



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS DE DOCTORA EN MATEMÁTICA

**Soluciones oscilatorias en ecuaciones
diferenciales con retardo**

Andrea Liliana Bel

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2014

Prefacio

Esta tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctora en Matemática de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Matemática de la Universidad Nacional de Sur durante el período comprendido entre los meses de abril de 2009 y diciembre de 2013, bajo la dirección del Dr. Walter Reartes, Profesor Asociado del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur y la codirección de la Dra. Griselda Itovich, Profesora Titular del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional de Río Negro. Este trabajo ha sido financiado en parte con becas de posgrado otorgadas por CONICET.

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento:

A Walter, por guiarme y alentarme a lo largo del desarrollo de esta tesis, por su ayuda y paciencia en todo momento.

A la gente que he conocido en la Universidad Nacional del Sur, compañeros, docentes, no docentes y alumnos, por recibirme con los brazos abiertos y acompañarme en distintos momentos de este camino. Especialmente a Ana por su gran apoyo en los últimos años tanto en lo laboral como en lo personal. Gracias!

A todo el Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Comahue donde di mis primeros pasos en la matemática, y a Griselda por introducirme en el universo de las ecuaciones diferenciales y darme la oportunidad de seguir este camino.

A toda mi familia, principalmente a mis padres y a mi hermano Hugo, por su apoyo y compañía aún a la distancia, por cargarme de alegría y energía cuando estoy en Neuquén.

Por último, pero no por eso menos importante, a todos mis amigos! A Lucre por el aguante en la recta final y a todos los que de una forma u otra aportaron su granito de arena para que esta tesis exista.

¡Muchas gracias a todos!

Resumen

Las ecuaciones diferenciales con retardo son utilizadas frecuentemente para modelar problemas en física, ingeniería o biología entre otros. Estas ecuaciones son un ejemplo de ecuaciones diferenciales funcionales y la complejidad que presentan sus soluciones es mucho mayor que la observada en ecuaciones diferenciales ordinarias, incluso para ecuaciones de primer orden. Por la dependencia temporal con el retardo, una solución queda determinada a partir de una función inicial definida en un intervalo de tiempo, el problema que resulta es infinito-dimensional.

Muchas herramientas teóricas conocidas para el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias se adaptan o generalizan para el estudio de ecuaciones diferenciales con retardo. Es especialmente interesante, tanto desde el punto de vista teórico como práctico, el estudio de soluciones oscilatorias en este tipo de ecuaciones. A lo largo de esta tesis desarrollamos metodologías que nos permite calcular soluciones periódicas y determinar su comportamiento dinámico.

La primer metodología presentada en esta tesis combina la utilización del método de análisis homotópico y un método de colocación para calcular la estabilidad de los ciclos periódicos existentes. Las ventajas que presenta este procedimiento y las distintas adaptaciones que hemos realizado a los métodos, nos permiten describir escenarios dinámicos interesantes en distintas ecuaciones con retardo. En primer lugar, analizamos una ecuación de van der Pol realimentada con retardo, observamos distintas bifurcaciones y resonancias en las que intervienen uno o varios ciclos periódicos. Por otra parte, utilizamos el método de análisis homotópico como herramienta teórica para probar la existencia de ramas de bifurcaciones de Hopf isocrónicas.

Otro método que permite el estudio de soluciones oscilatorias en ecuaciones diferenciales con y sin retardo, es la metodología en frecuencia. En esta tesis presentamos una metodología iterativa en frecuencia que generaliza los resultados existentes y permite, utilizando teoría de singularidades, describir distintos escenarios dinámicos relacionados con bifurcaciones de Hopf generalizadas. Por último, usamos el método en frecuencia para estudiar sistemas discretos, demostramos la existencia de bifurcaciones de gran interés y determinamos en forma analítica la interacción de las mismas.

Abstract

Delay differential equations are often used to model problems in physics, engineering and biology among others. These equations are examples of functional differential equations and their solutions have a much higher complexity than that observed in ordinary differential equations, even for first order equations. By the time dependence with the delay, a solution is determined from an initial function defined in an interval of time, the problem then it is infinite-dimensional.

Many theoretical tools developed for the study of ordinary differential equations are adapted or generalized to analyze delay differential equations. It is particularly interesting from both theoretical and practical point of view, the study of oscillatory solutions in this type of equations. Throughout this thesis we develop methodologies that allow us to calculate periodic solutions and determine its dynamic behavior.

The first methodology presented in this thesis combines the use of homotopy analysis method and a collocation method for calculating the stability of existing periodic cycles. The advantages of this procedure and the adaptations we have made to the methods, permit us to describe interesting dynamic scenarios in different equations with delay. First, we analyzed a van der Pol equation with time–delay feedback, we observed different bifurcations and resonances, which involved one or more periodic cycles. Also, we use the homotopy analysis method as a theoretical tool to prove the existence of branches of isochronous Hopf bifurcations.

Another method used in the study of oscillatory solutions in differential equations with or without delay, is the frequency–domain approach. In this thesis we present a frequency–domain iterative methodology that generalizes existing results and, if it is combined with the use of singularity theory, allows us to describe various dynamic scenarios related to generalized Hopf bifurcations. Finally, we use the frequency–domain approach to analyze discrete systems with delay, we show the existence of bifurcations of great interest and we determine analytically the interaction of these bifurcations.

Índice general

Prefacio	I
Agradecimientos	I
Resumen	III
Abstract	v
1. Introducción	1
1.1. Esquema de la tesis	2
2. Ecuaciones diferenciales con retardo	5
2.1. Introducción	5
2.2. Ecuaciones diferenciales con retardo	5
2.2.1. Teorema de existencia y unicidad. Mapeo solución	7
2.2.2. Estabilidad	8
2.3. Sistemas lineales con coeficientes constantes	9
2.3.1. Presencia de parámetros	11
2.4. Sistemas no lineales con un retardo	12
2.4.1. Bifurcación de Hopf	13
2.5. Estabilidad de soluciones periódicas	15
2.5.1. Método de colocación de Chebyshev	17
3. Método de análisis homotópico	21
3.1. Introducción	21
3.2. Descripción general del método	22
3.2.1. Ejemplo: EDR lineal	23
3.2.2. Operador \mathcal{L} y aproximación inicial x_0	25
3.2.3. El parámetro de control de convergencia h	26
3.3. HAM para soluciones periódicas	29
3.3.1. Ejemplo: van der Pol	32
3.4. Bifurcación de Hopf con HAM	35
4. Péndulo simple, más soluciones periódicas	39
4.1. Introducción	39
4.2. Péndulo simple	40
4.3. Vibraciones	41

4.3.1.	Resultados numéricos	44
4.4.	Rotaciones. Otras coordenadas	46
4.4.1.	Resultados numéricos	48
4.5.	Conclusión	50
5.	van der Pol con retardo, HAM iterado	51
5.1.	Introducción	51
5.2.	Ecuación de van der Pol con retardo	52
5.3.	Uso de iteraciones	54
5.3.1.	Múltiples soluciones	54
5.3.2.	HAM iterado	55
5.4.	Bifurcación de Hopf y Hopf doble	56
5.4.1.	Estabilidad de soluciones periódicas	59
5.5.	Cercanías de puntos de Hopf doble	60
5.5.1.	Hopf doble resonante 3:4	60
5.5.2.	Folds cerca de un punto de Hopf doble	61
5.5.3.	Hopf doble resonante 1:1	62
5.6.	Conclusión	63
6.	Isocronía en sistemas con retardo	65
6.1.	Introducción	65
6.2.	Bifurcación isocrónica	66
6.2.1.	Resultados principales	67
6.3.	Ejemplos	71
6.3.1.	Oscilador anarmónico	71
6.3.2.	Péndulo rotatorio con retardo	73
6.3.3.	Más resonancias	75
7.	Método en el dominio frecuencia para EDRs	79
7.1.	Introducción	79
7.2.	Sistemas retardados en el dominio frecuencia	80
7.2.1.	Estudio de bifurcaciones de Hopf	83
7.3.	Ecuación de bifurcación de alto orden con método en frecuencia iterativo	85
7.3.1.	Singularidades	89
7.4.	Ejemplos	92
7.4.1.	Péndulo rotatorio con retardo revisitado	92
7.4.2.	Bifurcación de Bautin en una EDR de primer orden	95
7.4.3.	Otras bifurcaciones de ciclos en una EDR de segundo orden	97
8.	Sistemas discretos con retardo	103
8.1.	Introducción	103
8.2.	Método en frecuencia para mapas	103
8.3.	Descripción del problema	105
8.4.	Análisis en el dominio frecuencia	107
8.4.1.	Estabilidad del punto fijo	108
8.4.2.	Bifurcaciones de doble período	109
8.4.3.	Bifurcaciones Neimark–Sacker	112
8.4.4.	Interacción doble período. Neimark–Sacker	113

<i>Índice general</i>	IX
8.5. Ejemplos	114
8.5.1. Mapa logístico	114
8.5.2. Modelo discreto de población	117
8.6. Conclusión	119
9. Conclusiones	121
9.1. Líneas de trabajo futuras	121
Bibliografía	123

Índice de figuras

2.1.	Izquierda: Solución de (2.9) obtenida con el método de pasos. Derecha: Mapa solución T evaluado en t_1 para una solución x con condición inicial ϕ en t_0	9
2.2.	Autovalores característicos para ecuaciones lineales escalares (izquierda y centro) y una ecuación de dimensión 2 (derecha).	10
2.3.	Puntos de colocación y grilla para la interpolación.	19
3.1.	Polinomios en h . Izquierda: $a = 1$, $b = 0,5$ y $c = 1$, para $t = 1,8$. Derecha: $a = \pi/2$, $b = 0$ y $c = 1$, para $t = 2$	25
3.2.	Solución con HAM (—) y numérica (—), fijando: $a = 1$, $b = 0,5$ y $c = 1$ (izquierda); $a = \pi/2$, $b = 0$ y $c = 1$ (derecha).	25
3.3.	Aproximaciones de la solución periódica para $\epsilon = 0,6$: (—) HAM orden 2, (—) Poincaré–Lindstedt orden 2.	35
4.1.	Soluciones del péndulo simple en el espacio de fases representado en el plano (izquierda) y en el cilindro (derecha).	41
4.2.	a) Polinomios en función de h para $v_0 = 1,95$. b) Solución exacta (—) y aproximada con HAM (—). c) Comparación períodos: (—) exacto dado en (4.6), (\cdots) $2\pi/\omega^{vib}$ calculado con HAM.	45
4.3.	a) Soluciones rotatorias exactas (—) y soluciones aproximadas con HAM (—) en ambos sistemas de coordenadas; b) Comparación de períodos: (—) exacto en (4.8) y (\cdots) $2\pi/\omega^{rot}$ calculado con HAM.	49
5.1.	Cantidad de condiciones iniciales que predice el sistema (5.9) para $\epsilon = 1$. Curvas de cambio de cantidad de condiciones iniciales (—) y curvas de puntos de Hopf (—).	53
5.2.	a) Polinomios en función de h . b) (—) ciclo HAM de orden 20, (—) aproximación numérica.	54
5.3.	Amplitud de los ciclos para $\epsilon = 1,4142$ y $\tau = 9$. (\cdots) sin iteración de condiciones iniciales, ($\circ\circ\circ$) con tres iteraciones de condiciones iniciales.	55
5.4.	Superficie S en el espacio $d-\tau-\epsilon$; (—): curvas de autointersecciones.	57
5.5.	Curvas de posibles puntos de Hopf para tres valores fijos de ϵ	58
5.6.	a) Entorno de un punto de Hopf doble fijando $\epsilon = 0,139057$; b) Amplitudes para valores constantes de τ indicados en a).	61
5.7.	a) Entorno de un punto de Hopf doble, para $\epsilon = 0,5$; b) Amplitud de los ciclos para $\tau = 12$, —: DDE-Biftool, $\circ\circ\circ$: HAM.	62
5.8.	a) Entorno de un punto de Hopf doble resonante 1:1, para $\epsilon = 4/(5\pi)$; b) Amplitudes para valores fijos de τ mostrados en a).	63

5.9. a) Amplitudes de los ciclos para $\epsilon = 4/(5\pi)$, $\tau = 7,91$; b) Multiplicadores correspondientes a los ciclos en la rama inferior de amplitudes en a). 63

6.1. Izquierda: puntos en que existe bifurcación de Hopf supercrítica (—) y subcrítica (– –). Derecha arriba: perfiles a partir del punto de Hopf con $\tau = 2,5$ indicado en la figura de la izquierda. Derecha abajo: algunos polinomios en h del ciclo existente para $\beta = -1$, $\tau = 2,5$ y $\gamma = -1$ 73

6.2. Máximo de los ciclos: HAM (\cdots) y DDE-Biftool (– –). Izquierda: $\beta = 0,5$ y $\tau = 2$. Derecha: $\beta = 0,3$ y $\tau = 7$ 75

6.3. Izquierda: Perfiles soluciones HAM para $\beta = 0,5$ y $\tau = 2$. Derecha: Perfiles para $\beta = 0,3$ y $\tau = 7$ 75

6.4. a) Máximo de los ciclos para $\beta = 0,3$, $\tau = 7$: HAM (\cdots) y DDE-Biftool (– –). b) Multiplicadores de los ciclos mostrados en a). c) Ciclo inestable (– –) y ciclo de período 3 estable (—) fijando $\gamma = -0,505$ 77

7.1. Caso $q = 2$. Izquierda: Variedad de transición H_0 . Derecha: Diagramas persistentes para los valores de μ_2 indicados en la figura de la izquierda. 91

7.2. Caso $q = 3$. Izquierda: Variedades de transición H_0 , H_1 y D . Derecha: Diagramas persistentes en las distintas regiones indicadas en la figura de la izquierda. 92

7.3. Máximo de las soluciones calculadas en los valores indicados de γ y τ . (\cdots , grandes) Dominio frecuencia; (\cdots , pequeños) HAM; (– –) DDE-Biftool y (—) punto de equilibrio. 94

7.4. Izquierda: curva de Hopf y punto de bifurcación de Bautin. Derecha: Comparaciones de las amplitudes calculadas con DDE-Biftool (– –) y dominio frecuencia (\cdots), de los ciclos para: $\tau = 5,2$ (arriba) y $\tau = 4,8$ (abajo). 96

7.5. Comparaciones de las amplitudes calculadas con DDE-Biftool (– –) y dominio frecuencia (\cdots), de los ciclos para: $\tau = 5,25$ (izquierda) y $\tau = 5,35$ (derecha). 97

7.6. Curvas de posibles puntos de Hopf para los valores de k indicados. 99

7.7. Diagrama de bifurcación en el espacio (κ, τ) con las curvas dadas en (7.79). Diagramas persistentes en cada región indicada en la figura de la izquierda. 101

7.8. Izquierda: curvas en que se verifica (7.82). Derecha: diagramas para valores en el segmento inferior (con $\tau = 4$) indicado en la figura de la izquierda. Abajo: diagramas para valores en el segmento superior, fijando $\tau = 6$. De izquierda a derecha se toman los valores del parámetro $\kappa = -1, -0,75, -0,5, -0,25, 0$, respectivamente. 102

7.9. Diagramas para $\tau = 7$. En la figura central se considera $\kappa = \kappa_0$, en las figuras de la izquierda y de la derecha, un valor de κ menor y otro mayor a κ_0 , respectivamente. 102

8.1. Representación en bloques de un sistema entrada-salida. 104

8.2. Diagramas de Nyquist. Izquierda: para $k = 2$. (a) $\rho = 0,4$, (b) $\rho = 0,7$. Derecha: para $k = 3$. (a) $\rho = 0,2$, (b) $\rho = 0,5$. Las pequeñas flechas indican la dirección a lo largo del contorno de Nyquist. 109

8.3.	Detalle de la intersección del diagrama de Nyquist con el eje real negativo, para valores pares de k . (a) $k\rho < 1$, (b) $k\rho > 1$	109
8.4.	Izquierda: Diagrama de bifurcaciones en el espacio ρ - μ para $k = 2$. PD: doble período supercrítico (+) y subcrítico (-). NS: Neimark-Sacker supercrítica (+, oscuro) y subcrítica (-, claro). Derecha: Múltiples atractores que rodean el punto fijo estable: (a) $\rho = 0,51$ y $\mu = 4,95$ (punto I, figura izq.), (b) $\rho = 0,525$ y $\mu = 4,9$ (punto II, figura izq.).	116
8.5.	Diagramas de bifurcación para $k = 2$. (a) $\rho = 0,2$, (b) $\rho = 0,6$	117
8.6.	Izquierda: Diagrama de bifurcaciones para $k = 6$. PD: doble período supercrítico (+) y subcrítico (-). NS: Neimark-Sacker supercrítica (+, oscuro) y subcrítica (-, claro). Derecha: Diagrama de bifurcación para $k = 6$. (a) $\rho = 0,2$, (b) $\rho = 0,6$	117
8.7.	Diagrama de bifurcaciones para distintos valores de k impar. La distinción entre NS subcrítica y supercrítica se usa solamente para describir la dirección de nacimiento de los ciclos ya que el punto fijo es inestable (debido a la PD bifurcación).	118
8.8.	Izquierda: Diagrama de bifurcaciones en dos parámetros. PD: doble período supercrítico (+) y subcrítico (-). NS: Neimark-Sacker supercrítica (+, rojo) y subcrítica (-, verde). La ampliación muestra los puntos de simulaciones. Derecha: (Punto a) Órbita de período 2; $\rho = 0,4, b = 1,828$ (Para este valor de ρ la bifurcación de doble período se da para $b_D \simeq 1,826$).	119
8.9.	Izquierda: (Punto b) $\rho = 0,75, b = 1,823$. Interacción local de una órbita inestable con el punto fijo estable. (Azul) Órbita estable exterior. Derecha: (Punto c) $\rho = 0,75, b = 1,84$. Se observa la órbita estable exterior.	120
8.10.	Izquierda: (Punto d) $\rho = 0,85, b = 1,78$. Derecha: (Punto e) $\rho = 0,85, b = 1,785$	120

Índice de tablas

4.1. Error E_1 para distintos valores de v_0 y h	46
5.1. Valores para el único ciclo obtenido con $\epsilon = 0,5$, $\tau = 12$, y $d = 1,35$	56
5.2. Autovalores del ciclo para $\epsilon = 0,1$, $\tau = 7$, y $d = 8,3328$	60
7.1. Cálculo de ξ_1	85
7.2. Método en frecuencia iterativo para orden $2q$	89
8.1. Método en frecuencia para bifurcaciones PD y NS para sistemas SISO.	106
8.2. Condiciones de estabilidad del punto fijo \hat{y}	110

Introducción

Las ecuaciones diferenciales con retardo son utilizadas frecuentemente para modelar problemas en física, ingeniería o biología entre otros [6, 24, 61]. Estas ecuaciones constituyen un ejemplo de ecuaciones diferenciales funcionales [35]. La complejidad presente en estos modelos es mucho mayor que la observada en ecuaciones diferenciales ordinarias, basta considerar una ecuación de primer orden en una dimensión que incluya un parámetro y un retardo, para hallar movimiento periódico, cuasi-periódico o bien comportamiento caótico [71, 83].

Debido a la dependencia temporal con el retardo, una solución queda determinada a partir de una función inicial definida en un intervalo de tiempo, el problema que resulta es infinito-dimensional. Muchas herramientas conocidas para el estudio de ecuaciones con retardo son adaptaciones o generalizaciones de resultados y técnicas que se emplean para ecuaciones diferenciales ordinarias. Así se reeditan en este contexto cuestiones clásicas como el análisis de bifurcación, la existencia de la variedad centro, la bifurcación de Hopf, la teoría de Floquet, los mapas de Poincaré, bifurcación de ciclos y el análisis de estabilidad de soluciones de equilibrio en general [15, 16, 22, 25, 33, 35].

En el estudio de soluciones de ecuaciones diferenciales, las soluciones oscilatorias son de gran importancia tanto desde el punto de vista teórico como práctico; a lo largo de esta tesis desarrollamos distintas metodologías que nos permiten calcular estas soluciones y determinar su comportamiento dinámico.

Las ecuaciones diferenciales no lineales son generalmente difíciles de resolver por métodos analíticos. Se conocen distintas técnicas que permiten hallar soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales. Entre ellas encontramos por ejemplo las técnicas perturbativas que resultan muy convenientes cuando la no-linealidad es débil. Esto se debe a la necesidad de que existan parámetros pequeños (o grandes) en las ecuaciones consideradas para obtener desarrollos de las soluciones.

Otros métodos, llamados no-perturbativos, como por ejemplo: el método de parámetro artificial pequeño de Lyapunov, el método de expansión- δ o el método de descomposición de Adomian; son, en principio, aplicables en general. Sin embargo debido a las dificultades para controlar la convergencia, resultan convenientes sólo para resolver problemas débilmente no lineales.

El método de análisis homotópico es un método analítico que resuelve los problemas de los métodos anteriores permitiendo controlar la convergencia de las series que se calculan mediante un parámetro que se introduce artificialmente [49, 50, 52, 53]. La aplicación del método para resolver ecuaciones diferenciales con retardo se ha considerado en algunas ecuaciones particulares [1, 5, 41, 42]. Sin embargo, la utili-

zación de este método como herramienta para el análisis de la dinámica relacionada con soluciones oscilatorias ha sido poco desarrollado en la literatura del tema hasta la actualidad.

En gran parte de esta tesis implementamos el método de análisis homotópico para el estudio de soluciones periódicas en ecuaciones diferenciales no lineales. En particular, desarrollamos una metodología que permite encontrar expresiones analíticas de alto orden de soluciones oscilatorias en ecuaciones diferenciales con retardo e implementamos un método de colocación de Chebyshev apropiado para decidir sobre la estabilidad de los ciclos [13]. Esto nos permite estudiar ciertos escenarios dinámicos interesantes en los que intervienen soluciones periódicas.

Además, presentamos una metodología iterativa en frecuencia que permite, utilizando teoría de singularidades, el estudio de soluciones oscilatorias locales en ecuaciones diferenciales con retardo. La bifurcación de Hopf en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias puede estudiarse en el dominio de la frecuencia por medio del Teorema Gráfico de Hopf y sus generalizaciones utilizando ideas de la teoría de sistemas realimentados y técnicas de balance de armónicos [57, 58, 59, 76]. La metodología ha sido extendida para el estudio de bifurcaciones locales de ciclos en ecuaciones diferenciales con retardo [29, 38, 59]. En esta tesis extendemos este análisis abarcando el estudio de algunas bifurcaciones de Hopf generalizadas en ecuaciones diferenciales con retardo.

1.1. Esquema de la tesis

En el siguiente capítulo resumimos los conceptos y teoremas básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales con retardo. Enunciamos en particular el teorema de Hopf para este tipo de ecuaciones y mostramos un método numérico que permite calcular la estabilidad de ciclos periódicos.

En el capítulo 3 presentamos el método de análisis homotópico puntualizando las distintas posibilidades y ventajas que presenta este método para la resolución de ecuaciones diferenciales. Desarrollamos la utilización del método orientado a la búsqueda de soluciones periódicas en ecuaciones con retardo y probamos algunos resultados para determinar bifurcaciones de Hopf.

Los siguientes capítulos corresponden a distintas aplicaciones y modificaciones que hemos realizado para utilizar el método de análisis homotópico en el estudio de varios sistemas. El capítulo 4 está dedicado al péndulo simple, aunque la ecuación analizada no contiene retardo este ejemplo nos permite mostrar la potencialidad del método y las adaptaciones a la búsqueda de soluciones periódicas en distintos sistemas de coordenadas. Las aproximación de las soluciones y del período de las mismas resultan muy buenas, tanto en el caso de las oscilaciones como de las rotaciones (los resultados en este capítulo se encuentran en [8]).

En el capítulo 5 consideramos la ecuación de van der Pol realimentada con retardo. Por medio de este ejemplo mostramos algunas dificultades que podemos encontrar al utilizar el método de análisis homotópico para hallar soluciones oscilatorias de ecuaciones con retardo y cómo estas dificultades se pueden resolver con el uso de iteraciones. Es posible recorrer el espacio de parámetros hallando las soluciones periódicas y su estabilidad, lo que permite el estudio de la dinámica de la ecuación en entornos de bifurcaciones complejas en las que intervienen varios ciclos (estos

resultados se encuentran en [7]).

El capítulo 6 contiene resultados teóricos obtenidos utilizando el método de análisis homotópico. Probamos que en ciertos sistemas conservativos modificados con retardo las soluciones que surgen en una rama de una bifurcación de Hopf tienen el mismo período, llamamos a este fenómeno bifurcaciones isocrónicas. Mostramos además dos ejemplos de sistemas mecánicos clásicos a los que se le ha agregado una realimentación con retardo. Los resultados forman parte de un trabajo enviado para su publicación.

En los dos capítulos siguientes utilizamos el método en frecuencia para estudiar sistemas continuos y discretos con retardo. En el capítulo 7 describimos un método iterativo que generaliza resultados existentes en el análisis de soluciones oscilatorias locales en sistemas con retardo. Analizamos tres ejemplos que muestran la potencialidad del método y que presentan bifurcaciones que han sido poco estudiadas en ecuaciones diferenciales con retardo.

Por último, en el capítulo 8 estudiamos un mapa discreto genérico que presenta una bifurcación de doble período. Aplicamos un controlador por retardos y el método en frecuencia para analizar los cambios en la bifurcación y la aparición de nuevas órbitas cercanas al punto de equilibrio. Presentamos condiciones analíticas para determinar bifurcaciones de doble período y Neimark–Sacker. Determinamos además la interacción de las bifurcaciones anteriores a través de una resonancia fuerte 1:2. Aplicamos los resultados a dos ejemplos de interés en la literatura de sistemas discretos (algunos de los resultados en este capítulo se encuentran en [28]).

2

Ecuaciones diferenciales con retardo

2.1. Introducción

En este capítulo presentamos las definiciones y teoremas de la teoría de ecuaciones diferenciales con retardos que utilizaremos a lo largo de esta tesis. El libro de Hale & Verduyn Lunel [35], fundamental en el desarrollo de esta teoría, contiene las demostraciones de la mayor parte de los teoremas enunciados a continuación. La exposición se complementa con resultados y observaciones presentados en [6, 44].

2.2. Ecuaciones diferenciales con retardo

Consideremos el espacio de Banach $\mathcal{C} = C([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$ de funciones continuas de $[- \tau, 0]$ en \mathbb{R}^n , equipado con la norma

$$\|\phi\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|, \quad (2.1)$$

donde $|\cdot|$ es la norma Euclidiana usual en \mathbb{R}^n . Sea $x \in C([\sigma_0 - r, \sigma_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$, para valores $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ y $\sigma \geq 0$. Para $t \in [\sigma_0, \sigma_0 + \sigma]$ sea $x_t \in \mathcal{C}$ la función definida por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ con $\theta \in [-\tau, 0]$.

Si $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definimos una *ecuación diferencial funcional con retardo* (EDFR) como

$$x'(t) = f(t, x_t). \quad (2.2)$$

Se dice que la ecuación es *lineal* si $f(t, \phi) = L(t)\phi + h(t)$, con $L(t) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal y $h(t) \in \mathbb{R}^n$. Si además $h = 0$ la ecuación es *lineal homogénea*. Si $f(t, \phi) = g(\phi)$ y g no depende explícitamente de t , decimos que la ecuación (2.2) es *autónoma*.

La ecuación funcional (2.2) contiene distintos tipos de ecuaciones diferenciales, por ejemplo: ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), si consideramos $\tau = 0$; ecuaciones diferenciales con uno o varios retardos (EDRs), tanto constantes como variables; y distintas ecuaciones integrodiferenciales [35]. Veamos algunos ejemplos de ecuaciones con retardos constantes con las que trabajaremos más adelante.

Ejemplo 1. Sea $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ el operador lineal $L\phi = A_0\phi(0) + \sum_{j=1}^p A_j\phi(-\tau_j)$, donde $A_i \in \mathbb{R}^n$ para $0 \leq i \leq n$, y $0 < \tau_j \leq \tau$, $j = 1, \dots, p$. La ecuación diferencial

lineal con retardos que obtenemos es

$$x'(t) = A_0x(t) + \sum_{j=1}^p A_jx(t - \tau_j). \quad (2.3)$$

Utilizando el teorema de representación de Riesz, expresamos la ecuación anterior en forma integral como

$$x'(t) = \int_{-\tau}^0 d[\eta(\theta)]x_t(\theta), \quad (2.4)$$

donde η es una matriz de orden $n \times n$ de funciones de variación acotada en $[-\tau, 0]$. La representación integral anterior es importante para demostrar distintos resultados teóricos.

Ejemplo 2. Consideremos el operador $f : \mathcal{C} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por

$$f(\phi; \mu) = g(\phi(0), \phi(-\tau); \mu), \quad (2.5)$$

siendo $\mu \in \mathbb{R}^k$ un vector de parámetros y $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función no lineal suficientemente suave. Entonces, de acuerdo a (2.2) tenemos la siguiente ecuación diferencial no lineal con retardo

$$x'(t) = g(x(t), x(t - \tau); \mu). \quad (2.6)$$

En los capítulos siguientes estudiaremos ecuaciones como la presentada en el Ejemplo 2, con un solo retardo y que puede contener o no parámetros reales. A pesar de su apariencia inofensiva, estas ecuaciones pueden presentar comportamientos muy complicados y muy distintos a los que se obtienen para EDOs, por ejemplo, es posible hallar soluciones periódicas, cuasiperiódicas e incluso comportamiento caótico en una ecuación de primer orden con un retardo [71]. Mencionamos a continuación algunos resultados importantes de la teoría general de EDFRs.

Para cada t fijo la ecuación (2.2) relaciona el valor de la derivada de la función x con los valores de esa función en el intervalo $[t - \tau, t]$. Luego, para plantear un problema de valores iniciales para la ecuación con retardo en $t = t_0$, es necesario especificar el valor de x no sólo en t_0 , sino en todo el intervalo $[t_0 - \tau, t_0]$. Por lo tanto, una condición inicial apropiada para la ecuación (2.2) es

$$x_{t_0} = \phi_0, \quad \phi_0 \in \mathcal{C}. \quad (2.7)$$

Definición 3. Una función $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución de la EDFR (2.2) con condición inicial (2.7) si existe $t_M > 0$ tal que:

- $x \in C([t_0 - \tau, t_0 + t_M], \mathbb{R}^n)$,
- x satisface (2.7), y
- $(t, x_t) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ y x verifica la ecuación (2.2) para todo $t \in [t_0, t_0 + t_M]$.

Para retardos constantes, una técnica básica para hallar soluciones de EDRs, conocida como *método de pasos*, permite reducir el problema a una sucesión de EDOs. Supongamos que consideramos una ecuación del tipo (2.6), con condición

inicial (2.7). Primer paso, si $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, entonces $t - \tau \in [t_0 - \tau, t_0]$. Luego, la EDR se convierte en la EDO

$$x'(t) = g(x(t), \phi_0(t - \tau); \mu), \quad t \in [t_0, t_0 + \tau]. \quad (2.8)$$

Resolviendo esta ecuación con valor inicial $x(t_0) = \phi_0(t_0)$, obtenemos la solución en el intervalo $[t_0, t_0 + \tau]$. Segundo paso, si $t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$, entonces $t - \tau \in [t_0, t_0 + \tau]$, y así $x(t - \tau)$ es la función calculada en el primer paso. Entonces, en el intervalo $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$, nuevamente la ecuación con retardo se convierte en una EDO que resolvemos usando el valor inicial $x(t_0 + \tau)$. Continuando de esta manera, considerando el intervalo $[t_0 + 2\tau, t_0 + 3\tau]$, etc., podemos calcular la solución de la ecuación para cualquier valor de t arbitrario.

Una observación importante tiene que ver con la suavidad de la solución de (2.6) construida. Supongamos que g tiene derivadas continuas de todo orden. Si la solución tiene una discontinuidad de orden k en el tiempo t^* , entonces cuando la variable t pasa a través de $t^* + \tau$, hay una discontinuidad en la derivada $k + 1$ de la solución debido al término $x(t - \tau)$ en la EDR, que a su vez se propaga cuando la variable t crece. Esta es una distinción fundamental entre EDRs y EDOs: Generalmente se observa una discontinuidad en la primer derivada en un punto inicial t_0 y ésta se propaga a través del intervalo de interés. En las ecuaciones de la forma (2.6) la solución se suaviza (se vuelve más diferenciable) a medida que t crece.

En la figura 2.1 izquierda, graficamos la solución del problema

$$\begin{aligned} x'(t) &= -3x(t - 1) + 1, & t \geq 1, \\ x(t) &= 1, & t \in [0, 1], \end{aligned} \quad (2.9)$$

obtenida con el método de pasos. Observamos claramente que la solución no es derivable en $t = 1$, y que al aumentar t la solución se suaviza.

2.2.1. Teorema de existencia y unicidad. Mapeo solución

Una vez planteado un problema de valores iniciales nos enfrentamos a la cuestión de poder asegurar existencia y unicidad de soluciones. En el siguiente teorema enunciaremos condiciones suficientes comparables a las que se conocen para EDOs, si en la ecuación (2.2) la función f es continua y verifica una condición Lipschitz en ϕ entonces para cualquier condición inicial $\phi_0 \in \mathcal{C}$ se prueba que existe solución y es única. Asumiremos de ahora en más que el retardo τ es constante y finito.

Teorema 4 (Existencia y unicidad). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ abierto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y $f(t, \phi)$ Lipschitz en ϕ en cada subconjunto compacto en Ω . Si $(t_0, \phi) \in \Omega$ entonces existe $t_\phi \in (t_0, \infty) \cup \{\infty\}$ tal que:*

1. *existe una solución x de la ecuación (2.2) con condición inicial ϕ , definida en el intervalo $[t_0, t_\phi)$,*
2. *en cualquier intervalo $[t_0, t_1] \subset [t_0, t_\phi)$ esta solución es única (más precisamente, dos soluciones cualesquiera del problema con condición inicial ϕ coinciden en un intervalo común en el que ambas existan, i.e., una de estas soluciones es una prolongación de la otra solución),*

3. si $t_\phi < \infty$, entonces x no tiene límite finito cuando $t \rightarrow t_\phi^-$, i.e. $[t_0, t_\phi)$ es el máximo intervalo de existencia de la solución de la ecuación (2.2) con condición inicial ϕ ,
4. la solución x depende continuamente de f y ϕ .

Dem. Página 95 de la referencia [44]. □

El teorema anterior será aplicable a todos los sistemas considerados en esta tesis. Cabe mencionar sin embargo, que existen teoremas de existencia y unicidad y de dependencia continua, con condiciones más relajadas que las anteriores, en particular, es suficiente asumir continuidad de la función f en Ω , ver por ejemplo [35].

Supongamos que se verifican las condiciones del teorema de existencia y unicidad enunciado antes. Dada una condición inicial $\phi_0 \in \mathcal{C}$ en t_0 , sea $[t_0, t_{\phi_0})$ el intervalo de existencia de la solución que asegura el teorema. Utilizamos la notación $x_t(t_0, \phi_0)$, para referirnos a segmentos pertenecientes a \mathcal{C} de la solución definida antes con condición inicial ϕ_0 en t_0 . Podemos definir el *mapa solución* de la EDFR como el mapa $T(t, t_0) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ definido para cada $t \in [t_0, t_\phi)$ por

$$T(t, t_0)\phi_0 = x_t(t_0, \phi_0). \quad (2.10)$$

T mapea la función inicial ϕ_0 en otra función x_t que se interpreta como la proyección de la porción de la trayectoria de la solución x en $[t - \tau, t]$ sobre el espacio \mathcal{C} (ver figura 2.1).

Consideremos una EDR autónoma y supongamos que cualquier solución se puede extender infinitamente, es decir $t_\phi = \infty$. Se puede probar que el operador T verifica la relación de semigrupo

$$T(t_2)T(t_1) = T(t_1 + t_2), \quad t_2 \geq t_1 \geq 0, \quad (2.11)$$

y es claro que $T(0) = I_{\mathcal{C}}$. Además, T es continuo para $(t, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}$. Luego, la familia de operadores $\{T(t) : t \geq 0\}$, es un semigrupo fuertemente continuo de transformaciones (en general no es un grupo ya que no se verifica la existencia de inverso). El operador T puede interpretarse como el flujo de la ecuación, y el espacio de fases adecuado en ese caso es el espacio de Banach \mathcal{C} . La órbita de una función $\phi \in \mathcal{C}$ es el subconjunto de \mathcal{C} dado por $\{T(t)\phi : t \geq 0\}$. Esta interpretación puede tener ventajas cuando analizamos soluciones que difieren en fase, por ejemplo, la órbita de una solución periódica forma una curva cerrada en \mathcal{C} , y cualquier punto en esa curva representa la misma solución periódica.

2.2.2. Estabilidad

Consideremos la ecuación (2.2) con f verificando las condiciones del teorema de existencia y unicidad.

Supongamos que $f(t, 0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces $\hat{x} = 0$ es un *punto de equilibrio* de la ecuación (2.2). A continuación detallamos distintos tipos de estabilidad del equilibrio, para simplificar la notación definimos un entorno del equilibrio \hat{x} en el espacio \mathcal{C} como $\mathcal{B}(\hat{x}, \delta) = \{\phi \in \mathcal{C} : \|\hat{x} - \phi\| < \delta\}$, para $\delta > 0$.

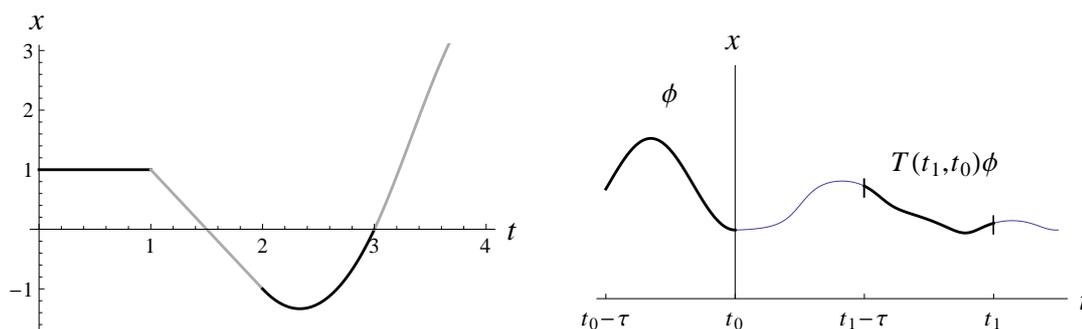


Figura 2.1: Izquierda: Solución de (2.9) obtenida con el método de pasos. Derecha: Mapa solución T evaluado en t_1 para una solución x con condición inicial ϕ en t_0 .

Definición 5. El equilibrio $\hat{x} = 0$ de la ecuación (2.2) es Lyapunov estable (estable) si para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$ tal que $\phi \in \mathcal{B}(0, \delta)$ implica $x_t(t_0, \phi) \in \mathcal{B}(0, \epsilon)$ para $t \geq t_0$. La solución de equilibrio es inestable si no es Lyapunov estable. El equilibrio se dice uniformemente estable si δ en la definición anterior es independiente de t_0 . El equilibrio trivial \hat{x} de la ecuación (2.2) se dice asintóticamente estable si es estable y existe un $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ tal que $\phi \in \mathcal{B}(0, \delta_0)$ implica $x(t_0, \phi)(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

La noción de solución exponencialmente estable también se puede extender de la correspondiente para el problema finito dimensional.

Cualquier solución no constante y de la ecuación (2.2) será estable si el equilibrio $\hat{x} = 0$ de la ecuación

$$x'(t) = f(t, x_t + y_t) - f(t, y_t) \quad (2.12)$$

es estable. Las demás definiciones se extienden de la misma manera.

Como sucede en la teoría de EDOs, para estudiar ciertas características locales de EDRs alrededor de un equilibrio se utiliza el sistema lineal asociado. A continuación presentamos la teoría correspondiente a sistemas lineales.

2.3. Sistemas lineales con coeficientes constantes

Comenzamos considerando la siguiente ecuación lineal con un retardo finito y coeficientes constantes

$$x'(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau), \quad (2.13)$$

donde $A_j \in \mathbb{R}_{n \times n}$, $j = 0, 1$. Analizamos distintos aspectos que muestran un panorama general de la teoría conocida para estas ecuaciones y que pueden ser extendidos a otras ecuaciones lineales con retardos más generales.

Reemplazando $x(t) = e^{\lambda t} v$, $v \in \mathbb{R}^n$ en (2.13) obtenemos la ecuación

$$(\lambda I - A_0 - A_1 e^{-\lambda \tau}) v = 0, \quad (2.14)$$

que puede escribirse como $\Delta(\lambda)v = 0$, siendo $\Delta(\lambda) = (\lambda I - A_0 - A_1 e^{-\lambda \tau})$, la matriz característica. Como buscamos soluciones no triviales ($v \neq 0$) se debe verificar la ecuación $\det(\Delta(\lambda)) = 0$. Tenemos entonces las siguientes definiciones.

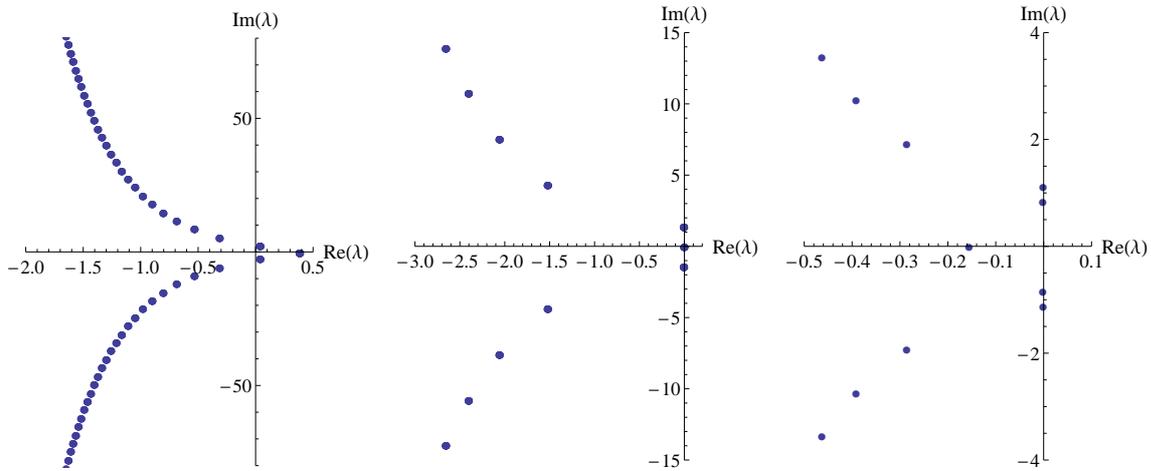


Figura 2.2: Autovalores característicos para ecuaciones lineales escalares (izquierda y centro) y una ecuación de dimensión 2 (derecha).

Definición 6. La función dada por

$$\det(\Delta(\lambda)) = \det(\lambda I - A_0 - A_1 e^{-\lambda\tau}), \quad (2.15)$$

es la función característica correspondiente al sistema lineal (2.13). Las soluciones λ de la ecuación característica $\det(\Delta(\lambda)) = 0$, son los autovalores característicos de (2.13).

La ecuación característica es una ecuación trascendente y, en general, tiene infinitas raíces. El cálculo exacto de estas raíces puede resultar muy complejo, pero se pueden demostrar distintos teoremas que describen la naturaleza de las raíces características. Uno de los más significativos es el siguiente.

Teorema 7. Si hay una sucesión $\{\lambda_k\}$ de autovalores de la función característica (2.15) tales que $|\lambda_k| \rightarrow +\infty$ cuando $k \rightarrow +\infty$ entonces $\operatorname{Re}(\lambda_k) \rightarrow -\infty$ cuando $k \rightarrow +\infty$.

De este teorema sigue que existe un número real α tal que todos los autovalores característicos λ de (2.13) satisfacen $\operatorname{Re}(\lambda) < \alpha$. En la figura 2.2 graficamos las raíces características de tres ecuaciones particulares, dos de ellas escalares (izquierda y centro) y una ecuación de dimensión 2 (derecha). Observamos el comportamiento asintótico mencionado en el teorema anterior, así como también la existencia de múltiples autovalores con parte real cero asociados a comportamientos que nos interesarán más adelante.

Claramente se observa que $\hat{x} = 0$ es un equilibrio de la ecuación (2.13). Este equilibrio se dice *hiperbólico* si todas las raíces características tienen parte real distinta de cero. La estabilidad del equilibrio se puede determinar utilizando el siguiente teorema.

Teorema 8. *Supongamos que el retardo τ es finito. El equilibrio trivial $\hat{x} = 0$ de la ecuación (2.13) es exponencialmente asintóticamente estable si y sólo si se verifica*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0, \det(\Delta(\lambda)) = 0\} = \emptyset, \quad (2.16)$$

donde $\det(\Delta(\lambda))$ es la función característica definida antes.

Otros criterios de estabilidad se pueden consultar en [75]. Allí, utilizando herramientas de la teoría de variable compleja, es posible determinar la cantidad de raíces características con parte real positiva, y plantear condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad del equilibrio trivial.

En lo que sigue no calcularemos directamente los autovalores característicos, nos interesará particularmente la existencia de autovalores nulos o imaginarios puros y el comportamiento de estos al variar parámetros que puedan incluirse en la ecuación.

2.3.1. Presencia de parámetros

Si las matrices A_i , $i = 0, 1$, en la ecuación (2.13) dependen de un parámetro $\mu \in \mathbb{R}$, tenemos

$$x'(t) = A_0(\mu)x(t) + A_1(\mu)x(t - \tau). \quad (2.17)$$

La ecuación característica en este caso resulta

$$\det(\Delta(\lambda, \mu)) = \det(\lambda I - A_0(\mu) - A_1(\mu)e^{-\lambda\tau}) = 0. \quad (2.18)$$

Para cada μ fijo, utilizamos el teorema 8 para determinar la estabilidad del equilibrio trivial.

Supongamos que el equilibrio trivial es exponencialmente asintóticamente estable, es decir, que todas las raíces características tiene parte real negativa, cuando $\mu < \mu_c$. Debido a la existencia de infinitas raíces características, al variar los parámetros, la pérdida de estabilidad (bifurcación) del equilibrio puede darse de muchas maneras. Dos de las bifurcaciones más simples son las siguientes:

- existe un autovalor real simple que pasa a través de cero y se vuelve positivo cuando μ crece y pasa a través de μ_c ;
- existe un par de autovalores complejos conjugados que pasan del semiplano izquierdo al derecho cuando μ crece, siendo imaginarios puros cuando $\mu = \mu_c$.

El primer caso corresponde a la condición de una bifurcación estática del equilibrio (pitchfork, transcítica, etc.), y el segundo caso está asociado a la condición de bifurcaciones dinámicas y a la presencia de oscilaciones (Hopf, Hopf doble, etc.). Es importante observar que las posibles bifurcaciones no están limitadas por la dimensión del sistema como sucede en el caso de EDOs.

Es posible extender la teoría de variedad centro para ecuaciones ordinarias y descomponer el espacio de fases \mathcal{C} utilizando las raíces características, para analizar bifurcaciones en la ecuación (2.17). Sea $\mu = \mu_c$, un valor crítico del parámetro en el que la ecuación característica (2.18) tiene m raíces con parte real cero y el resto de las raíces características tienen parte real negativa. En [35] se demuestran los siguientes resultados. Fijado el valor del parámetro en el valor crítico μ_c , el espacio de fases de la ecuación lineal (2.17) puede descomponerse como $\mathcal{C} = N \oplus S$, donde

N es el subespacio m -dimensional expandido por los autovectores asociados a los autovalores característicos de (2.17) con parte real cero, S es infinito dimensional y ambos subespacios son invariantes bajo el campo asociado a la ecuación lineal (2.17). Los espacios N y S son los análogos en este contexto a las variedades centro y estable para EDOs.

Sean $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ las raíces características asociadas al espacio N , estas raíces serán cero o imaginarias puras. En el segundo caso, es decir si existe una raíz característica $i\omega$, también será raíz su conjugada $-i\omega$. Si se asume que las raíces son simples una base $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\}$ del espacio N se puede construir de manera similar a lo que se realiza en EDOs. Si $\lambda_k = 0$, entonces $\phi_k = v_k$, siendo v_k la solución de $\Delta(0, \mu_c)v_k = 0$. Si $\lambda_k = i\omega_k$, y v_k es solución de $\Delta(i\omega_k, \mu_c)v_k = 0$, entonces $\phi_k = \text{Re}(e^{i\omega_k t} v_k)$, y $\phi_{k+1} = \text{Im}(e^{i\omega_k t} v_k)$.

En la siguiente sección analizamos el caso particular de la bifurcación de Hopf presentado en [33, 35] y serán importantes las siguientes definiciones. Sea $\mathcal{C}^* = C([0, r], \mathbb{R}^{n^*})$, con \mathbb{R}^{n^*} el espacio n -dimensional de vectores fila. Para $\phi \in \mathcal{C}$ y $\psi \in \mathcal{C}^*$, se define la forma bilineal

$$(\psi, \phi) = \sum_{i=1}^n \psi_j(0)\phi_j(0) + \int_{-\tau}^0 \psi(\sigma + \tau)A_1\phi(\sigma)d\sigma. \quad (2.19)$$

Como se muestra en [35], la forma bilineal anterior se utiliza para definir un sistema dual a (2.17) dado por

$$y'(t) = -y(s)A_0(\mu) - y(s + \tau)A_1(\mu), \quad s \leq 0. \quad (2.20)$$

Este sistema es usualmente denominado el adjunto formal del sistema lineal original.

En [17] y [25] se puede consultar el análisis de bifurcación de tipo Bogdanov–Takens utilizando variedad centro y formas normales, y el estudio correspondiente para bifurcaciones de Hopf doble se muestra en [15, 16].

Observación 9. El sistema adjunto formal puede representarse utilizando operadores de la siguiente manera

$$y'(t) = L^T(\mu)y^s, \quad s \leq 0, \quad (2.21)$$

siendo $y^s = y(s + \xi)$, $0 \leq \xi \leq \tau$ y L^T lineal en $\mathcal{C}^* \times \mathbb{R}$ dado por

$$L^T(\mu)\psi = -\psi(0)A_0(\mu) - \psi(\tau)A_1(\mu). \quad (2.22)$$

2.4. Sistemas no lineales con un retardo

Con los resultados anteriores es posible estudiar una EDR más general. Sea la ecuación con un retardo autónoma

$$x'(t) = g(x(t), x(t - \tau), \mu), \quad t \geq 0, \quad (2.23)$$

siendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suave, $\tau > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}^k$ un vector de parámetros. Supongamos que existe un subconjunto $B \subseteq \mathbb{R}^k$ tal que para todo $\mu \in B$ se tiene $g(0, 0, \mu) = 0$, es decir, $\hat{x} = 0$ es un equilibrio de la ecuación. Reescribamos la ecuación anterior de la siguiente manera

$$x'(t) = A_0(\mu)x(t) + A_1(\mu)x(t - \tau) + \tilde{g}(x(t), x(t - \tau), \mu), \quad t \geq 0, \quad (2.24)$$

donde $A_j(\mu) = D_{j+1}g(z_1, z_2, \mu)|_{(0,0,\mu)}$, $j = 0, 1$, y \tilde{g} es una función suave definida por $\tilde{g}(x(t), x(t - \tau), \mu) = g(x(t), x(t - \tau), \mu) - A_0(\mu)x(t) - A_1(\mu)x(t - \tau)$.

La *linealización* alrededor de $\hat{x} = 0$, de la ecuación anterior está dada por

$$x'(t) = A_0(\mu)x(t) + A_1(\mu)x(t - \tau). \quad (2.25)$$

Al igual que en el caso de EDOs, determinamos la estabilidad local del equilibrio trivial de la ecuación (2.23) analizando la estabilidad de $x = 0$ en la ecuación lineal anterior [35, 75].

Utilizando la linealización de la ecuación (2.23) y la teoría en la sección anterior es posible determinar distintas bifurcaciones locales. En lo que sigue resumimos la teoría relacionada con la bifurcación de Hopf, fenómeno que nos interesará a lo largo de toda la tesis. Para coincidir con la notación considerada en [33, 35] utilizamos el operador lineal $L(\mu)$ definido por

$$L(\mu)\phi = A_0(\mu)\phi(0) + A_1(\mu)\phi(-\tau), \quad (2.26)$$

y el operador $f(x_t, \mu) = \tilde{g}(x(t), x(t - \tau), \mu)$, con derivadas continuas de todo orden en la primer variable.

2.4.1. Bifurcación de Hopf

La primer hipótesis considerada es la siguiente

(H1) *La ecuación lineal*

$$x'(t) = L(\mu_0)x_t, \quad (2.27)$$

tiene una raíz característica imaginaria pura $\lambda_0 = i\nu_0$, $\nu_0 > 0$, y todas las raíces características $\lambda_j \neq \lambda_0, \bar{\lambda}_0$, verifican $\lambda_j \neq m\lambda_0$, para cualquier m entero.

De acuerdo a lo mencionado en la sección anterior se sigue que para los valores característicos $(i\nu_0, -i\nu_0)$ existen dos soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal (2.27) de la forma $\phi_1(t) = b \cos \nu_0 t$, $\phi_2(t) = b \sin \nu_0 t$, para algún vector columna n -dimensional b . De la misma manera, hay dos soluciones linealmente independientes de la ecuación formal adjunta para $\mu = \mu_0$, dadas por $\psi_1(t) = c \cos \nu_0 t$, $\psi_2(t) = c \sin \nu_0 t$.

Usando la forma bilineal (2.19) se define la matriz 2×2

$$(\Psi_{\mu_0}^*, \Phi_{\mu_0}) = \begin{pmatrix} (\psi_1, \phi_1) & (\psi_1, \phi_2) \\ (\psi_2, \phi_1) & (\psi_2, \phi_2) \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

donde

$$\Phi_{\mu_0} = (\phi_1, \phi_2), \quad \Psi_{\mu_0}^* = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

con ϕ_i y ψ_i las funciones definidas arriba, consideradas en los intervalos $[-r, 0]$ y $[0, r]$, respectivamente. Se puede probar que la matriz $(\Psi_{\mu_0}^*, \Phi_{\mu_0})$ es no singular. Si definimos $\Psi_{\mu_0} = (\Psi_{\mu_0}^*, \Phi_{\mu_0})^{-1} \Psi_{\mu_0}^*$, entonces $(\Psi_{\mu_0}, \Phi_{\mu_0}) = I$ y podemos descomponer el espacio \mathcal{C} como

$$\mathcal{C} = P_{\mu_0} \oplus Q_{\mu_0}, \quad (2.30)$$

siendo $P_{\mu_0} = \{\phi \in \mathcal{C} : \phi = \Phi_{\mu_0} a, a \in \mathbb{R}^2\}$, $Q_{\mu_0} = \{\phi \in \mathcal{C} : (\Psi_{\mu_0}, \phi) = 0\}$. La descomposición anterior de \mathcal{C} define la siguiente proyección

$$\pi_{\mu_0} \mathcal{C} = P_{\mu_0}, \quad (2.31)$$

y su complementaria $(I - \pi_{\mu_0})C = Q_{\mu_0}$.

Como $L(\mu)$ es continuamente diferenciable en μ , se verifican las hipótesis del siguiente lema.

Lema 10. *Supongamos que la familia de operadores lineales acotados $\{L(\mu) : \mu \in \mathbb{R}\}$ de \mathcal{C} a \mathbb{R}^n es continua, junto con su primer derivada respecto de μ . Si λ_0 es una raíz característica simple de $x'(t) = L(\mu_0)x_t$, entonces existe $\delta > 0$ y una raíz característica simple $\lambda(\mu)$ de la ecuación $x'(t) = L(\mu)x_t$, que es C^1 para $|\mu - \mu_0| < \delta$ y $\lambda(\mu_0) = \lambda_0$. Más aún, si \mathcal{C} se descompone por $\lambda(\mu)$ como $\mathcal{C} = P_\mu \oplus Q_\mu$, y π_μ es la proyección correspondiente con rango P_μ , entonces π_μ es continua junto con su primer derivada.*

Luego, existe un $\delta > 0$ y una raíz característica simple $\lambda(\mu)$ de la ecuación lineal

$$x'(t) = L(\mu)x_t, \quad (2.32)$$

tal que $\lambda(\mu_0) = i\nu_0$, existe la derivada $\lambda'(\mu)$ y es continua para $|\mu - \mu_0| < \delta$. Tomando δ suficientemente pequeño podemos asumir $\text{Im} \lambda(\mu) \neq 0$ para $|\mu - \mu_0| < \delta$, y podemos obtener una función $\phi_\mu \in \mathcal{C}$ continuamente diferenciable en μ que define una base de las soluciones de la ecuación (2.32) correspondientes al autovalor $\lambda(\mu)$. La base será

$$\Phi_\mu = (\text{Re}(\phi_\mu), \text{Im}(\phi_\mu)). \quad (2.33)$$

También se puede definir la base Ψ_μ de soluciones de la ecuación adjunta, de manera que $(\Psi_\mu, \Phi_\mu) = I$. Considerando las bases anteriores, \mathcal{C} se puede descomponer por $\{\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)\}$ como $\mathcal{C} = P_\mu \oplus Q_\mu$, con $\dim P_\mu = 2$ y el operador proyección π_μ es C^1 en μ .

De acuerdo a las definiciones anteriores, se tiene

$$\Phi_\mu(\theta) = \Phi_\mu(0)e^{B(\mu)\theta}, \quad -r \leq \theta \leq 0, \quad (2.34)$$

siendo $B(\mu)$ una matriz 2×2 con autovalores $\lambda(\mu)$ y $\bar{\lambda}(\mu)$. Utilizando un cambio de coordenadas se asume que

$$B(\mu) = \nu_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\mu - \mu_0) \cdot \zeta(\mu) & (\mu - \mu_0) \cdot \gamma(\mu) \\ -(\mu - \mu_0) \cdot \gamma(\mu) & (\mu - \mu_0) \cdot \zeta(\mu) \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

donde $\zeta(\mu), \gamma(\mu) \in \mathbb{R}^k$ son C^1 para $|\mu - \mu_0| < \delta$. Asociada a esta última expresión se considera la siguiente hipótesis.

(H2) $\zeta(\mu_0) \neq 0$.

Podemos enunciar ahora la siguiente generalización del teorema de Hopf.

Teorema 11. *Supongamos que $f(\phi, \mu)$ es C^2 con respecto a μ y ϕ , $f(0, \mu) = 0$, $\forall \mu$, y que se verifican las hipótesis (H1) y (H2). Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que si $a \in \mathbb{R}$, $|a| < \epsilon$, existe $\Gamma_a \subseteq \mathbb{R}^k$ variedad C^1 de codimensión 1 en el espacio a - α , continua y continuamente diferenciable en a , tal que*

$$\Gamma_0 = \{\mu \in \mathbb{R}^k : \text{Re}(\lambda(\mu)) = 0, |\mu - \mu_0| < \epsilon\}, \quad (2.36)$$

siendo $\lambda(\mu)$ el autovalor considerado en el lema anterior, tal que para cada $\mu \in \Gamma_a$, existe una función $\omega(\mu, a)$, y una función $\omega(\mu, a)$ -periódica $x^*(\mu, a)$ ambas C^1 en a y μ , $\omega(\mu_0, 0) = \omega_0 = 2\pi/\nu_0$, $x^*(\mu_0, 0) = 0$,

$$x_0^*(\mu, a) = \Phi_\mu \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + o(|a|) \quad \text{cuando } |a| \rightarrow 0, \quad (2.37)$$

y $x^*(\mu, a)$ es una solución de la ecuación con retardo (2.23). Más aún, para $|\mu - \mu_0| < \epsilon$, $|\omega - \omega_0| < \epsilon$ cada solución ω -periódica de la ecuación (2.23) con $|x_t| < \epsilon$ es de la forma anterior, excepto por una traslación en fase.

Demostración. Ver referencia [35]. □

En el caso $k = 1$, es decir $\mu \in \mathbb{R}$, la hipótesis (H2) es equivalente a $d\lambda/d\mu|_{\mu=\mu_0} \neq 0$. Luego, el teorema anterior es el teorema de bifurcación de Hopf usual, y el conjunto Γ_a es una curva suave de la forma $\mu(a)$. Si $k = 2$, entonces se obtendrá una superficie de bifurcación Γ_a en el espacio $a-\mu$.

Las condiciones sobre la derivabilidad de la función f pueden relajarse. El enunciado en [33] sólo requiere que f sea C^2 en ϕ y la continuidad de la derivada primera respecto de μ para toda $\phi \in \mathcal{C}$, tal que $d\phi/d\theta \in \mathcal{C}$ y $|d\phi/d\theta| \leq K$, para alguna constante $K > 0$. Además, en [33] se muestra un resultado para determinar la estabilidad local de la solución periódica utilizando los términos no lineales presentes en la ecuación y la estabilidad del equilibrio trivial.

En este trabajo, nos interesará conocer la estabilidad de soluciones periódicas no solamente en un entorno de la bifurcación de Hopf, sino también al variar el/los parámetro/s de la ecuación, para determinar posibles bifurcaciones de ciclos. En la siguiente sección desarrollamos parte de la teoría de multiplicadores de Floquet conocida para EDRs y describimos un método para el cálculo numérico de estos multiplicadores.

2.5. Estabilidad de soluciones periódicas

Consideremos nuevamente la ecuación (2.23), una solución periódica (ciclo) de período minimal p es una función x que verifica la ecuación y además $p > 0$ es el menor valor tal que $x(t + p) = x(t)$, para todo t . Un ciclo determina una curva cerrada en \mathbb{R}^n , y además como la EDR es autónoma esta solución define un cilindro de soluciones en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, obtenido modificando la fase de la solución periódica. Cuando hablamos de estabilidad de una solución periódica, no es correcto entonces referirse a la estabilidad asintótica como fue definida anteriormente. Se define en este caso la estabilidad orbital, sea $\gamma = \{x_t, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{C}$ la órbita de solución periódica x , se dice que x es estable orbitalmente si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si una solución y de la ecuación verifica $d(y_0, \gamma) < \delta$, entonces $d(y_t, \gamma) < \epsilon$ para todo $t \geq 0$ siendo $d(y, \gamma) = \inf\{\|y - \phi\| : \phi \in \gamma\}$. La solución x es orbitalmente asintóticamente estable si es orbitalmente estable y existe $b > 0$ tal que si $d(y_0, \gamma) < b$ entonces existe ξ tal que $\|y_t - x_{t+\xi}\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. De esta manera, la estabilidad orbital mide cuanto se acercan o se separan las soluciones en el espacio de fases \mathcal{C} . En lo que sigue utilizaremos simplemente estabilidad de un ciclo para referirnos a la estabilidad orbital definida antes.

Supongamos que existe una solución periódica x_P de la ecuación no lineal (2.23). La linealización alrededor de x_P resulta

$$x'(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t - \tau), \quad (2.38)$$

siendo $A_j(t) = D_{j+1}g(z_1, z_2, \mu)|_{(x_P(t), x_P(t-\tau), \mu)}$, $j = 0, 1$. Cada una de estas matrices es una función periódica en t de período p . Si el equilibrio $x = 0$ de la ecuación

anterior es asintóticamente estable entonces x_P es asintóticamente estable, de otra manera es inestable. Para determinar la estabilidad del equilibrio trivial de la ecuación (2.38) se definen multiplicadores de Floquet, análogamente a lo que se realiza en el caso de EDOs. Antes de continuar con la teoría para este tipo de ecuaciones observemos que, si g en la ecuación (2.23) es C^k , $k \geq 1$, entonces se puede probar que $x_P \in C^{k+1}$, luego x'_P es una solución no trivial de (2.38). Como consecuencia de esta última observación 1 es siempre un multiplicador característico de (2.38).

Consideremos la ecuación lineal con coeficientes periódicos

$$\begin{aligned} x'(t) &= A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t - \tau), \\ x(t) &= \varphi(t) \quad \text{si} \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$ es el retardo, $\varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, y $A_{0,1}$ son matrices periódicas de orden $n \times n$ con período p , i.e. p es el menor número real positivo tal que $A_i(t+p) = A_i(t)$.

Podemos definir un operador lineal infinito dimensional, conocido como operador de monodromía, asociado a la ecuación (2.39) de manera similar al caso de EDOs con coeficientes periódicos [35]. Este operador $U : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ se define como

$$U\phi = T(p, 0)\phi, \quad (2.40)$$

siendo T el mapeo definido en (2.10). Se puede probar que existe un entero $m > 0$ tal que $U^m = T(mp, 0)$ es un operador completamente continuo. Luego, el espectro de U es un conjunto compacto, a lo sumo numerable del plano complejo, con un único posible punto de acumulación en cero.

Los elementos distintos de cero en el espectro de U , es decir

$$\text{Nuc}(\mu I - U) \neq \{0\}, \quad (2.41)$$

son los multiplicadores de Floquet de la ecuación (2.39). La solución trivial de la ecuación (2.39) es asintóticamente estable si y sólo si todos los multiplicadores característicos tienen módulo menor que uno.

Al igual que para EDOs con coeficientes periódicos, podemos identificar tres tipos de pérdida de estabilidad del equilibrio en función de la localización de los multiplicadores característicos críticos (multiplicadores tales que $|\mu| = 1$): bifurcación Neimark-Sacker, *fold* y *flip*. En el primer caso existe un par de multiplicadores $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ complejos conjugados que están saliendo del círculo unidad. Si $e^{iq\theta_0} = 1$, para $q = 1, 2, 3, 4$, se dice que la bifurcación presenta una resonancia fuerte, asociada a dinámicas muy complejas del sistema [45]. En la bifurcación *fold* o silla nodo de ciclos, nos encontramos con un multiplicador real que se mueve hacia afuera del círculo unidad a través de 1. Por último, si un multiplicador real sale del círculo unidad esta vez por el valor -1, estamos frente a una bifurcación de tipo *flip* o doble período.

El desarrollo de un método analítico general para calcular los multiplicadores de Floquet de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos es complejo, incluso en el caso de EDOs. Una forma de encontrar estos autovalores es construir un operador finito dimensional que aproxime el operador de monodromía. A continuación desarrollamos los conceptos básicos del método de colocación de Chebyshev [13], método que utilizaremos en lo que sigue para el cálculo aproximado de autovalores.

2.5.1. Método de colocación de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev de primer tipo están definidos para $n \geq 0$ como

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta). \quad (2.42)$$

Es claro que $|T_n(s)| \leq 1, \forall s, n \geq 0$. Estos polinomios forman un conjunto ortogonal en el intervalo $[-1, 1]$, es decir

$$\int_{-1}^1 T_n(s)T_m(s)w(s) dt = 0, \quad \text{si } n \neq m, \quad (2.43)$$

donde $w(s) = (1 - s^2)^{-1/2}$. Los puntos de colocación de Chebyshev son puntos en el intervalo $[-1, 1]$, definidos como $t_j = \cos(j\pi/N)$, para $j = 0, 1, \dots, N$. Estos valores corresponden a los máximos y mínimos del polinomio T_N . Sea $m = N + 1$, el número de puntos de colocación.

Una matriz de diferenciación espectral para los puntos de colocación de Chebyshev se obtiene interpolando un polinomio a través de los puntos de colocación, derivando este polinomio y evaluando el polinomio resultante en los puntos de colocación [12]. Para cualquier orden m , los elementos de la matriz de diferenciación espectral de Chebyshev $D \in \mathbb{M}_m$, están definidos como

$$D_{00} = \frac{2N^2 + 1}{6}, \quad D_{NN} = -\frac{2N^2 + 1}{6}, \quad (2.44)$$

$$D_{jj} = \frac{-t_j}{2(1 - t_j^2)}, \quad j = 1, \dots, N - 1, \quad (2.45)$$

$$D_{ij} = \frac{c_i(-1)^{i+j}}{c_j(t_i - t_j)}, \quad i \neq j, \quad i, j = 0, \dots, N, \quad (2.46)$$

donde $c_i = \begin{cases} 2 & \text{if } i = 0, N \\ 1 & \text{if } i \neq 0, i \neq N \end{cases}$.

Además, si la ecuación es n -dimensional, podemos definir el operador diferencial \mathbb{D} de orden $nm \times nm$ como $\mathbb{D} = D \otimes I_n$.

Para lo que sigue es necesario definir los polinomios de Chebyshev trasladados, es decir polinomios de Chebyshev en el intervalo $[a, b]$, tenemos

$$T_n^*(s) = T_n\left(\frac{2s - (a + b)}{b - a}\right). \quad (2.47)$$

El método de colocación de Chebyshev nos permite aproximar valores de la soluciones de la ecuación (2.39) en los puntos de colocación del intervalo solución, a partir de las condiciones iniciales en los puntos de colocación, $s_j = (\cos(j\pi/N) - 1)\tau/2$, en el intervalo $[-\tau, 0]$.

Primero consideramos el caso $p = \tau$ analizado en [13]. Sea M_1 el conjunto de m valores de la solución en el intervalo $[0, p]$ y M_φ el conjunto de m valores de la función inicial $\varphi(t)$ en $[-p, 0]$. Como los valores están numerados de derecha a izquierda la condición de continuidad es $M_{1N} = M_{\varphi 0}$. Reemplazando M_1 y M_φ en (2.39) se genera

$$\hat{D}M_1 = \hat{M}_{A_0}M_1 + \hat{M}_{A_1}M_\varphi. \quad (2.48)$$

La matriz \hat{D} se obtiene de \mathbb{D} reemplazando las últimas n filas por $[0_n \ 0_n \ \dots \ I_n]$, para asegurar las condiciones de continuidad. Aquí 0_n y I_n son las matrices $n \times n$ de ceros e identidad, respectivamente. Además, la matriz anterior debe ser multiplicada por $2/p$ debido al reescalamiento de los polinomios al intervalo $[0, p]$. Las matrices restantes en (2.48) se definen como

$$\hat{M}_{A_0} = \begin{pmatrix} A_0(s_0) & & & & \\ & A_0(s_1) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A_0(s_{N-1}) & \\ 0_n & 0_n & \dots & 0_n & 0_n \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

$$\hat{M}_{A_1} = \begin{pmatrix} A_1(s_0) & & & & \\ & A_1(s_1) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A_1(s_{N-1}) & \\ I_n & 0_n & \dots & 0_n & 0_n \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

donde $A_i(s_j)$, con $j = 0, 1$, es la matriz $n \times n$ que resulta de evaluar A_i en el j -ésimo punto de colocación.

Usando el método de colocación definimos una matriz de monodromía finito dimensional \mathbf{U} cuyos autovalores aproximan los multiplicadores de Floquet relevantes [13]. De la definición de operador de monodromía y ya que $p = \tau$, sigue la definición de \mathbf{U} como el mapeo de los valores de la solución en intervalos sucesivos, i.e. $M_1 = \mathbf{U}M_\varphi$, entonces de (2.48) se obtiene

$$\mathbf{U} = \left(\hat{D} - \hat{M}_{A_0} \right)^{-1} \hat{M}_{A_1}. \quad (2.51)$$

Podemos calcular ahora nm autovalores. La exactitud de los multiplicadores de Floquet generalmente mejora al incrementar el número de puntos de colocación.

El estudio dinámico de los ciclos requiere la realización del cálculo de autovalores en el caso general $p \neq \tau$. Aquí, nuestra implementación sigue y desarrolla la idea propuesta en [12] para la aproximación numérica de estos autovalores. No realizamos un estudio detallado desde el punto de vista numérico de este método de cálculo.

Consideramos $0 < \tau < p \leq 2\tau$, el resto de los casos puede ser deducido a partir de éste. Para obtener la solución en un período p , con condición inicial φ , es necesario calcular

$$\begin{aligned} M_1 &= \mathbf{U}M_\varphi && \text{en } [0, \tau], \\ M_2 &= \mathbf{U}M_1 = \mathbf{U}^2M_\varphi && \text{en } [\tau, 2\tau], \end{aligned} \quad (2.52)$$

con la condición de continuidad $M_{2N} = M_{10}$. Luego, tenemos expresiones para los valores de las soluciones en $2m$ puntos de colocación, m en cada uno de los intervalos $[0, \tau]$ y $[\tau, 2\tau]$.

El operador de monodromía actúa en el espacio \mathcal{C} . Luego, es necesario adaptar la definición \mathbf{U} y entonces construir un nuevo operador $\tilde{\mathbf{U}}$, que transforme M_φ en \tilde{M} , para poder representar el operador de monodromía y finalmente aproximar sus autovalores.

Sea $M \in \mathbb{N}$ tal que $2\tau + s_M \leq p \leq 2\tau + s_{M-1}$, donde s_j son puntos de colocación en el intervalo $[-\tau, 0]$. Los valores se numeran de derecha a izquierda comenzando

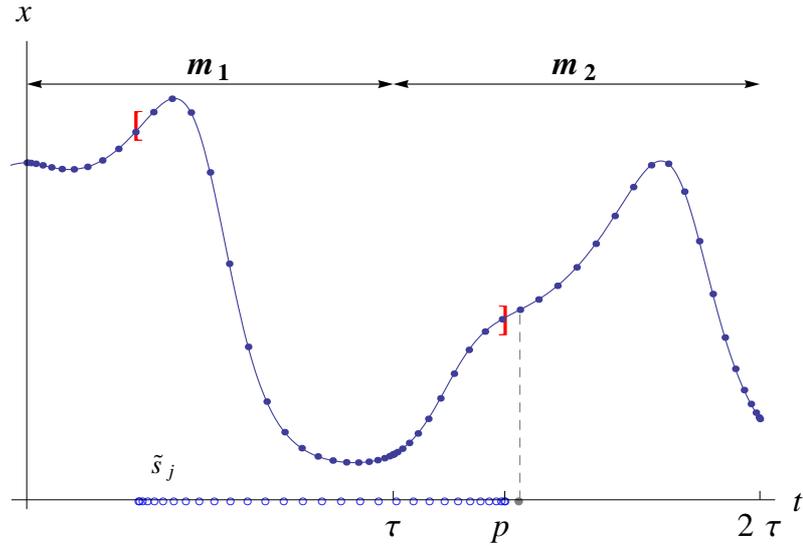


Figura 2.3: Puntos de colocación y grilla para la interpolación.

en cero. Consideremos la parte de la solución representada por los $(N + 1 - (M - 1))$ valores de M_2 dados por $\{M_{2(M-1)}, \dots, M_{2N}\}$, y los primeros M valores de M_1 , $\{M_{10} \dots, M_{1(M-1)}\}$, se considera un valor extra en M_1 debido a la condición de continuidad $M_{2N} = M_{10}$. La figura 2.3 muestra un ejemplo de esta situación, los valores en M_1 y M_2 se grafican como puntos sobre la solución. También observamos en esa figura el punto $2\tau + s_{M-1}$ y su valor correspondiente $M_{2(M-1)}$. En la misma figura, los corchetes limitan la parte de la solución que queremos aproximar. En el eje horizontal mostramos los puntos de colocación del intervalo $[p - \tau, p]$, definimos como $\tilde{s}_j = p + s_j$. En general el punto de colocación correspondiente al valor $M_{1(M-1)}$ será mayor que $p - \tau$, así para construir la matriz cuadrada se requiere un extrapolación.

Construimos una matriz $\bar{\mathbf{U}}$ usando las condiciones anteriores y las ecuaciones (2.52). $\bar{\mathbf{U}}$ se construye con las últimas $n(N + 1 - (M - 1))$ filas de \mathbf{U}^2 y las $n(M - 1)$ filas de \mathbf{U} a partir de la fila $n + 1$. Se descartan las primeras n filas debido a las condiciones de continuidad. El nuevo operador mapea M_φ a los valores de la solución en el rango $[\tau + s_{M-1}, 2\tau + s_{M-1}]$, llamamos a estos últimos \bar{M} . Pero este operador no es el que queremos encontrar, porque las proyecciones de los puntos \bar{M} no coinciden con los puntos de colocación \tilde{s}_j , como se observa claramente en la figura 2.3. Usamos los valores \bar{M} de la solución para hallar los valores \tilde{M} de la solución en los puntos \tilde{s}_j , y definimos (en forma aproximada) el operador $\tilde{\mathbf{U}}$.

La manera más fácil es realizar la interpolación lineal de valores en \tilde{M} usando los valores en \bar{M} . Esta interpolación es representada por una matriz M_L cuyos elementos están definidos en términos de \tilde{s}_j y los puntos de colocación $s_j + \tau$ y $s_j + 2\tau$ que se encuentran en el intervalo $[\tau + s_{M-1}, 2\tau + s_{M-1}]$, que en adelante llamaremos \bar{s}_j . De esta manera, el operador $\tilde{\mathbf{U}}$ es aproximadamente $M_L \bar{\mathbf{U}}$, y podemos aproximar los autovalores calculando los autovalores de $M_L \bar{\mathbf{U}}$.

Una manera de medir la exactitud de la aproximación es calcular el error del autovalor trivial 1, podemos ver que el error decrece cuando aumentamos la cantidad de puntos de colocación. Sin embargo, si continuamos aumentando el número de

puntos el error alcanza un mínimo y se estabiliza. Comparamos los autovalores calculados con los obtenidos utilizando DDE-Biftool [23] en algunos casos particulares y los resultados muestran una buena coincidencia.

La aproximación de los puntos en \tilde{M} también puede realizarse por medio de interpolación baricéntrica. Esta interpolación está definida como

$$\tilde{M}_j = \frac{\sum_{i=0}^N \frac{\eta_i}{\tilde{s}_j - \bar{s}_i} \bar{M}_i}{\sum_{i=0}^N \frac{\eta_i}{\tilde{s}_j - \bar{s}_i}}, \quad (2.53)$$

donde $\eta_i = (-1)^i/2$ si $i = 0$ o $i = N$ y, $\eta_i = (-1)^i$ si $i \neq 0, i \neq N$.

Como en el caso anterior, podemos definir una matriz M_B , que representa la interpolación en términos de \tilde{s}_j y \bar{s}_j . El operador \tilde{U} en este caso es aproximadamente $M_B \bar{U}$. El cálculo de los autovalores de $M_B \bar{U}$ son comparados con los calculados con DDE-Biftool. Observamos que la aproximación es mejor que cuando se utilizaba interpolación lineal, para el mismo número de puntos de colocación.

Método de análisis homotópico

3.1. Introducción

Los sistemas dinámicos modelados por ecuaciones diferenciales no lineales con o sin retardo son difíciles de resolver por métodos analíticos. Podemos mencionar los métodos perturbativos para resolver estas ecuaciones [5, 40, 62]. Estos métodos requieren de la existencia de parámetros que tomen valores pequeños o muy grandes. Entre los métodos no perturbativos podemos encontrar el método de parámetro artificial pequeño de Lyapunov, el método de descomposición de Adomian, el método de perturbación homotópica [36] y el método de análisis homotópico (HAM, por sus siglas en inglés *Homotopy Analysis Method*) [48]. Este último método contiene a los anteriores y así, resulta de gran interés para resolver una gran variedad de ecuaciones. El HAM ha sido aplicado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales así como también EDRs [1, 42, 48, 49, 50, 51, 53, 70, 73].

El HAM es independiente de la presencia de parámetros y siempre permite transformar un problema no lineal en una cantidad infinita de subproblemas lineales. Además, a diferencia de otras técnicas analíticas, el HAM provee una manera conveniente de garantizar la convergencia de la serie solución, lo que permite obtener soluciones incluso cuando la ecuación presenta una no linealidad muy fuerte.

Una característica muy importante y una gran ventaja del HAM sobre otros métodos es su flexibilidad en la elección tanto de una base de funciones como de una aproximación inicial de la serie solución. Así, el HAM provee una gran libertad en la elección del tipo de subproblema lineal en el que se descompone el problema original. Es posible resolver un problema utilizando distintas bases de funciones que capturen diferentes aspectos de las soluciones (comportamiento asintótico, periodicidad, etc.).

En la siguiente sección describimos en forma general cómo se utiliza la homotopía para hallar soluciones de ecuaciones diferenciales con retardo y puntualizamos algunos aspectos característicos del HAM. En la sección 3.3 consideramos la adaptación del método orientado a la búsqueda de soluciones periódicas, la construcción en este caso hace recordar al método de Poincaré-Linstedt [79]. Los contenidos de esta sección serán utilizados constantemente en los capítulos siguientes. Por último, en la sección 3.4 mostramos criterios para detectar bifurcaciones de Hopf utilizando HAM.

3.2. Descripción general del método

Sea una ecuación diferencial con retardo autónoma de la forma

$$x'(t) = f(x_t), \quad (3.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $x_t \in \mathcal{C} = C([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$ está dada por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ para $\theta \in [- \tau, 0]$ y $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un operador no lineal. En el caso particular en que $\tau = 0$ la ecuación anterior resulta una EDO de orden n .

Supongamos que se verifican las hipótesis del teorema de existencia enunciado en el capítulo anterior. Luego, existe una solución, que llamaremos x_S , de la ecuación (3.1), bien definida en $D \subseteq \mathbb{R}$, que verifica ciertas condiciones iniciales que llamaremos CI. En el caso con retardo dependiendo del problema estudiado, esta condición puede ser de dos formas: una función definida en el intervalo $[- \tau, 0]$, o valores de la función y sus derivadas en $t = 0$. Veremos en la siguiente sección que este último es el caso cuando se buscan soluciones periódicas de la ecuación.

Consideremos la familia de operadores \mathcal{H}_q que dependen de un parámetro de deformación $q \in [0, 1]$

$$\mathcal{H}_q[\phi] = (1 - q) \mathcal{L}[\phi - x_0] - q h \mathcal{N}_q[\phi], \quad (3.2)$$

donde ϕ es una homotopía que construimos con el método y se encuentra en función de t y del parámetro q , x_0 es una aproximación inicial de la solución que verifica CI, \mathcal{L} es un operador diferencial lineal, $h \neq 0$ es un parámetro real y \mathcal{N}_q es un operador no lineal que definimos a partir de la ecuación original

$$\mathcal{N}_q[\phi] = \frac{\partial \phi}{\partial t} - f(\phi_t). \quad (3.3)$$

El procedimiento se basa en la búsqueda de una función ϕ , analítica en $q \in [0, 1]$, tal que:

- i. $\mathcal{H}_q[\phi] = 0$ para $q \in [0, 1]$,
- ii. ϕ verifica las condiciones iniciales CI para todo $q \in [0, 1]$.

Si esta función existe, tomando $q = 0$ resulta

$$\mathcal{H}_0[\phi] = \mathcal{L}[\phi - x_0] = 0. \quad (3.4)$$

Entonces, como las funciones ϕ y x_0 verifican las mismas condiciones CI, podemos tomar $\phi(0) = x_0$. (Si el problema está bien condicionado es la única elección posible). Además, si $q = 1$ tenemos

$$\mathcal{H}_1[\phi] = -h \mathcal{N}_1[\phi] = 0, \quad (3.5)$$

luego $\phi(1)$ será solución de la ecuación (3.1) con las condiciones CI. Por lo tanto, ϕ define una homotopía entre la aproximación inicial x_0 y la solución buscada x_S . Ya que la función ϕ es analítica en $[0, 1]$, podemos utilizar el siguiente desarrollo en serie de Maclaurin

$$\phi(q) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k q^k, \quad (3.6)$$

donde $x_0 = \phi(0)$ y $x_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k \phi(q)}{dq^k} \Big|_{q=0}$. Evaluando en $q = 1$ resulta la siguiente serie de la solución

$$x_S = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k. \quad (3.7)$$

Reemplazando (3.6) en la ecuación $\mathcal{H}_q[\phi] = 0$, tomando la k -ésima derivada respecto de q , evaluando en $q = 0$ y dividiendo por $k!$ obtenemos

$$\mathcal{L}[x_k - x_{k-1} + \delta_{1k}x_0] = \frac{h}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} \mathcal{N}_q[\phi]}{\partial q^{k-1}} \Big|_{q=0}. \quad (3.8)$$

Además, utilizando la serie para ϕ y ya que $\phi(0)$ verifica las condiciones CI, deducimos condiciones iniciales para cada x_k con $k \geq 1$. En el lado derecho de (3.8) intervienen, para cada valor de k fijo, los k términos anteriores x_0, \dots, x_{k-1} . Así, obtenemos cada x_k en la expansión en serie de ϕ resolviendo recursivamente la ecuación diferencial lineal (3.8) con las condiciones iniciales halladas. Por lo tanto, transformamos el problema original en una cantidad infinita de problemas de valores iniciales lineales. Si realizamos los cálculos hasta un orden fijo obtenemos una expresión analítica aproximada de la solución.

Con las definiciones anteriores y algunas condiciones de convergencia se tiene el siguiente teorema.

Teorema 12. *Sea x_0 una función que verifica las condiciones iniciales CI. Sea x_k , para $k \geq 1$, la solución de la ecuación (3.8) con las condiciones iniciales correspondientes. Supongamos que la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$, converge a x_S en un cierto dominio D (que contiene los puntos en que están dadas las condiciones iniciales). Supongamos además que la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{L}[x_k]$ converge y que \mathcal{N}_q es analítico para $q \in [0, 1]$. Entonces, la función x_S verifica las condiciones CI y la ecuación $x'(t) = f(x_t)$ en D .*

Demostración. Ver referencia [52]. □

Como se establece en el teorema anterior, la validez de la expresión de la solución dada en (3.7) depende fundamentalmente de la posibilidad de asegurar la convergencia de esa serie. En cada problema estudiado \mathcal{L} , x_0 y el valor de h , deben ser elegidos apropiadamente de manera de poder asegurar esa convergencia. La posibilidad de elegir estos objetos es lo que diferencia el HAM de otros métodos analíticos. En particular, el parámetro h en (3.2), conocido como parámetro de control de convergencia, fue introducido por Liao, en su tesis doctoral en 1992, en este tipo de homotopías y ha demostrado ser una herramienta muy importante para controlar la convergencia de la serie en (3.7) (ver ejemplos en [52, 70]).

A continuación desarrollamos un ejemplo sencillo que muestra el uso del método y luego, en las siguientes subsecciones, realizamos algunas consideraciones respecto de la elección de cada uno de los tres objetos: \mathcal{L} , x_0 y h .

3.2.1. Ejemplo: EDR lineal

Consideremos la ecuación diferencial lineal con un retardo

$$x'(t) + ax(t-1) = 0, \quad (3.9)$$

con condición inicial $x(t) = bt + c$, para $t \in [0, 1]$, siendo a , b y c constantes reales.

Debido a que la ecuación diferencial es de primer orden definimos el operador lineal

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Además, elegimos la función inicial $x_0(t) = bt + c$. El operador \mathcal{N} no lineal que se define a partir de la ecuación (3.9) es

$$\mathcal{N}[\phi] = \frac{d\phi}{dt}(t, q) + a\phi(t - 1, q). \quad (3.11)$$

Considerando la serie de la función ϕ

$$\phi(t, q) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t)q^k, \quad (3.12)$$

reemplazando en la ecuación $\mathcal{H}_q[\phi] = 0$, siendo \mathcal{H}_q la homotopía en (3.2), y siguiendo el procedimiento mencionado antes, como ambos operadores son lineales, fácilmente obtenemos las ecuaciones

$$\mathcal{L}[x_k - x_{k-1} + \delta_{1k}x_0] = h(x'_{k-1}(t) + ax_{k-1}(t - 1)), \quad k \geq 1. \quad (3.13)$$

Determinamos las condiciones iniciales para cada término x_k considerando lo siguiente: la condición inicial está dada en el intervalo $[0, 1]$, y x_0 coincide con esa función en todo el intervalo, por lo tanto, imponemos que cada término x_k , con $k \geq 1$, se anule en todo el intervalo $[0, 1]$. Para verificar esta condición utilizaremos funciones de Heaviside, que notaremos como $u(t)$.

La ecuación diferencial (3.13) para $k = 1$ resulta

$$x'_1(t) = h(b + ab(t - 1) + ac). \quad (3.14)$$

Integrando esta ecuación y teniendo en cuenta que se debe verificar $x_1(t) = 0$ para $t \in [0, 1]$, definimos

$$x_1(t) = u(t - 1)h \left((b + ac)(t - 1) + ab \frac{(t - 1)^2}{2} \right). \quad (3.15)$$

Tanto en este término como en los siguientes la constante de integración se fija utilizando el valor $x_k(1) = 0$.

Continuando los cálculos a partir del término x_1 , resolviendo las ecuaciones (3.13), las funciones de Heaviside $u(t - n)$ con $n \geq 1$, comienzan a aparecer en los distintos términos x_k . Podemos hallar fórmulas que describen las funciones x_k , a partir de las cuales deducimos la siguiente expresión para la aproximación HAM de orden n de la solución del problema con valores iniciales original

$$x_{ap}(t) = bt + c + u(t - 1)hd_1 \sum_{i=1}^{n-1} ((h + 1)^i + 1) + \sum_{j=2}^n u(t - j)h^j a^{j-1} d_j \sum_{i=1}^{n-j} ((j + i - 1)(h + 1)^i + 1), \quad (3.16)$$

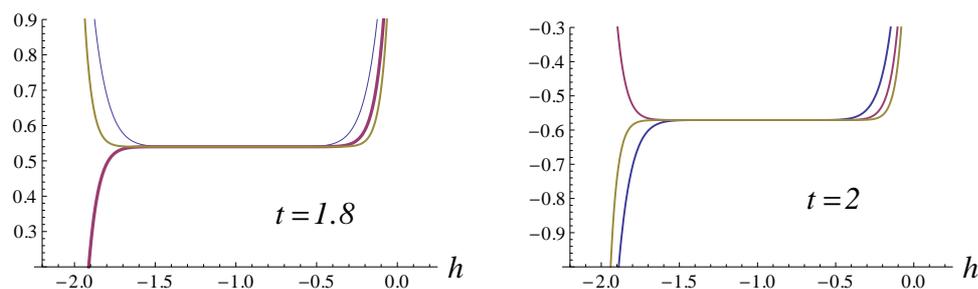


Figura 3.1: Polinomios en h . Izquierda: $a = 1$, $b = 0,5$ y $c = 1$, para $t = 1,8$. Derecha: $a = \pi/2$, $b = 0$ y $c = 1$, para $t = 2$.

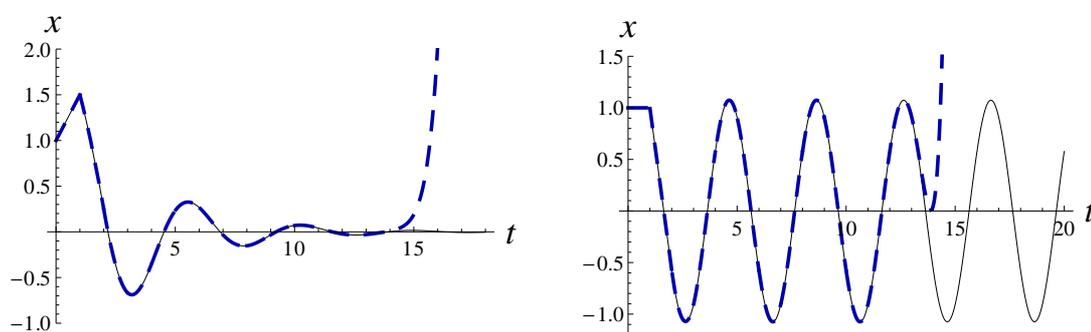


Figura 3.2: Solución con HAM (---) y numérica (—), fijando: $a = 1$, $b = 0,5$ y $c = 1$ (izquierda); $a = \pi/2$, $b = 0$ y $c = 1$ (derecha).

donde

$$d_j = \left((b + ac) \frac{(t-j)^j}{j!} + ab \frac{(t-j)^{j+1}}{(j+1)!} \right), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (3.17)$$

Para valores dados de las constantes a , b y c , fijemos en (3.16) distintos valores de t . Obtenemos de esta manera polinomios de orden n en la variable h . En la figura 3.1 mostramos algunos de estos polinomios, también llamados h -curvas, de los cuales nos ocuparemos en detalle más adelante. Graficamos curvas de varios órdenes en cada caso y observamos que existen valores de h en los que los polinomios son cercanos a un valor fijo, independiente de h . En la figura 3.2 comparamos soluciones HAM con soluciones numéricas en dos ejemplos particulares. En ambas soluciones utilizamos orden HAM 10 y el valor $h = -1$.

3.2.2. Operador \mathcal{L} y aproximación inicial x_0

La elección del operador diferencial lineal \mathcal{L} así como de la aproximación inicial x_0 es muy importante en el desarrollo del método para la búsqueda de soluciones de algún tipo específico. Se pueden elegir distintos operadores, incluso el orden de derivación no necesariamente debe ser el mismo que el de la ecuación (3.1) original [53].

Desde el punto de vista del estudio de bifurcaciones una elección simple es considerar \mathcal{L} como la linealización de la ecuación alrededor de algún punto de equilibrio que se desee estudiar. Como vimos en el capítulo anterior, al igual que sucede en el

caso de EDOs, la linealización captura el comportamiento local del sistema en un entorno de un punto de equilibrio hiperbólico.

Por otro lado, si por medio del estudio dinámico del sistema conocemos características generales de la solución, como por ejemplo periodicidad, comportamiento asintótico, etc., podemos seleccionar operadores cuyas soluciones capturen este tipo de comportamiento. Aunque, como ya mencionamos, no existen en principio restricciones respecto del orden del operador, por simplicidad es recomendable utilizar el de menor orden.

En la práctica generalmente utilizamos operadores \mathcal{L} cuyo inverso se puede definir fácilmente en cierto conjunto de funciones. Resolvemos las ecuaciones utilizando paquetes de cálculo simbólico, como por ejemplo Mathematica, hasta un orden deseado. Por ejemplo, si buscamos soluciones periódicas podemos considerar los operadores

$$\mathcal{L}[\psi] = \frac{d^{2m}\psi}{dt^{2m}} + (-1)^{m+1}\psi, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

y funciones iniciales x_0 trigonométricas, mientras que para obtener soluciones expresadas en términos de exponenciales es posible considerar

$$\mathcal{L}[\psi] = \frac{d\psi}{dt} + m\psi, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

y la aproximación inicial $x_0(t) = e^{-mt}$.

En todos los casos se puede utilizar operadores de la forma

$$\mathcal{L}[\psi] = \frac{d^m\psi}{dt^m}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Este tipo de operadores puede generar desarrollos de las soluciones en distintos conjuntos de funciones (polinomios, exponenciales, etc.), si consideramos diferentes funciones iniciales e imponemos condiciones adecuadas.

Una observación interesante que realiza Liao [52] es que la homotopía (3.2) se puede reescribir utilizando el operador $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/h$. Suponiendo que la norma del operador existe, la misma se puede modificar utilizando el parámetro h , lo mismo sucede al considerar la norma del operador inverso, se tiene $\|\tilde{\mathcal{L}}^{-1}\| = |h|\|\mathcal{L}^{-1}\|$. Luego, para cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar un valor del parámetro h tal que $\|\tilde{\mathcal{L}}^{-1}\| < \epsilon$. Liao afirma que “la acotación de esta norma y una buena elección de la solución inicial parecen indicar que siempre se puede hallar un valor del parámetro de convergencia tal que las series en el teorema 12 sean convergentes, aunque todavía no se ha podido demostrar esta afirmación en general”.

3.2.3. El parámetro de control de convergencia h

Como ya mencionamos el parámetro h puede ser determinante para asegurar la convergencia de la serie (3.7) que representa la solución.

En [84] se plantea un criterio para seleccionar un valor óptimo de h utilizando el error medio cuadrático residual. Ese valor, para la aproximación de orden m

$$x_{ap} = \sum_{n=0}^m x_n(t), \quad (3.21)$$

de la solución de la ecuación (3.1), está dado por

$$E_m(h) = \int_D (x'_{ap}(t) - f((x_{ap})_t))^2 dt, \quad (3.22)$$

siendo D el dominio de definición de la solución. Luego, el valor óptimo de h para este orden de aproximación se calcula como el mínimo de $E_m(h)$. El criterio resulta muy preciso en general aunque puede resultar costoso computacionalmente para aproximaciones de alto orden. Dicha dificultad se puede resolver utilizando métodos numéricos para el cálculo de la integral, pero no así en el caso en que existan parámetros indeterminados en la ecuación original.

A partir del teorema 12 sigue que si la serie de la solución x_S converge, entonces el error residual tiende a cero cuando $m \rightarrow \infty$. Podemos definir una región efectiva R_e del parámetro h como

$$R_e = \left\{ h : \lim_{m \rightarrow +\infty} E_m(h) = 0 \right\}. \quad (3.23)$$

Luego, en los valores $h \in R_e$, la serie solución tiende a una función que es independiente de h . En los puntos fuera de esta región la serie será divergente. La elección de distintos valores de h en la región efectiva puede influir en la velocidad de convergencia.

En general en la práctica es muy difícil calcular expresiones cerradas para la serie de la solución x_S , así, no es posible conocer exactamente la región R_e . Sin embargo, para un orden fijo podemos obtener aproximaciones de la región efectiva de la siguiente manera. Si en la solución aproximada hasta orden m se fija un valor de t , obtenemos un polinomio de orden m en h y lo mismo sucederá con las derivadas respecto de t de x_{ap} para t fijo. Graficando este tipo de funciones polinómicas, conocidas como h -curvas, podremos tener una idea aproximada del lugar en que se encuentra la región R_e y seleccionar un valor apropiado para h . El gráfico de la función E_m también puede darnos información en este sentido. En el ejemplo considerado antes (EDR lineal) y en los ejemplos que siguen mostramos algunas h -curvas particulares en las que podemos observar su forma característica. La utilización de las h -curvas como criterio para elegir un valor de h ha demostrado ser suficientemente bueno en todos los cálculos realizados en esta tesis.

3.2.3.1. Series de Taylor generalizadas

Una expresión cerrada de una solución con HAM se puede obtener sólo en unos cuantos casos. Consideremos como un ejemplo el siguiente problema de valores iniciales (que se muestra en [49])

$$x' + x^2 = 1, \quad x(0) = 0. \quad (3.24)$$

La solución de esta ecuación es $x(t) = \tanh t$, y se calcula integrando directamente. También se puede obtener fácilmente la siguiente solución perturbativa (para t pequeño)

$$x(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m t^{2m+1}. \quad (3.25)$$

El radio de convergencia de esta serie es $\pi/2$.

Para obtener la solución con HAM elegimos el operador $\mathcal{L}[\phi] = \partial\phi/\partial t$, y la solución inicial $x_0(t) = t$. La solución de orden m que se obtiene es

$$x_{ap}(t) = t + \sum_{n=1}^m \mu_{m,n}(h) \alpha_n t^{2n+1}, \quad (3.26)$$

donde

$$\mu_{m,n}(h) = (-h)^n \sum_{j=0}^{m-n} \binom{n-1+j}{j} (1+h)^j. \quad (3.27)$$

Esta expresión es denominada por Liao expansión de Taylor generalizada. Las funciones $\mu_{m,n}(h)$ tienen la propiedad

$$\mu_{m,n}(-1) = 1 \quad \text{si } n \leq m, \quad \text{y} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{m,n}(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } |1+h| < 1 \\ \infty & \text{si } |1+h| > 1 \end{cases}. \quad (3.28)$$

En [2] y [54] se observa que la expansión de Taylor generalizada anterior parece corresponder a una traslación en el punto alrededor del cual se realiza el desarrollo, como sigue

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(t_1)}{n!} (t - t_1)^n \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(t_1)}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (t - t_0)^k (t_0 - t_1)^{n-k} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \mu_{m,n}(f, t_0, t_1) \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n, \end{aligned} \quad (3.29)$$

siendo f una función C^∞ en un intervalo que contiene los puntos t_0 y t_1 , y

$$\mu_{m,n}(f, t_0, t_1) = \left(\frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} \right)^{-1} \sum_{k=n}^m \frac{f^{(k)}(t_1)}{k!} \binom{k}{n} (t_0 - t_1)^{k-n}. \quad (3.30)$$

Por ejemplo, si tomamos $f(t) = 1/(1+t)$ se obtiene

$$f(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \mu_{m+1,n+1}(h) (-1)^n t^n. \quad (3.31)$$

Esta expresión es la expansión de Taylor alrededor de $t_0 = -1/h - 1$. Con $-2 < h < 0$ tenemos la región de convergencia $-1 < t < -1 + 2/|h|$. Así, con una elección apropiada del parámetro h , es posible incrementar la región de convergencia de la solución.

El siguiente resultado (demostrado en [2]) muestra que variando h existirán segmentos de puntos en los cuales las series de Taylor convergen a la función f .

Teorema 13. Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que todas las derivadas de f existen y son uniformemente acotadas, i.e., existe $M > 0$ tal que

$$\max_{t \in [a, b]} |f^{(k)}(t)| \leq M, \quad \forall k. \quad (3.32)$$

Sea $G_n(t, \alpha)$ un polinomio de Taylor de grado n de f alrededor de $\alpha \in (a, b)$. Supongamos que $\alpha = g(h)$, entonces para cada $\epsilon > 0$ y $\gamma \in (a, b)$ existe $N \in \mathbb{N}$ y un intervalo (c, d) tal que para todo $h \in (c, d)$ y $n \geq N$ se verifica

$$|f(\gamma) - G_n(\gamma, g(h))| < \epsilon. \quad (3.33)$$

Corolario 14. Supongamos que f es suficientemente diferenciable en $[a, b]$, g es continua en $[a, b]$ y $G_n(t, g(h))$ es el polinomio de Taylor de orden n de f alrededor de $g(h)$. Entonces para todo $\gamma \in (a, b)$ la función $G_n(\gamma, g(h))$ muestra una región horizontal cuando n tiende a infinito.

3.3. HAM para soluciones periódicas

La búsqueda y el análisis de soluciones periódicas en ecuaciones diferenciales (con y sin retardo) es de gran importancia tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Supongamos que contamos con información del sistema a partir de la cual se presume que existen soluciones periódicas. A continuación se describe una manera de utilizar el HAM para hallar estas soluciones periódicas en EDRs no lineales.

Consideramos la siguiente ecuación diferencial autónoma de orden n

$$y^{(n)}(s) = F(y^{(n-1)}(s), \dots, y(s), y(s - \tau)), \quad (3.34)$$

donde $y \in C^n(\mathbb{R})$, F es una función escalar no lineal y $\tau > 0$ es un retardo.

Supongamos que existe una solución periódica de la ecuación anterior con frecuencia ω y amplitud a (se considera amplitud al máximo desplazamiento en la variable y que alcanza la solución en un período). Al estudiar soluciones periódicas podemos independizarnos de la condición inicial en un intervalo. Ya que la ecuación es autónoma, una solución x de período $2\pi/\omega$ da lugar a un continuo de soluciones (ver sección 2.5), determinamos una solución particular considerando la condición de fase: $x(0) = a$, $x'(0) = 0$.

Luego de realizar las sustituciones $t = \omega s$, e $y = ax$, obtenemos la siguiente ecuación normalizada

$$\omega^n ax^{(n)}(t) = F(\omega^{n-1} ax^{(n-1)}(t), \dots, ax(t), ax(t - \omega\tau)). \quad (3.35)$$

En las nuevas variables la solución periódica x_P tiene frecuencia y amplitud 1, y las condiciones de fase resultan

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0. \quad (3.36)$$

Podemos escribir la ecuación (3.35) como $N[x, \omega, a] = 0$, siendo N el operador diferencial no lineal

$$N[x, \omega, a] = \omega^n ax^{(n)}(t) - F(\omega^{n-1} ax^{(n-1)}(t), \dots, ax(t), ax(t - \omega\tau)). \quad (3.37)$$

Existe una diferencia respecto a lo desarrollado en la sección 3.2, y es que debido al cambio de variables agregamos al problema dos constantes que deben ser determinadas: ω y a . Veremos a continuación cómo se adapta el método a esta nueva situación.

Consideremos el espacio de funciones

$$C_{2\pi}^n(\mathbb{R}) := \left\{ x \in C^n(\mathbb{R}) : x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cos(kt) + d_k \operatorname{sen}(kt), c_k, d_k \in \mathbb{R} \right\}, \quad (3.38)$$

con $n \geq 2$. Este espacio contiene todas las funciones periódicas de frecuencia 1 en $C^n(\mathbb{R})$, incluida la solución buscada x_P . Elegimos una función inicial $x_0 \in C_{2\pi}^n(\mathbb{R})$ que verifique (3.36), por ejemplo $x_0(t) = \cos t$. Además, definimos el operador $\mathcal{L} : C_{2\pi}^n(\mathbb{R}) \rightarrow C_{2\pi}^{n-2}(\mathbb{R})$ como

$$\mathcal{L}[\psi] = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \psi. \quad (3.39)$$

El núcleo de este operador es el subconjunto de $C_{2\pi}^n(\mathbb{R})$ generado por $\{\cos t, \operatorname{sen} t\}$. Podemos definir un inverso del operador anterior, que llamaremos \mathcal{L}^{-1} , en el siguiente subespacio de $C_{2\pi}(\mathbb{R})$

$$S_{2\pi} = \left\{ x \in C(\mathbb{R}) : x(t) = c_0 + \sum_{k=2}^{+\infty} c_k \cos(kt) + d_k \operatorname{sen}(kt), c_k, d_k \in \mathbb{R} \right\}. \quad (3.40)$$

\mathcal{L}^{-1} se calcula utilizando la linealidad y considerando que

$$\mathcal{L}^{-1}[c] = c, c \in \mathbb{R}; \quad \mathcal{L}^{-1}[\cos kt] = \frac{\cos kt}{1 - k^2}, \quad \mathcal{L}^{-1}[\operatorname{sen} kt] = \frac{\operatorname{sen} kt}{1 - k^2}, \quad k \neq \pm 1. \quad (3.41)$$

De acuerdo a las definiciones anteriores, consideramos la siguiente familia de operadores

$$\mathcal{H}_q[\phi, \Omega, A] = (1 - q) \mathcal{L}[\phi - x_0] - q h \mathcal{N}_q[\phi, \Omega, A], \quad (3.42)$$

donde ϕ es la homotopía que se construye con el método, $h \neq 0$ es el parámetro de control de convergencia y \mathcal{N}_q es el operador no lineal

$$\mathcal{N}_q[\phi, \Omega, A] = N[\phi, \Omega, A]. \quad (3.43)$$

En este caso se buscan funciones ϕ , Ω y A , analíticas en q tales que:

- i. $\mathcal{H}_q[\phi, \Omega, A] = 0$ para $q \in [0, 1]$,
- ii. ϕ verifica las condiciones iniciales (3.36) para todo $q \in [0, 1]$.

Si tales funciones existen, considerando $q = 0$ obtenemos

$$\mathcal{H}_0[\phi, \Omega, A] = \mathcal{L}[\phi - x_0] = 0. \quad (3.44)$$

Por la definición del operador lineal (3.39) resulta

$$\phi(t, 0) - x_0(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t), \quad (3.45)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, de donde sigue que $\phi(t, 0) = x_0(t)$, ya que ambas funciones verifican las condiciones iniciales (3.36). Por otro lado, considerando $q = 1$ resulta

$$\mathcal{H}_1[\phi, \Omega, A] = -h \mathcal{N}_1[\phi, \Omega, A] = 0. \quad (3.46)$$

Luego, $\phi(t, 1) = x_P(t)$ es la solución periódica buscada del sistema (3.35), y los valores de frecuencia y amplitud resultan $\omega = \Omega(1)$ y $a = A(1)$, respectivamente. Así, cuando el parámetro q varía de 0 a 1, la función ϕ varía de la aproximación inicial x_0 a la solución deseada x_P , mientras que las funciones Ω y A varían de los valores iniciales ω_0 y a_0 a los correspondientes valores buscados ω y a .

Para hallar las funciones analíticas ϕ , Ω y A , consideramos las siguientes series de Maclaurin

$$\phi(t, q) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t)q^k, \quad \Omega(q) = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k q^k, \quad A(q) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k q^k. \quad (3.47)$$

Reemplazando estas series en la ecuación $\mathcal{H}_q[\phi, \Omega, A] = 0$, y siguiendo los pasos indicados en la sección 3.2, obtenemos las ecuaciones

$$\mathcal{L}[x_k - x_{k-1} + \delta_{1k}x_0] = \mathcal{R}_k[\phi, \Omega, A], \quad (3.48)$$

para $k \geq 1$, siendo

$$\mathcal{R}_k[\phi, \Omega, A] = \frac{h}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} \mathcal{N}_q[\phi, \Omega, A]}{\partial q^{k-1}} \Big|_{q=0}. \quad (3.49)$$

Además, como ϕ satisface (3.36) para todo $q \in [0, 1]$, imponemos en $t = 0$ las condiciones

$$x_k(0) = x'_k(0) = 0, \quad k \geq 1. \quad (3.50)$$

Supongamos que cada término $x_i \in C_{2\pi}^m(\mathbb{R})$, para $0 \leq i \leq k-1$. Entonces, la función $\mathcal{R}_k[\phi, \Omega, A]$ definida antes será continua y periódica en t con frecuencia 1, es decir, pertenecerá al conjunto $C_{2\pi}^m(\mathbb{R})$, y por lo tanto se puede expresar en la forma

$$\mathcal{R}_k[\phi, \Omega, A] = c_{k,0} + \sum_{m=1}^{m_k} c_{k,m} \cos mt + d_{k,m} \sin mt, \quad (3.51)$$

para algún entero $m_k \geq 1$ ó $m_k = \infty$. De acuerdo a la definición del operador \mathcal{L}^{-1} , para poder resolver la ecuación diferencial (3.48), la función (3.51) debe pertenecer a $S_{2\pi}$. Esto se logra imponiendo la anulación de los coeficientes de $\cos t$ y $\sin t$ en esa función. Tenemos entonces las siguientes condiciones adicionales para $k \geq 1$

$$\begin{aligned} c_{k,1} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}_k[\phi, \Omega, A] \cos t \, dt = 0, \\ d_{k,1} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}_k[\phi, \Omega, A] \sin t \, dt = 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

La presencia de $\cos t$ y $\sin t$ en la ecuación (3.48), generaría términos seculares de la forma $t \cos t$ y $t \sin t$. Si $k = 1$ obtenemos un sistema no lineal con incógnitas ω_0 y a_0 . En los demás casos el sistema es lineal y podemos resolverlo fácilmente. Calculamos las soluciones ω_{k-1} y a_{k-1} de este sistema para cada valor de k , y luego, utilizando el operador \mathcal{L}^{-1} resolvemos la ecuación diferencial (3.48) para obtener el término k -ésimo

$$x_k(t) = x_{k-1}(t) - \delta_{1k}x_0(t) + c_{k,0} + \sum_{m=2}^{m_k} \frac{1}{1-m^2} (c_{k,m} \cos mt + d_{k,m} \sin mt) + c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad (3.53)$$

donde c_1 y c_2 se determinan utilizando las condiciones $x_k(0) = x'_k(0) = 0$.

Resolviendo de esta manera obtenemos los coeficientes de las series (3.47) y si es posible hallar un valor adecuado de h tal que estas series sean convergentes en $q = 1$, de acuerdo al teorema 12 obtendremos la solución buscada. En este caso se construyen tres homotopías, que transforman las aproximaciones iniciales x_0 , ω_0 y a_0 en las soluciones buscadas x_P , ω y a .

En la práctica realizamos el procedimiento anterior hasta alcanzar el orden m deseado, obteniendo las aproximaciones

$$x_{ap}(t) = \sum_{k=0}^m x_k(t)q^k, \quad \omega_{ap} = \sum_{k=0}^m \omega_k q^k, \quad a_{ap} = \sum_{k=0}^m a_k q^k. \quad (3.54)$$

En este caso el error medio cuadrático residual resulta

$$E_m(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Delta_m(t))^2 dt, \quad (3.55)$$

donde $\Delta_m = N[x_{ap}, \omega_{ap}, a_{ap}]$. Sin embargo, por cuestiones de cálculo generalmente utilizaremos las h -curvas mencionadas en la sección anterior correspondientes a las aproximaciones (3.54) para seleccionar un valor adecuado de h .

Observación 15. A pesar de que la búsqueda está orientada a las órbitas periódicas no es estrictamente necesario utilizar desarrollos HAM en términos de funciones trigonométricas. Teóricamente podríamos desarrollar estas soluciones como una serie de otra base de funciones, sin embargo ya que en general sólo podremos calcular aproximaciones finitas de las soluciones el primer desarrollo será el más conveniente para los cálculos. El error de la aproximación en toda la recta real utilizando funciones trigonométricas es acotado, lo que no ocurre utilizando, por ejemplo, un desarrollo polinomial.

3.3.1. Ejemplo: van der Pol

Estudiaremos el ciclo periódico de la ecuación de van der Pol

$$x''(t) + \epsilon(x^2(t) - 1)x'(t) + x(t) = 0, \quad (3.56)$$

con $\epsilon > 0$, utilizando el HAM descrito en la sección anterior. La ecuación de van der Pol es un ejemplo muy conocido de los sistemas de Liénard, y es muy interesante en muchos aspectos. En particular, presenta un ciclo que resulta ser globalmente estable cuando $\epsilon > 0$. Además, a medida que el parámetro ϵ aumenta, este ciclo toma la forma característica de una oscilación de relajación. Más adelante estudiaremos una variante de la ecuación anterior a la que se le aplica un retardo.

En este ejemplo desarrollaremos el lado derecho de la ecuación (3.48) en detalle. En el caso general, estas funciones se obtienen utilizando distintos resultados referidos a la suma, producto, composición, etc. de series de potencias convergentes (ver [52]). En las ecuaciones estudiadas en el resto de los capítulos sólo indicaremos parte del detalle de estos cálculos en caso de ser necesario.

La ecuación normalizada, suponiendo que existe una solución periódica con amplitud a y frecuencia ω de la ecuación (3.56), resulta

$$\omega^2 x''(t) + \epsilon \omega (a^2 x^2(t) - 1)x'(t) + x(t) = 0. \quad (3.57)$$

Las condiciones para fijar la fase de la solución son: $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$.

Aplicando el HAM desarrollado anteriormente consideramos la familia de operadores

$$\mathcal{H}_q[\phi, \Omega, A] = (1 - q) \mathcal{L}[\phi - x_0] - q h \mathcal{N}_q[\phi, \Omega, A], \quad (3.58)$$

donde $h \neq 0$ es el parámetro de control de convergencia, $x_0(t) = \cos t$ es la aproximación inicial (que verifica $x_0(0) = 1$ y $x'_0(0) = 0$), \mathcal{L} es el operador diferencial lineal (3.39) y

$$\mathcal{N}_q[\phi, \Omega, A] = \Omega^2(q) \frac{\partial^2 \phi(t, q)}{\partial t^2} + \epsilon \Omega(q) (A^2(q) \phi^2(t, q) - 1) \frac{\partial \phi(t, q)}{\partial t} + \phi(t, q), \quad (3.59)$$

es el operador no lineal definido a partir de la ecuación normalizada.

Buscamos funciones ϕ , Ω y A , analíticas para $q \in [0, 1]$ tales que:

- i. $\mathcal{H}_q[\phi, \Omega, A] = 0$ para $q \in [0, 1]$,
- ii. $\phi(0, q) = 1$, $\left. \frac{\partial \phi(t, q)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$, para todo $q \in [0, 1]$.

Si estas funciones existen, considerando $q = 0$ y $q = 1$, obtenemos

$$\mathcal{H}_0[\phi, \Omega, A] = \mathcal{L}[\phi - x_0] = 0, \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_1[\phi, \Omega, A] = -h \mathcal{N}_1[\phi, \Omega, A] = 0, \quad (3.60)$$

respectivamente. De la primera ecuación, por la definición del operador \mathcal{L} resulta $\phi(t, 0) = x_0(t)$. Por otro lado, a partir de la segunda ecuación tenemos que $\phi(t, 1)$ corresponde a la solución buscada, siendo $\Omega(1)$ la frecuencia y $A(1)$ la amplitud de la misma.

Si las funciones ϕ , Ω y A son analíticas para $q \in [0, 1]$, existirán los siguientes desarrollos

$$\phi(t, q) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t) q^k, \quad \Omega(q) = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k q^k, \quad A(q) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k q^k. \quad (3.61)$$

El término k -ésimo en la serie de ϕ , para $k \geq 1$ se determina resolviendo

$$\mathcal{L}[x_k - x_{k-1} + \delta_{1k} x_0] = \mathcal{R}_k[\phi, \Omega, A], \quad (3.62)$$

con las condiciones iniciales $x_k(0) = 0$, $x'_k(0) = 0$.

Calcularemos a continuación el lado derecho de la ecuación anterior utilizando las series en (3.61). Suponiendo que la serie de ϕ puede derivarse dos veces respecto a t , por propiedades de la suma y el producto de series convergentes obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_q[\phi, \Omega, A] = & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n x''_{n-j}(t) \sum_{i=0}^j \omega_i \omega_{j-i} \right) q^n + \\ & \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^{n-j} \omega_i x'_{n-j-i}(t) \sum_{m=0}^j \left(\sum_{p=0}^m a_p a_{m-p} \right) \left(\sum_{q=0}^{j-m} x_s(t) x_{j-m-s}(t) \right) \right) \right) q^n - \\ & \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \omega_{n-j} x'_j q^n + \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) q^n. \quad (3.63) \end{aligned}$$

Derivando la ecuación anterior $k - 1$ veces respecto de q y de acuerdo a la definición (3.49) resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k[\phi, \Omega, A] = & h \left(\sum_{j=0}^{k-1} \left(x''_{k-1-j}(t) \sum_{i=0}^j \omega_i \omega_{j-i} + \right. \right. \\ & \left. \left. \epsilon \left(\left(\sum_{i=0}^{k-1-j} \omega_i x'_{k-1-j-i}(t) \right) \sum_{m=0}^j \left(\sum_{p=0}^m a_p a_{m-p} \right) \left(\sum_{q=0}^{j-m} x_s(t) x_{j-m-s}(t) \right) \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. \epsilon \omega_{k-1-j} x'_j \right) + x_{k-1}(t) \right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Imponiendo las condiciones (3.52) se obtienen los términos ω_k y a_k en las series de Ω y A . Considerando $k = 1$, ya que $h \neq 0$, ω_0 y a_0 deben ser solución de

$$\begin{aligned} 1 - \omega_0^2 &= 0, \\ 1 - \frac{a_0^2}{4} &= 0, \end{aligned} \quad (3.65)$$

por lo tanto, los valores iniciales resultan $\omega_0 = 1$ y $a_0 = 2$. Luego, la ecuación (3.62) para $k = 1$, resulta

$$x''_1(t) + x_1(t) = -h\epsilon \sin(3t), \quad (3.66)$$

con $x_1(0) = 0$, $x'_1(0) = 0$, resolviendo obtenemos

$$x_1(t) = \frac{h\epsilon}{8} (-3 \sin t + \sin(3t)). \quad (3.67)$$

Con los términos ya calculados, considerando (3.62) con $k = 2$, hallamos las condiciones

$$\begin{aligned} h\epsilon^2 - 16\omega_1 &= 0, \\ a_1\epsilon &= 0, \end{aligned} \quad (3.68)$$

de donde se sigue que $\omega_1 = h\epsilon^2/16$ y $a_1 = 0$. Luego, resolviendo la ecuación diferencial correspondiente con condiciones iniciales $x_2(0) = 0$, $x'_2(0) = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} x_2(t) = & -\frac{13}{192} h^2 \epsilon^2 \cos t + \frac{1}{384} (36h^2 \epsilon^2 \cos(3t) - 10h^2 \epsilon^2 \cos(5t)) + \\ & \frac{1}{384} h\epsilon (- (9h\epsilon^2 + 144h + 144) \sin t + (3h\epsilon^2 + 48h + 48) \sin(3t)). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Continuando los cálculos de esta manera, podemos obtener expresiones aproximadas hasta un orden deseado de la solución periódica, la frecuencia y la amplitud.

La aproximación de orden 2 de la solución de la ecuación (3.56) resulta

$$\begin{aligned} x_{ap}(t) = & \left(2 - \frac{26}{192} h^2 \epsilon^2 \right) \cos(\omega_{ap} t) + \frac{1}{192} h^2 \epsilon^2 (36 \cos(3\omega_{ap} t) - 10 \cos(5\omega_{ap} t)) + \\ & \frac{1}{192} h\epsilon (- (9h\epsilon^2 + 144h + 288) \sin(\omega_{ap} t) + (3h\epsilon^2 + 48h + 96) \sin(3\omega_{ap} t)), \end{aligned} \quad (3.70)$$

siendo $\omega_{ap} = 1 + h\epsilon^2/16$. En la figura 3.3 comparamos la aproximación anterior considerando $h = -1$, con la aproximación obtenida utilizando el método de Poincaré-Lindstedt hasta orden 2 dada por

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{96} (192 \cos \omega t + \epsilon(72 \sin \omega t - 24 \sin 3\omega t) + \\ & \epsilon^2(13 \cos \omega t - 18 \cos 3\omega t + 5 \cos 5\omega t)), \end{aligned} \quad (3.71)$$

siendo $\omega = 1 - \epsilon^2/16$. Podemos observar la gran coincidencia de ambas soluciones para $\epsilon = 0,6$.

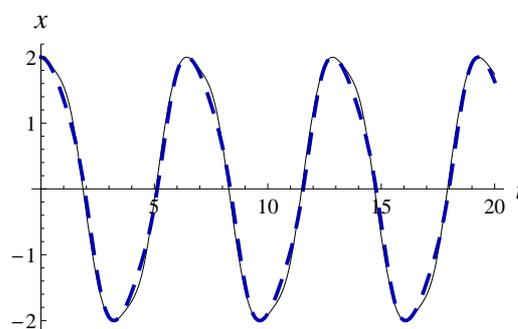


Figura 3.3: Aproximaciones de la solución periódica para $\epsilon = 0,6$: (—) HAM orden 2, (—) Poincaré-Lindstedt orden 2.

3.4. Bifurcación de Hopf con HAM

Veremos en los siguientes capítulos que el HAM como fue desarrollado antes permite hallar soluciones periódicas de EDRs y EDOs, ya sea generadas por una bifurcación de Hopf o por otros fenómenos, locales o globales del sistema. También mostraremos que es posible hallar múltiples soluciones de la ecuación normalizada $N[x, \omega, a] = 0$, considerando distintos valores iniciales no nulos ω_0, a_0 , que sean soluciones del sistema

$$\begin{aligned} c_{1,1}(\omega_0, a_0) &= 0, \\ d_{1,1}(\omega_0, a_0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.72)$$

donde $c_{1,1}$ y $d_{1,1}$ se definen en (3.52). En general, el sistema no lineal anterior es difícil de resolver y sólo en algunos casos es posible despejar las incógnitas en función de los parámetros. El análisis gráfico de este sistema es una herramienta que puede ayudar a determinar si existen soluciones y/o el cambio en la cantidad de soluciones variando parámetros.

A continuación analizamos cómo, a partir del análisis de un sistema de la forma (3.72), es posible obtener condiciones necesarias para la existencia de bifurcaciones de Hopf. Para deducir estas condiciones consideremos una ecuación con retardo de la forma

$$y^{(n)}(s) = F(y^{(n-1)}(s), \dots, y(s), y(s - \tau), \mu), \quad (3.73)$$

en la que se encuentra presente un parámetro $\mu \in \mathbb{R}$. Supongamos que la ecuación tiene un equilibrio en $\hat{y} = 0$, nos interesan las soluciones periódicas alrededor de este equilibrio (de ser necesario se realiza previamente una traslación en la ecuación para que el equilibrio sea el trivial).

El desarrollo del HAM realizado en la sección anterior para la búsqueda de soluciones periódicas es similar con la única diferencia de que el parámetro μ estará presente en cada cálculo. Consideremos la aproximación inicial $x_0(t) = \cos t$. La ecuación normalizada $N[\cos t, \omega_0, a_0, \mu] = 0$, se verifica trivialmente al considerar $a_0 = 0$ debido a que $\hat{x} = 0$ es un equilibrio de la misma. Luego, para valores

pequeños de a_0 podemos escribir

$$N[\cos t, \omega_0, a_0, \mu] = a_0 \tilde{N}[\omega_0, a_0, \mu], \quad (3.74)$$

siendo

$$\tilde{N}[\omega_0, a_0, \mu] = \left. \frac{\partial N[\cos t, \omega_0, a_0, \mu]}{\partial a_0} \right|_{a_0=0} + O(a_0). \quad (3.75)$$

Utilizando la nueva función \tilde{N} definimos

$$\begin{aligned} c(\omega_0, a_0, \mu) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{N}[\omega_0, a_0, \mu] \cos t \, dt, \\ d(\omega_0, a_0, \mu) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{N}[\omega_0, a_0, \mu] \sin t \, dt. \end{aligned} \quad (3.76)$$

El siguiente lema nos permite relacionar las raíces características imaginarias puras asociadas al equilibrio trivial con las soluciones de un sistema construido con las funciones definidas antes.

Lema 16. *Supongamos que para un valor crítico del parámetro $\mu = \mu_c$, la ecuación (3.73) tiene una raíz característica de la forma $i\omega_c$ con $\omega_c > 0$, asociada al equilibrio trivial. Entonces, el sistema de dos ecuaciones*

$$\begin{aligned} c(\omega_0, 0, \mu) &= 0, \\ d(\omega_0, 0, \mu) &= 0, \end{aligned} \quad (3.77)$$

se verifica cuando $\omega_0 = \omega_c$ y $\mu = \mu_c$.

Demostración. La ecuación característica del sistema (3.73) para el equilibrio trivial resulta

$$\lambda^n - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^{n-k} F_k(\mu) - e^{-\lambda\tau} F_n(\mu) = 0, \quad (3.78)$$

donde

$$F_k(\mu) = \left. \frac{\partial F(u_1, u_2, \dots, u_n, \mu)}{\partial u_k} \right|_{(u_1, \dots, u_n, \mu) = (0, \dots, 0, \mu)}, \quad (3.79)$$

para $1 \leq k \leq n$.

Supongamos que n es par. Como el operador no lineal N representa a la ecuación normalizada, tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{N}[\omega_0, 0, \mu] &= \omega_0^n (-1)^{\frac{n}{2}} \cos t - \\ &\quad \left. \frac{\partial F(\omega_0^{n-1} a_0 (-1)^{\frac{n}{2}} \sin t, \dots, \omega_0 a_0 \cos t, \omega_0 a_0 \cos(t - \omega_0 \tau), \mu)}{\partial a_0} \right|_{a_0=0}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Luego, de acuerdo a las definiciones (3.76), obtenemos

$$\begin{aligned} c(\omega_0, 0, \mu) &= \omega_0^n (-1)^{\frac{n}{2}} - \omega_0^{n-2} (-1)^{\frac{n-2}{2}} F_2(\mu) + \dots + \omega_0 \cos \omega_0 \tau F_n(\mu), \\ d(\omega_0, 0, \mu) &= \omega_0^{n-1} (-1)^{\frac{n}{2}} F_1(\mu) + \omega_0^{n-3} (-1)^{\frac{n-2}{2}} F_3(\mu) + \dots + \omega_0 \sin \omega_0 \tau F_n(\mu). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Las expresiones anteriores coinciden con la parte real e imaginaria de

$$(i\omega_0)^n - \sum_{k=1}^{n-1} (i\omega_0)^{n-k} F_1(\mu) - e^{-i\omega_0\tau} F_n(\mu), \quad (3.82)$$

respectivamente. Esta última a su vez es el lado izquierdo de la ecuación (3.78) cuando consideramos raíces de la forma $\lambda = i\omega_0$. Por hipótesis, existe una raíz característica $\lambda = i\omega_c$, cuando $\mu = \mu_c$, y así, el sistema (3.77) se verifica cuando $\omega_0 = \omega_c$ y $\mu = \mu_c$. El caso n impar se analiza de manera similar, realizando los cambios correspondientes en las ecuaciones (3.80) y (3.81). \square

El lema anterior brinda condiciones necesarias para que la ecuación (3.73) presente una bifurcación de Hopf, expresadas desde el punto de vista del HAM. De la misma manera, la condición necesaria para la existencia de bifurcación de Hopf doble tiene su correspondiente en este contexto: si existen dos raíces características imaginarias puras $i\omega_{c1}$ e $i\omega_{c2}$ para un valor crítico del parámetro $\mu = \mu_c$, entonces el sistema (3.77) con $\mu = \mu_c$ se verifica en dos valores positivos distintos ω_{c1} y ω_{c2} .

Para valores del parámetro cercanos al valor crítico, utilizando el sistema no lineal

$$\begin{aligned} c(\omega_0, a_0, \mu) &= 0, \\ d(\omega_0, a_0, \mu) &= 0, \end{aligned} \quad (3.83)$$

se hallarán valores iniciales no nulos a partir de los cuales podremos construir desarrollos HAM de soluciones periódicas de (3.73). Además, aplicando el teorema de la función implícita en el sistema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 17. *Sea ω_c, μ_c una solución del sistema (3.77). Si*

$$\delta = \begin{vmatrix} c_{\omega_0} & c_{\mu} \\ d_{\omega_0} & d_{\mu} \end{vmatrix}_{(\omega_c, 0, \mu_c)} \neq 0, \quad (3.84)$$

y existe $n \geq 1$ tal que n es el primer entero en el cual se verifica

$$\epsilon = \left(c_{\omega_0} \frac{\partial^n d}{\partial a_0^n} - d_{\omega_0} \frac{\partial^n c}{\partial a_0^n} \right) \Big|_{(\omega_c, 0, \mu_c)} \neq 0. \quad (3.85)$$

Entonces, para $a_0 \neq 0$ suficientemente pequeño, existen soluciones $\mu = \mu(a_0)$, $\omega_0 = \omega_0(a_0)$ del sistema (3.83). Además, se tiene

$$\mu = \mu_c - \frac{\epsilon}{\delta} a_0^n + O(a_0^{n+1}). \quad (3.86)$$

De acuerdo a la proposición anterior, para valores pequeños de a_0 en entornos de un posible punto de Hopf, el signo de ϵ/δ determinará si existen condiciones iniciales HAM para valores del parámetro μ mayores o menores que μ_c .

En general observamos que si los ciclos tienen amplitud pequeña e intervienen pocos armónicos, los términos x_k en el desarrollo HAM se vuelven rápidamente muy cercanos a cero con la norma del supremo, para ciertos intervalos del parámetro de convergencia h . Así, las soluciones HAM se corresponden con las soluciones de amplitud pequeña que surgen de la bifurcación de Hopf. Aunque no existe hasta el momento una demostración general de este hecho, la observación del mismo permite, utilizando la proposición anterior, analizar el comportamiento de las soluciones periódicas al variar el parámetro, lo que luego puede ser verificado calculando las aproximaciones analíticas con HAM.

Péndulo simple, más soluciones periódicas con HAM

4.1. Introducción

En esta sección utilizamos el HAM para hallar las soluciones periódicas de un péndulo simple. El péndulo simple consiste en una masa puntual, sujeta a un vínculo que permite el movimiento en un plano vertical, a una distancia fija de un punto y sometida a la atracción de la gravedad. En ausencia de rozamiento es un sistema conservativo.

Un sistema tan simple presenta, sin embargo, características dinámicas que lo vuelven muy interesante. Por un lado, es un sistema no lineal que puede integrarse explícitamente, pero solamente después de recurrir a la teoría de funciones elípticas de Jacobi [3, 14]. Por otro lado, su descripción como sistema dinámico nos muestra un espacio de fases con la estructura de variedad diferenciable con topología no trivial, es un cilindro. Estas características lo vuelven un ejemplo obligado en casi cualquier libro de mecánica, mecánica geométrica o sistemas dinámicos.

El sistema considerado aquí es especialmente interesante desde el punto de vista de su resolución con HAM. Esto es así por dos razones: la primera es que al ser el espacio de fases una variedad diferenciable resulta útil para ejemplificar cómo hacer un cambio de coordenadas de tal manera que las órbitas que representan rotaciones puedan ser íntegramente calculadas en el interior de una única carta, como ocurre habitualmente con las oscilaciones usando las coordenadas usuales. La segunda razón es que la presencia de la función $\text{sen}(\theta)$ en la ecuación da lugar a la aparición de un problema algebraico referido a las condiciones de arranque del método. Hemos resuelto este problema recurriendo al desarrollo de Jacobi–Anger.

Además de obtener aproximaciones analíticas de las soluciones periódicas, el método nos permite obtener expresiones para la frecuencia de las mismas. Se observa que el período correspondiente tiene una buena coincidencia con el período exacto, para un rango de velocidades iniciales muy amplio. De ser necesario, esta aproximación puede mejorarse aumentando la cantidad de términos calculados. De esta manera, mostramos que el HAM resulta ser un método adecuado y efectivo para realizar un estudio exhaustivo de un ejemplo pedagógico.

4.2. Péndulo simple

Consideremos la ecuación de un péndulo simple con distancia al pivote L

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0, \quad (4.1)$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Definiendo $\bar{\omega} = \sqrt{g/L}$ y cambiando la variable tiempo por $\bar{\omega}t$, obtenemos la ecuación adimensional

$$\ddot{\theta} + \sin \theta = 0. \quad (4.2)$$

El péndulo simple presenta dos equilibrios. El equilibrio trivial alrededor del cual se desarrolla un centro no lineal (ya que es un centro para el sistema linealizado y el sistema es conservativo [34]). Las órbitas en un entorno de este equilibrio son ciclos homotópicos con la identidad en el grupo fundamental del cilindro, estos movimientos suelen denominarse vibraciones. El otro equilibrio es inestable y corresponde al péndulo invertido. En el sistema existen además dos órbitas homóclinas que unen el equilibrio inestable con sí mismo. Separadas por estas últimas se encuentran las llamadas rotaciones, que son órbitas no homotópicas con la identidad. En la figura 4.1 podemos ver un retrato de fases completo representando el espacio de fases de dos maneras distintas.

Debido a que la energía:

$$e = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + 1 - \cos \theta \quad (4.3)$$

es constante, la ecuación puede resolverse fácilmente por integración directa (ver por ejemplo [46], [14] o [4] para su versión cuántica). Como ya mencionamos existen tres tipos de soluciones dependiendo del valor v_0 de la velocidad para $\theta = 0$:

1. Si $|v_0| < 2$ el movimiento es oscilatorio. Aquí el ángulo tiene la siguiente expresión en función del tiempo

$$\theta(t) = 2 \arcsen(\lambda \operatorname{sn}(t + \phi; \lambda)), \quad (4.4)$$

siendo $\lambda = v_0/2$ y $\phi = K(\lambda)$. K es la integral elíptica completa de primera especie

$$K(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - \lambda^2 v^2)}}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (4.5)$$

y $\operatorname{sn}(u; \lambda)$ es una función elíptica de Jacobi. El período de este movimiento es

$$T = 4K\left(\frac{v_0}{2}\right). \quad (4.6)$$

2. Si $|v_0| > 2$ el movimiento es una rotación. La expresión correspondiente del ángulo es

$$\theta(t) = 2 \arcsen(\operatorname{sn}(t\lambda; 1/\lambda)). \quad (4.7)$$

El signo de v_0 determina la dirección de rotación, si $v_0 > 0$ el movimiento es antihorario, mientras que si $v_0 < 0$ es horario. El período en este caso resulta

$$T = \frac{4}{v_0} K\left(\frac{2}{v_0}\right). \quad (4.8)$$

3. Si $|v_0| = 2$ se tiene una órbita homóclina que une el equilibrio inestable con sí mismo. En este caso el movimiento no es periódico (puede considerarse como el límite de un ciclo cuando el período tiende a infinito), la expresión es la siguiente

$$\theta(t) = 4 \arctan(\tanh(t/2)). \quad (4.9)$$

En la figura 4.1 mostramos varias soluciones oscilatorias y rotatorias, junto con las órbitas homóclinas del equilibrio inestable $(\pi, 0)$. A la izquierda vemos la representación clásica de las distintas soluciones en el espacio $(\theta, \dot{\theta})$ y a la derecha las representamos sobre el cilindro. Observamos claramente que, considerando esta variedad, las únicas soluciones no periódicas son las órbitas homóclinas, y que éstas separan los dos tipos de soluciones restantes en el espacio de fases. En lo que sigue veremos por qué la segunda representación es más apropiada para el estudio de soluciones periódicas en el péndulo utilizando el HAM.

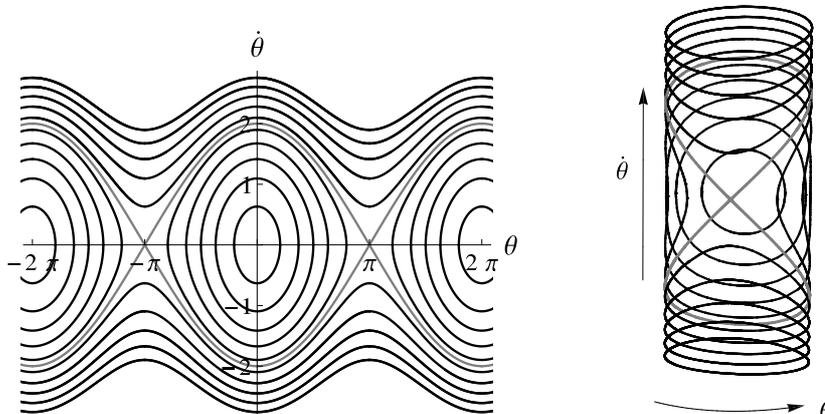


Figura 4.1: Soluciones del péndulo simple en el espacio de fases representado en el plano (izquierda) y en el cilindro (derecha).

4.3. Vibraciones

El péndulo simple es usualmente estudiado en un entorno del equilibrio trivial utilizando su linealización. Esta aproximación resulta ser un oscilador armónico, podemos calcular sus soluciones fácilmente, pero las mismas resultan buenas aproximaciones de las exactas sólo para oscilaciones de amplitud cercana a cero. A continuación aplicamos el HAM como fue desarrollado en el capítulo anterior para hallar aproximaciones válidas en un rango de amplitudes mucho más amplio.

Consideremos la ecuación del péndulo simple (4.2), supongamos que existe una solución periódica con frecuencia ω y amplitud a . Reescalando las variables t y θ (pero manteniendo sus nombres para simplificar la notación) obtenemos

$$\omega^2 a \ddot{\theta}(t) + \text{sen}(a\theta(t)) = 0. \quad (4.10)$$

La solución θ_P correspondiente tendrá frecuencia y amplitud 1, e imponemos las siguientes condiciones de fase:

$$\theta(0) = 1 \quad \text{y} \quad \dot{\theta}(0) = 0. \quad (4.11)$$

A partir de la ecuación (4.10) definimos el operador no lineal

$$\mathcal{N}_q[\phi, \Omega, A] = N[\phi(t, q), \Omega(q), A(q)] = \Omega(q)^2 A(q) \frac{\partial^2 \phi(t, q)}{\partial t^2} + \text{sen}(A(q)\phi(t, q)). \quad (4.12)$$

Utilizando el HAM descrito en el capítulo anterior tomamos el operador lineal

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \phi. \quad (4.13)$$

y consideramos la aproximación inicial $\theta_0 = \cos t$, que verifica las condiciones iniciales (4.11). Como vimos en la sección 3.3 buscamos funciones analíticas en $q \in [0, 1]$ que verifiquen $\mathcal{H}_q[\phi, \Omega, A] = 0$ en ese intervalo. Reemplazando en $q = 0$ tenemos $\mathcal{H}_0[\phi] = 0$, de donde resulta $\phi(t, 0) = \theta_0(t)$. Por otro lado, si fijamos en la homotopía el valor $q = 1$, resulta que la solución periódica de (4.10) es

$$\theta_P(t) = \phi(t, 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \theta_k(t), \quad (4.14)$$

y tenemos

$$\omega = \Omega(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k, \quad a = A(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k. \quad (4.15)$$

La ecuación para determinar cada término θ_k para $k \geq 1$ es

$$\mathcal{L}[\theta_k - \theta_{k-1} + \delta_{1k}\theta_0] = \frac{h}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} \mathcal{N}_q[\phi, \Omega, A]}{\partial q^{k-1}} \Big|_{q=0}, \quad (4.16)$$

con condiciones iniciales $\theta_k(0) = \theta'_k(0) = 0$.

De acuerdo a los operadores definidos antes, la ecuación diferencial anterior para el término θ_1 resulta

$$\ddot{\theta}_1(t) + \theta_1(t) = h(-\omega_0^2 a_0 \cos t + \text{sen}(a_0 \cos t)), \quad (4.17)$$

con $\theta_1(0) = \dot{\theta}_1(0) = 0$. Podemos resolver esta ecuación por el método de variación de parámetros, de donde obtenemos

$$\theta_1(t) = \frac{h}{a_0} \cos t (\cos a_0 - \cos(a_0 \cos t)) - h \text{sen } t \left(\frac{1}{2} \omega_0^2 a_0 t - \int_0^t \cos s \text{sen}(a_0 \cos s) ds \right). \quad (4.18)$$

Se observa claramente que la función θ_1 así definida no es necesariamente periódica. Podemos cancelar los términos no periódicos fijando valores adecuados de ω_0 y a_0 . Más precisamente, como mencionamos en el capítulo anterior, si anulamos los coeficientes de $\cos t$ y $\text{sen } t$ en el lado derecho de (4.17) obtendremos una función θ_1 periódica.

Consideremos los desarrollos de Jacobi–Anger

$$\text{sen}(z \cos t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(z) \cos(2n+1)t, \quad (4.19)$$

$$\cos(z \cos t) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(z) \cos 2nt, \quad (4.20)$$

donde J_n es la función de Bessel de primera clase de orden n . Podemos reescribir la ecuación (4.17) en la forma

$$\ddot{\theta}_1(t) + \theta_1(t) = h \left(-\omega_0^2 a_0 \cos t + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n J_{2n+1}(a_0) \cos((2n+1)t) \right). \quad (4.21)$$

Luego, el término θ_1 será periódico si el coeficiente de $\cos t$ en el lado derecho de la ecuación anterior se anula, esto es, si $-\omega_0^2 a_0 + 2J_1(a_0) = 0$, lo que implica que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2J_1(a_0)}{a_0}}. \quad (4.22)$$

Fijando un valor de a_0 la ecuación anterior permite obtener un valor de ω_0 , y calcular el término periódico θ_1 . Obtenemos

$$\theta_1(t) = 2h \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{J_{2n+1}(a_0)}{1 - (2n+1)^2} (\cos((2n+1)t) - \cos t). \quad (4.23)$$

Ahora, estamos en condiciones de construir la ecuación a partir de la cual calcularemos el término $\theta_2(t)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_2(t) + \theta_2(t) &= \ddot{\theta}_1(t) + \theta_1(t) + \\ &h \left(a_0 \omega_0^2 \ddot{\theta}_1(t) - (\omega_0^2 a_1 + 2\omega_0 \omega_1 a_0) \cos t + (a_0 \theta_1(t) + a_1 \cos t) \cos(a_0 \cos t) \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Reemplazamos en la ecuación anterior ω_0 como fue definido en (4.22) y θ_1 con la expresión ya calculada. Usando nuevamente la expansión de Jacobi–Anger adecuada, podemos calcular el término θ_2 resolviendo la ecuación con las condiciones iniciales $\theta_2(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$. Al igual que en el caso anterior, θ_2 será periódico si el coeficiente de $\cos t$ se anula. La condición que resulta relaciona linealmente ω_1 con a_1

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{-a_1(\omega_0^2 + J_2 - J_0)}{2\omega_0 a_0} + \\ &\frac{h}{\omega_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{2n+1}}{1 - (2n+1)^2} (-J_{2n+2} + J_{2n} + (-1)^n (\omega_0^2 + J_2 - J_0)), \end{aligned} \quad (4.25)$$

con ω_0 definido en (4.22) y cada función de Bessel J_i que interviene es evaluada en a_0 . Fijando un valor para a_1 podemos obtener el correspondiente valor de ω_1 tal que θ_2 resulte periódico.

A esta altura los cálculos a mano se vuelven demasiado extensos, los mismos pueden programarse fácilmente utilizando programas de cálculo simbólico, como Mathematica. Sin embargo, dependiendo del sistema, y como sucede en particular en este caso, el costo computacional es alto. Realizamos los cálculos para valores de $k \geq 2$ con Mathematica considerando sólo algunos términos de las expansiones de Jacobi–Anger. En particular, utilizamos las siguientes aproximaciones finitas

$$\begin{aligned} \sin(a_0 \cos t) &= 2(J_1(a_0) \cos t - J_3(a_0) \cos(3t)), \\ \cos(a_0 \cos t) &= J_0(a_0) + 2(-J_2(a_0) \cos(2t) + J_4(a_0) \cos(4t)). \end{aligned} \quad (4.26)$$

El error cuadrado medio (en un período) para estas aproximaciones es menor que 10^{-2} para todo $a_0 < 2,7$.

Al realizar los cálculos para los demás valores de k , observamos que la condición adicional para asegurar periodicidad es una única ecuación (correspondiente a anular el coeficiente de $\cos t$ en el lado derecho de (4.16)), que brindará la relación que deben verificar los valores ω_{k-1} y a_{k-1} . Por lo tanto, como en el caso $k = 1$, fijando el valor de a_{k-1} podemos obtener ω_{k-1} y θ_k , y continuar el proceso hasta el orden deseado.

Pero, ¿cómo fijamos los valores a_k para $k \geq 0$? Como ya mencionamos el péndulo simple tiene un centro no lineal en el equilibrio trivial. Más aún, existe una solución periódica de (4.2) para cada condición inicial $\theta(0) \in (0, \pi)$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Luego, si tomamos $a_0 \in (0, \pi)$ y $a_k = 0$ para $k \geq 1$, el HAM permite calcular la solución θ_P de (4.10) y la frecuencia ω correspondientes a la amplitud $a = a_0$.

4.3.1. Resultados numéricos

Para una oscilación de amplitud a la ecuación de la energía (4.3) permite calcular la correspondiente velocidad v_0 en $\theta = 0$. Luego, fijando $a = \arccos(1 - v_0^2/2)$ y utilizando el proceso anterior, podemos obtener las expresiones de la solución y la frecuencia en función de la velocidad inicial $0 < v_0 < 2$.

Como un primer ejemplo tomamos $v_0 = 1,95$ y calculamos la aproximación de la solución correspondiente hasta orden 15. En la figura 4.2 a) graficamos los polinomios en función de h para la frecuencia ω , y los valores $\theta_P(0,1)$ y $\ddot{\theta}_P(0,1)$ (como mencionamos en el capítulo 2, podemos utilizar la función y sus derivadas para el análisis de las h -curvas). Las expresiones de estos polinomios son

$$\begin{aligned} \omega &= 0,270673h^{15} + 3,12359h^{14} + 16,9264h^{13} + 57,1904h^{12} + 134,906h^{11} + \\ &235,701h^{10} + 315,718h^9 + 331,011h^8 + 274,825h^7 + 181,545h^6 + 95,2529h^5 + \\ &39,3305h^4 + 12,5197h^3 + 2,94437h^2 + 0,465156h + 0,573929 \\ \theta_P(0,1) &= -0,0914114h^{16} - 1,0801h^{15} - 6,00175h^{14} - 20,828h^{13} - 50,5537h^{12} - \\ &91,0661h^{11} - 126,052h^{10} - 136,917h^9 - 118,12h^8 - 81,3688h^7 - 44,7303h^6 - \\ &19,4903h^5 - 6,63502h^4 - 1,71943h^3 - 0,323528h^2 - 0,0401146h + 0,995004 \\ \ddot{\theta}_P(0,1) &= 40,5402h^{16} + 469,514h^{15} + 2553,42h^{14} + 8657,97h^{13} + 20492,1h^{12} + \\ &35911,1h^{11} + 48221,1h^{10} + 50637,2h^9 + 42054,1h^8 + 27737,4h^7 + 14497,3h^6 + \\ &5950,09h^5 + 1883,72h^4 + 445,934h^3 + 74,7369h^2 + 7,96799h + 0,0998334. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Observamos que, de acuerdo a lo mencionado en el capítulo anterior, podemos elegir fácilmente un h adecuado. Por ejemplo, tomando $h = -0,8$, la solución para este valor resulta

$$\begin{aligned} \theta_P(t) &= 2,88495 \cos(0,536173t) - 0,20478 \cos(1,60852t) + \\ &0,0154932 \cos(2,68086t) - 0,00246577 \cos(3,75321t) + 0,000277749 \cos(4,82555t) - \\ &0,0000354327 \cos(5,8979t) + 5,09679 \times 10^{-6} \cos(6,97024t) - \\ &7,10179 \times 10^{-7} \cos(8,04259t) + 1,01719 \times 10^{-7} \cos(9,11494t) - \\ &1,43853 \times 10^{-8} \cos(10,1873t) + 2,00188 \times 10^{-9} \cos(11,2596t) - \\ &2,71269 \times 10^{-10} \cos(12,332t) + 3,57771 \times 10^{-11} \cos(13,4043t) - \\ &3,68269 \times 10^{-12} \cos(14,4767t) + 1,66554 \times 10^{-13} \cos(15,549t) + \\ &1,96159 \times 10^{-14} \cos(16,6214t) - 9,50801 \times 10^{-15} \cos(17,6937t). \end{aligned} \tag{4.28}$$

En la figura 4.2 b) comparamos la solución calculada junto con la exacta dada en (4.4).

Por otro lado, una ventaja que nos da el HAM es que permite calcular aproximaciones de la frecuencia ω en función de la amplitud y por lo tanto de la velocidad inicial v_0 . Así, obtenemos por ejemplo la siguiente aproximación de orden 1 :

$$\omega^{vib} = \sqrt{\frac{2J_1(a)}{a}} + \frac{h(-aJ_0(a) + 2J_1(a) + aJ_4(a))J_3(a)}{8\sqrt{2aJ_1(a)}}, \quad (4.29)$$

siendo $a = \arccos(1 - v_0^2/2)$.

Se conocen distintas aproximaciones del período (4.6) que se calculan utilizando por ejemplo el desarrollo en serie de la integral elíptica o el método de balance de armónicos (ver [9] y [77] y las referencias que señalan). En la figura 4.2 c) comparamos el período exacto (4.6) con nuestro resultado $2\pi/\omega^{vib}$, fijando $h = -0,8$. Se advierte la coincidencia con el resultado exacto para velocidades $v_0 < 1,9$, el error relativo es menor al 0,5 %.

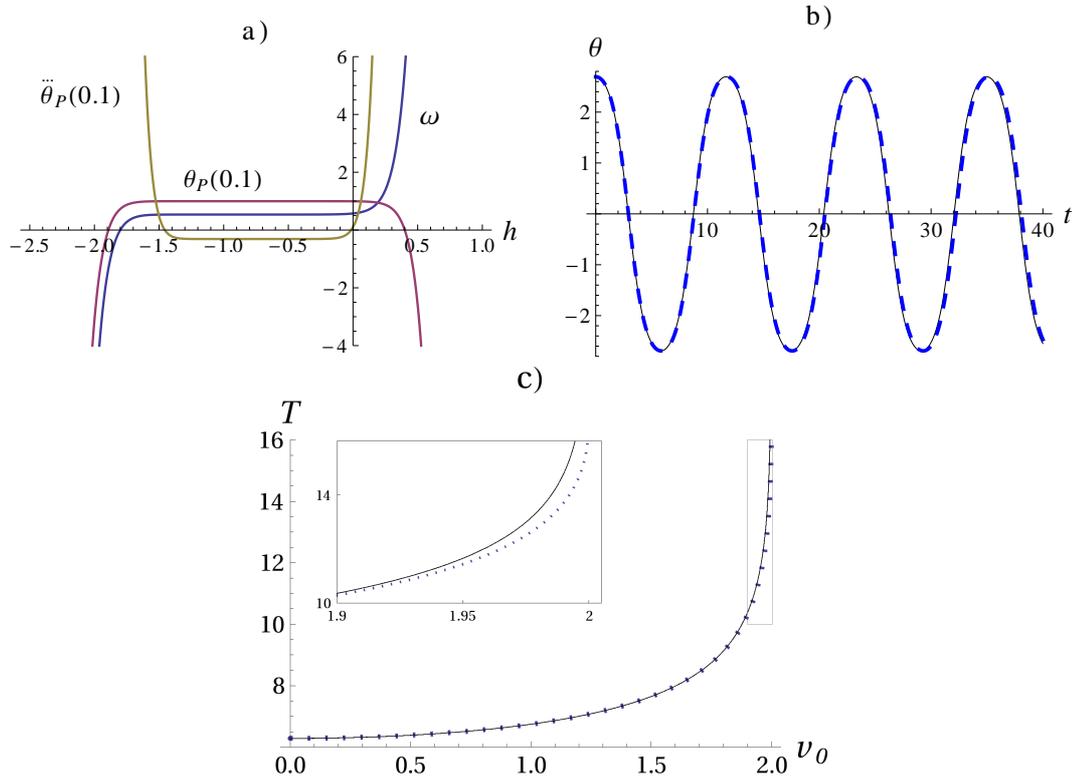


Figura 4.2: a) Polinomios en función de h para $v_0 = 1,95$. b) Solución exacta (—) y aproximada con HAM (---). c) Comparación períodos: (—) exacto dado en (4.6), (\cdots) $2\pi/\omega^{vib}$ calculado con HAM.

Según la definición dada en (3.22), calculemos el error medio cuadrático de orden 1 dado por

$$E_1(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left((\omega_0 + \omega_1)^2 a_0 (\ddot{\theta}_0(t) + \ddot{\theta}_1(t)) + \text{sen}(a_0(\theta_0(t) + \theta_1(t))) \right)^2 dt, \quad (4.30)$$

con las funciones y cantidades calculadas antes. Para valores arbitrarios de a_0 hallar el mínimo de esta función no resulta un cálculo directo ya que las integrales no son elementales. En la tabla 4.1 mostramos los errores calculados numéricamente considerando $h = -0,8$, $h = -1$ y $h = -1,2$. Consideramos varios valores de la velocidad inicial v_0 , siendo $a_0 = \arccos(1 - v_0^2/2)$. Se observa que el error es muy pequeño para velocidades $v_0 < 1,95$.

Tabla 4.1: Error E_1 para distintos valores de v_0 y h .

v_0	0.55	0.9	1.25	1.6	1.95
$h = -0,8$	$8,15504 \times 10^{-6}$	0,0000567241	0,0000959451	0,00022211	0,016231
$h = -1$	$5,38282 \times 10^{-6}$	0,0000140502	0,0000216898	0,00068958	0,0081467
$h = -1,2$	$3,18443 \times 10^{-6}$	$1,10234 \times 10^{-7}$	0,000324206	0,00354331	0,0069755

4.4. Rotaciones. Otras coordenadas

El método como fue desarrollado en la sección anterior está basado en la elección de valores de la amplitud de las vibraciones. La definición de amplitud que consideramos deja de tener sentido para las rotaciones. Además, considerando el plano como un cubrimiento del cilindro la función θ que representa una rotación no es estrictamente periódica ya que el movimiento no ocurre en una sola carta coordenada. Para poder aplicar el HAM para hallar soluciones rotatorias del péndulo en forma directa mapeamos el cilindro sobre el plano sin el origen (plano punteado). El objetivo de este cambio de coordenadas es resolver las ecuaciones para una rotación completa en el dominio de una sola carta. La relación con las coordenadas angulares es la siguiente

$$\begin{cases} u = e^{\dot{\theta}} \cos \theta, \\ v = e^{\dot{\theta}} \sen \theta. \end{cases} \quad (4.31)$$

La ecuación del péndulo en las nuevas coordenadas resulta

$$\begin{cases} \dot{u} = -uv(u^2 + v^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}v \log(u^2 + v^2), \\ \dot{v} = -v^2(u^2 + v^2)^{-1/2} + \frac{1}{2}u \log(u^2 + v^2). \end{cases} \quad (4.32)$$

En este caso, supongamos que existe una solución periódica con frecuencia ω y tal que $(u(0), v(0)) = (e^\xi, 0)$. Normalizamos el sistema anterior de manera que la nueva solución periódica (u_P, v_P) tenga frecuencia 1 y verifique $(u_P(0), v_P(0)) = (1, 0)$ (una vez más mantenemos los nombres de las variables por simplicidad), obtenemos

$$\begin{cases} \omega \dot{u} = -uv(u^2 + v^2)^{-1/2} - v\xi - \frac{1}{2}v \log(u^2 + v^2), \\ \omega \dot{v} = -v^2(u^2 + v^2)^{-1/2} + u\xi + \frac{1}{2}u \log(u^2 + v^2). \end{cases} \quad (4.33)$$

Para encontrar las soluciones periódicas del sistema anterior utilizamos el HAM descrito en la sección 3.3 del capítulo anterior adaptado al caso de sistemas de

ecuaciones. Utilizamos el operador \mathcal{L} definido por

$$\mathcal{L}[\phi] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & 1 \\ -1 & \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \phi_2 \\ -\phi_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

siendo $\phi = (\phi_1, \phi_2)$. Debido a la relación de este operador de dos dimensiones con el operador lineal utilizado en la sección 3.3, definimos fácilmente (en cierto conjunto de funciones periódicas) el operador inverso \mathcal{L}^{-1} de (4.34) utilizando el operador inverso para una dimensión ya definido. De acuerdo a las condiciones en $t = 0$ tomamos como función inicial $(u_0(t), v_0(t)) = (\cos t, \sin t)$.

A partir de (4.33) el operador no lineal resulta

$$\mathcal{N}_q[\phi, \Omega, \Xi] = N[\phi(t, q), \Omega(q), \Xi(q)] = \quad (4.35)$$

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \partial \phi_1 / \partial t + \phi_1 \phi_2 (\phi_1^2 + \phi_2^2)^{-1/2} + \phi_2 \Xi + \frac{1}{2} \phi_2 \log(\phi_1^2 + \phi_2^2) \\ \Omega \partial \phi_2 / \partial t + \phi_2^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2)^{-1/2} - \phi_1 \Xi - \frac{1}{2} \phi_1 \log(\phi_1^2 + \phi_2^2) \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Con las definiciones anteriores construimos la familia de operadores \mathcal{H}_q como en (3.2). Buscamos funciones analíticas que verifiquen $\mathcal{H}_q[\phi, \Omega, \Xi] = 0$, para $q \in [0, 1]$. Consideramos además $\phi(0, q) = (1, 0)$, para $q \in [0, 1]$. Reemplazando en la homotopía el valor $q = 0$ tenemos $\phi(t, 0) = (u_0(t), v_0(t))$. Por otro lado, si $q = 1$ la solución periódica de (4.33) será

$$\begin{pmatrix} u_P(t) \\ v_P(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(t, 1) \\ \phi_2(t, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t) \\ \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(t) \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

y además

$$\omega = \Omega(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k, \quad \xi = \Xi(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k. \quad (4.38)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales para hallar el primer término resulta

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) + v_1(t) &= h(-\omega_0 \sin t + \cos t \sin t + \xi_0 \sin t), \\ -u_1(t) + \dot{v}_1(t) &= h(\omega_0 \cos t + \sin^2 t - \xi_0 \cos t), \end{cases} \quad (4.39)$$

con condición inicial $u_1(0) = v_1(0) = 0$. Por la definición del operador inverso de \mathcal{L} , el término $(u_1(t), v_1(t))$ será periódico si los coeficientes de $\cos t$ y $\sin t$ se anulan en la siguiente expresión

$$\left. \left(\frac{\partial}{\partial t} N_1 - N_2 \right) \right|_{q=0} = 2(-\omega_0 + \xi_0) \cos(t) + \frac{1}{2}(-1 + 3 \cos(2t)). \quad (4.40)$$

Luego, este término será periódico si $\omega_0 = \xi_0$. Podemos ahora resolver el sistema (4.39) para obtener

$$\begin{cases} u_1(t) &= h(\cos(t) + \frac{1}{2}(-1 - \cos(2t))), \\ v_1(t) &= h(\sin(t) - \frac{1}{2} \sin(2t)). \end{cases} \quad (4.41)$$

Para cada $k \geq 2$, utilizando el operador inverso de \mathcal{L} , el término $(u_k(t), v_k(t))$ será periódico si los coeficientes de $\cos t$ y $\sin t$ se anulan en

$$\left. \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^{k-1} N_1}{\partial q^{k-1}} \right) - \frac{\partial^{k-1} N_2}{\partial q^{k-1}} \right) \right|_{q=0}. \quad (4.42)$$

Como en el caso anterior, uno de estos coeficientes se anula para todo k y el restante relaciona los valores ω_{k-1} y ξ_{k-1} . Es conveniente fijar el valor $\xi_0 = \dot{\theta}(0)$, y $\xi_k = 0$ si $k \geq 1$. Fijados los valores de ξ_{k-1} calculamos los términos ω_{k-1} y (u_k, v_k) . Tenemos así el desarrollo de la solución (u_P, v_P) y la frecuencia ω correspondientes a la condición inicial $(e^\xi, 0)$ hasta un orden deseado.

De acuerdo a lo anterior y si consideramos $\xi_0 > 2$, en las coordenadas originales la solución hallada corresponde a la solución rotatoria con velocidad $\dot{\theta}(0) = \xi > 2$ para $\theta(0) = 0$. Dada la simetría de las soluciones rotatorias no es necesario realizar cálculos para el caso $v_0 < -2$. Sin embargo, su consideración arroja algunas observaciones interesantes.

Si fijamos un valor $\dot{\theta}(0) < -2$, la frecuencia ω que obtenemos es negativa. Esto se debe a que el sentido de rotación es distinto. En su representación en el plano luego del cambio de coordenadas estas soluciones tienen sentido horario, mientras que las correspondientes a $\dot{\theta}(0) > 2$ tienen el sentido contrario. Para evitar el signo negativo de la frecuencia, el nuevo sentido de rotación puede traducirse en un cambio en la condición inicial y el operador lineal utilizados. En este caso es más adecuado considerar la condición inicial $(u_0(t), v_0(t)) = (\cos t, -\sin t)$, y el operador lineal traspuesto de \mathcal{L} en (4.34).

4.4.1. Resultados numéricos

Dado un valor $v_0 > 2$ podemos calcular el movimiento rotatorio correspondiente. Como en el caso anterior, una vez realizados los cálculos hasta el orden deseado observamos los polinomios en función del parámetro h y elegimos un valor adecuado del mismo. En la figura 4.3 a) comparamos la solución exacta (4.7) junto con la aproximada usando el HAM hasta orden 10 para $v_0 = 2,5$ y $v_0 = 3$. Mostramos las soluciones tanto en el espacio (u, v) como en el cilindro.

Fijando $h = -0,3$ en el primero de los valores v_0 mencionados la expresión de la solución resulta

$$\begin{aligned}
u_P(t) &= 1,00598 + 7,61297 \cos(1,99018t) + 2,83201 \cos(3,98036t) + \\
&0,613502 \cos(5,97053t) + 0,10334 \cos(7,96071t) + 0,0133044 \cos(9,95089t) + \\
&0,00129487 \cos(11,9411t) + 0,0000891894 \cos(13,9312t) + \\
&4,33837 \times 10^{-6} \cos(15,9214t) + 1,163544 \times 10^{-7} \cos(17,9116t) + \\
&4,043190 \times 10^{-9} \cos(19,9018t) - 1,267310 \times 10^{-10} \cos(21,892t) \\
v_P(t) &= 7,61297 \sin(1,99018t) + 2,79792 \sin(3,98036t) + 0,610272 \sin(5,97053t) + \\
&0,103039 \sin(7,96071t) + 0,0132836 \sin(9,95089t) + 0,00129386 \sin(11,9411t) + \\
&0,0000891479 \sin(13,9312t) + 4,338662 \times 10^{-6} \sin(15,9214t) + \\
&1,162647 \times 10^{-7} \sin(17,9116t) + 4,055239 \times 10^{-9} \sin(19,9018t) - \\
&1,267310 \times 10^{-10} \sin(21,892t).
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Mientras que para el caso $v_0 = 3$ con $h = -0,2$ tenemos

$$\begin{aligned}
u_P(t) &= 1,70325 + 14,0746 \cos(2,61725t) + 3,68573 \cos(5,2345t) + \\
&0,551584 \cos(7,85176t) + 0,0644068 \cos(10,469t) + 0,00556285 \cos(13,0863t) + \\
&0,000358114 \cos(15,7035t) + 0,0000152767 \cos(18,3208t) + \\
&5,073228 \times 10^{-7} \cos(20,938t) + 4,111218 \times 10^{-9} \cos(23,5553t) + \\
&4,416404 \times 10^{-10} \cos(26,1725t)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

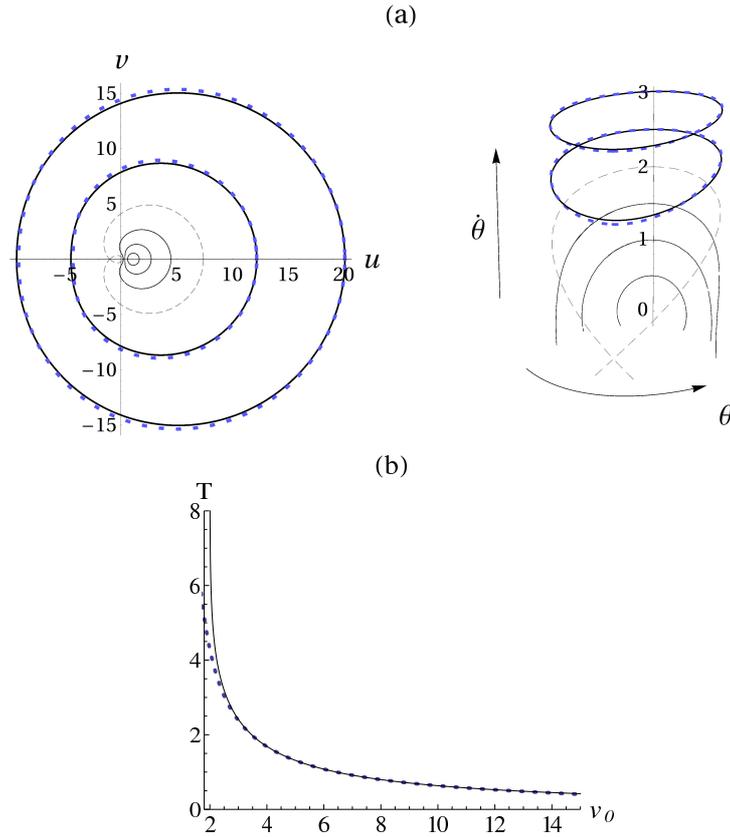


Figura 4.3: a) Soluciones rotatorias exactas (—) y soluciones aproximadas con HAM (---) en ambos sistemas de coordenadas; b) Comparación de períodos: (—) exacto en (4.8) y (---) $2\pi/\omega^{\text{rot}}$ calculado con HAM.

$$\begin{aligned}
v_P(t) = & 14,0746 \operatorname{sen}(2,61725t) + 3,65976 \operatorname{sen}(5,2345t) + 0,549794 \operatorname{sen}(7,85176t) + \\
& 0,0643009 \operatorname{sen}(10,469t) + 0,00555781 \operatorname{sen}(13,0863t) + 0,000357997 \operatorname{sen}(15,7035t) + \\
& 0,0000152709 \operatorname{sen}(18,3208t) + 5,074780 \times 10^{-7} \operatorname{sen}(20,938t) + \\
& 4,101773 \times 10^{-9} \operatorname{sen}(23,5553t) + 4,418700 \times 10^{-10} \operatorname{sen}(26,1725t).
\end{aligned}$$

(4.45)

Además, en este caso también es posible calcular aproximaciones de la frecuencia ω en función de la velocidad inicial v_0 . La aproximación para orden 8 resulta

$$\begin{aligned}
\omega^{\text{rot}} = & v_0 + 8h + h^2 \left(28v_0 + \frac{7}{2} \right) + h^3 \left(56v_0^2 + 14v_0 + \frac{175}{2} \right) + h^2 \left(28v_0 + \frac{7}{2} \right) + \\
& h^4 \left(70v_0^3 + \frac{105v_0^2}{4} + \frac{2625v_0}{8} + \frac{9415}{192} \right) + h^5 \left(56v_0^4 + 28v_0^3 + 525v_0^2 + \frac{1883v_0}{12} + \frac{14609}{60} \right) + \\
& h^6 \left(28v_0^5 + \frac{35v_0^4}{2} + \frac{875v_0^3}{2} + \frac{9415v_0^2}{48} + \frac{14609v_0}{24} + \frac{437017}{4608} \right) + \\
& h^7 \left(8v_0^6 + 6v_0^5 + \frac{375v_0^4}{2} + \frac{1345v_0^3}{12} + \frac{2087v_0^2}{4} + \frac{62431v_0}{384} + \frac{185701}{1536} \right) + \\
& h^8 \left(v_0^7 + \frac{7v_0^6}{8} + \frac{525v_0^5}{16} + \frac{9415v_0^4}{384} + \frac{14609v_0^3}{96} + \frac{437017v_0^2}{6144} + \frac{1299907v_0}{12288} + \frac{101836543}{6193152} \right).
\end{aligned}$$

(4.46)

En la figura 4.3 b) comparamos el período (4.8) con el calculado a partir de la aproximación anterior fijando $h = -0,15$. Para valores de v_0 entre 3,2 y 15 el error relativo de la aproximación no supera el 1%. Para valores $v_0 < 3,2$ el error

aumenta considerablemente, pero puede mejorarse calculando aproximaciones de mayor orden.

4.5. Conclusión

En este capítulo aplicamos el HAM para hallar expresiones analíticas de las soluciones oscilatorias y rotatorias del péndulo simple. Para este último caso, mapeamos el cilindro sobre el plano sin un punto y aplicamos el HAM para estudiar el sistema de ecuaciones diferenciales resultante. Las aproximaciones de ambos tipos de soluciones resultan muy buenas comparadas con las exactas que se calculan utilizando funciones elípticas de Jacobi. Además, el método permite obtener expresiones para la frecuencia de las soluciones periódicas. Observamos que el período correspondiente es una muy buena aproximación del exacto, en un amplio rango de velocidades iniciales. De ser necesario, esta aproximación puede mejorarse aumentando la cantidad de términos calculados. Mostramos de esta manera que el HAM resulta un método adecuado y efectivo para estudiar la dinámica y las soluciones de ecuaciones diferenciales.

En los capítulos siguientes consideraremos una modificación con retardo del péndulo rotatorio, este último puede ser estudiado de manera similar al caso simple mostrado aquí. En general, este método puede ser conveniente para el estudio de centros no lineales, por ejemplo en sistemas hamiltonianos, para aproximar las soluciones periódicas y obtener buenas aproximaciones del período de las mismas.

Ecuación de van der Pol con retardo, HAM iterado y bifurcaciones

5.1. Introducción

Por medio de este ejemplo, mostramos que el HAM es una herramienta apropiada para estudiar soluciones periódicas en ecuaciones diferenciales no lineales con retardo. Nos enfocamos en el análisis de bifurcación y estabilidad de soluciones periódicas. Los resultados no son los más generales que podríamos obtener, sin embargo, la aplicación de HAM a un sistema específico ilustra las dificultades que pueden aparecer al estudiar este tipo de ecuaciones y cómo podemos resolver algunas de esas dificultades.

Las ecuaciones de van der Pol y van der Pol–Duffing han sido estudiadas aplicando el HAM en [42, 48]. En [5] se estudia la ecuación de van der Pol con retardo, aplicando métodos perturbativos se muestra la presencia de bifurcación de Hopf. Por otro lado, en [81] se analiza la bifurcación de Hopf en la ecuación de van der Pol realimentada con retardo utilizando formas normales y el teorema de la variedad centro.

El método de análisis homotópico como fue presentado en la sección 3.3 permite construir expresiones analíticas de las soluciones periódicas de la ecuación estudiada. Para el estudio de este ejemplo implementamos el HAM iterado para mejorar la eficiencia numérica del método. Además utilizamos iteraciones en el cálculo de múltiples soluciones. Estas modificaciones al HAM clásico, combinadas con la utilización de paquetes de cálculo simbólico, nos permiten explorar el espacio de parámetros y encontrar las soluciones oscilatorias del sistema. Además, debido al alto orden de las aproximaciones de los ciclos obtenidas podemos aplicar el método de colocación de Chebyshev presentado en el capítulo 2, para estudiar la estabilidad de manera eficiente.

En el estudio de esta ecuación y su dinámica nos encontramos con distinto tipo de bifurcaciones, algunas se relacionan con los equilibrios, la bifurcación de Hopf, bifurcación de Hopf doble, etc., y otras son bifurcaciones de ciclos, *fold*, *flip* y Neimark-Sacker. El análisis de estas bifurcaciones es esencial para determinar el comportamiento del sistema considerado al variar los parámetros.

5.2. Ecuación de van der Pol con retardo

Consideramos la ecuación de van der Pol realimentada con retardo

$$x''(t) + \epsilon(x^2(t) - 1)x'(t) + x(t) = d\epsilon x(t - \tau), \quad (5.1)$$

donde ϵ, d son constantes reales positivas y $\tau > 0$ representa el retardo.

Supongamos que existe una solución periódica con amplitud a y frecuencia ω de la ecuación anterior. De acuerdo a lo desarrollado en la sección 3.3, la ecuación que resulta de la normalización es

$$\omega^2 x''(t) + \epsilon\omega(a^2 x^2(t) - 1)x'(t) + x(t) = d\epsilon x(t - \omega\tau), \quad (5.2)$$

la solución periódica correspondiente tiene amplitud y frecuencia 1, y debe verificar las condiciones de fase: $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$.

Consideramos la familia de operadores

$$\mathcal{H}_q[\phi, \Omega, A] = (1 - q)\mathcal{L}[\phi - x_0] - qh\mathcal{N}_q[\phi, \Omega, A], \quad (5.3)$$

donde $h \neq 0$ es el parámetro de control de convergencia y x_0 es una aproximación inicial que pertenece al espacio $C_{2\pi}^2(\mathbb{R})$ y verifica $x_0(0) = 1$ y $x_0'(0) = 0$. Además, \mathcal{L} es el operador lineal

$$\mathcal{L}[\psi] = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \psi, \quad (5.4)$$

y \mathcal{N}_q es definido a partir de (5.2) como

$$\mathcal{N}_q[\phi, \Omega, A] = \Omega^2(q) \frac{\partial^2 \phi(t, q)}{\partial t^2} + \epsilon \Omega(q) (A^2(q) \phi^2(t, q) - 1) \frac{\partial \phi(t, q)}{\partial t} + \phi(t, q) - d\epsilon \phi(t - \Omega(q)\tau, q). \quad (5.5)$$

Al igual que en la sección 3.3, consideramos las siguientes expresiones en serie

$$x_P(t) = \phi(t, 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t), \quad \omega = \Omega(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k, \quad a = A(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k. \quad (5.6)$$

Las series anteriores dependerán del parámetro h , y serán convergentes si es posible fijar un valor adecuado de este parámetro. Calculamos el término x_k para $k \geq 1$, utilizando las ecuaciones

$$\mathcal{L}[x_k(t) - x_{k-1}(t) + \delta_{1k}x_0(t)] = \frac{h}{(k-1)!} \left. \frac{\partial^{k-1} \mathcal{N}_q[\phi, \Omega, A]}{\partial q^{k-1}} \right|_{q=0}, \quad (5.7)$$

y las condiciones iniciales $x_k(0) = 0$, $x_k'(0) = 0$.

La derivada en el lado derecho de la ecuación anterior presenta una diferencia respecto de los ejemplos trabajados anteriormente que tiene que ver con la presencia de retardo. La derivada del último término del operador en (5.5) implica la necesidad de derivar la composición de dos de los desarrollos en serie (5.6). Como suponemos que las series son convergentes para $q \in [0, 1]$ esta derivada se obtiene utilizando la regla de la cadena.

Resolvemos el problema en (5.7) invirtiendo el operador \mathcal{L} teniendo en cuenta las condiciones indicadas en la sección 3.3 para que cada término resulte periódico.

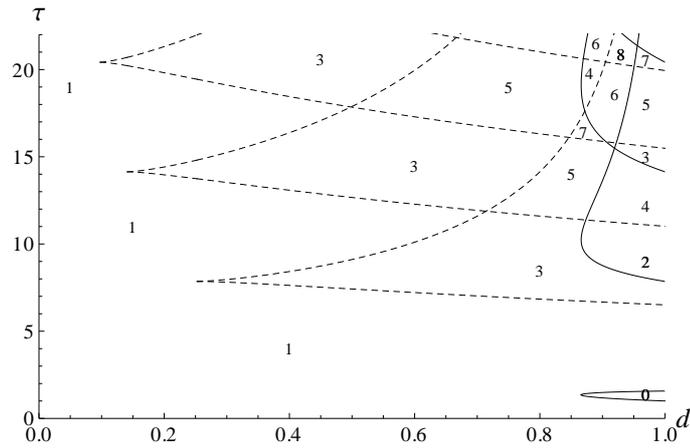


Figura 5.1: Cantidad de condiciones iniciales que predice el sistema (5.9) para $\epsilon = 1$. Curvas de cambio de cantidad de condiciones iniciales (---) y curvas de puntos de Hopf (—).

Estas condiciones se verifican en cada paso k fijando valores adecuados de ω_{k-1} y a_{k-1} , obteniendo así los desarrollos en serie de ω y a .

Si consideramos la aproximación inicial $x_0(t) = \cos(t)$, la ecuación (5.7) para $k = 1$, resulta

$$x_1''(t) + x_1(t) = h \left((1 - \omega_0^2 - d\epsilon \cos(\omega_0\tau)) \cos(t) + \epsilon\omega_0 \left(1 - \frac{a_0^2}{4} - \frac{d}{\omega_0} \sin(\omega_0\tau) \right) \sin(t) - \epsilon\omega_0 \frac{a_0^2}{4} \sin(3t) \right), \quad (5.8)$$

luego, como $h \neq 0$, ω_0 y a_0 deben ser solución del siguiente sistema

$$\begin{aligned} 1 - \omega_0^2 - d\epsilon \cos(\omega_0\tau) &= 0, \\ 1 - \frac{a_0^2}{4} - \frac{d}{\omega_0} \sin(\omega_0\tau) &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Podemos analizar la primera de estas ecuaciones gráficamente para ω_0 , y luego podemos despejar a_0 de la segunda ecuación. El número de soluciones de estas ecuaciones nos brinda una primera estimación del número de ciclos para cada valor de los parámetros (ver figura 5.1). Más adelante veremos cómo se puede mejorar esta estimación.

Una vez determinados los valores de ω_0 y a_0 , podemos calcular x_1 y plantear la ecuación para x_2 , a partir de la cual obtendremos un sistema, en este caso lineal, que nos permitirá determinar ω_1 y a_1 . Continuando de esta manera podemos obtener expresiones analíticas aproximadas de la solución periódica, y desarrollos de la frecuencia y la amplitud hasta un orden de aproximación arbitrario en q .

Mencionamos anteriormente que las aproximaciones se encuentran en función de h , y una idea de los valores de este parámetro para el cual las series son convergentes se consigue observando las h -curvas. En la figura 5.2 a) mostramos varias h -curvas para una expresión de orden 20 de un ciclo calculado con $\epsilon = 0,5$, $\tau = 12$, y $d = 1,35$. En b) graficamos el ciclo correspondiente en función de t para $h = -0,6$, junto con la aproximación numérica del mismo calculada con Mathematica, observamos la similitud entre ambos.

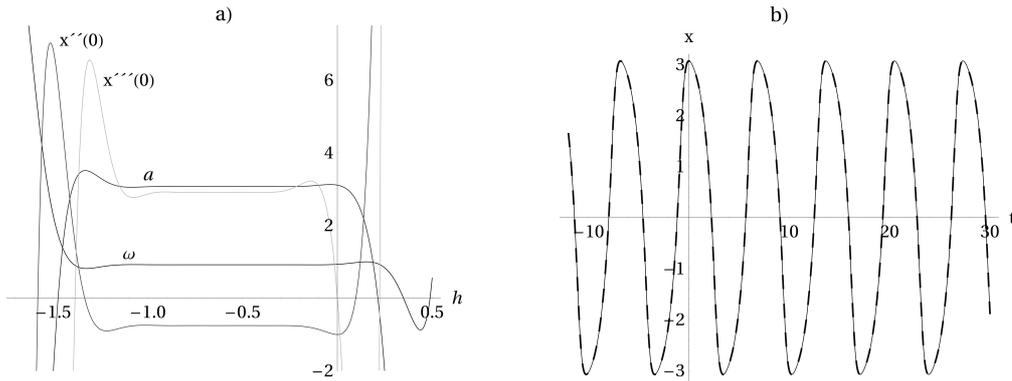


Figura 5.2: a) Polinomios en función de h . b) (---) ciclo HAM de orden 20, (—) aproximación numérica.

5.3. Uso de iteraciones

Como es usual en los métodos de búsqueda de soluciones óptimas, el uso de iteraciones mejoró en gran medida nuestros resultados con HAM. Utilizamos las iteraciones con dos objetivos principales, uno relacionado al cálculo de múltiples soluciones y el otro vinculado al cálculo eficiente de ciclos particulares.

5.3.1. Múltiples soluciones

De acuerdo a lo desarrollado en la sección 3.3, la cantidad de ciclos de la ecuación normalizada (5.2) que podemos calcular con HAM está asociada directamente a la cantidad de valores iniciales ω_0 y a_0 que resuelven el sistema

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} N[x_0, \omega_0, a_0] \cos t \, dt = 0, \\ d_{1,1} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} N[x_0, \omega_0, a_0] \sin t \, dt = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Así, los valores iniciales dependen fuertemente de la aproximación inicial x_0 . Como hemos mencionado x_0 pertenece al espacio $C_{2\pi}^2(\mathbb{R})$ y además verifica las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$. Existen entonces infinitas posibilidades de elegir tal función.

Supongamos que tenemos evidencia de que existen múltiples soluciones periódicas, debido por ejemplo a alguna bifurcación. Sin embargo, tomando como función inicial $x_0 = \cos t$, el sistema (5.9) tiene una única solución ω_0, a_0 . En ese caso, es posible generar nuevos valores iniciales ω_0, a_0 por medio de iteraciones de la solución inicial. Cada iteración está basada en tres pasos:

1. Resolver el HAM con orden 1, obtener la nueva aproximación inicial \tilde{x}_0 fijando un valor de h .
2. Generar con \tilde{x}_0 un sistema de la forma (5.10) y calcular los nuevos valores iniciales ω_0, a_0 . Existirá al menos un par de valores al igual que en el paso previo.

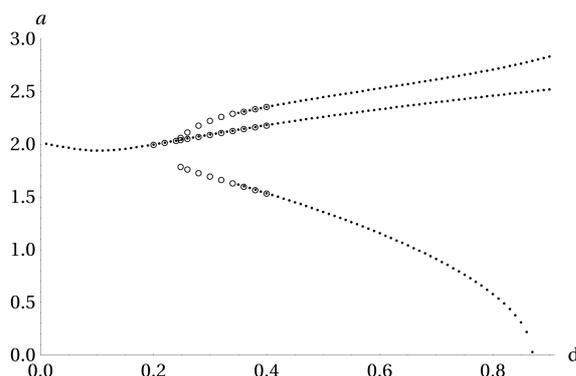


Figura 5.3: Amplitud de los ciclos para $\epsilon = 1,4142$ y $\tau = 9$. (\dots) sin iteración de condiciones iniciales, ($\circ\circ\circ$) con tres iteraciones de condiciones iniciales.

3. Usar la función \tilde{x}_0 obtenida como entrada para la siguiente iteración.

Si la cantidad de pares de valores iniciales ω_0, a_0 , no aumenta luego de una cantidad predeterminada de iteraciones detenemos este proceso de generación y continuamos con el cálculo de la solución periódica. Si la cantidad aumenta utilizamos cada par de valores obtenidos para el cálculo de la solución periódica correspondiente con HAM.

Particularmente en el caso de la ecuación de van der Pol con retardo, en algunas regiones del espacio de parámetros (especialmente si τ toma valores grandes), el cálculo de los ciclos era a simple vista incompleto cuando (5.9) generaba los valores iniciales. Por esto fue necesario corregir la generación utilizando iteraciones. En la figura 5.3 mostramos un ejemplo de los resultados del nuevo proceso de generación de los valores iniciales. Graficamos la amplitud de los ciclos para $\epsilon = 1,4142$ y $\tau = 9$, en función de d , con tres iteraciones (círculos) y sin iteraciones (puntos). Es claro que si no realizamos la iteración sólo uno de los ciclos es detectado para d en el intervalo $[0,2455, 0,34]$.

5.3.2. HAM iterado

Ya que el objetivo principal en este ejemplo es analizar soluciones y sus bifurcaciones al variar los parámetros de la ecuación, es importante poder realizar cálculos de los ciclos con mucha precisión. Esto se lograría fácilmente aumentando la cantidad de términos calculados en la aproximación HAM. Sin embargo, a medida que este orden crece la cantidad de términos que intervienen en los cálculos aumenta en gran medida. Es por esto que se hace necesario contar con un método más eficiente que el HAM original para el cálculo de aproximaciones.

El HAM iterado consiste en el cálculo de un número fijo de términos en la expansión de una solución particular buscada, fijar un valor apropiado de h (elegido observando las h -curvas de la primera iteración) y usar la función obtenida como entrada de la siguiente iteración. De esta manera, exploramos el espacio de funciones 2π periódicas de amplitud unitaria transformando iterativamente las aproximaciones de las soluciones. El proceso termina cuando la diferencia entre dos iteraciones sucesivas es menor que cierto valor de tolerancia.

Seleccionando un valor del parámetro h , reducimos en gran medida el número de términos que intervienen en el cálculo. Luego, como esperábamos, el HAM iterado mejora la velocidad de cálculo del ciclo respecto del procedimiento original. Además, este proceso no afecta la calidad de la solución como una aproximación de la solución exacta. De hecho, generalmente provee una mejor aproximación que aquellas obtenidas con el HAM usual descrito en la sección 3.3.

Como un ejemplo, consideremos en la ecuación analizada $\epsilon = 0,5$, $\tau = 12$ y $d = 0,35$. Estos son los valores para el ciclo que mostramos en la figura 5.2. La tabla 5.1 contiene los valores de ω , a , $x''(0)$, y $x'''(0)$ para este ciclo. Estos son calculados con HAM clásico y HAM iterado, tomando diferentes órdenes y cantidad de iteraciones, respectivamente. El orden para el HAM iterado es 5 en todos los casos. Observamos la similitud entre los valores obtenidos con HAM de orden 40 y HAM iterado con 8 iteraciones, sin embargo el tiempo de cálculo del segundo fue cercano al 3% del primero.

Tabla 5.1: Valores para el único ciclo obtenido con $\epsilon = 0,5$, $\tau = 12$, y $d = 1,35$.

	HAM sin iteraciones			HAM orden 5 con iteraciones		
	orden 10	orden 20	orden 40	2 iter	4 iter	8 iter
ω	0,920582	0,920284	0,920325	0,920219	0,920322	0,920324
a	3,070616	3,072865	3,072773	3,073421	3,072783	3,072775
$x''(0)$	-0,753920	-0,753933	-0,753726	-0,753705	-0,753706	-0,753726
$x'''(0)$	2,892260	2,911034	2,912385	2,943078	2,912267	2,912386

5.4. Bifurcación de Hopf y Hopf doble

En esta sección obtenemos puntos que verifican las condiciones necesarias para que la ecuación presente una bifurcación de Hopf. Luego calcularemos las soluciones periódicas utilizando HAM lo que nos permite calcular los diagramas locales de bifurcación.

Un cálculo sencillo permite hallar los equilibrios de la ecuación (5.2). Observamos que, si $d\epsilon \neq 1$, $\hat{x} = 0$ es el único equilibrio, mientras que si $d\epsilon = 1$ existen infinitos equilibrios no aislados, estudiaremos sólo el primero de estos casos.

Determinamos la estabilidad del equilibrio trivial utilizando la ecuación característica

$$\lambda^2 - \epsilon\lambda + 1 - d\epsilon e^{-\tau\lambda} = 0. \quad (5.11)$$

Se sigue que no existen raíces características iguales a cero (ya que consideramos $d\epsilon \neq 1$), mientras que existen raíces imaginarias puras $\lambda = i\omega$, con $\omega > 0$ si se puede resolver el sistema

$$\begin{aligned} 1 - \omega^2 - d\epsilon \cos(\omega\tau) &= 0, \\ -\omega + d \operatorname{sen}(\omega\tau) &= 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Como observamos en la sección 3.4, este sistema coincide con el obtenido considerando $a_0 = 0$ en (5.9).

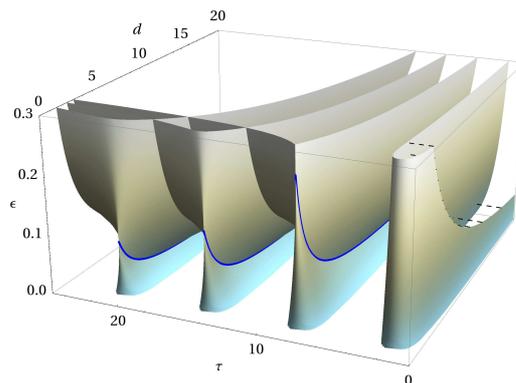


Figura 5.4: Superficie S en el espacio d - τ - ϵ ; (—): curvas de autointersecciones.

A partir del sistema anterior es posible definir una superficie S en el espacio de parámetros d - τ - ϵ , formada por infinitas hojas (ver figura 5.4). Utilizando las ecuaciones (5.12) obtenemos las siguientes expresiones para τ y d en función de ω y del parámetro ϵ ,

$$d = \frac{\sqrt{1 + (\epsilon^2 - 2)\omega^2 + \omega^4}}{\epsilon},$$

$$\tau = \begin{cases} \frac{1}{\omega} \left(2k\pi + \arctan\left(\frac{\epsilon\omega}{1 - \omega^2}\right) \right) & \text{si } \omega \neq 1, \\ 2k\pi + \frac{\pi}{2}, & \text{si } \omega = 1. \end{cases} \quad (5.13)$$

En la ecuación anterior $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y la función \arctan está definida de manera que la función τ resulte continua en $\omega = 1$. Para cada valor de k estas expresiones determinan una hoja de la superficie S . En los puntos de la superficie se verifica la condición necesaria para la existencia de bifurcación de Hopf, esto es, la existencia de un par de raíces características imaginarias puras. Además, en las autointersecciones de S , la existencia de dos pares de raíces complejas conjugadas imaginarias puras es un indicador de la posible existencia de bifurcaciones de Hopf dobles.

En lo que sigue consideramos d como parámetro de bifurcación. La condición de transversalidad de las raíces características, esto es, que la derivada de la parte real de la raíz respecto del parámetro no se anule, se verifica si

$$\tau \neq \frac{1 + \omega_c^2}{d_c^2 \epsilon}, \quad (5.14)$$

siendo ω_c el valor de la frecuencia en el punto de bifurcación d_c . Realizando algunas operaciones simples con las ecuaciones en el sistema (5.12) obtenemos

$$\omega_{c1,c2} = \sqrt{\frac{2 - \epsilon^2 \pm \epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 4(1 - d^2)}}{2}}. \quad (5.15)$$

En la figura 5.5 graficamos las curvas de posibles puntos de Hopf para tres valores fijos de ϵ .

Es interesante además poder determinar la existencia de puntos de Hopf doble. La dinámica alrededor de este tipo de puntos involucra la interacción de más de

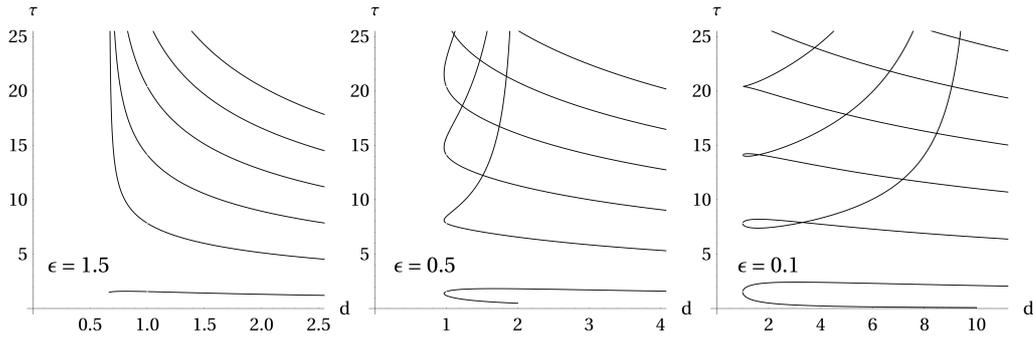


Figura 5.5: Curvas de posibles puntos de Hopf para tres valores fijos de ϵ .

un ciclo, y el comportamiento de los mismos al variar los parámetros es particularmente interesante en entornos de puntos de Hopf doble resonante. En la siguiente proposición determinamos condiciones necesarias para hallar este tipo de puntos de bifurcación fijando valores adecuados de ϵ .

Proposición 18. *Si la ecuación (5.1) presenta una bifurcación de Hopf doble resonante $p:q$, con $p \neq q$, entonces existe $0 < \epsilon_c < \sqrt{2}$ y un par de valores $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tales que se verifica*

$$\frac{p}{q} \left(2k_1\pi + \arctan \left(\frac{\epsilon_c \omega_c}{1 - \omega_c^2} \right) \right) = 2k_2\pi + \arctan \left(\frac{pq\epsilon_c \omega_c}{q^2 - p^2\omega_c^2} \right), \quad (5.16)$$

siendo

$$\omega_c = \sqrt{\frac{2 - \epsilon_c^2}{1 + \left(\frac{p}{q}\right)^2}}. \quad (5.17)$$

Demostración. Supongamos que existe una bifurcación de Hopf doble, entonces de acuerdo a la definición de la superficie S deben existir valores ω_{c1} y ω_{c2} tales que

$$d(\omega_{c1}) = d(\omega_{c2}) \quad \text{y} \quad \tau(\omega_{c1}) = \tau(\omega_{c2}), \quad (5.18)$$

con d y τ definidos en (5.13). Si $\omega_{c1} \neq \omega_{c2}$, la primer ecuación implica que

$$\omega_{c1}^2 + \omega_{c2}^2 = 2 - \epsilon^2, \quad (5.19)$$

y existirán intersecciones sólo si $\epsilon < \sqrt{2}$. Por otro lado, de la segunda ecuación se sigue que

$$\omega_{c2} \left(2k_1\pi + \arctan \left(\frac{\epsilon\omega_{c1}}{1 - \omega_{c1}^2} \right) \right) = \omega_{c1} \left(2k_2\pi + \arctan \left(\frac{\epsilon\omega_{c2}}{1 - \omega_{c2}^2} \right) \right). \quad (5.20)$$

para un par de valores $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si la bifurcación de Hopf doble es resonante $p:q$, entonces $\omega_{c2}/\omega_{c1} = p/q$, con $p, q \in \mathbb{N}$. Si $p \neq q$, de la ecuación (5.19) obtenemos

$$\omega_c = \sqrt{\frac{2 - \epsilon^2}{1 + \left(\frac{p}{q}\right)^2}}, \quad (5.21)$$

y reemplazando en (5.20) resulta (5.16). \square

Como ya mencionamos, la proposición anterior nos brinda condiciones necesarias para la existencia de bifurcación de Hopf doble resonante. Fijados los valores p y q , la ecuación (5.16) nos permite hallar un valor del parámetro ϵ_c , si es que existe, para el cual obtenemos una bifurcación resonante $p:q$. En relación con la estabilidad del equilibrio el caso más interesante es el correspondiente a intersecciones de una misma hoja en la superficie S , es decir, cuando consideramos $k_1 = k_2$ en (5.16).

¿Qué sucede con las resonancias del tipo 1:1? De acuerdo a las definiciones en (5.13), la única posibilidad de que la superficie se autointersecte con la misma frecuencia es considerando $\omega_1 = \omega_2 = 1$. En las demás intersecciones intervienen dos valores de frecuencia, uno de los cuales es mayor que 1 y el otro menor. Entonces, considerando el sistema (5.12), se sigue que el mismo tiene una solución doble en $\omega = 1$ cuando

$$d = 1, \quad \tau = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \epsilon = \frac{2}{\tau}. \quad (5.22)$$

En estos puntos puede existir una bifurcación con resonancia 1:1.

Una vez que hemos determinado un posible punto de Hopf doble, realizaremos el análisis de las soluciones periódicas alrededor de este tipo de puntos utilizando el HAM. Es necesario además poder estudiar las bifurcaciones de los ciclos en entornos de ese punto, lo que hace necesario poder determinar la estabilidad de los mismos. Como mencionamos anteriormente no se ha podido desarrollar una técnica analítica para calcular esta estabilidad en el caso general. Utilizamos entonces el método de colocación de Chebyshev.

5.4.1. Estabilidad de soluciones periódicas

Para estudiar la estabilidad de las soluciones periódicas x_P (con amplitud a y frecuencia ω) escribimos $x(t) = x_P(t) + v(t)$. Usamos esta sustitución en la ecuación (5.2) y analizamos la estabilidad del equilibrio $v = 0$. Si el equilibrio trivial es asintóticamente estable entonces x_P es asintóticamente estable, de otra manera es inestable. Para determinar la estabilidad de la solución trivial estudiamos la ecuación lineal con coeficientes periódicos

$$\omega^2 v''(t) + \epsilon \omega (a^2 x_P^2(t) - 1) v'(t) + (2\epsilon \omega a^2 x_P(t) x_P'(t) + 1) v(t) = d\epsilon v(t - \omega\tau). \quad (5.23)$$

Usando el método de colocación de Chebyshev, descrito en 2.5, definimos una matriz de monodromía finito dimensional $\tilde{\mathbf{U}}$ cuyos autovalores aproximan los multiplicadores de Floquet. La exactitud de los multiplicadores de Floquet generalmente mejora al incrementar el número de puntos de colocación.

Como ya mencionamos, si el período del ciclo no es múltiplo del retardo es necesario realizar interpolaciones. La manera más fácil es considerar una interpolación lineal representada por una matriz \mathbf{M}_L . Comparamos los autovalores calculados con los obtenidos utilizando DDE-Biftool [23] en algunos casos particulares y los resultados muestran una buena coincidencia. En la tabla 5.2 mostramos los resultados obtenidos para un ciclo particular.

Otra interpolación posible es la baricéntrica, análogamente al caso anterior podemos definir una matriz \mathbf{M}_B y aproximar los autovalores del operador $\tilde{\mathbf{U}}$. Los autovalores obtenidos son comparados con los correspondientes calculados con DDE-Biftool. Observamos que la aproximación es mejor que cuando se utilizaba interpolación lineal, para el mismo número de puntos de colocación m (ver tabla 5.2). Esta

última interpolación es la que utilizamos en el cálculo de la estabilidad en lo que sigue.

Tabla 5.2: Autovalores del ciclo para $\epsilon = 0,1$, $\tau = 7$, y $d = 8,3328$.

DDE-Biftool	Interpolación lineal		Interpolación baricéntrica	
	$m = 40$	$m = 100$	$m = 40$	$m = 100$
$-1,2202 \pm 0,8640i$	$-1,2203 \pm 0,8614i$	$-1,2204 \pm 0,8633i$	$-1,2209 \pm 0,8638i$	$-1,2204 \pm 0,8638i$
1,0000	0,9893	0,9976	0,9975	0,9992
0,8985		0,8974	0,8991	0,8984
0,8880	$0,8898 \pm 0,0022i$	0,8883	0,8883	0,8881
$-0,2232 \pm 0,2750i$	$-0,2192 \pm 0,2692i$	$-0,2225 \pm 0,2741i$	$-0,2228 \pm 0,2752i$	$-0,2231 \pm 0,2750i$
$-0,0680 \pm 0,1979i$	$-0,0646 \pm 0,1907i$	$-0,0675 \pm 0,1967i$	$-0,0683 \pm 0,1977i$	$-0,0680 \pm 0,1978i$
$0,1422 \pm 0,0302i$	$0,1332 \pm 0,0291i$	$0,1407 \pm 0,0300i$	$0,1421 \pm 0,0297i$	$0,1420 \pm 0,0301i$
$-0,0744 \pm 0,0805i$	$-0,0682 \pm 0,0725i$	$-0,0735 \pm 0,0792i$	$-0,0743 \pm 0,0805i$	$-0,0743 \pm 0,0804i$
$-0,0247 \pm 0,0835i$	$-0,0208 \pm 0,0730i$	$-0,0240 \pm 0,0819i$	$-0,0255 \pm 0,0834i$	$-0,0246 \pm 0,0834i$

5.5. Cercanías de puntos de Hopf doble

El conocimiento de los ciclos y su estabilidad nos permite detectar y analizar bifurcaciones en las que ellos intervienen. En este caso nos enfocamos en el análisis de ciclos cercanos a bifurcaciones de Hopf doble. Para llevar a cabo este análisis, detectamos parámetros adecuados utilizando la proposición 18, luego, fijado ϵ encontramos todos los ciclos y su estabilidad a lo largo de líneas horizontales del plano d - τ utilizando las técnicas desarrolladas anteriormente. Podemos detectar de esta manera bifurcaciones Neimark-Sacker y fold de ciclos, que confirman el comportamiento dinámico esperado en entornos de cada punto de Hopf doble (ver [45]).

Además del análisis anterior, la utilización del HAM permite calcular una solución periódica asociada al ciclo estable de la ecuación de van der Pol sin retardo (ver 3.3.1). Podemos estudiar el comportamiento de este ciclo al variar distintos parámetros y su relación con los ciclos que se originan en las distintas bifurcaciones.

5.5.1. Hopf doble resonante 3:4

De acuerdo a la proposición 18, fijando $\epsilon = 0,139057$, calculamos que existe un posible punto de bifurcación de Hopf doble resonante 3:4 cuando $d = 2,22971$ y $\tau = 7,90083$. Los pares de autovalores correspondientes son $\pm i 1,125888$ y $\pm i 0,844416$, y probamos fácilmente que la condición (5.14) se verifica para las dos frecuencias correspondientes. El análisis del comportamiento de los ciclos en las cercanías del punto de Hopf doble nos permite detectar la ocurrencia de bifurcaciones Neimark-Sacker (NS). Estas están asociadas a la aparición de toros 2D. La dinámica que observamos corresponde a uno de los conocidos como casos simples de resonancia [45].

Describimos qué sucede cuando los parámetros d y τ varían alrededor del punto de Hopf doble : en la región I (ver figura 5.6 a)) el equilibrio es estable, al pasar a la región II sobre los puntos de la curva H_1 el sistema sufre una bifurcación de Hopf supercrítica. El ciclo que surge es estable y continúa siendo estable en la región III. En los puntos de bifurcación de Hopf H_2 nace un nuevo ciclo inestable, que

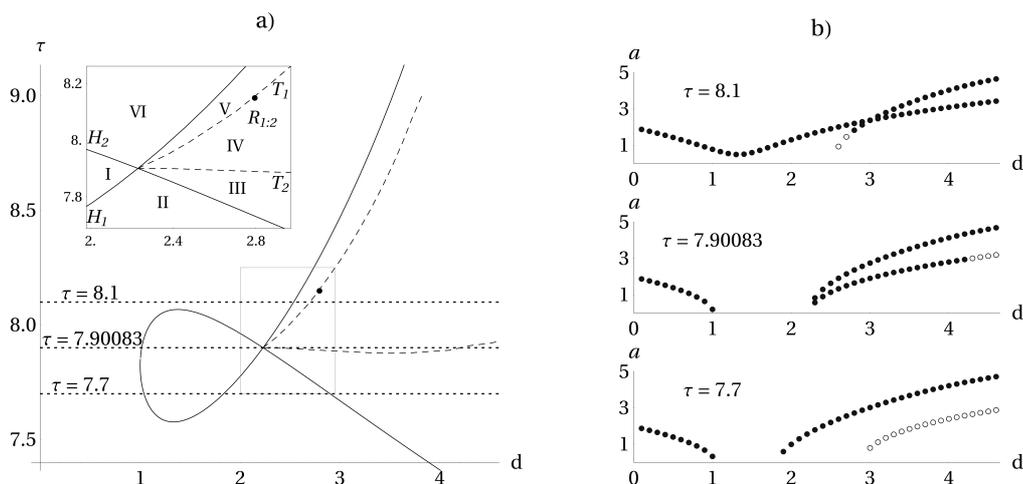


Figura 5.6: a) Entorno de un punto de Hopf doble fijando $\epsilon = 0,139057$; b) Amplitudes para valores constantes de τ indicados en a).

más adelante se estabiliza debido a una bifurcación NS (curva T_2). En la región IV, ambos ciclos son estables y el toro 2D que aparece en la última bifurcación es inestable. Continuando, al cruzar la curva T_1 el toro deja de existir. En la región V, encontramos nuevamente un ciclo estable y uno inestable, este último desaparece debido a la bifurcación de Hopf H_1 y el que resta se anula en H_2 .

Mostramos en la figura 5.6 a) las curvas T_1 y T_2 en el espacio d - τ , junto con las curvas de puntos de Hopf H_1 y H_2 , y las regiones mencionadas antes. En la figura 5.6 b) graficamos las amplitudes de los ciclos para varios valores fijos de τ , los resultados coinciden con la dinámica descrita que es la que se espera en entornos de este tipo de bifurcación. En esta figura y en las que siguen los puntos representan las amplitudes de ciclos estables y los círculos corresponden a soluciones periódicas inestables.

5.5.2. Folds cerca de un punto de Hopf doble

Como ya hemos mencionado existen curvas de posibles puntos de Hopf doble en los cuales no cambia la estabilidad del equilibrio trivial. Estos son igualmente interesantes debido a la dinámica de los ciclos que surgen de la bifurcación. Como un ejemplo, consideremos un entorno de un punto de Hopf doble obtenido para los valores $\epsilon = 0,5$, $\tau = 12,254248$, y $d = 1,511726$. Al variar los parámetros en un entorno de este punto el equilibrio trivial no cambia su estabilidad y los dos ciclos que surgen son inestables.

En la figura 5.7 a) mostramos la situación en un entorno del punto de Hopf doble para el valor mencionado de ϵ . Mostramos las curvas de Hopf H_1 y H_2 , y las curvas de fold de ciclos F_1 y F_2 calculadas con HAM. En la misma figura indicamos con puntos los valores de bifurcación fold de ciclos calculados con DDE-Biftool.

En la figura 5.7 b) mostramos las amplitudes de los ciclos existentes para $\tau = 12$. Observamos dos ramas de ciclos inestables que sugen de las bifurcaciones de Hopf. En cada rama es posible observar la bifurcación fold de ciclos, antes mencionada. Las ramas son comparadas con las obtenidas usando DDE-Biftool. Es interesante

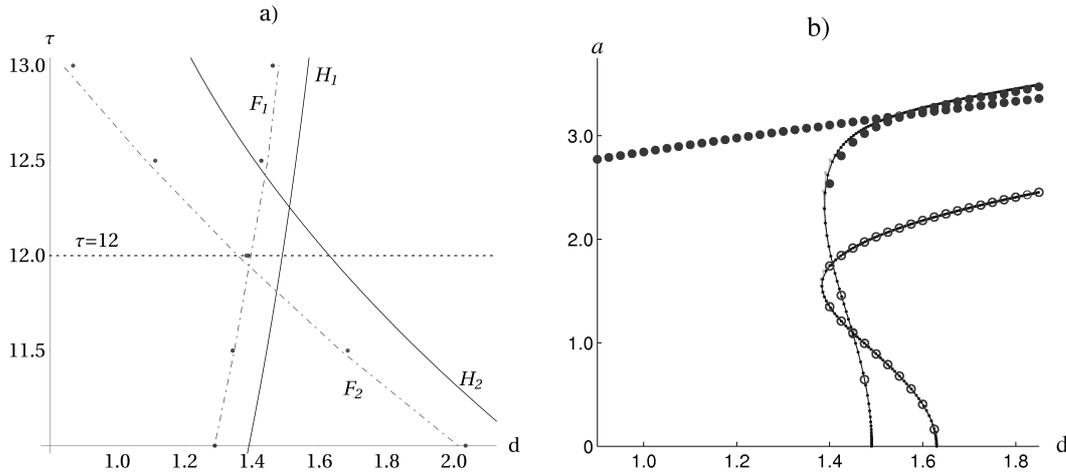


Figura 5.7: a) Entorno de un punto de Hopf doble, para $\epsilon = 0,5$; b) Amplitud de los ciclos para $\tau = 12$, —: DDE-Biftool, $\circ\circ\circ$: HAM.

observar que a pesar de la inestabilidad original, luego del fold, en una de las ramas el ciclo de mayor amplitud se vuelve estable.

Notemos que usando HAM hallamos además un ciclo estable que es independiente de la dinámica local asociada al Hopf doble, este ciclo es una deformación de la solución periódica bien conocida para el sistema de van der Pol sin delay (ver sección 3.3.1). Cálculos numéricos realizados con rutinas específicas de Matlab para este tipo de ecuaciones [74], confirman la existencia y estabilidad de este ciclo, no fue posible calcular esta rama de soluciones utilizando DDE-Biftool.

5.5.3. Hopf doble resonante 1:1

Finalmente, consideramos un posible punto de Hopf doble con resonancia 1:1. Este tipo de resonancia ha sido estudiada por ejemplo en [43, 78]. Para el punto en el espacio de parámetros $(\epsilon, d, \tau) = (4/(5\pi), 1, \pi 5/2)$, tenemos $\omega_{1,2} = 1$. Fijando ϵ , utilizamos el HAM para describir las soluciones periódicas en entornos de este punto en el espacio $d-\tau$.

Podemos hallar ramas de bifurcación NS que junto con las curvas de Hopf dividen el entorno del posible punto de Hopf doble en cuatro regiones, que graficamos en la figura 5.8 a). El equilibrio es inestable en todos los valores de los parámetros considerados. Cuando cruzamos una curva de Hopf, de la región I a la II o de la región I a la IV, aparecen ciclos inestables que se estabilizan en bifurcaciones NS existentes en los puntos de las curvas T_2 y T_1 , respectivamente. En la región III existe un toro 2D que resulta inestable. Observamos además, como en el caso anterior, un ciclo estable relacionado al ciclo del sistema sin retardo, Fig. 5.9 a).

Una resonancia 1 : 4 de ciclos aparece en las curvas T_1 y T_2 (ver figura 5.8 a)), esto es, el ciclo correspondiente tiene multiplicadores de Floquet $e^{\pm i\pi/2}$. Así, en estos puntos, el ciclo cambia su estabilidad cuando un par de multiplicadores imaginarios puros entra al círculo unidad. La dinámica en cercanías de esta resonancia puede ser muy compleja [45]. En la figura 5.9 b) mostramos esta situación para el punto $R_{1:4}$ sobre T_1 , al variar el parámetro d podemos observar como varían los multiplicadores

correspondientes a los ciclos en la rama inferior de la figura 5.9 a).

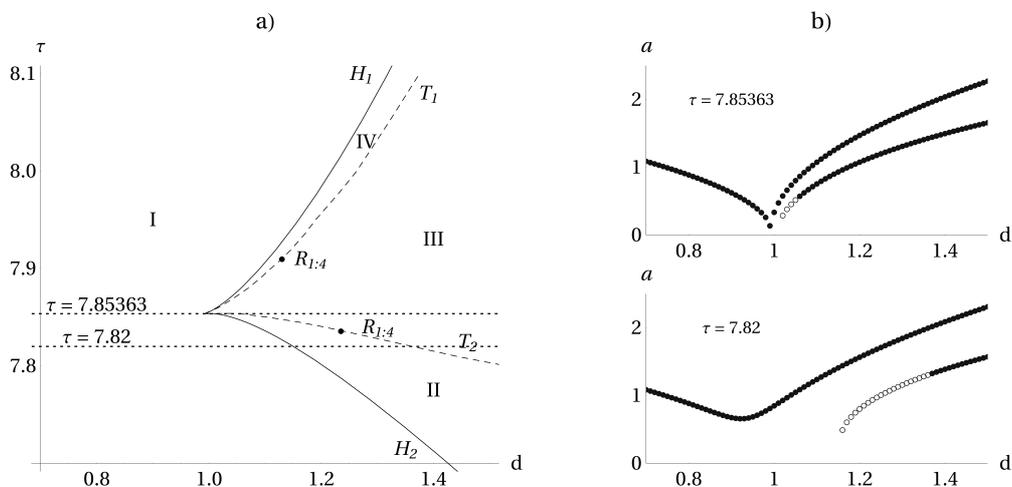


Figura 5.8: a) Entorno de un punto de Hopf doble resonante 1:1, para $\epsilon = 4/(5\pi)$; b) Amplitudes para valores fijos de τ mostrados en a).

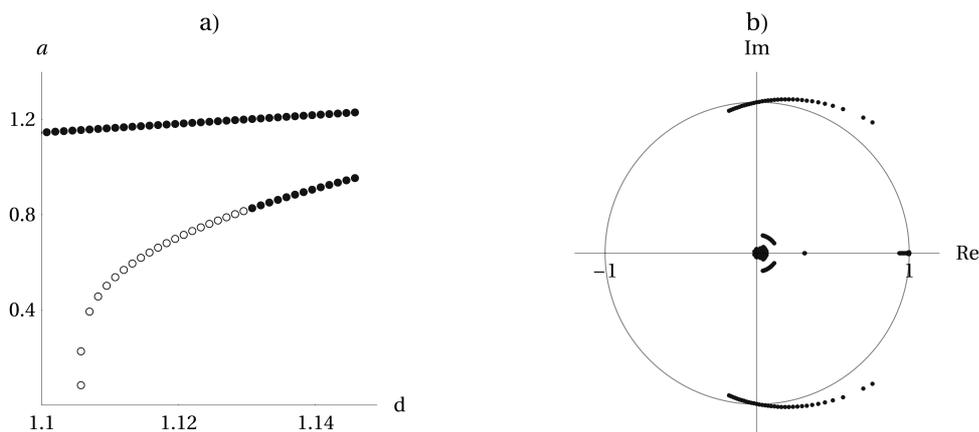


Figura 5.9: a) Amplitudes de los ciclos para $\epsilon = 4/(5\pi)$, $\tau = 7,91$; b) Multiplicadores correspondientes a los ciclos en la rama inferior de amplitudes en a).

5.6. Conclusión

En este capítulo desarrollamos y aplicamos el HAM iterado para encontrar expresiones analíticas de las soluciones periódicas de una ecuación diferencial no lineal con retardo. El método nos permite calcular estas soluciones con gran precisión, lo que observamos al compararlas con las obtenidas por métodos numéricos. Además, podemos realizar el análisis de estabilidad utilizando las expresiones halladas de las soluciones. Luego, es posible recorrer grandes regiones del espacio de parámetros y hallar distintas bifurcaciones. Obtenemos de esta manera distintas pinturas dinámicas del sistema en lo que se refiere a soluciones periódicas, no sólo de amplitud pequeña sino también asociadas a fenómenos globales.

A través de este ejemplo hemos mostrado que el HAM es una herramienta apropiada para estudiar EDRs no lineales haciendo énfasis en el análisis de bifurcaciones y estabilidad de soluciones periódicas.

6

Isocronía en sistemas con retardo

6.1. Introducción

En este capítulo se considera un tipo particular de ecuaciones diferenciales con retardo relacionadas con ecuaciones diferenciales ordinarias. Más precisamente consideramos una ecuación diferencial que corresponde a un movimiento en una dimensión bajo el efecto de una fuerza conservativa. Esta ecuación es de la forma

$$x'' = -g(x, \beta), \quad (6.1)$$

donde β representa algún parámetro adicional.

Si $\partial g / \partial x(\hat{x}, \beta) > 0$ en un equilibrio \hat{x} de (6.1), entonces este equilibrio es un centro. En un entorno de \hat{x} en el espacio de fases $x-x'$ hay órbitas periódicas distribuidas continuamente. En numerosos trabajos se ha estudiado el caso en el cual dicho centro es isocrónico, es decir, todas las órbitas tienen al misma frecuencia [18, 19, 30, 55, 69].

Modificamos la ecuación (6.1) agregando un término lineal proporcional a la diferencia entre el valor actual y el valor retardado de la posición $\gamma f(x(t) - x(t - \tau))$. Este esquema ha sido utilizado para controlar sistemas caóticos [66, 67]. Usualmente la presencia del término con retardo rompe el centro y en ciertos casos se observa una bifurcación de Hopf al mover alguno de los parámetros γ o β [63]. En este capítulo mostramos que la situación genérica en este caso es que los ciclos emergentes en cada rama de la bifurcación tengan la misma frecuencia. A esto lo llamamos una bifurcación isocrónica.

En este caso utilizamos el HAM como herramienta teórica para demostrar el resultado principal, a saber, que las ramas de bifurcación que aparecen debido al retardo son isocrónicas, por lo menos en un entorno de la bifurcación y bajo ciertas condiciones genéricas.

El capítulo se organiza de la siguiente manera. En la sección 6.2 mostramos las condiciones de bifurcación que aparecen debido al retardo, y además enunciamos y demostramos distintos lemas que permiten establecer el resultado principal del capítulo. En la sección 6.3 estudiamos dos ejemplos, el primero es un oscilador anarmónico con un término cúbico y en el segundo el sistema mecánico es un péndulo. Aplicaciones interesantes utilizando modelos de péndulos con retardo son considerados en diversos trabajos actuales, por ejemplo en el caso de un péndulo simple forzado, ver [85], y en el caso de un péndulo invertido en el carrito y los distintos controles realimentados que se pueden implementar, ver [47].

6.2. Bifurcación isocrónica

Se considera la ecuación

$$x'' + g(x, \beta) = \gamma f(x - x_\tau), \quad (6.2)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ es un parámetro, $\gamma \neq 0$, $\tau > 0$ representa un retardo y notamos $x_\tau(t) = x(t - \tau)$. Supongamos que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función analítica, tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) \neq 0$, mientras que la función $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es C^1 .

Los equilibrios \hat{x} del sistema son las soluciones de la ecuación $g(\hat{x}, \beta) = 0$. La ecuación característica para el equilibrio \hat{x} resulta

$$\lambda^2 + \frac{\partial g}{\partial x}(\hat{x}, \beta) - \gamma f'(0)(1 - e^{-\lambda\tau}) = 0. \quad (6.3)$$

La condición necesaria para la existencia de una bifurcación estática ($\lambda = 0$) se verifica si $\partial g / \partial x(\hat{x}, \beta) = 0$. Por otro lado, la condición necesaria para la existencia de bifurcación de Hopf resulta

$$\begin{aligned} -\omega^2 + \frac{\partial g}{\partial x}(\hat{x}, \beta) - \gamma f'(0)(1 - \cos \omega\tau) &= 0, \\ \gamma f'(0) \operatorname{sen} \omega\tau &= 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Como $f'(0) \neq 0$, los puntos solución del sistema anterior tienen la forma

$$\tau = \frac{n\pi}{\omega}, \quad \omega = \sqrt{\frac{\partial g}{\partial x}(\hat{x}, \beta) - \gamma f'(0)(1 - (-1)^n)}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6.5)$$

Además, a partir de la ecuación (6.3) podemos calcular la derivada de $\operatorname{Re} \lambda$ respecto del parámetro β o de la ganancia del término con retardo γ . En el primer caso la derivada evaluada en los puntos en (6.5) resulta

$$\left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda}{d\beta} \right|_{s=i\omega} = \frac{(-1)^n \gamma \tau f'(0)}{(\gamma \tau f'(0))^2 + 4\omega^2} \frac{d}{d\beta} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(\hat{x}, \beta) \right). \quad (6.6)$$

En el otro caso, la derivada es

$$\left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda}{d\gamma} \right|_{s=i\omega} = \frac{(1 - (-1)^n) \gamma \tau f'(0)^2}{(\gamma \tau f'(0))^2 + 4\omega^2}. \quad (6.7)$$

En lo que sigue llamamos μ al parámetro (β o γ) que consideramos como parámetro de bifurcación. Al variar μ , en caso de que la derivada correspondiente sea positiva (negativa) los autovalores complejos conjugados asociados a la bifurcación de Hopf cruzarán el eje imaginario de izquierda a derecha (derecha a izquierda). En ambos casos podemos aplicar el teorema de Hopf para ecuaciones con retardo y asegurar la existencia de soluciones periódicas en la cercanía del punto de bifurcación [35]. Por otro lado, si la derivada es cero entonces la bifurcación, si existe, será degenerada. Notaremos con μ_0 al valor crítico en que se da la bifurcación y ω_{μ_0} a la frecuencia asociada a ese valor.

Las condiciones (6.5) definen curvas en el espacio μ - τ . Los distintos valores de k definen distintas ramas que pueden intersectarse dando lugar a posibles puntos de Hopf doble.

6.2.1. Resultados principales

En esta sección establecemos el resultado principal del capítulo. En el teorema 22 probamos que, bajo ciertas condiciones, las soluciones periódicas de la ecuación (6.2) tienen la misma frecuencia. En particular, las condiciones enunciadas en el teorema implican que las soluciones de amplitud pequeña que surgen a partir de bifurcaciones de Hopf forman (lo que denominamos como) ramas isocrónicas.

Consideremos la ecuación (6.2), mediante un cambio de coordenadas trasladamos el origen a \hat{x} . Supongamos que existe una solución de la ecuación con frecuencia ω y amplitud a . Luego de sustituir t por ωt y x por ax , la ecuación resulta

$$a\omega^2 x'' + g(\hat{x} + ax, \beta) = \gamma f(a(x - x_{\omega\tau})). \quad (6.8)$$

En las nuevas variables la solución periódica x_P tiene frecuencia y amplitud uno. Fijamos la fase imponiendo las condiciones: $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$.

De acuerdo a lo mencionado en la sección 3.3, para hallar x_P consideremos la familia de operadores

$$\mathcal{H}_q[\phi, \Omega, A] = (1 - q)\mathcal{L}[\phi - x_0] - qh\mathcal{N}_q[\phi, \Omega, A], \quad (6.9)$$

donde ϕ la homotopía que construimos con el método, $h \neq 0$ es el parámetro de control de convergencia y x_0 es una aproximación inicial de la solución periódica que verifica $x_0(0) = 1$ y $x'_0(0) = 0$. \mathcal{L} es el operador lineal

$$\mathcal{L}[\psi] = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \psi, \quad (6.10)$$

y \mathcal{N}_q es el siguiente operador no lineal definido a partir de la ecuación normalizada

$$\mathcal{N}_q[\phi, \Omega, A] = A\Omega^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g(\hat{x} + A\phi, \beta) - \gamma f(A(\phi - \phi_{\Omega\tau})). \quad (6.11)$$

Una vez más, buscamos funciones ϕ , Ω y A , analíticas para $q \in [0, 1]$, tales que:

- i. $\mathcal{H}_q[\phi, \Omega, A] = 0$ para $q \in [0, 1]$,
- ii. ϕ verifica las condiciones $\phi(0, q) = 1$ y $\partial\phi/\partial t(0, q) = 0$ para $q \in [0, 1]$.

Si estas funciones existen, tomando $q = 0$ se sigue que $\phi(t, 0) = x_0(t)$, debido a las condiciones en $t = 0$. Además, si $q = 1$,

$$\mathcal{H}_1[\phi, \Omega, A] = -h \mathcal{N}_1[\phi, \Omega, A] = 0, \quad (6.12)$$

por lo tanto, $x_P(t) = \phi(t, 1)$, $\omega = \Omega(1)$ y $a = A(1)$ serán solución de la ecuación (6.8). Para hallar las funciones ϕ , Ω y A consideramos las siguientes expansiones en series

$$\phi(t, q) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t)q^k, \quad \Omega(q) = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k q^k \quad y \quad A(q) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k q^k. \quad (6.13)$$

Reemplazando estas series en $\mathcal{H}_q[\phi, \Omega, A] = 0$, y evaluando en $q = 0$ las derivadas k -ésimas respecto de q obtenemos las ecuaciones diferenciales

$$\mathcal{L}[x_k(t) - x_{k-1}(t) + \delta_{1k}x_0(t)] = \frac{h}{(k-1)!} \left. \frac{\partial^{k-1} \mathcal{N}_q[\phi, \Omega, A]}{\partial q^{k-1}} \right|_{q=0}, \quad (6.14)$$

con condiciones iniciales $x_k(0) = x'_k(0) = 0$ para $k \geq 1$.

Considerando que se debe cumplir $x_0(0) = 1$ y $x'_0(0) = 0$, elegimos la aproximación inicial $x_0(t) = \cos t$. Reemplazando en (6.14) para $k = 1$ tenemos

$$x''_1(t) + x_1(t) = h(-a_0\omega_0^2 \cos t + g(\hat{x} + a_0 \cos t, \beta) - \gamma f(a_0(\cos t - \cos(t - \omega_0\tau)))), \quad (6.15)$$

siendo las condiciones iniciales $x_1(0) = x'_1(0) = 0$. Suponemos $a_0 \neq 0$, ya que en caso contrario se anula el lado derecho de la ecuación anterior.

En este caso, la solución x_1 será periódica si los coeficientes de $\sin t$ y $\cos t$ en el término de la derecha de (6.15) son iguales a cero. Luego, ω_0 y a_0 deben ser solución del siguiente sistema no lineal de ecuaciones

$$-a_0\omega_0^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\hat{x} + a_0 \cos t, \beta) \cos t dt - \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0(\cos t - \cos(t - \omega_0\tau))) \cos t dt = 0, \quad (6.16a)$$

$$-\frac{\gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0(\cos t - \cos(t - \omega_0\tau))) \sin t dt = 0. \quad (6.16b)$$

Dado que $g(\hat{x} + a_0 \cos t, \beta)$ es par, en el coeficiente de $\sin t$ sólo está presente la función f . Como demostramos en el capítulo 3, las ecuaciones anteriores se reducen a las ecuaciones de bifurcación (6.4) en el límite $a_0 \rightarrow 0$.

Si $k \geq 2$, el sistema obtenido es lineal y permite calcular fácilmente ω_{k-1} y a_{k-1} . Para cada valor de k , una vez resuelto el sistema correspondiente, calculamos x_k , el procedimiento se repite hasta el orden deseado. Por último, utilizando las h -curvas para fijar un valor del parámetro h adecuado obtenemos la aproximación de la solución buscada.

Calculamos usando el sistema (6.16), la semilla para generar cada desarrollo con HAM. El siguiente lema está relacionado con la determinación del valor inicial ω_0 en el tipo de ecuaciones con retardo consideradas.

Lema 19. *Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ analítica con $f'(0) \neq 0$ y $a_0 \neq 0$, suficientemente pequeño. Entonces se cumple*

$$\int_0^{2\pi} f(a_0(\cos t - \cos(t - \omega_0\tau))) \sin t dt = 0 \quad (6.17)$$

si y solo si $\omega_0\tau = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Si $\omega_0\tau = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$f(a_0(\cos t - \cos(t - \omega_0\tau))) = f(a_0(1 - (-1)^m \cos t)),$$

de donde se sigue que la integral (6.17) es 0.

Para probar la otra implicación, consideremos la serie de potencias de la función analítica f

$$f(a_0(\cos t - \cos(t - \omega_0\tau))) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (a_0(\cos t - \cos(t - \omega_0\tau)))^n. \quad (6.18)$$

Reemplazando esta expresión en (6.17) tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} a_0^n \int_0^{2\pi} (\cos t - \cos(t - \omega_0 \tau))^n \sin t \, dt = 0 \quad (6.19)$$

Si n es par la integral anterior se anula. Si $n = 2k + 1$ podemos probar que la integral toma el valor $-\binom{2k+1}{k+1} \sin(\omega_0 \tau) \sin(\omega_0 \tau / 2)^{2k}$. Luego, la ecuación (6.17) resulta

$$-\sin(\omega_0 \tau) a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(k+1)! k!} \left(a_0 \sin\left(\frac{\omega_0 \tau}{2}\right) \right)^{2k} = 0. \quad (6.20)$$

Para valores de a_0 suficientemente pequeños la serie en la ecuación anterior no se anula, ya que $f'(0) \neq 0$ y la serie converge uniformemente en un intervalo que contienen al origen. Por lo tanto, como $a_0 \neq 0$ resulta $\omega_0 \tau = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. \square

Consideramos los ciclos que surgen de un punto μ_0 de bifurcación de Hopf. El lema anterior implica que para una amplitud inicial a_0 suficientemente pequeña la frecuencia inicial ω_0 sólo depende del retardo τ y de la rama de bifurcación elegida. De lo anterior tenemos que, para amplitudes iniciales pequeñas, ω_0 coincide con la frecuencia ω_{μ_0} en el punto de bifurcación.

En el siguiente lema demostramos algunas características especiales que presentan las series construidas con el HAM.

Lema 20. *Consideremos el sistema de (infinitas) ecuaciones lineales (6.14), con condiciones iniciales $x_0(0) = 1$, $x'_0(0) = 0$ y $x_k(0) = x'_k(0) = 0$ para todo $k \geq 1$. En estas ecuaciones \mathcal{L} es el operador lineal (6.10), \mathcal{N} está dado por la expresión (6.11), y ϕ , Ω y A son las series (6.13). Supongamos que f es analítica y g es C^1 . Supongamos además que $f'(0) \neq 0$. Entonces tomando $x_0(t) = \cos t$, imponiendo la anulacón de los términos correspondientes al primer armónico en el miembro de la derecha de las ecuaciones (6.14) y suponiendo que el valor a_0 inicial es suficientemente pequeño resulta que todas las sucesivas soluciones x_k que se obtiene son suma de cosenos, y $\omega_k = 0$ para todo $k \geq 1$.*

Demostración. Si $x_0(t) = \cos t$, tenemos el sistema de condiciones (6.16) para hallar ω_0 y a_0 . de acuerdo al lema anterior para a_0 pequeño resulta $\omega_0 \tau = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Luego, $x_0(t - \omega_0 \tau) = (-1)^m \cos t$. Se sigue que

$$\mathcal{N}_0[\phi] = -a_0 \omega_0^2 \cos t + g(\hat{x} + a_0 \cos t, \beta) - \gamma f(a_0(\cos t - (-1)^m \cos(t))).$$

Podemos expresar $\mathcal{N}_0[\phi]$ como suma de cosenos, dependiendo de la no linealidad de f puede ser una suma finita o infinita. Entonces, resolviendo la ecuación diferencial (6.15) resulta que x_1 es de la forma

$$x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^{\infty} b_k \cos kt,$$

pero $x_1(0) = x'_1(0) = 0$, por lo tanto $c_2 = 0$, y así x_1 es suma de cosenos. Observemos que también lo son las funciones $x_1(t - m\pi)$ y $x''_1(t)$, esto será útil más adelante.

Veamos que $\omega_1 = 0$. La condición para hallar ω_1 viene de considerar los coeficientes de $\cos t$ y $\sin t$ de

$$\left. \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial q} \right|_{q=0} = a_1 \omega_0^2 x_0''(t) + 2a_0 \omega_0 \omega_1 x_0''(t) + a_0 \omega_0^2 x_1''(t) + (a_1 x_0(t) + a_0 x_1(t)) \frac{\partial g}{\partial x}(\hat{x} + a_0 x_0(t), \beta) - \gamma \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q=0}. \quad (6.21)$$

Debido a la paridad de x_0 y x_1 el término que contiene $\sin t$ se encuentra en

$$\left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q=0} = f'(a_0(x_0(t) - x_0(t - \omega_0 \tau)))(a_0 x_1(t) + a_1 x_0(t) - a_0 x_1(t - \omega_0 \tau) - a_1 x_0(t - \omega_0 \tau) + a_0 \omega_1 \tau x_0'(t - \omega_0 \tau)), \quad (6.22)$$

los demás términos son sumas de cosenos. Reemplazando x_0 y ω_0 obtenemos

$$\left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q=0} = f'(a_0(1 - (-1)^m \cos t))(a_0 x_1(t) + a_1 \cos t - a_0 x_1(t - m\pi) - a_1(-1)^m \cos t - a_0 \omega_1 \tau (-1)^m \sin t), \quad (6.23)$$

En particular, la condición de que el coeficiente de $\sin t$ se anule es

$$\frac{1}{2} a_0 \omega_1 \tau \gamma (-1)^m \int_0^{2\pi} f'(a_0(1 - (-1)^m \cos(t))) \sin^2 t dt = 0. \quad (6.24)$$

Puede probarse que la integral en la ecuación anterior es

$$2\pi f'(0) + 2\pi a_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n} a_0^{2(n-1)} f^{(2n)}(0) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{3}{2}\right)_n}{(1)_{2n+2} (1)_{2n}}, \quad (6.25)$$

donde hemos usado los símbolos de Pochhammer $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$. Por lo tanto, como $f'(0) \neq 0$ resulta que para a_0 suficientemente pequeño la integral en (6.24) es no nula, de donde se sigue que $\omega_1 = 0$. Una vez más, resolviendo la ecuación (6.14), esta vez para $k = 2$ y tomando en cuenta las condiciones iniciales deducimos que el término x_2 es suma de cosenos.

Supongamos que $\omega_k = 0$ para $1 \leq k \leq n-1$ y x_k es suma de cosenos para $1 \leq k \leq n$.

Veamos que $\omega_n = 0$. Como en el caso $n = 1$, consideremos los coeficientes $\cos t$ y $\sin t$ de $\partial^n \mathcal{N} / \partial q^n |_{q=0}$. El término que contiene $\sin t$ se encuentra en

$$\left. \frac{\partial^n f}{\partial q^n} \right|_{q=0} = \sum_{\mathbf{m}} \frac{n! f^{(m_1+\dots+m_n)}(a_0(1 - (-1)^m \cos t))}{m_1! m_2! \dots m_n!} \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{j!} \left. \frac{\partial^j (A\phi - A\phi_{\Omega\tau})}{\partial q^j} \right|_{q=0} \right)^{m_j}, \quad (6.26)$$

donde la suma se realiza sobre todas las n -uplas $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ tales que $1m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n$ (fórmula de Faà di Bruno).

En las derivadas de cualquier orden de $A\phi$ respecto de q evaluadas en $q = 0$, sólo intervienen los términos x_k , $0 \leq k \leq n$, por lo tanto estas derivadas no aportan términos que contengan $\sin t$. Si escribimos $\omega = \omega_0 + \sum_{k=n}^{\infty} \omega_k q^k$, las derivadas de $A\phi_{\Omega\tau}$ son de la forma

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^j (A\phi_{\Omega\tau})}{\partial q^j} \right|_{q=0} &= j! \sum_{m=0}^j a_{j-m} x_m(t - \omega_0\tau), & \text{si } 1 \leq j < n \\ \left. \frac{\partial^n (A\phi_{\Omega\tau})}{\partial q^n} \right|_{q=0} &= n! \sum_{m=0}^n a_{n-m} x_m(t - \omega_0\tau) - n! a_0 \omega_n \tau x'_0(t - \omega_0\tau). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Luego, en (6.26) el único término que contiene $\sin t$ es el que contiene la derivada n -ésima de $A\phi_{\Omega\tau}$ respecto de q , que corresponde al caso $m_i = 0$, $i \neq n$ y $m_n = 1$. Luego obtenemos la condición

$$\frac{1}{2} n! a_0 \omega_n \tau \gamma (-1)^m \int_0^{2\pi} f'(a_0(1 - (-1)^m) \cos t) \sin^2 t dt = 0, \quad (6.28)$$

de donde, análogamente al caso de la ecuación (6.24), se sigue $\omega_n = 0$. \square

Observación 21. La condición de que a_0 sea suficientemente pequeño se cumple en un entorno de una bifurcación de Hopf. En el caso en que f sea lineal los lemas anteriores son válidos para cualquier valor de a_0 .

Usando el lema anterior para valores del parámetro de bifurcación en entornos de un punto de bifurcaciones de Hopf μ_0 del sistema original (6.2), probamos directamente el siguiente teorema.

Teorema 22. *Consideremos la ecuación diferencial (6.2) con $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ analítica y $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , $\gamma \neq 0$ y $\tau > 0$. Supongamos que la ecuación presenta una bifurcación de Hopf en el valor μ_0 (μ es el parámetro de bifurcación: β o γ) y que $f'(0) \neq 0$. Supongamos además que para algún valor de h las series obtenidas con HAM para las soluciones periódicas son convergentes. Entonces, en un entorno de la bifurcación, los ciclos emergentes son isocrónicos. Además, la frecuencia de estas soluciones coincide con la frecuencia en el punto de bifurcación ω_{μ_0} .*

Observación 23. Si la solución periódica existe, en el caso m par, el retardo τ es múltiplo del período de la misma. En teoría de control esta situación es conocida como esquema de control no invasivo, utilizado para la estabilización de ciclos [39].

6.3. Ejemplos

6.3.1. Oscilador anarmónico

Consideremos la ecuación

$$x'' + x + \beta x^3 = \gamma(x - x_\tau), \quad (6.29)$$

correspondiente a un oscilador anarmónico al que se le ha agregado un término retardado.

En este caso $g(x, \beta) = x + \beta x^3$, y $f(x - x_\tau) = x - x_\tau$. El punto $\hat{x} = 0$ es equilibrio del sistema para todo valor de β . Si $\beta < 0$ existen además otros dos equilibrios $\hat{x} = \pm\sqrt{-1/\beta}$.

Estudiamos sólo las órbitas alrededor de $\hat{x} = 0$. La ecuación de bifurcación (6.3) para este equilibrio no depende de β . Es por esto que consideramos a la ganancia γ como parámetro de bifurcación. Para $\tau > 0$ fijo, sea $\gamma_0 = (\tau^2 - (2n + 1)^2\pi^2)/(2\tau^2)$, con $n \in \mathbb{N}$. Existe una bifurcación de Hopf en los puntos así definidos si $\gamma_0 \neq 0$. La frecuencia en el punto de bifurcación es $\omega_{\gamma_0} = \sqrt{1 - 2\gamma_0}$.

Utilizamos el HAM desarrollado anteriormente para hallar las soluciones periódicas que surgen a partir de los puntos de bifurcación de Hopf. Como f es una función lineal, se verifican las condiciones del teorema 22 para todo valor de a_0 . Por lo tanto, las expresiones de las soluciones periódicas que surgen de un punto de bifurcación γ_0 , tienen frecuencia $\omega = \sqrt{1 - 2\gamma_0} = (2n + 1)\pi/\tau$.

Las ecuaciones (6.16) para determinar las condiciones iniciales resultan

$$1 - \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta a_0^2 - \gamma + \gamma \cos \omega_0 \tau = 0, \quad (6.30)$$

$$\gamma \sin \omega_0 \tau = 0. \quad (6.31)$$

Resolviendo el sistema anterior en entornos de los puntos de Hopf existentes obtenemos $\omega_0 = (2n + 1)\pi/\tau$, y

$$a_0 = \sqrt{\frac{4}{3\beta}(\omega_0^2 - 1 + 2\gamma)} = \sqrt{\frac{4}{3\beta} \left(\left(\frac{(2n + 1)\pi}{\tau} \right)^2 - 1 + 2\gamma \right)}. \quad (6.32)$$

Luego, existirá a_0 si $\beta > 0$ y $\gamma > \gamma_0$, o $\beta < 0$ y $\gamma < \gamma_0$. En caso de que las soluciones halladas con HAM sean convergentes, existirán en las regiones mencionadas del plano γ - τ , a la derecha (izquierda) de las curvas de Hopf si $\beta > 0$ ($\beta < 0$). Esta información junto con la estabilidad del equilibrio permite determinar la estabilidad de las soluciones halladas. Cuando el parámetro continúa variando la estabilidad puede cambiar debido a una bifurcación de ciclos o a fenómenos globales.

En la figura 6.1 consideramos $\beta < 0$, sombreamos la región del plano γ - τ en que el equilibrio trivial es estable. Graficamos además las curvas de Hopf, en línea continua los puntos correspondientes a bifurcaciones supercríticas (el ciclo que surge es estable) y en línea punteada los correspondientes a bifurcaciones subcríticas. Los resultados fueron corroborados con el paquete DDE-Biftool. Fijando $\beta = -1$ y $\tau = 2,5$, calculamos un punto de Hopf en $\gamma_0 \approx -0,289568$ (punto negro en la figura 6.1). Para varios valores del parámetro $\gamma < \gamma_0$ mostramos los perfiles de las soluciones con orden 10, observamos claramente la isocronía de las mismas. Graficamos también para una de las soluciones, correspondiente a $\gamma = -1$, los polinomios en la variable h mencionados al final de la sección 3.3.

En la figura 6.1 mostramos además los puntos $\tau = 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, que resultan de considerar k par. En estos puntos existe un par de autovalores complejos conjugados $\pm i$ pero se anula la derivada en (6.7). El sistema de condiciones iniciales tiene como solución los valores $\omega_0 = 1$ y $a_0 = 0$, y por lo tanto no es posible aplicar el HAM como fue desarrollado en la sección anterior.

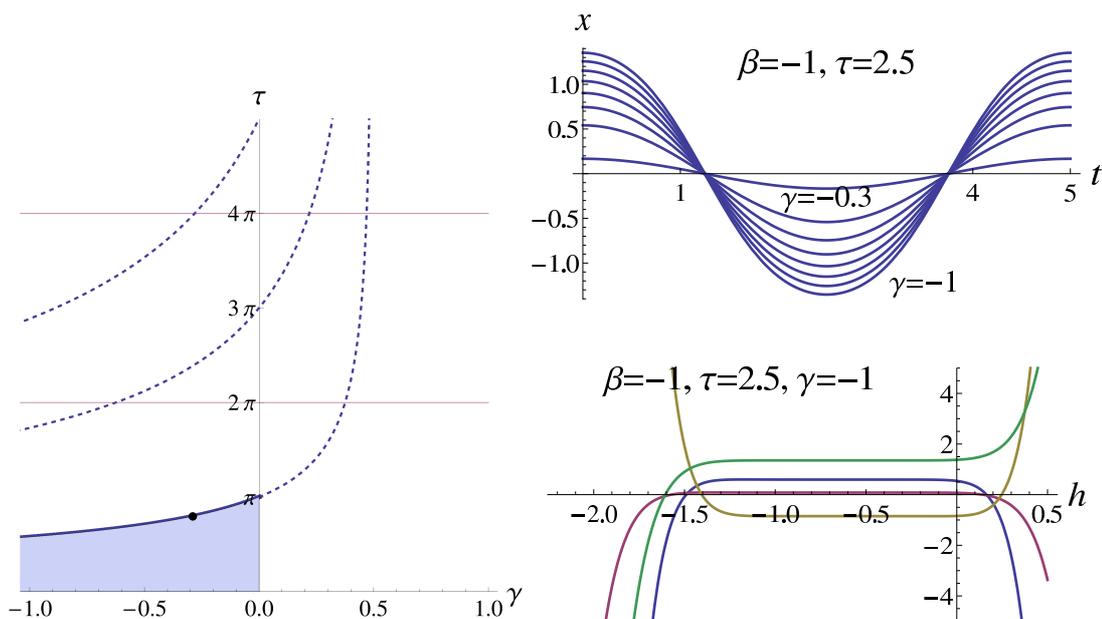


Figura 6.1: Izquierda: puntos en que existe bifurcación de Hopf supercrítica (—) y subcrítica (---). Derecha arriba: perfiles a partir del punto de Hopf con $\tau = 2,5$ indicado en la figura de la izquierda. Derecha abajo: algunos polinomios en h del ciclo existente para $\beta = -1$, $\tau = 2,5$ y $\gamma = -1$.

6.3.2. Péndulo rotatorio con retardo

Consideremos un péndulo de masa m y longitud l restringido a oscilar en un plano que gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular constante ω_r . Sea x la desviación angular del péndulo de la vertical. El Lagrangiano del sistema resulta

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m(l^2(\dot{x}')^2 + \omega_r^2 l^2 \sin^2 x) + mgl \cos x. \quad (6.33)$$

La ecuación de Euler–Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad (6.34)$$

permite obtener la siguiente ecuación de movimiento

$$x'' + \left(\frac{g}{l} - \omega_r^2 \cos x \right) \sin x = 0.$$

Realizando una normalización en el tiempo obtenemos

$$x'' + (\beta - \cos x) \sin x = 0, \quad (6.35)$$

donde $\beta = g/(l\omega_r^2)$. El comportamiento del péndulo de la ecuación anterior es bien conocido [34]. Si $\beta > 1$ existen dos equilibrios $\hat{x} = 0$ y $\hat{x} = \pi$, correspondientes al péndulo el reposo y al péndulo invertido, respectivamente. Si $0 < \beta < 1$, existe un tercer equilibrio $\hat{x} = \arccos \beta$, que es un centro, es decir, existe una familia de órbitas cerradas alrededor de este equilibrio.

Si consideramos la siguiente función $f(x - x_\tau) = \text{sen}(x - x_\tau)$, obtenemos la ecuación

$$x'' + (\beta - \cos x) \text{sen } x = \gamma \text{sen}(x - x_\tau), \quad (6.36)$$

con $\gamma \in \mathbb{R}$. Podemos interpretar esta realimentación como un torque que actúa sobre el pivote. El torque es siempre perpendicular al plano en que oscila el péndulo.

6.3.2.1. Bifurcaciones de Hopf

Los equilibrios del sistema son las soluciones de la ecuación

$$(\beta - \cos \hat{x}) \text{sen } \hat{x} = 0, \quad (6.37)$$

con $\hat{x} \in [0, \pi]$. Por lo tanto, el péndulo con retardo (6.36) tiene los mismos equilibrios que (6.35). La condición necesaria para la existencia de una bifurcación estática ($s = 0$) resulta $\beta \cos \hat{x} - 2(\cos \hat{x})^2 + 1 = 0$. Considerando el equilibrio trivial esta condición se verifica si $\beta = 1$, lo que coincide con el cambio en la cantidad de equilibrios mencionado antes.

Estudiamos a continuación las soluciones oscilatorias asociadas al equilibrio no trivial $\hat{x} = \arccos \beta$, tomando γ como parámetro de bifurcación, (en el capítulo siguiente consideraremos β como parámetro).

Los puntos solución del sistema (6.4) son de la forma

$$\gamma_0 = \frac{\tau^2(1 - \beta^2) - n^2\pi^2}{\tau^2(1 - (-1)^n)}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (6.38)$$

siendo la frecuencia en esos puntos $\omega_{\gamma_0} = \sqrt{1 - \beta^2 + \gamma_0((-1)^n - 1)}$, $n \in \mathbb{Z}$. La derivada en (6.7) no se anula si n es impar y $\gamma \neq 0$, en tales casos el sistema presenta una bifurcación de Hopf en γ_0 . Considerando τ variable, los puntos en (6.38) los podemos representar como curvas en el espacio γ - τ . Los distintos valores de n definen distintas curvas que pueden intersectarse dando lugar a posibles puntos de Hopf doble.

Mediante un cambio de coordenadas en la ecuación (6.36) trasladamos el origen a \hat{x} , y utilizamos el HAM descrito anteriormente para analizar las posibles soluciones periódicas de la ecuación. Supongamos que existe una solución periódica de la ecuación con frecuencia ω y amplitud a , la ecuación normalizada resulta

$$a\omega^2 \ddot{x} + (\beta - \cos(\hat{x} + ax)) \text{sen}(\hat{x} + ax) = \gamma \text{sen } a(x - x_{\omega\tau}). \quad (6.39)$$

En este caso, las condiciones iniciales (6.16) resultan

$$\begin{aligned} -a_0\omega_0^2 + 2\beta^2 J_1(a_0) + (1 - 2\beta^2) J_1(2a_0) - \\ 2\gamma \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(\eta) (J_{2n}(\zeta) + J_{2n+2}(\zeta)) = 0, \\ \gamma \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(\zeta) (J_{2n}(\eta) + J_{2n+2}(\eta)) = 0, \end{aligned} \quad (6.40)$$

donde $\eta = a_0(1 - \cos(\omega_0\tau))$ y $\zeta = a_0 \text{sen}(\omega_0\tau)$. Obtuvimos las ecuaciones anteriores usando las expresiones de Jacobi-Anger (dadas en el capítulo 4) para la composición de funciones trigonométricas.

A pesar de la complejidad del sistema considerado, se verifican las condiciones del teorema 22. Luego, dado un punto γ_0 de bifurcación de Hopf, si las series obtenidas con HAM son convergentes, es posible asegurar la isocronía de las soluciones periódicas asociadas con esa bifurcación para valores de γ en un entorno de γ_0 .

En la figura 6.2 mostramos los máximos (en la variable original x) de las soluciones periódicas que surgen de puntos de Hopf, junto con las soluciones numéricas obtenidas con DDE-Biftool. En la figura de la izquierda consideramos el valor $\beta = 0,5$ y $\tau = 2$ mientras que en la derecha utilizamos $\beta = 0,3$ y $\tau = 7$. En la figura 6.3 mostramos los perfiles de varias de las soluciones para los dos casos considerados antes.

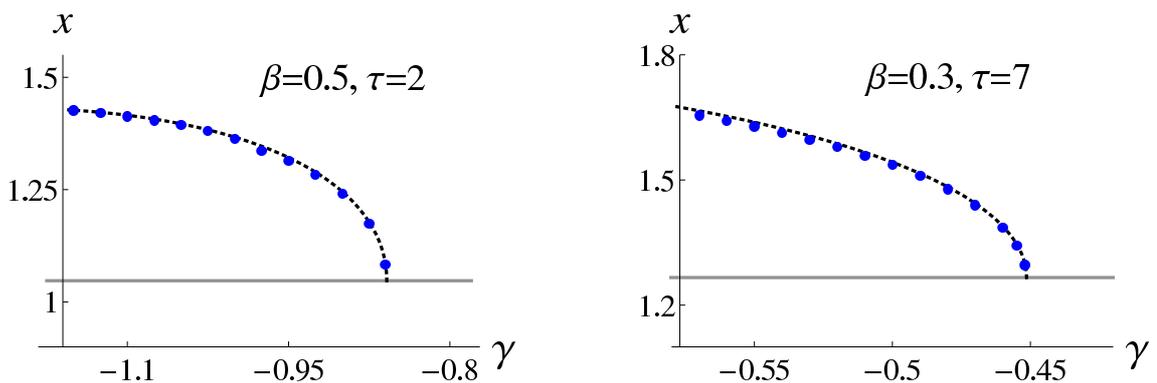


Figura 6.2: Máximo de los ciclos: HAM (\cdots) y DDE-Biftool ($---$). Izquierda: $\beta = 0,5$ y $\tau = 2$. Derecha: $\beta = 0,3$ y $\tau = 7$.

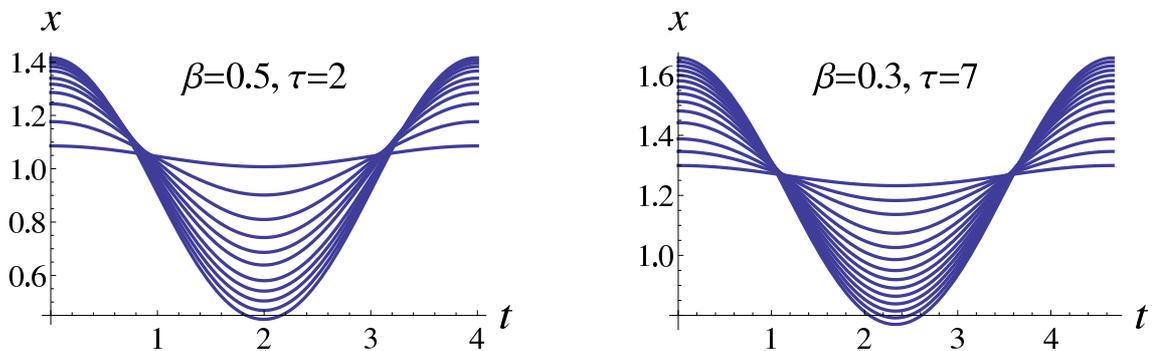


Figura 6.3: Izquierda: Perfiles soluciones HAM para $\beta = 0,5$ y $\tau = 2$. Derecha: Perfiles para $\beta = 0,3$ y $\tau = 7$.

6.3.3. Más resonancias

El péndulo rotatorio analizado en la subsección anterior presenta además de la isocronía, otros comportamientos muy interesantes.

Como mencionamos, los posibles puntos de Hopf están dados por las curvas (6.38), si esas curvas se intersectan se verifica una condición necesaria para la existencia de bifurcación de Hopf doble. Podemos probar que las intersecciones existen

para valores de k_1 y k_2 con distinta paridad, y en esos puntos se verifica

$$(1 - \beta^2)(k_1^2 - k_2^2) = \gamma((1 - (-1)^{k_2})k_1^2 - (1 - (-1)^{k_1})k_2^2). \quad (6.41)$$

Cada punto intersección tiene dos frecuencias ω_{k_1} y ω_{k_2} asociadas

$$\omega_{k_i} = \sqrt{1 - \beta^2 + \gamma((-1)^{k_i} - 1)}. \quad (6.42)$$

Las frecuencias verifican $\omega_{k_1}/\omega_{k_2} = k_1/k_2$. Considerando γ como parámetro de bifurcación la derivada en (6.7) se anula si k es par. Por lo tanto, no podemos asegurar que el sistema presenta bifurcaciones de Hopf doble resonante, sin embargo, para valores de los parámetros cercanos a esos puntos observamos comportamientos de las soluciones periódicas asociados a ese tipo de bifurcación.

Como un ejemplo, consideremos el valor $\beta = 0,3$. Existe una intersección de las curvas (6.38) para $k_1 = 2$ y $k_2 = 3$ en el punto $(\gamma, \tau) = (-(1 - \beta^2)5/8, 2\pi/(1 - \beta^2)) = (-0,56875, 6,9046)$, allí se verifica que el cociente de las frecuencias iniciales es $2/3$. Fijemos un valor del retardo cercano al punto hallado, por ejemplo $\tau = 7$. En la figura 6.4 a) mostramos las amplitudes de los ciclos existentes al variar γ , indicamos la estabilidad de los ciclos calculada utilizando el método de colocación de Chebyshev. Los resultados coinciden con los obtenidos utilizando DDE-Biftool. Al observar los multiplicadores de Floquet (figura 6.4 b)), se sigue que los ciclos sufren una bifurcación Neimark–Sacker resonante 1:3, esto es, al variar el parámetro γ el ciclo pierde su estabilidad cuando un par de multiplicadores cruzan el círculo unidad a través de $e^{\pm i2/3\pi}$, tal resonancia está asociada a la existencia de ciclos de período tres. En la figura 6.4 c), graficamos en el espacio $x-x'-x_\tau$ (llamado espacio de pseudofase) la solución inestable hallada con HAM y el ciclo de período 3 estable que lo rodea calculado numéricamente, para el valor $\gamma = -0,505$.

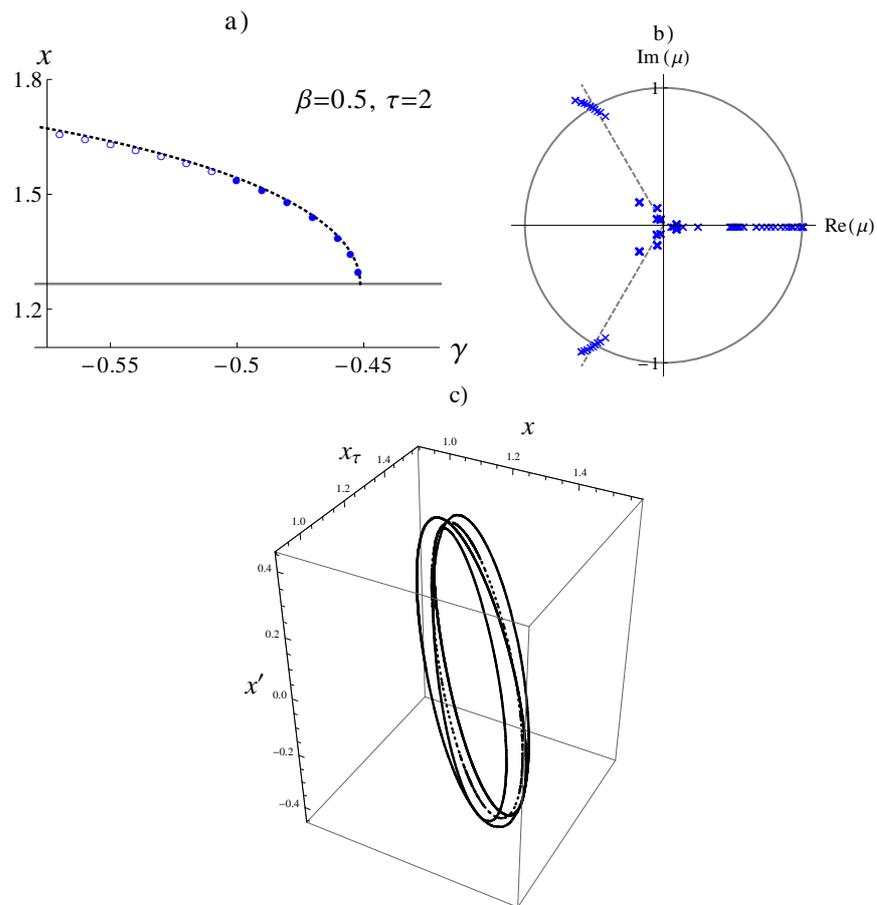


Figura 6.4: a) Maximo de los ciclos para $\beta = 0,3$, $\tau = 7$: HAM (\cdots) y DDE-Biftool ($- -$). b) Multiplicadores de los ciclos mostrados en a). c) Ciclo inestable ($- -$) y ciclo de período 3 estable ($-$) fijando $\gamma = -0,505$.

Método en el dominio frecuencia. Ciclos locales en EDRs

7.1. Introducción

En este capítulo proponemos un resultado cuya demostración provee una metodología que permite estudiar los ciclos locales en sistemas con retardo. El enfoque está basado en el denominado Teorema Gráfico de Hopf [57, 58, 59], utilizado para determinar oscilaciones locales en sistemas de EDOs o de EDRs, considerándolos como sistemas realimentados.

El método original en el dominio frecuencia permite determinar la dirección y estabilidad de las soluciones periódicas utilizando el criterio de Nyquist y el Teorema Gráfico de Hopf, ver [56]. Los resultados generales y el lenguaje formal que se utilizan en el método se encuentran desarrollados con detalle en el libro de Mees [56]. En ese libro se detallan además las ventajas de considerar los problemas como sistemas realimentados, sin importar el origen de los mismos, ya sea cuando el problema se relaciona o no con el diseño de controladores o si fue originalmente dado como un conjunto de ecuaciones diferenciales.

En sus distintas versiones el método en frecuencia combina la teoría de control realimentado, el método de balance de armónicos y el criterio de estabilidad generalizado de Nyquist. La implementación de estas técnicas hacen que sea un método muy utilizado y de interés para ingenieros que están naturalmente familiarizados con el lenguaje de la teoría de control.

Los resultados obtenidos utilizando la metodología en el dominio frecuencia para la determinación de existencia de soluciones oscilatorias locales en sistemas con retardo, fue presentado originalmente en el libro de Moiola y Chen [59], considerando dos tipos de no linealidades particulares. Luego, la metodología se aplicó y extendió a distintos casos [38] y finalmente se reformuló abarcando la versión para EDRs más general en [29]. La metodología fue aplicada en interesantes modelos donde se obtuvieron muy buenos resultados utilizando balances de orden 2. En el trabajo de Gentile [29], para mejorar la aproximación de las soluciones periódicas, se propone utilizar balances de mayor orden, utilizando extensas fórmulas desarrolladas hasta el orden 8 en [59].

Motivados por la eficacia mostrada al aplicar los resultados existentes en numerosas aplicaciones y los resultados desarrollados para EDOs en [76], creímos necesario contar con una metodología de tipo *algorítmica iterativa* que pueda implementarse

con paquetes de cálculo simbólico. Para ello, consideramos un balance de orden n que conjuntamente con la definición de proyecciones adecuadas conforman un método de reducción. A partir de esto obtenemos un procedimiento algorítmico que permite encontrar los coeficientes de una ecuación de bifurcación de soluciones periódicas de orden n .

La metodología propuesta en este capítulo consiste en reescribir la EDR de manera conveniente como un sistema lineal de entrada-salida, expresado como una función de transferencia y realimentado con una función no lineal. Luego utilizar técnicas de balance de armónicos y métodos de reducción para encontrar una ecuación de orden n , que determine la bifurcación local de órbitas periódicas que surgen de un equilibrio.

Por último analizamos la ecuación de bifurcación de ciclos locales obtenida utilizando diferenciación implícita y teoría de singularidades [32], lo cual nos permitirá clasificar distintos tipos de bifurcaciones de ciclos. Determinamos finalmente una pintura detallada de la dinámica local alrededor de un equilibrio, esto es, caracterizamos regiones en el espacio de parámetros en el que existen o no ciclos locales, o multiplicidad de ellos.

En la sección 7.2, con el objeto de estudiar la bifurcación de ciclos reformulamos de forma conveniente el sistema con retardo como un sistema de entrada-salida e introducimos una nueva función de transferencia lineal. Enunciamos el primer resultado obtenido para sistemas con retardo, presentando el lenguaje formal que será utilizado a lo largo del capítulo y la aplicación del método en frecuencia en forma originaria. En la sección 7.3 demostramos el resultado principal del capítulo, a partir del cual obtenemos una ecuación de bifurcación de orden arbitrario para un sistema con retardo general. Además, presentamos el algoritmo que se desprende de la demostración del resultado, y a continuación, utilizando teoría de singularidades analizamos distintas condiciones para determinar algunas bifurcaciones de Hopf degeneradas.

En la sección 7.4 estudiamos tres importantes ejemplos que muestran la potencia de la metodología propuesta. En el primer ejemplo consideramos la ecuación del péndulo rotatorio con retardo planteada en el capítulo anterior donde observamos la isocronía de los ciclos. En el segundo ejemplo analizamos una ecuación de primer orden que presenta una bifurcación de tipo Bautin, y en el tercer ejemplo determinamos la existencia de múltiples ciclos y su interacción al variar los parámetros en un entorno de una bifurcación de Hopf generalizada.

7.2. Sistemas retardados en el dominio frecuencia

Consideremos un sistema autónomo no lineal n -dimensional de la forma

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau), \mu), \quad (7.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $x' = dx/dt$, $\tau > 0$ representa un retardo en el tiempo, $\mu \in \mathbb{R}$ es el parámetro de bifurcación y $f : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función no lineal C^k con $k > 3$. Pueden existir más parámetros que llamaremos auxiliares.

Utilizando una representación entrada-salida escribimos la ecuación anterior co-

mo un sistema realimentado de n ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} x'(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + B g(y(t), y(t - \tau), \mu) \\ y(t) &= -Cx(t) \end{cases}, \quad (7.2)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $A_{0,1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y la función $g : \mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ definida de manera que

$$f(x(t), x(t - \tau), \mu) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + B g(-Cx(t), -Cx(t - \tau), \mu). \quad (7.3)$$

Aquí, el valor de g representa una variable de entrada que depende de la variable de salida $y \in \mathbb{R}^m$ y del parámetro de bifurcación μ . En general $m \leq n$, luego la salida puede descartar cierta parte de la información y reducir considerablemente la dimensión del sistema facilitando su estudio.

Aplicando transformada de Laplace al sistema anterior y descartando los efectos de condiciones iniciales, obtenemos el siguiente problema planteado en el dominio frecuencia

$$\mathcal{L}[y(t)](s) = -G(s, \mu) \mathcal{L}[g(y(t), y(t - \tau), \mu)](s), \quad (7.4)$$

siendo G una matriz de orden $m \times p$ definida como

$$G(s, \mu) = C(sI - A_0 - A_1 e^{-s\tau})^{-1} B. \quad (7.5)$$

G es la función de transferencia asociada a la realización (A_0, A_1, B, C) . En el caso en que $m = p$ se debe cumplir que esta matriz sea inversible cuando $s = 0$. Usando esta representación la variable de estado x es suprimida y la ecuación que resulta describe el sistema sólo en función de la entrada y la salida. Esto presenta muchas ventajas cuando el espacio de estados es de gran dimensión pero sólo existen pocas entradas y salidas. El problema pensado como un sistema realimentado es un problema de punto fijo [56].

Observación 24. Existe más de una realización asociada a cada sistema. Para poder asegurar que el comportamiento dinámico del sistema original (7.1) y el sistema realimentado (7.2) es el mismo la realización debe ser controlable y observable, es decir, debe ser minimal. La controlabilidad y observabilidad de los sistemas con retardo es bastante más difícil que su contraparte en dimensión finita. Varias propiedades de controlabilidad y observabilidad no equivalentes pueden ser definidas dependiendo del tipo de representación utilizado para modelar el sistema estudiado [60, 72].

Observación 25. La función g contiene la no linealidad del sistema y también puede contener términos lineales relacionados con las distintas realizaciones.

Los equilibrios \hat{y} del sistema (7.2) verifican la ecuación

$$\mathcal{L}[y](s) = -G(0, \mu) \mathcal{L}[g(y, y, \mu)](s),$$

que por unicidad de la antitransformada de Laplace resulta

$$y = -G(0, \mu)g(y, y, \mu). \quad (7.6)$$

Cada equilibrio constante \hat{x} del sistema (7.1) se corresponde con una solución \hat{y} de la ecuación anterior. Linealizando (7.4) alrededor del equilibrio \hat{y} se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y - \hat{y}](s) &= -G(s, \mu) \mathcal{L} \left[\frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(\hat{y}, \hat{y}, \mu)} (y - \hat{y}) + \frac{\partial g}{\partial y_\tau} \Big|_{(\hat{y}, \hat{y}, \mu)} (y_\tau - \hat{y}) \right] (s) \\ &= -G(s, \mu) \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y_\tau} e^{-s\tau} \right) \Big|_{(\hat{y}, \hat{y}, \mu)} \mathcal{L}[y - \hat{y}](s), \end{aligned} \quad (7.7)$$

donde para simplificar la notación llamamos y_τ a la segunda variable de la función g . A partir de la ecuación anterior tenemos la siguiente definición.

Definición 26. La matriz de orden $m \times m$ dada por

$$GJ(s, \mu) = G(s, \mu) \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y_\tau} e^{-s\tau} \right) \Big|_{(\hat{y}, \hat{y}, \mu)}, \quad (7.8)$$

es la función de transferencia lineal del sistema (7.2).

Considerando esta función de transferencia podemos utilizar la metodología en el dominio frecuencia para la búsqueda de soluciones periódicas del sistema original de manera análoga a lo desarrollado para EDOs [56, 59].

Observación 27. En [29] se presenta otra función de transferencia que es de mayor dimensión que la definida aquí, la reducción de la dimensión simplifica notablemente los cálculos en los que interviene esta matriz.

A partir de la función de transferencia se definen las funciones características $\lambda_1(s, \mu), \dots, \lambda_q(s, \mu)$, con $1 \leq q \leq m$, como las soluciones de

$$\det(\lambda I - GJ(s, \mu)) = 0. \quad (7.9)$$

La ecuación anterior podría no definir m funciones racionales, y en su lugar definir q funciones multivaluadas que pueden contener raíces de orden menor o igual a m . El siguiente resultado relaciona las raíces características del sistema original (en el dominio tiempo, definidas en el capítulo 1) con las funciones características recientemente definidas.

Lema 28. *Si una raíz de la ecuación característica del sistema no lineal (7.2) asociada al equilibrio \hat{x} toma el valor imaginario puro $i\omega_0$ cuando $\mu = \mu_0$, entonces el correspondiente autovalor de la matriz $GJ(s, \mu)$ (evaluada en \hat{y}) toma el valor -1 cuando $\mu = \mu_0$ y $s = i\omega_0$.*

Luego, la primer condición necesaria para que el sistema (7.2) exhiba una bifurcación de Hopf en $\mu = \mu_0$ con frecuencia crítica $\omega = \omega_0 \neq 0$, es que exista una raíz simple de $GJ(s, \mu)$, que en lo que sigue llamamos $\hat{\lambda}$, tal que $\hat{\lambda}(i\omega_0, \mu_0) = -1$. El lugar geométrico que describe este autovalor recibe el nombre de lugar geométrico característico.

7.2.1. Estudio de bifurcaciones de Hopf

A continuación enunciamos el Teorema Gráfico de Hopf para EDRs [59]. El teorema se basa en el análisis gráfico del comportamiento de un vector en el plano complejo (que será definido más adelante) y su relación con el lugar característico de $\hat{\lambda}$.

Teorema 29 (Moiola & Chen, 1996). *Sea \hat{y} un equilibrio localmente único del sistema*

$$\begin{cases} x'(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + B g(y(t), \mu) \\ y(t) = -Cx(t) \end{cases} . \quad (7.10)$$

Sea $\hat{\lambda}$ una función característica simple que toma el valor -1 cuando $\mu = \mu_0$ y $s = i\omega_0$. Supongamos que el vector $\xi_1(\omega, \mu)$ (definido más abajo) es distinto de cero en un entorno del punto (ω_0, μ_0) y la semirrecta con origen en -1 y con la dirección y sentido de ξ_1 , interseca por primera vez el contorno de $\hat{\lambda}$ en el punto

$$\tilde{P} = \hat{\lambda}(i\tilde{\omega}, \tilde{\mu}) = -1 + \xi_1(\tilde{\omega}, \tilde{\mu})\theta^2, \quad (7.11)$$

siendo $\theta = \theta(\tilde{\mu}) \geq 0$. Supongamos además que la intersección anterior es transversal, es decir

$$\begin{vmatrix} \operatorname{Re}(\xi_1) & \operatorname{Re}(\hat{\lambda}_\mu) \\ \operatorname{Im}(\xi_1) & \operatorname{Im}(\hat{\lambda}_\mu) \end{vmatrix}_{(\tilde{\omega}, \tilde{\mu})} \neq 0, \quad (7.12)$$

y que se verifica

$$\begin{vmatrix} \operatorname{Re}(\hat{\lambda}_\omega) & \operatorname{Re}(\hat{\lambda}_\mu) \\ \operatorname{Im}(\hat{\lambda}_\omega) & \operatorname{Im}(\hat{\lambda}_\mu) \end{vmatrix}_{(\omega_0, \mu_0)} \neq 0. \quad (7.13)$$

siendo $\hat{\lambda}_\omega = \partial\hat{\lambda}/\partial\omega$ y $\hat{\lambda}_\mu = \partial\hat{\lambda}/\partial\mu$. Por último, supongamos que en un entorno de \tilde{P} no existen otras intersecciones entre alguna función característica λ_i y la semirrecta que une -1 con \tilde{P} . Entonces, el sistema (7.10) tiene una solución periódica y de frecuencia $\omega = \tilde{\omega} + O(\theta^2)$, que es única en un entorno de radio $O(1)$ centrado en \hat{y} . Además, aplicando una pequeña perturbación alrededor del punto \tilde{P} y usando el criterio de estabilidad de Nyquist generalizado, se puede determinar la estabilidad de la solución periódica emergente.

Observación 30. El teorema anterior se puede extender fácilmente al caso en que la no linealidad dependa sólo del término retardado, ver [59]. La extensión al caso con no linealidad de la forma $g(y(t), y(t - \tau), \mu)$, se puede consultar en [29].

Supongamos que existe una raíz característica simple que toma el valor -1 cuando $\mu = \mu_0$ y $s = i\omega_0$, resumimos en la tabla 7.1 el cálculo del vector $\xi_1(\omega, \mu)$ para el sistema general (7.2). Luego, utilizando el método gráfico se calculan numéricamente (con métodos iterativos) valores aproximados de la frecuencia $\tilde{\omega}$ y amplitud $\theta(\tilde{\mu})$ que resuelven (7.11) para valores de $\tilde{\mu}$ cercanos a μ_0 .

Debido al criterio de Nyquist, la estabilidad de la solución periódica se puede determinar analizando el comportamiento del vector ξ_1 y su relación con el lugar característico de $\hat{\lambda}$ (tanto en el caso de EDOs o EDRs, [59]). Por otro lado, la estabilidad se puede determinar calculando el siguiente coeficiente a partir de (7.11)

$$\sigma_1 = -\operatorname{Re} \left(\frac{w^T G J(i\omega_0, \mu_0) p_1(\omega_0, \mu_0)}{w^T \frac{\partial}{\partial s} G J(s, \mu_0, \tau_0) \Big|_{s=i\omega_0} v} \right), \quad (7.14)$$

que se sigue del correspondiente coeficiente para EDOs calculado en [59].

El signo de este coeficiente junto con el cambio de estabilidad del equilibrio permite determinar la estabilidad del ciclo que emerge en la bifurcación de Hopf. Como un ejemplo, consideremos que para valores $\mu < \mu_0$ el equilibrio del sistema es estable y que es inestable cuando $\mu > \mu_0$. En ese caso, si $\sigma_1 < 0$ ($\sigma_1 > 0$), la bifurcación de Hopf es supercrítica (subcrítica), es decir, existe una solución periódica estable (inestable) cuando el equilibrio es inestable (estable).

Además, el método en frecuencia permite hallar aproximaciones cuasianalíticas de las soluciones periódicas que resultan de la bifurcación de Hopf. Se obtiene

$$\tilde{y}(t) = \hat{y} + \sum_{j=-2}^2 a_j e^{ij\omega t}, \quad (7.15)$$

siendo $a_0 = v_0\theta^2$, $a_1 = v\theta$, $a_2 = v_2\theta^2$ y $a_{-j} = \bar{a}_j$, $j = 1, 2$, y cada coeficiente es evaluado en $\hat{\mu}$, $\hat{\omega}$ y $\theta(\hat{\mu})$.

Por la naturaleza local del método, las aproximaciones tienen muy buena precisión cuando se consideran valores del parámetro próximos al valor de bifurcación. Cuando nos alejamos de la bifurcación, o si se anula el coeficiente σ_1 , es necesario utilizar un orden mayor en los cálculos para obtener una ecuación de bifurcación más precisa.

En la tabla 7.1 y en lo que sigue utilizamos la siguiente notación: sean z_1 y z_2 las dos primeras variables de la función g , tenemos los siguientes operadores multilineales

$$D_{k_1 k_2} = \frac{\partial^2 g}{\partial z_{k_1} \partial z_{k_2}} \Big|_{(\hat{y}, \hat{y}, \mu)}, \quad D_{k_1 k_2 k_3} = \frac{\partial^3 g}{\partial z_{k_1} \partial z_{k_2} \partial z_{k_3}} \Big|_{(\hat{y}, \hat{y}, \mu)}, \quad 1 \leq k_1, k_2, k_3 \leq 2, \quad (7.16)$$

que representan derivadas evaluadas en el equilibrio \hat{y} , de orden 2 y 3, respectivamente. Estos operadores serán aplicados a productos tensoriales de orden adecuado, usamos la notación de producto tensorial (u_1, u_2) , para vectores $u_i \in \mathbb{R}^m$.

En los distintos coeficientes calculados en la tabla 7.1, se observa la presencia de exponenciales complejas, estas funciones están asociados a las derivadas de la función g respecto de la variable retardada, y por lo tanto son inexistentes si la no linealidad no contiene retardo (como en el sistema (7.10)).

En [59] se presentan fórmulas para aplicar la metodología en frecuencia utilizando balances de armónicos hasta orden 8 para EDOs, utilizando el enfoque propuesto en [29] estas fórmulas se pueden adaptar para estudiar sistemas de EDRs. Sin embargo, como se observa en las aplicaciones mostradas en esos trabajos la presencia de exponenciales en la parte no lineal complica el análisis y los cálculos en general. Motivados por estos trabajos y por la necesidad de describir dinámicas locales de ciclos en sistemas con retardo con más precisión, presentamos una metodología alternativa.

En la siguiente sección describimos un método iterativo que permite realizar cálculos de alto orden y que puede ser fácilmente implementado en programas de cálculo simbólico. Los resultados de este método combinados con herramientas de la teoría de singularidades, permite el estudio local de EDRs generales, y en particular determinar la existencia de multiplicidad de ciclos. La estabilidad de los ciclos se determina utilizando información de la estabilidad del equilibrio y la dirección en la que surgen las soluciones periódicas al variar el parámetro de bifurcación.

Tabla 7.1: Cálculo de ξ_1 .

Paso 1	Calcular los autovectores asociados a $\hat{\lambda}$: v de GJ y w de GJ^T . Normalizar v y w , de manera que $ v = 1$ y $w^T v = 1$.
Paso 2	Definir $H(i\omega) = (GJ(i\omega, \mu) + I)^{-1}G(i\omega, \mu)$.
Paso 3	Definir $v_0 = -H(0) \sum_{k_1, k_2=1}^2 D_{k_1 k_2} e^{-i(k_1 - k_2)\omega\tau} (v, \bar{v}),$ $v_2 = -H(2i\omega) \frac{1}{2} \sum_{k_1, k_2=1}^2 D_{k_1 k_2} e^{-i(k_1 + k_2 - 2)\omega\tau} (v, v).$
Paso 4	Calcular $p_1(\omega, \mu) = \sum_{k_1, k_2=1}^2 (D_{k_1 k_2} e^{-i(k_1 - 1)\omega\tau} (v_0, v) + D_{k_1 k_2} e^{-i(2k_2 - k_1 - 1)\omega\tau} (v_2, \bar{v})) +$ $\frac{1}{2} \sum_{k_1, k_2, k_3=1}^2 D_{k_1 k_2 k_3} e^{-i(k_1 + k_2 - k_3 - 1)\omega\tau} (v, v, \bar{v}).$
Paso 5	Calcular $\xi_1(\omega, \mu) = -w^T GJ(i\omega, \mu)p_1(\omega, \mu)$.

7.3. Ecuación de bifurcación de alto orden con método en frecuencia iterativo

A continuación se demuestra un resultado para EDRs de la forma (7.1) que resulta ser muy conveniente en la determinación de soluciones periódicas de alto orden (extensión del correspondiente para EDOs [76]). Además de las expresiones analíticas aproximadas de las soluciones, este resultado permite hallar una ecuación de bifurcación a partir de la cual se determina la existencia y multiplicidad de ciclos utilizando teoría de singularidades.

Teorema 31. *Consideremos una realización minimal del sistema (7.1) de la forma (7.2) con función de transferencia G . Sea g de clase C^{2r+1} e \hat{y} un equilibrio del sistema. Supongamos que existe una función característica simple $\hat{\lambda}(s, \mu)$ de GJ , tal que para una única frecuencia ω_0 y un valor crítico del parámetro μ_0 se verifica $\hat{\lambda}(i\omega_0, \mu_0) = -1$. Para $1 \leq q \leq r$, las soluciones de la ecuación*

$$\hat{\lambda}(i\omega, \mu) + 1 - \sum_{k=1}^q \theta^{2k} \xi_k(\omega, \mu) = 0, \quad (7.17)$$

están en correspondencia uno a uno con soluciones periódicas del sistema de amplitud θ pequeña y período cercano a $2\pi/\omega_0$. Las soluciones aproximadas usando balance de armónicos de orden $2q$ son de la forma

$$y(t) = \hat{y} + \sum_{j=-2q}^{2q} a_j(\theta, \omega, \mu) e^{ij\omega t} + \mathcal{O}(\theta^{2q+1}). \quad (7.18)$$

Este teorema a diferencia del Teorema Gráfico de Hopf permite determinar la existencia de múltiples ciclos. Como veremos más adelante, utilizando la ecuación (7.17) se pueden determinar regiones en las que existe más de un ciclo límite y las variedades en el espacio de parámetros en que se observa el cambio en la cantidad de ciclos (al menos localmente).

Demostración. Consideremos una aproximación de una solución periódica con frecuencia ω de la siguiente manera

$$\tilde{y}(t) = \hat{y} + \sum_{j=-2q}^{2q} a_j e^{ij\omega t}, \quad (7.19)$$

con $a_j \in \mathbb{C}^m$, $a_{-j} = \bar{a}_j, \forall j$. Luego,

$$\tilde{y}(t - \tau) = \hat{y} + \sum_{j=-2q}^{2q} a_j e^{-ij\omega\tau} e^{ij\omega t}. \quad (7.20)$$

La función g evaluada en $\tilde{y}(t)$, $\tilde{y}(t - \tau)$ será una función periódica con frecuencia ω , para hallar su desarrollo son necesarias las siguientes definiciones. Con la notación de los operadores multilineales dada en (7.16), definimos F_j como

$$F_j(z) = \frac{1}{j!} \sum_{k_1, \dots, k_j=1}^2 D_{z_{k_1} \dots z_{k_j}} (z_{k_1} - \hat{z}_{k_1}, \dots, z_{k_j} - \hat{z}_{k_j}), \quad (7.21)$$

siendo $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^{2n}$ un vector que contiene las dos primeras variables del argumento de la función g . En particular, si $j = 1$ tenemos

$$F_1(z) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial g}{\partial z_i} \Big|_{(\hat{y}, \hat{y}, \mu)} (z_i - \hat{z}_i) = \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(\hat{y}, \hat{y}, \mu)} (y - \hat{y}) + \frac{\partial g}{\partial y_\tau} \Big|_{(\hat{y}, \hat{y}, \mu)} (y_\tau - \hat{y}). \quad (7.22)$$

Podemos escribir una aproximación de la función g evaluada en la solución periódica de la siguiente manera

$$\tilde{g}(\tilde{z}, \mu) = g(\hat{z}, \mu) + F_1(\tilde{z}) + \sum_{j=-2q}^{2q} c_j(a, \mu) e^{ij\omega t}, \quad (7.23)$$

donde $\tilde{z}(t) = (\tilde{y}(t), \tilde{y}(t - \tau))$, $a = (a_{-2q}, \dots, a_{2q})$ y c_j es el j -ésimo coeficiente de Fourier de la suma $\sum_{n=2}^{2q+1} F_n(\tilde{z})$ (en la aproximación anterior se descartan los armónicos de orden mayor a $2q$ que puedan existir).

Reemplazando las aproximaciones \tilde{y} y \tilde{g} en (7.4), usando el método de balance de armónicos y recordando la definición de $GJ(s, \mu)$, obtenemos

$$(GJ(ij\omega, \mu) + I) a_j = -G(ij\omega, \mu) c_j, \quad (7.24)$$

para $-2q \leq j \leq 2q$.

Si $j \neq 1$, por las condiciones que verifica la función característica $\hat{\lambda}(s, \mu)$ en (ω_0, μ_0) el operador $GJ(ij\omega, \mu) + I$ es inversible.

Si $j = 1$ resulta

$$(GJ(i\omega, \mu) + I)a_1 + G(i\omega, \mu)c_1 = 0. \quad (7.25)$$

En este caso el operador en el primer término de la ecuación no es inversible en el punto de bifurcación $\omega = \omega_0$, $\mu = \mu_0$ y $\tau = \tau_0$. Veremos a continuación como resolver esta última ecuación utilizando proyecciones en espacios adecuados.

Sea v el autovector de $GJ(i\omega, \mu)$ correspondiente a $\hat{\lambda}$, tal que $\|v\| = 1$, este vector puede depender de los parámetros. Como estamos interesados en soluciones cercanas al punto de bifurcación, el coeficiente a_1 debe encontrarse cerca del autovector v , por lo tanto consideramos

$$a_1 = v\theta + v^\perp, \quad (7.26)$$

siendo $\theta \in \mathbb{R}$ y v^\perp un vector ortogonal a v .

Definamos el operador

$$\hat{L} = GJ(i\omega, \mu) - \hat{\lambda}(i\omega, \mu)I, \quad (7.27)$$

y notemos $Nuc(\hat{L}) = \mathcal{K}$ y $Rango(\hat{L}) = \mathcal{R}$, por hipótesis $dim(\mathcal{K}) = 1$. El vector $v \in \mathcal{K}$ y podemos escribir $\mathbb{C}^m = \mathcal{K} \oplus M$, de manera que $v^\perp \in M$. Los vectores v y w son autovectores asociados a $\hat{\lambda}$, de los operadores GJ y GJ^T , respectivamente.

Sea la proyección $Q : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathcal{K}$ con núcleo \mathcal{R} . Considerando $w \in Nuc(\hat{L}^T)$ tal que $w^T v = 1$, se verifica $\bar{w} \in \mathcal{R}^\perp$ (i.e. $w^T z = 0$ para $z \in \mathcal{R}$), y podemos escribir $Q(z) = (w^T z)v$. La proyección complementaria $I - Q$ tiene rango \mathcal{R} y núcleo \mathcal{K} .

Puesto que $v \in \mathcal{K}$, entonces $(GJ(i\omega, \mu) + I)v = (\hat{\lambda}(i\omega, \mu) + 1)v$, y por definición de $I - Q$ resulta $(I - Q)(GJ(i\omega, \mu) + I)v = 0$. Luego, reemplazando a_1 en la ecuación (7.25) y aplicando la proyección $I - Q$ obtenemos

$$(I - Q)(GJ(i\omega, \mu) + I)v^\perp + (I - Q)G(i\omega, \mu)c_1 = 0, \quad (7.28)$$

el segundo término de esta ecuación pertenece a \mathcal{R} (rango de $I - Q$) y ya que $(I - Q)(GJ(i\omega, \mu) + I) : M \rightarrow \mathcal{R}$ es inversible en (ω_0, μ_0) , se puede aplicar el teorema de la función implícita para afirmar que existe $v^\perp = v^\perp(v, \omega, \mu)$ en un entorno del punto de bifurcación.

Por otro lado, aplicando la proyección Q a la ecuación (7.25) se obtenemos

$$Q((GJ(i\omega, \mu) + I)(\theta v + v^\perp)) + QG(i\omega, \mu)c_1 = 0. \quad (7.29)$$

Teniendo en cuenta los cálculos anteriores y la definición de Q resulta

$$(\hat{\lambda}(i\omega, \mu) + 1)(\theta + w^T v^\perp) + w^T G(i\omega, \mu)c_1 = 0. \quad (7.30)$$

De esta manera, las ecuaciones (7.24) generan el sistema

$$(GJ(ij\omega, \mu) + I)a_j + G(ij\omega, \mu)c_j(a, \mu) = 0, \quad \text{si } j \neq 1 \quad (7.31a)$$

$$(I - Q)(GJ(i\omega, \mu) + I)v^\perp + (I - Q)G(i\omega, \mu)c_1(a, \mu) = 0, \quad (7.31b)$$

$$(\hat{\lambda}(i\omega, \mu) + 1)(\theta + w^T v^\perp) + w^T G(i\omega, \mu)c_1(a, \mu) = 0, \quad (7.31c)$$

donde $a_1 = \theta v + v^\perp$, $\theta \in \mathbb{R}$, $v \in \mathcal{K}$ con $\|v\| = 1$ y $w \in Nuc(\hat{L}^T)$ verificando $w^T v = 1$.

Haciendo algunos cálculos sencillos (utilizando propiedades del producto tensorial) probamos que los coeficientes $c_j(a, \mu)$ son de la forma

$$c_j(a, \mu) = \sum_{n=2}^{2q+1} \frac{1}{n!} \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^2 D_{k_1 \dots k_n} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_n = j \\ -2q \leq j_1, \dots, j_n \leq 2q}} e^{-iS\omega\tau}(a_{j_1}, \dots, a_{j_n}), \quad (7.32)$$

donde $S = \sum_{i=1}^n (k_i - 1)j_i$.

Utilizando estas expresiones para un valor dado de q , las ecuaciones (7.31a) y (7.31b) quedan expresadas sólo en función de los coeficientes a_j . Recordemos que $a_{-j} = \bar{a}_j$, por lo tanto sólo se deben resolver $2q + 1$ ecuaciones.

Para resolver el sistema para valores de θ pequeños consideramos desarrollos en potencias de θ para cada a_j (comenzando con la potencia 1, ya que cada a_j es cero en el punto de bifurcación). Reemplazando e igualando coeficientes tenemos que los desarrollos serán de la forma

$$\begin{cases} a_0 = a_{0,2}\theta^2 + a_{0,4}\theta^4 + \dots + a_{0,2q}\theta^{2q}, \\ a_1 = v\theta + a_{1,3}\theta^3 + \dots + a_{1,2q-1}\theta^{2q-1}, \\ a_2 = a_{2,2}\theta^2 + a_{2,4}\theta^4 + \dots + a_{2,2q}\theta^{2q}, \\ a_3 = a_{3,3}\theta^3 + a_{3,5}\theta^5 + \dots + a_{3,2q-1}\theta^{2q-1}, \\ \vdots \\ a_{2q} = a_{2q,2q}\theta^{2q}. \end{cases} \quad (7.33)$$

Es decir, en cada a_j con $j \neq 0$, aparecen sólo las potencias de θ que tienen la misma paridad que j y son mayores o iguales a j y menores o iguales a $2q$, y en a_0 encontramos sólo potencias pares mayores que 1. Comenzando con $a_1 = v\theta$ y resolviendo las ecuaciones (7.31a) y (7.31b) iterativamente se pueden calcular los valores $a_{j,k}$ en función de los parámetros. Luego, se pueden obtener los coeficientes a_j y por lo tanto la aproximación de la solución \tilde{y} .

Por último, reemplazando las expresiones de cada a_j en la ecuación (7.31c) se obtiene

$$\theta \left(\hat{\lambda}(i\omega, \mu) + 1 - \sum_{k=1}^q \xi_k(\omega, \mu)\theta^{2k} \right) = 0, \quad (7.34)$$

donde $\xi_k(\omega, \mu)$ es el opuesto del coeficiente de θ^{2k+1} en la expresión de la izquierda en (7.31c) (esa expresión contiene sólo potencias impares de θ por la forma de los coeficientes a_j).

Para cada valor de $\theta \neq 0$ que resuelve la ecuación anterior tenemos una solución con balance de armónicos de orden $2q$ del sistema original que aproxima una solución periódica del sistema. □

La demostración anterior otorga un método de resolución iterativo que, como ya mencionamos, es muy beneficioso en los cálculos de soluciones periódicas de alto orden.

En la tabla 7.2 se resumen los pasos a seguir para aplicar el método en frecuencia iterativo para un orden $2q$ prefijado. En particular, se muestra como obtener expresiones de los coeficientes ξ_i presentes en la ecuación de bifurcación (7.34). Luego, estudiaremos esta ecuación utilizando derivación implícita y teoría de singularidades.

Observamos que, si la dimensión de la variable de salida y es 1, los vectores v y w asociados al autovalor $\hat{\lambda}$ son 1. En ese caso, el Paso 6.2 de la tabla 7.2 no es necesario, mientras que los cálculos en el Paso 6.1 se simplifican en gran medida.

Tabla 7.2: Método en frecuencia iterativo para orden $2q$.

Definiciones generales	
Paso 1	Calcular los autovectores asociados a $\hat{\lambda}$: v de GJ y w de GJ^T . Normalizar v y w , de manera que $ v = 1$ y $w^T v = 1$.
Paso 2	Definir $H(s, \mu) = (GJ(s, \mu) + I)^{-1}G(s, \mu)$.
Paso 3	Calcular $c_j(a, \mu)$ como en (7.32).
Paso 4	Definir: $a_0 = \sum_{j=1}^q a_{0,2j}\theta^{2j}$; $a_{2k-1} = \sum_{j=k}^q a_{2k-1,2j-1}\theta^{2j-1}$, $a_{2k} = \sum_{j=k}^q a_{2k,2j}\theta^{2j}$, para $1 \leq k \leq q$, y $a_{-k} = \bar{a}_k$, para $1 \leq k \leq 2q$. Con las definiciones anteriores calcular $a = (a_{-2q}, \dots, a_{2q})$.
Proceso iterativo	
Paso 5	Definir: $a_{k,j} = 0$ para $-2q \leq k, j \leq 2q$, y definir $a_{1,1} = v$. Usar definiciones en Paso 4 y seguir.
Paso 6	Para j desde 1 hasta q :
Paso 6.1	Calcular $a_{2k,2j}$ como el coeficiente de θ^{2j} en $-H(i2k\omega, \mu)c_{2k}(a, \mu)$, para $0 \leq k \leq j$. Calcular $a_{2k-1,2j-1}$ como el coeficiente de θ^{2j-1} en $-H(i(2k-1)\omega, \mu)c_{2k-1}(a, \mu)$, para $3 \leq k \leq j$. Usar definiciones en Paso 4 y seguir.
Paso 6.2	Calcular v^\perp resolviendo (7.31b). Calcular $a_{1,2j+1}$ como el coeficiente de θ^{2j+1} en v^\perp . Usar definiciones en Paso 4 y seguir.
Paso 7	Calcular $\xi_k(\omega, \mu)$ como el opuesto del coeficiente de θ^{2k+1} en la expresión de la izquierda en (7.31c).

7.3.1. Singularidades

En esta sección se utiliza terminología propia de la teoría de singularidades que se encuentra desarrollada en [32]. Notaremos en *itálica* términos específicos la primera vez que los utilizemos, las definiciones de los mismos son extensas y se pueden consultar en [32].

Supongamos que en el sistema (7.1) además del parámetro de bifurcación μ , existen parámetros auxiliares que denominaremos $\rho \in \mathbb{R}^r$. Sea (μ_0, ρ) un punto en el espacio de parámetros en el cual se verifican las hipótesis del teorema 31, y además

$$\left(\operatorname{Re} \hat{\lambda}_\mu \operatorname{Im} \hat{\lambda}_\omega - \operatorname{Im} \hat{\lambda}_\mu \operatorname{Re} \hat{\lambda}_\omega \right) \Big|_{(\omega_0, \mu_0, \rho)} \neq 0. \quad (7.35)$$

Entonces, el sistema de dos ecuaciones que se forma al calcular la parte real e imaginaria de la ecuación de bifurcación (7.34) verifica las hipótesis del teorema de la función implícita en el punto (ω_0, μ_0, ρ) . Derivando implícitamente, para $\theta \neq 0$ suficientemente pequeño se tienen las siguientes expresiones

$$\mu = \mu_0 + \mu_1\theta^2 + \cdots + \mu_q\theta^{2q}, \quad (7.36)$$

$$\omega = \omega_0 + \omega_1\theta^2 + \cdots + \omega_q\theta^{2q}, \quad (7.37)$$

donde μ_k y ω_k , para $0 \leq k \leq q$, son coeficientes que dependen del vector de parámetros ρ .

Realizamos a continuación un análisis equivalente al realizado en [76] para EDOs, ya que la presencia de retardo no provoca cambios sustanciales en la ecuación de bifurcación (sólo la aparición de funciones trigonométricas), podemos extender este análisis al caso de sistemas con retardo sin dificultad. A continuación se muestran los resultados que utilizaremos de la teoría de singularidades para analizar la ecuación (7.36).

Supongamos que la ecuación (7.36) evaluada en el punto (μ_0, ρ_0) es \mathbb{Z}_2 -equivalente a la forma normal

$$\mu_q\theta^{2q} - (\mu - \mu_0) = 0. \quad (7.38)$$

Entonces, los coeficientes μ_k , $1 \leq k \leq q-1$, verifican $\mu_k(\rho_0) = 0$, y en un entorno del punto (μ_0, ρ_0) se tiene el desarrollo universal

$$\mu_q(\rho)\theta^{2q} - (\mu - \mu_0) + \mu_1(\rho)\theta^2 + \mu_2(\rho)\theta^4 + \cdots + \mu_{q-1}(\rho)\theta^{2(q-1)} = 0. \quad (7.39)$$

Claramente debe ser $\mu_q(\rho) \neq 0$, en el entorno del punto (μ_0, ρ_0) considerado, en caso de que este coeficiente se anule no se puede determinar la naturaleza de la bifurcación y es necesario calcular la ecuación de bifurcación de orden $2(q+1)$. Detallamos a continuación los desarrollos para los valores de q que serán necesarios en las siguientes secciones. Otros desarrollos universales pueden consultarse en [31, 32].

Recordemos que, de acuerdo al teorema 31, cada solución de la ecuación de bifurcación se corresponde con una solución periódica. Es por esto que en cada caso se considera la forma normal y su desarrollo universal. Luego, podemos describir todos los posibles diagramas de bifurcación de soluciones periódicas locales del sistema original en el espacio de parámetros. La estabilidad de las soluciones está asociada a la estabilidad del equilibrio, en lo que sigue suponemos que el equilibrio es estable cuando $\mu < \mu_0$, e inestable si $\mu > \mu_0$. Se indican en cada caso las variedades de transición, definidas en el espacio de parámetros del desarrollo universal $(\mu_1, \dots, \mu_{q-1})$. Estas variedades separan subespacios en los que se tiene diagramas de bifurcación persistentes, y están asociadas a cambios en la cantidad de soluciones periódicas de amplitud pequeña existentes.

- Caso $q = 1$. Bifurcación de Hopf.

La forma normal es

$$\mu_1(\rho)\theta^2 - (\mu - \mu_0) = 0. \quad (7.40)$$

El signo de $\mu_1(\rho)$ determina el tipo de bifurcación, si $\mu_1(\rho) > 0$ ($\mu_1(\rho) < 0$) la bifurcación es supercrítica (subcrítica).

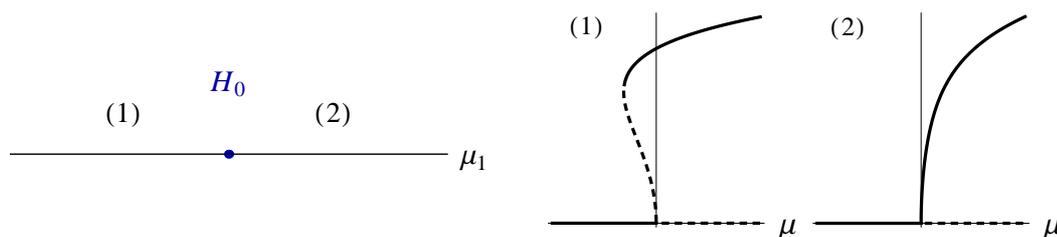


Figura 7.1: Caso $q = 2$. Izquierda: Variedad de transición H_0 . Derecha: Diagramas persistentes para los valores de μ_2 indicados en la figura de la izquierda.

- Caso $q = 2$. Bifurcación de Hopf generalizada (bifurcación de tipo Bautin).

El desarrollo universal de (7.38) en este caso resulta

$$\mu_2(\rho)\theta^4 - (\mu - \mu_0) + \mu_1(\rho)\theta^2 = 0. \quad (7.41)$$

Supongamos que $\mu_2(\rho) > 0$ en un entorno de ρ_0 (el caso $\mu_2(\rho) < 0$ se analiza de manera análoga). La variedad de transición es $H_0 : \mu_1 = 0$. Como se muestra en la figura 7.1, si $\mu_1 > 0$ existe una solución periódica estable y si $\mu_1 < 0$ se observa un *fold* de ciclos, siendo estable el ciclo de mayor amplitud e inestable el ciclo de amplitud más pequeña.

- Caso $q = 3$. Bifurcación de Hopf generalizada.

El desarrollo universal es

$$\mu_3(\rho)\theta^6 - (\mu - \mu_0) + \mu_1(\rho)\theta^2 + \mu_2(\rho)\theta^4 = 0. \quad (7.42)$$

Supongamos que $\mu_3(\rho) > 0$ en un entorno de ρ_0 (el caso $\mu_3(\rho) < 0$ se analiza de manera análoga). De acuerdo a la notación utilizada en [31] para este caso se definen en el espacio (μ_1, μ_2) las siguientes variedades de transición

$$H_0 : \mu_1 = 0, \quad (7.43)$$

$$H_1 : 3\mu_1\mu_3 = \mu_2^2, \quad \mu_2/\mu_3 \leq 0, \quad (7.44)$$

$$D : 4\mu_1\mu_3 = \mu_2^2, \quad \mu_2/\mu_3 \leq 0. \quad (7.45)$$

En la figura 7.2 se grafican estas curvas y se muestran los distintos diagramas persistentes en las regiones limitadas por las curvas H_0 , H_1 y D . Para valores adecuados de los parámetros se pueden observar hasta tres ciclos que coexisten.

Debido a la naturaleza local del método en frecuencia y por lo tanto de la ecuación de bifurcación (7.36), los comportamientos descritos se corresponden con la dinámica del sistema original en pequeños entornos del punto (μ_0, ρ_0) en el espacio de parámetros y para soluciones periódicas de amplitud pequeña.

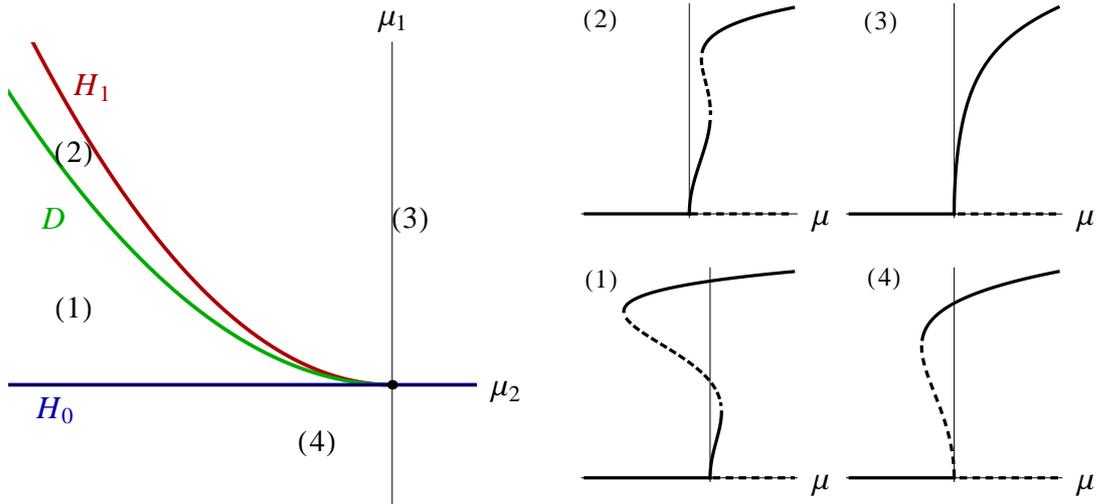


Figura 7.2: Caso $q = 3$. Izquierda: Variedades de transición H_0 , H_1 y D . Derecha: Diagramas persistentes en las distintas regiones indicadas en la figura de la izquierda.

7.4. Ejemplos

A continuación analizamos tres ejemplos en los que mostramos la potencialidad del método en frecuencia iterativo combinado con la teoría de singularidades. En particular, en el tercer ejemplo se muestra en detalle la aplicación de la metodología, la utilización de la tabla 7.2 y el análisis de la ecuación de bifurcación y de los ciclos periódicos correspondientes hasta orden 6 ($q = 3$).

7.4.1. Péndulo rotatorio con retardo revisitado

Consideremos el péndulo rotatorio con retardo analizado en el capítulo anterior

$$\ddot{x}(t) + (\beta - \cos x(t)) \sin x(t) = \gamma \sin(x(t) - x(t - \tau)), \quad (7.46)$$

donde $\beta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\tau > 0$. La realimentación se puede interpretar como un torque que actúa sobre el pivote del péndulo. Al agregar la realimentación el equilibrio no trivial $\hat{x} = \arccos \beta$, resulta ser asintóticamente estable si: $0 < \tau \sqrt{1 - \beta^2 - 2\gamma} < \pi$. De esta manera, para valores de los parámetros que verifiquen la desigualdad anterior, el torque funcionaría como un control estabilizando el equilibrio \hat{x} .

La pérdida de estabilidad de ese equilibrio está asociada a la existencia de bifurcaciones de Hopf. A continuación estudiamos estas bifurcaciones considerando β como parámetro de bifurcación.

Planteamos la ecuación (7.46) utilizando una representación entrada-salida, como un sistema realimentado de dos ecuaciones de primer orden como sigue

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A_0 \mathbf{x}(t) + Bg(y(t), y(t - \tau), \beta), \\ y &= -C\mathbf{x}, \end{cases} \quad (7.47)$$

siendo

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1 \ 0), \quad (7.48)$$

y $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es la función definida por

$$g(y(t), y(t - \tau), \beta) = y(t) + (\beta - \cos y(t)) \operatorname{sen} y(t) - \gamma \operatorname{sen}(y(t) - y(t - \tau)). \quad (7.49)$$

Sea la función de transferencia $G(s) = C(sI - A_0)^{-1}B = 1/(s^2 - 1)$ asociada a la realización (A_0, B, C) . Resolviendo la ecuación $\hat{y} = -G(0)g(\hat{y}, \hat{y}, \beta)$, obtenemos los equilibrios del sistema: $\hat{y} = 0$, $\hat{y} = \pi$ y $\hat{y} = \arccos \beta$. Al igual que en el capítulo anterior, nos interesa la dinámica asociada al equilibrio $\hat{y} = \arccos \beta$. La matriz Jacobiana en este punto resulta:

$$J(\beta) = \left(\frac{\partial g}{\partial y} \quad \frac{\partial g}{\partial y_\tau} \right) \Big|_{(\hat{y}, \hat{y}, \mu)} = (2 - \beta^2 - \gamma \quad \gamma). \quad (7.50)$$

Linealizando alrededor del equilibrio, obtenemos la función característica

$$\lambda(s, \beta) = GJ(s, \beta, \tau) = \frac{2 - \beta^2 - \gamma + \gamma e^{-s\tau}}{s^2 - 1}. \quad (7.51)$$

Las condiciones necesarias para que el sistema (7.47) tenga bifurcación local de ciclos son que exista una única frecuencia ω_0 y un valor crítico del parámetro β_0 tal que la función $\lambda(i\omega, \beta)$ verifique:

$$\lambda(i\omega_0, \beta_0) = -1, \quad (\operatorname{Re} \lambda_\beta \operatorname{Im} \lambda_\omega - \operatorname{Im} \lambda_\beta \operatorname{Re} \lambda_\omega)|_{(\omega_0, \beta_0)} \neq 0. \quad (7.52)$$

Estas condiciones se cumplen para $\omega_0 = k\pi/\tau$, con $k \in \mathbb{Z}$, y

$$\beta_0 = \left(1 - \gamma(1 - (-1)^k) - \left(\frac{k\pi}{\tau} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (7.53)$$

Dado que el sistema realimentado (7.47) verifica (7.52) en (ω_0, β_0) , utilizando el método iterativo en la tabla 7.2 es posible calcular la ecuación de bifurcación. En este caso los autovectores asociados a λ son $v = w = 1$, lo que simplifica algunos cálculos.

Considerando una aproximación de orden 4 de la solución, se obtiene la ecuación de bifurcación de órbitas periódicas locales

$$\lambda(i\omega, \beta) + 1 - \xi_1(\omega, \beta)\theta^2 - \xi_2(\omega, \beta)\theta^4 = 0. \quad (7.54)$$

Las expresiones de $\xi_k(\omega, \beta) \in \mathbb{C}$ para $k = 1, 2$, se calculan utilizando la tabla 7.2. De acuerdo al teorema 31, las soluciones no nulas de (7.54) están en correspondencia uno a uno con las soluciones periódicas de amplitud θ pequeña del sistema (7.47) con período cercano a $2\pi/\omega_0$.

Derivando implícitamente la ecuación (7.54) para $\theta \neq 0$ suficientemente pequeño obtenemos expansiones de la frecuencia ω y el parámetro β en función de la amplitud de la órbita θ

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \theta^2 + \omega_2 \theta^4 + \mathcal{O}(\theta^6), \quad \beta = \beta_0 + \beta_1 \theta^2 + \beta_2 \theta^4 + \mathcal{O}(\theta^6). \quad (7.55)$$

Se obtiene: $\omega_1 = \omega_2 = 0$, y

$$\beta_1 = -\frac{\pi^2 k^2 (11\beta_0^2 + 4\gamma((-1)^k - 1) + 4) + (\beta_0^2 - 1)\tau^2 (5\beta_0^2 + \gamma((-1)^k - 1) + 1)}{\beta_0((\beta_0^2 - 1)\tau^2 + 4\pi^2 k^2)},$$

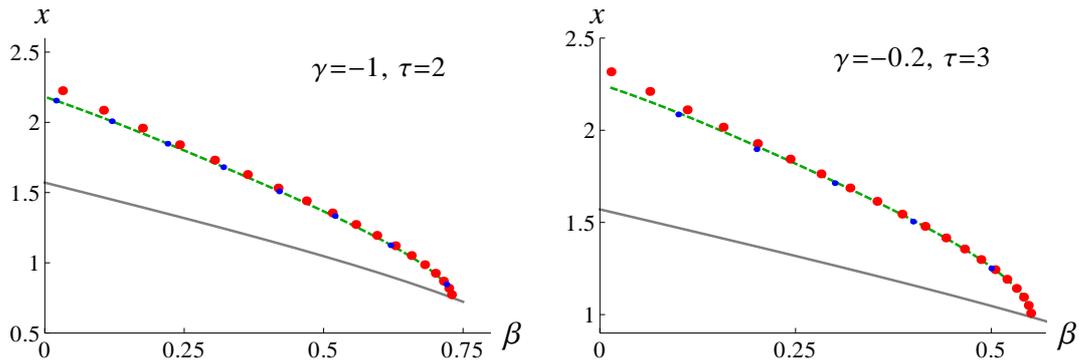


Figura 7.3: Máximo de las soluciones calculadas en los valores indicados de γ y τ . ($\cdot\cdot\cdot$, grandes) Dominio frecuencia; ($\cdot\cdot\cdot$, pequeños) HAM; ($- -$) DDE-Biftool y ($-$) punto de equilibrio.

la expresión de β_2 será calculada en cada caso (para valores fijos de γ y τ), debido a que es muy extensa.

La ecuación para el parámetro β presente en (7.55) se puede analizar con la teoría de singularidades resumida en la sección anterior. Si $\beta_1 \neq 0$ el signo de este coeficiente junto con la estabilidad del equilibrio permite conocer la estabilidad de las soluciones periódicas. Por otro lado, en la expansión correspondiente a ω observamos que, hasta el orden 4 en θ , la frecuencia de las soluciones periódicas correspondientes a un valor fijo del retardo no se modifica. En otras palabras, todos los ciclos que surgen de un mismo punto de una rama de bifurcación comparten la misma frecuencia, como en el capítulo anterior una vez más nos encontramos con ciclos isocrónicos, esta vez utilizando otro parámetro de bifurcación.

7.4.1.1. Ejemplos de bifurcación de Hopf

Consideremos $\gamma = -1$ y $\tau = 2$; existe una bifurcación de Hopf cuando $\omega_0 = \pi/2$ y $\beta_0 = \sqrt{12 - \pi^2}/2$. La ecuación de bifurcación (7.55) (derecha) para este caso resulta: $\beta = 0,729794 - 6,03605\theta^2 + 2,75391\theta^4 + \mathcal{O}(\theta^6)$. Luego, para valores del parámetro β menores que β_0 existe una rama de soluciones periódicas estables que surge del equilibrio no trivial con frecuencia $\omega = \pi/2 + \mathcal{O}(\theta^6)$. En la figura 7.3 a), mostramos los máximos (en la variable x del sistema original) de las soluciones halladas con la metodología en frecuencia, las mismas son comparadas con las obtenidas utilizando HAM y las calculadas con DDE-Biftool.

Si consideramos $\gamma = -0,2$ y $\tau = 3$, existe una bifurcación de Hopf cuando $\omega_0 = \pi/3$ y $\beta_0 = \sqrt{63/5 - \pi^2}/3$. La ecuación de bifurcación (7.55) (derecha) para este caso resulta: $\beta = 0,550797 - 3,82249\theta^2 + 1,9317\theta^4 + \mathcal{O}(\theta^6)$. Luego, cuando el parámetro β disminuye obtenemos una rama de soluciones periódicas estables con frecuencia $\omega = \pi/3 + \mathcal{O}(\theta^6)$. Como en el caso anterior, en la figura 7.3 b) graficamos los máximos (en la variable x del sistema original) de las soluciones obtenidas utilizando el método en frecuencia, se observa la gran coincidencia con las soluciones calculadas utilizando HAM y con las halladas numéricamente con DDE-Biftool.

7.4.2. Bifurcación de Bautin en una EDR de primer orden

Consideremos la EDR escalar

$$\dot{x}(t) = -\delta x(t) - \beta \left(\frac{x(t)}{1 + (x(t))^n} - \frac{kx(t - \tau)}{1 + (x(t - \tau))^n} \right), \quad (7.56)$$

donde los parámetros β, n, δ, k y el retardo τ son positivos. En lo que sigue se considerará δ como parámetro de bifurcación. Esta ecuación con retardo modela la leucemia mielógena crónica periódica [65]. Este sistema fue estudiado utilizando formas normales en [37].

Para todos los valores de los parámetros, $x = 0$ es un equilibrio de la ecuación (7.56). Existe además otro equilibrio dado por

$$\hat{x} = \left(\frac{\beta}{\delta}(k - 1) - 1 \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (7.57)$$

En [37] se realiza un estudio completo de la estabilidad de este equilibrio, y se establece que el mismo está bien definido y toma valores que tienen sentido para el modelo sólo si se considera $1 < k < 2$.

Estudiamos a continuación las soluciones periódicas asociadas a \hat{x} utilizando el método en frecuencia. Consideramos la realización minimal dada por las matrices

$$A_0 = -(\delta + 1), \quad A_1 = 0, \quad B = C = 1, \quad (7.58)$$

y la función no lineal

$$g(x(t), x(t - \tau)) = -x(t) + \beta \left(\frac{x(t)}{1 + (x(t))^n} - \frac{kx(t - \tau)}{1 + (x(t - \tau))^n} \right). \quad (7.59)$$

La matriz de transferencia en este caso resulta $G(s, \delta) = 1/(s + \delta + 1)$, y se obtiene la siguiente función de transferencia lineal

$$GJ(s, \delta) = - \left(1 + \frac{\delta((n - 1)(k - 1)\beta - n\delta)}{\beta(k - 1)^2} (1 - ke^{-s\tau}) \right) \frac{1}{s + \delta + 1}. \quad (7.60)$$

La dimensión de esta matriz facilita los cálculos en ciertos aspectos, en efecto tenemos un solo autovalor característico $\lambda(s, \delta) = GJ(s, \delta)$, y los autovectores asociados son $v = w = 1$.

Si definimos la constante $\beta_1 = \delta((n - 1)(k - 1)\beta - n\delta)/(\beta(k - 1)^2)$, los puntos en los que se verifica $\lambda(i\omega, \delta) = -1$ son soluciones del sistema

$$\begin{aligned} \delta &= \beta_1 (1 - k \cos \omega\tau) \\ \omega &= \beta_1 k \sin \omega\tau \end{aligned}. \quad (7.61)$$

Realizando algunas operaciones sencillas en el sistema anterior se sigue que

$$\omega = \sqrt{(\beta_1 k)^2 - (\delta - \beta_1)^2}, \quad (7.62)$$

y luego de la primera ecuación se obtiene

$$\tau = \frac{1}{\omega} \arccos \left(\frac{\beta_1 - \delta}{\beta_1 k} \right). \quad (7.63)$$

Considerando valores fijos de los parámetros β, k y n , la ecuación anterior define una curva en el espacio δ - τ de posibles puntos de Hopf.

En lo que sigue consideramos $n = 2$ y $\beta = 2,5$, y distintos valores de $k \in (1, 2)$. Analizamos bifurcaciones de tipo Bautin utilizando las herramientas desarrolladas en la sección anterior.

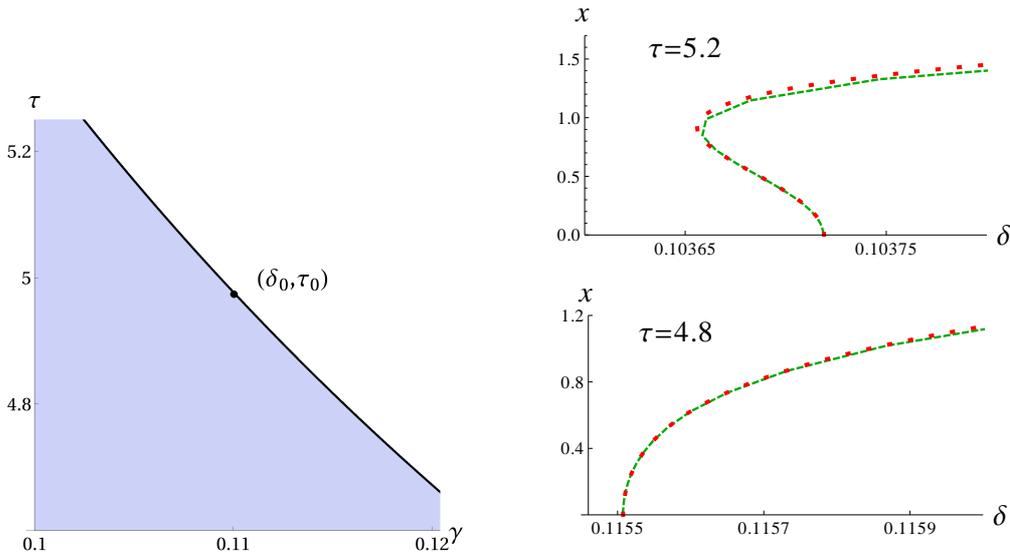


Figura 7.4: Izquierda: curva de Hopf y punto de bifurcación de Bautin. Derecha: Comparaciones de las amplitudes calculadas con DDE-Biftool (—) y dominio frecuencia (\cdots), de los ciclos para: $\tau = 5,2$ (arriba) y $\tau = 4,8$ (abajo).

7.4.2.1. Ejemplos bifurcación de tipo Bautin

Consideremos en primer lugar el valor $k = 1,5$. Para τ fijo, sea δ el parámetro de bifurcación y δ_0 el valor en que se verifican las hipótesis del teorema 31, siendo ω_0 la frecuencia inicial. Utilizamos la tabla 7.2 con orden 4 para obtener los coeficientes $\xi_{1,2}$. Si además, en el punto anterior verificamos

$$(\operatorname{Re} \lambda_\delta \operatorname{Im} \lambda_\omega - \operatorname{Im} \lambda_\delta \operatorname{Re} \lambda_\omega)|_{(\omega_0, \delta_0, \tau)} \neq 0. \quad (7.64)$$

es posible calcular la ecuación de bifurcación para el parámetro δ . La expresión general en función de τ es muy extensa para ser mostrada aquí, sin embargo nos permite obtener información sobre la dinámica del sistema. Realizando algunos cálculos numéricos observamos que en el punto $(\delta_0, \tau_0) = (0,1100351576, 4,9740704569)$, la ecuación de bifurcación es \mathbb{Z}_2 -equivalente a

$$\delta_2 \theta^4 - (\delta - \delta_0) = 0. \quad (7.65)$$

siendo $\delta_2 = 0,0019537383$, y la frecuencia crítica $\omega_0 = 0,2624792103$. Como el coeficiente δ_2 es positivo se sigue que, en un entorno de δ_0 , si $\delta_1 > 0$ se observará un único ciclo y si $\delta_1 < 0$ existirá un fold de ciclos.

En la figura 7.4 izquierda, graficamos la curva de puntos de Hopf en el espacio de parámetros δ - τ , el equilibrio es estable en la región sombreada (puntos por debajo de la curva). El punto en esa figura corresponde al punto de bifurcación de Bautin (δ_0, τ_0) . Para $\tau > \tau_0$ ($\tau < \tau_0$) resultan valores de $\delta_1 < 0$ ($\delta_1 > 0$). En la figura 7.4 derecha, mostramos ejemplos de los diagramas de bifurcación persistentes mencionados en la sección anterior, indicando la estabilidad de las soluciones periódicas. Comparamos las amplitudes de las soluciones con cálculos realizados con DDE-Biftool, observamos la muy buena coincidencia de los cálculos.

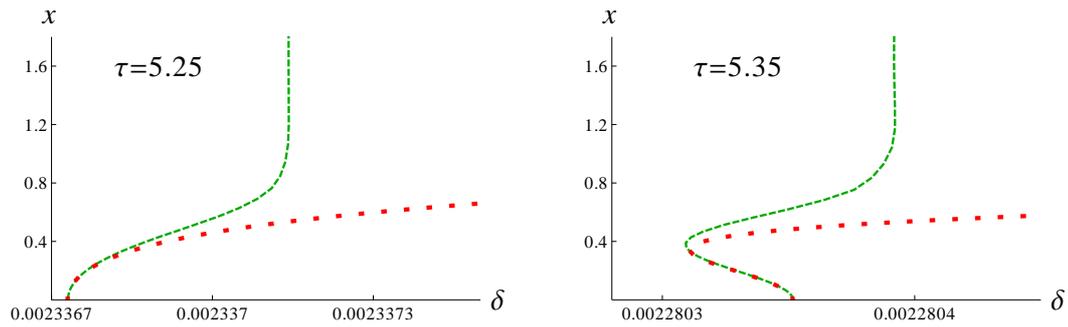


Figura 7.5: Comparaciones de las amplitudes calculadas con DDE-Biftool (---) y dominio frecuencia (\cdots), de los ciclos para: $\tau = 5,25$ (izquierda) y $\tau = 5,35$ (derecha).

Como otro ejemplo, consideremos el valor $k = 1,01$. Utilizando la ecuación de bifurcación del parámetro δ , podemos calcular que en el siguiente punto se verifican las condiciones de bifurcación de tipo Bautin: $(\delta_0, \tau_0) = (0,0023073665, 5,301432998)$. En este punto resulta $\omega_0 = 0,0396791$ y $\delta_2 = 0,0000417833$. De acuerdo a la teoría de singularidades el signo de δ_2 indica que nos encontramos con la misma dinámica que en el caso $k = 1,5$ considerado antes. Nuevamente, para valores de $\tau > \tau_0$ ($\tau < \tau_0$) obtenemos $\delta_1 < 0$ ($\delta_1 > 0$). En la figura 7.5 graficamos los diagramas de bifurcación correspondientes a dos valores del retardo cercanos a τ_0 . La amplitud de las soluciones periódicas que obtenemos son comparadas con las obtenidas numéricamente con el paquete DDE-Biftool, como esperabamos existe una gran coincidencia en los ciclos de amplitud pequeña.

Es importante resaltar que la exploración numérica con DDE-Biftool muestra la existencia de una bifurcación global que conduce a un ciclo límite de gran amplitud (explosión Canard). La investigación de este tipo de situaciones es muy interesante y es un área que no ha sido muy explorada en EDR. Este ejemplo proporciona una oportunidad de comenzar a realizar investigaciones en este sentido.

7.4.3. Otras bifurcaciones de ciclos en una EDR de segundo orden

Consideremos el sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} x(t) + (x_1(t)^2 + x_2(t)^2) \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} x(t) - \kappa \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} (x(t) - x(t - \tau)), \quad (7.66)$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$, los parámetros verifican $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $\kappa \neq 0$ y $\tau > 0$ representa el retardo.

El sistema anterior corresponde a la forma normal de una bifurcación de Hopf subcrítica a la que se le aplica una realimentación con retardo del tipo Pyragas. Sistemas de este tipo se han estudiado en [26, 29, 39] con el objetivo de estabilizar el ciclo periódico. El agregado de la realimentación provoca el cambio de estabilidad

buscado en ciertos valores del espacio de parámetros, pero además genera una gran variedad de escenarios en los que se observa multiplicidad de ciclos periódicos que complejizan la dinámica.

Para aplicar la metodología en frecuencia, se plantea la ecuación anterior utilizando la siguiente representación entrada-salida

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (\alpha - \kappa \cos \beta)x(t) + (\kappa \cos \beta)x(t - \tau) + g(x(t), x(t - \tau)), \\ y &= -x, \end{cases} \quad (7.67)$$

donde $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, es la función definida por

$$g(y(t), y(t - \tau)) = \begin{pmatrix} y_2 - \kappa \operatorname{sen} \beta (y_2 - y_{2\tau}) - (y_1^2 + y_2^2)(y_1 - \gamma y_2) \\ -y_1 + \kappa \operatorname{sen} \beta (y_1 - y_{1\tau}) - (y_1^2 + y_2^2)(\gamma y_1 + y_2) \end{pmatrix}. \quad (7.68)$$

La función de transferencia asociada a esta realización resulta

$$G(s) = \frac{1}{s - \alpha + \kappa \cos \beta (1 - e^{-s\tau})} I_2. \quad (7.69)$$

Si $\alpha\gamma \neq 1$, el único equilibrio del sistema es el trivial $y = (0 \ 0)^T$. La matriz de transferencia del sistema linealizado alrededor del equilibrio resulta

$$GJ(s, \alpha, \tau) = \frac{1 - \kappa \operatorname{sen} \beta (1 - e^{-s\tau})}{s - \alpha + \kappa \cos \beta (1 - e^{-s\tau})} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.70)$$

Si una de las funciones características de la matriz anterior verifica

$$\hat{\lambda}(i\omega_0, \alpha_0) = -1, \quad \left(\frac{\partial \operatorname{Re} \hat{\lambda}}{\partial \alpha} \frac{\partial \operatorname{Im} \hat{\lambda}}{\partial \omega} - \frac{\partial \operatorname{Re} \hat{\lambda}}{\partial \omega} \frac{\partial \operatorname{Im} \hat{\lambda}}{\partial \alpha} \right) \Big|_{(\omega, \alpha) = (\omega_0, \alpha_0)} \neq 0, \quad (7.71)$$

se cumplen las condiciones necesarias para que el sistema (7.67) presente una bifurcación local de ciclos. En particular, la función característica

$$\hat{\lambda}(s, \alpha) = -i \frac{1 - \kappa \operatorname{sen} \beta (1 - e^{-s\tau})}{s - \alpha + \kappa \cos \beta (1 - e^{-s\tau})}, \quad (7.72)$$

toma el valor -1 (condición de la izquierda en la ecuación (7.71)) en los puntos dados por la siguiente curva en el espacio (α, τ)

$$\tau = \frac{\pm \arccos(\cos \beta - \frac{\alpha}{\kappa}) + \beta + 2\pi n}{\omega}, \quad (7.73)$$

siendo $\omega = 1 - \kappa \operatorname{sen} \beta \pm \sqrt{\kappa^2 - (-\alpha + \kappa \cos \beta)^2}$. Además, se puede probar que para valores de κ pequeños, por ejemplo $\kappa \in (-0,1, 0,1)$, se verifican las dos condiciones necesarias indicadas en (7.71). En la figura 7.6 se muestran curvas de posibles puntos de Hopf. Observamos que al aumentar el valor del parámetro κ existen valores de τ en los que encontramos más de un punto de bifurcación de Hopf.

Calculemos los vectores asociados a $\hat{\lambda}$. Como $v \in \operatorname{Nuc}(\hat{L})$ y $\|v\| = 1$, resulta $v = 1/\sqrt{2}(1, -i)^T$. Por otro lado, $w \in \operatorname{Nuc}(\hat{L}^T)$ y $w^T v = 1$, luego tomamos $w = 1/\sqrt{2}(1, i)^T$. Con estos operadores se define la proyección

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.74)$$

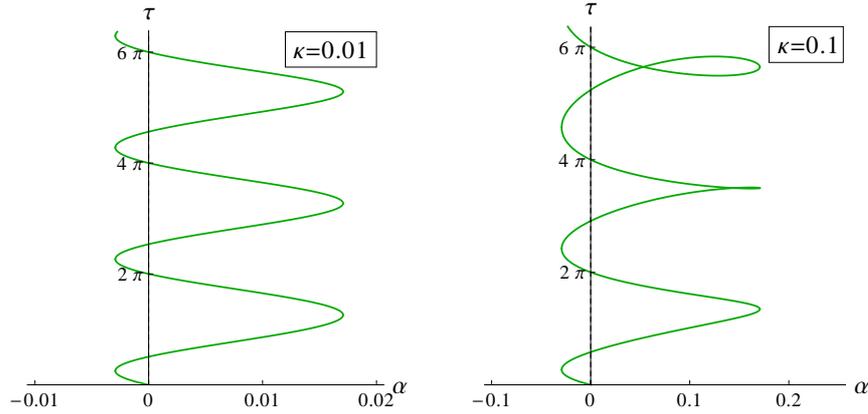


Figura 7.6: Curvas de posibles puntos de Hopf para los valores de k indicados.

recordemos que $Q : \mathbb{C}^m \rightarrow Nuc(\hat{L})$ ortogonal a $Rango(\hat{L})$.

Consideremos una aproximación de la solución periódica de orden $2q$. Reemplazando en la función g se observa que los coeficientes c_j se calculan solamente a partir de $F_3(z) = F_3(z_1, z_2) = -(z_1^2 + z_2^2) \begin{pmatrix} z_1 - \gamma z_2 \\ \gamma z_1 + z_2 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, realizando los cálculos en la tabla 7.2, si $a_1 = v\theta$, para $j = 1$ se obtiene $a_{02} = a_{22} = 0$, ya que $g_0 = g_2 = 0$ y $g_1 = -2(1 + i\gamma)\theta^3 v$. Luego, utilizando la proyección Q , y ya que g_1 es paralelo a v resulta $(I - Q)G(i\omega_0)g_1 = 0$. De esta última ecuación se sigue que $v^\perp = 0$, y el coeficiente a_1 no tiene correcciones.

Al realizar el cálculo en forma iterativa, debido a la forma de la función g , resulta que $a_1 = v\theta$ y $a_j = 0, j \neq 1$, independientemente del orden $2q$ elegido. Además, como el producto $w^T(G(i\omega)g_1)$ en (7.31c) sólo contiene términos de θ^3 , la ecuación de bifurcación resulta

$$\hat{\lambda}(i\omega, \alpha) + 1 - \frac{2(1 + i\gamma)}{i\omega - \alpha + (1 - e^{-i\omega\tau})\kappa \cos \beta} \theta^2 = 0. \quad (7.75)$$

Simplificando la ecuación anterior y tomando parte real e imaginaria se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} -\alpha + \kappa \cos \beta - \kappa \cos(\beta - \omega\tau) - 2\theta^2 &= 0, \\ \kappa \sen \beta - \kappa \sen(\beta - \omega\tau) - 1 + \omega - 2\gamma\theta^2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.76)$$

Para valores fijos de los parámetros $\alpha, \beta, \kappa, \tau$, las soluciones (ω, θ) del sistema anterior están en correspondencia uno a uno con las soluciones periódicas del sistema original, que tienen la forma: $y(t) = \sqrt{2}\theta \begin{pmatrix} \cos t\omega \\ \sen t\omega \end{pmatrix}$.

Es importante señalar que en las soluciones del sistema anterior la componente θ no es necesariamente un valor pequeño, en caso de no serlo las soluciones correspondientes no estarían asociadas necesariamente a bifurcaciones locales sino posiblemente a fenómenos globales. Sin embargo, considerando amplitud θ pequeña es posible realizar un análisis de bifurcaciones utilizando la teoría de singularidades.

Sea (ω_0, α_0) un punto en el que se verifican las condiciones necesarias (7.71). Considerando α como parámetro de bifurcación y para valores de θ pequeño, el

sistema (7.76) permite calcular desarrollos de α y ω en función de θ hasta cualquier orden deseado. Como un ejemplo, hasta orden 6 se obtiene

$$\alpha = \alpha_0 - \left(2 + \frac{2\kappa\gamma\tau \operatorname{sen}(\beta - \tau\omega_0)}{1 + \kappa\tau \cos(\beta - \tau\omega_0)} \right) \theta^2 + \frac{2\kappa\gamma^2\tau^2(\kappa\tau + \cos(\beta - \tau\omega_0))}{(1 + \kappa\tau \cos(\beta - \tau\omega_0))^3} \theta^4 - \frac{4\kappa\gamma^3\tau^3(-1 + 3\kappa^2\tau^2 + 2\kappa\tau \cos(\beta - \tau\omega_0)) \operatorname{sen}(\beta - \tau\omega_0)}{3(1 + \kappa\tau \cos(\beta - \tau\omega_0))^5} \theta^6, \quad (7.77)$$

y la aproximación de la frecuencia

$$\omega = \omega_0 + \frac{2\gamma}{1 + \kappa\tau \cos(\beta - \tau\omega_0)} \theta^2 - \frac{2\kappa\gamma^2\tau^2 \operatorname{sen}(\beta - \tau\omega_0)}{(1 + \kappa\tau \cos(\beta - \tau\omega_0))^3} \theta^4 - \frac{4\kappa\gamma^3\tau^3(-\cos(\beta - \tau\omega_0) + \kappa\tau(-2 + \cos 2(\beta - \tau\omega_0)))}{3(1 + \kappa\tau \cos(\beta - \tau\omega_0))^5} \theta^6. \quad (7.78)$$

De acuerdo a la teoría de singularidades presentada en la sección anterior, el desarrollo en (7.77) permitirá estudiar y determinar regiones en el espacio de parámetros en que el sistema sufre bifurcaciones degeneradas que generan multiplicidad de ciclos.

Fijando $\beta = \pi/4$ y $\gamma = -10$, se obtiene el diagrama de bifurcación en el espacio κ - τ que se muestra en la figura 7.7 izquierda. Allí se grafican las curvas correspondientes a las variedades de transición:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_1 = 0, \\ H_1 &: 3\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2^2, \quad \alpha_2/\alpha_3 < 0, \\ D &: 4\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2^2, \quad \alpha_2/\alpha_3 < 0. \end{aligned} \quad (7.79)$$

En el punto $(\kappa_0, \tau_0) = (-0,0475468061, 2,0927529542)$, intersección de las tres curvas en el espacio κ - τ , tenemos la forma normal

$$\alpha_3\theta^6 - (\alpha - \alpha_0) = 0, \quad (7.80)$$

siendo $\alpha_3 = -601,643$, en cada región comprendida entre las curvas encontramos distintos escenarios que corresponden al desarrollo universal de la ecuación anterior. Graficamos en la figura 7.7 derecha ejemplos de los diagramas de bifurcación persistentes hallados. La estabilidad de los ciclos no se indica en los diagramas, sin embargo la misma se puede determinar considerando que el equilibrio es estable para valores de $\alpha < \alpha_0$. Para valores de κ pequeños el punto de Hopf (ω_0, α_0) hallado es único y los diagramas se corresponden con los predichos.

7.4.3.1. Otras bifurcaciones de ciclos

Como mencionamos anteriormente, al aumentar el valor de κ (en valor absoluto), existen varios puntos de Hopf para un mismo valor del retardo. A continuación planteamos una forma alternativa a la utilización de teoría de singularidades, para estudiar soluciones periódicas que conecten puntos de bifurcación de Hopf a partir de la ecuación de bifurcación obtenida con el método en frecuencia.

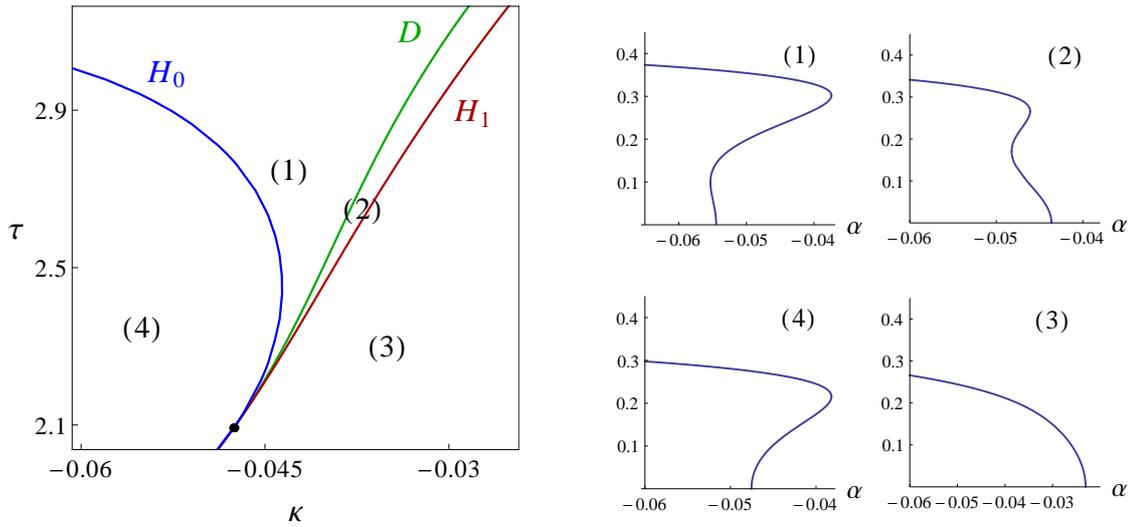


Figura 7.7: Diagrama de bifurcación en el espacio (κ, τ) con las curvas dadas en (7.79). Diagramas persistentes en cada región indicada en la figura de la izquierda.

Considerando una vez más la ecuación de bifurcación (7.75), pero despejando esta vez en función de la frecuencia, tenemos

$$\begin{aligned} \theta^2 &= \frac{\omega - 1 + \kappa \operatorname{sen} \beta - \kappa \operatorname{sen}(\beta - \omega\tau)}{2\gamma}, \\ \alpha &= \kappa \cos \beta - \kappa \cos(\beta - \omega\tau) - 2\theta^2. \end{aligned} \tag{7.81}$$

Si tomamos $z = \theta^2$, y calculamos el vector tangente de la curva $(\alpha(\omega), z(\omega))$, podemos determinar distintas condiciones de bifurcación de soluciones periódicas. Podemos plantear por ejemplo, condiciones de bifurcación de Hopf degenerada, equivalentes a las presentadas en la sección anterior. Otras bifurcaciones de ciclos que no se encuentran entre las anteriores son aquellas que conectan dos puntos de bifurcación de Hopf, a continuación consideramos brevemente esta situación.

Las condiciones $z = 0$, $\frac{dz}{d\alpha} = 0$ y $\frac{d^2z}{d\alpha^2} < 0$, que corresponden a la existencia de un vector tangente horizontal y curvatura negativa, indican la existencia de una bifurcación de ciclos como la mencionada anteriormente. Es decir, estas condiciones implican que en un entorno del punto α_0 en el que se verifiquen las condiciones anteriores existirá una rama de ciclos que conectan dos puntos de bifurcación de Hopf. Para la ecuación estudiada, de acuerdo al sistema (7.81), las condiciones resultan

$$\begin{aligned} \kappa \operatorname{sen} \beta - \kappa \operatorname{sen}(\beta - \omega\tau) - 1 + \omega &= 0, \\ 1 + \kappa\tau \cos(\beta - \omega\tau) &= 0, \\ c = \frac{d^2z}{d\alpha^2} < 0. \end{aligned} \tag{7.82}$$

En la figura 7.8 arriba izquierda mostramos algunos puntos en el espacio κ - τ en los que se verifican las condiciones anteriores. Utilizando dos valores fijos del retardo τ , graficamos en las figuras 7.8 arriba derecha y abajo, los diagramas característicos de este tipo de bifurcación. En los diagramas en 7.8 abajo vemos que existen varias ramas de soluciones periódicas que conectan equilibrios, las mismas van desapareciendo a medida que κ aumenta.

Considerando condiciones equivalentes a las anteriores hemos podido observar más escenarios interesantes relacionados con ciclos periódicos. Como un ejemplo,

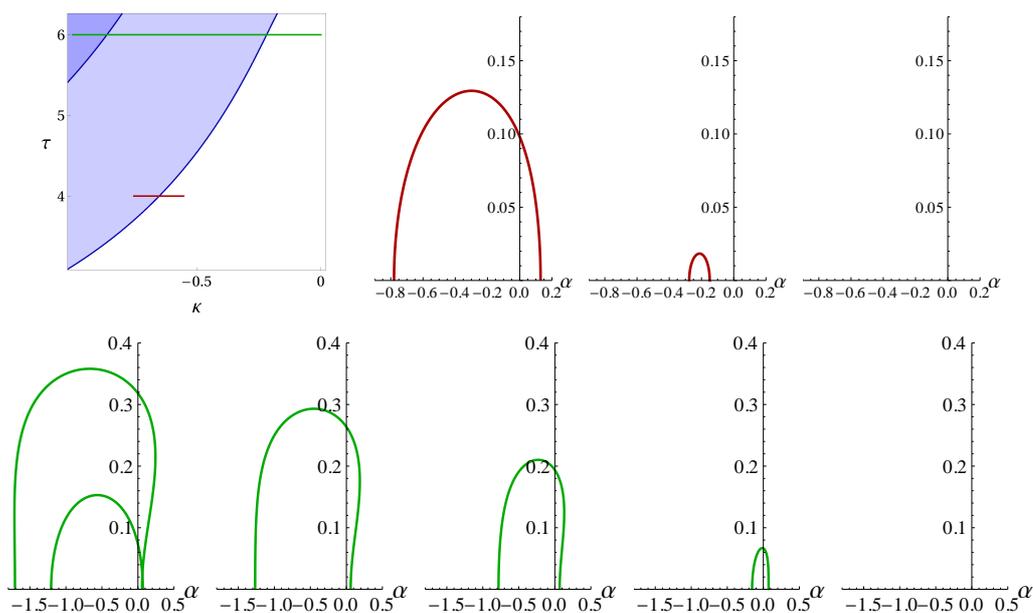


Figura 7.8: Izquierda: curvas en que se verifica (7.82). Derecha: diagramas para valores en el segmento inferior (con $\tau = 4$) indicado en la figura de la izquierda. Abajo: diagramas para valores en el segmento superior, fijando $\tau = 6$. De izquierda a derecha se toman los valores del parámetro $\kappa = -1, -0,75, -0,5, -0,25, 0$, respectivamente.

tomemos $\tau = 7$, en el valor $\kappa_0 = 0,372352$ se verifican las dos primeras ecuaciones en (7.82). Para valores de κ en un entorno de κ_0 obtenemos los diagramas que se muestran en la figura 7.9. Como podemos observar, este tipo de análisis requiere un desarrollo más formal y resulta prometedor para determinar bifurcaciones que complementen el análisis realizado utilizando la teoría descrita en la sección 7.3.1.

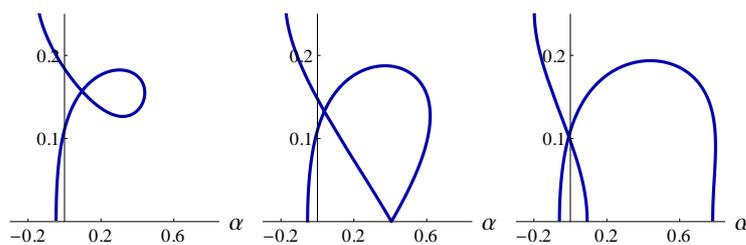


Figura 7.9: Diagramas para $\tau = 7$. En la figura central se considera $\kappa = \kappa_0$, en las figuras de la izquierda y de la derecha, un valor de κ menor y otro mayor a κ_0 , respectivamente.

Sistemas discretos con retardo

8.1. Introducción

Los sistemas con retardo han adquirido gran importancia en los últimos años; en particular, muchos investigadores se han enfocado en los esquemas de control que utilizan realimentación retrasada, conocidos como TDFC (*time delay feedback control*) [10, 11, 39, 67]. Dichos esquemas resultan simples y eficientes para diferentes objetivos de control que dependen de la aplicación particular; además se han utilizado tanto en sistemas continuos [39, 67, 68] como discretos [11, 80, 82]. En sistemas de EDOs el hecho de utilizar un esquema TDFC hace que el espacio de estados se vuelva de dimensión infinita. En mapas, el análisis es más simple ya que, si bien se incrementa el número de estados del sistema, este número sigue siendo finito.

Aunque la realimentación retrasada sirve para distintos objetivos, como la supresión de caos o estabilización de órbitas inestables, la misma puede introducir nuevas bifurcaciones no deseadas. Esto es razonable debido al mencionado incremento en la dimensión del sistema. También es posible que se alteren las bifurcaciones ya existentes, tanto en su ubicación como en lo que respecta a la estabilidad.

El objetivo en este capítulo es estudiar cómo repercute el uso de este tipo de control en la dinámica de un mapa escalar, que sin realimentación presenta una bifurcación de doble período. Como herramienta de estudio utilizamos el método en frecuencia [58, 59], cuya aplicación a sistemas discretos se puede hallar en [20, 21]. Mediante este método, obtenemos en forma analítica condiciones explícitas para la ocurrencia de bifurcaciones de doble período y Neimark-Sacker en el sistema controlado. También calculamos expresiones analíticas de los coeficientes que permiten determinar la estabilidad de las órbitas. Por último, utilizando el método en frecuencia, demostramos que para ciertos valores del retardo, la interacción entre doble período y Neimark-Sacker se debe a la existencia de la resonancia 1:2. El despliegue de esta resonancia involucra dinámicas complejas descritas en [45].

8.2. Método en frecuencia para mapas

Consideremos el sistema en variables de estado

$$x_{n+1} = Ax_n + Bf(x_n, \mu) \quad (8.1)$$

donde $x_n \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ (que puede ser la matriz nula), $B \in \mathbb{R}^{p \times l}$, $\mu \in \mathbb{R}^s$ es un vector de parámetros y $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^l$ es una función no lineal al menos C^3 .

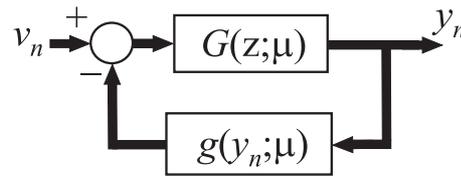


Figura 8.1: Representación en bloques de un sistema entrada-salida.

Podemos transformar el sistema anterior en la forma realimentada de la figura 8.1 tomando

$$G(z, \mu) = C[zI - A]^{-1}B \quad (8.2)$$

y $g(y_n, \mu) = -f(y_n, \mu)$, donde $y_n = Cx_n$ con $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$. En la figura 8.1, v_n es la entrada que se asume nula, $y_n \in \mathbb{R}^m$ es la salida y z representa una variable compleja. Como mencionamos en el capítulo anterior, la representación no es única y además, con la elección apropiada de las matrices C y B , las dimensiones m del espacio de entrada y l del espacio de salida del sistema equivalente pueden generalmente ser menores que p . Como se verá en las secciones siguientes, esta reducción generalmente permite que el análisis de bifurcaciones en el dominio frecuencia sea más sencillo de realizar que en el dominio tiempo.

Calculamos los puntos fijos \hat{y} de este sistema resolviendo

$$\hat{y} = -G(1, \mu)g(\hat{y}, \mu), \quad (8.3)$$

y el comportamiento dinámico en torno a los mismos se caracteriza mediante la matriz de lazo abierto $G(z, \mu)J(\mu)$ con

$$J(\mu) = \left. \frac{\partial g(\hat{y}, \mu)}{\partial y} \right|_{\hat{y}}. \quad (8.4)$$

Considerando $z = e^{i\omega}$, obtenemos el diagrama de Nyquist de los autovalores $\lambda(z, \mu)$ de $G(z, \mu)J(\mu)$ en el plano complejo. Si el diagrama de Nyquist de uno de los autovalores, que llamaremos $\hat{\lambda}$, cruza el punto crítico -1 cuando $\mu = \mu_0$ y $\omega = \omega_0$, pueden darse las siguientes situaciones:

- si $\omega_0 = \pi$, el sistema podría presentar una bifurcación de doble período (PD).
- si $e^{is\omega_0} \neq 1$ para $s = 1, 2, 3, 4$, en este caso es posible la aparición de una bifurcación de Neimark–Sacker (NS).

De existir alguna de las bifurcaciones anteriores, la amplitud y la estabilidad de la órbita emergente puede calcularse utilizando el método en frecuencia [20, 21]. Si consideramos sistemas SISO (*single-input single-output*) el único autovalor está dado por $\lambda(z, \mu) = G(z, \mu)J(\mu)$, y los autovectores correspondientes resultan idénticamente 1. Los cálculos en este caso se reducen considerablemente, en la tabla 8.1 describimos el procedimiento correspondiente a este tipo de sistemas, el mismo será suficiente para los propósitos de este capítulo. Una formulación más general puede hallarse en [27].

Si existe bifurcación, determinamos la estabilidad mediante el cálculo del índice σ (Paso 7 u 11 en la tabla 8.1). Si $\sigma > 0$ ($\sigma < 0$), las oscilaciones existen cuando

el punto fijo es inestable (estable), y las mismas son estables (inestables); en consecuencia, la bifurcación es *supercrítica* (*subcrítica*). En caso que $\sigma = 0$, la bifurcación es degenerada y el comportamiento que presenta el sistema es más complejo (ver [45]).

8.3. Descripción del problema

Consideremos un mapa escalar

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu) + u_n, \quad (8.5)$$

donde $x_n \in \mathbb{R}$ es el estado, $\mu \in \mathbb{R}$ es un parámetro, f es una función no lineal suave (al menos C^3 en el primer argumento) y $u_n \in \mathbb{R}$ es un control que se aplica al mapa. Supongamos que en ausencia del control ($u_n = 0$), dicho mapa verifica las siguientes condiciones:

- Existe un punto fijo \hat{x} , que es estable para $\mu \leq \mu_{\mathcal{O}}$ e inestable para $\mu > \mu_{\mathcal{O}}$.
- Existe un valor μ_0 para el cual el punto fijo \hat{x} sufre una bifurcación de doble período. Esto implica que $\partial f(x, \mu)/\partial x|_{(\hat{x}, \mu_{\mathcal{O}})} = -1$.

Como se muestra en [45], el coeficiente de estabilidad de la órbita emergente está dado por la expresión

$$\sigma_{\mathcal{O}}^{PD} = \frac{1}{4}(D_{xx}f(\hat{x}, \mu_{\mathcal{O}}))^2 + \frac{1}{6}D_{xxx}f(\hat{x}, \mu_{\mathcal{O}}). \quad (8.6)$$

Si este índice es negativo, la bifurcación es subcrítica, y si el mismo es positivo la bifurcación es supercrítica.

En lo que sigue analizaremos el efecto de aplicar un control con retardo de la forma:

$$u_n = \rho(x_{n-k} - f(x_n, \mu)), \quad (8.7)$$

donde $\rho \in (0, 1)$ es la ganancia del control y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es la cantidad de muestras retrasadas. Entonces, podemos escribir el sistema controlado completo como

$$x_{n+1} = (1 - \rho)f(x_n, \mu) + \rho x_{n-k}. \quad (8.8)$$

El control aplicado es del tipo *echo-type* [11]. Este control preserva el punto fijo del mapa y es aplicado para extender el rango de estabilidad del mismo. Para facilitar el análisis reescribimos el mapa (8.8) como un sistema de $k+1$ ecuaciones de estado de primer orden de la forma

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = (1 - \rho)f(x_{1,n}, \mu) + \rho x_{2,n}, \\ x_{2,n+1} = x_{3,n}, \\ \vdots \\ x_{k+1,n+1} = x_{1,n}. \end{cases} \quad (8.9)$$

Tabla 8.1: Método en frecuencia para bifurcaciones PD y NS para sistemas SISO.

Paso 1	Calcular $G(\cdot)$, $g(\cdot)$, \hat{y} , $J(\cdot)$ y $\hat{\lambda}(\cdot)$ tales que $\hat{\lambda}(e^{i\omega_0}, \mu_0) = -1$.
Paso 2	Definir la función $H(z, \mu) = [I + G(z, \mu)J(\mu)]^{-1}G(z, \mu)$.
Paso 3	Calcular $Q = D_{yy}g(\hat{y}, \mu)$ y $L = D_{yyy}g(\hat{y}, \mu)$.
Paso 4	Si $\omega_0 = \pi$, hallar los coeficientes $v_0^{PD} = -H(1, \mu)Q/2$, y $p^{PD}(\mu) = Qv_0^{PD} + L/6$. Si no, continuar en el Paso 8.
Paso 5	Obtener $\xi^{PD}(\mu) = -G(-1, \mu)p^{PD}(\mu)$ y hallar θ_R tal que $\lambda(-1, \mu_R) = -1 + \xi^{PD}(\mu_R)\theta_R^2$ para $\mu_R \neq \mu_0$. Si la solución existe, ir al Paso 6, si no, el procedimiento termina.
Paso 6	Aproximar la solución periódica como sigue: $y_n = \hat{y} + \theta_R^2 v_0^{PD} + \theta_R e^{i\pi n}$.
Paso 7	Calcular $\sigma^{PD} = \frac{-G(-1, \mu_0)p^{PD}(\mu_0)}{D_z G(-1, \mu_0)J(\mu_0)}$. Termina el procedimiento.
Paso 8	Calcular los coeficientes $v_0^{NS} = -H(1, \mu)Q/4$, $v_2^{NS} = -H(e^{i2\omega}, \mu)Q/4$, y $p^{NS}(\omega, \mu) = Qv_0^{NS} + Qv_2^{NS}/2 + L/8$.
Paso 9	Obtener $\xi^{NS}(\omega, \mu) = -G(e^{i\omega}, \mu)p^{NS}(\omega, \mu)$ y hallar ω_R y θ_R tal que $\lambda(e^{i\omega_R}, \mu_R) = -1 + \xi^{NS}(\omega_R, \mu_R)\theta_R^2$ para $\mu_R \neq \mu_0$. Si la solución existe, ir al Paso 10, si no, el procedimiento termina.
Paso 10	Aproximar la solución periódica como sigue: $y_n = \hat{y} + \Re(\theta_R^2 v_0^{NS} + \theta_R e^{i\omega_R n} + \theta_R^2 v_2^{NS} e^{i2\omega_R n})$.
Paso 11	Calcular $\sigma^{NS} = \Re\left(\frac{G(e^{i\omega_0}, \mu_0)p^{NS}(\omega_0, \mu_0)}{e^{i\omega_0} D_z G(e^{i\omega_0}, \mu_0)J(\mu_0)}\right)$. Termina el procedimiento.

La matriz Jacobiana del sistema anterior en \hat{x} es

$$A = \begin{pmatrix} (1-\rho)D_x f(\hat{x}, \mu) & \rho & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.10)$$

y su ecuación característica resulta

$$(\lambda - (1-\rho)D_x f(\hat{x}, \mu)) \lambda^k - \rho = 0. \quad (8.11)$$

Sólo será posible hallar las expresiones analíticas de los autovalores para leyes de control con pequeños retardos ($k = 0, 1$ o 2). Para retardos mayores, los autovalores se calculan en general en forma numérica [11], lo que dificulta la generalización de los resultados.

Veremos a continuación que el método en frecuencia permite un tratamiento analítico de mayor alcance del problema, que además provee condiciones explícitas para determinar la existencia de bifurcaciones de interés.

8.4. Análisis en el dominio frecuencia

El sistema (8.9) se puede expresar como un sistema realimentado de la forma (8.1) eligiendo las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad C^T = B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.12)$$

Así, la función de transferencia y el bloque no lineal del sistema entrada-salida equivalente están dados por

$$G(z) = C[zI - A]^{-1}B = \frac{z^k}{z^{k+1} - \rho}, \quad (8.13)$$

$$g(y_n, \mu) = -(1-\rho)f(y_n, \mu), \quad (8.14)$$

con $y_n = x_{1,n}$. La derivada de g en $\hat{y} = \hat{x}$ está dada por

$$J(\mu) = -(1-\rho)D_y f(\hat{y}, \mu), \quad (8.15)$$

y por lo tanto

$$\hat{\lambda}(z, \mu) = G(z, \mu)J(\mu) = -\frac{z^k(1-\rho)D_y f(\hat{y}, \mu)}{z^{k+1} - \rho}. \quad (8.16)$$

Reemplazando $z = e^{i\omega}$, resulta

$$\hat{\lambda}(e^{i\omega}, \mu) = -\frac{e^{i\omega k}(1-\rho)D_y f(\hat{y}, \mu)}{e^{i\omega(k+1)} - \rho}. \quad (8.17)$$

Como esperábamos, el análisis de $k+1$ autovalores en el dominio tiempo original se transforma en el estudio de una única función λ en el dominio frecuencia. Para cada valor de μ y ρ , la ecuación (8.17) representa una curva de Nyquist en el plano complejo, parametrizada en la frecuencia ω . Podemos determinar la estabilidad del punto fijo a partir de la cantidad de enciqlamientos del punto $-1 + 0i$ por parte de esta curva, y cada nuevo enciqlamiento de este punto que se da al variar los parámetros indica la ocurrencia de una bifurcación.

En las siguientes subsecciones se aprovecha la mencionada ventaja que proporciona el método en frecuencia para obtener resultados analíticos relacionados con las dinámicas no lineales que emergen a partir del equilibrio \hat{y} en el mapa controlado.

8.4.1. Estabilidad del punto fijo

Como mencionamos previamente, la estabilidad del punto fijo se determina analizando la función λ . Los polos de esta función están dados por

$$z_r = \rho^{\frac{1}{k+1}} e^{\frac{i2\pi r}{k+1}}, \quad r = 0, 1, \dots, k, \quad (8.18)$$

pero $0 < \rho < 1$, entonces todos los valores anteriores se encuentran dentro del círculo unidad. De acuerdo al criterio de estabilidad de Nyquist, el punto fijo será estable si el lugar característico $\lambda(e^{i\omega}, \mu)$ no encierra al punto crítico -1 .

Definimos la función normalizada

$$\tilde{\lambda}(e^{i\omega}) := \frac{(1 - \rho)e^{i\omega k}}{e^{i\omega(k+1)} - \rho}, \quad (8.19)$$

realizamos el análisis de estabilidad determinando los enciqlamientos de $\tilde{\lambda}(e^{i\omega})$ alrededor del punto $1/D_y f(\hat{y}, \mu)$. De hecho, fijando valores de ρ y k , y variando μ el diagrama de Nyquist de $\tilde{\lambda}(e^{i\omega})$ permanece invariante mientras que el nuevo punto crítico se mueve a lo largo del eje real, simplificando el análisis.

Podemos calcular fácilmente que el módulo

$$|\tilde{\lambda}(e^{i\omega})| = \frac{1 - \rho}{\sqrt{1 - 2\rho \cos \omega(k+1) + \rho^2}}, \quad (8.20)$$

satisface $(1 - \rho)/(1 + \rho) \leq |\tilde{\lambda}(e^{i\omega})| \leq 1$ para todo ω . Así, la curva de Nyquist normalizada se encuentra dentro de un anillo en el plano complejo. Los mínimos valores del módulo se obtiene en $\tilde{\omega}_n = (2n + 1)/(k + 1)\pi$, $n = 0, 1, \dots, k$, y los máximos en $\tilde{\omega}_n = 2n/(k + 1)\pi$, $n = 0, 1, \dots, k$. Así, existen $k + 1$ mínimos y $k + 1$ máximos. En las figuras 8.2 mostramos gráficos típicos de $\tilde{\lambda}$ para valores de k pares e impares.

Para valores pares de k , uno de los máximos siempre se encuentra en el eje real negativo en $\tilde{\lambda}(e^{i\pi}) = -1$. Esto significa que una condición crítica se establece cuando $1/D_y f(\hat{y}, \mu_0) = -1$. Luego, el punto fijo será estable si $D_y f(\hat{y}, \mu) > -1$ (no existe enciqlamiento) e inestable si $D_y f(\hat{y}, \mu) < -1$ (existe un enciqlamiento). Para cada valor de k , la cantidad de intersecciones de $\tilde{\lambda}(e^{i\omega})$ con el eje real negativo depende de los valores de ρ y k .

Los ceros de la parte imaginaria son las soluciones de $h(\omega) := -(\text{sen } \omega + \rho \text{sen } \omega k)$. La función h tiene una raíz doble en $\omega = \pi$ si $k\rho = 1$. Si $k\rho < 1$, basados en las

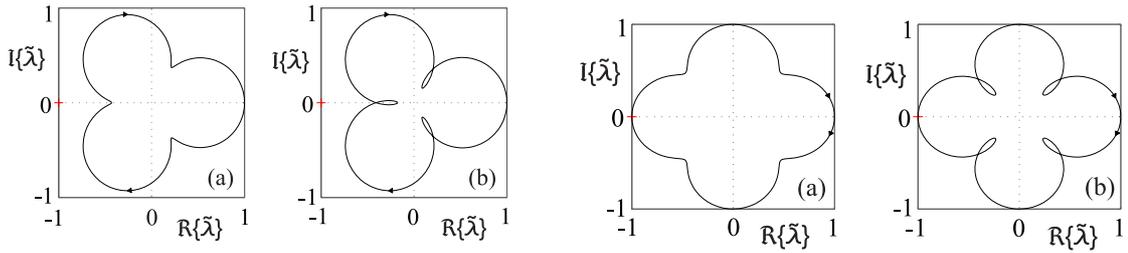


Figura 8.2: Diagramas de Nyquist. Izquierda: para $k = 2$. (a) $\rho = 0,4$, (b) $\rho = 0,7$. Derecha: para $k = 3$. (a) $\rho = 0,2$, (b) $\rho = 0,5$. Las pequeñas flechas indican la dirección a lo largo del contorno de Nyquist.

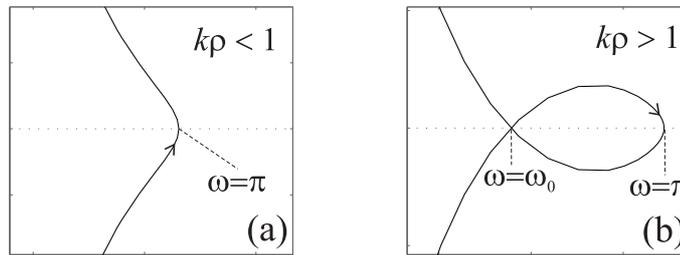


Figura 8.3: Detalle de la intersección del diagrama de Nyquist con el eje real negativo, para valores pares de k . (a) $k\rho < 1$, (b) $k\rho > 1$.

propiedades de la curva (que es un tipo de cicloide), podemos demostrar que la intersección es única (ver figura 8.3 (a)). Además, esta intersección ocurre en uno de los mínimos localizados en $\tilde{\lambda}(e^{i\pi}) = -(1 - \rho)/(1 + \rho)$. Entonces, \hat{y} será estable si $D_y f(\hat{y}, \mu) > -(1 - \rho)/(1 + \rho)$ e inestable si $D_y f(\hat{y}, \mu) < -(1 - \rho)/(1 + \rho)$. Si $k\rho > 1$, resulta $h'(\pi) < 0$ y, además $h(\pi) = 0$ entonces existe un intervalo $I = (\pi - \epsilon, \pi]$ para algún $\epsilon > 0$ tal que $h(\omega) > 0$ para $\omega \in I$. Por otro lado, ya que h es continua y $h(\pi/2) < 0$, existe al menos una raíz de esa función en el intervalo $(\pi/2, \pi)$. Luego, es posible afirmar que $\tilde{\lambda}(e^{i\omega})$ interseca el eje real al menos dos veces: en $\omega_o < \pi$ (con $\tilde{\lambda}(e^{i\omega_o}) < -(1 - \rho)/(1 + \rho)$) y para $\omega = \pi$ (en $\tilde{\lambda}(e^{i\pi}) = -(1 - \rho)/(1 + \rho)$). Con este escenario (figura 8.3 (b)), el punto fijo es estable si $D_y f(\hat{y}, \mu) > 1/\tilde{\lambda}(e^{i\omega_o})$ e inestable si $D_y f(\hat{y}, \mu) < 1/\tilde{\lambda}(e^{i\omega_o})$.

Finalmente, observamos que $\tilde{\lambda}(1) = 1$ para cada k , agregando una nueva condición para la estabilidad del punto fijo ($1/D_y f(\hat{y}, \mu_o) = 1$). De esta manera, \hat{y} será estable (inestable) si $D_y f(\hat{y}, \mu) < 1$ ($D_y f(\hat{y}, \mu) > 1$). Resumimos en la tabla 8.2 todas las condiciones para las cuales \hat{y} es estable.

8.4.2. Bifurcaciones de doble período

Como hemos supuesto en la sección anterior, el mapa original sin control desarrolla una bifurcación PD para $\mu = \mu_o$. A continuación mostramos que el efecto del control retrasado en las características de esta bifurcación depende del valor de k .

Proposición 32. *El mapa (8.8) exhibe la misma bifurcación PD que el sistema sin control si se considera una cantidad impar k de retardos en el control. Sin embargo,*

Tabla 8.2: Condiciones de estabilidad del punto fijo \hat{y} .

Punto fijo estable	
k impar	$-1 < D_y f(\hat{y}, \mu) < 1,$
k par	$-(1 + \rho)/(1 - \rho) < D_y f(\hat{y}, \mu) < 1$ si $k\rho < 1,$ $1/\tilde{\lambda}(e^{i\omega_0}) < D_y f(\hat{y}, \mu) < 1$ si $k\rho > 1,$ $-1 \leq \tilde{\lambda}(e^{i\omega_0}) \leq -(1 + \rho)/(1 - \rho).$

el nacimiento y las características (amplitud y estabilidad) de la órbita de período dos pueden ser modificados si k es par.

Demostración. La condición necesaria para la existencia de una bifurcación de doble período en el sistema controlado es

$$\tilde{\lambda}(e^{i\pi}) = \frac{1}{D_y f(\hat{y}, \mu_0)}. \quad (8.21)$$

Para afirmar que existe una solución de doble período es necesario además verificar si la ecuación

$$\lambda(-1, \mu_R) = -1 + \xi^{PD}(\mu_R)\theta_R^2, \quad (8.22)$$

tiene una solución para $\mu_R \neq \mu_0$ (Paso 5 de la tabla 8.1). Considerando (8.17) y $\xi^{PD}(\mu)$ calculado de acuerdo a la tabla 8.1, obtenemos

$$\frac{(-1)^{k+1}(1 - \rho)D_y f(\hat{y}, \mu_R)}{(-1)^{k+1} - \rho} = -1 + \frac{(-1)^k(1 - \rho)}{(-1)^{k+1} - \rho} \gamma(\mu_R)\theta_R^2, \quad (8.23)$$

donde

$$\gamma(\mu) := \frac{1}{2} \frac{(D_{yy} f(\hat{y}, \mu))^2}{(1 - D_y f(\hat{y}, \mu))} + \frac{1}{6} D_{yyy} f(\hat{y}, \mu). \quad (8.24)$$

Podemos determinar la estabilidad de la órbita emergente calculando el coeficiente σ^{PD} , que en este caso, de acuerdo al procedimiento en la tabla 8.1 resulta

$$\sigma^{PD} = -\frac{((-1)^{k+1} - \rho)\gamma(\mu_0)}{((-1)^{k+1} + k\rho)D_y f(\hat{y}, \mu_0)}. \quad (8.25)$$

A continuación analizamos cómo la paridad del retardo implica distintos resultados.

- Caso k impar. La condición (8.21) resulta $D_y f(\hat{y}, \mu_0) = -1$, con lo cual la condición de doble período es la misma que para el sistema sin controlador, luego, $\mu_0 = \mu_0$. Además, la ecuación (8.23) da lugar a $D_y f(\hat{y}, \mu_R) + 1 = -\gamma(\mu_R)\theta_R^2$, y entonces

$$\theta_R = \sqrt{\frac{-(1 + D_y f(\hat{y}, \mu_R))}{\gamma(\mu_R)}}. \quad (8.26)$$

El coeficiente de estabilidad (8.25) en este caso puede expresarse como

$$\sigma_{od}^{PD} = \frac{(1 - \rho)}{(1 + k\rho)} \sigma_{\mathcal{O}}^{PD}. \quad (8.27)$$

Ya que $\rho \in (0, 1)$, el signo del índice σ_{od}^{PD} es el mismo que el del coeficiente $\sigma_{\mathcal{O}}^{PD}$ (ver (8.6)). Así, la estabilidad de la bifurcación de doble período se preserva.

Además, utilizando el método en frecuencia podemos probar que la amplitud θ_R de la órbita es la misma que para el mapa sin control. Considerando $G(z) = 1/z$ y $g(\cdot) = -f(\cdot)$, utilizamos el procedimiento descrito en la tabla 8.1. Así, $\lambda(e^{i\omega}, \mu) = -D_y f(\hat{y}, \mu_0) e^{-i\omega}$, y se verifica que $\xi_{\mathcal{O}}^{PD}(\mu) = -\gamma(\mu)$. Luego, a partir de la ecuación

$$\lambda(-1, \mu_R) = -1 + \xi_{\mathcal{O}}^{PD}(\mu) \theta_R^2, \quad (8.28)$$

obtenemos la amplitud buscada, que coincide con la anterior. De esta manera, hemos probado que para el caso k impar, el control no modifica la bifurcación PD existente.

- Caso k par. De la condición (8.21) se sigue que los puntos de bifurcación PD están dados por

$$D_y f(\hat{y}, \mu_0) = -\frac{1 + \rho}{1 - \rho}. \quad (8.29)$$

Luego, el nacimiento de la bifurcación depende ahora del parámetro μ y de la ganancia ρ . De la ecuación (8.23) obtenemos fácilmente la ecuación

$$D_y f(\hat{y}, \mu_R) + \frac{1 + \rho}{1 - \rho} = -\gamma(\mu_R) \theta_R^2, \quad (8.30)$$

entonces la amplitud de la posible oscilación es

$$\theta_R = \sqrt{\frac{D_y f(\hat{y}, \mu_R) + \frac{1 + \rho}{1 - \rho}}{-\gamma(\mu_R)}}, \quad (8.31)$$

y a partir de (8.25) el coeficiente de estabilidad se reduce a

$$\sigma_{ev}^{PD} = \frac{(1 - \rho)}{(1 - k\rho)} \gamma(\mu_0). \quad (8.32)$$

Asumiendo que la bifurcación es no degenerada tenemos $\sigma_{ev}^{PD} \neq 0$, lo que implica $\gamma(\mu_0) \neq 0$, y considerando que γ es una función continua para $D_y f(\hat{y}, \mu) \neq 1$, se puede afirmar que existe un entorno $B = \{\mu \in \mathbb{R} : 0 < |\mu - \mu_0| < \epsilon\}$ tal que: $\text{sig}(\gamma(\mu)) = \text{sig}(\gamma(\mu_0))$.

Supongamos que $k\rho < 1$. Si $\gamma(\mu_0) > 0$, para $\mu_R \in B$ y $\mu_R > \mu_0$ (lo que implica $D_y f(\hat{y}, \mu_R) < -(1 + \rho)/(1 - \rho)$), la amplitud θ_R en (8.31) está bien definida y el coeficiente σ_{ev}^{PD} indica que la bifurcación es supercrítica. Si $\gamma(\mu_0) < 0$, la solución existirá para $D_y f(\hat{y}, \mu_R) > -(1 + \rho)/(1 - \rho)$ o lo que es equivalente $\mu_R < \mu_0$, y el signo del coeficiente de curvatura determina que la bifurcación es subcrítica.

Si $k\rho > 1$, mostramos en la sección anterior que el punto fijo se vuelve inestable para $\mu = \mu_0$ tal que $D_y f(\hat{y}, \mu_0) = 1/\lambda(e^{i\omega_0}) > -(1 + \rho)/(1 - \rho)$, con $\omega_0 < \pi$.

Como la bifurcación PD ocurre cuando el punto fijo \hat{y} es inestable, la órbita de período dos es también inestable. El análisis de la dirección de la bifurcación es análogo al caso en que $k\rho < 1$.

□

Observación 33. Una elección trivial para incrementar la región de estabilidad del punto fijo sería considerar $k = 0$ (que correspondería a un controlador no lineal sin retardo). En tal caso, el punto fijo \hat{y} puede ser globalmente estable bajo ciertas condiciones de la función f . Sin embargo, en la práctica podría suceder que por limitaciones propias de la medición el controlador demore al menos una muestra en actuar. En tales aplicaciones, sería más apropiado diseñar el controlador con una cantidad par de retardos.

8.4.3. Bifurcaciones Neimark–Sacker

Es conocido que los esquemas de control con realimentación retrasada pueden inducir la ocurrencia de bifurcaciones de Neimark–Sacker [11, 80, 82]. En lo que sigue obtenemos condiciones de existencia de esta bifurcación utilizando el método en frecuencia.

Proposición 34. *Supongamos que k es par, $k\rho > 1$ y que existe un valor μ_0 del parámetro tal que $D_y f(\hat{y}, \mu_0) = 1/\tilde{\lambda}(e^{i\omega_0})$, con $-1 < \tilde{\lambda}(e^{i\omega_0}) < -(1 - \rho)/(1 + \rho)$. Supongamos además que se verifican las siguientes condiciones*

$$(i) \quad D_\mu [D_y f(\hat{y}, \mu)]|_{\mu=\mu_0} \neq 0,$$

$$(ii) \quad \sigma^{NS} \neq 0, \text{ donde}$$

$$\sigma^{NS} = -\frac{1-\rho}{8} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\omega_0 k}}{e^{i\omega_0(k+1)} + k\rho} \left[(D_{yy} f(\hat{y}, \mu_0))^2 \times \left(\frac{2}{1 - D_y f(\hat{y}, \mu_0)} + \frac{(1-\rho)e^{i2\omega_0 k}}{e^{i2\omega_0(k+1)} - (1-\rho)D_y f(\hat{y}, \mu_0)e^{i2\omega_0 k} - \rho} \right) + D_{yyy} f(\hat{y}, \mu) \right] \right). \quad (8.33)$$

Entonces, el mapa (8.8) exhibe una bifurcación NS en un entorno de \hat{y} .

Demostración. En la sección anterior probamos que la curva del autovalor $\tilde{\lambda}(e^{i\omega})$ interseca el semieje real negativo en un valor de la frecuencia $\omega_0 < \pi$ si k es par y $k\rho > 1$. Entonces, la condición crítica para la aparición de una bifurcación NS está dada por $D_y f(\hat{y}, \mu_0) = 1/\tilde{\lambda}(e^{i\omega_0})$. Como $\tilde{\lambda}$ no depende del parámetro μ , analizamos la transversalidad de la intersección enfocándonos en el comportamiento de $P(\mu) := 1/D_y f(\hat{y}, \mu)$. La derivada de P en $\mu = \mu_0$ se puede expresar como

$$D_\mu P(\mu)|_{\mu=\mu_0} = - \frac{D_\mu (D_y f(\hat{y}, \mu))}{(D_y f(\hat{y}, \mu))^2} \Big|_{\mu=\mu_0} \neq 0. \quad (8.34)$$

Entonces, se satisface la condición de transversalidad si $D_\mu (D_y f(\hat{y}, \mu))|_{\mu=\mu_0} \neq 0$. Esto implica la hipótesis (i).

Determinamos la estabilidad de la bifurcación utilizando el índice σ^{NS} , que de acuerdo a lo descrito en la tabla 8.1 está dado por (8.33). Como se puede observar,

las características de la órbita emergente dependerán de la combinación de valores de todos los parámetros (μ , ρ y k). La hipótesis (ii) asegura que la bifurcación es no degenerada.

A partir de la condición $D_y f(\hat{y}, \mu_0) = 1/\lambda(e^{i\omega_0})$, se obtiene

$$e^{i\omega_0} - (1 - \rho)D_y f(\hat{y}, \mu_0) - \rho e^{-i\omega_0 k} = 0. \quad (8.35)$$

Haciendo algunos cálculos sencillos, la expresión de la frecuencia crítica resulta

$$\omega_0 = \frac{1}{k+1} \arccos \left[\frac{1 + \rho^2 - (1 - \rho)^2 D_y f(\hat{y}, \mu_0)^2}{2\rho} \right]. \quad (8.36)$$

Utilizando las partes real e imaginaria de (8.35) y despejando ρ y $D_y f(\hat{y}, \mu_0)$ en función de ω_0 resulta

$$\rho = -\frac{\operatorname{sen}(\omega_0)}{\operatorname{sen}(\omega_0 k)}, \quad D_y f(\hat{y}, \mu_0) = \frac{\operatorname{sen}(\omega_0(k+1))}{\operatorname{sen}(\omega_0 k) + \operatorname{sen}(\omega_0)}. \quad (8.37)$$

La ecuación de la derecha establece una relación entre el parámetro μ y la frecuencia crítica ω_0 , pues la derivada está evaluada en el equilibrio. Luego, a partir de las ecuaciones anteriores obtendremos la curva de Neimark–Sacker en el espacio de parámetros ρ – μ .

□

Observación 35. Existen valores impares de k en los que (8.35) tiene una solución. Estos casos no son relevantes desde el punto de vista del control ya que el punto fijo ya es inestable cuando se produce la bifurcación de NS. Aunque existen múltiples intersecciones con el semieje real negativo, el que se encuentra más a la izquierda ocurre cuando $\omega = \pi$, y así \hat{y} pierde su estabilidad en un bifurcación PD.

8.4.4. Interacción doble período. Neimark–Sacker

De acuerdo a los resultados anteriores, el sistema controlado puede tener bifurcaciones de doble período y de Neimark–Sacker para el mismo valor del retardo k . Las dinámicas complejas observadas simulando diferentes ejemplos y las evidencias numéricas que se muestran por ejemplo en [11] sugieren que estas bifurcaciones podrían interactuar dando lugar a la resonancia 1:2, en esta resonancia dos autovalores del sistema (del dominio tiempo) se hallan en el punto -1 . El método en frecuencia provee condiciones explícitas para la ocurrencia de esta singularidad [21]. La resonancia 1:2 es una de las denominadas como resonancias fuertes, que ocurren cuando la frecuencia crítica ω_0 de la bifurcación NS satisface $e^{is\omega_0} = 1$ para $s = 1, 2, 3$ o 4 . Una explicación completa del escenario dinámico de estas singularidades puede hallarse en [45].

Proposición 36. *El mapa (8.8) desarrolla una resonancia fuerte 1:2 sólo si k es par y $k\rho = 1$.*

Demostración. De acuerdo a lo que se prueba en [21], las condiciones para detectar la existencia de una resonancia 1:2 en el dominio frecuencia son $\tilde{\lambda}(e^{i\pi}) = 1/D_y f(\hat{y}, \mu_0)$ y $D_z \tilde{\lambda}(e^{i\pi}) = 0$. Usando la definición de $\tilde{\lambda}$ dada en (8.19) la condición anterior resulta

$$D_z \tilde{\lambda}(z) \Big|_{z=e^{i\pi}} = (1 - \rho)(-1)^{k+1} \frac{k\rho + (-1)^{k+1}}{((-1)^{k+1} - \rho)^2} = 0. \quad (8.38)$$

Como $\rho \in (0, 1)$, existirá la resonancia 1:2 sólo si $k\rho + (-1)^{k+1} = 0$. Claramente, no existe solución para valores impares de k . Sin embargo, si consideramos retardos pares, es posible elegir valores adecuados de k y ρ tales que $k\rho = 1$. \square

Observación 37. El mapa controlado puede desarrollar una resonancia 1:2 independientemente de la no linealidad, considerando k par mayor que cero y $\rho = 1/k$. Para el caso ideal $k = 0$, la bifurcación PD del mapa original se puede modificar sin crear una resonancia 1:2. Sin embargo, como ya mencionamos el controlador resultante puede no ser realizable en la práctica debido a limitaciones físicas.

8.5. Ejemplos

A continuación, los resultados de la sección anterior se aplican a dos mapas de interés. En primer lugar, analizamos el conocido mapa logístico, y luego estudiamos un modelo de población considerado en [64].

8.5.1. Mapa logístico

Para este sistema tenemos $f(x) = \mu x(1-x)$. El mapa con control correspondiente ha sido estudiado en [11], donde las bifurcaciones fueron halladas en forma numérica. En esta sección obtenemos resultados analíticos que formalizan y generalizan los estudios numéricos mencionados.

Es bien conocido que el mapa $x_{n+1} = \mu x_n(1-x_n)$ tiene un punto fijo no trivial $\hat{x} = 1 - \mu^{-1}$ para $\mu > 1$. Este punto fijo es estable para $\mu < 3$, y sufre una bifurcación de doble período para $\mu = 3$, en este valor del parámetro \hat{x} pasa a ser inestable y surge una órbita estable de período 2 ($\sigma_{\mathcal{O}}^{PD} = 9$). El objetivo principal es analizar la efectividad del control *echo-type* para tratar de modificar la dinámica y que la órbita de período dos exista para valores de μ más grandes, extendiendo así el rango de estabilidad de \hat{x} . El sistema controlado a estudiar es

$$x_{n+1} = (1 - \rho)\mu x_n(1 - x_n) + \rho x_{n-k}. \quad (8.39)$$

Aplicando las proposiciones demostradas en la sección anterior y considerando que $D_x f(\hat{x}, \mu) = 2 - \mu$, $D_{xx} f(\hat{x}, \mu) = -2\mu$ y $D_{xxx} f(\hat{x}, \mu) = 0$, se obtienen las siguientes expresiones de las curvas críticas y de los índices de estabilidad de los escenarios dinámicos existentes.

- Bifurcación PD. Los puntos críticos y los coeficientes de estabilidad son:

- Caso k impar:

$$\mu = 3, \quad \sigma_{od}^{PD} = \frac{9(1 - \rho)}{1 + k\rho}, \quad (8.40)$$

- Caso k par:

$$\mu = \frac{3 - \rho}{1 - \rho}, \quad \sigma_{ev}^{PD} = \frac{(3 - \rho)^2}{1 + k\rho}. \quad (8.41)$$

- Resonancia 1:2. Condición crítica: $k\rho = 1$, siendo k un número par.

- Bifurcación NS. La curva crítica resulta

$$\rho = -\frac{\text{sen}(\omega_0)}{\text{sen}(\omega_0 k)}, \quad \mu = 2 - \frac{\text{sen}(\omega_0(k+1))}{\text{sen}(\omega_0 k) + \text{sen}(\omega_0)}, \quad (8.42)$$

y el coeficiente de estabilidad correspondiente es

$$\sigma^{NS} = -\frac{(1-\rho)\mu^2}{2} \text{Re} \left\{ \frac{e^{i\omega_0 k}}{e^{i\omega_0(k+1)} + k\rho} \left[\frac{2}{\mu-1} + \frac{(1-\rho)e^{i2\omega_0 k}}{e^{i2\omega_0(k+1)} - (1-\rho)(2-\mu)e^{i2\omega_0 k} - \rho} \right] \right\}. \quad (8.43)$$

Como esperábamos, el rango de estabilidad de \hat{x} no cambia si el controlador es implementado con una cantidad impar de retardos. Sin embargo, el punto de bifurcación PD se puede trasladar a valores mayores de μ si k es par. El índice σ_{ev}^{PD} es positivo si $k\rho < 1$ y negativo si $k\rho > 1$, lo que implica que la estabilidad de la oscilación de período dos podría cambiar de acuerdo a la combinación de valores de ρ y k . La condición $k\rho = 1$ con k par corresponde a la resonancia fuerte 1:2, que es el punto en que las bifurcaciones PD y NS interactúan entre sí.

La figura 8.4 izquierda muestra las curvas de doble período y Neimark–Sacker en el espacio de parámetros ρ - μ , donde se ha fijado $k = 2$. Observamos que la región en el espacio de parámetros donde el punto fijo es estable se ha incrementado con respecto al sistema sin control. Así, por ejemplo, el punto fijo pierde su estabilidad en $\mu = 3$ si $\rho = 0$ (caso sin control), mientras que este fenómeno ocurre en $\mu = 3,5$ si $\rho = 0,2$. El rango de estabilidad puede ser aún mayor si consideramos mayores valores de ρ . Sin embargo, el comportamiento dinámico en un entorno de \hat{x} será más complicado cuando el valor de ρ se acerca al punto de resonancia (notado como $R_{1:2}$).

En este ejemplo, la bifurcación NS presenta una singularidad Chenciner cerca de $R_{1:2}$. Esta singularidad está caracterizada por la condición $\sigma^{NS} = 0$, y la existencia de la misma indica que podrían existir órbitas múltiples alrededor de \hat{x} (ver [45]). Para $k = 2$ en el punto $(\rho_{Ch}, \mu_{Ch}) \approx (0,549, 4,823)$, se verifica la condición de esta singularidad. Mostramos en la figura 8.4 derecha la coexistencia del punto fijo estable con diferentes órbitas invariantes (estables e inestables) para $\mu < \mu_0$ y $\rho > 1/2$. En ambos casos, la aparición de una órbita inestable alrededor del punto fijo llama la atención respecto de un hecho interesante. Aunque la región de estabilidad es mayor, la base de atracción de \hat{x} se reduce.

Para completar el análisis, graficamos los diagramas de bifurcación para $k = 2$ y dos valores diferentes de ρ en la figura 8.5. Para $\rho = 0,2$, el punto fijo pierde su estabilidad cuando una órbita estable de período 2 emerge alrededor del mismo. Sin embargo, una bifurcación NS provoca la primera inestabilidad del punto fijo para $\rho = 0,6$. El valor anterior de ρ parece ser un valor suficientemente alejado de la región en la que se encuentran la resonancia fuerte y el punto Chenciner ya que el punto fijo es el único atractor (estable) para $\mu < \mu_0$.

En vista de las condiciones críticas de cada una de las bifurcaciones enumeradas antes, la mayor región de estabilidad del equilibrio \hat{x} se obtiene considerando precisamente el mínimo número de retardos pares en la ley de control ($k = 2$). Cuando k aumenta, la resonancia 1:2 se traslada sobre la curva PD con menores valores de ρ (ya que $\rho = 1/k$), reduciendo la potencial expansión de intervalos de μ estables.

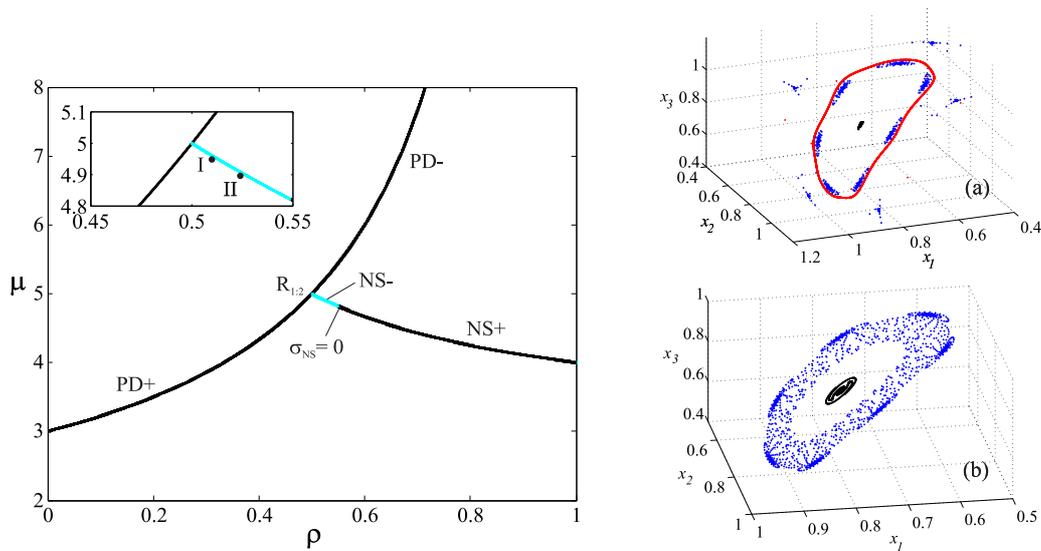


Figura 8.4: Izquierda: Diagrama de bifurcaciones en el espacio ρ - μ para $k = 2$. PD: doble período supercrítico (+) y subcrítico (-). NS: Neimark–Sacker supercrítica (+, oscuro) y subcrítica (-, claro). Derecha: Múltiples atractores que rodean el punto fijo estable: (a) $\rho = 0,51$ y $\mu = 4,95$ (punto I, figura izq.), (b) $\rho = 0,525$ y $\mu = 4,9$ (punto II, figura izq.).

Como un ejemplo, en la figura 8.6 presentamos el espacio de parámetros ρ - μ correspondiente a $k = 6$. En este caso, el máximo del rango de estabilidad se reduce a $\mu = 3,4$, en contraste con $\mu = 5$ obtenido para $k = 2$. Sin embargo, se puede deducir que $\sigma^{NS} > 0$ en la curva crítica NS para $\mu < 3,4$, por lo tanto, las órbitas invariantes sólo aparecen si \hat{x} es inestable (bifurcación NS supercrítica). Luego, la base de atracción del punto fijo no es afectada por el controlador.

Los diagramas de bifurcación de la figura 8.6 ilustran cómo el escenario dinámico puede ser muy distinto al que obtuvimos para $k = 2$. En el caso particular $\rho = 0,2$, el punto fijo pierde su estabilidad en $\mu_0 \approx 3,357$ debido a una bifurcación NS. La órbita que surge se vuelve inestable cuando $\mu \geq 3,674$ y podemos hallar una órbita de período dos estable. El mismo fenómeno se describe en [11] para $k = 12$ y $\rho = 0,1$, pero la condición para la existencia de bifurcación NS fue calculada sólo numéricamente.

Finalmente, en la figura 8.7 graficamos curvas críticas en el plano ρ - μ para distintos valores impares de k . Como probamos anteriormente, para estos valores del retardo no existe resonancia 1:2 que conecte escenarios PD y NS. Más aún, el comportamiento dinámico cambia sólo cuando \hat{x} se vuelve inestable.

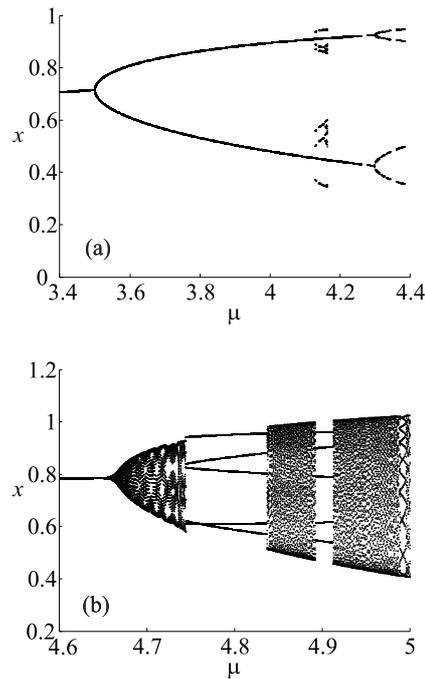


Figura 8.5: Diagramas de bifurcación para $k = 2$. (a) $\rho = 0,2$, (b) $\rho = 0,6$.

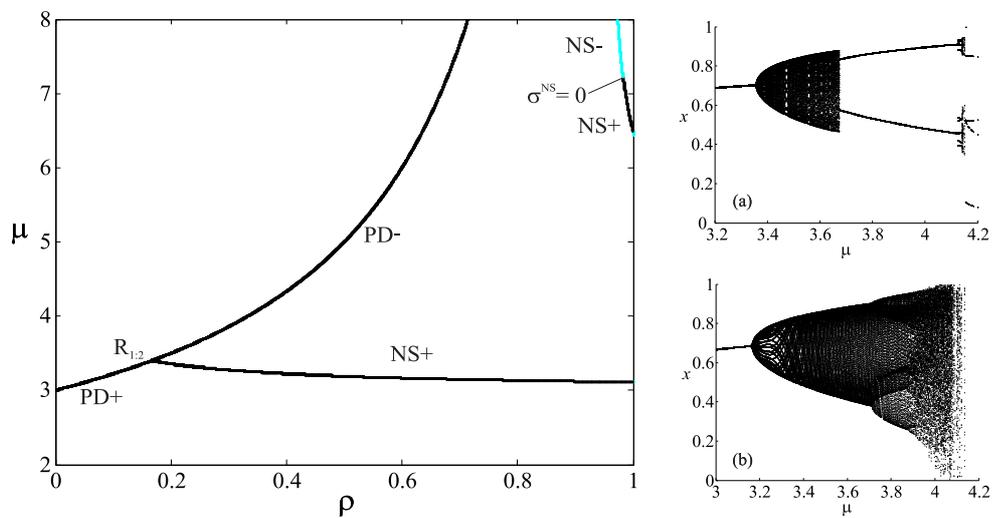


Figura 8.6: Izquierda: Diagrama de bifurcaciones para $k = 6$. PD: doble período supercrítico (+) y subcrítico (-). NS: Neimark–Sacker supercrítica (+, oscuro) y subcrítica (-, claro). Derecha: Diagrama de bifurcación para $k = 6$. (a) $\rho = 0,2$, (b) $\rho = 0,6$.

8.5.2. Modelo discreto de población

El siguiente mapa corresponde al modelo discreto de población estudiado en [64]

$$x_{n+1} = f(x_n, b) = \frac{x_n}{1 - bx_n + x_n^2}, \quad (8.44)$$

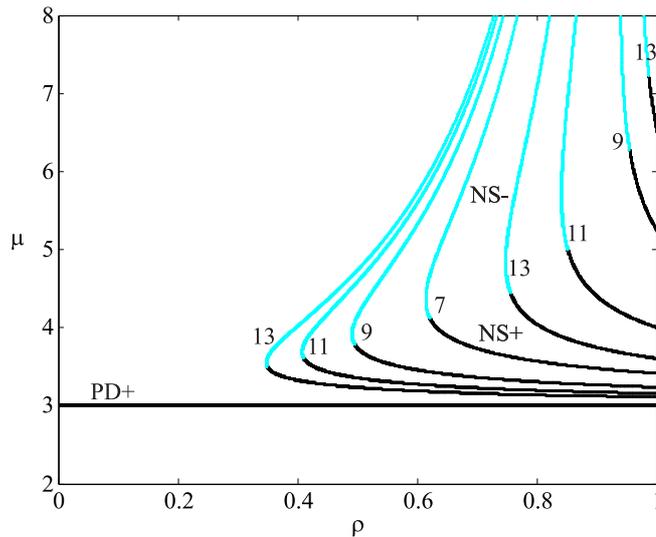


Figura 8.7: Diagrama de bifurcaciones para distintos valores de k impar. La distinción entre NS subcrítica y supercrítica se usa solamente para describir la dirección de nacimiento de los ciclos ya que el punto fijo es inestable (debido a la PD bifurcación).

donde x_n representa la densidad de población en el año n , y $b > 0$ es una constante. El sistema tiene un punto fijo en el origen y otro punto fijo no trivial $\hat{x} = b$. En [64] se observó que este último sufre una bifurcación de doble período para $b = \sqrt{2}$, y el ciclo que existe para $b > \sqrt{2}$ es estable ($\sigma_{\mathcal{O}} = 1$). Además, si se continúa incrementando el valor del parámetro, se observa que el mapa presenta una cascada de bifurcaciones de doble período.

Aplicando la realimentación con retardo a este mapa, obtenemos

$$x_{n+1} = (1 - \rho) \frac{x_n}{1 - bx_n + x_n^2} + \rho x_{n-k}. \quad (8.45)$$

Para este caso, las derivadas de la función no lineal son: $D_x f(\hat{x}, b) = 1 - b^2$, $D_{xx} f(\hat{x}, b) = 2b(b^2 - 2)$ y $D_{xxx} f(\hat{x}, b) = 6(-b^4 + 3b^2 - 1)$.

Como hemos determinado anteriormente, para k impar se mantiene la bifurcación de doble período cuando $b = \sqrt{2}$, y en la misma se genera una órbita de período dos estable ($\sigma_{od}^{PD} = (1 - \rho)/(1 + k\rho)$). En el caso de retardos pares, utilizando las condiciones de bifurcación calculadas en las secciones anteriores podemos determinar que la bifurcación se desplaza hacia valores mayores del parámetro. En particular, la bifurcación se da en el valor crítico $b = \sqrt{2/(1 - \rho)}$ y el coeficiente de estabilidad en este caso resulta

$$\sigma_{ev}^{PD} = \frac{7\rho^2 - 4\rho + 1}{(1 - k\rho)(1 - \rho)}. \quad (8.46)$$

Como el numerador es positivo, si $k\rho < 1$ la bifurcación es supercrítica y si $k\rho > 1$ la misma es subcrítica.

A partir de las condiciones de bifurcación NS calculamos una curva en el espacio de parámetros ρ - b , que graficamos en la figura 8.8. En los puntos de esta curva, la estabilidad se determina calculando el coeficiente σ^{NS} correspondiente.

A continuación ilustramos el comportamiento que presenta el sistema para distintas combinaciones de ρ y b cercanas a las curvas de PD y NS de la figura 8.8

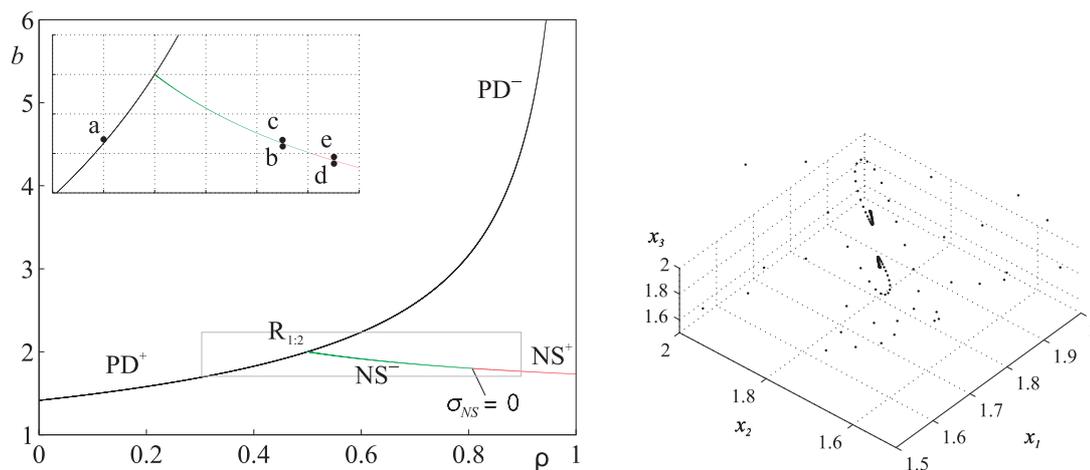


Figura 8.8: Izquierda: Diagrama de bifurcaciones en dos parámetros. PD: doble período supercrítico (+) y subcrítico (-). NS: Neimark–Sacker supercrítica (+, rojo) y subcrítica (-, verde). La ampliación muestra los puntos de simulaciones. Derecha: (Punto a) Órbita de período 2; $\rho = 0,4, b = 1,828$ (Para este valor de ρ la bifurcación de doble período se da para $b_D \simeq 1,826$).

izquierda. En la figura 8.8 derecha se observa la órbita de período dos estable generada a partir de la bifurcación PD, donde el punto fijo ha perdido su estabilidad.

En las figuras 8.9 y 8.10 ilustramos la interacción del punto fijo con una órbita inestable de la bifurcación de Neimark–Sacker subcrítica. En primera instancia el punto fijo es estable y se halla rodeado por dicha órbita (figura 8.9 izquierda); luego, ésta colapsa con el punto fijo, y como resultado este último se vuelve inestable (figura 8.9 derecha). La presencia de esta órbita inestable advierte sobre un hecho importante: si bien la región en el espacio de parámetros donde el punto fijo es estable se ha incrementado, el dominio de atracción del mismo se ve reducido, pues aparecen otros atractores que no existían en el sistema original. En ambos casos, el escenario se encuentra rodeado por una órbita estable, que es ajena a las bifurcaciones locales analizadas. Finalmente, en las figuras 8.10 izquierda y 8.10 derecha se observa cómo el punto fijo pierde la estabilidad y nace una órbita estable que lo rodea, mediante el mecanismo de bifurcación de Neimark–Sacker supercrítica.

8.6. Conclusión

A lo largo de este capítulo presentamos un estudio detallado, utilizando el método en frecuencia, del comportamiento dinámico exhibido por un mapa escalar bajo la acción de un controlador con retardo. El escenario dinámico que se observa en el sistema controlado depende fuertemente de la paridad del retardo k . Esto ha sido puntualizado en [11] para el caso logístico. En este capítulo mostramos este comportamiento para un mapa genérico; además hallamos condiciones explícitas para la ocurrencia de bifurcaciones de doble período y Neimark–Sacker, y calculamos expresiones para los coeficientes de curvatura que indican la estabilidad de las órbitas emergentes.

Las condiciones de bifurcación halladas permiten ubicar en forma simple en el

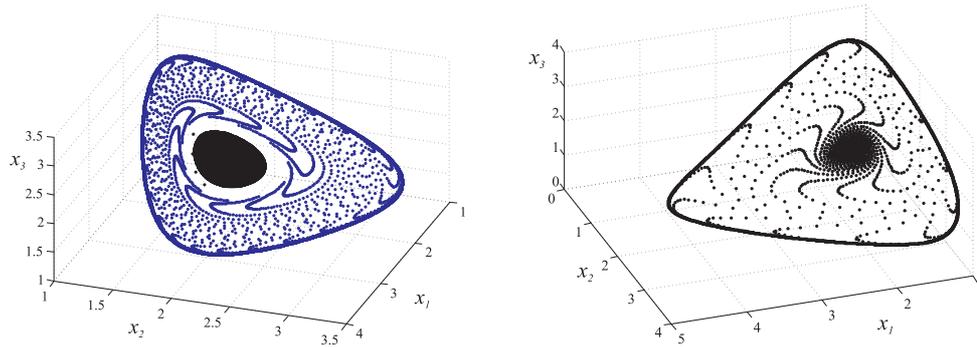


Figura 8.9: Izquierda: (Punto b) $\rho = 0,75, b = 1,823$. Interacción local de una órbita inestable con el punto fijo estable. (Azul) Órbita estable exterior. Derecha: (Punto c) $\rho = 0,75, b = 1,84$. Se observa la órbita estable exterior.

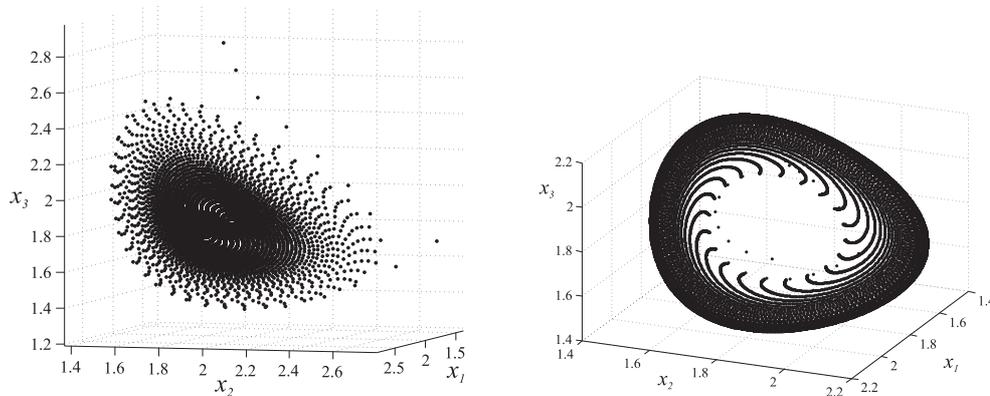


Figura 8.10: Izquierda: (Punto d) $\rho = 0,85, b = 1,78$. Derecha: (Punto e) $\rho = 0,85, b = 1,785$.

espacio de parámetros las bifurcaciones estudiadas. La región de estabilidad del equilibrio sólo puede extenderse utilizando valores pares del retardo k , pues para valores impares del retardo el doble período aparece en el mismo lugar que en el sistema sin control. Sin embargo, para valores pares de k surge el fenómeno de resonancia 1:2, que introduce dinámicas complejas, las cuales pueden resultar no deseadas. Si bien la región de estabilidad del punto fijo en el espacio de parámetros se incrementa, su cuenca de atracción se ve afectada por la aparición de otros atractores que coexisten con dicho punto.

Conclusiones

En esta tesis presentamos dos metodologías para el estudio de soluciones oscilatorias en ecuaciones diferenciales con retardo.

En primer lugar, utilizamos el HAM para estudiar ecuaciones diferenciales con y sin retardo. Realizamos un análisis completo de las soluciones de un péndulo simple mostrando la potencialidad del HAM. Además, desarrollamos una metodología que permite encontrar expresiones analíticas de las soluciones periódicas y determinar su estabilidad. Expresamos en el contexto del HAM las condiciones de bifurcación de Hopf, y para un sistema particular presentamos distintas bifurcaciones de Hopf doble que han sido, sólo en algunos casos, estudiadas con otras metodologías (formas normales, variedad centro, etc.). El HAM nos permitió observar y luego probar la existencia de las que denominamos como soluciones isocrónicas en sistemas con retardo. En particular, determinamos la existencia de ramas de soluciones que tienen el mismo período en ciertos sistemas conservativos realimentados con retardo.

En segundo lugar, presentamos una metodología iterativa en frecuencia que generaliza resultados existentes para el estudio de EDRs. Con esta metodología es posible obtener una ecuación de bifurcación de alto orden, a partir de la cual se pueden determinar bifurcaciones de Hopf generalizadas utilizando teoría de singularidades. Describimos algunas bifurcaciones locales de soluciones periódicas para varias ERDs, y observamos comportamientos dinámicos complejos de los ciclos. Por último, analizamos sistemas discretos con retardo utilizando el método en frecuencia. Determinamos distintas bifurcaciones de órbitas y obtenemos una expresión analítica para determinar una resonancia fuerte en este tipo de sistemas.

Implementamos ambas metodologías con la ayuda de paquetes de cálculo simbólico. Los cálculos computacionales en algunos casos resultan fundamentales.

9.1. Líneas de trabajo futuras

Para dar continuidad al trabajo que ha sido presentado en esta tesis, algunas de las posibles líneas de trabajo futuras son:

- Utilizar el HAM y la metodología planteada a partir de este método para estudiar y describir bifurcaciones en distintos sistemas con retardo, tanto en sistemas de interés teórico como aquellos que se planteen a partir de aplicaciones concretas. En particular, extender la aplicación de estas herramientas a sistemas de orden mayor a dos.

- Utilizar la metodología iterativa en frecuencia para hallar y describir distintas dinámicas complejas en las que intervienen soluciones periódicas. Desarrollar formas alternativas de estudiar la ecuación de bifurcación obtenida con esta metodología que permitan complementar el análisis mostrado en esta tesis.
- Combinar ambas metodologías aprovechando las ventajas que cada una presenta, para determinar y estudiar dinámicas globales que se observan en EDRs (y también en EDOs), como por ejemplo: Hopf singular, bifurcaciones de tipo Canards y MMOs (Mixed Mode Oscillations), entre otras. Estos fenómenos afectan la dinámica local de las soluciones oscilatorias y resultan difíciles de analizar en general, lo que los hace más interesantes.

Bibliografía

- [1] S. Abbasbandy. The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer. *Physics Letters A*, 360:109–113, 2006.
- [2] S. Abbasbandy, E. Shivanian, and K. Vajravelu. Mathematical properties of \hbar -curve in the frame work of the homotopy analysis method. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 16:4268–4275, 2011.
- [3] M. Abramowitz and I. A. Stegun, editors. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, 1965.
- [4] R. Aldrovandi and P. Leal Ferreira. Quantum pendulum. *Am. Jour. Phys.*, 48(8):660–664, 1980.
- [5] F. M. Atay. Van der Pol’s oscillator under delayed feedback. *J. Sound and Vibration*, 2(218):333–339, 1998.
- [6] B. Balachandran, T. Kalmár-Nagy, and D. E. Gilsinn, editors. *Delay Differential Equations, Recent Advances and New Directions*. Springer, 2009.
- [7] A. Bel and W. Reartes. The homotopy analysis method in bifurcation analysis of delay differential equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(8):1230024(1–12), 2012.
- [8] A. Bel, W. Reartes, and A. Torresi. Global study of the simple pendulum by the homotopy analysis method. *European Journal of Physics*, 33:231–241, 2012.
- [9] A. Beléndez, A. Hernández, T. Beléndez, C. Neipp, and A. Márquez. Application of the homotopy perturbation method to the nonlinear pendulum. *European Journal of Physics*, 28:93–104, 2007.
- [10] M. E. Bleich and J. E. S. Socolar. Stability of periodic orbits controlled by time–delay feedback. *Physics Letters A*, 210:87–94, 1996.
- [11] T. Buchner and J. J. Zebrowski. Logistic map with a delayed feedback: Stability of a discrete time–delay control of chaos. *Physical Review E*, 63:016210(1–7), 2000.
- [12] E. Bueler. Chebyshev collocation for linear, periodic, ordinary and delay differential equations: A posteriori estimates. *Cornell University Library*, 2004. <http://arxiv.org/pdf/math/0409464>.

- [13] E. Butcher and B. Mann. *Delay Differential Equations, Recent Advances and New Directions*, chapter Stability analysis and control of linear periodic delayed systems using Chebyshev and temporal finite element methods, pages 93–129. Springer, 2009.
- [14] O. Calin and D.-C. Chang. *Geometric Mechanics on Riemannian Manifolds*. Birkhäuser, 2005.
- [15] S. A. Campbell. *Delay Differential Equations, Recent Advances and New Directions*, chapter Calculating Centre Manifolds for Delay Differential Equations Using Maple, pages 221–244. Springer, 2009.
- [16] S. A. Campbell, J. Bélair, T. Ohira, and J. Milton. Limit cycles, tori, and complex dynamics in a second-order differential equation with delayed negative feedback. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 7:213–236, 1995.
- [17] S. A. Campbell and Y. Yuan. Zero singularities of codimension two and three in delay differential equations. *Nonlinearity*, 21:2671–2691, 2008.
- [18] J. Chavarriga and M. Sabatini. A survey of isochronous centers. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 1:1–70, 1999.
- [19] A. Cima, F. Manosas, and J. Villadelprat. Isochronicity for several classes of hamiltonian systems. *Journal of Differential Equations*, 157:373–413, 1999.
- [20] M. B. D’Amico, J. L. Moiola, and E. E. Paolini. Hopf bifurcation for maps: a frequency domain approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 49:281–288, 2002.
- [21] M. B. D’Amico, J. L. Moiola, and E. E. Paolini. Study of degenerate bifurcations in maps: a feedback systems approach. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14:1625–1641, 2004.
- [22] O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel, and H. O. Walther. *Delay Equations: Functional, Complex and Nonlinear Analysis*, volume 110 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1995.
- [23] K. Engelborghs, T. Luzyanina, and G. Samaey. DDE-Biftool v. 2.00: a MATLAB package for bifurcation analysis of delay differential equations. Technical Report TW 330, Department of Computer Science, K.U. Leuven, Leuven, Belgium, 2001.
- [24] T. Erneux. *Applied Delay Differential Equations*. Springer, 2009.
- [25] T. Faria and L. T. Magalhães. Normal forms for retarded functional differential equations and applications to Bogdanov-Takens singularity. *Journal of Differential Equations*, 122:201–224, 1995.
- [26] B. Fiedler, V. Flunkert, M. Georgi, P. Hövel, and E. Schöll. Refuting the odd number limitation of time-delayed feedback control. *Physical Review Letters*, 98(11):114101(1–4), 2007.

- [27] F. Gentile, A. Bel, M. B. D'Amico, and J. Moiola. Efecto de un controlador lineal por retardos sobre la dinámica de un mapa escalar. *Actas congreso AADECA*, 2010.
- [28] F. Gentile, A. Bel, M. B. D'Amico, and J. Moiola. Effect of delayed feedback on the dynamics of a scalar map via a frequency-domain approach. *CHAOS*, 21(2):023117(1–9), 2011.
- [29] F. S. Gentile, J. L. Moiola, and E. E Paolini. On the study of bifurcations in delay-differential equations: a frequency-domain approach. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(6):1250137(1–15), 2012.
- [30] J. Giné and M. Grau. Characterization of isochronous foci for planar analytic differential systems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 135(05):985–998, 2007.
- [31] M. Golubitsky and W. F. Langford. Classification and unfoldings of degenerate Hopf bifurcation. *Journal of Differential Equations*, 41:375–415, 1981.
- [32] M. Golubitsky and D. G. Schaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, volume I. Springer-Verlag, 1985.
- [33] J. K. Hale. *Nonlinear oscillations in equations with delays*, volume 17 of *Lectures in Applied Mathematics*. AMS, 1979.
- [34] J. K. Hale and H. Koçak. *Dynamics and Bifurcations*, volume 3 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, 1991.
- [35] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations*, volume 99 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1993.
- [36] J.-H. He. Homotopy perturbation technique. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 178:257–262, 1999.
- [37] A. V. Ion and R. M. Georgescu. Bautin bifurcation in a delay differential equation modeling leukemia. *Nonlinear Analysis*, 82:142–157, 2013.
- [38] G. Itovich, J. Moiola, A. Bel, and W. Reartes. Métodos frecuenciales para el análisis de ecuaciones diferenciales con retardo. Septiembre 2009.
- [39] W. Just, B. Fiedler, M. Georgi, V. Flunkert, P. Hövel, and E. Schöll. Beyond the odd number limitation: A bifurcation analysis of time-delayed feedback control. *Phys. Rev. E*, 76, 2007.
- [40] J. Kevorkian and J. D. Cole. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, 1968.
- [41] H. Khan, S. J. Liao, R. N. Mohapatra, and K. Vajravelu. An analytical solution for a nonlinear time-delay model in biology. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(7):3141–3148, 2009.
- [42] A. Kimiaefar, A. R. Saidi, G. H. Bagheri, M. Rahimpour, and D. G. Domairry. Analytical solution for van der Pol–Duffing oscillations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 42(5):2660–2666, 2009.

- [43] P. M. Kitanov, W. F. Langford, and A. R. Willms. Double hopf bifurcation with huygens symmetry. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 12:126–174, 2013.
- [44] V. Kolmanovskii and A. Myshkis. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, volume 463 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [45] Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer–Verlag, tercera edición edition, 2004.
- [46] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Mecánica Clásica*, volume 1 of *Curso de Física Teórica*. Reverté, 1969.
- [47] M. Landry, S. A. Campbell, K. Morris, and C. O. Aguilar. Dynamics of an inverted pendulum with delayed feedback control. *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, 4(2):333–351, 2005.
- [48] S. Liao. An analytic approximate approach for free oscillations of self-excited systems. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 39:271–280, 2004.
- [49] S. Liao. *Beyond Perturbation, Introduction to Homotopy Analysis Method*. Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [50] S. Liao. On the homotopy analysis method for nonlinear problems. *Applied Mathematics and Computations*, 147:499–513, 2004.
- [51] S. Liao. Notes on the homotopy analysis method: some definitions and theorems. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 14:983–997, 2009.
- [52] S. Liao. *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations*. Springer, 2012.
- [53] S. Liao and Y. Tan. A general approach to obtain series solutions of nonlinear differential equations. *Studies in Applied Mathematics*, 119:297–354, 2007.
- [54] C.-s. Liu. The essence of the homotopy analysis method. *Applied Mathematics and Computation*, 216:1299–1303, 2010.
- [55] P. Mardešić, D. Marín, and J. Villadelprat. The period function of reversible quadratic centers. *J. Differential Equations*, 224:120–171, 2006.
- [56] A. I. Mees. *Dynamics of Feedback Systems*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 1981.
- [57] A. I. Mees and D. J. Allwright. Using characteristic loci in the Hopf bifurcation. *Proceedings Instn. Electrical Engrs*, 126:628–632, 1979.
- [58] A. I. Mees and L. O. Chua. The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 26:235–254, 1979.
- [59] J. L. Moiola and G. Chen. *Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency Domain Approach*, volume 21 of *World Scientific Series on Nonlinear Science*. World Scientific Publishing, 1996.

- [60] A. S. Morse. Ring models for delay differential systems. *Automatica*, 12:529–531, 1976.
- [61] J. D. Murray. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Springer, third edition, 2001.
- [62] A. H. Nayfeh. *Introduction to Perturbation Techniques*. John Wiley & Sons, 1985.
- [63] G. Orosz and G. Stépán. Hopf bifurcation calculations in delayed systems with translational symmetry. *Journal of Nonlinear Science*, pages 505–528, 2004.
- [64] M. Peng. Multiple bifurcations and periodic bubbling in a delay population model. *Chaos, Solitons and Fractals*, 25:1123–1130, 2005.
- [65] L. Pujo-Menjouet and M. C. Mackey. Contribution to the study of periodic chronic myelogenous leukemia. *C. R. Biologies*, 327:235–244, 2004.
- [66] K. Pyragas. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*, 170:421–428, 1992.
- [67] K. Pyragas. Control of chaos via an unstable delayed feedback controller. *Physical Review Letters*, 86(11):2265–2268, 2001.
- [68] K. Pyragas, V. Pyragas, and H. Benner. Delayed feedback control of dynamical systems at a subcritical Hopf bifurcation. *Physical Review Letters*, 70:056222(1–4), 2004.
- [69] M. Sabatini. On the period function of planar systems with unknown normalizers. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 134(2):531–539, 2005.
- [70] M. Sajid, T. Hayat, and S. Asghar. Comparison between the HAM and HPM solutions of thin film flows of non-newtonian fluids on a moving belt. *Nonlinear Dynamics*, 50:27–35, 2007.
- [71] M. Schanz and A. Pelster. Analytical and numerical investigations of the phase-locked loop with time delay. *Physical Review E*, 67(5):056205(1–8), 2003.
- [72] O. Sename. New trends in desing of observers for time-delay systems. *Kybernetika*, 37:427–458, 2001.
- [73] F. Shakeri and M. Dehghan. Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method. *Mathematical and Computer Modelling*, 48:486–498, 2008.
- [74] L. F. Shampine and S. Thompson. Solving DDEs in MATLAB. *Applied Numerical Mathematics*, 37:441–458, 2001.
- [75] G. Stépán. *Retarded dynamical systems*. New York: Longman, 1989.
- [76] A. M. Torresi, G. L. Calandrini, P. A. Bonfili, and J. L. Moiola. Generalized Hopf bifurcation in a frequency domain formulation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(8):1250197(1–16), 2012.

- [77] M. Turkyilmazoglu. Improvements in the approximate formulae for the period of the simple pendulum. *European Journal of Physics*, 31:1007–1011, 2010.
- [78] S.A. Van Gils, M. Krupa, and W.F. Langford. Hopf bifurcation with non-semisimple 1:1 resonance. *Nonlinearity*, 3:825–850, 1990.
- [79] F. Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1992.
- [80] M. Vieira and A. J. Lichtenberg. Controlling chaos using nonlinear feedback with delay. *Physical Review E*, 54:1200–1207, 1996.
- [81] J. Wei and W. Jiang. Stability and bifurcation analysis in van der Pol’s oscillator with delayed feedback. *Journal of Sound and Vibration*, 283:801–819, 2005.
- [82] G. Wen, Q. G Wang, and M. S. Chiu. Delay feedback control for interaction of Hopf and period doubling bifurcations in discrete-time systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 16:101–112, 2006.
- [83] W. Wischert, A. Wunderlin, and A. Pelster. Delay-induced instabilities in nonlinear feedback systems. *Physical Review E*, 49(1):203–219, 1994.
- [84] K. Yabushita, M. Yamashita, and K. Tsuboi. An analytic solution of projectile motion with the quadratic resistance law using the homotopy analysis method. *J. Phys A – Math. Theor.*, 40:8403–8416, 2007.
- [85] Y. Yokoi and T. Hikiyara. Tolerance of start-up control of rotation in parametric pendulum by delayed feedback. *Physics Letters A*, 375:1779–1783, 2011.