Universidad Nacional del Sur

Tesis de Doctor en Matemática

Un estudio algebraico en subvariedades de reticulados residuados y sus subreductos implicativos

Diego Nicolás Castaño

Bahía Blanca Argentina

2012

Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática durante el período comprendido entre el 16 de septiembre de 2008 y el 18 de diciembre de 2012, bajo la dirección del Dr. José Patricio Díaz Varela, Profesor Titular del Departamento de Matemática en el Área I.

Diego Nicolás Castaño

Agradecimientos

A mi director Patricio Díaz Varela, porque desde el principio demostró gran interés en mi trabajo, impulsándome siempre a seguir adelante e incluyéndome en sus nuevos proyectos, y porque encontré en él a un amigo siempre dispuesto a ayudarme y preocupado por mi bienestar.

A Manuel Abad, Antoni Torrens, Miguel Campercholi y Diego Vaggione, porque me permitieron colaborar con ellos en diferentes trabajos, abriéndome desinteresadamente las puertas a todo su conocimiento.

A mi familia, porque, a pesar de la distancia, cuento con ellos en todo momento; y *muy especialmente a mi hermana*, por haberme introducido desde chico al fascinante mundo de la matemática, sin cuya influencia nada de esto hubiera sido posible.

A la Universidad Nacional del Comahue, porque fue allí donde di mis primeros pasos formales en la matemática.

Al Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur y al Instituto de Matemática de Bahía Blanca, por haberme abierto sus puertas desde un principio y permitirme formar parte de su comunidad.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, cuya ayuda económica facilitó en gran medida la realización de esta tesis.

Resumen

Abordamos diferentes problemas algebraicos en la variedad de los reticulados residuados integrales, conmutativos y acotados, así como también en la variedad de las álgebras de implicación de Łukasiewicz (subreductos implicativos de las MV-álgebras).

Damos una construcción que permite sumergir todo hoop de Wajsberg en una MV-álgebra y la utilizamos para desarrollar dualidades topológicas para ciertas clases de hoops de Wajsberg y para caracterizar los hoops de Wajsberg k-valuados libres. Estudiamos la descomponibilidad de las álgebras libres para diferentes subvariedades de reticulados residuados, probando la indescomponibilidad en ciertos casos y caracterizando las subvariedades de reticulados residuados pseudocomplementados que poseen sus álgebras libres descomponibles. Estudiamos también los elementos regulares de un reticulado residuado, introduciendo la noción de variedad regular y estableciendo sus conexiones con la traducción negativa de Kolmogorov.

Obtenemos una representación sencilla de las álgebras de implicación de Łukasiewicz finitas como crecientes en productos de MV-cadenas finitas y damos una dualidad topológica intrínseca para las álgebras de implicación. Caracterizamos la permutabilidad de congruencias en dichas álgebras, probamos que todas las subcuasivariedades son variedades y mostramos que todos los miembros finitos de esta variedad son débilmente proyectivos. Estudiamos también las clases algebraicamente expandibles en esta variedad, así como también las funciones algebraicas, especialmente para la subvariedad generada por la cadena de tres elementos.

Abstract

We deal with different algebraic problems in the variety of integral, commutative, bounded residuated lattices, as well as in the variety of Łukasiewicz implication algebras (implicative subreducts of MV-algebras).

We give a construction that allows us to embed any Wajsberg hoop into an MV-algebra and use it to develop topological dualities for certain classes of Wajsberg hoops and to characterize the free k-valued Wajsberg hoops. We study the decomposability of free algebras in different subvarieties of residuated lattices, establishing the indecomposability for some cases and characterizing the subvarieties of pseudocomplemented residuated lattices whose free algebras are decomposable. We also study the regular elements of a residuated lattices, introducing the notion of regular variety and establishing connections with the negative Kolmogorov translation.

We obtain a simple representation of finite Łukasiewicz implication algebras as upsets in products of finite MV-chains and give an intrinsic topological duality for implication algebras. We characterize congruence permutability for these algebras, prove that any subquasivariety is a variety and show that every finite member of this variety is weakly projective. We also study algebraically expandable classes in this variety, as well as algebraic functions, especially for the subvariety generated by the three-element chain.

Índice general

Notación

$A, B, C, \ldots$	conjuntos
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$	álgebras
$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \ldots$	clases de álgebras
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$	categorías
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$	funtores
$\mathbf{Free}_{\mathbb{Q}}(X)$	álgebra libre en la cuasivariedad $\mathbb{Q}$ con conjunto de generadores libres X
$\mathbb{K}_{fin}$	miembros finitos de $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}_{fg}$	miembros finitamente generados de $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}_{lf}$	miembros localmente finitos de $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}_{sim}$	miembros simples de $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}_{si}$	miembros subdirectamente irreducibles de $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}_{fsi}$	miembros finitamente subdirectamente irreducibles de $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}_{crit}$	miembros críticos de $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}_{to}$	miembros totalmente ordenados de $\mathbb{K}$
$I(\mathbb{K})$	álgebras isomorfas a miembros de $\mathbb{K}$
$H(\mathbb{K})$	imágenes homomorfas de miembros de $\mathbb{K}$
$S(\mathbb{K})$	subálgebras de miembros de $\mathbb{K}$
$P(\mathbb{K})$	productos directos de miembros de $\mathbb{K}$
$P_U(\mathbb{K})$	ultraproductos de miembros de $\mathbb{K}$
$V(\mathbb{K})$	variedad generada por $\mathbb{K}$
$Q(\mathbb{K})$	cuasivariedad generada por $\mathbb{K}$
$Cg^{\mathbf{A}}(X)$	congruencia generada por X en $\mathbf{A}$
$Fg^{\mathbf{A}}(X)$	filtro (implicativo) generado por X en $\mathbf{A}$
$Sg^{\mathbf{A}}(X)$	subuniverso generado por X en $\mathbf{A}$
$\mathbf{Sg}^{\mathbf{A}}(X)$	subálgebra generada por X en $\mathbf{A}$
$\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$	$\mathbf{A}$ es una subálgebra de $\mathbf{B}$
$\equiv_F$	congruencia asociada al filtro (implicativo) F
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	conjuntos de números naturales, enteros, racionales y reales, respectivamente
$\mathbf{A} \models s = t$	la ecuación $s = t$ es válida en el álgebra $\mathbf{A}$
$\vdash_{\mathbf{L}}$	relación de consecuencia asociada a la lógica $\mathbf{L}$
$\vdash_{\mathbf{L}}^{seq}$	relación de derivabilidad entre secuentes del cálculo de secuentes $\mathbf{L}$
$\models_{\mathbb{K}}$	relación de consecuencia ecuacional asociada a la clase de álgebras $\mathbb{K}$
$Mod(\Gamma)$	clase de estructuras que satisfacen las sentencias de primer orden de Γ

Introducción

Las estructuras residuadas son los modelos algebraicos de las lógicas subestructurales y en ellas las operaciones de implicación y fusión (multiplicación) están relacionadas vía la condición de residuación

$$x * y \leq z \Longleftrightarrow x \leq y \to z.$$

La clase de estructuras residuadas conocidas como FL-álgebras constituye la semántica algebraica equivalente del cálculo de Lambek **FL** en el sentido de los trabajos de Blok y Pigozzi (ver [BloPig89]). En esta tesis concentramos nuestra atención en la variedad formada por las FL-álgebras conmutativas, integrales y acotadas, a las cuales denominamos simplemente *reticulados residuados*. Esta variedad es la contraparte algebraica de la lógica de Lambek sin contracción ($\mathbf{FL_{ew}}$) y sus subvariedades se corresponden con las extensiones axiomáticas de la lógica $\mathbf{FL_{ew}}$. Un tratado completo sobre reticulados residuados y FL-álgebras en general, que incluye muchos de los últimos avances en esta área, se puede encontrar en [GalJipKowOno07].

En esta tesis se estudiarán propiedades algebraicas de los reticulados residuados, de algunas de sus subvariedades más importantes y de los correspondientes subreductos implicativos. Los resultados presentados aquí fueron obtenidos como fruto de la investigación en esta área durante los últimos cinco años. La mayoría de ellos ya ha sido publicada en revistas internacionales (ver [CasDia09, AbaCasDia10, AbaCasDia10, CasDiaTor11a, CasDiaTor11b, CamCasDia11]) o forma parte de trabajos en preparación.

Esta tesis está dividida en dos partes. En la primera de ellas se abordan tres problemas diferentes sobre reticulados residuados. Por esta razón se incluyen en el Capítulo 1 todos los preliminares necesarios sobre reticulados residuados que se utilizarán en los capítulos posteriores.

El Capítulo 2 está dedicado a estudiar la conexión entre las MV-álgebras, una de las clases de reticulados residuados más estudiadas, y los hoops de Wajsberg. Si bien ya es conocido que los hoops de Wajsberg son la clase de los $\{*, \to, 1\}$-subreductos de las MV-álgebras, damos en este capítulo una construcción simple que permite sumergir todo hoop de Wajsberg dentro de una MV-álgebra como filtro implicativo maximal cuyo cociente asociado es la MV-cadena de dos elementos. Estudiamos esta construcción en cierto detalle obteniendo relaciones entre un hoop de Wajsberg y su MV-álgebra correspondiente, así como también mostramos que esta construcción posee propiedades universales. Damos asimismo algunas aplicaciones de estos resultados; por ejemplo, obtenemos dualidades topológicas para ciertas clases de hoops de Wajsberg y caracterizamos los hoops de Wajsberg k-valuados libres. Todos los resultados de este capítulo se encuentran publicados en [AbaCasDia10].

El segundo problema que abordamos en esta tesis es la determinación de la descomponibilidad o indescomponibilidad de las álgebras libres en diferentes variedades de reticulados residuados. El objetivo es determinar si existen términos que, al ser evaluados en un reticulado residuado, den siempre como resultado un elemento booleano. En el Capítulo 3, probamos que ciertas subvariedades poseen álgebras libres indescomponibles, entre ellas la variedad de todos los reticulados residuados. Probamos asimismo que para que una variedad de reticulados residuados posea álgebras libres indescomponibles es suficiente que la variedad generada por sus miembros simples posea dicha propiedad. En este capítulo definimos también la noción de elemento *casi complementado*, noción que involucra sólo la operación de residuación y que permite, por tanto, traducir los resultados de indescomponibilidad a los $\{\rightarrow, 0, 1\}$-subreductos de los reticulados residuados, es decir, a las BCK-álgebras acotadas. Entre otros resultados probamos que las BCK-álgebras acotadas libres son indescomponibles. Los resultados de las investigaciones sobre estos temas están publicados en dos artículos: [CasDiaTor11a] y [CasDiaTor11b].

El Capítulo 4 está dedicado a estudiar en detalle la estructura de los elementos regulares de un reticulado residuado y su relación con el reticulado original. Es conocido que sobre el conjunto de los elementos regulares de un reticulado residuado se puede definir nuevamente una estructura de reticulado residuado, pero que el álgebra resultante no es, en general, ni una subálgebra ni una imagen homomorfa del reticulado residuado de base. Estudiamos en detalle la relación entre las ecuaciones válidas en estas estructuras y aplicamos para su estudio la traducción negativa de Kolmogorov. También investigamos las conexiones entre una variedad y la clase formada por las álgebras de elementos regulares de los miembros de ésta. Estudiamos en profundidad las relaciones entre estas clases de álgebras y observamos que nos conducen a una noción de *variedad regular*, variedades que poseen buenas propiedades respecto de sus miembros regulares. También estudiamos la contraparte lógica de estas nociones, caracterizando asimismo las variedades regulares mediante las propiedades de las extensiones axiomáticas correspondientes de $\mathbf{FL_{ew}}$. Los resultados incluidos en este capítulo forman parte de un trabajo que ya ha sido enviado para su publicación, [CasDiaTor].

En la Parte II de esta tesis nos concentramos en estudiar los $\{\rightarrow, 1\}$-subreductos de las MV-álgebras, a los cuales denominamos *álgebras de implicación de Łukasiewicz*. En esta parte realizamos un estudio profundo de estas estructuras, abordando diversos problemas algebraicos en esta variedad y obteniendo resultados más descriptivos. A modo de introducción al estudio de esta variedad, recopilamos en el Capítulo 5 las propiedades y resultados conocidos hasta el momento sobre ellas. Los trabajos de Y. Komori [Kom78a] y [Kom78b] constituyen un punto de partida para el estudio de estas estructuras, que están asociadas con el cálculo implicativo de Łukasiewicz, es decir, el fragmento implicativo del cálculo proposicional de Łukasiewicz.

Dedicamos el Capítulo 6 al estudio de algunas representaciones de álgebras de implicación de Łukasiewicz. En particular, damos una representación sencilla de los miembros finitos de esta variedad como subconjuntos crecientes de productos de MV-cadenas finitas y caracterizamos las congruencias en términos de subconjuntos de coátomos. Esta representación será de gran utilidad en los capítulos posteriores pues permite visualizar en forma simple los cocientes de dichas álgebras. Más aún, permite probar que todo cociente es un retracto. En este capítulo también estudiamos en particular una subvariedad de álgebras de implicación de Łukasiewicz cuyos miembros se conocen como álgebras de implicación o álgebras de Tarski. Estas estructuras son de hecho los $\{\rightarrow, 1\}$-subreductos implicativos de las álgebras de Boole y su estudio fue iniciado por Abbot en los trabajos [Abb67] y [Abb68]. En [AbaDiaTor04], los autores dieron una representación topológica para estas álgebras utilizando el espacio de Stone correspondiente a un álgebra de Boole en la que se puede sumergir el álgebra de implicación en cuestión. En esta tesis presentamos una nueva dualidad topológica para las álgebras de implicación definiendo una topología adecuada sobre el conjunto de filtros implicativos maximales. De esta forma, el espacio dual se puede calcular intrínsecamente a partir del álgebra sin necesidad de sumergirla en un álgebra de Boole. Estudiamos la conexión entre esta nueva dualidad y la dualidad anterior, y caracterizamos los monomorfismos, epimorfismos, productos y congruencias. Los resultados sobre la nueva dualidad topológica se encuentran publicados en [AbaCasDia10].

En el Capítulo 7 abordamos el problema de caracterizar las álgebras de implicación de Łukasiewicz que poseen permutabilidad de congruencias. Para ello comenzamos estudiando el problema en la subvariedad formada por las álgebras de implicación, para las cuales damos condiciones necesarias y suficientes para que un par de congruencias conmute. Como consecuencia de ello, se puede probar fácilmente que un álgebra de implicación posee permutabilidad de congruencias si y sólo si existen los ínfimos de todo par de elementos del álgebra. El mismo resultado vale para las álgebras de implicación de Łukasiewicz. Sin embargo, para su demostración debimos recurrir a resultados de representación más fuertes, como los teoremas de representación global de D. Vaggione [Vag92]. Los resultados de este capítulo se encuentran publicados en [CasDia09] y [CamCasDia11].

Otros problemas que abordamos en esta tesis sobre las álgebras de implicación de Łukasiewicz son la determinación de las subcuasivariedades de dicha variedad y el estudio de los miembros débilmente proyectivos. Los resultados obtenidos sobre estos temas constituyen el contenido del Capítulo 8. En lo que respecta a las cuasivariedades de álgebras de implicación de Łukasiewicz, pudimos comprobar que coinciden con las variedades, como es de esperar debido a la relativa facilidad de obtener inmersiones entre estas álgebras. Para esto es de utilidad el teorema de representación de álgebras finitas del Capítulo 6 así como la representación de las álgebras de implicación de Łukasiewicz libres dada por J. P. Díaz Varela en [Dia08]. Esta representación de las álgebras libres también fue de utilidad para estudiar los miembros débilmente proyectivos de la variedad. Probamos en este capítulo que toda álgebra de implicación de Łukasiewicz finita es débilmente proyectiva y mostramos que, por el contrario, una cadena infinita no tiene dicha propiedad. Los resultados sobre cuasivariedades están publicados en [CamCasDia11] y los resultados sobre álgebras débilmente proyectivas formarán parte de un trabajo que se encuentra en etapa de redacción en colaboración con J. P. Díaz Varela.

Finalmente, en el Capítulo 9 tratamos el problema de determinar las subclases algebraicamente expandibles de la variedad de álgebras de implicación de Łukasiewicz. Este tipo de clases de álgebras fue definido y ha sido estudiado extensamente por D. Vaggione y M. Campercholi para otras variedades algebraicas (ver [CamVag09]). En particular, M. Campercholi caracterizó en [Cam10] las subclases algebraicamente expandibles en la subvariedad de álgebras de implicación, con lo cual intentamos describir el reticulado de clases algebraicamente expandibles en el caso general de las álgebras de implicación de

Łukasiewicz. El caso general resulta ser extremadamente complejo, por lo cual, si bien obtenemos algunos resultados generales, nos abocamos principalmente al caso de la menor subvariedad que contiene estrictamente a las álgebras de implicación, es decir, la variedad generada por la cadena de tres elementos. Para poder clasificar las subclases algebraicamente expandibles fue crucial obtener un teorema de representación global en el sentido de [Vag92] y determinar las funciones algebraicas sobre cada una de las álgebras finitas (ver [CamVag11]). Como consecuencia de estos resultados obtuvimos un procedimiento efectivo para determinar y ordenar las clases algebraicamente expandibles. A modo de ejemplo, mostramos cómo aplicar este procedimiento para determinar un segmento inicial del reticulado de clases algebraicamente expandibles. Los resultados de este capítulo forman parte de un trabajo que se encuentra en etapa de redacción en colaboración con M. Campercholi y J. P. Díaz Varela.

Parte I

Reticulados residuados

Capítulo 1

Preliminares

En esta tesis estudiamos estructuras algebraicas relacionadas con el cálculo lógico $\mathbf{FL_{ew}}$ (*Full Lambek Calculus with exchange and weakening*), conocidas como *reticulados residuados*. Si bien asumimos cierta familiaridad con los reticulados residuados, presentamos en este capítulo las definiciones y propiedades básicas que utilizamos en el resto de la tesis. Para un tratamiento detallado de los reticulados residuados recomendamos [Höh95], [KowOno01] y [GalJipKowOno07]. También suponemos que el lector conoce los elementos del álgebra universal (véase, por ejemplo, [BurSan81]).

En la primer sección describiremos el cálculo de secuentes **FL** y su extensión $\mathbf{FL_{ew}}$, cuyas álgebras asociadas constituyen el centro de esta primer parte de la tesis. Las propiedades básicas de dichas álgebras se describirán brevemente en la Sección 2, repasaremos los conceptos de filtro implicativo, filtro maximal, radical, álgebras simples y semisimples. Como ya dijimos, llamamos a estas álgebras reticulados residuados y notamos por $\mathbb{RL}$ a la variedad que forman. Dicha variedad posee numerosas subvariedades que han sido muy estudiadas en la literatura. En la Sección 3 describiremos las subvariedades de $\mathbb{RL}$ relevantes para esta tesis tales como MV-álgebras, MTL-álgebras, álgebras de Heyting, álgebras de Boole, etc. Finalmente, en las últimas dos secciones de este capítulo, presentaremos algunos subreductos de los reticulados residuados. Son de especial interés los subreductos implicativos, pues la segunda parte de esta tesis se centra en el estudio algebraico de los subreductos implicativos de las MV-álgebras.

1.1. Lógicas subestructurales

En la década de 1930, G. Gentzen introdujo formulaciones de las lógicas clásica e intuicionista en términos de cálculos de secuentes. Esta presentación de las lógicas se presta mejor a un estudio desde el punto de vista de la *teoría de la demostración* pues permite obtener demostraciones *estándar*.

Describiremos ahora el cálculo **FL** (*Full Lambek*) que resulta de generalizar el cálculo introducido por Gentzen para la lógica intuicionista eliminando las reglas estructurales. El lenguaje del sistema **FL** consiste de las constantes 0 y 1, y las conectivas binarias $\wedge$, $\vee$, $*$, $/$ y $\backslash$. En este contexto los términos en dicho lenguaje se denominan **fórmulas**. Un **secuente** en este sistema es una secuencia de la forma $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \Rightarrow \beta$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ son fórmulas, $m \geq 0$, y β es una fórmula o la secuencia vacía.

El cálculo de secuentes **FL** consiste de ciertos **secuentes iniciales** y ciertas **reglas** que permiten obtener unos secuentes a partir de otros. En lo que sigue α y β son fórmulas, φ es una fórmula o una secuencia vacía, y las letras griegas mayúsculas denotan secuencias (posiblemente vacías) de fórmulas separadas por comas.

Secuentes iniciales:

$$\Rightarrow 1 \qquad 0 \Rightarrow \qquad \alpha \Rightarrow \alpha$$

Regla de corte:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Sigma, \alpha, \Xi \Rightarrow \varphi}{\Sigma, \Gamma, \Xi \Rightarrow \varphi}\ (\text{corte})$$

Reglas para las conectivas lógicas:

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, 1, \Delta \Rightarrow \varphi}\ (1\text{w}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow 0}\ (0\text{w})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \Delta \Rightarrow \varphi \qquad \Gamma, \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \alpha \vee \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}\ (\vee \Rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta}\ (\Rightarrow \vee) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta}\ (\Rightarrow \vee)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}\ (\wedge \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}\ (\wedge \Rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta}\ (\Rightarrow \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \alpha * \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}\ (* \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Delta \Rightarrow \beta}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \alpha * \beta}\ (\Rightarrow *)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Xi, \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Xi, \Gamma, \alpha \backslash \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}\ (\backslash \Rightarrow) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \backslash \beta}\ (\Rightarrow \backslash)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Xi, \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Xi, \beta / \alpha, \Gamma, \Delta \Rightarrow \varphi}\ (/ \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \beta / \alpha}\ (\Rightarrow /)$$

Dado un secuente s y un conjunto de secuentes S, escribimos $S \vdash^{seq}_{\mathbf{FL}} s$ para significar que el secuente s se puede obtener a partir de los secuentes de S y de secuentes iniciales utilizando las reglas del cálculo **FL**. Decimos que un secuente s es **demostrable** en **FL** si $\emptyset \vdash^{seq}_{\mathbf{FL}} s$.

Se pueden obtener extensiones del cálculo **FL** agregando una o varias de las reglas estructurales básicas:

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \beta, \alpha, \Delta \Rightarrow \varphi}\ (\text{e}) \qquad \frac{\Gamma, \alpha, \alpha, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \alpha, \Delta \Rightarrow \varphi}\ (\text{c}) \qquad \frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \alpha, \Delta \Rightarrow \varphi}\ (\text{i}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \alpha}\ (\text{o})$$

Estas reglas se conocen, respectivamente, como reglas de intercambio, contracción, debilitamiento a izquierda y debilitamiento a derecha. Cuando se agregan ambas reglas de debilitamiento, se habla simplemente de debilitamiento y se lo nota (w).

La extensión más importante para esta tesis es la que consiste en agregar las reglas de intercambio y debilitamiento, pero no la regla de contracción. A dicho cálculo de secuentes lo notamos $\mathbf{FL_{ew}}$. Si agregamos todas las reglas anteriores, obtenemos una formulación como cálculo de secuentes de la lógica intuicionista.

Asociado con el cálculo de secuentes **FL**, podemos definir una relación de consecuencia entre fórmulas de la siguiente manera: decimos que una fórmula φ es **deducible** o **demostrable** a partir de un conjunto de fórmulas Γ, y escribimos $\Gamma \vdash_{\mathbf{FL}} \varphi$ cuando $\{\Rightarrow \delta : \delta \in \Gamma\} \vdash^{seq}_{\mathbf{FL}} \Rightarrow \varphi$. También decimos que una fórmula φ es demostrable si el secuente $\Rightarrow \varphi$ lo es. La relación $\vdash_{\mathbf{FL}}$ es una relación de consecuencia finitaria e invariante por sustituciones. Esto nos permite hablar de la *lógica* **FL**, haciendo referencia a su relación de consecuencia asociada. Las lógicas como **FL** y $\mathbf{FL_{ew}}$, que se obtienen eliminando uno o más reglas estructurales del cálculo de secuentes para la lógica intuicionista se conocen como *lógicas subestructurales básicas.*

Observemos que si el secuente $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \Rightarrow \psi$ es demostrable en **FL**, se tiene que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \vdash_{\mathbf{FL}} \psi$. Sin embargo, la recíproca no es cierta.

Definiremos ahora las álgebras que resultarán ser la contraparte algebraica del cálculo **FL**.

Una **FL-álgebra** es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, *, \backslash, /, 0, 1\rangle$ tal que:

- $\langle A, \wedge, \vee\rangle$ es un reticulado;
- $\langle A, *, 1\rangle$ es un monoide;
- vale la ley de residuación:

$$x * y \leq z \text{ si y sólo si } y \leq x\backslash z \text{ si y sólo si } x \leq z/y,$$

  para todo $x, y, z \in A$;
- 0 es un elemento arbitrario de A.

Denotamos con $\mathbb{FL}$ a la clase de las FL-álgebras. Dicha clase es, de hecho, una variedad, pues la ley de residuación es equivalente a las siguientes ecuaciones:

- $x * (x\backslash z \wedge y) \leq z$,
- $(y \wedge z/x) * x \leq z$,
- $y \leq x\backslash(x * y \vee z)$,
- $y \leq (z \vee y * x)/x$.

Notemos que podemos considerar que las anteriores desigualdades son ecuaciones debido a que en un reticulado la desigualdad $x \leq y$ es equivalente a la ecuación $x \wedge y = x$.

Asociada con toda clase de álgebra hay una relación de consecuencia ecuacional. En este caso, denotamos con $\models_{\mathbb{FL}}$ a la relación de consecuencia ecuacional asociada a las FL-álgebras, la cual queda definida de la siguiente manera: dado un conjunto de ecuaciones

$E \cup \{s = t\}$, escribimos $E \models_{\mathbb{FL}} s = t$ siempre que para toda álgebra $\mathbf{A} \in \mathbb{FL}$, si $\mathbf{A} \models E$, entonces $\mathbf{A} \models s = t$. (Aquí $\models$ denota la relación de satisfacción estándar para álgebras y ecuaciones.)

La relación entre el cálculo **FL** y las FL-álgebras queda plasmada en la siguiente propiedad: dado un conjunto de fórmulas $\Phi \cup \{\psi\}$ y una ecuación $s = t$, se tiene que:

- $\Phi \vdash_{\mathbf{FL}} \psi$ si y sólo si $\{1 = 1 \wedge \varphi : \varphi \in \Phi\} \models_{\mathbb{FL}} 1 = 1 \wedge \psi$,
- $s = t \mathrel{=\!\mid\models}_{\mathbb{FL}} 1 = 1 \wedge (s\backslash t) \wedge (t\backslash s)$.

Esto significa, de acuerdo a [BloPig89], que la lógica **FL** es *algebrizable* y tiene por *semántica algebraica equivalente* a la clase de las FL-álgebras. En particular notemos que el secuente $\Rightarrow \psi$ es demostrable en **FL** si y sólo si la ecuación $1 = 1 \wedge \psi$ es válida en $\mathbb{FL}$.

La algebrizabilidad de **FL** respecto de la variedad $\mathbb{FL}$ implica asimismo que las extensiones axiomáticas de la lógica **FL** también son algebrizables y que sus semánticas algebraicas equivalentes son precisamente las subvariedades de la variedad $\mathbb{FL}$ (ver [KomOno85], [KowOno01] y [GalJipKowOno07], por ejemplo).

Ya hemos dicho que la extensión de **FL** que utilizaremos en esta tesis es $\mathbf{FL_{ew}}$, aquella que consiste en agregar las reglas de intercambio y debilitamiento. Si bien, según esta definición, el cálculo $\mathbf{FL_{ew}}$ no es una extensión axiomática de **FL**, se puede obtener una formulación equivalente de $\mathbf{FL_{ew}}$ simplemente agregando como axiomas a **FL** las fórmulas $(\alpha{*}\beta)\backslash(\beta{*}\alpha)$, $0\backslash\alpha$ y $\alpha\backslash 1$, para todas las fórmulas α, β. La semántica algebraica equivalente resulta ser la variedad de las FL-álgebras que satisfacen las condiciones:

- $x * y = y * x$,
- $0 \leq x$,
- $x \leq 1$,

para x, y cualesquiera. Por ahora denotaremos a esta clase de álgebras con $\mathbb{FL}_{ew}$ para recordar su conexión con el cálculo $\mathbf{FL_{ew}}$ (más adelante utilizaremos la notación $\mathbb{RL}$ para dicha clase, pues sus miembros son reticulados residuados, en inglés *residuated lattices*). Observemos también que, en virtud de la conmutatividad de $*$, resulta que

$$\begin{aligned} z \leq x\backslash y &\iff x * z \leq y \\ &\iff z * x \leq y \\ &\iff z \leq y/x. \end{aligned}$$

Esto prueba que $x\backslash y = y/x$. En virtud de esta igualdad, definimos $x \to y = x\backslash y = y/x$ y reducimos el lenguaje de $\mathbf{FL_{ew}}$ a los símbolos $\wedge, \vee, *, \to, 0, 1$. En la sección siguiente repasaremos las propiedades básicas de estas álgebras.

Para el cálculo $\mathbf{FL_{ew}}$ también se simplifican un poco las condiciones de algebrizabilidad. En efecto, resultan:

- $\Phi \vdash_{\mathbf{FL_{ew}}} \psi$ si y sólo si $\{\varphi = 1 : \varphi \in \Phi\} \models_{\mathbb{FL}_{ew}} \psi = 1$,
- $s = t \mathrel{=\!\mid\models}_{\mathbb{FL}_{ew}} (s \to t) \wedge (t \to s) = 1$.

En particular, un secuente $\Rightarrow \psi$ es demostrable en $\mathbf{FL_{ew}}$ si y sólo si la ecuación $\psi = 1$ es válida en $\mathbb{FL}_{ew}$.

Una de las propiedades más importantes de los cálculos **FL** y $\mathbf{FL_{ew}}$ es la posibilidad de eliminar la regla de corte de sus presentaciones. Más precisamente, si existe una demostración del secuente s a partir de los secuentes del conjunto S en el cálculo **FL**, existe una demostración que no utiliza la regla de corte. Esta propiedad vale tanto para **FL** como para $\mathbf{FL_{ew}}$, así como también para otros cálculos subestructurales (ver [GalJipKowOno07, Teorema 4.1]), y es clave para probar la decidibilidad de dichos cálculos pues restringe en gran medida las posibles demostraciones de un secuente s a partir de un conjunto de secuentes S.

1.2. Reticulados residuados

En la sección anterior introdujimos los reticulados residuados como la semántica algebraica equivalente de la lógica $\mathbf{FL_{ew}}$. En esta sección recopilaremos las propiedades algebraicas básicas de estas estructuras que necesitaremos en esta tesis. Un estudio detallado de dichas álgebras puede encontrarse en [GalJipKowOno07], [JipTsi07], [HarRafTsi02], [BloTsi03], [Höh95].

Definición 1.2.1 *Un* **reticulado residuado, acotado, conmutativo e integral** *es un álgebra* $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, *, \to, 0, 1\rangle$ *de tipo* $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$ *que verifica las siguientes condiciones:*

(1) $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ *es un reticulado acotado con primer elemento* 0 *y último elemento* 1*;*

(2) $\langle A, *, 1\rangle$ *es un monoide conmutativo;*

(3) *vale la* ley de residuación*:*

$$x * y \leq z \Longleftrightarrow x \leq y \to z,$$

donde $\leq$ *representa el orden parcial dado por la estructura de reticulado.*

La razón de los calificativos *acotado* y *conmutativo* es clara. Por otra parte, la *integralidad* de estos reticulados residuados hace referencia al hecho de que el neutro de la operación $*$ coincide con el último elemento del reticulado. Como en esta tesis sólo trabajaremos con este tipo de reticulados residuados, nos referiremos a ellos simplemente utilizando el término *reticulados residuados*.

Observemos que la única condición sobre la operación $\to$ es la dada por la ley de residuación. Sin embargo, dicha propiedad caracteriza $x \to y$ cualesquiera sean $x, y \in A$. En efecto, veamos que

$$x \to y = \max\{z \in A : z * x \leq y\}.$$

En primer lugar, como $x \to y \leq x \to y$, la ley de residuación implica que $(x \to y) * x \leq y$. Además, si $z * x \leq y$, entonces $z \leq x \to y$. Esto confirma que $x \to y$ es el mayor elemento $z \in A$ con la propiedad de que $z * x \leq y$.

Si bien la ley de residuación no es una identidad, es fácil probar que puede reemplazarse por el siguiente par de identidades:

$$x = x \wedge (y \to ((x * y) \vee z)),$$
$$z = (y * (x \wedge (y \to z))) \vee z.$$

Esto demuestra que la clase de los reticulados residuados constituye una variedad. A esta variedad la denotaremos, en adelante, $\mathbb{RL}$.

El siguiente lema recopila diversas propiedades básicas válidas en todo reticulado residuado que serán utilizadas constantemente.

Lema 1.2.2 *Si* $\mathbf{A}$ *es un reticulado residuado, para* $a, b, c \in A$ *se tiene que:*

(a) $a \leq b$ *si y sólo si* $a \to b = 1$,

(b) $1 \to a = a$,

(c) $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$,

(d) $(a * b) \to c = a \to (b \to c)$,

(e) $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$,

(f) $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$,

(g) $a * (b \vee c) = (a * b) \vee (a * c)$,

(h) $a * b \leq a \wedge b$.

Sobre todo reticulado residuado $\mathbf{A}$ consideramos la operación unaria definida por

$$\neg x := x \to 0.$$

A esta operación unaria la denominamos usualmente **negación**.

Lema 1.2.3 *Si* $\mathbf{A}$ *es un reticulado residuado, para* $a, b \in A$, *se tiene que:*

(a) si $a \leq b$, *entonces* $\neg b \leq \neg a$,

(b) $a \leq \neg\neg a$,

(c) $\neg a = \neg\neg\neg a$,

(d) $\neg(a * b) = \neg(\neg\neg a * \neg\neg b) = a \to \neg b$,

(e) $a * \neg a = 0$.

Para simplificar la notación, definimos recursivamente:

- $x^0 := 1$,
- $x^{n+1} := x * x^n$, para $n \geq 0$.

También definimos para $n \geq 0$:

$$nx := \neg(\neg x)^n.$$

Observar que $1x = \neg\neg x$ y, en general, es diferente de x.

Valen las siguientes propiedades.

Lema 1.2.4 *Si* $\mathbf{A}$ *es un reticulado residuado, para* $a, b \in A$ *tenemos que:*

(*a*) $a^n \to b = \underbrace{a \to (a \to \cdots \to (a}_{n \text{ veces}} \to b) \ldots)$, *para* $n \geq 1$,

(*b*) $a^1 = a$, $1a = \neg\neg a$,

(*c*) $\neg\neg na = na = n(\neg\neg a)$, *para* $n \geq 0$,

(*d*) *si* $0 \leq k \leq r$, *entonces* $a^r \leq a^k$ *y* $ka \leq ra$,

(*e*) *si* $a \leq b$, *entonces* $a^n \leq b^n$ *y* $na \leq nb$, *para* $n \geq 0$,

(*f*) $(a \vee b)^n = \bigvee_{k+r=n} a^k * b^r$, *para* $n \geq 1$.

Un **filtro implicativo** de un reticulado residuado $\mathbf{A}$ es un conjunto $F \subseteq A$ que satisface las siguientes condiciones:

(1) $1 \in F$,

(2) para todo $a, b \in A$, si $a \in F$ y $a \leq b$, entonces $b \in F$,

(3) si $a, b \in F$, entonces $a * b \in F$.

En otras palabras, un filtro implicativo es un subconjunto no vacío, creciente y cerrado por $*$.

También se puede definir un filtro implicativo F como un subconjunto de A que verifica:

(1) $1 \in F$,

(2) si $a, a \to b \in F$, entonces $b \in F$.

Esta formulación equivalente de la noción de filtro implicativo es fundamental en el estudio de los subreductos implicativos de los reticulados residuados, pues utiliza solamente la operación $\to$.

Denotaremos con $Fil(\mathbf{A})$ a la famila de filtros implicativos de un reticulado residuado $\mathbf{A}$. Es fácil verificar que $Fil(\mathbf{A})$ es cerrada bajo intersecciones arbitrarias, por lo que tiene una estructura natural de reticulado completo bajo el orden dado por la inclusión de conjuntos.

El hecho de que $Fil(\mathbf{A})$ sea cerrado bajo intersecciones arbitrarias también nos garantiza, dado un conjunto cualquiera $X \subseteq A$, la existencia del menor filtro implicativo que contiene a X. Decimos que dicho filtro implicativo está *generado por* X y lo denotamos con $Fg^{\mathbf{A}}(X)$. Es fácil probar que para $X \subseteq A$ no vacío,

$$Fg^{\mathbf{A}}(X) = \{a \in A : x_1^{n_1} * \ldots * x_k^{n_k} \leq a, \text{ para ciertos } k, n_1, \ldots, n_k \geq 0, x_1, \ldots, x_k \in X\}.$$

Para $x \in A$, escribimos $Fg^{\mathbf{A}}(x)$ en lugar de $Fg^{\mathbf{A}}(\{x\})$.

La importancia de los filtros implicativos radica en su relación estrecha con las congruencias. En efecto, dado un filtro implicativo F de un reticulado residuado $\mathbf{A}$, la relación binaria

$$\theta_F := \{(x, y) \in A \times A : x \to y \in F \text{ e } y \to x \in F\}$$

es una congruencia sobre $\mathbf{A}$ tal que $F = [1]_{\theta_F}$, donde $[1]_{\theta_F}$ denota la clase de equivalencia de 1 según la congruencia θ_F. De hecho, la correspondencia $F \mapsto \theta_F$ es un isomorfismo de orden entre $Fil(\mathbf{A})$ y $Con(\mathbf{A})$, el conjunto de todas las relaciones de congruencia sobre $\mathbf{A}$, ambos ordenados por la relación de inclusión. La aplicación inversa está dada por $\theta \mapsto [1]_\theta$. De aquí en adelante, escribiremos $\mathbf{A}/F$ en lugar de $\mathbf{A}/\theta_F$, y notaremos $[a]_F$, en lugar de $[a]_{\theta_F}$, a la clase de equivalencia del elemento $a \in A$ según la congruencia θ_F.

Una propiedad importante de la cual gozan los reticulados residuados es la *propiedad de extensión de congruencias*: dadas dos álgebras $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{RL}$ tales que $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, es decir, $\mathbf{A}$ es subálgebra de $\mathbf{B}$, se tiene que para cada congruencia θ sobre $\mathbf{A}$ existe una congruencia θ' sobre $\mathbf{B}$ tal que $\theta = \theta' \cap A^2$. En el lenguaje de los filtros implicativos, esto equivale a que para cada filtro implicativo F en $\mathbf{A}$ existe un filtro implicativo F' en $\mathbf{B}$ tal que $F = F' \cap A$.

Un filtro implicativo F de un reticulado residuado $\mathbf{A}$ es **propio** si $F \neq A$. Un filtro implicativo **maximal** es un filtro implicativo propio F de $\mathbf{A}$ tal que para todo filtro implicativo G de $\mathbf{A}$, $F \subsetneq G$ implica $G = A$. Utilizando el Lema de Zorn, es fácil probar que todo filtro implicativo propio debe estar contenido en algún filtro implicativo maximal. La siguiente es una caracterización útil de los filtros implicativos maximales.

Lema 1.2.5 *Un filtro implicativo F de $\mathbf{A} \in \mathbb{RL}$ es maximal si y sólo si para todo $a \in A$,*

$$a \notin F \textit{ si y sólo si existe } n > 0 \textit{ tal que } \neg a^n \in F.$$

Recordemos que un álgebra se dice **simple** si posee exactamente dos congruencias (las triviales). Luego, un reticulado residuado $\mathbf{A}$ es simple si y sólo si $\{1\}$ es el único filtro implicativo propio. Por el Lema 1.2.5, resulta entonces la siguiente caracterización sencilla de los reticulados residuados simples.

Corolario 1.2.6 *Un reticulado residuado $\mathbf{A}$ es simple si y sólo si para todo $a \in A \setminus \{1\}$, existe $n > 0$ tal que $\neg a^n = 1$.*

Ya hemos notado el hecho de que todo reticulado residuado no trivial $\mathbf{A}$ posee filtros implicativos maximales. Se denomina **radical** de $\mathbf{A}$ a la intersección de todos los filtros implicativos maximales de $\mathbf{A}$; lo notamos $Rad(\mathbf{A})$. El siguiente lema muestra una caracterización muy útil del radical (ver, por ejemplo, [Höh95] y [KowOno01]).

Lema 1.2.7 *En un reticulado residuado $\mathbf{A}$*

$$Rad(\mathbf{A}) = \{a \in A : \textit{para todo } n > 0, \textit{ existe } k_n \geq 0 \textit{ tal que } k_n(a^n) = 1\}. \tag{1.1}$$

Las siguientes son algunas propiedades del radical que nos serán de utilidad más adelante.

Lema 1.2.8

(a) *Si* $h : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ *es un homomorfismo entre dos reticulados residuados, entonces* $h(Rad(\mathbf{A}_1)) \subseteq Rad(\mathbf{A}_2)$.

(b) *Para cualquier* $F \in Fil(\mathbf{A})$, $Rad(\mathbf{A})/F \subseteq Rad(\mathbf{A}/F)$.

Un álgebra se dice **semisimple** si es isomorfa a un producto subdirecto de álgebras simples. Tenemos entonces el siguiente resultado.

Corolario 1.2.9 *Dada un álgebra* $\mathbf{A} \in \mathbb{RL}$ *se tiene que:*

(a) $\mathbf{A}$ *es semisimple si y sólo si* $Rad(\mathbf{A}) = \{1\}$,

(b) $\mathbf{A}/Rad(\mathbf{A})$ *es semisimple.*

Demostración. Para probar el ítem (a), consideremos la familia $\mathcal{M}$ de filtros implicativos maximales de $\mathbf{A}$ y sea $h : \mathbf{A} \to \prod_{F\in\mathcal{M}} \mathbf{A}/M$ el homomorfismo natural dado por $h(a)(M) = [a]_M$, para $a \in A$ y $M \in \mathcal{M}$. Observemos que la maximalidad de los filtros M asegura que los cocientes $\mathbf{A}/M$ sean álgebras simples.

Ahora bien, si $\bigcap \mathcal{M} = Rad(\mathbf{A}) = \{1\}$, entonces h es inyectivo, y resulta que $\mathbf{A}$ es producto subdirecto de álgebras simples, es decir, $\mathbf{A}$ es semisimple.

Recíprocamente, si $\mathbf{A}$ es semisimple, existe una representación subdirecta $h : \mathbf{A} \to \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$, donde $\mathbf{A}_i$ es un álgebra simple para todo i. Luego, si denotamos $M_i = \{a \in A : \pi_i(a) = 1\}$, cada M_i es un filtro implicativo maximal y se cumple que $\bigcap \mathcal{M} \subseteq \bigcap_{i\in I} M_i = \{1\}$.

Para probar el ítem (b), observemos el homomorfismo natural $h : \mathbf{A} \to \prod_{M\in\mathcal{M}} \mathbf{A}/M$ induce un homomorfismo inyectivo $\overline{h} : \mathbf{A}/Rad(\mathbf{A}) \to \prod_{M\in\mathcal{M}} \mathbf{A}/M$. Esto muestra entonces que $\mathbf{A}/Rad(\mathbf{A})$ es semisimple, pues es producto subdirecto de álgebras simples. $\square$

Otra noción importante que utilizaremos en esta tesis es la de elementos regulares. Dado un reticulado residuado $\mathbf{A}$, decimos que un elemento $a \in A$ es **regular** si verifica $\neg\neg a = a$. Al conjunto de todos los elementos regulares de $\mathbf{A}$ lo notamos $Reg(\mathbf{A})$. Observar que

$$Reg(\mathbf{A}) = \{a \in A : \neg\neg a = a\} = \{\neg a : a \in A\} = \{\neg\neg a : a \in A\}.$$

Para cualquier operación $\odot \in \{\wedge, \vee, *, \to\}$, consideramos la operación

$$x \odot_r y := \neg\neg(x \odot y).$$

Es fácil ver que $\mathbf{Reg}(\mathbf{A}) = \langle Reg(\mathbf{A}), \wedge_r, \vee_r, *_r, \to_r, 0, 1\rangle$ es un reticulado residuado (ver, por ejemplo, [CigTor04, Tor08]). Observemos que para todo $a, b \in Reg(\mathbf{A})$, tenemos que

$$a \to_r b = a \to b \text{ y } a \wedge_r b = a \wedge b.$$

Sin embargo, $\vee_r$ y $*_r$ son diferentes, en general, de $\vee$ y $*$, respectivamente, con lo cual $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ puede no ser una subálgebra de $\mathbf{A}$. Estudiaremos más en detalle esta construcción en el Capítulo 4.

1.3. Subvariedades de $\mathbb{RL}$

La variedad $\mathbb{RL}$ de los reticulados residuados abarca diversas variedades que ya habían sido estudiadas en forma independiente. El caso más notorio es el de las **álgebras de Boole**, que son equivalentes por términos a la subvariedad de $\mathbb{RL}$ caracterizada por la identidad $x \vee \neg x = 1$. Observar que en estos reticulados residuados el complemento booleano de un elemento x coincide con su negación $\neg x$. De aquí en adelante, consideraremos a las álgebras de Boole como idénticas a los miembros de esta subvariedad de $\mathbb{RL}$, a la cual denotamos simplemente con $\mathbb{B}$.

Otra subvariedad muy estudiada en forma independiente que resulta ser equivalente por términos a una subvariedad de $\mathbb{RL}$ es la variedad de las **álgebras de Heyting**. Más precisamente la subvariedad en cuestión es aquella caracterizada por la ecuación $x * y = x \wedge y$ y la notaremos con $\mathbb{H}$. Esta ecuación afirma que en estos reticulados residuados las operaciones $*$ e $\wedge$ coinciden, con lo cual la condición de residuación se convierte en la caracterización usual de $\rightarrow$ respecto de $\wedge$ en las álgebras de Heyting.

Otra subvariedad interesante de $\mathbb{RL}$ resulta de considerar la ecuación $\neg\neg x = x$, es decir, considerar los reticulados residuados en los cuales todo elemento coincide con su doble negación. Dichas álgebras se conocen como **reticulados residuados involutivos** y denotamos la variedad que forman con $\mathbb{IRL}$. Notemos que se sigue de (d) en el Lema 1.2.3 que en un reticulado residuado involutivo las operaciones $*$ e $\rightarrow$ están relacionadas vía las siguientes identidades:

$$
\begin{aligned}
x * y &= \neg(x \rightarrow \neg y), \\
x \rightarrow y &= \neg(x * \neg y) = \neg y \rightarrow \neg x.
\end{aligned}
$$

Observemos también que las álgebras de Heyting involutivas son precisamente las álgebras de Boole, es decir, $\mathbb{H} \cap \mathbb{IRL} = \mathbb{B}$.

Otras subvariedades a las que haremos mención a lo largo de esta tesis son las siguientes:

- **Reticulados residuados distributivos**: son aquellos en los que el reticulado subyacente es distributivo, es decir, en los que se cumple la identidad $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Notamos a la subvariedad $\mathbb{DRL}$.

- **Reticulados residuados de Glivenko**: son aquellos que satisfacen la ecuación $\neg\neg(\neg\neg x \rightarrow x) = 1$. Serán imporantes en el Capítulo 4, donde estudiamos el álgebra de elementos regulares de un reticulado residuado. Notamos a la subvariedad $\mathbb{GRL}$.

- **Reticulados residuados pseudocomplementados**: son aquellos en los que se cumple la ecuación $x \wedge \neg x = 0$. En ellos la negación es el pseudocomplemento en el sentido usual, es decir, $\neg x$ es el mayor elemento z tal que $z \wedge x = 0$. Notamos a la subvariedad $\mathbb{PRL}$.

- **Reticulados residuados de Stone**: son aquellos en los que se cumple la ecuación $\neg x \vee \neg\neg x = 1$. Notamos a la subvariedad $\mathbb{SRL}$.

Una subvariedad muy importante de $\mathbb{RL}$, que denotamos $\mathbb{MTL}$, es la clase de las **MTL-álgebras** (de *monoidal t-norm logic*), es decir, aquellos reticulados residuados que satisfacen la identidad:

$$(x \to y) \vee (y \to x) = 1.$$

A esta ecuación se la conoce comúnmente como *condición de prelinealidad*. Es bien conocido que $\mathbb{MTL}$ es precisamente la subvariedad de $\mathbb{RL}$ generada por los reticulados residuados totalmente ordenados. Más aún, un reticulado residuado satisface la ecuación de prelinealidad si y sólo si es producto subdirecto de reticulados residuados totalmente ordenados (ver [Höh95] y [EstGod01]).

Una variedad de gran importancia en esta tesis es la variedad de las MV-álgebras (de *many valued logic*). Recordemos que una **MV-álgebra** es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A, \oplus, \neg, 0\rangle$ de tipo $(2, 1, 0)$ tal que:

- $\langle A, \oplus, 0\rangle$ es un monoide conmutativo,
- $\neg\neg x = x$,
- $x \oplus \neg 0 = \neg 0$,
- $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$.

Un estudio detallado de estas álgebras se puede encontrar en [CigDOtMun00]. Si bien estas álgebras no son del tipo de similaridad de los reticulados residuados, la subvariedad de $\mathbb{RL}$ determinada por la ecuación

$$(x \to y) \to y = (y \to x) \to x \tag{1.2}$$

es equivalente por términos a la variedad de las MV-álgebras. La traducción de las operaciones se realiza de la siguiente manera. Si $\mathbf{A} = \langle A, \oplus, \neg, 0\rangle$ es una MV-álgebra, definimos

$$\begin{aligned}
1 &:= \neg 0, \\
x * y &:= \neg(\neg x \oplus \neg y), \\
x \to y &:= \neg x \oplus y, \\
x \vee y &:= (x \to y) \to y, \\
x \wedge y &:= \neg(\neg x \vee \neg y).
\end{aligned}$$

Recíprocamente, si $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, *, \to, 0, 1\rangle$ es un reticulado residuado que satisface la identidad (1.2), entonces $\mathbf{A}$ se puede considerar una MV-álgebra definiendo:

$$\begin{aligned}
x \oplus y &:= \neg x \to y, \\
\neg x &:= x \to 0.
\end{aligned}$$

Por esta razón consideraremos a las MV-álgebras como subvariedad de $\mathbb{RL}$ y notaremos a dicha variedad con $\mathbb{MV}$. Observemos que como las MV-álgebras satisfacen la identidad $\neg\neg x = x$, son reticulados residuados involutivos. Además, se puede verificar también que las MV-álgebras satisfacen la condición de prelinealidad, es decir, son también MTL-álgebras.

El ejemplo más importante de MV-álgebra es la que se puede definir sobre el intervalo real $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. En efecto, sobre este conjunto definimos:

$$\begin{aligned} a \oplus b &:= \text{mín}(a+b, 1), \\ \neg a &:= 1 - a, \end{aligned}$$

cualesquiera sean $a, b \in [0,1]$. Resulta que $[\mathbf{0},\mathbf{1}] = \langle [0,1], \oplus, \neg, 0 \rangle$ es una MV-álgebra. Además, esta MV-álgebra es especial pues genera la variedad de las MV-álgebras, es decir, $\mathbb{MV} = V([\mathbf{0},\mathbf{1}])$ (ver [CigDOtMun00]).

Otros ejemplos importantes de MV-álgebras son las MV-cadenas, es decir, las MV-álgebras cuyo orden es total. Un caso particular son las MV-cadenas finitas. Denotamos con $\mathbf{S}_n$ a la subálgebra de $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ que tiene por universo al conjunto $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Otro ejemplo de MV-cadenas son las álgebras de Chang $\mathbf{S}_n^\omega$ con universo

$$S_n^\omega = \{(x,y) : x \in \{\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \ldots, \tfrac{n-1}{n}\}, y \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0,y) : y \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{(1,-y) : y \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

En $\mathbf{S}_n^\omega$ las operaciones están dadas por:

$$0 = (0,0), \qquad \neg(x,y) = (1-x, -y)$$

$$(x,y) \oplus (u,v) = \begin{cases} (1,0) & \text{si } x+u > 1, \\ (1, \text{mín}(0, y+v)) & \text{si } x+u = 1, \\ (x+u, y+v) & \text{si } x+u < 1. \end{cases}$$

Se cuenta también con una buena descripción de las MV-álgebras libres. Dado $n \in \mathbb{N}$, se llama **función de McNaughton** sobre $[0,1]^n$ a toda función $f : [0,1]^n \to [0,1]$ tal que:

- f es continua con respecto a la topología usual en $[0,1]^n$,
- existen polinomios lineales $p_1, \ldots, p_k$ son coeficientes enteros tales que para cada $a \in [0,1]^n$, existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $f(a) = p_i(a)$.

Denotamos $M([0,1]^n)$ al conjunto de todas la funciones de McNaughton sobre $[0,1]^n$. Definiendo las operaciones puntualmente, se obtiene una MV-álgebra $\mathbf{M}([0,1]^n)$ que resulta isomorfa a la MV-álgebra libre con n generadores libres (ver [CigDOtMun00]). Esta descripción de las MV-álgebras libres es muy útil y será utilizada en diversas ocasiones en esta tesis.

1.4. Subreductos implicativos de $\mathbb{RL}$

Consideremos un lenguaje algebraico $\mathcal{L}$ y un sublenguaje $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$. Dada un álgebra $\mathbf{A}$ en el lenguaje $\mathcal{L}$, notamos con $\mathbf{A} \upharpoonright \mathcal{L}_0$ al álgebra que se obtiene a partir de $\mathbf{A}$ reteniendo sólo las operaciones correspondientes al lenguaje $\mathcal{L}_0$. Llamamos a $\mathbf{A} \upharpoonright \mathcal{L}_0$ el **$\mathcal{L}_0$-reducto** de $\mathbf{A}$. Por extensión, si $\mathbb{K}$ es una clase de álgebras en el lenguaje $\mathcal{L}$, definimos el **$\mathcal{L}_0$-reducto** de $\mathbb{K}$ como

$$\mathbb{K} \upharpoonright \mathcal{L}_0 = \{\mathbf{A} \upharpoonright \mathcal{L}_0 : \mathbf{A} \in \mathbb{K}\}.$$

Si $\mathbb{Q}$ es una cuasivariedad, es fácil ver que $\mathbb{Q} \restriction \mathcal{L}_0$ es cerrado bajo los operadores I, P y P_U, pero no, en general, bajo S. Esto motiva la definición del **$\mathcal{L}_0$-subreducto** de una clase $\mathbb{K}$, que es la clase $S(\mathbb{K} \restriction \mathcal{L}_0)$. Abreviamos $\mathbb{K}^{\mathcal{L}_0} = S(\mathbb{K} \restriction \mathcal{L}_0)$. Para una cuasivariedad $\mathbb{Q}$, resulta entonces que $\mathbb{Q}^{\mathcal{L}_0}$ es nuevamente una cuasivariedad.

En esta tesis estudiaremos algunos subreductos de subvariedades de $\mathbb{RL}$. Conviene comenzar notando que $\mathbb{RL}^{\{\to,1\}}$ es la cuasivariedad de las **BCK-álgebras** (ver [Idz84a]), que denotamos $\mathbb{BCK}$. Es improtante notar que, como el orden parcial de los reticulados residuados se puede caracterizar utilizando sólo la operación $\to$ y la constante 1, las BCK-álgebras poseen un orden parcial dado por

$$x \leq y \iff x \to y = 1.$$

Dentro de las BCK-álgebras, encontramos a las **álgebras de implicación de Łukasiewicz**, que son los $\{\to, 1\}$-subreductos de las MV-álgebras. Notamos $\mathbb{L} = \mathbb{MV}^{\{\to,1\}}$. Esta cuasivariedad resulta ser, de hecho, una variedad, y será objeto de estudio en la Parte II de esta tesis. A su vez, dentro de $\mathbb{L}$ encontramos a las **álgebras de implicación** o **álgebras de Tarski**, que son los $\{\to, 1\}$-subreductos de las álgebras de Boole. Notamos $\mathbb{I} = \mathbb{B}^{\{\to,1\}}$. Estas álgebras han sido extensamente estudiadas (ver [Abb67], [Abb68], [Mit71/72], [DiaTor03], [AbaDiaTor04]) y serán utilizadas como puntapié inicial para el estudio de las álgebras de implicación de Łukasiewicz.

Por otra parte, el subreducto $\mathbb{RL}^{\{\to,0,1\}}$ es la cuasivariedad de las **BCK-álgebras acotadas**, que denotamos $b\mathbb{BCK}$. Es importante notar que el subreducto correspondiente de $\mathbb{MV}$, es decir, $\mathbb{MV}^{\{\to,0,1\}}$ es equivalente por términos a las propias MV-álgebras (ver [Mun86]).

1.5. $\{*, \to, 1\}$-subreductos de $\mathbb{RL}$

En [BloVAl02] se prueba que los $\{*, \to, 1\}$-subreductos de los reticulados residuados son los **pocrims** (*"partially ordered commutative residuated integral monoids"*). La clase de los pocrims forma una cuasivariedad y será denotada con $\mathbb{M}$. En [Hig84] se muestra que $\mathbb{M}$ no es una variedad. Notar que como en estos subreductos se conserva tanto la operación $\to$ como la constante 1, al igual que en las BCK-álgebras, hay un orden parcial $\leq$ dado por

$$x \leq y \iff x \to y = 1.$$

Una clase importante de pocrims es la clase de los **hoops**, que se definen como aquellos pocrims en los cuales $x \leq y$ si y sólo si existe z tal que $x = y * z$. A esta condición se la conoce como **divisibilidad** por lo que podemos decir que un hoop es un pocrim divisible. Denotaremos con $\mathbb{HO}$ a la variedad de los hoops. Es importante observar que la clase de los hoops constituye una variedad (ver [Bos69]). Más precisamente, se puede ver que un hoop es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A, *, \to, 1\rangle$ tal que:

- $\langle A, *, 1\rangle$ es un monoide conmutativo,
- $x \to x = 1$,
- $x \to (y \to z) = (x * y) \to z$,

- $x * (x \to y) = y * (y \to x)$.

Los primeros estudios sistemáticos de las propiedades estructurales de los hoops se encuentran en la tesis doctoral de Ferreirim [Fer92] y en un trabajo posterior de Blok y Ferreirim [BloFer00]. Allí se caracterizan las álgebras subdirectamente irreducibles y se estudian diversas subvariedades de interés.

Es importante observar que todo hoop es un $\wedge$-semirreticulado y que el ínfimo es puede definir mediante

$$x \wedge y := x * (x \to y).$$

En el siguiente lema recopilamos algunas propiedades básicas de los hoops.

Lema 1.5.1 *Sea* $\mathbf{A} = \langle A, *, \to, 1\rangle$ *un hoop. Para todo* $a, b, c \in A$*, se cumple:*

(a) $1 \to a = a$,

(b) $a \to 1 = 1$,

(c) $a \to b \leq (c \to a) \to (c \to b)$,

(d) $a \leq b \to a$,

(e) $a \leq (a \to b) \to b$,

(f) $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$,

(g) $a \to b \leq (b \to c) \to (a \to c)$,

(h) *si* $a \leq b$*, entonces* $b \to c \leq a \to c$ *y* $c \to a \leq c \to b$.

Una subvariedad importante de $\mathbb{HO}$ es la variedad de los **hoops de Wajsberg**, los cuales se definen como aquellos hoops que satisfacen la identidad

$$(x \to y) \to y = (y \to x) \to x.$$

A esta variedad la denotamos $\mathbb{WHO}$. El orden parcial subyacente a un hoop de Wajsberg es el de un reticulado distributivo (ver [Fer92]) y el supremo queda definido como

$$x \vee y := (x \to y) \to y.$$

El siguiente lema enuncia algunas propiedades que verifican las operaciones de reticulado en un hoop de Wajsberg.

Lema 1.5.2 *Sea* $\mathbf{A} = \langle A, *, \to, 1\rangle$ *un hoop de Wajsberg. Para todo* $a, b, c \in A$*, se cumple:*

(a) $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$,

(b) $c \to (a \vee b) = (c \to a) \vee (c \to b)$,

(c) $(a \wedge b) \to c = (a \to c) \vee (b \to c)$, (*d*) $c \to (a \wedge b) = (c \to a) \wedge (c \to b)$.

Un hoop $\mathbf{A} = \langle A, *, \to, 1\rangle$ es **cancelativo** si $\langle A, *, 1\rangle$ es cancelativo como monoide. La clase de los hoops cancelativos es una variedad, que denotamos con $\mathbb{CHO}$ y que queda axiomatizada dentro de $\mathbb{HO}$ por la identidad (ver [BloFer00])

$$x \to (x * y) = y.$$

Más aún, todo hoop cancelativo es un hoop de Wajsberg y la variedad $\mathbb{CHO}$ puede axiomatizarse dentro de $\mathbb{WHO}$ mediante la identidad

$$x \to (x * x) = x.$$

Un **álgebra de Wajsberg** es un hoop de Wajsberg con primer elemento en el lenguaje $(*, \to, 0, 1)$, donde 0 es una constante para el primer elemento. Lo interesante de las álgebras de Wajsberg es que son equivalentes por términos a las MV-álgebras (ver [CigDOtMun00, FonRodTor84]). En general, definimos en cualquier hoop de Wajsberg $\mathbf{A} = \langle A, *, \to, 1\rangle$ la operación $\oplus$ mediante

$$x \oplus y := (x \to (x * y)) \to y.$$

Si $\mathbf{A}$ tiene primer elemento, es fácil ver que $\oplus$ es la suma usual de Łukasiewicz, es decir, la suma correspondiente a la estructura de MV-álgebra que se puede definir sobre $\mathbf{A}$. Por otra parte, si $\mathbf{A}$ es un hoop cancelativo, se verifica que $x \oplus y = 1$ para todo $x, y \in A$ (ver [AglPan02]).

Si $\mathbb{V}$ es una variedad de MV-álgebras, entonces la clase de los $\{*, \to, 1\}$-subreductos de las álgebras de $\mathbb{V}$ es una variedad de hoops de Wajsberg. En particular, $\mathbb{WHO}$ es la clase de los $\{*, \to, 1\}$-subreductos de las MV-álgebras. Más aún, si $\mathbf{A}$ es una MV-álgebra, la variedad de $\{*, \to, 1\}$-subreductos de $V(\mathbf{A})$ es $V(\mathbf{A} \restriction \{*, \to, 1\})$ (ver [AglPan02]).

Es sabido que los hoops son 1-regulares, es decir, que las congruencias sobre un hoop quedan completamente determinadas por la clase de equivalencia del 1. Más aún, de la misma manera que en los reticulados residuados se puede definir la noción de filtro implicativo en un hoop y resulta que, para cada congruencia θ sobre un hoop $\mathbf{A}$, $[1]_\theta$ es un filtro implicativo. Recíprocamente, para cualquier filtro implicativo F de $\mathbf{A}$ la relación binaria

$$\theta_F = \{(a, b) \in A^2 : a \to b, b \to a \in F\}$$

es una congruencia sobre $\mathbf{A}$ tal que $F = [1]_{\theta_F}$. De hecho, la correspondencia $\theta \mapsto [1]_\theta$ es un isomorfismo de orden entre la familia de todas las congruencias de $\mathbf{A}$ y la familia de todos los filtros implicativos de $\mathbf{A}$, ambas ordenadas por inclusión. Una particularidad de los hoops es que, como los filtros implicativos contienen a 1 y son cerrados bajo $\to$ y $*$, son asimismo subuniversos. Esto no sucede en el caso de los reticulados residuados pues el primer elemento 0 está en el lenguaje. También es importante observar que para un hoop de Wajsberg acotado $\mathbf{A}$ sus congruencias no dependen del hecho de que consideremos a $\mathbf{A}$ como MV-álgebra o como hoop de Wajsberg.

Ejemplos importantes de hoops de Wajsberg son los $\{*, \to, 1\}$-reductos de las MV-cadenas. Notamos $\mathbf{C}_n^\omega = \mathbf{S}_n^\omega \restriction \{*, \to, 1\}$. Observemos que el hoop $\mathbf{C}_1^\omega$ posee un subhoop cuyo universo es

$$C_\omega = \{(1, -y) : y \in \mathbb{N}\}.$$

A dicho hoop lo denotamos $\mathbf{C}_\omega$. Se tiene que $\mathbf{C}_\omega$ genera la variedad de los hoops cancelativos (ver [BloFer00]). También notamos las cadenas finitas $\mathbf{C}_n = \mathbf{S}_n \upharpoonright \{*, \rightarrow, 1\}$.

Definimos $\mathbb{MV}_n = V(\mathbf{S}_n)$ y $\mathbb{WHO}_n = V(\mathbf{C}_n)$. Siguiendo [CigDOtMun00], llamamos **MV-álgebras n-valuadas** a las álgebras de $\mathbb{MV}_n$ (o, para abreviar, MV_n-álgebras). Asimismo llamamos **hoops de Wajsberg n-valuados** a las álgebras de $\mathbb{WHO}_n$. Una base ecuacional para $\mathbb{MV}_n$ se da en [CigDOtMun00, Corolario 8.2.4, Teorema 8.5.1]. La misma base ecuacional caracteriza la variedad $\mathbb{WHO}_n$. En particular, los hoops de Wajsberg n-valuados son n-potentes, es decir, satisfacen la ecuación $x^n = x^{n+1}$.

Capítulo 2

MV-clausuras de hoops de Wajsberg

Los hoops de Wajsberg son los $\{*, \to, 1\}$-subreductos de las MV-álgebras (ver [BloFer00, Proposición 1.14]). Por esta razón es de esperar que haya una relación muy estrecha entre dichas estructuras. En este capítulo probamos que todo hoop de Wajsberg se puede sumergir en una MV-álgebra como un filtro implicativo maximal. Más precisamente, a partir de un hoop de Wajsberg $\mathbf{A}$ construimos una MV-álgebra $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$, que denominaremos *MV-clausura* de $\mathbf{A}$, con la propiedad de que A es un filtro implicativo maximal de $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$ tal que $\mathbf{MV}(\mathbf{A})/A \cong \mathbf{S}_1$. En la primera sección presentamos esta construcción y probamos que, desde un punto de vista categorial, posee una propiedad universal. En la sección siguiente investigamos más en profundidad cómo son las MV-clausuras de hoops de Wajsberg con diferentes propiedades. También relacionamos los filtros implicativos primos y maximales de un hoop de Wajsberg y los de su correspondiente MV-clausura. En las tres últimas secciones damos algunas aplicaciones de esta construcción. En primer lugar obtenemos una dualidad categórica para los hoops de Wajsberg localmente finitos a partir de una dualidad ya conocida para las MV-álgebras localmente finitas (ver [CigDubMun04]). Damos asimismo otra dualidad categórica para el caso de hoops de Wajsberg k-valuados independiente de la anterior y basada en trabajos R. Cignoli y A. Monteiro (ver [CigMon06]). En la sección final vemos cómo se pueden utilizar las MV-clausuras para obtener una caracterización de los hoops de Wajsberg k-valuados libres a partir de la correspondiente caracterización de las MV-álgebras k-valuadas libres dada en [BusCig08]. Los resultados de este capítulo se encuentran publicados en [AbaCasDia10].

2.1. Construcción de las MV-clausuras

Sea $\mathbf{A} = \langle A, *, \to, 1\rangle$ un hoop de Wajsberg. Definimos el álgebra

$$\mathbf{MV}(\mathbf{A}) = \langle A \times \{0, 1\}, \oplus_{mv}, \neg_{mv}, 0_{mv}\rangle,$$

donde las operaciones están definidas de la siguiente manera:

$$0_{mv} := (1, 0), \qquad \neg_{mv}(a, i) := (a, 1 - i),$$

$$(a,i) \oplus_{mv} (b,j) := \begin{cases} (a \oplus b, 1) & \text{si } i = j = 1, \\ (b \to a, 1) & \text{si } i = 1 \text{ y } j = 0, \\ (a \to b, 1) & \text{si } i = 0 \text{ y } j = 1, \\ (a * b, 0) & \text{si } i = j = 0. \end{cases}$$

Recordar que en $\mathbf{A}$ la operación $\oplus$ está definida como $x \oplus y := (x \to (x * y)) \to y$.

Más adelante probaremos que $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$ es una MV-álgebra. Previendo esto definimos las siguientes operaciones derivadas de las básicas:

$$\begin{aligned} 1_{mv} &:= \neg_{mv} 0_{mv}, \\ (a,i) *_{mv} (b,j) &:= \neg_{mv}(\neg_{mv}(a,i) \oplus_{mv} \neg_{mv}(b,j)), \\ (a,i) \to_{mv} (b,j) &:= \neg_{mv}(a,i) \oplus_{mv} (b,j). \end{aligned}$$

Se puede chequear fácilmente que

$$1_{mv} = (1,1),$$

$$(a,i) *_{mv} (b,j) = \begin{cases} (a * b, 1) & \text{si } i = j = 1, \\ (a \to b, 0) & \text{si } i = 1 \text{ y } j = 0, \\ (b \to a, 0) & \text{si } i = 0 \text{ y } j = 1, \\ (a \oplus b, 0) & \text{si } i = j = 0. \end{cases}$$

$$(a,i) \to_{mv} (b,j) = \begin{cases} (a \to b, 1) & \text{si } i = j = 1, \\ (a * b, 0) & \text{si } i = 1 \text{ y } j = 0, \\ (a \oplus b, 1) & \text{si } i = 0 \text{ y } j = 1, \\ (b \to a, 1) & \text{si } i = j = 0. \end{cases}$$

De esto, es claro que la aplicación $a \mapsto (a,1)$ es una inmersión del hoop $\mathbf{A}$ en $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$. En lo que sigue identificaremos a con $(a,1)$ para todo $a \in A$. Notemos también que $(a,0) = \neg_{mv}(a,1) = \neg_{mv} a$ para todo $a \in A$. De esta manera podemos considerar $MV(\mathbf{A})$ como la unión disjunta de A y $\neg_{mv} A = \{\neg_{mv} a : a \in A\}$.

Nuestro objetivo ahora es probar que $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$ es, en efecto, una MV-álgebra. En lugar de chequear que $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$ satisface los axiomas correspondientes, daremos una demostración que muestra algunos resultados de interés independiente.

Sea $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)$ la MV-álgebra libre sobre el conjunto X y sea $\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}}(X)$ el hoop de Wajsberg libre sobre X. El primer paso es observar la estrecha relación entre las álgebras libres $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)$ y $\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}}(X)$.

Lema 2.1.1 *Para cualquier conjunto de generadores libres X,*

$$\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}}(X) \cong \mathbf{Sg}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)\restriction\{*,\to,1\}}(X).$$

Demostración. Es suficiente ver que, dados dos términos $t_1(x_1,\ldots,x_n)$ y $t_2(x_1,\ldots,x_n)$ en el lenguaje $\{*,\to,1\}$ y en las variables $\{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq X$, se tiene que la identidad $t_1 = t_2$ vale en $\mathbb{WHO}$ si y sólo si vale en $\mathbb{MV}$. En efecto, si una tal ecuación vale en $\mathbb{WHO}$, en particular vale en todo hoop de Wajsberg acotado, con lo cual vale en toda MV-álgebra. Recíprocamente, supongamos que la ecuación $t_1 = t_2$ vale en toda MV-álgebra. Como la variedad de los hoops de Wajsberg es la clase de los $\{*, \to, 1\}$-subreductos de las MV-álgebras resulta que, dado un hoop de Wajsberg $\mathbf{A}$, existe una MV-álgebra $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{A} \leq \mathbf{B} \upharpoonright \{*, \to, 1\}$. Como $t_1 = t_2$ vale en $\mathbf{B}$ y sólo contiene símbolos del lenguaje $\{*, \to, 1\}$, también vale en $\mathbf{B} \upharpoonright \{*, \to, 1\}$, con lo cual es válida, a su vez, en $\mathbf{A}$. Esto completa la demostración. $\square$

En virtud de este lema identificaremos de aquí en más los elementos de $\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}}(X)$ con los correspondientes de $\mathbf{Sg}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)\upharpoonright\{*,\to,1\}}(X)$.

Sea $Fg^{\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)}(X)$ el filtro implicativo generado por X en $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)$. Para simplificar la notación, omitiremos el superíndice $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)$, puesto que no generará confusión.

En el siguiente lema, utilizamos la notación $\neg Fg(X) = \{\neg t : t \in Fg(X)\}$.

Lema 2.1.2 *$Fg(X)$ es un filtro implicativo maximal en $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)$ tal que $Free_{\mathbb{MV}}(X) = Fg(X) \cup \neg Fg(X)$.*

Demostración. Veamos que $Fg(X) \cup \neg Fg(X)$ es un subuniverso de $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)$. En efecto, es claro que $0 \in \neg Fg(X)$ y que $Fg(X) \cup \neg Fg(X)$ es cerrado bajo $\neg$. Además, si $t_1, t_2 \in Fg(X)$, tenemos que:

- $t_1 \oplus t_2 = (t_1 \to (t_1 * t_2)) \to t_2 \in Fg(X)$,
- $t_1 \oplus \neg t_2 = t_2 \to t_1 \in Fg(X)$,
- $\neg t_1 \oplus t_2 = t_1 \to t_2 \in Fg(X)$,
- $\neg t_1 \oplus \neg t_2 = \neg(t_1 * t_2) \in \neg Fg(X)$.

Como $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)$ está generada por X, concluimos entonces que $Free_{\mathbb{MV}}(X) = Fg(X) \cup \neg Fg(X)$.

Debemos observar también que $Fg(X)$ es un filtro propio, pues $0 \notin Fg(X)$. En efecto, si suponemos que $0 \in Fg(X)$, entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $x_1 * \ldots * x_n = 0$ y dicha ecuación no es válida en una MV-álgebra no trivial.

Por último, $Fg(X)$ es maximal puesto que si consideramos un filtro implicativo G estrictamente mayor a $Fg(X)$, G debe contener un elemento de la forma $\neg t$ para algún $t \in Fg(X)$. Luego $0 = t * \neg t \in G$ con lo cual $G = Free_{\mathbb{MV}}(X)$. $\square$

Consideremos ahora el álgebra $\mathbf{Fg}(X) = \langle Fg(X), *, \to, 1\rangle$, que es claramente un hoop de Wajsberg. Es claro que $\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}}(X)$ es una subálgebra de $\mathbf{Fg}(X)$. Más aún, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.1.3 *Para cualquier conjunto de generadores libres X, $\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}}(X) = \mathbf{Fg}(X)$.*

Demostración. En la MV-álgebra $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)$ consideremos el conjunto $S = Free_{\mathbb{WHO}}(X) \cup \neg Free_{\mathbb{WHO}}(X)$. Claramente $0 \in S$ y S es cerrado bajo $\neg$. Probemos que S es cerrado bajo $\oplus$. Para ello, observemos que si $t_1, t_2 \in Free_{\mathbb{WHO}}(X)$:

- $t_1 \oplus t_2 = (t_1 \to (t_1 * t_2)) \to t_2 \in Free_{\mathbb{WHO}}(X)$,
- $t_1 \oplus \neg t_2 = t_2 \to t_1 \in Free_{\mathbb{WHO}}(X)$,
- $\neg t_1 \oplus t_2 = t_1 \to t_2 \in Free_{\mathbb{WHO}}(X)$,
- $\neg t_1 \oplus \neg t_2 = \neg(t_1 * t_2) \in \neg Free_{\mathbb{WHO}}(X)$.

Por tanto S es un subuniverso de $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)$ y contiene a X. Luego $S = Free_{\mathbb{MV}}(X)$.

Sabemos que $Free_{\mathbb{MV}}(X) = Free_{\mathbb{WHO}}(X) \cup \neg Free_{\mathbb{WHO}}(X) = Fg(X) \cup \neg Fg(X)$. También es claro que $Fg(X) \cap \neg Fg(X) = \emptyset$. Como además $Free_{\mathbb{WHO}}(X) \subseteq Fg(X)$, resulta entonces inmediatamente que $Free_{\mathbb{WHO}}(X) = Fg(X)$. □

Corolario 2.1.4 *Para cualquier conjunto de generadores libres X, $\mathbf{MV}(\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}}(X)) \cong \mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)$. En particular, tenemos que $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)/Free_{\mathbb{WHO}}(X) \cong \mathbf{S}_1$.*

Demostración. El hecho de que $\mathbf{MV}(\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}}(X)) \cong \mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)$ resulta simplemente de observar cómo se operan los elementos en $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)$ y cómo se definen las operaciones en $\mathbf{MV}(\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}}(X))$. Además, como

$$\begin{aligned} Free_{\mathbb{MV}}(X) &= Fg(X) \cup \neg Fg(X) \\ &= Free_{\mathbb{WHO}}(X) \cup \neg Free_{\mathbb{WHO}}(X), \end{aligned}$$

resulta de inmediato que $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)/Free_{\mathbb{WHO}}(X) \cong \mathbf{S}_1$. □

Como vimos en la Sección 1.3, es bien sabido que $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)$ es isomorfo a la MV-álgebra de funciones de McNaughton sobre el $|X|$-cubo, es decir, sobre el conjunto $[0,1]^{|X|}$. En el siguiente corolario identificamos dichas álgebras.

Corolario 2.1.5 *Para cualquier conjunto de generadores libres X, $\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}}(X)$ es isomorfo a la subálgebra de $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X) \restriction \{*, \to, 1\}$ cuyo universo es*

$$\{f \in Free_{\mathbb{MV}}(X) : f(e) = 1\},$$

donde e es el vértice $|X|$-cubo cuyas coordenadas son todas iguales a 1.

Demostración. Es suficiente probar que $Fg(X) = \{f \in Free_{\mathbb{MV}}(X) : f(e) = 1\}$. Para ello, notemos primero que si $x_i \in X$, entonces $x_i(e) = 1$ por definición de e. Luego es claro que $Fg(X) \subseteq \{f \in Free_{\mathbb{MV}}(X) : f(e) = 1\}$, ya que si $f(e) = g(e) = 1$, entonces $(f * g)(e) = 1$, y si $f \leq g$ y $f(e) = 1$, entonces $g(e) = 1$. Recíprocamente, si $g \notin Fg(X)$, entonces $\neg g \in Fg(X)$, de donde $(\neg g)(e) = 1$, con lo cual $g(e) = 0$ y $g \notin \{f \in Free_{\mathbb{MV}}(X) : f(e) = 1\}$. □

Observación 2.1.6 La representación de $\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}}(X)$ que aparece en el corolario anterior fue dada en primer lugar en [AglPan02, Teorema 3.1]. Sin embargo, nuestra demostración es más elemental, pues no hace uso del hecho de que todo MV-término se puede construir a partir de las variables mediante *starrings*.

Lema 2.1.7 *Dado un hoop de Wajsberg* $\mathbf{A}$ *y un homomorfismo sobreyectivo* h : $\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}}(X) \to \mathbf{A}$*, la aplicación* $\widehat{h} : Free_{\mathbb{MV}}(X) \to MV(A)$ *definida mediante*

$$\widehat{h}(t) = \begin{cases} (h(t), 1) & si\ t \in Free_{\mathbb{WHO}}(X), \\ (h(\neg t), 0) & si\ t \in \neg Free_{\mathbb{WHO}}(X), \end{cases}$$

es un homomorfismo.

Demostración. Claramente $\widehat{h}$ es una función sobreyectiva bien definida. Mostramos a continuación que $\widehat{h}$ es, de hecho, un homomorfismo.

- $\widehat{h}(0) = (h(1), 0) = (1, 0) = 0_{mv}$.
- $\widehat{h}(\neg t) = \neg_{mv}(\widehat{h}(t))$.

  En efecto, si $t \in Free_{\mathbb{WHO}}(X)$, entonces $\widehat{h}(\neg t) = (h(\neg\neg t), 0) = (h(t), 0) = \neg_{mv}(h(t), 1) = \neg_{mv}\widehat{h}(t)$. Si $t \in \neg Free_{\mathbb{WHO}}(X)$, $t = \neg r$ para algún $r \in Free_{\mathbb{WHO}}(X)$. Entonces $\widehat{h}(\neg t) = \widehat{h}(r) = (h(r), 1)$, y $\neg_{mv}\widehat{h}(t) = \neg_{mv}(h(\neg t), 0) = \neg_{mv}(h(r), 0) = (h(r), 1)$.
- $\widehat{h}(t \oplus r) = \widehat{h}(t) \oplus_{mv} \widehat{h}(r)$.

  En efecto, tenemos los siguientes cuatro casos:

  - Si $t, r \in Free_{\mathbb{WHO}}(X)$, entonces $\widehat{h}(t \oplus r) = (h(t \oplus r), 1) = (h(x) \oplus h(r), 1) = (h(t), 1) \oplus_{mv} (h(r), 1) = \widehat{h}(t) \oplus_{mv} \widehat{h}(r)$.
  - Si $t \in Free_{\mathbb{WHO}}(X)$ y $r \in \neg Free_{\mathbb{WHO}}(X)$, con $r = \neg s$ para $s \in Free_{\mathbb{WHO}}(X)$, entonces $\widehat{h}(t \oplus r) = \widehat{h}(t \oplus \neg s) = \widehat{h}(s \to t) = (h(s \to t), 1) = (h(s) \to h(t), 1)$ mientras que $\widehat{h}(t) \oplus_{mv} \widehat{h}(r) = (h(t), 1) \oplus_{mv} (h(s), 0) = (h(s) \to h(t), 1)$.
  - Si $t \in \neg Free_{\mathbb{WHO}}(X)$ y $r \in Free_{\mathbb{WHO}}(X)$, se prueba en forma análoga al caso anterior.
  - Si $t, r \in \neg Free_{\mathbb{WHO}}(X)$, es decir, $t = \neg t_1, r = \neg r_1$, con $t_1, r_1 \in Free_{\mathbb{WHO}}(X)$, entonces $\widehat{h}(t \oplus r) = \widehat{h}(\neg t_1 \oplus \neg r_1) = \widehat{h}(\neg(t_1 * r_1)) = (h(t_1 * r_1), 0) = (h(t_1) * h(r_1), 0) = (h(t_1), 0) \oplus_{mv} (h(r_1), 0) = \widehat{h}(t) \oplus_{mv} \widehat{h}(r)$.

Por lo tanto, $\widehat{h}$ es un homomorfismo sobreyectivo. □

Ahora sí estamos en condiciones de probar que $\mathbf{MV(A)}$ es una MV-álgebra, cualquiera sea el hoop de Wajsberg $\mathbf{A}$.

Teorema 2.1.8 *Si* $\mathbf{A}$ *es un hoop de Wajsberg, entonces* $\mathbf{MV(A)}$ *es una MV-álgebra. Más aún,* A *es un filtro implicativo maximal de* $\mathbf{MV(A)}$ *y* $\mathbf{MV(A)}/A \cong \mathbf{S}_1$.

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ un hoop de Wajsberg y consideremos un conjunto de generadores libres X suficientemente grande de modo tal que existe un homomorfismo sobreyectivo $h : \mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}}(X) \to \mathbf{A}$. Por el lema anterior, existe un homomorfismo sobreyectivo $\widehat{h} : \mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X) \to \mathbf{MV(A)}$. Luego $\mathbf{MV(A)}$ resulta ser una MV-álgebra por ser una imagen homomorfa de una MV-álgebra. Además, es claro que A es un filtro implicativo de $\mathbf{MV(A)}$, pues es creciente y cerrado bajo $*$. También por definición tenemos que $MV(A) = A \cup \neg A$ y $A \cap \neg A = \emptyset$. Luego A debe ser un filtro implicativo maximal tal que $\mathbf{MV(A)}/A \cong \mathbf{S}_1$. $\square$

Vamos a ver ahora que esta construcción tiene una propiedad universal. De hecho, mostraremos que $\mathbf{MV(A)}$ es la MV-álgebra libremente generada sobre $\mathbf{A}$ en un sentido categorial que enseguida definiremos. Pero antes debemos ver qué propiedades tiene esta construcción respecto de homomorfismos entre hoops de Wajsberg.

Un subconjunto S de una MV-álgebra satisface la **propiedad de productos finitos**, que abreviamos PPF, siempre que 0 no pueda obtenerse como un producto finito de elementos de S, en otras palabras, el filtro implicativo generado por S es propio.

Lema 2.1.9 *Sea* $\mathbf{A}$ *un hoop de Wajsberg y* $\mathbf{B}$ *una MV-álgebra. Para cada homomorfismo* $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B} \upharpoonright \{*, \to, 1\}$ *existe un único homomorfismo de MV-álgebras* $\widehat{h} : \mathbf{MV(A)} \to \mathbf{B}$ *tal que* $\widehat{h} \upharpoonright_A = h$*, en otras palabras, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & MV(\mathbf{A}) \arrow[d, "\widehat{h}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Además, si h *es inyectivo y* $h(A)$ *tiene la PPF en* $\mathbf{B}$*, entonces* $\widehat{h}$ *también es inyectivo.*

Demostración. Para cada $a \in A$ definimos $\widehat{h}(a,1) = h(a)$ y $\widehat{h}(a,0) = \neg h(a)$.

Veamos que $\widehat{h}(\neg_{mv}(a,i)) = \neg\widehat{h}(a,i)$, $a \in A$, $i = 0,1$. Si $i = 1$, $\widehat{h}(\neg_{mv}(a,1)) = \widehat{h}(a,0) = \neg h(a) = \neg\widehat{h}(a,1)$. Si $i = 0$, $\widehat{h}(\neg_{mv}(a,0)) = \widehat{h}(a,1) = h(a) = \neg\neg h(a) = \neg\widehat{h}(a,0)$.

Ahora probemos que $\widehat{h}((a,i) \oplus_{mv} (b,j)) = \widehat{h}(a,i) \oplus \widehat{h}(b,j)$, $a,b \in A$, $i,j = 0,1$. Si $i = j = 1$, entonces $\widehat{h}((a,1) \oplus_{mv} (b,1)) = \widehat{h}(a \oplus b, 1) = h(a \oplus b) = h(a) \oplus h(b) = \widehat{h}(a,1) \oplus \widehat{h}(b,1)$. Si $i = 1$, $j = 0$, tenemos que $\widehat{h}((a,1) \oplus_{mv} (b,0)) = \widehat{h}(b \to a, 1) = h(b \to a) = h(b) \to h(a) = h(a) \oplus \neg h(b) = \widehat{h}(a,1) \oplus \widehat{h}(b,0)$. El caso $i = 0$, $j = 1$ es análogo al anterior. Finalmente, si $i = j = 0$, obtenemos $\widehat{h}((a,0) \oplus_{mv} (b,0)) = \widehat{h}(a * b, 0) = \neg h(a * b) = \neg(h(a) * h(b)) = \neg h(a) \oplus \neg h(b) = \widehat{h}(a,0) \oplus \widehat{h}(b,0)$.

También tenemos que $\widehat{h}(0_{mv}) = \widehat{h}(1,0) = \neg h(1) = \neg 1 = 0$. Así $\widehat{h}$ resulta ser un homomorfismo de MV-álgebras tal que $\widehat{h} \upharpoonright_A = h$.

Ahora supongamos que h es inyectiva y que $h(A)$ tiene la PPF en $\mathbf{B}$. Sea $(a,i) \in MV(\mathbf{A})$ tal que $\widehat{h}(a,i) = 1$. Si $i = 1$, entonces $h(a) = 1$ y, por la inyectividad de h, $a = 1$. Si $i = 0$, entonces $\neg h(a) = 1$, así que $h(a) = 0$, lo cual es imposible por la PPF. Esto muestra que $\widehat{h}$ también es inyectiva. $\square$

En la última parte del lema, es útil observar que, como $h(A)$ es cerrada bajo $*$, $h(A)$ tiene la PPF en $\mathbf{B}$ si y sólo si $0 \notin h(A)$.

Teorema 2.1.10 *Sea* $h : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ *un homomorfismo entre dos hoops de Wajsberg, entonces existe un único homomorfismo* $MV(h) : \mathbf{MV}(\mathbf{A}_1) \to \mathbf{MV}(\mathbf{A}_2)$ *tal que* $MV(h) \upharpoonright_{A_1} = h$*. Más aún, si* h *es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva, también lo es* $MV(h)$*.*

Demostración. Consideremos el homomorfismo $\iota \circ h : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{MV}(\mathbf{A}_2) \restriction \{*, \to, 1\}$, donde $\iota : \mathbf{A}_2 \to \mathbf{MV}(\mathbf{A}_2) \restriction \{*, \to, 1\}$ es el homomorfismo inclusión. Utilizando el Lema 2.1.9, existe un homomorfismo $MV(h) = \widehat{\iota \circ h} : \mathbf{MV}(\mathbf{A}_1) \to \mathbf{MV}(\mathbf{A}_2)$. Además, es claro que $MV(h) \restriction_{A_1} = h$, pues si $a \in A_1$, se tiene que $MV(h)(a) = \iota(h(a)) = h(a)$.

Supongamos ahora que $g : \mathbf{MV}(\mathbf{A}_1) \to \mathbf{MV}(\mathbf{A}_2)$ es un homomorfismo tal que $g \restriction_{A_1} = h$. Luego, para $a \in A_1$, tenemos que $g(a, 1) = g(a) = h(a) = (h(a), 1)$ y $g(a, 0) = g(\neg_{mv}(a, 1)) = \neg_{mv} g(a, 1) = \neg_{mv}(h(a), 1) = (h(a), 0)$. Esto muestra que $g = MV(h)$. Luego $MV(h)$ es único.

Ahora supongamos que h es inyectivo. En este caso, $\iota \circ h$ también es inyectivo y además verifica que $(\iota \circ h)(A_1) = \iota(h(A_1)) \subseteq A_2$ tiene la PPF en $\mathbf{MV}(\mathbf{A}_2)$ por la propia definición de la MV-clausura. Luego, $MV(h)$ es inyectivo.

Finalmente, si suponemos que h es sobreyectivo y observamos que $MV(h)(a, 1) = (h(a), 1)$ y $MV(h)(a, 0) = (h(a), 0)$, resulta inmediatamente que $MV(h)$ también es sobreyectivo. $\square$

Los resultados que acabamos de probar nos permiten definir un funtor $\mathcal{MV}$ de la categoría $\mathfrak{WHO}$ de hoops de Wajsberg en la categoría $\mathfrak{MV}$ de MV-álgebras. Dado un hoop de Wajsberg $\mathbf{A}$, sea $\mathcal{MV}(\mathbf{A}) = \mathbf{MV}(\mathbf{A})$, y dado un homomorfismo de hoops de Wajsberg $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, sea $\mathcal{MV}(h) : \mathbf{MV}(\mathbf{A}) \to \mathbf{MV}(\mathbf{B})$ el correspondiente homomorfismo de MV-álgebras $MV(h)$ mencionado en el corolario anterior. Se puede chequear fácilmente que $\mathcal{MV}$ es un funtor.

Afirmamos que $\mathcal{MV}$ es adjunto a izquierda del funtor olvido $\mathcal{U} : \mathfrak{MV} \to \mathfrak{WHO}$, es decir, el funtor tal que $\mathcal{U}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \restriction \{*, \to, 1\}$ para cada $\mathbf{A} \in \mathbb{MV}$, y tal que $\mathcal{U}(h) = h$ para todo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{MV}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. En efecto, para todo hoop de Wajsberg $\mathbf{A}$ y toda MV-álgebra $\mathbf{B}$, existe una aplicación

$$\eta_{\mathbf{A},\mathbf{B}} : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{MV}}(\mathcal{MV}(\mathbf{A}), \mathbf{B}) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{WHO}}(\mathbf{A}, \mathcal{U}(\mathbf{B}))$$

dada por $\eta_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(h) = h \restriction_A$. Por el Lema 2.1.9, se sigue fácilmente que $\eta_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ es una biyección. Verificar las condiciones de naturalidad en $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es un cálculo sencillo.

Esto muestra que, dado un hoop de Wajsberg $\mathbf{A}$, la MV-álgebra $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$ es precisamente la MV-álgebra libremente generada por $\mathbf{A}$ y también garantiza la unicidad de esta construcción a menos de isomorfismos. Por esta razón llamamos a $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$ la **MV-clausura** de $\mathbf{A}$.

2.2. Propiedades básicas

En esta sección vamos a derivar varias propiedades útiles de las MV-clausuras. En primer lugar, veamos cómo queda determinado el orden parcial resultante en dicha construcción.

Lema 2.2.1 *Dado un hoop de Wajsberg* $\mathbf{A}$*, las siguientes condiciones son equivalentes en* $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$*:*

(1) $(a, i) \leq_{mv} (b, j)$*;*

(2) *se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

- $i = j = 1$ *y* $a \leq b$,
- $i = 0$, $j = 1$ *y* $a \oplus b = 1$,
- $i = j = 0$ *y* $b \leq a$.

Demostración. Resulta inmediatamente de observar cuánto vale $(a, i) \rightarrow_{mv} (b, j)$. □

Observemos que el lema anterior nos asegura que, en $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$, los elementos de A están ordenados de la misma manera que en $\mathbf{A}$, y que los elementos de $\neg_{mv} A$ están ordenado de manera inversa que en $\mathbf{A}$.

Notemos además que si $\mathbf{A}$ es un hoop cancelativo, se verifica que $a \oplus b = 1$ para todo $a, b \in A$. Esto significa que, en $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$, los elementos de $\neg_{mv} A$ están todos por debajo de los de A.

Ahora veamos propiedades referentes a los filtros implicativos de $\mathbf{A}$ y de $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$.

Lema 2.2.2 *Sea* $\mathbf{A}$ *una MV-álgebra y* F *un filtro implicativo de* $\mathbf{A}$ *tal que* $\mathbf{A}/F \cong \mathbf{S}_1$. *Entonces* $\mathbf{A} \cong \mathbf{MV}(\mathbf{F})$, *donde* $\mathbf{F}$ *es el hoop de Wajsberg con universo* F *y operaciones heredadas de* $\mathbf{A}$.

Demostración. Primero observemos que, como F es cerrado bajo las operaciones $*$, $\rightarrow$, 1, el álgebra $\mathbf{F} = \langle F, *, \rightarrow, 1 \rangle$ es un hoop de Wajsberg. Definamos $h : \mathbf{MV}(\mathbf{F}) \rightarrow \mathbf{A}$ mediante

$$h(f, i) = \begin{cases} f & \text{si } i = 1, \\ \neg f & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Utilizando la definición de las operaciones en $\mathbf{MV}(\mathbf{F})$, es un simple cálculo verificar que h es un homomorfismo. Además, como $A = F \cup \neg F$ y esta unión es disjunta, resulta que h es una biyección. □

Lema 2.2.3 *Sea* F *un filtro implicativo de un hoop de Wajsberg* $\mathbf{A}$. *Entonces* F *es un filtro implicativo de* $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$ *y se tiene que* $\mathbf{MV}(\mathbf{A})/F \cong \mathbf{MV}(\mathbf{A}/F)$.

Demostración. Sabemos que F es cerrado por $*$ y contiene a 1. Para ver que F es un filtro implicativo en $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$ sólo restaría verificar que F es creciente en $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$. En efecto, en virtud del Lema 2.2.1, todo elemento por encima de un elemento de F debe estar en A y, por lo tanto, también en F.

Sea $h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}/F$ el homomorfismo canónico, es decir, $h(a) = [a]_F$ para todo $a \in F$. Luego, por el Teorema 2.1.10, $MV(h) : \mathbf{MV}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{MV}(\mathbf{A}/F)$ también es un homomorfismo sobreyectivo. Por la definición de $MV(h)$, es claro que el núcleo de $MV(h)$ es F, el mismo que el de h. Luego $\mathbf{MV}(\mathbf{A})/F \cong \mathbf{MV}(\mathbf{A}/F)$. □

Para cualquier hoop de Wajsberg acotado $\mathbf{A} = \langle A, *, \rightarrow, 1 \rangle$ definimos $\mathbf{A}_0 = \langle A, \oplus, \neg, 0 \rangle$ la correspondiente MV-álgebra con primer elemento 0.

Lema 2.2.4 *Si* $\mathbf{A}$ *es un hoop de Wajsberg acotado, entonces* $\mathbf{MV}(\mathbf{A}) \cong \mathbf{S}_1 \times \mathbf{A}_0$.

Demostración. Observemos que $\{1\} \times A$ es un filtro implicativo de $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{A}_0$ tal que $(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{A}_0)/(\{1\} \times A) \cong \mathbf{S}_1$. Luego, por el Lema 2.2.2, $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{A}_0 \cong \mathbf{MV}(\mathbf{1} \times \mathbf{A}) \cong \mathbf{MV}(\mathbf{A})$. □

Corolario 2.2.5 *Si* $\mathbf{A}$ *es un hoop de Wajsberg finito, entonces* $\mathbf{MV}(\mathbf{A}) \cong \mathbf{S}_1 \times \mathbf{A}_0$.

Demostración. Basta observar que, como los hoops de Wajsberg son cerrados por ínfimos, todo hoop de Wajsberg finito es acotado. □

Si $\mathbf{A}$ es un hoop de Wajsberg o una MV-álgebra, denotamos con $Spec(\mathbf{A})$ al conjunto de filtros implicativos maximales de $\mathbf{A}$.

Lema 2.2.6 *Sea* $\mathbf{A}$ *un hoop de Wajsberg acotado. Si* M *es un filtro implicativo maximal de* $\mathbf{A}$*, entonces existe un filtro implicativo maximal* M' *de* $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$ *tal que* $M' \cap A = M$*. Más aún, la correspondencia*

$$M \mapsto M \cap A$$

es una biyección entre $Spec(\mathbf{MV}(\mathbf{A})) \setminus \{A\}$ *y* $Spec(\mathbf{A})$.

Demostración. Es una consecuencia del Lema 2.2.4, ya que $\mathbf{MV}(\mathbf{A}) \cong \mathbf{S}_1 \times \mathbf{A}_0$ y los filtros maximales de $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{A}_0$ son $\{1\} \times A$ y los filtros de la forma $S_1 \times U$, donde U es un filtro maximal de $\mathbf{A}$. □

Un filtro implicativo propio P de un hoop de Wajsberg o de una MV-álgebra $\mathbf{A}$ es **primo** si para todo $a, b \in A$ se tiene que $a \to b \in P$ o bien $b \to a \in P$. Claramente P es primo en $\mathbf{A}$ si y sólo si $\mathbf{A}/P$ es una cadena. Observemos que esto es equivalente, a su vez, a la condición siguiente: si $a \vee b \in P$, entonces $a \in P$ o $b \in P$.

Lema 2.2.7 *Sea* P *un filtro implicativo primo de un hoop de Wajsberg* $\mathbf{A}$*. Entonces* $\mathbf{A}/P$ *es acotado si y sólo si* P *no es primo en* $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$.

Demostración. Como P es un filtro implicativo primo de $\mathbf{A}$, sabemos que $\mathbf{A}/P$ es una cadena. Luego hay dos posibilidades para $\mathbf{A}/P$: es acotado o es cancelativo (ver [AglPan02, Proposición 2.1]).

Si $\mathbf{A}/P$ es acotado, utilizando los Lemas 2.2.3 y 2.2.4 vemos que $\mathbf{MV}(\mathbf{A})/P \cong \mathbf{MV}(\mathbf{A}/P) \cong \mathbf{S}_1 \times (\mathbf{A}/P)_0$, que no es una cadena. Así que P no es primo en $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$.

Por otra parte, si $\mathbf{A}/P$ no es acotado, entonces $\mathbf{A}/P$ es cancelativo. En este caso vimos que los elementos de $\neg_{mv}\mathbf{A}/P$ están todos por debajo de los de $\mathbf{A}/P$ en $\mathbf{MV}(\mathbf{A}/P)$. Luego $\mathbf{MV}(\mathbf{A}/P) \cong \mathbf{MV}(\mathbf{A})/P$ es una cadena, lo que implica que P es un filtro implicativo primo de $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$. □

Denotemos con $Prim(\mathbf{A})$ al conjunto de filtros implicativos primos de un hoop de Wajsberg o una MV-álgebra $\mathbf{A}$.

Teorema 2.2.8 *Sea* $\mathbf{A}$ *un hoop de Wajsberg y* P *un filtro implicativo primo de* $\mathbf{A}$*. Entonces existe un filtro implicativo primo* P' *de* $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$ *tal que* $P' \cap A = P$*. Más aún, la correspondencia*

$$P' \mapsto \varphi(P') = P' \cap A$$

es una biyección entre $Prim(\mathbf{MV}(\mathbf{A})) \setminus \{A\}$ *y* $Prim(\mathbf{A})$.

Demostración. En primer lugar, observemos que φ está bien definida, es decir, si P' es un filtro implicativo primo de $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$, entonces $P' \cap A$ es un filtro implicativo primo de $\mathbf{A}$.

Veamos ahora que φ es sobreyectiva. Sea P un filtro primo de $\mathbf{A}$. Si P es primo en $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$, entonces basta con considerar $P' = P$. Si P no es primo en $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$, entonces, por el Lema 2.2.7, $\mathbf{A}/P$ es acotado y existe un isomorfismo $f : \mathbf{MV}(\mathbf{A})/P \to \mathbf{S}_1 \times (\mathbf{A}/P)_0$. Es fácil ver que $\{(0,1),(1,1)\}$ es un filtro implicativo primo de $\mathbf{L}_1 \times (\mathbf{A}/P)_0$. Luego $f^{-1}(\{(0,1),(1,1)\})$ es un filtro implicativo primo de $\mathbf{MV}(\mathbf{A})/P$. Si consideramos el homomorfismo canónico $\pi_P : \mathbf{MV}(\mathbf{A}) \to \mathbf{MV}(\mathbf{A})/P$, es fácil ver entonces que $P' = \pi_P^{-1}(f^{-1}(\{(0,1),(1,1)\}))$ es un filtro implicativo primo de $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$. Más aún, $P' = P \cup \neg_{mv} C$, donde C es el primer elemento de $\mathbf{A}/P$. Hemos hallado entonces $P' \in Prim(\mathbf{MV}(\mathbf{A}))$ tal que $P' \cap A = P$.

Resta ver que φ es inyectiva. Supongamos que $\varphi(P') = P$ para $P' \in Prim(\mathbf{MV}(\mathbf{A})$. Hay dos posibilidades según P sea primo en $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$ o no.

Supongamos que P es primo en $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$. Como en toda MV-álgebra los filtros implicativos primos están contenidos en un único filtro implicativo maximal, resulta que el único filtro implicativo maximal que contiene a P es A. Luego cualquier otro filtro implicativo primo de $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$ que contenga a P estará contenido en A. Esto muestra que el único filtro implicativo primo P' de $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$ tal que $P' \cap A = P$ es P mismo.

Supongamos ahora que P no es primo en $\mathbf{MV}(\mathbf{A})$. Por el Lema 2.2.7, sabemos que $\mathbf{A}/P$ es acotado. Denotemos con C el primer elemento de $\mathbf{A}/P$.

Consideremos un filtro implicativo $P' \in Prim(\mathbf{MV}(\mathbf{A}))$ tal que $P' \cap A = P$. Veremos que en este caso la única posibilidad para P' es que $P' = P \cup \neg_{mv} C$.

Veamos primero que $P \cup \neg_{mv} C \subseteq P'$. Notemos que si $c \in C$,

$$c \vee \neg_{mv} c = (c \to \neg_{mv} c) \to \neg_{mv} c = (\neg_{mv} c \oplus \neg_{mv} c) \to \neg_{mv} c = \neg_{mv} c^2 \to \neg_{mv} c = c \to c^2.$$

Ahora bien,

$$[c \to c^2]_P = [c]_P \to [c]_P^2 = [1]_P$$

pues $[c]_P = C$ es el primer elemento de $\mathbf{A}/P$. Luego $c \vee \neg_{mv} c = c \to c^2 \in P$, y como $P \subseteq P'$ y P' es primo, concluimos que $c \in P'$ o $\neg_{mv} c \in P'$. Si $c \in P'$, como $c \in A$, tenemos que $c \in P$ y esto implicaría que $\mathbf{A}/P$ es un álgebra trivial, es decir, $P = A$, contradicción. Luego $\neg_{mv} c \in P'$. Hemos probado entonces que $\neg_{mv} C \subseteq P'$. Luego $P \cup \neg_{mv} C \subseteq P'$.

Recíprocamente, probemos que $P' \subseteq P \cup \neg_{mv} C$. Si consideramos $a \in A$ y suponemos que $a \in P'$, es inmediato que $a \in P$. Tomemos entonces $a \in A$ y supongamos que $\neg_{mv} a \in P'$. Entonces $a \vee \neg_{mv} a \in P'$, pero, como vimos más arriba para c, $a \vee \neg_{mv} a = a \to a^2 \in A$. Luego $a \to a^2 \in P' \cap A = P$, con lo cual $[a \to a^2]_P = [1]_P$ y $[a]_P = [a]_P^2$, es decir, $[a]_P$ es idempotente en $\mathbf{A}/P$. Pero $\mathbf{A}/P$ es un hoop de Wajsberg acotado, por lo que sus únicos elementos idempotentes son $[1]_P$ y C. Si $[a]_P = [1]_P$, entonces $a \in P$, con lo cual $a, \neg_{mv} a \in P'$, de donde $0 \in P'$, contradicción. Luego $[a]_P = C$, de donde $a \in C$ y $\neg_{mv} a \in \neg_{mv} C$. $\square$

2.3. Dualidad topológica para los hoops de Wajsberg localmente finitos

En [CigDubMun04] los autores dan una equivalencia dual entre la categoría de MV-álgebras localmente finitas y cierta categoría de multiconjuntos. Veremos que las MV-clausuras nos permiten dar una dualidad topológica para los hoops de Wajsberg localmente finitos haciendo sólo unos pequeños cambios a la dualidad existente para MV-álgebras.

Comencemos repasando la dualidad dada en [CigDubMun04].

Un **número supernatural** es una función $\nu : P \to \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$, donde P es el conjunto de números primos positivos. Dados dos números supernaturales ν, μ, escribimos $\nu \leq \mu$ si $\nu(p) \leq \mu(p)$ para cada $p \in P$. Es claro que $\leq$ es un orden parcial sobre el conjunto G de los números supernaturales.

Con cada número natural n asociamos el número supernatural ν_n tal que $\nu_n(p)$ es el exponente del primo p en la descomposición de n como producto de potencias de primos distintos. Luego, si identificamos n con ν_n, es claro que G es una generalización del conjunto de números naturales y que el orden parcial definido sobre G es una extensión de la relación de divisibilidad.

También definimos una topología sobre G cuya base consiste del conjunto G mismo junto con los conjuntos

$$U_n = \{\nu \in G : \nu > \nu_n\}$$

para cada número natural n.

Podemos definir ahora la categoría $\mathfrak{C}$ de los multiconjuntos. Un objeto en $\mathfrak{C}$ o **multiconjunto** es un par $\langle X, \sigma \rangle$, donde X es un espacio de Stone y $\sigma : X \to G$ es una aplicación continua de X en el espacio de los números supernaturales. Un morfismo $\varphi : \langle X, \sigma \rangle \to \langle Y, \rho \rangle$ está dado por una aplicación continua $\varphi : X \to Y$ tal que $\rho(\varphi(x)) \leq \sigma(x)$ para todo $x \in X$.

En [CigDubMun04], los autores construyen una equivalencia dual entre la categoría $\mathfrak{C}$ y la categoría $\mathfrak{MV}_{lf}$ de MV-álgebras localmente finitas. Gracias a la construcción de la MV-clausura de un hoop de Wajsberg, podemos modificar la dualidad anterior para obtener una dualidad para la categoría de hoops de Wajsberg localmente finitos.

Definimos la categoría $\mathfrak{C}^*$ cuyos objetos son ternas $\langle X, \sigma, x_0 \rangle$, donde $\langle X, \sigma \rangle$ es un multiconjunto y x_0 es un elemento de X tal que $\sigma(x_0) = \nu_1$. Un morfismo $\varphi : \langle X, \sigma, x_0 \rangle \to \langle Y, \rho, y_0 \rangle$ es un morfismo $\varphi : \langle X, \sigma \rangle \to \langle Y, \rho \rangle$ en la categoría $\mathfrak{C}$ tal que $\varphi(x_0) = y_0$.

Definimos también una categoría auxiliar $\mathfrak{MV}^*_{lf}$ cuyos objetos son pares $\langle \mathbf{A}, F \rangle$, donde $\mathbf{A}$ es una MV-álgebra localmente finita y F es un filtro de $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A}/F \cong \mathbf{S}_1$. En esta categoría, un morfismo $h : \langle \mathbf{A}, F \rangle \to \langle \mathbf{B}, G \rangle$ es un homomorfismo de MV-álgebras $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ tal que $h(F) \subseteq G$.

Siguiendo el trabajo [CigDubMun04], puede probarse fácilmente que la misma equivalencia dual entre las categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{MV}_{lf}$ define una equivalencia dual entre $\mathfrak{C}^*$ y $\mathfrak{MV}^*_{lf}$. Luego, sólo resta probar que $\mathfrak{MV}^*_{lf}$ es equivalente a $\mathfrak{WH}_{lf}$, la categoría de hoops de Wajsberg localmente finitos.

Sea $\mathcal{F} : \mathfrak{MV}^*_{lf} \to \mathfrak{WH}_{lf}$ el funtor tal que $\mathcal{F}(\langle \mathbf{A}, F \rangle)$ es el hoop $\mathbf{F}$ y, dado un morfismo $h : \langle \mathbf{A}, F \rangle \to \langle \mathbf{B}, G \rangle$, el morfismo $\mathcal{F}(h) : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ es simplemente la restricción de h. Notar que la finitud local de $\mathbf{F}$ se desprende inmediatamente de la finitud local de $\mathbf{A}$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{G} : \mathfrak{WH}_{lf} \to \mathfrak{MV}^*_{lf}$ el funtor dado por $\mathcal{G}(\mathbf{L}) = \langle \mathbf{MV}(\mathbf{L}), L \rangle$ para cualquier hooop de Wajsberg localmente finito $\mathbf{L}$, y tal que $\mathcal{G}(f) = MV(f)$ para cualquier homomorfismo de hoops f (ver Teorema 2.1.10). Como $\mathbf{MV}(\mathbf{L})/L \cong \mathbf{S}_1$, la finitud local de $\mathbf{MV}(\mathbf{L})$ es una simple consecuencia de la finitud local de $\mathbf{L}$.

Resulta ahora una demostración de rutina probar que los funtores $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ definen una equivalencia natural entre las categorías $\mathfrak{WH}_{lf}$ y $\mathfrak{MV}^*_{lf}$. Se tiene entonces el siguiente resultado.

Teorema 2.3.1 *Las categorías $\mathfrak{WH}_{lf}$ y $\mathfrak{C}^*$ son dualmente equivalentes.*

2.4. Otra dualidad topológica para los hoops de Wajsberg k-valuados

Es fácil derivar una dualidad topológica para las MV-álgebras k-valuadas como restricción de la dualidad dada en la sección previa para las MV-álgebras. De hecho, como observan los autores en [CigDubMun04], es inmediato que la categoría $\mathfrak{MV}_k$ de MV$_k$-álgebras es dualmente equivalente a la subcategoría plena de $\mathfrak{C}$ cuyos objetos son los multiconjuntos $\langle X, \sigma \rangle$ tales que $\sigma(x) \leq \nu_k$ para todo $x \in X$. Mostraremos que esta dualidad es esencialmente la misma que la que se puede obtener de la representación de las MV$_k$-álgebras dada en [CigMon06]. Comenzamos repasando esta representación y extendiéndola a una dualidad categórica.

Dado un entero $k \geq 1$, con $Div(k)$ denotaremos al conjunto de divisores positivos de k. También definimos $Div^*(k) = \{n \in Div(k) : n < k\}$. El conjunto $Div(k)$ tiene una estructura natural de reticulado distributivo bajo el orden dado por la relación de divisibilidad. Asimismo el conjunto $Div^*(k)$ tiene estructura de semirreticulado inferior bajo el orden heredado de $Div(k)$.

Dado $k \geq 1$, un **espacio de Stone k-valuado** es un par $\langle X, \rho \rangle$, tal que X es un espacio de Stone y ρ es un $\wedge$-homomorfismo del reticulado de divisores positivos de k en el reticulado de subconjuntos cerrados de X, tal que $\rho(k) = X$.

Si consideramos al conjunto S_k con la topología discreta y $\langle X, \rho \rangle$ es un espacio de Stone k-valuado, entonces $\mathbf{C}_k(X, \rho)$ denota la MV$_k$-álgebra formada por las funciones continuas $f : X \to S_k$ tales que $f(\rho(d)) \subseteq S_d$ para $d \in Div^*(k)$, con las operaciones algebraicas definidas puntualmente. Observemos además que si notamos $Clop(X)$ a la familia de abiertos y cerrados del espacio X y con $B(\mathbf{C}_k(X, \rho))$ al conjunto de elementos booleanos de $\mathbf{C}_k(X, \rho)$, la aplicación $N \mapsto \gamma_N$, que aplica cada $N \in Clop(X)$ en la función característica γ_N, es un isomorfismo de álgebras de Boole.

Dados dos espacios de Stone k-valuados $\langle X_1, \rho_1 \rangle$ y $\langle X_2, \rho_2 \rangle$, una función $h : \langle X_1, \rho_1 \rangle \to \langle X_2, \rho_2 \rangle$ es una **función de Stone k-valuada** si h es continua y satisface la condición $h(\rho_1(d)) \subseteq \rho_2(d)$ para $d \in Div(k)$.

Sea $\mathfrak{X}_k$ la categoría cuyos objetos son los espacios de Stone k-valuados y cuyos morfismos son las funciones de Stone k-valuadas, y sea $\mathfrak{MV}_k$ la categoría cuyos objetos son las MV-álgebras k-valuadas y cuyos morfismos son los homomorfismos de MV-álgebras. Extenderemos ahora la representación topológica para MV$_k$-álgebras dada en [CigMon06] a una dualidad topológica entre las categorías $\mathfrak{X}_k$ y $\mathfrak{MV}_k$.

Dada una MV$_k$-álgebra $\mathbf{A}$, sea $X(\mathbf{A})$ el conjunto de homomorfismos $\chi : \mathbf{A} \to \mathbf{S}_k$. Si consideramos el conjunto S_k dotado con la topología discreta y S_k^A con la topología producto correspondiente, entonces $X(\mathbf{A}) \subseteq S_k^A$ hereda la topología de S_k^A. Los conjuntos $W_{a,i} = \{\chi \in X(\mathbf{A}) : \chi(a) = \frac{i}{k}\}$, $a \in A$, $0 \leq i \leq k$, forman una subbase para la topología de $X(\mathbf{A})$. Se sabe que $X(\mathbf{A})$ es homeomorfo al espacio de Stone de $B(\mathbf{A})$. Si definimos $\rho(d) = \{\chi \in X(\mathbf{A}) : \chi(A) \subseteq S_d\}$, $d \in Div(k)$, es claro que $\mathcal{X}_k(\mathbf{A}) = \langle X(\mathbf{A}), \rho\rangle$ es un espacio de Stone k-valuado. Más aún, para todo homomorfismo $h : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$, sea $\mathcal{X}_k(h) : \langle X(\mathbf{A}_2), \rho_{\mathbf{A}_2}\rangle \to \langle X(\mathbf{A}_1), \rho_{\mathbf{A}_1}\rangle$ dado por $\mathcal{X}_k(h)(\chi) = \chi \circ h$ para todo $\chi \in X(\mathbf{A}_2)$. Puede probarse que $\mathcal{X}_k$ es un funtor contravariante de $\mathfrak{MV}_k$ en $\mathfrak{X}_k$.

Recíprocamente, para cada espacio de Stone k-valuado $\langle X, \rho\rangle$, definimos $\mathcal{C}_k(\langle X, \rho\rangle) = \mathbf{C}_k(X, \rho)$ y para cada función de Stone k-valuada $h : \langle X_1, \rho_1\rangle \to \langle X_2, \rho_2\rangle$, definimos $\mathcal{C}_k(h) : \mathbf{C}_k(X_2, \rho_2) \to \mathbf{C}_k(X_1, \rho_1)$ mediante $\mathcal{C}_k(h)(f) = f \circ h$ para todo $f \in C_k(X_2, \rho_2)$. Entonces se ve fácilmente que $\mathcal{C}_k$ es un funtor contravariante de $\mathfrak{X}_k$ en $\mathfrak{MV}_k$.

La demostración del siguiente lema se encuentra en [CigMon06, Teorema 1.5].

Lema 2.4.1 *Dada una* MV$_k$*-álgebra* $\mathbf{A}$*, existe un isomorfismo* $\alpha_A : \mathbf{A} \to \mathcal{C}_k(\mathcal{X}_k(\mathbf{A}))$ *dado por* $\alpha_A(a)(\chi) = \chi(a)$ *para todo* $\chi \in X(\mathbf{A})$ *y* $a \in A$.

Probaremos un resultado similar para espacios de Stone k-valuados. Observar que nos referimos a los isomorfismos en la categoría $\mathfrak{X}_k$ como **homeomorfismos k-valuados**.

Recordemos que es posible definir términos de una variable $\sigma_i^k(x)$ para $i = 1, \ldots, k$ en el lenguaje de las MV-álgebras de forma tal que

$$\sigma_i^k\left(\frac{j}{k}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j > k, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para todo $\frac{j}{k} \in S_k$. Estos términos se denominan *términos de Moisil* (ver [CigMon06]) y satisfacen varias propiedades que resumimos en el siguiente lema.

Lema 2.4.2 *Para cualquier* MV$_k$*-álgebra* $\mathbf{A}$ *y cualesquiera* $a, b \in A$*:*

(a) *$a \in B(\mathbf{A})$ si y sólo si $a = \sigma_i^k(a)$ para algún $1 \leq i \leq k$ si y sólo si $a = \sigma_i^k(a)$ para todo $1 \leq i \leq k$,*

(b) *σ_i^k es un homomorfismo de reticulados de $\mathbf{A}$ en $B(\mathbf{A})$, para cada $1 \leq i \leq k$,*

(c) *$\sigma_i^k(\sigma_j^k(a)) = \sigma_j^k(a)$ para todo $1 \leq i, j \leq k$,*

(d) *$\sigma_1^k(a) \leq \sigma_2^k(a) \leq \ldots \leq \sigma_k^k(a)$,*

(e) *si $\sigma_i^k(a) = \sigma_i^k(b)$ para todo $1 \leq i \leq k$, entonces $a = b$.*

Podemos enunciar y demostrar ahora el resultado análogo al Lema 2.4.1 que prometimos más arriba.

Lema 2.4.3 *Dado un espacio de Stone k-valuado $\langle X, \rho\rangle$, existe un homeomorfismo k-valuado $\delta_X : \langle X, \rho\rangle \to \mathcal{X}_k(\mathcal{C}_k(X, \rho))$ dado por $\delta_X(x)(f) = f(x)$ para todo $f \in C_k(X, \rho)$ y $x \in X$.*

Demostración. Se verifica trivialmente que δ_X es una aplicación bien definida de X en $X(C_k(X,\rho))$.

Sean $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Como X es un espacio topológico totalmente disconexo, existe un abierto y cerrado N en X tal que $x_1 \in N$ pero $x_2 \notin N$. Consideremos la función característica $\gamma_N \in C_k(X,\rho)$. Entonces $\delta_X(x_1)(\gamma_N) = \gamma_N(x_1) = 1$ pero $\delta_X(x_2)(\gamma_N) = \gamma_N(x_2) = 0$. Esto muestra que δ_X es inyectiva.

Consideremos $h \in X(C_k(X,\rho))$, es decir, $h : \mathbf{C}_k(X,\rho) \to \mathbf{S}_k$ es un homomorfismo. Mostraremos que existe $x \in X$ tal que $\delta_X(x) = h$. Esto equivale a probar que existe $x \in X$ tal que $h(f) = f(x)$ para todo $f \in C_k(X,\rho)$. Supongamos primero que para todo $x \in X$ existe un abierto y cerrado N_x en X tal que $x \in N_x$ y $h(\gamma_{N_x}) = 0$. Por compacidad, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = N_{x_1} \cup \ldots \cup N_{x_n}$. Por lo tanto $1 = h(\gamma_X) = h(\gamma_{N_{x_1}} \oplus \ldots \oplus \gamma_{N_{x_n}}) = h(\gamma_{N_{x_1}}) \oplus \ldots \oplus h(\gamma_{N_{x_n}}) = 0$, contradicción. Esto muestra que existe un $x^* \in X$ tal que para todo abierto y cerrado N con $x^* \in N$, $h(\gamma_N) = 1$ (recordar que $h(\gamma_N)$ debe ser un elemento booleano de $\mathbf{S}_k$ pues γ_N es un elemento booleano de $\mathbf{C}_k(X,\rho)$). Notemos también que si N es abierto y cerrado y $x^* \notin N$, entonces $X \setminus N$ es también un abierto y cerrado y que $x^* \in X \setminus N$, así que $h(\gamma_{X \setminus N}) = 1$ y $h(\gamma_N) = 0$. Esto prueba que $h(\gamma_N) = \gamma_N(x^*)$ para todo abierto y cerrado N de X. Como $B(\mathbf{C}_k(X,\rho)) = \{\gamma_N : N \in Clop(X)\}$, podemos reescribir la última afirmación de la siguiente manera: $h(f) = f(x^*)$ para todo $f \in B(\mathbf{C}_k(X,\rho))$. Ahora consideremos un elemento arbitrario $f \in C_k(X,\rho)$. Para $1 \leq i \leq k$ tenemos que

$$\sigma_i^k(h(f)) = h(\sigma_i^k(f)) = \sigma_i^k(f)(x^*) = \sigma_i^k(f(x^*)).$$

Luego, $h(f) = f(x^*)$, como queríamos probar.

Probemos ahora que δ_X es continua. Como $\mathcal{X}_k(\mathcal{C}_k(X,\rho))$ tiene una topología con subbase dada por los conjuntos $W_{f,i} = \{h \in X(C_k(X,\rho)) : h(f) = \frac{i}{k}\}$, $f \in C_k(X,\rho)$, $0 \leq i \leq k$, sólo tenemos que probar que $\delta_X^{-1}(W_{f,i})$ es abierto en X. Pero $\delta_X^{-1}(W_{f,i}) = f^{-1}(\frac{i}{k})$ que es, en efecto, abierto en X.

Hemos probado hasta aquí que δ_X es una biyección continua. Como los espacios considerados son compactos y Hausdorff, se sigue inmediatamente que δ_X es un homeomorfismo.

Sea ρ' el $\wedge$-homomorfismo de $Div(k)$ en el reticulado de subconjuntos cerrados de $\mathcal{X}_k(\mathcal{C}_k(X,\rho))$. ρ' está dado por $\rho'(d) = \{\chi \in X(C_k(X,\rho)) : \chi(C_k(X,\rho)) \subseteq S_d\}$, $d \in Div(k)$.

Primero veamos que $\delta_X(\rho(d)) \subseteq \rho'(d)$ para todo $d \in Div^*(k)$. De hecho, si $x \in \rho(d)$, $\delta_X(x)(f) = f(x) \in S_d$ para todo $f \in C_k(X,\rho)$. Luego $\delta_X(x)(C_k(X,\rho)) \subseteq S_d$ y $\delta_X(x) \in \rho'(d)$.

También debemos probar que $\delta_X^{-1}(\rho'(d)) \subseteq \rho(d)$ para todo $d \in Div^*(k)$. Para mostrar esto, sea $x \notin \rho(d)$. Sea m el máximo común divisor del conjunto $\{n \in Div(k) : x \in \rho(n)\}$. Entonces $\rho(m) = \bigcap\{\rho(n) : x \in \rho(n), n \in Div(k)\}$, así que $x \in \rho(m)$. Observar que para todo $n \in Div(k)$ tenemos que

$$x \in \rho(n) \text{ si y sólo si } m \text{ divide a } n.$$

Sea $U = \bigcap\{X \setminus \rho(n) : m \text{ no divide a } n, n \in Div(k)\}$. Entonces U es abierto y $x \in U$. Como X tiene una base de abiertos y cerrados, existe un abierto y cerrado N tal que

$x \in N$ y $N \subseteq U$. Consideremos $f : X \to S_k$ dado por

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{si } z \in N, \\ 0 & \text{si } z \notin N. \end{cases}$$

Como N es abierto y cerrado, f es continua. Veamos que $f(\rho(n)) \subseteq S_n$ para todo $n \in Div^*(k)$. En efecto, si m divide a n, entonces $S_m \subseteq S_n$, de donde $f(\rho(n)) \subseteq \{0, \frac{1}{m}\} \subseteq S_n$. Si m no divide a n, entonces $U \subseteq X \setminus \rho(n)$, con lo cual $N \subseteq X \setminus \rho(n)$, y así $\rho(n) \subseteq X \setminus N$. En este caso $f(\rho(n)) = \{0\} \subseteq S_n$. Esto muestra que $f \in C_k(X, \rho)$. Ahora bien, como $x \notin \rho(d)$, m no divide a d y $\delta_X(x)(f) = f(x) = \frac{1}{m} \notin S_d$. Luego $\delta_X(x) \notin \rho'(d)$, así que $x \notin \delta_X^{-1}(\rho'(d))$. □

Los Lemas 2.4.1 y 2.4.3 constituyen la parte principal del resultado siguiente. Los demás detalles son verificaciones de rutina.

Teorema 2.4.4 *Los funtores contravariantes $\mathcal{C}_k$ y $\mathcal{X}_k$ definen una equivalencia dual entre las categorías $\mathfrak{X}_k$ y $\mathfrak{MV}_k$.*

Con base en este resultado y usando la MV-clausura de un hoop de Wajsberg, podemos derivar una dualidad topológica para la categoría $\mathfrak{WH}_k$ de hoops de Wajsberg k-valuados. Para ello definimos la categoría $\mathfrak{X}_k^*$ cuyos objetos son las ternas $\langle X, \rho, u\rangle$, donde $\langle X, \rho\rangle$ es un espacio de Stone k-valuado y u es un elemento fijo de X tal que $u \in \rho(1)$. Un morfismo en $\mathfrak{X}_k^*$ entre los objetos $\langle X_1, \rho_1, u_1\rangle$ y $\langle X_2, \rho_2, u_2\rangle$ es simplemente una función de Stone k-valuada $f : \langle X_1, \rho_1\rangle \to \langle X_2, \rho_2\rangle$ tal que $f(u_1) = u_2$. Extendiendo la dualidad dada en el Teorema 2.4.4, podemos deducir, de manera natural, una equivalencia dual entre la categoría $\mathfrak{X}_k^*$ y la categoría $\mathfrak{MV}_k^*$, es decir, la categoría cuyos objetos son pares $\langle \mathbf{A}, F\rangle$, donde $\mathbf{A}$ es una MV-álgebra k-valuada y F es un filtro maximal de $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A}/F \cong \mathbf{S}_1$, y cuyos morfismos $h : \langle \mathbf{A}_1, F_1\rangle \to \langle \mathbf{A}_2, F_2\rangle$ son homomorfismos $h : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ tales que $h(F_1) \subseteq F_2$. Nuevamente, como en la sección anterior, es fácil ver que la categoría $\mathfrak{MV}_k^*$ es equivalente a la categoría $\mathfrak{WH}_k$ de hoops de Wajsberg k-valuados y homomorfismos. Componiendo ambas equivalencias, obtenemos una equivalencia dual entre las categorías $\mathfrak{X}_k^*$ y $\mathfrak{WH}_k$. Enunciamos este resultado como un teorema independiente.

Teorema 2.4.5 *Las categorías $\mathfrak{WH}_k$ y $\mathfrak{X}_k^*$ son dualmente equivalentes.*

Denotemos ahora con $\mathfrak{C}_k$ la subcategoría plena de $\mathfrak{C}$ cuyos objetos son multiconjuntos $\langle X, \sigma\rangle$ tales que $\sigma(x) \leq \nu_k$ para todo $x \in X$. Como ambas categorías $\mathfrak{C}_k$ y $\mathfrak{X}_k$ son dualmente equivalentes a $\mathfrak{MV}_k$, se sigue inmediatamente que $\mathfrak{C}_k$ y $\mathfrak{X}_k$ son equivalentes. Análogamente, las categorías $\mathfrak{C}_k^*$ y $\mathfrak{X}_k^*$ también deben ser equivalentes, siendo que ambas son dualmente equivalentes a $\mathfrak{WH}_k$.

Describiremos explícitamente la equivalencia entre $\mathfrak{C}_k$ y $\mathfrak{X}_k$, dejando la correspondiente equivalencia entre $\mathfrak{C}_k^*$ and $\mathfrak{X}_k^*$ como un corolario inmediato.

Definiremos un par de funtores $\mathcal{A} : \mathfrak{C}_k \to \mathfrak{X}_k$ y $\mathcal{B} : \mathfrak{X}_k \to \mathfrak{C}_k$ que determinan la equivalencia mencionada. La demostración de este hecho es directa.

Para cada objeto $\langle X, \sigma\rangle$ en $\mathfrak{C}_k$, sea $\mathcal{A}(X, \sigma) = \langle X, \rho\rangle$, donde ρ es la función de $Div(k)$ en el reticulado de subconjuntos cerrados de X dada por

$$\rho(n) = \{x \in X : \sigma(x) \leq \nu_n\}.$$

Si $f : \langle X, \rho \rangle \to \langle X', \rho' \rangle$ es un morfismo en $\mathfrak{C}_k$, es fácil probar que f mismo también es un morfismo en $\mathfrak{X}_k$. Luego definimos $\mathcal{A}(f) = f$.

Recíprocamente, dado un objeto $\langle X, \rho \rangle$ en $\mathfrak{X}_k$, definimos $\mathcal{B}(X, \rho) = \langle X, \sigma \rangle$, donde, para todo $x \in X$, $\sigma(x)$ es el número supernatural que corresponde al máximo común divisor del conjunto

$$\{n \in Div(k) : x \in \rho(n)\}.$$

Para cada morfismo $f : \langle X, \rho \rangle \to \langle X', \rho' \rangle$ en $\mathfrak{X}_k$, definimos $\mathcal{B}(f) = f$, ya que puede probarse fácilmente que f mismo es un morfismo en $\mathfrak{C}_k$.

Esto completa la definición de la equivalencia entre $\mathfrak{C}_k$ y $\mathfrak{X}_k$.

2.5. Hoops de Wajsberg k-valuados libres

Como otra aplicación de la MV-clausura de un hoop de Wajsberg $\mathbf{A}$, caracterizaremos el álgebra libre en la variedad $\mathbb{WHO}_k$ sobre un conjunto X. Para X finito, obtendremos la expresión de $\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}_k}(X)$ como producto de cadenas finitas.

Recordemos que un álgebra de Boole $\mathbf{B}$ se dice libre sobre un conjunto parcialmente ordenado $Y \subseteq B$ si para cada álgebra de Boole $\mathbf{C}$ y para cada función creciente $f : Y \to C$, f se puede extender de manera única a un homomorfismo de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$.

El siguiente teorema está demostrado en [BusCig06].

Teorema 2.5.1 $\mathbf{B}(\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}_k}(X))$ *es el álgebra de Boole libre sobre el conjunto parcialmente ordenado* $Y = \{\sigma_i^k(x) : x \in X, i = 1 \ldots, k\}$.

Observemos que el conjunto ordenado Y del teorema anterior es la suma cardinal de cadenas de longitud k, una por cada generador libre $x \in X$.

El siguiente lema caracteriza los ultrafiltros del álgebra de Boole $\mathbf{B}(\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}_k}(X))$ en términos del conjunto ordenado Y. Es una consecuencia sencilla del teorema anterior.

Lema 2.5.2 *Consideremos el conjunto parcialmente ordenado* $Y = \{\sigma_i^k(x) : x \in X, i = 1 \ldots, k\}$. *La correspondencia que asocia a cada subconjunto creciente* $S \subseteq Y$ *el ultrafiltro booleano* U_S *generado por el conjunto* $S \cup \{\neg y : y \in Y \backslash S\}$, *define una biyección entre los subconjuntos crecientes de* Y *y los ultrafiltros de* $\mathbf{B}(\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}_k}(X))$.

Dado el conjunto parcialmente ordenado $Y = \{\sigma_i^k(x) : x \in X, i = 1, \ldots, k\}$, definimos las cadenas $K_j^k(x) := \{\sigma_i^k(x) : j \leq i \leq k\}$, para $1 \leq j \leq k$, $x \in X$. Claramente, $K_i^k(x) \cap K_j^k(y) = \emptyset$ si $x \neq y$, $1 \leq i, j \leq k$. También tenemos que

$$Y = \bigcup_{x \in X} K_1^k(x).$$

Sea R_k la familia de subconjuntos crecientes de Y. Sea

$$Ch_x = \{K_j^k(x) : j = 1, \ldots, k\} \cup \{\emptyset\}.$$

Para cada $d \in Div^*(k)$ definimos el conjunto

$$H_d^x = \{C \in Ch_x : \frac{\#C}{k} \in S_d\}$$

donde $\#C$ denota el cardinal del conjunto C.

Para cada $d \in Div^*(k)$, definimos $R_d \subseteq R_k$ tal que $S \in R_d$ si y sólo si $S = \bigcup_{x \in X} C_x$ para $C_x \in H_d^x$.

Podemos enunciar ahora el resultado principal de [BusCig08].

Teorema 2.5.3 $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}_k}(X)$ *es isomorfa al álgebra de funciones continuas f del espacio de Stone del álgebra de Boole libre sobre el conjunto parcialmente ordenado $Y = \{\sigma_i^k(x) : x \in X, 1 \leq i \leq k\}$ en $\mathbf{S}_k$ tal que para cada $d \in Div^*(k)$ y cada $S \in R_d$, $f(U_S) \in S_d$.*

Definimos, para cada $x \in X$ y cada subconjunto creciente S de Y,

$$j_{x,S} = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma_1^k(x) \in S \\ \text{máx}\{i \in \{1, \ldots, k\} : \sigma_i^k(x) \notin S\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil ver que para cada $x \in X$, la función $\widehat{x} : Spec(\mathbf{B}(\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}_k}(X))) \to \mathbf{S}_k$, que corresponde a x por el Teorema 2.5.3, está definida como sigue:

$$\widehat{x}(U_S) = \frac{k - j_{x,S}}{k}.$$

En la Sección 2.1 vimos que $\mathbf{MV}(\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}}(X)) = \mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)$. De la misma forma se prueba el siguiente resultado.

Teorema 2.5.4 *Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{MV}(\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}_k}(X)) \cong \mathbf{Free}_{\mathbb{MV}_k}(X)$. Más aún, $\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}_k}(X) \cong \mathbf{F}(X)$ donde $F(X)$ es el filtro generado por X dentro de $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}_k}(X)$.*

Combinando los Teoremas 2.5.3 y 2.5.4 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.5.5 $\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}_k}(X)$ *es isomorfo al álgebra de funciones continuas f del espacio de Stone del álgebra de Boole libre sobre el conjunto parcialmente ordenado $Y = \{\sigma_i^k(x) : x \in X, 1 \leq i \leq k\}$ en $\mathbf{C}_k$ tales que $f(U_Y) = 1$ y para cada $d \in Div^*(k)$ y cada $S \in R_d$, $f(U_S) \in S_d$.*

Demostración. Pongamos $\widehat{X} = \{\widehat{x} : x \in X\}$ y sea $F(\widehat{X})$ el filtro correspondiente a $F(X)$ en la representación funcional de $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}_k}(X)$ dada en el Teorema 2.5.3. Notar que para todo $x \in X$, $\widehat{x}(U_Y) = 1$. Luego $f(U_Y) = 1$ para todo $f \in F(\widehat{X})$. Recíprocamente, si $f \notin F(\widehat{X})$, entonces $f \in \neg F(\widehat{X})$, así que $\neg f(U_Y) = 1$ y $f(U_Y) = 0$. Esto muestra que $F(\widehat{X})$ está caracterizado precisamente por el hecho de que $f(U_Y) = 1$. $\square$

Para X finito obtenemos una caracterización aún mas concreta para $\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}_k}(X)$. Primero enunciemos el resultado correspondiente para $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}_k}(X)$ dado en [BusCig08, Teorema 4.1].

Teorema 2.5.6 *Si X es finito,*

$$\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}_k}(X) \cong \prod_{d \in Div(k)} \mathbf{S}_d^{\alpha_d},$$

donde para cada $d \in Div(k)$, $\alpha_d = \#\left(R_d \setminus \bigcup_{m \in Div^*(d)} R_m\right)$.

La caracterización de los hoops de Wajsberg k-valuados libres finitamente generados es ahora inmediata.

Teorema 2.5.7 *Si X es finito,*

$$\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}_k}(X) \cong \mathbf{C}_1^{\alpha_1 - 1} \times \prod_{\substack{d \in Div(k) \\ d \neq 1}} \mathbf{C}_d^{\alpha_d}.$$

Observación 2.5.8 Para el caso $k = 2$, si suponemos que $\#X = r \geq 1$, tenemos entonces que Y es la unión de r cadenas de longitud 2. Entonces $\#R_2 = 3^r$ y $\#R_1 = 2^r$. Se sigue entonces que $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}_2}(X) \cong \mathbf{S}_1^{2^r} \times \mathbf{S}_2^{3^r - 2^r}$, que es la fórmula dada por A. Monteiro a comienzos de los años 60. Como corolario obtenemos que $\mathbf{Free}_{\mathbb{WHO}_2}(X) \cong \mathbf{S}_1^{2^r - 1} \times \mathbf{S}_2^{3^r - 2^r}$.

Capítulo 3

Descomponibilidad de álgebras libres

Un enfoque natural para conocer la estructura de un álgebra consiste en descomponerla, siempre que sea posible, en un producto booleano (directo) de álgebras indescomponibles, reduciendo así el problema al estudio de aquellos factores indescomponibles. En el caso de los reticulados residuados la descomponibilidad depende de la existencia de elementos complementados (booleanos) en su reducto reticular (ver, por ejemplo, [CigTor02a], [CigTor06], [Cig08]). En [Cig08, Teorema 3.1] se da una representación de los reticulados residuados como producto booleano débil de álgebras directamente indescomponibles. En particular, las álgebras libres, en cualquier variedad de reticulados residuados, son producto booleano débil de álgebras indescomponibles. El principal objetivo de este capítulo es el estudio del "esqueleto booleano"de las álgebras libres en subvariedades de reticulados residuados.

Comenzaremos revisando en la Sección 3.1 las propiedades de los elementos complementados y su relación con el radical y la semisimplicidad de los reticulados residuados. Introducimos también allí la noción de elemento *casi complementado* pues resulta de utilidad para el estudio de la indescomponibilidad en los subreductos implicativos acotados. En la Sección 3.2 presentamos algunas subvariedades de $\mathbb{RL}$ cuyas álgebras libres son indescomponibles como consecuencia de una propiedad que poseen los cálculos de secuentes con ellas asociados. En las dos secciones siguientes damos dos teoremas generales que permiten extender la indescomponibilidad de las álgebras libres tanto a otras subvariedades de $\mathbb{RL}$ como a subcuasivariedades de BCK-álgebras acotadas. En la Sección 3.5 estudiamos el caso particular de los reticulados residuados pseucomplementados. Específicamente, probamos que las subvariedades de esta variedad que poseen sus álgebras libres descomponibles son exactamente las subvariedades de Stone, es decir, las que satisfacen la identidad de Stone $\neg x \vee \neg\neg x = 1$. En una sección final se aplica este resultado al caso particular de las álgebras de Heyting. Todos estos resultados se encuentran publicados en [CasDiaTor11a] y [CasDiaTor11b].

3.1. Elementos complementados y semisimplicidad

En esta sección repasaremos la relación entre la descomponibilidad directa de un reticulado residuado y la existencia de elementos complementados o booleanos. También introduciremos la noción más débil de elemento *casi complementado*, que resultará útil en el estudio de los subreductos implicativos de los reticulados residuados.

Dado un reticulado residuado $\mathbf{A}$, decimos que un elemento $a \in A$ es **complementado** o **booleano** si existe un elemento $b \in A$ tal que $a \vee b = 1$ y $a \wedge b = 0$. A tal elemento b lo llamamos **complemento** de a. Observemos que 0 y 1 son siempre elementos complementados. Denotamos con $B(\mathbf{A})$ al conjunto de elementos complementados de $\mathbf{A}$.

El siguiente lema reúne algunas propiedades básicas de los elementos complementados.

Lema 3.1.1 *Sea* $\mathbf{A}$ *un reticulado residuado.*

(a) *Si $a \in A$ es un elemento complementado. Entonces:*

- (I) *el complemento de a es único y coincide con $\neg a$;*
- (II) $a^2 = a$;
- (III) $\neg\neg a = a$;
- (IV) $a * b = a \wedge b$ *para todo* $b \in A$;
- (V) $a \to b = \neg a \vee b$ *para todo* $b \in A$;
- (VI) $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$ *para todo* $b \in A$.

(b) $a \in A$ *es complementado si y sólo si* $a \vee \neg a = 1$.

(c) $B(\mathbf{A})$ *es un subuniverso de* $\mathbf{A}$.

Demostración.

(a) Sea $a \in A$ un elemento complementado.

- (I) Sea b un complemento de a, es decir, $a \vee b = 1$ y $a \wedge b = 0$. Veamos que $b = \neg a$. En efecto,

$$\begin{aligned} \neg a &= \neg a * 1 \\ &= \neg a * (a \vee b) \\ &= (\neg a * a) \vee (\neg a * b) \\ &= 0 \vee (\neg a * b) \\ &= \neg a * b \\ &\leq b. \end{aligned}$$

  Además, como $a * b \leq a \wedge b = 0$, resulta que $b \leq a \to 0 = \neg a$. Por lo tanto, $b = \neg a$.

  Notar que, en particular, esto muestra que el complemento de a es único.

- (II) Resulta simplemente de

$$a = a * 1 = a * (a \vee \neg a) = a^2 \vee 0 = a^2.$$

- (III) Como $a \vee \neg a = 1$ y $a \wedge \neg a = 0$, es claro que a es un complemento de $\neg a$. Luego, por el inciso (I), $a = \neg\neg a$.

(IV) La desigualdad $a * b \leq a \wedge b$ vale en general. Veamos que, como a es complementado, la desigualdad recíproca también vale. En efecto,

$$\begin{aligned} a \wedge b &= (a \wedge b) * (a \vee \neg a) \\ &= [(a \wedge b) * a] \vee [(a \wedge b) * \neg a] \\ &\leq (b * a) \vee (a * \neg a) \\ &= a * b. \end{aligned}$$

(V) En primer lugar, tenemos que

$$\begin{aligned} (\neg a \vee b) \to (a \to b) &= [\neg a \to (a \to b)] \wedge [b \to (a \to b)] \\ &= [(\neg a * a) \to b] \wedge 1 \\ &= 0 \to b \\ &= 1. \end{aligned}$$

Esto muestra que $\neg a \vee b \leq a \to b$. Para la desigualdad recíproca, notemos primero que $(a \to b) * a \leq b$ pues $a \to b \leq a \to b$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} a \to b &= (a \to b) * (a \vee \neg a) \\ &= [(a \to b) * a] \vee [(a \to b) * \neg a] \\ &\leq b \vee \neg a. \end{aligned}$$

(VI) Utilizando incisos anteriores, vemos que

$$\begin{aligned} \neg(a \wedge b) &= \neg(a * b) \\ &= (a * b) \to 0 \\ &= a \to (b \to 0) \\ &= a \to \neg b \\ &= \neg a \vee \neg b. \end{aligned}$$

(b) Supongamos que $a \in A$ satisface $a \vee \neg a = 1$. Luego

$$\begin{aligned} a \wedge \neg a &\leq \neg\neg a \wedge \neg a \\ &= (\neg a \to 0) \wedge (a \to 0) \\ &= (\neg a \vee a) \to 0 \\ &= 1 \to 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego a es complementado. La recíproca es consecuencia del inciso (I).

(c) Es suficiente probar que si $a, b \in B(\mathbf{A})$, entonces $a \wedge b, a \vee b \in B(\mathbf{A})$, pues, por los incisos anteriores, sabemos que $a * b = a \wedge b$ y $a \to b = \neg a \vee b$.

En efecto,

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee \neg(a \wedge b) &= (a \wedge b) \vee \neg a \vee \neg b \\ &= a \to (b \to (a \wedge b)) \\ &= a \to ((b \to a) \wedge (b \to b)) \\ &= a \to (b \to a) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Para ver que $a \vee b$ también es complementado, es suficiente observar que

$$a \vee b = \neg\neg a \vee \neg\neg b = \neg(\neg a \wedge \neg b).$$

□

La prueba de que $B(\mathbf{A})$ es el universo de una subálgebra de $\mathbf{A}$ aparece ya en [KowOno01]. A dicha subálgebra la denotaremos con $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ y es claro que es la mayor álgebra de Boole contenida en $\mathbf{A}$.

En los reticulados residuados los elementos complementados se corresponden con las congruencias factor. Una congruencia θ de un álgebra $\mathbf{A}$ se dice **factor** siempre que exista una congruencia θ' de $\mathbf{A}$ tal que $\theta \cap \theta' = \Delta$ (la congruencia identidad) y $\theta \circ \theta' = A^2$. Entonces $\{\theta, \theta'\}$ se denomina **par de congruencias factor** y resulta que $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}/\theta \times \mathbf{A}/\theta'$. En general, un álgebra $\mathbf{A}$ se dice **directamente indescomponible** si tiene más de un elemento y siempre que es isomorfa a un producto directo de dos álgebras $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ se tiene que $\mathbf{A}_1$ ó $\mathbf{A}_2$ es el álgebra trivial. Equivalentemente, un álgebra no trivial es directamente indescomponible si y sólo si las únicas congruencias factor que posee son las triviales. Ahora bien, θ es una congruencia factor de un reticulado residuado $\mathbf{A}$ si y sólo si existe $a \in B(\mathbf{A})$ tal que $\theta = \theta_{Fg(a)}$. Por tanto, tenemos el siguiente resultado (ver [KowOno01, Proposición 1.5]).

Lema 3.1.2 *Un reticulado residuado* $\mathbf{A}$ *es directamente indescomponible si y sólo si* $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ *es el álgebra de Boole de dos elementos.*

El siguiente lema recoge propiedades que relacionan los elementos complementados con el radical de un reticulado residuado.

Lema 3.1.3 *Si* $\mathbf{A}$ *es un reticulado residuado, entonces:*

(*a*) $B(\mathbf{A}) \cap Rad(\mathbf{A}) = \{1\}$,

(*b*) *si* $a \in B(\mathbf{A})$, *entonces* $[a]_{Rad(\mathbf{A})} \in B(\mathbf{A}/Rad(\mathbf{A}))$,

(*c*) *la aplicación* $a \mapsto [a]_{Rad(\mathbf{A})}$ *es una inmersión de* $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ *en* $\mathbf{B}(\mathbf{A}/Rad(\mathbf{A}))$.

Demostración.

(*a*) Si $b \in B(\mathbf{A})$, entonces para todo $k, n \geq 1$, $k(b^n) = b$. Recordando la caracterización de los elementos del radical dada en el Lema 1.2.7, es claro entonces que si $b \in Rad(\mathbf{A})$ entonces que $b = 1$.

(b) Supongamos que $a \in B(\mathbf{A})$. Como $a \vee \neg a = 1$, resulta que $[a]_{Rad(\mathbf{A})} \vee \neg[a]_{Rad(\mathbf{A})} = [a \vee \neg a]_{Rad(\mathbf{A})} = [1]_{Rad(\mathbf{A})}$, con lo cual $a \in B(\mathbf{A}/Rad(\mathbf{A}))$.

(c) Claramente la aplicación $a \mapsto [a]_{Rad(\mathbf{A})}$ es un homomorfismo de $B(\mathbf{A})$ en $B(\mathbf{A}/Rad(\mathbf{A}))$. Sólo resta verificar la inyectividad de dicha aplicación. Para ello consideremos $a, b \in B(\mathbf{A})$ tales que $[a]_{Rad(\mathbf{A})} = [b]_{Rad(\mathbf{A})}$. Luego $a \to b$ y $b \to a$ pertenecen ambos a $Rad(\mathbf{A}) \cap B(\mathbf{A}) = \{1\}$, así que $a = b$.

□

Como consecuencia de estas propiedades, obtenemos el siguiente resultado, que será importante para determinar la indescomponibilidad de algunos reticulados residuados libres.

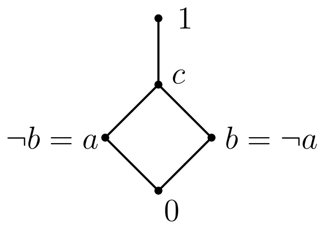
Corolario 3.1.4 *Sea* $\mathbf{A}$ *un reticulado residuado. Si* $\mathbf{A}/Rad(\mathbf{A})$ *es directamente indescomponible, entonces* $\mathbf{A}$ *es directamente indescomponible.*

Un elemento a de un reticulado residuado $\mathbf{A}$ se dice **casi complementado** si satisface que

$$a \to \neg a = \neg a \quad \text{y} \quad \neg a \to a = a. \tag{3.1}$$

Utilizando las propiedades vistas de los elementos complementados es inmediato verificar que todo elemento complementado es casi complementado. Sin embargo, la noción de elemento casi complementado es más general, como lo atestigua el hecho de que existen reticulados residuados que poseen elementos casi complementados que no son complementados. Por ejemplo, consideremos el álgebra de Heyting de 5 elementos $\mathbf{H}_5 = \langle \{0, a, b, c, 1\}, \wedge, \vee, \to, 0, 1 \rangle$, cuyo orden reticular está dado por el diagrama de Hasse de abajo y cuyo residuo se da en la tabla adjunta.

$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1
b	a	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1



Observemos que a y b son casi complementados, pero no son complementados. De hecho, $\mathbf{H}_5$ es directamente indescomponible. En forma similar podríamos obtener un reticulado residuado distributivo y/o involutivo con elementos casi complementados que no son complementados.

A continuación presentamos algunas propiedades de los elementos casi complementados que serán de utilidad más adelante.

Lema 3.1.5 *Sea* $\mathbf{A}$ *un reticulado residuado y sea* $a \in A$ *un elemento casi complementado. Entonces:*

(a) $\neg\neg a = a$, *y para todo* $n \geq 1$, $\neg a^n = \neg a$ *y* $na = a$, (*b*) $a \vee \neg a \in Rad(\mathbf{A})$.

Demostración.

(*a*) Como, por definición, $\neg\neg a = \neg a \to 0$, y como $\to$ es monótono en su segundo argumento, $\neg a \to 0 \leq \neg a \to a = a$. Entonces $\neg\neg a \leq a$, y luego, por el Lema 1.2.3 (b), obtenemos $a = \neg\neg a$.

Veamos que $\neg a^n = \neg a$ para todo $n \geq 1$. En efecto, para $n = 1$ es inmediato y si suponemos que $\neg a^n = \neg a$, entonces tenemos que

$$\neg a^{n+1} = \neg(a * a^n) = (a * a^n) \to 0 = a \to (a^n \to 0) = a \to \neg a^n = a \to \neg a = \neg a.$$

Finalmente, para probar que $na = a$ para todo $n \geq 1$, basta notar que $\neg a$ también es un elemento casi complementado y luego tenemos que

$$na = \neg(\neg a)^n = \neg\neg a = a.$$

(*b*) Aplicando el Lema 1.2.4 (f), el Lema 1.2.3 (e), el Lema 1.2.2 (e) y el item anterior, deducimos que para todo $n \geq 1$:

$$\neg(a \vee \neg a)^n = \neg(a^n \vee (\neg a)^n) = \neg a^n \wedge \neg(\neg a)^n = \neg a \wedge na = \neg a \wedge a.$$

Notemos también que $a \wedge \neg a \leq a \vee \neg a \leq \neg\neg(a \vee \neg a)$. Luego para todo $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} 2(a \vee \neg a)^n &= \neg[\neg(a \vee \neg a)^n]^2 \\ &= [\neg(a \vee \neg a)^n]^2 \to 0 \\ &= \neg(a \vee \neg a)^n \to (\neg(a \vee \neg a)^n \to 0) \\ &= \neg(a \vee \neg a)^n \to \neg\neg(a \vee \neg a)^n \\ &= (a \wedge \neg a) \to \neg(a \wedge \neg a) \\ &= (a \wedge \neg a) \to \neg\neg(a \vee \neg a) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Entonces, por el Lema 1.2.7 $a \vee \neg a \in Rad(\mathbf{A})$.

□

Del Corolario 1.2.9 y el lema anterior obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.1.6 *Si* $\mathbf{A}$ *es un reticulado residuado semisimple, entonces los elementos casi complementados son complementados.*

Otra clase de reticulados residuados en los cuales los elementos casi complementados coinciden con los complementados son las MTL-álgebras.

Lema 3.1.7 *Si* $\mathbf{A} \in \mathbb{MTL}$, *entonces todo elemento casi complementado es complementado.*

Demostración. Se sigue inmediatamente ya que $\mathbb{MTL}$ satisface la identidad

$$((x \to \neg x) \to \neg x) \wedge ((\neg x \to x) \to x) = x \vee \neg x.$$

□

3.2. Reticulados residuados libres

Recordemos que la variedad de los reticulados residuados es la semántica algebraica equivalente de la lógica $\mathbf{FL_{ew}}$. En particular, una ecuación $\alpha = 1$ es válida en $\mathbb{RL}$ si y sólo si el secuente $\Rightarrow \alpha$ es demostrable en el cálculo $\mathbf{FL_{ew}}$. Utilizaremos entonces propiedades de la lógica $\mathbf{FL_{ew}}$ y algunas de sus extensiones axiomáticas para mostrar la indescomponibilidad directa de los reticulados residuados libres y las álgebras libres en algunas otras subvariedades de $\mathbb{RL}$.

Se sigue de la algebrización de $\mathbf{FL_{ew}}$ que una fórmula φ es demostrable en una extensión axiomática $\mathbf{G}$ de $\mathbf{FL_{ew}}$ si y sólo si la ecuación $\varphi = 1$ es válida en su semántica algebraica equivalente $\mathbb{V}_\mathbf{G}$, la subvariedad de $\mathbb{RL}$ dada por las ecuaciones $\{\psi = 1 : \psi \text{ es un axioma de } \mathbf{G}\}$. Más aún, el álgebra libre $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}_\mathbf{G}}(X)$ es el álgebra de Lindenbaum-Tarski de $\mathbf{G}$.

Decimos que una extensión axiomática $\mathbf{G}$ de $\mathbf{FL_{ew}}$ tiene la **propiedad de disyunción**, si para fórmulas α y β cualesquiera, $\alpha \vee \beta$ es demostrable en $\mathbf{G}$ si y sólo si al menos una de las dos fórmulas, α ó β, es demostrable en $\mathbf{G}$ (ver [GalJipKowOno07, Sección 5.1.1] y [Sou07]). Esta propiedad tiene una versión algebraica equivalente: el último elemento 1 es supremo-irreducible en $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}_\mathbf{G}}(X)$, es decir, si $1 = \alpha \vee \beta$, entonces $\alpha = 1$ o $\beta = 1$.

Teorema 3.2.1 *Sea* $\mathbf{G}$ *una extensión axiomática de* $\mathbf{FL_{ew}}$ *que tiene la propiedad de disyunción. Entonces, para cualquier conjunto de variables* X*,* $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}_\mathbf{G}}(X)$ *es directamente indescomponible.*

Demostración. Sea α un elemento complementado en $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}_\mathbf{G}}(X)$. Luego $\alpha \vee \neg\alpha = 1$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\alpha \in \mathbf{Free}_{\mathbb{V}_\mathbf{G}}(Y)$, con $Y \subseteq X$ e Y numerable. Como 1 es supremo-ireducible en $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}_\mathbf{G}}(Y)$, entonces $\alpha = 1$ o bien $\neg\alpha = 1$, así que $\alpha \in \{0, 1\}$. Esto muestra que $B(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}_\mathbf{G}}(X))) = \{0, 1\}$ y, por el Lema 3.1.2, $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}_\mathbf{G}}(X)$ es directamente indescomponible. □

En virtud del teorema anterior, para ver que los reticulados residuados libres son directamente indescomponibles, basta con verificar que la lógica $\mathbf{FL_{ew}}$ posee la propiedad de disyunción. Ahora bien, en el caso de esta lógica, la propiedad de disyunción es una consecuencia sencilla del hecho de que la *regla de corte* en la formulación del cálculo de secuentes para $\mathbf{FL_{ew}}$ se puede quitar (ver [GalJipKowOno07, Teorema 4.1]). En efecto, si suponemos que $\alpha \vee \beta$ es demostrable para ciertas fórmulas α y β, tenemos que el secuente $\Rightarrow \alpha \vee \beta$ es demostrable en el cálculo $\mathbf{FL_{ew}}$. Ahora bien, sin la regla de corte, toda demostración del secuente $\Rightarrow \alpha \vee \beta$ debe concluir con una aplicación de la regla $(\Rightarrow \vee)$, es decir, la demostración de dicho secuente termina de alguna de las siguientes maneras:

$$\frac{\Rightarrow \alpha}{\Rightarrow \alpha \vee \beta} \qquad \frac{\Rightarrow \beta}{\Rightarrow \alpha \vee \beta}$$

Esto muestra que necesariamente alguno de los secuentes $\Rightarrow \alpha$ o $\Rightarrow \beta$ debe ser demostrable.

Análogamente, existen versiones de los cálculos de secuentes **Int** (cálculo proposicional intuicionista) e $\mathbf{InFL_{ew}}$ (cálculo *Full Lambek* involutivo) sin la regla de corte, lo que permite probar que dichos cálculos poseen la propiedad de disyunción (ver [GalJipKowOno07, Sección 5.1.1]). Las semánticas algebraicas equivalentes a dichos cálculos son, respectivamente, la variedad $\mathbb{H}$ de las álgebras de Heyting y la variedad $\mathbb{IRL}$ de los reticulados residuados involutivos.

La discusión anterior nos conduce al siguiente resultado.

Teorema 3.2.2 *Las variedades $\mathbb{RL}$, $\mathbb{IRL}$ y $\mathbb{H}$ tienen todas sus álgebras libres directamente indescomponibles.*

Recordemos que en las variedades $\mathbb{RL}$ e $\mathbb{IRL}$ las álgebras libres son semisimples (ver [KowOno00], [GalJipKowOno07] y [Gri81]). Sin embargo, las álgebras libres en $\mathbb{H}$ no son semisimples pues las álgebras de Heyting semisimples son precisamente las álgebras de Boole.

Existen otras variedades de reticulados residuados cuyas álgebras libres son directamente indescomponibles. Un ejemplo es la variedad de las MV-álgebras. Es bien sabido que toda MV-álgebra libre es semismiple y directamente indescomponible (ver, por ejemplo, [CigTor03]). Sin embargo, 1 no es supremo-irreducible en dichas álgebras o, lo que es lo mismo, la extensión axiomática correspondiente de $\mathbf{FL_{ew}}$ no tiene la propiedad de disyunción.

Observemos también que las álgebras libres en las variedades $\mathbb{RL}$, $\mathbb{IRL}$ y $\mathbb{MV}$ son semisimples, pero las variedades mismas no son semisimples pues contienen álgebras que no son semisimples.

3.3. Congruencias completamente invariantes y descomponibilidad

Dada un álgebra $\mathbf{A}$, decimos que una relación de congruencia θ sobre $\mathbf{A}$ es **completamente invariante** si, para todo endomorfismo $h : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, se verifica:

$$(a, b) \in \theta \text{ implica } (h(a), h(b)) \in \theta.$$

Si F es un filtro implicativo de $\mathbf{A}$, decimos que F es completamente invariante si su congruencia asociada θ_F lo es.

Lema 3.3.1 *Sea $\mathbf{A}$ un reticulado residuado, entonces:*

(a) *un filtro implicativo F es completamente invariante si y sólo si para todo endomorfismo $h : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ se cumple que $h(F) \subseteq F$,*

(b) *$Rad(\mathbf{A})$ es completamente invariante.*

Demostración.

(a) Sea $h : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ un endomorfismo. Si θ_F es completamente invariante y $a \in F$, entonces $(a, 1) \in \theta_F$ implica que $(h(a), 1) \in \theta_F$, luego $h(a) \in F$. Esto muestra que $h(F) \subseteq F$. Recíprocamente, si $h(F) \subseteq F$ y $(a, b) \in \theta_F$, entonces $a \to b, b \to a \in F$. Luego $h(a) \to h(b) = h(a \to b), h(b) \to h(a) = h(b \to a) \in F$, de donde $(h(a), h(b)) \in \theta_F$.

(b) Es consecuencia del item (a) y el Lema 1.2.8 (a).

$\square$

Usaremos la siguiente propiedad de las congruencias completamente invariantes. Para un estudio más detallado del tema referimos al lector a [Grä79, Capítulo 4] y [BurSan81, Capítulo II, §14].

Lema 3.3.2 *Sea* $\mathbb{V}$ *una variedad y sea* θ *una congruencia completamente invariante sobre* $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)$. *Entonces* $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)/\theta$ *es un álgebra libre en* $V(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)/\theta)$, *con* $\{[x]_\theta : x \in X\}$ *como su conjunto de generadores libres. Más aún, si* $\theta \neq \nabla$, $|\{[x]_\theta : x \in X\}| = |X|$, *es decir, los respectivos conjuntos de generadores libres tienen la misma cardinalidad.*

Por el Lema 3.3.1, sabemos que para cualquier variedad $\mathbb{V}$ de reticulados residuados $Rad(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$ es completamente invariante. En consecuencia, por el Lema 3.3.2, $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)/Rad(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$ es libre en la variedad que genera. Ahora bien, si consideramos un conjunto infinito numerable X de generadores libres, sabemos que $\mathbb{V} = V(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$, y luego, parece natural asociar a esta variedad la variedad

$$\mathbb{V}^S = V(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)/Rad(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)),$$

en la cual $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)/Rad(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$ resulta ser un álgebra libre sobre un conjunto infinito numerable de generadores libres.

Veremos ahora que la variedad asociada $\mathbb{V}^S$ no es otra cosa que la variedad generada por los miembros simples de $\mathbb{V}$. Para ello necesitamos primero el siguiente lema, donde $\mathbb{V}_{sim}$ denota la clase formada por las álgebras simples de $\mathbb{V}$.

Teorema 3.3.3 *Sea* $\mathbb{V}$ *una subvariedad de* $\mathbb{RL}$. *Entonces para cualquier conjunto* X, $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)/Rad(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$ *es el álgebra libre de la variedad* $V(\mathbb{V}_{sim})$ *sobre un conjunto de generadores libres de cardinal* $|X|$.

Demostración. Para abreviar, notemos $R = Rad(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$. Observemos en primer lugar que $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)/R \in V(\mathbb{V}_{sim})$ por ser un álgebra semisimple en $\mathbb{V}$.

Para ver que esta álgebra es libre para $V(\mathbb{V}_{sim})$ basta probar que es libre para $\mathbb{V}_{sim}$. Para ello, consideremos un álgebra $\mathbf{S} \in \mathbb{V}_{sim}$. Dada una aplicación $h : \{[x]_R : x \in X\} \to S$, definimos $h_0 : X \to S$ mediante $h_0(x) := h([x]_R)$. Sea $\overline{h}_0$ el homomorfismo de $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)$ en $\mathbf{S}$ que extiende a h_0. Por el Lema 1.2.8 (a), $\overline{h}_0(R) \subseteq Rad(\mathbf{S}) = \{1\}$. Luego existe un homomorfismo $\overline{h} : \mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)/R \to \mathbf{S}$ tal que $\overline{h}_0 = \overline{h} \circ q$, donde $q : \mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X) \to \mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)/R$ es el homomorfismo canónico. Luego $\overline{h}([x]_R) = (\overline{h} \circ q)(x) = \overline{h}_0(x) = h([x]_R)$, con lo cual $\overline{h}$ es la extensión deseada de h.

Por lo tanto, $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)/R$ es libre en $V(\mathbb{V}_{sim})$ sobre $\{[x]_R : x \in X\}$. $\square$

Corolario 3.3.4 *Sea* $\mathbb{V}$ *una subvariedad de* $\mathbb{RL}$. *Entonces* $\mathbb{V}^S = V(\mathbb{V}_{sim})$.

Demostración. Dado X infinito numerable, por el teorema anterior, $\mathbf{Free}_{V(\mathbb{V}_{sim})}(X) \cong \mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)/Rad(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$. Luego

$$V(\mathbb{V}_{sim}) = V(\mathbf{Free}_{V(\mathbb{V}_{sim})}(X)) = V(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)/Rad(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))) = \mathbb{V}^S.$$

□

Notemos que el teorema anterior afirma que las álgebras libres en $\mathbb{V}^S$ son precisamente los cocientes vía el radical de las correspondientes álgebras libres de $\mathbb{V}$. Uniendo esto con el Corolario 3.1.4, obtenemos el siguiente resultado relativo a indescomponibilidad de álgebras libres.

Corolario 3.3.5 *Sea $\mathbb{V}$ una subvariedad de $\mathbb{RL}$. Entonces, si las álgebras libres en $\mathbb{V}^S$ son directamente indescomponibles, entonces las álgebras libres en $\mathbb{V}$ también lo son.*

Ejemplo 3.3.6 Por ejemplo, consideremos la clase $\mathbb{GRL}$ de los reticulados residuados de Glivenko. Se sigue de los resultados dados en [CigTor04] que $\mathbb{GRL}^S = \mathbb{IRL}$. En la sección anterior vimos que las álgebras libres en $\mathbb{IRL}$ son indescomponibles, por lo que las álgebras libres en $\mathbb{GRL}$ también lo son. Sucede lo mismo para la clase $\mathbb{BL}$ de las BL-álgebras, pues $\mathbb{BL}^S = \mathbb{MV}$ (ver [CigTor03]).

Observemos que no obtenemos ningún resultado interesante para $\mathbb{RL}$ pues $\mathbb{RL}^S = \mathbb{RL}$ (ver [KowOno00]).

3.4. BCK-álgebras acotadas libres

Combinamos ahora los resultados obtenidos sobre indescomponibilidad de álgebras libres en variedades de reticulados residuados con la noción de elemento casi complementado para derivar resultados de indescomponibilidad de álgebras libres en las cuasivariedades de sus correspondientes subreductos implicativos acotados.

Dada una cuasivariedad $\mathbb{Q}$ en el lenguaje algebraico $\mathcal{L}$ y dado un sublenguaje $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$, es fácil describir en términos generales las álgebras libres del $\mathcal{L}_0$-subreducto de $\mathbb{Q}$ en términos de las álgebras libres de $\mathbb{Q}$. En efecto, sea X un conjunto de generadores libres y $\mathbf{Free}_{\mathbb{Q}}(X)$ un álgebra libre en $\mathbb{Q}$. Entonces afirmamos que $\mathbf{Sg}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{Q}}(X)\restriction\mathcal{L}_0}(X)$ es el álgebra libre en $\mathbb{Q}^{\mathcal{L}_0}$ generada por X. En efecto, basta con probar que $\mathbf{Sg}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{Q}}(X)\restriction\mathcal{L}_0}(X)$ es libre para $\mathbb{Q} \restriction \mathcal{L}_0$. Para ello, consideremos un álgebra $\mathbf{A} \in \mathbb{Q}$ y sea $h : X \to A$ una aplicación cualquiera. Sabemos que existe un $\mathcal{L}$-homomorfismo $\overline{h} : \mathbf{Free}_{\mathbb{Q}}(X) \to \mathbf{A}$ que extiende a h. Luego, la misma aplicación es un $\mathcal{L}_0$-homomorfismo de $\mathbf{Free}_{\mathbb{Q}}(X) \restriction \mathcal{L}_0$ en $\mathbf{A} \restriction \mathcal{L}_0$, y dicho homomorfismo se puede restringir a un $\mathcal{L}_0$-homomorfismo de $\mathbf{Sg}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{Q}}(X)\restriction\mathcal{L}_0}(X)$ en $\mathbf{A} \restriction \mathcal{L}_0$, lo que concluye la demostración.

El lenguaje de los reticulados residuados es $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, *, \to, 0, 1\}$. Consideraremos aquí el sublenguaje $\mathcal{L}_0 = \{\to, 0, 1\}$ y la cuasivariedad asociadada $\mathbb{RL}^{\{\to,0,1\}}$. Esta clase es la clase de las BCK-álgebras acotadas, que denotamos $b\mathbb{BCK}$ (ver, por ejemplo, [Idz84a, Idz84b, CigTor04], y las referencias dadas allí). Veremos que las álgebras libres en $b\mathbb{BCK}$ son indescomponibles. Asimismo probaremos resultados que permiten deducir la indescomponibilidad de las álgebras libres en subcuasivariedades de $b\mathbb{BCK}$ a partir de la indescomponibilidad de las álgebras libres en las correspondientes subcuasivariedades de $\mathbb{RL}$.

Las BCK-álgebras acotadas pueden definirse como álgebras en el lenguaje $\{\to, 0, 1\}$ de tipo $(2, 0, 0)$ que satisfacen las siguientes ecuaciones y cuasiecuación:

$$\begin{aligned}
&1 \to x = x,\\
&x \to 1 = 1,\\
&0 \to x = 1,\\
&(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z) = 1,\\
&(x \to y = 1)\,\&\,(y \to x = 1) \Rightarrow x = y.
\end{aligned}$$

Más aún, en [Wro83a] se muestra que $b\mathbb{BCK}$ no es una variedad (ver también [Wro83b]).

Dada un álgebra $\mathbf{A}$ en el lenguaje $\{\to, 0, 1\}$, $Con_{b\mathbb{BCK}}(\mathbf{A})$ representará la familia de $b\mathbb{BCK}$-congruencias sobre $\mathbf{A}$, es decir, las congruencias θ de $\mathbf{A}$ tales que $\mathbf{A}/\theta \in b\mathbb{BCK}$. Entonces, para cualquier $\mathbf{A} \in \mathbb{RL}$, es fácil verificar que

$$\begin{aligned}
Con(\mathbf{A}) &= \{\theta \in Con(\langle A, \to, 0, 1\rangle) : \langle A, \to, 0, 1\rangle/\theta \in b\mathbb{BCK}\}\\
&= Con_{b\mathbb{BCK}}(\langle A, \to, 0, 1\rangle).
\end{aligned}$$

Sea $\mathbf{B}$ una BCK-álgebra acotada. Un filtro implicativo F de $\mathbf{B}$ es un subconjunto de B que satisface las condiciones:

- $1 \in F$,
- si $a, a \to b \in F$, entonces $b \in F$.

Más aún, la correspondencia $F \mapsto \theta_F = \{(a, b) \in B^2 : a \to b, b \to a \in F\}$ da un isomorfismo de orden entre el conjunto de todos los filtros implicativos de $\mathbf{B}$ y $Con_{b\mathbb{BCK}}(\mathbf{B})$, ambos ordenados por inclusión. Un elemento $a \in B$ se dice **factor** si $\theta_{Fg^{\mathbf{B}}(a)}$ es una congruencia factor de $\mathbf{B}$. De hecho, todas las congruencias factor son de esta forma, es decir, toda congruencia factor está dada por un elemento factor de $\mathbf{B}$ (ver [GisTor08, Lema 3.1] para más detalles). Más aún, los elementos factores en $\mathbf{B}$ forman un álgebra de Boole $B_F(\mathbf{B})$ que es un subuniverso de $\mathbf{B}$. En [GisTor08, Lema 2.2], se prueba también que todo elemento factor a en una BCK-álgebra acotada satisface las condiciones $a \to \neg a = \neg a$ así como $\neg a \to a = a$. Estos hechos junto con el siguiente lema serán de suma utilidad en lo que sigue.

Lema 3.4.1 ([GisTor08, Lema 3.3]) *Una BCK-álgebra acotada* $\mathbf{B}$ *es directamente indescomponible si y sólo si los únicos elementos factores son* $\{0, 1\}$.

Teorema 3.4.2 *Sea* $\mathbb{Q}$ *una subcuasivariedad de* $\mathbb{RL}$ *tal que* $\mathbf{Free}_{\mathbb{Q}}(X)$ *es directamente indescomponible y semisimple. Entonces* $\mathbf{Free}_{\mathbb{Q}\{\to,0,1\}}(X)$ *es directamente indescomponible.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{Free}_{\mathbb{Q}\{\to,0,1\}}(X)$ es directamente descomponible. Entonces existe un elemento factor $a \in Free_{\mathbb{Q}\{\to,0,1\}}(X)$ tal que $a \neq 0, 1$. Este elemento satisface $a \to \neg a = \neg a$ y $\neg a \to a = a$. Como $\mathbf{Free}_{\mathbb{Q}\{\to,0,1\}}(X)$ es una $\{\to, 0, 1\}$-subálgebra de $\mathbf{Free}_{\mathbb{Q}}(X)$, a es casi complementado en $\mathbf{Free}_{\mathbb{Q}}(X)$. Por el Corolario 3.1.6, a es complementado, lo que contradice la indescomponibilidad de $\mathbf{Free}_{\mathbb{Q}}(X)$. Luego $\mathbf{Free}_{\mathbb{Q}\{\to,0,1\}}(X)$ es directamente indescomponible. $\square$

Ejemplo 3.4.3 Como $\mathbf{Free}_{\mathbb{RL}}(X)$ es semisimple y directamente indescomponible, se sigue que $\mathbf{Free}_{b\mathbb{BCK}}(X)$ es directamente indescomponible. Análogamente, como $\mathbb{IRL}^{\{\to,0,1\}} = \mathbb{IBCK}$, la clase de las BCK-álgebras involutivas, obtenemos que $\mathbf{Free}_{\mathbb{IBCK}}(X)$ es directamente indescomponible.

El Lema 3.1.7 nos proporciona otra fuente de subcuasivariedades de $b\mathbb{BCK}$ cuyas álgebras libres son directamente indescomponibles. La demostración del siguiente teorema es completamente análoga a la demostración del teorema anterior.

Teorema 3.4.4 *Sea $\mathbb{Q}$ una subcuasivariedad de $\mathbb{MTL}$ tal que $\mathbf{Free}_{\mathbb{Q}}(X)$ es directamente indescomponible. Entonces $\mathbf{Free}_{\mathbb{Q}^{\{\to,0,1\}}}(X)$ es directamente indescomponible.*

Ejemplo 3.4.5 Como las álgebras libres de la variedad $\mathbb{BL}$ son indescomponibles, se sigue del teorema anterior que esto también sucede en el correspondiente subreducto $\mathbb{BL}^{\{\to,0,1\}}$. De los resultados de [AglFerMon07] es fácil probar que $\mathbb{BL}^{\{\to,0,1\}}$ es la variedad de las **BCK-álgebras acotadas básicas**, es decir, BCK-álgebras acotadas que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$(x \to y) \to (x \to z) = (y \to x) \to (y \to z),$$
$$((x \to y) \to z) \to (((y \to x) \to z) \to z) = 1.$$

En efecto, es inmediato que cualquier $\{\to,0,1\}$-subreducto de una BL-álgebra es una BCK-álgebra acotada básica, pues las ecuaciones anteriores son válidas en toda BL-álgebra. Recíprocamente, dada una BCK-álgebra acotada básica $\mathbf{B} = \langle B, \to, 0, 1\rangle$, el reducto $\langle B, \to, 1\rangle$ es una **BCK-álgebra básica** (es decir, una BCK-álgebra que satisface las ecuaciones anteriores). Por los resultados de [AglFerMon07], existe una BL-álgebra $\mathbf{C} = \langle C, \wedge, \vee, *, \to, 0', 1\rangle$ tal que $\langle B, \to, 1\rangle$ es una subálgebra de $\mathbf{C} \restriction \{\to, 1\}$. El elemento $0 \in B$ no necesita coincidir con $0'$. Sin embargo, podemos considerar el álgebra $\mathbf{C}_0 = \langle [0), \wedge, \vee, *_0, \to, 0, 1\rangle$ donde $[0) = \{c \in C : 0 \leq c\}$ y

$$x *_0 y = (x * y) \vee 0, \qquad \text{para todo } x, y \in [0).$$

Es fácil verificar que $\mathbf{C}_0$ también es una BL-álgebra y que $\mathbf{B}$ es una subálgebra de $\mathbf{C}_0 \restriction \{\to, 0, 1\}$.

3.5. Reticulados residuados pseudocomplementados

Como introdujimos en la Sección 1.3, un reticulado residuado pseudocomplementado es un reticulado residuado que satisface la ecuación

$$x \wedge \neg x = 0.$$

$\mathbb{PRL}$ denota la variedad que forman dichos reticulados residuados. Recordemos asimismo (ver Sección 1.2) que un elemento a en un reticulado residuado $\mathbf{A}$ se dice regular si verifica que $\neg\neg a = a$, o equivalentemente, que existe $b \in A$ tal que $a = \neg b$. Más aún $\mathbf{Reg}(\mathbf{A}) = \langle Reg(\mathbf{A}), \wedge, \vee_r, *_r, \to, 0, 1\rangle$ es un reticulado residuado involutivo, siendo

$$x *_r y := \neg\neg(x * y), \qquad x \vee_r y := \neg\neg(x \vee y).$$

El siguiente teorema muestra que los reticulados residuados pseudocomplementados se pueden caracterizar utilizando sus elementos regulares.

Teorema 3.5.1 *Un reticulado residuado* $\mathbf{A}$ *es pseudocomplementado si y sólo si* $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ *es un álgebra de Boole.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{A} \in \mathbb{PRL}$. Entonces para todo $a \in Reg(A)$,

$$a \vee_r \neg a = \neg\neg(a \vee \neg a) = \neg(\neg a \wedge \neg\neg a) = \neg 0 = 1.$$

Esto muestra que todos los elementos de $Reg(\mathbf{A})$ son complementados, es decir, $B(\mathbf{Reg}(\mathbf{A})) = Reg(\mathbf{A})$. Luego $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ es un álgebra de Boole.

Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ es un álgebra de Boole, entonces para cualquier $a \in A$, como $\neg a, \neg\neg a \in Reg(\mathbf{A})$, tenemos que

$$a \wedge \neg a \leq \neg\neg a \wedge \neg a = 0,$$

y $\mathbf{A}$ es pseudocomplementado. □

En general, en un reticulado residuado pseudocomplementado, el álgebra de Boole de sus elementos regulares no es una subálgebra. El siguiente resultado mejora un resultado de [Cig08].

Teorema 3.5.2 *Para cada* $\mathbf{A} \in \mathbb{PRL}$*, son equivalentes:*

(a) $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ *es una subálgebra de* $\mathbf{A}$*,*

(b) $\mathbf{A}$ *es un reticulado residuado de Stone, es decir, satisface la identidad:*

$$\neg x \vee \neg\neg x = 1. \tag{3.2}$$

Demostración. Supongamos (a). Como $Reg(\mathbf{A})$ es cerrado bajo $\vee$, tenemos que para cualquier $a \in A$, $\neg a \vee \neg\neg a \in Reg(\mathbf{A})$. Luego, por el Teorema 3.5.1,

$$1 = \neg a \vee_r \neg\neg a = \neg\neg(\neg a \vee \neg\neg a) = \neg a \vee \neg\neg a.$$

Por lo tanto, $\mathbf{A}$ satisface la ecuación de Stone.

La implicación recíproca está demostrada en [Cig08]. □

Observemos también que todo reticulado residuado de Stone es pseudocomplementado pues

$$x \wedge \neg x \leq \neg\neg x \wedge \neg\neg\neg x = \neg(\neg x \vee \neg\neg x) = \neg 1 = 0.$$

En símbolos $\mathbb{SRL} \subseteq \mathbb{PRL}$.

Como ejemplos de reticulados residuados de Stone podemos citar a los reticulados residuados pseudocomplementados que son productos subdirectos de cadenas, es decir, las MTL-álgebras pseudocomplementadas. Este ejemplo incluye las álgebras de Gödel y las álgebras producto (ver [Háj98]) También han sido muy estudiadas las álgebras de Heyting que satisfacen la ecuación de Stone. Dichas álgebras se conocen como álgebras de Heyting stoneanas (ver, por ejemplo, [Cig08]).

Observemos que para todo reticulado residuado $\mathbf{A}$ se tiene que $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ es una subálgebra de $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$, pero, en general, no coinciden. Del Teorema 3.5.2 deducimos el siguiente resultado.

Lema 3.5.3 *Si* $\mathbf{A} \in \mathbb{PRL}$*, entonces* $\mathbf{B}(\mathbf{A}) = \mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ *si y sólo si* $\mathbf{A} \in \mathbb{SRL}$*.*

Veamos ahora algunas propiedades más acerca de los reticulados residuados pseudocomplementados.

Lema 3.5.4 *Sea* $\mathbf{A} \in \mathbb{PRL}$*, se verifican las siguientes propiedades:*

(a) $\mathbf{A}$ *satisface la ecuación de Glivenko:*

$$\neg\neg(\neg\neg x \to x) = 1, \tag{3.3}$$

(b) *la aplicación* $\neg\neg : x \mapsto \neg\neg x$ *es un homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *sobre* $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$*,*

(c) *si* $\mathbf{A} \in \mathbb{SRL}$*, entonces* $\neg\neg$ *es una retracción.*

Demostración.

(a) Sea $a \in A$, entonces tenemos que $a \leq \neg\neg a \to a$ de donde $\neg\neg a \leq \neg\neg(\neg\neg a \to a)$. Más aún, resulta que $\neg a \leq \neg\neg\neg a = \neg\neg a \to 0 \leq \neg\neg a \to a \leq \neg\neg(\neg\neg a \to a)$. Por lo tanto, $\neg a \vee \neg\neg a \leq \neg\neg(\neg\neg a \to a)$, de donde

$$1 = \neg a \vee_r \neg\neg a = \neg\neg(\neg a \vee \neg\neg a) \leq \neg\neg(\neg\neg(\neg\neg a \to a)) = \neg\neg(\neg\neg a \to a).$$

(b) Se sigue de (a) (ver [CigTor04]).

(c) Se sigue del hecho de que la restricción de $\neg\neg$ a $Reg(\mathbf{A}) = B(\mathbf{A})$ es la identidad (ver [Cig08]).

$\square$

Teorema 3.5.5 *Para cualquier subvariedad no trivial* $\mathbb{V}$ *de* $\mathbb{PRL}$*,* $\mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$ *es el álgebra de Boole libre sobre el conjunto de generadores libres* $\neg\neg X = \{\neg\neg x : x \in X\}$*. Más aún,* $|\neg\neg X| = |X|$*, es decir, los conjuntos de generadores* $\neg\neg X$ *y* X *tienen la misma cardinalidad.*

Demostración. En primer lugar, observemos que como $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X) \in \mathbb{PRL}$, $\mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$ es una imagen homomorfa (vía el homomorfismo $\neg\neg$) de $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)$. Luego $\neg\neg X$ es un conjunto de generadores de $\mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$. También sabemos que es una álgebra de Boole, por lo que sólo resta probar la propiedad de extensión universal. Para ello, sea $\mathbf{B} \in \mathbb{B}$ y $h : \neg\neg X \to B$ una aplicación cualquiera. Consideremos $h_0 : X \to B$ dada por $h_0(x) = h(\neg\neg x)$ para todo $x \in X$. Como $\mathbb{V}$ es una variedad no trivial, $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{V}$, con lo cual debe existir un homomorfismo $\overline{h}_0 : \mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X) \to \mathbf{B}$ tal que $\overline{h}_0(x) = h_0(x)$ para todo $x \in X$. Luego, obtenemos un homomorfismo $\overline{h} : \mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)) \to \mathbf{B}$ que es simplemente la restricción de $\overline{h}_0$ a $Reg(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$. Dicho homomorfismo es el buscado pues claramente extiende a la aplicación h, pues $\overline{h}(\neg\neg x) = \overline{h}_0(\neg\neg x) = \neg\neg\overline{h}_0(x) = \overline{h}_0(x) = h_0(x) = h(\neg\neg x)$.

Resta ver que X y $\neg\neg X$ poseen el mismo cardinal. Para ello es suficiente verificar que $\neg\neg x_1 \neq \neg\neg x_2$ para $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in X$. En efecto, si $\neg\neg x_1 = \neg\neg x_2$ en $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)$, reemplazando x_1 por 0 y x_2 por 1, obtendríamos la ecuación $0 = 1$, que sólo es válida en un álgebra trivial. $\square$

Corolario 3.5.6 *Para cualquier subvariedad* $\mathbb{V}$ *de* $\mathbb{SRL}$*,* $\mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)) \cong \mathbf{Free}_{\mathbb{B}}(X)$ *y* $\mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$ *es un retracto de* $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)$*,*

En lo que sigue supondremos que $\mathbb{V}$ es una subvariedad de $\mathbb{PRL}$. Sea $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $I_n = \{1, \ldots, n\}$. El álgebra $\mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X_n))$ es un álgebra de Boole libre sobre el conjunto de generadores libres $\{\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n\}$. Consideramos entonces, para cada $I \subseteq I_n$, el elemento de $Reg(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X_n))$ dado por

$$a_I(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i \in I} \neg\neg x_i \wedge \bigwedge_{i \in I_n \setminus I} \neg x_i.$$

Claramente la correspondencia $I \mapsto a_I(x_1, \ldots, x_n)$ es una biyección entre $\mathcal{P}(I_n)$, el conjunto de partes de I_n, y el conjunto de átomos del álgebra de Boole libre $\mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X_n))$. Luego, para cualquier $b \in Reg(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X_n))$, existe $N \subseteq \mathcal{P}(I_n)$ tal que

$$b = \neg\neg\Big(\bigvee_{I \in N} a_I(x_1, \ldots, x_n)\Big),$$

donde $N = \{I \in \mathcal{P}(I_n) : a_I \leq b\}$.

Lema 3.5.7 *Para cada* $J \subseteq I_n$*, consideremos la* n*-upla* $\mathbf{x}_J$ *cuya* i*-ésima componente es* x *si* $i \in J$ *y* 1 *si* $i \notin J$*. Para todo* $I \subseteq I_n$*, obtenemos*

$$a_I(\mathbf{x}_J) = \begin{cases} 1 & si\ I = I_n\ y\ J = \emptyset, \\ \neg\neg x & si\ I = I_n\ y\ J \neq \emptyset, \\ \neg x & si\ I = I_n \setminus J\ y\ J \neq \emptyset, \\ 0 & en\ todo\ otro\ caso. \end{cases}$$

Demostración. Escribamos el término $a_I(x_1, \ldots, x_n)$ de la siguiente manera:

$$a_I(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i \in I \cap J} \neg\neg x_i \wedge \bigwedge_{i \in I \setminus J} \neg\neg x_i \wedge \bigwedge_{i \in J \setminus I} \neg x_i \wedge \bigwedge_{i \notin I \cup J} \neg x_i.$$

Entonces

$$\begin{aligned} a_I(\mathbf{x}_J) &= \bigwedge_{i \in I \cap J} \neg\neg x \wedge \bigwedge_{i \in I \setminus J} \neg\neg 1 \wedge \bigwedge_{i \in J \setminus I} \neg x \wedge \bigwedge_{i \notin I \cup J} \neg 1 \\ &= \bigwedge_{i \in I \cap J} \neg\neg x \wedge \bigwedge_{i \in J \setminus I} \neg x \wedge \bigwedge_{i \notin I \cup J} 0. \end{aligned}$$

Analicemos los diferentes casos posibles.

Si $I \cup J \neq I_n$, $a_I(\mathbf{x}_J) = 0$. Luego podemos suponer que $I \cup J = I_n$ y que

$$a_I(\mathbf{x}_J) = \bigwedge_{i \in I \cap J} \neg\neg x \wedge \bigwedge_{i \in J \setminus I} \neg x.$$

Si $I \cap J \neq \emptyset$ y $J \setminus I \neq \emptyset$, entonces $a_I(\mathbf{x}_J) = \neg\neg x \wedge \neg x = 0$.

Si $I \cap J = \emptyset$, entonces $I = I_n \setminus J$ y

$$a_I(\mathbf{x}_J) = \bigwedge_{i \in J} \neg x.$$

Se sigue que $a_I(\mathbf{x}_J) = 1$ si $J = \emptyset$ (e $I = I_n$) y $a_I(\mathbf{x}_J) = \neg x$ si $J \neq \emptyset$.

Finalmente, si $J \setminus I = \emptyset$, entonces $J \subseteq I$. Luego $I = I_n$ y

$$a_I(\mathbf{x}_J) = \bigwedge_{i \in J} \neg\neg x.$$

Se sigue que $a_I(\mathbf{x}_J) = 1$ si $J = \emptyset$ (e $I = I_n$) y $a_I(\mathbf{x}_J) = \neg\neg x$ si $J \neq \emptyset$ (e $I = I_n$).

Resumiendo lo que hemos probado:

- $a_I(\mathbf{x}_J) = 1$ si $I = I_n$ y $J = \emptyset$,
- $a_I(\mathbf{x}_J) = \neg\neg x$ si $I = I_n$ y $J \neq \emptyset$,
- $a_I(\mathbf{x}_J) = \neg x$ si $I = I_n \setminus J$ y $J \neq \emptyset$,
- en todo otro caso $a_I(\mathbf{x}_J) = 0$.

$\square$

Ahora podemos enunciar el resultado principal de la sección.

Teorema 3.5.8 *Sea $\mathbb{V}$ una subvariedad no trivial de $\mathbb{PRL}$. Entonces $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)$ es directamente descomponible para algún X no vacío si y sólo si $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{SRL}$.*

Demostración. En primer lugar, notemos que si $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{SRL}$, entonces $\neg x \vee \neg\neg x = 1$ es válido en $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\{x\})$. Luego $\neg x$ es un elemento complementado de dicha álgebra distinto de 0 y de 1. Luego $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\{x\})$ es descomponible.

Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)$ es directamente descomponible. Entonces existe $\alpha \in Free_{\mathbb{V}}(X)$ tal que $\alpha \vee \neg\alpha = 1$ y $\alpha \neq 0, 1$. Podemos suponer que $\alpha = \alpha(x_1, \ldots, x_n)$, con lo cual $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X_n)$ también es descomponible. Asumimos entonces que $\alpha \in Free_{\mathbb{V}}(X_n)$. Como $\alpha \in Reg(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X_n))$, existe $N \subseteq \mathcal{P}(I_n)$, $N \neq \emptyset, \mathcal{P}(I_n)$, tal que

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \neg\neg \left(\bigvee_{I \in N} a_I(x_1, \ldots, x_n) \right).$$

Queremos probar que vale la ecuación $\neg x \vee \neg\neg x = 1$ en $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X_n)$, porque esto nos asegura que $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{SRL}$. Distinguimos dos casos, según I_n pertenezca o no a la familia N.

Primer caso: Supongamos que $I_n \notin N$. Fijemos $K \in N$ y sea $J = I_n \setminus K$. Como $K \neq I_n$, $J \neq \emptyset$ y el lema anterior implica que

$$a_I(\mathbf{x}_J) = \begin{cases} \neg x, & \text{si } I = K, \\ 0, & \text{si } I \in N, I \neq K. \end{cases}$$

Se sigue entonces que $\alpha(\mathbf{x}_J) = \neg\neg(\neg x) = \neg x$. Por lo tanto, como $\alpha \vee \neg\alpha = 1$, reemplazando las variables de α adecuadamente, obtenemos que $\neg x \vee \neg\neg x = 1$, como deseábamos.

Segundo caso: Supongamos ahora que $I_n \in N$. Elijamos $J \subseteq I_n$ tal que $J \neq I_n \setminus I$ para todo $I \in N$. Esto es posible pues $N \neq \mathcal{P}(I_n)$. Observemos que, en particular, $J \neq \emptyset$. Por el lema anterior obtenemos que

$$a_I(\mathbf{x}_J) = \begin{cases} \neg\neg x, & \text{si } I = I_n, \\ 0, & \text{si } I \in N, I \neq I_n. \end{cases}$$

Por lo tanto, $\alpha(\mathbf{x}_J) = \neg\neg(\neg\neg x) = \neg\neg x$ y la ecuación $\alpha \vee \neg\alpha = 1$ se convierte en la ecuación de Stone $\neg\neg x \vee \neg x = 1$ tras un reemplazo adecuado de variables.

Esto concluye la demostración. □

Resumimos ahora los resultados obtenidos en un corolario.

Corolario 3.5.9 *Para toda subvariedad no trivial* $\mathbb{V}$ *de reticulados residuados pseudocomplementados, las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) $\mathbb{V}$ *es una variedad de reticulados residuados de Stone,*

(2) $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)$ *es directamente descomponible para algún conjunto no vacío* X*,*

(3) $Reg(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)) = B(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$ *para algún conjunto no vacío* X*,*

(4) $\mathbf{B}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$ *es isomorfo al álgebra de Boole libre sobre* X *para algún conjunto no vacío* X.

Demostración. La equivalencia entre (1) y (2) es el teorema anterior. La equivalencia entre (2) y (3) resulta del Lema 3.5.3. La implicación (1) $\Rightarrow$ (4) es el contenido del Corolario 3.5.6 y la implicación (4) $\Rightarrow$ (2) es inmediata. □

Observación 3.5.10 En el corolario anterior, observemos que la descomponibilidad de *un* álgebra libre en $\mathbb{V}$ o, equivalentemente, la existencia de elementos complementados no triviales en *un* álgebra libre de $\mathbb{V}$, implica automáticamente la descomponibilidad de *toda* álgebra libre en $\mathbb{V}$ sobre un conjunto de generadores libres no vacío.

Un caso particular importante del teorema anterior se obtiene para las álgebras de Heyting, que se pueden pensar como una subvariedad de $\mathbb{PRL}$. En este caso se puede ampliar el resultado, pues la variedad $\mathbb{SH} = \mathbb{H} \cap \mathbb{SRL}$ de álgebras de Heyting stoneanas es una subvariedad *cosplitting* en $\mathbb{H}$.

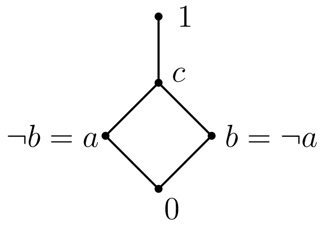
Recordemos en primer lugar la noción de variedades *splitting* y *cosplitting*. Sea $\mathbf{L^v}(\mathbb{H})$ el reticulado de subvariedades de $\mathbb{H}$. Dadas $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \in \mathbf{L^v}(\mathbb{H})$, decimos que el par $(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$ **parte** a $\mathbf{L^v}(\mathbb{H})$ si $\mathbb{V}_1 \not\subseteq \mathbb{V}_2$ y para cualquier $\mathbb{V} \in \mathbf{L^v}(\mathbb{H})$, se tiene que $\mathbb{V}_1 \subseteq \mathbb{V}$ o bien $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}_2$. Es fácil ver que $\mathbb{V}_1$ es completamente supremo-irreducible y que $\mathbb{V}_2$ es completamente ínfimo-irreducible. Luego es inmediato que $\mathbb{V}_1$ es la variedad generada por algún álgebra subdirectamente irreducible $\mathbf{A}$. Tal álgebra $\mathbf{A}$ se denomina **álgebra *splitting*** de $\mathbb{H}$, y $\mathbb{V}_1 = V(\mathbf{A})$ se denomina **variedad *splitting***. La variedad $\mathbb{V}_2$ se llama **variedad *cosplitting***.

En [BloPig82, Corolario 3.2] los autores prueban que si $\mathbb{V}$ es de tipo finito y tiene congruencias principales ecuacionalmente definibles (EDPC), entonces todo miembro subdirectamente irreducible finito de $\mathbb{V}$ es *splitting* y, por tanto, las álegebras *splitting* de dicha variedad son exactamente las álgebras subdirectamente irreducibles finitas.

Consideremos el álgebra de Heyting de 5 elementos $\mathbf{H}_5 = \langle\{0, a, b, c, 1\}, \wedge, \vee, \to, 0, 1\rangle$, cuyo orden reticular está dado por el diagrama de Hasse que se muestra más abajo y cuyo residuo se observa en la Tabla $(H5)$.

$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1
b	a	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

Tabla (H5)



$\langle H_5, \leq\rangle$

Podemos ver fácilmente que $\mathbf{H}_5$ es subdirectamente irreducible y que $\mathbf{H_5} \notin \mathbb{SH}$ (basta notar que $\neg a \vee \neg\neg a = c \neq 1$).

Lema 3.5.11 *Sea* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}$*. Entonces* $\mathbf{A} \notin \mathbb{SH}$ *si y sólo si* $\mathbf{H_5}$ *es isomorfa a una subálgebra de* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{A} \notin \mathbb{SH}$. Entonces existe $a \in A$ tal que $\neg a \vee \neg\neg a \neq 1$. Sea $B = \{0, \neg a, \neg\neg a, \neg a \vee \neg\neg a, 1\}$. Entonces B es un subuniverso de A. En efecto, claramente B es un subreticulado de A. Veamos que B es cerrado por $\to$,

- Como $\neg a \wedge (\neg a \to \neg\neg a) = 0$, tenemos que $\neg\neg a \leq \neg a \to \neg\neg a \leq \neg\neg a$. Así $\neg a \to \neg\neg a = \neg\neg a$.
- Como $\neg\neg a \wedge (\neg\neg a \to \neg a) = 0$, tenemos que $\neg a \leq \neg\neg a \to \neg a \leq \neg a$. Así $\neg\neg a \to \neg a = \neg a$.
- $(\neg\neg a \vee \neg a) \to 0 = 0$.
- $(\neg\neg a \vee \neg a) \to \neg a = a \to \neg(\neg\neg a \vee \neg a) = a \to 0 = \neg a$.
- $(\neg\neg a \vee \neg a) \to \neg\neg a = \neg a \to \neg(\neg\neg a \vee \neg a) = \neg a \to 0 = \neg\neg a$.

Entonces B es un subuniverso de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es isomorfo a $\mathbf{H}_5$.

La implicación recíproca es inmediata. $\square$

Corolario 3.5.12 *El par* $(\mathbb{V}(\mathbf{H_5}), \mathbb{SH})$ *parte* $\mathbf{L^v}(\mathbb{H})$*. Por lo tanto,* $\mathbb{SH}$ *es una variedad* cosplitting.

Combinando el Lema 3.5.11 y el Corolario 3.5.9 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.5.13 *Para toda variedad no trivial* $\mathbb{V} \in \mathbf{L^v}(\mathbb{H})$*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)$ *es directamente indescomponible cualquiera sea* X*,*

(2) $\mathbb{V} \not\subseteq \mathbb{SH}$*,*

(3) $\mathbf{H_5}$ *es isomorfa a una subálgebra de* $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)$ *para cualquier* X *no vacío.*

De la misma forma que probamos este resultado para los reticulados residuados pseudocomplementados, se puede probar para los reticulados distributivos pseudocomplementados. Recordemos que dichos reticulados forman una variedad $\mathbb{PL}$ que es el $\{\wedge, \vee, \neg, 0, 1\}$-subreducto de $\mathbb{H}$ (ver, por ejemplo, [BalDwi74]). El reticulado de subvariedades $\mathbf{L^v}(\mathbb{PL})$ es una cadena de tipo $\omega + 1$, y para cada subvariedad no trivial existe $n \geq 0$ tal que dicha subvariedad está generada por el álgebra $\mathbf{B}_n = \mathbf{2}^n \oplus 1$, el álgebra de Boole con n átomos con un elemento añadido por encima. Entonces $\mathbf{B}_0$ es el álgebra de Boole de dos elementos y $\mathbf{B}_1$ la cadena de tres elementos (el álgebra de Stone, en la terminología de [BalDwi74]), y $\mathbf{B}_2$ es el $\{\wedge, \vee, \neg, 0, 1\}$-reducto de $\mathbf{H_5}$. Entonces las variedades de $\mathbf{L^v}(\mathbb{PL})$ son

$$\mathbb{T} \subsetneq V(\mathbf{B}_0) \subsetneq V(\mathbf{B}_1) \subsetneq V(\mathbf{B}_2) \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{PL},$$

donde $\mathbb{T}$ es la variedad trivial. Observar que $\mathbb{SPL} = V(\mathbf{B}_1)$ es la variedad de reticulados distributivos stoneanos.

Al igual que en el caso de las álgebras de Heyting y los reticulados residuados pseudocomplementados, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.5.14 *Para una variedad* $\mathbb{V} \in \mathbf{L^v}(\mathbb{PL})$*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)$ *es directamente indescomponible cualquiera sea* X*,*

(b) $\mathbb{V} \not\subseteq \mathbb{SPL}$*,*

(c) $\mathbf{H_5}$ *es isomorfo a una subálgebra de* $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)$*, para cualquier* X *no vacío.*

Capítulo 4

Variedades regulares

En este capítulo estudiamos en detalle los elementos regulares de un reticulado residuado. Introducimos la noción de variedad regular y exploramos su relación con la traducción negativa de Kolmogorov. Además, investigamos las nociones correspondientes en las extensiones axiomáticas del cálculo $\mathbf{FL_{ew}}$.

Dado un reticulado residuado $\mathbf{A}$, sabemos que se puede definir una estructura de reticulado residuado (involutivo) $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ sobre el conjunto de sus elementos regulares (involutivos) $Reg(\mathbf{A})$. En general, no hay una relación directa entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$; por ejemplo, $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ no es necesariamente una subálgebra o una imagen homomorfa de $\mathbf{A}$ (ver [CigTor04] y [GalJipKowOno07, Capítulo 8]). Este último caso ha sido estudiado en [CigTor04], donde se muestra que la condición "$\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ es una imagen homomorfa de $\mathbf{A}$"es ecuacionalmente definible, y define la variedad de álgebras de Glivenko. Dichas variedades, vía algebrización, se corresponden con extensiones axiomáticas de $\mathbf{FL_{ew}}$ que admiten una generalización del teorema de Glivenko, el cual fue originalmente dado por V. Glivenko en [Gli29] para dar una interpretación de la lógica proposicional clásica en la lógica proposicional intuicionista.

Investigaremos en más detalle las relaciones entre estas dos estructuras y estudiaremos además la relación entre una variedad dada $\mathbb{V}$ de reticulados residuados y la clase $\mathbb{V}^r = \{\mathbf{Reg}(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \in \mathbb{V}\}$. En general, esta última no es una variedad ni está contenida en la primera, como ilustraremos con algunos ejemplos. En las Secciones 1 y 2, daremos condiciones necesarias y suficientes para que $\mathbb{V}^r$ sea una variedad y para que esté contenida en $\mathbb{V}$. También mostraremos que la mayoría de las variedades más conocidas de reticulados residuados satisfacen estas condiciones. Una herramienta que será útil para estudiar la clase $\mathbb{V}^r$ será la traducción negativa de Kolmogorov, originalmente introducida para dar otra interpretación del cálculo proposicional clásico en la lógica intuicionista (ver [Kol61]). Esta traducción es una transformación sobre los términos en el lenguaje de los reticulados residuados que nos permite relacionar las ecuaciones válidas en un álgebra $\mathbf{A}$ con las válidas en $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$. En la Sección 4.3 estudiaremos el caso particular de los reticulados residuados distributivos, pues constituye un ejemplo interesante de variedad para la cual $\mathbb{V}^r \not\subseteq \mathbb{V}$. En la Sección 4.4 damos algunos resultados sobre el reticulado de variedades regulares y en la sección final de este capítulo estudiamos la contrapartida lógica de la traducción de Kolmogorov y las variedades regulares, que resulta de la correspondencia entre subvariedades de reticulados residuados y extensiones axiomáticas del cálculo $\mathbf{FL_{ew}}$.

4.1. Álgebra de elementos regulares

Recordemos que dado un reticulado residuado $\mathbf{A}$, se define el álgebra de sus elementos regulares $\mathbf{Reg}(\mathbf{A}) = \langle Reg(\mathbf{A}), \wedge_r, \vee_r, *_r, \rightarrow_r, 0, 1\rangle$ donde para cada $\odot \in \{\wedge, \vee, *, \rightarrow\}$ la operación correspondiente está dada por

$$x \odot_r y := \neg\neg(x \odot y).$$

Más aún para todo $a, b \in Reg(\mathbf{A})$, sabemos que

$$a \rightarrow_r b = a \rightarrow b \quad \text{ y } \quad a \wedge_r b = a \wedge b.$$

Sin embargo, $\vee_r$ y $*_r$ son diferentes, en general, de $\vee$ y $*$, respectivamente, con lo cual $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ puede no ser una subálgebra de $\mathbf{A}$. Sin embargo, $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ siempre es un reticulados residuado y, en algunos casos, $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ puede obtenerse como imagen homomorfa de $\mathbf{A}$, pues, a partir de los resultados de [CigTor04] (ver también [GalJipKowOno07]), se deduce que:

Lema 4.1.1 *Para todo reticulado residuado $\mathbf{A}$, son equivalentes:*

(1) *La aplicación $x \mapsto \neg\neg x$ define un homomorfismo de $\mathbf{A}$ sobre $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$,*

(2) *$\mathbf{A} \in \mathbb{GRL}$, es decir, la ecuación $\neg\neg(\neg\neg x \rightarrow x) = 1$ vale en $\mathbf{A}$.*

Recordemos también que $Reg(\mathbf{A})$ contiene al conjunto de elementos booleanos (o complementados) de $\mathbf{A}$:

$$B(\mathbf{A}) = \{a \in A : a \vee \neg a\},$$

que es el universo de una subálgebra $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ tanto de $\mathbf{A}$ como de $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$.

Como muestra el lema siguiente, todo homomorfismo entre dos reticulados residuados $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ induce un homomorfismo entre $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ y $\mathbf{Reg}(\mathbf{B})$.

Lema 4.1.2 *Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos reticulados residuados y sea h un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$. Entonces $r(h)$, la restricción de h a $Reg(\mathbf{A})$, es un homomorfismo de $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ en $\mathbf{Reg}(\mathbf{B})$. Más aún, si h es sobreyectivo, entonces $r(h)$ también lo es.*

Demostración. Es claro que $h(Reg(\mathbf{A})) \subseteq Reg(\mathbf{B})$ con lo cual la restricción $r(h)$ de una aplicación de $Reg(\mathbf{A})$ en $Reg(\mathbf{B})$. Dados $a, b \in Reg(\mathbf{A})$ y $\odot \in \{\wedge, \vee, *, \rightarrow\}$, se tiene que

$$h(a \odot_r b) = h(\neg\neg(a \odot b)) = (\neg\neg(h(a) \odot h(b))) = h(a) \odot_r h(b).$$

Luego $r(h)$ es un homomorfismo de $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ en $\mathbf{Reg}(\mathbf{B})$. Además, si h es sobreyectivo, dado $b = h(a) \in Reg(\mathbf{A})$, se tiene que $b = \neg\neg b = \neg\neg h(a) = h(\neg\neg a)$, donde $\neg\neg a \in Reg(\mathbf{A})$. Resulta entonces que $r(h)$ es sobreyectivo. $\square$

Observación 4.1.3 El lema anterior permite definir un funtor $\mathcal{F}$ de la cateogría de reticulados residuados en la subcategoría plena de reticulados residuados involutivos. Más precisamente, si $\mathbf{A}$ es un reticulado residuado, definimos $\mathcal{F}(\mathbf{A}) = \mathbf{Reg}(\mathbf{A})$, y si $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo, establecemos $\mathcal{F}(h) = r(h)$.

Obtenemos un resultado interesante si restringimos $\mathcal{F}$ a la subcateogría de reticulados residuados de Glivenko. El Lema 4.1.1 permite mostrar que la restricción del funtor $\mathcal{F}$ a $\mathbb{GRL}$ es un adjunto a izquierda del funtor inclusión de $\mathbb{IRL}$ en $\mathbb{GRL}$. Luego, la categoría de reticulados residuados involutivos es una subcategoría reflectiva de la categoría de reticulados residuados de Glivenko.

También hay una relación estrecha entre los filtros implicativos de un reticulado residuado $\mathbf{A}$ y los filtros implicativos de $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$.

Lema 4.1.4 *Sea $\mathbf{A}$ un reticulado residuado. Entonces para cualquier filtro implicativo F de $\mathbf{A}$, $F \cap Reg(\mathbf{A})$ es un filtro implicativo de $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$. Recíprocamente, para cada filtro implicativo G de $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$, existe un filtro implicativo F de $\mathbf{A}$ tal que $G = F \cap Reg(\mathbf{A})$.*

Demostración. Es fácil chequear que $F \in Fil(\mathbf{A})$ implica $F \cap Reg(\mathbf{A}) \in Fil(\mathbf{Reg}(\mathbf{A}))$. Para probar la recíproca, basta tomar $F = Fg^{\mathbf{A}}(G)$, y verificar que $g = Fg^{\mathbf{A}}(G) \cap Reg(\mathbf{A})$. $\square$

Recordemos que un reticulado residuado $\mathbf{A}$ es directamente indescomponible si y sólo si $B(\mathbf{A}) = \{0, 1\}$ (ver Sección 3.1).

Lema 4.1.5 *Sea $\mathbf{A}$ un reticulado residuado no trivial, entonces:*

(a) *si $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ es directamente indescomponible, entonces $\mathbf{A}$ también es directamente indescomponible,*

(b) *si $\mathbf{A}$ es subdirectamente irreducible y $D(\mathbf{A}) = \{a \in A : \neg\neg a = 1\} = \{1\}$, entonces $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ es subdirectamente irreducible,*

(c) *$\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ es simple si y sólo si $D(\mathbf{A})$ es el mayor filtro implicativo propio de $\mathbf{A}$.*

Demostración. (a) vale debido a que $B(\mathbf{A}) \subseteq B(\mathbf{Reg}(\mathbf{A}))$.

Para probar (b), supongamos que $\mathbf{A}$ es subdirectamente irreducible y sea M el menor filtro de $\mathbf{A}$ distinto de $\{1\}$. Si $a \in M \setminus \{1\}$, como $D(\mathbf{A}) = \{1\}$, tenemos que $\neg\neg a \in (M \cap Reg(\mathbf{A})) \setminus \{1\}$, de donde $M \cap Reg(\mathbf{A}) \neq \{1\}$. Sea $G \neq \{1\}$ un filtro implicativo de $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$, entonces existe un filtro implicativo F de $\mathbf{A}$ tal que, $G = F \cap Reg(\mathbf{A})$. Como $F \neq \{1\}$, tenemos que $M \subseteq F$, así que $M \cap Reg(\mathbf{A}) \subseteq F \cap Reg(\mathbf{A}) = G$. Así $M \cap Reg(\mathbf{A})$ es el monolito de $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$. Esto concluye el ítem (b).

Para probar el tercer ítem, observemos que para un álgebra no trivial $\mathbf{A}$, como $0 \notin D(\mathbf{A})$, $D(\mathbf{A})$ es un filtro implicativo propio de $\mathbf{A}$. Supongamos ahora que $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ es simple y sea G un filtro implicativo de $\mathbf{A}$. Si $G \nsubseteq D(\mathbf{A})$, entonces existe $a \in G$ tal que $\neg\neg a \neq 1$, de donde $a^n \leq \neg\neg(\neg\neg a)^n = 0$ para algún $n > 0$; luego $0 \in G$ y $G = A$. Resulta entonces que todo filtro implicativo $G \neq A$ está contenido en $D(\mathbf{A})$. Recíprocamente, supongamos que $D(\mathbf{A})$ es el mayor filtro implicativo propio de $\mathbf{A}$. Sea $a \in Reg(\mathbf{A}) \setminus \{1\}$.

Como $a \notin D(\mathbf{A})$, tenemos que $0 \in Fg(a) = A$. Luego existe $n > 0$ tal que $a^n = 0$, de donde $\neg\neg a^n = 0$. De aquí resulta que $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$ es simple. $\square$

Dada una clase $\mathbb{K}$ de reticulados residuados, consideremos la clase

$$\mathbb{K}^r = \{\mathbf{Reg}(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \in \mathbb{K}\}.$$

Lema 4.1.6 *Sea $\mathbb{K}$ una clase de reticulados residuados, entonces vale lo siguiente:*

(*a*) $\mathbb{K}^r \subseteq \mathbb{K}$ *si y sólo si* $\mathbb{K}^r = \mathbb{K} \cap \mathbb{IRL}$,

(*b*) *si* $O \in \{H, S, P, V\}$, *entonces* $O(\mathbb{K})^r \subseteq O(\mathbb{K}^r)$,

(*c*) $V(\mathbb{K})^r \subseteq V(\mathbb{K})$ *si y sólo si* $\mathbb{K}^r \subseteq V(\mathbb{K})$.

Demostración. Probaremos sólo (*b*), ya que (*a*) es trivial y (*c*) se sigue inmediatamente de (*b*). Como $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ implica que $\mathbf{Reg}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{Reg}(\mathbf{B})$, tenemos el caso $O = S$. Como $\mathbf{Reg}(\prod \mathbf{A}_i) = \prod \mathbf{Reg}(\mathbf{A}_i)$, el caso $O = P$ también es inmediato. El caso $O = H$ es una consecuencia del Lema 4.1.2. Finalmente, el caso $O = V$ queda probado pues $V = HSP$. $\square$

Nos interesa especialmente estudiar las clases $\mathbb{V}^r$ donde $\mathbb{V}$ es una subvariedad de $\mathbb{RL}$. Por ejemplo, en virtud del Lema 3.5.1, resulta que $\mathbb{PRL}^r = \mathbb{B}$, es decir, al calcular $\mathbb{PRL}^r$ obtenemos una subvariedad de $\mathbb{RL}$. El siguiente lema reúne algunas propiedades sencillas acerca de $\mathbb{V}^r$.

Lema 4.1.7 *Las siguientes propiedades valen para cualquier variedad $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{RL}$:*

(*a*) $\mathbb{V}^r \subseteq \mathbb{V}$ *si y sólo si* $(\mathbb{V}_{si})^r \subseteq \mathbb{V}$,

(*b*) $\mathbb{V}^r$ *es cerrada bajo la formación de imágenes homomorfas y productos directos, es decir,* $HP(\mathbb{V}^r) \subseteq \mathbb{V}^r$,

(*c*) $S(\mathbb{V}^r) = V(\mathbb{V}^r)$.

Demostración. (*a*) se sigue del Lema 4.1.6 tomando $\mathbb{K} = \mathbb{V}_{si}$.

Probemos el ítem (*b*). Dados $\mathbf{A} \in \mathbb{V}$ y $G \in Fil(\mathbf{Reg}(\mathbf{A}))$ debemos probar que $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})/G \in \mathbb{V}^r$. Para ello consideremos el filtro $F = Fg^{\mathbf{A}}(G)$ y recordemos que verifica que $F \cap Reg(\mathbf{A}) = G$. A partir del homomorfismo natural $h : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/F$, obtenemos, por restricción, un homomorfismo sobreyectivo $r(h) : \mathbf{Reg}(\mathbf{A}) \to \mathbf{Reg}(\mathbf{A}/F)$ tal que $r(h)^{-1}([1]_F) = F \cap Reg(\mathbf{A}) = G$. Luego dicho homomorfismo sobreyectivo induce un isomorfismo de $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})/G$ en $\mathbf{Reg}(\mathbf{A}/F)$. Esto muestra que $\mathbf{Reg}(\mathbf{A}/G) \in \mathbb{V}^r$.

El hecho de que $\mathbb{V}^r$ sea cerrada por productos directos se sigue fácilmente pues para cualquier familia $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ en $\mathbb{RL}$, $\mathbf{Reg}\Big(\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i\Big) = \prod_{i\in I} \mathbf{Reg}(\mathbf{A}_i)$.

Finalmente, para demostrar (*c*), observemos que, en virtud de la propiedad de extensión de congruencias, vale que $SH(\mathbb{V}^r) = HS(\mathbb{V}^r)$ y luego

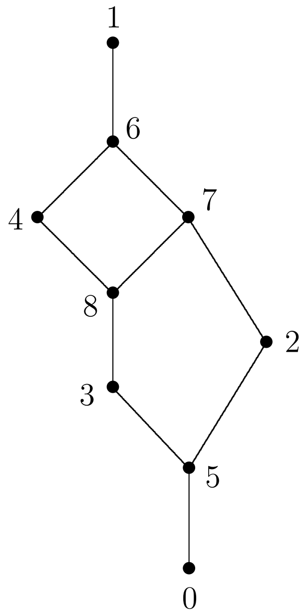
$$V(\mathbb{V}^r) = HSP(\mathbb{V}^r) \subseteq HS(\mathbb{V}^r) = SH(\mathbb{V}^r) \subseteq S(\mathbb{V}^r).$$

□

Como muestra el lema anterior, $\mathbb{V}^r$ es cerrada bajo H y bajo P, pero, en general, no es cerrada bajo S. Damos un ejemplo de este caso en el siguiente teorema.

Teorema 4.1.8 *Hay al menos una variedad de reticulados residuados* $\mathbb{V}$ *tal que* $\mathbb{V}^r$ *no es una variedad.*

Demostración. Consideremos $\mathbf{A} = \langle\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}, \wedge, \vee, *, \rightarrow, 0, 1\rangle$ el reticulado residuado cuya estructura reticular está dada por el diagrama de Hasse siguiente:



y cuyas operaciones $*$ y $\rightarrow$ están dadas en las siguientes tablas:

$*$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	0	5	5	0	5	5	5
3	0	3	5	0	0	0	5	5	0
4	0	4	5	0	5	0	5	5	5
5	0	5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	6	5	5	5	0	5	5	5
7	0	7	5	5	5	0	5	5	5
8	0	8	5	0	5	0	5	5	0

$\rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	1	1	6	6	6	1	1	6
3	4	1	6	1	1	6	1	1	1
4	3	1	6	6	1	6	1	6	6
5	6	1	1	1	1	1	1	1	1
6	5	1	6	6	6	6	1	6	6
7	5	1	6	6	6	6	1	1	6
8	8	1	6	6	1	6	1	1	1

Notemos primero que, de la tabla para *, resulta inmediatamente que para todo $a \in A$, $a \neq 1$ implica $a^3 = 0$, con lo cual $\mathbf{A} \models x \vee \neg x^3 = 1$. De esta manera, $V(\mathbf{A}) \models x \vee \neg x^3 = 1$, y, por los resultados de T. Kowalski (ver [Kow04]), resulta entonces una variedad con discriminador finitamente generada.

Afirmamos que $V(\mathbf{A})^r$ no es cerrado bajo S y, por tanto, que no es una variedad.

De la tabla para $\to$ deducimos que $Reg(\mathbf{A}) = A \setminus \{7\}$. Más aún, es fácil chequear que $B = A \setminus \{7, 8\}$ es el universo de una subálgebra de $\mathbf{Reg}(\mathbf{A})$, la cual denotamos con $\mathbf{B}$. Afirmamos que $\mathbf{B} \notin V(\mathbf{A})^r$. En efecto, supongamos que $\mathbf{B} = \mathbf{Reg}(\mathbf{C})$ para algún $\mathbf{C} \in V(\mathbf{A})$. Podemos suponer que $\mathbf{C}$ está generado por B, pues, en caso contrario, podríamos considerar la subálgebra de $\mathbf{C}$ generada por B. Luego, como $V(\mathbf{A})$ es localmente finita y $\mathbf{C}$ es finitamente generada, $\mathbf{C}$ es finita. Además, como $\mathbf{B}$ es directamente indescomponible, por el Lema 4.1.5, $\mathbf{C}$ también lo es. Por lo tanto $\mathbf{C} \in V(\mathbf{A})_{di} = V(\mathbf{A})_{sim} = IS(\mathbf{A})$, de donde $\mathbf{B} = \mathbf{Reg}(\mathbf{C}) \in IS(\mathbf{A})^r$, lo cual se ve fácilmente que no es cierto. $\square$

Notemos que si $\mathbb{V}^r$ no es una variedad, entonces $\mathbb{IV} \subsetneq \mathbb{V}^r$, y entonces, del teorema anterior y el ítem (a) del Lema 4.1.6, deducimos el siguiente resultado.

Corolario 4.1.9 *Existe al menos una variedad de reticulados residuados $\mathbb{V}$ tal que $\mathbb{V}^r \not\subseteq \mathbb{V}$.*

Nuestro próximo objetivo es caracterizar, por medio de las álgebras libres, las variedades $\mathbb{V}$ para las cuales $\mathbb{V}^r$ es una variedad.

Dado un conjunto X, $\mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X)$ denotará la subálgebra de $\mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$ generada por el conjunto $\neg\neg X = \{\neg\neg x : x \in X\}$. En particular, si $X = \{x_n : n \in \omega\}$ es numerable, $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\omega)$ representa el álgebra libre en $\mathbb{V}$ sobre un conjunto numerable de generadores libres, y en este caso escribimos también $\mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg\omega)$ en lugar de $\mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X)$.

Lema 4.1.10 *Sea $\mathbb{V}$ una variedad de reticulados residuados. Entonces para cualquier conjunto X, $\mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X)$ es el álgebra libre en $S(\mathbb{V}^r)$ sobre un conjunto de cardinalidad $|X|$.*

Demostración. Es claro que $\mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X) \in S(\mathbb{V}^r)$. Observemos además que la aplicación $x \mapsto \neg\neg x$ es una biyección de X en $\neg\neg X$, con lo cual $|X| = |\neg\neg X|$.

Sea $\mathbf{A} \in S(\mathbb{V}^r)$ y sea $h : \neg\neg X \to A$ una aplicación arbitraria. Consideremos $\mathbf{B} \in \mathbb{V}$ tal que $\mathbf{A}$ es una subálgebra de $\mathbf{Reg}(\mathbf{B})$ y sea $\overline{h} : \mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X) \to \mathbf{B}$ el homomorfismo tal que $\overline{h}(x) = h(\neg\neg x)$. Entonces, $r(\overline{h}) : \mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)) \to \mathbf{Reg}(\mathbf{B})$ es un homomorfismo tal que $r(\overline{h})(Sg^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X)) \subseteq Sg^{\mathbf{Reg}(\mathbf{B})}(h(\neg\neg X)) \subseteq A$. Luego la restricción $r(\overline{h}) \restriction_{Sg^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X)}$ es un homomorfismo de $\mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X)$ en $\mathbf{A}$ que extiende a h. $\square$

Teorema 4.1.11 *$\mathbb{V}^r$ es una variedad si y sólo si $\mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X) \in \mathbb{V}^r$ para todo conjunto X.*

Demostración. La implicación directa es trivial. Para ver la recíproca, supongamos que $\mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X) \in \mathbb{V}^r$ para todo conjunto X. Entonces, por el Lema 4.1.10, $\mathbf{Free}_{V(\mathbb{V}^r)}(X) \in \mathbb{V}^r$ para todo conjunto X. Como cualquier álgebra en $V(\mathbb{V}^r)$ es una imagen homomorfa de $\mathbf{Free}_{V(\mathbb{V}^r)}(X)$ para algún X adecuado, utilizando el Lema 4.1.7, resulta que $V(\mathbb{V}^r) \subseteq H(\mathbb{V}^r) \subseteq \mathbb{V}^r$. Luego $\mathbb{V}^r = V(\mathbb{V}^r)$ es una variedad. $\square$

Observemos que de los Teoremas 4.1.8 y 4.1.11 deducimos el siguiente resultado.

Corolario 4.1.12 *Hay al menos una variedad de reticulados residuados $\mathbb{V}$ tal que $\mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X) \neq \mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$ para algún conjunto X. Es decir, en general, $\mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$ no está generada por $\neg\neg X$.*

4.2. Traducción de Kolmogorov y variedades regulares

En lo que sigue de este capítulo, un *término* será un término en el lenguaje $\{\wedge, \vee, *, \rightarrow, 0, 1\}$, $T(X)$ denotará el conjunto formado por los términos cuyas variables pertenecen a X y dado $\sigma \subseteq \{\wedge, \vee, *, \rightarrow\}$, $T_\sigma(X)$ denotará el conjunto de términos en el lenguaje $(\{0,1\} \cup \sigma)$ con variables en X. Observemos que $T_\sigma(X) \subseteq T(X)$.

Dado $t \in T(X)$, definimos su ***traducción (negativa) de Kolmogorov*** $\widetilde{t}$ en forma recursiva, de la siguiente manera:

- $\widetilde{t} = \neg\neg t$, si $t \in X \cup \{0,1\}$,
- si $\odot \in \{\wedge, \vee, *, \rightarrow\}$ y $t = r \odot s$, entonces $\widetilde{t} = \neg\neg(\widetilde{r} \odot \widetilde{s})$.

La traducción de Kolmogorov de un término satisface una propiedad clave que enunciamos en el siguiente lema.

Lema 4.2.1 *Sea $t(x_1, \ldots, x_n)$ un término, $\mathbf{A}$ un reticulado residuado y $a_1, \ldots, a_n \in A$. Se tiene que:*

$$t^{\mathbf{Reg(A)}}(\neg\neg a_1, \ldots, \neg\neg a_n) = \widetilde{t}^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n). \tag{4.1}$$

Demostración. Por inducción sobre la complejidad de t.

- La afirmación es trivial para $t = x_i$, $1 \leq i \leq n$, y para $t \in \{0,1\}$.
- Si $t = r \odot s$ con $\odot \in \{\wedge, \vee, *, \rightarrow\}$, entonces

$$\begin{aligned}
&t^{\mathbf{Reg(A)}}(\neg\neg a_1, \ldots, \neg\neg a_n) \\
&\quad = r^{\mathbf{Reg(A)}}(\neg\neg a_1, \ldots, \neg\neg a_n) \odot_r s^{\mathbf{Reg(A)}}(\neg\neg a_1, \ldots, \neg\neg a_n) \\
&\quad = \neg\neg(r^{\mathbf{Reg(A)}}(\neg\neg a_1, \ldots, \neg\neg a_n) \odot s^{\mathbf{Reg(A)}}(\neg\neg a_1, \ldots, \neg\neg a_n)) \\
&\quad = \neg\neg(\widetilde{r}^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \odot \widetilde{s}^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \\
&\quad = \widetilde{t}^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n).
\end{aligned}$$

$\square$

La siguiente consecuencia directa del lema anterior será crucial para entender las clases $\mathbb{V}^r$.

Corolario 4.2.2 *Para cualquier reticulado residuado $\mathbf{A}$ y cualesquiera términos t, s, tenemos que:*

$$\mathbf{Reg(A)} \models t = s \quad \textit{si y sólo si} \quad \mathbf{A} \models \widetilde{t} = \widetilde{s}.$$

El siguiente lema caracteriza las álgebras para las cuales $\mathbf{Reg(A)} \leq \mathbf{A}$ (ver [CigTor04, Corolario 4.5] y [Tor08]). La demostración es directa.

Lema 4.2.3 *Dado un reticulado residuado $\mathbf{A}$, son equivalentes:*

(1) $\mathbf{Reg(A)}$ *es una subálgebra de* $\mathbf{A}$,

(2) $\mathbf{A} \models \widetilde{t}(x_1, \ldots, x_n) = t(\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n)$ *para cualquier término* $t(x_1, \ldots, x_n)$,

(3) $\mathbf{A} \models \neg\neg(\neg\neg x \vee \neg\neg y) = \neg\neg x \vee \neg\neg y$ *y* $\mathbf{A} \models \neg\neg(\neg\neg x * \neg\neg y) = \neg\neg x * \neg\neg y$.

Corolario 4.2.4 *Sea X un conjunto. Entonces, para cualquier variedad de reticulados residuados $\mathbb{V}$, son equivalentes:*

(1) $\mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$ *es una subálgebra de* $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)$,

(2) $\mathbb{V} \models \widetilde{t}(x_1, \ldots, x_n) = t(\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n)$ *para cualquier término* $t(x_1, \ldots, x_n)$,

(3) $\mathbb{V} \models \neg\neg(\neg\neg x \vee \neg\neg y) = \neg\neg x \vee \neg\neg y$ *y* $\mathbb{V} \models \neg\neg(\neg\neg x * \neg\neg y) = \neg\neg x * \neg\neg y$.

Observar que, por (4.1), el conjunto

$$Sg^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X) = \{\widetilde{t}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)}(x_1, \ldots, x_n) : t \in T(X), x_i \in X, i \leq n \in \mathbb{N}\}$$

es el universo de $\mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X)$. La interpretación de la correspondencia $t \mapsto \widetilde{t}$ sobre $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)$ no resulta, en general, una aplicación. En efecto, si $\mathbb{V}$ es tal que $\mathbb{V}^r \not\subseteq \mathbb{V}$, entonces existen $s, t \in T(X)$ tales que $\mathbb{V} \models s = t$ y $\mathbb{V}^r \not\models s = t$, de donde, por el Corolario 4.2.2, $\mathbb{V} \not\models \widetilde{s} = \widetilde{t}$. En otras palabras, tenemos que $s^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\omega)} = t^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\omega)}$ pero $\widetilde{s}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\omega)} \neq \widetilde{t}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\omega)}$, *interpretando siempre las variables en generadores libres.*

Teorema 4.2.5 *Para cualquier variedad de reticulados residuados $\mathbb{V}$, son equivalentes:*

(1) $\mathbb{V}^r \subseteq \mathbb{V}$,

(2) *para cualquier conjunto X, la correspondencia* $\widetilde{\cdot}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)} : t^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)} \mapsto \widetilde{t}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)}$ *es un homomorfismo de* $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)$ *sobre* $\mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X)$.

(3) $\widetilde{\cdot}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\omega)}$ *es una aplicación (bien definida) de* $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\omega)$ *en* $\mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\omega))$.

Demostración. Supongamos (1). Por los Lemas 4.1.6 y 4.1.7, $\mathbb{V}^r \subseteq \mathbb{V}$ es equivalente a $\mathbb{IV} = \mathbb{V}^r = S(\mathbb{V}^r)$. Luego, por el Lema 4.1.10, $\mathbf{Free}_{\mathbb{IV}}(X) \cong \mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X) \in \mathbb{IV}$. Entonces, la aplicación $x \mapsto \neg\neg x$ se extiende a un homomorfismo h de $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)$ sobre $\mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X)$. Para cualquier $t(x_1, \ldots, x_n) \in T(X)$, por el Lema 4.2.1, tenemos que

$$h(t^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)}(x_1, \ldots, x_n)) = t^{\mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))}(\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n) = \widetilde{t}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)}(x_1, \ldots, x_n),$$

así que (2) es válido.

La implicación (2) $\Rightarrow$ (3) es trivial porque $Sg^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg\omega) \subseteq Reg(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\omega))$.

Finalmente, asumamos que la condición (3) es verdadera y supongamos que $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $s(x_1, \ldots, x_n), t(x_1, \ldots, x_n) \in T(X)$ y $\mathbb{V} \models t = s$. Entonces $t^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\omega)}(x_1, \ldots, x_n) = s^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\omega)}(x_1, \ldots, x_n)$, luego $\widetilde{t}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\omega)}(x_1, \ldots, x_n) = \widetilde{s}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\omega)}(x_1, \ldots, x_n)$, de donde

$$t^{\mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))}(\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n) = s^{\mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))}(\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n),$$

y, en particular,

$$t^{\mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X)}(\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n) = s^{\mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X)}(\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n),$$

y, por el Lema 4.1.10, $S(\mathbb{V}^r) \models t = s$. Esto concluye la demostración. $\square$

Corolario 4.2.6 *Si $\mathbb{V}$ es una subvariedad de $\mathbb{RL}$, entonces $\mathbb{V}^r \subseteq \mathbb{V}$ si y sólo si $\mathbf{Free}_{S(\mathbb{V}^r)}(\omega)$ es una imagen homomorfa de $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\omega)$.*

Demostración. El resultado es una consecuencia del Teorema 4.2.5 y del hecho de que $\mathbf{Free}_{S(\mathbb{V}^r)}(\omega) \cong \mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg\omega)$ y $V(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\omega)) = \mathbb{V}$. □

Decimos que una variedad de reticulados residuados $\mathbb{V}$ es **regular** (o **de Kolmogorov**) si satisface la condición $\mathbb{V}^r \subseteq \mathbb{V}$. Por el Lema 4.1.6, si $\mathbb{V}$ es una variedad regular, entonces $\mathbb{V}^r = \mathbb{IV}$, con lo cual $\mathbb{V}^r$ es una variedad.

Es claro que $\mathbb{RL}$ es una variedad regular, pero también hay muchos ejemplos de subvariedades regulares de $\mathbb{RL}$. Como ejemplos triviales, cualquier subvariedad $\mathbb{V}$ de $\mathbb{RL}$ tal que $\mathbb{V} \supseteq \mathbb{IRL}$ es regular.

Por otra parte, la propiedad (a) del Lema 4.1.7 nos da una forma de probar que algunas subvariedades bien conocidas de $\mathbb{RL}$ son regulares. Más precisamente, para demostrar que $\mathbb{V}$ es regular basta con verificar que $(\mathbb{V}_{si})^r \subseteq \mathbb{V}$, lo cual puede ser sencillo si se cuenta con una buena descripción de los miembros subdirectamente irreducibles de $\mathbb{V}$. Algunos casos que se pueden resolver de esta manera son los siguientes:

- Dado $n \in \mathbb{N}$, denotamos con $\mathbb{EM}_n$ a la subvariedad de $\mathbb{RL}$ determinada por la ecuación $x \vee \neg x^n = 1$. T. Kowalski probó en [Kow04] que toda subvariedad de $\mathbb{RL}$ es semisimple si y sólo si es una variedad con discriminador y si y sólo si está contenida en $\mathbb{EM}_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En particular, las variedades $\mathbb{EM}_n$ son semisimples, es decir, sus miembros subdirectamente irreducibles son simples. Usando este hecho y el Lema 4.1.5, es fácil ver que $((\mathbb{EM}_n)_{si})^r \subseteq (\mathbb{EM}_n)_{si}$. Luego $\mathbb{EM}_n$ es regular para todo $n \in \mathbb{N}$. Observemos que la variedad considerada en el Teorema 4.1.8 es una subvariedad no regular de $\mathbb{EM}_3$.

- $\mathbb{MTL}$, la variedad generada por los reticulados residuados totalmente ordenados, es una variedad regular. En efecto, como todas las álgebras en $\mathbb{MTL}_{si}$ son totalmente ordenadas, también son totalmente ordenadas las álgebras de la clase $(\mathbb{MTL}_{si})^r$ con lo cual $(\mathbb{MTL}_{si})^r \subseteq \mathbb{MTL}$.

- Sea $\mathbb{WNM}$ la subvariedad de $\mathbb{MTL}$ dada por la ecuación

$$\neg(x * y) \vee ((x \wedge y) \to (x * y)) = 1.$$

  Las álgebras de $\mathbb{WNM}$ se denominan *álgebras mínimo-nilpotentes débiles*. Esta variedad también es regular. En efecto, dada $\mathbf{A} \in \mathbb{WNM}_{si}$, sabemos que $\mathbf{A}$ es totalmente ordenada. En particular, como 1 es $\vee$-irreducible en $\mathbf{A}$, para cada $a, b \in Reg(\mathbf{A})$ tal que $\neg(a *_r b) < 1$, tenemos que $\neg(a * b) \neq 1$, así que $a \wedge_r b = a \wedge b \leq a * b \leq a *_r b$. Luego $\mathbf{Reg}(\mathbf{A}) \in \mathbb{WNM}$.

Daremos ahora otra fuente de variedades regulares. Consideremos $\sigma_{ex} = \{\vee, *\}$, $\sigma_{in} = \{\wedge, \to\}$, y $T_r(X)$ el conjunto de términos $t(t_1, \dots, t_n)$ para $t(x_1, \dots, x_n) \in T_{\sigma_{ex}}(X)$, $n \geq 0$ y $t_1, \dots, t_n \in T_{\sigma_{in}}(X)$.

Lema 4.2.7 *Valen las siguientes propiedades:*

(a) *si* $t \in T_{\sigma_{ex}}(x_1, \ldots, x_n)$, *entonces* $\mathbb{RL} \models \widetilde{t}(x_1, \ldots, x_n) = \neg\neg t(x_1, \ldots, x_n)$,

(b) *si* $t \in T_{\sigma_{in}}(x_1, \ldots, x_n)$, *entonces* $\mathbb{RL} \models \widetilde{t}(x_1, \ldots, x_n) = t(\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n)$,

(c) *si* $t \in T_r(x_1, \ldots, x_n)$, *entonces* $\mathbb{RL} \models \widetilde{t}(x_1, \ldots, x_n) = \neg\neg t(\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n)$.

Demostración. Los primeros dos ítems pueden probarse fácilmente por inducción sobre la complejidad del término t teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{RL} \models \neg\neg(\neg\neg x \vee \neg\neg y) = \neg\neg(x \vee y), \\
&\mathbb{RL} \models \neg\neg(\neg\neg x * \neg\neg y) = \neg\neg(x * y), \\
&\mathbb{RL} \models \neg\neg(\neg\neg x \wedge \neg\neg y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y, \\
&\mathbb{RL} \models \neg\neg(\neg\neg x \to \neg\neg y) = \neg\neg x \to \neg\neg y).
\end{aligned}$$

El tercer ítem resulta de combinar los dos anteriores. □

La importancia de los términos en $T_r(X)$ radica en la siguiente propiedad.

Lema 4.2.8 *Para cualquier reticulado residuado* $\mathbf{A}$ *y cualesquiera términos* $t, s \in T_r(X)$, *tenemos que*

$$\mathbf{A} \models t = s \textit{ implica } \mathbf{Reg}(\mathbf{A}) \models t = s.$$

Demostración. Como $\mathbf{A} \models t(x_1, \ldots, x_n) = s(x_1, \ldots, x_n)$, se ve inmediatamente que

$$\mathbf{A} \models \neg\neg t(\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n) = \neg\neg s(\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n).$$

Luego, por el lema anterior, $\mathbf{A} \models \widetilde{t} = \widetilde{s}$. Por el Corolario 4.2.2, obtenemos que $\mathbf{Reg}(\mathbf{A}) \models t = s$. □

Corolario 4.2.9 *Si* $\mathbb{V}$ *es una variedad de reticulados residuados que admite una base ecuacional relativa a* $\mathbb{RL}$ *cuyos términos pertenecen a* $T_r(X)$, *entonces* $\mathbb{V}$ *es regular.* □

Como consecuencia del Corolario 4.2.9, obtenemos otra demostración de que la variedad $\mathbb{MTL}$ es regular. En efecto, es sabido que $\mathbb{MTL}$ puede caracterizarse dentro de $\mathbb{RL}$ mediante la ecuación $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$; luego, se puede aplicar el corolario anterior. Otros ejemplos son:

- la variedad $\mathbb{E}_n$ de los reticulados residuados que satisfacen la ecuación $x^n = x^{n+1}$. Esta variedad es importante pues T. Kowalski probó en [Kow04] que una variedad de reticulados residuados tiene la propiedad de congruencias principales (ecuacionalmente) definibles si y sólo si está contenida en $\mathbb{E}_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

- la variedad $\mathbb{BL}$ de las BL-ágebras, que se definen como las MTL-álgebras que satisfacen la ecuación de divisibilidad $x \wedge y = x * (x \to y)$. Para un estudio detallado de estas álgebras y su relación con las lógicas de t-normas continuas, véase [Háj98].

Una gran clase de variedades regulares es la clase de las variedades de Glivenko, es decir, las variedades contenidas en $\mathbb{GRL}$. Como para toda álgebra $\mathbf{A} \in \mathbb{GRL}$, $\mathbf{Reg}(\mathbf{A}) \in H(\mathbf{A})$, para cualquier subvariedad $\mathbb{V}$ de $\mathbb{GRL}$ se tiene que $\mathbb{V}^r \subseteq \mathbb{V}$, con lo cual $\mathbb{V}$ es regular. Enunciamos esto en la siguiente proposición.

Proposición 4.2.10 *Toda variedad de Glivenko es regular.*

En el siguiente teorema damos algunas caracterizaciones de las variedades de Glivenko en términos de los elementos regulares y de la traducción de Kolmogorov.

Teorema 4.2.11 *Si $\mathbb{V}$ es una subvariedad de $\mathbb{RL}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X) = \mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$*, para cualquier conjunto X,*

(2) $\mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg\{x\}) = \mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\{x\}))$*,*

(3) $\mathbb{V}$ *es una variedad de Glivenko,*

(4) *para cualquier término $t(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbb{V} \models \widetilde{t}(x_1, \ldots, x_n) = \neg\neg t(x_1, \ldots, x_n)$.*

Demostración. La implicación (1) $\Rightarrow$ (2) es trivial.

Supongamos que (2) es válida, entonces, como $\neg\neg(\neg\neg x \to x)$ es un elemento regular de $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)$, existe un término unario $t(x)$ tal que

$$\neg\neg(\neg\neg x \to x) = t^{\mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\{x\}))}(\neg\neg x),$$

con lo cual

$$\widetilde{t}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\{x\})}(x) = \neg\neg(\neg\neg x \to x).$$

Pero, por la definición de la traducción de Kolmogorov, vale siempre que

$$\widetilde{t}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\{x\})}(x) = \widetilde{t}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\{x\})}(\neg\neg x),$$

de donde resulta inmediatamente que

$$\neg\neg(\neg\neg x \to x) = \neg\neg(\neg\neg x \to \neg\neg x) = 1.$$

Luego, la ecuación de Glivenko se verifica en $\mathbb{V}$.

Ahora supongamos que vale (3) y sea $t(x_1, \ldots, x_n)$ un término. Como $\mathbb{V}$ es una variedad de Glivenko, es una variedad regular, así que $\neg\neg$ y $\widetilde{\cdot}$ definen ambos un homomorfismo de $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(x_1, \ldots, x_n)$ sobre $\mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(x_1, \ldots, x_n))$ tal que $x_i \mapsto \neg\neg x_i = \widetilde{x_i}$, para $1 \leq i \leq n$. Como $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es el conjunto de generadores libres de $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\{x_1, \ldots, x_n\})$, tenemos que

$$\begin{aligned}(\neg\neg t)^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\{x_1,\ldots,x_n\})}(x_1, \ldots, x_n) &= \neg\neg\left(t^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\{x_1,\ldots,x_n\})}(x_1, \ldots, x_n)\right) \\ &= t^{\mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\{x_1,\ldots,x_n\}))}(\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n) \\ &= \widetilde{t}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(\{x_1,\ldots,x_n\})}(x_1, \ldots, x_n),\end{aligned}$$

con lo cual $\mathbb{V} \models \neg\neg t = \widetilde{t}$.

Por último, supongamos que vale (4) y consideremos $t(x_1, \ldots, x_n) \in Reg(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))$. Entonces:

$$\begin{aligned} t^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)}(x_1, \ldots, x_n) &= \neg\neg t^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)}(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \widetilde{t}^{\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)}(x_1, \ldots, x_n) \\ &= t^{\mathbf{Reg}(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X))}(\neg\neg x_1, \ldots, \neg\neg x_n). \end{aligned}$$

Esto muestra que $Reg(\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)) \subseteq Sg^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X)$, con lo cual vale la igualdad. $\square$

4.3. Reticulados residuados distributivos

En esta sección mostraremos que la variedad $\mathbb{DRL}$ de los reticulados residuados distributivos no es regular, es decir, $\mathbb{DRL}^r \not\subseteq \mathbb{DRL}$. Sin embargo, $\mathbb{DRL}^r$ es una variedad y, de hecho, veremos que $\mathbb{DRL}^r$ coincide con $\mathbb{IRL}$, la variedad de los reticulados residuados involutivos.

$\mathbb{DRL}$ es la subvariedad de $\mathbb{RL}$ dada por la ecuación

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Notemos que el término $x \wedge (y \vee z)$ no pertenece a $T_r(\{x, y, z\})$. De hecho, como veremos que $\mathbb{DRL}$ no es regular, dicha variedad no admite ninguna axiomatización relativa a $\mathbb{RL}$ con ecuaciones que utilicen sólo términos en $T_r(X)$.

Para probar que $\mathbb{DRL}^r$ es toda la variedad $\mathbb{IRL}$, veremos que para cualquier $\mathbf{A} \in \mathbb{IRL}$ podemos construir $\mathbf{B} \in \mathbb{DRL}$ tal que $\mathbf{Reg}(\mathbf{B}) = \mathbf{A}$.

Comencemos con un reticulado residuado arbitrario $\mathbf{A}$. Para cualquier $X \subseteq A$, definimos:

$$(X] = \{a \in A : a \leq x \text{ para algún } x \in X\}.$$

También escribimos $(x]$ en lugar de $(\{x\}]$. Dado $X \subseteq A$, decimos que X es **decreciente** si $y \in X$ siempre que $y \leq x$ y $x \in X$, es decir, si $X = (X]$. Si $Dec^*(\mathbf{A})$ denota la familia de subconjuntos decrecientes *no vacíos* de $\mathbf{A}$, entonces $\langle Dec^*(\mathbf{A}), \cap, \cup, \{0\}, A\rangle$ es un reticulado distributivo acotado completo.

En $Dec^*(\mathbf{A})$ definimos la operación:

$$X * Y = (\{x * y : x \in X, y \in Y\}].$$

Es sencillo verificar que esta operación es asociativa, conmutativa, y que A es elemento neutro. Por lo tanto, $\langle Dec^*(\mathbf{A}), *, A\rangle$ es un monoide conmutativo. Más aún, para cualesquiera $X, Y_i \in Dec^*(\mathbf{A})$ tenemos que:

$$X * \bigcup_{i \in I} Y_i = \bigcup_{i \in I} (X * Y_i).$$

Luego, para cualquier $X, Y \in Dec^*(\mathbf{A})$, la familia

$$\{Z \in Dec^*(\mathbf{A}) : X * Z \subseteq Y\}$$

es cerrada bajo uniones arbitrarias, con lo cual posee máximo, al que denotamos con $X \to Y$. Además, se puede verificar fácilmente que dicho máximo está dado explícitamente por

$$X \to Y = \{z \in A : x * z \in Y \text{ para todo } x \in X\}.$$

Entonces, vale la siguiente propiedad de residuación:

$$X * Z \subseteq Y \iff Z \subseteq X \to Y.$$

Por lo tanto, $\mathbf{Dec}^*(\mathbf{A}) = \langle Dec^*(\mathbf{A}), \cap, \cup, *, \to, \{0\}, A\rangle$ es un reticulado residuado distributivo.

Observemos que la aplicación $\alpha_{\mathbf{A}} : A \to Dec^*(\mathbf{A})$ dada por $\alpha_{\mathbf{A}}(x) = (x]$ es inyectiva y, además, preserva todas las operaciones con excepción de $\vee$. En efecto:

- $(x] \cap (y] = (x \wedge y]$,
- $(x] * (y] = (x * y]$,
- $(x] \to (y] = (x \to y]$,
- $(0] = \{0\}$,
- $(1] = A$.

También vemos que

$$\begin{aligned}\neg X = X \to \{0\} &= \{z \in A : x * z = 0 \text{ para todo } x \in X\} \\ &= \{z \in A : z \leq \neg x \text{ para todo } x \in X\} \\ &= lb(\{\neg x : x \in X\}),\end{aligned}$$

donde $lb(Y)$ denota el conjunto de cotas inferiores de Y. Afirmamos que

$$\neg\neg X = lb(rub(X)), \tag{4.2}$$

donde $rub(Y)$ es el conjunto de todas la cotas superiores de Y que pertenecen a $Reg(\mathbf{A})$. Para probar esta igualdad basta con mostrar que $\{\neg y : y \in \neg X\} = rub(X)$. Por una parte, si $y \in \neg X$, entonces $\neg y \in Reg(\mathbf{A})$, y como $y \in \neg X = lb(\{\neg x : x \in X\}$, tenemos que $y \leq \neg x$ para cualquier $x \in X$, con lo cual $\neg y \geq \neg\neg x \geq x$ para cualquier $x \in X$. Así $\neg y \in rub(X)$. Recíprocamente, supongamos que $y = \neg\neg y \geq x$ para todo $x \in X$, entonces $\neg y \leq \neg x$ para todo $x \in X$, lo que significa que $\neg y \in \neg X$. De esta manera, $y = \neg(\neg y)$ con $\neg y \in \neg X$, como debíamos demostrar.

Observemos que si $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$, $n > 0$, y $a \in Reg(\mathbf{A})$ entonces $a \geq a_i$ para todo $i < n$ si y sólo si $a \geq \bigvee_{i<n} a_i$ si y sólo si $a \geq \neg\neg \bigvee_{i<n} a_i$; luego, para cualquier $n > 0$ y cualesquiera $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ tenemos que

$$rub\Big(\bigcup_{i<n}(a_i]\Big) = rub(\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}) = rub\Big(\Big\{\neg\neg \bigvee_{i<n} a_i\Big\}\Big),$$

entonces, por (4.2), tenemos que

$$\neg\neg \bigcup_{i<n} (a_i] = \Big(\neg\neg \bigvee_{i<n} a_i\Big].$$

En particular, si $\mathbf{A} \in \mathbb{IRL}$, entonces, para cualesquiera $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$, $n > 0$, tenemos que

$$\neg\neg \bigcup_{i<n} (a_i] = \Big(\bigvee_{i<n} a_i\Big]. \tag{4.3}$$

Ya estamos en condiciones de probar el principal resultado de esta sección.

Teorema 4.3.1 $\mathbb{DRL}^r = \mathbb{IRL}$.

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{IRL}$. Consideremos el reticulado residuado distributivo $\mathbf{Dec}^*(\mathbf{A})$ definido arriba. Sea $B = \alpha_{\mathbf{A}}(A)$ la imagen de la aplicación $\alpha_{\mathbf{A}} : x \mapsto (x]$, es decir, $B = \{(x] : x \in A\}$. Sea $\mathbf{C} = \mathbf{Sg}^{\mathbf{Dec}^*(\mathbf{A})}(B)$, la subálgebra de $\mathbf{Dec}^*(\mathbf{A})$ generada por B. Afirmamos que C está dada por

$$C = \Big\{\bigcup_{i<n} (x_i] : x_i \in A, n > 0\Big\}.$$

Para mostrar esto, basta verificar que C es un subuniverso de $\mathbf{Dec}^*(\mathbf{A})$. En efecto, $\{0\}$ y A pertenecen a C y, por definición, C es cerrado bajo $\cup$. Más aún, para cualquier $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{m-1} \in A$, $n, m > 0$ tenemos que:

- $\Big(\bigcup_{i<n} (a_i]\Big) \cap \Big(\bigcup_{j<m} (b_j]\Big) = \bigcup_{i<n, j<m} \Big((a_i] \cap (b_j]\Big) = \bigcup_{i<n, j<m} (a_i \wedge b_j]$,

- $\Big(\bigcup_{i<n} (a_i]\Big) * \Big(\bigcup_{j<m} (b_j]\Big) = \bigcup_{i<n, j<m} \Big((a_i] * (b_j]\Big) = \bigcup_{i<n, j<m} (a_i * b_j]$,

- $\Big(\bigcup_{i<n} (a_i]\Big) \to \Big(\bigcup_{j<m} (b_j]\Big) = \bigcap_{i<n} \Big((a_i] \to \bigcup_{j<m} (b_j]\Big) = \bigcap_{i<n} \bigcup_{j<m} (a_i \to b_j]$.

En esta última igualdad hemos utilizado el siguiente hecho: $(a_i] \to \bigcup_{j<m} (b_j] = \bigcup_{j<m} (a_i \to b_j]$. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}
(a_i] \to \bigcup_{j<m} (b_j] &= \Big\{z \in A : a_i * z \in \bigcup_{j<m} (b_j]\Big\} = \bigcup_{j<m} \Big\{z \in A : a_i * z \in (b_j]\Big\} \\
&= \bigcup_{j<m} \Big\{z \in A : a_i * z \le b_j\Big\} = \bigcup_{j<m} \Big\{z \in A : z \le a_i \to b_j\Big\} \\
&= \bigcup_{j<m} (a_i \to b_j]\,.
\end{aligned}$$

Esto completa la prueba de nuestra afirmación sobre C.

Veamos ahora que $B = Reg(\mathbf{C})$. Por (4.3), si $a \in A$, entonces $\neg\neg(a] = (a]$, luego $B \subseteq Reg(\mathbf{C})$. Además, si $a_0, \ldots, a_{n-1}$, $n > 0$, son tales que $\bigcup_{i<n}(a_i] \in Reg(\mathbf{C})$, por (4.3), tenemos que

$$\bigcup_{i<n}(a_i] = \neg\neg\bigcup_{i<n}(a_i] = \Big(\bigvee_{i<n} a_i\Big] \in B.$$

Por lo tanto, la aplicación $\alpha_{\mathbf{A}} : A \to Reg(\mathbf{C})$ es una biyección. De hecho, $\alpha_{\mathbf{A}}$ es un isomorfismo entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{Reg}(\mathbf{C})$, ya que para todo $a, b \in A$ tenemos que

- $\alpha_{\mathbf{A}}(0) = (0] = \{0\}$ y $\alpha_{\mathbf{A}}(1) = (1] = A$,
- $\alpha_{\mathbf{A}}(a \wedge b) = (a \wedge b] = (a] \cap (b]$,
- $\alpha_{\mathbf{A}}(a \vee b) = (a \vee b] = \neg\neg((a] \cup (b]) = (a] \cup_r (b]$,
- $\alpha_{\mathbf{A}}(a * b) = (a * b] = \neg\neg(a * b] = \neg\neg((a] * (b]) = (a] *_r (b]$,
- $\alpha_{\mathbf{A}}(a \to b) = (a \to b] = (a] \to (b]$.

Finalmente, como $\mathbb{DRL}^r$ es cerrado bajo imágenes homomorfas, concluimos que $\mathbf{A} \in \mathbb{DRL}^r$. □

Corolario 4.3.2 *Para cada* $\mathbf{A} \in \mathbb{RL}$*, existe* $\mathbf{B} \in \mathbb{DRL}$ *tal que* $\mathbf{Reg}(\mathbf{A}) \cong \mathbf{Reg}(\mathbf{B})$.

Observación 4.3.3 Utilizando la notación de la demostración del Teorema 4.3.1, $\mathbf{A} \in \mathbb{IRL}$, $\mathbf{C} = \mathbf{Sg}^{\mathbf{Dec}^*(\mathbf{A})}(B)$, observemos que:

- $\mathbf{C} \models \neg\neg(\neg\neg x * \neg\neg y) = \neg\neg x * \neg\neg y$, es decir, $Reg(\mathbf{C})$ es cerrado por $*$.
- $\mathbf{C}$ satisface la ecuación de Glivenko si y sólo si $\mathbf{A} \in \mathbb{MTL}$.

  En efecto, se puede chequear fácilmente que para cualesquiera $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$, $n > 0$, vale la siguiente relación

  $$\neg\neg\Big(\neg\neg\bigcup_{i<n}(a_i] \to \bigcup_{i<n}(a_i]\Big) = \Big(\bigvee_{j<n}\bigwedge_{i<n}(a_i \to a_j)\Big].$$

- $\mathbf{C}$ es pseudocomplementado si y sólo si $\mathbf{A}$ lo es (y, por lo tanto, un álgebra de Boole). Esto se sigue del hecho de que para todo $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$, $n > 0$,

  $$\neg\Big(\bigcup_{i<n}(a_i] \wedge \neg\bigcup_{i<n}(a_i]\Big) = \Big(\bigwedge_{i<n}\neg\Big(a_i \wedge \bigwedge_{j<n}\neg a_j\Big)\Big].$$

4.4. Reticulados de variedades regulares

Como $\mathbb{RL}$ es una variedad con congruencias distributivas, sus variedades no triviales, ordenadas por inclusión, constituyen un reticulado distributivo completo $\mathbf{L^v}(\mathbb{RL})$ cuyo primer elemento es la variedad $\mathbb{B}$ de las álgebras de Boole y cuyo último elemento es la propia clase $\mathbb{RL}$. Más aún, la colección de todas las subvariedades no triviales de $\mathbb{IRL}$ también forma una reticulado distributivo completo $\mathbf{L^v}(\mathbb{IRL})$.

Usando (1) del Lema 4.1.7 es fácil verificar que para cualquier familia de subvariedades regulares no triviales $(\mathbb{V}_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{RL}$, tenemos que

$$\left(\bigcap_{i\in I}\mathbb{V}_i\right)^r \subseteq \bigcap_{i\in I}\mathbb{V}_i \ \text{ y } \ \left(\bigvee_{i\in I}\mathbb{V}_i\right)^r \subseteq \bigvee_{i\in I}\mathbb{V}_i.$$

Luego, las subvariedades regulares no triviales de $\mathbb{RL}$, ordenadas por inclusión, forman un subreticulado completo de $\mathbf{L^v}(\mathbb{RL})$, que denotamos $\mathbf{L^r}(\mathbb{RL})$.

Si $\mathbb{V}$ es una subvariedad de $\mathbb{IRL}$, definimos

$$\widetilde{\mathbb{V}} = \{\mathbf{A} \in \mathbb{RL} : \mathbf{Reg}(\mathbf{A}) \in \mathbb{V}\}.$$

Tenemos entonces el siguiente resultado.

Lema 4.4.1 *Si $\mathbb{V}$ es una variedad de reticulados residuados involutivos, entonces:*

(*a*) $\mathbf{A} \in \widetilde{\mathbb{V}}$ *si y sólo si* $\mathbf{A} \models \widetilde{s} = \widetilde{t}$ *para cualquier ecuación* $s = t$ *válida en* $\mathbb{V}$. *En consecuencia,* $\widetilde{\mathbb{V}}$ *es una variedad.*

(*b*) $(\widetilde{\mathbb{V}})^r = \mathbb{V}$.

Demostración. La parte (*a*) se sigue del Corolario 4.2.2. Para la parte (*b*), observemos que si $\mathbf{A} \in \mathbb{V}$, entonces $\mathbf{Reg}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$, de donde $\mathbf{A} \in \widetilde{\mathbb{V}}$ y $\mathbf{A} \in (\widetilde{\mathbb{V}})^r$. La inclusión recíproca es trivial. $\square$

A modo de ejemplo de esta definiciones consideremos $\widetilde{\mathbb{B}}$. Recordemos que la variedad de las álgebras de Boole $\mathbb{B}$ es la variedad de reticulados residuados dada por la ecuación $x \vee \neg x = 1$. Así, para cada $\mathbf{A} \in \widetilde{\mathbb{B}}$, tenemos que $\mathbf{Reg}(\mathbf{A}) \models x \vee \neg x = 1$ y luego $\mathbf{A} \models \neg\neg(\neg\neg x \vee \neg x) = 1$. Como $\mathbb{RL} \models x \wedge \neg x \leq \neg(\neg\neg x \vee \neg x)$, resulta que $\mathbf{A} \models x \wedge \neg x = 0$, es decir, $\mathbf{A}$ es un reticulado residuado pseudocomplementado. Esto muestra que $\widetilde{\mathbb{B}} \subseteq \mathbb{PRL}$. La inclusión recíproca es una consecuencia del Teorema 3.5.1. Luego $\widetilde{B} = \mathbb{PRL}$.

Teorema 4.4.2 *Si $\mathbb{V}$ es una subvariedad de $\mathbb{IRL}$ y $\mathbb{W}$ es una subvariedad de $\mathbb{RL}$, entonces son equivalentes:*

(1) $\mathbb{W}$ *es regular e* $\mathbb{IW} = \mathbb{V}$,

(2) $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \widetilde{\mathbb{V}}$.

Demostración. Si $\mathbb{W}$ es regular e $\mathbb{IW} = \mathbb{V}$, entonces $\mathbb{W}^r = \mathbb{V}$ y, por definición, $\mathbb{W} \subseteq \widetilde{\mathbb{V}}$.

Recíprocamente, si $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \widetilde{\mathbb{V}}$, entonces $\mathbb{V}^r \subseteq \mathbb{W}^r \subseteq (\widetilde{\mathbb{V}})^r$. Como $\mathbb{V}^r = (\widetilde{\mathbb{V}})^r = \mathbb{V}$, tenemos que $\mathbb{W}^r = \mathbb{V} \subseteq \mathbb{W}$. De aquí resulta que $\mathbb{W}$ es regular y que $\mathbb{IW} = \mathbb{W}^r = \mathbb{V}$. $\square$

Observemos que dada una variedad no trivial $\mathbb{V} \in \mathbb{IRL}$,

$$[\mathbb{V}, \widetilde{\mathbb{V}}] = \{\mathbb{W} \in \mathbf{L^v}(\mathbb{RL}) : \mathbb{V} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \widetilde{\mathbb{V}}\} = \{\mathbb{W} \in \mathbf{L^r}(\mathbb{RL}) : \mathbb{W}^r = \mathbb{V}\},$$

es decir, $[\mathbb{V}, \widetilde{\mathbb{V}}]$ es la familia de todas las variedades regulares $\mathbb{W}$ tales que $\mathbb{W}^r = \mathbb{V}$.

Consideremos $\widetilde{\mathbf{L^v}}(\mathbb{IRL}) = \{\widetilde{\mathbb{V}} : \mathbb{V} \in \mathbf{L^v}(\mathbb{IRL})\}$. De la discusión anterior se sigue que la correspondencia $\mathbb{V} \mapsto \widetilde{\mathbb{V}}$ define un isomorfismo de orden de $\mathbf{L^v}(\mathbb{IRL})$ sobre $\widetilde{\mathbf{L^v}}(\mathbb{IRL})$, ambos ordenados por inclusión. Por lo tanto, $\widetilde{\mathbf{L^v}}(\mathbb{IRL})$ es un reticulado distributivo completo. Notemos también que, por el ítem (a) del Lema 4.4.1, tenemos que una variedad de reticulados residuados $\mathbb{W}$ pertenece a $\widetilde{\mathbf{L^v}}(\mathbb{IRL})$ si y sólo si $\mathbb{W}$ puede axiomatizarse por medio de ecuaciones de la forma $\widetilde{t} = \widetilde{s}$. Más aún, $\widetilde{\mathbf{L^v}}(\mathbb{IRL})$ es *cofinal* en $\mathbf{L^v}(\mathbb{RL})$, ya que para cualquier variedad de reticulados residuados $\mathbb{V}$, $\mathbb{V} \subseteq \widetilde{V(\mathbb{V}^r)} \in \widetilde{\mathbf{L^v}}(\mathbb{IRL})$.

Sea $\mathbb{V}$ una subvariedad de $\mathbb{IRL}$, y sea $\mathbb{W}$ una variedad de reticulados residuados. Si $\mathbb{W}$ es una variedad de Glivenko tal que $\mathbb{IW} = \mathbb{V}$, entonces, como $\mathbb{W}$ es regular, tenemos que $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \widetilde{\mathbb{V}}$, y así, $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{GRL} \cap \widetilde{\mathbb{V}}$. Recíprocamente, si $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{GRL} \cap \widetilde{\mathbb{V}}$, entonces $\mathbb{IW} = \mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ es una variedad de Glivenko. Hemos probado el siguiente lema.

Lema 4.4.3 *Si $\mathbb{V}$ es una subvariedad de $\mathbb{IRL}$ y $\mathbb{W}$ es una subvariedad de $\mathbb{RL}$, entonces son equivalentes:*

(1) $\mathbb{W}$ *es una variedad de Glivenko e* $\mathbb{IW} = \mathbb{V}$,

(2) $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{GRL} \cap \widetilde{\mathbb{V}}$.

Luego, para cualquier subvariedad $\mathbb{V}$ de $\mathbb{IRL}$,

$$[\mathbb{V}, \mathbb{GRL} \cap \widetilde{\mathbb{V}}] = \{\mathbb{W} \in \mathbf{L^v}(\mathbb{RL}) : \mathbb{V} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{GRL} \cap \widetilde{\mathbb{V}}\}$$

es la familia de todas las variedades de Glivenko $\mathbb{W}$ tales que $\mathbb{IW} = \mathbb{V}$.

4.5. Las propiedades de Kolmogorov y Glivenko y sus interpretaciones lógicas

En esta sección exploraremos las implicancias lógicas de los resultados algebraicos presentados hasta aquí. En primer lugar, veremos que la conexión entre una variedad $\mathbb{V}$ y su clase asociada $\mathbb{V}^r$ puede expresarse en términos de las correspondientes relaciones de consecuencia ecuacionales; llamaremos a esto *propiedad de traducción de Kolmogorov*. También estudiaremos la noción correspondiente para extensiones axiomáticas del cálculo $\mathbf{FL_{ew}}$.

Usaremos las siguientes abreviaturas:

- si Σ es un conjunto de términos en el lenguaje $\{\wedge, \vee, *, \to, 0, 1\}$, entonces $\widetilde{\Sigma} = \{\widetilde{t} : t \in \Sigma\}$,

- si E es un conjunto de ecuaciones en el lenguaje $\{\wedge, \vee, *, \to, 0, 1\}$, entonces $\widetilde{E} = \{\widetilde{t} = \widetilde{s} : (t = s) \in E\}$.

Dadas dos variedades de reticulados residuados $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, decimos que vale la **propiedad de traducción de Kolmogorov para $\mathbb{V}$ con respecto a $\mathbb{W}$** si para cualquier conjunto de ecuaciones $E \cup \{s = t\}$ tenemos que:

$$E \models_{\mathbb{W}} t = s \text{ si y sólo si } \widetilde{E} \models_{\mathbb{V}} \widetilde{t} = \widetilde{s}, \tag{4.4}$$

donde $\models_{\mathbb{V}}$ y $\models_{\mathbb{W}}$ son las relaciones de consecuencia ecuacionales asociadas a $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, respectivamente.

Teorema 4.5.1 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos variedades de reticulados residuados. Entonces vale la propiedad de traducción de Kolmogorov para $\mathbb{V}$ con respecto a $\mathbb{W}$ si y sólo si $\mathbb{W} = S(\mathbb{V}^r)$.*

Demostración. Observemos que si vale la propiedad de traducción de Kolmogorov para $\mathbb{V}$ con respecto a $\mathbb{W}$, entonces, para cualesquiera términos t y s,

$$\mathbb{W} \models t = s \Longleftrightarrow \models_{\mathbb{W}} t = s \Longleftrightarrow \models_{\mathbb{V}} \widetilde{t} = \widetilde{s} \Longleftrightarrow \mathbb{V} \models \widetilde{t} = \widetilde{s}.$$

Luego $\mathbb{W}$ es la variedad determinada por el conjunto de ecuaciones $\{t = s : \mathbb{V} \models \widetilde{t} = \widetilde{s}\}$, con lo cual, por el Corolario 4.2.2 y el Lema 4.1.7, $\mathbb{W} = S(\mathbb{V}^r)$.

Para ver que la propiedad de traducción de Kolmogorov vale para $\mathbb{V}$ con respecto a $S(\mathbb{V}^r)$ basta con verificar la propiedad (4.4) para un conjunto finito de ecuaciones E, es decir, $E = \{t_1 = s_1, \ldots, t_k = s_k\}$, ya que, como $\mathbb{V}$ y $S(\mathbb{V}^r)$ son variedades, las relaciones de consecuencia ecuacionales $\models_{\mathbb{V}}$ y $\models_{S(\mathbb{V}^r)}$ son finitarias (ver, por ejemplo, [Cze03, Capítulo Q] y las referencias dadas allí).

Supongamos que $E \models_{S(\mathbb{V}^r)} t = s$ y que todas las variables que aparecen en $E \cup \{t = s\}$ pertenecen al conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Sean $\mathbf{A} \in \mathbb{V}$ y $h : X \to A$ una aplicación tal que

$$\widetilde{t_i}^{\mathbf{A}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)) = \widetilde{s_i}^{\mathbf{A}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)), \text{ para } 1 \leq i \leq k.$$

Luego, por el Lema 4.2.1, tenemos que para $1 \leq i \leq k$ vale

$$t_i^{\mathbf{Reg(A)}}(\neg\neg h(x_1), \ldots, \neg\neg h(x_n)) = t_i^{\mathbf{Reg(A)}}(\neg\neg h(x_1), \ldots, \neg\neg h(x_n)),$$

con lo cual, utilizando la hipótesis y el Lema 4.2.1 nuevamente, obtenemos que

$$\begin{aligned} \widetilde{t}^{\mathbf{A}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)) &= t^{\mathbf{Reg(A)}}(\neg\neg h(x_1), \ldots, \neg\neg h(x_n)) \\ &= s^{\mathbf{Reg(A)}}(\neg\neg h(x_1), \ldots, \neg\neg h(x_n)) \\ &= \widetilde{s}^{\mathbf{A}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)). \end{aligned}$$

La arbitrariedad en la elección de $\mathbf{A}$ y de h muestran que $\widetilde{E} \models_{\mathbb{V}} \widetilde{t} = \widetilde{s}$.

Recíprocamente, supongamos que $\{\widetilde{t_i} = \widetilde{s_i} : 1 \leq i \leq k\} \models_{\mathbb{V}} \widetilde{t} = \widetilde{s}$. Sean $\mathbf{A} \in S(\mathbb{V}^r)$ y $h : X \to A$ cualquier aplicación tal que

$$t_i^{\mathbf{A}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)) = s_i^{\mathbf{A}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)), \text{ para } 1 \leq i \leq k.$$

Consideremos $\mathbf{B} \in \mathbb{V}$ tal que $\mathbf{A} \leq \mathbf{Reg}(\mathbf{B})$. Podemos considerar a h como una aplicación de X en $Reg(\mathbf{B}) \subseteq B$. Luego, para $1 \leq i \leq k$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{t_i}^{\mathbf{B}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)) &= t_i^{\mathbf{Reg(B)}}(\neg\neg h(x_1), \ldots, \neg\neg h(x_n)) \\
&= t_i^{\mathbf{Reg(B)}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)) \\
&= t_i^{\mathbf{A}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)) \\
&= s_i^{\mathbf{A}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)) \\
&= s_i^{\mathbf{Reg(B)}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)) \\
&= s_i^{\mathbf{Reg(B)}}(\neg\neg h(x_1), \ldots, \neg\neg h(x_n)) \\
&= \widetilde{s_i}^{\mathbf{B}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)),
\end{aligned}$$

de donde, por hipótesis,

$$\widetilde{t}^{\mathbf{B}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)) = \widetilde{s}^{\mathbf{B}}(h(x_1), \ldots, h(x_n))$$

y resulta finalmente que

$$\begin{aligned}
t^{\mathbf{A}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)) &= t^{\mathbf{Reg(B)}}(\neg\neg h(x_1), \ldots, \neg\neg h(x_n)) \\
&= \widetilde{t}^{\mathbf{B}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)) \\
&= \widetilde{s}^{\mathbf{B}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)) \\
&= s^{\mathbf{Reg(B)}}(\neg\neg h(x_1), \ldots, \neg\neg h(x_n)) \\
&= s^{\mathbf{A}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $E \models_{S(\mathbb{V}^r)} t = s$. □

Por el Corolario 4.1.9, no vale en general que $S(\mathbb{V}^r) \subseteq \mathbb{V}$, y en esos casos sucede que $S(\mathbb{V}^r) \neq \mathbb{IV}$. Luego hay un error en [GalJipKowOno07, line 11, page 373], lo que invalida los Teoremas 8.43 y 8.44 de esa sección.

Cuando vale la propiedad de traducción de Kolmogorov para $\mathbb{V}$ con respecto a $\mathbb{IV}$, decimos simplemente que vale la **propiedad de traducción de Kolmogorov en** $\mathbb{V}$. Por el Teorema 4.5.1 y el Lema 4.1.7, esto es equivalente a la condición $\mathbb{V}^r \subseteq \mathbb{V}$, es decir, $\mathbb{V}$ es una variedad regular. Por tanto, el siguiente teorema-resumen se deduce del Teorema 4.2.5, el Corolario 4.2.6 y el Teorema 4.5.1.

Teorema 4.5.2 *Para toda variedad de reticulados residuados* $\mathbb{V}$*, son equivalentes:*

(1) *la propiedad de traducción de Kolmogorov vale en* $\mathbb{V}$*,*

(2) $\mathbb{V}$ *es regular,*

(3) $\mathbf{Sg}^r_{\mathbb{V}}(\neg\neg X)$ *es una imagen homomorfa de* $\mathbf{Free}_{\mathbb{V}}(X)$,

(4) *para cualquier término* t, $\mathbb{V} \models t = 1$ *implica* $\mathbb{V} \models \widetilde{t} = 1$.

Recordemos que $\mathbb{V}$ tiene la **propiedad de Glivenko** si, para cualquier conjunto de ecuaciones $E \cup \{s = t\}$, tenemos que

$$E \models_{\mathbb{IV}} s = t \text{ si y sólo si } E \models_{\mathbb{V}} \neg\neg s = \neg\neg t,$$

o, equivalentemente,

$$E \models_{\mathbb{IV}} s = t \text{ si y sólo si } \neg\neg E \models_{\mathbb{V}} \neg\neg s = \neg\neg t,$$

donde $\neg\neg E = \{\neg\neg t = \neg\neg s : (t = s) \in E\}$. Entonces, de los resultados dados en [CigTor04] (ver también [GalJipKowOno07]) se desprende el siguiente teorema.

Teorema 4.5.3 *Una variedad* $\mathbb{V}$ *de reticulados residuados tiene la propiedad de Glivenko si y sólo si es una variedad de Glivenko.*

Por lo tanto, como las variedades de Glivenko son regulares, deducimos que la propiedad de Glivenko implica la propiedad de Kolmogorov, hecho que enunciamos en el siguiente corolario.

Corolario 4.5.4 *Si* $\mathbb{V}$ *tiene la propiedad de Glivenko, entonces vale la propiedad de traducción de Kolmogorov en* $\mathbb{V}$.

Así como en [CigTor04] los autores desarrollan una versión lógica de la propiedad de Glivenko, la propiedad de traducción de Kolmogorov también tiene su correspondiente contrapartida lógica. La razón de esto es el hecho de que los reticulados residuados son la contraparte algebraica del cálculo $\mathbf{FL_{ew}}$. De hecho, la variedad $\mathbb{RL}$ es la semántica algebraica equivalente de $\mathbf{FL_{ew}}$ en el sentido de Blok y Pigozzi (ver [BloPig89]). Más precisamente, para todo conjunto de fórmulas (términos) $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\}$, vale lo siguiente:

al1) $\Sigma \vdash_{\mathbf{FL_{ew}}} \varphi$ si y sólo si $\{\gamma = 1 : \gamma \in \Sigma\} \models_{\mathbb{RL}} \varphi = 1$,

al2) $\varphi = \psi \mathrel{=\!\!\mid\models_{\mathbb{RL}}} (\varphi \to \psi) * (\psi \to \varphi) = 1$.

En forma equivalente, para todo conjunto de ecuaciones E y para términos cualesquiera φ, ψ:

al3) $E \models_{\mathbb{RL}} \varphi = \psi$ si y sólo si $\{(\gamma \to \xi) * (\xi \to \gamma) : \gamma = \xi \in E\} \vdash_{\mathbf{FL_{ew}}} (\varphi \to \psi) * (\psi \to \varphi)$,

al4) $\varphi \dashv\vdash_{\mathbf{FL_{ew}}} (\varphi \to 1) * (1 \to \varphi)$.

De los resultados de [BloPig89] se sigue entonces que cualquier extensión axiomática $\mathbf{L}$ de $\mathbf{FL_{ew}}$ también es algebrizable y que su semántica algebraica equivalente es la subvariedad de $\mathbb{RL}$:

$$\mathbb{V}_{\mathbf{L}} = \{\mathbf{A} \in \mathbb{RL} : \mathbf{A} \models \varphi = 1, \text{ para toda fórmula } \varphi \text{ tal que } \vdash_{\mathbf{L}} \varphi\},$$

es decir, **al1)**, **al2)**, **al3)** y **al4)** siguen siendo válidas si se reemplazan $\mathbf{FL_{ew}}$ y $\mathbb{RL}$ por $\mathbf{L}$ y $\mathbb{V}_{\mathbf{L}}$, respectivamente. Esta correspondencia es una biyección. En efecto, toda subvariedad $\mathbb{V}$ de $\mathbb{RL}$ es la semántica algebraica equivalente a la extensión axiomática $\mathbf{L}_{\mathbb{V}}$ determinada por

$$\vdash_{\mathbf{L}_{\mathbb{V}}} \varphi \text{ si y sólo si } \mathbb{V} \models \varphi = 1.$$

Más aún, $\mathbf{L}_{\mathbb{V}_{\mathbf{L}}} = \mathbf{L}$ y $\mathbb{V}_{\mathbf{L}_{\mathbb{V}}} = \mathbb{V}$.

En virtud de estas correspondencias, podemos traducir los resultados vistos en las secciones anteriores a las extensiones axiomáticas de $\mathbf{FL_{ew}}$. Para cualquier extensión axiomática $\mathbf{L}$ de $\mathbf{FL_{ew}}$, denotamos por $\mathbf{InvL}$ a la extensión axiomática de $\mathbf{L}$ que resulta al agregar los axiomas de la forma

$$\neg\neg\varphi \to \varphi$$

para cada fórmula φ. Así $\mathbb{V}_{\mathbf{InvL}} = \mathbb{IV}_{\mathbf{L}}$.

Siguiendo en parte la nomenclatura utilizada en [GalJipKowOno07], dadas dos extensiones de $\mathbf{FL_{ew}}$, $\mathbf{L}$ y $\mathbf{K}$, decimos que **vale la propiedad de traducción de Kolmogorov para L con respecto a K** si para todo conjunto de fórmulas (términos) $\Sigma \cup \{\varphi\}$,

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi \text{ si y sólo si } \widetilde{\Sigma} \vdash_{\mathbf{L}} \widetilde{\varphi}.$$

Para probar la equivalencia entre las versiones algebraica y lógica de la propiedad de traducción de Kolmogorov necesitaremos del siguiente lema técnico.

Lema 4.5.5 *Sea $E = \{\alpha_i : i \in I\} \cup \{\beta_i : i \in I\} \cup \{\varphi, \psi\}$ un conjunto de fórmulas tales que $\vdash_{\mathbf{FL_{ew}}} \neg\neg\chi \to \chi$ para todo $\chi \in E$. Entonces, son equivalentes:*

(1) $\{\alpha_i * \beta_i : i \in I\} \vdash_{\mathbf{FL_{ew}}} \varphi * \psi$,

(2) $\{\neg\neg(\alpha_i * \beta_i) : i \in I\} \vdash_{\mathbf{FL_{ew}}} \neg\neg(\varphi * \psi)$.

Demostración. A partir de las hipótesis resulta que $\models_{\mathbb{RL}} \neg\neg\chi = \chi$ para todo $\chi \in E$. Utilizando la algebrización de $\mathbf{FL_{ew}}$, basta probar la equivalencia entre:

(1) $\{\alpha_i * \beta_i = 1 : i \in I\} \models_{\mathbb{RL}} \varphi * \psi = 1$,

(2) $\{\neg\neg(\alpha_i * \beta_i) = 1 : i \in I\} \models_{\mathbb{RL}} \neg\neg(\varphi * \psi) = 1$.

Sea X el conjunto de variables que aparecen en las fórmulas de E. Consideremos un álgebra $\mathbf{A} \in \mathbb{RL}$ y una interpretación $h : X \to A$. Para todo $\chi \in E$, denotamos con $h(\chi)$ a la interpretación de χ en $\mathbf{A}$, es decir, si $\chi = \chi(x_1, \ldots, x_n)$, $h(\chi) = \chi^{\mathbf{A}}(h(x_1), \ldots, h(x_n))$. Notemos que, por hipótesis, $h(\chi) = h(\neg\neg\chi) = \neg\neg h(\chi)$ para todo $\chi \in E$.

Probemos primero la implicación (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que $h(\neg\neg(\alpha_i * \beta_i)) = 1$ para todo $i \in I$. Luego, como $\neg\neg(h(\alpha_i) * h(\beta_i)) = 1$, deducimos que $h(\alpha_i) = \neg\neg h(\alpha_i) \geq \neg\neg(h(\alpha_i) * h(\beta_i)) = 1$; de donde $h(\alpha_i) = 1$. Análogamente, $h(\beta_i) = 1$ para todo $i \in I$. Luego $h(\alpha_i * \beta_i) = h(\alpha_i) * h(\beta_i) = 1$ para todo $i \in I$. Por hipótesis $h(\varphi * \psi) = 1$, lo cual implica inmediatamente que $h(\neg\neg(\varphi * \psi)) = \neg\neg h(\varphi * \psi) = 1$.

Debemos probar ahora la implicación recíproca. Supongamos que $h(\alpha_i * \beta_i) = 1$ para todo $i \in I$. Entonces $h(\neg\neg(\alpha_i * \beta_i)) = \neg\neg h(\alpha_i * \beta_i) = 1$ para todo $i \in I$. Luego, por hipótesis, $h(\neg\neg(\varphi * \psi)) = \neg\neg(h(\varphi) * h(\psi)) = 1$. Por lo tanto, $h(\varphi) = \neg\neg h(\varphi) \geq \neg\neg(h(\varphi) * h(\psi)) = 1$ y lo mismo sucede con $h(\psi)$. Así $h(\varphi * \psi) = h(\varphi) * h(\psi) = 1$. □

Con este lema, las propiedades de algebrización **al1)-al4)** y el Teorema 4.5.1, deducimos finalmente el siguiente resultado.

Teorema 4.5.6 *Sean* $\mathbf{L}$ *y* $\mathbf{K}$ *extensiones axiomáticas de* $\mathbf{FL_{ew}}$*. Son equivalentes:*

(1) *vale la propiedad de traducción de Kolmogorov para* $\mathbf{L}$ *con respecto a* $\mathbf{K}$*,*

(2) *vale la propiedad de traducción de Kolmogorov para* $\mathbb{V}_{\mathbf{L}}$ *con respecto a* $\mathbb{V}_{\mathbf{K}}$*,*

(3) $\mathbf{K} = \mathbf{L}_{S(\mathbb{V}^r_{\mathbf{L}})}$*, es decir,* $\mathbb{V}_{\mathbf{K}} = S(\mathbb{V}^r_{\mathbf{L}})$*.*

Demostración. Supongamos que (1) es válido y consideremos $E \cup \{\alpha = \beta\}$ un conjunto de ecuaciones. Usando las algebrizaciones de $\mathbf{L}$ y $\mathbf{K}$ junto con el lema previo, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
& E \models_{\mathbb{V}_{\mathbf{K}}} \alpha = \beta \\
& \iff \{(\gamma \to \chi) * (\chi \to \gamma) : \gamma = \chi \in E\} \vdash_{\mathbf{K}} (\alpha \to \beta) * (\beta \to \alpha) \\
& \iff \{\neg\neg((\widetilde{\gamma} \to \widetilde{\chi}) * (\widetilde{\chi} \to \widetilde{\gamma})) : \gamma = \chi \in E\} \vdash_{\mathbf{L}} \neg\neg((\widetilde{\alpha} \to \widetilde{\beta}) * (\widetilde{\beta} \to \widetilde{\alpha})) \\
& \iff \{(\widetilde{\gamma} \to \widetilde{\chi}) * (\widetilde{\chi} \to \widetilde{\gamma}) : \gamma = \chi \in E\} \vdash_{\mathbf{L}} ((\widetilde{\alpha} \to \widetilde{\beta}) * (\widetilde{\beta} \to \widetilde{\alpha}) \\
& \iff \widetilde{E} \models_{\mathbb{V}_{\mathbf{L}}} \widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta}.
\end{aligned}
$$

Esto muestra que (1) implica (2). De la misma forma podemos probar que (2) implica (1), aunque, en este caso, el lema previo no es necesario. Finalmente, la equivalencia entre (2) y (3) se sigue directamente del Teorema 4.5.1 y las propiedades de algebrización. □

Observación 4.5.7 La extensión $\mathbf{L}_{S(\mathbb{V}^r_{\mathbf{L}})}$ puede caracterizarse en forma directa en términos de $\mathbf{L}$. De hecho, $\mathbf{L}_{S(\mathbb{V}^r_{\mathbf{L}})}$ es la extensión axiomática de $\mathbf{FL_{ew}}$ que resulta de agregar los axiomas $\{\varphi : \vdash_{\mathbf{L}} \widetilde{\varphi}\}$.

Si $\mathbf{L}$ es una extensión axiomática de $\mathbf{FL_{ew}}$, decimos que **vale la propiedad de traducción de Kolmogorov para $\mathbf{L}$** si para todo conjunto de fórmulas $\Sigma \cup \{\varphi\}$,

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{InvL}} \varphi \text{ si y sólo si } \widetilde{\Sigma} \vdash_{\mathbf{L}} \widetilde{\varphi}.$$

Por lo tanto, de **al1)-al4)** y el Teorema 4.5.2, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.5.8 *Sea* $\mathbf{L}$ *una extensión axiomática de* $\mathbf{FL_{ew}}$*. Son equivalentes:*

(1) *vale la propiedad de traducción de Kolmogorov para* $\mathbf{L}$*,*

(2) *vale la propiedad de traducción de Kolmogorov en* $\mathbb{V}_{\mathbf{L}}$*,*

(3) *para cualquier fórmula* φ*,* $\vdash_{\mathbf{L}} \widetilde{\varphi}$ *implica* $\vdash_{\mathbf{InvL}} \varphi$*.*

Parte II

Álgebras de implicación de Łukasiewicz

Capítulo 5

Preliminares

En la segunda parte de este trabajo estudiamos los subreductos implicativos de las MV-álgebras, que denominamos *álgebras de implicación de Łukasiewicz.* Una subclase importante de dichas álgebras la constituyen los subreductos implicativos de las álgebras de Boole, conocidos como *álgebras de implicación* o *álgebras de Tarski.* Abordaremos algunos problemas específicos para esta clase de álgebras y también las utilizaremos como punto de partida para estudiar propiedades de las álgebras de implicación de Łukasiewicz.

En la Sección 5.1 daremos la definición y las propiedades básicas de las álgebras de implicación de Łukasiewicz. También repasaremos el concepto de filtro implicativo y diversas propiedades de éstos. Introduciremos además las álgebras de implicación como una subvariedad particular y veremos algunas propiedades especiales que poseen éstas. En la Sección 5.2 incluimos, a modo de referencia, la definición de los productos subdirectos globales y algunas de sus propiedades, puesto que serán una herramienta de utilidad en los capítulos posteriores.

5.1. Álgebras de implicación de Łukasiewicz

Las álgebras de implicación de Łukasiewicz son la contrapartida algebraica del fragmento implicativo de la lógica super-Łukasiewicz (ver [Kom78a, Kom78b]). De hecho, veremos que son la clase de los $\{\to, 1\}$-subreductos de las MV-álgebras. También son llamadas C-álgebras en [Kom78a, Kom78b] y álgebras de residuación de Łukasiewicz en [BerBlo04].

Concretamente, llamamos **álgebra de implicación de Łukasiewicz** a un álgebra $\mathbf{A} = \langle A, \to, 1\rangle$ de tipo $(2, 0)$ que satisface las siguientes ecuaciones para todo $x, y, z \in A$:

(Ł1) $1 \to x = x$,

(Ł2) $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$,

(Ł3) $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$,

(Ł4) $(x \to y) \to (y \to x) = y \to x$.

Denotamos con $\mathbb{L}$ a la clase de todas las álgebras de implicación de Łukasiewicz, que claramente constituye una variedad.

Lema 5.1.1 *Dada* $\mathbf{A} \in \mathbb{L}$*, las siguientes propiedades valen cualesquiera sean* $x, y, z \in A$*.*

(a) $x \to x = 1$,

(b) $x \to 1 = 1$,

(c) *si* $x \to y = 1$ *e* $y \to x = 1$*, entonces* $x = y$*,*

Demostración. Para probar (a), utilizamos (Ł2) y (Ł1) para obtener

$$\begin{aligned} 1 &= (1 \to 1) \to ((1 \to x) \to (1 \to x)) \\ &= 1 \to (x \to x) \\ &= x \to x. \end{aligned}$$

Usando también el axioma (Ł3) resulta el item (b):

$$\begin{aligned} 1 &= (1 \to x) \to ((x \to 1) \to (1 \to 1)) \\ &= x \to ((x \to 1) \to 1)) \\ &= x \to ((1 \to x) \to x)) \\ &= x \to (x \to x) \\ &= x \to 1. \end{aligned}$$

El axioma (Ł3) implica el item (c), pues:

$$\begin{aligned} x &= 1 \to x \\ &= (y \to x) \to x \\ &= (x \to y) \to y) \\ &= 1 \to y \\ &= y. \end{aligned}$$

□

Definimos sobre **A** la relación $\leq$ dada por

$$x \leq y \text{ si y sólo si } x \to y = 1.$$

Dicha relación es un orden parcial que denominamos *orden natural de* **A**. En efecto, la transitividad de $\leq$ resulta inmediatamente de los axiomas (Ł1) y (Ł2), y la reflexividad y la antisimetría son las propiedades (a) y (c) del lema anterior. Observemos también que la propiedad (b) del lema anterior afirma que 1 es último elemento en **A**.

Reunimos en el siguiente lema diversas propiedades válidas en toda álgebra de implicación de Łukasiewicz.

Lema 5.1.2 *Dada* $\mathbf{A} \in \mathbb{L}$*, las siguientes propiedades valen cualesquiera sean* $x, y, z \in A$*.*

(a) *si* $x \leq y$*, entonces* $y \to z \leq x \to z$*,* (*b*) *si* $x \leq y$, *entonces* $z \to x \leq z \to y$,

(*c*) $x \leq y \to x$,

(*d*) $x \leq (x \to y) \to y$,

(*e*) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$.

Demostración. Los ítems (a) y (b) resultan inmediatamente del axioma (Ł2).

Usando el axioma (Ł2) y las propiedades del lema anterior resulta el item (c):

$$\begin{aligned} 1 &= (y \to 1) \to ((1 \to x) \to (y \to x)) \\ &= 1 \to (x \to (y \to x)) \\ &= x \to (y \to x). \end{aligned}$$

El item (d) también resulta inmediatamente del axioma (Ł2) y las propiedades del lema anterior:

$$\begin{aligned} 1 &= (1 \to x) \to ((x \to y) \to (1 \to y)) \\ &= x \to ((x \to y) \to y)). \end{aligned}$$

Finalmente, para probar el ítem (e), observemos que, por el axioma (Ł2), tenemos que

$$y \to (x \to z) \leq ((x \to z) \to z) \to (y \to z),$$

y utilizando el inciso (a) del presente lema resulta

$$(((x \to z) \to z) \to (y \to z)) \to (x \to (y \to z)) \leq (y \to (x \to z)) \to (x \to (y \to z)).$$

Pero, por el inciso (d), sabemos que $x \leq (x \to z) \to z$, con lo cual, aplicando el inciso (a) nuevamente, resulta que

$$((x \to z) \to z) \to (y \to z) \leq x \to (y \to z),$$

es decir, $(((x \to z) \to z) \to (y \to z)) \to (x \to (y \to z)) = 1$. Esto muestra entonces que $(y \to (x \to z)) \to (x \to (y \to z)) = 1$, esto es, $y \to (x \to z) \leq x \to (y \to z)$. La desigualdad opuesta resulta de manera análoga. □

Ejemplo 5.1.3 Los ejemplos más básicos de álgebras de implicación de Łukasiewicz son los $\{\to, 1\}$-reductos de las MV-álgebras totalmente ordenadas finitas. Dado $n \geq 1$, denotamos con $\mathbf{L}_n$ al $\{\to, 1\}$-reducto de la MV-cadena $\mathbf{S}_n$. El universo de $\mathbf{L}_n$ es el conjunto de números racionales $L_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$, y para $a, b \in L_n$, $a \to b = \min(1, 1 - a + b)$. Notemos que $\mathbf{L}_n$ está generada por $\{0, \frac{n-1}{n}\}$ y que $\mathbf{L}_n$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{L}_m$ si y sólo si $n \leq m$.

Otro ejemplo importante es el $\{\to, 1\}$-reducto del álgebra de Chang $\mathbf{S}_1^\omega$ (ver Sección 1.3 y [Cha58, p. 474]). A dicho reducto lo denotamos $\mathbf{L}_1^\omega$ y su universo está dado por

$$L_1^\omega = \{(0, y) : y \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{(1, -y) : y \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

y la implicación en $\mathbf{L}_1^\omega$ está definida del siguiente modo:

$$(x,y) \to (z,u) = \begin{cases} (1,0) & \text{si } x=0, z=1, \\ (1, \text{mín}(0, u-y)) & \text{si } x=z=0 \text{ ó } x=z=1, \\ (0, u-y) & \text{si } x=1, z=0. \end{cases}$$

$\mathbf{L}_1^\omega$ está generada por $\{(0,0),(1,-1)\}$, por lo que también es finitamente generada.

Observemos que el conjunto $L_\omega = \{(1,-y) : y \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es un subuniverso de $\mathbf{L}_1^\omega$. La subálgebra correspondiente $\mathbf{L}_\omega$ es un ejemplo de un álgebra de implicación de Łukasiewicz que no es finitamente generada ni acotada. Es posible probar que toda subálgebra infinita de $\mathbf{L}_\omega$ es isomorfa a la propia $\mathbf{L}_\omega$. Por otra parte, para cada $a \in L_\omega$, el conjunto $[a) = \{x \in L_\omega : x \geq a\}$ es un subuniverso cuya subálgebra asociada es isomorfa a una cadena finita $\mathbf{L}_n$. En particular, esto muestra que, para cada $n \geq 1$, $\mathbf{L}_n$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{L}_\omega$. Se puede ver que esto no es una propiedad particular de $\mathbf{L}_\omega$, sino que toda álgebra de implicación de Łukasiewicz totalmente ordenada *infinita* contiene una copia de $\mathbf{L}_n$ para todo $n \geq 1$ (ver [Kom78b]).

Dada $\mathbf{A} \in \mathbb{L}$ y dado cualquier par de elementos $x, y \in A$, existe siempre el supremo $x \vee y$ en $\mathbf{A}$ y está dado por el término $(x \to y) \to y$. Más aún, si $x, y, z \in A$ y $z \leq x$, $z \leq y$, entonces existe el ínfimo entre x e y y está dado por $x \wedge y = ((x \to z) \vee (y \to z)) \to z$. Observemos que, en general, no existe el ínfimo de todo par de elementos. Para ello, basta considerar, por ej., la subálgebra de $\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_1$ que resulta de quitarle el primer elemento. Observemos que, por esta razón, el ínfimo no puede estar dado por un término, sino que se puede calcular utilizando un polinomio que depende de una cota inferior de los elementos.

Las operaciones de reticulado satisfacen las siguientes propiedades:

- $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$,
- $(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$,
- $z \to (x \vee y) = (z \to x) \vee (z \to y)$,

donde el ínfimo que aparece en la segunda ecuación siempre existe.

Por otra parte, si para $a, b \in A$ existe el ínfimo $a \wedge b$, entonces, para todo $c \in A$,

- $(a \wedge b) \to c = (a \to c) \vee (b \to c)$,
- $c \to (a \wedge b) = (c \to a) \wedge (c \to b)$.

Una propiedad fundamental de estas álgebras consiste en que para cada $c \in A$, podemos definir sobre el conjunto $[c) = \{x \in A : x \geq c\}$ una estructura de MV-álgebra. En efecto, definimos $\mathbf{A}_c = \langle [c), \wedge_c, \vee_c, *_c, \to_c, c, 1\rangle$ donde:

- $x \wedge_c y := ((x \to c) \vee (y \to c)) \to c$,
- $x \vee_c y := x \vee y$,
- $x *_c y := (x \to (y \to c)) \to c$,

- $x \to_c y := x \to y$.

Se puede probar en forma directa que $\mathbf{A}_c$ es una MV-álgebra. Esta propiedad permite probar que toda álgebra de implicación de Łukasiewicz es un $\{\to, 1\}$-subreducto de una MV-álgebra (ver [Fer92, Teorema 3.10]). Otra consecuencia inmediata de esta propiedad es que sobre una cadena de $n+1$ elementos existe una única estructura de álgebra de implicación de Łukasiewicz, la correspondiente al álgebra $\mathbf{L}_n$. En efecto, si $\mathbf{A}$ es un álgebra de implicación de Łukasiewicz totalmente ordenada con $n+1$ elementos y 0 es su primer elemento, entonces $\mathbf{A}_0$ es una MV-álgebra totalmente ordenada de $n+1$ elementos, con lo cual $\mathbf{A}_0 \cong \mathbf{S}_n$, de donde $\mathbf{A} \cong \mathbf{S}_n \upharpoonright \{\to, 1\} = \mathbf{L}_n$.

Las álgebras de implicación de Łukasiewicz son 1-regulares, es decir, las congruencias sobre estas álgebras están determinadas por la clase del 1. Si θ es una congruencia sobre $\mathbf{A} \in \mathbb{L}$, la clase $[1]_\theta$ resulta un **filtro implicativo**. Esta noción es exactamente la misma que la dada anteriormente para reticulados residuados, es decir, un conjunto $F \subseteq A$ es un filtro implicativo de $\mathbf{A}$ si contiene a 1 y siempre que $a, a \to b \in F$, se tiene que $b \in F$. Observemos que todo filtro implicativo es creciente con respecto al orden natural, es decir, si $a \in F$ y $a \leq b$, entonces $b \in F$, pues $a \to b = 1 \in F$. Notamos $Fil(\mathbf{A})$ al conjunto de filtros implicativos de $\mathbf{A}$.

Podemos asociar entonces un filtro implicativo con cualquier congruencia sobre $\mathbf{A}$. Recíprocamente, dado cualquier filtro implicativo F de $\mathbf{A}$, la relación

$$\theta_F = \{(a, b) \in A^2 : a \to b, b \to a \in F\}$$

es una congruencia sobre $\mathbf{A}$ tal que $F = [1]_{\theta_F}$. De hecho, la correspondencia $\theta \mapsto [1]_\theta$ da un isomorfismo de orden entre la familia de todas las relaciones de congruencia sobre $\mathbf{A}$ y la familia de todos los filtros implicativos de $\mathbf{A}$, ambas familias ordenadas por inclusión. Por esta razón, escribimos frecuentemente $\mathbf{A}/F$ en lugar de $\mathbf{A}/\theta_F$. También escribimos $a \equiv_F b$ en lugar de $(a, b) \in \theta_F$, y $[a]_F$ en lugar de $[a]_{\theta_F}$.

Dados dos elementos a, b en un filtro implicativo F, se tiene que si existe el ínfimo $a \wedge b$, entonces dicho ínfimo también pertenece a F. Para probar este hecho basta observar que $a \to (b \to (a \wedge b)) = 1$. Otra propiedad notable de los filtros implicativos es que, por contener a 1 y ser cerrados bajo $\to$, son el universo de una subálgebra de $\mathbf{A}$ que denotamos $\mathbf{F}$. Es importante remarcar que esto no sucede en estructuras acotadas en las que el primer elemento es una constante en el lenguaje.

Ejemplo 5.1.4 Claramente $\{1\}$ y A son filtros implicativos para toda álgebra de implicación de Łukasiewicz $\mathbf{A}$.

Se puede verificar fácilmente que $\mathbf{L}_\omega$ y $\mathbf{L}_n$, para $n \geq 1$, no poseen filtros implicativos distintos de los triviales, por lo que estas álgebras son simples.

Por su parte, el único filtro implicativo no trivial de $\mathbf{L}_1^\omega$ es L_ω y se ve inmediatamente que $\mathbf{L}_1^\omega / L_\omega \cong \mathbf{L}_1$. Luego $\mathbf{L}_1^\omega$ es un ejemplo de álgebra subdirectamente irreducible, pero no simple.

Dada un álgebra de implicación de Łukasiewicz $\mathbf{A}$ y un subconjunto $X \subseteq A$, la intersección de todos los filtros implicativos que contienen a X es nuevamente un filtro implicativo. Llamamos a este menor filtro implicativo que contiene a X **filtro implicativo generado por** X y lo denotamos con $Fg^{\mathbf{A}}(X)$. Dicho filtro implicativo se puede caracterizar de la siguiente manera:

$$Fg^{\mathbf{A}}(X) = \{a \in A : x_1 \to (x_2 \to \ldots \to (x_n \to a) \ldots) = 1, \text{ para } n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X\}.$$

Si $X = \{x\}$, escribimos $Fg^{\mathbf{A}}(x)$ en lugar de $Fg^{\mathbf{A}}(\{x\})$. Cuando no hay lugar a confusión, omitimos el superíndice $\mathbf{A}$.

Para simplificar un poco la notación, definimos por recurrencia el termino $x \overset{n}{\to} y$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

- $x \overset{0}{\to} y = y$,
- $x \overset{n+1}{\to} y = x \to (x \overset{n}{\to} y)$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Con esta notación, observemos que para $x \in A$,

$$Fg(x) = \{a \in A : x \overset{n}{\to} a = 1, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

También se puede probar fácilmente por inducción sobre n que vale la siguiente ecuación

$$(x \vee y) \overset{n}{\to} z = \bigwedge_{\substack{k+r=n \\ k,r \geq 0}} (x \overset{k}{\to} (y \overset{r}{\to} z)).$$

El conjunto ordenado de filtros implicativos $Fil(\mathbf{A})$ es un reticulado *distributivo*, donde las operaciones de ínfimo y supremo están dadas por

$$F_1 \wedge F_2 = F_1 \cap F_2, \qquad F_1 \vee F_2 = Fg^{\mathbf{A}}(F_1 \cup F_2).$$

Como consecuencia de esto las álgebras de implicación de Łukasiewicz poseen la propiedad de distributividad de congruencias.

Proposición 5.1.5 *Dada un álgebra de implicación de Łukasiewicz* $\mathbf{A}$ *y dos elementos* $x_1, x_2 \in A$, $Fg(x_1) \cap Fg(x_2) = Fg(x_1 \vee x_2)$.

Demostración. Como $x_i \leq x_1 \vee x_2$ para $i = 1, 2$, es claro que $Fg(x_1 \vee x_2) \subseteq Fg(x_1) \cap Fg(x_2)$. Recíprocamente, consideremos $x \in Fg(x_1) \cap Fg(x_2)$. Luego existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x_1 \overset{n}{\to} x = 1$ y $x_2 \overset{m}{\to} x = 1$. Veamos entonces que $(x_1 \vee x_2) \overset{n+m}{\to} x = 1$, lo que probaría que $x \in Fg(x_1 \vee x_2)$ y concluiría la demostración. En efecto, sabemos que

$$(x_1 \vee x_2) \overset{n+m}{\to} x = \bigwedge_{\substack{k+r=n+m \\ k,r \geq 0}} (x_1 \overset{k}{\to} (x_2 \overset{r}{\to} x)).$$

Como $k + r = n + m$, se tiene que $k \geq n$ ó $r \geq m$, de donde obtenemos que $x_1 \overset{k}{\to} (x_2 \overset{r}{\to} x) = 1$ para todo $k, r \geq 0$ tales que $k + r = n + m$. Luego $(x_1 \vee x_2) \overset{n+m}{\to} x = 1$. □

Observemos que la proposición anterior nos asegura que 1 es supremo-irreducible en las álgebras finitamente subdirectamente irreducibles. Además, como vale la ecuación $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$, resulta entonces que los miembros finitamente subdirectamente irreducibles de $\mathbb{L}$ son precisamente los miembros totalmente ordenados. En particular, las álgebras subdirectamente irreducibles son totalmente ordenadas.

Proposición 5.1.6 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra de implicación de Łukasiewicz y* F *un filtro implicativo de* $\mathbf{A}$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathbf{A}/F$ *es totalmente ordenado,*

(2) *para todo* $x, y \in A$*,* $x \to y \in F$ *o* $y \to x \in F$*,*

(3) *para todo* $x, y \in A$*, si* $x \vee y \in F$*, entonces* $x \in F$ *o* $y \in F$*.*

Demostración. La única implicación no trivial es (3) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que (3) es válido y consideremos $[x]_F, [y]_F \in A/F$. Como $(x \to y) \vee (y \to x) = 1 \in F$, o bien $x \to y \in F$ o bien $y \to x \in F$, así que $[x]_F \leq [y]_F$ o $[y]_F \leq [x]_F$. □

Un filtro implicativo que satisface las condiciones de la proposición previa se llama un filtro implicativo **primo**. La siguiente es una de las propiedades fundamentales de los filtros implicativos primos.

Teorema 5.1.7 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra de implicación de Łukasiewicz. Sea* F *un filtro implicativo y* M *un subconjunto de* A *cerrado bajo* $\vee$ *tal que* $M \cap F = \emptyset$*. Entonces existe un filtro implicativo primo* P *tal que* $F \subseteq P$ *y* $P \cap M = \emptyset$*.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los filtros G de $\mathbf{A}$ tales que $F \subseteq G$ y $G \cap M = \emptyset$. Claramente $\mathcal{F}$ es no vacía pues $F \in \mathcal{F}$. Es fácil verificar que estamos en condiciones de aplicar el Lema de Zorn y concluir que existe un filtro maximal P en la familia $\mathcal{F}$. Afirmamos que P es un filtro primo.

En efecto, supongamos que $x_1 \vee x_2 \in P$, $x_1, x_2 \notin P$ para algún par de elementos $x_1, x_2 \in A$. Como P es maximal en $\mathcal{F}$, existe $m_i \in M$, tal que $m_i \in Fg(P \cup \{x_i\})$, $i = 1, 2$. Como M es cerrado bajo supremos, consideremos $m = m_1 \vee m_2 \in M$. Tenemos entonces que $m \in Fg(P \cup \{x_1\}) \cap Fg(P \cup \{x_2\})$.

Sin embargo, observemos que

$$\begin{aligned} Fg(P \cup \{x_1\}) \cap Fg(P \cup \{x_2\}) &= (P \vee Fg(x_1)) \cap (P \vee Fg(x_2)) \\ &= P \vee (Fg(x_1) \cap Fg(x_2)) \\ &= P \vee Fg(x_1 \vee x_2) \\ &= P. \end{aligned}$$

Luego $m \in P$, lo que constituye una contradicción. □

El reticulado de todas las subvariedades de $\mathbb{L}$ fue descripto en [Kom78b] y resulta una cadena de tipo $\omega + 1$:

$$\mathbb{T} \subsetneq V(\mathbf{L}_1) \subsetneq \ldots \subsetneq V(\mathbf{L}_n) \subsetneq \ldots \subsetneq V(\mathbf{L}_\omega) = V(\mathbf{L}_1^\omega) = \mathbb{L},$$

donde $\mathbb{T}$ representa la variedad trivial. Notamos $\mathbb{L}_n = V(\mathbf{L}_n)$ para $n \geq 1$.

Álgebras de implicación o álgebras de Tarski

Llamamos **álgebras de implicación**, o también **álgebras de Tarski**, a los miembros de la subvariedad de $\mathbb{L}$ generada por $\mathbf{L}_1$. Notamos $\mathbb{I} = V(\mathbf{L}_1)$. Dichas álgebras fueron estudiadas inicialmente por Abbot (ver [Abb68, Abb67] y también [Ras74]), quien mostró su equivalencia con las álgebras semi-booleanas, es decir, los semirreticulados superiores cuyos filtros de orden principales son reticulados booleanos. De hecho, se puede ver que las álgebras de implicación son exactamente los $\{\to, 1\}$-subreductos de las álgebras de Boole.

Ecuacionalmente se puede definir a las álgebras de implicación como la subvariedad de $\mathbb{L}$ determinada por la ecuación

$$(x \to y) \to x = x.$$

Las siguientes son algunas propiedades válidas en las álgebras de implicación que no son válidas en general en $\mathbb{L}$:

- $x \vee (x \to y) = 1$,
- $x \vee y = 1$ si y sólo si $x \to y = y$,
- $x \to (x \to y) = x \to y$.

$\mathbb{I}$ es una variedad localmente finita, 3-permutable y 3-distributiva, pero no es permutable (ver [Mit71/72]). Todos sus miembros son semisimples, de hecho, son precisamente las álgebras de Hilbert semisimples (ver [Abb67] y [Die65]), y $\mathbf{L}_1$ es, a menos de isomorfismos, la única álgebra de implicación subdirectamente irreducible.

5.2. Productos subdirectos globales

Una herramienta que utilizaremos en los capítulos posteriores para estudiar la estructura de las álgebras de implicación de Łukasiewicz la constituyen los productos subdirectos globales. Éstos son una clase especial de representaciones subdirectas y su utilidad radica en que preservan cierto tipo de sentencias de primer orden en las que estaremos especialmente interesados en el Capítulo 9. El trabajo principal sobre estos productos es [KraCla79]. También han sido muy estudiados estudiado por otros autores (ver [Vol79], [Vag92], [GraVag96]).

Sea $\mathbf{A} \leq \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ un producto subdirecto. Un **sistema de emparche** en $\mathbf{A}$ es un par $(\Phi, \{a_F : F \in \Phi\})$, donde

- Φ es una familia de subconjuntos de I,
- $\{a_F : F \in \Phi\} \subseteq A$,
- $\bigcup \Phi = I$,
- $F \cap G \subseteq E(a_F, a_G)$ para todo $F, G \in \Phi$, donde $E(a_F, a_G) = \{i \in I : a_F(i) = a_G(i)\}$ es el *ecualizador* del par (a_F, a_G).

Decimos que el sistema de emparche es **finito** si Φ es finito.

Una **solución** del sistema de emparche $(\Phi, \{a_F : F \in \Phi\})$ es un elemento $a \in A$ tal que $F \subseteq E(a, a_F)$ para todo $F \in \Phi$. Es claro que cuando existe solución, ésta es única.

Dado $\tau \subseteq \mathcal{P}(I)$ decimos que **A emparcha (finitamente) sobre** τ si todo sistema de emparche (finito) $(\Phi, \{a_F : F \in \Phi\})$ con $\Phi \subseteq \tau$ tiene solución.

Dado un producto subdirecto $\mathbf{A} \leq \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$, decimos que es un **producto subdirecto global** si existe una topología τ sobre I tal que:

- $E(a, b) \in \tau$ para todo $a, b \in A$,
- **A** emparcha sobre τ.

Esta definición es equivalente a la dada originalmente en términos de secciones globales de haces (ver [KraCla79]).

Varios autores han obtenido resultados de representación de álgebras en productos subdirectos globales. El resultado que citamos a continuación se puede hallar en [Vag92] y da una representación subdirecta global para álgebras aritméticas en términos de álgebras finitamente subdirectamente irreducibles.

Teorema 5.2.1 *Sea* **A** *un álgebra aritmética, es decir, un álgebra con permutabilidad y distributividad de congruencias, y supongamos que la clase* $V(\mathbf{A})_{fsi} \cup \{$*álgebras triviales*$\}$ *es una clase universal, es decir, se puede axiomatizar utilizando sentencias de primer orden universales. Sea* Σ *la familia de congruencias que consiste en la congruencia* $A \times A$ *y todas las congruencias ínfimo-irreducibles de* $Con(\mathbf{A})$*. Entonces la inmersión*

$$A \hookrightarrow \prod_{\theta \in \Sigma} A/\theta$$

es un producto subdirecto global bajo la topología de ecualizadores, es decir, la topología generada por los conjuntos $e(a, b) = \{\theta \in \Sigma : (a, b) \in \theta\}$ *para* $a, b \in A$.

Demostración. Esto se sigue del hecho de que todo sistema de congruencias es resoluble en un álgebra aritmética (condición conocida también como *teorema chino del resto*) y el Teorema 2.1 de [GraVag96]. $\square$

Los productos subdirectos globales tienen una importante propiedad de preservación (ver [Vol79]). La siguiente es la propiedad básica que utilizaremos.

Proposición 5.2.2 *Sea* $\mathbf{A} \leq \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ *un producto subdirecto global. Dados términos* $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_k$ *en las variables* $x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m$*, consideremos la sentencia de primer orden*

$$\varphi := (\forall x_1, \ldots, x_n)(\exists! z_1, \ldots, z_m)\left(\mathop{\&}_{j=1}^{k} p_i = q_i\right).$$

Luego si $\mathbf{A}_i \models \varphi$ *para todo* $i \in I$*, entonces* $\mathbf{A} \models \varphi$.

Capítulo 6

Representaciones

Para estudiar cualquier tipo de estructura siempre es conveniente contar con alguna representación clara de las mismas, por ejemplo en términos de estructuras más conocidas. Sabemos que toda álgebra de implicación de Łukasiewicz es una subálgebra implicativa de una MV-álgebra, pero es natural pensar si se puede obtener algún tipo de representación más precisa de las primeras en términos de las segundas. Veremos en la Sección 6.1 que esto es posible en el caso finito. Más precisamente probaremos que toda álgebra de implicación de Łukasiewicz finita se puede pensar como un subconjunto creciente en alguna MV-álgebra finita, que necesariamente es un producto finito de cadenas finitas. Caracterizaremos asimismo las congruencias en términos de subconjuntos de coátomos y veremos que toda imagen homomorfa de un álgebra de implicación de Łukasiewicz finita es isomorfa a una subálgebra. Estos resultados serán de gran utilidad en los capítulos posteriores.

Otra forma de representar estructuras es a través de dualidades topológicas. Los casos más conocidos son el de las álgebras de Boole y el de los reticulados distributivos. Las primeras son dualmente equivalentes a los espacios de Stone y las segundas a los espacios de Priestley (ver [DavPri02] y las referencias dadas allí). Para la subvariedad $\mathbb{I}$ de álgebras de implicación, ya se había mostrado en [AbaDiaTor04] que existe una dualidad topológica. Sin embargo, para definir dicha representación era necesario sumergir el álgebra en cuestión dentro de un álgebra de Boole. En la Sección 6.2 daremos una nueva representación topológica para las álgebras de implicación con la ventaja de que es intrínseca, en el sentido de que se define sólo a partir de subconjuntos (filtros implicativos maximales) de la propia álgebra. Veremos la relación con la dualidad dada en [AbaDiaTor04] y caracterizaremos las congruencias y los productos directos en términos de los espacios topológicos asociados. Todos estos resultados están publicados en [AbaCasDia10].

6.1. Álgebras de implicación de Łukasiewicz finitas

Damos aquí un teorema de representación para las álgebras de implicación de Łukasiewicz finitas que resulta muy útil para estudiar dichas álgebras. En lo que sigue nos referimos al conjunto de los elementos complementados de un reticulado como el *esqueleto booleano* de dicho reticulado.

Teorema 6.1.1 *Dada un álgebra de implicación de Łukasiewicz* $\mathbf{A}$*, existe una MV-álgebra finita* $\mathbf{B}$ *(que es un producto directo de* $\mathbf{L}_k$*'s) tal que* A *es un subconjunto creciente de* $\mathbf{B}$ *y tal que todo elemento de* B *es ínfimo de elementos de* A*. Más aún,* A *contiene los coátomos del esqueleto booleano de* $\mathbf{B}$*.*

Demostración. Como $\mathbf{A}$ es finita, es producto subdirecto de cadenas finitas, es decir, podemos considerar $\mathbf{A}$ como un producto subdirecto de $\mathbf{L}_{k_1}, \ldots, \mathbf{L}_{k_n}$. Como cada $\mathbf{L}_{k_i}$ es simple, $\mathbf{L}_{k_i} \cong \mathbf{A}/M_i$ para algún filtro implicativo maximal M_i de $\mathbf{A}$. Por la condición de producto subdirecto, se debe tener que $\bigcap_i M_i = \{1\}$. Más aún, podemos suponer que para cada j, $\bigcap_{i \neq j} M_i \neq \{1\}$, pues, en caso contrario, podríamos borrar el j-éismo factor del producto subdirecto.

En lo que sigue identificaremos $\mathbf{A}$ con su imagen en el producto $\prod_{i=1}^n \mathbf{L}_{k_i}$. Considerando este producto como la MV-álgebra $\prod_{i=1}^n \mathbf{S}_{k_i}$ (recordar que $\mathbf{L}_{k_i} = \mathbf{S}_{k_i} \upharpoonright \{\rightarrow, 1\}$), podemos definir el conjunto B que consta de los elementos del producto $\prod_{i=1}^n \mathbf{L}_{k_i}$ que son ínfimos de elementos de A. Denotemos con $\pi_i : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{L}_{k_i}$ la proyección de $\mathbf{A}$ sobre $\mathbf{L}_{k_i}$. Como π_i es sobreyectiva, existe $a_i \in A$ tal que $\pi_i(a_i) = 0$. Luego $\bigwedge_i a_i = 0$, con lo cual $0 \in B$. Más aún, si $\bigwedge_i a_i, \bigwedge_j a'_j \in B$,

$$\bigwedge_i a_i \rightarrow \bigwedge_j a'_j = \bigwedge_j \left(\bigvee_i (a_i \rightarrow a'_j) \right) \in B.$$

Esto muestra que B es cerrado bajo $\rightarrow$ y, por lo tanto, también bajo las operaciones dadas por $\neg x := x \rightarrow 0$ y $x \oplus y = \neg x \rightarrow y$. Luego B es un MV-subuniverso de $\prod \mathbf{L}_{k_i}$.

Afirmamos que $B = \prod L_{k_i}$. Notemos primero que B contiene los elementos $c_i = (1, \ldots, 1, 0, 1, \ldots, 1)$, con un 0 en la i-ésima posición y 1's en el resto de las componentes. En efecto, para cada i, $\bigcap_{j \neq i} M_j \neq \{1\}$, así que existe algún $d_i \in \bigcap_{j \neq i} M_j$, $d_i \neq 1$. Pero $d_i \notin M_i$, con lo cual $d_i = (1, \ldots, 1, x, 1, \ldots, 1)$, donde $x \neq 1$ ocupa la posición i-ésima. Recordemos que en $\mathbf{S}_{k_i}$ se tiene que $x^{k_i} = 0$ si $x \neq 1$. Luego, $d_i^{k_i} = c_i$. Esto muestra que c_i pertenece a B, pues d_i lo está.

Consideremos ahora un elemento arbitrario $b \in \prod L_{k_i}$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Como $\pi_i : A \rightarrow L_{k_i}$ es sobreyectiva, existe $a_i \in A$ tal que $\pi_i(a_i) = b_i$. Así que $(1, \ldots, 1, b_i, 1, \ldots, 1) = a_i \vee c_i \in B$, donde b_i está en la entrada i-ésima. Luego $b = \bigwedge_i (a_i \vee c_i) \in B$. Esto muestra que $B = \prod L_{k_i}$.

Probemos ahora que A es creciente en B. Para ello, sean $a \in A$ y $b \in B$ con $a \leq b$. Tenemos que $b = \bigwedge_i a_i$, $a_i \in A$. Como $a \leq a_i$ para todo i, el ínfimo de $\{a_i\}_i$ pertenece a A.

Ya hemos notado que existen $a_i \in A$ tales que $\pi_i(a_i) = 0$. Como A es creciente y $c_i \geq a_i$, $c_i \in A$. Así A contiene los coátomos del esqueleto booleano de B. □

Observación 6.1.2 Notemos que la MV-extensión en la que se sumerge $\mathbf{A}$ es única en el sentido siguiente: si $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ son dos tales extensiones, entonces existe un isomorfismo $\varphi : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ tal que φ es la identidad sobre A. En efecto, como A es creciente y contiene los coátomos del esqueleto booleano de $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$, los elementos ínfimo-irreducibles de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ coinciden. Luego, la afirmación se sigue inmediatamente.

Continuaremos utilizando la notación del último teorema a lo largo de esta sección, es decir, **A** denota un álgebra de implicación de Łukasiewicz *finita* inmersa como un subconjunto creciente en una MV-álgebra que es producto finito de cadenas $\mathbf{L}_k$'s. Más aún, A contiene a $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$, el conjunto de coátomos del esqueleto booleano de la MV-álgebra.

Veremos ahora que las congruencias sobre **A** se corresponden con los subconjuntos de C. Pero primero veamos una propiedad básica de las congruencias.

Proposición 6.1.3 *Sea F un filtro implicativo de un álgebra de implicación de Łukasiewicz $\mathbf{A}$. Si $a \equiv_F b$, $c \equiv_F d$ y los ínfimos $a \wedge c$, $b \wedge d$ existen, entonces $a \wedge c \equiv_F b \wedge d$.*

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned}(a \wedge c) \to (b \wedge d) &= ((a \wedge c) \to b) \wedge ((a \wedge c) \to d) \\ &= ((a \to b) \vee (c \to b)) \wedge ((a \to d) \vee (c \to d)).\end{aligned}$$

Como $a \to b, c \to d \in F$ y F es creciente y cerrado bajo $\wedge$ (cuando $\wedge$ está definido), resulta que $(a \wedge c) \to (b \wedge d) \in F$. Análogamente, $(b \wedge d) \to (a \wedge c)$ también pertenece a F. □

Proposición 6.1.4 *La aplicación $F \mapsto C \cap F$ da un isomorfimo de reticulados entre el reticulado de filtros implicativos de $\mathbf{A}$ y el reticulado de partes de C. La correspondiente aplicación inversa está dada por $U \mapsto A \cap [\bigwedge U)$, para $U \subseteq C$, donde $[x) = \{a \in A : a \geq x\}$.*

Demostración. Sea h la aplicación dada por $h(F) = C \cap F$ para cualquier filtro implicativo F. Afirmamos que $F = A \cap [\bigwedge h(F))$. (Notemos que en el caso en que $h(F) = \emptyset$, consideramos $\bigwedge \emptyset = 1$.)

En efecto, sea $f \in F$. Si $f = 1$ no hay nada que probar. Supongamos que $f \neq 1$. Entonces $f = \bigwedge_{i \in I} f_i$ con $f_i \neq 1$ y $f_i = (1, \ldots, 1, x_i, 1, \ldots, 1) \geq c_i$. Aquí x_i es de la forma $\frac{r}{k}$ con $0 \leq r < k$. Si $r = 0$, $f_i = c_i \in F$. Si $1 \leq r < k$, tenemos que $f_i \to (1, \ldots, 1, \frac{r-1}{k}, 1, \ldots, 1) = (1, \ldots, 1, \frac{k-1}{k}, 1, \ldots, 1) \in F$ así que $(1, \ldots, 1, \frac{r-1}{k}, 1, \ldots, 1) \in F$. Aplicando este procedimiento tantas veces como sea necesario resulta que $c_i \in F$. Finalmente, $\bigwedge h(F) \leq \bigwedge_{i \in I} c_i \leq \bigwedge_{i \in I} f_i = f$. Esto muestra que $f \in A \cap [\bigwedge h(F))$.

Recíprocamente, sea $a \in A \cap [\bigwedge h(F))$. Tenemos que $a \geq \bigwedge_{c \in C \cap F} c$. También tenemos que $a = \bigwedge_{i \in I} a_i$ donde cada a_i es mayor o igual que algún $c \in C$. Si $a_i \geq c$ para algún $c \in C \cap F$, entonces $a_i \in F$. Ahora supongamos que $a_i \ngeq c$ para ningún $c \in C \cap F$. Entonces existe algún $c_0 \in C \setminus F$ con $c_0 \leq a_i$. Como $c_0 \in C \setminus F$, $\neg c_0 \leq c$ para todo $c \in C \cap F$. Luego

$$\neg c_0 \leq \bigwedge_{c \in C \cap F} c \leq a_i.$$

Como $c_0 \leq a_i$ y $\neg c_0 \leq a_i$, se sigue que $a_i = 1 \in F$. Esto muestra que $a_i \in F$ para todo $i \in I$. Ahora bien, como $a \in A$ y F es cerrado por $\wedge$ (cuando existe), concluimos que $a \in F$.

Debemos probar ahora que dado $U \subseteq C$, se tiene que $C \cap A \cap [\bigwedge U) = U$. Como $C \subseteq A$, veamos simplemente que $C \cap [\bigwedge U) = U$.

Sea $c \in C \cap [\bigwedge U)$. Entonces $c \geq \bigwedge_{u \in U} u$. Si $c \notin U$, $\neg u \leq c$ para todo $u \in U$. Luego

$$\neg \bigwedge_{u \in U} u = \bigvee_{u \in U} \neg u \leq c.$$

Por lo tanto

$$c \geq \neg \bigwedge_{u \in U} u \vee \bigwedge_{u \in U} u = 1,$$

contradicción. Luego $c \in U$. La recíproca es inmediata.

Esto prueba que h es una biyección. Veamos ahora que h preserva el orden parcial. Si $F_1 \subseteq F_2$, es claro que $h(F_1) \subseteq h(F_2)$. Recíprocamente, si $U_1 \subseteq U_2$, $U_i \subseteq C$, entonces $\bigwedge U_2 \leq \bigwedge U_1$. Luego $[\bigwedge U_1) \subseteq [\bigwedge U_2)$ y $A \cap [\bigwedge U_1) \subseteq A \cap [\bigwedge U_2)$. □

Denotemos con D al conjunto de elementos ínfimo-irreducibles de $\mathbf{A}$, es decir, $D = [C) \setminus \{1\}$. Para $a \in A$, definimos $D_a = \{x \in D : x \geq a\}$. Dado un filtro implicativo F, definimos también $D_F = D \cap F$.

Observemos que, como conjunto parcialmente ordenado, D consiste de cadenas mutuamente incomparables y que los elementos minimales de D son los coátomos del esqueleto booleano de $\mathbf{A}$, es decir, C. Más aún, dado un filtro implicativo F sobre $\mathbf{A}$, $F \cap D$ consta de algunas de las cadenas de ínfimo-irreducibles. En particular $F \cap D$ contiene precisamente aquellas cadenas cuyos elementos minimales están en $F \cap C$. Notemos que $F \cap D = F \cap C = \emptyset$ si y sólo si $F = \{1\}$.

En la siguiente proposición damos una caracterización de la relación de congruencia asociada a un filtro implicativo en términos de los elementos ínfimo-irreducibles que contiene dicho filtro.

Proposición 6.1.5 *Sea F un filtro implicativo de $\mathbf{A}$ y sean $a, b \in A$ elementos cualesquiera. Entonces $a \equiv_F b$ si y sólo si $D_a \setminus D_F = D_b \setminus D_F$.*

Demostración. Primero supongamos que $a \equiv_F b$, es decir, $a \to b, b \to a \in F$. Dado $x \in D_a \setminus D_F$, tenemos que $a \leq x$, así que $b \to a \leq b \to x$, de done $b \to x \in F$. Como x es ínfimo-irreducible, $b \to x = 1$ o bien $b \to x$ es ínfimo-irreducible.

Supongamos que $b \to x$ es ínfimo-irreducible. Como $b \to x \in F$, obtenemos que $x \in F$ (ya que x yace en la misma cadena de ínfimo-irreducibles que $b \to x$), contradicción. Luego $b \to x = 1$, de donde $b \leq x$ y $x \in D_b \setminus D_F$.

Esto muestra que $D_a \setminus D_F \subseteq D_b \setminus D_F$. La inclusión recíproca es completamente análoga.

Ahora supongamos que se verifica la condición $D_a \setminus D_F = D_b \setminus D_F$. Sabemos que $a = \bigwedge D_a$, $b = \bigwedge D_b$. Borrando de estos ínfimos aquellos elementos ínfimo-irreducibles que están en F, obtenemos que $a \equiv_F \bigwedge(D_a \setminus D_F)$ y $b \equiv_F \bigwedge(D_b \setminus D_F)$. Se sigue entonces inmediatamente que $a \equiv_F b$. □

Como resultado de la Proposición 6.1.4, obtenemos el siguiente importante resultado para las álgebras de implicación de Łukasiewicz finitas.

Proposición 6.1.6 *Toda imagen homomorfa de* $\mathbf{A}$ *es isomorfa a una subálgebra de* $\mathbf{A}$*. En símbolos,* $H(\mathbf{A}) \subseteq IS(\mathbf{A})$*. Más aún, toda imagen homomorfa de* $\mathbf{A}$ *es un retracto de* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. Sea F un filtro implicativo de $\mathbf{A}$ y sea U el subconjunto de C que determina a F, es decir, $U = F \cap C$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $U = \{c_1, \ldots, c_t\}$ con $t \leq n$. Consideremos el subuniverso de $\mathbf{A}$ dado por $S = \{x \in A : \pi_i(x) = 1, 1 \leq i \leq t\}$ y definamos $h : A \to S$ mediante $h(a_1, \ldots, a_n) = (1, \ldots, 1, a_{t+1}, \ldots, a_n)$, donde hay un 1 en las primeras t entradas. Recordando que $F = A \cap [\bigwedge U)$, es fácil ver que $\mathbf{A}/F \cong \mathbf{S}$. Más aún, como $h(x) = x$ para todo $x \in S$, h es una retracción. $\square$

Esta propiedad nos permitirá calcular las álgebras críticas en el Capítulo 8 y nos simplificará el estudio de las clases algebraicamente expandibles en el Capítulo 9.

6.2. Representación topológica de álgebras de implicación

En esta sección nos concentraremos en representaciones topológicas para las álgebras de implicación o álgebras de Tarski, es decir, las álgebras que son $\{\to, 1\}$-subreductos de álgebras de Boole. En [AbaDiaTor04] los autores dan una representación de un álgebra de implicación $\mathbf{A}$ como unión de una única familia de filtros de un álgebra de Boole adecuada $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$ y utilizan el espacio de Stone de $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$ para obtener una representación topológica de $\mathbf{A}$.

Veremos aquí que definiendo una topología tipo Zariski sobre el conjunto *Spec*($\mathbf{A}$) de filtros implicativos maximales de $\mathbf{A}$ obtenemos otra representación topológica de $\mathbf{A}$ tal que el espacio de Stone de $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$ es homeomorfo a la comptactificación por un punto del espacio topológico *Spec*($\mathbf{A}$). Esta nueva construcción es intrínseca en el sentido de que no depende de sumergir el álgebra de implicación $\mathbf{A}$ en un álgebra de Boole $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$.

6.2.1. Preliminares

Si $\mathbf{A}$ es un álgebra de implicación, existe un álgebra de Boole $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{A}$ es una subálgebra implicativa de $\mathbf{B}$, es decir, una subálgebra del $\{\to, 1\}$-reducto de $\mathbf{B}$ (ver [Abb68, Teorema 17]). Sea $\mathbf{B}(\mathbf{A}) = Sg^{\mathbf{B}}(A)$ la subálgebra de Boole de $\mathbf{B}$ generada por A y sea $F(\mathbf{A}) = Fg^{\mathbf{B}(\mathbf{A})}(A)$ el filtro generado por A en $\mathbf{B}(\mathbf{A})$. A es creciente en $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ [AbaDiaTor04] (daremos una demostración más breve en el Lema 6.2.3), y por lo tanto, A es una unión de filtros de $\mathbf{B}(\mathbf{A})$.

Un subconjunto C de un álgebra de Boole $\mathbf{B}$ satisface la **propiedad de ínfimos finitos**, que abreviaremos PIF, siempre que 0 no pueda obtenerse como ínfimo finito de elementos de C, es decir, el filtro de reticulados generado por C en $\mathbf{B}$ es propio. La PIF es el concepto análogo a la *propiedad de intersección finita* de las álgebras de Boole de conjuntos.

Consideremos la siguiente álgebra de Boole, llamada la **clausura Booleana** de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{Bo}(\mathbf{A}) = \begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{A}) & \text{si } F(\mathbf{A}) \neq B(\mathbf{A}), \\ \mathbf{B}(\mathbf{A}) \times \mathbf{B}_2 & \text{si } F(\mathbf{A}) = B(\mathbf{A}), \end{cases}$$

donde $\mathbf{B}_2$ es el álgebra de Boole de dos elementos.

En [AbaDiaTor04] los autores prueba el siguiente teorema relativo a la clausura booleana de un álgebra de implicación.

Teorema 6.2.1 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra de implicación. Entonces:*

(1) *A es un subconjunto creciente de $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$ y $\mathbf{A}$ satisface la PIF.*

(2) *Si $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B} \restriction \{\to, 1\}$ es un homomorfismo del álgebra de implicación $\mathbf{A}$ en el $\{\to, 1\}$-reducto del álgebra de Boole $\mathbf{B}$, tal que $h(\mathbf{A})$ tiene la PIF en $\mathbf{B}$, entonces existe un homomorfismo (booleano) $\widehat{h} : \mathbf{Bo}(\mathbf{A}) \to \mathbf{B}$ tal que $\widehat{h} \restriction_{\mathbf{A}} = h$, es decir, el diagrama*

$$\begin{array}{cc} \mathbf{A} \subseteq & \mathbf{Bo}(\mathbf{A}) \\ h \searrow & \downarrow \widehat{h} \\ & \mathbf{B} \end{array}$$

conmuta.

Más aún, el filtro propio $F(\mathbf{A})$ generado por A en $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$ es un ultrafiltro.

Dos álgebras de implicación distintas pueden tener la misma clausura booleana. Sin embargo, pueden ser distinguidas por los filtros que contienen. En efecto, si $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ es la familia de elementos maximales del conjunto ordenado de filtros de $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$ contenidos en el álgebra de implicación $\mathbf{A}$, entonces:

(a) $A = \bigcup_{F \in \mathcal{M}(\mathbf{A})} F$,

(b) $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ es una anticadena con respecto a la inclusión,

(c) si M es un filtro de $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$ contenido en A, entonces $M \subseteq F$ para algún $F \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$.

Más aún, estas propiedades caracterizan a $\mathcal{M}(\mathbf{A})$, en el sentido de que si $\mathbf{A}$ es un álgebra de implicación y $\mathcal{G}$ es una anticadena de filtros de $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$ contenidos en A que satisfacen (a), (b) and (c), entonces $\mathcal{G} = \mathcal{M}(\mathbf{A})$.

Observar que no excluimos el caso $\mathcal{M}(\mathbf{A}) = \{A\}$.

Denotamos con $St(\mathbf{B})$ al espacio de Stone de un álgebra de Boole $\mathbf{B}$ (ver [BurSan81]).

Llamamos **espacio de implicación** o ***i*-espacio** a la 4-upla $\langle X, \tau, u, \mathcal{C}\rangle$ tal que

(I) $\langle X, \tau\rangle$ es un espacio booleano,

(II) u es un elemento fijo de X,

(III) $\mathcal{C}$ es una anticadena, con respecto a la inclusión, de conjuntos cerrados de X tal que $\bigcap \mathcal{C} = \{u\}$,

(IV) si C es un subconjunto cerrado de X tal que para todo abierto y cerrado N de X, $C \subseteq N$ implica $D \subseteq N$ para algún $D \in \mathcal{C}$, entonces existe $D' \in \mathcal{C}$ tal que $D' \subseteq C$.

Si $\langle X_1, \tau_1, u_1, \mathcal{C}_1\rangle$ y $\langle X_2, \tau_2, u_2, \mathcal{C}_2\rangle$ son espacios de implicación, decimos que una aplicación $f : X_1 \to X_2$ es ***i*-continua** si f es continua, $f(u_1) = u_2$ y para todo $C \in \mathcal{C}_2$, existe $D \in \mathcal{C}_1$ tal que $D \subseteq f^{-1}(C)$.

En [AbaDiaTor04] se prueba que existe una equivalencia dual entre la categoría formada por las álgebras de implicación con los homomorfismos y la categoría formada por los espacios de implicación con las funciones i-continuas.

6.2.2. Compactification of $Spec(\mathbf{A})$

En esta sección definiremos una topología sobre el conjunto $Spec(\mathbf{A})$ de filtros implicativos maximales de un álgebra de implicación $\mathbf{A}$ de forma tal que la compactificación por un punto del espacio $Spec(\mathbf{A})$ sea homeomorfa al espacio de Stone de la clausura booleana $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$.

Observemos que en la variedad $\mathbb{I}$ de las álgebras de implicación, a diferencia de la variedad $\mathbb{L}$ de álgebras de implicación de Łukasiewicz, los filtros implicativos maximales coinciden con los filtros implicativos primos. Además, a partir de la descripción general de filtros implicativos generados por un conjunto X dada en el Capítulo 5 y teniendo en cuenta que en $\mathbb{I}$ vale la ecuación $x \to (x \to y) = x \to y$, resulta que si F es un filtro implicativo de un álgebra de implicación $\mathbf{A}$ y $a \in A$, entonces

$$Fg(F \cup \{a\}) = \{b \in A : a \to b \in F\}.$$

Lema 6.2.2 *Sea M un filtro implicativo propio de un álgebra de implicación $\mathbf{A}$. Entonces M es maximal si y sólo si para todo $a \notin M$, $a \to b \in M$ para todo $b \in A$.*

Demostración. Sea M un filtro implicativo maximal de $\mathbf{A}$ y supongamos $a \notin M$ y $b \in A$. Entonces

$$A = Fg(M \cup \{a\}) = \{x \in A : a \xrightarrow{n} x \in M \text{ para algún } n < \omega\}.$$

Esto implica que $a \xrightarrow{n} b \in M$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como la identidad $x \xrightarrow{2} y = x \to y$ es válida en toda álgebra de implicación, obtenemos que $a \to b \in M$.

Recíprocamente, supongamos que M es un filtro implicativo propio de $\mathbf{A}$ tal que $a \to b \in M$ siempre que $a \notin M$. Sea F un filtro implicativo de $\mathbf{A}$ tal que $M \subsetneq F$. Sean $a \in F \setminus M$ y $b \in A$. Por hipótesis, $a \to b \in M$, así que $a \to b \in F$. Como $a \in F$, resulta que $b \in F$. Esto muestra que $F = A$, con lo cual M es un filtro implicativo maximal. $\square$

El siguiente lema está probado en [AbaDiaTor04, Lema 1.1], pero damos aquí una demostración más sencilla.

Lema 6.2.3 *Sea $\mathbf{B}$ un álgebra de Boole, $\mathbf{A}$ una subálgebra implicativa de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ la subálgebra de Boole de $\mathbf{B}$ generada por A. Entonces A es creciente en $\mathbf{B}(\mathbf{A})$.*

Demostración. Sea $a \in A$, $b \in B(\mathbf{A})$ tal que $a \leq b$. Veamos que $b \in A$. Como $b \in B(\mathbf{A})$, existen a_{ki}, $c_{ki} \in A$ tales que

$$b = \bigwedge_{k=1}^{r} \left((\bigvee_{i \in I_k} \neg a_{ki}) \vee (\bigvee_{i \in J_k} c_{ki}) \right),$$

donde $r \geq 1$ y para todo $k = 1, \ldots, r$, I_k y J_k son subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ con $I_k \cup J_k \neq \emptyset$.

Sea $a_k = (\bigvee_{i \in I_k} \neg a_{ki}) \vee (\bigvee_{i \in J_k} c_{ki})$, $k = 1, \ldots, r$. Como $a \leq b$, $a \leq a_k$ para todo $k = 1, \ldots, r$, así que, para probar que $b \in A$, es suficiente probar que $a_k \in A$ para todo k.

Si k es tal que $J_k \neq \emptyset$, tenemos que $\bigvee_{i\in J_k} c_{ki} \in A$. Así que

$$a_k = (\bigvee_{i\in I_k} \neg a_{ki}) \vee (\bigvee_{i\in J_k} c_{ki}) = \bigvee_{i\in I_k} (a_{ki} \to \bigvee_{i\in J_k} c_{ki}) \in A.$$

Si k es tal que $J_k = \emptyset$, entonces $a \leq \bigvee_{i\in I_k} \neg a_{ki}$, y por lo tanto,

$$a_k = \bigvee_{i\in I_k} \neg a_{ki} = \bigvee_{i\in I_k} \neg a_{ki} \vee a = \bigvee_{i\in I_k} (a_{ki} \to a) \in A.$$

□

Observemos que, como consecuencia del lema previo, la colección de filtros de $\mathbf{B}(\mathbf{A})$ contenidos en $\mathbf{A}$ es simplemente la familia de filtros de reticulado de $\mathbf{A}$.

Si A es un subconjunto creciente de un álgebra de Boole $\mathbf{B}$, es claro que $\mathbf{A}$ y el filtro $F(\mathbf{A})$ generado por A en $\mathbf{B}$ son subálgebras implicativas de $\mathbf{B}$.

Lema 6.2.4 *Sea A un subconjunto creciente de un álgebra de Boole $\mathbf{B}$. Si M es un filtro implicativo maximal de $\mathbf{A}$, entonces el filtro (implicativo) $F(M)$ generado por M en $F(\mathbf{A})$ es un filtro implicativo maximal de $F(\mathbf{A})$ y $F(M) \cap A = M$.*

Demostración. Como M es un subconjunto creciente de $F(\mathbf{A})$, es fácil ver que $F(M)\cap A = M$. Esto, a su vez, implica que $F(M)$ es un filtro implicativo propio de $F(\mathbf{A})$.

Para probar que $F(M)$ es maximal, tomemos $x \in F(\mathbf{A})\backslash F(M)$ y veamos que $x \to y \in F(M)$ para todo $y \in F(\mathbf{A})$.

Como $x \in F(\mathbf{A})$, $x = \bigwedge_{i=1}^n x_i$, $x_i \in A$, y como $x \notin F(M)$, existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_{i_0} \notin M$. Sea $y \in F(\mathbf{A})$, $y = \bigwedge_{j=1}^m y_j$, $y_j \in A$. Entonces

$$\begin{aligned}
x \to y &= \left(\bigwedge_{i=1}^n x_i\right) \to \left(\bigwedge_{j=1}^m y_j\right) \\
&= \neg\left(\bigwedge_{i=1}^n x_i\right) \vee \left(\bigwedge_{j=1}^m y_j\right) \\
&= \left(\bigvee_{i=1}^n \neg x_i\right) \vee \left(\bigwedge_{j=1}^m y_j\right) \\
&= \bigwedge_{j=1}^m \left[\left(\bigvee_{i=1}^n \neg x_i\right) \vee y_j\right] \\
&= \bigwedge_{j=1}^m \left[\left(\bigvee_{i\neq i_0} \neg x_i\right) \vee (x_{i_0} \to y_j)\right].
\end{aligned}$$

Como $x_{i_0} \notin M$ y M es maximal en $\mathbf{A}$, $x_{i_0} \to y_j \in M$ para todo $j = 1, \ldots, m$. Como M es creciente, $(\bigvee_{i\neq i_0} \neg x_i) \vee (x_{i_0} \to y_j) \in M$ para todo j. Luego $\bigwedge_{j=1}^m [(\bigvee_{i\neq i_0} \neg x_i) \vee (x_{i_0} \to y_j)] \in F(M)$, esto es, $x \to y \in F(M)$, para todo $y \in F(\mathbf{A})$. □

El siguiente lema es importante porque nos permite asociar a cada filtro implicativo maximal de $\mathbf{A}$ un ultrafiltro de su clausura booleana.

Lema 6.2.5 *Si $M \in Spec(\mathbf{A})$, entonces $U = F(M) \cup (\neg F(\mathbf{A}) \setminus \neg F(M)) \in St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A})) \setminus \{F(\mathbf{A})\}$.*

Demostración. Verifiquemos que U es un ultrafiltro de $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$.

- $x \wedge y \in U$ para todo $x, y \in U$.

  En efecto, si $x, y \in F(M)$, $x \wedge y \in F(M)$. Supongamos que $x, y \in \neg F(\mathbf{A}) \setminus \neg F(M)$. Como $\neg F(\mathbf{A})$ es un ideal de $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$, $x \wedge y \in \neg F(\mathbf{A})$. Supongamos ahora que $x \wedge y \in \neg F(M)$, entonces $x \wedge y = \neg z$ para algún $z \in F(M)$. Entonces $\neg x \vee \neg y = z \in F(M)$. Como $F(M)$ es un filtro primo en $F(\mathbf{A})$, entonces $\neg x \in F(M)$ o $\neg y \in F(M)$, es decir, $x \in \neg F(M)$ o $y \in \neg F(M)$, contradicción, ya que $x, y \notin \neg F(M)$. Luego, $x \wedge y \in \neg F(\mathbf{A}) \setminus \neg F(M)$. Supongamos finalmente que $x \in F(M)$ e $y \in \neg F(\mathbf{A}) \setminus \neg F(M)$. Si $x \wedge y \in F(\mathbf{A})$, $y \in F(\mathbf{A})$, contradicción. Así que $x \wedge y \in \neg F(\mathbf{A})$. Como antes, tenemos que $x \wedge y \notin \neg F(M)$. Luego, $x \wedge y \in \neg F(\mathbf{A}) \setminus \neg F(M)$.

- Para todo $x \in Bo(\mathbf{A})$, $x \in U$ o $\neg x \in U$, pero no ambos.

  En efecto, supongamos que $x \notin U$. Como $F(\mathbf{A})$ es un ultrafiltro de $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$, se sigue que $x \in F(\mathbf{A})$ o $\neg x \in F(\mathbf{A})$. Si $x \in F(\mathbf{A})$, $\neg x \in \neg F(\mathbf{A})$. Además, como $x \notin U$, $x \notin F(M)$ con lo cual $\neg x \notin \neg F(M)$. Por lo tanto, $\neg x \in \neg F(\mathbf{A}) \setminus \neg F(M) \subseteq U$. Si $\neg x \in F(\mathbf{A})$, como $x \notin \neg F(\mathbf{A}) \setminus \neg F(M)$, $x \in \neg F(M)$. En consecuencia $\neg x \in F(M) \subseteq U$. Finalmente, es fácil ver que $U \cap \neg U = \emptyset$, así que $x \in U$ o $\neg x \in U$, pero no ambos.

- U es creciente en $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$.

  En efecto, supongamos que $x \leq y$, donde $x \in U$ e $y \in Bo(\mathbf{A})$. Supongamos que $y \notin U$, entonces $\neg y \in U$. Ahora bien, si $x \in F(M)$, obtenemos que $y \in U$ ya que $F(M)$ es creciente en $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$, contradicción. Si $x \in \neg F(\mathbf{A}) \setminus \neg F(M)$, consideramos dos posibilidades para $\neg y$. Si $\neg y \in F(M)$, como $\neg y \leq \neg x$, se sigue que $\neg x \in F(M)$, contradicción. Si $\neg y \in \neg F(\mathbf{A}) \setminus \neg F(M)$, entonces $y \in F(\mathbf{A}) \setminus F(M)$. Por el lema anterior, $F(M)$ es maximal en $F(\mathbf{A})$, así que obtenemos que $y \to \neg x \in F(M)$. Pero $y \to \neg x = \neg y \vee \neg x = \neg x$ pues $\neg y \leq \neg x$. Luego, $\neg x \in F(M)$, contradicción.

Estas condiciones junto con el hecho de que $U \neq F(\mathbf{A})$ implican que $U \in St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A})) \setminus \{F(\mathbf{A})\}$. □

Los lemas anteriores nos llevan a considerar la estrecha relación existente entre $St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A}))$ y $Spec(\mathbf{A})$.

Teorema 6.2.6 *Existe una biyección $\varphi : Spec(\mathbf{A}) \to St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A})) \setminus \{F(\mathbf{A})\}$.*

Demostración. Definimos $\varphi : Spec(\mathbf{A}) \to St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A})) \setminus \{F(\mathbf{A})\}$ mediante $\varphi(M) = F(M) \cup (\neg F(\mathbf{A}) \setminus \neg F(M))$ para $M \in Spec(\mathbf{A})$. Por el Lema 6.2.5, φ es una aplicación bien definida.

Definamos la aplicación inversa de φ. Para hacer esto, observemos que si U es un ultrafiltro de $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$, $U \neq F(\mathbf{A})$, entonces $U \cap A$ es un filtro implicativo maximal de A. En efecto, es claro que $U \cap A \neq A$, y para $x \in A$, $y \in A \setminus U$, se tiene que $y \to x \in U$ puesto que U es maximal, con lo cual $y \to x \in A \cap U$ para todo $x \in A$. Esto nos permite definir la aplicación $\psi : St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A})) \setminus \{F(\mathbf{A})\} \longrightarrow Spec(\mathbf{A})$ tal que $\psi(U) = U \cap A$ para todo $U \in St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A}))$.

Probemos ahora que ψ es inyectiva. Sean $U_1, U_2 \in St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A})) \setminus \{F(\mathbf{A})\}$, $U_1 \neq U_2$, y consideremos $x \in Bo(\mathbf{A})$ tal que $x \in U_1$ pero $x \notin U_2$. Existen dos posibilidades, a saber, $x \in F(\mathbf{A})$ o bien $\neg x \in F(\mathbf{A})$. Si $x \in F(\mathbf{A})$, entonces $x = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \in A$. Como $x \in U_1$, $x_i \in U_1$ para todo $i = 1, \ldots, n$, y como $x \notin U_2$, existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_{i_0} \notin U_2$. Luego $x_{i_0} \in U_1 \cap A$ y $x_{i_0} \notin U_2 \cap A$. En el caso de que $\neg x \in F(\mathbf{A})$, podemos argumentar de la misma forma teniendo en cuenta que $\neg x \notin U_1$ y $\neg x \in U_2$. En consecuencia, ψ es inyectiva.

Finalmente, dado $M \in Spec(\mathbf{A})$, sea $U = \varphi(M) \in St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A})) \setminus \{F(\mathbf{A})\}$. Por el Lema 6.2.4, tenemos que $\psi(U) = M$. Esto muestra que ψ es sobreyectiva y completa la demostración. $\square$

Definiremos ahora una topología tipo Zariski τ sobre $Spec(\mathbf{A})$. Para cada $a \in A$, sea $N_a = \{M \in Spec(\mathbf{A}) : a \in M\}$ y sea $\mathcal{B} = \{Spec(\mathbf{A}) \setminus N_b : b \in A\}$. Definimos τ como la topología generada por $\mathcal{B}$. Observar que $\mathcal{B}$ es, de hecho, una base para τ pues $\mathcal{B}$ es cerrada bajo intersecciones finitas. En efecto, dados $b_1, \ldots, b_n \in A$ y tomando $b = b_1 \vee \ldots \vee b_n$, vemos que, como los filtros implicativos maximales son primos,

$$N_b = \bigcup_{i=1}^{n} N_{b_i},$$

de donde

$$Spec(\mathbf{A}) \setminus N_b = \bigcap_{i=1}^{n} (Spec(\mathbf{A}) \setminus N_{b_i}).$$

Recordemos que la compactificación por un punto de un espacio topológico X es el espacio $X^* = X \cup \{\infty\}$ con la topología cuyos miembros son los subconjuntos abiertos de X y todos los subconjuntos U de X^* tales que $X^* \setminus U$ es un subconjunto cerrado y compacto de X. En otras palabras, un conjunto U es abierto en X^* si y sólo si $U \cap X$ es abierto en X y siempre que $\infty \in U$, $X \setminus U$ es compacto.

Para un estudio más detallado, desde un punto de vista topológico, de la comptactificación recomendamos, por ejemplo, [Kel55]. Entre algunas propiedades básicas de las que goza esta construcción, podemos citar que la compactificación por un punto X^* de un espacio topológico X siempre es un espacio compacto y que X es un subespacio. Además, el espacio X^* es Hausdorff si y sólo si X es localmente compacto y Hausdorff.

Teorema 6.2.7 *φ es un homeomorfismo entre los espacios $\langle Spec(\mathbf{A}), \tau \rangle$ y $St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A})) \setminus \{F(\mathbf{A})\}$ con la topología relativa.*

Demostración. Ya sabemos que φ es una biyección. Resta probar que φ y $\varphi^{-1} = \psi$ son aplicaciones continuas.

Sea $X = St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A})) \setminus \{F(\mathbf{A})\}$ con la topología relativa y consideremos un subconjunto abierto G de X. Luego $G = G' \cap X$ para algún subconjunto abierto G' de $St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A}))$. Como $St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A}))$ es Hausdorff, $\{F(\mathbf{A})\}$ es cerrado en $St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A}))$, así que $G = G' \setminus \{F(\mathbf{A})\}$ es abierto en $St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A}))$. Por lo tanto, existe un subconjunto abierto $Y \subseteq Bo(\mathbf{A})$ tal que

$$G = \bigcup_{b \in Y} G_b$$

donde $G_b = \{U \in St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A})) : b \in U\}$. Como

$$\varphi^{-1}(G) = \bigcup_{b \in Y} \varphi^{-1}(G_b)$$

basta probar que $\varphi^{-1}(G_b)$ es abierto en $Spec(\mathbf{A})$ para todo $b \in Y$.

Como $F(\mathbf{A}) \notin G$, entonces, para todo $b \in Y$, $F(\mathbf{A}) \notin G_b$. Como $F(\mathbf{A})$ es un ultrafiltro de $\mathbf{Bo}(\mathbf{A})$, se sigue que $b \notin F(\mathbf{A})$, así que $\neg b \in F(\mathbf{A})$ y tenemos que $\neg b = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i$ para ciertos $a_1, \ldots, a_n \in A$. Entonces $b = \bigvee_{i=1}^{n} \neg a_i$. Se sigue inmediatamente que $G_b = \bigcup_{i=1}^{n} G_{\neg a_i}$.

Afirmamos que $\varphi^{-1}(G_{\neg a_i}) = Spec(\mathbf{A}) \setminus N_{a_i}$, lo que completaría la demostración de la continuidad de φ. En efecto, si $M \in \varphi^{-1}(G_{\neg a_i}) = \psi(G_{\neg a_i})$, existe algún $U \in G_{\neg a_i}$ tal que $M = U \cap A$. Como $\neg a_i \in U$, $a_i \notin U$, así que $a_i \notin M$. Luego $M \in Spec(\mathbf{A}) \setminus N_{a_i}$. La recíproca es similar.

Queda por demostrar que ψ también es continua. Es suficiente probar que $\psi^{-1}(Spec(\mathbf{A}) \setminus N_a)$ es abierto en X para cada $a \in A$. En efecto,

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(Spec(\mathbf{A}) \setminus N_a) &= \{U \in X : a \notin U \cap A\} \\ &= \{U \in X : a \notin U\} \\ &= \{U \in X : \neg a \in U\} \\ &= G_{\neg a} \cap X, \end{aligned}$$

que es abierto en X. □

Observación 6.2.8 Sea Y un espacio Hausdorff compacto y consideremos $Y \setminus \{a\}$ con la topología relativa para un elemento $a \in Y$ fijo. Entonces Y es la compactificación por un punto de $Y \setminus \{a\}$. En efecto, es fácil ver que los abiertos de Y y los de $(Y \setminus \{a\})^*$ coinciden. En particular, $St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A}))$ es la compactificación por un punto de $St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A})) \setminus \{F(\mathbf{A})\}$.

Corolario 6.2.9 $St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A}))$ *es homeomorfo a la compactificación por un punto de* $\langle Spec(\mathbf{A}), \tau \rangle$.

Corolario 6.2.10 $\langle Spec(\mathbf{A}), \tau \rangle$ *es Hausdorff y localmente compacto.*

Corolario 6.2.11 $\langle Spec(\mathbf{A}), \tau \rangle$ *tiene una base formada por subconjuntos abiertos, cerrados y compactos.*

Demostración. En la demostración del Teorema 6.2.7 vimos que para todo $a \in A$, $Spec(\mathbf{A}) \setminus N_a = \psi(G_{\neg a})$. Ahora bien, como $G_{\neg a}$ es compacto, $Spec(\mathbf{A}) \setminus N_a$ también debe ser compacto en $Spec(\mathbf{A})$. Finalmente, como $Spec(\mathbf{A})$ es Hausdorff, se sigue que $Spec(\mathbf{A}) \setminus N_a$ es cerrado. Luego, $\mathcal{B} = \{Spec(\mathbf{A}) \setminus N_a : a \in A\}$ es una base de abiertos, cerrados y compactos para $Spec(\mathbf{A})$. □

Observación 6.2.12 Podríamos haber probado directamente que $Spec(\mathbf{A}) \setminus N_a$ es cerrado para todo $a \in A$. En efecto, usando el Lema 6.2.2, se verifica inmediatamente que

$$Spec(\mathbf{A}) \setminus N_a = \bigcap_{b \in A} N_{a \to b}.$$

Como los conjuntos N_b, $b \in A$, también son abiertos, esto prueba que la topología sobre $Spec(\mathbf{A})$ es análoga a la topología de Priestley sobre los filtros primos de un reticulado distributivo acotado (ver [DavPri02]).

La compacidad de $Spec(\mathbf{A}) \setminus N_a$ para cada $a \in A$ también se sigue directamente de la definición de la topología sobre $Spec(\mathbf{A})$. Supongamos que $Spec(\mathbf{A}) \setminus N_a \subseteq \bigcup_{i \in I}(Spec(\mathbf{A}) \setminus N_{a_i})$. Entonces $\bigcap_{i \in I} N_{a_i} \subseteq N_a$. Ahora bien, notemos que la intersección de los filtros implicativos maximales en N_a es $F(\{a\})$. Similarmente, la intersección de los filtros implicativos maximales de $\bigcap_{i \in I} N_{a_i}$ es $F(\{a_i : i \in I\})$. Se sigue pues que $F(\{a\}) \subseteq F(\{a_i : i \in I\})$, así que debe existir algún subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $a \in F(\{a_i : i \in J\})$. Tenemos entonces que $\bigcap_{i \in J} N_{a_i} \subseteq N_a$ de donde $Spec(\mathbf{A}) \setminus N_a \subseteq \bigcup_{i \in J}(Spec(\mathbf{A}) \setminus N_{a_i})$. Esto muestra que $Spec(\mathbf{A}) \setminus N_a$ es compacto.

Definición 6.2.13 *Decimos que un espacio topológico X es un* **espacio localmente de Stone** *si X^* es un espacio de Stone, es decir, la compactificación por un punto de X tiene una base de abiertos y cerrados.*

Por lo tanto, $\langle Spec(\mathbf{A}), \tau \rangle$ es un espacio localmente de Stone.

Observemos que si X es un espacio localmente de Stone, entonces X es Hausdorff y localmente compacto.

Proposición 6.2.14 *Un espacio topológico X es localmente de Stone si y sólo si es Hausdorff y tiene una base de abiertos, cerrados y compactos.*

Demostración. Sea X un espacio localmente de Stone. Entonces X es Hausdorff. Ahora bien, como X^* es un espacio de Stone, X^* tiene una base de abiertos y cerrados, que son compactos por la compacidad del espacio. Sea $\mathcal{B}^*$ una tal base y consideremos $\mathcal{B} = \{N \in \mathcal{B}^* : N \subseteq X\}$. Es claro que los elementos de $\mathcal{B}$ son subconjuntos abiertos, cerrados y compactos de X. Resta probar que $\mathcal{B}$ es una base para X. En efecto, sea G un abierto de X, entonces G es abierto en X^*, así que G es una unión de elementos de $\mathcal{B}^*$. Sin embargo, como $\infty \notin G$, todo elemento de esta unión está, de hecho, en $\mathcal{B}$.

Recíprocamente, sea X un espacio topológico Hausdorff con una base $\mathcal{B}$ de abiertos, cerrados y compactos. Es claro entonces que X es localmente compacto. Para mostrar que X es un espacio localmente de Stone, sólo tenemos que probar que X^* tiene una base de conjuntos abiertos y cerrados. Notamos a dicha base con $\mathcal{B}^*$ y la definimos así

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \cup \left\{ X^* \setminus \bigcup_{i=1}^{n} N_i : n \in \mathbb{N}, N_i \in \mathcal{B} \right\}.$$

Los elementos de $\mathcal{B}$ son trivialmente abiertos y cerrados en X^*. Un conjunto $H = X^* \setminus \bigcup_{i=1}^{n} N_i$, $N_i \in \mathcal{B}$, es abierto pues $\infty \in H$ y $X^* \setminus H = \bigcup_{i=1}^{n} N_i$ es compacto (y cerrado porque X es Hausdorff). Más aún, H es cerrado pues $\bigcup_{i=1}^{n} N_i$ es abierto en X^*. Finalmente, debemos probar que $\mathcal{B}^*$ es una base para X^*. Para ello, consideremos un abierto cualquiera G de X^*. Si $\infty \notin G$, G es abierto en X, así que G es una unión de elementos de $\mathcal{B}$ y, por ende, de $\mathcal{B}^*$. Por otra parte, si $\infty \in G$, entonces $X^* \setminus G$ es compacto en X. Entonces, existen $N_1, \ldots, N_n \in \mathcal{B}$ tales que $X^* \setminus G \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N_i$. Luego, $X^* \setminus \bigcup_{i=1}^{n} N_i \subseteq G$. Además, como X^* es Hausdorff $G \setminus \{\infty\}$ es abierto en X^* y luego también es abierto en X. Así $G \setminus \{\infty\} = \bigcup_{i \in I} N_i'$, $N_i' \in \mathcal{B}$. Esto muestra que

$$G = \bigcup_{i \in I} N_i' \cup \left(X^* \setminus \bigcup_{i=1}^{n} N_i \right).$$

Esto completa la demostración. $\square$

Definición 6.2.15 *Decimos que una terna $\langle X, \tau, \mathcal{C} \rangle$ es un* **espacio de implicación de Zariski** *o* **Z-espacio** *si*

(1) *$\langle X, \tau \rangle$ es un espacio localmente de Stone,*

(2) *$\mathcal{C}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X tales que $\mathcal{C}$ es una anticadena y $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$,*

(3) *si C es un subconjunto cerrado de X tal que para todo abierto y cerrado N de X cuyo complemento sea compacto, $C \subseteq N$ implica $D \subseteq N$ para algún $D \in \mathcal{C}$, entonces existe $D' \in \mathcal{C}$ tal que $D' \subseteq C$.*

Sea $\langle X, \tau, \mathcal{C} \rangle$ un Z-espacio y sea $\langle X^*, \tau^*, \infty, \mathcal{C}^* \rangle$ tal que $\langle X^*, \tau^* \rangle$ es la compactificación por un punto de $\langle X, \tau \rangle$ (recordemos que $\langle X^*, \tau^* \rangle$ es entonces un espacio de Stone) y $\mathcal{C}^* = \{C \cup \{\infty\} : C \in \mathcal{C}\}$. Observemos que si C es un subconjunto cerrado de X entonces $X \setminus C$ es un subconjunto abierto de X. Luego $X \setminus C$ es un abierto en X^* y, por tanto, $X^* \setminus (X \setminus C) = C \cup \{\infty\}$ es un cerrado de X^*.

Lema 6.2.16 *Si $\langle X, \tau, \mathcal{C} \rangle$ es un Z-espacio, entonces $\langle X^*, \tau^*, \infty, \mathcal{C}^* \rangle$ es un i-espacio.*

Demostración. Ya sabemos que $\langle X^*, \tau^* \rangle$ es un espacio de Stone y es claro que $\mathcal{C}^*$ es una anticadena de cerrados en X^* tal que $\bigcap \mathcal{C}^* = \{\infty\}$. Ahora bien, sea C un subconjunto cerrado de X^* tal que para todo abierto y cerrado N de X^*, $C \subseteq N$ implica $D \subseteq N$ para algún $D \in \mathcal{C}^*$.

Veamos primero que $\infty \in C$. En efecto, si $\infty \notin C$, C es compacto en X. Como X tiene una base de abiertos, cerrados y compactos, $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N_i$ donde cada N_i es un abierto, cerrado y compacto X. Entonces $\bigcup N_i$ es abierto y cerrado en X^*, $C \subseteq \bigcup N_i$, pero $\bigcup N_i$ no contiene ningún $D \in \mathcal{C}^*$, pues $\infty \notin \bigcup N_i$. Esto contradice la hipótesis sobre C. Luego ∞ debe pertenecer a C.

Ahora bien, como C es cerrado en X^*, $C \cap X = C \setminus \{\infty\}$ es cerrado en X. Supongamos que N' es un abierto y cerrado de X tal que $X \setminus N'$ es compacto y $C \setminus \{\infty\} \subseteq N'$. Entonces $N = N' \cup \{\infty\}$ es un abierto y cerrado de X^* tal que $C \subseteq N$. Por hipótesis, existe algún $D \in \mathcal{C}^*$ tal que $D \subseteq N$, así que $D \setminus \{\infty\} \in \mathcal{C}$ y $D \setminus \{\infty\} \subseteq N'$. Usando ahora la condición (3) de la definición de Z-espacio, obtenemos que debe existir algún $D' \in \mathcal{C}$ tal que $D' \subseteq C \setminus \{\infty\}$. Luego $D' \cup \{\infty\} \in \mathcal{C}^*$ y $D' \cup \{\infty\} \subseteq C$.

Esto completa la demostración de que $\langle X^*, \tau^*, \infty, \mathcal{C}^* \rangle$ es un espacio de implicación. $\square$

Sean $\langle X_1, \tau_1, \mathcal{C}_1 \rangle$ y $\langle X_2, \tau_2, \mathcal{C}_2 \rangle$ dos Z-espacios. Decimos que una *aplicación parcial* $f : X_1 \to X_2$ es **Z-continua** si verifica las siguientes condiciones:

(a) f es continua, es decir, para todo abierto G de X_2, $f^{-1}(G)$ es abierto en X_1;

(b) para todo compacto K de X_2, $f^{-1}(K)$ es compacto en X_1,

(c) para todo $C \in \mathcal{C}_2$, existe $D \in \mathcal{C}_1$ tal que $D \subseteq f^{-1}(C)$.

Dada una aplicación parcial Z-continua $f : X_1 \to X_2$, sea $Dom(f) = \{x \in X_1 : f(x) \text{ existe}\}$. Asociamos a f una aplicación $f^* : X_1^* \to X_2^*$ dada por

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in Dom(f), \\ \infty_2 & \text{si } x \notin Dom(f), \end{cases}$$

Lema 6.2.17 *Dada una aplicación parcial Z-continua $f : X_1 \to X_2$, f^* es una aplicación i-continua de X_1^* en X_2^*.*

Demostración. Sea G un subconjunto abierto de X_2^*. Si $\infty_2 \notin G$, entonces G es un subconjunto abierto de X_2 y $(f^*)^{-1}(G) = f^{-1}(G)$, que es abierto en X_1 y también en X_1^*. Si $\infty_2 \in G$, entonces $X_2^* \setminus G$ es compacto en X_2 y luego $f^{-1}(X_2^* \setminus G)$ es compacto en X_1. Pero $f^{-1}(X_2^* \setminus G) = (f^*)^{-1}(X_2^* \setminus G) = X_1^* \setminus (f^*)^{-1}(G)$. Esto muestra que $(f^*)^{-1}(G)$ es abierto en X_1^*. Por lo tanto, f^* es continua.

Se verifica trivialmente que $f^*(\infty_1) = \infty_2$ y que para cada $D_2 \in \mathcal{C}_2^*$, existe $D_1 \in \mathcal{C}_1^*$ tal que $D_1 \subseteq (f^*)^{-1}(D_2)$. Luego f^* es una aplicación i-continua. $\square$

Sea $\mathfrak{Z}$ la categoría formada por los Z-espacios y las aplicaciones parciales Z-continuas, y notemos con $\mathfrak{X}$ la categoría formada por los espacios de implicación y las aplicaciones i-continuas. Sea $\star : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ tal que $\star(\langle X, \tau, \mathcal{C} \rangle) = \langle X^*, \tau^*, \infty, \mathcal{C}^* \rangle$ y si $f : \langle X_1, \tau_1, \mathcal{C}_1 \rangle \to \langle X_2, \tau_2, \mathcal{C}_2 \rangle$ es una aplicación parcial Z-continua, entonces $\star(f) = f^*$. Los lemas previos implican directamente el siguiente teorema.

Teorema 6.2.18 $\star : \mathfrak{Z} \longrightarrow \mathfrak{X}$ *es un funtor covariante.*

Ahora definiremos una inversa para $\star$. Dado un espacio de implicación $\langle X, \tau, u, \mathcal{C} \rangle$, sea $\circ(\langle X, \tau, u, \mathcal{C} \rangle) = \langle X^\circ, \tau^\circ, \mathcal{C}^\circ \rangle$ donde $X^\circ = X \setminus \{u\}$, τ° es la topología relativa sobre X° y $\mathcal{C}^\circ = \{C \setminus \{u\} : C \in \mathcal{C}\}$. El siguiente lema es entonces inmediato.

Lema 6.2.19 *Para todo espacio de implicación $\langle X, \tau, u, \mathcal{C} \rangle$, $\langle X^\circ, \tau^\circ, \mathcal{C}^\circ \rangle$ es un Z-espacio.*

Resta definir la correspondencia entre morfismos. Sean $\langle X_1, \tau_1, u_1, \mathcal{C}_1 \rangle$ y $\langle X_2, \tau_2, u_2, \mathcal{C}_2 \rangle$ dos espacios de implicación. Dada una aplicación i-continua $f : X_1 \to X_2$, definimos $f^\circ : X_1^\circ \to X_2^\circ$ tal que $f^\circ = f \restriction_S$, donde $S = \{x \in X_1 : f(x) \neq u_2\} = X_1 \setminus f^{-1}(u_2)$. Observemos que f° es una aplicación parcial, ya que $f^\circ(x)$ no está definido para aquellos $x \in X_1^\circ$ tales que $f(x) = u_2$.

Lema 6.2.20 *Si $f : X_1 \to X_2$ es una aplicación i-continua entre espacios de implicación, entonces $f^\circ : X_1^\circ \to X_2^\circ$ es una aplicación parcial Z-continua entre Z-espacios.*

Demostración. Sea G un subconjunto abierto de X_2°. Entonces G es abierto en X_2, con lo cual $f^{-1}(G)$ es abierto en X_1 y, por ende, $f^{-1}(G) = f^{-1}(G) \cap X_1^\circ = (f^\circ)^{-1}(G)$ es abierto en X_1°. Esto muestra que f° es continua.

Ahora consideremos un conjunto compacto K en X_2°. Entonces $X_2 \setminus K$ es abierto en X_2, así que $f^{-1}(X_2 \setminus K) = X_1 \setminus f^{-1}(K)$ es abierto en X_1 y contiene a u_1. Luego $f^{-1}(K) = (f^\circ)^{-1}(K)$ es compacto en X_1°.

Esto completa la demostración de que f° es una aplicación parcial Z-continua ya que la condición (c) es trivial. $\square$

Resumimos los dos lemas anteriores en el siguiente teorema.

Teorema 6.2.21 $\circ : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Z}$ *es un funtor covariante.*

Nuestro objetivo ahora es mostrar que los funtores $\star$ y $\circ$ definen una equivalencia entre las categorías $\mathfrak{X}$ y $\mathfrak{Z}$.

Dado un Z-espacio $\langle X, \tau, \mathcal{C}\rangle$, tenemos que $\circ\star(\langle X, \tau, \mathcal{C}\rangle) = \langle X^{*\circ}, \tau^{*\circ}, \mathcal{C}^{*\circ}\rangle$. Es inmediato que $X^{*\circ} = X$ y que $\mathcal{C}^{*\circ} = \mathcal{C}$. Usando la definición de compactificación por un punto y el hecho de que $\langle X, \tau\rangle$ es un espacio de Hausdorff, es fácil mostrar que $\tau^{*\circ} = \tau$. Luego, al aplicar los funtores $\circ$ y $\star$ obtenemos el Z-espacio original.

Recíprocamente, supongamos que $\langle X, \tau, \infty, \mathcal{C}\rangle$ es un espacio de implicación, donde asumimos que el elemento distinguido es ∞ en lugar de u para que el argumento siguiente resulte más sencillo. Entonces, $\star \circ (\langle X, \tau, \infty, \mathcal{C}\rangle) = \langle X^{\circ *}, \tau^{\circ *}, \infty, \mathcal{C}^{\circ *}\rangle$. Es fácil ver que $X^{\circ *} = X$ y $\mathcal{C}^{\circ *} = \mathcal{C}$. Más aún, por la Observación 6.2.8, también tenemos que $\tau^{\circ *} = \tau$. Por lo tanto, al aplicar $\star\circ$ obtenemos el espacio de implicación de partida.

Como $\circ\star = id_{\mathfrak{Z}}$ y $\star\circ = id_{\mathfrak{X}}$, tenemos el siguiente teorema de equivalencia.

Teorema 6.2.22 *Los funtores $\star$ y $\circ$ definen una equivalencia entre las categorías $\mathfrak{Z}$ y $\mathfrak{X}$.*

Sea $\mathfrak{I}$ la categoría formada por las álgebras de implicación y los homomorfismos entre ellas. Sea $\mathcal{I}$ el funtor que establece una dualidad entre las categorías $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{I}$ (ver [AbaDiaTor04]). Como consecuencia del teorema anterior tenemos que

$$\mathcal{E} = \mathcal{I}\star : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{I}$$

es un funtor contravariante entre las categorías $\mathfrak{Z}$ e $\mathfrak{I}$. Observar que para cualquier Z-espacio $\langle X, \tau, \mathcal{C}\rangle$, tenemos que

$$\mathcal{I}\star(\langle X, \tau, \mathcal{C}\rangle) = \mathcal{I}(\langle X^*, \tau^*, \infty, \mathcal{C}^*\rangle) = \langle\{N \in Clop(X^*) : C \subseteq N, \text{ para algún } C \in \mathcal{C}^*\}, \to\rangle,$$

donde $N_1 \to N_2 = N_1^c \cup N_2$, y se ve fácilmente (como veremos en la sección siguiente) que

$$\langle\{N \in Clop(X^*) : C \subseteq N, \text{ para algún } C \in \mathcal{C}^*\}, \to\rangle \cong$$

$$\cong \langle\{N \in Clop(X) : X \setminus N \text{ es compacto, y } C \subseteq N \text{ para algún } C \in \mathcal{C}\}, \to\rangle.$$

El siguiente corolario es inmediato.

Corolario 6.2.23 *El funtor $\mathcal{E}$ define una dualidad entre las categorías $\mathfrak{Z}$ e $\mathfrak{I}$.*

Como aplicación, damos una representación topológica de las álgebras de Boole generalizadas. Recordemos que un álgebra de Boole generalizada es un álgebra de implicación $\mathbf{A}$ tal que el ínfimo está definido para todo par de elementos de A, y es un ínfimo-reticulado con la implicación como residuo. En este caso tenemos que $F(\mathbf{A}) = A$, por lo que el correspondiente espacio de implicación es $X(\mathbf{A}) = \langle St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A})), \tau, \{F(\mathbf{A})\}\rangle$. Luego, el Z-espacio asociado es $\langle Spec(\mathbf{A}), \tau', \{\emptyset\}\rangle$, donde $\langle Spec(\mathbf{A}), \tau'\rangle$ es un espacio localmente de Stone. Recíprocamente, si $\langle X, \tau, \{\emptyset\}\rangle$ es un Z-espacio, entonces el álgebra de implicación correspondiente es un álgebra de Boole generalizada. Esto muestra que las álgebras de Boole generalizadas se corresponden con los Z-espacios en los cuales $\mathcal{C} = \{\emptyset\}$.

Sea $g\mathfrak{Z}$ la subcategoría plena de $\mathfrak{Z}$ cuyos objetos son los Z-espacios para los cuales $\mathcal{C} = \{\emptyset\}$. Por otra parte, sea $g\mathfrak{B}$ la subcategoría plena de $\mathfrak{I}$ que consiste de las álgebras de Boole generalizadas. Luego, la restricción $g\mathcal{E}$ del funtor $\mathcal{E}$ a $g\mathfrak{Z}$ da una dualidad entre las categorías $g\mathfrak{Z}$ y $g\mathfrak{B}$.

Observemos que en la categoría $g\mathfrak{Z}$ podemos eliminar el símbolo $\{\emptyset\}$ y considerar sus objetos simplemente como espacios localmente de Stone. Más aún, en la definición de los morfismos de $g\mathfrak{Z}$ podemos omitir la condición (c) ya que se cumple trivialmente por ser $\mathcal{C} = \{\emptyset\}$.

En la sección siguiente describiremos explícitamente la dualidad entre $\mathfrak{Z}$ e $\mathfrak{I}$ para evitar el paso a través de $\mathfrak{X}$.

6.2.3. Dualidad entre $\mathfrak{I}$ y $\mathfrak{Z}$

En lo que sigue, describiremos en detalle la dualidad entre las categorías $\mathfrak{I}$ y $\mathfrak{Z}$ desarrollada en la sección anterior. Más precisamente, haremos explícita la correspondencia entre las álgebras de implicación y los Z-espcios así como también la correspondencia entre los homomorfismos implicativos y las aplicaciones parciales Z-continuas. Además, caracterizaremos los monomorfismos y los epimorfismos en ambas categorías así como también la contraparte dual en $\mathfrak{Z}$ de los homomorfismos sobreyectivos. También veremos que las congruencias de un álgebra de implicación están determinadas por los subconjuntos cerrados de su Z-espacio asociado y mostraremos cómo construir el Z-espacio asociado al producto directo de dos álgebras de implicación.

Descripción de la dualidad

Daremos ahora una descripción directa de la dualidad entre $\mathfrak{I}$ y $\mathfrak{Z}$.

Tenemos el funtor $\mathcal{E} : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{I}$ tal que

$$\mathcal{E}(\langle X, \tau, \mathcal{C}\rangle) = \mathcal{I}(\langle X^*, \tau^*, \infty, \mathcal{C}^*\rangle) = \langle A, \to\rangle,$$

donde $A = \{N \in Clop(X^*) : C \subseteq N$ para algún $C \in \mathcal{C}^*\}$ y $N_1 \to N_2 = N_1^c \cup N_2$ para todo $N_1, N_2 \in A$. Aquí $Clop(X^*)$ es la familia de subconjuntos abiertos y cerrados del espacio X^*.

Como $\infty \in C$ para todo $C \in \mathcal{C}^*$, se sigue que $\infty \in N$ para todo $N \in A$. Además, es fácil ver que $N \in Clop(X^*)$ con $\infty \in N$ si y sólo si $N' = N \setminus \{\infty\}$ es un abierto y cerrado de X y $X \setminus N'$ es compacto. Si identificamos los abiertos y cerrados de X^* con los abiertos y cerrados de X cuyo complemento es compacto, podemos considerar

$$A = \{N \in Clop(X) : X \setminus N \text{ es compacto y } C \subseteq N \text{ para algún } C \in \mathcal{C}\}.$$

De esta forma obtenemos un álgebra de implicación asociada al Z-espacio $\langle X, \tau, \mathcal{C}\rangle$ sin hacer referencia alguna al espacio de implicación $\langle X^*, \tau^*, \infty, \mathcal{C}^*\rangle$.

Consideremos ahora una aplicación parcial Z-continua $f : \langle X_1, \tau_1, \mathcal{C}_1\rangle \to \langle X_2, \tau_2, \mathcal{C}_2\rangle$. Aplicando el funtor $\star$ obtenemos $f^* : \langle X_1^*, \tau_1^*, \infty_1, \mathcal{C}_1^*\rangle \to \langle X_2^*, \tau_2^*, \infty_2, \mathcal{C}_2^*\rangle$ dado por

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in Dom(f) \\ \infty_2 & \text{si } x \notin Dom(f) \end{cases}$$

donde $Dom(f) = \{x \in X_1 : f(x) \text{ existe}\}$. Sean $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ las correspondientes álgebras de implicación. Entonces $\mathcal{I}(f^*) : \mathbf{A}_2 \to \mathbf{A}_1$ está dada por $\mathcal{I}(f^*)(N) = (f^*)^{-1}(N)$ para todo $N \in A_2$. Si consideramos $N' = N \setminus \{\infty_2\}$ e identificamos N' con N, obtenemos que

$$\mathcal{E}(f)(N') = f^{-1}(N') \cup (X \setminus Dom(f)).$$

Ésta es una descripción directa del homomorfismo $\mathcal{E}(f)$ a partir de la aplicación parcial Z-continua f.

Recíprocamente, consideremos ahora un álgebra de implicación $\mathbf{A}$ y sea $X(\mathbf{A}) = \langle X, \tau, \infty, \mathcal{C}\rangle$ su espacio de implicación asociado. Entonces $\circ X(\mathbf{A}) = \langle X^\circ, \tau^\circ, \mathcal{C}^\circ\rangle$, donde $X^\circ = St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A})) \setminus \{F(\mathbf{A})\}$. Si identificamos M con $\varphi(M)$, tenemos que $X^\circ = Spec(\mathbf{A})$ y $C \in \mathcal{C}^\circ$ si y sólo si $C = \{M \in Spec(\mathbf{A}) : F \subseteq M\}$, donde $F \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$. Esto nos permite obtener directamente el Z-espacio asociado a $\mathbf{A}$ sin pasar por el espacio de implicación correspondiente.

Ahora bien, si $h : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ es un homomorfismo entre dos álgebras de implicación, entonces $X(h) : X(\mathbf{A}_2) \to X(\mathbf{A}_1)$ está dado por $X(h)(U) = \widehat{h}^{-1}(U)$ donde $U \in St(\mathbf{Bo}(\mathbf{A}_2))$ y $\widehat{h} : \mathbf{Bo}(\mathbf{A}_1) \to \mathbf{Bo}(\mathbf{A}_2)$ es el homomorfismo booleano dado en el Teorema 6.2.1. Se sigue que la aplicación parcial $\circ(X(h)) : \circ(X(\mathbf{A}_2)) \to \circ(X(\mathbf{A}_1))$ está dada por

$$\circ(X(h))(M) = \widehat{h}^{-1}(F(M) \cup \neg F(\mathbf{A}_2) \setminus \neg F(M)) \cap A_1$$

si $\widehat{h}^{-1}(F(M) \cup \neg F(\mathbf{A}_2) \setminus \neg F(M)) \neq F(\mathbf{A}_1)$ para un $M \in Spec(\mathbf{A}_2)$, y $\circ(X(h))(M)$ queda indefinida en otro caso.

Es fácil ver que esto se reduce a

$$\circ(X(h))(M) = \begin{cases} h^{-1}(M) & \text{si } h^{-1}(M) \neq A_1, \\ \text{no definido} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Morfismos especiales

Como $\mathfrak{I}$ es una categoría ecuacional, los monomorfismos en $\mathfrak{I}$ son simplemente los homomorfismos inyectivos. Sin embargo, los epimorfismos no coinciden con los homomorfismos sobreyectivos. Por ejemplo, consideremos el álgebra de implicación booleana de cuatro elementos cuyo universo es $B = \{0, a, a', 1\}$ y su subuniverso $A = \{a, a', 1\}$. Entonces se puede probar fácilmente que la aplicación inclusión $i : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un epimorfismo que no es sobreyectivo.

Nos abocamos ahora a la tarea de caracterizar los monomorfismos y epimorfismos en la categoría $\mathfrak{Z}$. También hallaremos las contrapartidas duales de los homomorfismos sobreyectivos de $\mathfrak{I}$.

Proposición 6.2.24 *Una aplicación parcial $\mathfrak{Z}$-continua $f : \langle X_1, \tau_1, \mathcal{C}_1\rangle \to \langle X_2, \tau_2, \mathcal{C}_2\rangle$ es un monomorfismo si y sólo si f es una aplicación inyectiva.*

Demostración. Siendo f monomorfismo, supongamos que existe $x \notin Dom(f)$. Consideremos el Z-espacio $Z = \{a, b\}$ con $\mathcal{C}_Z = \{\emptyset\}$ y dos aplicaciones parciales $g, h : Z \to X_1$ dadas por $g(a) = x$ y $h(b) = x$. Es inmediato verificar que g y h son aplicaciones parciales Z-continuas y que $f \circ g = f \circ h$. Como f es monomorfismo, obtenemos $g = h$, contradicción. Esto muestra que $Dom(f) = X_1$.

Ahora supongamos que $x, y \in X_1$ y que $f(x) = f(y)$. Consideremos el Z-espacio $Z = \{a\}$ con $\mathcal{C}_Z = \{\emptyset\}$. Sean $g, h : Z \to X_1$ dos aplicaciones parciales dadas por $g(a) = x$ y $h(a) = y$. Entonces $f \circ g = f \circ h$, de donde $g = h$ y, por tanto, $x = y$. Esto muestra que f es inyectiva.

La implicación recíproca es trivial. $\square$

Corolario 6.2.25 *Sea $h : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ un homomorfismo entre dos álgebras de implicación. Entonces h es un epimorfismo en la categoría $\mathfrak{I}$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

(e1) $h^{-1}(M) \in Spec(\mathbf{A}_1)$ para todo $M \in Spec(\mathbf{A}_2)$;

(e2) si $M_1, M_2 \in Spec(\mathbf{A}_2)$ y $M_1 \neq M_2$, entonces $h^{-1}(M_1) \neq h^{-1}(M_2)$.

Las siguientes proposiciones son inmediatas.

Proposición 6.2.26 *Una aplicación parcial $\mathfrak{Z}$-continua $f : \langle X_1, \tau_1, \mathcal{C}_1\rangle \to \langle X_2, \tau_2, \mathcal{C}_2\rangle$ es un epimorfismo si y sólo si $f^{-1}(N_1) \neq f^{-1}(N_2)$ siempre que $N_1, N_2 \in \mathcal{E}(X_1)$, $N_1 \neq N_2$.*

Proposición 6.2.27 *Sea $f : \langle X_1, \tau_1, \mathcal{C}_1\rangle \to \langle X_2, \tau_2, \mathcal{C}_2\rangle$ una aplicación parcial $\mathfrak{Z}$-continua. Entonces $\mathcal{E}(f)$ es un homomorfismo sobreyectivo si y sólo si dado cualquier $N_1 \in \mathcal{E}(X_1)$, existe $N_2 \in \mathcal{E}(X_2)$ tal que $N_1 = f^{-1}(N_2) \cup (X_1 \setminus Dom(f))$.*

Congruencias y productos

Teorema 6.2.28 *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de implicación y $(X, \tau, \mathcal{C})$ su correspondiente Z-espacio. Entonces, existe una correspondencia uno a uno entre los filtros implicativos de $\mathbf{A}$ y los subconjuntos cerrados de X.*

Demostración. Sea F un filtro implicativo de $\mathbf{A}$ y consideremos $C_F = \{M \in Spec(\mathbf{A}) : F \subseteq M\}$. Como $C_F = \bigcap_{a \in F} N_a$, es claro que C_F es cerrado en X. Notemos también que $\bigcap C_F = F$. Mostraremos que la aplicación $F \mapsto C_F$ es una correspondencia uno a uno entre los filtros implicativos de $\mathbf{A}$ y los subconjuntos cerrados de X. En efecto, supongamos que F_1 y F_2 son dos filtros implicativos de $\mathbf{A}$ tales que $C_{F_1} = C_{F_2}$. Entonces $F_1 = \bigcap C_{F_1} = \bigcap C_{F_2} = F_2$. Además, si C es cualquier subconjunto cerrado de X, entonces existe una familia $\{a_i\}_{i \in I}$ de elementos de A tal que $C = \bigcap_{i \in I} N_{a_i}$. Se sigue inmediatamente entonces que $C = \{M \in Spec(\mathbf{A}) : Fg(\{a_i\}_{i \in I}) \subseteq M\}$. □

Corolario 6.2.29 *El reticulado de congruencias de un álgebra de implicación finita es booleano.*

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de implicación finita y $(X, \tau, \mathcal{C})$ su correspondiente Z-espacio. Como X es finito y Hausdorff, τ debe ser la topología discreta. Luego todo subconjunto de X es cerrado y el reticulado de congruencias de $\mathbf{A}$ es isomorfo al reticulado booleano de partes de X. □

Teorema 6.2.30 *Sean $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ dos álgebras de implicación y $(X_1, \tau_1, \mathcal{C}_1)$, $(X_2, \tau_2, \mathcal{C}_2)$ sus correspondientes Z-espacios. Supongamos que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Entonces el correspondiente Z-espacio para $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ es el espacio $(X, \tau, \mathcal{C})$ donde $X = X_1 \cup X_2$, $\tau = \{U_1 \cup U_2 : U_i \in \tau_i, i = 1, 2\}$ y $\mathcal{C} = \{C_1 \cup C_2 : C_i \in \mathcal{C}_i, i = 1, 2\}$.*

Demostración. En primer lugar observemos que $(X, \tau, \mathcal{C})$ es un Z-espacio. En efecto, es fácil ver que (X, τ) es un espacio topológico Hausdorff. Además, si llamamos $\mathcal{B}_i$ a la base de abiertos, cerrados y compactos de X_i, $i = 1, 2$, se puede probar que $\mathcal{B} = \{N_1 \cup N_2 : N_i \in \mathcal{B}_i, i = 1, 2\}$ es una base de abiertos, cerrados y compactos para X. También es claro que $\mathcal{C}$ es una familia de cerrados en X y se tiene que

$$\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{U \in \mathcal{C}_1} \bigcap_{V \in \mathcal{C}_2} (U \cup V) = \bigcap_{U \in \mathcal{C}_1} \left(U \cup \bigcap_{V \in \mathcal{C}_2} V \right) = \bigcap_{U \in \mathcal{C}_1} U = \emptyset.$$

Finalmente, sea C un cerrado de X tal que para todo abierto y cerrado N cuyo complemento es compacto, $C \subseteq N$ implica $D \subseteq N$ para algún $D \in \mathcal{C}$. Sabemos que $C = C_1 \cup C_2$ con cada C_i cerrado en X_i, $i = 1, 2$. Supongamos que $C_1 \subseteq N_1$ para algún abierto y cerrado N_1 de X_1 cuyo complemento es compacto. Entonces $N_1 \cup X_2$ es trivialmente abierto y cerrado en X y $X \setminus (N_1 \cup X_2) = X_1 \setminus N_1$ es compacto en X. Como $C \subseteq N_1 \cup X_2$, debe existir $D \in \mathcal{C}$ tal que $D \subseteq N_1 \cup X_2$. Pero $D = D_1 \cup D_2$, con $D_i \subseteq X_i$, $i = 1, 2$, así que $D_1 \subseteq N_1$. Como X_1 es un Z-espacio, resulta que debe existir $D_1' \in \mathcal{C}_1$ tal que $D_1' \subseteq C_1$. Análogamente, debe existir $D_2' \in \mathcal{C}_2$ tal que $D_2' \subseteq C_2$, así que $D' = D_1' \cup D_2' \in \mathcal{C}$ y $D' \subseteq C$. Esto completa la demostración de que $(X, \tau, \mathcal{C})$ es un Z-espacio.

Resta probar todavía que $(X, \tau, \mathcal{C})$ es, de hecho, el Z-espacio correspondiente a $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$. Afirmamos primero que los filtros implicativos maximales de $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ son aquellos de la forma $M_1 \times A_2$ con $M_1 \in Spec(\mathbf{A}_1)$ y $A_1 \times M_2$ con $M_2 \in Spec(\mathbf{A}_2)$. Abreviamos $\overline{M}_1 = M_1 \times A_2$ y $\overline{M}_2 = A_1 \times M_2$. Por el Lema 6.2.2, es claro que $\overline{M}_i$ es un filtro implicativo maximal de $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ para cada $M_i \in Spec(\mathbf{A}_i)$, $i = 1, 2$. Recíprocamente, sea $M \in Spec(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2)$. Es fácil mostrar que $M = F_1 \times F_2$ para ciertos filtros implicativos F_i de $\mathbf{A}_i$, $i = 1, 2$. Supongamos que $F_1 \neq A_1$ y sea $x \in A_1 \setminus F_1$, así $(x, 1) \notin M$. Por el Lema 6.2.2, para cada $x' \in A_1$ e $y \in A_2$, $(x, 1) \to (x', y) = (x \to x', y) \in M$, así que $x \to x' \in F_1$ e $y \in F_2$. Esto muestra que $F_1 \in Spec(\mathbf{A}_1)$ y que $F_2 = A_2$. De la misma manera, si suponemos que $F_2 \neq A_2$ obtenemos que $F_1 = A_1$ y $F_2 \in Spec(\mathbf{A}_2)$. Esto completa la prueba de nuestra afirmación.

Es claro entonces ahora que los elementos de $X = X_1 \cup X_2$ pueden identificarse con los de $Spec(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2)$ vía la aplicación $M_i \mapsto \overline{M}_i$, $M_i \in Spec(\mathbf{A}_i)$, $i = 1, 2$. Además, para cada $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ tenemos que

$$Spec(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) \setminus N_{(a_1,a_2)} = \{\overline{M} : M \in Spec(\mathbf{A}_1) \setminus N_{a_1}\} \cup \{\overline{M} : M \in Spec(\mathbf{A}_2) \setminus N_{a_2}\}.$$

Esto muestra que la base $\mathcal{B}$ definida arriba es la base correcta para el Z-espacio de $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$. Finalmente, es fácil notar que los filtros de reticulado de $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ son precisamente los filtros de la forma $F_1 \times F_2$ donde F_i es un filtro de reticulado de $\mathbf{A}_i$, $i = 1, 2$. Luego el conjunto de filtros implicativos maximales de $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ que contiene a $F_1 \times F_2$ es el conjunto $\{\overline{M} : M \in Spec(\mathbf{A}_1), F_1 \subseteq M\} \cup \{\overline{M} : M \in Spec(\mathbf{A}_2), F_2 \subseteq M\}$. Esto implica que la elección de $\mathcal{C}$ también es la correcta. $\square$

Capítulo 7

Permutabilidad de congruencias

Las álgebras de implicación de Łukasiewicz no poseen la propiedad de permutabilidad de congruencias. Por lo tanto, resulta natural preguntarse cuáles de ellas sí poseen dicha propiedad. En este capítulo veremos que la clave para la permutabilidad de congruencias radica en la existencia de ínfimos entre los elementos del álgebra. Comenzaremos, en la Sección 7.1, analizando el problema más general de la permutabilidad de dos congruencias particulares θ_1 y θ_2 en un álgebra de implicación. Daremos condiciones necesarias y suficientes para que se verifique $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$ y veremos, entre otras consecuencias, que un álgebra de implicación posee permutabilidad de congruencias si y solamente si existe el ínfimo de todo par de elementos en ella. En la Sección 7.2 abordaremos el problema de la permutabilidad de congruencias para el caso más general de las álgebras de implicación de Łukasiewicz. En este caso nos valdremos de un teorema de representación en términos de productos globales para obtener la misma caracterización que en el caso de las álgebras de implicación. Los resultados de este capítulo se encuentran publicados en [CasDia09] y en [CamCasDia11].

7.1. Álgebras de implicación

7.1.1. El caso general

Dos congruencias θ_1, θ_2 sobre un álgebra $\mathbf{A}$ se dice que *permutan* si $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$. El siguiente resultado permite reducir el problema de la permutabilidad de dos congruencias al caso en que su intersección es la congruencia identidad. Recordemos que si θ_1, θ_2 son dos congruencias sobre un álgebra $\mathbf{A}$ tales que $\theta_1 \subseteq \theta_2$, entonces la relación

$$\theta_2/\theta_1 = \{([a]_{\theta_1}, [b]_{\theta_1}) : (a, b) \in \theta_2\}$$

es una congruencia sobre el álgebra cociente $\mathbf{A}/\theta_1$.

Lema 7.1.1 *Sean θ_1, θ_2 dos congruencias sobre un álgebra $\mathbf{A}$ y sea $\theta = \theta_1 \cap \theta_2$. Entonces $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$ si y sólo si $\theta_1/\theta \circ \theta_2/\theta = \theta_2/\theta \circ \theta_1/\theta$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $([a]_\theta, [b]_\theta) \in \theta_1/\theta \circ \theta_2/\theta$. Luego existe $[c]_\theta \in A/\theta$ tal que $([a]_\theta, [c]_\theta) \in \theta_1/\theta$ y $([c]_\theta, [b]_\theta) \in \theta_2/\theta$. Como $([a]_\theta, [c]_\theta) \in \theta_1/\theta$, existe $(a', c') \in \theta_1$ tal que $([a]_\theta, [c]_\theta) =$

$([a']_\theta, [c']_\theta)$. Luego $(a, a'), (c, c') \in \theta \subseteq \theta_1$ y podemos deducir que $(a, c) \in \theta_1$. Análogamente se demuestra que $(c, b) \in \theta_2$. Luego $(a, b) \in \theta_1 \circ \theta_2$. Utilizando la hipótesis tenemos entonces que $(a, b) \in \theta_2 \circ \theta_1$, es decir, existe $d \in A$ tal que $(a, d) \in \theta_2$ y $(d, b) \in \theta_1$. De aquí resulta inmediatamente que $([a]_\theta, [d]_\theta) \in \theta_2/\theta$ y $([d]_\theta, [b]_\theta) \in \theta_1/\theta$, con lo cual $([a]_\theta, [b]_\theta) \in \theta_2/\theta \circ \theta_1/\theta$. Hemos probado entonces que $\theta_1/\theta \circ \theta_2/\theta \subseteq \theta_2/\theta \circ \theta_1/\theta$. La inclusión recíproca es análoga.

($\Leftarrow$) Dado $(a, b) \in \theta_1 \circ \theta_2$, existe $c \in A$ tal que $(a, c) \in \theta_1$ y $(c, b) \in \theta_2$. Luego $([a]_\theta, [c]_\theta) \in \theta_1/\theta$ y $([c]_\theta, [b]_\theta) \in \theta_2/\theta$, es decir, $([a]_\theta, [b]_\theta) \in \theta_1/\theta \circ \theta_2/\theta$. Por hipótesis tenemos entonces que $([a]_\theta, [b]_\theta) \in \theta_2/\theta \circ \theta_1/\theta$, con lo cual existe $d \in A$ tal que $([a]_\theta, [d]_\theta) \in \theta_2/\theta_1$ y $([d]_\theta, [b]_\theta) \in \theta_1/\theta$. De la misma forma que en la implicación recíproca, se ve fácilmente que $(a, d) \in \theta_2$ y $(d, b) \in \theta_1$, con lo cual $(a, b) \in \theta_2 \circ \theta_1$. Hemos probado entonces que $\theta_1 \circ \theta_2 \subseteq \theta_2 \circ \theta_1$ y la otra inclusión es completamente análoga. $\square$

El siguiente lema da una caracterización muy útil de las clases de equivalencia asociadas a una congruencia en un álgebra de implicación. De aquí en adelante notamos $a \overset{\theta}{\equiv} b$ en lugar de $(a, b) \in \theta$.

Lema 7.1.2 *Consideremos un álgebra $\mathbf{A} \in \mathbb{I}$ y una congruencia $\theta \in Con(\mathbf{A})$. Entonces para todo $x \in A$ la clase de equivalencia de x módulo θ está dada por*

$$[x]_\theta = \{\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \to x) : \alpha_1, \alpha_2 \in [1]_\theta \text{ y } \alpha_1 \wedge (\alpha_2 \to x) \text{ existe}\}.$$

En otras palabras, $y \in [x]_\theta$ si y sólo si existen $\alpha_1, \alpha_2 \in [1]_\theta$ tales que $y = \alpha_1 \wedge (\alpha_2 \to x)$.

Demostración. Sea $y \in [x]_\theta$. Entonces $\alpha_1 = x \to y \in [1]_\theta$ y $\alpha_2 = y \to x \in [1]_\theta$. Notemos que

$$\alpha_2 \to x = (y \to x) \to x = (x \to y) \to y = \alpha_1 \to y.$$

Luego $y \leq \alpha_2 \to x$. Como $y \leq \alpha_1$, $\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \to x)$ existe y vale que

$$\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \to x) = ((\alpha_2 \to x) \to (\alpha_1 \to y)) \to y = 1 \to y = y.$$

Recíprocamente, dados $\alpha_1, \alpha_2 \in [1]_\theta$ tales que $\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \to x)$ existe, resulta que $\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \to x) \overset{\theta}{\equiv} 1 \wedge (1 \to x) = x$, de donde $\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \to x) \in [x]_\theta$. $\square$

Podemos probar ahora el teorema principal de esta sección, en el que se caracteriza la permutabilidad de dos congruencias cuya intersección es la congruencia identidad.

Teorema 7.1.3 *Sean $\mathbf{A} \in \mathbb{I}$ y $\theta_1, \theta_2 \in Con(\mathbf{A})$ tales que $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta = \{(a, a) : a \in A\}$. Las congruencias θ_1 y θ_2 permutan si y sólo si se satisfacen las siguientes dos condiciones:*

(1) *existe el ínfimo $\alpha \wedge \beta$ cualesquiera sean $\alpha \in [1]_{\theta_1}$ y $\beta \in [1]_{\theta_2}$,*

(2) *dado $x \in A$, siempre que existan los ínfimos $\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \to x)$ y $\beta_1 \wedge (\beta_2 \to x)$ para $\alpha_1, \alpha_2 \in [1]_{\theta_1}$, $\beta_1, \beta_2 \in [1]_{\theta_2}$, también existe el ínfimo $(\alpha_1 \wedge \beta_1) \wedge ((\alpha_2 \wedge \beta_2) \to x)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$.

Para probar (1) consideremos $\alpha \in [1]_{\theta_1}$ y $\beta \in [1]_{\theta_2}$. Entonces $\alpha \overset{\theta_1}{\equiv} 1 \overset{\theta_2}{\equiv} \beta$, es decir, $\alpha \overset{\theta_1 \circ \theta_2}{\equiv} \beta$, así que $\alpha \overset{\theta_2 \circ \theta_1}{\equiv} \beta$. Por lo tanto, existe $c \in A$ tal que $\alpha \overset{\theta_2}{\equiv} c \overset{\theta_1}{\equiv} \beta$. Tenemos pues que $c \to \alpha \in [1]_{\theta_2}$. Además, como $c \to \alpha \geq \alpha \in [1]_{\theta_1}$, $c \to \alpha \in [1]_{\theta_1}$. Luego $c \to \alpha \in [1]_{\theta_1} \cap [1]_{\theta_2}$. Pero $[1]_{\theta_1} \cap [1]_{\theta_2} = \{1\}$ pues $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta$. Concluimos entonces que $c \to \alpha = 1$, es decir, $c \leq \alpha$. De la misma manera podemos probar que $c \leq \beta$, con lo cual existe el ínfimo $\alpha \wedge \beta$.

Supongamos ahora que se verifican las condiciones del item (2) y sean $a = \alpha_1 \wedge (\alpha_2 \to x)$ y $b = \beta_1 \wedge (\beta_2 \to x)$. Luego

$$a = \alpha_1 \wedge (\alpha_2 \to x) \overset{\theta_1}{\equiv} x \overset{\theta_2}{\equiv} \beta_1 \wedge (\beta_2 \to x) = b.$$

Como θ_1 y θ_2 permutan, existe $y \in A$ tal que $a \overset{\theta_2}{\equiv} y \overset{\theta_1}{\equiv} b$. Por (1), tanto $\alpha_1 \wedge \beta_1$ como $\alpha_2 \wedge \beta_2$ existen. Así

$$y \to (\alpha_1 \wedge \beta_1) \overset{\theta_2}{\equiv} y \to \alpha_1.$$

Como $a \leq \alpha_1$, $y \to a \leq y \to \alpha_1$, así que la ecuación de arriba, junto con el hecho de que $y \to a \in [1]_{\theta_2}$, implica que $y \to (\alpha_1 \wedge \beta_1) \in [1]_{\theta_2}$.

Análogamente

$$y \to (\alpha_1 \wedge \beta_1) \overset{\theta_1}{\equiv} y \to \beta_1,$$

y como $b \leq \beta_1$, entonces $y \to b \leq y \to \beta_1$ e $y \to b \in [1]_{\theta_1}$, de donde obtenemos que $y \to (\alpha_1 \wedge \beta_1) \in [1]_{\theta_1}$. Hemos probado entonces que $y \to (\alpha_1 \wedge \beta_1) \in [1]_{\theta_1} \cap [1]_{\theta_2} = \{1\}$. Por lo tanto $y \leq \alpha_1 \wedge \beta_1$.

También tenemos que

$$y \to ((\alpha_2 \wedge \beta_2) \to x) \overset{\theta_2}{\equiv} y \to (\alpha_2 \to x) \geq y \to a \in [1]_{\theta_2},$$

$$y \to ((\alpha_2 \wedge \beta_2) \to x) \overset{\theta_1}{\equiv} y \to (\beta_2 \to x) \geq y \to b \in [1]_{\theta_1}.$$

En consecuencia, $y \to ((\alpha_2 \wedge \beta_2) \to x) \in [1]_{\theta_1} \cap [1]_{\theta_2} = \{1\}$, es decir, $y \leq (\alpha_2 \wedge \beta_2) \to x$.

Luego y es cota inferior de $\alpha_1 \wedge \beta_1$ y $(\alpha_2 \wedge \beta_2) \to x$, lo que demuestra que existe el ínfimo entre dichos elementos. Esto completa la demostración de (2).

($\Leftarrow$) Supongamos que se cumplen las condiciones (1) y (2). Sea $a \overset{\theta_1}{\equiv} x \overset{\theta_2}{\equiv} b$. Como $a \in [x]_{\theta_1}$ y $b \in [x]_{\theta_2}$, por el Lema 7.1.2 existen $\alpha_1, \alpha_2 \in [1]_{\theta_1}$ y $\beta_1, \beta_2 \in [1]_{\theta_2}$ tales que

$$a = \alpha_1 \wedge (\alpha_2 \to x), \qquad b = \beta_1 \wedge (\beta_2 \to x).$$

Por (1) y (2), existe $(\alpha_1 \wedge \beta_1) \wedge ((\alpha_2 \wedge \beta_2) \to x)$. Luego

$$\begin{aligned} a &= \alpha_1 \wedge (\alpha_2 \to x) \\ &\overset{\theta_2}{\equiv} (\alpha_1 \wedge \beta_1) \wedge ((\alpha_2 \wedge \beta_2) \to x) \\ &\overset{\theta_1}{\equiv} \beta_1 \wedge (\beta_2 \to x) \\ &= b, \end{aligned}$$

es decir, $a \overset{\theta_2 \circ \theta_1}{\equiv} b$. □

Utilizando el Lema 7.1.1 podemos dar ahora una caracterización de la permutabilidad de dos congruencias en el caso general.

Corolario 7.1.4 *Sean $\mathbf{A} \in \mathbb{I}$, $\theta_1, \theta_2 \in Con(\mathbf{A})$. Entonces θ_1 y θ_2 permutan si y sólo si las congruencias $\theta_1/(\theta_1 \cap \theta_2)$ y $\theta_2/(\theta_1 \cap \theta_2)$ satisfacen las condiciones (1) y (2) del Teorema 7.1.3 en el álgebra $\mathbf{A}/(\theta_1 \cap \theta_2)$.*

7.1.2. El caso finito

En esta sección simplificamos el resultado del Teorema 7.1.3 en el caso de un álgebra de implicación finita. Comenzamos mostrando algunas propiedades útiles de las clases de equivalencia determinadas por una congruencia.

Lema 7.1.5 *Sean $\mathbf{A} \in \mathbb{I}$ y $\theta \in Con(\mathbf{A})$. Las clases de equivalencia módulo θ son cerradas por supremos.*

Demostración. Si $a \overset{\theta}{\equiv} b$, entonces $a \vee a \overset{\theta}{\equiv} a \vee b$, y luego $a \overset{\theta}{\equiv} a \vee b$. □

Corolario 7.1.6 *Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{I}$ un álgebra finita y sea $\theta \in Con(\mathbf{A})$. Las clases de equivalencia módulo θ poseen último elemento.*

Demostración. Sea $x \in A$. Como A es finito, $[x]_\theta$ es finito. Entonces existe $y = \bigvee [x]_\theta$ y por el lema anterior $y \in [x]_\theta$. Así y es el último elemento de $[x]_\theta$. □

Lema 7.1.7 *Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{I}$ un álgebra finita y sea $\theta \in Con(\mathbf{A})$. Sea $x \in A$ tal que $x = \bigvee [x]_\theta$, entonces:*

(*a*) *$x \vee \alpha = 1$ para todo $\alpha \in [1]_\theta$;*

(*b*) *$[x]_\theta = \{x \wedge \alpha : \alpha \in [1]_\theta$ tal que existe $x \wedge \alpha\}$;*

(*c*) *si $y \in [x]_\theta$, entonces existe un único $\alpha \in [1]_\theta$ tal que $y = x \wedge \alpha$;*

(*d*) *si $x \leq y$, entonces $y = \bigvee [y]_\theta$.*

Demostración.

(*a*) Sea $\alpha \in [1]_\theta$, entonces $\alpha \to x \overset{\theta}{\equiv} 1 \to x = x$, de donde $\alpha \to x \in [x]_\theta$. Como $x = \bigvee [x]_\theta$, tenemos que $\alpha \to x \leq x$, así que $\alpha \to x = x$. Esto, a su vez, implica que $x \vee \alpha = 1$.

(*b*) Sea $y \in [x]_\theta$. Entonces $\alpha = x \to y \in [1]_\theta$.

Como $y \leq x$ e $y \leq \alpha$, el ínfimo entre x y α existe. Tenemos que $x \wedge \alpha = (\alpha \to (x \to y)) \to y = (\alpha \to \alpha) \to y = 1 \to y = y$.

Recíprocamente, si existe $x \wedge \alpha$ para algún $\alpha \in [1]_\theta$, tenemos que $x \wedge \alpha \overset{\theta}{\equiv} x \wedge 1 = x$, con lo cual $x \wedge \alpha \in [x]_\theta$.

(c) Sólo debemos probar la unicidad de α. Para hacer esto, notemos que si $y = x \wedge \alpha$, es necesario que $\alpha = x \to y$. De hecho,

$$x \to y = x \to (x \wedge \alpha) = (x \to x) \wedge (x \to \alpha) = 1 \wedge \alpha = \alpha.$$

Observemos que hemos usado el hecho de que $x \to \alpha = \alpha$ dado en (a) por la condición equivalente $x \vee \alpha = 1$.

(d) Supongamos que $x \leq y$ y consideremos $u = \bigvee[y]_\theta$. Entonces $u \to y \in [1]_\theta$ y $(u \to y) \to x \overset{\theta}{\equiv} 1 \to x = x$, es decir, $(u \to y) \to x \in [x]_\theta$. Como $x = \bigvee[x]_\theta$, tenemos $(u \to y) \to x \leq x$ y, de hecho,$(u \to y) \to x = x$, de donde $(u \to y) \vee x = 1$. Luego $u \to y = x \to (u \to y) = u \to (x \to y) = u \to 1 = 1$, con lo cual $u \leq y$. Además, como $u = \bigvee[y]_\theta$, $y \leq u$. Esto muestra que $y = u = \bigvee[y]_\theta$.

□

Lema 7.1.8 *Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{I}$ un álgebra finita y sean $\theta_1, \theta_2 \in Con(\mathbf{A})$ tales que $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$. Si $x \in A$ es tal que $x = \bigvee[x]_{\theta_1} = \bigvee[x]_{\theta_2}$, entonces $x = \bigvee[x]_{(\theta_1 \circ \theta_2)}$.*

Demostración. Sea $y \in [x]_{(\theta_1 \circ \theta_2)} = [x]_{(\theta_2 \circ \theta_1)}$. Entonces existe $z \in A$ tal que $y \overset{\theta_2}{\equiv} z \overset{\theta_1}{\equiv} x$. Sea $s = \bigvee[z]_{\theta_2} = \bigvee[y]_{\theta_2}$. Luego $z \leq s$ e $y \leq s$.

Como $s \overset{\theta_2}{\equiv} z$, tenemos que $s \vee x \overset{\theta_2}{\equiv} z \vee x = x$ pues $x = \bigvee[x]_{\theta_1}$ y $z \in [x]_{\theta_1}$.

Así, como $x = \bigvee[x]_{\theta_2}$ y $s \vee x \in [x]_{\theta_2}$, tenemos que $s \vee x \leq x$, es decir, $s \leq x$. Luego $y \leq s \leq x$.

Esto muestra que $x = \bigvee[x]_{(\theta_1 \circ \theta_2)}$. □

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema principal de esta sección.

Teorema 7.1.9 *Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{I}$ un álgebra finita y sean $\theta_1, \theta_2 \in Con(\mathbf{A})$ tales que $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta$. Entonces $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$ si y sólo si dado cualquier $x \in A$ tal que $x = \bigvee[x]_{\theta_1} = \bigvee[x]_{\theta_2}$ se tiene que para todo $a \in [x]_{\theta_1}$ y todo $b \in [x]_{\theta_2}$ existe el ínfimo $a \wedge b$.*

Demostración. Supongamos primero que $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$. Sea $x \in A$ tal que $x = \bigvee[x]_{\theta_1} = \bigvee[x]_{\theta_2}$, $a \in [x]_{\theta_1}$ y $b \in [x]_{\theta_2}$.

Como $a \overset{\theta_1}{\equiv} x \overset{\theta_2}{\equiv} b$, tenemos que $a \overset{\theta_1 \circ \theta_2}{\equiv} b$, por lo tanto $a \overset{\theta_2 \circ \theta_1}{\equiv} b$. Luego existe $c \in A$ tal que $a \overset{\theta_2}{\equiv} c \overset{\theta_1}{\equiv} b$.

Observemos que $c \overset{\theta_1}{\equiv} b \overset{\theta_2}{\equiv} x$, es decir, $c \overset{\theta_1 \circ \theta_2}{\equiv} x$. Por el lema anterior, $x = \bigvee[x]_{(\theta_1 \circ \theta_2)}$, así que $c \leq x$. Luego $x \to a \leq c \to a$. Pero como $x \to a \in [1]_{\theta_1}$, concluimos que $c \to a \in [1]_{\theta_1}$. Como $a \overset{\theta_2}{\equiv} c$, tenemos que $c \to a \in [1]_{\theta_2}$. Por lo tanto, $c \to a \in [1]_{\theta_1} \cap [1]_{\theta_2} = \{1\}$ pues $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta$. Entonces $c \to a = 1$ y $c \leq a$.

Análogamente $c \leq b$. Por lo tanto, existe el ínfimo entre a y b.

Recíprocamente, supongamos que $a \overset{\theta_1}{\equiv} c \overset{\theta_2}{\equiv} b$ y consideremos los siguientes elementos de A:

$$s = \bigvee[a]_{\theta_1} = \bigvee[c]_{\theta_1}, \quad t = \bigvee[b]_{\theta_2} = \bigvee[c]_{\theta_2}, \quad u = \bigvee[a]_{\theta_2}, \quad v = \bigvee[b]_{\theta_1}.$$

Como $c \overset{\theta_2}{\equiv} t$, tenemos que $s \vee c \overset{\theta_2}{\equiv} s \vee t$, es decir, $s \overset{\theta_2}{\equiv} s \vee t$.

Como $a \overset{\theta_2}{\equiv} u$, tenemos que $a \vee s \overset{\theta_2}{\equiv} u \vee s$, es decir, $s \overset{\theta_2}{\equiv} u \vee s$.

Luego $u \vee s \overset{\theta_2}{\equiv} s \vee t$.

Ahora bien, como $u = \bigvee [u]_{\theta_2}$ y $t = \bigvee [t]_{\theta_2}$, por el Lema 7.1.7 (d),

$$u \vee s = \bigvee [u \vee s]_{\theta_2} = \bigvee [s \vee t]_{\theta_2} = s \vee t.$$

Análogamente podemos probar que $t \vee v = s \vee t$.

Como $a \overset{\theta_1}{\equiv} s$, resulta que $u \vee a \overset{\theta_1}{\equiv} u \vee s$, es decir, $u \overset{\theta_1}{\equiv} u \vee s = s \vee t$. Luego $u \in [s \vee t]_{\theta_1}$.

Como $b \overset{\theta_2}{\equiv} t$, tenemos que $b \vee v \overset{\theta_2}{\equiv} t \vee v$, es decir, $v \overset{\theta_2}{\equiv} t \vee v = s \vee t$. Así $v \in [s \vee t]_{\theta_2}$.

Por el Lema 7.1.7 (d) sabemos que $s \vee t = \bigvee [s \vee t]_{\theta_1} = \bigvee [s \vee t]_{\theta_2}$. Por lo tanto, utilizando la hipótesis, concluimos que $u \wedge v$ existe.

Como $s \vee t \overset{\theta_2}{\equiv} v$, obtenemos que $u \wedge (s \vee t) \overset{\theta_2}{\equiv} u \wedge v$, es decir, $u \overset{\theta_2}{\equiv} u \wedge v$.

Como $s \vee t \overset{\theta_1}{\equiv} u$, obtenemos que $(s \vee t) \wedge v \overset{\theta_1}{\equiv} u \wedge v$, es decir, $v \overset{\theta_1}{\equiv} u \wedge v$.

Finalmente

$$a \overset{\theta_2}{\equiv} u \overset{\theta_2}{\equiv} u \wedge v \overset{\theta_1}{\equiv} v \overset{\theta_1}{\equiv} b,$$

y así $a \overset{\theta_2 \circ \theta_1}{\equiv} b$. Esto basta para concluir que las congruencias θ_1 y θ_2 permutan. $\square$

Corolario 7.1.10 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra de implicación y sean* $\theta_1, \theta_2 \in Con(\mathbf{A})$ *tales que* $\mathbf{A}/(\theta_1 \cap \theta_2)$ *es finita. Entonces* $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$ *si y sólo si las congruencias* $\theta_1/(\theta_1 \cap \theta_2)$ *y* $\theta_2/(\theta_1 \cap \theta_2)$ *satisfacen las condiciones del teorema anterior en el álgebra* $\mathbf{A}/(\theta_1 \cap \theta_2)$.

7.1.3. Algunas aplicaciones

En esta sección daremos algunas aplicaciones de los resultados dados en las secciones anteriores. Por ejemplo veremos que se puede probar fácilmente que un álgebra de implicación tiene la propiedad de permutabilidad de congruencias si y sólo si todo par de elementos posee ínfimo. Este resultado ya había sido probado por Cornish en [Cor80, Teorema 3.14]. También simplificaremos la demostración de la caracterización de las congruencias factor dada en [DiaTor03]. Finalmente, teniendo en cuenta los resultados sobre álgebras de implicación libres presentados en [DiaTor03], hallaremos las congruencias sobre las álgebras de implicación libres con un número finito de generadores que conmutan con toda otra congruencia de la misma álgebra.

Álgebras de implicación con permutabilidad de congruencias

Recordemos que un álgebra $\mathbf{A}$ se dice que tiene la propiedad de *permutabilidad de congruencias* si todo par de congruencias sobre $\mathbf{A}$ permutan (para una exposición más detallada del tema consultar [BurSan81]). El siguiente teorema se encuentra en [Cor80, Teorema 3.14] y da una caracterización sencilla de las álgebras de implicación con permutabilidad de congruencias. Lo que haremos a continuación es mostrar que dicho resultado es una consecuencia directa del Teorema 7.1.3.

Teorema 7.1.11 *Un álgebra $\mathbf{A} \in \mathbb{I}$ tiene la propiedad de permutabilidad de congruencias si y sólo si para todo par de elementos $a, b \in A$ existe el ínfimo $a \wedge b$.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{A}$ tiene permutabilidad de congruencias. Notemos que si $a, b \in A$ y $a \vee b = 1$, entonces $Fg(a) \cap Fg(b) = \{1\}$. Luego, por el Teorema 7.1.3, el ínfimo entre a y b debe existir. Ahora bien, dados $a, b \in A$ cualesquiera, tenemos que $a \vee (a \to b) = 1$. Luego existe $c \in A$ tal que $c \leq a$ y $c \leq a \to b$, de donde $c \leq a$ y $a \leq c \to b$. Así $c \leq c \to b$, es decir, $c \to (c \to b) = c \to b = 1$, con lo cual $c \leq b$. Esto muestra que c es una cota inferior de a y b, por lo que el ínfimo entre dichos elementos debe existir.

Recíprocamente, si existe el ínfimo de todo par de elementos de A, esta propiedad también se verifica en $A/(\theta_1 \cap \theta_2)$, donde $\theta_1, \theta_2 \in Con(\mathbf{A})$. Luego las condiciones del Teorema 7.1.3 se cumplen trivialmente y por el Corolario 7.1.4 concluimos que θ_1 y θ_2 permutan. □

Observar que, como consecuencia del teorema anterior, $\mathbf{A}$ tiene la propiedad de permutabilidad de congruencias si y sólo si es un álgebra de Boole generalizada bajo las operaciones de reticulado.

Congruencias factor

Una congruencia θ sobre un álgebra $\mathbf{A}$ se dice una *congruencia factor* si existe una congruencia θ^* tal que $\theta \cap \theta^* = \Delta$, $\theta \vee \theta^* = \nabla$ y $\theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta$. Para más detalles sobre la importancia de las congruencias factor y sus propiedades ver [BurSan81].

Las congruencias factor en un álgebra de implicación fueron caracterizadas en [DiaTor03]. Podemos ver ahora que dicho resultado resulta también como consecuencia del Teorema 7.1.3. Recordemos que, como $\mathbb{I}$ es una variedad con distributividad de congruencias, para cualquier álgebra $\mathbf{A} \in \mathbb{I}$ el reticulado de congruencias $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ es pseudocomplementado. Denotamos con $\theta^\perp$ el pseudocomplemento de una congruencia θ sobre $\mathbf{A}$. No es difícil probar que $[1]_{\theta^\perp} = \{x \in A : x \vee y = 1 \text{ para todo } y \in [1]_\theta\}$.

Teorema 7.1.12 *Sean $\mathbf{A} \in \mathbb{I}$ y $\theta \in Con(\mathbf{A})$. Entonces θ es una congruencia factor si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*

(a) *Para todo $c \in [1]_\theta$ y todo $b \in [1]_{\theta^\perp}$, $c \wedge b$ existe.*

(b) *Para todo $a \in A$, existen únicos $c_a \in [1]_\theta$ y $b_a \in [1]_{\theta^\perp}$ tales que $a = c_a \wedge b_a$.*

Demostración. Supongamos que θ es una congruencia factor. La condición (a) se sigue inmediatamente del Teorema 7.1.3. Por otra parte, como $\theta \vee \theta^\perp = \nabla$, $Fg([1]_\theta \cup [1]_{\theta^\perp}) = A$. Asimismo, como $[1]_\theta$ y $[1]_{\theta^\perp}$ son ambos crecientes y cerrados por ínfimos (cuando existen), $Fg([1]_\theta \cup [1]_{\theta^\perp}) = \{c \wedge b : c \in [1]_\theta, b \in [1]_{\theta^\perp} \text{ tal que } c \wedge b \text{ existe}\}$. Esto implica la parte existencial de la condición (b). La unicidad es inmediata.

Recíprocamente, supongamos que θ es una congruencia que satisface las condiciones (a) y (b). Basta probar que $\theta \circ \theta^\perp = \nabla$. En efecto, sean $a, d \in A$, entonces por (a) existen $c_a, c_d \in [1]_\theta$ y $b_a, b_d \in [1]_{\theta^\perp}$ tales que $a = c_a \wedge b_a$ y $d = c_d \wedge b_d$. Por (b), $c_d \wedge b_d$ existe, así que $a = c_a \wedge b_a \overset{\theta}{\equiv} c_d \wedge b_a \overset{\theta^\perp}{\equiv} c_d \wedge b_d = d$. □

Permutabilidad de congruencias en álgebras de implicación libres

Estudiaremos ahora la permutabilidad de congruencias en álgebras de implicación libres con un número finito de generadores. Hallaremos cuáles son las congruencias sobre dichas álgebras que permutan con todas las demás.

El álgebra de implicación libre $\mathbf{Free}_{\mathbb{I}}(X)$ es la subálgebra del $\{\to, 1\}$-reducto del álgebra de Boole libre $\mathbf{Free}_{\mathbb{B}}(X)$ generada por X. De hecho, $Free_{\mathbb{I}}(X) = \{p \in Free_{\mathbb{B}}(X) : p \geq x,$ para algún $x \in X\}$ (ver [DiaTor03] y las referencias dadas allí). Se sigue de esta descripción que, al igual que en las álgebras de Boole libres, si X es infinito, entonces la única cota superior de X, relativa al orden natural de $\mathbf{Free}_{\mathbb{I}}(X)$, es 1; y si X es finito, entonces el conjunto de las cotas superiores de X es $\{1, \bigvee X\}$, donde $\bigvee X$ es un coátomo.

En [DiaTor03] los autores hallan todas las congruencias factor de $\mathbf{Free}_{\mathbb{I}}(X)$. Para referencia enunciamos aquí el teorema principal de ese artículo.

Teorema 7.1.13 *Si X es infinito, entonces $\mathbf{Free}_{\mathbb{I}}(X)$ es directamente indescomponible. Si X es finito con al menos dos elementos, entonces $\mathbf{Free}_{\mathbb{I}}(X)$ tiene un único par de congruencias factor no trivial $\{\theta, \theta^{\perp}\}$ dado por $[1]_\theta = \{1, \bigvee X\}$ y $[1]_{\theta^\perp} = \{a \in Free_{\mathbb{I}}(X) : a \vee \bigvee X = 1\}$.*

En la demostración del siguiente teorema usaremos el hecho de que el reticulado de congruencias $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ para un álgebra de implicación finita $\mathbf{A}$ es un reticulado booleano (ver el Corolario 6.2.29 del capítulo anterior). Luego, para cada congruencia θ, su pseudocomplemento $\theta^\perp$ es, en realidad, su complemento.

Teorema 7.1.14 *Sea X un conjunto finito con al menos dos elementos y sea $\mathbf{Free}_{\mathbb{I}}(X)$ el álgebra de implicación libre generada por X. La congruencia θ dada por $[1]_\theta = \{1, \bigvee X\}$ y su pseudocomplemento $\theta^\perp$ son las únicas congruencias no triviales de $\mathbf{Free}_{\mathbb{I}}(X)$ que permutan con todas las congruencias.*

Demostración. Primero mostramos que θ permuta con todas las congruencias. Para ver esto, sea θ' cualquier congruencia sobre $\mathbf{Free}_{\mathbb{I}}(X)$. Sean $F = [1]_\theta = \{1, \bigvee X\}$ y $F' = [1]_{\theta'}$, los filtros implicativos correspondientes. Si $F \subseteq F'$, es inmediato que θ y θ' permutan. Luego podemos suponer que $F \nsubseteq F'$. En este caso, $F \cap F' = \{1\}$.

Por el Teorema 7.1.9, para probar que θ y θ' permutan, es suficiente probar que si $z = \bigvee [z]_\theta = \bigvee [z]_{\theta'}$ y $a \in [z]_\theta$, $b \in [z]_{\theta'}$, entonces existe $a \wedge b$.

Si $a = z$, $a \wedge b = z \wedge b = b$, así que podemos asumir que $a \neq z$. Luego, por el Lema 7.1.7 (b), sabemos que $[a]_\theta = \{z, z \wedge \bigvee X\}$, con lo cual $a = z \wedge \bigvee X$.

Como existe algún $x \in X$ tal que $x \leq b$, $\bigvee X \wedge b$ existe y tenemos que

$$(\bigvee X \wedge b) \to a = (\bigvee X \to a) \vee (b \to a).$$

Como $\bigvee X \overset{\theta}{\equiv} 1$, $\bigvee X \to a \overset{\theta}{\equiv} a$. Hay dos posibilidades, a saber, $\bigvee X \to a = a$ o bien $\bigvee X \to a = z$. En el primer caso, $\bigvee X = \bigvee X \vee a = 1$, contradicción. Luego $\bigvee X \to a = z$. Esto muestra que

$$(\bigvee X \wedge b) \to a = z \vee (b \to a).$$

Ahora bien, $z \vee (b \to a) \stackrel{\theta}{\equiv} z \vee (b \to z) = z \vee 1 = 1$ y $z \vee (b \to a) \stackrel{\theta'}{\equiv} z \vee (z \to a) = 1$. Como $F \cap F' = 1$, concluimos que $z \vee (b \to a) = 1$, es decir, $(\bigvee X \wedge b) \to a = 1$. Por lo tanto, $\bigvee X \wedge b \leq a$. Esto muestra que $a \wedge b$ existe y completa la demostración de que θ y θ' permutan.

Probemos ahora que $\theta^{\perp}$ también permuta con todas las congruencias. Sea θ' una congruencia arbitraria sobre $\mathbf{Free}_{\mathbb{I}}(X)$. Si $\theta' \subseteq \theta^{\perp}$, es inmediato que θ' y $\theta^{\perp}$ permutan. Por lo tanto, asumimos que $\theta' \not\subseteq \theta^{\perp}$. Sólo debemos verificar que $\theta^{\perp} \circ \theta' = \nabla$.

En efecto, observemos que $F^{\perp} = [1]_{\theta^{\perp}}$ es un filtro implicativo maximal ya que F es un filtro implicativo minimal y $\mathbf{Con}(\mathbf{Free}_{\mathbb{I}}(X))$ es un reticulado booleano. Es fácil ver que las dos clases de congruencia módulo $\theta^{\perp}$ son $F^{\perp}$ y $(\bigvee X] = \{a \in Free_{\mathbb{I}}(X) : a \leq \bigvee X\}$. Ahora bien, si llamamos $F' = [1]_{\theta'}$, como $F' \not\subseteq F^{\perp}$, existe $z \in F' \setminus F^{\perp}$. Como $z \notin F^{\perp}$, $z \leq \bigvee X$ y entonces $\bigvee X \in F'$.

Sean $a, b \in Free_{\mathbb{I}}(X)$. Mostraremos que $a \stackrel{\theta^{\perp} \circ \theta'}{\equiv} b$. Hay tres casos diferentes, a saber:

- Si $a, b \in F^{\perp}$ o si $a, b \in (\bigvee X]$, entonces $a \stackrel{\theta^{\perp}}{\equiv} b$ y luego $a \stackrel{\theta^{\perp} \circ \theta'}{\equiv} b$.

- Supongamos que $a \in F^{\perp}$ y $b \in (\bigvee X]$. Sea $c = \bigvee [b]_{\theta'}$. Por el Lema 7.1.7 (a), tenemos que $c \vee \alpha = 1$ para todo $\alpha \in F'$. En particular, en el caso de que $\alpha = \bigvee X$, obtenemos que $c \in F^{\perp}$. Luego
$$a \stackrel{\theta^{\perp}}{\equiv} c \stackrel{\theta'}{\equiv} b.$$

- Sea $a \in (\bigvee X]$ y $b \in F^{\perp}$. Como $b \geq x$ para algún $x \in X$, $b \wedge \bigvee X$ existe. Luego
$$a \stackrel{\theta^{\perp}}{\equiv} b \wedge \bigvee X \stackrel{\theta'}{\equiv} b \wedge 1 = b.$$

Esto muestra que $\theta^{\perp}$ y θ' permutan.

Recíprocamente, consideremos una congruencia no trivial θ' sobre $\mathbf{Free}_{\mathbb{I}}(X)$ tal que θ' permuta con toda otra congruencia. Sabemos que $\theta' \cap (\theta')^{\perp} = \Delta$ y que $\theta \vee (\theta')^{\perp} = \nabla$. Más aún, como θ' permuta con toda congruencia, en particular $\theta' \circ (\theta')^{\perp} = (\theta')^{\perp} \circ \theta'$. Luego $\{\theta', (\theta')^{\perp}\}$ es un par de congruencias factor. Por el Teorema 7.1.13, $\theta' = \theta$ o bien $\theta' = \theta^{\perp}$.
□

7.2. Álgebras de implicación de Łukasiewicz

Al igual que para las álgebras de implicación, veremos que las álgebras de implicación de Łukasiewicz tienen permutabilidad de congruencias si y sólo si existe el ínfimo de todo par de elementos. Sin embargo, la demostración no resulta tan elemental debido a que la mayoría de las propiedades deducidas en el caso de álgebras de implicación hacen uso del axioma $(x \to y) \to x = x$, el cual no es válido en el contexto más general de las álgebras de implicación de Łukasiewicz.

Comencemos observando que la existencia de ínfimos para todo par de elementos se puede describir utilizando la siguiente sentencia de primer orden:

$$(\forall x_1, x_2)(\exists z)(z \to x_1 = 1 \,\&\, z \to x_2 = 1 \,\&\, (x_1 \to z) \vee (x_2 \to z) = 1).$$

En efecto, si $z \leq x_1$ y $z \leq x_2$, z es una cota inferior de $\{x_1, x_2\}$, por lo que sabemos que existe $x_1 \wedge x_2$ y vale:

$$x_1 \wedge x_2 = ((x_1 \to z) \vee (x_2 \to z)) \to z.$$

Ahora bien, si suponemos además que $(x_1 \to z) \vee (x_2 \to z) = 1$, resulta entonces que $x_1 \wedge x_2 = z$. Recíprocamente, si existe el ínfimo entre x_1 y x_2, basta tomar $z = x_1 \wedge x_2$ para verificar la sentencia anterior.

Más aún, cuando el ínfimo entre dos elementos existe, éste es único. con lo cual la sentencia anterior es equivalente a la siguiente:

$$(\forall x_1, x_2)(\exists! z)(z \to x_1 = 1 \,\&\, z \to x_2 = 1 \,\&\, (x_1 \to z) \vee (x_2 \to z) = 1).$$

Este es un tipo muy especial de sentencias, que tienen la propiedad de ser preservadas bajo productos subdirectos globales (ver Capítulo 5, Sección 2). Por ello, será conveniente tener una representación de las álgebras de implicación de Łukasiewicz como productos subdirectos globales. Para obtener dicha representación utilizaremos el Teorema 5.2.1. En nuestro caso, dada un álgebra de implicación de Łukasiewicz $\mathbf{A}$ con permutabilidad de congruencias, la clase $V(\mathbf{A})_{fsi} \cup \{\text{álgebras triviales}\}$ es exactamente $V(\mathbf{A})_{to}$, es decir, la clase formada por los miembros totalmente ordenados de $V(\mathbf{A})$. En particular, dicha clase se puede axiomatizar utilizando las ecuaciones que definen la variedad $V(\mathbf{A})$ junto con la siguiente sentencia universal:

$$(\forall x, y)(x \to y = 1 \text{ ó } y \to x = 1).$$

Luego $V(\mathbf{A})_{fsi} \cup \{\text{álgebras triviales}\}$ es una clase universal. El siguiente teorema de representación resulta entonces una consecuencia inmediata del Teorema 5.2.1.

Teorema 7.2.1 *Si $\mathbf{A} \in \mathbb{L}$ y $\mathbf{A}$ posee permutabilidad de congruencias, entonces $\mathbf{A}$ es producto subdirecto global de álgebras de implicación de Łukasiewicz totalmente ordenadas. Más precisamente, si $MI(\mathbf{A})$ es el conjunto de congruencias ínfimo-irreducibles sobre $\mathbf{A}$, entonces la inmersión natural*

$$\mathbf{A} \hookrightarrow \prod_{\theta \in MI(\mathbf{A}) \cup \{A \times A\}} \mathbf{A}/\theta$$

resulta un producto subdirecto global con la topología de ecualizadores.

Observación 7.2.2 El espacio $MI(\mathbf{A}) \cup \{A \times A\}$ es compacto con la topología de ecualizadores. Para ver esto es suficiente probar que $MI(\mathbf{A})$ es compacto, pues la congruencia total $A \times A$ pertenece a todos los ecualizadores. Ahora bien, por el Teorema de Subbase de Alexander, basta considerar cubrimientos de $MI(\mathbf{A})$ formados por subbásicos, es decir, por ecualizadores. Como, además, la condición $\theta \in e(a, b)$ es equivalente a $(a, b) \in \theta$, la compacidad de $MI(\mathbf{A})$ se traduce en la siguiente propiedad: si $S \subseteq A \times A$ es tal que para toda $\theta \in MI(\mathbf{A})$ existe $(a,b) \in S$ con $(a,b) \in \theta$, entonces existe un subconjunto finito $S_0 \subseteq S$ tal que para toda $\theta \in MI(\mathbf{A})$ existe $(a,b) \in S_0$ con $(a,b) \in \theta$. Probaremos que este es el caso.

En primer lugar, notemos que existe el ínfimo entre a y b siempre que $a \vee b = 1$. En efecto, sean $F_1 = Fg(a)$ y $F_2 = Fg(b)$, y consideremos θ_1, θ_2 las respectivas congruencias asociadas. Claramente $(a,1) \in \theta_1$ y $(1,b) \in \theta_2$, esto es, $(a,b) \in \theta_1 \circ \theta_2$. Como θ_1 y θ_2 permutan, existe $c \in A$ tal que $(a,c) \in \theta_2$ y $(c,b) \in \theta_1$. Así $c \to a \in F_2$ y $c \to b \in F_1$. Más aún, resulta que $c \to a, c \to b \in F_1 \cap F_2$. Pero $F_1 \cap F_2 = Fg(a \vee b) = \{1\}$. Luego, $c \leq a$ y $c \leq b$, de donde resulta que existe el ínfimo entre a y b.

Si recordamos ahora que para todo $a, b \in A$ tenemos que $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$, resulta entonces que existe el ínfimo $(a \to b) \wedge (b \to a)$. Podemos considerar entonces el conjunto

$$X = \left\{ \bigvee_{i=1}^{n} (a_i \to b_i) \wedge (b_i \to a_i) : (a_i, b_i) \in S \right\}.$$

Supongamos que $1 \notin X$. Como X es cerrado bajo supremos, por el Teorema 5.1.7 existe un filtro primo P en $\mathbf{A}$ tal que $P \cap X = \emptyset$. Por otra parte, como P es un filtro primo, $\mathbf{A}/P$ es una cadena, así que $\theta_P \in MI(\mathbf{A})$. Luego, existe $(a,b) \in S$ tal que $(a,b) \in \theta_P$. Se sigue entonces que $(a \to b) \wedge (b \to a) \in P \cap X$, contradicción.

Esto muestra que $1 \in X$. Luego $1 = \bigvee_{i=1}^{n} (a_i \to b_i) \wedge (b_i \to a_i)$ para algunos $(a_i, b_i) \in S$. Ahora bien, dada cualquier congruencia $\theta \in MI(\mathbf{A})$, el filtro asociado P_θ es un filtro primo, y como $1 \in P$, debe existir $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $(a_j \to b_j) \wedge (b_j \to a_j) \in P_\theta$ o, equivalentemente, $(a_j, b_j) \in \theta$. Esto completa la demostración de que $MI(\mathbf{A})$ es compacto.

Como consecuencia de la representación del teorema anterior obtenemos la caracterización deseada para las álgebras con permutabilidad de congruencias.

Teorema 7.2.3 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra de implicación de Łukasiewicz. Entonces* $\mathbf{A}$ *tiene permutabilidad de congruencias si y sólo si para todo par de elementos* $x, y \in A$ *existe el ínfimo* $x \wedge y$.

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{L}$ con permutabilidad de congruencias. Consideremos la sentencia

$$\varphi = (\forall x_1, x_2)(\exists! z)(z \to x_1 = 1 \ \& \ z \to x_2 = 1 \ \& \ (x_1 \to z) \vee (x_2 \to z) = 1).$$

Por la discusión anterior sobre esta sentencia, es claro que toda álgebra de implicación de Łukasiewicz totalmente ordenada satisface φ. Luego, basta utilizar el teorema anterior y la Proposición 5.2.2 para concluir que en $\mathbf{A}$ existe el ínfimo para cada par de elementos.

Ahora supongamos que $\mathbf{A}$ es un álgebra de implicación de Łukasiewicz tal que todo par de sus elementos posea ínfimo. Esto nos permite considerar la aplicación $f : A^3 \to A$ dada por

$$f(x,y,z) = ((x \to y) \to z) \wedge ((z \to y) \to x).$$

Si bien f no es una aplicación determinada por un término en el lenguaje de las álgebras de implicación de Łukasiewicz, por la Proposición 6.1.3, tenemos que si F es un filtro implicativo de $\mathbf{A}$ tal que $x_i \equiv_F y_i$, $1 \leq i \leq 3$, entonces $f(x_1, x_2, x_3) \equiv_F f(y_1, y_2, y_3)$.

Ahora bien, la aplicación f actúa como lo hace un término de Mal'cev. En efecto, se verifica fácilmente que $f(x,x,z) = z$ y que $f(x,z,z) = x$. Por lo tanto, si $x \equiv_{F_1} z \equiv_{F_2} y$, tenemos que

$$x = f(x,z,z) \equiv_{F_2} f(x,y,z) \equiv_{F_1} f(y,y,z) = z.$$

Esto prueba que $\mathbf{A}$ tiene permutabilidad de congruencias. □

Álgebras minimalmente no permutables

Decimos que un álgebra $\mathbf{A}$ es **minimalmente no permutable** si no tiene permutabilidad de congruencias, pero cada uno de sus cocientes no triviales tiene permutabilidad de congruencias.

Lema 7.2.4 *Dada un álgebra finita* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{A}$ *no tiene permutabilidad de congruencias si y sólo si al menos uno de sus cocientes es minimalmente no permutable.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{A}$ no posee permutabilidad de congruencias. Si todos su cocientes no triviales tienen permutabilidad de congruencias, entonces $\mathbf{A}$ es minimalmente no permutable y no hay nada más que probar. Por otra parte, si $\mathbf{A}$ posee al menos un cociente no trivial que no tenga permutabilidad de congruencias, podemos considerar un cociente de $\mathbf{A}$ de cardinal mínimo que no tenga permutabilidad de congruencias. Dicho cociente debe ser minimalmente no permutable pues sus cocientes propios son cocientes de $\mathbf{A}$ de cardinal menor.

Recíprocamente, si $\mathbf{A}$ tiene permutabilidad de congruencias, todos sus cocientes también. Luego $\mathbf{A}$ no puede tener un cociente que sea minimalmente no permutable. □

En el siguiente lema damos una caracterización de las álgebras de implicación de Łukasiewicz finitas minimalmente no permutables.

Proposición 7.2.5 *Un álgebra de implicación de Łukasiewicz finita es minimalmente no permutable si y sólo si es isomorfa a un creciente propio de un producto directo* $\mathbf{B}$ *de cadenas finitas y contiene los átomos del esqueleto booleano de* $\mathbf{B}$.

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de implicación de Łukasiewicz finita minimalmente no permutable. Podemos considerar $\mathbf{A}$ como un creciente en un producto directo $\mathbf{B}$ de cadenas finitas tal que A contiene los coátomos del esqueleto booleano de $\mathbf{B}$ (ver Teorema 6.1.1). Como $\mathbf{A}$ no tiene permutabilidad de congruencias, $\mathbf{A}$ es una subálgebra propia de $\mathbf{B}$, pues, de lo contrario, todo par de elementos tendría ínfimo en $\mathbf{A}$.

Podemos escribir $\mathbf{B} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{B}_i$, donde cada $\mathbf{B}_i$ es el reducto implicativo de una MV-cadena finita. Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, sea $F_j = \{x \in A : x(i) = 1 \text{ para } i \neq j\}$. Es fácil chequear que F_j es un filtro implicativo no trivial de $\mathbf{A}$. Luego $\mathbf{A}/F_j$ tiene permutabilidad de congruencias y, por el Teorema 7.2.3, todo par de elementos en $\mathbf{A}/F_j$ tiene ínfimo. Como $\mathbf{A}/F_j \cong \{x \in A, x(j) = 1\}$, se sigue que $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in A$, donde 1 ocupa la posición j-ésima.

Esto muestra que A contiene todos los átomos del esqueleto booleano de $\mathbf{B}$.

Recíprocamente, supongamos que A contiene todos los átomos del esqueleto booleano de $\mathbf{B}$. Es claro entonces que todo cociente no trivial tiene primer elemento y, por tanto, tiene permutabilidad de congruencias. Como $\mathbf{A}$ es propia, no posee el primer el elemento de $\mathbf{B}$, luego no puede tener permutabilidad de congruencias, con lo cual $\mathbf{A}$ es minimalmente no permutable. $\square$

Capítulo 8

Cuasivariedades y álgebras débilmente proyectivas

En este capítulo abordamos dos problemas distintos para la variedad de las álgebras de implicación de Łukasiewicz, pero que, para su resolución, hacen uso de un mismo resultado: la descripción de las álgebras libres finitamente generadas dada en [Dia08]. Será de utilidad también considerar las álgebras de implicación de Łukasiewicz como subreductos de MV-álgebras y así poder aprovechar el conocimiento que se tiene sobre la estructura de las MV-álgebras, especialmente la descripción de las MV-álgebras libres en términos de funciones de McNaughton.

En la Sección 8.1 estudiaremos las cuasivariedades de álgebras de implicación de Łukasiewicz. De hecho, mostraremos que no hay más cuasivariedades que las variedades. En un primer momento probaremos esto sólo en el caso localmente finito, es decir, mostraremos que no hay cuasivariedades propias dentro de las subvariedades $\mathbb{L}_n = V(\mathbf{Ł}_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Luego extenderemos este resultado a la variedad total $\mathbb{L}$.

En la segunda sección de este capítulo vamos a estudiar las álgebras de implicación de Łukasiewicz débilmente proyectivas. Veremos que todos los miembros finitos de $\mathbb{L}$ son débilmente proyectivos pero que álgebras sencillas como, por ejemplo, una cadena infinita, no lo son.

8.1. Cuasivariedades

Comenzamos abordando el estudio de las cuasivariedades en cada subvariedad localmente finita $\mathbb{L}_n = V(\mathbf{L}_n)$, para lo cual es útil conocer las álgebras críticas de $\mathbb{L}$. Recordemos que un álgebra finita $\mathbf{A}$ es **crítica** si no pertenece a la cuasivariedad generada por sus subálgebras propias. La importancia de estas álgebras se ve reflejada en el siguiente teorema. Reproducimos una demostración de J. Gispert y A. Torrens en [GisTor] pues dicho artículo no está publicado.

Teorema 8.1.1 *Toda cuasivariedad localmente finita está generada por sus álgebras críticas.*

Demostración. Sea $\mathbb{K}$ una cuasivariedad localmente finita y sea $\mathbf{A} \in \mathbb{K}$. Consideremos la familia $\mathbb{F}$ de subálgebras finitamente generadas de $\mathbf{A}$. Es bien conocido que $\mathbf{A}$ puede sumergirse en un ultraproducto de miembros de $\mathbb{F}$ (ver, por ejemplo, [BurSan81, Capítulo V, Teorema 2.14]). Por lo tanto, $\mathbf{A} \in ISP_U(\mathbb{F})$. Como $\mathbb{K}$ es localmente finita, tenemos que $\mathbf{A} \in ISP_U(\{\mathbf{B} \leq \mathbf{A} : \mathbf{B} \text{ es finita}\}) \subseteq Q(\mathbb{K}_{fin})$, donde $\mathbb{K}_{fin}$ denota la clase de las álgebras finitas de $\mathbb{K}$. Esto muestra que $\mathbb{K} = Q(\mathbb{K}_{fin})$.

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{K}_{fin}$. Afirmamos que $Q(\mathbf{A}) = Q(\{\mathbf{B} \leq \mathbf{A} : \mathbf{B} \text{ es crítica}\})$. Procedemos por inducción sobre el cardinal de A. Si $|A| = 1$, entonces $\mathbf{A}$ es crítica y el resultado es inmediato. Supongamos entonces que $|A| = n > 1$. Si $\mathbf{A}$ es crítica, no hay nada más que probar. Por otra parte, si $\mathbf{A}$ no es crítica, entonces $Q(\mathbf{A}) = Q(\{\mathbf{B} \leq \mathbf{A} : \mathbf{B} \neq \mathbf{A}\})$. Para cada $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}$, se tiene que $|B| < n$, por lo que, por hipótesis inductiva, $Q(\mathbf{B}) = Q(\{\mathbf{C} \leq \mathbf{B} : \mathbf{C} \text{ es crítica}\})$. Juntando estos resultado obtenemos que $Q(\mathbf{A}) = Q(\{\mathbf{C} \leq \mathbf{A} : \mathbf{C} \text{ es crítica}\})$, como queríamos probar.

Finalmente tenemos que

$$\mathbb{K} = Q(\mathbb{K}_{fin}) = Q(\{\mathbf{B} : \mathbf{B} \text{ es crítica}, \mathbf{B} \leq \mathbf{A}, \mathbf{A} \in \mathbb{K}_{fin}\}) = Q(\mathbb{K}_{crit}) \subseteq \mathbb{K},$$

donde $\mathbb{K}_{crit}$ es la clase formada por las álgebras críticas de $\mathbb{K}$. □

Determinaremos ahora las álgebras críticas de la variedad $\mathbb{L}$.

Teorema 8.1.2 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra de implicación de Łukasiewicz. Entonces* $\mathbf{A}$ *es crítica si y sólo si* $\mathbf{A} \cong \mathbf{L}_k$ *para algún* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de implicación de Łukasiewicz finita. Como $\mathbf{A}$ es finita, $\mathbf{A} \in ISP(\mathbf{L}_{i_1}, \ldots, \mathbf{L}_{i_r})$ para ciertos $i_1, \ldots, i_r \in \mathbb{N}$, donde cada $\mathbf{L}_{i_j}$ es una imagen homomorfa de $\mathbf{A}$ y, por el Corolario 6.1.6, isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{A}$.

Si $\mathbf{A}$ no es isomorfa a ningún $\mathbf{L}_k$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbf{A}$ pertenece a la cuasivariedad generada por sus subálgebras propias, es decir, $\mathbf{A}$ no es crítica.

Recíprocamente, si $\mathbf{A} \cong \mathbf{L}_k$, sus subálgebras propias son isomorfas a las álgebras $\mathbf{L}_i$, $1 \leq i \leq k-1$. Como $\mathbf{A} \notin V(\mathbf{L}_{k-1})$, se deduce que $\mathbf{A}$ es crítica. □

Corolario 8.1.3 $V(\mathbf{L}_k) = Q(\mathbf{L}_k)$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por el Teorema 8.1.1, $V(\mathbf{L}_k)$ está generada como cuasivariedad por sus álgebras críticas. Pero las únicas álgebras críticas en $V(\mathbf{L}_k)$ son isomorfas a las álgebras $\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_k$, y además son todas subálgebras de $\mathbf{L}_k$. Por lo tanto, $V(\mathbf{L}_k) = Q(\mathbf{L}_k)$. □

Corolario 8.1.4 *Toda subcuasivariedad de* $V(\mathbf{L}_k)$, $k \in \mathbb{N}$, *es una variedad.*

Demostración. Sea $\mathbb{Q}$ una subcuasivariedad de $V(\mathbf{L}_k)$. Por el Teorema 8.1.1, $\mathbb{Q}$ está generada como cuasivariedad por sus miembros críticos, que son $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \ldots, \mathbf{L}_r$ para algún $r \leq k$. Por lo tanto, $\mathbb{Q} = Q(\mathbf{L}_r) = V(\mathbf{L}_r)$ y es una variedad. □

Queremos extender el Corolario 8.1.4 a la variedad total $\mathbb{L}$ de álgebras de implicación de Łukasiewicz. En [GisMun05] los autores muestran que la variedad de las MV-álgebras posee la *propiedad de inmersión finita* (que llamaremos *FEP*, por sus siglas en inglés).

Esto significa que dada cualquier MV-álgebra **A** y cualquier subálgebra parcial finita **P** de **A**, existe una MV-álgebra finita **B** tal que **P** se puede sumergir en **B**. Entre otras consecuencias, esta propiedad implica que la variedad $\mathbb{MV}$ de las MV-álgebras está generada como cuasivariedad por sus miembros finitos. Ahora bien, como las álgebras de implicación de Łukasiewicz son los $\{\to, 1\}$-subreductos de las MV-álgebras, es una consecuencia sencilla que la variedad $\mathbb{L}$ también posee la FEP. Enunciamos esto como un teorema y damos a continuación dos consecuencias inmediatas de este hecho.

Teorema 8.1.5 *La variedad $\mathbb{L}$ posee la FEP.*

Corolario 8.1.6 *$\mathbb{L}$ está generada como cuasivariedad por sus miembros finitos.*

Corolario 8.1.7 $\mathbb{L} = Q(\{\mathbf{L}_k : k \in \mathbb{N}\})$.

En [Dia08] aparece una caracterización de las álgebras de implicación de Łukasiewicz libres con un número finito de generadores libres. En particular, se calcula en dicho trabajo el álgebra libre con dos generadores libres. Reproducimos brevemente aquí dicha construcción pues nos será de suma utilidad.

Sea $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(1)$ la MV-álgebra libre con un generador libre, es decir, la MV-álgebra de funciones de McNaughton sobre el intervalo real $[0, 1]$. Sea

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(1) \times \mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(1).$$

Decimos que un par $(f_1, f_2) \in M_2$ es *compatible* si $f_1(0) = f_2(0)$. Consideremos entonces el conjunto $\mathbf{M}_2^c$ de pares compatibles. Es claro que $\mathbf{M}_2^c$ es un subuniverso de $\mathbf{M}_2$. Sean $x_1 = (x, 0)$ y $x_2 = (0, x)$, donde x es el generador libre de $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(1)$. Para $i = 1, 2$, consideremos los conjuntos crecientes $[x_i) = \{(f_1, f_2) \in M_2^c : x_i \leq (f_1, f_2)\}$. Entonces

$$\mathbf{Free}_{\mathbb{L}}(2) \cong \langle [x_1) \cup [x_2), \to, 1\rangle.$$

Proposición 8.1.8 $\mathbf{Free}_{\mathbb{L}}(2)$ *posee una subálgebra isomorfa a $\mathbf{L}_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. $\mathbf{L}_1$ es una subálgebra de cualquier álgebra de implicación de Łukasiewicz no trivial. Para $k \geq 2$ consideremos la siguiente función de McNaughton:

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{para } 0 \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ (k-1)x & \text{para } \frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k-1}, \\ 1 & \text{para } \frac{1}{k-1} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Es fácil ver que

$$f_k^r(x) = \begin{cases} 1 - rx & \text{para } 0 \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ r(k-1)x - r + 1 & \text{para } \frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k-1}, \\ 1 & \text{para } \frac{1}{k-1} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

para $1 \leq r \leq k$. Ver la Figura 8.1.

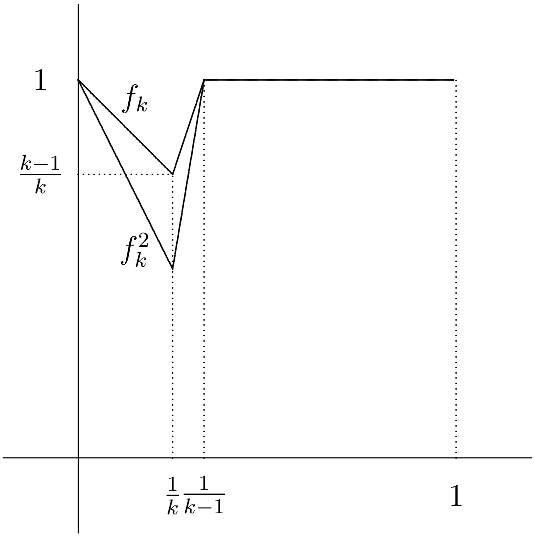


Figura 8.1: Funciones de McNaughton f_k

Afirmamos que $\{1, f_k, f_k^2, \ldots, f_k^k\}$ es una subálgebra implicativa de $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(1)$ isomorfa a $\mathbf{L}_k$. En efecto, de la Figura 8.1 es claro que

$$f_k^r \to f_k^s = \begin{cases} 1 & \text{si } r \geq s, \\ f_k^{s-r} & \text{si } r < s. \end{cases}$$

También podemos representar f_k mediante un MV-término. En efecto, observando la Figura 8.1, se ve que dicho término es $t_k = \neg x \vee (k-1)x$.

Ahora considérense los siguientes elementos de $\mathbf{Free}_{\mathbb{L}}(2)$: $(1,1)$, $(1, f_k)$, $(1, f_k^2)$, $\ldots$, $(1, f_k^k)$. Es inmediato que todos pertenecen a $\mathbf{Free}_{\mathbb{L}}(2)$ ya que son todos pares compatibles mayores a $(x, 0)$. Luego $\mathbf{Free}_{\mathbb{L}}(2)$ tiene una subálgebra isomorfa a $\mathbf{L}_k$. $\square$

Teorema 8.1.9 *Toda subcuasivariedad de* $\mathbb{L}$ *es una variedad.*

Demostración. Sea $\mathbb{Q}$ una subcuasivariedad de $\mathbb{L}$ y sea $\mathbb{V} = V(\mathbb{Q})$. $\mathbb{V}$ es una subvariedad de $\mathbb{L}$, por lo que o bien $\mathbb{V} = V(\mathbf{L}_k)$ para algún $k \in \mathbb{N}$ o bien $\mathbb{V} = \mathbb{L}$.

En el primer caso, $\mathbb{Q} \subseteq V(\mathbf{L}_k)$ y el Corolario 8.1.4 implica que $\mathbb{Q}$ es una variedad. En el segundo caso, tenemos que $\mathbb{L} = V(\mathbb{Q})$. Pero como $\mathbf{Free}_{\mathbb{L}}(2) \cong \mathbf{Free}_{\mathbb{Q}}(2)$, se tiene que $\mathbf{Free}_{\mathbb{L}}(2) \in \mathbb{Q}$. Por la proposición anterior, concluimos entonces que $\mathbf{L}_k \in \mathbb{Q}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Finalmente, el Corolario 8.1.7 implica que $\mathbb{Q} = \mathbb{L}$. $\square$

8.2. Álgebras débilmente proyectivas

Recordemos que un álgebra $\mathbf{A}$ en una variedad $\mathbb{V}$ se dice **débilmente proyectiva** si dadas álgebras $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{V}$, un homomorfismo sobreyectivo $h : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ y un homomorfismo $g : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$, existe un homomorfismo $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ tal que $g = f \circ h$. En otras palabras, un álgebra $\mathbf{A}$ es débilmente proyectiva si el siguiente diagrama se puede completar con un homomorfismo $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ de forma que resulte conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{A} \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{B} \arrow[r, "f"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

siendo f un homomorfismo sobreyectivo.

Como ejemplo de álgebras débilmente proyectivas podemos citar a las álgebras libres en la variedad $\mathbb{V}$. Es sencillo verificar que todas ellas son efectivamente débilmente proyectivas. Más aún, las álgebras libres nos permiten obtener una caracterización de las álgebras débilmente proyectivas. El siguiente resultado es estándar y muy sencillo de probar. Recordemos que un **retracto** de un álgebra $\mathbf{A}$ es un álgebra $\mathbf{B}$ para la cual existen homomorfismos $\pi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $\iota : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ tales que $\pi \circ \iota$ es la identidad en $\mathbf{B}$.

Proposición 8.2.1 *Un álgebra $\mathbf{A}$ en una variedad $\mathbb{V}$ es débilmente proyectiva si y sólo si es un retracto de un álgebra libre en $\mathbb{V}$.*

Otra propiedad útil de las álgebras débilmente proyectivas cuya demostración es directa es la siguiente.

Proposición 8.2.2 *Si $\mathbf{A}$ es un álgebra débilmente proyectiva en $\mathbb{V}$, todo retracto de $\mathbf{A}$ también es débilmente proyectivo en $\mathbb{V}$.*

Vamos a probar que $\mathbf{Free}_{\mathbb{L}_n}(m)$ es un retracto de $\mathbf{Free}_{\mathbb{L}}(m)$. De esta manera, teniendo en cuenta la Proposición 6.1.6, resulta inmediato que toda álgebra finita en $\mathbb{L}$ es débilmente proyectiva. Para ello nos valdremos de la caracterización dada en [Dia08] de las álgebras libres en $\mathbb{L}$ con un número finito de generadores libres.

Denotamos con $M([0,1]^m)$ al conjunto de las funciones de McNaughton sobre el cubo m-dimensional $[0,1]^m$. En general, dado $S \subseteq [0,1]^m$, denotamos con $M(S)$ al conjunto formado por todas las funciones $f : S \to [0,1]$ que son restricciones de funciones en $M([0,1]^m)$. Observemos que sobre $M(S)$ hay una estructura natural de MV-álgebra; a dicha MV-álgebra la notamos $\mathbf{M}(S)$. Denotaremos con $M^+([0,1]^m)$ a las funciones de McNaughton $f : [0,1]^m \to [0,1]$ tales que existe un índice $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ de modo que se verifica $f(x_1, \ldots, x_m) \geq x_i$ para todo $(x_1, \ldots, x_m) \in [0,1]^m$, en otras palabras, f es mayor o igual a alguna de las proyecciones. Definimos en forma análoga $M^+(S)$ para cualquier subconjunto $S \subseteq [0,1]^m$. Como $M^+(S)$ es un subconjunto creciente en $\mathbf{M}(S)$, $M^+(S)$ es un subuniverso implicativo. Luego definimos el álgebra de implicación de Łukasiewicz $\mathbf{M}^+(S) = \langle M^+(S), \to, 1 \rangle$. Con estas notaciones, la caracterización de las álgebras libres en $\mathbb{L}$ dada en [Dia08] es la siguiente.

Teorema 8.2.3 *Llamando $O_m = \{(x_1, \ldots, x_m) \in [0,1]^m : x_i = 0$ para algún índice $i\}$,*

$$\mathbf{Free}_{\mathbb{L}}(m) \cong \mathbf{M}^+(O_m).$$

La caracterización de las álgebras libres en la subvariedad $\mathbb{L}_n$ resulta entonces una consecuencia sencilla. Dado $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{Q}^m$, llamamos *denominador* de a y lo notamos $\mathrm{den}(a)$ al único $d \in \mathbb{N}$ tal que $a_i = \frac{k_i}{d}$, $k_i \in \mathbb{Z}$, tal que $MCD(k_1, \ldots, k_m, d) = 1$ (aquí *MCD* significa *máximo común divisor*).

Corolario 8.2.4 *Llamando* $R_nO_m = \{x \in O_m \cap \mathbb{Q}^m : \mathrm{den}(x) \leq n\}$,

$$\mathbf{Free}_{\mathbb{L}_n}(m) \cong \mathbf{M}^+(R_nO_m).$$

Vamos a probar que $\mathbf{M}^+(R_nO_m)$ es un retracto de $\mathbf{M}^+(O_m)$, con lo cual $\mathbf{M}^+(R_nO_m)$ resultará un álgebra débilmente proyectiva en la variedad $\mathbb{L}$. Para ello necesitaremos varios resultados previos sobre la estructura de la MV-álgebra $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ y sobre las funciones de McNaughton.

Lema 8.2.5 *En la MV-álgebra* $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$*, se tiene que* $b^k \geq a$ *si y sólo si* $a = 0$ *o bien* $b \geq \frac{a-1}{k} + 1$.

Demostración. Si suponemos que $b^k \geq a$, entonces $\text{máx}\{0, kb - k + 1\} \geq a$. Luego, suponiendo $a \neq 0$, tenemos que $kb - k + 1 \geq a$, es decir, $b \geq \frac{a-1}{k} + 1$.

Recíprocamente, si $a = 0$ no hay nada que probar y si $b \geq \frac{a-1}{k} + 1$, entonces $kb - k + 1 \geq a$, con lo cual $b^k = kb - k + 1 \geq a$. □

Lema 8.2.6 *En la MV-álgebra* $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$*, si* $a \in [\frac{n-1}{n}, 1)$*, entonces*

$$a \to a^k = a^{k-1}, \qquad \textit{para } 1 \leq k \leq n.$$

En particular, el conjunto $\{1, a, a^2, \ldots, a^n\}$ *es una subálgebra implicativa de* $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ *isomorfa a* $\mathbf{L}_n$.

Demostración. Sea $a \in [\frac{n-1}{n}, 1)$ y $1 \leq k \leq n$. Luego

$$a \geq \frac{n-1}{n} \geq \frac{k-1}{k},$$

de donde

$$ka - k + 1 \geq 0,$$

con lo cual

$$a^k = \text{máx}\{0, ka - k + 1\} = ka - k + 1.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
a \to a^k &= \neg a \oplus a^k \\
&= \text{mín}\{1, (1 - a) + (ka - k + 1)\} \\
&= \text{mín}\{1, (k - 1)a - (k - 1) + 1\} \\
&= \text{mín}\{1, a^{k-1}\} \\
&= a^{k-1}.
\end{aligned}$$

Para ver que $\{1, a, a^2, \ldots, a^n\}$ es una subálgebra implicativa de $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ isomorfa a $\mathbf{L}_n$ es suficiente verificar que

$$a^r \to a^k = a^{k-r}, \quad \text{para } 0 \leq r \leq k \leq n.$$

Esto resulta inmediatamente al aplicar reiteradamente la ecuación $a \to a^k = a^{k-1}$. $\square$

Corolario 8.2.7 *Dada $f : [0,1]^m \to [0,1]$ una función de McNaughton no constante tal que $f(x) \geq \frac{n-1}{n}$ para todo $x \in [0,1]^m$, se tiene que $\{1, f, f^2, \ldots, f^n\}$ es una subálgebra implicativa de $\mathbf{M}([0,1]^m)$ isomorfa a $\mathbf{L}_n$.*

Lema 8.2.8 *Sea $a \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $a = \frac{k}{d}$, $d = \mathrm{den}(a)$ y $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r \leq d$. Dado $\varepsilon > 0$, existe una función de McNaughton $f : [0,1] \to [0,1]$ tal que:*

- $f(a) = \frac{r}{d}$,
- $f(x) \geq \frac{r}{d}$ *para todo* $x \in [0,1]$,
- $f(x) = 1$ *siempre que* $|x - a| \geq \varepsilon$.

Demostración. Busquemos una función lineal $f(x) = mx + n$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ tal que $f(a) = \frac{r}{d}$. Debemos hallar $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$mk + nd = r.$$

Como $MCD(k,d) = 1$, dicha ecuación diofántica tiene solución. Si m_0, n_0 es una solución cualquiera, entonces la solución general está dada por

$$m = m_0 + dt, n = n_0 - kt, t \in \mathbb{Z}.$$

Luego la función lineal f resulta de la forma

$$f(x) = (m_0 + dt)x + (n_0 - kt).$$

Consideremos $t > -\frac{m_0}{d}$, de modo que f sea creciente. En este caso,

$$f(x) \geq 1 \Longleftrightarrow x \geq \frac{1 + kt - n_0}{m_0 + dt}.$$

Como $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{1 + kt - n_0}{m_0 + dt} = \frac{k}{d} = a$, podemos elegir t suficientemente grande para que

$$\frac{1 + kt - n_0}{m_0 + dt} - a < \varepsilon.$$

Luego la función de McNaughton $f^\sharp = (f \vee 0) \wedge 1$ verifica las siguientes condiciones:

- $f^\sharp(a) = \frac{r}{d}$,
- $f^\sharp(x) \geq \frac{r}{d}$ para todo $x \geq a$,

- $f^\sharp(x) = 1$ siempre que $x \geq a + \varepsilon$.

Ahora consideremos una función lineal

$$g(x) = (m_0 + dt)x + (n_0 - kt)$$

con $t < -\frac{m_0}{d}$, de modo que g sea decreciente. En este caso,

$$g(x) \geq 1 \iff x \leq \frac{1 + kt - n_0}{m_0 + dt}.$$

Como $\lim_{t\to-\infty} \frac{1 + kt - n_0}{m_0 + dt} = \frac{k}{d} = a$, podemos elegir t para que

$$a - \frac{1 + kt - n_0}{m_0 + dt} < \varepsilon.$$

Luego la función de McNaughton $g^\sharp = (g \vee 0) \wedge 1$ verifica las siguientes condiciones:

- $g^\sharp(a) = \frac{r}{d}$,
- $g^\sharp(x) \geq \frac{r}{d}$ para $x \leq a$,
- $g^\sharp(x) = 1$ siempre que $x \leq a - \varepsilon$.

Finalmente, la función de McNaughton $f^\sharp \vee g^\sharp$ verifica las condiciones del enunciado.
□

Lema 8.2.9 *Sean $a, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$ tales que $MCD(b_1, b_2) = 1$.*

(*a*) *Existen únicos $q, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r_i < b_i$, tales que*

$$\frac{a}{b_1 b_2} = q + \frac{r_1}{b_1} + \frac{r_2}{b_2}.$$

(*b*) *Si $a < b_1 b_2$, entonces $q = 0$ o $q = -1$, con lo cual*

$$\frac{a}{b_1 b_2} = \frac{r_1}{b_1} \oplus \frac{r_2}{b_2}, \text{ o bien } \frac{a}{b_1 b_2} = \frac{r_1}{b_1} * \frac{r_2}{b_2}.$$

(*c*) *Si $1 - \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} < \frac{a}{b_1 b_2} < 1$, entonces $q = 0$ y*

$$\frac{a}{b_1 b_2} = \frac{r_1}{b_1} \oplus \frac{r_2}{b_2}.$$

Demostración. La parte (*a*) es un resultado elemental. Para la parte (*b*), observemos que si $a < b_1 b_2$ resulta

$$0 < q + \frac{r_1}{b_1} + \frac{r_2}{b_2} < 1$$

de donde
$$-\frac{r_1}{b_1} - \frac{r_2}{b_2} < q < 1 - \frac{r_1}{b_1} - \frac{r_2}{b_2},$$
con lo cual $-2 < q < 1$, es decir, $q = 0$ o $q = -1$.

Finalmente, para la parte (c), basta notar que si $q = -1$, entonces
$$q + \frac{r_1}{b_1} + \frac{r_2}{b_2} \leq -1 + \frac{b_1 - 1}{b_1} + \frac{b_2 - 1}{b_2} = 1 - \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2}.$$
□

Corolario 8.2.10 *Sean $a, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{N}$, $a < b = b_1 \ldots b_m$, $MCD(b_i, b_j) = 1$ para $i \neq j$.*

(a) *Existen únicos $q, r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{Z}$ tales que*
$$\frac{a}{b_1 \ldots b_m} = q + \frac{r_1}{b_1} + \ldots + \frac{r_m}{b_m}$$
donde $0 \leq r_i < b_i$.

(b) *Existe un término $t(x_1, \ldots, x_m) = x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_m$ (asociando siempre a izquierda), donde cada $\circ$ es $\oplus$ o $*$, tal que*
$$\frac{a}{b} = t\left(\frac{r_1}{b_1}, \ldots, \frac{r_m}{b_m}\right).$$

(c) *Dado $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe un término $t(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m) = x_1 \circ \ldots \circ x_{i-1} \circ x_{i+1} \circ \ldots \circ x_m$ (asociando siempre a izquierda), donde cada $\circ$ es $\oplus$ o $*$, tal que*
$$\frac{b_1 \ldots b_m - 1}{b_1 \ldots b_m} = \frac{r_i}{b_i} \oplus t\left(\frac{r_1}{b_1}, \ldots, \frac{r_{i-1}}{b_{i-1}}, \frac{r_{i+1}}{b_{i+1}}, \ldots, \frac{r_m}{b_m}\right).$$

Demostración. Las partes (a) y (b) resultan de aplicar repetidas veces el lema anterior. La unicidad en (a) se puede probar fácilmente.

Para demostrar la parte (c), aplicamos el ítem (c) del lema anterior a la fracción
$$\frac{b_1 \ldots b_m - 1}{b_1 \ldots b_m} = \frac{b_1 \ldots b_m - 1}{b_i b}$$
donde $b = b_1 \ldots b_{i-1} b_{i+1} \ldots b_m$. Obtenemos la siguiente descomposición:
$$\frac{b_1 \ldots b_m - 1}{b_1 \ldots b_m} = \frac{s_i}{b_i} \oplus \frac{s}{b_1 \ldots b_{i-1} b_{i+1} \ldots b_m}.$$
Ahora aplicamos los items (a) y (b) del presente corolario para obtener un término t tal que
$$\frac{b_1 \ldots b_m - 1}{b_1 \ldots b_m} = \frac{s_i}{b_i} \oplus t\left(\frac{s_1}{b_1}, \ldots, \frac{s_{i-1}}{b_{i-1}}, \frac{s_{i+1}}{b_{i+1}}, \ldots, \frac{s_m}{b_m}\right).$$

Finalmente, observando la manera en que se hace la descomposición (en cada paso la suma o el producto de Łukasiewicz no tiene como resultado 0 ni 1) es claro que

$$\frac{s_i}{b_i} \oplus t\left(\frac{s_1}{b_1}, \ldots, \frac{s_{i-1}}{b_{i-1}}, \frac{s_{i+1}}{b_{i+1}}, \ldots, \frac{s_m}{b_m}\right) = \frac{s_1}{b_1} + \ldots + \frac{s_m}{b_m} - p,$$

siendo p la cantidad de veces que aparece la operación $*$ en el término t. Por la unicidad en el inciso (a) de este corolario, resulta necesariamente que $s_i = r_i$ para $1 \leq i \leq m$. □

En el lema siguiente $MCM(d_1, \ldots, d_m)$ representa el *mínimo común múltiplo* de los enteros $d_1, \ldots, d_m$.

Lema 8.2.11 *Sean $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{N}$ y $d = MCM(d_1, \ldots, d_m)$. Existen $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{N}$ tales que*

- $d = b_1 \ldots b_m$,
- $MCD(b_i, b_j) = 1$ *para* $i \neq j$,
- $b_i \mid d_i$ *para* $1 \leq i \leq m$.

Demostración. Escribiendo cada d_i como producto de potencias de primos, es claro que existen $b_i, t_i \in \mathbb{Z}$ tales que $d_i = b_i t_i$, $1 \leq i \leq m$ de modo que $d = b_1 \ldots b_m$ y $(b_i, b_j) = 1$ para $i \neq j$. Cada b_i es 1 o bien el producto de potencias de números primos, cada una de las cuales es la mayor potencia del primo correspondiente que divide a d. □

Dado $x = (x_1, \ldots, x_m) \in [0,1]^m$, notamos $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_m|\}$.

Lema 8.2.12 *Sea $a \in [0,1]^m \cap \mathbb{Q}^m$, $d = \text{den}(a)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe una función de McNaughton $f : [0,1]^m \to [0,1]$ tal que:*

- $f(a) = \frac{d-1}{d}$,
- $f(x) \geq \frac{d-1}{d}$ *para todo* $x \in [0,1]^m$,
- $f(x)^k \geq x_i$ *para todo* $x \in [0,1]^m$ *si* $\left(\frac{d-1}{d}\right)^k \geq a_i$, $0 \leq k \leq d$,
- $f(x) = 1$ *siempre que* $\|x - a\|_\infty \geq \varepsilon$.

Demostración. Sea $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $a_i = \frac{k_i}{d}$, $0 \leq k_i \leq d$, para $1 \leq i \leq m$.

Observemos que si $d_i = \text{den}(a_i)$, tenemos que $d = \text{den}(a) = MCM(d_1, \ldots, d_m)$. Por el Lema 8.2.11, existen $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{N}$ tales que $d = b_1 \ldots b_m$, $MCD(b_i, b_j) = 1$ para $i \neq j$ y $b_i \mid d_i$ para $1 \leq i \leq m$. A su vez, por el Corolario 8.2.10, existen $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r_i < b_i$, y términos $t_1, \ldots, t_m$ en el lenguaje $\{\oplus, *\}$ tales que

$$\frac{d-1}{d} = \frac{d-1}{b_1 \ldots b_m} = \frac{r_i}{b_i} \oplus t_i\left(\frac{r_1}{b_1}, \ldots, \frac{r_{i-1}}{b_{i-1}}, \frac{r_{i+1}}{b_{i+1}}, \ldots, \frac{r_m}{b_m}\right).$$

Notemos que, como $b_i \mid d_i$,

$$\frac{r_i}{b_i} = \frac{s_i}{d_i}$$

para cierto $s_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq s_i < d_i$, $1 \leq i \leq m$. Usando el Lema 8.2.8, para $1 \leq i \leq m$ existe una función de McNaughton $f_i : [0,1] \to [0,1]$ tal que:

- $f_i(a_i) = \frac{s_i}{d_i} = \frac{r_i}{b_i}$,
- $f_i(x) \geq \frac{s_i}{d_i} = \frac{r_i}{b_i}$ para todo $x \in [0,1]$,
- $f_i(x) = 1$ siempre que $|x - a_i| \geq \varepsilon$.

Utilizando el mismo lema nuevamente, podemos construir, para $1 \leq i \leq m$, funciones de McNaughton $g_i : [0,1] \to [0,1]$ tales que:

- $g_i(a_i) = 0$,
- $g_i(x) = 1$ siempre que $|x - a_i| \geq \varepsilon$.

A partir de estas funciones de McNaughton de una variable definimos la siguiente función de McNaughton sobre $[0,1]^m$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \bigvee_{i=1}^{m} (f_i(x_i) \oplus t_i(f_1(x_1), \ldots, f_{i-1}(x_{i-1}), f_{i+1}(x_{i+1}), \ldots, f_m(x_m))) \vee \bigvee_{i=1}^{m} g_i(x_i).$$

Verifiquemos que f tiene las propiedades deseadas.

- $f(a) = \frac{d-1}{d}$.

  En efecto,

$$\begin{aligned}
f(a) &= f(a_1, a_2, \ldots, a_m) \\
&= \bigvee_{i=1}^{m} (f_i(a_i) \oplus t_i(f_1(a_1), \ldots, f_{i-1}(a_{i-1}), f_{i+1}(a_{i+1}), \ldots, f_m(a_m))) \vee \bigvee_{i=1}^{m} g_i(a_i) \\
&= \bigvee_{i=1}^{m} \left(\frac{r_i}{b_i} \oplus t_i \left(\frac{r_1}{b_1}, \ldots, \frac{r_{i-1}}{b_{i-1}}, \frac{r_{i+1}}{b_{i+1}}, \ldots, \frac{r_m}{b_m} \right) \right) \vee \bigvee_{i=1}^{m} 0 \\
&= \frac{d-1}{d}.
\end{aligned}$$

- $f(x) \geq \frac{d-1}{d}$ para todo $x \in [0,1]^m$.

  En efecto, dado $x = (x_1, \ldots, x_m) \in [0,1]^m$, tenemos que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \bigvee_{i=1}^{m} (f_i(x_i) \oplus t_i(f_1(x_1), \ldots, f_{i-1}(x_{i-1}), f_{i+1}(x_{i+1}), \ldots, f_m(x_m))) \vee \bigvee_{i=1}^{m} g_i(x_i) \\
&\geq f_1(x_1) \oplus t_1(f_2(x_2), \ldots, f_m(x_m)) \\
&\geq \frac{r_1}{b_1} \oplus t_1 \left(\frac{r_2}{b_2}, \ldots, \frac{r_m}{b_m} \right) \\
&= \frac{d-1}{d}
\end{aligned}$$

  pues $\oplus$ y $*$ son operaciones monótonas.

- $f(x)^k \geq x_i$ para todo $x \in [0,1]^m$ si $\left(\frac{d-1}{d}\right)^k \geq a_i$.

  Supongamos que $\left(\frac{d-1}{d}\right)^k \geq a_i$ para algún índice i, $0 \leq k \leq d$. Luego, por el Lema 8.2.5, $\frac{d-1}{d} \geq \frac{a_i-1}{k} + 1$, de donde resulta $k \leq d(1-a_i) = d - k_i$.

  Observemos que:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \bigvee_{i=1}^{m} (f_i(x_i) \oplus t_i(f_1(x_1), \ldots, f_{i-1}(x_{i-1}), f_{i+1}(x_{i+1}), \ldots, f_m(x_m))) \vee \bigvee_{i=1}^{m} g_i(x_i) \\
&\geq f_i(x_i) \oplus t_i(f_1(x_1), \ldots, f_{i-1}(x_{i-1}), f_{i+1}(x_{i+1}), \ldots, f_m(x_m)) \\
&\geq f_i(x_i) \oplus t_i\left(\frac{r_1}{b_1}, \ldots, \frac{r_{i-1}}{b_{i-1}}, \frac{r_{i+1}}{r_{i+1}}, \ldots, \frac{r_m}{b_m}\right) \\
&\geq f_i(x_i) \oplus \left(\frac{d-1}{d} - \frac{r_i}{b_i}\right) \\
&= \left(f_i(x_i) + \left(\frac{d-1}{d} - \frac{r_i}{b_i}\right)\right)^{\sharp} \\
&\geq \frac{x_i - 1}{d - k_i} + 1.
\end{aligned}$$

  La última desigualdad resulta del hecho de que

$$f_i(x_i) + \left(\frac{d-1}{d} - \frac{r_i}{b_i}\right) \geq \frac{x_i - 1}{d - k_i} + 1$$

  para todo $x_i \in [0,1]$, ya que vale la igualdad para $x_i = a_i$ y la función f_i tiene la forma $f_i(x_i) = (ax_i + b)^{\sharp} \vee (cx_i + d)^{\sharp}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ y $c \leq -1$.

  Por el Lema 8.2.5 resulta entonces que $f(x)^{d-k_i} \geq x_i$ para todo $x \in [0,1]^m$. Luego, como $k \leq d - k_i$, resulta que $f(x)^k \geq f(x)^{d-k_i} \geq x_i$.

- $f(x) = 1$ siempre que $\|x - a\|_\infty \geq \varepsilon$.

  En efecto, si $\|x - a\|_\infty \geq \varepsilon$, entonces existe j tal que $|x_j - a_j| \geq \varepsilon$, con lo cual

$$\begin{aligned}
f(x) &= \bigvee_{i=1}^{m} (f_i(x_i) \oplus t_i(f_1(x_1), \ldots, f_{i-1}(x_{i-1}), f_{i+1}(x_{i+1}), \ldots, f_m(x_m))) \vee \bigvee_{i=1}^{m} g_i(x_i) \\
&\geq g_j(x_j) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

Ya estamos en condiciones de probar el principal resultado de esta sección.

Teorema 8.2.13 $\mathbf{M}^+(R_nO_m)$ *es un retracto de* $\mathbf{M}^+(O_m)$.

Demostración. Claramente se tiene un homomorfismo sobreyectivo $\pi : \mathbf{M}^+(O_m) \to \mathbf{M}^+(R_nO_m)$ dado por la restricción a R_nO_m de las funciones de $M^+(O_m)$. Buscamos ahora un homomorfismo $\iota : \mathbf{M}^+(R_nO_m) \to \mathbf{M}^+(O_m)$ tal que $\pi \circ \iota = id_{M^+(R_nO_m)}$.

Como R_nO_m es finito, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de modo que para cada par $a_1, a_2 \in R_nO_m$ los conjuntos $\{x \in [0,1]^m : \|x - a_1\|_\infty < \varepsilon\}$ y $\{x \in [0,1]^m : \|x - a_2\|_\infty < \varepsilon\}$ sean disjuntos. Utilizando este valor de ε, apliquemos el lema anterior para cada $a \in R_nO_m$ y construyamos una función de McNaughton f_a con las propiedades enunciadas en dicho lema. Claramente si $d = \text{den}(a)$, entonces $f_a(a)^k = \frac{d-k}{d}$ para $0 \leq k \leq d$. Más aún, observemos que como $f_a(x) \geq \frac{d-1}{d}$, por el Lema 8.2.7, $\{1, f_a, f_a^2, \ldots, f_a^d\}$ es una subálgebra implicativa de $\mathbf{M}([0,1]^m)$ isomorfa a $\mathbf{L}_d$.

Dada $g \in M^+(R_nO_m)$, supongamos que $g(a) = \frac{\text{den}(a)-k_a}{\text{den}(a)}$, $0 \leq k_a \leq \text{den}(a)$, para cada $a \in R_nO_m$. Luego definimos

$$\iota(g)(x) = \bigwedge_{a \in R_nO_m} f_a(x)^{k_a}.$$

Veamos que $\iota(g) \in M^+(O_m)$. En efecto, como $g \in M^+(R_nO_m)$ existe $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $g(x) \geq x_\ell$ para todo $x \in R_nO_m$. Luego, dado $a \in R_nO_m$, sea $d = \text{den}(a)$ y $g(a) = \frac{d-k}{d} \geq a_\ell$. En vista de las propiedades que posee f_a, como $f_a(a)^k = \frac{d-k}{d} = \left(\frac{d-1}{d}\right)^k \geq a_\ell$, resulta que $f_a(x)^k \geq x_\ell$ para todo $x \in O_m$. Como esto sucede para cada $a \in R_nO_m$, es claro que $\iota(g)(x) \geq x_\ell$ para todo $x \in O_m$, con lo cual $\iota(g) \in M^+(O_m)$.

Hemos definido entonces una aplicación $\iota : M^+(R_nO_m) \to M^+(O_m)$. Veamos que ι es un homomorfismo de álgebras de implicación de Łukasiewicz. En efecto, dadas dos funciones $g_1, g_2 \in M^+(R_nO_m)$, supongamos que $g_1(a) = \frac{\text{den}(a)-k_{1,a}}{\text{den}(a)}$ y $g_2(a) = \frac{\text{den}(a)-k_{2,a}}{\text{den}(a)}$ para todo $a \in R_nO_m$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\iota(g_1)(x) \to \iota(g_2)(x) &= \bigwedge_{a \in R_nO_m} f_a(x)^{k_{1,a}} \to \bigwedge_{b \in R_nO_m} f_b(x)^{k_{2,b}} \\
&= \bigwedge_{b \in R_nO_m} \bigvee_{a \in R_nO_m} \left(f_a(x)^{k_{1,a}} \to f_b(x)^{k_{2,b}}\right) \\
&= \bigwedge_{b \in R_nO_m} \left(\bigvee_{\substack{a \in R_nO_m \\ a \neq b}} \left(f_a(x)^{k_{1,a}} \to f_b(x)^{k_{2,b}}\right) \vee \left(f_b(x)^{k_{1,b}} \to f_b(x)^{k_{2,b}}\right) \right) \\
&\underset{(1)}{=} \bigwedge_{b \in R_nO_m} \left(f_b(x)^{k_{2,b}} \vee \left(f_b(x)^{k_{1,b}} \to f_b(x)^{k_{2,b}}\right)\right) \\
&= \bigwedge_{b \in R_nO_m} \left(f_b(x)^{k_{1,b}} \to f_b(x)^{k_{2,b}}\right) \\
&\underset{(2)}{=} \bigwedge_{b \in R_nO_m} f_b(x)^{\text{máx}\{k_{2,b}-k_{1,b},0\}} \\
&\underset{(3)}{=} \iota(g_1 \to g_2)(x).
\end{aligned}$$

donde:

- (1) resulta pues, si $a \neq b$, $f_a(x) = 1$ para todo x tal que $f_b(x) \neq 1$;

- (2) resulta pues $\{1, f_b, f_b^2, \ldots, f_b^{\mathrm{den}(b)}\}$ es una subálgebra de $\mathbf{M}^+([0,1]^m)$ isomorfa a $\mathbf{L}_{\mathrm{den}(b)}$;
- (3) resulta pues $(g_1 \to g_2)(b) = \frac{\mathrm{den}(b)-k_{1,b}}{\mathrm{den}(b)} \to \frac{\mathrm{den}(b)-k_{2,b}}{\mathrm{den}(b)} = \frac{\mathrm{den}(b)-\mathrm{máx}\{k_{2,b}-k_{1,b},0\}}{\mathrm{den}(b)}$.

Hemos construido entonces un homomorfismo $\iota : \mathbf{M}^+(R_nO_m) \to \mathbf{M}^+(O_m)$ que claramente satisface la condición $\pi \circ \iota = id_{M^+(R_nO_m)}$. Por lo tanto, $\mathbf{M}^+(R_nO_m)$ es un retracto de $\mathbf{M}^+(O_m)$. □

Corolario 8.2.14 $\mathbf{Free}_{\mathbb{L}_n}(m)$ *es un retracto de* $\mathbf{Free}_{\mathbb{L}}(m)$.

Corolario 8.2.15 *Toda álgebra finita en* $\mathbb{L}$ *es débilmente proyectiva.*

Como ejemplo de un álgebra que no es débilmente proyectiva, probaremos que $\mathbf{L}_\omega$ no lo es. Como dijimos ya en la sección anterior, la variedad $\mathbb{MV}$ de las MV-álgebras posee la FEP, con lo cual está generada como cuasivariedad por sus miembros finitos. A su vez, los miembros finitos de $\mathbb{MV}$ son productos directos de cadenas finitas, las cuales son todas subálgebras de $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$. Por lo tanto, $\mathbb{MV}$ está generada como cuasivariedad por el álgebra $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$. Esto significa que para verificar que una cuasi-identidad es válida en toda MV-álgebra, basta con verificarla en el álgebra $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$.

Lema 8.2.16 *En la MV-álgebra* $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ *y, por lo tanto, en toda MV-álgebra, vale la siguiente cuasi-identidad:*

$$x^n \to y = x \Rightarrow y = x^{n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sean $a, b \in [0,1]$ tales que $a^n \to b = a$. Notemos que si $a = 1$, entonces $b = 1$ y se verifica trivialmente que $b = a^{n+1}$. Luego supongamos $a \neq 1$.

Tenemos que

$$a = a^n \to b = \neg a^n \oplus b = n(\neg a) \oplus b = \mathrm{mín}\{1, n(1-a) + b\}.$$

Pero como $a \neq 1$, debemos tener que

$$a = n(1-a) + b < 1.$$

Luego

$$b = (n+1)a - n.$$

Finalmente notemos que

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= \neg((n+1)\neg a) \\ &= \neg\,\mathrm{mín}\{1, (n+1)(1-a)\} \\ &= \mathrm{máx}\{0, 1-(n+1)(1-a)\} \\ &= \mathrm{máx}\{0, (n+1)a - n\} \\ &= \mathrm{máx}\{0, b\} \\ &= b, \end{aligned}$$

como queríamos probar. □

Corolario 8.2.17 *Dada una MV-álgebra* $\mathbf{A}$*, toda subálgebra implicativa de* $\mathbf{A}$ *isomorfa a* $\mathbf{L}_\omega$ *es de la forma* $\{1, a, a^2, a^3, \ldots\}$ *para cierto* $a \in A$*,* $a \neq 0, 1$*.*

Demostración. Supongamos que $S = \{a_0 = 1, a_1, a_2, \ldots\}$ es una subálgebra implicativa de $\mathbf{A}$ isomorfa a $\mathbf{L}_\omega$, es decir, tal que $a_n \to a_{n+m} = a_m$ para todo $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Veamos que $a_n = a_1^n$ para todo $n \geq 1$. En efecto, para $n = 1$ es claro. Supongamos entonces que $a_k = a_1^k$ y probemos que $a_{k+1} = a_1^{k+1}$. Para ello notemos que

$$a_1^k \to a_{k+1} = a_k \to a_{k+1} = a_1.$$

Luego, por el lema anterior, resulta que $a_{k+1} = a_1^{k+1}$.

Esto muestra que $S = \{1, a_1, a_1^2, a_1^3, \ldots\}$. □

Teorema 8.2.18 *Las álgebras de implicación de Łukasiewicz libres no poseen subálgebras isomorfas a* $\mathbf{L}_\omega$*.*

Demostración. Sea $\mathbf{Free}_{\mathbb{L}}(X)$ el álgebra de implicación de Łukasiewicz libre sobre el conjunto de generadores libres X. Como las álgebras de implicación de Łukasiewicz son los $\{\to, 1\}$-subreductos de las MV-álgebras, podemos pensar a $\mathbf{Free}_{\mathbb{L}}(X)$ como la subálgebra implicativa de $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X)$ generada por X.

Supongamos ahora que $\mathbf{Free}_{\mathbb{L}}(X)$ posee una subálgebra $\mathbf{S}$ isomorfa a $\mathbf{L}_\omega$. Por la proposición anterior, existe $t \in Free_{\mathbb{MV}}(X)$ tal que $S = \{1, t, t^2, t^3, \ldots\}$.

Ahora bien, como en t aparece sólo un número finito de variables, debe existir $X_0 \subseteq X$, X_0 finito, tal que $t \in Sg(X_0)$ y, más aún, $S \subseteq Sg(X_0)$.

Notemos además que

$$Sg(X_0) \cap [X) = Sg(X_0) \cap [X_0).$$

En efecto, si existe $t'(x_1, \ldots, x_n) \in Sg(X_0)$ tal que $t'(x_1, \ldots, x_n) \geq y$ para $y \in X$, $y \neq x_1, \ldots, x_n$, entonces $t'(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

Luego $S \subseteq Sg(X_0) \cap [X_0)$.

Como $\mathbf{Sg}(X_0) \cong \mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X_0)$, tenemos entonces que $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X_0)$ posee una subálgebra $\mathbf{S}$ isomorfa a $\mathbf{L}_\omega$ tal que $S \subseteq [X_0)$.

Ahora bien, como $S = \{1, t, t^2, \ldots\} \subseteq [X_0)$, para cada $n \geq 1$, existe $x_n \in X_0$ tal que $t^n \geq x_n$. Pero como X_0 es finito, debemos tener que existe $x_0 \in X_0$ tal que $x_n = x_0$ para infinitos n. Luego $S \subseteq [x_0)$.

Utilicemos ahora la descripción de $\mathbf{Free}_{\mathbb{MV}}(X_0)$ en términos de funciones de McNaughton sobre $[0, 1]^k$, $k = |X_0|$. Podemos suponer entonces que existe una función de McNaughton $f : [0, 1]^k \to [0, 1]$, f no idénticamente 1, tal que $f(x_1, \ldots, x_k)^n \geq x_1$ para todo $n \geq 1$ y todo $x_1, \ldots, x_k \in [0, 1]$. Consideremos el conjunto

$$A = \{(a_1, \ldots, a_k) \in [0, 1]^k : f(a_1, \ldots, a_k) \neq 1\}.$$

Dado $(a_1, \ldots, a_k) \in A$, existe n suficientemente grande tal que $f(a_1, \ldots, a_k)^n = 0$. Pero como $f(a_1, \ldots, a_k)^n \geq a_1$, resulta que $a_1 = 0$. Esto muestra que

$$A \subseteq \{(a_1, \ldots, a_k) \in [0, 1]^k : a_1 = 0\}.$$

Luego $f(a_1, \ldots, a_k) = 1$ para todo $(a_1, \ldots, a_k)$ con $a_1 \neq 1$. Por continuidad f debe ser idénticamente igual a 1, contradicción. $\square$

Como toda álgebra débilmente proyectiva es un retracto de algún álgebra libre, concluimos entonces lo siguiente.

Corolario 8.2.19 $\mathbf{L}_\omega$ *no es débilmente proyectiva.*

Capítulo 9

Clases algebraicamente expandibles

En [CamVag09], D. Vaggione y M. Campercholi introdujeron la noción de *clase algebraicamente expandible*. Una tal clase de álgebra está determinada por sentencias de la forma

$$(\forall x_1, \ldots, x_n)(\exists! z_1, \ldots, z_m) \mathop{\&}_{i=1}^{k} p_i(\overline{x}, \overline{z}) = q_i(\overline{x}, \overline{z})$$

donde p_i, q_i son términos en las variables $x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m$. A este tipo de sentencias las denominamos *sentencias DEF* (Definición Ecuacional de Función). Cuando un álgebra $\mathbf{A}$ satisface una sentencia DEF quedan definidas m operaciones n-arias $f_1, \ldots, f_m : A^n \to A$ tales que valen las ecuaciones

$$p_i(\overline{x}, f_1(\overline{x}), \ldots, f_m(\overline{x})) = q_i(\overline{x}, f_1(\overline{x}), \ldots, f_m(\overline{x})), \qquad 1 \leq i \leq k.$$

En dicho trabajo, los autores plantean el problema de hallar todas las clases algebraicamente expandibles dentro de una variedad dada y resuelven este problema para muchas variedades clásicas. Posteriormente, en [Cam10], M. Campercholi describió completamente las clases algebraicamente expandibles de la variedad $\mathbb{I}$ de las álgebras de implicación. Más precisamente, el autor mostró que dichas clases forman una cadena de tipo $\omega + 1$ y da las sentencias que definen cada clase. En este capítulo abordaremos el problema de determinar las clases algebraicamente expandibles para la variedad $\mathbb{L}$ de álgebras de implicación de Łukasiewicz. Veremos algunos resultados generales sobre esta variedad pero, debido al alto grado de complejidad del problema, nos abocaremos principalmente al caso de la variedad $\mathbb{L}_2$ generada por la cadena de tres elementos $\mathbf{L}_2$. Veremos que en este caso es posible dar una descripción de las clases algebraicamente expandibles en términos de cierta familia especial de álgebras.

Otro problema íntimamente relacionado con el anterior es el de la determinación de las *funciones algebraicas* sobre un álgebra dada. Una tal función no es otra cosa que una operación sobre un álgebra inducida por una sentencia DEF. En [CamVag11], los autores presentan este problema y lo resuelven para diversas variedades conocidas. Una propiedad particular que permite la descripción de estas funciones es que forman un clon. Dicho clon contiene al clon de funciones definibles por términos y en muchos casos coincide con él, es decir, en muchos casos las únicas funciones algebraicas son las definibles por términos. En este capítulo también abordaremos este problema para las álgebras de implicación de Łukasiewicz. Veremos que en este caso hay nuevas e interesantes funciones algebraicas, que no son definibles mediante términos. Daremos una descripción completa de dichas funciones para todas las álgebras de la variedad $\mathbb{L}_2$. Además estos resultados nos serán de utilidad para resolver el problema de la determinación de las clases algebraicamente expandibles.

En la Sección 9.1 expondremos las nociones y propiedades básicas sobre las clases algebraicamente expandibles y las funciones algebraicas. En la Sección 9.2 abordaremos el problema de la determinación de las clases algebraicamente expandibles que culminaremos en la Sección 9.4, previa caracterización de las funciones algebraicas, contenido que constituye el objetivo de la Sección 9.3.

9.1. Funciones algebraicas y clases algebraicamente expandibles

Dado un lenguaje de álgebras $\mathcal{L}$, una sentencia de primer orden φ en $\mathcal{L}$ se dice una **definición ecuacional de función** (DEF) si es de la forma

$$\varphi = (\forall x_1, \ldots, x_n)(\exists! z_1, \ldots, z_m) \left(\mathop{\&}_{i=1}^{k} s_i(\overline{x}, \overline{z}) = t_i(\overline{x}, \overline{z}) \right),$$

donde s_i y t_i son términos en el lenguaje $\mathcal{L}$, $n \geq 0$, $m \geq 1$, $k \geq 1$. Utilizamos las abreviaturas $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ para mayor simplicidad de las expresiones.

Podemos separar el contenido existencial de φ de la parte de unicidad, definiendo:

$$E(\varphi) = (\forall \overline{x})(\exists \overline{z}) \left(\mathop{\&}_{i=1}^{k} s_i(\overline{x}, \overline{z}) = t_i(\overline{x}, \overline{z}) \right),$$

$$U(\varphi) = (\forall \overline{x})(\forall \overline{z})(\forall \overline{y}) \left(\left(\mathop{\&}_{i=1}^{k} s_i(\overline{x}, \overline{z}) = t_i(\overline{x}, \overline{z}) \,\&\, \mathop{\&}_{i=1}^{k} s_i(\overline{x}, \overline{y}) = t_i(\overline{x}, \overline{y}) \right) \Rightarrow \overline{z} = \overline{y} \right).$$

Con estas definiciones, φ es equivalente a $E(\varphi) \,\&\, U(\varphi)$. Observemos que $E(\varphi)$ es una sentencia positiva y que $U(\varphi)$ es equivalente a una conjunción de cuasi-identidades.

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra tal que $\mathbf{A} \models \varphi$. Es claro, entonces que podemos definir unívocamente una función $[\varphi]^{\mathbf{A}} : A^n \to A^m$ de modo que

$$[\varphi]^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_m) \text{ si y sólo si } \mathop{\&}_{i=1}^{k} s_i^{\mathbf{A}}(\overline{a}, \overline{b}) = t_i^{\mathbf{A}}(\overline{a}, \overline{b}).$$

Para $1 \leq j \leq m$, denotamos $[\varphi]_j^{\mathbf{A}} = \pi_j \circ [\varphi]^{\mathbf{A}}$, donde $\pi_j : A^m \to A$ es la j-ésima proyección. Concluimos entonces que la validez de φ en $\mathbf{A}$ permite definir sobre $\mathbf{A}$ m operaciones n-arias, como solución de un sistema de ecuaciones en el lenguaje de $\mathbf{A}$.

Decimos entonces que una función $f : A^n \to A$ es **algebraica**, cuando existe una sentencia DEF φ válida en $\mathbf{A}$ tal que $f = [\varphi]_j^{\mathbf{A}}$ para algún j. En el caso de que φ posea una única variable z, decimos que f es **monoalgebraica** y escribimos $f = [\varphi]^{\mathbf{A}}$ (sin subíndice). Las funciones monoalgebraicas jugarán un papel importante en la caracterización de las funciones algebraicas en las álgebras de implicación de Łukasiewicz. Un estudio sistemático de las funciones algebraicas se puede encontrar en los trabajos de D. Vaggione y M. Campercholi (ver, por ejemplo, [CamVag11]).

El siguiente lema reúne las propiedades básicas de las sentencias DEF que utilizaremos en este trabajo.

Lema 9.1.1 *Sea φ una DEF con n cuantificadores universales y m cuantificadores existenciales.*

(a) *Si $\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ es una familia de álgebras tal que $\mathbf{A}_i \models \varphi$ para todo $i \in I$, entonces $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i \models \varphi$. Más aún,*

$$[\varphi]_j^{\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i}(p_1, \ldots, p_n)(i) = [\varphi]_j^{\mathbf{A}_i}(p_1(i), \ldots, p_n(i))$$

para cada $i \in I$, $j = 1, \ldots, m$, $p_1, \ldots, p_n \in \prod_{i\in I} A_i$.

(b) *Supongamos que $\mathbf{A} \models \varphi$ y que $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$. Entonces*

- $\mathbf{B} \models U(\varphi)$.
- $\mathbf{B} \models \varphi$ *si y sólo si* $\mathbf{B} \models E(\varphi)$ *si y sólo si* $[\varphi]^{\mathbf{A}}(B^n) \subseteq B^m$.

(c) *Supongamos que $\mathbf{A} \models \varphi$ y que $\theta \in Con(\mathbf{A})$. Entonces:*

- $\mathbf{A}/\theta \models E(\varphi)$.
- *si $\mathbf{A}/\theta \models U(\varphi)$, entonces $[\varphi]_1^{\mathbf{A}}, \ldots, [\varphi]_m^{\mathbf{A}}$ preservan θ.*

(d) *Supongamos que $\mathbf{A} \models \varphi$ y que $\mathbf{B} \in IS(\mathbf{A}) \cap H(\mathbf{A})$. Entonces $\mathbf{B} \models \varphi$.*

(e) *Si $\mathbf{B}, \mathbf{C} \leq \mathbf{A}$ y se tiene que $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \models \varphi$, entonces $\mathbf{B} \cap \mathbf{C} \models \varphi$.*

(f) *Dado un automorfismo γ de $\mathbf{A}$, sea $PF(\gamma) = \{a \in A : \gamma(a) = a\}$, el subuniverso de $\mathbf{A}$ formado por los puntos fijos de γ, y sea $\mathbf{PF}(\gamma)$ la subálgebra correspondiente. Si $\mathbf{A} \models \varphi$, entonces $\mathbf{PF}(\gamma) \models \varphi$.*

Además de las propiedades elementales enunciadas en el lema anterior, las sentencias DEF gozan de una propiedad de preservación muy importante respecto de los productos subdirectos globales. Dicha propiedad ya la presentamos en el Capítulo 5, Proposición 5.2.2. La recordamos nuevamente aquí porque será de suma utilidad en este capítulo.

Proposición 9.1.2 *Supongamos que $\mathbf{A} \leq \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ es un producto subdirecto global y sea φ una sentencia DEF. Si $\mathbf{A}_i \models \varphi$ para todo $i \in I$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi$.*

Respecto de las sentencias DEF podemos plantear dos problemas distintos pero íntimamente relacionados. El primero consiste en describir todas las funciones algebraicas sobre un álgebra dada. La siguiente propiedad de las funciones algebraicas facilita esta descripción.

Lema 9.1.3 *Si $f : A^n \to A$ y $g_1, \ldots, g_n : A^m \to A$ son funciones algebraicas sobre un álgebra $\mathbf{A}$, entonces la composición $f \circ (g_1, \ldots, g_n) : A^m \to A$ también es una función algebraica sobre $\mathbf{A}$.*

El lema anterior, junto con el hecho de que las proyecciones $\pi_i : A^n \to A$ son funciones algebraicas, se resume diciendo que la familia de funciones algebraicas sobre $\mathbf{A}$ es un *clon*. Más aún, todas las funciones sobre $\mathbf{A}$ determinadas por los términos del lenguaje de $\mathbf{A}$ son claramente algebraicas, por lo que el clon de funciones algebraicas contiene al clon de funciones representables por términos. Denotamos con $Clo(\mathbf{A})$ al clon de funciones representables por términos en $\mathbf{A}$ y con $Clo_{alg}(\mathbf{A})$ al clon de funciones algebraicas sobre $\mathbf{A}$. Tenemos entonces que $Clo(\mathbf{A}) \subseteq Clo_{alg}(\mathbf{A})$. Para muchas álgebras vale la igualdad (ver [CamVag11]); sin embargo, veremos que para las álgebras de implicación de Łukasiewicz ése no es el caso.

Las funciones monoalgebraicas, por su parte, no forman un clon, pero constituyen una clase muy importante de funciones algebraicas. El conjunto de funciones algebraicas sobre un álgebra $\mathbf{A}$ lo notamos $M_{alg}(\mathbf{A})$. Se tiene la cadena de inclusiones $Clo(\mathbf{A}) \subseteq M_{alg}(\mathbf{A}) \subseteq Clo_{alg}(\mathbf{A})$.

La principal ventaja de que el conjunto de funciones algebraicas forme un clon radica en que para su descripción basta dar un conjunto de generadores, es decir, es suficiente hallar una familia de funciones algebraicas de modo que toda otra función algebraica se pueda obtener por composición a partir de las funciones de esta familia distinguida.

El otro problema relacionado con las sentencias DEF al que aludimos anteriormente surge a partir de la siguiente definición: decimos que una clase de álgebras $\mathbb{K}$ es una **clase algebraicamente expandible** si hay un conjunto de sentencias DEF Γ tal que $\mathbb{K} = Mod(\Gamma)$, es decir, $\mathbb{K}$ consta de todas las álgebras del tipo de similaridad considerado que satisfacen las sentencias de Γ. Dada una variedad $\mathbb{V}$, el problema consiste en describir todas las subclases de $\mathbb{V}$ definibles por medio de sentencias DEF. Observemos que las ecuaciones son equivalentes a sentencias DEF, por lo que las subvariedades de $\mathbb{V}$ son clases algebraicamente expandibles. Es claro que la intersección arbitraria de clases algebraicamente expandibles vuelve a ser del mismo tipo. Esto permite mostrar que las clases algebraicamente expandibles contenidas en una variedad $\mathbb{V}$ forman un reticulado, al que denotamos $AE(\mathbb{V})$.

Un estudio profundo de las clases algebraicamente expandibles se encuentra en los trabajos de D. Vaggione y M. Campercholi (ver, por ejemplo, [CamVag09]). El siguiente resultado general probado por dichos autores en el trabajo citado nos será de utilidad para la descripción de las clases algebraicamente expandibles en las variedades $\mathbb{L}_n$. Aquí $Mod(\varphi)$ denota la clase de estructuras del tipo de similaridad considerado que satisfacen la sentencia φ.

Proposición 9.1.4 *Sea $\mathbb{Q}$ una cuasivariedad y sean φ_1, φ_2 dos DEFs en el lenguaje de $\mathbb{Q}$. Supongamos que $Mod(U(\varphi_1)) \cap \mathbb{Q}$ y $Mod(U(\varphi_2)) \cap \mathbb{Q}$ son cuasivariedades finitamente generadas, y supongamos además que para cada álgebra finita $\mathbf{A} \in \mathbb{Q}$ se tiene que*

$$\mathbf{A} \models \varphi_1 \Longleftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi_2.$$

Entonces

$$Mod(\varphi_1) \cap \mathbb{Q} = Mod(\varphi_2) \cap \mathbb{Q}.$$

9.2. Representación global de álgebras de implicación de Łukasiewicz finitas

El objetivo de esta sección es obtener una representación de las álgebras de implicación de Łukasiewicz finitas como productos subdirectos globales de una familia especial de álgebras. En [Vag92], D. Vaggione probó varios resultados que relacionan las representaciones de álgebras en productos subdirectos globales con los teoremas chinos del resto. Probaremos un teorema chino del resto que dará como consecuencia inmediata la representación global deseada.

En primer lugar definimos la familia de álgebras que vamos a utilizar para representar a todas las álgebras finitas de $\mathbb{L}$.

Definimos $\mathbf{F}_1 = \mathbf{L}_1$ y, para $n \geq 2$, definimos $\mathbf{F}_n$ como el álgebra de implicación de Łukasiewicz con universo $F_n = \{0,1\}^n - \{(0,\ldots,0)\}$, es decir, $\mathbf{F}_n$ es el álgebra de implicación de Łukasiewicz que se obtiene quitando el primer elemento al álgebra $\mathbf{L}_1^n$.

Consideremos la familia $\mathcal{G}$ de álgebras de $\mathbb{L}$ tal que:

- $\mathbf{L}_n \in \mathcal{G}$ para todo $n \geq 1$,
- $\mathbf{A} \in \mathcal{G}$ si $\mathbf{A}$ es un álgebra finita de $\mathbb{L}$ que tiene n coátomos y posee una subálgebra isomorfa a $\mathbf{F}_n$ sin ínfimo en $\mathbf{A}$, es decir, tal que no existe en $\mathbf{A}$ el ínfimo del conjunto subyacente de la subálgebra.

Dada un álgebra de implicación de Łukasiewicz $\mathbf{A}$, sea

$$\Sigma_{\mathbf{A}} = \{\theta \in Con(\mathbf{A}) : \mathbf{A}/\theta \in I(\mathcal{G})\}.$$

Un sistema $(\theta_1,\ldots,\theta_n; a_1,\ldots,a_n)$ donde $\theta_1,\ldots,\theta_n \in Con(\mathbf{A})$, $a_1,\ldots,a_n \in A$ es un **sistema de congruencias en A** si $(a_i,a_j) \in \theta_i \vee \theta_j$, para $i,j = 1,\ldots,n$. Un elemento $b \in A$ es una **solución** al sistema $(\theta_1,\ldots,\theta_n; a_1,\ldots,a_n)$ si $(b,a_i) \in \theta_i$, para $i = 1,\ldots,n$.

El siguiente es un "teorema chino del resto" respecto de las congruencias $\Sigma_{\mathbf{A}}$.

Teorema 9.2.1 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra de implicación de Łukasiewicz finita. Todo sistema de congruencias* $(\theta_1,\ldots,\theta_n; a_1,\ldots,a_n)$ *en* $\mathbf{A}$ *tal que para cada* $\theta \in \Sigma_{\mathbf{A}}$, $\theta_i \subseteq \theta$ *para algún índice* i*, tiene solución en* $\mathbf{A}$.

Demostración. Sea F_i el filtro implicativo asociado a la congruencia θ_i, $i = 1,\ldots,n$.

En primer lugar, vamos a traducir la condición de que $(\theta_1,\ldots,\theta_n; a_1,\ldots,a_n)$ es un sistema de congruencias en términos de elementos ínfimo-irreducibles. Para ello, recordemos la notación utilizada en la Sección 6.1. Pensamos a $\mathbf{A}$ sumergida en un producto directo de cadenas finitas y recordemos que, si notamos con C al conjunto de coátomos del esqueleto booleano de dicho producto de cadenas, podemos suponer que A contiene a C. Por otra parte, llamamos D al conjunto de elementos ínfimo-irreducibles de $\mathbf{A}$. Es claro que $C \subseteq D$ y que D está formado por cadenas incomparables entre sí, siendo los elementos de C los mínimos de dichas cadenas. Recordemos también que, para $a \in A$, $D_a = \{d \in D : a \leq d\}$ y que si F es un filtro de $\mathbf{A}$, $D_F = F \cap D$.

Utilizando las Proposiciones 6.1.4 y 6.1.5, la condición

$$(a_i,a_j) \in \theta_i \vee \theta_j, \text{ para } 1 \leq i,j \leq n$$

se convierte en

$$D_{a_i} \setminus (D_{F_i} \cup D_{F_j}) = D_{a_j} \setminus (D_{F_i} \cup D_{F_j}), \text{ para } 1 \leq i,j \leq n.$$

Sea

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} D_{a_i} \setminus D_{F_i}.$$

Afirmamos que $b = \bigwedge B$ existe en $\mathbf{A}$ y que es la solución deseada al sistema de congruencias.

Supongamos que B no tenga ínfimo y sea $M \subseteq B$ minimal con respecto a la propiedad de no tener ínfimo en $\mathbf{A}$, es decir, M no tiene ínfimo en $\mathbf{A}$, pero todo subconjunto propio de M sí lo tiene. La minimalidad de M hace que contenga a lo sumo un elemento de cada cadena de ínfimo-irreducibles. Sea $M = \{d_1, \ldots, d_k\}$ y sea M' el conjunto de los ínfimos de todos los subconjuntos propios de M. Estamos considerando aquí que $\bigwedge \emptyset = 1 \in M'$. Afirmamos que M' es un subuniverso de $\mathbf{A}$ y que $\mathbf{M'} \cong \mathbf{F}_k$. En efecto, teniendo en cuenta que

$$d_i \to d_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ d_j & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

vemos que

$$\bigwedge_{s=1}^{u} d_{i_s} \to \bigwedge_{t=1}^{v} d_{j_t} = \bigwedge_{t=1}^{v} \underbrace{\bigvee_{s=1}^{u} (d_{i_s} \to d_{j_t})}_{\in M \cup \{1\}} \in M'.$$

Es inmediato entonces que $\mathbf{M'} \cong \mathbf{F}_k$.

Sea

$$U = \{c \in C : \text{para todo } d \in M, c \not\leq d\}$$

y sea F el filtro implicativo correspondiente a U. Luego, el álgebra $\mathbf{A}/F$ tiene k coátomos y contiene una subálgebra isomorfa a $\mathbf{M'}$ o, equivalentemente, a $\mathbf{F}_k$. Luego $F \in \Sigma_{\mathbf{A}}$ y, por hipótesis, existe algún índice ℓ tal que $F_\ell \subseteq F$.

Ahora bien, como $D_F \cap M = \emptyset$, $D_{F_\ell} \cap M = \emptyset$, así que $M \subseteq B \setminus D_{F_\ell}$. Entonces

$$\begin{aligned} M &\subseteq B \setminus D_{F_\ell} \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^{n} D_{a_i} \setminus D_{F_i} \right) \setminus D_{F_\ell} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (D_{a_i} \setminus (D_{F_i} \cup D_{F_\ell})) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (D_{a_\ell} \setminus (D_{F_i} \cup D_{F_\ell})) \\ &\subseteq D_{a_\ell}. \end{aligned}$$

Esto muestra que $M \subseteq [a_\ell)$, lo que contradice el hecho de que M no posee ínfimo en $\mathbf{A}$.

Hemos probado entonces que B debe tener ínfimo en $\mathbf{A}$. Ahora veremos que $b = \bigwedge B$ es, de hecho, la solución del sistema de congruencias planteado. En efecto, como B es creciente en D, $B = D_b$. Luego, verificar que b es solución del sistema de congruencias es equivalente a verificar que

$$B \setminus D_{F_i} = D_{a_i} \setminus D_{F_i}, \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

En efecto, para $1 \leq j \leq n$ tenemos que

$$\begin{aligned}
B \setminus D_{F_j} &= \left(\bigcup_{i=1}^{n} D_{a_i} \setminus D_{F_i} \right) \setminus D_{F_j} \\
&= \bigcup_{i=1}^{n} \left(D_{a_i} \setminus (D_{F_i} \cup D_{F_j}) \right) \\
&= \bigcup_{i=1}^{n} \left(D_{a_j} \setminus (D_{F_i} \cup D_{F_j}) \right) \\
&= D_{a_j} \cap D_{F_j}^c \cap \bigcup_{i=1}^{n} D_{F_i}^c \\
&= D_{a_j} \setminus D_{F_j}.
\end{aligned}$$

□

El siguiente corolario se sigue inmediatamente de los resultados generales sobre productos subdirectos globales obtenidos por D. Vaggione en [Vag92] (específicamente, el Teorema 3.5). De todas maneras, para una mayor independencia de este trabajo, incluimos una demostración directa del caso particular que nos interesa. Recordar la definición de producto subdirecto global dada en la Sección 5.2.

Corolario 9.2.2 *Toda álgebra de implicación de Łukasiewicz finita es producto subdirecto global de álgebras de $\mathcal{G}$.*

Demostración. Consideremos el homomorfismo natural $\mathbf{A} \to \prod_{\theta \in \Sigma_{\mathbf{A}}} \mathbf{A}/\theta$. Como $\Sigma_{\mathbf{A}}$ contiene a todas las congruencias de $\mathbf{A}$ cuyo cociente es subdirectamente irreducible, es claro que $\bigcap \Sigma_{\mathbf{A}} = \Delta$ y que el homomorfismo mencionado es inyectivo, con lo cual define un producto subdirecto. Queremos ver ahora que dicho producto subdirecto es global.

Consideramos sobre $\Sigma_{\mathbf{A}}$ la topología τ generada por los ecualizadores $e(a, b) = \{\theta \in \Sigma_{\mathbf{A}} : (a, b) \in \theta\}$ para $a, b \in A$.

Probaremos que el producto subdirecto $\mathbf{A} \to \prod_{\theta \in \Sigma_{\mathbf{A}}} \mathbf{A}/\theta$ emparcha sobre τ. Ahora bien, como $\mathbf{A}$ es finita, $\Sigma_{\mathbf{A}}$ y τ también lo son. Luego es suficiente mostrar que hay emparche finito. Más aún, es fácil verificar que para probar que hay emparche sobre una topología τ, es suficiente probar que hay emparche respecto de una base de dicha topología. En nuestro caso, la base de la topología τ está formada por intersecciones finitas de ecualizadores.

Consideremos un sistema de emparche finito $(\{F_1, \ldots, F_n\}, \{a_1, \ldots, a_n\})$, donde para cada $i = 1, \ldots, n$, $a_i \in A$ y F_i es un básico de la topología τ. Más aún, debemos suponer que $F_i \cap F_j \subseteq e(a_i, a_j)$ para cada par i, j, y que $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \Sigma_{\mathbf{A}}$.

Supongamos $F_i = \bigcap_{k=1}^{m_i} e(a_{ik}, b_{ik})$, $1 \leq i \leq n$, $a_{ik}, b_{ik} \in A$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, consideremos la congruencia $\theta_i = \bigcap_{\theta \in F_i} \theta$. Como $\Sigma_{\mathbf{A}}$ contiene a todas las congruencias (completamente) ínfimo-irreducibles de $\mathbf{A}$, es claro que $\theta_i = Cg^{\mathbf{A}}(\{(a_{ik}, b_{ik}) : 1 \leq k \leq m_i\})$, y más aún,

$$\begin{aligned}\theta_i \vee \theta_j &= Cg^{\mathbf{A}}(\{(a_{ik}, b_{ik}) : 1 \leq k \leq m_i\}) \vee Cg^{\mathbf{A}}(\{(a_{jk}, b_{jk}) : 1 \leq k \leq m_j\}) \\ &= Cg^{\mathbf{A}}(\{(a_{ik}, b_{ik}) : 1 \leq k \leq m_i\} \cup \{(a_{jk}, b_{jk}) : 1 \leq k \leq m_j\}) \\ &= \bigcap\{\theta : \theta \in F_i \cap F_j\}.\end{aligned}$$

Ahora bien, como $F_i \cap F_j \subseteq e(a_i, a_j)$, concluimos que $(a_i, a_j) \in \theta_i \vee \theta_j$. Esto significa que $(\theta_1, \ldots, \theta_n; a_1, \ldots, a_n)$ es un sistema de congruencias en $\mathbf{A}$.

Observemos que dicho sistema de congruencias satisface las condiciones del teorema anterior. En efecto, dado $\theta \in \Sigma_{\mathbf{A}}$, existe i tal que $\theta \in F_i$, de donde $\theta_i \subseteq \theta$. Por lo tanto, en virtud del teorema anterior, existe $b \in A$ tal que $(b, a_i) \in \theta_i$ para $1 \leq i \leq n$. Resulta entonces que $F_i \subseteq e(b, a_i)$ para $1 \leq i \leq n$, con lo cual el sistema de emparche tiene solución. $\square$

Queremos probar ahora que este resultado es óptimo. Para ello, afirmamos que las álgebras de la familia $\mathcal{G}$ son globalmente indescomponibles en el sentido de que no se pueden representar como productos subdirectos globales de imágenes homomorfas propias. Para hacer esto, utilizaremos la propiedad de preservación de los productos subdirectos globales enunciada en la Proposición 9.1.2.

Dadas variables $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq 2$, consideremos los términos

$$s_i^n(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{j \neq i} x_j.$$

Además, consideremos las siguientes sentencias DEF

$$\varphi_n = (\forall x_1, \ldots, x_n)(\exists! z)\left(z \to s_1^n(\overline{x}) = 1 \,\&\, \ldots \,\&\, z \to s_n^n(\overline{x}) = 1 \,\&\, \bigvee_{i=1}^{n}(s_i^n(\overline{x}) \to z) = 1\right).$$

Es fácil chequear que la validez de φ_n es equivalente a la existencia del ínfimo

$$\bigwedge_{i=1}^{n} s_i^n(x_1, \ldots, x_n).$$

Observemos que φ_2 es equivalente a la existencia del ínfimo de todo par de elementos y que fue la sentencia DEF utilizada en la Sección 7.2 para caracterizar la permutabilidad de congruencias.

Si un álgebra $\mathbf{A}$ satisface φ_n, denotamos con $[\varphi_n]^{\mathbf{A}}$ la aplicación de A^n en A que determina la sentencia φ_n.

Proposición 9.2.3 *Si* $\mathbf{A}$ *es un álgebra de implicación de Łukasiewicz finita con n coátomos, entonces* $\mathbf{A} \models \varphi_m$ *para todo* $m > n$.

Demostración. El Teorema 6.1.1 nos permite considerar $\mathbf{A}$ como un subconjunto creciente de $\mathbf{L}_k^n$ para algún k suficientemente grande.

Claramente $\mathbf{L}_k$ satisface φ_m porque es totalmente ordenada, por lo que queda definida una aplicación $[\varphi_m]^{\mathbf{L}_k} : L_k^m \to L_k$, dada por

$$[\varphi_m]^{\mathbf{L}_k}(a_1, \ldots, a_m) = \bigwedge_{i=1}^{m} (s_i^m)^{\mathbf{L}_k}(a_1, \ldots, a_m).$$

Dados $a_1, \ldots, a_m \in L_k$, sea $\tilde{a} = \max\{a_1, \ldots, a_m\}$, entonces es fácil verificar que:

- $[\varphi_m]^{\mathbf{L}_k}(a_1, \ldots, a_m) = \tilde{a}$ si $\tilde{a}$ aparece más de una vez entre los elementos $a_1, \ldots, a_m$,
- $[\varphi_m]^{\mathbf{L}_k}(a_1, \ldots, a_m) = \max(\{a_1, \ldots, a_m\} \setminus \{\tilde{a}\})$, en otro caso.

En particular, $[\varphi_m]^{\mathbf{L}_k}(a_1, \ldots, a_m) \geq a_j$ para todo j excepto posiblemente para un valor de j.

Observemos asimismo que, como $\mathbf{L}_k \models \varphi_m$, también es válido que $\mathbf{L}_k^n \models \varphi_m$. Más aún, se verifica fácilmente que, dados $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m \in L_k^n$,

$$[\varphi_m]^{\mathbf{L}_k^n}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m)(i) = [\varphi_m]^{\mathbf{L}_k}(\overline{x}_1(i), \ldots, \overline{x}_m(i)),$$

para $1 \leq i \leq n$. Luego, para cada i tal que $1 \leq i \leq n$,

$$[\varphi_m]^{\mathbf{L}_k^n}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m)(i) \geq \overline{x}_j(i), 1 \leq j \leq m \text{ excepto posiblemente para un índice } j = j_i.$$

Como $1 \leq i \leq n$ pero $1 \leq j \leq m$ y $m > n$, debe existir un índice j_0 para el cual

$$[\varphi_m]^{\mathbf{L}_k^n}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m)(i) \geq \overline{x}_{j_0}(i)$$

para todo i tal que $1 \leq i \leq n$. Esto muestra que

$$[\varphi_m]^{\mathbf{L}_k^n}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m) \geq \overline{x}_{j_0}.$$

Ahora bien, como $\mathbf{A}$ es creciente en $\mathbf{L}_k^n$, resulta que $\mathbf{A}$ satisface φ_m. $\square$

Corolario 9.2.4 *Toda álgebra de la familia $\mathcal{G}$ es globalmente indescomponible.*

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{G}$. Si $\mathbf{A} \cong \mathbf{L}_n$ para algún n, no hay nada que probar pues $\mathbf{L}_n$ es subdirectamente irreducible.

Luego, supongamos que $\mathbf{A}$ posee n coátomos y una subálgebra isomorfa a $\mathbf{F}_n$ que no posee ínfimo en $\mathbf{A}$. De esta condición, se desprende que $\mathbf{A} \not\models \varphi_n$, pues podemos tomar los átomos de la subálgebra de $\mathbf{A}$ isomorfa a $\mathbf{F}_n$ para refutar la sentencia φ_n.

Ahora bien, supongamos que $\mathbf{A}$ fuera producto subdirecto global de imágenes homomorfas propias. Como todo cociente propio de $\mathbf{A}$ posee menos coátomos que $\mathbf{A}$, la proposición anterior nos garantiza que dichos cocientes satisfacen la sentencia φ_n. Luego, como la validez de φ_n se preserva bajo productos subdirectos globales, $\mathbf{A}$ debería satisfacer φ_n, lo que constituye una contradicción. $\square$

9.3. Clases algebraicamente expandibles (Parte 1)

Las clases algebraicamente expandibles en la variedad $\mathbb{L}_1$ de álgebras de implicación fueron descriptas completamente en [Cam10]. En ese trabajo se muestra que forman una cadena de tipo $\omega+1$ y que las sentencias DEF que determinan cada clase son precisamente las sentencias φ_n definidas en la sección anterior.

Nuestro objetivo es ahora describir el reticulado de clases algebraicamente expandibles de la variedad $\mathbb{L}$. Sin embargo, veremos que dicho objetivo es bastante ambicioso pues simplemente al considerar la variedad $\mathbb{L}_2 = V(\mathbf{L}_2)$ (álgebras de Łukasiewicz trivalentes) aparecen un sinnúmero de nuevas clases algebraicamente expandibles y la complejidad del reticulado aumenta enormemente. Debido a esta razón, daremos algunos resultados generales sobre el reticulado de clases algebraicamente expandibles de $\mathbb{L}$, pero nos concentraremos la mayor parte del tiempo en la subvariedad $\mathbb{L}_2$.

Dadas dos álgebras $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{L}$, definimos:

$$\mathbf{A} \prec \mathbf{B} \text{ si y sólo si para toda DEF } \varphi : (\mathbf{B} \models \varphi \Rightarrow \mathbf{A} \models \varphi).$$

La relación $\prec$ es claramente reflexiva y transitiva, es decir, un pre-orden. Luego la relación

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \text{ si y sólo si } \mathbf{A} \prec \mathbf{B} \text{ y } \mathbf{B} \prec \mathbf{A}$$

es una relación de equivalencia. Restringiendo la relación a la familia $\mathcal{G}$, tenemos que $(\mathcal{G}, \prec)$ es un conjunto pre-ordenado al que se le puede asociar el conjunto ordenado $(\mathcal{G}/\sim, \prec)$.

Sea $\mathcal{G}_n = \mathcal{G} \cap \mathbb{L}_n$. Como consecuencia del Teorema 9.2.2, sabemos que toda álgebra finita de $\mathbb{L}_n$ se puede representar como producto subdirecto global de miembros de $\mathcal{G}_n$. Denotamos con $Dec(\mathcal{G}_n, \prec)$ al reticulado de decrecientes del conjunto pre-ordenado $(\mathcal{G}_n, \prec)$. Observar que $Dec(\mathcal{G}_n, \prec) \cong Dec(\mathcal{G}_n/\sim, \prec)$.

Proposición 9.3.1 *La aplicación $\alpha : AE(\mathbb{L}_n) \to Dec(\mathcal{G}_n, \prec)$, dada por $\alpha(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cap \mathcal{G}_n$, es inyectiva y respeta los ínfimos.*

Demostración. Primero observemos que $\mathbb{K} \cap \mathcal{G}_n$ es decreciente en $(\mathcal{G}_n, \prec)$ para cualquier $\mathbb{K} \in AE(\mathbb{L}_n)$. En efecto, supongamos que $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$, con $\mathbf{A} \in \mathcal{G}_n$ y $\mathbf{B} \in \mathbb{K} \cap \mathcal{G}_n$. Es claro entonces que las sentencias DEF que definen la clase $\mathbb{K}$ valen en $\mathbf{B}$ y, por lo tanto, también en $\mathbf{A}$. Luego $\mathbf{A} \in \mathbb{K} \cap \mathcal{G}_n$.

Ahora veamos que α es inyectiva. Supongamos que $\alpha(\mathbb{K}_1) = \alpha(\mathbb{K}_2)$, es decir, $\mathbb{K}_1 \cap \mathcal{G}_n = \mathbb{K}_2 \cap \mathcal{G}_n$. Supongamos que $\mathbb{K}_i = \bigcap_j Mod(\varphi_j^i)$, $i = 1, 2$, donde φ_j^i son sentencias DEF.

En la Sección 8.1 vimos que $\mathbb{L}_n$ y todas sus subcuasivariedades (subvariedades) son finitamente generadas. Por lo tanto, estamos en condiciones de aplicar la Proposición 9.1.4. Para ello debemos probar en primer lugar que $\mathbb{K}_1 \cap \mathbb{L}_{n,fin} = \mathbb{K}_2 \cap \mathbb{L}_{n,fin}$. En efecto, si $\mathbf{A} \in \mathbb{K}_1 \cap \mathbb{L}_{n,fin}$, $\mathbf{A} \models \varphi_j^1$ para todo j. Pero como $\mathbf{A}$ es finita, es producto subdirecto global de cierta subfamilia $\mathcal{G}_\mathbf{A} \subseteq \mathcal{G}_n$. Las álgebras de $\mathcal{G}_\mathbf{A}$ son imágenes homomorfas de $\mathbf{A}$ y, como $\mathbf{A}$ es finita, también son subálgebras de $\mathbf{A}$. Luego $\mathcal{G}_\mathbf{A} \models \varphi_j^1$ para todo j, es decir, $\mathcal{G}_\mathbf{A} \subseteq \mathbb{K}_1 \cap \mathcal{G}_n$. Luego $\mathcal{G}_\mathbf{A} \subseteq \mathbb{K}_2 \cap \mathcal{G}_n$ y, por lo tanto, $\mathbf{A} \models \varphi_j^2$ para todo j, es decir, $\mathbf{A} \in \mathbb{K}_2 \cap \mathbb{L}_n$. La recíproca es análoga. Por la Proposición 9.1.4, resulta entonces que $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_2$.

Finalmente, es inmediato que α respeta los ínfimos, pues tanto en $AE(\mathbb{L}_n)$ como en $Dec(\mathcal{G}_n, \prec)$ el ínfimo es la intersección. $\square$

Este resultado nos dice que es importante conocer el reticulado $Dec(\mathcal{G}_n, \prec)$, pues contiene una copia del reticulado de clases algebraicamente expandibles de $\mathbb{L}_n$.

Nos proponemos ahora describir el reticulado $Dec(\mathcal{G}_2, \prec)$. El primer paso es describir el pre-orden $\prec$ sobre el conjunto $\mathcal{G}_2$. En lo que resta de esta sección veremos la estructura básica de $(\mathcal{G}_2, \prec)$ y retomaremos su descripción en la Sección 9.5.

Podemos clasificar los miembros de la familia $\mathcal{G}_2$ según el número de coátomos que poseen dichas álgebras o, lo que es lo mismo, el número de factores totalmente ordenados necesarios para representar a dichas álgebras. Esta clasificación se puede realizar utilizando las sentencias DEF φ_n. En efecto, de acuerdo con la Proposición 9.2.3 tenemos que

$$\mathcal{G}_2 \cap Mod(\varphi_2) \subsetneq \mathcal{G}_2 \cap Mod(\varphi_3) \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{G}_2,$$

donde $\mathcal{G}_2 \cap Mod(\varphi_n)$ son los miembros de $\mathcal{G}_2$ que poseen a lo sumo $n-1$ coátomos.

Por otra parte, una subfamilia importante de $\mathcal{G}_2$ es $\mathcal{G}_1 = \{\mathbf{F}_n : n \geq 1\}$. Si denotamos con φ_I a la ecuación $(x \to y) \to x = x$ tenemos que $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L} \cap Mod(\varphi_I)$ y, en particular, $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 \cap Mod(\varphi_I)$.

En [Cam10] se prueba que $\mathbf{F}_n \prec \mathbf{F}_{n+1}$ para todo n. Recogemos este resultado en un lema y damos una demostración sencilla de este hecho a partir de la propiedad (f) del Lema 9.1.1.

Lema 9.3.2 $\mathbf{F}_n \prec \mathbf{F}_{n+1}$ *para todo* $n \geq 1$.

Demostración. Consideremos $\gamma : \mathbf{F}_{n+1} \to \mathbf{F}_{n+1}$ la aplicación que permuta las dos primeras coordenadas, es decir, $\gamma(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}) = (a_2, a_1, a_3, \ldots, a_{n+1})$. Esta aplicación es claramente un automorfismo de $\mathbf{F}_{n+1}$. Además, como $PF(\gamma) = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}) \in F_{n+1} : a_1 = a_2\}$, resulta que $\mathbf{PF}(\gamma) \cong \mathbf{F}_n$. Luego si $\mathbf{F}_{n+1} \models \varphi$ para una DEF φ, resulta inmediatamente que $\mathbf{F}_n \models \varphi$. $\square$

Este resultado, junto con la cadena de subfamilias descripta más arriba, permiten concluir que las clases algebraicamente expandibles contenidas en $\mathbb{L}_1$ son:

$$\mathbb{L}_1 \cap Mod(\varphi_2) \subsetneq \mathbb{L}_1 \cap Mod(\varphi_3) \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbb{L}_1.$$

El álgebra más sencilla de $\mathcal{G}_2$ que no pertenece a $\mathcal{G}_1$ es ciertamente $\mathbf{L}_2$. Como $\mathbf{L}_2$ posee un único coátomo, sabemos que $\mathbf{L}_2 \models \varphi_2$. Además, la función inducida por φ_2 sobre $\mathbf{L}_2$ es $[\varphi_2]^{\mathbf{L}_2}(x, y) = x \wedge y$. Esto significa que el ínfimo es una función algebraica sobre $\mathbf{L}_2$.

Sea $p(x, y) = (y \to x) \vee y$ y consideremos la sentencia DEF

$$\varphi_B = (\forall x)(\exists! z)(x \to z = p(x, z) \to (p(x, z) \to x)).$$

Es fácil verificar que $\mathbf{L}_2 \models \varphi_B$ y que induce la función $b = [\varphi_B]^{\mathbf{L}_2} : L_2 \to L_2$ dada por $b(1) = 1$, $b(1/2) = 0$, $b(0) = 1/2$. Esta función b resulta entonces algebraica sobre $\mathbf{L}_2$.

Vamos a describir ahora todas las álgebras de $\mathcal{G}_2$ que satisfacen φ_B. Veremos que dichas álgebras forman una cadena análoga a la cadena $\{\mathbf{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Observemos que

$\mathbf{L}_1$ no satisface φ_B. Más aún, veremos que φ_B caracteriza las álgebras $\mathbf{B} \in \mathbb{L}_2$ tales que $\mathbf{L}_1 \not\prec \mathbf{B}$.

Dado $n \geq 2$, denotamos con $\mathbf{T}_n$ a la subálgebra de $\mathbf{L}_2^n$ cuyo universo está dado por

$$T_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \in L_2^n : a_i = 1 \text{ para algún } i\}.$$

Definimos también $\mathbf{T}_1 = \mathbf{L}_2$. Notemos que $\mathbf{T}_n \in \mathcal{G}_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pues para $n \geq 2$ se tiene que $\mathbf{F}_n \leq \mathbf{T}_n$ y no posee ínfimo en $\mathbf{T}_n$.

Proposición 9.3.3 $\mathbf{T}_n \prec \mathbf{T}_{n+1}$ *para todo* $n \geq 1$*. Además,* $\mathbf{T}_{n+1} \not\prec \mathbf{T}_n$ *para ningún* $n \geq 1$.

Demostración. Sea $\gamma : \mathbf{T}_{n+1} \to \mathbf{T}_{n+1}$ el automorfimo que permuta las dos primeras coordenadas. Luego

$$PF(\gamma) = \{(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in T_{n+1} : a_1 = a_2\}.$$

Luego para $n \geq 2$ es claro que $\mathbf{PF}(\gamma) \cong \mathbf{T}_n$. Por el inciso (f) del Lema 9.1.1, esto muestra que $\mathbf{T}_n \prec \mathbf{T}_{n+1}$ para $n \geq 2$. Además, es claro que $\mathbf{T}_1 \prec \mathbf{T}_2$ pues $\mathbf{T}_1 \in IS(\mathbf{T}_2) \cap H(\mathbf{T}_2)$. La segunda afirmación del enunciado resulta fácilmente del hecho de que $\mathbf{T}_n \models \varphi_{n+1}$ pero $\mathbf{T}_{n+1} \not\models \varphi_{n+1}$. □

El lema anterior nos indica que la familia $\{\mathbf{T}_n : n \geq 1\}$ forma una cadena ascendente en $\mathcal{G}_2$ al igual que la familia $\mathcal{G}_1 = \{\mathbf{F}_n : n \geq 1\}$. Queremos ver ahora que la familia $\{\mathbf{T}_n : n \geq 1\}$ está determinada por la sentencia φ_B. Pero para ello necesitaremos primero el siguiente resultado auxiliar.

Lema 9.3.4 *Las subálgebras de* $\mathbf{L}_2^n$ *isomorfas a* $\mathbf{L}_1^n$ *son de la forma*

$$\{(a_1, \ldots, a_n) \in L_2^n : a_i \in \{0,1\} \text{ para } i \in I, a_i \in \{1/2, 1\} \text{ para } i \in J\}$$

donde $I \cap J = \emptyset$ *e* $I \cup J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Demostración. Supongamos que $\mathbf{A}$ es una subálgebra de $\mathbf{L}_2^n$ isomorfa a $\mathbf{L}_1^n$. Fijemos $i \in I$ y consideremos la proyección i-ésima $\pi_i : L_2^n \to L_2$. Luego, como $\pi_i(\mathbf{A})$ no puede ser isomorfo a $\mathbf{L}_2$, $\pi_i(A)$ debe ser $\{0,1\}$, $\{1/2, 1\}$ o bien $\{1\}$. Esto muestra que existen $I, J, K \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, disjuntos dos a dos, tales que $I \cup J \cup K = \{1, 2, \ldots, n\}$ y

$$A \subseteq \{(a_1, \ldots, a_n) \in L_2^n : a_i \in \{0,1\} \text{ para } i \in I, a_i \in \{1/2, 1\} \text{ para } i \in J, a_i = 1 \text{ para } i \in K\}.$$

Ahora bien, como A posee 2^n elementos, es claro que $K = \emptyset$ y que la inclusión anterior debe ser una igualdad. □

Proposición 9.3.5 *Dada* $\mathbf{A} \in \mathcal{G}_2$, $\mathbf{A} \models \varphi_B$ *si y sólo si* $\mathbf{A} \cong \mathbf{T}_n$ *para algún* $n \geq 1$.

Demostración. Sea $b : L_2 \to L_2$ la función algebraica inducida por φ_B, es decir, $b(0) = 1/2$, $b(1/2) = 0$ y $b(1) = 1$. Sea $b^n : L_2^n \to L_2^n$ la extensión de b inducida. Es inmediato que T_n es cerrada bajo b^n y que luego $\mathbf{T}_n \models \varphi_B$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{A} \in \mathcal{G}_2$ y que $\mathbf{A} \models \varphi_B$. $\mathbf{L}_1$ no puede ser cociente de $\mathbf{A}$, pues si éste fuera el caso tendríamos que $\mathbf{L}_1 \in H(\mathbf{A}) \cap IS(\mathbf{A})$ de donde, por el inciso (d) del Lema 9.1.1, resultaría que $\mathbf{L}_1 \models \varphi_B$, contradicción. Luego podemos pensar a $\mathbf{A}$ como un creciente en $\mathbf{L}_2^n$ que contiene a los coátomos del esqueleto booleano de $\mathbf{L}_2^n$. Como $\mathbf{L}_2 \models \varphi_B$ resulta que $\mathbf{L}_2^n \models \varphi_B$ y luego $\mathbf{A}$ debe ser cerrada bajo b^n.

Supongamos que A contuviera un elemento de $\mathbf{L}_2^n$ que no posee ninguna coordenada igual 1, entonces, como A es creciente, $(1/2, 1/2, \dots, 1/2) \in A$. Luego, $b^n(1/2, \dots, 1/2) = (0, \dots, 0) \in A$, contradicción. Concluimos entonces que $A \subseteq T_n$. Para ver que vale la igualdad, sólo resta probar que A contiene los átomos del esqueleto booleano de $\mathbf{L}_2^n$.

Observemos que como $\mathbf{A} \in \mathcal{G}_2$, debe contener una subálgebra isomorfa a $\mathbf{F}_n$ que no posea ínfimo. Por el lema anterior existen $I, J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ disjuntos tales que $I \cup J = \{1, 2, \dots, n\}$ y

$$\{(a_1, \dots, a_n) \in L_2^n : a_i \in \{0, 1\} \text{ si } i \in I, a_i \in \{1/2, 1\} \text{ si } i \in J\} \cap T_n \subseteq A.$$

De esto y el hecho de que A es creciente resulta, por ejemplo, que $(1, 1/2, 1/2, \dots, 1/2) \in A$. Luego, como A es cerrada bajo b^n, $(1, 0, \dots, 0) \in A$. Análogamente el resto de los átomos del esqueleto booleano de $\mathbf{L}_2^n$ también tienen que pertenecer a A. Por lo tanto, $A = T_n$. □

La proposición anterior caracteriza las álgebras de $\mathcal{G}_2$ que satisfacen φ_B. Sin embargo, podemos ir más allá de ese resultado y dar una caracterización para el caso general de las álgebras de $\mathbb{L}_2$ que satisfacen φ_B. Para ello necesitamos el siguiente lema previo.

Lema 9.3.6 *Para toda* $\mathbf{A} \in \mathcal{G}_2 \setminus I(\{\mathbf{T}_n : n \in \mathbb{N}\})$ *se tiene que* $\mathbf{L}_1 \prec \mathbf{A}$.

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{G}_2 \setminus I(\{\mathbf{T}_n : n \in \mathbb{N}\})$. Si $\mathbf{A}$ tiene por cociente a $\mathbf{L}_1$, entonces $\mathbf{L}_1 \in H(\mathbf{A}) \cap IS(\mathbf{A})$ y por el Lema 9.1.1 (d), $\mathbf{L}_1 \prec \mathbf{A}$. Luego podemos suponer que $\mathbf{A}$ es un creciente en $\mathbf{L}_2^n$ que contiene los coátomos del esqueleto booleano de $\mathbf{L}_2^n$ y que $\mathbf{L}_2 \prec \mathbf{A}$.

Sean $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n!}$ los automorfismos de $\mathbf{L}_2^n$ que consisten en permutar las coordenadas y sea $B = \bigcap_{i=1}^{n!} \sigma_i(A)$. Como uno de los automorfismos es la identidad, B es un subuniverso de $\mathbf{A}$ y, por el Lema 9.1.1 (e) y (f), se tiene que $\mathbf{B} \prec \mathbf{A}$. Más aún para $1 \leq j \leq n!$ se tiene que

$$\sigma_j(B) = \sigma_j\left(\bigcap_{i=1}^{n!} \sigma_i(A)\right) = \bigcap_{i=1}^{n!} \sigma_j\sigma_i(A) = B$$

pues $\{\sigma_j\sigma_1, \sigma_j\sigma_2, \dots, \sigma_j\sigma_{n!}\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n!}\}$. Luego $\sigma_j \restriction_B : B \to B$ es un automorfismo de B para $1 \leq j \leq n!$. Consideremos ahora $C = \bigcap_{j=1}^{n!} PF(\sigma_j \restriction_B)$. Utilizando nuevamente el Lema 9.1.1, resulta que C es un subuniverso de $\mathbf{B}$ y que $\mathbf{C} \prec \mathbf{B}$. Por lo tanto, tenemos también que $\mathbf{C} \prec \mathbf{A}$. De la construcción de $\mathbf{C}$ se ve fácilmente que $C \subseteq \{(1/2, 1/2, \dots, 1/2), (1, 1, \dots, 1)\}$.

Supongamos ahora que $A \not\subseteq T_n$. Entonces existe un elemento $(a_1, \dots, a_n) \in A$ tal que $a_i \neq 1$ para $1 \leq i \leq n$. Luego como A es creciente, resulta que $m = (1/2, 1/2, \dots, 1/2) \in$

A. Ahora bien, $\sigma_j(m) = m$ para $1 \leq j \leq n!$. Luego $m \in B$. Más aún, como $m \in PF(\sigma_j\restriction_B)$ para $1 \leq j \leq n!$, concluimos que $m \in C$. Luego $\mathbf{C} \cong \mathbf{L}_1$ y hemos probado que $\mathbf{L}_1 \prec \mathbf{A}$.

Resta probar el resultado suponiendo que $A \subsetneq T_n$. Lo probaremos por inducción sobre n. Para $n = 1$ la afirmación es trivial pues en tal caso resulta $\mathbf{A} \cong \mathbf{L}_1$. Supongamos entonces que el resultado es válido para todo $k < n$ y probémoslo para n.

Como $A \subsetneq T_n$, A no posee alguno de los átomos del esqueleto booleano de $\mathbf{L}_2^n$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(1, 0, \dots, 0) \notin A$. Sea $\mathbf{D}$ la proyección de $\mathbf{A}$ sobre todas las coordenadas con excepción de la primera. Observemos algunas propiedades de $\mathbf{D}$.

- D es un creciente en $\mathbf{L}_2^{n-1}$.
- $(0, 0, \dots, 0) \notin D$.

  En efecto, si $(0, 0, \dots, 0) \in D$, entonces existe $a \in \{0, 1/2, 1\}$ tal que $(a, 0, 0, \dots, 0) \in A$. Pero como $A \subseteq T_n$, resulta que $a = 1$, de donde $(1, 0, \dots, 0) \in A$, contradicción.
- $(1/2, 1/2, \dots, 1/2) \in D$.

  En efecto, como $\mathbf{A} \in \mathcal{G}_2$, $\mathbf{A}$ contiene una subálgebra isomorfa a $\mathbf{F}_n$ que no posee ínfimo en $\mathbf{A}$. En virtud del Lema 9.3.4 y del hecho de que A es creciente, resulta que $(1, 1/2, 1/2, \dots, 1/2) \in A$. Luego $(1/2, 1/2, \dots, 1/2) \in D$.
- $\mathbf{D} \not\models \varphi_B$.

  Resulta inmediatamente de los dos ítems anteriores.

Ahora bien, $\mathbf{D}$ tiene una representación como producto global de álgebras de $\mathcal{G}_2$ con a lo sumo $n-1$ coátomos. Las álgebras que aparecen en dicha representación no pueden ser todas de la familia $\{\mathbf{T}_n : n \geq 1\}$, pues en ese caso φ_B sería válida en $\mathbf{D}$. Luego $\mathbf{D}$ posee un cociente $\mathbf{E}$ en la familia con a lo sumo $n-1$ coátomos y que no es isomorfo a ningún $\mathbf{T}_n$, $n \geq 1$. Por hipótesis inductiva, $\mathbf{L}_1 \prec \mathbf{E}$. Luego $\mathbf{L}_1 \prec \mathbf{E} \prec \mathbf{D} \prec \mathbf{A}$, como queríamos probar. $\square$

Teorema 9.3.7 *Para un álgebra* $\mathbf{A} \in \mathbb{L}_2$ *son equivalentes:*

(1) $\mathbf{A} \models \varphi_B$,

(2) $\mathbf{L}_1 \not\prec \mathbf{A}$.

Si además, $\mathbf{A}$ *es finita, la siguiente condición también es equivalente:*

(3) $\mathbf{A}$ *es producto subdirecto global de álgebras de la familia* $\{\mathbf{T}_n : n \geq 1\}$.

Demostración. Veamos primero la equivalencia de las tres condiciones para el caso de un álgebra finita $\mathbf{A} \in \mathbb{L}_2$. La implicación (1) $\Rightarrow$ (2) es inmediata del hecho de que $\mathbf{L}_1 \not\models \varphi_B$. Por su parte, la implicación (3) $\Rightarrow$ (1) es consecuencia inmediata de la Proposición 9.3.5 y del hecho de que los productos subdirectos globales preservan las sentencias DEF. Para probar la implicación (2) $\Rightarrow$ (3), supongamos que $\mathbf{L}_1 \not\prec \mathbf{A}$. Como $\mathbf{A}$ es finita, sabemos que es producto subdirecto global de $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k\} \subseteq \mathcal{G}_2$. Ahora bien, para cada i, $\mathbf{A}_i \in$

$IS(\mathbf{A} \cap H(\mathbf{A})$, con lo cual $\mathbf{A}_i \prec \mathbf{A}$ y, por lo tanto, $\mathbf{L}_1 \not\prec \mathbf{A}_i$ para ningún i. Luego, por el Lema 9.3.6, $\{\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k\} \subseteq I(\{\mathbf{T}_n : n \geq 1\})$, como queríamos demostrar.

Para completar la demostración sólo resta ver que la implicación (2) $\Rightarrow$ (1) también vale para el caso de un álgebra infinita $\mathbf{A} \in \mathbb{L}_2$. Supongamos que $\mathbf{A} \not\models \varphi_B$. En primer lugar, notemos que si $\mathbf{L}_1 \in H(\mathbf{A})$, entonces $\mathbf{L}_1 \prec \mathbf{A}$ y no hay nada que probar. Luego podemos suponer que todos los cocientes subdirectamente irreducibles de $\mathbf{A}$ son isomorfos a $\mathbf{L}_2$. En particular, notemos que, como $\mathbf{L}_2$ es un álgebra débilmente proyectiva (véase Sección 8.2), $\mathbf{L}_2 \in H(\mathbf{A}) \cap IS(\mathbf{A})$, de donde $\mathbf{L}_2 \prec \mathbf{A}$.

Consideremos $\mathbf{A} \leq \mathbf{L}_2^I$ para cierto conjunto I. Como $\mathbf{L}_2 \models U(\varphi_B)$ y $U(\varphi_B)$ es una cuasi-identidad, resulta que $\mathbb{L}_2 \models U(\varphi_B)$ y, en particular, $\mathbf{A} \models U(\varphi_B)$. Luego $\mathbf{A} \not\models E(\varphi_B)$. Por otra parte, $\mathbf{L}_2^I \models \varphi_B$, con lo cual debe existir un elemento $a \in A$ tal que $b^I(a) \notin A$, siendo $b^I : L_2^I \to L_2^I$ la función algebraica inducida por φ_B sobre $\mathbf{L}_2^I$.

Construiremos un álgebra finita $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{B} \prec \mathbf{A}$ y $\mathbf{B} \not\models \varphi_B$. Para ello, observemos que dada una sentencia DEF φ tal que $\mathbf{A} \models \varphi$, se tiene que $\mathbf{L}_2 \models \varphi$ y que las funciones inducidas por φ sobre $\mathbf{L}_2$ extendidas a $\mathbf{L}_2^I$ son cerradas en A. Luego consideremos las álgebras $\mathbf{L}_2^*$ y $\mathbf{A}^*$ que resultan de agregar a $\mathbf{L}_2$ y $\mathbf{A}$, respectivamente, las operaciones determinadas por todas las sentencias DEF válidas en $\mathbf{A}$. Es claro que $\mathbf{A}^* \leq (\mathbf{L}_2^*)^I$. En particular $\mathbf{A}^* \in V(\mathbf{L}_2^*)$, con lo cual $\mathbf{A}^*$ es un álgebra localmente finita. Entonces $\mathbf{B}^* = \mathbf{Sg}^{\mathbf{A}^*}(a)$ es un álgebra finita. Más aún, si $\mathbf{B}$ denota el reducto de $\mathbf{B}^*$ al lenguaje $\{\to, 1\}$, resulta que $\mathbf{B} \prec \mathbf{A}$ pues B es cerrado bajo todas las funciones algebraicas de $\mathbf{A}$. Más aún, como $b^I(a) \notin B$, $\mathbf{B} \not\models \varphi_B$. Como $\mathbf{B}$ es un álgebra finita en $\mathbb{L}_2$ tal que $\mathbf{B} \not\models \varphi_B$, por lo ya probado, podemos concluir que $\mathbf{L}_1 \prec \mathbf{B}$. Ahora bien, como $\mathbf{B} \prec \mathbf{A}$, resulta finalmente que $\mathbf{L}_1 \prec \mathbf{A}$. $\square$

Los resultados obtenidos hasta el momento nos permiten clasificar las álgebras de $\mathbb{L}_2$ en tres clases:

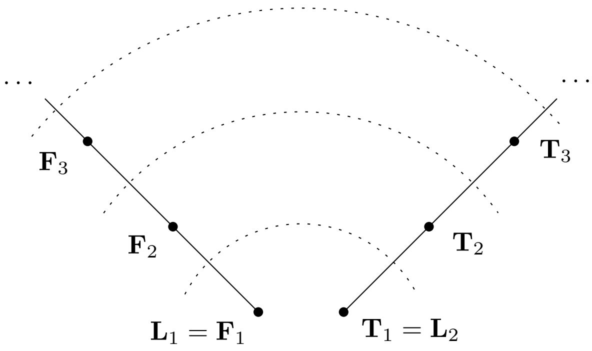
- Álgebras $\mathbf{A} \in \mathbb{L}_2$ tales que $\mathbf{L}_1 \prec \mathbf{A}$ pero $\mathbf{L}_2 \not\prec \mathbf{A}$: éstas son precisamente las álgebras de implicación, es decir, la subvariedad $\mathbb{L}_1$.

- Álgebras $\mathbf{A} \in \mathbb{L}_2$ tales que $\mathbf{L}_2 \prec \mathbf{A}$ pero $\mathbf{L}_1 \not\prec \mathbf{A}$: en virtud del teorema anterior, éstas son precisamente las álgebras que satisfacen la sentencia φ_B, es decir, la clase algebraicamente expandible $\mathbb{L}_2 \cap Mod(\varphi_B)$.

- Álgebras $\mathbf{A} \in \mathbb{L}_2$ tales que $\mathbf{L}_1 \prec \mathbf{A}$ y $\mathbf{L}_2 \prec \mathbf{A}$.

Esta clasificación nos será de utilidad en la sección siguiente para determinar todas las funciones algebraicas sobre cada álgebra de $\mathbb{L}_2$.

En lo que respecta a la familia $\mathcal{G}_2$, la clasificación anterior indica que existen dos cadenas de álgebras mutuamente incomparables: $\{\mathbf{F}_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{G}_2 \cap \mathbb{L}_1$ y $\{\mathbf{T}_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{G}_2 \cap Mod(\varphi_B)$. Ambas cadenas de álgebras están subdivididas según el número de coátomos que poseen mediante las sentencias φ_n. Observemos asimismo que, de la misma clasificación, resulta que toda álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{G}_2$ que no pertenezca a una de estas dos cadenas verifica que $\mathbf{L}_1 \prec \mathbf{A}$ y que $\mathbf{L}_2 \prec \mathbf{A}$. Nuestro conocimiento actual de $\mathcal{G}_2$ se puede resumir en el siguiente diagrama:



9.4. Clones algebraicos

En esta sección vamos a caracterizar las funciones algebraicas en todas las álgebras de $\mathbb{L}_2$. Para ello utilizaremos algunas herramientas del álgebra universal que describiremos a continuación.

La primera de dichas herramientas es el siguiente resultado, cuya prueba puede encontrarse, por ejemplo, en [BurSan81, Cap. IV, §10, Lema 10.4].

Lema 9.4.1 (Baker-Pixley) *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra finita en el lenguaje* $\mathcal{L}$ *con un* términos mayoría $M(x, y, z)$*, es decir, un término que satisface las ecuaciones* $M(x, x, y) = M(x, y, x) = M(y, x, x) = x$*. Sea* $f : A^n \to A$*,* $n \geq 1$*, una función que preserva subálgebras de* $\mathbf{A}^2$*, es decir, para todo subuniverso* S *de* $\mathbf{A}^2$ *y para toda* n*-upla de elementos* $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in S$*, se tiene que* $(f(a_1, \ldots, a_n), f(b_1, \ldots, b_n)) \in S$*. Entonces existe un término* $p(x_1, \ldots, x_n)$ *en el lenguaje* $\mathcal{L}$ *que representa a* f *sobre* $\mathbf{A}$*.*

Para enunciar el otro resultado importante del álgebra universal que utilizaremos, necesitamos primero dar una definición. Dada un álgebra $\mathbf{A}$, decimos que una función $f : A^k \to A$ es **definible por una fórmula abierta positiva** si existe una fórmula abierta positiva $O(x_1, \ldots, x_k, z)$ en el lenguaje de $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A} \models O(a_1, \ldots, a_n, b)$ si y sólo si $b = f(a_1, \ldots, a_n)$. Observemos que, en el caso algebraico, una fórmula abierta positiva es simplemente una combinación proposicional de ecuaciones utilizando sólo las conectivas de conjunción y disyunción.

La utilización del siguiente resultado y su demostración fueron sugeridas por Miguel Campercholi.

Teorema 9.4.2 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra finita. Una aplicación* $f : A^k \to A$ *es definible por una fórmula abierta positiva si y sólo si para todo* $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ *y todo homomorfismo* $h : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$*, siempre que* $a_1, \ldots, a_k, f(a_1, \ldots, a_k) \in B$*, resulta que* $f(h(a_1), \ldots, h(a_k)) = h(f(a_1, \ldots, a_k))$*.*

Demostración. La implicación directa es inmediata, por lo que probaremos sólo la implicación recíproca. Supongamos que f satisface la condición sobre los homomorfismos expresada en el enunciado del teorema. Dados $a_1, \ldots, a_k \in A$, definimos el conjunto $\Delta_{a_1,\ldots,a_k}(x_1, \ldots, x_k, y)$ formado por todas las ecuaciones $\varepsilon(x_1, \ldots, x_k, y)$ en el lengauje de $\mathbf{A}$ para las cuales vale $\varepsilon^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_k, f(a_1, \ldots, a_k))$. Observemos que como $\mathbf{A}$ es finita,

$\mathbf{Free}_{V(\mathbf{A})}(x_1, \ldots, x_k, y)$ es finita, con lo cual podemos suponer que $\Delta_{a_1,\ldots,a_k}$ es finito, eliminando ecuaciones equivalentes. Denotemos entonces con $\delta_{a_1,\ldots,a_k}(x_1, \ldots, x_k, y)$ la conjunción de todas la ecuaciones en $\Delta_{a_1,\ldots,a_k}(x_1, \ldots, x_k, y)$ y consideremos la fórmula abierta positiva

$$O(x_1, \ldots, x_k, y) = \bigvee_{a_1,\ldots,a_k \in A} \delta_{a_1,\ldots,a_k}(x_1, \ldots, x_k, y),$$

donde $\bigvee$ representa la disyunción lógica. Veamos que la fórmula $O(x_1, \ldots, x_k, y)$ define la aplicación f. En efecto, dados $a_1, \ldots, a_k \in A$ vale $\delta^{\mathbf{A}}_{a_1,\ldots,a_k}(a_1, \ldots, a_k, f(a_1, \ldots, a_k))$, con lo cual cualesquiera sean $a_1, \ldots, a_k \in A$ vale $O(a_1, \ldots, a_k, f(a_1, \ldots, a_k))$. Recíprocamente, supongamos que vale $O^{\mathbf{A}}(a'_1, \ldots, a'_k, b)$ para ciertos $a'_1, \ldots, a'_k, b \in A$. Luego existen $a_1, \ldots, a_k \in A$ tales que vale $\delta^{\mathbf{A}}_{a_1,\ldots,a_k}(a'_1, \ldots, a'_k, b)$. Sea $\mathbf{B} = \mathbf{Sg}^{\mathbf{A}}(\{a_1, \ldots, a_k, f(a_1, \ldots, a_k)\})$. Vamos a definir una aplicación $h : B \to A$ de modo que $h(a_i) = a'_i$ para $1 \leq i \leq k$ y $h(f(a_1, \ldots, a_k)) = b$. Para ello, dado $s \in B$, consideramos un término $t(x_1, \ldots, x_k, y)$ tal que $s = t^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_k, f(a_1, \ldots, a_k))$ y definimos $h(s) := t^{\mathbf{A}}(a'_1, \ldots, a'_k, b)$. Esta aplicación está bien definida en virtud de que vale $\delta^{\mathbf{A}}_{a_1,\ldots,a_k}(a'_1, \ldots, a'_k, b)$. Más aún, por la forma de su definición es un homomorfismo de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$. Luego, utilizando la hipótesis sobre f, tenemos que $b = h(f(a_1, \ldots, a_k)) = f(h(a_1), \ldots, h(a_k)) = f(a'_1, \ldots, a'_k)$. □

A partir de este resultado universal se puede obtener una caracterización para las funciones monoalgebraicas sobre las álgebras de implicación de Łukasiewicz totalmente ordenadas finitas. Para ello necesitamos el siguiente lema.

Lema 9.4.3 *Existe una conjunción de ecuaciones $\varepsilon(x, y, z, w)$ en el lenguaje de las álgebras de implicación de Łukasiewicz tal que en toda cadena $\mathbf{A} \in \mathbb{L}$ vale la equivalencia $(x = y$ ó $z = w) \leftrightarrow \varepsilon(x, y, z, w)$.*

Demostración. Sea $\varepsilon(x, y, z, w)$ la conjunción de las ecuaciones $(x \to y) \vee (z \to w) = 1$, $(x \to y) \vee (w \to z) = 1$, $(y \to x) \vee (z \to w) = 1$, $(y \to x) \vee (w \to z) = 1$. Es claro que en una cadena vale la equivalencia del enunciado pues 1 es supremo-irreducible. □

Utilizando este lema y el Teorema 9.4.2 resulta un criterio sencillo para determinar si una función es monoalgebraica sobre las cadenas de Łukasiewicz finitas.

Teorema 9.4.4 *Dada $\mathbf{A}$ una cadena finita en $\mathbb{L}$, una función $f : A^k \to A$ es monoalgebraica sobre $\mathbf{A}$ si y sólo si para todo $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ y todo homomorfismo $h : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$, siempre que $a_1, \ldots, a_k, f(a_1, \ldots, a_k) \in B$, resulta que $f(h(a_1), \ldots, h(a_k)) = h(f(a_1, \ldots, a_k))$.*

Demostración. Basta observar que las funciones monoalgebraicas son las funciones definibles mediante conjunciones de ecuaciones y que, en virtud del Lema 9.4.3, éstas coinciden con las funciones definibles mediante sentencias abiertas y positivas. □

Observación 9.4.5 Si $\mathbf{A}^*$ es una expansión de una cadena finita $\mathbf{A} \in \mathbb{L}$, es decir, $\mathbf{A}^*$ resulta de agregar operaciones al álgebra $\mathbf{A}$, el teorema anterior sigue siendo válido para $\mathbf{A}^*$, ya que el Lema 9.4.3 no pierde validez al aumentar el lenguaje algebraico.

Otro resultado previo que necesitaremos, específico de las álgebras de implicación de Łukasiewicz, es el siguiente.

Lema 9.4.6 *Todo término en el lenguaje* $\{\rightarrow, \wedge, 1\}$ *es equivalente en* $\langle L_2, \rightarrow, \wedge, 1\rangle$ *(y también en* $\langle L_1, \rightarrow, \wedge, 1\rangle$*) a un término de la forma* $t_1 \wedge t_2 \wedge \ldots \wedge t_n$*, donde* $t_1, \ldots, t_n$ *son términos en el lenguaje* $\{\rightarrow, 1\}$*.*

Demostración. Sea $t(x_1, \ldots, x_n)$ un término en el lenguaje $\{\rightarrow, \wedge, 1\}$. Haremos inducción sobre la longitud de t.

Si t tiene longitud 1, entonces $t = x$ para una variable x o bien $t = 1$. En cualquier caso no hay nada que probar.

Supongamos que el resultado es cierto para términos de longitud menor a n y probémoslo para un término t de longitud n. Hay dos casos:

- $t = t_1 \rightarrow t_2$:

  Como t_1 y t_2 son de longitud menor, la hipótesis inductiva nos asegura que t_i es equivalente en $\langle L_2, \rightarrow, \wedge, 1\rangle$ a $\bigwedge_{k=1}^{m_i} t_{ik}$, donde los t_{ik} son términos en el lenguaje $\{\rightarrow, 1\}$. Luego en $\langle L_2, \rightarrow, \wedge, 1)$ se tiene que

$$t = t_1 \rightarrow t_2 = \bigwedge_{k=1}^{m_1} t_{1k} \rightarrow \bigwedge_{r=1}^{m_2} t_{2r} = \bigwedge_{r=1}^{m_2} \left(\bigwedge_{k=1}^{m_1} t_{1k} \rightarrow t_{2r} \right) = \bigwedge_{r=1}^{m_2} \bigvee_{k=1}^{m_1} (t_{1k} \rightarrow t_{2r}).$$

- $t = t_1 \wedge t_2$:

  Este caso resulta directamente usando la hipótesis inductiva.

$\square$

Estamos ahora en condiciones de abordar el problema de caracterizar las funciones algebraicas sobre las álgebras de $\mathbb{L}_2$. Para ello vamos a caracterizar primero las funciones algebraicas en las álgebras subdirectamente irreducibles $\mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$.

En el caso de $\mathbf{L}_1$, sabemos que $\mathbf{L}_1 \models \varphi_2$ y la función algebraica inducida por φ_2 es $[\varphi_2]^{\mathbf{L}_1}(x, y) = x \wedge y$. La siguiente proposición muestra que esta función algebraica y las operaciones básicas son suficientes para generar todas las funciones algebraicas sobre $\mathbf{L}_1$. Además, obtenemos una caracterización sencilla de dichas funciones.

Proposición 9.4.7 *Dada una función* $f : L_1^n \rightarrow L_1$*, son equivalentes:*

(1) $f \in Clo_{alg}(\mathbf{L}_1)$,

(2) $f \in M_{alg}(\mathbf{L}_1)$,

(3) $f \in Clo(\langle L_1, \rightarrow, \wedge, 1\rangle)$,

(4) $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$.

Demostración. Probaremos (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1).

Sea $f \in Clo_{alg}(\mathbf{L}_1)$. Luego existe una sentencia DEF $\varphi = (\forall\vec{x})(\exists!\vec{z})(\varepsilon(\vec{x},\vec{z}))$, donde $\varepsilon(\vec{x},\vec{z})$ es una conjunción finita de ecuaciones, tal que $\mathbf{L}_1 \models \varphi$ y $f = [\varphi]_i^{\mathbf{L}_2}$ para algún índice i. Como $\varepsilon(1,1,\ldots,1)$ es válido, resulta inmediatamente que $f(1,1,\ldots,1) = 1$.

Supongamos ahora que $f(1,1,\ldots,1) = 1$. Consideremos el álgebra $\mathbf{A} = \langle L_1, \rightarrow, \wedge, 1\rangle$ y apliquemos el Lema 9.4.1. El término

$$M(x,y,z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

es claramente un *término mayoría* sobre $\mathbf{A}$.

También es sencillo ver que los subuniversos de $\mathbf{A}^2$ son A^2, $\{1\}\times A$, $A\times\{1\}$, $\{(a,a) : a \in A\}$ y $\{(1,1)\}$. Luego, de la condición $f(1,\ldots,1) = 1$ se deduce que f preserva subálgebras de $\mathbf{A}^2$. Por lo tanto f es representable sobre $\mathbf{A}$ como un término en el lenguaje $\{\rightarrow, \wedge, 1\}$.

Supongamos ahora que $f \in Clo(\langle L_1, \rightarrow, \wedge, 1\rangle)$ y veamos que f es monoalgebraica sobre $\mathbf{L}_1$. Por el Lema 9.4.6, f está determinada por un término de la forma $\bigwedge_{k=1}^m t_k$ donde cada t_k es un término en el lenguaje $\{\rightarrow, 1\}$. Consideremos entonces la sentencia DEF

$$\varphi_f = (\forall\overline{x})(\exists!z)\left(z \rightarrow t_1(\overline{x}) = 1 \,\&\, z \rightarrow t_2(\overline{x}) = 1 \,\&\, \ldots \,\&\, z \rightarrow t_m(\overline{x}) = 1 \,\&\, \bigvee_{k=1}^{m}(t_k(\overline{x}) \rightarrow z) = 1\right).$$

Resulta entonces que $\mathbf{L}_1 \models \varphi_f$ y que $[\varphi_f]^{\mathbf{L}_1} = f$.

Finalmente, la implicación (2) $\Rightarrow$ (1) es trivial. $\square$

Observación 9.4.8 Las equivalencias (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (4) resultan fácilmente del Teorema 9.4.4. Sin embargo, dicho teorema no permite obtener la caracterización (3).

En el caso del álgebra $\mathbf{L}_2$, conocemos dos sentencias DEF que son válidas en ella, a saber, φ_2 y φ_B. La primera induce la función binaria $[\varphi_2]^{\mathbf{L}_2}(x,y) = x \wedge y$ y la segunda induce la función unaria $[\varphi_B]^{\mathbf{L}_2}(x) = b(x)$. En la siguiente proposición mostramos que estas dos funciones junto con las operaciones básicas bastan para generar todas las funciones algebraicas sobre $\mathbf{L}_2$. Al igual que en el caso de $\mathbf{L}_1$ se obtiene también una caracterización sencilla. Sin embargo, a diferencia de ese caso, veremos que no todas las funciones algebraicas sobre $\mathbf{L}_2$ son monoalgebraicas.

Proposición 9.4.9 *Dada una función $f : L_2^n \rightarrow L_2$, son equivalentes:*

(1) $f \in Clo_{alg}(\mathbf{L}_2)$,

(2) $f \in Clo(\langle L_2, \rightarrow, \wedge, b, 1\rangle)$,

(3) $f(1,1,\ldots,1) = 1$.

Demostración. La demostración de la implicación (1) $\Rightarrow$ (3) es idéntica al caso de $\mathbf{L}_1$. La implicación (3) $\Rightarrow$ (2), también resulta en forma análoga considerando el álgebra $\langle L_2, \rightarrow, \wedge, b, 1\rangle$ para aplicar el Lema 9.4.1. Finalmente, la implicación (2) $\Rightarrow$ (1) es inmediata a partir del hecho de que la composición de funciones algebraicas siempre es algebraica. $\square$

Observación 9.4.10 De acuerdo al teorema anterior, para generar vía composiciones todas las funciones algebraicas sobre $\mathbf{L}_2$ basta utilizar, además de las operaciones básicas, la función binaria $\wedge$ y la función unaria b. Es importante observar, que no podemos prescindir de ninguna de estas dos funciones. Por una parte, $b \notin Clo(\langle L_2, \rightarrow, \wedge, 1\rangle)$. En efecto, como b es una función unaria, si hubiera un término en el lenguaje $\{\rightarrow, \wedge, 1\}$ que la represente, debería ser éste también unario. Pero se ve fácilmente que $Free_{V(\langle L_2, \rightarrow, \wedge, 1\rangle)}(1) = \{1, x\}$. Por otra parte, $\wedge \notin Clo(\langle L_2, \rightarrow, b, 1\rangle)$. Para probar esto, definimos para cada función $f : L_2^2 \rightarrow L_2$ el número $N(f)$ dado por la cantidad de pares $(a, b) \in L_2^2$ tales que $f(a, b) = 1$. Es inmediato entonces que:

- $N(\pi_1) = N(\pi_2) = 3$, siendo $\pi_1, \pi_2 : L_2^2 \rightarrow L_2$ las proyecciones correspondientes.
- $N(f \rightarrow g) \geq N(g)$ pues $\mathbf{L}_2 \models x \rightarrow 1 = 1$.
- $N(b(f)) = N(f)$, pues $b(a) = 1$ si y sólo si $a = 1$.

Luego es inmediato que $N(f) \geq 3$ para toda $f \in Clo(\langle L_2, \rightarrow, b, 1\rangle)$. Sin embargo, $N(\wedge) = 1$, por lo que $\wedge \notin Clo(\langle L_2, \rightarrow, b, 1\rangle)$.

Utilicemos ahora el Teorema 9.4.4 para determinar claramente cuáles son las funciones monoalgebraicas en $\mathbf{L}_2$.

Proposición 9.4.11 *Dada una función $f : L_2^n \rightarrow L_2$, son equivalentes:*

(1) $f \in M_{alg}(\mathbf{L}_2)$,

(2) *f satisface las siguientes condiciones:*

- $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$,
- *si* $a_1, \ldots, a_n, f(a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}$, *entonces* $f(b(a_1), \ldots, b(a_n)) = b(f(a_1, \ldots, a_n))$,
- *si* $a_1, \ldots, a_n, f(a_1, \ldots, a_n) \in \{\frac{1}{2}, 1\}$, *entonces* $f(b(a_1), \ldots, b(a_n)) = b(f(a_1, \ldots, a_n))$.

Demostración. Resulta de aplicar el Teorema 9.4.4. La primer condición sigue del hecho de que f debe respetar los homomorfismos triviales y las dos condiciones restantes se deducen a partir de considerar la función b como homomorfismo entre $\{0, 1\}$ y $\{\frac{1}{2}, 1\}$ y viceversa. $\square$

Observación 9.4.12 Utilizando el resultado anterior es inmediato verificar que sobre $\mathbf{L}_2$ existen sólo tres funciones monoalgebraicas unarias: la identidad, la función constante 1 y la función b. Esto indica que la función b no es una función arbitraria sino que es la más sencilla de las funciones algebraicas sobre $\mathbf{L}_2$ que no es representable mediante un término.

Ahora vamos a determinar un conjunto especial de funciones algebraicas sobre $\mathbf{L}_2$, aquellas determinadas por una sentencia DEF φ que no sólo es válida en $\mathbf{L}_2$ sino también en $\mathbf{L}_1$. Veremos asimismo que estas funciones algebraicas especiales son, de hecho, monoalgebraicas, y ello será fundamental para la caracterización posterior de las funciones algebraicas en cualquier álgebra de $\mathbb{L}_2$.

Proposición 9.4.13 *Para una función $f : L_2^n \to L_2$ son equivalentes:*

(1) $f = [\varphi]_i^{\mathbf{L}_2}$ *para algún índice i y alguna sentencia DEF φ tal que $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2 \models \varphi$,*

(2) $f \in Clo(\langle L_2, \to, \wedge, 1\rangle)$,

(3) *f satisface las siguientes condiciones:*

- $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$.
- $f(\{0, 1\}^n) \subseteq \{0, 1\}$.
- $f(b(a_1), \ldots, b(a_n)) = b(f(a_1, \ldots, a_n))$ *para todo* $a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$.

Demostración. Probemos las implicaciones (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1).

Sea φ una DEF tal que $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2 \models \varphi$, $\varphi = (\forall x_1, \ldots, x_n)(\exists! z_1, \ldots, z_m)\varepsilon(\overline{x}, \overline{z})$, donde $\varepsilon(\overline{x}, \overline{z})$ es una conjunción de ecuaciones. Supongamos también que $f = [\varphi]_i^{\mathbf{L}_2}$ para algún $i \in \{1, \ldots, m\}$. Como $\varepsilon(1, 1, \ldots, 1)$ es necesariamente válida en $\mathbf{L}_2$, es claro que $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$. Por otra parte, como $\mathbf{L}_1 \models \varphi$ y $\{0, 1\}$ es un subuniverso de $\mathbf{L}_2$ isomorfo a $\mathbf{L}_1$, resulta inmediato que $f(\{0, 1\}^n) \subseteq \{0, 1\}$. De la misma forma como $\{1/2, 1\}$ es un subuniverso de $\mathbf{L}_2$ isomorfo a $\mathbf{L}_1$, $f(\{1/2, 1\}^n) \subseteq \{1/2, , 1\}$. Sin embargo, f satisface una condición aún más estricta que ésta, pues $b : L_2 \to L_2$ define un isomorfismo entre los subuniversos $\{0, 1\}$ y $\{1/2, 1\}$, por lo que si vale $\varepsilon(a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_m)$ para elementos $a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_m \in \{0, 1\}$, entonces vale también $\varepsilon(b(a_1), \ldots, b(a_n), b(c_1), \ldots, b(c_m))$, con lo cual $f(b(a_1), \ldots, b(a_n)) = b(f(a_1, \ldots, a_n))$.

Supongamos que f es una función que satisface las condiciones del inciso (3). Consideremos el álgebra $\mathbf{A} = \langle L_2, \to, \wedge, 1\rangle$. Al igual que en las demostraciones de las Proposiciones 9.4.7 y 9.4.9, el álgebra $\mathbf{A}$ posee término *mayoría*, por lo que podemos aplicar el Lema 9.4.1. Los subuniversos de $\mathbf{A}^2$ son de los siguientes tipos:

- $S = S_1 \times S_2$ para ciertos subuniversos S_1, S_2 de $\mathbf{L}_2$: En este caso f preserva S pues preserva los subuniversos de $\mathbf{L}_2$.

- $S \subseteq \{(a, a) : a \in L_2\}$: En este caso es claro que f preserva S.

- $S = \{(0, 1/2), (1, 1)\}$: Sean $(a_1, a_1'), \ldots, (a_n, a_n') \in S$ y supongamos que $f(a_1, \ldots, a_n) = a$, $a \in \{0, 1\}$. Notemos que $a_i' = b(a_i)$ para $1 \leq i \leq n$. Luego $f(a_1', \ldots, a_n') = f(b(a_1), \ldots, b(a_n)) = b(f(a_1, \ldots, a_n)) = b(a)$. Luego $(f(a_1, \ldots, a_n), f(a_1', \ldots, a_n')) = (a, b(a))$. Ahora bien, si $a = 0$, $b(a) = 1/2$ y tenemos que $(a, b(a)) = (0, 1/2) \in S$; si $a = 1$, $b(a) = 1$ y $(a, b(a)) = (1, 1) \in S$. Esto muestra que f preserva S.

- $S = \{(1/2, 0), (1, 1)\}$: Este caso es análogo al anterior.

Como f preserva todos los subuniversos de $\mathbf{A}^2$, concluimos que $f \in Clo(\mathbf{A}) = Clo(\langle L_2, \to, \wedge, 1\rangle)$.

Finalmente, supongamos que $f \in Clo(\langle L_2, \to, \wedge, 1\rangle)$ y veamos que se verifica la condición (1). Por el Lema 9.4.6 sabemos que f está determinada por un término de la forma

$\bigwedge_{k=1}^{m} t_k$ donde cada t_k es un término en el lenguaje $\{\rightarrow, 1\}$. Consideremos entonces la sentencia DEF

$$\varphi_f = (\forall \overline{x})(\exists! z)\left(z \rightarrow t_1(\overline{x}) = 1 \,\&\, z \rightarrow t_2(\overline{x}) = 1 \,\&\, \ldots \,\&\, z \rightarrow t_m(\overline{x}) = 1 \,\&\, \bigvee_{k=1}^{m}(t_k(\overline{x}) \rightarrow z) = 1\right).$$

Resulta entonces que $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2 \models \varphi_f$ y que $[\varphi_f]^{\mathbf{L}_2} = f$. □

Observación 9.4.14 En virtud del la Proposición 9.4.11, las condiciones del item (3) implican que las funciones caracterizadas en la proposición anterior son todas monoalgebraicas. Este hecho también resulta evidente en la demostración anterior puesto que la sentencia φ_f posee una sola variable z.

Resta probar sólo una proposición previa más antes de presentar la caracterización de las funciones algebraicas en el caso general. El siguiente resultado determina las funciones algebraicas en el álgebra $\langle L_2, \rightarrow, b, 1\rangle$.

Proposición 9.4.15 *Dada una función $f : L_2^n \rightarrow L_2$, son equivalentes:*

(1) $f \in Clo_{alg}(\langle L_2, \rightarrow, b, 1\rangle)$,

(2) $f \in M_{alg}(\langle L_2, \rightarrow, b, 1\rangle)$,

(3) $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$.

Demostración. La única implicación no trivial es (3) $\Rightarrow$ (2) y resulta de aplicar el Teorema 9.4.4 (ver Observación 9.4.5). Basta notar que $\langle L_2, \rightarrow, b, 1\rangle$ posee sólo dos subuniversos, L_2 y $\{1\}$, y que el único homomorfismo definido sobre una subálgebra que no es restricción de la función identidad es el homomorfismo trivial de L_2 en $\{1\}$. La condición (3) es precisamente equivalente a la preservación de dicho homomorfismo. □

Estamos en condiciones ahora de caracterizar los clones algebraicos de todas las álgebras de $\mathbb{L}_2$. Dada $\mathbf{A} \in \mathbb{L}_2$, distinguimos los tres casos que presentamos en la sección anterior:

- $\mathbf{L}_1 \prec \mathbf{A}$, $\mathbf{L}_2 \not\prec \mathbf{A}$: éstas son las álgebras de implicación.
- $\mathbf{L}_1 \not\prec \mathbf{A}$, $\mathbf{L}_2 \prec \mathbf{A}$: éstas son las álgebras determinadas por la sentencia φ_B.
- $\mathbf{L}_1 \prec \mathbf{A}$, $\mathbf{L}_2 \prec \mathbf{A}$.

Dados dos conjuntos S e I y una función $f : S^n \rightarrow S$, notamos f^I a la función $f^I : (S^I)^n \rightarrow S^I$ definida coordenada a coordenada mediante $f^I(\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_n)(i) = f(\overline{s}_1(i), \ldots, \overline{s}_n(i))$ para todo $\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_n \in S^I$.

Teorema 9.4.16 *Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{L}_1$. Si consideramos $\mathbf{A} \leq \mathbf{L}_1^I$ tenemos que*

$$Clo_{alg}(\mathbf{A}) = M_{alg}(\mathbf{A}) = \{g^I|_A : g \in Clo_{alg}(\mathbf{L}_1), g^I(A^n) \subseteq A\}.$$

Demostración. Consideremos una función $f \in Clo_{alg}(\mathbf{A})$. Luego existe una DEF φ tal que $\mathbf{A} \models \varphi$ y $f = [\varphi]_i^{\mathbf{A}} : A^n \to A$ para cierto índice i. Ahora bien, como $\mathbf{L}_1 \prec \mathbf{A}$, tenemos que $\mathbf{L}_1 \models \varphi$. Sea $g = [\varphi]_i^{\mathbf{L}_1} : L_1^n \to L_1$ y notemos que como $\mathbf{L}_1 \models \varphi$, $\mathbf{L}_1^I \models \varphi$ y $[\varphi]_i^{\mathbf{L}_1^I} = g^I$. Por unicidad, es claro que $f = g^I|_A$ y entonces se debe tener que $g^I(A^n) \subseteq A$. Observar que $g \in Clo_{alg}(\mathbf{L}_1)$.

Consideremos ahora una función $g \in Clo_{alg}(\mathbf{L}_1)$, $g : L_1^n \to L_1$, tal que $g^I(A^n) \subseteq A$, y veamos que $g^I|_A \in M_{alg}(\mathbf{A})$. Como $g \in Clo_{alg}(\mathbf{L}_1) = M_{alg}(\mathbf{L}_1)$ (ver Proposición 9.4.7), existe una sentencia DEF $\psi = (\forall x_1, \ldots, x_n)(\exists! z)\varepsilon(\overline{x}, z)$ tal que $\mathbf{L}_1 \models \psi$ y $g = [\psi]^{\mathbf{L}_1}$. Luego $\mathbf{L}_1^I \models \psi$ y $[\psi]^{\mathbf{L}_1^I} = g^I$. Más aún, como $g^I(A^n) \subseteq A$, resulta que $\mathbf{A} \models \psi$ y que $g^I|_A \in M_{alg}(\mathbf{A})$. $\square$

Teorema 9.4.17 *Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{L}_2$ tal que $\mathbf{A} \models \varphi_B$. Si consideramos $\mathbf{A} \leq \mathbf{L}_2^I$ tenemos que*

$$Clo_{alg}(\mathbf{A}) = \{g^I|_A : g \in Clo_{alg}(\mathbf{L}_2), g^I(A^n) \subseteq A\}.$$

Demostración. La inclusión $Clo_{alg}(\mathbf{A}) \subseteq \{g^I|_A : g \in Clo_{alg}(\mathbf{L}_2), g^I(A^n) \subseteq A\}$ resulta en forma análoga a la correspondiente inclusión en el Teorema 9.4.16.

Consideremos ahora una función $g \in Clo_{alg}(\mathbf{L}_2)$, $g : L_2^n \to L_2$, tal que $g^I(A^n) \subseteq A$, y veamos que $g^I|_A \in Clo_{alg}(\mathbf{A})$. Observemos que, como $g(1, 1, \ldots, 1) = 1$, en virtud de la Proposición 9.4.15, $g \in M_{alg}(\langle L_2, \to, b, 1\rangle)$. Luego existe una sentencia DEF $\psi = (\forall x_1, \ldots, x_n)(\exists! z)\varepsilon(\overline{x}, z)$ en el lenguaje $\{\to, b, 1\}$ tal que $\langle L_2, \to, b, 1\rangle \models \psi$ y $[\psi]^{\langle L_2, \to, b, 1\rangle} = g$. Definimos ahora una nueva conjunción de ecuaciones $\varepsilon'(\overline{x}, \overline{z})$ a partir de $\varepsilon(\overline{x}, z)$ reemplazando cada ocurrencia de la operación b por una variable z_j y agregando la ecuación correspondiente que define el valor de dicha operación. De esta manera obtenemos una conjunción de ecuaciones $\varepsilon'(\overline{x}, \overline{z})$ en el lenguaje $\{\to, 1\}$. Como $\mathbf{A} \models \varphi_B$, A es cerrado bajo b^I, con lo cual es inmediato que $\mathbf{A} \models (\forall x_1, \ldots, x_n)(\exists z_1, \ldots, z_m)\varepsilon'(\overline{x}, \overline{z})$ y que $g^I|_A \in Clo_{alg}(\mathbf{A})$. $\square$

Teorema 9.4.18 *Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{L}_2$ tal que $\mathbf{L}_1 \prec \mathbf{A}$ y $\mathbf{L}_2 \prec \mathbf{A}$. Si consideramos $\mathbf{A} \leq \mathbf{L}_2^I$ tenemos que*

$$Clo_{alg}(\mathbf{A}) = M_{alg}(\mathbf{A}) = \{g^I|_A : g \in Clo(\langle L_2, \to, \wedge, 1\rangle), g^I(A^n) \subseteq A\}.$$

Demostración. Resulta en forma similar al Teorema 9.4.16 pero utilizando la Proposición 9.4.13 (ver también Observación 9.4.14). $\square$

9.5. Clases algebraicamente expandibles (Parte 2)

En esta sección retomamos la descripción de la familia $\mathcal{G}_2$ para poder describir el reticulado de clases algebraicamente expandibles en $\mathbb{L}_2$. Contamos ahora con una herramienta importante pues disponemos de una descripción sencilla de todas las funciones algebraicas en cada álgebra de $\mathbb{L}_2$.

Veamos primero una caracterización general de la relación $\prec$.

Teorema 9.5.1 *Dadas dos álgebras* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{L}_2$*,* $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$ *si y sólo si se verifica alguno de los siguientes casos:*

(I) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{L}_1$*,* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \leq \mathbf{L}_1^I$ *y para toda función* $f : L_1^n \to L_1$ *tal que* $f^I|_B \in Clo_{alg}(\mathbf{B})$*, se tiene que* $f^I|_A \in Clo_{alg}(\mathbf{A})$*.*

(II) $\mathbf{B} \notin \mathbb{L}_1$*,* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \leq \mathbf{L}_2^I$ *y para toda función* $f : L_2^n \to L_2$ *tal que* $f^I|_B \in Clo_{alg}(\mathbf{B})$*, se tiene que* $f^I|_A \in Clo_{alg}(\mathbf{A})$*.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$. Es claro que si $\mathbf{B} \in \mathbb{L}_1$, $\mathbf{A} \in \mathbb{L}_1$, con lo cual hay dos casos posibles: $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{L}_1$ o bien $\mathbf{B} \notin \mathbb{L}_1$.

(I) Supongamos que $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{L}_1$. Podemos considerar entonces $\mathbf{A}, \mathbf{B} \leq \mathbf{L}_1^I$ para cierto conjunto I. Consideremos una función $f : L_1^n \to L_1$ tal que $f^I|_B \in Clo_{alg}(\mathbf{B})$. Luego existe una sentencia DEF φ tal que $\mathbf{B} \models \varphi$ y $[\varphi]_i^{\mathbf{B}} = f^I|_B$ para cierto índice i. Como $\mathbf{L}_1 \prec \mathbf{B}$, resulta que $\mathbf{L}_1 \models \varphi$ y también $\mathbf{L}_1^I \models \varphi$. Además, como $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$, tenemos también que $\mathbf{A} \models \varphi$. Esto significa que $[\varphi]_i^{\mathbf{A}} = f^I|_B$, de donde $f^I|_A \in Clo_{alg}(\mathbf{A})$.

(II) El caso en que $\mathbf{B} \notin \mathbb{L}_1$ resulta en forma análoga pues $\mathbf{L}_2 \prec \mathbf{B}$.

Veamos la implicación recíproca.

(I) Supongamos que $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{L}_1$ y verifican la condición del enunciado. Sea φ una sentencia DEF tal que $\mathbf{B} \models \varphi$. Como $\mathbf{L}_1 \prec \mathbf{B}$, sabemos que $[\varphi]_i^{\mathbf{B}} = f^I|_B$ para cierta $f : L_1^n \to L_1$. Por hipótesis, $f^I|_A \in Clo_{alg}(\mathbf{A})$ y, en particular, $f^I|_A$ es cerrada en A. Como esto sucede para cada i, resulta inmediatamente que $\mathbf{A} \models \varphi$.

(II) Si $\mathbf{B} \notin \mathbb{L}_1$, el resultado se obtiene en forma análoga, ya que $\mathbf{L}_2 \prec \mathbf{B}$.

$\square$

Este resultado junto con las descripciones sencillas de los clones algebraicos vistas en la sección anterior implican directamente el siguiente resultado más preciso.

Teorema 9.5.2 *Dadas dos álgebras* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{L}_2$*,* $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$ *si se verifica alguno de los siguientes casos:*

(I) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{L}_1$*,* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \leq \mathbf{L}_1^I$ *y para toda función* $f : L_1^n \to L_1$ *tal que* $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$ *y* $f^I(B^n) \subseteq B$*, se tiene que* $f^I(A^n) \subseteq A$*.*

(II) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \models \varphi_B$*,* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \leq \mathbf{L}_2^I$ *y para toda función* $f : L_2^n \to L_2$ *tal que* $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$ *y* $f^I(B^n) \subseteq B$*, se tiene que* $f^I(A^n) \subseteq A$*.*

(III) $\mathbf{B} \notin \mathbb{L}_1$ *y* $\mathbf{B} \not\models \varphi_B$*,* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \leq \mathbf{L}_2^I$ *y para toda función* $f : L_2^n \to L_2$ *tal que*

- $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$,
- $f(\{0, 1\}^n) \subseteq \{0, 1\}$,
- $f(b(a_1), \ldots, b(a_n)) = b(f(a_1, \ldots, a_n))$ *para todo* $a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$,
- $f^I(B^n) \subseteq B$,

se tiene que $f^I(A^n) \subseteq A$.

Para poder utilizar el teorema anterior para ordenar las álgebras de la familia $\mathcal{G}_2$ necesitamos reducir la cantidad de funciones que debemos testear a una cantidad finita. Ello es posible cuando se trata de álgebras finitas. En efecto, supongamos que $\mathbf{A} \not\prec \mathbf{B}$ para un par de álgebras finitas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{L}_2$. Entonces existe una sentencia DEF φ tal que $\mathbf{B} \models \varphi$ pero $\mathbf{A} \not\models \varphi$. Supongamos que $\varphi = (\forall x_1, \ldots, x_n)(\exists! z_1, \ldots, z_m)\varepsilon(\overline{x}, \overline{z})$. Supongamos también que $\mathbf{A}$ está generada por un conjunto $\{g_1, \ldots, g_k\}$. Como $\mathbf{A} \not\models \varphi$, existen elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $\mathbf{A} \not\models (\exists! z_1, \ldots, z_m)\varepsilon(\overline{a}, \overline{z})$. Ahora bien, existen términos $t_1, \ldots, t_n$ en las variables $x_1, \ldots, x_k$ tales que $a_i = t_i^{\mathbf{A}}(g_1, \ldots, g_k)$. Consideremos la sentencia DEF $\varphi' = (\forall x_1, \ldots, x_k)(\exists! z_1, \ldots, z_m)\varepsilon(t_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, t_n(x_1, \ldots, x_k), \overline{z})$. Resulta entonces que $\mathbf{A} \not\models \varphi'$ pero $\mathbf{B} \models \varphi'$. Esto prueba que si $\mathbf{A}$ es k-generada, en el test dado en el teorema anterior podemos suponer que las funciones son k-arias. El problema de determinar si $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$ se reduce entonces a testear un número finito de funciones, es decir, obtenemos un algoritmo para determinar la relación $\prec$ entre álgebras finitas. Más adelante daremos algunos ejemplos de cómo aplicar este procedimiento y veremos que se simplifica aún más.

Vamos a ilustrar este procedimiento con la subfamilia de $\mathcal{G}_2$ determinada por la sentencia φ_3. Dicha sentencia limita el número máximo de coátomos que pueden tener las álgebras consideradas a 2. Veamos en primer lugar qué álgebras contiene la familia $\mathcal{G}_2 \cap Mod(\varphi_3)$. Recordemos que todas las álgebras de implicación de Łukasiewicz finitas las pensamos como crecientes en un producto de cadenas finitas. Luego basta dar el diagrama de Hasse del conjunto ordenado correspondiente para recuperar la operación $\to$.

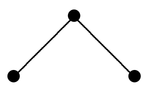
Miembros de $\mathcal{G}_2$ con un solo coátomo:

$\mathbf{F}_1 = \mathbf{L}_1$

$\mathbf{T}_1 = \mathbf{L}_2$

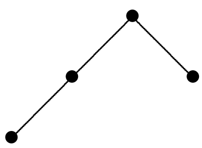
Miembros de $\mathcal{G}_2$ con dos coátomos:

- Crecientes en $\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_1$:

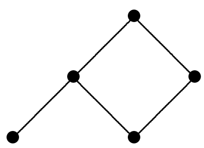


$\mathbf{F}_2$

- Crecientes en $\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2$:

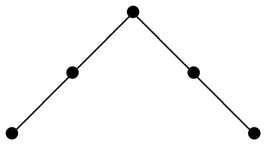


$\mathbf{A}_1$

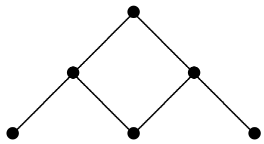


$\mathbf{A}_2$

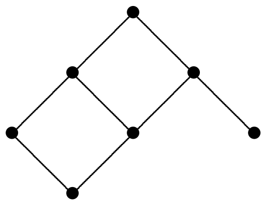
- Crecientes en $\mathbf{L}_2 \times \mathbf{L}_2$:



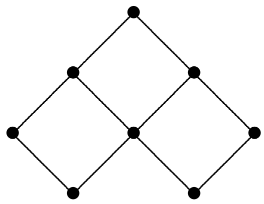
$\mathbf{T}_2 = \mathbf{B}_1$



$\mathbf{B}_2$



$\mathbf{B}_3$



$\mathbf{B}_4$

Veamos un par de ejemplos de determinación de la relación $\prec$ sobre estas álgebras.

Ejemplo 9.5.3 Probaremos que $\mathbf{F}_2 \prec \mathbf{A}_1$. Como $\mathbf{A}_1 \notin \mathbb{L}_1$ y $\mathbf{A}_1 \not\models \varphi_B$, estamos en el caso (III) del teorema anterior. Podemos considerar $\mathbf{F}_2, \mathbf{A}_1 \leq \mathbf{L}_2^2$. Más precisamente, consideramos

$$F_2 = \{(1, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2}, 1), (1, 1)\}, \quad \text{y} \quad A_1 = \{(1, 0), (1, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2}, 1), (1, 1)\}.$$

Observar que $F_2 \subseteq A_1$ y que $\mathbf{F}_2$ está generada por $\{(1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1)\}$. Notar también que $\mathbf{L}_2 \prec \mathbf{A}_1$ pues $\mathbf{L}_1 \in IS(\mathbf{A}_1) \cap H(\mathbf{A}_1)$.

Supongamos, por contradicción, que $\mathbf{F}_2 \not\prec \mathbf{A}_1$. Entonces existe una sentencia DEF φ tal que $\mathbf{A}_1 \models \varphi$ y $\mathbf{F}_2 \not\models \varphi$. Como $\mathbf{F}_2$ es 2-generada, teniendo en cuenta las observaciones posteriores al teorema anterior, podemos suponer que φ es de la forma $\varphi = (\forall x_1, x_2)(\exists! z_1, \ldots, z_m)\varepsilon(\overline{x}, \overline{z})$ y que $\mathbf{F}_2 \not\models (\exists! z_1, \ldots, z_m)\varepsilon((1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1), \overline{z})$.

Ahora observemos que, como $\mathbf{A}_1 \models \varphi$, $\mathbf{L}_2, \mathbf{L}_2^2 \models \varphi$. Luego, si $f_i = [\varphi]_i^{\mathbf{L}_2}$, $1 \leq i \leq m$, entonces $f_i^2 = [\varphi]_i^{\mathbf{L}_2^2}$, $1 \leq i \leq m$. Luego debe existir $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que

$$f_i^2((1, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2}, 1)) \notin F_2,$$

pero

$$f_i^2(A_1^2) \subseteq (A_1).$$

Veamos que esto es imposible. De las condiciones anteriores y teniendo en cuenta que $A_1 \setminus F_2 = \{(1, 0)\}$, resulta que

$$f_i^2((1, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2}, 1)) = (1, 0).$$

Esto significa que

$$f_i(1, \tfrac{1}{2}) = 1, \quad \text{y} \quad f_i(\tfrac{1}{2}, 1) = 0.$$

Ahora bien, como $\mathbf{A}_1 \not\models \varphi_B$, $\mathbf{L}_1 \prec \mathbf{A}_1$, con lo cual $\mathbf{L}_1 \models \varphi$. Luego la condición $f_i(\frac{1}{2}, 1) = 0$ es imposible, puesto que $\{\frac{1}{2}, 1\}$ es un subuniverso de $\mathbf{L}_2$ isomorfo a $\mathbf{L}_1$.

Esta contradicción prueba que $\mathbf{F}_2 \prec \mathbf{A}_1$.

Ejemplo 9.5.4 Veamos que $\mathbf{A}_1 \not\leq \mathbf{A}_2$. Notemos que $\mathbf{A}_2 \notin \mathbb{L}_1$ y $\mathbf{A}_2 \not\models \varphi_B$, con lo cual estamos en el caso (III) del teorema anterior. Para probar que $\mathbf{A}_1 \not\leq \mathbf{A}_2$, procederemos como en el ejemplo anterior con la diferencia de que en lugar de obtener una contradicción hallaremos una función $f : L_2^3 \to L_2$ que cumple las condiciones del ítem (III) del teorema anterior, pero tal que f^2 no es cerrada en A_1.

Comenzamos considerando $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \leq \mathbf{L}_2^2$, estableciendo

$$A_1 = \{(1,0),(1,\tfrac{1}{2}),(\tfrac{1}{2},1),(1,1)\}, \text{ y } A_2 = \{(1,0),(1,\tfrac{1}{2}),(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),(\tfrac{1}{2},1),(1,1)\}.$$

Como $\mathbf{A}_1$ está generada por $\{(1,0),(1,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},1)\}$, consideramos una función $f : L_2^3 \to L_2$ tal que

$$f^2((1,0),(1,\tfrac{1}{2}),(\tfrac{1}{2},1)) \notin A_1$$

pero tal que

$$f^2(A_2^2) \subseteq A_2.$$

Como $A_2 \setminus A_1 = \{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$, resulta que

$$f^2((1,0),(1,\tfrac{1}{2}),(\tfrac{1}{2},1)) = (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),$$

de donde

$$f(1,1,\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}, \quad \text{y} \quad f(0,\tfrac{1}{2},1) = \tfrac{1}{2}.$$

Consideramos entonces la función $f : L_2^3 \to L_2$ definida por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } (x,y,z) = (1,1,\frac{1}{2}), \\ \frac{1}{2} & \text{si } (x,y,z) = (0,\frac{1}{2},1), \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (1,1,0), \\ 1 & \text{en todo otro caso.} \end{cases}$$

Observemos que definimos $f(1,1,0) = 0$ de modo que f cumpla las primeras tres condiciones del ítem (III) del teorema anterior. Veamos ahora que $f^2(A_2^2) \subseteq A_2$. En efecto, supongamos que existen $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3) \in A_2$ tales que $f^2((a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)) \notin A_2$. Hay dos posibilidades:

- Si $f^2((a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)) = (0,x)$, entonces $f(a_1,a_2,a_3) = 0$, de donde $(a_1,a_2,a_3) = (1,1,0)$. Luego $(a_3,b_3) = (0,b_3) \notin A_2$, contradicción.

- Si $f^2((a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)) = (\frac{1}{2},0)$, entonces $f(a_1,a_2,a_3) = \frac{1}{2}$ y $f(b_1,b_3,b_3) = 0$. Luego $(b_1,b_2,b_3) = (1,1,0)$ y como $(a_3,b_3) = (a_3,0) \in A_2$, resulta que $a_3 = 1$. Luego $(a_1,a_2,a_3) = (0,\frac{1}{2},1)$. Pero entonces $(a_1,b_1) = (0,1) \notin A_2$, contradicción.

Hemos encontrado entonces una función $f : L_2^3 \to L_2$ que verifica las condiciones del item (III) del teorema anterior, pero tal que $f^2(A_1^2) \not\subseteq A_1$. Esto muestra que $\mathbf{A}_1 \not\leq \mathbf{A}_2$.

Para hallar un término adecuado, definimos los términos $p(x,y) = (y \to x) \vee y$ y $q(x,y) = x \to (x \to y)$ y observamos su comportamiento en $\mathbf{L}_2$:

$$p^{\mathbf{L}_2}(a,b) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } a = 0, b = \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad q^{\mathbf{L}_2}(a,b) = \begin{cases} b & \text{si } a = 1, \\ 1 & \text{si } a \neq 0. \end{cases}$$

Luego el término $t_1(x,y,z) = q(x \wedge y, z)$ verifica:

$$t_1^{\langle L_2, \rightarrow, \wedge, 1\rangle}(a,b,c) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } (a,b,c) = (1,1,\frac{1}{2}), \\ 0 & \text{si } (a,b,c) = (1,1,0), \\ 1 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y el término $t_2(x,y,z) = z \rightarrow p(x,y)$ verifica:

$$t_2^{\langle L_2, \rightarrow, \wedge, 1\rangle}(a,b,c) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } (a,b,c) = (0,\frac{1}{2},1), \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego el término $t(x,y,z) = t_1(x,y,z) \wedge t_2(x,y,z)$ verifica:

$$t^{\langle L_2, \rightarrow, \wedge, 1\rangle}(a,b,c) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } (a,b,c) = (1,1,\frac{1}{2}), \\ 0 & \text{si } (a,b,c) = (1,1,0), \\ \frac{1}{2} & \text{si } (a,b,c) = (0,\frac{1}{2},1), \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Obtenemos así un término que representa a la función f. Dicho término resulta entonces

$$t(x,y,z) = ((x \wedge y) \overset{2}{\rightarrow} z) \wedge (z \rightarrow ((y \rightarrow x) \vee y)).$$

Ahora bien, según el Lema 9.4.6, dicho término se puede escribir como ínfimo de términos implicativos. De hecho, utilizando propiedades elementales de álgebras de implicación se puede reescribir

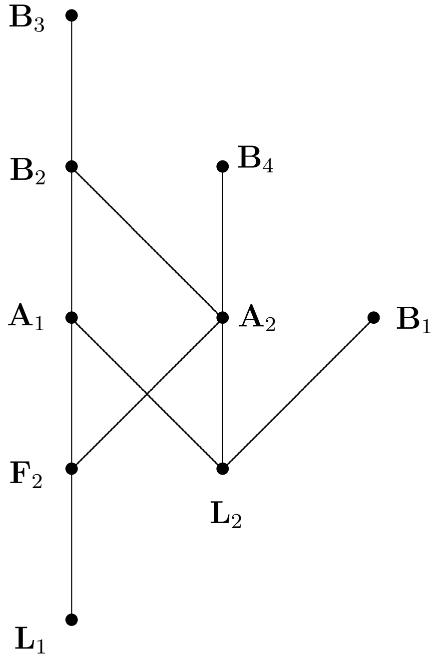
$$\begin{aligned} t(x,y,z) &= ((x \wedge y) \overset{2}{\rightarrow} z) \wedge (z \rightarrow ((y \rightarrow x) \vee y)) \\ &= ((x \wedge y) \rightarrow ((x \wedge y) \rightarrow z)) \wedge (z \rightarrow ((y \rightarrow x) \vee y)) \\ &= ((x \wedge y) \rightarrow ((x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z))) \wedge (z \rightarrow ((y \rightarrow x) \vee y)) \\ &= \underbrace{((x \rightarrow ((x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z))) \vee (y \rightarrow ((x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z))))}_{s_1(x,y,z)} \wedge \underbrace{(z \rightarrow ((y \rightarrow x) \vee y))}_{s_2(x,y,z)}. \end{aligned}$$

Luego podemos definir la sentencia DEF

$$\begin{aligned} \varphi = (\forall x_1, x_2, x_3)(\exists! z)(z \rightarrow s_1(x_1,x_2,x_3) = 1 \;\&\; z \rightarrow s_2(x_1,x_2,x_3) = 1 \;\&\; \\ \&\; (s_1(x_1,x_2,x_3) \rightarrow z) \vee (s_2(x_1,x_2,x_3) \rightarrow z) = 1) \end{aligned}$$

y es claro entonces que $\mathbf{A}_2 \models \varphi$ pero $\mathbf{A}_1 \not\models \varphi$.

Procediendo como en los ejemplos anteriores resulta el siguiente orden entre las álgebras de $\mathcal{G}_2 \cap Mod(\varphi_3)$. Observar que no hay casos de álgebras $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{G}_2 \cap Mod(\varphi_3)$ tales que $\mathbf{A} \prec \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} \prec \mathbf{A}$, es decir, para este subconjunto de $\mathcal{G}_2$ la relación $\prec$ es un orden parcial.



Realizando los cálculos correspondientes y simplificando las sentencias obtenidas, obtenemos las siguientes sentencias DEF que permiten distinguir las álgebras de la familia $\mathcal{G}_2 \cap Mod(\varphi_3)$:

- $\psi_1 = (\forall x_1, x_2, x_3)(\exists! z)(\varepsilon_2(p(x_1, x_2), x_3, z))$
- $\psi_2 = (\forall x_1, x_2, x_3)(\exists! z_1, z_2)(\varepsilon_B(p(x_1, x_2), z_1) \,\&\, \varepsilon_2(z_1, p(x_3, x_2), z_2))$
- $\psi_3 = (\forall x_1, x_2, x_3)(\exists! z_1, z_2)(\varepsilon_B(p(x_3, x_2) \vee x_1, z_1) \,\&\, \varepsilon_2(z_1, p(x_2, x_1), z_2))$
- $\psi_4 = (\forall x_1, x_2)(\exists! z_1, z_2)(\varepsilon_B(p(x_1, x_2), z_1) \,\&\, \varepsilon_2(x_2, z_1, z_2))$
- $\psi_5 = (\forall x_1, x_2, x_3, x_4)(\exists! z)(\varepsilon_2(p(x_1, x_2), p(x_4, x_3), z))$
- $\psi_6 = (\forall x_1, x_2)(\exists! z_1, z_2, z_3)(\varepsilon_B(p(x_1, x_2), z_1) \,\&\, \varepsilon_B(p(x_2, x_1), z_2) \,\&\, \varepsilon_2(z_1, z_2, z_3))$

Aquí hemos notamos con $\varepsilon_2, \varepsilon_B$ a las conjunciones de ecuaciones que aparecen en las sentencias DEF φ_2, φ_B, respectivamente; es decir, $\varphi_2 = (\forall x_1, x_2)(\exists! z)\varepsilon_2(x_1, x_2, z)$ y $\varphi_B = (\forall x)(\exists! z)\varepsilon_B(x, z)$. También abreviamos $p(x, y) = (y \to x) \vee y$.

En la siguiente tabla indicamos con una tilde las sentencias válidas en cada una de las álgebras de la familia $\mathcal{G}_2 \cap Mod(\varphi_3)$.

	φ_2	φ_3	φ_T	φ_B	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6
$\mathbf{L}_1$	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\mathbf{L}_2$	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\mathbf{F}_2$		✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\mathbf{A}_1$		✓				✓	✓	✓	✓	✓
$\mathbf{A}_2$		✓			✓	✓	✓		✓	✓
$\mathbf{B}_1$		✓		✓		✓	✓	✓		✓
$\mathbf{B}_2$		✓					✓		✓	✓
$\mathbf{B}_3$		✓							✓	✓
$\mathbf{B}_4$		✓			✓	✓	✓		✓	

Con toda esta información podemos construir el reticulado de decrecientes de $(\mathcal{G}_2 \cap Mod(\varphi_3), \prec)$. Veremos que casi todos los decrecientes están determinados por algún conjunto de sentencias DEF y, por tanto, determinan una clase algebraicamente expandible. Sin embargo, como lo anticipa la Proposición 9.3.1, algunos decrecientes no se corresponden con ninguna clase algebraicamente expandible. La Figura 9.1 muestra el reticulado de decrecientes de $(\mathcal{G}_2 \cap Mod(\varphi_3), \prec)$, indicando en cada nodo las álgebras que generan cada decreciente. Los decrecientes marcados con ■ están determinados por la fórmula que aparece entre paréntesis y φ_3. Los decrecientes marcados con • son intersección de decrecientes marcados con ■ y por lo tanto se corresponden con las sentencias DEF de dichos decrecientes. Los decrecientes que no tienen marca no se corresponden con ninguna sentencia DEF. En efecto, notemos que si $\mathbf{B}_1 \models \varphi$ y $\mathbf{L}_1 \models \varphi$, se puede probar que $\mathbf{A}_1 \models \varphi$ utilizando argumentos similares a los del Teorema 9.5.2. Por lo tanto, los decrecientes que contienen a $\mathbf{L}_1$ y $\mathbf{B}_1$ pero no contienen a $\mathbf{A}_1$ no pueden ser de la forma $\mathbb{K} \cap \mathcal{G}_2$ para ninguna clase algebraicamente expandible $\mathbb{K}$. Resulta inmediata entonces la estructura del reticulado de clases algebraicamente expandibles por debajo de $\mathbb{L}_2 \cap Mod(\varphi_3)$. Dicho reticulado se muestra en la Figura 9.2.

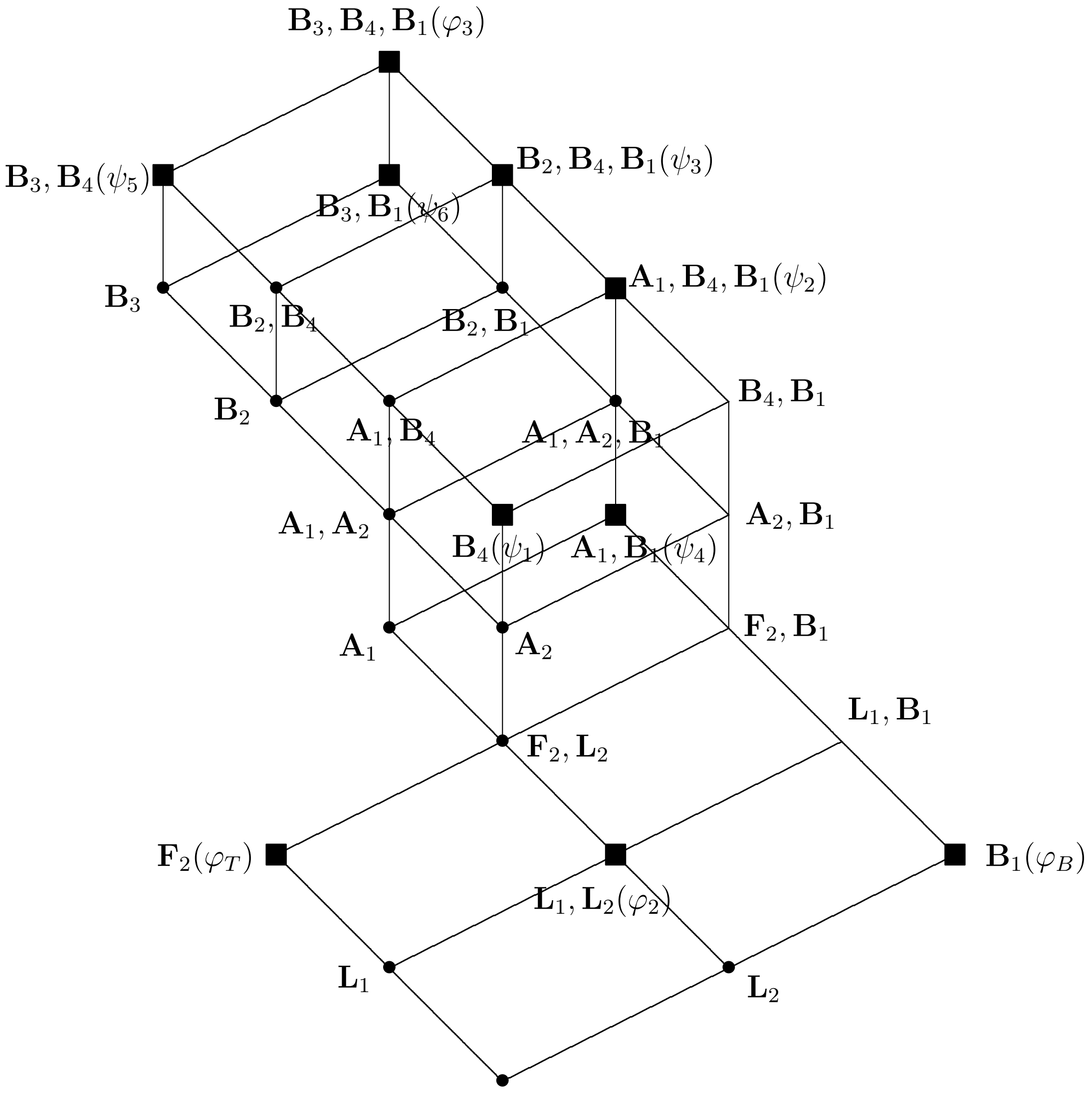


Figura 9.1: Reticulado de decrecientes de $(\mathcal{G}_2 \cap Mod(\varphi_3), \prec)$

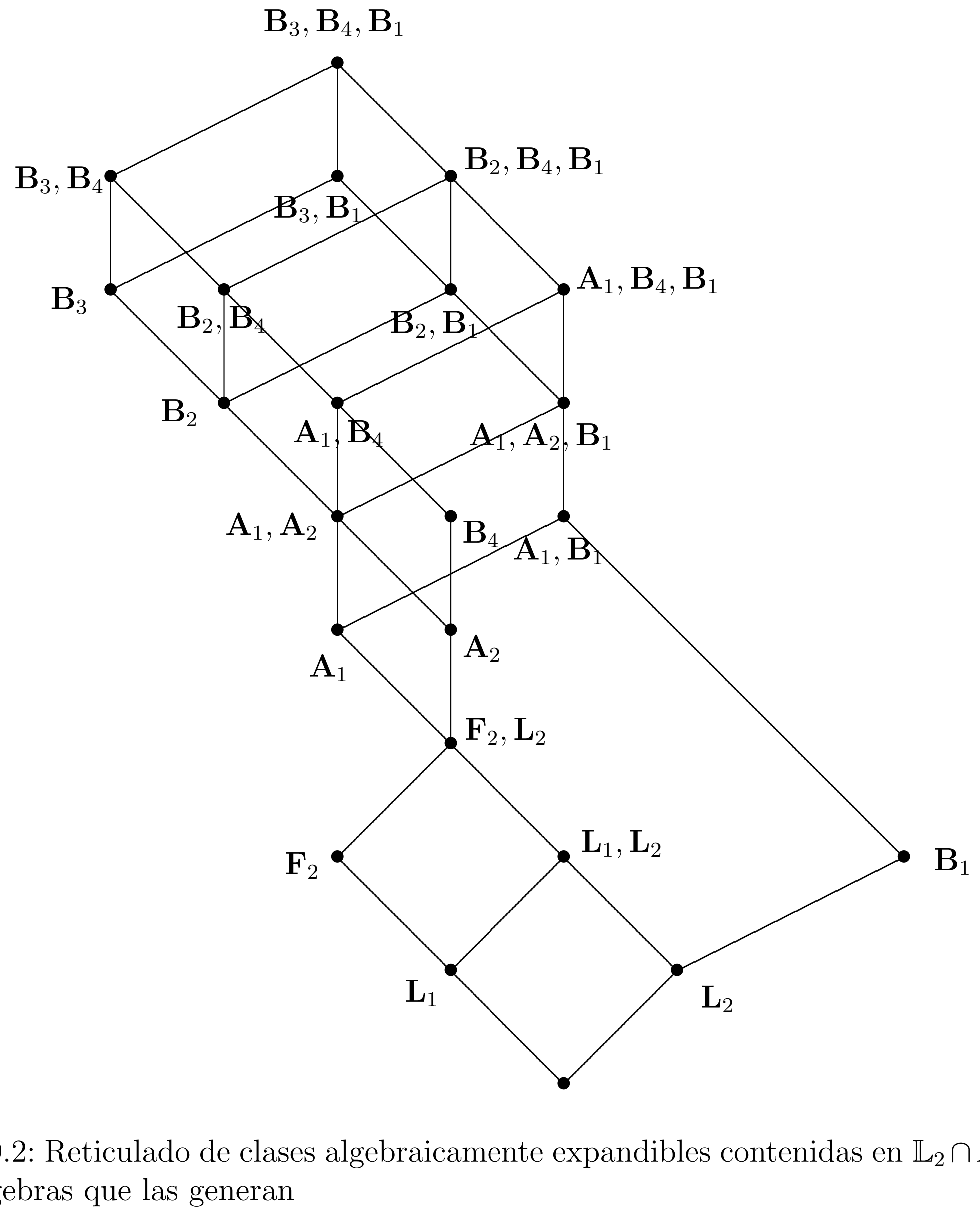


Figura 9.2: Reticulado de clases algebraicamente expandibles contenidas en $\mathbb{L}_2 \cap Mod(\varphi_3)$ y las álgebras que las generan

Bibliografía

[AbaCasDia10] M. Abad, D. Castaño, J. P. Díaz Varela, Zariski-type topology for implication algebras, *Math. Log. Quart.* **56** (3), 2010, 299-309.

[AbaCasDia10] M. Abad, D. Castaño, J. P. Díaz Varela, MV-closures of Wajsberg hoops and applications, *Algebra Universalis* **64** (1-2), 2010, 213-230.

[AbaDiaTor04] M. Abad, J. P. Díaz Varela, A. Torrens, Topological representation for implication algebras, *Algebra Universalis* **52**, 39-48, 2004.

[Abb67] J. C. Abbott, Semi-boolean algebras, *Mat. Vesnik* **4** (19), 177-198, 1967.

[Abb68] J. C. Abbott, Implicational algebras, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie* **11** (59), 3-23, 1968.

[AglFerMon07] P. Aglianò, I. M. A. Ferreirim, F. Montagna, Basic hoops: an algebraic study of continuous t-norms, *Studia Logica* **87**, 73-98, 2007.

[AglPan02] P. Aglianò, G. Panti, Geometrical methods in Wajsberg hoops, *J. Algebra* **256**, 352-374, 2002.

[BalDwi74] R. Balbes, P. Dwinger, *Distributive lattices*, University of Missouri Press, Columbia, Missouri, 1974.

[BerBlo04] J. Berman, W. J. Blok, Free Łukasiewicz and hoop residuation algebras, *Studia Logica*, **77** (2), 153-180, 2004.

[BloFer00] W. J. Blok, I. M. A. Ferreirim, On the structure of hoops, *Algebra Universalis* **43**, 233-257, 2000.

[BloPig82] W. J. Blok, D. Pigozzi, On the structure of varieties with equationally definable principal congruences I, *Algebra Universalis* **15**, 195-227, 1982.

[BloPig89] W. J. Blok, D. Pigozzi, Algebrizable logic, *Mem. Amer. Math. Soc.* **77** (396), 1989.

[BloVAl02] W. J. Blok, C. J. van Alten, The finite embeddability property for residuated lattices, pocrims and BCK-algebras, *Algebra Universalis* **48**, 253-271, 2002.

[BloTsi03] K. Blount, C. Tsinakis, The structure of residuated lattices, *Internat. J. Algebra Comput.* **13** (4), 437-461, 2003.

[Bos69] B. Bosbach, Komplementäre Halbgruppen: Axiomatik und Arithmetik, *Fund. Math.* **64**, 257-287, 1969.

[BurSan81] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A course in universal algebra*, Volumen 78 de *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[BusCig06] M. Busaniche, R. L. Cignoli, Free algebras in varieties of BL-algebras generated by a BL_n-chain, *J. Aust. Math. Soc.* **80**, 419-439, 2006.

[BusCig08] M. Busaniche, R. L. Cignoli, Free MV_n-algebras, *Algebra Universalis* **58**, 335-340, 2008.

[Cam10] M. Campercholi, Algebraically expandable classes of implication algebras, *Internat. J. Algebra Comput.* **20** (5), 605-617, 2010.

[CamCasDia11] M. Campercholi, D. Castaño, J. P. Díaz Varela, Quasivarieties and permutability of congruences in Łukasiewicz implication algebras, *Studia Logica* **98**, 2011, 267-283.

[CamVag09] M. Campercholi, D. Vaggione, Algebraically expandable classes, *Algebra Universalis* **61** (2), 151-186, 2009.

[CamVag11] M. Campercholi, D. Vaggione, Algebraic functions, *Studia Logica* **98** (1-2), 285-306, 2011.

[CasDia09] D. Castaño, J. P. Díaz Varela, Conditions for permutability of congruences in implication algebras, *Order* **26** (3), 2009, 245-254.

[CasDiaTor11a] D. Castaño, J. P. Díaz-Varela, A. Torrens, Indecomposability of free algebras in some subvarieties of residuated lattices and their bounded subreducts, *Soft Comput.* **15**, 1449-1455, 2011.

[CasDiaTor11b] D. Castaño, J. P. Díaz-Varela, A. Torrens, Free-decomposability in varieties of pseudocomplemented residuated lattices, *Studia Logica* **98**, 223-235, 2011.

[CasDiaTor] D. Castaño, J. P. Díaz-Varela, A. Torrens, Regular elements and Kolmogorov translation in residuated lattices, enviado para su publicación.

[Cha58] C. C. Chang, Algebraic analysis of many valued logics, *Trans. Amer. Math. Soc.* **88**, 467-490, 1958.

[Cig08] R. L. Cignoli, Free algebras in varieties of Stonean residuated lattices, *Soft Comput.* **12**, 315-320, 2008.

[CigDubMun04] R. L. Cignoli, E. J. Dubuc, D. Mundici, Extending Stone duality to multisets and locally finite MV-algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **189**, 37-59, 2004.

[CigMon06] R. L. Cignoli, L. Monteiro, Maximal subalgebras of MV_n-algebras, a proof of a conjecture of A. Monteiro, *Studia Logica* **84**, 393-405, 2006.

[CigDOtMun00] R. L. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano, D. Mundici, *Algebraic foundations of many-valued reasoning*, Trends in Logic, Studia Logica Library, Vol. 7, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[CigTor02a] R. L. Cignoli, A. Torrens, Free algebras in varieties of BL-algebras with a Boolean retract, *Algebra Universalis* **48**, 55-79, 2002.

[CigTor02b] R. L. Cignoli, A. Torrens, Free Stone algebras, *Discrete Math.* **222**, 251-257, 2002.

[CigTor03] R. Cignoli, A. Torrens, Hájek basic fuzzy logic and Łukasiewicz infinite-valued logic, *Arch. Math. Logic* **42**, 2003.

[CigTor04] R. Cignoli, A. Torrens, Glivenko like theorems in natural expansions of BCK-logics, *Math. Log. Quart.* **50** (2), 111-125, 2004.

[CigTor06] R. L. Cignoli, A. Torrens, Free algebras in varieties of Glivenko MTL-algebras satisfying the equation $2(x^2) = (2x)^2$, *Studia Logica* **83**, 157-181, 2006.

[Cor80] W. H. Cornish, 3-permutability and quasicommutative BCK-algebras, *Math. Japonica* **25**, 477-496, 1980.

[Cze03] J. Czelakowski, *Protoalgebraic logics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[DavPri02] B. A. Davey, H. A. Pristley, *Introduction to lattices and order*, Second Ed., Cambridge Univesrity Press, 2002.

[Dia08] J. P. Díaz Varela, Free Łukasiewicz implication algebras, *Arch. Math. Logic* **47** (1), 25-33, 2008.

[DiaTor03] J. P. Díaz Varela, A. Torrens, Decomposability of free Tarski algebras, *Algebra Universalis* **50** (1), 1-5, 2003.

[Die65] A. Diego, *Sobre álgebras de Hilbert*, Notas de lógica matemática 12, Instituto de Matemática de Bahía Blanca, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1965.

[EstGod01] F. Esteva, L. Godo, Monoidal t-norm based logic: towards a logic of left-continuous t-norms, *Fuzzy Sets and Systems* **124** (3), 271-288, 2001.

[Fer92] I. M. A. Ferreirim, *On varieties and quasivarieties of hoops and their reducts*, tesis doctoral, University of Illinois, Chicago, 1992.

[FonRodTor84] J. M. Font, A. J. Rodríguez, A. Torrens, Wajsberg algebras, *Stochastica* **8** (1), 5-31, 1984.

[GalJipKowOno07] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski, H. Ono, *Residuated lattices - an algebraic glimpse at subestructural logics*, Studies in Logic Vol. 151, Elsevier, Amsterdam, 2007.

[GisMun05] J. Gispert, D. Mundici, MV-algebras: a variety for magnitudes with Archimedean units, *Algebra Universalis* **53** (1), 7-43, 2005.

[GisTor07] J. Gispert, A. Torrens, Bounded BCK-algebras and their generated variety, *Math. Log. Quart.* **53**, 206-213, 2007.

[GisTor08] J. Gispert, A. Torrens, Boolean representation of bounded BCK-algebras, *Soft Comput.* **12** (10), 941-954, 2008.

[GisTor] J. Gispert, A. Torrens, Locally finite quasivarieties of MV-algebras, preprint.

[Gli29] V. Glivenko, Sur quelques points de la logique de M. Brouwer, *Bull. Acad. Sci. Belgique* **15**, 183-188, 1929.

[GraVag96] H. Gramaglia, D. Vaggione, Birkhoff-like sheaf representation for varieties of lattice expansions, *Studia Logica* **56** (1-2), Special issue on Priestley duality, 111-131, 1996.

[Grä79] G. Grätzer, *Universal algebra*, 2nd ed., Springer Verlag, New York, 1979.

[Gri81] V. N. Grišin, Predicate and set-theoretic calculi based on Logic without contractions, *Math. USSR Izvestija* **18** (1), 41-59, 1981.

[Háj98] P. Hájek, *Metamathematics of fuzzy logic*, Trends in Logic - Studia Logic Library, 4. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[HarRafTsi02] J. Hart, L. Rafter, C. Tsinakis, The structure of commutative residuated lattices, *Internat. J. Algebra Comput.* **12** (4), 509-524, 2002.

[Hig84] D. Higgs, Dually residuated commutative monoids with identity element as least element do not form an equational class, *Math. Japonica* **29** (1), 69-75, 1984.

[Höh95] U. Höhle, Commutative, residuated l-monoids, in *Non-Classical Logics and their Applications to Fuzzy Subsets: A Handbook on the Mathematical Foundations of Fuzzy Set Theory* (U. Höhle y E. P. Klement, editores), Kluwer, Boston, 53-106, 1995.

[Idz84a] P. M. Idziak, Lattice operation in BCK-algebras, *Math. Japonica* **29**, 839-846, 1984.

[Idz84b] P. M. Idziak, Filters and congruence relations in BCK-semilattices, *Math. Japonica* **29**, 975-890, 1984.

[JipTsi07] P. Jipsen, C. Tsinakis, A survey of residuated lattices, *Ordered Algebraic Structures* (J. Martínez ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 19-56, 2002.

[Kel55] J. L. Kelly, *General topology*, Van Nostrand, 1955.

[Kol61] A. Kolmogorov, On the principle of tertium non datur, *Matematiceskij Sbornik* **32**, 646-667, 1925. Traducida como "On the principle of excluded middle"en *From Frege to Gödel - A Source Book of Mathematical Logic 1879-1931* (J. van Heijnorrted ed.) Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 416-437, 1967.

[Kom78a] Y. Komori, The separation theorem of the $\aleph_0$-valued Łukasiewicz propositional logic, *Rep. Fac. Sci. Shizuoka Univ.* **12**, 1-5, 1978.

[Kom78b] Y. Komori, Super-Łukasiewicz implicational logics, *Nagoya Math. J.* **72**, 127-133, 1978.

[KomOno85] Y. Komori, H. Ono, Logics without the contraction rule, *Journal of Symbolic Logic* **50**, 169-2001, 1985.

[Kow04] T. Kowalski, Semisimplicity, EDPC and discriminator varieties of residuated lattices, *Studia Logica* **77** (2), 255-265, 2004.

[KowOno00] T. Kowalski, H. Ono, The variety of residuated lattices is generated by its finite simple members, *Reports on Math. Logic* **34**, 59-77, 2000.

[KowOno01] T. Kowalski, H. Ono, *Residuated lattices: an algebraic glimpse at logics without contraction*, Japan Advanced Institut of Science and Thechnology, 2001.

[KowOno04] T. Kowalski, H. Ono, *Residuated lattices: an algebraic glimpse at logics without contraction*, preliminary report, 2004.

[KraCla79] P. H. Krauss, D. M. Clark, Global subdirect products, *Mem. Amer. Math. Soc.* **17** (210), 109 págs., 1979.

[Mit71/72] A. Mitschke, Implication algebras are 3-permutable and 3-distributive, *Algebra Universalis* **1**, 182-186, 1971/72.

[Mon80] A. A. Monteiro, Sur les algèbres de Heyting symmétriques, *Port. Math.* **39**, 1-237, 1980.

[Mun86] D. Mundici, MV-algebras are categorically equivalent to bounded commutative BCK-algebras, *Math. Japonica* **31** (6), 889-894, 1986.

[Ras74] H. Rasiowa, *An algebraic approach to non-classical logics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 78, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1974.

[Sou07] D. Souma, An algebraic approach to the disjunction property of substructural logic, *Notre Dame Journal of Formal Logic* **48** 489-495, 2007.

[Tor08] A. Torrens, An approach to Glivenko's theorem in algebraizable logics, *Studia Logica* **88**, 349-383, 2008.

[Vag92] D. J. Vaggione, Sheaf representation and Chinese remainder theorems, *Algebra Universalis* **29** (2), 232-272, 1992.

[Vol79] H. Volger, Preservation theorems for limits of structures and global sections of sheaves of structures, *Math. Z.* **166** (1), 27-54, 1979.

[Wro83a] A. Wroński, BCK-algebras do not form a variety, *Math. Japonica* **28**, 211–213, 1983.

[Wro83b] A. Wroński, Reflections and distensions of BCK algebras, *Math. Japonica* **28**, 215-225, 1983.