LA PLAZA DEL BARRIO, UN LUGAR COMPLETO DE FUNCIONES

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA INCLUIR EL MODELADO MATEMÁTICO EN EL NIVEL MEDIO

Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur

Contenido

La plaza del barrio, un lugar completo de funciones / J. A. Del Punta, L. Rohlmann y V. San Román.
1a ed ilustrada. Bahía Blanca, 2021.

Libro digital, PDF
Archivo Digital: descarga

1. Matemática. 2. Funciones. I. AUTOR.
CDD 510.712

Publicado por Departamento de Matemática – Universidad Nacional del Sur

www.uns.edu.ar

Primera edición, junio 2021

La plaza del barrio, un lugar completo de funciones

Propuesta didáctica para Matemática – Nivel Secundario

Departamento de Matemática – UNS

Participan de este proyecto:

Docentes del Departamento de Matemática
Del Punta, Jessica A.
Rohlman, Lucas
San Román, Verónica

Docentes de Nivel Secundario
Avio, Mabel
Baleani, Marcela
Bustor Torres, Romina
Cayo, Mirta
Chávez Castro, Viviana
Compagnucci, Silvana
González, María Antonieta
Llul, María Andrea

Prefacio

El presente material surge como resultado de dos talleres destinados a docentes de Matemática de Nivel Secundario y llevados a cabo durante la segunda mitad de 2019, uno en el Partido de Villarino y el otro en el Partido de Bahía Blanca, Provincia de Buenos Aires. Estos talleres fueron concebidos por un grupo de Docentes del Departamento de Matemática, en el marco del Programa Nexos: Articulación Educativa Universidad - Escuela Secundaria, una convocatoria realizada por el Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología a través de la Secretaría de Políticas Universitarias. Uno de los lineamientos del Programa Nexos apunta al diseño e implementación de espacios de trabajo conjunto con docentes del nivel medio para favorecer la articulación transversal de los contenidos desarrollados en los últimos años del secundario y los primeros del trayecto universitario.

Partiendo de elementos cotidianos como son los juegos de una plaza, nuestra propuesta busca fomentar la inclusión, en las planificaciones áulicas, del modelado matemático y el trabajo con datos reales mediante el uso de diversas tecnologías. El contenido fundamental que se trabaja en este contexto es el de Funciones, el cual atraviesa todos los años del Nivel Secundario. Sin embargo es importante destacar que esta propuesta puede ser el motor para enseñar otros conceptos que pueden venir de la Geometría o de la Estadística. Además, tanto la temática como la metodología propuestas son ideales para trabajar de manera conjunta e interdisciplinarmente con docentes de otras áreas, como por ejemplo de Computación, Física o Educación Física.

El material elaborado consta de tres grandes bloques. El primero incluye la descripción del movimiento de cada uno de los juegos seleccionados y la función matemática que lo modela. Se presentan aquí también algunos conceptos del campo de la Física necesarios para describir el movimiento. En un segundo bloque se describen algunas tecnologías que pueden utilizarse para modelar el movimiento, y se presentan las propuestas áulicas desarrolladas por los distintos grupos de docentes involucrados en este proyecto. En el bloque final se plantea una reflexión en torno a la evaluación de los contenidos, haciendo foco en el uso de tecnologías que acompañen la metodología implementada en la etapa previa de desarrollo del contenido específico.

Capítulo 1

Introducción

Una plaza es un lugar de continuo movimiento. Los distintos juegos buscan justamente divertir a los chicos mediante el movimiento. Más aún, encontramos allí chicos andando en bicicleta o jugando a la pelota. Hasta las fuentes de agua nos muestran movimiento. En este trabajo proponemos incluir el estudio del movimiento de estos elementos dentro de las actividades planificadas por cada docente. El movimiento se describe mediante funciones, por lo que sería natural incluirlo en esa unidad curricular. Sin embargo, la metodología que presentamos (fuertemente experimental e incorporando el uso de programas o aplicaciones de celulares para analizar datos) abre las puertas a trabajar otros contenidos tomando como eje de la propuesta didáctica el movimiento de objetos en una plaza. O por qué no, coordinar un trabajo interdisciplinar entre colegas de distintas áreas.

Noción de modelo

La Matemática desarrolla herramientas que nos permiten representar y estudiar el comportamiento del mundo que nos rodea, permitiendo así comprender distintos fenómenos y responder a numerosos interrogantes. A estas representaciones, que pueden combinar gráficos, fórmulas o esquemas, las llamamos **modelo** [1]. Un modelo busca describir, de manera simplificada y con un cierto grado de abstracción, las interacciones que se producen entre los distintos elementos que se están estudiando. Mediante modelos se pueden estudiar una gran diversidad de problemas en distintas áreas, tanto en ciencias exactas como en ciencias sociales. Al proponer un modelo nos enfrentamos a la difícil decisión de priorizar la simplicidad o proponer una representación detallada del sistema a estudiar. Para esto, es fundamental definir previamente los supuestos y un sistema de coordenadas adecuad que permitan lograr un buen equilibrio entre estos dos aspectos.

El concepto de función

Existen muchas relaciones cotidianas que involucran dos variables de modo tal que el valor de una depende del valor de la otra. Por ejemplo:

- ◇ La distancia recorrida por un auto depende de la velocidad a la que se desplaza.
- ◇ La cantidad de lluvia recogida durante una hora en un recipiente depende de la intensidad con la que caiga la misma (esta se suele medir en litros por metro cuadrado).
- ◇ El costo de una encomienda depende de su peso y del lugar de destino.

De manera intuitiva podemos decir que una función es una relación entre dos magnitudes, de tal manera que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda. En nuestra propuesta entran en juego las funciones lineales, cuadráticas, trigonométricas y exponenciales, las cuales combinadas de diferentes maneras permiten modelar el movimiento de los juegos que se observan en una plaza. Así, con funciones lineales o lineales a trozos podemos modelar el desplazamiento de niños jugando a la pelota o andando en bicicleta. Para modelar el juego del tobogán veremos que pueden usarse tanto funciones lineales como cuadráticas, la elección dependerá de qué se considere como variable independiente. Funciones cuadráticas también aparecen en el modelado de una pelota al ser pateada o de las gotas que salen de una fuente de agua. Las funciones trigonométricas describen el movimiento ideal de la calesita y de la hamaca, y si combinamos estas funciones con una exponencial podemos incluso dar un modelo más realista del movimiento, como veremos en el caso de la hamaca.

El trabajo experimental y en equipo

La naturaleza del trabajo propuesto en éstas páginas nos ubica en una situación ideal para trabajar con datos experimentales, esto es, datos tomados de la realidad a partir de medir, de alguna manera, el movimiento que se quiere modelar. Los datos experimentales, si fueron bien tomados, permiten el contraste entre el modelo y lo que realmente ocurre. Es decir, nos muestran cuán bueno es nuestro modelo. Más aún, podemos aprovechar estos datos para trabajar otros conceptos vinculados, por ejemplo, a la estadística a partir del cálculo de promedios, desvíos o errores en la estimación de los elementos (llamados parámetros) necesarios para armar nuestro modelo.

Por otro lado, los conceptos involucrados en la descripción del movimiento provienen de la Física, por lo que esta propuesta abre las puertas a la elaboración de proyectos interdisciplinares con docentes de dicha área de conocimiento. Cabe destacar que no solo con Física pueden coordinarse actividades conjuntas. Veremos en una de las propuestas la posibilidad de trabajar con docentes de Educación Física.

Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) y Recursos Educativos Abiertos (REA)

En los últimos años, las TIC han tenido un desarrollo explosivo, impactando sobre diversos ámbitos de nuestra vida cotidiana. La educación no fue ajena a este fenómeno. Muchos docentes se han ido involucrando cada vez más en un proceso de reestructuración y revisión de sus prácticas, manteniéndose en continua formación en la búsqueda de diversificar las metodologías, herramientas y formas de desarrollo de sus propuestas áulicas. Los materiales didácticos son elementos claves en la presentación de contenidos y la construcción del conocimiento de cada alumno. Es fundamental que su diseño e implementación promueva el aprendizaje significativo mediante la interacción entre los distintos actores involucrados [2]. En este contexto, la comprensión y manejo de TIC se presentan como una competencia imprescindible en la formación de los futuros trabajadores y ciudadanos, así como un recurso didáctico apropiado para transformar el proceso de enseñanza-aprendizaje [3].

La gran mayoría de los docentes, especialmente en nivel secundario, han formado el hábito de intercambiar sus producciones con sus pares. Esta práctica se realiza mano a mano, con colegas conocidos y en general dentro de las instituciones educativas en las que trabajan. Hoy día, internet permite que esa práctica de compartir se expanda, habilitando los intercambios con muchos otros docentes de distintos lugares del país (y el mundo). Plataformas como GeoGebra permiten y promueven este tipo de prácticas. Los recursos así generados y compartidos bajo licencias de libre acceso se conocen como Recursos Educativos Abiertos (REA). La Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OECD, sus siglas en inglés) define los REA como “materiales digitalizados ofrecidos libremente y abiertamente para profesorado, alumnado y autodidactas a fin de que sean usados y reutilizados para enseñar, mientras se aprende y se investiga” [4]. La creación de REA se ofrece como una posibilidad para mejorar la calidad de la educación mediante el intercambio de contenidos y recursos educativos para su implementación, en un entorno mediado por las TIC.

Las distintas propuestas que conforman el presente material, persiguen tres objetivos principales. En primer lugar, buscamos brindar herramientas y proponer actividades novedosas para llevar al aula. A su vez, nos proponemos despertar curiosidades en cada docente que se acerque a este material, de forma que cada uno comience a innovar en la elaboración de nuevas actividades y acercamientos al conocimiento basándose en sus propias experiencias y su realidad áulica. Finalmente, queremos difundir los principios que promueven las Practicas Educativas Abiertas y la elaboración de Recursos Educativos Abiertos, pues entendemos que estas propuestas enriquecen enormemente las planificaciones áulicas. En nuestra opinión, el trabajo en equipo, abiertamente compartido y lo más conectado posible a una realidad cercana al alumno es la base de un aprendizaje significativo.

Bibliograía

[1] Bocco, M. (2010) Funciones elementales para construir modelos matemáticos - 1a ed. - Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica. ISBN 978-950-00-0758-0

[2] Schwartzman, G. (2013). Materiales didácticos en educación en línea: por qué, para qué, cómo. En Brocca, D. I Jornadas Nacionales III Jornadas de la UNC: experiencias e investigación en educación a distancia y tecnología educativa. Universidad Nacional de Córdoba, 2013.

[3] Adell, J. (2018). Más allá del instrumentalismo en tecnología educativa. En J. Gimeno (Ed.), Cambiar los contenidos, cambiar la educación. Madrid: Morata.

[4] OECD (2007) Giving Knowledge for Free. The Emergence of Open Educational Resources, París: Centre for Educational Research and Innovation (CERI).

Capítulo 2

Descripción del movimiento mediante funciones

2.1 Función lineal

Las funciones lineales permiten modelar distintos movimientos que pueden encontrarse en una visita a la plaza. Imaginemos un niño deslizándose por un tobogán. Con una función lineal podemos describir, por ejemplo, la altura a la que se encuentra el niño mientras se desliza en función de su posición horizontal. También hay movimientos lineales que relacionan la posición de un objeto en función del tiempo. Por ejemplo, el desplazamiento de una persona andando en bicicleta o corriendo, siempre que lo haga a velocidad constante. O incluso, algo menos evidente, la variación del ángulo de giro de una calesita. Presentamos a continuación las funciones lineales que describen estos movimientos, explicando los pasos a tener en cuenta en cada situación que se modela y las limitaciones que pueda tener el modelo planteado.

El tobogán

Imaginemos un niño deslizándose por un tobogán. Podemos pensar que este desplazamiento ocurre en un plano, como se muestra en la Figura 1. Para modelar este movimiento, suponemos que la tabla del tobogán por la que se desliza el chico es plana. El primer paso para construir el modelo es fijar un sistema de coordenadas cartesianas que nos permita ubicar los distintos elementos en juego. Elegimos como eje vertical (eje y) la dirección perpendicular al suelo y como eje horizontal (eje x) la dirección sobre el suelo que va desde donde está la escalera hacia el punto en que la tabla del tobogán llega al suelo. El origen de coordenadas lo ubicamos de forma que el movimiento horizontal se inicie en $x = 0$. El sistema elegido se muestra en la Figura 1. Sobre esta misma figura podemos distinguir los siguientes elementos:

- ◇ Altura mínima: y_{min},
- ◇ Altura máxima: y_{max},
- ◇ Longitud máxima: x_{max},
- ◇ Ángulo de inclinación: α.

Figura 1. Ubicación de ejes cartesianos en un tobogán

En la Figura 1 la altura mínima y_{min} es nula pues la tabla del tobogán llega a tocar el suelo. Pero esto no siempre ocurre por lo que, en otros casos, este valor debe ser tenido en cuenta para modelar el movimiento.

Vista desde un lateral como se observa en la Figura 1, la tabla por la que los chicos se deslizan determina una recta en este sistema de coordenadas propuesto. Entonces, la altura del chico, que indicamos con la letra y, en función de la longitud x que se desplazó está determinada por la ecuación de esa recta. Para hallar tal ecuación necesitamos su pendiente a y su ordenada al origen b, dos elementos que son fáciles de calcular. De acuerdo a la forma en que elegimos nuestro sistema de coordenadas, tenemos

$$\begin{aligned} &\text{Pendiente: } a = -\operatorname{tg}(\alpha) = -\frac{y_{max} - y_{min}}{x_{max}}, \\ &\text{Ordenada al origen: } b = y_{max} \end{aligned}$$

Finalmente la altura a la que se encuentra el chico a medida que avanza horizontalmente está dada por la función lineal

$$y(x) = ax + b = -\operatorname{tg}(\alpha)\, x + y_{max}. \tag{2.1}$$

Observación 1

Dominio e imagen de funciones que modelan movimiento. Un detalle muy importante al modelar situaciones de la vida real es el *dominio* y la *imagen* de las funciones involucradas. Los valores que tomen las variables, tanto dependientes como independientes, deben tener sentido en el contexto en el que se están usando.

La función lineal, desde el punto de vista matemático, está definida para cualquier valor real de la variable independiente (que en este caso sería x). Sin embargo, en nuestro modelo x representa la posición horizontal de un niño en un tobogán, por lo que los valores que puede tomar esta variable deben estar en el intervalo $[0, x_{max}]$. De la misma manera, la imagen de esta función lineal queda reducida al intervalo $[y_{min}, y_{max}]$. Otros valores no tendrían sentido en este contexto.

Funciones lineales dependientes del tiempo

Como mencionamos al inicio de esta sección, hay otros movimientos que pueden modelarse mediante funciones lineales. Por ejemplo, el desplazamiento de un chico andando en bici o corriendo, siempre que lo haga a velocidad constante. A este tipo de movimiento se lo llama *movimiento rectilíneo uniforme*. En estos casos, la función lineal tendrá la forma

$$d(t) = d_0 + v_0 t, \tag{2.2}$$

donde d es la variable dependiente que representa el desplazamiento, t es la variable independiente y representa al tiempo, d_0 es el desplazamiento inicial (es decir, desde dónde comienza a moverse el niño) y v_0 es la velocidad (constante) a la que se desplaza.

En la Sección 3.2 se describe una propuesta para trabajar función lineal de manera interdisciplinar con Educación Física. En dicha propuesta se modela el trote de un alumno mediante una función lineal a trozos. Allí se toma como punto de partida la función lineal (2.2) y se mide el desplazamiento del alumno, al que se le pide que cambie la velocidad en distintos tramos (ver Propuesta 1).

Otro ejemplo de función lineal dependiente del tiempo es el ángulo de giro de una calesita en movimiento sobre la que no hay fuerzas de rozamiento. Si la velocidad de giro ω, llamada *velocidad angular*, es constante, el ángulo de giro θ es una función lineal del tiempo y su expresión es

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t \tag{2.3}$$

donde θ_0 es el ángulo inicial, de acuerdo al sistema de coordenadas que se elije.

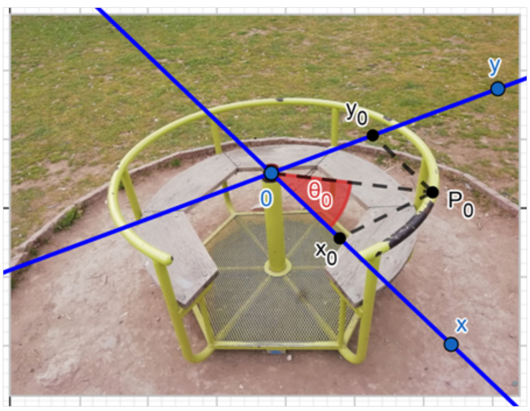


Figura 2. Ubicación de ejes cartesianos en una calesita

2.2 Función cuadrática

Describir la posición en la que se encuentra una pelota lanzada por un niño a un aro de basquet en función del tiempo, o saber el momento en que una partícula de agua expulsada de una fuente de agua tocará el suelo, son algunas situaciones que pueden ser modeladas con funciones cuadráticas. En esta sección presentamos diversas situaciones en las que la función cuadrática es adecuada para modelar el movimiento de objetos que podemos encontrar en una plaza.

Movimiento de una pelota

Analicemos algunas de las posibles situaciones que podemos observar al encontrarnos con un grupo de niños jugando con una pelota. Una de ellas consiste en tirar verticalmente la pelota hacia arriba, y otra es un tiro oblicuo, que es el que más frecuentemente ocurre.

Tiro vertical

La situación más sencilla de estudiar es aquella en la que la pelota es lanzada verticalmente hacia arriba. El movimiento de la pelota en este caso es unidimensional, pues observamos movimiento solo en la dirección vertical, y varía en función del tiempo. Si suponemos que no existen fuerzas de rozamiento que intervengan en esta situación, la altura (y) que alcanza la pelota estará determinada por la velocidad con la que es lanzada (v_0), la gravedad (g) y el tiempo (t). Este tipo de movimiento, denominado *movimiento rectilíneo uniformemente variado*, se describe de manera general como sigue:

$$y(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + v_0\,t + y_0 \tag{2.4}$$

La Figura 3 muestra la gráfica del movimiento que corresponde a una altura inicial de $1,2m$ y una velocidad inicial de $3,7m/s$. Sabemos además que $g \sim 9.8m/s^2$. Con estos datos resulta que la altura de la pelota en función del tiempo se expresa, en este ejemplo particular, de la forma:

$$y(t) = -4,9t^2 + 3,7t + 1,2. \tag{2.5}$$

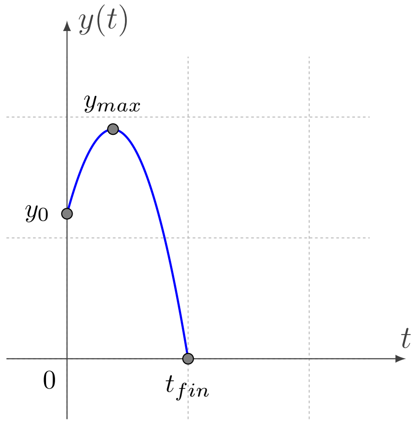


Figura 3. Gráfico del movimiento de una pelota lanzada verticalmente.

Como se explicó en la Observación 1, el dominio de esta función debe ser un conjunto de valores que tengan sentido en el contexto del problema, aún cuando la función cuadrática está definida para cualquier valor real de la variable independiente. En este caso, el dominio que consideramos es $[0, t_{fin}]$, donde t_{fin} es el instante en que la pelota toca el suelo, y puede calcularse a partir de la ecuación (2.4) igualando $y(t) = 0$ y despejando el valor de t. Atención: esta es una ecuación cuadrática que tendrá dos soluciones, una de las cuales será negativa y no tendrá ningún sentido en el contexto estudiado.

Observación 2

Movimiento ideal y movimiento real. Como dijimos, en esta situación ideal la pelota describe un movimiento unidimensional pues es lanzada en forma vertical y no intervienen fuerzas de rozamiento. Sin embargo en la práctica sería poco probable que esto suceda, ya que el tiro vertical debería ser muy preciso, además el aire siempre produce rozamiento y también el viento podría influir sobre la pelota. De hecho, una observación interesante es que en la ecuación que dimos, en ningún momento nos importó el peso o la forma del objeto que se lanza. Efectivamente, en una situación ideal como la planteada sería exactamente igual lanzar una pelota hacia arriba o un bollo de papel: si ambos fueran lanzados desde la misma altura inicial y con la misma velocidad, entonces describirían la misma trayectoria. Sería muy interesante estudiar este fenómeno en conjunto con la materia de Física.

Volviendo a nuestras funciones de movimiento, es posible mejorar el modelo propuesto incluyendo la fuerza de rozamiento, que es la responsable de que el fenómeno ideal descripto no se observe en la vida cotidiana. Sin embargo, al incluir esta fuerza, las funciones que describen el movimiento dejan de ser funciones cuadráticas y encontramos combinaciones de funciones exponenciales y lineales. Las expresiones que corresponden a dichas funciones exceden el objetivo de estas notas. Aún así, es posible estudiar este movimiento a partir de datos experimentales y contrastar el modelo ideal con lo que se observa en la realidad. Esto puede hacerse siguiendo las ideas presentadas en la Propuesta 6 de la Sección 3.2. En dicha propuesta se contrasta el movimiento real de una hamaca, registrado con una cámara de video, con el modelo teórico que lo describe.

Tiro oblicuo

Si la pelota es lanzada en forma oblicua y sin efecto de rotación, el movimiento que se describe es bidimensional y a su vez depende del tiempo. Es decir, para cada instante t tenemos una posición de la pelota dada por el par ordenado

$$P(t) = (x(t), y(t)).$$

Podemos estudiar este movimiento en el plano, es decir como una función $P : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, o bien hacer el análisis de cada una de las componentes $x(t)$ e $y(t)$. Más aún, podemos estudiar la función que relaciona la posición vertical de la pelota con su posición horizontal, es decir, $y(x)$. En la Figura 4 presentamos los gráficos de las funciones $y(x)$, $x(t)$ y $y(t)$. Tanto las funciones $y(x)$, la cual indica la altura de la pelota en función de su posición horizontal, como $y(t)$, que indica la altura de la pelota en función del tiempo, son cuadráticas. Esto es así ya que la altura se ve afectada por la fuerza de gravedad. En cambio, la función $x(t)$ que describe el avance horizontal de la pelota según varía el tiempo, es lineal pues la fuerza de gravedad no actúa en esa dirección. Veremos a continuación las expresiones que corresponden a cada una de estas funciones.

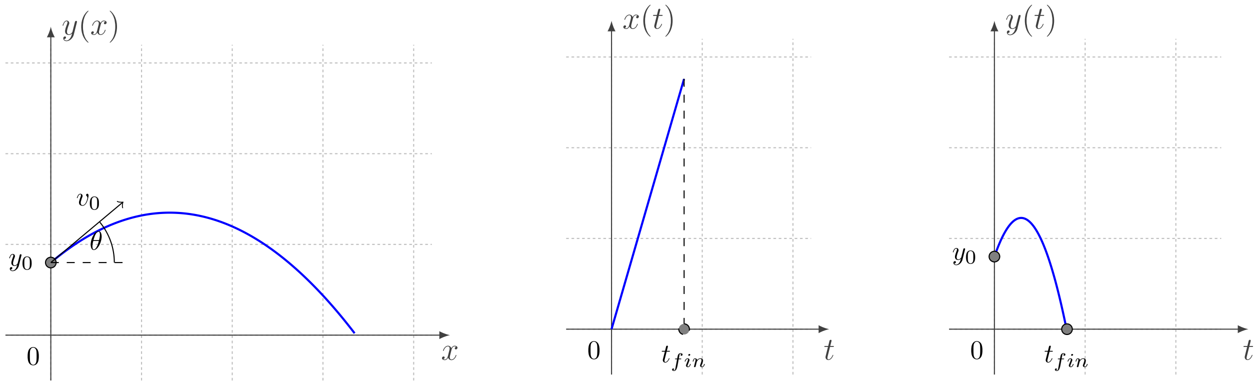


Figura 4. Gráficos de las funciones que describen el movimiento de una pelota lanzada en forma oblicua.

Empecemos con las funciones dependientes del tiempo. Como dijimos en el párrafo anterior, en la dirección horizontal el movimiento es lineal en el tiempo, mientras que en la dirección vertical el movimiento es cuadrático en el tiempo. Las expresiones que corresponden a cada una de estas funciones son

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\theta)\, t, \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \operatorname{sen}(\theta)\, t + y_0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Aquí v_0 es la velocidad inicial, θ es el ángulo que forma la dirección en la que se lanza la pelota con la dirección horizontal, y_0 es la altura inicial desde la que se inicia el lanzamiento y g es la gravedad. Como variable independiente estamos considerando al tiempo t, y las variables dependientes son las componentes x e y que nos indican la posición $P = (x, y)$ de la pelota. Los gráficos de la Figura 4 corresponden a los valores

$$y_0 = 0{,}8m, \quad v_0 = 4{,}5m/s, \quad \theta = 40\,^\circ \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 4{,}5 \cos(40\,^\circ) \sim 3{,}45, \\ 4{,}5 \operatorname{sen}(40\,^\circ) \sim 2{,}89. \end{cases}$$

Es decir que las funciones graficadas fueron

$$\begin{cases} x(t) = 3{,}45\, t, \\ y(t) = -4{,}9\, t^2 + 2{,}89\, t + 0{,}8. \end{cases}$$

Ahora, para hallar la función cuadrática que describe la trayectoria de este movimiento, es deicr la parábola que sigue la pelota en el plano xy, y que es la que en realidad vemos cuando alguien tira una pelota, podemos partir de las ecuaciones (2.6) que describen el movimiento horizontal y vertical de la pelota. Si despejamos t en la primer ecuación,

$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\theta)},$$

y reemplazamos en la segunda ecuación, obtenemos

$$y = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\theta \left(\frac{x}{v_0 \cos(\theta)} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\theta)} \right)^2.$$

Reordenamos esta expresión para encontrar la función cuadrática cuya gráfica coincide con la trayectoria que sigue la pelota al ser lanzada. Ahora tenemos como variable independiente la posición en la dirección horizontal y como variable dependiente la posición vertical. Esto es,

$$y(x) = -\left(\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2(\theta)}\right)x^2 + \mathrm{tg}(\theta)\,x + y_0. \tag{2.7}$$

Las expresiones para los coeficientes de esta función cuadrática se ven un poco complicados, pero se debe tener en cuenta que una vez que se conocen los valores asociados al problema (y_0, v_0, θ) es fácil encontrar la función cuadrática y trabajar con ella. Por ejemplo, en la Figura 3 tomamos

$$y_0 = 0{,}8m, \quad v_0 = 4{,}5m/s, \quad \theta = 40^\circ \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{9{,}8}{2\,(4{,}5)^2\cos^2(40^\circ)} \sim 0{,}41, \\ \mathrm{tg}(40^\circ) \sim 0{,}839, \end{cases}$$

y entonces la parábola graficada en el panel superior de la figura corresponde a

$$y(x) = -0{,}41x^2 + 0{,}839x + 0{,}8.$$

A partir de esta expresión, es fácil responder a preguntas como por ejemplo: ¿A qué distancia del niño que la lanza caerá la pelota? ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará? Preguntas como ¿en qué instante alcanza la altura máxima? requieren de combinar la información que se obtiene de la función (2.7) con las funciones (2.6) o bien se puede responder directamente a partir de la función $y(t)$.

Ejemplo 1

Un chico parado frente a un aro de basquet amurado a una pared lanza una pelota con intención de embocarla en el aro. La pelota es lanzada desde una altura de 1.6 m formando un ángulo $\theta = 50^\circ$ y a una velocidad de 8 m/s. El aro se encuentra a 3 m del suelo y su base está a 4.5 m del niño. ¿Convierte el doble el niño?

A partir de los datos del problema encontramos

$$y_0 = 1{,}6m, \; v_0 = 8m/s, \; \theta = 50^\circ \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{9{,}8}{2\,(8)^2\cos^2(50^\circ)} \sim 0{,}17, \\ \mathrm{tg}(50^\circ) \sim 1{,}19, \end{cases}$$

y la función cuadrática que describe el movimiento de la pelota es

$$y(x) = -0{,}17x^2 + 1{,}19x + 1{,}6. \tag{2.8}$$

Para saber si el chico emboca la pelota en el aro basta saber a qué altura se encuentra la pelota a una distancia $x = 4,5m$, pues a esa distancia se encuentra el aro. Entonces

$$y(4) = -0,17 \cdot (4,5)^2 + 1,19 \cdot 4,5 + 1,6 = 3,5.$$

Así, podemos concluir que la pelota no entrará en el aro, sino que rebotará contra la pared a $50cm$ por encima del aro. La Figura 5 esquematiza la situación. Allí se grafica la función (2.8). Podemos observar que el dominio de esta función es el intervalo $[0; 4,5]$. Para otros valores de x la función no corresponde a la situación que estamos estudiando, como se explicó en la Observación 1.

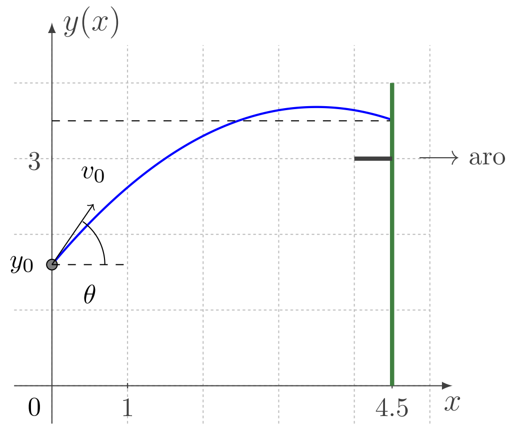


Figura 5. Lanzamiento oblicuo

El tobogán

Vimos en la Sección 2.1 que la trayectoria que sigue un niño al deslizarse por un tobogán puede modelarse con una función lineal. Ahora bien, cada punto en esa trayectoria es dependiente del tiempo. Es decir, para cada instante t la posición en que se encuentra el niño está dada por el par ordenado

$$P(t) = (x(t), y(t)).$$

La forma en que se relacionan x e y está dada por la función lineal (2.1) estudiada en la Sección 2.1. Veremos a continuación cómo son las funciones dependientes del tiempo $x(t)$ e $y(t)$, las cuales describen la forma en que el niño se desplaza en la dirección horizontal y vertical a medida que transcurre el tiempo.

Al igual que hicimos en la Sección 2.1, suponemos que la tabla del tobogán es plana y elegimos el mismo sistema de coordenadas que en esa situación ya estudiada. Además en este caso vamos a tener en cuenta la fuerza de rozamiento que afecta al movimiento. Esta fuerza se caracteriza por un coeficiente, llamado *coeficiente de rozamiento dinámico*, que indicaremos con la letra f. El valor que toma este coeficiente depende de los materiales con que están hechos los objetos que rozan, y para algunos materiales este valor es conocido (pueden encontrarse tablas de estos valores en distintas páginas de internet). Sin embargo, para esta situación particular es relativamente sencillo de determinar experimentalmente, simplemente basta tomar el tiempo que el objeto tarda en llegar al suelo y reemplazar con todos los datos del problema en cualquiera de las funciones de movimiento. En el Ejemplo 2 mostramos cómo deducir este coeficiente a partir de datos supuestos, pero el mismo trabajo se puede hacer recopilando los datos experimentalmente.

Las funciones que describen el movimiento en cada dirección están dadas de manera general por las funciones

$$\begin{cases} x(t) = g\cos(\alpha)\,[\mathrm{sen}(\alpha) - f\cos(\alpha)]\,t^2, \\ y(t) = y_{max} - g\,\mathrm{sen}(\alpha)\,[\mathrm{sen}(\alpha) - f\cos(\alpha)]\,t^2. \end{cases} \tag{2.9}$$

Aquí g corresponde a la gravedad, α es el ángulo que forma la tabla del tobogán con el suelo e y_{max} es la altura desde la que empieza a deslizarse el objeto. Estos elementos se ilustraron en la Figura 1. Nuevamente vemos ecuaciones que parecen difíciles, pero una vez que se conocen los datos del problema es sencillo obtener la ecuación de cada una de estas funciones cuadráticas. Por ejemplo, para los valores iniciales

$$\alpha = 42\,^\circ, \quad f = 0.6, \quad y_{max} = 2.7m \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{sen}(42\,^\circ) \sim 0,67, \\ \cos(42\,^\circ) \sim 0,74, \end{cases}$$

las funciones cuadráticas que modelan el movimiento son

$$\begin{cases} x(t) = 9,8 \cdot 0,74 \cdot [0,67 - 0,6 \cdot 0,74]\,t^2, \\ y(t) = 2,7 - 9,8 \cdot 0,67 \cdot [0,67 - 0,6 \cdot 0,74]\,t^2, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x(t) = 2,07\,t^2, \\ y(t) = 2,7 - 1,88\,t^2. \end{cases} \tag{2.10}$$

Sus gráficas se muestran en la Figura 6.

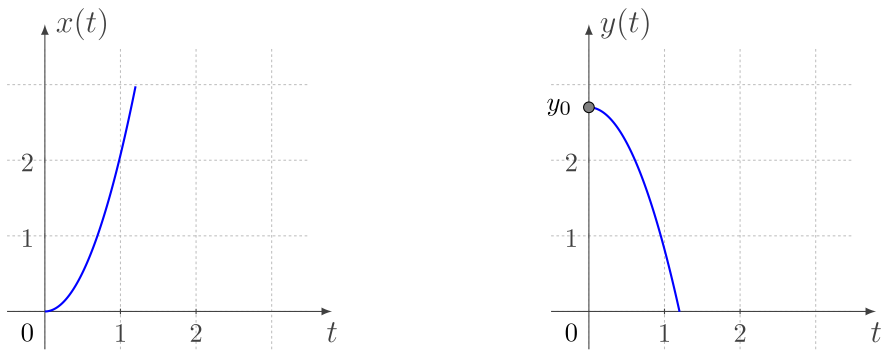


Figura 6. Gráficos de las funciones (2.10) que describen el movimiento horizontal $x(t)$ y vertical $y(t)$ de un niño deslizándose por un tobogán.

Ejemplo 2

En este ejemplo veremos cómo deducir el coeficiente de rozamiento que actúa sobre un niño que se arroja por un tobogán. Supongamos que el ángulo de inclinación de la tabla del tobogán es $\alpha = 35\,°$, la altura máxima y_{max} del mismo es 3 m y la altura mínima es $y_{min} = 0$ (ver la Figura 1 para identificar en el tobogán qué representa cada uno de estos elementos). Entonces las funciones de movimiento quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x(t) = 9{,}8\cos(35\,°)\,[\mathrm{sen}(35\,°) - f\cos(35\,°)]\,t^2, \\ \\ y(t) = 3 - 9{,}8\,\mathrm{sen}(35\,°)\,[\mathrm{sen}(35\,°) - f\cos(35\,°)]\,t^2. \end{cases}$$

Aplicando la propiedad distributiva y realizando los cálculos correspondientes con el redondeo $\cos(35\,°) \sim 0{,}82,\ \mathrm{sen}(35\,°) \sim 0{,}57$ encontramos el modelo

$$\begin{cases} x(t) = (4{,}58 - 6{,}59\,f)\,t^2, \\ \\ y(t) = 3 - (3{,}18 - 4{,}58\,f)\,t^2. \end{cases} \tag{2.11}$$

Si conocemos el tiempo que el niño tarda en deslizarse, podemos encontrar el valor del coeficiente f reemplazando el dato en alguna de las ecuaciones. Supongamos que el niño tardó $1{,}6$ segundos en tocar el suelo, esto es $y(1{,}6) = 0$. Entonces, para determinar el coeficiente de rozamiento reemplazamos este dato en la función que nos indica la altura $y(t)$.

$$\begin{aligned} y(1{,}6) = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 &= 3 - (3{,}18 - 4{,}58\,f)\,(1{,}6)^2 \\ 3{,}18 - 4{,}58\,f &= \frac{3}{(1{,}6)^2} \\ f &= \frac{1{,}17 - 3{,}18}{-4{,}58} \sim 0{,}44. \end{aligned}$$

Con este valor del coeficiente reemplazamos en las ecuaciones (2.11) y resulta que las funciones que describen el movimiento para este tobogán en particular, son

$$\begin{cases} x(t) = 1{,}68\,t^2, \\ \\ y(t) = 3 - 1{,}16\,t^2. \end{cases}$$

2.3 Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas modelan el movimiento de un niño que se encuentra hamacándose o girando en una calesita, siempre que se desprecien las fuerzas de rozamiento. Estas fuerzas son las responsables de que el juego se detenga, por lo que ignorarlas en el modelado de una situación real no tiene demasiado sentido. Por otro lado, las funciones que resultan al incluir el rozamiento son mucho más complejas de lo que nos proponemos estudiar en estas notas. Por estos motivos, nuestra propuesta consiste en hacer una presentación del modelo ideal, sin incluir el rozamiento, el cual nos permite hacer un estudio de funciones trigonométricas, y luego realizar un trabajo de campo para contrastar el modelo con la situación real y abrir el debate sobre lo adecuado de los modelos y las razones por las que no se ajustan del todo a la realidad.

La calesita

El movimiento que realiza un niño en una calesitas, llamado *movimiento circular uniforme*, describe una circunferencia en un plano. Es decir que se trata de un movimiento bidimensional por lo que tendremos, para cada instante t, un par ordenado indicando la posición del niño:

$$P(t) = (x(t), y(t))\,.$$

Podemos estudiar este movimiento en el plano, como una función $P : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, o bien hacer el análisis de cada una de las componentes $x(t)$ e $y(t)$.

Para modelar este movimiento debemos, en primer lugar, establecer un sistema de ejes coordenados. Para esto, consideramos el suelo como plano de coordenadas y ubicamos el origen en el centro de la calesita, como muestra la Figura 7. En segundo lugar, para simplificar el modelado suponemos que no hay fuerzas de rozamiento que afecten el movimiento. Además, vamos a considerar que el movimiento se realiza en *sentido antihorario*, es decir contrario al movimiento de las agujas del reloj. Entonces, si la posición inicial del niño es el punto $P_0 = (x_0, y_0)$, su movimiento en cada dirección está determinado por las funciones trigonométricas:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\theta_0 + \omega t), \\ y(t) = R\,\mathrm{sen}(\theta_0 + \omega t), \end{cases} \tag{2.12}$$

donde R es la distancia del niño al centro de la calesita (es decir, es el radio de giro). El ángulo θ_0 se llama *ángulo inicial*, se mide en *radianes* y es el ángulo que forma la posición del niño con el eje x, como se muestra en la Figura 7. El valor ω es la *velocidad angular*. Veamos estos elementos con un poco más de detalle.

- **Posición y ángulo inicial**. La posición inicial $P_0 = (x_0, y_0)$ corresponde a reemplazar con $t = 0$ en las funciones de movimiento, es decir,

$$P_0 = P(0) \quad = \quad (x(0), y(0)) \; = \; (R\cos(\theta_0), R\,\mathrm{sen}(\theta_0))$$

y encontramos así que

$$x_0 = R\cos(\theta_0), \qquad y_0 = R\,\mathrm{sen}(\theta_0).$$

De esto resulta inmediato que el ángulo inicial θ_0 está relacionado con la posición inicial $P_0 = (x_0, y_0)$ a partir de la igualdad

$$tg(\theta_0) = \frac{y_0}{x_0}.$$

- **Velocidad angular y período**. Podemos determinar el valor de ω usando el *período* T de este movimiento, esto es el tiempo que tarda la calesita en dar una vuelta completa. El período y la velocidad angular se relacionan mediante la identidad

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{2.13}$$

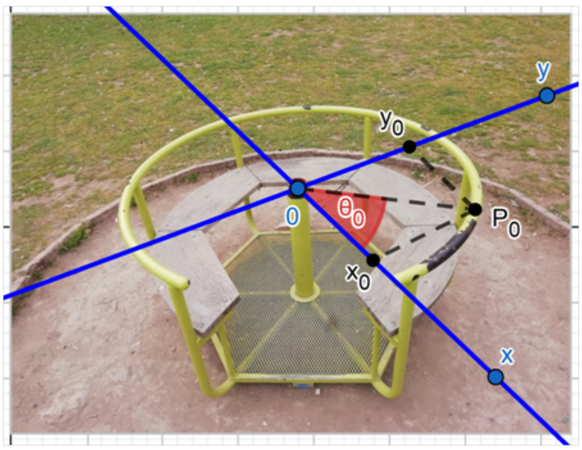


Figura 7. Sistema de coordenadas para describir el movimiento de una calesita.

Notemos que las funciones de movimiento (2.12) esconden a su vez una función lineal:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t. \tag{2.14}$$

Esta función indica la variación del ángulo de giro respecto del tiempo y ya la presentamos en la Sección 2.1. Vemos así que modelar el movimiento de una calesita no solo motiva el estudio de funciones trigonométricas, sino también el de *composición de funciones*.

Ejemplo 3

Supongamos que la calesita tiene un radio de 130 cm, y está girando a razón de una vuelta cada 3 segundos. Supongamos además que la posición del niño forma un ángulo inicial de 30° con el eje x.

Para poder expresar las funciones de movimiento necesitamos, en primer lugar, el ángulo inicial en radianes, esto es

$$\theta_0 = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \simeq 0.524.$$

También debemos calcular la velocidad angular. Sabemos que el período es $T = 3\,s$ y luego

$$\omega = \frac{2\pi}{3\,s} \simeq 2{,}094\,s^{-1}$$

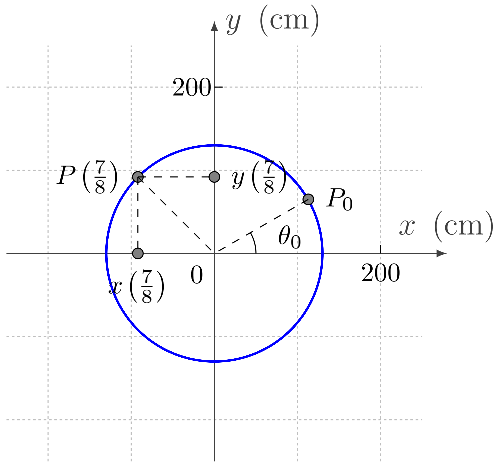


Figura 8. Representación de la posición $P(t) = (x(t), y(t))$ de un niño en una calesita.

Si bien estamos considerando valores aproximados de θ_0 y ω, podemos tomar como modelo del movimiento al par de funciones

$$\begin{cases} x(t) = 130\cos(0{,}524 + 2{,}094\,t), \\ y(t) = 130\,\mathrm{sen}(0{,}524 + 2{,}094\,t). \end{cases}$$

Aunque no estamos poniendo las unidades de medida en las expresiones, debemos tener presente que el tiempo se está midiendo en segundos y los valores de x e y están dados en centímetros. En la Figura 8 identificamos los valores iniciales $\theta_0 = 30^\circ$ y

$$P_0 = P(0) \simeq (130\cos(0{,}524), 130\,\mathrm{sen}(0{,}524)) \simeq (113, 65).$$

Además marcamos en este gráfico el punto correspondiente a $t = \frac{7}{8} = 0{,}875$. Esto es

$$P\left(\frac{7}{8}\right) = \left(x\left(\frac{7}{8}\right), y\left(\frac{7}{8}\right)\right) \simeq (-92, 92).$$

La representación gráfica de cada una de estas funciones se muestra a continuación.

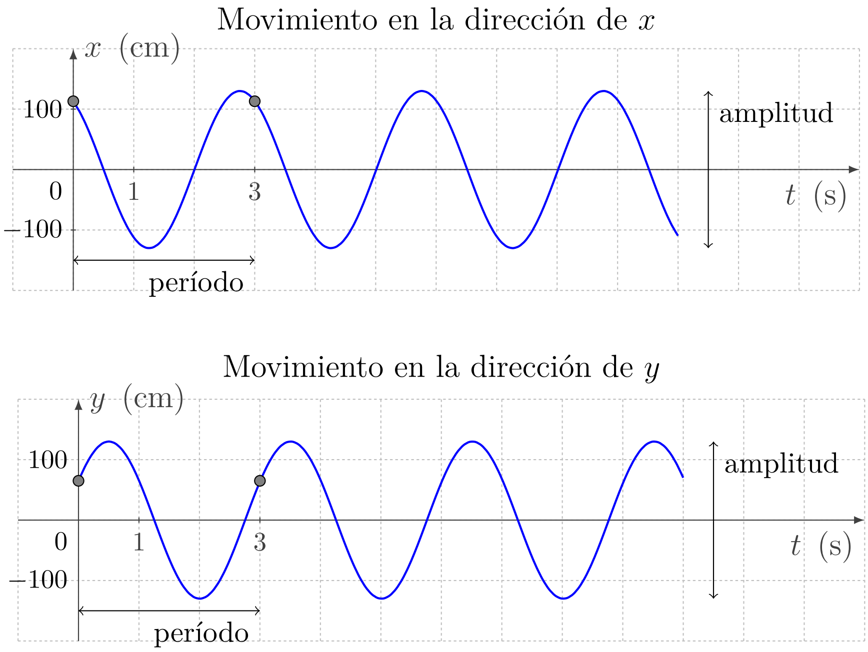


Figura 9. Representación de cada una de las componentes x, y del movimiento de un niño en una calesita en función del tiempo.

El modelo presentado supone que ningún rozamiento afecta el movimiento, lo cual es poco realista. Si no hubiera rozamiento, la calesita nunca frenaría. Incluir el rozamiento en el modelo requiere de funciones más elaboradas las cuales se alejan de esta propuesta. Sin embargo, haciendo uso de programas o aplicaciones para celulares podemos estudiar las funciones que modelan el movimiento real a partir de su representación gráfica, aunque no sabremos su expresión analítica. Mostramos cómo hacerlo en la Propuesta 6 de la Sección 3.2.

La hamaca

Para poner en funcionamiento una hamaca la tomamos del asiento y lo desplazamos una distancia D respecto de la línea vertical que indica la posición de reposo, como indica la Figura 10, manteniendo tensa la cuerda que sostiene la hamaca. Si este desplazamiento es pequeño y suponemos que no hay ningún tipo de rozamiento, el ángulo que describe la cuerda de la hamaca con el eje vertical en función del tiempo está dado por

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t). \tag{2.15}$$

ω_0 es la *frecuencia* y está determinada por la gravedad g y la longitud L de la cuerda que la sostiene:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Dada la relación que existe entre el período y la frecuencia de oscilación: $T = 2\pi/\omega_0$ (ver Anexo), encontramos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

El ángulo inicial θ_0 se relaciona con el desplazamiento inicial mediante la razón trigonométrica

$$\operatorname{sen}(\theta_0) = \frac{D}{L} \quad \longrightarrow \quad \theta_0 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{D}{L}\right), \quad \theta_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Es importante prestar atención a que D y L estén dadas con las mismas unidades de medida.

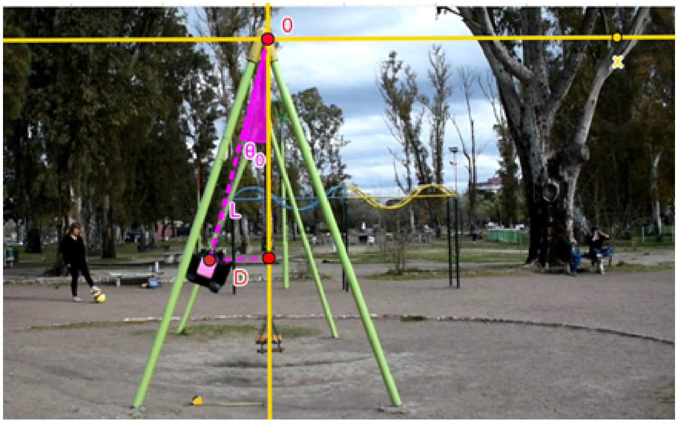


Figura 10. Vista lateral de una hamaca, ubicada en un sistema de ejes cartesianos adecuados para estudiar su movimiento.

El rozamiento en este caso se puede modelar con una función exponencial decreciente, de forma que obtenemos

$$\theta(t) = \theta_0\, e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t). \tag{2.16}$$

El coeficiente γ está asociado a la fricción que es la responsable de que la hamaca se detenga.

Este modelo, conocido en Física como *péndulo simple*, es solo válido para ángulos iniciales muy pequeños por lo que no describe la situación habitual de un niño hamacándose en una plaza. Las funciones en tal caso son muy complejas, por lo que no se presentan en estas notas, sino que se propone trabajar experimentalmente con ellas, como se describe en la Propuesta 6 de la Sección 3.2.

Capítulo 3

Propuestas áulicas

Proponer actividades interdisciplinares en las que se trabajen de forma integrada los contenidos de Matemática con los de Física, y que a partir de datos experimentales se contrasten los modelos teóricos con la situación real puede resultar muy enriquecedor. Un enfoque del modelado a partir de los aspectos físicos (como son las fuerzas que entran en juego) acompañado por el análisis matemático de las funciones que describen el movimiento se presenta como una gran oportunidad de mostrar a los alumnos que la matemática es una herramienta útil para explicar ciertas situaciones cotidianas. En este capítulo presentamos algunas herramientas digitales para trabajar con datos experimentales y luego una serie de propuestas didácticas que surgieron de espacios de encuentro y trabajo conjunto con docentes de nivel secundario. Las tres primeras propuestas fueron enteramente elaboradas por docentes de Matemática y Física de escuelas secundarias. En ellas se propone una introducción al tema a partir de algunas actividades iniciales y luego una serie de actividades que involucran la toma de datos experimentales y el modelado del movimiento de algún elemento. Las últimas tres propuestas son en realidad esquemas orientativos para diseñar secuencias didácticas, con las que se completa el abanico de funciones y modelos presentados en las propuestas iniciales.

3.1 Tecnologías para modelar y analizar el movimiento

En los últimos años han surgido muchas tecnologías diseñadas para abordar distintos contenidos educativos. Una gran diversidad de programas y aplicaciones de celular permiten la recopilación de datos y su análisis, así como el estudio de funciones matemáticas.

Una propuesta que contemple el trabajo con datos experimentales debe ser cuidadosamente diseñada, y es altamente recomendable que el docente realice la actividad para vivenciar la experiencia que luego propondrá a sus alumnos. Esto le permitirá prever las dificultades que puedan surgirle a los alumnos al momento de desarrollar la actividad. Por ejemplo, procesar un video con el programa Tracker requiere que la filmación sea *buena*, esto es, que cumpla ciertos requisitos que luego permitan su procesamiento. Si se quiere obtener un video del movimiento de una hamaca para luego procesarlo con este programa, es importante respetar las siguientes pautas al momento de filmar.

- La filmación debe hacerse desde el lateral, de forma que el movimiento hacia adelante y hacia atrás se observe sobre un plano frente al alumno que está filmando.
- Se debe tomar una medida de referencia. Por ejemplo, colocar sobre una parte del suelo que sea bien plana y esté cerca de la hamaca, una soga de color (para que resulte bien visible) bien extendida y siguiendo la dirección del movimiento de la hamaca, y tomar la medida de esta soga. Este dato es necesario para luego calibrar el video en el programa Tracker.
- La cámara debe abarcar la hamaca completa y debe estar bien quieta durante el proceso de filmación.
- El movimiento debe iniciarse llevando la hamaca hasta una posición inicial y soltándola, sin empujarla (la cuerda que une la hamaca con el eje debe estar siempre tensa)
- El alumno que se hamaca no debe moverse, solo dejarse llevar por el movimiento.
- El programa Tracker detecta el movimiento a partir del color del objeto por lo que quien se hamaca debe tener ropa de un color que contraste con lo que será el fondo de la grabación. Una opción muy adecuada es pegar en la hamaca algún objeto con un color llamativo y luego usar ese elemento para hacer el seguimiento del movimiento con el programa.

Programa Tracker

Este programa es libre y puede descargarse desde su página web *https://physlets.org/tracker/*. El programa está en inglés, pero esto no dificulta su utilización, ya que es posible encontrar tutoriales en español. Describimos a continuación la síntesis de pasos a seguir para trabajar con este programa.

1. Abrir el video (primera opción a la izquierda en el margen superior)
2. Seleccionar cuadro inicial, cuadro final y longitud del paso con el que avanzará el video. Esto se puede hacer marcando sobre la quinta opción empezando desde la izquierda en el margen superior (el ícono es de un trozo de negativo) o bien sobre la barra que aparece en el margen inferior, moviendo las flechas negras al cuadro inicial y al cuadro final que se deseas analizar. El paso se puede elegir marcando con el mouse sobre el número que aparece a la derecha de esta barra. Por defecto, el paso es 1, pero si el video es muy largo conviene agrandarlo.

3. Calibrar: indicar sobre el video una medida de referencia. Esto se hace marcando sobre el ícono que tiene un 10 y un segmento (margen superior) y eligiendo la opción *vara de calibración*. Luego apretar la tecla de *mayúsculas* y marcar con el mouse cada extremo del segmento que se usará como referencia. Una vez hecho aparecerá un valor sobre este segmento que debemos cambiar con el valor de referencia del segmento elegido.

4. Agregar ejes cartesianos marcando sobre el ícono en el que se muestran. Podemos mover el origen o rotar los ejes con el mouse.

5. Crear una masa puntual (ícono crear, opción masa puntual). Este es el paso en el que indicamos en la imagen inicial del video el objeto al que vamos a estudiarle el movimiento. Para esto, una vez elegida la opción *masa puntual* debemos marcarlo luego de apretar la tecla de *mayúsculas*.

6. Luego del paso anterior se abre una ventana con el nombre *masa A*. Al marcar sobre este nombre con el mouse se abre un conjunto de opciones, elegir *trayectoria automática*. Con esto se abre una nueva ventana.

7. Apretar *mayúsculas + control* y marcar con el mouse sobre el objeto seleccionado como *masa A*. Así indicamos el objeto al que se le rastreará el movimiento en el video. Para que esto ocurra, debemos marcar la opción "search".

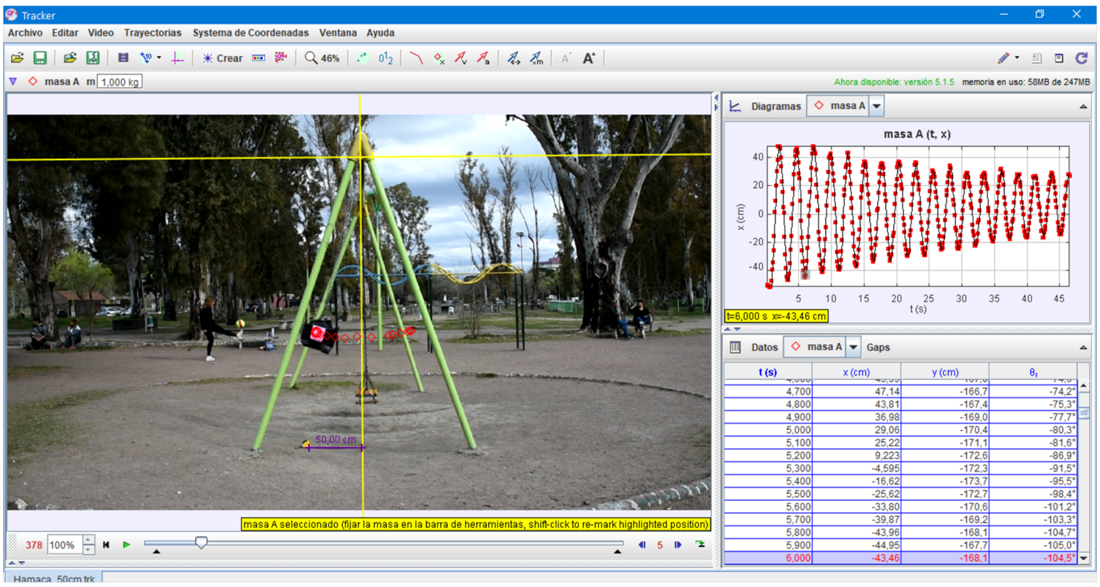


Figura 11. Captura de pantalla del programa Tracker. A la izquierda se observa el video, y a la derecha la gráfica de x en función de t y la tabla de datos que recupera el programa.

En la Figura 11 vemos una captura de pantalla del programa. En la ventana superior derecha se presenta la gráfica de la trayectoria, que por defecto será la posición en el eje x en función del tiempo. Podemos cambiar lo que se representa en cada eje simplemente marcando sobre su etiqueta y eligiendo una de las opciones que se despliegan.

En la ventana inferior derecha veremos los datos de tiempo, posición horizontal (x), posición vertical (y) y el ángulo que forma la cuerda con el eje vertical. Podemos agregar otras variables, marcando sobre las columnas y eligiendo alguna de las opciones que se nos presenta.

En la ventana de la izquierda se visualiza el video que se va a estudiar. Si marcamos el botón derecho del mouse estando sobre el gráfico veremos varias opciones, entre ellas la opción de *análisis*. Al seleccionar esta opción veremos el gráfico en una nueva ventana y la opción de ajuste nos permite hacer una ajuste lineal, cuadrático o sinusoidal entre otros. Esto es, nos da la fórmula de la función lineal, cuadrática o sinusoidal que mejor se aproxima a los datos.

Podemos grabar las imágenes de las pantallas (ya sea la pantalla inicial o la pantalla de análisis) como archivos pdf indicando la opción *imprimir* y allí seleccionar *imprimir como pdf*. Los datos también se pueden copiar y pegar en una hoja de cálculo para trabajar con ellos en otro programa.

El programa Tracker no tiene capacidad de trabajar con videos muy "pesados", por lo que si la grabación es muy extensa convendrá dividirla en distintos segmentos con alguna herramienta que permita cortar videos o reducir el tamaño de los mismos.

Aplicaciones para celulares

Existen varias aplicaciones que pueden resultar interesantes para recopilar datos: cronómetros, contador de pasos o pulsaciones, manipuladores de video, etc. En particular, podemos capturar breves videos y transformarlos en una secuencia de cuadros superpuestos usando Motion Shot (en español se encuentra traducida como Captura Animación). La Figura 12 ilustra una imagen obtenida con esta aplicación, en la que se capturó el lanzamiento de una pelota a un aro de basquet. Esta aplicación, ofrecida por Sony Network Communications Inc., permite capturar un breve video, en 3 sencillos pasos: capturar una película corta> editar> guardar / compartir. El video capturado tiene un máximo de 8 segundos, luego la aplicación procesa todos los cuadros y lo transforma en una única imagen, en la que se puede observar el movimiento de los diferentes objetos o personas.

Se encuentra disponible en el Play Store de Google:
$https://play.google.com/store/apps/details?id=com.sony.motionshot\&hl=es_AR\&gl=US$. Respecto a las especificaciones técnicas, se requiere un sistema operativo de Android 4.1 y versiones posteriores para su instalación.

Figura 12. Imagen del lanzamiento de una pelota capturada con la aplicación Motion Shot

Si bien esta aplicación es muy sencilla de utilizar es importante mencionar algunas aclaraciones.

1. Antes de comenzar con la grabación es importante configurar la resolución de grabado para obtener una mejor calidad de imagen.

2. Se sugiere apoyar el celular en algún lugar fijo o un trípode ya que cualquier movimiento es capturado y la imagen final queda procesada en base a todos los cuadros capturados. (se sugiere grabar sobre un fondo fijo).

3. Antes de comenzar la captura del video, es importante enfocar la cámara. Esto se hace simplemente tocando la pantalla una vez; transcurrido unos segundos se podrá observar un recuadro verde en la pantalla y la siguiente leyenda: "el enfoque de la cámara está bloqueado".

4. Para comenzar la grabación se debe presionar una vez el botón rojo. En este momento podemos esperar a que transcurran los 8 segundos de grabación o frenarlo cuando se desee presionando otra vez el mismo botón.

5. Luego de que la aplicación procese el video, el usuario podrá editar y cortar el video según la conveniencia y elegir la cantidad de fotogramas utilizadas para generar la imagen y el estilo de los fotogramas.

6. Finalizada la edición, presionar el botón verde (tilde/check) para guardar la imagen en el dispositivo y a continuación se podrá compartir y exportar a otros programas, como por ejemplo GeoGebra.

Manipulación de datos y animaciones con GeoGebra

GeoGebra es una de las plataformas que más se ha difundido en los últimos años como potente herramienta para el estudio de la Geometría o las Funciones en la enseñanza de la Matemática de distintos niveles.

Las tablas de datos obtenidas con el programa Tracker, o las imágenes resultantes de Motion Shot pueden exportarse y trabajarse desde GeoGebra, como se muestra en las propuestas presentadas en la siguiente Sección.

También GeoGebra permite la creación de Recursos Educativos Abiertos (REA) que pueden ser compartidos con la comunidad de usuarios, generando un espacio de intercambio de actividades e ideas muy enriquecedor al momento de planificar una propuesta. En relación a la temática abordada en este trabajo, pueden encontrar siguiendo el link *https://www.geogebra.org/m/ecgsps88* una actividad que permite simular el lanzamiento de una pelota a un aro de basquet. El alumno debe seleccionar el ángulo y la velocidad adecuados para que la pelota entre al aro.

Figura 14. Imagen de un Recurso Educativo Abierto compartido en GeoGebra.

3.2 Secuencias didácticas

Propuesta 1: Modelado del movimiento de una bicicleta mediante una función lineal

Autores: Andrea Llull, Mirta Cayo, Silvana Compagnucci, Viviana Chávez Castro
Contenidos: Función Lineal
Año: 3°
Saberes previos: Concepto de función, ubicación de puntos en el plano, construcción de tabla de valores, proporcionalidad.

PRIMER ETAPA: *Actividades iniciales para introducir el tema.*

Observación

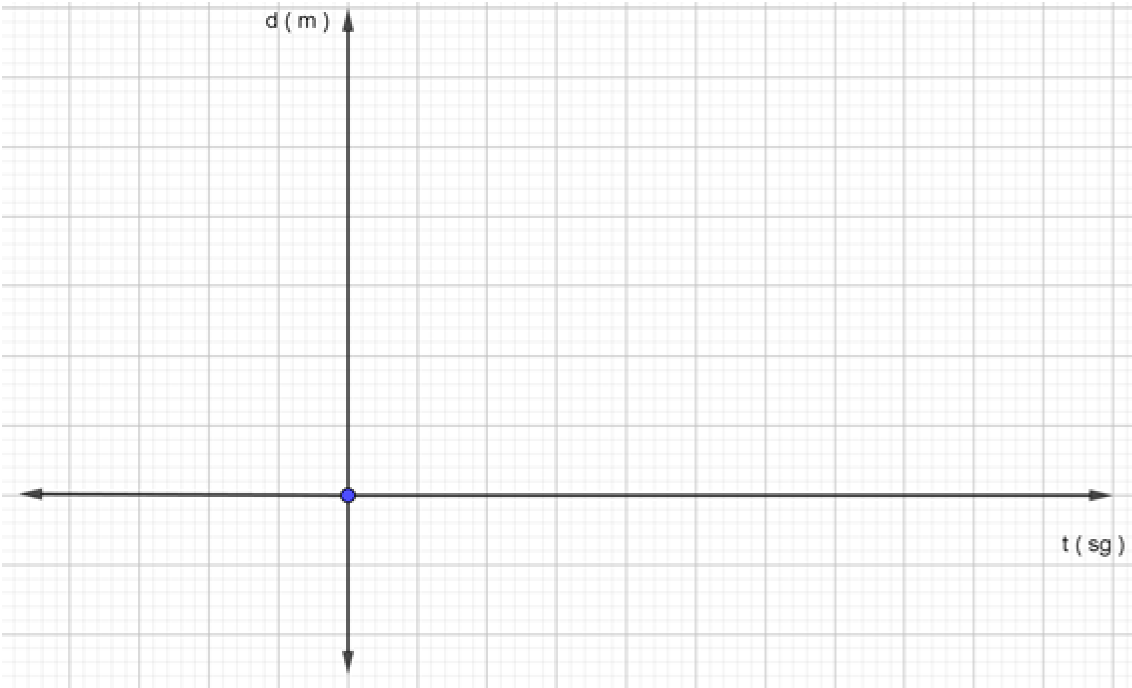
Proponemos como actividad inicial un problema que permita revisar conceptos previos así como introducir el tema que se estudiará con detalle. Este problema incluye nombres de lugares, como La Carrindanga, o Monte Hermoso, o el Club Liniers, todos lugares conocidos para alumnos de la ciudad de Bahía Blanca. Cada docente puede adaptar la propuesta al contexto geográfico en que se trabaje esta propuesta.

Juan entrena en La Carrindanga para participar del triatlón de Monte Hermoso. Su récord lo alcanzó cuando logró mantener una velocidad constante de 6 m por segundo. Saliendo del Club Liniers comenzó a tomar el tiempo, y anotó los resultados en una tabla como la que se muestra a continuación.

Actividades: Completa la tabla y respondé el siguiente cuestionario.

t (seg)	2	6		
d (m)			60	84

1. Construí un sistema de ejes coordenados adecuado para volcar los datos de la tabla.



2. Representá los pares ordenados de la tabla en el sistema de ejes cartesianos construido.

3. Para este problema, ¿tiene sentido utilizar los cuatro cuadrantes? ¿Habrá valores que no son válidos para t?

4. ¿Esta relación entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido cumple las condiciones para ser una función?

5. ¿Cómo caracterizarías a esta función? ¿Cuál es la fórmula asociada?

6. ¿Tiene el formato de $y = ax + b$? ¿Es una función lineal?

7. ¿Cuál es su dominio y su imagen?

8. ¿Es creciente o decreciente? ¿Por qué?

SEGUNDA ETAPA: Trabajo en computadora.

Se trabajará en grupos de 4 integrantes con el programa Tracker. Para comenzar deberán grabar un video de uno de ellos andando en bicicleta, teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- Elegir un espacio plano donde la bicicleta pueda desplazarse linealmente y a velocidad constante.

- Colocar una marca bien visible en la cabeza (pañuelo de color intenso).

- Establecer una longitud de referencia que será utilizada como unidad de medida por el programa.

Cada video será cargado al programa Tracker y se decidirá con el docente la ubicación de los ejes cartesianos y las unidades de medida que se utilizarán.

Del análisis de la trayectoria que realiza el programa se obtendrá una tabla de valores que incluya al tiempo, a la posición horizontal (Eje X) y vertical (Eje Y), a la velocidad y a la aceleración.

Los gráficos obtenidos con el programa muestran la relación entre:

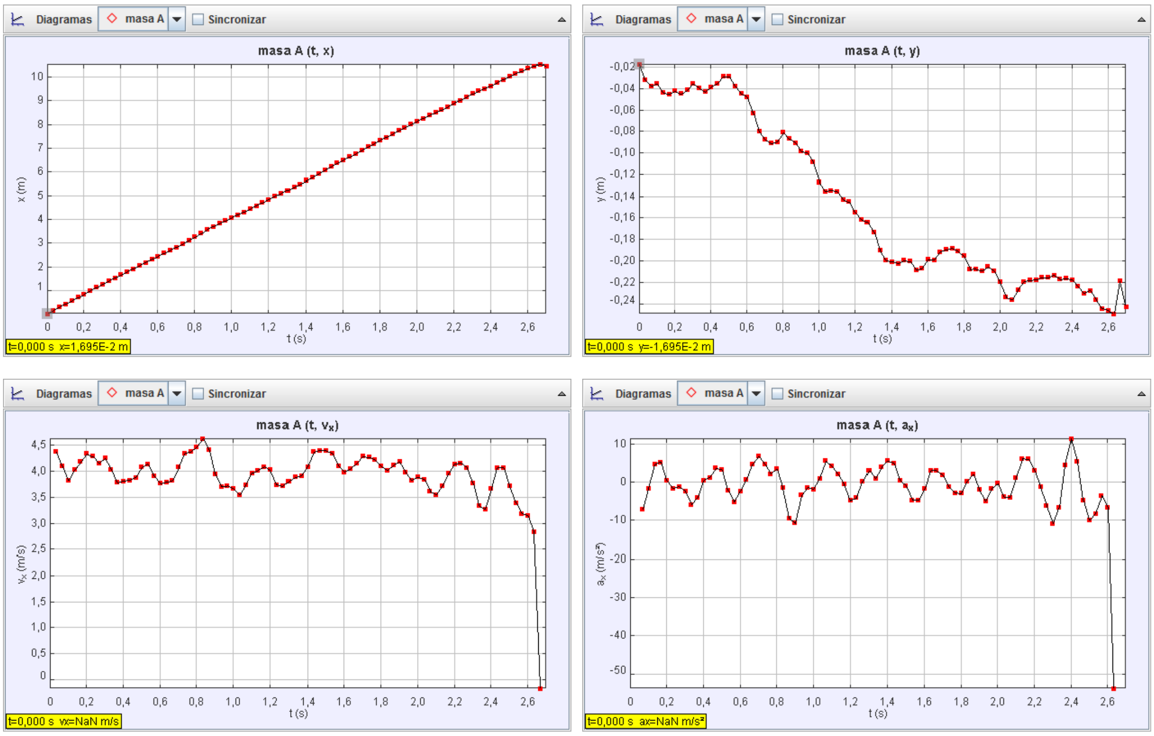
– Posición horizontal y tiempo.

– Posición vertical y tiempo.

– Velocidad horizontal y tiempo.

– Aceleración horizontal y tiempo.

Los gráficos obtenidos son los siguientes:



Actividades:

(a) ¿Cuál de los gráficos anteriores reconocen como el que representa a una función lineal?

(b) Lleven a GeoGebra los valores de la tabla que acompaña al gráfico elegido en el punto 1 para corroborar sus hipótesis.

(c) Determinen si la función lineal es creciente o decreciente. ¿Cuál es el signo de la pendiente?

(d) Indiquen el valor de la ordenada al origen.

(e) ¿Cómo se debería modificar esta experiencia para que el gráfico corte al eje de abscisas en $t = 0,4$?

(f) Filmen otras situaciones cotidianas en las que piensen que se puede modelizar mediante una función lineal y verifiquen utilizando el programa Tracker.

Propuesta 2: Modelado del movimiento de una pelota mediante la función cuadrática

Autores: Avio, Mabel; Baleani Marcela, Gonzalez, María Antonieta.
Contenidos: Función Cuadrática
Año: 4°
Saberes previos: Concepto de función (variables, dominio, imagen, intervalos de crecimiento y decrecimiento, raíces, máximos y/o mínimos, conjunto de positividad y negatividad, lectura de gráficos), función lineal.

PRIMER ETAPA: Actividades iniciales para introducir el tema.

Actividad 1.

Una señora hace cuadros a medida de forma cuadrada y luego los vende. El precio de venta es de \$200 por cada 100 cm^2.

(a) Completar la siguiente tabla de acuerdo a la información dada:

LADO (cm)	ÁREA	PRECIO DE VENTA
10		
15		
20		
25		
30		

(b) Reflejar los valores de la tabla en tres gráficos donde se relacione:

- la medida del lado y su área.
- la medida del lado y el precio de venta.
- el área y el precio de venta.

(Si no encontrás la forma de unir los puntos en el gráfico, podés agregar más valores a la tabla.)

(c) Encontrar una fórmula para las tres relaciones anteriores, las llamaremos f,g y h respectivamente.

(d) Comprobar con algún software los gráficos que obtuvieron en el inciso anterior.

(e) ¿Existen diferencias entre sus gráficos y los del programa? Justificar.

(f) A partir de lo analizado anteriormente completar:

- El dominio de la función f del programa es .... y el del programa ....
- La imagen de la función f del problema es .... y la del programa ....
- El dominio de la función g del programa es .... y el del programa ....
- La imagen de la función g del problema es .... y la del programa ....
- El dominio de la función h del programa es .... y el del programa ....
- La imagen de la función h del problema es .... y la del programa ....

Actividad 2.

Si el/la cliente/a desea agregarle al cuadro un maro hecho con una varilla, el precio se modifica. El costo de la varilla es de $300 cada 10 cm.

(a) ¿Cómo se modificó el costo del cuadro ya finalizado?

(b) Obtengan una nueva relación entre el costo del cuadro dependiendo del lado del mismo y que incluya el costo del marco.

(c) ¿Pueden graficar esta situación a partir de una tabla?

Actividad 3.

Por último el cuadro se entrega envuelto con un papel y un moño cuyo costo es fijo y vale $80.

(a) Escribir la ecuación de la función que representa el costo total del cuadro (incluyendo marco y envoltorio).

(b) Graficar la función anterior.

SEGUNDA ETAPA: Trabajo en computadora.

Vamos a trabajar con el siguiente modelo que consiste en arrojar una pelota entre dos personas.

Les compartiremos a los/as alumnos/as una foto que refleja la trayectoria de una pelota al ser arrojada entre dos personas. Esta foto la capturamos usando la app Motion Shot.

En sus celulares o netbooks los/as alumnos/as deberán tener descargado el programa GeoGebra y les pediremos que peguen esta foto, de tal manera que el semieje positivo de las X coincida con la cinta métrica (proyección de la trayectoria de la pelota en el suelo) y el origen de coordenadas esté al inicio de la cinta.

Les diremos que la trayectoria que describe la pelota es una parábola de ecuación

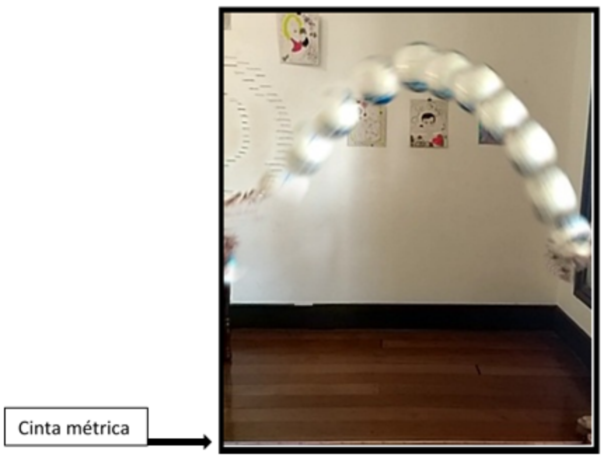
$$y(x) = -\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2(\theta)}x^2 + \operatorname{tg}(\theta)\,x + y_0$$

donde g: gravedad; v_0: velocidad inicial: α ángulo inicial e y_o altura inicial.

A su vez, cada punto en esa trayectoria depende del tiempo. Es decir, para cada instante t la posición en que se encuentra la pelota está dada por el par $P(t) = (x(t), y(t))$, donde

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\theta)\,t, \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}g\,t^2 + v_0\operatorname{sen}(\theta)\,t + y_0. \end{cases}$$

Les propondremos construir una función cuadrática que modelice la trayectoria que se aprecia en la fotografía.



Sabemos que $g = 9{,}8m/seg^2$, debemos determinar v_0, y_0 y el ángulo α de la fórmula.

(a) ¿Qué significado tiene en el problema el valor y_0? ¿Cómo lo obtienen? Marcarlo en la foto.

(b) ¿Cómo miden el ángulo α? ¿Cuál es su valor aproximado? ¿Dónde lo ibicarías en la foto?

(c) Observando la fórmula dada, ¿Cómo pueden calcular el valor v_0?

(d) Completen la fórmula obtenida sustituyendo con los g, v_0, α e y_0 hallados:

$$y(x) = -\frac{.......}{2.......^2 \cos(.......)}x^2 + \operatorname{tg}(.......)\,x + ...$$

(e) ¿Cómo nos damos cuenta que la gráfica de esta función es la correcta?

(f) ¿Cuál es el dominio y la imagen de la función dada en esta situación?

(g) ¿Existe un punto máximo y/o mínimo? ¿Cuál es?

(h) ¿Qué significado tiene en el problema el valor máximo de la función?

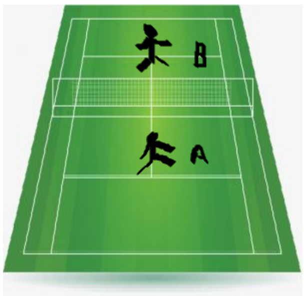
(i) La función hallada tiene dos ceros (o raíces). ¿Tienen sentido dentro del contexto del problema planteado? Calculen y justifiquen sus respuestas.

Propuesta 3: Modelado del movimiento de una pelota mediante la función cuadrática

Autores: Bustos Torres, Romina.
Contenidos: Función Cuadrática
Año: 4°
Saberes previos: Concepto de función (variables, dominio, imagen, intervalos de crecimiento y decrecimiento, raíces, máximos y/o mínimos, conjunto de positividad y negatividad, lectura de gráficos), función lineal.

PRIMER ETAPA: Actividades iniciales para introducir el tema.

1. Observá el dibujo de dos jugadores en una cancha de Voley y respondé el cuestionario.



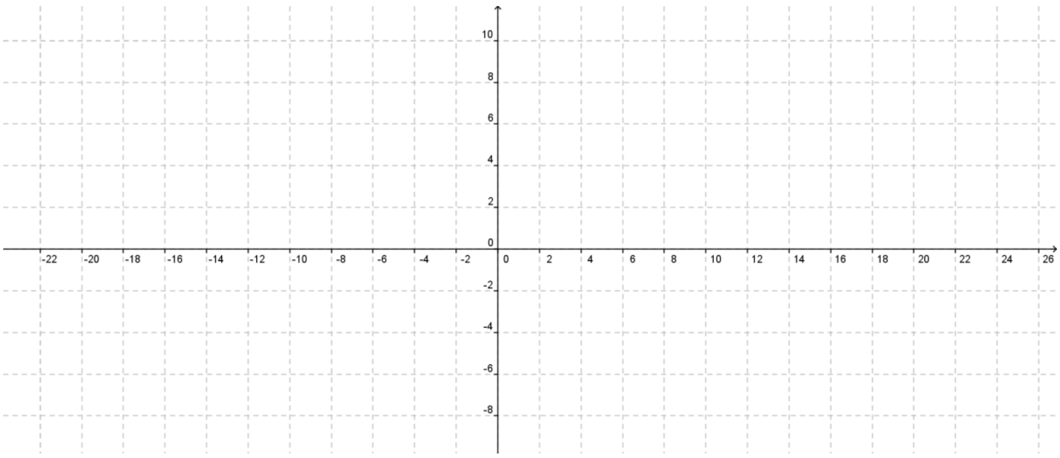
(a) ¿Qué trayectoria recorre la pelota desde el jugador A hacia el jugador B? Graficarla en el dibujo.

(b) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

(c) ¿Cuál es la altura mínima?

(d) Desde el punto máximo, ¿cómo son las distancias de los jugadores respecto de la red?

2. Ubica el esquema realizado en el dibujo anterior en el siguiente sistema de coordenadas y responde:



¿Qué variables representarías en el eje de abscisas y en el eje de ordenadas?

3. Realizar una puesta en común con los compañeros comparando los distintos gráficos realizados.

De los gráficos que surgieron en el inciso anterior, y teniendo en cuenta las variables, ¿cuál consideras como más representativo?

4. La trayectoria dibujada es una parábola, cuya forma analítica es $f(x) = a.x^2 + b.x + c$

Usando la calculadora, completá la siguiente tabla de valores. Luego representa los valores obtenidos gráficamente en un sistema de ejes cartesianos.

x	-6	-4	-2	0	1	3	5
$f(x) = x^2$							

SEGUNDA ETAPA: Trabajo en computadora.

1. En grupos utilizar la aplicación *"Capture Animation"* y con una pelota realizar un pase de voley.

   Observación: realizar el pase y tantas tomas como sea posible, hasta obtener una imagen lo más precisa a la descripción de una parábola.

2. Luego insertar la imagen en el programa GeoGebra.

   En este punto se deberá:

   a) Determinar la posición de los ejes cartesianos.

   b) Marcar los puntos del recorrido de la pelota.

3. Utilizando la expresión polinómica, seleccionar tres puntos y formular la construir la ecuación cuadrática.

   a) ¿Qué criterios tomarías en cuenta para la selección de los puntos?

   b) ¿Por que se deben considerar 3 puntos? ¿Se podría utilizar más o menos puntos?

4. Graficar la función y luego compararla con el recorrido realizado por la pelota.

Propuesta 4: Función lineal a trozos para modelar niños corriendo

En conjunto con Educación Física, se puede modelar el trote de alumnos mediante funciones lineales y lineales a trozos. Ya sea mediante la filmación de un video que luego se trabaje con el programa Tracker, o simplemente con la medición de los tiempos que tarda un alumno en recorrer cierto tramo recto previamente definido (por ejemplo, una cuadra) se puede modelar el desplazamiento del alumno usando la fórmula (2.2) vista en la Sección 2.1

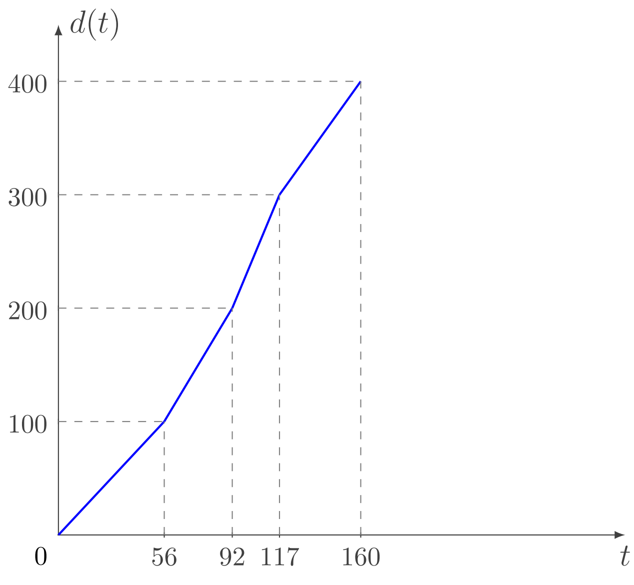
$$d(t) = d_0 + v_0.t$$

Proponemos a continuación un esquema orientativo para planificar una actividad que involucre la toma de tiempos como datos experimentales.

Celular en mano, cada alumno corre una vuelta a la manzana. Cada cuadra debe recorrerse a distinta velocidad. Por ejemplo, se puede iniciar la primera cuadra con un trote lento, luego la segunda aumentar un poco la velocidad, la tercera cuadra más rápido y la cuarta volver a una velocidad suave. El cronómetro se inicia al momento de iniciar el recorrido y en cada esquina el alumno toma una captura de pantalla del tiempo que marca el cronómetro. Con los valores registrados, cada alumno completa la tabla de datos:

cuadra	1	2	3	4
t (seg)				

Suponiendo que la posición inicial es $d_0 = d(0) = 0$, y que cada cuadra mide 100 m (recordemos: todo modelo requiere hacer algún supuesto) podemos volcar estos datos en un gráfico en el que se reflejen los metros recorridos en función del tiempo. El siguiente gráfico incluye valores de tiempo a modo ilustrativo, estamos suponiendo aquí que el registro de un alumno fue $t_1 = 56$ s, $t_2 = 92$ s, $t_3 = 117$ s, $t_4 = 160$ s.



Tenemos así una función lineal a trozos. La pendiente de cada tramo es la velocidad media empleada en recorrer cada cuadra, y puede calcularse como el cociente:

$$\text{velocidad media} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{variación de tiempo}}$$

Con estos datos puede proponerse un cuestionario para trabajar este tipo de funciones.

Propuesta 5: Función cuadrática en el modelado del desplazamiento sobre un tobogán

En esta propuesta se plantea el estudio de la función cuadrática en el modelado del desplazamiento de un objeto sobre un tobogán. En primer lugar, se propone deducir el coeficiente de rozamiento entre la tabla del tobogán y el objeto que se desplaza sobre ella a partir de datos experimentales. Luego se propone comparar el modelo resultante con los datos registrados con una cámara de video. Presentamos la propuesta de forma esquemática, dejando a cada docente que contextualice, complete y adapte las actividades a la situación en la que desee aplicarla.

La clase se divide en grupos. Cada grupo deberá proveerse de un cuaderno de notas, un teléfono celular con cronómetro y cámara de video, una cinta métrica, una caja de zapatos con objetos de peso dentro.

Actividad 1: En la plaza del barrio tomar las siguientes mediciones (ver Figura 1):

- el ángulo de inclinación que forma la tabla del tobogán con el eje horizontal del piso: α,
- la longitud de la base del tobogán: x_{max},
- la altura máxima y_{max} y mínima y_{min} del tobogán,
- el tiempo que tarda la caja de zapatos en deslizarse por el tobogán.

Filmar la caída de la caja por el tobogán. La filmación debe ser bien pautada por el docente para que el material resultante pueda luego ser utilizado en el programa Tracker.

Tomar nota de los obstáculos que puedan haber surgido en las mediciones y cómo los resolvieron.

Actividad 2: Las ecuaciones que describen el movimiento horizontal x y vertical y del deslizamiento por un tobogán son

$$\begin{cases} x(t) = g\cos(\alpha)\,[\operatorname{sen}(\alpha) - f\cos(\alpha)]\,t^2, \\ y(t) = y_{max} - g\operatorname{sen}(\alpha)\,[\operatorname{sen}(\alpha) - f\cos(\alpha)]\,t^2. \end{cases}$$

donde g es la constante de gravedad y vale $9{,}8m/s^2$.

Con los datos recopilados, reemplazar en la fórmula anterior para encontrar la función que describe el movimiento. El valor del coeficiente de rozamiento f es desconocido, por lo que inicialmente se deja expresado como una incógnita.

Con el dato del tiempo que tarda la caja en deslizarse, hallar el valor del coeficiente f (el procedimiento para esto se ilustró en el Ejemplo 2).

Actividad 3: Con el programa Tracker, generar una tabla de valores de la posición de la caja en función del tiempo.

Actividad 4: Importar la tabla de datos del video con el programa GeoGebra y representar en un gráfico cartesiano los datos de la posición horizontal en función del tiempo (esto es, $x(t)$) y en otro gráfico representar la posición vertical en función del tiempo (esto es, $y(t)$). Superponer a cada uno de estos gráficos los gráficos de las funciones obtenidas en la Actividad 2.

Comparar los gráficos generados por los datos experimentales y los obtenidos con el modelo teórico, y elaborar conclusiones.

Propuesta 6: Funciones trigonométricas en la descripción del movimiento de una hamaca

Proponemos introducir el estudio de las funciones trigonométricas a partir del análisis de la construcción de su representación gráfica, contrastando las intuitivas de los alumnos. Suponemos aquí que los alumnos ya conocen las razones trigonométricas y saben calcular valores de las funciones trigonométricas con calculadora.

Las primeras actividades podrían, por ejemplo, ser:

1. Usando la calculadora, completá la siguiente tabla de valores de la función seno. Luego representá los valores encontrados (pares ordenados) en un eje cartesiano.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
$f(x) = sen(x)$									

2. ¿Cómo creés que será la gráfica de $f(x) = sen(x)$ para los valores intermedios que no fueron calculados en la tabla? Completá sobre la representación anterior lo que creés que sería el gráfico de esta función en el intervalo $[0, 4\pi]$

Dado que en el gráfico inicial los alumnos ubican puntos aislados, es probable que muchos de ellos completen el gráfico de la función seno uniendo estos puntos con tramos de rectas. Proponemos entonces contrastar este posible error con actividades que hagan reflexionar sobre lo adecuado de la predicción que hicieron. Por ejemplo, con las siguientes preguntas.

3. ¿De qué maneras podés verificar si tu conjetura es correcta?

4. Una manera de verificar si efectivamente el gráfico propuesto corresponde a la función es evaluarla en puntos intermedios. Para esto, extendé la tabla del ejercicio 1 agregando los siguientes valores de x:

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{7\pi}{6}, \quad \frac{4\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{3}, \quad \frac{11\pi}{6}.$$

   Luego representá los pares obtenidos sobre el gráfico que ya tenés armado. ¿Fue correcta tu predicción?

5. ¿Cómo crees que será el gráfico en el intervalo $(2\pi, 4\pi)$? Representalo en el gráfico.

Una vez construida una aproximación adecuada de esta función en el intervalo $[0, 4\pi]$ se puede proponer un cuestionario que apunte al estudio de su dominio, imagen, periodicidad u otras características.

Para el trabajo de campo pueden usarse distintas aplicaciones. Por ejemplo, si se elije usar el programa Tracker, se propone la formación de grupos, cada uno de los cuales genere un video de alguno de sus integrantes hamacándose. Es importante que el docente establezca, previo a la filmación, las condiciones necesarias para obtener buenas mediciones. Para esto, siempre es recomendable que el docente viva la experiencia mientras la diseña, de forma de prever los posibles inconvenientes que surjan de realizar la tarea. En el inicio de esta misma Sección se presenta una lista de indicaciones a tener en cuenta para conseguir una buena filmación.

Se podría, por ejemplo, pedir que cada grupo tenga un desplazamiento inicial diferente para luego contrastar los distintos resultados entre grupos. La filmación debería hacerse hasta que la hamaca se frene, aunque si esto requiere mucho tiempo, puede cortarse antes.

A partir del programa Tracker se pueden obtener las tablas de valores y gráficas de distintas funciones, como:

- $x(t)$: posición horizontal en función del tiempo,
- $y(t)$: posición vertical en función del tiempo,

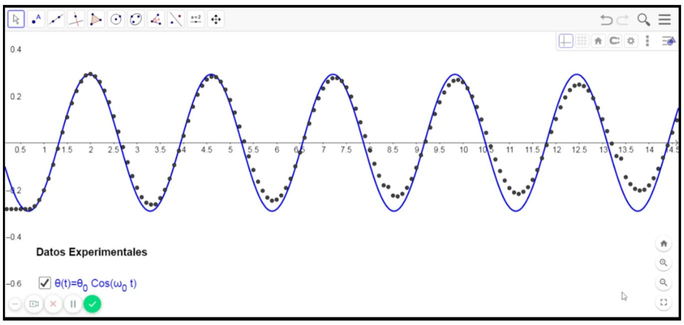
- $\theta(t)$: ángulo que forma la cuerda de la hamaca respecto de un eje vertical en función del tiempo,
- $y(x)$: posición vertical en función de la posición horizontal.

Puede proponerse su estudio a partir de la observación de las gráficas acompañando con una consigna del tipo:

A partir de los datos obtenidos para $x(t)$, completá el siguiente párrafo.

> La función $x(t)$ que indica .... en función de .... tiene dominio $Dom(x) =$ .... e imagen $Im(x) =$ .... Su valor máximo es $x_{max} =$ .... y se alcanza en el instante $t_1 =$ .... y su valor mínimo es $x_{min} =$ .... y se alcanza en el instante $t_2 =$ ....

Una actividad que puede ser interesante es visualizar el contraste entre el modelo teórico y los datos recopilados. Para esto, se puede trabajar con la función trigonométrica que modela el movimiento de una hamaca, presentada en la ecuación (2.15). A partir de los datos recopilados para la función $\theta(t)$ se pueden deducir las constantes θ_0 y ω_0 usando las fórmulas presentadas en la sección que describe este movimiento. Luego, la tabla de valores experimentales obtenida para $\theta(t)$ puede exportarse a GeoGebra y graficar, sobre un mismo sistema de ejes, estos datos y la función teórica. Se obtendría un gráfico similar al siguiente:



En esta figura, los puntos representan los datos experimentales y la línea representa el gráfico de la función trigonométrica que modela el movimiento cuando no se considera rozamiento. A partir de esta situación, puede proponerse un debate sobre qué puede estar fallando, si el modelo o los datos recopilados, por qué se produce esta diferencia en el gráfico, y cómo puede mejorarse el modelo.

Capítulo 4

Evaluación

La forma de evaluar es un elemento clave dentro del modelo que guía este estudio pues es deseable que, en esta instancia de aprendizaje, confluyan los propósitos (por qué o para qué) y los objetos (qué) de la evaluación. Los métodos de evaluación pueden desarrollarse a través de diferentes instrumentos como son: las rúbricas, los exámenes, los cuestionarios, los debates, las listas de cotejo, los portafolios, las pruebas de desempeño, entre otras [1]. En el siguiente cuadro se presentan los métodos, y sus implicaciones:

Método de evaluación	Descripción	Objetivos del aprendizaje para evaluar
Selección de respuesta o escritura corta	El alumno selecciona una respuesta de una lista o escribe una respuesta corta.	-Desarrollo de patrones de razonamiento. - Procesos de síntesis.
Respuesta escrita extendida	A partir de una pregunta o una tarea, el alumno debe construir una respuesta escrita extensa. En este método se analiza la respuesta aplicando alguno de los dos criterios establecidos a priori: - Otorga puntos si cierta información, considerada indispensable para explicar el proceso o dar solución al problema, está presente. - Utiliza una rúbrica que defina, a priori, aquellos elementos que debería contener la respuesta y compara la obtenida por cada alumno con respecto a esa rúbrica.	- Desarrollo del lenguaje escrito en la resolución de problemas complejos. - Relaciones de los distintos elementos del conocimiento.
Evaluación del desempeño	Requiere de la observación y la emisión, por parte del docente, de un juicio respecto a la calidad con la que fueron ejecutadas ciertas tareas complejas. Para llevar a cabo una evaluación del desempeño se requieren dos etapas: - en la primera, se establece una tarea o serie de actividades que sirvan para evaluar el desempeño, -y en la segunda, se selecciona el instrumento para registrar los juicios. El instrumento para evaluar (conocido como guías de puntuación) puede ser de dos tipos: lista de cotejo y rúbricas.	- Resolución de problemas, con lo cual se pueden hacer inferencias sobre las formas de razonamiento. - Habilidades y estrategias puestas en juego al momento de realizar las actividades.
Oral	Reside en la obtención de información sobre el aprendizaje de los alumnos mediante la comunicación interpersonal (por ejemplo: entrevista, examen oral, debate, cuestionamiento oral, exposición de un tema). Este método de evaluación puede utilizarse tanto bajo un enfoque informal como formal con el objetivo de brindar retroalimentación descriptiva a los alumnos. Las evaluaciones orales pueden ser de dos tipos: a. Simples, cortas. Para obtener información puntual durante las clases, por ejemplo que los alumnos expresen el resultado de cierto ejercicio. b. Complejas y largas. Además de evaluar el resultado, se evalúa el proceso del razonamiento en la elaboración de respuestas más complejas.	- Habilidades comunicativas orales. -Argumentación sobre "la lógica" que utilizaron los alumnos al momento de resolver un problema, permitiendo evaluar las distintas formas de razonamiento, del más simple al complejo.

En esta experiencia compartimos el uso de las nuevas tecnologías en el proceso de evaluación por medio de una plataforma gratuita llamada Kahoot!. Esta herramienta permite la creación de cuestionarios tanto para aprender o reforzar el aprendizaje como para la evaluación (disponible en app o versión web). Existen cinco características que convierten esta aplicación en un instrumento ideal para trabajar en el aula de clases:

1. Adaptable: en pocos minutos puedes crear actividades sobre cualquier tema de interés.
2. Simple y rápida: funciona en cualquier dispositivo con internet y los participantes no necesitan inscribirse o abrir cuentas para sumarse a la actividad.
3. Diversidad de opciones: Kahoot! permite empezar conversaciones, reforzar conocimientos, introducir nuevas temáticas y fomentar el trabajo en equipo, entre otras cosas.
4. Motivante: a los estudiantes les encanta y es ideal para impulsar el aprendizaje social y potenciar las habilidades de todos ellos.
5. Es gratis: no necesitas pagar para convertir Kahoot! en una herramienta de trabajo en el aula de clase.

Luego, las TIC en educación ofrecen nuevos desafíos y posibilidades para la educación en general y para la evaluación en particular siguiendo con el principio tecnológico de "interactividad". Así, se pueden proponer distintos momentos dentro del proceso evaluativo como son: diagnóstico implementando con cuestionarios online con plataformas como Socrative, Kahoot!, Google Forms Quizizz, videos interactivos editados con por ejemplo EDpuzzle, portfolio electrónico, apoyada en rúbricas de evaluación disponibles para los alumnos, entre otras; he incorporar el feedback virtual como una actividad dinámica que abre nuevos campos de revisión tanto a docentes y alumnos sobre la calidad de los aportes y tareas realizadas, como señala Barbera [3] la clave es la naturaleza de la interacción puesto que involucra a profesores y alumnos de igual manera aunque desde diferentes perspectivas.

Resumiendo, es necesario idear y poner en práctica actividades de evaluación que sirvan, al mismo tiempo que para recoger información acerca del conocimiento conceptual que el alumno ha construido, para crear nuevas situaciones y oportunidades de aprendizaje. Como señalan Coicaud y Serón [4] la evaluación de los aprendizajes tiene sentido didáctico cuando se basa en la búsqueda de información acerca de los procesos cognitivos idiosincráticos que desarrolla cada alumno, con la finalidad de ayudarlos a mejorar y enriquecer sus construcciones.

Bibliograía

[1] Stiggins, R., Arter, J., Chappuis, J. & Chappuis, S. (2007). Classroom Assessment for Student Learning. Doing it Right-Using it Well. Columbus, Ohio, EE. UU.: Pearson Merrill

Prentice Hall.

[2] Barberà E (2006) Aportaciones de la tecnología a la e-Evaluación. RED. Revista de Educación a Distancia. http://www.um.es/ead/red/M6

[3] Coicaud, S. y Serón, M. (2014). Ampliando la mirada sobre la evaluación de los aprendizajes en propuestas mediadas por tecnologías. En M. Bianchi, y L. Sandoval (Eds.), Habitar la Red. Comunicación, cultura y educación en entorno tecnológicos enriquecidos.(1a ed., pp. 19-33). EDUPA.

Anexo

La gravedad

La gravedad es una fuerza que actúa sobre todos los objetos sobre la Tierra. En estas notas consideramos la constante de gravedad como

$$g = 9{,}8\,\frac{m}{s^2}.$$

Es muy importante prestar atención a las unidades de medida dadas en cada problema, o a las unidades de medida que se eligen para tomar datos experimentales pues **todas las unidades de medida que aparecen involucradas en cada una de las funciones de movimiento deben ser compatibles.**

Por ejemplo, en el lanzamiento de una pelota (Sección 2.2) la altura inicial y_0 debe estar dada en metros y el tiempo debe medirse en segundos si vamos a usar la constante de gravedad en metros sobre segundos al cuadrado.

Oscilación, frecuencia y período del movimiento periódico

En un movimiento periódico, una oscilación es el recorrido que se hace desde una posición inicial hasta volver al mismo lugar. Al concepto de oscilación se asocian dos características

símbolo	nombre	definición
ω_0	frecuencia de oscilación	número de oscilaciones por segundo
T	período	tiempo que tarda en realizarse una oscilación

y estos dos elementos se relacionan mediante la identidad

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

También en el movimiento periódico suele ser de interés la *amplitud*, que es la distancia entre el máximo y el mínimo valor que toma la función. En la Figura ... se representan sobre la gráfica de la función estos elementos.