

Milanesi, Gastón S.

EL MODELO BINOMIAL BORROSO Y LA VALORACIÓN DE OPCIONES REALES: EL CASO DE VALUACIÓN DE UN CONTRATO DE CONCESIÓN PARA LA EXPLOTACIÓN PETROLERA

Estocástica: Finanzas y Riesgo

Año 2013, vol. 3, no. 2, pp. 95-118

Milanesi, G.S. (2013). El modelo binomial borroso y la valoración de opciones reales: el caso de valuación de un contrato de concesión para la explotación petrolera. Estocástica: Finanzas y Riesgo. En RIDCA. Disponible en:

<http://repositoriodigital.uns.edu.ar/handle/123456789/5308>



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons
Atribución-NoComercial-CompartirIgual 2.5 Argentina
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/ar/>

El modelo binomial borroso y la valoración de opciones reales: el caso de valuación de un contrato de concesión para la explotación petrolera

Gastón Silverio Milanesi*

Fecha de recepción: 2 abril de 2013

Fecha de aceptación: 10 de junio de 2013

* Universidad Nacional del Sur, UNS
Departamento Ciencias de la Administración
milanesi@uns.edu.ar

RESUMEN

Se presentan los pasos a seguir para la evaluación de nuevos proyectos cuando no existen activos financieros gemelos y la información es ambigua, complementando el modelo binomial probabilístico con su versión binomial borrosa. El trabajo se estructura de la siguiente manera: (a) se reseñan los modelos de valuación de opciones reales y se clasifican en probabilísticos y borrosos; (b) se desarrolla el enfoque borroso binomial de valoración con: el método MAD (*Marketed Asset Disclaimer*), rejillas binomiales borrosas y la aversión al riesgo del agente con el índice pesimismo-optimismo; (c) el modelo se ilustra con la valuación de un contrato de concesión de explotación petrolera con opciones de expansión-abandono-continuar, donde se comparan los resultados obtenidos entre la valoración borrosa y el modelo binomial probabilístico. Se demuestra la importancia de conjugar la valuación probabilística y borrosa en situaciones de falta de información (ambigüedad) para nuevos proyectos o empresas cerradas en mercados emergentes.

Palabras claves: Opciones reales, fuzzy, binomial, ambigüedad. **JEL:** C44; G32

The Binomial Fuzzy Model and real options valuation: an oil exploitation concession contract valuation.

ABSTRACT

The steps for evaluation new projects are showed, when twin financials assets do not exist and the information is ambiguity, complementing the binomial probabilistic model with the fuzzy binomial valuation approach. The papers structures as follow: (a) it review the real option valuation models and are classified in probabilistic and fuzzy; (b) it is developed the fuzzy binomial valuation approach with: the MAD (Marketed Asset Disclaimer) method, fuzzy binomial lattices and the agent's risk aversion with the optimistic-pessimist index; (c) the model is shown with a valuation of an oil concession with expansion-abandon-continue options, comparing the results obtained with the fuzzy valuation and the probabilistic binomial model. In situations of lack of information (ambiguity) for new project o close firms in emerging markets, it is show the importance of conjugating the probabilistic and fuzzy valuation.

Key words: Real Options, fuzzy, binomial, ambiguity. **JEL:** C44; G32

1. Introducción: Valuación y las opciones reales

La valuación de decisiones de inversión mediante métodos tradicionales, como el descuento de flujos de fondos (DFF) no captura la flexibilidad estratégica total del activo objeto de la valoración. Esto se debe, principalmente a que el método supone irreversibilidad de la inversión (Dixit y Pindyck, 1994), puesto que asume una conducta pasiva de la gerencia frente a potenciales oportunidades estratégicas (por ejemplo: proyecciones suponiendo el comienzo inmediato del proyecto, su funcionamiento ininterrumpido con base en una capacidad de planta fija, sin ningún tipo de alteración hasta la finalización del horizonte de proyección especificado) (Mun, 2004). El actual ambiente de negocios se caracteriza por su importante dinamismo, incertidumbre y fuerte interacción de los agentes de mercado. Esto conduce a concluir que una importante fuente del valor correspondiente a los proyectos de inversión esta formada por la capacidad adaptativa, oportunidades y la flexibilidad estratégica en contextos turbulentos. Por lo expuesto es necesario valorar inversiones con métodos que permitan capturar beneficios de las nuevas oportunidades o reaccionar para mitigar potenciales pérdidas (por ejemplo; diferir, expandir, contraer, abandonar, o alterar el proyecto en diferentes etapas de su vida). La Teoría Financiera, por medio de la Teoría de Opciones, provee los modelos de valuación de opciones reales cuantificando el valor adicional de las oportunidades de potenciar ganancias y limitar pérdidas que eventualmente presente el proyecto. Los modelos de opciones reales tienen por fin calcular el valor expandido o estratégico (Trigeorgis, 1997), entendido como la suma del valor actual neto estático (descuento de flujo de fondos) y el valor de las “opciones reales” operativas y estratégicas de la inversión.¹ El activo subyacente se encuentra representado por el valor actual de los flujos de fondos libres del activo real.

¹ Muchas de estas opciones se manifiestan de manera natural (diferimiento, contracción, cierre temporario, abandono), otras pueden ser planeadas y construidas con el pago de un costo (expandir capacidad de la planta, construir opciones de crecimiento, opción de abandonar cuando el proyecto es secuencial, intercambio de tecnologías).

Para su aplicación los modelos de opciones reales requieren que se verifique la condición de mercados completos, eficientes y perfectos que permitan trabajar con activos financieros gemelos, carteras réplicas y argumentos de arbitraje con el fin de replicar los flujos de fondos riesgosos del proyecto; (Smith y Nau, 1995), (Wang y Halal, 2010).

Existe una amplia y difundida literatura especializada en métodos de valuación donde los tradicionales modelos de valuación en particular los modelos de opciones reales son originalmente planteados en términos probabilísticos (probabilidad). En los últimos años ha surgido una corriente de modelos de valoración de opciones que hace uso de la matemática borrosa (*fuzzy sets*). Los modelos probabilísticos definen grados de incertidumbre (Landro, 2010), a diferencia de los modelos borrosos, que se caracterizan por emplear escalas semánticas que definen niveles de ambigüedad-vaguedad en términos de posibilidades; (Fornero, 2012). Son adecuados en situaciones donde la insuficiente información transforma un panorama totalmente incierto en una situación ambigua. Algunas ventajas de los modelos de valuación de opciones borrosas residen en: (a) definir escalas semánticas de posibilidad donde se sostiene la facilidad de comprensión e interpretación en la toma de decisiones empresariales (Kinnunen, 2010); (b) permiten capturar el sesgo positivo correspondiente al potencial valor de la flexibilidad estratégica (Carlsson y Fuller, 2003); y (c) alternativos en situaciones de valuación donde no existe información de mercado que permita trabajar con activos financieros gemelos o carteras réplicas (proyectos de inversión de base tecnológica, nuevos productos o estrategias innovadoras, empresas de capital cerrado o firmas que operan en mercados emergentes).

El objetivo de este trabajo es comparar el modelo binomial de valoración de opciones (Trigeorgis, 1995) y el modelo binomial borroso aplicado a la valuación de opciones (*fuzzy binomial valuation approach*) (Liao y Ho, 2010). Adicionalmente, se expone la metodología de cálculo del valor esperado de las opciones del proyecto mediante el índice pesimismo-optimismo y el cálculo del valor puntual medio (*crisp mean value*) (Yoshida, Yasuda, Nakami y Kurano; 2006).

La estructura del trabajo es la siguiente: (a) se reseña el universo de modelos de valuación en el marco de las opciones reales, agrupando a los modelos en probabilísticos y borrosos; (b) se desarrolla el enfoque borroso binomial de valoración de opciones reales como un vehículo que brinda un marco metodológico en el tratamiento y valoración de proyectos en condiciones de am-

bigüedad. Las herramientas que integra la propuesta son: el enfoque MAD (*marketed asset disclaimer*) para estimar la volatilidad base, el uso de rejillas binomiales en contraposición a los árboles de decisión, el enfoque binomial borroso para proyectar el valor del proyecto y los flujos de fondos estocásticos, y la descripción de la conducta del agente mediante el coeficiente de pesimismo-optimismo para obtener el valor esperado de las opciones del proyecto (VEOP) valor puntual medio (*crisp mean value*); (c) finalmente se ilustra el funcionamiento del modelo adaptando el caso desarrollado por J. Smith (2005), los principales resultados, como el sesgo positivo propio de la valoración borrosa son contrastados con el resultado simétrico del tradicional modelo binomial de valoración de opciones.

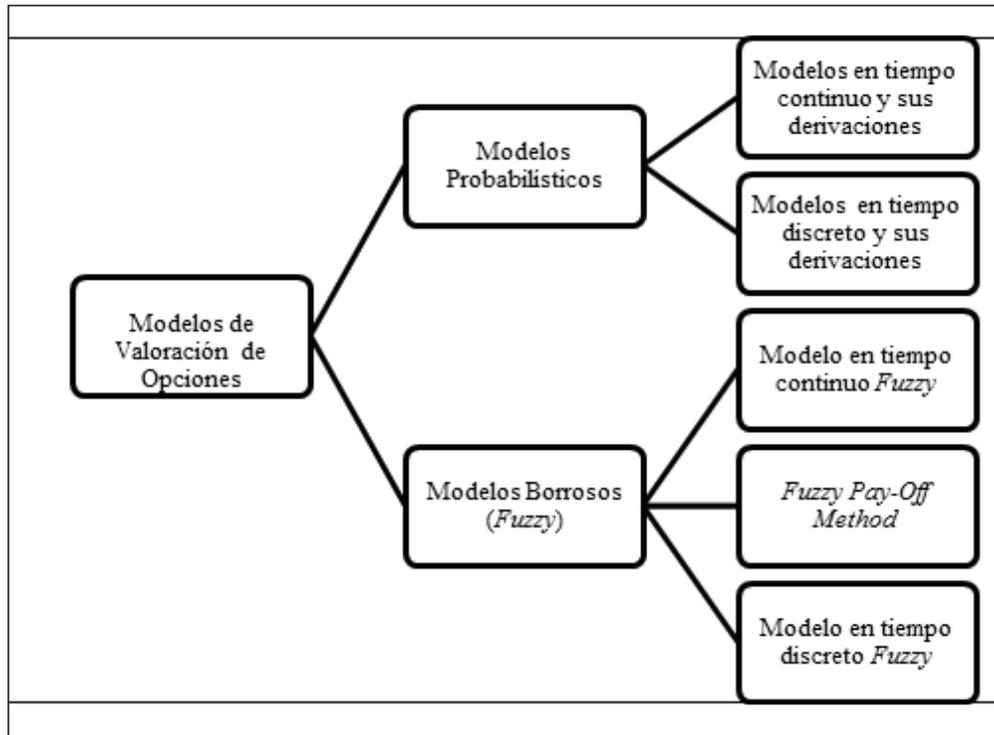
2. Reseña de los modelos probabilísticos y borrosos de Opciones Reales

A continuación se referencian los principales modelos y derivaciones de estos para valorar opciones reales. Con el objeto de trazar una línea divisoria según sea el enfoque, éstos son clasificados en probabilísticos y borrosos. El primer grupo, a su vez se divide en: (a) tiempo continuo y sus derivaciones donde se encuentran los desarrollos seminales de la Teoría de Opciones; (b) discretos donde las distintas variantes surgen mayoritariamente de las propuestas en el campo de las Opciones Reales. El segundo grupo se apoya en las nociones de conjuntos borrosos y se clasifican en: (i) modelos continuos borrosos; (ii) el método de flujos de fondos borrosos (*fuzzy pay-off method*); (iii) modelos binomiales borrosos. En la ilustración de la página siguiente, se muestra la clasificación de modelos probabilísticos y borrosos para valorar opciones;

2.1 Modelos probabilísticos:

a) *Modelos en tiempo continuo y sus derivaciones*: La teoría de opciones reales nace con el modelo de valoración para opciones europeas conocido como Black-Scholes y el posterior aporte de Merton (Black, y Scholes, 1973); (Merton, 1973). Varias han sido las transformaciones y adecuaciones desde su formulación original, éstas han avanzado introduciendo modificaciones al proceso estocástico sobre el subyacente; incorporando cantidad de momentos estocásticos de orden superior, definiendo complejidad, características y estructura de la opción (exóticas-simples), introduciendo imperfecciones y efectos del mercado (apalancamientos del subyacente),

Figura 1. Modelos de valoración de opciones probabilístico y borrosos (elaboración propia).



entre otras; (Dixit y Pindyck, 1994); (Luherman, 1998); (Copeland y Tufano, 2004); (Baliero Filho y Rosenfeld, 2004); (Hull, 2006); (León, Mencia y Sentaria, 2007); (Haug Gaarder, 2007); (Wilmott, 2009). Los modelos en tiempo continuo mayoritariamente reconocen su campo de aplicación en la valoración de opciones financieras. No obstante, existen métodos que derivan en sencillos algoritmos utilizando modelos en tiempo continuo para valorar opciones reales. Éstos respetan los supuestos de cartera réplica del modelo Black-Merton-Scholes (BMS) empleando las técnicas de escenarios y simulaciones con el objeto de inferir la distribución de probabilidad de los posibles valores del subyacente. El valor de la flexibilidad estratégica surge del promedio de valores positivos asignando valor cero a los negativos; (Datar y Mathews, 2004); (Datar, Matews y Johnson, 2007).

b) Modelos en tiempo discretos y sus derivaciones: La valuación de la flexibilidad estratégica en proyectos de inversión, empresas en marcha y activos reales ha quedado reservada preferentemente para los modelos formulados en tiempo discreto. Son utilizados preferentemente en el desarrollo de modelos de decisión y en la mayoría de las aplicaciones de opciones reales (Tri-

georgis, 1995 y 1997); (Luherman, 1998); (Amram y Kulatilaka, 1998), (Mun, 2004), reconociendo sus raíces en el clásico modelo binomial; (Cox, Ross y Rubinstein, 1979). Producto de su versatilidad se adapta a diferentes modalidades y adecuaciones según: (a) se trabaje con rejillas² o árboles (Brandao, Dyer y Hahn, 2005); (Smith, 2005); (b) sea binomial o trinomial; (Rendleman y Bartter, 1979); (Jarrow y Rudd, 1982); (Boyle, 1988), (Rubinstein, 2000); (Jabbour, Kramin y Young, 2001); (c) sean probabilidades objetivas o equivalentes ciertos y probabilidades implícitas, (Rubinstein, 1994); (Derman, Kani y Chriss, 1996); (Arnold, Crack y Schwartz, 2004); (Arnold y Crack, 2004); (d) sean momentos estocásticos de orden superior y transformaciones aplicadas a la distribución binomial, (Rubinstein, 1998); (Haahtela, 2010); (Milanesi, 2012); (e) sean enfoques para la estimación de la volatilidad (*marketed asset disclaimer* [MAD] riesgos de mercados y privados-volatilidades cambiantes); (Smith y Nau, 1995); (Copeland y Antikarov, 2001); (Haahtela, 2011); (f) o sean aplicaciones de la Teoría de Juegos (Smit y Trigeorgis, 2004).

2.2 Modelos borrosos (Fuzzy)

En esta categoría se agrupan los modelos que trabajan en un esquema de posibilidad aplicando matemáticas borrosas (*fuzzy*) (Zadeh, 1965); (Dubois y Prade, 1980); (Carlsson y Fuller, 2001). Los algoritmos de valoración y el análisis del riesgo se circunscriben al concepto de posibilidad y al empleo de la matemática borrosa (Fuller y Majlender, 2003), (Kahraman, Ruan y Tolga, 2002). De este grupo resulta la adecuación de los modelos tradicionales de opciones (2.1) a la lógica de los conjuntos borrosos, clasificándose en:

a) *Modelo en tiempo continuo Fuzzy* (MCF): En el clásico modelo de Black-Merton-Scholes (BMS) se utilizan las nociones de conjuntos borrosos para valorar opciones financieras o reales. Se supone comportamiento borroso mediante el uso de números trapezoidales con el objeto de describir los posibles valores del subyacente (activo financiero o real) y precios de ejercicio respectivamente; (Carlsson y Fuller, 2003); (Carlsson, Fuller, Heikkila y Majlender, 2007).

b) *Fuzzy Pay-Off Method* (FPOM): desarrollado por Collan, Fullér y Mezei, (2009) quienes emplean la técnica de escenarios trabajando con distribuciones triangulares y valiéndose de las matemáticas borrosas (*fuzzy*). El

² N. de E. En la literatura además de rejilla se utiliza también la palabra ládice.

valor de la opción surge del producto entre el cociente representativo del área de valores positivos sobre el área total de posibles valores del triángulo y el valor posible medio del escenario borroso. Los resultados obtenidos con el presente método son consistentes con el método desarrollados por (Datar y Mathews, 2004) y (Datar, Mathews y Johnson, 2007).

c) *Modelos en tiempo discreto Fuzzy (MDF)*: Consiste en adaptar el tradicional modelo binomial a la lógica borrosa. Esos permiten operar y definir la ambigüedad propia del subyacente con números borrosos triangulares o trapezoidales; en particular para estimar los movimientos ascendentes y descendentes (Muzzioli y Torricelli, 2004); (Yoshida, Yasuda, Nakagami y Kurano, 2006); (Garcia Sastre y Roselló Miralle, 2007); (Zdnek, 2010); (Liao y Ho S, 2010); (En Shine Yu, Ming, Li y Chen, 2011).

3. El modelo binomial borroso y la valuación de activos reales

La ventaja de la teoría *fuzzy* aplicada a los modelos de opciones reales consiste en la posibilidad de capturar el sesgo positivo en la distribución de probabilidad de posibles valores del proyecto, rasgo característico de las opciones reales del proyecto (incorporando en el valor el potencial beneficio de la inversión, limitando el riesgo de las posibles pérdidas). Las principales variables que afectan el valor de la opción en el modelo binomial son los factores u (coeficiente de ascenso) y d (coeficiente de descenso), siendo $u = e^{\sigma\sqrt{t}}$ y $d=1/u$. La base para su estimación se encuentra en la volatilidad (σ) derivada de la cartera de activos financieros gemelos. En aquellos proyectos donde no existen activos financieros tranzados que repliquen sus flujos y por ende el riesgo, emerge como alternativa el enfoque MAD. Éste supone que el mercado financiero es completo y que el valor del activo réplica del proyecto es representado por el valor actual neto estimado a partir de la proyección de sus flujos de fondos sin flexibilidad, actualizados por tasa que refleje el riesgo de inversiones equivalentes al objetivo de valuación. El proceso estocástico se supone del tipo GBM (*geometric brownian motion*), por ende una distribución normal de los rendimientos. La volatilidad del proyecto se obtiene calculando el desvío estándar de los rendimientos con simulación Monte Carlo de los flujos de fondos del proyecto y consecuentemente de su valor actual neto. Estos son simulados desde el periodo 1 hasta n obteniéndose los flujos de fondos

futuros ($FF_i, i=1...n$) por iteración y se calcula el valor actual del proyecto al final del primer periodo:

$$VAN_1 = \sum_{i=1}^n \frac{FF_i}{(1+k)^{i-1}}$$

Luego se estima el rendimiento del proyecto (z) correspondiente a cada iteración con la siguiente expresión;

$$z = \ln \left(\frac{VAN_1}{VAN_0} - 1 \right) \quad (1)$$

Del conjunto de valores z se obtiene el rendimiento medio ($\bar{z} = E(z)$) y su desvío estándar (s), entre el momento 0 y 1. La volatilidad del proyecto (σ) se define como el desvío anualizado del rendimiento y se calcula con la relación $s/\sqrt{\Delta t}$, donde Δt representa la amplitud del intervalo de tiempo de los flujos de fondos. Si la distancia entre V_1 y V_0 es un año entonces $\sigma=s$.

Alternativamente es posible adaptar el modelo binomial a la lógica borrosa (Dubois y Prade, 1980), empleando números borrosos triangulares. El modelo requiere de estimar factores borrosos; $u'=[u_1, u_2, u_3]$ y $d'=[d_1, d_2, d_3]$ en donde u_1, d_1 (peor escenario), u_3, d_3 (mejor escenario) y u_2, d_2 (caso base). El modelo caracteriza la incertidumbre por la posibilidad y para ello se propone el uso de un número borroso triangular para estimar la volatilidad. Ésta se calcula por medio del coeficiente de variación (CV_{-}^{+}), que representa los juicios y opiniones de expertos sobre las máximas variaciones positivas y negativas respecto del valor de máxima posibilidad (Ho y Liao, 2010). Ésta queda determinada como $\sigma' = [(1 - CV) * \sigma; \sigma; (1 + CV) * \sigma]$. En este caso σ , puede ser eventualmente la medida de riesgo inferida con el enfoque MAD. El modelo binomial borroso es una adaptación del modelo binomial de valoración de opciones a la lógica borrosa. Para estimar los coeficientes de ascenso y descenso borrosos se emplea la volatilidad borrosa siguiendo la misma lógica que en el modelo binomial,

$$u' = e^{(\sigma' \sqrt{t})} = [u_1, u_2, u_3] = [e^{((1-CV)*\sigma)\sqrt{t}}, e^{(\sigma*\sqrt{t})}, e^{((1+CV)*\sigma)\sqrt{t}}] \quad (2)$$

$$d' = [d_1, d_2, d_3] = \left[\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3} \right] \quad (3)$$

Debido al sesgo que existe en la distribución de posibilidad triangular el factor de ascenso crea mayor valor y el factor de descenso los revierte a cero. El caso base es similar al resultado obtenido en el modelo binomial tradicional. La combinación de los tres resultados crea la distribución de posibilidad y consecuentemente un número borroso en cada nodo de la rejilla binomial. A partir de las ecuaciones 2 y 3 se utilizan los factores u' y d' para estimar los coeficientes equivalentes ciertos, donde r representa el tipo de interés libre de riesgo;

$$p'_u = \frac{(1+r)-d'}{u'-d'} = \left[p_{u1} = \frac{(1+r)-d_1}{u_1-d_1}; p_{u2} = \frac{(1+r)-d_2}{u_2-d_2}; p_{u3} = \frac{(1+r)-d_3}{u_3-d_3} \right] \quad (4)$$

y

$$p'_d = \frac{(1+r)-d'}{u'-d'} = \left[p_{d1} = \frac{(1+r)-d_1}{u_1-d_1}; p_{d2} = \frac{(1+r)-d_2}{u_2-d_2}; p_{d3} = \frac{(1+r)-d_3}{u_3-d_3} \right] \quad (5)$$

El modelo binomial borroso crea una distribución de posibilidad en cada nodo que maximiza y minimiza los posibles valores del subyacente. Esto se logra combinando el mínimo coeficiente equivalente cierto borroso de ascenso y descenso para el peor escenario. De manera similar el mejor escenario debe ser actualizado con los máximos coeficientes equivalentes ciertos de ascenso y descenso. El caso base se resuelve de igual manera que el tradicional modelo binomial. Suponiendo un número borroso triangular (1=peor, 2=base, 3=mejor); de la ecuación 4, las parejas de coeficientes equivalentes ciertos quedan planteadas de la siguiente manera;

$$p'_u, p'_d = [(p_{u3}, p_{d1}); (p_{u2}, p_{d2}); (p_{u1}, p_{d3})] \quad (6)$$

Los coeficientes de posibilidades neutrales al riesgo tienen por fin que expresar los valores extremos de la distribución (Liao y Ho, 2010). Para la construcción de la rejilla binomial borrosa se parte del valor actual neto del proyecto (V_0) calculado con la siguiente expresión

$$V_0 = \sum_{t=1}^n FFL_t p_k^{-t} + FFL_0 \quad (7)$$

La corriente de flujo de fondos proyectada (FFL_t) se actualiza por el factor pk , más el flujo de fondos del periodo actual (FFL_0). Para los siguientes periodos, el valor del proyecto se integra por los flujos esperados (primer término de la expresión) más el valor del flujo en el momento actual (segundo término). Los pasos necesarios para aplicar el modelo binomial borroso requieren de la estimación de tres rejillas, a saber:

- Rejilla binomial borrosa correspondiente a la evolución del valor borroso del subyacente ($V'_{(i,j)t}$) descontando la razón de flujos de fondos del periodo ($1-TF$).
- Rejilla binomial borrosa correspondiente a la evolución de los flujos de fondos borrosos ($FF'_{(i,j)t}$) por periodo.
- Rejilla binomial borrosa con las opciones donde el valor del subyacente surge de la suma de las rejillas precedentes.

Para estimar la primera rejilla se debe calcular necesariamente la razón de flujo de fondos libres a valor actual del proyecto para cada periodo $TF_t = FFL_t/V_t$. El valor borroso proyectado del subyacente (V'_t) surge del producto entre el valor borroso del periodo precedente del i -ésimo, j -ésimo nodo ($V'_{(i,j)t-1}$) y los coeficientes borrosos de ascenso (u') y descenso (d') (ecuación 2 y 3) descontando el *ratio* flujo de fondos, conforme surge de la siguiente ecuación,

$$V'_{(i,j)t} = [V'_{(i)t-1} \times (u') \times (1 - TF_t)]; [V'_{(j)t-1} \times (d') \times (1 - TF_t)] \quad (8)$$

La segunda rejilla (ecuación 8) requiere aplicar la razón de flujo de fondos-valor actual (TF_t) al valor proyectado borroso (ecuación 7);

$$FF'_{(i,j)t} = [V'_{(i)t,u'} \times TF_t; V'_{(j)t,d'} \times TF_t] \quad (9)$$

Finalmente, el valor de las opciones surge de la suma de las dos rejillas precedentes.

$$VO'_{(i,j)t} = \max \left\{ [FF'_{(i,j)t} + (1+r)^{-1} \times (V'_{(i)t+1,u'} \times p'_u + V'_{(j)t+1,d'} \times p'_d)] ; [FFOP' + FF'_{(i,j)t} + (1+r)^{-1} \times (V'_{(i)t+1,u'} \times p'_u + V'_{(j)t+1,d'} \times p'_d)] \right\} \quad (10)$$

La ecuación anterior representa el valor expandido borroso de la inversión ($VO'_{(i,j)t}$). Este es el máximo valor entre el proyecto sin opciones (continuar) expresado en el primer término y el proyecto más valor agregado de la flexibilidad estratégica definido por la expresión $FFOP'$ en el segundo término. La rejilla binomial borrosa se resuelve recursivamente para cada nodo borroso donde r representa la tasa de interés libre de riesgo.

El supuesto de que la distribución de posibilidades de flujos de fondos se encuentra sesgada a la derecha altera la manera de computar el valor medio del número borroso, es decir, el valor de la opción real. Suponiendo que $VO' = [VO_1(\alpha); VO_3(\alpha)]$ es un número borroso y $\lambda \in [0,1]$. El valor puntual medio (*crisp mean value*) de VO' es

$$E(VO') = \int_0^1 [(1-\lambda)VO_1(\alpha) + \lambda VO_3(\alpha)] d\alpha \quad (11)$$

El factor de ponderación λ es conocido como índice optimismo-pesimismo (Yoshida, Yasuda, Nakami y Kurano, 2006), quienes establecen que su valor es definido por una decisión subjetiva del agente. (Liao y Ho, 2010) establecen que el valor del índice se puede determinar objetivamente. Para capturar el sesgo hacia la derecha (positivo) del número borroso triangular que representa el valor de las opciones estratégicas del proyecto $E(VO)'$, se propone calcular el índice λ con la siguiente expresión

$$\lambda = AD / (AI + AD) \quad (12)$$

Donde AD representa el área derecha del área del número borroso triangular y AI el área izquierda del número borroso triangular.³ Calculando la integral

³ Las áreas se calculan con la ecuación del área de un triángulo, $(bxh)/2$. Para cada área la altura es $(1,0)$ y la base derecha es igual a $VO_3(0) - VO_2(1)$; y la base izquierda $VO_2(1) - VO_1(0)$.

definida de la expresión 10 se obtiene la ecuación 12 correspondiente al valor medio borroso. Los valores VO_1 y VO_3 , representan los valores de mínima y el de máxima posibilidad de la función de pertenencia.

$$E(VO') = \frac{[(1-\lambda)VO_1 + VO_2 + \lambda VO_3]}{2} \quad (13)$$

4. Un caso de aplicación. Valuación de un proyecto de inversión de explotación de un yacimiento de petróleo

A continuación se desarrolla el caso planteado en Smith (2005). Se pretende determinar el valor para el inversor privado de un contrato de concesión para la explotación de un yacimiento de petróleo, bajo la forma jurídica de consorcio con el sector público, por un periodo de 10 años. La participación privada es de 75%, el saldo restante representa la propiedad estatal. Los estudios arrojan reservas totales por 99 millones de barriles, se proyecta para el primer año producir 9 millones de barriles. Se proyecta: (a) Decrecimiento de la producción a razón de una tasa anual de 15%; (b) Crecimiento del precio del crudo a razón de 3% anual; (c) Crecimiento de costos de explotación a razón de 2% anual; y (d) Costos fijos estables (no hay cambio de estructura). Para proyectar los flujos de fondos libres del contrato se emplean las siguientes variables: (a) Precio del crudo por barril u\$ 87.28; costos de producción que representan 77% del precio de venta (u\$ 67.21); (b) Costos fijos (u\$ 7 millones); (c) Amortización inversión fija 10 años (u\$ 300 millones /10 años); (d) No se toma deuda y la tasa ajustada por riesgo asciende a 10%.

El contrato dispone de las siguientes opciones previstas en el quinto año de vida: continuar, abandonar o expandir, bajo las siguientes condiciones: (a) Continuar la explotación hasta el décimo año sin variación alguna (Continuar); (b) Vender la explotación con valor fijado en cien millones de dólares (u\$100 millones) (Abandono); y (c) Comprar participación estatal con un costo de (u\$ 50 millones) y un incremento de 1,33 de los ingresos (4/3) (Expandir).

En la Tabla 1 se expone la proyección de: a) variables necesarias para la proyección; b) flujo de fondos libres del proyecto para los 10 años de concesión; y c) el valor actual inicial (VO), de u\$ 592,84 millones estimado mediante el método de descuento de flujo de fondos (Ec. 6). Las dos últimas filas

Tabla 1. Flujos de fondos proyectados y valor actual neto del proyecto (elaboración propia).

Conceptos (millones)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reservas de petróleo	99,00	90,00	81,00	73,35	66,85	61,32	56,62	52,63	49,23	46,35	43,90
Nivel de producción	9,00	9,00	7,65	6,50	5,53	4,70	3,99	3,39	2,89	2,45	2,08
Costo variable operativo	67,21	68,55	69,92	71,32	72,75	74,20	75,68	77,20	78,74	80,32	81,92
Precio de crudo (por barril)	87,28	89,90	92,60	95,37	98,23	101,18	104,22	107,34	110,56	113,88	117,30
Ingresos por ventas		809,09	708,35	620,16	542,95	475,36	416,17	364,36	319,00	279,28	244,51
Costos de producción		-616,95	-534,89	-463,75	-402,07	-348,60	-302,23	-262,04	-227,19	-196,97	-170,77
Costo fijo		-7,00	-7,00	-7,00	-7,00	-7,00	-7,00	-7,00	-7,00	-7,00	-7,00
FF después de impuestos		185,14	166,46	149,41	133,88	119,76	106,94	95,32	84,81	75,31	66,74
Participación minoritaria		-46,28	-41,62	-37,35	-33,47	-29,94	-26,74	-23,83	-21,20	-18,83	-16,68
Flujo de fondos libres (FFL)	0,00	138,85	124,85	112,06	100,41	89,82	80,21	71,49	63,61	56,48	50,05
(V_t) Valor actual	592,84	652,1-2	564,60	483,73	408,83	339,27	274,39	213,61	156,32	101,99	50,05
(TFt) FFL_t/V_t	0,00%	21,29%	22,11%	23,17%	24,56%	26,47%	29,23%	33,47%	40,69%	55,38%	100,00%

Tabla 2. Parámetros modelo binomial (elaboración propia).

σ	u	d	r	p	1-p
35,00%	1,41907	0,70469	5%	0,48515	0,51485

expresan el valor actual neto en cada periodo (V_t) y el *ratio* flujos de fondos libres-valor actual neto del proyecto (TF_t).

Para valorar las opciones del proyecto es menester calcular los parámetros del modelo binomial para la construcción de la rejilla. En la Tabla 2 se exponen los valores correspondientes a la volatilidad, el coeficientes de ascenso, el de descenso, la tasa libre de riesgo, y el coeficiente equivalente cierto. La volatilidad (35%) se obtiene empleando el enfoque MAD, para ello mediante simulación,⁴ se iteran los flujos de fondos como entrada para calcular

⁴ En este caso se utilizó el aplicativo Microsoft Excel ® construyendo una planilla de cálculo donde la simulación se realiza empleando el generador de números aleatorios. La distribución normal es supuesta para los flujos de fondos. Para mayor detalle de los modelos de simulación Montecarlo y el uso de planillas de cálculo ver Machain, L. (2011): "Simulación de modelos financieros", San Lorenzo, Argentina, Editorial Helemm, Capítulo 9, pp. 187-209.

las variables de la ecuación 1. De la muestra de rendimiento (z) resultante en cada iteración se obtiene el rendimiento medio ($\bar{z} = E(z)$) (y su desvío estándar (s), entre el momento 0 y 1 y consecuentemente la volatilidad del proyecto ($\sigma) = s/\sqrt{\Delta t}$. El rango de variación (CV) se supone con base en el juicio de expertos en 15% siendo la volatilidad borrosa de [29,75%, 35%, 40,25%]. Con estos datos se está en condiciones de calcular los factores de ascenso, descenso (Ec. 2 y 3) y coeficientes borrosos equivalente ciertos (Ec.4). Éstos se exponen en la siguiente Tabla.

Tabla 3. Parámetros modelo binomial fuzzy: (elaboración propia).

	u		d		p		$1-p$
$u1$	1,3465	$d1$	0,74267	$pu1$	0,5111	$1-pu1$	0,4889
$u2$	1,4191	$d2$	0,70469	$pu2$	0,4852	$1-pu2$	0,5148
$u3$	1,4956	$d3$	0,66865	$pu3$	0,4627	$1-pu3$	0,5373

Las parejas de coeficientes equivalentes ciertos borrosos (Ec.5) queda planteada como $p'_u = [0,4627; 0,4852; 0,5111]$ y $p'_d = [0,4889; 0,5148; 0,5373]$. Éste es el orden empleado para identificar los escenarios del número borroso triangular (peor escenario, base, mejor escenario) a ser aplicados en el procedimiento recursivo sobre los nodos borrosos, sobre el peor escenario. La primera rejilla a construir proyecta el valor borroso del activo ($V'_{(i,j)t}$) descontando el *ratio* de flujos de fondos del periodo ($1-TF_t$), del periodo (Ec. 7), los valores proyectados en cada nodo se ordenan de menor a mayor, el valor intermedio corresponde al modelo binomial clásico (Tabla 4).

La segunda rejilla sirve para estimar los flujos de fondos borrosos por periodo, empleando la ecuación 8.

Finalmente, la Tabla 6 expone la tercera rejilla empleando la ecuación 9. Los insumos son las rejillas precedentes (Tabla 4 y 5) y los parámetros del modelo binomial borroso (Tabla 3). A modo de ejemplo, en $t=10$ el nodo superior para el escenario pesimista asciende a \$378,04,

$$= \max \{ [378,04 + (1+0,05)^{-1} \times (0 \times 0,4627 + 0 \times 0,4889)]; [0 + 378,04 + (1+0,05)^{-1} \times (0 \times 0,4627 + 0 \times 0,4889)] \}.$$

El valor esperado del proyecto en $t+1$ es igual a cero dado que la concesión dura 10 años, además las opciones reales son ejercidas en $t=5$, por lo

Tabla 4. Rejilla binomial borrosa proyección valor del proyecto neto flujo de fondos del periodo (elaboración propia).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
592,84	798,25	845,98	887,22	917,88	932,37	923,06	879,60	787,96	629,27	378,04,	
	841,28	939,64	1.038,56	1.132,37	1.212,25	1.264,84	1.270,24	1.199,25	1.009,35	639,06,	
	886,63	1.043,66	1.215,72	1.396,98	1.576,14	1.733,15	1.834,38	1.825,22	1.618,99	1.080,30	
	440,29	466,61	489,36	506,27	514,26	509,13	485,15	434,61	347,08	208,51,	
	417,77	466,61	515,73	562,32	601,99	628,10	630,78	595,53	501,23	317,35	
	396,40	466,61	543,53	624,57	704,67	774,87	820,13	816,03	723,83	482,99	
			257,36	269,91	279,24	283,65	280,82	267,59	239,72	191,44	115,01
			231,71	256,11	279,24	298,94	311,90	313,24	295,73	248,90	157,59
			208,62	243,01	279,24	315,05	346,44	366,67	364,84	323,62	215,94
				148,87	154,02	156,45	154,89	147,59	132,22	105,59	63,43
			127,18	138,67	148,45	154,89	155,55	146,86	123,60	78,26	
			108,65	124,84	140,86	154,89	163,93	163,11	144,69	96,54	
				84,95	86,29	85,43	81,41	72,93	58,24	34,99	
				68,86	73,72	76,91	77,24	72,93	61,38	38,86	
				55,82	62,97	69,25	73,29	72,93	64,69	43,16	
					47,60	47,12	44,90	40,22	32,12	19,30	
					36,61	38,19	38,36	36,21	30,48	19,30	
					28,16	30,96	32,77	32,60	28,92	19,30	
						25,99	24,77	22,19	17,72	10,64	
						18,97	19,05	17,98	15,14	9,58	
						13,84	14,65	14,58	12,93	8,63	
							13,66	12,24	9,77	5,87	
							9,46	8,93	7,52	4,76	
							6,55	6,52	5,78	3,86	
								6,75	5,39	3,24	
								4,43	3,73	2,36	
								2,91	2,58	1,72	
									2,97	1,79	
									1,85	1,17	
									1,16	0,77	
										0,99	
										0,58	
										0,34	

Tabla 5. Rejilla binomial borrosa proyección flujos de fondos (elaboración propia).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
169,97	187,07	205,53	225,43	246,84	269,81	294,40	320,62	348,51	378,04
179,13	207,78	240,59	278,11	320,94	369,71	425,14	487,98	559,01	639,06
188,79	230,78	281,63	343,10	417,27	506,60	613,96	742,68	896,65	1.080,30
93,75	103,18	113,36	124,34	136,15	148,82	162,38	176,84	192,23	208,51
88,95	103,18	119,47	138,11	159,37	183,59	211,12	242,32	277,60	317,35
84,40	103,18	125,91	153,40	186,56	226,50	274,49	332,04	400,88	482,99
	56,91	62,53	68,58	75,09	82,08	89,56	97,54	106,02	115,01
	51,24	59,33	68,58	79,14	91,17	104,84	120,33	137,85	157,59
	46,13	56,29	68,58	83,41	101,26	122,72	148,45	179,23	215,94
		34,49	37,83	41,42	45,27	49,40	53,80	58,48	63,43
		29,46	34,06	39,30	45,27	52,06	59,76	68,45	78,26
		25,17	30,66	37,29	45,27	54,87	66,37	80,13	96,54
			20,86	22,85	24,97	27,25	29,67	32,25	34,99
			16,91	19,52	22,48	25,85	29,67	33,99	38,86
			13,71	16,67	20,24	24,53	29,67	35,83	43,16
				12,60	13,77	15,03	16,37	17,79	19,30
				9,69	11,16	12,84	14,74	16,88	19,30
				7,45	9,05	10,97	13,27	16,02	19,30
					7,60	8,29	9,03	9,81	10,64
					5,54	6,38	7,32	8,38	9,58
					4,05	4,90	5,93	7,16	8,63
						4,57	4,98	5,41	5,87
						3,17	3,63	4,16	4,76
						2,19	2,65	3,20	3,86
							2,75	2,99	3,24
							1,80	2,07	2,36
							1,19	1,43	1,72
								1,65	1,79
								1,03	1,17
								0,64	0,77
									0,99
									0,58
									0,34

tanto también su valor asciende a \$0. Siguiendo con el mismo escenario y nodo, recursivamente, en $t=9$ el valor es de \$611,18=

$$\max \{ [348,51 + (1+0,05)^{-1} \times (378,04 \times 0,4627 + 258,51 \times 0,4889)]; [0 + 348,51 + (1 + 0,05)^{-1} \times (378,04 \times 0,4627 + 258,51 \times 0,4889)] \}.$$

Tabla 6. Rejilla binomial borrosa valor de las opciones reales (elaboración propia).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V1 Min	486,68	695,64	757,42	827,14	903,10	984,70	837,41	814,73	746,90	611,88	378,04
V2 Base	626,15	886,48	1.009,60	1.149,90	1.303,69	1.469,36	1.264,84	1.270,24	1.199,25	1.009,35	639,06
V3 Max	841,63	1.177,22	1.392,45	1.641,23	1.918,24	2.219,88	1.933,74	1.996,97	1.935,22	1.668,69	1.080,30
		388,09	413,48	443,57	481,88	525,19	461,88	449,38	411,96	337,49	208,51
		443,18	492,97	553,67	628,24	709,52	628,10	630,78	595,53	501,23	317,35
		526,96	609,48	711,78	835,57	970,36	864,55	892,82	865,21	746,05	482,99
			241,56	247,42	253,96	271,74	254,76	247,86	227,22	186,15	115,01
			258,77	274,17	294,59	332,20	311,90	313,24	295,73	248,90	157,59
			286,18	313,57	351,52	411,72	386,53	399,17	386,83	333,55	215,94
				162,89	157,20	141,42	140,51	136,71	125,33	102,67	63,43
				165,41	161,10	148,45	154,89	155,55	146,86	123,60	78,26
				171,41	169,03	161,96	172,81	178,46	172,95	149,13	96,54
					127,30	122,85	77,50	75,40	69,13	56,63	34,99
					125,79	119,52	76,91	77,24	72,93	61,38	38,86
					125,35	116,67	77,26	79,79	77,32	66,67	43,16
						112,60	42,75	41,59	38,13	31,23	19,30
						109,69	38,19	38,36	36,21	30,48	19,30
						107,45	34,54	35,67	34,57	29,81	19,30
							23,58	22,94	21,03	17,23	10,64
							18,97	19,05	17,98	15,14	9,58
								15,44	15,95	15,46	13,33
								12,65	11,60	9,50	5,87
								9,46	8,93	7,52	4,76
								7,13	6,91	5,96	3,86
									6,40	5,24	3,24
									4,43	3,73	2,36
									3,09	2,66	1,72
										2,89	1,79
										1,85	1,17
										1,19	0,7
											0,99
											0,58
											0,34

FuE(VAN)		
Base	c3-c2	215,49
Altura	1,00	1,00
ARD	(b*h)/2	107,74
Base	c2-c1	139,47
Altura	1,00	1,00
ARL	(b*h)/2	69,73
λ índice	ARD/ARL+ARD	0,61
FuE(VAN)	$((1-\lambda)C1+C2+\lambda C3)/2$	664,15
	VE Binomial	626,15
	VE Binomial Fuzzy	664,15
	Fuzzy inferior	486,68
	Fuzzy superior	841,63

En este caso el valor esperado del proyecto en $t+1$ corresponde a los nodos pesimistas en $t=10$, nuevamente el valor de las opciones reales es nula ya que son ejercidas en el quinto periodo. En *itálica* se destaca el nodo intermedio que es coincidente con el modelo binomial clásico.

En la Tabla 6 en el quinto periodo, se ejecutan las opciones (E: expansión-C: continuar-A: abandono/venta) dependiendo del escenario acontecido. Por ejemplo, en el escenario optimista con 5 ascensos (5u) la ecuación 9 se aplica de la siguiente manera;

$\$ 2.218,88 = \text{máx} \{ [417,27 + (1 + 0.05)^{-1} \times (1933,74 \times 0,510 + 864,65 \times 0,5373)]; [(417,27 - 50) + (1 + 0,05)^{-1} \times 1/3 \times (378,04 \times 0,4627 + 258,51 \times 0,4889)]; (417,27 + 100) \}$, siendo el resultado expandir (*E*). En la siguiente Tabla se presentan la opción ejecutada en cada nodo borroso; El sesgo positivo del número borroso triangular se aprecia en la Tabla 7, el escenario pesimista tres alternativas de expansión y tres de abandono; el es-

Tabla 7. Valor de la opción real $t=5$ para el nodo borroso y decisión a ser adoptada (elaboración propia).

Nodos	Decisión: V1	Decisión: V2	Decisión: V3
5*u	984,70 E	1.469,36 E	2.219,88 E
	830,23	1.212,25	1.799,23
	346,84	420,94	517,27
4*u+1*d	525,19 E	709,52 E	970,36 E
	457,93	601,99	804,41
1*d+4*u	236,15	259,37	286,56
3*u+2*d	271,74 E	332,20 E	411,72 E,
	252,58	298,94	359,64
2*d+3u	175,09	179,14	183,41
3*d+2*u	131,94	144,83	161,96 E
	139,31	148,45 C	160,79
2*u+3*d	141,42 A	139,30	137,29
1*d+4*u	54,84	51,78	50,29
	76,84	73,72	71,89
4*u+1*d	122,85 A	119,52 A	116,67 A,
5*d	12,31	5,58	0,37
	42,38	36,61	32,14
	112,60 A	109,69 A	107,45 A

cenario base dos de expansión-abandono y una de continuar, finalmente el escenario optimista cuatro de expansión y dos de abandono. La anatomía del conjunto de posibles decisiones se ve expandida en el caso borroso frente al modelo binomial tradicional. El valor actual neto expandido (estratégico) $t=0$ es un número triangular borroso [$V_{1(min)} = \$468,68$ (millones); $V_{2(base)} = \$626,15$ (millones); $V_{3(max)} = \$841,63$ (millones)], (Tabla 6).

El cálculo del índice se detalla en el recuadro de la Tabla 6 siendo de 0,61 (Ec.11). El valor expandido del proyecto (*crisp mean value*) (Ec.12) asciende a \$664,15 (millones), este es levemente superior al valor de \$626,15 (millones) del modelo binomial tradicional. La diferencia a favor del modelo borroso surge del sesgo asimétrico positivo ($a-\alpha = \$468,68$; $a = \$626,15$; $\beta+a = \$841,63$) del índice, potenciando los valores positivos y limitando los negativos producto de las opciones contenidas en el contrato en el periodo $t=5$.

5. Conclusiones

El principal objetivo de este trabajo, es didáctico e ilustrativo, y se propone un método para la aplicación del modelo binomial borroso en la valoración, tomándose como caso un contrato de concesión de explotación de petróleo para un consorcio privado-público con opciones de expansión-abandono o continuación. Se expuso una síntesis de los diferentes modelos de valuación de opciones reales, clasificados estos en probabilísticos y borrosos. Se enfatizó el segundo grupo desarrollándose el modelo binomial borroso, como alternativa a ser aplicada en situaciones de ambigüedad utilizando la semántica de las posibilidades en lugar de las probabilidades. Específicamente en situaciones donde la falta de mercados completos, eficientes y perfectos hace que no existan precios de activos financieros gemelos que permitan replicar el flujo de fondos riesgoso del proyecto.

Los pasos para implementar el modelo son: (a) estimar la volatilidad mediante simulación Montecarlo y los posibles valores extremos propios de la medida de variación (CV) por medio de juicios de expertos; (b) cálculo de coeficientes equivalentes que reflejan los valores extremos del número borroso triangular; (c) construcción de las rejillas binomiales borrosas que representan el mapa de posibles valores del modelo: subyacente borroso neto de flujos de fondos, flujos de fondos borrosos, valor estratégico borroso con opciones. La salida del modelo es el valor expandido borroso para tres posibles escenarios: peor, base y mejor. Presentan la anatomía del conjunto de

posibles decisiones involucradas según el nodo borroso, expandiendo el conjunto de información en relación al modelo binomial tradicional: peor escenario las combinaciones son tres expansiones y tres abandonos; mejor escenario presenta cuatro expansiones y dos abandonos; finalmente el caso base pronostica dos expansiones y dos abandonos y una continuación en condiciones normales. Finalmente el grado de aversión a la ambigüedad del agente se representa mediante el coeficiente de pesimismo-optimismo obteniéndose el valor estratégico borroso del proyecto (*crisp mean value*). Éste asciende a \$664,15 millones, superior a los \$626,15 millones del método binomial tradicional. Ésto es así por el sesgo positivo del número borroso triangular, respetando la filosofía de los modelos de opciones, ya que los beneficios son potenciados y las pérdidas limitadas, producto de las alternativas estratégicas (opciones) en el caso del contrato objeto de estudio.

Bibliografía

- Amram, M- Kulatilaka, N. (1998). *Real Options* (1 ed.). Boston, Massachusetts, Estados Unidos: Harvard Business School Press.
- Arnold, T- Crack, T. (2004). "Using the WACC to Value Real Options". *Financial Analysts Journal*(60), 78-82.
- _____, T- Schwartz, A. (2004). *Implied Binomial Trees in Excel whitout VBA*. SSRN: Social Science Research NetWork .
- Baliero Filho; R-Rosenfeld,R. (2004). "Testing Option Pricing with Edgeworth Expansion". *Physica A: Statistical Mechanis an its Application*, 344, 484-490.
- Black, F- Scholes, M. (Mayo-Junio de 1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, 637-659.
- Boyle, P. (1988). "A Lattice Framework for Option Pricing with two State Variables". *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 23, 1-12.
- Brandao, L- Dyer, J- Hahn, W. (2005). "Using Binomial Decision Trees to Solve Real Options Valuations Problems". *Journal of Decision Analysis*(2), 69-88.
- _____. (2009). "Projetos de Opcoes Reis com Incertezas Correlacionadas". *Revista de Administracao e Contabilidade da Unisinos*(1), 19-26.
- Carlsson, C-Fuller, R. (2001). "On Possibilistic Mean Value and Variance Fuzzy Numbers". *Fuzzy Sets and Systems*(122), 772-777.
- _____. (2003). "A Fuzzy Approach to Real Option Valuation". *Fuzzy Sets and Systems*(139), 315-326.

- _____, R-Heikkila, M-Majlender, P. (2007). "A Fuzzy Approach to R&D Project Portfolio Selection". *International Journal of Approximating Reasoning*(44), 93-105.
- Cochrane, J. (2005). *Asset Pricing* (2 ed.). Princeton: Princeton University Press.
- Collan, M- Fullér, R-Mezei, J. (2009). "Fuzzy Pay-Off Method for Real Option Valuation". *Journal of Applied Mathematics and Decision Systems, ID 238196*, 1-14.
- Copeland, T- Antikarov, V. (2001). *Real Options* (1 ed.). New York: Texere LLC.
- _____, T- Tufano, P. (2004). "A Real World to Manage Real Options". *Harvard Business School Review*(82), 90-99.
- Cox, J- Ross, S-Rubinstein, M. (Septiembre de 1979). "Option Pricing: A Simplified Approach". *Journal of Financial Economics*, 229-263.
- Datar, V- Mathews, S-Johnson, B. (2007). "A Practical Method for Valuing Real Options: The Boeing Approach". *Journal of Applied Corporate Finance*, 19, 95-104.
- _____, S. (2004). "European Real Options: An intuitive Algorithm for the Black-Scholes Formula". *Journal of Applied Finance*, 14, 7-13.
- Derman, E-Kani, I-Chriss, N. (February de 1996). "Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile". (Goldman-Sachs, Ed.) *Quantitative strategies research notes*.
- Dixit, A- Pindyck, R. (1994). *Investment under Uncertainty* (1 ed.). New Jersey: Princeton University Press.
- Dubois, D-Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems*. New York: Academic Press.
- Fornero, R. (Septiembre de 2012). "El Valor de los proyectos de inversión con estimaciones probabilísticas y borrosas". *XXXII Jornadas Nacionales de Administración Financiera, XXXII*, 83-135.
- Fuller, R-Majlender, P. (2003). "On Weigthed Possibilistic Mean and Variance of Fuzzy Numbers". *Fuzzy Sets and Systems*(136), 363-374.
- Garcia Sastre, M. -Roselló Miralles, M. (2007). "La lógica borrosa para valorar la incertidumbre en la técnica de valoración de opciones reales". (A. E. (AEDEM), Ed.) *DIALNET OAI Articles*, <http://dialnet.unirioja.es/servlet/oaiart?codigo=2499409>, 1-22.
- Haahtela, T. (2010). *Displaced Diffusion Binomial Tree for Real Option Valuation*. SSRN: Social Science Research Network.
- _____. "Recombining Trinomial Tree for Real Option Valuation with Changing Volatility". *SSRN-Social Science Research Network*.
- _____. (2011). "Estimating Changing Volatility in Cash Flow Simulation Based Real Options Valuation with Regression Sum of Squared Error Method". SSRN: *Social Science Research Network*.

- Haug Gaarder, E. (2007). *Derivatives: Models and Models* (1 ed.). Chichester : John Wiley & Sons.
- Hull, J. (2006). *Futures, Options and other Derivatives* (6 ed.). New Jersey: Prentice Hall.
- Jabbour, G-Kramin, M-Young, S. (Noviembre de 2001). "Two-state Option Pricing: Binomial Models Revisited". *Journal of Futures Markets*, 21, 987-1001.
- Jarrow, R-Rudd, A. (1982). "Aproximate option valuation for arbitrary stochastic processes". *Journal of Financial Economics*, 10, 347-369.
- Kahraman, C-Ruan, D-Tolga, E. (2002). "Capital Budgeting Techniques using Discounted Fuzzy versus Probabilistic Cash Flow". *Information Science*(142), 57-76.
- Kinnunen, J. (2010). *Valuing M&A Synergies as (Fuzzy) Real Options*. Abo Akedimi University.
- Landro, A. (2010). *Acerca de la Probabilidad: La interpretación del concepto de azar y la definición de probabilidad*. Buenos Aires: Centro de Investigaciones en Econometría Facultad de Ciencias Económicas UBA.
- León, A- Mencia, J- Sentaria, E. (2007). "Parametric Properties of Semi-Nonparametric Distributions, with application to Options Valuation". *Documento de Trabajo 0707 Banco de España*, 9-30.
- Liao, S-Ho, S. (2010). "Investment Project Valuation based on a Fuzzy Binomial Approach". *Information Sciences*(180), 2124-2133.
- Luherman, T. (1998). *Investment Science* (1 ed.). New York: Oxford University Press.
- _____. "Investment Opportunities as Real Options: Get started with the numbers". *Harvard Business Review*(4), 51-67.
- Machain, L. (2011). *Simulación de Modelos Financieros* Editorial Helemm, San Lorenzo, Argentina,
- Merton, R. (Primavera de 1973). "The Theory of Rational Options Pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science*, 141-183.
- Milanesi, G. (2012). "Opciones Reales: el Método Binomial, Asimetría y Curtosis en la Valoración de Empresas de Base Tecnológica". *Revista Española de Capital de Riesgo*(2), 41-55.
- Mun, J. (2004). *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investment and Decisions* (1 ed.). New York: Wiley.
- Muzzioli, S-Torricelli, A. (2004). "A Multiperiod Binomial Model for Pricing Options in a Vague World". *Journal of Economics and Dynamics Control*(28), 861-867.

- Rendleman, R-Bartter, B. (1979). "Two-state Option Pricing". *Journal of Finance*(34), 1092-1110.
- Rubinstein, M. (3 de 1994). "Implied Binomial Trees". *Journal of Finance*, 49, 771-818.
- _____. (1998). "Edgeworth Binomial Trees". *Journal of Derivatives*(5), 20-27.
- _____. (2000). *On the Relation Between Binomial and Trinomial Option Pricing Model*. Berkeley, Research Program in Finance-292. California: UC Berkeley.
- Shine Yu, S-Ming, H-Li, Y-Chen Yuan. (2011). "A novel option pricing model via fuzzy binomial decision tree". *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 7(2), 709-718.
- Smit, H-Trigeorgis, L. (2004). *Strategic Investment: Real Options and Games* (1 ed.). New Jersey, Estados Unidos: Princeton University Press.
- Smith, J. (2005). "Alternative Approach for Solving Real Options Problems". *Decision Analysis*(2), 89-102.
- _____. J-Nau, R. (1995). "Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Anaysis". *Management Science*(5), 795-816.
- Trigeorgis, L- Mason, S. (1987). "Valuing Managerial Flexibiliy". *Midland Corporate Finance*, 5, 14-21.
- _____. L. (1988). A Conceptual Options Framework for Capital Budgeting. *Advances in Futures and Options Research*(4), 145-167.
- _____. (1995). *Real Options in Capital Investment: Models, Strategies and Applications* (1 ed.). London, United Kindgon: Praeger.
- _____. (1997). *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocations* (2 ed.). Cambridge: MIT Press.
- Wang, A-Halal, W. (2010). "Comparision of Real Asset Valuation Models: A Literature Review". *International Journal of Business and Management*(5), 14-24.
- Wilmott, P. (2009). *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance* (Segunda ed.). United Kingdom: John Wiley & Sons.
- Yoshida, Y-Yasuda, M-Nakagami, J-Kurano, M. (2006). "A New Evaluation of Mean Value for Fuzzy Numbers and its Application to American Options under Uncertainty". *Fuzzy Sets and Systems*(157), 2614-2626.
- Zadeh, L. (1965). "Fuzzy Sets". *Information Control*, 3(8), 338-353.
- Zdnek Zmeskal. (2010). "Generalised Soft Binomial American Real Option Pricing Model". *European Journal of Operational Research*(207), 1096-1103.