



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS DE DOCTORA EN MATEMÁTICA

**Algoritmos no monótonos de región de  
confianza y filtros para optimización no lineal**

María de Gracia Mendonça

BAHÍA BLANCA

2017

ARGENTINA

# Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctor en Matemáticas, de la Universidad Nacional del Sur, y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Matemática, de la Universidad Nacional del Sur, durante el período comprendido entre el 15 de Abril de 2008 y el 19 de Junio de 2017.

Este trabajo fue realizado bajo la dirección de la Dra. María Cristina Maciel, Profesora Titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional del Sur.

María de Gracia Mendonça  
mendonca@ing.unp.edu.ar  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR  
Bahía Blanca, 19 de Junio de 2017.



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR  
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el ..../..../....., mereciendo la calificación de .....(.....)

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Optimización sin restricciones</b>	<b>6</b>
2.1	Un algoritmo monótono de región de confianza . . . . .	8
2.1.1	El método de gradiente espectral proyectado . . . . .	13
2.2	Un algoritmo no monótono de región de confianza . . . . .	17
2.2.1	Discusión teórica . . . . .	23
2.3	Resultados Numéricos . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Optimización con restricciones</b>	<b>40</b>
3.1	El problema de optimización con restricciones de igualdad y de caja . . . . .	40
3.2	La aproximación del espacio tangente . . . . .	44
3.2.1	El enfoque de Vardi . . . . .	44
3.2.2	El enfoque de Byrd-Omojokun . . . . .	45
3.3	La aproximación en todo el espacio . . . . .	46
3.3.1	El enfoque de Celis, Dennis y Tapia . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Función de mérito vs. filtros</b>	<b>49</b>
<b>5</b>	<b>El algoritmo</b>	<b>64</b>
<b>6</b>	<b>Discusión teórica</b>	<b>69</b>
6.1	Hipótesis estándar . . . . .	69
6.2	Decrecimiento suficiente del modelo . . . . .	70
6.2.1	El subproblema normal . . . . .	72
6.2.2	El subproblema tangente . . . . .	77
6.3	Buena definición del algoritmo . . . . .	84

6.4	Convergencia global . . . . .	93
<b>7</b>	<b>Resultados numéricos</b>	<b>100</b>
<b>8</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>109</b>

# Índice de Figuras

1.1	Regularidad y existencia de los multiplicadores de Lagrange. . . . .	3
2.1	Aceptación del paso de prueba. . . . .	9
2.2	Perfil de rendimiento para el número de iteraciones. . . . .	34
2.3	Perfil de rendimiento para el número de evaluaciones de funciones. . . . .	35
2.4	Perfil de rendimiento para el número de evaluaciones del gradiente. . . . .	36
2.5	Perfil de rendimiento para el número de iteraciones de problemas no singulares. . . . .	37
2.6	Perfil de rendimiento para el número de evaluaciones de funciones de problemas no singulares. . . . .	38
2.7	Perfil de rendimiento para el número de evaluaciones del gradiente de problemas no singulares. . . . .	39
3.1	Incompatibilidad del problema (3.10). . . . .	43
3.2	Enfoque de Vardi. . . . .	45
3.3	Enfoque de Byrd y Omojokun. . . . .	46
3.4	Enfoque de Celis, Dennis y Tapia. . . . .	47
4.1	El par $(h_j, f_j)$ domina al par $(h_k, f_k)$ . . . . .	53
4.2	Función de mérito. . . . .	53
4.3	Filtro. . . . .	54
4.4	Filtro con envolvente recta. . . . .	56
4.5	Filtro con envolvente inclinada. . . . .	59
4.6	Filtro con envolvente recta. . . . .	60
4.7	Envolvente inclinada. . . . .	61
6.1	Gradiente proyectado de $M_k(s)$ . . . . .	73

6.2	Proyección del gradiente reducido $\bar{g}_k$ de $\bar{Q}_k(s)$ sobre $\hat{\Omega}$ . . . . .	79
6.3	Esquema de índices. . . . .	95
6.4	Esquema de índices. . . . .	97
7.1	Perfil de rendimiento para el número de iteraciones. . . . .	102
7.2	Perfil de rendimiento para el número de evaluaciones de funciones. . . . .	103
7.3	Perfil de rendimiento para el número de evaluaciones de gradientes. . . . .	104
7.4	Perfil de rendimiento para el número de iteraciones. . . . .	106
7.5	Perfil de rendimiento para el número de evaluaciones de funciones. . . . .	107
7.6	Perfil de rendimiento para el número de evaluaciones de gradientes. . . . .	108

# Agradecimientos

Ante todo mi más profundo agradecimiento a la Dra. María Cristina Maciel por dirigirme en esta tesis de Doctorado, brindándome su generoso apoyo y estímulo en estos años.

Es menester además tener presentes a todos aquellos docentes del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur con los cuales he tenido contacto.

En memoria de mis padres, Alice Pires Caiado y Antonio Mendonça, y mi colega y amiga Dra. Miriam Pacheco.

# Resumen

Un algoritmo para problemas de optimización no lineal con restricciones de igualdad y de caja es presentado. En el marco del método de programación cuadrática secuencial, con una estrategia de globalización de región de confianza, se evita el uso de parámetros de penalización en funciones de mérito mediante el uso de un filtro inclinado con memoria.

Los subproblemas de región de confianza son resueltos mediante el uso del método de gradiente espectral proyectado (SPG), un método no monótono para problemas convexos de gran escala. El paso de prueba es evaluado mediante una condición no monótona sobre el Lagrangiano de la función objetivo, que puede ser considerado una generalización de la condición de fracción decrecimiento de Cauchy y la condición no monótona para búsqueda lineal de Grippo, Lampariello y Lucidi.

Las propiedades de buena definición y convergencia global del algoritmo son analizadas bajo hipótesis estándar para problemas de optimización no lineal con restricciones de igualdad y de caja, basados en una estrategia de región de confianza.

Resultados numéricos son reportados para validar la eficiencia y robustez del algoritmo en problemas de variado tamaño, y un problema de ajuste de observaciones con ruido a una solución de una ecuación diferencial de segundo orden, que genera un problema no diferenciable. La condición de decrecimiento no monótona es comparada con la tradicional condición monótona mediante perfiles de rendimiento.

# Abstract

An algorithm based on nonmonotone trust-region-filter method for a non-linear problem with equality and box constraints is presented. In the frame of sequential quadratic programming with a strategy for global convergence based on the trust region approach the use of a slanting filter with memory avoid the pitfalls of penalty parameters of merit functions.

The trust region subproblems are solved by the Spectral Projected Gradient (SPG), a nonmonotone method for large-scale convex constrained problems. The trial step is evaluated by a nonmonotone condition in the Lagrangian of the objective function, which can be considered not only a generalization of the fraction of Cauchy decrease condition, but also a generalization of the nonmonotone line search proposed by Grippo, Lampariello y Lucidi.

Well definition and global convergence properties are analyzed under mild conditions for the non linear problems with equality and box restrictions based on trust region.

Numerical results are reported to validate the robustness and efficiency of the algorithm on varied size test problems, and for fit a set of noisy observations to a second order differential equation solution wich generate a non diferential problem. The nonmonotone rule is compared to the traditional monotone rule through performance profiles.

# Capítulo 1

## Introducción

En este trabajo consideramos el problema de optimización no lineal con restricciones de igualdad y de caja

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & f(x) \\ & c(x) = 0 \\ & x \in \Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

siendo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  funciones con derivadas segundas continuas sobre un conjunto abierto que contiene a la caja  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : l_i \leq x_i \leq u_i\}$ .

Recordemos que el problema más general

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & f(x) \\ & c(x) = 0 \\ & \hat{c}(x) \leq 0 \\ & x \in \Omega, \end{aligned}$$

donde también aparecen restricciones de desigualdad, representadas por la función  $\hat{c} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  puede fácilmente ser transformado en un problema del tipo (1.1), mediante la introducción de variables auxiliares  $z_j$  para  $j = 1, \dots, p$

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & f(x) \\ & c_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \hat{c}_j(x) + z_j^2 = 0, \quad j = 1, \dots, p, \\ & x \in \Omega. \end{aligned}$$

Los métodos iterativos para resolver el problema (1.1) deben decidir en cada iteración si el iterado actual satisface razonablemente la condición de estar próximo al verdadero punto optimal. Como testear la optimalidad es en muchas situaciones una tarea difícil y costosa, la opción más práctica es requerir que se satisfaga, aproximadamente, alguna condición necesaria de optimalidad.

Para el problema de optimización sin restricciones

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad (1.2)$$

la condición necesaria de primer orden asegura que si el punto  $x^*$  es un minimizador local de la función  $f$  entonces  $\nabla f(x^*) = 0$ . Con más información se tiene una condición necesaria de segundo orden que asegura que si  $x^*$  es un minimizador local de  $f$ , una función de clase  $C^2$  en un entorno de  $x^*$ , entonces  $\nabla f(x^*) = 0$  y la matriz Hessiana de  $f$  es semidefinida positiva en  $x^*$ , esto es,  $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$ . Restringiendo un poco estas condiciones se puede obtener una condición suficiente de segundo orden afirmando que para  $f$  de clase  $C^2$  en un entorno de  $x^*$  que satisface  $\nabla f(x^*) = 0$  y de modo que la matriz Hessiana de  $f$  sea definida positiva en  $x^*$ , esto es,  $\nabla^2 f(x^*) > 0$ , entonces  $x^*$  es un minimizador local del problema sin restricciones (1.2). Claro que no siempre la información de segundo orden está disponible, y aún así, el costo de verificar que la matriz Hessiana es definida positiva en el punto optimal puede resultar relativamente costosa. Es por lo tanto la condición de optimalidad de primer orden la opción mejor ponderada desde el punto de vista práctico.

Para el problema con restricciones (1.1) una condición necesaria de primer orden es la existencia de los multiplicadores de Lagrange, que es el caso particular de la condición propuesta por Karush, Khun y Tucker para el problema de optimización no lineal general, [KAR39], [HT50]. Si  $x^*$  es un minimizador local regular, podemos asegurar que existen los escalares  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$  tales que

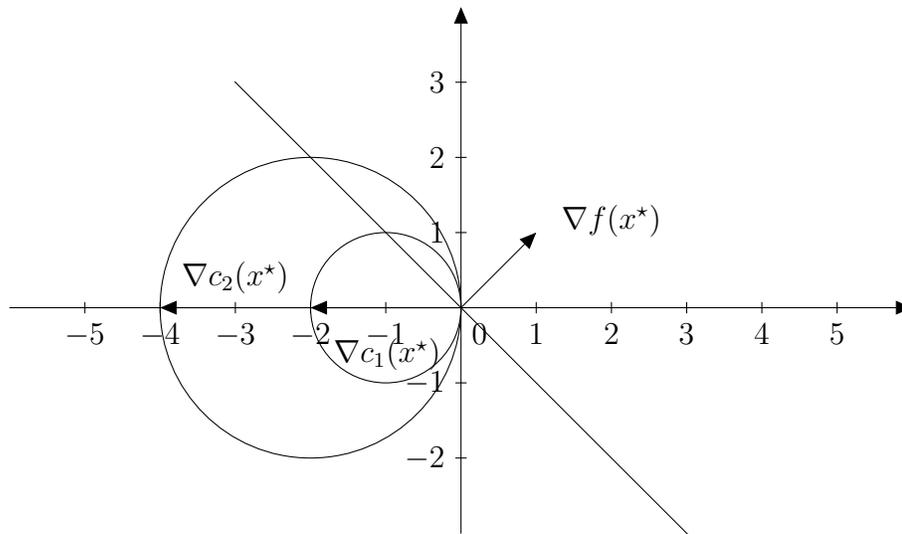
$$\nabla \ell(x^*, \lambda^*) = 0, \quad (1.3)$$

donde  $\ell(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i(x)$  es la función de Lagrange. En este caso diremos que  $x^*$  es un punto KKT. La existencia de los multiplicadores de Lagrange es una condición necesaria de primer orden sólo si  $x^*$  es un punto

regular, esto es, si  $\nabla c(x^*)$  tiene rango completo. Por ejemplo, en el problema

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ & (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1 \\ & (x_1 + 2)^2 + x_2^2 = 4, \end{aligned}$$

el mínimo  $x^* = (0, 0)$  no es un punto regular y no existe un vector  $\lambda^*$  tal que el gradiente  $\nabla f(x^*)$  sea combinación lineal de los gradientes de las restricciones  $\nabla c_1(x^*)$  y  $\nabla c_2(x^*)$ .



**Figura 1.1:** Regularidad y existencia de los multiplicadores de Lagrange.

La regularidad es llamada una condición calificadora de primer orden, y no es la única que puede ser impuesta para asegurar que se satisfaga una condición necesaria de primer orden del problema con restricciones, pero es la que se usa en este trabajo por ser la más adecuada para el problema (1.1).

En el capítulo 2 analizamos el problema de optimización sin restricciones (1.2) para  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dos veces continuamente diferenciable.

Se presenta un algoritmo que hace uso de una estrategia de globalización de región de confianza cuyos subproblemas cuadráticos se resuelven aproximadamente mediante el método del gradiente espectral proyectado. Para la evaluación del paso se propone una condición no monótona (2.11) que puede ser considerada una generalización de la propuesta por Grippo, Lampariello

y Lucidi [GLL86] y a la vez de la condición de fracción de decrecimiento de Cauchy (2.9). Bajo hipótesis estándar se establece la buena definición (2.3) y la convergencia global (2.4) del algoritmo. Finalmente se presentan amplios resultados numéricos comparando el algoritmo de región de confianza con una condición de aceptación del paso monótona y otra no monótona para problemas de gran escala. Para exhibir los beneficios del uso de una condición de aceptación no monótona se realiza además la comparación con un algoritmo que utiliza el método de gradientes conjugados para resolver los subproblemas de región de confianza.

En el capítulo 3 se comienza a analizar el problema de optimización con restricciones de igualdad y de caja (1.1). Asumiendo válida la condición calificadora de regularidad, la condición necesaria de primer orden garantiza la existencia de los multiplicadores de Lagrange. Como en el caso sin restricciones se incorpora una estrategia de región de confianza al método de programación cuadrática secuencial, resolviendo en cada iteración el subproblema cuadrático de región de confianza

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & Q_k(s) = \frac{1}{2}s^T H_k s + \nabla_x \ell_k^T s + \ell_k \\ & \nabla c_k^T s + c_k = 0 \\ & \|s\|_\infty \leq \delta_k. \end{aligned}$$

Para resolver la posible incompatibilidad que se presenta cuando la variedad lineal no intersecta la región de confianza se adopta el enfoque de la aproximación del espacio tangente de Omojokun [OMO89], descomponiendo el paso de prueba  $s_k$  en sus componentes normal  $s_k^n$  y tangente  $s_k^t$ . La primera de estas componentes es calculada, dentro de una región de confianza reducida, como el paso más linealmente factible, solución aproximada del subproblema normal

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & M_k(s) = \frac{1}{2} \|\nabla c_k^T s + c_k\|_2^2 \\ & \|s\|_\infty \leq r\delta_k \\ & x_k + s \in \Omega. \end{aligned}$$

Por su parte, la componente tangente es calculada como solución aproximada del subproblema tangente de región de confianza

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & \tilde{Q}_k(s^t) = \frac{1}{2}(s_k^n + s^t)^T H_k (s_k^n + s^t) + \nabla_x \ell_k^T (s_k^n + s^t) + \ell_k \\ & \|s_k^n + s^t\|_\infty \leq \delta_k \\ & x_k + s_k^n + s^t \in \Omega \\ & \nabla c_k^T s^t = 0. \end{aligned}$$

Para resolver cada uno de estos subproblemas se utiliza, como en el caso sin restricciones el método de gradiente espectral proyectado (SPG).

Para evitar el uso de una función de mérito en la valoración de la calidad del nuevo iterado utilizamos la noción de filtro introducida por Fletcher y Leyffer [FL06], evitando así el problema de actualización de los parámetros de penalización. La evolución de la noción de filtro es presentada en el capítulo 4.

En el capítulo 5 se realiza una exposición completa del algoritmo de programación no lineal objeto de este trabajo.

En el capítulo 6 se desarrollan los aspectos teóricos concernientes al algoritmo propuesto, haciendo una detallada presentación de las reducciones no monótonas actual y la predicha por el modelo cuadrático del Lagrangiano que permiten, como en el caso sin restricciones, medir la adecuación del modelo local al problema original. Los principales resultados son los teoremas que prueban la buena definición (6.1) y la convergencia global del algoritmo (6.2).

En el capítulo 7 se muestran los resultados numéricos del algoritmo propuesto. Como en el caso de optimización sin restricciones, se hace énfasis en comparar un algoritmo con una condición de aceptación del paso monótona y otro con la condición no monótona propuesta.

Es conveniente introducir alguna notación, en su forma más común en la literatura. Denotaremos con  $g(x) = \nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$  al vector gradiente cuya  $i$ -ésima componente es  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ . Con  $G(x) = \nabla^2 f(x)$  identificamos a la matriz

Hessiana,  $\nabla^2 f(x)$  cuyo elemento  $(i, j)$  es  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ , o una aproximación de ella. Como suponemos que la función  $f$  es dos veces diferenciable, la matriz Hessiana resulta simétrica.

Además denotamos por  $\ell(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T c(x)$  el Lagrangiano o función Lagrangiana y con  $H(x)$  a su matriz Hessiana  $\nabla_{xx}^2 \ell(x, \lambda)$  como función de la variable  $x$ , o una aproximación de ella.

Con el propósito de una mejor presentación en varias ocasiones utilizamos una notación abreviada como  $f_k = f(x_k)$ ,  $c_k = c(x_k)$  o  $\ell_k = \ell(x_k, \lambda_k)$  cuando las funciones deban ser evaluadas en el iterado  $x_k$ .

Si no hay aclaración previa, con  $\|\cdot\|$  denotamos la norma Euclidiana  $\|\cdot\|_2$ .

# Capítulo 2

## Optimización sin restricciones

En este capítulo consideramos el problema no lineal sin restricciones

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad (2.1)$$

donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es dos veces continuamente diferenciable.

Uno de los métodos iterativos más utilizado para resolver este problema es el método de Newton. Famoso por su convergencia local  $q$ -cuadrática, también es conocido por sus problemas de convergencia global cuando la aproximación inicial no es suficientemente buena, esto es, cuando no se encuentra dentro de la región de convergencia determinada por el método. Por ello es crucial incorporar alguna estrategia que permita asegurar la convergencia comenzando desde cualquier punto inicial. Procedimientos de este tipo se conocen como estrategias de aproximación o de globalización.

Las principales estrategias de globalización usadas hoy en día son la búsqueda lineal y la región de confianza.

Al aplicar la estrategia de búsqueda lineal a un algoritmo iterativo, para cada iterado  $x_k$  se determina en primer término una dirección, en general de descenso,  $d_k$ , y a continuación se calcula la longitud del paso de prueba  $s_k$ , a lo largo de esta dirección, de modo que el nuevo iterado  $x_{k+1} = x_k + s_k$  permita una disminución razonable del valor de la función objetivo  $f$ . Como la dirección de búsqueda es una dirección de descenso, a menos que se alcance un punto estacionario, siempre existen mejores puntos a lo largo de esta dirección. Entre los criterios monótonos de aceptación del paso de prueba más usados podemos encontrar los presentados por Armijo (1966) [ARM66], Goldstein (1965) [GOL65] y Wolfe (1969) [WOL69a, WOL69b].

La filosofía de los métodos de región de confianza es totalmente distinta. Se fija primero el tamaño del paso para luego analizar en qué dirección es conveniente moverse. Para ello, alrededor del iterado actual  $x_k$  se construye un modelo que aproxime a la función objetivo, que puede ser lineal o cuadrático, para buscar un mínimo del mismo dentro de una región cerrada centrada en  $x_k$ , llamada **región de confianza**, la cual no es más que un entorno del iterado actual. Es natural pensar que tal solución sea una buena aproximación del problema original, ya que localmente el modelo aproximado se ajusta bien a la función objetivo. Sin embargo, para aceptar el paso de prueba calculado, es necesario comparar el decrecimiento de la función objetivo y el decrecimiento del modelo. Si el valor de la función objetivo fue bien predicho por el modelo, de acuerdo con la condición de aceptación propuesta, entonces la región de confianza es mantenida o aumentada, ratificando nuestra confianza en el modelo usado, en caso contrario, cuando el modelo es rechazado, se disminuye la región de confianza con la esperanza que este ofrezca una mejor predicción en una región de menor radio.

En este trabajo concentramos nuestra atención en los métodos de región de confianza. Estos son métodos robustos, con fuertes propiedades de convergencia y que permiten tratar con situaciones donde la matriz Hessiana de la función objetivo no es definida positiva, lo cual es una gran ventaja sobre los métodos de búsqueda lineal. En cada iteración construimos una aproximación cuadrática de la función objetivo alrededor del iterado actual  $x_k$ . Como el modelo cuadrático deja de ser representativo a medida que nos alejamos de  $x_k$ , procuramos un punto crítico de  $f$  dentro de un entorno centrado en  $x_k$ , proponiendo el siguiente **subproblema de región de confianza**

$$\min_{s.a} \quad q_k(s) = \frac{1}{2}s^T G_k s + g_k^T s + f_k \quad (2.2)$$

$$\|s\| \leq \delta_k,$$

donde  $f_k = f(x_k)$ ,  $g_k = \nabla f_k$  y  $G_k$  es una aproximación simétrica de  $\nabla^2 f_k$ .

El siguiente algoritmo es una iteración típica de región de confianza utilizando un modelo cuadrático:

---

**Algoritmo 2.1. (Región de confianza)**


---

Para cada  $x_k$ ,

**Paso 0.** Testear convergencia.

**Paso 1.** (Cálculo del paso de prueba)

Determinar el paso de prueba  $s_k$  como solución aproximada del subproblema de región de confianza

$$\min_{s.a} \quad q_k(s) = \frac{1}{2}s^T G_k s + g_k^T s + f_k \\ \|s\| \leq \delta_k.$$

**Paso 2.** (Evaluación del paso de prueba)

- Si el paso es aceptado:
    - definir  $x_{k+1} = x_k + s_k$ ,
    - mantener o aumentar la región de confianza,
    - actualizar la información,
    - ir a **Paso 0**.
  - Si el paso es rechazado:
    - definir  $x_{k+1} = x_k$ ,
    - reducir la región de confianza,
    - ir a **Paso 1**.
- 

## 2.1 Un algoritmo monótono de región de confianza

Por ahora dejamos pendiente la elección del método que nos permita calcular el paso de prueba en el **Paso 1** del algoritmo, para dedicarnos al criterio de aceptación del **Paso 2**. La clave para decidir si el paso de prueba  $s_k$  es aceptable o no, es saber que tan buena es la aproximación del modelo  $q_k$  respecto de la función  $f$  alrededor de  $x_k$ . Para ello se definen las cantidades

$$ared_k = f(x_k) - f(x_k + s_k) \quad (2.3)$$

como el *decremento actual* de la función  $f$  en  $x_k$ , y

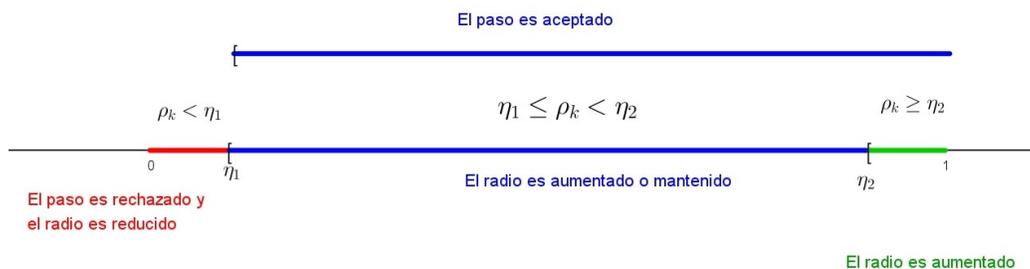
$$pred_k = q_k(0) - q_k(s_k) \quad (2.4)$$

como el *decrecimiento predicho* por el modelo  $q_k$  en  $x_k$ , lo que permite construir el cociente

$$\rho_k = \frac{ared_k}{pred_k}. \quad (2.5)$$

Como el paso  $s_k$  se obtiene minimizando el modelo cuadrático  $q_k$  sobre una región que contiene al paso  $s = 0$ , la reducción predicha es siempre no negativa, ya que en caso contrario estaría diciendo que  $f(x_k) = q_k(0) < q_k(s_k)$  para todo  $\|s_k\| \leq \delta_k$ , es decir,  $x_k$  sería un mínimo para el modelo en el interior de la región de confianza y el algoritmo debería haber terminado en la iteración anterior. En consecuencia, si  $\rho_k$  es negativo es porque  $f(x_k) < f(x_k + s_k)$  y el paso debe ser rechazado. Por otro lado, si  $\rho_k$  es próximo a 1, el modelo se ajusta muy bien a la función cerca del iterado actual  $x_k$ , y es seguro aceptar el paso y aumentar la región de confianza. De igual manera, si  $\rho_k > 0$  pero muy pequeño, el paso es rechazado y se reduce la región de confianza por considerar que el modelo no se ajusta suficientemente a la función.

En la figura 2.1 se muestra un esquema de la actualización del radio de la región de confianza.



**Figura 2.1:** Aceptación del paso de prueba.

El algoritmo 2.2 muestra cómo funciona el **Paso 2** en un algoritmo monótono.

---

**Algoritmo 2.2. (Algoritmo monótono)**


---

**Paso 2.** (Evaluación del paso de prueba)

Definir

$$\begin{aligned} \text{ared}_k(s_k, \delta_k) &= f(x_k) - f(x_k + s_k) \\ \text{pred}_k(s_k, \delta_k) &= f(x_k) - q_k(s_k) \\ \rho_k &= \frac{\text{ared}_k}{\text{pred}_k} \end{aligned}$$

y evaluar la aceptación del paso de la siguiente manera:

Dadas las constantes  $\eta_1, \eta_2, \alpha_1, \alpha_2$  tales que  $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$  y  $0 < \alpha_1 < 1 < \alpha_2$ ,

- Si  $\rho_k \geq \eta_2$  entonces  $x_{k+1} = x_k + s_k$ , elegir  $\delta_{k+1} \in (\delta_k, \alpha_2 \delta_k]$  e ir al **Paso 0**.
  - Si  $\eta_1 < \rho_k < \eta_2$  entonces  $x_{k+1} = x_k + s_k$ , elegir  $\delta_{k+1} \in [\alpha_1 \delta_k, \delta_k]$  e ir al **Paso 0**.
  - Si  $\rho_k \leq \eta_1$  entonces el paso es rechazado,  $x_{k+1} = x_k$ , reducir el radio de la región de confianza  $\delta_{k+1} \in [\min\{\delta_{min}, \alpha_1 \delta_k\}, \delta_k)$  e ir al **Paso 1**.
- 

Aunque en principio se busca la solución óptima del subproblema de región de confianza (2.2), basta con encontrar una solución aproximada que produzca *suficiente decrecimiento* en el modelo dentro de la región de confianza. Para cuantificar este suficiente decrecimiento, se define el *paso de Cauchy*, que es el minimizador del modelo cuadrático en la región de confianza a lo largo de la dirección de máximo descenso  $-g_k$  a partir de  $x_k$ , esto es,

$$s_k^{\text{CP}} = -t_k^{\text{CP}} g_k,$$

donde

$$t_k^{\text{CP}} \in \arg \min_{s.a} \begin{aligned} & q_k(-tg_k) \\ & \|tg_k\| \leq \delta_k \\ & t \geq 0. \end{aligned}$$

Para  $t \geq 0$ , consideramos la función

$$h(t) = q_k(-tg_k) = \frac{1}{2}t^2 g_k^T G_k g_k - tg_k^T g_k + f_k.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} h'(t) &= tg_k^T G_k g_k - \|g_k\|_2^2, \\ h''(t) &= g_k^T G_k g_k. \end{aligned}$$

1. Si la matriz  $G_k$  es definida positiva, la función  $h$  es estrictamente convexa y el minimizador es único

$$t_k^* = \frac{\|g_k\|_2^2}{g_k^T G_k g_k}.$$

- a) Si el paso  $-t_k^* g_k$  está dentro de la región de confianza, esto es, si

$$\frac{\|g_k\|_2^3}{g_k^T G_k g_k} \leq \delta_k,$$

entonces

$$\begin{aligned} t_k^{\text{CP}} &= t_k^* \\ &\text{y} \\ s_k^{\text{CP}} &= -\frac{\|g_k\|_2^2}{g_k^T G_k g_k} g_k. \end{aligned}$$

- b) Si el paso  $-t_k^* g_k$  no está dentro de la región de confianza elegimos el paso de Cauchy  $s_k^{\text{CP}}$  como la proyección sobre la misma, esto es,

$$s_k^{\text{CP}} = -\frac{\delta_k}{\|g_k\|_2} g_k. \quad (2.6)$$

2. Si la curvatura del modelo cuadrático  $q_k(s)$  a lo largo de la dirección negativa de su gradiente no es positiva, el minimizador no es único, y tomamos el paso de Cauchy como la proyección de esta dirección sobre la región de confianza, es decir, nuevamente (2.6).

Por lo tanto, se define el *paso de Cauchy* como

$$s_k^{\text{CP}} = \begin{cases} -\frac{\|g_k\|^2}{g_k^T G_k g_k} g_k & \text{si } G_k \text{ es definida positiva y } \frac{\|g_k\|_2^3}{g_k^T G_k g_k} \leq \delta_k \\ -\frac{\delta_k}{\|g_k\|_2} g_k & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Y el *punto de Cauchy* como

$$x_k^{\text{CP}} = x_k - t_k^{\text{CP}} g_k = x_k + s_k^{\text{CP}}.$$

El siguiente es un conocido resultado debido a Powell [POW75], y su demostración y comentarios pueden encontrarse en [MOR83] y [CGT00].

**Lema 2.1.** *El paso de Cauchy  $s_k^{\text{CP}}$  satisface la condición*

$$q_k(0) - q_k(s_k^{\text{CP}}) \geq \frac{1}{2} \|g_k\|_2 \min \left\{ \delta_k, \frac{\|g_k\|_2}{\|G_k\|_2} \right\}. \quad (2.8)$$

Para que el modelo cuadrático satisfaga la condición (2.8) basta pedir que prediga un decrecimiento que sea al menos tan bueno como una fracción del decrecimiento que produce el paso de Cauchy, es decir,

$$q_k(0) - q_k(s_k) \geq \sigma_0 (q_k(0) - q_k(s_k^{\text{CP}})), \quad (2.9)$$

para algún  $\sigma_0 \in (0, 1)$ . En este caso se dice que el modelo satisface la condición de *fracción de decrecimiento de Cauchy*.

Las primeras demostraciones de convergencia global de los métodos de optimización sin restricciones basados en la estrategia de región de confianza fueron presentadas por Powell [POW70, POW75], quien introdujo lo que hoy conocemos como punto de Cauchy, así como la primera formulación del Lema 2.1 y la condición de decrecimiento de Cauchy (2.9). El siguiente resultado fue propuesto por Powell para el método de Newton, requiriendo que el cociente  $\rho_k$  entre el decrecimiento actual y el decrecimiento predicho sea no negativo, es decir, el paso aceptado produce simplemente una reducción de la función objetivo. Posteriormente Moré [MOR83] mostró que la convergencia no depende del método utilizado para resolver el subproblema de región de confianza para modelos cuadráticos.

**Teorema 2.1.** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continuamente diferenciable y acotada inferiormente en un abierto convexo de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a la sucesión  $\{x_n\}$  generada por el algoritmo 2.1. Si se satisface la condición de decrecimiento de Cauchy entonces*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0.$$

*Demostración.* Ver Powell [POW75], Moré [MOR83] o Conn, Gould y Toint [CGT00].  $\square$

Con algún requerimiento extra es posible obtener un resultado más fuerte [THO75], asegurando que la sucesión de iterados converge a un punto estacionario.

**Teorema 2.2.** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continuamente diferenciable y acotada inferiormente en un abierto convexo de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a la sucesión  $\{x_n\}$  generada por el algoritmo 2.1, la cual satisface la condición de decrecimiento de Cauchy. Si la sucesión  $\{G_k\}$  está uniformemente acotada y  $\nabla f$  es uniformemente continua, entonces*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0.$$

*Demostración.* Ver Thomas [THO75], Moré [MOR83] o Conn, Gould y Toint [CGT00].  $\square$

### 2.1.1 El método de gradiente espectral proyectado

En el Paso 1 del Algoritmo 2.1, el paso de prueba  $s_k$  podría ser calculado utilizando cualquier algoritmo de programación cuadrática secuencial para minimización con restricciones convexas. En nuestro caso hemos elegido un algoritmo no monótono como es el método de gradiente espectral proyectado (SPG, Spectral Projected Gradient por sus siglas en inglés), que combina el método de gradiente proyectado con la longitud de paso espectral introducida por Barzilai y Borwein [BB88] y la búsqueda lineal no monótona introducida por Grippo, Lampariello y Lucidi [GLL86].

En 1988, Barzilai y Borwein [BB88] presentaron un método de tipo gradiente que hacía uso de una nueva estrategia para la elección de la longitud del paso. Usando teoría de números lograron establecer convergencia para el caso cuadrático de funciones de dos variables.

En cada iteración,

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k),$$

donde

$$\lambda_k = \frac{s_{k-1}^T s_{k-1}}{s_{k-1}^T y_{k-1}},$$

$$s_{k-1} = x_k - x_{k-1}, \text{ e } y_{k-1} = \nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}).$$

En el caso del modelo cuadrático

$$q_k(s) = \frac{1}{2} s^T G_k s + g_k^T s + f_k,$$

la longitud del paso es

$$\lambda_k = \frac{g_{k-1}^T g_{k-1}}{g_{k-1}^T G_{k-1} g_{k-1}},$$

que es la longitud óptima del método de máximo descenso de Cauchy del paso  $k - 1$ . De este modo, el método de Barzilai-Borwein calcula, en cada iteración el paso que minimiza el modelo cuadrático a lo largo de la dirección negativa del gradiente, pero usa la longitud de paso de la iteración previa.

En el trabajo de 1988 [BB88] se probó que para funciones cuadráticas estrictamente convexas el método converge  $R$ -superlinealmente en dos dimensiones. Más aún, respecto a la velocidad de convergencia, en 1990 Fletcher [FLE90] mostró que en el caso general sólo se podría esperar convergencia  $R$ -lineal.

Por otro lado, en 1991, Raydán [RAY91, RAY93] generalizó para  $n$  variables el método de Barzilai y Borwein estableciendo la convergencia global para funciones cuadráticas estrictamente convexas, mientras que en 2002, Dai y Liao [DL02] lograron probar usando las estrategias de Raydán la convergencia  $R$ -lineal.

Para la minimización de funciones arbitrarias la sucesión de valores funcionales del método de Barzilai-Borwein no decrece en forma monótona, siendo a veces el decrecimiento severamente comprometido. Sin embargo se observó experimentalmente que la efectividad del método estaba más asociada con la interrelación entre la longitud del paso y los autovalores de la matriz Hessiana que con el decrecimiento de la función objetivo. A su vez, comenzando con el trabajo de Grippo, Lampariello y Lucidi [GLL86], las estrategias de aceptación del paso no monótonas habían empezado a utilizarse

para el método de Newton, mostrando ser muy efectivas para funciones cuyo gráfico presentaba valles profundos y sinuosos.

Combinando esta estrategia no monótona en una búsqueda lineal con el método de Barzilai y Borwein, en 1997 Raydán [RAY97] desarrolló el método de gradiente espectral, que es globalmente convergente para funciones generales que resultó experimentalmente más eficiente que el método de gradientes conjugados para problemas de gran escala por ser de bajo costo computacional y de almacenamiento de datos ya que no se consideran operaciones matriciales.

La idea de Raydán fue extendida posteriormente por Birgin, Martínez y Raydán [BMR00, BMR01] en el método de gradiente espectral proyectado para minimizar funciones diferenciables sobre conjuntos convexos cerrados.

El método clásico de gradientes proyectados se combinó con la elección de la longitud del paso de prueba del Gradiente Espectral, obteniendo convergencia global mediante la estrategia de búsqueda lineal no monótona desarrollada por Grippo, Lampariello y Lucidi. Este método ha sido intensamente estudiado y extendido a diferentes problemas de optimización no lineal, [ABMY05, ABM05, ABM10, BM01, BM02, BMR03, BMR09, FMR95] además de haber sido ampliamente usado en diversas aplicaciones [BCM99, BMMR06, RPVC04, SZZ05, VAC03, ZSC06].

A continuación establecemos el algoritmo de gradiente espectral proyectado.

---

### Algoritmo 2.3. (SPG)

---

Fijar  $i = 0$ ,  $x_i = x_k$ .

Mientras  $\|P(x_i - \nabla q_i) - x_i\| > \varepsilon_1$ ,

    Calcular  $d_i = P(x_i - \alpha_i \nabla q_i) - x_i$ ,

$x_+ = x_i + d_i$  y

    fijar  $\lambda = 1$ .

Mientras  $f(x_+) > \max_{0 \leq j \leq \min\{i, m-1\}} f(x_{i-j}) + \gamma \lambda d_i^T \nabla q_i$ ,

    definir  $\lambda_{new} \in [\sigma_1 \lambda, \sigma_2 \lambda]$ ,

    fijar  $\lambda = \lambda_{new}$  y

    calcular  $x_+ = x_i + \lambda d_i$ .

Fin.

Fijar  $x_{i+1} = x_+$  y

calcular  $s_i = x_{i+1} - x_i$ ,

$y_i = \nabla q_{i+1} - \nabla q_i$  y  
 $b_i = s_i^T y_i$ .  
 Si  $b_i \leq 0$ ,  
     fijar  $\alpha_{i+1} = \alpha_{max}$ ,  
 en otro caso  
     calcular  $\alpha_{i+1} = \min \left\{ \alpha_{max}, \max \left\{ \alpha_{min}, \frac{s_i^T s_i}{b_i} \right\} \right\}$  y  
     fijar  $i = i + 1$ .

Fin.

Fijar  $x_k = x_i$ .

Como en su contraparte irrestricta, cada iterado generado por el método tiene la forma

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k,$$

donde la dirección de búsqueda es una dirección factible de descenso definida por

$$d_k = P(x_k - \alpha_k \nabla q_k) - x_k.$$

Esto significa que se podrían definir métodos convergentes considerando suficiente decrecimiento en cada iteración, pero como en el caso irrestricto llevaría a resultados experimentales muy ineficientes. Por ello el método de gradiente espectral proyectado utiliza internamente una búsqueda lineal no monótona del tipo de la empleada por Grippo, Lampariello y Lucidi que no impone decrecimiento en cada iteración, sino cada  $M$  iteraciones, siendo  $M \geq 0$ , un parámetro predefinido.

En nuestro caso, recordemos que deseamos resolver el problema de optimización no lineal sin restricciones (2.1) adoptando una estrategia de globalización de región de confianza, de modo que en cada iteración necesitamos resolver el subproblema (2.2). Este es un problema de minimización de una función cuadrática sobre una región convexa determinada por el entorno de la región de confianza alrededor del iterado actual. Haciendo uso de la norma Euclidiana las proyecciones son simples y rápidas de calcular, de modo que adaptando el método SPG para funciones cuadráticas hemos conseguido un algoritmo consistente y de bajo costo computacional para resolver el subproblema de región de confianza planteado en cada iteración.

En la próxima sección proponemos una condición de aceptación del paso de prueba comparando el decrecimiento real de la función objetivo con el decrecimiento predicho por el modelo cuadrático, el procedimiento estándar

para algoritmos de región de confianza. En concordancia con la naturaleza no monótona del método SPG la condición de aceptación propuesta es no monótona, generalizando la condición de Grippo, Lampariello y Lucidi que tendrá en cuenta información de segundo orden de la función objetivo.

## 2.2 Un algoritmo no monótono de región de confianza

En esta sección presentamos un algoritmo de región de confianza para problemas de optimización sin restricciones derivado del Algoritmo 2.1, introduciendo una modificación en el Paso 2 que permite la aceptación del paso en una forma no monótona, es decir, admitiendo que para algunos índices la sucesión de los valores de la función objetivo  $\{f(x_k)\}$  no sea decreciente. Usamos para ello una modificación de la condición de aceptación del paso de prueba propuesta por Grippo, Lampariello y Lucidi [GLL86]:

$$f(x_k + s_k) \leq f_{max} + \sigma g_k^T s_k, \quad \sigma \in (0, 1) \quad (2.10)$$

siendo  $f_{max} = \max_{0 \leq j \leq m(k)} f(x_{k-j})$  el máximo valor de la función objetivo obtenido en las últimas  $M + 1$  iteraciones, donde

$$\begin{aligned} m(0) &= 0, \\ 0 \leq m(k) &\leq \min\{m(k-1) + 1, M\} \quad \text{para } k \geq 1, \end{aligned}$$

y  $M$  es un número entero no negativo.

La nueva propuesta consiste en agregar un término de segundo orden a la derivada direccional de modo que se pueda tomar en cuenta la convexidad de la función objetivo al momento de aceptar el paso de prueba,

$$f(x_k + s_k) \leq f_{max} + \sigma \left( g_k^T s_k + \frac{1}{2} s_k^T G_k s_k \right), \quad \sigma \in (0, 1) \quad (2.11)$$

que podemos escribir como

$$\sigma (q_k(0) - q_k(s_k)) \leq f_{max} - f(x_k + s_k).$$

Definimos

$$ared_k^{nm} = f_{max} - f(x_k + s_k),$$

como el *decrecimiento actual* de la función objetivo  $f$  en la  $k$ -ésima iteración respecto de sus  $M + 1$  valores previos.

Recordando que

$$pred_k = q_k(0) - q_k(s_k)$$

es el *decrecimiento predicho* por el modelo cuadrático en la  $k$ -ésima iteración, definimos el cociente

$$\tilde{\rho}_k = \frac{ared_k^{nm}}{pred_k} \quad (2.12)$$

que mide, en el iterado  $x_k$ , el ajuste del modelo cuadrático a la función objetivo, respecto del peor de sus últimos  $M + 1$  valores.

Podemos entonces construir un algoritmo no monótono alterando el Paso 2 del Algoritmo 2.1 de la siguiente manera:

---

**Algoritmo 2.4. (Algoritmo no monótono - versión 1)**

---

**Paso 2.** (Evaluación del paso de prueba)

Definir

$$\begin{aligned} ared_k^{nm}(s_k, \delta_k) &= f_{max} - f(x_k + s_k), \\ pred_k(s_k, \delta_k) &= f(x_k) - q_k(s_k), \\ \tilde{\rho}_k &= \frac{ared_k^{nm}}{pred_k}, \end{aligned}$$

y evaluar la aceptación del paso de la siguiente manera:

Dadas las constantes  $\eta_1, \eta_2, \alpha_1, \alpha_2$  tales que  $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$  y  $0 < \alpha_1 < 1 < \alpha_2$ ,

Si  $\tilde{\rho}_k \geq \eta_2$  entonces  $x_{k+1} = x_k + s_k$ , elegir  $\delta_{k+1} \in (\delta_k, \alpha_2 \delta_k]$ , e ir al **Paso 0**.

Si  $\eta_1 < \tilde{\rho}_k < \eta_2$  entonces  $x_{k+1} = x_k + s_k$ , elegir  $\delta_{k+1} \in [\alpha_1 \delta_k, \delta_k]$ , e ir al **Paso 0**.

Si  $\tilde{\rho}_k \leq \eta_1$  entonces el paso es rechazado,  $x_{k+1} = x_k$ , reducir el radio de la región de confianza  $\delta_{k+1} \in [\min\{\delta_{min}, \alpha_1 \delta_k\}, \delta_k)$ , e ir al **Paso 1**.

---

Observemos que el método monótono puede considerarse un caso particular de este último, donde  $M = 0$ , es decir, el máximo  $f_{max}$  se toma sólo sobre la iteración anterior.

Podemos hacer una nueva generalización definiendo

$$pred_k^{nm} = q_{l(k)}(0) - q_k(s_k) = f(x_{l(k)}) - q_k(s_k)$$

como el *decrecimiento predicho* por el modelo cuadrático  $q_k(s)$  en la iteración  $k$  con respecto al modelo cuadrático alrededor de  $x_{l(k)}$ , donde  $l(k)$  es un entero no negativo tal que:

$$\begin{aligned} k - m(k) &\leq l(k) \leq m(k) && \text{y} \\ f(x_{l(k)}) &= f_{max} = \max_{0 \leq j \leq m(k)} f(x_{k-j}). \end{aligned}$$

Estamos así comparando el decrecimiento del modelo cuadrático actual respecto del modelo cuadrático construido alrededor del punto  $x_{l(k)}$  donde la función objetivo alcanzó su peor valor en las últimas  $M + 1$  iteraciones.

Entonces el cociente

$$\rho_k^{nm} = \frac{ared_k^{nm}}{pred_k^{nm}} \quad (2.13)$$

mide el ajuste del modelo cuadrático a la función objetivo en el iterado actual respecto del peor en las últimas  $M + 1$  iteraciones.

Podemos construir un nuevo algoritmo no monótono modificando el **Paso 2** del Algoritmo 2.1 de la siguiente manera

### Algoritmo 2.5. (Algoritmo no monótono - versión 2)

**Paso 2.** (Evaluación del paso de prueba)

Definir

$$\begin{aligned} ared_k^{nm}(s_k, \delta_k) &= f_{max} - f(x_k + s_k), \\ pred_k^{nm}(s_k, \delta_k) &= q_{l(k)}(0) - q_k(s_k), \\ \rho_k^{nm} &= \frac{ared_k^{nm}}{pred_k^{nm}}, \end{aligned}$$

y evaluar la aceptación del paso de la siguiente manera:

Dadas las constantes  $\eta_1, \eta_2, \alpha_1, \alpha_2$  tales que  $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$  y  $0 < \alpha_1 < 1 < \alpha_2$ ,

Si  $\rho_k^{nm} \geq \eta_2$  entonces  $x_{k+1} = x_k + s_k$ , elegir  $\delta_{k+1} \in (\delta_k, \alpha_2 \delta_k]$ , e ir al **Paso 0**.

- Si  $\eta_1 < \rho_k^{\text{nm}} < \eta_2$  entonces  $x_{k+1} = x_k + s_k$ , elegir  $\delta_{k+1} \in [\alpha_1 \delta_k, \delta_k]$ , e ir al **Paso 0**.
- Si  $\rho_k^{\text{nm}} \leq \eta_1$  entonces el paso es rechazado,  $x_{k+1} = x_k$ , reducir el radio de la región de confianza  $\delta_{k+1} \in [\min\{\delta_{\min}, \alpha_1 \delta_k\}, \delta_k]$ , e ir al **Paso 1**.

Observemos que

$$\begin{aligned}
pred_k^{\text{nm}} &= q_{l(k)}(0) - q_s(s_k) \\
&= f(x_{l(k)}) - q_k(s_k) \\
&\geq f(x_k) - q_k(s_k) \\
&= q_k(0) - q_k(s_k) \\
&= pred_k.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Presentamos ahora los principales resultados acerca de algoritmos de región de confianza no monótonos para optimización sin restricciones y con restricciones de caja de los últimos años, comparando los distintos criterios de aceptación del paso de prueba que ofrecen cada uno de ellos. Se ha evitado la notación de los autores priorizando la que hemos introducido en este trabajo.

Autor	condición de aceptación propuesta
N.Y. Deng, Y. Xiao,	$ared_k = f(x_{l(k)}) - f(x_k) - \gamma \Delta_k \ g_k\ ,$ $pred_k = q_k(0) - q_k(s_k),$
F.J. Zhou.	$\mu_k = \begin{cases} \frac{ared_k}{pred_k} & \text{si } M > 0 \\ \mu & \text{si } M = 0 \end{cases},$
[DXZ93]	$\rho_k = \frac{ared_k}{pred_k} \geq \bar{\mu}_k = \min\{\mu, \mu_k\}.$

<p>X. Ke, J. Han. [KH98]</p>	$\begin{aligned} \text{ared}_k &= f(x_{l(k)}) - f(x_k + s_k), \\ \text{pred}_k &= q_k(0) - q_k(s_k), \\ \rho_k &= \frac{\text{ared}_k}{\text{pred}_k} \geq \eta_k, \end{aligned}$ <p>donde <math>\mu_k = \min \left\{ \mu, \frac{\eta \Delta_k \ g_k\ }{\text{pred}_k} \right\}</math> con <math>\mu, \eta \in (0, 1)</math> y</p> $f(x_{l(k)}) = \max_{0 \leq j \leq m(k)} f(x_{k-j}),$ <p>con <math>m(k) = \min\{m(k-1) + 1, M_k\}</math> y <math>M_k = 0</math> cuando <math>\rho_k \geq C \geq 1</math>.</p>
<p>W. Sun. [SUN04]</p>	$\begin{aligned} \text{ared}_k &= f(x_{l(k)}) - f(x_k + s_k), \\ \text{pred}_k &= q_k(0) - q_k(s_k), \\ \rho_k &= \frac{\text{ared}_k}{\text{pred}_k} \geq \eta_1. \end{aligned}$
<p>J. Mo, K. Zhang, Z. Wei. [MZW05]</p>	$\begin{aligned} \text{ared}_k &= f(x_{l(k)}) - f(x_k + s_k), \\ \text{pred}_k &= q_k(0) - q_k(s_k), \\ \text{con } f(x_{l(k)}) &= \max_{0 \leq j \leq m(k)} f(x_{k-j}) \text{ y} \\ m(k) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_{k-1} \geq \eta_1 \\ \min\{m(k-1) + 1, M\} & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \rho_k &= \frac{\text{ared}_k}{\text{pred}_k} \geq \eta_1. \end{aligned}$
<p>J. Mo, Ch. Liu, S. Yan. [MLY07]</p>	$\begin{aligned} \text{ared}_k &= C_k - f(x_k + s_k), \\ \text{pred}_k &= q_k(0) - q_k(s_k), \\ C_k &= \begin{cases} f(x_k) & \text{si } k = 0 \\ \frac{\eta_{k-1} Q_{k-1} C_{k-1} + f(x_k)}{Q_k} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}, \\ Q_k &= \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \eta_{k-1} Q_{k-1} + 1 & \text{si } k \geq 1 \end{cases}, \\ \rho_k &= \frac{\text{ared}_k}{\text{pred}_k} \geq \eta_1. \end{aligned}$

S.J. Qu, K.C. Zhang, J. Zhang. [QZZ08]	$\begin{aligned} \text{ared}_k &= f(x_{l(k)}) - f(x_k + s_k), \\ \text{pred}_k &= \phi_k(0) - \phi_k(s_k), \\ \text{donde } \phi_k(s) &= \frac{g_k^T s}{1 - \alpha_k^T s} + \frac{1}{2} \frac{s^T G_k s}{(1 - \alpha_k^T s)^2}, \\ \rho_k &= \frac{\text{ared}_k}{\text{pred}_k} \geq \eta_1. \end{aligned}$
M. Ahookhosh, K. Amini. [AA12]	$\begin{aligned} \text{ared}_k &= R_k - f(x_k + s_k), \\ \text{pred}_k &= q_k(0) - q_k(s_k), \\ \text{donde } R_k &= \eta_k f(x_{l(k)}) + (1 - \eta_k) f(x_k) \text{ y} \\ \eta_k &= \begin{cases} \frac{\eta_0}{2} & \text{si } k = 1 \\ \frac{\eta_{k-1} + \eta_{k-2}}{2} & \text{si } k \geq 2 \end{cases} \\ \rho_k &= \frac{\text{ared}_k}{\text{pred}_k} \geq \eta_1. \end{aligned}$

A diferencia de los trabajos anteriores, Toint [TOI97] utiliza una condición no monótona en un algoritmo de región de confianza para minimizar sobre un conjunto convexo y cerrado, definiendo

$$\rho_{1,k} = \begin{cases} \frac{f(x_{l(k)}) - f(x_k + s_k)}{\sum_{i=l(k)}^l q_k(0) - q_i(s_k)} & \text{si } l > 0 \\ 0 & \text{si } l = 0 \end{cases}$$

donde  $l$  es el número de iteraciones exitosas,

$$\rho_{2,k} = \frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{q_k(0) - q_k(s_k)}$$

y

$$\rho_k = \max\{\rho_{1,k}, \rho_{2,k}\} \geq \eta_1.$$

Por otro lado, Chen, Han y Xu [CHX01] para resolver un problema de programación no lineal con restricciones de caja utilizan una condición no

monótona similar a las de Sun [SUN04] y Mo, Zhang y Wei [MZW05] con

$$\begin{aligned} \text{ared}_k &= f(x_{l(k)}) - f(x_k + s_k), \\ \text{pred}_k &= q_k(0) - q_k(s_k) \text{ y} \\ \rho_k &= \frac{\text{ared}_k}{\text{pred}_k} \geq \eta_1. \end{aligned}$$

donde

$$f(x_{l(k)}) = \max_{0 \leq j \leq m(k)} f(x_{k-j})$$

con  $m(0) = 0$  y  $m(k) = \min\{m(k-1) + 1, 2M, M_k\}$  y ahora  $M_k$  se incrementa sólo cuando el paso es rechazado.

### 2.2.1 Discusión teórica

Comenzamos estableciendo las hipótesis bajo las cuales demostramos la buena definición y la convergencia global del Algoritmo 2.5.

- A1.** Existe un conjunto abierto y convexo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que,  $x_k, x_k + s_k \in D$ , para todo  $k$ .
- A2.** El gradiente de  $f$  es Lipchitz continuo sobre el conjunto  $D$ , esto es,  $\nabla f \in Lip_\gamma(D)$ .
- A3.** La sucesión de matrices Hessianas o sus aproximaciones  $\{G_k\}$  está uniformemente acotada, esto es, existe  $\vartheta_{G_f} \geq 0$  tal que  $\|G_k\| \leq \vartheta_{G_f}$ , para todo  $k$ .
- A4.** La función objetivo  $f$  está acotada inferiormente en el conjunto compacto

$$D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\}.$$

Podemos observar que como consecuencia de la hipótesis (A2),

$$|f(x + s) - f(x) - \nabla f(x)^T s| = \mathcal{O}(\|s\|^2).$$

Presentamos ahora algunos resultados técnicos que nos permitirán obtener teoremas de buena definición y convergencia para este nuevo criterio de aceptación del paso.

**Lema 2.2.** *Asumiendo las hipótesis (A1)-(A3) se tiene*

$$|ared_k^{nm} - pred_k^{nm}| \leq \beta_0 \|s_k\|^2, \quad \beta_0 > 0.$$

*Demostración.* Como  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es continuamente diferenciable sobre el abierto convexo  $D$  donde  $\nabla f$  es Lipschitz continua, entonces

$$\begin{aligned} |f(x+s) - f(x) - \nabla f(x)^T s| &= \left| \int_0^1 (\nabla f(x+ts) - \nabla f(x))^T s dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \|\nabla f(x+ts) - \nabla f(x)\|_2 \|s\|_2 dt \\ &\leq \int_0^1 \gamma t \|s\|_2^2 dt = \frac{\gamma}{2} \|s\|_2^2. \end{aligned}$$

Tenemos así que

$$\begin{aligned} |ared_k^{nm} - pred_k^{nm}| &= \left| \frac{1}{2} s_k^T G_k s_k + \nabla f(x_k)^T s_k + f(x_k) - f(x_k + s_k) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \|G_k\|_2 \|s_k\|_2^2 + |f(x+s) - f(x) - \nabla f(x)^T s| \\ &\leq \frac{\vartheta_{G_f}}{2} \|s_k\|_2^2 + \frac{\gamma}{2} \|s_k\|_2^2 = \beta_0 \|s\|_2^2, \end{aligned}$$

donde  $\beta_0 = \frac{1}{2} (\vartheta_{G_f} + \gamma)$ . □

El siguiente lema presenta un resultado similar al Lema 2.1 de Powell [POW75] donde el decrecimiento del modelo cuadrático del paso de Cauchy es acotado inferiormente cuando el paso de prueba es calculado mediante el método de gradiente espectral proyectado.

**Lema 2.3.** *Asumiendo las hipótesis (A1)-(A3), y  $g_k \neq 0$  se cumple que*

$$q_k(0) - q_k(s_k^{CP}) \geq \frac{1}{2} \|g_k\| \|s_k\| \min \left\{ 1, \frac{|\alpha_k|}{\vartheta_{G_f}} \right\},$$

donde  $\alpha_k$  es el cociente de Raleigh, esto es,  $\alpha_k = \frac{s_{k-1}^T y_{k-1}}{s_{k-1}^T s_{k-1}}$ .

*Demostración.* En primer término consideramos el caso en que la curvatura del modelo cuadrático es positiva a lo largo de la dirección negativa de su gradiente, i.e.,  $g_k^T G_k g_k > 0$ . En este caso el minimizador del método de Cauchy es único,

$$t_k^* = \frac{\|g_k\|_2^2}{g_k^T G_k g_k}.$$

Podemos encontrar dos situaciones diferentes.

1. Si el paso óptimo  $-t_k^* g_k$  está dentro de la región de confianza, el paso de Cauchy es

$$s_k^{\text{CP}} = -\frac{\|g_k\|_2^2}{g_k^T G_k g_k} g_k.$$

Reemplazando en el modelo cuadrático obtenemos

$$\begin{aligned} q_k(0) - q_k(s_k^{\text{CP}}) &= -\frac{1}{2}(s_k^{\text{CP}})^T G_k s_k^{\text{CP}} - g_k^T s_k^{\text{CP}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\|g_k\|_2^4}{g_k^T G_k g_k} + \frac{\|g_k\|_2^2}{g_k^T G_k g_k} g_k^T g_k \\ &= \frac{1}{2} \frac{\|g_k\|_2^4}{g_k^T G_k g_k}. \end{aligned}$$

Como  $g_k^T G_k g_k \leq \|g_k\|_2^2 \|G_k\|_2$ ,

$$q_k(0) - q_k(s_k^{\text{CP}}) \geq \frac{1}{2} \frac{\|g_k\|_2^2}{\|G_k\|_2} \geq \frac{1}{2} \frac{\|g_k\|_2^2}{\vartheta_{G_f}}. \quad (2.15)$$

En este caso, para el paso de prueba pueden presentarse dos escenarios

- a) Si el paso  $s_k = -\frac{1}{\alpha_k} g_k$ , obtenido mediante el método del gradiente espectral proyectado está dentro de la región de confianza, i.e., si  $\|s_k\|_2 \leq \delta_k$ , entonces

$$q_k(0) - q_k(s_k^{\text{CP}}) \geq \frac{1}{2\vartheta_{G_f}} \|g_k\|_2 \|s_k\|_2 |\alpha_k|. \quad (2.16)$$

- b) Por otro lado, si el paso de prueba yace fuera de la región de confianza,

$$\frac{\|g_k\|_2}{|\alpha_k|} > \delta_k,$$

y una vez proyectado el paso estará en la frontera, i.e.,

$$s_k = -\frac{c_k}{\alpha_k} g_k,$$

con

$$0 < c_k = \frac{|\alpha_k|}{\|g_k\|_2} \delta_k < 1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} q_k(0) - q_k(s_k^{\text{CP}}) &> \frac{1}{2\vartheta_{G_f}} \|g_k\|_2 \delta_k |\alpha_k| \\ &= \frac{1}{2\vartheta_{G_f}} \|g_k\|_2 \|s_k\|_2 |\alpha_k|. \end{aligned} \quad (2.17)$$

2. Si el paso óptimo  $-t_k^* g_k$  no está dentro de la región de confianza,

$$\|t_k^* g_k\|_2 = \frac{\|g_k\|_2^3}{g_k^T G_k g_k} > \delta_k,$$

o sea,

$$-\frac{g_k^T G_k g_k}{\|g_k\|_2^2} \delta_k > -\|g_k\|_2.$$

El paso de Cauchy es la proyección del paso óptimo sobre la región de confianza obteniendo

$$s_k^{\text{CP}} = -\frac{\delta_k}{\|g_k\|_2} g_k.$$

Reemplazando en el modelo cuadrático,

$$\begin{aligned} q_k(0) - q_k(s_k^{\text{CP}}) &= -\frac{1}{2} \frac{\delta_k^2}{\|g_k\|_2^2} g_k^T G_k g_k + \frac{\delta_k}{\|g_k\|_2} g_k^T g_k \\ &\geq -\frac{1}{2} \delta_k \|g_k\|_2 + \delta_k \|g_k\|_2 \\ &= \frac{1}{2} \delta_k \|g_k\|_2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

En este caso el paso de prueba  $-\frac{1}{\alpha_k} g_k$  también yace fuera de la región de confianza y debe ser proyectado sobre su frontera, de modo que  $\|s_k\|_2 = \delta_k$ , y

$$q_k(0) - q_k(s_k^{\text{CP}}) \geq \frac{1}{2} \|s_k\|_2 \|g_k\|_2. \quad (2.19)$$

Consideramos ahora el caso en que el modelo cuadrático  $q_k(s)$  no tiene curvatura positiva en la dirección negativa de su gradiente, i.e., cuando  $g_k^T G_k g_k \leq 0$ , entonces el paso de Cauchy se define como

$$s_k^{\text{CP}} = -\frac{\delta_k}{\|g_k\|_2} g_k.$$

Reemplazando en el modelo cuadrático,

$$\begin{aligned} q_k(0) - q_k(s_k^{\text{CP}}) &= -\frac{1}{2} \frac{\delta_k^2}{\|g_k\|_2^2} g_k^T G_k g_k + \delta_k \|g_k\|_2 \\ &\geq \delta_k \|g_k\|_2 > \frac{1}{2} \delta_k \|g_k\|_2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

En este caso el paso de prueba también está fuera de la región de confianza y debe ser proyectado sobre su frontera, de modo que

$$q_k(0) - q_k(s_k^{\text{CP}}) > \frac{1}{2} \|g_k\|_2 \|s_k\|_2. \quad (2.21)$$

Por lo tanto, de las desigualdades (2.16), (2.17), (2.19) y (2.21) podemos concluir

$$q_k(0) - q_k(s_k^{\text{CP}}) \geq \frac{1}{2} \|g_k\| \|s_k\| \min \left\{ 1, \frac{|\alpha_k|}{\vartheta_{G_f}} \right\}.$$

□

Observemos que de las desigualdades (2.15), (2.18) y (2.20) volvemos a obtener

$$q_k(0) - q_k(s_k^{\text{CP}}) \geq \frac{1}{2} \|g_k\|_2 \min \left\{ \delta_k, \frac{\|g_k\|_2}{\vartheta_{G_f}} \right\}. \quad (2.22)$$

El paso de prueba  $s_k$ , calculado como solución aproximada del subproblema de región de confianza (2.2) mediante el método de gradiente espectral proyectado, sigue la dirección negativa del gradiente, como tal, el decrecimiento que produce en el modelo cuadrático debe ser una fracción del decrecimiento producido por el minimizador óptimo del subproblema representado por el paso de Cauchy, esto es, el modelo debe satisfacer la condición de fracción de decrecimiento de Cauchy (2.9). Esta observación junto con la

desigualdad (2.14), permite reescribir el lema anterior para el Algoritmo 2.5 de la siguiente manera,

$$pred_k^{nm} \geq \frac{\sigma_0}{2} \|g_k\|_2 \|s_k\|_2 \min \left\{ 1, \frac{|\alpha_k|}{\vartheta_{G_f}} \right\}, \quad (2.23)$$

y la desigualdad (2.22) como

$$pred_k^{nm} \geq \frac{\sigma_0}{2} \|g_k\|_2 \min \left\{ \delta_k, \frac{\|g_k\|_2}{\vartheta_{G_f}} \right\}. \quad (2.24)$$

El siguiente resultado permite garantizar la buena definición del Algoritmo 2.5 .

**Teorema 2.3.** *Bajo las hipótesis (A1)-(A3), si el Algoritmo 2.5 no termina en el iterado  $x_k$ , se debe obtener  $\rho_k^{nm} \geq \eta_1$  luego de un número finito de reducciones del radio de la región de confianza.*

*Demostración.* Supongamos que el Algoritmo 2.5 realiza ciclos indefinidamente entre el Paso 1 y el Paso 2. Esto significa que en la  $k$ -ésima iteración el paso de prueba es siempre rechazado.

Definimos el índice del ciclo interno, en la iteración  $k$  por  $k(j)$ . Obtenemos así

$$\rho_{k(j)}^{nm} = \frac{ared_{k(j)}^{nm}}{pred_{k(j)}^{nm}} \leq \eta_1,$$

para  $j = 1, 2, \dots$

Podemos observar que el ciclo entre el Paso 1 y el Paso 2 genera las sucesiones:  $x_{k(j)} = x_k$ ,  $g_{k(j)} = g_k$ ,  $G_{k(j)} = G_k$ ,  $\alpha_{k(j)}$ ,  $s_{k(j)}$ ,  $\delta_{k(j)}$ .

Como los pasos  $s_{k(j)}$  son rechazados, el radio de la región de confianza es reducido en cada iteración interna, de modo que  $\delta_{k(j)} \rightarrow 0$ , en consecuencia  $\|s_{k(j)}\| \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$ .

Usando la desigualdad (2.24) y el Lema 2.2 obtenemos

$$\begin{aligned} |\rho_{k(j)}^{nm} - 1| &= \left| \frac{ared_{k(j)}^{nm} - pred_{k(j)}^{nm}}{pred_{k(j)}^{nm}} \right| \\ &\leq \frac{\beta_0 \delta_{k(j)}^2}{\frac{\sigma_0}{2} \|g_k\|_2 \min \left\{ \delta_{k(j)}, \frac{\|g_k\|_2}{\vartheta_{G_f}} \right\}}. \end{aligned}$$

Para  $j$  suficientemente grande tendremos

$$\min \left\{ \delta_{k(j)}, \frac{\|g_k\|_2}{\vartheta_{G_f}} \right\} = \delta_{k(j)},$$

de modo que

$$|\rho_{k(j)}^{\text{nm}} - 1| \leq \frac{2\beta_0\delta_{k(j)}}{\sigma_0\|g_k\|_2} \rightarrow 0.$$

En consecuencia la desigualdad  $\rho_{k(j)}^{\text{nm}} \geq \eta_1$  se debe cumplir luego de un número finito de iteraciones internas, esto es,  $j$ -iteraciones, de modo que el paso de prueba  $s_{k(j)}$  será aceptado para  $j$  suficientemente grande, lo cual contradice nuestra suposición.  $\square$

Presentamos ahora el teorema de convergencia global.

**Teorema 2.4.** *Asumiendo las hipótesis (A1)-(A4) se tiene que*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0.$$

*Demostración.* Supongamos que existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $\|g_k\| > \varepsilon$  para todo  $k$  suficientemente grande.

Consideramos en primer lugar el caso en que sólo es posible obtener un número finito de iteraciones exitosas. Esto significa que a partir de cierto momento todos los pasos son rechazados y el radio de la región de confianza comienza a ser reducido, esto es,  $\delta_{k+1} = \frac{1}{2}\delta_k$  para todo  $k$  suficientemente grande, y en consecuencia  $\delta_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Usando la desigualdad (2.24) podemos escribir, para  $k$  suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \text{pred}_k^{\text{nm}} &\geq \frac{\sigma_0}{2} \|g_k\| \min \left\{ \delta_k, \frac{\|g_k\|}{\vartheta_{G_f}} \right\} \\ &> \frac{\sigma_0\varepsilon}{2} \min \left\{ \delta_k, \frac{\varepsilon}{\vartheta_{G_f}} \right\}. \end{aligned}$$

Como  $\delta_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , podemos calcular el mínimo

$$\min \left\{ \delta_k, \frac{\varepsilon}{\vartheta_{G_f}} \right\} = \delta_k,$$

para  $k$  suficientemente grande, y así

$$pred_k^{nm} \geq \frac{1}{2}\sigma_0\varepsilon\delta_k.$$

Esta última desigualdad y el Lema 2.2, permite concluir que

$$|\rho_k^{nm} - 1| = \left| \frac{ared_k^{nm} - pred_k^{nm}}{pred_k^{nm}} \right| \leq \frac{2\beta_0\|s_k\|_2^2}{\sigma_0\varepsilon\delta_k} \leq \frac{2\beta_0\delta_k}{\sigma_0\varepsilon} \rightarrow 0,$$

siempre que  $k \rightarrow \infty$ .

En consecuencia,  $\rho_k^{nm} \rightarrow 1$ , cuando  $k \rightarrow \infty$ , y es posible encontrar iteraciones exitosas para  $k$  suficientemente grande, contradiciendo nuestra suposición.

Consideramos ahora el caso en que es posible obtener un número infinito de iteraciones exitosas. Denotemos con  $\mathcal{K}$  al conjunto de índices de todas las iteraciones exitosas  $k$  tales que  $\|g_{k-1}\| > \varepsilon$ .

La desigualdad (2.24) nos permite escribir para cada índice  $k + 1 \in \mathcal{K}$ ,

$$\begin{aligned} ared_k^{nm} &= f(x_{l(k)}) - f(x_{k+1}) \\ &\geq \eta_1 pred_k^{nm} \\ &\geq \frac{\eta_1\sigma_0}{2}\|g_k\| \min \left\{ \delta_k, \frac{\|g_k\|}{\vartheta_{G_f}} \right\} \\ &\geq \frac{\eta_1\sigma_0\varepsilon}{2} \min \left\{ \delta_k, \frac{\varepsilon}{\vartheta_{G_f}} \right\}. \end{aligned}$$

Observemos que cada iteración exitosa  $k + 1 \in \mathcal{K}$ , tiene asociada un índice que llamaremos **índice de iteración máxima**  $\hat{l}(k)$  tal que,

$$f(x_{\hat{l}(k)}) = \max_{j \geq 0, k-j \in \mathcal{K}} f(x_{k-j}),$$

y

$$\begin{aligned} f(x_{\hat{l}(k)}) - f(x_{k+1}) &\geq f(x_{l(k)}) - f(x_{k+1}) \\ &\geq \frac{\eta_1\sigma_0\varepsilon}{2} \min \left\{ \delta_k, \frac{\varepsilon}{\vartheta_{G_f}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Esto significa que  $x_{\hat{l}(k)}$  es una iteración exitosa que satisface  $\|g_{\hat{l}(k)-1}\| > \varepsilon$ , la cual a su vez tiene asociado un índice de iteración máxima  $\hat{l}(\hat{l}(k) - 1)$ , tal que

$$f(x_{\hat{l}(\hat{l}(k)-1)}) = \max_{j \geq 1, \hat{l}(k)-j \in \mathcal{K}} f(x_{\hat{l}(k)-j}),$$

y

$$\begin{aligned} f(x_{\hat{l}(\hat{l}(k)-1)}) - f(x_{\hat{l}(k)}) &\geq f(x_{l(\hat{l}(k)-1)}) - f(x_{\hat{l}(k)}) \\ &\geq \frac{\eta_1 \sigma_0 \varepsilon}{2} \min \left\{ \delta_{\hat{l}(k)-1}, \frac{\varepsilon}{\vartheta_{G_f}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Así siguiendo podemos llegar al punto donde  $x_0$  es alcanzado en este proceso de mirar hacia atrás. De esta manera podemos construir para cada  $k \in \mathcal{K}$  una subsucesión de iterados máximos asociados, saltando hacia atrás sobre iteraciones exitosas máximas que no son puntos estacionarios.

Como la notación se vuelve más y más complicada, denotamos de una forma más simple a esta subsucesión mediante  $k_0, k_1, \dots, k_q$  donde  $0 < q \leq k$  es tal que,

$$\begin{aligned} x_{k_q} &= x_{\hat{l}(k)}, \\ x_{k_{q-1}} &= x_{\hat{l}(\hat{l}(k)-1)}, \\ \dots &\quad \dots \end{aligned}$$

hasta que  $x_{k_0} = x_{l(0)} = x_0$ .

Observamos que si  $q = k$  el análisis se reduce al caso monótono.

Con esta notación podemos reescribir las desigualdades (2.25) y (2.26) de la forma

$$\begin{aligned} f(x_{k_{q-1}}) - f(x_{k_q}) &\geq \frac{\eta_1 \sigma_0 \varepsilon}{2} \min \left\{ \delta_{k_{q-1}}, \frac{\varepsilon}{\vartheta_{G_f}} \right\}, \\ f(x_{k_q}) - f(x_{k+1}) &\geq \frac{\eta_1 \sigma_0 \varepsilon}{2} \min \left\{ \delta_k, \frac{\varepsilon}{\vartheta_{G_f}} \right\}. \end{aligned}$$

En general,

$$f(x_{k_{j-1}}) - f(x_{k_j}) \geq \frac{\eta_1 \sigma_0 \varepsilon}{2} \min \left\{ \delta_{k_{j-1}}, \frac{\varepsilon}{\vartheta_{G_f}} \right\},$$

para  $1 \leq j \leq q$ .

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x_0) - f(x_{k+1}) &= f(x_0) - f(x_{k_1}) + f(x_{k_1}) - \dots - f(x_{k_q}) - f(x_{k+1}) \\ &\geq \frac{\eta_1 \sigma_0 \varepsilon}{2} \min \left\{ \delta_{k_0}, \frac{\varepsilon}{\vartheta_{G_f}} \right\} + \dots + \frac{\eta_1 \sigma_0 \varepsilon}{2} \min \left\{ \delta_{k_q}, \frac{\varepsilon}{\vartheta_{G_f}} \right\} \\ &= \frac{\eta_1 \sigma_0 \varepsilon}{2} \sum_{j=0}^q \min \left\{ \delta_{k_j}, \frac{\varepsilon}{\vartheta_{G_f}} \right\}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$f(x_0) - f(x_{k+1}) \geq \frac{\eta_1 \sigma_0 \varepsilon}{2} \min \left\{ \sum_{j=0}^q \delta_{k_j}, (q+1) \frac{\varepsilon}{\vartheta_{G_f}} \right\}.$$

Observemos que cuando  $k \rightarrow \infty$  tenemos que  $q \rightarrow \infty$ , y como según la hipótesis (A4),  $f$  es acotada inferiormente, el lado izquierdo de esta última desigualdad está acotado y es posible obtener que

$$\min \left\{ \sum_{j=0}^q \delta_{k_j}, (q+1) \frac{\varepsilon}{\vartheta_{G_f}} \right\} = \sum_{j=0}^q \delta_{k_j},$$

para  $q$  suficientemente grande. Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{k_j} < \infty,$$

y  $\delta_{k_j} \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$ .

Pero estos son radios de regiones de confianza asociados con iteraciones exitosas de modo que  $\{\delta_{k_j}\}$  no puede converger a cero.  $\square$

## 2.3 Resultados Numéricos

Como se dijo anteriormente, los algoritmos 2.2, 2.4 y 2.5 sólo difieren en la forma en que se realiza la evaluación del paso de prueba, monótona en el primer caso y no monótona en los últimos dos. Por ello las comparaciones se han realizado corriendo el mismo código, con la sola modificación, en el Paso 2, de los criterios de evaluación (2.5) y (2.12). El cálculo del paso de prueba vía el Algoritmo SPG 2.3 se ha realizado utilizando una subrutina desarrollada por Birgin, Martínez and Raydán [BMR01]. Por otro lado, para poder exhibir el buen comportamiento del nuevo esquema se lo ha comparado con un algoritmo que utiliza el criterio de aceptación del paso de prueba no monótono 2.4, pero en el cual el subproblema de región de confianza se resuelve vía el método de gradiente conjugado de Steihaug [STE83], adecuado para problemas de gran tamaño.

Los algoritmos se han codificado en Fortran 77, con doble precisión, usando el compilador GFortran. El código se ha desarrollado en una notebook

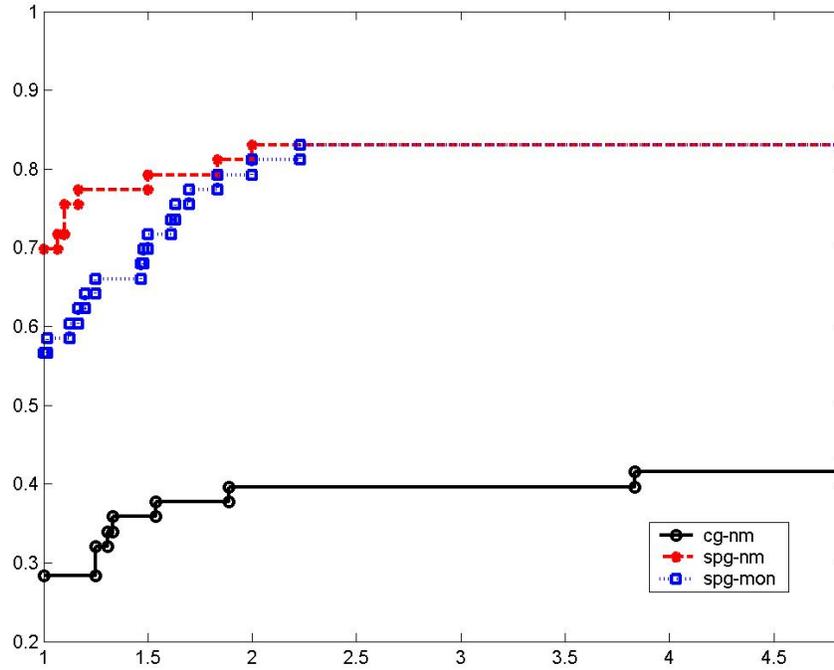
con procesador Intel Pentium de 2.0GHz, y de 2Gb de memoria RAM, usando el sistema operativo Linux Ubuntu 9.04 sobre un disco rígido particionado con 40Gb.

Se han seleccionado 90 problemas de Moré, Garbow, y Hillstrom [MGH81] y Andrei [AND08] para ser testeados. Como estamos interesados en problemas de gran escala, se han elegido de modo que su tamaño sea de  $10^5$  variables. Se estableció como  $n = 2500$  el número máximo de iteraciones, y una tolerancia para el criterio de parada de  $\varepsilon_1 = 10^{-7}$ . Los parámetros de los algoritmos han sido elegidos de la siguiente manera:  $\eta_1 = 10^{-4}$ ,  $\eta_2 = 0,9$ ,  $\alpha_1 = 0,5$ ,  $\alpha_2 = 2$ . El valor mínimo permitido para el radio de la región de confianza es de  $\delta_{min} = 10^{-4}$ . Para el algoritmo no monótono 2.4 se estableció el parámetro  $M = 10$  para comparar el iterado de prueba con los valores previos de la función objetivo a través de la condición (2.11), y para el algoritmo monótono 2.2 obviamente fue fijado  $M = 0$ .

Para visualizar el comportamiento completo de los algoritmos se usó como recurso el *perfil de rendimiento* propuesto por Dolan y Moré [DM02]. Como medidas de rendimiento se han elegido: el número de iteraciones, de evaluaciones de la función objetivo, y de su gradiente.

Por comodidad al texto nos referiremos al algoritmo monótono 2.2 como **spg-mon**, al algoritmo no monótono 2.4 como **spg-nm**, y a la combinación del método de Steihaug con el criterio no monótono de aceptación del paso como **cg-nm**.

La figura 2.2 muestra el perfil de rendimiento de los algoritmos medido a través del número de iteraciones. En el lado izquierdo del gráfico podemos observar que el algoritmo **spg-nm** tiene la probabilidad más alta de ser considerado óptimo, con chances de un 70% de resolver un problema mejor entre los testeados. Además, **spg-mon** tiene menos del 60% y **cg-nm** es el perdedor con aproximadamente un 30%. Por otro lado, mirando el lado derecho del gráfico vemos que ambos algoritmos **spg-nm** y **spg-mon** tienen más del 80% de expectativas de resolver cualquier problema, mientras que **cg-nm** tiene chances solamente alrededor de un 40% de hacerlo.



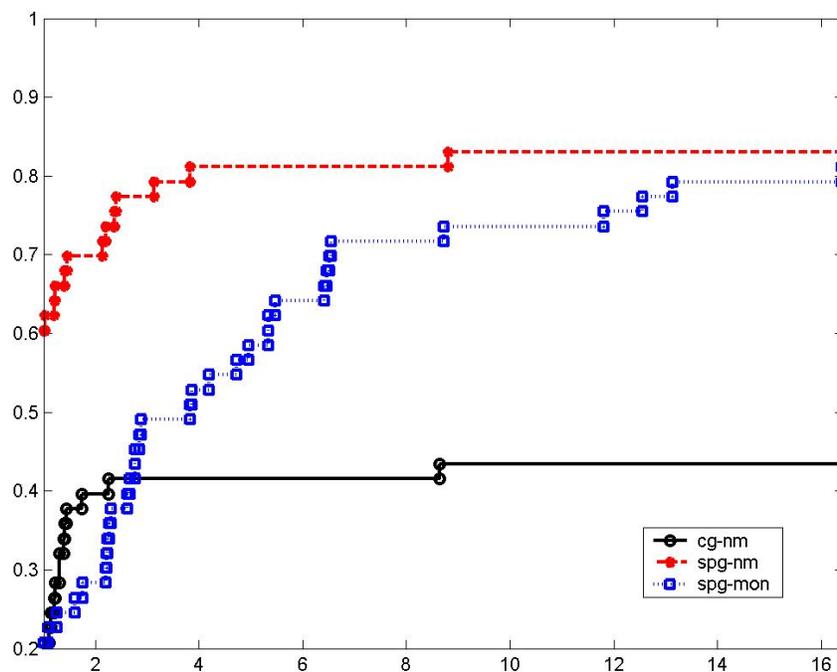
**Figura 2.2:** Perfil de rendimiento para el número de iteraciones.

En la figura 2.3, donde la medida de rendimiento es el número de evaluaciones de la función objetivo, ambos algoritmos `spg-nm` and `spg-mon` mantienen su probabilidad de resolver un problema en alrededor de un 80% mientras que el algoritmo `cg-nm` aumenta levemente su probabilidad a un 44%. En este caso, el perdedor es el algoritmo `spg-mon` con la menor probabilidad, menor de un 8% de ganar sobre los otros algoritmos. Sin embargo, si aumentamos el factor de expectativa, el algoritmo `spg-mon` aumenta rápidamente sus chances de ganar, pero mantiene su rendimiento por debajo del algoritmo `spg-nm`, el cual aumenta en un 80% sus posibilidades de hacer el mejor trabajo.



**Figura 2.3:** Perfil de rendimiento para el número de evaluaciones de funciones.

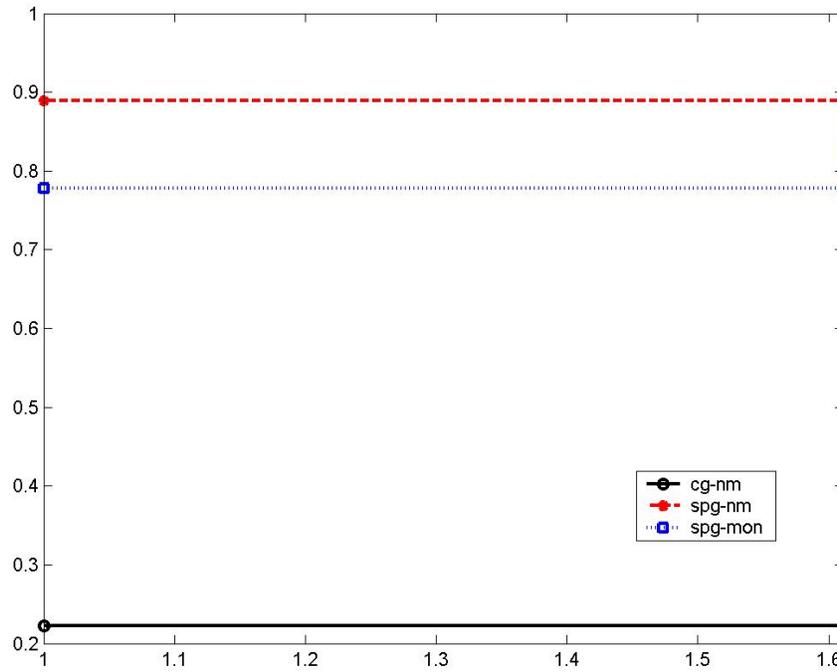
Finalmente, la figura 2.4 muestra el perfil de rendimiento del número de evaluaciones del gradiente. En este caso, el algoritmo **spg-nm** es el más exitoso con un 60% de chances de obtener el mejor resultado. Podemos notar que el algoritmo **cg-nm** tiene un bajo desempeño con un 20% de efectividad, similar al de **spg-mon**, pero relajando este requerimiento, **cg-nm** mantiene su rendimiento en alrededor del 40% mientras que **spg-mon** lo mejora. Esto ocurre porque **spg-mon** debe realizar más iteraciones internas hasta que el paso de prueba es aceptado por el criterio monótono. Podemos observar que el mismo algoritmo SPG con un criterio de aceptación no monótono tiene un comportamiento un poco diferente, lo que significa que son necesarias menos iteraciones internas en este caso.



**Figura 2.4:** Perfil de rendimiento para el número de evaluaciones del gradiente.

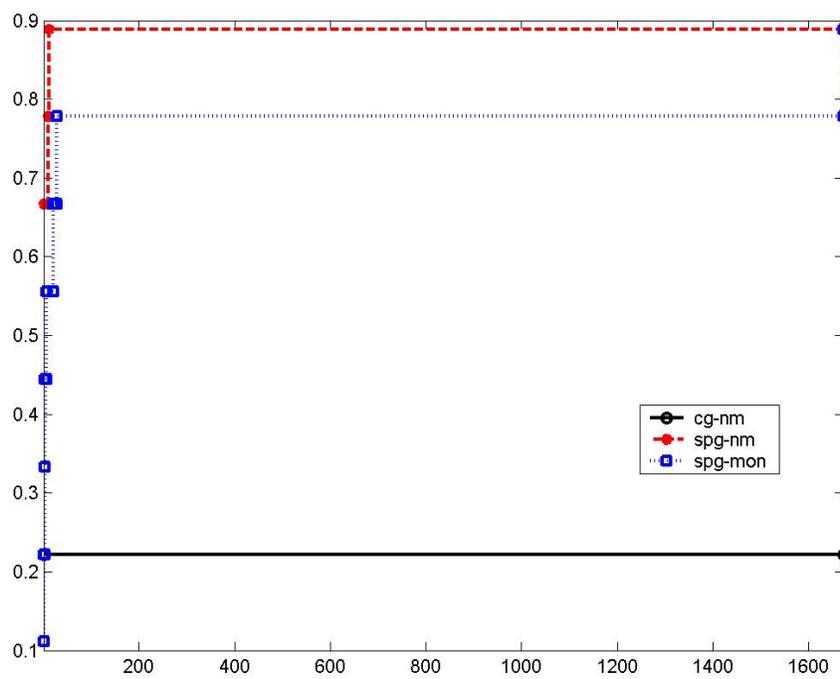
Para obtener más información acerca del comportamiento de estos algoritmos clasificamos los resultados de acuerdo con las características de la matriz Hessiana en la solución: definida positiva, singular y mal condicionada. Sin embargo sus perfiles de rendimiento no muestran notables diferencias en sus patrones y se ha decidido exhibir sólo el caso no singular para el cual se han obtenido diferentes resultados.

En la figura 2.5 se ha tomado en cuenta el número de iteraciones como medida de rendimiento, y nuevamente el ganador es el algoritmo **spg-nm** con una habilidad para resolver el problema de aproximadamente de un 90%, pero aún con la misma efectividad.



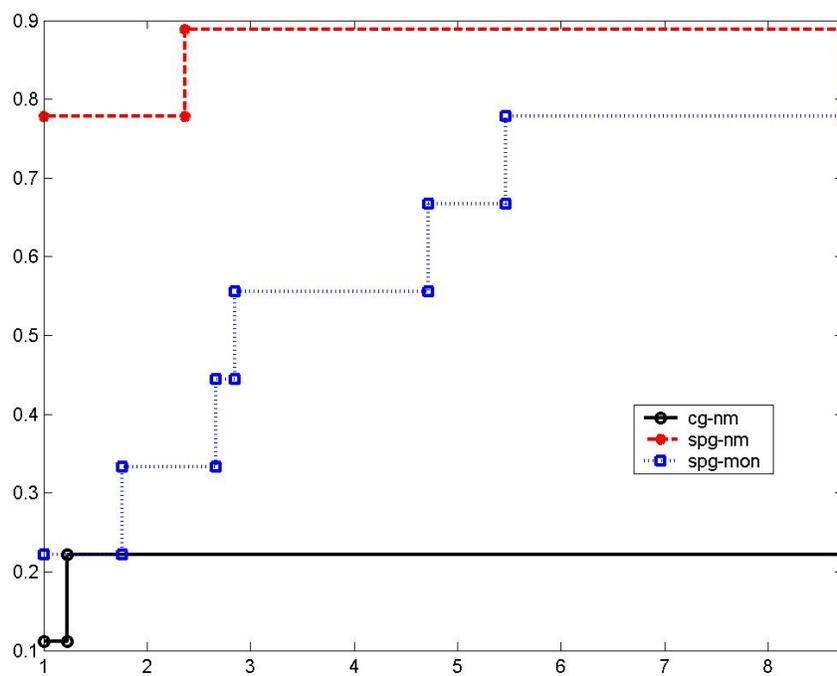
**Figura 2.5:** Perfil de rendimiento para el número de iteraciones de problemas no singulares.

Similar comportamiento puede observarse en la figura 2.6, donde se mide el número de evaluaciones de la función objetivo.



**Figura 2.6:** Perfil de rendimiento para el número de evaluaciones de funciones de problemas no singulares.

La última figura, 2.7 presenta la medida del número de evaluaciones del gradiente. Se puede observar que el rendimiento es similar al de la figura 2.4 con un alto porcentaje, aproximadamente de un 90%, de problemas resueltos vía el algoritmo **spg-nm**, y un pequeño porcentaje, alrededor de un 20%, vía el algoritmo **cg-nm**.



**Figura 2.7:** Perfil de rendimiento para el número de evaluaciones del gradiente de problemas no singulares.

Los resultados de este capítulo han sido publicados en *Monotone and nonmonotone trust-region-based-on algorithms for large unconstrained optimization problems* [MMV13].

# Capítulo 3

## Optimización con restricciones

### 3.1 El problema de optimización con restricciones de igualdad y de caja

A partir de este capítulo nos abocamos a analizar el problema consistente en minimizar una función bajo restricciones de igualdad y dentro de una caja. Más precisamente,

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & f(x) \\ & c(x) = 0 \\ & x \in \Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : l \leq x \leq u\}$ , y la función objetivo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y la función de restricciones  $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  son de clase  $C^2$  sobre un conjunto abierto  $D$  que contiene a la caja  $\Omega$ .

Consideramos en primer término el problema más simple con sólo restricciones de igualdad

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & f(x) \\ & c(x) = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Asumiendo que la solución de este problema  $x_*$  cumple la condición calificadora de primer orden de regularidad, es decir, que la matriz Jacobiana de las restricciones  $\nabla c(x_*)$  tiene rango completo, la condición necesaria de

optimalidad de primer orden [BER03], [MS95], asegura, como mencionamos anteriormente (1.3), que existe un vector  $\lambda_\star \in \mathbb{R}^m$  de multiplicadores de Lagrange tal que el par  $(x_\star, \lambda_\star)$  es una solución del sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned}\nabla_x \ell(x, \lambda) &= 0 \\ c(x) &= 0,\end{aligned}\tag{3.3}$$

donde  $\ell(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T c(x)$  es el Lagrangiano o la función Lagrangiana. Más detalladamente,

$$\begin{aligned}\nabla f(x) + \nabla c(x)\lambda &= 0 \\ c(x) &= 0.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Aplicando el método de Newton al sistema (3.4) se obtiene un algoritmo iterativo que en cada iteración resuelve el sistema

$$\begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 \ell(x_k, \lambda_k) & \nabla c(x_k) \\ \nabla c(x_k)^T & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x \ell(x_k, \lambda_k) \\ c(x_k) \end{pmatrix}\tag{3.5}$$

de modo que el nuevo iterado se genera mediante

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + s_k^N \\ \lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta \lambda_k^N \end{cases}$$

donde  $(s_k^N, \Delta \lambda_k^N)$  resuelve el sistema extendido (3.5).

En 1978, R.A. Tapia [TAP78] mostró que el problema de hallar una solución del sistema (3.4) mediante el método de Newton es equivalente a hallar un punto crítico  $(s^{QP}, \Delta \lambda^{QP})$  del siguiente problema de programación cuadrática

$$\begin{aligned}\min_{s.a} \quad Q_k(s) &= \frac{1}{2} s^T H_k s + \nabla_x \ell_k^T s + \ell_k \\ \nabla c_k^T s + c_k &= 0,\end{aligned}\tag{3.6}$$

donde  $H_k = \nabla_{xx}^2 \ell(x_k, \lambda_k)$  la matriz Hessiana del Lagrangiano o una aproximación de ella, de modo que ambos algoritmos generan los mismos iterados.

El método de programación cuadrática secuencial es uno de los más efectivo para resolver el problema de programación no lineal (3.1). En cada iteración se construye un modelo cuadrático de la función de Lagrange y un

modelo lineal de las restricciones de igualdad, alrededor del iterado actual  $x_k$ , que bajo las hipótesis adecuadas converge a la solución del problema (3.1). Sin embargo, el subproblema (3.6) puede no tener solución en el caso que  $\nabla c(x_k)$  no sea de rango completo, esto es, si  $x_k$  no es un punto regular. En este caso la linealización de las restricciones

$$\nabla c_k^T s + c_k = 0 \quad (3.7)$$

forma un sistema incompatible.

Como el método de programación cuadrática secuencial para resolver el problema (3.1) es equivalente al método de Newton para resolver el sistema (3.4), este comparte sus ventajas y desventajas. Localmente se tiene un método que converge q-cuadráticamente, pero, por otro lado, no se consigue convergencia global, es decir, no se puede asegurar convergencia si el punto inicial está lejos de la solución, a priori desconocida. Como en el caso de optimización sin restricciones, se necesita incorporar una estrategia de globalización de región de confianza agregando una condición que restrinja el tamaño del paso del problema (3.6). Esto es, en cada iteración se resuelve el subproblema de programación cuadrática con región de confianza

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & Q_k(s) = \frac{1}{2} s^T H_k s + \nabla_x \ell_k^T s + \ell_k \\ & \nabla c_k^T s + c_k = 0 \\ & \|s\|_\infty \leq \delta_k, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde  $\delta_k$  es el *radio de la región de confianza*.

Notar que hemos usado la norma  $\|\cdot\|_\infty$  para la región de confianza. Su propósito es facilitar los cálculos cuando se incorpore la restricción correspondiente a la caja

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : l \leq x \leq u\} \quad (3.9)$$

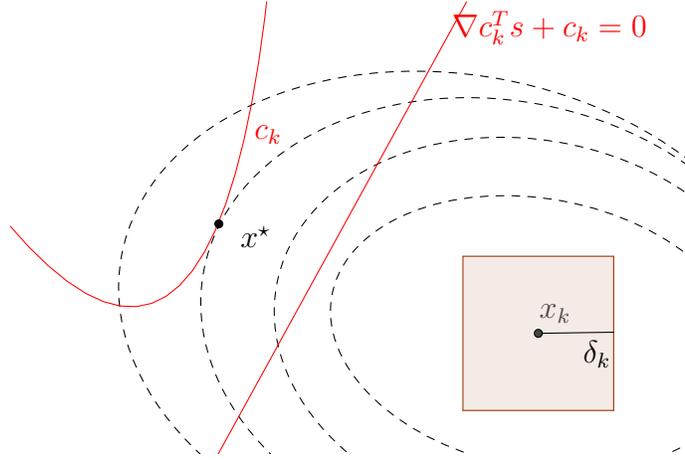
de modo que ambas puedan ser manipuladas simultáneamente.

Así, al agregar la restricción de caja del problema original (3.1) obtenemos el subproblema

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & Q_k(s) = \frac{1}{2} s^T H_k s + \nabla_x \ell_k^T s + \ell_k \\ & \nabla c_k^T s + c_k = 0 \\ & x_k + s \in \Omega \\ & \|s\|_\infty \leq \delta_k, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde las dos últimas restricciones son del mismo tipo.

Al incorporar la región de confianza en el problema (3.8) puede aparecer una nueva incompatibilidad si la variedad lineal (3.7) no intersecta la región de confianza. En la figura 3.1 puede apreciarse la incompatibilidad del problema (3.10) en  $\mathbb{R}^2$  con una única restricción, la cual está representada en color rojo con línea continua, mientras que las curvas de nivel del modelo cuadrático  $Q_k(s)$  del Lagrangiano se muestra en línea punteada.



**Figura 3.1:** Incompatibilidad del problema (3.10).

Observemos que si el iterado actual  $x_k$  es un punto factible, i.e., si  $c_k = c(x_k) = 0$ , el subproblema de región de confianza (3.8) es compatible. En este caso, la solución es hallada restringiendo el modelo cuadrático  $Q_k(s)$  al subespacio nulo asociado a las restricciones  $\mathcal{N}(\nabla c_k^T)$  y resolviendo el problema de región de confianza sin restricciones en el espacio de dimensión igual a  $\text{rango}(\mathcal{N}(\nabla c_k^T))$ . En caso contrario una inconsistencia provocada porque

$$\{s : \nabla c_k^T s + c_k = 0\} \cap \{s : \|s\|_\infty < \delta_k\} = \emptyset$$

puede ocurrir.

Se han propuesto diferentes estrategias para evitar esta inconsistencia. Siguiendo la idea de Dennis [DEAM97], vamos a clasificarlas en dos grandes grupos.

1. *Aproximación del espacio tangente.* El paso es determinado usando la descomposición

$$s_k = s_k^n + s_k^t,$$

donde  $s_k^n$  es la componente *normal* del paso, cuyo objetivo es reducir el error en la aproximación de las restricciones de igualdad dentro de la región de confianza, y  $s_k^t$  es la componente *tangencial* del paso, cuyo objetivo es reducir el modelo cuadrático del Lagrangiano (o de la función objetivo, para algunos autores) procurando al mismo tiempo mantener la reducción de la factibilidad obtenida anteriormente en el paso normal.

2. *Aproximación en todo el espacio.* El paso de prueba es calculado de una sólo vez, sin descomposición, aunque sea necesario identificar las componentes normal y tangencial para propósitos teóricos.

A continuación se analizan brevemente las ideas principales de cada uno de estos enfoques.

## 3.2 La aproximación del espacio tangente

### 3.2.1 El enfoque de Vardi

En 1985, A. Vardi [VAR80] propone evitar la inconsistencia del problema (3.8) relajando la restricción de igualdad mediante una traslación obteniendo el subproblema

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & Q_k(s) = \frac{1}{2}s^T H_k s + \nabla_x \ell_k^T s + \ell_k \\ & \nabla c_k^T s + \alpha c_k = 0 \\ & \|s\| \leq \delta_k, \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde  $\alpha \in [0, 1]$  es elegido de modo que la nueva restricción de igualdad y la región de confianza tengan algún punto en común. Observemos que el problema (3.11) siempre es compatible eligiendo el parámetro  $\alpha = 0$ . Ver la Figura 3.2.

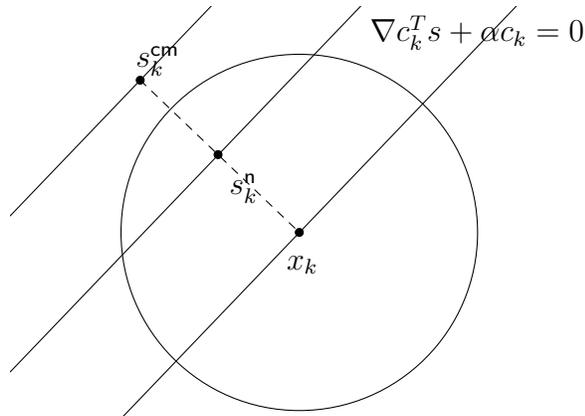
En este enfoque el paso normal se obtiene como solución en cuadrados mínimos de la ecuación

$$\nabla c_k^T s + \alpha c_k = 0.$$

obteniendo

$$s_k^n = -\alpha(\nabla c_k^T)^\dagger c_k,$$

donde  $(\nabla c_k^T)^\dagger$  es la matriz pseudoinversa de  $\nabla c_k^T$ .



**Figura 3.2:** Enfoque de Vardi.

Este enfoque fue inicialmente sugerido por A. Miele, H.Y. Huang y J.C. Heideman [MHH69] en 1969 en el contexto de la estrategia de globalización de búsqueda lineal para resolver el problema de restricciones de igualdad (3.1). La dificultad del enfoque de Vardi es que el paso depende del parámetro  $\alpha$ , cuyo costo de cálculo puede ser alto cuando el problema involucra gran cantidad de variables. El análisis de Vardi [VAR85] se restringe al caso de modelos convexos, mientras que el mismo enfoque es considerado por Byrd, Schnabel y Schultz [BSS87] en un modelo más general.

### 3.2.2 El enfoque de Byrd-Omojokun

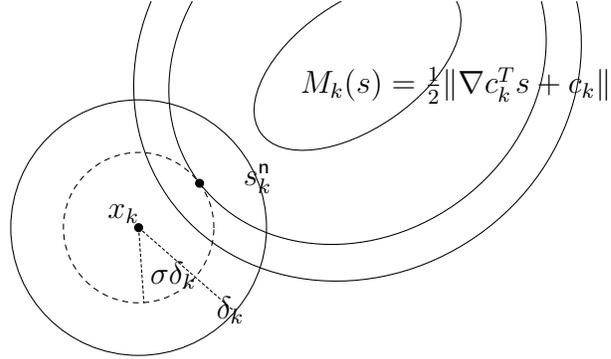
En 1989, E.O. Omojokun [OMO89], sugiere un nuevo enfoque para resolver el problema de incompatibilidad que no depende del parámetro  $\alpha$ . Como el propósito del paso normal  $s_k^n$  es obtener la factibilidad de la linealización de las restricciones de igualdad (3.7) dentro de la región de confianza, la propuesta de Omojokun es calcular, dentro de una región de confianza reducida de radio  $\sigma\delta_k$  con  $\sigma \in (0, 1)$ , el paso *más linealmente factible* como solución del subproblema

$$\min_{s.a} M_k(s) = \frac{1}{2} \|\nabla c_k^T s + c_k\|_2^2 \quad (3.12)$$

$$\|s\| \leq \sigma\delta_k.$$

El problema (3.12) minimiza el modelo cuadrático de la linealización de las restricciones de igualdad dentro de una región de confianza reducida. Esta

reducción de la región de confianza permite a partir del paso normal hallar un paso tangente que produzca una mejora en la optimalidad con mayor flexibilidad. Ver la Figura 3.3.



**Figura 3.3:** Enfoque de Byrd y Omojokun.

Este enfoque es la base de los desarrollos entre otros de Biegler, Nocedal y Schmid [BNS95], El-Alem [EA95, EA99], Lalee, Nocedal y Plantenga [LNP98], Gomes, Maciel y Martínez [GMM99], Dennis, El-Alem y Maciel [DEAM97], Dennis y Vicente [DV97]

### 3.3 La aproximación en todo el espacio

#### 3.3.1 El enfoque de Celis, Dennis y Tapia

En 1985, Celis, Dennis y Tapia [CDT85] realizaron una propuesta diferente para lidiar con el problema de incompatibilidad de las restricciones de igualdad y región de confianza. En lugar de considerar la linealización de las restricciones (3.7) se utiliza la desigualdad

$$\|\nabla c_k^T s + c_k\|_2 \leq \theta_k. \quad (3.13)$$

El subproblema de región de confianza se transforma entonces en

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & Q_k(s) = \frac{1}{2} s^T H_k s + \nabla_x \ell_k^T s + \ell_k \\ & \|\nabla c_k^T s + c_k\|_2 \leq \theta_k \\ & \|s\|_2 \leq \delta_k. \end{aligned} \quad (3.14)$$

La clave de este enfoque es la elección del parámetro  $\theta_k$ . La elección de Celis, Dennis y Tapia es

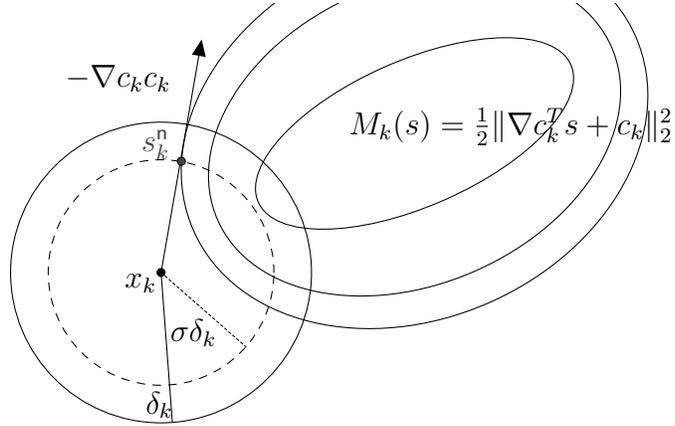
$$\theta_k^{CDT} = \|\nabla c_k^T s_k^{CP} + c_k\|_2,$$

donde  $s_k^{CP}$  es el paso de Cauchy del modelo cuadrático de la linealización de las restricciones, i.e., la solución del subproblema

$$\begin{aligned} \min_{s,a} \quad & M_k(s) = \frac{1}{2} \|\nabla c_k^T s + c_k\|_2^2 \\ & \|s\|_2 \leq \sigma \delta_k \\ & s = -t \nabla c_k c_k \\ & t \geq 0, \end{aligned}$$

donde  $\nabla M_k(0) = \nabla c_k c_k$  y  $\sigma \in (0, 1)$ .

Así, la estrategia de Celis, Dennis y Tapia es minimizar el modelo cuadrático del Lagrangiano sobre el conjunto de pasos que yacen dentro de la región de confianza que proporcionen al menos una fracción del decrecimiento que da el paso de Cauchy en el residuo de la linealización de las restricciones. Esto asegura que la factibilidad no lineal es alcanzada en el límite permitiendo cierta flexibilidad para el progreso de la optimalidad. Ver la Figura 3.4.



**Figura 3.4:** Enfoque de Celis, Dennis y Tapia.

Este enfoque ha sido utilizado entre otros por El-Alem [EA88] probando convergencia global de un algoritmo que usa el Lagrangiano aumentado como función de mérito. Powell y Yuan [PY91] consideraron una elección diferente del parámetro  $\theta_k$ ,

$$\theta_k^{PY} = \|\nabla c_k^T s_k^{PY} + c_k\|_2,$$

donde  $s_k^{PY}$  es la solución del subproblema de región de confianza

$$\min_{s.a} M_k(s) = \frac{1}{2} \|\nabla c_k^T s + c_k\|_2^2$$
$$\|s\|_2 \leq \sigma \delta_k,$$

para  $\sigma \in (0, 1)$ .

# Capítulo 4

## Función de mérito vs. filtros

A diferencia de los problemas de optimización sin restricciones estudiados en el Capítulo 2, en los problemas no lineales con restricciones de igualdad y de caja

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & f(x) \\ & c(x) = 0 \\ & x \in \Omega. \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : l \leq x \leq u\}$ , hay dos requerimientos en conflicto: la *optimalidad*, i.e. minimizar la función objetivo, y la *factibilidad*, i.e. reducir la violación de las restricciones. Para decidir cuándo un iterado de prueba  $x_{k+1}$  es *mejor* que los anteriores es necesario construir algún criterio de aceptación del paso de prueba manteniendo el balance entre estos dos objetivos.

Tradicionalmente esto se ha realizado comparando el decrecimiento predicho por el modelo y el decrecimiento actual de una función de mérito. Esta procura combinar en una misma expresión la función objetivo  $f(x)$  y una medida de la violación de las restricciones  $h(x) = h(c(x))$  que se anula en la región factible y es positiva fuera de ella. Aunque en sus primeros años las funciones de penalización buscaban transformar el problema de optimización con restricciones en una sucesión de problemas sin restricciones para los cuales existen métodos eficientes, se han utilizado también recientemente como funciones de mérito para la aceptación del paso de prueba. De esta manera, el decrecimiento de la función de mérito nos permite garantizar la calidad del nuevo iterado. Tal es el caso de una de las primeras funciones de penalización

propuesta por Courant [COU43], la función de *penalización cuadrática*

$$p_2(x, \mu) = f(x) + \frac{\mu}{2} \|c(x)\|_2^2,$$

donde  $\mu > 0$  es el parámetro de penalización, el cual es aumentado cuando la restricción no se cumple. Cuando el parámetro de penalización se vuelve muy grande, la violación de las restricciones es cada vez más cara, de modo que la minimización de la función construida, para una sucesión controlada del crecimiento del parámetro, produce una sucesión de iterados cuyos puntos límite resuelven el problema original. El problema práctico aquí es que, a medida que aumentamos el parámetro de penalización para forzar la satisfacción de las restricciones, la función de penalización converge en teoría sólo si el parámetro de penalización diverge. Esto provoca que el método se vuelva lento y la matriz Hessiana de la función de penalización sea mal condicionada a medida que crece el parámetro de penalización. Por ello sería útil trabajar con métodos que necesiten asumir sólo valores moderados del parámetro de penalización.

Esto fue lo que motivó a Hestenes [HES69] y Powell [POW69] a presentar independientemente el método de los multiplicadores, que genera una sucesión de problemas irrestrictos para resolver el problema de optimización con restricciones de igualdad. En cada uno de ellos se busca minimizar el *Lagrangiano Aumentado*

$$L(x, \lambda, \rho) = f(x) + \lambda^T c(x) + \frac{\rho}{2} \|c(x)\|_2^2,$$

en el cual un término de penalización es agregado al Lagrangiano, siendo  $\rho > 0$ , el parámetro de penalización.

Su uso como función de mérito fue sugerida por Wright [WRI76] un tiempo después y usada ampliamente [CDT85, DEAM97, EA91, FLE70, PY91]. Para evaluar la aceptación del paso obtenido a través de un algoritmo de programación cuadrática secuencial con región de confianza Gomes, Maciel y Martínez [GMM99], utilizaron como función de mérito una del tipo Lagrangiano Aumentado que es una combinación convexa del Lagrangiano y una medida de la violación de las restricciones

$$p(x, \lambda, \theta) = \theta \ell(x, \lambda) + (1 - \theta) h(x),$$

donde  $h(x) = \frac{1}{2} \|c(x)\|_2^2$ , y  $\theta \in [0, 1]$  es el parámetro de penalización usado como peso para balancear los dos requerimientos en conflicto. Esta misma

función de mérito fue utilizada por Martínez [MAR01] para evaluar el paso en un algoritmo de restauración inexacta.

Como en el caso de penalización cuadrática hay varias dificultades asociadas con esta función de penalización exacta, en particular la elección del parámetro de penalización. Aunque bajo ciertas condiciones existe un valor umbral del parámetro de penalización por sobre el cual es posible asegurar que el Lagrangiano aumentado tiene un mínimo local estricto en la solución del problema (4.1), este valor teórico no es conocido a priori. De este modo la dificultad consiste en mantener el parámetro de penalización lo más pequeño posible para evitar las dificultades ya mencionadas en la función de penalización cuadrática, pero que no esté por debajo del valor umbral, el cual no es conocido [BER96, MS95].

Algunos métodos para actualizar el parámetro de penalización en forma adaptativa han sido propuestos, pero ellos no están faltos de dificultades.

Fletcher y Leyffer [FL06] presentaron en forma novedosa la noción de filtro con el propósito de evitar el clásico uso de las funciones de penalización, y el consiguiente problema de la actualización de parámetros.

En el trabajo de Fletcher y Leyffer [FL06] se exhiben experiencias numéricas de un algoritmo de programación cuadrática secuencial con estrategia de región de confianza que en cada iteración debe resolver el subproblema

$$\begin{aligned} \min_{s,a} \quad & m_k(s) = g_k^T s + \frac{1}{2} s^T H_k s \\ & c_k + A_k^T s \leq 0 \\ & \|s\|_\infty \leq \bar{\delta}_k, \end{aligned}$$

donde  $g_k = \nabla f(x_k)$ , y  $A_k = A(x_k) = \nabla c(x_k)^T$ , utilizando la técnica de filtro para aceptar o rechazar el paso de prueba. Aunque en este primer trabajo no se presentan demostraciones de convergencia global, se sugieren un conjunto de heurísticas para evitar problemas donde el método podría fallar, algunas de las cuales serán descartadas en trabajos posteriores.

La idea original, basada en la noción de optimalidad Pareto, proviene del área de la optimización multiobjetivo y se basa en el hecho de considerar que tal vez no es posible mejorar *al mismo tiempo* la optimalidad y la factibilidad. En lugar de combinar la función objetivo y una medida de la violación de las restricciones en una sola función, la técnica de filtro procura ver al problema de optimización no lineal como un problema biobjetivo, analizando ambas cuestiones por separado.

La diferencia radical consiste en cambiar la pregunta:

¿cuál es el *mejor* punto que podemos obtener?

por

¿cuál es el *peor* punto que podemos descartar?

Así, se compara el valor de la función objetivo y una medida de la violación de las restricciones del iterado de prueba con las de los iterados previos guardados en una colección llamada *filtro*. Un punto clave que diferencia al filtro de la función de penalización es que no existe un parámetro que relacione la optimalidad con la factibilidad, sino que la comparación se realiza en forma independiente, evitando el problema de actualización del parámetro. Un nuevo iterado es *aceptable para el filtro* cuando la factibilidad o la optimalidad mejoran en comparación a las de los valores guardados en el filtro.

Considerando que en un problema de optimización no lineal hay dos objetivos en conflicto, optimalidad y factibilidad, Fletcher y Leyffer [FL06] presentan el siguiente concepto de *dominación* extraído de la optimización multiobjetivo.

**Definición 4.1.** *Se dice que un par  $(h_k, f_k)$  es **dominado por** otro par  $(f_j, h_j)$  si y sólo si*

$$f_j \leq f_k \quad \text{y} \quad h_j \leq h_k,$$

donde  $f_j$  y  $h_j$  denotan los valores de  $f(x)$  y  $h(c(x))$  evaluados en  $x_j$ . En este caso se dice también que el par  $(h_j, f_j)$  **domina** al par  $(f_k, h_k)$ .

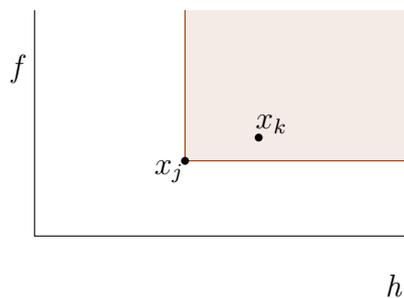
Esto nos dice que  $x_j$  es al menos tan bueno como  $x_k$  respecto de la optimalidad y la factibilidad, de modo que  $x_k$  no aporta ninguna mejora en el proceso de minimización y puede ser descartado, conservando sólo a  $x_j$ .

En la Figura 4.1 puede verse la situación donde el par  $(h_k, f_k)$  es dominado por el par  $(h_l, f_l)$ . Por simplicidad se hace abuso de notación marcando estos pares por los puntos  $x_k$  y  $x_l$  donde las funciones  $h(x)$  y  $f(x)$  son evaluadas. Las semirrectas horizontales y verticales con origen en  $x_l$  determinan una región en el plano  $(h, f)$  donde todos los puntos son dominados por el par  $(h_l, f_l)$ .

Para hacer un paralelo entre la función de mérito y el filtro, consideremos una función de mérito general

$$p(x, \sigma) = f_0(x) + \sigma h(x),$$

donde  $f_0$  puede representar tanto la función objetivo como el Lagrangiano asociado al problema, y  $h(x) = h(c(x))$  es alguna medida de la violación de

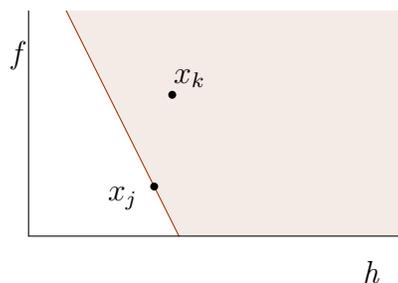


**Figura 4.1:** El par  $(h_j, f_j)$  domina al par  $(h_k, f_k)$ .

las restricciones. Tanto la función de penalización cuadrática como el Lagrangiano aumentado son ejemplos de esta función de mérito. La importancia de la elección del parámetro de penalización  $\sigma > 0$  puede valorarse aquí observando que es la pendiente de la recta por sobre la cual están los puntos que serán rechazados por ser su valor mayores que en la función de mérito, i.e.,

$$p(x_j, \sigma) < p(x_k, \sigma).$$

La Figura 4.2 muestra esta situación.



**Figura 4.2:** Función de mérito.

Podemos observar comparando las Figuras 4.1 y 4.2 que la noción de filtro es menos restrictiva que la función de mérito, permitiendo que más puntos permanezcan como aceptados. En este sentido el filtro puede ser considerado una técnica no monótona de aceptación de nuevos iterados.

Con esto en mente se define en cada iteración  $k$  un filtro  $\mathcal{F}_k$  como el conjunto de aquellos pares que deben ser recordados, más precisamente,

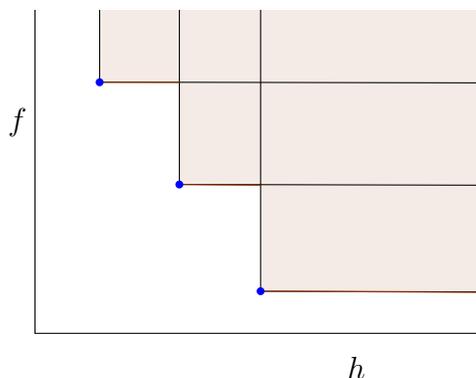
**Definición 4.2.** Un **filtro**  $\mathcal{F}_k$  es una lista de pares  $(h_j, f_j)$  generados en iteraciones previas tales que no son dominados por ningún otro par del filtro.

Para que un nuevo iterado pueda ser incluido en el filtro deberá entonces verificar la siguiente condición

**Definición 4.3.** Un par  $(h, f)$  se dice que es **aceptable para ser incluido en el filtro**  $\mathcal{F}_k$  si no es dominado por ningún otro par del mismo, es decir, si

$$f < f_l \quad \text{o} \quad h < h_l, \quad \text{para cada } l \in \mathcal{F}_k.$$

En la Figura 4.3 se muestra la situación en el plano  $(h, f)$ , donde los puntos marcados representan los pares guardados en el filtro, mientras que las semirectas horizontales y verticales originadas en ellos generan bloques de puntos que no son aceptables para el filtro. La unión de estos bloques genera la llamada **zona prohibida** del plano  $(h, f)$  ya que los pares que viven en ella no podrán ser considerados para ser aceptados por el filtro. Por esta razón, cada vez que un nuevo par es agregado al filtro es necesario realizar un proceso de **actualización** que elimine del filtro aquellos pares que se transformaron en dominados por esta inclusión.



**Figura 4.3:** Filtro.

En 1999 Fletcher, Leyffer y Toint [FLT99] presentaron la técnica de filtro para resolver un problema con restricciones de desigualdad en un algoritmo de programación lineal secuencial con una estrategia de región de confianza en cada uno de los subproblemas, demostrando que es posible obtener convergencia global con este nuevo mecanismo. El algoritmo, llamado *SLP-Filter*,

resuelve en cada iteración el subproblema de programación lineal que consiste en minimizar la aproximación lineal de la función objetivo sujeta a la linealización de las restricciones y la región de confianza, esto es,

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & g_k^T s \\ & c_k + A_k^T s \leq 0 \\ & \|s\|_\infty \leq \delta_k, \end{aligned}$$

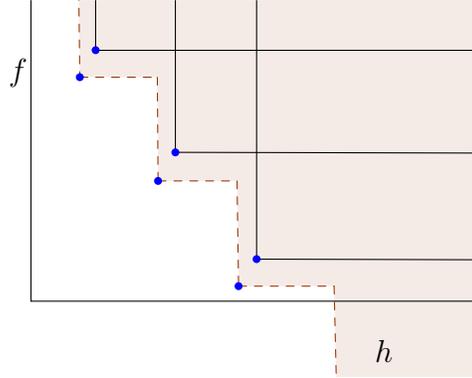
donde  $g_k = \nabla f(x_k)$ , y  $A_k = A(x_k) = \nabla c(x_k)$ . En este trabajo se observa que varias de las heurísticas presentadas en el trabajo anterior de Fletcher y Leyffer [FL06] no son necesarias para la demostración de la convergencia global, otras son modificadas, como es el caso de la envolvente del filtro. Ya se había observado que no era aconsejable que sean aceptados pares  $(h, f)$  que estén arbitrariamente cerca de la frontera de la zona prohibida generada por el filtro, ya que esto permitiría la posibilidad de una sucesión oscilante de iterados con puntos límite que no sean puntos del tipo Karush, Kuhn y Tucker (KKT) (3.3), evitando que el algoritmo termine en forma exitosa. Cuando se usan funciones de penalización esta situación es evitada pidiendo que satisfaga *suficiente decrecimiento*. Siguiendo esta idea Fletcher y Leyffer idearon una *envolvente inferior* alrededor del filtro que modifica la definición de aceptación (4.3).

**Definición 4.4.** *Un par  $(h, f)$  se dice **aceptable para ser incluido en el filtro**  $\mathcal{F}_k$  si*

$$h \leq \beta h_j \quad \text{o} \quad f \leq f_j - \max\{\alpha_1 \Delta q_j, \alpha_2 h_j \mu_j\}, \quad \text{para cada } j \in \mathcal{F}_k,$$

siendo  $0 < \beta < 1$  una constante próxima a 1,  $0 < \alpha_2 < \alpha_1 < 1$  próximos a 0, y  $\mu_j = \min\{10^k \in [10^{-6}, 10^6] : 10^k > \|\lambda_j\|_\infty\}$ .

La primer desigualdad genera una envolvente horizontal en la dirección de la medida de la violación de las restricciones  $h(x)$ , mientras que la segunda desigualdad lo hace en la dirección vertical de la optimalidad, comparando el decrecimiento de la función objetivo  $f_j - f$ , con una fracción del decrecimiento predicho por el modelo cuadrático  $\alpha_1 \Delta q_j > 0$ . Como es posible que el modelo cuadrático prediga un incremento de  $f$  se define alternativamente la envolvente mediante una estimación del parámetro de penalización  $\mu_j$  como la menor potencia de 10, en un rango computacionalmente adecuado, mayor que el máximo de los multiplicadores de Lagrange  $\|\lambda_j\|_\infty$ . El valor  $\alpha_2 h_j \mu_j$  es



**Figura 4.4:** Filtro con envolvente recta.

usado como una fracción de la reducción predicha por  $f$  en este caso. En la Figura 4.4 se muestra un típico filtro con este tipo de envolvente.

En el trabajo de Fletcher, Leyffer y Toint [FLT99] se construye una nueva envolvente alrededor del SLP-filtro que resulta más simple de entender y más adecuada para probar la convergencia global, evitando que se acumulen iterados en una vecindad de una entrada del filtro que satisfaga  $h_j > 0$ , aunque su imagen sigue siendo del tipo de la Figura 4.4.

**Definición 4.5.** Un par  $(h, f)$  se dice **aceptable para ser incluido en el filtro**  $\mathcal{F}_k$  si

$$h \leq \beta h_j \text{ o } f \leq f_j - \gamma h_j \text{ para cada } j \in \mathcal{F}_k,$$

siendo  $0 < \gamma < \beta < 1$ , con  $\gamma$  próximo a 0 y  $\beta$  próximo a 1.

Una interesante observación es que el filtro así construido, por si sólo no puede asegurar convergencia a un punto estacionario. Tal sería el caso de una sucesión  $\{x_k\}$  que satisfaga a partir de cierto momento sólo la condición de factibilidad  $h_{k+1} \leq \beta h_j$  para todo  $j \in \mathcal{F}_k$ . Esto aseguraría que la sucesión converge a un punto factible, pero no nos dice nada de su optimalidad. Es necesario, entonces, incluir una condición de reducción suficiente de la optimalidad. En el marco de optimización sin restricciones hemos utilizado en el capítulo anterior la condición de reducción suficiente

$$ared_k \geq \eta pred_k \tag{4.2}$$

que compara el decrecimiento del modelo lineal  $m_k(s) = g_k^T s$ , y el decrecimiento de la función objetivo  $f(x)$ , siendo  $\eta \in (0, 1)$  un parámetro próximo

a cero. En este contexto  $pred_k = -g^T s_k > 0$ , sin embargo en un algoritmo más general de programación no lineal el decrecimiento del modelo puede ser no positivo por lo que este criterio no es apropiado. Ante esta situación Fletcher, Leyffer y Toint [FLT99] decidieron considerar el criterio (4.2) siempre y cuando el decrecimiento predicho por el modelo  $pred_k$  sea suficientemente positivo, más precisamente si

$$pred_k > \sigma h_k^2, \quad (4.3)$$

donde  $\sigma > 0$  es próximo a cero.

Queda de esta manera separado el análisis de la aceptación del paso por parte del filtro y la posterior aceptación por parte del algoritmo. Surge así una importante diferencia con el primer trabajo de Fletcher y Leyffer [FL06], ya que no todos los iterados aceptables para el filtro son incluidos en él, sólo aquellos llamados de *tipo h*.

**Definición 4.6.** *Una iteración que predice un decrecimiento positivo en el modelo como (4.3), se dice de **tipo f**. Por otro lado, cualquier otra iteración es considerada de **tipo h**.*

En el caso de las iteraciones de tipo *f* la reducción de la función objetivo predicha por el modelo en (4.3) es más relevante que el error producido en las restricciones. Por ello se considera que el principal objetivo es la mejora de la optimalidad, con un posible deterioro de la factibilidad. Sin embargo parte del decrecimiento predicho por el modelo debe cumplirse también en la función objetivo, es por eso que considerando que el algoritmo se comporta casi como si no tuviera restricciones, se compara en este caso el decrecimiento predicho por el modelo con el decrecimiento real de la función objetivo usando la condición (4.2).

Mientras tanto, en las iteraciones de tipo *h*, que ocurren cuando

$$pred_k \leq \sigma h_k^2,$$

es decir, cuando no hay suficiente decrecimiento en el modelo, no se espera que haya decrecimiento en la función objetivo. En esta desigualdad también puede interpretarse que la violación de las restricciones es importante respecto del decrecimiento del modelo. Como se busca siempre priorizar la factibilidad por sobre la optimalidad, estas son razones suficientes para descartar al iterado  $x_k$  enviándolo al filtro. Otra razón para almacenar un iterado en el filtro es

que el subproblema de región de confianza sea incompatible, en cuyo caso el principal objetivo es reducir  $h(x)$ , con un posible crecimiento de  $f(x)$ .

Una interesante observación es que sólo se incorporan al filtro pares que no son factibles, es decir, con

$$h_j > 0, \quad \forall j \in \mathcal{F}_k,$$

ya que si fuera  $h_k = 0$ , el subproblema de región de confianza sería compatible, existiendo una dirección de descenso  $s_k$  tal que

$$pred_k = -g_k^T s_k \geq 0,$$

sin embargo, usando el desarrollo de Taylor de  $f$  alrededor de  $x_k$  obtenemos

$$\begin{aligned} ared_k &= f(x_k) - f(x_k + s_k) \\ &= -\nabla f(x_k)^T s_k - O(\|s_k\|^2) \\ &= pred_k - O(\|s_k\|^2) \geq \eta pred_k. \end{aligned}$$

Esto asegura que la  $k$ -ésima iteración es de tipo  $f$  por lo que el par  $(h_k, f_k)$  no debería haber ingresado al filtro.

En 2002, Fletcher, Gould, Leyffer, Toint y Wächter [FGL<sup>+</sup>02] demuestran la convergencia global de un algoritmo de filtro *SQP-filter* donde la función objetivo es aproximada por un modelo cuadrático generando un algoritmo de programación cuadrática secuencial con estrategia de región de confianza.

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & \frac{1}{2} s^T H_k s + g_k^T s + f_k \\ & c_E(x_k) + \nabla c_E^T(x_k) s = 0 \\ & c_I(x_k) + \nabla c_I^T(x_k) s \geq 0 \\ & \|s\|_\infty \leq \delta_k. \end{aligned}$$

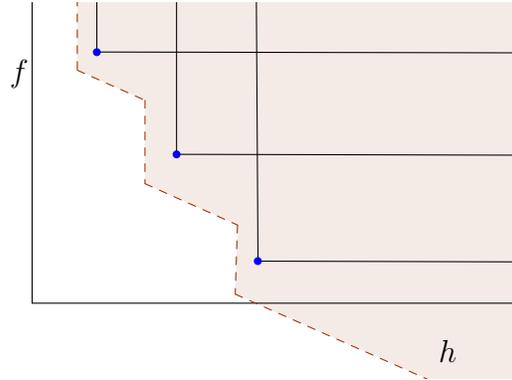
Este mismo filtro ha sido utilizado con una estrategia de búsqueda lineal por Wächter y Biegler

Un gran avance se produce en 2001 cuando en su tesis doctoral C.M. Chin [CHI01] construye un filtro con envolvente inclinada cuyo criterio de aceptación es el siguiente

**Definición 4.7.** *Un par  $(h, f)$  se dice **aceptable para ser incluido en el filtro**  $\mathcal{F}_k$  si*

$$h \leq (1 - \gamma)h_j \text{ o } f \leq f_j - \gamma h \text{ para cada } j \in \mathcal{F}_k,$$

siendo  $0 < \gamma < 1$  próximo a 0.



**Figura 4.5:** Filtro con envolvente inclinada.

En la Figura 4.5 se muestra un filtro con envolvente inclinada.

La noción de filtro inclinado fue usado por Chin y Fletcher [CF03] en el contexto de programación lineal secuencial y por Fletcher, Leyffer y Toint [FLT02], y Ulbrich [ULB04] en programación cuadrática secuencial todos con estrategia de región de confianza. También Chin [CHI03] presentó este filtro con una estrategia de búsqueda lineal. En todos los casos se probó la convergencia global del algoritmo.

Esta nueva envolvente inclinada goza de la propiedad de *inclusión* que no tenía la envolvente recta. Es deseable que puntos del plano  $(h, f)$  que han sido descartados por encontrarse en la zona prohibida del filtro  $\mathcal{F}_k$  en la  $k$ -ésima iteración no puedan ser candidatos a ser aceptados en iteraciones posteriores. La propiedad de inclusión obliga a que cada zona prohibida contenga a las anteriores evitando esta situación.

Para analizar mejor las diferencias de ambos filtros, consideremos el caso donde el par  $(h_j, f_j) \in \mathcal{F}_k$  se encuentra en el filtro y se quiere incluir al par  $(h_k, f_k)$  con  $f_k = f_j$  y  $h_k < (1 - \gamma)h_j$ . La envolvente recta alrededor del par  $(h_j, f_j)$  está determinada por las rectas vertical y horizontal

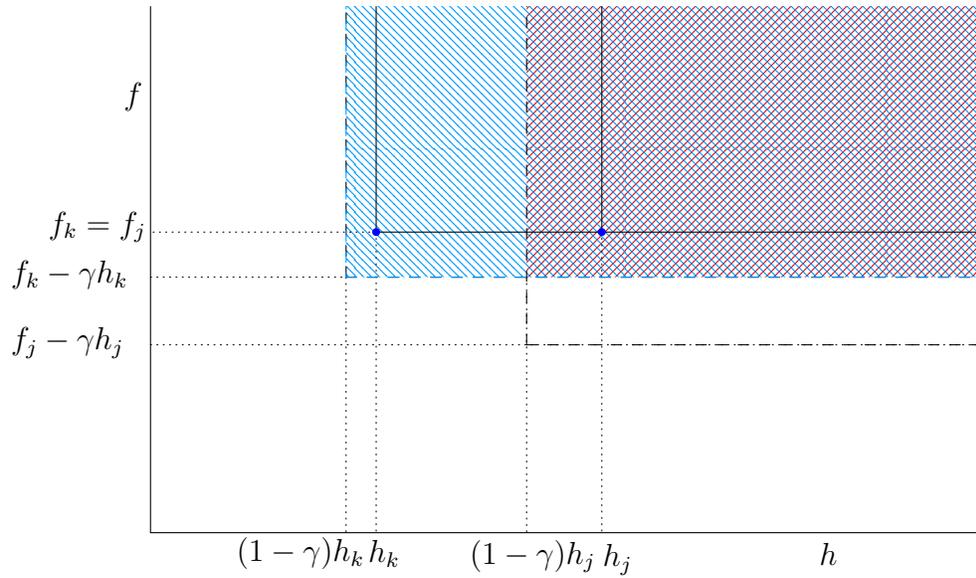
$$\begin{aligned} h &= (1 - \gamma)h_j, \\ f &= f_j - \gamma h_j, \end{aligned}$$

mientras que la envolvente recta alrededor del par  $(h_k, f_j)$  está determinada

por las rectas vertical y horizontal

$$\begin{aligned} h &= (1 - \gamma)h_k, \\ f &= f_j - \gamma h_k. \end{aligned}$$

Como  $h_k < (1 - \gamma)h_j < h_j$ , entonces  $f_j - \gamma h_j < f_j - \gamma h_k < f_j$ . Cuando se incorpora el par  $(h_k, f_k)$  al filtro, su actualización obliga a eliminar al par  $(h_j, f_j)$  por ser dominado por el anterior. Junto con él se descarta una zona prohibida asociada a su envolvente, determinada por las rectas horizontales  $f = f_j - \gamma h_j$ ,  $f = f_j - \gamma h_k$  y la recta vertical  $h = (1 - \gamma)h_j$ , y que no cae dentro de la nueva zona prohibida. Esto posibilita que pares que han sido descartados puedan volver a ser elegidos. La Figura 4.6 muestra esta situación.



**Figura 4.6:** Filtro con envolvente recta.

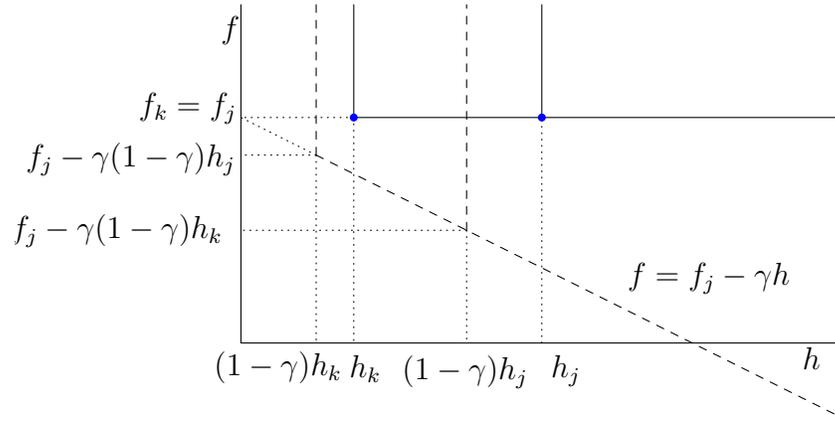
Por otro lado la envolvente inclinada alrededor del par  $(h_j, f_j)$  está determinada por las rectas vertical y oblicua

$$\begin{aligned} h &= (1 - \gamma)h_j, \\ f &= f_j - \gamma h, \end{aligned}$$

mientras que la envolvente alrededor del par  $(h_k, f_j)$  está determinada por las rectas vertical y oblicua

$$\begin{aligned} h &= (1 - \gamma)h_k, \\ f &= f_j - \gamma h. \end{aligned}$$

Observemos que las pendientes de las rectas oblicuas son invariantes a lo largo de todo el algoritmo, mientras que la ordenada al origen cambia con la altura del vértice del filtro actual. Esto explica por qué pares con la misma componente de optimalidad tienen la misma recta oblicua asociada. En la Figura 4.7 puede observarse esta situación donde claramente el nuevo filtro incluye al anterior.



**Figura 4.7:** Envolvente inclinada.

Como consecuencia, en el filtro de envolvente inclinada cuando un par es agregado al filtro se genera una nueva zona prohibida que contiene a la zona prohibida previa. Esta propiedad de inclusión, permite probar en forma simple el siguiente resultado acerca de la convergencia de la sucesión  $\{h_k\}$ , cuya demostración puede ser hallada en [CF03, FLT02].

**Lema 4.1.** *Si  $\{(h_k, f_k)\}$  es una sucesión infinita de pares ingresados al filtro para la cual la sucesión  $\{f_k\}$  está acotada inferiormente, entonces  $h_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .*

En 2012 Shen, Leyffer y Fletcher [SLF12] presentaron una combinación de un filtro con envolvente inclinada tradicional para la convergencia global,

con un filtro no monótono con memoria, que actúa localmente para acelerar la convergencia. En el marco de una estrategia de región de confianza, ambos filtros interactúan en forma dinámica. Mientras el paso de prueba permita que el nuevo iterado permanezca dentro de la región de confianza, actúa el filtro local no monótono, acelerando la convergencia.

En 2003, Gould y Toint [GT03, GT06] presentaron un filtro no monótono con un enfoque totalmente diferente para la aceptación del iterado de prueba. En este caso, el filtro está basado en el área con la que el nuevo iterado podría contribuir a la región dominada por el filtro. Este área resulta positiva para un filtro monótono, sin embargo, en su propuesta, Gould y Toint requieren que la contribución promedio al área dominada por el filtro de los últimos pares incluidos junto con el par asociado al iterado de prueba sea suficientemente positiva, aceptando pares que podrían ser dominados por el filtro. Además la actualización del filtro permite la eliminación de pares del filtro que son reemplazados por otros que no necesariamente coinciden con el par dominado asociado al punto de prueba, disminuyendo el área dominada por el filtro.

Gonzaga, Karas y Vanti [GKV03] propusieron en 2003 un algoritmo de restauración inexacta [MP00, MAR01] que utiliza una fase de factibilidad y una fase de optimalidad, independientes entre sí. La única conexión entre las dos fases es un filtro de envolvente inclinada que evalúa el paso de prueba también en dos etapas. Primero se considera la factibilidad del paso normal, para luego evaluar la optimalidad. Ribeiro, Karas y Gonzaga [RKG08] extendieron el análisis de convergencia global para un método de filtro que no depende de la forma particular en que el paso es calculado. Sólo se requiere que los puntos generados sean aceptados por el filtro, y que cerca de un punto factible no estacionario la reducción de la función objetivo sea suficientemente grande. En 2007 Karas, Oening y Ribeiro [KOR08] modifican el filtro a uno con envolvente inclinada del tipo [CF03].

La idea de filtro también ha sido usada en métodos de punto interior, como en el caso de Ulbrich, Ulbrich y Vicente [UUV04] basándose en el filtro de Fletcher, Gould, Leyffer, Toint y Wächter [FGL<sup>+</sup>02], probando la convergencia del algoritmo a un punto estacionario. Wächter y Biegler [WB05b, WB05a, WB05c] también incorporaron un filtro a un algoritmo de punto interior con búsqueda lineal modificando la condición de optimalidad del filtro.

Finalmente, los métodos de filtro también han sido utilizados exitosamente en problemas de ecuaciones no lineales [FL03, GLT04], optimización nonsmooth [FL99, KRSS09], optimización sin restricciones [GST06, YZ10, FMA12,

AP16], optimización libre de derivadas [AD04], el método de restricciones activas para el problema general de optimización no lineal [FGLM07] y el método de Lagrangiano Aumentado [FL08, LEY16].

# Capítulo 5

## El algoritmo

En este capítulo se presenta un algoritmo de programación cuadrática secuencial para problemas de programación no lineal con restricciones de igualdad y de caja,

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & f(x) \\ & c(x) = 0 \\ & x \in \Omega, \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : l \leq x \leq u\}$ .

El algoritmo está basado en una estrategia de región de confianza para asegurar convergencia global, y un filtro inclinado no monótono con memoria, junto con una condición de reducción suficiente no monótona para la aceptación del paso de prueba.

En el Paso 1 de cada iteración del algoritmo 5.1 se calcula el paso de prueba  $s_k$ . La estrategia de región de confianza está basada en una aproximación del espacio tangente descomponiendo el paso de prueba en una componente normal  $s_k^n$  y una componente tangencial  $s_k^t$ . El paso normal es calculado usando el enfoque de Byrd-Omojokun (3.12).

En el subproblema normal la componente normal  $s_k^n$  es la solución aproximada del subproblema de región de confianza

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & M_k(s) = \frac{1}{2} \|\nabla c_k^T s + c_k\|_2^2 \\ & \|s\|_\infty \leq r\delta_k, \\ & x_k + s \in \Omega. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Para ello se utiliza el método de gradiente espectral proyectado [BMR00]. Las proyecciones se realizan respecto de la norma  $\|\cdot\|_\infty$  sobre la intersección

de la caja  $\Omega$  y la región de confianza reducida, manteniendo la dirección proyectada.

En el subproblema tangente la componente tangencial  $s_k^t$  es la solución aproximada del subproblema de región de confianza

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad \tilde{Q}_k(s^t) &= \frac{1}{2}(s_k^n + s^t)^T H_k(s_k^n + s^t) + \nabla_x \ell_k^T(s_k^n + s^t) + \ell_k \\ &\|s_k^n + s^t\|_\infty \leq \delta_k \\ &x_k + s_k^n + s^t \in \Omega \\ &\nabla c_k^T s^t = 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

obtenido de realizar el cambio de variable  $s = s_k^n + s^t$  en el subproblema de región de confianza original (3.10). En el caso de la linealización de las restricciones de igualdad se ha usado que

$$\begin{aligned} \nabla c_k^T s + c_k &= 0, \\ &y \\ \nabla c_k^T s_k^n + c_k &= 0, \end{aligned}$$

entonces

$$\nabla c_k^T (s - s_k^n) = 0,$$

es decir,

$$\nabla c_k^T s^t = 0. \quad (5.4)$$

Nuevamente se utiliza el método de gradiente espectral proyectado, donde las proyecciones sobre la intersección de la caja y la región de confianza se realizan como en el subproblema normal, mientras que para la proyección sobre el conjunto de las variedades lineales se hace uso del método de Dykstra. [DYK83]

En el Paso 2 se evalúa la aceptación del paso de prueba  $s_k$  por parte del filtro de tipo inclinado propuesto por Chin [CHI01], utilizando como medida de factibilidad la norma de convergencia uniforme de las restricciones

$$h(x) = \|c(x)\|_\infty,$$

mientras que como medida de optimización se usa la norma euclídeana del gradiente proyectado del Lagrangiano

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \|P_\Omega(x - \nabla_x \ell(x, \lambda)) - x\|_2^2.$$

Un par  $(h, \psi)$  se considera aceptable para ser incluido en el filtro si es dominado a lo sumo por  $M$  pares del filtro  $\mathcal{F}_k$  y el par asociado al iterado actual  $(k_k, \psi_k)$ . En caso contrario, el paso de prueba es rechazado y se vuelve al Paso 1 para calcular uno nuevo, disminuyendo la región de confianza.

Luego de que el paso de prueba  $s_k$  es calculado y el par asociado  $(h(x_k + s_k), \psi(x_k + s_k))$  ha pasado el criterio de aceptación del filtro se hace necesario comparar el modelo cuadrático con el Lagrangiano. Para ello definimos, como en el problema sin restricciones, y siguiendo la propuesta de Grippo, Lampariello y Lucidi [GLL86] el decrecimiento actual no monótono y el decrecimiento predicho no monótono del Lagrangiano. Para ello hacemos uso de las hipótesis sobre el algoritmo que son enumeradas en la Sección 6.1.

Como en la Sección 2.2 definimos  $l(k)$  como el entero no negativo tal que

$$\begin{aligned} k - m(k) &\leq l(k) \leq m(k), \\ \ell(x_{l(k)}, \lambda_{l(k)}) &= \ell_{max} = \max_{0 \leq j \leq m(k)} \ell(x_{k-j}, \lambda_{k-j}), \end{aligned}$$

siendo  $\ell_{max}$  el máximo valor de la función de Lagrange obtenido en las últimas  $M + 1$  iteraciones, donde

$$\begin{aligned} m(0) &= 0, \\ 0 \leq m(k) &\leq \min\{m(k-1) + 1, M\} \quad \text{para } k \geq 1, \end{aligned}$$

y  $M$  es un número entero no negativo.

El **decrecimiento no monótono actual** de la función Lagrangiana es definido por

$$Ared_k^{nm} = \ell(x_{l(k)}, \lambda_{l(k)}) - \ell(x_k + s_k, \lambda_k + \Delta\lambda_k).$$

El paso de prueba  $s_k$  es calculado como solución del subproblema de región de confianza (3.10) que minimiza el modelo cuadrático del Lagrangiano, de modo que el **decrecimiento no monótono predicho** por el modelo  $Q_k(s)$  en la iteración  $k$  con respecto al modelo cuadrático  $Q_{l(k)}(s)$  alrededor de  $x_{l(k)}$  es definido por

$$Pred_k^{nm} = Q_{l(k)}(0) - Q_k(s_k) - \Delta\lambda_k^T (\nabla c(x_k))^T s_k + c(x_k).$$

En la Sección 6.2 se muestra un análisis detallado de su deducción.

En el Paso 3 se evalúa el decrecimiento positivo del modelo cuadrático del Lagrangiano. Si este predice un decrecimiento suficientemente positivo,

seguiremos adelante llamando a esta una iteración de **tipo f**, en forma similar a (4.6). En caso contrario, el paso de prueba es rechazado, ingresando el par al filtro, que debe ser actualizado, es decir, se deben eliminar todos aquellos pares que estando en el filtro, son dominados por el par recién ingresado. Será necesario en este caso volver al Paso 1 para calcular un nuevo paso de prueba, previa reducción de la región de confianza. Llamamos a esta una iteración de **tipo h**. Cuando la iteración es de tipo *f*, en el Paso 4 se lleva a cabo la evaluación del paso de prueba midiendo el ajuste del modelo cuadrático al Lagrangiano en el iterado actual respecto del peor de las últimas  $M + 1$  iteraciones mediante el cociente  $\rho_k^{nm} = \frac{Ared_k^{nm}}{Pred_k^{nm}}$ .

Finalmente, en el Paso 5, luego de actualizar la información, es testada la convergencia a un punto estacionario del problema (5.1) mediante las condiciones

$$\begin{aligned} \|P_\Omega(x_k - \nabla_x \ell(x_k, \lambda_k)) - x_k\|_2 &< tol, \\ \|h(x_k)\|_\infty &< tol, \end{aligned}$$

decidiendo la continuación o no del algoritmo.

A continuación se presentan los detalles del algoritmo

---

**Algoritmo 5.1. (Algoritmo NLP - Filtro no monótono)**

---

Dado el iterado actual  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , el radio de la región de confianza  $\delta_k > 0$ , y los parámetros  $\eta_1, \eta_2, \alpha_1, \alpha_2, \gamma$ , tales que  $0 < \eta_2 < \eta_1 < 1$ ,  $0 < \alpha_1 < 1 < \alpha_2$ ,  $0 < \gamma < 1$ , y  $M > 0$  una constante entera. En cada iteración, si  $x_k$  es un punto estacionario del problema (5.1), el algoritmo termina, en otro caso, los siguientes pasos permiten obtener el siguiente iterado,  $x_{k+1}$ .

**Paso 1.** (Cálculo del paso de prueba)

Encontrar un paso de prueba  $s_k = s_k^n + s_k^t$  como solución aproximada del subproblema de región de confianza,

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad Q_k(s) &= \frac{1}{2} s^T H_k s + \nabla_x \ell_k^T s + \ell_k \\ \nabla c_k^T s + c_k &= 0 \\ x_k + s &\in \Omega \\ \|s\|_\infty &< \delta_k, \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde  $H_k$  es la matriz Hessiana del Lagrangiano o su aproximación.

**Paso 2.** (Aceptación del punto de prueba por el filtro)

Definir  $\psi(x) = \frac{1}{2} \|P_\Omega(x - \nabla_x \ell(x, \lambda)) - x\|_2^2$  y  $h(x) = \|c(x)\|_\infty$ .

- Si  $h(x_k + s_k) \leq (1 - \gamma)h(x_j)$  o  $\psi(x_k + s_k) \leq \psi(x_j) - \gamma h(x_k + s_k)$  por todos salvo a lo sumo  $M$  pares  $(h_{k-j}, \psi_{k-j})$  en  $\mathcal{F}_k \cup \{(h_k, \psi_k)\}$ , ir a **Paso 3**,
- en otro caso  $x_{k+1} = x_k$ ,  $\delta_{k+1} \in [\min\{\delta_{min}, \alpha_1 \delta_k\}, \delta_k)$  e ir al **Paso 1**.

**Paso 3.** (Evaluación del decrecimiento positivo)

Denotar  $\ell_{max} = \max\{\ell(x_{k-j}, \lambda_{k-j}) : 0 \leq j \leq m(k)\}$ ,

donde  $m(0) = 0$ , y  $0 \leq m(k) \leq \min\{m(k-1) + 1, M\}$ , para  $k \geq 1$ , definir las cantidades

$$\begin{aligned} Ared_k^{nm} &= \ell_{max} - \ell(x_k + s_k, \lambda_k + \Delta_k), \\ Pred_k^{nm} &= Q_k(0) - Q_k(s_k) - \Delta \lambda_k^T (\nabla c_k^T s_k + c_k). \end{aligned}$$

- Si

$$Pred_k^{nm} \geq \gamma h_k^2, \quad (5.6)$$

entonces ir al **Paso 4**, (*iteración de tipo f*)

- en otro caso agregar el par asociado a la iteración de prueba al filtro y actualizar el filtro, luego tomar  $x_{k+1} = x_k$ , elegir  $\delta_{k+1} \in [\min\{\delta_{min}, \alpha_1 \delta_k\}, \delta_k)$ , e ir al **Paso 1** (*iteración de tipo h*).

**Paso 4.** (Evaluación del paso y actualización del radio de región de confianza)

Definir  $\rho_k^{nm} = \frac{Ared_k^{nm}}{Pred_k^{nm}}$ , y evaluar el paso para su aceptación siguiendo [MMV13]

- Si  $\rho_k^{nm} \geq \eta_1$ , entonces  $x_{k+1} = x_k + s_k$  y elegir  $\delta_{k+1} \in (\delta_k, \max\{\alpha_2 \delta_k, \delta_{max}\}]$ .
- Si  $\eta_2 < \rho_k^{nm} < \eta_1$ , entonces  $x_{k+1} = x_k + s_k$  y elegir  $\delta_{k+1} \in [\alpha_1 \delta_k, \delta_k]$ .
- Si  $\rho_k^{nm} \leq \eta_2$ , entonces rechazar el paso,  $x_{k+1} = x_k$  y elegir  $\delta_{k+1} \in [\min\{\delta_{min}, \alpha_1 \delta_k\}, \delta_k)$ .

**Paso 5.** Actualizar toda la información, testear convergencia e ir al **Paso 1**.

---

# Capítulo 6

## Discusión teórica

En este capítulo se desarrolla el análisis del comportamiento global del algoritmo 5.1. Bajo hipótesis estándar para algoritmos para problemas no lineales con restricciones de igualdad y de caja basados en una estrategia de región de confianza es posible obtener la buena definición (6.1) y convergencia global (6.2) del algoritmo.

### 6.1 Hipótesis estándar

Se enumeran a continuación las hipótesis bajo las cuales se establece la buena definición del Algoritmo 5.1 y la convergencia a un punto estacionario.

1. Existe un conjunto abierto convexo  $D$  que contiene a la caja  $\Omega$ .
2. Las funciones  $f$  y  $c$  son de clase  $C^2$  sobre el conjunto  $D$ .
3. La sucesión de matrices Hessianas  $\nabla_{xx}^2 \ell(x_k, \lambda_k)$ , o sus aproximaciones  $H_k$ , es uniformemente acotada.
4. La matriz Jacobiana  $\nabla c(x) = [\nabla c_1(x), \dots, \nabla c_m(x)]$  es de rango completo sobre  $D$ .

Las hipótesis 1 y 2 permiten obtener cotas sobre las funciones  $f$ ,  $c$  y sus derivadas de primer y segundo orden sobre el conjunto compacto  $\Omega$ . Para ellas usamos la siguiente notación:

1.  $\|\nabla f(x)\|_2 \leq \kappa_{gf}$ .

2.  $\|\nabla^2 f(x)\|_2 \leq \kappa_{Hf}$  o  $\|H_k\|_2 \leq \kappa_{Hf}$ .
3.  $\|c(x)\|_2 \leq \kappa_c$ .
4.  $\|\nabla c_j(x)\|_2 \leq \kappa_{gc_j}$ .
5.  $\|\nabla c(x)\|_2 \leq \kappa_{gc}$ .
6.  $\|\nabla^2 c(x)\|_2 \leq \kappa_{Hc}$ .
7.  $\|\nabla_x \ell(x, \lambda)\|_2 \leq \kappa_\ell$ .
8.  $\|\Delta \lambda_k\|_2 \leq \kappa_\lambda$ .

## 6.2 Decrecimiento suficiente del modelo

El problema de programación cuadrática con restricciones lineales y de caja con una estrategia de región de confianza (5.5) es resuelto aproximadamente siguiendo el enfoque de Byrd y Omojokun (3.12), descomponiendo el paso de prueba  $s_k$  en sus componentes normal  $s_k^n$  y tangencial  $s_k^t$ . Se muestra en esta sección que el paso de Cauchy de cada una de estas componentes satisface una desigualdad del tipo (2.8), de modo que, como en el caso sin restricciones, el modelo cuadrático del Lagrangiano, al satisfacer una condición de decrecimiento de Cauchy, nos permite probar tanto la buena definición como la convergencia global del algoritmo.

Una vez hallado el paso de prueba  $s_k$ , y luego de haber pasado por la aceptación del filtro, es menester evaluar el decrecimiento que produce en el modelo cuadrático para ser comparado con el decrecimiento real que genera en la función Lagrangiana misma. Para este propósito definimos la reducción no monótona actual del Lagrangiano en la  $k$ -ésima iteración como

$$Ared_k^{nm} = \ell(x_{l(k)}, \lambda_{l(k)}) - \ell(x_k + s_k, \lambda_k + \Delta \lambda_k),$$

donde  $x_{l(k)}$ , como en la Sección 2.2, es el punto donde el Lagrangiano toma su máximo valor, de entre los últimos  $M$  de la subsucesión de puntos aceptados por el algoritmo. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \ell(x_k + s_k, \lambda_k + \Delta \lambda_k) &= f(x_k + s_k) + (\lambda_k + \Delta \lambda_k)^T c(x_k + s_k) \\ &= f(x_k + s_k) + \lambda_k^T c(x_k + s_k) + \Delta \lambda_k^T c(x_k + s_k) \\ &= \ell(x_k + s_k, \lambda_k) + \Delta \lambda_k^T c(x_k + s_k). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Usando el desarrollo de Taylor de 2° orden de  $\ell(x, \lambda_k)$  alrededor del punto  $(x_k, \lambda_k)$  obtenemos

$$\begin{aligned}\ell(x_k + s_k, \lambda_k) &= \ell(x_k, \lambda_k) + \nabla_x \ell(x_k, \lambda_k)^T s_k + \frac{1}{2} s_k^T \nabla_{xx}^2 \ell(x_k + \xi_k s_k, \lambda_k) s_k \\ &= \ell(x_k, \lambda_k) + \nabla_x \ell(x_k, \lambda_k)^T s_k + \frac{1}{2} s_k^T H_k s_k + \\ &\quad \frac{1}{2} s_k^T (\nabla_{xx}^2 \ell(x_k + \xi_k s_k, \lambda_k) - H_k) s_k,\end{aligned}$$

con  $\xi_k \in (0, 1)$ .

Como  $\{H_k\}$  es una sucesión uniformemente convergente de matrices simétricas que aproximan a  $\nabla_{xx}^2 \ell(x_k, \lambda_k)$ ,

$$\|\nabla_{xx}^2 \ell(x_k + \xi_k s_k, \lambda_k) - H_k\|_2 \leq \kappa_H,$$

para  $\xi_k \in (0, 1)$ .

Por lo tanto,

$$\ell(x_k + s_k, \lambda_k) = Q_k(s_k) + \mathcal{O}_1(\|s_k\|_2^2).$$

Por otro lado, usando el desarrollo de Taylor de 2° orden de cada función coordenada de las restricciones  $c_j(x)$  alrededor de  $x_k$  obtenemos para cada  $j = 1, \dots, m$ ,

$$c_j(x_k + s_k) = c_j(x_k) + \nabla c_j(x_k)^T s_k + \frac{1}{2} s_k^T \nabla^2 c_j(x_k + \mu_{j,k} s_k) s_k,$$

con  $\mu_{j,k} \in (0, 1)$ .

Como,  $\|\nabla^2 c_j(x_k + \mu_{j,k} s_k)\|_2 \leq \kappa_{Hc}$ ,

$$\frac{1}{2} s_k^T \nabla^2 c_j(x_k + \mu_{j,k} s_k) s_k = \mathcal{O}_2(\|s_k\|_2^2).$$

Por lo tanto, podemos escribir (6.1) como

$$\begin{aligned}\ell(x_k + s_k, \lambda_k + \Delta \lambda_k) &= \ell(x_k + s_k, \lambda_k) + \Delta \lambda_k^T c(x_k + s_k) \\ &= Q_k(s_k) + \Delta \lambda_k^T (c(x_k) + \nabla c(x_k)^T s_k) + \\ &\quad \mathcal{O}_1(\|s_k\|_2^2) + \Delta \lambda_k^T \mathcal{O}_2(\|s_k\|_2^2).\end{aligned}$$

Como la sucesión de multiplicadores  $\{\lambda_k\}$  está uniformemente acotada, también lo está la sucesión de sus incrementos  $\{\Delta\lambda_k\}$ .

Por lo tanto,

$$\ell(x_k + s_k, \lambda_k + \Delta\lambda_k) = Q_k(s_k) + \Delta\lambda_k^T (\nabla c(x_k))^T s_k + c(x_k) + \mathcal{O}(\|s_k\|_2^2),$$

y podemos finalmente escribir el decrecimiento actual no monótono del Lagrangiano como

$$Ared_k^{nm} = Q_{l(k)}(0) - Q_k(s_k) - \Delta\lambda_k^T (\nabla c(x_k))^T s_k + c(x_k) + \mathcal{O}(\|s_k\|_2^2).$$

Con esto en mente, definimos el decrecimiento no monótono predicho por el modelo cuadrático del Lagrangiano como

$$Pred_k^{nm} = Q_{l(k)}(0) - Q_k(s_k) - \Delta\lambda_k^T (\nabla c(x_k))^T s_k + c(x_k).$$

### 6.2.1 El subproblema normal

Calculamos el paso de Cauchy  $s_k^{\text{nCP}}$  para el subproblema normal (5.2). Este es el minimizador del modelo cuadrático de la linealización de las restricciones dentro de la región de confianza reducida y la caja  $\Omega$ , en la dirección negativa del gradiente proyectado de  $M_k(s)$  en  $s = 0$ .

Denotamos por

$$d_k^n = \bar{P}_\Omega(\nabla c_k c_k)$$

la proyección de  $\nabla M_k(0) = \nabla c_k c_k$  sobre  $\Omega$  respecto de la norma  $\|\cdot\|_\infty$ , esto es, permitiendo que la dirección de máximo descenso de  $M_k(s)$  permanezca invariante. Más precisamente, si

$$t_k^\Omega = \max\{t > 0 : [x_k, x_k - t\nabla c_k c_k] \subset \Omega\},$$

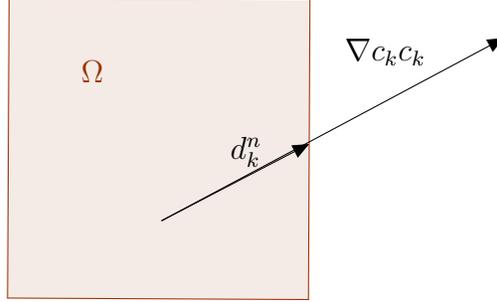
podemos escribir al gradiente proyectado como

$$d_k^n = t_k^\Omega \nabla c_k c_k.$$

La situación es graficada en la Figura 6.1.

El paso de Cauchy de la componente normal del paso de prueba se puede escribir como  $s_k^{\text{nCP}} = -t_k^{\text{nCP}} d_k^n$ , donde

$$\begin{aligned} t_k^{\text{nCP}} \in \arg \min_{s.a} \quad & M_k(-t d_k^n) = \frac{1}{2} \| -t \nabla c_k^T d_k^n + c_k \|_2^2 \\ & \|t d_k^n\|_\infty \leq r \delta_k \\ & t \geq 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$



**Figura 6.1:** Gradiente proyectado de  $M_k(s)$ .

Para  $t \geq 0$  consideramos la función

$$\begin{aligned} h(t) &= M_k(-td_k^n) = \frac{1}{2} \|-t \nabla c_k^T d_k^n + c_k\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2} t^2 \|\nabla c_k^T d_k^n\|_2^2 - t (d_k^n)^T \nabla c_k c_k + \frac{1}{2} \|c_k\|_2^2. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} h'(t) &= t \|\nabla c_k^T d_k^n\|_2^2 - (d_k^n)^T \nabla c_k c_k, \\ &\text{y} \\ h''(t) &= \|\nabla c_k^T d_k^n\|_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función  $h$  es convexa y tiene al menos un minimizador global. Vamos a considerar dos casos:

1. La curvatura del modelo cuadrático  $M_k(s)$  a lo largo de la dirección negativa de su gradiente proyectado,  $-d_k^n$ , es positiva, i.e., si

$$\|\nabla c_k^T d_k^n\|_2 > 0,$$

o equivalentemente si

$$\|\nabla c_k^T \nabla c_k c_k\|_2 > 0,$$

entonces el minimizador es único

$$t_k^* = \frac{(d_k^n)^T \nabla c_k c_k}{\|\nabla c_k^T d_k^n\|_2} = \frac{\|\nabla c_k c_k\|_2^2}{t_k^\Omega \|\nabla c_k^T \nabla c_k c_k\|_2}.$$

Vamos a analizar dos situaciones por separado:

- a) Si el paso  $-t_k^* d_k^n$  está dentro de la región de confianza reducida, i.e., si  $\|t_k^* d_k^n\|_\infty \leq r\delta_k$ , o sea

$$t_k^* \|d_k^n\|_\infty = t_k^* t_k^\Omega \|\nabla c_k c_k\|_\infty = \frac{\|\nabla c_k c_k\|_2^2 \|\nabla c_k c_k\|_\infty}{\|\nabla c_k^T \nabla c_k c_k\|_2^2} \leq r\delta_k.$$

En este caso,

$$t_k^{\text{nCP}} = t_k^*,$$

y

$$s_k^{\text{nCP}} = -t_k^* d_k^n = -\frac{\|\nabla c_k c_k\|_2^2}{\|\nabla c_k^T \nabla c_k c_k\|_2^2} \nabla c_k c_k.$$

- b) Si el paso  $-t_k^* d_k^n$  no está dentro de la región de confianza reducida, i.e., si  $\|t_k^* d_k^n\|_\infty > r\delta_k$ , o sea

$$\frac{\|\nabla c_k c_k\|_2^2 \|\nabla c_k c_k\|_\infty}{\|\nabla c_k^T \nabla c_k c_k\|_2^2} > r\delta_k,$$

elegimos  $s_k^{\text{nCP}} = \bar{P}_{r\delta_k}(-t_k^* d_k^n)$ , la proyección de  $-t_k^* d_k^n$  sobre la región de confianza reducida respecto de la norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

En este caso,

$$s_k^{\text{nCP}} = -\frac{t_k^* d_k^n}{\|t_k^* d_k^n\|_\infty} r\delta_k = -\frac{r\delta_k}{\|d_k^n\|_\infty} d_k^n = -\frac{r\delta_k}{\|\nabla c_k c_k\|_\infty} \nabla c_k c_k.$$

2. Si la curvatura del modelo cuadrático  $M_k(s)$  a lo largo de la dirección negativa de su gradiente proyectado es nula, i.e.,  $\|\nabla c_k^T d_k^n\|_2 = \|\nabla c_k^T \nabla c_k c_k\|_2 = 0$ , como  $x_k - d_k^n$  está dentro de la caja  $\Omega$ , se elige como paso de Cauchy de la componente normal la proyección de la dirección negativa del gradiente proyectado sobre la región de confianza reducida

$$s_k^{\text{nCP}} = \bar{P}_{r\delta_k}(-d_k^n) = -\frac{r\delta_k}{\|d_k^n\|_\infty} d_k^n = -\frac{r\delta_k}{\|\nabla c_k c_k\|_\infty} \nabla c_k c_k.$$

Resumiendo,

$$s_k^{\text{nCP}} = \begin{cases} -\frac{\|\nabla c_k c_k\|_2^2}{\|\nabla c_k^T \nabla c_k c_k\|_2^2} \nabla c_k c_k & \text{si } \|\nabla c_k^T \nabla c_k c_k\|_2 > 0 \text{ y} \\ & \frac{\|\nabla c_k c_k\|_2^2 \|\nabla c_k c_k\|_\infty}{\|\nabla c_k^T \nabla c_k c_k\|_2^2} \leq r\delta_k, \\ -\frac{r\delta_k}{\|\nabla c_k c_k\|_\infty} \nabla c_k c_k & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Lema 6.1.** *El paso de Cauchy  $s_k^{\text{nCP}}$  de la componente normal satisface la condición*

$$M_k(0) - M_k(s_k^{\text{nCP}}) \geq \frac{1}{2} \|\nabla_{c_k} c_k\|_2 \min \left\{ \frac{\|\nabla_{c_k} c_k\|_2}{\kappa_{gc}}, r\delta_k \right\}.$$

*Demostración.* Consideramos en primer lugar el caso en que la curvatura del modelo  $M_k(s)$  a lo largo de la dirección negativa del gradiente proyectado es positivo. En este caso, como vimos anteriormente, el minimizador es único. Podemos considerar dos situaciones:

1. Si el minimizador está dentro de la región de confianza reducida, entonces

$$s_k^{\text{nCP}} = -\frac{\|\nabla_{c_k} c_k\|_2^2}{\|\nabla_{c_k}^T \nabla_{c_k} c_k\|_2^2} \nabla_{c_k} c_k.$$

Reemplazando en el modelo,

$$\begin{aligned} M_k(0) - M_k(s_k^{\text{nCP}}) &= \frac{1}{2} \|c_k\|_2^2 - \frac{1}{2} \|\nabla_{c_k}^T s_k^{\text{nCP}} + c_k\|_2^2 \\ &= -\frac{1}{2} \|\nabla_{c_k}^T s_k^{\text{nCP}}\|_2^2 - (s_k^{\text{nCP}})^T \nabla_{c_k} c_k \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\|\nabla_{c_k} c_k\|_2^2}{\|\nabla_{c_k}^T \nabla_{c_k} c_k\|_2^2} + \frac{\|\nabla_{c_k} c_k\|_2^2}{\|\nabla_{c_k}^T \nabla_{c_k} c_k\|_2^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\|\nabla_{c_k} c_k\|_2^2}{\|\nabla_{c_k}^T \nabla_{c_k} c_k\|_2^2}. \end{aligned}$$

Como  $\|\nabla_{c_k}^T \nabla_{c_k} c_k\|_2^2 \leq \|\nabla_{c_k}^T\|_2^2 \|\nabla_{c_k} c_k\|_2^2$ , entonces

$$M_k(0) - M_k(s_k^{\text{nCP}}) \geq \frac{1}{2} \frac{\|\nabla_{c_k} c_k\|_2^2}{\|\nabla_{c_k}\|_2^2} \geq \frac{1}{2\kappa_{gc}} \|\nabla_{c_k} c_k\|_2^2. \quad (6.3)$$

2. Si el minimizador está fuera de la región de confianza reducida, el paso de Cauchy de la componente normal yace sobre el borde de la misma, i.e.,

$$s_k^{\text{nCP}} = -\frac{r\delta_k}{\|\nabla_{c_k} c_k\|_\infty} \nabla_{c_k} c_k.$$

Reemplazando en el modelo,

$$\begin{aligned} M_k(0) - M_k(s_k^{\text{nCP}}) &= -\frac{1}{2} \|\nabla_{c_k}^T s_k^{\text{nCP}}\|_2^2 - (s_k^{\text{nCP}})^T \nabla_{c_k} c_k \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(r\delta_k)^2}{\|\nabla_{c_k} c_k\|_\infty^2} \|\nabla_{c_k}^T \nabla_{c_k} c_k\|_2^2 + \frac{r\delta_k}{\|\nabla_{c_k} c_k\|_\infty} \|\nabla_{c_k} c_k\|_2^2. \end{aligned}$$

Como el minimizador está fuera de la región de confianza reducida,

$$\begin{aligned} \frac{\|\nabla c_k c_k\|_2^2 \|\nabla c_k c_k\|_\infty}{\|\nabla c_k^T \nabla c_k c_k\|_2^2} &> r\delta_k, \\ -\frac{1}{2} \frac{(r\delta_k)^2 \|\nabla c_k^T \nabla c_k c_k\|_2^2}{\|\nabla c_k c_k\|_\infty^2} &> -\frac{1}{2} r\delta_k \frac{\|\nabla c_k c_k\|_2^2}{\|\nabla c_k c_k\|_\infty}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} M_k(0) - M_k(s_k^{\text{nCP}}) &> -\frac{1}{2} r\delta_k \frac{\|\nabla c_k c_k\|_2^2}{\|\nabla c_k c_k\|_\infty} + r\delta_k \frac{\|\nabla c_k c_k\|_2^2}{\|\nabla c_k c_k\|_\infty} \\ &= \frac{1}{2} r\delta_k \frac{\|\nabla c_k c_k\|_2^2}{\|\nabla c_k c_k\|_\infty} \\ &\geq \frac{1}{2} r\delta_k \|\nabla c_k c_k\|_2, \end{aligned} \tag{6.4}$$

ya que  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$  para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Consideramos ahora el caso en que la curvatura del modelo cuadrático  $M_k(s)$  a lo largo de la dirección negativa su gradiente proyectado es nula, i.e.,

$$\|\nabla c_k^T \nabla c_k c_k\|_2 = 0,$$

de modo que

$$s_k^{\text{nCP}} = -\frac{r\delta_k}{\|\nabla c_k c_k\|_\infty} \nabla c_k c_k.$$

Reemplazando en el modelo,

$$\begin{aligned} M_k(0) - M_k(s_k^{\text{nCP}}) &= -\frac{1}{2} \|\nabla c_k^T s_k^{\text{nCP}}\|_2^2 - (s_k^{\text{nCP}})^T \nabla c_k c_k \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(r\delta_k)^2}{\|\nabla c_k c_k\|_\infty^2} \|\nabla c_k^T \nabla c_k c_k\|_2^2 + \frac{r\delta_k}{\|\nabla c_k c_k\|_\infty} \|\nabla c_k c_k\|_2^2 \\ &= \frac{r\delta_k}{\|\nabla c_k c_k\|_\infty} \|\nabla c_k c_k\|_2^2 \\ &> \frac{1}{2} r\delta_k \|\nabla c_k c_k\|_2, \end{aligned} \tag{6.5}$$

ya que  $\frac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty} \geq 1 > \frac{1}{2}$ .

De (6.3), (6.4) y (6.5) se tiene

$$M_k(0) - M_k(s_k^{\text{nCP}}) \geq \frac{1}{2} \|\nabla c_k c_k\|_2 \min \left\{ \frac{1}{\kappa_{gc}} \|\nabla c_k c_k\|_2, r\delta_k \right\}.$$

□

## 6.2.2 El subproblema tangente

Calculamos ahora el paso de Cauchy  $s_k^{\text{tCP}}$  para el subproblema tangente (5.3). La ecuación (5.4) nos dice que  $s^{\text{t}} \in \mathcal{N}(\nabla c_k^T) = \text{Im}(\nabla c_k)^\perp$ , de modo que podemos escribir

$$s^{\text{t}} = W_k \bar{s}^{\text{t}},$$

donde  $W_k$  es una matriz  $n \times (n - m)$  cuyas columnas forman una base ortonormal de  $\mathcal{N}(\nabla c_k^T)$  y  $\bar{s}^{\text{t}} \in \mathbb{R}^{n-m}$ . Luego podemos expresar

$$s = s_k^{\text{n}} + s^{\text{t}} = s_k^{\text{n}} + W_k \bar{s}^{\text{t}}.$$

Reemplazando en el modelo cuadrático

$$\begin{aligned} \bar{Q}_k(\bar{s}^{\text{t}}) &= Q_k(s_k^{\text{n}} + W_k \bar{s}^{\text{t}}) \\ &= \frac{1}{2} (s_k^{\text{n}} + W_k \bar{s}^{\text{t}})^T H_k (s_k^{\text{n}} + W_k \bar{s}^{\text{t}}) + \nabla_x \ell_k^T (s_k^{\text{n}} + W_k \bar{s}^{\text{t}}) + \ell_k \\ &= \frac{1}{2} (\bar{s}^{\text{t}})^T (W_k^T H_k W_k) \bar{s}^{\text{t}} + ((s_k^{\text{n}})^T H_k W_k + \nabla_x \ell_k^T W_k) \bar{s}^{\text{t}} + \\ &\quad \frac{1}{2} (s_k^{\text{n}})^T H_k s_k^{\text{n}} + \nabla_x \ell_k^T s_k^{\text{n}} + \ell_k \\ &= \frac{1}{2} (\bar{s}^{\text{t}})^T (W_k^T H_k W_k) \bar{s}^{\text{t}} + (W_k^T \nabla Q_k(s_k^{\text{n}}))^T \bar{s}^{\text{t}} + Q_k(s_k^{\text{n}}) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{s}^{\text{t}})^T \bar{H}_k \bar{s}^{\text{t}} + \bar{g}_k^T \bar{s}^{\text{t}} + Q_k(s_k^{\text{n}}), \end{aligned}$$

donde el vector en  $\mathbb{R}^{n-m}$

$$\bar{g}_k = W_k^T \nabla Q_k(s_k^{\text{n}}) = W_k^T (H_k s_k^{\text{n}} + \nabla_x \ell_k)$$

y la matriz en  $\mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$

$$\bar{H}_k = W_k^T H_k W_k.$$

son el gradiente y la matriz Hessiana reducidos al espacio tangente.

El subproblema tangente puede entonces escribirse como el *subproblema tangente reducido*

$$\begin{aligned} \min_{s.a} \quad & \bar{Q}_k(\bar{s}^t) = \frac{1}{2}(\bar{s}^t)^T \bar{H}_k \bar{s}^t + \bar{g}_k^T \bar{s}^t + Q_k(s_k^n) \\ & \nabla c_k^T W_k \bar{s}^t = 0 \\ & x_k + s_k^n + W_k \bar{s}^t \in \Omega \\ & \|s_k^n + W_k \bar{s}^t\|_\infty \leq \delta_k. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Calculamos la dirección de máximo descenso de  $\bar{Q}_k(\bar{s}^t)$  en  $\bar{s}^t = 0$ , es decir, en  $s = s_k^n$ ,

$$\nabla \bar{Q}_k(\bar{s}^t) = \bar{H}_k \bar{s}^t + \bar{g}_k,$$

entonces

$$\nabla \bar{Q}_k(0) = \bar{g}_k = W_k^T (H_k s_k^n + \nabla_x \ell_k).$$

Denotamos por

$$\bar{d}_k^t = \bar{P}_{\hat{\Omega}}(\bar{g}_k)$$

la proyección de  $\bar{g}_k$  sobre la intersección de la caja con el núcleo del gradiente de las restricciones restringida al espacio  $\mathbb{R}^{n-m}$ , respecto de la norma  $\|\cdot\|_\infty$ ,

$$\hat{\Omega} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-m} : x = W_k \bar{x} \in \Omega \cap \mathcal{N}(\nabla c_k^T)\},$$

esto es, permitiendo que la dirección de máximo descenso de  $\bar{Q}_k(\bar{s}^t)$  permanezca invariante. Más precisamente, si

$$\tau_k^\Omega = \max\{t > 0 : [x_k + s_k^n, x_k + s_k^n - tW_k \bar{g}_k] \subset \Omega\},$$

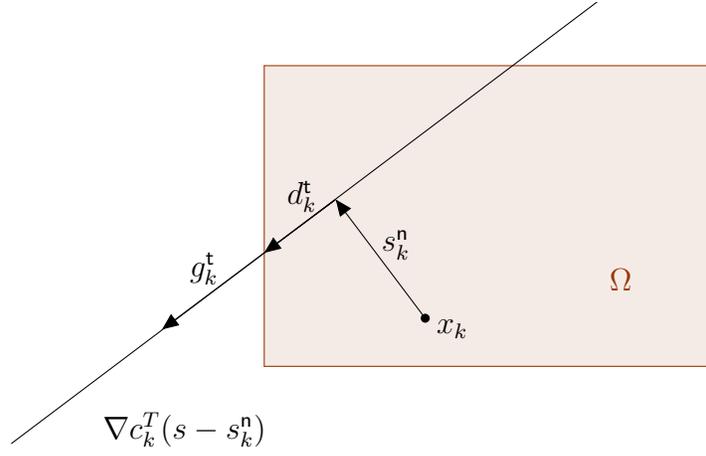
podemos escribir al gradiente proyectado como

$$\bar{d}_k^t = \tau_k^\Omega \bar{g}_k.$$

Ver Figura 6.2.

El paso de Cauchy de la componente tangencial del paso de prueba se puede escribir como  $\bar{s}_k^{\text{tCP}} = -\tau_k^{\text{tCP}} \bar{d}_k^t$ , donde

$$\begin{aligned} \tau_k^{\text{tCP}} \in \arg \min_{s.a} \quad & \bar{Q}_k(-t\bar{d}_k^t) = \frac{1}{2}t^2(\bar{d}_k^t)^T \bar{H}_k \bar{d}_k^t - t\bar{g}_k^T \bar{d}_k^t + Q_k(s_k^n) \\ & x_k + s_k^n - tW_k \bar{d}_k^t \in \Omega \\ & \|s_k^n - tW_k \bar{d}_k^t\|_\infty \leq \delta_k \\ & t \geq 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$



**Figura 6.2:** Proyección del gradiente reducido  $\bar{g}_k$  de  $\bar{Q}_k(s)$  sobre  $\hat{\Omega}$ .

Para  $t \geq 0$  consideramos la función

$$\begin{aligned} h(t) &= \bar{Q}_k(-t\bar{d}_k^t) = \bar{Q}_k(-t\tau_k^\Omega \bar{g}_k) \\ &= \frac{1}{2}t^2(\tau_k^\Omega)^2 \bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k - t\tau_k^\Omega \bar{g}_k^T \bar{g}_k + Q_k(s_k^n). \end{aligned}$$

Entonces

$$h'(t) = t(\tau_k^\Omega)^2 \bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k - \tau_k^\Omega \|\bar{g}_k\|_2^2,$$

y

$$h''(t) = (\tau_k^\Omega)^2 \bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k.$$

Vamos a considerar dos casos:

1. La curvatura del modelo cuadrático  $\bar{Q}_k(\bar{s}^t)$  a lo largo de la dirección negativa de su gradiente proyectado  $-\bar{d}_k^t$  es positiva, i.e., si

$$\bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k > 0,$$

entonces el minimizador es único

$$\tau_k^* = \frac{\|\bar{g}_k\|_2^2}{\tau_k^\Omega \bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k}.$$

Vamos a considerar por separado dos situaciones:

- a) Si  $-\tau_k^* \bar{d}_k^t$  está dentro de la región de confianza, esto es, si  $\|\tau_k^* \bar{d}_k^t\|_\infty \leq \delta_k$ , o

$$\tau_k^* \|\bar{d}_k^t\|_\infty = \frac{\|\bar{g}_k\|_2^2 \|\bar{g}_k\|_\infty}{\bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k} \leq \delta_k.$$

En este caso

$$\tau_k^{\text{tCP}} = \tau_k^*,$$

y

$$\bar{s}_k^{\text{tCP}} = -\tau_k^* \bar{d}_k^t = -\frac{\|\bar{g}_k\|_2^2}{\bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k} \bar{g}_k.$$

- b) Si  $-\tau_k^* \bar{d}_k^t$  no está dentro de la región de confianza, esto es si  $\|\tau_k^* \bar{d}_k^t\|_\infty > \delta_k$ , o

$$\frac{\|\bar{g}_k\|_2^2 \|\bar{g}_k\|_\infty}{\bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k} > \delta_k,$$

tomamos  $\bar{s}_k^{\text{tCP}} = \bar{P}_{\delta_k}(-\tau_k^* \bar{d}_k^t)$ , la proyección de  $-\tau_k^* \bar{d}_k^t$  sobre la región de confianza respecto de la norma  $\|\cdot\|_\infty$ . En este caso,

$$\begin{aligned} \bar{s}_k^{\text{tCP}} = \bar{P}_{\delta_k}(-\tau_k^* \bar{d}_k^t) &= -\frac{\tau_k^* \bar{d}_k^t}{\|\tau_k^* \bar{d}_k^t\|_\infty} \delta_k = -\frac{\tau_k^* \bar{g}_k}{\|\tau_k^* \bar{g}_k\|_\infty} \delta_k \\ &= -\frac{\delta_k}{\|\bar{g}_k\|_\infty} \bar{g}_k. \end{aligned}$$

2. Si la curvatura del modelo cuadrático  $\bar{Q}_k(\bar{s}^t)$  a lo largo de la dirección negativa de su gradiente proyectado,  $-\bar{d}_k^t$ , no es positiva, i.e., si  $\bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k \leq 0$ , como  $x_k + s_k^n - tW_k \bar{d}_k^t$  está dentro de la caja  $\Omega$  se elige tomar

$$\bar{s}_k^{\text{tCP}} = \bar{P}_{\delta_k}(-\bar{d}_k^t) = -\frac{\delta_k}{\|\bar{d}_k^t\|_\infty} \bar{d}_k^t = -\frac{\delta_k}{\|\bar{g}_k\|_\infty} \bar{g}_k.$$

Resumiendo,

$$\bar{s}_k^{\text{tCP}} = \begin{cases} -\frac{\|\bar{g}_k\|_2^2}{\bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k} \bar{g}_k & \text{si } \bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k > 0 \text{ y} \\ & \frac{\|\bar{g}_k\|_2^2 \|\bar{g}_k\|_\infty}{\bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k} \leq \delta_k, \\ -\frac{\delta_k}{\|\bar{g}_k\|_\infty} \bar{g}_k & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Lema 6.2.** *El paso de Cauchy  $s_k^{\text{tCP}}$  de la componente tangencial satisface la condición*

$$\bar{Q}_k(0) - \bar{Q}_k(\bar{s}_k^{\text{tCP}}) \geq \frac{1}{2} \|\nabla Q_k(s_k^n)\|_2 \min \left\{ \frac{\|\nabla Q_k(s_k^n)\|_2}{\kappa_H}, \delta_k \right\}.$$

*Demostración.* Consideramos primeramente el caso en que la curvatura del modelo cuadrático  $\bar{Q}_k(\bar{s}^{\text{t}})$  a lo largo de la dirección negativa de su gradiente proyectado,  $-\bar{d}_k^{\text{t}}$ , es positiva. En este caso el minimizador del problema de Cauchy (6.7) es único.

Podemos considerar dos situaciones:

1. Si el minimizador  $-\tau_k^* \bar{d}_k^{\text{t}}$  está dentro de la región de confianza, entonces

$$\bar{s}_k^{\text{tCP}} = -\frac{\|\bar{g}_k\|_2^2}{\bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k} \bar{g}_k.$$

Reemplazando en el modelo cuadrático

$$\begin{aligned} \bar{Q}_k(0) - \bar{Q}_k(\bar{s}_k^{\text{tCP}}) &= Q_k(s_k^n) - Q_k(s_k^n + W_k \bar{s}_k^{\text{tQP}}) \\ &= -\frac{1}{2} (\bar{s}_k^{\text{tCP}})^T \bar{H}_k \bar{s}_k^{\text{tCP}} - \bar{g}_k^T \bar{s}_k^{\text{tCP}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\|\bar{g}_k\|_2^4}{\bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k} + \frac{\|\bar{g}_k\|_2^4}{\bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\|\bar{g}_k\|_2^4}{\bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k}. \end{aligned}$$

Como

$$\bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k \leq \|\bar{g}_k\|_2 \|\bar{H}_k \bar{g}_k\|_2 \leq \|\bar{H}_k\|_2 \|\bar{g}_k\|_2^2,$$

entonces

$$\bar{Q}_k(0) - \bar{Q}_k(\bar{s}_k^{\text{tCP}}) \geq \frac{1}{2} \frac{\|\bar{g}_k\|_2^2}{\|\bar{H}_k\|_2} = \frac{1}{2} \frac{\|W_k \nabla Q_k(s_k^n)\|_2^2}{\|\bar{H}_k\|_2}.$$

Como las columnas de la matriz  $W_k$  forman una base ortonormal de  $\mathcal{N}(\nabla c_k^T)$ , y usando que las matrices semejantes tienen los mismos au-

tovalores

$$\begin{aligned}
\|\overline{H}_k\|_2^2 &= \|W_k^T H_k W_k\|_2^2 = (W_k^T H_k W_k)^T (W_k^T H_k W_k) \\
&= W_k^T H_k^T W_k W_k^T H_k W_k = W_k^T H_k^T H_k W_k \\
&= (H_k W_k)^T (H_k W_k) = \|H_k W_k\|_2^2 \\
&= \rho((H_k W_k)^T (H_k W_k)) = \rho(W_k^T (H_k^T H_k) W_k) \\
&= \rho(H_k^T H_k) = \|H_k\|_2^2,
\end{aligned}$$

donde  $\rho(A)$  representa el radio espectral de la matriz  $A$ .

Entonces

$$\begin{aligned}
\overline{Q}_k(0) - \overline{Q}_k(\overline{s}_k^{\text{tCP}}) &\geq \frac{1}{2} \frac{\|W_k \nabla Q_k(s_k^n)\|_2^2}{\|H_k\|_2} \\
&\geq \frac{1}{2} \frac{\|W_k \nabla Q_k(s_k^n)\|_2^2}{\kappa_H} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\|\nabla Q_k(s_k^n)\|_2^2}{\kappa_H}, \tag{6.8}
\end{aligned}$$

ya que la norma Euclidiana preserva las transformaciones ortogonales.

2. Si el minimizador  $-\tau_k^* \overline{d}_k^{\text{t}}$  no está dentro de la región de confianza, entonces

$$\overline{s}_k^{\text{tCP}} = -\frac{\delta_k}{\|\overline{g}_k\|_\infty} \overline{g}_k.$$

Reemplazando en el modelo cuadrático

$$\begin{aligned}
\overline{Q}_k(0) - \overline{Q}_k(\overline{s}_k^{\text{tCP}}) &= Q_k(s_k^n) - Q_k(s_k^n + W_k \overline{s}_k^{\text{tCP}}) \\
&= -\frac{1}{2} (\overline{s}_k^{\text{tCP}})^T \overline{H}_k \overline{s}_k^{\text{tCP}} - \overline{g}_k^T \overline{s}_k^{\text{tCP}} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\delta_k}{\|\overline{g}_k\|_\infty^2} \overline{g}_k^T H_k \overline{g}_k + \frac{\delta_k}{\|\overline{g}_k\|_\infty} \|\overline{g}_k\|_2^2.
\end{aligned}$$

Como el minimizador está fuera de la región de confianza

$$\begin{aligned}
\frac{\|\overline{g}_k\|_2^2 \|\overline{g}_k\|_\infty}{\overline{g}_k^T \overline{H}_k \overline{g}_k} &> \delta_k \\
-\frac{1}{2} \frac{\delta_k^2}{\|\overline{g}_k\|_\infty^2} \overline{g}_k^T \overline{H}_k \overline{g}_k &> -\frac{1}{2} \delta_k \frac{\|\overline{g}_k\|_2^2}{\|\overline{g}_k\|_\infty}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_k(0) - \bar{Q}_k(\bar{s}_k^{\text{tCP}}) &> -\frac{1}{2}\delta_k \frac{\|\bar{g}_k\|_2^2}{\|\bar{g}_k\|_\infty} + \delta_k \frac{\|\bar{g}_k\|_2^2}{\|\bar{g}_k\|_\infty} \\
&= \frac{1}{2}\delta_k \frac{\|\bar{g}_k\|_2^2}{\|\bar{g}_k\|_\infty} = \frac{1}{2}\delta_k \left( \frac{\|\bar{g}_k\|_2^2}{\|\bar{g}_k\|_\infty} \right) \|\bar{g}_k\|_2 \\
&\geq \frac{1}{2}\delta_k \|\bar{g}_k\|_2 = \frac{1}{2}\delta_k \|W_k \nabla Q_k(s_k^n)\|_2 \\
&= \frac{1}{2}\delta_k \|\nabla Q_k(s_k^n)\|_2, \tag{6.9}
\end{aligned}$$

ya que  $\|x\|_2 \geq \|x\|_\infty$  y la norma Euclidiana preserva las transformaciones ortogonales.

Consideramos ahora el caso en que la curvatura del modelo cuadrático  $\bar{Q}_k(\bar{s}^{\text{t}})$  a lo largo de la dirección negativa de su gradiente proyectado,  $-\bar{d}_k^{\text{t}}$ , no es positiva, i.e., si

$$\bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k \leq 0,$$

entonces

$$\bar{s}_k^{\text{tCP}} = -\frac{\delta_k}{\|\bar{g}_k\|_\infty} \bar{g}_k.$$

Reemplazando en el modelo cuadrático

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_k(0) - \bar{Q}_k(\bar{s}_k^{\text{tCP}}) &= -\frac{1}{2}(\bar{s}_k^{\text{tCP}})^T \bar{H}_k \bar{s}_k^{\text{tCP}} - \bar{g}_k^T \bar{s}_k^{\text{tCP}} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\delta_k^2}{\|\bar{g}_k\|_\infty^2} \bar{g}_k^T \bar{H}_k \bar{g}_k + \frac{\delta_k}{\|\bar{g}_k\|_\infty} \bar{g}_k^T \bar{g}_k \\
&\geq \frac{\delta_k}{\|\bar{g}_k\|_\infty} \bar{g}_k^T \bar{g}_k \\
&= \delta_k \left( \frac{\|\bar{g}_k\|_2}{\|\bar{g}_k\|_\infty} \right) \|\bar{g}_k\|_2 \\
&\geq \frac{1}{2}\delta_k \|\bar{g}_k\|_2 \\
&= \frac{1}{2}\delta_k \|W_k \nabla Q_k(s_k^n)\|_2 \\
&= \frac{1}{2}\delta_k \|\nabla Q_k(s_k^n)\|_2, \tag{6.10}
\end{aligned}$$

ya que  $\frac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty} \geq 1 > \frac{1}{2}$  y la norma Euclidiana preserva las transformaciones ortogonales.

De (6.8), (6.9) y (6.10) se tiene

$$\bar{Q}_k(0) - \bar{Q}_k(\bar{s}_k^{\text{tCP}}) \geq \frac{1}{2} \|\nabla Q_k(s_k^n)\|_2 \min \left\{ \frac{\|\nabla Q_k(s_k^n)\|_2}{\kappa_H}, \delta_k \right\}.$$

□

Como en el caso sin restricciones, el modelo cuadrático del Lagrangiano debe satisfacer una condición de decrecimiento de Cauchy del tipo (2.9)

$$Q_k(s_k^n) - Q_k(s_k) \geq \sigma_1 [Q_k(s_k^n) - Q_k(W_k \bar{s}_k^{\text{tCP}})], \quad (6.11)$$

para algún  $\sigma_1 \in (0, 1)$ , o para el modelo reducido

$$\bar{Q}_k(0) - \bar{Q}_k(s_k^{\text{t}}) \geq \sigma_1 [\bar{Q}_k(0) - \bar{Q}_k(\bar{s}_k^{\text{tCP}})]. \quad (6.12)$$

### 6.3 Buena definición del algoritmo

La siguiente desigualdad asegura que cuando el punto actual está próximo a la región factible, el paso normal debe ser corto. Esta puede ser vista como una relajación a la condición de ortogonalidad entre las componentes normal y tangente del paso.

**Lema 6.3.** *Asumiendo las hipótesis (1)-(2), existe una constante  $\nu_1$  tal que*

$$\|s_k^n\|_2 \leq \nu_1 h_k,$$

donde  $h_k = \|c(x_k)\|_\infty$ .

*Demostración.* Analizamos dos casos:

1. Si  $x_k$  es factible, entonces  $s_k^n = 0$  y la desigualdad es trivialmente válida.
2. En otro caso, por la forma de calcular el paso y como  $\nabla c_k$  tiene rango completo,

$$\begin{aligned} \nabla c_k^T s_k^n + c_k &= 0 \\ \nabla c_k^T \nabla c_k y_k &= -c_k, \end{aligned}$$

donde  $s_k = \nabla c_k y_k$ , de modo que,  $y_k = -(\nabla c_k^T \nabla c_k)^\dagger c_k$ .

$$\begin{aligned} \|s_k^{nm}\|_2 &= \|\nabla c_k y\|_2 \\ &= \|\nabla c_k (\nabla c_k^T \nabla c_k)^\dagger c_k\|_2 \\ &\leq \|\nabla c_k\|_2 \|(\nabla c_k^T \nabla c_k)^\dagger\|_2 \|c_k\|_2 \\ &\leq \kappa_{gc} \kappa_{gc^\dagger} h_k. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\|s_k^n\|_2 \leq \|s_k^{nm}\|_2 \leq \nu_1 h_k,$$

tomando  $\nu_1 = \kappa_{gc} \kappa_{gc^\dagger}$ .

□

**Lema 6.4.** *Asumiendo las hipótesis (1)-(2), si  $s_k$  es la solución del subproblema de región de confianza (5.5), entonces el punto de prueba  $x_+ = x_k + s_k$  satisface la desigualdad*

$$h(x_+) \leq \frac{1}{2} \delta_k^2 n \kappa_{Hc}.$$

*Demostración.* Como  $c \in C^2(D)$ , con  $\Omega \subset D$  y la construcción del algoritmo asegura que  $x_k \in \Omega$ , usando el desarrollo de Taylor de cada restricción  $c_j(x)$  alrededor de  $x_k$

$$\begin{aligned} c_j(x_k + s_k) &= c_j(x_k) + \nabla c_j(x_k)^T s_k + \frac{1}{2} s_k^T \nabla^2 c_j(x_k + \mu_{j,k} s_k) s_k \\ &= \frac{1}{2} s_k^T \nabla^2 c_j(x_k + \mu_{j,k} s_k) s_k, \end{aligned}$$

con cada  $\mu_{j,k} \in (0, 1)$ .

Entonces,

$$\begin{aligned} |c_j(x_k + s_k)| &\leq \frac{1}{2} \|\nabla^2 c_j(x_k + \mu_{j,k} s_k)\|_2 \|s_k\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \kappa_{Hc} n \|s_k\|_\infty^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \kappa_{Hc} n \delta_k^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$h(x_+) = \|c(x_k + s_k)\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq m} |c_j(x_k + s_k)| \leq \frac{1}{2} \kappa_{Hc} n \delta_k^2.$$

□

El siguiente lema garantiza que para valores del radio de región de confianza suficientemente pequeños, el par  $(h_+, \psi_+)$  asociado al paso de prueba, está dominado por a lo sumo  $M - 1$  pares del filtro, y por lo tanto puede ser considerado aceptable para ser incluido en el filtro.

**Lema 6.5.** *Asumiendo las hipótesis (1)-(2), el par  $(h_+, \psi_+)$  asociado al punto de prueba  $x_+ = x_k + s_k$  está dominado a lo sumo por  $M - 1$  pares del filtro  $\mathcal{F}_k$  si*

$$\delta_k^2 \leq \frac{2(1 - \gamma)\tau_k}{n\kappa_{Hc}}, \quad (6.13)$$

donde  $\tau_k \leq h_j$  para  $j \in I_{\mathcal{F}_k}$ , conjunto de índices de pares del filtro  $\mathcal{F}_k$ , salvo un número  $M - 1$  de índices.

*Demostración.* Usando el Lema 6.4

$$h(x_k + s) \leq \frac{1}{2}\delta_k^2 n\kappa_{Hc} < (1 - \gamma)\tau_k,$$

si vale (6.13). En este caso,

$$h(x_k + s) < (1 - \gamma)\tau_k < (1 - \gamma)h_j,$$

para todo  $j \in I_{\mathcal{F}_k}$  salvo un número  $M - 1$  de índices. Por lo tanto, el par  $(h_+, \psi_+)$  está dominado a lo sumo por  $M - 1$  pares del filtro  $\mathcal{F}_k$ .  $\square$

**Lema 6.6.** *Asumiendo las hipótesis (1)-(2), si  $s_k$  es la solución del subproblema de región de confianza (5.5), entonces existe una constante  $\nu_2 > 0$  tal que*

$$\nu_2 h_k \leq \|s_k^n\|_2.$$

*Demostración.* Definimos el conjunto

$$V_k = \{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq m, h_k = |c_j(x_k)|\},$$

donde se alcanza el máximo valor del error de la factibilidad en la  $k$ -ésima iteración, ya que

$$h_k = h(x_k) = \|c(x_k)\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq m} |c_j(x_k)|.$$

Para cada  $j \in V_k$  se tiene

$$h_k = |c_j(x_k)| = |\nabla c_j(x_k)^T s_k^n| \leq \|\nabla c_j(x_k)\|_2 \|s_k^n\|_2 \leq \kappa_{gc} \|s_k^n\|_2.$$

Basta entonces tomar  $\nu_2 = \frac{1}{\kappa_{gc}}$ .  $\square$

El siguiente lema asegura que para un radio de región de confianza suficientemente pequeño, el modelo cuadrático del Lagrangiano predice un decrecimiento no monótono suficientemente positivo para no ser rechazado por el algoritmo.

**Lema 6.7.** *Asumiendo que valen las hipótesis (1)-(3). Si el Algoritmo 5.1 aún no terminó en la  $k$ -ésima iteración, y  $h_k \leq \varrho_1 \delta_k$ , entonces existen constantes  $\nu_3, \nu_4 > 0$  tales que*

1.  $Pred_k^{nm} \geq \nu_3 h_k$ ,
2.  $Pred_k^{nm} \geq \nu_4 \delta_k$ ,

cuando

$$\varrho_1 = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2\kappa_H \nu_1 \delta_{max}}, \frac{\sigma_1 \varepsilon}{4} \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2\kappa_H \delta_{max}} \right\} \right\},$$

para algún  $\varepsilon > 0$ .

*Demostración.*

1. El decrecimiento del modelo cuadrático del Lagrangiano desde el punto  $x_k^n = x_k + s_k^n$ , a lo largo del espacio tangente, satisface la condición

$$Q_k(s_k^n) - Q_k(s_k) \geq \frac{\sigma_1}{2} \|\nabla Q_k(s_k^n)\|_2 \min \left\{ \delta_k, \frac{\|\nabla Q_k(s_k^n)\|_2}{\kappa_H} \right\}, \quad (6.14)$$

como consecuencia del Lema 6.2 y el hecho que la componente tangencial  $s_k^t$  genera un decrecimiento que es al menos una fracción del decrecimiento que produce el paso de Cauchy (6.11).

Asumiendo que el algoritmo no terminó en la  $k$ -ésima iteración, se tiene  $\|\nabla_x \ell_k\|_2 > \varepsilon$ , para algún  $\varepsilon > 0$ . Entonces, usando el Lema 6.3

$$\|H_k s_k^n\|_2 \leq \|H_k\|_2 \|s_k^n\|_2 \leq \kappa_H \nu_1 h_k.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \|\nabla Q_k(s_k^n)\|_2 &= \|H_k s_k^n + \nabla_x \ell_k\|_2 \\ &\geq \|\nabla_x \ell_k\|_2 - \|H_k s_k^n\|_2 \\ &\geq \varepsilon - \kappa_H \nu_1 h_k \\ &\geq \varepsilon - \kappa_H \nu_1 \varrho_1 \delta_k \\ &\geq \varepsilon - \kappa_H \nu_1 \varrho_1 \delta_{max} \geq \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

siempre que  $\frac{\varepsilon}{2} \geq \kappa_H \nu_1 \varrho_1 \delta_{max}$ , es decir,

$$\varrho_1 \leq \frac{\varepsilon}{2\kappa_H \nu_1 \delta_{max}}. \quad (6.16)$$

Entonces podemos escribir la condición de decrecimiento (6.14) como

$$\begin{aligned} Q_k(s_k^n) - Q_k(s_k) &\geq \frac{\sigma_1 \varepsilon}{4} \min \left\{ \delta_k, \frac{\varepsilon}{2\kappa_H} \right\} \\ &= \frac{\sigma_1 \varepsilon}{4} \delta_k \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2\kappa_H \delta_k} \right\} \\ &\geq \frac{\sigma_1 \varepsilon}{4} \delta_k \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2\kappa_H \delta_{max}} \right\}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

de modo que

$$Q_k(s_k^n) - Q_k(s_k) \geq \varrho_1 \delta_k \geq h_k,$$

siempre que  $\varrho_1 \leq \frac{\sigma_1 \varepsilon}{4} \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2\kappa_H \delta_{max}} \right\}$ .

Por lo tanto, asumiendo que  $h_k \leq \varrho_1 \delta_k$  se tiene

$$Q_k(s_k^n) - Q_k(s_k) \geq h_k,$$

siempre que  $\varrho_1 \leq \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2\kappa_H \nu_1 \delta_{max}}, \frac{\sigma_1 \varepsilon}{4} \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2\kappa_H \delta_{max}} \right\} \right\}$ .

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |Q_k(0) - Q_k(s_k^n)| &= \left| \frac{1}{2} (s_k^n)^T H_k s_k^n + \nabla_x \ell_k^T s_k^n \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \|H_k\|_2 \|s_k^n\|_2^2 + \|\nabla_x \ell_k^T\|_2 \|s_k^n\|_2 \\ &\leq \left( \frac{1}{2} \kappa_H \sqrt{nr} \delta_{max} + \kappa_{gl} \right) \nu_1 h_k. \end{aligned}$$

Como

$$Q_{l(k)}(0) = \ell(x_{l(k)}, \lambda_{l(k)}) \geq \ell(x_k, \lambda_k) = Q_k(0),$$

entonces podemos escribir

$$Q_{l(k)}(0) - Q_k(s_k^n) \geq -C_1 h_k, \quad (6.18)$$

donde  $C_1 = \left( \frac{1}{2} \kappa_H \sqrt{nr} \delta_{max} + \kappa_{gl} \right) \nu_1$ .

Finalmente,

$$\Delta \lambda_k^T (\nabla c_k^T s_k + c_k) \leq \|\Delta \lambda_k\|_2 \|\nabla c_k^T s_k + c_k\|_2,$$

pero, usando el Lema 6.3

$$\begin{aligned} \|\nabla c_k^T s_k + c_k\|_2 &= \|\nabla c_k^T s_k^n + c_k\|_2 \\ &\leq \|\nabla c_k\|_2 \|s_k^n\|_2 + \|c_k\|_2 \\ &\leq \kappa_{gc} \nu_1 h_k + \sqrt{m} h_k \\ &= (\kappa_{gc} \nu_1 + \sqrt{m}) h_k. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\Delta \lambda_k^T (\nabla c_k^T s_k + c_k) \leq C_2 h_k, \quad (6.19)$$

donde  $C_2 = \kappa_\lambda (\kappa_{gc} \nu_1 + \sqrt{m})$ .

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Pred_k^{nm} &= Q_{l(k)}(0) - Q_k(s_k) - \Delta_k^T (\nabla c_k^T s_k + c_k) \\ &\geq (-C_1 + 1 - C_2) h_k, \end{aligned}$$

siempre que

$$\delta_k \leq \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2\kappa_H \sqrt{nr}}, \frac{C_1 - 2\kappa_{gc} \sqrt{nr}}{\kappa_H nr^2} \right\}.$$

Basta entonces tomar

$$\nu_3 = -C_1 + 1 - C_2,$$

para obtener

$$Pred_k^{nm} \geq \nu_3 h_k.$$

2. Para la segunda desigualdad hacemos uso de algunos cálculos ya realizados.

De la desigualdad (6.17) tenemos que

$$Q_k(s_k^n) - Q_k(s_k) \geq C_3 \delta_k,$$

con  $C_3 = \frac{\sigma_1 \varepsilon}{4} \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2\kappa_H \delta_{max}} \right\}$ , siempre que se cumpla (6.16).  
De (6.18) obtenemos

$$Q_{l(k)}(0) - Q_k(s_k^n) \geq -C_1 h_k \geq -C_1 \varrho_1 \delta_k \geq -C_1 \delta_k,$$

si  $\varrho_1 \leq 1$ .

Y finalmente de (6.19)

$$\Delta \lambda_k^T (\nabla c_k^T s_k + c_k) \leq C_2 h_k \leq C_2 \varrho_1 \delta_k \leq C_2 \delta_k,$$

si  $\varrho_1 \leq 1$ .

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Pred_k^{nm} &= Q_{l(k)}(0) - Q_k(s_k) - \Delta \lambda_k^T (\nabla c_k^T s_k + c_k) \\ &\geq (-C_1 + C_3 - C_2) \delta_k, \end{aligned}$$

siempre que

$$\varrho_1 \leq \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2\kappa_H \nu_1 \delta_{max}}, 1 \right\}.$$

Basta entonces tomar

$$\nu_4 = -C_1 + C_3 - C_2.$$

□

**Lema 6.8.** *Asumiendo las hipótesis (1)-(3), existe una constante  $\nu_5 > 0$  tal que*

$$|Ared_k^{nm} - Pred_k^{nm}| \leq \nu_5 \delta_k^2.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} |Ared_k^{nm} - Pred_k^{nm}| &= |\ell(x_{l(k)}, \lambda_{l(k)}) - \ell(x_k + s_k, \lambda_k) - \Delta \lambda_k^T c(x_k + s_k) - \\ &\quad \ell(x_{l(k)}, \lambda_{l(k)}) + \ell(x_k, \lambda_k) + \nabla_x \ell(x_k, \lambda_k)^T s_k + \\ &\quad \frac{1}{2} s_k^T H_k s_k + \Delta \lambda_k^T (\nabla c(x_k)^T s_k + c(x_k))| \\ &\leq |\ell(x_k + s_k, \lambda_k) - \ell(x_k, \lambda_k) - \nabla_x \ell(x_k, \lambda_k)^T s_k - \frac{1}{2} s_k^T H_k s_k| \\ &\quad + \|\Delta \lambda_k\|_2 \|c(x_k + s_k) - c(x_k) - \nabla c(x_k)^T s_k\|_2. \end{aligned}$$

Usando el desarrollo de Taylor de 2° orden de  $\ell(x, \lambda_k)$  alrededor de  $x_k$ ,

$$\ell(x_k + s_k, \lambda_k) = \ell(x_k, \lambda_k) + \nabla_x \ell(x_k, \lambda_k)^T s_k + \frac{1}{2} s_k^T \nabla_{xx}^2 \ell(x_k + \xi_1 s_k, \lambda_k) s_k,$$

con  $\xi_1 \in (0, 1)$ . Entonces

$$\begin{aligned} |\ell(x_k + s_k, \lambda_k) - \ell(x_k, \lambda_k) - \nabla_x \ell(x_k, \lambda_k)^T s_k - \frac{1}{2} s_k^T H_k s_k| &= \frac{1}{2} |s_k^T (\nabla_{xx}^2 \ell(x_k + \xi_1 s_k, \lambda_k) - H_k) s_k| \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla_{xx}^2 \ell(x_k + \xi_1 s_k, \lambda_k) - H_k\|_2 \|s_k\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \kappa_H \|s_k\|_2^2 \leq \frac{1}{2} \kappa_H \delta_k^2. \end{aligned}$$

Usando el desarrollo de Taylor de 2° orden de cada restricción  $c_j(x)$  alrededor de  $x_k$ ,

$$c_j(x_k + s_k) = c_j(x_k) + \nabla c_j(x_k)^T s_k + \frac{1}{2} s_k^T \nabla^2 c_j(x_k + \mu_{j,k} s_k) s_k,$$

con cada  $\mu_{j,k} \in (0, 1)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|c(x_k + s_k) - c(x_k) - \nabla c(x_k)^T s_k\|_2 &\leq \|c(x_k + s_k) - c(x_k) - \nabla c(x_k)^T s_k\|_1 \\ &= \sum_{j=1}^m |c_j(x_k + s_k) - c_j(x_k) - \nabla c_j(x_k)^T s_k| \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} |s_k^T \nabla^2 c_j(x_k + \mu_{j,k} s_k) s_k| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \|\nabla^2 c_j(x_k + \mu_{j,k} s_k)\|_2 \|s_k\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \kappa_{H_c} \|s_k\|_2^2 \leq \frac{1}{2} \kappa_{H_c} \delta_k^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|Ared_k^{nm} - Pred_k^{nm}| = \frac{1}{2} (\kappa_H + \kappa_\lambda \kappa_{H_c}) \delta_k^2.$$

Basta entonces tomar

$$\nu_5 = \frac{1}{2} (\kappa_H + \kappa_\lambda \kappa_{H_c}).$$

□

**Teorema 6.1.** *Asumiendo las hipótesis (1)-(3). Si el Algoritmo 5.1 no termina en la  $k$ -ésima iteración, entonces es posible generar un iterado de prueba  $x_+ = x_k + s_k$  tal que*

- a. *el par  $(h_+, \psi_+)$  está dominado a lo sumo por  $M$  pares de  $\mathcal{F}_k \cup \{(h_k, \psi_k)\}$ ,*
- b.  *$Pred_k^{nm} \geq \nu_3 h_k^2$ ,*
- c.  *$Ared_k^{nm} \geq \eta_1 Pred_k^{nm}$ ,*

*para un número finito de reducciones del radio de la región de confianza. Por lo tanto, el Algoritmo 5.1 está bien definido, en el sentido que no produce indefinidamente ciclos entre el **Paso 1** y el **Paso 4**.*

*Demostración.* Supongamos que el Algoritmo 5.1 genera, en la  $k$ -ésima iteración, ciclos entre los pasos 1 y 4, rechazando siempre el paso de prueba. Definimos el índice del ciclo interno producido en la  $k$ -ésima iteración por  $k(j)$ . En este ciclo interno se generan las sucesiones  $x_{k(j)} = x_k$ ,  $s_{k(j)}$ ,  $\delta_{k(j)}$  y las que de ellas se derivan. Cuando en cada iteración interna los pasos  $s_{k(j)}$  son rechazados, el radio de la región de confianza es reducido, eligiendo  $\delta_{k(j+1)} \in [\min\{\delta_{min}, \alpha_1 \delta_{k(j)}\}, \delta_{k(j)})$ , de modo que  $\|s_{k(j)}\| \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$ .

El Lema 6.5 garantiza que para  $\delta_{k(j)}$  suficientemente pequeño, el par  $(h_+, \psi_+)$  asociado al iterado  $x_+ = x_k + s_{k(j)}$  está dominado por a lo sumo  $M$  pares de  $\mathcal{F}_{k(j)} \cup \{(h_{k(j)}, \psi_{k(j)})\}$ .

El Lema 6.7 asegura que para  $\delta_{k(j)}$  suficientemente pequeño se verifica que

$$Pred_{k(j)}^{nm} \geq \nu_3 h_{k(j)} \geq \nu_3 h_{k(j)}^2.$$

Sólo queda probar que es posible hallar una iteración interna  $j$  tal que

$$Ared_{k(j)}^{nm} \geq \eta_1 Pred_{k(j)}^{nm}.$$

Usando los lemas 6.7 y 6.8 se tiene

$$\left| \frac{Ared_{k(j)}^{nm}}{Pred_{k(j)}^{nm}} - 1 \right| = \frac{|Ared_{k(j)}^{nm} - Pred_{k(j)}^{nm}|}{Pred_{k(j)}^{nm}} \leq \frac{\nu_5 \delta_k^2}{\nu_4 \delta_k} \rightarrow 0,$$

cuando  $j \rightarrow \infty$ .

Por lo tanto, es posible hallar un índice  $j$  tal que

$$\frac{Ared_{k(j)}^{nm}}{Pred_{k(j)}^{nm}} \geq \eta_1,$$

para un  $\eta_1 \in (0, 1)$  dado, obteniendo un paso aceptable para el Algoritmo 5.1 que satisface las condiciones (1), (2) y (3). Esto contradice la suposición hecha que el algoritmo genera en la  $k$ -ésima iteración una sucesión infinita de pasos rechazados.  $\square$

## 6.4 Convergencia global

**Lema 6.9.** *Cada par  $(h_k, \psi_k)$  ingresado al filtro satisface la condición  $h_k > 0$ .*

*Demostración.* Supongamos que el par  $(h_k, \psi_k)$  es ingresado al filtro, pero  $h_k = \|c(x_k)\|_\infty = 0$ . Entonces el punto  $x_k$  es factible y  $s_k = s_k^\dagger$ . Ahora, la componente tangente del paso es calculada minimizando el modelo cuadrático del Lagrangiano a lo largo del espacio tangente, de modo que  $Pred_k$  como aproximación de  $Ared_k$  debe ser positivo, esto es, el modelo cuadrático debe predecir un decrecimiento positivo, si es que el algoritmo no encontró un punto estacionario. Como

$$Pred_k^{nm} \geq Pred_k > 0 = \gamma h_k^2,$$

la condición (5.6) se satisface, y el paso no es de tipo  $h$  por lo que no sería ingresado al filtro contradiciendo la suposición.  $\square$

**Lema 6.10.** *Asumiendo las hipótesis (1)-(2). Si  $\{(h_k, \psi_k)\}_k$  es la sucesión de pares generados por el Algoritmo 5.1 que fueron agregados al filtro, entonces existe una subsucesión  $\{(h_{k_j}, \psi_{k_j})\}_j$  tal que  $h_{k_j} \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$ .*

*Demostración.* Cuando el par  $(h_k, \psi_k)$  fue agregado al filtro  $\mathcal{F}_k$  en el Paso 3, debió haber sido aceptado por el Algoritmo 5.1 en el Paso 4, en una iteración anterior, en la cual debió ser aceptado por el respectivo filtro, en el Paso 2, siendo dominado en ese momento por a lo sumo  $M$  pares del filtro, es decir, pares que pertenecen a la sucesión  $\{(h_k, \psi_k)\}_k$ .

Como  $f$  y  $c$  son de clase  $C^2$ , las funciones  $h$  y  $\psi$  son continuas en el abierto convexo  $D$  que contiene a la caja  $\Omega$ . El Algoritmo 5.1 sólo genera iterados  $x_k \in \Omega$ , que es un compacto, entonces la sucesión  $\{(h_k, \psi_k)\}_k$  tiene algún valor de adherencia  $(\bar{h}, \bar{\psi})$  en  $\Omega$ .

Supongamos que toda subsucesión de iterados  $\{x_{k_i}\}_i$  tal que  $(h_{k_i}, \psi_{k_i}) \rightarrow (\bar{h}, \bar{\psi})$  satisface  $\bar{h} > 0$ . Dado  $r_2 > 0$  existe  $i_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $i \geq i_0$  se verifica

$$(h_{k_i}, \psi_{k_i}) \in B_2((\bar{h}, \bar{\psi}), r_2).$$

Como  $h_{k_i} \rightarrow \bar{h} > 0$  cuando  $i \rightarrow \infty$ , podemos tomar  $0 < r_2 \leq \frac{\bar{h}}{2}$  de modo que para cada  $i \geq i_0$  se tiene

$$(h_{k_i} - \bar{h})^2 + (\psi_{k_i} - \bar{\psi})^2 < r_2^2.$$

Entonces

$$|h_{k_i} - \bar{h}| < r_2 \leq \frac{\bar{h}}{2},$$

de modo que

$$h_{k_i} > \frac{\bar{h}}{2} \quad \text{para cada } i \geq i_0. \quad (6.20)$$

Fijado  $i \geq i_0$ , para cada  $j = 1, \dots, M + 1$ ,

$$(h_{k_{i+j}}, \psi_{k_{i+j}}) \in B_2((\bar{h}, \bar{\psi}), r_2),$$

entonces,

$$|h_{k_{i+M+2}} - h_{k_{i+j}}| \leq |h_{k_{i+M+2}} - \bar{h}| + |\bar{h} - h_{k_{i+j}}| < 2r_2,$$

y por otro lado,

$$|\psi_{k_{i+M+2}} - \psi_{k_{i+j}}| \leq |\psi_{k_{i+M+2}} - \bar{\psi}| + |\bar{\psi} - \psi_{k_{i+j}}| < 2r_2.$$

Tomando  $0 \leq r_2 \leq \frac{\bar{h}}{4}\gamma$ , con  $0 < \gamma < 1$  como en el Paso 2 del Algoritmo 5.1, se tiene

$$|h_{k_{i+M+2}} - h_{k_{i+j}}| < 2r_2 \leq \frac{\bar{h}}{2}\gamma,$$

entonces, usando la desigualdad (6.20),

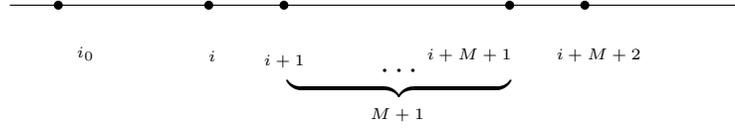
$$h_{k_{i+M+2}} > h_{k_{i+j}} - \frac{\bar{h}}{2}\gamma > h_{k_{i+j}} - \gamma h_{k_{i+j}} = (1 - \gamma)h_{k_{i+j}}.$$

Por otro lado,

$$|\psi_{k_{i+M+2}} - \psi_{k_{i+j}}| < 2r_2 \leq \frac{\bar{h}}{2}\gamma,$$

entonces, usando la desigualdad (6.20),

$$\psi_{k_{i+M+2}} \geq \psi_{k_{i+j}} - \frac{\bar{h}}{2}\gamma > \psi_{k_{i+j}} - \gamma h_{k_{i+M+2}}.$$



**Figura 6.3:** Esquema de índices.

Por lo tanto, para cada  $i \geq i_0$  el par  $(h_{k_{i+M+2}}, \psi_{k_{i+M+2}})$  es dominado por los pares  $(h_{k_{i+j}}, \psi_{k_{i+j}})$  para  $j = 1, \dots, M+1$ .

Pero la condición no monótona de aceptación de pares por parte del filtro dice que el par  $(h_{k_{i+M+2}}, \psi_{k_{i+M+2}})$  debe ser dominado a lo sumo por  $M$  pares de la subsucesión, todos ellos incorporados anteriormente al filtro.

Por lo tanto, se debe tener  $h_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Teorema 6.2.** *Asumiendo las hipótesis (1)-(4). El Algoritmo 5.1 termina en un número finito de iteraciones, o*

$$\liminf h_k = 0 \quad y \quad \liminf \psi_k = 0,$$

es decir, existe alguna subsucesión  $\{x_{k_j}\}_j$  tal que  $h_{k_j} \rightarrow 0$  y  $\psi_{k_j} \rightarrow 0$ , cuando  $j \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Si el algoritmo termina luego de un número finito de pasos, no hay nada que probar. Asumimos entonces que el Algoritmo 5.1 no termina y consideramos dos situaciones:

1. El algoritmo genera un número infinito de iteraciones de tipo  $h$  cuyos pares son agregados al filtro.

El Lema 6.10 asegura que es posible obtener de entre ellas una subsucesión  $\{x_{k_j}\}_j$  tal que  $h_{k_j} \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$ .

Las iteraciones de tipo  $h$  son rechazadas por el algoritmo, disminuyendo el radio de la región de confianza para volver a calcular un nuevo iterado. Pero la sucesión de radios de región de confianza  $\{\delta_k\}_k$  está acotada inferiormente por  $\delta_{min} > 0$ , entonces a partir de cierto momento se satisfacen las condiciones del Lema 6.7 para la sucesión  $\{x_{h_j}\}_j$ , es decir, existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $h_{k_j} \leq \varrho_1 \delta_{k_j}$ , para  $j \geq N_1$ . De este modo,

$$Pred_{k_j}^{nm} \geq \nu_4 \delta_{k_j} \quad \text{para } j \geq N_1.$$

Supongamos que la sucesión  $\{\psi_{k_j}\}_j$  no converge a cero, esto es, supongamos que existe  $\tau > 0$  tal que  $\psi_{k_j} > \tau$  siempre que  $j \geq N_2$ , para algún  $N_2 \in \mathbb{N}$ . Como cada par  $(h_{k_j}, \psi_{k_j})$  fue ingresado al filtro, el iterado asociado  $x_{k_j}$  ha sido rechazado por el algoritmo. Pero el algoritmo está bien definido, de modo que no todos los iterados  $x_{k_j}$  pueden pertenecer a la misma iteración interna. Para cada  $x_{k_j}$  existe un  $x_{k_{j+J}} = x_{k_a}$  que será aceptado. Entonces

$$Ared_{k_a}^{nm} \geq \eta_1 Pred_{k_a}^{nm} \geq \eta_1 \nu_4 \delta_{k_a} \geq \eta_1 \nu_4 \delta_{min}.$$

O sea que,

$$\ell(x_{l(k_a)}, \lambda_{l(k_a)}) - \ell(x_{k_a} + s_{k_a}, \lambda_{k_a} + \Delta \lambda_{k_a}) \geq \eta_1 \nu_4 \delta_{min}.$$

Esto dice que el decrecimiento del Lagrangiano en el iterado de prueba  $x_{k_a}$  respecto de sus últimos  $M$  valores en puntos de la sucesión es al menos de  $\eta_1 \nu_4 \delta_{max}$ , para algún punto aceptado posteriormente a cada término de la subsucesión con  $j \geq \max\{N_1, N_2\}$ . Por lo tanto, la subsucesión  $\ell(x_{k_a})$  no puede estar acotada inferiormente contradiciendo las hipótesis (1) y (2).

2. El Algoritmo 5.1 genera sólo un número finito de iteraciones de tipo  $h$ . Entonces a partir de cierto momento las iteraciones satisfacen la condición de suficiente positividad del algoritmo y existe  $N_3 \in \mathbb{N}$  tal que

$$Pred_k^{nm} \geq \gamma h_k^2, \quad (6.21)$$

para  $k \geq N_3$ .

Como el algoritmo está bien definido, cada ciclo de iteraciones rechazadas es finito, luego del cual es posible hallar un iterado aceptado que satisface

$$Ared_k^{nm} \geq \eta_1 Pred_k^{nm},$$

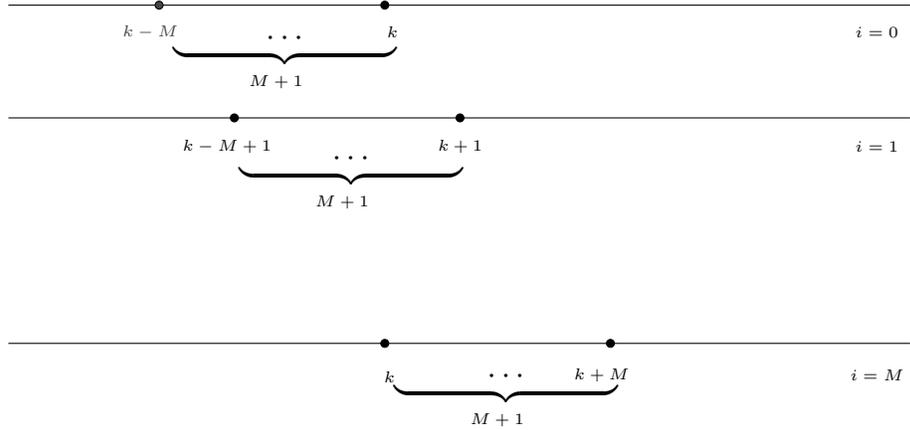
es decir,

$$\max_{0 \leq j \leq M} \ell(x_{k-j}, \lambda_{k-j}) \geq \ell(x_{k+1}, \lambda_{k+1}) + \eta_1 Pred_k^{nm}.$$

De esta manera podemos construir de entre los iterados generados por el algoritmo una sucesión infinita  $\{x_k\}$  de iterados aceptados que verifican

estas dos condiciones. Como la sucesión de máximos es decreciente, para  $i = 0, \dots, M$

$$\begin{aligned}
\max_{0 \leq j \leq M} \ell_{k-j} &= \max_{0 \leq i \leq M} \max_{0 \leq j \leq M} \ell_{k-(j-i)} \\
&\geq \max_{0 \leq j \leq M} \ell_{k-(j-i)} \quad \text{para cada } i = 0, \dots, M \\
&= \max_{0 \leq j \leq M} \ell_{(k+i)-j} \\
&\geq \ell_{(k+i)+1} + \eta_1 \text{Pred}_{k+i}^{\text{nm}} \\
&\geq \ell_{(k+i)+1} + \eta_1 \min_{0 \leq i \leq M} \text{Pred}_{k+i}^{\text{nm}} \\
&= \ell_{(k+i)+1} + \eta_1 \min_{1 \leq j \leq M+1} \text{Pred}_{k+j-1}^{\text{nm}}.
\end{aligned}$$



**Figura 6.4:** Esquema de índices.

Por lo tanto, para  $i = 0, \dots, M$

$$\max_{0 \leq j \leq M} \ell_{k-j} \geq \ell_{(k+i)+1} + \eta_1 \min_{1 \leq j \leq M+1} \text{Pred}_{k+j-1}^{\text{nm}},$$

o sea,

$$\max_{0 \leq j \leq M} \ell_{k-j} - \eta_1 \min_{1 \leq j \leq M+1} \text{Pred}_{k+j-1}^{\text{nm}} \geq \ell_{(k+i)+1},$$

entonces

$$\max_{0 \leq j \leq M} \ell_{k-j} - \eta_1 \min_{1 \leq j \leq M+1} \text{Pred}_{k+j-1}^{\text{nm}} \geq \max_{1 \leq j \leq M+1} \ell_{k+j},$$

que podemos escribir como

$$\max_{0 \leq j \leq M} \ell_{k-j} - \max_{1 \leq j \leq M+1} \ell_{k+j} \geq \eta_1 \min_{1 \leq j \leq M+1} \text{Pred}_{k+j-1}^{\text{nm}}. \quad (6.22)$$

Como la función  $\ell(x, \lambda)$  es continua sobre la caja  $\Omega$ , está acotada inferiormente y la sucesión decreciente de máximos tiene límite. Entonces el lado izquierdo de (6.22) tiende a 0 cuando  $k \rightarrow \infty$ . Como  $\text{Pred}_k^{\text{nm}} \geq \beta h_k \geq 0$ , el lado derecho de (6.22) también tiende a 0, es decir,

$$\min_{1 \leq j \leq M+1} \text{Pred}_{k+j-1}^{\text{nm}} \rightarrow 0,$$

cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Dado el conjunto  $\mathcal{M} = \{l : \min_{1 \leq j \leq M+1} \text{Pred}_{k+j-1}^{\text{nm}} = \text{Pred}_l^{\text{nm}}\}$ , considerar

la subsucesión  $\{x_k\}_{k \in \mathcal{M}}$ .

Como la sucesión yace dentro del compacto  $\Omega$ , esta subsucesión debe tener al menos un punto límite  $\bar{x}$ , entonces existe una subsucesión  $\{x_{k_j}\}_{k_j \in \mathcal{M}}$  tal que  $x_{k_j} \rightarrow \bar{x}$  cuando  $j \rightarrow \infty$ . Pero para  $k_j \in \mathcal{M}$  se satisface que  $\text{Pred}_{k_j}^{\text{nm}} \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$ , entonces también se verifica que  $h_{k_j} \rightarrow 0$ , por la condición de suficiente positividad (6.21). Como vimos anteriormente, esto asegura que a partir de cierto momento se satisfacen las condiciones del Lema 6.7 de modo que  $\text{Pred}_{k_j}^{\text{nm}} \geq \nu_4 \delta_{k_j}$ , siempre que  $k_j \geq N_1$  para algún  $N_1 \in \mathbb{N}$ . Como en el caso anterior, si suponemos que la subsucesión  $\{\psi_{k_j}\}_{k_j \in \mathcal{M}}$  no converge a cero, el algoritmo sigue generado iterados con estas propiedades, de modo que

$$\text{Ared}_{k_j}^{\text{nm}} \geq \eta_1 \text{Pred}_{k_j}^{\text{nm}} \geq \eta_1 \nu_4 \delta_{k_j} \geq \eta_1 \nu_4 \delta_{\min}.$$

O sea que,

$$\ell(x_{k_j(l)}, \lambda_{k_j(l)}) - \ell(x_{k_j} + s_{k_j}, \lambda_{k_j} + \Delta \lambda_{k_j}) \geq \eta_1 \nu_4 \delta_{\min}.$$

Esto dice que el decrecimiento del Lagrangiano en el iterado de prueba  $x_{k_j}$  respecto de sus últimos  $M$  valores en puntos de la subsucesión es al menos de  $\eta_1 \nu_4 \delta_{\min}$ , para términos de la subsucesión posteriores a  $N_1$ ,  $N_2$  y  $N_3$ . Es decir, cada  $M$  iterados en esta situación, la subsucesión

produce en el Lagrangiano un decrecimiento superior a  $\eta_1\nu_4\delta_{min}$ . Por lo tanto, como en el caso anterior, la subsucesión  $\ell_{k_j(l)}$  no puede estar acotada inferiormente contradiciendo las hipótesis (1) y (2).

□

# Capítulo 7

## Resultados numéricos

En este capítulo presentamos resultados numéricos del algoritmo que estamos proponiendo para resolver el problema consistente en minimizar una función bajo restricciones de igualdad y dentro de una caja (3.1). Las pruebas numéricas han tenido el objetivo, como en el caso de optimización sin restricciones del capítulo 3, de comparar los resultados producidos por el algoritmo utilizando la tradicional condición de suficiente decrecimiento monótona para la aceptación del paso de prueba,

$$ared_k \geq \eta pred_k,$$

donde  $0 < \eta < 1$ , y

$$\begin{aligned}ared_k &= \ell(x_k, \lambda_k) - \ell(x_k + s_k, \lambda_k + \Delta_k), \\pred_k &= q_k(0) - q_k(s_k),\end{aligned}$$

versus la condición no monótona de aceptación propuesta

$$ared_k^{nm} \geq \eta pred_k^{nm},$$

donde  $0 < \eta < 1$ ,

$$\begin{aligned}ared_k^{nm} &= \ell_{max} - \ell(x_k + s_k, \lambda_k + \Delta_k), \\pred_k^{nm} &= q_{l(k)}(0) - q_k(s_k) - \Delta \lambda_k^T (\nabla c(x_k)^T s_k + c(x_k)),\end{aligned}$$

y  $l(k)$  es un entero no negativo tal que

$$\begin{aligned}k - m(k) &\leq l(k) \leq m(k), \\m(0) &= 0, \\0 \leq m(k) &\leq \min\{m(k-1) + 1, M\} \quad \text{para } k \geq 1,\end{aligned}$$

y

$$\ell(x_{l(k)}, \lambda_{l(k)}) = \ell_{max} = \max_{0 \leq j \leq m(k)} \ell(x_{k-j}, \lambda_{k-j}),$$

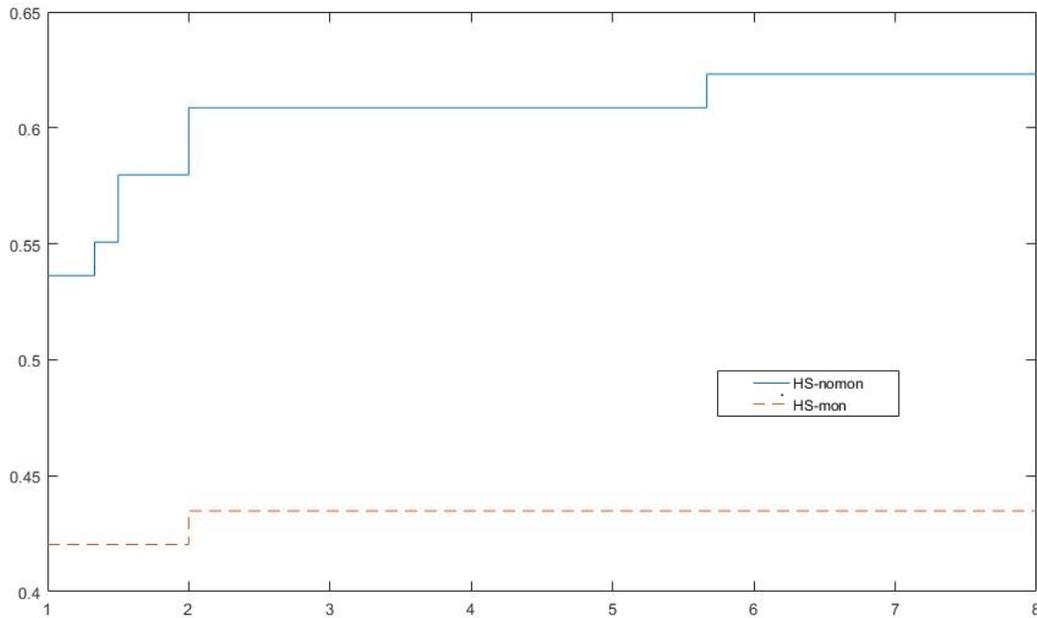
esto es,  $\ell_{max}$  es el máximo valor del Lagrangiano obtenido en las últimas  $M$  iteraciones, para un valor prefijado  $M$ .

En primer lugar se seleccionaron 70 problemas de Hock y Schittkowski [HS81, SCH] de variados tamaños. Algunos parámetros elegidos han sido:  $\eta_1 = 10^{-1}$ ,  $\eta_2 = 0.9$ ,  $\gamma = 10^{-1}$ ,  $\alpha_1 = 0.5$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\delta_{min} = 10^{-6}$ ,  $\delta_{max} = 10^6$ , and  $M = 5$ .

Se presentan y analizan a continuación los perfiles de rendimiento de ambos algoritmos, tomando como medidas de rendimiento, el número de iteraciones, de evaluaciones de la función objetivo  $f$  y de su gradiente. Nos referimos al algoritmo monótono como **HS-mon** y al algoritmo no monótono como **HS-nomon**.

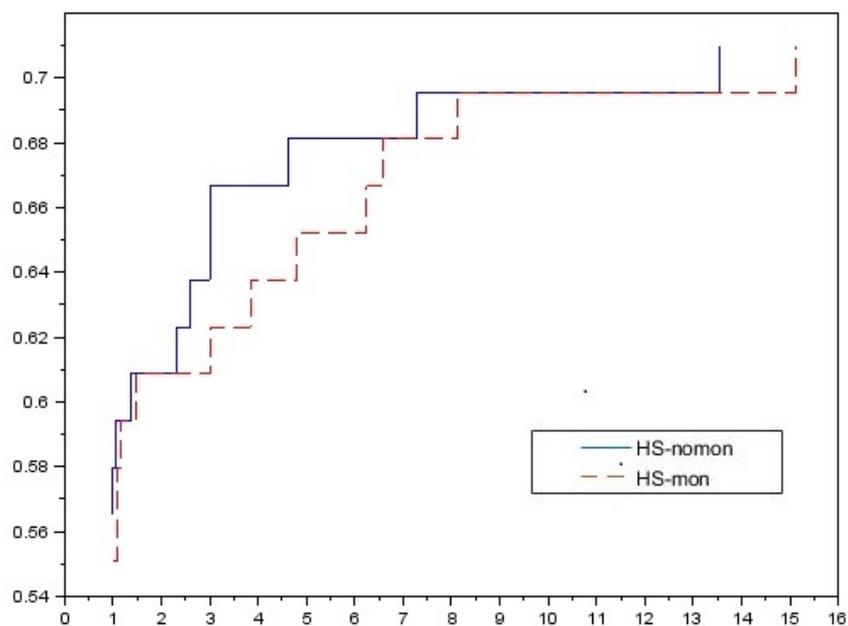
En la figura 7.1 se muestra el comportamiento de los algoritmos tomando como medida comparativa el número de iteraciones necesarias para alcanzar la solución. En el margen izquierdo podemos observar que el algoritmo **HS-nomon** tiene una mayor probabilidad de ser considerado óptimo. Con un 54% de chances de resolver un problema mejor, el algoritmo **HS-nomon** supera al **HS-mon**, que tiene un 42% de posibilidades de ser eficiente.

Comparando la eficiencia en un factor de 2, esto es, calculando la probabilidad, para cada algoritmo, de que en algún problema tenga un rendimiento de a lo sumo 2 veces mejor, vemos que el algoritmo **HS-nomon** mejora su eficacia, resolviendo satisfactoriamente el 61% de los problemas, mientras que el algoritmo **HS-mon** sólo mejora en un 2%. De allí en adelante ambos algoritmos mantienen casi el mismo rendimiento. En el margen derecho, la figura 7.1 muestra que el algoritmo **HS-nomon** es más robusto que el algoritmo **HS-mon**, resolviendo el 61% de los problemas, mientras que el segundo sólo lo hace en un 44%.



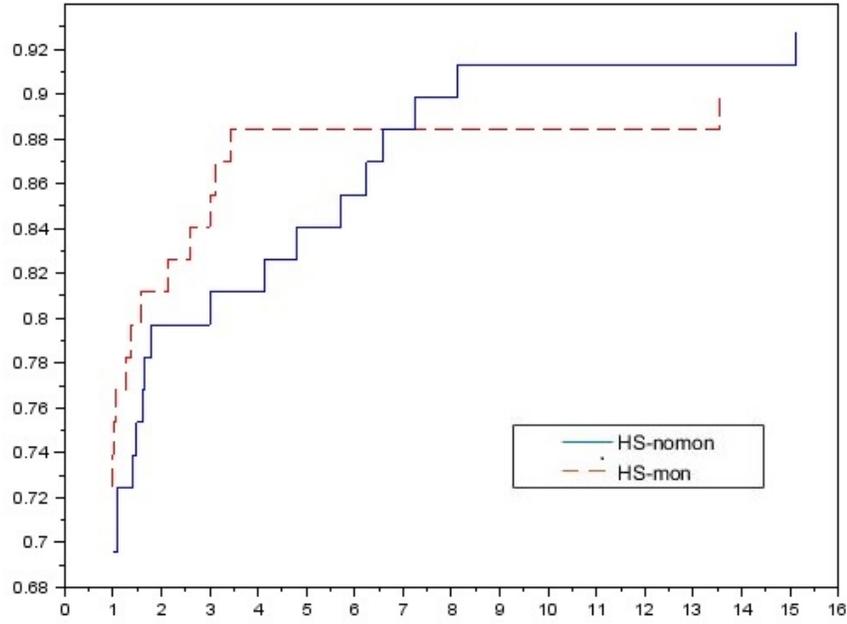
**Figura 7.1:** Perfil de rendimiento para el número de iteraciones.

En la figura 7.2, la medida de rendimiento es el número de evaluaciones de la función objetivo. Vemos nuevamente que el algoritmo **HS-nomon** tiene un mejor desempeño que el algoritmo **HS-mon**. Con una probabilidad cercana al 55% el algoritmo **HS-nomon** resuelve eficientemente los problemas con un número menor de evaluaciones de la función objetivo, mientras que el algoritmo **HS-mon** tiene una eficiencia similar, pero menor, respecto de esta medida de desempeño. La tendencia se mantiene, aunque el rendimiento del algoritmo **HS-nomon** mejora su desempeño más rápidamente. Observando a la derecha del gráfico vemos, sin embargo, que ambos algoritmos tienen una robustez similar, ya que ambos resuelven algún problema con una eficiencia superior a un 70%, consiguiéndolo antes el algoritmo **HS-nomon**.



**Figura 7.2:** Perfil de rendimiento para el número de evaluaciones de funciones.

En la figura 7.3 comparamos los dos algoritmos usando como medida de desempeño el número de evaluaciones del gradiente de la función objetivo. Vemos que el rendimiento es similar al que vimos antes, aunque el algoritmo HS-nomon mejora su desempeño en forma mucho más lenta.



**Figura 7.3:** Perfil de rendimiento para el número de evaluaciones de gradientes.

A continuación se presentan resultados numéricos sobre un problema presentado por Gomes, Maciel y Martínez [GMM99]. Consideramos el problema de estimar una solución de la ecuación diferencial

$$-y'' + e^y = F(t), \quad t \in [0, 2\pi] \quad (7.1)$$

que ajusta las observaciones con ruido  $(t_1, y_1), \dots, (t_n, y_n)$ .

En nuestro caso  $F(t) = \sin(t) + \exp(\sin(t))$ , de modo que la función  $y(t) = \sin(t)$  es una solución particular de (7.1). Dividimos el intervalo  $[0, 2\pi]$  en  $ndiv$  intervalos igualmente espaciados definiendo  $h = \frac{2\pi}{ndiv}$ . A continuación se discretiza la ecuación (7.1) usando diferencias centrales,

$$\frac{-x_{i-1} + 2x_i + x_{i+1}}{h^2} + \exp(x_i) = F((i-1)h), \quad i = 2, \dots, ndiv. \quad (7.2)$$

Las  $n$  variables a determinar en el problema serán los valores de la función  $y(t)$  en la grilla  $t = ih$ , para  $i = 0, \dots, ndiv$ , para las cuales usamos la notación  $x_{i+1} = y(ih)$ .

Como queremos aproximar la solución  $y(t) = \sin(t)$ , nuestras variables están en la caja  $-1 \leq x_i \leq 1$  para  $i = 1, \dots, ndiv$ , debiendo satisfacer además las  $m = ndiv - 1 = n - 2$  restricciones (7.2).

La función objetivo del problema es una medida del error de los valores teóricos predichos por la solución de la ecuación diferencial,  $y(t)$ , respecto de los datos observados  $y^{obs}$ , que puede ser expresada como

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1, \dots, x_n) = f(y(0), y(h), \dots, y((n-1)h)) & (7.3) \\ &= \sum_{\nu=1}^n \phi(|y_{\nu}^{obs} - y((\nu-1)h)|) \end{aligned}$$

donde  $\phi$  es una medida de la desviación de cada uno de los datos, frecuentemente calculada usando  $\phi(t) = t^2$ . Sin embargo, si algunas observaciones atípicas están sujetas a grandes errores es necesaria una medida de desviación que esté menos sujeta a valores extremos. Gomes, Maciel y Martínez [GMM99] definen

$$\phi(z) = \begin{cases} z^2 & \text{si } z \leq 0.25 \\ 0.5(z - 0.25) + 0.0625 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (7.4)$$

de modo que tanto  $\phi$  con  $f$  no son diferenciables en  $z = 0.25$ .

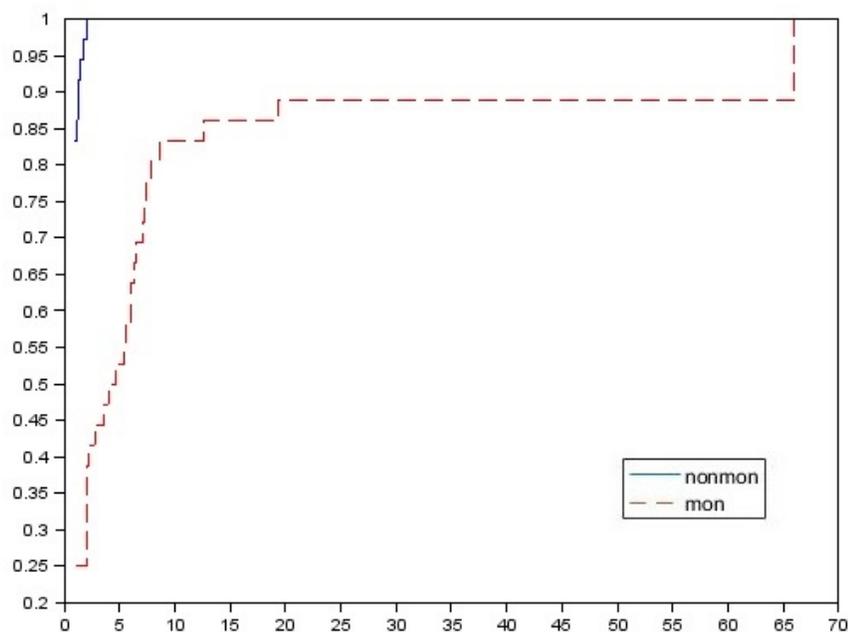
Las experiencias numéricas con este problema fueron diseñadas teniendo en cuenta que:

1. para cada valor *normal*  $t_i$  de la grilla, la observación  $y_i^{obs}$  es elegida aleatoriamente en  $[\sin(t_i) - 0.1, \sin(t_i) + 0.1]$ ,
2. para cada valor *atípico*  $t_i$ , la observación  $y_i$  es elegida aleatoriamente en  $[\sin(t_i) - 0.4, \sin(t_i) + 0.4]$ .

Con los mismos parámetros utilizados en los experimentos realizados con los problemas de Hock y Schittkowski [HS81, SCH], tomando distintos números de variables y de valores atípicos, se realizaron 36 experimentos comparando, como en el caso anterior, la condición de suficiente decrecimiento monótona **mon** y no monótona **nonmon**.

En la figura 7.4 se muestra el perfil de rendimiento de ambos algoritmos, tomando como medida de comparación el número de iteraciones necesarias para alcanzar satisfactoriamente una solución.

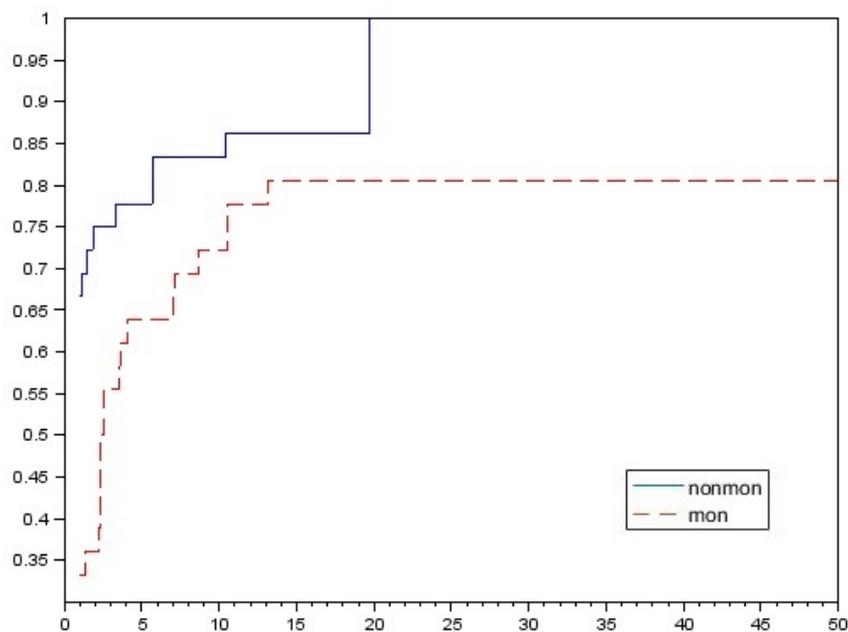
Puede apreciarse que el algoritmo ganador es por muy amplio margen **nomon**, tanto en eficiencia como en robustez. Con un 85% de problemas resueltos de una manera más favorable, **nomon** contrasta con el algoritmo **mon** que solo obtiene un 25% de problemas cuya solución es alcanzada con eficiencia. Por otro lado, el algoritmo **nomon** resuelve el 100% de los problemas con un factor de 3, mientras que **mon** necesita un factor de 66 para obtener el mismo resultado.



**Figura 7.4:** Perfil de rendimiento para el número de iteraciones.

En la figura 7.5 podemos observar el perfil de rendimiento cuando la medida comparativa es el número de evaluaciones de la función objetivo. El algoritmo **nomon** es más eficiente, con un porcentaje del 66% de problemas mejor resueltos, sobre un 33% del algoritmo **mon**, que aumenta rápidamente

a un 55% con un factor de 2. El algoritmo **nomon** alcanza su mayor robustez, resolviendo el 100% de los problemas, con sólo un factor de 19, mientras que por otro lado, el algoritmo **mon** sólo logra resolver el 80% de los problemas.

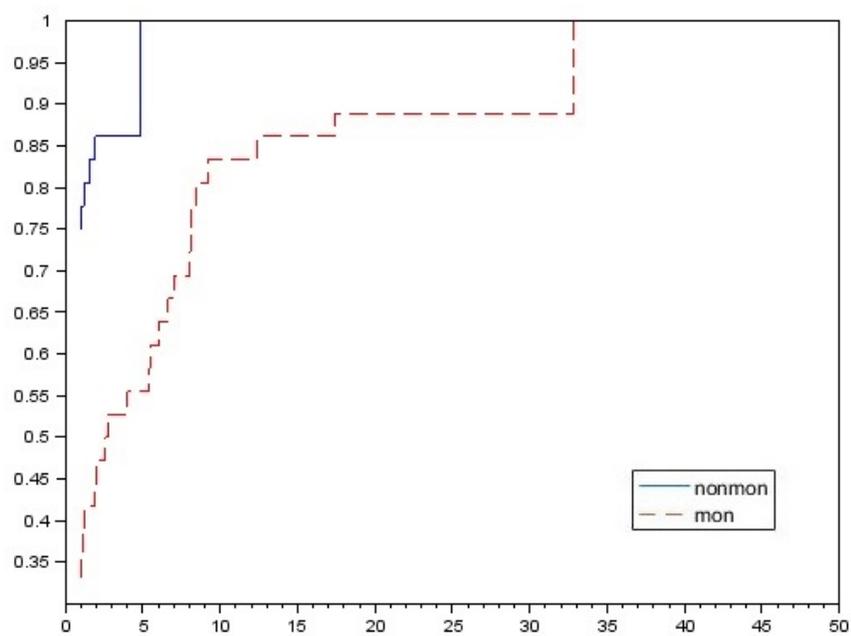


**Figura 7.5:** Perfil de rendimiento para el número de evaluaciones de funciones.

Finalmente, en la figura 7.6, se presenta el perfil de rendimiento de ambos algoritmos, teniendo como medida de comparación el número de evaluaciones de gradientes de la función objetivo.

Vemos nuevamente que el algoritmo **nomon** muestra mejores rendimientos tanto en eficiencia como en robustez. Un 75% de los problemas son resueltos con un mayor desempeño, mientras que el mismo resultado es obtenido por sólo el 34% para **mon**. El algoritmo **nomon** obtiene la solución deseada para el 100% de los problemas con un factor de 5, mientras que **mon**, con ese mismo factor sólo logra resolver un 55% de los problemas, necesitando un factor de

32 para llegar a la solución del 100% de los problemas.



**Figura 7.6:** Perfil de rendimiento para el número de evaluaciones de gradientes.

# Capítulo 8

## Conclusiones

Se ha desarrollado un algoritmo para el problema de optimización no lineal con restricciones de igualdad y de caja (1.1). El nuevo algoritmo basado en la propuesta de Gomes, Maciel y Martínez [GMM99] utiliza el método de programación cuadrática secuencial con la incorporación de una región de confianza como estrategia de globalización. La evaluación del paso de prueba consta de una primera etapa donde se implementó un filtro inclinado no monótono, para posteriormente evaluar si el modelo cuadrático del Lagrangiano predice un decrecimiento no monótono suficientemente positivo. En una segunda etapa, se mide el ajuste del modelo cuadrático del Lagrangiano mediante una condición no monótona que generaliza por un lado la condición de decrecimiento de Cauchy, y por otro lado la condición no monótona de Grippo, Lampariello y Lucidi [GLL86].

Para analizar la eficiencia y confiabilidad de esta condición no monótona de aceptación del paso, se consideró en un primer momento su implementación en un algoritmo para resolver el problema de optimización sin restricciones (2.1). En el Capítulo 2 se presentó un algoritmo de programación cuadrática secuencial con una estrategia de región de confianza, que resuelve cada subproblema mediante el método no monótono de gradiente espectral proyectado. Para evaluar la aceptación de cada paso de prueba se consideró agregar un término de segundo orden (2.11) a la condición no monótona de Grippo, Lampariello y Lucidi de modo de tomar en cuenta la concavidad de la función objetivo. Esto permitió elaborar una primera versión de un algoritmo (2.4) no monótono que compara el decrecimiento predicho por el modelo cuadrático de la función objetivo con el decrecimiento no monótono de la misma respecto del peor de sus últimos  $M + 1$  valores. En una se-

gunda generalización, se definió el decrecimiento no monótono predicho por el modelo cuadrático de la función objetivo en la iteración actual respecto del modelo cuadrático alrededor del punto donde se alcanzó el máximo valor de la función objetivo en los últimos  $M + 1$  iterados, con lo cual se implementó una segunda versión del algoritmo no monótono 2.5. Se demostró la buena definición y convergencia global del algoritmo con esta última versión, que incluye a la primera como caso particular, bajo hipótesis estándar para algoritmos de región de confianza. Se realizaron experimentos numéricos con dos algoritmos similares, que difieren sólo en la aceptación del paso, comparando la condición monótona y no monótona. Se agregó además a la comparación un algoritmo no monótono que resuelve el subproblema de región de confianza mediante el método de gradiente conjugado de Steihaug. Se testearon problemas de gran escala de Moré, Garbow y Hillstom [MGH81]. Los perfiles de rendimiento mostraron que la mejor combinación en cuanto a la eficiencia y robustez resultó la condición no monótona de aceptación del paso, junto con el método de gradiente espectral proyectado.

Volviendo al caso general del problema no lineal con restricciones de igualdad y caja, la estrategia de región de confianza está basada en una aproximación del espacio tangente, descomponiendo el paso de prueba en una componente normal y una componente tangencial. Tanto el problema normal, como el tangencial se resolvieron usando el método de gradiente espectral proyectado. La componente normal se calculó como la solución aproximada del subproblema de región de confianza que consiste en minimizar el modelo cuadrático de la linealización de las restricciones de igualdad, sujeto a las restricciones de la región de confianza y de la caja. Por otra parte, la componente tangencial se calculó como solución aproximada del subproblema de región de confianza que consiste en minimizar el modelo cuadrático del Lagrangiano alrededor del punto normal, sujeto a las restricciones de la región de confianza, la caja y el modelo lineal de las restricciones de igualdad. En la aplicación del método de gradiente espectral conjugado se utilizó el método de Dykstra para realizar la proyección sobre el conjunto de variedades.

En los problemas de programación no lineal con restricciones existen dos objetivos que compiten simultáneamente: la optimalidad y la factibilidad. Tradicionalmente, esto se ha resuelto mediante una condición de suficiente decrecimiento de una función de mérito que combina ambas condiciones. En esta tesis se utilizó en su reemplazo la noción de filtro proveniente del área de Optimización Multiobjetivo, y que se basa en el hecho que quizás no es posible mejorar ambas al mismo tiempo. Se ha implementado un filtro in-

clinado no monótono con memoria, basado en las ideas de Shen, Leyffer, Fletcher [SLF12] y Chin [CHI01], que mide la factibilidad en forma tradicional, mediante la norma de las restricciones de igualdad, pero la optimalidad es medida por la norma Euclidiana del gradiente proyectado del Lagrangiano. Como el filtro por sí sólo no asegura convergencia a un punto estacionario del problema de programación no lineal, tal es el caso cuando los iterados son aceptados sólo por la condición de factibilidad del filtro, se implementó además una condición no monótona de aceptación del paso de prueba similar al caso sin restricciones, comparando la reducción actual no monótona del Lagrangiano con la reducción no monótona predicha por su modelo cuadrático.

Bajo hipótesis estándar para algoritmos para problemas no lineales con restricciones de igualdad y de caja basados en una estrategia de región de confianza, se demostró la buena definición del algoritmo, esto es, que en cada iteración es posible hallar un paso aceptable para el filtro y que satisface la condición no monótona de suficiente decrecimiento. Además se ha demostrado que el algoritmo converge globalmente a un punto estacionario factible, más precisamente, si el algoritmo no termina exitosamente en la  $k$ -ésima iteración, debe existir al menos una subsucesión de puntos factibles que converja a un punto estacionario.

Finalmente, se realizaron experimentos numéricos del algoritmo que tuvieron como objetivo, como en el caso sin restricciones, comparar los resultados para el caso en que se implementó la condición de aceptación de suficiente decrecimiento no monótona versus la tradicional condición monótona. En ambos casos los algoritmos fueron construidos en forma similar, utilizando el mismo filtro, de modo de medir sólo la incidencia de la condición de aceptación del paso. En principio, se seleccionaron problemas de variado tamaño de Hock y Schittkowski [HS81], para luego analizar el problema de mayor escala presentado por Gomes, Maciel y Martínez [GMM99], que estima la solución de una ecuación diferencial de segundo orden que ajusta una serie de observaciones con ruido. En ambos casos el algoritmo con la condición de aceptación no monótona presentó mayor eficacia y robustez que aquel con la condición monótona tradicional.

# Bibliografía

- [AA12] M. AHOOKHOSH and K. AMINI. An efficient nonmonotone trust-region method for unconstrained optimization. *Numerical Algorithms*, 59(4):523–540, 2012.
- [ABM05] M. ANDRETTA, E. BIRGIN, and J.M. MARTINEZ. Practical active-set euclidean trust-region method with spectral projected gradients for bound- constrained minimization. *Optimization*, 54(3):305–325, 2005.
- [ABM10] M. ANDRETTA, E. BIRGIN, and J.M. MARTINEZ. Partial spectral projected gradient method with active-set strategy for linearly constrained optimization. *Numerical Algorithms*, 53(1):23–52, 2010.
- [ABMY05] R. ANDREANI, E. BIRGIN, J.M. MARTINEZ, and Y. YUAN. Spectral projected gradient and variable metric methods for optimization with linear inequalities. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 25(2):221–252, 2005.
- [AD04] Ch. AUDET and J.E. DENNIS. A pattern search filter method for nonlinear programming without derivatives. *SIAM Journal on Optimization*, 14:980–1010, 2004.
- [AND08] N. ANDREI. An unconstrained optimization test functions collection. *Advanced Modeling and Optimization*, 10(1):147–161, 2008.
- [AP16] F. ARZANI and R. PEYGHAMI. A new nonmonotone filter barzilai-borwein method for solving unconstrained optimization problems. *International Journal of Computer Mathematics*, 93(3):596–608, 2016.

- [ARM66] L. ARMIJO. Minimization of functions having Lipschitz-continuous first partial derivatives. *Pacific Journal of Mathematics*, 16:1–3, 1966.
- [BB88] J. BARZILAI and J.M. BORWEIN. Two point step size gradient methods. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 8:141–148, 1988.
- [BCM99] E. BIRGIN, I. CHAMBOULEYERON, and J.M. MARTINEZ. Estimation of the optical constants and the thickness of thin films using unconstrained optimization. *Journal of Computational Physics*, 151:862–880, 1999.
- [BER96] D.P. BERTSEKAS. *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*. Athena Scientific, 1996.
- [BER03] D.P. BERTSEKAS. *Nonlinear programming*. Athena Scientific, 2003.
- [BM01] E. BIRGIN and J.M. MARTINEZ. A spectral conjugate gradient method for unconstrained optimization. *Applied Mathematics and Optimization*, 43:117–128, 2001.
- [BM02] E. BIRGIN and J.M. MARTINEZ. Large-scale active-set box-constrained optimization method with spectral projected gradients. *Computational Optimization and Applications*, 23:101–125, 2002.
- [BMMR06] E. BIRGIN, J.M. MARTINEZ, W.F. MASCARENHAS, and D.P. RONCONI. Method of sentinels for packing items within arbitrary convex regions. *Journal of Operational Research Society*, 57:735–746, 2006.
- [BMR00] E. BIRGIN, J.M. MARTINEZ, and M. RAYDAN. Nonmonotone spectral projected gradient methods on convex sets. *SIAM Journal on Optimization*, 10(4):1196–1211, 2000.
- [BMR01] E. BIRGIN, J.M. MARTINEZ, and M. RAYDAN. Algorithm 813: SPG-software for convex-constrained optimization. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 27:340–349, 2001.

- [BMR03] E. BIRGIN, J.M. MARTINEZ, and M. RAYDAN. Inexact spectral projected gradient methods on convex sets. *IMA Journal on Numerical Analysis*, 23:539–559, 2003.
- [BMR09] E.G. BIRGIN, J.M. MARTINEZ, and M. RAYDAN. Spectral projected gradient methods. In C.A. Floudas and P.M. Pardalos, editors, *Encyclopedia of Optimization*, pages 3652–3659. Springer US, 2009.
- [BNS95] L.T. BIEGLER, J. NOCEDAL, and C. SCHMID. A reduced hessian method for large-scale constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 5(2):314–347, 1995.
- [BSS87] R.H. BYRD, R.B. SCHNABEL, and G.A. SCHULTZ. A trust region algorithm for nonlinearly constrained optimization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 24:1152–1170, 1987.
- [CDT85] M.R. CELIS, J.E. DENNIS, and R.A. TAPIA. A trust region strategy for nonlinear equality constrained optimization. In P. Boggs, R.H. Byrd, and R.B. Schnabel, editors, *Numerical Optimization*, pages 71–82. SIAM Publications, Philadelphia, 1985.
- [CF03] Ch.M. CHIN and R. FLETCHER. On the global convergence of an SLP-filter algorithm that takes EQP steps. *Mathematical Programming, Serie A*, 96:161–177, 2003.
- [CGT00] A. CONN, N.I.M. GOULD, and Ph. TOINT. *Trust-region methods*. SIAM-MPS, Philadelphia, Pennsylvania, 2000.
- [CHI01] Ch.M. CHIN. *A new trust region based SLP-filter algorithm which uses EQP active set strategy*. Ph.D. Thesis, University of Dundee, Scotland, 2001.
- [CHI03] Ch.M. CHIN. A global convergence theory of a filter line search method for nonlinear programming. Technical report, Department of Statistics, University of Oxford, Oxford, England, UK, 2003.
- [CHX01] Z.W. CHEN, J.Y. HAN, and D.C. XU. A nonmonotone trust region method for nonlinear programming with simple bound constraints. *Applied Mathematics Optimization*, 43:63–85, 2001.

- [COU43] R. COURANT. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49:1–23, 1943.
- [DEAM97] J.E. DENNIS, M. EL-ALEM, and M.C. MACIEL. A global convergence theory for general trust-region-based algorithms for equality constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 7(1):177–207, 1997.
- [DL02] Y. DAI and L.Z. LIAO. R-linear convergence of the Barzilai and Borwein gradient method. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 22:1–20, 2002.
- [DM02] E.D. DOLAN and J.J. MORE. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming, Serie A*, 91:201–213, 2002.
- [DV97] J.E. DENNIS and L.N. VICENTE. On the convergence theory of trust-region based algorithms for equality-constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 7(4):927–950, 1997.
- [DXZ93] N.Y. DENG, Y. XIAO, and F.J. ZHOU. A nonmonotonic trust-region algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 76:259–285, 1993.
- [DYK83] R.L. DYKSTRA. An algorithm for restricted least-squares regression. *Journal of the American Statistical Association*, 78:837–842, 1983.
- [EA88] M. EL-ALEM. *A global convergence theory for a class of trust region algorithms for constrained optimization*. Ph.D. Thesis, Rice University, Houston, Texas, 1988.
- [EA91] M. EL-ALEM. A global convergence theory for the celis-dennis-tapia trust region algorithm for constrained optimization. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 28(1):266–290, 1991.
- [EA95] M. EL-ALEM. Global convergence without the assumption of linear independence for a trust-region algorithm for constrained optimization. *Journal of Optimization: Theory and Applications*, 87(3):563–577, 1995.

- [EA99] M. EL-ALEM. A global convergence theory for dennis, el-alem, and maciel's class of trust-region algorithms for constrained optimization without assuming regularity. *SIAM Journal on Optimization*, 9(4):965–990, 1999.
- [FGL<sup>+</sup>02] R. FLETCHER, N.I.M. GOULD, S. LEYFFER, Ph.L. TOINT, and A. WÄCHTER. Global convergence of trust-region SQP-filter algorithms for general nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 13(3):635–659, 2002.
- [FGLM07] M. FRIEDLANDER, N.I.M. GOULD, S. LEYFFER, and T.S. MUNDSÉN. A filter active-set trust-region method. Technical Report ANL/MCS-P1456-0907, Mathematics and Computer Sciences Division, Argonne National Laboratory, Argonne, Illinois, US, 2007.
- [FL99] R. FLETCHER and S. LEYFFER. A bundle filter method for nonsmooth nonlinear optimization. Technical Report NA/195, University of Dundee, Dundee, Schotland, UK, 1999.
- [FL03] R. FLETCHER and S. LEYFFER. Filter-type algorithms for solving systems of algebraic equations and inequalities. In G. di Pillo and A. Murli, editors, *High performance algorithms and software for nonlinear optimization*, pages 259–278. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 2003.
- [FL06] R. FLETCHER and S. LEYFFER. Nonlinear programming without a penalty function. *Mathematical Programming*, 106:25–57, 2006.
- [FL08] M.P. FRIEDLANDER and S. LEYFFER. Global and finite termination of a two-phase augmented lagrangian filter method for general quadratic programs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(4):1706–1729, 2008.
- [FLE70] R. FLETCHER. A class of methods for nonlinear programming with termination and convergence properties. In J. Abadie, editor, *Integer and Nonlinear Programming*, pages 157–175. North-Holland, Amsterdam, Netherlands, 1970.

- [FLE90] R. FLETCHER. Low storage methods for unconstrained minimization. In E.L. Allgover and K. Georg, editors, *Lectures in Applied Mathematics, Computational Solution of Nonlinear Systems of Equations*, volume 26, pages 165–179. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1990.
- [FLT99] R. FLETCHER, S. LEYFFER, and Ph.L. TOINT. On the global convergence of a SLP-filter algorithm. Technical Report NA/183, Department of Mathematics, University of Dundee, Dundee, Schotland, UK, 1999.
- [FLT02] R. FLETCHER, S. LEYFFER, and Ph.L. TOINT. On the global convergence of a filter SQP-algorithm. *SIAM Journal on Optimization*, 13(1):44–59, 2002.
- [FMA12] M. FATEMI and N. MAHDAVI-AMINI. A filter trust-region algorithm for unconstrained optimization with strong global convergence properties. *Computational Optimization and Applications*, 52:239–266, 2012.
- [FMR95] A. FRIEDLANDER, J.M. MARTINEZ, and M. RAYDAN. A new method for large-scale box constrained convex quadratic minimization problems. *Optimization Methods and Software*, 5:57–74, 1995.
- [GKV03] C. GONZAGA, E. KARAS, and M. VANTI. A globally convergent filter method for nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 14(3):646–669, 2003.
- [GLL86] L. GRIPPO, F. LAMPARIELLO, and S. LUCIDI. A nonmonotone line search technique for Newton’s method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 23:707–716, 1986.
- [GLT04] N.I.M. GOULD, S. LEYFFER, and Ph.L. TOINT. A multidimensional filter algorithm for nonlinear equations and nonlinear least squares. *SIAM Journal on Optimization*, 15:17–38, 2004.
- [GMM99] F.A.M. GOMES, M.C. MACIEL, and J.M. MARTINEZ. Nonlinear programming algorithms using trust regions and augmented Lagrangians with nonmonotone penalty parameters. *Mathematical Programming*, 84(1):161–200, 1999.

- [GOL65] A. A. GOLDSTEIN. On steepest descent. *SIAM Journal on Optimization and Optimization, Serie A*, 3(1):147–151, 1965.
- [GST06] N.I.M. GOULD, C. SAINVITU, and Ph.L. TOINT. A filter-trust-region method for unconstrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 16(2):341–357, 2006.
- [GT03] N.I.M. GOULD and Ph.L. TOINT. Global convergence of a non-monotone trust-region filter algorithm for nonlinear programming. Technical Report Numerical Analysis Report RAL-TR-2003-003, Rutherford Appleton Laboratory, Oxfordshire, England, UK, 2003.
- [GT06] N. GOULD and Ph. TOINT. Global convergence of a non-monotone trust-region filter algorithm for nonlinear programming. In W.W. Hager, Sh.J. Huang, P.M. Pardalos, and O.A. Prokopyev, editors, *Multiscale Optimization Methods and Applications*, volume 82 of *Nonconvex Optimization and Its Applications*, pages 125–150. Springer US, 2006.
- [HES69] M.R. HESTENES. Multiplier and gradient methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 4:303–320, 1969.
- [HS81] W. HOCK and K. SCHITTKOWSKI. *Test examples for nonlinear programming codes*. Springer-Verlag, 1981.
- [HT50] H.W.KUHN and A.W. TUCKER. Nonlinear programming. In *Proceedings of the 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 481–492, Berkeley and Los Angeles, USA, 1950. University of California Press.
- [KAR39] W. KARUSH. *Minima of functions of several variables with inequalities as side constraints*. Ph.D. Thesis, University of Chicago, Chicago, Illinois, 1939.
- [KH98] X. KEN and J. HAN. A class of nonmonotone trust region algorithms for unconstrained optimization problems. *Science in China*, 41(9):927–932, 1998.
- [KOR08] E.W. KARAS, A.P. OENING, and A.A. RIBEIRO. Global convergence of slanting filter methods for nonlinear programming.

*Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200:486–500, 2008.

- [KRSS09] E.W. KARAS, A.A. RIBEIRO, C. SAGASTIZABAL, and M. SOLODOV. A bundle-filter method for nonsmooth convex constrained optimization. *Mathematical Programming, Serie B*, 116:297–320, 2009.
- [LEY16] S. LEYFFER. Augmented lagrangian filter methods. Technical Report ANL/MCS-P1370-0906, Argonne National Laboratory, Mathematics and Computer Science Division, Argonne, Illinois, US, 2016.
- [LNP98] M. LALEE, J. NOCEDAL, and T.D. PLANTENGA. On the implementation of an algorithm for large-scale equality constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 8(3):682–706, 1998.
- [MAR01] J.M. MARTINEZ. Inexact-restoration method with Lagrangian tangent decrease and new merit function for nonlinear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 111:39–58, 2001.
- [MGH81] J.J. MORE, B.S. GARBOW, and K.W. HILLSTROM. Testing unconstrained optimization software. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 7(1):17–41, 1981.
- [MHH69] A. MIELE, H.Y. HUANG, and J.C. HEIDEMAN. Sequential gradient-restoration algorithm for the minimization of constrained functions: Ordinary and conjugate gradient version. *Journal of Optimization Theory and Applications*, (4):213–243, 1969.
- [MLY07] J. MO, Ch. LIU, and S. YAN. A nonmonotone trust region method based on nonincreasing technique of weighted average of the successive function values. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 209:97–108, 2007.
- [MMV13] M.C. MACIEL, M.G. MENDONÇA, and A.B. VERDIELL. Monotone and nonmonotone trust-region-based-on algorithms for large unconstrained optimization problems. *Computational Optimization and Applications*, 54(1):27–43, 2013.

- [MOR83] J.J. MORE. Recent developments in algorithms and software for trust region methods. In A. Bachem, M. Grottschel, and B. Korte, editors, *Mathematical Programming: The state of the art*, pages 258–287. Springer-Verlag, 1983.
- [MP00] J.M. MARTINEZ and E.A. PILOTTA. Inexact-restoration algorithms for constrained optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 104:135–163, 2000.
- [MS95] J.M. MARTINEZ and S.A. SANTOS. *Métodos computacionais de otimização*. IMPA, 1995.
- [MZW05] J. MO, K. ZHANG, and Z. WEI. A nonmonotone trust region method for unconstrained optimization. *Applied Mathematics and Computation*, 171:371–384, 2005.
- [OMO89] E.O. OMOJOKUN. *Trust region algorithm for optimization with nonlinear equality and inequality constraints*. Ph.D. Thesis, University of Colorado, Boulder, Colorado, 1989.
- [POW69] M.J.D. POWELL. A method for nonlinear constrained in minimization problems. In R. Fletcher, editor, *Optimization*, pages 283–298. Academic Press, New York, 1969.
- [POW70] M.J.D. POWELL. A new algorithm for unconstrained optimization. In O.L. Mangasarian, K. Ritter, and J.B. Rosen, editors, *Nonlinear Programming*, pages 31–65. Academic Press, New York, 1970.
- [POW75] M.J.D. POWELL. Convergence properties of a class of minimization algorithms. In O.L. Mangasarian, R.R. Meyer, and S.M. Robinson, editors, *Nonlinear Programming 2*, pages 1–27. Academic Press, New York, 1975.
- [PY91] M.J.D. POWELL and Y. YUAN. A trust region algorithm for equality constrained optimization. *Mathematical Programming*, 49:189–221, 1991.
- [QZZ08] S.J. QU, K.C. ZHANG, and J. ZHANG. A nonmonotone trust region method of conic model for unconstrained optimization.

- Journal of Computational and Applied Mathematics*, 220:119–128, 2008.
- [RAY91] M. RAYDAN. *Convergence properties of the Barzilai and Borwein gradient method*. Ph.D. Thesis, Rice University, Houston, Texas, 1991.
- [RAY93] M. RAYDAN. On the Barzilai and Borwein choice of the step-length for the gradient method. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 13:321–326, 1993.
- [RAY97] M. RAYDAN. The Barzilai and Borwein gradient method for the large scale unconstrained minimization problem. *SIAM Journal on Optimization*, 7:26–33, 1997.
- [RKG08] A.A. RIBEIRO, E.W. KARAS, and C.C. GONZAGA. Global convergence of filter methods for nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 19(3):1231–1249, 2008.
- [RPVC04] A. RAMIREZ-PORRAS and W.E. VARGAS-CASTRO. Transmission of visible light through oxidized copper films: feasibility of using a spectral projected gradient method. *Applied Optics*, 43:1508–1514, 2004.
- [SCH] K. SCHITTKOWSKI. More test examples for nonlinear programming codes. In *Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems*.
- [SLF12] Ch. SHEN, S. LEYFFER, and R. FLETCHER. A nonmonotone filter method for nonlinear optimization. *Computational Optimization and Applications*, 52:583–607, 2012.
- [STE83] T. STEIHAUG. The conjugate gradient method and trust regions in large scale optimization. *SIAM Journal on Num. Analysis*, 20(3):626–637, 1983.
- [SUN04] W. SUN. Nonmonotone trust region method for solving optimization problems. *Applied Mathematics and Computation*, 156:159–174, 2004.

- [SZZ05] T. SERAFINI, G. ZANGHIRATI, and L. ZANNI. Gradient projection methods for quadratic programs and applications in training support vector machines. *Optimization Methods and Software*, 20:347–372, 2005.
- [TAP78] R.A. TAPIA. Quasi-Newton methods for equality constrained optimization: equivalence of existing methods and a new implementation. In O.L. Mangasarian, R.R. Meyer, and S.M. Robinson, editors, *Nonlinear Programming*, volume 3, pages 125–164. Academic Press, New York, 1978.
- [THO75] S.W. THOMAS. *Sequential estimation techniques for quasi-Newton algorithms*. Ph.D. Thesis, Cornell University, Ithaca. New York, 1975.
- [TOI97] Ph.L. TOINT. Non-monotone trust-region algorithms for nonlinear optimization subject to convex constraints. *Mathematical Programming*, 77:69–94, 1997.
- [ULB04] S. ULBRICH. On the superlinear local convergence of a filter-SQP method. *Mathematical Programming, Serie B*, 100:217–245, 2004.
- [UUV04] M. ULBRICH, S. ULBRICH, and L. VICENTE. A globally convergent primal-dual interior-point filter method for nonlinear programming. *Mathematical Programming, Serie A*, 100(2):379–410, 2004.
- [VAC03] W.E. VARGAS, D.E. AZOFEIFA, and N. CLARK. Retrieved optical properties of thin films on absorbing substrates from transmittance measurements by application of a spectral projected method. *Thin Solid Films*, 425:1–8, 2003.
- [VAR80] A. VARDI. *Trust region strategies for unconstrained and constrained minimization*. Ph.D. Thesis, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, Ithaca, New York, 1980.
- [VAR85] A. VARDI. A trust region algorithm for equality constrained minimization: convergence properties and implementation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 22(3):575–591, 1985.

- [WB05a] A. WÄCHTER and L.T. BIEGLER. Line search filter methods for nonlinear programming: local convergence. *SIAM Journal on Optimization*, 16(1):32–48, 2005.
- [WB05b] A. WÄCHTER and L.T. BIEGLER. Line search filter methods for nonlinear programming: motivation and global convergence. *SIAM Journal on Optimization*, 16(1):1–31, 2005.
- [WB05c] A. WÄCHTER and L.T. BIEGLER. On the implementation of an interior-point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 16(1):1–31, 2005.
- [WOL69a] P. WOLF. Convergence conditions for ascent methods. *SIAM Review*, 11:226–235, 1969.
- [WOL69b] P. WOLF. Convergence conditions for ascent methods. II: some corrections. *SIAM Review*, 13:185–188, 1969.
- [WRI76] M.H. WRIGHT. *Numerical methods for nonlinearly constrained optimization*. Ph.D. Thesis, Stanford University, Stanford, CA, 1976.
- [YZ10] L.QI Y. ZHANG, W. SUN. A nonmonotone filter barzilai-borwein method for optimization. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 27(1):55–69, 2010.
- [ZSC06] N. ZEEV, O. SAVASTA, and D. CORES. Non-monotone spectral projected gradient method applied to full waveform inversion. *Geophysical Prospecting*, 54:525–534, 2006.