



Universidad Nacional del Sur

TESIS DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

*Caracterización de caminos hamiltonianos
en problemas específicos*

Blanca Isabel Niel

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2014

Prefacio

Esta Tesis es parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad ni en ninguna otra. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática, durante el período comprendido entre el 16 de diciembre de 2003-11 de noviembre de 2008 dirigida por el Dr. Aldo Victorio Figallo, Profesor Titular del Departamento de Matemática de la UNS, y desde el 16 de junio de 2009 y el 12 de Diciembre de 2013, bajo la dirección de la Dra. Nélide Beatriz Brignole, Profesora Adjunta del Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación de la UNS y del Dr. Walter Alberto Reartes, Profesor Asociado del Departamento de Matemática de la UNS.

Blanca Isabel Niel



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el/...../....., mereciendo la calificación de(.....)

Dedicatoria

A los que sufren y esperan por su milagro.

Agradecimiento

A quienes me ayudaron a concretar esta realización personal.

Resumen

Algunos fenómenos naturales, desde un enfoque teleológico, escogen trayectorias expeditas, e.g. la refracción de la luz, el plegamiento de biopolímeros, otros por el contrario seleccionan caminos ineficientes y extravagantes, e.g. la reflexión de la luz en superficies espejadas cóncavas. Otros, en cambio, eligen caminos que evolucionan sin proseguir estrategias extremas. Los problemas aquí tratados plantean determinar el conjunto de trayectorias admisibles, para lo cual se apela a métodos y modelos sustentados en argumentos lógicos y proposiciones matemáticas. La metodología variacional permite un nexo entre el pensamiento de Hamilton en “Geometría Óptica” y su diseño del “Icosian Game”. Vínculo que consiste en la identificación de las trayectorias hamiltonianas y cuasi-hamiltonianas reflexivas en las arquitecturas de las redes con nodos en los vértices de los n -gonos regulares. Mientras que mediante la aplicación del algoritmo aritmético propuesto se caracterizan las soluciones extremales de diferentes problemas de hamiltonianos cíclicos y no cíclicos óptimos y subóptimos.

Abstract

In the teleology of natural phenomena it is well known that some processes expedite progress, e.g. the law of refraction, the folding of biopolymers, while, on the contrary other processes perform the pathways of the inefficiency or extravagance, e.g. the law of reflection at the hollow mirrors, and there are processes that involve non-extreme strategies. The studied problems impose to determine the set of the admissible trajectories that require methods and models supported by logical arguments and mathematical statements. The variational procedure allows a link between Hamilton's thoughts in "Geometric Optics" and his design of the "Icosian Game". This connection identifies the reflective hamiltonian and quasi-hamiltonian paths in the architecture of the networks built on the vertices of the regular n-gons. The applications of the proposed algorithm deal with the characterization of the pathways that solve different hamiltonian cyclic and non-cyclic extremal path problems.

Certifico que fueron incluidos los cambios y correcciones sugeridas por los jurados.

Dra. Nélica Beatriz Brignole

Dr. Walter Alberto Reartes

Índice general

| | | |
|-----------|---|-----------|
| I | Preliminares | 23 |
| 0.1. | Contexto | 25 |
| 0.2. | Formulación | 26 |
| 0.3. | Comunicaciones en Congresos Nacionales e Internacionales | 30 |
| II | Hamilton vs Hamilton | 31 |
| 1. | Hamilton vs Hamilton | 33 |
| 1.1. | Hamilton de la Geometría Óptica a Hamilton en un Juego Hamiltoniano | 35 |
| 1.2. | Metodología Empleada | 35 |
| 1.3. | Problema de Heron | 36 |
| 1.3.1. | Obtención de la braquistócrona por cálculos algebraicos | 37 |
| 1.3.2. | Obtención de la braquistócrona por razones geométricas | 38 |
| 1.4. | Ley de Snell | 38 |
| 1.4.1. | Tratamiento de una interfase de ancho unitario | 40 |
| 1.4.2. | Determinando la braquistócrona en una interfase de ancho unitario | 42 |
| 1.4.3. | Contribuciones auxiliares | 43 |
| 1.4.4. | Caracterización de $p(x, c, c_1)$ | 46 |
| 1.4.5. | Resolución del caso palíndromo | 47 |
| 1.4.6. | Solución en una interfase de ancho arbitrario | 48 |
| 1.4.7. | Refracciones sucesivas: Braquistócrona. | 49 |
| 1.5. | Naturaleza no necesariamente expedita | 51 |
| 1.5.1. | Primer ejemplo en el espejo circular | 53 |
| 1.5.2. | Segundo ejemplo en el espejo cuasi-esférico | 56 |
| 1.5.3. | Tercer ejemplo en el espejo cuasi-esférico | 58 |
| 1.6. | Confluencia de dos áreas de investigación de Hamilton | 73 |
| 1.7. | Comunicaciones y publicaciones de las ideas del Capítulo 1 | 75 |
| 2. | Geometría de los Hamiltonianos | 77 |
| 2.1. | Contexto del trabajo | 77 |
| 2.2. | Primer Resultado: Hamiltonianos Reflexivos | 79 |
| 2.2.1. | Camino de longitudes estacionarias en la circunferencia: Trayectorias geométricas no restringidas | 80 |
| 2.2.2. | Si $\beta = -\pi$ las trayectorias reflexivas son ciclos en $e^{\pi i} \sqrt[n]{1}$ | 84 |
| 2.2.3. | Hamiltonianos reflexivos en n -gonos: Rayos geométricos restringidos | 86 |

| | | |
|--------|---|-----|
| 2.2.4. | Caleidoscopio de ciclos reflexivos | 90 |
| 2.2.5. | Tópicos singulares de la paridad | 99 |
| 2.3. | Segundo Resultado: Hamiltonianos no reflexivos en $2p + 2$ -gonos regulares | 104 |
| 2.3.1. | Razonamientos lógicos y geométricos | 104 |
| 2.4. | Discusión sobre paridad | 107 |
| 2.4.1. | Apéndice A: Demostración del Teorema 2.2.3 | 108 |
| 2.4.2. | Apéndice B: Demostración del Teorema 2.3.4 | 110 |
| 2.4.3. | Apéndice C: Poligonal estrellada maximal en vértices del $4p$ -gono regular | 113 |
| 2.4.4. | Hamiltonianos de longitudes mínimas sobre n -gonos | 114 |
| 2.5. | Tercer Resultado: Hamiltonianos óptimos en vértices de $2p + 1$ -gonos . . . | 118 |
| 2.5.1. | Hamiltonianos sub-óptimos en los vértices de un $2l + 1$ -gono regular | 119 |
| 2.5.2. | $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Máx. TSPPs en vértices de un $2l + 1$ -gono regular | 121 |
| 2.5.3. | Apéndice D: Demostración del Teorema 2.5.1 | 123 |
| 2.6. | Conclusión final del capítulo | 131 |
| 2.7. | Exposiciones en Congresos Nacionales y Conferencias Internacionales . . . | 131 |

III Algoritmo Aritmético 133

| | | |
|-----------|---|------------|
| 3. | Algoritmo Aritmético | 135 |
| 3.0.1. | Hamiltonianos ineficientes en vértices de $2p + 2$ -gonos | 135 |
| 3.0.2. | Metodología propuesta | 137 |
| 3.0.3. | Geometría intrínseca y aritmética inherente | 137 |
| 3.1. | Algoritmo Aritmético: Proposiciones Fundamentales | 139 |
| 3.2. | Algoritmo Aritmético: Aplicación en N_{par} -Gonos | 139 |
| 3.2.1. | Ciclos hamiltonianos congruentes con Γ_k | 142 |
| 3.3. | Cada camino hamiltoniano máximo en un $2p + 2$ -gono regular | 144 |
| 3.3.1. | Longitudes de la ineficiencia en vértices de $2p + 2$ -gonos | 148 |
| 3.3.2. | Apéndice E: Procedimiento constructivo alternativo | 149 |
| 3.3.3. | Conclusiones | 150 |
| 3.4. | Algoritmo Aritmético en N_{impar} -Gonos | 151 |
| 3.4.1. | Índice de Rotación en Ciclos Hamiltonianos | 161 |
| 3.4.2. | Cómputos del algoritmo en $3p + 2(l + 1)$ -gonos | 163 |
| 3.5. | Hamiltonianos No Cíclicos más largos en N_{impar} -Gonos | 167 |
| 3.5.1. | Longitud de los caminos relevantes | 168 |
| 3.5.2. | Distribución de los segmentos en hamiltonianos de N_{impar} -Gonos . . | 170 |
| 3.6. | Ordenamientos y enumeración de hamiltonianos relevantes en N_{impar} -Gonos | 170 |
| 3.6.1. | Poligonales hamiltonianas reflexivas biestrellas | 174 |
| 3.6.2. | Existencia de hamiltonianas biestrellas en N_{impar} -Gonos acoplados | 175 |
| 3.7. | Conclusiones y Conjetura sobre Máx. TSP en N_{impar} -Gonos acoplados . . . | 179 |
| 3.7.1. | Publicaciones | 179 |

| | | |
|------------|--|------------|
| IV | Líneas de Investigaciones Futuras | 181 |
| 4. | Estudios iniciados: Estructuras en bin-gonos y hubnet | 183 |
| 4.1. | Longitudes en 3-gonos acoplados y desacoplados | 184 |
| 4.1.1. | Ciclos relevantes en 3-gonos acoplados | 184 |
| 4.1.2. | Radios de transición en 3-gonos acoplados | 185 |
| 4.1.3. | 3-gonos en antípodas: Longitudes y hamiltonianos. | 187 |
| 4.1.4. | Longitudes en $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi\sqrt[3]{1}}, \frac{1}{2}e^{i\alpha\sqrt[3]{1}}), d_{N \times N}^E)$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ | 189 |
| 4.1.5. | Mín. TSP en n -gonos acoplados | 190 |
| 4.2. | Máx. TSP en $\mathcal{N}(K_{2(2p+1)}(e^{i\pi\sqrt[2p+1]{1}}, r\sqrt[2p+1]{1}), D)$ | 191 |
| 4.2.1. | Hamiltonianos reflexivos en $\mathcal{N}(K_6(e^{i\pi\sqrt[3]{1}}, r e^{i\pi\sqrt[3]{1}}), D)$ | 192 |
| 4.2.2. | Parámetro estructural en $\mathcal{N}(K_6(e^{i\pi\sqrt[3]{1}}, r e^{i\pi\sqrt[3]{1}}), D)$ | 194 |
| 4.2.3. | Algoritmo y hamiltonianos en n -gonos acoplados | 195 |
| 4.2.4. | Máx. TSP en las redes $\mathcal{N}(K_{2n}(e^{i\pi\sqrt[n]{1}}, e^{i\pi\sqrt[n]{1}}), d_{N \times N}^E)$ | 198 |
| 4.2.5. | El caso más simple de acoplamiento en paridad | 199 |
| 4.2.6. | Forma tridiagonal del Hessiano de la función variacional | 201 |
| 4.3. | Discusión y proyección de los cálculos | 202 |
| 4.3.1. | TSPs en $\mathcal{N}(K_{14}(e^{i\pi\sqrt[7]{1}}, \frac{1}{2}e^{i\pi\sqrt[7]{1}}), d_{14 \times 14}^E)$ | 202 |
| 4.3.2. | TSPs en $\mathcal{N}(K_{16}(e^{i\pi\sqrt[8]{1}}, \frac{1}{2}e^{i\pi\sqrt[8]{1}}), d_{16 \times 16}^E)$ | 202 |
| 5. | El algoritmo en secuencias Watson-Crick | 205 |
| 5.0.3. | Un algoritmo aritmético cohesivo | 207 |
| 5.0.4. | Matrices y topologías de contactos | 209 |
| 5.1. | Aplicaciones a oligonucleótidos | 210 |
| 5.1.1. | Conclusiones de esta aplicación incipiente | 213 |
| 5.2. | Comunicaciones y Publicaciones | 214 |
| V | Conclusiones Generales | 215 |
| 6. | Contribuciones del trabajo de tesis | 217 |
| VI | Glosario | 219 |
| VII | Bibliografía | 225 |

Índice de figuras

| | | |
|-------|--|-----|
| 1.1. | Problema de Heron. | 36 |
| 1.2. | Enfoque Geométrico. | 38 |
| 1.3. | Ley de Snell. | 39 |
| 1.4. | Sucesivas refracciones. | 50 |
| 1.5. | Primer ejemplo en el espejo cuasi-esférico, $\pi < \alpha_* < 2\pi$ | 53 |
| 1.6. | Segundo caso en el espejo cuasi-esférico. | 56 |
| 1.7. | Rayos geométricos con parámetros α_i $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ | 58 |
| 1.8. | Antípodas: Ejemplo 1.5.7, $\alpha_1 \in [-\pi, \pi]$ | 59 |
| 1.9. | Rayos del Ejemplo 1.5.7. | 59 |
| 1.10. | Antípodas: Ejemplo 1.5.8, $\alpha_1 \in [-\pi, \pi]$ y $\alpha_2 \in [-\pi, \pi]$ | 60 |
| 1.11. | Rayos del Ejemplo 1.5.8 | 61 |
| 1.12. | Caleidoscopio del Ejemplo 1.5.8, $\alpha_1 \in (-\infty, +\infty)$ y $\alpha_2 \in (-\infty, +\infty)$ | 62 |
| 1.13. | Antípodas: Ejemplo 1.5.10, $\alpha_1 \in [-\pi, \pi]$, $\alpha_2 \in [-\pi, \pi]$ y $\alpha_3 \in [-\pi, \pi]$ | 65 |
| 1.14. | Rayos del Ejemplo 1.5.10 | 69 |
| 1.15. | Representación de los rayos reflexivos para $n-1 = 4$ colisiones. | 73 |
| 1.16. | Representación de los rayos reflexivos para $n-1 = 5$ colisiones. | 73 |
| 1.17. | Número primo de Fermat $n = 17$: Recorridos del viajante \sim Rayos en el espejo cuasi-esférico $e^{i\pi} \sqrt[17]{1}$ | 76 |
| 2.1. | Ángulos variacionales α_i | 80 |
| 2.2. | Expresiones de $l_{q,\max}$ y l_{\min} (izq.) Diagrama de los L_k desde V_0 para n par | 84 |
| 2.3. | Geometría de los digonos replicados del 6-gono. | 94 |
| 2.4. | Interpretación geométrica del caleidoscopio del Máx. TSP en $2p+1$ -gono. | 95 |
| 2.5. | Geometría del Máx. TSP en $2k+1$ -gonos. | 96 |
| 2.6. | Itinerarios y longitudes del viajante en $\mathcal{N}(K_{n=7}(e^{i\pi} \sqrt[7]{1}), d_{7 \times 7}^E)$, i.e. C_H^7 | 97 |
| 2.7. | Hamiltonianos reflexivos cíclicos en el 7-gono. | 99 |
| 2.8. | Longitudes e Itinerarios de C_H^6 s en $\mathcal{N}(K_{n=6}(e^{i\pi} \sqrt[6]{1}), d_{6 \times 6}^E)$ | 101 |
| 2.9. | 12-gono, Hamiltonianos Γ_k : $\Gamma_1 \cong \mathcal{FN}$, $\{12/5\} \cong T_\star$, $\Gamma_5 \cong \text{Máx. TSP}$ | 113 |
| 2.10. | C_H^n y P_H^{n-1} de los Mín. TSPs en $\mathcal{N}(K_{15}(e^{i\pi} \sqrt[15]{1}), (d_{ij})_{15 \times 15})$ | 117 |
| 2.11. | Los segmentos L_k^\pm desde V_0 en un $2l+1$ -gono regular. | 119 |
| 3.2. | C_H^m s inciso d) del Lema 3.2.4 en la red $\mathcal{N}(K_{12}(\sqrt[12]{1}), (d_{ij})_{12 \times 12})$ | 141 |
| 3.3. | L_k^\mp en vértices de un N_{impar} -Gono | 152 |
| 3.4. | e.g.: De C_{Q-H}^5 en el 9-gono a un C_H^5 en el 5-gono. | 159 |
| 3.5. | e.g.: De C_{Q-H}^7 en el 9-gono a un C_H^7 en el 7-gono. | 160 |
| 3.6. | C_{Q-H}^6 en $\mathcal{N}(K_{11}(e^{i\pi} \sqrt[11]{1}), (d_{ij})_{11 \times 11})$ y C_H^6 en $\mathcal{N}(K_6(\sqrt[6]{1}), (d_{ij})_{6 \times 6})$ | 160 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 3.7. | C_{Q-H}^4 en $\mathcal{N}(K_{11}(e^{i\pi} \sqrt[11]{1}), (d_{ij})_{11 \times 11})$ y C_H^4 en $\mathcal{N}(K_4(\sqrt[4]{1}), (d_{ij})_{4 \times 4})$ | 160 |
| 3.8. | Índices de Rotación j y \tilde{j} e.g. $5L_1^-$ y $5L_1^+$ | 161 |
| 3.9. | Índices de Rotación j y \tilde{j} e.g. $5L_2^+$ | 161 |
| 3.10. | Representación gráfica del \tilde{j} en $7L_2^+$ | 162 |
| 3.11. | Rotación en cuasi-hamiltonianos: e.g. $n = 9$, $m = 3$, $m = 4$ y $m = 5$ | 163 |
| 3.12. | N-Gonos acoplados: Ángulos variacionales α_i | 174 |
| 3.13. | N_{impar} -Gonos acoplados: $\mathcal{N}(K_{N=2n_{impar}}(e^{i\pi} \sqrt[n_{impar}]{1}, \frac{1}{2}e^{i\pi} \sqrt[n_{impar}]{1}), d_{N \times N}^E)$ | 175 |
| 3.14. | Biestrella hamiltoniana en $\mathcal{N}(K_{N=2 \times 7}(e^{i\pi} \sqrt[7]{1}, r e^{i\pi} \sqrt[7]{1}), d_{N \times N}^E)$ | 176 |
| 3.15. | Biestrellas cuasi-hamiltonianas en 15-gonos acoplados. | 176 |
| 3.16. | Poligonales hamiltonianas biestrellas en 7-gonos acoplados. | 177 |
| 3.17. | Biestrellas cuasi-hamiltonianas en 8-gonos acoplados. | 178 |
| 4.1. | Conectores en $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, r e^{i(\pi+\alpha)} \sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$ | 184 |
| 4.2. | Longitud de conectores: $\{\tilde{l}_0, \tilde{l}, l, L\}$ | 185 |
| 4.3. | Hamiltonianos en $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, \frac{1}{2} e^{i\pi} \sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$ | 185 |
| 4.4. | Mín. y Máx. TSP en $\mathcal{N}(K_{2n=6}(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, \frac{1}{2} \sqrt[3]{1}), d_{6 \times 6}^E)$ | 186 |
| 4.5. | Conectores en 3-gonos regulares opuestos. | 187 |
| 4.6. | Mín. TSP en $\mathcal{N}(K_{2n=6}(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, r \sqrt[3]{1}), d_{6 \times 6}^E)$ | 188 |
| 4.7. | Máx. TSP en $\mathcal{N}(K_{2n=6}(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, r \sqrt[3]{1}), d_{6 \times 6}^E)$ | 189 |
| 4.8. | Radios de transición de Mín. TSPs en $\mathcal{N}(K_{2n}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}, r e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{2n \times 2n}^E)$ | 191 |
| 4.9. | Caracterización de hamiltonianos reflexivos en 3-gonos acoplados. | 193 |
| 4.10. | Bivectores en hamiltoniano biestrella en 9-gonos acoplados. | 198 |
| 4.11. | Poligonales biestrellas reflexivas en 8-gonos. | 198 |
| 4.12. | Formas del Máx. TSP en $\mathcal{N}(K_{N=2n}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}, \frac{1}{2} e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{N \times N}^E)$ | 199 |
| 4.13. | Exploración exhaustiva TSPs en $\mathcal{N}(K_{14}(e^{i\pi} \sqrt[7]{1}, \frac{1}{2} e^{i\pi} \sqrt[7]{1}), d_{14 \times 14}^E)$ | 202 |
| 4.14. | Heurísticas del Concorde en $\mathcal{N}(K_{14}(e^{i\pi} \sqrt[7]{1}, \frac{1}{2} e^{i\pi} \sqrt[7]{1}), d_{14 \times 14}^E)$ | 203 |
| 4.15. | Exploración Exhaustiva: TSPs en $\mathcal{N}(K_{16}(e^{i\pi} \sqrt[8]{1}, \frac{1}{2} e^{i\pi} \sqrt[8]{1}), d_{16 \times 16}^E)$ | 203 |
| 4.16. | Cómputos del Concorde en $\mathcal{N}(K_{16}(e^{i\pi} \sqrt[8]{1}, \frac{1}{2} e^{i\pi} \sqrt[8]{1}), d_{16 \times 16}^E)$ | 204 |

Índice de cuadros

| | | |
|-------|--|-----|
| 2.1. | Formas, longitudes y sentido de las trayectorias reflexivas; $\beta = -1, n = 23$. | 83 |
| 2.2. | Recorridos reflexivos del viajante. Ejemplo 2.2.7 pág. 87, $n = 23, \beta = -\pi$. | 88 |
| 2.3. | Trayectorias cíclicas reflexivas. Ejemplo 2.2.8 de pág. 87, $n = 24, \beta = -\pi$. | 89 |
| 2.4. | Mín. TSP del 5-gono, ccw. en $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$. | 91 |
| 2.5. | Mín. TSP del 5-gono, cw. en $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$. | 91 |
| 2.6. | Máy. TSP en vértices del 5-gono, cw. $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3, \alpha_3 < \alpha_4$. | 92 |
| 2.7. | Máy. TSP del 5-gono, ccw. en $\alpha_1 > \alpha_2, \alpha_2 < \alpha_3, \alpha_3 > \alpha_4$. | 92 |
| 2.8. | Máy. TSP del 5-gono, cw. en $\alpha_1 < \alpha_2, \alpha_2 > \alpha_3, \alpha_3 > \alpha_4$. | 92 |
| 2.9. | Máy. TSP del 5-gono, ccw. en $\alpha_1 > \alpha_2, \alpha_2 < \alpha_3, \alpha_3 < \alpha_4$. | 93 |
| 2.10. | Máy. TSP del 5-gono, ccw. en $\alpha_1 < \alpha_2, \alpha_2 > \alpha_3, \alpha_3 < \alpha_4$. | 93 |
| 2.11. | Máy. TSP del 5-gono, ccw. en $\alpha_1 < \alpha_2, \alpha_2 < \alpha_3, \alpha_3 > \alpha_4$. | 93 |
| 2.12. | 6-gono: Longitudes hamiltonianas admisibles y no admisibles. | 101 |
| 2.13. | Mín. TSPs, e.g. 16-gono. | 115 |
| 2.14. | Camino del viajante de cada Máx. TSP en $\mathcal{N}(K_{23}(e^{i\pi} \sqrt[23]{1}), (d_{ij})_{23 \times 23})$. | 122 |
| 3.1. | \mathcal{C}_{Q-H}^m en $\mathcal{N}(K_{n=n_{impar}}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{n \times n}^E)$ | 167 |
| 3.2. | $\mathcal{C}_H^{n_{impar}}$ en $\mathcal{N}(K_{n=n_{impar}}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{n \times n}^E)$ | 168 |
| 4.1. | Parámetro estructural y longitudes hamiltonianas en 3-gonos acoplados. | 187 |
| 4.2. | $L(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4)$ en hamiltonianos de $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, r \sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$. | 188 |
| 4.3. | Spectrum de longitudes hamiltonianas en bi 3-gono regular. | 190 |
| 4.4. | Parámetro estructural y ángulos variacionales críticos. | 194 |
| 4.5. | Ranking de longitudes: Mín. TSP en $\mathcal{N}(K_{14}(e^{i\pi} \sqrt[7]{1}, \frac{1}{2} e^{i\pi} \sqrt[7]{1}), d_{14 \times 14}^E)$ | 202 |
| 4.6. | Ranking de longitudes: Máx. TSP en $\mathcal{N}(K_{N=2n=14}(e^{i\pi} \sqrt[7]{1}, \frac{1}{2} e^{i\pi} \sqrt[7]{1}), d_{N \times N}^E)$. | 203 |
| 4.7. | Ranking de longitudes: Mín. TSP en $\mathcal{N}(K_{16}(e^{i\pi} \sqrt[8]{1}, \frac{1}{2} e^{i\pi} \sqrt[8]{1}), d_{16 \times 16}^E)$. | 203 |
| 4.8. | Ranking de longitudes: Máx. TSP en $\mathcal{N}(K_{N=2n=16}(e^{i\pi} \sqrt[8]{1}, \frac{1}{2} e^{i\pi} \sqrt[8]{1}), d_{N \times N}^E)$. | 204 |
| 5.1. | Palíndromo alfabético G G A C C A G G . | 210 |
| 5.2. | Aritmética cohesiva del tribucle P_5 en la ribozima sunYL-13. | 211 |
| 5.3. | Tribucle P_5 en la ribozima sunYL-13. | 212 |
| 5.4. | BPPM: 1 ^{era} horquilla en la ribozima L-21 Sca I. | 213 |
| 5.5. | Config. desplegadas y bucles, $k_j = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ y $k_i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. | 214 |

Parte I
Preliminares

0.1. Contexto

Varias de las contribuciones de este trabajo de tesis giran entorno del término “hamiltoniano” por lo tanto es conveniente aclarar a priori el contexto teórico en el que esencialmente se utiliza aquí este adjetivo. Existen modelos hamiltonianos asociados al estudio de sistemas físicos, biofísicos y biológicos complejos desordenados que utilizan generalizaciones de los modelos propuestos por E. Ising y L. Onsager desde la Mecánica Estadística. En tales modelos el hamiltoniano se refiere a expresiones del tipo $\mathcal{H} = \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \vec{S}_i \vec{S}_j$,

en las que las componentes de J_{ij} son las interacciones entre espines, $\vec{S}_i = \pm 1$ si $i = \{1, 2, \dots, N\}$, propia de materiales (aleaciones) con estructuras intermedias a la ferromagnética y antiferromagnética, e.g. [Kirkpatrick, S. and Sherrington, D. (1978)], ecuación (1.1) en la pág. 17. Las reglas utilizadas en las conectividades J_{ij} varían desde un enfoque probabilístico, basado en la propiedades termodinámicas de los modelos de vidrios de espines, hasta aquellos definidos por semejanza con las sinapsis neu-

ronales, e.g. [Hopfield, J. J. (1982)], en las que $J_{\mu\nu} \equiv N^{-1} \sum_{i=1}^N S_i^\mu S_i^\nu$ con ν y μ variando en los enteros positivos menores e iguales a p , conocida como regla Hebbiana, e.g. ecuación (1.1) en [Kanter, I. and Sompolinsky, H.(1987)], cuyos autores destacan “... The network is based on a Hamiltonian version of the model of Personnaz et al.” Más precisamente, estos autores plantean un tensor de conectividades usando las propiedades de la matriz pseudoinversa de Moore-Penrose, así como una propuesta de asociación con la estructura de una única ecuación matricial $J\Sigma = F$, con $\Sigma = [\vec{S}^1, \dots, \vec{S}^p]$, ecuación (12) en [Personnaz, I., Guyon, I. and Dreyfus, G. (1986)]. Dinámica utilizada para correlacionar patrones de contactos de pares de aminoácidos en estructuras secundarias del plegamiento de una cadena de RNA en [Fernández, A.(1994)], [Fernández, A. and Belinky, A.(1994)]. Es importante destacar que desde las propiedades físicas y termodinámicas de los vidrios de espines se converge en modelos biológicos que interpretan la actividad sináptica de las neuronas en el conjunto de 2^N estados binarios, e.g. [Niel, B. I. and Verdiell, A. B. (1997a)], [Fernández, A.(1993)].

Sin embargo, en este trabajo de tesis el adjetivo hamiltoniano esta relacionado de manera específica al tratamiento de trayectorias hamiltonianas, cíclicas y no-cíclicas, por lo que en la siguiente sección se aclara el uso dado al término cada vez que aparece mencionado. Un hamiltoniano cíclico sin ponderar debe verificar las condiciones en (1) de la pág. 26 y un hamiltoniano no-cíclico sin ponderar debe cumplir 8 y 9, en la pág. 27. Es ilustrativo destacar que a través de la idea concebida por John J. Hopfield en sus trabajos [Hopfield, J. J. (1982)] y [Hopfield, J. J. (1984)], existen conexiones posibles para que los hamiltonianos de los modelos de Ising generalizados resulten estrategias de exploraciones de hamiltonianos ponderados, [Hopfield, J. J. and Tank, T. W. (1985)], [Haykin, S. (2000)], [Niel, B. I. and Verdiell, A. B. (1997b)], [Watts, D. J. (1999)].

0.2. Formulación

La formulación de los problemas que involucran trayectorias hamiltonianas requiere, una vez determinado el conjunto de puntos, de la selección de una métrica para ponderar las conexiones entre puntos. Si se trata de la distancia euclídea, la matriz sináptica es simétrica y sus componentes son las distancias entre pares de puntos. La exploración de los ciclos hamiltonianos, impone seleccionar aquellos que visitan una sola vez cada punto del conjunto y que regresan al punto de partida. En otras palabras, si se trata de un problema sobre n nodos, esto impone una secuencia $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_i \rightarrow P_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow P_n \rightarrow P_1$, con $P_i \neq P_{i+1}$ y $1 \leq i < n$, la que se pondera mediante la adición del valor métrico de cada conexión $P_i \rightarrow P_{i+1}$ constitutiva del tour. En el caso de los problemas hamiltonianos euclidianos la longitud total del ciclo es la suma de la distancia de cada trayecto $P_i \rightarrow P_{i+1}$. El número de ciclos posibles es del orden de $(n-1)!$ extremadamente grande aún en caso de que la cardinalidad del conjunto de nodos sea relativamente pequeña. Razón por la cual se tropieza inmediatamente con la imposibilidad de una exploración computacional exhaustiva en virtud del enorme tiempo computacional que dicha estrategia requeriría. Cada tour de un problema hamiltoniano de n nodos puede ser expresado mediante una matriz H de dimensión $n \times n$ cuya x -ésima fila describe la localización del x -ésimo punto de una sucesión admisible, naturalmente surge una representación matricial binaria, (1) y (2), de cada ciclo hamiltoniano.

$$\sum_{j=1}^n H_{x,j} = 1 \quad \text{si } x \in \{1, \dots, n\}. \quad (1)$$

$$\sum_{x=1}^n H_{x,j} = 1 \quad \text{si } j \in \{1, \dots, n\}. \quad (2)$$

Si $D = (D_{xy})_{n \times n}$ la matrix cuyas componentes son las distancias entre nodos, el elemento $D_{x,y}$ denota la distancia entre el punto x y el y , cuando los puntos x e y son adyacentes en un tour admisible, i.e., si $H_{x,i} = 1$ y $H_{y,i+1} = 1$ para cada i entonces $d_{x,y} = \sum_{i=1}^n D_{x,y} H_{x,i} (H_{y,i+1} + H_{y,i-1})$. Finalmente la longitud total del recorrido hamiltoniano se expresa según la ecuación (3).

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_x \sum_{y \neq x} D_{x,y} H_{x,i} (H_{y,i+1} + H_{y,i-1}). \quad (3)$$

Las estrategias de exploración más conocidas son (4), (5), (6) y (7). Si la métrica es la distancia entre puntos (4) implica la resolución exacta del Mín. TSP, i.e. determinar él o los ciclos hamiltonianos que realizan la mínima longitud de recorrido entre sus n puntos. En contraste (6) es la resolución del Máx. TSP, i.e. encontrar él o los ciclos hamiltonianos que realizan la máxima longitud de recorrido. Ambas estrategias coinciden con experiencias computacionales exhaustivas, normalmente no factibles, como ya se ha explicado. Mientras que las búsquedas (5) y (6) determinan, en general, soluciones que aproximan respectivamente las soluciones del Mín. TSP y Máx. TSP. La estrategia de búsqueda en (5) es por etapas consecutivas mediante la selección de una opción que

minimice la longitud ante cada segmento a integrar al ciclo hamiltoniano, es usualmente llamada estrategia greedy o según el contexto, estrategia del vecino más cercano. Por el contrario, la búsqueda siguiendo (7) implica la selección consecutiva de una conexión con máxima ponderación, es decir con longitud lo más larga posible. Tal estrategia se conoce como exploración antigreedy o estrategia secuencial de la torpeza.

$$\min_{\forall H} L = \text{Mín. TSP} \quad (4)$$

$$\min_{\forall H} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_l \min_k \sum_{k \neq l} D_{l,k} H_{l,i} (H_{k,i+1} + H_{k,i-1}) \quad (5)$$

$$\max_{\forall H} L = \text{Máx. TSP} \quad (6)$$

$$\max_{\forall H} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_l \max_k \sum_{k \neq l} D_{l,k} H_{l,i} (H_{k,i+1} + H_{k,i-1}) \quad (7)$$

Los más diversos casos de los problemas de ciclos hamiltonianos que engloban (4) y (6) son reconocidas respectivamente mediante los acrónimos Mín. TSP y Máx. TSP y provienen del llamado Traveling Salesman Problem, que plantea estudiar el recorrido cíclico de un viajante de comercio que debe visitar n ciudades y regresar a su punto de partida, sin la repetición de visitas, para asegurar su eficiencia o costo mínimo, [Niel, B. I. (2012b)]. Desde una concepción filosófica siempre es bueno reconocer la ineficiencia, extravagancia o torpeza de los procesos para asegurar que las evoluciones de los sistemas en sinergia realicen sus objetivos plenos. Es por ello que la bibliografía de los Maximum Cyclic and Non-Cyclic Hamiltonian Path Problems han sido objeto de innumerables investigaciones, [Lawler, E. L., Lenstra, J. K., Rinnooy Kan A. H. G. and Shmoys, D. B. (1985)], [Barvinok, A. I. et al. (2003)].

Los problemas de los hamiltonianos, cuando se visita una sola vez cada uno de los n puntos del conjunto pero sin regresar al punto inicial, se reconocen en la bibliografía como problemas de caminos hamiltonianos. En estos casos, la formulación de los problemas de los caminos hamiltonianos euclidianos del plano, puede efectuarse mediante la utilización de un vector de n componentes, \vec{p} y siendo C una matriz de dimensión $n \times 2$ con las coordenadas cartesianas de cada uno de los puntos, en este arreglo C_{j1} es la coordenada x del punto j , y C_{j2} es la coordenada y del mismo punto. Con $p_i = j$ se indica que el punto que originalmente estaba en la posición j en el arreglo C ahora está localizado en la posición i del trayecto. Se debe cumplir la condición (8) para que cada uno de los puntos en la lista original estén localizados en el camino.

$$p_i \neq p_j, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad i \neq j. \quad (8)$$

Los reordenamientos de los puntos se obtienen por las matrices de permutaciones $H(\vec{p})$, de dimensión $n \times n$ que se construye según

$$[H(\vec{p})]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } p_i = j \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (9)$$

La definición de $H(\vec{p})$, permite que $C' = H(\vec{p})C$ sea un arreglo de $n \times 2$ que contiene los mismas coordenadas planas de los n puntos pero ordenados según lo que dispone el vector \vec{p} . Una vez más es claro que $H(\vec{p})$ es de componentes binarias y que posee un solo uno en cada fila y en cada columna, i.e. $[H(\vec{p})]$ verifica (10).

$$\sum_{i=1}^n [H(\vec{p})]_{ij} = \sum_{j=1}^n [H(\vec{p})]_{ij} = 1, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}. \quad (10)$$

Utilizando las matrices $S = \frac{O^n}{n} = \frac{\vec{o}^n \vec{o}^{n\top}}{n}$, con $o_i^n = 1, i \in \{1, \dots, n\}$ y $U^n = I^n - \frac{O^n}{n}$ resulta que $H(\vec{p}) = U^n H(\vec{p}) U^n + S$, [Regalia, P. A. and Mitra, S. K. (1989)]. Ahora es necesario determinar una expresión que utilice $H(\vec{p})$ para calcular la longitud de un camino hamiltoniano especificado por el ordenamiento determinado en \vec{p} . Si \bar{D} es la matriz $n \times n$ cuyas componentes son los opuestos de la matriz D de distancia entre los puntos, i.e. $\bar{D}_{ij} = D_{ij} = -(\text{distancia entre los puntos } i \text{ y } j)$. Sea Q la matriz de $n \times n$ definida por $Q_{ij} = \delta_{j-1,i} + \delta_{j+1,i}, i, j \in \{1, \dots, n\}$, [Henderson, H. V. and Searle, S. R. (1981)].

La longitud del camino hamiltoniano que le corresponde al ordenamiento \vec{p} está dada por la siguiente expresión, [Gee, A. H., Aiyer, S. V. B. and Prager, R. W. (1993)].

$$L(\vec{p}) = -\frac{1}{2} \text{traza}[H(\vec{p})DH(\vec{p})^\top Q]. \quad (11)$$

Generalmente se buscan las soluciones de dos versiones dicotómicas de los problemas de los caminos hamiltonianos (12) y (13).

$$\text{Mín.}_{\vec{p}} L(\vec{p}) \quad (12)$$

$$\text{Máx.}_{\vec{p}} L(\vec{p}) \quad (13)$$

Cabe mencionar que las más variadas versiones de los problemas de caminos hamiltonianos análogas a (12) tienen asociado el acrónimo Mín. TSPPs, a partir de Minimum Traveling Salesman Problems. Mientras que las diversas versiones de (13) se reconocen por Máx. TSPPs, proveniente de Maximum Traveling Salesman Problems, [Niel, B. I. (2012a)].

Ejemplo 0.2.1 *Se analizan las soluciones de las diferentes estrategias para la matriz C , de orden $n \times 2$ de componentes $C_{j1} = \cos(\frac{2(j-1)\pi}{n})$, $C_{j2} = \sin(\frac{2(j-1)\pi}{n})$ y $j = 1, 2, \dots, n$.*

$2\pi \leq \sum_{(k,l) \in C_H} \text{long. cuerda}_{kl} = \sum_{(k,l) \in C_H} D_{k,l} \leq 2n$ para $C_H(\vec{p})$ un ciclo hamiltoniano arbitrario. Ambos criterios, (4) y (5), en búsqueda de la mínima longitud de recorrido hamiltoniana coinciden. A partir de las estructuras de las matrices de las distancias D del caso con $D_{\text{mín}} = D_{l, l+1}$, resulta que la eficiencia local consecutiva conlleva la eficiencia global.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_{l,l+1} & * & * & \cdots & D_{l,l+1} \\ D_{l,l+1} & 0 & D_{l,l+1} & * & \cdots & * \\ * & D_{l,l+1} & 0 & D_{l,l+1} & * & * \\ * & * & D_{l,l+1} & 0 & D_{l,l+1} & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{l,l+1} & * & * & * & D_{l,l+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \min_{\vec{p}} L(\vec{p}) &= \min_{\vec{p}} \frac{1}{2} \sum_{i,l} \min_k \sum_{k \neq l} D_{l,k} V_{l,i} (V_{k,i+1}(\vec{p}) + V_{k,i-1}(\vec{p})) = \\ &= \min_{\vec{p}} \frac{1}{2} \sum_{i,l} D_{l,l+1} V_{l,i} (V_{l+1,i+1}(\vec{p}) + V_{l+1,i-1}(\vec{p})) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_l D_{l,l+1} V_{l,l} (V_{l+1,l+1}(\vec{p}) + V_{l+1,l-1}(\vec{p})) = \sum_l D_{l,l+1} = \sum_l D_{1,2} = n \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \frac{2\pi}{n}}. \end{aligned}$$

Mientras que los criterios, (6) y (7), en búsqueda de la máxima longitud de recorrido hamiltoniana coinciden si n es impar. En estos casos las matrices de las distancias euclídeas D , con $D_{\max} = D_{l,l+\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor}$, permiten confirmar que la ineficiencia local consecutiva en estos casos conlleva la ineficiencia global.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & D_{\max} & D_{\max} & * & * & * \\ * & 0 & * & * & * & D_{\max} & D_{\max} & * & * \\ * & * & 0 & * & * & * & D_{\max} & D_{\max} & * \\ * & * & * & 0 & * & * & * & D_{\max} & D_{\max} \\ D_{\max} & * & * & * & 0 & * & * & * & D_{\max} \\ D_{\max} & D_{\max} & * & * & * & 0 & * & * & * \\ * & D_{\max} & D_{\max} & * & * & * & 0 & * & * \\ * & * & D_{\max} & D_{\max} & * & * & * & 0 & * \\ * & * & * & D_{\max} & D_{\max} & * & * & * & 0 \end{pmatrix}$$

$$\max_{\vec{p}} L(\vec{p}) = \max_{\vec{p}} \frac{1}{2} \sum_{i,l} \max_k \sum_{k \neq l} D_{l,k} V_{l,i} (V_{k,i+1}(\vec{p}) + V_{k,i-1}(\vec{p}))$$

Por lo tanto en los casos de imparidad resulta:

$$\max_{\vec{p}} L(\vec{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i,l} D_{l,l+\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor} V_{l,i} (V_{l+\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor, i+1}(\vec{p}) + V_{l+\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor, i-1}(\vec{p}))$$

y como

$$D_{\max} = D_{l,l+\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor} = D_{1,1+\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \frac{2\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor \pi}{2k+1}},$$

entonces

$$\max_{\vec{p}} L(\vec{p}) = n \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \frac{2\pi \lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor}{2k+1}}$$

En contraste, en caso de paridad las matrices de las distancias conectivas o matrices sinápticas para $n = 2k$ con $k \geq 3$ tienen las estructuras D , con las componentes más relevantes de valor $D_{\text{máx}} = 2$, $D_{aw} = \sqrt{2(1 - \cos(\pi - \frac{\pi}{k}))}$ y $D_{\text{mín}} = D_{l,l+1} = \sqrt{2(1 - \cos \frac{\pi}{k})}$. En estos casos, [Fekete, S. P., Meijer, H. R., Rohe, A. and Tietze, W. (2002)], $D_{\text{máx}}$ es realizada por pares de puntos diametralmente opuestos, D_{aw} por pares que son casi-diámetros y $D_{l,l+1}$ son los pares de vecinos lo más próximos posibles.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_{l,l+1} & * & * & D_{aw} & 2 & D_{aw} & * & * & D_{l,l+1} \\ D_{l,l+1} & 0 & D_{l,l+1} & * & * & D_{aw} & 2 & D_{aw} & * & * \\ * & D_{l,l+1} & 0 & D_{l,l+1} & * & * & D_{aw} & 2 & D_{aw} & * \\ * & * & D_{l,l+1} & 0 & D_{l,l+1} & * & * & D_{aw} & 2 & D_{aw} \\ D_{aw} & * & * & D_{l,l+1} & 0 & D_{l,l+1} & * & * & D_{aw} & 2 \\ 2 & D_{aw} & * & * & D_{l,l+1} & 0 & D_{l,l+1} & * & * & D_{aw} \\ D_{aw} & 2 & D_{aw} & * & * & D_{l,l+1} & 0 & D_{l,l+1} & * & * \\ * & D_{aw} & 2 & D_{aw} & * & * & D_{l,l+1} & 0 & D_{l,l+1} & * \\ * & * & D_{aw} & 2 & D_{aw} & * & * & D_{l,l+1} & 0 & D_{l,l+1} \\ D_{l,l+1} & * & * & D_{aw} & 2 & D_{aw} & * & * & D_{l,l+1} & 0 \end{pmatrix}$$

La evaluación en caso de paridad, $n = 2k$, siguiendo la búsqueda secuencial (7) resulta ser $L_{\approx \text{máx}} = k * 2 + (2k - (k + 1)) * \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos(\pi - \frac{\pi}{k})} + \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos(\frac{\pi}{k})}$ con $k \geq 3$. A pesar de la persecución local del fracaso no resulta ser la ponderación de máxima ineficiencia. Sin embargo la estrategia exhaustiva, (13), conduce a la longitud de recorrido $\text{máx}_{\vec{p}} L(\vec{p}) = 2 * 2 + (2k - 2) * \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos(\pi - \frac{\pi}{k})}$ con $k \geq 3$. En las secciones §2.3 y §2.5.1 se exhiben hamiltonianos euclídeos representantes que realizan los diferentes Máx.TSPPs según la cardinalidad del números de puntos.

0.3. Comunicaciones en Congresos Nacionales e Internacionales

1. Niel, B. I. Seminar at the Mathematical Sciences Department, January 1st 2000. University of Cincinnati, U.S.A. "On the necessity of implementing an Artificial Neural Network for Solving A Specific Traveling Salesman Problem".
2. [Niel, B. I. (2001)] The geometry of the Euclidean Hamiltonian trajectories on $\sqrt[n]{1}$ points. Actas del VI Congreso Dr. Antonio A. R. Monteiro, Bahía Blanca. Departamento de Matemática. Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur, 2003. (Full article at pg. 33-49, 2001). Autor-Expositor.
3. [Niel, B. I. (2002)] Hamilton path paradigms mirrored at the Fermat's Principle. Proceedings of the 4th International Conference On Modelling and Simulation. November 11-13, 2002. Victoria University, Melbourne. Australia. (Full article at pg. 132-138). Autor-Expositor.

Parte II
Hamilton vs Hamilton

Capítulo 1

Hamilton vs Hamilton

En este Capítulo conectamos dos áreas de investigación desarrolladas a partir de las contribuciones del matemático, físico y astrónomo irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805-1865). Hemos explicitado un nexo entre uno de sus postulados sobre *Geometría Óptica* y los itinerarios definidos a partir del *Icosian game*.

Hamilton postuló que los rayos luminosos no necesariamente minimizan el tiempo de recorrido de sus trayectorias, contradiciendo el Principio de Fermat, Fermat sostuvo, a partir de las experiencias de la refracciones de la luz de su época (1662), que la luz viajaba según las trayectorias que minimizaban el tiempo, es decir las braquistócronas, del griego brachistos “el más breve” y chronos “tiempo”.

Hamilton aseveró, [Hamilton, W. R. (1833)] : ... “In optics, for example, though the sum of the incident and reflected portions of the path of light, in a single ordinary reflection at a plane, is always the shortest of any, yet in reflexion at a curved mirror this economy is often violated. If an eye be placed in the interior but not at the centre of a reflecting hollow sphere, it may see itself reflected in two opposite points, of which one indeed is the nearest to it, but the other on the contrary is the furthest; so that of the two different paths of light, corresponding to these two opposite points, the one indeed is the shortest, but the other is the longest of any. In mathematical language, the integral called action, instead of being always a minimum, is often a maximum; and often it is neither the one nor the other: though it has always a certain *stationary* property,” ... “yet we ought not (I think) to retain the epithet *least*: but rather to adopt the alteration proposed above, and to speak, in mechanics and in optics, of the *Law of Stationary Action*”.

Otro legado de Hamilton es el *Icosian game*, juego que inventó en 1857 y que fue distribuido comercialmente como un tablero con orificios ubicados en los vértices de una figura dodecaédrica. El jugador debía insertar clavijas en dichos agujeros de tal manera que en el recorrido consecutivo de las respectivas inserciones se visitara una sola vez cada hueco y se finalizara en el punto de partida una vez que todas las clavijas -en número coincidente con el de orificios- fueran ubicadas y por lo tanto todos los orificios estuviesen ocupados. Por esta razón, todo ciclo con la condición de formar un itinerario o tour que pase una sóla vez por cada punto perteneciente a un conjunto finito de puntos fue pos-

teriormente llamado, en su honor “*Hamiltoniano*”. Este juego matemático originó, entre otros, un campo muy diverso de estudio y aplicaciones conocido como los Problemas del Viajante de Comercio, cuyos acrónimos TSP y TSPP son normalmente aceptados sin traducción desde las expresiones en inglés, Traveling Salesman Problems (TSPs) y Traveling Salesman Path Problems, (TSPPs).

Particularmente, en este Capítulo hemos analizado fenómenos teleológicos de los rayos geométricos y luminosos en diferentes geometrías, aceptando los postulados de la Geometría Óptica [Born, M., and Wolf, F. (1990)], para el concepto idealizado de rayo luminoso. Hemos probado que en determinadas geometrías planas espejadas los rayos luminosos, cuando obedecen la *Ley de Reflexión*, ocasionalmente pueden minimizar, maximizar y en ciertas circunstancias ni minimizan ni maximizan el tiempo insumido durante el recorrido o viaje. Hemos confirmado que los fenómenos naturales pueden ser eficientes, extravagantes e inclusive en ciertas oportunidades tibios - “*mild*”.

En los desarrollos mostraremos modelos variacionales sencillos en los que existen rayos luminosos cuyas trayectorias son máximos, o mínimos de la función del tiempo utilizado para recorrer el camino seguido por el rayo, pero también, que existen casos o situaciones de rayos luminosos cuyas trayectorias no corresponden al máximo ni al mínimo del tiempo insumido en sus respectivos viajes, sino a puntos estacionarios de sus funciones de propagación. Específicamente, lo hemos verificado en tres casos diferentes de la geometría de un virtual o ideal *Espejo Cuasi-Esférico* [Niel, B. I. (2001), Niel, B. I. (2002)]. El último modelo variacional aquí establecido se estudia en detalle en el Capítulo 2 donde confirmamos que las trayectorias Hamiltonianas Euclidianas Cíclicas conformadas por las curvas fronteras de los polígonos estrellados validan la *Ley de Reflexión* y son rayos luminosos en una geometría espejada cuasi-circular sobre las raíces n -ésimas de la unidad. En particular, las trayectorias Hamiltonianas reflexivas de máxima densidad contruídas sobre los vértices de un polígono regular de número impar de lados, a partir de estos desarrollos se presentan como únicas candidatas a resolver el Máx. TSP [Niel, B. I. (2001), Niel, B. I. (2002)] (Capítulo 2, §2.2.2 en la pág. 84).¹

Una vez explicitado el contexto histórico y el propósito de los desarrollos en este Capítulo, pasamos a describir los contenidos de cada una de las secciones que lo integran. En la Sección §1.2 se explica la metodología utilizada, sustentada en los principios del análisis matemático real y los modelos variacionales asumiendo las aproximaciones de la Geometría Óptica. La Sección §1.3 trata el *Problema de Heron*, mientras que en la Sección §1.4 se desarrolla un enfoque algebraico original de la *Ley de Snell*. Para ello resolvemos los polinomios de grado cuarto que permitirán detectar el punto en la interfase en el que el rayo luminoso realiza la braquistócrona cualquiera sea el conjunto de datos del problema; es decir, cualesquiera sean los puntos de partida y de llegada del rayo y las velocidades de propagación de los mismos. Obviamente se considera que los puntos de partida y llegada están ubicados en medios que tienen distintos índices de refracción.

¹**Palabras Claves:** Geometría Óptica, Braquistócrona, Caminos Hamiltonianos, Principio de Fermat, Principio de Hamilton, Polígonos estrellados, Polinomios de cuarto grado.

Mientras que el enfoque geométrico de que la “*Ley de Refracción*” satisface el Principio de Fermat [Sundar, B., Hamilton, A. C., and Courtial, J.(2009)] ha sido ampliamente divulgado y utiliza el Principio de Huygens para la justificación, e.g. Huygens’ Solution en [Tikhomirov, V. M. (1990)], pág. 22, Ley de Snel [Santaló, L. A. (1993)], pág. 61. En las secciones §1.5.1, §1.5.2 y §1.5.3 se analizan tres situaciones geométricas diferentes en el *Espejo Cuasi-Esférico* [Niel, B. I. (2002)]. Estos casos estudiados han originado las posteriores formulaciones de variadas versiones del Problema del Viajante de Comercio en las redes completamente conectadas con nodos en los vértices de los polígonos regulares. Simbolizadas por $\mathcal{N}(K_n(\sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ y estudiadas en los Capítulos 2, 3 y en la Sección 3.4.

Trabajos que requieren del despliegue de metodologías específicas en virtud de que las trayectorias extremales en estos TSPs no son coincidentes, en general, con trayectorias luminosas o reflexivas.

1.1. Hamilton de la Geometría Óptica a Hamilton en un Juego Hamiltoniano

Bajo las simplificaciones asumidas por las aproximaciones de la Geometría Óptica consideraremos que: “*Un rayo luminoso conecta dos puntos atravesando una trayectoria cuya función de propagación o tiempo de recorrido es estacionaria con respecto a las variaciones del camino*”. Confirmamos en las diferentes geometrías estudiadas, utilizando el cálculo diferencial, que los rayos luminosos pueden minimizar, maximizar o simplemente hacer estacionaria la función de su tiempo total de propagación con tiempos de viaje intermedios entre el mínimo y el máximo posibles de ser alcanzados por rayos geométricos no reflexivos. Esfuerzo teórico adicional nos ha permitido determinar analíticamente las trayectorias de los rayos luminosos en cada una de las circunstancias que hemos analizado.

1.2. Metodología Empleada

Se comienza considerando el Problema de Heron, la Ley de Snell y la reflexión en los casos del *Espejo Cuasi-Circular* por el siguiente procedimiento [Lemons, D. S. (1997)]: En primer lugar, describimos e ilustramos mediante representaciones mono o multi-paramétricas la familia de los caminos o trayectorias de los rayos geométricos. Cada rayo geométrico de la familia debe conectar los puntos inicial y final especificados y cada trayectoria geométrica posible será identificada, según lo imponga la geometría del modelo, por uno o varios de los valores del conjunto de parámetros geométricos. En segundo término, se determina la expresión analítica de la función de propagación de los rayos geométricos. Por último, se establece la condición necesaria de primer orden para óptimos de cada problema específico. Esto caracteriza o selecciona la trayectoria luminosa. En cada uno de los casos aquí tratados la diferencial total de segundo orden nos indicará si las soluciones -rayos luminosos- minimizan, maximizan o ni minimizan ni maximizan el tiempo total del

recorrido. Dado que se trata de resolver un problema de extremos locales de la función de propagación de los rayos geométricos[Miller, R. E. (2000)].

Cabe aclarar que el Problema de Heron y la Ley de Snell verifican el *Principio de Fermat* (i.e. \sim Braquistócrona \sim Máxima eficiencia \sim Proceso expedito).

1.3. Problema de Heron

Heron de Alejandría, invocando un principio de mínimo, resolvió el problema de la física óptica de un rayo, que comienza en $P_1 = (x_1, y_1)$ encima de un espejo plano, viaja en línea recta hasta el espejo plano, rebota y se refleja dirigiéndose en línea recta hasta llegar a $P_2 = (x_2, y_2)$.

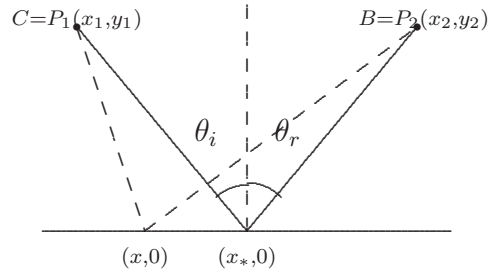


Figura 1.1: Problema de Heron.

Explicitamos aquí la matemática del método delineado en la Sección §1.2.

Construimos la función la función de propagación de los rayos geométricos suponiendo que $y_1 > 0$ e $y_2 > 0$ (1.1),

$$T(x) = \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}, \quad x_1 \leq x \leq x_2. \quad (1.1)$$

Igualando a cero la derivada primera $T'(x)$ obtenemos (1.2)

$$\frac{(x - x_1)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} = \frac{(x_2 - x)}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}. \quad (1.2)$$

La ecuación (1.2) en términos geométricos se escribe como:

$$\theta_i = \theta_r. \quad (1.3)$$

Los cálculos condujeron a la ecuación (1.3) conocida en óptica geométrica como la “Ley de Reflexión”: *el ángulo de incidencia que el rayo forma con la normal del espejo es igual al ángulo que el rayo reflejado conforma con dicha normal.*

La derivada segunda de $T(x)$ es positiva en todo punto, puesto que:

$$T''(x) = \frac{y_1^2}{[(x - x_1)^2 + y_1^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{y_2^2}{[(x_2 - x)^2 + y_2^2]^{\frac{3}{2}}} > 0. \quad (1.4)$$

Proposición 1.3.1 *El Problema de Heron se resuelve por un único rayo luminoso que viaja en tiempo mínimo, i.e. la trayectoria determinada es una braquistócrona.*

Demostración. $T'(x)$ es $C_{[x_1, x_2]}$, $T'(x_1) < 0$, $T'(x_2) > 0$, el Teorema de Bolzano establece la existencia de x_* en (x_1, x_2) tal que $T'(x_*) = 0$. Además, $T''(x) > 0 \forall x$, implica que $T'(x)$ es estrictamente creciente, por lo tanto x_* es la única abscisa estacionaria, de $T(x)$ en (x_1, x_2) , y por ser $T''(x_*) > 0$, x_* es el mínimo estacionario o relativo pero además es el mínimo absoluto en $[x_1, x_2]$. Obviamente es el mínimo absoluto y positivo del problema. ■

La abscisa x_* construye la braquistócrona, que consiste en los siguientes dos tramos lineales: “Parte desde el punto $P_1 = (x_1, y_1)$ en línea recta llega a la superficie del espejo plano en $P_\cap = (x_*, 0)$ y desde éste punto de rebote nuevamente en línea recta llega a $P_2 = (x_2, y_2)$.”

Observación 1.3.2 *La familia de rayos geométricos del Problema de Heron (Ver Figura 1.1 en la pág. 36) están condicionados a rebotar sobre la superficie especular plana una sola vez. Pues, en caso contrario la solución sería la conexión pitagórica -geodésica- del punto $P_1 = (x_1, y_1)$ al $P_2 = (x_2, y_2)$.*

1.3.1. Obtención de la braquistócrona por cálculos algebraicos

A continuación, se obtiene por medio de manipulaciones algebraicas, el punto en el que el rayo luminoso incide en la interfase espejada plana donde se verifica la *Ley de Reflexión*. Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación (1.2), lo que resulta en la ecuación cuadrática (1.5)

$$x^2(y_1^2 - y_2^2) - 2x(x_2y_1^2 - x_1y_2^2) + y_1^2x_2^2 - x_1^2y_2^2 = 0. \quad (1.5)$$

A partir de que $y_1 > 0$ e $y_2 > 0$, obtenemos las raíces $x_\cap = \frac{x_2y_1 + x_1y_2}{y_1 + y_2}$ y $x_{\not\cap} = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_1 - y_2}$.

La sustitución de $x_{\not\cap}$ en el numerador de (1.2) resulta en que $\text{Sign}(x_{\not\cap} - x_1) \neq \text{Sign}(x_2 - x_{\not\cap})$, entonces $x_{\not\cap}$, es una solución que debe descartarse del problema original (1.2), se originó como consecuencia del proceso de elevación al cuadrado, por lo tanto no es la solución que estamos buscando en (1.2) que sabemos que existe y es única, por lo tanto, el valor del parámetro del Problema de Heron es el determinado por (1.6).

$$x_\cap = \frac{x_2y_1 + x_1y_2}{y_1 + y_2}. \quad (1.6)$$

La braquistócrona está precisamente identificada: Parte de $P_1 = (x_1, y_1)$ en línea recta hasta $(\frac{x_2y_1 + x_1y_2}{y_1 + y_2}, 0)$ y desde este punto de rebote en la superficie del espejo plano nuevamente en línea recta llega a $P_2 = (x_2, y_2)$. ■

1.3.2. Obtención de la braquistócrona por razones geométricas

Un razonamiento distintivo del caso [Tikhomirov, V. M. (1990)], págs. 4-5, conduce a la determinación del valor del parámetro en el que la *Ley de Reflexión* se realiza mediante consideraciones geométricas.

Por razones de simplicidad, seleccionamos rayos geométricos, que comienzan en $(0, a)$, viajan en línea recta hasta la superficie azogada llegando a $(x, 0)$, rebotan en ella dirigiéndose al punto $(1, b)$. Esta trayectoria es un rayo luminoso cuando colisiona con la superficie espejada en $x_{\cap} = \frac{a}{a+b}$. Puesto, que en el espejo plano, la búsqueda de la braquistócrona es equivalente al hallazgo de la geodésica -pues el rayo viaja en un medio uniforme- entonces la trayectoria más corta se determina dibujando la línea recta entre $(0, -a)$ y $(1, b)$.

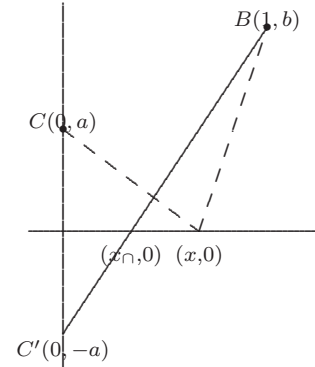


Figura 1.2: Enfoque Geométrico.

Claramente el Problema de Heron es exactamente equivalente a resolver el siguiente problema de minimización: Dada una recta y dos puntos en el plano que yacen en el mismo semiplano determínese el punto en la recta que minimiza la longitud entre el conjunto de trayectorias que comienzan en uno de dichos puntos llega a la recta y luego se dirige al otro punto. Minimizar la función (1.1) es exactamente minimizar $\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2 - x)^2 + (-y_2)^2}$, $x_1 \leq x \leq x_2$, (Ver Figura 1.2). La respuesta es pitagórica, entre el punto $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, -y_2)$, i.e. “As the crow flies”, la geodésica.

1.4. Ley de Snell

En breve, siguiendo la metodología descrita en la Sección §1.2, la función de propagación del rayo luminoso resulta ser (1.7). Se supone que la luz viaja en una línea recta en el material de la primer interfase a velocidad v_1 , desde el punto (x_1, y_1) hacia un punto en la interfase entre ambos medios $(x, 0)$. A partir del cual ingresa en el segundo material y con una velocidad v_2 se dirige hasta el punto (x_2, y_2) , (Ver la Figura 1.3 y su explicación en la pág. 39).

$$T(x) = \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}{v_2} \quad (1.7)$$

Mientras que su derivada primera es:

$$T'(x) = \frac{(x - x_1)}{v_1 \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} - \frac{(x_2 - x)}{v_2 \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}. \quad (1.8)$$

Esta última ecuación (1.8) igualada a cero conduce a la expresión de la *Ley de Snell* en términos geométricos y físicos (1.9). Normalmente conocida como la *Ley de la Refracción*,

[Tikhomirov, V. M. (1990)], pág. 123.

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}. \quad (1.9)$$

Otro de los hechos importantes de los rayos luminosos conocido en vida de Pierre de Fermat es que los rayos luminosos, cuando atraviesan un medio de menor densidad (e.g. aire) hacia uno de mayor densidad (e.g. agua), (i.e. refracción) cambian su dirección con respecto a la normal de la interfase. La Ley de Snell es derivable a partir del Principio de Fermat con la técnica delineada en la Sección §1.2. Por lo tanto, se buscan los rayos geométricos que yacen en el plano $x - y$, tales que conecten el punto $C = (x_1, y_1)$ con el $B = (x_2, y_2)$, viviendo en medios diferentes, de modo que se minimice el tiempo de viaje.

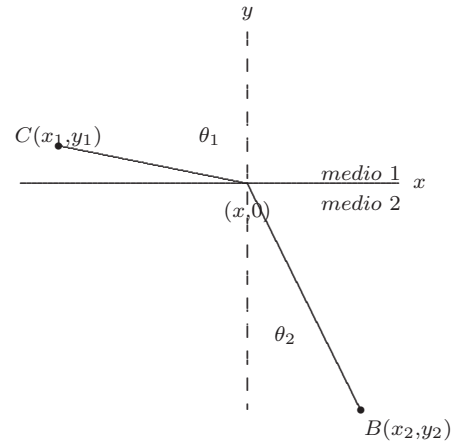


Figura 1.3: Ley de Snell.

Proposición 1.4.1 *La Ley de Snell, i.e. el problema de óptica geométrica (1.9), es resuelto por la braquistócrona.*

Demostración. La función $T(x)$, ecuación (1.7), es continua, $T(x) \rightarrow +\infty$, estrictamente creciente para $x \rightarrow \pm\infty$ y su segunda derivada es (1.10).

$$T''(x) = \frac{y_1^2}{v_1 ((x - x_1)^2 + y_1^2)^{3/2}} + \frac{y_2^2}{v_2 ((x_2 - x)^2 + y_2^2)^{3/2}} \quad (1.10)$$

$T''(x)$ es positiva para todo x , entonces $T(x)$ es una función convexa. Por lo tanto $T(x)$ tiene un mínimo relativo que es el mínimo absoluto. La abscisa donde el mínimo es realizado construye la trayectoria luminosa, i.e. la braquistócrona. ■

Observación 1.4.2 *$T'(x_1) < 0$ y $T'(x_2) > 0$ y de (1.10) es evidente que $T''(x) > 0$ entonces $T'(x)$ es una función estrictamente creciente y por el Teorema de Bolzano en $[x_1, x_2]$ existe una única raíz tal que $T'(x_*) = 0$. El Problema de Snell posee una única abscisa estacionaria. Ella es la encargada de realizar el Principio de Fermat ya que $T''(x)$ es $\forall x$ positiva.*

Elevando al cuadrado ambos lados de (1.9) obtenemos los siguientes polinomios de grado cuarto ²

²Si $v_1 = v_2$ se obtiene la ecuación cuadrática (1.5). Esto significa que el Problema de Heron es un caso particular de la Ley de Snell.

$$\begin{aligned}
 & (v_2^2 - v_1^2)x^4 + 2(x_1 + x_2)(v_1^2 - v_2^2)x^3 + \\
 & [(v_2^2 - v_1^2)(x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2) + v_2^2y_2^2 - v_1^2y_1^2]x^2 + \\
 & 2[(v_1^2 - v_2^2)(x_1x_2^2 + x_2x_1^2) + v_1^2x_2y_1^2 - v_2^2x_1y_2^2]x + \\
 & (v_2^2 - v_1^2)(x_1^2x_2^2) + y_2^2v_2^2x_1^2 - y_1^2v_1^2x_2^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Es bien conocido que las ecuaciones polinomiales de grado $n \leq 4$ se resuelven utilizando adiciones finitas, multiplicaciones, divisiones y extracciones de raíces.

1.4.1. Tratamiento de una interfase de ancho unitario

Ahora trataremos la situación particular en la cual $A = (0, a)$ y $B = (1, b)$, con $a > 0$, $b > 0$ y $v_2 \neq v_1$. En tal caso la ecuación algebraica (1.11) de cuarto grado se convierte en:

$$x^4 - 2x^3 + \left[\frac{v_2^2(b^2 + 1) - v_1^2(a^2 + 1)}{v_2^2 - v_1^2} \right] x^2 + 2 \left(\frac{v_1^2 a^2}{v_2^2 - v_1^2} \right) x - \left(\frac{v_1^2 a^2}{v_2^2 - v_1^2} \right) = 0 \tag{1.12}$$

Que reescribimos como:

$$p(x, c, c_1) = x^4 - 2x^3 + cx^2 + 2c_1x - c_1 = 0 \tag{1.13}$$

donde

$$c_1 = \frac{v_1^2 a^2}{v_2^2 - v_1^2} \tag{1.14}$$

$$c_2 = \frac{v_2^2 b^2}{v_2^2 - v_1^2} \tag{1.15}$$

y

$$c = c_2 - c_1 + 1. \tag{1.16}$$

A partir de (1.14) y (1.15) es claro que

$$\text{sign}(c_1) = \text{sign}(c_2). \tag{1.17}$$

Proposición 1.4.3 *Existe al menos una raíz de $p(x, c, c_1)$ en el intervalo abierto $(0, 1)$.*

Demostración. De (1.17) y como $p(0) = -c_1$, y $p(1) = c_2$, poseen distinto signo, el Teorema de Bolzano establece la existencia de $x_* \in (0, 1)$ tal que $p(x_*, c, c_1) = 0$. ■

Proposición 1.4.4 *Sea $T(x)$ la función de propagación del rayo luminoso correspondiente al caso particular en que los rayos parten del punto $A = (0, a)$ en el primer medio y llegan al punto $B = (1, b)$ en el segundo, con $a > 0$ y $b < 0$. Es decir,*

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(1-x)^2 + b^2}}{v_2},$$

$$T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1-x}{v_2 \sqrt{(1-x)^2 + b^2}}$$

y

$$T''(x) = \frac{a^2}{v_1 (a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{v_2 ((1-x)^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Entonces $T'(x)$ tiene una única raíz en el intervalo abierto $(0, 1)$.

Demostración. $T''(x)$ es positiva, por lo tanto $T'(x)$ es una función estrictamente creciente, además $T'(0) < 0$ y $T'(1) > 0$, entonces $T'(x)$ tiene una única raíz precisamente en el intervalo abierto $(0, 1)$. ■

Llamemos x_* a la única raíz de $T'(x)$ en $(0, 1)$, i.e., $T'(x_*) = 0$, pero

$$T'(x_*) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_*}{v_1 \sqrt{a^2 + x_*^2}} = \frac{1 - x_*}{v_2 \sqrt{(1 - x_*)^2 + b^2}}, \quad (1.18)$$

es decir, x_* es una raíz de

$$\frac{x_*^2}{(v_1)^2 (a^2 + x_*^2)} = \frac{(1 - x_*)^2}{(v_2)^2 [(1 - x_*)^2 + b^2]}, \quad (1.19)$$

y en consecuencia, es una raíz de $p(x)$ en el intervalo $(0, 1)$:

$$p(x_*) = 0, \quad x_* \in (0, 1).$$

Por otra parte, $p(\tilde{x}_*) = 0 \not\Leftrightarrow T'(\tilde{x}_*) = 0$, sin embargo

$$p(\tilde{x}_*) = 0 \Leftrightarrow \frac{|\tilde{x}_*|}{v_1 \sqrt{a^2 + \tilde{x}_*^2}} = \frac{|1 - \tilde{x}_*|}{v_2 \sqrt{(1 - \tilde{x}_*)^2 + b^2}} \quad (1.20)$$

Por lo tanto:

- Si, $\tilde{x}_* < 0$

$$p(\tilde{x}_*) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\tilde{x}_*}{v_1 \sqrt{a^2 + \tilde{x}_*^2}} = \frac{1 - \tilde{x}_*}{v_2 \sqrt{(1 - \tilde{x}_*)^2 + b^2}}$$

- Si $0 < \tilde{x}_* < 1$

$$p(\tilde{x}_*) = 0 \Leftrightarrow \frac{\tilde{x}_*}{v_1 \sqrt{a^2 + \tilde{x}_*^2}} = \frac{1 - \tilde{x}_*}{v_2 \sqrt{(1 - \tilde{x}_*)^2 + b^2}}$$

- Si $\tilde{x}_* > 1$

$$p(\tilde{x}_*) = 0 \Leftrightarrow \frac{\tilde{x}_*}{v_1 \sqrt{a^2 + \tilde{x}_*^2}} = \frac{-(1 - \tilde{x}_*)}{v_2 \sqrt{(1 - \tilde{x}_*)^2 + b^2}}.$$

En síntesis:

$$\text{Si } 0 < \tilde{x}_* < 1, \quad p(\tilde{x}_*) = 0 \Leftrightarrow T'(\tilde{x}_*) = 0$$

$$\text{Si } \tilde{x}_* \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty),$$

$$p(\tilde{x}_*) = 0 \Leftrightarrow \frac{\tilde{x}_*}{v_1 \sqrt{a^2 + \tilde{x}_*^2}} = -\frac{(1 - \tilde{x}_*)}{v_2 \sqrt{(1 - \tilde{x}_*)^2 + b^2}}, \text{ por lo tanto } T'(\tilde{x}_*) \neq 0. \quad (1.21)$$

Teorema 1.4.5 Si $x_* \in (0, 1)$ y $p(x_*) = 0$, entonces $T'(x_*) = 0$.

Demostración. Consecuencia inmediata de la Proposición 1.4.4 y de las consideraciones en (1.21). ■

Nota 1.4.6 En otras palabras, la ecuación polinomial $p(x, c, c_1) = 0$ tiene una única raíz en el intervalo $(0, 1)$ la cual es la solución de la Ley de Snell.

1.4.2. Determinando la braquistócrona en una interfase de ancho unitario

Obtenemos las raíces de (1.13) por el método de Ferrari y la fórmula de Cardan [Uspensky, J. V. (1948)], esto nos permite determinar el punto que minimiza la función de propagación luminosa (1.7). A continuación, teniendo en cuenta el Teorema 1.4.5 se determina la braquistócrona del Problema de Snell en una interfase unitaria.

Las cuatro raíces, para las condiciones de la *Ley de Snell* de la Sección 1.4.1, son:

$$\begin{aligned}
 x_1(c, c_1, c_2) &= \frac{1 + \sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)}}{2} + \frac{\sqrt{(1 + \sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)})^2 - 2 \left[y_r(c, c_1, c_2) + \frac{(2c_1 + y_r(c, c_1, c_2))}{\sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)}} \right]}}{2} \\
 x_2(c, c_1, c_2) &= \frac{1 + \sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)}}{2} - \frac{\sqrt{(1 + \sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)})^2 - 2 \left[y_r(c, c_1, c_2) + \frac{(2c_1 + y_r(c, c_1, c_2))}{\sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)}} \right]}}{2} \\
 x_3(c, c_1, c_2) &= \frac{1 - \sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)}}{2} + \frac{\sqrt{(\sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)} - 1)^2 - 2 \left[y_r(c, c_1, c_2) - \frac{(2c_1 + y_r(c, c_1, c_2))}{\sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)}} \right]}}{2} \\
 x_4(c, c_1, c_2) &= \frac{1 - \sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)}}{2} - \frac{\sqrt{(\sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)} - 1)^2 - 2 \left[y_r(c, c_1, c_2) - \frac{(2c_1 + y_r(c, c_1, c_2))}{\sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)}} \right]}}{2}
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Donde $y_r(c, c_1, c_2)$ es una de las raíces de la ecuación cúbica (1.23). [Uspensky, J. V. (1948)] Cap. V, §2 y §6; [Rey Pastor, J. et al.] Cap. IV, §3 y §4.

$$y^3 - cy^2 - 4c_1c_2 = 0. \tag{1.23}$$

Con la sustitución $y = z + \frac{c}{3}$ se elimina el factor cuadrático, y resulta (1.24).

$$z^3 - \frac{c^2}{3}z - 4c_1c_2 - 2\frac{c^3}{27} = 0. \tag{1.24}$$

Retomando la cuestión de obtener las raíces de la ecuación (1.13); con las constantes c_1 , c_2 y c verificando las condiciones (1.14), (1.15), (1.16) y (1.17); seleccionamos una de las raíces de la ecuación cúbica (1.23) que, de acuerdo al signo del discriminante $\Delta = 16c_1c_2(c^3 + 27c_1c_2)$ de (1.24), adopta la forma que corresponda, de las que se indican a continuación:

- $\Delta > 0$, i.e. si $c > -3\sqrt[3]{c_1c_2} \rightarrow$

$$y_r(c, c_1, c_2) = \sqrt[3]{\frac{c^3}{27} + 2c_1c_2 + \frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{c_1c_2(c^3 + 27c_1c_2)}} + \sqrt[3]{\frac{c^3}{27} + 2c_1c_2 - \frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{c_1c_2(c^3 + 27c_1c_2)}} + \frac{c}{3} \tag{1.25}$$

- $\Delta = 0$, i.e. si $c = -3\sqrt[3]{c_1c_2}, \rightarrow$

$$y_r(c, c_1, c_2) = 2\sqrt[3]{c_1c_2} + \frac{c}{3} \tag{1.26}$$

- $\Delta < 0^3$, i.e. si $c < -3\sqrt[3]{c_1c_2} \rightarrow$

$$y_r(c, \phi) = \frac{|c|}{3} \left(2 \cos \left(\frac{\phi}{3} \right) - 1 \right) \quad (1.27)$$

y siendo ϕ determinado por

$$\tan \phi = \frac{2\sqrt{27}\sqrt{-c_1c_2(c^3 + 27c_1c_2)}}{c^3 + 54c_1c_2} \quad \text{o por} \quad \cos \phi = \frac{c^3 + 54c_1c_2}{|c|^3}. \quad (1.28)$$

Caso en el que si $-(c^3 + 54c_1c_2) > 0$, el ángulo ϕ pertenece al segundo cuadrante, y mientras que si $-(c^3 + 54c_1c_2) < 0$, ϕ pertenecerá al primer cuadrante. En la primera situación $-\infty < c < -3\sqrt[3]{2c_1c_2}$ y en la segunda circunstancia $-3\sqrt[3]{2c_1c_2} < c < -3\sqrt[3]{c_1c_2}$.

■

Observación 1.4.7 $y_r(c, c_1, c_2) \neq c - 1$ puesto que en caso contrario se contradice la condición (1.17).

Observación 1.4.8 En el caso $\Delta = 0$, i.e. si $c = -3\sqrt[3]{c_1c_2}$, las otras dos raíces de la ecuación cúbica (1.24) coinciden en la raíz doble $z_*(c, c_1, c_2) = -\sqrt[3]{c_1c_2}$, esta por lo tanto podría seleccionarse como solución de la ecuación cúbica para ser utilizada en el método propuesto por Ferrari a (1.29).

$$y_r(c, c_1, c_2) = -\sqrt[3]{c_1c_2} + \frac{c}{3}. \quad (1.29)$$

1.4.3. Contribuciones auxiliares

Aquí, proponemos una técnica que permite determinar a (1.22) como la única respuesta del *Problema de Snell*.

Si es $c = -3\sqrt[3]{c_1c_2}$ y $y_r(c, c_1, c_2) = \sqrt[3]{c_1c_2} > 0$, estos datos determinan las siguientes cotas

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{1 - c + y_r}}{2} &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt[3]{c_1c_2}}}{2} > 1 \\ \frac{\sqrt{1 - c + y_r} - 1}{2} &= \frac{\sqrt{1 + 4\sqrt[3]{c_1c_2}} - 1}{2} > 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

que permiten reescribir (1.22) de la siguiente manera:

³El caso $\Delta < 0$ se conoce como “casus irreducibilis” porque en tal situación se deben obtener una de las tres raíces reales de la ecuación cúbica (1.24), es imposible hacerlo mediante operaciones racionales y radicaciones en un número finito de veces, pues involucra las determinación de raíces cúbicas de números complejos. Es necesario calcularlas trigonométricamente, es decir, recurrir a funciones trascendentes.

$$\begin{aligned}
 \frac{2x_1}{1 + \sqrt{1-c+y_r}} &= 1 + \sqrt{1 - \frac{2y_r}{(1 + \sqrt{1-c+y_r})^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-c+y_r}}\right) - \frac{4c_1}{(1 + \sqrt{1-c+y_r})^2 \sqrt{1-c+y_r}}} \\
 \frac{2x_2}{1 + \sqrt{1-c+y_r}} &= 1 - \sqrt{1 - \frac{2y_r}{(1 + \sqrt{1-c+y_r})^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-c+y_r}}\right) - \frac{4c_1}{(1 + \sqrt{1-c+y_r})^2 \sqrt{1-c+y_r}}} \\
 \frac{2x_3}{\sqrt{1-c+y_r}-1} &= -1 + \sqrt{1 + \frac{2y_r}{(\sqrt{1-c+y_r}-1)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-c+y_r}} - 1\right) + \frac{4c_1}{\sqrt{1-c+y_r}(\sqrt{1-c+y_r}-1)^2}} \\
 \frac{2x_4}{\sqrt{1-c+y_r}-1} &= -1 - \sqrt{1 + \frac{2y_r}{(\sqrt{1-c+y_r}-1)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-c+y_r}} - 1\right) + \frac{4c_1}{\sqrt{1-c+y_r}(\sqrt{1-c+y_r}-1)^2}}.
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Aquí existe la relación

$$-3\sqrt[3]{c_1 c_2} = c_2 - c_1 + 1, \tag{1.32}$$

que al sustituir $c_2 = t^3$ se expresa como

$$t^3 + 3\sqrt[3]{c_1} t + 1 - c_1 = 0. \tag{1.33}$$

- $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. La Regla de Descartes aplicada a (1.13), junto con el Teorema 1.4.5, establece que hay dos posibilidades para la raíces de la ecuación (1.13): Existen tres raíces positivas y una negativa, o bien una raíz negativa, una positiva y dos complejas conjugadas. Demostramos que x_3 y x_4 son números reales. Si x_3 y x_4 pertenecen a \mathbb{R} y x_1 , x_2 pertenecen a \mathbb{C} , entonces de (1.31) x_4 es una raíz negativa y x_3 debe ser positiva según la Regla de Descartes. Finalmente, el *Teorema 1.4.5* debe cumplirse, lo que selecciona x_3 como la solución de la *Proposición 1.4.1*. Si las cuatro raíces son reales, de (1.31) x_4 es una raíz negativa garantizada por la Regla de Descartes, y las tres restantes deben ser positivas, x_1 es mayor o igual que uno, luego la selección final debe estar entre x_2 y x_3 .
- $c_1 < 0$, $c_2 < 0$. También aquí la Regla de Descartes aplicada a (1.13), junto con el Teorema 1.4.5, establece que hay dos posibilidades para las cuatro raíces: Cuatro raíces reales, con dos negativas y dos positivas, o bien que existan dos raíces reales positivas y dos complejas conjugadas. En la primer situación $x_1 > 1$, $x_4 < 0$, por lo cual las raíces postuladas serían x_2 o x_3 . Confirmamos que la nominación corresponde a x_2 . Para x_3 y x_4 en \mathbb{C} , la Regla de Descartes establece que $x_1 > 1$ y x_2 positiva, en consecuencia esta es la que soluciona el problema. Es indudable que suponer a x_1 y x_2 en \mathbb{C} con x_3 y x_4 en \mathbb{R} es una situación que contradice lo establecido por la Regla de Descartes.

Ejemplo 1.4.9 Dados $c_1 = \frac{5-3\sqrt{3}}{4}$, $c_2 = \frac{1}{2(5-3\sqrt{3})}$, entonces resultan $c = -\frac{3}{2}$ e $y_r = \frac{1}{2}$. Situación de discriminante nulo $\Delta = 0$, en la que las cuatro raíces de (1.13) son reales. De manera concreta $x_3 = x_4 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, raíz doble real negativa. Mientras que x_1 y x_2 son reales positivas, una de ellas mayor que la unidad, $x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{15-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}$ y la otra $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{15-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} \approx 0,314521$ la que realiza la braquistócrona del caso.

El “casus irreducibilis $c < -3\sqrt[3]{c_1c_2}$ ”, $c = \sqrt[3]{2}(-3\sqrt[3]{c_1c_2})$. La resolvente puede escogerse como $y_r(c, c_1, c_2) = -\sqrt[3]{2c_1c_2}$. Bajo la restricción

$$-3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{c_1c_2} = c_2 - c_1 + 1. \quad (1.34)$$

- $c_1 > 0, c_2 > 0 \rightarrow c_1 > 1$. x_3 y $x_4 \notin \mathbb{C}$. Si x_1 y $x_2 \in \mathbb{C}$, la solución es x_3 . Si x_1 y $x_2 \in \mathbb{R}$, entonces la solución debe encontrarse entre x_2 y x_3 .
- $c_1 < 0, c_2 < 0$ x_1 y $x_2 \notin \mathbb{C}$. Si x_1 y $x_2 \in \mathbb{R}$, entonces $x_1 > 1$ y esto obliga a que x_2 sea positiva. Si $x_4 < 0, x_1 > 1$ permanece la incertidumbre respecto a los signos de x_2 y x_3 . Se demuestra que en este caso $x_2 < 0$, y que x_3 resulta ser la solución del problema.

Proposición 1.4.10 *En el “casus irreducibilis”, $\Delta < 0$, es decir si c pertenece al intervalo $(-\infty, -3\sqrt[3]{c_1c_2})$, resulta ser $y_r(c, \phi) > 0$.*

Demostración. Directa desde las ecuaciones (1.27) y (1.28) ya que $\cos\left(\frac{\phi}{3}\right) > \frac{1}{2}$. ■

De $y_r(c, \phi) > 0$, y c tal que $c < -3\sqrt[3]{c_1c_2}$ el valor $\sqrt{y_r + 1 - c}$ vive en \mathbb{R} , en consecuencia resulta

$$\frac{1 + \sqrt{1 - c + y_r}}{2} > 1$$

$$\frac{\sqrt{1 - c + y_r} - 1}{2} > 0 \quad (1.35)$$

entonces las ecuaciones (1.22) pueden ser reescritas como (1.31), bajo (1.17) la predicción es análoga a la del caso previo para $c = -3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{c_1c_2}$.

Proposición 1.4.11 *En el “casus irreducibilis”, c en $(-\infty, -3\sqrt[3]{c_1c_2})$:*

Si $c_1 > 0, c_2 > 0$. La Regla de Descartes, junto con el Teorema 1.4.5, aplicados a la ecuación (1.13) conduce a dos situaciones: existen tres raíces positivas y una negativa o bien, una raíz positiva, una negativa y dos complejas conjugadas. De (1.31) es claro que x_3 y x_4 no pertenecen a \mathbb{C} , entonces x_3 y x_4 pertenecen a \mathbb{R} , e indudablemente $x_4 < 0$ y x_3 debe ser positiva. Si suponemos que x_1 y x_2 pertenecen a \mathbb{C} , la solución de la Proposición 1.4.4 resulta ser x_3 . Alternativamente, si se supone que x_1 y x_2 pertenece a \mathbb{R} , de (1.31), es claro que $x_4 < 0, x_1 > 1$, por lo que la solución debe ser x_2 o bien x_3 .

Si $c_1 < 0, c_2 < 0$. También en este caso la Regla de Descartes y el Teorema 1.4.5 señalan dos alternativas para la ecuación (1.13): existen dos raíces positivas y dos complejas conjugadas, o bien cuatro raíces reales, dos positivas y dos negativas. Una vez más, si se tiene en cuenta que y_r y c_1 son negativos, de (1.31) obtenemos que x_1 y x_2 no están en \mathbb{C} , entonces son reales, y además $x_1 > 1$, entonces necesariamente x_2 es

positiva y por lo tanto la solución buscada. En la segunda alternativa, $x_4 < 0$, $x_1 > 1$ pero hay incertidumbre acerca de los signos de x_2 y x_3 . Probamos que $x_2 < 0$, entonces x_3 resulta ser la solución del problema. ■

1.4.4. Caracterización de $p(x, c, c_1)$

La caracterización de los polinomios de cuarto grado en (1.36)

$$p(x, c_1, c_2, c) = x^4 - 2x^3 + cx^2 + 2c_1x - c_1 \quad (1.36)$$

$$p'''(x) = 24\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad (1.37)$$

$p'''(x) = 0$ establece que en $x = \frac{1}{2}$, $p'(x, c)$ cambia de cóncava a convexa.

$$p''(x, c) = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (2c - 3) \quad (1.38)$$

$i_1)$ Si $c \geq \frac{3}{2} \Rightarrow p(x, c_1, c_2, c)$ es convexa.

$i_2)$ Si $c < \frac{3}{2} \Rightarrow p(x, c_1, c_2, c)$ cambia su concavidad en:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{6-4c}\right); \alpha_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{6-4c}\right), \text{ por lo tanto}$$

$$p''(x, c) = 12\left[x - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{6-4c}\right)\right]\left[x - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{6-4c}\right)\right].$$

Luego, $p(x, c_1, c_2, c)$ es cóncava en (α_1, α_2) y convexa en $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, +\infty)$, con las siguientes peculiaridades:

$i_{21})$ Si $c < 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 < 0 \\ \alpha_2 > 1 \end{cases} \Rightarrow p(x, c_1, c_2, c)$ es cóncava en $(0, 1)$.

$i_{22})$ Si $c = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow p(x, c_1, c_2, c)$ es cóncava en $(0, 1)$.

$i_{23})$ Si $0 < c < \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 > 0 \\ \alpha_1 < \alpha_2 \\ \alpha_2 < 1 \end{cases} \Rightarrow p(x, c_1, c_2, c)$ cambia de convexa en $(0, \alpha_1)$ es cóncava en (α_1, α_2) y de nuevo a convexa en $(\alpha_2, 1)$.

La ecuación cuadrática $p''(x, c) = 0$ distingue en $\alpha_1(c)$ y $\alpha_2(c)$, el máximo relativo y el mínimo relativo de $p'(x, c, c_1)$, respectivamente.

Ahora, analizamos toda la información en $p'(x, c, c_1)$:

$$p'(x, c, c_1) = 4x^3 - 6x^2 + 2cx + 2c_1 \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} p'(0, c, c_1) &= 2c_1 \\ p'(\alpha_1(c), c, c_1) &= (c_1 + c_2) + \left(1 - \frac{2c}{3}\right)^{3/2} \\ p'(\frac{1}{2}, c, c_1) &= c_1 + c_2 \\ p'(\alpha_2(c), c, c_1) &= (c_1 + c_2) - \left(1 - \frac{2c}{3}\right)^{3/2} \\ p'(1, c, c_1) &= 2c_2 \end{aligned} \quad (1.40)$$

Finalmente, consideramos ciertos detalles específicos de $p(x, c, c_1, c_2)$:

$$\begin{aligned} p(x, c, c_1) &= x^4 - 2x^3 + cx^2 + 2c_1x - c_1 \\ p(0, c, c_1) &= -c_1 \\ p(\frac{1}{2}, c, c_1) &= \frac{1}{4}(c - \frac{3}{4}) \\ p(1, c, c_1) &= c_2 \\ p(\alpha_1(c), c, c_1) &= -\frac{\sqrt{6-4c}}{2\sqrt{6}}(c_1 + c_2) - \frac{5}{36} \left(c - \frac{3}{5}(4 - \sqrt{6})\right) \left(c - \frac{3}{5}(4 + \sqrt{6})\right) \\ p(\alpha_2(c), c, c_1) &= \frac{\sqrt{6-4c}}{2\sqrt{6}}(c_1 + c_2) - \frac{5}{36} (c - \frac{3}{5}(4 + \sqrt{6}))(c - \frac{3}{5}(4 - \sqrt{6})) \end{aligned} \quad (1.41)$$

Proposición 1.4.12 *La trayectorias luminosas -braquistócronas- de la Ley de Snell se obtienen en la abscisa $x_* = \frac{1}{2}$ para todas las constantes admisibles $c_1 = \frac{v_1^2 a^2}{v_2^2 - v_1^2}$ y $c_2 = \frac{v_1^2 b^2}{v_2^2 - v_1^2}$ bajo la restricción $-\frac{1}{4} = c_2 - c_1$.*

■

Proposición 1.4.13 *El Teorema 1.4.5, los ítems $i_1)$ e $i_{23})$ indicados en la pág. 46, y la Regla de Descartes determinan que $p(x, 0) < c < +\infty, c_1 > 0)$ tiene una única raíz positiva, una única raíz negativa y un par imaginarias conjugadas. Mientras que $p(x, 0) < c < +\infty, c_1 < 0)$ tiene dos raíces positivas y un par de imaginarias conjugadas.*

■

1.4.5. Resolución del caso palíndromo

Proposición 1.4.14 *Si $c_1 = -1$ la ecuación (1.13) se reduce a la siguiente ecuación de cuarto grado, i.e. el palíndromo (1.42).*

$$x^4 - 2x^3 + cx^2 - 2x + 1 = 0, \quad c < 2. \quad (1.42)$$

Cuyas cuatro raíces son, [Christianson, B. (1991)]:

$$x_{1,3} = \frac{1 + \sqrt{3-c}}{2} \pm \frac{\sqrt{(1 + \sqrt{3-c})^2 - 4}}{2}$$

$$x_{2,4} = \frac{1 - \sqrt{3-c}}{2} \pm \frac{\sqrt{(1 - \sqrt{3-c})^2 - 4}}{2}.$$
(1.43)

La braquistócrona del Problema de Snell es realizada por x_3 .

Demostración.

Las siguientes reescrituras de las cuatro raíces:

$$x_{1,3} = \frac{1 + \sqrt{3-c}}{2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{(1 + \sqrt{3-c})^2}} \right\}$$

$$x_{2,4} = \frac{1 - \sqrt{3-c}}{2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{(1 - \sqrt{3-c})^2}} \right\},$$

las identidades $\frac{1 + \sqrt{3-c}}{2} > 1$, $\frac{1 - \sqrt{3-c}}{2} < 0$ y la Regla de Descartes permite la selección de x_3 , como aquella raíz que construye la trayectoria luminosa. ■

1.4.6. Solución en una interfase de ancho arbitrario

La *Ley de Refracción* en una interfase de ancho arbitrario “ α ” no conlleva cambios substanciales en su formulación, como se explicita a continuación, siguiendo el procedimiento establecido en la Sección (1.1) :

$$T(x, \alpha) = \frac{\sqrt{\tilde{a}^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(\alpha - x)^2 + \tilde{b}^2}}{v_2}$$
(1.44)

$$T'(x, \alpha) = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + \tilde{a}^2}} - \frac{\alpha - x}{v_2 \sqrt{(\alpha - x)^2 + \tilde{b}^2}}$$
(1.45)

El punto estacionario debe obtenerse de la resolución de la siguiente ecuación polinomial de cuarto grado :

$$x^4 - 2\alpha x^3 + \left(\alpha^2 + \frac{v_2^2 \tilde{b}^2 - v_1^2 \tilde{a}^2}{v_2^2 - v_1^2} \right) x^2 + 2\alpha \frac{\tilde{a}^2}{v_2^2 - v_1^2} x - \alpha^2 \frac{\tilde{a}^2}{v_2^2 - v_1^2} = 0$$
(1.46)

Si \bar{x} denota la solución de (1.12), i.e., la refracción en una interfase de ancho unitario, proponiendo $\alpha \bar{x}$ como la solución del Problema general de Snell (1.44), ya que la geometría del problema sugiere que una contracción o expansión de la interfase se corresponderá con valores proporcionales en a y b .

Entonces, al reemplazar $\alpha \bar{x}$ en (1.46) obtenemos:

$$\alpha \bar{x}^4 - 2\alpha^4 \bar{x}^3 + \alpha^4 \bar{x}^2 + \alpha^2 \left(\frac{v_2^2 \tilde{b}^2 - v_1^2 \tilde{a}^2}{v_2^2 - v_1^2} \right) \bar{x}^2 + 2 \frac{\tilde{a}^2 \alpha^2}{v_2^2 - v_1^2} \bar{x} - \frac{\alpha^2 \tilde{a}^2}{v_2^2 - v_1^2}. \quad (1.47)$$

Lo que requiere la selección de

$$\begin{cases} \tilde{a} =: \alpha a \\ \tilde{b} =: \alpha b \end{cases} \quad (1.48)$$

con la finalidad de hacer nula (1.47) mientras \bar{x} satisface (1.12)

$$\alpha^4 \left(\bar{x}^4 - 2\bar{x}^3 + \bar{x}^2 \left(1 + \frac{v_2^2 b^2 - v_1^2 a^2}{v_2^2 - v_1^2} \right) + 2 \frac{a^2}{v_2^2 - v_1^2} \bar{x} - \frac{a^2}{v_2^2 - v_1^2} \right) = \quad (1.49)$$

$$\alpha^4 (\bar{x}^4 - 2\bar{x}^3 + \bar{x}^2 (c_2 - c_1 + 1) + 2c_1 \bar{x} - c_1) = \alpha^4 0 = 0.$$

Se ha probado, por lo tanto, la siguiente afirmación :

Teorema 1.4.15 *Dadas constantes positivas α , a y \tilde{a} y constantes negativas b y \tilde{b} , la braquistócrona entre los puntos $P_1(0, \tilde{a})$ y $P_2(\alpha, \tilde{b})$ con velocidades v_1 en el medio que contiene a P_1 y v_2 en el medio que contiene a P_2 se determina a partir de la braquistócrona encontrada en el mismo contexto pero con $P_1(0, a)$, $P_2(\alpha, b)$. De manera precisa, si el tiempo mínimo en la interfase unitaria (1.12) es realizado en \bar{x} , entonces en $\alpha \bar{x}$ el mínimo absoluto es alcanzado en cualquier interfase de ancho arbitrario con $P_1(0, \alpha a)$ y $P_2(\alpha, \alpha b)$ como puntos extremos.*

■

1.4.7. Refracciones sucesivas: Braquistócrona.

Descartes, Fermat y Snell, entre otros, sustentados en experimentos ópticos de la época asumían que cuando la luz atraviesa capas yuxtapuestas de medios no homogéneos, cuanto más denso se vuelve el medio menor es la velocidad con la que la luz viaja. En los casos en que el rayo luminoso atraviesa diferentes medios contiguos e.g., aire, agua y aceite; Fermat postuló que la luz atravesaba, desde un punto en un primer medio hasta un punto en otro medio no homogéneo con el de partida, siguiendo el camino que insume tiempo mínimo, [Wolf, K. B., and Krötzsch, G. (1995)]. Es decir, la trayectoria de este tipo de fenómenos ópticos es la *braquistócrona*. Dado el carácter teleológico del problema, el rayo luminoso parte de C y llega a B , luego de atravesar un número finito de N medios de distintos índices de refracción, (Ver Figura 1.4), los cálculos de la metodología §1.2 confirman la existencia de un punto crítico estacionario que realiza el mínimo de la función de propagación de la luz, por ejemplo en [Niel, B. I. (2002)], pág. 134-135.

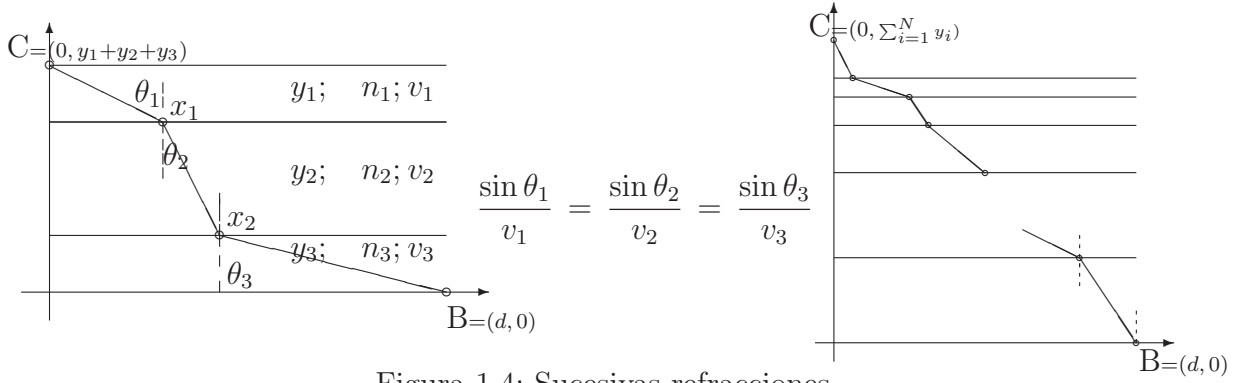


Figura 1.4: Sucesivas refracciones.

$$T(x_1, \dots, x_{N-1}) = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{v_1} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\sqrt{y_i^2 + (x_i - x_{i-1})^2}}{v_i} + \frac{\sqrt{(d - x_{N-1})^2 + y_N^2}}{v_N} \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial T(x_1, \dots, x_{N-1})}{\partial x_i} = 0; \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (1.51)$$

$$T_{x_1} = \frac{\partial T(x_1, \dots, x_{N-1})}{\partial x_1} = \frac{x_1}{v_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - \frac{(x_2 - x_1)}{v_2 \sqrt{y_2^2 + (x_2 - x_1)^2}}$$

$$T_{x_i} = \frac{\partial T(x_1, \dots, x_{N-1})}{\partial x_i} = \frac{(x_i - x_{i-1})}{v_i \sqrt{y_i^2 + (x_i - x_{i-1})^2}} - \frac{(x_{i+1} - x_i)}{v_{i+1} \sqrt{y_{i+1}^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}}; \quad 2 \leq i \leq N-2$$

$$T_{x_{N-1}} = \frac{\partial T(x_1, \dots, x_{N-1})}{\partial x_{N-1}} = \frac{(x_{N-1} - x_{N-2})}{v_{N-1} \sqrt{(x_{N-1} - x_{N-2})^2 + y_{N-1}^2}} - \frac{(d - x_{N-1})}{v_N \sqrt{y_N^2 + (d - x_{N-1})^2}}$$

La función de propagación (1.50) es indefinidamente diferenciable ya que en ninguna de sus derivadas parciales sucesivas se anulan los denominadores dado que cada $y_i > 0$, el espesor de cada medio es de longitud no nula.

La nulidad del gradiente de la función de propagación (1.50) requiere resolver las siguientes identidades:

$$\frac{x_1}{v_1 \sqrt{y_1^2 + x_1^2}} = \dots = \frac{(x_i - x_{i-1})}{v_i \sqrt{y_i^2 + (x_i - x_{i-1})^2}} = \dots = \frac{(d - x_{N-1})}{v_N \sqrt{y_N^2 + (d - x_{N-1})^2}}; \quad 2 \leq i \leq N-1 \quad (1.52)$$

Sean $x_{c_i}^e$ las abscisas críticas estacionarias que resuelven el sistema de ecuaciones (1.51) equivalente a resolver las identidades en (1.52), dado que no existen abscisas críticas singulares en $(0, d) \times \dots \times (0, d)$ debido a que los espesores de los distintos medios son supues-

tos no nulos, i.e. $|y_i| > 0$. El signo positivo de cada una de las expresiones en los denominadores de (1.52) junto al hecho de que $x_{c_1}^e$ debe ser positiva, debido a que el rayo geométrico debe salir de C para llegar hasta B atravesando las $N-1$ interfases distintas, imponen

que las abscisas críticas estacionarias verifiquen $0 < x_{c_{i-1}}^e < x_{c_i}^e < d$, $1 \leq i \leq N - 1$.

Utilizaremos una notación conveniente para reducir las expresiones de los determinantes de las matrices hessianas tridiagonales, [Golub, G. H., Van Loan, C. F. (1996)] y simétricas de la función de propagación (1.50), que contienen las derivadas parciales de segundo grado, con diagonal principal positiva y las diagonales superior e inferior a la principal conformada por términos negativos.

Sean A_i los términos positivos definidos a continuación

$$A_i = \frac{y_i^2}{v_i [y_i^2 + (x_i - x_{i-1})^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad x_0 = 0, \quad x_N = d.$$

Las evaluaciones de los determinantes del hessiano de $T(x_1, \dots, x_{N-1})$, (1.50), de distintos órdenes resultan tener las expresiones (1.53).

$$|H_{(M-1) \times (M-1)}(x_1, \dots, x_{N-1})| = \sum_{j=1}^M \left(\prod_{i=1, i \neq j}^M A_i \right), \quad 3 \leq M \leq N - 1. \quad (1.53)$$

$$T_{x_1 x_1} = \frac{y_1^2}{v_1 (y_1^2 + x_1^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y_2^2}{v_2 (y_2^2 + (x_2 - x_1)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.54)$$

A partir de (1.54), y como cada uno de los determinantes menores principales del hessiano (1.53) son positivos en $\underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{N-1}$. Por lo tanto, la función de propagación $T(x_1, \dots, x_{N-1})$,

(1.50) es una función convexa pues posee su diferencial de segundo orden estrictamente positivo, i.e. $d^2(T(x_1, \dots, x_{N-1})) > 0$ en cualquier región, en particular en el conjunto abierto $\underbrace{(0, d) \times \dots \times (0, d)}_{N-1}$, y las identidades en (1.52) determinan un mínimo global,

§3.5.2, pág. 137 [Miller, R. E. (2000)]. En otras palabras, la braquistócrona de las refracciones sucesivas es única y los puntos en donde el rayo luminoso atraviesa cada interfase de espesor $|y_i|$ queda determinado por la abscisa $x_{c_i}^e$. En este fenómeno de la refracción de la luz en un medio no homogéneo, la naturaleza es expedita, y su trayectoria resulta ser la *braquistócrona*. Otro proceso natural expedito es el plegamiento de los ARN y ADN [Fernández, A., and Niel, B.(1997), Fernández, A., Niel, B., and Burastero, T.(1998)].

1.5. Naturaleza no necesariamente expedita

En [Hamilton, W. R. (1833)], Hamilton declaraba: “... It was known to Euclid and to Ptolemy, that the communication between visible objects and a beholding eye is usually effected in straight lines; and that when the line of communication is bent, by reflexion, at any point of a plane or of a spheric mirror, the angle of bending at this point, between the two straight parts of the bent line, is bisected by the normal to the mirror. It was known also that this law extends to successive reflections...”

Asumida la creación idealizada del espejo cuasi-esférico en [Niel, B. I. (2002)] y bajo

Capítulo 1. Hamilton vs Hamilton

los supuestos de [Hamilton, W. R. (1833), Corrente, F., and Onorato, P.(2011)] y con el propósito de confirmar el comportamiento extravagante de la naturaleza, estudiamos la ley de la reflexión sobre tres superficies espejadas esféricas y/o cuasi-esféricas diferenciadas, [Lemons, D. S. (1997), Niel, B. I. (2004)].

1.5.1. Primer ejemplo en el espejo circular

Aquí, trataremos, los rayos luminosos sobre el conjunto de los rayos geométricos que comienzan en C en el espejo circular de radio R , rebotan una vez sobre la superficie espejada, en cualquier punto de la concavidad circular espejada, e.g. en D -con excepción de los extremos C y B - y finalizan en el punto B . En particular, el punto inicial C se ha localizado en $(-R, 0)$ -sin pérdida de generalidad- y el punto final B es de ubicación arbitraria en la superficie circular a excepción de ser coincidente con C .

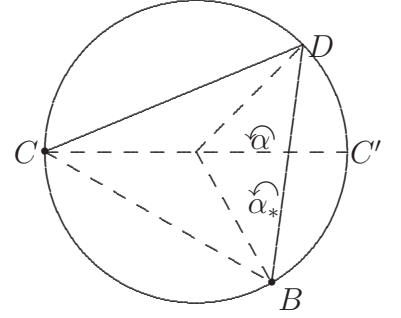


Figura 1.5: Primer ejemplo en el espejo cuasi-esférico, $\pi < \alpha_* < 2\pi$.

En este modelo variacional se ha tomado al ángulo α , que se mide en sentido antihorario, a partir de la antípoda de C , como parámetro de la función de propagación de los rayos geométricos (Ver Figura 1.5). El tiempo consumido, o la longitud de recorrido, $T(\alpha)$, de estos rayos geométricos está constituido por dos segmentos lineales $t_1(\alpha)$ y $t_2(\alpha)$, es decir:

$$t_1(\alpha)^2 = [R + R \cos(\alpha)]^2 + R^2 \sin^2(\alpha) = 2R^2(1 + \cos(\alpha))$$

$$t_2(\alpha)^2 = [R(\cos(\alpha) - \cos(\alpha_*))]^2 + [R(\sin(\alpha) - \sin(\alpha_*))]^2 = 2R^2(1 - \cos(\alpha_* - \alpha)),$$

con el ángulo α_* medido en sentido antihorario de igual manera a como se mide el parámetro de variaciones y en particular, para que B viva en el semicírculo inferior, supondremos su rango de variación en el intervalo $\pi < \alpha_* < 2\pi$, (Ver Figura 1.5). En consecuencia, la función de propagación de los rayos $T(\alpha)$, tiene la siguiente expresión:

$$T(\alpha) = t_1(\alpha) + t_2(\alpha) = \sqrt{2}R[\sqrt{1 + \cos(\alpha)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha - \alpha_*)}] \quad (1.55)$$

y su función derivada primera $T'(\alpha)$ está dada por:

$$T'(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}R \left[\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha)}} - \frac{\sin(\alpha - \alpha_*)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha - \alpha_*)}} \right], \quad \alpha \neq \pi \text{ y } \alpha \neq \alpha_* \quad (1.56)$$

La derivada de segundo orden de la función de propagación de los rayos geométricos (1.55) tiene la siguiente expresión:

$$T''(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{4}R \left\{ \frac{1 + \cos(\alpha)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha)}} + \left[\frac{1 - \cos(\alpha - \alpha_*)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha - \alpha_*)}} \right] \right\}. \quad (1.57)$$

Claramente $T''(\alpha) < 0$ excepto en las abscisas singulares, por lo tanto la función (1.55), $T(\alpha)$ es cóncava en los intervalos $(0, \pi)$, (π, α_*) y $(\alpha_*, 2\pi)$.

Descartando, en principio, los múltiplos periódicos, los puntos críticos del problema son:

1. Puntos críticos frontera del problema $\{ \alpha_1^F = 0, \alpha_2^F = 2\pi \}$
2. Puntos críticos estacionarios del problema $\left\{ \alpha_1^e = \frac{\alpha_* - \pi}{2}, \alpha_2^e = \frac{\alpha_* + \pi}{2} \right\}$
3. Puntos críticos singulares $\{ \alpha_1^s = \pi, \alpha_2^s = \alpha_* \}$

En consecuencia, el conjunto de abscisas críticas del problema son:

$$\left\{ \alpha_I = 0, \alpha_1 = \frac{\alpha_* - \pi}{2}, \alpha_2 = \pi, \alpha_3 = \frac{\alpha_* + \pi}{2}, \alpha_4 = \alpha_*, \alpha_F = 2\pi \right\}.$$

A continuación delineamos las trayectorias de los rayos geométricos o luminosos desplegadas por cada uno de las abscisas críticas del parámetro variacional α , a saber:

1. $\alpha_I = 0$. Despliega la trayectoria de dos tramos lineales, que comienza en $C = (-R, 0)$ llega a $C' = (R, 0)$ y de aquí se dirige a $B = (R \cos \alpha_*, R \sin \alpha_*)$.
2. $\alpha_1 = \frac{\alpha_* - \pi}{2}$. Es uno de los dos rayos luminosos que rebota en el círculo cumpliendo la *Ley de Reflexión* respecto de la normal a la circunferencia espejada en el punto de choque.
3. $\alpha_2 = \pi$. Este rayo geométrico, constituido por un solo segmento lineal, rebota en $C = (-R, 0)$ y se dirige a $B = (R \cos \alpha_*, R \sin \alpha_*)$.
4. $\alpha_3 = \frac{\alpha_* + \pi}{2}$. Es el otro rayo luminoso que verifica la *Ley de Reflexión* en las antípodas del rebote de $\alpha_1 = \frac{\alpha_* - \pi}{2}$.
5. $\alpha_4 = \alpha_*$. Esta trayectoria, parte directamente desde $C = (-R, 0)$ hacia $B = (R \cos \alpha_*, R \sin \alpha_*)$, no choca en ningún otro lugar del círculo, por lo tanto también está constituida por un solo segmento lineal.
6. $\alpha_F = 2\pi$. Despliega el mismo recorrido que $\alpha_I = 0$.

El estudio del signo de $T'(\alpha)$ en cada vecindad de las abscisas críticas permite caracterizar si son óptimos locales o relativos.

En efecto, $T'(\frac{\alpha_* - \pi}{2}) = 0$ y $\begin{cases} \alpha < \frac{\alpha_* - \pi}{2} \rightarrow T'(\alpha) > 0 \\ \alpha > \frac{\alpha_* - \pi}{2} \rightarrow T'(\alpha) < 0 \end{cases}$, por lo tanto en $\frac{\alpha_* - \pi}{2}$, $T(\alpha)$ tiene un máximo relativo estricto. En π el signo de $T'(\alpha)$ cambia de negativo a positivo lo

que resulta en un mínimo relativo estricto de $T(\alpha)$. Además, $\begin{cases} \alpha < \frac{\alpha_* + \pi}{2} \rightarrow T'(\alpha) > 0 \\ \alpha > \frac{\alpha_* + \pi}{2} \rightarrow T'(\alpha) < 0 \end{cases}$,

en consecuencia en $\frac{\alpha_* + \pi}{2}$, $T(\alpha)$ tiene un máximo relativo estricto. Finalmente de $\alpha < \alpha_*$ a $\alpha > \alpha_*$ el signo de $T'(\alpha)$ cambia de negativo a positivo, entonces $T(\alpha)$ tiene un mínimo estricto en α_* .

Observación 1.5.1 Si $\pi < \alpha_* < 2\pi$ entonces $T(\alpha)$ posee dos máximos estacionarios estrictos locales de valores respectivos $T(\frac{\alpha_*-\pi}{2})$ y $T(\frac{\alpha_*+\pi}{2})$. Además posee, en principio, dos mínimos estrictos locales coincidentes en su valor en ambas abscisas críticas singulares $T(\alpha_*) = T(\pi)$. Por último, en las abscisas críticas fronteras el valor alcanzado es también coincidente $T(0) = T(2\pi)$.

Nota 1.5.2 La expresión (1.57), si $\pi < \alpha_* < 2\pi$, es indiscutible en cuanto a confirmar que en las abscisas críticas estacionarias existen máximos locales o relativos, ambos rayos luminosos del problema, es decir que verifican la Ley de Reflexión. En las abscisas críticas singulares una de las dos expresiones de las dos componentes de la longitud total se anulan, mientras que las abscisas frontera del problema, claramente no definen un rayo luminoso. Por tratarse, (1.55) de una función continua y aceptando la variación del parámetro α en el compacto $[0, 2\pi]$, la validez de las hipótesis del Teorema de Bolzano-Weierstrass nos asegura la existencia del mínimo y del máximo absoluto. El estudio de la concavidad deducido de (1.57), si $\pi < \alpha_* < 2\pi$, permite confirmar que el mínimo absoluto de $T(\alpha)$ es alcanzado en ambas abscisas singulares, $T(\alpha_*) = T(\pi)$, y el máximo absoluto en el rayo luminoso determinado por $\frac{\alpha_*-\pi}{2}$ con valor $T(\frac{\alpha_*-\pi}{2})$.

El único parámetro - α - de la función de propagación $T(\alpha)$, (1.55), si $\pi < \alpha_* < 2\pi$, exhibe dos rayos luminosos consistentes con la Ley de Reflexión, en estas trayectorias $T(\alpha)$, alcanza el máximo relativo que es el absoluto $T(\frac{\alpha_*-\pi}{2})$, es decir la naturaleza luminosa es extravagante. Mientras que el otro rayo luminoso es un máximo local de $T(\alpha)$ (1.55) que no realiza el mínimo absoluto de la función de propagación. En otras palabras, la naturaleza se muestra en este problema extravagante y tibia dentro de los caminos posibles. Por otra parte, si $\pi < \alpha_* < 2\pi$, en los puntos de abscisas singulares las trayectorias no conforman rayos admisibles, bajo el supuesto del concepto ideal de rayo luminoso.

En consecuencia, se obtiene la siguiente Proposición 1.5.3.

Proposición 1.5.3 El primer caso de la geometría óptica en este espejo cuasi-esférico tiene dos trayectorias luminosas, $(C \rightarrow \acute{D} = (\cos(\frac{\alpha_*+\pi}{2}), \sin(\frac{\alpha_*+\pi}{2})) \rightarrow B)_{\alpha=\frac{\pi+\alpha_*}{2}}$, y el rayo de recorrido más largo $(C \rightarrow D = (\cos(\frac{\alpha_*-\pi}{2}), \sin(\frac{\alpha_*-\pi}{2})) \rightarrow B)_{\alpha=\frac{\alpha_*-\pi}{2}}$. ■

1.5.2. Segundo ejemplo en el espejo cuasi-esférico

Estudiamos los rayos geométricos que comienzan en el centro $C(0,0)$ de un espejo cuasi-esférico de radio R , que se reflejan una vez, y finalizan en el punto $B(R/n,0)$ $n > 1$, del eje y a la derecha del centro. Se define la función de propagación en términos del ángulo central α y de la distancia \overline{CB} entre el centro del espejo C y el punto final B .

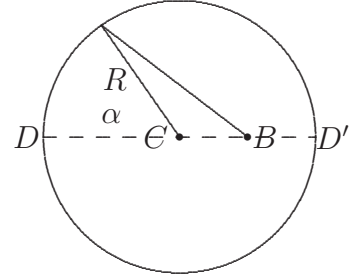


Figura 1.6: Segundo caso en el espejo cuasi-esférico.

La función de propagación de los rayos geométricos del caso es (1.58),

$$T(\alpha) = R + \sqrt{R^2 + \overline{CB}^2 + 2R\overline{CB} \cos(\alpha)} \quad (1.58)$$

y al igualar a cero la primera derivada de $T(\alpha)$

$$T'(\alpha) = \frac{-R\overline{CB} \sin \alpha}{\sqrt{R^2 + \overline{CB}^2 + 2R\overline{CB} \cos \alpha}} = 0 \quad (1.59)$$

se determinan los ángulos estacionarios 0 y π . Como $T'(\alpha) = 0$ si y solo si $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$, ya que hemos descartado los múltiplos periódicos. En este caso la derivada primera (1.59) no posee puntos cuspidales, puesto que $0 < \overline{CB} < R$. El test de la derivada segunda caracteriza los parámetros estacionarios:

$$T''(\alpha) = -\frac{R\overline{CB} \cos(\alpha)(R^2 + \overline{CB}^2 + 2\overline{CB}R \cos \alpha) + R^2\overline{CB}^2 \sin^2 \alpha}{(R^2 + \overline{CB}^2 + 2\overline{CB}R \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

$$T''(\alpha = 0) = -\frac{R\overline{CB}}{(R^2 + \overline{CB}^2 + 2\overline{CB}R)} < 0$$

$$T''(\alpha = \pi) = -T''(\alpha = 0) > 0.$$

Finalmente, de las técnicas usuales del cálculo sigue la validez de la siguiente Proposición 1.5.4.

Proposición 1.5.4 *El segundo ejemplo en el espejo cuasi-esférico, (Ver Figura 1.6), tiene dos rayos luminosos admisibles consistentes con la Ley de Reflexión, $(C \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B)_{\alpha=0}$ el máximo de $T(x) = R + R + \overline{CB} = 2R + \overline{CB}$, y la braquistócrona $(C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow B)_{\alpha=\pi}$, el mínimo de $T(x) = \overline{CB} + (R - \overline{CB}) + (R - \overline{CB}) = 2R - \overline{CB}$. ■*

Observación 1.5.5 *Los infinitos rayos luminosos que parten del centro del espejo cuasi-esférico se reflejan una vez -rebotando en cualquier punto del círculo- y que retornan al centro tienen la misma longitud o el mismo tiempo de recorrido, caso en el que C y B son coincidentes y la función de propagación (1.58) se reduce a $T(\alpha) = 2R$. Todos los caminos geoméricamente admisibles son rayos.*

En otros términos, todos los caminos geoméricamente admisibles de este caso particular del problema aquí analizado, $C \equiv B$, son rayos luminosos ni expeditos ni extravagantes.

Observación 1.5.6 Si B coincide con D' la función de propagación (1.58) se reduce a $T(\alpha) = R + \sqrt{2}R\sqrt{1 + \cos\alpha}$. El rayo luminoso extravagante recorre $(C \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow D')_{\alpha=0}$, insumiendo $T(\alpha = 0) = 3R$ y el rayo luminoso expedito, la braquistócrona $(C \rightarrow \acute{D})_{\alpha=\pi}$, que gasta $T(\alpha = \pi) = R$, con rebote en el punto final \acute{D} .

1.5.3. Tercer ejemplo en el espejo cuasi-esférico

Aquí estudiamos en primer lugar los tres ejemplos más sencillos de la geometría de los rayos reflexivos o luminosos sobre el dispositivo virtual el espejo cuasi-esférico, Ver Figura 1.7, cuando los rayos comienzan y finalizan sus trayectorias en las antípodas de la circunferencia. Analizamos, de manera consecutiva tres ejemplos. En el Ejemplo 1.5.7 se permite un sólo rebote en la superficie espejada, en el Ejemplo 1.5.8 dos choques y en el Ejemplo 1.5.10 tres contactos en la superficie azogada, en todos los casos no se contabilizan los contactos de partida y de llegada.

La última afirmación en la cita de Hamilton transcrita en la pág. 51 una vez más es evidenciable en los resultados que la metodología propuesta arroja sobre los rayos geométricos en el espejo cuasi-esférico que comienzan en $C = (-R, 0)$ y colisionan $n - 1$ veces en cualquier lugar del mismo -exceptuados los puntos extremos C, B - y que finalizan en $B = (R, 0)$, (e.g. Figuras 1.15 , 1.16).

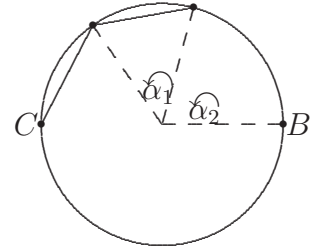


Figura 1.7: Rayos geométricos con parámetros α_i $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$.

Ejemplo 1.5.7 *Longitud del recorrido:*

$$L(\alpha_1) = \sqrt{2} R \left\{ \sqrt{1 + \cos(\alpha_1)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_1)} \right\} \quad (1.60)$$

$$\frac{dL(\alpha_1)}{d\alpha_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{2}} R \left\{ \frac{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)} - \sqrt{1 - \cos(\alpha_1)}}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_1)} \sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} \right\}$$

Abscisas críticas singulares:

$$\begin{aligned} &\nexists \frac{dL(\alpha_1)}{d\alpha_1} \\ &1 - \cos(\alpha_1) = 0 \\ &1 + \cos(\alpha_1) = 0 \end{aligned}$$

Abscisas críticas estacionarias:

$$\begin{aligned} &\frac{dL(\alpha_1)}{d\alpha_1} = 0 \\ &\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)} - \sqrt{1 - \cos(\alpha_1)} = 0 \end{aligned}$$

Concavidad:

$$\frac{d^2 L(\alpha_1)}{d\alpha_1^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} R \left\{ \frac{1 - \cos(\alpha_1)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_1)}} + \frac{1 + \cos(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} \right\} < 0$$

Análisis en el compacto $\mathcal{K}_1 = [-\pi, \pi]$.

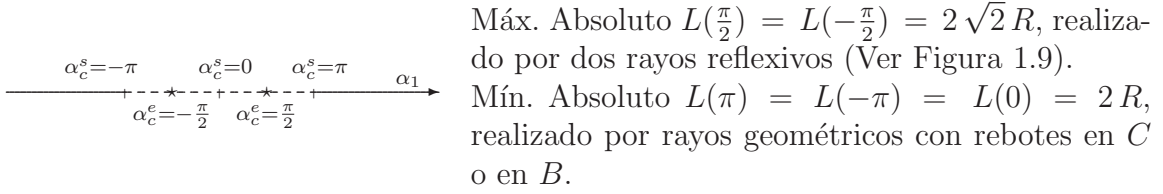
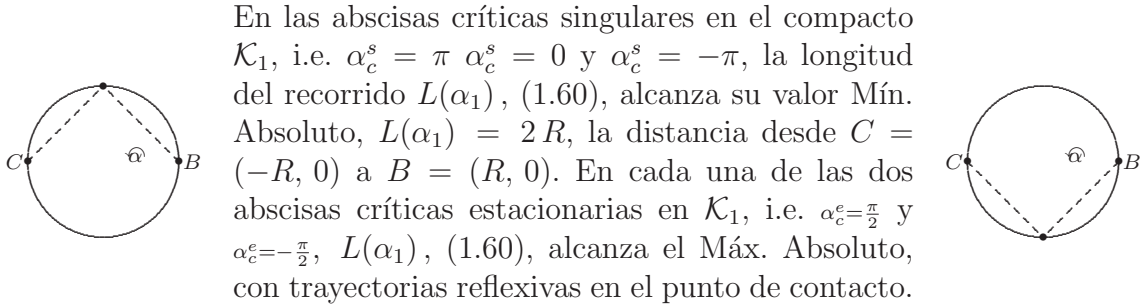


Figura 1.8: Antípoda: Ejemplo 1.5.7, $\alpha_1 \in [-\pi, \pi]$.

A partir de la expresión de $\frac{d^2 L(\alpha_1)}{d\alpha_1^2}$ es evidente el carácter de máximos locales de las dos abscisas críticas estacionarias. Ambas abscisas frontera del compacto $\mathcal{K}_1 = [-\pi, \pi]$ son puntos singulares del problema, además $\alpha_c^s = 0$, También, es otra abscisa singular interior, las tres caracterizables como mínimos locales, por el cambio de signo de $\frac{dL(\alpha_1)}{d\alpha_1}$ en un entorno las mismas. Sumando el Teorema del Bolzano-Weierstrass como instrumento de análisis de $L(\alpha_1)$, (1.60), en \mathcal{K}_1 es simple determinar que en los puntos críticos estacionarios se alcanza el Máx. Abs. y en los puntos críticos singulares el Mín. Abs.



En las abscisas críticas singulares en el compacto \mathcal{K}_1 , i.e. $\alpha_c^s = \pi$, $\alpha_c^s = 0$ y $\alpha_c^s = -\pi$, la longitud del recorrido $L(\alpha_1)$, (1.60), alcanza su valor Mín. Absoluto, $L(\alpha_1) = 2R$, la distancia desde $C = (-R, 0)$ a $B = (R, 0)$. En cada una de las dos abscisas críticas estacionarias en \mathcal{K}_1 , i.e. $\alpha_c^e = \frac{\pi}{2}$ y $\alpha_c^e = -\frac{\pi}{2}$, $L(\alpha_1)$, (1.60), alcanza el Máx. Absoluto, con trayectorias reflexivas en el punto de contacto.

Figura 1.9: Rayos del Ejemplo 1.5.7.

Ejemplo 1.5.8

$$L(\alpha_1, \alpha_2) = \sqrt{2} R \left\{ \sqrt{1 + \cos(\alpha_1)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_2)} \right\} \quad (1.61)$$

$$L_{\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} R \left\{ \frac{-\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} + \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} \right\}$$

$$L_{\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} R \left\{ \frac{-\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} + \frac{\sin(\alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2)}} \right\}$$

$$L(\alpha_1, \alpha_2)_{\alpha_1} = L(\alpha_1, \alpha_2)_{\alpha_2} = 0$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} = \frac{\sin(\alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2)}} \quad (1.62)$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} = \frac{\sin(\alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2)}} \Leftrightarrow \alpha_2 \equiv \pm\pi - \alpha_1 \quad (1.63)$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} \Leftrightarrow \alpha_2 - \alpha_1 \pm \pi \equiv \alpha_1 \quad (1.64)$$

Entonces, resolver (1.62) implica solucionar simultáneamente (1.63) y (1.64):

$$\begin{cases} \alpha_2 \equiv \pm\pi - \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \pm \pi \equiv \alpha_1 \end{cases} \quad (1.65)$$

Se indican a continuación los valores de las variables α_1 y α_2 para los cuales la función (1.61) no es diferenciable:

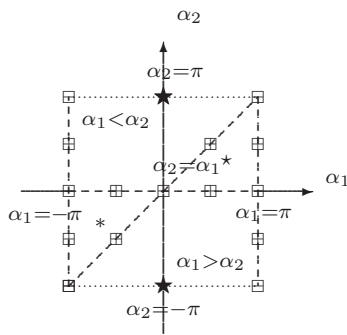
$$\alpha_1 \equiv \pm\pi, \quad \alpha_2 \equiv \alpha_1, \quad \alpha_2 \equiv 0. \quad (1.66)$$

$$L_{\alpha_1\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{\sqrt{2}}{4} R \left\{ \frac{1 + \cos(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} + \frac{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} \right\}$$

$$L_{\alpha_1\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\sqrt{2}}{4} R \frac{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}}$$

$$L_{\alpha_2\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{\sqrt{2}}{4} R \left\{ \frac{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} + \frac{1 - \cos(\alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2)}} \right\}$$

Análisis en el compacto $\mathcal{K}_2 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.



Las congruencias (1.65) resultan ser:

$$\begin{aligned} (+, +) & \begin{cases} \alpha_2 \equiv \pi - \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv \pi + \alpha_1 \end{cases} & (+, -) & \begin{cases} \alpha_2 \equiv \pi - \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv -\pi + \alpha_1 \end{cases} \\ (-, +) & \begin{cases} \alpha_2 \equiv -\pi - \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv \pi + \alpha_1 \end{cases} & (-, -) & \begin{cases} \alpha_2 \equiv -\pi - \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv -\pi + \alpha_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Figura 1.10: Antípodos: Ejemplo 1.5.8, $\alpha_1 \in [-\pi, \pi]$ y $\alpha_2 \in [-\pi, \pi]$.

En el siguiente arreglo, precisamos las duplas de los ángulos críticos estacionarios que en cada una de las cuatro congruencias definen en $\mathcal{K}_2 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ un rayo reflexivo

y en la Figura 1.11 pueden apreciarse el bosquejo de las respectivas trayectorias⁴.

$$\begin{aligned} (+, +) \star \curvearrowright (0, \pi) &\cong 6R & (+, -) \star \curvearrowright \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) &\cong 3R \\ (-, +) * \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right) \curvearrowleft &\cong 3R & (-, -) \star \curvearrowright (0, -\pi) &\cong 6R. \end{aligned}$$

Las abscisas críticas singulares en \mathcal{K}_2 son $\alpha_2 = \alpha_1$, $\alpha_1 = \pm\pi$ y $\alpha_2 = 0$ (Ver Figura 1.10 las líneas discontinuadas). Si $\alpha_2 = \alpha_1$ técnicamente el problema se reduce al ejemplo anterior. Entonces en dicho subconjunto lineal en los puntos $(0, 0)$, $(-\pi, -\pi)$, (π, π) hay mínimos locales singulares (Ver Figura 1.10 los 7 $\boxplus \cong 2R$), mientras que en los puntos $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ y $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ hay máximos locales singulares (Ver Figura 1.10 los 8 $\boxplus \cong 2\sqrt{2}R$). En las singularidades sobre las recta verticales $\alpha_1 = \pm\pi$ técnicamente el caso implica los cálculos y análisis del ejemplo anterior. Con los máximos locales singulares en $(\pm\pi, -\frac{\pi}{2})$ y $(\pm\pi, \frac{\pi}{2})$ y mínimos locales singulares en $(\pm\pi, -\pi)$, $(\pm\pi, \pi)$ y $(\pm\pi, 0)$.

El determinante de la matriz Hessiana $\mathcal{H}_{2 \times 2}$, i.e. $|\mathcal{H}_{2 \times 2}|$, en la región de diferenciabilidad de $L(\alpha_1, \alpha_2)$, (1.61), y en particular, en el compacto \mathcal{K}_2 es positivo. Entonces en las abscisas críticas angulares estacionarias (1.65) poseen máximos locales ya que además $L_{\alpha_1 \alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2) < 0$. Como resulta de los siguientes cálculos.

$$\mathcal{H}_{2 \times 2} = \frac{R^2}{2} \left\{ \sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}\sqrt{1 - \cos(\alpha_2)} + \sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_2)}\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \right\}$$

Entonces, satisfechas las condiciones (1.65), $L_{\alpha_1 \alpha_1}(\alpha_{c1}^e, \alpha_{c2}^e) = -\frac{\sqrt{2}}{2}R\sqrt{1 + \cos(\alpha_{c1}^e)}$ y $|\mathcal{H}_{2 \times 2}(\alpha_{c1}^e, \alpha_{c2}^e)| = \frac{3\sqrt{2}}{8}R\sqrt{1 + \cos(\alpha_{c1}^e)}$.

La aplicación del Teorema de Bolzano-Weierstrass en \mathcal{K}_2 determina, dada la sencillez de las evaluaciones, que $L(\alpha_1, \alpha_2)$, (1.61) alcanza su valor Máx. Absoluto $6R$, realizado en las abscisas críticas estacionarias $(0, \pi)$ y $(0, -\pi)$. Al mismo tiempo, es claramente visible que el Mín. Absoluto de $L(\alpha_1, \alpha_2)$ en \mathcal{K}_2 es $2R$ y se alcanza sobre las abscisas críticas singulares: $(-\pi, \pi)$, $(\pi, -\pi)$, $(\pm\pi, 0)$, (α_2, α_2) si $\alpha_2 = 0$, (α_1, α_1) si $\alpha_1 = \pm\pi$.

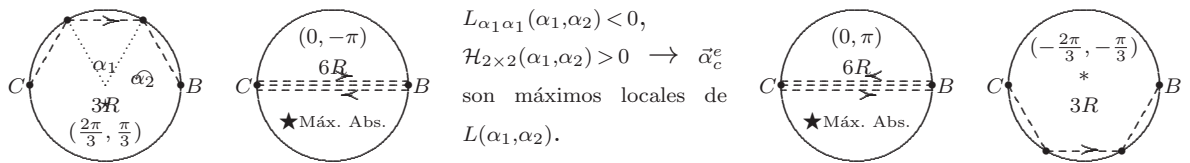
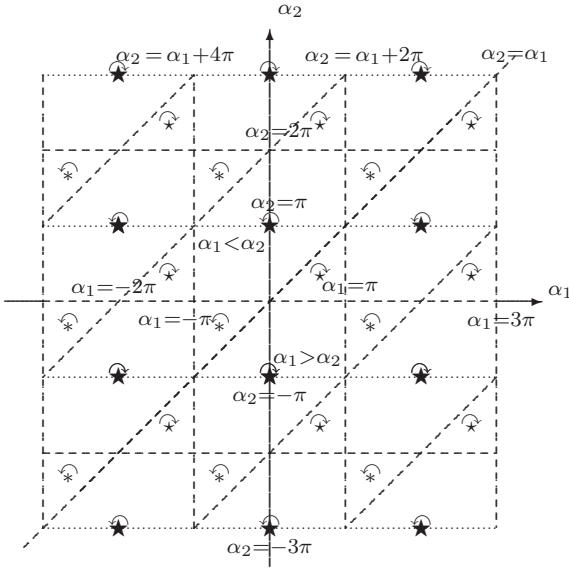


Figura 1.11: Rayos del Ejemplo 1.5.8

⁴ \cong Correspondencia: Entre los ángulos variacionales, indicados a su izquierda, con el valor de la longitud euclídea de la trayectoria desplegada por tales ángulos, indicada a su derecha.

Análisis en $\mathcal{R}^2 = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$

Observación 1.5.9 Escogiendo $\bar{\mu} = 0$ y $\mu = 0$ en (1.67) la trayectoria reflexiva del tipo $\curvearrowright \star$ una de las que alcanza el Máx. Abs. de $L(\alpha_1, \alpha_2)$ está encerrada en el conjunto abierto acotado delimitado por las siguientes fronteras lineales singulares: $\alpha_1 = \pi, \pi \leq \alpha_2 \leq 2\pi$; $\alpha_1 = -\pi, 0 \leq \alpha_2 \leq \pi$; $\alpha_2 = \alpha_1, 0 \leq \alpha_1 \leq \pi$; $\alpha_2 = \alpha_1 + 2\pi, -\pi \leq \alpha_1 \leq 0$; $\alpha_2 = 0, -\pi \leq \alpha_1 \leq 0$ y $\alpha_2 = 2\pi, 0 \leq \alpha_1 \leq \pi$, Ver Figura 1.12.



Las congruencias en (1.65) resultan en el caleidoscopio de trayectorias reflexivas (1.67).

$$\begin{aligned}
 & (+, -) \curvearrowright \star \\
 (\alpha_{c_1}^e, \alpha_{c_2}^e) &= \left[\frac{2\pi}{3} + 2\bar{k}\pi, \frac{4\pi}{3} - \pi(2k+1) \right], \bar{k}, k \in \mathbb{Z} \\
 & (-, +) \curvearrowright \star (1.67) \\
 (\alpha_{c_1}^e, \alpha_{c_2}^e) &= \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\bar{\lambda}\pi, -\frac{4\pi}{3} + \pi(1-2\lambda) \right], \bar{\lambda}, \lambda \in \mathbb{Z} \\
 & (+, +) \curvearrowright \star \equiv \curvearrowright (-, -) \\
 (\alpha_{c_1}^e, \alpha_{c_2}^e) &= [2\bar{\mu}\pi, \pi(1-2\mu)], \bar{\mu}, \mu \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Claramente las singularidades (1.66) de la función $L(\alpha_1, \alpha_2)$ del problema (1.61), separan las tres formas de las trayectorias reflexivas del caso, (Ver. Figura 1.11).

Figura 1.12: Caleidoscopio del Ejemplo 1.5.8, $\alpha_1 \in (-\infty, +\infty)$ y $\alpha_2 \in (-\infty, +\infty)$.

Ejemplo 1.5.10

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sqrt{2} R \left\{ \sqrt{1 + \cos(\alpha_1)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_3)} \right\} \quad (1.68)$$

$$L_{\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\sqrt{2}}{2} R \left\{ \frac{-\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} + \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} \right\}$$

$$L_{\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\sqrt{2}}{2} R \left\{ \frac{-\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} + \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}} \right\}$$

$$L_{\alpha_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\sqrt{2}}{2} R \left\{ \frac{-\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}} + \frac{\sin(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3)}} \right\}$$

$$L_{\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = L_{\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = L_{\alpha_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}} = \frac{\sin(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3)}} \quad (1.69)$$

Planos en los que la función (1.68) no es diferenciable:

$$\alpha_1 \equiv \pm \pi, \quad \alpha_2 \equiv \alpha_1, \quad \alpha_3 \equiv \alpha_2, \quad \alpha_3 \equiv 0. \quad (1.70)$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} = \frac{\sin(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3)}} \Leftrightarrow \alpha_3 \equiv \pm \pi - \alpha_1 \quad (1.71)$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}} \Leftrightarrow \alpha_3 - \alpha_2 \pm \pi \equiv \alpha_1 \quad (1.72)$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} \Leftrightarrow \alpha_2 - \alpha_1 \pm \pi \equiv \alpha_1 \quad (1.73)$$

$$\begin{cases} \alpha_3 \equiv \pm \pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv \pm \pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv \pm \pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (1.74)$$

$$L_{\alpha_1 \alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -\frac{\sqrt{2}}{4} R \left\{ \frac{1 + \cos(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} + \frac{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} \right\}$$

$$L_{\alpha_1 \alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\sqrt{2}}{4} R \frac{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}}$$

$$L_{\alpha_1 \alpha_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

$$L_{\alpha_2\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -\frac{\sqrt{2}}{4} R \left\{ \frac{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} + \frac{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}} \right\}$$

$$L_{\alpha_2\alpha_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\sqrt{2}}{4} R \frac{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}}$$

$$L_{\alpha_3\alpha_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -\frac{\sqrt{2}}{4} R \left\{ \frac{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}} + \frac{1 - \cos(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3)}} \right\}$$

$$|\mathcal{H}_{2 \times 2}| = \frac{R^2}{8} \left\{ \sqrt{1 + \cos(\alpha_1)} \sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} + \sqrt{1 + \cos(\alpha_1)} \sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)} \right\}$$

$$|\mathcal{H}_{3 \times 3}| = L_{\alpha_1\alpha_1} L_{\alpha_2\alpha_2} L_{\alpha_3\alpha_3} - L_{\alpha_1\alpha_1} L_{\alpha_2\alpha_3}^2 - L_{\alpha_3\alpha_3} L_{\alpha_1\alpha_2}^2$$

Análisis en el compacto $\mathcal{K}_3 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

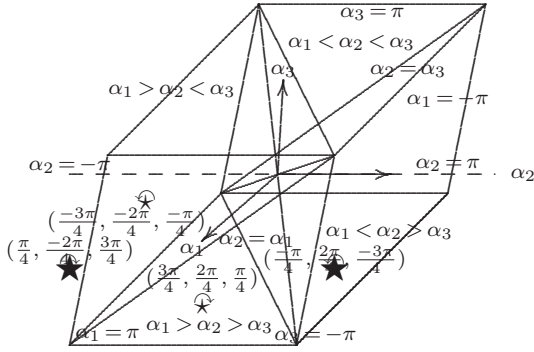
Notamos con \mathcal{D}_3 la región acotada en donde resulta diferenciable la función (1.68), i.e. $\mathcal{D}_3 = \mathcal{K}_3 - \{\alpha_1 = \pm\pi, \alpha_2 = \alpha_1, \alpha_3 = \alpha_2, \alpha_3 = 0\}$.

En cada terna de parámetros críticos variacionales estacionarios localizada en $\mathcal{D}_3 \subset \mathcal{K}_3$, utilizando (1.74) resulta:

$$L_{\alpha_1\alpha_1}(\alpha_{c_1}^e, \alpha_{c_2}^e, \alpha_{c_3}^e) = -\frac{\sqrt{2}}{2} R \sqrt{1 + \cos(\alpha_{c_1}^e)}, \quad |\mathcal{H}_{2 \times 2}(\alpha_{c_1}^e, \alpha_{c_2}^e), \alpha_{c_3}^e| = 3\frac{\sqrt{2}}{8} R \sqrt{1 + \cos(\alpha_{c_1}^e)}$$

y $|\mathcal{H}_{3 \times 3}(\alpha_{c_1}^e, \alpha_{c_2}^e), \alpha_{c_3}^e| = -\frac{\sqrt{2}}{4} R \sqrt{1 + \cos(\alpha_{c_1}^e)}$.

Entonces, en cada terna angular crítica estacionaria hay un máximo estricto local de $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, (1.68), (Teorema §70-5, pág. 213, [Rey Pastor, J. et al.]).


 Figura 1.13: Antípodas: Ejemplo 1.5.10, $\alpha_1 \in [-\pi, \pi]$, $\alpha_2 \in [-\pi, \pi]$ y $\alpha_3 \in [-\pi, \pi]$.

Las congruencias (1.74) en el compacto $\mathcal{K}_3 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ definen las siguientes trayectorias reflexivas determinadas por las ternas de ángulos variacionales $(\frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ radicada en $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \pi$, $(\frac{-3\pi}{4}, \frac{-2\pi}{4}, \frac{-\pi}{4})$ que vive en $-\pi > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{-2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ localizado en $\alpha_1 > \alpha_2 < \alpha_3$ y $(\frac{-\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4})$ en la subregión $\alpha_1 > \alpha_2 < \alpha_3$, cada una proviene de las asignaciones de signos $+, -, -; -, +, +; +, +, -$ y $-, -, +$ en (1.74).

Las congruencias en (1.74) implican la resolución de los siguientes ocho sistemas:

$$A^{+++} = \begin{cases} \alpha_3 \equiv \pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv \pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv \pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (1.75)$$

$$B^{-++} = \begin{cases} \alpha_3 \equiv -\pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv \pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv \pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (1.76)$$

$$C^{++-} = \begin{cases} \alpha_3 \equiv \pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv \pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv -\pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (1.77)$$

$$D^{-+-} = \begin{cases} \alpha_3 \equiv -\pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv +\pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv -\pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (1.78)$$

$$E^{+--} = \begin{cases} \alpha_3 \equiv \pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv -\pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv -\pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (1.79)$$

$$F^{---} = \begin{cases} \alpha_3 \equiv -\pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv -\pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv -\pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (1.80)$$

$$G^{--+} = \begin{cases} \alpha_3 \equiv -\pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv -\pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv \pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (1.81)$$

$$H^{+-+} = \begin{cases} \alpha_3 \equiv \pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv -\pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv \pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (1.82)$$

A^{+++} , D^{-+-} y G^{--+} corresponde una trayectoria reflexiva de la misma forma y orientación, aunque sólo G^{--+} es la que pertenece a $\mathcal{K}_3 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

Puesto que si a α_3 en (1.75) se le resta 2π se convierte en (1.81) o recíprocamente si a α_3 en (1.81) se le suma 2π se convierte en A^{+++} . Del mismo modo, si se adiciona 2π simultáneamente a α_3 y a α_2 en (1.78) se obtiene la congruencia reconocida en A^{+++} . También si a α_2 en (1.78) se le suma 2π se transforma en el sistema de congruencias (1.81). Entonces el grupo de congruencias en (1.83) definen la misma figura reflexiva.

$$G^{-++} \equiv A^{+++} \equiv D^{-+-} \quad (1.83)$$

Algo semejante ocurre con las congruencias F^{---} , H^{+++} y C^{++-} que son también trayectorias reflexivas y solamente C^{++-} está localizada en \mathcal{K}_3 . De manera análoga a lo explicado en el agrupamiento anterior, por ejemplo si a α_3 en (1.77) se le resta 2π , el sistema de congruencias en (1.77) se convierte en el sistema de congruencias angulares que hemos asociado con la notación F^{---} , i.e. (1.80). Si en H^{+++} , a α_3 se le resta 2π y simultáneamente se le resta 2π a α_2 , el sistema (1.82) se transforma en las congruencias (1.80).

$$C^{++-} \equiv F^{---} \equiv H^{+++} \quad (1.84)$$

Geoméricamente, lo que se está haciendo es desplazar una o dos coordenadas en 2π o -2π según corresponda, con lo cual se muestra que coinciden en una misma figura dos trayectorias reflexivas distintivas del problema. Esto por lo tanto, justifica la aparición de un caleidoscopio, esta vez tridimensional en $\alpha_1 \in (-\infty, +\infty)$, $\alpha_2 \in (-\infty, +\infty)$ y $\alpha_3 \in (-\infty, +\infty)$. Región en la que los planos de las singularidades (1.70) separarán los caminos reflexivos.

Por lo tanto las congruencias en (1.78) y en (1.75) equivalen a estudiar el sistema (1.81) en \mathcal{K}_3 . Así como (1.82) y (1.80) son coincidentes en \mathcal{K}_3 con la solución de (1.77). Además, geoméricamente, es fácil de interpretar que existen trayectorias reflexivas que resultan ser de a pares una la imagen especular de la otra, con respecto del diámetro que conecta C con B .

Simplemente, si por ejemplo a partir de (1.75) se considera (1.85).

$$\bar{A}^{+++} = \begin{cases} \bar{\alpha}_3 \equiv \pi - (2\pi - \alpha_1) \\ \bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_2 \equiv \pi + (2\pi - \alpha_1) \\ \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \equiv \pi + (2\pi - \alpha_1) \end{cases} \quad (1.85)$$

Resulta que la relación entre las coordenadas de (1.75) y (1.85) satisfacen (1.86).

$$\begin{aligned} \alpha_3 &\equiv -\bar{\alpha}_3 \\ \alpha_3 - \alpha_2 &\equiv -(\bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_2) \\ \alpha_2 - \alpha_1 &\equiv -(\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1) \end{aligned} \quad (1.86)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &\equiv -\bar{\alpha}_3 \\ \alpha_2 &\equiv -\bar{\alpha}_2 \\ \alpha_1 &\equiv -\bar{\alpha}_1 \end{aligned} \quad (1.87)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.87) en (1.75) se tiene:

$$\bar{A}^{+++} = \begin{cases} -\bar{\alpha}_3 \equiv \pi - (-\bar{\alpha}_1) \\ -\bar{\alpha}_3 + \bar{\alpha}_2 \equiv \pi - \bar{\alpha}_1 \\ -\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1 \equiv \pi - \bar{\alpha}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\alpha}_3 \equiv -\pi - \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_2 \equiv -\pi + \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \equiv -\pi + \bar{\alpha}_1 \end{cases} \Leftrightarrow F^{---} \quad (1.88)$$

Claramente \bar{A}^{+++} es exactamente F^{---} , (1.80). Cómputos semejantes, verifican la validez de (1.89).

$$\bar{B}^{-++} \equiv E^{+--} \quad \bar{C}^{++-} \equiv G^{-+-} \quad \bar{G}^{-+-} \equiv C^{++-} \quad (1.89)$$

Por lo tanto, en términos de la forma de los rayos reflexivos, reduciendo la multiplicidad en coordenadas existen cuatro figuras reflexivas distintivas para el Ejemplo 1.5.10, las que resultan de las congruencias (1.76), (1.79), (1.77) y (1.81), (Ver Figura 1.14).

En general, si en todas las congruencias (1.74) buscamos la existencia de trayectorias simétricas respecto al diámetro que une C con B , resulta sencillo confirmar que cada trayectoria reflexiva posee su imagen especular respecto de la línea $\bar{C}B$. Reemplazando $2\pi - \alpha_1 \equiv -\alpha_1$ en (1.74), buscamos las coordenadas angulares para esta inversión de imagen.

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_3 \equiv \pm\pi + \alpha_1 \\ \bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_2 \equiv \pm\pi - \alpha_1 \\ \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \equiv \pm\pi - \alpha_1 \end{cases} \quad (1.90)$$

A partir de (1.74) sabemos que

$$\begin{cases} -\alpha_3 \equiv \mp\pi + \alpha_1 \\ -(\alpha_3 - \alpha_2) \equiv \mp\pi - \alpha_1 \\ -(\alpha_2 - \alpha_1) \equiv \mp\pi - \alpha_1 \end{cases} \quad (1.91)$$

Comparando (1.90) y (1.91) resulta (1.92) y finalmente (1.93).

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_3 \equiv -\alpha_3 \equiv \mp\pi + \alpha_1 \\ \bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_2 \equiv -(\alpha_3 - \alpha_2) \equiv \mp\pi - \alpha_1 \\ \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \equiv -(\alpha_2 - \alpha_1) \equiv \mp\pi - \alpha_1 \end{cases} \quad (1.92)$$

$$\begin{cases} \alpha_3 \equiv \mp\pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv \mp\pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv \mp\pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (1.93)$$

Brevemente si a α_3 en A^{+++} se le resta 2π pasamos a la congruencia G^{-+-} y si a α_2 de esta congruencia se le resta 2π pasamos a la congruencia D^{-+-} , con la forma reflexiva representada en la tercer ilustración de la Figura 1.14. Sus respectivas congruencias simétricas respecto de la horizontal, i.e. $\bar{A}^{+++} = F^{---}$, $\bar{G}^{-+-} = C^{++-}$ y $\bar{D}^{-+-} = H^{+--}$ tienen la forma de la segunda representación gráfica de la Figura 1.14. Mientras que E^{+--} y su simétrica construyen las respectivas formas de la última y primera representación en la Figura 1.14.

Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass la función $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, (1.68), debe alcanzar en \mathcal{K}_3 el Máx. Abs. $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y el Mín. Abs. $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, e.g. $\mathcal{K}_3 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. La función $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, (1.68), es una función periódica continua y diferenciable salvo en los planos (1.70) y sus intersecciones. En cada plano de (1.70) contenido en \mathcal{K}_3 siempre se anulará al menos una de las distancias componentes de (1.68), por lo tanto el máximo absoluto será alcanzado en la frontera de \mathcal{K}_3 o en la zona diferenciable del mismo la que hemos acordado previamente en simbolizar por \mathcal{D}_3 en la pág. 64. Si notamos con $\partial(\mathcal{K}_3)$ la frontera del compacto seleccionado para el presente estudio, las respectivas restricciones de $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, (1.68), resultan ser:

$$L(\pm\pi, \alpha_2, \alpha_3) = \sqrt{2} R \left\{ \sqrt{1 + \cos \alpha_2} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_3)} \right\} \quad (1.94)$$

$$L(\alpha_1, \pm\pi, \alpha_3) = \sqrt{2} R \left\{ 2\sqrt{1 + \cos \alpha_1} + \sqrt{1 + \cos \alpha_3} + \sqrt{1 - \cos \alpha_3} \right\} \quad (1.95)$$

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \pm\pi) = \sqrt{2} R \left\{ \sqrt{1 + \cos \alpha_1} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} + \sqrt{1 + \cos \alpha_2} + \sqrt{2} \right\} \quad (1.96)$$

En las fronteras $\alpha_1 = \pm\pi$, el análisis y caracterización de óptimos se reduce al Ejemplo 1.5.8 ya que vale (1.94). Si se consideran $\alpha_2 = \pm\pi$, el estudio debe efectuarse sobre (1.95). Y finalmente sobre los planos del compacto en que $\alpha_3 = \pm\pi$, debe estudiarse (1.96). A partir del Ejemplo 1.5.8 resulta que el Máx. Abs. sobre las fronteras $\alpha_1 = \pm\pi$ será alcanzado para las abscisas críticas $(\alpha_2, \alpha_3) = (0, \pm\pi)$ y por lo tanto en cualquiera de dichos planos fronterizos el valor máximo es $L(\pm\pi, 0, \pm\pi) = 6R$. Los puntos críticos estacionarios en la restricción (1.95) deben satisfacer la siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{1 + \cos \alpha_1}} &= 0 \\ \sin \alpha_3 \left(\frac{\sqrt{1 + \cos \alpha_3} - \sqrt{1 - \cos \alpha_3}}{\sqrt{1 - \cos \alpha_3} \sqrt{1 + \cos \alpha_3}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Las duplas del tipo $\alpha_1 = k_1 \pi$ con $\alpha_3 = k_2 \pi$ quedan descartadas por tratarse de abscisas singulares que anulan ramas y por lo tanto no alcanzarán el máximo absoluto buscado. Las duplas del tipo $\alpha_1 \equiv 0$ y $\alpha_3 \equiv \pm\frac{\pi}{2}$ alcanzan el valor $L(0, \pm\pi, \pm\frac{\pi}{2}) = (4 + 2\sqrt{2})R$. En la frontera determinada por $\alpha_3 \equiv \pm\pi$, la restricción (1.96) tiene abscisas estacionarias en las congruencias en (1.97).

$$\begin{cases} \alpha_2 \equiv -\alpha_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \equiv \pm\pi - \alpha_1 \end{cases} \quad (1.97)$$

Estas congruencias se satisfacen, salvo multiplicidad, por las abscisas críticas estacionarias $(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$ y $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ que determinan el valor $L(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \pm\pi) = (2 + 3\sqrt{3})R$. Las restantes líneas fronteras de esta restricción son singularidades que anulan una de las ramas positivas que conforman la restricción analizada. Finalmente, sobre los planos y rectas singulares contenidas en \mathcal{K}_3 por la misma razón no es posible la obtención del máximo absoluto. Entonces el máximo absoluto se alcanza en la zona diferenciable interior del compacto y es el mayor de los máximos relativos estacionarios, es decir la función $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, (1.68), alcanza su máximo absoluto en $\mathcal{K}_3 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ sobre la trayectoria reflexiva determinada por G^{-+} y su simétrica C^{+-} , i.e. $L(-\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}) = L(\frac{\pi}{4}, -\frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) = 4R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ (Ver Figura 1.14).

Análisis en $\mathcal{R}^3 = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$

Se concluye entonces, por todo lo anteriormente explicado que en este caso es suficiente en principio, para investigar las formas de las trayectorias reflexivas, analizar la mitad de las posibilidades de signos, y aún dentro de este subconjunto distinguir la existencia de desplazamientos angulares múltiples de $2k\pi$. En este ejemplo el caleidoscopio está construido por las imágenes reflexivas en (1.98) separadas por los planos singulares del problema (1.70).

$$\begin{aligned}
 & G^{--+} \sim (-, -, +) \curvearrowright \star \\
 (\alpha_{c_1}^e, \alpha_{c_2}^e, \alpha_{c_3}^e) &= \left[-\frac{\pi}{4} + 2k_1\pi, \frac{2\pi}{4} + 2k_2\pi, -\frac{3\pi}{4} + 2k_3\pi\right], k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z} \\
 & C^{++-} \sim (+, +, -) \curvearrowright \star \\
 (\alpha_{c_1}^e, \alpha_{c_2}^e, \alpha_{c_3}^e) &= \left[\frac{\pi}{4} + 2\bar{k}_1\pi, -\frac{2\pi}{4} + 2\bar{k}_2\pi, \frac{3\pi}{4} + 2\bar{k}_3\pi\right], \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3 \in \mathbb{Z} \quad (1.98) \\
 & B^{-++} \sim (-, +, +) \curvearrowright \star \\
 (\alpha_{c_1}^e, \alpha_{c_2}^e, \alpha_{c_3}^e) &= \left[-\frac{3\pi}{4} + 2\tilde{k}_1\pi, -\frac{2\pi}{4} + 2\tilde{k}_2\pi, -\frac{\pi}{4} + 2\tilde{k}_3\pi\right], \tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3 \in \mathbb{Z} \\
 & E^{+--} \sim (+, -, -) \curvearrowright \star \\
 (\alpha_{c_1}^e, \alpha_{c_2}^e, \alpha_{c_3}^e) &= \left[\frac{3\pi}{4} + 2\varkappa_1\pi, \frac{2\pi}{4} + 2\varkappa_2\pi, \frac{\pi}{4} + 2\varkappa_3\pi\right], \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

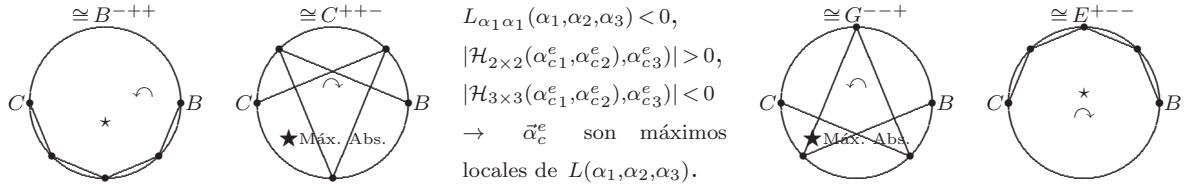


Figura 1.14: Rayos del Ejemplo 1.5.10

Capítulo 1. Hamilton vs Hamilton

Luego de los casos particulares estudiados en los Ejemplos 1.5.7, 1.5.8 y 1.5.10 se presentan las conclusiones generales de la sección §1.5.3, [Niel, B. I. (2005b)]. Particularmente, estos resultados se centralizan en las formas de las distintas trayectorias reflexivas del caso.

Si $T(\alpha_i)$ representa la longitud total recorrida por los rayos geométricos que comienzan en $C = (-R, 0)$ en el espejo cuasi-esférico (Ver Figura 1.7) y colisionan su superficie $n - 1$ veces -en cualquier lugar con excepción de los puntos extremos C , B - y que finalizan en el punto $B = (R, 0)$, entonces $T(\alpha_i)$ es determinada por la expresión (1.99) en la que los parámetros variacionales son los $n - 1$ ángulos α_i medidos en sentido antihorario a partir del segmento que une el $(0, 0)$ con el punto $B = (R, 0)$.

$$T(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1} = \sqrt{2}R \left\{ \sqrt{1 + \cos \alpha_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \sqrt{1 - \cos(\alpha_{i-1} - \alpha_i)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_{n-1})} \right\}. \quad (1.99)$$

$T(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ es una función continua.

$T(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ tiene n puntos críticos estacionarios. Los parámetros estacionarios críticos, $\alpha_{c_i}(k)$, son:

$$\alpha_{c_i} = i(2k - 1) \frac{\pi}{n} + \pi \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (1.100)$$

Los puntos estacionarios (1.100), $\alpha_{c_i} \ 1 \leq i \leq n-1$, resultan de la resolución de las siguientes identidades trigonométricas, para $n \geq 2$,

$$-\frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{1 + \cos \alpha_1}} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}} = \dots = \frac{\sin(\alpha_{i-1} - \alpha_i)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_{i-1} - \alpha_i)}} = \dots = \frac{\sin(\alpha_{n-1})}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_{n-1})}}. \quad (1.101)$$

Cada punto crítico estacionario despliega una trayectoria de n tramos lineales, i.e.,

$$\begin{aligned} &(-R, 0) \rightarrow (R \cos \alpha_{c_{1k}}, R \sin \alpha_{c_{1k}}) \rightarrow (R \cos \alpha_{c_{2k}}, R \sin \alpha_{c_{2k}}) \rightarrow \dots \\ &\rightarrow (R \cos \alpha_{c_{ik}}, R \sin \alpha_{c_{ik}}) \rightarrow \dots \rightarrow (R \cos \alpha_{c_{n-1k}}, R \sin \alpha_{c_{n-1k}}) \rightarrow (R, 0). \end{aligned} \quad (1.102)$$

Además, estas n trayectorias, tienen longitud total de recorrido (o su equivalente al tiempo total de tránsito $\frac{T(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}}{v}$) calculable por la siguiente expresión:

$$T(\alpha_{c_i}(k))_{1 \leq i \leq n-1} = \sqrt{2}Rn \sqrt{1 - \cos(\Delta \alpha_{c_i}(k))}. \quad (1.103)$$

con

$$\Delta \alpha_{c_i}(k) = \alpha_{c_i}(k) - \alpha_{c_{i-1}}(k) = \frac{\pi}{n}(2k - 1) \quad (1.104)$$

Además, a partir de (1.103) y (1.104), las trayectorias en (1.102) resultan ser n trayectorias estacionarias reflexivas, constituidas por n trayectos lineales en $n - 1$ puntos de choque sobre la superficie circular espejada. Reflexivas, pues en sus $n - 1$ colisiones con la superficie espejada circular, cada uno de estos rayos luminosos verifica la *Ley de*

Reflexión, respecto de la normal radial.

Entre estos n rayos reflexivos (1.102), existen trayectorias con la misma longitud total si se mantiene la relación entre los pares k y $\tilde{k} = n + 1 - k$, si $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

De manera precisa,

i) Si n es par existen exactamente $\frac{n}{2}$ pares de (k, \tilde{k}) correspondientes a trayectorias luminosas que verifican que $T(\alpha_c(k)) = T(\alpha_c(n + 1 - k))$ para $k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$.

Además, los tiempos de tránsito de los rayos están ordenados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T(\alpha_c(1)) = T(\alpha_c(n)) < T(\alpha_c(2)) = T(\alpha_c(n - 1)) < T(\alpha_c(3)) = T(\alpha_c(n - 2)) < \\ \dots < T(\alpha_c(\frac{n}{2} - 1)) = T(\alpha_c(\frac{n}{2} + 2)) < T(\alpha_c(\frac{n}{2})) = T(\alpha_c(\frac{n}{2} + 1)) < 2nR. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Entonces, si n es par, los tiempos de (1.105) se calculan a partir de las siguientes desigualdades angulares:

$$\begin{aligned} 0 < \Delta\alpha_c(1) < \Delta\alpha_c(2) < \dots < \Delta\alpha_c(\frac{n}{2}) < \pi \\ \pi < \Delta\alpha_c(\frac{n}{2} + 1) < \dots < \Delta\alpha_c(n) < 2\pi. \end{aligned} \quad (1.106)$$

ii) Si n es impar existen exactamente $\frac{n-1}{2}$ pares de (k, \tilde{k}) tales que $T(\alpha_c(k)) = T(\alpha_c(n + 1 - k))$ para $k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$.

Estos rayos luminosos tienen tiempos de tránsito ordenados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T(\alpha_c(1) = T(\alpha_c(n))) < T(\alpha_c(2)) = T(\alpha_c(n - 1)) < \dots \\ < T(\alpha_c(\frac{n-1}{2})) = T(\alpha_c(\frac{n+3}{2})) < T(\alpha_c(\frac{n+1}{2})) = 2nR. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Entonces, si n es impar, los tiempos en (1.107) se calculan a partir de las siguientes desigualdades angulares:

$$\begin{aligned} 0 < \Delta\alpha_c(1) < \dots < \Delta\alpha_c(\frac{n-1}{2}) < \Delta\alpha_c(\frac{n+1}{2}) = \pi \\ \pi < \Delta\alpha_c(\frac{n+3}{2}) < \dots < \Delta\alpha_c(n) < 2\pi. \end{aligned} \quad (1.108)$$

En caso de ser n impar si $k = \frac{n+1}{2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ la trayectoria reflexiva está construida por $n-1$ colisiones entre C y B con longitud de recorrido $T(\alpha_c(\frac{n+1}{2})) = 2nR$ máxima.

Simultáneamente, las trayectorias reflexivas definidas por cada uno de los pares $(k, \tilde{k} = n+1-k)$, para $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, corresponden a poligonales abiertas pero recorridas en sentido contrarios y sobre puntos en la circunferencia espejada con la mismas abscisas $\cos(\alpha_{c_i}(k)) = \cos(\alpha_{c_i}(\tilde{k}))$ y con ordenadas de signo contrario $-\sin(\alpha_{c_i}(k)) = \sin(\alpha_{c_i}(\tilde{k}))$, si $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (e.g. Figuras 1.15 , 1.16).

Por todo lo expuesto, estamos en condiciones de afirmar el siguiente resultado.

Proposición 1.5.11 $T(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}$, (1.99), Figura 1.7, *obtiene su mínimo absoluto en la abscisa crítica singular $\alpha_{c_i}^s = \pi$, $\forall 1 \leq i \leq n-1$ -(exceptuando múltiplos periódicos)- y con el valor $T(\pi, \dots, \pi) = 2R$.*

Si el número $n-1$ de colisiones en el espejo circular es par, $T(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ obtiene su máximo absoluto en la abscisa crítica estacionaria $\alpha_{c_i}^e(\tilde{k} = \frac{n+1}{2})$ (1.100) y con longitud de recorrido reflexiva $T(\alpha_{c_i}^e(\frac{n+1}{2}))_{1 \leq i \leq n-1} = 2nR$ -extravagancia luminosa-, (e.g. Figura 1.15, $k = 3$).

*Si el número $n-1$ de colisiones en el espejo circular es impar, $T(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ obtiene su máximo absoluto en las abscisas críticas estacionarias $\alpha_{c_i}^e(\frac{n}{2})_{1 \leq i \leq n-1}$ y $\alpha_{c_i}^e(\frac{n}{2} + 1)_{1 \leq i \leq n-1}$ en (1.100) -(exceptuando sus múltiplos periódicos). Entonces, los recorridos más largos insumen la longitud $T(\alpha_{c_i}^e(\frac{n}{2}))_{1 \leq i \leq n-1} = T(\alpha_{c_i}^e(\frac{n}{2} + 1))_{1 \leq i \leq n-1} = \sqrt{2}Rn\sqrt{1 - \cos(\Delta\alpha_{c_i}(\frac{n}{2}))}$
 $= \sqrt{2}Rn\sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{n})} = \sqrt{2}Rn\sqrt{1 - \cos(\Delta\alpha_{c_i}(\frac{n}{2} + 1))}$, (e.g. Figura 1.16, $k = 3$ y $k = 4$). En esta situación la extravagancia luminosa se realiza según las dos trayectorias (1.102) definidas por ambos conjuntos críticos estacionarios, $\alpha_{c_i}^e(\frac{n}{2})_{1 \leq i \leq n-1}$ y $\alpha_{c_i}^e(\frac{n}{2} + 1)_{1 \leq i \leq n-1}$, con un número impar $n-1$ de rebotes sobre el espejo circular que son puntos simétricos, respectivamente, respecto del diámetro que une $(-R, 0)$ con $(R, 0)$, la primera poligonal es recorrida en sentido horario ⁵ desde C y la que se corresponde con $\alpha_{c_i}^e(\frac{n}{2} + 1)_{1 \leq i \leq n-1}$ recorrida en sentido antihorario, (e.g. Figura 1.16, $k = 3$ y $k = 4$).*

Las restantes abscisas críticas estacionarias son rayos luminosos, de este tercer ejemplo en el espejo cuasi-esférico $T(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}$, (1.99), Figura 1.7, que ni maximizan ni minimizan la longitud total (1.99) en sus recorridos, según lo establecido por las expresiones (1.107) y (1.108) al ser sustituidas en (1.103), (e.g. Figura 1.15, $k = 1$, $k = 2$, $k = 4$ y $k = 5$; e.g. Figura 1.16, $k = 1$, $k = 2$, $k = 5$ y $k = 6$). ■

⁵Normalmente, utilizamos las abreviaturas del inglés cw. de clockwise y ccw. de counterclockwise para señalar el sentido de recorrido de ciclos y caminos en las representaciones gráficas. e.g. Figura 1.16.

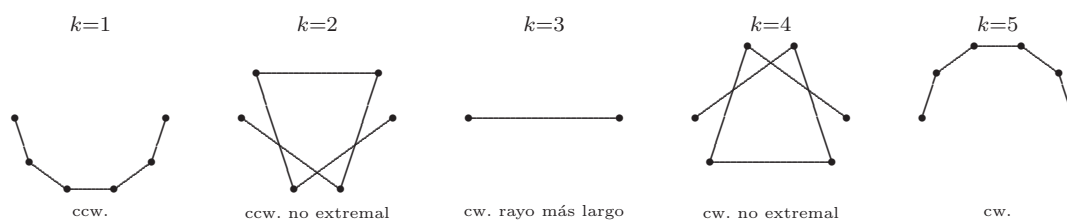


Figura 1.15: Representación de los rayos reflexivos para $n - 1 = 4$ colisiones.

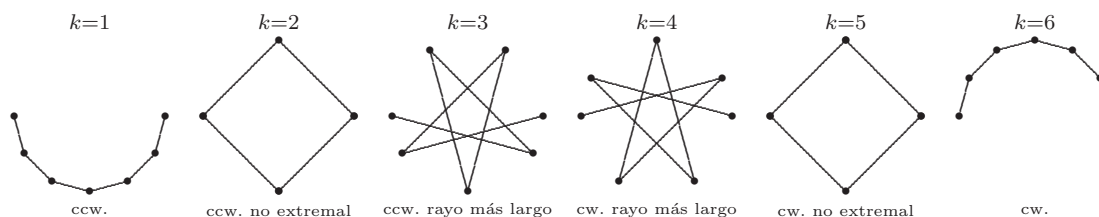


Figura 1.16: Representación de los rayos reflexivos para $n - 1 = 5$ colisiones.

1.6. Confluencia de dos áreas de investigación de Hamilton

En este Capítulo se han expuesto ejemplos precisos de la geometría óptica en el que el rayo luminoso -una construcción ideal- no necesariamente minimiza el tiempo de propagación. Simultáneamente, se determinan las trayectorias luminosas para cada sistema óptico expresándolas en función de los parámetros físicos y geométricos naturales del caso (i.e. la velocidad de la luz en un medio específico, la posición de la fuente luminosa, la localización de los puntos extremos del trayecto y la geometría de la superficie o interfase espejada considerada). A partir de ahora, nos dedicaremos a destacar ciertos detalles y enfoques de esta presentación.

Es importante mencionar una vez más, que la tarea de encontrar los puntos estacionarios de la función de propagación en el Problema de Heron y en los distintivos casos analizados en el espejo cuasi-esférico, es equivalente a realizar la exploración de los puntos críticos estacionarios sobre la función distancia total recorrida por los rayos -módulo la velocidad de la luz en el medio uniforme. En términos simples, en estos casos, la búsqueda de las braquistócronas es coincidente con la determinación de las geodésicas. Por otra parte, las braquistócronas han sido singularizadas en la *Ley de Refracción* conocida como *Ley de Snell*.

Se ha verificado la unicidad de la braquistócrona del hallazgo de W. Snell en refracciones entre dos medios uniformes distintos, con principios del análisis matemático. En este problema de la naturaleza óptica nuestra propuesta se diferencia de la de otros muchos autores, entre ellos [Tikhomirov, V. M. (1990), Santaló, L. A. (1993)], quienes normalmente transcriben los fundamentos geométricos de la demostración sustentada bajo el Principio de C. Huygens. De manera precisa, explicitamos la braquistócrona para un sistema óptico geométrico de interfase de ancho arbitrario. A tal efecto, se encuentra la raíz real que anula la ecuación polinómica de cuarto grado, que se plantea al estudiar la *Ley de la Refracción*

y que determina la trayectoria luminosa. Además, la afirmación en el *Teorema* 1.4.15, establece que para caracterizar la braquistócrona de un sistema con interfase de ancho arbitrario es suficiente conocer la respuesta del problema en una interfase unitaria. En la subsección §1.4.3 denominada *Contribuciones Auxiliares*, se ha obtenido la expresión analítica de las raíces que realizan el Problema de Snell en función de las constantes de las posiciones iniciales y finales de los rayos, i.e. a y b , y de los parámetros físicos v_1 y v_2 , i.e. la velocidad de los rayos luminosos en cada uno de los dos medios que componen del sistema óptico. Los casos de colisión en el punto medio de la interfase y el sistema óptico que deviene en un polinomio de grado cuarto palíndromo - pág. 47 y §1.4.5- se trataron especialmente por ser dos casos particulares de sencilla resolución.

La metodología propuesta en la §1.2 nos ha permitido lograr el objetivo propuesto en la geometría plana y circular. Los métodos de Ferrari y Cardan nos permitieron evidenciar y proponer la competitividad entre (1.22), (1.25), (1.26) y (1.27) para poder exhibir el curso del rayo luminoso en el *Problema de Snell*. En [Faucete, W. M. (1996)], por otra parte se encara la resolución de los polinomios de grado cuarto con coeficientes racionales, aunque en las situaciones particulares que se estudian, la tarea de seleccionar la raíz que realiza el tiempo de tránsito mínimo para parámetros ópticos $-v_1, v_2-$ y físico-geométricos $-a, b-$ arbitrarios del sistema, requirió esfuerzo algebraico no menor. Cuando se estudia el polinomio palíndromo de cuarto grado (1.13) no se usa la fórmula de Cardan [Christianson, B. (1991)] para determinar una raíz de la resolvente cúbica, i.e. $y^3 - cy^2 - 4c_1c_2 = 0$, porque los cálculos algebraicos resultan en extremo complicados. Por tal razón, en esta circunstancia, es necesaria la selección de una raíz cúbica

$\sqrt[3]{\frac{c^2}{3} + \sqrt{\frac{16c_1c_2}{27}(\frac{c^3}{27} + c_1c_2)}} - \frac{c}{3}$, debiéndose adicionar a su propia recíproca. Cabe aclarar que el anterior procedimiento no facilitaría el hallazgo de la expresión de la raíz que resuelve el *Problema de Snell* en una interfase espejada de ancho unitario para valores arbitrarios de los parámetros geométricos y ópticos a, b, v_1 , y v_2 .

Los seguidores de Descartes fueron los primeros en declarar que el proclamado *Principio de Tiempos Mínimos de Fermat*, no era siempre sustentable en las experiencias naturales, ellos sostuvieron que: “the law of reflection, is sometimes consistent with the greatest rather than the least propagation time”. Este postulado de la geometría óptica es el que verifican los ejemplos primero y segundo que hemos estudiado. Este es el contexto adecuado en las superficies espejadas cuasi-esféricas. Aún más evidente es nuestra tercer aplicación en la que se coincide con la ideas de Hamilton, i.e. “the stationary property of the transit time of light rays ” [Niel, B. I. (2001)]. En las afirmaciones de la *Proposición* 1.5.3, existen muchos detalles a observar bajo la validez de los postulados de la geometría óptica, las Figuras 1.15 y 1.16 bosquejan de manera simbólica lo que se ha destacado a lo largo del análisis del tercer ejemplo.

Entonces, en un espejo cóncavo ideal, [Niel, B. I. (2002)], que damos en llamar cuasi-esférico o cuasi-circular al suponer la colocación de n espejos planos cuyas normales coinciden con las n -ésimas raíces de la unidad, los rayos que satisfacen la Ley de Reflexión en sus n colisiones sobre esta construcción ideal, que empiezan y finalizan en el mismo punto en la circunferencia, tienen la forma de las poligonales regulares frontera de polígonos y de

polígonos estrellados (Ver Figura 1.17). En consecuencia, la naturaleza, suele minimizar, o a veces maximizar recursos y en muchas situaciones ni es eficiente, ni extravagante, es de conducta intermedia. Entre las poligonales reflexivas [Niel, B. I. (2003)], se hallan las que minimizan el Recorrido del Viajante, así como aquellas del recorrido más ineficiente de un viajante que visitara un número impar de puntos, i.e. la trayectoria coincidente con la poligonal estrellada de máxima densidad [Kirillov, A. (1999)]. Por otra parte, las poligonales estrelladas de densidad intermedia ni minimizan ni maximizan el tiempo total de propagación de los rayos luminosos. La interpretación de estos resultados así como el estudio de ciertos problemas de los Hamiltonianos Euclídeos óptimos, serán explicados con precisión en el Capítulo 2, Capítulo 3 y su Sección 3.4.

Es importante destacar que en este enfoque Hamiltoniano de la Geometría Óptica en un espejo cuasi-esférico, la generalización de la tercera aplicación del método de variación de los parámetros de los rayos geométricos, ha confluído en las trayectorias hamiltonianas abiertas y cerradas recorridas por el viajante sobre los vértices de polígonos regulares.⁶

1.7. Comunicaciones y publicaciones de las ideas del Capítulo 1

1. Niel, B. I. Mathematical analysis to elucidate Fermat's Principle circumstances. Actas del Séptimo Congreso Dr. Antonio A. R. Monteiro, Bahía Blanca. Departamento de Matemática. Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur, 2003. (Resumen en la pág. 100, 2003). Autor-Expositor.
2. Niel, B. I. Hallazgos de Hamilton en óptica geométrica en un juego Hamiltoniano. LIII Reunión de Comunicaciones Científicas, U.M.A. 2003. Autor-Expositor.
3. Niel, B. I. Hamilton's real finds on geometric optics in a Hamiltonian play . *Proceedings of MS' 2004 University Claude Bernard - Lyon I, LNSS, CNRS, 5-7 July 2004*. France. (Full article at pg. 9.9-9.13). Autor-Expositor.
4. Paper publicado en [Niel, B. I. (2005b)], bajo el título: *Fermat, Snell and Hamilton on Geometric Optics Circumstances*.

⁶Normalmente conocidas como problemas del Travelling Salesman Problem, TSP, en sus versiones Mín. (Mín. TSP) y Máx. (Máx. TSP) ya sean en circuitos (cycles) o en caminos no cíclicos, es decir Mín. TSPP y Máx. TSPP. Acrónimos que agregan una "P" proveniente de Path.

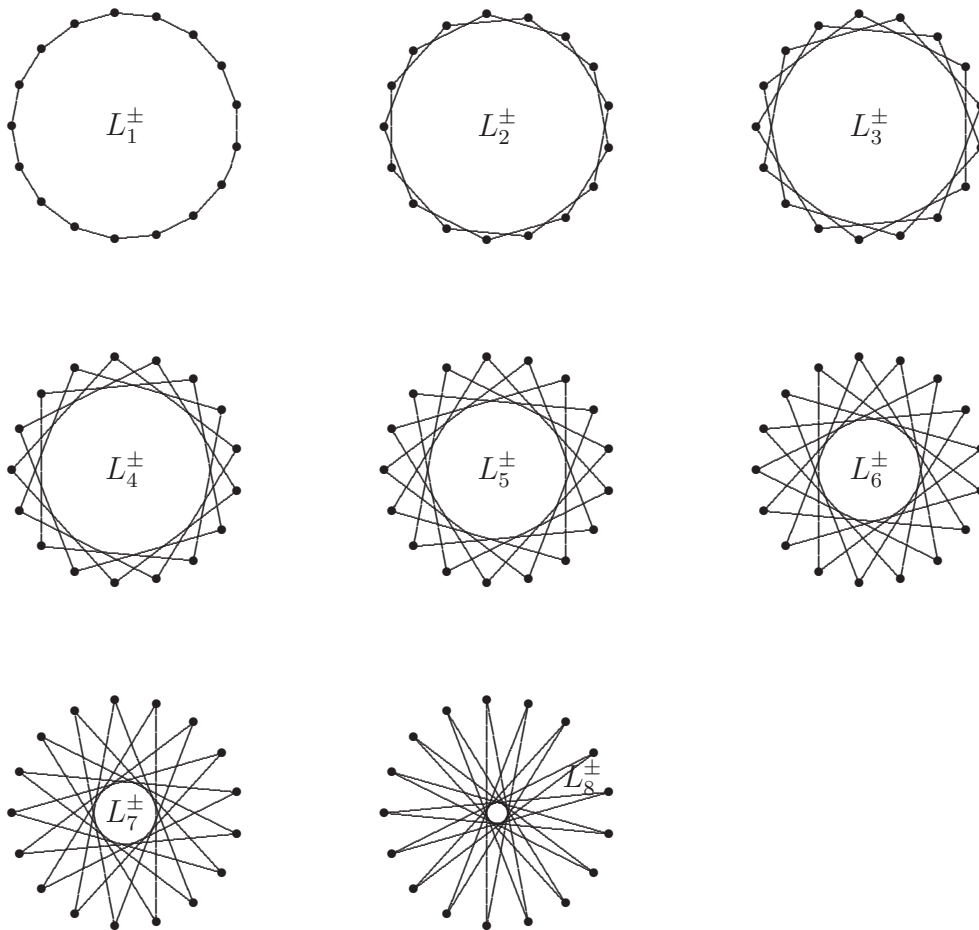


Figura 1.17: Número primo de Fermat $n = 17$: Recorridos del viajante \sim Rayos en el espejo cuasi-esférico $e^{i\pi} \sqrt[17]{1}$.

Capítulo 2

Geometría de los Hamiltonianos

Los resultados de este capítulo están dedicados a estudiar ciclos y caminos hamiltonianos en las redes $\mathcal{N}(K_n(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ con conexión completa K_n , sobre los vértices de las n -ésimas raíces de la unidad $e^{i\pi} \sqrt[n]{1}$ con la distancia euclídea $D = (d_{ij})_{n \times n}$ ponderando las conexiones entre los nodos. En primer término se distinguen y se enumeran los hamiltonianos cíclicos, euclidianos y reflexivos. En segundo término determinaremos los caminos y ciclos hamiltonianos óptimos. Se utiliza un postulado de la Geometría Óptica para identificar los hamiltonianos euclidianos cíclicos más cortos, mientras que los hamiltonianos más largos son caracterizables por este postulado solamente en caso que el número de vértices en las redes sea impar. Mediante consideraciones geométricas específicas, exhibimos un representante de cada uno de los hamiltonianos euclídeos que solucionan los $\frac{n}{2}$ problemas diferentes de los Caminos Hamiltonianos Euclidianos con máxima longitud de recorrido sobre los vértices de un polígono regular de número par de lados [Niel, B. I. (2004), Niel, B. I. (2005a)]. Además, en el caso en que el número de nodos de la red coincide con los $4p$ vértices de un polígono regular, se evidencia la existencia de la poligonal estrellada de máxima densidad entre los ciclos reflexivos.

2.1. Contexto del trabajo

Consideramos la red $\mathcal{N}(K_n(\sqrt[n]{1}), D)$, con $K_n(\sqrt[n]{1})$ el grafo completo con vértices sobre las n -ésimas raíces de la unidad y con $D = (d_{ij})$ la matriz de componentes positivas o nulas de orden $n \times n$ de las distancias euclidianas entre nodos. En estas estructuras, tratamos los problemas de los *hamiltonianos euclidianos cíclicos y no-cíclicos óptimos* [Gee, A. H., Aiyer, S. V. B. and Prager, R. W. (1993)]. La exploración de los hamiltonianos óptimos euclidianos requieren en general implementación computacional dura, en el sentido de que en una red con la arquitectura de conexión completa K_n existen $\frac{(n-1)!}{2}$ ciclos hamiltonianos para testear en una estrategia de búsqueda exhaustiva [Buckly, F., and Harary F. (1990), Hopfield, J. J. and Tank, T. W. (1985)]. Aún para un número moderado de nodos n , evaluar cada uno de ellos resulta ilusorio como lo hemos oportunamente experimentado en simulaciones realizadas en 1998 [Niel, B. I. (2001)] y

posteriormente durante 2005¹. Razones que motivan el desarrollo de muy diversas técnicas y algoritmos de aproximación [Barvinok, A. I. (1996), Fekete, S. P. (1999), Concorde code]. Barnivok en [Barvinok, A. I. (1996)], desarrolla un algoritmo de aproximación de tiempo polinomial para una versión especial de los circuitos más largos en un espacio euclidiano, que es aplicable a nuestro contexto. Fekete, también diseña un algoritmo de tiempo polinomial para realizar el cómputo de la longitud de los ciclos más largos sobre un conjunto de puntos en el plano. Además, este autor demuestra que: “*the Max TSP under euclidean norm in \mathbb{R}^d is \mathcal{NP} -hard for any fixed $d \geq 3$* ” en [Fekete, S. P. (1999)] en la pág. 345. Simultáneamente, este autor, deja abierta la conjetura respecto a la complejidad de la exploración de los ciclos más largos con puntos en el plano y con métrica euclídea. El método de exploración más simple posible consiste en utilizar localmente las estrategias greedy y anti-greedy. Técnicas conocidas como los algoritmos del *Nearest Neighbor* y *Farthest Neighbor*, por nosotros simbolizadas respectivamente mediante \mathcal{NN} y \mathcal{FN} [Brassard, G. and Bratley, P. (1996), Concorde code]. La técnica Greedy, i.e. \mathcal{NN} , detecta los hamiltonianos de mínimo recorrido en las estructuras $\mathcal{N}(K_n(\sqrt[n]{1}), D)$. La exploración Anti-Greedy, i.e. *Farthest Neighbor*, identifica los ciclos hamiltonianos más largos en las estructuras $\mathcal{N}(K_{n=2p+1}(\sqrt[2p+1]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$. Estas trayectorias hamiltonianos óptimas conservan la forma regular de las poligonales de los n -gonos. En ambos casos, hemos seleccionado un contexto teórico adecuado proveniente de los fundamentos y postulados de la Geometría Óptica en el diseño de un modelo sobre un ideal de espejo cóncavo, que hemos denominado espejo cuasi-esférico [Hamilton, W. R. (1833)] con la finalidad de interpretar con razonamientos lógicos y matemáticos los resultados obtenidos desde las simulaciones. En contraposición, el ciclo detectado por la exploración Anti-Greedy, i.e. \mathcal{FN} , en las arquitecturas de las redes sobre un número par de vértices $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ está lejos de ser el viajante más ineficiente, es decir no es el que recorre el camino hamiltoniano cíclico más largo, (e.g. Referirse a la primera y última representación de las trayectorias en la Figura 2.9 de pág. 113). El sub-óptimo hamiltoniano propuesto por la exploración \mathcal{FN} de forma no regular inspiró nuestra construcción de las posibles configuraciones que resuelven los $\frac{n}{2}$ diferentes problemas de caminos hamiltonianos no cíclicos de máxima ineficiencia en $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$. Concretamente, finalizaremos resolviendo cuáles y cuántos son los hamiltonianos cíclicos que realizan el Mín. TSP y el Máx. TSP en las arquitecturas $\mathcal{N}(K_n(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$. Y alejándonos de las formas perfectas o regulares sustentando razonamientos en la geometría del conjunto de puntos exhibiremos hamiltonianos no cíclicos representantes de cada una de las soluciones de los $\frac{n}{2}$ problemas diferentes de caminos de orden $n - 1$ de máxima longitud de recorrido sobre los nodos de $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ cuando el viajante no regresa al punto de partida.

Este trabajo contiene dos secciones esenciales, Sección 2.2 y la Sección 2.2.3, las Conclusiones de su contenido y los Apéndices A, B y C. Los Apéndices A y B contienen las

¹Simulaciones realizadas con un Pentium 4, C.P.U. de 2.4 GHz, 256 MB de R.A.M., Windows XP y DevC++ ver. 4.9.9.2 software. El tiempo de procesamiento fue en las redes de 14 nodos menor a un segundo en una estrategia de fuerza bruta o chequeo exhaustivo, mientras que con “*some clever programming behind*” la exploración insumió dos segundos sobre 16 nodos y 6 días, cuatro horas en 26 nodos. Estos resultados proyectan sobre 42 nodos un requerimiento temporal de procesamiento de datos de 13 millones de años. Agradecimiento a Agustín Claverie. Laboratorio de Matemática. Departamento de Matemática, U.N.S.

demostraciones de los Teoremas 2.2.3 y 2.3.4, que han sido pospuesta con la finalidad de no quebratar con detalles el hilo conector del razonamiento de la contribución. En la Sección 2.2, se confirman cuántos y cuáles son los ciclos más cortos en $\mathcal{N}(K_n(\sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ y los más largos en $\mathcal{N}(K_{n=2p+1}(\sqrt[2p+1]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$, sustentando los argumentos en un postulado de la Geometría Óptica. Contexto que permite obtener la enumeración de los ciclos hamiltonianos reflexivos en $\mathcal{N}(K_n(\sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$. Mientras que la Sección 2.2.3, está dedicada a determinar las trayectorias hamiltonianas de orden $n - 1$ más largas en $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$. Finalmente en una secuencia de longitudes decrecientes de hamiltonianos sub-óptimos que comienza con el hamiltoniano de orden $n - 1$ obtenido por la exploración anti-greedy y en la que se ubica, cuando existe -Appendix C, la poligonal estrellada reflexiva de máxima densidad se analizan las longitudes de recorridos de varias configuraciones hasta determinar el máximo de cada uno de los Traveling Salesman Path Problems, Máx. TSPP, en las arquitecturas de las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ cuando el viajante no vuelve a su punto de partida.

2.2. Primer Resultado: Hamiltonianos Reflexivos

Continuamos esta sección en el contexto teórico originado por las ideas de Hamilton en superficies espejadas cóncavas y aceptando la abstracción ideal de rayo luminoso sostenida por los fundamentos básicos del área de la Geometría Óptica: “ *Un rayo luminoso, en su trayecto entre dos puntos, debe atravesar el camino óptico que hace estacionaria su longitud de recorrido con respecto a las variaciones de los parámetros que definen las trayectorias* ” [Hamilton, W. R. (1833), Tikhomirov, V. M. (1990), Lemons, D. S. (1997)]. Asumiendo este principio creamos un modelo matemático que confirma que en espejos esféricos y cuasi-esféricos [Hamilton, W. R. (1833)], las trayectorias reflexivas pueden realizar el máximo, el mínimo e inclusive no ser ni el máximo ni el mínimo de la función de la longitud del recorrido, i.e. simplemente hacer estacionaria dicha función [Hamilton, W. R. (1833), Sherk, F. A. et al. (1995)]. Este fenómeno particular da a luz una serie de detalles interesantes respecto a los sub-óptimos reflexivos y a los hamiltonianos reflexivos en las redes $\mathcal{N}(K_n(\sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$, [Niel, B. I. (2004), Niel, B. I. (2002)].

2.2.1. Caminos de longitudes estacionarias en la circunferencia: Trayectorias geométricas no restringidas

Aquí se seleccionan los caminos geométricos que comienzan en $C = (-1, 0)$ del espejo cuasi-esférico de radio unitario, que colisionan n veces -incluyendo el último choque- en cualquier punto del espejo cóncavo, y que finalizan en $B = (\cos \beta, \sin \beta)$, con $-\pi \leq \beta \leq 0$.

En esta geometría cada arreglo de n ángulos $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta)$, denotado por (α_i, β) , determina un camino con $n + 1$ vértices -incluyendo los puntos de partida y de llegada- y constituidos en principio por n segmentos lineales. Estos caminos pueden tener dos o más vértices coincidentes y segmentos lineales reducidos a un punto. Para cada $\beta \in [-\pi, 0]$ los $n - 1$ ángulos $\alpha_i \in \mathbb{R}$ están escogidos (Ver Figura 2.1) como las variables independientes de la función de la longitud del recorrido $F_n(\alpha_i, \beta)$, (2.1).

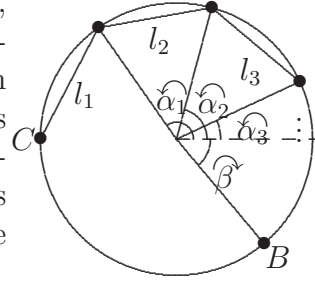


Figura 2.1: Ángulos variacionales α_i .

La longitud de las trayectorias geométricas determinadas por (α_i, β) , es la siguiente:

$$F_n(\alpha_i, \beta) = \sqrt{2} \left\{ \sqrt{1 + \cos \alpha_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \sqrt{1 - \cos(\alpha_i - \alpha_{i-1})} + \sqrt{1 - \cos(\beta - \alpha_{n-1})} \right\}. \quad (2.1)$$

$F_n(\alpha_i, \beta)$ es una función continua. Además $F_n(\alpha_i, \beta) = F_n(\alpha_i + 2k_i\pi, \beta)$ para cualquier $k_i \in \mathbb{Z}$, por lo tanto en el conjunto compacto $\mathcal{K} = [0, 2\pi]^{n-1} \times [-\pi, 0]$, $F_n(\alpha_i, \beta)$ alcanza todos los valores de su imagen.

El caso $\beta = 0$ trata con caminos no-cíclicos, sus características y peculiaridades no son de interés particular para nuestro presente análisis, [Niel, B. I. (2005b)].

Observación 2.2.1 Si $\beta = -\pi$, ($B \equiv C$), para cualquier poligonal cíclica, existe un arreglo de n ángulos, $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, -\pi)$ que la caracteriza, mientras que $F_n(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, -\pi)$ es la longitud recorrida por dicha trayectoria. En particular, entre este conjunto de trayectorias están aquellas que tienen sus vértices en $e^{\pi i} \sqrt[m]{1}$, con $m \leq n$.

Nota 2.2.2 Reconocemos como trayectoria reflexiva cíclica o no-cíclica a aquellas que en cada punto de colisión con la circunferencia verifican la “Ley de Reflexión”, salvo eventualmente en el punto inicial y/o final.

Teorema 2.2.3 Para cada β , $-\pi < \beta \leq 0$, $F_n(\alpha_i, \beta)$ tiene n puntos críticos estacionarios $\alpha_{c_i}(k)$, (2.2):

$$\alpha_{c_i}(k) = \frac{(n - i)\pi + i\beta}{n} + i \cdot \frac{2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1; \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (2.2)$$

- i) Si $-\pi < \beta \leq 0$, cada punto crítico estacionario construye una trayectoria reflexiva de n segmentos lineales cuya longitud es $F_n(\alpha_{c_i}(k), \beta) = \sqrt{2n} \sqrt{1 - \cos \Delta \alpha_{c_i}(k)}$, donde $\Delta \alpha_{c_i}(k) = \alpha_{c_{i-1}}(k) - \alpha_{c_i}(k)$.
- ii) Si $\beta = -\pi$ es $C \equiv B$ y $F_n(\alpha_i, -\pi)$ tiene $n - 1$ puntos críticos estacionarios $\alpha_{c_i}(k)$ dados por (2.2) pero con $k = 0, 2, \dots, n - 1$.
- iii) Todos los puntos críticos estacionarios de $F_n(\alpha_i, \beta)$ son máximos relativos.
- iv) Todos los puntos críticos singulares, donde $F_n(\alpha_i, \beta)$ es una función no diferenciable, erigen trayectorias conformadas con un número menor que $n - 1$ de tramos lineales.
- v) El mínimo de $F_n(\alpha_i, \beta)$ es la distancia entre C y B .
- vi) El máximo de $F_n(\alpha_i, \beta)$ es el máximo relativo de máxima longitud de recorrido. Si n es impar, $\max(F_n(\alpha_i, \beta)) = n \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos(\frac{\beta}{n})} = F_n(\alpha_{c_i}(\frac{n+1}{2}), \beta)$. Si n es par, $\max(F_n(\alpha_i, \beta)) = n \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos(\frac{\beta+\pi}{n})} = F_n(\alpha_{c_i}(\frac{n}{2} + 1), \beta)$.
- vii) Cuando $-\pi < \beta < 0$ y n es par, las longitudes de las n trayectorias reflexivas (todas diferentes) están ordenadas en una cadena de desigualdades estrictamente creciente:

$$0 < F_n(\alpha_{c_i}(1); \beta) < F_n(\alpha_{c_i}(0); \beta) < F_n(\alpha_{c_i}(2); \beta) < F_n(\alpha_{c_i}(n-1); \beta) < F_n(\alpha_{c_i}(3); \beta) < \dots < \underbrace{F_n(\alpha_{c_i}(n-j); \beta) < F_n(\alpha_{c_i}(j+2); \beta)}_{2 \leq j \leq \frac{n}{2}-2} < F_n(\alpha_{c_i}(\frac{n}{2} + 1); \beta) < 2n. \quad (2.3)$$

Si $\beta = -\pi$ y n es par:

$$0 = F_n(\alpha_{c_i}(1); -\pi) < F_n(\alpha_{c_i}(0); -\pi) = F_n(\alpha_{c_i}(2); -\pi) < F_n(\alpha_{c_i}(n-1); -\pi) = F_n(\alpha_{c_i}(3); -\pi) < \dots < \underbrace{F_n(\alpha_{c_i}(n-j); -\pi) = F_n(\alpha_{c_i}(j+2); -\pi)}_{2 \leq j \leq \frac{n}{2}-2} < F_n(\alpha_{c_i}(\frac{n}{2} + 1); -\pi) = 2n. \quad (2.4)$$

Si $\beta = 0$ y n es par:

$$0 < F_n(\alpha_{c_i}(1); 0) = F_n(\alpha_{c_i}(0); 0) < F_n(\alpha_{c_i}(2); 0) = F_n(\alpha_{c_i}(n-1); 0) < \dots < \underbrace{F_n(\alpha_{c_i}(j); 0) = F_n(\alpha_{c_i}(n+1-j); 0)}_{3 \leq j \leq \frac{n}{2}} < 2n. \quad (2.5)$$

- viii) De otro modo, si n es impar y $-\pi < \beta < 0$ las longitudes crecientes de las n trayectorias reflexivas son:

$$0 < F_n(\alpha_{c_i}(1); \beta) < F_n(\alpha_{c_i}(0); \beta) < F_n(\alpha_{c_i}(2); \beta) < \underbrace{F_n(\alpha_{c_i}(n-j); \beta) < F_n(\alpha_{c_i}(j+2); \beta)}_{1 \leq j \leq \frac{n-3}{2}} < 2n. \quad (2.6)$$

Si $\beta = -\pi$ y n es impar:

$$0 = F_n(\alpha_{c_i}(1); -\pi) < F_n(\alpha_{c_i}(0); -\pi) = F_n(\alpha_{c_i}(2); -\pi) < \underbrace{F_n(\alpha_{c_i}(n-j); -\pi) = F_n(\alpha_{c_i}(j+2); -\pi)}_{1 \leq j \leq \frac{n-3}{2}} < 2n. \quad (2.7)$$

Si $\beta = 0$ y n es impar:

$$0 < F_n(\alpha_{c_i}(1); 0) = F_n(\alpha_{c_i}(0); 0) < \underbrace{F_n(\alpha_{c_i}(j); 0) = F_n(\alpha_{c_i}(n+1-j); 0)}_{2 \leq j \leq \frac{n-1}{2}} < F_n(\alpha_{c_i}(\frac{n+1}{2}); 0) = 2n. \quad (2.8)$$

ix) Las trayectorias reflexivas viajan en sentido antihorario o en sentido horario, de acuerdo con el siguiente esquema:

- Cuando $-\pi < \beta < 0$

$$\begin{aligned} n \text{ par:} & \quad \curvearrowleft \text{ si } 1 \leq k < \frac{n+1}{2}; y \quad \curvearrowright \text{ si } \frac{n}{2} + 1 \leq k \leq n \quad (k = 0 \equiv k = n) \\ n \text{ impar:} & \quad \curvearrowleft \text{ si } 1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}; y \quad \curvearrowright \text{ si } \frac{n+1}{2} + 1 \leq k \leq n \quad (k = 0 \equiv k = n) \end{aligned} \quad (2.9)$$

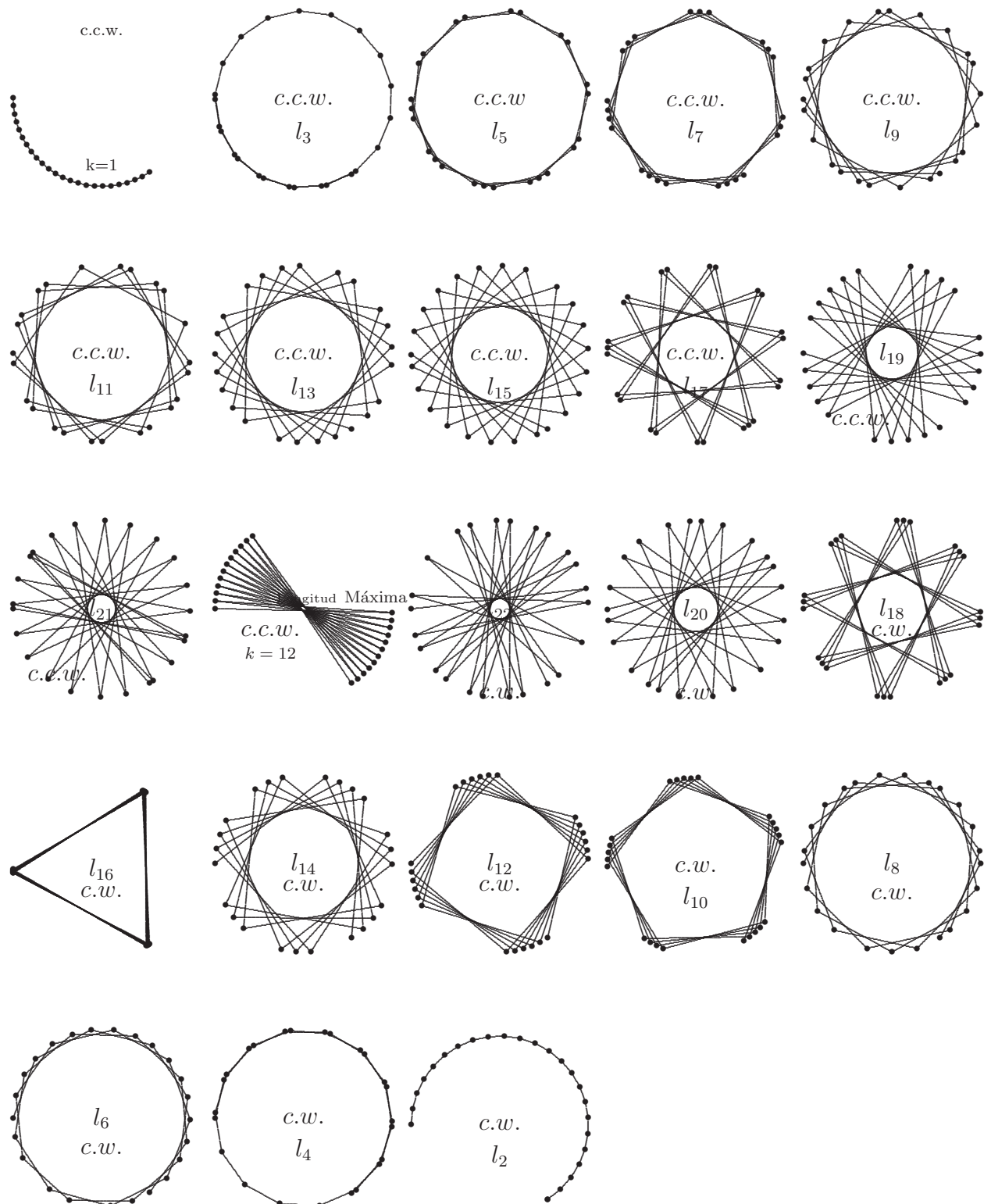
- Cuando $\beta = -\pi$

$$\begin{aligned} n \text{ par:} & \quad \curvearrowleft \text{ si } 1 < k \leq \frac{n}{2} + 1; y \quad \curvearrowright \text{ si } \frac{n}{2} + 2 \leq k \leq n \quad (k = 0 \equiv k = n) \\ n \text{ impar:} & \quad \curvearrowleft \text{ si } 1 < k \leq \frac{n+1}{2}; y \quad \curvearrowright \text{ si } \frac{n+1}{2} + 1 \leq k \leq n \quad (k = 0 \equiv k = n) \end{aligned} \quad (2.10)$$

- Cuando $\beta = 0$

$$\begin{aligned} n \text{ par:} & \quad \curvearrowleft \text{ si } 1 \leq k \leq \frac{n}{2}; y \quad \curvearrowright \text{ si } \frac{n}{2} + 1 \leq k \leq n \quad (k = 0 \equiv k = n) \\ n \text{ impar:} & \quad \curvearrowleft \text{ si } 1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}; y \quad \curvearrowright \text{ si } \frac{n+1}{2} + 1 \leq k \leq n \quad (k = 0 \equiv k = n) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Demostración. Referirse al Apéndice A, a partir de la pág. 108 hasta la pág. 110. ■



Cuadro 2.1: Formas, longitudes y sentido de las trayectorias reflexivas; $\beta = -1, n = 23$.

2.2.2. Si $\beta = -\pi$ las trayectorias reflexivas son ciclos en $e^{\pi i} \sqrt[n]{1}$.

En este caso particular la longitud de los caminos geométricos están dadas por

$$F_n(\alpha_i, -\pi) = \sqrt{2} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 - \cos(\alpha_{i-1} - \alpha_i)} \quad (\alpha_0 = \pi \text{ and } \alpha_n = \beta = -\pi).$$

Las abscisas críticas estacionarias en $F_n(\alpha_i, -\pi)$ generan $n - 1$ trayectorias reflexivas con n tramos lineales y vértices sobre el conjunto de puntos $e^{\pi i} \sqrt[n]{1}$: $\{V_0 = (-1, 0), \dots, V_{n-1}\}$. En otras palabras, son trayectorias cíclicas sobre algunos o todos los vértices de un n -gono regular. Una vez que acordamos en términos y notaciones en el conjunto de puntos $e^{\pi i} \sqrt[n]{1}$, pasamos a tratar características peculiares del caso $\beta = -\pi$ en (2.1).

Sea n un número natural arbitrario y consideremos los vértices de un n -gono regular, es decir el conjunto de n puntos de la forma $e^{\pi i} \sqrt[n]{1}$, nombrados en sentido horario como V_0, \dots, V_{n-1} , a partir de $V_0 = (-1, 0)$. Si l_{\max} es el diámetro, es un segmento que une el vértice V_j con su opuesto $V_{j+\frac{n}{2}}$, solamente en el caso de que n sea par. Si $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$, entonces L_k^- representa el segmento que une los vértices V_j con V_{j+k} y L_k^+ el segmento que conecta V_j con V_{n+j-k} , aunque también con $l_{q,\max}^-$ y $l_{q,\max}^+$ designamos los segmentos que pensamos como los cuasi-diámetros, $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-$ y $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+$ respectivamente. Los subíndices son adicionados módulo n . Cuando se traza el segmento L_k^- se lo inicia desde el vértice V_j y finaliza en el vértice V_{j+k} operación que conlleva un avance angular en sentido horario de magnitud $k \frac{2\pi}{n}$. En otro caso, si L_k^+ se traza desde el mismo vértice inicial le corresponde un avance o variación angular en sentido horario de magnitud $(1 - \frac{k}{n}) \frac{2\pi}{n}$. Por ejemplo, en la Figura 2.2 (derecha), se ilustra la situación $j = 0$ para n par.

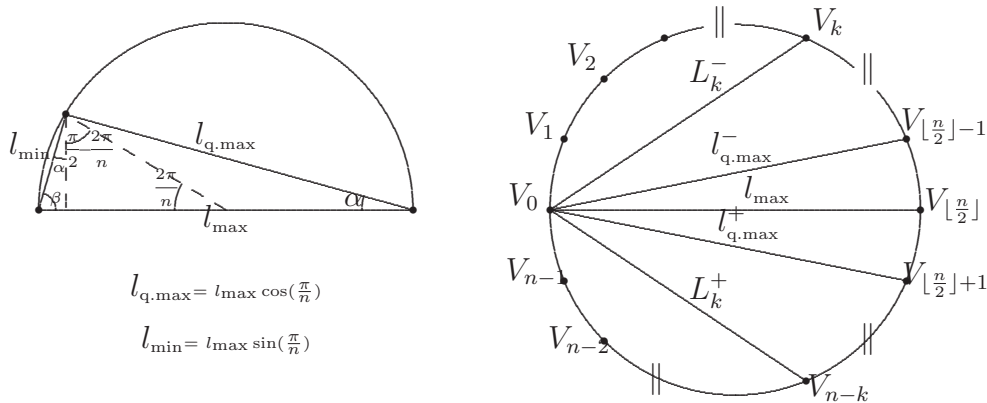


Figura 2.2: Expresiones de $l_{q,\max}$ y l_{\min} (izq.) Diagrama de los L_k desde V_0 para n par

Notación: Por T_k^- se denota un ciclo reflexivo compuesto por n segmentos L_k^- y con vértices en $\{V_0, \dots, V_{n-1}\}$, mientras que T_k^+ está conformado por n segmentos L_k^+ , y con T_k se nota la longitud euclídea del ciclo, puesto que $T_k = \mathcal{L}(n L_k^-) = n \mathcal{L}(L_k^-) =$

$\mathcal{L}(n L_k^+) = n \mathcal{L}(L_k^+) = n \mathcal{L}(L_k^\pm)^2$. En esta circunstancia, la longitud recorrida resulta ser $T_k = 2n \cos \left[\left(\frac{n}{2} - k \right) \frac{\pi}{n} \right]$.

Lema 2.2.4 *Las abscisas críticas estacionarias de $F_n(\alpha_i, -\pi)$ corresponden a ciclos reflexivos constituidos por n segmentos L_k^+ o n segmentos L_k^- . Algunos de los cuales son ciclos hamiltonianos de orden n sobre los puntos $e^{\pi i} \sqrt[n]{1}$. Sus longitudes de recorrido están indicadas en las cadenas de desigualdades (2.4) y (2.7), en el Teorema 2.2.3, que corresponden -respectivamente- a los casos n par y n impar.*

Demostración. Cada una de las trayectorias T_k^- y T_k^+ corresponden a las abscisas críticas estacionarias, en concordancia con los siguientes detalles.

Para n par:

$$T_k^- \longleftrightarrow \alpha_{c_i}(n+1-k), \quad 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$$

$$T_k^+ \longleftrightarrow \alpha_{c_i}(k+1), \quad 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$$

Las coordenadas angulares $\alpha_{c_i}(\frac{n}{2} + 1)$ están asociadas a los $\frac{n}{2}$ -digonos -construidos por n segmentos l_{\max} - simbolizados por $T_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^*$. Se ha utilizado que $\alpha_{c_i}(0)$ y $\alpha_{c_i}(n)$ caracterizan la misma trayectoria T_1^- . Finalmente, T_0^* denota los rebotes en $V_0 \equiv C$, que se corresponde a las abscisas críticas singulares $\alpha_{c_i}(1) = (\pi, \dots, \pi)$.

Para n impar:

$$T_k^- \longleftrightarrow \alpha_{c_i}(n+1-k), \quad 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

$$T_k^+ \longleftrightarrow \alpha_{c_i}(k+1), \quad 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

$$T_0^* \longleftrightarrow \alpha_{c_i}(1).$$

Por lo tanto, las desigualdades (2.4) y (2.7) (Teorema 2.2.3, pág. 81) son respectivamente equivalentes a:

$$0 = T_0^* < T_1^- = T_1^+ < T_2^- = T_2^+ < \underbrace{T_{j+1}^- = T_{j+1}^+}_{2 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2} < T_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^* = 2n \quad (2.12)$$

$$0 = T_0^* < T_1^- = T_1^+ < \underbrace{T_{j+1}^- = T_{j+1}^+}_{1 \leq j \leq \frac{n-3}{2}} < 2n. \quad (2.13)$$

Obviamente, ambas cadenas de desigualdades son verdaderas, una vez que ellas son reescritas en la forma (2.12) y (2.13). ■

² $\mathcal{L}()$ Se utiliza para indicar la longitud euclídeana de segmentos dirigidos y de trayectorias conformadas por tales segmentos. En ocasiones se simboliza $\mathcal{L}(L_k^\pm)$ por L_k , es decir, se considera $\mathcal{L}(L_k^\pm) = L_k$.

2.2.3. Hamiltonianos reflexivos en n -gonos: Rayos geométricos restringidos

Teorema 2.2.5 *La unicidad -excepto orientación- de los ciclos hamiltonianos reflexivos de orden n en las redes $\mathcal{N}(K_n(\sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$, tienen la forma de poligonales estrelladas, (poligonales de las fronteras de los n -gonos estrellados), construidas con n segmentos L_k^- , para los siguientes valores de k :*

- a_1) $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y k es relativamente primo a n , si n es impar. (e.g. La poligonal reflexiva n -gono estrellada de máxima densidad existe. De manera precisa, consiste en el ciclo contruido por n segmentos $l_{q_{\max}} = L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$).
- a_2) $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ y k es relativamente primo a n . Si $n = 4p$ (El n -gono estrellado de máxima densidad se erige con n segmentos $l_{q_{\max}}$, es hamiltoniana); $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2$ y k es relativamente primo a n . Si $n = 2(2p + 1)$ (La poligonal constituida por n segmentos $l_{q_{\max}}$ no atraviesa cada uno de los puntos de $e^{\pi i} \sqrt[n]{1}$, i.e. no es hamiltoniana).

Demostración.

a_1)

Si $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y el segmento L_k^- se dibuja desde el vértice inicial V_0 al vértice de llegada V_k , la reflexión en V_k requiere la incorporación de otro L_k^- . Puesto que, la integración de un segmento L_k^- en cualquier vértice genera un avance angular cw. de $k \frac{2\pi}{n}$, resulta claro que la adición secuencial de n segmentos L_k^- comenzando en V_0 culmina en V_0 .

Como k y n no tienen un común divisor, entonces no existe m , $0 < m < n$, tal que $m \frac{2k\pi}{n} = 2r\pi$, $r \in \mathbb{Z}$. En consecuencia, al vértice V_0 se regresa solamente después de haber ubicado n segmentos L_k^- .

Sin embargo, si $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ pero k y n tienen un común divisor d , el ciclo, construido por sucesivas adiciones del mismo segmento arriba a V_0 después de colisionar solo $\frac{n}{d}$ vértices. En este caso, la ubicación de n segmentos L_k^- implica que el primer ciclo formado pasando por $\frac{n}{d}$ vértices es d veces repetido, entonces este ciclo no pertenece a los ciclos hamiltonianos de orden n . Por lo que un ciclo hamiltoniano reflexivo de orden n sobre el conjunto de vértices $\{V_0, \dots, V_{n-1}\}$, un n -gono regular [Treatman, S., and Wickham, C. (2000)], deberá tener la forma de una n poligonal estrellada construida por n segmentos L_k^- (o L_k^+) para $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y si k es relativamente primo con n . Este resultado es independiente de la paridad o imparidad de n .

La poligonal estrellada asociada a la geometría del n -gono estrellado de lado $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-$ es un ciclo hamiltoniano reflexivo de orden n ya que no existe $m < n$ tal que $m \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \frac{2\pi}{n} = (m - \frac{m}{n}) \pi = 2r\pi$, $r \in \mathbb{Z}$.

a_2)

Si n es par, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ divide a n , por lo que la trayectoria cerrada reflexiva contruida por n segmentos $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = l_{q_{\max}}$ no pertenece al conjunto de ciclos hamiltonianos.

Si $n = 4p$; $m < n$ y si no existe m tal que $m (\frac{n}{2} - 1) \frac{2\pi}{n}$ resulte ser un múltiplo de 2π , por lo tanto se trata de un ciclo hamiltoniano reflexivo de orden n .

Si $n = 2(2p + 1)$; para $m = 2p + 1$ resulta que $m (\frac{n}{2} - 1) \frac{2\pi}{n} = 2p\pi$, por lo que el ciclo de

n segmentos $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} = l_{q,\max}$ no origina un hamiltoniano cíclico sobre los vértices de un $n = 2(2p + 1)$ -gono regular estrellado. ■

Observación 2.2.6 La función de Euler $\phi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, determina la cardinalidad del conjunto de números enteros positivos menores que n con la propiedad de ser relativamente primos a n . Si $\text{mcd}(m, n)$ denota el máximo común divisor entre los naturales m y n , $\phi(n) = \#\{m | \text{mcd}(m, n) = 1, 0 < m < n\}$, [Kirillov, A. (1999)], [Vinogradov, I. (1971)]. En el presente contexto, la función de Euler $\phi(n)$ enumera los hamiltonianos cíclicos reflexivos en las redes $\mathcal{N}(K_n(e^{\pi i} \sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$. De manera precisa $\phi(n)$ contabiliza las trayectorias hamiltonianas reflexivas cíclicas en ambos sentidos de recorridos, i.e. cw y ccw .

Ejemplo 2.2.7 En la red $\mathcal{N}(K_{n=23}(\sqrt[23]{1}), (d_{ij})_{23 \times 23})$ existen 22 hamiltonianos reflexivos, puesto que $\phi(23) = 22$ (Ver Cuadro 2.2, en la pág. 88).

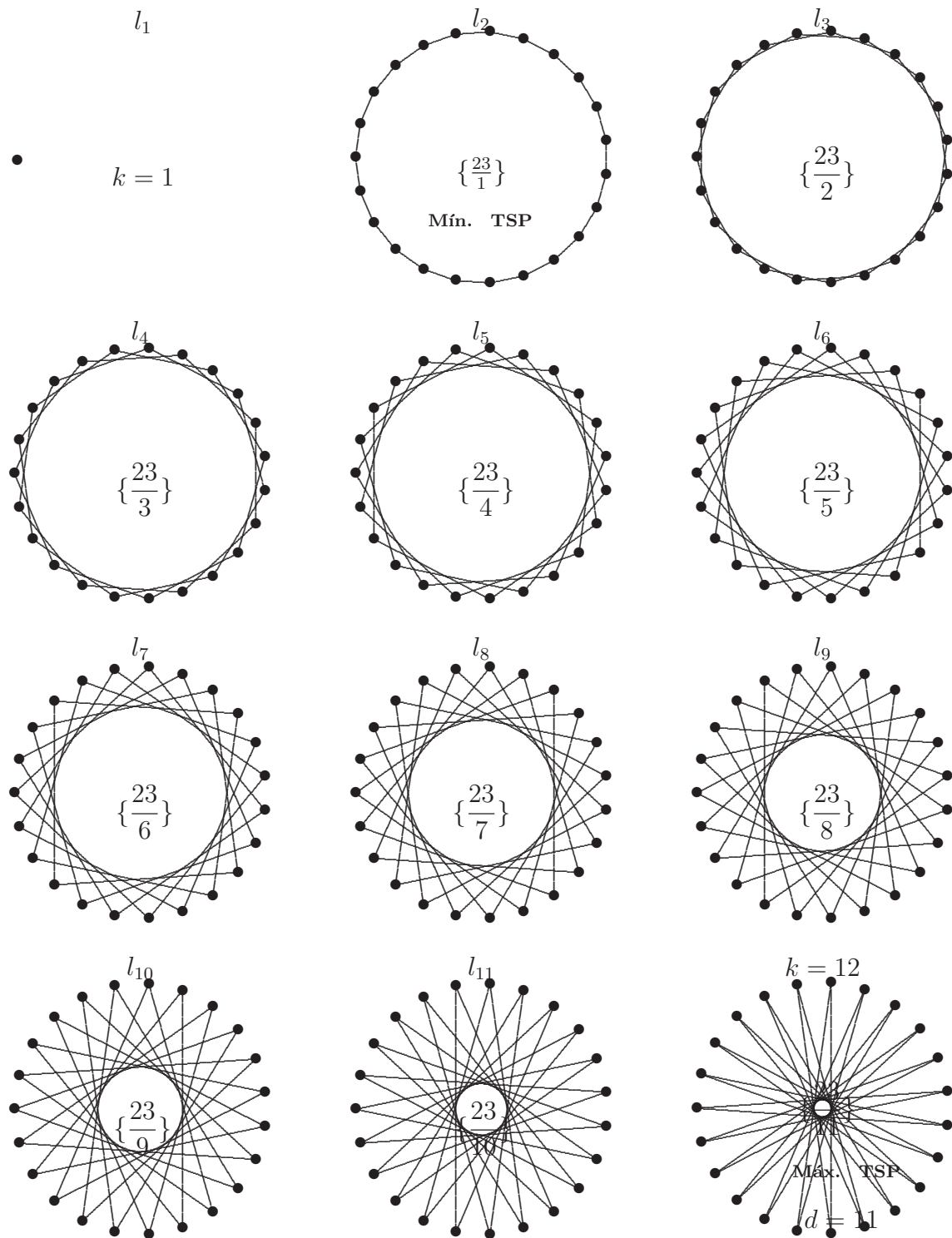
Ejemplo 2.2.8 En la arquitectura $\mathcal{N}(K_{n=24}(\sqrt[24]{1}), (d_{ij})_{24 \times 24})$, asociada a los vértices del 24-gono regular, como $\phi(24) = 8$, los hamiltonianos reflexivos lucen como las poligonales estrelladas asociables a los 24-gonos estrellados. Concretamente $\{\{\frac{24}{1}\}, \{\frac{24}{5}\}, \{\frac{24}{7}\}, \{\frac{24}{11}\}\}$ ³ cw y ccw recorridos (Ver Cuadro 2.3, en la pág. 89).

Corolario 2.2.9 El camino hamiltoniano euclídeo de longitud de recorrido mínima en las redes $\mathcal{N}(K_n(\sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$, y el camino hamiltoniano euclídeo de longitud de recorrido máxima en las redes $\mathcal{N}(K_{2p+1}(\sqrt[2p+1]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$, i.e. el Mín. TSP sobre los vértices de un n -gono regular, con n par o impar, y el Máx. TSP sobre los vértices de un $n = 2p + 1$ -gono regular, $p \geq 2$, son realizados por ciclos reflexivos.

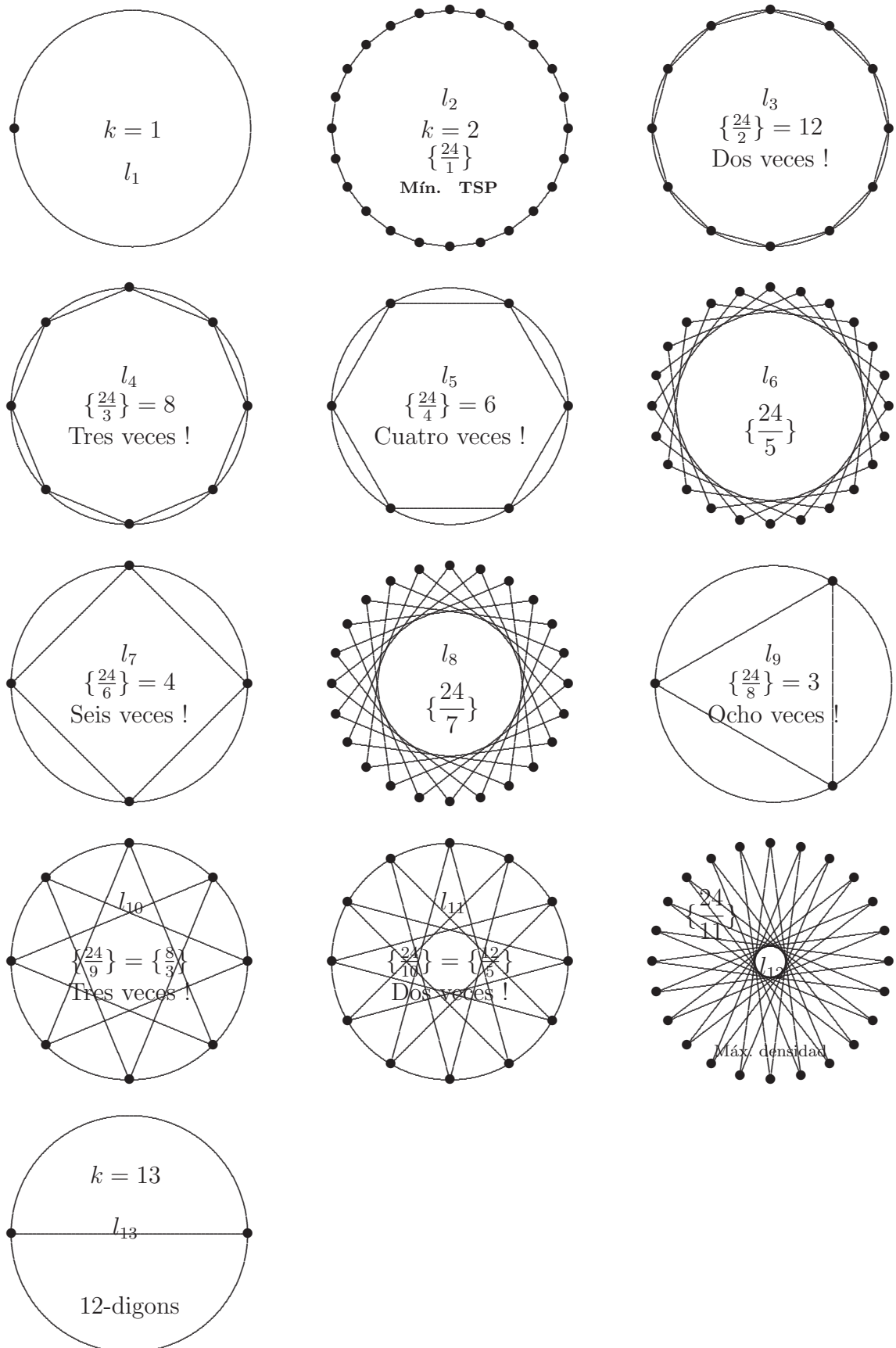
Demostración. En las redes en $\mathcal{N}(K_n(\sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ el camino hamiltoniano de longitud de recorrido mínima es la poligonal reflexiva frontera del n -gono, independientemente de la paridad o imparidad de n . En cambio, solamente si n es impar, hemos demostrado en el Teorema 2.2.3, (2.7) que el hamiltoniano más largo con vértices en $\{V_0, \dots, V_{n-1}\}$ de un n_{odd} -gono es la trayectoria reflexiva construida con n segmentos $l_{q,\max}$. Como los vértices V_0, \dots, V_{n-1} son congruentes con una simple rotación de los n puntos $\sqrt[n]{1}$, los hamiltonianos cíclicos más largos en $\mathcal{N}(K_{2p+1}(\sqrt[2p+1]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ son los ciclos reflexivos construidos por n segmentos $l_{q,\max}$, i.e. la poligonal estrellada de máxima longitud, asociable a la forma de $n = 2p + 1$ -gono regular de máxima densidad. Del Teorema 2.2.3, inciso ix) resulta evidente que los ciclos óptimos en ambos casos son únicos salvo sentido del recorrido. ■

Observación 2.2.10 El Teorema 2.2.3 demuestra que el máximo de $F_n(\alpha_{c_i}(\frac{n}{2} + 1), -\pi) = 2n$ no corresponde a un ciclo hamiltoniano de orden n , si n es par. Además el Teorema 2.2.5 clarifica que si $n \neq 4p$ la poligonal estrellada de máxima densidad es una trayectoria reflexiva pero no es un ciclo hamiltoniano. En consecuencia, ambos resultados dejan abierto el problema de determinar las longitudes máximas y los ciclos hamiltonianos que las realizan en las redes $\mathcal{N}(K_{2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$. Exploración que se debe realizar en el conjunto de los ciclos hamiltonianos no reflexivos sobre los vértices de los $n = 2p + 2$ -gonos regulares.

³Hemos adoptado la notación usada por primera vez por el matemático suizo L. Schläfli (1814-1895), [Coxeter, H. S. M. (1963)], i.e. $\{p/d\}$ simboliza un p -gono regular estrellado de densidad d .



Cuadro 2.2: Recorridos reflexivos del viajante. Ejemplo 2.2.7 pág. 87, $n = 23$, $\beta = -\pi$.



Cuadro 2.3: Trayectorias cíclicas reflexivas. Ejemplo 2.2.8 de pág. 87, $n = 24$, $\beta = -\pi$.

2.2.4. Caleidoscopio de ciclos reflexivos

Con referencia al modelo variacional de la Figura 2.1, pág. 80, la función $F_n(\alpha_i, \beta = -\pi) = \sum_{i=1}^n \sqrt{2 - 2 \cos(\alpha_i - \alpha_{i-1})}$ con $\alpha_0 = \alpha_n = \pi$, es singular en los hiperplanos congruentes con $\alpha_1 = \pm\pi$, $\alpha_2 = \alpha_3, \dots, \alpha_{n-2} = \alpha_{n-1}$ y $\alpha_{n-1} = \pm\pi$, los que dividen el espacio de parámetros angulares \mathbb{R}^{n-1} en subregiones de la forma $\alpha_1 \geq \alpha_2, \alpha_2 \geq \alpha_3, \dots, \alpha_{n-2} \geq \alpha_{n-1}$. En cada una de estas 2^{n-2} - subregiones en \mathbb{R}^{n-1} se localizan las trayectorias reflexivas cíclicas del modelo.

Ejemplo 2.2.11 *En la estructura $\mathcal{N}(K_5(e^{i\pi} \sqrt[5]{1}), (d_{ij})_{5 \times 5})$, congruente con los vértices del 5-gono regular, se identifica el Caleidoscopio de los ciclos reflexivos en cada una de las subregiones de los ángulos variacionales a partir de los ocho sistemas de identidades recurrentes (2.14), (2.15), (2.16), y (2.17) que anulan las derivadas primeras de $F_5(\alpha_i, \beta = -\pi) = \sum_{i=1}^5 \sqrt{2 - 2 \cos(\alpha_i - \alpha_{i-1})}$ con $\alpha_0 = \alpha_5 = \pi$, si se considera que $-\pi < \alpha_1 < \pi$ y $-\pi < \alpha_4 < \pi$. Ver la ilustración de los ángulos variacionales en la Figura 2.1, pág. 80.*

$$\alpha_4 = -\alpha_1 \tag{2.14}$$

$$\alpha_4 - \alpha_3 = \pm\pi + \alpha_1 \tag{2.15}$$

$$\alpha_3 - \alpha_2 = \pm\pi + \alpha_1 \tag{2.16}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \pm\pi + \alpha_1 \tag{2.17}$$

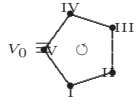
En este caleidoscopio de las trayectorias reflexivas cíclicas en los vértices del pentágono regular, i.e. en las redes $\mathcal{N}(K_5(e^{i\pi} \sqrt[5]{1}), (d_{i,j})_{5 \times 5})$, en cada una de las subregiones del espacio de parámetros angulares variacionales, vive al menos un recorrido del viajante que realiza el Mín. TSP o el que alcanza el Máx. TSP. Variando a lo sumo en el sentido de la orientación del ciclo. En este caleidoscopio por tratarse de un número primo de vértices no existirán otras formas cíclicas reflexivas excepto estas dos, i.e. la poligonal hamiltoniana que recorre cada vértice del 5-gono y la poligonal estrellada de máxima densidad $\{\frac{5}{2}\}$ o $\{\frac{5}{3}\}$ recorrida en sentido horario o antihorario, respectivamente. Cuya forma estrellada y regular se reconoce como el símbolo Pitagórico de la buena salud, [Coxeter, H. S. M. (1963)].

En cada una de las sub-regiones se localiza al menos una trayectoria poligonal reflexiva cíclica si $-\pi < \alpha_1 < \pi$ y $-\pi < \alpha_4 < \pi$ que se obtienen mediante las asignaciones de los parámetros críticos estacionarios $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ de la función de la longitud de recorrido $F_5(\alpha_i, -\pi)$, Figura 2.1, pág. 80, a partir de la resolución de los ocho sistemas de identidades angulares en recurrencia definidas en (2.14), (2.15), (2.16) y (2.17).

En la subregión (2.18) de los parámetros variacionales se localiza el Mín. TSP, ver detalles en el Cuadro 2.4.

$$\alpha_1 < \alpha_2, \alpha_2 < \alpha_3, \alpha_3 < \alpha_4 \tag{2.18}$$

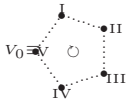
2.2. Primer Resultado: Hamiltonianos Reflexivos

| $n = 5$ | Signos | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4$ | cw. o ccw. | Formas |
|---------|--------|-------------------|------------------|-----------------|------------------|--|------------|---|
| (2.15)+ | +++ | $-\frac{3\pi}{5}$ | $-\frac{\pi}{5}$ | $\frac{\pi}{5}$ | $\frac{3\pi}{5}$ | $<<<$ | ccw. | $\{5L_1^+\}$  |

Cuadro 2.4: MÍN. TSP del 5-gono, ccw. en $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$.

$$\alpha_1 > \alpha_2, \alpha_2 > \alpha_3, \alpha_3 > \alpha_4 \quad (2.19)$$

En la subregión angular (2.19) se localiza el hamiltoniano reflexivo cíclico que realiza el MÍN. TSP en vértices del 5-gono recorrido en sentido horario. Los detalles de los cálculos se encuentran en el Cuadro 2.5.

| $n = 5$ | Signos | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4$ | cw. o ccw. | Formas |
|-------------------------|--------|------------------|-----------------|------------------|-------------------|--|------------|--|
| (2.15), (2.16),(2.17) - | --- | $\frac{3\pi}{5}$ | $\frac{\pi}{5}$ | $-\frac{\pi}{5}$ | $-\frac{3\pi}{5}$ | $>>>$ | cw. | $\{5L_1^-\}$  |

Cuadro 2.5: MÍN. TSP del 5-gono, cw. en $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$.

Capítulo 2. Geometría de los Hamiltonianos

$$\alpha_1 > \alpha_2, \alpha_2 > \alpha_3, \alpha_3 < \alpha_4 \quad (2.20)$$

| $n = 5$ | Signos | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4$ | cw. o ccw. | Formas |
|----------|--------|-----------------|-------------------|-------------------|------------------|--|------------|------------------|
| (2.15) + | + - - | $\frac{\pi}{5}$ | $-\frac{3\pi}{5}$ | $-\frac{7\pi}{5}$ | $-\frac{\pi}{5}$ | > > < | cw. | $\{5L_2^-\}$ |

Cuadro 2.6: Máx. TSP en vértices del 5-gono, cw. $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3, \alpha_3 < \alpha_4$.

$$\alpha_1 > \alpha_2, \alpha_2 < \alpha_3, \alpha_3 > \alpha_4 \quad (2.21)$$

| $n = 5$ | Signos | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4$ | cw. o ccw. | Formas |
|----------|--------|-----------------|-------------------|------------------|------------------|--|------------|------------------|
| (2.16) + | - + - | $\frac{\pi}{5}$ | $-\frac{3\pi}{5}$ | $\frac{3\pi}{5}$ | $-\frac{\pi}{5}$ | > < > | cw. | $\{5L_2^-\}$ |

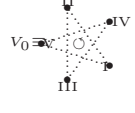
Cuadro 2.7: Máx. TSP del 5-gono, ccw. en $\alpha_1 > \alpha_2, \alpha_2 < \alpha_3, \alpha_3 > \alpha_4$.

$$\alpha_1 < \alpha_2, \alpha_2 > \alpha_3, \alpha_3 > \alpha_4 \quad (2.22)$$

| $n = 5$ | Signos | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4$ | cw. o ccw. | Formas |
|----------|--------|-----------------|------------------|------------------|------------------|--|------------|------------------|
| (2.17) + | - - + | $\frac{\pi}{5}$ | $\frac{7\pi}{5}$ | $\frac{3\pi}{5}$ | $-\frac{\pi}{5}$ | < > > | cw. | $\{5L_2^-\}$ |

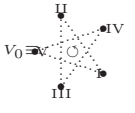
Cuadro 2.8: Máx. TSP del 5-gono, cw. en $\alpha_1 < \alpha_2, \alpha_2 > \alpha_3, \alpha_3 > \alpha_4$.

$$\alpha_1 > \alpha_2, \alpha_2 < \alpha_3, \alpha_3 < \alpha_4 \quad (2.23)$$

| $n = 5$ | Signos | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4$ | cw. o ccw. | Formas |
|----------|--------|------------------|-------------------|-------------------|-----------------|--|------------|---|
| (2.17) - | ++- | $-\frac{\pi}{5}$ | $-\frac{7\pi}{5}$ | $-\frac{3\pi}{5}$ | $\frac{\pi}{5}$ | $> < <$ | ccw. | $\{5L_2^+\}$  |

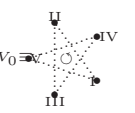
Cuadro 2.9: Máx. TSP del 5-gono, ccw. en $\alpha_1 > \alpha_2, \alpha_2 < \alpha_3, \alpha_3 < \alpha_4$.

$$\alpha_1 < \alpha_2, \alpha_2 > \alpha_3, \alpha_3 < \alpha_4 \quad (2.24)$$

| $n = 5$ | Signos | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4$ | cw. o ccw. | Formas |
|----------|--------|------------------|------------------|-------------------|-----------------|--|------------|--|
| (2.16) - | +-+ | $-\frac{\pi}{5}$ | $\frac{3\pi}{5}$ | $-\frac{3\pi}{5}$ | $\frac{\pi}{5}$ | $< > <$ | ccw. | $\{5L_2^+\}$  |

Cuadro 2.10: Máx. TSP del 5-gono, ccw. en $\alpha_1 < \alpha_2, \alpha_2 > \alpha_3, \alpha_3 < \alpha_4$.

$$\alpha_1 < \alpha_2, \alpha_2 < \alpha_3, \alpha_3 > \alpha_4 \quad (2.25)$$

| $n = 5$ | Signos | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4$ | cw. o ccw. | Formas |
|----------|--------|------------------|------------------|------------------|-----------------|--|------------|---|
| (2.15) - | -++ | $-\frac{\pi}{5}$ | $\frac{3\pi}{5}$ | $\frac{7\pi}{5}$ | $\frac{\pi}{5}$ | $< < >$ | ccw. | $\{5L_2^+\}$  |

Cuadro 2.11: Máx. TSP del 5-gono, ccw. en $\alpha_1 < \alpha_2, \alpha_2 < \alpha_3, \alpha_3 > \alpha_4$.

Capítulo 2. Geometría de los Hamiltonianos

Ejemplo 2.2.12 En la estructura $\mathcal{N}(K_6(e^{i\pi\sqrt[6]{1}}), (d_{ij})_{6 \times 6})$, congruente con los vértices del 6-gono regular, se identifica el Kaleidoscopio de los ciclos reflexivos en cada una de las subregiones de los ángulos variacionales a partir de los dieciséis sistemas de identidades recu-

rrentes que anulan las derivadas primeras de $F_6(\alpha_i, \beta = -\pi) = \sum_{i=1}^6 \sqrt{2 - 2 \cos(\alpha_i - \alpha_{i-1})}$ con $\alpha_0 = \alpha_6 = \pi$, si se considera que $-\pi < \alpha_1 < \pi$ y $-\pi < \alpha_5 < \pi$. Ver ilustración del modelo variacional para interpretar este caso particular en la Figura 2.1, pág. 80.

$$\alpha_5 = -\alpha_1 \quad (2.26)$$

$$\alpha_5 - \alpha_4 = \pm\pi + \alpha_1 \quad (2.27)$$

$$\alpha_4 - \alpha_3 = \pm\pi + \alpha_1 \quad (2.28)$$

$$\alpha_3 - \alpha_2 = \pm\pi + \alpha_1 \quad (2.29)$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \pm\pi + \alpha_1 \quad (2.30)$$

El sistema asociado con los cuatro valores positivos del factor π , se resuelve para la trayectoria cíclica reflexiva hamiltoniana $\{-\frac{4\pi}{6}, -\frac{2\pi}{6}, 0, \frac{2\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \}$, con la forma de la poligonal natural asociada al 6-gono y recorrida en sentido ccw., $\{\frac{6}{5}\}$. Mientras que el sistema de identidades que corresponde a asignar al factor π un signo negativo se resuelve para $\{\frac{4\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, 0, -\frac{2\pi}{6}, -\frac{4\pi}{6}, \}$, i.e. el ciclo hamiltoniano $\{\frac{6}{1}\}$ recorrido en sentido horario.

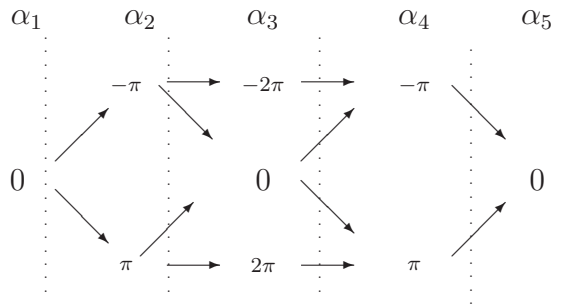


Figura 2.3: Geometría de los digonos replicados del 6-gono.

Los casos en los que el factor π aparece una sola vez con signo negativo, los cuatro sistemas se resuelven para las abscisas estacionarias $\{-\frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{6\pi}{6}, -\frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}\}$, $\{-\frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, -\frac{6\pi}{6}, -\frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}\}$, $\{-\frac{2\pi}{6}, -\frac{10\pi}{6}, -\frac{6\pi}{6}, -\frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}\}$, $\{-\frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{6\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}\}$. Trayectoria reflexiva no hamiltoniana que recorre dos veces en sentido antihorario el 3-gono definido por los vértices $e^{i\pi\sqrt[3]{1}}$ contenidos en el 6-gono congruente con las $\sqrt[6]{1}$ raíces de la unidad. Resulta sencillo confirmar que los cuatro sistemas que se definen al asignarle un sólo signo positivo al factor π se resuelven con los negativos de los cuatro puntos críticos anteriores. Y la forma de la trayectoria reflexiva es coincidente con la anterior, pero con la excepción de estar recorrida en sentido horario. La Figura 2.3 de la pág. 94 ilustra de manera constructiva las abscisas críticas estacionarias de $F_6(\alpha_i, \beta = -\pi)$ de las seis trayectorias reflexivas en la forma de digonos reiterados que rebotan en $V_0(-1, 0)$ y en su antípoda el nodo $(1, 0)$. Cada uno de estos seis puntos críticos estacionarios resultan al resolver los $C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 3!$ sistemas asignando dos valores positivos y dos valores

negativos en los cuatro factores $\pm\pi$ en (2.27)-(2.30). Estas trayectorias reflexivas están determinadas por las secuencias angulares siguientes: $\{0, -\pi, 0, -\pi, 0\}$, $\{0, -\pi, 0, \pi, 0\}$, $\{0, \pi, 0, -\pi, 0\}$, $\{0, \pi, 0, \pi, 0\}$, $\{0, \pi, 2\pi, \pi, 0\}$ y $\{0, -\pi, -2\pi, -\pi, 0\}$.

Ejemplo 2.2.13 Poligonal estrellada reflexiva de máxima densidad en las arquitecturas $\mathcal{N}(K_{n=2k+1}(e^{i\pi\sqrt[n]{1}}), (d_{i,j})_{n \times n})$, i.e. Máx. TSP $\sim \{\frac{2k+1}{k}\}$.

Las poligonales estrelladas de máxima densidad en un $2k + 1$ -gono son de la forma $(-\frac{\pi}{n+1}, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \frac{\pi}{n+1})$ o bien $(\frac{\pi}{n+1}, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, -\frac{\pi}{n+1})$, con $n = 2k$. Además cada coordenada -a partir de la primera- admite dos expresiones, que se obtienen de la anterior

sumando los valores $\begin{cases} \pi - \frac{\pi}{n+1} \\ -\pi - \frac{\pi}{n+1} \end{cases}$. Interpretación geométrica que origina el árbol de la pág. 96.

La última coordenada queda determinada por $\alpha_n = -\alpha_1$, todas las expresiones posibles de la poligonal estrellada de máxima densidad $(-\frac{\pi}{n+1}, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \frac{\pi}{n+1})$ resultan de sumar sucesivamente $n - 1$ términos $(\pi - \frac{\pi}{n+1})$ o $(-\pi - \frac{\pi}{n+1})$ a α_1 , de manera que la suma final sea $\frac{\pi}{n+1}$.

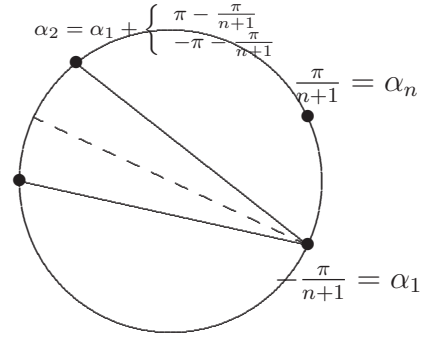


Figura 2.4: Interpretación geométrica del caleidoscopio del Máx. TSP en $2p + 1$ -gono.

Llamando x al número de sumandos $(\pi - \frac{\pi}{n+1})$, e y al número de sumandos $(-\pi - \frac{\pi}{n+1})$ tales que $\alpha_1 + x(\pi - \frac{\pi}{n+1}) + y(-\pi - \frac{\pi}{n+1}) = \alpha_n$, se tiene el siguiente sistema para la poligonal estrellada de máxima densidad $(-\frac{\pi}{n+1}, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \frac{\pi}{n+1})$:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{n+1} + x(\pi - \frac{\pi}{n+1}) + y(-\pi - \frac{\pi}{n+1}) = \frac{\pi}{n+1} \\ x + y = n - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - \frac{x+y}{n+1} = \frac{2}{n+1} \\ x + y = n - 1 \end{cases}$$

$\iff x - y = \frac{n-1}{n+1} + \frac{2}{n+1} = 1 \iff x = y + 1$. Por lo tanto $y + 1 + y = n - 1 \iff y = \frac{n-2}{2} \implies x = \frac{n-2}{2} + 1$. Es decir hay una única forma de pasar de α_1 a α_n sumando $n - 1$ sumandos $(\pi - \frac{\pi}{n+1})$ y $(-\pi - \frac{\pi}{n+1})$ que consiste en sumar $x = \frac{n-2}{2} + 1$ sumandos $(\pi - \frac{\pi}{n+1})$ y $y = \frac{n-2}{2}$ sumandos $(-\pi - \frac{\pi}{n+1})$. Por lo tanto hay $C_{\frac{n-2}{2}+1}^{n-1} = C_{\frac{n-2}{2}}^{n-1}$ formas distintas de combinarlos por lo tanto hay $C_{\frac{n-2}{2}}^{n-1}$ n -uplas $(-\frac{\pi}{n+1}, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \frac{\pi}{n+1})$. Luego el número total de trayectorias que siguen la forma de una poligonal estrellada de máxima densidad es $2 C_{\frac{n-2}{2}}^{n-1}$, [Vilenkin, N. (1972)].

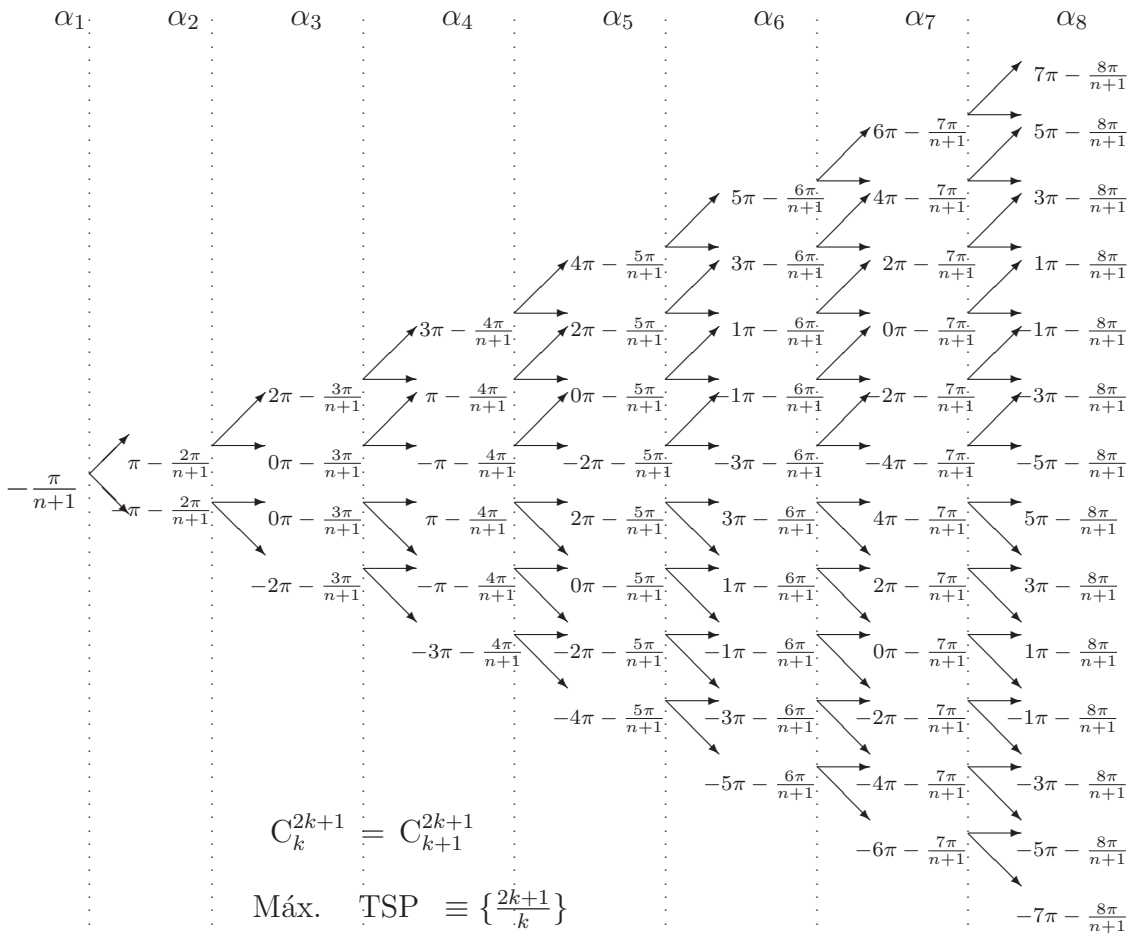


Figura 2.5: Geometría del Máx. TSP en $2k + 1$ -gonos.

Ejemplo 2.2.14 *Recorridos cíclicos hamiltonianos en los vértices de un 7-gono regular.*

Hay una diferencia fundamental en el estudio de los recorridos del viajante, ciclos hamiltonianos, de acuerdo a que el número de vértices sea par o impar. La resolución del Máx. TSP es un claro ejemplo de esta afirmación. El análisis comparativo de los ciclos exhibidos en las Figuras 2.8 y 2.6 evidencia el carácter no reflexivo de las trayectorias que realizan el Máx. TSP en el hexágono; por ejemplo el ciclo hamiltoniano $\{2L_2^- + L_3 + 2L_2^+ + L_3\}$ en C_H^6 ⁴, de longitud $2L_3 + 4L_2$; versus las estructuras regulares estrelladas en el heptágono. Estas son ciclos hamiltonianos que realizan el itinerario de mayor costo o ineficiencia, i.e Máx. TSP en los vértices de un heptágono, e.g. $\{7L_3^-\}$ y $\{7L_3^+\}$. Detalle singular y destacable en toda arquitectura con un número de vértices impar primo es la presencia de todos los itinerarios hamiltonianos reflexivos estrellados. En el presente ejemplo del heptágono, por tratarse de impar fermatiano existen como itinerarios del viajante los ciclos $\{\frac{7}{1}\}$: $\{7L_1^-\}$ y $\{7L_1^+\}$ que realizan el Mín. TSP y además ciclos $\{\frac{7}{3}\}$: $\{7L_3^-\}$; $\{7L_3^+\}$, que realizan el Máx. TSP. Existen también los hamiltonianos reflexivos no extremos $\{\frac{7}{2}\}$, i.e. los ciclos $\{7L_2^-\}$ y $\{7L_2^+\}$, representados, entre otros, en la Figura 2.6.

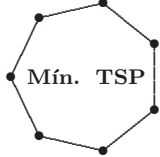


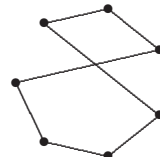
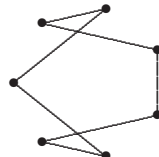
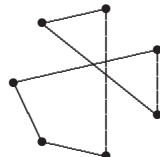
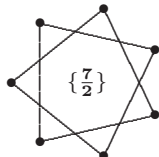

| $\mathcal{N}(K_7(e^{i\pi\sqrt[7]{1}}, d_{7 \times 7}^E))$ | | | | | |
|---|---|---|---|--|---|
| Mín. TSP; $7L_1$ | | | Máx. TSP; $7L_3$ | | |
| $7L_1^-; 7L_1^+$  | | | $7L_3^-; 7L_3^+$  | | |
| $2L_2^\pm + 5L_1^\pm$ | $2L_3^\pm + 5L_1^\pm$ | $4L_2^\pm + 3L_1^\pm$ | $3L_3^\pm + 4L_1^\pm$ | $7L_2^-; 7L_2^+$ | $2L_2^\pm + 5L_3^\pm$ |
|  |  |  |  | $\{\frac{7}{2}\}$  |  |

Figura 2.6: Itinerarios y longitudes del viajante en $\mathcal{N}(K_{n=7}(e^{i\pi\sqrt[7]{1}}, d_{7 \times 7}^E)$, i.e. C_H^7 .

Ejemplo 2.2.15 *Las poligonales reflexivas cíclicas en los vértices del 7-gono regular, i.e. en la red $\mathcal{N}(K_7(e^{i\pi\sqrt[7]{1}}, (d_{i,j})_{7 \times 7})$, son todas trayectorias hamiltonianas.*

La región de diferenciabilidad de la función $F_7(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6, \beta = -\pi)$, que da la longitud de recorrido, (2.1) Pág. 80, está formada por las subregiones en el espacio euclídeo \mathbb{R}^6 , que resultan al eliminar del mismo los hiperplanos $\alpha_1 = \pm\pi$, $\alpha_2 = \alpha_3$, $\alpha_3 = \alpha_4$, $\alpha_4 = \alpha_5$, $\alpha_5 = \alpha_6$ y $\alpha_6 = \pm\pi$, sobre los cuales la función no es diferenciable.

⁴ C_H^n denota cada ciclo hamiltoniano con nodos en las n raíces de la unidad, $e^{i\pi\sqrt[n]{1}} =: e^{i\pi} e^{\frac{0-2k\pi i}{n}}$ $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. En consistencia con las ilustraciones.

Capítulo 2. Geometría de los Hamiltonianos

La resolución de los 2^5 sistemas de identidades angulares $\alpha_6 = -\alpha_1$, $\alpha_6 - \alpha_5 = \pm\pi + \alpha_1$, $\alpha_5 - \alpha_4 = \pm\pi + \alpha_1$, $\alpha_4 - \alpha_3 = \pm\pi + \alpha_1$, $\alpha_3 - \alpha_2 = \pm\pi + \alpha_1$ y $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm\pi + \alpha_1$, si se considera $-\pi < \alpha_1 < \pi$ y $-\pi < \alpha_6 < \pi$, identifica en cada una de las 2^5 subregiones del espacio \mathbb{R}^6 la localización de al menos una de las tres figuras hamiltonianas cíclicas reflexivas.

Observación 2.2.16 *Se consideran en este tratamiento a las identidades de las variaciones anteriores del caso, ordenadas según lo escrito en el párrafo anterior.*

Existen tres poligonales estrelladas que se corresponden con los hamiltonianos reflexivos cíclicos, ver Figura 2.6 en la pág. 97, $\{\frac{7}{1}\} \sim$ Mín. TSP, $\{\frac{7}{2}\}$ y $\{\frac{7}{3}\} \sim$ Máx. TSP y que corresponden a los seis puntos críticos estacionarios de la función $F_7(\alpha_i, -\pi)$, ver Teorema 2.2.3 en la página 80, es decir las tres poligonales reflexivas mencionadas recorridas en sentido horario y en sentido antihorario, que se obtienen al reemplazar $\beta = -\pi$ en la ecuación (2.2), pág. 80. En particular los ciclos hamiltonianos reflexivos $\{\frac{7}{1}\}$ y $\{\frac{7}{6}\}$ congruentes con la poligonal naturalmente asociada al 7-gono, quedan determinados de la siguiente manera el $\{\frac{7}{1}\}$ cw. definido por el punto crítico de $F_7(\alpha_i, -\pi)$ que se obtiene al resolver el sistema $\alpha_6 = -\alpha_1$, $\alpha_6 - \alpha_5 = \alpha_5 - \alpha_4 = \alpha_4 - \alpha_3 = \alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_1 = -\pi + \alpha_1$, i.e. $(\frac{5\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{\pi}{7}, -\frac{\pi}{7}, -\frac{3\pi}{7}, -\frac{5\pi}{7})$ cuya trayectoria vive en $-\pi < \alpha_1 < \dots < \alpha_i < \alpha_{i+1} < \dots < \alpha_6 < \pi$. Mientras que, el $\{\frac{7}{6}\}$ ciclo hamiltoniano ccw. resulta al resolver el sistema por recurrencia $\alpha_6 = -\alpha_1$, $\alpha_6 - \alpha_5 = \alpha_5 - \alpha_4 = \alpha_4 - \alpha_3 = \alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_1 = \pi + \alpha_1$, i.e. $(-\frac{5\pi}{7}, -\frac{3\pi}{7}, -\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7})$, trayectoria que se localiza en la subregión $\pi > \alpha_1 > \dots > \alpha_i > \alpha_{i+1} \dots > \alpha_6 > -\pi$. Cada sistema determinado por una única identidad angular con signo negativo y las cuatro restantes con signo positivo determinan una trayectoria estrellada reflexiva del tipo $\{\frac{7}{5}\}$ ccw., e.g. $\alpha_6 = -\alpha_1$, $\alpha_6 - \alpha_5 = \alpha_5 - \alpha_4 = \alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_1 = \pi + \alpha_1$ con $\alpha_4 - \alpha_3 = -\pi + \alpha_1$, i.e. $(-\frac{3\pi}{7}, \frac{\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, -\frac{5\pi}{7}, -\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7})$ que vive en la subregión $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 > \alpha_4 < \alpha_5 < \alpha_6$. Este ciclo hamiltoniano reflexivo, $\{\frac{7}{5}\}$ ccw., se encuentra localizado por las resoluciones de las $C_4^5 = \frac{5!}{4!1!} = 5$ identidades con solo una identidad del tipo $\alpha_i - \alpha_{i-1} = -\pi + \alpha_1$. Por el contrario, cuando las identidades angulares contienen una única expresión $\alpha_i - \alpha_{i-1} = \pi + \alpha_1$, la trayectoria que se localiza por la resolución de los $C_1^5 = 5$ sistemas de identidades con la restricción mencionada corresponden a la poligonal estrellada de densidad media recorrida en sentido horario, i.e. $\{\frac{7}{2}\}$ cw., e.g. $\alpha_6 = -\alpha_1$, $\alpha_5 - \alpha_4 = \alpha_4 - \alpha_3 = \alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_1 = -\pi + \alpha_1$ y $\alpha_6 - \alpha_5 = \pi + \alpha_1$ que determina al punto crítico estacionario $(\frac{3\pi}{7}, -\frac{\pi}{7}, -\frac{5\pi}{7}, -\frac{9\pi}{7}, -\frac{13\pi}{7}, -\frac{3\pi}{7})$ localizado en la subregión $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_5 < \alpha_6$. Por lo tanto, las identidades angulares estudiadas con un solo signo distinto identifican y ubican C_4^5 más C_1^5 poligonales del tipo $\{\frac{7}{5}\}$ y $\{\frac{7}{2}\}$. Finalmente, si de las cinco identidades del sistema solo dos mantienen el signo positivo para π , cada uno de los $C_2^5 = 10$ sistemas a resolver identifican a la poligonal estrellada de máxima densidad $\{\frac{7}{3}\}$ cw., e.g. $\alpha_6 = -\alpha_1$, $\alpha_6 - \alpha_5 = \alpha_5 - \alpha_4 = \pi + \alpha_1$ y $\alpha_4 - \alpha_3 = \alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_1 = -\pi + \alpha_1$, i.e. $(\frac{\pi}{7}, -\frac{5\pi}{7}, -\frac{11\pi}{7}, -\frac{17\pi}{7}, -\frac{9\pi}{7}, -\frac{\pi}{7})$, que vive en $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 < \alpha_5 < \alpha_6$. En caso contrario, si tres de las identidades mantiene a π con signo positivo, se identifica a $\{\frac{7}{4}\}$ ccw., e.g. $\alpha_6 = -\alpha_1$, $\alpha_6 - \alpha_5 = \alpha_5 - \alpha_4 = \alpha_4 - \alpha_3 = \pi + \alpha_1$ y $\alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_1 = -\pi + \alpha_1$, i.e. $(-\frac{\pi}{7}, -\frac{9\pi}{7}, -\frac{17\pi}{7}, -\frac{11\pi}{7}, -\frac{5\pi}{7}, \frac{\pi}{7})$, que vive en $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5 < \alpha_6$. En consecuencia, los sistemas con dos identidades de distinto signo determinan la localización de C_2^5 y C_3^5 , un total de veinte repeticiones de la poligonal estrellada de máxima densidad en

uno u otro sentido de recorrido, i.e. aquella que resuelve el Máx. TSP del caso $\{\frac{7}{3}\}$. (Ver Figura 2.7, en la pág. 99).

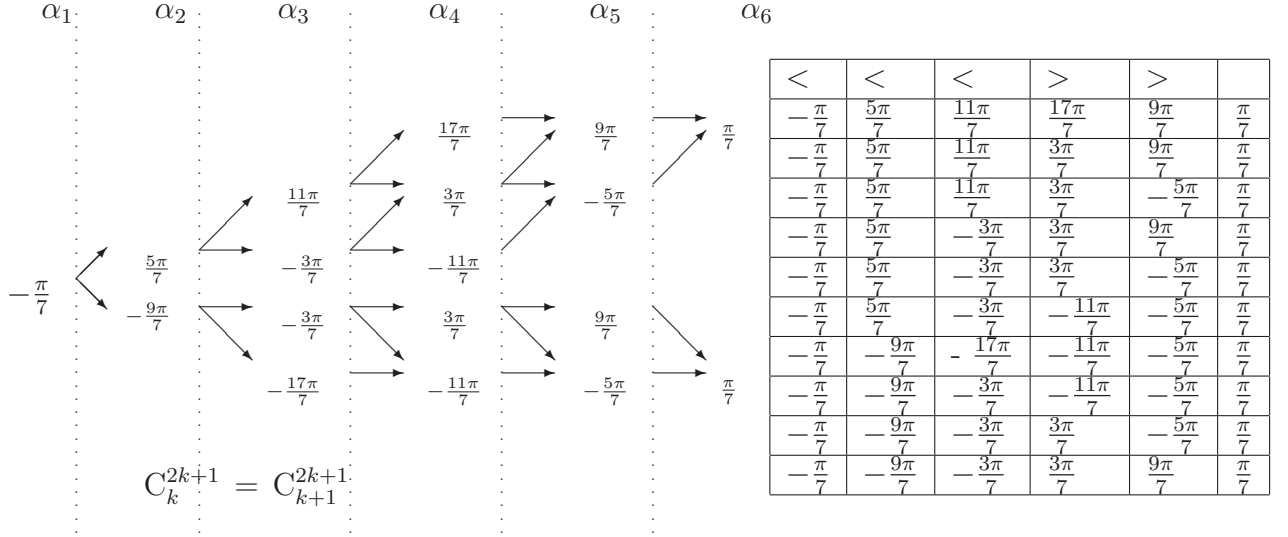


Figura 2.7: Hamiltonianos reflexivos cíclicos en el 7-gono.

2.2.5. Tópicos singulares de la paridad

Sea $n \in \mathbb{N}$. Las longitudes $l(L_k)$ de los segmentos L_k^\pm , $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ verifican las siguientes relaciones

$$l(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i}) - l(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (i+1)}) < l(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (i+1)}) - l(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (i+2)}), \quad 0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2. \quad (2.31)$$

Es inmediata la justificación geométrica que determina la validez del siguiente resultado en los vértices de un $2p + 2$ -gono.

Teorema 2.2.17 *En las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[n]{1}), D)$, congruentes con los vértices del $2p + 2$ -gono no existe ciclo hamiltoniano, $\exists C_H^n$, que realice las siguientes longitudes totales de recorrido:*

$$\left(\frac{n}{2} + l\right) L_{\frac{n}{2}} + \sum_{i=1}^{p+1-l} l_i L_j^\pm$$

cualquiera sea j , $1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$ con l y l_i enteros positivos.

Capítulo 2. Geometría de los Hamiltonianos

Demostración.

Inmediata a partir del hecho que superar el número $\frac{n}{2}$ para la cantidad de los diámetros constitutivos de las sucesiones origina la creación de un 2-gono. ■

Teorema 2.2.18 *En las redes, $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[n]{1}), D)$, no existen itinerarios hamiltonianos sobre los n vértices de un $2p+2$ -gono regular, formados por n segmentos L_k^\pm que satisfagan:*

$$\sum_{i=1}^j l_i L_{k_i} + \mu L_1; \quad 2 \leq k_i \leq \frac{n}{2}, \quad k_i \neq k_{i+1}, \quad \mu \geq 1, \quad 2p+2 = \sum_{i=1}^j l_i + \mu \quad (2.32)$$

si $\sum_{i=1}^j l_i k_i$ y μ tienen distinta imparidad.

Demostración.

Sea γ_i , $0 \leq \gamma_i \leq l_i$, la cantidad de $L_{k_i}^+$ y η , $0 \leq \eta \leq \mu$, la cantidad de L_1^+ . Entonces, una trayectoria cíclica en la estructura $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[n]{1}), D)$, que realice la longitud de recorrido expresada por $\sum_{i=1}^j l_i L_{k_i} + \mu L_1$, (2.32), requiere de la existencia de al menos una terna de enteros positivos (γ_i, η, z) que resuelva la siguiente identidad:

$$-2 \sum_{i=1}^j \gamma_i k_i - 2\eta + \sum_{i=1}^j l_i k_i + \mu = n \left(z - \sum_{i=1}^j \gamma_i - \eta \right), \quad 1 \leq z \leq n-1. \quad (2.33)$$

Bajo la hipótesis de que n es par y como $\sum_{i=1}^j l_i k_i$ y μ poseen distinta paridad, no existe terna (γ_i, η, z) alguna que resuelva la ecuación (2.33). ■

Ejemplo 2.2.19 *En la estructura de la red $\mathcal{N}(K_6(\sqrt[6]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$, en congruencia con los vértices del 6-gono regular, en el Cuadro 2.12 se explicita longitudes euclidianas no realizables mediante hamiltoniano alguno. Mientras que en la Figura 2.8 se exhiben longitudes admisibles de recorridos así como un representante cíclico hamiltoniano que las realiza.*

En la red $\mathcal{N}(K_6(\sqrt[6]{1}), d_{6 \times 6}^E)$ las longitudes de recorridos $L_2 + 5L_1$, $3L_2 + 3L_1$, $2L_3 + L_2 + 3L_1$, $L_3 + 3L_2 + 2L_1$, $3L_3 + L_2 + 2L_1$, $5L_2 + L_1$, $4L_3 + L_2 + L_1$, $2L_3 + 3L_2 + L_1$ no son realizables mediante un ciclo hamiltoniano, ya que satisfacen la ecuación (2.32). Es sencillo establecer que la longitud asociada a $L_3 + 5L_1$ puede ser realizada por trayectorias cerradas pero en ningún caso por un tour hamiltoniano C_H^6 . Precisamente porque las distribuciones son $(\gamma = 0, \eta = 3)$, $(\gamma = 0, \eta = 1)$ y sus respectivos pares duales, i.e. $(\gamma = 1, \eta = 1)$, $(\gamma = 1, \eta = 4)$, verifican las condiciones del Teorema 2.2.18. Sin embargo, existen C_H^6 que realizan las longitudes $2L_2 + 4L_1$ y $2L_3 + 4L_1$. Por ejemplo aquellos con los respectivos ordenamientos $L_2^- + L_1^+ + L_2^- + 3L_1^-$ y $L_3 + 2L_1^+ + L_3 + 2L_1^-$, referirse al Teorema 2.4.6 en la página 116. Existen dos C_H^6 que realizan la longitud de viaje $3L_3 + 3L_1$. Construidos por tres subsucesiones consecutivas $(L_3 + L_1^-)$ o $3(L_3 + L_1^+)$. El

hamiltoniano $L_3 + L_1^+ + L_2^- + L_1^- + L_2^- + L_1^+$ recorre la longitud $L_3 + 2L_2 + 3L_1$. El ciclo del viajante $L_2^- + L_1^+ + L_2^- + L_2^- + L_1^+ + L_2^-$ insume $4L_2 + 2L_1$, mientras que $2L_3 + 2L_2 + 2L_1$ puede ser un recorrido del viajante si el orden es $L_3 + L_2^- + L_1^+ + L_3 + L_1^- + L_2^+$. El Teorema 2.2.17 determina que no existe C_H^6 que realice la longitud de trayecto $4L_3 + 2L_1$, pues está conformada por cuatro diámetros. En las columnas décima, decimoquinta y decimoséptima del Cuadro 2.12 los casos verifican las condiciones del Teorema 2.2.17. El hamiltoniano euclidiano obtenido por la estrategia de exploración del vecino más lejano, i.e. \mathcal{FN} acrónimo de “furthest neighbour”, realiza la longitud de recorrido $3L_3 + 2L_2 + L_1$ mediante por ejemplo la sucesión $L_3 + L_2^- + L_3 + L_2^- + L_3 + L_1^+$ o siguiendo $L_3 + L_2^+ + L_3 + L_2^+ + L_3 + L_1^-$. Por último el hamiltoniano $L_3 + 2L_2^- + L_1^- + 2L_2^-$ insume la longitud $L_3 + 4L_2 + L_1$.

| $\sum_{i=1}^j l_i L_{k_i} + \mu L_1$, en $\mathcal{N}(K_6(\sqrt[6]{1}), d_{6 \times 6}^E)$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|------------|------------|---|---|------------|---|---|------------|---|------------|------------|------------|---|------------|------------|---|------------|------------|---|
| L_3 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | 1 | 2 | 0 | 4 | 1 | 3 | 2 | 0 | 5 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| L_2 | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 | 2 | 1 | 4 | 0 | 3 | 1 | 2 | 5 | 0 | 4 | 1 | 3 | 2 |
| L_1 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| C^6 | \nexists | ? | ? | ? | \nexists | ? | ? | \nexists | ? | ? | \nexists | \nexists | ? | \nexists | ? | ? | \nexists | \nexists | ? |
| C^6 | † | ∃ | ∃ | ∃ | † | ∃ | ∃ | † | ∃ | ∃ | † | † | ∃ | † | † | ∃ | † | † | ∃ |
| C_H^6 | \nexists | \nexists | ∃ | ∃ | \nexists | ∃ | ∃ | \nexists | ∃ | \nexists | \nexists | \nexists | ∃ | \nexists | \nexists | ∃ | \nexists | \nexists | ∃ |

Cuadro 2.12: 6-gono: Longitudes hamiltonianas admisibles y no admisibles.

| $\mathcal{N}(K_6(\sqrt[6]{1}), d_{6 \times 6}^E)$ | | | | | | | |
|---|---------------|---------------|---------------------|-------------------------|----------------------|--------------------|---------------------|
| Mín. TSP; $6L_1$ | | | | Máx. TSP; $2L_3 + 4L_2$ | | | |
| | | | | | | | |
| $2L_2 + 4L_1$ | $2L_3 + 4L_1$ | $3L_3 + 3L_1$ | $L_3 + 2L_2 + 3L_1$ | $4L_2 + 2L_1$ | $2L_3 + 2L_2 + 2L_1$ | $L_3 + 4L_2 + L_1$ | $3L_3 + 2L_2 + L_1$ |
| | | | | | | | |
| 2º | 3º | 6º | 4º | 5º | 7º | 8º | 9º |

Figura 2.8: Longitudes e Itinerarios de C_H^6 s en $\mathcal{N}(K_{n=6}(e^{i\pi} \sqrt[6]{1}), d_{6 \times 6}^E)$.

Ejemplo 2.2.20 Comparación de las longitudes de recorridos (2.34) y (2.35) de caminos hamiltonianos con vértices de un $2p + 2$ -gono.

Se parte de que existe en las estructuras $\mathcal{N}(K_{2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$, al menos un camino hamiltoniano P_H^n que realiza las respectivas longitudes de recorrido (2.34) y (2.35), para $l_{\frac{n}{2}-k+1} = l_{\max} \cos[(k-1)\frac{\pi}{n}]$ si $k + \bar{k} = \frac{n}{2} + 1$ y con $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$, en las condiciones de la Figura 2.2 de la pág. 84 y teniendo en cuenta la validez de (2.31) para las longitudes

Capítulo 2. Geometría de los Hamiltonianos

euclídeas $\mathcal{L}(L_k)$ de los segmentos L_k es posible comparar las longitudes (2.34) y (2.35).

$$\left(\frac{n}{2} - k + 1\right) l_{\max} + \left(\frac{n}{2} + k - 2\right) l_{q,\max}, \quad n > 6, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}. \quad (2.34)$$

$$\left(\frac{n}{2} - 1\right) l_{\frac{n}{2}} + \left(\frac{n}{2} - 1\right) l_{\frac{n}{2}-1} + l_{\frac{n}{2}-k+1}, \quad 1 \leq k \leq \frac{n}{2}. \quad (2.35)$$

La expresiones (2.34) y (2.35) se reescriben, respectivamente como (2.36) y (2.37).

$$\bar{k} l_{\max} + (n - 1 - \bar{k}) l_{q,\max}; \quad \bar{k} = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} - 2, \dots, 3, 2, 1. \quad (2.36)$$

$$\left(\frac{n}{2} - 1\right) l_{\max} + \left(\frac{n}{2} - 1\right) l_{q,\max} + l_{\bar{k}}; \quad l_{\bar{k}} = l_{\max} \sin\left(\frac{\bar{k}\pi}{n}\right), \quad \bar{k} = \frac{n}{2}, \left(\frac{n}{2} - 1\right), \dots, 3, 2, 1. \quad (2.37)$$

Es obvio que si $\bar{k} = \frac{n}{2}$, ($k = 1$, en (2.34)) y $\bar{k} = \frac{n}{2} - 1$, ($k = 2$, en (2.34)) ambas longitudes euclidianas son las mismas. En cualquiera de los otros casos se confirma la siguiente desigualdad:

$$\left(\frac{n}{2} - 1\right) l_{\max} + l_{\bar{k}} \leq \bar{k} l_{\max} + \left(\frac{n}{2} - \bar{k}\right) l_{q,\max}; \quad l_{\bar{k}} = l_{\max} \sin\left(\frac{\bar{k}\pi}{n}\right), \quad \bar{k} = \frac{n}{2} - 2, \dots, 2, 1. \quad (2.38)$$

La expresión anterior, si $\tilde{k} = k - 1$, es equivalente a:

$$\tilde{k} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - (\tilde{k} - 1) - \cos\left(\frac{\tilde{k}\pi}{n}\right) > 0, \quad \text{si } 2 \leq \tilde{k} \leq \frac{n}{2} - 1. \quad (2.39)$$

Utilizando la representación en serie de las funciones trigonométricas se tiene que:

$$\underbrace{\frac{1}{2!} \left[\left(\frac{\tilde{k}\pi}{n}\right)^2 - \tilde{k} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \right]}_{a_1 > 0 \text{ si } \tilde{k} \geq 2} - \frac{1}{4!} \left[\left(\frac{\tilde{k}\pi}{n}\right)^4 - \tilde{k} \left(\frac{\pi}{n}\right)^4 \right] + \dots + \frac{(-1)^r}{(2r)!} \left[\left(\frac{\tilde{k}\pi}{n}\right)^{2r} - \tilde{k} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2r} \right] + \dots > 0$$

Si a_r denota $a_r =: \frac{1}{(2r)!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2r} [\tilde{k}^{2r} - \tilde{k}]$, es suficiente para la convergencia de la serie demostrar que a_r es estrictamente decreciente, lo que es equivalente a $\frac{a_r}{a_{r+1}} > 1$, para todo $r \geq 1$ (\tilde{k} fijo, $2 \leq \tilde{k} \leq \frac{n}{2} - 1$).

$$\begin{aligned} \frac{a_r}{a_{r+1}} &= \frac{1}{(2r)!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2r} [\tilde{k}^{2r} - \tilde{k}] : \frac{1}{(2r+2)!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2r+2} [\tilde{k}^{2r+2} - \tilde{k}] \\ &= \underbrace{(2r+2)(2r+1)}_{\geq 12 \text{ si } r \geq 1} \underbrace{\left(\frac{n}{\pi}\right)^2}_{> 1 \text{ si } n \geq 4} \left(\frac{\tilde{k}^{2r-1} - 1}{\tilde{k}^{2r+1} - 1} \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

a partir del hecho, de que para cada r fijo, resulta ser $\frac{\tilde{k}^{2r-1} - 1}{\tilde{k}^{2r+1} - 1}$ estrictamente decreciente para $\tilde{k} = 2, 3, \dots$ lo que conduce a la siguiente desigualdad $\frac{\tilde{k}^{2r-1} - 1}{\tilde{k}^{2r+1} - 1} \geq \frac{(\frac{n}{2} - 1)^{2r-1} - 1}{(\frac{n}{2} - 1)^{2r+1} - 1}$

si $\tilde{k} \leq \frac{n}{2} - 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{a_r}{a_r + 1} &= (2r + 2)(2r + 1) \frac{n^2}{\pi^2} \left(\frac{\tilde{k}^{2r-1} - 1}{\tilde{k}^{2r+1} - 1} \right) \geq \frac{12}{\pi^2} n^2 \frac{(\frac{n}{2} - 1)^{2r-1} - 1}{(\frac{n}{2} - 1)^{2r+1} - 1} > \frac{12}{\pi^2} n^2 \frac{(\frac{n}{2} - 1)^{2r-1} - 1}{(\frac{n}{2} - 1)^{2r+1}} \\ &= \frac{12}{\pi^2} n^2 \left[\frac{1}{(\frac{n}{2} - 1)^2} - \frac{1}{(\frac{n}{2} - 1)^{2r+1}} \right]. \end{aligned}$$

Lema 2.2.21 Para cada entero $n \geq 5$ vale

$$\frac{12}{\pi^2} n^2 \left[\frac{1}{(\frac{n}{2} - 1)^2} - \frac{1}{(\frac{n}{2} - 1)^{2r+1}} \right] > 1.$$

Demostración. Para cada entero $n \geq 5$ la sucesión $x_r = \frac{1}{(\frac{n}{2} - 1)^2} - \frac{1}{(\frac{n}{2} - 1)^{2r+1}}$ es monótona estrictamente creciente, por lo tanto $x_r > x_1 = \frac{4}{(n-2)^2} \left(1 - \frac{2}{n-2}\right)$ para todo entero positivo $r > 1$. Es decir,

$$\frac{12}{\pi^2} n^2 \left[\frac{1}{(\frac{n}{2} - 1)^2} - \frac{1}{(\frac{n}{2} - 1)^{2r+1}} \right] > \frac{48}{\pi^2} \frac{n^2}{(n-2)^2} \left(1 - \frac{2}{n-2}\right) > \frac{48}{\pi^2} \left(1 - \frac{2}{n-2}\right).$$

Pero la sucesión $y_n = \left(1 - \frac{2}{n-2}\right)$ es monótona estrictamente creciente a partir de $n = 3$. En consecuencia, $y_n = \left(1 - \frac{2}{n-2}\right) > y_5 = \frac{1}{3}$ para todo $n > 5$.

Por lo tanto

$$\frac{12}{\pi^2} n^2 \left[\frac{1}{(\frac{n}{2} - 1)^2} - \frac{1}{(\frac{n}{2} - 1)^{2r+1}} \right] > \frac{48}{\pi^2} \left(1 - \frac{2}{n-2}\right) > \frac{48}{\pi^2} \cdot \frac{1}{3} > 1$$

■

El Lema anterior demuestra que $\frac{a_r}{a_{r+1}} > 1$ para todo r . Como el primer término de la serie alternada es positivo, la desigualdad (2.39) es verdadera. Se ha demostrado entonces que la longitud de recorrido en (2.35) es menor que la longitud (2.34).

2.3. Segundo Resultado: Hamiltonianos no reflexivos en $2p + 2$ -gonos regulares

En esta sección se caracterizan las configuraciones de los hamiltonianos que realizan el Máx. TSP en las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$ para $n \geq 6$. El Teorema 2.3.1 obtiene los resultados deseados a partir de las pruebas en el Teorema 2.3.5, Lema 2.5.2, Teorema 2.3.9 y el Teorema 2.3.10. La prueba del Teorema 2.3.4 se presenta en el Apéndice B en la pág. 110. Hemos decidido posponer los detalles de la demostración para no interrumpir con argumentaciones extensas y gravosas el hilo conductor del razonamiento que presenta la idea general. En el Apéndice C, pág. 113, en la cadena de longitudes de ciclos hamiltonianos sub-óptimos, se encuentra la poligonal hamiltoniana estrellada de máxima densidad en las estructuras de las redes $\mathcal{N}(K_{n=4p}(\sqrt[4p]{1}), D)$.

2.3.1. Razonamientos lógicos y geométricos

Teorema 2.3.1 Sean las redes $\mathcal{N} = \{K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D\}$ con sus $n = 2p + 2$ nodos, V_0, \dots, V_{n-1} , que se hallan en correspondencia con las raíces n -ésimas de la unidad, ordenadas en sentido cw. a partir de $V_0 = (-1, 0)$. Existe al menos una trayectoria cerrada con n segmentos, cuyos vértices son los puntos del conjunto $\{V_0, \dots, V_{n-1}\}$, que comienza en V_0 y tal que para cada k entre 1 y $\frac{n}{2} - 1$, esta trayectoria se construye, con un único $L_k^-, \frac{n}{2} + 1 - k$ diámetros l_{max} y $\frac{n}{2} + k - 2$ cuasi-diámetros $l_{q,max}^\pm$.

Demostración. A partir del vértice V_0 , cualquier reordenamiento en la sucesión de los n segmentos $L_k^-, L_k^+, l_{max}, l_{q,max}^-$ or $l_{q,max}^+$ determina una trayectoria con sus vértices en el conjunto $\{V_0, \dots, V_{n-1}\}$. Sin embargo, alguno o algunos de los posibles reordenamientos mencionados podría no conformar un camino cerrado o bien no pasar por cada uno de los vértices en el conjunto $\{V_0, \dots, V_{n-1}\}$. En general, un reordenamiento cualquiera de los mencionados segmentos no cumple el requisito de formar un ciclo hamiltoniano sobre los n vértices en cuestión. La trayectoria requerida deberá poseer exactamente: un segmento $L_k^-, \frac{n}{2} + 1 - k$ segmentos l_{max} , t segmentos $l_{q,max}^-$ y $\frac{n}{2} + k - 2 - t$ segmentos $l_{q,max}^+$. Teniendo en cuenta el avance angular cw. que se produce al pasar de un vértice V_i a V_j , al colocar, a partir de V_i , uno de los segmentos antes indicados, probar la existencia de uno de los caminos cerrados indicados en la tesis requiere que para algún $m \in \mathbb{N}$ exista una solución entera para la siguiente ecuación (2.41):

$$\frac{n}{2} - (k - 1) + \left(\frac{n}{2} + k - 2 - t\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) + t\left(1 - \frac{2}{n}\right) + k\frac{2}{n} = 2m, \quad 0 \leq t \leq \frac{n}{2} + k - 2. \quad (2.41)$$

Una solución entera para (2.41) es $t = k - 1$. ■

Definición 2.3.2 Denotaremos por Γ_k , $1 \leq k \leq n/2 - 1$, a la trayectoria, que comienza en el vértice inicial $V_0 = (-1, 0)$ y está determinada por la siguiente sucesión de segmentos:

$$\Gamma_k: \underbrace{L_k^-, \underbrace{l_{q,max}^-, \dots, l_{q,max}^-}_{k-1}, l_{max}, \underbrace{l_{q,max}^+, \dots, l_{q,max}^+}_k, \underbrace{l_{max}, l_{q,max}^+, l_{max}, \dots, l_{q,max}^+, l_{max}}_{\left(\frac{n}{2} - k\right)l_{max} \text{ y } \left(\frac{n}{2} - k - 1\right)l_{q,max}^+}}_{2k+1} \quad (2.42)$$

Nota 2.3.3 Las trayectorias Γ_k , se tratarán con mayor detalle en (3.2) pág. 142 .

El Teorema 2.3.1 ha confirmado la existencia de trayectorias de orden n construidas con un único segmento L_k^- , $(\frac{n}{2} + 1 - k)$ segmentos l_{\max} , $(k - 1)$ segmentos $l_{q,\max}^-$ y $(\frac{n}{2} - 1)$ segmentos $l_{q,\max}^+$. A continuación, el Teorema 2.3.4 garantiza la existencia de ciclos hamiltonianos euclidianos cíclicos de orden n compuestos por las mencionadas asignaciones de segmentos dirigidos en las redes $\mathcal{N} = \{K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D\}$.

Teorema 2.3.4 En las redes $\mathcal{N} = \{K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D\}$ con sus $n = 2p + 2$ nodos, V_0, \dots, V_{n-1} , en correspondencia con las n -ésimas raíces de la unidad ordenadas cw. a partir de $V_0 = (-1, 0)$; resulta que cada trayectoria Γ_k (2.42), $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, es un ciclo hamiltoniano euclidiano de orden n . Es decir, cada Γ_k atraviesa los n vértices de un $2p + 2$ -gono regular.

Demostración. Referirse al Apéndice B, desde la pág. 110 a la pág. 113, (Ver Figura 2.9, en la pág. 113). ■

Teorema 2.3.5 Las longitudes de recorrido $\mathcal{L}(\Gamma_k)$, de los ciclos Γ_k , $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, definidos en el Teorema 2.3.4, están ordenadas en la cadena (2.43) de desigualdades estrictamente creciente con respecto a k .

$$\mathcal{L}(\Gamma_1) < \mathcal{L}(\Gamma_2) < \dots < \mathcal{L}(\Gamma_{\frac{n}{2}-1}). \quad (2.43)$$

Demostración. Es necesario demostrar que

$$\left(\frac{n}{2} - k + 1\right) l_{\max} + \left(\frac{n}{2} + k - 2\right) l_{q,\max} + l_{\max} \sin\left(k\frac{\pi}{n}\right) < \left(\frac{n}{2} - k\right) l_{\max} + \left(\frac{n}{2} + k - 1\right) l_{q,\max} + l_{\max} \sin\left[(k+1)\frac{\pi}{n}\right].$$

Esta desigualdad es verdadera para $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 2$. Reescrita como la desigualdad de la siguiente serie:

$$-\frac{\pi}{n} + \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j+1} \underbrace{\left\{ \frac{1}{(2j)!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2j} + \frac{1}{(2j+1)!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2j+1} [(k+1)^{2j+1} - k^{2j+1}] \right\}}_{a_j} < 0. \quad (2.44)$$

A partir de $\frac{\pi^{2j+3}}{(2j+3)!} < \frac{\pi^{2j+1}}{(2j+1)!}$ y $\left[\left(\frac{k+1}{n}\right)^{2j+1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{2j+1} \right] > \left[\left(\frac{k+1}{n}\right)^{2j+3} - \left(\frac{k}{n}\right)^{2j+3} \right]$, para $n > 6$; el signo positivo de $a_j - a_{j+1}$, para $j \in \mathbb{N}$ está comprobado, en consecuencia (2.44) es una serie alternada convergente con su primer término $-\frac{\pi}{n}$ lo que valida el signo de (2.44). ■

Observación 2.3.6 Γ_k simboliza los caminos hamiltonianos euclidianos cíclicos determinados por la sucesión de segmentos (3.1). Por Γ'_k se representan los caminos hamiltonianos euclidianos no-cíclicos que se obtienen al quitar el segmento inicial L_k^- en el correspondiente ciclo Γ_k , $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$. Es claro que, para cada k , el camino abierto Γ'_k es un camino hamiltoniano euclidiano no-cíclico de orden $n - 1$, con puntos extremos inicial y final en V_k y V_0 respectivamente.

Capítulo 2. Geometría de los Hamiltonianos

Lema 2.3.7 Para $n \in \mathbb{N}$ las longitudes $\mathcal{L}(L_k)$ de los segmentos L_k^\pm , $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ verifican las siguientes desigualdades

$$\mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i}) - \mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (i+1)}) < \mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (i+1)}) - \mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (i+2)}), \quad 0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2. \quad (2.45)$$

Demostración. Desde que $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k} = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$, la desigualdad (2.45) es equivalente a la siguiente:

$$\sin\left[\left(\frac{i}{n} + \frac{1}{2n}\right)\pi\right] < \sin\left[\left(\frac{i+1}{n} + \frac{3}{2n}\right)\pi\right]$$

la cual es verdadera para $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3$. ■

Observación 2.3.8 T' simboliza la familia de todas las trayectorias hamiltonianas no-cíclicas de orden $n - 1$ con vértices en el conjunto $\{V_0, \dots, V_{n-1}\}$ de las redes $\mathcal{N} = \{K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D\}$.

Teorema 2.3.9 En las redes $\mathcal{N} = \{K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D\}$, la longitud recorrida por la trayectoria Γ'_k , i.e. $\mathcal{L}(\Gamma'_k)$, $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$, es la correspondiente a la máxima longitud de recorrido alcanzada por los caminos hamiltonianos euclidianos no-cíclicos de orden $n - 1$ del problema con vértice inicial V_k y vértice final V_0 .

Demostración. Se probará que las longitudes de las trayectorias no-cíclicas, o abiertas, Γ'_k satisfacen una relación inversa a la de los correspondientes Γ_k en (2.43), i.e.,

$$\mathcal{L}(\Gamma'_1) > \mathcal{L}(\Gamma'_2) > \dots > \mathcal{L}(\Gamma'_{\frac{n}{2}-1}) > \mathcal{L}(\Gamma'_{\frac{n}{2}}). \quad (2.46)$$

El número máximo de diámetros admisibles, l_{\max} , para cualquier camino hamiltoniano euclideo no-cíclico de orden $n - 1$ que atravesase los $n = 2p + 2$ nodos de estas redes es $\frac{n}{2}$. Por lo tanto, la longitud de recorrido de un hamiltoniano no-cíclico máximo de orden $n - 1$ debería tener $\frac{n}{2}$ diámetros l_{\max} y $\frac{n}{2} - 1$ cuasi-diámetros $l_{q,\max}$. Precisamente Γ'_1 es un camino con tales características. Es decir, $\mathcal{L}(\Gamma'_1) = \text{Máx.}\{\mathcal{L}(\Gamma') : \Gamma' \in T'\}$. A partir del Lema 2.3.7, la menor diferencia de longitud entre dos segmentos L_k es $l_{\max} - l_{q,\max}$. Por lo tanto el menor decrecimiento posible para la longitud de recorrido del camino hamiltoniano Γ'_1 se obtiene si un diámetro l_{\max} es reemplazado por un cuasi-diámetro $l_{q,\max}$. En tal caso la trayectoria estará formada por $\frac{n}{2} - 1$ segmentos l_{\max} y $\frac{n}{2}$ segmentos $l_{q,\max}$. Precisamente, Γ'_2 es una trayectoria de esta clase. Por el mismo argumento, si en Γ'_2 un segmento l_{\max} es sustituido por un $l_{q,\max}$, la trayectoria resultante deberá estar conformada por $\frac{n}{2} - 2$ segmentos l_{\max} y $\frac{n}{2} + 1$ segmentos $l_{q,\max}$, que es precisamente la conformación de la trayectoria hamiltoniana no cíclica Γ'_3 . La reiteración de este procedimiento demuestra la validez de la cadena de desigualdades en (2.46), con la siguiente conclusión adicional de que cualquier trayectoria $\Gamma' \in T'$, cuyos $n - 1$ segmentos no sean un reordenamiento de los segmentos de alguna trayectoria Γ'_k , $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$, tienen la propiedad de que $\mathcal{L}(\Gamma'_{\frac{n}{2}}) > \mathcal{L}(\Gamma')$. En particular, cualquier trayectoria euclidea hamiltoniana, no-cíclica, de orden $n - 1$, con extremos inicial y final en V_k y V_0 , posee longitud de recorrido menor o igual que $\mathcal{L}(\Gamma'_k)$.

■

Teorema 2.3.10 *En las redes $\mathcal{N} = \{K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D\}$ la longitud de máximo recorrido del problema de los hamiltonianos euclidianos cíclicos de orden $n = 2p + 2$, corresponden al valor $\mathcal{L}(\Gamma_{\frac{n}{2}-1})$. En otras palabras, el Máx. TSP sobre los vértices de un $2p + 2$ -gono regular debe alcanzar la longitud de viaje $\mathcal{L}(\Gamma_{\frac{n}{2}-1})$.*

Demostración. Para cada k , $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$, si T_k representa el conjunto de todas las trayectorias $\Gamma \in T$, tales que Γ posee un segmento L_k (L_k^+ o L_k^-). Sea $\Gamma \in T_k$, $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$ y con Γ' se denota una trayectoria no-cíclica obtenida si el segmento L_k es extraído de Γ . A partir del Teorema 2.3.9 se sabe que $\mathcal{L}(\Gamma') \leq \mathcal{L}(\Gamma)$. Como $\mathcal{L}(\Gamma) = \mathcal{L}(\Gamma') + \mathcal{L}(L_k)$ y $\mathcal{L}(\Gamma_k) = \mathcal{L}(\Gamma'_k) + \mathcal{L}(L_k)$, resulta que $\mathcal{L}(\Gamma) \leq \mathcal{L}(\Gamma_k)$, para k , $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$. Esta desigualdad prueba que, para $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, $\mathcal{L}(\Gamma_k)$ es la longitud máxima recorrida por cualquier trayectoria T la cual tiene, a lo sumo un segmento L_k . Falta verificar si para $\Gamma \in T_{\frac{n}{2}}$, la desigualdad $\mathcal{L}(\Gamma) \leq \mathcal{L}(\Gamma_{\frac{n}{2}-1})$ es verdadera. Para lo que se considera una trayectoria $\Gamma \in T_{\frac{n}{2}} - T_{\frac{n}{2}-1}$. Tal, Γ no posee cuasi-diámetros $l_{q,\max}$ ni puede estar constituidas por un número mayor a $\frac{n}{2}$ diámetros l_{\max} . Γ debe estar conformada por $\frac{n}{2}$ segmentos L_k (L_k^+ o L_k^-) pero k solamente puede tomar valores que no superen a $\frac{n}{2} - 2$, i.e. $\mathcal{L}(\Gamma) \leq \frac{n}{2} \mathcal{L}(l_{\max}) + \frac{n}{2} \mathcal{L}(L_{\frac{n}{2}-2})$. Ya que $\frac{n}{2} \mathcal{L}(l_{\max}) + \frac{n}{2} \mathcal{L}(L_{\frac{n}{2}-2}) = 2 \mathcal{L}(l_{\max}) + (\frac{n}{2} - 2) \mathcal{L}(l_{\max}) - \mathcal{L}(L_{\frac{n}{2}-1}) + (\frac{n}{2} - 2) \mathcal{L}(L_{\frac{n}{2}-1}) + (\frac{n}{2} - 2) \mathcal{L}(L_{\frac{n}{2}-2}) + 2 \mathcal{L}(L_{\frac{n}{2}-2})$ y a partir del Lema 2.5.2, $\frac{n}{2} \mathcal{L}(l_{\max}) + \frac{n}{2} \mathcal{L}(L_{\frac{n}{2}-2}) < 2 \mathcal{L}(l_{\max}) + (n - 4) \mathcal{L}(L_{\frac{n}{2}-1}) + 2 \mathcal{L}(L_{\frac{n}{2}-2}) < \mathcal{L}(\Gamma_{\frac{n}{2}-1})$. Por lo tanto $\mathcal{L}(\Gamma) < \mathcal{L}(\Gamma_{\frac{n}{2}-1})$. ■

2.4. Discusión sobre paridad

Hasta aquí, esta contribución confirma que las configuraciones óptimas de los ciclos hamiltonianos euclidianos de orden n en las redes $\mathcal{N} = \{K_n(\sqrt[n]{1}), D\}$ resuelven los problemas de los hamiltonianos de orden $n - 1$ de recorridos más largos en las estructuras de las redes $\mathcal{N} = \{K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D\}$. Es decir se resolvieron el Mín. TSP y el Máx. TSP en vértices de n -gonos regulares y los Máx. TSPs en vértices de $2p + 2$ -gonos regulares. Queda abierta la posibilidad de estudiar otros problemas de los óptimos hamiltonianos no-cíclicos, e.g., los problemas de determinar las longitudes mínimas de recorridos y los hamiltonianos euclidianos de orden $n - 1$ en las redes the $\mathcal{N} = \{K_n(\sqrt[n]{1}), D\}$. Estudios y resultados que serán discutidos en próximos capítulos e inclusive parte de contenidos presentados en trabajos anteriores, e.g. [Niel, B. I. and Claverie, A. (2005)]. Es importante aclarar que en el presente contenido hemos explicitado, en general, para cada óptimo de los $\frac{n}{2}$ problemas del Máx. TSP en vértice de un $2p + 2$ -gono regular un sólo ciclo hamiltoniano óptimo, mientras que en el Capítulo 3 exhibimos y enumeramos todas las configuraciones hamiltonianas que efectivamente realizan estos máximo.

Entre los resultados colaterales del presente contenido cabe destacar la identificación y enumeración de los hamiltonianos reflexivos en las arquitecturas $\mathcal{N} = \{K_n(\sqrt[n]{1}), D\}$, como así también el ubicar, entre los hamiltonianos sub-óptimos y óptimos de máxima longitudes de recorridos de las poligonales estrelladas de máxima densidad, sobre los vértices de $4p$ -gono regular.

2.4.1. Apéndice A: Demostración del Teorema 2.2.3

Las abscisas críticas estacionarias, $\alpha(k)_{c_i \ 1 \leq i \leq n-1}$ $0 \leq k \leq n-1$, deben satisfacer las siguientes identidades trigonométricas:

$$-\frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{1 + \cos \alpha_1}} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}} = \dots = \frac{\sin(\alpha_{i-1} - \alpha_i)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_{i-1} - \alpha_i)}} = \dots = \frac{\sin(\alpha_{n-1} - \beta)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_{n-1} - \beta)}}, \quad (2.47)$$

equivalentes a las diferencias angulares: $\pi - \alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_3 = \dots = \alpha_{i-1} - \alpha_i = \dots = \alpha_{n-1} - \beta$. Aquí, debe entenderse el $=$ como \equiv , donde $\delta \equiv \gamma$ cuando los ángulos δ y γ difieren en un múltiplo de 2π , entonces el cómputo recursivo origina la ecuación (2.2).

Demostración. i) ¿ Por qué las abscisas críticas estacionarias generan trayectorias reflexivas de n segmentos lineales ? Puesto que $\Delta\alpha_{c_i}(k)$ es independiente de i y a partir del hecho de que las abscisas críticas estacionarias no anulan denominador alguno de la ecuación (2.47), entonces existen n segmentos lineales de (2.1) que constituyen cada camino de las poligonales estacionarias.

Demostración. ii) La abscisa crítica estacionaria $\alpha_{c_i}(1) = \pi$ se vuelve una abscisa crítica singular y corresponde al mínimo de la función, $F_n(\alpha_{c_i}(1), -\pi) = 0$.

Demostración. iii) Las derivadas parciales de segundo orden y los cálculos de los determinantes menores principales del hessiano son expresados con mayor claridad y brevedad si se adoptan las siguientes notaciones: $a_1 = \sqrt{1 + \cos \alpha_1}$, $a_n = \sqrt{1 - \cos(\alpha_{n-1} - \beta)}$, $a_j = \sqrt{1 - \cos(\alpha_{j-1} - \alpha_j)}$ para $2 \leq j \leq n-1$ y $a_j^i = a_j$ si $j \neq i$ mientras que $a_j^i = 1$ cuando $j = i$. Las evaluaciones de la derivada parcial $F_{\alpha_1 \alpha_1} = -\frac{\sqrt{2}R}{4}\{a_1 + a_2\}$ y de los determinantes menores principales de distinto orden del hessiano, resultan ser \mathcal{H}_i ,

$$\text{i.e., } |\mathcal{H}_i| = \left(-\frac{\sqrt{2}R}{4}\right)^i \sum_{i=1}^{i+1} \prod_{j=1}^{i+1} a_j^i, \text{ si } 2 \leq i \leq n-2, \text{ y } |\mathcal{H}_{n-1}| = \left(-\frac{\sqrt{2}R}{4}\right)^{n-1} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n a_j^i.$$

Expresiones que confirman la alternancia de los signos, por lo que la función (2.1) posee máximos relativos o locales en cada una de las abscisas críticas estacionarias, según [Rey Pastor, J. et al.] pág. 215 ítem c) y en el ítem d) Teorema 2. primer párrafo.

Demostración. iv) ¿ Por qué las abscisas críticas singulares originan trayectorias reflexivas constituidas por un número de segmentos lineales menor que n ? Esto se evidencia del concepto abscisa crítica singular lo que conlleva que al menos uno de los denominadores en (2.47) se extinguen, en consecuencia al menos una de las raíces cuadradas en la función (2.1) tendrá contribución nula.

Demostración. v) El Mín. $(F_n(\alpha_i, \beta)) = \sqrt{2}\sqrt{1 + \cos(\beta)} = F_n(\pi, \dots, \pi, \beta)$, es alcanzado en la abscisa crítica singular (π, \dots, π, β) .

Demostración. vi) Resulta del Lema 2.4.1 y del Lema 2.4.2.

Lema 2.4.1 *Para cada $n \geq 5$ y cada $\beta \in [-\pi, 0]$ el mayor de los máximos relativos de $F_n(\alpha_i, \beta)$ tiene mayor longitud de recorrido que cualquiera de las trayectorias generadas a partir de las abscisas críticas singulares.*

Demostración. $\bar{\alpha}_i$ es una abscisa singular si y solo si al menos una de las n adiciones de $F_n(\bar{\alpha}_i, \beta)$ es nula. Luego $F_n(\bar{\alpha}_i, \beta) \leq 2(n-1)$, por lo tanto la proposición es válida si las siguientes desigualdades (2.48) y (2.49) son verdaderas:

$$i) \quad \text{Si } n \text{ impar; } 2(n-1) < n\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\left(\frac{\beta}{n}\right)} = F_n(\alpha_{c_i}\left(\frac{n+1}{2}\right), \beta) \quad (2.48)$$

$$ii) \text{ Si } n \text{ par; } 2(n-1) < n\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\left(\frac{\beta+\pi}{n}\right)} = F_n(\alpha_{c_i}\left(\frac{n}{2}+1\right), \beta) \quad (2.49)$$

Primero, se prueba *i*): $2(n-1) < n\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\left(\frac{\beta}{n}\right)} \Leftrightarrow 2\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 < 1+\cos\left(\frac{\beta}{n}\right) \Leftrightarrow -4 + \frac{2}{n} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{2k}}{(2k)! n^{2k-1}}$. La serie en el término de la derecha de esta desigualdad converge a S , con $S > -\frac{\beta^2}{2n}$. La última desigualdad resulta válida si $\frac{\beta^2}{2n} \leq 4 - \frac{2}{n}$. Por lo que (2.48) es válida, ya que $\frac{\beta^2}{2n} \leq \frac{\pi^2}{2n} < \frac{5}{n} < 4 - \frac{2}{n}$, $\forall n \geq 2$. En segundo lugar, se prueba *ii*): Mediante argumentos análogos que confirman la desigualdad (2.49) a partir de que $\frac{(\beta+\pi)^2}{2n} \leq \frac{\pi^2}{2n} < 4 - \frac{2}{n}$, $\forall n \geq 2$. \square

Lema 2.4.2 Para cada $\beta \in [-\pi, 0]$ el máximo de $F_n(\alpha_i, \beta)$ es un máximo relativo.

Demostración. Para cada $\beta \in [-\pi, 0]$ los $n-1$ ángulos $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (Ver la Figura 2.1) son seleccionados como variables independientes de $F_n(\alpha_i, \beta)$. Como $F_n(\alpha_i, \beta)$ es una función continua y además verifica que para cada entero k_i , $F_n(\alpha_i, \beta) = F_n(\alpha_i + 2k_i\pi, \beta)$ alcanza todos los valores de su imagen sobre el conjunto compacto $\mathcal{K} = [0, 2\pi]^{n-1} \times [-\pi, 0]$. Si β_* es una selección particular en $[-\pi, 0]$, la función $F_n(\alpha_i, \beta_*)$ alcanza su máximo en (α_i^*, β_*) en el conjunto compacto $\mathcal{K}_* = [0, 2\pi]^{n-1} \times \{\beta_*\}$. Del resultado del Lema 2.4.1, $F_n(\alpha_i, \beta_*)$ es diferenciable en (α_i^*, β_*) , entonces el máximo es un máximo relativo, por lo tanto el mayor de los máximos relativos de $F_n(\alpha_i, \beta_*)$. \square

Demostración. vii) y *Demostración.* viii) Para $-\pi < \beta < 0$,

$$\Delta\alpha_{c_i}(k) = \frac{\pi - \beta}{n} - k\frac{2\pi}{n}. \quad (2.50)$$

Las siguientes cadenas de desigualdades provienen de (2.50) y de las pruebas (2.3) y (2.6), respectivamente.

$$0 < -\Delta\alpha_{c_i}(1) < \Delta\alpha_{c_i}(0) < -\Delta\alpha_{c_i}(2) < \Delta\alpha_{c_i}(n-1) + 2\pi < -\Delta\alpha_{c_i}(3) < \quad (2.51)$$

$$< \underbrace{\Delta\alpha_{c_i}(n-j) + 2\pi < -\Delta\alpha_{c_i}(j+2)}_{2 \leq j \leq \frac{n}{2}-2} < \Delta\alpha_{c_i}\left(\frac{n}{2}+1\right) + 2\pi < \pi.$$

$$0 < -\Delta\alpha_{c_i}(1) < \Delta\alpha_{c_i}(0) < -\Delta\alpha_{c_i}(2) < \underbrace{\Delta\alpha_{c_i}(n-j) + 2\pi < -\Delta\alpha_{c_i}(j+2)}_{1 \leq j \leq \frac{n-3}{2}} < \pi. \quad (2.52)$$

Para $\beta = -\pi$, puesto que $-\Delta\alpha_{c_i}(k) = (k-2)\frac{2\pi}{n}$, resultan (2.53) y (2.54), las cuales probaron (2.4) y (2.7), respectivamente.

$$\begin{aligned}
 0 = -\Delta\alpha_{c_i}(1) < \Delta\alpha_{c_i}(0) = -\Delta\alpha_{c_i}(2) < \Delta\alpha_{c_i}(n-1) + 2\pi = -\Delta\alpha_{c_i}(3) < \\
 < \underbrace{\Delta\alpha_{c_i}(n-j) + 2\pi = -\Delta\alpha_{c_i}(j+2)}_{2 \leq j \leq \frac{n}{2}-2} < \Delta\alpha_{c_i}\left(\frac{n}{2} + 1\right) + 2\pi = \pi.
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$0 = -\Delta\alpha_{c_i}(1) < \Delta\alpha_{c_i}(0) = -\Delta\alpha_{c_i}(2) < \underbrace{\Delta\alpha_{c_i}(n-j) + 2\pi = -\Delta\alpha_{c_i}(j+2)}_{1 \leq j \leq \frac{n-3}{2}} < \pi. \tag{2.54}$$

Para $\beta = 0$, a partir de $-\Delta\alpha_{c_i}(k) = (2k-1)\frac{2\pi}{n}$, resultan (2.55) y (2.56), las que probaron (2.5) y (2.8), respectivamente.

$$\begin{aligned}
 0 < -\Delta\alpha_{c_i}(1) = \Delta\alpha_{c_i}(0) < -\Delta\alpha_{c_i}(2) = \Delta\alpha_{c_i}(n-1) + 2\pi < \\
 < \underbrace{-\Delta\alpha_{c_i}(j) = \Delta\alpha_{c_i}(n+1-j) + 2\pi}_{3 \leq j \leq \frac{n}{2}} < \pi.
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$0 < -\Delta\alpha_{c_i}(1) = \Delta\alpha_{c_i}(0) < \underbrace{-\Delta\alpha_{c_i}(j) = \Delta\alpha_{c_i}(n+1-j) + 2\pi}_{2 \leq j \leq \frac{n-1}{2}} < -\Delta\alpha_{c_i}\left(\frac{n+1}{2}\right) = \pi. \tag{2.56}$$

Proposición 2.4.3 *Si k y \tilde{k} etiquetan dos trayectorias reflexivas diferentes, con sus respectivos valores angulares $\Delta\alpha_{c_i}(k)$ y $\Delta\alpha_{c_i}(\tilde{k})$, ambos caminos reflexivos tienen la misma longitud si y solo si $\Delta\alpha_{c_i}(k) \equiv \pm\Delta\alpha_{c_i}(\tilde{k})$. Esta desigualdad es posible si y solo si cuando $\beta = 0$ y cuando $\beta = -\pi$, en cuyos respectivos caso $\tilde{k} = n+1-k$ y $\tilde{k} = n+2-k$. En conclusión, $\forall \beta \in (-\pi, 0)$ la totalidad de los caminos reflexivos poseen distintas longitudes de recorridos. Por el contrario, si $\beta = 0$ es $F_n(\alpha_{c_i}(k), 0) = F_n(\alpha_{c_i}(n+1-k), 0)$ y si $\beta = -\pi$ resulta $F_n(\alpha_{c_i}(k), -\pi) = F_n(\alpha_{c_i}(n+2-k), -\pi)$, trayectorias cíclicas que fueron objeto de especial atención en §2.2.2 y §2.2.3. Mientras que el caso $\beta = 0$ está explicado en el Capítulo 1.5.3 y en los Ejemplos 1.5.7, 1.5.8 y 1.5.10 [Niel, B. I. (2005b)].*

Demostración. ix) Los caminos reflexivos cuando $-\pi < \beta < 0$ viajan en ccw. or cw. sentido de circulación, de acuerdo con $\pi < \alpha_{c_1}(k) < 2\pi$ o $2\pi < \alpha_{c_1}(k) < 3\pi$, respectivamente. Cálculos directos demuestran que el esquema en (2.9) es correcto. Si $\beta = -\pi$ y $\beta = 0$ las trayectorias determinadas por $k = \frac{n}{2} + 1$ y $k = \frac{n+1}{2}$ retornan, respectivamente $\alpha_{c_1}(k) = 2\pi$. Aquí se asignan la ccw. circulación. Cómputos similares conducen a (2.10) y (2.11). ■

2.4.2. Apéndice B: Demostración del Teorema 2.3.4

La sucesión (3.1) determina el ordenamiento de los segmentos que comienzan con un L_k^- que conecta V_0 a V_k y finaliza con el último diámetro l_{\max} que une cierto vértice a V_0 . Los vértices V_0, \dots, V_{n-1} son reenumerados de la siguiente manera: $V'_0 = V_0$ y si $1 \leq j \leq n-1$, V'_j designa el vértice que determina el j -ésimo segmento de la sucesión

(3.1) cuando este es ubicado después de V'_{j-1} . Es decir, $V'_0 = V_0$, $V'_1 = V_k$, $V'_2 = V_{k+\frac{n}{2}-1}$, \dots . Con $\angle(V'_j)$ se simboliza el avance angular c.w., que se corresponde con el vértice V'_j , la secuencia angular en correspondencia con los vértices V'_0, \dots, V'_{n-1} comienza con los siguientes valores:

$$\angle(V'_0) = \pi, \angle(V'_1) = \pi - k\frac{2\pi}{n}, \angle(V'_2) = (-k+1)\frac{2\pi}{n}, \angle(V'_3) = (-k+2)\frac{2\pi}{n} - \pi, \dots$$

Existe una partición natural de la secuencia (3.1) en tres secciones S_1 , S_2 y S_3 . La primera, S_1 , constituida por el único segmento L_k^- ubicado en primer lugar, seguido a continuación por los $k-1$ segmentos $l_{q,max}^-$. La segunda sección, S_2 , construida por un diámetro l_{max} en primer lugar y por k consecutivos cuasi-diámetros $l_{q,max}^+$. Finalmente, la tercera sección S_3 , conformada por $(\frac{n}{2} - k)$ diámetros l_{max} y $\frac{n}{2} - k - 1$ cuasi-diámetros $l_{q,max}^+$. Estos segmentos van ubicados alternadamente, pero de tal manera que el primero y el último son diámetros l_{max} .

Cada partición puede ser caracterizada por los vértices asociados en cada integración de los segmentos constituyentes de las mismas, es decir:

$$S_1 = \{V'_0, \dots, V'_k\}, \quad S_2 = \{V'_{k+1}, \dots, V'_{2k+1}\}, \quad \text{y} \quad S_3 = \{V'_{2k+2}, \dots, V'_{2k+(n-2k)} = V'_n\}.$$

Las sucesiones de vértices y ángulos determinadas por la sucesión de segmentos (3.1), según corresponda a cada una de las tres particiones, se esquematiza a continuación:

$$S_1 : \quad \begin{array}{ccccccc} \pi & \xrightarrow{L_k^-} & \left[\pi - k\frac{2\pi}{n} \right] & \dots \xrightarrow{l_{q,max}^-} \dots & \left[\pi - k\frac{2\pi}{n} - (j-1)\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) \right] & \dots \xrightarrow{l_{q,max}^-} \dots & \left[-(k-2)\pi - \frac{2\pi}{n} \right] \\ V'_0 & & V'_1 & & V'_j & & V'_k \end{array}$$

$$S_2 : \quad \begin{array}{ccccccc} l_{max} & \xrightarrow{} & \left[-(k-1)\pi - \frac{2\pi}{n} \right] & \dots \xrightarrow{l_{q,max}^+} \dots & \left[-(k+i-2)\pi - i\frac{2\pi}{n} \right] & \dots \xrightarrow{l_{q,max}^+} \dots & \left[-(2k-1)\pi - (k+1)\frac{2\pi}{n} \right] \\ & & V'_{k+1} & & V'_{k+i} & & V'_{2k+1} \end{array}$$

$$S_3 : \quad \begin{array}{ccccccc} & \xrightarrow{l_{max}} & \left[-2k\pi - (k+1)\frac{2\pi}{n} \right] & \xrightarrow{l_{q,max}^+} \dots & \xrightarrow{\begin{array}{c} \text{si } j = 2s \\ l_{max} \end{array}} & \left\{ \begin{array}{l} \left[-(2k+j-2)\pi - (k+s)\frac{2\pi}{n} \right] \\ \left[-(2k+j-2)\pi - (k+s+1)\frac{2\pi}{n} \right] \end{array} \right. & \rightarrow \dots \\ & & V'_{2k+2} & & \xrightarrow{\begin{array}{c} l_{q,max}^+ \\ \text{si } j = 2s+1 \end{array}} & & \\ & & & & & V'_{2k+j} & \\ & & & & & (2 \leq j \leq n-2k) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} l_{max} & \xrightarrow{} & [-(n+1)\pi] \\ & & V'_{2k+(n-2k)} = V'_n \equiv V'_0 = V_0 \end{array}$$

Capítulo 2. Geometría de los Hamiltonianos

La demostración se obtiene en dos etapas de tres incisos cada una, en la primera $-a_1, a_2, a_3-$ se constata que cada sección S_i está atravesando vértices diferentes y en la segunda etapa $-b_1, b_2, b_3-$ se confirma que no existe yuxtaposición de los vértices entre las secciones, $S_i \cap S_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

- $a_1)$ Teniendo en cuenta la manera en que se alcanzan los vértices en forma consecutiva a partir de V'_0 , en S_1 , dos vértices cualesquiera son distintos $V'_i \neq V'_j$, $1 \leq i < j \leq k$, si la diferencia angular $\sphericalangle(V'_i) - \sphericalangle(V'_j) = (j-i)\pi + (i-j)\frac{2\pi}{n} \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}^-$. Esto resulta confirmado puesto que $0 < \frac{2(j-i)}{n} \leq 1 - \frac{6}{n}$.
- $a_2)$ Similar es el caso (a_1), en S_2 , dos vértices cualesquiera $V'_{k+i} \neq V'_{k+j}$, $1 \leq i < j < k+1$, requieren que $\sphericalangle(V'_{k+i}) - \sphericalangle(V'_{k+j}) = (j-i)\pi + (j-i)\frac{2\pi}{n} \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}^-$. Esto sucede en virtud de que $\frac{2(j-i)}{n} \notin \mathbb{Z}^-$.
- $a_3)$ En S_3 , las expresiones de los ángulos de los vértices difieren según el orden par o impar del vértice. Por lo tanto, las diferencias angulares $\sphericalangle(V'_{2k+i}) - \sphericalangle(V'_{2k+j})$ para $2 \leq i < j \leq n - 2k$, deberán ser evaluadas para i par con j par, i par con j impar, i impar con j par y i impar con j impar:

- $i < j$, (i par, j par): $\sphericalangle(V'_{2k+i}) - \sphericalangle(V'_{2k+j}) = (j-i)\pi + \left(\frac{j-i}{n}\right)\pi$. Puesto que $\frac{j-i}{n} \notin \mathbb{Z}$, los vértices no coinciden.
- $i < j$, (i par, j impar): $\sphericalangle(V'_{2k+i}) - \sphericalangle(V'_{2k+j}) = (j-i)\pi + \left(\frac{j-1-i}{n}\right)\pi$. A partir de que $\frac{j-i-1}{n} \notin \mathbb{Z}$ los vértices no coinciden.
- $i < j$, (i impar, j par): $\sphericalangle(V'_{2k+i}) - \sphericalangle(V'_{2k+j}) = (j-i)\pi + (j-i-1)\frac{\pi}{n}$. Desde que $\frac{j-i-1}{n} \notin \mathbb{Z}$, los vértices no coinciden.
- $i < j$, (i impar, j impar): $\sphericalangle(V'_{2k+i}) - \sphericalangle(V'_{2k+j}) = (j-i)\pi + (j-i)\frac{\pi}{n}$. Como $\frac{j-i}{n} \notin \mathbb{Z}$ los vértices no coinciden.

La prueba de que exista intersección vacía entre las tres secciones requiere de la misma clase de procedimiento:

- $b_1)$ $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Es suficiente probar que $\sphericalangle(V'_j) - \sphericalangle(V'_{k+i}) = (k+i-j)\pi + (i+j-k-1)\frac{2\pi}{n} \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}^-$ if $1 \leq i \leq k+1$; $1 \leq j \leq k \leq \frac{n}{2} - 2$. Ya que $-1 + \frac{2}{n} \leq \frac{2(i+j-k-1)}{n} \leq 1 - \frac{2}{n}$, aún si $(i+j-k-1) = 0 \Rightarrow \sphericalangle(V'_j) - \sphericalangle(V'_{k+i}) = (2i-1)\pi \neq 2m\pi$.
- $b_2)$ $S_2 \cap S_3 = \emptyset$. Se debe probar que $\sphericalangle(V'_{k+i}) - \sphericalangle(V'_{2k+j}) \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}^-$, si $1 \leq i \leq k+1$, $2 \leq j \leq n - 2k$, $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 2$ cuando j tome valores pares e impares.
- Si j es par, $\sphericalangle(V'_{k+i}) - \sphericalangle(V'_{2k+j}) = (k-i+j)\pi + \left(k + \frac{j}{2} - i\right)\frac{2\pi}{n}$. Pero $\frac{2(k+j/2-i)}{n} \in \mathbb{Z}$, si y solo si es cero. Entonces $\sphericalangle(V'_{k+i}) - \sphericalangle(V'_{2k+j}) = \pi \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}^-$.
- Si j es impar, j solamente puede variar entre 3 y $n - 2k - 1$, ya que el último $j = n - 2k$ es par. En tal situación resulta $\sphericalangle(V'_{k+i}) - \sphericalangle(V'_{2k+j}) = (k+j-i)\pi + (k+j/2-i+1)\frac{2\pi}{n} \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}^-$. Si $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 2$, $1 \leq i \leq k+1$ y $j = 2s + 1$ es tal que $3 \leq j \leq n - 2k - 1$, entonces $j = 2$ y $j = n - 2k$ son par. Aquí $1 \leq s \leq \frac{n}{2} - (k+1)$. Por lo tanto $\sphericalangle(V'_{k+i}) - \sphericalangle(V'_{2k+j}) = (k+j-i)\pi + (k+s-i+1)\frac{2\pi}{n}$. Puesto que

$1 \leq s \leq \frac{n}{2} - k - 1$ resulta que $\frac{6-2i}{n} \leq \frac{2(s+k-i+1)}{n} < 1$, entonces $\frac{2(s+k-i+1)}{n}$ solamente puede ser cero o una fracción no entera. Si tomara el valor cero, $s = i - k - 1$ resultaría menor o igual que cero, esto contradice el hecho de que $s \geq 1$.

b₃) Finalmente, para demostrar que $S_1 \cap S_3 = \emptyset$ es necesario probar que $\angle(V'_i) - \angle(V'_{2k+j}) \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}^-$, si $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 2$, $1 \leq i \leq k$ y $2 \leq j \leq n - 2k$, tratando de forma separada los casos j par y j impar.

Si j es par, $j = 2s$ con $1 \leq s \leq \frac{n}{2} - k$ y $\angle(V'_i) - \angle(V'_{2k+j}) = (2k+j-i)\pi + (i+s-1)\frac{2\pi}{n} \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}^-$ ya que $0 < \frac{(i+s-1)2}{n} < 1$.

Si j es impar, debería ser $3 \leq j = 2s + 1 \leq n - 2k - 1$, ya que 2 y $n - 2k$ son par. En consecuencia $1 \leq s \leq \frac{n}{2} - k - 1$ y $\angle(V'_i) - \angle(V'_{2k+j}) = (2k+j-i)\pi + (i+s)\frac{2\pi}{n}$, con $\frac{(i+s)2}{n} \notin \mathbb{Z}$ debido a que $\frac{4}{n} \leq \frac{2(s+i)}{n} \leq 1 - \frac{2}{n}$. ■

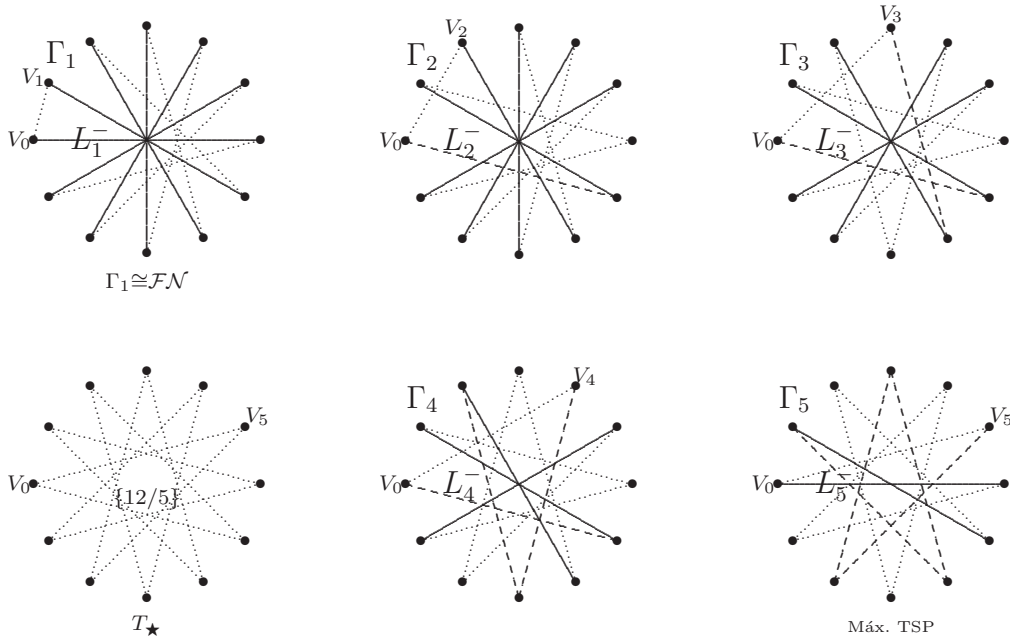


Figura 2.9: 12-gono, Hamiltonianos Γ_k : $\Gamma_1 \cong \mathcal{FN}$, $\{12/5\} \cong T_\star$, $\Gamma_5 \cong \text{Máx. TSP}$.

2.4.3. Apéndice C: Poligonal estrellada maximal en vértices del $4p$ -gono regular

Aquí exhibimos la poligonal estrellada de máxima densidad, que luce asociable a un $4p$ -gono estrellado de máxima densidad en las redes $\mathcal{N}(K_{4p}(\sqrt[4]{1}), D)$ ubicándola entre la cadena de longitudes de los hamiltonianos sub-óptimos y óptimos cuando el número de vertices corresponde al de un $4p$ -gono regular, (e.g. Ver T_\star en los vértices de un 12-gono regular en la Figura 2.9, en la pág. 113).

Teorema 2.4.4 *En las redes $\mathcal{N} = \{K_{4p}(\sqrt[4]{1}), D\}$ con $p \geq 2$, la longitud recorrida por la poligonal estrellada de máxima densidad T_\star , está localizada entre las configuraciones*

Capítulo 2. Geometría de los Hamiltonianos

hamiltonianas que corresponden al valor de $k = \frac{n}{2} - 3$ y $k = \frac{n}{2} - 2$ en la sucesión de longitudes de recorridos de los ciclos hamiltonianos Γ_k , (2.43), i.e.,

$$\mathcal{L}(\Gamma_1) < \mathcal{L}(\Gamma_2) < \cdots < \mathcal{L}(\Gamma_{\frac{n}{2}-3}) < \mathcal{L}(T_\star) < \mathcal{L}(\Gamma_{\frac{n}{2}-2}) < \mathcal{L}(\Gamma_{\frac{n}{2}-1}). \quad (2.57)$$

Demostración. Es necesario probar las desigualdades indicadas a continuación:

$$4 \mathcal{L}(l_{\max}) + (n - 5) \mathcal{L}(l_{q,\max}) + \mathcal{L}(l_{\max}) \cos\left(\frac{3\pi}{n}\right) < n \mathcal{L}(l_{q,\max}) \quad (2.58)$$

$$3 \mathcal{L}(l_{\max}) + (n - 4) \mathcal{L}(l_{q,\max}) + \mathcal{L}(l_{\max}) \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) > n \mathcal{L}(l_{q,\max}) \quad (2.59)$$

La desigualdad (2.58) se convierte en $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{3\pi}{n}\right)^{2k} \left[-\frac{5}{3^{2k}} + 1\right] < 0$.

Sea $a_k = \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{3\pi}{n}\right)^{2k} \left[-\frac{5}{3^{2k}} + 1\right]$ y puesto que $a_k - a_{k+1} > 0$, la serie es alternada, y su primer término, $a_1 = S_1 = -\frac{9}{2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \left[-\frac{5}{9} + 1\right] < 0$, es negativo por lo que la suma de la serie es negativa. Por lo tanto la desigualdad (2.58) es correcta.

La desigualdad (2.59) es verdadera, dado que $2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \left(\frac{2}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} - 1\right) > 0, \forall n. \blacksquare$

2.4.4. Hamiltonianos de longitudes mínimas sobre n -gonos

Se entiende por “trayectoria abierta” o “recorrido no cíclico” a toda poligonal de $n - 1$ lados, con vértices en el conjunto V_0, \dots, V_{n-1} , que comience en un vértice V_{i_0} y finalice en otro distinto V_{i_1} .

El problema de las trayectorias abiertas consiste en determinar, para cada n y para cada par de vértices distintos V_{i_0} y V_{i_1} , cuáles son las trayectorias de $n - 1$ lados que pasan por todos los puntos o vértices de un n -gono una sola vez, con longitud mínima partiendo por ejemplo de V_{i_0} y arribando a V_{i_1} , $V_{i_1} \neq V_{i_0}$. Este tipo especial de caminos se denominan caminos hamiltonianos o trayectorias hamiltonianas no cíclicas. El conjunto de tales trayectorias se denota aquí por P_H^{n-1} . Las trayectorias cerradas que pasan por todos los vértices una sola vez -y regresan al punto de partida- se llaman como trayectorias hamiltonianas cíclicas o tours. El conjunto de tales trayectorias se simboliza por C_H^n .

En el Cuadro 2.13 se exhiben las longitudes de algunos hamiltonianos cíclicos subóptimos a partir de aquella que realiza el Mín. TSP en los vértices de un 16-gono.

El problema en cuestión no pierde generalidad si nos limitamos a estudiar solo las trayectorias con vértice inicial V_i , $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, y vértice final $V_{i_1} = V_0 = (-1, 0)$, en cualquiera de las geometrías inherentes a un n -gono regular, sea n par Figura 2.2 de la pág. 84 o impar situación representada en la Figura 2.11 de la pág. 119.

| Mín. TSPPs | Rep. | e.g. Configuración |
|-------------------------|------|--|
| $16l_1$ | 2 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16-1 |
| $14l_1+2l_2$ | 32 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-16-15-1 |
| $14l_1+2l_3$ | 32 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-16-15-14-1 |
| $13l_1+2l_2 + 1 l_3$ | 96 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-15-16-14-1 |
| $12l_1+4l_2$ | 176 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-13-12-14-16-15-1 |
| $14l_1+2l_4$ | 32 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-16-15-14-13-1 |
| $13l_1+1l_2+1 l_3+1l_4$ | 192 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-14-15-16-13-1 |
| $12l_1+3l_2+1l_4$ | 128 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-14-16-15-13-1 |
| $13l_1+3l_3$ | 32 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-15-16-13-14-1 |
| $12l_1+2l_2+2l_3$ | 416 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-13-12-15-16-14-1 |
| $11l_1+4l_2+1l_3$ | 960 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-14-16-13-15-1 |
| $10l_1+6l_2$ | 384 | 1-2-3-4-5-6-7-8-10-9-11-13-12-14-16-15-1 |
| $14l_1+2l_5$ | 32 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-16-15-14-13-12-1 |
| $13l_1+1l_2+1l_4+1l_5$ | 192 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-13-14-15-16-12-1 |
| $13l_1+2l_3+1l_5$ | 96 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-14-15-16-13-12-1 |
| $12l_1+2l_2+1l_3+1l_5$ | 384 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-13-14-16-15-12-1 |
| $13l_1+1l_3+2l_4$ | 64 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-14-15-16-12-13-1 |
| $11l_1+4l_2+1l_5$ | 160 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-13-15-16-14-12-1 |
| $12l_1+2l_2+2l_4$ | 448 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-16-14-15-13-1 |
| $12l_1+1l_2+ 2l_3+1l_4$ | 384 | 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-15-14-16-13-1 |

Cuadro 2.13: Mín. TSPPs, e.g. 16-gono.

En estos términos, si denotamos por $T(V_i, V_0)$ al conjunto de todas las trayectorias hamiltonianas no cíclicas que comienzan en V_i y terminan en V_0 , este problema se reduce a determinar, en cada $T(V_i, V_0)$, una trayectoria de longitud mínima.

Se declara, que con $\widehat{}$ se simboliza el segmento L_k^- que está ausente en una sucesión de segmentos dirigidos L_k^\pm , \widehat{L}_k y que potencialmente conectaría a $V_0 \equiv (-1, 0)$ con el vértice V_k .

Si denotamos $l(L_k)$ o también con L_k a la longitud común de L_k^- y L_k^+ , es claro que:

$$l(L_1) < l(L_2) < \dots < l(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}). \quad (2.60)$$

Se designa como de tipo P_1 a toda trayectoria abierta formada solo por lados L_1 y de tipo P_j , $2 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ a toda trayectoria abierta formada por $n - 2$ lados L_1 y un lado L_j . Como toda trayectoria de tipo P_j , $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, tiene la misma longitud $\mathcal{L}(P_j) = (n - 2)l(L_1) + l(L_j)$, resulta que

$$\mathcal{L}(P_1) < \dots < \mathcal{L}(P_{j-1}) < \mathcal{L}(P_j) < \dots < \mathcal{L}(P_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}). \quad (2.61)$$

Por lo tanto el problema de las trayectorias hamiltonianas abiertas P_H^{n-1} mínimas requiere, en principio, exhibir al menos para cada j , $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ una trayectoria hamiltoniana de tipo P_j . Lo haremos indicando las sucesiones de vértices que determinan tales trayectorias:

$$T_1 : V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \cdots \rightarrow V_{j-1} \rightarrow V_j \rightarrow \cdots \rightarrow V_{n-1} \rightarrow V_0$$

$$2 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad (2.62)$$

$$T_j : V_j \rightarrow V_{j+1} \rightarrow \cdots \rightarrow V_{n-2} \rightarrow V_{n-1} \rightarrow V_{j-1} \rightarrow V_{j-2} \rightarrow \cdots \rightarrow V_1 \rightarrow V_0, .$$

$$\uparrow$$

Conjetura 2.4.1 Longitudes mínimas recorridas por caminos hamiltonianos con la restricción \widehat{L}_k^- sobre los vértices de un n -gono regular son (2.63), [Niel, B. I. (2011)].

$$\widehat{L}_k^- + L_k^\pm + (n-2) L_1^\pm; \quad 2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad (2.63)$$

Observación 2.4.5 Las subsucesiones de orden $2 \leq m \leq n$ de los siguientes incisos construyen trayectorias cerradas sobre los vértices de un n -gono regular, con $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

1. $L_k^+ + L_k^-; L_k^- + L_k^+$,
2. $L_k^- + k L_1^+; k L_1^+ + L_k^-$,
3. $L_k^- + (n-k) L_1^-; (n-k) L_1^- + L_k^-$.

Teorema 2.4.6 Los itinerarios cíclicos hamiltonianos C_H^n representativos que realizan las longitudes de recorridos (2.63) son los ordenamientos en (2.64) y (2.65).

$$\widehat{L}_k^- + (k-1) L_1^+ + L_k^- + (n-k-1) L_1^- \quad (2.64)$$

$$\widehat{L}_k^- + (n-k-1) L_1^- + L_k^- + (k-1) L_1^+ \quad (2.65)$$

Demostración.

Resulta de la directa aplicación del algoritmo en el Capítulo 3, §3.1, pág. 139. En virtud de los incisos en la Observación 2.4.5. ■

La Figura 2.10, representa las trayectorias (2.64) y (2.65) sobre los vértices del 15-gono.

Se destaca que bajo la validez de la Conjetura 2.4.1, los caminos hamiltonianos definidos por las sucesiones (2.64) y (2.65) resuelven los $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ diferentes Mín. TSPPs sobre los vértices de un n -gono regular.

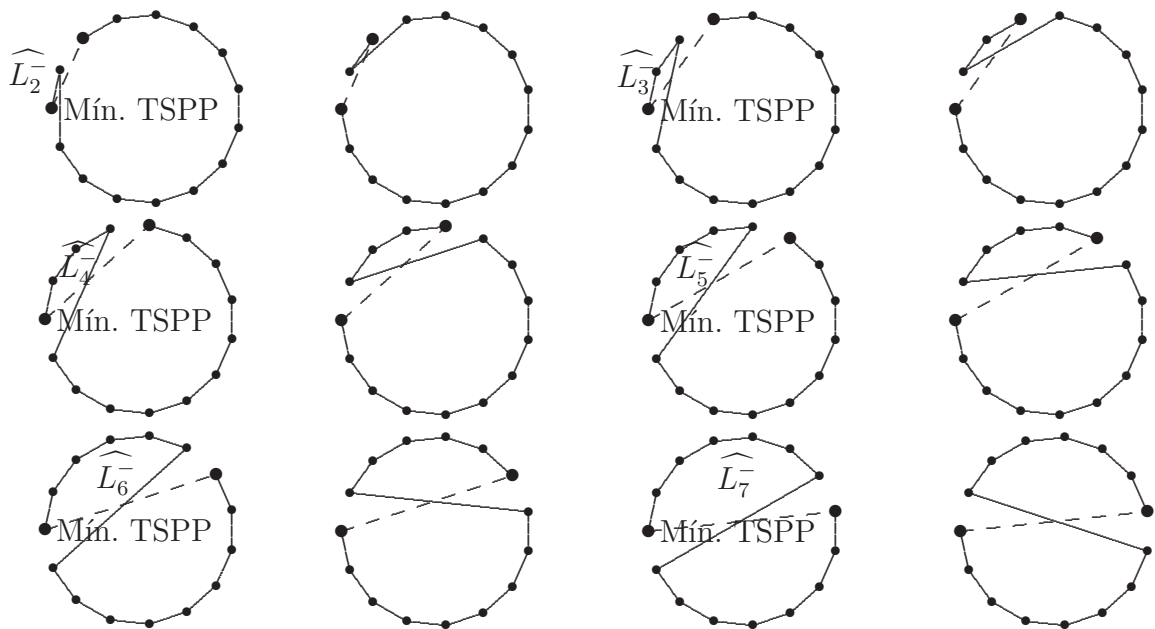


Figura 2.10: C_H^n y P_H^{n-1} de los Mín. TSPPs en $\mathcal{N}(K_{15}(e^{i\pi/15}\sqrt[15]{1}), (d_{ij})_{15 \times 15})$

2.5. Tercer Resultado: Hamiltonianos óptimos en vértices de $2p + 1$ -gonos

Aquí exhibimos los recorridos más ineficientes del viajante en polígonos regulares con número impar de vértices. La estructura matemática que requiere la exploración de los mencionados hamiltonianos cíclicos y no-cíclicos la simbolizamos mediante las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+1}(e^{i\pi \sqrt{2p+1}}), D)$, constituidas por el grafo completo K_{2p+1} sobre los nodos $e^{i\pi \sqrt{2p+1}}$ de un polígono regular de número impar de vértices $n = 2p + 1$, con conectividad completa ponderada por la distancia euclídea entre nodos, $D = (d_{ij})_{n \times n}$. En las arquitecturas de las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+1}(e^{i\pi \sqrt{2p+1}}), D)$ nos proponemos determinar los Máx. TSPPs, es decir, los itinerarios abiertos de un viajante que parte de uno cualquiera de sus nodos y debe llegar a otro nodo distinto pasando por cada uno los restantes vértices una sola vez y con máxima ineficiencia. Esto implica encontrar los caminos hamiltonianos de orden $n - 1$ de máxima longitud euclidiana de recorrido existentes en la estructura conectiva ponderada de las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+1}(e^{i\pi \sqrt{2p+1}}), (d_{ij})_{n \times n})$. De manera específica, nos proponemos resolver los $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ diferentes Máx. TSPPs -Maximum Travelling Salesman Path Problems-, para ello debemos determinar las longitudes extremales y los itinerarios que las realicen, hemos seleccionado sin pérdida de generalidad, el punto de partida $V_0 = R(-1, 0) \equiv (-1, 0)$ y el de llegada V_j , según el problema, i.e. V_j será respectivamente, cada uno de los $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ vértices ubicados en la semicircunferencia superior. Ver Figura 2.11. La estrategia de exploración anti-greedy $\sim \mathcal{AG}$, en la que se maximiza paso a paso la ineficiencia [Brassard, G. and Bratley, P. (1996)], la presente arquitectura $\mathcal{N}(K_{n=2p+1}(e^{i\pi \sqrt{2p+1}}), (d_{ij})_{n \times n})$, conduce al itinerario cíclico del hamiltoniano imitando la forma del polígono estrellado de máxima densidad y trayectoria cíclica que resuelve el Máx. TSP -Maximum Travelling Salesman Problem, e.g. observar el cuadro superior izquierdo, T_{11} , en el Cuadro 2.14. Cabe observar que en la arquitectura de los polígonos de un número impar de vértices ser el más ineficiente en cada etapa ha conducido a la ineficiencia global. Sin embargo, este paradigma exploratorio de costo de implementación algorítmico mínimo, \mathcal{AG} , no resuelve ninguno de los $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2$ casos restantes de Máx. TSPP [Niel, B. I. and Claverie, A. (2005)]. A saber, cada uno de los siguientes problemas: Máx. TSPP₁: punto inicial $V_0 = (-1, 0)$, punto final V_1 , Máx. TSPP₂: $V_0 = (-1, 0)$, punto final V_2 , Máx. TSPP₃: $V_0 = (-1, 0)$, punto final $V_3 \dots$ y Máx. TSPP _{$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2$} : $V_0 = (-1, 0)$, punto final $V_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}$ implicarían una búsqueda exhaustiva que temporalmente resultaría imposible, ya que para un número de nodos superior a la veintena normalmente requiere de estrategias de exploraciones aproximadas con cortes de ramas no necesarias de ser exploradas con la finalidad de asegurar la convergencia del algoritmo en tiempos razonables y solamente para obtener resultados cercanos a los exactos. Por tal razón es necesario explicitar al menos un itinerario representante que resuelva cada uno de los Máx. TSPP previamente especificados una vez determinadas las respectivas longitudes maximales de los posibles caminos óptimos de cada uno de los problemas. En este capítulo se exhibe en primer lugar un representante del camino del viajante para cada una de las longitudes de recorrido maximales y fundamentamos las razones teóricas que nos han permitido determinar cada una de las respectivas longitudes extremales.

Por razones de claridad en la presentación del presente contenido, en §2.5.1 exhibimos

los ciclos del recorrido del viajante relevantes para la resolución de cada uno de los itinerarios abiertos extremales que resuelven cada uno de los problemas aquí planteados. Posteriormente, en §2.5.2 confirmamos que al quitar el segmento que une el punto inicial con el final en cada uno de los ciclos exhibidos los correspondientes a los representantes de las longitudes extremales de cada uno de los Máj. TSPP planteados en la estructura $\mathcal{N}(K_{n=2p+1}(e^{i\pi \sqrt[2p+1]{1}}), (d_{ij})_{n \times n})$. Al lector interesado en los detalles de la demostración de que cada itinerario exhibido en §2.5.1 pasa una y solo una vez por cada vértice de un polígono regular de número impar de lados, i.e. $2p + 1$ -gono regular, se lo deriva al Apéndice 2.5.3.

Para recurrir a la geometría, ya utilizada, referida a los polígonos regulares con un número impar de vértices en el plano, es que asociamos sus vértices al conjunto de puntos $e^{i\pi \sqrt[2p+1]{1}}$. Además, los enumeramos y simbolizamos en sentido horario a partir del $V_0 = (-1, 0), \dots, V_{n-1}$.

Sea $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$, L_k^- representa el segmento que une el vértice V_0 con V_k y L_k^+ al segmento que conecta V_0 con V_{n-k} . $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-$ y $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+$ designan $l_{q,\max}^-$ y $l_{q,\max}^+$ respectivamente. Los subíndices se adicionan módulo n . Si V_k es el vértice de llegada al trazar L_k^- desde V_0 un avance angular cw. correspondiente es $k \frac{2\pi}{n}$. Mientras L_k^+ implica una variación angular c.w. de $(1 - \frac{k}{n})2\pi$.

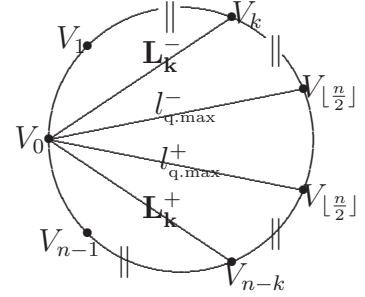


Figura 2.11: Los segmentos L_k^\pm desde V_0 en un $2l + 1$ -gono regular.

2.5.1. Hamiltonianos sub-óptimos en los vértices de un $2l + 1$ -gono regular

Se han determinado los recorridos cíclicos del viajante hacia la máxima ineficiencia en los polígonos regulares de número impar de vértices en el Capítulo 2, Teorema 2.2.3 inciso vi) de la pág. 80 y en las secciones dedicadas a los hamiltonianos reflexivos §2.2.2 y §2.2.3 en las páginas 84 y 86, respectivamente, (Ver Cuadro 2.2). Aquí se explicitan recorridos sub-óptimos relevantes de la ineficiencia del viajante que simbolizamos por T_k y que nos permitirán determinar un representante de cada uno de los Máj. TSPPs planteados sobre $\{V_0, \dots, V_{n-1}\}$ (Ver Figura 2.11) con la estructura de conectividad completa y ponderación euclidiana en las estructuras de las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+1}(e^{i\pi \sqrt[2p+1]{1}}), D)$.

Para cada k entre 1 y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, p está definido en función del parámetro k como $p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k$. Esta definición determina que p varíe de manera inversa a k , es decir desde $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ hasta cero mientras k crece en los enteros positivos desde 1 hasta $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Los siguientes teoremas exhiben, para cada k variando entre 1 y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, la existencia de un ciclo hamiltoniano que designamos por T_k de n segmentos dirigidos, cuyos vértices $e^{i\pi \sqrt[2p+1]{1}}$ están ordenados $\{V_0, \dots, V_{n-1}\}$ según la Figura 2.11 y construidos por la siguiente asignación de conectores: un único L_k , p segmentos $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$ ($L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-$ o $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+$), y $n - (p + 1)$ segmentos $l_{q,\max}$ (

$L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- \circ L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+$).

Teorema 2.5.1 *Sea $n = 2p + 1$, $p \geq 2$, cualquier entero positivo impar. Para cada k entre 1 y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, la trayectoria T_k determinada por la sucesión de n segmentos dirigidos (2.66) o (2.67) o (2.68) o (2.69) es un recorrido del viajante de orden n sobre los vértices $\{V_0, \dots, V_{n-1}\}$ de un polígono regular de número impar de lados, asociados al ordenamiento dado en la Figura 2.11, con la arquitectura de completa conexión y ponderadas por la distancia euclídea en $\mathcal{N} = \{K_{n=2p+1}(e^{i\pi \frac{2p+1}{\sqrt{1}}}, D)\}$.*

$$\underbrace{l_{q,max}^-, l_{q,max}^-, l_{q,max}^-, l_{q,max}^-, l_{q,max}^-, \dots, l_{q,max}^-}_{n-1}, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- \quad \text{si } k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad (p = 0). \quad (2.66)$$

En este caso particular, $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, los segmentos dirigidos $l_{q,max}^-$ y $L_k^- = L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-$ son coincidentes y la trayectoria es la de máxima longitud. Ref. Teorema 2.2.3 inciso [ix] $\beta = -\pi$, Capítulo 2, pág. 80.

$$\underbrace{l_{q,max}^+, l_{q,max}^+}_2, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-, l_{q,max}^-, \underbrace{l_{q,max}^-, l_{q,max}^-, \dots, l_{q,max}^-}_{n-5}, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^- \quad \text{si } k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 \quad (p = 1), \quad (2.67)$$

Para $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2$ existen dos clases de sucesiones las exhibidas en (2.68) si p es par y las desplegadas por (2.69) si p es impar.

Si $p = 2s$:

$$\underbrace{l_{q,max}^+, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+, \dots, l_{q,max}^+, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+}_{p=2s, \exists s \text{ pares } (l_{q,max}^+, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+)}, l_{q,max}^-, l_{q,max}^-, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-, l_{q,max}^-, \dots, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-, l_{q,max}^-}_{\exists s \text{ pares } (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-, l_{q,max}^-)}, \underbrace{l_{q,max}^-, \dots, l_{q,max}^-}_{n-(2p+3)}, L_k^- \quad (2.68)$$

Para $n = 4t + 3$, s varía entre $1 \leq s \leq \frac{1}{2}(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$. Luego si $n = 4t + 1$, s varía según

$$1 \leq s \leq \frac{1}{2} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Si $p = 2s + 1$:

$$\underbrace{l_{q,max}^+, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+, \dots, l_{q,max}^+, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+}_{p-1}, l_{q,max}^+, l_{q,max}^+, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-, l_{q,max}^-, \dots, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-, l_{q,max}^-}_{p+1}, \underbrace{l_{q,max}^-, \dots, l_{q,max}^-}_{n-(2p+3)}, L_k^- \quad (2.69)$$

Demostración. Referirse al contenido en §2.5.3, desde la pág. 123 hasta la pág. 130. El Cuadro 2.14 ilustra estos recorridos del viajante en la red $\mathcal{N}(K_{23}(e^{i\pi \frac{23}{\sqrt{1}}}, (d_{ij})_{23 \times 23}))$.

En las ilustraciones de cada trayectoria hamiltoniana euclidiana T_k y $l_{q,\max}^-$ están graficados con líneas completas, mientras que con líneas discontinuadas los restantes $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+$ y reservamos el líneado por puntos para el único segmento dirigido L_k^\pm . En cada gráfica hemos destacado que la trayectoria cíclica es un representante del camino del viajante que resuelve el Máx. TSPP específico cuando es extraído el único segmento L_k^\pm . ■

2.5.2. $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Máx. TSPPs en vértices de un $2l + 1$ -gono regular

Si n es impar, $T_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ es el camino del viajante de orden n construido por n segmentos $l_{q,\max}$, esta trayectoria es congruente con el polígono estrellado de máxima densidad, $\{\frac{n}{p}\}$, [Coxeter, H. S. M. (1963), Kirillov, A. (1999)]. Indudablemente, es el recorrido del viajante de máximo costo, es decir de máxima longitud, es la solución del Máx. TSP en $\mathcal{N}(K_{n=2p+1}(e^{i\pi \sqrt[2p+1]{1}}, D)$. Ver justificación en el enfoque variacional del Teorema 2.2.3 inciso [ix)] $\beta = -\pi$, Capítulo 2, pág. 80. Teniendo en cuenta la geometría de los vértices y el tipo de segmentos L_k que conforman los ciclos T_k , $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, resulta válida la siguiente cadena de desigualdades de sus longitudes de recorridos,

$$\mathcal{L}(T_1) < \cdots < \mathcal{L}(T_{k-1}) < \mathcal{L}(T_k) < \cdots < \mathcal{L}(T_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}). \quad (2.70)$$

Con \mathcal{T} se simboliza la familia de ciclos hamiltonianos de orden n impar, con vértices $\{V_0, \dots, V_{n-1}\}$ en $\mathcal{N} = \{K_{n=2p+1}(e^{i\pi \sqrt[2p+1]{1}}, D)\}$. (Ver Figura 2.11, pág. 119 y e.g. Cuadro 2.14, pág. 122).

Lema 2.5.2 Para $n \in \mathbb{N}$ las longitudes L_k de los segmentos L_k^\pm , $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ verifican las siguientes desigualdades de las diferencias entre las longitudes de los segmentos, a saber:

$$\mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i}) - \mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (i+1)}) < \mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (i+1)}) - \mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (i+2)}), \quad 0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2. \quad (2.71)$$

Demostración. Puesto que $\mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k}) = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$, la cadena de desigualdades en (3.10) es equivalente a:

$$\sin\left[\left(\frac{i}{n} + \frac{1}{2n}\right)\pi\right] < \sin\left[\left(\frac{i+1}{n} + \frac{3}{2n}\right)\pi\right]$$

que es válida para i tal que $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3$. ■

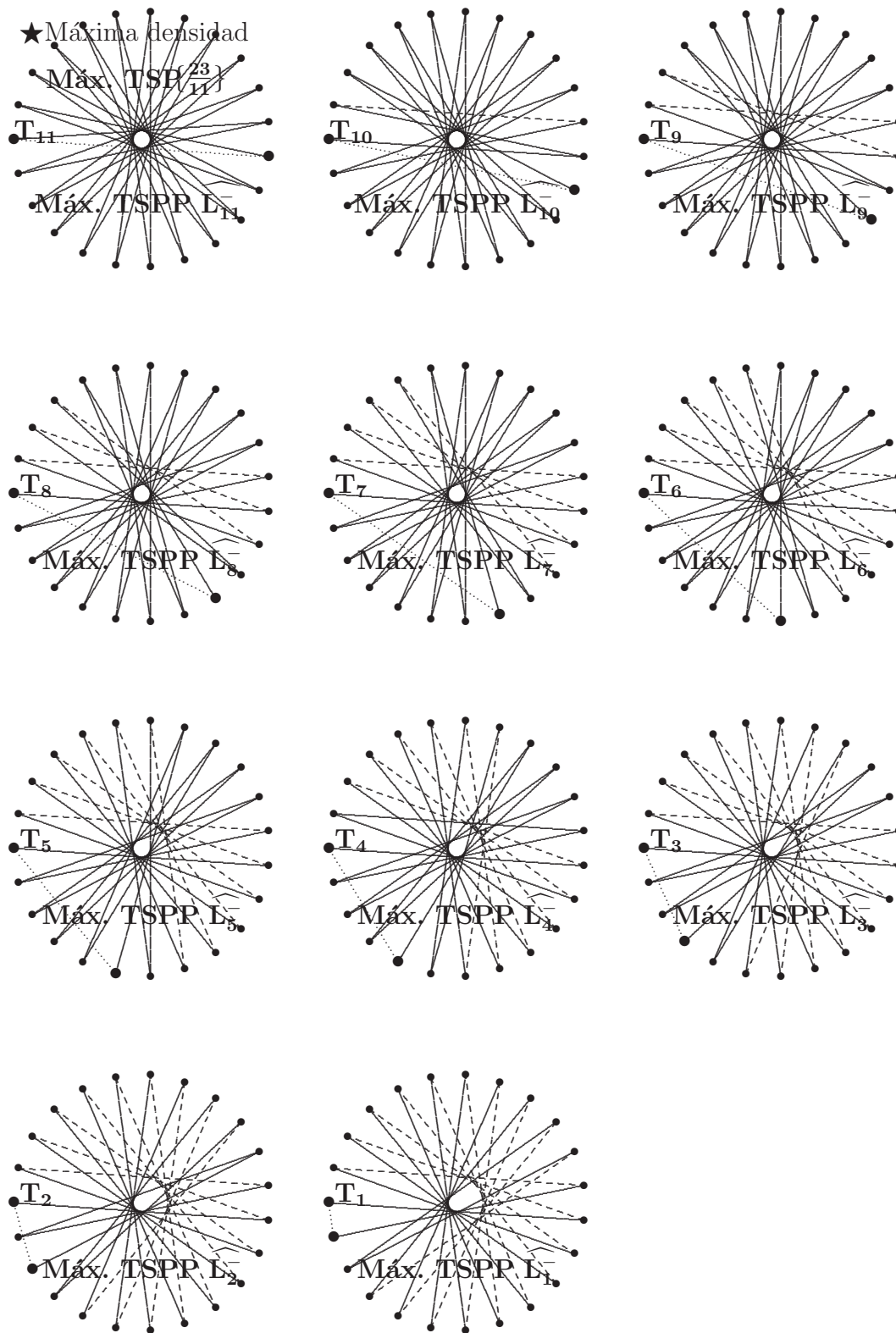
Si n es impar, necesitamos probar la validez de la siguiente desigualdad:

$$\mathcal{L}(T) < \mathcal{L}(T_1) \quad \forall T \in \mathcal{T} - \{T_1, \dots, T_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\}. \quad (2.72)$$

A tal efecto probamos el siguiente Lema.

Lema 2.5.3 Si $T \in \mathcal{T}$, entonces no existe T tal que

$$\mathcal{L}(T_{k-1}) < \mathcal{L}(T) < \mathcal{L}(T_k), \quad 1 < k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor. \quad (2.73)$$



Cuadro 2.14: Camino del viajante de cada Máx. TSPP en $\mathcal{N}(K_{23}(e^{i\pi \sqrt[23]{1}}), (d_{ij})_{23 \times 23})$.

Demostración. El Lema 2.5.2 establece que las longitudes de los segmentos L_k verifican las siguientes identidades

$$\mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) - \mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}) < \mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}) - \mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}) < \cdots < \mathcal{L}(L_2) - \mathcal{L}(L_1). \quad (2.74)$$

Además la configuración geométrica de T_k caracteriza las trayectorias con un único segmento dirigido L_k y con la particularidad de que deben ser cambiados al menos dos segmentos dirigidos T_k para obtener otro ciclo hamiltoniano en la familia de ciclos hamiltonianos \mathcal{T} .

La diferencia entre las longitudes de T_k y T_{k-1} es

$$\mathcal{L}(T_k) - \mathcal{L}(T_{k-1}) = (\mathcal{L}(l_{q,\max}) - \mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1})) + (\mathcal{L}(L_k) - \mathcal{L}(L_{k-1})). \quad (2.75)$$

Con la finalidad de disminuir la longitud de un ciclo T_k , dentro de la familia de ciclos considerada T , es necesario cambiar por lo menos dos segmentos dirigidos. La menor reducción de la longitud dentro de la familia T se obtiene al cambiar un segmento dirigido, específicamente cuando un segmento dirigido $l_{q,\max}$ es reemplazado por un $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$. Este intercambio requiere que la segunda substitución reemplace un segmento L_k por otro L_j , con $j < k$. Si L_k fuere reemplazado por L_j con $j > k$, eventualmente en el caso que T resultare un recorrido del viajante cíclico, así mismo implicaría $\mathcal{L}(T) > \mathcal{L}(T_k)$ puesto que $\mathcal{L}(L_j) - \mathcal{L}(L_k) > \mathcal{L}(l_{q,\max}) - \mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1})$ y entonces $\mathcal{L}(T_k) - \mathcal{L}(T) = (\mathcal{L}(l_{q,\max}) - \mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1})) + (\mathcal{L}(L_k) - \mathcal{L}(L_j)) < 0$. Finalmente, si $j < k$, el segmento dirigido L_j que provoca la mínima reducción de longitud es L_{k-1} . En consecuencia el ciclo T con menor longitud de T_k y tal que $\mathcal{L}(T_k) - \mathcal{L}(T)$ sea el mínimo posible, es $T = T_{k-1}$. ■

Hemos concluido la resolución de los Máx. TSPPs de orden $n - 1$ en las estructuras $\mathcal{N} = \{K_{n=2p+1}(e^{i\pi \sqrt[2p+1]{1}}, D)\}$, i.e. los $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ problemas del viajante no cíclicos han sido resueltos al exhibir un representante T_k en el Teorema 2.5.1 de cada una de las longitudes de recorrido máximas $\mathcal{L}(T_k)$, [Niel, B. I., Reartes, W. A. and Brignole, N. B. (2010)]. La asignatura pendiente es determinar si, salvo redundancia, e.g. rotaciones planas, estas trayectorias del viajante son las únicas posibles de realizar los respectivos Máx. TSPPs. El Capítulo 3.4, a partir de la pág. 167 estará dedicado a enumerar y explicitar los reordenamientos de todos los caminos hamiltonianos que realizan $\mathcal{L}(T_k)$ para cada k tal que $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, [Niel, B. I. and Claverie, A. (2005)], [Niel, B. I. (2006)].

2.5.3. Apéndice D: Demostración del Teorema 2.5.1

Demostración. Demostración del Teorema 2.5.1 en la pág. 120.

Los arreglos dados en las sucesiones (2.66), (2.67), (2.68) y (2.69) determinan recorridos del viajante que simbolizamos por T_k en las estructuras $\mathcal{N}(K_{n=2p+1}(\sqrt[2p+1]{1}), D)$ para indicar la ubicación del primer segmento dirigido a partir del vértice inicial V_0 .

Hemos considerado el ordenamiento definido por cada sucesión sobre la reenumeración de los vértices V_0, \dots, V_{n-1} del modo siguiente: $V'_0 = V_0$ y si $1 \leq j \leq n - 1$, llamamos V'_j al vértice que determina el j -ésimo segmento de la sucesión cuando este es ubicado

Capítulo 2. Geometría de los Hamiltonianos

siguiendo al vértice V'_{j-1} .

Esta demostración, trata por separado los cuatro tipo de sucesiones: (2.66), (2.67), (2.68) y (2.69).

Sucesión (2.66)

Esta sucesión construye la trayectoria $T_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ conformada por n segmentos dirigidos $l_{q,\max}^-$, en consecuencia el avance angular que le corresponde al i -ésimo vértice V'_i es $\sphericalangle(V'_i) = \pi - i(1 - \frac{1}{n})\pi$, $1 \leq i \leq n$.

Teniendo en cuenta que el vértice inicial V'_0 es el punto $(-1, 0)$, el ángulo que tiene asignado es $\sphericalangle(V'_0) = \pi$, el desplazamiento angular que corresponde a cada segmento dirigido L_k^- es $\frac{2\pi k}{n}$ mientras que el que le corresponde L_k^+ es $(1 - \frac{k}{n})2\pi$, para $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, y siempre en un movimiento en sentido horario. El vértice del extremo final después de la ubicación del n -ésimo segmento es V'_n y $\sphericalangle(V'_n) = \pi - (n-1)\pi$. Puesto que n es impar la igualdad indica que V'_n coincide con $V'_0 = (-1, 0)$, por lo tanto $T_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ es una trayectoria cíclica.

La diferencia

$$\sphericalangle(V'_i) - \sphericalangle(V'_j) = (j - i)(1 - \frac{1}{n})\pi, \quad 1 \leq i < j \leq n - 1$$

no es un entero múltiplo de 2π , por lo tanto cada uno de los vértices V'_0, \dots, V'_{n-1} son diferentes entre sí. En conclusión, la trayectoria determinada por el ordenamiento de segmentos en la sucesión (2.66) es un recorrido cíclico hamiltoniano euclídeo.

Sucesión (2.67)

Los ángulos de avance correspondientes a los cuatro primeros vértices de la sucesión (2.67) son:

$$V'_0 = \pi, \quad V'_1 = -\frac{\pi}{n}, \quad V'_2 = -\pi - \frac{2\pi}{n}, \quad V'_3 = -2\pi + \frac{\pi}{n}$$

entonces

$$\sphericalangle(V'_{3+j}) = -(j+2)\pi + \frac{j+1}{n}\pi, \quad \text{para } 1 \leq j \leq n-4,$$

por lo tanto

$$\sphericalangle(V'_{n-1}) = -(n-2)\pi + (1 - \frac{3}{n})\pi \quad \text{y} \quad \sphericalangle(V'_n) = -(n-2)\pi = \pi - (n-1)\pi.$$

Al ser n impar, la última identidad indica que V'_n coincide con V'_0 y por lo que se trata de una trayectoria cíclica. Las siguientes diferencias angulares computadas

$$\sphericalangle(V'_1) - \sphericalangle(V'_{3+j}) = (j+2)\pi - \frac{j+2}{n}\pi$$

$$\sphericalangle(V'_2) - \sphericalangle(V'_{3+j}) = (j+1)\pi - \frac{j+3}{n}\pi$$

$$\sphericalangle(V'_3) - \sphericalangle(V'_{3+j}) = j\pi - \frac{j}{n}\pi$$

$$\sphericalangle(V'_{3+i}) - \sphericalangle(V'_{3+j}) = (j-i)\pi + \frac{j-i}{n}\pi, \quad 1 \leq i < j \leq n-4$$

confirman que ninguna de ellas son un múltiplo entero de π . En consecuencia, los vértices V'_0, \dots, V'_{n-1} son todos diferentes entre sí, lo que significa que la trayectoria $T_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$ es un

ciclo hamiltoniano.

Sucesión (2.68)

La sucesión (2.68) admite una partición en tres subsucesiones o secciones S_1 , S_2 y S_3 bien diferenciadas. La primera S_1 conformada por $p + 2$ segmentos lineales: $\frac{p}{2}$ segmentos $l_{q,\max}^+$, $\frac{p}{2}$ segmentos dirigidos $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+$ y dos $l_{q,\max}^-$, dispuestos en el ordenamiento indicado en la sucesión.

La segunda sección S_2 se construye por p segmentos dirigidos: $\frac{p}{2}$ segmentos $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-$ y $\frac{p}{2}$ segmentos $l_{q,\max}^-$, alternativamente arreglados, comenzando con $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-$ y finalizando con $l_{q,\max}^-$.

Finalmente, la tercer sección S_3 está constituida por $n - (2p + 3)$ segmentos $l_{q,\max}^-$ y el segmento final L_k^- .

La caracterización de las secciones por los vértices que ellos contienen, nos permite escribir

$$S_1 = \{V'_0, \dots, V'_{p+2}\}, \quad S_2 = \{V'_{p+2+1}, \dots, V'_{2p+2}\},$$

y

$$S_3 = \{V'_{2p+2+1}, \dots, V'_{2p+2+n-(2p+3)} = V'_{n-1}, V'_n = V'_0\}.$$

El arreglo siguiente indica la sucesión angular completa correspondiente a los vértices de la sucesión de segmentos dirigidos (2.68). Ha sido dividida por secciones y los segmentos dirigidos adicionales son indicados en cada paso consecutivo colocándolos encima de una flecha indicando avance horario del movimiento

$$S_1 : \quad \begin{array}{ccccccc} \pi & l_{q,\max}^+ & -\frac{\pi}{n} & L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ & -\pi - \frac{4\pi}{n} & l_{q,\max}^+ & \dots \\ \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ V'_0 & & V'_1 & & V'_2 & & \dots \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+}_{\text{si } j=2s} \\ \underbrace{l_{q,\max}^+}_{\text{si } j=2s+1} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -(j-1)\pi - \frac{2j}{n}\pi \\ -(j-1)\pi - \frac{2j-1}{n}\pi \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\dots \rightarrow \begin{array}{ccccccc} L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ & -(p-1)\pi - \frac{2p\pi}{n} & l_{q,\max}^- & -p\pi - \frac{(2p-1)\pi}{n} & l_{q,\max}^- & -(p+1)\pi - \frac{2(p-1)\pi}{n} & \\ \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \\ & V'_p & & V'_{p+1} & & V'_{p+2} & \end{array}$$

$$S_2 : \quad \begin{array}{ccccccc} L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^- & -(p+2)\pi - \frac{(p-5)\pi}{n} & l_{q,\max}^- & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ & V'_{p+2+1} & & & & & \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{l_{q,\max}^-}_{\text{si } j=2s} \\ \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-}_{\text{si } j=2s+1} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -(p+j+1)\pi - \frac{2(p-j-1)}{n}\pi \\ -(p+j+1)\pi - \frac{2(p-j)-3}{n}\pi \end{array} \right. \rightarrow$$

$$V'_{p+2+j}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \longrightarrow \dots \longrightarrow l_{q,\max}^- \longrightarrow -(2p+1)\pi - \frac{2\pi}{n} \\
 \\
 V'_{2p+2}
 \end{array} \\
 \\
 S_3 : \begin{array}{c}
 l_{q,\max}^- \longrightarrow -2(p+1)\pi - \frac{3\pi}{n} \longrightarrow l_{q,\max}^- \dots l_{q,\max}^- \longrightarrow -(2p+j+1)\pi + \frac{(j+2)\pi}{n} \longrightarrow \\
 \\
 V'_{2p+2+1} \qquad \qquad \qquad V'_{2p+2+j}
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \longrightarrow \dots \longrightarrow l_{q,\max}^- \longrightarrow -(n-3)\pi - \frac{(2p+1)\pi}{n} \longrightarrow L_k^- \longrightarrow (-n+2)\pi \\
 \\
 V'_{n-1} \qquad \qquad \qquad V'_n = V'_0
 \end{array}
 \end{array}$$

Una vez más utilizamos el método de las diferencias angulares, para probar que los vértices en cada una de las secciones son todos diferentes así como que las distintas secciones no tienen vértices en común. De esta manera podremos concluir que la denominada trayectoria T_k bajo escrutinio es un recorrido cíclico del viajante.

Para la primera sección S_1 las diferencias angulares bajo evaluación son:

$$\angle(V'_i) - \angle(V'_j) = (j-i)\pi + \begin{cases} \frac{2(j-i)}{n}\pi & \text{si } i, j \text{ ambos con la misma paridad} \\ \frac{2(j-i)-1}{n}\pi & \text{si } i \text{ par y } j \text{ impar} \\ \frac{2(j-i)+1}{n}\pi & \text{si } i \text{ impar y } j \text{ par} \end{cases}$$

$$1 \leq i < j \leq p$$

$$\angle(V'_j) - \angle(V'_{p+1}) = (p-j+1)\pi + \begin{cases} \frac{2(p-j)-1}{n}\pi & \text{si } j \text{ par} \\ \frac{2(p-j)}{n}\pi & \text{si } j \text{ impar} \end{cases}$$

$$1 \leq j \leq p$$

$$\angle(V'_j) - \angle(V'_{p+2}) = (p-j+2)\pi + \begin{cases} \frac{2(p-j-1)}{n}\pi & \text{si } j \text{ par} \\ \frac{2(p-j)-1}{n}\pi & \text{si } j \text{ impar} \end{cases}$$

$$1 \leq j \leq p$$

en todos estos casos el numerador de las fracciones que aparecen en cada una de las expresiones de las diferencias es estrictamente menor que n , por lo tanto tales diferencias no son múltiplos enteros de 2π y en consecuencia los $p + 2$ vértices en S_1 son todos diferentes.

Para la segunda sección S_2 la diferencias angulares son:

$$\sphericalangle(V'_{p+2+i}) - \sphericalangle(V'_{p+2+j}) = (j - i)\pi - \begin{cases} \frac{2(j - i)}{n}\pi & \text{si } i, j \text{ con la misma paridad} \\ \frac{2(j - i) + 1}{n}\pi & \text{si } i \text{ par y } j \text{ impar} \\ \frac{2(j - i) - 1}{n}\pi & \text{si } i \text{ impar y } j \text{ par} \end{cases}$$

$$1 \leq i < j \leq p$$

en cualquier caso, las diferencias no son múltiplos enteros de 2π y por lo tanto los vértices en S_2 son todos diferentes.

En referencia a la tercera sección S_3 , hemos verificado, en el análisis de la sucesión (2.66), que si a partir de un determinado vértice m segmentos dirigidos $l_{q,\max}^-$, $m < n$ se colocan consecutivamente o sucesivamente, la sucesión resultante tiene la totalidad de sus vértices diferentes. Finalmente, los $n - (2p + 2)$ vértices de S_3 son distintos entre si, solo si V'_n no coincide con ninguno de los vértices $V'_{2p+2+1}, \dots, V'_{n-1}$. Como $\sphericalangle(V'_{2p+2+j}) = -(2p + j + 1)\pi + \frac{j + 2}{n}\pi$, $1 \leq j \leq n - (2p + 3)$ y las fracciones $\frac{j + 2}{n}$ no resultan ser números enteros, dichos vértices no coinciden con V'_0 .

De otro modo, si $j = n - (2p + 3)$, $\sphericalangle(V'_{2p+2+j}) = \sphericalangle(V'_{n-1}) = -(n - 3)\pi - \frac{2p + 1}{n}\pi$ y $\sphericalangle(V'_n) = \sphericalangle(V'_{n-1}) - \frac{2k\pi}{n} = -(n - 1)\pi + \pi$, como $n - 1$ es par resulta que el vértice V'_n coincide con $V'_0 = (-1, 0)$. Por lo tanto, la totalidad de vértices en S_3 son diferentes y la sucesión (2.68) determina una trayectoria cíclica, con vértice inicial y final en V'_0 .

Resta demostrar que la trayectoria es hamiltoniana, i.e. falta verificar que las sucesiones S_1 , S_2 y S_3 no contienen vértices comunes.

$S_1 \cap S_2 = \emptyset$, en este caso, es necesario evaluar las siguientes tres diferencias:

a)

$$\sphericalangle(V'_i) - \sphericalangle(V'_{p+2+j}), \quad 0 \leq i \leq p \text{ y } 1 \leq j \leq p, p \geq 2$$

b)

$$\sphericalangle(V'_{p+1}) - \sphericalangle(V'_{p+2+j}), \quad 1 \leq j \leq p$$

c)

$$\sphericalangle(V'_{p+2}) - \sphericalangle(V'_{p+2+j}), \quad 1 \leq j \leq p.$$

Capítulo 2. Geometría de los Hamiltonianos

Para la primer diferencia a), los resultados son:

$$\begin{aligned} \angle(V'_i) - \angle(V'_{p+2+j}) &= (p+2+j-i)\pi - \begin{cases} \frac{2(p-j-i-1)}{n}\pi & \text{si } i, j \text{ igual paridad} \\ \frac{2(p-j-i)-3}{n}\pi & \text{si } i \text{ par y } j \text{ impar} \\ \frac{2(p-j-i)-1}{n}\pi & \text{si } i \text{ impar y } j \text{ par} \end{cases} \\ 0 \leq i \leq p \text{ y } 1 \leq j \leq p, p \geq 2 \end{aligned}$$

veamos que cualquiera de estos resultados determinan un entero positivo y múltiplo de 2π . Como $0 \leq p-j \leq \frac{n-1}{2} - 1$ resulta que $-n+1 \leq -2(i+1) \leq 2(p-j-i-1) \leq n-5$ entonces $-1 + \frac{1}{n} \leq \frac{2(p-j-i-1)}{n} \leq 1 - \frac{5}{n}$ por lo tanto $\frac{2(p-j-i-1)}{n}$ es un entero solo si este es cero, en este caso

$$\angle(V'_i) - \angle(V'_{p+2+j}) = (p+2+j-i)\pi = (2j+3)\pi, \quad (i, j \text{ impar})$$

es un múltiplo impar de π , por lo tanto $V'_i \neq V'_{p+2+j}$.

En cada caso de las dos fracciones remanentes, una línea análoga de argumentos conduce a las siguientes desigualdades

$$-\frac{3}{n} \leq \frac{2(p-j-i)-3}{n} \leq 1 - \frac{6}{n}$$

y

$$-1 + \frac{2}{n} \leq \frac{2(p-j-1)-1}{n} \leq 1 - \frac{4}{n}$$

por lo arriba expresado, se puede deducir que, en ambos casos, el término central es cero o una fracción entera. Puesto que $p-j-1$ es un entero la cancelación no es posible, entonces $V'_i \neq V'_{p+2+j}$ para $1 \leq i \leq p$.

Las diferencias b) y c) no son enteros múltiplos de 2π , ya que

$$\begin{aligned} \angle(V'_{p+1}) - \angle(V'_{p+2+j}) &= (j+1)\pi - \begin{cases} \frac{2j+1}{n}\pi & \text{si } j \text{ par} \\ \frac{2(j+1)}{n}\pi & \text{si } j \text{ impar} \end{cases} \\ 1 \leq j \leq \frac{n-1}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle(V'_{p+2}) - \angle(V'_{p+2+j}) &= j\pi - \begin{cases} \frac{2j}{n}\pi & \text{si } j \text{ par} \\ \frac{2j-1}{n}\pi & \text{si } j \text{ impar} \end{cases} \\ 1 \leq j \leq \frac{n-1}{2} - 1 \end{aligned}$$

y las cuatro fracciones que aparecieron en ambas diferencias corresponden a números positivos menores que uno. Hemos terminado de justificar que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

$S_1 \cap S_3 = \emptyset$.

Las diferencias que se necesitan evaluar con el objetivo de comprobar que las secciones S_1 y S_3 no tienen vértices comunes son:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \angle(V'_i) - \angle(V'_{2p+2+j}) &= (2p + 2 + j - i)\pi - \begin{cases} \frac{j + 2i + 2}{n}\pi & \text{si } j \text{ par} \\ \frac{j + 2i + 1}{n}\pi & \text{si } j \text{ impar} \end{cases} \\
 1 \leq i \leq p & \\
 \text{b) } \angle(V'_{p+1}) - \angle(V'_{2p+2+j}) &= (p + j + 1)\pi - \frac{2p + j + 1}{n}\pi \\
 \text{c) } \angle(V'_{p+2}) - \angle(V'_{2p+2+j}) &= (p + j)\pi - \frac{2p + j}{n}\pi
 \end{aligned}$$

En el caso a), las desigualdades son:

$$0 < \frac{j + 2i + 2}{n} \leq 2 - \frac{5}{n} \quad \text{y} \quad 0 < \frac{j + 2i + 1}{n} < 2 - \frac{5}{n}$$

por lo tanto las dos fracciones que aparecen en a) solamente toman un valor entero si $j + 2i + 2 = n$ cuando i es par y $j + 2i + 1 = n$ cuando i es impar. En tal situación, obtenemos:

$$\angle(V'_i) - \angle(V'_{2p+2+j}) = \begin{cases} (2p + n - 3i - 1)\pi & \text{si } i \text{ par} \\ (2p + n - 3i)\pi & \text{si } i \text{ impar} \end{cases}.$$

En ambos casos, la diferencia es un entero impar múltiplo de π . Hemos finalizado de probar que las diferencias a) toman valores que son múltiplos impares de π o en su defecto no son enteros múltiplos de π , resultados que demuestran que $S_1 \cap S_3 = \emptyset$.

$$S_2 \cap S_3 = \emptyset$$

En este último caso las diferencias para evaluar, para $1 \leq i \leq p$ y $1 \leq j \leq n - (2p + 3)$, son:

$$\angle(V'_{p+2+i}) - \angle(V'_{2p+2+j}) = (p + j - i)\pi - \begin{cases} \frac{2(p - i) + j}{n}\pi & \text{si } i \text{ par} \\ \frac{2(p - i) + j + 1}{n}\pi & \text{si } i \text{ impar} \end{cases} \quad (2.76)$$

En actual condición las desigualdades

$$0 < 2(p - i) + j \leq 2p + j \leq 3p \leq \frac{3}{2}(n - 1) - 3$$

son verdaderas. Por lo tanto, las fracciones que aparecen en (2.76) conducen a un número entero, es necesario que $2(p - i) + j = n$ cuando i es par y $2(p - i) + j + 1 = n$ cuando i es impar. En cualquier caso la diferencia $\angle(V'_{p+2+i}) - \angle(V'_{2p+2+j})$ es un múltiplo impar de π . Esta afirmación finaliza la demostración de que la sucesión (2.68) determina un ciclo hamiltoniano euclidiano cuyos nodos son los vértices $\{V_0, \dots, V_{n-1}\}$.

Sucesión (2.69)

Esta última sucesión admite, de la misma manera que la sucesión (2.68) previamente considerada, la partición en tres secciones S_1 , S_2 y S_3 claramente diferenciadas.

Capítulo 2. Geometría de los Hamiltonianos

En el siguiente arreglo exhibimos la sucesión angular completa con sus correspondientes vértices de cada una de las tres secciones, juntamente con los respectivos segmentos dirigidos colocados sobre las flechas que indican el movimiento horario de las consecutivas etapas.

$$S_1 : \begin{array}{ccccccc} \pi & l_{q,\max}^+ & -\frac{\pi}{n} & L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ & -\pi - \frac{4\pi}{n} & l_{q,\max}^+ & \dots \\ V_0' & \longrightarrow & V_1' & \longrightarrow & V_2' & \longrightarrow & \dots \end{array} \begin{array}{l} \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+}_{\text{si } j=2s} \\ \longrightarrow \\ \underbrace{l_{q,\max}^+}_{\text{si } j=2s+1} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -(j-1)\pi - \frac{2j}{n}\pi \\ -(j-i)\pi - \frac{2j-1}{n}\pi \end{array} \right. \longrightarrow \\ V_j'$$

$$\dots \begin{array}{ccccc} L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ & -(p-2)\pi - \frac{2(p-1)\pi}{n} & l_{q,\max}^+ & -(p-1)\pi - \frac{(2p-1)\pi}{n} & l_{q,\max}^- & -p\pi - \frac{2p\pi}{n} \\ \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow & \end{array} \begin{array}{ccc} V_{p-1}' & & V_p' & & V_{p+1}' \end{array}$$

$$S_2 : \begin{array}{ccccc} L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^- & -(p+1)\pi - \frac{2p-3}{n}\pi & l_{q,\max}^- & -(p+2)\pi - \frac{2p-4}{n}\pi & L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^- \\ \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow \end{array} \begin{array}{ccc} V_{p+1+1}' & & V_{p+1+2}' \end{array}$$

$$\dots \begin{array}{l} \underbrace{l_{q,\max}^-}_{\text{si } j=2s} \\ \longrightarrow \\ \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-}_{\text{si } j=2s+1} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -(p+j) - \frac{2(p-j)}{n}\pi \\ -(p+j) - \frac{2(p-j)-1}{n}\pi \end{array} \right. \dots \begin{array}{l} l_{q,\max}^- \\ \longrightarrow \\ V_{2p+2}' \end{array}$$

A partir que el vértice V_{2p+2}' de la sucesión (2.69) coincide con el V_{2p+2}' de la sucesión (2.68), y que también esta sección se conecta adecuadamente con la sección final S_3 , dejamos al lector interesado el trabajo de realizar los cálculos de esta verificación. Finalmente, poniendo atención al hecho de que las diferencias angulares, requieren similares evaluaciones que las que hemos venido efectuando para las diferencias en (2.68), dejamos como propuesta comprobar que efectivamente la inclusión de la sección S_4 determina un ciclo hamiltoniano. ■

2.6. Conclusión final del capítulo

En la §2.4 ya argumentamos sobre los contenido desarrollados en las secciones §2.2 y §2.3. En esta §2.5 se explicitan las configuraciones de un hamiltoniano óptimo para cada uno de los diferentes Máx. TSPPs si se trata de determinar los ciclos de máxima ineficiencia sobre los vértices de un n -gono regular de número impar de lados.

2.7. Exposiciones en Congresos Nacionales y Conferencias Internacionales

1. Niel, B. I. *Caracterización de ciclos y caminos hamiltonianos en redes con nodos en las raíces de la unidad*. LVI Reunión Anual de Comunicaciones Científicas, UMA 2.006. Sesión: Matemática Aplicada I. Índice de Comunicaciones Científicas pág. 56. Autor-Expositor.
2. Niel, B. I. *Geometry of the euclidean hamiltonian subptimal and optimal paths in the $\mathcal{N}(K_n(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), D)$ networks*. Proceedings of the VIII Dr. Antonio A. R. Monteiro, Congress of Mathematics, pg. 67 - 84, 2006, Mathematics Department, Universidad Nacional del Sur, 8000 Bahía Blanca, Argentina. Autor-Expositor.
3. Niel, B. I. and Claverie, A. *How faraway are the greedy and anti-greedy strategies of solving specific travelling salesman's problems ?* Proceedings of the XII SIGEF Congreso Internacional, pg. 177 - 200, Octubre 2005, Universidad Nacional del Sur, 8000 Bahía Blanca, Argentina. Autor-Expositor.
4. Niel, B. I. *The longest non cyclic traveling Salesman's Paths in the Networks built on the n -th roots of the Unity*. Autor-Expositor. Abstracts of MSME'06, Networks: pg. 59. Proceedings of MSME'06, C.D.: ISBN 987-1171-53-6. Bahía Blanca, 27-29 Septiembre 2006. Conferencia Internacional, 2006, Universidad Nacional del Sur, Argentina. Autor-Expositor.

Parte III
Algoritmo Aritmético

Capítulo 3

Algoritmo Aritmético

Este capítulo contiene los argumentos geométricos y aritméticos que fundamentan un procedimiento algorítmico aritmético para determinar si una sucesión de segmentos dirigidos en las estructuras de las redes $\mathcal{N}(K_n(\sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ conforman un ciclo hamiltoniano. En particular, se aplicará el algoritmo para resolver cuántas y cuáles son las trayectorias hamiltonianas no-cíclicas en las arquitecturas de las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ que resuelven cada uno de los $\frac{n}{2}$ diferentes Máx. TSPPs con vértices de un $2p+2$ -gono regular (Ver Figura 2.2, pág. 84). Es decir, se va a identificar cada uno de los caminos hamiltonianos de la ineficiencia que solucionan los siguientes $\frac{n}{2}$ problemas: Máx. TSPP₁: punto inicial $V_0 = (-1, 0)$, punto final V_1 , Máx. TSPP₂: $V_0 = (-1, 0)$, punto final V_2 , Máx. TSPP₃: $V_0 = (-1, 0)$, punto final V_3 y así hasta resolver el Máx. TSPP _{$\frac{n}{2}$} : $V_0 = (-1, 0)$, punto final $V_{\frac{n}{2}}$. Es necesario tener en cuenta los resultados del Capítulo 2 §2.3, en la pág. 104 en los que se ha exhibido un hamiltoniano no-cíclico representativo de cada una de las categorías, i.e. Γ'_k , con longitud de recorrido $\mathcal{L}(\Gamma'_k)$ para cada $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$. Declaramos, que los resultados aquí expuestos, practicamente son una traducción al castellano del trabajo [Niel, B. I. (2012a)].

3.0.1. Hamiltonianos ineficientes en vértices de $2p+2$ -gonos

La identificación de cada uno de los hamiltonianos no-cíclicos de orden $n-1$ que resuelven cada uno de los $\frac{n}{2}$ problemas de los caminos hamiltonianos de máxima longitud de recorrido sobre los vértices de un $2p+2$ -gono regular será realizada mediante un algoritmo o procedimiento aritmético de sustento geométrico en el conjunto de puntos $e^{i\pi \frac{k}{n}} \sqrt[n]{1}$, en congruencia con los $2p+2$ vértices de un $2p+2$ -gono regular. Es importante mencionar que tal identificación es realizada eliminando la redundancia provocada por las rotaciones planares y el cambio de orientación del sentido de recorrido en las trayectorias hamiltonianas óptimas o subóptimas. Además, salvo las mencionadas reiteraciones, se confirma la unicidad del hamiltoniano que resuelve el Máx. TSP.

Consideramos la red $\mathcal{N}(K_n(\sqrt[n]{1}), D)$, donde $K_n(\sqrt[n]{1})$ es un grafo completo con vértices en las n -ésimas raíces de la unidad y $D = (d_{ij})$ es la matrix de orden $n \times n$ cuyas com-

¹Palabras claves- Caminos hamiltonianos; Problemas de trayectorias óptimas; Problemas geométricos de hamiltonianos; Ciclos o tours de estrategias de los vecinos más alejados o más lejanos; Problema del Viajante de Comercio: Traveling Salesman Problem.

ponentes son las distancias euclidianas entre nodos. Aquí tratamos los problemas de las *Trayectorias Cíclicas y No-Cíclicas Hamiltonianas Euclídeas de Longitud Máxima en las Redes* $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$, [Buckly, F., and Harary F. (1990)].

En general, [Applegate, D., Bixby, R. E., Chavatal, V. and Cook, W. J. (2006)], la búsqueda de los Hamiltonianos Euclidianos Óptimos implican tareas computacionales duras, ya que estas estructuras tienen $\frac{(n-1)!}{2}$ ciclos hamiltonianos a ponderar. Por lo que requieren de técnicas de aproximación a la soluciones ², [Concorde code]. Las estrategias más simples, del vecino más cercano y del más lejano \mathcal{NN} y \mathcal{FN} , respectivamente, como lo hemos explicado en la introducción del Capítulo 2 en la pág. 77, identifican los hamiltonianos cíclicos de longitud de recorrido mínima en los vértices de un n -gono regular y los hamiltonianos cíclicos de longitud de recorrido máxima cuando se trata de un $2p + 1$ -gono regular. Estos hamiltonianos óptimos cíclicos tienen la belleza de las formas perfectas o regulares sobre los n -gonos regulares. Concretamente, las poligonales regulares de mínima densidad $\{\frac{n}{1}\}$ y las poligonales regulares estrelladas de máxima densidad $\{\frac{2p+1}{p}\}$, [Coxeter, H. S. M. (1963), Kirillov, A. (1999)]. En contraposición, los ciclos que la búsqueda \mathcal{FN} sobre los vértices de un $2p+2$ -gono regular captura un ciclo hamiltoniano subóptimo con longitud de recorrido menor a la extrema en las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ [Niel, B. I. (2001), Fekete, S. P., Meijer, H. R., Rohe, A. and Tietze, W. (2002)], consiste precisamente, en la conformación del ciclo seleccionado por la estrategia del \mathcal{FN} la que inspira nuestra construcción e hipótesis sobre configuraciones representativas que resuelven los $\frac{n}{2}$ diferentes Problemas de los Caminos Hamiltonianos Euclídeos No-Cíclicos en estas redes, que expusimos en el Capítulo 2 §2.3, [Niel, B. I. (2006)]. En la presente discusión se propone un procedimiento que determina si una sucesión de n segmentos dirigidos en el conjunto de puntos $e^{i\pi} \sqrt[n]{1}$ verifica la propiedad de ser un ciclo hamiltoniano. La metodología que proponemos resulta de la geometría intrínseca y de la aritmética inherente a los vértices de un n -gono regular [Niel, B. I., Reartes, W. A. and Brignole, N. B. (2010)]. El algoritmo propuesto nos permite obtener cada uno de los caminos hamiltonianos que solucionan los $\frac{n}{2}$ diferentes Problemas de los Caminos Hamiltonianos Euclídeos No-Cíclicos de Máxima longitud de recorrido en las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ ³. Para evitar redundancia la enumeración se realiza eliminando aquellas configuraciones que resulten de rotaciones planas y/o de cambio en el sentido del recorrido. Además, bajo la congruencia anterior en las clases de hamiltonianos, se confirma la unicidad del ciclo hamiltoniano que resuelve el Máx. TSP en $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$.

Después de haber formulado los Máx. TSPs que aquí resolvemos, en §3.0.2 fundamentamos el algoritmo aritmético. En §3.2 se confirma un camino hamiltoniano representativo que resuelve cada uno de los Máx. TSPs utilizando la metodología propuesta, cuya directa aplicación resulta en una mayor belleza y brevedad respecto de los cómputos exhibidos en la Demostración del Teorema 2.3.4, Apéndice B, desde la pág. 110 a la pág. 113, (Ver Figura 2.9, 113). En §3.2.1 se acuerda como se evita contabilizar las trayectorias con-

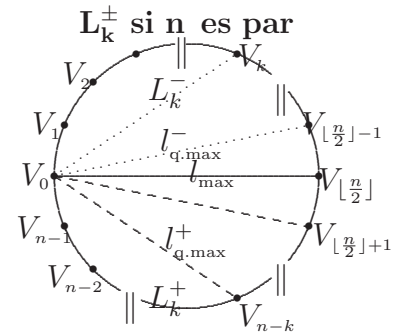
²Por ejemplo [Fekete, S. P., Meijer, H. R., Rohe, A. and Tietze, W. (2002)] testean la eficiencia de la solución heurística del Algorithm CROSS' que proponen, en los vértices de $\sqrt[10]{1}$, en la pág. 14, Figuras 9. y 10.

³MSC 2010: 05C12 Distance in graphs, 05C38 Paths and Cycles, 05C22 Signed and weighted graphs, 05C35 Extremal problems, 90B10 Network models, deterministic.

gruentes en la enumeración de los hamiltonianos cíclicos óptimos y/o subóptimos, para ello establecemos las definiciones de congruencia entre hamiltonianos. En §3.3 se identifican las configuraciones de los caminos óptimos de máxima longitud de recorrido en los vértices de un $2p+2$ -gono regular y en §3.3.1 se explica el espectro de las trayectorias que resuelven cada uno de los $\frac{n}{2}$ diferentes Problemas de los Caminos Hamiltonianos Euclídeos de Máxima Longitud de recorrido en las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$. Finalmente en §3.3.3, se concluye acerca de los aspectos relevantes que han permitido capturar las soluciones obtenidas. Finalmente, en §3.3.2, Apéndice E en la pág. 149, diseñamos un proceso alternativo para la construcción de los caminos hamiltonianos más largos.

3.0.2. Metodología propuesta

Sean V_0, \dots, V_{n-1} los puntos del conjunto $e^{\pi i} \sqrt[n]{1}$ enumerados cw. por los enteros módulo n , \mathbb{Z}_n , a partir del vértice $V_0 = (-1, 0)$. Para cada k en $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y cada $j \in \mathbb{Z}_n$, $L_{k,j}^-$ denota el segmento que une V_j con V_{j+k} , mientras que $L_{k,j}^+$ denota aquél que conecta V_j a $V_{j+(n-k)} = V_{j-k}$. Desde ahora en adelante, L_k^- y L_k^+ denotan a $L_{k,0}^-$ y $L_{k,0}^+$, respectivamente.



Con l_{\max} se simboliza el diámetro, que une V_j con su opuesto $V_{j+\frac{n}{2}}$, si n es par. Además, es válida la identificación $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- = L_{\frac{n}{2}}^- = L_{\frac{n}{2}}^+ = l_{\max}$. Mientras que con $l_{q,\max}^-$ y $l_{q,\max}^+$ respectivamente se designan, los cuasi-diámetros $L_{\frac{n}{2}-1}^-$ y $L_{\frac{n}{2}-1}^+$ si n es par, mientras que la notación $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-$ y $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+$ se escoge en caso que n sea impar.

3.0.3. Geometría intrínseca y aritmética inherente

Si P_n simboliza un n -gono regular inscripto en la circunferencia unitaria y con sus vértices en V_0, \dots, V_{n-1} , según la figura anterior, P_n puede ser considerado como la poligonal de segmentos $L_{1,0}^-, L_{1,1}^-, \dots, L_{1,n-1}^-$ [Kirillov, A. (1999)]. Por ejemplo, a partir de la interpretación vectorial de los segmentos $L_{k,j}^\pm$, es interesante notar que $L_{1,j}^+ = -L_{1,j-1}^-$. Además, $L_{k,j}^-$ puede ser interpretado como la resultante de la poligonal de k lados de P_n , que une en sentido horario el vértice V_j al V_{j+k} , mientras que por otra parte $L_{k,j}^+$ es la resultante de la poligonal de $n-k$ lados que conecta cw. V_j con el vértice $V_{j-k} \equiv V_{j+n-k}$. Los segmentos $L_{k,j}^-$ y $L_{k,j}^+$ son las respectivas cuerdas (o resultantes) de las poligonales con $sn+k$ y $rn+n-k$ lados consecutivos de P_n , cualesquiera sean los enteros s y r . Por lo tanto, es natural asociar $L_{k,j}^-$ con el entero $e(L_{k,j}^-) = k$, así como también $L_{k,j}^+$ con el entero $e(L_{k,j}^+) = n-k \equiv -k$ (módulo n).

Definición 3.0.1 Para cualquier entero n , se dice que L es un “segmento L_k ” si para algún k tal que $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, y para algún $j \in \mathbb{Z}_n$, $L = L_{k,j}^-$ o $L = L_{k,j}^+$.

Definición 3.0.2 Si L es un segmento L_k , “el entero asociado a L ”, denotado por $e(L)$,

Capítulo 3. Algoritmo Aritmético

se define como:

$$e(L) = \begin{cases} k & \text{si } L = L_{k,j}^- \\ n - k \equiv -k & \text{si } L = L_{k,j}^+ \end{cases}$$

Definición 3.0.3 Si $S = \{L_1, \dots, L_j\}$ es una sucesión de segmentos L_k , “el entero asociado al camino o trayectoria construida por la sucesión S ”, que se denota como $e(S)$

está determinado por $e(S) = \sum_{i=1}^j e(L_i)$ (módulo n).

Es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos:

- La colocación consecutiva de dos segmentos L_k a partir de un vértice V_i arbitrario determina el vértice que corresponde a colocar, desde V_i y en sentido cw., tantos lados de P_n como lo indique el número correspondiente a la suma de los enteros asociados a cada uno de los dos segmentos L_k . En otras palabras, la resultante de una poligonal construida por dos segmentos L_k , es otro segmento L_k y su entero asociado es la suma (módulo n) de los enteros asociados a las componentes de la poligonal.
- Si L es un segmento L_k entonces para algún j en \mathbb{Z}_n , $0 \leq e(L) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Si en cambio, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < e(L) \leq n$, L es $L = L_{n-e(L),j}^+ = L_{-e(L),j}^-$.

El concepto de entero asociado $e(L_k)$ y su adición módulo n , despliega el siguiente correlato geométrico sobre los vértices $\{V_0 = (-1, 0), \dots, V_{n-1}\}$: Para cada i , $0 \leq i \leq n-1$, el lugar geométrico que corresponde al vértice V_i coincide con el lugar que corresponde a V_{i+sn} , para cada entero s . Puesto que los segmentos $L_{k,0}^-$ y $L_{k,0}^+$ respectivamente conectan los vértices V_0 a V_k y V_0 con $V_{-k} \equiv V_{n-k}$, resulta claro que para cualquier entero k entre 0 y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, los vértices V_k y V_{-k} son simétricos con respecto al eje horizontal. Este correlato permite fundamentar el Lema 3.0.4.

Lema 3.0.4 Dos vértices V_i, V_j son vértices simétricos con respecto al eje horizontal si y solo si $i + j \equiv 0$ (módulo n).

Demostración. Sean V_i y V_j vértices simétricos con respecto al eje horizontal. Es decir, $V_i \equiv V_{-j} \iff V_j \equiv V_{-i}$. Por lo tanto, $i = -j + sn \iff j = -i + rn \iff i + j \equiv 0$ (módulo n). ■

Dada una sucesión de segmentos L_k , de aquí en más la poligonal que ella determine se considera en una relación uno-a-uno con la suma de cada uno de los segmentos dirigidos que pertenecen a la secuencia.

Dado que $e(L_{k,i}^\pm) = e(L_{k,j}^\pm)$, para índices i y j cualesquiera en \mathbb{Z}_n , no se pierde generalidad si en las sucesiones de segmentos L_k se eliminan los subíndices en segundo término o de la derecha.

3.1. Algoritmo Aritmético: Proposiciones Fundamentales

Las proposiciones fundamentales que dan origen a la técnica propuesta para determinar si una secuencia de n segmentos dirigidos que unen los vértices de un n -gono regular son ciclos hamiltonianos euclídeos, son esencialmente el Lema 3.1.2 y el Teorema 3.1.3.

Definición 3.1.1 Sea $S_m : a_1, a_2, \dots, a_m$ una sucesión finita. Una “subsucesión propia” de S_m es cada subsucesión $S_{jr} : a_j, a_{j+1}, \dots, a_{j+r-1}, a_{j+r}$ para $1 \leq j \leq m$ y $r \geq 0$ con $j + r < m$ si $j = 1$, y $j + r \leq m$ si $j > 1$.

Basándonos en los argumentos previos, resultan válidos el Lema 3.1.2 y el Teorema 3.1.3 siguientes.

Lema 3.1.2 La trayectoria determinada por una sucesión S de segmentos L_k , comienza y termina en el mismo vértice V_j si y solo si $e(S) \equiv 0$.

Teorema 3.1.3 Una sucesión S de n segmentos L_k determina un ciclo hamiltoniano euclidiano de orden n si solo si cualquier subsucesión propia no tiene como entero asociado ni a n ni múltiplo alguno de n y si verifica que $e(S) \equiv 0$.

Demostración. Sea $S : L_{k_1}, L_{k_2}, \dots, L_{k_n}$ un ciclo hamiltoniano euclidiano de orden n , entonces cada subsucesión propia S' determina una trayectoria que no repite vértices y que verifica $e(S') \not\equiv 0$. Recíprocamente, si cada subsucesión propia S' de S es tal que $e(S') \not\equiv 0$, la trayectoria asociada con L_{k_2}, \dots, L_{k_n} es un camino hamiltoniano euclídeo que pasa una sola vez por los n vértices $V_{i_0}, \dots, V_{i_{n-1}}$. La suposición de que L_{k_1} no conecta los vértices final e inicial asociados con la trayectoria L_{k_2}, \dots, L_{k_n} implicaría la existencia de una subsucesión propia que determine un ciclo. Esto es una contradicción. En consecuencia, $e(S) \equiv 0$. ■

3.2. Algoritmo Aritmético: Aplicación en N_{par} -Gonos

En el Capítulo 2 §2.3, en la pág. 104 exhibimos un hamiltoniano no-cíclico Γ'_k , con longitud de recorrido $\mathcal{L}(\Gamma'_k)$ para cada $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$. Estos caminos hamiltonianos Γ'_k son trayectorias de máxima longitud de recorrido de cada Máx. TSP P_k . Las sucesiones Γ'_k y Γ_k , definidas en (3.1) en la pág. 141 y en (3.2) en la pág. 142 respectivamente, y conformadas por un segmento dirigido L_k^- , siendo los restantes los cuasi-diámetros $l_{q,max}^-, l_{q,max}^+$, y el diámetro l_{max} juegan un rol destacado en la resolución de los $\frac{n}{2}$ diferentes Problemas de los Caminos Hamiltonianos Euclidianos de Máxima Longitud de recorrido en las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$ [Niel, B. I. (2005a)]. Precisamente, Γ'_k , $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$ con L_k^- como segmento extraíble, son trayectorias seleccionadas como secuencias representantes de la solución de cada uno de los mencionados problemas (§ 3.3.1).

Capítulo 3. Algoritmo Aritmético

Nota 3.2.1 En las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$ C_H^m simboliza un ciclo cuasi-hamiltoniano euclidiano que pasa una vez por a lo sumo m nodos y es de orden m menor o igual que n en las estructuras de $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$. Mientras que P_H^m denota un camino cuasi-hamiltoniano euclidiano que pasa una vez por a lo sumo m nodos siendo de orden m menor o igual que $n - 1$. Este símbolo $\hat{}$ significa que los segmentos debajo de él serán eliminados de una sucesión conformada por segmentos L_k . En las representaciones gráficas del presente contenido, en las poligonales hamiltonianas cíclicas los segmentos con sentido cw. L_k^- y $l_{q,max}^-$ serán dibujados con líneas punteadas, mientras que para $l_{q,max}^+$ se usan las líneas discontinuas de guiones ortográficos y líneas sólidas continuas para los diámetros l_{max} , e.g. Figura 3.2 y Figura 2.9.

Nota 3.2.2 $L_{k_1} + L_{k_2} + \dots + L_{k_n}$ simboliza la trayectoria determinada por la secuencia $L_{k_1}, L_{k_2}, \dots, L_{k_n}$.

Nota 3.2.3 Si $S : L_{k_1}, L_{k_2}, \dots, L_{k_n}$ es una sucesión de segmentos L_k , $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(L_{k_1} + L_{k_2} + \dots + L_{k_n})$ denota la longitud euclídea asociada al recorrido de la trayectoria S .

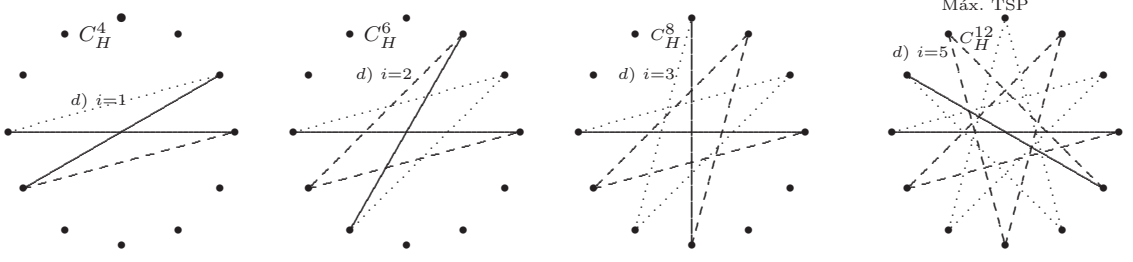
Lema 3.2.4 Las siguientes sucesiones de segmentos L_k determinan C_{C-H}^m , i.e. ciclos cuasi-hamiltonianos euclidianos⁴, en las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$:

- C_H^2 : a) $l_{q,max}^- + l_{q,max}^+$; b) $l_{max} + l_{max}$; c) $l_{q,max}^+ + l_{q,max}^-$.
- C_H^{2i+2} : d) $\underbrace{l_{q,max}^-}_i + l_{max} + \underbrace{l_{q,max}^+}_i + l_{max}$, $1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 2$. (Ver Figura 3.2).
- C_H^{2i+2} : e) $\underbrace{l_{q,max}^+}_j + l_{max} + \underbrace{l_{q,max}^-}_i + l_{max} + \underbrace{l_{q,max}^+}_{i-j}$, $0 \leq j \leq i, 1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.
- C_H^{2i+2} : f) $\underbrace{l_{q,max}^-}_j + l_{max} + \underbrace{l_{q,max}^+}_i + l_{max} + \underbrace{l_{q,max}^-}_{i-j}$, $0 \leq j \leq i, 1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$.

Demostración. Desde la aplicación directa del Teorema 3.1.3 y la aritmética asumida. ■

Una demostración alternativa del siguiente Teorema 3.2.5 se ha presentado en el Apéndice B pág. 110 a la pág. 113 del Capítulo 2, sin embargo la aplicación del algoritmo aritmético, a nuestro entender, ha ganado brevedad y belleza para confirmar la validez del mencionado resultado.

⁴Con C_H^m o $C_{C-H}^m = C_{QH}^m$, en el presente contexto se simboliza a cualquier trayectoria poligonal cíclica que pasa una sola vez por m , $m < n$, de los n vértices de un n -gono regular.


 Figura 3.2: C_H^m s inciso d) del Lema 3.2.4 en la red $\mathcal{N}(K_{12}(\sqrt[12]{1}), (d_{ij})_{12 \times 12})$.

Teorema 3.2.5 Sean las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$ con sus $n = 2p+2$ nodos, V_0, \dots, V_{n-1} , que corresponden a las n -ésimas raíces de la unidad ordenadas en sentido horario a partir del vértice $V_0 = (-1, 0)$. Cada trayectoria Γ'_k , con punto inicial V_k , $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, determinada por la siguiente sucesión de segmentos:

$$\Gamma'_k : \widehat{L}_k^- ; \underbrace{l_{q,max}^-}_{k-1}, l_{max}, \underbrace{l_{q,max}^+}_k, \underbrace{l_{max}, l_{q,max}^+}_{\left(\frac{n}{2}-k-1\right)}, l_{max} \quad (3.1)$$

es un camino hamiltoniano euclídeo de orden $n - 1$ en las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$, i.e. es un P_H^{n-1} con punto final en el vértice V_0 .

Demostración. A partir de la aplicación directa del Teorema 3.1.3 y del Lema 3.2.4.

Puesto que $e(l_{q,max}^-) = \frac{n}{2} - 1$, $e(l_{max}) = \frac{n}{2}$ y $e(l_{q,max}^+) = \frac{n}{2} + 1$, resultan los siguientes enteros asociados para cada una de las subsucesiones propias de la secuencia de segmentos dirigidos de Γ'_k (3.1):

1. $h(\frac{n}{2} - 1) = h\frac{n}{2} - h \neq 0$ para $1 \leq h \leq k - 1 < \frac{n}{2} - 1$
2. $h(\frac{n}{2} - 1) + \frac{n}{2} \neq 0$ para $1 \leq h \leq k - 1 < \frac{n}{2} - 1$
3. $h(\frac{n}{2} - 1) + \frac{n}{2} + i(\frac{n}{2} + 1) = (h + i + 1)\frac{n}{2} + (i - h) \neq 0$ para $0 \leq h \leq k - 1$; $1 \leq i \leq k$
4. $\frac{n}{2} + i(\frac{n}{2} + 1) \neq 0$ para $1 \leq i \leq k$
5. $h(\frac{n}{2} - 1) + \frac{n}{2} + k(\frac{n}{2} + 1) + \frac{n}{2} = (h + k)\frac{n}{2} + n + (k - h) \neq 0$ para $0 \leq h \leq k - 1 < k$
6. $h(\frac{n}{2} - 1) + \frac{n}{2} + k(\frac{n}{2} + 1) + j(n + 1) = (h + k + 1)\frac{n}{2} + jn + (k - h + j) \neq 0$
para $\begin{cases} 0 \leq h \leq k - 1 \\ 1 \leq j \leq \frac{n}{2} - k - 1 \end{cases}$
7. $h(\frac{n}{2} - 1) + \frac{n}{2} + k(\frac{n}{2} + 1) + j(n + 1) + \frac{n}{2} = (h + k + 2)\frac{n}{2} + jn + (k - h + j) \neq 0$ para $\begin{cases} 0 \leq h \leq k - 1 \\ 1 \leq j \leq \frac{n}{2} - k - 1 \end{cases}$ Este inciso computa $e(\Gamma'_k) = n\frac{n}{2} - k \neq 0$ para $h = k - 1$;
 $j = \frac{n}{2} - k - 1$

8. $i(\frac{n}{2} + 1) + j(n + 1) = i\frac{n}{2} + jn + (i + j) \not\equiv 0$ para $0 \leq i \leq k; 1 \leq j \leq \frac{n}{2} - k - 1$

9. $i(\frac{n}{2} + 1) + j(n + 1) + \frac{n}{2} \not\equiv 0$ para $0 \leq i \leq k; 1 \leq j \leq \frac{n}{2} - k - 1$

En consecuencia, los enteros asociados a cada una de las subsucesiones de Γ'_k , incluido $e(\Gamma'_k)$, son no congruentes con 0 (módulo n). Entonces, por el Teorema 3.1.3 Γ'_k es un camino hamiltoniano euclidiano de orden $n - 1$ para cada $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$. ■

Corolario 3.2.6 *Sea Γ_k la trayectoria determinada por la sucesión de n segmentos que surge al adicionarse inicialmente a Γ'_k el segmento dirigido L_k^- (Ver sucesión (3.1)), $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$. Para cada k , la trayectoria Γ_k constituida por la secuencia (3.2) es un ciclo hamiltoniano euclidiano de orden n en las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$ con vértice inicial y final en $V_0 = (-1, 0)$.*

$$\Gamma_k : L_k^-, \underbrace{l_{q,max}^-}_{k-1}, l_{max}, \underbrace{l_{q,max}^+}_k, \underbrace{l_{max}, l_{q,max}^+}_{(\frac{n}{2}-k-1)}, l_{max} \quad (3.2)$$

Demostración. Resulta directamente de la prueba del Teorema 3.1.3 y del Teorema 3.2.5 y desde que $e(\Gamma'_k) = -k$ y $e(L_k^-) = k$ (Ver Figura 2.9). ■

3.2.1. Ciclos hamiltonianos congruentes con Γ_k

Sea $T_k, 1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, el conjunto de los ciclos hamiltonianos euclidianos en las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$, constituidos por un segmento L_k^- (o L_k^+), $(\frac{n}{2} - k + 1)$ diámetros l_{max} , $(\frac{n}{2} + k - 2)$ cuasi-diámetros $l_{q,max}^\pm$ con $(k - 1)$ $l_{q,max}^-$ (o $(k - 1)$ segmentos $l_{q,max}^+$). La trayectoria cíclica Γ_k , construida por la sucesión (3.2), es una trayectoria en T_k y para cada k todas las trayectorias en T_k tienen la misma longitud, $\mathcal{L}(\Gamma_k)$. Estamos interesados en saber cuántas y cómo están ordenadas las trayectorias hamiltonianas T_k . Una vez que respondamos estas preguntas, estaremos en condición de afirmar que la resolución de los $\frac{n}{2}$ diferentes Máx. TSPPs en los vértices de un $2p + 2$ -gono regular en congruencia con las estructuras de $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$ ha sido efectuada, puesto que el Theorem 3.1.4 en [Niel, B. I. (2005a)] muestra que $\mathcal{L}(\Gamma'_k)$ para $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$ es la máxima longitud de recorrido que es insumida por los caminos hamiltonianos euclidianos que comienzan en el vértice V_k y finalizan en V_0 .

Definición 3.2.7 *Dados $T, T' \in T_k$, T es congruente con T' , si $T' = T$, o si T' se obtiene del ciclo hamiltoniano euclidiano T por inversión del sentido de recorrido u orientación, o si T' se obtiene por una rotación de T , o si T' es el resultado de una rotación y una inversión de la orientación del ciclo hamiltoniano T .*

Si las trayectorias hamiltonianas T y T' en T_k son congruentes en el sentido de la definición anterior se simbolizan mediante $T \sim T'$.

Lema 3.2.8 *Dada una sucesión de segmentos L_k en $T_k, 1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$ cuyo último segmento tiene a j como entero asociado, una vez que este segmento dirigido es colocado en el extremo inicial, la nueva secuencia tiene la trayectoria original, pero rotada j vértices en sentido horario.*

Demostración. Sea $L_{k_1}, L_{k_2}, \dots, L_{k_n}$ la sucesión que define al ciclo, sin pérdida de generalidad, se considera la trayectoria construida a partir del vértice inicial V_0 con el segmento iniciador L_{k_1} seguido por el segmento L_{k_2} posicionado en $V_{0+e(L_{k_1})}$ y así siguiendo con los $n - 2$ restantes segmentos en el orden establecido por la secuencia previa.

Si el segmento L_{k_n} con entero asociado j es relocalizado en el primer lugar, los vértices inicial y final del segmento L_{k_1} cambian respectivamente a V_{0+j} y $V_{j+e(L_{k_1})}$, en la nueva sucesión. Después del reordenamiento segmento por segmento de cada uno de los remanentes $n - 1$ segmentos $L_{k_2}, \dots, L_{k_{n-1}}$, la nueva trayectoria corresponde a la original pero cw. rotada en j vértices. ■

Lema 3.2.9 Para n par y $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, las trayectorias que se corresponden con las siguientes sucesiones son las $n - 1$ rotaciones planares asociadas a la sucesión (3.2), es decir a Γ_k :

$$\begin{array}{l}
 1. \quad \Gamma_k : L_k^-; \underbrace{l_{q,max}^-}_{k-1}; l_{max}; \underbrace{l_{q,max}^+}_k; \underbrace{l_{max}, l_{q,max}^+}_{\left(\frac{n}{2}-k-1\right)}; l_{max} \\
 2. \quad l_{max}; L_k^-; \underbrace{l_{q,max}^-}_{k-1}; l_{max}; \underbrace{l_{q,max}^+}_k; \underbrace{l_{max}, l_{q,max}^+}_{\left(\frac{n}{2}-k-1\right)} \\
 \dots \\
 n - k. \quad \underbrace{l_{q,max}^+}_k; \underbrace{l_{max}, l_{q,max}^+}_{\left(\frac{n}{2}-k-1\right)}; l_{max}; L_k^-; \underbrace{l_{q,max}^-}_{k-1}; l_{max} \\
 \dots \\
 n. \quad \underbrace{l_{q,max}^-}_{k-1}; l_{max}; \underbrace{l_{q,max}^+}_k; \underbrace{l_{max}, l_{q,max}^+}_{\left(\frac{n}{2}-k-1\right)}; l_{max}; L_k^-
 \end{array}$$

Demostración. El resultado se obtiene después de $n - 1$ sucesivas aplicaciones del Lema 3.2.8 a la sucesión (3.2), Γ_k . ■

Puesto que cada segmento L_k verifica que $L_k^\pm + L_k^\mp \equiv 0 \Leftrightarrow L_k^\pm; L_k^\mp \in C_H^2$ y $L_k^\pm = -L_k^\mp$. Si L_k^\pm conecta el vértice V_{i0} con el vértice V_{i1} resulta que L_k^\mp une V_{i1} a V_{i0} .

Lema 3.2.10 Dada una sucesión S de m L_k^\pm segmentos, $S : L_{k_1}^\pm, L_{k_2}^\pm, \dots, L_{k_{m-1}}^\pm, L_{k_m}^\pm$ la nueva sucesión $-S : L_{k_m}^\mp, L_{k_{m-1}}^\mp, \dots, L_{k_2}^\mp, L_{k_1}^\mp$ determina la trayectoria orientada en sentido contrario a aquella desplegada por S .

Demostración. Si $L_{k_1}^\pm$ conecta el vértice V_{i0} al vértice V_{i1} , $L_{k_2}^\pm$ une el vértice V_{i1} al vértice V_{i2} y así siguiendo hasta que $L_{k_m}^\pm$ conecte el vértice V_{im-1} al vértice V_{im} , entonces $L_{k_m}^\mp$ conecta el vértice V_{im} a vértice V_{im-1} , $L_{k_{m-1}}^\mp$ conecta el vértice V_{im-1} con el vértice V_{im-2} y así continuando hasta $L_{k_1}^\mp$ quien conecta V_{i1} a V_{i0} . ■

3.3. Cada camino hamiltoniano máximo en un $2p + 2$ -gono regular

Aquí se explicitan cada uno de los caminos hamiltonianos de recorrido máximo en un $2p + 2$ -gono regular, mediante la identificación de sus arreglos secuenciales específicos en el conjunto de trayectorias T_k / \sim . Para $k \neq \frac{n}{2} - 1$ cualquier rotación en el plano o inversión de orientación de Γ_k implica la desaparición de L_k^- del primer lugar en la sucesión o su inversión de signo. En consecuencia, un exámen completo de las trayectorias no-congruentes con Γ_k impone desestimar cualquier reubicación cíclica de los elementos de las secuencias así como también el cambio del signo en cada uno sus segmentos dirigidos. Por lo tanto, sólo se consideran los reordenamientos que mantienen a L_k^- como primer término en las sucesiones para ser integradas a la presente enumeración.

Lema 3.3.1 *Sea $T \in T_k$ tal que $T \not\sim \Gamma_k$. Entonces, existe $T' \in T_k$, con L_k^- como primer segmento dirigido y $T \sim T'$.*

Demostración. Sea $T \in T_k$ y $T \not\sim \Gamma_k$. Si L_k^- es primer segmento dirigido de T , nada que probar. Si T no comienza con L_k^- , entonces $T : L_{s_1}, \dots, L_{s_{j-1}}, L_k^-, L_{s_{j+1}}, \dots, L_{s_n}$. Sea $T' : L_k^-, L_{s_{j+1}}, \dots, L_{s_n}, L_{s_1}, \dots, L_{s_{j-1}}$. Entonces T' es una rotación plana de T i.e. $T' \sim T$ y en consecuencia $T' \not\sim \Gamma_k$. ■

En otras palabras, para determinar todas las trayectorias en T_k que no son ciclos congruentes con Γ_k , es suficiente determinar las trayectorias que comiencen en L_k^- y no resulten ser ciclos hamiltonianos congruentes con Γ_k , (§3.2.1).

Definición 3.3.2 *$S : L_{k_1}, L_{k_2}, L_{k_3}, \dots, L_{k_m}$ y $S' : L'_{k_1}, L'_{k_2}, L'_{k_3}, \dots, L'_{k'_m}$ son llamadas sucesiones “opuestas” si $L_{k_1}, L_{k_2}, L_{k_3}, \dots, L_{k_m} = L'_{k_m}, L'_{k_{m-1}}, \dots, L'_{k_2}, L'_{k_1}$.*

Definición 3.3.3 *Sea $S : L_{k_2}, L_{k_3}, L_{k_4}, \dots, L_{k_n}$ de modo que su sucesión “completa” $L_k^- ; S = L_k^-, L_{k_2}, L_{k_3}, L_{k_4}, \dots, L_{k_n} \in T_k$. Luego, las sucesiones $T_S : L_k^-, L_{k_2}, L_{k_3}, L_{k_4}, \dots, L_{k_n}$ y $T_S^* : L_k^-, L_{k_n}, L_{k_{n-1}}, \dots, L_{k_2}$ se denominan sucesiones “asociadas” con S .*

Lema 3.3.4 *Sean S y S' sucesiones completas $\in T_k$. Entonces, S y S' tienen el mismo par de sucesiones asociadas, si y solo si S y S' son opuestas.*

Demostración. S y S' son sucesiones opuestas $\Leftrightarrow T_S = T_{S'}^*$ y $T_S^* = T_{S'}$. ■

Lema 3.3.5 *Sea $T : L_k^-, L_{k_2}, L_{k_3}, L_{k_4}, \dots, L_{k_n} \in T_k$. Luego, $T' : L_k^-, L_{k_n}, L_{k_{n-1}}, \dots, L_{k_3}, L_{k_2} \in T_k$.*

Demostración. $T \in T_k \Leftrightarrow S : L_{k_2}, L_{k_3}, L_{k_4}, \dots, L_{k_n} \in P_H^{n-1} \Rightarrow S' : L_{k_n}, L_{k_{n-1}}, \dots, L_{k_2} \in P_H^{n-1}$. Además, $e(S') = e(S) = -k$. Por lo tanto, $T' : L_k^-, S' \in T_k$. ■

Lema 3.3.6 *Para $k \neq \frac{n}{2} - 1$ y $T \in T_k$ de modo que $T : L_k^-, L_{k_2}, L_{k_3}, L_{k_4}, \dots, L_{k_n}$ y $T' : L_k^-, L_{k_n}, L_{k_{n-1}}, \dots, L_{k_3}, L_{k_2}$. Entonces $T \sim T'$ si y solo si $S : L_{k_2}, L_{k_3}, L_{k_4}, \dots, L_{k_n}$ es una sucesión palíndromo.*

Demostración. $k \neq \frac{n}{2} - 1 \Rightarrow L_k^- \neq L_{k_i}, 2 \leq i \leq n$. Sea $T \sim T'$. Si $T = T'$ entonces S es una secuencia palíndromo.

Sea $T \neq T'$. Puesto que ambas trayectorias tienen el mismo segmento inicial L_k^- se tiene que $T \neq T' \Leftrightarrow S : L_{k_2}, L_{k_3}, \dots, L_{k_n} \neq S' : L_{k_n}, L_{k_{n-1}}, \dots, L_{k_2}$, i.e. S no es una palíndromo. ■

Corolario 3.3.7 Para $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 2$, si $S : L_{k_2}, L_{k_3}, \dots, L_{k_n}$ no es una palíndromo, y $L_k^-, S \in T_k$, entonces $L_k^-, L_{k_2}, L_{k_3}, \dots, L_{k_n} \not\sim L_k^-, L_{k_n}, L_{k_{n-1}}, \dots, L_{k_3}, L_{k_2}$. ■

Sea (3.3) los segmentos dirigidos preestablecidos:

$$\underbrace{l_{q,\max}^-}_{k-1} \quad \underbrace{l_{q,\max}^+}_{\frac{n}{2}-1} \quad \underbrace{l_{\max}}_{\frac{n}{2}-k+1} \quad (3.3)$$

Lema 3.3.8 Si \mathcal{S} es $l_{\max}; \underbrace{\sqcup l_{q,\max}^-}_{u} \sqcup; l_{\max}; \underbrace{\sqcup l_{q,\max}^+}_{y} \sqcup; l_{\max}$, $u \geq 0, y \geq 0$. Entonces \mathcal{S} no es una subsucesión admisible de cualquier P_H^{n-1} para la asignación de segmentos dirigidos determinada por (3.3) cuando $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 2$.

Demostración. Si $u = 0$ y/o $y = 0$, se engendran uno o dos ciclos elementales $l_{\max}; l_{\max}$, (inciso b) Lema 3.2.4).

Si $u \geq 1, y \geq 1$ y $u \geq y$, se origina el siguiente ciclo C_H^{2+2y} , (inciso d) Lema 3.2.4):

$$l_{\max}; \underbrace{\underbrace{l_{q,\max}^-}_{u-y} \sqcup \underbrace{l_{q,\max}^-}_{y} \sqcup}_{C_H^{2+2y}}; l_{\max}; \underbrace{\underbrace{l_{q,\max}^+}_{y} \sqcup}_{C_H^{2+2y}}; l_{\max}.$$

Si $u \geq 1, y \geq 1$ y $u \leq y$, generan el siguiente ciclo C_H^{2+2u} , (inciso e) con $j = 0$ Lema

$$3.2.4): \underbrace{l_{\max}; \underbrace{\underbrace{l_{q,\max}^-}_{u} \sqcup}_{C_H^{2+2u}}; l_{\max}; \underbrace{\underbrace{l_{q,\max}^+}_{y-u} \sqcup}_{C_H^{2+2u}}}_{C_H^{2+2u}}; l_{\max}. \quad \blacksquare$$

Definición 3.3.9 En el presente contexto un camino hamiltoniano de la asignación (3.3) si llamará “admisibles” si cuando se le adiciona el segmento dirigido L_k^- en primer lugar el ciclo resultante no es congruente, §3.2.1, con ningún ciclo hamiltoniano Γ_k , (3.2).

Teorema 3.3.10 Los $k - 1$ segmentos dirigidos $l_{q,\max}^-$ preestablecidos en (3.3) deben implantarse en el extremo izquierdo y/o en el extremo derecho de cualquier secuencia que determine un camino hamiltoniano admisible P_H^{n-1} constituido por la asignación de segmentos dirigidos dada en (3.3). En consecuencia, desestimando las rotaciones planares, las k sucesiones siguientes (3.4) constituyen todos los caminos hamiltonianos admisibles P_H^{n-1} para cada $k, 1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 2$ engendrados con (3.3) en las estructuras $\mathcal{N} (K_{n=2p+2}(\sqrt[1]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$.

$$\underbrace{l_{q,\max}^-}_i; l_{\max}; \underbrace{l_{q,\max}^+}_{i+1}; \underbrace{l_{\max}, l_{q,\max}^+}_{\frac{n}{2}-k-1}; \underbrace{l_{q,\max}^+}_{k-1-i}; l_{\max}; \underbrace{l_{q,\max}^-}_{k-1-i} \quad 0 \leq i \leq k - 1. \quad (3.4)$$

Capítulo 3. Algoritmo Aritmético

Demostración. El Lema 3.3.8 y el Lema 3.2.4 prueban que los $k - 1$ segmentos dirigidos $l_{q,\max}^-$ preestablecidos en (3.3) deben ser implantado(s) en el extremo izquierdo y/o en el extremo derecho de cualquier camino hamiltoniano admisible P_H^{n-1} construido con la asignación de segmentos dirigidos dada en (3.3).

$$\begin{aligned}
 l) \quad & \underbrace{l_{q,\max}^-}_i ; l_{\max} ; \underbrace{l_{q,\max}^+}_j ; l_{\max} ; \sqcup \cdots \sqcup \quad 0 \leq i < j \quad \therefore \quad j \geq i + 1 \\
 r) \quad & \sqcup \cdots \sqcup ; l_{\max} ; \underbrace{l_{q,\max}^+}_{j'} ; l_{\max} ; \underbrace{l_{q,\max}^-}_{i'} \quad j' > i' \geq 0 \quad \therefore \quad j' \geq i' + 1
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

De manera específica, el Lema 3.3.8 establece que $l)$ es una sucesión en la que ni el segmento l_{\max} ni $l_{q,\max}^+$ pueden adicionarse en su extremo izquierdo. Además, el Lema 3.3.8 establece que $r)$ es una sucesión en la que ningún segmento l_{\max} o $l_{q,\max}^+$ puede anexarse en su extremo derecho. Caso contrario, se originarían los ciclos cuasi-hamiltonianos que se detallaron en el Lema 3.2.4. Luego, cada secuencia admisible en P_H^{n-1} constituida con los segmentos en (3.3) deberá mantener la siguiente forma:

$$\underbrace{l_{q,\max}^-}_i ; l_{\max} ; \underbrace{l_{q,\max}^+}_j ; l_{\max} ; \sqcup \cdots \sqcup ; \underbrace{l_{q,\max}^+}_{j'} ; l_{\max} ; \underbrace{l_{q,\max}^-}_{i'} \quad i + i' = k - 1, \quad i < j, \quad i' < j' \tag{3.6}$$

El número de segmentos l_{\max} remanentes y que deben ser implantados en (3.6) es $\frac{n}{2} - k - 2$. Por otra parte existen $\frac{n}{2} - 1 - (j + j')$ segmentos dirigidos $l_{q,\max}^+$ que deben insertarse en (3.6). Ya que $j + j' \geq k + 1$ se tiene que $\frac{n}{2} - 1 - (j + j') \leq \frac{n}{2} - k - 2$. Si $\frac{n}{2} - 1 - (j + j') < \frac{n}{2} - k - 2$, existe al menos un l_{\max} más que $l_{q,\max}^+$. Por lo que su implantación en (3.6) genera al menos un ciclo elemental del tipo $l_{\max} ; l_{\max}$. Sin embargo, si $\frac{n}{2} - 1 - (j + j') = \frac{n}{2} - k - 2$ existe esta cantidad de $l_{q,\max}^+$ y l_{\max} , siendo $j + j' = k + 1$. Cuyas inserciones en (3.6) como pares $\underbrace{l_{q,\max}^+, l_{\max}}_{\frac{n}{2}-k-2}$ engendran el siguiente camino

cuasi-hamiltoniano euclídeo:

$$\underbrace{l_{q,\max}^-}_i ; l_{\max} ; \underbrace{l_{q,\max}^+}_j ; l_{\max} ; \sqcup \underbrace{l_{q,\max}^+, l_{\max}}_{\frac{n}{2}-k-2} \sqcup ; \underbrace{l_{q,\max}^+}_{j'} ; l_{\max} ; \underbrace{l_{q,\max}^-}_{i'}$$

$$i + i' = k - 1, \quad i < j, \quad i' < j'$$

Desde que $i < j$, $i' < j'$, $i + i' = k - 1$ y $j + j' = k + 1$, se tiene que $j = i + 1$, $i' = k - 1 - i$ y $j' = k - i$. Sus respectivas substituciones en la secuencia previa, junto con las identificaciones de las subsucesiones propias cuasi-hamiltonianas $l_{\max} ; \sqcup \underbrace{l_{q,\max}^+, l_{\max}}_{\frac{n}{2}-k-2} \sqcup ; \underbrace{l_{q,\max}^+}_1 ; \underbrace{l_{q,\max}^+}_{k-i-1}$ y $\underbrace{l_{\max}, l_{q,\max}^+}_{\frac{n}{2}-k-1} ; \underbrace{l_{q,\max}^+}_{k-i-1}$, se generan las k sucesiones

(3.4) con $0 \leq i \leq k - 1$. ■

Teorema 3.3.11 *En las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$, el conjunto cociente de ciclos hamiltonianos euclídeos T_k / \sim tiene k clases de equivalencia con $2n$ caminos en cada una para $1 \leq k < \frac{n}{2} - 1$, y una única clase que posee n trayectorias si $k = \frac{n}{2} - 1$.*

Demostración. A partir del Teorema 3.3.10, para cada k , $1 \leq k < \frac{n}{2} - 1$, existen exactamente k secuencias, conformadas con los $n - 1$ segmentos preestablecidos en (3.3), son P_H^{n-1} :

$$\Gamma'_{k,i} : \underbrace{l_{q,\max}^-}_{i-1}; l_{\max}; \underbrace{l_{q,\max}^+}_i; \underbrace{l_{\max}; l_{q,\max}^+}_{\frac{n}{2}-k-1}; \underbrace{l_{q,\max}^+}_{k-i}; l_{\max}; \underbrace{l_{q,\max}^-}_{k-i} \in P_H^{n-1}, \quad 1 \leq i \leq k \quad (3.7)$$

Además, $e(\Gamma'_{k,i}) = -k$, $1 \leq i \leq k$, entonces

$$\Gamma_{k,i} : L_k^-; \Gamma'_{k,i} = L_k^-; \underbrace{l_{q,\max}^-}_{i-1}; l_{\max}; \underbrace{l_{q,\max}^+}_i; \underbrace{l_{\max}; l_{q,\max}^+}_{\frac{n}{2}-k-1}; \underbrace{l_{q,\max}^+}_{k-i}; l_{\max}; \underbrace{l_{q,\max}^-}_{k-i} \in T_k, \quad 1 \leq i \leq k$$

y $\Gamma_{k,i} \not\sim \Gamma_{k,j}$ si $i \neq j$.

Si $k = 2p$ las sucesiones $\Gamma'_{k,i}$ son opuestas de a pares (Definición 3.3.2), i.e. $\Gamma'_{k,i}$ con $\Gamma'_{k,(k+1-i)}$, $1 \leq i \leq \frac{k}{2}$ y ninguna de ellas es una palíndromo. Luego, por el Lema 3.3.5 y el Corolario 3.3.7, las sucesiones asociadas $T_{\Gamma'_{k,i}}, T_{\Gamma'_{k,i}}^* \in T_k$ y $T_{\Gamma'_{k,i}} \not\sim T_{\Gamma'_{k,i}}^*$, $1 \leq i \leq k$. Por el contrario, los pares de las sucesiones asociadas correspondientes a $\Gamma'_{k,i}$ y $\Gamma'_{k,k+1-i}$ son la misma secuencia (Lema 3.3.4). Con el objetivo de obtener todos los ciclos hamiltonianos vis-à-vis no congruentes en T_k , Entonces, de cada par de sucesiones opuestas una debe ser descartada. La selección de $\Gamma'_{k,1}, \dots, \Gamma'_{k,\frac{k}{2}}$ recoge y exhibe las correspondientes k sucesiones asociadas que resultan ser vis-à-vis no congruentes:

$$\begin{aligned} \Gamma_k \sim \Gamma_{k,k} &= T_{\Gamma'_{k,1}}^* : L_k^-; \underbrace{l_{q,\max}^-}_{k-1}; l_{\max}; \underbrace{l_{q,\max}^+}_k; \underbrace{l_{\max}; l_{q,\max}^+}_{(\frac{n}{2}-k-1)}; l_{\max} \\ T_{\Gamma'_{k,1}} &: L_k^-; l_{\max}; \underbrace{l_{q,\max}^+; l_{\max}}_{(\frac{n}{2}-k-1)}; \underbrace{l_{q,\max}^+}_k; l_{\max}; \underbrace{l_{q,\max}^-}_{k-1} \\ &\dots\dots\dots \\ T_{\Gamma'_{k,\frac{k}{2}}}^* &: L_k^-; \underbrace{l_{q,\max}^-}_{\frac{k}{2}}; l_{\max}; \underbrace{l_{q,\max}^+}_{\frac{k}{2}+1}; \underbrace{l_{\max}; l_{q,\max}^+}_{(\frac{n}{2}-k-1)}; \underbrace{l_{q,\max}^+}_{\frac{k}{2}-1}; l_{\max}; \underbrace{l_{q,\max}^-}_{\frac{k}{2}-1} \\ T_{\Gamma'_{k,\frac{k}{2}}} &: L_k^-; \underbrace{l_{q,\max}^-}_{\frac{k}{2}-1}; l_{\max}; \underbrace{l_{q,\max}^+}_{\frac{k}{2}}; \underbrace{l_{\max}; l_{q,\max}^+}_{(\frac{n}{2}-k-1)}; \underbrace{l_{q,\max}^+}_{\frac{k}{2}}; l_{\max}; \underbrace{l_{q,\max}^-}_{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

Luego, T_k tiene k clases de equivalencia. Los procedimientos en el Lema 3.2.9 y en el Lema 3.2.10 han permitido confirmar que cada clase posee $2n$ trayectorias congruentes.

Mientras que, si k es impar, $k = 2p + 1 \geq 3$, los argumentos previos demuestran que las únicas sucesiones en P_H^{n-1} construidas por las asignaciones dadas en (3.3) son las k sucesiones $\Gamma'_{k,i}$, (3.7). Aunque, en este caso $\Gamma'_{k,\frac{k+1}{2}}$ es una palíndromo y las restantes $k - 1$ son opuestas por pares. Concretamente, $\Gamma'_{k,1}$ con $\Gamma'_{k,k}$, $\Gamma'_{k,2}$ con $\Gamma'_{k,(k-1)}$ y así continuando

hasta $\Gamma'_{k, \frac{k-1}{2}}$ con $\Gamma'_{k, \frac{k+3}{2}}$. De manera análoga a los casos con k par, $\Gamma'_{k, \frac{k+3}{2}}, \dots, \Gamma'_{k, (k-1)}$ y $\Gamma'_{k, k}$ son descartadas. Cada una de las $\frac{k-1}{2}$ secuencias restantes admiten dos sucesiones asociadas (ciclos) $T_{\Gamma'_{k, i}}^*, T_{\Gamma'_{k, i}}$, $1 \leq i \leq \frac{k-1}{2}$. Como $\Gamma'_{k, \frac{k+1}{2}}$ es una palíndromo, verifica $T_{\Gamma'_{k, \frac{k+1}{2}}}^* = T_{\Gamma'_{k, \frac{k+1}{2}}}$.

En consecuencia, las siguientes secuencias k cíclicas $T_{\Gamma'_{k, 1}}^* = \Gamma_{k, k} \sim \Gamma_k, T_{\Gamma'_{k, 1}}, \dots, T_{\Gamma'_{k, \frac{k-1}{2}}}^*, T_{\Gamma'_{k, \frac{k-1}{2}}}$ y $T_{\Gamma'_{k, \frac{k+1}{2}}}^* = T_{\Gamma'_{k, \frac{k+1}{2}}}$ son vis-à-vis no congruentes.

Finalmente, si $k = \frac{n}{2} - 1$, el Lema 3.3.6 no es aplicable puesto que $L_k^- = l_{q, \max}^-$. El Teorema 3.2.5 y su its Corolario 3.2.6 establece $\Gamma'_{\frac{n}{2}-1} : \widehat{l_{q, \max}^-}; \underbrace{l_{q, \max}^-}_{\frac{n}{2}-2}, l_{\max}, \underbrace{l_{q, \max}^+}_{\frac{n}{2}-1}, l_{\max}$ y

$\Gamma_{\frac{n}{2}-1} : l_{q, \max}^-, \Gamma'_{\frac{n}{2}-1}$. De manera específica, $\Gamma_{\frac{n}{2}-1}$ y su respectiva sucesión de orientación revertida se obtienen del Lema 3.2.4 por la sustitución de $j = i = \frac{n}{2} - 1$ en los incisos f) y e). En general, las n rotaciones -Lema 3.2.4 inciso f) $i = \frac{n}{2} - 1, 0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$ y el inciso e) $i = \frac{n}{2} - 1, 0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$ - generan n reordenamientos posibles de los $\frac{n}{2} - 1$ segmentos dirigidos $l_{q, \max}^-$, los dos diámetros l_{\max} y los $\frac{n}{2} - 1$ segmentos $l_{q, \max}^+$. Cabe destacar, que los cambios de orientación están incluidos en estos n reordenamientos.

En conclusión, si $k = \frac{n}{2} - 1$, el conjunto cociente de trayectorias hamiltonianas euclídeas T_k / \sim tiene una única clase con n elementos. ■

Corolario 3.3.12 *El Máx. TSP en las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$, i.e. $\mathcal{L}(\Gamma_{\frac{n}{2}-1})$, desestimando las rotaciones planares, es único.*

Demostración. Directamente del último párrafo del Teorema 3.3.11. ■

3.3.1. Longitudes de la ineficiencia en vértices de $2p + 2$ -gonos

En las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$, en [Niel, B. I. (2005a)], Theorem 3.1.4 y Theorem 3.1.5 afirman que:

“... the traversed length of the trajectory $\Gamma'_k, \mathcal{L}(\Gamma'_k)$, $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, is the Máx. of the non-cyclic Euclidean Hamiltonian Path Problem of order $n - 1$, with initial and final ends at V_k and V_0 ” ... and “the maxima of the Euclidean Hamiltonian Cyclic Problems of order $n = 2p + 2$, correspond to $\mathcal{L}(\Gamma_{\frac{n}{2}-1})$.”

De los Teoremas 3.1.2 en §3.1 y 3.3.11 en §3.3 resulta el siguiente Corolario:

Corolario 3.3.13 *En las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$ para cada $k, 1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 2$, las secuencias $\widehat{L}_k^-, \Gamma'_{k, i}$, $1 \leq i \leq k$ son caminos hamiltonianos euclídeos, que comienzan y finalizan en los vértices V_k y V_0 , respectivamente.*

Puesto que $\mathcal{L}(\Gamma'_k) = \mathcal{L}(\Gamma'_{k, i}) = \mathcal{L}(\widehat{L}_k^-, \Gamma'_{k, i})$ para cada $1 \leq i \leq k$, las sucesiones $\widehat{L}_k^-, \Gamma'_{k, i}$ son el espectro completo de los Caminos Hamiltonianos de Longitud de Recorrido Máxima para cada uno de los $\frac{n}{2} - 2$ problemas diferentes -si $\widehat{L}_k^-, 1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 2$ - sobre

los vértices de un $2p + 2$ -gono regular directamente asociable a la arquitectura de la red $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$.

Demostración.

Para cada k , $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 2$, este resultado surge directamente de la ecuación (3.7) del Teorema 3.3.11, de las longitudes máximas determinadas en [Niel, B. I. (2005a)]. ■

$\Gamma_{\frac{n}{2}-1}$ y sus $n - 1$ ciclos congruentes (Referidos al Lema 3.2.4 y al Teorema 3.3.11) tienen la longitud de recorrido $\mathcal{L}(\Gamma_{\frac{n}{2}-1})$. Concretamente, estas trayectorias resuelven el problema del Máx. TSP en las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$, es decir son los ciclos hamiltonianos de máxima longitud de recorrido asociados a los vértices de un $2p + 2$ -gono regular [Niel, B. I. (2005a)]. Además, los hamiltonianos no cíclicos de máxima longitud de recorrido realizan $\mathcal{L}(\Gamma'_{\frac{n}{2}-1})$ igual a $\mathcal{L}(\Gamma_{\frac{n}{2}-1}) - \mathcal{L}(l_{\max})$ están determinados de los ciclos más largos en las estructuras $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$.

Teorema 3.3.14 *En las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$ existen $\frac{n}{2} - 1$ caminos hamiltonianos euclídeos $\widehat{l_{q,\max}^-}$; $\underbrace{l_{q,\max}^-}_{j-1} + l_{\max} + \underbrace{l_{q,\max}^+}_{\frac{n}{2}-1} + l_{\max} + \underbrace{l_{q,\max}^-}_{\frac{n}{2}-1-j}$, con $1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$ que comienzan en $V_{\frac{n}{2}-1}$ y finalizan en $V_0 = (-1, 0)$ con una longitud de recorrido $\mathcal{L}(\Gamma'_{\frac{n}{2}-1})$.*

Demostración. A partir del Lema 3.2.4 inciso f) con $i = \frac{n}{2} - 1$ y para $1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$ una vez que su primer segmento dirigido $l_{q,\max}^-$ sea extraído. ■

Teorema 3.3.15 *En las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$ existen dos caminos hamiltonianos $\widehat{l_{\max}^-}$; $\underbrace{l_{q,\max}^-}_{\frac{n}{2}-1} + l_{\max} + \underbrace{l_{q,\max}^+}_{\frac{n}{2}-1}$ y $\widehat{l_{\max}^+}$; $\underbrace{l_{q,\max}^+}_{\frac{n}{2}-1} + l_{\max} + \underbrace{l_{q,\max}^-}_{\frac{n}{2}-1} + l_{\max}$, que se inician en $V_{\frac{n}{2}} = (1, 0)$ y finalizan en $V_0 = (-1, 0)$ con longitud total de recorrido $\mathcal{L}(\Gamma_{\frac{n}{2}-1}) - L(l_{\max})$.*

Demostración. Desde el Lema 3.2.4 incisos e) y f) con $j = 0$, $i = \frac{n}{2} - 1$ y luego de extraerse el primer diámetro l_{\max} . ■

3.3.2. Apéndice E: Procedimiento constructivo alternativo

En esta subsección se presenta un procedimiento alternativo para la construcción de las secuencias Γ'_k , para $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 2$ a partir de $\Gamma'_{\frac{n}{2}-1}$. Utilizando la metodología propuesta en la §3.0.2, se genera una sucesión representante para cada uno de los caminos hamiltonianos de orden $n - 1$ de longitud de recorrido máxima en las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D)$ conformados por un único segmento L_k^- , con $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, $(k - 1)$ segmentos dirigidos $l_{q,\max}^-$, $(\frac{n}{2} - 1)$ segmentos $l_{q,\max}^+$ y por $\frac{n}{2} - k + 1$ diámetros.

El Teorema 3.1.3 y el Lema 3.2.4 garantizan el siguiente proceso de levantamientos e implantes de segmentos dirigidos cuya reiteración en los levantamientos de los segmentos $l_{q,\max}^-$ y $l_{q,\max}^+$ es iniciada en $--$; $\widehat{l_{q,\max}^-}$; $\underbrace{l_{q,\max}^-}_{\frac{n}{2}-3}$; l_{\max} ; $\widehat{l_{q,\max}^+}$; $\underbrace{l_{q,\max}^+}_{\frac{n}{2}-2}$; l_{\max} , es decir desde

Capítulo 3. Algoritmo Aritmético

$\Gamma'_{\frac{n}{2}-1}$ y son simbolizados por $\widehat{\Gamma'_{\frac{n}{2}-1}}$. A la acción de levantar o extraer es consecutiva la de insertar o implantar un l_{\max} y la relocalización de un $l_{q,\max}^+$. Procedimientos que paso a paso generan las secuencias de los Γ'_k desde $k = \frac{n}{2} - 2$ a $k = 1$, como hamiltonianos euclidianos de orden $n - 1$ en las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}({}^{2p+2}\sqrt{1}), D)$.

Mediante el siguiente diagrama de flujo representamos como se reconstruyen los óptimos objeto de estudio del capítulo.

I) Sea $i = 1$

II)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{--- } \underbrace{l_{q,\max}^-}_{\frac{n}{2}-2-i} ; l_{\max} ; \underbrace{l_{q,\max}^+}_{\frac{n}{2}-1-i} ; l_{\max} ; \underbrace{l_{q,\max}^+ ; l_{\max}}_{i-1} \text{ ---} \\ \widehat{\Gamma'_{\frac{n}{2}-i=k+1}} \quad 1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 2 \in P_{C-H}^{n-3} \\ \text{--- } \underbrace{l_{q,\max}^-}_{\frac{n}{2}-2-i} ; l_{\max} ; \underbrace{l_{q,\max}^+}_{\frac{n}{2}-1-i} ; l_{\max} ; \underbrace{l_{q,\max}^+ ; l_{\max}}_i \text{ ---} \\ 1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 2 \in P_H^{n-1}, \quad i.e. \quad \Gamma'_{\frac{n}{2}-1-i=k}. \end{array} \right.$$

III) Hacer $i = i + 1$, si $i \leq \frac{n}{2} - 2$ ir a II), caso contrario, finalizar. ■

3.3.3. Conclusiones

Este trabajo está concatenado a los resultados obtenidos en [Niel, B. I. (2005a)] respecto a las longitudes de recorrido de los hamiltonianos más ineficientes asociables a los vértices de un $2p + 2$ -gono regular. El aporte distintivo del capítulo consiste en la identificación y por lo tanto la enumeración, salvo congruencia, de todos los hamiltonianos euclidianos no cíclicos que resuelven los $\frac{n}{2}$ diferentes Máx. TSPPs. Entre las contribuciones auxiliares se confirma la unicidad salvo rotaciones y cambio del sentido de recorrido del ciclo que realiza el recorrido más ineficiente en las estructuras $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}({}^{2p+2}\sqrt{1}), D)$, i.e. $\mathcal{L}(\Gamma'_{\frac{n}{2}-1})$. Destacamos que el algoritmo propuesto de fundamentos geométricos y carácter aritmético e inherente a los vértices de los n -gonos regulares permite capturar los caminos y ciclos hamiltonianos euclidianos de manera independiente de la paridad o imparidad del número de vértices, [Niel, B. I., Reartes, W. A. and Brignole, N. B. (2010)]. Este aspecto será evidenciado en la siguiente aplicación del algoritmo propuesto §3.4. Concretamente, serán identificados cada uno de los hamiltonianos euclídeos no cíclicos más ineficientes en las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+1}(e^{\pi i \cdot 2p+1}\sqrt{1}), (d_{ij})_{n \times n})$.

3.4. Algoritmo Aritmético en N_{impar} -Gonos

Los hamiltonianos euclidianos más largos en los vértices de los N_{impar} -Gonos regulares se caracterizan e identifican utilizando los fundamentos del algoritmo aritmético en §3.1. Se explicitan las poligonales hamiltonianas euclídeas que solucionan los $\lfloor \frac{n_{impar}}{2} \rfloor$ diferentes problemas de máxima longitud de recorrido en las arquitecturas de las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+1}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ asociables a los vértices de un $2p + 1$ -gono regular, [Niel, B. I., Reartes, W. A. and Brignole, N. B. (2010)]. La enumeración y captura de estas trayectorias óptimas se lleva a cabo eliminando la redundancia de las rotaciones y el cambio de orientación, de manera análoga a lo realizado en la §3.2 y §3.2.1. El objetivo exige en primer término determinar las composiciones de segmentos dirigidos que integran las longitudes óptimas y en segundo término los ordenamientos que engendran caminos hamiltonianos de orden $n - 1$. Además, se introduce, el concepto de “índice de rotación” de las trayectorias cíclicas hamiltonianas que aporta un enfoque complementario en la caracterización de las poligonales bajo estudio [Niel, B. I. (2013)].

Luego de adaptar la notación a los vértices de un N_{impar} -Gono regular para utilizar las proposiciones fundamentales del Algoritmo Aritmético (Ver §3.1 139) se lo aplica en el Ejemplo 3.4.36 de la pág. 163 exhibiendo los cálculos que naturalmente se reiteran al aparecer en subsucesiones constitutivas de las configuraciones óptimas y sub-óptimas de los problemas aquí estudiados. Además, en los Ejemplos 3.4.29, 3.4.30, 3.4.31 y 3.4.35 se usa el algoritmo para determinar el Índice de Rotación de hamiltonianos y cuasi-hamiltonianos. En la sección §3.5 se resuelven los Problemas de los Hamiltonianos de mayor longitud en N_{impar} -Gonos; a tal fin se explicitan las longitudes de los caminos relevantes §3.5.1, la distribución de los segmentos dirigidos para que exista la posibilidad de realizar dichas longitudes de recorridos §3.5.2 y los ordenamientos que determinan hamiltonianos; para la posterior afirmación §3.6 de que salvo las congruencias análogas a la definidas para los problemas del mismo tipo en las estructuras con número par de vértices, se tenga en cuenta que se ha efectuado la enumeración de cada configuración óptima para cada uno de los $\lfloor \frac{n_{impar}}{2} \rfloor$ diferentes Max. TSPPs en las redes aquí consideradas [Barvinok, A. I., Gimadi, E. Kh. and Serdyukov, A. I. (2002), Niel, B. I. (2012b)]. Finalmente, retomamos el enfoque de los modelos variacionales del Capítulo 1 y del Capítulo 2 para obtener los hamiltonianos reflexivos en arquitecturas de las redes $\mathcal{N}(K_{N=2n_{impar}}(e^{i\pi} \sqrt[n_{impar}]{1}, r e^{i\pi} \sqrt[n_{impar}]{1}), d_{N \times N}^E)$.

Es importante distinguir que el contenido de esta segunda aplicación del procedimiento algorítmico propuesto se concentra en la resolución de los $\lfloor \frac{n_{impar}}{2} \rfloor$ diferentes Maximum Traveling Salesman Path Problems de orden $n_{impar} - 1$, con punto inicial en $V_0 = (-1, 0)$ y final en V_k para $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (Ver Figura 3.3), en las estructuras $\mathcal{N}(K_{n=n_{impar}}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$, mientras que en la §2.5 del Capítulo 2 se ha exhibido un representante de los hamiltonianos óptimos que resuelve cada uno de los problemas, i.e. aquí identificamos, salvo congruencias, todos los reordenamientos que solucionan cada uno de los casos.

A continuación se presentan los resultados obtenidos de diversas aplicaciones del Al-

Capítulo 3. Algoritmo Aritmético

goritmo Aritmético, (Capítulo 3 y §3.1), en las redes euclídeas completamente conectadas sobre los vértices de n_{impar} -gonos regulares.

Aquí se trabaja con los $n = 2p + 1$ vértices del n -gono regular que se han asociado a los puntos V_0, \dots, V_{n-1} del conjunto $e^{\pi i} \sqrt[n]{1}$, enumerados en sentido horario por los enteros módulo n , \mathbb{Z}_n , a partir del vértice $V_0 = (-1, 0)$. Para cada k en $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y cada $j \in \mathbb{Z}_n$, $L_{k,j}^-$ denota el segmento que conecta V_j con V_{j+k} , mientras que $L_{k,j}^+$ denota aquél que conecta V_j a $V_{j+(n-k)} = V_{j-k}$. De aquí en más, L_k^- y L_k^+ denotan, respectivamente, a $L_{k,0}^-$ y $L_{k,0}^+$. $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-$ and $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+$ designan los cuasi-diámetros si n es impar.

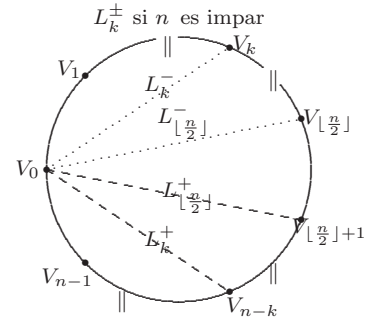


Figura 3.3: L_k^\mp en vértices de un N_{impar} -Gono

Si P_n simboliza el n -gono regular inscrito en la circunferencia unitaria y con sus vértices en V_0, \dots, V_{n-1} , según la figura anterior, P_n puede ser considerado como la poligonal de segmentos $L_{1,0}^-, L_{1,1}^-, \dots, L_{1,n-1}^-$ [Kirillov, A. (1999)]. Por ejemplo, a partir de la interpretación vectorial de los segmentos $L_{k,j}^\pm$, es interesante notar que $L_{1,j}^+ = -L_{1,j-1}^-$. Además, $L_{k,j}^-$ puede ser interpretado como la resultante de la poligonal de k lados de P_n , que une en sentido horario el vértice V_j al V_{j+k} , mientras que por otra parte $L_{k,j}^+$ es la resultante de la poligonal de $n - k$ lados que conecta cw. V_j con el vértice $V_{j-k} \equiv V_{j+n-k}$. Los segmentos $L_{k,j}^-$ y $L_{k,j}^+$ son las respectivas cuerdas (o resultantes) de las poligonales $sn + k$ y $rn + n - k$ lados consecutivos de P_n originadas en el vértice V_j , cualesquiera sean los enteros s y r . Por lo tanto, es natural asociar $L_{k,j}^-$ con el entero $e(L_{k,j}^-) = k$, $k \in \mathbb{Z}_n$, así como también $L_{k,j}^+$ con el entero $e(L_{k,j}^+) = n - k \equiv -k$ (módulo n).

Definición 3.4.1 Para cualquier entero n , L es un “segmento L_k ” si para algún k tal que $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, y para algún $j \in \mathbb{Z}_n$, es $L = L_{k,j}^-$ o $L = L_{k,j}^+$.

Definición 3.4.2 Si L es un segmento L_k , “el entero asociado a L ”, denotado por $e(L)$, se define como:

$$e(L) = \begin{cases} k & \text{si } L = L_{k,j}^- \\ n - k \equiv -k \text{ (módulo } n) & \text{si } L = L_{k,j}^+ \end{cases}$$

Definición 3.4.3 Si $S = \{L_1, \dots, L_j\}$ es una sucesión de segmentos L_k , “el entero asociado al camino o trayectoria construida por la secuencia S ”, que se denota como $e(S)$,

$$e(S) = \sum_{i=1}^j e(L_i) \text{ (módulo } n).$$

Es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos:

- La ubicación consecutiva de uno, dos o más segmentos L_k a partir de un vértice V_i arbitrario de P_n determina el vértice que corresponde a colocar, en sentido cw.,

comenzando en V_i , tantos lados de P_n como lo indique el número correspondiente a la suma de los enteros asociados a cada uno de los segmentos L_k ubicados. En otras palabras, la resultante de una poligonal construida por uno o más segmentos L_k , $S = \{L_{k_1}, L_{k_2}, \dots, L_{k_j}\}$, es otro segmento L_k cuyo entero asociado es la suma (módulo n) de los enteros asociados a las componentes de la poligonal: $e(S) = \sum_{i=1}^j e(L_i)$ (módulo n).

- El concepto de entero asociado $e(L_k)$ y su adición módulo n , despliega el siguiente correlato geométrico sobre los vértices $\{V_0 = (-1, 0), \dots, V_{n-1}\}$: Para cada i , $0 \leq i \leq n-1$, el lugar geométrico que corresponde al vértice V_i coincide con el lugar que corresponde a V_{i+sn} , para cada entero s . Puesto que los segmentos $L_{k,0}^-$ y $L_{k,0}^+$ respectivamente conectan los vértices V_0 a V_k y V_0 con $V_{-k} \equiv V_{n-k}$, resulta claro que para cualquier entero k entre 0 y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, los vértices V_k y V_{-k} son simétricos con respecto al eje horizontal.

Observación 3.4.4 *El ángulo central que determina un segmento L_k en la circunferencia unitaria es: $e(L_k) \frac{2\pi}{n}$, es decir*

$$\angle(L_k) = \begin{cases} k \frac{2\pi}{n} & \text{si } L_k = L_k^- \\ (n-k) \frac{2\pi}{n} & \text{si } L_k = L_k^+ \end{cases} \quad 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Ejemplo 3.4.5 *Segmentos L_k con vértices en las n_{impar} raíces de la unidad $\{V_0 = (-1, 0), \dots, V_{n-1}\}$ y sus respectivos avances angulares.*

1. $\angle(L_1^-) = \frac{2\pi}{n}$
2. $\angle(L_1^+) = (n-1) \frac{2\pi}{n}$
3. $\angle(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+) = (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) \frac{2\pi}{n_{\text{impar}}} = \pi \left(\frac{n_{\text{impar}} + 1}{n_{\text{impar}}} \right)$

Es clara entonces la validez de la siguiente proposición.

Proposición 3.4.6 *Si $S = \{L_{k_1}, L_{k_2}, \dots, L_{k_j}\}$ es una sucesión de L_k segmentos, a la poligonal que se construye colocando el primer segmento L_{k_1} a partir de V_0 , el segundo L_{k_2} a partir del vértice $V_{0+e(L_{k_1})}$, y así siguiendo con los restantes L_{k_i} con $3 \leq i \leq j$, le*

corresponde un desplazamiento angular de $\sum_{i=1}^j e(L_i) \frac{2\pi}{n} = e(S) \frac{2\pi}{n}$.

Observación 3.4.7 *En todos los casos los segmentos L_k de una sucesión $S = \{L_{k_1}, L_{k_2}, \dots, L_{k_j}\}$, se colocan uno a continuación del otro considerando los ángulos correspondientes siempre con sentido cw.*

Corolario 3.4.8 *Una sucesión $S = \{L_{k_1}, L_{k_2}, \dots, L_{k_j}\}$, con $2 \leq j \leq n$ de L_k segmentos determina una poligonal cerrada (ciclo hamiltoniano o no) si y solo si $e(S) \equiv 0$ (módulo n).*

Capítulo 3. Algoritmo Aritmético

Demostración. La poligonal es cerrada si y solo si $e(S) \frac{2\pi}{n}$ es múltiplo entero de 2π , por lo tanto si y solo si n divide a $e(S)$, i.e. si y solo si $e(S) \equiv 0$ (módulo n). ■

En adelante se consideran solo ciclos o cuasi-ciclos hamiltonianos en las estructuras de las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+1}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$, sin embargo varios de los resultados que siguen mantienen su validez para ciclos no hamiltonianos.

Teorema 3.4.9 *Si $S = \{L_{k_1}, L_{k_2}, \dots, L_{k_n}\}$ es una sucesión de n segmentos L_k que determinan un ciclo \mathcal{C} en $\mathcal{N}(K_{n=2p+1}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$, entonces existe un único entero $z(\mathcal{C})$, $1 \leq z(\mathcal{C}) \leq n - 1$, tal que $e(S) = \sum_{i=1}^n e(L_i) = z(\mathcal{C})n \equiv 0$ (módulo n).*

Demostración. $1 \leq e(L_{k_i}) \leq n - 1$, $1 \leq i \leq n$, luego $n \leq \sum_{i=1}^n e(L_{k_i}) \leq n(n - 1) \Leftrightarrow$
 $1 \leq \frac{\sum_{i=1}^n e(L_{k_i})}{n} \leq n - 1.$

Pero \mathcal{C} es ciclo y en consecuencia $\sum_{i=1}^n e(L_{k_i}) \equiv 0$ (módulo n) \Leftrightarrow dicha sumatoria es múltiplo de n . Por lo tanto $z(\mathcal{C}) = \frac{\sum_{i=1}^n e(L_{k_i})}{n}$ es el entero buscado. ■

Definición 3.4.10 *Dado un ciclo \mathcal{C} en $\mathcal{N}(K_{n=2p+1}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$, el entero $z(\mathcal{C})$ se llama el índice del ciclo \mathcal{C} , y describe el número de vueltas o giros del ciclo alrededor del origen.*

Observación 3.4.11 *El Teorema 3.4.9 afirma, en particular, que el máximo índice para un ciclo hamiltoniano euclídeo con vértices en un n -gono regular es $n - 1$.*

Por definición de $e(L_k)$ es $e(L_k)$ menor o igual que $n - 1$ y solo $e(L_1^+) = n - 1$. Nótese que la poligonal euclídea cíclica nL_1^+ tiene como avance angular total $\sum_1^n e(L_1^+) \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n} (n - 1)n$, y significa que el número de vueltas ι_R , en sentido cw., alrededor del centro del n -gono regular es $(n - 1) \equiv -1$. Esta congruencia significa que el hecho que este ciclo hamiltoniano describa $n - 1$ giros o vueltas cw. equivale a que describa un giro ccw., (Ver Figura 3.8).

Las siguientes consideraciones contribuirán a una mejor comprensión del sentido de la observación anterior y de las definiciones y ejemplos a posteriori.

Dada la sucesión $S = \{L_{k_1}, L_{k_2}, \dots, L_{k_n}\}$ se interpreta que el segmento L_{k_i} indica el camino de la i -ésima etapa que recorre el viajero, para quien, desde el punto de vista de la distancia recorrida, es indiferente que en cada caso se trate de un L_k^- o de un L_k^+ . Pero a fin de estudiar, prescindiendo de la longitud, otras características de la trayectoria, como ser el número de vueltas alrededor del origen (índice de la trayectoria) o el sentido de

rotación (orientación) cobra relevancia la diferencia entre L_k^+ y L_k^- , que es simplemente el desplazamiento angular asignado a cada uno de ellos.

Dado que el desplazamiento angular cw. significa un desplazamiento cw. sobre la circunferencia unitaria, para tener una nueva visión gráfica de una sucesión S que determina un ciclo, imaginemos otro caminante, un caminante secundario que se comporta de manera diferente al primero respecto al ciclo que determina S . El primero sabemos que recorre los segmentos que forman el ciclo, en cambio el secundario no transita sobre cada segmento sino que camina sobre el arco de la circunferencia unitaria que corresponde a cada uno de los segmentos del ciclo. Por ejemplo, si consideramos la sucesión $S = \{n L_1^+\}$ del segundo caso en el Ejemplo 3.4.12, el primer segmento L_1^+ une el vértice V_0 con el V_{n-1} y nuestro caminante secundario recorre el arco cw. de longitud $(n-1) \frac{2\pi}{n}$ que une dichos vértices, el segundo segmento une V_{n-1} con el V_{n-2} y ahora el caminante secundario transita el arco, de la misma longitud, que une tales vértices. Así siguiendo, el último segmento de la sucesión une V_1 con el V_0 y al recorrer el arco correspondiente nuestro caminante secundario ha transitado $(n-1)$ giros completos sobre la circunferencia unitaria. Téngase en cuenta que en \mathbb{Z}_n es $(n-1) \equiv -1$ (módulo n).

Observemos que al colocar uno a uno los n segmentos L_1^+ el caminante original - que camina sobre los segmentos del ciclo- recorre el ciclo que define S en sentido ccw. opuesto al sentido cw. con que el mismo caminante transita el ciclo que define la sucesión $S_1 = \{n L_1^-\}$ (que como figura geométrica coincide con la que describe S). Por otra parte, en el caso de S_1 , el caminante secundario completa sólo una vuelta sobre la circunferencia unitaria.

Resulta sugestivo que en \mathbb{Z}_n al caminante secundario le corresponda 1 cuando recorre el ciclo que define S_1 y -1 para el ciclo que define S .

Estos hechos y las propiedades que se demuestran seguidamente conducen a las definiciones y caracterizaciones de más adelante referidas al índice y orientación de un ciclo.

Ejemplo 3.4.12 *En referencia al primer y segundo casos exhibidos en Ejemplo 3.4.5 en la pág. 153 resulta claro que:*

1. $S_1 = \underbrace{\{L_1^-, \dots, L_1^-\}}_n$. En este caso \mathcal{C}_1 es el polígono regular P_n con vértices en las n -ésimas raíces de la unidad recorrido en sentido cw. y como $\sum_{i=1}^n e(L_1^-) = n \therefore z(\mathcal{C}_1) = 1$. (Ver e.g. en la Figura 3.8 pág.161, izq.)
2. $S_2 = \underbrace{\{L_1^+, \dots, L_1^+\}}_n$. Aquí, en cambio $z(\mathcal{C}_2) = \frac{\sum_{i=1}^n e(L_1^+)}{n} = n-1 \equiv -1$ (módulo n). Tomando en cuenta que la amplitud del desplazamiento angular de cada lado L_1^+ es $(n-1) \frac{2\pi}{n}$, resulta que para colocar los n segmentos consecutivamente se deben efectuar $n-1$ giros completos alrededor del origen y claramente los lados de P_n se van ubicando en sentido contrario a los correspondientes del inciso anterior. (Ver

Capítulo 3. Algoritmo Aritmético

e.g. en la Figura 3.8 pág. 161, der.) En otras palabras, la congruencia $n - 1 \equiv -1$ (módulo n) significa que el hecho que este ciclo describa $n - 1$ giros o vueltas cw. equivale a que describa un giro ccw.

Es decir, $\underbrace{\{L_1^-, \dots, L_1^-\}}_n$ y $\underbrace{\{L_1^+, \dots, L_1^+\}}_n$ determinan ciclos que ocupan el mismo lugar geométrico, pero tienen sentidos de recorrido opuestos, el primero es cw. y el segundo ccw. Es importante destacar que el índice del primer ciclo es $z(\mathcal{C}_1) = 1$ y el que corresponde al segundo ciclo es $z(\mathcal{C}_2) = n - 1 \equiv -1$ (módulo n), i.e. $z(\mathcal{C}_2) \equiv -z(\mathcal{C}_1)$ (módulo n) y además que $1 \leq z(\mathcal{C}_1) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < z(\mathcal{C}_2) \leq n - 1$.

Ejemplo 3.4.13 *Poligonales estrellas de máxima densidad en los vértices de un $(2p+1)$ -gono regular.*

1. $S_3 = \underbrace{\{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-, \dots, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-\}}_n$. En las redes $\mathcal{N}(K_{n=2p+1}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ define un \mathcal{C}_3 hamiltoniano. Su índice es $z(\mathcal{C}_3) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
2. $S_4 = \underbrace{\{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+, \dots, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+\}}_n$. (Ver e.g. en la Figura 3.9 pág.161, derecha). En este caso $z(\mathcal{C}_4) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Las poligonales estrellas de máxima densidad de los ciclos hamiltonianos \mathcal{C}_3 y \mathcal{C}_4 , definidas respectivamente por la secuencia de segmentos dirigidos S_3 y S_4 conforman figuras geométricas regulares coincidentes en su forma, [Coxeter, H. S. M. (1963)]. Resulta sencillo verificar que los segmentos lineales en la primera trayectoria se orientan en el sentido cw. mientras que los de la segunda lo hacen en el sentido contrario, i.e. ccw.

Nótese que, los índices $z(\mathcal{C}_3)$ y $z(\mathcal{C}_4)$ verifican también que $1 \leq z(\mathcal{C}_3) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < z(\mathcal{C}_4) \leq n - 1$. Por otra parte, $z(\mathcal{C}_4) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \equiv -\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (módulo n), i.e. $z(\mathcal{C}_4) = -z(\mathcal{C}_3)$ (módulo n).

Nota 3.4.14 *Existen ciclos hamiltonianos y cuasi-hamiltonianos en las estructuras de las redes $\mathcal{N}(K_n(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ para los cuales resulta dificultoso, e incluso imposible, decidir si se trata de un ciclo cw. o ccw. En la sección §3.4.1 ejemplificaremos por casos.*

El Teorema siguiente provee argumentos para poder discriminar objetivamente los sentidos de giro cw. y ccw. en la mayoría de los ciclos en consideración.

Teorema 3.4.15 *Si $S = \{L_{k_1}^\mp, L_{k_2}^\mp, \dots, L_{k_{m-1}}^\mp, L_{k_m}^\mp\}$ en $\mathcal{N}(K_{n=2p+1}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ determina un ciclo \mathcal{C} tal que $1 \leq z(\mathcal{C}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces el ciclo opuesto $\bar{\mathcal{C}}$ determinado por $\bar{S} : \{L_{k_n}^\pm, L_{k_{m-1}}^\pm, \dots, L_{k_2}^\pm, L_{k_1}^\pm\}$ verifica que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < z(\bar{\mathcal{C}}) \leq n - 1$, y recíprocamente. Además $z(\bar{\mathcal{C}}) \equiv -z(\mathcal{C})$ (módulo n).*

Demostración. De la Definición 3.4.2, pág. 152 de $e(L_k^\pm)$, surge directamente que $e(L_k^\mp) = n - e(L_k^\pm)$ para cualquier segmento L_k .

Entonces

$$z(\mathcal{C}) = \frac{\sum_{i=1}^n e(L_{k_i}^{\mp})}{n}$$

y

$$\begin{aligned} z(\bar{\mathcal{C}}) &= \frac{\sum_{i=1}^n e(L_{k_{n+1-i}}^{\pm})}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n [n - e(L_{k_i}^{\mp})]}{n} = \\ &= \frac{n \sum_{i=1}^n 1 - \sum_{i=1}^n e(L_{k_i}^{\mp})}{n} = \frac{n^2 - z(\mathcal{C})n}{n} = n - z(\mathcal{C}) \equiv -z(\mathcal{C}) \pmod{n}. \end{aligned}$$

Es decir: $z(\bar{\mathcal{C}}) = n - z(\mathcal{C}) \equiv -z(\mathcal{C}) \pmod{n}$.

Además $1 \leq z(\mathcal{C}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Rightarrow n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq n - z(\mathcal{C}) \leq n - 1$, y como $n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ se tiene que

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq n - z(\mathcal{C}) \equiv -z(\mathcal{C}) \pmod{n} \leq n - 1$$

pero, entonces

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq n - z(\mathcal{C}) \leq n - 1,$$

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < n - z(\mathcal{C}) \equiv -z(\mathcal{C}) \pmod{n} \equiv z(\bar{\mathcal{C}}) \leq n - 1, \text{ i.e.}$$

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < z(\bar{\mathcal{C}}) \leq n - 1.$$

Recíprocamente, si $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < z(\bar{\mathcal{C}}) \leq n - 1$ resulta $1 \leq n - z(\bar{\mathcal{C}}) < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \therefore 1 \leq n - z(\bar{\mathcal{C}}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, es decir $1 \leq z(\mathcal{C}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. ■

Definición 3.4.16 Dado un ciclo \mathcal{C} en $\mathcal{N}(K_{n=2p+1}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ se dice que tiene orientación cw. si $1 \leq z(\mathcal{C}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, o bien, orientación ccw. si $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < z(\mathcal{C}) \leq n - 1$.

Observación 3.4.17 Si \mathcal{C} es un ciclo hamiltoniano sobre los vértices de un $2p + 2$ -gono regular, para cualquier ciclo $\in C_H^n$ en las estructuras $\mathcal{N}(K_{n=2p+2}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$, tal que $z(\mathcal{C}) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$, el ciclo opuesto $\bar{\mathcal{C}}$ verifica que $z(\bar{\mathcal{C}}) = n - z(\mathcal{C}) = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} = z(\mathcal{C})$. Por lo tanto $z(\mathcal{C}) + z(\bar{\mathcal{C}}) = n \equiv 0$ en \mathbb{Z}_n , es decir $z(\mathcal{C}) = -z(\bar{\mathcal{C}}) \pmod{n}$ y en consecuencia la Definición 3.4.16 no permite diferenciar en estas redes la orientación de un ciclo \mathcal{C} y la de su opuesto $\bar{\mathcal{C}}$.

Nota 3.4.18 En un $2p + 2$ -gono regular, es decir si n es par $\angle(L_{\frac{n}{2}}^-) = \angle(L_{\frac{n}{2}}^+)$. Por lo que $L_{\frac{n}{2}}^- \equiv L_{\frac{n}{2}}^+$.

Ejemplo 3.4.19 $S = \{L_2^-, L_1^-, L_2^+, L_1^+\}$ define un \mathcal{C} ciclo hamiltoniano en el 4-gono regular, i.e. $\mathcal{C} \in C_H^4$ en la estructura $\mathcal{N}(K_{n=4}(e^{i\pi} \sqrt[4]{1}), (d_{ij})_{4 \times 4})$ tal que $z(\mathcal{C}) = 2$, pero también vale que $\overleftarrow{S} = \{L_1^-, L_2^-, L_1^+, L_2^+\}$ es tal que $z(\overleftarrow{\mathcal{C}}) = 2$. En este caso solo pueden distinguirse el orden en el que los vértices son visitados mediante las respectivas sucesiones S y \overleftarrow{S} .

Ejemplo 3.4.20 Γ_k definidos en (3.2). Referirse a la Observación 3.4.17. Las trayectorias euclídeas hamiltonianas Γ_k son generalizaciones al comentario realizado en la pág. 160 concerniente al ciclo representado en la Figura 3.7, derecha.

Los ciclos del Ejemplo 3.4.20 son los óptimos y subóptimos hamiltonianos de los problemas estudiados en el Capítulo 2, §2.3, Teorema 2.3.4 y en el Capítulo 3 §3.2 determinados por las asignaciones de las sucesiones en (3.2), pág. 142, así como todas las sucesiones no congruentes e inclusive las congruentes, [Niel, B. I. (2012a)].

Teorema 3.4.21 Sean m entero, par o impar, tal que $2 \leq m \leq n$ y $S' = \{V_0, V_{i_1}, \dots, V_{i_{m-1}}\} \subseteq S = \{V_0, V_{i_1}, \dots, V_{i_{n-1}}\}$ un subconjunto con m de las n raíces unitarias $e^{i\pi} \sqrt[n]{1}$, ordenadas también cw. a partir de V_0 . Si \mathcal{C}' es un ciclo cuasi-hamiltoniano con vértices en los puntos de S' y determinado por los segmentos $\{L_{k_1}, L_{k_2}, \dots, L_{k_{m-1}}, L_{k_m}\}$ entonces $z(\mathcal{C}') = \frac{\sum_{i=1}^m e(L_{k_i})}{n}$ verifica que $1 \leq z(\mathcal{C}') \leq m-1$ y además, si $\overleftarrow{\mathcal{C}'}$ es el ciclo opuesto a \mathcal{C}' vale que $z(\overleftarrow{\mathcal{C}'}) = m - z(\mathcal{C}') \equiv -z(\mathcal{C}') \pmod{m}$.

Demostración. Por ser \mathcal{C}' un ciclo con vértices en S' sus m segmentos dirigidos son, en particular, m segmentos L_k en S , que los designamos con los mismos símbolos $\{L_{k_1}, L_{k_2}, \dots, L_{k_m}\}$ y por lo tanto vale que $\sum_{i=1}^m e(L_{k_i}) \equiv 0 \pmod{n}$. En tal caso sabemos que $\exists z(\mathcal{C}')$ tal que $\sum_{i=1}^m e(L_{k_i}) = z(\mathcal{C}')n$ con $1 \leq z(\mathcal{C}') \leq n-1$, que cuenta el número de vueltas del ciclo alrededor del centro.

Si llamamos $\{V_0, V_1^*, \dots, V_{m-1}^*\}$ a los vértices del m -gono regular, congruentes con las m raíces unitarias $e^{i\pi} \sqrt[n]{1}$, ordenados cw. a partir de V_0 , tomando en cuenta que los puntos de S' están ordenados de la misma manera a partir de V_0 , si establecemos la correspondencia $V_0 \rightarrow V_0, V_{i_1} \rightarrow V_1^*$, y así hasta $V_{i_{m-1}} \rightarrow V_{m-1}^*$ los segmentos $\{L_{k_1}, L_{k_2}, \dots, L_{k_m}\}$ de \mathcal{C}' se transforman respectivamente en los segmentos $\{L_{k_1}^*, L_{k_2}^*, \dots, L_{k_m}^*\}$ del correspondiente ciclo \mathcal{C}^* . La naturaleza de la transformación de \mathcal{C}' en \mathcal{C}^* , garantiza que ambos describen el mismo número de vueltas alrededor del origen. Pero $\mathcal{C}^* \in C_H^m$ y en consecuencia, por el Teorema 3.4.15, $z(\mathcal{C}') = \frac{\sum_1^m e(L_{k_i})}{n} = z(\mathcal{C}^*) = \frac{\sum_1^m e(L_{k_i}^*)}{m}$ y además, si $\overleftarrow{\mathcal{C}^*}$ es el ciclo opuesto de \mathcal{C}^* se verifica que $z(\overleftarrow{\mathcal{C}^*}) = m - z(\mathcal{C}^*) \equiv z(\mathcal{C}^*) \pmod{m}$. Pero $\overleftarrow{\mathcal{C}^*}$ se corresponde con $\overleftarrow{\mathcal{C}'}$, por lo tanto $z(\overleftarrow{\mathcal{C}'}) = z(\overleftarrow{\mathcal{C}^*}) = m - z(\mathcal{C}^*) = m - z(\mathcal{C}') \equiv z(\mathcal{C}') \pmod{m}$. ■

Observación 3.4.22 Este teorema permite estudiar el índice y la orientación de los ciclos cuasi-hamiltonianos de la misma manera que la de los ciclos hamiltonianos y además sin el requisito de la imparidad de n . Por otra parte, el argumento usado en la demostración de deformación de un ciclo cuasi-hamiltoniano de orden m a un m -gono sobre las

m raíces de la unidad, también hamiltoniano y sin cambiar el índice, permite inferir que el procedimiento es aplicable a ciclos con vértices no necesariamente sobre las n raíces unitarias.

Ejemplo 3.4.23 Sea $S' = \{V_0, V_{i_1}, V_{i_2}, V_{i_3}, V_{i_4}\} \subseteq \{V_0, V_1, \dots, V_8\}$, donde $V_{i_1} = V_1$, $V_{i_2} = V_2$, $V_{i_3} = V_4$ y $V_{i_4} = V_5$. Los segmentos dirigidos $L_{k_1} = L_4^-$, $L_{k_2} = L_2^+$, $L_{k_3} = L_3^-$, $L_{k_4} = L_4^+$ y $L_{k_5} = L_1^+$ determinan el cuasi-ciclo $\mathcal{C}' \in C_{Q-H}^5$ con vértices S' , Figura 3.4. En este caso, el transformado $\mathcal{C}^* \in C_H^5$ del cuasi-ciclo \mathcal{C}' en los vértices del 9-gono, está definido por: $\{L_{k_1}^* = L_2^+, L_{k_2}^* = L_1^+, L_{k_3}^* = L_2^-, L_{k_4}^* = L_2^-, L_{k_5}^* = L_1^+\} \in C_H^5$ (Ver Figura 3.4). Entonces $\overleftarrow{\mathcal{C}'} : \{L_1^-, L_4^-, L_3^+, L_2^-, L_4^+\}$ y $\overleftarrow{\mathcal{C}^*} : \{L_1^-, L_2^+, L_2^-, L_1^-, L_2^-\}$. Se pueden calcular ahora los índices del cuasi-ciclo y del ciclo:

$$\begin{aligned} z(\mathcal{C}') &= \frac{4+7+3+5+8}{9} = 3 & z(\mathcal{C}^*) &= \frac{3+4+2+2+4}{5} = 3 \\ z(\overleftarrow{\mathcal{C}'}) &= \frac{1+4+6+2+5}{9} = 2 & z(\overleftarrow{\mathcal{C}^*}) &= \frac{1+3+3+1+2}{5} = 2 \equiv -3 \pmod{5} \end{aligned}$$

y resulta entonces que $1 \leq z(\overleftarrow{\mathcal{C}^*}) = 2 \leq \lfloor \frac{5}{2} \rfloor$ y $\lfloor \frac{5}{2} \rfloor < 3 = z(\mathcal{C}^*) \leq 4 = 5 - 1$. Por lo tanto $z(\mathcal{C}') = z(\mathcal{C}^*) = 3$ ccw. y $z(\overleftarrow{\mathcal{C}'}) = 2 \equiv -3 \pmod{5}$ cw. Es decir, \mathcal{C}' describe tres vueltas ccw. y su opuesto $\overleftarrow{\mathcal{C}'}$ también describe tres vueltas pero en sentido contrario cw.

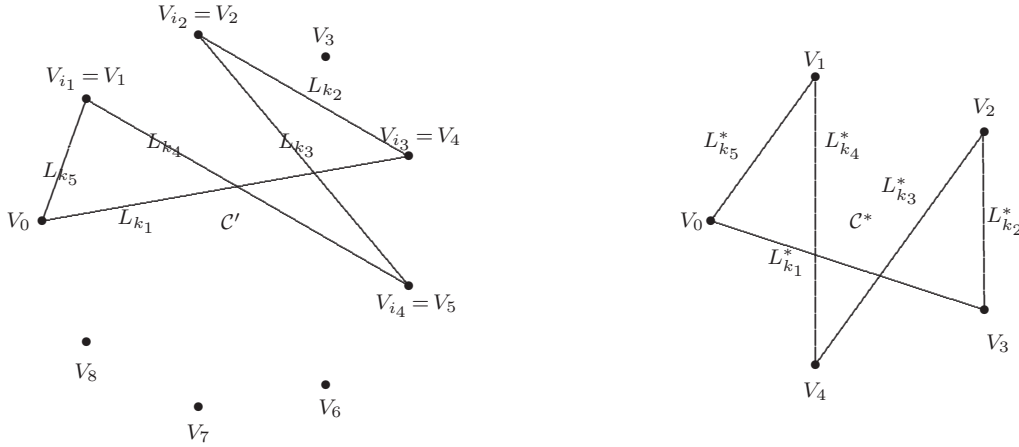


Figura 3.4: e.g.: De C_{Q-H}^5 en el 9-gono a un C_H^5 en el 5-gono.

Ejemplo 3.4.24 Con los mismos criterios que en el Ejemplo 3.4.23, se analizan aquí los cuasi-ciclos \mathcal{C}' y $\overleftarrow{\mathcal{C}'}$ determinados respectivamente por las sucesiones $\mathcal{C}' : \{L_4^-, L_2^+, L_3^-, L_4^+, L_3^+, L_1^-, L_1^-\}$ y $\overleftarrow{\mathcal{C}'} : \{L_1^+, L_1^+, L_3^-, L_4^-, L_3^+, L_2^-, L_4^+\}$ ambos cuasi-ciclos de orden siete, C_{Q-H}^7 , en el 9-gono, con vértices en $S' = \{V_0, V_{i_1} = V_1, V_{i_2} = V_2, V_{i_3} = V_4, V_{i_4} = V_5, V_{i_5} = V_7, V_{i_6} = V_8\}$, Figura 3.5. Los correspondientes ciclos \mathcal{C}^* y $\overleftarrow{\mathcal{C}^*} \in C_H^7$ están definidos por $\mathcal{C}^* : \{L_3^-, L_1^+, L_2^-, L_3^+, L_3^+, L_1^-, L_1^-\}$ y $\overleftarrow{\mathcal{C}^*} : \{L_1^+, L_1^+, L_3^-, L_3^-, L_2^+, L_1^-, L_3^+\}$. Sigue entonces que $z(\mathcal{C}') = z(\mathcal{C}^*) = \frac{21}{7} = 3$ y $z(\overleftarrow{\mathcal{C}'}) = z(\overleftarrow{\mathcal{C}^*}) = \frac{28}{7} = 4 \equiv -3 \pmod{7}$. Por lo tanto \mathcal{C}' describe tres vueltas cw. y $\overleftarrow{\mathcal{C}'}$ también describe tres vueltas ccw.

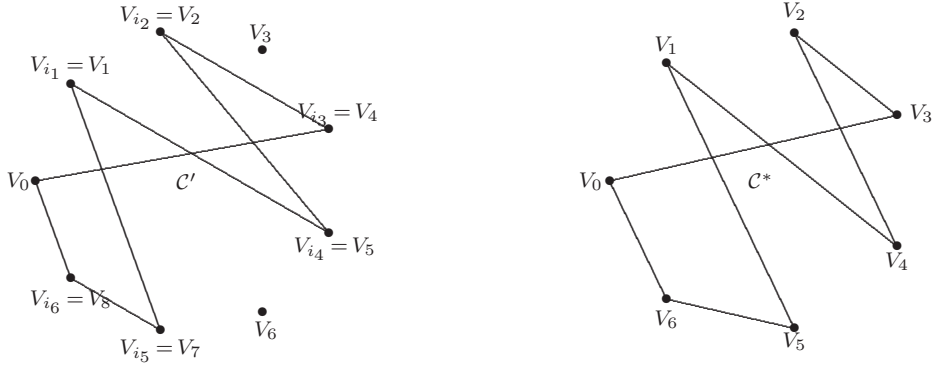


Figura 3.5: e.g.: De C_{Q-H}^7 en el 9-gono a un C_H^7 en el 7-gono.

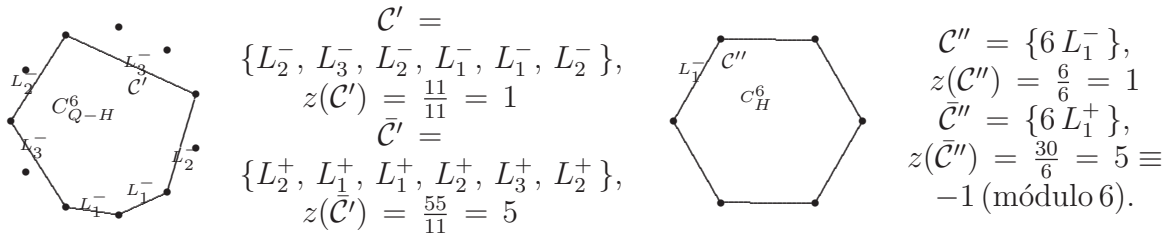


Figura 3.6: C_{Q-H}^6 en $\mathcal{N}(K_{11}(e^{i\pi} \sqrt[11]{1}), (d_{ij})_{11 \times 11})$ y C_H^6 en $\mathcal{N}(K_6(\sqrt[6]{1}), (d_{ij})_{6 \times 6})$.

Ejemplo 3.4.25 *El que ilustra la Figura 3.6.*

Ejemplo 3.4.26 *El ejemplo en la Figura 3.7 corresponde a un caso en que el índice coincide con $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ y por lo tanto no nos da indicación del sentido. Solo el análisis de las sucesiones correspondientes nos indica que ambos ciclos tienen sentido contrario.*

Se puede apreciar aquí con claridad que para ciclos de este tipo, que tienen un cruzamiento que los hace equivalentes -en el aspecto de la orientabilidad- a la figura con forma de “ocho”, al cual no es posible asignarle sentido cw. ni ccw. debido a que está formado por dos bucles y cada uno tiene la orientación contraria del otro. Ver Nota 3.4.18, en la pág. 157.

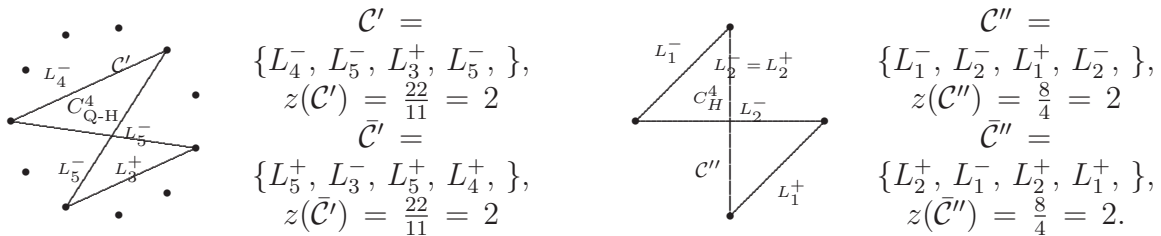


Figura 3.7: C_{Q-H}^4 en $\mathcal{N}(K_{11}(e^{i\pi} \sqrt[11]{1}), (d_{ij})_{11 \times 11})$ y C_H^4 en $\mathcal{N}(K_4(\sqrt[4]{1}), (d_{ij})_{4 \times 4})$.

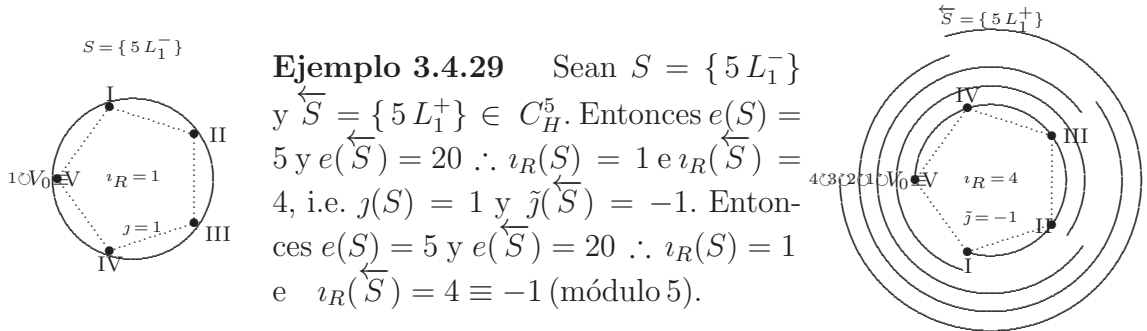
3.4.1. Índice de Rotación en Ciclos Hamiltonianos

En base a los fundamentos dados en la §3.0.3 y el algoritmo aritmético de la §3.1, Lema 3.1.2 y Teorema 3.1.3, se sustenta la siguiente definición de “índice de rotación orientado” para trayectorias hamiltonianas cíclicas, [Niel, B. I. (2012a)].

Definición 3.4.27 Sean, $S = \{L_{k_1}^\pm, \dots, L_{k_n}^\pm\}$, $n \geq 3$ una sucesión correspondiente a una trayectoria hamiltoniana euclidiana cíclica sobre los vértices de un polígono regular de número impar de lados, e ι_R el entero tal que $1 \leq \iota_R = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} e(L_{k_i}) \leq n - 1$.

Si $1 \leq \iota_R \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ se dice que $S \in C_H^n$ cw. con índice de rotación orientado $j = \iota_R$. Si $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < \iota_R \leq n - 1$ se dice que $S \in C_H^n$ ccw. con índice de rotación orientado $\tilde{j} = -(n - \iota_R) \equiv -\iota_R \pmod{n}$.

Observación 3.4.28 Si n es par subsiste la definición anterior si $1 \leq \iota_R < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ o bien si $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < \iota_R \leq n - 1$.



Ejemplo 3.4.29 Sean $S = \{5L_1^-\}$ y $\overleftarrow{S} = \{5L_1^+\} \in C_H^5$. Entonces $e(S) = 5$ y $e(\overleftarrow{S}) = 20 \therefore \iota_R(S) = 1$ e $\iota_R(\overleftarrow{S}) = 4$, i.e. $j(S) = 1$ y $\tilde{j}(\overleftarrow{S}) = -1$. Entonces $e(S) = 5$ y $e(\overleftarrow{S}) = 20 \therefore \iota_R(S) = 1$ e $\iota_R(\overleftarrow{S}) = 4 \equiv -1 \pmod{5}$.

Figura 3.8: Índices de Rotación j y \tilde{j} e.g. $5L_1^-$ y $5L_1^+$.

Ejemplo 3.4.30 Sean S y $\overleftarrow{S} \in C_H^5$ tales que $S = \{5L_2^-\}$ y $\overleftarrow{S} = \{5L_2^+\} \Rightarrow e(S) = 10$ y $e(\overleftarrow{S}) = 15 \therefore \iota_R(S) = 2$ e $\iota_R(\overleftarrow{S}) = 3$, i.e. $j(S) = 2$ y $\tilde{j}(\overleftarrow{S}) = -2$.

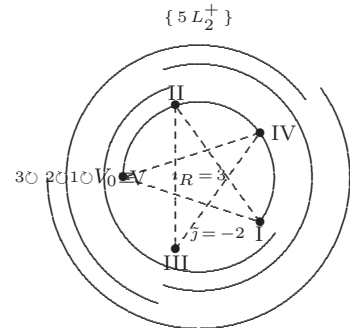


Figura 3.9: Índices de Rotación j y \tilde{j} e.g. $5L_2^+$

Ejemplo 3.4.31 Sean S y $\overleftarrow{S} \in C_H^7$ tales que $S = \{7L_2^-\}$ y $\overleftarrow{S} = \{7L_2^+\} \Rightarrow e(S) = 14$ y $e(\overleftarrow{S}) = 35 \therefore \nu_R(S) = 2$ e $\nu_R(\overleftarrow{S}) = 5$, i.e. $j(S) = 2$ y $\tilde{j}(\overleftarrow{S}) = -2$.

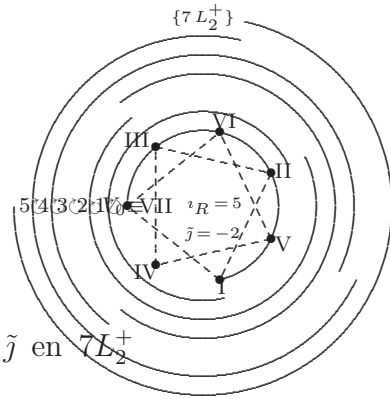


Figura 3.10: Representación gráfica del \tilde{j} en $7L_2^+$

Corolario 3.4.32 Sean $S = \{L_{k_1}^\pm, \dots, L_{k_m}^\pm\}$ y $\overleftarrow{S} = \{L_{k_1}^\mp, \dots, L_{k_m}^\mp\}$, con $3 \leq m < n$ correspondientes a trayectorias cuasi-hamiltonianas euclidianas cíclicas sobre m de los n vértices de un polígono regular de número impar de lados y ambas inician en el punto $V_0 = (-1, 0)$. Es decir, S y $\overleftarrow{S} \in C_{Q-H}^m$, pero difieren en el sentido de recorrido. Para el caso que $1 \leq \nu_R(S) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq m} e(L_{k_i}^\pm) \neq \nu_R(\overleftarrow{S}) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq m} e(L_{k_i}^\mp)$, hay dos posibilidades: $1 \leq \nu_R(S) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ en cuyo caso $S \in C_{Q-H}^m$ cw. con índice de rotación $j = \nu_R$ y $\overleftarrow{S} \in C_{Q-H}^m$ ccw. con índice de rotación $\tilde{j} = -j$. Si en cambio es $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor < \nu_R(S) \leq m - 1$ la poligonal cíclica $S \in C_{Q-H}^m$ ccw. mientras que $\overleftarrow{S} \in C_{Q-H}^m$ cw.

Demostración.

Inmediata a partir del Teorema 3.4.21 en la pág. 158. ■

Observación 3.4.33 Si $S \in C_{Q-H}^m$ y \overleftarrow{S} es su poligonal cíclica borra huella con índices de rotación baricéntricos respectivos j y \tilde{j} , verifican la identidad $j + \tilde{j} = m < n_{impar}$.

Observación 3.4.34 Si un ciclo cuasi-hamiltoniano no encierra el centro del polígono P_n en que está inscrito, el índice de rotación alrededor de su baricentro es el mismo que el índice alrededor de la circunferencia unitaria.

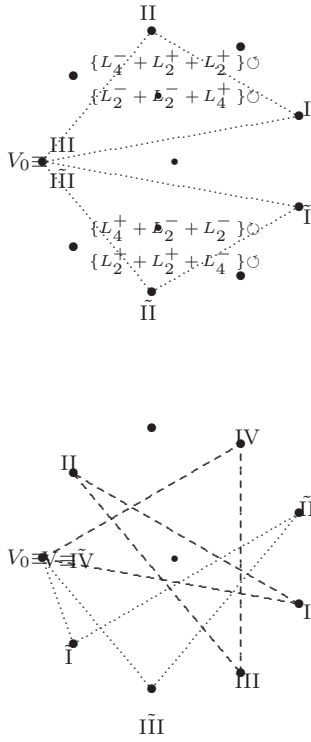


Figura 3.11: Rotación en cuasi-hamiltonianos: e.g. $n = 9$, $m = 3$, $m = 4$ y $m = 5$.

3.4.2. Cómputos del algoritmo en $3p + 2(l + 1)$ -gonos

Con la finalidad de no reiterar los cálculos similares a los realizados en las demostraciones de los Teoremas 3.6.2, 3.6.5 y 3.6.7, se ha decidido exhibir los procedimientos de la metodología propuesta a través de un ejemplo integrador. Es decir, una sucesión de segmentos dirigidos en la que cada una de las subsucesiones constitutivas involucran a aquellas que conforman los ciclos y caminos hamiltonianos de los mencionados teoremas, e.g. Proposición 3.4.36.

Proposición 3.4.36 Para cada $n = 3p + 2(l + 1)$, con $l, p \in \mathbb{N}$ y $\frac{p}{3} = 1 + 2t$ la siguiente sucesión de segmentos dirigidos es una trayectoria hamiltoniana euclídea cíclica.

$$L_{[\frac{p}{2}]+1+l}^- + \underbrace{L_{[\frac{n}{2}]}^-}_{2([\frac{p}{2}]+l)} + \underbrace{L_{[\frac{n}{2}]}^- + L_{[\frac{n}{2}-1]}^-}_{[\frac{p}{2}]+1} + \underbrace{L_{[\frac{n}{2}]}^+}_{2} + \underbrace{L_{[\frac{n}{2}-1]}^+ + L_{[\frac{n}{2}]}^+}_{[\frac{p}{2}]} \quad (3.8)$$

Demostración. Se debe probar que (3.8) $\in C_H^n$. En otras palabras, (3.8) genera una poligonal cíclica asociable a los vértices de un $3p + 2(l + 1)$ -gono regular, congruente con una única visita de cada nodo de la red $\mathcal{N}(K_{3p+2(l+1)}(e^{i\pi\sqrt[n]{1}}, (d_{ij})_{n \times n})$ y volviendo al punto de partida.

Como $n = 11 + 18t + 2l$ resulta $[\frac{n}{2}] = 5 + 9t + l$, y a partir de que $p = 3 + 6t$ se

Ejemplo 3.4.35 En los nodos congruentes con los vértices de un 9-gono regular, se estudian las rotaciones de las siguientes poligonales cíclicas cuasi-hamiltonianas: $S_1 = \{2L_2^-, L_4^+\}$ y \overleftarrow{S}_1 , $e(S_1) = 9$, $\therefore \nu_R = 1 \leq [\frac{3}{2}]$ implica $j = 1$, mientras que $e(\overleftarrow{S}_1) = 18$, $\therefore \nu_R = 2 \rightarrow \tilde{j} = -(3-2)$. Por lo tanto S_1 es cw. y da una vuelta alrededor de su baricentro en tanto que su borra huellas \overleftarrow{S}_1 es ccw. y también da una vuelta alrededor del mismo baricentro.

$S_2 = \{L_4^+, 2L_2^-\}$ y \overleftarrow{S}_2 , $e(S_2) = 9$, $\therefore \nu_R = 1 \rightarrow j = 1$, mientras que $e(\overleftarrow{S}_2) = 18$, $\therefore \nu_R = 2 \rightarrow \tilde{j} = -(3-2)$. Idem al caso anterior.

$S_3 = \{L_1^+, L_4^+, L_3^-, L_2^-\}$ y \overleftarrow{S}_3 , $e(S_3) = 18$, $e(\overleftarrow{S}_3) = 18$, $\therefore \nu_R(S) = \nu_R(\overleftarrow{S})$. En este caso nada se puede afirmar en base al Teorema 3.4.32.

$S_4 = \{3L_4^+, 2L_3^+\}$ y \overleftarrow{S}_4 , $e(S_4) = 27$, $\therefore \nu_R = 3$. En este caso $m = 5$ y $[\frac{5}{2}] < 3 = \nu_R < 5 - 1$, por lo tanto S_4 es ccw. y $\tilde{j} = -(5-3) = -2$ (Definición 3.4.27). Por otra parte, $e(\overleftarrow{S}_4) = 18$, $\therefore \nu_R = 2 \rightarrow j = 2$. Entonces, S_4 es ccw. dando dos vueltas alrededor de su baricentro, mientras que su borra huellas \overleftarrow{S}_4 es cw dando dos vueltas respecto del mismo baricentro.

Capítulo 3. Algoritmo Aritmético

tiene que $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor = 1 + 3t$. En consecuencia, los enteros asociados a los segmentos dirigidos que forman la sucesión (3.8) son los siguientes: $e(L_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1 + l}^-) = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1 + l = 2 + 3t + l$, $e(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-) = 5 + 9t + l$, $e(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+) = 6 + 9t + l$, $e(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) = 4 + 9t + l$, $e(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+) = 7 + 9t + l$, $e(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) = n - 2$ y $e(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+) = n + 2$.

Es necesario confirmar que cada subsucesión propia en la sucesión (3.8) determina una trayectoria euclídea no cíclica que pasa por algunos de los vértices del $3p + 2(l + 1)$ -gono regular. Se considera como subsucesión trivial a cualquier subsucesión del ordenamiento (3.8) constituida con a lo sumo tres segmentos dirigidos, con la condición de que no formen ciclo. La demostración implica probar que los enteros asociados a cada una de las siguientes subsucesiones no es n ni múltiplo de n y que el entero asociado al ordenamiento completo (3.8) es múltiplo de n .

1. $L_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1 + l}^- + s L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-; \quad 1 \leq s \leq 2\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 2l = 2 + 6t + 2l$
2. $s L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + k (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-); \quad 0 \leq s \leq 2\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 2l, \quad 0 \leq k \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1$
3. $L_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1 + l}^- + (2 + 6t + 2l) L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + k (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-); \quad 1 \leq k \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$
4. $s L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + k (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-; \quad 0 \leq s \leq 2 + 6t + 2l, \quad 0 \leq k \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$
5. $L_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1 + l}^- + 2(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + l) L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + k (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-; \quad 1 \leq k \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$
6. $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^- + k (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) + j L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+; \quad 1 \leq k \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \quad 1 \leq j \leq 2$
7. $k (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) + j L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+; \quad 1 \leq k \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1, \quad 1 \leq j \leq 2$
8. $s L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + (\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1) (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) + j L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+; \quad 1 \leq s \leq 2(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + l), \quad 1 \leq j \leq 2$
9. $L_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1 + l}^- + 2(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + l) L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + (\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1) (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) + j L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+; \quad 1 \leq j \leq 2$
10. $j L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+ + \nu (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+); \quad 1 \leq \nu \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \quad 1 \leq j \leq 2$
11. $j L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+ + \nu (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+) + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+; \quad 1 \leq \nu \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1, \quad 0 \leq j \leq 2$
12. $k (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) + 2 L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+ + \nu (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+); \quad 1 \leq k \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1, \quad 1 \leq \nu \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$
13. $k (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) + 2 L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+ + \nu (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+) + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+; \quad 1 \leq k \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1, \quad 0 \leq \nu \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1$
14. $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^- + k (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) + 2 L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+ + \nu (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+); \quad 0 \leq k \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \quad 1 \leq \nu \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$
15. $s L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + (2 + 3t) (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) + 2 L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+ + \nu (L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+); \quad 1 \leq s \leq 2(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + l), \quad 1 \leq \nu \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$

16. $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 + l}^- + 2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + l) L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + (2 + 3t)(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) + 2 L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+ + \nu(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+)$; $1 \leq \nu \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
17. $s L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + (2 + 3t)(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) + 2 L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+ + \nu(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+) + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+$; $1 \leq s \leq 2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + l)$, $0 \leq \nu \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$
18. $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 + l}^- + 2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + l) L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + (2 + 3t)(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) + 2 L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+ + \nu(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+) + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+$; $0 \leq \nu \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$

Los cálculos al aplicar el algoritmo aritmético en las subsucesiones enumeradas de 1 a 18, son semejantes, por razones de brevedad se explicitan los cálculos completos solamente para las subsucesiones en los incisos (8), (14), (16) y (18).

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & e[s L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) + j L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+] = \\
 & = s(5 + 9t + l) + (2 + 3t)(n - 2) + j(6 + 9t + l) = \\
 & = \begin{cases} i(10 + 18t + 2l) + (2 + 3t)(n - 2) + 6 + 9t + l \\ \text{si } s = 2i, 1 \leq i \leq 1 + 3t + l, j = 1 \\ \\ i(n - 1) + (2 + 3t)(n - 2) + n + 1 \\ \text{si } s = 2i, 1 \leq i \leq 1 + 3t + l, j = 2 \\ \\ i(n - 1) + 5 + 9t + l + (2 + 3t)(n - 2) + 6 + 9t + l \\ \text{si } s = 2i + 1, 0 \leq i \leq 3t + l, j = 1 \\ \\ i(n - 1) + 5 + 9t + l + (2 + 3t)(n - 2) + n + 1 \\ \text{si } s = 2i + 1, 0 \leq i \leq 3t + l, j = 2 \end{cases} \\
 & = \begin{cases} n(2 + 3t + i) - i + 2 + 3t + l \neq zn, \\ \text{puesto que } 1 \leq 2 + 3t + l - i \leq 1 + 3t + l < n \\ \\ n(3 + 3t + i) - (3 + 6t + i) \neq zn, \\ \text{puesto que } 3 \leq 3 + 6t + i \leq 4 + 9t + l < n \\ \\ n(3 + 3t + i) - (4 + 6t + i) \neq zn, \\ \text{puesto que } 4 \leq 4 + 6t + i \leq 4 + 9t + l < n \\ \\ n(3 + 3t + i) - i + 2 + 3t + l \neq zn, \\ \text{puesto que } 2 \leq 2 + 3t + l - i \leq 2 + 3t + l < n \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (14) \quad & e[L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^- + k(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) + 2 L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+ + \nu(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+)] = \\
 & = 4 + 9t + l + k(n - 2) + n + 1 + \nu(n + 2) = (k + \nu + 1)n + 2(\nu - k) + 5 + 9t + l \neq zn.
 \end{aligned}$$

Capítulo 3. Algoritmo Aritmético

Como $0 \leq k \leq 1 + 3t \Rightarrow -2 - 6t \leq -2k \leq 0$ y $1 \leq \nu \leq 3t \therefore -6t \leq 2(\nu - k) \leq 6t \therefore$ después de la adición de $5 + 9t + l$ a cada término resulta $5 < 5 + 3t + l \leq 2(\nu - k) + 5 + 9t + l \leq 5 + 15t + l < n$.

$$(16) \quad e[s L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + (2 + 3t)(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) + 2L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+ + \nu(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+)] =$$

$$= \begin{cases} i(n-1) + (2+3t)(n-2) + n + 1 + \nu(n+2) \\ \text{si } s = 2i, 1 \leq i \leq 1 + 3t + l \\ \\ i(n-1) + 5 + 9t + l + (2+3t)(n-2) + n + 1 + \nu(n+2) \\ \text{si } s = 2i + 1, 0 \leq i \leq 3t + l \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (3 + 3t + \nu + i)n + 2\nu - 3 - 6t - i \neq zn, \\ \text{ya que } -n < 2\nu - 3 - 6t - i \leq -2 \\ \\ (3 + 3t + \nu + i)n + 2\nu + 2 + 3t + l - i \neq zn, \\ \text{ya que } 4 \leq 2 + 3t + l + 2\nu - i < n \end{cases}.$$

$$(18) \quad e[L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 + l}^- + 2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + l)L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + (2 + 3t)(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-) + 2L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+ + \nu(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+)] = (4 + 6t + \nu + l)n + 2\nu + 5 + 3t + l \neq zn \text{ ya que } 5 \leq 5 + 3t + l + 2\nu \leq 5 + 9t + l < n.$$

En la red $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}}}(e^{i\pi \sqrt[n]{1}}), (d_{ij})_{n \times n})$ se recuerda que $C_{\text{Q-H}}^m$ denota una trayectoria poligonal cíclica, que pasa una sola vez por m vértices, $3 \leq m < n_{\text{impar}}$, a excepción del vértice inicial y final. Mientras, que $C_H^{n_{\text{impar}}}$ simboliza un ciclo hamiltoniano euclídeo que pasa por cada uno de los n_{impar} vértices de un polígono regular con número impar de lados. ■

Ejemplo 3.4.37 *El Cuadro 3.1 exhibe ciclos cuasi-hamiltonianos de orden m que viven en las estructuras $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}}}(e^{i\pi \sqrt[n]{1}}), d_{n \times n}^E), \forall n_{\text{impar}} \geq n_{\text{impar}}^{\text{min}}$.*

Ejemplo 3.4.38 *Sean dadas las sucesiones*

$$L_{l+1}^-, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+}_2, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-}_{2l}, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+}_2, \quad 0 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3.$$

Los cálculos del algoritmo establecen que son ciclos hamiltonianos $C_H^{n_{\text{impar}}=7+2l}$ en las redes $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}}}(e^{i\pi \sqrt[n]{1}}), (d_{ij})_{n \times n})$ con $n_{\text{impar}} = 7 + 2l$, y que pertenecen al conjunto de ciclos cuasi-hamiltonianos $C_{\text{Q-H}}^{n_{\text{impar}} > 7+2l}$ en las redes construidas sobre vértices de los n_{impar} -gonos regulares si $n_{\text{impar}} > 7 + 2l$. El avance angular de esta sucesión de segmentos dirigidos es proporcional a: $l + 1 + 2(\lfloor \frac{n_{\text{impar}}}{2} \rfloor + 1) + \lfloor \frac{n_{\text{impar}}}{2} \rfloor - 1 + 2l \lfloor \frac{n_{\text{impar}}}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_{\text{impar}}}{2} \rfloor - 1 + 2(\lfloor \frac{n_{\text{impar}}}{2} \rfloor + 1) = (l + 3)n_{\text{impar}}$, con índice de rotación $\nu_R = l + 3$.

| $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}}}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{n \times n}^E); 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ | | | |
|--|-----------|---------|--------------------------------|
| $\mathcal{C}_{\text{Q-H}}^m \approx S \quad \forall n_{\text{impar}} \geq n_{\text{impar}}^{\min}$ | ι_R | $j(S)$ | $\tilde{j}(\overleftarrow{S})$ |
| $\mathcal{C}_{\text{Q-H}}^4 : L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+; n_{\text{impar}} \geq 5$ | 2 | $j = 2$ | $\tilde{j} = 2$ |
| $\mathcal{C}_{\text{Q-H}}^4 : L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-, 3L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+; n_{\text{impar}} \geq 5$ | 2 | $j = 2$ | $\tilde{j} = 2$ |
| $\mathcal{C}_{\text{Q-H}}^6 : L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+}_2, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-}_2; n_{\text{impar}} \geq 7$ | 3 | $j = 3$ | $\tilde{j} = 3$ |
| $\mathcal{C}_{\text{Q-H}}^6 : \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+}_2, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-; n_{\text{impar}} \geq 7$ | 3 | $j = 3$ | $\tilde{j} = 3$ |
| $\mathcal{C}_{\text{Q-H}}^{2k+1} : L_k^-, 2kL_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-; n_{\text{impar}} \geq 5$ | k | $j = k$ | $\tilde{j} = k + 1$ |
| $\mathcal{C}_{\text{Q-H}}^{2k+1} : L_k^-, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-}_k; n_{\text{impar}} \geq 5$ | k | $j = k$ | $\tilde{j} = k + 1$ |

 Cuadro 3.1: $\mathcal{C}_{\text{Q-H}}^m$ en $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}}}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{n \times n}^E)$

Ejemplo 3.4.39 Sean las sucesiones $L_{l+1}^-, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-}_{2l}, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+}_2$, $0 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2$.

El procedimiento algorítmico determina que el índice de rotación $\iota_R = l + 2$ y los caracteriza como ciclos hamiltonianos $\mathcal{C}_{\text{H}}^{n_{\text{impar}}=5+2l}$ y como poligonales cíclicas cuasi-hamiltonianas $\mathcal{C}_{\text{Q-H}}^{n_{\text{impar}}>5+2l}$ si $n_{\text{impar}} > 5 + 2l$.

Ejemplo 3.4.40 Las secuencias $L_{l+1}^-, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-}_{2l-1}$, $1 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$.

En las redes $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}} \geq 5}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{n \times n}^E)$ estos ordenamientos y distribuciones de segmentos dirigidos son caracterizados por el algoritmo como ciclos $\mathcal{C}_{\text{Q-H}}^{2l+1}$ con índice de rotación $\iota_R = l$.

Ejemplo 3.4.41 El Cuadro 3.2 exhibe ciclos hamiltonianos de $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}}}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{n \times n}^E)$.

3.5. Hamiltonianos No Cíclicos más largos en N_{impar} -Gonos

En las redes $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}}}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{n \times n}^E)$ para $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, consideramos a continuación las trayectorias conformadas por un único segmento dirigido L_k^- , $(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k)$ segmentos dirigidos $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^\pm$ y $(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + k)$ segmentos dirigidos $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^\pm$, o de manera equivalente según la expresión (3.10).

| |
|--|
| $\mathcal{C}_H^{n_{\text{impar}}}$ en $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}}}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{n \times n}^E); \iota_R = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ |
| $\mathcal{C}_H^{n_{\text{impar}}=4t+1}$ |
| $L_1^-, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-}_{\frac{n-1}{4}}, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+}_2, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+}_{\frac{n-1}{4}-1}$ |
| $\mathcal{C}_H^{n_{\text{impar}}=4t+3}$ |
| $L_1^-, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-}_{\frac{n-3}{4}}, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-}_2, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+}_{\frac{n-3}{4}}$ |
| $\mathcal{C}_H^{n_{\text{impar}}=4t+3}$ |
| $L_1^-, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+}_2, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-}_2, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-}_{\frac{n-3}{4}-1}, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+}_2, \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+, L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+}_{\frac{n-3}{4}-1}$ |

Cuadro 3.2: $\mathcal{C}_H^{n_{\text{impar}}}$ en $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}}}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{n \times n}^E)$

3.5.1. Longitud de los caminos relevantes

En esta sección determinamos las composiciones admisibles de los segmentos dirigidos que construyen trayectorias (3.9) con las longitudes expresadas por la ecuación (3.10).

$$\widehat{L}_k^- + p L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^\pm + (n - p - 1) L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^\pm, \quad p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k. \quad (3.9)$$

Las longitudes euclídeas $\mathcal{L}(L_k)$ de los L_k segmentos L_k^\pm , $k \in \mathbb{Z}$ y $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $n \in \mathbb{N}$, verifican las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i}) - \mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (i+1)}) &< \mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (i+1)}) - \mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (i+2)}), \\ 0 \leq i &\leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3. \end{aligned}$$

Resultan las longitudes de los recorridos de los caminos (3.10):

$$\mathcal{L}(\widehat{L}_k^-) + p \mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^\pm) + (n - p - 1) \mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^\pm), \quad p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k. \quad (3.10)$$

Específicamente, en dicho conjunto de trayectorias, nos concentramos en las que son ciclos hamiltonianos euclidianos sobre los n_{impar} -gonos regulares, i.e. $\mathcal{C}_H^{n_{\text{impar}}}$, y que poseen como longitud total de recorrido las longitudes (3.10) en las redes $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}}}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{n \times n}^E)$.

El Teorema 3.5.1 establece las composiciones admisibles de los segmentos dirigidos de un subconjunto de trayectorias sobre vértices de N_{impar} -Gonos que dan origen a caminos con las longitudes total de recorrido determinadas en la ecuación (3.10).

Teorema 3.5.1 *En las redes $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}}}(e^{\pi i} \sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ las longitudes de recorrido (3.10) se realizan, salvo cambios de orientación, si las sucesiones están compuestas por un único segmento dirigido L_k^- , $(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k - \alpha)$ segmentos dirigidos $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-$, α segmentos*

$L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+$, β segmentos $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+$ y $(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + k - \beta)$ segmentos $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-$. Si $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ con $p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k$ y se satisfacen las condiciones en (3.11).

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 2p \\ 0 \vee [p + \frac{1}{3} - \frac{n}{3}] \leq \alpha \leq \frac{2}{3}p \end{cases} \quad (3.11)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{n}k + \frac{2\pi}{n} \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 \right) \left[\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k \right) - \alpha \right] + \frac{2\pi}{n} \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \right) \alpha + \\ & + \frac{2\pi}{n} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \left[\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + k \right) - \beta \right] + \frac{2\pi}{n} \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \right) \beta = 2m\pi \\ & n \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 \right) + 2k + 1 + 3\alpha + \beta = mn \end{aligned}$$

Desde las restricciones $0 \leq \alpha \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k$ y $0 \leq \beta \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + k$ resulta que $2k + 1 + 3\alpha + \beta = [m - (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)]n \leq 2n - 1$, entonces m toma el valor $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $2k + 1 + 3\alpha + \beta = n$ esto conduce a que $3\alpha + \beta = 2p$.

En consecuencia, los pares (α, β) admisibles para realizar las longitudes (3.10) deben verificar (3.11) ■

Observación 3.5.2 Destacamos que las longitudes (3.10) pueden ser realizadas por sucesiones que inviertan ciertos signos en las composiciones, e.g. $\mathcal{L}(\widehat{L_k^-}) = \mathcal{L}(\widehat{L_k^+})$.

Si aplicamos un descenso sucesivo desde el máximo valor de los hamiltonianos cíclicos $n_{impar}\mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-)$, (Capítulo 2, §2.5, pág. 121), hacia las sucesivas apariciones de un único $\widehat{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - p}^-}$ para $1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ ocupando las restantes $n - 1$ locaciones solamente con segmentos dirigidos del tipo $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^\pm$ y $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^\pm$ en las sucesiones de orden N_{impar} y desde la aplicación directa del algoritmo resulta la no existencia de estructuras hamiltonian cíclicas conformadas por:

$$\widehat{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - p}^-} + \underbrace{(p - 1) L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^\pm + (n - p) L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^\pm}_{\exists P_H^{n-1}}, \quad 1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2.$$

En contraste, el algoritmo determina la existencia de caminos hamiltonianos abiertos de orden $n - 1$ sobre los vértices de N_{impar} -Gonos que se convierten en ciclos hamiltonianos al iniciarse el recorrido con un segmento $\widehat{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - p}^-} = \widehat{L_k^-}$. En otras palabras existen composiciones y distribuciones que realizan la longitud establecida por la ecuación (3.12) pasando una y solo una vez por cada uno de los vértices de los N_{impar} -Gonos regulares.

$$\underbrace{p\mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^\pm) + (n_{impar} - p - 1)\mathcal{L}(L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^\pm)}_{Max\mathcal{L}(P_H^{n_{impar}-1})}, \quad 1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1. \quad (3.12)$$

3.5.2. Distribución de los segmentos en hamiltonianos de N_{impar} -Gonos

Los Teoremas 3.6.2, 3.6.5 y 3.6.7 confirman, como resultados de las aplicaciones directas del algoritmo, la existencia de ciclos hamiltonianos que realizan las longitudes totales recorridas por sucesiones de la forma (3.9) y con determinadas asignaciones dentro del conjunto de las distribuciones admisibles dadas en (3.11).

1. Para p_{impar} si $\alpha = \lfloor \frac{p_{\text{impar}}}{2} \rfloor$ y $\beta = \lfloor \frac{p_{\text{impar}}}{2} \rfloor + 2$ en (3.11) existen $C_H^{n_{\text{impar}}}$ con longitud de recorrido (3.10). Ver Teorema (3.6.2) en la pág. 170.
2. Para p_{par}
 - a) $\alpha = \frac{p_{\text{par}}}{2} = \beta$ en (3.11) existen $C_H^{n_{\text{impar}}}$ con longitud de recorrido (3.10). Ver Teorema (3.6.5) en la pág. 171,
 - b) $\alpha = \frac{p_{\text{par}}}{2} - 1$ y $\beta = \alpha + 4$ en (3.11) existen $C_H^{n_{\text{impar}}}$ con longitud de recorrido (3.10). Ver Teorema (3.6.7) en la pág. 172.

En cualquiera de las otras posibles duplas (α, β) admisibles, i.e. que verifiquen (3.11) el algoritmo confirma la no existencia de ciclo hamiltoniano.

3.6. Ordenamientos y enumeración de hamiltonianos relevantes en N_{impar} -Gonos

La directa aplicación del algoritmo propuesto determina los ordenamientos, dentro de ciertas composiciones admisibles, precisamente aquellas establecidas en la §3.5.2 que construyen caminos hamiltonianos sobre los vértices de los N_{impar} -Gonos.

Recordamos que $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ simboliza cualquier camino euclidiano con vértice inicial $V_0 = (-1, 0)$ y vértice final V_k , entre ellos solo puede colocarse un segmento dirigido $\widehat{L}_k = \widehat{L}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - p}^-$ con $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entre los puntos final e inicial de la poligonal de $n_{\text{impar}} - 1$ componentes lineales.

Observación 3.6.1 *Las demostraciones del Teorema 3.6.2, Teorema 3.6.5 y Teorema 3.6.7 resultan de aplicaciones directas del Teorema 3.1.3 del Algoritmo Propuesto.*

Teorema 3.6.2 *Sea $p_{\text{impar}} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k$ un número entero impar para $k \in \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$. Las trayectorias (3.13) y (3.14) construyen caminos hamiltonianos $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ en las redes $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}}}(e^{\pi i} \sqrt[n]{1}), (d_{i,j})_{n \times n})$ si $n_{\text{impar}} \geq 2p_{\text{impar}} + 3$.*

$$\underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+}_{\lfloor \frac{p_{\text{impar}}}{2} \rfloor} + \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+}_2 + \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-}_{\lfloor \frac{p_{\text{impar}}}{2} \rfloor + 1} + \tilde{m} L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+}_{\lfloor \frac{p_{\text{impar}}}{2} \rfloor - i} + \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+}_2 + \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-}_{\lfloor \frac{p_{\text{impar}}}{2} \rfloor - i} + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^- + \\
 & \quad + \tilde{m} L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^- + \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-}_{i-1} + \\
 & \quad + \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-}_2 + \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+}_i, \quad 1 \leq i \leq \lfloor \frac{p_{\text{impar}}}{2} \rfloor.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

con $\tilde{m} = (n - 1) - (2p_{\text{impar}} + 2) \square$

Nota 3.6.3 Con $\overrightarrow{F.R.}$ y $\overleftarrow{B.R.}$ se denotan, respectivamente, las lecturas hacia la derecha y las lecturas hacia la izquierda de una sucesión arbitraria compuesta de segmentos dirigidos L_k^\pm .

Corolario 3.6.4 En las redes $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}}}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ si $n_{\text{impar}} \geq 2p_{\text{impar}} + 3$, las lecturas hacia adelante y hacia atrás de las sucesiones (3.13) y (3.14) son $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$.

En consecuencia, $\overrightarrow{F.R.}$ y $\overleftarrow{B.R.}$ de la sucesiones (3.13) y (3.14) contabilizan con 2 más otras $2 \lfloor \frac{p_{\text{impar}}}{2} \rfloor$ sucesiones diferentes, respectivamente. Además, $\overrightarrow{F.R.}$ y $\overleftarrow{B.R.}$ de la trayectoria (3.13) y de los caminos (3.14) construyen $(p_{\text{impar}} + 1)$ ciclos hamiltonianos $C_H^{n_{\text{impar}}}$ si el segmento dirigido $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - p_{\text{impar}}}^-$ es inicialmente anexado a estas secuencias. \square

Teorema 3.6.5 Sea $p_{\text{par}} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k$ un número entero par para $k \in \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$. Las trayectorias (3.15) y (3.16) construyen caminos hamiltonianos $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ en las redes $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}}}(e^{\pi i} \sqrt[n]{1}), (d_{i,j})_{n \times n})$ si $n_{\text{impar}} \geq 2p_{\text{par}} + 3$, con $\beta = \alpha = \frac{p_{\text{par}}}{2}$ es el número de $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+$ y $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+$, respectivamente.

$$\underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+}_{\frac{p_{\text{par}}}{2}} + \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-}_2 + \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-}_{\frac{p_{\text{par}}}{2}} + \tilde{m} L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+}_{\frac{p_{\text{par}}}{2} - 1 - i} + \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-}_2 + \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-}_{\frac{p_{\text{par}}}{2} - 2 - i} + \\
 & \quad + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^- + \tilde{m} L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^- + \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-}_i + \\
 & \quad + \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-}_2 + \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+}_{i+1}, \quad 0 \leq i \leq \frac{p_{\text{par}}}{2} - 2,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

con $\tilde{m} = (n - 1) - (2p_{\text{par}} + 2) \square$

Capítulo 3. Algoritmo Aritmético

Corolario 3.6.6 *En las redes $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}}}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ si $n_{\text{impar}} \geq 2p_{\text{par}} + 3$, las lecturas hacia adelante y hacia atrás de las secuencias (3.15) y (3.16) son caminos hamiltonianos, $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$. Particularmente, la enumeración de los caminos hamiltonianos $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ distintos que se originan a partir de las lecturas hacia adelante y hacia atrás de las sucesiones (3.16) dependen de la paridad de $\frac{p_{\text{par}}}{2}$.*

De manera específica, si $\frac{p_{\text{par}}}{2}$ es impar, desde que $(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{impar}} - 1 - i \neq i + 1$ cada sucesión en (3.16) no es palíndromo [Niel, B. I. (2012a)]. Además, las $(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{impar}} - 1$ sucesiones definidas en (3.16) se hallan en pares $\overrightarrow{F.R.}$ y $\overleftarrow{B.R.}$. En particular, la lectura $\overrightarrow{F.R.}$ del camino hamiltoniano $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ determinado por $i = 0$ coincide con el camino de la lectura $\overrightarrow{B.R.}$, $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ determinado por $i = \frac{p_{\text{par}}}{2} - 2$, $i = 1$ camino de la lectura $\overrightarrow{F.R.}$ coincide con la lectura $\overrightarrow{B.R.}$ de la sucesión definida por $i = \frac{p_{\text{par}}}{2} - 3$ y así sucesivamente. Es decir las caminos de las lecturas $\overrightarrow{F.R.}$ definidos por (3.16) con $i \in \{0, \dots, \frac{p_{\text{par}}}{2} - 3\}$ coinciden con los caminos hamiltonianos $\overrightarrow{B.R.}$ determinados por (3.16) con $i \in \{\frac{p_{\text{par}}}{2} - 2, \dots, \frac{p_{\text{par}}}{2} - 1\}$. Por lo tanto, existen $(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{impar}} - 1$ ciclos hamiltonianos $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ distintos que se corresponden con cada uno de las lecturas $\overrightarrow{F.R.}$ determinadas por (3.16). Desde que la lectura $\overrightarrow{F.R.}$ de (3.15) es diferente a su $\overrightarrow{B.R.}$, ambos caminos hamiltonianos $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ deberán ser adicionadas en la enumeración final. En conclusión, los diferentes caminos hamiltonianos $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ son $(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{impar}} + 1$. En caso de que $\frac{p_{\text{par}}}{2}$ sea par, como $(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{par}} - 1 - i = i + 1$, entonces $i = \frac{(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{par}} - 2}{2} = \frac{p_{\text{par}}}{4} - 1$ este índice en (3.16) construye un camino hamiltoniano $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ que es palíndromo [Niel, B. I. (2012a)]. Además, los caminos de las lecturas $\overrightarrow{F.R.}$ definidas por (3.16) con $i \in \{0, \dots, \frac{p_{\text{par}}}{4} - 2\}$ coinciden con las lecturas $\overrightarrow{B.R.}$ determinadas por (3.16) con $i \in \{\frac{p_{\text{par}}}{2} - 2, \dots, \frac{p_{\text{par}}}{4}\}$. Por lo tanto, existen $(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{par}} - 1$ caminos hamiltonianos $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ distintos que se corresponden con cada una de las lecturas $\overrightarrow{F.R.}$ de los caminos determinados por (3.16). Puesto que las lecturas $\overrightarrow{F.R.}$ de (3.15) es diferente a sus lecturas $\overrightarrow{B.R.}$, ambos caminos $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ se deben adicionar a la enumeración final. En conclusión, los caminos hamiltonianos $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ distintos son $(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{par}} + 1$. \square

Teorema 3.6.7 *Sea $p_{\text{par}} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k$ un entero par para $k \in \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$. Las trayectorias (3.17) construyen $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ en las redes $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}}}(e^{\pi i} \sqrt[n]{1}), (d_{i,j})_{n \times n})$ si $n_{\text{impar}} \geq 2p_{\text{par}} + 3$, y $\alpha = \frac{p_{\text{par}}}{2} - 1 \geq 0$ es el número de $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+$ y $\beta = \alpha + 4 = \frac{p_{\text{par}}}{2} + 3$ la cantidad de $L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+$.*

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+}_{\frac{p_{\text{par}}}{2} - 1 - i} + \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+}_2 + \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^-}_{\frac{p_{\text{par}}}{2} - 1 - i} + \\
 & + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^- + \tilde{m} L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^- + \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^- + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^-}_i + \\
 & + \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+}_2 \underbrace{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}^+ + L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^+}_i, \quad 0 \leq i \leq \frac{p_{\text{par}}}{2} - 1.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

con $\tilde{m} = (n - 1) - (2p_{\text{par}} + 2) \square$

Corolario 3.6.8 *En las redes $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}}}(e^{i\pi} \sqrt{1}), (d_{ij})_{n \times n})$ si $n_{\text{impar}} \geq 2p_{\text{par}} + 3$, las lecturas hacia adelante y hacia atrás de las secuencias (3.17) son caminos hamiltonianos $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$.*

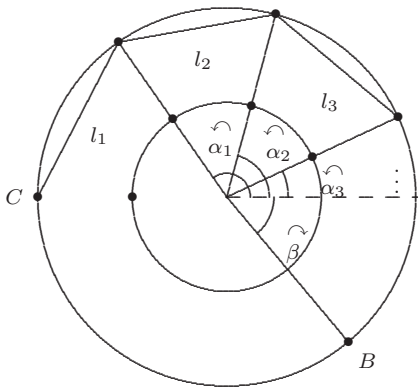
Particularmente, la enumeración de los distintos $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ originados desde las lecturas hacia adelante y hacia atrás de las secuencias (3.17) dependen de la paridad de $\frac{p_{\text{par}}}{2} - 1$. De manera específica, si $\frac{p_{\text{par}}}{2}$ es impar, i.e. $(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{impar}} - 1$ es par, entonces $(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{impar}} - 1 - i = i$, por lo tanto la secuencia en (3.17) que se construye a partir de este índice $i = \frac{(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{impar}} - 1}{2}$ es un palíndromo [Niel, B. I. (2012a)]. Además, las $(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{impar}} - 1$ secuencias definidas en (3.17) están en pares con respecto a sus lecturas $\overrightarrow{F.R.}$ y $\overleftarrow{B.R.}$ a excepción de aquella generada por el índice $i = \frac{(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{impar}} - 1}{2}$ en cuyo caso la lectura $\overrightarrow{F.R.}$ y la $\overleftarrow{B.R.}$ son coincidentes. Especialmente, el camino $\overrightarrow{F.R.}$ es un $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ determinado por $i = 0$ que coincide con la lectura $\overleftarrow{B.R.}$ del camino $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ determinado por $i = (\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{impar}} - 1$, $i = 1$ $\overrightarrow{F.R.}$ coincide con $\overleftarrow{B.R.}$ la secuencia definida por $i = (\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{impar}} - 2$ y continuando de esta manera, hasta el índice $i = \frac{(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{impar}} - 1}{2}$ en el cual la lectura $\overrightarrow{F.R.}$ y $\overleftarrow{B.R.}$ engendran un único camino hamiltoniano. Es decir, la lectura $\overrightarrow{F.R.}$ de los caminos definidos por (3.17) con el decrecimiento de los índices $i \in \{0, \dots, \frac{(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{impar}} - 1}{2} - 1\}$ coinciden con las lecturas $\overleftarrow{B.R.}$ de los caminos determinados por (3.17) con $i \in \{(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{impar}} - 1, \dots, \frac{(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{impar}} - 1}{2} + 1\}$. En conclusión, existen $(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{impar}}$, $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ distintos correspondientes con cada una de las lecturas $\overrightarrow{F.R.}$ de los caminos determinados por (3.17). Por otra parte, si $(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{par}}$ es par, i.e. $\frac{p_{\text{par}}}{2} - 1$ es impar, puesto que $(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{par}} - 1 - i \neq i$, entonces las sucesiones (3.17) construyen $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ ninguno de los cuales es un palíndromo [Niel, B. I. (2012a)]. Además, los caminos de las lecturas $\overrightarrow{F.R.}$ en los índices $\{0, \dots, \frac{p_{\text{par}}}{2} - 2\}$ coinciden, respectivamente, con aquellos de las lecturas $\overleftarrow{B.R.}$ correspondientes a los índices decrecientes $\{\frac{p_{\text{par}}}{2} - 1, \dots, \frac{p_{\text{par}}}{2} - 2 + 1\}$. En conclusión, existen $(\frac{p_{\text{par}}}{2})_{\text{par}}$, $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ distintos vis-à-vis con cada uno de los caminos $\overrightarrow{F.R.}$ determinados por (3.17). \square

El Corolario 3.6.4, Corolario 3.6.6 y Corolario 3.6.8 resultan respectivamente del Teorema 3.6.2, Teorema 3.6.5 y Teorema 3.6.7.

En conclusión, los caminos hamiltonianos $P_H^{n_{\text{impar}}-1}$ candidatos a resolver los problemas de las trayectorias de máxima longitud de viaje sobre los vértices de los N_{impar} -Gonos regulares se obtienen una vez anexado el segmento dirigido $\widehat{L_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - p}^-}$ entre el vértice final y el inicial de los caminos hamiltonianos desplegados a partir de las sucesiones (3.13) y (3.14) si p_{impar} . En otros casos, mediante los ordenamientos (3.15), (3.16), y (3.17). Siempre teniéndose en cuenta de que los palíndromos en cuyo casos las lecturas hacia adelante y hacia atrás coinciden también resuelven estos problemas específicos con máximas longitudes euclidianas de recorridos [Niel, B. I., Reartes, W. A. and Brignole, N. B. (2010)].

3.6.1. Poligonales hamiltonianas reflexivas biestrellas

En la sección §4 del siguiente Capítulo se retoma el pensamiento de Hamilton en las superficies cuasi-esféricas para analizar mediante los rayos geométricos determinados por el modelo variacional descrito en la Figura 3.12, la existencia de hamiltonianos reflexivos óptimos que resuelvan los Máx. y Mín. TSP en arquitecturas de redes construidas con nodos en de los vértices de dos n -gonos regulares concéntricos.



Cada arreglo de n ángulos $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta)$, denotado (α_i, β) , determina una trayectoria poligonal de $n + 1$ vértices -incluyendo los puntos inicial y final- de n tramos lineales. Existen trayectorias que pueden tener dos o más vértices coincidentes, es decir líneas que se reducen a un punto. Para cada $\beta \in [-\pi, 0]$ los $n - 1$ ángulos α_i son los parámetros variacionales de la longitud de recorrido de las poligonales $H^{2n_{\text{impar}}}(\alpha_i, r) = \sum_{i=1}^{n_{\text{impar}}} 2\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_i - \alpha_{i-1})}$, con $\alpha_0 = \pi, \alpha_n = \beta$, y r en $(0, 1)$ es el parámetro estructural que localiza los vértices del n_{impar} -gono regular.

Figura 3.12: N-Gonos acoplados: Ángulos variacionales α_i .

Siendo $H^{2n_{\text{impar}}}(\alpha_i, r)$ una función de la longitud de recorrido de trayectorias poligonales que generalizada en las estructuras con conectividad completa en los vértices de dos N-Gonos regulares acoplados a la función $F_n(\alpha_i, \beta)$, de ecuación (2.1) en la pág. 80 del Capítulo 2, se plantea el siguiente interrogante:

$\dot{}$ Son los Máx. TSPs en las redes $\mathcal{N}(K_{N=2n_{\text{impar}}}(e^{i\pi n_{\text{impar}}\sqrt{1}}, r e^{i\pi n_{\text{impar}}\sqrt{1}}), d_{N \times N}^E)$ resueltos replicando las formas regulares de las poligonales estrellas de máxima densidad como ocurre en los Máx. TSP de las estructuras $\mathcal{N}(K_{n=n_{\text{impar}}}(e^{i\pi n_{\text{impar}}\sqrt{1}}), d_{n \times n}^E)$?

Por ejemplo, si $\alpha_{n_{\text{impar}}} = -\pi$ en la Figura 3.13 representamos algunos resultados de casos sencillos de implementaciones computacionales efectuadas.

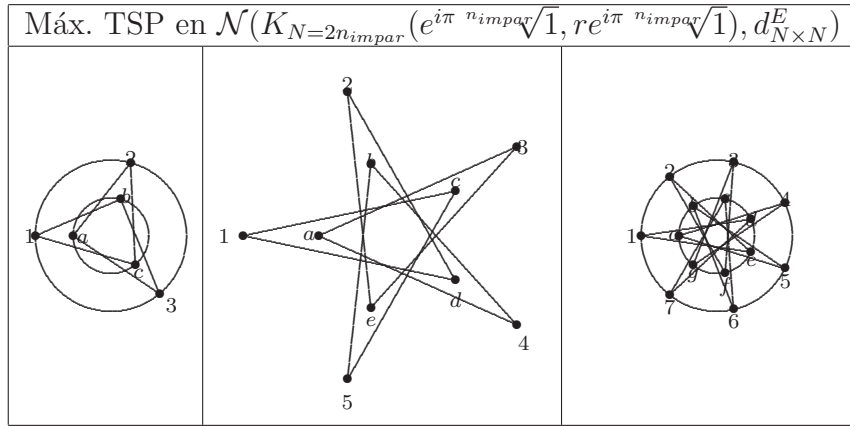


Figura 3.13: N_{impar} -Gonos acoplados: $\mathcal{N}(K_{N=2n_{\text{impar}}}(e^{i\pi n_{\text{impar}}\sqrt{1}}, \frac{1}{2}e^{i\pi n_{\text{impar}}\sqrt{1}}), d_{N \times N}^E)$.

3.6.2. Existencia de hamiltonianas biestrellas en N_{impar} -Gonos acoplados

Se consideran dos “circunferencias acopladas” -e.g. Ver Figuras 3.12, 3.13, 4.12 en las páginas 174, 175 y 199 respectivamente- en el sentido que una es la circunferencia unitaria y sobre ella se identifican los vértices $\{V_0, V_1, \dots, V_{n-1}\}$ asociados a un n -gono regular congruentes con las n raíces unitarias $e^{i\pi \frac{n}{\sqrt{1}}}$, mientras que la otra es un circunferencia concéntrica y de radio menor sobre la que se identifican los vértices $\{V'_0, V'_1, \dots, V'_{n-1}\}$, que son las proyecciones radiales de los correspondientes V_i . (Ver ilustración de la Figura 3.12).

El problema aquí consiste en estudiar las poligonales hamiltonianas biestrellas reflexivas en las estructuras de conexión completa de las redes $\mathcal{N}(K_{N=2n}(e^{i\pi \frac{n}{\sqrt{1}}}, r e^{i\pi \frac{n}{\sqrt{1}}}), d_{N \times N}^E)$ que se construyen de la siguiente manera.

Para cada s , tal que $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ los segmentos son de la forma $\overline{V_0, V'_s}, \overline{V'_s, V_{2s}}, \overline{V_{2s}, V'_{3s}}, \dots$, donde los subíndices $ks \in \mathbb{Z}_n$.

Notación 3.6.9 Se define ${}_p L_q = V_p, V'_q$ y ${}_r L'_t = V'_r, V_t$. e.g. Ver Figura 3.14, pág. 176.

En general los segmentos ${}_p L_q$ y ${}_r L'_t$ son de la forma ${}_{(i-1)s} L_{is} = \overline{V_{(i-1)s}, V'_{is}}$ y ${}_{is} L'_{(i+1)s} = \overline{V'_{is}, V_{(i+1)s}}$, con $1 \leq i \leq 2n$.

Ejemplo 3.6.10 Se considera la trayectoria hamiltoniana biestrella en la estructura de la red $\mathcal{N}(K_{N=2 \times 7}(e^{i\pi \frac{7}{\sqrt{1}}}, r e^{i\pi \frac{7}{\sqrt{1}}}), d_{N \times N}^E)$ para $n = 7$ y $s = 2$, ver Figura 3.14.

Ejemplo 3.6.11 En la estructura $\mathcal{N}(K_{N=2 \times 15}(e^{i\pi \frac{15}{\sqrt{1}}}, r e^{i\pi \frac{15}{\sqrt{1}}}), d_{N \times N}^E)$ con $r \in (0, 1)$ se representan trayectorias reflexivas cuasi-hamiltoniana en la arquitectura de dos 15-gonos regulares acoplados, para tres pares de $n = 15$ y s no relativamente primos, e.g. $s \in \{3, 5, 6\}$, ver Figura 3.15.

La sucesión S de segmentos dirigidos que la genera es $S = \{ V_0, V_2', V_2, V_4, V_4, V_6', V_6, V_8, V_8, V_{10}', \dots \}$

$$S = \{ \overline{V_0, V_2'}, \overline{V_2', V_4}, \overline{V_4, V_6'}, \overline{V_6', V_8}, \overline{V_8, V_{10}'}, \overline{V_{10}', V_0}, \overline{V_0, V_2}, \overline{V_2, V_4}, \overline{V_4, V_6}, \overline{V_6, V_8}, \overline{V_8, V_{10}}, \overline{V_{10}, V_0} \} = \{ {}_0L_2, {}_2L_4', {}_4L_6, {}_6L_8', {}_8L_{10}, {}_{10}L_0, {}_0L_2', {}_2L_4, {}_4L_6', {}_6L_8, {}_8L_{10}', {}_{10}L_0' \}.$$

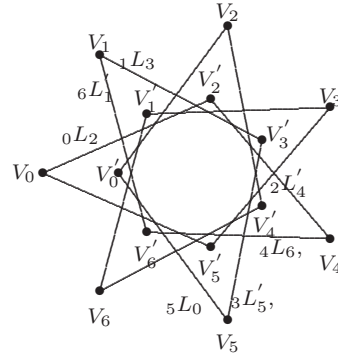


Figura 3.14: Biestrella hamiltoniana en $\mathcal{N}(K_{N=2 \times 7}(e^{i\pi \sqrt[7]{1}}, r e^{i\pi \sqrt[7]{1}}), d_{N \times N}^E)$.

| $\mathcal{N}(K_{N=2 \times 15}(e^{i\pi \sqrt[15]{1}}, r e^{i\pi \sqrt[15]{1}}), d_{N \times N}^E)$ | | |
|--|-----------------|-----------------|
| $n = 15, s = 3$ | $n = 15, s = 5$ | $n = 15, s = 6$ |
| | | |

Figura 3.15: Biestrellas cuasi-hamiltonianas en 15-gonos acoplados.

Lema 3.6.12 Para n y $s \in \mathbb{N}$, si $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces los correspondientes segmentos ${}_{(i-1)s}L_{is}$ y ${}_{is}L'_{(i+1)s}$ son todos de igual longitud. Además, el desplazamiento angular que determinan vale $\angle({}_{(i-1)s}L_{is}) = \angle({}_{is}L'_{(i+1)s}) = s \frac{2\pi}{n}$.

Demostración. En ambos casos por verificación directa vía argumentos geométricos básicos. ■

Lema 3.6.13 Sea $n \in \mathbb{N}$ impar y $s \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces al considerar la sucesión de segmentos dirigidos $S = \{ {}_{(i-1)s}L_{is}, {}_{is}L'_{(i+1)s} \}_{1 \leq i \leq 2n}$ resulta que la subsucesión de n segmentos $\bar{S} = \{ {}_0L_s, {}_sL'_{2s}, {}_{2s}L_{3s}, {}_{3s}L'_{4s}, \dots, {}_{(n-2)s}L'_{(n-1)s}, {}_{(n-1)s}L_{ns} \}$ formada por los n primeros segmentos de S , comienza en el vértice V_0 y termina en V_0' . Además el desplazamiento angular que determina \bar{S} es $s 2\pi$. Es decir, la poligonal que determina \bar{S} completa s giros alrededor del origen.

Demostración. Basta observar que los segmentos de S están colocados uno a continuación del otro y que el primero ${}_0L_s$ une el vértice V_0 con el V_s' , mientras que el último segmento de \bar{S} une $V_{(n-1)s}$ con V_{ns}' . Es decir, V_{n-s} con V_0' , dado que $ns \equiv 0$ y $(n-1)s \equiv -s \equiv n-s$ módulo n .

Por otra parte, el desplazamiento angular que le corresponde a la poligonal que determina \bar{S} es $ns \frac{2\pi}{n} = s2\pi$. ■

Teorema 3.6.14 Sea $n \in \mathbb{N}$ impar y $s \in \mathbb{N}$ relativamente primo con n y tales que $1 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces la sucesión $S = \{ (i-1)_s L_{is}, i_s L'_{(i+1)s} \}_{1 \leq i \leq 2n-1}$, determina una trayectoria biestrella reflexiva que es un ciclo hamiltoniano sobre los $2n$ vértices $\{V_0, V_1, \dots, V_{n-1}, V'_0, V'_1, \dots, V'_{n-1}\} = \{e^{i\pi(\frac{n-2k}{n})}, r e^{i\pi(\frac{n-2k}{n})}\}$, para cualquier real r en el intervalo abierto $(0, 1)$ y $0 \leq k \leq n-1$. e.g. ver ilustración en la Figura 3.16.

Demostración. Se prueba en primer lugar que no existe h , $1 \leq h < 2n$, $h \neq n$, tal que $hs \frac{2\pi}{n} = m2\pi$, para $m \in \mathbb{N}$.

Como h no es n ni múltiplo de n y s no tiene ningún factor en común con n entonces hs no es múltiplo de n .

Por lo tanto, cualquier subsucesión propia de S con h segmentos tiene un desplazamiento angular de $hs \frac{2\pi}{n}$ que no es múltiplo de 2π y por lo tanto no forma ciclo.

Si $k = n$ el Lema 3.6.13 prueba que la subsucesión \bar{S} , formada por los primeros n segmentos de S , no forma ciclo. Finalmente, para $k = 2n$ es $ks \frac{2\pi}{n} = 4s\pi$ y como por otra parte ${}_0L_s$ une el vértice V_0 con el V'_s y $(2n-1)_s L'_{2ns} = {}_{n-s}L'_0$ une V'_{n-s} con V_0 resulta que S es un ciclo hamiltoniano de orden $2n$ sobre los vértices $V_0, V_1, \dots, V_{n-1}, V'_0, V'_1, \dots, V'_{n-1}$. ■

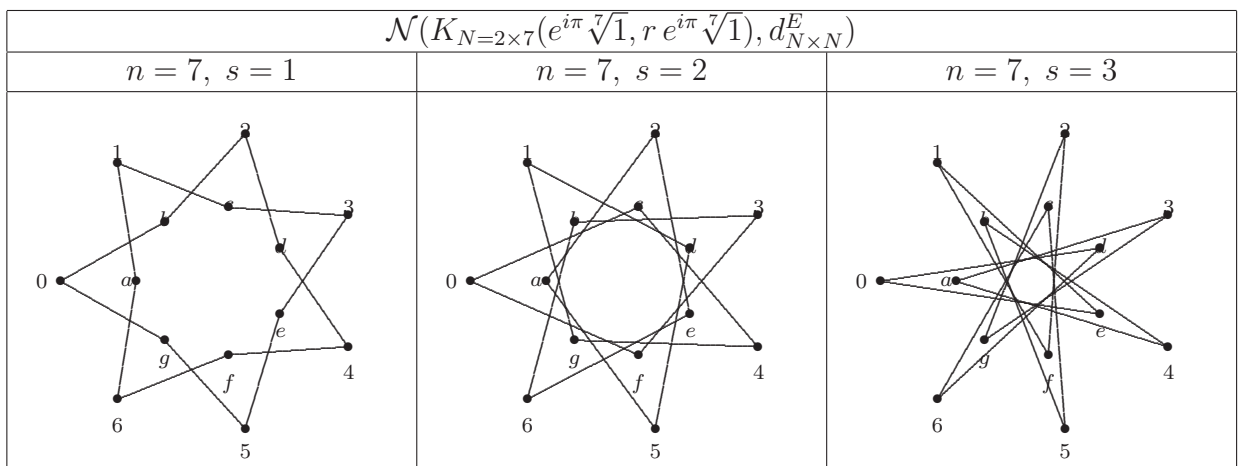


Figura 3.16: Poligonales hamiltonianas biestrellas en 7-gonos acoplados.

Capítulo 3. Algoritmo Aritmético

Teorema 3.6.15 *Sea $n \in \mathbb{N}$ par y s tal que $1 \leq s \leq \frac{n}{2}$, entonces no existe poligonal biestrella de la forma $S = \left\{ (i-1)_s L_{is}, i_s L'_{(i+1)s} \mid 1 \leq i \leq 2n-1 \right\}$ que sea un ciclo hamiltoniano reflexivo sobre los $2n$ vértices $\{V_0, V_1, \dots, V_{n-1}, V'_0, V'_1, \dots, V'_{n-1}\} = \{e^{i\pi(1-2\frac{k}{n})}, r e^{i\pi(1-2\frac{k}{n})}\}$, para cualquier real r en el intervalo abierto $(0,1)$ y $0 \leq k \leq n-1$. e.g. ver ilustración en la Figura 3.17, pág. 178.*

Demostración.

Nótese que la sucesión $S = \{S_1; S_2\}$ en la que $S_1 = {}_0L_s, {}_sL'_{2s}, {}_{2s}L_{3s}, \dots, {}_{(n-2)s}L_{(n-1)s}, {}_{(n-1)s}L'_{ns}$ y $S_2 = {}_{ns}L_{(n+1)s}, {}_{(n+1)s}L'_{(n+2)s}, \dots, {}_{(2n-2)s}L_{(n-1)s}, {}_{(2n-1)s}L'_{2ns}$ tiene la propiedad que a la subsucesión S_1 , de los n primeros segmentos de S , le corresponde un desplazamiento angular de $ns \frac{2\pi}{n} = s2\pi$. Además, el primer segmento ${}_0L_s$ de S_1 une V_0 con V'_s y el último ${}_{(n-1)s}L'_{ns} = {}_{n-s}L'_0$ une V'_{n-s} con V_0 . Es decir, la poligonal asociada a la subsucesión S_1 es un ciclo de n segmentos que comienza y finaliza en V_0 y por lo tanto la sucesión S no determina un ciclo hamiltoniano sobre los $2n$ vértices $\{V_0, V_1, \dots, V_{n-1}, V'_0, V'_1, \dots, V'_{n-1}\}$.

Más aún, los segmentos dirigidos de la segunda mitad de S repiten exactamente y en el mismo orden los n segmentos de la primera mitad S_1 y por lo tanto vuelven a describir el ciclo que define S_1 :

$$\begin{aligned} {}_{ns}L_{(n+1)s} &= {}_0L_s \\ {}_{(n+1)s}L'_{(n+2)s} &= {}_sL'_{2s} \\ {}_{(n+2)s}L_{(n+3)s} &= {}_{2s}L_{3s} \\ &\dots \\ {}_{(2n-2)s}L_{(2n-1)s} &= {}_{(n-2)s}L_{(n-1)s} \\ {}_{(2n-1)s}L'_{2ns} &= {}_{(n-1)s}L'_{ns}. \end{aligned}$$

■

En la Figura 3.17 se visualizan como ejemplos $n = 8$ para $s = 1$, $s = 2$ y $s = 3$.

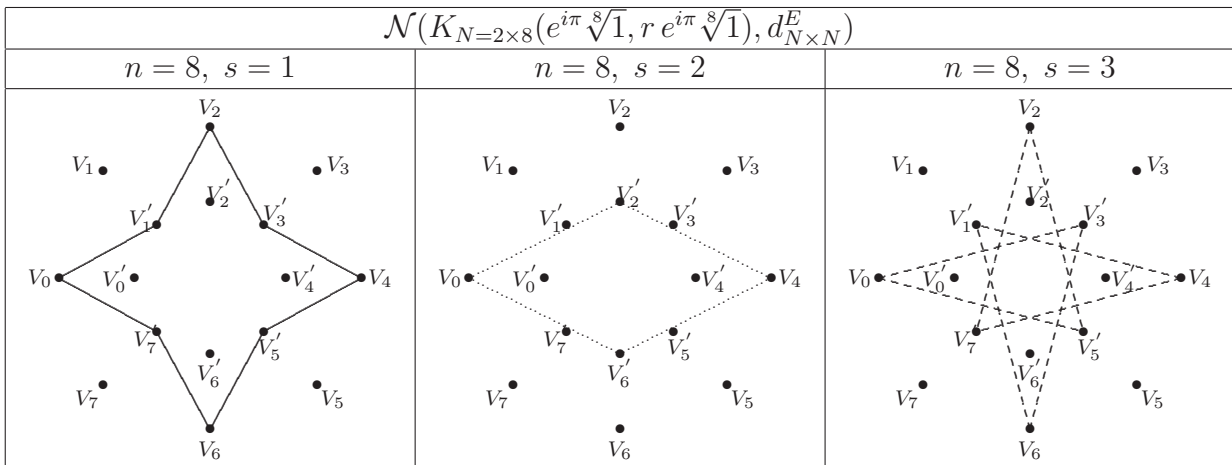


Figura 3.17: Biestrellas cuasi-hamiltonianas en 8-gonos acoplados.

3.7. Conclusiones y Conjetura sobre Máx. TSP en N_{impar} -Gonos acoplados

Las identificaciones de los hamiltonianos que resuelven los $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ distintos Máx. TSPPs sobre los vértices de un $2p + 1$ -gono regular han sido desarrolladas mediante los cómputos requeridos por el algoritmo propuesto. Este trabajo es un compendio de los resultados expuestos en las comunicaciones científicas [Niel, B. I. (2007), Niel, B. I. (2008)], la conferencia internacional [Niel, B. I., Reartes, W. A. and Brignole, N. B. (2010)] y la publicación [Niel, B. I. (2013)]. Un paso más en la compresión intrínseca del conjunto de hamiltonianos sobre los vértices de un N_{impar} -Gono regular se adquiere mediante el concepto del índice de rotación. Finalmente, se plantea como conjetura la posibilidad de que una poligonal estrella sea la que realice las longitudes máximas sobre las conexiones completas entre vértices de dos N_{impar} -Gonos regulares acoplados (ver Figura 3.12), i.e. en las estructuras de las redes $\mathcal{N}(K_{N=2n_{\text{impar}}}(e^{i\pi/n_{\text{impar}}}\sqrt{1}, r e^{i\pi/n_{\text{impar}}}\sqrt{1}), d_{N \times N}^E)$ con el parámetro estructural r en el intervalo abierto $(0, 1)$.

3.7.1. Publicaciones

Las ideas fundamentales de la §3.2 están publicadas en [Niel, B. I. (2012a)] y los aportes en la §3.4 están publicadas en [Niel, B. I. (2013)]. Y fueron presentadas en SIAM Conference on Discrete Mathematics, DM10, USA.

Parte IV

Líneas de Investigaciones Futuras

Capítulo 4

Estudios iniciados: Estructuras en *bin*-gonos y hubnet

La vida moderna vuelve imperativo la selección de estrategias eficientes para asegurar la sinergia en organizaciones de seres humanos como en conjuntos de empresas, de vehículos, de computadoras, etc. Razones que han motivado un crecimiento exponencial en los trabajos teóricos y aplicados de muy diversos Problemas del Viajante de Comercio, normalmente reconocidos por el acrónimo TSP, i.e. Traveling Salesman Problem, [Applegate, D., Bixby, R. E., Chavatal, V. and Cook, W. J. (2006)]. Es importante hacer la aclaración de que para que los procesos de transferencia de información, personas y/o cosas, resulten eficientes [Barvinok, A. I., Gimadi, E. Kh. and Serdyukov, A. I. (2002)], se deben reconocer las opciones de la ineficiencia. En otras palabras, siempre es bueno conocer y ponderar que es lo no conviene, esto es lo que ha motivado un amplio campo de trabajos en los Máx. TSP, [Barvinok, A. I. et al. (2003)].

Las aplicaciones inmediatas de los TSPs se realizan en las planificaciones de rutas y la logística de empresas de transporte aéreo, naval y terrestre. Ya que para garantizar eficiencia generalmente es necesario minimizar costos y asegurar procesos expeditos. Así como por ejemplo lo hacen las cadenas biopoliméricas de los aminoácidos, [Fernández, A., Niel, B., and Burastero, T.(1998)]. En este proyecto se formulan e inician los estudios para encontrar las resoluciones de ambas versiones de los TSPs, el Mín. TSP y el Máx. TSP en las estructuras de redes de conexión completa sobre los vértices acoplados y desacoplados de dos n -gonos regulares. De manera específica, la arquitectura de estas redes se simboliza por $\mathcal{N} := \{K_{N=2n}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}, r e^{i(\pi+\varphi)} \sqrt[n]{1}), D\}$. Notación, donde \mathcal{N} se asocia de la palabra red del inglés, $K_{N=2n}$ simboliza conectividad completa entre los $2n$ nodos, determinados en el conjunto de puntos congruente con $\{e^{i\pi} \sqrt[n]{1}, r e^{i(\pi+\varphi)} \sqrt[n]{1}\}$, en el que r es el parámetro estructural, que indica la posición en la que se localizan los vértices del n -gono regular interior, por lo que $0 < r < 1$.

En principio, se explicitan resultados de algunas de las experiencias computacionales realizadas que permiten iniciar el trabajo teórico a partir de ciertas hipótesis para resolver el Mín. y el Máx. Traveling Salesman Problem en estas redes de doble capa de vértices regularmente ubicados. Experiencias computacionales obtenidas con la implementación de búsquedas exhaustivas, de adecuación de una interface para utilizar una versión libre del Concorde [Concorde code], así como adaptaciones de los algoritmos de las estrate-

gias del Vecino más Próximo \mathcal{NN} -Nearest Neighbor- y del Vecino más Lejano -Farthest Neighbor- \mathcal{FN} o también llamadas exploraciones de máxima ineficiencia secuencial \mathcal{AG} -antigreedy. En este contexto, en una segunda etapa, se intenta conjeturar proposiciones fundamentadas en argumentos teóricos para solucionar casos en las mencionadas arquitecturas de redes. Etapa iniciadora que promueve la continuación del análisis para esclarecer desde el ámbito académico educativo y desde la investigación ciertos aportes en distintas arquitecturas de redes, que pueden dar sustento al desarrollo tecnológico en organizaciones y/o conjunto de objetos.

4.1. Longitudes en 3-gonos acoplados y desacoplados

En las estructuras de las redes $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, r e^{i(\pi+\alpha)} \sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$ con vértices congruentes a dos 3-gonos desacoplados, se seleccionan las longitudes euclídeas que ponderan las conexiones entre los seis nodos, Figura 4.1.

Se estudian las poligonales cíclicas que comienzan y finalizan en $C = (-1, 0)$ sobre la circunferencia unitaria, y que colisionan cinco veces los vértices localizados en el círculo exterior e interior. Un ciclo admisible debe pasar por cada nodo en $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, r e^{i\alpha} \sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$, con $\alpha \in [0, \frac{\pi}{3}]$, una única vez, exceptuando a C . Tres segmentos distintos conectan los vértices en la capa interior con la exterior, a saber, \tilde{l}_1, \tilde{l}_2 y \tilde{l}_3 . Mientras que, los segmentos L y l conectan vértices en la misma circunferencia.

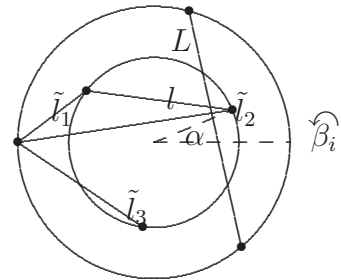


Figura 4.1: Conectores en $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, r e^{i(\pi+\alpha)} \sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$.

4.1.1. Ciclos relevantes en 3-gonos acoplados

En las arquitecturas de las redes $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, r e^{i(\pi+\alpha)} \sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$ consideramos una de las estructuras más sencillas, aquella originada cuando los vértices de cada uno de los 3-gonos regulares están radialmente alineados, i.e. $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, r e^{i\pi} \sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$, Figura 4.2.

Entre las estructuras acopladas, los datos representados en la Figura 4.4 corresponden al caso en que el parámetro estructural r ha sido escogido como 0.5.

En las estructuras $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi\sqrt[3]{1}}, r e^{i\pi\sqrt[3]{1}}), d_{N \times N}^E)$, mutatis mutandis asignamos con $\tilde{l}_1 \leftrightarrow \tilde{l}_0$, $\tilde{l}_2 = \tilde{l}_3 \leftrightarrow \tilde{l}$ y $\tilde{l}_3 = \tilde{l}_2 \leftrightarrow \tilde{l}$. La longitud de recorrido de los ciclos están conformadas por las asignaciones de los cuatro enteros positivos z_1, z_2, z_3 y z_4 en asociación directa con cada uno los conectores $\tilde{l}^\pm, l^\pm, L^\pm$ y \tilde{l}_0^\pm . Por lo tanto, la longitud del recorrido es $L(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_1 \sqrt{1+r+r^2} + z_2 r L + z_3 L + z_4 (1-r)$, es decir $L(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_1 \tilde{l} + z_2 l + z_3 L + z_4 \tilde{l}_0$.

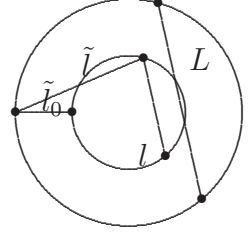


Figura 4.2: Longitud de conectores: $\{\tilde{l}_0, \tilde{l}, l, L\}$.

Es sencillo confirmar que z_2 y z_3 no pueden ser mayor o igual que 3 para generar los ciclos hamiltonianos definidos según se consigna en la Figura 4.1 cuando las estructuras corresponden a los vértices de 3-gonos regulares acoplados. Es claro que, $z_1 = 5$ no origina ciclo hamiltoniano alguno. Las restricciones naturales en los enteros z_i para lograr el objetivo planteado son $z_1 \neq 5 \cup 0 \leq z_1 \leq 6, 0 \leq z_2 \leq 2, 0 \leq z_3 \leq 2$, así como $0 \leq z_4 \leq 3$. Además, $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 6$. En consecuencia, los ciclos hamiltonianos euclidianos del caso deben ser construidos mediante las asignaciones dadas en la Tabla de la derecha, siendo $\tilde{l} = \sqrt{1+r+r^2}, l = r L, L$ y $\tilde{l}_0 = 1-r$.

| $L(z_1, z_2, z_3, z_4)$ | | | |
|-------------------------|-------|-------|---------------|
| \tilde{l} | l | L | \tilde{l}_0 |
| z_1 | z_2 | z_3 | z_4 |
| 6 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 2 |
| 3 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 3 |
| 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 0 |
| 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 3 |
| 0 | 2 | 2 | 2 |

Figura 4.3: Hamiltonianos en $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi\sqrt[3]{1}}, \frac{1}{2} e^{i\pi\sqrt[3]{1}}), d_{N \times N}^E)$.

4.1.2. Radios de transición en 3-gonos acoplados

En las estructuras de $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi\sqrt[3]{1}}, r e^{i\pi\sqrt[3]{1}}), d_{N \times N}^E)$ la longitud de los ciclos hamiltonianos que realizan el Mín. TSP, según lo indican las experiencias computacionales efectuadas en los nodos de la red $\mathcal{N}(K_{2n=6}(e^{i\pi\sqrt[3]{1}}, \frac{1}{2} \sqrt[3]{1}), d_{6 \times 6}^E)$, evidencian ausencia de unicidad para las formas de estas poligonales cíclicas óptimas. En otros términos, alcanzan la mínima longitud del recorrido según las restricciones impuestas en el planteo de la sección §4.1, Figura 4.1, distintas configuraciones que por lo general además tampoco resultan ser independientes del valor que tome el parámetro estructural r , ver Cuadro 4.1.

Los cálculos exhaustivos -Ver los datos del Cuadro 4.1- evidencian la existencia de radios de transición en los que al menos conviven dos formas de las poligonales hamiltonianas diferentes y obviamente con asignaciones distintas para los conectores en la red congruente con 3-gonos acoplados. Concretamente, la longitud de recorrido $3\tilde{l}_0 + \tilde{l} + l + L = 2\tilde{l}_0 + 2l + 2L$ en $r = 0,5 \left(\frac{1-2c_1c_2}{c_1^2-1} \right) + 0,5 \sqrt{\left(\frac{2c_1c_2-1}{c_1^2-1} \right)^2 - 4 \left(\frac{c_2^2-1}{c_1^2-1} \right)} \approx 0,122412656017793$, con $c_1 = \sqrt{3} + 1$ and $c_2 = \sqrt{3} - 1$. En contraste, dirigiendo el cursor al final del Cuadro 4.1 resulta como única la forma para el Máx. TSP, $6\tilde{l}$, resultado que por otra parte ha resultado ser independiente del parámetro estructural r seleccionado para la ubicación de los vértices internos.

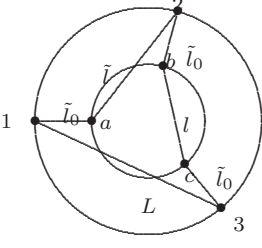
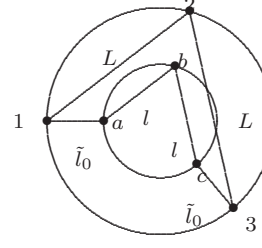
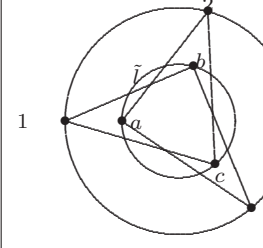
| Mín. y Máx. TSP en $\mathcal{N}(K_{2n=N}(e^{i\pi\sqrt[3]{1}}, \frac{1}{2}e^{i\pi\sqrt[3]{1}}), d_{6 \times 6}^E)$ | | |
|---|---|--|
| Mín. TSP | Mín. TSP | Máx. TSP |
| $r_t \leq r < 1$ | $0 < r \leq r_t$ | $\forall r \in (0, 1)$ |
| $3\tilde{l}_0 + \tilde{l}_1 + l_1 + L_1$ | $2\tilde{l}_0 + 2l_1 + 2L_1$ | $6\tilde{l}$ |
|  |  |  |

Figura 4.4: Mín. y Máx. TSP en $\mathcal{N}(K_{2n=6}(e^{i\pi\sqrt[3]{1}}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{1}), d_{6 \times 6}^E)$.

Ya que la longitud de cada ciclo hamiltoniano euclidiano corresponde a $L(z_1, z_2, z_3, z_4)$ para z_i $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ enteros asignados por las filas de la Tabla 4.3. Es posible demostrar que $L(6, 0, 0, 0) > L(4, 1, 1, 0) > L(4, 0, 0, 2)$ para todo r en el intervalo abierto $(0, 1)$. Así como también es posible justificar la validez de $L(6, 0, 0, 0) > L(3, 0, 0, 3)$, $L(6, 0, 0, 0) > L(1, 1, 1, 3)$, $L(6, 0, 0, 0) > L(3, 1, 1, 1)$, $L(6, 0, 0, 0) > L(2, 1, 1, 2)$, $L(6, 0, 0, 0) > L(2, 2, 2, 0)$, $L(6, 0, 0, 0) > L(1, 2, 2, 1)$ y $L(6, 0, 0, 0) > L(0, 2, 2, 2)$ para todo r en el intervalo abierto $(0, 1)$. En conclusión, estos cálculos junto a las experiencias computacionales para ciertos valores del parámetro estructural confirmarían que el Máx. TSP es único excepto el sentido de recorrido de la poligonal biestrella (ver en la Figura 4.4, el extremo derecho). Desafortunadamente, las secuencias y formas de los hamiltonianos que solucionan el Mín. TSP dependen del radio de la circunferencia interior. Los datos, levantados de la experiencias computacionales, hacen predecible esta realidad, e.g. referirse a la tercera fila del Cuadro 4.1.

Trabajando analíticamente con las longitudes se determina que $L(1, 1, 1, 3) < L(6, 0, 0, 0)$, $L(1, 1, 1, 3) < L(4, 1, 1, 0)$, $L(1, 1, 1, 3) < L(4, 0, 0, 2)$, $L(1, 1, 1, 3) < L(3, 1, 1, 1)$, $L(1, 1, 1, 3) < L(3, 0, 0, 3)$, $L(1, 1, 1, 3) < L(2, 1, 1, 2)$ la validez de cada una de estas desigualdades si $\forall r \in (0, 1)$. Sin embargo $L(1, 1, 1, 3) < L(2, 2, 2, 0)$ si y solo si $r \in \left(\frac{13-3\sqrt{13}}{2(11+6\sqrt{3})}, 1\right)$ caso contrario es falsa. Por otra parte $L(1, 1, 1, 3) < L(1, 2, 2, 1)$ si y solo si $r \in \left(\frac{2-L}{2+L}, 1\right)$ y falsa en otro caso. Finalmente $L(1, 1, 1, 3) < L(0, 2, 2, 2)$ si y solo si $r \in \left(r_t = \frac{\sqrt{21}-3}{2(3+2\sqrt{3})}, 1\right)$ y de otro modo no es válida. El análisis entre $L(2, 2, 2, 0)$, $L(1, 2, 2, 1)$, $L(0, 2, 2, 2)$ y $L(1, 1, 1, 3)$ confirma que las formas de las poligonales hamiltonianas cíclicas que realizan el Mín. TSP dependen del parámetro estructural r . Específicamente, Mín. TSP = $L(0, 2, 2, 2) = 2\tilde{l}_0 + 2l + 2L$ para $r \in \left(0, r_t = \frac{\sqrt{21}-3}{2(3+2\sqrt{3})}\right]$ y Mín. TSP = $L(1, 1, 1, 3) = 3\tilde{l}_0 + \tilde{l} + l + L$ si $r \in \left[r_t = \frac{\sqrt{21}-3}{2(3+2\sqrt{3})}, 1\right)$.

| | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--|-------------------------------------|
| $r = 0,95$ | $r = 0,5$ | $r_* = \frac{1}{1+L}$ | $r_t \approx 0,1224$ | $r = 0,05$ |
| $r = 0,95$ | $r = 0,5$ | $\tilde{l}_0 = l$ | $\tilde{l}_0 + \tilde{l}_1 = l + L$ | $r = 0,05$ |
| $3\tilde{l}_0 + \tilde{l} + l + L$ | $3\tilde{l}_0 + \tilde{l} + l + L$ | $3\tilde{l}_0 + \tilde{l} + l + L$ | $\frac{3\tilde{l}_0 + \tilde{l} + l + L}{2\tilde{l}_0 + 2l + 2L}$ | $2\tilde{l}_0 + 2l + 2L$ |
| $3\tilde{l}_0 + 3\tilde{l}$ | $3\tilde{l}_0 + 3\tilde{l}$ | $3\tilde{l}_0 + 3\tilde{l}$ | $\frac{\tilde{l}_0 + \tilde{l} + 2l + 2L}{2\tilde{l}_0 + 2l + 2L}$ $\frac{3\tilde{l}_0 + 3\tilde{l}}{2\tilde{l}_0 + 2l + 2L}$ | $\tilde{l}_0 + \tilde{l} + 2l + 2L$ |
| $2\tilde{l}_0 + 2l + 2L$ | $2\tilde{l}_0 + 2l + 2L$ | $2\tilde{l}_0 + 2l + 2L$ | $\frac{2\tilde{l} + 2l + 2L}{2\tilde{l}_0 + 4\tilde{l}}$ $\frac{\tilde{l}_0 + 3\tilde{l} + l + L}{2\tilde{l}_0 + 2l + 2L}$ | $2\tilde{l} + 2l + 2L$ |
| $2\tilde{l}_0 + 2\tilde{l} + l + L$ | $2\tilde{l}_0 + 2\tilde{l} + l + L$ | $2\tilde{l}_0 + 2\tilde{l} + l + L$ | $4\tilde{l} + l + L$ | $3\tilde{l}_0 + \tilde{l} + l + L$ |
| $2\tilde{l}_0 + 4\tilde{l}$ | $2\tilde{l}_0 + 4\tilde{l}$ | $2\tilde{l}_0 + 4\tilde{l}$ | $6\tilde{l}$ | $2\tilde{l}_0 + 2\tilde{l} + l + L$ |
| $\tilde{l}_0 + \tilde{l} + 2l + 2L$ | $\tilde{l}_0 + \tilde{l} + 2l + 2L$ | $\tilde{l}_0 + \tilde{l} + 2l + 2L$ | | $\tilde{l}_0 + 3\tilde{l} + l + L$ |
| $\tilde{l}_0 + 3\tilde{l} + l + L$ | $\tilde{l}_0 + 3\tilde{l} + l + L$ | $\tilde{l}_0 + 3\tilde{l} + l + L$ | | $4\tilde{l} + l + L$ |
| $4\tilde{l} + l + L$ | $2\tilde{l} + 2l + 2L$ | $2\tilde{l} + 2l + 2L$ | | $3\tilde{l}_0 + 3\tilde{l}$ |
| $2\tilde{l} + 2l + 2L$ | $4\tilde{l} + l + L$ | $4\tilde{l} + l + L$ | | $2\tilde{l}_0 + 4\tilde{l}$ |
| $6\tilde{l}$ | $6\tilde{l}$ | $6\tilde{l}$ | | $6\tilde{l}$ |

Cuadro 4.1: Parámetro estructural y longitudes hamiltonianas en 3-gonos acoplados.

En las estructuras $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, r e^{i\pi} \sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$, las longitudes conectivas son $\tilde{l}_2 = 1 + r$ y $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_3 = \sqrt{1 - r + r^2}$. La longitud de recorrido de los ciclos hamiltonianos se determina mediante la asignación de cuatro enteros positivos $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ y \bar{z}_4 asociados cada uno a los respectivos conectores, según el Cuadro 4.2. Entonces la longitud total recorrida - $L(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4)$ - está conformada por $L(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4) = \bar{z}_1 \sqrt{1 - r + r^2} + \bar{z}_2 r L + \bar{z}_3 L + \bar{z}_4 (1 + r)$.

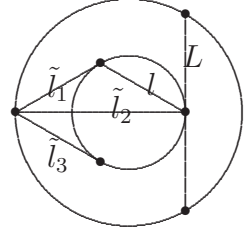


Figura 4.5: Conectores en 3-gonos regulares opuestos.

4.1.3. 3-gonos en antípodas: Longitudes y hamiltonianos.

En las estructuras de 3-gonos desacoplados, estudiamos el caso de la ubicación de los vértices de cada 3-gono regular en sus antípodas. En las arquitecturas definidas en la §4.1 implica el desacoplamiento máximo posible entre los vértices de cada uno de los 3-gonos regulares. Es decir, se estudian las estructuras de las redes $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, r \sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$.

Análisis semejantes a los efectuados en las subsecciones §4.1.1 y §4.1.2, permiten indagar acerca de los ciclos que resuelven los Máx. TSP y Mín. TSP en el caso de los vértices de los 3-gonos completamente desacoplados, i.e. las redes $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, r \sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$. Las experiencias computacionales exhiben la existencia de radios de transición en las exploraciones exhaustivas realizadas para determinar las soluciones del Mín. y Máx. TSP en la red $\mathcal{N}(K_6(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, \frac{1}{2} \sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$.

La longitud del Mín. TSP resulta ser $2\tilde{l}_1 + 2l + 2L$ si el parámetro estructural pertenece a $0 < r \leq r_t = 5 - 2\sqrt{6}$ y $6\tilde{l}_1$ cuando $r_t \leq r < 1$, respectivamente, ver Figura 4.6.

| $L(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4)$ | | | |
|---|-------------|-------------|-----------------------|
| $\tilde{l}_1 = \sqrt{1 - r + r^2}$ | $l = rL$ | L | $\tilde{l}_2 = 1 + r$ |
| \bar{z}_1 | \bar{z}_2 | \bar{z}_3 | \bar{z}_4 |
| 6 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 2 |
| 3 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 3 |
| 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 0 |
| 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 3 |
| 0 | 2 | 2 | 2 |

Cuadro 4.2: $L(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4)$ en hamiltonianos de $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi\sqrt[3]{1}}, r\sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$.

En las estructuras de las redes $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi\sqrt[3]{1}}, r\sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$, a partir de la geometría inherente a sus seis nodos, se observa que el Mín.{Mín. TSP} imita e intenta asemejarse a la forma triangular regular entre los tres vértices de $e^{i\pi\sqrt[3]{1}}$. Concretamente, $\text{Mín.}\{\text{Mín. TSP}\} = 3\sqrt{3} = 6\tilde{l}_1$ se alcanza en la red $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi\sqrt[3]{1}}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$.

Observación 4.1.1 En las redes $\mathcal{N}(K_{N=2n_{\text{impar}}}(e^{i\pi\sqrt[3]{1}}, r\sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$ de dos $2p + 1$ -gonos regulares con sus respectivos vértices en las antípodas, el Mín.{Mín. TSP} se realiza en la arquitectura de las redes $\mathcal{N}(K_{N=2n_{\text{impar}}}(e^{i\pi\sqrt[3]{1}}, \cos(\frac{\pi}{n_{\text{impar}}})\sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$.

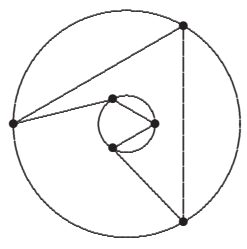
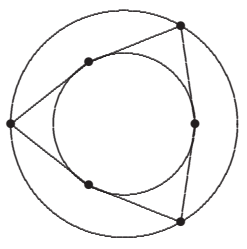
| Mín. TSP en $\mathcal{N}(K_{2n=N}(e^{i\pi\sqrt[3]{1}}, r\sqrt[3]{1}), d_{6 \times 6}^E)$ | |
|--|--|
| $0 < r \leq r_t = 5 - 2\sqrt{6}$ | $r_t \leq r < 1$ |
| $2\tilde{l}_1 + 2l + 2L$ | $6\tilde{l}_1$ |
|  |  |

Figura 4.6: Mín. TSP en $\mathcal{N}(K_{2n=6}(e^{i\pi\sqrt[3]{1}}, r\sqrt[3]{1}), d_{6 \times 6}^E)$.

Por otra parte, las configuraciones que realizan el Máx. TSP del caso exhiben dos radios estructurales de transición. La configuración óptima residente si $0 < r \leq r_t^1 = 5 - 2\sqrt{6}$ posee longitud de recorrido $3\tilde{l}_1 + 3\tilde{l}_2$ (Ver representación en el cuadro a la izquierda en la Figura 4.7). Para un factor estructural comprendido en $r_t^1 < r \leq r_t^2 = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$ la longitud de máximo recorrido resulta ser $\tilde{l}_1 + 3\tilde{l}_2 + l + L$ (Ver la representación en el cuadro central en la Figura 4.7). Finalmente, la máxima longitud del recorrido $2\tilde{l}_2 + 2l + 2L$ corresponde al rango $r_t^2 < r < 1$. (Ver cuadro en el extremo derecho de la Figura 4.7). Naturalmente, esta última figura imita al Máx. TSP en la red $\mathcal{N}(K_{N=6}(\sqrt[6]{1}, d_{N \times N}^E))$.

4.1.4. Longitudes en $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, \frac{1}{2} e^{i\alpha} \sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$.

En el Cuadro 4.3 exhibimos las longitudes de los recorridos de los ciclos hamiltonianos de algunos de los resultados obtenidos en las implementaciones computacionales exhaustivas cuando la variación de las experiencias se enfocan en el grado del desacoplamiento α entre los vértices de los 3-gonos regulares de las estructuras de las redes $\mathcal{N}(K_{N=2n=6}(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, \frac{1}{2} e^{i\alpha} \sqrt[3]{1}), d_{N \times N}^E)$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$.

Es momento de declarar que las experiencias computacionales implementadas se realizaron en un Pentium 4, C.P.U. de velocidad 2.4 GHz, 256 MB de memoria R.A.M., en plataforma Windows XP con el software DevC++ ver. 4.9.9.2. El tiempo de procesamiento hasta un número total de 14 nodes fue del orden del segundo con estrategias de exploración cuasi-exhaustivas [Andreescu, T. and Feng, Z. (2004), Gutin, G. and Punnen, A. (2007)], en 16 nodos se insumían aprox. dos segundos y más de 6 días para una red con 26 nodos. En virtud de los tiempos de procesamiento inconmensurables que implican las búsquedas en números crecientes de nodos se instrumenta una interfase para nodos de las redes $\mathcal{N}(K_{2n}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}, r e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{2n \times 2n}^E)$ que utiliza una versión libre del Concorde. Las soluciones aproximadas del Mín. TSP se generan en pantalla a partir de las heurísticas, i.e. Greedy, Boruvka, Quick Boruvka, Nearest Neighbor y Lin-Kernighan, que el programa propone para activar, [Concorde code].

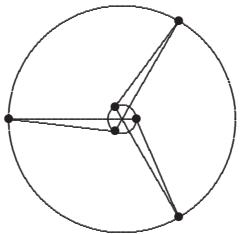
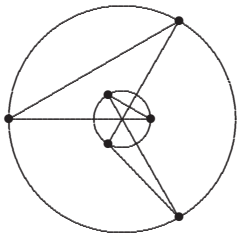
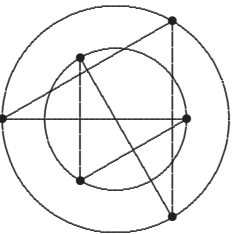
| Máx. TSP en $\mathcal{N}(K_{2n=N}(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, r \sqrt[3]{1}), d_{6 \times 6}^E)$ | | |
|--|---|---|
| $0 < r \leq r_t^1 = 5 - 2\sqrt{6}$ | $r_t^1 \leq r \leq r_t^2 = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$ | $r_t^2 \leq r < 1$ |
| $3\tilde{l}_1 + 3\tilde{l}_2$ | $\tilde{l}_1 + 3\tilde{l}_2 + l + L$ | $2\tilde{l}_2 + 2l + 2L$ |
|  |  |  |

Figura 4.7: Máx. TSP en $\mathcal{N}(K_{2n=6}(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, r \sqrt[3]{1}), d_{6 \times 6}^E)$.

| Espectrum de longitudes hamiltonianas | | |
|--|---------------------------------------|---------------------------------------|
| $\alpha \in (0, \pi/3)$ | Desacoplados, $\alpha = 0$ | Acoplados, $\alpha = \pi/3$ |
| $\tilde{l}_1 \neq \tilde{l}_2 \neq \tilde{l}_3$ | $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_3$ | $\tilde{l}_2 = \tilde{l}_3$ |
| $3\tilde{l}_1 + 3\tilde{l}_3$ | $6\tilde{l}_1$ | $3\tilde{l}_1 + 3\tilde{l}_2$ |
| $3\tilde{l}_1 + \tilde{l}_3 + l + L$ | $4\tilde{l}_1 + l + L$ | $3\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2 + l + L$ |
| $3\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2 + l + L$ | $3\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2 + l + L$ | $3\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2 + l + L$ |
| $3\tilde{l}_1 + 3\tilde{l}_2$ | $3\tilde{l}_1 + 3\tilde{l}_2$ | $3\tilde{l}_1 + 3\tilde{l}_2$ |
| $2\tilde{l}_1 + 2\tilde{l}_2 + 2\tilde{l}_3$ | $4\tilde{l}_1 + 2\tilde{l}_2$ | $2\tilde{l}_1 + 4\tilde{l}_2$ |
| $2\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2 + \tilde{l}_3 + l + L$ | $3\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2 + l + L$ | $2\tilde{l}_1 + 2\tilde{l}_2 + l + L$ |
| $2\tilde{l}_1 + 2l + 2L$ | $2\tilde{l}_1 + 2l + 2L$ | $2\tilde{l}_1 + 2l + 2L$ |
| $\tilde{l}_1 + 3\tilde{l}_3 + l + L$ | $4\tilde{l}_1 + l + L$ | $\tilde{l}_1 + 3\tilde{l}_2 + l + L$ |
| $\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2 + 2\tilde{l}_3 + l + L$ | $3\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2 + l + L$ | $\tilde{l}_1 + 3\tilde{l}_2 + l + L$ |
| $\tilde{l}_1 + \tilde{l}_3 + 2l + 2L$ | $2\tilde{l}_1 + 2l + 2L$ | $\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2 + 2l + 2L$ |
| $\tilde{l}_1 + 2\tilde{l}_2 + \tilde{l}_3 + l + L$ | $2\tilde{l}_1 + 2\tilde{l}_2 + l + L$ | $\tilde{l}_1 + 3\tilde{l}_2 + l + L$ |
| $\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2 + 2l + 2L$ | $\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2 + 2l + 2L$ | $\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2 + 2l + 2L$ |
| $\tilde{l}_2 + 3\tilde{l}_3 + l + L$ | $3\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2 + l + L$ | $4\tilde{l}_2 + l + L$ |
| $2\tilde{l}_3 + 2l + 2L$ | $2\tilde{l}_1 + 2l + 2L$ | $2\tilde{l}_2 + 2l + 2L$ |
| $\tilde{l}_1 + 3\tilde{l}_2 + l + L$ | $\tilde{l}_1 + 3\tilde{l}_2 + l + L$ | $\tilde{l}_1 + 3\tilde{l}_2 + l + L$ |
| $3\tilde{l}_2 + 3\tilde{l}_3$ | $3\tilde{l}_2 + 3\tilde{l}_1$ | $6\tilde{l}_2$ |
| $\tilde{l}_2 + \tilde{l}_3 + 2l + 2L$ | $\tilde{l}_2 + \tilde{l}_1 + 2l + 2L$ | $2\tilde{l}_2 + 2l + 2L$ |
| $3\tilde{l}_2 + \tilde{l}_3 + l + L$ | $3\tilde{l}_2 + \tilde{l}_1 + l + L$ | $4\tilde{l}_2 + l + L$ |
| $2\tilde{l}_2 + 2l + 2L$ | $2\tilde{l}_2 + 2l + 2L$ | $2\tilde{l}_2 + 2l + 2L$ |

Cuadro 4.3: Espectrum de longitudes hamiltonianas en bi 3-gono regular.

4.1.5. Mín. TSP en n -gonos acoplados

Aquí se representan algunas de las exploraciones heurísticas realizadas mediante ilustraciones de ejemplos sencillos del TSPs en las redes $\mathcal{N}(K_{2n}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}, \frac{1}{2} e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{2n \times 2n}^E)$.

En general, en $\mathcal{N}(K_{2n}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}, r e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{2n \times 2n}^E)$ el Mín. TSP es sensitivo al parámetro estructural r .

En la Figura 4.8 se ilustran los hamiltonianos cíclicos de longitud de recorrido mínimo para los casos particulares en que es $n = 7$ y $n = 8$. En general, el radio en el que dos estructuras hamiltonianas conviven con distinta combinación de conectores y distinta forma de la poligonal bi-cíclica pero manteniendo mínima la longitud de recorrido está dado por la expresión $r_t = \frac{1 - \sqrt{0,5 + 0,5 \cos \gamma}}{1 + \sqrt{0,5 + 0,5 \cos \gamma}}$, siendo $\gamma = (n - 2)n^{-1}\pi$ si n es par. En contraste, las experiencias computacionales de las exploraciones cuasi-exhaustivas y las heurísticas

del Concorde, en los casos en que n es impar determinan una transición de expresión aproximada $r_t \approx \frac{(1-\sqrt{0,5(1+\cos \eta)})(\eta-1)}{(\eta-1)[1+\sqrt{0,5(1+\cos \eta)-(1+\cos \eta)}]}$, con $\eta = (n-2)\pi n^{-1}$.

Los casos fronterizos, i.e. los problemas del TSPs si $r = 1$, arquitecturas de las redes $\mathcal{N}(K_{2n}(e^{i\pi} \sqrt[2n]{1}), d_{2n \times 2n}^E)$ y las estructuras de hub-nets $r = 0$ son las respuestas imitadas en las experiencias computacionales con r próximo al uno y el cero. Las formas de las configuraciones hamiltonianas del Mín. TSP en $\mathcal{N}(K_{2n}(e^{i\pi} \sqrt[2n]{1}), d_{2n \times 2n}^E)$ son aquellas que realizan el Mín. TSP en las estructuras de las redes con número de nodos pares $\mathcal{N}(K_{2n}(e^{i\pi} \sqrt[2n]{1}), d_{2n \times 2n}^E)$, i.e. las poligonales de los $2n$ -gonos regulares y las configuraciones del Mín. TSP de las hub-nets $\mathcal{N}(K_{2n}(e^{i\pi} \sqrt[2n]{1}), \{(0, 0)\}, d_{2n \times 2n}^E)$, respectivamente. Sin embargo, existen radios en los que los hamiltonianos óptimos en las estructuras $\mathcal{N}(K_{2n}(e^{i\pi} \sqrt[2n]{1}), r e^{i\pi} \sqrt[2n]{1}), d_{2n \times 2n}^E$ tienen composición y formas que se alejan de las preestablecidas por los casos límites.

En otras palabras, no es posible en general, asegurar la unicidad de los hamiltonianos óptimos. Aparecen como excepción las poligonales cíclicas biestrellas hamiltonianas, §3.6.1 pág. 174, existentes en las redes $\mathcal{N}(K_{2(2p+1)}(e^{i\pi} \sqrt[2p+1]{1}, r e^{i\pi} \sqrt[2p+1]{1}), d_{2n \times 2n}^E)$ de estructuras acopladas, como soluciones posibles de los Máx. TSPs, §4.2 pág. 191.

Mientras que por otra parte, las trayectorias reflexivas y las hamiltonianas reflexivas en $\mathcal{N}(K_{2(2p)}(e^{i\pi} \sqrt[2p]{1}, r e^{i\pi} \sqrt[2p]{1}), d_{2n \times 2n}^E)$ son enumerables y caracterizables, e.g. §4.2.1 192 y e.g. §4.2.5 pág. 199 y §4.2.6 pág. 201).

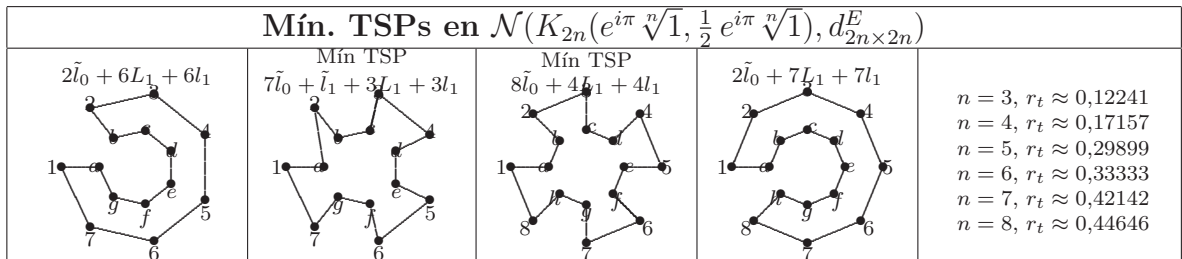


Figura 4.8: Radios de transición de Mín. TSPs en $\mathcal{N}(K_{2n}(e^{i\pi} \sqrt[2n]{1}), r e^{i\pi} \sqrt[2n]{1}), d_{2n \times 2n}^E$.

4.2. Máx. TSP en $\mathcal{N}(K_{2(2p+1)}e^{i\pi}(\sqrt[2p+1]{1}, r \sqrt[2p+1]{1}), D)$

En las estructuras acopladas $\mathcal{N}(K_{2(2p+1)}(e^{i\pi} \sqrt[2p+1]{1}, r e^{i\pi} \sqrt[2p+1]{1}), D)$ se intenta confirmar teóricamente si los ciclos hamiltonianos de máxima longitud de recorrido son poligonales biestrellas reflexivas (Ver Figura 3.6.1), Figura 4.4, Figura 4.12. Algunos instrumentos, fundamentos y argumentos teóricos se explicitan al estudiar el caso más simple, i.e. $\mathcal{N}(K_6(e^{i\pi} \sqrt[3]{1}, r e^{i\pi} \sqrt[3]{1}), D)$, la red de 3-gonos regulares acoplados. Posteriormente, se discute el caso de los Máx. TSPs en las estructuras acopladas de $2p + 1$ -gonos regulares, i.e. en las arquitecturas de las redes $\mathcal{N}(K_{2(2p+1)}(e^{i\pi} \sqrt[2p+1]{1}, r e^{i\pi} \sqrt[2p+1]{1}), D)$, Figura 3.13, [Niel, B. I. (2008)].

4.2.1. Hamiltonianos reflexivos en $\mathcal{N}(K_6(e^{i\pi}\sqrt[3]{1}, r e^{i\pi}\sqrt[3]{1}), D)$

Sea $H^6(\alpha_1, \alpha_2, r)$, (4.1), la función de longitudes de recorrido con α_1 , y α_2 los parámetros variacionales angulares (Ver Figura 4.4 , Figura 3.12, Figura 3.13 del Capítulo 3.4, Figura 3.6.1). Mientras que r es el parámetro estructural que ubica la circunferencia donde se localizan los vértices interiores del 3-gono regular y que se corresponde con el modelo explicado en §4.1. $H^6(\alpha_1, \alpha_2, r)$ es una función continua respecto de las variaciones angulares. Y fijo $r = r_*$ el parámetro estructural en algún valor del intervalo $0 < r < 1$, $H^6(\alpha_1, \alpha_2, r_*)$ es una función periódica.

Por razones de brevedad, se muestran las formulæ que permiten caracterizar los óptimos de $H^6(\alpha_1, \alpha_2, r)$ en un conjunto compacto $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$ definido por $-\pi \leq \alpha_1 \leq \pi \times -\pi \leq \alpha_2 \leq \pi$ cuyos resultados de manera simplificada, se exhiben en la Figura 4.9. Cada uno de ellos han sido obtenidos del estudio completo de las formas diferenciales lineal y cuadrática de $H^6(\alpha_1, \alpha_2, r)$ cualquiera sea $r = r_*$ en el intervalo abierto $(0, 1)$ y desde la evaluación de cada una de las derivadas parciales de primer y segundo grado. Además, las expresiones de las derivadas parciales de cualquier grado de $H^6(\alpha_1, \alpha_2, r)$ determinan que se trata de una función continuamente diferenciable $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, 1)$.

$$H^6(\alpha_i) = 2 \left\{ \sum_{i=1}^3 \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_i - \alpha_{i-1})} \right\}, \quad a_0 = \pi, \quad a_3 = -\pi \quad (4.1)$$

$$H^6_{\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2) = 2r \left\{ \frac{\sin(\alpha_1 - \pi)}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_1 - \pi)}} - \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} \right\}$$

$$H^6_{\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2) = 2r \left\{ \frac{\sin(\alpha_2 - \pi)}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \pi)}} + \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} \right\}$$

En la región $0 < r < 1$, $-\pi \leq \alpha_1 \leq \pi$, $-\pi \leq \alpha_2 \leq \pi$ los puntos críticos estacionarios de $H^6(\alpha_1, \alpha_2)$, i.e. aquellos que resuelven $H^6_{\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2) = H^6_{\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ son:

$$\left\{ \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right), (0, 0), (\pi, -\pi), (\pi, \pi), (-\pi, -\pi), (-\pi, \pi), (\pi, 0), (-\pi, 0), (0, \pi), (0, -\pi) \right\}$$

$$H^6_{\alpha_1\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2) = -2r^2 \left\{ \frac{(\cos(\alpha_1 - \pi) - r)(\cos(\alpha_1 - \pi) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_1 - \pi))^{3/2}} + \frac{(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r)(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \alpha_1))^{3/2}} \right\}$$

$$H^6_{\alpha_1\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2) = 2r^2 \left\{ \frac{(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r)(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \alpha_1))^{3/2}} \right\}$$

$$H^6_{\alpha_2\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2) = -2r^2 \left\{ \frac{(\cos(\alpha_2 - \pi) - r)(\cos(\alpha_2 - \pi) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \pi))^{3/2}} + \frac{(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r)(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \alpha_1))^{3/2}} \right\}$$

$$\mathcal{H}_{2 \times 2}^6 = \begin{vmatrix} H^6_{\alpha_1\alpha_1} & H^6_{\alpha_1\alpha_2} \\ H^6_{\alpha_1\alpha_2} & H^6_{\alpha_2\alpha_2} \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{2 \times 2}^6 = -4r^4 \left\{ \frac{(\cos(\alpha_1 - \pi) - r)(\cos(\alpha_1 - \pi) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_1 - \pi))^{3/2}} \cdot \frac{(\cos(\alpha_2 - \pi) - r)(\cos(\alpha_2 - \pi) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \pi))^{3/2}} + \right.$$

$$+ \frac{(\cos(\alpha_1 - \pi) - r)(\cos(\alpha_1 - \pi) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_1 - \pi))^{3/2}} \cdot \frac{(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r)(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \alpha_1))^{3/2}} +$$

$$+ \left. \frac{(\cos(\alpha_2 - \pi) - r)(\cos(\alpha_2 - \pi) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \pi))^{3/2}} \cdot \frac{(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r)(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \alpha_1))^{3/2}} \right\}$$

Si el parámetro estructural de la arquitectura de la red pertenece al intervalo abierto $(0, 1)$, $H^6(\alpha_1, \alpha_2, r)$ es una función diferenciable en cualquier región y con periodicidad en los parámetros variacionales α_i , con $i \in \{1, 2\}$ para cada r_* . Por lo tanto, en el conjunto compacto $-\pi \leq \alpha_1 \leq \pi$, $-\pi \leq \alpha_2 \leq \pi$, $H^6(\alpha_1, \alpha_2, r_*)$ debe alcanzar su valor máximo y su valor mínimo absoluto para cada $r_* \in (0, 1)$. En base a los cálculos realizados (Ver Tabla en la Figura 4.9) el Mín. $H^6(\alpha_1, \alpha_2, r_*) = 6(1 - r_*)$ se obtiene en los puntos críticos estacionarios $\{(\pi, -\pi), (\pi, \pi), (-\pi, -\pi), (-\pi, \pi)\}$. Además, el análisis de los signos de los determinantes menores principales de la matriz hessiana determine que todos ellos son mínimos relativos de $H^6(\alpha_1, \alpha_2, r_*)$. Por otra parte, se determina el Máx. Absoluto de $H^6(\alpha_1, \alpha_2, r_*)$ al constatar que en las cuatro fronteras del compacto $-\pi \leq \alpha_1 \leq \pi$, $-\pi \leq \alpha_2 \leq \pi$, $H^6(\alpha_1, \alpha_2, r_*)$ no puede superar el valor máximo alcanzado por los extremos relativos $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ y $(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$ (Ver. trayectoria hamiltoniana reflexiva para $r_* = \frac{1}{2}$ del cuadro derecho de la Figura 4.4 en la pág. 186).

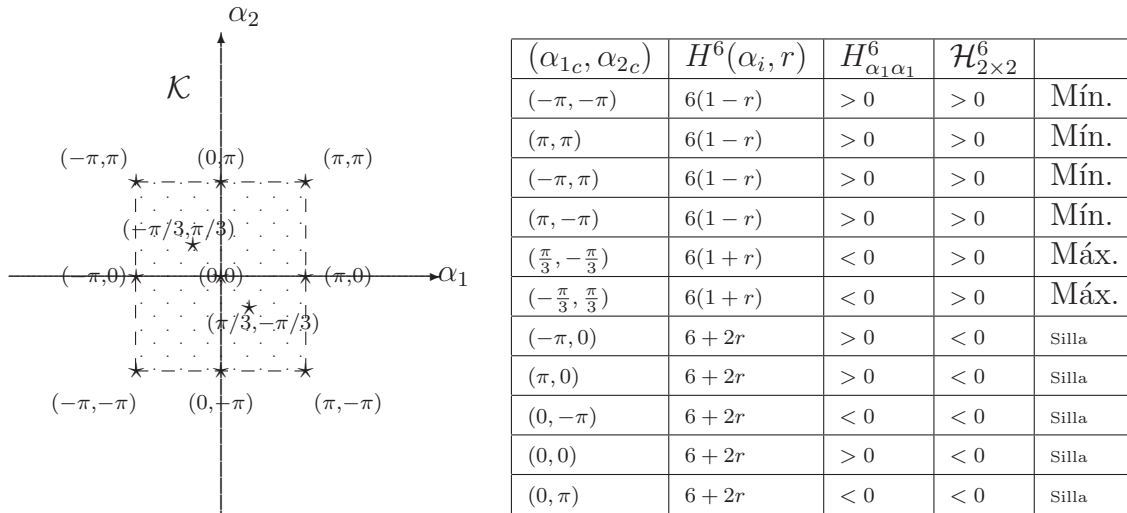


Figura 4.9: Caracterización de hamiltonianos reflexivos en 3-gonos acoplados.

4.2.2. Parámetro estructural en $\mathcal{N}(K_6(e^{i\pi}\sqrt[3]{1}, r e^{i\pi}\sqrt[3]{1}), D)$

Las expresiones de $H^6_r(\alpha_1, \alpha_2, r)$ y de $H^6_{rr}(\alpha_1, \alpha_2, r)$ establecen que $H^6(\alpha_1, \alpha_2, r)$ es una función diferenciable con respecto al parámetro estructural r si $r \in (0, 1)$.

$$H^6_r(\alpha_1, \alpha_2, r) = 2 \left\{ \frac{r - \cos(\alpha_1 - \pi)}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_1 - \pi)}} + \frac{r - \cos(\alpha_2 - \pi)}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \pi)}} + \frac{r - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} \right\}$$

$$H^6_{rr}(\alpha_1, \alpha_2, r) = 2 \left\{ \frac{\sin^2(\alpha_1 - \pi)}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_1 - \pi))^{3/2}} + \frac{\sin^2(\alpha_2 - \pi)}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \pi))^{3/2}} + \frac{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \alpha_1))^{3/2}} \right\}$$

La expresión de $H^6_{rr}(\alpha_1, \alpha_2, r)$ para r en $(0, 1)$ se anula en los puntos en los que los parámetros variacionales angulares satisfacen la siguientes identidades trigonométricas:

$$\sin^2(\alpha_1 - \pi) = \sin^2(\alpha_2 - \pi) = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$$

Los puntos $\{(0, 0), (\pi, -\pi), (\pi, \pi), (-\pi, -\pi), (-\pi, \pi), (\pi, 0), (-\pi, 0), (0, \pi), (0, -\pi)\}$, resultan ser las soluciones en el compacto seleccionado, (ver Figura 4.9, izquierda). A partir de la continuidad uniforme y de la diferenciabilidad respecto del parámetro estructural, cuando $r \rightarrow 1$, la función $H^6(\alpha_1, \alpha_2, r)$ se convierte en la función $2F_3(\alpha_1, \alpha_2, -\pi)$ de la subsección §2.2.2, en la pág. 84.

| $(\alpha_{1c}, \alpha_{2c})$ | $r - \cos(\alpha_1 - \pi)$ | $r - \cos(\alpha_2 - \pi)$ | $r - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$ | $H^6_r(\alpha_1, \alpha_2, r)$ | $H^6_{rr}(\alpha_1, \alpha_2, r)$ |
|-----------------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------|---|-----------------------------------|
| $(-\pi, -\pi)$ | $r - 1$ | $r - 1$ | $r - 1$ | -6 | 0 |
| (π, π) | $r - 1$ | $r - 1$ | $r - 1$ | -6 | 0 |
| $(-\pi, \pi)$ | $r - 1$ | $r - 1$ | $r - 1$ | -6 | 0 |
| $(\pi, -\pi)$ | $r - 1$ | $r - 1$ | $r - 1$ | -6 | 0 |
| $(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$ | $r + \frac{1}{2}$ | $r + \frac{1}{2}$ | $r + \frac{1}{2}$ | $\frac{6(r + \frac{1}{2})}{\sqrt{r^2 + r + 1}}$ | $\frac{9}{2(r^2 + r + 1)^{3/2}}$ |
| $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ | $r + \frac{1}{2}$ | $r + \frac{1}{2}$ | $r + \frac{1}{2}$ | $\frac{6(r + \frac{1}{2})}{\sqrt{r^2 + r + 1}}$ | $\frac{9}{2(r^2 + r + 1)^{3/2}}$ |
| $(-\pi, 0)$ | $r - 1$ | $r + 1$ | $r + 1$ | 2 | 0 |
| $(\pi, 0)$ | $r - 1$ | $r + 1$ | $r + 1$ | 2 | 0 |
| $(0, -\pi)$ | $r + 1$ | $r - 1$ | $r + 1$ | 2 | 0 |
| $(0, 0)$ | $r + 1$ | $r + 1$ | $r - 1$ | 2 | 0 |
| $(0, \pi)$ | $r + 1$ | $r - 1$ | $r + 1$ | 2 | 0 |

Cuadro 4.4: Parámetro estructural y ángulos variacionales críticos.

El modelo variacional, §3.6.1, Figura 3.12, reconoce la existencia de una sola forma regular reflexiva hamiltoniana (Ver Figura 4.4, cuadro de la derecha), recorrida por la poligonal biestrella en sentido horario, $(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$, y aquella recorrida en sentido ccw. definida por los parámetros variacionales críticos $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

Se está en condiciones de afirmar el siguiente resultado.

Proposición 4.2.1 *En las estructuras $\mathcal{N}(K_6(e^{i\pi}\sqrt[3]{1}, r e^{i\pi}\sqrt[3]{1}), D)$ el Máx. TSP se resuelve con los hamiltonianos reflexivos que realizan el máximo absoluto de la función $H^6(\alpha_1, \alpha_2, r)$ independientemente del valor que tome el parámetro estructural $r \in (0, 1)$.*

4.2.3. Algoritmo y hamiltonianos en n -gonos acoplados

Se propone un algoritmo aritmético para detectar ciclos hamiltonianos en las arquitectura de las redes $\mathcal{N}(K_{2n}(e^{i\pi}\sqrt[n]{1}, r e^{i\pi}\sqrt[n]{1}), D)$.

Se definen como “bivector” a una cuaterna de la forma (I, F, C_I, C_F) , que caracteriza a vectores -bidimensionales- que unen dos nodos cualesquiera de una estructura asociable a los vértices de dos n -gonos regulares en bicapa, precisamente los puntos de la forma $e^{i\pi}\sqrt[n]{1}$, sobre la circunferencia unitaria y sus respectivas proyecciones radiales sobre otra circunferencia concéntrica de radio $r < 1$.

Los nodos están enumerados, en ambas circunferencias, por los enteros módulo n , en sentido horario y comenzando con $V_0(-1, 0)$.

Las dos primeras componentes I y F indican respectivamente los vértices inicial y final del vector que une dos nodos. Las dos restantes componentes C_I y C_F indican respectivamente la circunferencia en que están el origen I y el extremo F . Se asigna 1 a la circunferencia exterior y 2 a la interior.

Ejemplo 4.2.2 $(0, 2, 1, 2)$ indica al vector que une el nodo 0 de la circunferencia exterior con el nodo 2 de la interior.

Ejemplo 4.2.3 $(0, 0, 1, 2)$ indica al vector que une el nodo 0 de la circunferencia exterior con el nodo 0 de la interior.

Ejemplo 4.2.4 $(0, 0, 1, 1)$ caracteriza al vector puntual que corresponde al punto $V_0(-1, 0)$ en la circunferencia unitaria.

Dos bivectores (I_1, F_1, C_I^1, C_F^1) y (I_2, F_2, C_I^2, C_F^2) se pueden “sumar” si y solo si $I_2 = F_1$ y $C_I^2 = C_F^1$. Con esta condición se define la suma, o resultante, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} (I_1, F_1, C_I^1, C_F^1) \\ + \\ (I_2, F_2, C_I^2, C_F^2) \\ \hline (I_1, F_2, C_I^1, C_F^2) \end{array}$$

Esta operación es asociativa, pero no es conmutativa.

Lema 4.2.5 *Dados tres bivectores adicionales, es decir de la forma $V_I = (I_1, F_1, C_I^1, C_F^1)$, $V_2 = (I_2, F_2, C_I^2, C_F^2)$ y $V_3 = (I_3, F_3, C_I^3, C_F^3)$, vale que $(V_1 + V_2) + V_3 = V_1 + (V_2 + V_3)$.*

Demostración.

Basta hacer las dos sumas \square

Nos interesa estudiar las trayectorias, cíclicas y no cíclicas con nodos en los $2n$ puntos de la estructuras $\mathcal{N}(K_{2n}(e^{i\pi\sqrt[n]{1}}, r e^{i\pi\sqrt[n]{1}}), D)$.

Es claro que cualquier sucesión de bivectores $V_1 = (0, F_1, 1, C_F^1), V_2, \dots, V_k, k \leq 2n$ y tal que son adicionables en el orden en que aparecen en la sucesión, forman una trayectoria que comienza en el punto $(-1, 0)$.

En adelante nos referiremos, solamente, a sucesiones de este tipo.

Lema 4.2.6 *i) La condición necesaria y suficiente para que una trayectoria determinada por una sucesión de $2n-1$ elementos, V_1, \dots, V_{2n-1} , sea abierta y hamiltoniana sobre los $2n$ nódulos del sistema bi-gonos acoplados, es que resulten diferentes todas las sumas parciales*

$$\begin{array}{r}
 S_1 = V_1 \\
 + \\
 S_2 = S_1 + V_2 \\
 + \quad \dots \quad \dots \\
 \hline
 S_{2n-1} = S_{2n-2} + V_{2n-1} \neq (0, 0, 1, 1)
 \end{array}$$

ii) La condición necesaria y suficiente para que una sucesión de $2n$ elementos V_1, \dots, V_{2n} determine una trayectoria hamiltoniana cíclica sobre los $2n$ nodos de la arquitectura de las redes bicapa es que resulten diferentes las sumas parciales

$$\begin{array}{r}
 S_1 = V_1 \\
 + \\
 S_2 = S_1 + V_2 \\
 + \quad \dots \quad \dots \\
 \hline
 S_{2n-1} = S_{2n-2} + V_{2n-1} \neq (0, 0, 1, 1)
 \end{array}$$

y que además $S_{2n-1} + V_{2n} = (0, 0, 1, 1)$.

Demostración.

Ambas demostraciones resultan obvias a partir del hecho que cualquiera suma parcial $S_k = S_{k-1} + V_k$ determina la resultante de la poligonal de lados V_1, \dots, V_k .

Ejemplo 4.2.7 *En las redes $\mathcal{N}(K_{2n}(e^{i\pi\sqrt[n]{1}}, r e^{i\pi\sqrt[n]{1}}), D)$ existe la poligonal biestrella de máxima densidad.*

La secuencia de bivectores que generan el poligonal biestrella de máxima densidad en las redes $\mathcal{N}(K_{2n}(e^{i\pi\sqrt[n]{1}}, r e^{i\pi\sqrt[n]{1}}), D)$:

$$V^1 = (0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1, 2)$$

$$V^2 = (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 2, 1)$$

$$V^3 = (2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, 1, 2)$$

$$V^4 = (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, 2, 1)$$

$$V^{2k-1} = (2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k + 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k, 1, 2)$$

$$V^{2(k+1)} = (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k, 2, 1)$$

$$V^{2n-1} = (1, \overbrace{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{2n-1}, 1, 2)$$

$$V^{2n} = (\underbrace{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}_{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, 0, 2, 1)$$

En la poligonal biestrella de máxima densidad las sumas parciales son:

$$S^1 = (0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1, 2)$$

$$S^2 = (0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1, 2) + (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 2, 1) = (0, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1, 1)$$

$$S^3 = (0, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1, 1) + (2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, 1, 2) = (0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, 1, 2)$$

$$S^4 = (0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, 1, 2) + (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, 2, 1) = (0, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, 1, 1)$$

$$S^5 = (0, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, 1, 1) + (2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2, 1, 2) = (0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2, 1, 2)$$

$$S^6 = (0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2, 1, 2) + (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2, 2, 1) = (0, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2, 1, 1)$$

$$S^{2k+1} = (0, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k, 1, 2) + (2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (k+1), 2, 1) = (0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (k+1), 1, 1)$$

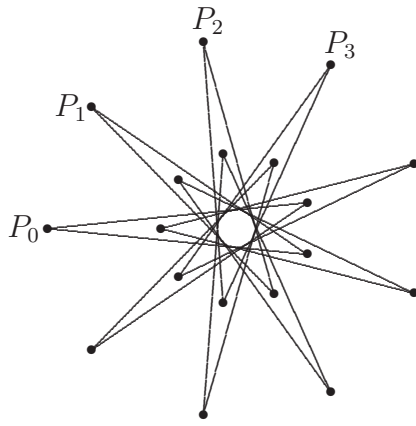
$$S^{2(k+1)} = (0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (k+1), 1, 1) + (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (k+1), 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (k+1), 1, 2) = (0, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (k+1), 1, 2)$$

$$S_n = S_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} = (0, -1, 1, 1) = (0, n-1, 1, 1)$$

$$S_{n+1} = S_{2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)} = (0, n-1, 1, 2)$$

La longitud total del recorrido realizado las poligonales hamiltonianas biestrellas cíclicas de máxima densidad es $\mathcal{L}(\star) = 2n_{impar} \sqrt{1 + r^2 + 2r \cos(\frac{-\pi}{n_{impar}})}$. La Figura 4.10 se explicitan las componentes de las cuaternas que originan la configuración reflexiva de máxima longitud asociada a los vértices de dos 9-gonos regulares acoplados.

$\mathcal{N}(K_{18}(e^{i\pi} \sqrt[9]{1}, \frac{1}{2} e^{i(\pi)} \sqrt[9]{1}), D) : \text{bi}\{9/4\}$ estrella de máx. densidad.



| bivectores | | | |
|---|--------------|----------|--------------|
| V^1 | (0, 4, 1, 2) | V^2 | (4, 8, 2, 1) |
| V^3 | (8, 3, 1, 2) | V^4 | (3, 7, 2, 1) |
| V^5 | (7, 2, 1, 2) | V^6 | (2, 6, 2, 1) |
| V^7 | (6, 1, 1, 2) | V^8 | (1, 5, 2, 1) |
| V^9 | (5, 0, 1, 2) | V^{10} | (0, 4, 2, 1) |
| V^{11} | (4, 8, 1, 2) | V^{12} | (8, 3, 2, 1) |
| V^{13} | (3, 7, 1, 2) | V^{14} | (7, 2, 2, 1) |
| V^{15} | (2, 6, 1, 2) | V^{16} | (6, 1, 2, 1) |
| V^{17} | (1, 5, 1, 2) | V^{18} | (5, 0, 2, 1) |
| $r = \frac{1}{2}, \quad \mathcal{L} = 18\sqrt{\frac{5}{4}} + \cos(\frac{\pi}{9})$ | | | |

Figura 4.10: Bivectores en hamiltoniano biestrella en 9-gonos acoplados.

Observación 4.2.8 La Figura 4.11 muestra las poligonales reflexivas cuando los vértices de dos $2p$ -gonos regulares están acoplados o desacoplados. Por lo tanto cabe preguntarse en qué circunstancias La función de Euler §2.2.3 en la pág. 87 enumerará las trayectorias reflexivas y cuándo aquellas que resulten ser reflexivas y hamiltonianas ?

La respuesta está determinada por el Teorema 3.6.14 en la pág. 177 y el Teorema 3.6.15 en la pág. 177.

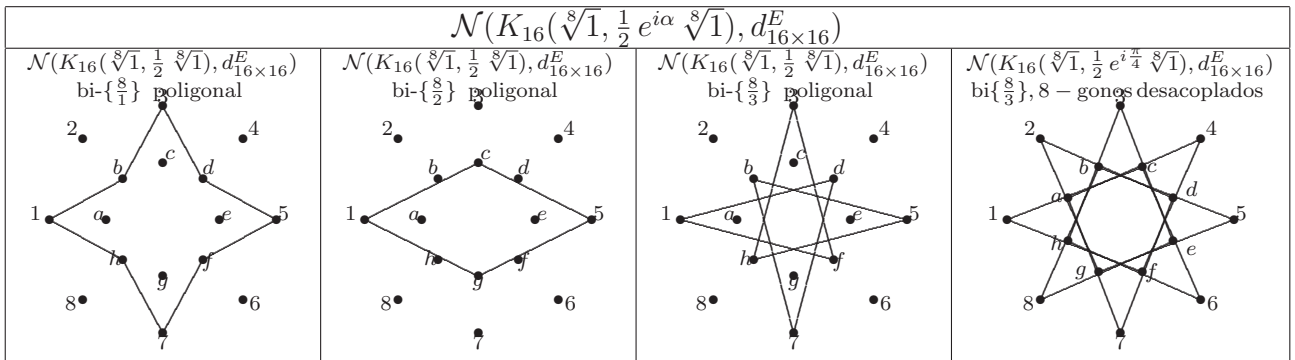


Figura 4.11: Poligonales biestrellas reflexivas en 8-gonos.

4.2.4. Máx. TSP en las redes $\mathcal{N}(K_{2n}(e^{i\pi} \sqrt{n}, e^{i\pi} \sqrt{n}), d_{N \times N}^E)$

Algunos de los resultados obtenidos de las exploraciones computacionales cuasi-exhaustivas en las redes $\mathcal{N}(K_{2n=N}(e^{i\pi} \sqrt{n}, \frac{1}{2} e^{i\pi} \sqrt{n}), d_{N \times N}^E)$ están representados en la Figura 4.12.

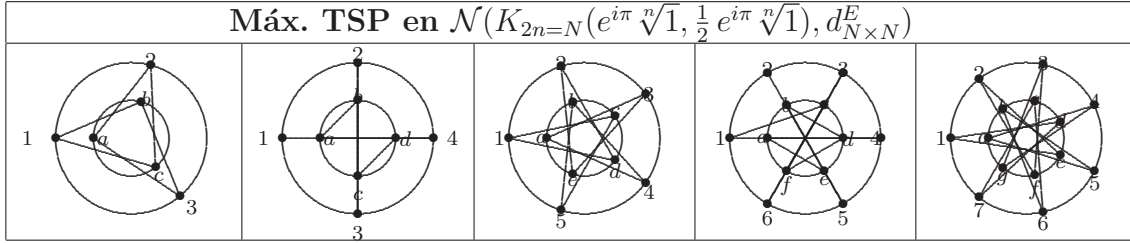
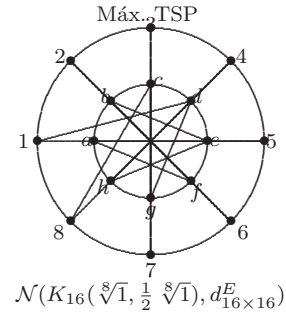


Figura 4.12: Formas del Máx. TSP en $\mathcal{N}(K_{N=2n}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}, \frac{1}{2} e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{N \times N}^E)$.

En las arquitecturas de dos n -gonos acoplados $\mathcal{N}(K_{N=2n}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}, r e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{N \times N}^E)$ cabe preguntarse si los hamiltonianos de máxima ineficiencia convergen hacia las formas de los ciclos que resuelven el Máx. TSP en las estructuras $\mathcal{N}(K_{N=2n}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{N \times N}^E)$ (Ver Figura 4.12).



4.2.5. El caso más simple de acoplamiento en paridad

Se consideran las arquitecturas $\mathcal{N}(K_8(e^{i\pi} \sqrt[4]{1}, r e^{i(\pi+\beta)} \sqrt[4]{1}), D)$ y entre ellas los casos más sencillos $\beta = 0$. El modelo variacional §3.6.1 en la pág. 174 conduce a las siguientes expresiones obtenidas de manera análoga a las efectuadas en la sección §4.2.1.

$$H^8(\alpha_i) = 2 \left\{ \sum_{i=1}^4 \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_{i-1} - \alpha_i)} \right\}, \quad a_0 = \pi, \quad a_4 = \pi$$

$$H^8_{\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2r \left\{ \frac{\sin(\alpha_1 - \pi)}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_1 - \pi)}} - \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} \right\}$$

$$H^8_{\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2r \left\{ \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} - \frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}} \right\}$$

$$H^8_{\alpha_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2r \left\{ \frac{\sin(\alpha_3 - \pi)}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_3 - \pi)}} + \frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}} \right\}$$

$$H^8_{\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = H^8_{\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = H^8_{\alpha_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

Las identidades anteriores para cualquier valor estructural, $r \in (0, 1)$, se resuelven a partir del sistema de identidades siguiente: $\alpha_3 = -\alpha_1$, $\alpha_3 - \alpha_2 = \pm\pi + \alpha_1$ y $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm\pi + \alpha_1$. Entonces, las abscisas críticas estacionarias en el compacto $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$ determinado por $-\pi \leq \alpha_1 \leq \pi$, $-\pi \leq \alpha_2 \leq \pi$ y $-\pi \leq \alpha_3 \leq \pi$ son: $(-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2})$, $(0, \pi, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2})$ y $(0, -\pi, 0)$. La primera y tercera terna angular definen una poligonal reflexiva recorrida dos veces con forma semejante a la representación del segundo cuadro en la Figura 4.11 de la pág. 198.

$$H^8_{\alpha_1\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -2r^2 \left\{ \frac{(\cos(\alpha_1 - \pi) - r)(\cos(\alpha_1 - \pi) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_1 - \pi))^{3/2}} + \frac{(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r)(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \alpha_1))^{3/2}} \right\}$$

$$H^8_{\alpha_1\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2r^2 \left\{ \frac{(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r)(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \alpha_1))^{3/2}} \right\}$$

$$H^8_{\alpha_1\alpha_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

$$H^8_{\alpha_2\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -2r^2 \left\{ \frac{(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r)(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \alpha_1))^{3/2}} + \frac{(\cos(\alpha_3 - \alpha_2) - r)(\cos(\alpha_3 - \alpha_2) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_3 - \alpha_2))^{3/2}} \right\}$$

$$H^8_{\alpha_2\alpha_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2r^2 \left\{ \frac{(\cos(\alpha_3 - \alpha_2) - r)(\cos(\alpha_3 - \alpha_2) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_3 - \alpha_2))^{3/2}} \right\}$$

$$H^8_{\alpha_3\alpha_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -2r^2 \left\{ \frac{(\cos(\alpha_3 - \pi) - r)(\cos(\alpha_3 - \pi) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \alpha_1))^{3/2}} + \frac{(\cos(\alpha_3 - \alpha_2) - r)(\cos(\alpha_3 - \alpha_2) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_3 - \alpha_2))^{3/2}} \right\}$$

$$\mathcal{H}_{3 \times 3}^8 = \begin{vmatrix} H^8_{\alpha_1\alpha_1} & H^8_{\alpha_1\alpha_2} & 0 \\ H^8_{\alpha_1\alpha_2} & H^8_{\alpha_2\alpha_2} & H^8_{\alpha_2\alpha_3} \\ 0 & H^8_{\alpha_3\alpha_2} & H^8_{\alpha_3\alpha_3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{2 \times 2}^8 &= 4r^4 \left\{ \frac{(\cos(\alpha_1 - \pi) - r)(\cos(\alpha_1 - \pi) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_1 - \pi))^{3/2}} \cdot \frac{(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r)(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \alpha_1))^{3/2}} + \right. \\ &+ \frac{(\cos(\alpha_1 - \pi) - r)(\cos(\alpha_1 - \pi) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_1 - \pi))^{3/2}} \cdot \frac{(\cos(\alpha_3 - \alpha_2) - r)(\cos(\alpha_3 - \alpha_2) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_3 - \alpha_2))^{3/2}} + \\ &\left. + \frac{(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r)(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_2 - \alpha_1))^{3/2}} \cdot \frac{(\cos(\alpha_3 - \alpha_2) - r)(\cos(\alpha_3 - \alpha_2) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_3 - \alpha_2))^{3/2}} \right\} \end{aligned}$$

Si A_{ij} $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ denota $A_i = \frac{(\cos(\alpha_i - \pi) - r)(\cos(\alpha_i - \pi) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_i - \pi))^{3/2}}$ mientras que A_{ij} con $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$ y $j \neq i$ simboliza $A_{ij} = \frac{(\cos(\alpha_j - \alpha_i) - r)(\cos(\alpha_j - \alpha_i) - r^{-1})}{(1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_j - \alpha_i))^{3/2}}$

$$\mathcal{H}_{3 \times 3}^8 = -8r^6 \{A_1 A_3 A_{12} + A_1 A_3 A_{23} + A_3 A_{12} A_{23} + A_1 A_{12} A_{23}\}$$

La función de la longitud de recorrido de las trayectorias reflexivas definidas por los parámetros variacionales críticos $(0, \pm\pi, 0)$ toma el valor $H^8(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)|_{(0, \pm\pi, 0)} = 8(1+r)$, como $H^8_{\alpha_1\alpha_1}(0, \pm\pi, 0) = \frac{-4r^2}{\sqrt{1+r}}(1+r^{-1})$, $\mathcal{H}_{2 \times 2}^8(0, \pm\pi, 0) = \frac{12r^4}{(1+r)^2}(1+r^{-1})$ y $\mathcal{H}_{3 \times 3}^8(0, \pm\pi, 0) = \frac{-8r^6}{\sqrt{1+r}}(1+r^{-1})$ ambas ternas variacionales críticas estacionarias son un máximo relativo de $H^8(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Cómputos análogos permiten caracterizar a las trayectorias reflexivas determinadas por $(-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2})$ y $(\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2})$ como máximos locales de $H^8(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 8\sqrt{1+r^2}$. El Mínimo Absoluto de $H^8(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ en $\subset \mathbb{R}^3$ y en el compacto \mathcal{K} es el valor $8(1-r)$ se alcanza por ejemplo en $a_0 = \pi, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = a_4 = \pi$. Mientras que el Máximo Absoluto de $H^8(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ es el valor $8(1+r)$ alcanzado en \mathcal{K} por el mayor de los máximos relativos. Por otra parte, es sencillo verificar que las trayectorias reflexivas del caso no son ciclos hamiltonianos de la estructura $\mathcal{N}(K_8(\sqrt[4]{1}, r\sqrt[4]{1}), D)$.

4.2.6. Forma tridiagonal del Hessiano de la función variacional

En las arquitecturas $\mathcal{N}(K_n(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}, r e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), D)$ y con las condiciones impuestas del modelo variacional §3.6.1 en la pág. 174 se obtiene la expresión de la longitud de recorrido de las trayectorias cíclicas generalizando los casos estudiados en §4.2.1 y §4.2.5.

$$H^{2n}(\alpha_i) = 2 \left\{ \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha_{i-1} - \alpha_i)} \right\}, \quad a_0 = \pi, \quad a_n = \pi$$

La matriz $\mathcal{H}_{(n-1) \times (n-1)}^{2n}$ Hessiana de la función $H^{2n}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ en las arquitecturas acopladas $\mathcal{N}(K_{2n}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}, r e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{2n \times 2n}^E)$ mantiene forma tridiagonal principal.

$$\mathcal{H}_{(n-1) \times (n-1)} = \begin{vmatrix} H^{2n}_{\alpha_1 \alpha_1} & H^{2n}_{\alpha_1 \alpha_2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ H^{2n}_{\alpha_1 \alpha_2} & H^{2n}_{\alpha_2 \alpha_2} & H^{2n}_{\alpha_2 \alpha_3} & 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & H^{2n}_{\alpha_3 \alpha_2} & H^{2n}_{\alpha_3 \alpha_3} & H^{2n}_{\alpha_3 \alpha_4} & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & H^{2n}_{\alpha_3 \alpha_4} & H^{2n}_{\alpha_4 \alpha_4} & H^{2n}_{\alpha_4 \alpha_5} & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & H^{2n}_{\alpha_4 \alpha_5} & H^{2n}_{\alpha_5 \alpha_5} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & H^{2n}_{\alpha_{(n-2)\alpha_{(n-2)}}} & H^{2n}_{\alpha_{(n-2)\alpha_{(n-1)}}} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & H^{2n}_{\alpha_{(n-2)\alpha_{(n-1)}}} & H^{2n}_{\alpha_{(n-1)\alpha_{(n-1)}}} \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

A partir de que la matriz Hessiana $\mathcal{H}_{(n-1) \times (n-1)}$ es simétrica y tridiagonal, entonces cada uno de sus determinantes menores principales pueden ser calculados aplicando el siguiente proceso recursivo:

$$\begin{aligned} \det.(\mathcal{H}_{1 \times 1}) &= H_{\alpha_1 \alpha_1}^{2n} \\ \det.(\mathcal{H}_{2 \times 2}) &= H_{\alpha_1 \alpha_1}^{2n} H_{\alpha_2 \alpha_2}^{2n} - (H_{\alpha_1 \alpha_2}^{2n})^2 \\ \det.(\mathcal{H}_{(n-1) \times (n-1)}) &= H_{\alpha_{n-1} \alpha_{n-1}}^{2n} \det.(\mathcal{H}_{(n-2) \times (n-2)}) - (H_{\alpha_{n-2} \alpha_{n-1}}^{2n})^2 \det.(\mathcal{H}_{(n-3) \times (n-3)}) \end{aligned}$$

En las estructuras acopladas $\mathcal{N}(K_{2n}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}, r_* e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{2n \times 2n}^E)$, las poligonales reflexivas cíclicas de cada arquitectura $r_* \in (0, 1)$ se determinan resolviendo los siguientes sistemas de identidades angulares (4.3)

$$\begin{cases} \alpha_{n-1} = -\alpha_1 \\ \alpha_{n-i} - \alpha_{n-i-1} = \pm\pi + \alpha_1, \quad 1 \leq i \leq n-2 \end{cases} \quad (4.3)$$

Expresiones que determinan las abscisas críticas estacionarias del modelo estudiado en la sección §2.2.1 del Capítulo 2, en el Teorema 2.2.3 inciso ii), pág. 80. Los ciclos hamiltonianos reflexivos pueden ser identificados y enumerados por la Función de Euler, $\phi(n)$, si n es impar como ocurre en las redes $\mathcal{N}(K_n(e^{i\pi} \sqrt[2p+1]{1}), d_{2n \times 2n}^E)$. Por el contrario si n es par no existen ciclos hamiltonianos reflexivos en las arquitecturas $\mathcal{N}(K_{2(2p)}(e^{i\pi} \sqrt[2p]{1}, r_* e^{i\pi} \sqrt[2p]{1}), d_{2n \times 2n}^E)$ de cada arquitectura $r_* \in (0, 1)$. Además, en ausencia de abscisas críticas singulares resulta sencillo identificar las subregiones del espacio

variacional en las que se localizan las respectivas poligonales reflexivas biestrellas o no. Por ejemplo, en la red $\mathcal{N}(K_{18}(e^{i\pi\sqrt[9]{1}}, r e^{i\pi\sqrt[9]{1}}), D)$, la Función de Euler exhibe la existencia de las poligonales hamiltonianas cíclicas reflexivas biestrellas $2\{9/1\}$ y $2\{9/2\}$. En contraste, con a la poligonal cíclica reflexiva $2\{9/3\}$.

4.3. Discusión y proyección de los cálculos

Las experiencias computacionales en las estructuras de los n gonos acoplados y des-acoplados, $\mathcal{N}(K_{N=2n}(e^{i\pi\sqrt[n]{1}}, r e^{i(\pi+\alpha)\sqrt[n]{1}}), D)$, que las configuraciones óptimas de los Máx. TSP y Mín. TSP, así como las diferentes versiones de Máx. TSPs y Mín. TSPs, requiere del diseño de algoritmos de aproximación a las soluciones. Es evidente, que utilizar la geometría y una aritmética inherente al conjunto de puntos que se consideren puede conducir a un nuevo desarrollo, en el que será menester tener presente varios de los resultados aportados por este trabajo de investigación. Se está en condiciones de afirmar que ciertos fundamentos y proposiciones del presente contenido serán puestos a consideración de revisores de alguna publicación especializada.

4.3.1. TSPs en $\mathcal{N}(K_{14}(e^{i\pi\sqrt[7]{1}}, \frac{1}{2} e^{i\pi\sqrt[7]{1}}), d_{14 \times 14}^E)$

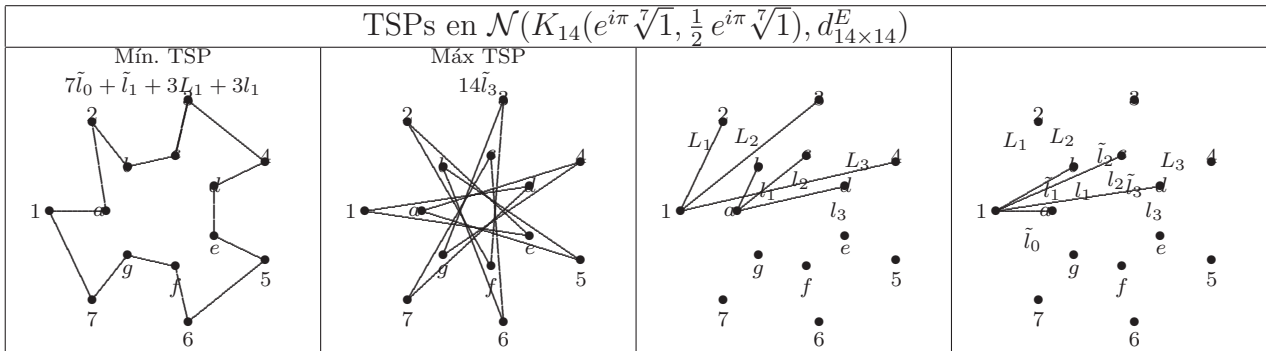


Figura 4.13: Exploración exhaustiva TSPs en $\mathcal{N}(K_{14}(e^{i\pi\sqrt[7]{1}}, \frac{1}{2} e^{i\pi\sqrt[7]{1}}), d_{14 \times 14}^E)$.

| Longitud de C_H^E | $\mathcal{N}(K_{14}(e^{i\pi\sqrt[7]{1}}, \frac{1}{2} e^{i\pi\sqrt[7]{1}}), d_{14 \times 14}^E)$ |
|---|---|
| Mín. TSP : $7\tilde{l}_0 + 3L_1 + 3l_1 + \tilde{l}_1$ | 1 - a - 2 - b - c - 3 - 4 - d - e - 5 - 6 - f - g - 7 - 1 |
| $7\tilde{l}_0 + 3\tilde{l}_1 + 2l_1 + 2L_1$ | 1 - a - 2 - b - 3 - c - 4 - d - e - 5 - 6 - f - g - 7 - 1 |
| $5\tilde{l}_0 + \tilde{l}_1 + 4l_1 + 4L_1$ | 1 - a - b - 2 - 3 - c - d - 4 - 5 - e - f - g - 6 - 7 - 1 |
| $6\tilde{l}_0 + l_2 + 3l_1 + 4L_1$ | 1 - a - b - 2 - 3 - c - d - 4 - 5 - e - g - f - 6 - 7 - 1 |
| $7\tilde{l}_0 + 5\tilde{l}_1 + L_1 + l_1$ | 1 - a - 2 - b - 3 - c - 4 - d - 5 - e - 6 - f - g - 7 - 1 |

Cuadro 4.5: Ranking de longitudes: Mín. TSP en $\mathcal{N}(K_{14}(e^{i\pi\sqrt[7]{1}}, \frac{1}{2} e^{i\pi\sqrt[7]{1}}), d_{14 \times 14}^E)$

4.3.2. TSPs en $\mathcal{N}(K_{16}(e^{i\pi\sqrt[8]{1}}, \frac{1}{2} e^{i\pi\sqrt[8]{1}}), d_{16 \times 16}^E)$

| Longitud C_H^E | $\mathcal{N}(K_{14}(e^{i\pi\sqrt[7]{1}}, \frac{1}{2}e^{i\pi\sqrt[7]{1}}), d_{14 \times 14}^E)$ |
|-------------------------------|--|
| Máx. TSP : $14\tilde{l}_3$ | $1-d-7-c-6-b-5-a-4-g-3-f-2-e-1$ |
| $12\tilde{l}_3 + l_3 + L_3$ | $1-4-a-5-b-6-c-7-d-g-3-f-2-e-1$ |
| $10\tilde{l}_3 + 2l_3 + 2L_3$ | $1-4-a-5-2-f-3-g-d-7-c-6-b-e-1$ |
| $8\tilde{l}_3 + 3l_3 + 3L_3$ | $1-4-a-5-2-6-c-7-d-g-3-f-b-e-1$ |
| $6\tilde{l}_3 + 4l_3 + 4L_3$ | $1-4-a-5-2-6-3-g-d-7-c-f-b-e-1$ |

Cuadro 4.6: Ranking de longitudes: Máx. TSP en $\mathcal{N}(K_{N=2n=14}(e^{i\pi\sqrt[7]{1}}, \frac{1}{2}e^{i\pi\sqrt[7]{1}}), d_{N \times N}^E)$.


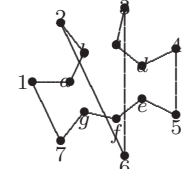
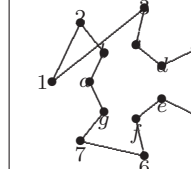
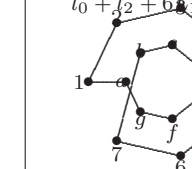
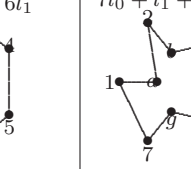
| Concorde en $\mathcal{N}(K_{14}(e^{i\pi\sqrt[7]{1}}, \frac{1}{2}e^{i\pi\sqrt[7]{1}}), d_{14 \times 14}^E)$ | | | | |
|--|---|---|---|---|
| Greedy | Boruvka | Quick Boruvka | Nearest Neighbor | Lin-Kernighan |
| $2\tilde{l}_0 + 6L_1 + 6l_1$ | $6\tilde{l}_0 + 2L_1 + 2L_3 + 4l_1$ | $6\tilde{l}_0 + 3L_1 + L_2 + 4l_1$ | greedy $\equiv 2\tilde{l}_0 + 6L_1 + 6l_1$ $\tilde{l}_0 + \tilde{l}_2 + 6L_1 + 6l_1$ | Mín. TSP $7\tilde{l}_0 + l_1 + 3L_1 + 3l_1$ |
|  |  |  |  |  |

Figura 4.14: Heurísticas del Concorde en $\mathcal{N}(K_{14}(e^{i\pi\sqrt[7]{1}}, \frac{1}{2}e^{i\pi\sqrt[7]{1}}), d_{14 \times 14}^E)$.

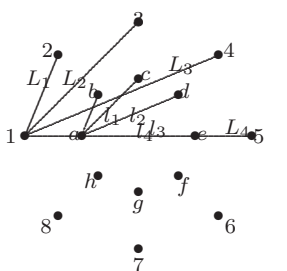
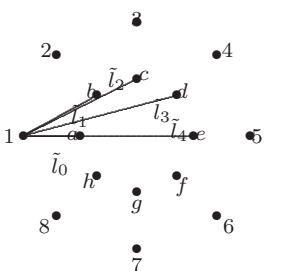
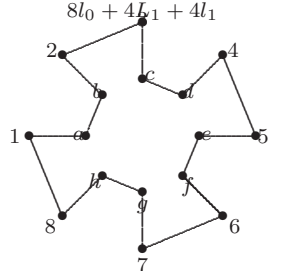
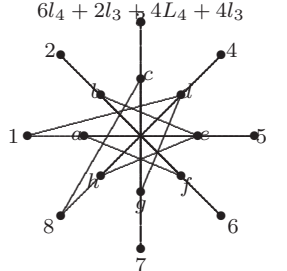
| TSPs en $\mathcal{N}(K_{16}(e^{i\pi\sqrt[8]{1}}, \frac{1}{2}e^{i\pi\sqrt[8]{1}}), d_{16 \times 16}^E)$ | | | |
|--|---|--|---|
| Mín. TSP | Máx TSP | | |
| $8\tilde{l}_0 + 4L_1 + 4l_1$ | $6\tilde{l}_4 + 2\tilde{l}_3 + 4L_4 + 4l_3$ |  |  |
|  |  | | |

Figura 4.15: Exploración Exhaustiva: TSPs en $\mathcal{N}(K_{16}(e^{i\pi\sqrt[8]{1}}, \frac{1}{2}e^{i\pi\sqrt[8]{1}}), d_{16 \times 16}^E)$.

| Longitud de C_H^E | $\mathcal{N}(K_{16}(e^{i\pi\sqrt[8]{1}}, \frac{1}{2}e^{i\pi\sqrt[8]{1}}), d_{16 \times 16}^E)$ |
|--|--|
| Mín. TSP : $8\tilde{l}_0 + 4L_1 + 4l_1$ | $1-a-b-2-3-c-d-4-5-e-f-6-7-g-h-8-1$ |
| $8\tilde{l}_0 + 2\tilde{l}_1 + 3l_1 + 3L_1$ | $1-a-2-b-3-c-d-4-5-e-f-6-7-g-h-8-1$ |
| $2\tilde{l}_0 + 7l_1 + 7L_1$ | $1-a-b-c-d-e-f-g-h-8-7-6-5-4-3-2-1$ |
| $6\tilde{l}_0 + 2\tilde{l}_1 + l_1 + 4L_1$ | $1-a-2-b-c-3-4-d-e-5-6-f-g-h-7-8-1$ |
| $7\tilde{l}_0 + \tilde{l}_1 + l_2 + 4L_1 + 3l_1$ | $1-a-2-b-c-3-4-d-e-5-6-f-h-g-7-8-1$ |

Cuadro 4.7: Ranking de longitudes: Mín. TSP en $\mathcal{N}(K_{16}(e^{i\pi\sqrt[8]{1}}, \frac{1}{2}e^{i\pi\sqrt[8]{1}}), d_{16 \times 16}^E)$.

| Longitud de C_H^E | $\mathcal{N}(K_{16}(e^{i\pi} \sqrt[8]{1}, \frac{1}{2} e^{i\pi} \sqrt[8]{1}), d_{16 \times 16}^E)$ |
|---|---|
| Máx. TSP := $6\tilde{l}_4 + 2\tilde{l}_3 + 4l_3 + 4L_4$ | 1 - d - g - 3 - 7 - c - 8 - 4 - h - e - b - 6 - 2 - f - a - 5 - 1 |
| $5\tilde{l}_4 + 3\tilde{l}_3 + 3l_3 + l_4 + 4L_4$ | 1 - d - 7 - 3 - g - b - 6 - 2 - f - c - 8 - 4 - h - e - a - 5 - 1 |
| $6\tilde{l}_4 + 5\tilde{l}_3 + 4L_4 + L_3$ | 1 - 4 - 8 - d - g - 3 - 7 - c - h - e - b - 6 - 2 - f - a - 5 - 1 |
| $4\tilde{l}_4 + 4\tilde{l}_3 + 2l_3 + 2l_4 + 4L_4$ | 1 - d - 7 - 3 - f - 2 - 6 - b - g - c - 8 - 4 - h - e - a - 5 - 1 |
| $5\tilde{l}_4 + \tilde{l}_3 + 4l_3 + l_4 + 4L_4 + L_3$ | 1 - 4 - 8 - c - 7 - 3 - g - d - h - e - b - 6 - 2 - f - a - 5 - 1 |

Cuadro 4.8: Ranking de longitudes: Máx. TSP en $\mathcal{N}(K_{N=2n=16}(e^{i\pi} \sqrt[8]{1}, \frac{1}{2} e^{i\pi} \sqrt[8]{1}), d_{N \times N}^E)$.

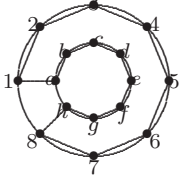
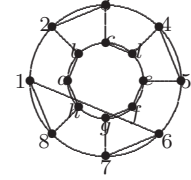
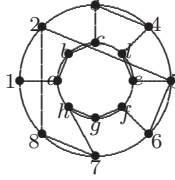
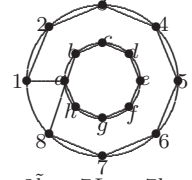
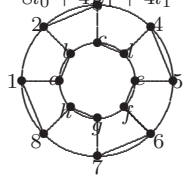
| Heurísticas del Concorde en $\mathcal{N}(K_{16}(e^{i\pi} \sqrt[8]{1}, \frac{1}{2} e^{i\pi} \sqrt[8]{1}), d_{16 \times 16}^E)$ | | | | |
|---|---|---|--|---|
| Greedy | Boruvka | Quick Boruvka | Nearest Neighbor | Lin-Kernighan |
| $2\tilde{l}_0 + 7L_1 + 7l_1$  | $6\tilde{l}_0 + 4L_1 + L_3 + 5l_1$  | $5\tilde{l}_0 + \tilde{l}_1 + 4L_1 + L_2 + 5l_1$  | $\tilde{l}_0 + \tilde{l}_1 + 7L_1 + 7l_1$  $2\tilde{l}_0 + 7L_1 + 7l_1$ \equiv Greedy | Mín. TSP $8\tilde{l}_0 + 4L_1 + 4l_1$  |

Figura 4.16: Cómputos del Concorde en $\mathcal{N}(K_{16}(e^{i\pi} \sqrt[8]{1}, \frac{1}{2} e^{i\pi} \sqrt[8]{1}), d_{16 \times 16}^E)$.

Capítulo 5

El algoritmo en secuencias Watson-Crick

Se aplica el algoritmo aritmético del Capítulo 3 a pares compatibles de bases Watson-Crick en secuencias biopoliméricas. Los ejemplos propuestos se sustentan en ciertos supuestos para un modelo del plegamiento de las cadenas de ARN explicitado en los trabajos [Cendra, H., Fernández, A., and Reartes, W.(1996)] y [Fernández, A., and Niel, B.(1997)]. Los contenidos aquí presentados fueron expuestos en el Congreso de Mecánica Computacional Vol. XXX con el título “From unfolded sequences to structural motifs”. En [Fernández, A., Niel, B., and Burastero, T.(1998)] se establece que el plegamiento de un biopolímero es un proceso expedito que ocurre en una escala temporal inconmensurablemente breve respecto de los tiempos requeridos por el equilibrio termodinámico, por lo tanto con la finalidad de replicar un principio de mínimo esfuerzo para este proceso se sugiere que cada evento elemental del plegamiento implique la minimización de la pérdida de la entropía conformacional con la concurrente maximización del número de formación de contactos o apareamientos entre pares de bases Watson-Crick. En términos termodinámicos se sostiene que en cada evento posible para cerrar un bucle o lazo la secuencia de nucleótidos experimenta un costo entálpico menor que su variación entrópica, [Fernández, A., and Cendra, H.(1996)]. A partir de los parámetros termodinámicos compilados en oligonucleótidos, e.g. [Sheehy et al. (2010)], se asocian enteros complementarios a cada uno de los pares de bases Watson-Crick y se analizan los patrones de contactos posibles que intervienen en el plegamiento.

Fijados los bloques básicos constituyentes y la cantidad de cada uno de los residuos de los oligonucleótidos, la sucesión desplegada se obtiene en la exploración de cuasi-hamiltonianos admisibles de diferentes longitudes bajo la penalización de cualquier formación tipo cremallera (zipping, stacking) de los procesos de apareamiento de las bases. Las comparaciones de las lecturas de las secuencias en ambas direcciones de las sucesiones desplegadas obtenidas permiten individualizar determinados motivos estructurales de interés biológico estudiados trabajos científicos sobre ácidos nucleicos, e.g. [Wieczorech, K. P. et al. (2006), Zarrinkar, P. P., and Williamson, J. R.(1994)].

Para cada uno de los cuatro nucleótidos del RNA se utiliza la notación estándar **G**,

C, **A**, **U**, donde **G** = guanina, **C** = citosina, **A** = adenina y **U** = uracilo, o eventualmente **T** = timina cuando se trata de los residuos en cadenas DNA. Los pares de bases Watson-Crick suponen la complementariedad entre **G** – **C** y **A** – **U** (o eventualmente **A** – **T**).

El método asocia enteros complementarios a cada uno de los dos pares de bases de residuos complementarios que integran las secuencias homólogas de nucleótidos, por ejemplo para un número de n_t unidades que integran la sucesión $\mathbf{G} \sim \lfloor \frac{n_t}{2} \rfloor + 1$ y $\mathbf{C} \sim \lfloor \frac{n_t}{2} \rfloor$, $\mathbf{A} \sim \lfloor \frac{n_t}{2} \rfloor + 2$ y $\mathbf{T} (\mathbf{U}) \sim \lfloor \frac{n_t}{2} \rfloor - 1$. Fijadas las unidades monoméricas totales n_t y las cantidades de cada uno de los monómeros, se determinan, la (o las) sucesiones desplegadas realizando búsquedas de secuencias hamiltonianas admisibles de orden $n_t - 1$ o $n_t - u_d$, en caso de que para la existencia de al menos una configuración desplegada sea necesario descartar u_d unidades cuando se penalizan los enlaces elementales entre bases para impedir la formación del cierre automático por cremalleras debido a enlaces consecutivos de nucleótidos compatibles. Por otra parte, dado el carácter teleológico del proceso del plegado de un biopolímero, es posible pensar su evolución, al menos desde un punto de vista teórico en equilibrio termodinámico y por lo tanto en reversibilidad de los eventos elementales, desde cadenas desplegadas a la estructura globular, y recíprocamente conocida la estructura activa determinar aquella(s) secuencias que la originaron bajo interacciones intramoleculares cohesivas. En otros términos, subsucesiones como las siguientes **-G C G C G C G C G C-**, **-A U A U A U A U A U-**, **-G C A U G C A U G C A U-** están inhibidas en la cadena inicial. El proceso de envoltura, ligaduras y/o plegado de los biopolímeros implica interpretar adecuadamente efectos cooperativos y asociativos que hacen posible la pérdida de libertad conformacional de las macromoléculas, [Fernández, A.(2010)]. Aquí se consideran los efectos asociativos y cooperativos bajos los supuestos en [Fernández, A., Niel, B., and Burastero, T.(1998)] con la consecutiva renormalización de las distancias entre unidades. En términos sencillos cada evento que implique la aparición de un contacto entre pares de nucleótidos compatibles, e.g. **A U**, **G C** y/o la formación de un bucle, e.g. **G C A U**, acorta las distancias efectivas entre monómeros. Es así como aún dentro del rango de escalas temporales pequeñísimas en el plegamiento existen interacciones diferenciables por etapas temporales, como lo han demostrado rigurosas investigaciones científicas en laboratorios. La propuesta del presente estudio es comparar los motivos estructurales elementales en las topologías de contactos en arreglos matriciales BPPM -base pairing contact matrix- a nivel de las estructuras secundarias individualizadas por varios trabajos científicos, [Sheehy et al. (2010), Lu et al.(2006), Wieczorech, K. P. et al. (2006), Kulinski, T. et al.(2003)]. De manera específica, como la etapa limitante de la velocidad del plegamiento se rige por la sincronización entre la formación de un bucle (triloop, tetraloop, heptalooop) y una cremallera (stem) en un escenario multidominio, se analizan a la luz de la aritmética cohesiva, dual y complementaria definida -§5.0.3- las transiciones en las BPPMs -base-pairing contact pattern matrices- los motivos estructurales planares que aparecen a partir de secuencias primarias de oligonucleótidos de una sola cinta o banda como aquellos investigados en [Zarrinkar, P. P., and Williamson, J. R.(1994)]y [Kulinski, T. et al.(2003)]. Teniendo presente que: *“the dominant plegamiento pathway, the brachistochrone, at each stage minimized the entropy loss asociados with loop clo-*

sure with a synchronic maximization of the number of efectivo base-pairing contacts” [Fernández, A., and Niel, B.(1997), Fernández, A., Niel, B., and Burastero, T.(1998)].

Desarrollamos esta aplicación rudimentaria explicando en la siguiente sección tres proposiciones sobre las que se basa un algoritmo de búsqueda de las secuencias primarias que mediante penalización de la aritmética cohesiva seleccionada interprete la estructura anudada que caracterizan distintos dominios en determinadas ribozimas. A continuación algunos ejemplos que muestran la utilidad de trabajar con las matrices de los patrones de contactos, §5.0.4. En el contenido de la sección §5.1 se aplica el procedimiento para interpretar motivos estructurales exhibidos en las estructuras secundarias de la literatura del tema.

5.0.3. Un algoritmo aritmético cohesivo

Se supone al biopolímero compuesto por cuatro residuos que se pliega por contactos cooperativos de apareamiento de bases de aminoácidos que de manera simultánea ocurren en dominios o regiones distintivas de la macromolécula. Por lo tanto, la estructura secundaria de los oligonucleótidos juega un rol clave en el proceso de envoltura y plegamiento de los mismos. El escenario biofísico de la cadena es esencialmente similar al de un polielectrolito en solución. El espacio conformacional está resuelto al nivel de las transiciones entre patrones de contactos entre pares de bases. Estructuras secundarias que se reconocen mediante el acrónimo BPPs proveniente de “base pairing contact patterns”. Cada etapa del plegamiento se define por un equilibrio cooperativo entre la formación de un bucle y el apareamiento de bases (bp) en una cremallera (stem, zipper). En consecuencia, cada paso efectivo del plegado experimenta localmente una minimización de la libertad conformacional y la consiguiente maximización del número de contactos intramoleculares. La velocidad determinante de la etapa es la pérdida de entropía (ΔS_{bucle}) asociada al cerramiento de un bucle. Los motivos estructurales admisibles del concepto ideal de bucle son: horquilla (hairpin), saco (bulge), con forma de ocho (eightshaped), y el pseudonudo (pseudoknot). Además, el cambio de entropía es función del número de bases desapareadas que construyen el bucle [Fernández, A., and Cendra, H.(1996)]. Así como el calor liberado en la formación de las cremalleras (stem) por los bps es proporcional al número de puentes conectores entre bases que conforman el cierre.

Sea n_t el número de monómeros que componen el oligonucleótido, y con q_G , q_C , q_A y $q_{U(T)}$, se denotan las respectivas cantidades de las bases **G**, **C**, **A** y **U(T)**. Una sucesión del nucleótido desplegada, es decir una secuencia no enrollada ni anudada se determina bajo penalización de la cooperación de las reglas complementarias para impedir la formación de cualquier eventual subsucesión en espiral (coil) en la estructura. Así se determinan sucesiones para las configuraciones desplegadas admisibles con máximo número de unidades $m_t \leq n_t$, al impedir las formaciones de los bucles **A U**, **G C**, **U A**, **C G**, y el tetrabucle **G A C U**, con sus 23 permutaciones asociables a respectivos estructurales motivos; el lazo **G G G C**, y sus reordenamientos, así como también sus cuaternas complementarias **C C C G**. Se impone el algoritmo aritmético cohesivo para cada bp (base-pairing) por ejemplo, si **G**, **C**, **A** y **U** son los nucleótidos, “los asociados enteros complementarios”, simbolizados

por $e(\mathbf{G})$, $e(\mathbf{C})$, $e(\mathbf{A})$, $e(\mathbf{U})$, se determinan después de una selección específica de enteros $k_i \neq k_j$ en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} e(\mathbf{C}) = k_j; \quad e(\mathbf{G}) = n_t - k_j \quad 1 \leq k_j \leq \lfloor \frac{n_t}{2} \rfloor \\ k_j \neq k_i \\ e(\mathbf{A}) = k_i; \quad e(\mathbf{U}) = n_t - k_i \quad 1 \leq k_i \leq \lfloor \frac{n_t}{2} \rfloor \end{aligned} \quad (5.1)$$

o

$$\begin{aligned} e(\mathbf{G}) = k_j; \quad e(\mathbf{C}) = n_t - k_j \quad 1 \leq k_j \leq \lfloor \frac{n_t}{2} \rfloor \\ k_j \neq k_i \\ e(\mathbf{U}) = k_i; \quad e(\mathbf{A}) = n_t - k_i \quad 1 \leq k_i \leq \lfloor \frac{n_t}{2} \rfloor \end{aligned} \quad (5.2)$$

Primera Proposición, la condición cohesiva: Las ecuaciones (5.1) o (5.2), establecen que el tetrabucle $\mathbf{G A C U}$ y sus reordenamientos son motivos estructurales posibles independientes de n_t el número de monómeros que componen el oligonucleótido, [Maizel et al.(1981)].

Por ejemplo, los motivos estructurales en el Cuadro 5.2 de la pág. 214 son las penalizaciones de $\mathbf{G-C}$ y de $\mathbf{A-U}$ de los enlaces bps para $k_j = \lfloor \frac{n_t}{2} \rfloor$, y $k_i = \lfloor \frac{n_t}{2} \rfloor - 1$, en (5.1).

La condición cohesiva definida, i.e. (5.1) o (5.2), desde fundamentos físicoquímicos asignan un valor al potencial complementario entre ligandos aniónicos y catiónicos.

Sea $S = \{\dots \mathbf{U, G, G, A, \dots AG, \dots U, C, C, \dots C, \dots}\} \cong \{N_1, N_2, \dots, N_{n_t}\}$ es una secuencia arbitraria conformada por un número n_t impar de residuos, si el entero asociado a dicha sucesión S , se denota como $e(S)$ y se calcula mediante la expresión $e(S) = \sum_{i=1}^{n_t} e(N_i)$ (modulo n), en la que N_i es el nucleótido (residuo) localizado en la $i^{\text{ésima}}$ posición en S .

Teniendo en cuenta que, una subsucesión propia de la sucesión S_m de residuos N_i , $S_m : \{N_1, N_2, \dots, N_m\}$ es aquella S_{j_r} que verifica: $S_{j_r} : N_j, N_{j+1}, \dots, N_{j+r-1}, N_{j+r}$ si $1 \leq j \leq m$ y $r \geq 0$ con $j+r < m$ si $j = 1$, y $j+r \leq m$ si $j > 1$, se está en condiciones de establecer la segunda proposición.

Segunda Proposición, el algoritmo aritmético cohesivo: Sea $S_{n_t} : \{N_1, N_2, \dots, N_{n_t}\}$ una secuencia arbitraria de n_t residuos N_i . S_{n_t} determina una sucesión desplegada de n_t residuos, simbolizada por $(U_F)_{\sim}^{m_t}$, con $m_t \leq n_t$ si y sólo si cada una de las subsucesiones propias no tienen como enteros asociados ni a n_t ni a múltiplo alguno de n_t .

En general, se utiliza $(U_F)^m$ para representar una secuencia desplegada de m nucleótidos, donde m resulte ser menor o igual que $n_t - 1$. Mientras que, L_o^m denota un bucle (loop) constituido por m nucleótidos.

Tercera Proposición, máx. orden y redundancia vs unicidad: Dadas las cantidades de los residuos **G** (q_G), **C** (q_C), **A** (q_A), y **U** (q_U) integrantes de una secuencia arbitraria de n_t monómeros, no necesariamente va existir una sucesión desplegada de máximo orden n_t . Por lo tanto, se realizan las exploraciones algorítmicas para determinar subsucesiones desplegadas de orden $n_t - u_d$, si u_d representa la cantidad de unidades de los residuos descartados. Por otra parte, bajo las mismas proporciones relativas entre los nucleótidos componentes, aún si se mantienen los cocientes conocidos como “Chargaff’s Rules”, las exploraciones algorítmicas generalmente explicitan varios ordenamientos posibles.

5.0.4. Matrices y topologías de contactos

Una dualidad de enteros complementarios genera varios bucles y subsucesiones desplegadas de nucleótidos, e.g. ver Cuadro 5.2 de la pág. 214. En las oligosecuencias dadas a continuación cabe mencionar que un punto y coma se ha escogido para separar las distintas subsucesiones. Por otra parte, las secuencias desplegadas, que no son bucles, comienzan con 5'⊐ y finalizan en 3', e.g. **A**(**C**) $_{n_t-3}$, (**A**) $_z$ (**C**) $_{n_t-3z}$, **A**(**C**) $_{n_t-4}$ **A G G**, **A**(**GC**) $_{\lfloor \frac{n_t}{2} \rfloor - 1}$, **A G A**(**C**) $_{n_t-5}$, 5'⊐(**CA**) $_{\frac{n_t-1}{4}}$ **GG**(**UG**) $_{\frac{n_t-1}{4}-1}$ 3', 5'(**C**) $_{n_t-7}$ **CA CCUG**3', 5'⊐**G G A**(**C**) $_{n_t-7}$ **AG G**3', 5'⊐(**CA**) $_{\frac{n_t-3}{4}}$ **CC**(**UG**) $_{\frac{n_t-3}{4}}$ 3', 5'(**GU**) $_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - i}$ **GG**(**AC**) $_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - (i+1)}$ **A**(**C**) $_{2l}$ **A**(**CA**) $_i$ **CC**(**UG**) $_i$ 3' for p odd, y $0 \leq i \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1$, $n_t = 2p + 1 + 2l$. En contraste, si p es par, y $0 \leq i \leq \frac{p}{2} - 1$ las sucesiones desplegadas obtenidas son: 5'⊐(**GU**) $_{\frac{p}{2}-i-1}$ **CC**(**AC**) $_{\frac{p}{2}-2-i}$ **A**(**C**) $_{2l}$ **A**(**CA**) $_i$ **CC**(**UG**) $_{i+1}$ 3' y 5'⊐(**GU**) $_{\frac{p}{2}-1-i}$ **GG**(**AC**) $_{\frac{p}{2}-i-1}$ **A**(**C**) $_{2l}$ **A**(**CA**) $_i$ **GG**(**UG**) $_i$ 3', cuando $n_t = 2p + 1 + 2l$. Es importante notar que en los últimos ejemplos las subsucesiones existen cualquiera sea el número n_t de residuos y son independientes de la cantidad q_C siempre que el número de unidades n_t supere un mínimo de $n_{t_{\min}} = 2p + 3$ unidades, i.e. $n_t \geq 2p + 3$.

Un palíndromo alfabético se reconoce en la representación BPPM (base-pairing contact matrix) por líneas diagonales transversales a la diagonal principal en un arreglo matricial autocomparativo de la estructura secundaria de contacto entre pares de bases. Un ejemplo es 5'⊐ **GG A**(**C**) $_{2l}$ **A GG**3', es decir 5'⊐ **GG A**(**C**) $_l$ y (**C**) $_l$ **A GG** que comienza en la 2^{da} y $(l + 5)$ ésima posición, respectivamente, ver Cuadro 5.1. A pesar de no poseer, aparentemente, relevancia biológica esta clase de motivo estructural sirve para identificar en una matriz de autocomparación de una determinada topología de contacto las distintas regiones en las que no existe compatibilidad entre los aminoácidos componentes de las estructuras secundarias de los oligonucleótidos.

El algoritmo propuesto cumple las reglas establecidas en [Maizel et al.(1981)] con la finalidad de estudiar las topologías de contactos, es decir los patrones de contacto entre pares de bases, BPP, en sucesivas transiciones elementales. Concretamente, estos autores establecen: “...Comparison of the sequence with its reversed complement reveals regions of self-complementarity that can be involved in the formation of secondary structure in

single-stranded molecules...

| | nt1 | nt2 | nt3 | nt4 | nt5 | nt6 | nt7 | nt8 | nt9 |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | □ | G | G | A | C | C | A | G | G |
| □ | | | | | | | | | |
| G | | G | G | | | | | G | G |
| G | | G | G | | | | | G | G |
| A | | | | A | | | A | | |
| C | | | | | C | C | | | |
| C | | | | | C | C | | | |
| A | | | | A | | | A | | |
| G | | G | G | | | | | G | G |
| G | | G | G | | | | | G | G |

Cuadro 5.1: Palíndromo alfabético **G G A C C A G G**.

Un oligonucleótido es un palíndromo si su lectura de izquierda a derecha y la lectura correspondiente a su secuencia complementaria de derecha a izquierda resultan ser unidad por unidad coincidentes, e.g. 5'... **A C C U** □ ... □ **A G G U** ... 3'. Esta secuencia es una palíndromo, ya que su sucesión complementaria ... **U G G A** □ ... □ **U C C A** ... en lectura de derecha a izquierda coincide con la original, [Bachellier, S. et al. (1999)].

5.1. Aplicaciones a oligonucleótidos

En esta sección, se utiliza la aritmética cohesiva propuesta en la sección §5.0.3 para exhibir motivos estructurales planares que aparecen en las configuraciones secundarias de intermediarios cinéticos en el plegamiento de ciertos biopolímeros.

En el Cuadro 5.2 se exhiben los reordenamientos obtenidos cuando el algoritmo se aplica con la condición cohesiva $k_j = \lfloor \frac{n_t}{2} \rfloor$ y $k_i = \lfloor \frac{n_t}{2} \rfloor - 1$, en la ecuación (5.2) de la pág. 208. Aquí, los bucles existen con independencia del número total de unidades n_t en la subsucesión nucleótida estudiada, cuando n_t es impar, [Maizel et al.(1981)].

La aritmética complementaria seleccionada exhibe que en el conjunto de sucesiones de nucleótidos compuestos por $q_U = q_C = q_A = 3$, y $q_G = 2$, las subsucesiones **U C U C** y **G A G A** son complementarias y antiparalelas. Mientras que, la sucesión **U C U C A A G A G U** con la base **C** descartada tiene un motivo estructural que demanda un mayor costo entrópico que el que conlleva el contacto o enlace de ambas subsucesiones antiparalelas y la sincronizada formación del tribucle en **U C U C(A C U)G A G A**. En este oligonucleótido **U C U C A C U G A G A** la aritmética seleccionada explicita la existencia de dos posibles estructuras cinéticas intermedias: **U C U C(A C U G)A G A** y **U C U C A(C U G A)G A**. Ambas exhiben la posibilidad de la formación de un tetrabucle, marcados respectivamente por paréntesis. El primero

con una cremallera (stem) de tres ligandos con una base aislada o externa **U**, (bulge). La formación del segundo tetrabucle deja dos bases **U C** desapareadas. En este caso la estructura es menos estable porque su cambio entálpico es menor que su pérdida de entropía conformacional. La duda se presenta ante la posible coexistencia en equilibrio de las estructuras **U C U C(A C U)G A G A** y **U C U C(A C U G)A G A**. La selección de una de ella en detrimento de la otra requiere de una comparación muy detallada y minuciosa a partir de los cambios entálpicos y entrópicos calculados con los parámetros termodinámicos obtenidos de experimentos en ambientes muy semejantes.

| $n_t \sim \text{impar}$ | b-p | Motivos | Refs. |
|-------------------------|----------------------------|------------------------|---|
| $\forall n_t$ | A U | W-C | - |
| $\forall n_t$ | G C | W-C | - |
| $\forall n_t$ | A C U G | Tetrabucle (L_o^4) | 13 ^{ra} Tabla 1, [Sheehy et al. (2010)] |
| $\forall n_t$ | A G G G | Tetrabucle (L_o^4) | Tabla 1& 2, [Sheehy et al. (2010)] |
| $n_t \geq 7$ | U C U C A C | L_o^6 | pg. 424, [Sheehy et al. (2010)] |
| $n_t \geq 7$ | U G G A C C | L_o^6 | 15 ^{ta} Tabla 3, [Sheehy et al. (2010)] |
| $n_t \geq 7$ | U G A G A G | L_o^6 | 30 ^{ésima} Tabla 2, [Sheehy et al. (2010)] |
| $n_t = 11$ | U C U C A A G A G U | L_o^{10} | - |

Cuadro 5.2: Aritmética cohesiva del tribucle P_5 en la ribozima sunYL-13.

El Cuadro 5.2 y la BPPM en el Cuadro 5.3 de la pág. 212 ilustran la región del tribucle P_5 en la ribozima sunYL-13 (Ver [Fernández, A., Niel, B., and Burastero, T.(1998)] Figura 3 en la pág. 95 y en [Fernández, A., and Cendra, H.(1996)] , Figura 1 de la pág 338. En esta estructura secundaria diez de los catorce dominios de los fosfatos etiquetados son el resultado de eventos cooperativos elementales posibles de ser interpretados mediante el algoritmo aritmético propuesto. Con excepción de las regiones de P_3 y de P_7 que corresponden a un motivo estructural tridimensional, conocido en la literatura como configuración tipo pseudonudo (pseudoknot), que no ha sido integrada entre los motivos estructurales objeto de análisis en este estudio.

Por otra parte, el dominio etiquetado por P_8 , 5'...**C A A C U C U A A G A G U U G**...3', en la ribozima sunYL-13 requiere de un análisis similar al motivo estructural del ámbito asociado al fosfato rotulado por P_5 .

En los dos párrafos siguientes, se analizan ciertas regiones de la estructura secundaria de la ribozima L-21 Sca I en [Zarrinkar, P. P., and Williamson, J. R.(1994)], específicamente Fig. 2 A, de la pág. 919. En particular, se considera la subsucesión que comienza en la décimo tercera unidad y finaliza en la trigésimo primera posición. Una primera comparación de la mitad de las unidades de este oligonucleótido con su subsucesión complementaria revertida confirma el carácter autocomplementario del dominio para la inherente formación de una horquilla (hairpin). La BPPM asociada a este motivo estructural planar se muestra en el Cuadro 5.4. Si este arreglo matricial se dobla siguiendo la línea de asteriscos el vástago (stem) y el bucle (loop) son claramente distinguibles a lo largo de la diagonal principal. Concretamente, el bucle está conformado por los nucleótidos **C A U G C A** mientras que sus vecinos más cercanos **G** y **C** inician consecutivos ligandos

Capítulo 5. El algoritmo en secuencias Watson-Crick

entre pares de bases al estilo cremallera (stem), (Ver Cuadro 5.4, en la pág. 213).

| S | n_1 | n_2 | n_3 | n_4 | n_5 | n_6 | n_7 | n_8 | n_9 | n_{10} | n_{11} |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| | U | C | U | C | A | C | U | G | A | G | A |
| U | U | | U | | | | U | | | | * |
| C | | C | | C | | C | | | | * | |
| U | U | | U | | | | U | | * | | |
| C | | C | | C | | C | | * | | | |
| A | | | | | A | | * | | A | | A |
| G | | | | | | □ | | G | | G | |
| U | U | | U | | * | | U | | | | |
| G | | | | * | | | | G | | G | |
| A | | | * | | A | | | | A | | A |
| G | | * | | | | | | G | | G | |
| A | * | | | | A | | | | A | | A |

Cuadro 5.3: Tribucle P_5 en la ribozima sunYL-13.

La aritmética determina la necesidad renormalizar las distancias entre unidades puesto que **C A U G C A** debe reducirse a una estructura enroscada en cualquier caso, debido a la existencia pares elementales y/o tetrabucler estables, aquí entre paréntesis se simbolizan los contactos bp: **C(A U)(G C)A**; **C(A U G C)A**; **C A(U G C A)**. Por otra parte, si la unidad vecina más cercana es agregada al análisis, el reescalamiento de las distancias es de igual orden de magnitud, ya que: **(G C)(A U)(G C)A C**; **(G C)A(U G C A)C**; **(G(C(A U)G)C)A C** y **(G C)A(U(G C)A)C**. El mismo escenario es aplicable al dominio del fosfato P_{5c} , 5'... **C C U U G C A A G G** El algoritmo reescala las distancias a partir de ligaduras anidadas y consecutivas de bp contactos, i.e. 5'... **(C(C(U(U(G C)A)A)G)G)**... las que entre las varias conformaciones posibles generaran una forma tipo cierre relámpago (zipper) entre las bases, [Schuster P. et al. (1993)]. El Cuadro 5.2 que contiene los resultados de la aritmética complementaria elegida, confirma la existencia del tetrabucle **A G G G** y sus cuatro permutaciones, i.e. **G G G A**, **G A G G** y **G G A G**. Obviamente, sus respectivos motivos estructurales complementarios son admisibles, e.g. **U C C C**. Estas cuaternas de residuos aparecen en las estructuras secundarias estudiadas en los papers [Kulinski, T. et al.(2003)], [De Gregorio, E. et al.(2006)], y [Schnarel, M. N. et al. (1996)]. Precisamente, [De Gregorio, E. et al.(2006)], en la estructura secundaria palíndromo de la Yersinia existen multidominios distintivos de horquillas generados por **G G G A** y tetrabucler **U C C C** como motivos estructurales esenciales. Estos se corresponden con la dualidad cohesiva inherente a la impuesta en los cómputos en el Cuadro 5.2. La estructura del TAR hairpin del HIV-1 y HIV-2 puede ser interpretada a partir de esta cohesión intramolecular de atracción [Amann, R. I. et al.(1990), Wieczorech, K. P. et al. (2006)].

En contraste, en [Zarrinkar, P. P., and Williamson, J. R.(1994)], ver Fig. 2, pg. 919, la estructura secundaria de la ribozima L-21 Sca I tiene una horquilla (hairpin) rotu-

lada por P_{5b} , $5'...G [G (G A A A) C] U U U G...3'$, y su motivo estructural es en forma de ocho, ambos patrones son consistentes con el tetrabucle en la primera posición en Tabla 1 de [Sheehy et al. (2010)], i.e. **G A A A**, con el vecino más próximo un bp **C-G**.

| S | n_1 | n_2 | n_3 | n_4 | n_5 | n_6 | n_7 | n_8 | n_9 | n_{10} | n_{11} | n_{12} | n_{13} | n_{14} | n_{15} |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | □ | C | A | G | G | C | A | U | G | C | A | C | C | U | G |
| □ | | | | | | | | | | | | | | | |
| C | | C | | | | C | | | | C | | C | C | | * |
| A | | | A | | | | A | | | | A | | | * | |
| G | | | | G | G | | | | G | | | | * | | G |
| G | | | | G | G | | | | | | | * | | | G |
| U | | | | | | | | U | | | * | | | U | |
| G | | | | G | G | | | | | * | | | | | G |
| C | | C | | | | C | | | * | C | | C | C | | |
| A | | | A | | | | A | * | | | A | | | | |
| U | | | | | | | * | U | | | | | | U | |
| G | | | | G | G | * | | | | | | | | | G |
| C | | C | | | * | C | | | | C | | C | C | | |
| C | | C | | * | | C | | | | C | | C | C | | |
| U | | | * | | | | | U | | | | | | U | |
| G | | * | | G | G | | | | | | | | | | G |

Cuadro 5.4: BPPM: 1^{era} horquilla en la ribozima L-21 Sca I.

En el dominio del fosfato P_{6b} la horquilla en $5'... G U C A A C A G A (U C U U) C U...3'$ es compatible la siguiente condición cohesiva $k_j = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$, y $k_i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ de la ecuación (5.2), según el Cuadro 5.5. Un escenario de multidominios es consistente con esta aritmética asociativa. Resultando admisibles la existencia de los tetrabucles: **U C A G**, **G A A A**, **U U U C**, y sus permutaciones. Las formaciones de los bucles y del bp elemental tiene como consecuencia del efecto cooperativo la renormalización de la distancia entre unidades. La primera estructura con forma de ocho (bulge plus a heptaloop) en la estructura secundaria de la ribozima L-21 Sca I es un claro ejemplo del reescalamiento. Precisamente, en el oligonucleótido $5'... A A A C C A A U A G A U U G C A U C G G U U U ...$ estos eventos cooperativos reducen la distancia efectiva a $5'... A A A C C A A G U G U U U ...$, e.g. referirse a la décima fila en el Cuadro 5.5.

5.1.1. Conclusiones de esta aplicación incipiente

El plegamiento de las macromoléculas biológicas es un tema central de investigación de la bioingeniería que involucra un espectro muy amplio de disciplinas científicas así como las innumerables contribuciones de investigadores de diversas ramas del conocimiento. El interés y relevancia biotecnológica involucra a especialistas en biología, química, física así como también expertos en computación. El algoritmo aplicado puede ser utilizado para el diseño de pruebas de oligonucleótidos.

| $n_t \sim \text{impar}$ | b-p | Motivos |
|-------------------------|-----------------------------------|---------------------|
| $\forall n_t$ | A U | W-C |
| $\forall n_t$ | G C | W-C |
| $\forall n_t$ | A C U G | (L_{\circ}^4) |
| $\forall n_t$ | G A A A | (L_{\circ}^4) |
| $\forall n_t$ | U C U U | (L_{\circ}^4) |
| $n_t \geq 7$ | G G A C C U | L_{\circ}^6 |
| $n_t \geq 7$ | G A A C U U | L_{\circ}^6 |
| $n_t \geq 7$ | $(A C)_3 C$; $G(U G)_3$ | L_{\circ}^7 |
| $n_t \geq 7$ | 5'□ C C A A G U G | $(U_F)_{\sim}^7$ |
| $n_t \geq 9$ | C C A A G U G U | L_{\circ}^8 |
| $n_t \geq 9$ | U G G A A C C U | L_{\circ}^8 |
| $n_t \geq 13$ | 5'□(C U) ₃ C C A A G G | $(U_F)_{\sim}^{12}$ |
| $n_t \geq 13$ | U G G A A C C A C A G U | L_{\circ}^{12} |
| $n_t \geq 15$ | 5'□ C U G G A A C C A C A G A C | $(U_F)_{\sim}^{14}$ |

Cuadro 5.5: Config. desplegadas y bucles, $k_j = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ y $k_i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

5.2. Comunicaciones y Publicaciones

A partir del reconocimiento de que el proceso de plegamiento de un biopolímero es expedito y eficiente, [Fernández, A., and Niel, B.(1997)] y del modelo variacional físico-químico, [Fernández, A., Niel, B., and Burastero, T.(1998)] que interpreta la disminución de la energía libre de Gibbs en los eventos elementales del mismo, se propone [Niel, B. I., Reartes, W. A. and Brignole, N. B. (2011)] una aplicación embriónica para analizar la estabilidad de motivos planares de las estructuras secundarias de oligonucleótidos a nivel de las matrices de las topologías de contacto de las macromoléculas.

Parte V

Conclusiones Generales

Capítulo 6

Contribuciones del trabajo de tesis

En cada capítulo que conforma el trabajo de tesis se ha señalado la relevancia teórica y/o práctica de los temas allí tratados, y también los desarrollos que son contribuciones originales. Finalmente, se detallan a continuación las contribuciones más relevantes que se presentan en este trabajo de tesis:

1. En los Capítulos “Hamilton vs Hamilton” y “Geometría de los Hamiltonianos” se propone la metodología y modelos variacionales que caracterizan caminos y ciclos euclidianos reflexivos. El hallazgo de una confluencia entre dos áreas de investigación de Hamilton se desarrolla en “Hamilton vs Hamilton”. En este contexto cabe destacar el Teorema 2.2.3, pág. 80 que, entre otras aplicaciones, permite obtener los resultados de la Sección §2.2.2, pág. 84.
2. En el Capítulo “Algoritmo Aritmético” el procedimiento fundamentado en el §3.1, en la pág. 3.1, hace posible la identificación de los ciclos hamiltonianos de máxima ineficiencia en los vértices de un n -gono regular. En §3.3, pág. 145, el Teorema 3.3.10 es una aplicación directa de este desarrollo teórico sobre los vértices de un $2p + 2$ -gono regular. Por otra parte, los resultados que aparecen en el §3.6, desde la pág. 170 a 173, son consecuencia de aplicar dicho algoritmo sobre los vértices de un $2p + 1$ -gono regular.
3. Como resultado de la convergencia del enfoque variacional con el algoritmo aritmético resulta el Teorema 3.4.21 en la pág. 158, de la §3.4, que permite la caracterización del sentido de recorrido de hamiltonianos y cuasi-hamiltonianos y el número de vueltas alrededor del centro o baricentro en trayectorias cíclicas.
4. En el Capítulo “Estudios iniciados: Estructuras en bin -gonos y hubnet” muestra de que manera extensiones de las metodologías propuestas pueden interpretar estructuras conectivas de mayor complejidad. Por otra parte, el carácter cohesivo de la aritmética algorítmica aplicada a secuencias complementarias y/o antiparalelas de pares de aminoácidos puede ser una bio-aplicación a perfeccionar.
5. Resultados del Capítulo 3, Sección 3.4, como los Teoremas 3.4.21, 3.6.14 y 3.6.15, entre otros, es parte del material en reelaboración para ser enviado a publicar a alguna revista de la especialidad.

Parte VI

Glosario

Notación, acrónimos y abreviaturas

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y \mathbb{C} Conjuntos de los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos respectivamente, con sus correspondientes estructuras.

\mathbb{R}^n Espacio euclídeo n -dimensional, constituido por las n -uplas ordenadas de números reales (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Cardinal de un conjunto.

$e^{i\pi} \sqrt[n]{1}$ Conjunto de las n raíces de orden n de la unidad: $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \frac{\cos(2k\pi)}{n} + i \frac{\sin(2k\pi)}{n}$, para $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

C_n^m Denota a los números combinatorios: $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

\equiv Congruencia.

\cong Correspondencia: A la expresión de la izquierda de \cong le corresponde el término o valor indicado a su derecha.

cw. Del inglés: clockwise, indica el sentido de recorrido de las agujas del reloj en caminos o ciclos.

ccw. Del inglés: counterclockwise, indica el sentido de recorrido contrario al de las agujas del reloj en caminos o ciclos.

P Del inglés path: indica camino, y en este trabajo se usa para indicar caminos o trayectorias no cerradas (ciclos).

P_H^{n-1} Indica una trayectoria o camino hamiltoniano no cíclico, de $n-1$ lados, que toca cada uno de los vértices o nodos, de un conjunto dado de n nodos. En este trabajo los n nodos se reducen, en general, a los n vértices de un n -gono regular.

P_{QH}^m Indica un camino "Cuasi hamiltoniano", en el sentido que se trata de un camino hamiltoniano, que toca $m+1$ vértices de un conjunto de n y $m+1 < n$.

P_H^{n-1} s Indica el plural de P_H^{n-1} .

C_H^m Indica un ciclo hamiltoniano que toca cada uno de los vértices o nodos, de un conjunto dado de n nodos.

C_{QH}^m Indica un ciclo cuasi hamiltoniano, en el sentido que se trata de un ciclo hamiltoniano, pero que toca m nodos de un conjunto de n y $m < n$.

TSP Del inglés: “*travel salesman problem*”, se usa para referirse a uno de los posibles caminos que puede transitar un viajante de comercio que se propone visitar un conjunto dado de localidades iniciando su viaje en la ciudad en que está su hogar y regresando a dicha localidad.

TSPP Del inglés: “*travel salesman path problem*”, se usa para referirse a una variante de la definición anterior en la que el viajante de comercio recorre cada una de las localidades pero no retorna a la localidad de partida. En general, la palabra del inglés “*path*” es utilizada para distinguir una trayectoria hamiltoniana no cíclica de una hamiltoniana cíclica.

Mín. TSP Indica el ciclo de mínima longitud de recorrido, de entre todos los posibles que puede transitar el viajante, para visitar todas las localidades de su cartera.

Mín. TSPP Indica el camino de mínima longitud de recorrido, de entre todos los posibles que puede transitar el viajante, para visitar todas las localidades de su cartera.

Mín. TSPPs Plural de Mín. TSP.

Máx. TSP Indica el ciclo de máxima longitud de recorrido, de entre todos los posibles que puede transitar el viajante, para visitar todas las localidades de su cartera.

Máx. TSPP Indica el camino de máxima longitud de recorrido, de entre todos los posibles que puede transitar el viajante, para visitar todas las localidades de su cartera.

Máx. TSPPs Plural de Máx. TSP.

K_p En una estructura (o arquitectura) de red indica que existe conexión entre dos cualesquiera de los p vértices (o nodos) que conforman la red.

\mathcal{K}_m Conjunto compacto de \mathbb{R}^m .

$\mathcal{L}(\Gamma)$ denota la longitud euclídea de un segmento o trayectoria Γ .

C_H^m Cuando $m < n$ indique que se trata de m de los n vértices del n -gono, entonces $C_H^m = C_{QH}^m$.

$\{\frac{p}{q}\}$ En geometría, “polígono regular estrellado” es una generalización del polígono regular, con lados que se autointersectan de manera equilateral y equiangular. Se construye

de la siguiente manera: elegido un sentido de giro, digamos cw. se toman dos enteros positivos p y q , tales que son relativamente primos y $p > q$. Se toman los p vértices de un p -gono regular y a partir de un vértice inicial que llamamos V_0 se cuentan q vértices en sentido cw. y se obtiene el vértice que denotamos V_q . Se repite el procedimiento a partir de V_q y se llega al vértice V_{2q} . Luego de p reiteraciones se llega al vértice V_{pq} , que coincide con el de partida V_0 . Los p segmentos $V_0, V_q; V_q, V_{2q}; \dots; V_{(p-1)q}, V_{pq} = V_0$, forman un p -gono estrella o estrellado. Por ejemplo, en un pentágono, un polígono estrellado regular, se obtiene al dibujar una línea o segmento desde el primero al tercer vértice, desde el tercero al quinto, de este último al segundo, desde éste al cuarto y desde él al primero.

La notación para un polígono estrellado regular de esta forma es $\{p/q\}$, o de manera equivalente $\{\frac{p}{q}\}$, se debe al matemático suizo Schläfli. Cabe agregar que también se suele usar la notación $\{p/(p-q)\}$ para tales polígonos.

Es posible construir un polígono regular estrellado solo cuando p y q son relativamente primos, i.e. $\text{mcd}(p, q) = 1$. Si además q es menor o igual que $\lfloor p/2 \rfloor$, entonces q se denomina la “densidad” del polígono estrellado.

$\mathcal{N}(K_n(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$: Del inglés: \mathcal{N} “net” representa la arquitectura de la red con conectividad completa asociada a los n vértices de un n -gono regular, $\mathcal{N}(K_n(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), D)$, y con las conexiones ponderadas por las distancias euclidianas entre nodos d_{ij} , es decir $D = (d_{ij})$ es la matrix cuadrada de orden $n \times n$, con diagonal principal integrada por ceros.

$\mathcal{N} = \{K_{n=2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}), D\}$ simboliza la estructura de red arriba mencionada pero para los casos de polígonos con número par de vértices.

$\mathcal{N}(K_{N=2n}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}, r e^{i\pi} \sqrt[n]{1}), d_{N \times N}^E)$ o también $\mathcal{N} := \{K_{N=2n}(e^{i\pi} \sqrt[n]{1}, r e^{i(\pi+\varphi)} \sqrt[n]{1}), D\}$ simbolizan arquitecturas de redes asociadas a los vértices de dos polígonos regulares de n lados cada uno, de modo que uno de ellos tiene sus vértices sobre las n raíces unitarias y el otro, en las n proyecciones radiales de los anteriores sobre la circunferencia interior concéntrica de radio r , rotadas en un ángulo φ . Claramente $0 < r < 1$. $K_{N=2n}$ simboliza conectividad completa entre los $2n$ nodos, $\{e^{i\pi} \sqrt[n]{1}, r e^{i(\pi+\varphi)} \sqrt[n]{1}\}$, indicados anteriormente.

\mathcal{NP} Del inglés: \mathcal{NP} -hard, también \mathcal{NP} -hardness simboliza el hecho de que en general las diversas variantes de los problemas del viajante de comercio, no son resueltos por algoritmos temporalmente polinomiales.

\mathcal{NN} Del inglés: *Nearest Neighbor* se asocia a la estrategia de exploración de los caminos hamiltonianos optando por seleccionar en cada etapa al nodo más cercano entre aquellos aún no visitados en el tour.

\mathcal{FN} Del inglés: *Farthest Neighbor* se asocia a la estrategia de exploración de los caminos hamiltonianos optando por seleccionar en cada etapa al nodo más alejado entre aquellos aún no visitados en el tour.

\mathcal{G} Del inglés: *Greediest* está relacionado con algoritmos “greedy”: voraz, ansioso, que en cada etapa se decide en forma oportunista.

\mathcal{AG} Del inglés: *Clumsiest* estrategias o heurísticas que en cada etapa deciden con máxima ineficiencia.

Parte VII
Bibliografía

Bibliografía

- [Amann, R. I. et al.(1990)] Amann, R. I., Binder, B. J., Olson, R. J., Chisholm, S. W., Devereux, R., and Stahl, D. A. *Combination of 16S rRNA-Targeted Oligonucleotide Probes with Flow Cytometry for Analyzing Mixed Microbial Populations*. American Society for Microbiology, June 1990, Vol. 56, No. 6, pp. 1919-1925.
- [Andreescu, T. and Feng, Z. (2004)] Andreescu, T. and Feng, Z. *A Path to Combinatorics for Undergraduates. Counting Strategies*. Birkhäuser, 2004.
- [Applegate, D., Bixby, R. E., Chavatal, V. and Cook, W. J. (2006)] Applegate, D., Bixby, R. E., Chavatal, V. and Cook, W. J. *Traveling Salesman Problem: A Computational Study*. Princeton University Press, 2006.
- [Concorde code] Applegate, D., Bixby, R. E., Chavatal, V. and Cook, W. J. *Concorde code*. <http://www.tsp.gatech.edu/concorde/>.
- [Bachelier, S. et al. (1999)] Bachelier, S., Clement, J. M., and Hofnung, M. *Short palindromic repetitive DNA elements in enterobacteria: a survey*. Res. Microbiol. Elsevier, 150 (1999), pp. 627-639.
- [Barvinok, A. I. (1996)] Barvinok, A. I. *Two algorithmic results for the traveling salesman problem*. Mathematics of operations research, Vol. 21, No. 1, Feb. 1996, U.S.A., pp. 65-84.
- [Barvinok, A. I., Gimadi, E. Kh. and Serdyukov, A. I. (2002)] Barvinok, A. I., Gimadi, E. Kh. and Serdyukov, A. I. *The maximum traveling salesman problem*. Edit. G. Gutin and A. Punnen, 2002.
- [Barvinok, A. I. et al. (2003)] Barvinok, A. I., Fekete, S. P., Johnson, D. S., Tamir, A., Woeginger, G. J. and Woodroffe, R. *The geometric maximum traveling salesman problem*. Journal of the ACM. Volume 50, Issue 5, September 2003.
- [Brassard, G. and Bratley, P. (1996)] Brassard, G. and Bratley, P. *Fundamentals of Algorithmics*. Prentice Hall, Inc. 1996.
- [Born, M., and Wolf, F. (1990)] Born, M. and Wolf, E. *Principles of Optics*. Pergamon Press, 1970.
- [Buckly, F., and Harary F. (1990)] Buckley, F. and Harary, F. *Distance in Graphs*. Addison-Wesley Publishing Co., 1990.

Bibliografía

- [Cendra, H., Fernández, A., and Reartes, W.(1996)] Cendra, H., Fernández, A., and Reartes, W. *A geometric framework for polymer folding*. Journal of Mathematical Chemistry. Vol. 19, 1996, pp. 331-336.
- [Christianson, B. (1991)] Christianson, B. *Solving quartics using palindromes*. Mathematical Gazette, Vol. 75, pp. 327-328, October 1991, The Mathematical Association.
- [De Gregorio, E. et al.(2006)] De Gregorio, E., Silvestro, G., Venditti, R., Carlomagno, M. S., and Di Nocera, P. P. *Structural Organization and Functional Properties of Miniature DNA Insertion Sequences in Yersinia*. Journal of Bacteriology, November 2006, Vol. 188, No. 22, pp. 7876-7884.
- [Corrente, F., and Onorato, P.(2011)] Corrente, F., and Onorato, P. *Two Lagrange-like optical invariants and some applications*. Optics Letters. Vol. 36, No. 9, 2011, pp. 1701-1703.
- [Coxeter, H. S. M. (1963)] Coxeter, H. S. M. *Introduction to Geometry*. John Wiley and Sons, Inc., 1963.
- [Dudley, U. (1997)] Dudley, U. *Numerology or, what Pythagoras wrought*. Mathematical Association of America, 1997.
- [Faucete, W. M. (1996)] Faucete, W. M. *A Geometric Interpretation of the Solution of the General Quartic Polynomial*. The American Mathematical Monthly, Vol. 103, No. 1, January 1996, pp. 51-57.
- [Fekete, S. P. (1999)] Fekete, S. P. *Simplicity and Hardness of the Maximum Traveling Salesman Problem under Geometric Distances*. In Proc. 10th ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms, pp. 337 - 345, 1999.
- [Fekete, S. P., Meijer, H. R., Rohe, A. and Tietze, W. (2002)] Fekete, S. P., Meijer, H. R., Rohe, A. and Tietze, W. *Solving a Hard Problem to Approximate an Easy One: Heuristics for Maximum Matchings and Maximum Traveling Salesman Problems*. Journal of Experimental Algorithms. 7 (2002), article 11.
- [Fernández, A.(2010)] Fernández, A. *Transformative Concepts for Drug Design: Target Wrapping*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010. ISBN 978-3-642-11791-6.
- [Fernández, A., and Niel, B.(1997)] Fernández, A., and Niel, B. *Folding pathways as brachistochrones*. Proceedings of the Fourth “Dr. Antonio A. R. Monteiro” Congress on Mathematics. Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, 1997, pp. 179-186.
- [Fernández, A., Niel, B., and Burastero, T.(1998)] Fernández, A., Niel, B., and Burastero, T. *The RNA folding problem: a variational problem within an adiabatic approximation*. Biophysical Chemistry. Vol. 74, April 1998, Printed in U.S.A., pp. 89-98.
- [Fernández, A., and Cendra, H.(1996)] Fernández, A., and Cendra, H. *In vitro RNA folding: the principle of sequential minimization of entropy loss at work*. Biophysical Chemistry. Vol. 58, No. 1, April 1996, Printed in U.S.A., pp. 335-339.

-
- [Fernández, A.(1994)] Fernández, A. *Memorizing all significant foldings of a random RNA chain*. PHYSICA A, Stat. and Theor.) 203, 359 (1994).
- [Fernández, A. and Belinky, A.(1994)] Fernández, A. and Belinky, A. *Neural network hamiltonian governing the formation of RNA base pairs*. Berichte der Bunsengesellschaft für Physikalische Chemie Rapid Communication 98, 125 (1994).
- [Fernández, A.(1993)] Fernández, A. *Simulating an exploration of RNA conformation space with an appropriate parallel-updating strategy*. Physical Review E. Vol. 48, No. 4, October 1993, pp. 3107-3111.
- [Gee, A. H., Aiyer, S. V. B. and Prager, R. W. (1993)] Gee, A. H., Aiyer, S. V. B. and Prager, R. W. *An analytical framework for optimizing neural networks*. Neural Networks, Vol. 6, pp. 79-97, 1993, Pergamon Press Ltd.
- [Golub, G. H., Van Loan, C. F. (1996)] Golub, G. H., Van Loan, C. F. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 1996, USA.
- [Gutin, G. and Punnen, A. (2007)] Gutin, G. and Punnen, A. *The Traveling Salesman Problem and Its variations*. Chapter 1. The Maximum Traveling Salesman Problem. A. Barvinok, E. Kh. Gimaldi and A. I. Serdyukov Edit. Springer, 2007.
- [Hamilton, W. R. (1833)] Hamilton, W. R. *On a general Method of expressing the Paths of Light, and of the Planets, by the Coefficients of a Characteristic Function*. Dublin University Review and Quarterly Magazine, Vol. I, 1833, pp. 795-826.
- [Haykin, S. (2000)] Haykin, S. *Neural Networks: A comprehensive foundation*. Prentice Hall, 2000.
- [Henderson, H. V. and Searle, S. R. (1981)] [Henderson, H. V. and Searle, S. R. *The Vec-Permutation Matrix, The Vec Operator and Kronecker Products: A Review*. Linear and Multilinear Algebra, 1981, vol. 9, pp. 271-288.
- [Hopfield, J. J. (1982)] Hopfield, J. J. *Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities*. Biophysics. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 79, pp. 2554-2558, 1982.
- [Hopfield, J. J. (1984)] Hopfield, J. J. *Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 81, pp. 3088-3092, 1984.
- [Hopfield, J. J. and Tank, T. W. (1985)] Hopfield, J. J. and Tank, T. W. *Neural computation of decisions in optimization problems*. Biological Cybernetics, Vol. 52, pp. 141-152.
- [Kanter, I. and Sompolinsky, H.(1987)] Kanter, I. and Sompolinsky, H. *Associative recall of memory without errors*. Physical Review A. Vol. 35, No. 1, January 1, 1987, pp. 380-392.

Bibliografía

- [Kirillov, A. (1999)] Kirillov, A. *On Regular Polygons, Euler's Function, and Fermat Numbers*. Kvant Selecta: Algebra and Analysis, I, pp. 87-98, American Mathematical Society, 1999.
- [Kirkpatrick, S. and Sherrington, D. (1978)] Kirkpatrick, S. and Sherrington, D. *Infinite-ranged models of spin-glasses*. Physical Review B. Vol. 17, No. 11, June 1, 1978, pp. 4384-4338.
- [Kulinski, T. et al.(2003)] Kulinski, T., Olejniczak, M., Huthoff, H., Bielecki, L., Pachulska-Wieczorek, K., Das, A. T., Berkhout, B., and Adamiak, R. W. *The Apical Loop of the HIV-1 TAR RNA Hairpin Is Stabilized by a Cross-loop Base Pair*. The Journal of the Biological Chemistry. July 25, 2003. Vol. 278, No 40, pp. 38892-39901.
- [Lawler, E. L., Lenstra, J. K., Rinnooy Kan A. H. G. and Shmoys, D. B. (1985)] *The Traveling Salesman Problem*. John Wiley and Sons, 1985.
- [Lemons, D. S. (1997)] Lemons, D. S. *Perfect Form. Variational Principles, Methods, and Applications in Elementary Physics*. Princeton University Press, Inc. 1997.
- [Liskovets, V. (2002)] Liskovets, V. *Some Identities for Enumerators of Circulant Graphs*. arXiv:math.CO/0104131, Vol. 1, 14 December 2002, pp. 1-17. Institute of Mathematics. Minsk, Belarus.
- [Lu et al.(2006)] Lu, Z. J., Turner, D. H., and Mathews, D, H. *A set of nearest neighbor parameters for predicting the enthalpy change of RNA secondary structure formation*. Nucleic Acids Research, 2006, Vol. 34, No.17, pp. 4912-4924.
- [Maizel et al.(1981)] Maizel, J. R., Jr., and Lenk, R. P. *Enhanced graphic matrix analysis of nucleic acid and protein sequences*. Proc. Natl. Acad. Sci USA, Vol. 78, No. 12, pp. 7665-7669, December 1981. Genetics.
- [Miller, R. E. (2000)] Miller, R. E. *Optimization Foundations and Applications*. John Wiley and Sons, Inc., 2000.
- [Niel, B. I. (2013)] Niel, B. I. *Longest Hamiltonian in N-odd-Gon*. Open Journal of Discrete Mathematics. Scientific Research Publish. Volume 03, Number 02, April 2013.
- [Niel, B. I. (2012a)] Niel, B. I. *Every Longest Hamiltonian Path in Even N-Gons*. Journal of Discrete Mathematics, Algorithms and Applications. World Scientific. Volume 04, Number 04, December 2012.
- [Niel, B. I. (2012b)] Niel, B. I. *Viajes sobre N-Gons*. Editorial eae, 2012.
- [Niel, B. I. (2011)] Niel, B. I. *Every shortest Hamiltonian path in N-gons*. Proceedings of the XI Dr. Antonio A. R. Monteiro, Congress of Mathematics, May, 27, 2011, Mathematics Department, Universidad Nacional del Sur, 8000 Bahía Blanca, Argentina.

-
- [Niel, B. I., Reartes, W. A. and Brignole, N. B. (2011)] Niel, B. I., Reartes, W. A. and Brignole, N. B. *From unfolded sequences to structural motifs*. Enief XI. XIX Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones. Mecánica Computacional Vol. XXX, AMCA. pp. 2853-2862, 1 al 4 Noviembre de 2011, Rosario.
- [Niel, B. I., Reartes, W. A. and Brignole, N. B. (2010)] Niel, B. I., Reartes, W. A. and Brignole, N. B. *Every Longest Hamiltonian Path in Odd N -gons*. SIAM Conference on Discrete Mathematics. Austin, Texas. June 14-17, 2010.
- [Niel, B. I. (2008)] Niel, B. I. *Los caminos hamiltonianos más largos en redes de las raíces impares de la unidad*. UMA 08, Resúmen págs. 68-69. LVIII Reunión de Comunicaciones Científicas, 2008.
- [Niel, B. I. (2007)] Niel, B. I. *Un método general para obtener los hamiltonianos óptimos no cíclicos*. LVII Reunión Anual de Comunicaciones Científicas, UMA 2.007. Sesión: Optimización Combinatoria y Grafos, FAMAFA, Córdoba. 17 al 22 de septiembre 2007. Índice de Comunicaciones Científicas págs. 99-100.
- [Niel, B. I. (2006)] Niel, B. I. *Caracterización de ciclos y caminos hamiltonianos en redes con nodos en las raíces de la unidad*. LVI Reunión Anual de Comunicaciones Científicas, UMA 2.006. Sesión: Matemática Aplicada I. Índice de Comunicaciones Científicas pág. 56.
- [Niel, B. I. (2005a)] Niel, B. I. *Geometry of the euclidean hamiltonian subptimal and optimal paths in the N 's networks*. Proceedings of the VIII Dr. Antonio A. R. Monteiro, Congress of Mathematics, pp. 67 - 84, 2006, Mathematics Department, Universidad Nacional del Sur, 8000 Bahía Blanca, Argentina.
- [Niel, B. I. (2005b)] Niel, B. I. *Fermat, Snell and Hamilton on Geometric Optics Circumstances*. AMSE, Modelling, Measurement and Control, Serie A: A General Physics and Electrical Applications, Vol. 78, Number 3-4, 2005.
- [Niel, B. I. and Claverie, A. (2005)] Niel, B. I. and Claverie, A. *How faraway are the greedy and anti-greedy strategies of solving specific travelling salesman's problems ?* Proceedings of the XII SIGEF Congreso Internacional, pp. 177 - 200, Octubre 2005, Universidad Nacional del Sur, 8000 Bahía Blanca, Argentina.
- [Niel, B. I. (2004)] Niel, B. I. *A main result that forecasts the optimum hamiltonian paths of a network built on the n -th root of unity's points*. LIV Reunión Anual de Comunicaciones Científicas, UMA 2.004. Sesión: Matemática Aplicada. Índice de Comunicaciones Científicas pág. 120.
- [Niel, B. I. (2004)] Niel, B. I. *Hamilton's real finds on geometric optics in a Hamiltonian play*. Proceedings of MS' 2004 University Claude Bernard - Lyon I, LNSS, CNRS, pp. 9.9-9.13, 5-7 July 2004, Lyon, France.
- [Niel, B. I. (2003)] Niel, B. I. *Hallazgos de Hamilton en óptica geométrica en un juego Hamiltoniano*. LIII Reunión de Comunicaciones Científicas, U.M.A. 2003. Sesión: Teoría de Grafos, Combinatoria y Convexidad. Índice de Comunicaciones Científicas pág. 77.

Bibliografía

- [Niel, B. I. (2002)] Niel, B. I. *Hamiltonian path paradigms mirrored at the Fermat's Principle*. Proceedings of the Fourth International Conference on Modelling and Simulation. Victoria University. pp. 132-138. 11-13 November, 2002, Melbourne, Australia.
- [Niel, B. I. (2001)] Niel, B. I. *The geometry of the Euclidean Hamiltonian trajectories on $\sqrt[n]{1}$ points*. Actas del VI Congreso Dr. Antonio A. R. Monteiro, Bahía Blanca. Departamento de Matemática. Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur, pp. 33-49, 2001.
- [Niel, B. I. and Verdiell, A. B. (1997a)] Niel, B. I. and Verdiell, A. B. *Computer simulations and theoretical probes for neurodynamic convergence properties*. Proceedings of the Fourth Dr. Antonio A. R. Monteiro Congress on Mathematics. Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, 1997, pp. 187-198.
- [Niel, B. I. and Verdiell, A. B. (1997b)] Niel, B. I. and Verdiell, A. B. *Neural network searching equilibrium for a dynamic economic model*. Fuzzy Economic Review. Number 1, Vol. II, May, 1997, pp. 57-72.
- [Personnaz, I., Guyon, I. and Dreyfus, G. (1986)] Personnaz, I., Guyon, I. and Dreyfus, G. *Collective computational properties of neural networks: New learning mechanisms*. Physical Review A, vol. 34, number 5, pp. 4217-4228, november 1986.
- [Regalia, P. A. and Mitra, S. K. (1989)] Regalia, P. A. and Mitra, S. K. *Kronecker products, Unitary matrices and Signal Processing Applications*. SIAM Review. Vol. 31, No. 4, pp. 586-613. December 1989.
- [Rey Pastor, J. et al.] Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. and Trejo, C. A. *Análisis Matemático 1. Análisis Algebraico. Teoría de Ecuaciones. Cálculo infinitesimal de una variable*. Editorial Kapelusz S. A., 1957.
- [Rey Pastor, J. et al.] Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. and Trejo, C. A. *Análisis Matemático 2. Cálculo infinitesimal de varias variables*. Editorial Kapelusz S. A., 1957.
- [Santaló, L. A. (1993)] Santaló, L. A. *La Geometría en la formación de profesores*. Red Olímpica 1993.
- [Schnarel, M. N. et al. (1996)] Schnarel, M. N., Damberger, S. H., Gray M. W., and R. Gutell R. R. *Comprehensive Comparison of Structural Characteristics in Eukaryotic Cytoplasmic Large Subunit (23 S-like) Ribosomal RNA*. Journal of Molecular Biology, 1996.
- [Sheehy et al. (2010)] Sheehy, J. P., Amber, R. D., and Znosko, B. M. *Thermodynamic characterization of naturally occurring RNA tetraloops*. RNA. January 4, 2010, pp. 417-429. A publication of the RNA Society.
- [Sherk, F. A. et al. (1995)] Sherk, F. A., McMullen, P., Thompson, A. C. and Weiss, A. I. (1995) *Kaleidoscopes*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and advanced texts. A Wiley-Interscience Publication 1995.

- [Schuster P. et al. (1993)] Schuster P., Fontana W., Stadler P. F. and Hofacker I. L. From sequences to shapes and back: A case study in RNA secondary structures. Institut für Molekulare Biotechnologie, Jena, Germany. Proceedings Biological Sciences. The Royal Society. 1994. Mar 22; 255(1344); pp. 279-84.
- [Smith, D., R., Pendry, J. B., and Wiltshire, M. C. K. (2004)] Smith, D., R., Pendry, J. B., and Wiltshire, M. C. K. *Metamaterials and Negative Refractive Index*. Science. Vol. 305, No. 5685, 2004, pp. 788-792.
- [Sundar, B., Hamilton, A. C., and Courtial, J.(2009)] Sundar, B., Hamilton, A. C., and Courtial, J. *Fermat's principle and the formal equivalence of local light-ray rotation and refraction at the interface between homogeneous media with a complex refractive index ratio*. Optics Letters. Vol. 34, No. 3, 2009, pp. 374-376.
- [Tikhomirov, V. M. (1990)] Tikhomirov, V. M. *Stories about maxima and minima*. AMS and Mathematical Association of America, 1990.
- [Treatman, S., and Wickham, C. (2000)] Treatman, S. and Wickham, C. *Constructible Approximations of Regular Polygons*. The American Mathematical Monthly, Volume 107, Number 10, pp. 911-922, December 2000. Serge Tabachnikov, Editor, AMS.
- [Uspensky, J. V. (1948)] Uspensky, J. V. *Theory of Equations*. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1948.
- [Vilenkin, N. (1972)] Vilenkin, N. *¿ De cuántas formas ? Combinatoria*. Editorial MIR, MOSCU 1972.
- [Vinogradov, I. (1971)] Vinogradov, I. *Fundamentos de la teoría de los números*. Editorial MIR, MOSCU 1971.
- [Watts, D. J. (1999)] Watts, D. J. *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness*. Princeton Studies in Complexity, 1999.
- [Wieczorech, K. P. et al. (2006)] Wieczorech, K. P., Purzycka, P. S., and Adamiak, R. W. *New, extended hairpin form of the TAR-2 RNA domain points to the structural polymorphism at the 5' end of the HIV-2 leader RNA*. Nucleic Acids Research. Vol 34, No. 10, pp. 2984-2997, April 2006.
- [Wolf, K. B., and Krötzsch, G. (1995)] Wolf, K. B., and Krötzsch, G. *Geometry and dynamics in refracting systems*. European Journal of Physics. Vol. 16, No. 1, 1995, 14-20.
- [Zarrinkar, P. P., and Williamson, J. R.(1994)] Zarrinkar, P. P., and Williamson, J. R. *Kinetic Intermediates in RNA Folding*. Science. Vol. 265, 12 August 1994.
- [Zhang, W., and Chen, S. J.(2003)] Zhang, W., and Chen, S. J. *Master equation approach to finding the rate-limiting steps in biopolymer folding*. Journal of Chemical Physics. Vol. 118, No. 7, 15 February 2003.