

**Blanca Isabel Niel**

---

**CRESTOMATÍA:  
UN CALEIDOSCOPIO DEL CALCULUS**

---



**Serie Docencia**  
**Colección Ciencias y Tecnología**

---

Niel, Blanca Isabel

Crestomatía: un caleidoscopio del calculus . - 1a ed. - Bahía Blanca : Editorial de la Universidad Nacional del Sur. Ediuns, 2015.  
CD Rom.

ISBN 978-987-655-040-6

1. Matemática. 2. Cálculo. I. Título  
CDD 515

---

Fecha de catalogación: 15/04/2015



Editorial de la Universidad Nacional del Sur  
ediuns@uns.edu.ar  
www.ediuns.uns.edu.ar



Red de Editoriales de Universidades Nacionales



Libro  
Universitario  
Argentino

No se permite la reproducción parcial o total, el alquiler, la transmisión o la transformación de este libro, en cualquier forma o por cualquier medio, sea electrónico o mecánico, mediante fotocopias, digitalización u otros métodos, sin el permiso previo y escrito del editor. Su infracción está penada por las leyes n° 11723 y 25446.

Queda hecho el depósito que establece la ley n° 11723  
Bahía Blanca, Argentina, abril de 2015.

© 2015. EdiUNS.

# Dedicatoria

*A los que sufren y esperan por su milagro.*



# Índice general

<b>I</b>	<b>Introducción</b>	<b>25</b>
1.	Nuestro título.	27
1.1.	CRESTOMATÍA: UN CALEIDOSCOPIO DEL CALCULUS. . . . .	27
<b>II</b>	<b>Guía de Trabajos Prácticos</b>	<b>31</b>
2.	Guía de Ejercicios Propuestos	33
2.1.	Trabajo Práctico N $\cong$ 0: Funciones y desigualdades, “valor absoluto”. . . .	40
2.2.	Trabajo Práctico N $\cong$ I: Límite de una función de una variable real. . . . .	59
2.3.	Trabajo Práctico N $\cong$ II: Continuación de Límite. Continuidad en un punto $x_0$ . Continuidad en un intervalo cerrado $[a, b]$ . . . . .	66
2.4.	Trabajo Práctico N $\cong$ IIIi: Concepto de Derivada de $y = f(x)$ . . . . .	73
2.5.	Trabajo Práctico N $\cong$ III: Esencialmente: Cálculo de derivadas. . . . .	81
2.6.	Trabajo Práctico N $\cong$ IV: Derivada – Aplicaciones. . . . .	84
2.7.	Trabajo Práctico N $\cong$ V: Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial. . . . .	94
2.8.	Trabajo Práctico N $\cong$ VI: Antiderivación. . . . .	100
2.9.	Trabajo Práctico N $\cong$ VII: Aplicaciones de la Integral Definida. . . . .	105
2.10.	Trabajo Práctico N $\cong$ VIII: Aplicaciones de la Fórmula de Taylor. . . . .	117
2.11.	Trabajo Práctico N $\cong$ IX: Sucesiones. . . . .	123
2.12.	Trabajo Práctico N $\cong$ X. Series. . . . .	133

<b>III</b>	<b>Funciones Trigonométricas y Curvas Planas</b>	<b>149</b>
<b>3.</b>	<b>Funciones Trigonométricas y Curvas Planas</b>	<b>151</b>
3.1.	Funciones Trigonométricas y Curvas Planas: Ejercicios resueltos. Nivel I: 1 <sup>er</sup> PARCIAL - ♣©1 <sup>er</sup> COLOQUIO. . . . .	152
<b>IV</b>	<b>Valor Absoluto y Gráficas de Curvas Planas</b>	<b>167</b>
<b>4.</b>	<b>Medida: Valor Absoluto</b>	<b>169</b>
4.1.	Ejercicios resueltos: PRIMER COLOQUIO OPTATIVO . . . . .	170
4.2.	Inversión por ramas de $y = \cosh x$ . . . . .	183
4.3.	Inversión en intervalo principal. . . . .	184
<b>V</b>	<b>Límite y Continuidad</b>	<b>185</b>
<b>5.</b>	<b>Teoremas de límites.</b>	<b>187</b>
5.1.	Existencia del límite finito: Ejemplos resueltos utilizando la definición. . .	191
5.2.	No existencia de límite finito. . . . .	198
5.3.	Asíntotas. . . . .	206
5.3.1.	Manera práctica de encontrar las asíntotas . . . . .	215
5.4.	Continuidad: Ejercicios Resueltos . . . . .	218
5.4.1.	Definición de continuidad en un punto . . . . .	218
5.4.2.	Definición práctica de continuidad en un punto . . . . .	219
5.4.3.	Propiedades de funciones continuas en un punto . . . . .	219
5.4.4.	Propiedades de funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado	220
5.4.5.	Teorema del Punto Fijo. . . . .	224
<b>VI</b>	<b>Derivada</b>	<b>241</b>
<b>6.</b>	<b>Derivada: Ejemplos</b>	<b>243</b>
6.1.	Gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$ . . . . .	244

6.2. Velocidades Relacionadas . . . . .	248
6.3. Optimización . . . . .	253
6.4. Ejercicio resuelto: Optimización. Nivel II: 2 <sup>do</sup> PARCIAL - ♣© 2 <sup>do</sup> CO- LOQUIO. . . . .	259
<b>VII Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial</b>	<b>265</b>
<b>7. Teorema de Rolle. Teorema de Lagrange. Regla de L'Hôpital</b>	<b>267</b>
7.1. Teoremas del Valor Medio del Cálculo Diferencial: Justificaciones y aplica- ciones. . . . .	268
<b>VIII Integración</b>	<b>277</b>
<b>8. Integración: Notas teóricas</b>	<b>279</b>
8.1. El concepto de la integral definida . . . . .	279
8.2. Definición de la integral . . . . .	281
8.3. El Area y la Integral . . . . .	289
8.4. Sumas de Riemann . . . . .	298
8.4.1. Algunas propiedades de la integral . . . . .	303
8.4.2. La Función Integral . . . . .	309
8.5. Teorema Fundamental del Cálculo Integral (Para funciones continuas) . .	311
8.5.1. Regla de Barrow (Para funciones continuas) . . . . .	312
8.5.2. Teorema Fundamental del Cálculo Integral (Segunda versión) . . .	313
8.6. Apéndice . . . . .	317
8.7. Ejercicios resueltos: Aplicación de la Integral Definida. Nivel III: 3 <sup>er</sup> PAR- CIAL. . . . .	320
8.7.1. Áreas . . . . .	320
8.7.2. Volúmenes de Sólidos de Revolución . . . . .	321
8.8. Ejercicios resueltos: Ejemplos de física. Ecuación de Landau. Nivel IV: ♣© 4 <sup>to</sup> COLOQUIO. . . . .	327
8.8.1. Antiderivadas ejemplos muy sencillos de la física . . . . .	333

**IX Teorema de Cauchy 337**

**9. Aplicaciones de la derivada y de la integral 339**

9.1. Polinomios y Fórmula de Taylor . . . . . 339

9.1.1. Contacto entre dos curvas . . . . . 341

9.1.2. Orden de contacto entre curvas . . . . . 343

9.1.3. Aproximación local de una función mediante funciones polinómicas 346

9.1.4. Expresión de una función polinómica por potencias de  $(\mathbf{x} - \alpha)$  . . 346

9.1.5. Expresión de una función polinómica en términos de sus derivadas  
en un punto  $\alpha$  . . . . . 347

9.1.6. Polinomios de Taylor . . . . . 348

9.1.7. Fórmula de Taylor . . . . . 348

9.1.8. Diversas formas del término complementario de la Fórmula de Taylor 348

9.1.9. Expresión infinitesimal del término complementario de la Fórmula  
de Taylor . . . . . 350

9.1.10. Forma de Lagrange del término complementario de la Fórmula de  
Taylor . . . . . 352

9.1.11. Otra manera de obtener la forma de Lagrange del término comple-  
mentario de la Fórmula de Taylor . . . . . 353

9.1.12. Forma integral del término complementario de la fórmula de Taylor 355

9.2. Resolución aproximada de ecuaciones: Método de Newton . . . . . 357

9.2.1. Método de Newton . . . . . 358

9.2.2. Acerca de la eficiencia del método de Newton . . . . . 361

9.3. Ejercicio resuelto: Estudio de  $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ . Nivel IV ♣ © 4<sup>to</sup> CO-  
LOQUIO. . . . . 366

9.3.1. Sugerencias para el estudio de  $f(x) = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ . . . . . 375

**X Coordenadas Polares 379**

**10. Sistema de Coordenadas Polares 381**

10.1. Introducción . . . . . 381



10.2. Coordenadas polares de un punto en el plano . . . . .	382
10.2.1. Circunferencias . . . . .	387
10.2.2. Rosas . . . . .	388
10.2.3. Cardioides y Limaços (Caracoles) . . . . .	393
10.2.4. Observaciones que facilitan la construcción de gráficos en polares . . . . .	403
10.3. Familias de curvas paramétricas: Concoides de Nicomedes . . . . .	406
<b>XI Ecuaciones Diferenciales Ordinarias</b>	<b>407</b>
<b>11. Antiderivación y E.D.O. simples</b>	<b>409</b>
11.1. Crecimiento y/o decrecimiento en poblacionales . . . . .	410
11.1.1. Familias de funciones y cuasi-asociables E.D.O. . . . .	433
11.1.2. Resolución de diferentes problemas de valores iniciales . . . . .	437
11.1.3. Carp Population . . . . .	446
<b>XII Sucesiones y Series</b>	<b>471</b>
<b>12. Sucesiones y Series: Ejercicios resueltos</b>	<b>473</b>
<b>XIII Ilustraciones: Snapshots</b>	<b>483</b>
<b>13. Gráficas</b>	<b>485</b>
13.1. Sentencias perfectibles: §3, pp. 151-161. . . . .	491
13.2. Sentencias y <i>Sucesiones</i> infinitas de reales. . . . .	492
13.3. Optimización en compactos . . . . .	493
13.4. O.D.E: Sentencias vs. unicidad de soluciones. . . . .	494
13.5. Secuencias para las concoides de Nicomedes. . . . .	495
13.6. Bifurcación $\pitchfork$ en la E.D.O. de Landau. . . . .	496
13.7. DSolve y E.D.O. . . . .	497
13.8. Cómputos y Conjeturas en el Cálculus. . . . .	498

**XIV Hamilton vs Hamilton 499**

**14. Hamilton en la Geometría Óptica vs Hamilton en el Icosian Game 501**

14.1. Hamilton de la Geometría Óptica a Hamilton en un Juego Hamiltoniano . 504

14.2. Metodología Empleada . . . . . 505

14.3. Problema de Heron . . . . . 505

    14.3.1. Obtención de la braquistócrona por cálculos algebraicos . . . . . 507

    14.3.2. Obtención de la braquistócrona por razones geométricas . . . . . 508

14.4. Ley de Snell . . . . . 508

    14.4.1. Tratamiento de una interfase de ancho unitario . . . . . 510

    14.4.2. Determinando la braquistócrona en una interfase de ancho unitario 513

    14.4.3. Contribuciones auxiliares . . . . . 515

    14.4.4. Caracterización de  $p(x, c, c_1)$  . . . . . 518

    14.4.5. Resolución del caso palíndromo . . . . . 520

    14.4.6. Solución en una interfase de ancho arbitrario . . . . . 521

    14.4.7. Refracciones sucesivas: Braquistócrona. . . . . 522

14.5. Naturaleza no necesariamente expedita . . . . . 526

    14.5.1. Primer ejemplo en el espejo circular . . . . . 527

    14.5.2. Segundo ejemplo en el espejo cuasi-esférico . . . . . 531

    14.5.3. Tercer ejemplo en el espejo cuasi-esférico . . . . . 533

14.6. Confluencia de dos áreas de investigación de Hamilton . . . . . 554

14.7. Comunicaciones y publicaciones de las ideas del Capítulo 14 . . . . . 558

**XV Parciales-Coloquios 559**

**15. Parciales y/o Coloquios 561**

15.1. ♣© 1<sup>er</sup> COLOQUIO OPTATIVO . . . . . 562

15.2. ♣© 2<sup>do</sup> COLOQUIO OPTATIVO . . . . . 564

15.3. 3<sup>er</sup> PARCIAL - ♣© 3<sup>er</sup> COLOQUIO . . . . . 574

15.4. 4<sup>to</sup> PARCIAL - ♣© 4<sup>to</sup> COLOQUIO OPTATIVO . . . . . 584

15.5. 5<sup>to</sup> PARCIAL - ♣© 5<sup>to</sup> COLOQUIO OPTATIVO . . . . . 592

<b>XVI Conclusiones Generales</b>	<b>599</b>
15.6. Contribuciones del compendio. . . . .	601
<b>XVII Forthcoming Issue</b>	<b>603</b>
16. Calculus en varias variables	605
<b>XVIII Bibliografía</b>	<b>607</b>



# Índice de figuras

1.1. Nuestro título. . . . .	28
2.1. Ilustraciones en las pautas del cursado. . . . .	38
2.2. $f(x) = \left  \frac{x-3}{x+1} \right $ . . . . .	41
2.3. $f(x) = \sin x$ , $f^{-1}(x) = \arcsin x$ y $f(x) = \cos x$ , $f^{-1}(x) = \arccos x$ . . . . .	44
2.4. $f(x) = \tan x$ ; $f^{-1}(x) = \arctan x$ $f(x) = \tanh x$ ; $f^{-1}(x) = \operatorname{arctanh} x$ . . . . .	44
2.5. Gráficas de $f(x) = \frac{x}{x}$ ; $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ ; $f(x) = \frac{ x }{x}$ y $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ . . . . .	59
2.6. $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ $x \in [-2.5, 2.5]$ . . . . .	62
2.7. Gráficas de $f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ y de $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ . . . . .	62
2.8. ¿ Por qué nos interesamos en $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ ? . . . . .	63
2.9. $f(x) =  \log_3  x-1  $ . . . . .	65
2.10. Gráfica de $f(x) =  (x-2)^2 - 1  - 3$ . . . . .	65
2.11. Asíntota: Interpretación de $d(P, l) \approx  \overline{PP''} $ . . . . .	68
2.12. Lámina triangular. . . . .	69
2.13. Gráfica de $y = f(x)$ . . . . .	72
2.14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ . . . . .	72
2.15. Segmento secante a $y = f(x)$ entre $(x_0, f(x_0))$ y $(x, f(x))$ , con $\Delta x > 0$ . . . . .	73
2.16. $y = f(x)$ derivable en $x_0$ . . . . .	73
2.17. Recta tangente vertical en $x = x_0$ . . . . .	74
2.18. Recta con mejor aproximación a la curva en $(x_0, f(x_0))$ . . . . .	76
2.19. Familia de rectas secantes con $x_F - x_0 > 0$ . . . . .	78
2.20. La diferencial. . . . .	78
2.21. Recta tangente. Recta normal. . . . .	79

2.22. Ángulo entre curvas. . . . .	79
2.23. Teorema de la derivación de la función inversa. . . . .	80
2.24. Gráficas de la derivada primera. . . . .	84
2.25. Velocidad del extremo de la sombra. . . . .	86
2.26. Elevación del peso $W$ . . . . .	87
2.27. Estado inicial y final de las variables. . . . .	88
2.28. Dinámica del Problema de Elevación del peso $W$ . . . . .	88
2.29. Búsqueda del máximo y mínimo tiempo. . . . .	90
2.30. Propagación del rayo de luz. . . . .	91
2.31. Mejor visualización de $\overline{AB}$ . . . . .	91
2.32. Triángulos de área variable. . . . .	92
2.33. $dy/dt = r(1 - y/K)y$ . . . . .	93
2.34. Gráficas del Ejercicio N $\cong$ 7 . . . . .	95
2.35. Gráficas del Ejercicio N $\cong$ 11 a) . . . . .	96
2.36. Gráficas del Ejercicio N $\cong$ 12 b) . . . . .	97
2.37. Asíntotas de $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ . . . . .	98
2.38. Mínimo de $f(x) = x^x, x > 0$ . . . . .	98
2.39. Signo de $f'(x) = x^x [\ln(x) + 1], x > 0$ . . . . .	99
2.40. $y = e^{-1}x + \frac{1}{2e}$ : Asíntota de $f(x) = x\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ . . . . .	99
2.41. Crecimiento y decrecimiento exponencial. . . . .	103
2.42. Crecimiento logístico $y$ vs $t$ . . . . .	103
2.43. $f(x) = x$ , en $[0, 1]$ . . . . .	105
2.44. $f(x) = x$ , en $[0, b]$ . . . . .	105
2.45. Partición regular, $n = 4$ , del $[0, 1]$ , para $f(x) = x^2$ . . . . .	106
2.46. $f(x) = x^2$ , en $[0, b]$ . . . . .	106
2.47. Representación de elementos diferenciales del área. . . . .	106
2.48. Astroide. . . . .	107
2.49. Recinto $R(f, g, [a, b])$ . . . . .	107
2.50. Ilustración de una sección del elemento de volumen. . . . .	109
2.51. Esfera, Toro, Cono Recto. . . . .	110

2.52. Recinto de integración $\Omega$ . . . . .	110
2.53. $f(x) = \cos 2x$ y $g(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$ , $x_0 = 0$ . . . . .	117
2.54. The kissing parábola at $x_0 = 1$ . . . . .	119
2.55. Circunferencia osculatriz a $f(x) = x^2$ at $x_0 = 1$ . . . . .	119
2.56. Contacto entre curvas, en $x_0 = 0$ y en $x_0 = 1$ . . . . .	120
2.57. ¿Cuál es la representación que corresponde a $x_0 = 0$ y cuál a $x_0 = 1$ ? .	121
2.58. $a_{n+1} = a_n + 3$ ; $a_{n+1} = a_n - 3$ . . . . .	123
2.59. Sucesiones: $a_n = 0,5^n$ ; $a_n = (-0,5)^n$ . . . . .	124
2.60. Sucesiones: $a_n = 2^n$ ; $a_n = (-2)^n$ . . . . .	124
2.61. Representación del caso $n = a/5$ . . . . .	124
2.62. Cuadrados Eliminados. . . . .	125
2.63. Partición en cuatro partes iguales del $[0, 1]$ , para $f(x) = x^2$ . . . . .	125
2.64. Procesos iterativos $\text{sen}(\text{sen}(\text{sen}(\text{sen}(x_0))))$ ,... y $\text{cos}(\text{cos}(\text{cos}(\text{cos}(x_0))))$ ,....	126
2.65. Procesos iterativos de $f(x) = \sqrt{x}$ para $\neq$ valores de $x_0$ . . . . .	126
2.66. Línea quebrada. . . . .	127
2.67. Transportando los $u_n$ sobre un eje real. . . . .	147
3.1. Identidad esencial y circunferencia trigonométrica. . . . .	151
3.2. Gráficas de $z_1(t) = \sin(t)$ , $z_2(t) = \cos(t)$ y $z_3(t) = \sin(2t)$ ; $t \in [0, 2\pi]$ .	152
3.3. $x(t) = \sin(2t)$ , $y(t) = \sin(t)$ , $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ : $x^2 = 4y^2(1 - y^2)$ . . . . .	153
3.4. Parte I de la curva con forma de ocho. . . . .	154
3.5. Parte II de la curva con forma de ocho. . . . .	154
3.6. Parte III de la curva con forma de ocho. . . . .	155
3.7. La curva (3.7) con forma de ocho vive en el compacto de $\mathfrak{R}^2$ : $[-1, 1] \times$ $[-1, 1]$ . . . . .	155
3.8. $x = 1 - 2y^2$ , $y \in [-1, 1]$ , $x \in [-1, 1]$ . . . . .	156
3.9. La curva con forma de ocho deformado $\alpha_* = \frac{7\pi}{32}$ . . . . .	156
3.10. Ocho deformado $\alpha_* = \frac{\pi}{2}$ , convertido en parte de una parábola . . . . .	156
3.11. $x(t) = \sin(2t)$ e $y(t) = \sin(t + \frac{\pi}{4})$ , $t \in [0, 2\pi]$ . . . . .	157
4.1. Solución gráfica de $2 <  2^{- x } - 1  + 2 < \frac{3}{2}$ y $2 <  2^{- x } - 1  + 2 < \frac{5}{2}$ . . . . .	170

4.2. Sugerencia: e.g. Graficar $[x]$ y multiplicarla por $\frac{1}{x^2}$ . . . . .	170
4.3. Gráficas de $[x]$ , $x - [x]$ , $[x] - x$ , $\frac{[x]-x}{x}$ y $\frac{x-[x]}{x}$ . . . . .	171
4.4. Gráficas de $[x]$ , $x - [x]$ , $[x]$ y $[x]$ . . . . .	171
4.5. Multiplicación por $x^{-1}$ de $[x]$ , $[x]$ , $[x]$ . . . . .	172
4.6. Recíprocas de $[x]$ , $[x]$ , $[x]$ en un intervalo del origen. . . . .	172
4.7. Recíprocas de $[x]$ , $[x]$ , $[x]$ multiplicadas por $x$ . . . . .	173
4.8. La diferencia de ordenadas entre $x$ y $[x]$ para contruir $x - [x]$ . . . . .	173
4.9. Gráficas de $f(x) = \sqrt{x - [x]}$ y $f(x) = \frac{\sqrt{x - [x]}}{x}$ . . . . .	175
4.10. $ \log_2 (x + 1)   \geq K$ , si $K \gg 0$ . . . . .	175
4.11. Soluciones de $ \log_2 (x + 1)   \geq 1$ : $(-\infty, -3]$ ; $[-\frac{3}{2}, -1)$ ; $(-1, -\frac{1}{2}]$ ; $[1, +\infty)$ . . . . .	177
4.12. $\log_2(x + 1) \geq 1$ : Solución $[1, +\infty)$ . . . . .	178
4.13. $\log_2[-(x + 1)] \geq 1$ : Solución $(-1, 2^{-K} - 1]$ . . . . .	178
4.14. $\log_2[-(x + 1)] \geq 1$ : Solución $(-\infty, -2^K - 1]$ . . . . .	179
4.15. $-\log_2[-(x + 1)] \geq 1$ : Solución $[-2^{-K} - 1, -1)$ . . . . .	179
4.16. Soluciones de $ \log_2 (x + 1)   \geq 1$ : $(-\infty, -3]$ ; $[-\frac{3}{2}, -1)$ ; $(-1, -\frac{1}{2}]$ ; $[1, +\infty)$ . . . . .	180
4.17. Funciones hiperbólicas: $m(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ y $n(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ . . . . .	180
4.18. $x(t) = \sin(2t)$ e $y(t) = \sin(t + \frac{\pi}{4})$ , $t \in [0, 2\pi]$ . . . . .	181
5.1. Ubicación de $x_0$ . . . . .	192
5.2. Interpretación gráfica de la no existencia del límite. . . . .	198
5.3. $f(x) = \frac{ x }{x}$ . $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . . . . .	199
5.4. $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ $x \in [-2, 5, 2, 5]$ . . . . .	200
5.5. $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ . . . . .	201
5.6. $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ $x \in [\frac{1}{3}, 1]$ . . . . .	201
5.7. $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ . . . . .	201
5.8. $f(x) = \sin(\frac{\pi}{x})$ $x \in [\frac{1}{(n+2)\pi}, \frac{1}{n\pi}]$ ó $[\frac{-1}{(n)\pi}, \frac{-1}{(n+2)\pi}]$ $n \in \pm \mathbb{N}$ . . . . .	202
5.9. $\ell > 1$ . . . . .	202
5.10. $\ell < -1$ . . . . .	203
5.11. $\ell = 1$ . . . . .	204
5.12. $\ell \in (0, 1)$ . . . . .	205



5.13. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. . . . .	206
5.14. Interpretación de $d(P, l) \approx  \overline{PP''} $ . . . . .	208
5.15. Asíntotas de $x^2 - 2y^2 + 4xy - x + 1 = 0$ . . . . .	211
5.16. Asíntotas de $x^3y - x^4 - y + 1 = 0$ . . . . .	211
5.17. Gráfica de $f(x) = x \sin x$ . . . . .	212
5.18. Asíntotas de $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ y $f(x) = \frac{x^2+2x}{x-2}$ . . . . .	213
5.19. Gráficas de $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ y $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ . . . . .	214
5.20. Asíntotas de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ . . . . .	216
5.21. Asíntotas de la cónica: $3x^2 + y^2 - 4xy - 8x + 2y - 2 = 0$ . . . . .	217
5.22. Gráfico de $f(x)$ . . . . .	227
5.23. Longitud de la cuerda. . . . .	228
5.24. Trayectoria del monje. . . . .	230
5.25. Fuente puntual luminosa. . . . .	232
5.26. Primer caso. . . . .	235
5.27. Segundo caso. . . . .	235
5.28. Dibujo correspondiente al caso $a = \frac{3}{2}$ , $b = 2$ , $H = 5$ . . . . .	236
5.29. Lámina triangular: Primera coordenda del punto M. . . . .	239
6.1. Gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$ . . . . .	247
6.2. Elevación del peso $W$ . . . . .	248
6.3. Estado inicial y final de las variables. . . . .	248
6.4. Dinámica del Problema. . . . .	249
6.5. Mejor visualización de $\overline{AB}$ . . . . .	253
6.6. Conos invertidos . . . . .	254
6.7. Triángulos semejantes . . . . .	254
6.8. Problema de optimización sin solución . . . . .	255
6.9. Variantes de un problema de optimización. . . . .	256
6.10. Miguel: Braquistócrona vs Máximo deleite del panorama . . . . .	259
6.11. Solución del Ej. 17, pág. 288, M. Spivak . . . . .	259
6.12. $t_T(\alpha)$ , $\dot{t}_T(\alpha)$ , $\ddot{t}_T(\alpha)$ , si $c = 1$ , $c > 1$ , $c < 1$ $\frac{W}{V} < \frac{2}{\pi}$ y $c < 1$ $\frac{W}{V} > \frac{2}{\pi}$ . . . . .	263

7.1. Mínimo de $f(x) = x^x, x > 0$ .	270
7.2. Signo de $f'(x) = x^x [\ln(x) + 1], x > 0$ .	271
7.3. Gráficas del Ejercicio N $\doteq$ 11 a).	271
7.4. $y = g(x)$ posee un mínimo en $x_M$ .	272
7.5. $y = f(x)$ cóncava hacia arriba en $x_M$ .	272
7.6. An eery case! (eery: mysterious)	273
7.7. Derivación de funciones compuestas.	275
8.1. $f(x) = x^2$ , en $[0, b]$	280
8.2. División de $[0, b]$ en $n$ partes y rectángulos contenidos y continentes	280
8.3. Sumas inferior y superior de una partición del $[0, 1]$ en cuatro partes iguales para $f(x) = x^2$ .	283
8.4. Subintervalo sin particionar y subintervalo particionado.	284
8.5. $f(x) = c$ ; caso simple de $\text{Sup}\{s(f, P)\} = \text{inf}\{S(f, P)\}$	287
8.6. Representación esquemática de la función de Dirichlet	288
8.7. Regiones contenida $r_P$ y continente $R_P$ , correspondientes a la partición $P$	289
8.8. $f(x)$ acotada, discontinua e integrable	292
8.9. Esquema de sumas inferior y superior de $f(x) = x$ , en $[0, 1]$	294
8.10. $f(x) = x$ , en $[0, b]$	296
8.11. $f(x) = x^2$ , en $[0, b]$	297
8.12. Representaciones de $s(f, P_3)$ y $s(f, P_4)$	302
8.13. Gráfico de una función y su correspondiente función integral	310
8.14. Función discontinua y primitiva continua pero no derivable en un punto	316
8.15. $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^4) dx$ .	320
8.16. $A = \int_0^1 (\sqrt[4]{y} - y^2) dy$	321
8.17. Área encerrada por $f(x) =  (x-1)^2 - 1 $ $x \in [-1, 3]$ y el eje de las abscisas.	322
8.18. $V = \pi \int_0^1 [(2 - x^4)^2 - (2 - \sqrt{x})^2] dx$ , eje de giro $y = 2$ .	322
8.19. $V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{x} + 1,5)^2 - (x^4 + 1,5)^2] dx$ , eje de giro $y = -\frac{3}{2}$ .	323
8.20. $V = \pi \int_0^3 [5^2 - (1 + \sqrt{y+1} + 2)^2] dy$ , eje de giro $x = -2$ .	323
8.21. $V = \pi \int_0^3 \{[4 - (1 + \sqrt{y+1})]^2 - (1)^2\} dy$ , eje de giro $x = 4$ .	324

8.22.	$V = \pi \int_0^1 [(1 + \sqrt{1-y} + 2)^2 - (1 - \sqrt{1-y} + 2)^2] dy$ , eje de giro $x = -2$ .	324
8.23.	$V = \pi \int_0^1 \{[4 - (1 - \sqrt{1-y})]^2 - [4 - (1 + \sqrt{1-y})]^2\} dy$ , eje de giro $x = 4$ .	325
8.24.	$V = \pi \int_0^3 [(1 - \sqrt{1+y} + 2)^2 - (1)^2] dy$ , eje de giro $x = -2$ .	325
8.25.	$V = \pi \int_0^3 \{5^2 - [4 - (1 - \sqrt{1+y})]^2\} dy$ , eje de giro $x = 4$ .	326
8.26.	Caso $W > R$ . Soluciones (8.17): Estabilidad asintótica $\chi_e(t) = 0$ .	329
8.27.	Caso $R < W$ $\cap$ . Soluciones (8.19): Estabilidad asintótica $\chi_{\pm}^+(t) = \pm\sqrt{\frac{\Delta^+}{A}}$ , $-\sqrt{\frac{\Delta^+}{A}} < x < \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}}$ y $x \neq 0$ .	331
8.28.	Caso $R < W$ $\cap$ . Soluciones (8.18) y (8.19): Estabilidad asintótica $\chi_{\pm}^+(t) =$ $\pm\sqrt{\frac{\Delta^+}{A}}$ .	332
8.29.	Caso $R = W$ . Soluciones (8.20): Estabilidad asintótica $\chi_e(t) = 0$ .	333
9.1.	$f(\alpha) = \varphi(\alpha)$ , y $f'(\alpha) \neq \varphi'(\alpha)$	343
9.2.	$f(\alpha) = \varphi(\alpha)$ , $f'(\alpha) = \varphi'(\alpha)$ y $f(\alpha)'' \neq \varphi'(\alpha)$	344
9.3.	¿Cuál es el punto inicial $a$ o $b$ ?	358
9.4.	Aproximaciones inicial y primera y estimaciones de los respectivos errores	359
9.5.	$f''(x) > 0$ , $f(x_0) > 0$ , sucesiones de iterados monótonas y acotadas	361
9.6.	$x = -1$ e $y = e$ . Asíntotas de $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$	373
9.7.	$y = e^{-1}$ : Asíntota de $f(x) = (\frac{x}{x+1})^x$	373
10.1.	Coordenadas polares $(r, \theta)$ del punto $P$ .	382
10.2.	Interpretación de valores negativos para $r$ .	382
10.3.	Ejemplos de puntos con la primer coordenada negativa.	383
10.4.	Punto $P(x, y)$ en el primer cuadrante.	384
10.5.	Punto $P(x, y)$ en el segundo cuadrante.	385
10.6.	Punto $P(x, y)$ en el tercer cuadrante.	385
10.7.	Punto $P(x, y)$ en el cuarto cuadrante.	386
10.8.	Representaciones cartesiana y polar de la función $r(\theta) = 3,5 \sin \theta$ , con $\theta \in [0, \pi]$ .	387
10.9.	Tres cuadros de la animación $r(\theta) = 3,5 \sin \theta$ .	388
10.10.	$r(\theta) = 3 \cos 3\theta$ .	389
10.11.	$r(\theta) = 3 \cos 2\theta$ .	389

10.12	$r(\theta) = 3 \cdot \sin 2\theta$ . . . . .	389
10.13	$r(\theta) = 3 \cdot \sin 2\theta$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ . . . . .	390
10.14	$r(\theta) = 3 \cdot \sin 2\theta$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . . . . .	390
10.15	Simetría del crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \sin(x)$ . . . . .	391
10.16	$r(\theta) = 3 \cdot \sin 2\theta$ con $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ . . . . .	391
10.17	$r(\theta) = 3 \cdot \sin 2\theta$ con $0 \leq \theta \leq \pi$ . . . . .	392
10.18	$r(\theta) = 3 \cdot \sin 2\theta$ con $0 \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$ . . . . .	392
10.19	$r(\theta) = 3 \cdot \sin 2\theta$ con $0 \leq \theta \leq \frac{13\pi}{8}$ . . . . .	392
10.20	$r(\theta) = 1,5 + \cos \theta$ . . . . .	393
10.21	$r(\theta) = 1 + \cos \theta$ . . . . .	394
10.22	$r(\theta) = 0,5 + \cos \theta$ . . . . .	394
10.23	$r(\theta) = 0 + \cos \theta$ . . . . .	394
10.24	Gráfica de $r(\theta) = 0,05 + \cos \theta$ , $\theta \in [0, \frac{7\pi}{6}]$ , caracol con un rizo, incompleto y con un valor de $a$ pequeño. . . . .	395
10.25	Caracol con un rizo que muta hacia la circunferencia $r(\theta) = \cos \theta$ , pero recorrida dos veces, cuando $a \rightarrow 0$ . . . . .	395
10.26	Representación en polares de $r(\theta) = k \cos \theta$ , con $k > 0$ . . . . .	395
10.27	$r(\theta) = 3 + 2 \cos \theta$ , en coordenadas cartesianas. . . . .	396
10.28	Gráficas de $r(\theta) = 3 + 2 \cos \theta$ con $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , $[0, \pi]$ y $[0, \frac{3\pi}{2}]$ . . . . .	398
10.29	Gráfica de $r(\theta) = 3 + 2 \cos \theta$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ . . . . .	399
10.30	$r(\theta) = 2 - 2 \cos \theta$ , con $\theta \in [0, \pi]$ . . . . .	400
10.31	$r(\theta) = 2 - 2 \cos \theta$ , con $\theta \in [0, 2\pi]$ . . . . .	400
10.32	Representación cartesiana $r(\theta) = 1 - 2 \sin \theta$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ . . . . .	400
10.33	Gráfica de $r(\theta) = 1 - 2 \sin \theta$ con $\theta \in [0, \frac{\pi}{6}]$ . . . . .	400
10.34	Gráfica de $r(\theta) = 1 - 2 \sin \theta$ con $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . . . . .	401
10.35	Gráficas de $r(\theta) = 1 - 2 \sin \theta$ con $\theta \in [0, \frac{5\pi}{6}]$ , $[0, \pi]$ , $[0, \frac{3\pi}{2}]$ y $[0, 2\pi]$ . . . . .	401
10.36	Mutaciones: Primera superior $r(\theta) = 1,5 + \cos \theta$ , caracol sin rizo. Segunda $r(\theta) =$ 1. $+ \cos \theta$ cardioide. Tercera $r(\theta) = 0,5 + \cos \theta$ , caracol con un rizo. Cuarta $r(\theta) = 0 + \cos \theta$ circunferencia. . . . .	402
10.37	Corrimiento horizontal de un gráfico en el plano cartesiano . . . . .	403

10.38	Cambio de coordenadas $\theta' = \theta - \theta_0$ , $\rho = r$ .	403
10.39	Rotación de gráfico en el plano polar	404
10.40	Gráficos de $r(\theta) = 1 - 2 \cos(\theta - \theta_0)$ cuando $\theta_0 = 0, \frac{2\pi}{3}, \pi$ y $\frac{5\pi}{3}$ .	405
10.41	Concoide de Nicomedes $a = \frac{1}{2}$ .	406
11.1.	Campo de direcciones: The simplest model $\frac{dy}{dt} = y$ e $\frac{dy}{dt} = -y$ .	412
11.2.	$N(t) > 0$ : Crecimiento $r > 0$ , decrecimiento $r < 0$ . Cóncava.	415
11.3.	$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \propto y(t)$ , Soluciones $y(t) = e^{(rt+C)}$ , $y(t) = -e^{(rt+C)}$ $r > 0$ .	416
11.4.	$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \propto y(t)$ , Soluciones $y(t) = e^{(rt+C)}$ , $y(t) = -e^{(rt+C)}$ e $y_e(t) \equiv 0$ .	416
11.5.	$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} \propto N(t) \rightarrow$ crecimiento o decrecimiento exponencial.	417
11.6.	$f(y)$ vs $y$ , $\frac{dy}{dt} = r y(1 - \frac{y}{K})$ .	421
11.7.	$y$ vs $t$ del modelo logístico $\frac{dy}{dt} = r y(1 - \frac{y}{K})$ , $r > 0$ , $K > 0$ .	424
11.8.	Soluciones de $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3} y(1 - y)(y - 3)$ , en $(t, y)$ .	428
11.9.	$f(y) = \frac{1}{3} y(1 - y)(y - 3)$ versus $y$ .	429
11.10	Soluciones $t$ vs $y$ , de $\frac{dy}{dt} = \frac{r}{TK} y(T - y)(y - K)$ .	432
11.11	$t = \sqrt[3]{y} + c$ , $t = \sqrt[3]{y^2} + c$ , $t =  y  + c$ , $t = -\frac{1}{y} + c$ , $t = \ln  y  + c$ .	434
11.12	$\frac{dt}{dy} = \frac{d(\sqrt[3]{y} + c)}{dy}$ , $\frac{dt}{dy} = \frac{d(\sqrt[3]{y^2} + c)}{dy}$ , $\frac{dt}{dy} = \frac{d( y  + c)}{dy}$ , $\frac{dt}{dy} = \frac{d(-\frac{1}{y} + c)}{dy}$ , $\frac{dt}{dy} = \frac{d(\ln  y  + c)}{dy}$ .	435
11.13	Las funciones $t = \sqrt[3]{y} + c$ no son las únicas soluciones de $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$ .	436
11.14	La familia $t = \sqrt[3]{y^2} + c$ , no son las soluciones de $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y}}$ .	436
11.15	Las funciones $t =  y  + c$ , no resuelven $\frac{dt}{dy} = \frac{ y }{y}$ .	437
11.16	Familia de funciones $t = \frac{-1}{y} + c$ son las soluciones $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{y^2}$ .	437
11.17	La familia $t = \ln  y  + c$ son las soluciones $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{y}$ .	438
11.18	$t = \sqrt[3]{y} + c$ , $t = \sqrt[3]{y^2} + c$ , $t = -\frac{1}{y} + c$ .	444
11.19	$t =  y  + c$ , $t = \ln  y  + c$ .	445
11.20	Carp Fishing Soluciones: Estabilidad, si $c < \frac{1}{4}$ , en $\chi_e^2(t) \rightarrow \chi_e(t) \approx 1$ .	450
11.21	Reciprocidad funcional en las soluciones, $c = \frac{1}{4}$ , en $t > K \geq 0$ y $N_e(t) = \frac{1}{2}$ .	453
11.22	Reciprocidad funcional en las soluciones, $c = \frac{1}{4}$ , en $t < \bar{K}$ y $N_e(t) = \frac{1}{2}$ .	453
11.23	Soluciones si $c > \frac{1}{4}$ .	455
11.24	Extinción poblacional y barreras temporales en $c = \frac{10}{4} > \frac{1}{4}$ .	456
11.25	Extinción en una población particular del caso $c = \frac{10}{4}$ .	456

12.1. Ilustración de Aquiles y la Tortuga. . . . .	474
12.2. Paradoja de Aquiles y la Tortuga. . . . .	475
13.1. Bifurcación $\pitchfork$ en las soluciones de la E.D.O. de Landau. . . . .	496
14.1. Problema de Heron. . . . .	505
14.2. Enfoque Geométrico. . . . .	508
14.3. Ley de Snell. . . . .	509
14.4. Sucesivas refracciones. . . . .	523
14.5. Primer ejemplo en el espejo cuasi-esférico, $\pi < \alpha_* < 2\pi$ . . . . .	527
14.6. Segundo caso en el espejo cuasi-esférico. . . . .	531
14.7. Rayos geométricos con parámetros $\alpha_i$ $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . . . . .	533
14.8. Antípodas: Ejemplo 14.5.7, $\alpha_1 \in [-\pi, \pi]$ . . . . .	535
14.9. Rayos del Ejemplo 14.5.7. . . . .	535
14.10 Antípodas: Ejemplo 14.5.8, $\alpha_1 \in [-\pi, \pi]$ y $\alpha_2 \in [-\pi, \pi]$ . . . . .	537
14.11 Rayos del Ejemplo 14.5.8 . . . . .	538
14.12 Caleidoscopio del Ejemplo 14.5.8, $\alpha_1 \in (-\infty, +\infty)$ y $\alpha_2 \in (-\infty, +\infty)$ . . . . .	539
14.13 Antípodas: Ejemplo 14.5.10, $\alpha_1 \in [-\pi, \pi]$ , $\alpha_2 \in [-\pi, \pi]$ y $\alpha_3 \in [-\pi, \pi]$ . . . . .	543
14.14 Rayos del Ejemplo 14.5.10 . . . . .	549
14.15 Representación de los rayos reflexivos para $n-1 = 4$ colisiones. . . . .	554
14.16 Representación de los rayos reflexivos para $n-1 = 5$ colisiones. . . . .	554
14.17 Número primo de Fermat $n = 17$ : Recorridos del viajante $\sim$ Rayos en el espejo cuasi-esférico $e^{i\pi} \sqrt[17]{1}$ . . . . .	557
15.1. $x(t) = \sin(2t)$ e $y(t) = \sin(t + \frac{\pi}{4})$ , $t \in [0, 2\pi]$ . . . . .	563
15.2. Gráfica de $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ . . . . .	565
15.3. Gráfica de $f(x) = \pm \sqrt{1 - (x + 1/4)^2} \left(1 - \frac{1/4}{x + 1/4}\right)$ . . . . .	565
15.4. Proceso iterativo $\{\sqrt{x_0}, \sqrt{\sqrt{x_0}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{x_0}}}, \dots\}$ iniciado en distinto $x_0$ . . . . .	594
15.5. Proceso iterativo $\{x_0, \cos(x_0), \cos(\cos(x_0)), \cos(\cos(\cos(x_0))), \dots\}$ , inicia- dos en diferentes $x_0$ , $x_* \rightarrow 0,739085$ . . . . .	594

# Índice de cuadros

1.1. Hoja de Presentación. . . . .	29
2.1. CRONOGRAMA TENTATIVO. (Cuadro Inicial). . . . .	35
2.1. CRONOGRAMA TENTATIVO. (Cont. 1.) . . . . .	36
2.1. CRONOGRAMA TENTATIVO. (Cont. 2.) . . . . .	37
2.2. Operando sobre $ x $ , $e^x$ , $\sin x$ , $\cos x$ , $\log(x + 2)$ y $2^{-x}$ . . . . .	53
2.3. Operando sobre $\log x $ , $\sinh x$ , $\cosh x$ , $\log(x + 2)$ $2^{- x }$ , entre otras. . . . .	56
2.4. Operando sobre $\text{tang}(x)$ , $\text{sec}(x)$ , $\sin x$ y $\text{cosec}(x)$ . . . . .	57
3.1. Construcción del recorrido de la cúbica si $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . . . . .	158
3.2. La cúbica $x(y) \in [-1, 1] \times [0, 1]$ . . . . .	158
3.3. La cúbica $x(y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ . . . . .	159
3.4. $x(t) = \sin(0t)$ o $x(t) = \cos(0t)$ , si $y(t) = \sin t$ , $t \in [0, 2\pi]$ . . . . .	160
3.5. $x(t) = \sin(nt)$ o $x(t) = \cos(nt)$ , si $y(t) = \sin t$ , $n \in \{1, 2\}$ , $t \in [0, 2\pi]$ . . . . .	162
3.6. $x(t) = \sin(nt)$ o $x(t) = \cos(nt)$ , si $y(t) = \sin t$ , $n \in \{3, 4\}$ , $t \in [0, 2\pi]$ . . . . .	163
3.7. $x(t) = \sin(nt)$ o $x(t) = \cos(nt)$ , si $y(t) = \sin t$ , $n \in \{5, 6\}$ , $t \in [0, 2\pi]$ . . . . .	164
3.8. $x(t) = \sin(nt)$ o $x(t) = \cos(nt)$ , si $y(t) = \sin t$ , $n \in \{7, 8\}$ , $t \in [0, 2\pi]$ . . . . .	165
3.9. $x(t) = \sin(mt)$ o $x(t) = \cos(mt)$ , si $y(t) = \sin t$ , $t \in [0, 2\pi]$ . . . . .	166
4.1. El recorrido que se realiza sobre parte de $2y^2 - 1 - x = 0$ . . . . .	182
4.2. Inversión por ramas $y = \cosh x$ . . . . .	183
4.3. Inversión en intervalos principales $y = \sin x$ , $y = \cos x$ . . . . .	184
10.1. Intervalos de crecimiento y decrecimiento de $r(\theta) = 3 + 2 \cos \theta$ . . . . .	397
10.2. Información para construir la gráfica de la cardioide $r(\theta) = a(1 - \cos \theta)$ . . . . .	399

10.3. Información recopilada para graficar $r(\theta) = 1 - 2 \sin \theta$ .	399
13.1. A picture is worth 1000 words.	486
13.2. Pop-up-Window: Aplicación reiterada de la función valor absoluto.	487
13.3. e.g. Grilla polar (Arriba). Tabla y Representación Cartesiana (Abajo).	488
13.4. e.g. Un caracol girando alrededor del origen.	489
13.5. e.g. Mutación: Circunferencia, Cuasi-Circunferencia, Cardioide y Caracol.	490
13.6. Sentencias perfectibles: Funciones Trigonómicas.	491
13.7. Presionando la misma tecla.	492
13.8. Optimización en compactos: Miguel el ecologista.	493
13.9. E.D.O. $\frac{dx}{dt} = x^{2/3}$ .	494
13.10 Concoides de Nicomedes, $a = -1$ y $a = 2$ .	495
13.11 Selección de $c$ y de $r$ en $\dot{y} = ry$ .	497
13.12 Cómputos y Conjeturas en el Cálculo.	498
15.1. Valor Medio Integral $\mu = \frac{1}{e-1}$ de $f(x) = \ln x$ , $x$ en el intervalo $[1, e]$ .	575
15.2. Valor Medio Integral $\mu = -\frac{1}{2}$ de $f(x) = - x $ , $x$ en el intervalo $[-1, 1]$ .	576
15.3. Ejercicio N <sup>o</sup> 3 del 3 <sup>er</sup> ©. Longitud y recorrido en curvas parametrizadas.	578
15.4. Ejercicio N <sup>o</sup> 4 del 3 <sup>er</sup> © OPTATIVO, $\frac{dx}{dt} = x(x-1)$ .	579
15.5. Valor Medio Integral $\mu = -\frac{7}{16}$ de $f(x) = [x]$ , $x$ en el intervalo $[-\frac{9}{2}, \frac{7}{2}]$ .	580
15.6. Valor Medio Integral $\mu = 0$ de $f(x) = [x]$ , $x$ en el intervalo $[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}]$ .	581
15.7. Valor Medio Integral $\mu = \frac{7}{16}$ de $f(x) = [x]$ , $x$ en el intervalo $[-\frac{7}{2}, \frac{9}{2}]$ .	582
15.8. Dinámica logística $x_{n+1} = 3,2x_n(1-x_n)$ , sin convergencia, para los inicia- dores $x_0 = 0,1$ , $x_0 = 0,3$ y $x_0 = 0,5$ .	586
15.9. El complemento de mi casita y el sol bajo el cielo de $y = \arccos(x)$ , $x \in [-1, 1]$ .	592
15.10 Estudio completo de $f(x) = \frac{1}{1+ x } + \frac{1}{1+ x-1 }$ .	596
15.11 La derivada primera de $f(x) = \frac{1}{1+ x } + \frac{1}{1+ x-1 }$ .	597
15.12 Corazón ♡.	602
16.1. GRÁFICOS - ANALISIS MATEMATICO II	606



# Parte I

## Introducción



# Capítulo 1

## Nuestro título.

### 1.1. CRESTOMATÍA: UN CALEIDOSCOPIO DEL CALCULUS.

Sobre la base del significado o los significados que asigna el “*Diccionario de la Real Academia Española*”, en su vigésima segunda edición, a cada vocablo del título que hemos elegido, dejamos librado a la imaginación del lector el sentido que prefiera asignarle al mismo. De todas maneras sugerimos visitar el sitio web online <http://www.rae.es/>, y solo agregamos que nuestro interés se centra en el “*Cálculo*” sobre el conjunto de los números reales.

***Crestomatía.*** (Del gr. *χρηστομαθεια*).

f. Colección de escritos selectos para la enseñanza. (Ver R.A.E., Tomo I a/g pág. 682.)

***Caleidoscopio.*** (Del gr. *Καλειδοσκοπιο*). (Del gr. *Καλος*, bello, *ειδος*, imagen, y *σcopio*, ver. ( R.A.E., Tomo I a/g pág. 399 y Tomo II h/z pág. 2033.)

1. m. Tubo ennegrecido interiormente, que encierra dos o tres espejos inclinados y en un extremo dos láminas de vidrio, entre las cuales hay varios objetos de forma irregular, cuyas imágenes se ven multiplicadas simétricamente al ir volteando el tubo, a la vez que se mira por el extremo opuesto.
2. Conjunto diverso y cambiante.

## Capítulo 1. Nuestro título.

*Calcūlus.* (Latín.) Cálculo. (§15.6, pág. 601) ( R.A.E., Tomo I a/g pág. 397.)

1. m. Cómputo, cuenta o investigación que se hace de algo por medio de operaciones matemáticas.
2. Conjetura.

Confiamos en que antes de finalizar la lectura de este compendio, aún cuando no haya sido completa o muy minuciosa, el lector sentirá conformidad con el título elegido:

**“CRESTOMATÍA: UN CALEIDOSCOPIO DEL CALCULUS ”.**

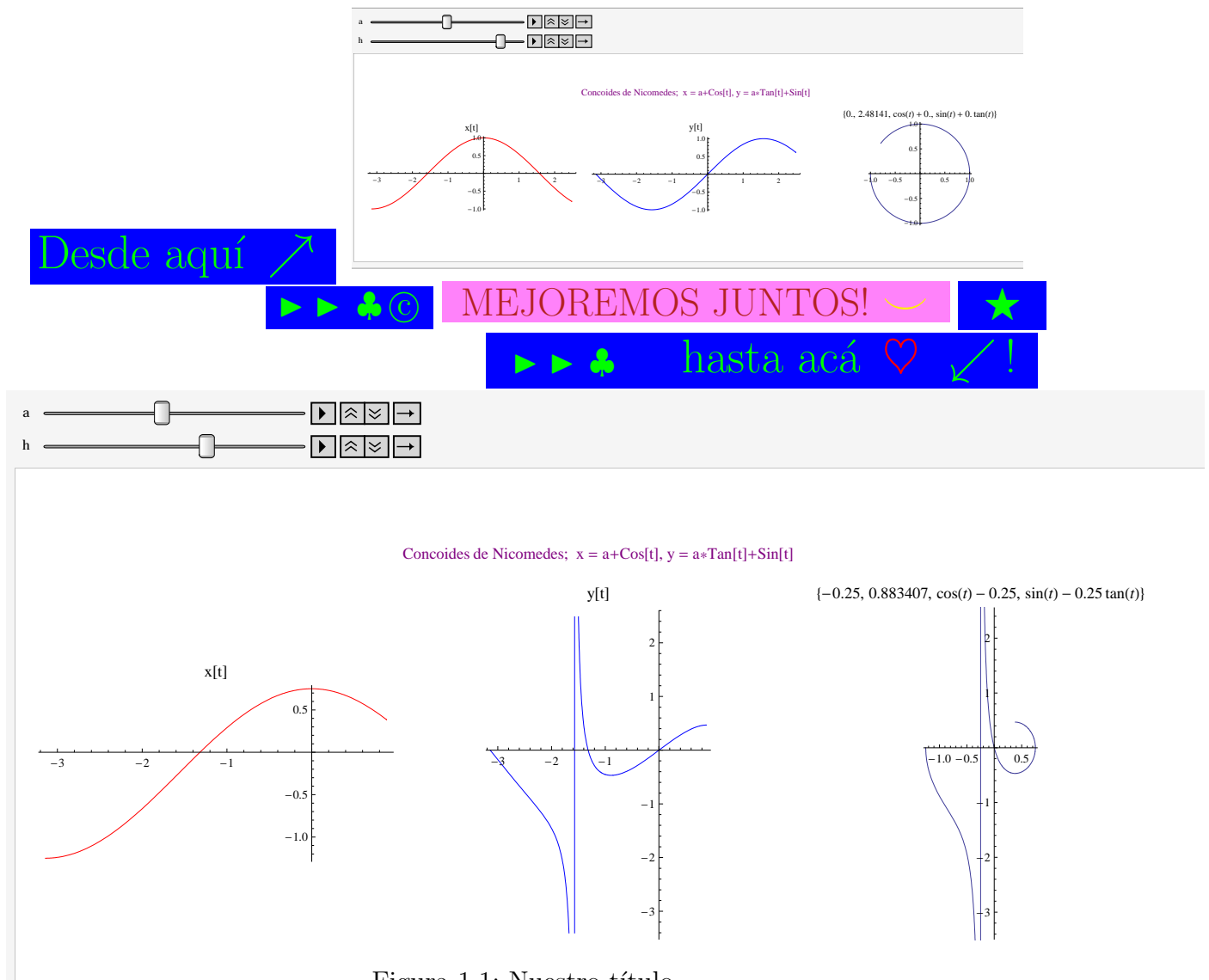
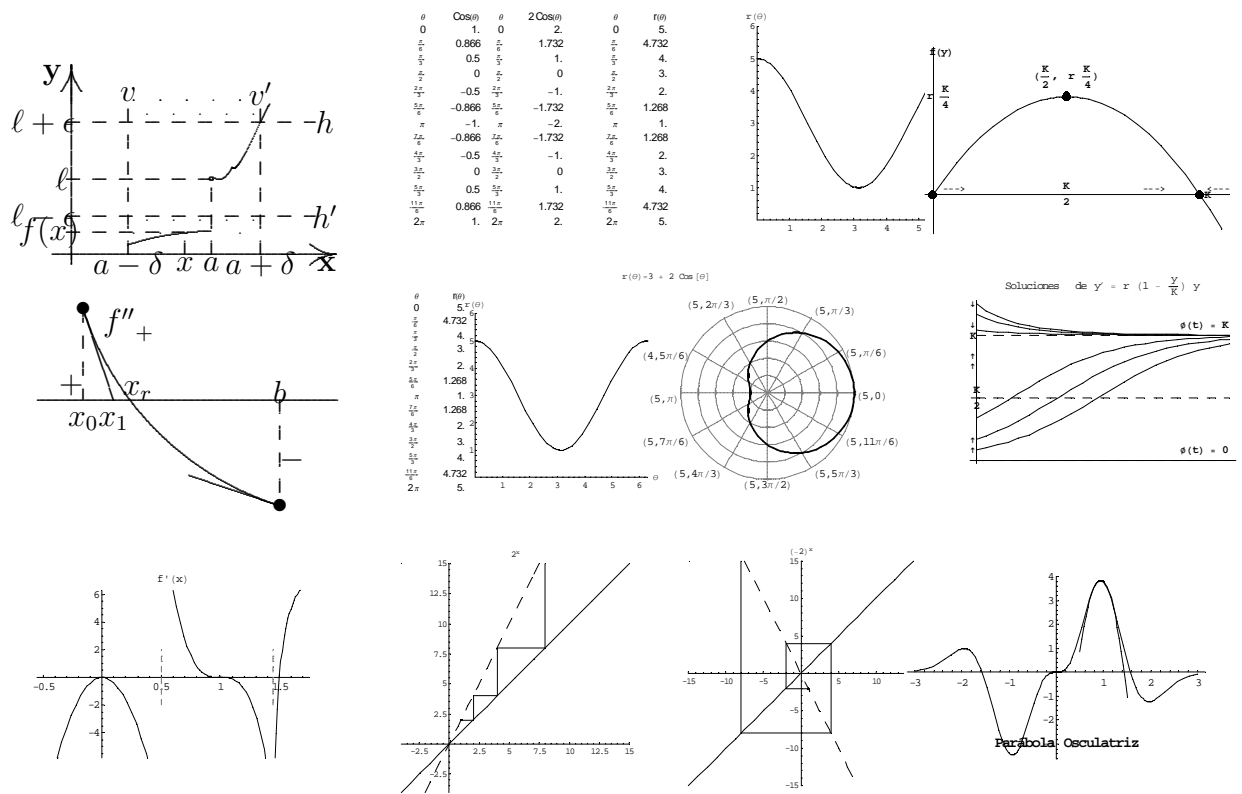


Figura 1.1: Nuestro título.

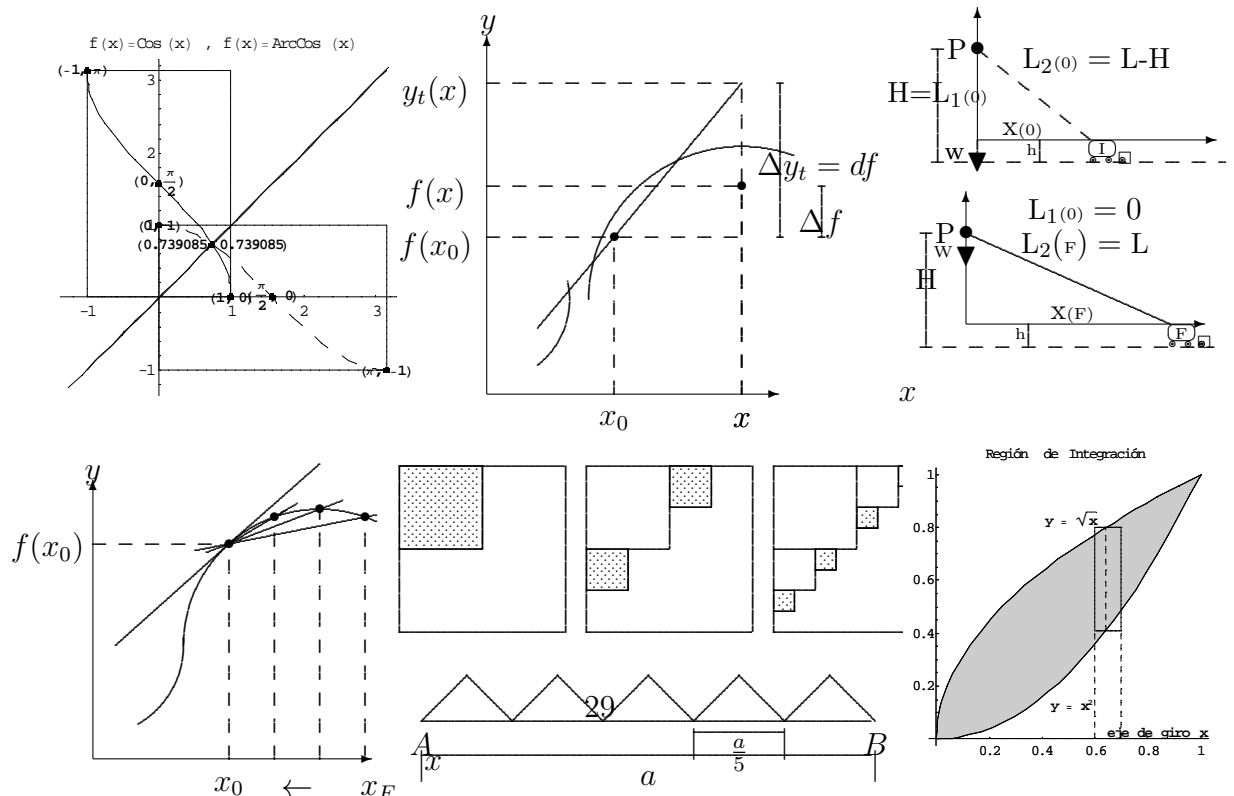
# 1.1. CRESTOMATÍA: UN CALEIDOSCOPIO DEL CALCULUS.



## CRESTOMATIA: UN CALEIDOSCOPIO del CALCULUS

Prof. Blanca Isabel Niel

Depto de Matemática. U.N.S.



Cuadro 1.1: Hoja de Presentación.



## Parte II

# Guía de Trabajos Prácticos





## Capítulo 2

### Guía de Ejercicios Propuestos

## CRONOGRAMA TENTATIVO

**ASIGNATURA: ANALISIS MATEMATICO I ( DM 5551-5, 5551-6, Area I )**

**Alumnos de las Carreras:**

**Ing. Electrónica, Ing. Electricista ( DM 5551-5 )**

Horarios de Clases Teóricas: Martes -8 - 10, Jueves -8 - 10, Aula: 9 (12 de Octubre).

Horarios de Clases Prácticas: Martes -10 - 12, Jueves -10 - 12, Aula: 9 (12 de Octubre).

**Prof.: Ing. Blanca Isabel Niel, Legajo: 5442.**

**Asistente: Ing. Sandra Marcela Lopez.**

**Ayudantes: Ornela Scorolli y Hernán Alvarez.**

## CURSADO Y COLOQUIOS

### ■ *Cursado*

$$1. \{ \text{Nota Primer Parcial} + \text{Nota Segundo Parcial} + \text{Nota Tercer Parcial}(\geq 40) \} \geq 180$$

( Cursa la Asignatura)

$$2. 0 \leq \text{Nota Primer Parcial} + \text{Nota Segundo Parcial} + \text{Nota Tercer Parcial} < 180 \quad \rightarrow$$

Recuperatorio de cada Parcial con nota  $< 60$ .

Calificación de recuperatorios  $\geq 60$ .

(Cursa la Asignatura)

### ■ *Coloquios*

Si la Nota Primer Parcial  $\geq 60$  (Puede Rendir Primer Coloquio) y Si la Nota Segundo Parcial  $\geq 60$  (Puede Rendir Segundo Coloquio) y Si Nota Tercer Parcial  $\geq 60$  (Puede Rendir Tercer Coloquio); si en cada Coloquio I, II y III la Nota es  $\geq 60$  está en condiciones de Rendir el IV Coloquio si la nota es  $\geq 60$ , tiene la Asignatura Aprobada. En el primer Coloquio con nota  $< 60$ , debe rendirse el Exámen Final de la Asignatura.

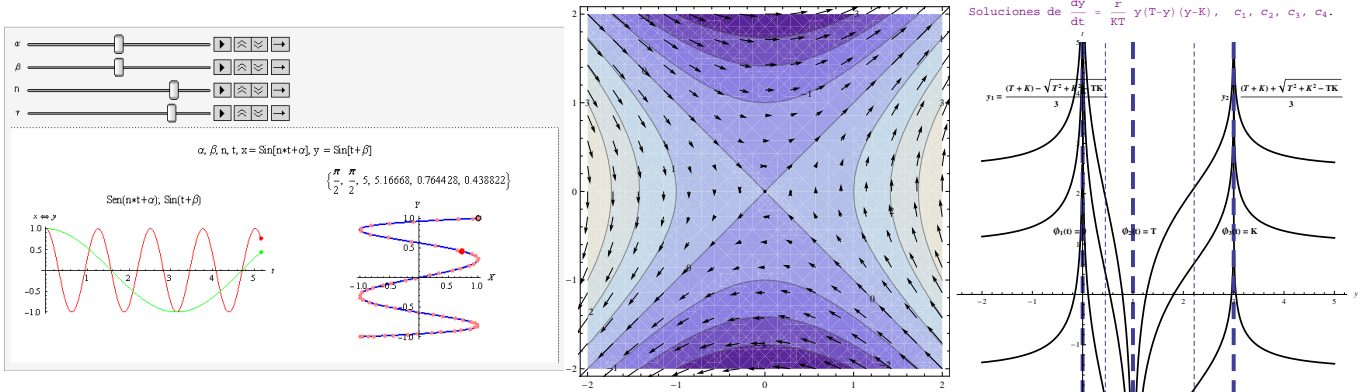
Período	Temas a Desarrollar	Ilustraciones
Martes 17/03/2.015 Jueves 19/03/2.015	<b>Valor absoluto</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Desigualdades</li> <li>■ Funciones</li> </ul>	
Jueves 26/03/2.015 Martes 31/03/2.015 Martes 07/04/2.015	<b>Límite de <math>f(x)</math></b> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Continuidad</li> <li>■ Teorema de Bolzano</li> <li>■ Teorema de Bolzano</li> </ul> <b>Weierstrass</b>	
Jueves 09/04/2.015 Martes 14/04/2.015	<b>Derivada</b>	
Jueves 16/04/2.015 Martes 21/04/2.015	<b>Derivada: Aplicaciones</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Gráfico de funciones</li> <li>■ Optimización</li> </ul>	
<b>Jueves 23/04/2.015</b>	<b>1er PARCIAL</b> Aula: 9, 8-12	<b>1er COLOQUIO</b>
Martes 28/04/2.015 Jueves 30/04/2.015	<b>Teorema de Lagrange</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Interpretación geométrica</li> <li>■ Consecuencia en el Cálculo Integral</li> <li>■ Regla de L'Hôpital</li> </ul>	

Cuadro 2.1: CRONOGRAMA TENTATIVO. (Cuadro Inicial).

Período	Temas a Desarrollar	Ilustraciones
<b>Antiderivación</b>		
Martes 05/05/2.015	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Antiderivadas</li> <li>■ Métodos de integración</li> </ul>	
Jueves 07/05/2.015		
Martes 12/05/2.015		
<b>Jueves 14/05/2.015</b>	<b>2<sup>do</sup> PARCIAL</b> Aula: 9, 8-12	<b>2<sup>do</sup> COLOQUIO</b>
<b>Derivada: Otras aplicaciones</b>		
Jueves 28/05/2.015	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Fórmula de Taylor</li> <li>■ Misceláneos</li> </ul>	
Martes 02/06/2.015		
Jueves 04/06/2.015		

Cuadro 2.1: CRONOGRAMA TENTATIVO. (Cont. 1.)

Período	Temas a Desarrollar	Ilustraciones
Martes 09/06/2.015 Jueves 11/06/2.015 Martes 16/06/2.015	<b>Polares. Impropias</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Integrales Impropias</li> <li>Longitud de curvas planas</li> </ul>	
Jueves 18/06/2.015 Martes 23/06/2.015	<b>Sucesiones y Series</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Sucesiones</li> <li>Dinámicas discretas</li> <li>Series: Aplicaciones</li> </ul>	
<b>Jueves 25/06/2.015</b>	<b>3<sup>er</sup> PARCIAL</b> Aula: 9, 8-12	<b>3<sup>er</sup> COLOQUIO</b>
Martes 30/05/2.015	<b>Funciones Vectoriales</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Movimientos planos</li> <li>Velocidad</li> <li>Aceleración</li> </ul>	
<b>Jueves 02/07/2.015</b>	<b>RECUPERATORIO</b>	<b>4<sup>to</sup> COLOQUIO</b>



Fechas requeridas 4<sup>to</sup> y/o 5<sup>to</sup> **COLOQUIO** **EXAMENES FINALES**

Cuadro 2.1: CRONOGRAMA TENTATIVO. (Cont. 2.)

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

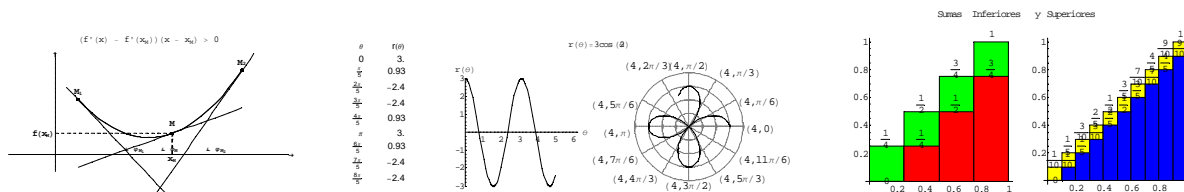


Figura 2.1: Ilustraciones en las pautas del cursado.

A continuación se explicitan los libros y/o apuntes más relacionados o afines con el enfoque que hemos utilizado para seleccionar los ejercicios propuestos en la Guía de Trabajos Prácticos.

- a) Problemas y Ejercicios. [Stewart, J. (2010)].  
 Otros, [Larson, R. P. Hosteler, y Edwards B. H. (2010)], [Leithold, L. (1988)],  
 [Demidovich, D. (1980)], [Ayres, F. (1950)].
- b) Bibliografía Básica: Motivación de fundamentos teóricos.  
 [Rey Pastor, J. et al. (1957)].  
 Otros, [Spivak, M. (1999)], [Strang, G. (2010)], [Sadosky, M. y Guber, R. (1971)].

Bibliografía para consultar “*Ejercicios Adicionales*” por parte de los alumnos interesados.

- [Purcell, E. J., Varberg, D. et. al. ( 1993)]
- [Rabuffetti, H. (1995)]
- [Stewart, J. (2008)], [Stewart, J. (2001)], [Stewart, J. (1998)]
- [Iturrioz, L. (1972)]

Bibliografía para consultar “*Enfoques Teóricos Diferentes* ” por parte de los alumnos interesados.

- [Sadosky, M. y Guber, R. (1971)]
- [Noriega, R. J. (1991)]
- [Thomas, G. B. y Finney, R. L. (1.998)]
- [Germani, A. y Brignole, D. (2000)] y [Germani, A. y Brignole, D. (2000)]

---

Bibliografía para consultar sobre como obtener “*Visualizaciones Gráficas, Imágenes y Cómputos del Cálculo*” por parte de los alumnos interesados.

- [Aguilera, N. E. (1995)]
- [Cordero, L. A., Fernández, M. y Gray, A. (1995)]

Prof. Blanca Isabel Niel

## 2.1. Trabajo Práctico N $\doteq$ 0: Funciones y desigualdades, “valor absoluto”.

1. Grafique y halle la “imagen” de cada una de las siguientes funciones de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$l(x) : x \rightarrow ||x - 1| - 1|$$

$$r(x) : x \rightarrow |||x - 1| - 1| - 1|$$

$$f(x) : x \rightarrow |x - 5| - |x + 3| - 1$$

$$g(x) : x \rightarrow 3|x - 1| - |2x|$$

$$h(x) : x \rightarrow |x - 3| - |2x - 1| + 3$$

$$m(x) : x \rightarrow |2x - 4| + |x + 5| - 1$$

$$s(x) : x \rightarrow |x^2 - 4| - 1$$

$$t(x) : x \rightarrow |x^2 - x|$$

2. Idem para

$$f(x) : x \rightarrow \begin{cases} |2x + 1| & \text{si } x < -1 \\ |4 - x| & \text{si } -1 \leq x < 5 \\ |x - 3| & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

3. (i) Grafique las funciones  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$ , y  $f(x)$ , en ese orden:

$$f_1(x) = (x - 2)^2$$

$$f_2(x) = (x - 2)^2 - 1,$$

$$f_3(x) = |(x - 2)^2 - 1|$$

$$f(x) = |(x - 2)^2 - 1| - 3$$

(ii) Reefina a  $f(x) = |(x - 2)^2 - 1| - 3$  sin usar valor absoluto.

(iii) Resuelva analíticamente la inecuación  $|(x - 2)^2 - 1| + 3 \geq 0$ .

(iv) Verifique la concordancia entre la solución del inciso (iii) y el gráfico de  $f(x)$ .

(v) Resuelva  $|(x - 2)^2 - 1| - 3 = ||(x - 2)^2 - 1| - 3|$ .

4. Indique el “dominio”, grafique, calcule las intersecciones con los ejes coordenados y determine la “imagen” de cada una de las siguientes funciones

$$f(x) : x \rightarrow \frac{|x - 1|}{|x + 3|}$$

$$f(x) : x \rightarrow \frac{2x}{x + 3}$$

$$f(x) : x \rightarrow \frac{|x - 1|}{3 - x}$$



$$f(x) : x \rightarrow \ln |x - 1| \qquad f(x) : x \rightarrow |\ln x| \qquad f(x) : x \rightarrow 2^{-|x-1|}$$

$$f(x) : x \rightarrow -\frac{|3x + 2|}{|x - 1|} \qquad f(x) : x \rightarrow |3^{x-2}| \qquad f(x) : x \rightarrow |x + 2| + \frac{|x - 3|}{|x|}$$

$$f(x) : x \rightarrow |x^2 + 2x + 1| - 2|x + 4| - |x^2 - 1| \qquad f(x) : x \rightarrow |\log_{\frac{1}{7}} x|$$

5. Exprese las funciones dadas en todos los incisos del ejercicio anterior como funciones definidas a trozos y sin usar valor absoluto, en los casos en que este aparezca en la definición dada.

6. Resuelva las siguientes desigualdades, si  $f(x) = \frac{2x - 6}{2x + 2}$ . Ver Figura 2.2.

$i_1)$   $-10 < f(x) < 5$

$i_2)$   $f(x) > 15$

$i_3)$   $f(x) < -15$

Represente gráficamente los resultados obtenidos.

7. Resuelva las siguientes desigualdades, si  $f(x) = \left| \frac{2x - 6}{2x + 2} \right|$ .

$i_1)$   $1 < f(x) < 2$

$i_2)$   $f(x) > 15$

Represente gráficamente los resultados obtenidos.

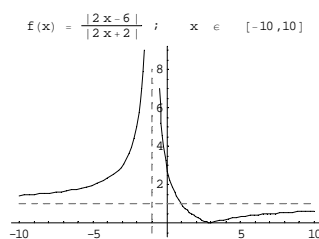


Figura 2.2:  $f(x) = \left| \frac{x - 3}{x + 1} \right|$ .

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

---

8. Resuelva las siguientes desigualdades, si  $f(x) = \left| \frac{2x - 6}{2x + 2} \right| - 10$ .

$i_1)$   $-5 < f(x) < 10$

$i_2)$   $f(x) > 100$

Represente gráficamente los resultados obtenidos.

9. Resuelva las siguientes desigualdades, si  $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ .

$i_1)$   $-5 < f(x) < 10$

$i_2)$   $f(x) > 100$

Represente gráficamente los resultados obtenidos.

10. Resuelva las siguientes desigualdades, si  $f(x) = |\log_{\frac{1}{5}} x|$ .

$i_1)$   $5 < f(x) < 10$

$i_2)$   $f(x) > 100$

Represente gráficamente los resultados obtenidos.

11. Resuelva las siguientes desigualdades, si  $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

$i_1)$   $5 < f(x) < 10$

$i_2)$   $f(x) > 100$

Represente gráficamente los resultados obtenidos.

12. Resuelva las siguientes desigualdades si  $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x - 10$

$i_1)$   $-5 < f(x) < 10$

$i_2)$   $f(x) > 50$

Represente gráficamente los resultados obtenidos.

13. Resuelva las siguientes desigualdades si  $f(x) = \left| \left(\frac{1}{5}\right)^x - 10 \right|$

$i_1)$   $5 < f(x) < 10$

$i_2) f(x) > 50$

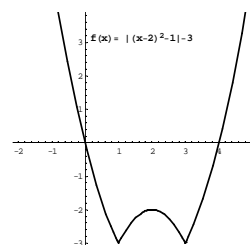
Represente gráficamente los resultados obtenidos.

14.  $i_1)$  Sea  $f(x) = -(x-1)^2 + 1$ , determine los dos restricciones (tramos) invertibles y obtenga las respectivas inversas. Grafique.

$i_2)$  La función  $g(x) = |(x-2)^2 - 1| - 3$  no es inversible, sin embargo admite cuatro restricciones invertibles. Obtenga cada una de ellas y la correspondiente inversa.

15. Considere la función  $f(x) = |(x-2)^2 - 1| - 3$ .

i) Descomponga  $f(x)$  en cuatro tramos invertibles y obtenga la expresión de la inversa de cada uno de tales tramos. Grafique.



ii) Dado  $K > 1$ , vale que:

$$\{x, f(x) > K\} = (-\infty, a) \cup (b, +\infty).$$

Determine  $a$  y  $b$  y represente gráficamente.

16.  $i_1)$  Dada  $f(x) = \frac{1}{x}$  determine y grafique  $f^{-1}(x)$ .

$i_2)$  Dada  $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$  determine y grafique  $f^{-1}(x)$ .

$i_3)$  Dada  $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$  determine y grafique  $f^{-1}(x)$ .

$i_4)$  Dada  $f(x) = \log_5 x$  determine y grafique  $f^{-1}(x)$ .

$i_5)$  Dada  $f(x) = 2^x$  determine y grafique  $f^{-1}(x)$ .

$i_6)$  Dada  $f(x) = 2^{-x}$  determine y grafique  $f^{-1}(x)$ .

17.  $i_1)$  Grafique las siguientes funciones trigonométricas:  $f(x) = |\sin x|$ ,  $f(x) = |\cos x|$ ,  $f(x) = |\tan x|$  y  $f(x) = |\operatorname{cosec} x|$ .

$i_2)$  Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas  $|\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $|\tan x| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

18.  $i_1)$  Determine las siguientes funciones  $f(x) = \sinh x$ ,  $f(x) = |\sinh x|$ ,  $f(x) = \cosh x$ ,  $f(x) = \tanh x$  y  $f(x) = |\tanh x|$ .

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

$i_2$ ) Resuelva las siguientes ecuaciones hiperbólicas  $|\sinh x| = 10$ ,  $|\tanh x| = 0,5$ .

19. i) Determine las inversas de las funciones trigonométricas  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \cos x$  y  $f(x) = \tan x$  aclarando el intervalo de inversibilidad de las mismas (Ver figuras 2.3 y 2.4 izquierda).
- ii) Determine las inversas de las funciones hiperbólicas  $f(x) = \sinh x$ ,  $f(x) = \cosh x$  y  $f(x) = \tanh x$  aclarando el intervalo de inversibilidad de las mismas (Ver Figura 2.4 derecha).

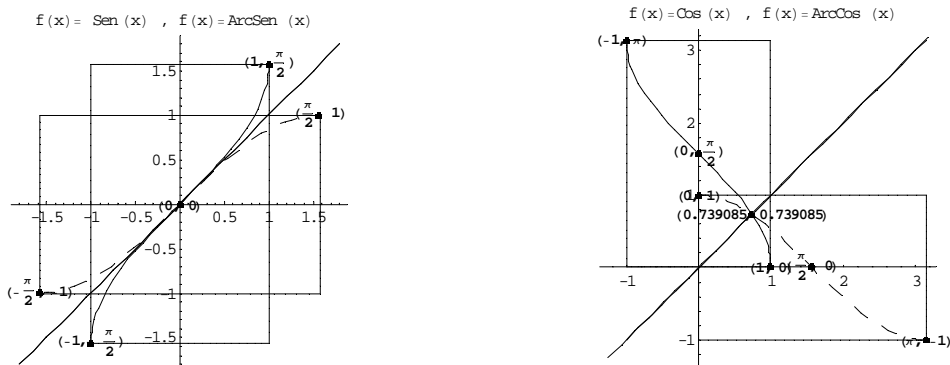


Figura 2.3:  $f(x) = \sin x$ ,  $f^{-1}(x) = \arcsin x$  y  $f(x) = \cos x$ ,  $f^{-1}(x) = \arccos x$ .

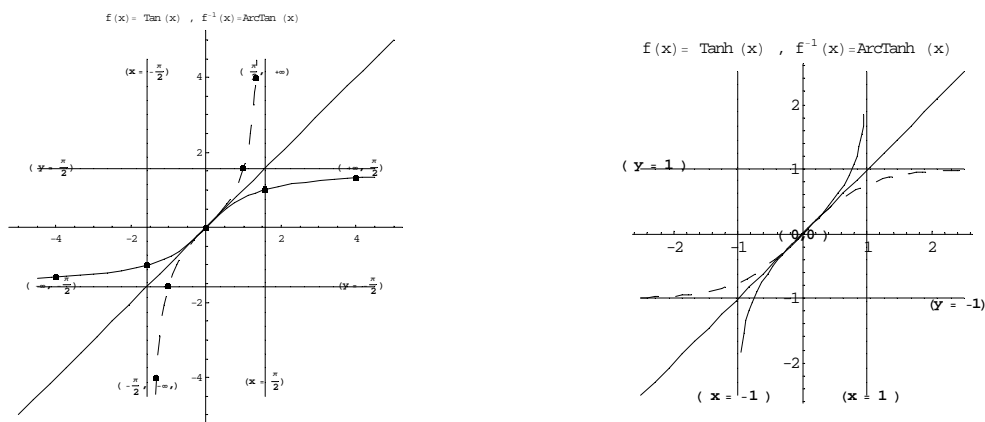
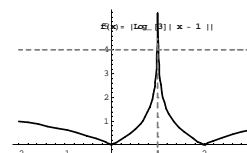


Figura 2.4:  $f(x) = \tan x$ ;  $f^{-1}(x) = \arctan x$

$f(x) = \tanh x$ ;  $f^{-1}(x) = \text{arctanh}x$ .

20. Considere la función  $f(x) = |\log_3 |x - 1||$

- i) Defina  $f(x)$  a trozos. Grafíquela.
- ii) Descomponga  $f(x)$  en tantos tramos inversibles como sea necesario y obtenga la expresión de la inversa de cada uno de tales tramos. Grafíque.



iii) Dado  $K > 1$ , vale que:

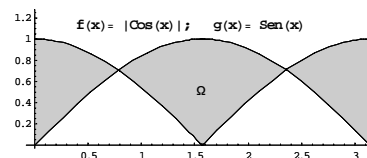
$$\{x, f(x) > K\} =$$

$$= (-\infty, a_1) \cup (a_2, 1) \cup (1, a_3) \cup (a_4, +\infty).$$

Determine  $a_1, a_2, a_3, a_4$  y represente gráficamente.

21. Sea  $\Omega$  la región acotada limitada por:  $y = \sin(x)$  e  $y = |\cos(x)|$ , para  $x$  entre 0 y  $\pi$ .

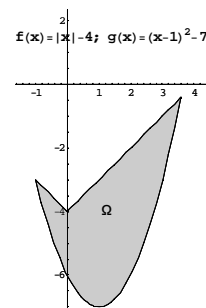
Determine las restricciones inversibles de tales funciones y obtenga las correspondientes inversas, indicando dominio e imagen de cada una de ellas.



22. Sea  $\Omega$  la región acotada limitada por:

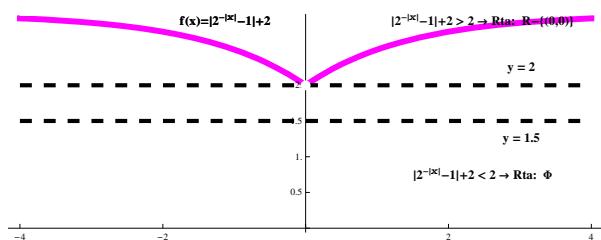
$$\begin{cases} f(x) = |x| - 4 \\ g(x) = (x - 1)^2 - 7 \end{cases}$$

Determine las restricciones inversibles de tales funciones y obtenga las correspondientes inversas, indicando dominio e imagen de cada una de ellas.



## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

23. Sea  $f(x) = |2^{-|x|-1}|$ . (Ver resolución en §4.1, pág. 170, la Figura 4.1.)

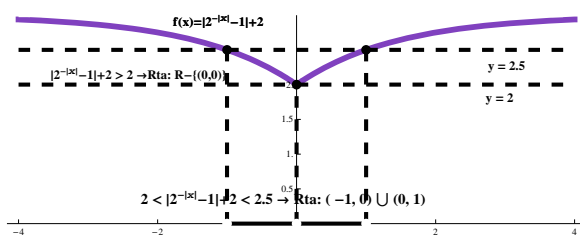


i) Interprete gráficamente el conjunto de números reales que satisfacen:

$$|2^{-|x|-1}| = 0; \quad |2^{-|x|-1}| \leq 0,5; \quad |2^{-|x|-1}| < \epsilon, \forall \epsilon > 0; \quad |2^{-|x|-1}| < \epsilon, \forall \epsilon < 0;$$

$$|2^{-|x|-1}| = 1; \quad |2^{-|x|-1}| \geq 0,5; \quad |2^{-|x|-1}| \leq \epsilon, \forall \epsilon > 1; \quad |2^{-|x|-1}| \leq \epsilon, \forall \epsilon < 1.$$

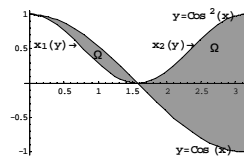
ii) Resuelva analíticamente las igualdades y desigualdades planteadas en el inciso i).



24. Sea  $\Omega$  la región acotada comprendida

$$\text{entre las curvas } \begin{cases} y = \cos^2(x) \\ y = \cos(x) \end{cases}, \quad x \in [0, \pi].$$

Determine las restricciones inversibles de tales funciones y obtenga las correspondientes inversas, indicando dominio e imagen de cada una de ellas.

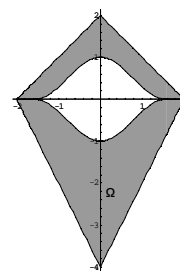


25. Sea  $\Omega$  la región dentro del romboide de semiejes 4 y 6 que se indica en la Figura, del que se quita la subregión que contiene al origen y está limitada por la curva  $y^2 - \cos^4(x) = 0$ ,  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

i) Determine las ecuaciones de cada una de las rectas que delimitan el romboide.

ii) Obtenga las expresiones  $x = x(y)$  de los arcos de la curva  $y^2 - \cos^4(x) = 0$  en cada uno de los cuadrantes.

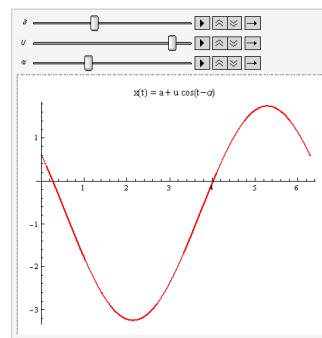
iii) Determine las inversas de cada una de las funciones obtenidas en los dos incisos anteriores, con sus correspondientes dominios e imágenes.



26. Funciones Trigonométricas

i) Sea  $x(a, R_1, t) = a + R_1 \cos(t)$ ,  $a$  y  $R_1$  son parámetros o constantes reales, mientras que  $t$  se considera la variable independiente. Grafique en coordenadas cartesianas (Descartes)  $x$  vs  $t$ , en el intervalo  $t \in \left[-\frac{n_1}{n_2}\pi, \frac{m_1}{m_2}\pi\right]$ , para los valores especificados:

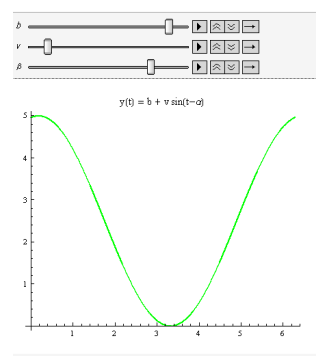
- $a = 0, R_1 = 1, n_1 = n_2 = 1, m_1 = 2, m_2 = 1;$
- $a = 1, R_1 = 1, n_1 = n_2 = 1, m_1 = 2, m_2 = 1;$
- $a = -1, R_1 = 1, n_2 = 0, m_1 = 2, m_2 = 1;$
- $a = 1, R_1 = 1, n_1 = 0, m_1 = 2, m_2 = 1.$



Dé una interpretación geométrica (o física) de las constantes  $a$  y  $R_1$  en estas ondas.

- ii) Sea  $x(a, R_1, t) = a + R_1 \cos(t - \alpha_*)$ ,  $a, R_1$  y  $\alpha_*$  son parámetros o constantes, mientras que  $t$  se considera la variable independiente. Compare cada una de las cuatro gráficas que obtuvo en el inciso anterior con aquellas que describa el efecto que produce incorporar el parámetro angular  $\alpha_* = \frac{\pi}{2}$  en la ecuación. Dé una interpretación geométrica (o física) que describa el efecto que produce incorporar el parámetro angular  $\alpha_*$ .
- iii) Sea  $y(b, R_2, t) = b + R_2 \sin(t)$ ,  $b$  y  $R_2$  son parámetros o constantes, mientras que  $t$  se considera la variable independiente. Grafique en coordenadas cartesianas (Descartes)  $y$  vs  $t$ , en el intervalo  $t \in [-\frac{n_1}{n_2}\pi, \frac{m_1}{m_2}\pi]$ , para los valores especificados:

- $b = 0, R_2 = 1, n_1 = n_2 = 1, m_1 = 2, m_2 = 1;$
- $b = 1, R_2 = 1, n_1 = n_2 = 1, m_1 = 2, m_2 = 1;$
- $b = -1, R_2 = 1, n_1 = 0, m_1 = 2, m_2 = 1;$
- $b = 1, R_2 = 1, n_2 = 0, m_1 = 2, m_2 = 1.$



Dé una interpretación geométrica (o física) del efecto o acción de cada una de las constantes  $a$  y  $R_2$  en estas ondas.

- iv) Sea  $y(b, R_2, t) = b + R_2 \sin(t - \beta_*)$ , donde  $b, R_2$  y  $\beta_*$  son parámetros o constantes, mientras que  $t$  se considera la variable independiente. Compare cada



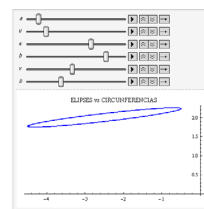
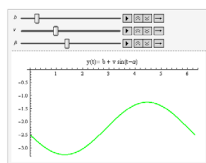
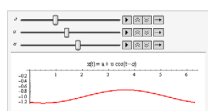
una de las cuatro gráficas que obtuvo en el inciso anterior con aquellas con la asignación  $\alpha_* = \frac{\pi}{2}$ .

Dé una interpretación geométrica (o física) que describa el efecto que produce incorporar el parámetro angular  $\beta_*$  en la ecuación.

## 27. Funciones trigonométricas y Elipses

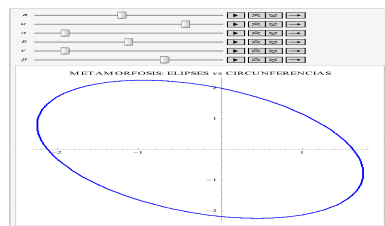
$$\begin{cases} x(a, R_1, t) = a + R_1 \cos(t - \alpha_*), & a \in \mathbb{R}, R_1 > 0, \alpha_* \in [0, 2\pi] \\ y(b, R_2, t) = b + R_2 \sin(t - \beta_*), & b \in \mathbb{R}, R_2 > 0, \beta_* \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Los parámetros  $a, b, R_1, R_2, \alpha_*$  y  $\beta_*$  son constantes reales que se encuentran dentro de los rangos indicados en cada caso, y  $t$  es la variable independiente.

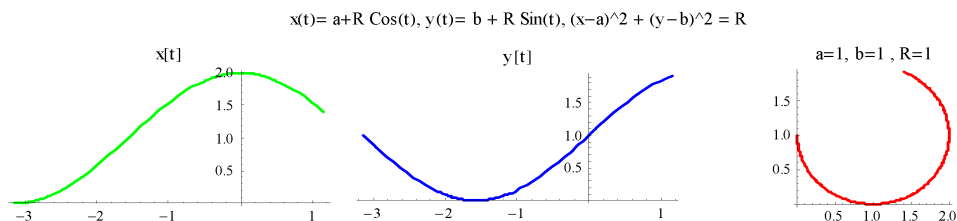


Metamorfosis: Circunferencia  $\iff$  Elipses.

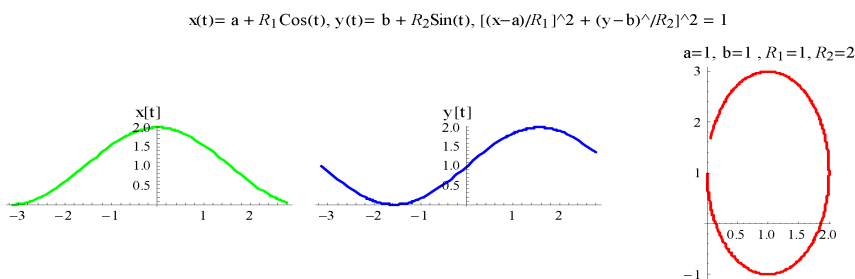
- i) Verifique que  $\left(\frac{x(a, R_1, t) - a}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{y(b, R_2, t) - b}{R_2}\right)^2 = 1$ ,  
para todo  $t$  en  $\mathbb{R}$  es una elipse.



- ii) Verifique que si  $R_1 = R_2 > 0$ , el lugar geométrico de los puntos  $(x(t), y(t))$  es una circunferencia de centro  $(a, b)$  y radio  $R_1 = R_2$ , o un trozo (o parte) de la misma, de acuerdo con el rango de variación que se adopte para la variable independiente  $t$ . (Ver Animación con el Mathematica).



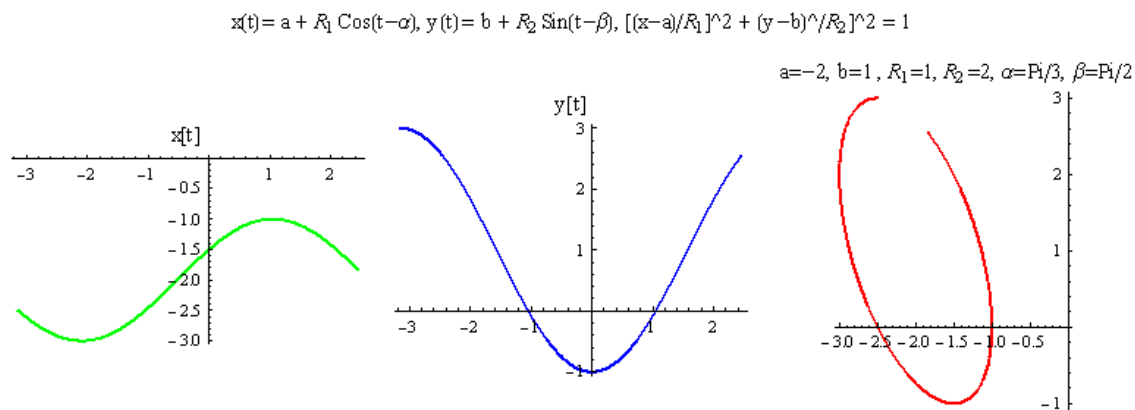
iii) Verifique que si  $R_1 \neq R_2 > 0$ , el lugar geométrico de los puntos  $(x(t), y(t))$  es una elipse de centro  $(a, b)$  de semiejes  $R_1$  y  $R_2$ , o un trozo (o parte) de la misma, de acuerdo con el rango de variación que se adopte para la variable independiente  $t$ . (Ver Animación con el Mathematica).



iv) 
$$\begin{cases} x(a, R_1, t) = -2 + \cos(t - \pi/3), \\ y(b, R_2, t) = 1 + 2 \sin(t - \pi/2) \end{cases}$$

Determine la ecuación cartesiana de la curva plana cerrada para una apropiada variación de la variable independiente  $t$ . Identifique el centro y los semiejes si

se trata de una elipse.



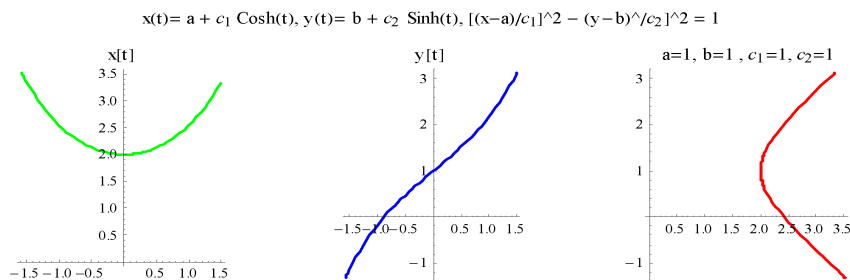
28. Sea 
$$\begin{cases} x(a, c_1, t) = a + c_1 \cosh(t), \\ y(b, c_2, t) = b + c_2 \sinh(t). \end{cases}$$

Con  $a, c_1, b$  y  $c_2$  parámetros o constantes reales y  $t$  la variable independiente.

i) Verifique si  $\left(\frac{x(a, c_1, t) - a}{c_1}\right)^2 - \left(\frac{y(b, c_2, t) - b}{c_2}\right)^2 = 1$ , para todo  $t$  en  $\mathbb{R}$ .

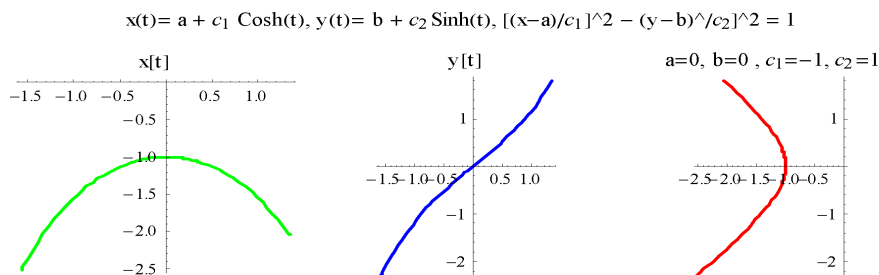
ii) Sea 
$$\begin{cases} x(1, 1, t) = 1 + \cosh(t) & t \in \mathbb{R} \\ y(1, 1, t) = 1 + \sinh(t) & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ii)<sub>1</sub> Determine la ecuación cartesiana de la curva plana asociada a esta parametrización.



ii)<sub>2</sub> ¿  $(x - 1)^2 - (y - 1)^2 = 1$  es la ecuación cartesiana de la curva plana representada por ii) ?

ii)<sub>3</sub> 
$$\begin{cases} x(0., -1., t) = -\cosh(t) & t \in \mathbb{R} \\ y(0., 1., t) = \sinh(t) & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
 Encuentre una expresión analítica para la curva plana definida por esta parametrización.

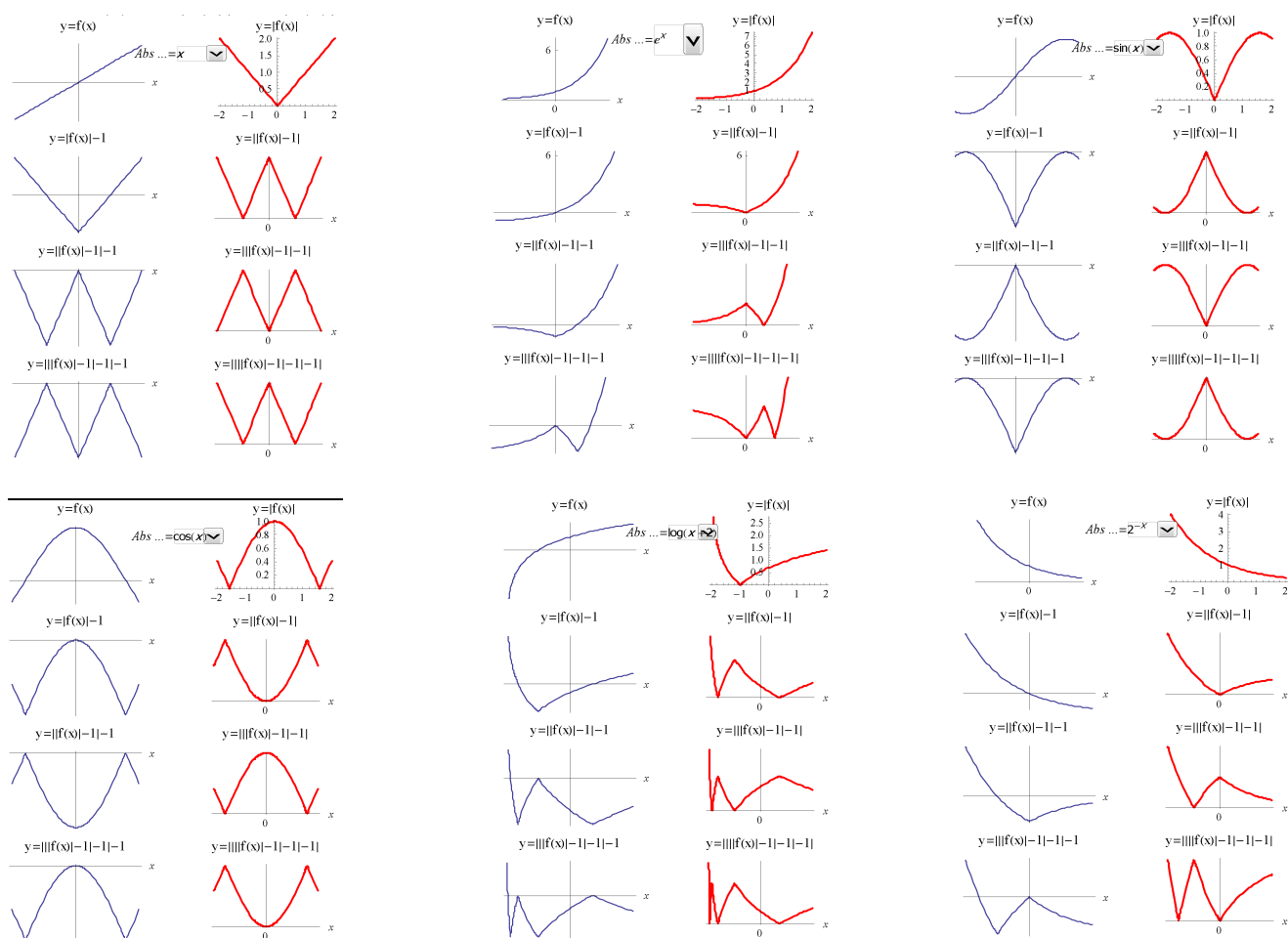


iii) Determine una parametrización de la rama superior de la hipérbola  $y^2 - x^2 = 1$ .

29. Identifique el resultado de cada una de las siguientes operaciones  $y = |f(x)|$ ,  $y = |f(x)| - 1$ ,  $y = ||f(x)| - 1|$ ,  $y = ||f(x)| - 1| - 1$ ,  $y = |||f(x)| - 1| - 1|$ ,  $y = |||f(x)| - 1| - 1| - 1$ , e  $y = ||||f(x)| - 1| - 1| - 1|$  realizadas sobre la gráfica<sup>1</sup>, i.e. conjunto de puntos del plano  $(x, f(x))$ , de las siguientes curvas planas  $y = f(x)$ ,  $f(x) = |x|$ ,  $f(x) = e^x$ ,  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \cos x$ ,  $f(x) = \log(x+2)$ ,  $f(x) = 2^{-x}$ , ver Cuadro 2.2, y otras en Cuadro 2.3 y Cuadro 2.4.

<sup>1</sup>Ver secuencias perfectibles para las imágenes en un pop-up-window de la §13 en la pág. 487.

2.1. Trabajo Práctico N<sup>o</sup> 0: Funciones y desigualdades, “valor absoluto”.

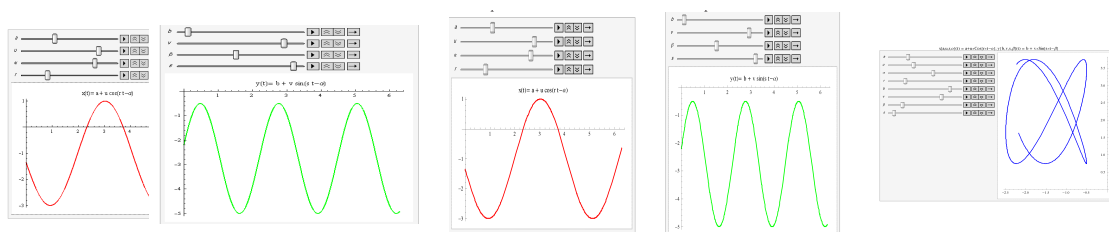


Cuadro 2.2: Operando sobre  $|x|$ ,  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\log(x + 2)$  y  $2^{-x}$ .

30. Funciones trigonométricas y reconocimiento de curvas planas: Lissajous, Elipses, Circunferencias, etc.

$$\begin{cases} x(a, R_1, c_1, \alpha_*)(t) = a + R_1 \cos(c_1 t - \alpha_*), & a, c_1 \in \mathbb{R}, R_1 > 0, \alpha_* \in [0, 2\pi] \\ y(b, R_2, c_2, \beta_*)(t) = b + R_2 \sin(c_2 t - \beta_*), & b, c_2 \in \mathbb{R}, R_2 > 0, \beta_* \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  y  $\alpha_*$  y  $\beta_*$  son constantes reales que se encuentran dentro de los rangos indicados en cada caso, y  $t$  es la variable independiente.



## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

- i) Determine mediante selección de los parámetros circunferencias. No menos de cuatro.

Ayuda: Dispone de las Animaciones en Mathematica.

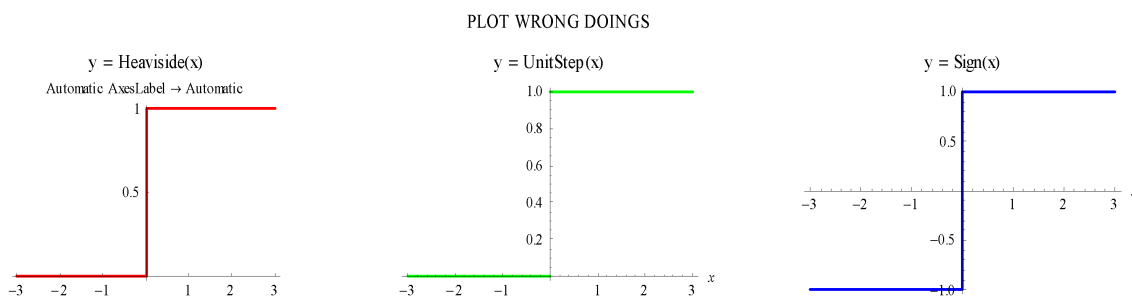
- ii) Determine mediante selección de los parámetros elipses. No menos de cuatro.

Ayuda: Dispone de las Animaciones en Mathematica.

- iii) Determine mediante selección de los parámetros curvas tipo Lissajous. No menos de cuatro.

Ayuda: Dispone de las Animaciones en Mathematica.

31. Funciones Escalones: Función Signo, Función Escalón Unitario, Función de Heaviside.



$$i) y = \text{Sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Determine la expresión analítica de

$$y = f(x) = \text{Sign}(x)\text{Sign}(x + 1)\text{Sign}(1 - x).$$

$$ii) y = \text{UnitStep}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Grafique, para  $x$  en el intervalo  $[0, 10]$ , las funciones  $y = \text{UnitStep}(\text{Sin}(\pi x))$ ,

$$y = \text{UnitStep}(\text{Cos}(\pi x)), y = \text{UnitStep}(\text{Sin}(\pi x)) + \text{UnitStep}(\text{Cos}(\pi x)) \text{ e}$$

$$y = \text{UnitStep}(\text{Sin}(\pi x)) - \text{UnitStep}(\text{Cos}(\pi x)).$$

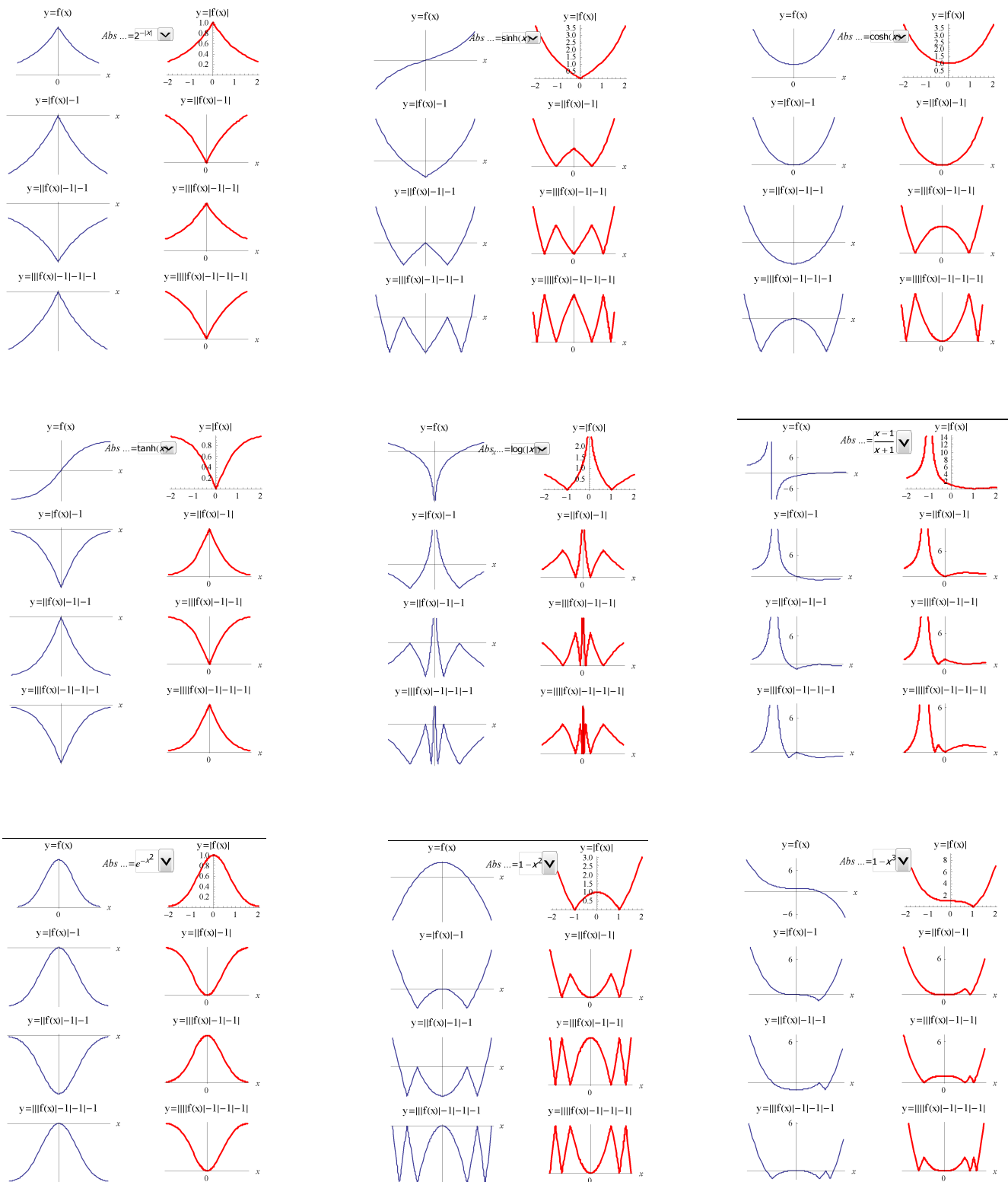
$$iii) y = \text{Heaviside}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ Determine la expresión analítica de}$$

$$y = f(x) = \text{Heaviside}(x)\text{Heaviside}(1 - x).$$

32. Utilice Sign(x), UnitStep(x), Heaviside(x)- para expresar la siguiente función:

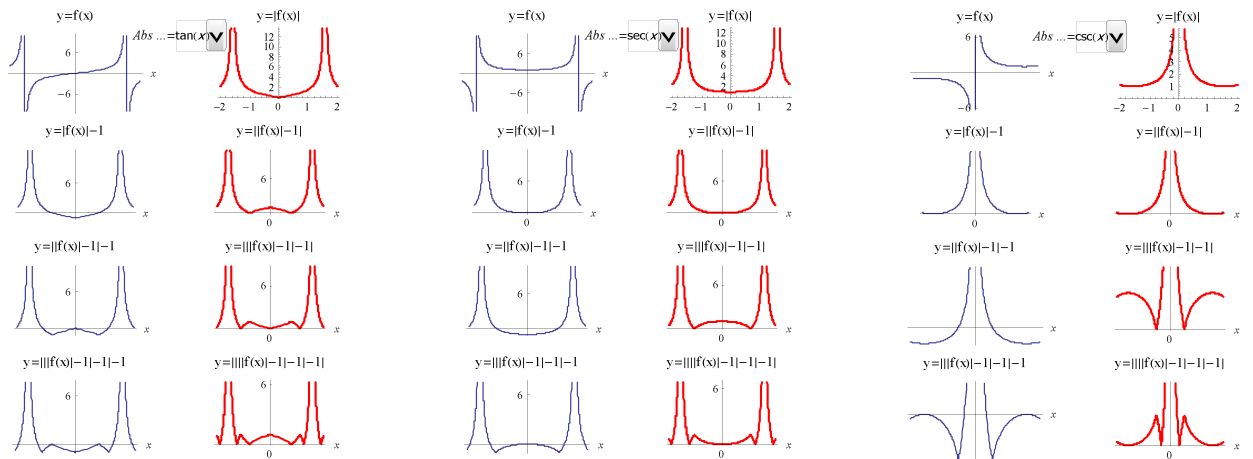
$$y = f(x) = \begin{cases} 4-2x, & \in (1, 2] \\ 2x, & \text{si } x = 1 \\ -2(1+x), & \text{si } x = 0 \\ 3 + x, & \in (-2, -1) \\ -2+4x, & \in (0, 1) \\ -2-4x, & \in (-1, 0) \end{cases} .$$

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos



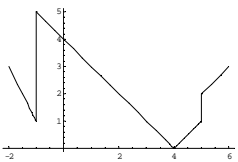
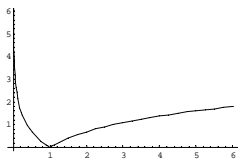
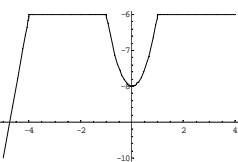
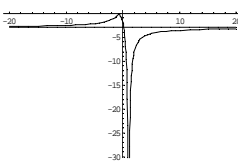
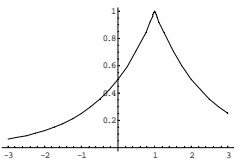
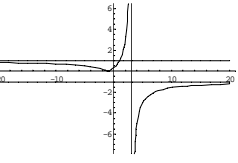
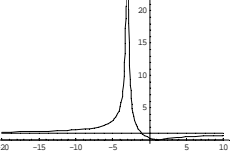
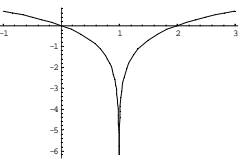
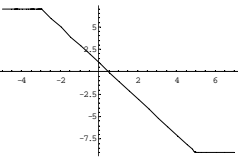
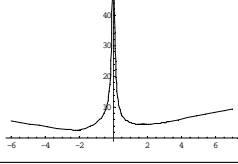
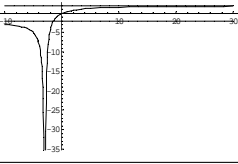
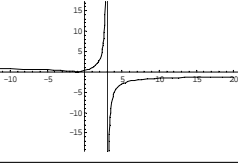
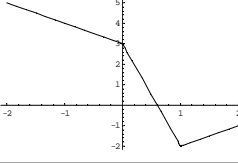
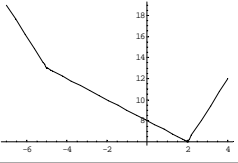
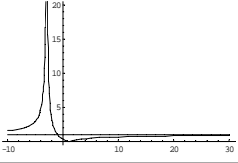
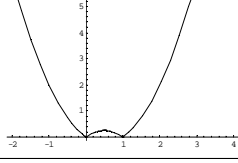
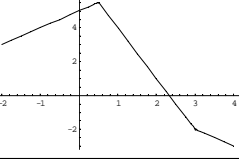
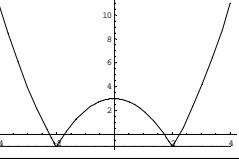
Cuadro 2.3: Operando sobre  $\log|x|$ ,  $\sinh x$ ,  $\cosh x$ ,  $\log(x+2)$ ,  $2^{-|x|}$ , entre otras.





Cuadro 2.4: Operando sobre  $\tan(x)$ ,  $\sec(x)$ ,  $\sin x$  y  $\csc(x)$ .

# Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

<b>Who is Who ?</b>		
		
		
		
		
		
		

## 2.2. Trabajo Práctico N $\doteq$ I: Límite de una función de una variable real.

1. Bosqueje la gráfica de  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 + x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ .

Halle, si existen,  $f(1)$ ,  $f(0)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ .

2. Determine, si existen, los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{Signo}(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right);$$

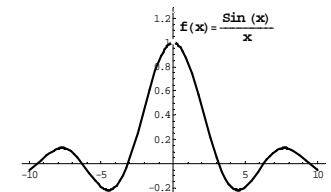
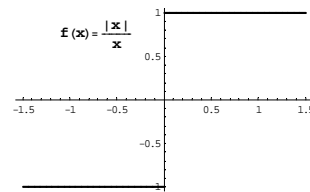
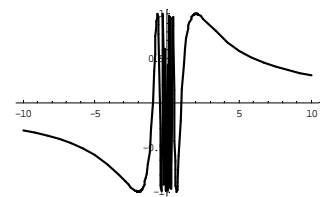
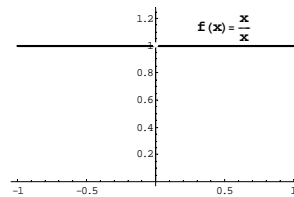


Figura 2.5: Gráficas de  $f(x) = \frac{x}{x}$ ;  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ ;  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  y  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ .

Se recomienda la lectura de §5.2, pp. 198-205, y ver Figura 5.2, Figura 5.3 y 2.14.

3. a) Establezca, en el lenguaje de “ $\epsilon$ ”, y “ $\delta$ ”, qué significa  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ .
  - b) Establezca, en el lenguaje de “ $\epsilon$ ”, y “ $\delta$ ”, qué significa  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ .
  - c) Establezca, en el lenguaje de “ $\epsilon$ ”, y “ $\delta$ ”, qué significa  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ .
4. Proponemos consultar la sección §5, la Definición 5.0.1, de la pág. 187. Además, la lectura de los ejemplos resueltos en §5.1, pág. 191, puede ayudarle a meditar las respuestas de cada uno de los siguientes incisos.

a) Interprete gráficamente  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ .

b) Interprete gráficamente  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ .

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

---

c) Pruebe por definición que:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ .

d) Pruebe por definición que:  $\lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 = 9$ .

e) Pruebe por definición que:  $\lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 = 9$ .

5. Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{25}}{x - 5} \quad \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{1}{x - 8} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 1}{3x - 2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x - 3} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 - x - 3}{x - 3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 3x}{x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x^3 + 8)}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x + 2|}{x + 2} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{(x - 2)^2} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)^3}{|x - 2|}$$

6. Trace la gráfica de una función  $g(x)$  que satisfaga todas las condiciones dadas:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = 4$ ;  $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 2$ ;  $g(3) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 5$ ;  $g(-2) = 3$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -2$ .

b)  $\text{Dom } g(x) = \mathbb{R} - \{0\}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 0$ ;  
 $g(2) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 1$ .

7. Calcule los siguientes límites. Cuando un límite no sea finito especifique, en cada caso, si es  $+\infty$ ,  $-\infty$  ó  $\infty$ .

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^4 + 2x^2 + 1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6^{x+1} + 7}{6^x - 4} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3(2x - 3)}{\sqrt{x^2 - 4}} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 6}}{5x - 1} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 3}\right) & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{argtanh} x & \text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{argsinh} x \end{array}$$

8. A partir de  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$ , calcule los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\tan(5x)}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$       c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)\sin(x)}{x^2 - 2x}$       e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \tan(4x) \operatorname{cosec}(6x)$       f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)\sin(5x)}{(x-x^3)^2}$

9. Calcule los límites laterales. Si el límite no es finito, establezca si es  $+\infty$ ,  $-\infty$  ó  $\infty$ .

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 4}$       c)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + 2x}{x^2 - 4x + 4}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$       e)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$       f)  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{x^2 - 3}{\tan(x)}$

10. Calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x - \sqrt{2}}{2 - x^2}$       b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x|}{x - 2}$       c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) - 1}{\sin x}$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x}$       e)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|9 - x^2|}{x - 3}$       f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$   
 g)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x) + 3\sin(x) - 4}{\sin^2(x) - 3\sin(x) + 2}$       h)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$       i)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - 9x^{-2}}{1 - 3x^{-1}}$   
 j)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$       k)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$       l)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

11. a) Establezca en el lenguaje de “ $\epsilon$ ”, y “ $\delta$ ” qué significa  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Interprete gráficamente  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

b) Pruebe que las funciones polinomiales son continuas en  $\mathbb{R}$ .

12. Estudie la continuidad. Clasifique cada una de las discontinuidades que encuentre.

Redefina la función en cada caso de discontinuidad evitable.

a)  $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < 1 ; \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$       b)  $f(x) = \frac{|x-1|(x^2-4)}{(x^2-3x+2)(x+3)}$ .

13. Determine, cuando sea posible, los valores de  $a$  y  $b$  para que, en cada uno de los casos siguientes, la función  $g(x)$  resulte continua en  $\mathbb{R}$ .

i)  $g(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 0 \\ x - a & \text{si } 0 \leq x \leq 1 ; \\ \frac{a}{x} + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$       ii)  $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sin(ax+b) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} . \\ e^{x-\frac{\pi}{2}} & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

14. Sea  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ .

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

- a) Determine Dom.  $f(x)$  e Im.  $f(x)$ .
- b) ¿Es  $f(x)$  impar ?
- c) Encuentre los puntos en que el gráfico de  $f(x)$  interseca: al eje  $x$ , a la recta  $y = 1$  y a la recta  $y = -1$ .

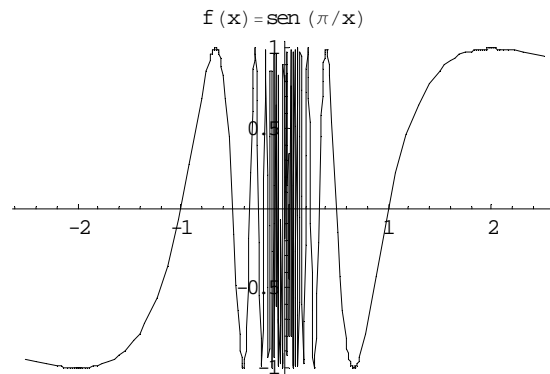


Figura 2.6:  $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$   $x \in [-2.5, 2.5]$ .

- e) Justifique la no existencia de  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left( \frac{\pi}{x} \right)$ .<sup>2</sup>

- f) Analice los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \left( \frac{\pi}{x} \right); \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \left( \frac{\pi}{x} \right); \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^m \sin \left( \frac{\pi}{x} \right).$$

Considere  $m$  entero y mayor o igual que 3.

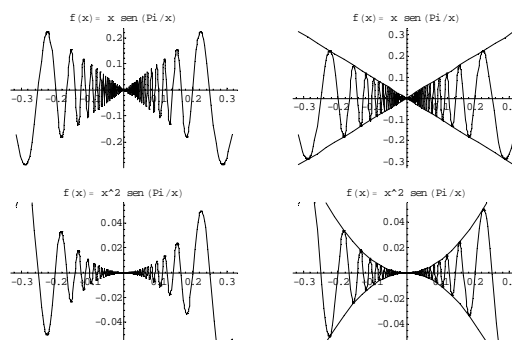
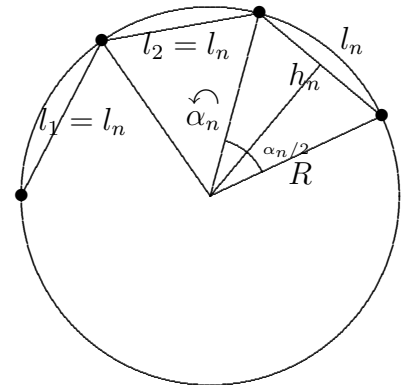


Figura 2.7: Gráficas de  $f(x) = x \sin \left( \frac{\pi}{x} \right)$  y de  $f(x) = x^2 \sin \left( \frac{\pi}{x} \right)$ .

<sup>2</sup> Una vez más se recomienda leer la §5.2, pág. 200.

**Observación 2.2.1** ¿ Por qué nos interesamos en  $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$  ?

Sabemos que la longitud de una circunferencia de radio  $R$  mide  $2\pi R$ . El polígono regular  $P_n$ , de  $n$  lados inscripto en la circunferencia ( $n \geq 3$ ) está formado por  $n$  triángulos isósceles de ángulo central  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  y lado opuesto  $l_n$ . Es claro que el perímetro de  $P_n$  es  $n$  veces  $l_n$ . Como  $R^2 = h_n^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2$  resulta  $l_n = 2\sqrt{R^2 - h_n^2} \therefore P_n = 2n\sqrt{R^2 - h_n^2}$ . Por otra parte es razonable suponer que  $P_n \rightarrow 2\pi R$  para  $n \rightarrow \infty$ , en consecuencia  $\frac{P_n}{2R} \rightarrow \pi$  si  $n \rightarrow \infty$ .



Luego

$$\frac{P_n}{2R} = \frac{n\sqrt{R^2 - h_n^2}}{R} = n\sqrt{1 - \left(\frac{h_n}{R}\right)^2} = n\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Figura 2.8: ¿ Por qué nos interesamos en  $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$  ?

15. Demuestre que si el  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L > 0$ , existe un intervalo reducido de  $x_0$ , tal que  $f(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \wedge \neq x_0$ . Análoga situación para  $L < 0$ . Esta proposición se conoce como “Teorema de Permanencia del Signo”, consultar su demostración, en el Teorema 5.0.5, de la pág. 190.

16. a) De las definiciones, en el lenguaje de “ $\epsilon$ ” y “ $\delta$ ”, de

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$

- ã) ¿ Cuánto debe aproximarse  $x$  a 2 para que la distancia de  $(8x - 5)$  a 11 sea menor que 0.01 ?

- b) De las definiciones, en el lenguaje de “ $K$ ” y “ $\delta$ ”, de

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty.$$

- ñ<sub>1</sub>) Indique en menos de cuánto se debe acercar  $x$  a 3 para que:

$$\frac{1}{(x+3)^4} > 10.000.$$

$\tilde{b}_2$ ) Grafique  $f(x) = \left| \frac{x-3}{x+1} \right|$ . Verifique que  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ .

Interprete gráficamente, marcando un  $K$  y señalando el correspondiente intervalo  $(-1 - \delta, -1 + \delta)$

$\tilde{b}_3$ ) Sea  $f(x) = |\log_3 |x - 7| - 1|$ , pruebe por definición que  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = +\infty$ .

c) De las definiciones, en el lenguaje de  $\epsilon$  y  $M$  de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L.$$

$\tilde{c}_1$ ) Grafique  $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$  y verifique que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ .

Interprete gráficamente, marcando un intervalo  $(1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$  y señalando los correspondientes intervalos  $(-\infty, -M)$  y  $(M, +\infty)$ .

$\tilde{c}_2$ ) (i) Grafique las funciones  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  y  $f(x)$  siguientes:

$$f_1(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x \quad f_2(x) = -\left(\frac{1}{10}\right)^x \quad f(x) = -\left(\frac{1}{10}\right)^x + 5.$$

(ii) Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , considerando  $f(x) = -\left(\frac{1}{10}\right)^x + 5$ .

Determine la  $\text{Im } f(x)$ .

(iii) Tome  $\epsilon = 10^{-2}$  y trabajando con la definición de límite ( $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ )

encuentre los valores de  $x$  que la función aplica en el intervalo

$$(5 - 10^{-2}, 5 + 10^{-2}).$$

(iv) Indique si *existen*  $x$  tales que  $f(x) \in (5, 5 + 10^{-2})$ .

(v) Indique cuan grande debe ser  $x$  para que  $f(x) \in (5 - 10^{-6}, 5)$ .

(vi) Escriba las respuestas de los incisos (iii), (iv) y (v).

d) Escriba las definiciones, en el lenguaje de  $K$  y  $M$ , de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$



- $\tilde{d}_1$ ) Grafique  $f(x) = |\log_3 |x - 1||$ ,  
 verifique que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$   
 e interprete gráficamente.

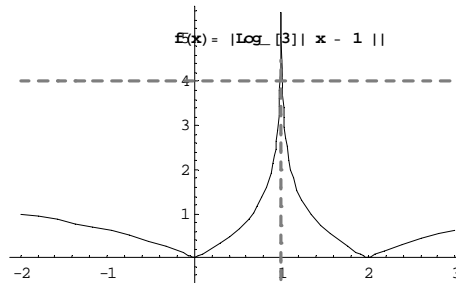


Figura 2.9:  $f(x) = |\log_3 |x - 1||$ .

17. Considere la función  $f(x) = |(x - 2)^2 - 1| - 3$ .

- i) Para cada  $K > 1$ , existen dos números  $a(K)$   
 y  $b(K)$  tales que vale que:

$$\{x, f(x) > K\} = (-\infty, a) \cup (b, +\infty).$$

Determine  $a$  y  $b$  y represente gráficamente  
 sobre el esquema de la Figura 2.10.

- ii) Utilizando los resultados del inciso anterior  
 justifique analíticamente que:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = +\infty.$$

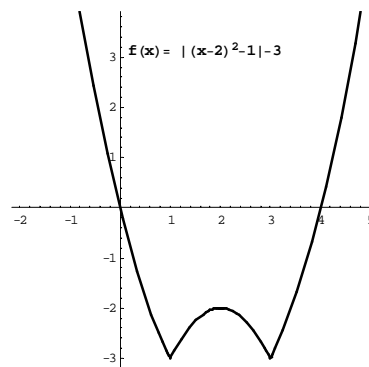


Figura 2.10: Gráfica de  $f(x) = |(x - 2)^2 - 1| - 3$ .

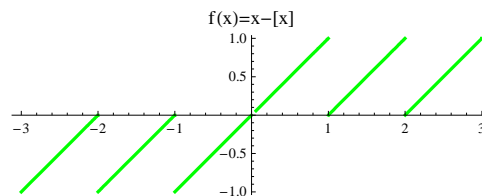
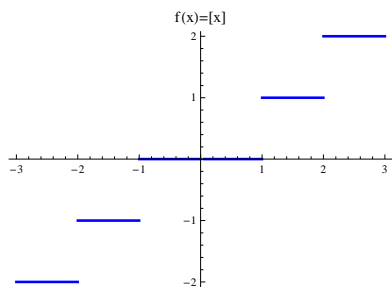
### 2.3. Trabajo Práctico N $\doteq$ II: Continuación de Límite. Continuidad en un punto $x_0$ . Continuidad en un intervalo cerrado $[a, b]$ .

1. a) Establezca en el lenguaje de “ $\epsilon$ ”, y “ $\delta$ ” qué significa  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .  
 b) Pruebe por definición que:  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ .  
 c) Pruebe por definición que:  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2$ .
  
2. a) Estudie la continuidad en  $x_0 = 0$  de las siguientes funciones:  

$$f(x) = \frac{|x|}{x}; \quad f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}; \quad f(x) = e^x; \quad f(x) = e^{|x|};$$

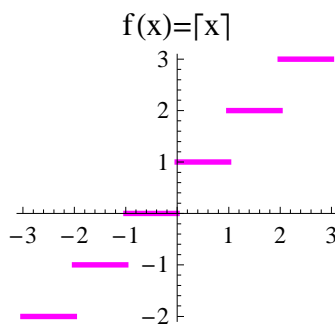
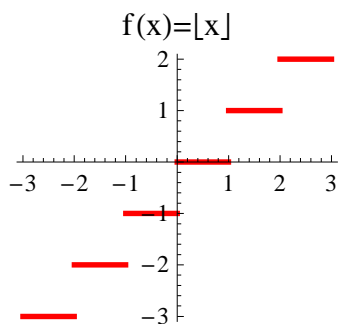
$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}; \quad f(x) = \text{cotg } x; \quad f(x) = x \text{ sen } \left(\frac{\pi}{x}\right); \quad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$
  
 b) Establezca cuáles de las funciones discontinuas en  $x_0 = 0$  del inciso a) pueden ser extendidas con continuidad.  
 c) En los puntos de discontinuidad evitable redefina la función para que resulte continua.  
 d) ¿Cuál es la condición que asegura que en  $x_0$  la discontinuidad es inevitable?
  
3. Defina continuidad de  $y = f(x)$  a derecha y a izquierda de  $x_0$  en lenguaje  $\epsilon, \delta$ .
  
4. Grafique en el intervalo  $[-4.75, 5.25]$  la siguientes funciones  $[x]$ ,  $x - [x]$ ,  $\lfloor x \rfloor$  y  $\lceil x \rceil$ .  
 Ayuda: La versión del software Mathematica 6.0 las define de la siguiente manera:  
 $f(x) = [x]$  gives the integer part of x;  $f(x) = x - [x]$  gives the fractional part of x;  
 $f(x) = \lfloor x \rfloor$  gives the greatest integer less than or equal to x;  $f(x) = \lceil x \rceil$  gives the smallest integer greater than or equal to x.

2.3. Trabajo Práctico N<sup>o</sup> II: Continuación de Límite. Continuidad en un punto  $x_0$ .  
 Continuidad en un intervalo cerrado  $[a, b]$ .

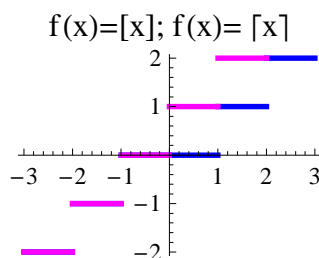
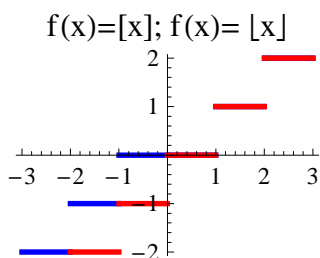


5. Estudie la continuidad a derecha y a izquierda en cada punto  $x_0 \in \mathbb{Z}$  de  $f(x) = [x]$ .
6. Estudie la continuidad a derecha y a izquierda en cada punto  $x_0 \in \mathbb{Z}$  de  $f(x) = x - [x]$ .
7. Estudie la continuidad a derecha y a izquierda en cada punto  $x_0 \in \mathbb{Z}$  de  $f(x) = \lfloor x \rfloor$ .
8. Estudie la continuidad a derecha y a izquierda en cada punto  $x_0 \in \mathbb{Z}$  de  $f(x) = \lceil x \rceil$ .

Floor and Ceiling



Yuxtaposición

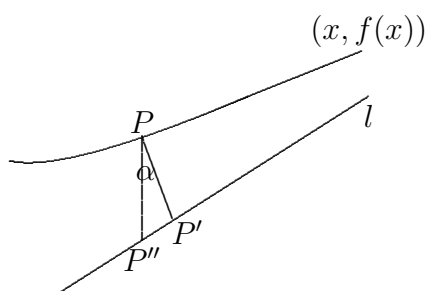


## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

9. **Definición 2.3.1** Se dice que un punto  $P(x, f(x))$  se aleja infinitamente sobre una curva, cuando su abscisa  $(x) \rightarrow \infty$ , ó su ordenada  $f(x) \rightarrow \infty$ , ó ambas coordenadas  $(x \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow \infty)$ , crecen infinitamente.

**Definición 2.3.2** Se dice que la recta  $l$  es asíntota de una curva  $C$  si tiende a cero la distancia de  $l$  a un punto  $P$  que se aleja infinitamente sobre la curva  $C$ . Distinguiremos tres casos, según que crezcan infinitamente sobre la curva  $x$ , ó  $y$ , ó ambas.

Denotemos  $d(P, l)$  a la distancia del punto  $P(x, f(x))$  de la curva  $y = f(x)$ , a la recta no vertical  $l$ . Tal distancia es la longitud del segmento  $\overline{PP'}$ , donde  $P'$  es la intersección de  $l$  con la perpendicular a ella que pasa por  $P$ .



Si sobre la recta  $l$ , de ecuación  $y = mx + n$ , consideramos el punto  $P''(x, mx + n)$  resulta que el triángulo  $PP'P''$  es rectángulo y vale que  $|\overline{PP'}| = |\overline{PP''}| \cos \alpha$ , es decir  $|\overline{PP'}| = |f(x) - (mx + n)| \cos \alpha$ .

Es fácil ver ahora que para que  $d(P, l) \rightarrow 0$  es suficiente que  $|\overline{PP''}| = |f(x) - (mx + n)| \rightarrow 0$ , pues como  $0 \leq d(P, l) = |\overline{PP'}| \cos \alpha \leq |\overline{PP''}|$ , por el Teorema de Encaje resulta que  $\overline{PP''} \rightarrow 0$  implica  $d(P, l) \rightarrow 0$ .

Figura 2.11: Asíntota: Interpretación de  $d(P, l) \approx |\overline{PP''}|$ .

Determine las asíntotas de  $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x + 1}$ ,  $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$  y de  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ .

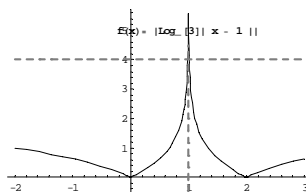
Ver Asíntotas, §5.3, pp. 206 - 217.

10. Determine los valores de  $A$  que hacen continuas a las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ 2A + x & x \geq 0 \end{cases}; f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & x \neq 4 \\ A & x = 4 \end{cases}; f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & x > 0 \\ x + A & x \leq 4 \end{cases}$$

11. Grafique  $f(x) = |\log_3 |x - 1||$ , verifique que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$  e interprete gráficamente.

Pruebe que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ .



12. Una pieza en forma de triángulo equilátero delgado con lados de 1 unidad de longitud, está colocada verticalmente en el plano  $xy$  con un vértice  $V$  en el origen. Bajo la influencia de la gravedad, girará alrededor de  $V$  hasta que un lado toque al eje  $x$ , Figura 2.12. Denotemos por  $x$  a la primera coordenada del punto medio  $M$  del lado opuesto a  $V$  en el momento inicial y sea  $f(x)$  la primera coordenada de este punto en el momento final. Suponemos que el triángulo se equilibra cuando  $M$  está directamente arriba de  $V$ . (Ver resolución en la pág. 238).

- a) Determine el dominio y la imagen de  $y = f(x)$ .
- b) ¿Dónde es  $y = f(x)$  discontinua? Identifique los puntos fijos de  $y = f(x)$ .

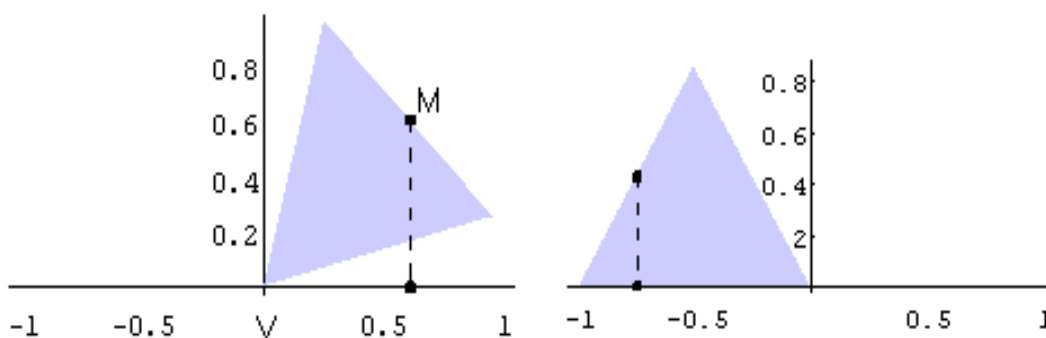


Figura 2.12: Lámina triangular.

13. Analice la continuidad de las siguientes funciones en los puntos considerados y en el intervalo  $[-4.25, 5.25]$ .

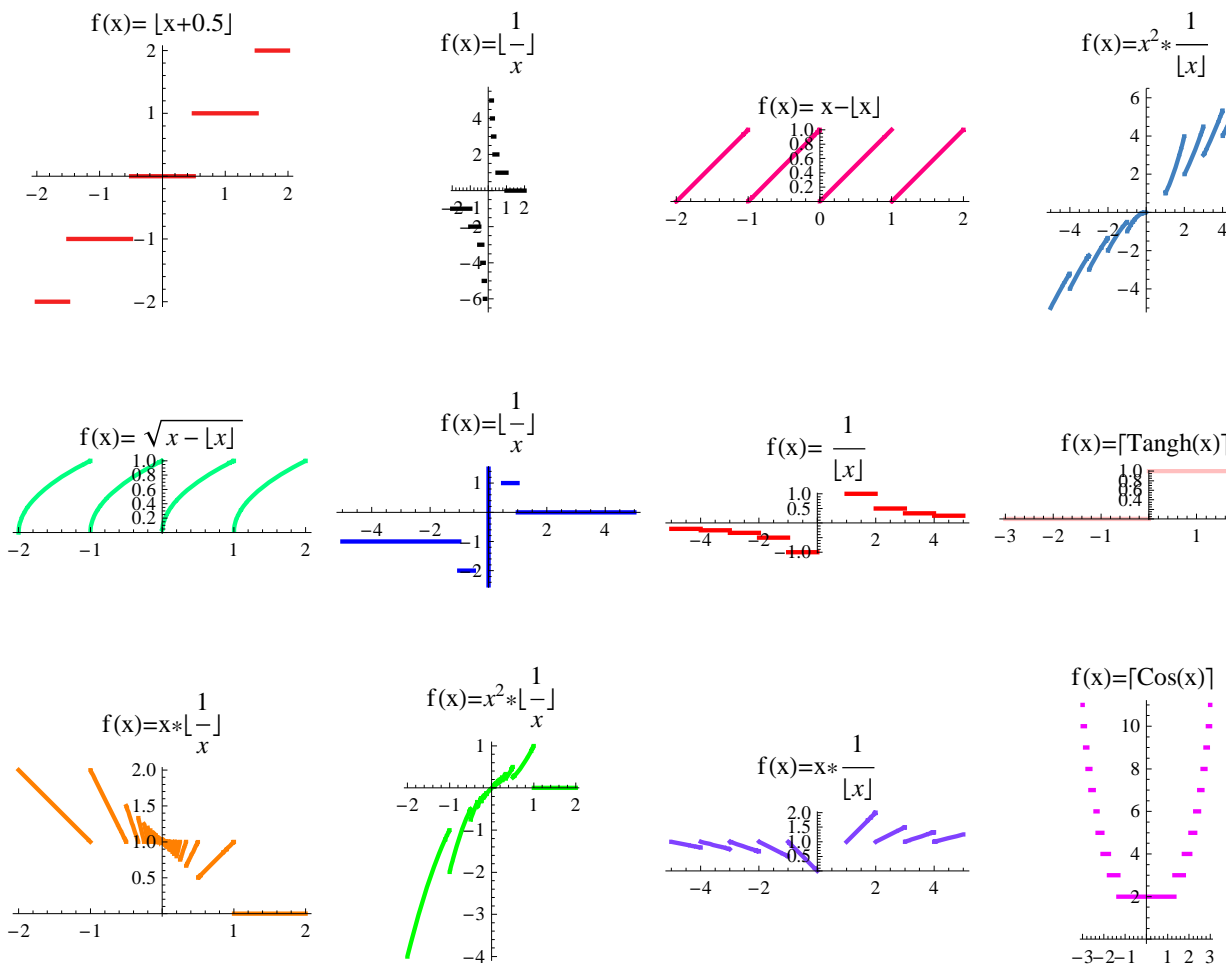
## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

$$f(x) = \sqrt{x - [x]} \quad x \rightarrow 1^+; \quad f(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \quad x \rightarrow 0^+; \quad f(x) = \lceil \tanh(x) \rceil \quad x \rightarrow 0^+,$$

$$f(x) = \frac{1}{[x]} \quad x \rightarrow 0^+; \quad f(x) = x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \quad x \rightarrow 0^+; \quad f(x) = [x - \frac{1}{2}] \quad x \rightarrow \frac{1}{2}^+,$$

$$f(x) = \lceil \cosh(x) \rceil \quad x \rightarrow 0^+; \quad f(x) = x^2 \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \quad x \rightarrow 0^+; \quad f(x) = x \frac{1}{[x]} \quad x \rightarrow 0^+;$$

$$f(x) = [x + \frac{1}{2}] \quad x \rightarrow -\frac{1}{2}^+; \quad f(x) = \lceil \sinh(x) \rceil \quad x \rightarrow 0^+; \quad f(x) = x^2 \frac{1}{[x]} \quad x \rightarrow 0^+.$$



### 14. Aplicaciones de los Teoremas de funciones continuas en $[a, b]$ .

a) Interprete gráficamente el *Teorema de Bolzano*.

b) ¿ La ecuación  $x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = 0$  tiene al menos una solución real ?

- c) Use el *Teorema de Bolzano* para demostrar que  $x^3 + 3x - 2 = 0$ <sup>3</sup> tiene una solución real entre 0 y 1. Determine dicha raíz con un error por exceso de a lo sumo 0.1. **Ver Ejercicio §5.4, en la pág. 236.** Ver resolución analítica del polinomio cuártico proveniente de la “*Ley de Snell*” §14, párrafo 14.4.1, ecuación polinomial cuártica (14.12), pp.511-514.
- d) Sea  $f(x) = \cos(2x) + 3$  ¿Puede afirmar que en el intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$  existe  $x_0$  tal que  $f(x_0) = 3.5$ ? En tal caso determínelo.
- d) Aproximar la menor raíz positiva de  $\tan(x) = x$ .
15. Verifique que si  $y = f(x)$  es continua en  $[0, 1]$  y satisface  $0 \leq f(x) \leq 1$ , entonces  $y = f(x)$  tiene un *punto fijo* (i.e., existe un número  $c$  en  $[0, 1]$  tal que  $f(c) = c$ ). *Sugerencia:* Aplique el *Teorema del Valor Intermedio* a  $g(x) = x - f(x)$ .  
**Ver §5.4.5, en la pág. 224.**
16. Pruebe que la liga tiene un punto fijo, es decir que hay un punto en la liga (en realidad exactamente un punto) que está donde estaba originalmente. (Considérese el problema anterior).
17. Utilice el *Teorema del Valor Intermedio* para probar que existen siempre dos puntos en un aro de alambre circular con la misma temperatura. *Sugerencia:* Coloque el centro en el origen y sea  $\theta$  el ángulo que forma un diámetro con el eje  $x$ . Defina apropiadamente  $f(\theta)$ . **Ver resolución §5.4, en la pág. 238.**
18. Empezando a las 04,00 horas, un monje escaló lentamente la cima de una montaña, llegando a mediodía. Al día siguiente regresó recorriendo la misma trayectoria, empezando a las 05,00 horas, y llegando al pie de la montaña las 11 horas. Muestre que hay algunos puntos a lo largo de la trayectoria, en los cuales su reloj mostraba la misma hora en ambos días. **Ver resolución en la §5.4, pág. 229.**

---

<sup>3</sup>Las fórmulas de Cardano permiten obtener las raíces exactas de cualquier polinomio cúbico.

El hallazgo de Ferrari permite obtener las raíces exactas de cualquier polinomio de grado cuatro.

J. V. Uspensky. “Theory of Equations”. McGraw-Hill, Inc. 1948. Biblioteca del Instituto de Matemática, A 152.

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

19. Sea  $f(x)$  continua en  $[0, 1]$  con  $f(0) = f(1) = 0$ . Pruebe que la gráfica de  $f(x)$  tiene una cuerda (un segmento de recta con ambos extremos en la gráfica) de longitud  $L$ , donde  $L$  es cualquier número entre 0 y 1.

Ver resolución §5.4, en la pág. 228.

20. a) Enuncie y ejemplifique el *Teorema de Bolzano-Weierstrass*.  
 b) Dibuje una función continua en  $[2, 4)$  no acotada inferiormente y que tenga máximo absoluto. ¿Puede alcanzar dicha función el mínimo absoluto?  
 c) Dibuje una función discontinua en  $[0, 4]$  que no alcance ni el valor máximo ni el mínimo absoluto.

21. Sea  $f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \in [0, 1] \\ 1 & x = 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

La gráfica alcanza el valor máximo y el mínimo absoluto.  
 ¿Cuáles son dichos valores? ¿Se contradice el *Teorema de Bolzano-Weierstrass*?

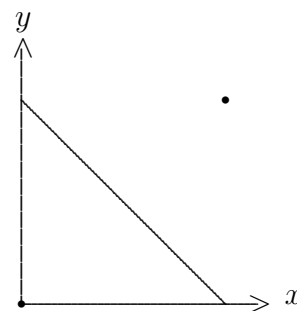


Figura 2.13: Gráfica de  $y = f(x)$ .

22. La inspección de la Figura 2.14 conjuntamente con ciertas manipulaciones algebraicas llevan a concluir que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$ . Justifique esta afirmación.

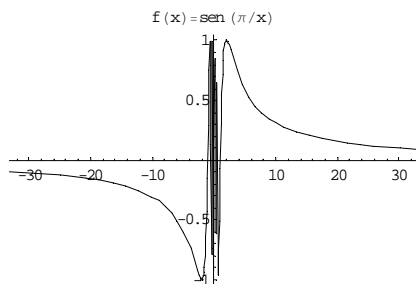


Figura 2.14:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ .



## 2.4. Trabajo Práctico N<sup>o</sup> IIIi: Concepto de Derivada de $y = f(x)$ .

1. a) ¿Qué significa que  $y = f(x)$  sea derivable en  $x_0$  ?
- b) Expresa en lenguaje  $\epsilon - \delta$  dicho concepto.
- c) Justifique la *veracidad o falsedad* de cada uno de las siguientes proposiciones:
  - (\*) ¿Para que  $y = f(x)$  sea derivable en  $x_0$  es necesario que esté definida en  $x_0$  ?
  - (\*\*) ¿Para que  $y = f(x)$  sea derivable en  $x_0$  es necesario que  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  esté definido en  $x_0$  ?

2. Interprete gráfica y geoméricamente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

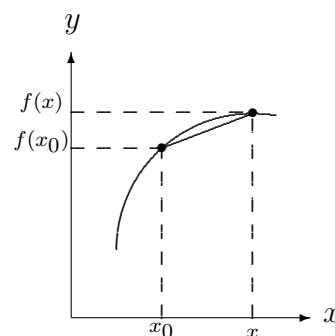


Figura 2.15: Segmento secante a  $y = f(x)$  entre  $(x_0, f(x_0))$  y  $(x, f(x))$ , con  $\Delta x > 0$ .

3. Interprete gráfica y geoméricamente:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

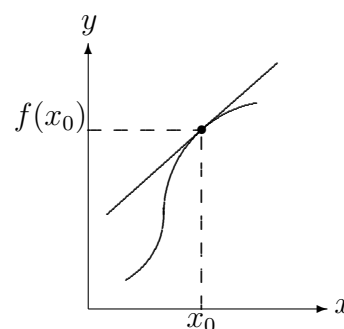


Figura 2.16:  $y = f(x)$  derivable en  $x_0$ .

4. En cada uno de los siguientes casos calcule, por definición, la derivada de  $f(x)$  en un punto arbitrario  $x_0$  de su dominio.

$$f(x) = x^2; \quad f(x) = \sqrt{x}; \quad f(x) = \frac{1}{x}; \quad f(x) = x^3; \quad f(x) = \sqrt[3]{x}.$$

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

5. a) Sea  $y = f(x)$  derivable en  $x_0$ .  
 Justifique que:  $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x_0) + \Psi(x)$  con  $\lim_{x \rightarrow x_0} \Psi(x) = 0$ .
- b) Determine  $\Psi(x)$  para  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .
- c) Utilice el inciso a) para justificar que si  $f'(x_0) \neq 0$  el incremento de la función es un infinitésimo equivalente a  $f'(x_0)\Delta x$ .

6. Sea  $y = f(x)$  tal que en  $x_0$ , tiene derivada infinita del

tipo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = +\infty = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \text{ ó eventualmente}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\infty = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Verifique si  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  y  $f(x) = -\sqrt[3]{x}$  tienen, en  $x_0 = 0$ , derivada infinita de uno de los tipos indicados arriba. ¿ y  $f(x) = x^{2/3}$  ?

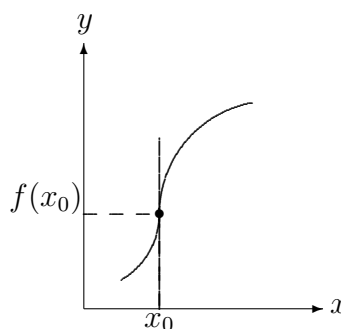


Figura 2.17: Recta tangente vertical en  $x = x_0$ .

7. a) Obtenga la expresión de  $f'(x_0)$  para  $f(x) = \text{Signo}(x)$  y para  $f(x) = |x|$ .  
 Aclare con precisión, en cada caso, que ocurre en  $x_0 = 0$ .
- b) Describa en lenguaje  $\epsilon$ - $\delta$  el concepto “ $y = f(x)$  es derivable a derecha del punto  $x_0$ ”.
- c<sub>1</sub>) Sea  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$  ¿  $\exists f'_+(0)$  ?; ¿  $\exists f'_-(0)$  ?; ¿  $\exists f'(0)$  ?
- c<sub>2</sub>) Sea  $f(x) = |x|$ , ¿  $\exists f'_+(0)$  ?; ¿  $\exists f'_-(0)$  ?; ¿  $\exists f'(0)$  ?
8. a) Demuestre que si  $y = f(x)$  es derivable en  $x_0$  (es decir, existe  $f'(x)|_{x_0}$  y es un valor finito) entonces  $y = f(x)$  es continua en  $x_0$ .
- b) Demuestre que la sola existencia de los límites laterales  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'_{0^+}(x_0)$  y  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'_{0^-}(x_0)$ , ambos finitos pero no necesariamente coincidentes, es suficiente para garantizar la continuidad de  $y = f(x)$  en  $x = x_0$ .
- c) Demuestre que continuidad en  $x_0$  no implica derivabilidad en  $x_0$ .

9. Usando la definición obtenga  $f'(x)$  para cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = x^3; \quad f(x) = ax + b; \quad f(x) = \text{sen } x; \quad f(x) = \ln x.$$

10. a) Sea  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  compruebe que  $f'_+(0) = 0$ , que  $f'_-(0) = 1$ , y que  $\nexists f'(0)$ .

b) Sea  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ , compruebe que  $f'_+(0) = +\infty$  y que  $f'_-(0) = -\infty$ .

11. a) Compruebe que si una función es derivable en  $x_0$ , con  $f'(x_0) \neq 0$ , entonces el incremento  $f(x) - f(x_0) = \Delta y$  puede ser expresado como la suma de dos infinitésimos, uno de ellos equivalente a  $\Delta y$  y el otro de orden superior a dicho incremento.

b) ¿Qué ocurre si  $f'(x_0) = 0$ ?

12. a) Determine si existe o no  $f'(0)$  para  $f(x) = \begin{cases} x \text{ sen } \left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ .

b) Idem para  $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ sen } \left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ .

13. Sean

$$f(x) = x^{-3}; \quad f(x) = x^{-n} \quad n \in \mathbb{N}; \quad f(x) = \cos 3x; \quad f(x) = \log_b x.$$

i) Determine el cociente incremental  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

ii) Calcule por definición, la derivada en cada punto de sus respectivos dominios.

*Sugerencia:* Probablemente necesitará las siguientes identidades trigonométricas:  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ ;  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta +$

$\cos \alpha \sin \beta$  y los siguientes límites:  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t} = 0$ , y  $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$ .

14. En cada uno de los casos siguientes: ¿ $\exists f'(x) \forall x$  del dominio de  $f(x)$ ?

$$\begin{array}{lll}
 f(x) = 3 - |x^2 - 1| & f(x) = \sqrt{x + 4} & f(x) = (x + 1)^{2/3} \\
 f(x) = |\sin(x)| & f(x) = |\ln x| & f(x) = ||x|| \\
 f(x) = (x + 1)^2 - 2|x + 4| - |x^2 - 1| & f(x) = 2^{-|x-1|} & f(x) = ||x - 3|| \\
 f(x) = \tanh x & f(x) = \frac{1}{x^2} & f(x) = |2^{-x} - 4|
 \end{array}$$

15. Utilizando las reglas para calcular derivadas, halle  $f'(x)$ .

$$\begin{array}{lll}
 f(x) = \sqrt{2}x^3 & f(x) = -2x^{-4} & f(x) = \sqrt{x} + \ln x \\
 f(x) = \frac{1}{3x^2 + 1} & f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} & f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x + 3 \tan x \\
 f(x) = \operatorname{tg} x & f(x) = 3 \operatorname{sen} 2x & f(x) = |x - 5| \\
 f(x) = \operatorname{tgh} x & f(x) = \frac{x^2 + 1}{x \operatorname{sen} x} & f(x) = \frac{(\sqrt{ax^2 + bx + c})(2x - 7)^{-5}}{3x(\sqrt[5]{-x - 2})} \\
 f(x) = (\ln x)^2 & f(x) = \ln x + 3x^2 & f(x) = \sqrt[3]{(2x + 5)(\sqrt{x})(ax^2 + bx + c)}.
 \end{array}$$

16. ★ Justifique analíticamente por qué la recta tangente  $\ll$  *Es la mejor aproximación lineal de  $y = f(x)$  en  $P = (x_0, f(x_0))$  cuando  $f'(x_0)$  es finita  $\gg$ , i.e. si  $\exists f'(x_0)$  (finita)  $\therefore y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , es la recta de máximo contacto con  $y = f(x)$  en  $(x_0, f(x_0))$ . Sugerencia: Trabaje con la familia de rectas que pasan por  $(x_0, f(x_0))$ , i.e.  $\mathcal{F} = \{y = m(x - x_0) + f(x_0), \forall m \in \mathbb{R}\}$ .*

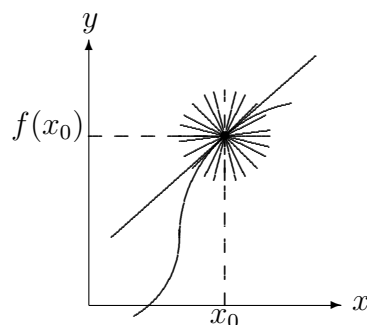


Figura 2.18: Recta con mejor aproximación a la curva en  $(x_0, f(x_0))$ .

17. Derivadas sucesivas

(a) Calcule las derivadas segundas de:

$$\begin{array}{lll}
 f(x) = x\sqrt{1 + x^2} & f(x) = x \ln x & f(t) = \sqrt{3t + 1} \\
 f(t) = (t^2 + 4)^{\frac{2}{3}} & f(t) = t^{\frac{2}{3}} - 2t^{\frac{1}{2}} + 4t^{-\frac{1}{2}} & f(u) = x^2 2^x
 \end{array}$$

(b) Si  $y = f(x) = h(x) \cdot g(x)$  y suponiendo que  $h(x)$  y  $g(x)$  poseen derivadas de todos los órdenes determine:  $f^{ii}(x)$ ,  $f^{iii}(x)$ ,  $f^{iv}(x)$ .

(c) Determine todas las sucesivas derivadas no idénticamente nulas de  $f(x) = x^6 + 2x^4 + 3x^3 - x + 2$ .

(d) Sea  $f(x) = \frac{1}{x}$ , determine  $f^{(n)}(x)$  para  $n = 1, 2, \dots$  ¿Cuánto vale  $f^{(n)}(1)$  ?

(e) Sea  $f(x)$  una función polinómica de grado  $n$ .

Pruebe que si  $k > n$   $f^{(k)}(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

18. Derivada de una función de función.

i) Justifique como calcular  $D_x[f(g(x))]$ .

ii) Aplique al cálculo de  $f'(x)$  para las siguientes funciones:

$$f(x) = \ln x^3, \quad f(x) = \ln^3 x, \quad f(x) = \cos^5 x,$$

$$f(x) = \cos x^5, \quad f(x) = \log_{\frac{1}{5}}^3 x, \quad f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x^3$$

$$f(x) = e^{3 \sin x} \quad f(x) = 2^{3 \sin x} \quad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3 \sin x}$$

19. Derivación logarítmica.

Explicite cada paso a seguir en el Método de la derivación logarítmica de una función del tipo  $y = f(x) = (h(x))^{g(x)}$ .

¿ Es posible aplicar dicha técnica si  $h(x) < 0$  ?

Calcule:

$$\frac{d e^{\cos \pi x}}{d x} \quad \frac{d x^{\log_{\frac{1}{5}} 3x}}{d x} \quad \frac{d (x^x \sqrt{x})^3}{d x} \quad \frac{d (2^x \sqrt{x})^x}{d x} \quad \frac{d (2^x \cosh x \sqrt{x})^x}{d x}$$

$$\frac{d (x^x)^x}{d x} \quad \frac{d x^{(x^x)}}{d x} \quad \frac{d (x^x \sqrt{x})^x}{d x} \quad \frac{d (x^x)^{(x^x)}}{d x} \quad \frac{d (2^x \cosh x \sqrt{x})^{(x^x)}}{d x}.$$

20. (a) Sea  $y = f(x)$  derivable en  $x_0$ . Encuentre la relación entre la recta tangente en  $x_0$ ,  $y_t(x)$  y la diferencial:  $df(x_0, x) = f'(x_0)(x - x_0)$ .

(b) Calcule la diferencial de  $y = x^2$  en  $x_0 = 1$  y úsela para aproximar  $\Delta y$  en  $\mathcal{E}(1, \delta)$ .

(c) Estime el valor de  $\sqrt{8,999}$  utilizando la diferencial.

(d) Sea  $y = f(x)$  derivable en  $x_0$ . ¿ Cómo debería ser el gráfico de  $y = f(x)$  para que la aproximación lineal, en ese entorno, sea por defecto (exceso) ? Ejemplifique.

(e) Aproxime linealmente  $\sqrt{3,99}$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 10^{-6}\right)$ ,  $\sqrt[3]{8,001}$ .

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

21. ★ Sea  $y = f(x)$  derivable en  $x_0$  y sea  $\mathcal{F}$  la familia de rectas secantes  $y_{x_F}(x)$  a la gráfica de dicha curva, por los puntos  $P_0(x_0, f(x_0))$ ,  $P_F(x_F, f(x_F))$  y  $x_F \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , i.e.

$$\mathcal{F} : \left\{ y_{x_F}(x) = \frac{f(x_F) - f(x_0)}{(x_F - x_0)}(x - x_0) + f(x_0), \quad x_F \neq x_0 \right\}.$$

Demuestre que la recta límite de dicha familia, para  $x_F \rightarrow x_0$ , es la recta tangente a la curva en dicho punto.

*Sugerencia:* Evalúe el siguiente límite:  $\lim_{x_F \rightarrow x_0} y_{x_F}(x)$ .

Considere la función  $f(x) = x^2 \cdot D(x)$ , donde:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}.$$

- i) Analice la familia de secantes  $\overline{P_0(0,0), P(x_F, f(x_F))}$ .

- ii) Verifique que  $f(x)$  es continua sólo en  $x = 0$  y además derivable allí.

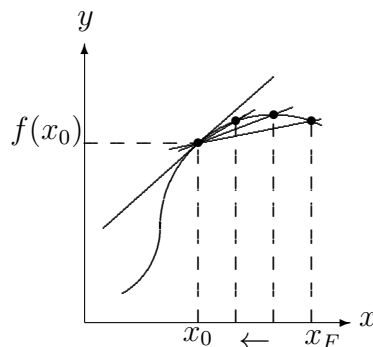


Figura 2.19: Familia de rectas secantes con  $x_F - x_0 > 0$ .

22. Sea  $y = f(x)$  con derivada finita  $x_0$ . Para cierto incremento  $\Delta x$ , interprete  $\Delta y = \Delta f$  y  $dy = df(x_0, \Delta x)$  en una gráfica de  $(x, f(x))$ ,  $\forall x \in \mathcal{E}(x_0, \delta)$ .

Establezca la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- $b_1$ ) Si  $f'(x_0)$  existe y es finita,  $df(x_0, \Delta x)$  es un infinitésimo equivalente a  $\Delta y = \Delta f$ .
- $b_2$ ) Si  $f'(x_0)$  existe, es finita y no nula,  $df(x_0, \Delta x)$  es un infinitésimo equivalente a  $\Delta y = \Delta f$ .

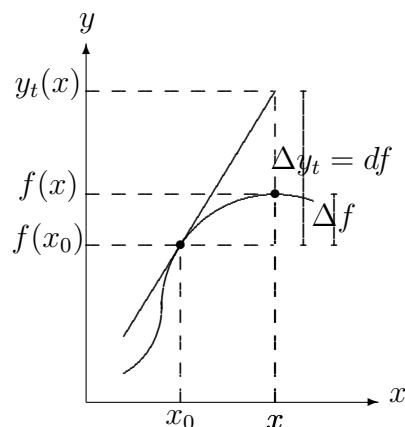


Figura 2.20: La diferencial.

23. (a) Sea  $y = f(x)$  derivable en  $x_0$ . Determine la expresión de recta normal al gráfico de  $y = f(x)$  en dicho punto.
- (b) Calcule la recta tangente y la recta normal al gráfico de:  $h(x) = 2 - \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 9$ ;  $v(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = -1$ .
- (c) Sea  $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{7}{2}x^2 + 14x - 7$ ; En qué puntos la recta tangente tiene pendiente 2 ?

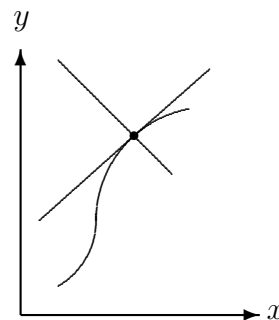


Figura 2.21: Recta tangente. Recta normal.

24. a) Determine y justifique una fórmula para calcular ángulos entre curvas que se intersectan.
- b) Halle el ángulo que forman, al cortarse, las curvas  $f_1(x) = x^2 + 4x + 4$  y  $f_2(x) = x^2 - 4x + 4$ .
- c) Cómo calcula el ángulo entre dos curvas si una de ellas tiene derivada infinita única (de igual signo a derecha e izquierda) en el punto de intersección.
- d) Cómo calcula el ángulo entre dos curvas si ambas tienen derivada infinita única en el punto de intersección.

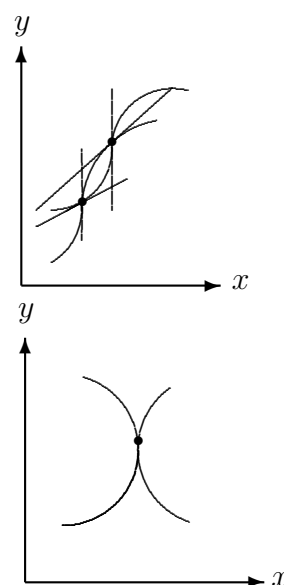


Figura 2.22: Ángulo entre curvas.

25. Derivada de la función inversa.

a) ¿ Bajo qué condiciones puede probar que  $f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$ , siendo  $x = g(y)$  e  $y = f(x)$  ?

b) Aplique al cálculo de  $f'(x)$  para las siguientes funciones:

$$f(x) = \arcsen x, \quad f(x) = \arctg x, \quad f(x) = \arccos x$$

c) Calcule

$$f'(x) = \frac{d (ArgSinh(x))}{d x} ;$$

$$f'(x) = \frac{d (ArgCosh(x))}{d x}$$

d) Calcule  $f'(ArgCosh(x))|_{(1)}$  y  $f'(ArgSinh(x))|_{(0)}$ .

e) Calcule  $f'(ArgTanh(x))|_{(0)}$  y  $f'(ArgTanh(x))|_{(0,5)}$ .

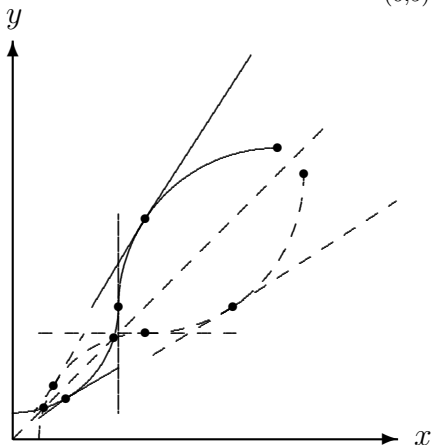


Figura 2.23: Teorema de la derivación de la función inversa.



## 2.5. Trabajo Práctico N $\doteq$ III: Esencialmente: Cálculo de derivadas.

1. Para cada una de las siguientes funciones  $f(x)$  y  $x_0 \in \text{Dom } f(x)$ :

i)  $f(x) = -2x^2 + 1, x_0 = 1$

ii)  $f(x) = -3 \sin(x), x_0 = \frac{\pi}{2}$

iii)  $f(x) = |x^2 - 1|, x_0 = -1, x_0 = 0$     iv)  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x+3} & \text{si } x \leq 3 \\ x-3 & \text{si } x > 3 \end{cases}, x_0 = 3$

a) Evalúe el cociente incremental  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  para los siguientes valores de  $\Delta x$ : 0.25; 0.05; -0.01. Interprete geoméricamente.

b) Calcule  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  en los casos en que existe. Interprete geoméricamente.

Cuando sea necesario calcule:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ y } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

c) Determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto  $(x_0, f(x_0))$  cuando las mismas existan. Grafique.

2. Dada  $f(x) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  estudie la derivabilidad de la función  $f(x)$  y halle la expresión de  $f'(x)$ .

Determine el dominio de  $f'(x)$ . Realice las gráficas de  $f(x)$  y  $f'(x)$ .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -1 - 2x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. Encuentre, en caso de ser posible, los valores de  $m$  y  $b$  para que la función  $f(x)$  dada sea derivable en  $\mathbb{R}$ .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ mx + b & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 1 \\ mx + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

4. Calcule la derivada primera de las siguientes funciones utilizando, cuando sea posible, reglas para la suma, resta, producto y cociente:

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

---

a)  $f(x) = x^{-2} \cos(x)$

b)  $f(x) = 3x^3 - \sqrt{x} + x^2 - 1$

c)  $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\operatorname{tg}(x)} + \frac{4^x + \sqrt{3}}{\operatorname{cosec}(x)}$

d)  $f(x) = (-7x^3 + 2) \sin(x)(2\sqrt{x} + 9)$

e)  $f(x) = x^5(x^{-1} - x^{-4}) \left( \frac{\sqrt{5}}{\operatorname{cotg}(x) + \pi x} \right)$

f)  $f(x) = \frac{3 \cos(x)(\sqrt{2} - 3^x + x^5)}{\ln(x) - 3x}$

g)  $f(x) = \frac{\cos(x)(3x + 2\sqrt{x})}{-x^4 + 3x^3 - 5 + \sin(x)}$

h)  $f(x) = \frac{x^3 \cos(x)}{e \sqrt{x} + \pi x^{-3}}$

5. Utilizando, cuando sea posible, las reglas de derivación para la suma, resta, producto, cociente y composición, calcule la derivada de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \sqrt[3]{\log_4\left(\frac{x}{x-1}\right)}$

b)  $f(x) = \sqrt{x} e^{x^3} (x^2 + 1)^8$

c)  $f(x) = \sin(\sin(\sin(x)))$

d)  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{2x + \sqrt{x^3}}}$

e)  $f(x) = \frac{\sin^2(4x) \cdot \ln(3 \cos(x) + x^4)}{\operatorname{tg}(x^3 - x) 7^x}$

f)  $f(x) = \ln\left(\frac{\sin^2(4x) - \sqrt{3x}}{\operatorname{tg}(x^2) + 2^x}\right)$

g)  $f(x) = \sqrt{\frac{x^{-5} e^x}{\operatorname{sec}^2(3x)}}$

h)  $f(x) = x^4(\sin(3x^2 + 5x - 6))^{-5}$

6. Aplique en caso de ser necesario el método de derivación logarítmica para hallar la derivada de las funciones dadas a continuación:

a)  $f(x) = x^x$

b)  $f(x) = x^{\sin(x)}$

c)  $f(x) = (5e^{5\sqrt{2}})^2$

d)  $f(x) = (1 + x^2)^{(x-5)}$

e)  $f(x) = x^{3\pi^2}$

f)  $f(x) = (2\pi)^x$

g)  $f(x) = x^{(x^x)} + \cos^3(x)$

h)  $f(x) = x^{e^x}$

i)  $f(x) = x^{\ln(x)}$

7. Aplique el teorema de la derivada de la función inversa para hallar la derivada de las funciones dadas a continuación:

a)  $f(x) = \arcsen(x)$    b)  $f(x) = arctg(x)$    c)  $f(x) = argsh(x)$    d)  $f(x) = argtgh(x)$

8. Halle la derivada de las funciones dadas a continuación:

a)  $f(x) = argsh\left(\frac{x^2 + 3}{\ln(2x)}\right)$    b)  $f(x) = \frac{argsh(\sqrt{x})}{\sqrt[5]{x + \sqrt{x}}}$    c)  $f(x) = xarctg(\ln(x^3))$

d)  $f(x) = x arccos(1 - x^2)$    e)  $f(x) = (arctg(\sin(x)))^3$    f)  $f(x) = \frac{cosec(x^{-3} + x)}{x^4 + arcsen(\pi x)}$

g)  $f(x) = e^x argsh(x^3 - \sin(2x))$    h)  $f(x) = arccotg(x^2 + 3x)$     $f(x) = \pi arccos(x \ln(x))$

9. Encuentre las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la curva definida por cada una de las ecuaciones dadas en el punto indicado:

a)  $y^2 = 1 + x^2 y + 2x$ ;  $P_0(-2, 1)$    b)  $y^4 - 4x^4 = 6xy$ ;  $P_0(1, 2)$

10. Obtenga la derivada sucesiva que se indica:

a)  $\frac{d^2}{dx^2} (2tg(3x))$    b)  $\frac{d^3}{dx^3} (x^4 - 2x^2 + x - \pi)$

c)  $\frac{d^4}{dx^4} \left(\frac{3}{2x - 1}\right)$    d)  $\frac{d^5}{dx^5} \left(\frac{\pi}{4}\right)$  si  $f(x) = \cos(2x) - \sin(2x)$

## 2.6. Trabajo Práctico N $\doteq$ IV: Derivada – Aplicaciones.

“... engineers seek the *least expensive, the strongest or the most efficient* in their designs”, a quotation from the book:

*Perfect Form.* Don S. Lemons. Princeton University Press.

**[★I]** Primera aplicación: Monotonía, extremos absolutos y relativos, concavidad y puntos de inflexión.

1. Dada la gráfica de  $f'(x)$ , esboce, en cada caso, una gráfica posible para  $y = f(x)$  suponiéndola continua.

Cada una de las figuras que sigue es el gráfico de la derivada  $f'(x)$  de una función continua  $f(x)$ . Esboce, en cada caso, un gráfico para  $f(x)$ .

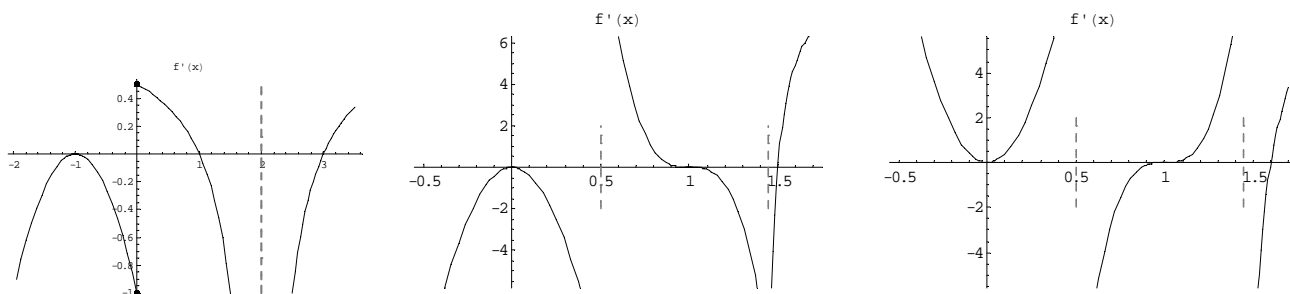


Figura 2.24: Gráficas de la derivada primera.

Determine, en cada caso, el signo de  $f''(x)$ .

2. Ejercicios orientados a bosquejar la gráfica de una  $y = f(x)$ :

- a) Determine en que puntos  $y = f(x)$  es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo:

$$\begin{array}{lll}
 f(x) = x^3 - 3x - 1 & f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} & f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1 - x) \\
 f(x) = e^{-x^2} & f(x) = \frac{x}{1 + x^2} & f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \\
 f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} & f(x) = \frac{x}{x^3 - 8} & f(x) = -\frac{x^2}{x + 3}
 \end{array}$$

b) Encuentre los valores extremos de:

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = -2x^3 + 3x^2 & \text{en } [-\frac{1}{2}, 2] & f(x) = x^{\frac{2}{3}} & \text{en } [-1, 2] \\
 f(x) = \frac{1}{x} & \text{en } [0, 1) & f(x) = |x| & \text{en } [-2, 1] \\
 f(x) = \frac{1}{x} & \text{en } (0, 1) & f(x) = e^{-x^2} & \text{en } [-2, 2] \\
 f(x) = x - \tan x & \text{en } [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] & f(x) = x^{\frac{2}{5}} & \text{en } [-1, 32]
 \end{array}$$

3. Estudio completo de las gráficas de:  $f(x) = e^{-x^2}$ ; y de  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

4. Bosqueje la gráfica de :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^3+2} & x > 0 \\ \frac{x}{x^3+2} & x < 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 15}{-x^2 - 4x + 9} & \text{si } x < -4 \vee x \geq 3 \\ \frac{-x^2 + 1}{x + 1} & \text{si } -4 \leq x < 3 \wedge x \neq -1 \end{cases}$$

Determine  $Dom f(x)$ , intersección con los ejes coordenados, simetrías, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad, puntos de inflexión, extremos, asíntotas y finalmente, con todos los elementos obtenidos trace el gráfico de  $f(x)$ .

Verifique si la segunda función dada en *Ej. N<sup>o</sup> 4* es o nó  $f(x) = \frac{|x^2 + x - 12|}{x + 1} - 3$ .

5. Grafique la función  $f(x) = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$  teniendo en cuenta: Dominio, paridad o imparidad, intersecciones con los ejes, continuidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos, concavidad, puntos de inflexión y asíntotas. Ver §6.1 pp. 244-247.

**[★II] Segunda aplicación: Problemas de tasa de variación.**

1. Una solución está pasando desde un filtro cónico de 24 plg. de profundidad y 16 plg. de diámetro hacia un recipiente cilíndrico de 12 plg. de diámetro. ¿ A que velocidad se está elevando el nivel de la solución en el cilindro si cuando la profundidad de la solución en el filtro es 12 plg. su nivel está disminuyendo a una velocidad de 1 plg/min ?
2. Una escalera de 20 pies de longitud yace apoyada contra una pared. Determine la velocidad a la cual:

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

---

- a) se está moviendo hacia abajo el extremo superior de la escalera cuando su extremo inferior se encuentra a 12 pies de la pared y se aleja de ella a una velocidad de 2 pie/seg.
- b) decrece la pendiente de la escalera.
3. Un recipiente tiene forma de cono circular, con el vértice en la parte inferior. La altura es 10 m y el radio de la base 4 m. Se introduce agua en el recipiente a una velocidad constante de  $5 \text{ m}^3/\text{min}$ , ¿con qué velocidad se eleva el nivel del agua cuando la profundidad del agua es de 5 m ?
4. Gas está escapando de un globo esférico a razón de  $0,125 \frac{\text{m}^3}{\text{seg}}$ . ¿ Con qué rapidez disminuye el área del globo cuando el radio es de 2.5 metros ?
5. El área de un triángulo equilátero disminuye a razón de  $4 \frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$ . Encuentre la razón de cambio de la longitud de sus lados en el momento en que el área del triángulo es  $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .
6. Un incendio que comenzó en un terreno seco se extiende formando un círculo. El radio del círculo crece a razón de  $1,8 \text{ m}/\text{min}$ . Calcule la rapidez con que crece el área del círculo cuando el radio es de  $45 \text{ m}$ .

7. Un farol F está a  $H$  metros de altura, y una persona de altura  $h$ , se aleja desde la base  $O$  en línea recta a una velocidad de  $v \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ . Determine la velocidad  $V$  de la punta de la sombra luego de haber caminado  $t$  seg. [Ayres, F. (1950)], pg. 59, chap. 11, §Related Rates. Theory and Problems of Differential and Integral Calculus.

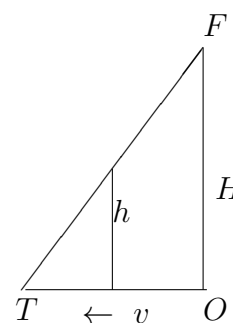
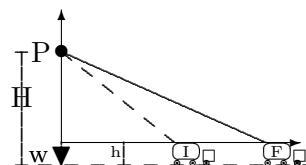


Figura 2.25: Velocidad del extremo de la sombra.

8. Un niño mantiene su barrilete a 150 pies de altura. Si el barrilete se mueve horizontalmente alejándose de él a la velocidad de 20 pies/seg., ¿ cuán rápido se desenrolla el piolín en el instante en que el barrilete se halla a 250 pies del niño ?

9. Un avión se desplaza en vuelo horizontal, a 8 kilómetros de altura. (En este Ejercicio se supone la tierra llana.) La ruta de vuelo pasa por encima de un punto P del suelo. La distancia entre el avión y el punto P disminuye a razón de 4 kilómetros por minuto en el instante en el que esta distancia es de 10 kilómetros. Calcule la velocidad del avión.
10. Un triángulo rectángulo variable  $\triangle ABC$  en el plano  $xy$  tiene su ángulo recto en el vértice  $B$ , un vértice  $A$  fijo en el origen, y el tercer vértice  $C$  sobre la parábola de ecuación  $y = \frac{1}{4}x^2$ . El vértice  $B$  parte del punto  $(0, 1)$  en el instante  $t = 0$  y se desplaza hacia arriba siguiendo el eje  $y$  a una velocidad constante de 2 cm/seg. Determine la rapidez de crecimiento del área del triángulo en el instante  $t = 7/2$  segs.
11. Un peso  $W$  está ligado a una soga de longitud  $L$ , la cual pasa a través de la polea  $P$ , situada a una altura  $H$  del suelo. El otro extremo de la soga está atado a un camión, dicha atadura está a nivel  $h$  del suelo. El camión avanza a velocidad constante  $v$ .
- Si  $L = 50ft, H = 20ft, h = 2ft, v = 9ft/sec$ ; ¿ Con qué velocidad se eleva  $w$  cuando está a 6 pies del suelo ? [Ayres, F. (1950)], pg. 58, chap. 11, §Related Rates. Theory and Problems of Differential and Integral Calculus.



Resolución §6.2 en pp. 248-252.

Figura 2.26: Elevación del peso  $W$ .

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

*Geometría del Problema de Elevación del peso  $W$*

Determine las posiciones inicial  $X(0)$ , final  $X(F)$  y la distancia que puede recorrer el camión en base a los datos  $H, L, h, v$ .

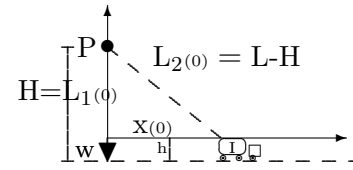
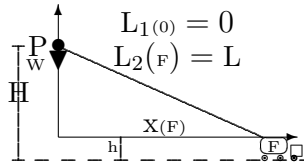


Figura 2.27: Estado inicial y final de las variables.

*Mecánica del Problema.*

Determine la expresión de la velocidad de elevación del peso  $w$  en función de los datos  $H, L, h, v$ . Determine los intervalos de variación de cada una de las magnitudes variables. Determine qué magnitudes poseen igual y cuáles diferentes tasas de variaciones -analice físicamente sus respuestas. Determine en qué circunstancias la velocidad de elevación resultaría aproximadamente igual a la velocidad del camión. ¿ En qué instantes la velocidad de elevación es la menor posible, la mayor posible ?

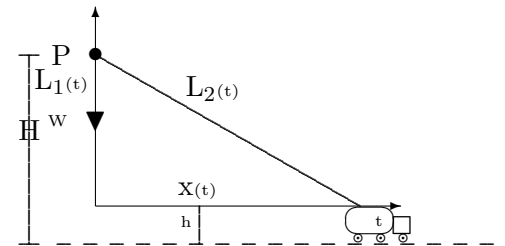


Figura 2.28: Dinámica del Problema de Elevación del peso  $W$ .



**[★III] Tercera aplicación: Optimización.** Problemas prácticos en busca de soluciones eficientes.

1. Pruebe que entre todos los rectángulos de:
  - perímetro dado, el cuadrado es el de mayor área.
  - área dada, el cuadrado es el de perímetro mínimo.
2. Un granjero quiere cercar un terreno rectangular y adyacente a un muro de piedra.
  - Si dispone de  $L$  metros de alambre, ¿cuáles serán las dimensiones para que el área del terreno cercado sea máxima ?
  - Si el área disponible es  $A$ , ¿cuáles serán las dimensiones para que la cantidad de alambre necesaria para cercarlo sea mínima ?
3. Determine las dimensiones del cilindro circular recto, de mayor volumen, que puede inscribirse en una esfera de radio 1.
4. Demuestre que de todos los cilindros circulares rectos que pueden inscribirse en un cono circular recto, de altura  $h$  y radio de la base  $r$ , el de mayor volumen es aquél cuya altura es un tercio de la del cono.
5. Los puntos  $A$  y  $B$  están en distintas orillas de un río recto de 3 km de ancho y son opuestos uno del otro. El punto  $C$  está en la misma orilla que  $B$  pero a  $k$  kilómetros de  $B$ , río abajo y una compañía telefónica desea tender un cable de  $A$  a  $C$ . El costo por kilómetro de cable en tierra es de \$10.000 y el de cable acuático es de \$ 12.500. Se piensa en tender el cable desde  $A$  hasta un punto  $P$  en la orilla opuesta y desde allí hasta  $C$ . **Ver Ejemplo 6.3.4 en la pág. 256.**
  - a) Si  $x$  kilómetros es la distancia de  $B$  a  $P$ , obtenga una ecuación que de el costo total del cable tendido  $C(x)$ . Determine el dominio de  $C(x)$ .
  - b) Si  $k = 2$ , calcule el valor de  $x$  para el cual el costo del cable tendido sea el menor posible.

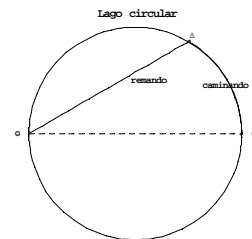
## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

6. Un campo petrolero tiene  $N$  pozos que producen un total de  $B$  barriles de crudo por día. Por cada pozo nuevo que se adiciona, la producción media por pozo disminuye en  $b$  barriles diarios. ¿ Cuántos pozos adicionales se deben agregar para obtener la mayor producción de crudo por día ? [Ver Ejemplo 6.3.5 en la pág. 257.](#)
7. Halle, si es posible, el cono -invertido- de mayor superficie lateral que puede inscribirse en un cono de radio 1 y altura 3, [Rabuffetti, H. (1995)]. [Rta. en la pág. 254.](#)
8. Antonio está en una lancha en el mar a 2 millas de la costa  $B$ , que se extiende en línea recta. En ese momento ve humo en su casa, que está en la playa y a 6 millas del punto  $B$ , que es el más cercano de la costa a la lancha. Antonio sabe que puede navegar a 6 millas/hora y correr a 10 millas/hora. ¿ Qué trayectoria, sobre mar y tierra seguirá para llegar a su casa en tiempo mínimo ?

*Brachistochrone*: “brakhus ”  $\equiv$  shortness, “chronos ”  $\equiv$  time <sup>4</sup>.

9. Miguel, el ecologista, tiene que cruzar diametralmente una laguna circular<sup>a</sup> de un kilómetro de radio. Puede hacerlo de tres maneras: atravesándola en bote a  $1 \frac{\text{km}}{\text{hora}}$ , bordeándola a pie a  $4 \frac{\text{km}}{\text{hora}}$ , o parte a remo y parte caminando. Encuentre la trayectoria que emplea el menor y el mayor tiempo.

§*Problemas, pág. 288, Derivadas e integrales de Calculus, Cálculo Infinitesimal, Michael Spivak, 2<sup>da</sup> Ed.* Resolución en la pág. 259 y Cuadro 13.8 de la pág. 493.



<sup>a</sup>Averno, Lago (gk., aornos, sin pájaros, lago del sur de Italia, en Campania, cerca de Nápoles. Tiene unos 3 km de circunferencia,... Consulte la web.) [Ver §6.4 en la pp. 259-263.](#)

Figura 2.29: Búsqueda del máximo y mínimo tiempo.

<sup>4</sup>¿ Does the lure of the perfect shape in any sense cause the light-ray’s motion ?.

Niel. B. I., *Hamiltonian path paradigms mirrored at the Fermat’s Principle*. Proceedings of The Fourth International Conference on Modelling and Simulation, 11 - 13 November, 2002. Victoria University of Technology. Melbourne, Australia. “Modelling and Simulation: Keys to Technological Advances ” pg. 132 - 137.

10. (Ley de Snell) Least time: Pierre De Fermat, *Analysis ad refractiones*, 1662. He quoted: “Nature operates by the simplest and most expeditious ways and means”.

El “principio de Fermat en óptica enuncia que la luz viaja de un punto  $C$  a un punto  $B$  a lo largo de la ruta que requiere el tiempo mínimo” (Descartes had rival hypotheses). Suponga que la luz viaja en un medio a la velocidad  $c_1$ , y en el segundo a la velocidad  $c_2$ . Si  $C$  está en el medio 1 y  $B$  en el medio 2 y el eje  $x$  separa los dos medios, como se muestra en la figura 9.10.a, justifique la ley:  $\frac{\text{sen}\theta_1}{c_1} = \frac{\text{sen}\theta_2}{c_2}$ .

Resolución en Capítulo 14, pág. 505 y pág. 508.

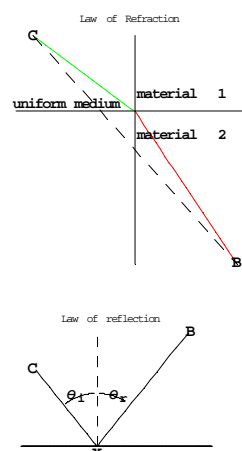


Figura 2.30: Propagación del rayo de luz.

11. Analice que tienen en común los tres ejercicios de optimización previos, es decir, la situación de Antonio, la de Miguel y la Ley de la Refracción del rayo luminoso.

12. Determine el punto del suelo desde el cual se ve un segmento vertical  $\overline{AB}$  bajo ángulo máximo. Ver Figura 6.5.

§33-7, pág. 464, viii. *Funciones derivables, Análisis Matemático, J. Rey Pastor, P. Pi Calleja y C. A. Trejo, Tomo I*. En la figura se indica la construcción geométrica de la solución. Ver resolución en la pág. 253.

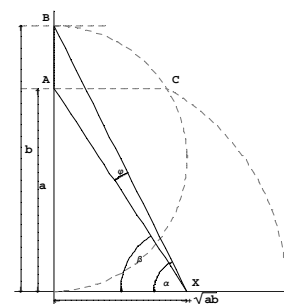


Figura 2.31: Mejor visualización de  $\overline{AB}$ .

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

13. Cada recta de pendiente negativa que contiene el punto  $P_0 (3, 1)$  determina un triángulo rectángulo con los semiejes positivos.

i) Determine cuál de tales triángulos tiene área mínima.

ii) ¿ Existe alguno de área máxima ?

Justifique su respuesta.

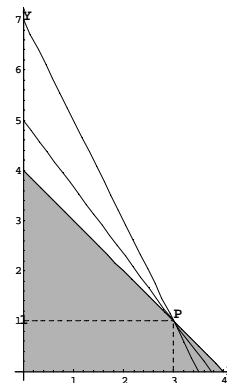


Figura 2.32: Triángulos de área variable.

### [★IV] Cuarta aplicación: Análisis cualitativo de la naturaleza de las soluciones de E.D.O

de primer orden a variables separables.

Cada una de las expresiones dadas en (i) a (iv) representa un modelo de crecimiento y/o decrecimiento poblacional- formación y/o desaparición de reactivos químicos, epidemias, flujos laminares de fluidos, dispositivos de control automático, etc.<sup>5</sup>

Interprete cada modelo si  $y(t)$  representa la cantidad de individuos de la especie en cada instante de tiempo. Interprete si dichas poblaciones se extinguen o crecen indefinidamente o bien tienen una barrera para el crecimiento o decrecimiento. Sugerencia: Consultar §11.1, pp. 410- 470. Además de §8.8, en la pág. 327. [Ver resolución y ejemplos en pp. 410-433.](#)

Análise cualitativamente la naturaleza de las funciones  $y(t)$  a partir de las respectivas expresiones dadas de  $dy/dt$  y mediante las expresiones obtenibles de las respectivas derivadas segundas  $d^2y/dt^2$ .

$$(i) \frac{dy}{dt} = r y, \quad r > 0, \quad y(0) = y_0.$$

$$(ii) \frac{dy}{dt} = r y, \quad r < 0, \quad y(0) = y_0.$$

$$(iii) \frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{k}\right) y, \quad r > 0, \quad y(0) = y_0.$$

<sup>5</sup>§2.6, pg. 58-74, Population Dynamics and Some Related Problems; Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 6<sup>th</sup> Edition, Authors: W. E. Boyce, R. C. DiPrima, Diego Murio, University of Cincinnati. J. Wiley 1.999

(iv)  $\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{k}\right) y$ ,  $r < 0$ ,  $y(0) = y_0$ .

(v)  $\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{k}\right) y \left(\frac{y}{\kappa} - 1\right)$ ,  $r < 0$ ,  $y(0) = y_0$ .

(vi)  $\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{k}\right) y \left(\frac{y}{\kappa} - 1\right)$ ,  $r < 0$ ,  $y(0) = y_0$ .

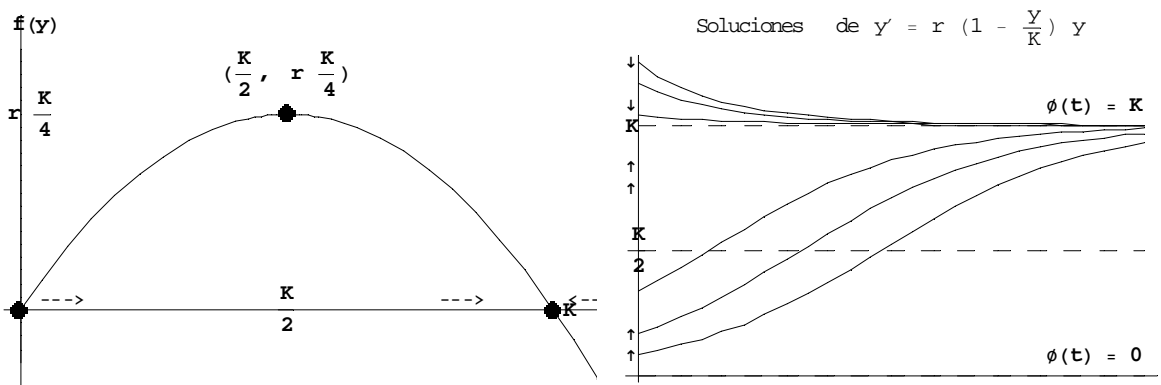


Figura 2.33:  $dy/dt = r(1 - y/K)y$ .

## 2.7. Trabajo Práctico N $\doteq$ V: Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial.

1. i) Encuentre el número real cuya existencia garantiza el Teorema del Valor Medio de Lagrange para  $f(x) = 2\sqrt{x}$ , para  $x \in [1, 4]$ .
- ii) Sea  $f(x) = x^{2/3} \in [-8, 27]$  ¿ Es aplicable el Teorema de Lagrange ? Justifique su respuesta. (Sugerencia: Ver §7.1, pág. 268.)

2. i) Sea  $f(x)$  continua en  $[x, x + h]$  y derivable en  $(x, x + h)$ . Compruebe que el Teorema de Valor Medio de Lagrange puede expresarse de la forma:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h) \quad \text{para algún } 0 < \theta < 1.$$

- ii) Determine  $\theta$  en función de  $x$  y de  $h$  cuando:

$$ii_1) f(x) = x^2,$$

$$ii_2) f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Para  $x$  fijo halle, en cada caso, el límite de  $\theta$  cuando  $h \rightarrow 0$ .

3. Justifique, mediante el Teorema del Valor Medio, que  $|\text{sen } x_1 - \text{sen } x_2| \leq |x_1 - x_2|$ .
4. Demuestre que si  $f(x)$  es una función derivable en  $[a, b]$ , con  $\text{Signo}f(a) \neq \text{Signo}f(b)$  y  $f'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ , la ecuación  $f(x) = 0$  tendrá una y sólo una solución entre  $a$  y  $b$ . *Sugerencia: Use el Teorema del Valor Intermedio y el Teorema de Rolle, ver §7.1, pág. 268.*

- i) Utilice la proposición anterior para justificar que  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 1 = 0$ , tiene exactamente una solución en cada uno de los siguientes intervalos  $(-1, 0)$ ;  $(0, 1)$ ;  $(4, 5)$ .
- ii) Sea  $f(x)$  una función derivable en un intervalo  $[a, b]$ . Entre ceros distintos sucesivos de la  $f'(x)$  puede haber a lo sumo un cero de  $f(x)$ . *Sugerencia: Intente demostrarlo por reducción al absurdo y use el Teorema de Rolle.*

5. Demuestre que si  $y = f(x)$  es continua en  $[a, b]$  y derivable con  $f'(x) \geq 0$  en  $(a, b)$ , entonces  $f(x)$  es no decreciente en  $[a, b]$ .

Utilice la proposición anterior para justificar que si  $f(x) \geq 0$ ,  $f'(x) \geq 0$ , entonces  $f^2(x)$  es no decreciente.

6. Verifique las siguientes desigualdades

i)  $e^a(x - a) < e^x - e^a < e^x(x - a)$ ,  $a < x$

ii)  $\frac{x - a}{x} < \ln\left(\frac{x}{a}\right) < \frac{x - a}{a}$ ,  $0 < a < x$ .

7. (a) Encuentre una expresión analítica que interprete la geometría de cada uno de los siguientes gráficos en la Figura 2.34.

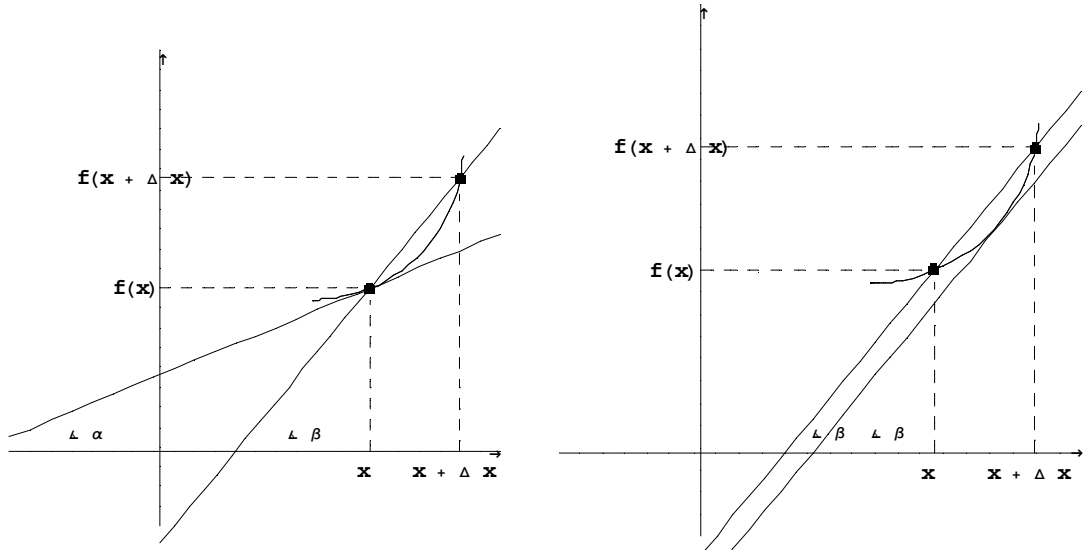


Figura 2.34: Gráficas del Ejercicio N  $\doteq$  7

Compárese el significado de las fórmulas:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(\xi), \quad x < \xi < x + \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_+(x) + \eta(x), \quad \eta(x) \rightarrow 0 \text{ cuando } \Delta x \rightarrow 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \omega(x), \quad \omega(x) \rightarrow 0, \text{ cuando } \Delta x \rightarrow 0$$

- (b) Compare las respectivas condiciones de validez de las fórmulas en (a).

8. Las siguientes funciones son continuas en todo su dominio.

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

- (a) ¿Son derivables? Si existe algún punto donde no exista la derivada indíquelo.
- (b) Determine un intervalo  $[a, b]$  del Dominio de  $f(x)$  donde la función verifique las hipótesis del Teorema de Rolle ó de Lagrange. Compruebe que la tesis de los mismos es verdadera en cada caso:

$$f(x) = 7|x| \quad f(x) = \sqrt{x} \quad f(x) = \frac{x+1}{x+1} \quad f(x) = \frac{|x+1|}{x+1}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}, \quad f(x) = x^{\frac{2}{3}}.$$

9. Sea  $f(x) = 5 + 3(x-1)^{\frac{2}{3}}$ . Verifique que  $f(0) = f(2)$ . ¿ Existe  $c \in (0, 2)$  tal que  $f'(c) = 0$  ? ¿Por qué no contradice el Teorema de Rolle ?
10. Suponga que en una carrera, el caballo  $A$  y el caballo  $B$  terminan empatados. Justifique que sus velocidades fueron idénticas en algún instante de la carrera.
11. (a) Utilice el Teorema del Valor Medio para probar que la gráfica de una función  $y = f(x)$  cóncava hacia arriba siempre está arriba de su recta tangente, *i.e.* (id est), pruebe que:  $f(x) > f(c) + f'(c)(x - c)$ ,  $x \neq c$ .

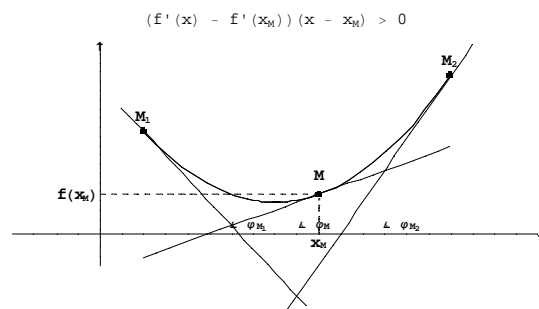


Figura 2.35: Gráficas del Ejercicio N  $\hat{=}$  11 a)

- (b) Desde un punto de vista geométrico, si  $y = f(x)$  es cóncava hacia arriba, además de estar la curva por encima de su recta tangente en cada punto, ¿ qué otra condición cumplen éstas ( *i.e.*, las rectas tangentes a  $y = f(x)$  ) ?



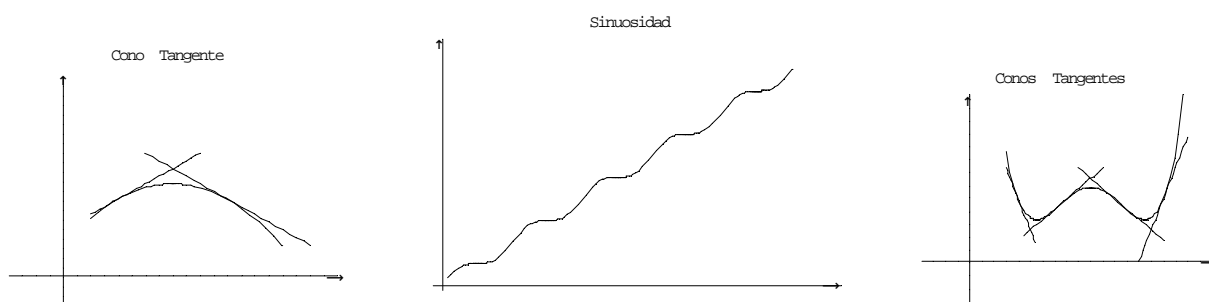


Figura 2.36: Gráficas del Ejercicio N  $\doteq$  12 b)

c) Si  $f''(x_M) > 0$  y existe  $f'(x)$  finita  $\forall x \in \epsilon(x_M, \delta)$  entonces el gráfico de  $f(x)$  es cóncavo hacia arriba en  $(x_M, f(x_M))$ .

Verifique que  $g(x) = f(x) - [f(x_M) + f'(x_M)(x - x_M)] > 0 \quad x \neq x_M$ .

12. Enuncie el *Teorema de Cauchy*. (Sugerencia: Ver en la §9 la pág. 339.)
13. Enuncie la *Regla de L'Hôpital*. (Sugerencia: Ver en la §7.1 la pág. 270.)
14. Calcule los siguientes límites indeterminados, utilizando la *Regla de L'Hôpital*.

$$\frac{0}{0} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^3-27} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-2}} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$$

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3x}{x^3-1} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\cot(\frac{\pi}{2}-x)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x}$$

$$0 \cdot \infty \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cot(1-x) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

$$\infty - \infty \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} - \tan x \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cot^2 x - \operatorname{cosec}^2 x)$$

$$1^\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{x-2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (2x + e^x) \frac{1}{\sin x} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)^{\cot(x-1)}$$

$$0^0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{(x-1)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x^x \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\ln x}$$

$$\infty^0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln(x+1)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x^{\sin x} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (3+x)^{\frac{2}{x}}$$

15. Efectúe el estudio completo de la gráfica de  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  Figura 2.37.

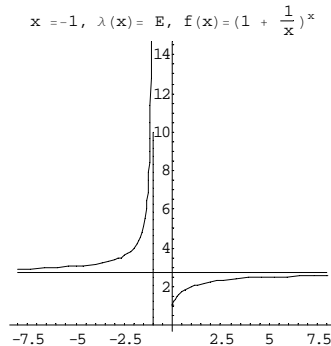


Figura 2.37: Asíntotas de  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ .

16. Efectúe el estudio completo de  $f(x) = x^x, x > 0$  Figura 7.1.  $f(x) = x^x, x > 0$

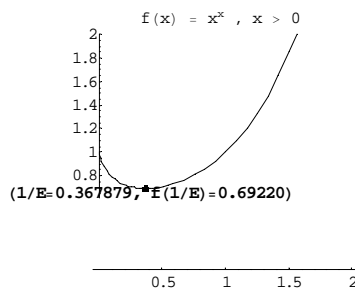


Figura 2.38: Mínimo de  $f(x) = x^x, x > 0$ .

$f'(x) = x^x [\ln(x) + 1]$  estamos trabajando con  $x > 0$ , la derivada primera se anula si y sólo si  $\ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = E^{-1} = \frac{1}{E} \approx 0,367879$ , como el signo de la derivada primera está determinado por el signo de  $\ln(x) + 1$ , i.e. Figura 7.2, dicha función es negativa en el intervalo  $(0, \frac{1}{e})$  y positiva en  $(\frac{1}{e}, +\infty)$ , por lo tanto  $(\frac{1}{e} \approx 0,367879, f(\frac{1}{e}) \approx 0,69220062755534635)$  es un mínimo local o relativo estricto y como  $f''(x) > 0$  en el dominio de definición real de la  $f(x)$  el mínimo en  $\frac{1}{e}$  es absoluto, pues la función es cóncava hacia arriba en  $(0, +\infty)$ .

$$f''(x) = x^x \left[ (\ln(x) + 1)^2 + \frac{1}{x} \right] > \forall x > 0.$$

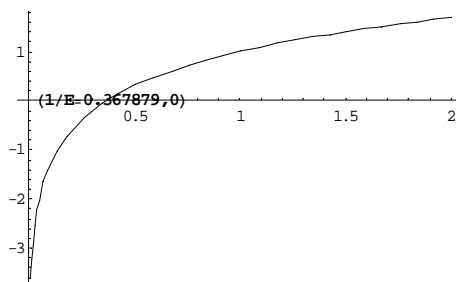


Figura 2.39: Signo de  $f'(x) = x^x [\ln(x) + 1]$ ,  $x > 0$ .

17. Proponemos la lectura en §9.3 del ejercicio resuelto:

Estudio de  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ , pp. 366-377.

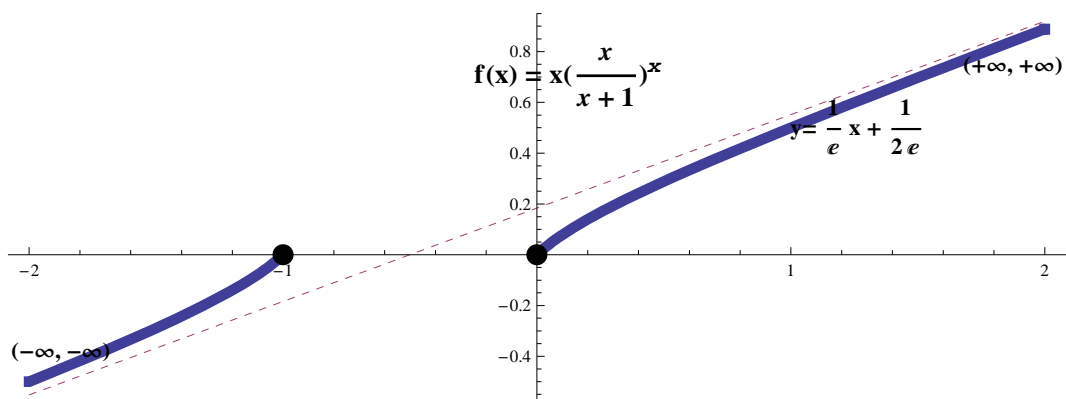


Figura 2.40:  $y = e^{-1}x + \frac{1}{2e}$ : Asíntota de  $f(x) = x \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

## 2.8. Trabajo Práctico N $\doteq$ VI: Antiderivación.

1. Defina “Antiderivada”.
2. Calcule las Antiderivadas de las siguientes funciones elementales:

$AntiDer(u^n);$	$AntiDer(u^0);$
$AntiDer(\frac{1}{\sqrt{u}});$	$AntiDer(\frac{1}{u});$
$AntiDer(a^u), a > 0;$	$AntiDer(e^u);$
$AntiDer(\text{sen } u);$	$AntiDer(\text{cos } u);$
$AntiDer(\text{sec}^2 u);$	$AntiDer(\text{cosec}^2 u);$
$AntiDer(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}});$	$AntiDer(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}});$
$AntiDer(\text{sh } u);$	$AntiDer(\text{ch } u);$
$AntiDer(\frac{1}{\text{sh}^2 u});$	$AntiDer(\frac{1}{\text{ch}^2 u});$
$AntiDer(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}});$	$AntiDer(\frac{1}{\sqrt{u^2-1}});$
$AntiDer(\frac{1}{1-u^2})$	$AntiDer(\text{sech}^2 u)$

3. Utilizando  $dG(t) = f[\alpha(t)]\alpha'(t)dt = f(x)dx$  - Método de Sustitución -, calcule:

$\int \cos 3x \, dx$	$\int \frac{dx}{(x+2)^4}$	$\int e^x \text{sen}(e^x) \, dx$
$\int \frac{\ln x}{x} \, dx$	$\int e^{x^2} x \, dx$	$\int \frac{x}{1-x^2} \, dx$
$\int \frac{dx}{4+x^2}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$	$\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \, dx;$
$\int \text{sen } 2x \, dx$	$\int \text{sh } 4x \, dx$	$\int \text{sec}^2 5x \, dx;$
$\int \text{tg } x \, dx$	$\int \text{cotg } x \, dx$	$\int \cos^5 x \, dx$
$\int \cos^2 x \, dx$	$\int \text{sen}^2 x \, dx$	$\int \text{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$
$\int \text{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$	$\int \frac{dx}{\text{sen } x \cos x}$	$\int \text{sen}^{127} x \, dx$

4. Integración por partes

$\int \ln x \, dx$	$\int x e^{ax} \, dx$	$\int \arctan x \, dx$	$\int x^n \text{sen } x \, dx$
$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$	$\int x \ln x \, dx$	$\int x^2 \cos x \, dx$	$\int e^{ax} \cos b x \, dx$

5. Método de las fracciones simples

$$\begin{array}{lll} \int \frac{0,5x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx & \int \frac{x^2 + 3x}{x^4 - x^2} dx & \int \frac{9x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx \\ \int \frac{x^2 - x + 4}{(x-1)^2(x-2)} dx & \int \frac{1}{1 + 9x^2} dx & \int \frac{1}{x^2 + 2x + 10} dx \\ \int \frac{x+2}{x^3 - 1} dx & \int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 3 \sin x + 2} dx & \int \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx \end{array}$$

### Determinar una antiderivada

Una curva, de ecuación  $y = f(x)$ , pasa por el punto  $(1, 1)$  y la recta tangente en tal punto es  $x + 12y = 13$ . Conociendo que  $f''(x) = x^2 - 1$ , determine la ecuación  $y = f(x)$  de la curva.

---

### Familia de curvas ortogonales

Determine las trayectorias ortogonales a cada una de las siguientes familias de curvas:

- $x^2 + y^2 = c^2$
  - $x^2 - y^2 = c$
  - $y^2 = 2x + c$
- 

**Velocidad de escape.** Ver resolución en §8.8, Ejemplo 8.8.7 la pág. 333.

Si  $V$  es un cuerpo de masa  $m$ , situado a una distancia  $s$  del centro de la tierra, la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la tierra sobre  $V$  se calcula (en forma simplificada) por la fórmula

$$F = -mg \frac{R^2}{s^2}.$$

donde  $R \approx 3960$  millas  $\approx 6336$  km es el radio medio de la tierra y  $g$  es la aceleración de la gravedad.

Compruebe que, si  $V$  está en la superficie terrestre, la velocidad inicial  $v_0$  que debe proveérsele (en la dirección vertical hacia el espacio) para que no regrese a la superficie, debe ser mayor que  $\sqrt{2gR}$ , e.d.  $v_0 > \sqrt{2gR}$ .

---

### Aplicación física

- Un plano  $P$  tiene un ángulo de inclinación  $\alpha$  con respecto al plano horizontal y un objeto se desliza sobre él, sin rozamiento, cayendo por acción de la gravedad.
  - a) Determine el desplazamiento en función del tiempo transcurrido desde el instante en que comenzó la caída.
  - b) Si el dato disponible es que el objeto recorrió 20 metros en 5 segundos, determine la inclinación  $\alpha$  del plano  $P$ .

Ver resolución en §8.8, Ejemplo 8.8.8 la pág. 335.

- Una pelota se deja caer de un dirigible situado a 640 pies de altura. Si en el momento en que se suelta la pelota el aparato está ascendiendo a 48 pie/seg, determine el tiempo que la pelota se mantiene en el aire y la velocidad con la que llega al suelo.

---

### Crecimiento y/o decrecimiento poblacionales. Resolución §11.1, pp. 410 -433.

Teniendo en cuenta que la velocidad de crecimiento de una población en un instante  $t$  depende del número de individuos de la especie en ese instante  $t$ , analice cada una de las siguientes situaciones

- i) La hipótesis más simple, referida a la variación del número de integrantes de la población, consiste en suponer que la velocidad de cambio en el número de individuos es proporcional a la cantidad actual de seres vivos, i.e.,(Figura 11.5)

$$\frac{dy}{dt} = r y \quad r > 0 \quad \text{ó} \quad r < 0.$$

- $i_1$ ) Encuentre, una antiderivada y la familia de antiderivadas.
  - $i_2$ ) Conjeture el comportamiento del modelo para  $r > 0$  y para  $r < 0$ .

- ii) La ecuación de crecimiento y/ó decrecimiento *logístico* es la siguiente:

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y \quad r > 0 \quad K > 0.$$

Este es usualmente un modelo más realista.

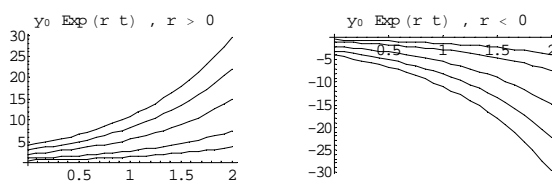


Figura 2.41: Crecimiento y decrecimiento exponencial.

- ii<sub>1</sub>) Encuentre una antiderivada, la familia de antiderivadas y represente gráficamente dicha familia (Figura 11.7).
- ii<sub>2</sub>) ¿Cómo piensa que evolucionará la población de acuerdo con este modelo ?

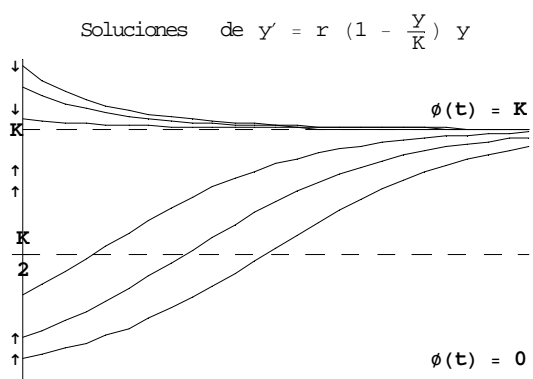


Figura 2.42: Crecimiento logístico  $y$  vs  $t$ .

- iii) Interprete el siguiente modelo, con los criterios usados para interpretar al anterior,

$$\frac{dy}{dt} = -r \left(1 - \frac{y}{T}\right) y :$$

Obtenga la familia de antiderivadas y bosqueje cualitativamente a la misma.

- iv) Modelo de crecimiento *logístico con umbral*

$$\frac{dy}{dt} = -r \left(r - \frac{y}{T}\right) \left(r - \frac{y}{K}\right) y, \quad r > 0 \quad K > 0 \quad 0 < T < K.$$

Obtenga la familia de antiderivadas y bosqueje cualitativamente las mismas. Compare estas últimas gráficas con las obtenidas en el inciso iii) y conjeture cómo será la evolución de la población de acuerdo a este modelo.

**Puntos de Bifurcación.** Ver Resolución §8.8, Ejemplo 8.8.1 en las pp. 327-333.

En ciertos problemas de la física algunas cantidades observables, tales como una velocidad, la forma de cierta onda, o el avance de una reacción química, dependen de un parámetro que describe el estado físico del problema. A medida que este parámetro se incrementa, suele alcanzar un valor crítico en el que la velocidad, o la forma de la onda o la concentración de cierto reactivo cambie su carácter. Sea la ecuación diferencial de Landau <sup>6</sup>, de primer orden a variables separables, a saber:

$$\frac{dx}{dt} = (R - R_c)x - ax^3. \quad (2.1)$$

Aquí  $a$  y  $R_c$  son constantes positivas, y  $R$  es un parámetro que puede tomar varios valores. Por ejemplo,  $R$  puede medir la cantidad de cierto reactivo químico y  $x$  puede medir el avance de la reacción química.

- Determine, si es posible, la o las soluciones  $x(t)$ .
- Si  $R < R_c$ , demuestre que existe solamente una solución de equilibrio  $x = 0$  y que ésta es asintóticamente estable.
- Si  $R > R_c$ , demuestre que existen tres soluciones de equilibrio  $x = 0$  y  $x = \pm\sqrt{\frac{R-R_c}{a}}$  y que la primera solución es inestable mientras que las otras dos son asintóticamente estables.
- Grafique en el plano  $(x, t)$  la solución o las soluciones  $x(t)$  y las soluciones de equilibrio para tres casos particulares tales que:  $R < R_c$ ,  $R > R_c$  y  $R = R_c$ .

Ayuda: El punto  $R = R_c$  se llama *punto de bifurcación*. Para  $R < R_c$  la solución tiende asintóticamente hacia la solución de equilibrio  $x = 0$ . Sin embargo, esta solución pierde su estabilidad a medida que  $R$  atraviesa el valor  $R_c$ , y para  $R > R_c$  la solución es asintóticamente estable a  $x = \sqrt{\frac{R-R_c}{a}}$  y  $x = -\sqrt{\frac{R-R_c}{a}}$ . Debido a la forma que las soluciones toman en el entorno de  $R_c$ , este tipo de problema es conocido como *bifurcación pitchfork*  $\pitchfork$ .

---

<sup>6</sup>L. D. Landau (1908-1968) was a Russian physicist who received the Nobel Prize in 1962 for his contributions to the understanding of condensed states, particularly liquid helium.



## 2.9. Trabajo Práctico N $\doteq$ VII: Aplicaciones de la Integral Definida.

- Determine las expresiones de las sumas inferiores  $s(f, P_n)$  y superiores  $S(f, P_n)$  de  $y = f(x) = x$  en  $[0, b]$  para particiones  $P_n = \{t_0, \dots, t_n\}$  en  $n$  subintervalos iguales y justifique el hecho que, para  $n$  suficientemente grande,  $s(f, P_n)$  y  $S(f, P_n)$  están próximos a  $\frac{b^2}{2}$  (Figura 8.9). Sugerencia: Ver §8, Definición 8.2.7, en la pág. 286.

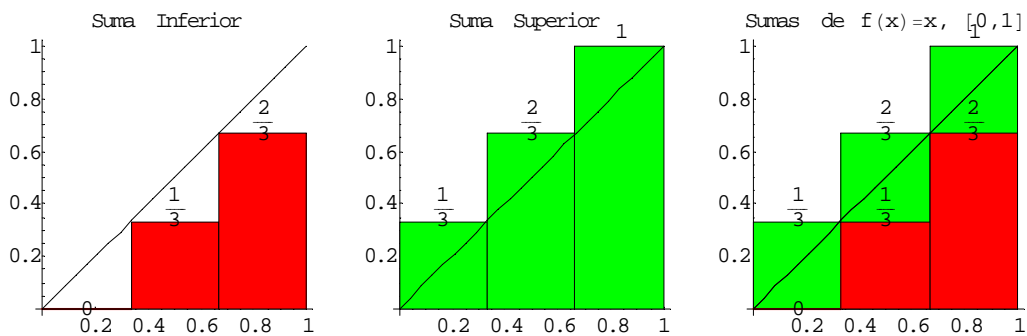


Figura 2.43:  $f(x) = x$ , en  $[0, 1]$ .

- Admitiendo una idea intuitiva del área de una figura plana, ver §8.3, pág. 289:

¿ Es posible conjeturar que las sumas inferiores y superiores calculadas en el ejercicio anterior determinarán el área del recinto limitado por la gráfica de  $f(x) = x$ , el eje  $x$  y las rectas verticales  $x = 0$ ,  $x = b$  ?

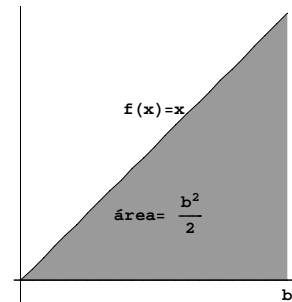


Figura 2.44:  $f(x) = x$ , en  $[0, b]$ .

- Determine las expresiones de las sumas inferiores  $s(f, P_n)$  y superiores  $S(f, P_n)$  de  $y = f(x) = x^2$  en  $[0, b]$  para particiones  $P_n = \{t_0, \dots, t_n\}$  en  $n$  subintervalos iguales y justifique que para  $n$  muy grande  $s(f, P_n)$  y  $S(f, P_n)$  están próximos a  $\frac{b^3}{3}$  (Figura 2.63).

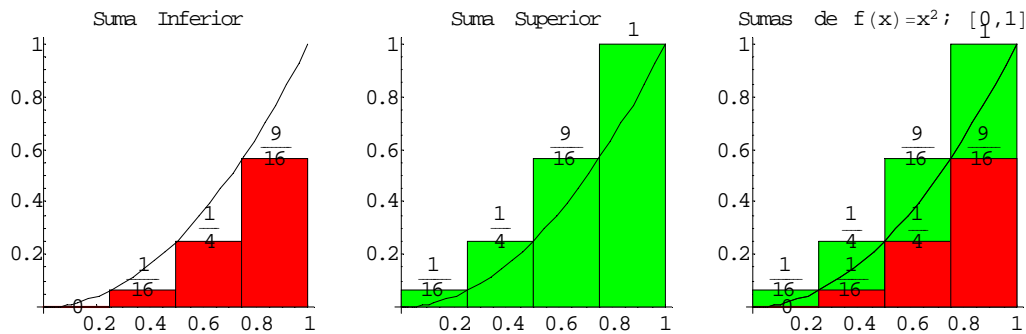


Figura 2.45: Partición regular,  $n = 4$ , del  $[0, 1]$ , para  $f(x) = x^2$ .

4. Admitiendo una idea intuitiva del área de una figura plana:

¿ Es posible conjeturar que las sumas inferiores y superiores calculadas en el ejercicio anterior determinarán el área del recinto limitado por la gráfica de  $f(x) = x^2$ , el eje  $x$  y las rectas verticales  $x = 0$ ,  $x = b$  ?

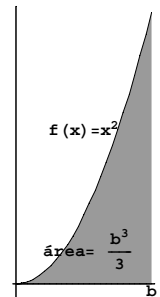


Figura 2.46:  $f(x) = x^2$ , en  $[0, b]$ .

5. Encuentre el área de la región limitada por

i)  $f(x) = \frac{x^2}{3} - 4$  y el eje  $x$  entre  $-2$  y  $3$ .

ii)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$  y el eje  $x$  entre  $x = -1$  y  $x = 2$ .

6. Dada la región plana  $y = x^2$  e  $y = \sqrt{x}$ .

Determine el *área* acotada entre las curvas:

i) Efectuando la integración respecto del eje  $x$ .

ii) Efectuando la integración respecto del eje  $y$ .

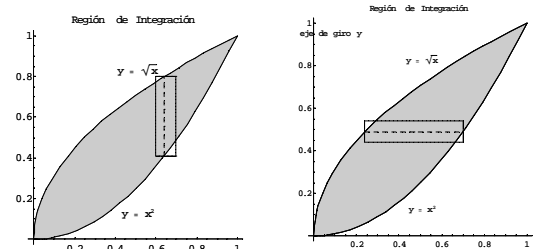
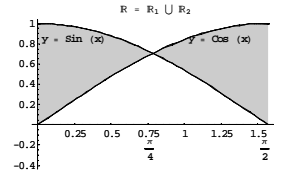


Figura 2.47: Representación de elementos diferenciales del área.

7. Calcule el área de la región acotada  $\mathfrak{R}$ , limitada por:

$$y = \sin x \text{ e } y = \cos x, \text{ para } x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

- Efectuando la integración respecto del eje  $x$ .
- Efectuando la integración respecto del eje  $y$ .



8. Encuentre el área encerrada por la astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

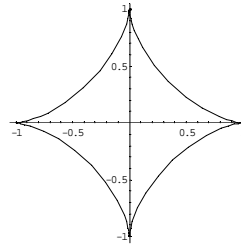


Figura 2.48: Astroide.

9. Determine el área limitada por la función  $f(x) = \text{Signo}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$  el eje  $x$  y las rectas verticales  $x = -1, x = 2$ .

10. Calcule el área comprendida entre las curvas  $f(x) = -x^2 + 8$   $g(x) = x - 4$  integrando:

- i) respecto del eje  $x$  y
- ii) respecto del eje  $y$ .

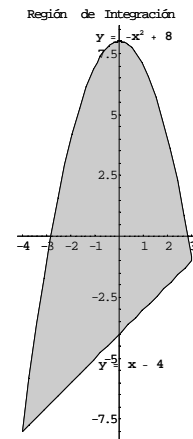


Figura 2.49: Recinto  $R(f, g, [a, b])$ .

11. (a) Considérese un objeto que se mueve a lo largo de una recta con velocidad  $v(t)$  en el instante  $t$ . ¿ Cuáles de las siguientes integrales definidas representa el “desplazamiento” del objeto y cuál la “distancia total” que el objeto

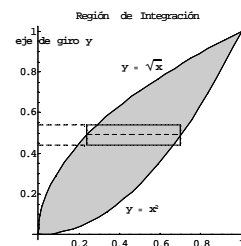
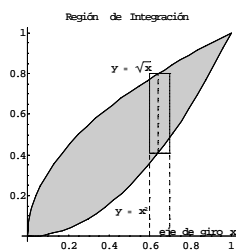
## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

---

recorrió durante  $a \leq t \leq b$ ?

$$\int_a^b v(t)dt \quad \int_a^b |v(t)|dt.$$

- (b) Empezando en  $s = 0$ , cuando  $t = 0$ , un objeto se mueve a lo largo de una recta de tal manera que su velocidad en el instante  $t$  es  $v(t) = 2t - 4$  cm/seg. ¿Cuánto tiempo le llevará llegar hasta  $s = 12$ ? ¿Recorre una distancia total de 12 cm ?
12. Encuentre el área de la región comprendida entre las curvas  $y = x^4$  e  $y = 2x - x^2$ . Idem para las curvas  $y^2 = 4x$  y la recta  $4x - 3y = 4$ .
13. Sea  $\mathfrak{R}$ , la región acotada por  $y = x^2$ , el eje  $x$  entre 0 y 1 y la recta  $x = 1$ . Calcule el volúmen de los sólidos que genera  $\mathfrak{R}$ , al girar alrededor del eje  $x$  y al girar alrededor del eje  $y$ .
14. Dada la región plana  $\mathfrak{R}$ , acotada por  $y = f(x) = x^2$  e  $y = f(x) = \sqrt{x}$  :
- (i) Calcule el *volúmen del sólido* que genera  $\mathfrak{R}$  al girar alrededor del eje  $x$ .
- (ii) Calcule el *volúmen del sólido* que genera  $\mathfrak{R}$  al girar alrededor del eje  $y$ .



- (iii) Calcule el *volúmen del sólido* que genera  $\mathfrak{R}$  al hacerla girar alrededor del eje  $y = -0.25$ .
- (iv) Calcule el *volúmen del sólido* que genera  $\mathfrak{R}$  al hacerla girar respecto del eje  $y = 1.25$ .

15. Dada la región plana  $\mathfrak{R}$ , acotada por las curvas  $y = f(x) = x^2$  e  $y = f(x) = \sqrt{x}$ :
- Calcule el *volumen del sólido* que genera  $\mathfrak{R}$  al hacerla girar alrededor del eje  $x = -1$ .
  - Calcule el *volumen del sólido* que genera  $\mathfrak{R}$  al hacerla girar alrededor del eje  $x = 1.5$ .

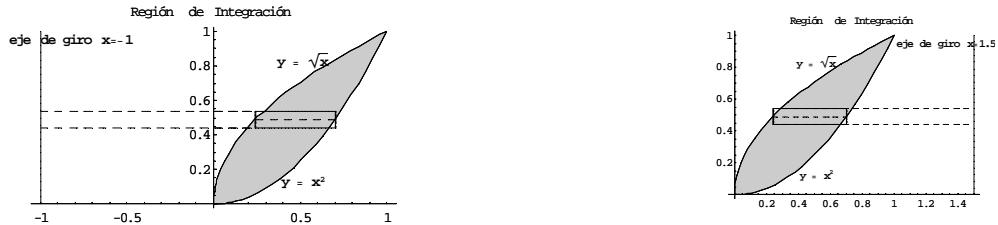
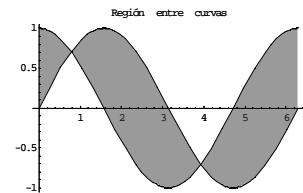


Figura 2.50: Ilustración de una sección del elemento de volumen.

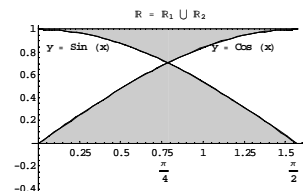


16. Las gráficas de  $y = \sin x$  e  $y = \cos x$  determinan una región  $\Omega$ , indicada en la figura.



Región  $\Omega$ .

- Calcule el área de  $\Omega$ .
  - Calcule el volumen que genera  $\Omega$  al rotar alrededor del  $y = -3$ .
17.  $\mathfrak{R}_1$  es la región plana limitada sólo por las curvas  $y = 0$ ,  $y = \cos x$  e  $y = \sin x$ , para  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  y  $\mathfrak{R}_2$  la limitada sólo por  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = 1$ , para  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Si llamamos  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ , calcule:



- El *área* de la región  $\mathfrak{R}$ .

- Efectuando la integración respecto del eje  $x$ .

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

---

- Efectuando la integración respecto del eje  $y$ .
- (ii) El *volumen del sólido* que genera la región  $\mathfrak{R}$  al girar alrededor del eje  $x = -3$ .
- (iii) El *volumen del sólido* que genera la región  $\mathfrak{R}$  al girar alrededor del eje  $y = 3$ .
- (iv) **Plantee** la integral definida que permite calcular el *volumen del sólido* que genera la región  $\mathfrak{R}$  al girar alrededor del eje  $x = 3$ .
- (v) **Plantee** la integral definida que permite calcular el *volumen del sólido* que genera la región  $\mathfrak{R}$  al girar alrededor del eje  $y = -3$ .
18. Determine el volumen de la esfera, del toro y del cono circular recto mediante la revolución de un recinto plano adecuado.

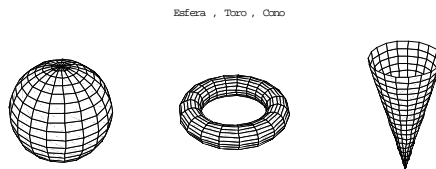


Figura 2.51: Esfera, Toro, Cono Recto.

19. Sea  $\Omega$  la región acotada limitada por:  $y = \sin(x)$  e  $y = |\cos(x)|$ , para  $x$  entre 0 y  $\pi$ .

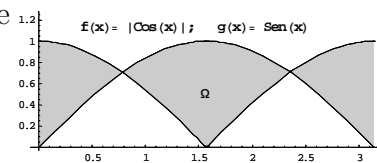


Figura 2.52: Recinto de integración  $\Omega$ .

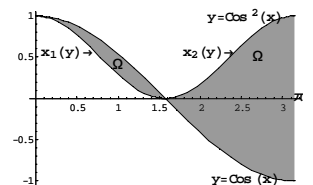
- (i) **Plantee** las integrales definidas que dan el área de la región  $\Omega$ ,
- Efectuando la integración respecto del eje  $x$ .
  - Efectuando la integración respecto del eje  $y$ .
- (ii) **Plantee** la integral definida que da el *volumen del sólido* que genera la región  $\Omega$  al girar alrededor del eje  $x = -1$ .
- (iii) **Plantee** la integral definida que da el *volumen del sólido* que genera la región  $\Omega$  al girar alrededor del eje  $y = 2$ .
- (iv) **Plantee** la integral definida que da el *volumen* del sólido cuya base es la región  $\Omega$  y las secciones perpendiculares al eje  $x$  son triángulos equiláteros.
- (v) **Plantee** las integrales definidas que le dan la longitud de la frontera de la región  $\Omega$ .

20. ★Sea  $\Omega$  la región acotada comprendida entre las curvas

$$\begin{cases} y = \cos^2(x) \\ y = \cos(x) \end{cases}, \quad x \in [0, \pi].$$

(i) **Plantee** las integrales definidas que dan el área de la región  $\Omega$ ,

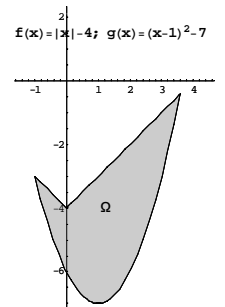
- Efectuando la integración respecto del eje  $x$ .
- Efectuando la integración respecto del eje  $y$ .



(ii) **Plantee** la integral definida que da el *volumen del sólido* que genera la región  $\Omega$  al girar alrededor del eje  $y = -3$ .

21. Sea  $\Omega$  la región acotada limitada por: (Ver pp. 577-578.)

$$\begin{cases} f(x) = |x| - 4 \\ g(x) = (x - 1)^2 - 7 \end{cases}$$

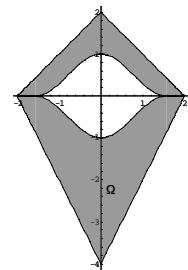


## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

---

- (i) **Plantee** las integrales definidas que dan el área de la región  $\Omega$ ,
- Efectuando la integración respecto del eje  $x$ .
  - Efectuando la integración respecto del eje  $y$ .
- (ii) **Plantee** la integral definida que da el *volumen del sólido* que genera la región  $\Omega$  al girar alrededor del eje  $x = 6$ .
- (iii) **Plantee** la integral definida que da el *volumen del sólido* que genera la región  $\Omega$  al girar alrededor del eje  $y = 1$ .
- (iv) **Plantee** la integral definida que da el *volumen* del sólido cuya base es la región  $\Omega$  y las secciones perpendiculares al eje  $y$  son semicírculos o pares de semicírculos.
- (v) **Plantee** las integrales definidas que le dan la longitud de la frontera de la región  $\Omega$ .
22. ★Sea  $\Omega$  la región dentro del romboide de semiejes 4 y 6 que se indica en la Figura, del que se quita la subregión que contiene al origen y está limitada por la curva  $y^2 - \cos^4(x) = 0$ ,  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

- i) **Plantee** las integrales que dan el área de  $\Omega$  pero integrando sobre el *eje y*.
- ii) **Plantee** las integrales que dan el volumen del sólido que genera  $\Omega$  al rotar alrededor de:
- ii*<sub>1</sub>) eje  $x = -2$ .
- ii*<sub>2</sub>) eje  $y = 2$ .



23. Sugerencia: ★ Ver los Ejemplos resueltos en §8.7, pág. 320.

### 24. Longitud de una curva plana

- a) Defina el concepto de *curva rectificable* y *curva no rectificable*.



- i) Intente el razonamiento geométrico que explique que debe entenderse por longitud de arco de una curva plana.
- ii) Intente un razonamiento geométrico que confirme que la curva  $y = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$  es una curva no rectificable en  $(-\delta, \delta)$ .
- b) Calcule la longitud de un arco de las siguientes curvas planas. Seleccione distintos intervalos e interprete gráfica y geoméricamente sus respectivas respuestas.
- $y = x; \quad x^2 = 2py; \quad y = chx; \quad y = x^{3/2}; \quad y = x^{1/3}.$
- c) Calcule la longitud total de la hipocicloide de 4 puntas (astroide). (Ver Figura 2.48, pág. 107).
- Generalice su respuesta para  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ .
- d) Calcule la longitud del arco comprendido en un cuadrante de la curva  $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ . Sugerencia:  $x(t) = a \cos^3(t), y(t) = b \cos^3(t)$ .
- i) Grafique esta curva plana para distintos valores de los parámetros  $a$  y  $b$ . (e.g.  $a = 1$  y  $b = 2$ ). ¿Qué relación encuentra entre esta curva plana con  $a = b = 1$  y la ecuación y gráfica de  $x^3 = y^2$ ?
- ii) Calcule la longitud del arco comprendido en un cuadrante de la curva  $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/n} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/n} = 1$  en términos de  $a$  y  $b$ .
- Sugerencia:  $x(t) = a \cos^n(t), y(t) = b \cos^n(t)$ .

## 25. Volúmenes de sólidos por Secciones.

- a) Un cuerpo tiene base circular de radio 1. Las secciones transversales, perpendiculares a la base, son triángulos equiláteros. Calcule el volumen del sólido.
- b) Calcule el volumen del cuerpo  $S$  descrito:
- a) S: Un cono circular recto con altura  $h$  y radio de la base  $r$ .
- b) S: Un tronco de un cono circular recto con altura  $h$  y radio de la base inferior  $R$  y radio de la base superior  $r$ .
- c) S: Un casquete, con altura  $h$ , de una esfera de radio  $r$ .
- d) S: Un tronco de una pirámide con base cuadrada de lado  $b$ , tapa cuadrada de lado  $a$  y altura  $h$ .

- c) Calcule el volumen de un sólido cuya base es un cuadrado de lado  $L$  y altura  $h$ .
- d) La base del sólido es una región elíptica cuyo límite es la curva  $9x^2 + 4y^2 = 36$ . Las secciones transversales, perpendiculares al eje  $x$ , son triángulos isósceles cuya hipotenusa está en la base.
- e) La base del sólido es la región parabólica  $\{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 1\}$ . Las regiones transversales perpendiculares al eje  $y$  son triángulos equiláteros.
- f) S tiene la misma base que el ejercicio anterior, pero las secciones transversales perpendiculares al eje  $y$  son cuadrados.
- g) Se corta una cuña de un cilindro circular de radio 4 mediante dos planos. Un plano es perpendicular al eje del cilindro y el otro lo intersecta formando un ángulo  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) en uno de los diámetros del cilindro. Calcule el volumen del cilindro.
- h) La base de S es la región triangular cuyos vértices están en  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ , y  $(0, 1)$ . La secciones transversales perpendiculares al eje  $x$  son semicírculos.

### 26. Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral. Ver §8, pág. 308.

- a) Enuncie el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para  $y = f(x)$  continua en  $[a, b]$ . Ver ejemplos en §15.3, pp. 575-577.
- 1) Interprete gráficamente dicho teorema para la situación particular en que  $y = f(x) \in C_{[a, b]}$ ,  $f(x) \geq 0$  y  $f(x) \not\equiv 0 \in [a, b]$ .
  - 2) Verifique e interprete gráficamente dicho teorema para las siguientes situaciones:  
 $f(x) = x, [-1, 1]$ ;  $f(x) = \pi, [-1, 1]$ ;  
 $f(x) = x^2, [-1, 1]$ ;  $f(x) = |x|, [-1, 1]$ .
  - 3) Verifique e interprete gráficamente dicho teorema en los siguientes casos:  
 $f(x) = \ln x, [1, 10]$ ;  $f(x) = 1 - \cos x, [0, \pi]$ ;  $f(x) = x^{2^x}, [0, 1]$ .
  - 4) Interprete gráficamente dicho teorema para  $f(x) = \ln x$  en  $[1, 10]$ .

b) Enuncie el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para  $y = f(x)$  acotada en  $[a, b]$  y con un número a lo sumo finito de discontinuidades de primera especie. [Ver ejemplos en §15.3, pp. 580-583.](#)

1) Verifique e interprete gráficamente dicho teorema para las siguientes situaciones:

$$f(x) = \text{Sign}(x), [-1, 1]; \quad f(x) = \lfloor x \rfloor, [-1, 1]; \quad f(x) = \lceil x \rceil, [-1, 1].$$

$$f(x) = \lfloor x \rfloor, [-3, 3]; \quad f(x) = \lceil x \rceil, [-3, 3]; \quad f(x) = [x], [-3, 3].$$

2) Interprete gráficamente y verifique el teorema para las siguientes situaciones:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor, [-3/2, 9/2]; \quad f(x) = \lceil x \rceil, [-3/2, 9/2];$$

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor, [-5/2, 9/2]; \quad f(x) = \lceil x \rceil - x, [-5/2, 9/2];$$

$$f(x) = x - \lceil x \rceil, [-5/2, 9/2]; \quad f(x) = \lfloor x \rfloor - x, [-5/2, 9/2].$$

## 27. Entorno teórico

a) Justifique de manera intuitiva como utilizaría el “concepto de la integral definida” para calcular el volumen de un sólido de revolución.

b) Justifique de manera intuitiva como utilizaría el “concepto de la integral definida” para calcular el volumen de un sólido definido por secciones.

c) Defina Integral de Cauchy.

d) ¿ Cuándo una función se dice integrable según Riemann ?

e) Sea  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ :

- ¿ Es  $F(x)$  continua ? En caso de una respuesta afirmativa: ¿Qué condiciones debe verificar  $y = f(x)$  a tal efecto ?

Justifique cada una de sus respuestas.

- ¿ Es posible calcular  $F'(x)$  ? En caso de ser afirmativa calcule  $F'(x)$ .

Justifique su respuesta.

f) Para  $y = f(x)$  continua en  $[a, b]$  justifique la validez de la “Regla de Barrow”.

g) Bajo qué condiciones son válidas, [Ver §8 pp. 308-309](#), las siguientes desigualdades:

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

---

- $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$  donde  $m$  y  $M$  son el mínimo y el máximo absoluto de  $y = f(x)$  en  $[a, b]$ . Justifique dicha desigualdad.
- $s(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S(b - a)$  donde  $s$  y  $S$  son el ínfimo y el supremo de  $y = f(x)$  en  $[a, b]$ . Justifique dicha desigualdad.

## 2.10. Trabajo Práctico N<sup>o</sup> VIII: Aplicaciones de la Fórmula de Taylor.

### Osculatriz - Kissing - Contacting

**Fórmula de Taylor** *Aplicaciones*: Contacto entre curvas. Ver §9, pp. 339-356.

Estudio general de máximos y mínimos.

Estudio general de concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

- a) Sea  $f(x) = \cos 2x$  y  $g(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$ , analice el contacto entre dichas curvas planas en  $x_0 = 0$ , Figura 2.53.

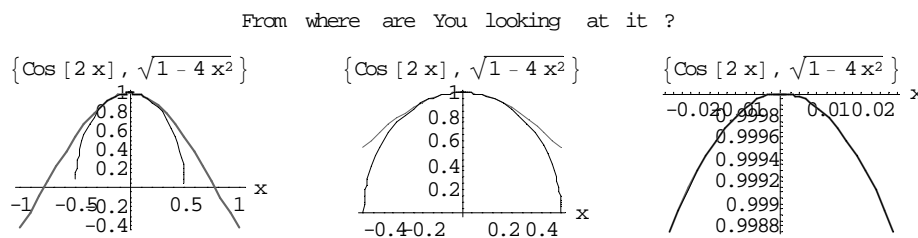


Figura 2.53:  $f(x) = \cos 2x$  y  $g(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$ ,  $x_0 = 0$ .

- Determine el orden de contacto de los gráficos de las funciones  $f(x) = x + 1 + \frac{2x + 1}{x^2}$  y  $g(x) = -x^2 + 5(x - 1) + \frac{6}{x}$ , en  $x_0 = 1$ .
- Sea  $f(x)$  el gráfico de una determinada función que admite derivadas de cualquier orden en algún entorno de  $x_0$ . Teniendo a su disposición las siguientes familias de curvas: *rectas*, *parábolas verticales* y *circunferencias*, determine para cada familia la curva osculatriz<sup>7</sup> ( curva de contacto más elevado ) al gráfico en  $(x_0, f(x_0))$ .
  - En el ejercicio anterior debió haber determinado, si  $f''(x_0) \neq 0$ , que la parábola vertical de contacto más elevado con  $y = f(x)$  en  $(x_0, f(x_0))$  tiene la siguiente

<sup>7</sup>Cita textual de Sadosky - Guber, *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral* §XII.9, pág. 438.

**Osculación** proviene del latín *osculari*, besar, de *osculum*, beso, propiamente boquita, boca pequeña, como diminutivo de *os*, boca.

expresión analítica

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

establezca la *veracidad* o *falsedad* de la siguiente proposición: *Cualquier parábola que pase por el punto  $(x_0, f(x_0))$  que no sea la osculatriz tiene a lo sumo, un contacto de primer orden y al menos un contacto de orden cero.*

4. Determine la parábola  $y = ax^2 + bx + c$  que posea el contacto de orden más elevado ( parábola osculatriz ) con la curva  $y = e^x$  en el punto  $P = (0, 1)$ . Determine la familia de parábolas verticales con contacto a lo sumo de orden uno con la curva  $y = e^x$  en el punto  $P = (0, 1)$ . Determine la familia de parábolas verticales con contacto de orden uno con la curva  $y = e^x$  en el punto  $P = (0, 1)$  . Determine la familia de parábolas verticales con contacto a lo sumo de orden cero con la curva  $y = e^x$  en el punto  $P = (0, 1)$ . Determine la familia de parábolas verticales con contacto de orden cero con la curva  $y = e^x$  en el punto  $P = (0, 1)$ .
5. Estudiada ya la aproximación lineal y algunas de sus consecuencias, consideremos ahora la *parábola osculatriz* .
  - a) Analice el contacto entre la curva  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  y su parábola osculatriz en el punto correspondiente a  $x = 0$  . Idem para la curva  $f(x) = \cos x$ , en el mismo punto.
  - b) Justifique la siguiente afirmación: *Si existe  $f'''(x_0)$  entonces la parábola osculatriz atraviesa a la curva en el punto de contacto  $(x_0, f(x_0))$ , a menos que tenga contacto superior por ser  $f'''(x_0) = 0$ .*
  - c) Obtenga la parábola osculatriz a la catenaria  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , en el punto correspondiente a  $x_0 = 0$ , que la aproxima para  $x$  en un entorno de  $x_0$ .
  - d) ¿ Qué ocurre si  $f'''(x_0) = 0$  ? Analice las situaciones  $f(x) = \sin x$  y de  $f(x) = \cos x$  en  $x_0 = 0$ .
6. Sea  $f(x) = (x^4 + 18x^3) \cos x e^{-x^2}$  verifique si su parábola osculatriz en  $x_0 = 1$  es  $p(x) = 19e^{-1} \cos 1 + (x - 1)^2(-93 \cdot 2^{-1}e^{-1} \cos 1 - 20 e^{-1} \sin 1) + (x - 1)(20 e^{-1} \cos 1 - 19 e^{-1} \sin 1)$  Figura 2.54.

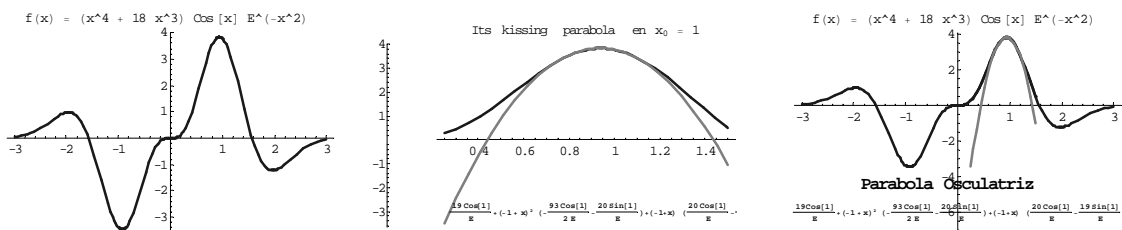


Figura 2.54: The kissing parábola at  $x_0 = 1$ .

7. Si  $f(x)$  admite derivada segunda en un entorno de  $x_0$ , determine el centro y el radio de la *circunferencia osculatriz* a la curva en el punto  $(x_0, f(x_0))$ .

- i) Determine la “*circunferencia osculatriz*” a  $f(x) = x^2$  en el punto  $(1, 1)$
- ii) ★ En su opinión, y en el caso general, ¿ Existe alguna diferencia en la utilidad de aproximar una función por la *parábola osculatriz* o bien por la *circunferencia osculatriz* ? Figura 2.55.

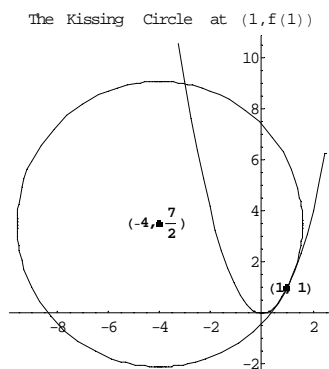


Figura 2.55: Circunferencia osculatriz a  $f(x) = x^2$  at  $x_0 = 1$ .

8. Halle los órdenes de contacto mutuo en  $x = 0$ , de las curvas:  $y = x$ ;  $y = \sin x$ ;  $y = x \cos x$ .
9. Determine los ordenes de contacto de las curvas  $x^2 + y^2 = y$ ,  $y = x^2$ , en sus puntos de intersección.
10. Determine el orden de contacto de c/u de los pares de funciones -  $\{f(x) = (\sin x)^2, g(x) = x^2 (\cos x)^{\frac{2}{3}}\}$ ,  $\{f(x) = \cos \pi x, g(x) = -1 + \frac{\pi^2(x-1)^2}{2}\}$ - de la Figura 2.56.

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

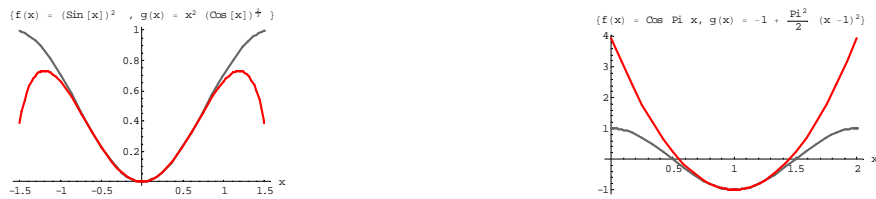


Figura 2.56: Contacto entre curvas, en  $x_0 = 0$  y en  $x_0 = 1$ .

11. Sea  $f(x)$ ,  $(n + 1)$ -veces derivable en un entorno de  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .
- Escriba el polinomio de Taylor de grado  $n$ ,  $P_n(x)$ , que aproxima a  $f(x)$  en el entorno mencionado.
  - Escriba el correspondiente término complementario  $T_n(x)$ , en una forma que le permita estimar el error que se comete al aproximar a  $f(x)$  por  $P_n(x)$  en  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .
12. Sea  $f(x) = e^x$  y  $P = (0, 1)$ .
- Aproxímela en  $\mathcal{E}(0, \delta)$  mediante el polinomio de grado 1 que tenga el contacto en  $P$  más elevado.
  - Idem mediante un polinomio de grado 2.
  - Idem mediante un polinomio de grado 3.
  - Generalize para  $n \in \mathbb{N}$ .
13. a) Considere la función  $f(x) = \sin x$  en un entorno de  $x_0$  y escriba la expresión de los polinomios de Taylor:  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$ ,  $P_3(x)$  y  $P_4(x)$ .
- (b) Analice los gráficos de la Figura 2.57 y determine: ¿Cuál corresponde a los polinomios de Taylor en el entorno de  $x_0 = 0$  ? y ¿Cuál corresponde a los desarrollados en un entorno de  $x_0 = 1$  ? En ambas figuras, están representados la función  $f(x) = \sin x$  y sus polinomios de Taylor  $P_n(x)$ , para  $n$  desde 1 hasta 7. ¿Por qué parecerían existir más curvas en la figura de la derecha ?
- d) Determine una cota superior del error cometido al aproximar  $\sin(0,02)$  mediante  $P_1(x)$ , mediante  $P_2(x)$ , mediante  $P_3(x)$  y mediante  $P_4(x)$ .
- e) Aproxime  $f(x) = \sin x$  por la fórmula de Taylor en un entorno de  $\frac{\pi}{6}$ .





Figura 2.57: ¿Cuál es la representación que corresponde a  $x_0 = 0$  y cuál a  $x_0 = 1$  ?

- f) Obtenga las tres primeras aproximaciones  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$  y  $P_3(x)$  de  $\sin(31^\circ)$ .
14. Determine el polinomio de Taylor que permite aproximar  $\ln(1,1)$  con un error menor que  $10^{-6}$ . Calcule el valor aproximado de  $\ln(1,1)$  resultante.
15. Aproxime el número real  $\sin(1)$  mediante un polinomio de Taylor de grado prefijado  $n = 4$  y estime el error.
16. i) Calcule un valor aproximado de  $e^{0,9}$  con error menor que 0,001 .  
 ii) Calcule  $\cos(63^\circ)$  usando el polinomio de Taylor con  $n$  lo suficientemente grande como para que  $|T_n(x)| \leq 0,0005$ .  
 iii) Pruebe que si  $x$  está en  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , el error de utilizar  $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$  es menor que  $5 \times 10^{-6}$  y por lo tanto esta fórmula es suficientemente adecuada para construir la tabla del seno con cinco decimales exactos.
17. Indique la aproximación de  $f(x) = a^x$  mediante la fórmula de Mac. Laurin, de orden  $n$ .
18. Aplique la Fórmula de Taylor para calcular el límite indeterminado:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x(1 - \cos 3x)}$ .
19. Sea  $f(x)$  tal que admite hasta la derivada de orden  $n$  en  $x_0$ . Use la fórmula de Taylor, en su expresión infinitesimal, para comprobar que en el punto  $A = (x_0, f(x_0))$  la curva tiene una inflexión o bien queda de un lado de la recta tangente en un entorno de  $x_0$ . Más aún, si la primera derivada que no se anula ( de orden superior a la primera ) es impar entonces hay inflexión, en tanto que presenta concavidad hacia las  $y$  positivas o negativas si el orden es par y el valor resulta positivo o negativo respectivamente.

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

---

20. Usando la fórmula Taylor en su expresión infinitesimal demuestre que la condición necesaria y suficiente para que la función  $y = f(x)$ , que admite derivadas sucesivas en  $x_0$ , tenga un extremo local en el punto crítico estacionario  $x_0$ , es que la primera derivada que no se anula en  $x_0$  sea de orden par. Si tal derivada no nula es positiva hay un mínimo en  $x_0$  y un máximo si es negativa.

21. Utilizando los ejercicios teóricos previos, efectúe el estudio de los máximos y mínimos relativos de:

i)  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x}$ .

ii) Si el desarrollo de Mac-Laurin de  $f(x)$ , es  $f(x) = c x^n + \dots$ .

iii) Discutir los máximos, mínimos y puntos de inflexión de  $f(x) = x^3 + p x + q$ .

iv) Estudio del comportamiento en  $x_0 = 0$  de las funciones:

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} - a;$$

$$g(x) = \cos 2x - e^{-2x^2}.$$

22. ★ *Resolución aproximada de ecuaciones.*

Dado el problema de determinar un cero de  $y = f(x)$ , i.e., hallar  $\tilde{x}$  tal que  $f(\tilde{x}) = 0$ , suponiendo válidas las hipótesis de la fórmula de Taylor en  $\mathcal{E}(\tilde{x}, \delta)$  y utilizando como expresión del término complementario para el  $P_1(x)$  el siguiente  $T_2(x) = \frac{1}{2!} f''(\xi)$  con  $\xi \in \mathcal{E}(\tilde{x}, \delta)$ .

a) Justifique e interprete geoméricamente la *Regla de Newton* para resolver la ecuación  $f(x) = 0$ .

b) ¿ Su respuesta está asociada a la convergencia de sucesiones ?

c) Se sabe que la menor raíz positiva  $x_r$  de la ecuación trascendente  $\tan x = x$ , está entre  $257^\circ 27' < x_{\text{raíz}} < 257^\circ 28'$ . Mejore la estimación de  $x_r$  usando la *Regla de Newton*. Ver §9.2, pp. 357-365.

## 2.11. Trabajo Práctico N $\doteq$ IX: Sucesiones.

1. Sea  $a_n = a_{n-1} + 3$   $n \geq 2, a_1 = 1$ .
  - (a) Halle los cinco primeros términos de esta sucesión.
  - (b) Determine una forma explícita del término general  $a_n$ .
  - (c) Explícite un procedimiento iterativo que genere los valores  $a_n$  en las siguientes figuras.

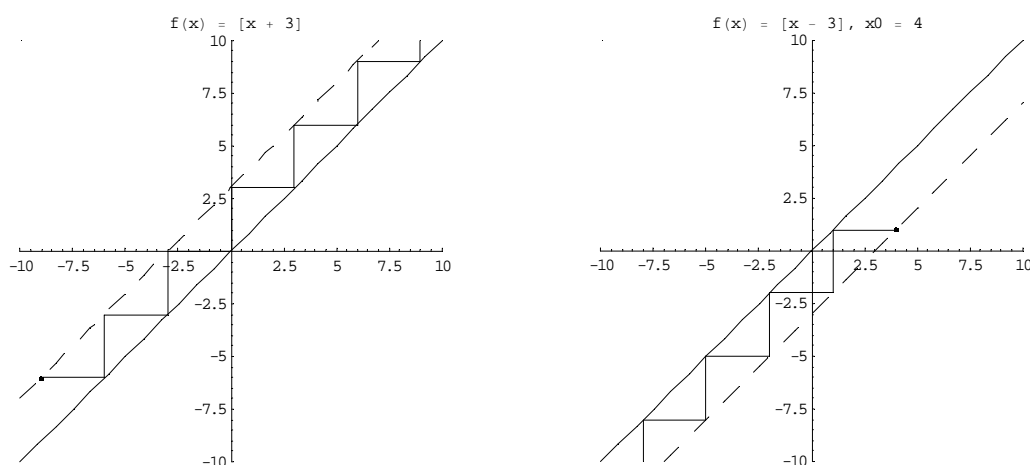


Figura 2.58:  $a_{n+1} = a_n + 3$ ;  $a_{n+1} = a_n - 3$ .

- (d) Halle  $\sum_{n=2}^{10} a_n$ , si  $a_n$  es el término general definido en 2 (a).
2.
  - i) Pruebe que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$  si  $|r| < 1$ .
  - ii) Pruebe que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = \infty$  si  $|r| > 1$ .
3. Estudie la convergencia de las siguientes progresiones geométricas (sucesiones):
 
$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}; \quad a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(-1)^n}{2^n};$$

$$a_n = 2^n; \quad a_n = (-2)^n.$$

Las cuatro gráficas siguientes describen procesos iterativos que se pueden asociar a c/u de las sucesiones anteriores. Analice la situación.

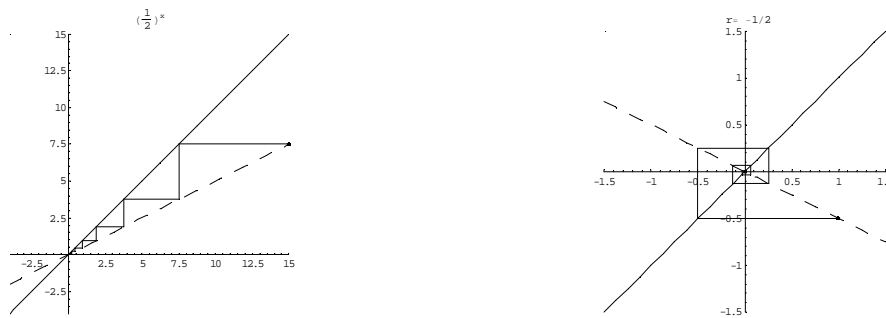


Figura 2.59: Sucesiones:  $a_n = 0,5^n$ ;  $a_n = (-0,5)^n$ .

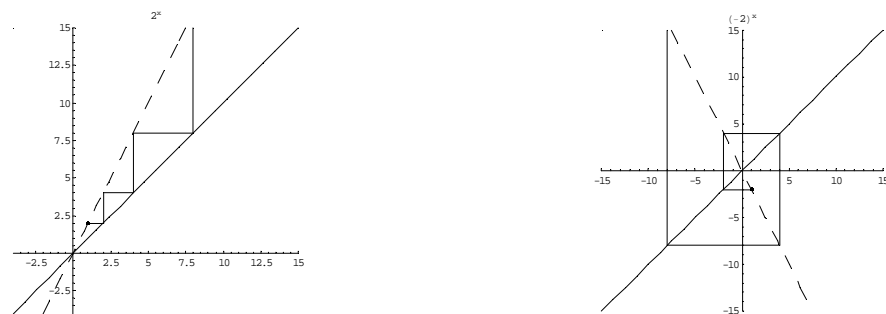


Figura 2.60: Sucesiones:  $a_n = 2^n$ ;  $a_n = (-2)^n$ .

4. (a) Generalice lo hecho en el Ejercicio N<sup>o</sup> 4 para  $a_1 = b \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ .

(b) Determine la forma explícita del término  $a_n$  de 5(a).

(c) Calcule  $\sum_{n=1}^{99} \left(\frac{1}{3}\right)^n$  ;  $\sum_{n=11}^{57} (2)^n$  ;  $\sum_{n=3}^7 (5)^n - 3 \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ .

5. El segmento  $\overline{AB}$  de longitud  $a$ , está dividido en  $n$  partes iguales. Sobre cada una de ellas, tomándola como base, se ha construido un triángulo isósceles siendo los ángulos de la base  $45^\circ$ . Determine una fórmula para obtener la longitud de la línea quebrada en función de  $n$ .

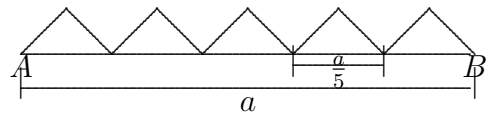


Figura 2.61: Representación del caso  $n = a/5$ .

6. La representación decimal de un número  $x = 0, d_1 d_2 d_3 \dots$  (en la cual cada término  $d_i$  es uno de los dígitos  $0, 1, 2, \dots, 9$ ) significa

$$0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \dots \quad (*)$$

- (a) Si el número  $x$  es tal que  $d_i = d \neq 0 \forall i$ , determine la progresión geométrica cuyos términos son los sumandos de la serie cuya suma es el número  $x$ .
- (b) Use (\*) para obtener la serie que corresponde a la representación decimal de un número de la forma:  $\pm n, d_1 d_2 \dots d_i \dots$

7. Dado un cuadrado de lado  $1 m$  se hacen  $n$  cortes como se indican en la Figura 2.62 para  $n = 1, n = 2$  y  $n = 3$ . Calcule el área eliminada  $A_n$ , para cada  $n$  y el valor al que tiende  $A_n$  cuando  $n$  crece indefinidamente. ¿A partir de qué valor de  $n$  el área eliminada será mayor que  $0,45 m^2$  ?

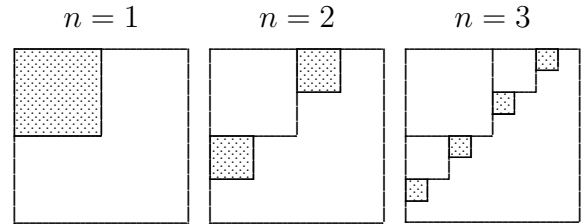


Figura 2.62: Cuadrados Eliminados.

8. Considere el arco de parábola  $y = x^2, x \in [0, 1]$ . Dividiendo el segmento  $[0, 1]$  en  $n$  partes iguales, construya:

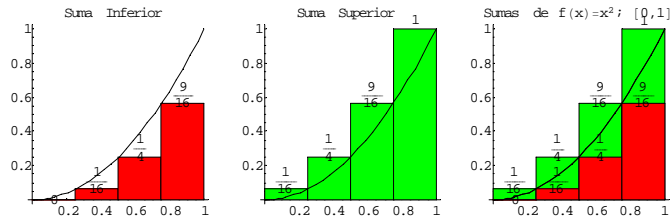


Figura 2.63: Partición en cuatro partes iguales del  $[0, 1]$ , para  $f(x) = x^2$ .

- i) los rectángulos inscritos cuya base sea el segmento  $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$  y la altura respectiva  $\left(\frac{k}{n}\right)^2$ , con  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ;
- ii) los rectángulos circunscritos cuya base sea el segmento  $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$  y la correspondiente altura  $\left(\frac{k+1}{n}\right)^2$ , con  $k = 1, \dots, n$ .

Si simbolizamos por  $s_n$  la suma de las áreas de los rectángulos inscritos del inciso i) y por  $S_n$  la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos del inciso ii) determine la expresión de cada una de ellas en función de  $n$ .

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

9. Sea  $x_0$  un número real cualquiera. Usando la calculadora evalúe sucesivamente:

(a)  $\{x_0, \text{sen}(x_0), \text{sen}(\text{sen}(x_0)), \text{sen}(\text{sen}(\text{sen}(x_0))), \text{sen}(\text{sen}(\text{sen}(\text{sen}(x_0))))\dots\}$ .

(b)  $\{x_0, \text{cos}(x_0), \text{cos}(\text{cos}(x_0)), \text{cos}(\text{cos}(\text{cos}(x_0))), \text{cos}(\text{cos}(\text{cos}(\text{cos}(x_0))))\dots\}$ .

Analice ambos comportamientos dinámicos mediante las representaciones de la Figura 2.64.

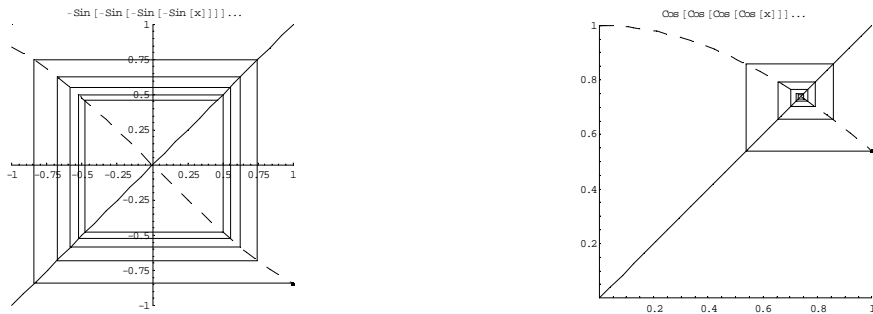


Figura 2.64: Procesos iterativos  $\text{sen}(\text{sen}(\text{sen}(\text{sen}(x_0))))\dots$  y  $\text{cos}(\text{cos}(\text{cos}(\text{cos}(x_0))))\dots$ .

10. Sea  $f(x) = \sqrt{x}$ . Analice el comportamiento de los dos procesos iterativos que resultan al evaluar  $\sqrt{x_0}, \sqrt{\sqrt{x_0}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{x_0}}}, \dots$  primero para  $x_0 = 2$ , luego para  $x_0 = \frac{1}{3}$  y finalmente para  $x_0 = 0.0001$ . (Ver Figura 2.65).

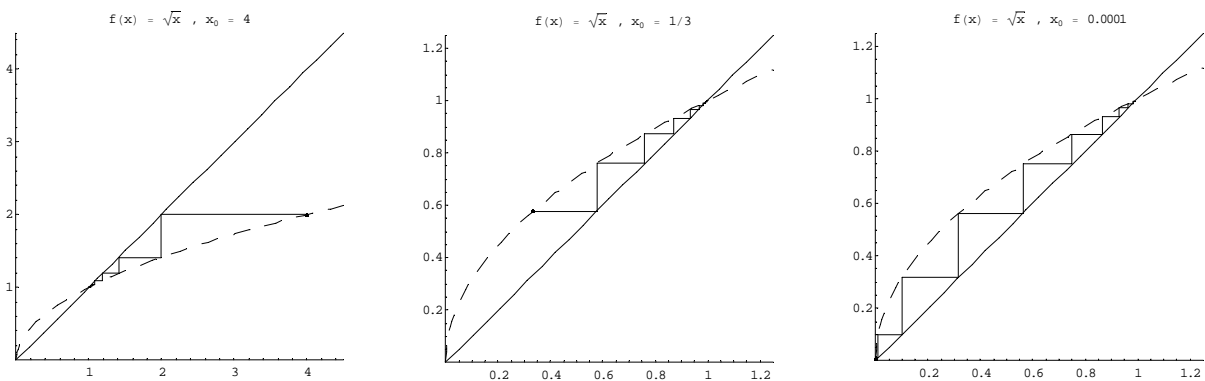
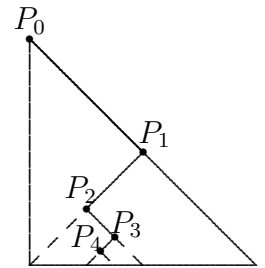


Figura 2.65: Procesos iterativos de  $f(x) = \sqrt{x}$  para  $\neq$  valores de  $x_0$ .

11. Dado un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden  $l$  m, sea  $l_n$  la longitud de la línea quebrada formada por los segmentos  $\overline{P_0P_1}$ ,  $\overline{P_1P_2}$ ,  $\overline{P_2P_3}$ ,  $\dots$ ,  $\overline{P_{n-1}P_n}$  como se indica en la Figura 2.66.



- i) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n$
- ii) ¿ Para qué valores de  $n$  es  $l_n > 1,4$  ?

Figura 2.66: Línea quebrada.

12. Modelamiento de dinámicas discretas:

- a) **Interés Compuesto.** Ver resolución en el Ejemplo 12.0.27, pág. 476.

*Quando se coloca un capital  $C$  “a interés ” se debe especificar la cantidad de dinero  $I$  que se pagará en calidad de interés, por cada 100 pesos del capital -  $I\%$ - y por unidad de tiempo, que también se debe establecer junto con el interés.*

*Las unidades de tiempo más usuales son días, semanas, meses, etc.*

*Se estila definir la tasa  $i = \frac{I}{100}$ .*

*Se dice que un capital  $C$  se coloca a interés compuesto del  $I\%$  en la unidad de tiempo (días, meses, etc) cuando el interés que produce el capital cada vez que transcurre una unidad de tiempo, no se retira sino que se incorpora al capital incrementándolo.*

*Por ejemplo si el capital inicial  $C$  se coloca al  $I\%$  de interés mensual, al cabo de un mes el capital será  $C + \frac{I.C}{100} = C + iC = C(1 + i)$ .*

- (a)<sub>1</sub> i) Un ahorrista coloca, el día 1/1/2002, \$ 1000 a interés compuesto del 10% mensual. Obtenga una fórmula que le permita conocer la cantidad de dinero que posee el ahorrista al cabo de  $t$  meses:
  - ii) Analizando la variación del capital de manera iterativa es decir, cómo varía al cabo del primer mes, al cabo del segundo, etc. (Dinámica Causa - Efecto),
  - iii) Obtenga una expresión explícita en términos del número  $t$  de meses transcurridos desde el momento en que se colocó el capital inicial de \$1000. (Dinámica Teleológica),

- iv) Generalice la expresión obtenida en el inciso anterior para el caso de un capital inicial  $C_0$  cualquiera, colocado a un interés compuesto del  $I\%$  por unidad de tiempo o período de capitalización  $\Delta$ .

( Respuesta:  $C_n = C_0 (1 + i)^n$  ).

*Ayuda:* Necesitará la igualdad  $(1+i)^n + (1+i)^n i = (1+i)^{n+1}$ , válida  $\forall n \in \mathbb{N}$ , y que se demuestra fácilmente sacando factor común  $(1+i)^n$  en el primer miembro.

- (a)<sub>2</sub> i) Si  $t$  es el número de años en que se invierten  $C_0$  pesos a una tasa de interés del  $I\%$  anual, compuesto  $m$  veces por año; interprete el significado de la expresión  $C_n = C_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}$ .
- ii) Determine el valor presente  $-C_0-$  de 1000 \$, que se recibirán a los 3 años a partir de ahora, si el dinero se invierte a una tasa anual del 12% compuesto semestralmente. (Valor presente = Capital inicial).
- iii) Utilizar cualquiera de las siguientes definiciones (equivalentes) del número “ $e$ ”  $\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$  ó  $\lim_{z \rightarrow 0} (1+z)^{\frac{1}{z}}$ , para justificar la expresión del interés “compuesto continuo”  $C = C_0 e^{it}$ .

*Observación:* Se dice que el capital se coloca a interés compuesto continuo cuando el interés incrementa continuamente el capital. Piense que tal situación se puede obtener haciendo tender a cero el período de capitalización.

- iv) ¿Cuál es el valor presente de 1000 \$ pagaderos en 3 años a partir de ahora si el dinero puede invertirse a una tasa de interés del 12% compuesto continuamente ?

- b) **Dinámica inicial de una epidemia.** Ver resolución en el Ejemplo 12.0.28, desde la pág. 478 hasta la pág. 480.

$N$  = población total.

$I_n$  = número de personas que tienen la enfermedad en el día  $n$ .

$F_n$  = número de personas que contrajeron la enfermedad el día  $n$ .

$C_n$  = número de personas que sanaron el día  $n$ .



Luego  $I_{n+1} = I_n + F_{n+1} - C_{n+1}$ , si  $F_{n+1} = a I_n (N - I_n)$  y  $C_{n+1} = b I_n$ ,  $a$  y  $b$  son constantes.

- i) Obtenga  $I_{n+1} = f(I_n)$ .
- ii) Simplifique la expresión de  $I_{n+1}$  obtenida en i) considerando  $I_n \lll N$ .
  - ii<sub>1</sub>) Indique en ii) la razón de la sucesión geométrica.
  - ii<sub>2</sub>) Obtenga una expresión explícita.
  - ii<sub>3</sub>) Determine de acuerdo con este modelo, en qué casos:
    - a) la epidemia se extiende.
    - b) la epidemia es controlable.
    - c) la epidemia es estacionaria.
- iii) Suponiendo que el modelo dinámico no simplificado representa una epidemia controlable, calcule el número límite de personas infectables.

13. Se pueden generar aproximaciones a  $\sqrt{N}$  con la sucesión definida recurrentemente

por:  $x_1 = \frac{N}{2}$ ,  $x_{k+1} = \frac{1}{2} \left( x_k + \frac{N}{x_k} \right)$ . [Ver resolución en el Ejemplo 12.0.29, pág. 480.](#)

a. Calcule  $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ , para  $N = 10$ .

b. Suponiendo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ , demuestre que  $L = \sqrt{N}$ .

14. Calcule los límites de las sucesiones:

$$\left\{ \frac{2n}{2n-1} \right\}, \left\{ \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n} \right\}, \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\}, \{1 + (-1)^n\}, \left\{ \frac{(n-1)(n+2)(2n+3)}{n^3} \right\},$$

$$\left\{ \frac{2n+1}{1-3n} \right\}, \{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \}, \{ 2^{-n} \sin n \}, \{ \cos n\pi \}, \left\{ \frac{\sin \left( n \frac{\pi}{2} \right)}{n} \right\}.$$

15. Indique para que valores de  $n$  es  $\frac{1}{n^2} < \epsilon$ , para  $\epsilon = 0,1$ ,  $\epsilon = 0,01$ ,  $\epsilon = 10^{-5}$ .

16. Sea  $\{\alpha_n\}$  una sucesión de números reales, establezca la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \ll$  cualquiera que sean  $A < \alpha$  y  $B > \alpha$  existen  $n_A, n_B \in \mathbb{N}$  tales que de  $n_A$  en adelante se conserva  $\alpha_n$  superior a  $A$  y de  $n_B$  en adelante se conserva  $\alpha_n$  inferior a  $B \gg$ .

17. Demuestre las siguientes propiedades de sucesiones convergentes:

- Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente entonces su límite es único.
- Toda sucesión convergente es acotada.
- Toda sucesión comprendida entre otras dos que tienen igual límite, tiene ese mismo límite, i.e.,

Si  $\alpha_n < \gamma_n < \beta_n, \forall n$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \alpha$  entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \alpha$ .

18. **Definición 2.11.1** El número irracional  $e$  puede ser definido por sucesiones que determinan los extremos de intervalos encajados (2.2).

El número  $e = 2,71828183 \dots$  está definido por la sucesión de intervalos encajados:

$$\left\{ \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right] \right\}_{n \in \mathbb{N}}. \quad (2.2)$$

Calcule utilizando la definición previa los límites de las siguientes sucesiones:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n; & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n; & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}; \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n; & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{2n-2}\right)^n; & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-5}{2n+2}\right)^{-n}. \end{aligned}$$

19. **Criterio de convergencia de Cauchy:** La condición necesaria y suficiente para que una sucesión  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ , de números reales tenga límite finito, es que para cada número positivo  $\epsilon$  corresponda un valor  $\nu$  de  $n$ , tal, que todas las diferencias  $\alpha_n - \alpha_{n+p}$ , ( $n > \nu, p > 0$ ), entre términos posteriores a  $\alpha_\nu$  se conserven en valor absoluto inferiores a  $\epsilon$ .

**Observación 2.11.2** La importancia de este criterio general radica en el hecho de que nos permite asegurar el carácter convergente de una sucesión, aun sin conocer el valor del límite.

**Ejemplo 2.11.3** Usando el Criterio de convergencia de Cauchy para caracterizar sucesiones convergentes en  $\mathbb{R}$ , demuestre que: la sucesión de sumas parciales formada a partir de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$  no es convergente.

La diferencia

$$S_{n^2} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad (*)$$

tiene  $n^2 - n$  sumandos y como  $n + j < n^2$ ,  $1 \leq j < n^2 - n$  es  $\frac{1}{n+j} > \frac{1}{n^2}$ , luego

$$S_{n^2} - S_n > \frac{n^2 - n}{n^2} \quad (**)$$

entonces  $S_{n^2} - S_n$  no puede hacerse tan pequeño como se quiera a medida que  $n$  crece, ya que la expresión a la derecha de (\*\*) tiende a 1 para  $n$  suficientemente grande.

## 20. Sucesiones Monótonas.

i) Sucesiones monótonas crecientes y acotadas superiormente

Si

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots, \quad (2.3)$$

$$a_n \leq A, \quad \forall n, \quad (2.4)$$

y

$$\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\} \leq A. \quad (2.5)$$

Entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ .

*Demostración.* Dado  $\epsilon > 0$  arbitrario,  $\alpha - \epsilon$  no puede ser cota superior de  $\{a_n\}$  pues  $\alpha - \epsilon < \alpha$  y  $\alpha$  es la menor de las cotas superiores, por definición de supremo;  $\therefore \exists n_0$  tal que  $\alpha - \epsilon < a_{n_0} \leq \alpha$ .  $\therefore \forall n > n_0$  es  $a_{n_0} \leq a_n$ .  $\therefore \alpha - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \epsilon \quad \forall n > n_0$ , es decir  $\forall n > n_0$  es  $\alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon$ .

ii) Sucesiones monótonas decrecientes acotadas inferiormente.

**Ejercicio 2.11.4** *Enuncie y demuestre la propiedad correspondiente a i) para sucesiones decrecientes.*

**Ejercicio 2.11.5** *Use los incisos i) y/o ii) para demostrar que:*

i<sub>1</sub>) *Si  $\{\alpha_n\}$  y  $\{\beta_n\}$  son dos sucesiones de números no negativos tales que  $\alpha_n \leq \beta_n$ ,  $\forall n$  y  $S_n^{\beta_k} = \sum_{k=1}^n \beta_k$  verifica que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{\beta_k} = S_\beta$ , entonces existe  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{\alpha_k} =$*

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

---

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k$  y es menor o igual que  $S_\beta$ .

$i_2)$  Si  $\{\alpha_n\}$  y  $\{\beta_n\}$  son dos sucesiones de números no negativos tales que  $\alpha_n \geq \beta_n$ ,  $\forall n$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{\beta_k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \beta_k = +\infty$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{\alpha_k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k = +\infty$ .

## 2.12. Trabajo Práctico N $\doteq$ X. Series.

### 1. Series numéricas

Dada una sucesión  $\{a_n\}$ , i.e.  $\{a_n\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$  se llama **serie** a la expresión:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \quad (2.6)$$

**Suma de la serie**, y la notaremos con **S**, si existe, es el límite de la sucesión de sumas parciales  $S_n = \sum_{n=0}^n a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n). \quad (2.7)$$

Si este límite es finito la *serie* se llama *convergente* y tiene suma; si es infinito se llama *divergente* y si  $S_n$  no tiene límite la *serie* se llama *oscilante*.

**Ejemplo 2.12.1** Sea la serie  $\frac{1}{1,2} + \frac{1}{2,3} + \frac{1}{3,4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$ , determine si su suma parcial tiene límite finito. En otras palabras, determine si esta serie es *convergente*.

La suma parcial  $S_n$  en este caso

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1,2} + \frac{1}{2,3} + \frac{1}{3,4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Calculando el límite de esta expresión cuando  $n \rightarrow \infty$ , resulta

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1.$$

La serie es convergente y su suma es 1.

### 2. Serie geométrica

Es aquella en la cual cada término es igual al anterior multiplicado por un *factor*

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

---

constante llamado *razón* de la serie.

En particular si el primer término es 1 y la razón es  $q$  resulta la serie:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n. \quad (2.8)$$

Para estudiar en que casos la serie geométrica (2.8) converge y en cuales diverge, formemos la suma de los  $(n + 1)$  primeros términos

$$S_n = \sum_{n=0}^n q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n. \quad (2.9)$$

Por tratarse de una *progresión geométrica*, para  $q \neq 1$ ,

$$q S_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1}.$$

$$S_n - q S_n = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

como  $q \neq 1$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (2.10)$$

$$S_n = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q}$$

En tanto  $-1 < q < 1$ , es decir  $|q| < 1$ ,  $q^{n+1}$  tiende a 0 y por consiguiente el segundo término tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$  por lo que:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \quad \text{si} \quad |q| < 1. \quad (2.11)$$

Por lo tanto la *serie convergente* (2.8) es *convergente* si  $|q| < 1$  y su suma es igual al primer término dividido por 1 menos la razón.

Si  $q = 1$ , la expresión anterior de  $S_n$ , (2.10) no puede emplearse, pero siendo todos los términos iguales a 1 resulta  $S_n = \sum_{n=0}^{n-1} 1 = 1 + \underbrace{1 + \dots + 1}_{n-1} = n$ , y  $S_n \rightarrow +\infty$ , puesto que en este caso  $q = 1$ , la sucesión de sumas parciales constituye la sucesión de término general  $S_n = n$ , claramente se trata de una sucesión divergente, i.e.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , por lo tanto la serie es divergente.

Si  $q = -1$ ,  $S_n$ , (2.10), vale 1 o 0 según  $n$  sea par o impar, i.e.,  $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , una

expresión posible para el término general de la sucesión de sumas parciales de (2.8) cuando  $q = -1$  es  $S_n = \frac{1-(-1)^{n-1}}{2}$  por lo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-(-1)^{n-1}}{2}$  es oscilante, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-(-1)^{n-1}}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ par} \\ 0 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}, \text{ es decir la sucesión de su-}$$

mas parciales, es un sucesión oscilante, lo que implica la no existencia de suma para la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ , en este caso estudiado de la serie geométrica (2.8), es divergente.

Si  $q > 1$ , evidentemente es  $S_n > n$  y cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $S_n \rightarrow \infty$ ,  $\therefore$  la serie es divergente. Otra manera de justificar que la sucesión de sumas parciales de (2.8) en los casos en que  $q > 1$  no tiene suma es utilizando la expresión del término n-ésimo de la misma dado por la ecuación (2.10) entonces al calcular el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{q^{n+1}}^{q>1}}{\underbrace{1-q}_{<0}}}_{-\infty} = +\infty$$

indudablemente, se confirma que la serie (2.8), para los caos en que  $q > 1$  no tiene suma, es decir no son convergentes.

Si  $q < -1$ , en (2.10),  $q^{n+1} \rightarrow +\infty$  si  $n$  es par y  $q^{n+1} \rightarrow -\infty$  si  $n$  es impar, por lo tanto no tiene suma finita la serie (2.8), para los caos en que  $q < -1$  situaciones en los que las respectivas series geométricas resulta divergentes por carecer de límite único finito el término general de sus sucesiones de sumas parciales.

La generalización de la discusión anterior para las series geométricas (2.8):

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n. \quad (2.12)$$

se resume a continuación:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} \text{si } |q| < 1 & \text{es } S = \frac{a}{1-q} \\ \text{si } |q| \geq 1 & \text{es divergente} \end{cases}. \quad (2.13)$$

**Observación 2.12.2** *Moraleja: Sumar finito siempre es posible*, más aún en nuestros días teniendo en cuenta la potencialidad de los hardware's disponibles en conjunción con las habilidades de los expertos en programación y manejos de software's.

▪ 
$$\sum_{n=0}^{(10000000000000)10^{32}} a_n.$$

Por tratarse de una suma finita, la respuesta será afirmativa, existe un real  $S$ ,

tal que 
$$\sum_{n=0}^{(10000000000000)10^{32}} a_n = S.$$

▪ 
$$\sum_{n=(10000000000000)10^{32}}^{+\infty} a_n.$$

Aquí, debemos determinar primero, si la serie, una suma infinita de números reales, es convergente, es decir si podemos afirmar que existe y es finito el límite del término general de la sucesión de sumas parciales  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , o en su defecto cuando no sea posible explicitar la expresión general para la sucesión de sumas parciales  $S_n = \sum_{n_0}^n a_n$ , se deberá recurrir a los “Criterios para la convergencia” que trataremos posteriormente, pp. 143-147, previamente de haber testeado la “Condición necesaria para la convergencia” en la pág. 139.

En el caso de las series geométricas, todo es muy sencillo y bello, pues es posible conocer la expresión para el término general de la sucesión de sumas parciales y trabajando con el límite sobre su expresión es sencillo deducir en caso de convergencia el valor de la suma. Como queda evidenciado aún con mayor claridad por las consideraciones que se formulan a continuación.

$$q^{n_0} + q^{n_0+1} + q^{n_0+2} + \dots + q^{n_0+n} + \dots = \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n. \quad (2.14)$$

$$\tilde{S}_n = q^{n_0} + q^{n_0+1} + q^{n_0+2} + \dots + q^{n_0+n-1} + q^{n_0+n}.$$

$$\tilde{S}_n = \sum_{n=n_0}^n q^n = q^{n_0} (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n),$$

entonces desde (2.9), se obtiene que:





Si se utiliza (2.17), resulta que:

$$\sum_{n_0=(10000000000000)10^{32}}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^{10^3} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right).$$

**Ejemplo 2.12.4** Calcular la suma  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ .

Por tratarse de una serie geométrica de razón (cociente)  $\frac{1}{2}$  es convergente y utilizando (2.11) su suma es  $S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ .

**Ejemplo 2.12.5** Encontrar el número racional para el decimal periódico mixto  $0,38153153\dots$ .

$$0,381531531253\dots = 0,38 + \frac{0.\widehat{153}}{100} = \frac{38}{100} + \frac{1}{100} 0.\widehat{153}$$

$$0,381531531253\dots = 0,38 + \frac{0.\widehat{153}}{100} = \frac{38}{100} + \frac{1}{100} \left\{ \frac{153}{1000} + \frac{153}{1000^2} + \frac{153}{1000^3} + \dots + \right\}$$

$$0,381531531253\dots = 0,38 + \frac{0.\widehat{153}}{100} = \frac{38}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{153}{1000} \left\{ 1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000^2} + \dots + \right\}$$

$$0,381531531253\dots = 0,38 + \frac{0.\widehat{153}}{100} = \frac{38}{100} + \frac{153}{100000} \left( \frac{1}{1-\frac{1}{1000}} \right)$$

$$0,381531531253\dots = 0,38 + \frac{0.\widehat{153}}{100} = \frac{38}{100} + \frac{153}{100000} \left( \frac{1}{\frac{999}{1000}} \right)$$

$$0,381531531253\dots = 0,38 + \frac{0.\widehat{153}}{100} = \frac{38}{100} + \frac{153}{100} \cdot \frac{1}{999} = \frac{38115}{99900}.$$

**Ejercicio 2.12.6** Verificar que la serie

$$S = 1 + 2r + 2r^2 + \dots$$

es convergente si  $-1 < r < 1$  y que es  $S = \frac{1+r}{1-r}$ .

**Ejercicio 2.12.7** Dada la serie

$$r + \frac{r}{1+r} + \frac{r}{(1+r)^2} + \dots$$

determinar para qué valores converge y en ese caso calcular la suma.

### 3. Series telescópicas.

Son otras de las series, en las que es posible, determinar la expresión explícita del término general de la sucesión de sumas parciales.

**Ejercicio 2.12.8** Dada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ , determine la expresión de su suma parcial  $n$ -ésima. En caso de ser convergente, determine su suma.

Sugerencia: Realice la descomposición en fracciones simples del término  $a_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ .

### 4. Condición necesaria de convergencia.

Si  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

En otras palabras, sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  convergente, i.e.  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ,  $S_n = \sum_{n=0}^n a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Dem.** De acuerdo con la definición una serie es convergente si existe finito el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \tag{2.18}$$

equivalentemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S.$$

Luego el límite de  $S_n - S_{n-1}$  para  $n \rightarrow \infty$ , debe ser nulo, pero además  $S_n - S_{n-1} =$

$$\sum_{n=0}^n a_n - \sum_{n=0}^{n-1} a_n = a_n, \text{ es decir}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \tag{2.19}$$

Por consiguiente: *si el término general de una serie no tiende a cero, la serie no es convergente.*

**Observación 2.12.9** *El término general puede tender a cero y la serie no ser convergente, e.g.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ .*

$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ . Luego  $S_n \rightarrow \infty$ , a pesar de que  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$  tiende a cero.

Por consiguiente la condición  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  no es suficiente para asegurar la convergencia de la serie.

**Ejercicio 2.12.10** *Demostrar que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$  cuyo término general tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ , es divergente.*

**Ejercicio 2.12.11** *Utilice la C.N. para demostrar que esta serie no tiene suma: La serie  $1 + 2 + 3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n$  es divergente pues  $S_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .*

**Ejercicio 2.12.12** *Utilice la C.N. para demostrar que esta serie no tiene suma: La serie  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ .*

La suma  $S_n$  es alternadamente igual a 1 ó 0 según se tome un número impar o par de términos. Por consiguiente  $S_n$  no tiende a ningún valor definido cuando  $n \rightarrow \infty$ .

5. **Progresión aritmética y sumas posibles.** En (2.20) definimos en forma recursiva, recurrente o implícita una progresión aritmética, especificados el valor inicial o arrancador  $a_0$  y la constante  $c$ .

$$a_{n+1} = a_n + c, \text{ dados } a_0, \text{ y } c. \quad (2.20)$$

Ahora determinamos a partir de los datos  $a_0$  y  $c$  la expresión explícita de estas progresiones,  $a_1 = a_0 + c$ ,  $a_2 = a_1 + c = a_0 + c + c = a_0 + 2c$ ,  $a_3 = a_2 + c = a_0 + 2c + c = a_0 + 3c$ , luego continuando de esta manera se deduce que:

$$a_n = a_0 + nc. \quad (2.21)$$

Claramente, a menos que  $c = 0$  la sucesión aritmética  $a_n$ , es divergente:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + n c) = \infty, \text{ si } c \neq 0.$$

¿ Qué ocurre con la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_0 + n c$  ?

Claramente por la *condición necesaria para la convergencia*  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_0 + n c$  no tiene suma, no es una serie convergente.

De cualquier manera, veamos que es posible determinar la expresión explícita o término general de la sucesión de sumas parciales de una progresión geométrica, observemos que:  $S_0 = a_0$ ,  $S_1 = a_0 + a_0 + c = 2a_0 + c$ ,  $S_2 = a_0 + a_0 + c + a_0 + 2c = 3a_0 + 3c$ , prosiguiendo se obtiene que  $S_2 = 3a_0 + 3c$ ,  $S_3 = 4a_0 + 6c$ , lo que conduce a:

$$S_n = \sum_{n=0}^n (a_0 + n c) = (n+1) a_0 + \frac{(n)(n+1)}{2} c.$$

¿ Qué ocurre con las sumas finitas de los términos de una progresión geométrica  $\sum_{n=0}^n a_n = \sum_{n=0}^n a_0 + n c$  ?

La expresión anterior nos permite determinar la suma finita de los términos en una progresión aritmética y además evidencia que no se pueden construir series convergentes, puesto que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^n a_0 + n c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (n+1) a_0 + \frac{(n)(n+1)}{2} c \right] = \infty.$$

$$\sum_{n=0}^n a_0 + n c = (n+1) a_0 + \frac{(n)(n+1)}{2} c. \quad (2.22)$$

**Ejemplo 2.12.13** Sea  $a_0 = 1$  y  $c = 1$ .

- Determine ¿ de qué sucesión se trata ?

## Capítulo 2. Guía de Ejercicios Propuestos

---

- Determine la sucesión de sumas parciales y justifique que tampoco es convergente.
- Determine el valor de la suma finita  $\sum_{n=0}^n (a_{n_0} + nc)$ .
- Determine el valor de la suma finita  $\sum_{n=n_1}^{n=n_2} (a_{n_0} + nc)$  si  $n_1 < n_2$ .

Respuesta: La sucesión es la de los números naturales, i.e.  $a_n = 1 + n$ , con  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . La serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} (1 + n)$  no tiene suma  $\lim_{n \rightarrow +\infty} = +\infty$ , luego por la C. N. para la convergencia, la serie de los naturales  $\sum_{n=0}^{+\infty} (1 + n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ , no tiene suma, es una serie divergente. Para calcular el real  $\sum_{n=n_1}^{n=n_2} (a_{n_0} + nc)$ , se aplica la ecuación (2.22) para  $n = n_2$  y se resta del valor que se obtiene al aplicar la misma fórmula para  $n = n_1 - 1$ .

**Ejercicio 2.12.14** Identifique cuál es el conjunto de números naturales que determina la sucesión aritmética con los datos  $a_0 = 1$  y  $c = 2$ .

**Ejercicio 2.12.15** Identifique cuál es el conjunto de números naturales que determina la sucesión aritmética con los datos  $a_0 = 0$  y  $c = 2$ .

6. **Condición necesaria y suficiente de convergencia:** Cauchy estableció que: “la condición necesaria y suficiente para la convergencia de una serie es que la suma de  $p$  términos a partir de un cierto rango

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{n+p}$$

pueda hacerse tan pequeña como se quiera con tal de tomar  $n$  suficientemente grande, cualquiera sea  $p$  fijo”.

**Ejemplo 2.12.16** La sucesión de sumas parciales formada a partir de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$  no es convergente.

$S_{n^2} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n^2}$  tiene  $n^2 - n$  sumandos y como  $n+j < n^2$ ,  $1 \leq j < n^2 - n$  es  $\frac{1}{n+j} > \frac{1}{n^2}$ , luego  $S_{n^2} - S_n > \frac{n^2 - n}{n^2}$  entonces  $S_{n^2} - S_n$  no puede hacerse tan pequeño como se quiera a medida que  $n$  crece, ya que la expresión a la derecha de tiende a 1 para  $n$  suficientemente grande. Es decir,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  es divergente.

### 7. Series de Términos Positivos.

Si en la definición general de serie y de suma de una serie se consideran solamente términos positivos, se tienen las series de términos positivos. En cuyo caso resultarán series convergentes o divergentes, pero nunca oscilantes, puesto que la sucesión  $S_n$  de las sumas parciales cuando  $n \rightarrow \infty$  tenderá a un valor finito o a infinito.

**Ejemplo 2.12.17**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$  es una serie de términos positivos convergente.

$$s_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$S_n = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

### 8. Criterios de Comparación de Series de Términos Positivos.

i) Convergencia.

*Si los términos de una serie de términos positivos son respectivamente menores o iguales que los de una serie de términos positivos que se sabe que es convergente, la primera serie es también convergente.*

Sea  $u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$ , una serie de términos positivos cuya convergencia se quiere estudiar y

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots,$$

una serie de términos positivos de la cual se sabe que es convergente; sea además  $u_n < a_n$ , a partir de un cierto valor de  $n$ .

Si las sumas parciales son

$$S_n = \sum_{n=0}^n u_n$$

$$A_n = \sum_{n=0}^n a_n$$

resulta por ser  $u_n \leq a_n$ ,  $S_n \leq A_n$ , si designamos con  $A$  la suma de la serie que sirve de comparación,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ .

En virtud de que *toda sucesión creciente y acotada tiene un límite*, resulta que la sucesión  $S_n$  (que es creciente porque está constituida por sumandos positivos y acotada porque es inferior a  $A$ ) tiene un límite  $S \leq A$ , o en otros términos la serie es convergente.

**Ejemplo 2.12.18**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  es convergente si es  $p > 1$ .

En efecto, sus términos son respectivamente menores (o iguales) que los de la serie cuya suma parcial es ( $n = 2^r - 1$ )

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{2^m}{(2^m)^p}$$

$$\sigma_n = 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \cdots + \frac{2^m}{(2^m)^p}$$

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2^{(p-1)}} + \frac{1}{4^{(p-1)}} + \frac{1}{8^{(p-1)}} + \cdots + \frac{1}{(2^m)^{(p-1)}}$$

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2^{(p-1)}} + \frac{1}{2^{2(p-1)}} + \frac{1}{2^{3(p-1)}} + \cdots + \frac{1}{(2^m)^{(p-1)}}$$

si se designa con  $q$  el valor  $\frac{1}{2^{(p-1)}}$

$$\sigma_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^m.$$

La última expresión es una progresión geométrica y la serie correspondiente es convergente si  $|q| < 1$ . Como  $q = \frac{1}{2^{p-1}}$ , resultará su valor menor que 1 sólo si  $p > 1$ .

ii) Divergencia.

*Si los términos de una serie de términos positivos son respectivamente mayores o iguales que los de una serie de términos positivos que se sabe que es divergente, la primera serie es también divergente.*

**Ejemplo 2.12.19** La serie armónica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  es divergente.



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \rightarrow \infty.$$

Las series del tipo  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ , llamadas **series p**, son convergentes si es  $p > 1$  y divergentes si es  $p \leq 1$ .

9. Otras formas de los Criterios de Comparación.

I) Sea  $\sum \frac{1}{c_n}$  una serie convergente. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n a_n) = L,$$

siendo  $L$  un número finito, es  $\sum a_n$  convergente.

II) Sea  $\sum \frac{1}{d_n}$  una serie divergente. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n a_n) = L > 0$$

la serie  $\sum a_n$  es divergente.

**Ejemplo 2.12.20** La serie  $\sum \frac{1}{n^2 + 1}$  es convergente.

Como se ve eligiendo  $c_n = n^2$ , con lo que resulta  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1$ .

**Ejemplo 2.12.21** La serie  $\sum \frac{1+n}{1+n^2}$  es divergente.

Pues si  $d_n = n$  se tiene  $\left( \frac{1+n}{1+n^2} \right) n \rightarrow 1 > 0$ .

**Convergencia y divergencia:** En el estudio de las series hay dos cuestiones distintas:

- una es saber con certeza si la serie es convergente o nó y
- otra es calcular la suma de la serie (si es convergente).

Desde el punto de vista teórico la primera cuestión es la más importante, porque **hasta tanto no se haya demostrado la convergencia de una serie** no se puede operar con los términos de la serie sin correr el riesgo de llegar a resultados absurdos.

Una vez que se ha demostrado la convergencia de una serie se podrá tener un valor tan próximo como se quiera de la suma de la serie con tal de tomar un número suficientemente grande de términos.

### 10. Criterios clásicos de convergencia.

**Criterio de Cauchy:** Si desde un valor  $n$  en adelante se conserva  $\sqrt[n]{u_n}$  inferior a un número positivo  $k < 1$ , la serie de términos positivos es convergente. Si para infinitos valores de  $n$  es  $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ , la serie es divergente.

*Demostración.* Si  $\sqrt[n]{u_n} < k$ , es decir,  $u_n < k^n$ , basta aplicar el criterio de comparación, pues la serie geométrica de razón  $k$ ,  $\sum k^n$  es convergente si  $k < 1$ .

En el segundo caso existen infinitos términos  $u_n \geq 1$ , por lo tanto la serie es divergente, pues su término general no tiende a cero.

**Criterio de D'Alembert:** Si desde un valor  $n$  en adelante, la razón  $\frac{u_n}{u_{n-1}}$  de un término al anterior se conserva menor que un número  $k < 1$ , la serie de términos positivos es convergente. Si desde un valor  $n$  en adelante es  $\frac{u_n}{u_{n-1}} \geq 1$ , la serie es divergente.

*Demostración.* En efecto, la condición  $\frac{u_n}{u_{n-1}} < k$  equivale a  $\frac{u_n}{u_{n-1}} < \frac{k^n}{k^{n-1}}$  y basta aplicar el criterio de comparación entre la serie  $\sum u_n$  y la serie geométrica  $\sum k^n$  de razón menor que 1. En el segundo caso, los términos no decrecen, y no tendiendo a cero, la serie diverge.

**En los casos más sencillos** que con más frecuencia se presentan, tienen límite  $\sqrt[n]{u_n}$  y  $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ . Cuando uno de estos límites  $\lambda$  puede hallarse, caben tres casos:

- a) Si  $\lambda < 1$ , la serie es convergente.
- b) Si  $\lambda > 1$ , la serie es divergente.
- c) Si  $\lambda = 1$ , en general nada puede decirse.

Cuando los criterios anteriores no son aplicables, por ser igual a 1 el límite de  $\sqrt[n]{u_n}$ ,

o el de  $\frac{u_n}{u_{n-1}}$  se acude por ejemplo al Criterio de Raabe.

**Criterio de Raabe:** Si desde un valor  $n$  en adelante la expresión  $n \left(1 - \frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$  se conserva superior a un número fijo,  $1 + \epsilon > 1$ , la serie  $\sum u_n$  de términos positivos es convergente. Si dicha expresión se conserva inferior o igual a 1, la serie es divergente. En los casos en que existe el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{u_n}{u_{n-1}}\right) = \lambda$ ,  $\lambda > 1$ , la serie es convergente; si  $\lambda < 1$ , la serie es divergente. Si el límite es 1 nada puede asegurarse.

11. **Series alternadas:** Una serie se llama *alternada* si sus términos son alternativamente positivos y negativos. Se la puede escribir así:  $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2h-1} - u_{2h} + \dots$  indicando ahora con  $u_n$  no el término  $n$ -ésimo, sino el valor absoluto del mismo. *Criterio de convergencia para series alternadas* (Leibniz, 1704). Si una serie alternada cumple la condición  $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$ , es decir, si los módulos de los términos son decrecientes, la condición  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  es necesaria y suficiente para la convergencia.

En este criterio, ver la Figura (2.67), el resto  $S - S_n$  es en valor absoluto menor que el primer término despreciado (2.23) y del mismo signo que él.

$$|S - S_n| < u_{n+1} \quad (2.23)$$

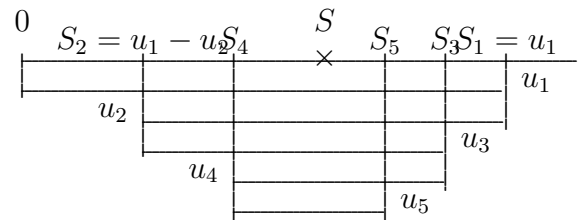


Figura 2.67: Transportando los  $u_n$  sobre un eje real.



## Parte III

# Funciones Trigonométricas y Curvas

## Planas



# Capítulo 3

## Funciones Trigonométricas y Curvas Planas

Identidad trigonométrica esencial y circunferencia trigonométrica:

$$\begin{cases} x(\alpha) = \sin(\alpha) \\ y(\alpha) = \cos(\alpha) \end{cases}, \quad \alpha \in [0, 2\pi]$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (3.1)$$

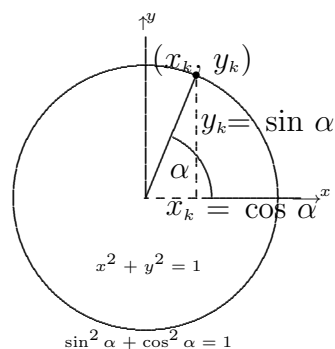


Figura 3.1: Identidad esencial y circunferencia trigonométrica.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \quad (3.2)$$

Si  $\beta = \alpha \rightarrow$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (3.3)$$

Aplicando la identidad trigonométrica (3.2),  $z(t) = \sin(t + \frac{\pi}{2}) = \sin(t) \cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2}) \cos(t) = \cos(t)$ , ya que  $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$  y  $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \rightarrow$

$$z(t) = \sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos(t) \quad (3.4)$$

**Observación 3.0.22** Esta última identidad muestra que la función periódica  $z(t) = \cos(t)$  es simplemente una traslación hacia la izquierda en  $\frac{\pi}{2}$  de la función periódica  $z(t) = \sin(t)$ . (Ref. a las Figuras 3.3 y 3.2).

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha \tag{3.5}$$

Si  $\beta = \alpha \rightarrow$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \tag{3.6}$$

### 3.1. Funciones Trigonométricas y Curvas Planas: Ejercicios resueltos. Nivel I: 1<sup>er</sup> PARCIAL - ♣ © 1<sup>er</sup> COLOQUIO.

Realizamos en primer lugar las gráficas individuales para  $z_1(t) = \sin(t)$ ,  $z_2(t) = \cos(t)$  y  $z_3(t) = \sin(2t)$  en el intervalo  $t \in [0, 2\pi]$ .

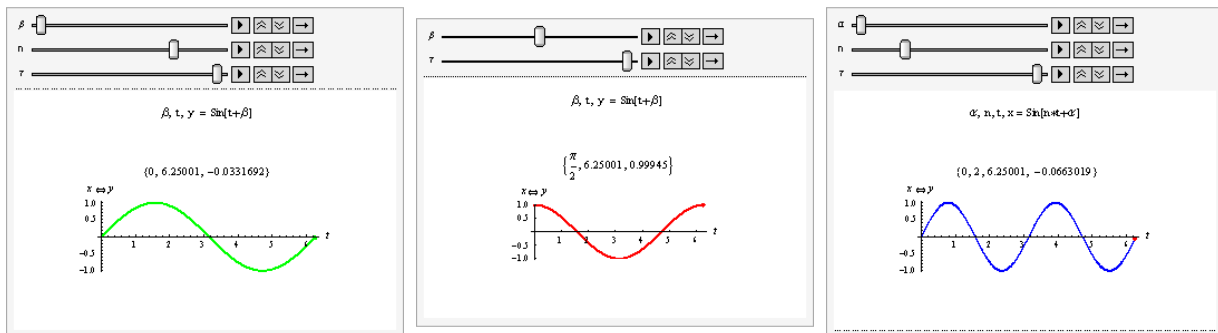


Figura 3.2: Gráficas de  $z_1(t) = \sin(t)$ ,  $z_2(t) = \cos(t)$  y  $z_3(t) = \sin(2t)$ ;  $t \in [0, 2\pi]$ .

**Ejemplo 3.1.1** Graficar la siguiente curva del plano:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{3.7}$$

Para graficar la curva (3.7) en el plano  $xy$  tengamos en cuenta las identidades trigonométricas (3.1) y (3.3).



Utilizando la identidad trigonométrica (3.3), resulta que el problema planteado es equivalente a graficar la curva plana:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \iff \begin{cases} x(t) = 2 \sin(t) \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

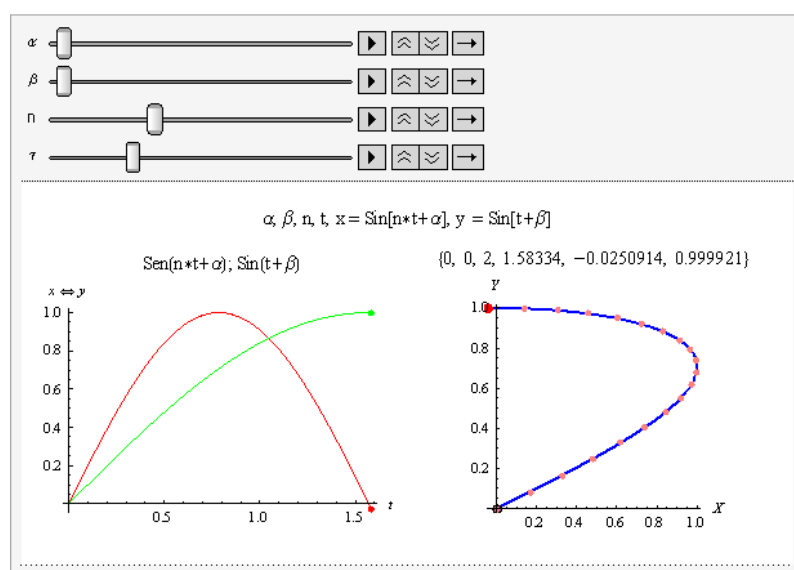


Figura 3.3:  $x(t) = \sin(2t)$ ,  $y(t) = \sin(t)$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ :  $x^2 = 4y^2(1 - y^2)$ .

Si eliminamos, en principio parcialmente el parámetro  $t$ , podemos escribir  $x(t) = 2 y(t) \cos(t)$ . Utilizando la identidad trigonométrica fundamental (3.1),  $\cos(t)$  puede despejarse como:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad (3.8)$$

Por lo tanto, lograríamos la eliminación del parámetro  $t$  por completo utilizando la expresión multiforme en (3.8), entonces  $x = 2 y \cos(t) = 2 y (\pm \sqrt{1 - \sin^2 t}) = 2 y (\pm \sqrt{1 - y^2})$ . Por lo tanto, hemos establecido que (3.7) es:

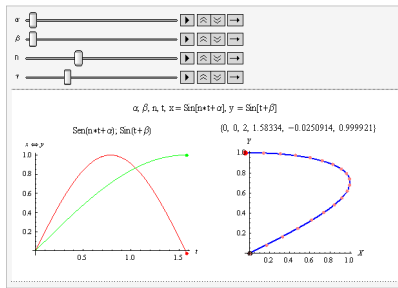
$$\begin{cases} x(t) = 2 \sin(t) \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \approx x = 2 y (\pm \sqrt{1 - y^2}) \quad (3.9)$$

### Capítulo 3. Funciones Trigonométricas y Curvas Planas

Cabe aclarar que  $\approx$  simboliza una manera de aseverar cierta aproximación o semejanza. Ya que la curva plana  $x = 2y (\pm\sqrt{1 - y^2})$  no tiene definido ningún sentido de recorrido. Sin embargo, como veremos a continuación (3.7) sí tiene un sentido de recorrido asociado así como también punto inicial o de partida y punto final o de llegada.

- a) Si  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , considerando la Figura 3.2 pág. 152, resulta el recorrido de  $x = 2y (\sqrt{1 - y^2})$  con  $y \in [0, 1] \therefore x \in [0, 1]$ .

Analice cuidadosamente las siguientes representaciones gráficas.



La flecha indica el sentido de recorrido de la curva conforme  $t$  crece desde 0 hasta  $\frac{\pi}{2}$ .

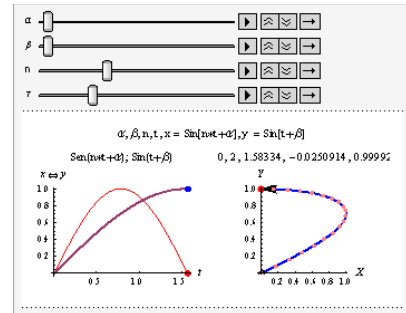
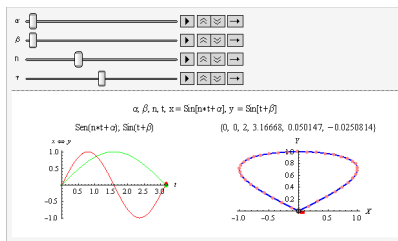


Figura 3.4: Parte I de la curva con forma de ocho.

- b) Si  $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ,  $x = 2y (-\sqrt{1 - y^2}) = -2y (\sqrt{1 - y^2})$  se recorre en el compacto de  $\mathbb{R}^2$  determinado por  $y \in [0, 1]$  con  $x \in [-1, 1]$ , con el sentido antihorario ya predeterminado. Estudie las siguientes gráficas.



La flecha indica el sentido de recorrido de la curva conforme  $t$  aumenta de  $\frac{\pi}{2}$  hasta  $\frac{3\pi}{2}$ .

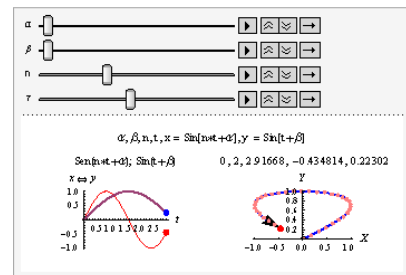
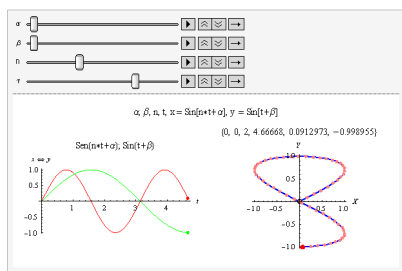


Figura 3.5: Parte II de la curva con forma de ocho.

- c) Si  $t \in [3\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ ,  $x = 2y (\sqrt{1 - y^2})$  con  $y \in [-1, 0]$ .



La flecha indica el sentido de recorrido de la curva conforme  $t$  ha aumentado de  $\frac{3\pi}{2}$  a  $\pi$ .

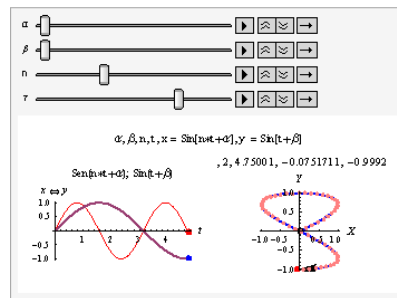


Figura 3.6: Parte III de la curva con forma de ocho.

d) Resumiendo los resultados de los incisos a), b) y c) se obtiene el siguiente gráfico:

La flecha indica el sentido de recorrido de la curva conforme  $t$  crece desde 0 a  $2\pi$ .

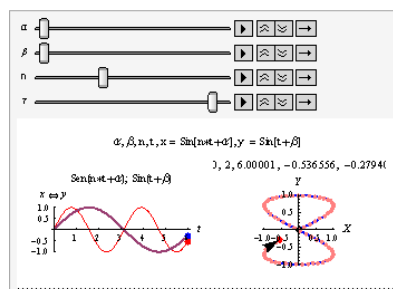
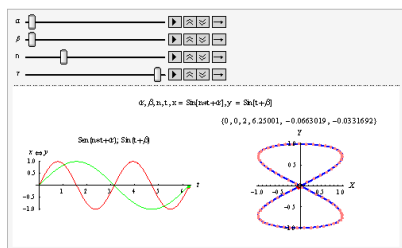


Figura 3.7: La curva (3.7) con forma de ocho vive en el compacto de  $\mathbb{R}^2$ :  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .

**Ejemplo 3.1.2** Graficar la curva plana dada por:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t + \frac{\pi}{2}) \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Utilizando las identidades (3.4) en la pág. 151 y (3.6) en la pág. 152 establecemos que hemos de representar en el plano  $xy$  a:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \iff \begin{cases} x(t) = \cos^2 t - \sin^2 t \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Utilizando la identidad trigonométrica fundamental (3.1),  $\cos^2 t$  puede despejarse como  $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - y^2$ , con lo que eliminamos el parámetro  $t$  por completo entonces  $x = (1 - y^2) - y^2 = (1 - 2y^2)$ ,  $y \in [-1, 1]$ .

La porción de parábola está siendo recorrida desde el  $(1, 0)$  al  $(-1, 1)$ , luego regresa al  $(1, 0)$  alcanza el  $(-1, -1)$  y regresa para finalizar en el punto inicial  $(1, 0)$ .

### Capítulo 3. Funciones Trigonómicas y Curvas Planas

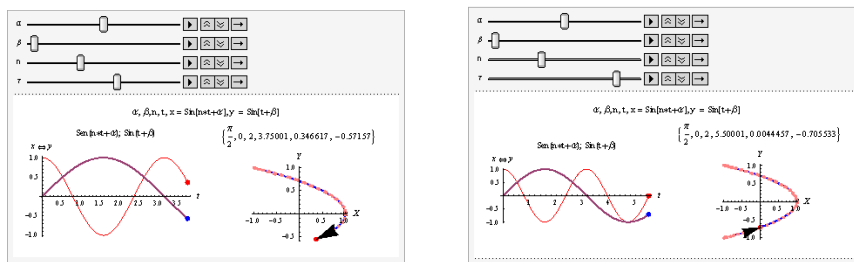


Figura 3.8:  $x = 1 - 2y^2$ ,  $y \in [-1, 1]$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

**Ejemplo 3.1.3** Graficar la curva plana dada por:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t + \alpha_*) \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi], \quad 0 < \alpha = \alpha_* \leq \frac{\pi}{2}.$$

Sugerencia: Una vez analizados los casos límites  $\alpha_* = 0$  y  $\alpha_* = \frac{\pi}{2}$  confirme si la curva algebraica en la que viajan estos recorridos tiene la siguiente expresión  $(x - \sin \alpha_*)^2 + 4y^2(x \sin \alpha_* - 1) + 4y^4 = 0$ .

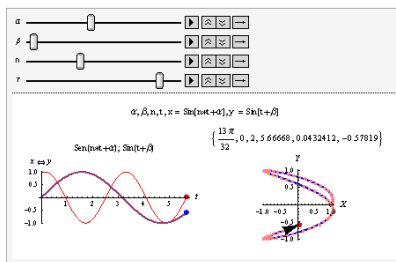


Figura 3.9: La curva con forma de ocho deformado  $\alpha_* = \frac{7\pi}{32}$

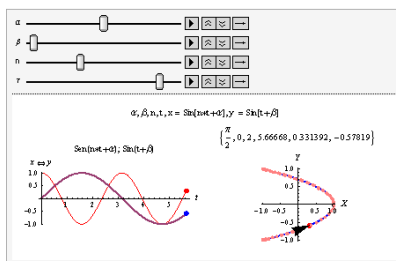


Figura 3.10: Ocho deformado  $\alpha_* = \frac{\pi}{2}$ , convertido en parte de una parábola

**Ejemplo 3.1.4** Estudie gráfica y/o analíticamente el siguiente recorrido:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(t + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \iff \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \sin t \\ y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin(t) + \cos(t)) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Sugerencia: El recorrido se realiza sobre parte de la curva plana  $2y^2 - 1 - x = 0$ .

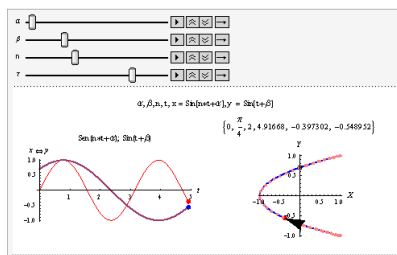


Figura 3.11:  $x(t) = \sin(2t)$  e  $y(t) = \sin(t + \frac{\pi}{4})$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

**Ejemplo 3.1.5** Graficar la curva plana dada por:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(3t) \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Utilizando la identidad trigonométrica (3.2),  $\sin(3t) = \sin(t + 2t) = \sin t \cos 2t + \sin 2t \cos t$ , aplicando (3.6), (3.3) y la identidad trigonométrica fundamental (3.1), se obtiene que  $\sin(3t) = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$ . Como  $y(t) = \sin t$ , la eliminación del parámetro  $t$  conduce a  $x = 3y(1 - \frac{4}{3}y^2) = -4y(y^2 - \frac{3}{4})$ , por lo tanto

$$x = -4y(y - \frac{\sqrt{3}}{2})(y + \frac{\sqrt{3}}{2}) \quad y \in [-1, 1], \quad x \in [-1, 1].$$

En detalle, teniendo en cuenta las gráficas de la Figura 3.2 de la pág 152 podemos precisar el recorrido y las simetrías de esta curva plana.

Naturalmente  $x(y)$ , es parte de una función polinómica cúbica con tres raíces reales en  $(0, 0)$ ,  $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$  y  $(0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ .

A partir de que  $x(-y) = 4y(y^2 - \frac{3}{4}) = -x(y)$ , sólo será necesario culminar el análisis cuidadoso de los datos parciales explicitados en la Table 3.1, pág. 158.

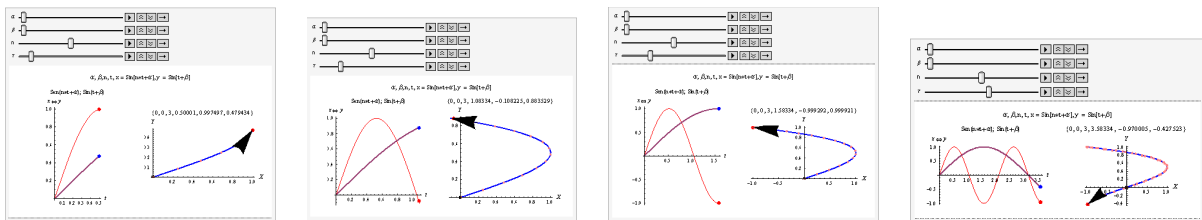
### Capítulo 3. Funciones Trigonométricas y Curvas Planas

Además, el valor máximo de la componente  $x$  de la curva está dado cuando  $x_{\max}(t) = 1$ , que es alcanzado e.g. si  $t = \frac{\pi}{6}$ , es decir,  $x = \sin(\frac{3\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{2})$ . Por lo tanto, si  $t = \frac{\pi}{6}$  la otra componente del punto de la curva a graficar vale  $y(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ . Entonces, no es demasiado difícil confirmar que los puntos  $(1, \frac{1}{2})$  y  $(-1, 1)$  pertenecen al gráfico de la curva.

Variación sincrónica $t \rightarrow y \rightarrow x, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$						
$t$	$y$	$-4y$	$(y - \frac{\sqrt{3}}{2})$	$(y + \frac{\sqrt{3}}{2})$	Signo $x$	$P_*(x_*, y_*)$
$[0, \frac{\pi}{3}]$	$[0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$	$[-2\sqrt{3}, 0]$	$[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0]$	$[\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}]$	$\geq 0$	$(1, \frac{1}{2})$
$[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$	$[-4, -2\sqrt{3}]$	$[0, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}]$	$[\sqrt{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}]$	$\leq 0$	$(-1, 1)$

Cuadro 3.1: Construcción del recorrido de la cúbica si  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

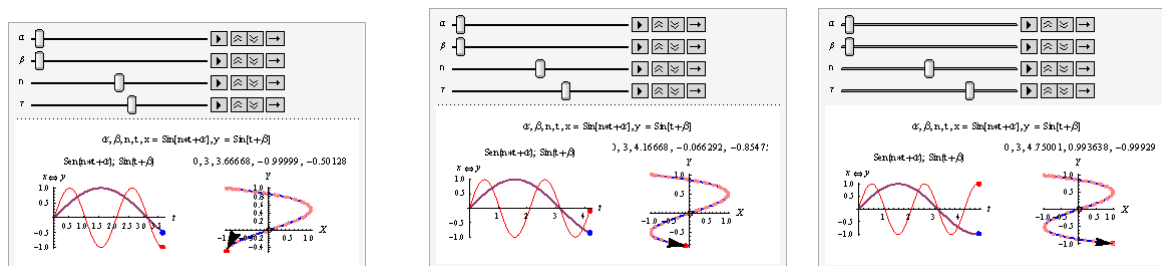
Hemos construído, teniendo en cuenta los datos anteriores, y de la observación de las gráficas de la funciones  $\sin(mt)$  con frecuencia normal  $m = 1$  y aquella de frecuencia ampliada  $m = 3$ , la parte de la cúbica  $x(y)$  que vive en el compacto  $xy$  o producto cartesiano  $[-1, 1] \times [0, 1]$ . Mientras  $t$  crece de  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , esta porción de la cúbica se va dibujado en el sentido antihorario desde el  $[0, 0]$  hacia  $\rightarrow [1, \frac{1}{2}]$  luego pasando por la raíz  $[0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$  y siguiendo  $\rightarrow$  hasta el  $[-1, 1]$ . Mientras  $t$  crece de  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  este mismo recorrido es desandado o recorrido en sentido horario. Es decir, partiendo desde el último punto  $[-1, 1] \rightarrow [0, \frac{\sqrt{3}}{2}] \rightarrow [1, \frac{1}{2}]$  y se llega al  $[0, 0]$  punto donde inició el recorrido del trozo de esta cúbica  $x(y)$ . En el compacto de  $xy, [-1, 1] \times [-1, 0]$  vive la otra parte de la cúbica generada para  $t \in [\pi, 2\pi]$  recorrida en sentido antihorario desde el  $[0, 0]$  pasando por  $[-1, -\frac{1}{2}]$  cuando  $t$  avanza de  $[\pi, \frac{7\pi}{6}]$ .



Cuadro 3.2: La cúbica  $x(y) \in [-1, 1] \times [0, 1]$

Cuando  $t$  crece de  $[\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}]$  la cúbica se recorre desde el  $[-1, -\frac{1}{2}]$  hacia el  $[0, -\frac{\sqrt{3}}{2}]$ , llegando al  $[1, -1]$  cuando  $t \in [\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}]$ . Finalmente, revierte la orientación recorriendo

la misma porción de la cúbica, i.e. en sentido horario consecutivamente pasando entre los puntos más notorios desde el  $[1, -1] \rightarrow [0, -\frac{\sqrt{3}}{2}] \rightarrow [-1, -\frac{1}{2}] \rightarrow [0, 0]$  si el avance de  $t$  corresponde al intervalo  $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ .



Cuadro 3.3: La cúbica  $x(y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ .

**Ejemplo 3.1.6 Evenness vs Oddity:** Cuasi-8 vs Multi-S  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , i.e.  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2nt) \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]; \quad \begin{cases} x(t) = \sin[(2n+1)t] \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad (3.10)$$

En cualquiera de los casos  $y = \sin t \rightarrow \cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - y^2 \rightarrow \cos t = \pm \sqrt{1 - y^2} \rightarrow \sin(2t) = 2y \cos(t) = 2y (\pm \sqrt{1 - y^2}) \rightarrow \cos(2t) = (\cos^2 t - \sin^2 t) = 1 - \sin^2 t - \sin^2 t = 1 - 2y^2$ . Por lo tanto las siguientes sustituciones serán recurrentemente utilizadas para resolver este tipo de ejercicios dependientes de la paridad o imparidad de  $n$ . Razón por la cual, las explicitaremos como ecuaciones a las que les asociaremos un número.

Siendo

$$y = \sin t \quad (3.11)$$

$$\cos^2 t = 1 - y^2 \quad (3.12)$$

$$\cos t = \pm \sqrt{1 - y^2} \quad (3.13)$$

$$\sin(2t) = 2y \cos(t) \quad (3.14)$$

### Capítulo 3. Funciones Trigonométricas y Curvas Planas

$$\sin(2t) = 2y \left( \pm \sqrt{1 - y^2} \right) \tag{3.15}$$

$$\cos(2t) = 1 - 2y^2 \tag{3.16}$$

$$\sin[(2n + 1)t] = \sin(2nt) \cos t + \cos(2nt) \sin t \tag{3.17}$$

$$\cos[(2n + 1)t] = \cos(2nt) \cos t - \sin(2nt) \sin t \tag{3.18}$$

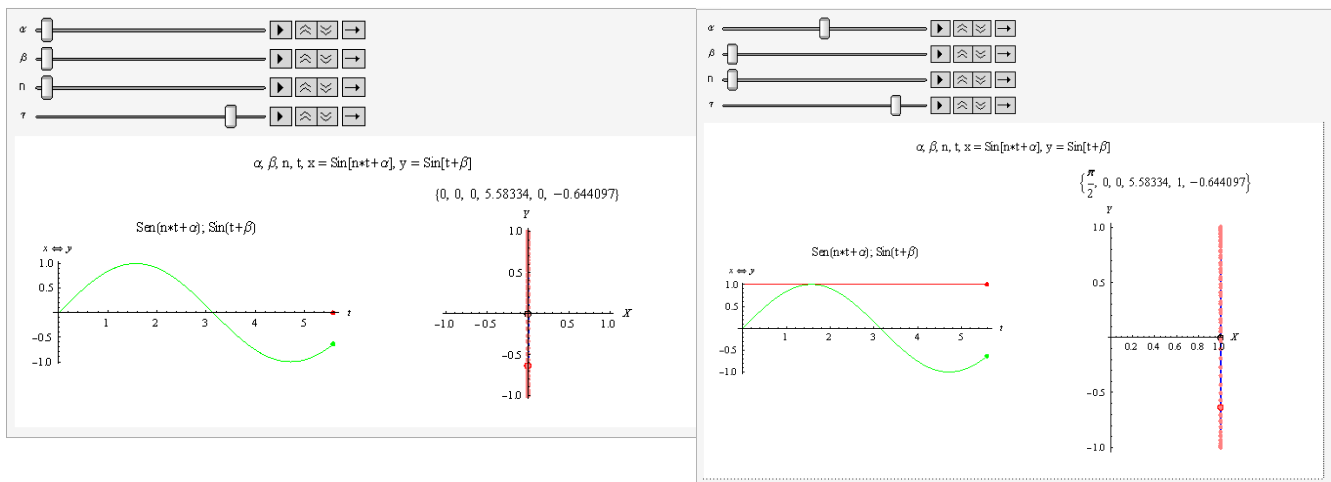
En particular, se tiene que:

$$\sin\left[(2n + 1)t + \frac{\pi}{2}\right] = \cos[(2n + 1)t] \tag{3.19}$$

$$\begin{cases} x(t) = \sin(0.t) = 0 \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]. \quad \begin{cases} x(t) = \sin(0.t + \frac{\pi}{2}) \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\searrow x = 0; \quad -1 \leq y \leq 1$$

$$\swarrow x = 1; \quad -1 \leq y \leq 1$$



Cuadro 3.4:  $x(t) = \sin(0t)$  o  $x(t) = \cos(0t)$ , si  $y(t) = \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .



**Ejemplo 3.1.7**

$$\begin{cases} x(t) = \sin(4t) \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Este ejemplo, lo desarrollaremos brevemente mediante pasos concatenamos de fácil entendimiento, ya que el lector se ha visto beneficiado por los detalles en los ejemplos anteriormente explicados. De (3.3) en la pág. 151 y (3.6) en la pág. 152, resulta ser  $x(t) = \sin(4t) = \sin 2(2t) = 2 \sin(2t) \cos(2t) = 2 \cdot 2 \sin(t) \cos(t) \cos(2t) = 2 \cdot 2 \sin(t) \cos(t) (\cos^2 t - \sin^2 t)$ . Finalmente, utilizando la identidad trigonométrica fundamental (3.1) de la pág. 151 y del hecho que  $y(t) = \sin t$ , se tiene que  $\cos t = \pm \sqrt{1 - y^2}$ , por lo tanto  $x(t) = \sin(4t) = \pm 4y \sqrt{1 - y^2} (1 - 2y^2)$ .

**Ejemplo 3.1.8**

$$\begin{cases} x(t) = \sin(5t) \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

De manera directa y breve:  $x(t) = \sin(5t) = \sin(t + 4t) = \sin t \cos(4t) + \cos t \sin(4t) = \sin t (\cos^2(2t) - \sin^2(2t)) + 2 \cos t \sin(2t) \cos(2t) = \sin t (1 - \sin^2(2t) - \sin^2(2t)) + 2 \cos t \sin(2t) \cos(2t) = \sin t (1 - 2 \sin^2(2t)) + 2 \cos t (2 \sin t \cos t) (\cos^2 t - \sin^2 t) = \sin t [(1 - 2 \sin^2(2t))] + 4 \cos^2 t (\cos^2 t - \sin^2 t) = y [(1 - 2 \sin^2(2t))] + 4 (1 - y^2) (1 - y^2 - y^2) = y [(1 - 2 \cdot 2^2 \sin^2(t) \cos^2(t))] + 4 (1 - y^2) (1 - y^2 - y^2) = y [(1 - 8y^2(1 - y^2) + 4(1 - y^2) (1 - y^2 - y^2))] = y [(1 - 8y^2(1 - y^2) + 4(1 - y^2) (1 - 2y^2))] = y \{ 1 + (1 - y^2)[-8y^2 + 4(1 - 2y^2)] \} = y \{ 1 + (1 - y^2)[-16y^2 + 4] \} = y [1 + 4(1 - y^2)(1 - 4y^2)] \quad x(y) = y [1 + 4(1 - y^2)(1 - 4y^2)] \quad y \in [-1, 1] \quad y = \sin t \quad t \in [0, 2\pi].$

$$x(y) = y \left[ 1 + 4^2 (y^2 - 1) \left( y^2 - \frac{1}{4} \right) \right] \quad y \in [-1, 1] \quad y = \sin t \quad t \in [0, 2\pi].$$

**Observación 3.1.9** En  $x(t) = \sin(7t) = y(7 - 24y^2 + 80y^4 - 64y^6)$  son puntos visibles de la curva  $(0, 0)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, -1)$  y la simetría  $x(-y) = -x(y)$ . Mientras que en  $x(t) = \cos(7t) = y(7 - 24y^2 + 80y^4 - 64y^6)$  son puntos visibles de la curva  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(\pm 1, 0)$  y la simetría  $x(-y) = x(y)$ .

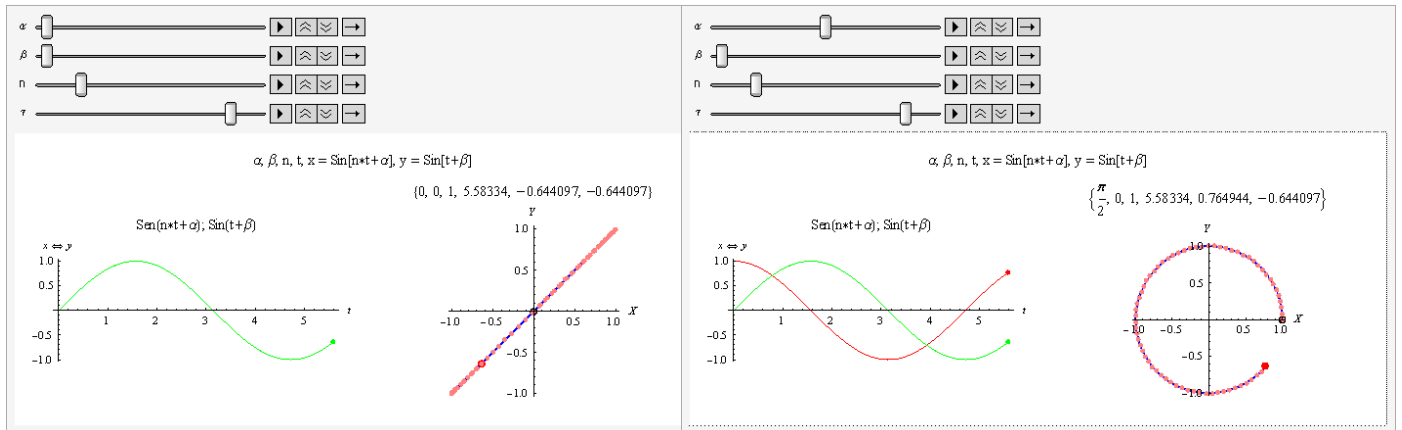
### Capítulo 3. Funciones Trigonométricas y Curvas Planas

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\searrow x = y; \quad -1 \leq y \leq -1$$

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t + \frac{\pi}{2}) \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\swarrow x^2 + y^2 = 1, \quad -1 \leq y \leq -1$$

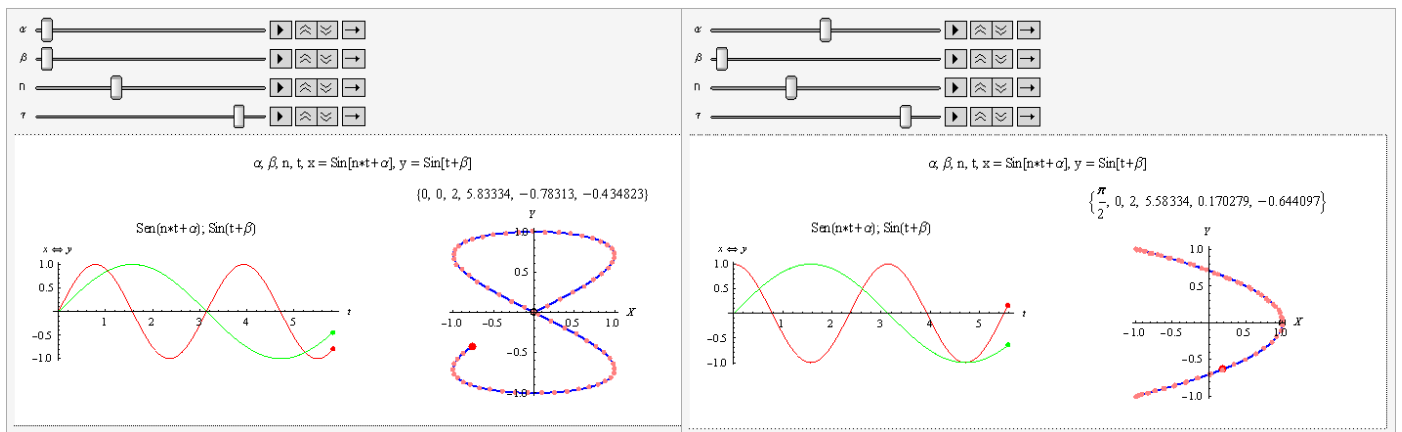


$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\searrow x = 2y \left( \pm \sqrt{1 - y^2} \right), \quad -1 \leq y \leq -1$$

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t + \frac{\pi}{2}) \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\swarrow x = \cos(2t) = 1 - y^2, \quad -1 \leq y \leq -1$$



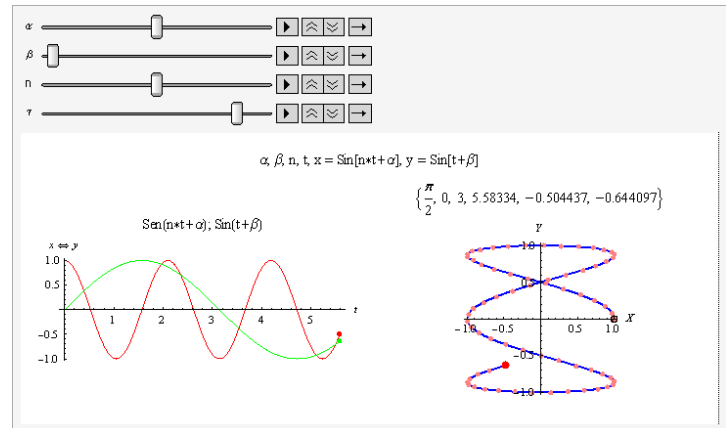
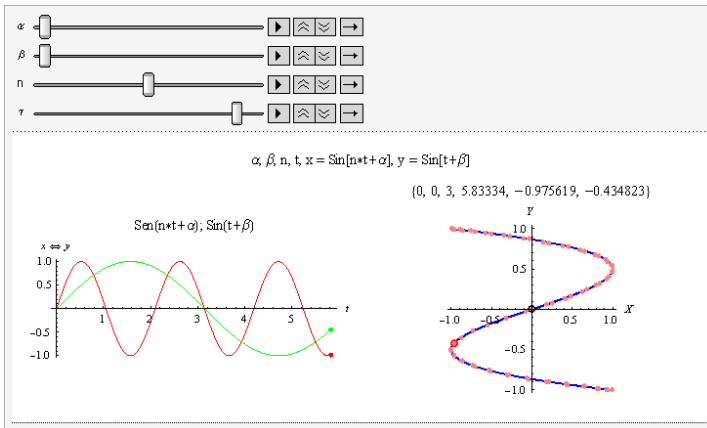
Cuadro 3.5:  $x(t) = \sin(nt)$  o  $x(t) = \cos(nt)$ , si  $y(t) = \sin t$ ,  $n \in \{1, 2\}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

$$\begin{cases} x(t) = \sin(3t) \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\searrow x = y(3 - 4y^2) \quad -1 \leq y \leq 1$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\swarrow x = (\pm\sqrt{1-y^2})(1 - 4y^2)$$

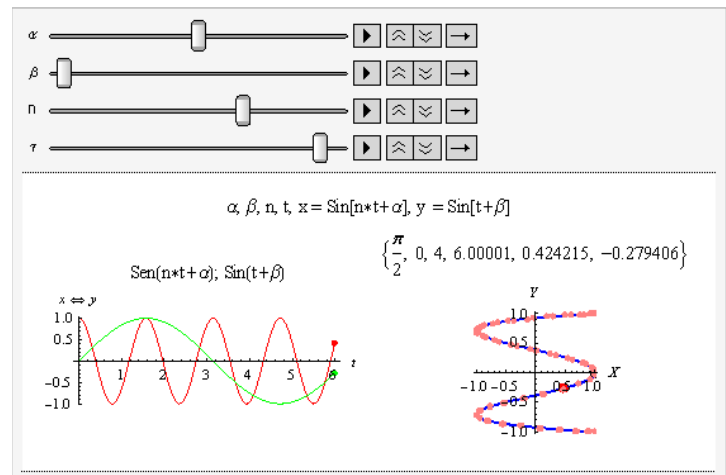
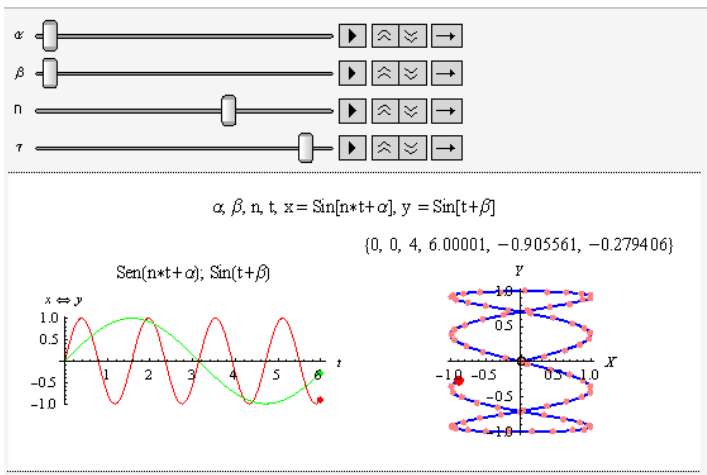


$$\begin{cases} x(t) = \sin(4t) \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\searrow x = y(\pm\sqrt{1-y^2})(4 - 8y^2) \quad -1 \leq y \leq 1$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos(4t) \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\swarrow x = 1 - 8y^2 + 8y^4, \quad -1 \leq y \leq 1$$



Cuadro 3.6:  $x(t) = \sin(nt)$  o  $x(t) = \cos(nt)$ , si  $y(t) = \sin t$ ,  $n \in \{3, 4\}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

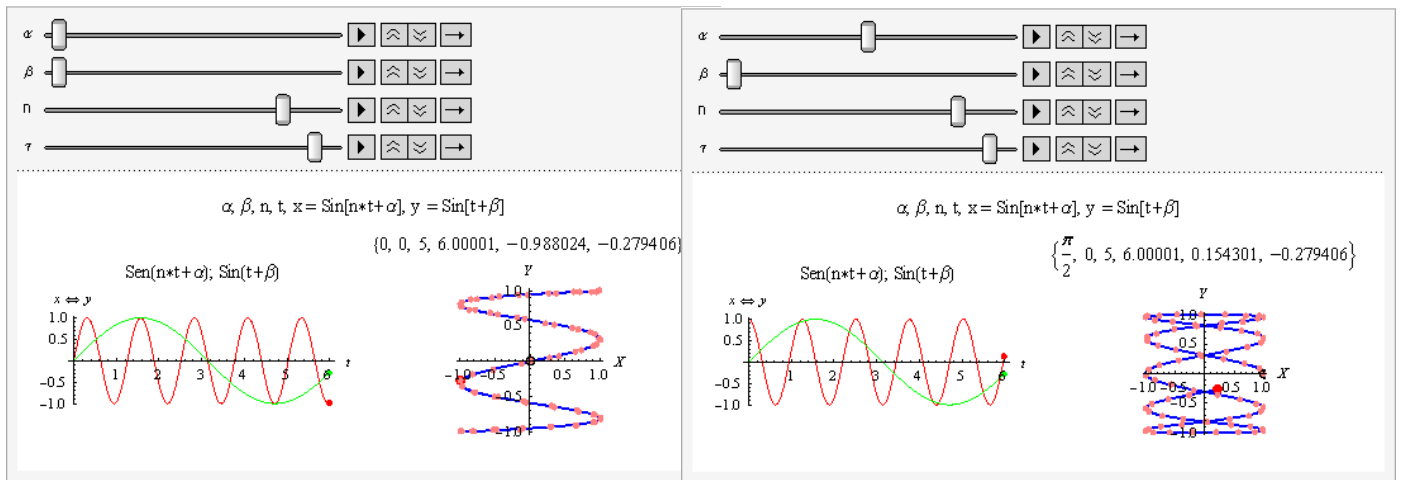
### Capítulo 3. Funciones Trigonométricas y Curvas Planas

$$\begin{cases} x(t) = \sin(5t) \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\searrow x = y(5 - 20y^2 + 16y^4)$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos(5t) \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\swarrow x = (\pm\sqrt{1-y^2})(1 - 12y^2 + 16y^4)$$

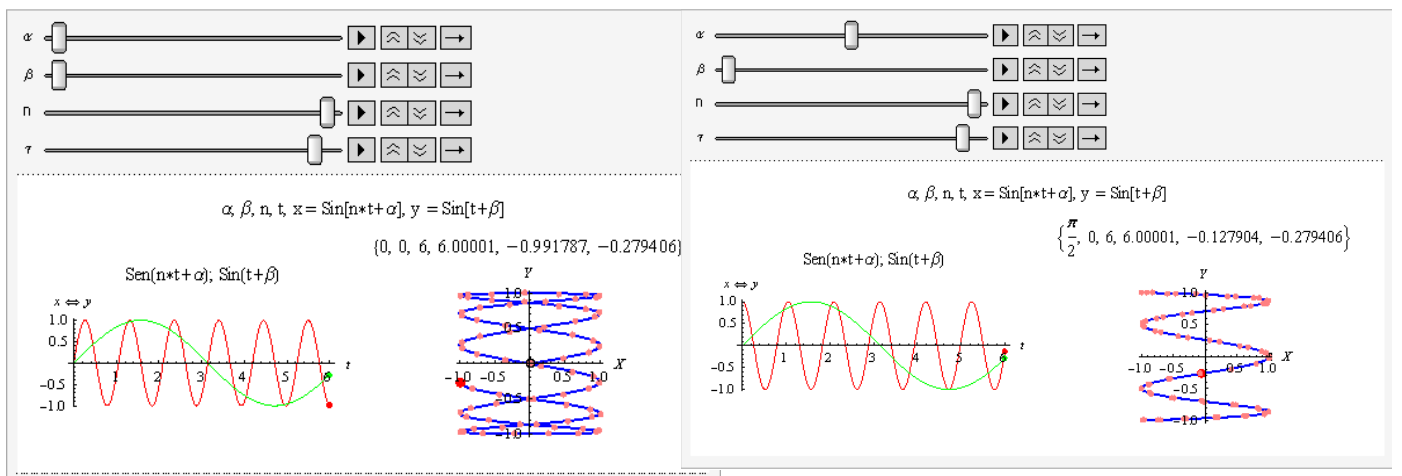


$$\begin{cases} x(t) = \sin(6t) \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\searrow x = y(\pm\sqrt{1-y^2})(6 - 32y^2 + 32y^4)$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos(6t) \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\swarrow x = 1 - 18y^2 + 48y^4 - 32y^6$$



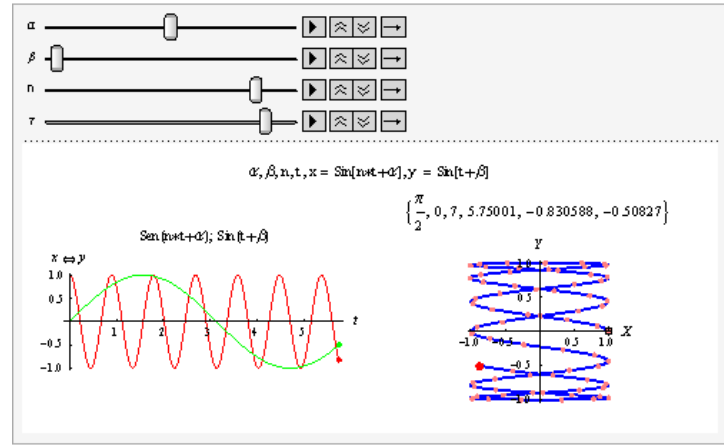
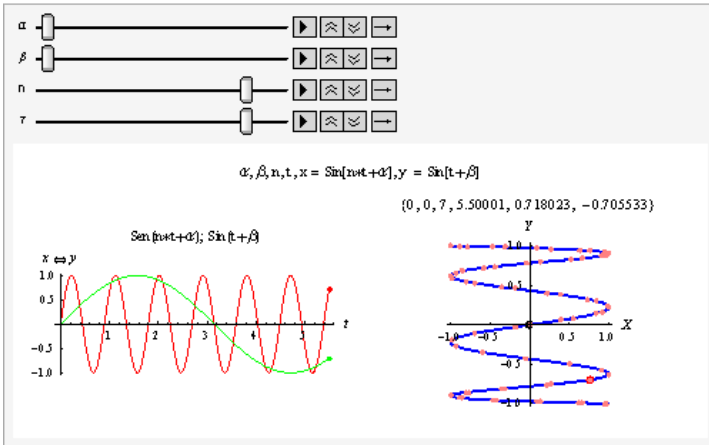
Cuadro 3.7:  $x(t) = \sin(nt)$  o  $x(t) = \cos(nt)$ , si  $y(t) = \sin t$ ,  $n \in \{5, 6\}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

$$\begin{cases} x(t) = \sin(7t) \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\searrow x = y(7 - 24y^2 + 80y^4 - 64y^6)$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos(7t) \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\swarrow x = (\pm\sqrt{1-y^2})(1 - 24y^2 + 80y^4 - 64y^6)$$

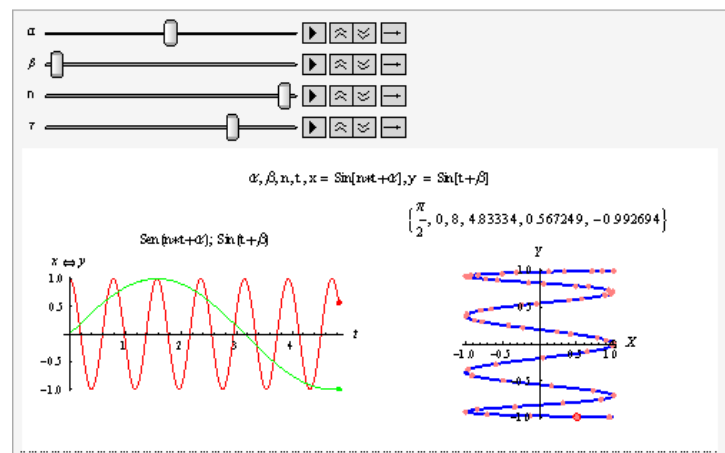
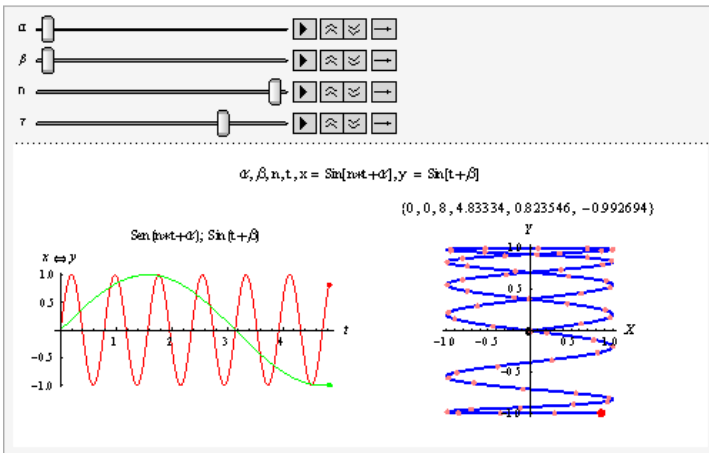


$$\begin{cases} x(t) = \sin(8t) \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\searrow x = y(7 - 24y^2 + 80y^4 - 64y^6)$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos(8t) \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\swarrow x = (\pm\sqrt{1-y^2})(1 - 24y^2 + 80y^4 - 64y^6)$$



Cuadro 3.8:  $x(t) = \sin(nt)$  o  $x(t) = \cos(nt)$ , si  $y(t) = \sin t$ ,  $n \in \{7, 8\}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

### Capítulo 3. Funciones Trigonómicas y Curvas Planas

---

	$\begin{cases} x(t) = \sin(mt) \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi];$	$\begin{cases} x(t) = \cos(mt) \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]. \quad m \in \mathbb{N}$		
$x = \sin(mt)$		$x = \cos(mt)$	Gráfica	
$x = \sin(0t)$	$x = 0$	$x = \cos(0t)$	$x = 1$	pág. ??
$x = \sin(t)$	$x = y$	$x = \cos(t)$	$x^2 + y^2 = 1$	pág. ??
$x = \sin(2t)$	$x = 2y(\pm\sqrt{1-y^2})$	$x = \cos(2t)$	$x = 1 - 2y^2$	pág. ??
$x = \sin(3t)$	$x = y(3 - 4y^2)$	$x = \cos(3t)$	$x = (\pm\sqrt{1-y^2})(1 - 4y^2)$	pág. ??
$x = \sin(4t)$	$x = 4y(\pm\sqrt{1-y^2})(1 - 2y^2)$	$x = \cos(4t)$	$x = 1 - 8y^2 + 8y^4$	pág. ??
$x = \sin(5t)$	$x = y(5 - 20y^2 + 16y^4)$	$x = \cos(5t)$	$x = (\pm\sqrt{1-y^2})(1 - 12y^2 + 16y^4)$	pág. ??
$x = \sin(6t)$	$x = y(\pm\sqrt{1-y^2})(6 - 32y^2 + 32y^4)$	$x = \cos(6t)$	$x = 1 - 18y^2 + 48y^4 - 32y^6$	pág. ??
$x = \sin(7t)$	$x = y(7 - 24y^2 + 80y^4 - 64y^6)$	$x = \cos(7t)$	$x = (\pm\sqrt{1-y^2})(1 - 24y^2 + 80y^4 - 64y^6)$	pág. ??
$x = \sin(8t)$	$x = y(\pm\sqrt{1-y^2})(8 - 48y^2 + 160y^4 - 128y^6)$	$x = \cos(8t)$	$x = 1 - 32y^2 + 128y^4 - 224y^6 + 128y^8$	pág. ??

Cuadro 3.9:  $x(t) = \sin(mt)$  o  $x(t) = \cos(mt)$ , si  $y(t) = \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

## Parte IV

# Valor Absoluto y Gráficas de Curvas Planas





# Capítulo 4

## Medida: Valor Absoluto

## 4.1. Ejercicios resueltos: PRIMER COLOQUIO OP-TATIVO

Nivel I: 1<sup>er</sup> PARCIAL - ♣ © 1<sup>er</sup> COLOQUIO.

1. ♣ © Interprete gráficamente la solución de las siguientes la inecuaciones:

i)  $2 < |2^{-|x|} - 1| + 2 < \frac{3}{2}$

ii)  $2 < |2^{-|x|} - 1| + 2 < \frac{5}{2}$

Respuesta i):

∅      ii)  $(-1, 0) \cup (0, 1)$

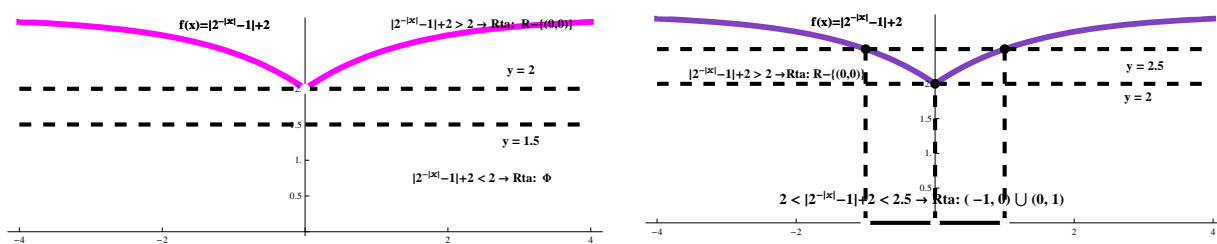


Figura 4.1: Solución gráfica de  $2 < |2^{-|x|} - 1| + 2 < \frac{3}{2}$  y  $2 < |2^{-|x|} - 1| + 2 < \frac{5}{2}$ .

2. ♣ © Cada vez que tenga que determinar la existencia de límites en los que aparezcan las funciones  $[x]$ ,  $\{x\}$ ,  $\{x\}$  y  $x - [x]$  multiplicadas por  $x^{-1}$  o  $x^{-2}$ , se recomienda hacer las gráficas en entornos de las abscisas bajo interés bosquejando la multiplicación de las funciones involucradas, ref. Figura 4.2.

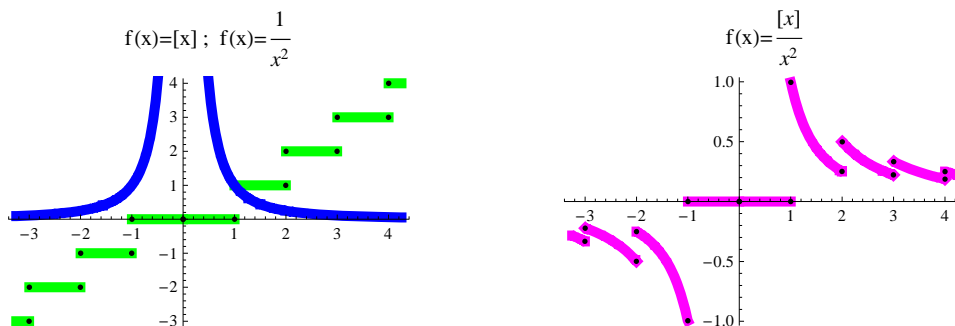


Figura 4.2: Sugerencia: e.g. Graficar  $[x]$  y multiplicarla por  $\frac{1}{x^2}$

Recomendamos también efectuar los bosquejos de las gráficas de las funciones recíprocas de  $\lfloor x \rfloor$ ,  $\lceil x \rceil$ ,  $[x]$  en un intervalo del origen, (Ver Figura 4.6).

♣ © Determine, cuando existan, los siguientes límites<sup>1</sup>:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x}$       (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lceil x \rceil}{x}$       (c)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{\lceil x \rceil - 1}$

Respuesta (a):

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x} = -1$ . Damos a continuación una de las posibles justificaciones a este resultado:  $\lim_{x \rightarrow 0} \lfloor x \rfloor = \lfloor 0 \rfloor = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{0}{x}}_{\rightarrow 0} = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} =$

$- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} 1 = -1$  como existen finitos en la abscisa  $x = 0$  la diferencia de los límites  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x}$  utilizando del Teorema 5.0.2, suponiendo la existencia

de límites finitos, de §5 inciso d) pág. 187, se ha concluido que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x} = -1$ .

Analogamente se puede concluir que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \lceil x \rceil}{x} = 1$  (Ref. Figura 4.3, última derecha).

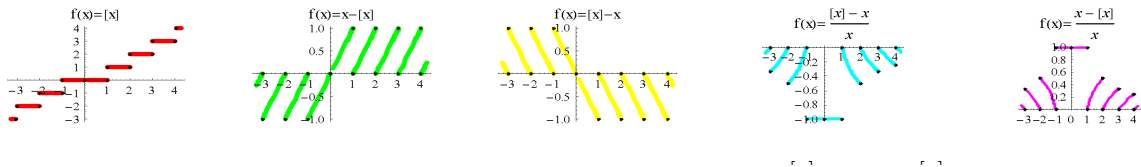


Figura 4.3: Gráficas de  $\lfloor x \rfloor$ ,  $x - \lfloor x \rfloor$ ,  $\lceil x \rceil - x$ ,  $\frac{\lceil x \rceil - x}{x}$  y  $\frac{x - \lceil x \rceil}{x}$ .

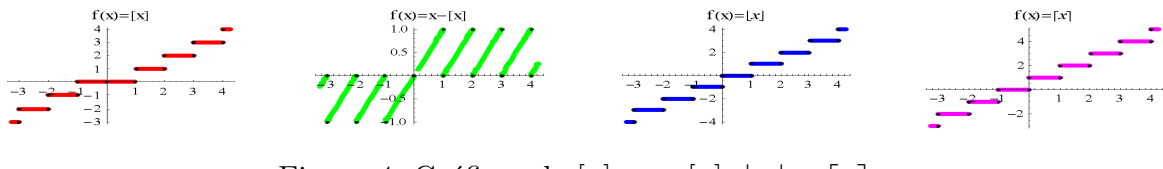


Figura 4.4: Gráficas de  $\lfloor x \rfloor$ ,  $x - \lfloor x \rfloor$ ,  $\lfloor x \rfloor$  y  $\lceil x \rceil$ .

Respuesta (b):

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lceil x \rceil}{x} = \not\exists$ . Damos a continuación una de las posibles justificaciones a este re-

<sup>1</sup>Ayuda: Una mirada concienzuda de la Figura 4.3 tal vez pueda ayudarle.

sultado: A partir de que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0$ , mientras que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$ , por lo tanto

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]}{x} = 0$ . Además  $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$  y como  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]}{x} = 1$ .

Brevemente  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[x]}{x} = \not\exists$  puesto que  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]}{x} = 1 \end{cases}$ . Ref. a la Figura 4.5, primera representación a izquierda.

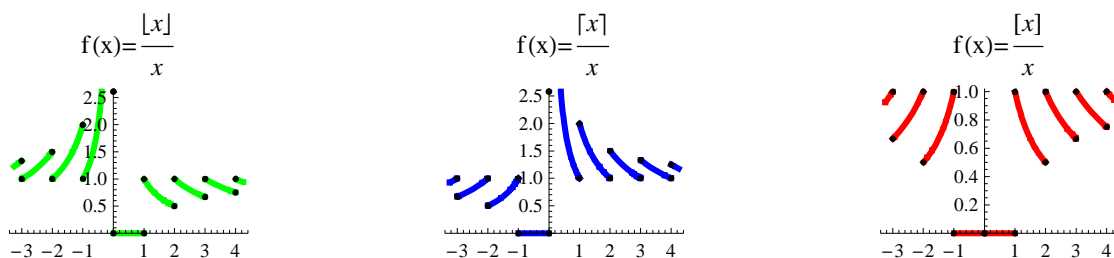


Figura 4.5: Multiplicación por  $x^{-1}$  de  $[x]$ ,  $\lceil x \rceil$ ,  $\lfloor x \rfloor$ .

Respuesta (c):

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\lceil x \rceil - 1}$$

Observemos que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\lceil t \rceil} = 0$  pues  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^+} t = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \lceil t \rceil = 1 \end{cases}$ .

Haciendo la sustitución  $t = x - 1$  y como  $\lceil t + 1 \rceil - 1 = \lceil t \rceil$ , el  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\lceil x \rceil - 1}$  se ha transformado en  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\lceil t \rceil}$  que ya hemos determinado con valor nulo (Ref. Figura 4.7, bosquejo gráfico del cuadro medio).

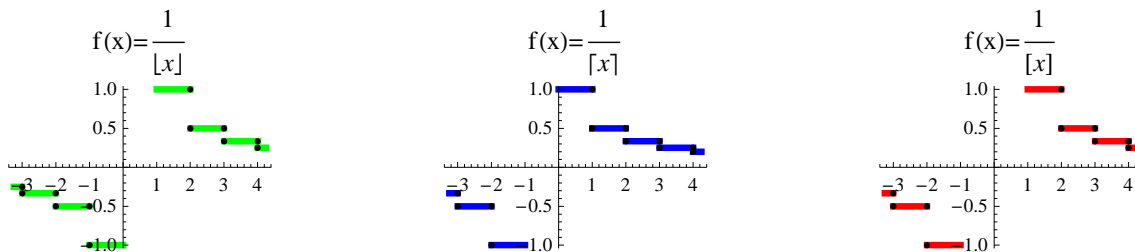


Figura 4.6: Recíprocas de  $[x]$ ,  $\lceil x \rceil$ ,  $\lfloor x \rfloor$  en un intervalo del origen.

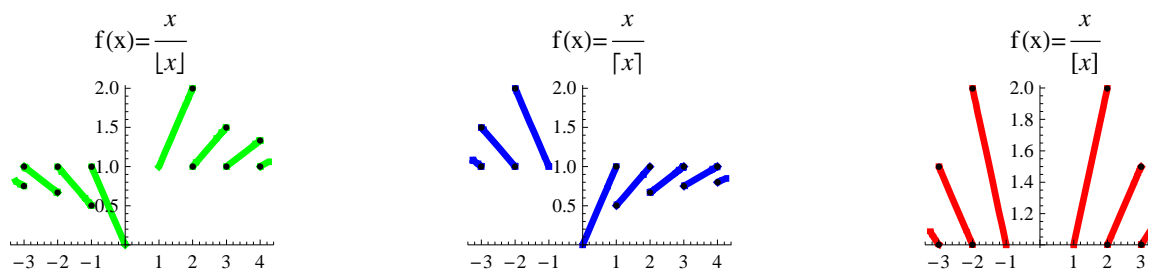


Figura 4.7: Recíprocas de  $\lfloor x \rfloor$ ,  $\lceil x \rceil$ ,  $\lceil x \rceil$  multiplicadas por  $x$ .

3. ♣ © Determine el dominio de definición de  $f(x) = \frac{\sqrt{x - \lfloor x \rfloor}}{x}$ , clasifique, si existen, las discontinuidades y redefina  $f(x)$  si es posible extender su dominio de continuidad.

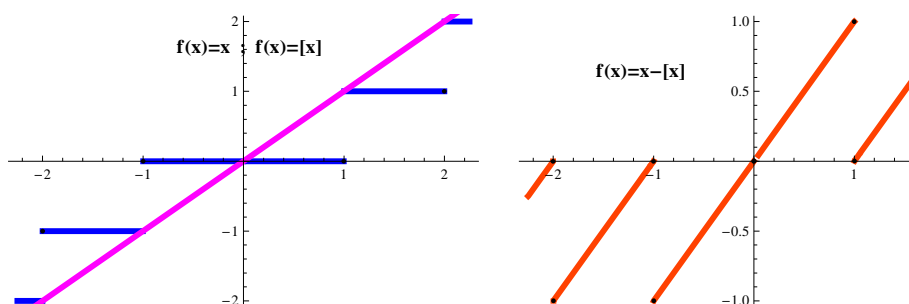


Figura 4.8: La diferencia de ordenadas entre  $x$  y  $\lfloor x \rfloor$  para contruir  $x - \lfloor x \rfloor$ .

Respuesta:

$\text{Dom}(f(x)) = \text{Dom}\left(\frac{\sqrt{x - \lfloor x \rfloor}}{x}\right)$  está determinado por el conjunto de los reales positivos y los enteros negativos,  $\{-\mathbb{N} \cup \mathbb{R}^+\}$ .

En cuanto a la continuidad de  $f(x)$  comencemos:

- a) por declarar que en el conjunto  $-\mathbb{N}$ , cada abscisa es un punto aislado de la  $f(x) = \frac{\sqrt{x - \lfloor x \rfloor}}{x}$ , por lo que no hay continuidad de  $f(x)$  en ningún real negativo  $\mathbb{R}^-$ , solamente está definida en los enteros negativos valiendo en cada uno de ellos cero, sea  $z \in \mathbb{N}$  un natural, entonces  $-z$  es un entero negativo y  $f(-z) = \frac{\sqrt{-z - \lfloor -z \rfloor}}{-z} = \frac{\sqrt{-z + z}}{-z} = \frac{\sqrt{0}}{-z} = 0$  (Ref. Figura 4.9).

- b) En contraste hay continuidad de  $f(x)$  en cada abscisa real positiva no entera,  $r \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$ , ya que  $\lim_{x \rightarrow r} \frac{\sqrt{x - [x]}}{x} = \frac{\sqrt{r - [r]}}{r}$ , si  $r$  no es entero, observe la segunda gráfica de izquierda a derecha en la Figura 4.4. Este cómputo es el resultado de la composición de la función continua  $\sqrt{(\ )}$  para un argumento  $(\ ) > 0$  y la continuidad de la función  $x - [x]$ , i.e. la continuidad de la función parte decimal en una abscisa real positiva no entera.
- c) Sea  $z \in \mathbb{N}$  las siguientes consideraciones permiten concluir la discontinuidad de  $f(x) = \frac{\sqrt{x - [x]}}{x}$  en los naturales.

- $\lim_{x \rightarrow z^+} [x] = z$
- $\lim_{x \rightarrow z^-} [x] = z - 1$
- $\lim_{x \rightarrow z} x = z$

Entonces  $\lim_{x \rightarrow z^+} x - [x] = 0$  mientras que  $\lim_{x \rightarrow z^-} x - [x] = z - (z - 1) = 1$ , por lo tanto  $\nexists \lim_{x \rightarrow z} x - [x]$  y tampoco existe el  $\nexists \lim_{x \rightarrow z} \sqrt{x - [x]}$  en una abscisa entera positiva y su división por la función continua  $x$ ,  $\lim_{x \rightarrow z} x = z$  permite aseverar la no existencia del límite pues la función del numerador no tiene límite:

$$\boxed{\nexists \lim_{x \rightarrow z} \frac{\sqrt{x - [x]}}{x}, \quad z \in \mathbb{N}.$$

d)

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x - [x]}}{x} = +\infty}$$

Desde que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x - [x]} = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$  son ambos infinitésimos en cero y el de la función que va en el denominador es de orden potencial uno y el del denominador tiene orden menor que uno, de manera precisa tiene exponente fraccionario  $\frac{1}{2}$ , resulta evidente el resultado enmarcado (Ver Figura 4.9 derecha).

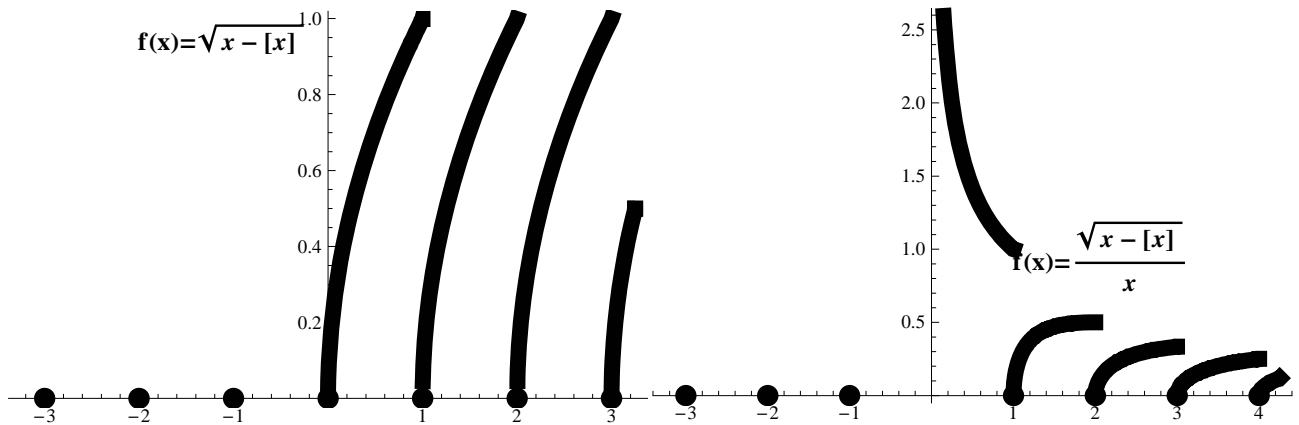


Figura 4.9: Gráficas de  $f(x) = \sqrt{x - [x]}$  y  $f(x) = \frac{\sqrt{x - [x]}}{x}$

4. ♣ © Resuelva analíticamente la inecuación  $|\log_2|(x + 1)|| \geq K$ , si  $K \gg 0$ .

Respuesta:

Obsérvese que el dominio de  $f(x) = |\log_2|(x + 1)||$ , son todos los reales a excepción de la abscisa  $x = -1$ .

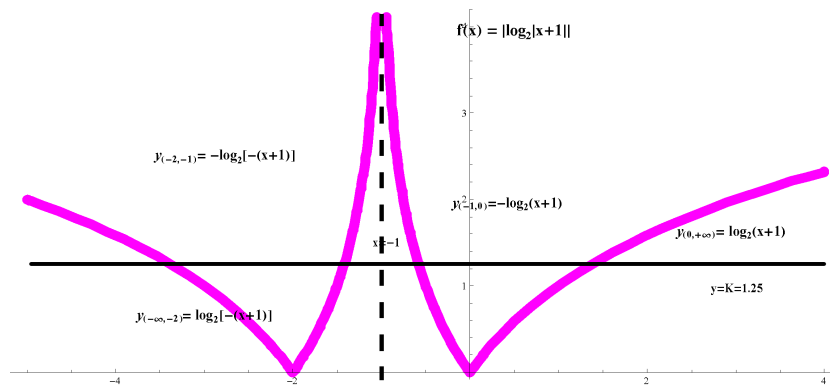


Figura 4.10:  $|\log_2|(x + 1)|| \geq K$ , si  $K \gg 0$

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ -(x + 1) & \text{si } x < -1 \end{cases} . \text{ De aquí en más se descarta } x = -1.$$

$$|\log_2|x+1|| = \begin{cases} |\log_2(x + 1)| & \text{si } x > -1 \\ |\log_2[-(x + 1)]| & \text{si } x < -1 \end{cases} = \begin{cases} \log_2(x + 1) & \text{si } x > -1 \text{ y si } \log_2(x + 1) \geq 0 \\ -\log_2(x + 1) & \text{si } x > -1 \text{ y si } \log_2(x + 1) < 0 \\ \log_2[-(x + 1)] & \text{si } x < -1 \text{ y si } \log_2[-(x + 1)] \geq 0 \\ -\log_2[-(x + 1)] & \text{si } x < -1 \text{ y si } \log_2[-(x + 1)] < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 |\log_2|x+1|| &= \begin{cases} \log_2(x+1) & \text{si } x > -1 \text{ y si } \overbrace{\log_2(x+1) \geq 0}^{x \geq 0} \\ -\log_2(x+1) & \text{si } x > -1 \text{ y si } \overbrace{\log_2(x+1) < 0}^{-1 < x < 0} \\ \log_2[-(x+1)] & \text{si } x < -1 \text{ y si } \overbrace{\log_2[-(x+1)] \geq 0}^{x \leq -2} \\ -\log_2[-(x+1)] & \text{si } x < -1 \text{ y si } \overbrace{\log_2[-(x+1)] < 0}^{-2 < x < -1} \end{cases} \\
 |\log_2|x+1|| &= \begin{cases} \log_2(x+1) & \text{si } x \geq 0 \\ -\log_2(x+1) & \text{si } -1 < x < 0 \\ \log_2[-(x+1)] & \text{si } x \leq -2 \\ -\log_2[-(x+1)] & \text{si } -2 < x < -1 \end{cases} \\
 0 \lll K \leq |\log_2|x+1|| &= \begin{cases} \log_2(x+1) \geq K & \text{si } x \geq 0 \\ -\log_2(x+1) \geq K & \text{si } -1 < x < 0 \\ \log_2[-(x+1)] \geq K & \text{si } x \leq -2 \\ -\log_2[-(x+1)] \geq K & \text{si } -2 < x < -1 \end{cases} \\
 0 \lll K \leq |\log_2|x+1|| &= \begin{cases} x \geq 2^K - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x \leq 2^{-K} - 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ x \leq -2^K - 1 & \text{si } x \leq -2 \\ x \geq -1 - 2^{-K} & \text{si } -2 < x < -1 \end{cases} \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

En la Figura 4.11 se pueden detectar claramente cada uno de los cuatro subintervalos soluciones, con la intersección de la recta horizontal  $y = K$  y cada una de las definiciones por tramos de la función  $f(x) = |\log_2|(x+1)||$ . Brevemente en la rama  $(-\infty, -2]$  los valores solución pertenecen al intervalo  $x \leq -2^K - 1$ , en  $(-2, -1)$  los valores solución pertenecen al intervalo  $-2 < x \geq -1 - 2^{-K} < -1$ , lo que implica la solución en el conjunto de los reales  $[-1 - 2^{-K}, -1)$ , mientras que en la rama definida sobre el  $(-1, 0)$ ,  $-1 < x \leq 2^{-K} - 1$ , i.e.  $(-1, 2^{-K} - 1]$  y para el trozo definido en  $[0, +\infty)$  le corresponde  $x \geq 2^K - 1$ , esto es al intervalo cerrado no acotado  $[2^K - 1, +\infty)$ .



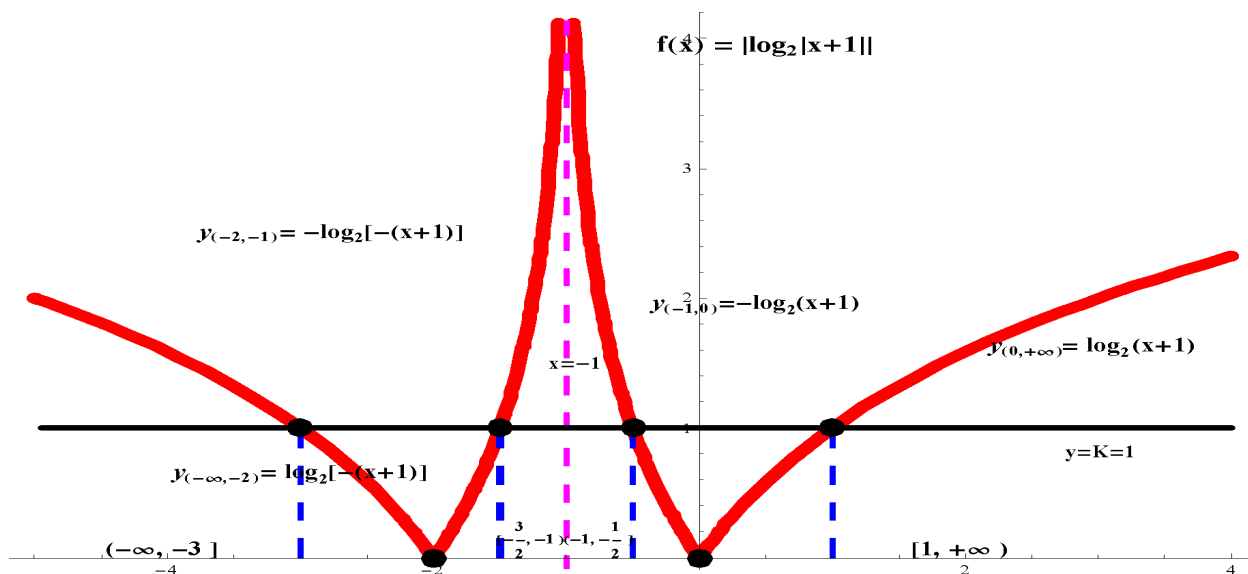


Figura 4.11: Soluciones de  $|\log_2|(x + 1)|| \geq 1$ :  $(-\infty, -3]$ ;  $[-\frac{3}{2}, -1]$ ;  $(-1, -\frac{1}{2}]$ ;  $[1, +\infty)$

Si quisiéramos mantenernos estrictos a la consigna que impone un trabajo análtico, tendríamos que proseguir de la siguiente manera:

- $2^K - 1$  ¿ dónde está ubicado ? A partir de que  $0 < K < +\infty$  se tiene que  $2^0 < 2^K < 2^{+\infty}$ , es decir  $1 < 2^K < +\infty$  y por lo tanto al restar uno resulta  $0 < 2^K - 1 < +\infty$  que  $2^K - 1$  es un número positivo. Esto conlleva que en (4.1) la primer intersección de condiciones resulta ser el intervalo  $[2^K - 1, +\infty)$ .
- $2^{-K} - 1$  ¿ dónde está ubicado ? Desde  $0 < K < +\infty$  resulta  $-\infty < -K < 0$   $2^{-\infty} < 2^{-K} < 2^0$  es decir  $0 < 2^{-K} < 1$  restando uno en cada término de la desigualdad se concluye que  $-1 < 2^{-K} - 1 < 0$ . En palabras sencillas  $2^{-K} - 1$  es un número negativo que pertenece al intervalo abierto  $(-1, 0)$ . Finalmente la segunda fila en (4.1) establece como intervalo común para la validez de ambas condiciones al semiabierto  $(-1, 2^{-K} - 1]$ .
- $-2^K - 1$  ¿ dónde está ubicado ? Desde  $0 < K < +\infty$  se tiene  $2^0 < 2^K < 2^{+\infty}$  y  $-2^{+\infty} < -2^K < -2^0$ , es decir  $-\infty < -2^K < -1$  y  $-\infty < -2^K - 1 < -2$ . Se ha establecido que  $-2^K - 1$  es un número negativo estrictamente menor

## Capítulo 4. Medida: Valor Absoluto

que dos. Lo que establece como conjunto solución de la tercera fila en (4.1) al intervalo  $(-\infty, -2^K - 1]$

- d)  $2^{-K} - 1$  ¿ dónde está ubicado ? Una vez más  $0 < K < +\infty$  resulta  $-\infty < -K < 0$   $2^{-\infty} < 2^{-K} < 2^0$  o sea  $0 < 2^{-K} < 1$  luego  $-1 < -2^{-K} < 0$  y finalmente  $-1 - 1 < -2^{-K} - 1 < -1$  determina que  $-2^{-K} - 1$  es un real negativo que vive en el  $(2, -1)$ . Ambas condiciones en la cuarta fila de (4.1) se satisfacen en el intervalo semiabierto  $[-2^{-K} - 1, -1)$ .

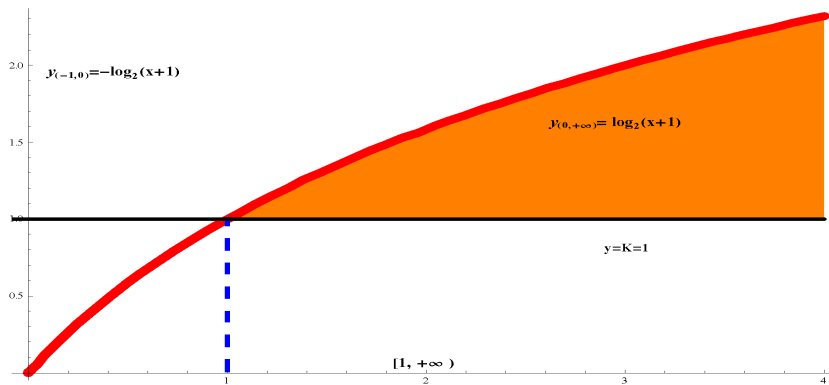


Figura 4.12:  $\log_2(x+1) \geq 1$ : Solución  $[1, +\infty)$ .

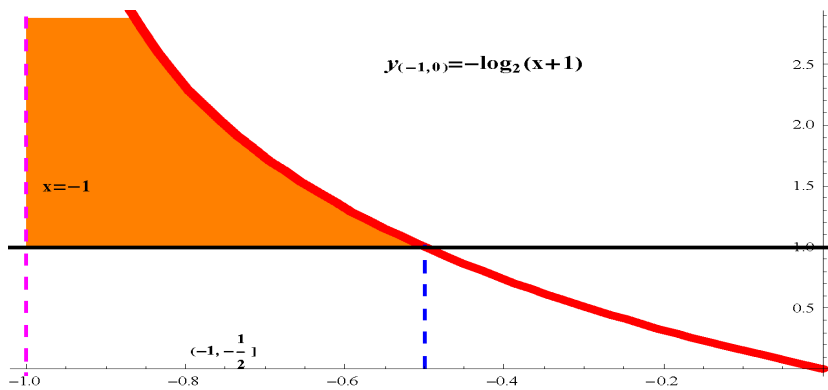


Figura 4.13:  $\log_2[-(x+1)] \geq 1$ : Solución  $(-1, 2^{-K} - 1]$ .

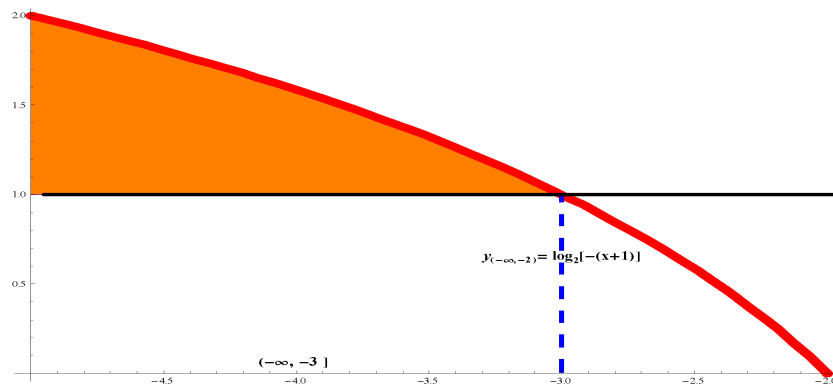


Figura 4.14:  $\log_2[-(x + 1)] \geq 1$  : Solución  $(-\infty, -2^K - 1]$ .

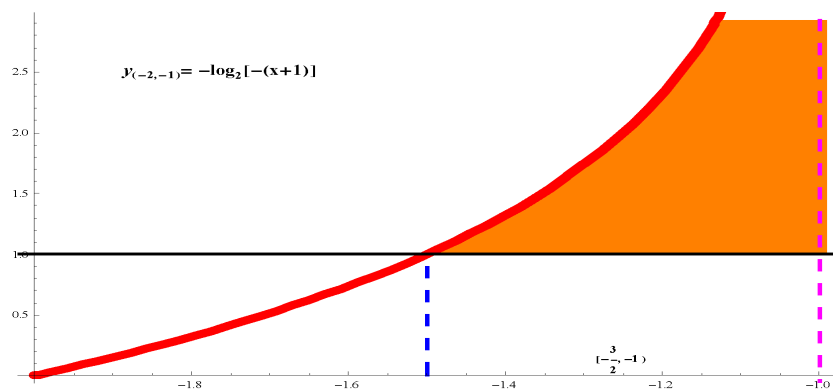


Figura 4.15:  $-\log_2[-(x + 1)] \geq 1$  : Solución  $[-2^{-K} - 1, -1)$ .

Entonces hemos justificado y confirmado que las condiciones en (4.1) resultaron ser:

$$0 \lll K \leq |\log_2|x + 1|| = \begin{cases} [2^K - 1, +\infty) \\ (-1, 2^{-K} - 1] \\ (-\infty, -2^K - 1] \\ [-1 - 2^{-K}, -1) \end{cases} \quad (4.2)$$

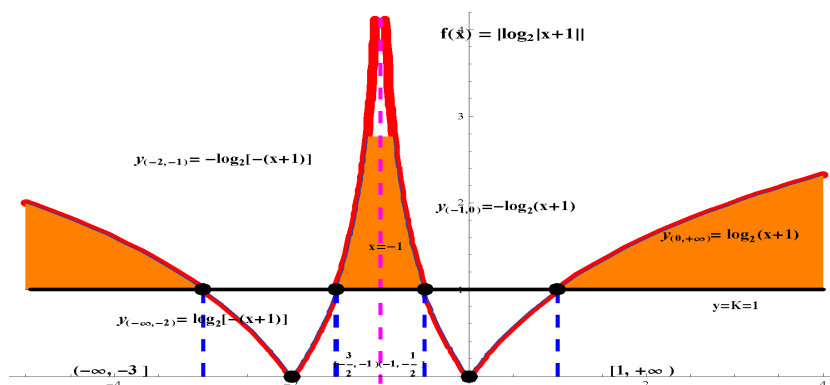


Figura 4.16: Soluciones de  $|\log_2|(x+1)|| \geq 1$ :  $(-\infty, -3]$ ;  $[-\frac{3}{2}, -1)$ ;  $(-1, -\frac{1}{2}]$ ;  $[1, +\infty)$

5. ♣ © Estudie analíticamente el siguiente recorrido:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases} \quad t \in [-\infty, +\infty]$$

*Sugerencia:* El recorrido se realiza sobre parte de la curva plana  $x^2 - y^2 - 1 = 0$ .

Respuesta:

$$\begin{aligned} \cosh^2 t - \sinh^2 t &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} [(e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}) - (e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t})] = 1. \end{aligned}$$

$$\boxed{\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \rightarrow x^2 - y^2 = 1 \text{ si } x \geq 1}$$

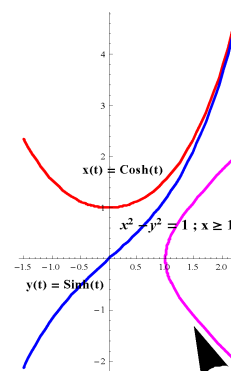


Figura 4.17: Funciones hiperbólicas:  $m(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  y  $n(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$

6. ♣ © Estudie analíticamente el siguiente recorrido:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(t + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \iff \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \sin t \\ y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin(t) + \cos(t)) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Sugerencia: El recorrido se realiza sobre parte de la curva plana  $2y^2 - 1 - x = 0$ .  
(Ref. Figura 15.2).

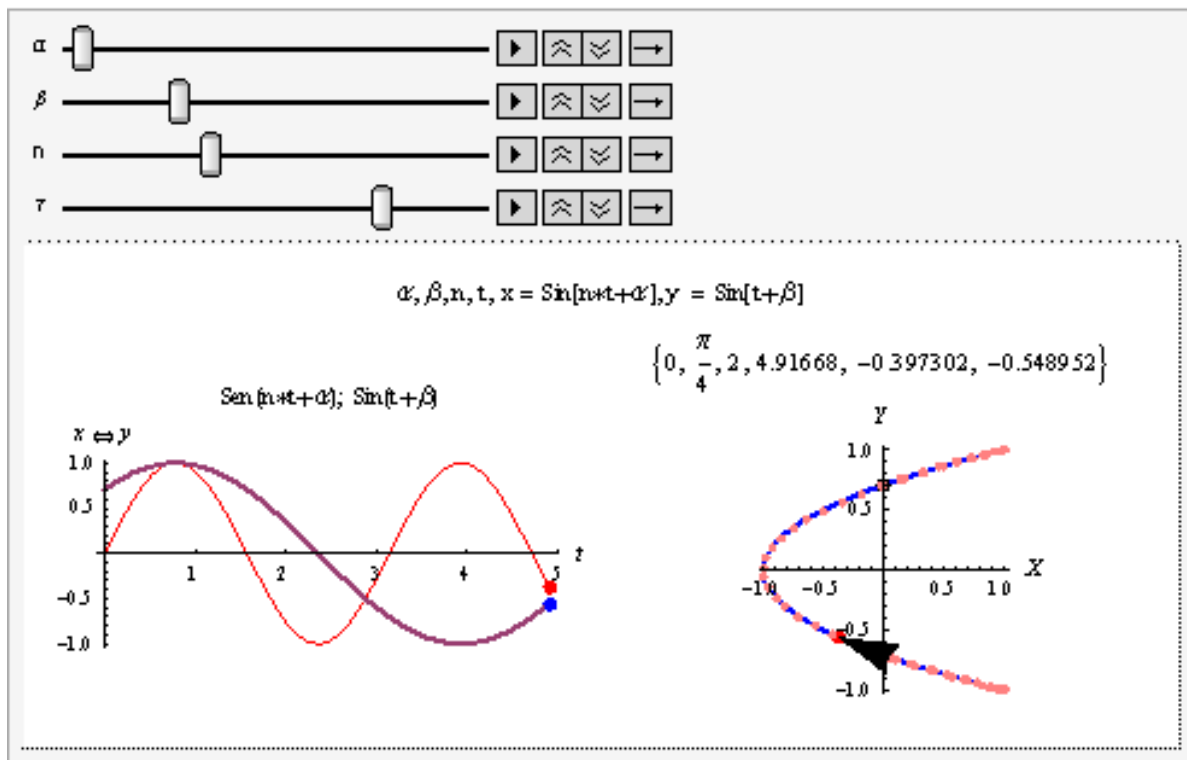


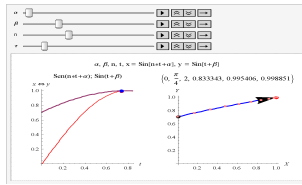
Figura 4.18:  $x(t) = \sin(2t)$  e  $y(t) = \sin(t + \frac{\pi}{4})$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

Respuesta:

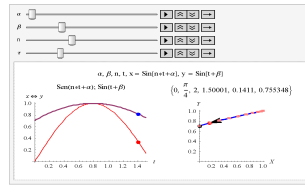
La ayuda evidencia como eliminar el parámetro  $t$  para determinar la parábola sobre la cual se realiza el movimiento. El recorrido comienza y termina en el punto  $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ . Sin embargo este punto es atravesado durante el movimiento una vez más además de ser punto inicial y final del viaje. Cada uno de los cuadros presentados en la Tabla 4.1 muestra como se recorre la porción de la parábola  $2y^2 - 1 - x = 0$  contenida en el compacto  $(-1, 1) \times (-1, 1)$  a medida que el parámetro  $t$  va incrementándose en intervalos consecutivos y concatenados de amplitud  $\frac{\pi}{4}$ .

# Capítulo 4. Medida: Valor Absoluto

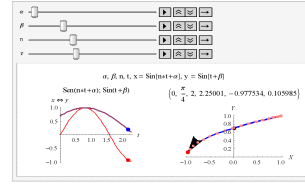
$$t \in [0, \frac{\pi}{4}] : (0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \rightarrow (1, 1)$$



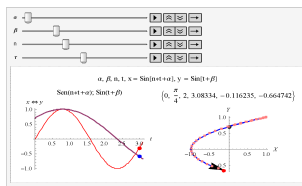
$$t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] : (1, 1) \rightarrow (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$$



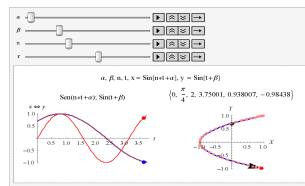
$$t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}] : (0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \rightarrow (-1, 0)$$



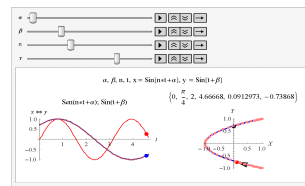
$$t \in [\frac{3\pi}{4}, \pi] : (-1, 0) \rightarrow (0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$



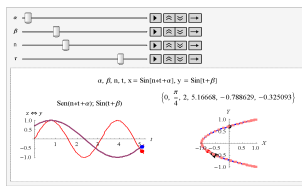
$$t \in [\pi, \frac{5\pi}{4}] : (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \rightarrow (1, -1)$$



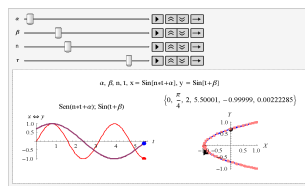
$$t \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}] : (1, -1) \rightarrow (0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$



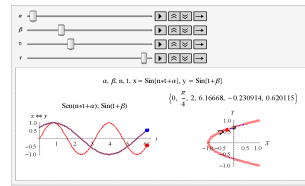
$$t \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}] : (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \rightarrow (-1, 0)$$



$$t \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}] : (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \rightarrow (-1, 0)$$



$$t \in [\frac{7\pi}{4}, 2\pi] : (-1, 0) \rightarrow (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$$



Cuadro 4.1: El recorrido que se realiza sobre parte de  $2y^2 - 1 - x = 0$ .

**Observación 4.1.1** *Estimados Lectores: Tengan muy presente que las representaciones gráficas son perfectibles. SIEMPRE CONFIRME UD ! si no existe alguna pérdida de detalles u omisiones relevantes.*

## 4.2. Inversión por ramas de $y = \cosh x$ .

### Inversión por trozos de “ $y = \cosh(x)$ ”

$y = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow e^x + e^{-x} = 2y$  multiplicando esta identidad por  $e^x$  se obtiene  $e^{2x} + 1 = 2ye^x$  o de manera equivalente  $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$  sustituyendo  $e^x$  por  $w$  resulta  $w^2 - 2yw + 1 = 0$  cuyas raíces son:

$$w_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

- $w_1 = e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$   
 $y = \cosh(x) \geq 1, y^2 \geq 1, y^2 - 1 \geq 0, \sqrt{y^2 - 1} \geq 0 \Rightarrow$

$$y + \sqrt{y^2 - 1} \geq 1$$

$\therefore$  aplicando a esta desigualdad  $\ln(\cdot)$  resulta que  $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \geq \ln 1 = 0$ , i.e.

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \geq 0.$$

Es decir, cada punto de la gráfica de  $y = \cosh x$  para  $x \geq 0$  es representable por  $(x, \cosh(x)) = (\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}), y)$ .

- $w_2 = e^x = y - \sqrt{y^2 - 1}$   
 Para  $y \geq 1$  son válidas las siguientes desigualdades  $(y - 1)^2 \leq y^2 - 1 \leq y^2$ .  
 A partir de  $y^2 - 1 \geq (y - 1)^2$ ,  $\sqrt{y^2 - 1} \geq \sqrt{(y - 1)^2} = y - 1$  puesto que  $y \geq 1$ , en consecuencia si  $\sqrt{y^2 - 1} \geq y - 1$  entonces  $-\sqrt{y^2 - 1} \leq 1 - y$  adicionando  $y$  a ambos miembros  $y - \sqrt{y^2 - 1} \leq y + 1 - y \therefore$

$$y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1.$$

Por otro lado siendo que si  $y \geq 1$  es  $y^2 - 1 \leq y^2$  entonces  $\sqrt{y^2 - 1} \leq \sqrt{y^2} = y$  multiplicando por  $-1$  se obtiene  $-\sqrt{y^2 - 1} \geq -y$ , por último adicionando  $y$  resulta

$$y - \sqrt{y^2 - 1} \geq 0.$$

Entonces

$$0 \leq y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1$$

de donde

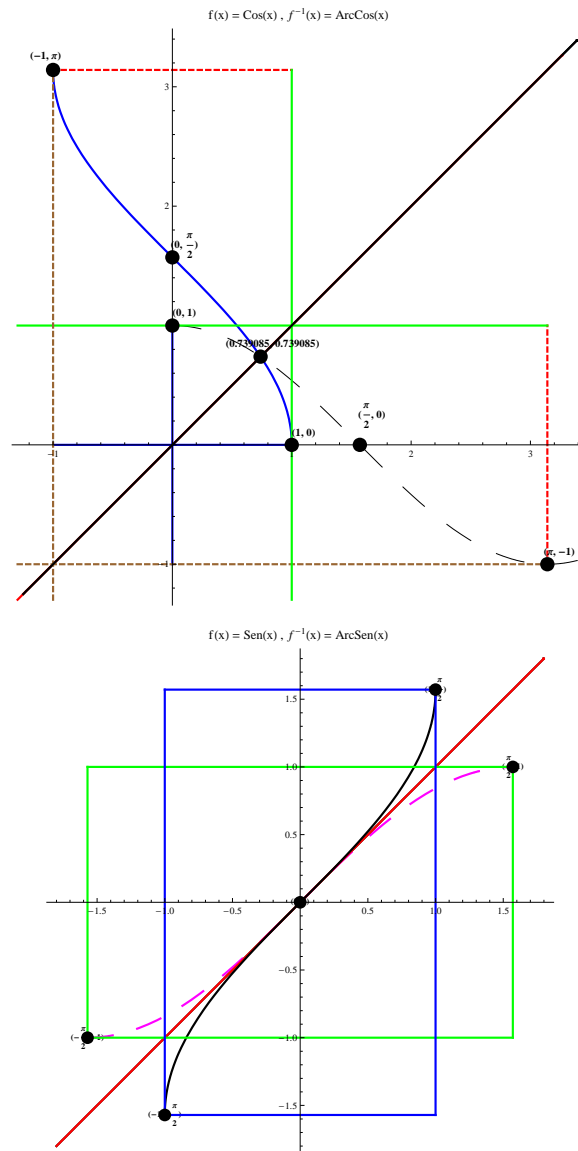
$$-\infty < x = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) \leq 0.$$

Es decir, cada punto de la gráfica de  $y = \cosh x$  para  $x \leq 0$  es representable por  $(x, \cosh(x)) = (\ln(y - \sqrt{y^2 - 1}), y)$ .

Cuadro 4.2: Inversión por ramas  $y = \cosh x$ .

### 4.3. Inversión en intervalo principal.

En las siguientes figuras se muestra gráficamente y en detalle la inversión de las funciones trigonométricas, seleccionado un intervalo principal adecuado. Es decir, se representan gráficamente como funciones de  $x$ , la función trigonométrica y su inversa. Proponemos al estudiante un análisis minucioso e interpretación geométrica de cada imagen.



Cuadro 4.3: Inversión en intervalos principales  $y = \sin x, y = \cos x$ .



## Parte V

# Límite y Continuidad



# Capítulo 5

## Teoremas de límites.

**Definición 5.0.1**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 / \forall x : x \in D_f \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$

**Teorema 5.0.2** *Sea  $n$  un entero positivo,  $k$  una constante, y  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones con límite en  $x_0$ , i.e.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$ . Entonces,*

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$

b)  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$

c)  $\lim_{x \rightarrow x_0} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \ell_1$

d)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_1 \pm \ell_2$

e)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$

f) Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$

g)  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^n = \ell_1^n$

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

---

*Demostración.* Justificación e)

$$\begin{aligned}
 |f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| &= |f(x)g(x) - \ell_1g(x) + \ell_1g(x) - \ell_1\ell_2| \\
 &= |g(x)(f(x) - \ell_1) + \ell_1(g(x) - \ell_2)| \\
 &\leq |g(x)(f(x) - \ell_1)| + |\ell_1(g(x) - \ell_2)| \\
 &\leq |g(x)||f(x) - \ell_1| + |\ell_1||g(x) - \ell_2| \\
 |f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| &\leq |g(x)||f(x) - \ell_1| + |\ell_1||g(x) - \ell_2| \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

$$\forall x \in 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)| < \epsilon + |\ell_2|. \quad (*)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$ , existen  $\delta_2$  y  $\delta_3$  tales que

$$\forall x \in 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \frac{\epsilon}{2(\epsilon + |\ell_2|)}. \quad (**)$$

$$\forall x \in 0 < |x - x_0| < \delta_3 \Rightarrow |g(x) - \ell_2| < \frac{\epsilon}{2|\ell_1|}. \quad (***)$$

si elige  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ , entonces se verifica

$$\forall x \in 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |g(x)| < \epsilon + |\ell_2| \\ |f(x) - \ell_1| < \frac{\epsilon}{2(\epsilon + |\ell_2|)} \\ |g(x) - \ell_2| < \frac{\epsilon}{2|\ell_1|} \end{cases} \tag{5.2}$$

las desigualdades anteriores (5.2) hacen que el  $2^{\circ}$  miembro de la desigualdad (5.1) se mantenga menor que  $\epsilon$

$$|f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| \leq |g(x)||f(x) - \ell_1| + |\ell_1||g(x) - \ell_2| < \epsilon \tag{5.3}$$

$$\forall x \in 0 < |x - x_0| < \delta . \blacksquare$$

Justificación f)

Verifique dicho postulado a partir de

$$1^\circ) \text{ Justificar que } \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{g(x)} \right] = \frac{1}{\left[ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right]}.$$

2º) Utilizar el postulado e).

En primer lugar justificaremos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{g(x)} \right] = \frac{1}{\left[ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right]} = \frac{1}{\ell_2}$ .

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell_2} \right| = \frac{|\ell_2 - g(x)|}{|g(x)\ell_2|} = \frac{|g(x) - \ell_2|}{|g(x)||\ell_2|} \quad (5.4)$$

Si  $\ell_2 \neq 0$  entonces  $\ell_2 > 0$  ó  $\ell_2 < 0$ . Consideremos que  $\ell_2 > 0$ , entonces  $\forall \epsilon > 0$   $\exists$ :  $\ell_2 - \epsilon > 0$  se tiene considerando además que por hipótesis existe el  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2 \neq 0$  que

$$\forall x \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - \ell_2| < \epsilon$$

análogamente

$$\forall x \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow -\epsilon + \ell_2 < g(x) < \epsilon + \ell_2$$

bajo nuestra suposición

$$\forall x \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow 0 < -\epsilon + \ell_2 < g(x) < \epsilon + \ell_2$$

$$\frac{1}{\ell_2 - \epsilon} > \frac{1}{g(x)} > \frac{1}{\epsilon + \ell_2} > 0$$

como  $\ell_2 > 0$ , la multiplicación de la desigualdad previa por  $\frac{1}{\ell_2}$  no cambia el orden en la desigualdad

$$\frac{1}{(\ell_2 - \epsilon)(\ell_2)} > \frac{1}{g(x)\ell_2} > \frac{1}{(\epsilon + \ell_2)(\ell_2)} > 0$$

en consecuencia

$$0 < \frac{1}{g(x)\ell_2} < \frac{1}{(\ell_2 - \epsilon)(\ell_2)}$$

equivalentemente

$$\frac{1}{|g(x)\ell_2|} = \frac{1}{|g(x)||\ell_2|} = \frac{1}{|g(x)|\ell_2} < \frac{1}{(\ell_2 - \epsilon)(\ell_2)}$$

$$\forall x \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow \frac{|g(x) - \ell_2|}{|g(x)||\ell_2|} < \frac{|g(x) - \ell_2|}{(\ell_2 - \epsilon)(\ell_2)} \quad (5.5)$$

una vez más considerando la hipótesis de existencia el  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2 \neq 0$  se elige un  $\delta_2$

$$\forall x \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - \ell_2| < \epsilon (\ell_2 - \epsilon)(\ell_2)$$

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

---

finalmente para  $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$  obtenemos la validez de las siguientes desigualdades

$$\forall x \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell_2} \right| < \frac{|g(x) - \ell_2|}{(\ell_2 - \epsilon)(\ell_2)} \\ |g(x) - \ell_2| < \epsilon (\ell_2 - \epsilon)(\ell_2) \end{cases} \quad (5.6)$$

finalmente se ha obtenido que

$$\forall x \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell_2} \right| < \epsilon \quad (5.7)$$

En segundo lugar haciendo uso del postulado  $e)$  ( $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$ ) y de

la justificación previa que nos ha llevado a probar que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{g(x)} \right] = \frac{1}{\left[ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right]} = \frac{1}{\ell_2}$

resulta la validez de las siguientes expresiones

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \ell_1 \cdot \frac{1}{\ell_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

■

**Proposición 5.0.3** *Si existe límite finito es infinitésimo.*

Verifique que si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \ell = 0$ .

*Demostración.* Se infiere del simple hecho que  $|f(x) - \ell| = |f(x) - \ell - 0|$ . ■

**Proposición 5.0.4**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ .

*Demostración.* Directa desde la Definición 5.0.1, i.e. existencia del límite finito.

**Teorema 5.0.5** *Teorema de permanencia de signo.*

El  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \neq 0$ , existe un entorno reducido de  $x_0$  ( $E_r(x_0, \delta)$ ) tal que  $\forall x \in E_r(x_0, \delta)$  la función  $f(x)$  tiene el mismo signo que  $\ell$ .

*Demostración.* Supongamos  $\ell > 0$ , luego, seleccionemos  $\epsilon = \frac{\ell}{2}$  entonces  $\ell - \frac{\ell}{2} < f(x) < \ell + \frac{\ell}{2}$  equivalentemente  $\frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3\ell}{2} \rightarrow f(x) > \frac{\ell}{2} > 0$ , pero como  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell > 0 \exists$  un  $\delta > 0$  correspondiente al  $\epsilon$  seleccionado tal que  $\forall x \in E_r(x_0, \delta) \quad f(x) > 0$ . ■

**Teorema 5.0.6** *Teorema del Encaje.*

Sean  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$  funciones que satisfacen  $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in E_r(x_0, \delta)$ . Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ ,  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ .

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$ . Escójase  $\delta_1$  tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow \ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$$

y  $\delta_2$  tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow \ell - \epsilon < h(x) < \ell + \epsilon$$

escójase  $\delta_3$  tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta_3 \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Sea  $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ . Entonces,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \ell - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \epsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell.$$

■

**Ejemplo 5.0.7** Si se sabe que  $1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \forall x$  próxima a 0 pero diferente a 0. ¿Qué se puede concluir?

*Respuesta:* Sea  $f(x) = 1 - \frac{x^2}{6}$ ,  $g(x) = \frac{\sin x}{x}$  y  $h(x) = 1$ , resulta entonces utilizando el Teorema del encaje que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

## 5.1. Existencia del límite finito: Ejemplos resueltos utilizando la definición.

Los siguientes ejemplos prueban por definición la existencia del límite.

**Ejemplo 5.1.1**  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2$ .

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

*Respuesta:* Apliquemos la definición. Consideremos el entorno (genérico) de  $x_0^2$  y de radio  $\epsilon$ , que notaremos  $E(x_0^2, \epsilon) = (x_0^2 - \epsilon, x_0^2 + \epsilon)$ . Debemos encontrar un  $\delta(\epsilon) > 0$  tal que si  $0 < |x - x_0| < \delta$  (si  $x \in E_r(x_0, \delta)$ ) entonces  $f(x) = x^2 \in E(x_0^2, \epsilon) = (x_0^2 - \epsilon, x_0^2 + \epsilon)$ . Para ello es conveniente preguntarnos qué significa esta pertenencia es decir, tratar de ver con claridad en qué situación debe estar  $x$  para que

$$f(x) = x^2 \in (x_0^2 - \epsilon, x_0^2 + \epsilon) \quad (5.8)$$

$$\text{Pero (5.8)} \Leftrightarrow |x^2 - x_0^2| < \epsilon \Leftrightarrow |x - x_0||x + x_0| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - x_0||x + x_0| < \epsilon \quad (5.9)$$

En la última desigualdad (5.9) se vería con claridad que valor debe tener  $\delta$  para que  $0 < |x - x_0| < \delta$  implique  $x^2 \in (x_0^2 - \epsilon, x_0^2 + \epsilon)$  si en lugar del factor  $|x + x_0|$  hubiera un número.

Pero estudiar el  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  significa estudiar el comportamiento de la función cuando  $x$  está “próximo” a  $x_0$  y en realidad no interesan los valores de  $f(x)$  para  $x$  “fuera” de algún entorno  $E(x_0, \delta_1)$ . Tomemos  $\delta_1 = 1$  y estudiemos la función sólo para  $x \in E(x_0, \delta_1 = 1)$ .

Sabemos que si  $x$  verifica la desigualdad (5.9) entonces  $f(x)$  verifica la desigualdad (5.8). Pero si  $x \in E(x_0, 1)$  se tiene que  $x_0 - 1 < x < x_0 + 1$  si sumamos  $x_0$  a cada término de la desigualdad previa resulta  $x_0 + x_0 - 1 < x + x_0 < x_0 + x_0 + 1 \therefore$   
 $\Leftrightarrow 2x_0 - 1 < x + x_0 < 2x_0 + 1$

$$|x + x_0| < \max\{|2x_0 - 1|, |2x_0 + 1|\}.$$

Luego si llamamos  $M = \max\{|2x_0 - 1|, |2x_0 + 1|\}$  resulta que  $|x + x_0| < M$ . (Ver Figura 5.1).

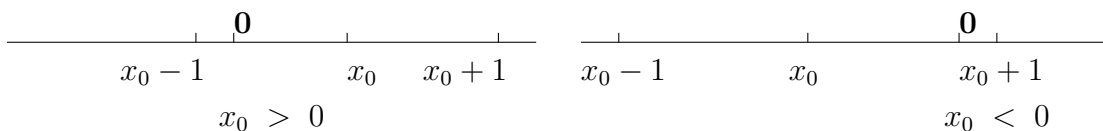


Figura 5.1: Ubicación de  $x_0$ .

Nuestro objetivo es hallar  $\delta$  tal que si  $0 < |x - x_0| < \delta$  entonces  $|x^2 - x_0^2| < \epsilon$  o sea  $|x - x_0||x + x_0| < \epsilon$  con la elección de  $\delta_1$  hemos encontrado una cota superior  $M$



para  $|x + x_0|$  que permite a su vez acotar  $|x^2 - x_0^2|$  en términos de ella y de  $|x - x_0|$  como sigue

$$|x^2 - x_0^2| < |x - x_0| M \quad (5.10)$$

∴ ¿Cómo debe ser  $\delta_2$  para que  $|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |x^2 - x_0^2| < |x - x_0| M < \epsilon$  ?  
en consecuencia

∴ ¿Cómo debe ser  $\delta_2$  para que  $|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |x - x_0| M < \epsilon$  ?

claramente  $\delta_2 = \frac{\epsilon}{M}$

Tomando  $\delta_2 = \frac{\epsilon}{M}$  es claro que  $0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |x - x_0| < \frac{\epsilon}{M} \Leftrightarrow |x - x_0| M < \epsilon \Rightarrow |x^2 - x_0^2| < \epsilon$ . ■

**Observación 5.1.2** Esta conclusión es válida si  $\delta = \delta_2 \leq \delta_1$ , si no lo fuese basta tomar  $\delta = \text{Mín} \{\delta_1, \delta_2\}$ . En este ejercicio se complicó la obtención del  $\delta$  pues este en general depende no solamente de la elección del  $\epsilon$  sino también de  $x_0$ .

**Ejemplo 5.1.3**  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$  para  $x_0 > 0$ .

*Respuesta 1.:* Tomemos el entorno  $(\sqrt{x_0} - \epsilon, \sqrt{x_0} + \epsilon)$ . Veamos para qué valores de  $x$ , sus transformados por la función  $f(x) = \sqrt{x}$  caen entre las franjas verticales  $y = \sqrt{x_0} - \epsilon$  y  $y = \sqrt{x_0} + \epsilon$ , es decir  $\sqrt{x_0} - \epsilon < \sqrt{x} < \sqrt{x_0} + \epsilon$ , o análogamente  $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon$ :

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = |(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}) \left( \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right)| = \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| < \epsilon$$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| = |x - x_0| \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|}$$

Seleccionamos un entorno de  $x_0$  de radio  $\delta_1$  luego en principio estaremos trabajando para los  $x$  pertenecientes al entorno reducido  $0 < |x - x_0| < \delta_1$ , por lo tanto  $x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1$ .

Como  $f(x) = \sqrt{x}$  es creciente resulta la siguiente desigualdad a partir de la anterior  $\sqrt{x_0 - \delta_1} < \sqrt{x} < \sqrt{x_0 + \delta_1}$ , si sumamos  $\sqrt{x_0}$  a la anterior desigualdad se obtiene

$$0 < \sqrt{x_0 - \delta_1} + \sqrt{x_0} < \sqrt{x} + \sqrt{x_0} < \sqrt{x_0 + \delta_1} + \sqrt{x_0}$$

luego

$$\frac{1}{\sqrt{x_0 + \delta_1} + \sqrt{x_0}} < \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{1}{\sqrt{x_0 - \delta_1} + \sqrt{x_0}}$$

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

---

por lo tanto

$$\frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0 + \delta_1} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0 - \delta_1} + \sqrt{x_0}}$$

Observemos que

$$\sqrt{x} + \sqrt{x_0} > \sqrt{x_0}$$

luego

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{1}{\sqrt{x_0}}$$

por lo tanto

$$\frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0 + \delta_1} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0 - \delta_1} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}$$

en consecuencia si encontramos un  $\delta$  tal que  $0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \epsilon$  tendremos :

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \epsilon$$

finalmente si observamos que para que  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  valga  $\frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \epsilon$  basta tomar  $\delta_2 = \epsilon \sqrt{x_0}$  pues

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Leftrightarrow |x - x_0| < \epsilon \sqrt{x_0} \Leftrightarrow \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \epsilon$$

luego  $\forall x \in (x_0 - \epsilon \sqrt{x_0}, x_0 + \epsilon \sqrt{x_0})$  se cumple que  $f(x) = \sqrt{x} \in (\sqrt{x_0} - \epsilon, \sqrt{x_0} + \epsilon)$  es decir  $\delta = \delta_2$  depende de la amplitud del entorno del límite y del punto  $x_0$  donde se calcula el límite. ■

*Respuesta 2.:* Dado  $\epsilon > 0$  arbitrario, brevemente podemos seguir los siguientes pasos

1.

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| = |x - x_0| \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|}$$

2. Seleccionamos  $\delta = \delta_1 = \epsilon \sqrt{x_0} > 0$

por lo tanto estamos trabajando con el conjunto de  $x$  pertenecientes al entorno reducido  $E_r(x_0, \delta_1)$  por lo tanto

$$x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1 \quad \wedge \quad x \neq x_0$$

$$\begin{aligned}
 0 &< \sqrt{x_0 - \delta_1} + \sqrt{x_0} < \sqrt{x} + \sqrt{x_0} < \sqrt{x_0 + \delta_1} + \sqrt{x_0} \\
 \frac{1}{\sqrt{x_0 + \delta_1} + \sqrt{x_0}} &< \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{1}{\sqrt{x_0 - \delta_1} + \sqrt{x_0}} \\
 \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0 + \delta_1} + \sqrt{x_0}} &< \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0 - \delta_1} + \sqrt{x_0}} \\
 |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| &< \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

esta última desigualdad resulta de reemplazar  $\delta_1 = x_0$ , pero es válida cualquiera sea el  $\delta_1 > 0$  seleccionado.

3. Buscamos ahora un  $\delta_2$  tal que  $\forall x \in E_r(x_0, \delta_2)$  se verifique la siguiente desigualdad:

$$\frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \epsilon \tag{5.12}$$

¿Cómo debemos tomar  $\delta_2$  para que la ecuación (5.12) sea satisfecha?

$$|x - x_0| < \sqrt{x_0} \epsilon$$

la anterior desigualdad exhibe claramente que la elección debe ser

$$\delta_2 = \sqrt{x_0} \epsilon$$

4. Necesitamos que se verifiquen ambas desigualdades (5.11) y (5.12) para lograr dicho objetivo  $\delta$  resultará ser el  $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ .

■

*No es necesario leer!* Desde un punto de vista netamente práctico  $\delta$  puede resultar ser  $\delta_1$  ó  $\delta_2$

- i) Si  $\delta = \delta_2$  es porque  $\delta_2 < \delta_1 \Leftrightarrow \delta_2 = \epsilon \sqrt{\delta_1} < \delta_1 \Leftrightarrow \epsilon < \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_1}} = \sqrt{\delta_1}$ , como hemos seleccionado  $\delta_1 = x_0$  si  $\epsilon < \sqrt{x_0} \rightarrow \delta = \delta_2$ .
- ii) Si  $\delta = \delta_1$  es porque  $\delta_1 < \delta_2$  en consecuencia  $\delta_1 < \delta_2 \Leftrightarrow \delta_2 = \epsilon \sqrt{\delta_1} > \delta_1 \Leftrightarrow \epsilon > \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_1}} = \sqrt{\delta_1}$ , como hemos seleccionado  $\delta_1 = x_0$  si  $\epsilon > \sqrt{x_0} \rightarrow \delta = \delta_1$ .

*Sugerencia:* Aprovechano la simplicidad de la función analizada  $y = \sqrt{x}$  interprete gráficamente las consideraciones previas.

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

---

**Ejemplo 5.1.4**  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$ .

*Respuesta:* Realizamos la verificación para  $x_0 > 0$ .

Tomemos el entorno  $(\frac{1}{x_0} - \epsilon, \frac{1}{x_0} + \epsilon)$ . Veamos para qué valores de  $x$  es  $f(x) = \frac{1}{x} \in (\frac{1}{x_0} - \epsilon, \frac{1}{x_0} + \epsilon)$ , es decir

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x_0 - x|}{|x x_0|} = \frac{|x - x_0|}{|x x_0|} < \epsilon$$

Efectuaremos los pasos brevemente

1. Seleccionemos  $\delta = \delta_1$  tal que  $x_0 - \delta_1 > 0$ , por lo tanto estaremos trabajando para los  $x$  pertenecientes al entorno reducido  $0 < |x - x_0| < \delta_1$ , i.e.,

$$x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1 \quad \wedge \quad x \neq x_0$$

2. Para dichos valores de  $x$  la desigualdad  $\frac{|x - x_0|}{|x x_0|}$  puede acotarse de la siguiente forma

$$\begin{aligned} x_0 (x_0 - \delta_1) < x x_0 < (x_0 + \delta_1) x_0 \quad \wedge \quad x \neq x_0 \\ \frac{1}{x_0 (x_0 - \delta_1)} > \frac{1}{x x_0} > \frac{1}{x_0 (x_0 + \delta_1)} \quad \wedge \quad x \neq x_0 \\ \frac{1}{x x_0} < \frac{1}{x_0 (x_0 - \delta_1)} \\ \frac{|x - x_0|}{|x x_0|} < \frac{|x - x_0|}{x_0 (x_0 - \delta_1)} \end{aligned} \tag{5.13}$$

3. Buscamos ahora un  $\delta_2$  tal que  $\forall x \in E_r(x_0, \delta_2)$  se verifique la siguiente desigualdad :

$$\frac{|x - x_0|}{x_0 (x_0 - \delta_1)} < \epsilon \tag{5.14}$$

¿Cómo debemos tomar  $\delta_2$  para que la ecuación (5.14) sea satisfecha ?

$$|x - x_0| < \epsilon x_0 (x_0 - \delta_1)$$

la anterior desigualdad es verdadera pues  $x_0 (x_0 - \delta_1) > 0$ ,  $\therefore$

$$\delta_2 = \epsilon x_0 (x_0 - \delta_1)$$

4. Necesitamos que se verifiquen ambas desigualdades (5.13) y (5.14) para lograr dicho objetivo  $\delta$  resultará ser el  $\delta = \text{mín} \{\delta_1, \delta_2\}$ . ■

**Ejercicio 5.1.5** Verifique que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x_0} \quad x_0 \neq 0$ .

## 5.2. No existencia de límite finito.

Recordemos una vez más la definición de límite finito:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 / \forall x : x \in D_f \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Veamos como puede negarse la expresión anterior.

Para que la función  $f(x)$  no tenga límite en el punto  $a$ , la definición de límite no debe verificarse para ningún número real  $\ell$ , es decir,

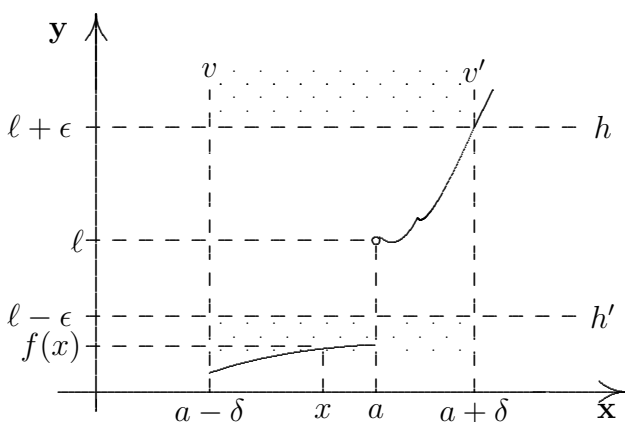
$$\forall \ell \in \mathbb{R} : \sim [ \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 / \forall x : (x \in D_f \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon) ]$$

Ahora bien, para negar la proposición anterior, hay que negar los cuantificadores y además negar la implicación mediante la conjunción entre el antecedente y la negación del consecuente.

O sea,  $f(x)$  no tiene límite en el punto  $a$  si y sólo si

$$\forall \ell : \exists \epsilon > 0 / \forall \delta > 0 \exists x / (x \in D_f \wedge 0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - \ell| \geq \epsilon)$$

Gráficamente, la expresión anterior significa que, para cualquier número real  $\ell$  que se proponga como posible límite finito de  $f(x)$  para  $x \rightarrow a$ , siempre es posible encontrar un entorno de  $\ell$  tal que, en cualquier entorno reducido del punto  $a$ , hay por lo menos un  $x$  del dominio, para el cual  $f(x)$  queda fuera del entorno de  $\ell$ .



O sea, existen dos rectas horizontales  $h$  y  $h'$  en las condiciones indicadas en la figura, tales que para cualquier par de verticales  $v$  y  $v'$ , hay un punto del gráfico, con abscisa distinta de  $a$ , que está ubicado entre las rectas verticales pero no entre las rectas horizontales.

Figura 5.2: Interpretación gráfica de la no existencia del límite.

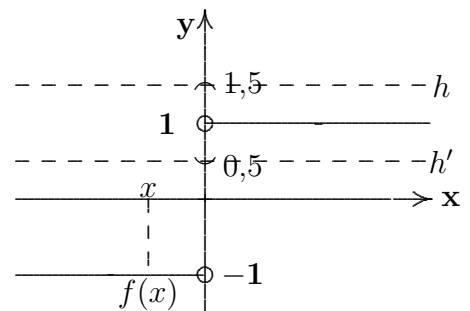
**Ejemplo 5.2.1** Consideremos la función  $f(x) : x \rightarrow \frac{|x|}{x}$ .

Puede demostrarse que no existe límite de esta función cuando  $x$  tiende al punto cero. Para ello probaremos en primer lugar que el número 1 no es el límite buscado. En segundo lugar probaremos que ningún número real  $\ell \neq 1$  es dicho límite. Si se verifican las dos proposiciones anteriores, entonces los valores de  $f$  no tienen límite para  $x \rightarrow 0$ .

En primer lugar, para probar que 1 no es el límite mencionado, consideremos un entorno de 1 de radio  $\epsilon = \frac{1}{2}$ .

En cualquier entorno reducido de centro 0 incluido en el eje de abscisas, hay puntos  $x \in D_f$  a la izquierda de 0 para los cuales  $f(x) = -1$

Es decir, para los cuales  $f(x)$  está fuera del entorno seleccionado de radio 0.5 de  $\ell = 1$ , i. e.  $E(1, \frac{1}{2})$ .



En segundo lugar, para probar que ningún número real  $\ell \neq 1$  es el límite de los valores de  $f$  para  $x \rightarrow 0$ , elegimos  $\epsilon = \frac{|1 - \ell|}{2}$ , pues si  $\ell \neq 1$  resulta dicha cantidad ser un  $\epsilon > 0$ .

Ahora bien, en cualquier entorno reducido del origen, hay puntos  $x$  a la derecha de 0 para los cuales  $f(x) = 1$ .

Por lo tanto, para esos  $x$ :

$$|f(x) - \ell| = |1 - \ell| > \frac{|1 - \ell|}{2} = \epsilon.$$

Es decir, queda probado que la función  $f$  no admite a ningún número real como límite en el punto de abscisa  $x_0 = 0$ .

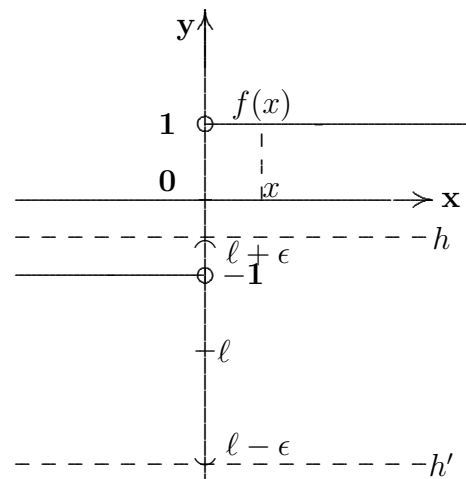


Figura 5.3:  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ .  $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

---

De manera similar puede verificarse que no existe un número real que sea el límite indicado en cada  $c/u$  de las siguientes expresiones:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow x_0} [x]$  si  $x_0 \in \mathbb{Z}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  si  $f(x) : \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

**Ejemplo 5.2.2** Consideremos por ejemplo la función  $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ .

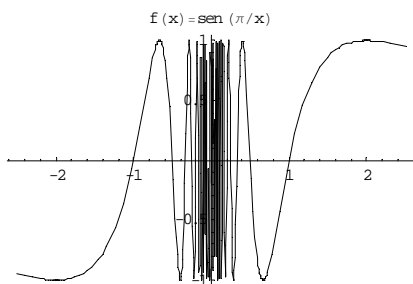


Figura 5.4:  $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$   $x \in [-2,5, 2,5]$ .

Comprobar gráficamente que la función  $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$  no tiene límite cuando  $x$  tiende a cero.

El  $D_{f(x)} = \mathbb{R} - \{0\}$ . Se verifica que  $f(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{-x}\right) = -\sin \frac{\pi}{x} = -f(x)$ , es una función *impar*.

Una primera inspección de la gráfica ( Figura 5.4) en un entorno reducido del cero, nos llevaría a pensar en la no existencia del  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$ , ya que la función es una onda que toma todos los valores desde -1 a 1, por pequeño que sea dicho entorno. Para  $x = \frac{1}{n}$ , con  $n \in \mathbb{Z}$  se tiene que  $\sin \frac{\pi}{x} \Big|_{x = \frac{1}{n}} = \sin n \pi = 0$ .



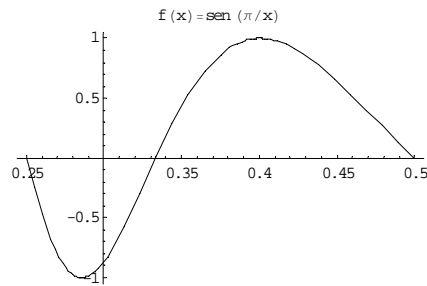


Figura 5.5:  $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$   $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ .

Entre dos consecutivos de estos puntos la función sube hasta +1 y vuelve a descender hasta cero, o baja hasta -1 y vuelve a ascender hasta cero.

Entre cada uno de estos puntos y el origen, la gráfica tiene infinitas oscilaciones.

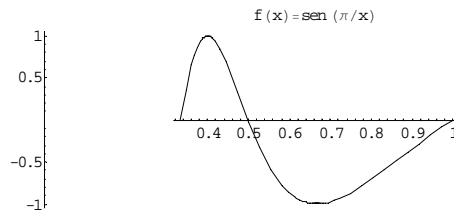


Figura 5.6:  $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$   $x \in [\frac{1}{3}, 1]$ .

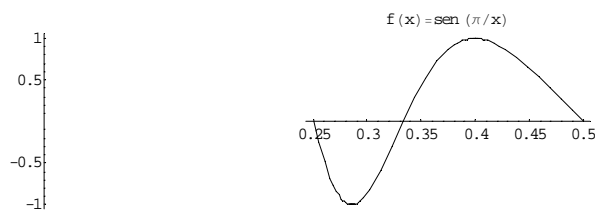


Figura 5.7:  $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$   $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ .

Figuras semejantes a las Figuras 5.6 y 5.7 se obtienen si se toman los intervalos de la forma  $[\frac{1}{(n+2)\pi}, \frac{1}{n\pi}]$   $n \in \mathbb{N}$ , en ellas se completa una única onda, de imagen, pasando por los valores  $0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$  ó  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0$ .

La imparidad de  $f(x) = \sin(\frac{\pi}{x})$  se refleja cuando se seleccionan intervalos de la forma

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

$[\frac{1}{n\pi}, \frac{1}{(n+2)\pi}]$   $n \in -\mathbb{N}$ , como lo evidencian las gráficas de la Figura 5.8 obtenidas utilizando el *software Mathematica*.

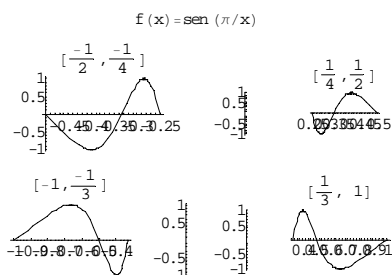


Figura 5.8:  $f(x) = \sin(\frac{\pi}{x})$   $x \in [\frac{1}{(n+2)\pi}, \frac{1}{n\pi}]$  ó  $[\frac{-1}{(n)\pi}, \frac{-1}{(n+2)\pi}]$   $n \in \pm \mathbb{N}$ .

No hay ningún número  $\ell$ , tal que los valores de la función se aproximen a él cuando  $x$  se aproxima a cero. Si existiese un límite  $\ell$ , dado cualquier entorno  $(\ell - \epsilon, \ell + \epsilon)$ , con  $\epsilon$  arbitrariamente pequeño, existiría un entorno reducido de 0,  $E_r(0, \delta)$  tal que a todos los  $x$  allí la función los aplica en  $(\ell - \epsilon, \ell + \epsilon)$ .

i) Veamos que un número  $\ell > 1$  no puede ser el  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  :

Tomando  $\epsilon_0 = \ell - 1$ , como  $\forall x \in \mathbb{R}$  vale que  $-1 \leq \sin(\frac{\pi}{x}) \leq 1$ , en la franja horizontal abierta comprendida entre las rectas  $y = \ell + \epsilon_0$  e  $y = \ell - \epsilon_0$ , (i. e.  $\ell + \ell - 1$  y  $\ell - (\ell - 1)$ ), resulta que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin \frac{\pi}{x} < 1 \therefore f(x) \notin (1 - \epsilon_0, 1 + \epsilon_0) = (1, 2\ell - 1) \therefore \ell$  no es  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{\pi}{x})$ . En la Figura 5.9 la zona sombreada indica la región del plano en el que se halla la gráfica de  $f(x)$  y evidencia claramente que cualquiera sea  $x$  en los reales  $f(x) = \sin(\frac{\pi}{x})$  satisface  $|f(x) - \ell| \geq \epsilon_0$ .

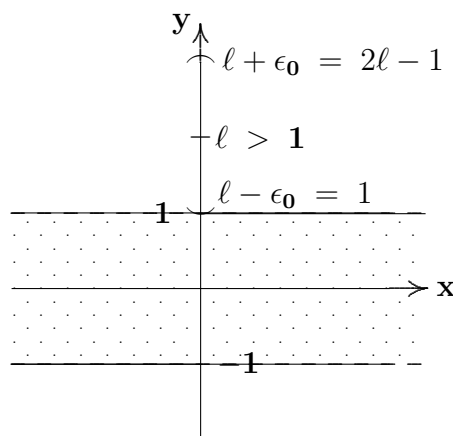


Figura 5.9:  $\ell > 1$ .

ii) Veamos que si  $\ell < -1$ , tampoco puede ser el  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ :

Basta tomar  $\epsilon_0 = -\ell - 1$ , como  $\forall x \in \mathbb{R}$  vale que  $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1$   $\therefore$  en la franja horizontal abierta comprendida entre  $\ell + \epsilon_0$  y  $\ell - \epsilon_0$ , (i. e.  $\ell + (-\ell - 1)$  y  $\ell - (-\ell - 1)$ ), resulta que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) > -1$   $\therefore f(x) \notin (\ell - \epsilon_0, \ell + \epsilon_0) = (-1, 2\ell + 1)$   $\therefore \ell$  no es el  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ . En la Figura 5.10 la zona sombreada indica la región del plano en el que se halla la gráfica de  $f(x)$  y evidencia claramente que cualquiera sea  $x$  en los reales  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$  satisface  $|f(x) - \ell| \geq \epsilon_0$ .

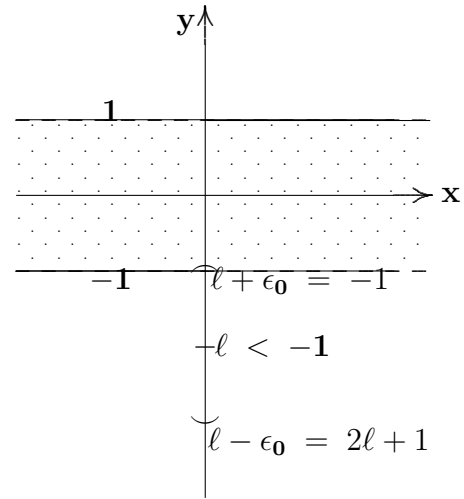


Figura 5.10:  $\ell < -1$ .

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

iii) Veamos que  $\ell = 1$  no puede ser  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

Tomando  $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$  el entorno  $E(1, \frac{1}{2}) \equiv (1 - \epsilon_0, 1 + \epsilon_0) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ . Podemos ver que  $\forall \delta > 0$ , en el entorno reducido  $E_r(0, \delta) \equiv (-\delta, \delta)_r = (-\delta, 0) \cup (0, \delta) \ni x_0 : \sin\left(\frac{\pi}{x_0}\right) = 0$ , más aún, es claro que existen infinidad de  $x_0$  que cumplen la anterior ecuación trigonométrica, basta tomar  $x_0 = \frac{1}{n}$ , pues  $\sin\left(\frac{\pi}{x_0}\right) \Big|_{\frac{1}{n}} = \sin n\pi = 0, n \in \mathbb{Z}$ .

$\therefore \ell = 1$  no es  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$  pues hemos probado que dado el entorno  $E(1, \frac{1}{2})$ , cualquier entorno reducido  $E_r(0, \delta)$  contiene puntos que la función no aplica en  $E(1, \frac{1}{2})$ .

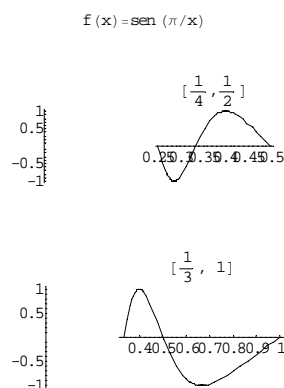


Figura 5.11:  $\ell = 1$ .

Si bien la Figura 5.11 han sido obtenidas para intervalos no muy cercanos al cero, cualquier representación gráfica de  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$  en intervalos de la forma  $[\frac{1}{(n+2)\pi}, \frac{1}{n\pi}]$   $n \in \mathbb{N}$  ó  $[\frac{1}{n\pi}, \frac{1}{(n+2)\pi}]$   $n \in -\mathbb{N}$  con  $n$  suficientemente grandes completarán una onda (imparidad de por medio) con las características de las representadas en la Figura 5.11. ¿Qué es lo que cambiará en realidad en las representaciones gráficas para intervalos como los siguientes:  $[\frac{1}{102}, \frac{1}{100}]$ ,  $[\frac{1}{10^6+2}, \frac{1}{10^6}]$ ,  $[-\frac{1}{10^6}, -\frac{1}{10^6+2}]$ , ...? *Sugerencia.* Observe una vez más la Figura 5.4 y compárela con las Figuras (5.6, 5.7, 5.8) ello le permitirá encontrar la respuesta.

iv) El número  $\ell = -1$  tampoco es el  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

Por análoga razón a  $\ell = 1$ ,  $\ell = -1$  no es el límite. Bastará con tomar  $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$ , es decir el entorno  $E(-1, \frac{1}{2})$  y en tal caso puntos de la forma  $x_0 = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,

o aquellos de la forma  $x_0 = \frac{1+4k}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , en los primeros la función es nula y en los segundos toma el valor 1, ambos valores no pertenecen al  $E(-1, \frac{1}{2})$  y además tales puntos pueden encontrarse en cualquier entorno reducido del cero.

v) Veamos ahora que si  $\ell \in (0, 1)$ ,  $\ell$  no es el  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{\pi}{x})$ .

En este caso seleccionemos  $\epsilon_0 = \frac{\min\{1-\ell, \ell\}}{2}$

y entonces para todo entorno reducido del cero  $E(0, \delta)_r$  existen puntos de la forma  $x_0 = \frac{1}{n}$ , con  $n \in \mathbb{Z}$  en los cuales  $\sin n\pi = 0 \notin (\ell - \epsilon_0, \ell + \epsilon_0)$ .

Encuentre puntos distintos a los propuestos que están presentes en todo entorno del cero y que no pertenecen a  $\ell - \epsilon_0 < f(x) < \ell + \epsilon_0$ .

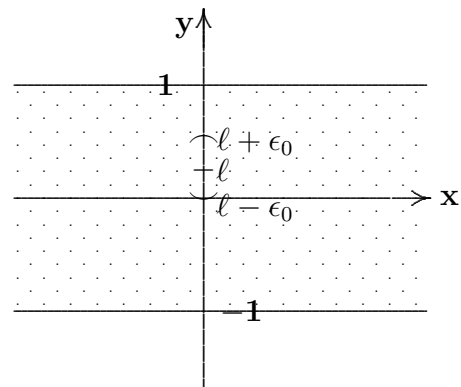


Figura 5.12:  $\ell \in (0, 1)$ .

vi) Para  $\ell \in (-1, 0)$ , se prueba que no es el límite en cuestión trabajando de manera análoga a lo hecho en el inciso anterior.

Ya que contamos con el recurso de las gráficas de  $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$  obtenidas mediante el software *Mathematica* es conveniente aquí inspeccionar respecto a la existencia ó no del siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

Ver Figura 2.14, pág. 72 .

### 5.3. Asíntotas.

**Definición 5.3.1** Se dice que un punto  $P(x, f(x))$  se aleja infinitamente sobre una curva, cuando su abscisa  $(x) \rightarrow \infty$ , ó su ordenada  $f(x) \rightarrow \infty$ , ó ambas coordenadas  $(x \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow \infty)$ , crecen infinitamente.

**Definición 5.3.2** Se llama asíntota una recta  $l$  tal que tiende a cero la distancia a ella de un punto  $P$  que se aleja infinitamente sobre la curva. Distinguiremos tres casos, según que crezcan infinitamente sobre la curva  $x$ , ó  $y$ , ó ambas.

- 1°) El punto  $P(x, f(x))$  se aleja infinitamente sobre la curva con  $x \rightarrow \infty$ , ó  $x \rightarrow +\infty$ , ó  $x \rightarrow -\infty$ , pero de tal manera que su ordenada verifique  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ . En tal caso la recta  $y = b$  es una asíntota paralela al eje  $x$ .
- 2°) Si el punto  $P(x, f(x))$  se aleja infinitamente sobre la curva de tal manera que  $x \rightarrow x_0$  pero  $y(x) = f(x) \rightarrow \infty$ , ó bien  $y(x) = f(x) \rightarrow -\infty$ , ó bien  $y(x) = f(x) \rightarrow +\infty$ , entonces la recta  $x = x_0$  es una asíntota vertical, paralela al eje  $y$ .

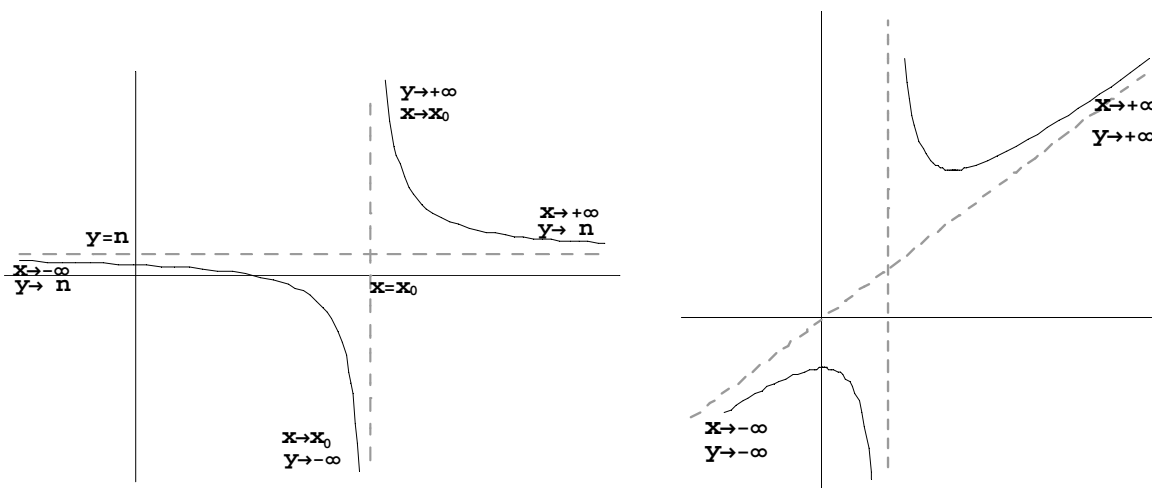


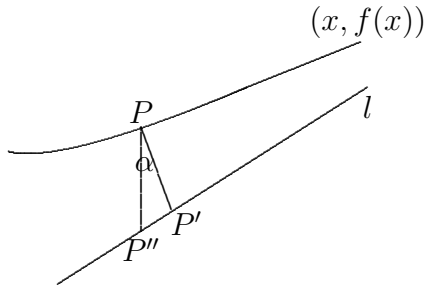
Figura 5.13: Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

- 3°) Si cuando un punto  $P(x, f(x))$  se aleja infinitamente sobre una curva y sus coordenadas  $x$  e  $y$  crecen infinitamente, entonces para que la recta  $y = mx + n$  sea una asíntota, basta con que tienda a cero la diferencia  $f(x) - (mx + n)$ . Tal

*diferencia de la distancia, a menos de un factor coseno, del punto  $P$  de la curva a la recta  $l$ , para cada  $x$  (Ver Fig. 5.14).*

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

Denotemos  $d(P, l)$  a la distancia del punto  $P(x, f(x))$  de la curva  $y = f(x)$ , a la recta no vertical  $l$ . Tal distancia es la longitud del segmento  $\overline{PP'}$ , donde  $P'$  es la intersección de  $l$  con la perpendicular a ella que pasa



por  $P$ . Si sobre la recta  $l$ , de ecuación  $y = mx + n$ , consideramos el punto  $P''(x, mx + n)$  resulta que el triángulo  $PP'P''$  es rectángulo y vale que  $|\overline{PP'}| = |\overline{PP''}| \cos \alpha$ , es decir  $|\overline{PP'}| = |f(x) - (mx + n)| \cos \alpha$ .

Es fácil ver ahora que para que  $d(P, l) \rightarrow 0$  es suficiente que  $|\overline{PP''}| = |f(x) - (mx + n)| \rightarrow 0$ , pues como  $0 \leq d(P, l) = |\overline{PP'}| \cos \alpha \leq |\overline{PP''}|$ , por el *Teorema de Encaje* resulta que  $\overline{PP''} \rightarrow 0$  implica  $d(P, l) \rightarrow 0$ .

Figura 5.14: Interpretación de  $d(P, l) \approx |\overline{PP''}|$ .

Entonces, cuando  $|\overline{PP''}| = |f(x) - (mx + n)|$  sea infinitésimo para  $x \rightarrow \infty$ , ó  $x \rightarrow +\infty$  ó  $x \rightarrow -\infty$ , la recta  $l$  es una asíntota de la curva  $y = f(x)$ . En tal caso la ecuación de la curva se puede escribir como:

$$y = f(x) = mx + n + \epsilon(x) \quad (5.15)$$

donde  $\epsilon(x) = f(x) - (mx + n)$ .

Si la ecuación (5.15) se divide miembro a miembro por  $x$  resulta:

$$\frac{y}{x} = m + \frac{n}{x} + \frac{\epsilon(x)}{x} \quad (5.16)$$

por lo tanto, si la curva  $(x, f(x))$  tiene una asíntota, usando (5.16) la dirección de dicha asíntota se obtiene a partir del siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \begin{cases} \infty \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}} \frac{f(x)}{x} = m \quad (5.17)$$

Cuando exista el límite (5.17), diremos que la dirección de pendiente o coeficiente angular  $m$  es una *dirección asintótica* de la curva (que pueden ser varias para una misma curva).



Obtenida la pendiente de una asíntota, se busca a continuación la ordenada al origen calculando:

$$\lim_{x \rightarrow \begin{cases} \infty \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}} (y - mx) \quad (5.18)$$

Pueden presentarse tres casos, de acuerdo a que tal límite sea finito, ó que no sea finito ó bien que no exista.

$c_1$ ) Si el límite (5.18) existe y es finito, nos da la ordenada al origen  $n$ , en (5.15), de la asíntota. En este caso, la rama de la curva que tiene dicha asíntota se llama *hiperbólica*.

$c_2$ ) Si el límite (5.18) es  $+\infty$  ó  $-\infty$ , la rama de la curva se llama *parabólica*. Tal como ocurre con  $y = \sqrt{x}$ , donde  $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$  y  $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [+ \sqrt{x} - 0 \cdot x] = +\infty$ . La otra rama de la parábola,  $y = -\sqrt{x}$ , es también parabólica con igual dirección asintótica  $m = 0$ .

$c_3$ ) Puede ocurrir, finalmente, que para una dirección asintótica no exista el límite (5.18). (e. g.  $f(x) = x + \sin x$ ).

**Ejemplo 5.3.3** Estudiar las asíntotas de  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ .

La función  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ , tiene dos asíntotas verticales  $x = 1$  y  $x = -1$ . Tiene además una tercer asíntota no vertical, con dirección asintótica 1 y ordenada al origen 0 puesto que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = 0$ , es decir, posee la asíntota oblicua  $y = x$ . *Obsérvese* que la curva corta a dicha asíntota en  $(0, 0)$ .

**Ejemplo 5.3.4** Encuentre las asíntotas de la curva algebraica  $x^2 - 2y^2 + 4xy - x + 1 = 0$ .

Para determinar las asíntotas de la curva  $x^2 - 2y^2 + 4xy - x + 1 = 0$ , despejamos  $y$  en función de  $x$ , para ello reordenamos la expresión implícita dada  $2y^2 - 4xy - x^2 + x - 1 = 0$  y obtenemos dos ramas que conforman sus expresiones explícitas,

$$y_{1,2}(x) = \frac{4x \pm \sqrt{4^2x^2 - 4(2)(-x^2 + x - 1)}}{2(2)} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 2(-x^2 + x - 1)}}{2}$$

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

---

$$y_{1,2}(x) = x \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3x^2 - x + 1}, \quad \therefore$$

$$y_1(x) = x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3x^2 - x + 1}$$

$$y_2(x) = x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3x^2 - x + 1}.$$

Las direcciones asintóticas resultarán de:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3x^2 - x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3 - \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = m.$$

Ahora verificaremos si existe asíntota oblicua:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} y - \left(1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right)x$$

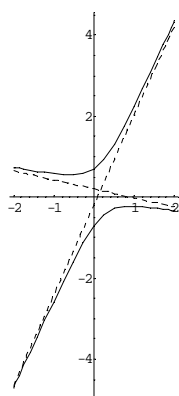
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3x^2 - x + 1} - \left(1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right)x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}x \right) \frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}x\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x^2}{\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{x}{2} + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}x} = \end{aligned}$$

y dividiendo numerador y denominador por  $x$  se tiene:

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2x}}{\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}.$$

Análogamente para determinar la ordenada al origen de la otra rama de la hipérbola, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado para salir de la indeterminación de tipo  $\infty - \infty$ .

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}x \right) \frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}x\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2}{\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}x} \text{ dividiendo numerador y de-} \\ &\text{nominador por } x \text{ se tiene: } = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2x}}{\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{6}}{12}. \end{aligned}$$



Los cálculos anteriores han determinado la existencia de dos asíntotas oblicuas para la curva  $x^2 - 2y^2 + 4xy - x + 1 = 0$ , ellas son:

$$\tilde{y}_1(x) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)x - \frac{\sqrt{6}}{12}$$

$$\tilde{y}_2(x) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)x + \frac{\sqrt{6}}{12}$$

Figura 5.15: Asíntotas de  $x^2 - 2y^2 + 4xy - x + 1 = 0$ .

**Ejemplo 5.3.5** Sea dada la curva  $x^3y - x^4 - y + 1 = 0$ , encuentre sus asíntotas.

Dada la curva definida implícitamente como  $x^3y - x^4 - y + 1 = 0$ , afortunadamente es posible encontrar su representación explícita como  $y = f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} = \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$ .

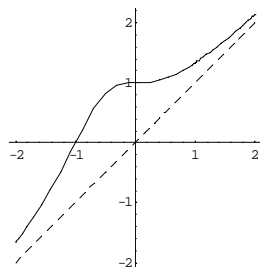
Resulta evidente que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{4}{3}$ . Por lo tanto  $x = 1$  no es asíntota vertical.

Buscaremos si existe asíntota oblicua, para ello debemos evaluar el

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{x(x^3 - 1)} = 1.$$

La curva posee dirección asintótica, veamos si existe el  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x$ .  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1 - x^4 + x}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x^2 + x + 1)} = 0$ .

Entonces  $y = x$  es asíntota oblicua.



Los límites efectuados anteriormente demostraron que la única asíntota de  $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$  es la recta  $y = x$ .

Figura 5.16: Asíntotas de  $x^3y - x^4 - y + 1 = 0$ .

**Ejemplo 5.3.6** Sea  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  determine sus asíntotas.

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

---

Esta función no está definida en  $x = 1$ , pero si  $x \rightarrow 1$ , el denominador  $x - 1$  es un infinitésimo, y la función tiene límite  $\infty$ , con signo  $+$  ó  $-$  según sea  $x > 1$ , ó bien  $x < 1$ ; porque siendo positivo el numerador, la fracción tiene el mismo signo que el denominador; la curva se aleja, pues, infinitamente hacia arriba para valores próximos al  $x = 1$ , pero situados a la derecha; y hacia abajo para los valores a la izquierda del  $x = 1$ . Es  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = \infty$ , y entonces la recta  $x = 1$  es una asíntota a la curva.

Si hacemos crecer infinitamente a  $x$  hacia la derecha o hacia la izquierda, es decir tomando valores positivos o negativos, la ordenada  $y$  tiende hacia 1, pues difiere de 1 en la fracción  $2 : (x - 1)$ , que es infinitésima; luego  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1$ . La recta  $y = 1$  es otra asíntota. (Ver Figura 5.18, izquierda).

**Ejemplo 5.3.7**  $y^2 = x$  ¿ Posee alguna dirección asíntótica ?

La parábola tiene un solo punto impropio, éste es el eje  $x$ , puesto que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pm\sqrt{x}}{x} = 0$  en él la tangente es la recta impropia.

**Ejemplo 5.3.8** ¿  $y = \sin x$  tiene como dirección asíntótica al eje  $x$  ?

Efectivamente, la senoide pues al eje  $x$   $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$  como dirección asíntótica, pero como el  $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - 0.x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$  que  $\nexists$  la senoide no tiene tangente en su punto impropio.

**Ejemplo 5.3.9** Sea  $y = x \sin x$  ¿ Esta senoide posee alguna dirección asíntótica ?

La curva  $y = x \sin x$  se aleja infinitamente, pero no tiene dirección asíntótica.

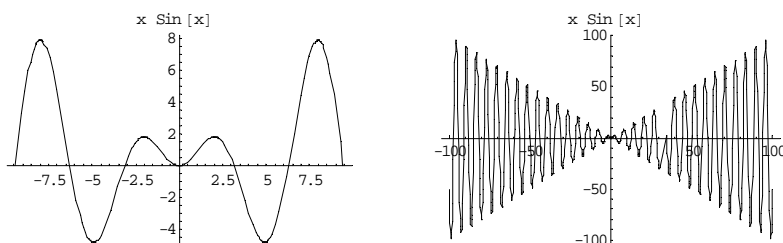


Figura 5.17: Gráfica de  $f(x) = x \sin x$ .

**Ejemplo 5.3.10** *A veces se buscan directamente las asíntotas, sin pasar por las direcciones asíntóticas, como lo haremos en dos casos siguientes.*

1. Si la ecuación es  $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , siendo el grado del polinomio dividido  $P(x)$ , superior en 1 al grado del polinomio divisor  $Q(x)$ , efectuada la división y sacada la parte entera  $mx + a$ , la fracción complementaria tiende a cero, por tener el numerador de menor grado que el denominador; luego, se tiene la asíntota  $y = mx + a$ .

Sea por ejemplo:  $y = \frac{2x^2 - 3}{x + 1}$  la parte entera es  $2x - 2$ ; luego, la ecuación de una asíntota es  $y = 2x - 2$ . Otra asíntota es, claramente,  $x = -1$ .

2. Sea la función  $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 2}$ .

Con razonamiento análogo resulta:  $\lim_{x \rightarrow 2} y = \infty$   $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$ .

La curva tiene por lo tanto, una asíntota en  $x = 2$ ; para estudiar la otra rama infinita, separamos del cociente su parte entera, y tendremos:

$$y = x + 4 + \frac{8}{x - 2}$$

Si construimos la recta  $y = x + 4$ , la diferencia de ordenadas con la curva es la fracción infinitésima  $\frac{8}{x - 2}$ , para  $x \rightarrow \infty$ ; luego, también la recta  $y = x + 4$  es asíntota, quedando la curva por encima de ella, en el primer cuadrante; por debajo en el tercero (Ver Figura 5.18, derecha).

Para que este error sea menor que 0.01, deberá tomarse  $|x|$  superior a 802.

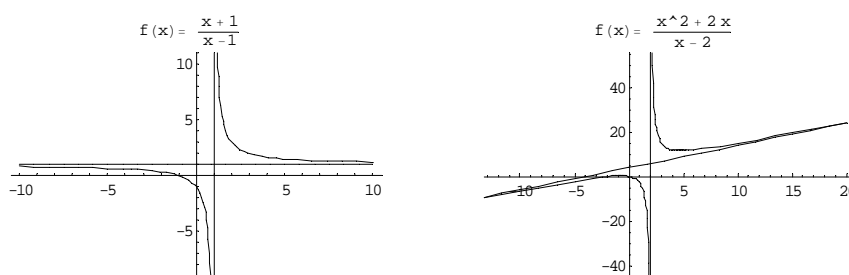


Figura 5.18: Asíntotas de  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  y  $f(x) = \frac{x^2+2x}{x-2}$ .

**Ejemplo 5.3.11** *Sea la función  $y = x \sin \frac{\pi}{x}$  ¿Posee  $f(x)$  una asíntota horizontal ?*

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

La curva  $y = x \sin \frac{\pi}{x}$  tiene la dirección asintótica del eje  $x$ , pues  $\frac{y}{x} \rightarrow 0$ . Como el  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x}$ , es la respuesta al cálculo explicitado en la ecuación (5.18), ya que previamente obtuvimos  $m = 0$ , resulta  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x} = \pi \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} = \pi$  luego  $y = \pi$  asíntota horizontal (Ver Figura 5.19).

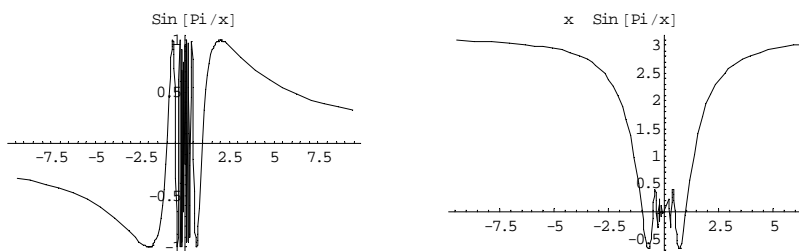


Figura 5.19: Gráficas de  $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$  y  $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ .

### Ejemplo 5.3.12

Sea la cónica  $3x^2 + y^2 - 4xy - 8x + 2y - 2 = 0$ , halle sus asíntotas.

Despejando, resulta:  $y = 2x - 1 \pm \sqrt{x^2 + 4x + 3}$ ; luego, las dos asíntotas son:  $y = 2x - 1 + (x + 2) = 3x + 1$ ,  $y = 2x - 1 - (x + 2) = x - 3$ .

### Ejemplo 5.3.13 Halle, si existen las asíntotas de $y^2 = x^2 + a$ .

Es infinitésima la diferencia  $\sqrt{x^2 + a} - x$  al crecer  $x$  infinitamente; porque multiplicando y dividiendo por la suma, se puede escribir así:  $\frac{(x^2 + a) - x}{\sqrt{x^2 + a} + x} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a} + x}$  que es un infinitésimo, como recíproco de una variable que crece infinitamente. Luego la recta  $y = x$  es asíntota. Análogamente: es infinitésima, al crecer  $x$  infinitamente, la diferencia  $\sqrt{(ax + b)^2 + c} - (ax + b)$ , y entonces la curva  $y = \sqrt{(ax + b)^2 + c}$  tiene asíntota  $y = ax + b$ .

**Ejercicio 5.3.14** \* ¿ Es siempre la asíntota posición límite de la tangente cuyo punto de contacto se aleja al infinito sobre la curva ?

Ayuda: Considerar las funciones:  $y = x^{-1} \sin x^2$  ;  $y = e^{-x} \sin e^x$  y téngase presente que  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$ , pero que  $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} y'$ .

### 5.3.1. Manera práctica de encontrar las asíntotas

**Definición 5.3.15** Dada la función  $f(x)$ , la recta  $\lambda(x) = ax + b$  se dice una asíntota para  $f(x)$  si se verifica que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda(x)) = 0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda(x)) = 0 \quad (5.19)$$

Esto significa que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $M(\epsilon) > 0$  tal que:  $f(x) - \lambda(x) < \epsilon \quad \forall x$  tal que  $|x| > M$  siendo  $x > A > 0$  en el primer caso mientras que  $x < -M < 0$  en el segundo.

*Nota:* Si  $a = 0$  es  $\lambda(x) = b$  y se está en presencia de una asíntota horizontal.

**Proposición 5.3.16** Dada la función  $y = f(x)$  y la recta  $\lambda(x) = ax + b$ , donde  $a \neq 0$  ó  $b \neq 0$ , si la recta es asíntota de  $f(x)$  se verifica que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\lambda(x)} = 1 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{\lambda(x)} = 1 \quad (5.20)$$

*Demostración.*

i) *Nota* Si  $a = 0$  como  $b \neq 0$ , resulta que la recta  $y = b$  es asíntota horizontal y la conclusión es inmediata.

ii) Si  $a \neq 0$  la función  $\lambda(x) = ax + b$  no es acotada, luego dado  $K > 0$  existe

$M_1 = M_1(K)$  tal que  $|\lambda(x)| > K$  para todo  $x$  tal que  $|x| > M_1$  y entonces:  
 $\left| \frac{f(x)}{\lambda(x)} - 1 \right| = \left| \frac{f(x) - \lambda(x)}{\lambda(x)} \right| = \frac{1}{|\lambda(x)|} |f(x) - \lambda(x)| < \frac{1}{K} |f(x) - \lambda(x)|$  para todo  $x$  tal que:  $|x| > M_1$ .

Como por hipótesis  $\lambda(x)$  es asíntota de  $f(x)$ , sabemos que  $\forall \epsilon > 0$  existe  $\tilde{M} = \tilde{M}(\epsilon) > 0$  tal que  $|f(x) - \lambda(x)| < \epsilon K$  para todo  $x$  tal que  $|x| > \tilde{M}$ , tomando  $M = \max\{M_1, \tilde{M}\}$  resulta que para todo  $x$  tal que  $x > M$  se verifica:  
 $\left| \frac{f(x)}{\lambda(x)} - 1 \right| < \frac{1}{K} |f(x) - \lambda(x)| < \frac{1}{K} \cdot \epsilon \cdot K = \epsilon$  y entonces son válidos los límites en (5.20). ■

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

**Observación 5.3.17** *La recíproca de la proposición no es válida en general.*

**Ejemplo 5.3.18**  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ,  $\lambda(x) = x - 1$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\lambda(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} = \frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = 1$ , sin embargo la recta  $y = x - 1$  no es asíntota de la función, pues:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda(x)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - (x - 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x-1} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \left( \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \\ &2 \cdot \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - (x - 1)) &= +\infty. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\text{Dom } f(x) = \{x : x^2 - 1 \geq 0\}$

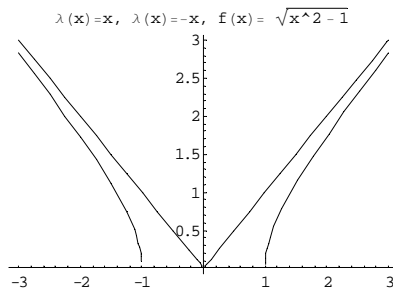


Figura 5.20: Asíntotas de  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ .

$0\} = \{x : x^2 \geq 1\}$  y que  $\sqrt{x^2 - 1} \leq \sqrt{x^2} = |x|$  para todo  $x \in \text{Dom} f(x)$  resulta la gráfica que se observa en la Figura 5.20.

**Ejemplo 5.3.19** *La cónica  $3x^2 + y^2 - 4xy - 8x + 2y - 2 = 0$  tiene las dos asíntotas:  $y = 2x - 1 + (x + 2) = 3x + 1$ ,  $y = 2x - 1 - (x + 2) = x - 3$ .*

Despejando  $y$  obtenemos  $y = 2x - 1 \pm \sqrt{x^2 + 4x + 3}$   $y^2 + y(2 - 4x) + 3x^2 - 8x - 2 = 0$ , aplicando Baskara resultan las funciones  $y_{1,2}(x) = 2x - 1 \pm \sqrt{x^2 + 4x + 3}$ , si  $x > 0$ ,  $\frac{y_1(x)}{x} = 2 - \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}$ , mientras que si  $x < 0$ ,  $\frac{y_1(x)}{x} = 2 - \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}$ . Entonces para  $x \rightarrow +\infty$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y_1(x)}{x} = 3$ , por otro lado  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y_1(x)}{x} = x$ . Ahora determinaremos si existe ordenada al origen para la dirección asíntótica 3 en  $x \rightarrow +\infty$ , para lo



que evaluaremos el siguiente límite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_1(x) - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -(x+1) + \sqrt{x^2 + 4x + 3} = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 3} - (x+1))(\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x+1))}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x+1)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x + 3 - (x+1)^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 2/x}{\sqrt{1 + 4/x + 3/x^2} + (1 + 1/x)} = \frac{2}{2} = 1.$$

Por lo tanto en  $x \rightarrow +\infty$  la curva  $y_1(x) = 2x - 1 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}$  tiene por asíntota a la recta  $y = 3x + 1$ . Veamos que ocurre con dicha curva para  $x \rightarrow -\infty$ , la dirección asintótica es 1, veamos si existe asíntota,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y_1(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + \sqrt{x^2 + 4x + 3} = \infty - \infty =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{((x-1) + \sqrt{x^2 + 4x + 3})(x-1 - \sqrt{x^2 + 4x + 3})}{(x-1) - \sqrt{x^2 + 4x + 3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(6x + 2)}{(x-1) - \sqrt{x^2 + 4x + 3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(6 + 2/x)}{(1 - 1/x) + \sqrt{1 + 4/x + 3/x^2}} = -\frac{6}{2} = -3.$$

Hemos confirmado que la curva  $y_1(x) = 2x - 1 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}$  tiene por asíntota a la recta  $y = x - 3$  para un punto que se aleja infinitamente sobre con  $x \rightarrow -\infty$ .

Cálculos completamente análogos nos permitirán confirmar que la otra rama de la hipérbola posee las mismas asíntotas pero para el punto de la curva que se aleja infinitamente según  $x \rightarrow +\infty$  le corresponde la asíntota obtenida para  $x \rightarrow +\infty$  en el cálculo anterior.

*Justifique las razones, (ver Figura 5.21).*

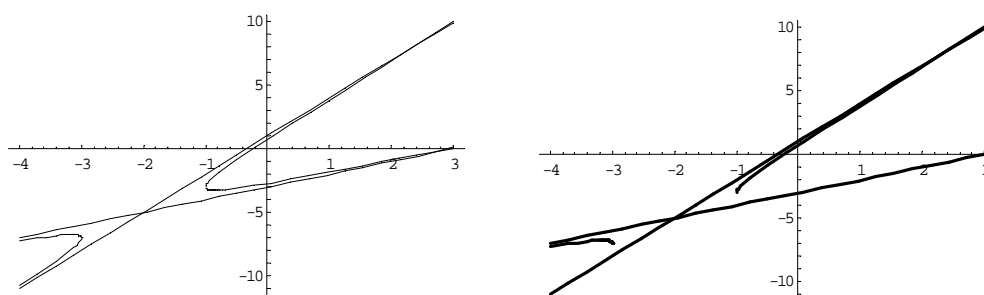


Figura 5.21: Asíntotas de la cónica:  $3x^2 + y^2 - 4xy - 8x + 2y - 2 = 0$ .

## 5.4. Continuidad: Ejercicios Resueltos

### 5.4.1. Definición de continuidad en un punto

**Definición 5.4.1.1.** La función  $y = f(x)$  se dice **continua en**  $x_0$  si se verifican las siguientes propiedades:

i)  $x_0 \in \text{Dom } f(x)$ , o sea  $f(x)$  está definida en  $x = x_0$ .

ii)  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , finito

iii)  $\ell = f(x_0)$

En otras palabras  $f(x)$  es continua en  $x_0 \in \text{Dom } f(x)$  si existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  y si es  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

*Justificación:*

Entonces, aplicando la definición de límite para  $x \rightarrow x_0$ , resulta que para todo entorno de  $f(x_0)$  :

$$E(f(x_0), \epsilon) = (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon, \epsilon > 0,)$$

se puede determinar un entorno de  $x_0$  :

$$E(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

donde  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que para todo  $x \in E(x_0, \delta)$  es  $y = f(x) \in E(f(x_0), \epsilon)$ . O sea la imagen de  $E(x_0, \delta)$  por  $f(x)$  es tá contenida en el entorno  $E(f(x_0), \epsilon)$ , esto es:

$$f(E(x_0, \delta)) \subseteq E(f(x_0), \epsilon).$$

**Observación:** Nótese que a diferencia que en el concepto de *límite* de una función en un punto, el concepto de *continuidad de una función en un punto* de su dominio considera entornos completos de dicho punto.

**Definición 5.4.1.2:** La función  $y = f(x)$  es **continua en**  $x_0$ , si para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\epsilon)$  tal que:  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall x : |x - x_0| < \delta$ .

### 5.4.2. Definición práctica de continuidad en un punto

Se debe verificar para probar la continuidad de  $f(x)$  en  $x_0$  las siguientes condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_0) \quad \text{debe } \exists \text{ finito} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{debe } \exists \text{ finito} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{debe } \exists \text{ finito} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \end{array} \right. \quad (5.21)$$

**Ejemplo 5.4.1** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ . Compruebe que es continua en  $x_0 = 0$ .

Resolución: Se debe verificar para probar la continuidad de  $f(x)$  en  $x_0$  las condiciones establecidas en el arreglo de la ecuación (5.21). En particular, haremos algunas consideraciones previas para el posterior tratamiento de la continuidad en cero de esta función.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mu} = +\infty, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0^-} \frac{1}{\mu} = -\infty \\ \text{b) } \lim_{\mu \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{\mu}} = +\infty, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{\mu}} = 0 \end{array}$$

Ahora pasamos a considerar cada una de las condiciones en (5.21) para este caso:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \approx \frac{\sim 0}{\sim +\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \approx \frac{\sim 0}{\sim 1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \end{array} \right. \quad \therefore f(x) \text{ es continua en } x_0 = 0.$$

### 5.4.3. Propiedades de funciones continuas en un punto

Considerando la *Proposición 5.0.3* de la pág. 190, resulta: Toda función continua en un punto se puede expresar, en un entorno de este punto, como la suma del valor que toma la función en dicho punto y un infinitésimo.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff f(x) - f(x_0) = \phi(\Delta x); \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \phi(\Delta x) = 0 \quad (5.22)$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

*Otra manera de definir continuidad en un punto* Una función es continua en un punto  $x_0$  si y sólo si  $f(x) = f(x_0) + \theta(\Delta x)$  siendo  $\theta(\Delta x)$  un infinitésimo para  $\Delta x \rightarrow 0$ . Entonces  $\Delta y = f(x) - f(x_0) = \theta(\Delta x)$  depende de  $\Delta x$  y de  $x_0$ .

### 5.4.4. Propiedades de funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado

1. **Proposición 5.4.4.1** Sea  $y = f(x)$  un función continua en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ .

- i) Si  $f(x)$  es estrictamente creciente en  $[a, b]$ , su inversa  $y = g(x)$  es continua y estrictamente creciente en  $[c, d] = [f(a), f(b)]$ .
- ii) Si  $f(x)$  es estrictamente decreciente en  $[a, b]$ , su inversa  $y = g(x)$  es continua y estrictamente decreciente en  $[c, d] = [f(b), f(a)]$ .

**Corolario 5.4.4.1.**  $\forall b > 0, b \neq 1$ , las funciones  $f(x) = b^x$ ,  $g(x) = \log_b x$ , son continuas en sus respectivos dominios.

- i) Si  $b \in [0, 1]$  ambas son decrecientes.
- ii) Si  $b > 1$  ambas son crecientes.

*Justificación:* La demostración resulta del *Corolario 5.4.4.1*, si se tiene en cuenta que

$$y = \log_b x = \frac{1}{\ln a} \ln x$$

La continuidad de  $g(x) = \ln x$  para  $x \in (0, +\infty)$  permite asegurar la continuidad en ese intervalo de  $y = \log_b x$  y desde ella la continuidad de  $y = b^x \forall x \in \mathbb{R}$ .

- i) Como  $y = \log_b x$  es estrictamente decreciente si  $b \in (0, 1)$  ( $\ln a < 0$ ) también  $y = b^x$  es estrictamente decreciente  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- ii) Para  $a > 1$  resulta  $y = b^x$  estrictamente creciente  $\forall x \in \mathbb{R}$ , pues su inversa  $y = \log_b x$  es estrictamente creciente  $(0, +\infty)$ .

2. **Teorema 5.4.2 Teorema de Bolzano-Weierstrass:** Sea  $f(x)$  una función continua en el segmento  $[a, b]$ . Existe un punto  $c$ ,  $a \leq c \leq b$ , tal que  $f(x) \leq f(c)$  para todo  $x \in [a, b]$ . Análogamente existe un punto  $d$ ,  $a \leq d \leq b$ , tal que  $f(d) \leq f(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ .

*Demostración.* Dado que  $f(x)$  es continua en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ , el conjunto de valores que alcanza o toma en dicho intervalo es también un conjunto acotado. Supongamos, que esto no fuera verdadero, al dividir el intervalo  $[a, b]$  en dos intervalos iguales,  $f(x)$  no estaría acotada por lo menos en uno de ellos, por ejemplo supongamos en el  $[a, \frac{a+b}{2}]$ . Si dividimos este intervalo nuevamente, y suponiendo ahora que los valores no acotados están en el intervalo  $[\frac{3a+b}{4}, \frac{a+b}{2}]$ . Reiterando indefinidamente este proceso, se construye una sucesión de intervalos encajados que define un número real  $\xi$ . Toda vecindad de  $\xi$  contiene un intervalo  $[a_n, b_n]$  del encaje, donde  $f(x)$  no está acotada, y entonces  $f(x)$  no es continua en  $x = \xi$ , contrario a la hipótesis.  $f(x)$  tiene un extremo superior  $M$ , que veremos se alcanza en un punto. Pues, caso contrario, la función  $g(x) = \frac{1}{f(x)-M}$ , no acotada en  $[a, b]$  por tomar  $f(x) - M$  valores arbitrariamente pequeños, sería continua en  $[a, b]$ , lo que no es posible.

3. **Definición:** Una función  $f(x)$  es *acotada* en  $[a, b]$  si existe un número  $M > 0$  tal que  $-M \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ . (o  $|f(x)| \leq M$ ).

4. **Proposición:** Sea  $f(x)$  estrictamente creciente en el intervalo  $X$ , entonces existe la función inversa  $f^{-1}(y)$  y es estrictamente creciente.

*Demostración.* Si  $f(x)$  es estrictamente creciente en  $X$  entonces es biunívoca. Luego existe la función  $f^{-1}$  definida sobre el conjunto  $Y$ , imagen de la  $f(x)$ . Veamos que  $f^{-1}(y)$  es estrictamente creciente en  $Y$ . Consideremos los puntos  $y_1, y_2 \in Y$  tales que  $y_1 < y_2$ . Si fuera  $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ , sería  $y_1 = f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2)) = y_2$  lo que contradice  $y_1 < y_2$ . En el caso  $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$  como  $f(x)$  es creciente sería  $y_1 = f(f^{-1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2)) = y_2$ , lo que también contradice  $y_1 < y_2$ . Entonces  $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$  y  $f^{-1}$  es estrictamente creciente.

5. **Proposición:** Sea  $f(x)$  una función estrictamente creciente y continua en un in-

intervalo  $X$ . Entonces la inversa  $f^{-1}(y)$  es continua sobre el intervalo  $Y$ .

6. **Definición 5.4.3.1:** Una función  $y = f(x)$  se dice **uniformemente continua** en  $A \subset \text{Dom } f(x)$  si se verifica que:  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que  $|f(x) - f(\tilde{x})| < \epsilon \forall x \in A$  tal que  $|x - \tilde{x}| < \delta$  cualquiera que sea  $\tilde{x} \in A$ ; o sea para todo par  $x, \tilde{x} \in A$  tal que  $|x - \tilde{x}| < \delta$ .

Una función se dice *uniformemente continua* en un intervalo, es decir la continuidad uniforme es una propiedad de una función en un intervalo.

**Ejercicio 5.4.3** Justificar que  $y = mx + b$  e  $y = \sin x$  son uniformemente continuas en  $\mathbb{R}$ ; y que  $f(x) = x^2$  continua en  $\mathbb{R}$ , no es uniformemente continua en su dominio de definición.

7. **Proposición 5.4.3.1. (Teorema de Heine - Cantor)** Si la función  $y = f(x)$  es continua en  $[a, b]$  (intervalo cerrado y acotado), entonces es uniformemente continua en  $[a, b]$ .

Recordemos que una función  $f(x)$  es continua en un intervalo  $X$  si es continua en todo punto  $x_0$  de  $X$ .

En base a lo ya visto podemos expresar también esta idea diciendo que  $f(x)$  es continua en  $X$  si para todo punto  $x_0$  de  $X$  y para todo entorno  $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$  existe un entorno  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  tal que para todo  $x$  de  $X$  con  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  se cumple que  $f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ .

En general el valor de  $\delta$ , amplitud del entorno de  $x_0$ , depende tanto de  $\epsilon$  como de  $x_0$ .

Por ejemplo, en el caso de la función  $f(x) = 2x$  en  $(0, 1)$ , el valor  $\delta$  está dado por la relación  $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ . Aquí delta depende solamente de  $\epsilon$  solamente.

Para la función  $f(x) = x^2$  en  $(0, 1)$  podemos encontrar  $\delta$  de la siguiente manera: para que  $f(x) = x^2 \in (x_0^2 - \epsilon, x_0^2 + \epsilon)$ , deber ser  $|x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| < \epsilon$ . Falta terminar la continuidad en cualquier  $x_0$  perteneciente al  $(0, 1)$ .

Supongamos ahora que estamos interesados en hacer una mejor elección de  $\delta$  para eliminar esta dependencia entre  $\delta$  y  $x_0$ .

En el ejemplo dado podemos reemplazar  $|1 + x_0|$  por  $|1 + 1| = 2$ , entonces  $|x - x_0||x + x_0| < |x - x_0| 2 < \epsilon$ , y esto se cumple si  $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{2} = \delta$ . Este valor de  $\delta$  es menor o igual que la expresión anterior (ya que  $|1 + x_0| \leq |1 + 1| = 2$  luego  $\frac{1}{|1 + x_0|} \geq \frac{1}{2}$  y  $\frac{\epsilon}{|1 + x_0|} \geq \frac{\epsilon}{2}$ ), y depende solamente de  $\epsilon$ . Entonces sirve igualmente para todos los puntos  $x_0 \in (0, 1)$  ya que para todo  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  se cumple que  $|x^2 - x_0^2| < |x - x_0||1 + x_0| < \frac{\epsilon}{2} 2 = \epsilon$  o sea  $x^2 \in (x_0^2 - \epsilon, x_0^2 + \epsilon)$ .

**Ejemplo 5.4.4** *Demostrar que si existe un número positivo  $M$  tal que para todo  $x, x_0 \in (a, b)$  es*

$$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|$$

*entonces  $f$  es uniformemente continua en  $(a, b)$ .*

*Demostración.* Consideremos el entorno  $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ . Veamos para qué valores de  $x \in (a, b)$  se cumple que  $f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ , o sea que

$$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0| < \epsilon.$$

Basta tomar los  $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{M} = \delta$ . Como  $\delta$  depende únicamente de  $\epsilon$  es uniformemente continua en  $(a, b)$ .

**Ejercicio 5.4.5** *Ejercicios propuestos sobre Continuidad Uniforme.*

- Probar que la función identidad  $f(x) = x$  es uniformemente continua en toda la recta.*
- Probar que  $f(x) = x^2$  no es uniformemente continua en  $(1, +\infty)$ .*
- ¿Es uniformemente continua  $f(x) = \sin x$  en  $[0, 2\pi]$  ? ¿ y la función  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $(0, 4)$  ?*
- Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son uniformemente continuas en un intervalo probar que  $f(x) + g(x)$  es uniformemente continua en dicho intervalo.*
- Hallar un valor de  $\delta$  que demuestre que la función  $f(x) = x^3$  es uniformemente continua en  $(0, 2)$ .*

### 5.4.5. Teorema del Punto Fijo.

**Ejemplo 5.4.6** Verifique que si  $y = f(x)$  es continua en  $[0, 1]$  y satisface  $0 \leq f(x) \leq 1$ , entonces  $y = f(x)$  tiene un punto fijo (i.e., existe un número  $c$  en  $[0, 1]$  tal que  $f(c) = c$ ).

*Sugerencia:* Aplique el teorema del valor intermedio a  $g(x) = x - f(x)$ .

Recordemos que el “Teorema del Valor Intermedio” establece que: Si  $y = f(x)$  es continua en  $[a, b]$  e  $y_*$  es un número comprendido entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , entonces existe un número  $x_*$  comprendido entre  $a$  y  $b$  tal que  $f(x_*) = y_*$ .

*Respuesta:*  $f(x) \in [0, 1] \rightarrow 0 \leq \text{Im}(f(x)) \leq 1$ , sea  $g(x) = x - f(x)$  por ser diferencia de dos funciones continuas es una función continua en  $[0, 1]$ , obviamente si  $f(0) = 0$  ó  $f(1) = 1$  ya está probada la existencia del punto fijo; en general, si  $f(0) \neq 0$  y  $f(1) \neq 1$ , se tiene que  $g(0) = 0 - f(0) < 0$  y  $g(1) = 1 - f(1) > 0$ , luego por el Teorema del Valor Intermedio existe al menos un  $c$  perteneciente al  $(0, 1)$  en el que  $g(c) = 0$ ,  $\therefore f(c) = c$ .

**Teorema 5.4.7** *Una versión del Teorema del Punto Fijo:* Sea  $g(x) \in \mathcal{C}_{[a,b]} \rightarrow [a, b]$ , i.e.  $a \leq g(x) \leq b$ ,  $\forall x$  en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Entonces  $g(x)$  tiene al menos un punto fijo  $c \in [a, b]$ . Si, además,  $g(x)$  es diferenciable y el valor absoluto de su derivada primera satisface  $|g'(x)| \leq M < 1 \quad \forall x \in [a, b]$ , siendo una  $M$  constante entonces, el punto fijo es único y el algoritmo  $x_{n+1} = g(x_n)$  con  $x_n \in [a, b]$  y  $x_1 \in [a, b]$ , produce una sucesión convergente a  $c$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Ver la justificación de esta versión del Teorema del Punto Fijo en §15.4 en la pág. 587.

**Ejemplo 5.4.8** Dada  $y = f(x)$  continua y  $f(x) < 5$ .

a) ¿Qué puede decir respecto a la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

$$a_1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 5 \text{ cualquiera sea } x_0$$

$$a_2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 4,95 \text{ para cierto } x_0$$

$$a_3) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 3 \text{ para cierto } x_0 \text{ ?}$$



b) *Idem pero no se asegura la continuidad de  $y = f(x)$ .*

Resolución.

Si  $y = f(x)$  continua y  $f(x) < 5 \forall x$ .

*Verdadera*

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 5$  cualquiera sea  $x_0$ .

Supongamos que es falsa, es decir supongamos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 5$  para algún  $x_0$  pero entonces como la función es continua el valor del límite cuando nos aproximamos a dicha abscisa debe coincidir con el valor de la función en él, pero la función por hipótesis toma valores menores a 5 para todo valor de abscisa, es decir hemos llegado a contradecir la hipótesis, por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 5$  cualquiera sea  $x_0$  es verdadera.

*Falsa*

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 4,95$  para cierto  $x_0$ .

Si tomamos  $f(x) = 4,95 \forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} 4,95 = 4,95$  para cualquier  $x_0$ , es decir el valor del límite no es menor que 4.95  $\forall x_0$ .

*Falsa*

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 3$  para cierto  $x_0$

Si tomamos  $f(x) = 2 \forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} 2 = 2$  para cualquier  $x_0$ , es decir el valor del límite no es mayor que 3  $\forall x_0$ .

Dada ahora  $y = f(x)$  discontinua y  $f(x) < 5$ .

*Falsa*

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 5$  cualquiera sea  $x_0$

Tomamos  $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 5 \\ 10 - x & \text{si } x > 5 \\ 0 & \text{si } x = 5 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 5$  cumple con las hipótesis, pues efectivamente  $f(x) < 5$  y es discontinua, pero el límite no es menor que 5 en particular para  $x_0 = 5$ .

*Falsa*

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 4,95$  para cierto  $x_0$

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

---

$$\text{Tomemos } f(x) = \begin{cases} 4,96 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4,96 \neq 4,95$$

Falsa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 3 \text{ para cierto } x_0$$

$$\text{Tomemos } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \not> 3.$$

**Ejemplo 5.4.9** *Justifique que si conocemos los valores de una función continua en los números racionales, entonces conocemos sus valores en todas partes. Como equivalencia, pruebe que si  $f$  y  $g$  son funciones continuas y  $f(x) = g(x)$  para todo  $x$  en  $Q$  (los racionales), entonces  $f(x) = g(x)$  para todo  $x$  en  $\mathbb{R}$ .*

Respuesta: Si se conoce  $f(x)$  sólo sobre los racionales y  $x_0$  es irracional, tomando una sucesión de racionales  $x_n \rightarrow x_0$ , como  $f(x)$  es continua en  $x_0$  debe ser  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$   $\therefore$  se conoce su valor sobre cada irracional.

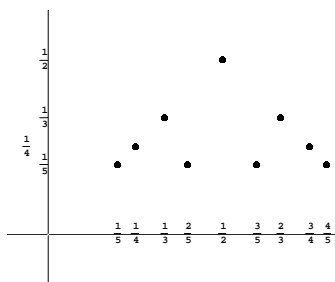
Si  $f(x), g(x)$  continuas y  $f(x) = g(x) \forall x \in Q$  entonces  $f(x) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}$   
 $\iff (f - g)(x) = 0 \forall x$  : en particular  $(f - g)(x) = 0$  sobre  $Q$   $\therefore$  si  $x_0 \notin Q$  tomando  $\{x_n\} \subseteq Q \exists x_n \rightarrow x_0$  es decir  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f - g)(x_n) = 0 \therefore (f - g)(x_0) = 0$ .

**Ejemplo 5.4.10** *Sea  $f(x) = 0$  si  $x$  es irracional y sea  $f(x) = \frac{1}{q}$  si  $x$  es el número racional  $\frac{p}{q}$  en su mínima expresión ( $q > 0$ .) Pruebe que  $f(x)$  es continua en cada irracional en  $(0, 1)$  pero discontinua en cada número racional en  $(0, 1)$ .*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ irracional} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \end{cases}$$

i) Probaremos que si  $x_0$  es irracional y  $x \rightarrow x_0$  entonces  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 0$

ii) Si  $x_1 = \frac{p_1}{q_1}$  racional entonces  $f(x_1) = \frac{1}{q_1} \neq 0$ . Tomando  $\epsilon = \frac{1}{2q_1}$ , en cualquier entorno  $\epsilon_r(x_1, \delta)$  existe un irracional  $x_\delta$  luego  $f(x_\delta) = 0 \therefore \lim_{x \rightarrow x_1} f(x) \neq \frac{1}{p_1}$ .

Figura 5.22: Gráfico de  $f(x)$ .

*Demostración de i).* Trataremos de probar que si  $x_0$  es irracional entonces “cerca” de él no puede haber racionales con divisor “chico”: Sea  $M > 0$  (arbitr. grande), en cualquier intervalo  $(a, b)$  sólo hay un número finito de racionales  $\frac{p}{q}$  tal que  $p$  y  $q \leq M$ , (más aún si  $0 \notin (a, b)$  entonces sólo hay un número finito tales que  $p$  ó  $q$  son menores o iguales que  $M$ ). Si  $0 \notin (a, b)$  veamos que no puede haber:  $r_1, \dots, r_N$  e infinitos  $s_i$  tales que  $\frac{r_j}{s_i} \in (a, b)$ , en este caso hay números tan próximos a cero como querramos; ni infinitos  $r_i$  con  $s_1, s_2, \dots, s_M$  tales que  $\frac{r_j}{s_i} \in (a, b)$ , pues en este caso existirían números mayores a  $b$ . Es decir, si hay infinitos numeradores y pocos divisores el cociente crece indefinidamente. En cambio si hay pocos numeradores e infinitos divisores entonces los cocientes toman valores cerca de cero. Entonces si  $x_0 \neq 0$  es irracional se puede encontrar un entorno  $\mathcal{E}(x_0)$  tal que  $\forall \frac{p}{q} \in \mathcal{E}(x_0)$  es  $p$  y  $q > M$ . Esto significa que si  $x = \frac{p}{q} \rightarrow x_0$  entonces  $q$  tiende a infinito luego  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x = \frac{p}{q} \rightarrow x_0} f\left(\frac{p}{q}\right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{q} = 0 = f(x_0)$  porque si  $x$  racional al acercarse a  $x_0$  se hace  $(x = \frac{p}{q}) q \rightarrow \infty \therefore f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \rightarrow 0$  y si  $x$  es irracional entonces  $f(x) = 0$ .

Hemos demostrado que si  $x_0$  es irracional y  $x \rightarrow x_0$  entonces  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 0$ . Es decir, hemos probado la continuidad de la función en cualquier irracional perteneciente al  $(0, 1)$ .

*Demostración ii):* Comprobemos que en los racionales dicha función es discontinua. Si  $x_1 = \frac{p_1}{q_1}$  racional entonces por definición de  $f(x)$  es  $f(x_1) = \frac{1}{q_1} \neq 0$ . Toman-

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

do  $\mathcal{E} = \frac{1}{2q_1}$  en cualquier entorno reducido  $\mathcal{E}_r(x_1, \delta)$  existe un irracional  $x_\delta$  luego  $f(x_\delta) = 0 \therefore \lim_{x \rightarrow x_1} f(x) \neq \frac{1}{q_1}$ .

**Ejemplo 5.4.11** Sea  $f(x)$  continua en  $[0, 1]$  con  $f(0) = f(1) = 0$ . Pruebe que la gráfica de  $f(x)$  tiene una cuerda (un segmento de recta con ambos extremos en la gráfica) de longitud  $L$ , donde  $L$  es cualquier número entre 0 y 1.

Respuesta:  $f(x)$  continua en  $[0, 1]$  y  $f(0) = f(1) = 0$ . Si  $P_0 = (0, f(0)) = (0, 0)$  y  $P_x = (x, f(x))$  la función longitud de la cuerda  $F(x) = d(P_0, P) = \sqrt{x^2 + (f(x))^2}$  es continua en  $[0, 1]$  y vale:  $F(0) = 0$ ,  $F(1) = 1$ , por lo tanto toma todos los valores intermedios entre 0 y 1.

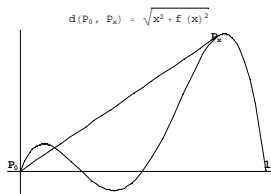


Figura 5.23: Longitud de la cuerda.

**Ejemplo 5.4.12** ★ Sea  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  para toda  $x$  y  $y$  en  $\mathbb{R}$ . Pruebe que existe un número  $m$  tal que  $f(t) = mt$  para todo número racional  $t$ .

*Sugerencia:* Primero decida cuánto debe valer  $m$ . Después proceda paso a paso empezando con  $f(0) = 0$ ,  $f(p) = mp$  para  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f(\frac{1}{p}) = \frac{m}{p}$  y así sucesivamente.

Suponiendo que  $f$  es continua en  $x = 0$ .

*Respuesta:*

i)  $f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Como  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = f(0) - f(0) = 0$

Veamos ahora que  $f(-a) = -f(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$$0 = f(0) = f(a + (-a)) = f(a) + f(-a) \therefore f(-a) = -f(a)$$

Utilizando el inciso *ii*) sabemos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x - a) = 0$ . Pero utilizando la linealidad de la hipótesis se tiene

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x - a) = \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + f(-a)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$$

$\therefore \eta(x) = f(x) - f(a)$  es infinitésimo en  $a$  o sea  $f(x) = f(a) + \eta(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Debemos probar que  $\exists m \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = mx \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Si tal  $m$  existe debe ser  $f(1) = m \cdot 1$ , es decir:  $m = f(1)$ .

Veamos que satisface lo requerido.

- Si  $x = n$  un natural, es  $f(x) = f(n) = \overbrace{f(1 + 1 + \dots + 1)}^n = \overbrace{f(1) + \dots + f(1)}^n = n f(1) = n m$
- Si  $x = \frac{1}{n}$  es  $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\overbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}^n\right) = n f\left(\frac{1}{n}\right) = m \therefore f\left(\frac{1}{n}\right) = m \frac{1}{n}$
- Si  $x = \frac{r}{n}$   $f\left(\frac{r}{n}\right) = f\left(\overbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}^r\right) = r f\left(\frac{1}{n}\right) = r m \frac{1}{n} = m \frac{r}{n}$
- Si  $x \in \mathcal{I}$ , como  $f(x)$  es continua, tomando una sucesión  $\left\{\frac{r_n}{s_n}\right\}$  de racionales tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{s_n} = x$ , resulta utilizando el inciso anterior que

$$\lim_{\substack{r_n \\ s_n} \rightarrow x} f\left(\frac{r_n}{s_n}\right) = \lim_{\substack{r_n \\ s_n} \rightarrow x} m \frac{r_n}{s_n} = m \cdot \lim_{\substack{r_n \\ s_n} \rightarrow x} \frac{r_n}{s_n} = m x.$$

**Ejemplo 5.4.13** Empezando a las 4 horas, un monje escaló lentamente la cima de una montaña, llegando a mediodía. Al día siguiente regresó recorriendo la misma trayectoria, empezando a las 5 horas, y llegando al pie de la montaña las 11 horas. Muestre que hay algunos puntos a lo largo de la trayectoria, en los cuales su reloj mostraba la misma hora en ambos días.

Respuesta:

Llamemos  $I(x)$  función de ida y  $V(x)$  función de vuelta, la primera posee como dominio

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

[4, 12] y la segunda [5, 11], si formamos la función  $I(x) - V(x)$  definida en [5, 11], se observa lo siguiente  $(I - V)(5) = I(5) - V(5) = C - B < 0$  mientras que  $(I - V)(11) = I(11) - V(11) = A - 0 > 0$  como dicha función es continua por ser diferencia de funciones continuas por el teorema de Bolzano o el Teorema de Valor Intermedio existe al menos un  $x_0$  perteneciente a [5, 11] tal que  $I(x_0) = V(x_0)$  en el instante  $x_0$  de ambos días el monje estaba en el punto  $D$  de la trayectoria.

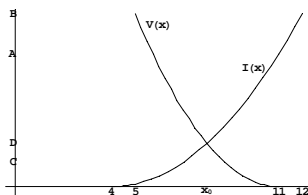


Figura 5.24: Trayectoria del monje.

La posibilidad de que haya varios puntos requiere un recorrido, tanto de ida como de vuelta, con avances y retrocesos!

**Ejemplo 5.4.14** *Pruebe que cualquier región acotada puede ser encerrada en un cuadrado. Equivalentemente, sea  $D$  una región arbitraria, acotada en el primer cuadrante. Dado un ángulo  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $D$  puede ser encerrada en un rectángulo cuya base forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ . Pruebe que para algún ángulo, este rectángulo es un cuadrado.*

El rectángulo inicial  $[b_0, h_0]$  y el final  $[b_{\frac{\pi}{2}}, h_{\frac{\pi}{2}}]$  son iguales. Si en  $\theta = 0$  el rectángulo es un cuadrado, listo. Si no lo es, supongamos que el lado horizontal es mayor. Al rotar  $\frac{\pi}{2}$ , la base  $b_0$  que es mayor se convierte, con continuidad, en la altura  $h_0$  que es menor. Por lo tanto en alguna posición  $\theta_*$  intermedia  $b_{\theta_*} = h_{\theta_*}$ .

**Teorema 5.4.15** *Teorema de Bolzano.*

*Si  $f(x)$  es continua en  $[a, b]$  y  $\text{signo}(f(a)) \neq \text{signo}(f(b))$  entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .*

*Demostración.* Recuerde que:

- i) Si  $c$  es el supremo de un conjunto de números reales  $A$ , entonces  $\forall \epsilon > 0$  el número  $c - \epsilon$  no es cota superior del conjunto  $A$ .

ii) Teorema de permanencia de signo de las funciones continuas.

Sea  $A = \{x \text{ tal que } x \in [a, b] \text{ y } f(x) < 0\} \subseteq [a, b]$ .

$A \neq \emptyset$  pues  $a \in A$  y es un conjunto acotado, por lo tanto existe algún punto  $c \in [a, b]$  que es el supremo de  $A$  (Principio del Supremo o Axioma del Supremo).

Por otra parte, como  $f(b) > 0$  y la función es continua a izquierda en  $b$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > 0 \forall x \in (b - \delta, b]$ .

Si para algún  $x_0 \in (c, b)$  es  $f(x_0) = 0$ , el teorema está demostrado. Si  $f(x) \neq 0 \forall x \in (c, b)$ , debe ser  $f(x) > 0$  pues  $x > \sup A$ . Veamos que  $f(c) = 0$ . Suponiendo  $f(c) \neq 0$  debe ser  $f(c) > 0$  ó  $f(c) < 0$ . Si  $f(c) > 0$ , como  $f(x)$  es continua en  $c$ , existe entorno  $(c - \delta_1, c + \delta_1)$  tal que  $f(x) > 0 \forall x \in (c - \delta_1, c + \delta_1)$ . Contradicción  $c - \delta_1$  no es cota superior de  $A$  y entonces existe un punto  $a_1 \in A$  tal que  $c - \delta_1 < a_1 < c$  y  $f(a_1) < 0$ . Análogo suponiendo  $f(c) < 0$ .

**Ejemplo 5.4.16** Analice la continuidad de las siguientes funciones en los puntos considerados:

$$\begin{array}{llll} x \lfloor 1/x \rfloor & x \rightarrow 0^+; & \lfloor x - \frac{1}{2} \rfloor & x \rightarrow \frac{1}{2}^+; & x^2 \lfloor 1/x \rfloor & x \rightarrow 0^+; \\ \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} & x \rightarrow 1^+; & \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & x \rightarrow 0^+; & x(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor} & x \rightarrow 0^+; \\ \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor & x \rightarrow -\frac{1}{2}^+ & \lfloor x \rfloor (-1)^{\lfloor 1/x \rfloor} & x \rightarrow 0^+; & \sqrt{\lfloor x \rfloor - x} & x \rightarrow 1^+. \end{array}$$

★ Respuesta de algunos incisos seleccionados.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lfloor x \rfloor (-1)^{\lfloor 1/x \rfloor} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor} = 0.$$

Los dos últimos se resuelven utilizando la propiedad de un infinitésimo por una función acotada.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \lfloor 1/x \rfloor = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor t \rfloor}{t} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor t \rfloor}{\lfloor t \rfloor + t - \lfloor t \rfloor} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{t - \lfloor t \rfloor}{\lfloor t \rfloor}} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \lfloor 1/x \rfloor = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor t \rfloor}{t \{ \lfloor t \rfloor + t - \lfloor t \rfloor \}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{t \{ 1 + \frac{t - \lfloor t \rfloor}{\lfloor t \rfloor} \}} = 0.$$

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

**Ejemplo 5.4.17** Verifique que si  $y = f(x)$  es continua en  $[0, 1]$  y satisface  $0 \leq f(x) \leq 1$ , entonces  $y = f(x)$  tiene un punto fijo (i.e., existe un número  $c$  en  $[0, 1]$  tal que  $f(c) = c$ ). Sugerencia: Aplique el teorema del valor intermedio a  $g(x) = x - f(x)$ .

Respuesta:  $f(x) \in [0, 1] \rightarrow 0 \leq \text{Im}(f(x)) \leq 1$ , sea  $g(x) = x - f(x)$  por ser diferencia de dos funciones continuas es una función continua en  $[0, 1]$ , obviamente si  $f(0) = 0$  ó  $f(1) = 1$  ya está probada la existencia del punto fijo; en general, si  $f(0) \neq 0$  y  $f(1) \neq 1$ , se tiene que  $g(0) = 0 - f(0) < 0$  y  $g(1) = 1 - f(1) > 0$ , luego por el Teorema del Valor Intermedio existe al menos un  $c$  perteneciente al  $[0, 1]$  en el que  $g(c) = 0$ ,  $\therefore f(c) = c$ .

**Ejemplo 5.4.18** Una fuente puntual de luz  $F$  parte del origen y recorre el semieje positivo  $x$ . En  $x = 5$  está el segmento vertical (opaco)  $\overline{AB} = \overline{(5, 0)(5, 1)}$ .

Determine la función  $y = f(x)$  que para cada  $x$  da la longitud del tramo iluminado, sobre el segmento  $[0, 7]$  del eje  $y$ , que produce  $F$  ubicada en el punto  $x$ .

Determine el dominio e imagen de  $f(x)$ . Determine los puntos de continuidad, de discontinuidad y clasifique cada discontinuidad si es el caso.

Aclaración: Si  $F$  está en  $x = 0$  ó  $x = 5$  se considera que el eje  $y$  no recibe luz, por lo tanto  $f(0) = f(5) = 0$ .

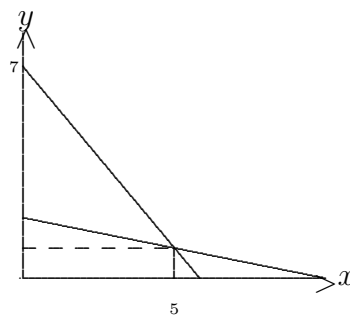


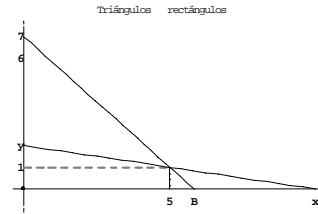
Figura 5.25: Fuente puntual luminosa.

Para construir la función pedida, utilizaremos semejanza de triángulos rectángulos en dos oportunidades, primeramente para detectar el punto  $B$  a partir del cual la fuente puntual luminosa nuevamente ilumina la pared vertical ubicada en el origen de coordenadas y de altura 7 y en segundo lugar para determinar para cualquier posición arbitraria de la fuente puntual luminosa más allá de  $B$  la altura mínima  $y$  a la cual la fuente ilumina

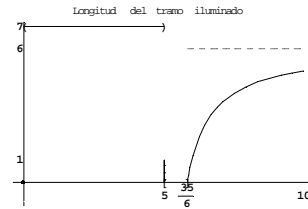


la pared, i.e., respectivamente:

$\frac{7-1}{5} = \frac{1}{B-5}$ ;  $\frac{y-1}{5} = \frac{1}{x-5}$  de la primer semejanza resulta el valor de  $B = \frac{35}{6}$  y de la segunda la relación entre  $y$  y  $x$   $y = \frac{x}{x-5}$ , finalmente la longitud de pared iluminada resulta ser cuando la fuente luminosa está ubicada más allá de  $B$ ,  $\ell = 7 - y(x) = \frac{6x-35}{x-5}$ ,  $\therefore$  la  $f(x)$  pedida es la siguiente:



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 7 & \text{si } x \in (0, 5) \\ 0 & \text{si } x \in [5, \frac{35}{6}] \\ \frac{6x-35}{x-5} & \text{si } x \in (\frac{35}{6}, +\infty) \end{cases}$$



$$\mathcal{D}_{f(x)} = \mathbb{R}^* = \mathfrak{R}^+ \cup \{0\}, \mathcal{I}m_{f(x)} = [0, 6) \cup \{7\}.$$

**Proposición 5.4.19** Demuestre que si  $y = f(x)$  es continua en  $x_0$  y  $f(x_0) > 0$ , hay un intervalo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  tal que  $f(x) > 0$  en ese intervalo.

*Demostración.* Sabemos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , esto es equivalente a:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \text{dado } \epsilon > 0, \text{ arbitrario, } \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Teniendo en cuenta que:

$$|f(x) - f(x_0)| = \begin{cases} f(x) - f(x_0) & \text{si } f(x) - f(x_0) \geq 0 \\ -(f(x) - f(x_0)) & \text{si } f(x) - f(x_0) < 0 \end{cases}.$$

Entonces la desigualdad

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - f(x_0) < \epsilon & \text{si } f(x) - f(x_0) \geq 0 \\ -(f(x) - f(x_0)) < \epsilon & \text{si } f(x) - f(x_0) < 0 \end{cases}.$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) - f(x_0) < \epsilon \\ -\epsilon < (f(x) - f(x_0)) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\epsilon < f(x) - f(x_0) < \epsilon.$$

Entonces,

$$f(x_0) - \epsilon < f(x) < \epsilon + f(x_0).$$

Por hipótesis  $f(x_0) > 0$ , luego  $\epsilon + f(x_0) > 0$ , si condicionamos a que  $f(x_0) - \epsilon$ , sea  $f(x_0) - \epsilon \geq 0$ , obligamos a que  $f(x)$  esté estrictamente acotada entre dos valores positivos, el mayor  $\epsilon + f(x_0)$  y el menor  $f(x_0) - \epsilon$ , y por lo tanto, para los  $\epsilon$  en el rango  $(0, f(x_0)]$ , siempre existirá un conjunto de vecinos del  $x_0$ , incluido él, que transformados por la  $f$  resulten positivos, pues  $f(x)$  es continua en  $x_0$  por hipótesis.

Otra manera de realizar esta demostración, es seguir los pasos análogos a aquellos dados para demostrar el Teorema de Permanencia de signo para la existencia de límite finito no nulo, i.e. 5.0.5, en la pág. 190.

**Ejercicio 5.4.20**  $f(x) = \begin{cases} |x| & -1 < x < 0 \\ x + 1 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$   $f(0) > 0$  y además  $f(x) > 0$  en un entorno de cero. Es decir, esta función no es continua en  $x_0 = 0$  y sin embargo mantiene el signo de  $f(0)$  en un entorno. ¿ Se opone este caso al Teorema de Permanencia de Signo ?

**Ejercicio 5.4.21** Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  dadas como:

$$1^{\circ}) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$2^{\circ}) \quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

i) Probar que en ambos casos  $f(x)$  y  $g(x)$  no son continuas en  $x_0 = 0$ .

ii) Calcular  $f(x) + g(x)$ ; y  $f(x).g(x)$ .

iii) Las funciones obtenidas en el inciso ii) ¿ son continuas en  $x_0 = 0$  ?

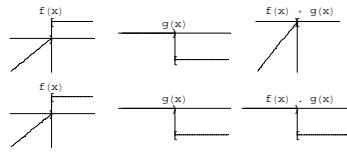


Figura 5.26: Primer caso.

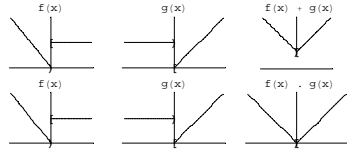


Figura 5.27: Segundo caso.

iv) A partir de los resultados del inciso iii) Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- La suma (el producto) de dos funciones discontinuas en un punto es discontinua en el punto.
- La suma (el producto) de dos funciones discontinuas en un punto no siempre es una función discontinua en él.

**Ejercicio 5.4.22** a) Enuncie el Teorema de Bolzano.

b) Demuestre que la ecuación  $x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = 0$  tiene al menos una solución real. Sugerencia: Aplique el Teorema de Bolzano.

c) Use el Teorema de Bolzano para demostrar que  $x^3 + 3x - 2 = 0$ <sup>1</sup> tiene una solución real entre 0 y 1. Determine dicha raíz real con un error de a lo sumo 0.1 y haciendo una elección por exceso.

<sup>1</sup>Las fórmulas de Cardano G. (1501-1576) permiten obtener las raíces exactas de cualquier polinomio cúbico con coeficientes reales.

El hallazgo de Ferrari L. (1522-1565) permite obtener las raíces exactas de cualquier polinomio de grado cuatro con coeficientes reales.

J. V. Uspensky. "Theory of Equations". McGraw-Hill, Inc. 1948. Biblioteca del Instituto de Matemática, A 152.

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

- d) Sea  $f(x) = \cos(2x) + 3$  ¿Puede afirmar que en el intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$  existe  $x_0$  tal que  $f(x_0) = 3,5$  ? En caso afirmativo determínelo.
- e) Halle la menor raíz positiva de  $\tan(x) = x$ .

**Ejemplo 5.4.23** Supóngase dada la longitud de la hipotenusa  $H$  de un triángulo rectángulo y también conocidas las longitudes de los lados  $-a, b-$  de un rectángulo inscrito como se muestra en la Figura 5.28.

Dados  $a, b$  y  $H$  ¿Cómo podríamos determinar las restantes dimensiones del triángulo, i.e.,  $X, Y$  ?

Para el caso particular  $a = 1,55, b = 2,125$  y  $H = 10$ . aplique el Teorema de Bolzano para explicitar en qué intervalo se encontraría la solución al problema planteado.

Ayuda: En este caso el polinomio en  $X$  que se obtiene, posee las cuatro raíces reales, tres de ellas son positivas. Evalúe el polinomio en  $x = 1, x = 1,5, x = 2$  y en  $x = 10$ .

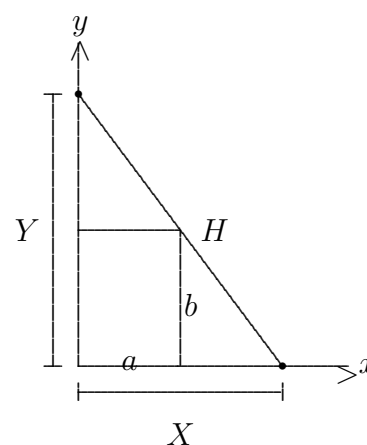


Figura 5.28: Dibujo correspondiente al caso  $a = \frac{3}{2}, b = 2, H = 5$ .

Respuesta:

$$H^2 = Y^2 + x^2$$

$y = mx + n$  los puntos  $(X, 0)$  y  $(0, Y)$  pertenecen a dicha recta  $\therefore$

$$\begin{cases} Y = m \cdot 0 + n & \Rightarrow y = mx + Y \\ 0 = mX + Y & \Rightarrow m = \frac{-Y}{X} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{Y}{X}x + Y.$$

Como  $(a, b)$  es punto de dicha recta

$$b = -\frac{Y}{X}a + Y \quad Y = \frac{bX}{X - a}$$

Reemplazando este último resultado en la primer identidad, i.e.,

$$H^2 - X^2 = \left( \frac{bX}{X-a} \right)^2 \Rightarrow X^4 - 2aX^3 + X^2(a^2 + b^2 - H^2) + 2aH^2X - a^2H^2 = 0.$$

El anterior es no es un polinomio palindrómico. Pero si hacemos la sustitución

$$Z = \frac{Y-b}{a} \equiv Z = \frac{b}{X-a} \Rightarrow X = \frac{b}{Z} + a.$$

Reemplazada esta última en el polinomio cuártico conduce a:

$$a^2b^2Z^4 + 2ab^3Z^3 + (a^2 + b^2 - H^2)b^2Z^2 + 2ab^3Z + b^2 = 0.$$

Dividiendo término a término por  $a^2b^2$ , resulta:

$$Z^4 + 2\frac{b}{a}Z^3 + \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} - \frac{H^2}{a^2} \right) Z^2 + 2\frac{b}{a}Z + \left( \frac{b}{a} \right)^2 = 0.$$

Si  $a = b$  es decir el rectángulo de la Figura 5.28 se ha convertido en un cuadrado, entonces el polinomio cuártico es palindrómico:

$$Z^4 + 2Z^3 + \left( 2 - \frac{H^2}{a^2} \right) Z^2 + 2Z + 1 = 0.$$

En este caso particular sus cuatro raíces exactas pueden determinarse sin más que usar Baskara.

Dividiéndolo por  $Z^2$  resulta:

$$\begin{aligned} Z^2 + 2Z + \left( 2 - \frac{H^2}{a^2} \right) + 2\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z^2} &= 0. \\ \left( Z + \frac{1}{Z} \right)^2 + 2 \left( Z + \frac{1}{Z} \right) + \left( 2 - \frac{H^2}{a^2} \right) - 2 &= 0 \\ \left( Z + \frac{1}{Z} \right)^2 + 2 \left( Z + \frac{1}{Z} \right) - \left( \frac{H^2}{a^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Cuadrático en  $\left( Z + \frac{1}{Z} \right)$ , luego reemplazando la suma de  $Z$  y su recíproca por  $W$ ,

$$\begin{aligned} W^2 + 2W - \left( \frac{H^2}{a^2} \right) &= 0. \\ W_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4H^2/a^2}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 + H^2/a^2}. \\ Z + \frac{1}{Z} = W &\Rightarrow Z^2 + WZ + 1 = 0. \end{aligned}$$

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

---

**Ejemplo 5.4.24** Utilice el Teorema del Valor Intermedio para probar que existen siempre dos puntos en un aro de alambre circular con la misma temperatura. Sugerencia: Coloque el centro en el origen y sea  $\theta$  el ángulo que forma un diámetro con el eje  $x$ . Defina apropiadamente  $f(\theta)$ .

Respuesta: Sea  $f(\theta)$  la temperatura de un extremo del diámetro menos la temperatura en el otro extremo, i.e.  $f(\theta) = t_{\theta_{izq.}} - t_{\theta_{der.}}$ , por lo tanto  $f(\theta = 0) = t_{0_{izq.}} - t_{0_{der.}}$ , mientras que  $f(\theta = \pi) = t_{\pi_{izq.}} - t_{\pi_{der.}}$ . Como para el diámetro,  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , es claro que  $t_{0_{izq.}} = t_{\pi_{der.}}$  y que  $t_{0_{der.}} = t_{\pi_{izq.}}$ , es decir  $f(\theta = 0) = t_{0_{izq.}} - t_{0_{der.}} = t_{\pi_{der.}} - t_{\pi_{izq.}} = -(t_{\pi_{izq.}} - t_{\pi_{der.}}) = -f(\theta = \pi)$ . Por el Teorema del Valor Intermedio para una función continua, existe al menos un  $\theta_*$  perteneciente al intervalo abierto  $(0, \pi)$  tal que  $f(\theta^*) = 0$ , lo que significa que  $f(\theta^*) = t_{\theta^*_{izq.}} - t_{\theta^*_{der.}} = 0$ , en otras palabras dos puntos del aro circular poseen la misma temperatura, ya que  $t_{\theta^*_{izq.}} = t_{\theta^*_{der.}}$ .

**Ejemplo 5.4.25** Una pieza en forma de triángulo equilátero delgado con lados de 1 unidad de longitud, está colocada verticalmente en el plano  $xy$  con un vértice  $V$  en el origen. Bajo la influencia de la gravedad, girará alrededor de  $V$  hasta que un lado toque al eje  $x$ , Figura 2.12, pág. 69, del Trabajo Práctico II, pág. 66. Denotemos por  $x$  a la primera coordenada del punto medio  $M$  del lado opuesto a  $V$  en el momento inicial y sea  $f(x)$  la primera coordenada de este punto en el momento final. Suponemos que el triángulo se equilibra cuando  $M$  está directamente arriba de  $V$ , [Purcell, E. J., Varberg, D. et. al. (1993)], Ejercicio N<sup>o</sup> 49, §2.7, pág. 89.

- Determine el dominio y la imagen de  $y = f(x)$ .
- Determine los puntos de discontinuidad de  $y = f(x)$ .
- Identifique los puntos fijos de  $y = f(x)$ .

Respuesta: El punto  $M$  de la lámina triangular en equilibrio inestable, es el punto medio opuesto al vértice  $V$  de coordenadas  $(0, 0)$ . Por lo tanto, en la posición inicial de equilibrio  $M$  posee como primer coordenada el valor cero, y mientras no sea soplada por alguna brisa, la lámina permanecerá invertida en dicha posición de inestabilidad. Precisamente

por tratarse de una lámina triangular y equilátera, la ordena de M en esta posición es el valor determinado por la altura de un triángulo rectángulo de catetos  $\frac{1}{2}$  e hipotenusa unitaria, i.e.  $h^2 + \frac{1}{2} = 1$ , por lo tanto M en su posición inicial posee coordenadas  $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

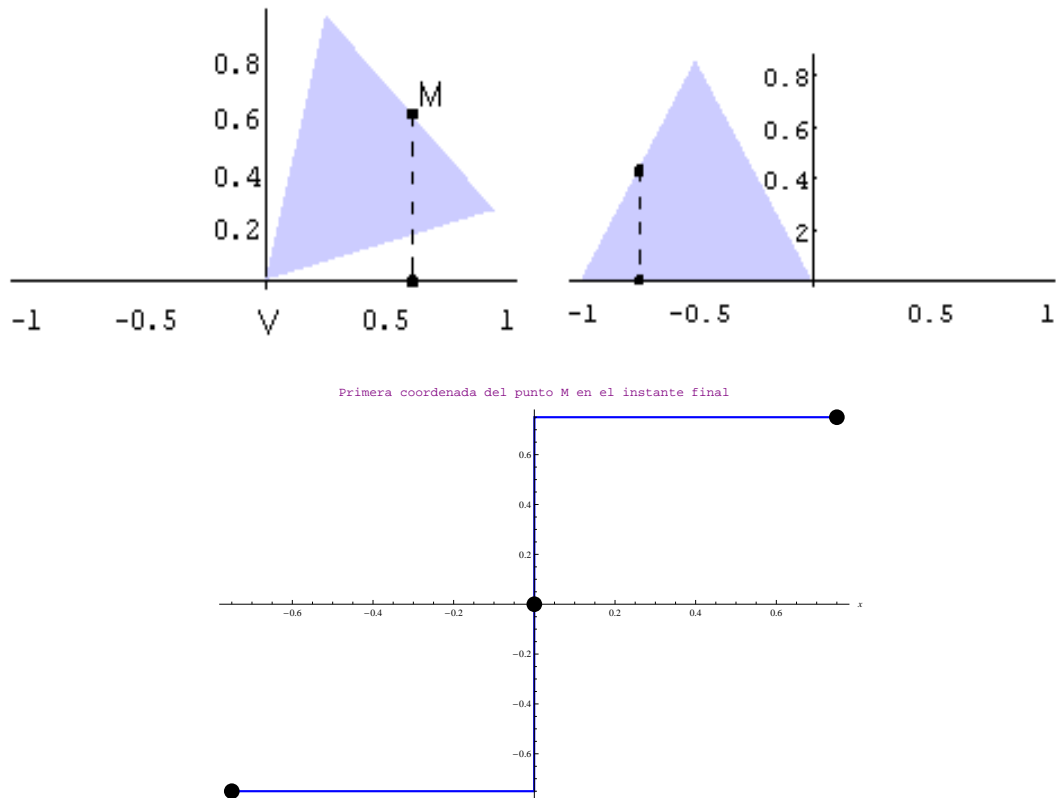


Figura 5.29: Lámina triangular: Primera coordenda del punto M.

El ejercicio propone, hacer un seguimiento de la primera coordenada del punto M en el instante final después que es sometida la lámina a una brisa del lado derecho o izquierdo respecto de la posición de equilibrio. La primera coordenada de M en el instante final, cuando la lámina queda apoyada por una brisa de izquierda a derecha es  $\frac{3}{4}$ . Mientras, que si la brisa que provoca el desequilibrio es de derecha a izquierda, la primera coordenada de M en el instante final es  $-\frac{3}{4}$ . El valor  $\frac{3}{4}$ , proviene de utilizar la evidencia geométrica  $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{x_M^F}{h}$ . En conclusión, la función que realiza el seguimiento de la posición final de la primera coordenada del punto medio opuesto al vértice de la lámina, es una función discontinua en cero que posee tres puntos fijos, a saber  $(0, 0)$  el de equilibrio inestable,  $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$  y  $(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$ .

## Capítulo 5. Teoremas de límites.

---

Estos dos últimos, son los dos equilibrios estables de la lámina triangular equilátera del problema.

Entonces, el  $\text{Dom}f(x) = [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$ , la  $\text{Imag}f(x) = \{-\frac{3}{4}, 0, \frac{3}{4}\}$ . Es discontinua en  $x = 0$  y los puntos fijos son tres  $-\frac{3}{4}, 0, \frac{3}{4}$ , ver Figura 5.29.

**Observación 5.4.26** *Tenga en cuenta que la gráfica en la Figura 5.29 se ha obtenido utilizando “Plot” y la función  $\frac{3|x|}{x}$ , el mathematica, pinta la vertical  $(0, t)$  para  $t \in [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$ , que no debería estar coloreada, pues no se trataría entonces de una función.*

**Ejemplo 5.4.27** *¿ Es correcto exigir el cálculo del límite  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$  ? ¿ Es correcto exigir el cálculo del límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$  ? ¿ Es correcto exigir el cálculo del límite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$  ?*

El dominio de la función  $f(x) = \sqrt{x}$ , es el conjunto de los números reales positivos y el cero. Por lo tanto, las vecindades por derechas de la abscisa  $x_0 = 0$ , por pertenecer al dominio de la función, permiten establecer que es correcto solamente exigir el cálculo del  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$ .

**Ejemplo 5.4.28** *¿ Es correcto exigir el cálculo del límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{[x]}$  ?*

1. Dominio de  $f(x) = \frac{x}{[x]}$  son los números reales del conjunto  $\{\mathbb{R} - (-1, 1)\}$ , i.e.  $f(x)$  está definida en  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ .
2. Por lo tanto  $x_0 = 0$ , es una abscisa que no pertenece al dominio de la función, y lo que es real impedimento, e imposibilita que cobre sentido el cálculo del límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{[x]}$ , es que existen vecindades reducidas de  $x_0 = 0$ , es decir  $0 < |x - x_0| < \delta$ , con  $0 < \delta < 1$  que no pertenecen al dominio de la función considerada. En lenguaje coloquial es imposible aproximarse por derecha y por izquierda a  $x_0 = 0$  para la función considerada.

¡ NO ES CORRECTO !  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{[x]}$

**Ejercicio 5.4.29** *Sean  $f(x) = \frac{x}{[x]}$  y  $f(x) = \frac{x}{\lceil x \rceil}$ . ¿ Es correcto exigir el cálculo del límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{[x]}$  ? ¿ Es correcto exigir el cálculo del límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\lceil x \rceil}$  ?*



# Parte VI

## Derivada



# Capítulo 6

## Derivada: Ejemplos

## 6.1. Gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$ .

**Ejemplo 6.1.1** Grafique la función real  $f(x) = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$  teniendo en cuenta: El dominio de la función, paridad o imparidad, intersecciones con los ejes coordenados, continuidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos, concavidad, puntos de inflexión y asíntotas.

- *Dom* $f(x)$ :  $h(x) = x^2(6-x)$  es un polinomio real por lo que  $\text{Dom}(h(x)) = \mathfrak{R}$ .  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  está definida  $\forall x \in \mathfrak{R}$ . Entonces el dominio de  $f(x) = g(h(x))$  es  $\mathfrak{R}$ .

- Paridad o imparidad: para comprobar si la función es par, impar o ninguna de ambas cosas se calcula  $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2[6-(-x)]} = \sqrt[3]{x^2(6+x)}$ . Como  $f(-x) \neq f(x) = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$  y  $f(-x) \neq -f(x) = -\sqrt[3]{x^2(6-x)}$  se concluye que  $f(x)$  no es par ni impar.

- *Intersecciones con los ejes coordenados*: Intersección con el eje  $x$ ,  $\begin{cases} y = 0 \\ y = \sqrt[3]{x^2(6-x)} \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow x = 0; x = 6$ .

Intersección con el eje  $y$ ,  $\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{x^2(6-x)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0; f(0) = 0$ .

- Continuidad:  $h(x) = x^2(6-x)$  es un polinomio por lo que se puede asegurar su continuidad  $\forall x$  y  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  es continua  $\forall x$ , por lo tanto  $f(x) = g(h(x))$  es una función continua  $\forall x$ , por ser composición de funciones continuas.

- *Intervalos de crecimiento y decrecimiento*:

$$f'(x) = \frac{12x - 3x^2}{x^{4/3}(6-x)^{2/3}} = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} \quad x \neq 0$$

entonces  $f'(x)$  no está definida en  $x = 0$  y en  $x = 6$ .

$$f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$$

tampoco está definida  $f''(x)$  en  $x = 0$  y en  $x = 6$ .

*Estudio del signo de  $f'(x)$ .*

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 4-x > 0 \\
 (-\infty, 0) \quad x^{1/3} < 0 \\
 (6-x)^{2/3} > 0
 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } (-\infty, 0) \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 4-x > 0 \\
 (0, 4) \quad x^{1/3} > 0 \\
 (6-x)^{2/3} > 0
 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es creciente en } (0, 4) \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 4-x < 0 \\
 (4, 6) \quad x^{1/3} > 0 \\
 (6-x)^{2/3} > 0
 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } (4, 6) \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 4-x < 0 \\
 (6, +\infty) \quad x^{1/3} > 0 \\
 (6-x)^{2/3} > 0
 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } (6, +\infty)
 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} = -\infty$  estos dos límites indican que el punto crítico  $P_c = (0, f(0)) = (0, 0)$  es un punto cuspidal de retroceso del tipo que tiene  $f(x) = x^{2/3}$  en  $(0, 0)$ , allí no hay recta tangente única (vertical) y como en un  $\mathcal{E}_r(0, \delta)$  el signo de  $f'(x)$  cambia de negativo a positivo al pasar por  $x_c = 0$ , resulta ser un mínimo relativo o local de la  $f(x)$ .

- Extremos:** Los abscisas de los puntos críticos de  $f(x)$  son  $\{0, 4, 6\}$ . En  $x = 4$  hay punto estacionario y en  $x = 0$  cuspidal. En  $x = 6$  es

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = -\infty$$

y como existe  $\mathcal{E}_r(6, \delta)$  en donde el signo de  $f'(x)$  no cambia, el punto  $(6, 0)$  no es extremo y en él existe tangente única vertical de ecuación  $x = 6$ .

Como  $f'(x) = 0$  se verifica sólo cuando  $x = 4$  y  $f''(4) < 0$ , la función tiene un máximo relativo o local estricto en  $x = 4$ . En síntesis, la función tiene un punto cuspidal de retroceso mínimo en  $(0, 0)$ , un máximo local estricto en  $(4, \sqrt[3]{32})$  y no tiene extremo en  $(6, 0)$ .

## Capítulo 6. Derivada: Ejemplos

- *Concavidad y puntos de inflexión:* No existe valor de  $x$  que anule a  $f''(x)$  y no está definida en  $x = 0$  ni en  $x = 6$ .

Como en  $x = 0$  hay un mínimo relativo cuspidal, no hay inflexión. Para ver que ocurre en  $x = 6$ , donde la curva tiene tangente única vertical, estudiaremos el signo de  $f''(x)$ .

$$\begin{aligned} (-\infty, 0) \quad \left. \begin{array}{l} x^{4/3} > 0 \\ (6-x)^{5/3} > 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia abajo en } (-\infty, 0) \\ (0, 6) \quad \left. \begin{array}{l} x^{4/3} > 0 \\ (6-x)^{5/3} > 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia abajo en } (0, 6) \\ (6, +\infty) \quad \left. \begin{array}{l} x^{4/3} > 0 \\ (6-x)^{5/3} < 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es cóncava hacia arriba en } (6, +\infty) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $(6, 0)$  es un punto de inflexión.

- *Asíntotas:*

- *Verticales:*  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{x^2(6-x)} \neq \begin{cases} \infty \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} \quad \forall x_0 \in \mathfrak{R} \Rightarrow \nexists$  asíntotas verticales.

- *Horizontales:*  $\lim_{x \rightarrow \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}} \sqrt[3]{x^2(6-x)} = \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists$  asíntotas horizontales.

- *Oblicuas:* Si  $y = mx + n$  es una asíntota oblicua de  $y = f(x)$ , entonces  $f(x) - (mx + n) = \sigma(x)$ , con  $\sigma(x)$  infinitésimo para  $x \rightarrow \begin{cases} +\infty \\ 0 \\ -\infty \\ 0 \\ \infty \end{cases}$ , por lo tanto

$$f(x) = mx + n + \sigma(x), \text{ y } \lim_{x \rightarrow \begin{cases} +\infty \\ 0 \\ -\infty \end{cases}} \frac{f(x)}{x} = m. \text{ Como } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(6-x)}}{x} =$$

$$-1, \text{ resulta } y = -x + n. \text{ Para obtener } n \text{ calculamos } \lim_{x \rightarrow \begin{cases} +\infty \\ 0 \\ -\infty \end{cases}} (f(x) - x) =$$

$\lim_{x \rightarrow \begin{cases} +\infty \\ 0 \\ -\infty \end{cases}} (\sqrt[3]{x^2(6-x)} + \sqrt[3]{x^3})$ , que es del tipo  $-\infty + \infty$ . Para salvar esta indeterminación, tenemos en cuenta que  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ , es decir  $a+b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$ , luego llamando  $a = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$  y  $b = \sqrt[3]{x^3}$  se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^2(6-x)} + \sqrt[3]{x^3}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(6-x) + x^3}{(x^2(6-x))^{2/3} - \sqrt[3]{x^2(6-x)x^3} + x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2}{x^{4/3}(6-x)^{2/3} - x^2(6-x)^{1/3} + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\left(\frac{6-x}{x}\right)^{2/3} - (6-x)^{1/3} + 1} = 2 \end{aligned}$$

por lo tanto la ecuación de la asíntota oblicua es  $y = -x + 2$ . Finalmente como

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty \text{ concluimos que } \text{Im}f(x) = \mathfrak{R}.$$

**Observación 6.1.2** *En general, si se estudia el signo de  $f'(x)$  y el de  $f''(x)$  se obtienen directamente los puntos críticos, además en cuales hay extremos y en cuales nó y también se obtienen los puntos de inflexión. Pues donde  $f'(x)$  cambia de signo hay extremo local y donde  $f''(x)$  cambia de signo hay un punto de inflexión.*

$$\text{Signo}(f'(x)) = \text{Signo}\left(\frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}\right) \equiv \text{Signo}\left(\frac{4-x}{x^{1/3}}\right) \Big|_{x \neq 6}$$

y

$$\text{Signo}(f''(x)) = \text{Signo}\left(\frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}\right) \equiv \text{Signo}\left(\frac{1}{(x-6)^{5/3}}\right) \Big|_{x \neq 0}.$$

*Procedimiento que evitaría cierta redundancia del trabajo previo.*

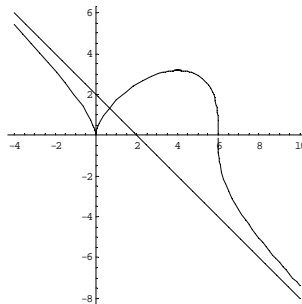


Figura 6.1: Gráfico de  $f(x) = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$ .

## 6.2. Velocidades Relacionadas

**Ejemplo 6.2.1** *Un peso puntual  $W$  está ligado a una soga de longitud  $L$ , que pasa a través de la polea  $P$ , situada a una altura  $H$  del suelo. El otro extremo de la soga está atado a un camión y dicha atadura está a nivel  $h$  del suelo. El camión avanza a velocidad constante  $v$ .*

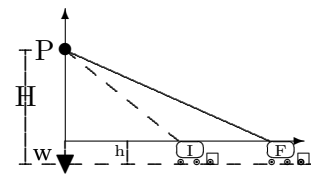


Figura 6.2: Elevación del peso  $W$ .

Si  $L = 50\text{ft}$ ,  $H = 20\text{ft}$ ,  $h = 2\text{ft}$ ,  $v = 9\text{ft/sec}$ ; ¿ Con qué velocidad se eleva  $w$  cuando está a 6 pies del suelo ?

*Geometría del Problema.*

Determine las posiciones inicial  $X(0)$ , final  $X(F)$  y la distancia que puede recorrer el camión en base a los datos  $H, L, h, v$ .

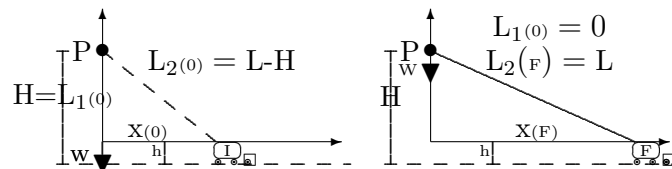


Figura 6.3: Estado inicial y final de las variables.



*Mecánica del Problema.*

Determine la expresión de la velocidad de elevación del peso  $w$  en función de los datos  $H, L, h, v$ . Determine los intervalos de variación de cada una de las magnitudes variables. Determine qué magnitudes poseen igual y cuáles diferentes tasas de variación -analice físicamente sus respuestas. Conjeture en qué circunstancias la velocidad de elevación resultaría aproximadamente igual a la velocidad del camión. ¿ En qué instantes la velocidad de elevación es: la menor posible, la mayor posible ?

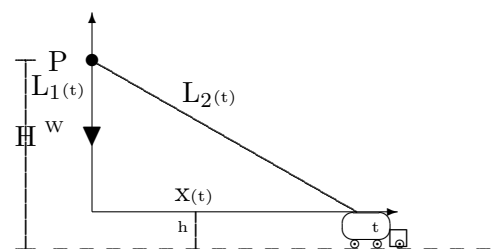


Figura 6.4: Dinámica del Problema.

Posición Inicial y Final del Camión.

$L_1(t) :=$  distancia del peso  $W$  a la polea.

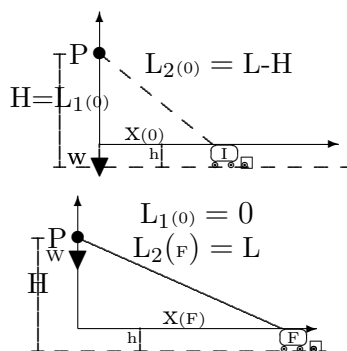
$$(H - h)^2 + x(0)^2 = L_2(0)^2$$

$$L_1(0) = H$$

$$H + L_2(0) = L$$

$$(H - h)^2 + x(0)^2 = (L - H)^2$$

$$x(0) = \sqrt{(L - H)^2 - (H - h)^2}.$$



$$(H - h)^2 + x(F)^2 = L_2(F)^2$$

$$L_1(F) = 0$$

$$L_2(F) = L$$

$$(H - h)^2 + x(F)^2 = L^2$$

$$x(F) = \sqrt{L^2 - (H - h)^2}.$$

## Capítulo 6. Derivada: Ejemplos

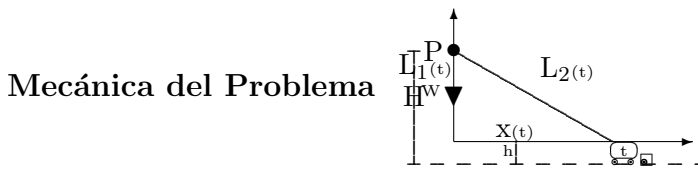
---

∴ los intervalos de variación de las variables son:

$$0 \leq L_1(t) \leq H$$

$$L - H \leq L_2(t) \leq L$$

$$\sqrt{(L - H)^2 - (H - h)^2} \leq x(t) \leq \sqrt{L^2 - (H - h)^2}.$$



$$L_1(t) + L_2(t) = L$$

$$L_1 \dot{(t)} + L_2 \dot{(t)} = 0 \Rightarrow -L_1 \dot{(t)} = L_2 \dot{(t)}$$

$$y(t) + L_1(t) = H$$

$$y \dot{(t)} = -L_1 \dot{(t)}$$

∴

$$y \dot{(t)} = -L_1 \dot{(t)} = L_2 \dot{(t)}$$

$$x \dot{(t)} = v$$

$$(H - h)^2 + x(t)^2 = L_2(t)^2$$

$$2x(t)x \dot{(t)} = 2L_2(t)L_2 \dot{(t)}$$

$$x(t)x \dot{(t)} = L_2(t)L_2 \dot{(t)}$$

$$x(t)x \dot{(t)} = L_2(t)y \dot{(t)}$$

$$\frac{x(t)x \dot{(t)}}{L_2(t)} = y \dot{(t)}$$

$$\frac{\sqrt{L_2(t)^2 - (H - h)^2} x \dot{(t)}}{L_2(t)} = y \dot{(t)}$$

$$\frac{\sqrt{L_2(t)^2 - (H - h)^2} v}{L_2(t)} = y \dot{(t)}$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{H-h}{L_2(t)}\right)^2} v = \dot{y}(t).$$

La última ecuación es la velocidad de elevación del peso. Si  $H = h$  no tiene sentido la polea, y el problema se reduce a que el camión arrastre horizontalmente el peso  $W$ . En tal caso la variable  $L_1(t)$  es nula e  $y(t) \equiv h$

Por otra parte, para que resulte  $\dot{y}(t) \approx v$  se debe tomar  $L_2(t)$  muy grande, i.e., una soga de longitud muy grande comparada con  $H$ . En tal caso

$$\begin{aligned} L - H &< L \\ \frac{1}{L} &< \frac{1}{L - H} \\ 0 &< \frac{H - h}{L} < \frac{H - h}{L - H} \\ \frac{(H - h)^2}{L^2} &< \frac{(H - h)^2}{(L - H)^2} \\ -\frac{(H - h)^2}{(L - H)^2} &< -\frac{(H - h)^2}{L^2} \\ 1 - \frac{(H - h)^2}{(L - H)^2} &< 1 - \frac{(H - h)^2}{L^2} \end{aligned}$$

Entonces, teniendo en cuenta la fórmula que da  $\dot{y}(t)$  y que  $L_2(0) = L - H$  y  $L_2(t) = L$ , resulta que la velocidad de elevación en el instante inicial es menor que en el instante final, pues:

$$\dot{y}(0) = \sqrt{1 - \left(\frac{H-h}{L-H}\right)^2} v < \dot{y}(F) = \sqrt{1 - \left(\frac{H-h}{L}\right)^2} v.$$

Pero además, dado que  $L$  es “muy grande” comparada con  $H$ , resulta  $L - H \approx L$  y además  $\left(\frac{H-h}{L-H}\right)^2 \approx \left(\frac{H-h}{L}\right)^2$  y ambos serán tanto más pequeños cuanto más grande sea  $L$  con respecto a  $H$ . Pero entonces, tanto  $1 - \left(\frac{H-h}{L-H}\right)^2$  como  $1 - \left(\frac{H-h}{L}\right)^2$  son positivos y muy cercanos a 1, luego también serán próximas a 1 sus raíces cuadradas. En síntesis,  $\sqrt{1 - \left(\frac{H-h}{L-H}\right)^2} \approx 1$  y  $\sqrt{1 - \left(\frac{H-h}{L}\right)^2} \approx 1 \therefore \dot{y}(0) = \sqrt{1 - \left(\frac{H-h}{L-h}\right)^2} v \approx$

## Capítulo 6. Derivada: Ejemplos

---

$v \approx \sqrt{1 - \left(\frac{H-h}{L}\right)^2} v = \dot{y}(F)$ . Es decir, las velocidades inicial y final son muy similares y ambas muy similares a la velocidad  $v$  del camión.

Por otra parte, como

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\frac{H-h}{L_2(t)}\right)^2}} 2 \left(\frac{H-h}{L_2(t)}\right) \left(\frac{H-h}{L_2(t)^2}\right) > 0 \quad \forall t$$

resulta que  $\dot{y}(t)$  es una función estrictamente creciente i.e. la velocidad irá aumentando con la altura.

## 6.3. Optimización

**Ejemplo 6.3.1** Determine el punto del suelo desde el cual se ve el segmento vertical  $\overline{AB}$  bajo ángulo máximo. Ver Figura 6.5. §33-7, pág. 464, viii. *Funciones derivables, Análisis Matemático, J. Rey Pastor, P. Pi Calleja y C. A. Trejo, Tomo I.*

En la figura se indica la construcción geométrica de la solución.

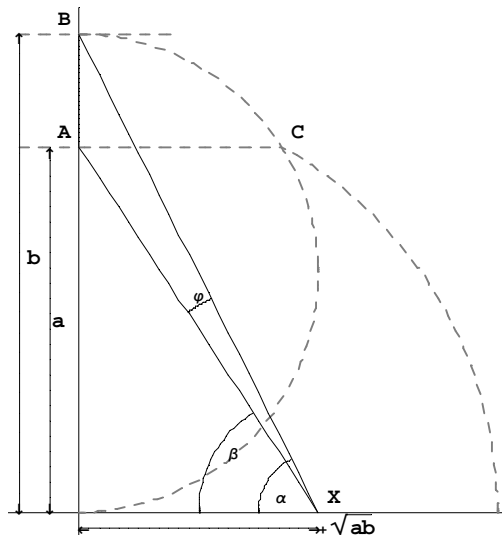


Figura 6.5: Mejor visualización de  $\overline{AB}$ .

*Respuesta:* En el caso de nuestro problema, en el cual  $x$  toma valores positivos y  $\varphi(x)$  varía en el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ , maximizar  $\varphi(x)$  es equivalente a maximizar  $\tan \varphi(x)$ , ya que la tangente es estrictamente creciente en  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , como  $\tan \varphi(x) = \frac{\tan \beta(x) - \tan \alpha(x)}{1 + \tan \beta(x) \tan \alpha(x)} = \frac{\frac{b-a}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{a(b-a)}{x^2}} = \frac{b-a}{x + abx^{-1}}$ , tendremos que  $\max[\varphi(x)] \equiv \max[\tan \varphi(x)] = \max \frac{(b-a)}{x + abx^{-1}}$ .

Por otra parte, como  $(b-a) > 0$ , será  $\max \frac{(b-a)}{x + abx^{-1}} \equiv \min(x + abx^{-1})$ . Entonces nuestro objetivo es ahora minimizar  $g(x) = x + abx^{-1}$ . Para ello debemos calcular  $\frac{d}{dx}(x + abx^{-1}) = 1 - \frac{ab}{x^2}$  e igualarla a cero:  $1 - \frac{ab}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - ab}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{ab}$ . La abscisa crítica que resuelve nuestro problema es  $x_c = \sqrt{ab}$ . En efecto,  $g''(x) = \frac{d}{dx} \left(1 - \frac{ab}{x^2}\right) \Big|_{\sqrt{ab}} = \frac{2ab}{x^3} \Big|_{\sqrt{ab}} > 0$ , luego  $g(\sqrt{ab})$  es un mínimo de  $x + abx^{-1}$ .

Analicemos que ocurre con la abscisa real negativa  $x_c = -\sqrt{ab}$ . En este caso,  $\max \frac{(b-a)}{x + abx^{-1}} \equiv \max x + abx^{-1}$  y entonces  $\frac{d^2}{dx^2} x + abx^{-1} \Big|_{-\sqrt{ab}} = \frac{2ab}{x^3} \Big|_{-\sqrt{ab}} < 0$ , la abscisa  $x_c = -\sqrt{ab}$  corresponde a un máximo. Como era de esperar, las dos soluciones dan puntos simétricos respecto del punto  $O$ .

## Capítulo 6. Derivada: Ejemplos

**Ejemplo 6.3.2** Hallar el cono de mayor superficie lateral que pueda inscribirse en un cono de radio 1 y altura 3 de acuerdo con la siguiente Figura 6.6. Referirse a la pág. 266, Ejemplo 5, del libro *Introducción al Análisis Matemático (Cálculo 1)*. Hebe T. Rabuffetti, Edit. El Ateneo.

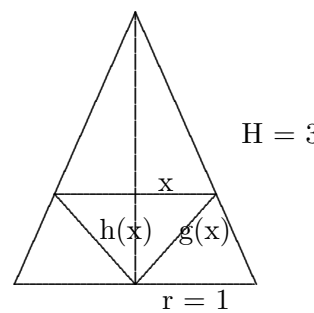


Figura 6.6: Conos invertidos

*Respuesta:* Utilizando la fórmula que da la superficie lateral de un cono, al área correspondiente al cono inscripto, sin considerar el área de la base circular, es

$$a(x) = \pi x g(x)$$

donde la generatriz  $g(x)$  es

$$g(x) = \sqrt{x^2 + [h(x)]^2}.$$

$$\text{luego } g(x) = \sqrt{x^2 + 9(1-x)^2} = \sqrt{10x^2 - 18x + 9}.$$

Para calcular  $h(x)$  podemos comparar los triángulos semejantes  $ABC$  y  $AB'C'$ , donde  $\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'}$ .

Reemplazando valores en la igualdad anterior, resulta:

$$\frac{3-h(x)}{x} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow 3-h(x) = 3x \Leftrightarrow h(x) = 3(1-x).$$

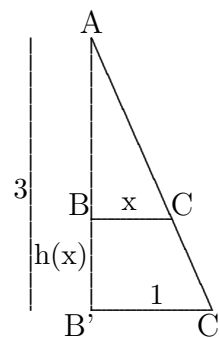


Figura 6.7: Triángulos semejantes

Finalmente  $\forall x > 0$  es  $a(x) = \pi x \sqrt{10x^2 - 18x + 9}$ . El área, entonces, depende exclusivamente de  $x$ . De acuerdo con los datos del problema y el significado geométrico asignado a la variable  $x$ , el dominio de la función  $a(x)$  que da el área determinada es el intervalo abierto  $(0, 1)$ .

Por lo tanto los puntos 0 y 1 son puntos críticos de la función, ya que son extremos del dominio de la función a extremar.

Para buscar los demás puntos críticos calculamos la derivada de la función  $a(x)$ .

Obtenemos

$$a'(x) = \frac{\pi(20x^2 - 27x + 9)}{\sqrt{10x^2 - 18x + 9}}.$$

La derivada  $a'(x)$  se anula en los puntos  $x_1 = \frac{3}{4}$  y  $x_2 = \frac{3}{5}$ , ambos interiores al intervalo  $(0, 1)$ .

Puede verificarse, mediante uno cualquiera de los criterios estudiados, que el valor  $a(\frac{3}{4})$  es un mínimo local y el valor  $a(\frac{3}{5})$  es un máximo local.

Sin embargo, como la función área considerada es continua en el intervalo abierto  $(0, 1)$ , no alcanza necesariamente extremos absolutos en dicho conjunto. En este caso no tiene ni máximo ni mínimo absolutos, pues ambos corresponden a los extremos del intervalo abierto, como puede verificarse al tomar los valores  $a(0)$  y  $a(1)$ . Tengase en cuenta que si la función  $a(x)$ , que es continua en el cerrado  $[0, 1]$ , tomase un extremo absoluto en un punto del abierto  $(0, 1)$ , tal extremo absoluto sería también extremo relativo. Por lo

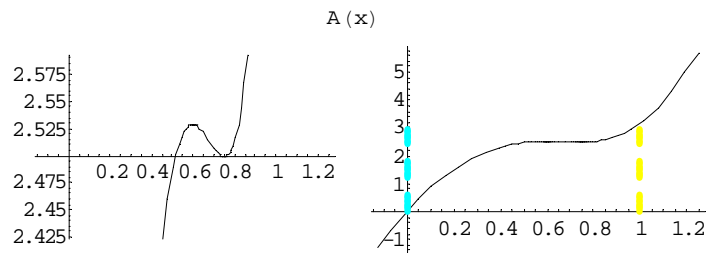


Figura 6.8: Problema de optimización sin solución

tanto, el problema de obtener extremos absolutos de  $a(x)$  en  $(0, 1)$  no tiene solución. Considerando los casos límites  $x = 0$  y  $x = 1$ , los extremos absolutos resultan  $a(0) = 0$  y  $a(1) = \pi$ . Interprete geoméricamente cuáles son los “conos límites” correspondientes a  $x = 0$  y  $x = 1$ .

**Observación 6.3.3** *Nótese que, al encarar un problema de este tipo, es necesario un análisis exhaustivo de las condiciones planteadas y de la función obtenida para resolverlo. Si se resuelve mecánicamente el problema, considerando solamente los puntos del dominio donde se anula la derivada primera, pueden obtenerse conclusiones erróneas.*

## Capítulo 6. Derivada: Ejemplos

**Ejemplo 6.3.4** Los puntos  $A$  y  $B$  están en distintas orillas de un río recto de 3 km de ancho y son opuestos uno del otro. El punto  $C$  está en la misma orilla que  $B$  pero a  $k$  kilómetros de  $B$ , río abajo. Una compañía telefónica desea tender un cable desde  $A$  a  $C$ . El costo por kilómetro de cable para tierra es de \$10.000 y el de cable acuático es de \$ 12.500. Se piensa en tender el cable desde  $A$  hasta un punto  $P$  en la orilla opuesta y desde allí hasta  $C$ .

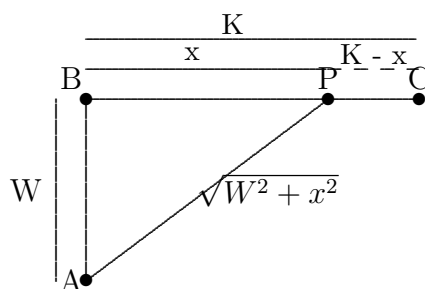


Figura 6.9: Variantes de un problema de optimización.

*Respuesta:* Haremos un planteo general del problema: Supongamos que  $C_T$  es el costo del cable terrestre y  $C_A$  el costo del cable sumergible, por km. En tal caso el costo total del cable tendido estará determinado por:

$$C(x) = C_A \sqrt{W^2 + x^2} + C_T (K - x)$$

para  $x$  variando en el intervalo  $[0, K]$ .

Como

$$C'(x) = \frac{x}{\sqrt{W^2 + x^2}} C_A - C_T,$$

los puntos críticos estacionarios se obtienen resolviendo la ecuación  $C'(x) = 0$ :

$$\frac{x}{\sqrt{W^2 + x^2}} C_A = C_T \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{q^2 - 1}} W,$$

donde hemos notado por  $q$  al cociente de costos  $q = \frac{C_A}{C_T}$ .

Como el dominio de definición de  $C(x)$  es  $[0, K]$ , se debe descartar la raíz negativa, luego el único punto crítico estacionario es  $x_c = \sqrt{\frac{1}{q^2 - 1}} W$ . Por otra parte, como

$$C''(x) = \frac{W^2}{(W^2 + x^2)^{3/2}} > 0 \quad \forall x,$$

y  $\forall x \in [0, K]$ , resulta que  $C(x)$  tiene un mínimo local en  $\frac{W}{\sqrt{q^2 - 1}}$ , siempre que  $q$  sea mayor que 1, es decir, que el cable terrestre sea estrictamente más barato que el sumergible. Si el costo del cable sumergible resultara menor o igual que el del terrestre por km, la



ecuación  $C'(x) = 0$  tiene raíces complejas y no tiene raíces reales. Esto significa que, en tal situación, la función a extremar no tiene puntos críticos estacionarios ni singulares. Luego los extremos absolutos deben estar en los puntos frontera del dominio. Analice la situación y diga cuál es la solución de menor costo en este último caso.

Un problema específico establecería  $C_A = 12,500\$/km$ ,  $C_T = 10,000\$/km$ ,  $W = 3$  y  $K = 2$ . En este caso  $q = 0,8$ ,  $x_c = 4 > K = 2$ , por lo tanto el Problema propuesto se resuelve utilizando la continuidad de  $C(x)$  en  $[0, k = 2]$ , en cuyo caso el Teorema de Bolzano Weierstrass establece que la función alcanza el mínimo y el máximo absoluto, en  $[0, 2]$  como  $C(x)$  en dicho intervalo es estrictamente decreciente el mínimo absoluto de  $C(x)$  será alcanzado en  $x = 2$ . Es decir, se utilizará un tendido completamente acuático.  $C(0) = 57500$  y  $C(2) = 45069$ . Si los valores de los cables se mantienen fijos en 12.500 \$ y 10.000 \$ respectivamente ¿Cuál es la mínima distancia  $K$  entre  $B$  y  $C$  a partir de la cual la solución incluye un tramo terrestre ?

**Ejemplo 6.3.5** *Un campo petrolero tiene  $N$  pozos que producen un total de  $B$  barriles de crudo por día. Por cada pozo nuevo que se adiciona, la producción media por pozo disminuye en  $b$  barriles diarios. ¿ Cuántos pozos adicionales se deben agregar para obtener la mayor producción de crudo por día ?*

*Respuesta.*

Producción de barriles  $P$  en función (la función es discreta pero la “continuizamos ”) del número de pozos  $x$ :

$$P(x) = x[B - (x - N)b] = -bx^2 + (B + Nb)x, \quad x \in [0, +\infty).$$

Cabe hacer notar que la función  $\overline{P(x)}$  que modela el problema es en realidad una restricción de la función  $P(x)$ , más precisamente es la restricción de  $P(x)$  al conjunto  $D = [0, +\infty) \cap [N, N + \frac{B}{b}] \cap \mathbf{N}$ .

Esto es así porque:

- La variable es “número de barriles ”, es decir, un número natural,
- La función  $P(x)$ , cantidad total de crudo, se anula en  $x = 0$ ;  $x = N + \frac{B}{b}$  y toma valores negativos fuera del intervalo  $[0, N + \frac{B}{b}]$ ,

## Capítulo 6. Derivada: Ejemplos

---

- Como se pide el número de barriles que se debe adicionar a los  $N$  existentes, sólo interesa la producción de crudo  $P(x)$  para  $x \geq N$ .

Para determinar el número de barriles que corresponde a la máxima producción de crudo procederemos a extremar la función  $P(x)$  sobre el dominio  $[0, N + \frac{B}{b}]$  y luego, en base a tal resultado, deducir la solución buscada para  $\overline{P(x)}$ .

$$P'(x) = -2bx + (B + Nb)$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -2bx + B + Nb = 0 \Leftrightarrow x_c = \frac{B + Nb}{2b}$$

$$P''(x) = -2b < 0 \quad \forall x.$$

$P(x)$  tiene un máximo relativo estricto en  $x_c$ . Como la función es continua en  $[0, \frac{B + Nb}{b}]$  tiene máximo absoluto y mínimo absoluto. Si un extremo absoluto está en el interior será extremo relativo. Puesto que en nuestro caso hay un sólo punto crítico estacionario en el interior y la función toma el mínimo absoluto cero en los dos extremos, el máximo absoluto sólo puede estar en el  $x_c = \frac{B + Nb}{2b}$ . Con esta información es posible deducir cuál es el número entero del intervalo  $[N, N + \frac{B}{b}]$  en el que  $\overline{P(x)}$  toma su máximo valor:

- i) Si el punto  $x_c$  está en el dominio de  $\overline{P(x)}$ , es decir si  $x_c$  es un entero en  $[N, N + \frac{B}{b}]$  entonces es la solución buscada.
- ii) Si  $x_c \in [N, N + \frac{B}{b}]$  pero no es entero, entonces la solución buscada es el entero en tal intervalo más próximo a  $x_c$ .
- iii) Si  $x_c \notin [N, N + \frac{B}{b}]$ , es decir si  $x_c = \frac{Nb + B}{2b} < N$ , entonces, también en este caso la solución es el entero en  $[N, N + \frac{B}{b}]$  más próximo a  $x_c$ .

## 6.4. Ejercicio resuelto: Optimización. Nivel II: 2<sup>do</sup> PARCIAL - ♣©2<sup>do</sup> COLOQUIO.

Miguel, ecologista, tiene que cruzar diametralmente -antípodas- una laguna circular de un 1 kilómetro de radio. Puede hacerlo ya sea atravesándola a remo a  $2 \frac{\text{km}}{\text{hora}}$  o bordeándola a pie a  $4 \frac{\text{km}}{\text{hora}}$ , o parte a remo y parte caminando (Ver Figura 6.10).

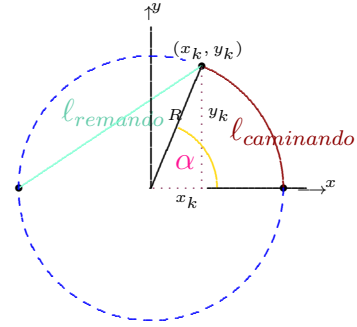


Figura 6.10: Miguel: Braquistócrona vs Máximo deleite del panorama

¿ Cómo tendrá que hacer el recorrido para:

- i) disfrutar al máximo del panorama -tiempo máximo ?
- ii) cruzar lo más rápido posible -braquistócrona: trayectoria de tiempo mínimo ?

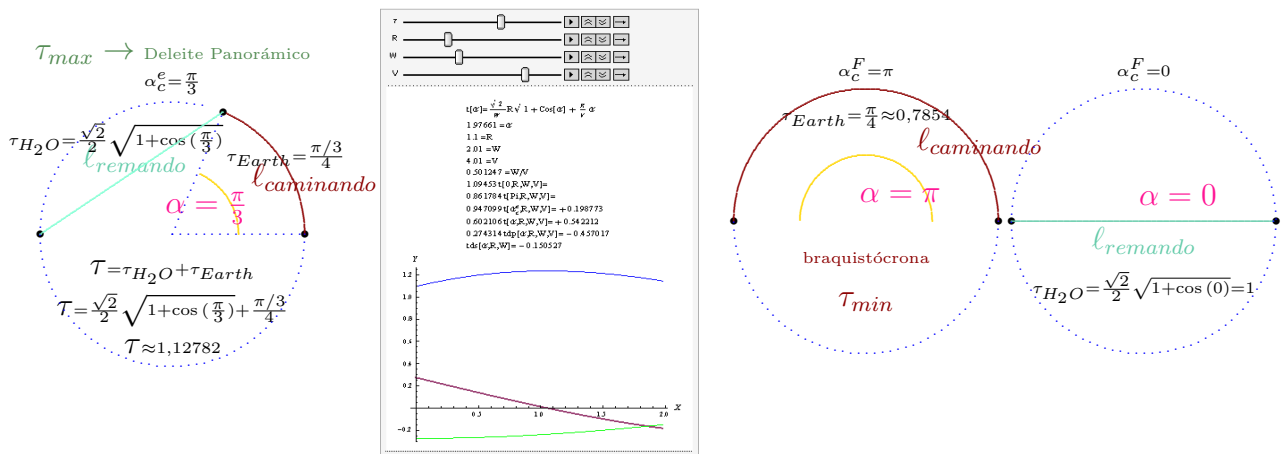


Figura 6.11: Solución del Ej. 17, pág. 288, M. Spivak

$$t_T = \frac{\ell_{remando}}{v_{remando}} + \frac{\ell_{caminando}}{v_{caminando}}$$

$$\ell_{remando}^2 = r^2 + r^2 - 2rr \cos(\alpha)$$

$$\ell_{\text{caminando}} = \alpha r$$

∴

$$t_T = \sqrt{2}r \frac{\sqrt{1 + \cos(\alpha)}}{v_{\text{remando}}} + \frac{\alpha r}{v_{\text{caminando}}}; \quad 0 \leq \alpha \leq \pi$$

Calculemos la derivada primera de la función del tiempo viajado<sup>1</sup>, i.e.

$$\frac{dt_T}{d\alpha} = \frac{r}{v_{\text{caminando}}} - \frac{r}{\sqrt{2}v_{\text{remando}}} \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha)}}$$

Calculemos la derivada segunda de la función del tiempo viajado, i.e.

$$\frac{d^2 t_T}{d^2 \alpha} = -\frac{r}{2\sqrt{2}v_{\text{remando}}} \frac{(1 + \cos(\alpha))^2}{(1 + \cos(\alpha))^{\frac{3}{2}}}$$

Ahora determinemos los puntos críticos en  $\alpha_c \in [0, \pi]$ . Comencemos por reconocer los dos puntos críticos frontera del problema  $\alpha_c^F = 0$  y  $\alpha_c^F = \pi$ . Luego, determinemos si existen puntos críticos estacionarios,  $\alpha_c^e$ , es decir, aquellos en los que  $\frac{dt_T}{d\alpha} = 0$ ,  $\alpha_c^e \in (0, \pi)$ . Y finalmente, identifiquemos la existencia o nó de puntos críticos singulares,  $\alpha_c^s$ , es decir aquellos en los que no existe finita la derivada primera de la función del tiempo.

Si llamamos  $c$  al cociente de las velocidades de las dos capacidades deportivas de Miguel

$c = \frac{v_{\text{remando}}}{v_{\text{caminando}}}$  e igualamos a cero la derivada primera de la función  $t_T(\alpha)$ , resulta

$$\frac{dt_T}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha)}} = \frac{\sqrt{2}v_{\text{remando}}}{v_{\text{caminando}}} = \sqrt{2}c.$$

Si elevamos al cuadrado, y reorganizamos la identidad anterior, aún ante el eventual costo de agregar soluciones adicionales a las del problema y omitiendo de manera ligera el hecho de que el denominador  $\sqrt{1 + \cos(\alpha)}$  no puede ser cero, resulta:

$$2c^2(1 + \cos(\alpha)) = \sin^2(\alpha)$$

la sustitución de la identidad trigonométrica  $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$ , nos permite transformar la búsqueda de las abscisas críticas estacionarias del problema por medio de:

$$\cos^2(\alpha) + 2c^2 \cos \alpha + 2c^2 - 1 = 0 \tag{6.1}$$

---

<sup>1</sup>Ejercicio generalizado a partir de la versión que aparece en “*Calculus, cálculo infinitesimal*”, Michael Spivak, Editorial Reverté, S. A., 5ª reimpression 1999. §11 Significado de la derivada. PROBLEMAS, pág. 288, ej. 17.

que afortunadamente con la sustitución  $u = \cos \alpha$ , puede resolver con la utilización de la fórmula de Bhaskara para determinar los ceros de la siguiente cuadrática  $u^2 + 2c^2u + 2c^2 - 1 = 0$ , a saber:  $u_{+,-} = -c^2 \pm \sqrt{(c^2 - 1)^2}$ .

A partir de ahora suponemos desconocer las capacidades deportivas del ecologista y por razones didácticas que implican la generalización del problema hablaremos de la velocidad  $W$  cuando Miguel se esté trasladando por el agua del lago y con velocidad  $V$  cuando Miguel se traslade por la periferia terrestre del lago circular, i.e.  $v_{remando} \rightarrow W$  y  $v_{caminando} \rightarrow V$ ,  $\therefore$  el parámetro  $c = \frac{W}{V}$ , es el cociente de velocidades, en otras palabras una constante positiva del problema generalizado. Las expresiones que resuelven el problema son:

$$t_T(\alpha) = \sqrt{2} R \frac{\sqrt{1 + \cos(\alpha)}}{W} + \frac{\alpha R}{V}; \quad 0 \leq \alpha \leq \pi \quad (6.2)$$

$$t_T'(\alpha) = \frac{dt_T(\alpha)}{d\alpha} = \frac{R}{V} - \frac{R}{\sqrt{2}W} \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha)}} \quad 0 \leq \alpha < \pi \quad (6.3)$$

$$t_T''(\alpha) = \frac{d^2t_T(\alpha)}{d^2\alpha} = -\frac{R}{2\sqrt{2}W} \frac{(1 + \cos(\alpha))^2}{(1 + \cos(\alpha))^{\frac{3}{2}}} \quad 0 \leq \alpha < \pi \quad (6.4)$$

La función (6.2) es continua en el compacto  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , i.e. la función (6.2)  $\in C_{[a,b]}$ , en consecuencia el Teorema de Bolzano-Weierstrass establece que el Máximo Absoluto y el Mínimo absoluto son realizables y alcanzados por abscisas en dicho compacto. Por otra parte, la función (6.3), no está definida en  $\pi$  y la función derivada segunda (6.4) es negativa en el intervalo  $[0, \pi)$ . Entonces la función (6.2) es además de continua cóncava hacia abajo en  $(0, \pi)$ . Siendo  $\alpha_c^F = 0$  y  $\alpha_c^F = \pi$  las abscisas críticas frontera del problema, con valores temporales  $t_T(0) = \frac{2R}{W}$  y  $t_T(\pi) = \frac{\pi R}{V}$ . Mientras que las abscisas críticas estacionarias resultarían del análisis de las raíces de (6.1), i.e.  $\cos(\alpha_c^e)_{\pm} = u_{+,-} = -c^2 \pm |c^2 - 1|$ . Observemos que  $c = 1 \rightarrow u_+ = u_- = -1$  y la función (6.2) se transforma en  $t_T(\alpha) = \frac{R}{V} (\sqrt{2} \sqrt{1 + \cos(\alpha)} + \alpha)$ ;  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , en cuyo caso  $(\alpha_c^e)_{\pm} = \alpha_c^F = \pi$ , abscisa descartada, pues allí no existe finita la derivada primera, (Referirse a (6.3)). Por lo tanto, la exploración de alguna abscisa crítica estacionaria en  $0 < \alpha < \pi$  conlleva al estudio de  $\cos(\alpha_c^e)_{\pm} = u_{+,-} = -c^2 \pm |c^2 - 1|$  si  $c^2 > 1$  y  $c^2 < 1$ .

$$\cos(\alpha_c^e)_+ = u_+ = -c^2 + |c^2 - 1|, \text{ si } c^2 < 1 \text{ y } c^2 > 1 \quad (6.5)$$

$$\cos(\alpha_c^e)_- = u_- = -c^2 - |c^2 - 1|, \text{ si } c^2 < 1 \text{ y } c^2 > 1 \quad (6.6)$$

## Capítulo 6. Derivada: Ejemplos

---

Obsérvese que en (6.5),  $c^2 > 1$  conduce a  $(\alpha_c^s)_\pm = \alpha_c^F = \pi$ , así como también en (6.6),  $c^2 < 1$ , por lo tanto sólo debemos explorar la existencia de abscisas críticas estacionarias en:

$$\cos(\alpha_c^e)_+ = u_+ = -c^2 + |c^2 - 1|, \text{ si } c^2 < 1 \quad (6.7)$$

$$\cos(\alpha_c^e)_- = u_- = -c^2 - |c^2 - 1|, \text{ si } c^2 > 1 \quad (6.8)$$

Es decir en:

$$\cos(\alpha_c^e)_+ = u_+ = -2c^2 + 1, \text{ si } c^2 < 1 \quad (6.9)$$

$$\cos(\alpha_c^e)_- = u_- = -2c^2 - 1, \text{ si } c^2 > 1 \quad (6.10)$$

Las situaciones en las que las habilidades deportivas de Miguel caen en el intervalo  $0 \leq c = \frac{W}{V} < 1$  adicionan a los dos puntos críticos fronteras, la siguiente abscisa crítica estacionaria. Puesto que  $0 < c^2 = (\frac{W}{V})^2 < 1 \Rightarrow 0 < 2c^2 < 2 \Rightarrow -2 < -2c^2 < 0 \Rightarrow -1 < 1 - 2c^2 < 1$ , i.e.  $-1 < \cos(\alpha_c^e)_+ = u_+ = 1 - 2c^2 < 1$ . Hemos confirmado la existencia de la abscisa crítica estacionaria  $(\alpha_c^e)_+ = \arccos(1 - 2c^2)$  si  $0 < c = \frac{W}{V} < 1$ . En dichas situaciones,  $W < V$ , las abscisas críticas del problema son tres:  $\{\alpha_c^F = 0, \alpha_c^F = \pi, \alpha_c^e = 1 - 2c^2\}$ . En contraste con los casos en los que  $c^2 > 1$ , en los que (6.10) no aporta abscisa adicional a las fronteras. Evidenciamos este hecho por la siguiente secuencia de cálculos  $c^2 = (\frac{W}{V})^2 > 1 \Rightarrow 2c^2 > 2 \Rightarrow -2c^2 < -2 \Rightarrow 1 - 2c^2 < -1 \Rightarrow \cos(\alpha_c^e)_- = u_- = 1 - 2c^2 < -1$  y como  $\pi$  es singular y frontera, no hemos encontrado para las situaciones analizadas - i.e.  $c = \frac{W}{V} > 1$  - abscisas críticas estacionarias. En estas circunstancias el Mínimo y el Máximo tiempo del recorrido están determinados en las abscisas fronteras  $t_T(0) = \frac{2R}{W}$  y  $t_T(\pi) = \frac{\pi R}{V}$ , como  $\frac{1}{W} < \frac{1}{V}$  y  $2R < \pi R$ , resulta  $t_T(0) < t_T(\pi)$  lo que concluye que la braquistócrona es la trayectoria que realiza Miguel cruzando a remo diametralmente el lago,  $\alpha = 0$ , y el máximo panorama lo disfruta si camina sobre la semicircunferencia,  $\alpha = \pi$ . En contraste, si  $0 < c = \frac{W}{V} < 1$  se deben computar los valores temporales en las abscisas fronteras y en la abscisa estacionaria  $t_T(\arccos(1 - 2c^2)) = 2R \frac{\sqrt{1 - c^2}}{W} + R \frac{\arccos(1 - 2c^2)}{V}$  y de la comparación numérica posterior se determina qué abscisa realiza el mínimo y cuál realiza el máximo de la función (6.2).

6.4. Ejercicio resuelto: Optimización. Nivel II: 2<sup>do</sup> PARCIAL - ♣©2<sup>do</sup> COLOQUIO.

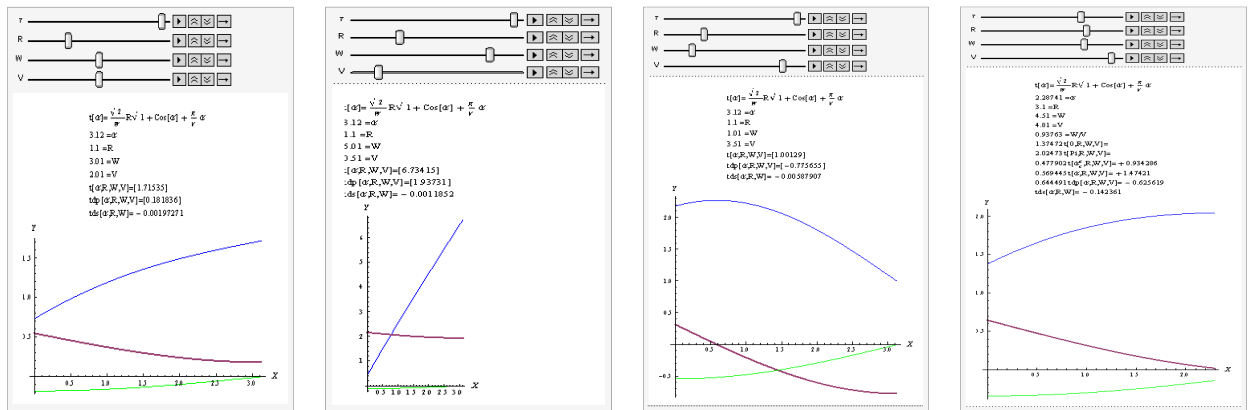


Figura 6.12:  $t_T(\alpha)$ ,  $\dot{t}_T(\alpha)$ ,  $\ddot{t}_T(\alpha)$ , si  $c = 1$ ,  $c > 1$ ,  $c < 1$   $\frac{W}{V} < \frac{2}{\pi}$  y  $c < 1$   $\frac{W}{V} > \frac{2}{\pi}$ .

**Ejercicio 6.4.1** Interprete, en cada uno de los gráficos de la Figura 6.12 cuáles son las trayectorias de tiempo de recorrido mínimo -braquistócrona y cuáles son las trayectorias de tiempo de viaje máximo.





## Parte VII

# Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial



## Capítulo 7

Teorema de Rolle. Teorema de  
Lagrange. Regla de L'Hôpital

## 7.1. Teoremas del Valor Medio del Cálculo Diferencial: Justificaciones y aplicaciones.

### Teorema 7.1.1 *Teorema de Rolle.*

Sea  $f(x)$  continua en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ , con derivada única (finita o infinita) en el intervalo abierto acotado  $(a, b)$ , y es  $f(a) = f(b)$ , existe al menos una abscisa en  $(a, b)$  en el que la derivada primera se anula, i.e. existe  $x_\zeta \in (a, b)$  tal que  $f'(x_\zeta) = 0$ .

*Demostración.* Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, sabemos que una función continua en un conjunto compacto de los reales, alcanza su valor máximo absoluto  $M$  y su valor mínimo absoluto  $m$  en abscisas del mencionado conjunto. Por lo tanto, en  $[a, b]$  existen  $x_\zeta$  y  $x_\xi$  tales que  $f(x_\zeta) = M$  y  $f(x_\xi) = m$ , ya que  $m = f(x_\xi) \leq f(x) \leq f(x_\zeta) = M \forall x \in [a, b]$ . Si  $x_\zeta$  y  $x_\xi$  fueran los valores extremos del intervalo  $[a, b]$ , entonces e.g.  $m = f(a) \leq f(x) \leq f(b) = M$ , como por hipótesis  $f(a) = f(b) = m = M$  se tiene que  $m = f(a) \leq f(x) \leq f(b) = m$ ,  $m \leq f(x) \leq m$ , es decir  $f(x) = m$ , la función es constante en todo el intervalo  $[a, b]$ . Luego, su derivada primera es nula, i.e.  $f'(x) = 0$  en todo  $\in [a, b]$ , luego el teorema está justificado. Pero, si por el contrario, uno de los valores de las abscisas  $x_\zeta$  y  $x_\xi$ , perteneciera al interior. Supongamos que  $x_\zeta$  es interior, i.e.  $x_\zeta \in (a, b)$ , luego es un extremo local o relativo de la función  $f(x)$ , puede ser que  $f(x_\zeta) = M$  o que  $f(x_\zeta) = m$ , un máximo local o un mínimo local, que a la vez sea el máximo o el mínimo absoluto de la función en el intervalo cerrado y acotado. Obviamente, esto exige para una función con derivada única en el  $(a, b)$  que  $f'(x_\zeta) = 0$ .

**Observación 7.1.2** *Geométricamente, el Teorema de Rolle, establece la existencia de una abscisa, en la que el arco de curva plana regular (suave) posee recta tangente paralela al eje  $x$ .*

Sugerimos al lector, hacer una bella representación gráfica para distintos ejemplos sencillos, interpretando lo establecido por el Teorema 7.1.1.

### Teorema 7.1.3 *Teorema de Lagrange.*

Sea  $f(x)$  continua en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ , con derivada única (finita o

infinita) en el intervalo abierto acotado  $(a, b)$ , entonces existe una abscisa interior  $x_\zeta$ , i.e.  $x_\zeta \in (a, b)$ , tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_\zeta), \quad x_\zeta \in (a, b) \quad (7.1)$$

*Demostración.* Se construye la siguiente función

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Obsérvese que:

- $\varphi(x)$  es continua en  $[a, b]$ , y derivable en  $(a, b)$ , por ser diferencia de dos funciones con las mencionadas propiedades. Entonces,

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- $\varphi(a) = f(a)$  y  $\varphi(b) = f(a)$ .

Luego  $\varphi(x)$  es una función que verifica las condiciones del Teorema 7.1.1, el Teorema de Rolle, por lo tanto existe  $x_\zeta \in (a, b)$   $\varphi'(x_\zeta) = 0$ .

$$\varphi'(x_\zeta) = 0 = f'(x_\zeta) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies f'(x_\zeta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Nota 7.1.4** *La inclinación o pendiente de la recta que pasa por los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ , recta secante, de la gráfica de una función  $y = f(x)$  que satisface las condiciones del teorema, es la misma, que la pendiente, de por lo menos, una recta tangente en un punto  $(x_\zeta, f(x_\zeta))$ , para  $x_\zeta \in (a, b)$ .*

Ejemplifique e interprete gráficamente el Teorema del Valor medio del Cálculo Diferencial, i.e. el Teorema de Lagrange.

**Ejercicio 7.1.5** *Interpretar geoméricamente el Teorema 7.1.3. Interpretar geoméricamente la construcción  $\varphi(x)$  desde una función  $f(x)$  que verifique las condiciones del Teorema de Lagrange.*

## Capítulo 7. Teorema de Rolle. Teorema de Lagrange. Regla de L'Hôpital

Remitimos al estudiante, a la §9 en la pág. 340, en la que demostramos, el resultado que hemos llamado, “*Teorema del Valor Medio Diferencial Generalizado*”, con el que se prueba el “*Teorema de Cauchy*” en la pág. 339 y nos allana la justificación de la Regla de L'Hôpital, que posibilita el cálculo de ciertos límites indeterminados. En su defecto, en [Rey Pastor, J. et al. (1957)], consultar la §36. Límites indeterminados, pp. 483-491.

**Teorema 7.1.6** “*Regla de L'Hôpital*”.

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  continuas. Existen finitas  $f'(x)$  y  $g'(x)$  y si

1.  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ,
2.  $g(x) \neq 0 \forall x \in \mathcal{E}_R(x_0, \delta)$ , i.e.  $\forall x \in 0 < |x - x_0| < \delta$ ,
3.  $f'(x)$  y  $g'(x)$  ni se anulan, ni se hacen simultáneamente infinitas  $\forall x \in 0 < |x - x_0| < \delta$ ,
4. existe finito o infinito el  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*Demostración.* Inmediata desde el Teorema 9.1.1 en la pág. 339.

**Ejemplo 7.1.7** Efectúe el estudio completo de  $f(x) = x^x$ ,  $x > 0$  Figura 7.1.

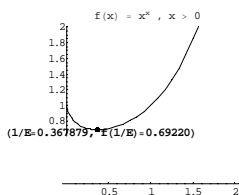


Figura 7.1: Mínimo de  $f(x) = x^x$ ,  $x > 0$ .

$$f(x) = x^x \quad x > 0$$

$f'(x) = x^x [\ln(x) + 1]$  estamos trabajando con  $x > 0$ , la derivada primera se anula si y sólo si  $\ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = E^{-1} = \frac{1}{E} \approx 0,367879$ , como

el signo de la derivada primera está determinado por el signo de  $\ln(x) + 1$ , i.e. Figura 7.2, dicha función es negativa en el intervalo  $(0, \frac{1}{e})$  y positiva en  $(\frac{1}{e}, +\infty)$ , por lo tanto  $(\frac{1}{e} \approx 0,367879, f(\frac{1}{e}) \approx 0,69220062755534635)$  es un mínimo local o relativo estricto y como  $f''(x) > 0$  en el dominio de definición real de la  $f(x)$  el mínimo en  $\frac{1}{e}$  es absoluto, pues la función es cóncava hacia arriba en  $(0, +\infty)$ .

$$f''(x) = x^x \left[ (\ln(x) + 1)^2 + \frac{1}{x} \right] > \forall x > 0.$$

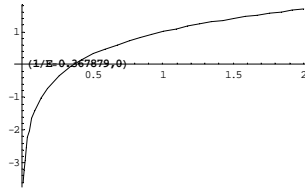


Figura 7.2: Signo de  $f'(x) = x^x [\ln(x) + 1]$ ,  $x > 0$ .

**Ejemplo 7.1.8** Utilice el Teorema del Valor Medio para probar que si  $f''(x) > 0$ ,  $\forall x$  en un entorno  $\epsilon(x_M, \delta)$ , entonces la función  $y = f(x)$  es cóncava hacia arriba en  $x_M$ .

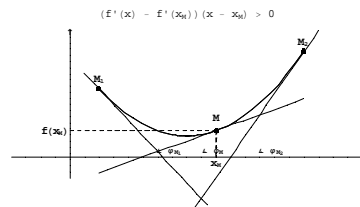


Figura 7.3: Gráficas del Ejercicio N  $\doteq$  11 a).

Como  $f''(x) > 0$  en  $\epsilon(x_M, \delta)$ , para dos puntos  $x_{M_1}$  y  $x_{M_2}$  en ese entorno tales que  $x_{M_1} < x_M < x_{M_2}$  existen  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , con  $x_{M_1} < \xi_1 < x_M < \xi_2 < x_{M_2}$  y valen las dos desigualdades siguientes:

$$\frac{f'(x_{M_2}) - f'(x_M)}{x_{M_2} - x_M} = f''(\xi_2) > 0 \quad y \quad \frac{f'(x_M) - f'(x_{M_1})}{x_M - x_{M_1}} = f''(\xi_1) > 0$$

sigue entonces que:

$$f'(x_{M_2}) - f'(x_M) > 0, \quad y \quad f'(x_M) - f'(x_{M_1}) > 0, \quad \frac{f'(x_{M_1}) \quad f'(x_M) \quad f'(x_{M_2})}{x_{M_1} \quad \xi_1 \quad x_M \quad \xi_2 \quad x_{M_2}} ;$$

i.e.,

$$f'(x) < f'(x_M) \text{ en } (x_M - \delta, x_M) \quad y \quad f'(x_M) < f'(x) \text{ en } (x_M, x_M + \delta).$$

Si definimos la función  $g(x) = f(x) - [f(x_M) + f'(x_M)(x - x_M)]$ , es claro que si toma valores positivos en un entorno reducido de  $x_M$ , indica que en tal entorno, el gráfico de  $f(x)$  está arriba de su recta tangente en el punto  $(x_M, f(x_M))$ . Pero como  $g'(x) = f'(x) - f'(x_M)$ , las dos desigualdades anteriores establecen que: Por lo tanto  $g(x)$  posee un mínimo local

$$g'(x) < 0 \text{ en } (x_M - \delta, x_M),$$

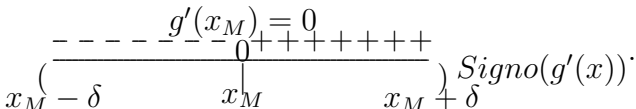
$$g'(x) > 0 \text{ en } (x_M, x_M + \delta) \text{ y } g'(x_M) = 0.$$


Figura 7.4:  $y = g(x)$  posee un mínimo en  $x_M$ .

en  $x_M$ , más aún  $\forall x \in \epsilon_R(x_M, \delta)$  resulta  $g(x) > g(x_M) = 0$ .

**Observación 7.1.9** *Nótese que la misma demostración es aplicable a cualquier punto de  $\epsilon(x_M, \delta)$ , por lo tanto la curva es cóncava hacia arriba en todo punto del entorno dado.*

**Ejemplo 7.1.10** *Resolución del ejercicio anterior con "Hipótesis menos restrictivas".*

Sea  $y = f(x)$  tal que  $f''(x_M) > 0$ . Utilice el Teorema del Valor Medio para probar que la curva es cóncava hacia arriba en  $x_M$ . Es decir, pruebe que existe un entorno  $(x_M - \delta, x_M + \delta)$  tal que  $\forall x \in \epsilon_R(x_M, \delta)$  el punto  $(x, f(x))$  está arriba de la recta tangente en  $x_M$ :  
 $y = f(x_M) + f'(x_M)(x - x_M)$ .

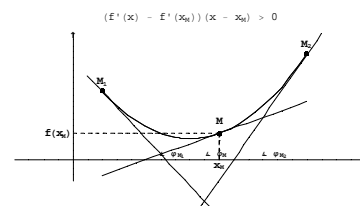


Figura 7.5:  $y = f(x)$  cóncava hacia arriba en  $x_M$ .



Respuesta:

Como  $f''(x_M) = \lim_{x \rightarrow x_M} \frac{f'(x) - f'(x_M)}{x - x_M} > 0$ , existe un entorno reducido  $\epsilon_R(x_0, \delta)$  en el cual

$$\frac{f'(x) - f'(x_M)}{x - x_M} > 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > f'(x_M) & \text{---} \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{x \quad x + \delta} \\ f'(x) < f'(x_M) & \text{---} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{x - \delta \quad x} \end{cases}$$

Utilizando el Teorema del Valor Medio, tenemos:

$$\frac{f(x_{M_2}) - f(x_M)}{x_{M_2} - x_M} = f'(\xi_2) > f'(x_M) \quad (*) \quad \text{---} \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{x_M \quad \xi_2 \quad x_{M_2}}$$

$$\frac{f(x_M) - f(x_{M_1})}{x_M - x_{M_1}} = f'(\xi_1) < f'(x_M) \quad (**) \quad \text{---} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{x_{M_1} \quad \xi_1 \quad x_M}$$

De (\*)

$$f(x_{M_2}) = f'(\xi_2)(x_{M_2} - x_M) + f(x_M) > f'(x_M)(x_{M_2} - x_M) + f(x_M).$$

De (\*\*)

$$f(x_M) - f(x_{M_1}) = f'(\xi_1)(x_M - x_{M_1}) < f'(x_M)(x_M - x_{M_1})$$

$$f(x_{M_1}) - f(x_M) > f'(x_M)(x_{M_1} - x_M)$$

$$f(x_{M_1}) > f'(x_M)(x_{M_1} - x_M) + f(x_M),$$

i.e., en el entorno  $\epsilon_R(x_M, \delta)$  la curva está estrictamente más arriba que la recta tangente en el punto  $(x_M, f(x_M))$ .

**Ejemplo 7.1.11** Sea  $f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ .

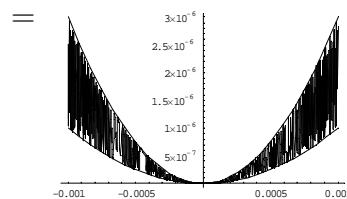


Figura 7.6: An eery case! (eery: mysterious)

Calculemos  $f'(0)$  por definición

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[2x + x \sin \left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Pero

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

pues al ser

$$-|x| \leq \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

aplicando el Teorema del Encaje resulta

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} -|x| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

y por lo tanto  $f'(0) = 0$ .

Entonces existe la recta tangente en  $(0, 0)$  y coincide con el eje  $x$ .

Más aún, la derivada existe en cualquier punto distinto del cero y vale  $f'(x) = 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ , i.e.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Por otra parte si intentamos calcular  $f''(0)$  por definición encontramos que no existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[4 + 2 \sin \left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\cos(1/x)}{x}\right],$$

i.e. no existe  $f''(0)$ .

Entonces

$$f''(x) = \begin{cases} 4 + 2 \sin \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}; & x \neq 0 \\ \nexists & x = 0. \end{cases}$$

En síntesis, hemos mostrado que la derivada primera cambia infinitas veces de signo en cualquier entorno de cero, donde hay un mínimo local estricto (estacionario) y en consecuencia, de acuerdo a la definición adoptada, la curva es cóncava hacia arriba pues se mantiene arriba de la recta tangente en  $x_0 = 0$ .

**Ejemplo 7.1.12** Derivación de funciones compuestas

Sean  $g(x)$  derivable en  $x_0$  y  $f(x)$  derivable en  $y_0 = g(x_0)$ .

Recordemos que:  $\varphi(x)$  derivable en  $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \varphi'(x_0) \Leftrightarrow \exists$  infinitésimo  $\epsilon(\Delta x)$  tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} &= \varphi'(x_0) + \epsilon(\Delta x) \\ \Leftrightarrow \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) &= \underbrace{\varphi'(x_0) \Delta x}_{d\varphi(x_0, \Delta x)} + \underbrace{\epsilon(\Delta x) \Delta x}_{\text{de orden superior a } \Delta x} \end{aligned}$$

Como  $f(y)$  derivable en  $y_0 = g(x_0) \exists$  infinitésimo  $\sigma(\Delta y)$  tal que:

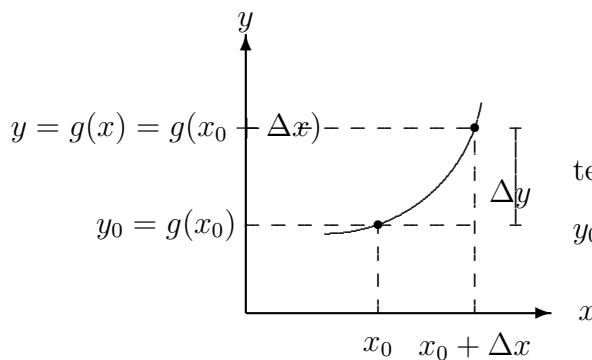
$$f(y_0 + \Delta y) - f(y_0) = f'(y_0) \Delta y + \sigma(\Delta y) \Delta y \quad (7.2)$$

como  $g(x)$  es derivable en  $x_0 \exists$  infinitésimo  $\epsilon(\Delta x)$  tal que:

$$g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g'(x_0) \Delta x + \epsilon(\Delta x) \Delta x \quad (7.3)$$

luego:

$$\frac{(f \circ g)(x_0 + \Delta x) - (f \circ g)(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{\Delta x} =$$



teniendo en cuenta que  $g(x) = g(x_0) + \Delta x = y_0 + \Delta y$  y que  $y_0 = g(x_0)$  resulta:

$$\Delta y = g(x) - g(x_0) \Rightarrow (*) g(x_0 + \Delta x) = \Delta y + y_0$$

Figura 7.7: Derivación de funciones compuestas.

$$\begin{aligned} &= \frac{\Delta(f \circ g)}{\Delta x} = \frac{f(y_0 + \Delta y) - f(y_0)}{\Delta x} = (\text{por (7.2)}) = \frac{f'(y_0) \Delta y + \sigma(\Delta y) \Delta y}{\Delta x} = \\ &= f'(y_0) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \sigma(\Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(y_0) \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} + \sigma(\Delta y) \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \end{aligned}$$

$$= f'(g(x_0)) \underbrace{\frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}}_{\rightarrow g'(x_0)} + \underbrace{\sigma(\Delta y)}_{\rightarrow 0 \text{ por (7.2), ver (**)}} \underbrace{\frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}}_{\rightarrow g'(x_0)},$$

para  $\Delta x \rightarrow 0$ , i.e.,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f \circ g(x) - f(g(x_0))}{\Delta x} = f'(g(x_0)) g'(x_0). \quad (7.4)$$

(\*\*) Se sabe que  $\sigma(\Delta y) \rightarrow 0$  si  $\Delta y \rightarrow 0$ , por (7.2), pero  $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) \rightarrow 0$ . Es decir

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma(\Delta y) \rightarrow 0.$$

# Parte VIII

## Integración



# Capítulo 8

## Integración: Notas teóricas

### 8.1. El concepto de la integral definida

*Motivación:* Dos problemas clásicos de la antigüedad fueron el de determinar la tangente a una curva y el de determinar el área de una figura con contorno curvo. Ambos constituyeron los principales estímulos para desarrollar el cálculo diferencial e integral. Trataremos ahora el segundo de los problemas, vinculado indisolublemente a la integral. Daremos en breve una definición analítica de la integral, la que podríamos hacer sin utilizar el concepto de área, sin embargo, nos apoyaremos fuertemente en él, como protagonista histórico que fue y además porque resulta un recurso didáctico relevante para captar y visualizar a la integral.

Aceptaremos la noción de área como intuitivamente evidente, que lo fue para casi todos nosotros hasta que alguien nos alertó que su existencia es un enunciado matemático que necesita ser demostrado.

Como primera motivación y a manera de ejemplo premonitorio, presentamos la demostración -actualizada- que dio Arquímedes (Siracusa, 287-212 A.C.) para la fórmula del área de una región limitada en parte por un arco de parábola (Ver figura 8.1).

Consideremos la región  $\Omega$  limitada: por el arco de parábola  $y = x^2$  definido sobre el segmento  $[0, b]$ , por el propio segmento  $[0, b]$  y por la recta  $x = b$ . Llamemos  $A(\Omega)$  el área de la región  $\Omega$  que nos ocupa.

Arquímedes demostró que  $A(\Omega) = \frac{b^3}{3}$ .

## Capítulo 8. Integración: Notas teóricas

Usaremos la fórmula

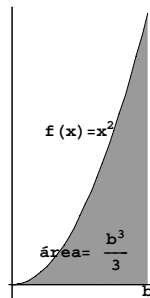


Figura 8.1:  $f(x) = x^2$ , en  $[0, b]$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

válida para todo  $n$  natural y fácilmente demostrable usando inducción.

Si se *particiona* el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  partes iguales podemos obtener  $n$  rectángulos de igual base contenidos en  $\Omega$ , que se muestran en blanco en la figura 8.2, y además otros  $n$  que la contienen.

Notemos que el primer rectángulo contenido es nulo, que el segundo tiene por base al

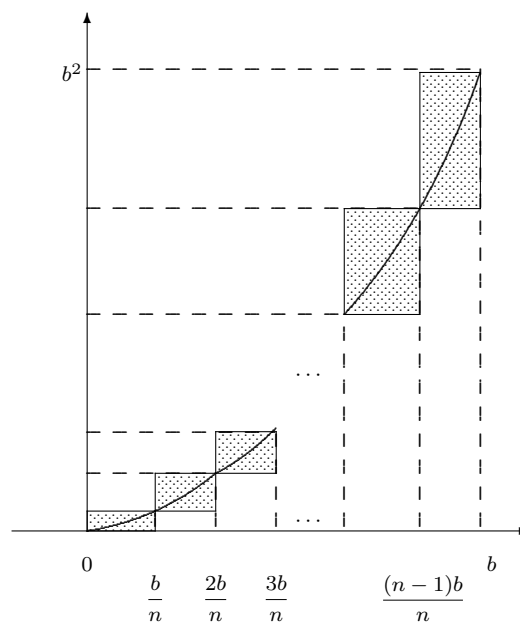


Figura 8.2: División de  $[0, b]$  en  $n$  partes y rectángulos contenidos y continentales



segmento  $\left[\frac{b}{n}, \frac{2b}{n}\right]$  y que el área  $-A(RC)-$  de todos los rectángulos contenidos en  $\Omega$  es:

$$\begin{aligned} A(RC) &= \frac{b}{n} \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n} \left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n} \left(\frac{3b}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{b}{n} \left[\frac{(n-1)b}{n}\right]^2 = \\ &= [1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] \frac{b^3}{n^3} = \left[\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right] \frac{b^3}{n^3} = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right] b^3. \end{aligned}$$

Notemos también que todos los rectángulos diferencia, que se muestran punteados en la figura, tienen bases de igual longitud  $\frac{b}{n}$  y que la suma de sus alturas es  $b^2$ , por lo tanto el área del conjunto de los mismos es  $b^2 \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n}$ . Finalmente, como el área del conjunto de los continentes es la suma del área  $A(RC)$  de los contenidos más el área  $\frac{b^3}{n}$  de los diferencia, se tiene:

$$A(RC) \leq A(\Omega) \leq A(RC) + \frac{b^3}{n},$$

es decir

$$\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right] b^3 \leq A(\Omega) \leq \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right] b^3 + \frac{b^3}{n}$$

y por lo tanto

$$0 \leq A(\Omega) - \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right] b^3 \leq \frac{b^3}{n}.$$

Teniendo en cuenta que esta desigualdad es válida para todo  $n$ , usando el Teorema de encaje resulta:

$$A(\Omega) - \frac{b^3}{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{A(\Omega) = \frac{b^3}{3}}.$$

## 8.2. Definición de la integral

A continuación nos abocamos a construir la definición de integral, que como veremos resulta relativamente larga y compleja. Un desafío. Pero concluida la definición quedará claro que la integral formaliza la noción de área, a la que en principio consideramos como intuitivamente evidente. De ahora en adelante no deberá sorprendernos descubrir que la definición de un concepto al que consideramos intuitivamente “evidente” suele presentar serias dificultades. Si aún no está convencido de esto intente dar una definición precisa de recta, concepto que seguramente maneja desde la infancia con gran seguridad y confianza.

**Definición 8.2.1** Sea  $a < b$ . Recibe el nombre de **partición** del intervalo  $[a, b]$  toda colección finita de puntos de  $[a, b]$  que incluye a los extremos  $a$  y  $b$ .

Los puntos de una partición pueden ser numerados  $t_0, t_1, \dots, t_n$  de manera que

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Dar la partición  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  equivale a dar la familia de  $n$  subintervalos  $\{[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]\}$ , que verifican las dos propiedades siguientes,

$$1) \bigcup_{i=0}^n [t_{i-1}, t_i] = [a, b]$$

$$2) (t_{i-1}, t_i) \cap (t_{j-1}, t_j) = \emptyset \text{ si } i \neq j.$$

Es interesante y útil destacar que dadas dos particiones cualesquiera de  $[a, b]$ , digamos  $P_1 = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  y  $P_2 = \{t'_0, t'_1, \dots, t'_m\}$ , la unión  $P_1 \cup P_2$  es también una partición de  $[a, b]$ . Por ejemplo si  $P_1 = \{0, 1, 2, 5\}$  y  $P_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3, 5\right\}$ , es  $P_1 \cup P_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, 5\right\}$ .

**Definición 8.2.2** Sean  $f(x)$  una función acotada en  $[a, b]$  y  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  una partición de  $[a, b]$ . Si llamamos

$$m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} < x < t_i\},$$

$$M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} < x < t_i\},$$

se definen las **sumas inferior y superior** de  $f$ , correspondientes a la partición  $P$ , respectivamente como:

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1})$$

y

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}).$$

En la Figura 8.3 se muestran las sumas inferior y superior de la función continua  $f(x) = x^2$ , correspondientes a una partición del intervalo  $[0, 1]$  en cuatro subintervalos iguales.

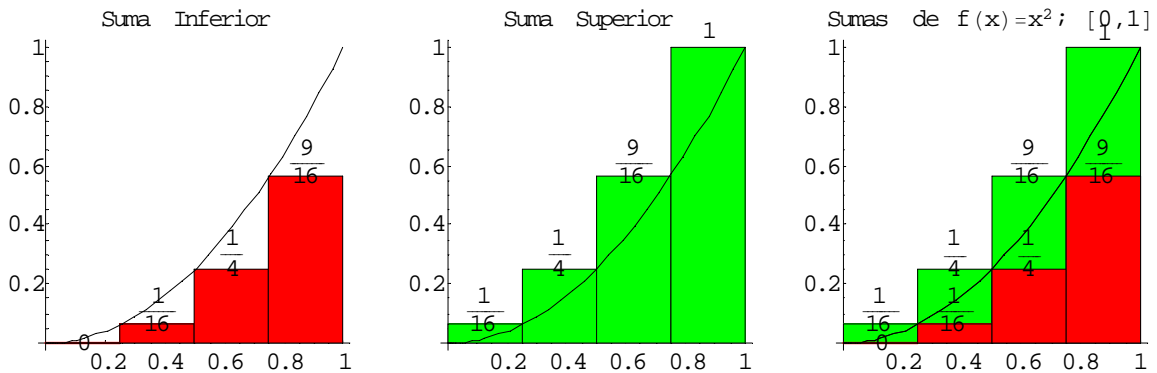


Figura 8.3: Sumas inferior y superior de una partición del  $[0, 1]$  en cuatro partes iguales para  $f(x) = x^2$ .

**Observación 8.2.3** Si  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  es una partición cualquiera de  $[a, b]$ , la condición de que sea  $f(x)$  acotada en  $[a, b]$  es esencial para que estén definidos  $m_i$  y  $M_i$ , en cada subintervalo de la misma.

Además, dado que para cada  $i$  es

$$m_i \leq M_i$$

resulta

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq n$$

y por lo tanto

$$s(f, P) \leq S(f, P).$$

**Observación 8.2.4** Si  $t_*$  es un punto interior de  $[t_{k-1}, t_k]$  entonces  $m_k = \inf \{f(x) : x \in [t_{k-1}, t_k]\} \leq m'_k = \inf \{f(x) : x \in [t_{k-1}, t_*]\}$ .

Esto es así dado que el conjunto de números  $\{f(x) : x \in [t_{k-1}, t_k]\}$  contiene a todos los números del conjunto  $\{f(x) : x \in [t_{k-1}, t_*]\}$  y eventualmente a otros más pequeños y más grandes. Por igual razón resulta  $m_k \leq m''_k = \inf \{f(x) : x \in [t_*, t_k]\}$ .

Con el mismo tipo de argumento resulta que los correspondientes supremos verifican  $M'_k \leq M_k$  y  $M''_k \leq M_k$ .

**Lema 8.2.5** Si  $Q$  es una partición que contiene a  $P$ , entonces

$$s(f, P) \leq s(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, P). \tag{8.1}$$

*Demostración.* Probaremos en primer lugar que el resultado es válido cuando la partición  $Q$  contiene exactamente un punto más que  $P$  (ver Figura 8.4). Es decir cuando  $Q$  resulta de  $P$  al particionar un subintervalo  $[t_{k-1}, t_k]$  en dos,  $[t_{k-1}, t_*]$  y  $[t_*, t_k]$ .

En tal caso será

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k, \dots, t_n\}$$

$$Q = \{t_0, \dots, t_{k-1}, t_*, t_k, \dots, t_n\},$$

y

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_* < t_k < \dots < t_n = b.$$

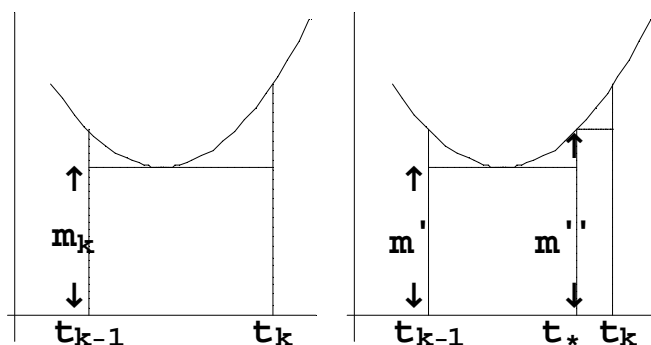


Figura 8.4: Subintervalo sin particionar y subintervalo particionado.

Tomando en cuenta la Observación 8.2.4 resulta

$$m_k(t_k - t_{k-1}) = m_k(t_* - t_{k-1}) + m_k(t_k - t_*) \leq m'_k(t_* - t_{k-1}) + m''_k(t_k - t_*) \quad (8.2)$$

con lo cual, al escribir

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_k(t_k - t_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^n m_i(t_i - t_{i-1})$$

y

$$s(f, Q) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + \overbrace{m'_k(t_* - t_{k-1}) + m''_k(t_k - t_*)} + \sum_{i=k+1}^n m_i(t_i - t_{i-1})$$

de (8.2) resulta claro que  $s(f, P) \leq s(f, Q)$ .

De manera totalmente análoga, teniendo en cuenta que

$$M'_k(t_* - t_{k-1}) + M''_k(t_k - t_{k-1}) \leq M_k(t_k - t_{k-1}),$$

al escribir  $S(f, P)$  y  $S(f, Q)$  de la manera en que se lo hizo con  $s(f, P)$  y  $s(f, Q)$ , se ve que  $S(f, Q) \leq S(f, p)$ , y por lo tanto resulta la desigualdad (8.1) buscada.

En el caso general, en que la partición  $Q$  contiene  $r$  puntos más que la partición  $P$ , se llega al mismo resultado en  $r$  pasos. Se considera en primer lugar  $Q_1$  con un punto más que  $P$ , luego  $Q_2$  con un punto más que  $Q_1$  y así hasta llegar a  $Q_r = Q$ . Aplicando  $r$  veces lo demostrado en la primera parte se obtiene la siguiente cadena de desigualdades, que completa la demostración de (8.1)

$$\begin{aligned} s(f, P) \leq s(f, Q_1) \leq \cdots \leq s(f, Q_{r-1}) \leq s(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, Q_{r-1}) \leq \\ \cdots \leq S(f, Q_1) \leq S(f, P). \end{aligned}$$

■

**Teorema 8.2.6** *Sea  $f(x)$  acotada en  $[a, b]$ . Si  $P_1$  y  $P_2$  son dos particiones cualesquiera de  $[a, b]$  entonces  $s(P_1) \leq S(P_2)$ .*

*Demostración.* Es consecuencia directa del Lema 8.2.5 si tenemos en cuenta que la partición  $P_1 \cup P_2$  contiene tanto a  $P_1$  como a  $P_2$ . En tal caso

$$s(P_1) \leq s(P_1 \cup P_2) \leq S(P_1 \cup P_2) \leq S(P_2)$$

■

Del Teorema 8.2.6 resulta, en particular, que cualquier suma superior  $S(f, P)$  es una cota superior para el conjunto de todas las sumas inferiores  $s(f, P)$ . En consecuencia existe el supremo de las sumas inferiores, que llamaremos *integral inferior* de  $f(x)$  por *diferencial* de  $x$ , entre  $a$  y  $b$ , y que denotaremos por  $\int_a^b f(x)dx$ , i.e.

$$\int_a^b f(x)dx = \sup \{s(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}. \quad (8.3)$$

Vale además que

$$\int_a^b f(x)dx \leq S(f, P) \quad \forall P \text{ partición de } [a, b].$$

Pero entonces la integral inferior es una cota inferior del conjunto de las sumas superiores, hecho que asegura la existencia del ínfimo de tal conjunto, al que llamaremos *integral superior* de  $f(x)$  por diferencial de  $x$ , entre  $a$  y  $b$ , y que denotaremos por  $\overline{\int_b^a} f(x)dx$ .

Concluimos entonces que si una función está acotada en un intervalo  $[a, b]$ , existen tanto la integral inferior, como la integral superior y vale

$$\int_b^a f(x)dx \leq \overline{\int_b^a} f(x)dx. \quad (8.4)$$

Más aún, si  $P$  es una partición cualquiera de  $[a, b]$  se verifica que

$$s(f, P) \leq \int_b^a f(x)dx \leq \overline{\int_b^a} f(x)dx \leq S(f, P). \quad (8.5)$$

**Definición 8.2.7** Si  $f(x)$  es una función acotada en  $[a, b]$  y verifica que

$$\int_b^a f(x)dx = \overline{\int_b^a} f(x)dx \quad (8.6)$$

se dice que  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$ , a este valor común se lo denomina “integral de  $f(x)$  por diferencial de  $x$  entre  $a$  y  $b$ ” y se lo denota por  $\int_b^a f(x)dx$  :

$$\int_b^a f(x)dx = \int_b^a f(x)dx = \overline{\int_b^a} f(x)dx. \quad (8.7)$$

Cabe destacar que si  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$ , de la desigualdad (8.5) resulta que la integral es el único número con la propiedad de estar entre la suma inferior y la suma superior de cualquier partición  $P$  de  $[a, b]$ .

Por otra parte, si  $f(x)$  no es integrable, es decir si

$$\int_b^a f(x)dx < \overline{\int_b^a} f(x)dx \quad (8.8)$$

todo número  $x$  comprendido estrictamente entre la integral inferior y la superior verifica la desigualdad

$$s(f, P) < x < S(f, P) \quad \text{para cualquiera que sea la partición } P \text{ de } [a, b].$$

Adelantamos como dato relevante que toda función continua en un intervalo  $[a, b]$  es integrable allí. La demostración es relativamente simple pero requiere el manejo de algunos conceptos que aún no tenemos.

Los siguientes ejemplos clásicos, muestran que son posibles las dos situaciones recién descritas, i.e. que existen funciones para las cuales se verifica la igualdad (8.6), las integrables, y otras para las cuales se verifica la desigualdad (8.8), las no integrables.

**Ejemplo 8.2.8** *Función integrable:* Sea  $f(x) = c \forall x$  de  $[a, b]$  (ver Figura 8.5). Si  $P =$

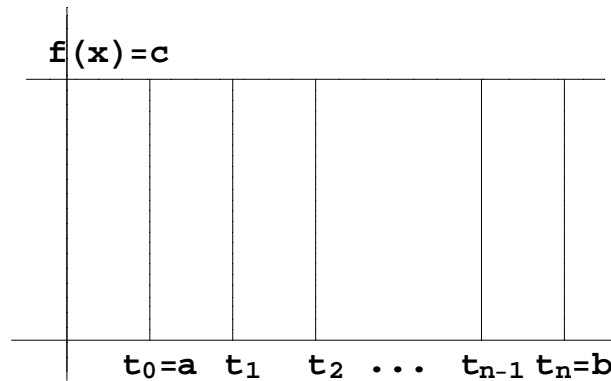


Figura 8.5:  $f(x) = c$ ; caso simple de  $\text{Sup}\{s(f, P)\} = \text{inf}\{S(f, P)\}$

$\{t_0, \dots, t_n\}$  es una partición cualquiera de  $[a, b]$ , entonces

$$m_i = M_i = C, \quad 1 \leq i \leq n$$

de donde siguen

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n c(t_i - t_{i-1}) = c(b - a),$$

y

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n c(t_i - t_{i-1}) = c(b - a)$$

por lo tanto, al ser coincidentes todas las sumas inferiores y las superiores, resulta

$$\text{sup}\{s(f, P)\} = \text{inf}\{S(f, P)\} = c(b - a) = \int_a^b C \, dx.$$

## Capítulo 8. Integración: Notas teóricas

Note que  $i$ , casualmente, si  $C > 0$ , el valor de la integral coincide con el área de la región -rectángulo- que determinan el gráfico de la función, el eje  $x$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$ .

**Ejemplo 8.2.9** *Función no integrable:* Sea  $f(x)$  la función de Dirichlet, definida en  $[a, b]$  por (Figura 8.6):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x, \text{ irracional} \\ 1, & x, \text{ racional.} \end{cases}$$

Si  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  es una partición cualquiera de  $[a, b]$ , resultan  $m_i = 0$  y  $M_i = 1$ , puesto que cada subintervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  contiene tanto números racionales como irracionales, luego

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n 0 \cdot (t_i - t_{i-1}) = 0,$$

y

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot (t_i - t_{i-1}) = b - a$$

entonces

$$0 = \sup\{s(f, P)\} < \inf\{S(f, p)\} = b - a.$$

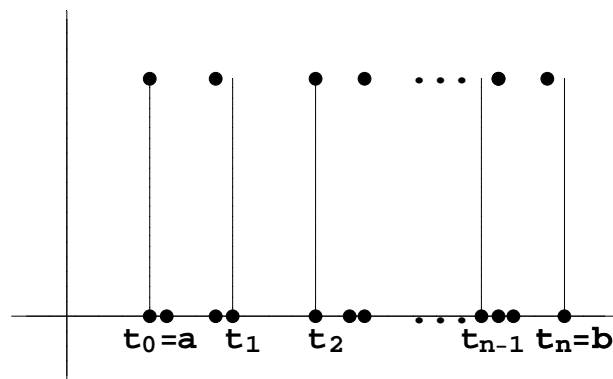


Figura 8.6: Representación esquemática de la función de Dirichlet



### 8.3. El Area y la Integral

A partir del hecho que el área de un rectángulo  $\mathbf{R}$  de base  $B$  y altura  $H$  es  $A(\mathbf{R}) = BH$ <sup>1</sup> podremos al fin presentar la famosa relación *área-integral*.

Con tal objetivo consideremos una función  $f(x)$  continua y no negativa ni idénticamente nula sobre el intervalo  $[a, b]$ . Si  $f(x)$  no toma valores negativos entonces su gráfico, que está por encima del eje  $x$  aunque pueda tocarlo, junto con dicho eje y las rectas  $x = a$  y  $x = b$  determinan una región  $\Omega$  en el plano.

Hemos visto ya que cualquiera sea la partición  $P$  de  $[a, b]$ , los rectángulos cuyas áreas determinan la suma inferior  $s(f, P)$  conforman una región  $r_P$  contenida de  $\Omega$ , mientras que los correspondientes a la suma superior  $S(f, P)$  conforman otra región  $R_P$  que la contiene (Ver Figura 8.7).

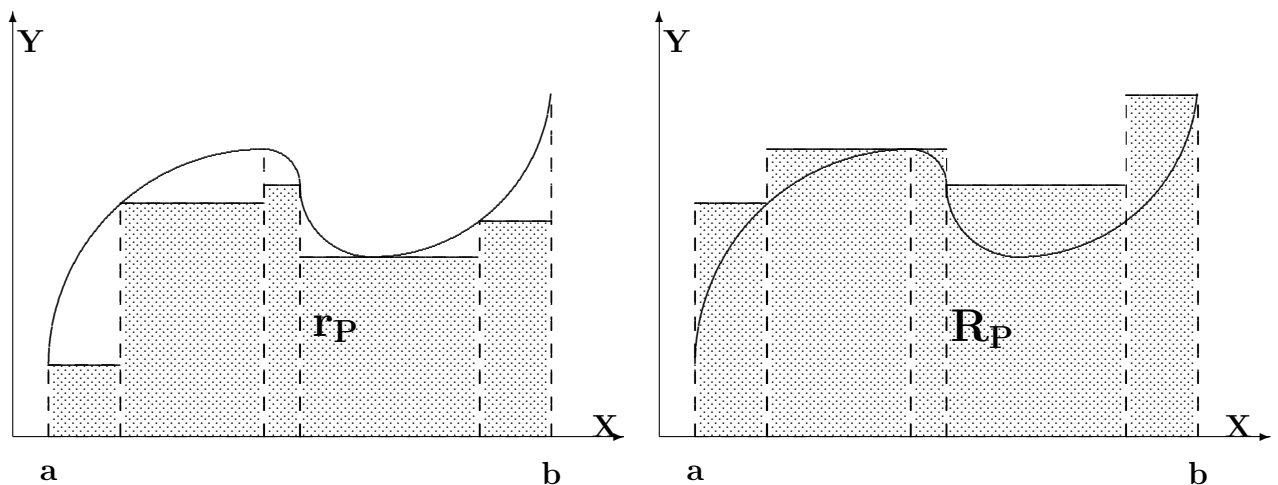


Figura 8.7: Regiones contenida  $r_P$  y continente  $R_P$ , correspondientes a la partición  $P$

El sentido común nos dice que si pretendemos definir el área de  $\Omega$ , esta deberá ser un número comprendido entre las áreas  $A(r_P)$  y  $A(R_P)$ , o sea entre  $s(f, P)$  y  $S(f, P)$ . En este caso el *único número* entre  $s(f, P)$  y  $S(f, P) \forall P$  es  $\int_a^b f(x) dx$  y por lo tanto es natural definir el área de la región  $\Omega$  como la integral:

$$A(\Omega) = \int_a^b f(x) dx$$

<sup>1</sup>R. Courant, “¿ Qué es la matemática ? ”

**Observación 8.3.1** *La integral define el área sólo en el caso en que  $f(x)$  es no negativa en  $[a, b]$ .*

Hasta ahora hemos visto sólo dos ejemplos referidos a la integral:

- i) Si  $f(x) = c$  entonces es integrable sobre  $[a, b]$  y  $\int_a^b c \, dx = c(b - a)$
- ii) Si  $f(x) = \begin{cases} 0, & x, \text{ irracional} \\ 1, & x, \text{ racional,} \end{cases}$  entonces  $f$  no es integrable sobre  $[a, b]$ .

Nos interesa conocer cuáles funciones son integrables y cuáles no, sobre un intervalo  $[a, b]$ . A tal fin es útil una definición alternativa de la integral, que la provee el siguiente teorema.

**Teorema 8.3.2** *Sea  $f(x)$  acotada en  $[a, b]$ , entonces  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$  si y sólo si para cada  $\epsilon > 0$  existe una partición  $P_\epsilon$  de  $[a, b]$  tal que*

$$S(f, P_\epsilon) - s(f, P_\epsilon) < \epsilon.$$

*Demostración.*  $\Leftarrow$ ) Sea  $f(x)$  tal que para cada  $\epsilon > 0$  existe una partición  $P_\epsilon$  de  $[a, b]$  tal que

$$0 \leq S(f, P_\epsilon) - s(f, P_\epsilon) < \epsilon,$$

como sabemos que ((8.5) pág. 286 )

$$s(f, P_\epsilon) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} \leq S(f, P_\epsilon)$$

sigue que

$$0 \leq \overline{\int_a^b f(x) dx} - \int_a^b f(x) dx \leq S(f, P_\epsilon) - s(f, P_\epsilon) < \epsilon$$

y por lo tanto

$$\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx}$$

es decir,  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$ .

$\Rightarrow$ ) Sea  $f(x)$  integrable en  $[a, b]$ , entonces

$$\sup\{s(f, P)\} = \inf\{S(f, P)\}.$$

Esto significa que dado  $\epsilon > 0$  existen particiones  $P'_\epsilon, P''_\epsilon$  tales que

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx - s(f, P'_\epsilon) < \frac{\epsilon}{2}$$

y

$$0 \leq S(f, P''_\epsilon) - \int_a^b f(x)dx < \frac{\epsilon}{2}$$

y por lo tanto

$$S(f, P''_\epsilon) - s(f, P'_\epsilon) < \epsilon.$$

Considerando una partición  $P_\epsilon$  que contenga a  $P'_\epsilon$  y  $P''_\epsilon$ , por ejemplo  $P_\epsilon = P'_\epsilon \cup P''_\epsilon$ , del lema 8.2.5 sigue que

$$S(f, P_\epsilon) \leq S(f, P''_\epsilon),$$

$$s(f, P_\epsilon) \geq s(f, P'_\epsilon)$$

y como

$$s(f, P'_\epsilon) \leq s(f, P_\epsilon) \leq S(f, P_\epsilon) \leq S(f, P''_\epsilon)$$

resulta finalmente

$$S(f, P_\epsilon) - s(f, P_\epsilon) \leq S(f, P''_\epsilon) - s(f, P'_\epsilon) < \epsilon.$$

■

**Observación 8.3.3** *El Teorema 8.3.2 provee otra definición de función integrable, equivalente a la definición 8.2.7, pero con la diferencia que no menciona supremo ni ínfimo, lo cual es muy conveniente en ciertos casos.*

**Ejemplo 8.3.4** *Sea  $f(x)$  definida en  $[0, 2]$  por*

$$f(x) = \begin{cases} c, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}, \text{ con } c > 0.$$

*$f(x)$  es integrable en  $[0, 2]$ .*

## Capítulo 8. Integración: Notas teóricas

*Resolución:* Debemos probar que dado  $\epsilon > 0$  existe una partición  $P_\epsilon$  del intervalo tal que  $S(f, P_\epsilon) - s(f, P_\epsilon) < \epsilon$ .

Para cualquier partición  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ , tal que el punto  $x = 1$  esté en el interior de uno de los subintervalos de la misma, digamos  $x_{j-1} < 1 < x_j$ , se tiene (ver Figura 8.8)

$$\begin{aligned} m_i = M_i = c & \quad \text{si } i \neq j, \\ m_j = 0 \text{ y } M_j = c & \quad \text{si } i = j. \end{aligned}$$

y entonces, dado que  $\begin{cases} m_i = M_i = c & \text{si } i \neq j \\ m_j = 0 \text{ y } M_j = c & \text{si } j = i \end{cases}$  resulta

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{j-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + \underbrace{m_j(t_j - t_{j-1})}_0 + \sum_{i=j+1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) = 2c - (t_j - t_{j-1})$$

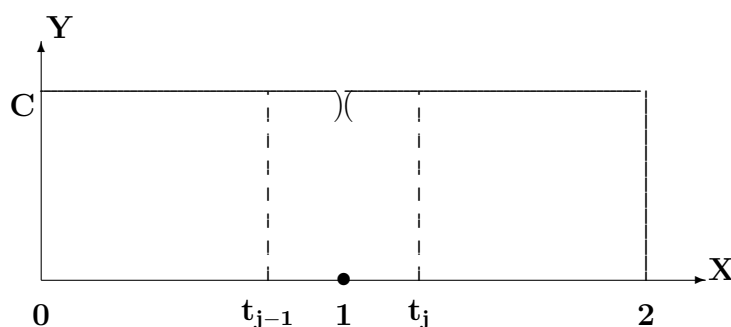


Figura 8.8:  $f(x)$  acotada, discontinua e integrable

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{j-1} M_i(t_i - t_{i-1}) + \underbrace{M_j(t_j - t_{j-1})}_{t_j - t_{j-1}} + \sum_{i=j+1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) = 2c$$

por lo tanto

$$S(f, P) - s(f, P) = t_j - t_{j-1}.$$

Entonces para obtener una partición  $P_\epsilon$  tal que

$$S(f, P_\epsilon) - s(f, P_\epsilon) < \epsilon,$$

basta elegir una con la condición

$$t_{j-1} < 1 < t_j \text{ y } t_j - t_{j-1} < \epsilon.$$

Por otra parte, es simple de verificar y se deja a cargo del lector que, cualquiera sea la partición  $P$  de  $[0, 2]$  vale que

$$s(f, P) \leq 2c \leq S(f, P).$$

Y como  $f$  es integrable, existe un único número entre todas las sumas inferiores y superiores, a saber, la integral de  $f$ . Por lo tanto

$$\int_0^2 f(x) dx = 2c.$$

En este momento el lector está en condiciones de resolver los ejercicios 1 y 2 que se proponen a continuación. (No pierda la oportunidad ni el placer de resolverlos).

**Ejemplo 8.3.5** Sean  $c \neq 0$  y  $f(x)$  definida en  $[a, b]$  por :  $f(x) = \begin{cases} c, & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$ , donde  $x_0$  es un punto en  $(a, b)$ .

Demuestre que  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$  y que  $\int_a^b f(x)dx = c(b - a)$ .

**Ejemplo 8.3.6** Sean  $c \neq 0$  y  $f(x)$  definida en  $[a, b]$  por:  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ c, & x = x_0 \end{cases}$ , donde  $x_0$  es algún punto de  $(a, b)$ .

Demuestre que  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$  y que  $\int_a^b f(x)dx = 0$ .

**Ejemplo 8.3.7** Sea  $f(x) = x$ , definida, para mayor sencillez, en el intervalo  $[0, b]$ , donde  $b > 0$ .

Entonces  $f(x)$  es integrable en  $[0, b]$  y vale  $\int_0^b x dx = \frac{b^2}{2}$ .

En tal caso para cualquier partición  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  vale que

$$m_i = t_{i-1} \text{ y } M_i = t_i$$

por lo tanto

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n t_{i-1}(t_i - t_{i-1})$$

y

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n t_i(t_i - t_{i-1})$$

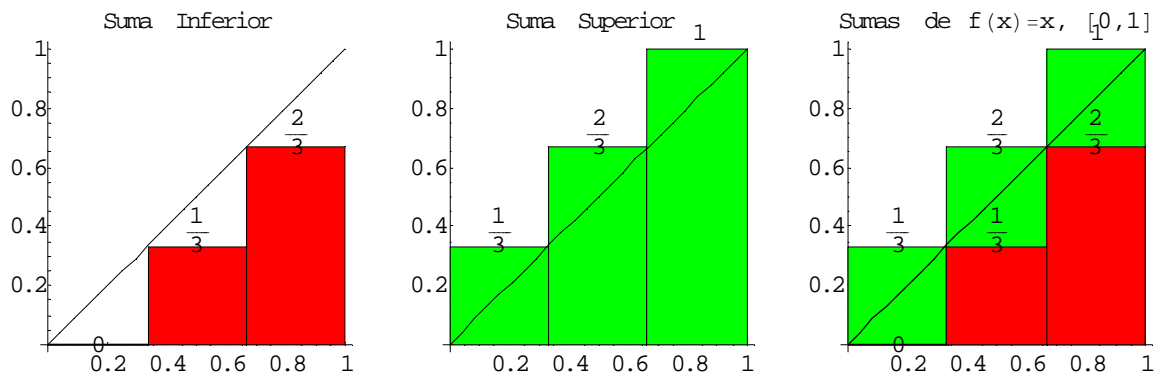


Figura 8.9: Esquema de sumas inferior y superior de  $f(x) = x$ , en  $[0, 1]$

Las dos fórmulas anteriores se simplifican considerablemente para particiones  $P$  formadas por subintervalos de igual longitud (ver Figura 8.9).

En este caso, la longitud de cada subintervalo  $t_i - t_{i-1}$  es  $b/n$ , de modo que

$$\begin{aligned}
 t_0 &= 0 \\
 t_1 &= 1 \cdot \frac{b}{n} \\
 \\
 t_2 &= 2 \cdot \frac{b}{n} \\
 \\
 &\dots \\
 t_i &= i \cdot \frac{b}{n} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Entonces

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n t_{i-1}(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(i-1)b}{n} \cdot \frac{b}{n} \right\} = \left( \sum_{j=0}^{n-1} j \right) \frac{b^2}{n^2}.$$

Recordando la fórmula

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

se puede escribir

$$s(f, P) = \frac{(n-1)n}{2} \cdot \frac{b^2}{n^2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{b^2}{2}.$$

Análogamente

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n t_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{ib}{n} \cdot \frac{b}{n} = \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{b^2}{2}.$$

Las expresiones anteriores de  $s(f, P_n)$  y de  $S(f, P_n)$  muestran que basta tomar  $n$  suficientemente grande para que, tanto  $S(f, P_n)$  como  $s(f, P_n)$ , estén tan próximos al valor  $\frac{b^2}{2}$  como se desee.

Además, como

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) = \frac{2}{n} \cdot \frac{b^2}{2},$$

resulta comprensible que existan particiones  $P_n$  para las cuales  $S(f, P_n) - s(f, P_n)$  sea tan pequeño como se quiera. Por lo tanto, según el teorema 8.3.2, la función  $f$  es integrable.

**Observación 8.3.8** *Teniendo en cuenta que  $s(f, P_n) = \frac{n-1}{n} \frac{b^2}{2}$  y que  $S(f, P_n) = \frac{n+1}{n} \frac{b^2}{2}$  es claro que*

$$s(f, P_n) \leq \frac{b^2}{2} \leq S(f, P_n) \quad \forall n.$$

*Esta desigualdad demuestra que  $b^2/n$  está comprendido entre ciertas sumas inferiores y sus correspondientes superiores. Como además hemos demostrado que la diferencia  $S(f, P_n) - s(f, P_n)$  puede hacerse tan pequeña como se quiera, se concluye que  $\frac{b^2}{2}$  es el único número con tal propiedad; entonces*

$$\int_0^b f(x) dx = \frac{b^2}{2}.$$

**Observación 8.3.9** *Nótese que el valor  $\int_0^b f(x) dx = \frac{b^2}{2}$  corresponde al área de la región comprendida entre el gráfico de  $f(x)$ , el eje  $x$  y la recta  $x = b$ . ( triángulo, Figura 8.10).*

Le proponemos al lector que, con la guía del desarrollo anterior, compruebe que  $f(x) = x$  es integrable en  $[a, b]$  y que vale  $\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$ .

**Ejemplo 8.3.10** *La función  $f(x) = x^2$  (Figura 8.11) es integrable en  $[0, b]$  y  $\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$ .*

*Dado que  $f(x)$  es creciente en  $[0, b]$ , para cualquier partición  $P = \{[t_{i-1}, t_i]\}$  del intervalo vale que*

$$m_i = f(t_{i-1}) = (t_{i-1})^2 \quad \text{y} \quad M_i = f(t_i) = t_i^2.$$

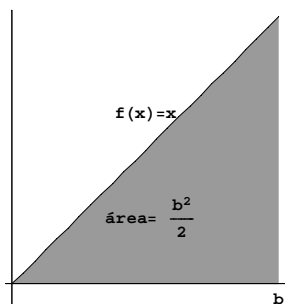


Figura 8.10:  $f(x) = x$ , en  $[0, b]$

Eligiendo también en este caso las particiones  $P_n = \{t_0, \dots, t_n\}$  obtenidas al dividir el intervalo  $[0, b]$  en  $n$  partes iguales, resulta  $t_i = \frac{i \cdot b}{n}$  y en consecuencia<sup>2</sup>

$$s(f, P_n) = \sum_{i=1}^n (t_{i-1})^2 (t_i - t_{i-1}) = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{b^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

y

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^n t_i^2 (t_i - t_{i-1}) = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{b^3}{n^3} \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}.$$

Luego

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) = b^3 \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2} \right).$$

Esta expresión muestra que la diferencia puede hacerse tan pequeña como se desee con sólo tomar  $n$  suficientemente grande.

Además

$$s(f, P_n) = \frac{b^3}{6} \frac{n(n-1)(2n-1)}{n^3} = \frac{b^3}{6} \left( 2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) < 2 \frac{b^3}{6} = \frac{b^3}{3}$$

y

$$S(f, P_n) = \frac{b^3}{6} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{b^3}{6} \left( 2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) > \frac{b^3}{3}.$$

Es decir

$$s(f, P_n) < \frac{b^3}{3} < S(f, P_n) \quad \forall n.$$

<sup>2</sup>Recuerde que para todo número natural  $k$  vale la fórmula

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$



Luego, un razonamiento análogo al usado en el ejemplo anterior demuestra que

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$

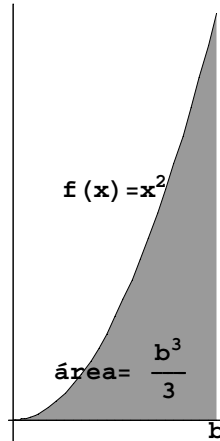


Figura 8.11:  $f(x) = x^2$ , en  $[0, b]$

Compare este resultado con el de Arquímedes en pág. 279.

Los dos ejemplos anteriores pueden hacer pensar que el cálculo de las integrales de la mayoría de las funciones es generalmente difícil o imposible. De hecho, las integrales de la mayor parte de las funciones son imposibles de determinar con exactitud (aunque pueden determinarse con tanta precisión como se quiera mediante el cálculo de sumas inferiores y superiores). Se verá sin embargo que la integral de muchas funciones puede calcularse muy fácilmente, mediante distintas técnicas o métodos de integración.

El objetivo de los ejemplos anteriores fue en primer lugar mostrar funciones integrables, luego mostrar cómo se pueden calcular usando la definición y finalmente mostrar que tal forma de calcular es complicada, extensa y que su grado de dificultad aumenta enormemente cuando las funciones a integrar dejan de ser las muy simples.

Afortunadamente se han desarrollado métodos que permiten calcular rápida, fácil y eficazmente la mayoría de las integrales que aparecen en muchas aplicaciones.

El proceso de perfeccionamiento del cálculo que surge a partir de una definición, es el usual en Matemática: Se buscan propiedades y se demuestran teoremas mediante los cuales se transforman en factibles cálculos extremadamente complejos, y aún imposibles, en el contexto del enfoque original.

## 8.4. Sumas de Riemann

Con el objeto de simplificar la presentación del tema incurriremos, toda vez que no haya lugar a confusión, en un abuso de notación: Hasta ahora el símbolo  $\Delta x_i$  se usó para designar a la longitud  $x_i - x_{i-1}$  del  $i$ -ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  de una partición  $P$  de un intervalo  $[a, b]$ , en adelante también lo usaremos para designar al propio subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Sean  $f(x)$  una función acotada en un intervalo  $[a, b]$  y  $P$  una partición cualquiera del mismo. Llamaremos *suma de Riemann*, de  $f(x)$  correspondiente a la partición  $P$ , a la sumatoria:

$$SR(f, P) = \sum_{\substack{\Delta x_i \in P \\ \xi_i \in \Delta x_i}} f(\xi_i) \Delta x_i \quad (8.9)$$

donde  $\xi_i$  es un punto cualquiera del subintervalo  $\Delta x_i := [x_{i-1}, x_i]$  de  $P$ .

Nótese que esta suma tiene tantos sumandos como subintervalos tenga la partición  $P$ , por lo tanto en todos los casos es una suma finita.

Teniendo en cuenta que, si  $f(x)$  está acotada en  $[a, b]$  es

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i \quad \forall \quad \Delta x_i \in P$$

resulta

$$s(f, P) \leq \sum_{\substack{\Delta x_i \in P \\ \xi_i \in P}} f(x_i) \Delta x_i \leq S(f, P).$$

Esta desigualdad nos indica que con las sumas de Riemann es posible obtener la integral, tanto como con las sumas inferiores y superiores. Pero como veremos enseguida, usaremos las sumas de Riemann para obtener las integrales como límite de sucesiones. Más precisamente, que la integral se puede expresar

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} f(\xi_i) \Delta x_i \quad (8.10)$$

donde  $\{P_n\}$  es una sucesión de particiones de  $[a, b]$  que verifican ciertas condiciones.

Previo a la demostración de los enunciados precedentes daremos algunas definiciones y precisiones sobre el problema de la integrabilidad de funciones.

**Definición 8.4.1** Si  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  es una partición de  $[a, b]$  se llama “norma” de  $P$ , y se denota  $\|P\|$ , al número

$$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\}.$$

En otras palabras, la *norma* de una partición  $P$  es la longitud del subintervalo de mayor longitud de la misma.

**Ejemplo 8.4.2** Si consideramos la partición  $P = \{0, 1, 2, 4\}$  del intervalo  $[0, 4]$ , es  $\|P\| = 2$ .

**Definición 8.4.3** Se dice que una sucesión de particiones  $\{P_n\}$  de  $[a, b]$  tiene las propiedades  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  si:

- $\Pi_1$   $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots \subseteq P_n \subseteq \dots$
- $\Pi_2$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = 0$ .

Ya hemos visto ejemplos de funciones integrables y no integrables, y de cálculo de las integrales de ciertas funciones simples, pero tenemos postergado un problema importante, el problema de la integrabilidad.

Si bien hemos adelantado a título informativo que las funciones continuas son integrables, es conveniente a esta altura poner un poco más de precisión en el tema y dar condiciones para que una función resulte integrable en un intervalo.

**Teorema 8.4.4** *Toda función continua en  $[a, b]$  es integrable.*

La demostración, así como los instrumentos previos para concretarla se incluyen en el apéndice al final del capítulo, pero su lectura puede omitirse sin perjuicio de la comprensión de los temas que continuaremos desarrollando.

En realidad el teorema puede demostrarse con condiciones mucho menos restrictivas que

la continuidad pero, naturalmente, con una demostración significativamente más trabajosa y que requiere mayores conocimientos que los necesarios para la versión dada arriba. Vale la pena mencionar aquí que una versión intermedia, y suficiente para todas nuestras expectativas de cálculo actuales, es la siguiente:

**Teorema 8.4.5** *Toda función acotada en  $[a, b]$  y continua, salvo eventualmente en un número finito de puntos, es integrable en  $[a, b]$ .*

Contando con estos resultados podemos proseguir, en mejores condiciones, con el estudio de la integral.

**Teorema 8.4.6** *Si  $f(x)$  continua en  $[a, b]$  y  $\{P_n\}$  es una sucesión de particiones que tiene las propiedades  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ , entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} SR(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (8.11)$$

La demostración de este teorema es muy similar a la del Teorema 8.4.4 además puede ser demostrado con condiciones menos restrictivas que la continuidad. También aquí se puede mencionar la siguiente versión intermedia, que se obtiene de manera bastante sencilla a partir del Teorema 8.4.6.

**Teorema 8.4.7** *Sea  $f(x)$  acotada en  $[a, b]$  y continua, salvo eventualmente en un número finito de puntos. Si  $\{P_n\}$  es una sucesión de particiones de  $[a, b]$  que tiene las propiedades  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ , entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} SR(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (8.12)$$

Uno de los aportes de los Teoremas 8.4.6 y 8.4.7 es que nos permiten obtener la integral como límite de una sucesión, con fuerte sentido intuitivo y con la notoriamente agradable particularidad de que la integral se obtiene como límite reemplazando:  $\sum$  por  $\int$ ;  $f(\xi_i)$  por  $f(x)$  y  $\Delta x_i$  por  $dx$ .

Resulta claro que esta nueva expresión de la integral presenta similares dificultades para el cálculo que las afrontadas en los ejemplos dados anteriormente, luego no debemos considerarla como un procedimiento adecuado para el cálculo. La usaremos para obtener un método con el cual, al fin, se podrá calcular con facilidad y sencillez el valor de muchas integrales.

El primer paso en tal sentido es demostrar varias importantes propiedades de la integral, que listamos más abajo.

Antes de seguir adelante es bueno hacer en este punto una pequeña reflexión sobre las condiciones  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ , que se piden a una sucesión de particiones  $\{P_n\}$  para que la correspondiente sucesión de sumas de Riemann defina la integral.

La condición  $\Pi_1$  garantiza que las sucesiones  $\{s(f, P_n)\}$  y  $\{S(f, P_n)\}$  resulten respectivamente monótona creciente, monótona decreciente y que además se dispongan de la siguiente manera

$$s(f, P_1) \leq s(f, P_2) \leq \cdots \leq s(f, P_n) \leq \cdots \leq S(f, P_n) \leq \cdots \leq S(f, P_2) \leq S(f, P_1)$$

con lo cual resulta que ambas son convergentes y el límite de las sumas inferiores es menor o igual que el de las superiores.

En el siguiente ejemplo de una sucesión  $\{P_n\}$  que verifica  $\Pi_1$  pero no  $\Pi_2$  y la posterior ilustración del comportamiento de las sumas inferiores nos mostrará, de manera intuitiva pero elocuente, la necesidad de la condición  $\Pi_2$ :

$$\begin{aligned} P_1 &= \{0, \mathbf{1}, \mathbf{2}, 3\} \\ P_2 &= \left\{0, \frac{1}{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{5}{2}, 3\right\} \\ P_3 &= \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, 3\right\} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Es decir, para obtener  $P_2$  se dividen en dos partes el primer intervalo y el tercero, sin alterar el  $[1, 2]$ . Para obtener  $P_3$  se dividen en dos cada uno de los subintervalos de  $P_2$ , salvo el  $[1, 2]$  que se mantiene inalterable, y así sucesivamente.

## Capítulo 8. Integración: Notas teóricas

Es claro que  $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots \subseteq P_n \subseteq \dots$  y que en todas las  $P_n$  está el subintervalo  $[1, 2] \therefore \|P_n\| = 1 \quad \forall n$ , es decir  $\{P_n\}$  no verifica  $\Pi_2$ .

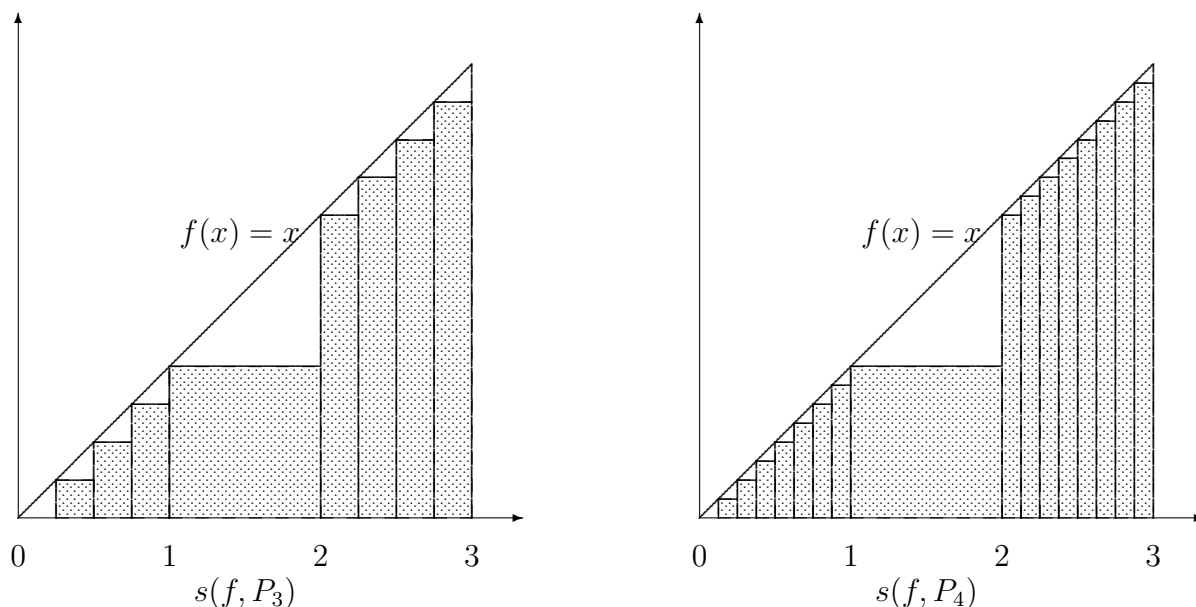


Figura 8.12: Representaciones de  $s(f, P_3)$  y  $s(f, P_4)$

En la figura se representan las sumas inferiores  $s(x, P_3)$  y  $s(x, P_4)$  que son suficientes para mostrar, a nivel intuitivo pero de manera convincente, que el límite de la sucesión  $\{s(x, P_n)\}$  no puede valer  $\frac{9}{2}$ , que es el área del triángulo  $T$  que determina  $f(x) = x$  sobre el segmento  $[0, 3]$ . En este caso, y también guiándonos por la figura, se ve que el límite de la sucesión no puede superar el valor  $\frac{9}{2} - \frac{1}{8} = \frac{35}{8}$ , que es el área de la figura que resulta de quitar de  $T$  el triángulo de base 1 que se muestra en blanco en cada uno de los gráficos de arriba. Por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} s(x, P_n) \neq \int_0^3 x dx = \frac{9}{2}$ .

La propiedad  $\Pi_2$  tiene por objeto evitar que en una sucesión de particiones se mantengan subintervalos “sin ser divididos”.

Con los teoremas, aclaraciones y precisiones anteriores podemos encarar las demostraciones de las anunciadas propiedades de la integral, las que a su vez nos permitirán obtener resultados con los cuales el cálculo se hará mucho más accesible.

En lo que sigue nos referiremos a las funciones acotadas en  $[a, b]$  y con a lo sumo un número finito de puntos de discontinuidad, como *funciones integrables*. Además, toda vez que hagamos referencia a una sucesión de particiones  $\{P_n\}$  de un intervalo  $[a, b]$  sobreentenderemos que verifica las condiciones  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ .

### 8.4.1. Algunas propiedades de la integral

**I<sub>1</sub>)** Si  $f(x)$ ,  $g(x)$  son funciones integrables en  $[a, b]$  y  $\lambda$ ,  $\mu$  números reales, entonces  $\lambda f(x) + \mu g(x)$  es integrable en  $[a, b]$  y vale

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

**I<sub>2</sub>)** Si  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$  y  $c$  es un punto intermedio entre  $a$  y  $b$ , entonces  $f(x)$  es integrable en  $[a, c]$  y  $[c, b]$  y además

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**I<sub>3</sub>)** Si  $f(x)$  es integrable y no negativa en  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

**I<sub>4</sub>)** Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son integrables y además  $f(x) \leq g(x)$  en  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

**I<sub>5</sub>)** Si  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$  entonces  $|f(x)|$  también lo es y

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**I<sub>6</sub>)** (Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral) Si  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$ ,  $m = \inf\{f(x), x \in [a, b]\}$  y  $M = \sup\{f(x), x \in [a, b]\}$ , entonces existe un valor intermedio  $\mu$  entre  $m$  y  $M$  tal que

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b - a).$$

Si además  $f(x)$  es continua en  $[a, b]$ , entonces existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(x_0)(b - a).$$

## Capítulo 8. Integración: Notas teóricas

---

*Demostración. de I<sub>1</sub>*).

Sea  $\{P_n\}$  una sucesión de particiones de  $[a, b]$  tal que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} f(\xi_i) \Delta x_i \quad \text{y} \quad \int_a^b g(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} g(\xi_i) \Delta x_i$$

entonces, a partir de la existencia de tales límites y usando propiedades de los límites de sucesiones, resulta

$$\begin{aligned} \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx &= \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} f(\xi_i) \Delta x_i + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} g(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} f(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} g(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \lambda \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} f(\xi_i) \Delta x_i + \mu \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} g(\xi_i) \Delta x_i \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} [\lambda f(\xi_i) + \mu g(\xi_i)] \Delta x_i \end{aligned}$$

la existencia de este último límite significa la integrabilidad de  $[\lambda f + \mu g](x)$  y que su valor es precisamente el de la integral  $\int_a^b [\lambda f + \mu g](x)dx$ .

■

*Demostración. de I<sub>2</sub>*).

Si  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$  significa que está acotada y tiene a lo sumo, un número finito de discontinuidades allí. Por lo tanto lo mismo vale en cualquier subintervalo. En particular si  $c$  es un punto intermedio entre  $a$  y  $b$ ,  $f(x)$  está acotada y tiene, a lo sumo, un número finito de discontinuidades en  $[a, c]$  y en  $[c, b]$ . Es decir, es integrable en ambos subintervalos.

Si  $\{P'_n\}$  y  $\{P''_n\}$  son sucesiones de particiones de  $[a, c]$  y  $[c, b]$  respectivamente, es claro que si  $P_n = P'_n \cup P''_n \quad \forall n$ , resulta  $\{P_n\}$  una sucesión de particiones de  $[a, b]$ . Más aún, si  $\{P'_n\}$  y  $\{P''_n\}$  verifican  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  entonces  $\{P_n\}$  también.



Como

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\Delta x_i \in P'_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} f(\xi_i) \Delta x_i \quad \text{y} \quad \int_c^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\Delta x_i \in P''_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} f(\xi_i) \Delta x_i$$

vale que

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\Delta x_i \in P'_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} f(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\Delta x_i \in P''_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} f(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{\substack{\Delta x_i \in P'_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{\substack{\Delta x_i \in P''_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} f(\xi_i) \Delta x_i \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_n = P'_n \cup P''_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} f(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

■

Si ponemos por definición

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

la igualdad anterior se puede expresar como

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0.$$

**Observación 8.4.8** Usando la propiedad  $\mathbf{I}_2$ ) se puede obtener la siguiente versión más general:

$\mathbf{I}'_2$ ) Sea  $f(x)$  integrable en  $(A, B)$ . Si  $[a, b] \subseteq (A, B)$  y  $c$  es un punto cualquiera en  $(A, B)$ , no necesariamente en  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

*Demostración.*

Si  $c \in [a, b]$  estamos en el caso  $\mathbf{I}_2$ ). Si  $c \notin [a, b]$  podemos considerar, por ejemplo, que  $A < c < a < b < B$ . En tal situación y teniendo en cuenta que  $a \in [c, b]$  la propiedad  $\mathbf{I}_2$ ) nos dice que

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

y por lo tanto que

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

■

**Observación 8.4.9** *Justifica haber establecido por definición la igualdad*

$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx,$$

el hecho que tal relación depende en realidad de la convención por la cual se asigna, en un segmento  $[a, b]$ , un signo al sentido de “a hacia b” y el opuesto al de “b hacia a”.

La argumentación que sigue pretende dejar mejor en claro la cuestión:

Para calcular  $\int_a^b f(x)dx$  damos una sucesión de particiones  $\{P_n\}$  y para cada una, digamos  $P_n = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_{r_n} = b\}$  es

$$SR(f, P_n) = \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{\substack{[t_{i-1}, t_i] \in P_n \\ \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]}} f(\xi_i) (t_i - t_{i-1}).$$

En este caso, al integrar de “a hacia b”, hemos tomado  $\Delta x_i = t_i - t_{i-1}$ . Es decir, la diferencia entre el extremo  $t_i$  “más alejado” de  $a$  y el extremo  $t_{i-1}$  “más cercano” de  $a$ .

Con el mismo criterio, cuando integremos de  $b$  hacia  $a$ , el  $\Delta x_i$  como diferencia entre el extremo  $t_{i-1}$  “más alejado” de  $b$  y el extremo  $t_i$  “más cercano” de  $b$ , resulta ser

$$\Delta x_i = t_{i-1} - t_i = -(t_i - t_{i-1}) < 0$$

entonces

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{[t_{i-1}, t_i] \in P_n \\ \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]}} f(\xi_i)(t_{i-1} - t_i) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{[t_{i-1}, t_i] \in P_n \\ \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]}} -f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = - \int_a^b f(x) dx.$$

*Demostración.* de **I**<sub>3</sub>).

Si  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$  y  $\{P_n\}$  es una sucesión de particiones verificando  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ , por ser  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0 \forall \Delta x_i \in P_n$  y para todo  $n$ , resulta

$$SR(f, P_n) = \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_n \\ \xi_i \in \Delta x_i}} \underbrace{f(\xi_i)}_{\geq 0} \underbrace{\Delta x_i}_{> 0} \geq 0 \quad \forall n,$$

por lo tanto

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} SR(f, P_n) \geq 0.$$

■

*Demostración.* de **I**<sub>4</sub>).

$f(x) \leq g(x)$  en  $[a, b] \Leftrightarrow g(x) - f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ , entonces por la propiedad **I**<sub>3</sub>) vale

$$\int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0$$

y por la propiedad **I**<sub>1</sub>) resulta

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

es decir

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

■

*Demostración.* de **I**<sub>5</sub>).

Una función  $f(x)$  está acotada en  $[a, b]$  si y sólo si la función  $|f(x)|$  lo está. Además, la función  $|f(x)|$  es continua en todo punto en que  $f(x)$  lo sea.

De estas dos afirmaciones resulta que si una función  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$  -acotada y con a lo sumo un número finito de discontinuidades- entonces la función  $|f(x)|$  también lo es.

## Capítulo 8. Integración: Notas teóricas

---

Por otra parte, si recordamos que cuando  $a > 0$  y  $-a \leq x \leq a$  entonces  $|x| \leq a$ , teniendo en cuenta que  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \forall x$  resulta

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

y por lo tanto

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

■

**Observación 8.4.10** Hemos visto que  $f(x)$  integrable implica  $|f(x)|$  integrable. Cabe aclarar que la implicación inversa no es verdadera. Por ejemplo la función definida en  $[0, 1]$  por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ racional} \\ -1 & \text{si } x \text{ irracional} \end{cases}$$

no es integrable en  $[0, 1]$  :  $\int_0^1 f(x)dx = -1 \neq \int_0^1 f(x)dx = 1$ . (Ver Ejemplo 8.2.9 pág. 288)

En cambio la función constante  $|f(x)| = 1 \forall x \in [0, 1]$  sí lo es. (Ver Ejemplo 8.2.8 pág. 287)

*Demostración.* de **I**<sub>6</sub>).

Dado que  $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$ , por la propiedad **I**<sub>4</sub>) resulta

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$

entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

de donde sigue

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} \leq M.$$

Es decir, el número  $\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$  es un valor intermedio entre el ínfimo y el supremo de  $f(x)$  en  $[a, b]$  y verifica que

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \quad (8.13)$$

Si  $f(x)$  además de ser integrable es continua en  $[a, b]$ , entonces el ínfimo es el mínimo y el supremo es el máximo. En tal caso  $\mu$  es un valor intermedio entre el mínimo y el máximo, luego el Teorema de los valores intermedios de las funciones continuas asegura que existe un  $x_\mu \in [a, b]$  tal que  $f(x_\mu) = \mu$ , y por lo tanto (8.13) resulta

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_\mu)(b - a), \quad \text{con } x_\mu \in [a, b]. \quad (8.14)$$

■

Las propiedades recién demostradas serán útiles herramientas, en realidad indispensables herramientas, para abordar los conceptos y teoremas fundamentales que veremos a continuación.

### 8.4.2. La Función Integral

**Observación 8.4.11** *El hecho de ser  $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{t \rightarrow a} t^2$  nos muestra con simple elocuencia, que el resultado del paso al límite para una función no depende de la denominación que adoptemos para la variable independiente, en cualquier caso es  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{t \rightarrow a} f(t)$ . Lo mismo ocurre con la integral:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Esta observación es útil en cuanto nos facilita una notación no confusa para la que denominaremos *función integral*.

Consideremos una función  $f(x)$  integrable en cualquier subintervalo  $[x_1, x_2]$  de un intervalo abierto  $(A, B)$ , que puede ser todo  $\mathbb{R}$ . Si tomamos un punto (cualquiera)  $a \in (A, B)$  y a cada  $x \in (A, B)$  le asignamos el valor  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , sin duda hemos definido una función  $F : (A, B) \rightarrow \mathbb{R}$ , que llamaremos *función integral*.

Por ejemplo si consideramos un  $A < 0$ ,  $B > 0$  y  $f(x) = x$ , tomando  $a = 0$  resulta  $F(x) = \int_0^x tdt = \frac{x^2}{2}$  (Ver Ejemplo 8.3.10 pág. 295)

**Definición 8.4.12** *Dada una función  $f(x)$  se dice que la función  $F(x)$  es una primitiva o antiderivada de  $f(x)$  en  $A \subseteq D(f)$  si  $F'(x) = f(x) \forall x \in A$ .*

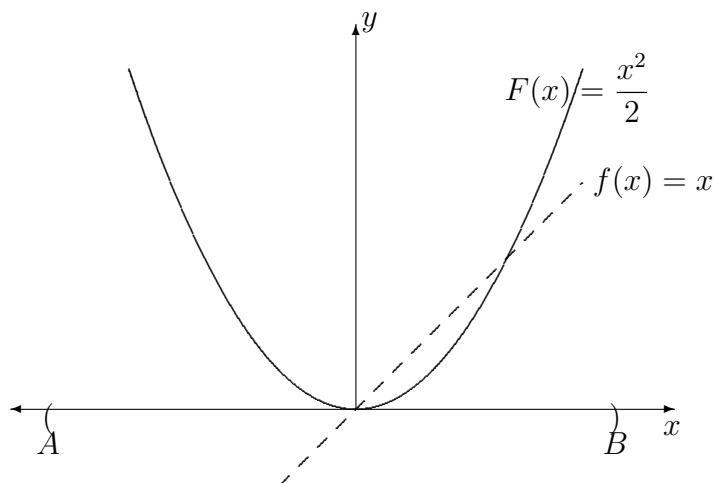


Figura 8.13: Gráfico de una función y su correspondiente función integral

**Ejemplo 8.4.13**  $F(x) = \sin x$  es una primitiva de  $f(x) = \cos(x)$  en  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 8.4.14** Si  $\alpha \neq -1$ ,  $F(x) = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1}$  es una primitiva de  $f(x) = x^\alpha$ , en  $\mathbb{R}$  si  $\alpha > 0$  y en  $\mathbb{R} - \{0\}$  si  $\alpha < 0$ .

**Ejemplo 8.4.15**  $F(x) = |x|$  es una primitiva de  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  en  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

Es claro que si  $F(x)$  es una primitiva de  $f(x)$  entonces  $G(x) = F(x) + C$  también lo es, cualquiera sea la constante  $C$ . Por lo tanto, si una función admite una primitiva, admite infinitas.

La cuestión que surge naturalmente es de saber cuales son todas las primitivas de una función dada. Si  $F(x)$  es una primitiva de  $f(x)$  ¿es la familia  $\{F(x) + C, c \in \mathbb{R}\}$  la familia de todas las primitivas de  $f(x)$  ?

La respuesta es afirmativa y la demostración resulta una consecuencia directa del Teorema del Valor Medio de Lagrange.

**Proposición 8.4.16** Si  $F(x)$  y  $G(x)$  son dos primitivas de  $f(x)$  en un intervalo abierto  $(a, b)$ , entonces existe una constante  $C$  tal que  $F(x) = G(x) + C$ .

*Demostración.*

Si  $F(x)$  y  $G(x)$  son primitivas de  $f(x)$  en  $(a, b)$  resulta que la función  $H(x) = F(x) - G(x)$  verifica que  $H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$ .

Pero toda función con derivada nula en un intervalo es constante en tal intervalo (corolario del Teorema del Valor Medio de Lagrange). Por lo tanto  $\exists C$  tal que  $H(x) = F(x) - G(x) = C \forall x \in (a, b)$ , es decir  $F(x) = G(x) + C \forall x \in (a, b)$ .

■

Estamos ahora en condiciones de demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, que establece que la función integral es una primitiva del integrando.

Este extraordinario resultado, que es la llave que posibilita el cálculo efectivo de muchas integrales, al reducir dicho cálculo a la búsqueda de primitivas, muestra al mismo tiempo otro hecho notable, y en su momento sorprendente: que el problema de la tangente y el problema del área son, en cierto sentido, opuestos el uno del otro pero indisolublemente ligados.

## 8.5. Teorema Fundamental del Cálculo Integral (Para funciones continuas)

**Teorema 8.5.1** *Si  $f(x)$  es continua en el intervalo abierto  $(A, B)$  y  $a$  es un punto cualquiera del mismo, entonces la función integral*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

*es una primitiva de  $f(x)$  en  $(A, B)$ . Es decir  $F(x)$  es derivable y  $F'(x) = f(x) \forall x \in (A, B)$ .*

*Demostración.*

Recordando el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral, **I**<sub>6</sub>) pág. 303, la demostración resulta directamente del cálculo de la derivada de la función integral.

Sea  $x_0$  un punto cualquiera de  $(A, B)$  entonces

$$\begin{aligned}
 F'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt}{\Delta x}.
 \end{aligned}
 \tag{8.15}$$

Como  $f(x)$  es continua en  $(A, B)$  lo es en particular en el intervalo  $[x_0, x_0 + \Delta x]$  (o en el  $[x_0 + \Delta x, x_0]$  si  $\Delta x < 0$ ) por lo tanto, por el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para funciones continuas, existe  $x_{\Delta x}$  “entre”  $x_0$  y  $x_0 + \Delta x$  tal que  $\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt = f(x_{\Delta x}) \Delta x$ .

El hecho que  $x_{\Delta x}$  esté “entre”  $x_0$  y  $x_0 + \Delta x$  nos hace concluir que  $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow x_{\Delta x} \rightarrow x_0$ . Por lo tanto, al ser  $f(x)$  continua, de (8.15) resulta

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_{\Delta x}) \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_{\Delta x}) = f(x_0).$$

■

### 8.5.1. Regla de Barrow (Para funciones continuas)

Si  $f(x)$  es continua en  $[a, b]$  y  $G(x)$  es una primitiva cualquiera de  $f(x)$  en  $[a, b]$  entonces

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

*Demostración.*

Por el Teorema Fundamental sabemos que la función integral  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  es otra primitiva de  $f(x)$ , luego existe una constante  $C$  tal que

$$\int_a^x f(t) dt = G(x) + C$$



pero entonces

$$0 = \int_a^a f(t)dt = G(a) + C$$

implica  $C = -G(a)$ , luego

$$\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$$

y tomando  $x = b$  resulta

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

■

Cabe destacar que este resultado reduce al cálculo de una integral al problema, en muchos casos enormemente más simple, de encontrar una primitiva del integrando.

Si por ejemplo, recordamos que el área de la región  $\Omega$ , limitada en el plano por: la parábola  $y = x^2$ , el eje  $x$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$ , es

$$A(\Omega) = \int_a^b x^2 dx$$

el hecho que  $G(x) = \frac{x^3}{3}$  es una primitiva del integrando  $f(x) = x^2$ , nos indica que

$$A(\Omega) = \int_a^b x^2 dx = G(b) - G(a) = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \quad (\text{Ver ejemplo 8.3.10, pág. 295}).$$

Si bien las versiones dadas del Teorema Fundamental y la Regla de Barrow pueden adaptarse para calcular la mayor parte de las integrales que aparecen en las aplicaciones que trataremos, es conveniente enunciar y demostrar versiones más potentes de ambas, que se obtienen al quitar la exigencia de la continuidad en todo el intervalo de integración.

### 8.5.2. Teorema Fundamental del Cálculo Integral (Segunda versión)

**Teorema 8.5.2** *Si  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$ , entonces la función integral  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  es continua en  $[a, b]$ . Además es derivable en todo punto  $x_0$  en que el integrando sea continuo y vale  $F'(x_0) = f(x_0)$ .*

*Demostración.*

Veamos en primer lugar la continuidad de  $F(x)$ .

Como  $f(x)$  está acotada en  $[a, b]$  existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$  y en tal caso, para un  $x$  cualquiera en el intervalo, se verifica la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} 0 \leq |F(x + \Delta x) - F(x)| &= \left| \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| = \\ &= \left| \int_{x+\Delta x}^x f(t)dt \right| \leq \left| \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|dt \right| \leq \left| \int_x^{x+\Delta x} Mdt \right| = M|\Delta x|. \end{aligned}$$

En conclusión, se tiene que

$$0 \leq |F(x + \Delta x) - F(x)| \leq M \cdot |\Delta x|$$

y por lo tanto

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(x + \Delta x) = F(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Para demostrar la segunda parte de la tesis  $\ll$  si  $f(x)$  es continua en  $x_0$  entonces  $F'(x_0) = f(x_0) \gg$  basta demostrar que: si  $f(x)$  tiene un número finito de puntos de discontinuidad en  $(a, b)$  y es continua en  $x_0 \in (a, b)$  entonces también es continua en un entorno  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$ . Tal es así porque la demostración, para  $f(x)$  continua en  $[a, b]$ , se basó en que la función era continua en el intervalo cerrado  $[x_0, x_0 + \Delta x]$  y es claro que esta condición se verifica en este caso más general una vez que  $\Delta x$  es lo suficientemente pequeño como para que sea  $[x_0, x_0 + \Delta x] \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

**Lema 8.5.3** *Si  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$  (acotada y con a lo sumo un número finito de puntos de discontinuidad) y es continua en  $x_0 \in (a, b)$ , entonces es continua en un entorno  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .*

*Demostración.*

Como  $f(x)$  tiene un número finito de puntos de discontinuidad, digamos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y  $x_0$  no es uno de ellos, entonces existe el número positivo  $\delta = \min \{|x_i - x_0|, |x_0 - a|, |x_0 - b|\}_{1 \leq i \leq n}$  y para tal valor el entorno  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$  y además no contiene a ninguno de los puntos de discontinuidad.

■

Es interesante observar que cuando  $f(x)$  es continua en  $(A, B)$  la función integral  $F(x)$  es continua allí, por ser derivable. Por lo tanto toda primitiva de  $f(x)$  resulta continua dado que todas difieren en una constante de  $F(x)$ .

En el caso en que  $f(x)$  sólo sea integrable en  $(A, B)$  hemos visto que  $F(x)$  es continua, pero no es derivable en cada punto de discontinuidad de  $f(x)$ . Eso trae como consecuencia que la función admita primitivas discontinuas.

Por ejemplo, sabemos que  $F(x) = |x|$  es una primitiva (continua) de  $f(x) = \text{Signo}(x) = \frac{x}{|x|}$  en  $\mathbb{R} - \{0\}$  pero también lo es toda función (discontinua) de la forma  $G(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x + C & \text{si } x > 0 \end{cases}$ ,  $C \neq 0$ .

En este caso la Regla de Barrow continúa valiendo pero con la versión que indicamos más abajo.

*Notación.* Si  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$  denotaremos con  $Cf[ab]$  al conjunto de los puntos del intervalo en los que la función es continua.

**Teorema 8.5.4** *Regla de Barrow.* Si  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$  y  $G(x)$  es una primitiva en  $Cf[ab]$  pero continua en  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

**Observación 8.5.5** *El siguiente ejemplo de una función muy simple discontinua en  $x = 0$ , pretende mostrar casi visualmente la razón por la cual la función integral no es derivable en un punto de discontinuidad (no evitable) del integrando.*

Si  $f(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \leq 0 \\ 5 & \forall x > 0 \end{cases}$  y consideramos el punto inicial  $a = -1$ , la función integral  $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$  nos da:

- para cada  $x \in (-1, 0]$ , el área del rectángulo cuya base es el segmento  $[-1, x]$  y de altura 1, es decir  $F(x) = x + 1$

## Capítulo 8. Integración: Notas teóricas

- para cada  $x > 0$ , el área del rectángulo de base  $[-1, 0]$  y altura uno, más el área del rectángulo de base  $[0, x]$  y altura 5. Es decir

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt = \begin{cases} x + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 5x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

Notemos en primer lugar que  $F(x)$  es continua en todo punto de su dominio.

En la figura se indican sombreadas las magnitudes del incremento  $F(0 + \Delta x) - F(0)$ , para un valor de  $\Delta x$  positivo y para el opuesto negativo. Se puede ver en la figura que la

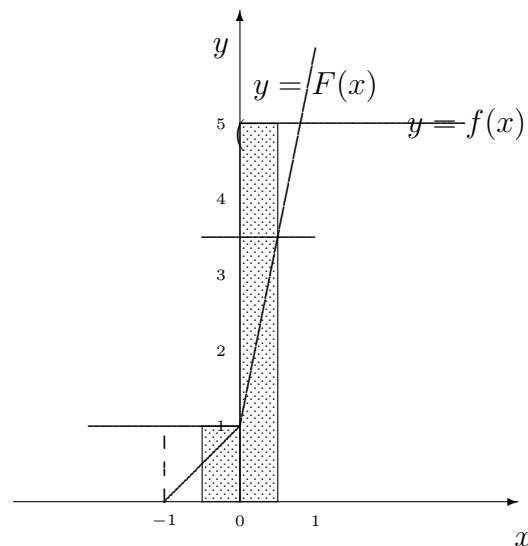


Figura 8.14: Función discontinua y primitiva continua pero no derivable en un punto

magnitud del incremento correspondiente a  $\Delta x > 0$  quintuplica a la del correspondiente a  $\Delta x < 0$ .

En otras palabras, si a partir de  $x = 0$  consideramos un incremento cualquiera hacia la derecha, la función crece cinco veces más que si consideramos el mismo incremento pero hacia la izquierda. Eso significa que la función  $F(x)$  no puede ser derivable en  $x = 0$ . En realidad tiene las dos derivadas laterales en ese punto pero son distintas. En este caso concreto  $F'(0^+) = 5$  y  $F'(0^-) = 1$ .

## 8.6. Apéndice

**Definición 8.6.1** *Continuidad Uniforme:* Una función  $f(x)$  se dice uniformemente continua en un conjunto  $A \subseteq D(f)$  si dado  $\epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$  tal que  $x', x'' \in A$  y  $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \epsilon$ .

Usaremos el siguiente *Teorema de Heine - Cantor:* Si  $f(x)$  es continua en un intervalo acotado y cerrado  $[a, b]$ , entonces es uniformemente continua en dicho intervalo.

**Teorema 8.6.2** *Toda función continua en un intervalo  $[a, b]$  es integrable allí.*

*Demostración.*

Debemos probar que dado un  $\epsilon > 0$  existe una partición  $\bar{P}$  tal que  $S(f, \bar{P}) - s(f, \bar{P}) < \epsilon$ .

Tomemos una sucesión de particiones  $\{P_n\}$  que verifique las propiedades  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ .

En tal caso las correspondientes sucesiones  $\{S(f, P_n)\}$  y  $\{s(f, P_n)\}$  verifican

$$s(f, P_1) \leq \dots \leq s(f, P_n) \leq \dots \leq S(f, P_n) \leq \dots \leq S(f, P_1) \quad \text{Ver pág. 301}$$

La continuidad de  $f(x)$  en  $[a, b]$  implica la uniforme continuidad allí, por lo tanto para el número positivo  $\frac{\epsilon}{b-a}$ , existe  $\delta > 0$  tal que cualesquiera sean  $x', x'' \in [a, b]$ ,  $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{b-a}$ .

Por otra parte, al ser  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = 0$  ( $\Pi_2$ ), para el número  $\delta > 0$  existe un  $n_0$  tal que  $\|P_n\| < \delta \forall n \geq n_0$ .

Sigue entonces que para todo subintervalo  $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i] \in P_{n_0}$  es  $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ . En particular, si  $\xi'_i, \xi''_i$  son dos puntos cualesquiera de  $\Delta x_i$ , se verifica  $|\xi'_i - \xi''_i| \leq |x_i - x_{i-1}| < \delta$  y por lo tanto  $|f(\xi'_i) - f(\xi''_i)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ . Para cada  $\Delta x_i \in P_{n_0}$  llamemos  $\xi'_i$  y  $\xi''_i$  a los puntos en que  $f(x)$  toma el mínimo y el máximo respectivamente ( $f(x)$  es continua en  $\Delta x_i$ ).

Entonces

$$S(f, P_{n_0}) - s(f, P_{n_0}) = \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_{n_0} \\ \xi''_i \in \Delta x_i}} f(\xi''_i) \Delta x_i - \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_{n_0} \\ \xi'_i \in \Delta x_i}} f(\xi'_i) \Delta x_i =$$

$$= \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_{n_0} \\ \xi'_i, \xi''_i \in \Delta x_i}} [f(\xi''_i) - f(\xi'_i)] \Delta x_i < \sum_{\Delta x_i \in P_{n_0}} \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_i = \epsilon.$$

Por lo tanto  $\bar{P} = P_{n_0}$  es la partición buscada. ■

**Observación 8.6.3** Consideremos que  $f(x)$  está acotada en  $[a, b]$ , pero que no es continua.

En tal caso, si  $P$  es una partición cualquiera de  $[a, b]$ , no podemos garantizar la existencia del máximo  $M_i$  ni del mínimo  $m_i$  de la función en cada  $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i] \in P$ . Sin embargo si podemos asegurar la existencia de un supremo  $M_i$  y de un ínfimo  $m_i$ , con los cuales se pueden definir las correspondientes sumas superior e inferior, que junto con la de Riemann verifican

$$S(f, P) = \sum_{\Delta x_i \in P} M_i \Delta x_i \leq \sum_{\substack{\Delta x_i \in P \\ \xi_i \in \Delta x_i}} f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{\Delta x_i \in P} m_i \Delta x_i.$$

Además reobtener las propiedades que demostramos para tales sumas en el caso de  $f(x)$  continua, se limita prácticamente a una repetición.

También se define función integrable de manera totalmente análoga:

**Definición 8.6.4** Una función  $f(x)$  acotada en  $[a, b]$  se dice integrable si dado  $\epsilon > 0$  existe una partición  $P_\epsilon$  tal que  $S(f, P_\epsilon) - s(f, P_\epsilon) < \epsilon$ .

**Teorema 8.6.5** Toda función  $f(x)$  acotada en  $[a, b]$  y con, a lo sumo, un número finito de puntos de discontinuidad es integrable.

*Demostración.*

Dado  $\epsilon > 0$  debemos encontrar una partición  $\bar{P}$  de  $[a, b]$  tal que  $S(f, \bar{P}) - s(f, \bar{P}) < \epsilon$ . Llamemos respectivamente  $S$  e  $I$  al supremo e ínfimo de  $f(x)$  en  $[a, b]$  y consideremos que tiene  $k$  puntos de discontinuidad  $d_1, \dots, d_k$ .

Cualquier partición  $P$  con la propiedad que cada punto de discontinuidad  $d_j$  está en el

interior  $(x_{i_j-1}, x_{i_j})$  de un  $\Delta x_{i_j} \in P$ , se puede expresar como la unión de dos familias de subintervalos  $P_1$  y  $P_2$ .  $P_1$  formada por los  $k$  subintervalos  $\Delta x_{i_j}$  y  $P_2$  por todos los  $\Delta x_i$  en los que  $f(x)$  es continua. En tal caso  $f(x)$  es uniformemente continua sobre los subintervalos de  $P_2$  y se puede escribir

$$S(f, P) = \sum_{\Delta x_i \in P} M_i \Delta x_i = \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_2 \\ \xi_i'' \in \Delta x_i}} f(\xi_i'') \Delta x_i + \sum_{\Delta x_{i_j} \in P_1} M_{i_j} \Delta x_{i_j},$$

donde  $M_i$  es el supremo de  $f(x)$  en  $\Delta x_i$  y  $f(\xi_i'')$  es el máximo de  $f(x)$  en  $\Delta x_i \in P_2$

$$s(f, P) = \sum_{\Delta x_i \in P} m_i \Delta x_i = \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_2 \\ \xi_i' \in \Delta x_i}} f(\xi_i') \Delta x_i + \sum_{\Delta x_{i_j} \in P_1} m_{i_j} \Delta x_{i_j},$$

donde  $m_i$  es el ínfimo de  $f(x)$  en  $\Delta x_i$  y  $f(\xi_i')$  es el mínimo de  $f(x)$  en  $\Delta x_i \in P_2$ .

Tomemos ahora una partición  $\bar{P}$ , del tipo de las que estamos considerando, pero con la norma tan pequeña como sea necesario para que valga

$$\text{i) En cada } \Delta x_i \in P_2 \text{ es } f(\xi_i'') - f(\xi_i') < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

$$\text{ii) } \sum_{\substack{\Delta x_{i_j} \in P_1 \\ (1 \leq j \leq k)}} x_{i_j} - x_{i_j-1} < \frac{\epsilon}{2(S-I)}.$$

En tal caso

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum_{\substack{\Delta x_i \in P_2 \\ \xi_i', \xi_i'' \in \Delta x_i}} [f(\xi_i'') - f(\xi_i')] \Delta x_i + \sum_{\substack{\Delta x_{i_j} \in P_1 \\ (1 \leq j \leq k)}} (M_{i_j} - m_{i_j}) \Delta x_{i_j} \\ &< \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\epsilon}{2(S-I)}(S-I) = \epsilon. \end{aligned}$$

**Nota 8.6.6** Si fuese  $S - I = 0$  resultaría  $M_{i_j} - m_{i_j} = 0$  para  $1 \leq j \leq k$  y entonces sería nula la segunda sumatoria en la expresión anterior. En tal caso no sería necesario pedir la condición (ii). ■

## 8.7. Ejercicios resueltos: Aplicación de la Integral Definida. Nivel III: 3<sup>er</sup> PARCIAL.

Aplicación de la Integral Definida: Áreas y Volúmenes de revolución.

### 8.7.1. Áreas

Determine un valor numérico asociado al área acotada encerrada por las funciones:  
 $f(x) = \sqrt{x}$  y  $f(x) = x^4$ .

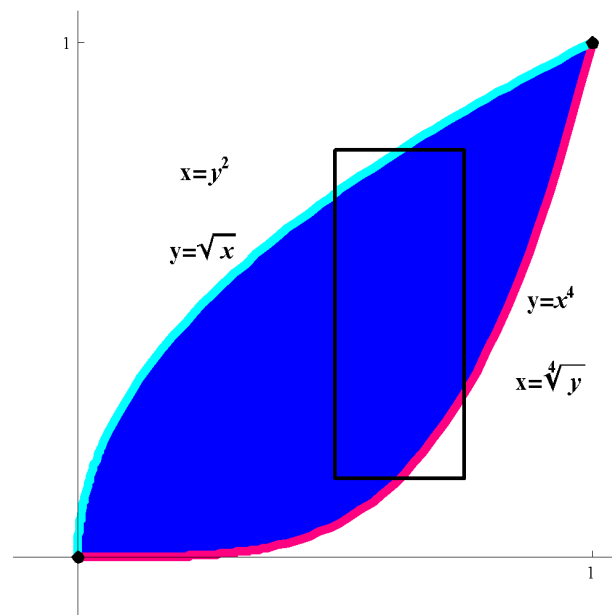


Figura 8.15:  $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^4) dx$ .

Determine un valor numérico asociado al área encerrada por la función:

$f(x) = |(x - 1)^2 - 1|$  y el eje de las abscisas.

- i) Integre respecto del eje de las abscisas.
- ii) Integre respecto del eje de las ordenadas.

Respuesta i):

$$\int_{-1}^0 [(x - 1)^2 - 1] dx + \int_0^2 [1 - (x - 1)^2] dx + \int_2^3 [(x - 1)^2 - 1] dx$$



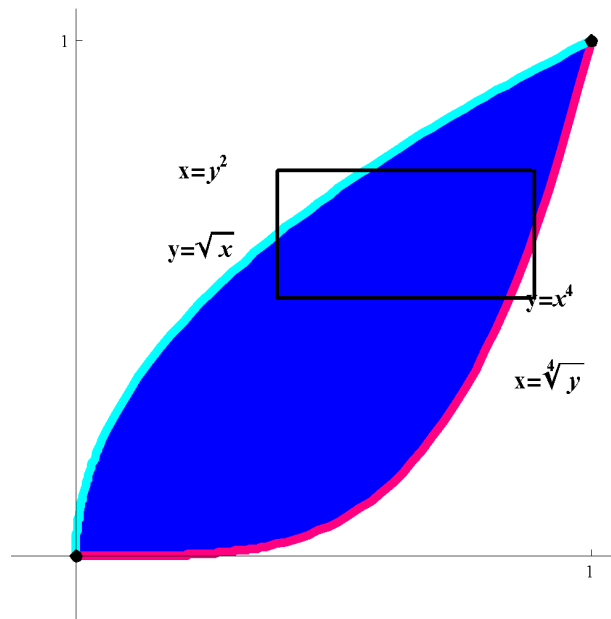


Figura 8.16:  $A = \int_0^1 (\sqrt[4]{y} - y^2) dy$

Respuesta ii):

$$\int_0^3 1 + [1 - \sqrt{y+1}] dy + \int_0^1 \{1 + \sqrt{1-y} - [1 - \sqrt{1-y}]\} dy + \int_0^3 3 - [1 + \sqrt{1+y}] dy$$

### 8.7.2. Volúmenes de Sólidos de Revolución

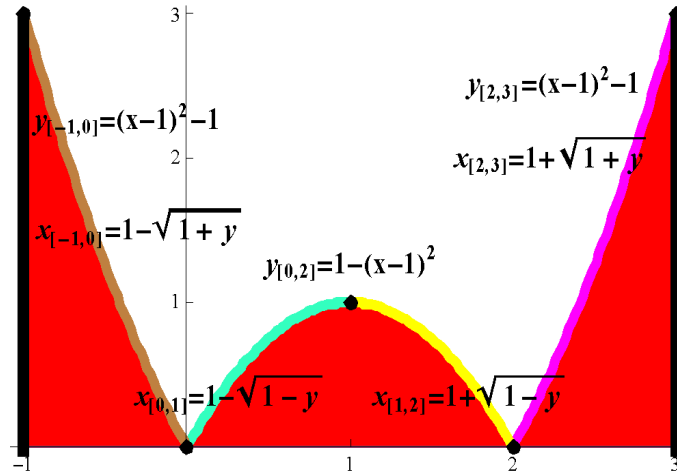


Figura 8.17: Área encerrada por  $f(x) = |(x-1)^2 - 1|$   $x \in [-1, 3]$  y el eje de las abscisas.

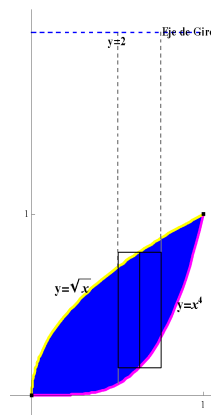


Figura 8.18:  $V = \pi \int_0^1 [(2 - x^4)^2 - (2 - \sqrt{x})^2] dx$ , eje de giro  $y = 2$ .

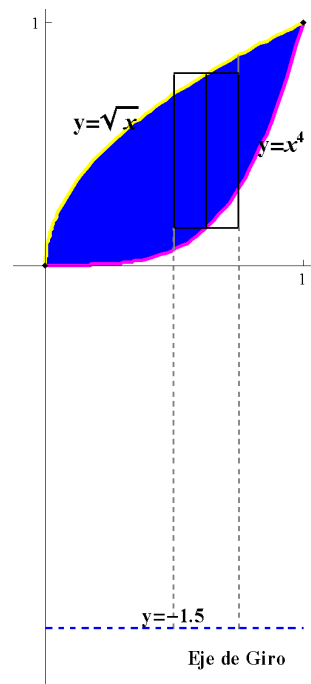


Figura 8.19:  $V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{x} + 1,5)^2 - (x^4 + 1,5)^2] dx$ , eje de giro  $y = -\frac{3}{2}$ .

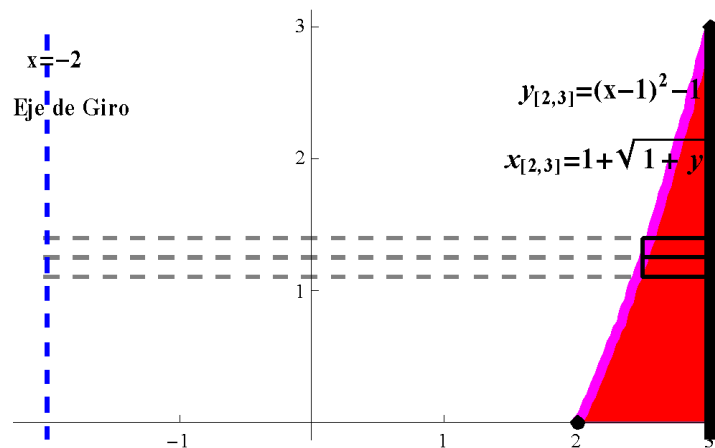


Figura 8.20:  $V = \pi \int_0^3 [5^2 - (1 + \sqrt{1+y} + 2)^2] dy$ , eje de giro  $x = -2$ .

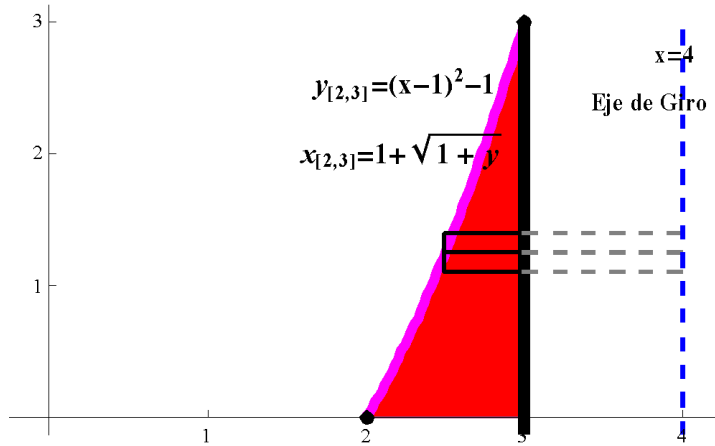


Figura 8.21:  $V = \pi \int_0^3 \{ [4 - (1 + \sqrt{y+1})]^2 - (1)^2 \} dy$ , eje de giro  $x = 4$ .

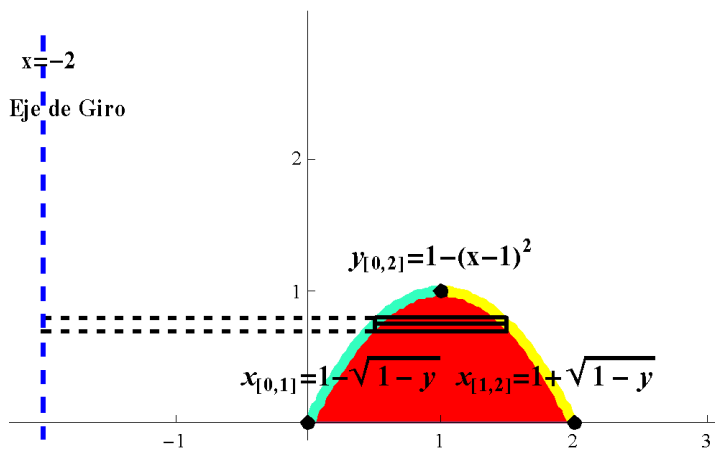


Figura 8.22:  $V = \pi \int_0^1 [(1 + \sqrt{1-y} + 2)^2 - (1 - \sqrt{1-y} + 2)^2] dy$ , eje de giro  $x = -2$ .

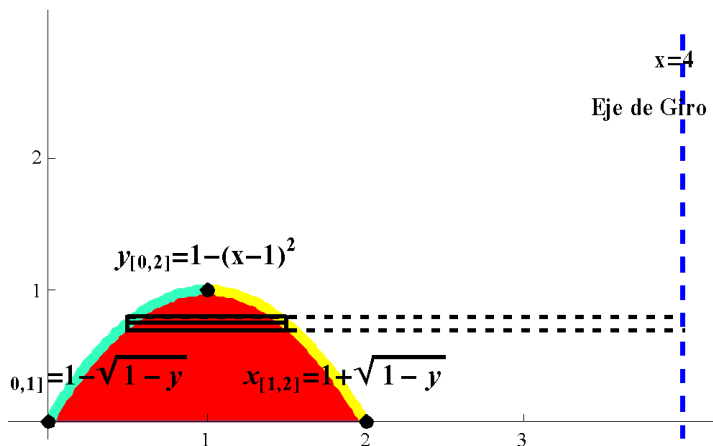


Figura 8.23:  $V = \pi \int_0^1 \{ [4 - (1 - \sqrt{1-y})]^2 - [4 - (1 + \sqrt{1-y})]^2 \} dy$ , eje de giro  $x = 4$ .

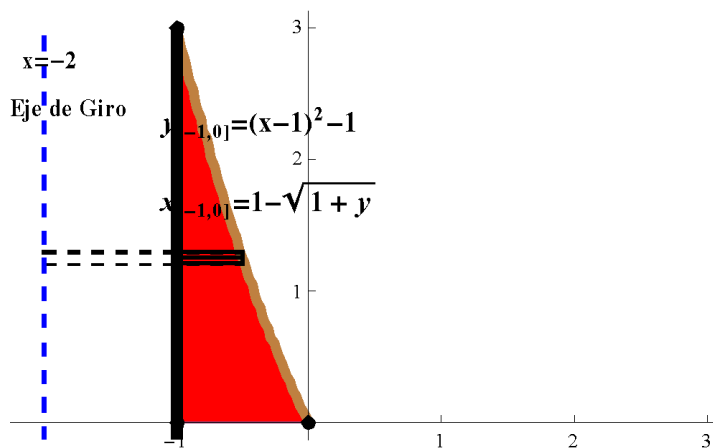


Figura 8.24:  $V = \pi \int_0^3 [(1 - \sqrt{1+y} + 2)^2 - (1)^2] dy$ , eje de giro  $x = -2$ .

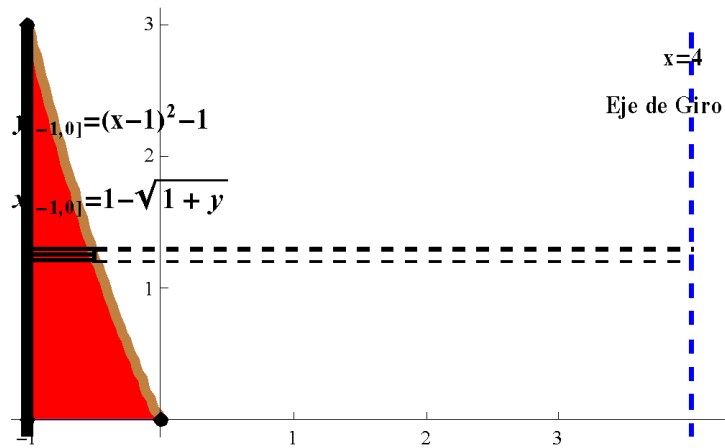


Figura 8.25:  $V = \pi \int_0^3 \{5^2 - [4 - (1 - \sqrt{1+y})]^2\} dy$ , eje de giro  $x = 4$ .

## 8.8. Ejercicios resueltos: Ejemplos de física. Ecuación de Landau. Nivel IV: ♣ © 4<sup>to</sup> COLOQUIO.

**Ejemplo 8.8.1** *Bifurcación, e.g. ♠: E.D.O. de Landau*<sup>3</sup>

$$\frac{dx}{dt} = (R - W)x - Ax^3. \quad (8.16)$$

En ciertos problemas de la física algunas cantidades observables, tales como una velocidad, la forma de cierta onda, o el avance de una reacción química, dependen de un parámetro que describe el estado físico del problema. A medida que este parámetro se incrementa, suele alcanzar un valor crítico en el que la velocidad, o la forma de la onda o la concentración de cierto reactivo cambie su carácter. Esta descripción es claramente evidenciada al resolver la ecuación diferencial de Landau, de primer orden a variables separables, (8.16). En virtud de la forma de sus soluciones es reconocida mediante el símbolo del tridente ♠.

Aquí hemos considerado a  $A$  y  $W$  constantes positivas, y  $R$  es un parámetro que puede tomar varios valores. Claramente si  $R$  es menor, igual o mayor que  $W$  las expresiones de las soluciones  $\chi(t)$  de esta E.D.O. cambian de forma y para valores de  $t$  grandes se acercan a los estados de equilibrio del sistema. Además las soluciones o estados de equilibrio de este proceso, según el signo o nulidad de la diferencia  $R - W$  cambian de uno  $\chi_e(t) = 0$  a tres,  $\chi_e(t) = 0$ ,  $\chi_e^+(t) = \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}}$  y  $\chi_e^-(t) = -\sqrt{\frac{\Delta^+}{A}}$ .

Comenzamos por la resolución de la E.D.O. de Landau para los tres parámetros  $R$ ,  $W$  y  $A$  positivos. En cuyo caso consideraremos las tres posibilidades:  $R < W$ ,  $R > W$  y  $R = W$ .

$R < W$  Ahora denotamos por  $\Delta^+ = W - R$  luego la E.D.O. en (8.16) si  $R < W$  se convierte en  $\dot{x} = -x \Delta^+ - Ax^3$ . La separación de variables en esta situación conduce a:

$$\int \frac{dx}{x(\Delta^+ + Ax^2)} = - \int dt.$$

$$\int \frac{dx}{x(\frac{\Delta^+}{A} + x^2)} = -A \int dt$$

<sup>3</sup>L. D. Landau (1908-1968) fue un físico Ruso que recibió el Premio Nobel en 1962 por sus contribuciones al esclarecimiento de los estados condensados de la materia, particularmente en el helio líquido.

$$\frac{1}{x(x^2 + \frac{\Delta^+}{A})} = \frac{B}{x} + \frac{Cx + D}{x^2 + \frac{\Delta^+}{A}}$$

$\frac{1}{x^2 + \frac{\Delta^+}{A}} \Big|_{x=0} = B + \frac{x(Cx+D)}{x^2 + \frac{\Delta^+}{A}} \Big|_{x=0} \rightarrow B = \frac{A}{\Delta^+}$  Reemplazando  $x = 1$  y  $x = -1$  en la expresión de las fracciones simples resultan dos ecuaciones que determinan el valor de los coeficientes  $C$  y  $D$ , a saber:

$$\frac{1}{(1 + \frac{\Delta^+}{A})} = \frac{A}{\Delta^+} + \frac{C + D}{1 + \frac{\Delta^+}{A}}$$

$$\frac{1}{-1(1 + \frac{\Delta^+}{A})} = -\frac{A}{\Delta^+} + \frac{-C + D}{1 + \frac{\Delta^+}{A}}$$

La suma de las dos igualdades anteriores, establecen que el coeficiente  $D$  es nulo, i.e.  $D = 0$ , por lo tanto es fácil comprobar en cualquiera de las identidades anteriores luego de reemplazar este valor que  $C = -\frac{A}{\Delta^+}$ . Por lo tanto, las antiderivadas buscadas luego del proceso de separación de variables, válido para  $x \neq 0$ , en este caso  $\int \frac{dx}{x(\frac{\Delta^+}{A} + x^2)}$  son las que corresponden a:

$$\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{\Delta^+}{A}} = -\Delta^+ \int dt$$

Brevemente

$$\ln|x| - \ln \sqrt{x^2 + \frac{\Delta^+}{A}} = -\Delta^+ t + C$$

$$\ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2 + \frac{\Delta^+}{A}}}\right) = -\Delta^+ t + C \rightarrow \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + \frac{\Delta^+}{A}}} = e^{-\Delta^+ t + C}$$

Elevando al cuadrado, esta última expresión, se tiene que:

$$x^2 e^{-2C} - x^2 e^{-2\Delta^+ t} - \frac{\Delta^+}{A} e^{-2\Delta^+ t} = 0.$$

Finalmente, despejando  $x^2$  de la ecuación anterior y con la posterior extracción de la raíz cuadrada, resulta:

$$\chi_{\pm}^+(t) = \pm \sqrt{\frac{\Delta^+}{A} \frac{e^{-\Delta^+ t}}{\sqrt{e^{-2C} - e^{-2\Delta^+ t}}}}, \quad x \neq 0 \tag{8.17}$$

**Observación 8.8.2**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \chi_{\pm}^+(t) = 0$ . Evidenciando que la solución de equilibrio  $\chi(t) = 0$ , identificada al comienzo del presente tratamiento es la asíntota de estabilidad de las soluciones diferenciables aquí determinadas por las expresiones en (8.17).



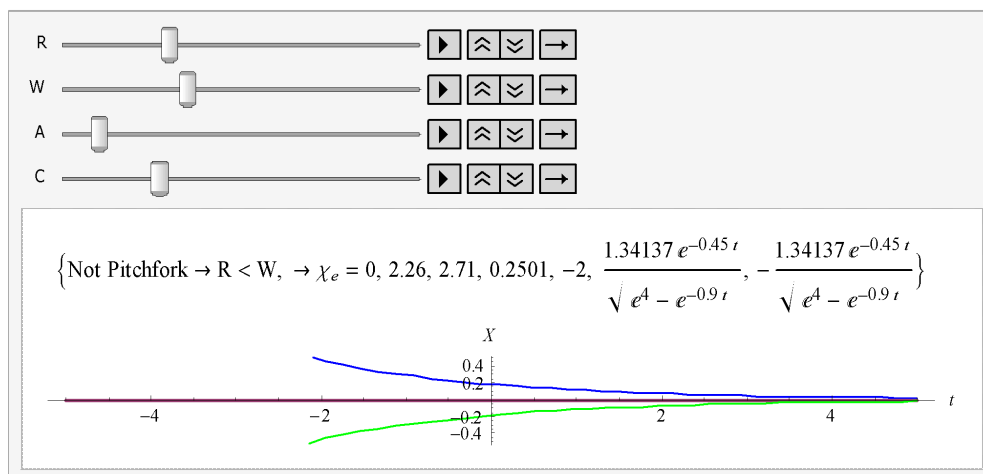


Figura 8.26: Caso  $W > R$ . Soluciones (8.17): Estabilidad asintótica  $\chi_e(t) = 0$ .

$R > W$ ,  $\heartsuit$  En este caso la E.D.O. (8.16),  $\dot{x} = (R - W)x - Ax^3$  posee tres soluciones de equilibrio. Al reescribirla como  $\dot{x} = x[(R - W) - Ax^2]$ , resulta evidente que  $\dot{x} = 0$  se realiza si  $\chi(t) = 0$ , y para  $(R - W) - Ax^2 = 0$  lo que conduce a dos soluciones de equilibrio  $\chi_{\pm}^+ = \pm \sqrt{\frac{R-W}{A}}$ .

Por razones de claridad notamos  $\Delta^+ = R - W$ , entonces la ecuación diferencial ordinaria de Landau (8.16)  $\dot{x} = x(\Delta^+ - Ax^2)$ , con  $\Delta^+ > 0$ , de manera equivalente  $\dot{x} = -Ax(x^2 - \frac{\Delta^+}{A}) = -Ax(x - \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}})(x + \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}})$  se resuelve mediante antiderivación utilizando el método de las fracciones simples. Teniendo presente que la no acotación del integrando  $\int \frac{dx}{x(x - \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}})(x + \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}})}$  divide el plano  $x(t)$  vs  $t$  en tres bandas delimitadas por las tres soluciones de equilibrio, a saber:  $-\infty < x < -\sqrt{\frac{\Delta^+}{A}}$ ,  $-\sqrt{\frac{\Delta^+}{A}} < x < \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}}$  y  $\sqrt{\frac{\Delta^+}{A}} < x < +\infty$ .

Entonces la E.D.O. en (8.16) si  $R > W$ , corresponde a efectuar la antiderivación de

$$\int \frac{dx}{x(x - \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}})(x + \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}})} = -A \int dt.$$

Utilizando el Método de las Fracciones Simples, resulta que:

$$\frac{1}{x(x - \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}})(x + \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}})} = \frac{A}{\Delta^+} \left[ \frac{-1}{x} + \frac{0,5}{(x - \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}})} + \frac{0,5}{(x + \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}})} \right]$$

$$\frac{A}{\Delta^+} \int \left[ \frac{-1}{x} + \frac{0,5}{(x - \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}})} + \frac{0,5}{(x + \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}})} \right] dx = -A \int dt$$

$$\int \frac{-dx}{x} + \int \frac{0,5 dx}{(x - \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}})} + \int \frac{0,5 dx}{(x + \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}})} = -\Delta^+ \int dt$$

cuya familia de antiderivadas en la separación de variables resulta ser:

$$-\ln|x| + \frac{1}{2} \ln \left| x - \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| x + \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}} \right| = \frac{-1}{\Delta^+} t + C$$

que utilizando propiedades de los logaritmos es reescrita como:

$$\ln \frac{\sqrt{|x^2 - \frac{\Delta^+}{A}|}}{|x|} = -\Delta^+ t + C$$

y como el logaritmo es inversible se tiene:

$$\frac{\sqrt{|x^2 - \frac{\Delta^+}{A}|}}{|x|} = e^{-\Delta^+ t + C}$$

elevando al cuadrado ambos miembros se obtiene:

$$\frac{|x^2 - \frac{\Delta^+}{A}|}{x^2} = \bar{C} e^{-2\Delta^+ t}$$

Equivalente a:

$$\left| 1 - \frac{\Delta^+}{A x^2} \right| = \bar{C} e^{-2\Delta^+ t}$$

$$\text{Si } 1 - \frac{\Delta^+}{A x^2} > 0 \rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{A}{\Delta^+} (1 - \bar{C} e^{-2\Delta^+ t}) \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}} \frac{1}{\sqrt{(1 - \bar{C} e^{-2\Delta^+ t})}}$$

Las soluciones, han resultado tener las dos expresiones siguientes:

$$\chi_{\pm}^+(t) = \pm \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}} \frac{1}{\sqrt{(1 - \bar{C} e^{-2\Delta^+ t})}}, \quad -\infty < x < -\sqrt{\frac{\Delta^+}{A}} \cup \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}} < x < +\infty. \quad (8.18)$$

$$\text{Si } 1 - \frac{\Delta^+}{A x^2} < 0 \rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{A}{\Delta^+} (1 + \bar{C} e^{-2\Delta^+ t}) \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}} \frac{1}{\sqrt{(1 + \bar{C} e^{-2\Delta^+ t})}}$$

Las soluciones, han resultado tener las dos expresiones siguientes:

$$\chi_{\pm}^+(t) = \pm \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}} \frac{1}{\sqrt{(1 + \bar{C} e^{-2\Delta^+ t})}}, \quad -\sqrt{\frac{\Delta^+}{A}} < x < \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}} \text{ y } x \neq 0. \quad (8.19)$$

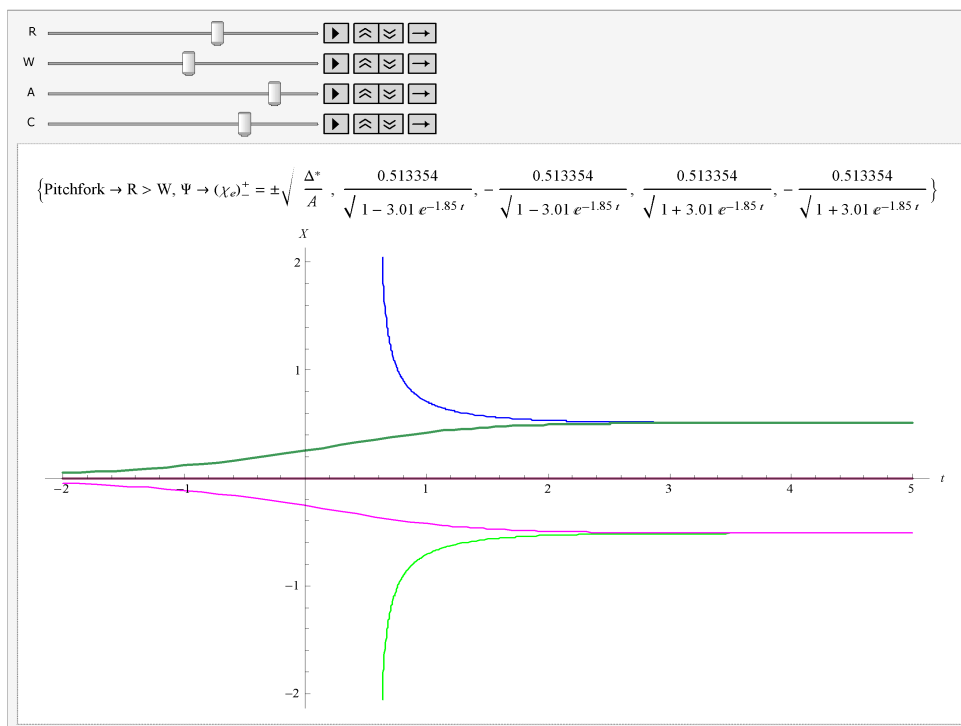


Figura 8.27: Caso  $R < W$  ♠. Soluciones (8.19): Estabilidad asintótica  $\chi_{\pm}^+(t) = \pm\sqrt{\frac{\Delta^+}{A}}$ ,  $-\sqrt{\frac{\Delta^+}{A}} < x < \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}}$  y  $x \neq 0$ .

**Observación 8.8.3** En las soluciones (8.18) y (8.19)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \chi_{\pm}^+(t) = \pm\sqrt{\frac{\Delta^+}{A}}$ . Evidenciando que las soluciones de equilibrio  $\chi_{\pm}^+ = \pm\sqrt{\frac{R-W}{A}}$  identificadas al comienzo del presente tratamiento son las asíntotas de estabilidad de las soluciones diferenciables aquí determinadas por las expresiones en (8.18) y (8.19). Mientras que la solución de equilibrio  $\chi(t) = 0$ , resulta ser inestable para las soluciones diferenciables en (8.18) y en (8.19), en el caso aquí analizado, i.e.  $R > W$ .

$R = W$  En este caso la E.D.O. (8.16) se reduce a resolver  $\dot{x} = -Ax^3$ . Aquí existe una única solución de equilibrio, i.e.  $\chi(t) = 0$ . Corresponde ahora efectuar la antiderivación de las variables separables:

$$\int \frac{dx}{x^3} = -A \int dt, \quad x \neq 0.$$

Resultando que:

$$\frac{x^{-3+1}}{-2} = -A t + C$$

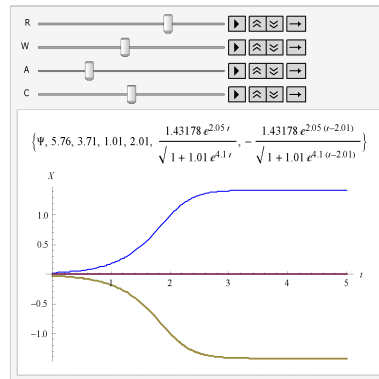


Figura 8.28: Caso  $R < W$ . Soluciones (8.18) y (8.19): Estabilidad asintótica  $\chi_{\pm}^+(t) = \pm \sqrt{\frac{\Delta^+}{A}}$ .

Luego las expresiones que se obtienen son:

$$\chi_{\pm}^+(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2A t + \tilde{C}}}, \quad \text{si } 2A t + \tilde{C} > 0 \quad (8.20)$$

**Observación 8.8.4**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \chi_{\pm}^+(t) = 0$ . Evidenciando que la solución de equilibrio  $\chi(t) = 0$  es la asíntota estable de las soluciones diferenciables determinadas en las expresiones en (8.20).

**Observación 8.8.5** Hemos Determinado, las soluciones  $\chi(t)$  de la E.D.O. de Landau, (8.16) pág. 327. Si  $R < W$ , demostramos que existe sólo una solución de equilibrio  $\chi_e(t) = 0$  y que ésta es asintóticamente estable. Si  $R > W$ , verificamos la existencia de tres soluciones de equilibrio  $\chi_e(t) = 0$  y  $\chi_{\pm}^+(t) = \pm \sqrt{\frac{R-W}{A}}$  y que la primera solución de equilibrio es inestable mientras que las otras dos son asintóticamente estables. Hemos graficado en el plano  $(x, t)$  las soluciones  $\chi(t)$  y las soluciones de equilibrio para tres casos particulares tales que:  $R < W$ , Figura 8.26, pág 329,  $R > W$ , Figuras 8.27 y 8.28, págs. 331 y 332, y  $R = W$ , Figura 8.29, pág 333.

**Nota 8.8.6** El punto  $R = W$  se llama punto de bifurcación. Para  $R < W$  la solución tiende asintóticamente hacia la solución de equilibrio  $x = 0$ . Sin embargo, esta solución pierde su estabilidad a medida que  $R$  atraviesa el valor  $W$ , y para  $R > W$  la solución es asintóticamente estable a  $x = \sqrt{\frac{R-W}{A}}$  y  $x = -\sqrt{\frac{R-W}{A}}$ . Debido a la forma que las

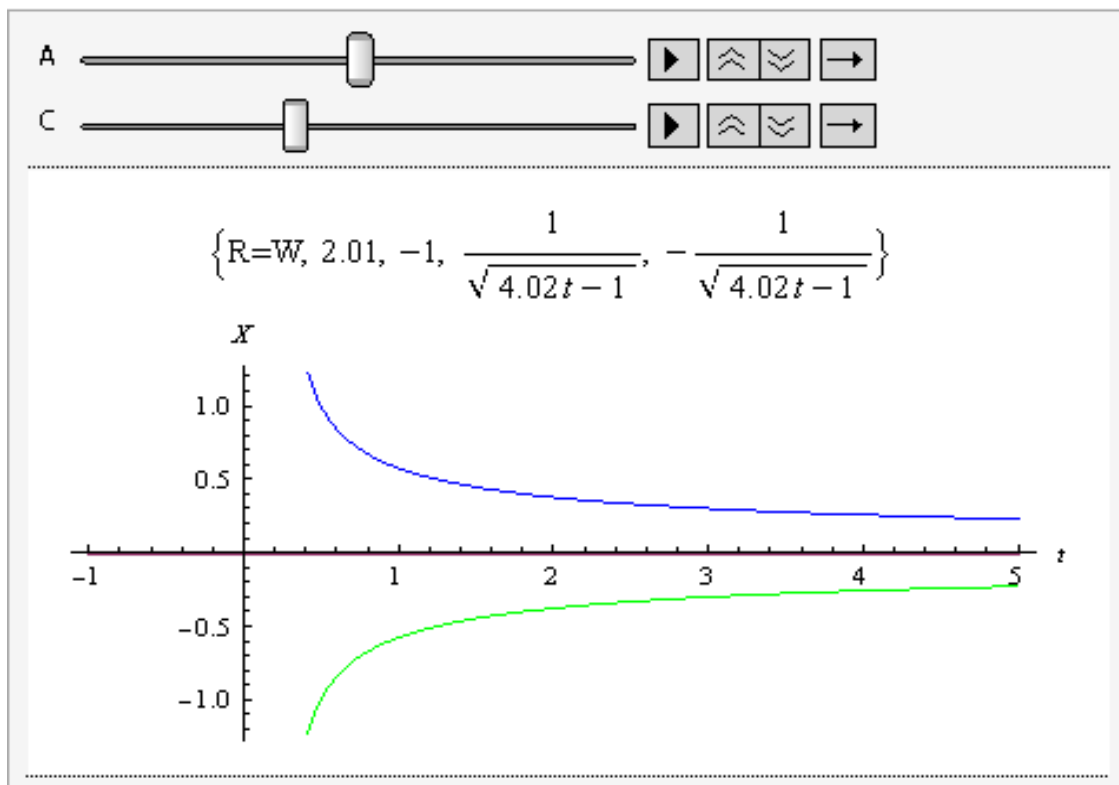


Figura 8.29: Caso  $R = W$ . Soluciones (8.20): Estabilidad asintótica  $\chi_e(t) = 0$ .

soluciones toman en el entorno de  $W$ , este tipo de problema es conocido como bifurcación *pitchfork*  $\pitchfork$ .

### 8.8.1. Antiderivadas ejemplos muy sencillos de la física

**Ejemplo 8.8.7 Velocidad de escape** La fuerza de atracción gravitatoria puede representarse, mediante ciertas simplificaciones como:

$$F = -mg \frac{R^2}{s^2}.$$

Determinar que la  $v_0$  que debe suministrársele a un objeto para que no regrese a la superficie terrestre debe ser  $v_0 \geq \sqrt{2gR}$ , donde  $R \approx 3960$  millas es el radio terrestre.

Respuesta:

## Capítulo 8. Integración: Notas teóricas

---

La fuerza de atracción gravitatoria puede representarse, mediante ciertas simplificaciones como:

$$F = -m g \frac{R^2}{s^2}.$$

Determinar que la  $v_0$  que debe suministrarse a un objeto para que no regrese a la superficie terrestre debe ser  $v_0 \geq \sqrt{2gR}$ , donde  $R \approx 3960$  millas es el radio terrestre.

*Rta:*

$$m a = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = -mg \frac{R^2}{s^2}$$

la última igualdad puede expresarse como:

$$v \frac{dv}{ds} = -g \frac{R^2}{s^2}$$

luego separando variables se tiene:

$$v dv = -g \frac{R^2}{s^2} ds$$

y antiderivando

$$\int v dv = - \int \frac{R^2}{s^2} ds$$
$$\frac{v^2}{2} = \frac{g R^2}{s} + C$$

, para determinar  $C$ , utilizamos el hecho que  $v = v_0$  cuando el objeto está por ser lanzado verticalmente de la superficie terrestre, i.e.,  $s = R$ , por lo tanto

$$\frac{v_0^2}{2} = g R + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{v_0^2}{2} - gR$$

así se obtiene la expresión de la mitad de la velocidad al cuadrado del objeto en función de la longitud recorrida por el mismo

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g R^2}{s} + \frac{v_0^2}{2} - gR$$

finalmente la velocidad al cuadrado tiene la siguiente expresión:

$$v^2 = \frac{2g R^2}{s} + v_0^2 - 2gR.$$

Si deseamos que el objeto no regrese a la superficie terrestre, estamos dándole la posibilidad a la variable  $s$  longitud de la trayectoria que recorre el objeto sea todo lo grande

que se pueda, es decir,  $s \rightarrow +\infty$  en cuyo caso  $v^2 = v_0^2 - 2gR$  pero  $v_0^2$  es una cantidad positiva, lo que impone que  $v_0^2 - 2gR$  también lo sea, en consecuencia para que el objeto no regrese a la tierra es necesario que  $v_0^2 \geq 2gR \rightarrow v_0 \geq \sqrt{2gR}$ .

**Ejemplo 8.8.8** *Un plano  $P$  tiene un ángulo de inclinación  $\alpha$  con respecto al plano horizontal y un objeto se desliza sobre él, sin rozamiento, cayendo por acción de la gravedad.*

- a) *Determine el desplazamiento en función del tiempo transcurrido desde el instante en que comenzó la caída.*
- b) *Si el dato disponible es que el objeto recorrió 20 metros en 5 segundos, determine la inclinación  $\alpha$  del plano  $P$ .*

Respuesta:

La caída libre de un cuerpo puntual por un plano inclinado, se diferencia de la caída libre -vertical- en que debemos tener presente que para aplicar la *segunda ley de Newton* la gravedad que actúa sobre el objeto no es  $-g$  sino  $-g \sin \alpha$  siendo  $\alpha$  la inclinación del plano con respecto de la horizontal. Por lo tanto la *segunda ley de Newton* establece que la aceleración del móvil  $a$  está dada por la expresión  $a = -g \sin \alpha$ , antiderivando se obtiene la expresión para la velocidad del móvil en función del tiempo, i.e.,  $v(t) = -g \sin \alpha t + v_0$ ; finalmente la expresión para el espacio recorrido es  $e(t) = -g \sin \alpha \frac{t^2}{2} + v_0 t + e_0$ .

Si el objeto se dejó caer por el plano inclinado y no fue arrojado su velocidad inicial,  $v_0$ , es nula y por lo tanto  $e(t) = -g \sin \alpha \frac{t^2}{2}$  si es que el sistema de coordenadas ha sido ubicado en el punto de máxima altura del plano.

Para determinar la inclinación del plano utilizamos los datos del inciso b) y lo reemplazamos en esta última ecuación, reemplazando  $e(t) = 8$  metros,  $g = 9,8 \text{ m/seg}^2$   $t = 5$  segs,  

$$\sin \alpha = \frac{2e(t)}{g t^2}.$$





## Parte IX

### Teorema de Cauchy



# Capítulo 9

## Aplicaciones de la derivada y de la integral

### 9.1. Polinomios y Fórmula de Taylor

A continuación se enuncia y se demuestra el Teorema de Cauchy sobre el que se sustenta una versión que hemos llamado Teorema del Valor Medio de Lagrange generalizado.

**Teorema 9.1.1** *Teorema de Cauchy.*

Si  $f(x)$  y  $g(x)$  verifican:

- i) Son continuas en  $[a, b]$  y  $g(a) \neq g(b)$
- ii) Son derivables en  $(a, b)$  y las derivadas  $f'(x)$ ,  $g'(x)$  no se anulan simultáneamente en  $(a, b)$ .

Entonces  $\exists$  un punto intermedio  $\xi \in (a, b)$  tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (9.1)$$

*Demostración.* Es claro que la igualdad (9.1) implica la igualdad siguiente:

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi) \quad (9.2)$$

En cambio, para probar que si un real  $\xi \in (a, b)$  verifica (9.2) entonces también verifica (9.1), se requiere que  $g'(\xi) \neq 0$ . Pero en nuestro caso si existe un valor  $\xi$  que satisface

## Capítulo 9. Aplicaciones de la derivada y de la integral

---

(9.2), suponer  $g'(\xi) = 0$  implica que  $f'(\xi) = 0$ , dado que  $[g(b) - g(a)] \neq 0$ , contradiciendo la hipótesis.

Por lo tanto, con las hipótesis dadas

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} &\Leftrightarrow g'(\xi) [f(b) - f(a)] = f'(\xi) [g(b) - g(a)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g'(\xi) [f(b) - f(a)] - f'(\xi) [g(b) - g(a)] = 0. \end{aligned}$$

Esta última igualdad sugiere considerar la función  $H(x) = g(x)[f(b) - f(a)] - f(x)[g(b) - g(a)]$ , que verifica  $H(a) = H(b)$  y también, en base a las hipótesis i) e ii), las demás condiciones requeridas por el Teorema de Rolle en  $[a, b]$ . Luego  $\exists \xi \in (a, b)$  tal que  $H'(\xi) = 0$ , es decir:  $g'(\xi) [f(b) - f(a)] = f'(\xi) [g(b) - g(a)]$ .

■

**Teorema 9.1.2** *Teorema Generalizado del Valor Medio de Lagrange.*

Si  $f(x)$  es  $n + 1$  veces derivable en un entorno  $(a - \delta, a + \delta)$  y verifica que  $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$  entonces, para todo  $x \in (a - \delta, a + \delta)$  vale

$$f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (9.3)$$

donde  $\xi$  es un punto "entre"  $a$  y  $x$ , i.e.  $\exists \theta, -1 < \theta < 1$  tal que  $\xi = a + \theta \Delta x$ .

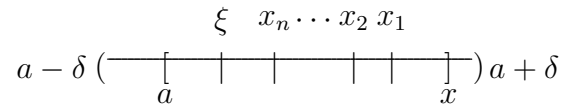
*Demostración.* Si consideramos la función  $g(x) = (x-a)^{n+1}$ , es  $g(x) \neq 0 \forall x \neq a$  y además  $g'(x) = (n+1)(x-a)^n$ ,  $g''(x) = (n+1)n(x-a)^{n-1}, \dots$ ,  $g^n(x) = (n+1)n \dots 2(x-a)$  y  $g^{n+1}(x) = (n+1)!$  Luego  $g(a) = g'(a) = \dots = g^n(a) = 0$  y  $g^{n+1}(a) = (n+1)!$

Sea  $x$  un punto cualquiera del entorno  $(a - \delta, a + \delta)$ , que podemos considerar sin pérdida de generalidad entre  $a$  y  $a + \delta$ . El Teorema de Cauchy asegura la existencia de  $x_1$ ,  $a < x_1 < x$ , tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}.$$

Como con las condiciones disponibles se puede reiterar la aplicación del Teorema de Cauchy, obtenemos sucesivamente los puntos  $x_2, x_3, \dots, x_n$  y  $\xi$  tales que:

$$a < \xi < x_n < \dots < x_2 < x_1 < x$$



y además

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{f''(x_2)}{g''(x_2)} = \dots = \frac{f^n(x_n)}{g^n(x_n)} = \frac{f^{n+1}(\xi)}{g^{n+1}(\xi)} = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Se ha probado entonces que  $\exists \xi$  entre  $a$  y  $x$  tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

■

### 9.1.1. Contacto entre dos curvas

**Definición 9.1.3** Se dice que la función  $f(x)$  es infinitésimo de orden  $p$  en  $x = \alpha$ ,  $p > 0$  real cualquiera, si existen una función  $\vartheta(x)$  y dos constantes positivas  $k$  y  $K$  tales que en algún entorno  $\epsilon_R(\alpha, \delta)$  es

$$f(x) = (x - \alpha)^p \vartheta(x) \quad \text{y} \quad 0 < k < |\vartheta(x)| < K \quad (9.4)$$

**Definición 9.1.4** Un número  $\alpha$  se llama cero de orden  $p$ ,  $p > 0$  real cualquiera, de la función continua  $f(x)$ , o raíz de orden  $p$  de la ecuación  $f(x) = 0$ , si  $f(x)$  es infinitésimo de orden  $p$  en  $\alpha$ .

**Definición 9.1.5** Un cero de orden  $p$  de  $f(x)$  se dice un cero de equivalencia potencial si existe  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \vartheta(x) = L \neq 0$ .

**Observación 9.1.6** Notemos que si  $\alpha$  es un cero de equivalencia potencial de  $f(x)$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{(x - \alpha)^p L} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(x - \alpha)^p \vartheta(x)}{(x - \alpha)^p L} = 1,$$

i.e. si  $\alpha$  es un cero de equivalencia potencial de  $f(x)$  entonces  $f(x)$  es un infinitésimo equivalente a  $(x - \alpha)^p L$ ,  $f(x) \sim (x - \alpha)^p L$ .

## Capítulo 9. Aplicaciones de la derivada y de la integral

**Proposición 9.1.7** Si en un punto  $\alpha$  la función  $f(x)$  verifica que  $f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(p-1)}(\alpha) = 0$  y  $f^{(p)}(\alpha) \neq 0$ , entonces  $\alpha$  es cero de equivalencia potencial (de orden  $p$  entero) de  $f(x)$ , y en consecuencia  $f(x)$  es infinitésimo equivalente a  $\frac{(x-\alpha)^p}{p!} f^{(p)}(\alpha)$ .

*Demostración.* Se sabe que  $p$  es entero. Veamos en primer lugar que  $\alpha$  es cero de orden  $p$ . Considerando las funciones  $f(x)$  y  $(x-\alpha)^p$ , mediante la aplicación sucesiva de la regla de L'Hospital  $p-1$  veces, obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{(x-\alpha)^p} &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{p(x-\alpha)^{(p-1)}} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f''(x)}{p(p-1)(x-\alpha)^{(p-2)}} = \dots = \\ &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f^{p-1}(x)}{p!(x-\alpha)} = \frac{1}{p!} \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f^{p-1}(x) - f^{p-1}(\alpha)}{x-\alpha} = \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!} \end{aligned}$$

i.e.,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{(x-\alpha)^p} = \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!}. \quad (9.5)$$

Esta identidad implica la existencia de un infinitésimo  $\gamma(x)$ , en  $x = \alpha$ , tal que

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)^p} = \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!} + \gamma(x)$$

entonces

$$f(x) = \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!} (x-\alpha)^p + \gamma(x)(x-\alpha)^p \quad \text{i.e.}$$

$$f(x) = (x-\alpha)^p \left[ \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!} + \gamma(x) \right].$$

Si llamamos

$$\vartheta(x) = \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!} + \gamma(x) \quad (9.6)$$

es

$$f(x) = (x-\alpha)^p \vartheta(x) \quad (9.7)$$

y, por la continuidad de la función valor absoluto  $\left| \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!} + \gamma(x) \right| \rightarrow \left| \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!} \right| > 0$  por lo tanto tomando  $\epsilon = \frac{1}{2} \left| \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!} \right|$  existe un entorno reducido  $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)_R$  tal que

$$\underbrace{\frac{1}{2} \left| \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!} \right|}_k < \left| \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!} + \gamma(x) \right| < \underbrace{\frac{3}{2} \left| \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!} \right|}_K,$$

es decir

$$\left| \frac{f^{(p)}(\alpha)}{2p!} \right| < |\vartheta(x)| < \left| \frac{3f^{(p)}(\alpha)}{2p!} \right|, \quad \forall x \in \epsilon_R(\alpha, \delta). \quad (9.8)$$

Esta acotación para el factor  $\vartheta(x)$  indica que  $\alpha$  es un cero de orden  $p$  (entero) de  $f(x)$ . Por otra parte, de (9.6) resulta  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \vartheta(x) = \frac{f^{(p)}(\alpha)}{p!} \neq 0$ , con lo cual se completa la demostración de que  $\alpha$  es además cero de equivalencia potencial y en consecuencia que  $f(x)$  es infinitésimo equivalente a  $\frac{(x - \alpha)^p f^{(p)}(\alpha)}{p!}$ .

**Proposición 9.1.8** Si  $\alpha$  anula a  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $\dots$ ,  $f^{(p)}(x)$  entonces  $f(x)$  es infinitésimo de orden superior a  $p$  en  $x = \alpha$ , en otros términos,  $f(x) = o[(x - \alpha)^p]$ .

*Demostración.* Resulta directamente de (9.5).

### 9.1.2. Orden de contacto entre curvas

- a) Cuando dos curvas  $y = f(x)$  e  $y = \varphi(x)$  coinciden en el punto de abscisa  $\alpha$ , i.e.  $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$ , la diferencia

$$\gamma(x) = f(x) - \varphi(x) \quad (9.9)$$

es un infinitésimo en  $x = \alpha$ .

Es claro que conociendo las características de dicho infinitésimo se conocerá la naturaleza del contacto que tienen ambas curvas en el punto de encuentro. Al respecto el concepto de derivada ofrece un auxilio esclarecedor, que resaltaremos con las siguientes consideraciones de carácter intuitivo, aplicadas a funciones que admiten derivadas sucesivas.

- i) Si la información disponible es que  $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$ , la situación de las curvas en un entorno de  $\alpha$  puede ser como la que muestra la figura 9.1,  $f'(\alpha) \neq \varphi'(\alpha)$ . En tal caso muy poco es lo que se puede decir de una de las funciones en base a lo que se conozca de la otra.

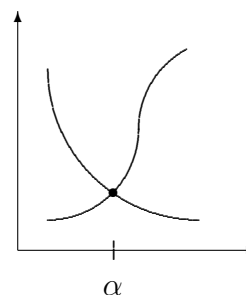


Figura 9.1:  $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$ , y  $f'(\alpha) \neq \varphi'(\alpha)$

**Ejemplo 9.1.9** Si elegimos las funciones  $f(x) = x^4$  y  $\varphi(x) = \sqrt[4]{x}$  es claro que coinciden en  $\alpha = 1$ ,  $f(1) = \varphi(1) = 1$ , en tanto que  $f'(1) = 4$  y  $\varphi'(1) = \frac{1}{4}$ , como puede apreciarse las funciones, si bien se encuentran en  $\alpha = 1$  -se cortan- es claro que son muy diferentes en las proximidades de ese punto.

ii) Pero si además de ser  $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$  se sabe que  $f'(\alpha) = \varphi'(\alpha)$ , ambas curvas comparten la misma recta tangente en el punto de encuentro. Este hecho modifica sustancialmente la situación anterior por cuanto al “pegarse” ambos gráficos a la misma recta en un entorno de  $\alpha$ , en realidad se están “pegando” entre sí. Cosa que no ocurre en el caso previo. Este hecho se explica si los

Pero, aún cuando comparten la recta tangente en  $\alpha$ , las curvas podrían comportarse, como se muestra esquemáticamente en la figura 9.2, es decir las curvas se aproximan bien entre sí pero sólo en un entorno muy pequeño alrededor de  $\alpha$ . Notemos que la situación que muestra esta figura,  $f''(\alpha) \neq \varphi''(\alpha)$ , nos indica que, salvo en puntos muy próximos al de contacto, las rectas tangentes de ambas curvas difieren notoriamente al alejarse de tal punto.

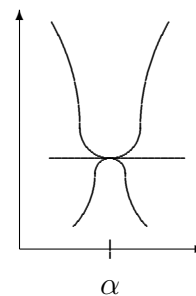


Figura 9.2:  $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$ ,  $f'(\alpha) = \varphi'(\alpha)$  y  $f''(\alpha) \neq \varphi''(\alpha)$

gráficos de las funciones  $f(x)$  y  $\varphi(x)$  estuviesen, uno respecto del otro, como lo están los de  $f(x)$  y  $\varphi(x)$  en la Figura 9.1.

**Ejemplo 9.1.10**  $f(x) = x^8$  y  $\varphi(x) = -16x^2$ , se encuentran en  $\alpha = 0$  donde  $f(0) = \varphi(0) = f'(0) = \varphi'(0) = 0$  en tanto que  $f''(0) = 0$  y  $\varphi''(0) = -32$ .

iii) Reiterando el argumento resulta razonable conjeturar que si además de valer  $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$  y  $f'(\alpha) = \varphi'(\alpha)$ , también vale que  $f''(\alpha) = \varphi''(\alpha)$ , entonces las derivadas primeras se mantendrían más próximas entre sí y en consecuencia las rectas tangentes variarían menos abruptamente, con lo cual sería de esperar que la separación entre las curvas, a partir del punto de encuentro, resulte menos brusca.



Estudiaremos entonces el comportamiento de la diferencia  $\gamma(x)$  cuando en el punto  $\alpha$  existan y sean finitas las derivadas sucesivas de  $f(x)$  y  $\varphi(x)$ , coincidentes hasta el orden  $n$  y distintas para el orden  $n + 1$ .

Por ejemplo, si las curvas  $f(x)$  y  $\varphi(x)$  no son tangentes en  $\alpha$ , es decir si  $f'(\alpha) \neq \varphi'(\alpha)$ , resulta que  $\gamma(x) = f(x) - \varphi(x)$  verifica  $\gamma(\alpha) = 0$  y  $\gamma'(\alpha) \neq 0$ . Entonces, por la proposición 9.1.7,  $\gamma(x)$  es infinitésimo de primer orden en  $\alpha$ . Si en cambio  $f'(\alpha) = \varphi'(\alpha)$  (es decir las curvas son tangentes en el punto de encuentro) pero  $f''(\alpha) \neq \varphi''(\alpha)$ , resulta  $\gamma(\alpha) = \gamma'(\alpha) = 0$  y  $\gamma''(\alpha) \neq 0$ . Entonces  $\gamma(x)$  es infinitésimo de segundo orden en  $\alpha$ . Se dice en este caso que las curvas tienen un contacto simple o de primer orden en  $\alpha$ . Estos ejemplos sirven para introducir la siguiente definición.

- b) **Definición 9.1.11** *Diremos que dos curvas  $y = f(x)$  e  $y = \varphi(x)$  tienen en  $\alpha$  un contacto de orden  $p$ , cuando el infinitésimo  $\gamma(x)$  es de orden  $p + 1$  en  $\alpha$ . Si  $\gamma(x)$  es de orden entero o equivalencia potencial, lo mismo se dice del contacto respectivo.*

En el caso de que  $f(x)$  y  $\varphi(x)$  coinciden en  $\alpha$ , junto con sus  $p$  primeras derivadas, pero  $f^{(p)}(\alpha) \neq \varphi^{(p)}(\alpha)$  son finitas y distintas, se dice que las dos curvas tienen en  $\alpha$  un punto de contacto, de orden entero  $p - 1$  y de equivalencia potencial (proposición 9.1.7).

Se verá que cuando el contacto es de orden par, las dos curvas se cruzan en el punto de encuentro, mientras que no lo hacen si el orden es impar.

Nótese que si se conoce la igualdad en  $\alpha$  de las derivadas hasta el orden  $n$ , se sabe que el contacto es de orden al menos  $n - 1$ . Esto es así por cuanto, en ese caso,  $\gamma(x)$  es infinitésima en  $\alpha$  de orden superior a  $n - 1$ .

- c) Dada una curva  $C$ , otra curva de una familia dada se llama *osculatriz* de  $C$  en un punto  $P$  cuando es, de entre todas las de dicha familia que tocan a  $C$  en  $P$ , la que tiene un contacto de orden más elevado en  $P$ .

### 9.1.3. Aproximación local de una función mediante funciones polinomiales

Si recordamos la argumentación heurística §9.1.2 podemos conjeturar que dos curvas  $f(x)$  y  $P(x)$  serán tanto más similares en las proximidades de un punto de contacto, cuanto más derivadas en común tengan en tal punto.

Como las funciones polinómicas están entre las más simples y conocidas el comentario anterior nos hace preguntarnos sobre el siguiente problema:

Dada una función  $y = f(x)$  que admite derivadas sucesivas hasta el orden  $n$  en un punto  $\alpha$  ¿ Es posible construir una función polinómica  $P_n(x)$  con la propiedad que  $f(x)$  y  $P_n(x)$  coincidan en  $\alpha$ , junto con sus respectivas  $n$  primeras derivadas ?

Si la respuesta es afirmativa, por lo dicho más arriba, el polinomio  $P_n(x)$  es un excelente candidato para aproximar a  $f(x)$  en los alrededores del punto  $\alpha$ . De todos modos, para que la aproximación resulte de utilidad, será necesario obtener una estimación del error de la aproximación en cada caso. Este problema es encarado a posteriori.

### 9.1.4. Expresión de una función polinómica por potencias de $(x - \alpha)$

Con respecto a la existencia de  $P_n(x)$  con la propiedad requerida en la introducción, la respuesta es efectivamente afirmativa y para justificarla usaremos (sin demostración) la siguiente propiedad de las funciones polinómicas:

**Proposición 9.1.12** *Para cada punto  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la función polinómica de grado  $n$   $P_n(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ , puede representarse de manera única como*

$$P(x) = c_0 + c_1(x - \alpha) + \dots + c_n(x - \alpha)^n. \tag{9.10}$$

### 9.1.5. Expresión de una función polinómica en términos de sus derivadas en un punto $\alpha$

Una vez representada la función polinómica en la forma (9.10), si observamos que

$$P'(x) = c_1 + 2c_2(x - \alpha) + 3c_3(x - \alpha)^2 + \cdots + (n - 1)c_{n-1}(x - \alpha)^{n-2} + nc_n(x - \alpha)^{n-1}$$

$$P^{(2)}(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x - \alpha) + \cdots + c_{n-1}(n - 1)(n - 2)(x - \alpha)^{n-3} + c_n n(n - 1)(x - \alpha)^{n-2}$$

$$P^{(3)}(x) = 3 \cdot 2c_3 + \cdots + c_{n-1}(n - 1)(n - 2)(n - 3)(x - \alpha)^{n-4} + c_n n(n - 1)(n - 2)(x - \alpha)^{n-3}$$

.....

$$P^{(n-1)}(x) = (n - 1)! c_{n-1} + n! c_n(x - \alpha)$$

$$P^{(n)}(x) = n! c_n$$

$$P^{(n+1)}(x) = 0, \quad \forall x$$

se obtiene:

$$P(\alpha) = c_0, \quad P'(\alpha) = c_1, \quad P^2(\alpha) = 2!c_2, \quad P^{(3)}(\alpha) = 3!c_3, \cdots,$$

$$P^{(n-1)}(\alpha) = (n - 1)!c_{n-1} \quad \text{y} \quad P^{(n)}(\alpha) = n!c_n,$$

i.e.

$$c_0 = P(\alpha), \quad c_1 = P'(\alpha), \quad c_2 = \frac{P^{(2)}(\alpha)}{2!}, \cdots, \quad c_n = \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}.$$

Este hecho demuestra que si un polinomio de grado  $n$  se expresa en términos de las potencias de  $(x - \alpha)$  entonces sus  $n + 1$  coeficientes, y por lo tanto el polinomio mismo, están determinados por los valores que toman el polinomio y sus  $n$  primeras derivadas en el punto  $\alpha$ . Más precisamente

$$P(x) = P(\alpha) + P^{(1)}(\alpha)(x - \alpha) + \frac{P^{(2)}(\alpha)}{2!}(x - \alpha)^2 + \cdots + \frac{P^{(n-1)}(\alpha)}{(n - 1)!}(x - \alpha)^{n-1} + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(x - \alpha)^n, \quad (9.11)$$

que suele llamarse fórmula de Taylor para polinomios.

### 9.1.6. Polinomios de Taylor

En base a los resultados anteriores, sabemos que si se conocen los valores de  $f(x)$  y de sus primeras  $n$  derivadas en un punto  $\alpha$ , el polinomio

$$P_n(x) = f(\alpha) + \frac{f^{(1)}(\alpha)}{1!}(x - \alpha) + \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2!}(x - \alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x - \alpha)^n \quad (9.12)$$

es el único de grado  $n$  con la propiedad que coincide con  $f(x)$  en  $x = \alpha$  y, como mostraremos más adelante, coinciden además las respectivas  $n$ -primeras derivadas en dicho punto. El polinomio (9.12) es el *Polinomio de Taylor* que aproxima a la función  $f(x)$  en un entorno del punto  $\alpha$ .

### 9.1.7. Fórmula de Taylor

Sea  $f(x)$  una función derivable hasta el orden  $n$  en un punto  $\alpha$ . Por una parte esto significa que tanto  $f(x)$  como sus  $n - 1$  primeras derivadas están definidas en un entorno  $\epsilon(\alpha, \delta)$  y por otra parte que el polinomio  $P_n(x)$  definido en (9.12) tiene con  $f(x)$  un contacto de orden no inferior a  $n - 1$  en el punto  $\alpha$ .

Si llamamos  $R_n(x)$  al término complementario que hay que agregar a  $P_n(x)$  para obtener  $f(x)$ , resulta la fórmula general de Taylor:

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + R_n(x) = \\ &= f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x - \alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x - \alpha)^n + R_n(x). \end{aligned} \quad (9.13)$$

En general los polinomios  $P_n(x)$  aproximan a  $f(x)$  en la vecindad de  $x = \alpha$ , tanto mejor cuanto mayor sea  $n$ . El término complementario  $R_n(x)$ , que pronto estudiaremos, da el error de aproximación.

### 9.1.8. Diversas formas del término complementario de la Fórmula de Taylor

Por ser la fórmula de Taylor una importantísima herramienta del Cálculo es útil presentarla en diferentes versiones, de manera que cada versión tenga diferentes requerimientos

para ser utilizada.

i) *Forma infinitesimal*

Hipótesis: Existe  $f^n(\alpha)$  finita.

El término complementario es:

$$R_n(x) = f(x) - f(\alpha) - \frac{f'(\alpha)}{1!} (x - \alpha) - \dots - \frac{f^n(\alpha)}{n} (x - \alpha)^n \quad (9.14)$$

que se anula en  $\alpha$ , lo mismo que sus derivadas hasta la de orden  $n$  inclusive. En estas condiciones se probará que  $R_n(x)$  es infinitésimo de orden superior a  $(x - \alpha)^n$ ,

$$R_n(x) = o[(x - \alpha)^n]. \quad (9.15)$$

Ver demostración en §9.1.9.

En muchas cuestiones (concavidad, inflexiones, contactos) es suficiente este nivel de precisión del término complementario, es decir, basta saber que al detener el desarrollo en la potencia  $(x - \alpha)^n$ , el término complementario es infinitésimo respecto de ella.

ii) *Forma de Lagrange*. Requiere la condición más restrictiva de que en un entorno de  $x = \alpha$  sea  $f^n(x)$  continua y que exista  $f^{n+1}(x)$  como derivada única.

Entonces, si  $x = \alpha + h$

$$R_n(a + h) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta h)}{(n + 1)!} h^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1). \quad (9.16)$$

**Observación 9.1.13** *La condición de que  $f^{(n)}(x)$  sea continua con derivada única en un entorno de  $\alpha$  significa admitir que  $f^{(n+1)}(x)$  puede tomar valores infinitos en puntos del entorno, siempre que resulten las dos derivadas laterales infinitas pero del mismo signo en tales puntos.*

*La exigencia de la continuidad de  $f^{(n)}(x)$  se debe a que una función con derivada infinita única en un punto no necesariamente es continua en tal punto. Por ejemplo:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{tiene derivada única infinita en } x = 0 \text{ y no es continua allí.}$$

**Observación 9.1.14** *Mostraremos dos maneras diferentes de obtener la forma de Lagrange del término complementario, en una de ellas usaremos el Teorema Generalizado de Lagrange.*

Ver demostraciones en §9.1.10 y §9.1.11.

iii) *Forma integral del término complementario.*

Si  $f(x)$  es una función continua, conjuntamente con sus derivadas hasta el orden  $n + 1$  entonces, llamando  $h = x - \alpha$ , es

$$R_n(\alpha + h) = \frac{1}{n!} \int_0^h f^{(n+1)}(\alpha + h - t) t^n dt.$$

Ver demostración en §9.1.12.

### 9.1.9. Expresión infinitesimal del término complementario de la Fórmula de Taylor

Sea  $f(x)$  tal que existe  $f^n(\alpha)$  finita.

La existencia de  $f^n(\alpha)$  finita asegura que existen todas las derivadas  $f^{(i)}(x)$ ,  $0 \leq i < n$ , con valores finitos en un entorno  $\epsilon(\alpha, \delta)$ . ¿ Por qué ?

Para obtener la expresión infinitesimal del término complementario procedemos de la siguiente manera:

1. Construimos el Polinomio de Taylor de grado  $n$ ,

$$P_n(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!} (x - \alpha) + \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2!} (x - \alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n. \quad (9.17)$$

2. Formamos el siguiente infinitésimo en  $\alpha$

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad (9.18)$$

$$R_n(x) = f(x) - \left[ f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!} (x - \alpha) + \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2!} (x - \alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n \right]$$

3. Calculamos las derivadas de  $R_n(x)$  hasta el orden  $n - 1$

$$i) \quad R'_n(x) = f'(x) - P'_n(x) = f'(x) - \left[ f'(\alpha) + f^{(2)}(\alpha) (x - \alpha) + \frac{f^{(3)}(\alpha)}{2!} (x - \alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{(n-1)!} (x - \alpha)^{n-1} \right]$$

$$\text{ii) } R_n^{(2)}(x) = f^{(2)}(x) - P_n^{(2)}(x) = f^{(2)}(x) - \left[ f^{(2)}(\alpha) + \frac{f^{(3)}(\alpha)}{1!} (x - \alpha) + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{(n-1)!} (x - \alpha)^{n-1} \right]$$

$$\text{iii) } R_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - P_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - [f^{(n-1)}(\alpha) + f^{(n)}(\alpha) (x - \alpha)]$$

Nótese que  $R_n'(\alpha) = \dots = R_n^{(n-1)}(\alpha) = 0$ .

4. Como por hipótesis se conoce la existencia de  $f^{(n)}(x)$  sólo en el punto  $\alpha$ , derivando  $R_n^{(n-1)}(x)$  en  $x = \alpha$  resulta

$$R_n^{(n)}(\alpha) = \left\{ f^{(n-1)}(x) - [f^{(n-1)}(\alpha) + f^{(n)}(\alpha) (x - \alpha)] \right\}' \Big|_{\alpha} = f^{(n)}(\alpha) - f^{(n)}(\alpha) = 0,$$

i.e.

$$R_n^{(n)}(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{(x - \alpha)} = 0.$$

Vale entonces que  $R_n(\alpha) = R_n'(\alpha) = R_n^{(2)}(\alpha) = \dots = R_n^{(n-1)}(\alpha) = R_n^{(n)}(\alpha) = 0$ . Hemos comprobado en realidad que en las condiciones dadas el polinomio de Taylor  $P_n(x)$  y sus  $n$  primeras derivadas coinciden respectivamente con  $f(x)$  y sus  $n$  primeras derivadas, en  $x = \alpha$ .

De acuerdo a consideraciones heurísticas anteriores este hecho es auspicioso en la expectativa de que el polinomio ofrezca una buena aproximación de la función en el entorno dado. Pero la única manera de valorar la calidad de la aproximación es a través del término complementario o resto.

5. Calculamos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_n(x)}{(x - \alpha)^n}$$

aplicando la Regla de L'Hospital  $n - 1$  veces, de tal modo:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{R_n(x)}{(x - \alpha)^n} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{R_n'(x)}{n(x - \alpha)^{n-1}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{R_n^{(2)}(x)}{n(n-1)(x - \alpha)^{n-2}} = \dots = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - \alpha)} = \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{(x - \alpha)} = \frac{1}{n!} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(0)}{(x - \alpha)} = R_n^{(n)}(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Esto prueba que  $R_n(x)$  es infinitésimo de orden superior al infinitésimo principal  $(x - \alpha)^n$ , en  $\alpha$ ,  $R_n(x) = o[(x - \alpha)^n]$ .

6. Teniendo en cuenta la definición (9.18) podemos escribir

$$f(x) - P_n(x) = o[(x - \alpha)^n]. \tag{9.19}$$

7. Finalmente, con la sólo condición de ser  $f^n(\alpha)$  finita, concluimos que:

$$f(x) = P_n(x) + o[(x - \alpha)^n] \tag{9.20}$$

Esta versión de la *fórmula de Taylor* nos indica que al detener el desarrollo en la potencia  $(x - \alpha)^n$ , el término complementario es infinitésimo respecto de dicha potencia o, en otros términos, es infinitésimo de orden superior.

### 9.1.10. Forma de Lagrange del término complementario de la Fórmula de Taylor

Sea  $f(x)$   $(n + 1)$ -veces derivable en un entorno  $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ . Aún cuando ya hemos probado que en esta situación la diferencia (término complementario) entre la función y su desarrollo de Taylor  $P_n(x)$  tiene derivada nula hasta el orden  $n$  en  $x = \alpha$ , y por lo tanto ambas funciones tienen las respectivas derivadas sucesivas iguales hasta las de orden  $n$  inclusive, calcularemos nuevamente el valor de las derivadas sucesivas de  $P_n(x)$ .

Tomando el polinomio de Taylor  $P_n(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!} (x - \alpha) + \dots + \frac{f^n(\alpha)(x - \alpha)^n}{n!}$ .

Vale que:

1.  $P_n(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!} (x - \alpha) + \dots + \frac{f^n(\alpha)(x - \alpha)^n}{n!}$ ; por lo tanto  $P_n(\alpha) = f(\alpha)$

2.  $P'_n(x) = \frac{f'(\alpha)}{1!} + \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2!} 2(x - \alpha) + \frac{f^{(3)}(\alpha)}{3!} 3(x - \alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)n(x - \alpha)^{n-1}}{n!}$   
 por lo tanto  $P'_n(\alpha) = f'(\alpha)$

3.  $P_n^{(2)}(x) = \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2!} 2! + \frac{f^{(3)}(\alpha)}{3!} 3 \cdot 2(x - \alpha) + \frac{f^{(4)}(\alpha)}{4!} 4 \cdot 3 + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)n(n-1)(x - \alpha)^{n-2}}{n!}$   $P_n^{(2)}(\alpha) = f^{(2)}(\alpha)$

4. ....

5.  $P_n^{(n-1)}(x) = \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} (n-1)(n-2) \dots + 2 + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot (x - \alpha)$  por lo tanto  $P_n^{(n-1)}(\alpha) = f^{(n-1)}(\alpha)$



$$6. P_n^{(n)}(x) = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}n! \quad \text{por lo tanto } P_n^{(n)}(\alpha) = f^{(n)}(\alpha)$$

$$7. P_n^{(n+1)}(x) = 0$$

si consideramos el término complementario o resto

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x), \quad x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta), \quad (9.21)$$

teniendo en cuenta que

$$R_n(\alpha) = R_n^{(1)}(\alpha) = \dots = R_n^{(n)}(\alpha) = 0$$

y que

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - P_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \quad \forall x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \quad (9.22)$$

el Teorema generalizado de Lagrange aplicado a  $R_n(x)$  conduce a la siguiente expresión del mismo, conocida como forma de Lagrange del resto

$$R_n(x) = \frac{R^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1}, \quad \xi = \alpha + \theta(x-\alpha) \text{ con } 0 < \theta < 1. \quad (9.23)$$

Por lo tanto, si convenimos en denotar  $f^{(0)}(x) = f(x)$ , podemos escribir la fórmula general de Taylor como

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (x-\alpha)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-\alpha)^{n+1} \quad (9.24)$$

con  $\xi = \alpha + \theta\Delta x$  ( $0 < \theta < 1$ ) ( $\xi$  “entre”  $\alpha$  y  $x$ ),

o en notación diferencial, recordando que  $d^k f(x, \Delta x) = f^{(k)}(x) \Delta x^k = f^{(k)}(x) dx^k$ ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k f(\alpha, \Delta x)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(\xi, \Delta x)}{(n+1)!}. \quad (9.25)$$

### 9.1.11. Otra manera de obtener la forma de Lagrange del término complementario de la Fórmula de Taylor

Sea  $f(x)$  con la condición de que en un entorno de  $x = \alpha$  es  $f^{(n)}(x)$  continua y existe  $f^{(n+1)}(x)$  como derivada única. Tomemos un  $x = \alpha + h$  en dicho entorno y aceptando, sin pérdida de generalidad, que  $h > 0$ . Entonces (9.13) se transforma en:

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}h + \frac{f''(\alpha)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} + R_n(\alpha + h). \quad (9.26)$$

## Capítulo 9. Aplicaciones de la derivada y de la integral

Para  $\alpha$  y  $h$  fijos  $R_n$  es una constante. Vamos a demostrar que puede escribirse como:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\alpha + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1} \quad (0 < \theta < 1). \quad (9.27)$$

Consideremos  $x = x_1 = \alpha + h$  y la siguiente función  $\beta(t)$ <sup>1</sup>, continua en  $[\alpha, x_1]$  y derivable en  $(\alpha, x_1)$

$$\beta(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x_1 - t) + \frac{f^{(2)}(t)}{2!}(x_1 - t)^2 + \frac{f^{(3)}(t)}{3!}(x_1 - t)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x_1 - t)^n + \frac{R_n(\alpha + h)}{h^{n+1}}(x_1 - t)^{n+1} \quad (9.28)$$

derivando obtenemos

$$\begin{aligned} \beta'(t) = & f'(t) + \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x_1 - t) - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x_1 - t)^2 - \frac{f^{(2)}(t)}{2!}2(x_1 - t) + \\ & + \frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x_1 - t)^3 - \frac{f^{(3)}(t)}{3!}3(x_1 - t)^2 \cdots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x_1 - t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x_1 - t)^{n-1} - \\ & - \frac{R_n(\alpha + h)}{h^{n+1}}(n+1)(x_1 - t)^n, \end{aligned}$$

y simplificando resulta finalmente

$$\beta'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x_1 - t)^n - \frac{R_n(\alpha + h)}{h^{n+1}}(n+1)(x_1 - t)^n.$$

Se puede comprobar ahora que  $\beta(t)$  cumple con las condiciones del Teorema de Rolle, ya que además de ser continua en  $[\alpha, x_1]$  y derivable en  $(\alpha, x_1)$  verifica  $\beta(x_1) = f(\alpha + h) = \beta(\alpha)$ . Por lo tanto existe  $t_* \in (\alpha, x_1)$  tal que  $\beta'(t_*) = 0$ .

Esto es

$$\frac{f^{n+1}(t_*)}{n!}(x_1 - t_*)^n - \frac{R_n(\alpha + h)}{h^{n+1}}(n+1)(x_1 - t_*)^n = 0 \quad (9.29)$$

de donde

$$R_n(\alpha + h) = \frac{f^{n+1}(t_*)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Pero  $\alpha < t_* < x_1 = \alpha + h \Leftrightarrow 0 < t_* - \alpha < h \Leftrightarrow 0 < \frac{t_* - \alpha}{h} < 1$ , luego tomando  $\theta = \frac{t_* - \alpha}{h}$ , resulta  $t_* = \alpha + \theta h$  y

$$R_n(\alpha + h) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (9.30)$$

Hemos deducido en este caso la misma expresión del resto, en la forma de Lagrange, ya obtenida en §9.1.10, pero sin recurrir al Teorema generalizado de Lagrange. No es en vano recordar aquí las condiciones exigidas para su obtención: *En un entorno de  $\alpha$  debe ser  $f^n(x)$  continua y debe existir  $f^{n+1}(x)$  en dicho entorno, como derivada única.*

<sup>1</sup>§39-3, pág. 527, J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, C. A. Trejo, Análisis Matemático I, vol. I, Editorial Kapelusz.

### 9.1.12. Forma integral del término complementario de la fórmula de Taylor

En las formas estudiadas hasta el momento del término complementario de la Fórmula de Taylor aparece siempre una variable indeterminada. En cambio la forma integral de dicho término, que desarrollaremos a continuación, da una expresión exacta para el valor del mismo.

De todos modos, aún en este caso, su evaluación efectiva suele resultar circular, en el sentido que a veces requerirá el uso de la misma función a desarrollar u otra similar.

Por otra parte necesitamos hacer referencia en este punto a la llamada Fórmula de Mac Laurin, que es en realidad la Fórmula de Taylor, pero en el caso particular en que el desarrollo se hace a partir de  $\alpha = 0$ , es decir, en potencias de  $x$  en lugar de potencias de  $(x - \alpha)$ :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

Sea  $f(x)$  una función derivable hasta el orden  $n + 1$ , con  $f^{(n+1)}(x)$  continua. En tal caso se puede evaluar el incremento  $\Delta f = f(x) - f(\alpha)$  de la siguiente manera:

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(u) du$$

que con el cambio de variable  $u = x - t$  resulta

$$\int_0^x f'(u) du = - \int_x^0 f'(x - t) dt = \int_0^x f'(x - t) dt$$

integrando por partes la integral de la derecha obtenemos:

$$f(x) - f(0) = f'(x - t)t \Big|_0^x + \int_0^x f^{(2)}(x - t) t dt = xf'(0) + \int_0^x f^{(2)}(x - t) t dt.$$

Reiterando el procedimiento de integrar por partes la integral de la derecha resulta

$$f(x) - f(0) = xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \frac{1}{2} \int_0^x f^{(3)}(x - t) t^2 dt$$

y finalmente, después de  $n$  repeticiones, obtenemos

$$f(x) - f(0) = xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(x - t) t^n dt \quad (9.31)$$

## Capítulo 9. Aplicaciones de la derivada y de la integral

---

o equivalentemente

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x).$$

Pero éste es el desarrollo de  $f(x)$  por la fórmula de Mac Laurin, y el término complementario tiene la forma

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(x-t) t^n dt \quad (9.32)$$

que es una expresión exacta.

Aplicando (9.31) a la función  $F(h) = f(\alpha + h)$ , resulta

$$F(h) - F(0) = h F'(0) + \frac{h^2}{2!} F^{(2)}(0) + \frac{h^3}{3!} F^{(3)}(0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(0) + R_n(h),$$

$$R_n(h) = \frac{1}{n!} \int_0^h F^{(n+1)}(h-t) t^n dt$$

y por lo tanto

$$f(\alpha + h) - f(\alpha) = h f'(\alpha) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(\alpha) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\alpha) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\alpha) + R_n(h), \quad (9.33)$$

$$R_n(h) = \frac{1}{n!} \int_0^h f^{(n+1)}(\alpha + h - t) t^n dt$$

o bien, con el cambio de variables  $\alpha + h - t = \tau$ :

$$R_n(h) = \frac{1}{n!} \int_{\alpha}^{\alpha+h} f^{(n+1)}(\tau) (\alpha + h - \tau)^n d\tau. \quad (9.34)$$

**Ejemplo 9.1.15** Si se aplica la forma integral del resto a las funciones  $\sin x$ ,  $\cos x$  y  $\ln(x+1)$  con  $\alpha = 0$ , se obtendrá:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \int_0^x \frac{\sin^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!} (x-t)^{2n+1} dt,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{e^t}{n!} (x-t)^n dt,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \int_0^x \frac{\cos^{(2n+1)}(t)}{(2n)!} (x-t)^{2n} dt,$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{(n+1)} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-\tau)^n}{(1+\tau)^{n+1}} d\tau.$$

## 9.2. Resolución aproximada de ecuaciones: Método de Newton

Hemos visto ya que dada una ecuación  $f(x) = 0$ , si se conoce un intervalo  $[a, b]$  dentro del cual existe una raíz, se sabe además que la función  $f(x)$  es continua allí y que toma valores con signos opuestos en los extremos del mismo, entonces el Teorema de Bolzano nos provee un método iterativo para aproximar la raíz con el grado de precisión que sea necesario. En términos más precisos, el método de Bolzano provee una sucesión cuyo límite es la raíz buscada, o bien un encaje de intervalos que determina la raíz.

Si bien el método es seguro y preciso interesa la “velocidad de convergencia” es decir, la cantidad de pasos requeridos para lograr una precisión preestablecida.

En tal sentido el método de Newton ofrece una aproximación más eficiente, aunque con mayores requerimientos que la simple continuidad sobre el intervalo inicial. A grandes rasgos, consiste en reemplazar la curva por la tangente en uno de los extremos del arco, determinar el punto  $x_1$  en que la tangente corta al eje  $x$ , reemplazar el extremo considerado del arco por el que corresponde a la abscisa  $x_1$  y reiterar el procedimiento. Las cuestiones a dilucidar serán en cuál extremo y en qué condiciones de regularidad se logra una aproximación eficiente.

El primer punto a destacar es que el Método de Newton se aplica a funciones que admiten al menos derivada segunda y utiliza la fórmula de Taylor. Esta última, al aproximar a la función  $f(x)$  por polinomios permite reemplazar la ecuación original por otra algebraica entera de más fácil resolución, cuyas raíces dan valores aproximados de la original y con un error que se puede acotar.

Haremos a continuación una presentación a nivel intuitivo del problema que, confiamos, sirva para presentar con más claridad la fundamentación del método y las condiciones con las cuales resultará más eficiente o menos eficiente.

Consideremos que la ecuación  $f(x) = 0$  tiene una raíz  $x_r$  en el intervalo  $[a, b]$ , que existe  $f''(x)$  no nula en ese intervalo y que  $f(x)$  toma signos distintos en los extremos.

En tales condiciones la función es cóncava hacia arriba o bien cóncava hacia abajo en todo

el intervalo y existe una y sólo una raíz  $x_r$  allí. La Figura 9.3<sup>2</sup> ilustra los cuatro casos posibles en esta situación.

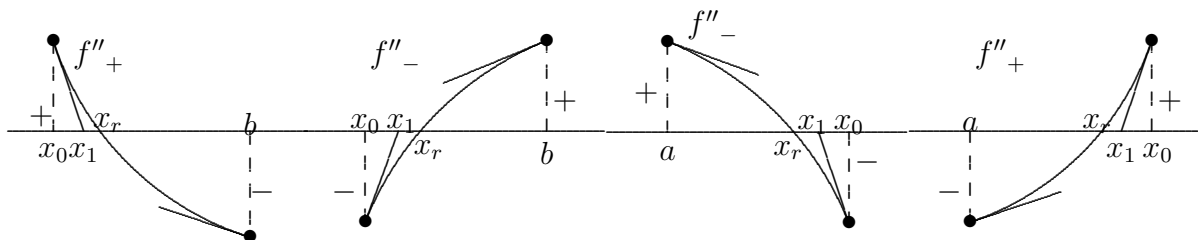


Figura 9.3: ¿Cuál es el punto inicial  $a$  o  $b$  ?

A continuación realizamos una descripción sumaria del Método de Newton.

Como  $f''(x)$  no cambia de signo, en uno de los extremos del intervalo su signo coincide con el de  $f(x)$ . Si elegimos ese extremo como la primer aproximación  $x_0$  a la solución  $x_r$  se puede ver en la Figura 9.3, cosa que luego demostraremos formalmente, que la tangente en  $x_0$  corta siempre al eje  $x$  en un punto  $x_1$ , que está entre  $x_0$  y  $x_r$ . Es decir  $x_1$  está más próximo que  $x_0$  a la raíz buscada (La tangente en el otro extremo no siempre satisface esa propiedad<sup>3</sup>). Pero además  $f(x_1)$  tiene el mismo signo que  $f(x_0)$  y entonces se puede repetir el procedimiento, construyendo la tangente en  $x_1$  para obtener la tercera aproximación  $x_2$ , y así siguiendo.

### 9.2.1. Método de Newton

Desarrollemos  $f(x)$  por Taylor en el intervalo  $[x_0, x_r]$ , a partir de  $x_0$ . Si llamamos  $\delta_0 = x_r - x_0$ , este valor es el error de la aproximación inicial  $x_0$  y la ecuación puede plantearse en términos del error como

$$0 = f(x_r) = f(x_0) + (x_r - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x_r - x_0)^2 f''(\xi_0), \quad x_0 < \xi_0 < x_r \quad (9.35)$$

donde ahora la incógnita a determinar es  $\delta_0$ . Pero este valor no puede obtenerse de esa ecuación porque no se conoce  $f''(\xi_0)$ .

<sup>2</sup>Reproducción Figura 121. §40-4, pág. 536, J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, C. A. Trejo, Análisis Matemático I, Vol. I, Edit. Kapelusz.

<sup>3</sup>En el gráfico de la izquierda en la Figura 9.3 se puede ver que la tangente en el extremo  $b$  corta al eje  $x$  en un punto más alejado de  $x_r$  que  $x_0$ .

Si en (9.35) prescindimos del término de segundo grado, la ecuación cambia a una lineal, que naturalmente no tendrá la misma solución  $\delta_0 = (x_r - x_0)$  que (9.35) sino otra, aproximada, de la forma  $(x_1 - x_0)$ :

$$0 = f(x_0) + (x_1 - x_0) f'(x_0) \Leftrightarrow x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (9.36)$$

de donde resulta que  $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$  es la intersección de la tangente en  $x_0$  con el eje  $x$ , es decir la primera aproximación que da el método de Newton (Ver figura 9.4).

Por otra parte de (9.35) y (9.36) obtenemos respectivamente

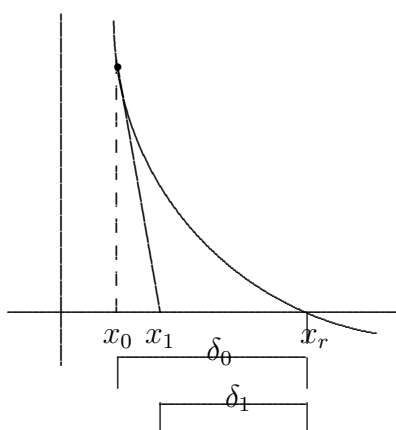


Figura 9.4: Aproximaciones inicial y primera y estimaciones de los respectivos errores

$$x_r - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{1}{2}(x_r - x_0)^2 \frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)} \quad \text{y} \quad x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (9.37)$$

por lo tanto el valor absoluto del error de la aproximación  $x_1$  es

$$|\delta_1| = |x_r - x_1| = |(x_r - x_0) - (x_1 - x_0)| = \left| -\frac{(x_r - x_0)^2}{2} \frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)} \right| \leq \frac{(b - a)}{2} \left| \frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)} \right|. \quad (9.38)$$

Probaremos ahora que la aproximación  $x_1$  es efectivamente mejor que la inicial  $x_0$ , para la cual es suficiente probar que  $x_1$  está entre  $x_0$  y  $x_r$ , es decir  $x_1 \in (x_0, x_r)$  o  $x_1 \in (x_r, x_0)$ . Dado que el punto  $x_0$  es el extremo en el que  $f''(x)$  y  $f(x)$  tienen el mismo signo, digamos positivo, el signo de  $f'(x)$  puede coincidir o no allí.

Entonces

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{y} \quad x_r - x_1 = -\frac{(x_r - x_0)^2}{2} \frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)}$$

## Capítulo 9. Aplicaciones de la derivada y de la integral

resultan: ambos negativos si  $f'(x_0) > 0$  y ambos positivos si  $f'(x_0) < 0$ . Por lo tanto  $x_r < x_1 < x_0$  si  $f'(x_0) > 0$  y  $x_0 < x_1 < x_r$  si  $f'(x_0) < 0$ . Como se ve, en cualquiera de las dos situaciones  $x_1$  mejora la aproximación inicial<sup>4</sup>. A análogo resultado se llega, mutatis mutandis, si  $f''(x_0) < 0$ .

Retomemos el desarrollo del método de Newton ya esbozado para demostrar, que con las hipótesis dadas, se obtiene una sucesión de aproximaciones que converge a la solución  $x_r$ . Tomando la recta tangente en  $x_1$  obtenemos la nueva aproximación  $x_2$  entre  $x_1$  y  $x_r$ , que tiene un error  $\delta_2 = x_r - x_2$ . De tal modo  $x_0 < x_1 < x_2 < x_r$  si  $f'(x) < 0$  o  $x_r < x_2 < x_1 < x_0$  si  $f'(x_0) > 0$ .

Reiterando el procedimiento obtenemos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{con } x_{n+1} \text{ entre } x_n \text{ y } x_r \quad \text{y con un error } \delta_{n+1} = x_r - x_{n+1}. \quad (9.39)$$

Por lo tanto  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} < x_r$  si  $f'(x_0) < 0$  o  $x_r < x_{n+1} < \dots < x_2 < x_1 < x_0$  si  $f'(x_0) > 0$ . Esto demuestra que la sucesión de aproximaciones  $x_1, x_2, x_3, \dots$  es monótona, acotada y por lo tanto convergente. Es decir, existe  $\tilde{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  que está en  $(x_0, x_r]$  o  $[x_r, x_0)$ , y además  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ .

Sigue entonces, usando (9.43) y la continuidad de  $f(x)$  y  $f'(x)$ , que

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) = -\frac{f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)}{f'(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)} = -\frac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})}$$

por lo tanto  $f(\tilde{x}) = 0$  y dado que  $x_r$  es el único cero en  $[a, b]$  tenemos que  $\tilde{x} = x_r$ .

**Observación 9.2.1** *Con las hipótesis adoptadas  $f'(x)$  no puede anularse en  $(x_0, x_r)$  o  $(x_r, x_0)$ , según el caso.*

Si  $f'(x_0) < 0$  y suponemos que existe  $\alpha \in (x_0, x_r)$  tal que  $f'(\alpha) = 0$ , entonces la función tiene un mínimo estricto en  $\alpha$  y además como  $f(x)$  no se anula en  $(x_0, x_r)$  y  $f(x_0) > 0$  debe ser  $0 < f(\alpha) < f(x) \quad \forall x \in (x_0, x_r), x \neq \alpha$  luego  $\lim_{x \rightarrow x_r} f(x) = f(x_r) \geq f(\alpha) > 0$ .

Contradiciendo que  $f(x_r) = 0$ .

La Figura 9.5 ilustra sucesivas aproximaciones a la solución  $x_r$  para los casos en que  $f''(x_0)$ ,  $f(x_0)$  y  $f'(x)$  son positivas -gráfico de la izquierda- y cuando  $f''(x_0)$ ,  $f(x_0)$  positivas pero

<sup>4</sup>§40-4, pág. 536, J. Rey Pastor, Vol. I, error en la observación efectuada en letra pequeña.



$f'(x)$  negativa, en el gráfico de la derecha.

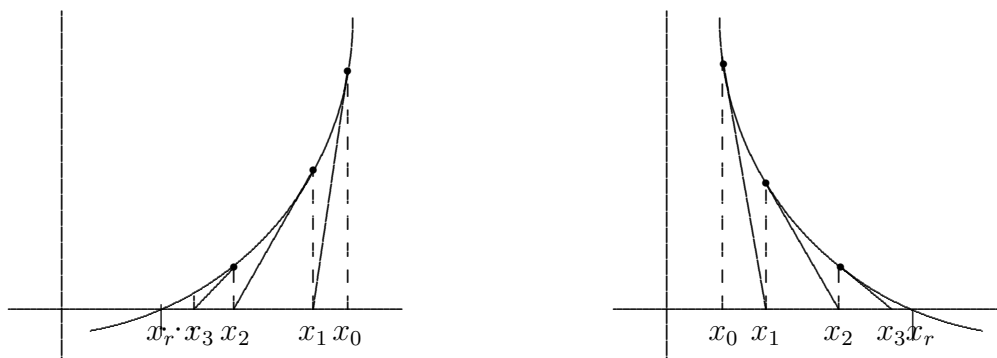


Figura 9.5:  $f''(x) > 0$ ,  $f(x_0) > 0$ , sucesiones de iterados monótonas y acotadas

### 9.2.2. Acerca de la eficiencia del método de Newton

A continuación planteamos, en forma de ejercicios pero incluyendo las soluciones a modo de ejemplo, varias propiedades que nos darán la información necesaria para conocer la eficacia del método de Newton, es decir, la rapidez con que la sucesión de aproximaciones  $x_n$  tiende a la solución  $x_r$ .

Recuerde que hemos llamado  $\delta_k = x_r - x_k$  a la diferencia entre la aproximación  $x_k$  y la solución  $x_r$ , es decir, al error de tal aproximación.

**Ejemplo 9.2.2** Consideremos el caso en que  $f''(x) > 0$ ,  $f(x_0) > 0$  y  $f'(x) > 0$  y llamemos  $\delta_k$  a la diferencia entre  $x_k$  y la solución  $x_r$ , es decir  $\delta_k = x_r - x_k$  es el error de la aproximación  $x_k$ .

Demuestre que:

a) Existe  $\xi_k \in (x_r, x_k)$  tal que  $\delta_k = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)}$ .

b)  $\delta_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ .

c) Existe  $\eta_k \in (\xi_k, x_k)$  tal que

$$\delta_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)f'(x_k)} f''(\eta_k)(x_k - \xi_k).$$

d)

$$\delta_{k+1} \leq \frac{f''(\eta_k)}{f'(x_k)} \delta_k^2. \quad (9.40)$$

*Respuestas:*

a) Por el teorema del Valor Medio de Lagrange existe  $\xi_k \in (x_r, x_k)$  tal que

$$\frac{f(x_k) - f(x_r)}{x_k - x_r} = f'(\xi_k),$$

es decir

$$\frac{f(x_k) - 0}{x_k - x_r} = f'(\xi_k), \quad x_r < \xi_k < x_k$$

por lo tanto

$$\delta_k = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)}, \quad x_r < \xi_k < x_k.$$

b)

$$\delta_{k+1} = x_{k+1} - x_r = (x_k - x_r) + (x_{k+1} - x_k) = \delta_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

y reemplazando  $\delta_k$

$$\delta_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)f'(x_k)} (f'(x_k) - f'(\xi_k)), \quad x_r < \xi_k < x_k.$$

c) Por el teorema del Valor Medio de Lagrange existe  $\eta_k \in (\xi_k, x_k)$  tal que

$$\frac{f'(x_k) - f'(\xi_k)}{x_k - \xi_k} = f''(\eta_k).$$

Por lo tanto

$$\delta_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)f'(x_k)} f''(\eta_k)(x_k - \xi_k) \quad x_r < \xi_k < \eta_k < x_k$$

es decir

$$\delta_{k+1} = \frac{\delta_k}{f'(x_k)} f''(\eta_k)(x_k - \xi_k) \quad x_r < \xi_k < \eta_k < x_k.$$

- d) Y como para todo  $k$  es  $0 < x_k - \xi_k < x_k - x_r = \delta_k$  dado que  $f'' > 0$ ,  $f(x_i) > 0$  y  $f'(x_i) > 0$ , resulta

$$\delta_{k+1} < \frac{\delta_k}{f'(x_k)} f''(\eta_k) \delta_k \quad x_r < \xi_k < \eta_k < x_k$$

o bien

$$\delta_{k+1} < \frac{f''(\eta_k)}{f'(x_k)} \delta_k^2 \quad x_r < \xi_k < \eta_k < x_k. \quad (9.41)$$

Esta desigualdad es muy importante porque a partir de ella se puede conjeturar la principal ventaja del método de Newton: los sucesivos errores  $\delta_1, \delta_2, \dots$ , tienden *cuadráticamente* a cero, en el sentido que  $|\delta_{k+1}| \leq C \delta_k^2$ , para una constante  $C$  fija. Esto significa una velocidad de convergencia extremadamente rápida de los  $x_k$  hacia los  $x_r$ . Para que este hecho se verifique efectivamente se requiere, que en un entorno lateral de la solución  $x_r$ ,  $f''(x)$  no sea *demasiado* grande ni que  $f'(x)$  sea demasiado pequeña. Concretamente:

- e) Demuestre que si existen constantes positivas  $m$  y  $M$  tales que  $m \leq |f'(x)|$ ,  $|f'(x)| \leq M$  en un entorno  $(x_r - \delta, x_r + \delta)$ , con  $\delta < 1$ , que contiene a la solución inicial  $x_0$  entonces el método de Newton es eficaz, en el sentido que  $\{x_k\}$  converge cuadráticamente a la solución  $x_r$ .

*Rta:* Damos primero la respuesta para la situación particular que venimos considerando:  $f''(x) > 0$ ,  $f'(x) > 0$  y  $f(x_0) > 0$ , luego procedemos con el caso general.

Si  $m \leq |f'(x)|$  y  $|f''(x)| < M$ , de (9.41) resulta

$$\delta_{k+1} < \frac{f''(\eta_k)}{f'(x_k)} \delta_k^2 < \frac{M}{m} \delta_k^2.$$

Demostración en el caso general.

Es  $f''(x)$  positiva o negativa en todo el intervalo considerado, y  $\text{Signo}(f(x_0)) \equiv \text{Signo}(f''(x))$ . Es decir, esta situación comprende a cualquiera de los cuatro casos posibles (Figura 9.3).

Si denotamos el error  $\delta_k = x_k - x_r$ , podemos utilizar, como ya lo hicimos anteriormente, el teorema de Lagrange para obtener:

$$\frac{f(x_k) - f(x_r)}{x_k - x_r} = f'(\xi_k) \quad \xi_k \text{ entre } x_k \text{ y } x_r,$$

como  $f(x_r) = 0$ , se obtiene

$$\delta_k = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)},$$

$$\delta_{k+1} = x_{k+1} - x_r = x_k - x_r + x_{k+1} - x_k = x_k - x_r - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \delta_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \text{ por lo tanto}$$

$$\delta_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)f'(x_k)}(f'(x_k) - f'(\xi_k))$$

y aplicando nuevamente el teorema del Valor Medio de Lagrange, se tiene

$$\frac{f'(x_k) - f'(\xi_k)}{x_k - \xi_k} = f''(\eta_k) \quad \text{con } \eta_k \text{ entre } x_k \text{ y } \xi_k$$

pero como  $\xi_k$  está entre  $x_k$  y  $x_r$ , tenemos que  $\eta_k$  está entre  $x_k$  y  $x_r$ , entonces

$$f'(x_k) - f'(\xi_k) = f''(\eta_k)(x_k - \xi_k) \text{ con } \eta_k \text{ entre } x_k \text{ y } x_r.$$

Reemplazando en la expresión de  $\delta_{k+1}$ , resulta

$$\delta_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)f'(x_k)} f''(\eta_k)(x_k - \xi_k).$$

Sigue entonces que

$$|\delta_{k+1}| = \left| \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)f'(x_k)} f''(\eta_k)(x_k - \xi_k) \right| = \frac{|\delta_k|}{|f'(x_k)|} |f''(\eta_k)| |x_k - \xi_k|$$

y como  $|x_k - \xi_k| < |x_k - x_r| = |\delta_k|$ , resulta

$$|\delta_{k+1}| \leq \frac{|f''(\eta_k)|}{|f'(x_k)|} \delta_k^2 \leq \frac{M}{m} |\delta_k|^2.$$

También es claro a partir de esta desigualdad que tanto más rápida será la convergencia cuanto más pequeños sean  $\frac{M}{m}$  y  $\delta_0 = |x_r - x_0|$ .

f) Determine la expresión de  $x_{n+1}$  para  $f(x) = x^2 - A$ ,  $A > 0$ .

*Rta:* Dicha expresión se obtiene a partir de  $f(x) = x^2 - A$ ,  $f'(x) = 2x$  y  $f''(x) = 2$ ,  $f(x_n) = x_n^2 - A$ ,  $f'(x_n) = 2x_n$  luego reemplazando en la ecuación (9.43) que da  $x_{n+1}$  en términos de  $x_n$ , se tiene  $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - A}{2x_n}$ .

Si tomamos  $A = 2$ , sabemos ya que las soluciones exactas son  $x_{r_1} = \sqrt{2}$  y  $x_{r_2} = -\sqrt{2}$ . Si se escoge  $x_0 = 1,4$  obtenemos  $x_1 = 1,4142857$ ,  $x_2 = 1,41421355$ , que tiene ya 7 decimales exactos y  $x_3 = 1,414213562$ .

Como  $f(x) = x^2 - 2$ , resulta  $f'(x) = 2x$  y  $f''(x) = 2 \quad \forall x$   $\therefore$  si consideramos el intervalo  $[1,4, 1,6]$  resulta  $m = 2,8$  y  $M = 2$ , luego  $\frac{M}{m} < 0,715$   $\therefore |\delta_{k+1}| < 0,715 \delta_k^2$  y por ejemplo, como  $|\delta_0| = |1,4 - \sqrt{2}| < 0,0143$  resulta  $|\delta_1| < 0,715(0,0143)^2 < 0,000147$ .

Veamos este otro ejemplo:  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $x_{r_1} = 1$ ,  $x_{r_2} = -1$ .

Comenzando desde  $x_0 = 2$ , obtenemos:

$x_i$	$ \delta_i $
$x_0 = 2$	$ x_0 - x_{r_1}  = 1$
$x_1 = 1,25$	$ x_1 - x_{r_1}  = 0,25 \approx 3 \times 10^{-1}$
$x_2 = 1,025$	$ x_2 - x_{r_1}  = 0,025 \approx 3 \times 10^{-2}$
$x_3 = 1,0003048$	$ x_3 - x_{r_1}  = 0,0003048 \approx 3 \times 10^{-4}$
$x_4 = 1,0000000464$	$ x_4 - x_{r_1}  = 0,0000000464 \approx 5 \times 10^{-8}$

**Nota 9.2.3** Recuerde que  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}$  es una sucesión convergente a un punto  $x_\star \in \mathbb{R}$   
 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_\star| = 0$ .

**Definición 9.2.4** Velocidad de convergencia  $q$ -orden  $p$ .

Se dice que  $\{x_k\}$  converge a  $x_\star$  con  $q$ -orden de convergencia  $p$  si existe una constante  $c \geq 0$  y un índice  $K$  tal que para todo  $k \geq K$  se cumple  $|x_{k+1} - x_\star| \leq c|x_k - x_\star|^p$ . Si  $p = 2$  se tiene convergencia  $q$ -cuadrática y si  $p = 3$  se tiene convergencia  $q$ -cúbica <sup>5</sup>.

**Ejemplo 9.2.5** Como ejemplo de una aplicación del método a un caso más complejo, citamos el cálculo de la menor raíz positiva de la ecuación trascendente

$$\tan x = x. \tag{9.42}$$

resuelto en §40-4, pág. 537, J. R. Pastor, P. Pi Calleja y C. A. Trejo, *Análisis Matemático, vol I, Editorial Kapelusz, 1952*.

<sup>5</sup>El prefijo  $q$  (por quotient) se utiliza para diferenciar este tipo de convergencia de las de tipo  $r$  (por root).

### 9.3. Ejercicio resuelto: Estudio de $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ .

#### Nivel IV ♣ © 4<sup>to</sup> COLOQUIO.

**Ejemplo 9.3.1** Gráfica de  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ .

Respuesta:

1. Dominio de  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ .

Comencemos por recordar que en el Cálculo Diferencial e Integral de una variable real  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  requiere que  $1 + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 0$ , y ha este nivel de conocimientos alcanzados resultará sencillo al lector confirmar que el conjunto de definición o  $Dom f(x)$  es  $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ . Es decir, no habrá gráfica en  $x \in [-1, 0]$ , y siendo  $\frac{x+1}{x} > 0$  cualquiera sea  $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$  resulta evidente del carácter exponencial de  $f(x)$  que es una función de signo positivo, en otros términos su gráfica está por encima del eje de las abscisas.

La aplicación de la Regla de L'Hôpital conduce a determinar que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ , así como también que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  y por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ <sup>6</sup>

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ \pm\infty \end{cases}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e} \quad (9.43)$$

Por razones de brevedad, efectuaremos el cómputo únicamente del primero de estos límites dada la similitud de los cálculos que involucran la resolución de la indeterminación en cada los dos límites restantes.

Supongamos que existe finito el  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  y los denotamos por  $L$ , entonces cada uno de los siguientes pasos confirmarán que su valor es el Euler's number ( $e \approx 2.71828$ ).

---

<sup>6</sup>John Napier of Merchiston (1550–4 April 1617). Napier is best known as the discoverer of logarithms. The neper is a unit in a logarithmic scale. While the bel uses the decadic (base-10) logarithm to compute ratios, the neper uses the natural logarithm, based on Euler's number ( $e \approx 2.71828$ ), from [www.Acoustic-Sounds.com](http://www.Acoustic-Sounds.com): Bel, B  $\leftrightarrow$  Decibel DB  $\leftrightarrow$  Neper Np.

1<sup>ro</sup>)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = L$

2<sup>do</sup>) Aplicamos la función logaritmo neperiano o natural,  $\ln$ , a ambos miembros

$$\ln \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = \ln L$$

3<sup>ro</sup>) Permutamos  $\ln$  y el  $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ , pues la función logaritmo es continua en todo su dominio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \ln \left[ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] \right\} = \ln L$$

4<sup>to</sup>) Por propiedad del logaritmo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln L$$

5<sup>to</sup>) Límite indeterminación del tipo  $+\infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

6<sup>to</sup>) Debemos reordenarlo para poder aplicar la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

hemos llevado la indeterminación original a una del tipo  $\frac{0}{0}$

7<sup>mo</sup>) Aquí aplicamos la Regla de L'Hôpital

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

8<sup>vo</sup>)  $\ln L = 1 \rightarrow e^{\ln L} = e^1 \rightarrow L = e$

9<sup>no</sup>)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

10<sup>mo</sup>) Justificar que es válida la aplicación de la Regla de L'Hôpital y verificar que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \text{ } ^7$$

2. Asíntotas de  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  :  $y = e$ ,  $x = -1$ .

Calculemos si existen, direcciones asíntóticas de  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ , para ello debe-

mos efectuar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{x}$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{x}$ .

---

<sup>7</sup>El número  $e$ , al igual que el número  $\pi$  y el número áureo  $\phi$ , es un irracional. El matemático y físico Leonhard Euler popularizó el uso de la letra  $e$  para el valor de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818... = e$ .

Para el cálculo de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \frac{1}{x})^x}{x}$ , realizamos el cambio de variable  $t = \frac{1}{x}$ , y confirmamos que si  $x \rightarrow +\infty$  entonces  $t \rightarrow 0$ , por lo tanto calcularemos el  $\lim_{t \rightarrow 0} t(1+t)^{\frac{1}{t}} = 0$ , puesto que  $\lim_{t \rightarrow 0} t = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ . Entonces, acabamos de determinar que la dirección asintótica es cero, y por lo tanto la asíntota oblicua si existe es una horizontal, precisamente ya que hemos confirmado que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = e$ , la recta horizontal  $y = e$  es una de las asíntotas de  $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ , (Ver Figura 9.6).

Además el  $\lim_{x \rightarrow -1^-} (1 + \frac{1}{x})^x = +\infty$ , y entonces resultará la recta vertical  $x = -1$  una asíntota vertical de la función  $(1 + \frac{1}{x})^x$ , (Ver Figura 9.6).

Por otra parte, el estudiante puede confirmar sin dificultades que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x})^x = 1$  una vez salvada la forma indeterminada de tipo  $\infty^0$  mediante la aplicación de la Regla de L'Hôpital. Este cálculo explicita que  $x = 0$  no es una asíntota vertical.

3. Estudio del crecimiento de  $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ .

Cabe confirmar la veracidad o falsedad (Ref. a la Figura 9.6) de si para  $x > 0$  la  $f(x)$  es estrictamente creciente y cóncava hacia abajo, mientras que para  $x < -1$ ,  $f(x)$  es estrictamente creciente y cóncava hacia arriba.

Para ello, seguiremos trabajando utilizando el Método de la Derivación Logarítmica y la aplicación cuidadosa de la Regla de L'Hôpital para el cálculo de los límites indeterminados que aparezcan. Eventualmente, utilizaremos el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (Teorema de Lagrange) para considerar caminos alternativos en las justificaciones. A continuación se enumeran los pasos a seguir para el cálculo de  $\frac{f(x)}{dx}$ .

$$\boxed{f'(x) = (1 + \frac{1}{x})^x \left[ \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x} \right]} \tag{9.44}$$



Sea  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  con la técnica de la derivación logarítmica, calculamos  $f'(x)$ :

- $\ln(f(x)) = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]$
- $\ln(f(x)) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
- $\frac{d(\ln(f(x)))}{dx} = \frac{d\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)}{dx}$
- $\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$
- $f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right]$

Como  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  es positiva, el signo de la derivada primera se determina estudiando el signo del segundo factor del producto en la expresión de (9.44), es decir estudiando el signo de la función  $n(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{(x+1)}$  en  $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ .

Procedemos desdoblado el análisis de su signo en los respectivos subconjuntos del dominio de  $f(x)$ :

$$\text{Signo}(n(x)) = \begin{cases} \text{Signo}\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{(x+1)}\right] & \text{si } x > 0 \\ \text{Signo}\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{(x+1)}\right] & \text{si } x < -1 \end{cases}.$$

Para confirmar el crecimiento estricto de la función  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  si  $x > 0$  basta determinar que en dicho intervalo abierto no acotado  $\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right] > 0$ . De manera, similar se determinará que en el intervalo  $x < -1$  dicha expresión también es positiva  $\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{(x+1)}\right] > 0$ , es decir  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  es estrictamente creciente en su dominio de definición.

Para ello en primer lugar calculamos la derivada primera de  $n(x)$ :

$$\dot{n}(x) = \frac{dn(x)}{dx} = n'(x) = \frac{-1}{|x|(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

y realizamos los siguientes cálculos:

a) Sea  $n(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{(x+1)}$ ,  $x > 0$ .

A continuación justificaremos que  $\text{Signo}(n(x)) > 0$ , es decir  $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{(x+1)} > 0$  si  $x > 0$ . Los siguientes items lo confirman:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{(x+1)} = +\infty$ . Es decir, el eje de las ordenadas,  $x = 0$  es asíntota vertical de  $n(x)$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{(x+1)} = 0$ . No tardaríamos en determinar que el eje de las abscisas,  $y = 0$  es asíntota horizontal de  $n(x)$ .
- $\dot{n}(x) = \frac{dn(x)}{dx} = n'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ . Por lo tanto  $\text{Signo}(\dot{n}(x)) < 0$  si  $x > 0$ .

Luego, la función  $n(x)$  si  $x > 0$  es estrictamente decreciente y por los valores de los límites en la frontera del intervalo considerado, resulta positiva, i.e.  $\text{Signo}(n(x)) > 0$  si  $x > 0$ . Permitiéndonos asegurar que  $f'(x) > 0$  si  $x > 0$ . En consecuencia,  $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$  es estrictamente creciente si  $x > 0$ .

b)  $n(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{(x+1)}, x < -1$ .

Ahora justificaremos que  $\text{Signo}(n(x)) > 0$ , es decir  $\ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{(x+1)} > 0$  si  $x < -1$ .

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{(x+1)} = +\infty$ .

A continuación justificamos en detalle este resultado.

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(1 + \frac{1}{x}) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{(x+1)} = -\infty$

- Entonces  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{(x+1)} = -\infty - (-\infty)$  es una indeterminación. Para ello reescribimos  $\ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{(x+1)} = \frac{(x+1) \ln(1 + \frac{1}{x}) - 1}{x+1}$

Para ello reescribimos  $\ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{(x+1)} = \frac{(x+1) \ln(1 + \frac{1}{x}) - 1}{x+1}$

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1) \ln(1 + \frac{1}{x}) - 1}{x+1}$

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) \ln(1 + \frac{1}{x}) = 0(-\infty)$ . Para resolver esta indeterminación, lo reescribimos como:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) \ln(1 + \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x+1}} = \frac{-\infty}{-\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\frac{-1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{-1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{|x|}$$

A partir de que:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{|x|} = 0 \text{ ha resultado que } \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

$$\text{Finalmente, } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\overbrace{(x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1}^{\rightarrow 0}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-1}{(x+1)}, \text{ cuyo límite es:}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-1}{(x+1)} = +\infty$$

Límite  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{(x+1)} = +\infty$  que establece que  $n(x)$  posee otra asíntota vertical, la recta  $x = -1$ .

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{(x+1)} = 0$$

$$\blacksquare \dot{n}(x) = \frac{dn(x)}{dx} = n'(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)^2}. \text{ Por lo tanto } \text{Signo}(\dot{n}(x)) > 0 \text{ si } x < -1.$$

Luego, la función  $n(x)$  si  $x < -1$  es estrictamente creciente y por los valores de los límites en la frontera del intervalo considerado, resulta positiva, i.e.  $\text{Signo}(n(x)) > 0$  si  $x < -1$ . Permittiéndonos asegurar que  $f'(x) > 0$  si  $x < -1$ . En consecuencia,  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  es estrictamente creciente si  $x < -1$ .

**Observación 9.3.2** En breve  $f'(x) > 0$  si  $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$  por lo tanto  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  es estrictamente creciente en su dominio de definición.

4. Estudio de la concavidad de  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ .

Dejamos al lector interesado efectuar el cálculo para computar la derivada segunda,  $f''(x)$ , (9.45).

$$\boxed{f''(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left\{ \left[ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{(x+1)} \right]^2 + \left( \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{|x|(x+1)} \right) \right\}} \quad (9.45)$$

Mediante el estudio del signo de  $f''(x)$ , (9.45), sabremos cuándo  $f(x)$  es cóncava hacia arriba  $\smile$ ,  $f''(x) > 0$  y cuándo  $f(x)$  es cóncava hacia abajo  $\frown$ ,  $f''(x) < 0$ .

$$\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{|x|(x+1)} = \begin{cases} -\frac{1}{x(x+1)^2} & x > 0 \\ \frac{2x+1}{x(x+1)^2} & x < -1 \end{cases}$$

Es sencillo verificar que  $f''(x)$  es positiva si  $x < -1$ , desde que (9.45) este conformada por dos sumandos positivos en  $(-\infty, -1)$ . Por lo tanto  $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$  es cóncava hacia arriba en  $(-\infty, -1)$ . Sin embargo, para  $(0, +\infty)$  el segundo sumando de (9.45) es negativo. Para determinar el signo de la función  $f''(x)$  en  $(0, +\infty)$ , utilizamos el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (Teorema de Lagrange) y la información de la función  $f'(x)$  y de  $f(x)$  que ya hemos obtenido. En dicho intervalo  $f(x)$  es positiva y estrictamente creciente,  $f'(x) > 0$ , desde el  $(0, 1)$  no perteneciente a la curva hacia el hipotético punto asintótico  $(+\infty, e)$  en la asíntota horizontal, por lo tanto dadas las abscisas  $0 < a < b$  debe ser  $f'(a) > f'(b)$ , según Lagrange  $\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} = f''(\xi)$  con  $a < \xi < b$  entonces  $f''(\xi) < 0$ . Esto ocurre cualesquiera sea el intervalo cerrado acotado  $[a, b]$  siempre y cuando estén contenidos en  $(0, +\infty)$ . De esta manera, hemos evidenciado que  $f''(x)$  es negativa en el mencionado subconjunto del dominio de la  $f(x)$ . Es decir,  $f(x)$  es cóncava hacia abajo en el mismo. Por todo lo expuesto la gráfica de  $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$  es la representada en la Figura 9.6.

**Observación 9.3.3** *En breve  $f''(x) > 0$  si  $x \in (-\infty, -1)$  entonces  $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$  es cóncava hacia arriba  $\smile$  en  $(-\infty, -1)$  y  $f''(x) < 0$  si  $(0, +\infty)$  por lo tanto  $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$  es cóncava hacia abajo  $\frown$  en  $(0, +\infty)$ .*

**Observación 9.3.4** *Cabe mencionar que en el estudio de las asíntotas de  $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$  hemos trabajado con los siguientes límites indeterminados del tipo exponencial:*

- i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x})^x$  es una forma indeterminada del tipo  $\infty^0$ .
- ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$  es una forma indeterminada del tipo  $1^{+\infty}$ .

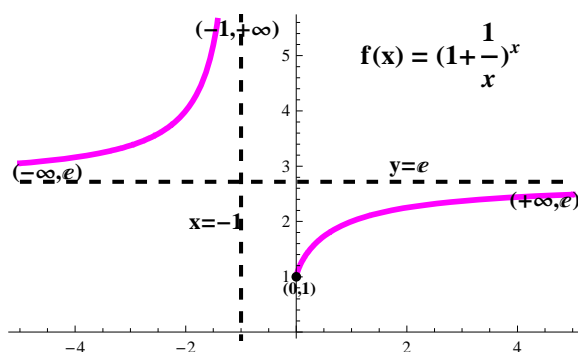


Figura 9.6:  $x = -1$  e  $y = e$ . Asíntotas de  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

iii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  es una forma indeterminada del tipo  $1^{-\infty}$ .

iv)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  es una forma indeterminada del tipo  $1^{\infty}$ .

**Ejemplo 9.3.5** Estudio completo de  $f(x) = \frac{x^x}{(1+x)^x}$ .

**Observación 9.3.6** Observe que se trata de la función recíproca a la estudiada en §9.3.1. Por lo que es sencillo llegar a determinar que su gráfica es la que se muestra en la Figura 9.7.

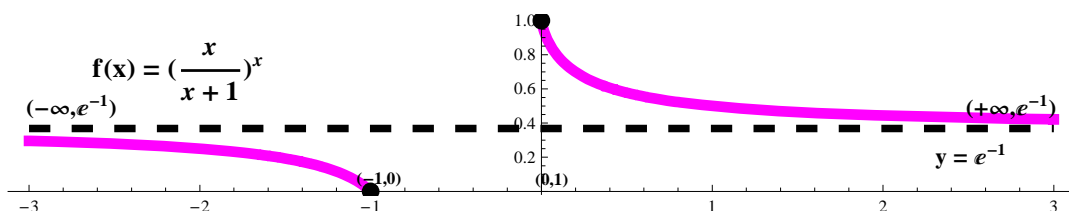


Figura 9.7:  $y = e^{-1}$ : Asíntota de  $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

## Capítulo 9. Aplicaciones de la derivada y de la integral

---

Observe que la validez de la siguiente proposición, puede ayudarlo a resolver de manera más sucinta <sup>8</sup> este Ejercicio 9.3.5.

**Proposición 9.3.7** *Supongamos  $y = f(x)$  derivable con excepción de puntos singulares aislados.*

i) *Si  $y = f(x)$  posee una asíntota horizontal que no sea el eje de las abscisas entonces su función recíproca  $f^{-1}(x)$  también posee una asíntota horizontal que no es el eje de las abscisas. Establezca la justificación. Las asíntotas verticales  $y = f(x)$  no lo son de función recíproca  $f^{-1}(x)$ .*

ii) *Los puntos críticos estacionarios de  $f^{-1}(x)$  son los mismos que los de  $f(x)$ .*

Demostración. 
$$\frac{d f^{-1}(x)}{d x} = -f^{-2}(x) \frac{d f(x)}{d x} = -f^{-2}(x) f(x)' = -\frac{f(x)'}{f(x)^2}$$

iii) *Los intervalos de crecimiento de  $f(x)$  son de decrecimiento de  $f^{-1}(x)$ , mientras que los intervalos decrecimiento de  $f(x)$  son de crecimiento de  $f^{-1}(x)$ .*

Demostración. *Establezca la justificación de este inciso.*

Establezca la veracidad o falsedad de la siguiente sentencia:  $f^{-1}(x)$  es cóncava hacia arriba en aquellos intervalos en los que  $f(x)$  es positiva y cóncava hacia abajo. Mientras que  $f^{-1}(x)$  es cóncava hacia abajo en aquellos intervalos en los que  $f(x)$  es negativa y cóncava hacia arriba.

Ayuda: 
$$\frac{d^2 f^{-1}(x)}{d^2 x} = f^{-2}(x) \left[ 2 \frac{(f'(x))^2}{f(x)} - f''(x) \right]$$

**Ejemplo 9.3.8** *Estudio completo de  $f(x) = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ .*

**Nota 9.3.9** *Observe que se trata de la función recíproca a la estudiada en §9.3.1 multiplicada por  $x$ . Por lo que es sencillo llegar a determinar al menos cualitativamente que su gráfica es la que se muestra en la Figura 2.40.*

---

<sup>8</sup>DICCIONARIO DE LA LENGUA ESPAÑOLA - Vigésima segunda edición, on line. (sucinto, ta. Del lat. succinctus, part. pas. de succingere, ceñir).

1. adj. Breve, compendioso.

2. adj. p. us. -poco usado o usada, poco usados o usadas- Recogido o ceñido por abajo.

Sin embargo a continuación justificaremos mediante el cálculo diferencial cada paso para determinar que efectivamente la Figura 2.40 representa su gráfico.

### 9.3.1. Sugerencias para el estudio de $f(x) = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ .

1.  $Dom(f(x)) = Dom \left[ \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} \right]$ . Necesitamos determinar los valores de  $x$  para los cuales  $x \left( \frac{x}{1+x} \right)^x > 0 \rightarrow \frac{x}{1+x} > 0 \rightarrow (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ .

2. Signo  $\left[ x \frac{x^x}{(1+x)^x} \right]$ , si  $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$  es positivo en  $(0, +\infty)$  y negativo en  $(-\infty, -1)$ .

3. Calculemos  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{1+x} \right)^x$ . Observemos que  $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{x^{-1} + 1}$ , por lo que debemos calcular el  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^{-1} + 1} \right)^x = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1^x}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x} = \frac{1}{e} = e^{-1}$ , resulta desde (9.43).

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ \pm\infty \end{cases}} \left( \frac{x}{1+x} \right)^x = e^{-1}} \quad (9.46)$$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x}{1+x} \right)^x$  es una forma indeterminada del tipo  $0^0$ .

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x}{1+x} \right)^x = L$

b)  $\ln \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x}{1+x} \right)^x = \ln L$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left( \frac{x}{1+x} \right)^x = \ln L$

d) Ahora es una forma indeterminada  $0(-\infty) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left( \frac{x}{1+x} \right) = \ln L$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left( \frac{x}{1+x} \right)}{\frac{1}{x}} = \ln L$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{-x(1+x)^2}{(x+1)x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-|x|}{1+x} = 0 = \ln L \therefore L = 1$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = 1$$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$  resulta ser cero, puesto que:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = 1$$

Ya que el producto de los límites de las funciones  $m(x) = x$  y  $n(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$  existe, son cada uno de ellos un valor finito, obviamente en la misma abscisa  $x \rightarrow 0^+$ , ver Teorema 5.0.2, inciso e) en la pág. 187, esto permite establecer que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = 0.$$

**Observación 9.3.10** En el estudio de  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  dejamos para el alumno interesado el cálculo del  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x}$ . Utilizando el inciso adecuado del Teorema sobre el cociente los límites finitos de funciones en una misma abscisa siempre que aquella en el denominador no tenga límite nulo, i.e. Teorema 5.0.2, inciso f) de la pág. 187, confirmamos mediante el cálculo del límite efectuado en el inciso anterior que  $1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-1}\right]^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = 1$  que efectivamente  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1$ .

6. Veamos que  $x = -1$  no es asíntota vertical. A partir de  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = +\infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = 0, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow -1^-} x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = 0.$$

7. Determinamos ahora la existencia de una dirección asintótica.

Calculemos  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$  que ya hemos determinado (9.46), i.e.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{e}.$$

8. Veamos entonces, si efectivamente existe una asíntota oblicua. Para ello tenemos que determinar si existe finito el  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{1}{e}x$ .



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{x}{1+x} \right)^x - \frac{1}{e} x = e^{-1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{\rightarrow 0} \left[ \underbrace{e \left( \frac{x}{1+x} \right)^x - 1}_{\rightarrow 0} \right], \text{ desde (9.46) es claro}$$

que estamos frente a una indeterminación de la forma  $+\infty 0$ . Entonces, reescribimos su expresión para llevarlo a la forma  $\frac{0}{0}$  y así poder aplicar la Regla de L'Hôpital

$$e^{-1} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ e \left( \frac{x}{1+x} \right)^x - 1 \right] = e^{-1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e \left( \frac{x}{1+x} \right)^x - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d \left( \frac{x}{1+x} \right)^x}{dx}}{\frac{-1}{x^2}},$$

a partir del Método de la Derivación Logarítmica  $\frac{d \left( \frac{x}{1+x} \right)^x}{dx}$  obtenemos que

$$\frac{d \left( \frac{x}{1+x} \right)^x}{dx} = \left( \frac{x}{1+x} \right)^x \left[ \ln \left( \frac{x}{1+x} \right) + \frac{1}{x+1} \right] \text{ y desde } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left( \frac{x}{x+1} \right) + \frac{1}{x+1}}{\frac{-1}{x^2}} =$$

$$\frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \frac{x+1}{x} \right) (x+1)^{-2} - (x+1)^{-2}}{2x^{-3}} = \frac{1}{2} \text{ de (9.46), } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d \left( \frac{x}{1+x} \right)^x}{dx}}{\frac{-1}{x^2}} = \frac{1}{2e}$$

entonces existe una asíntota oblicua:  $y = \frac{1}{e} x - \frac{1}{2e}$ . Faltaría confirmar si los mismos resultados se obtienen para  $x \rightarrow -\infty$ .

**Ejercicio 9.3.11** Estudio del crecimiento de  $f(x) = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ . Figura 2.40, pág. 99.

Sea  $y = f(x)$  e  $\bar{y} = x f^{-1}(x)$  confirme que  $\dot{\bar{y}} = f^{-1}(x) [1 - x f^{-1}(x) f'(x)]$

**Ejercicio 9.3.12** Estudio de la concavidad de  $f(x) = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ . Figura 2.40.

<sup>9</sup> Sea  $y = f(x)$  confirme el siguiente resultado para  $\bar{y} = x f^{-1}(x)$ :

$$\ddot{\bar{y}} = -2 f^{-2}(x) f'(x) + 2 x f^{-3}(x) (f'(x))^2 - x (f^{-1}(x))^2 f''(x)$$

<sup>9</sup>THE FREE DICTIONARY (on line)

1. frown  $\curvearrowright$ : v. frowned, frowning, frowns (v.intr.) 1. To wrinkle the brow, as in thought or displeasure.
2. smile  $\curvearrowleft$ : smile (n.) 1. A facial expression characterized by an upward curving of the corners of the mouth and indicating pleasure, amusement, or derision. happiness n. 1. the quality or state of being happy. 2. good fortune; pleasure; contentment; joy.



# Parte X

## Coordenadas Polares



# Capítulo 10

## Sistema de Coordenadas Polares

### 10.1. Introducción

Sabemos ya que si consideramos en el plano un sistema de ejes cartesianos  $X$  e  $Y$ , cada punto  $P$  del mismo determina un par ordenado de números reales  $(x, y)$ , que son las *coordenadas cartesianas* del punto  $P$ .

En este sistema de coordenadas las funciones de expresión más simple son las rectas. Cualquier recta (no vertical) tiene una expresión de la forma  $y = f(x) = ax + b$ .

En cambio no existe una función  $y = f(x)$  que represente a una circunferencia en el plano cartesiano. Sólo es posible obtener funciones que representen a una semicircunferencia y su expresión es del tipo  $y = f(x) = \sqrt{a^2 - (x - \alpha)^2}$  o bien  $y = g(x) = -\sqrt{a^2 - (x - \alpha)^2}$ , que en ambos caso resulta mucho más compleja que la ecuación de la recta antes considerada. Si en lugar de tomar como referencial un par de rectas ortogonales consideramos un punto  $O$  como origen o polo y una semirecta  $r$  con origen en el polo como *eje polar*, es posible obtener otra correspondencia entre los puntos del plano y pares de números reales, que asigna a cada punto  $P$  un par de números reales  $(r, \theta)$  que lo caracteriza, sus *coordenadas polares*.

En realidad, sería más adecuado indicar las coordenadas polares por el par  $(\theta, r)$  en lugar de  $(r, \theta)$ , pero hemos adoptado esta última forma debido a lo generalizado de su uso.

Notemos que la variación de  $\theta$  es entre 0 y  $2\pi$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  y la de  $r$  entre 0 y  $+\infty$ ,  $r \in [0, +\infty)$ .

## Capítulo 10. Sistema de Coordenadas Polares

Cada punto  $P$  distinto del polo  $O$  determina con éste la semirecta de origen  $O$  que contiene a  $P$ . A su vez esta semirecta determina un ángulo  $\theta$ , medido en sentido antihorario, con el eje polar. El ángulo  $\theta$  junto con la distancia  $r$  del punto  $P$  al polo, es decir la longitud del segmento  $\overline{OP}$ , constituyen las coordenadas polares del punto  $P$ .

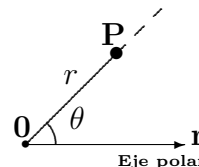


Figura 10.1: Coordenadas polares  $(r, \theta)$  del punto  $P$ .

Es claro además, que en este sistema de coordenadas, la ecuación  $\theta = \theta_0$  (constante) representa a la semirecta de origen  $O$  que forma el ángulo  $\theta_0$  con el eje polar. En cambio la ecuación  $r = r_0$  (constante) representa a la circunferencia (completa) centrada en el polo y de radio  $r_0$ .

### 10.2. Coordenadas polares de un punto en el plano

Para graficar curvas en coordenadas polares será conveniente permitir valores negativos de  $r$ , y a tal fin es necesaria una convención especial o definición que le asigne sentido a un par ordenado de la forma  $(-r, \theta)$ .

Tenga en cuenta que si  $r$  designa números no negativos entonces  $-r$  designa un número no positivo.

#### Definición 10.2.1

$$(-r, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} (r, \theta + \pi) \quad (10.1)$$

Esta definición es razonable porque los puntos de la forma  $(r, \theta + \pi)$  están en la semirecta opuesta a la que contiene a los de la forma  $(r, \theta)$ , ver Figura.

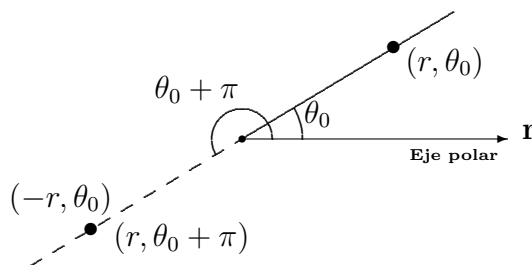


Figura 10.2: Interpretación de valores negativos para  $r$ .

La Observación 10.2.2 facilita el manejo de las coordenadas polares usando calculadoras.

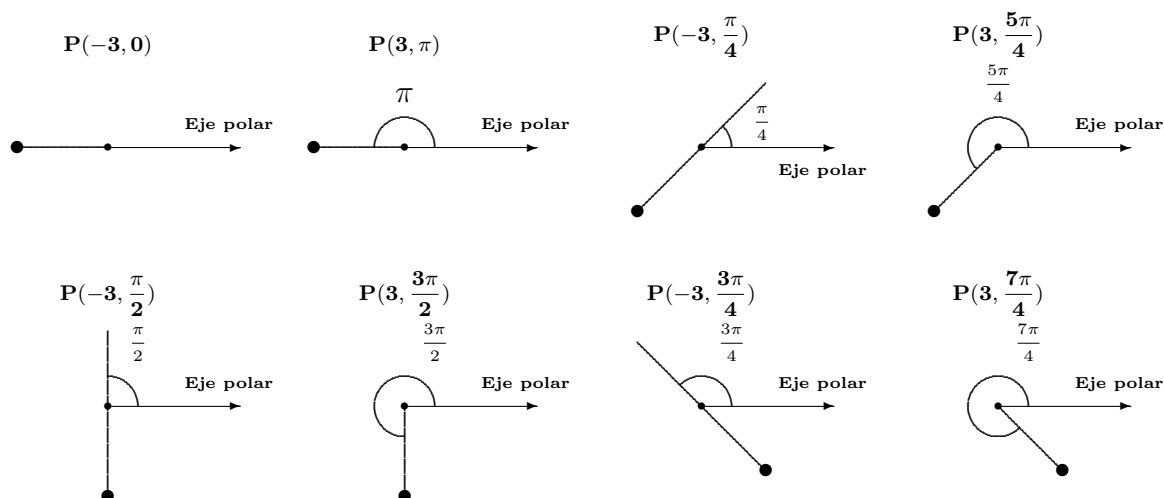


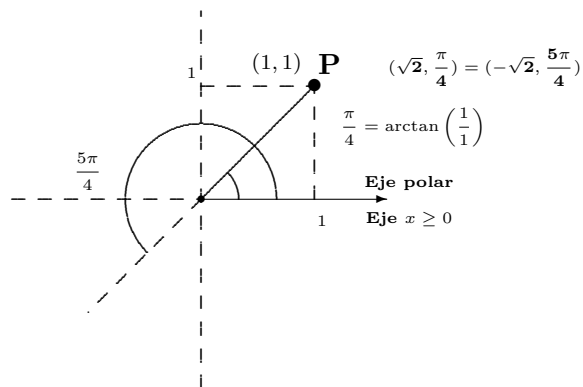
Figura 10.3: Ejemplos de puntos con la primer coordenada negativa.

**Observación 10.2.2** Cuando se conocen las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  de un punto  $P$  en el plano interesa saber cómo determinar sus coordenadas polares, en un referencial que tiene el polo en el origen del sistema cartesiano y el eje polar coincidente con el semieje positivo de las  $x$ . Teniendo en cuenta que la tangente tiene período  $\pi$  consideraremos  $-\frac{\pi}{2} < \arctan\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{\pi}{2}$ .

- i) Sea  $P(x, y)$ ,  $x \neq 0$ , un punto del primer cuadrante que no pertenece al eje  $Y$ , entonces  $x > 0$  e  $y \geq 0$ .

En este caso la distancia  $r$  de  $P$  al origen es  $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$  y el ángulo  $\theta_P$  que forma la semirecta  $OP$  con el semieje positivo de las  $x$  es  $0 \leq \theta_P = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{\pi}{2}$ , por lo tanto las coordenadas polares de  $P$  son  $(r, \theta_P)$  o también, de acuerdo a la convención adoptada,  $(-r, \theta_P + \pi)$ .

**Ejemplo 10.2.3** Sea  $P$  el punto de coordenadas cartesianas  $(1, 1)$ .



Entonces  $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  y  $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$ . El valor 1 de la tangente corresponde tanto al ángulo  $\frac{\pi}{4}$ , en el primer cuadrante, como al ángulo  $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$  en el tercer cuadrante. Dado que  $x > 0$  e  $y > 0$ , el punto  $P$  está en el primer cuadrante y en consecuencia sus coordenadas polares son  $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$  o bien  $(-\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$ , aún cuando siempre es preferible la primera forma.

Figura 10.4: Punto  $P(x, y)$  en el primer cuadrante.

**Observación 10.2.4** Si el punto  $P$  está en el eje  $Y$ , sus coordenadas cartesianas son de la forma  $(0, y)$ . En tal caso es  $r = \sqrt{0^2 + y^2} = |y|$  y la correspondiente coordenada angular  $\theta_P$  vale,

$$\theta_P = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } y < 0 \end{cases}.$$

Nótese que  $\theta_P$  no está definida si  $y = 0$ , pero en este caso, al ser  $x = 0$  e  $y = 0$  el punto  $P$  es justamente el polo  $O$ .

ii) Sea  $P(x, y)$  un punto del segundo cuadrante que no pertenece al eje  $Y$ , entonces  $x < 0$  e  $y \geq 0$ . Luego no hay inconveniente en calcular  $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ .

En cambio para obtener  $\theta_P$  se debe tomar en cuenta que por ser  $\frac{y}{x} < 0$ , la calculadora entrega un valor angular  $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  comprendido entre  $-\frac{\pi}{2}$  y cero, que no es  $\theta_P$ . Saber que  $x < 0$  e  $y \geq 0$  nos indica que la coordenada angular de  $P$  es  $\theta_P = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$ .



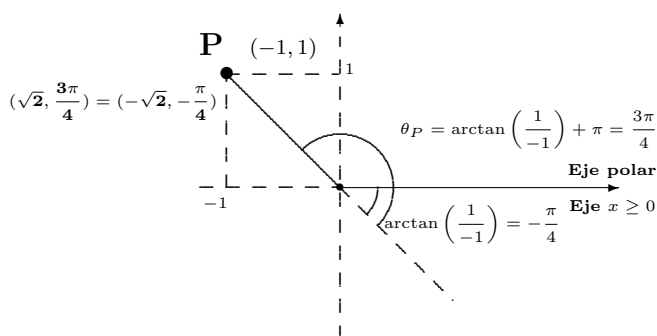


Figura 10.5: Punto  $P(x, y)$  en el segundo cuadrante.

**Ejemplo 10.2.5** Sea  $P$  el punto de coordenadas cartesianas  $(-1, 1)$ .

Entonces  $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ;  $\arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4}$  pero como  $x < 0$  e  $y > 0$  es  $\theta_P = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$ .

Luego las coordenadas de  $P$  son  $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$ .

- iii) Sea  $P(x, y)$  un punto del tercer cuadrante que no pertenece al eje  $Y$ , entonces  $x < 0$  e  $y \leq 0$ . Luego, como en todos los casos anteriores es  $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ . Por su parte  $\theta_P = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$  por cuanto, al ser  $\frac{y}{x} \geq 0$ , el ángulo  $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  que da la calculadora es del primer cuadrante mientras que el dato  $x < 0, y \leq 0$  indica que  $\theta_P$  es del tercer cuadrante.

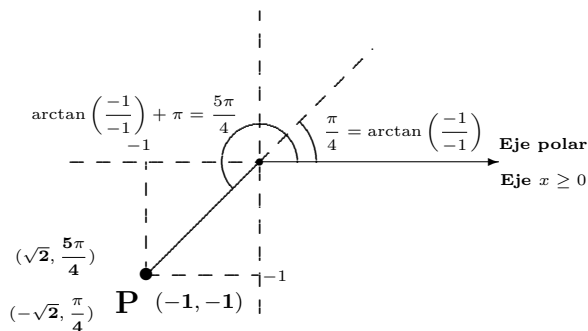


Figura 10.6: Punto  $P(x, y)$  en el tercer cuadrante.

**Ejemplo 10.2.6** Sea  $P$  el punto de coordenadas cartesianas  $(-1, -1)$ .

Entonces  $r = \sqrt{2}$  y  $\theta_P = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) + \pi$ .

- iv) En base a lo descrito anteriormente en *i*), *ii*) y *iii*) determine las coordenadas polares de un punto  $P(x, y)$  del cuarto cuadrante, que no pertenezca al eje  $Y$ .  
 Sugerencia: Observe el ejemplo dado en la Figura 10.7.

**Ejemplo 10.2.7**

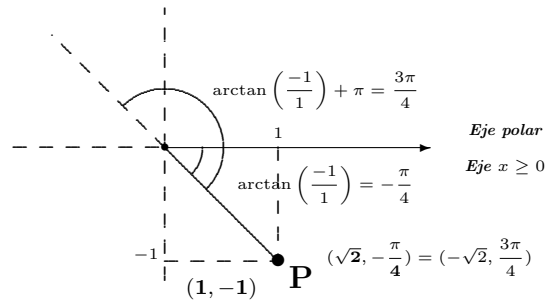


Figura 10.7: Punto  $P(x, y)$  en el cuarto cuadrante.

**Observación 10.2.8** *No olvide que en coordenadas polares la variable angular  $\theta$  debe expresarse en radianes.*

### 10.2.1. Circunferencias

**Ejemplo 10.2.9** *Considérese la ecuación  $r = 3,5 \sin \theta$ .*

<sup>1</sup> Asignando a  $\theta$  valores a partir de cero, con incrementos sucesivos de  $\frac{\pi}{6}$  y calculando los

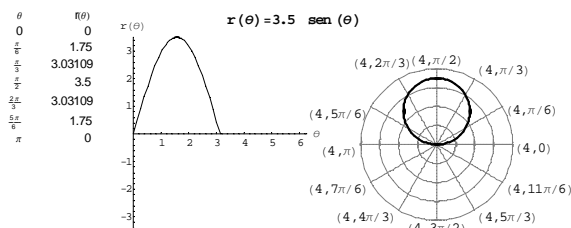


Figura 10.8: Representaciones cartesiana y polar de la función  $r(\theta) = 3,5 \sin \theta$ , con  $\theta \in [0, \pi]$ .

correspondientes valores de  $r$ , puede construirse la tabla “ $\theta, r(\theta)$ ” que se muestra en el lado izquierdo de la Figura 10.8. Los pares de valores enlistados en esta tabla pueden graficarse de dos formas. Si consideramos a cada par  $(r, \theta)$  como las coordenadas cartesianas de un punto en el plano  $r, \theta$ , los puntos de nuestra tabla se representan sobre el gráfico de la senoide de ecuación (cartesiana)  $y = 3,5 \sin(x)$  ( $r(\theta) = 3,5 \sin(\theta)$ ), que se muestra en la parte central de la Figura 10.8.

Si en cambio a cada par  $(r, \theta)$  lo consideramos como las coordenadas polares de un punto en el plano polar, los puntos de nuestra tabla se representan sobre la circunferencia que se ilustra a la derecha de la Figura 10.8.

**Observación 10.2.10** *Nótese que en la última tabla de la Figura 10.9 hay 13 pares, pero sólo se marcan seis puntos en la figura correspondiente. Esto se debe a que los pares  $(r, \theta)$  repiten a los precedentes a partir de  $\theta = \pi$ . Por ejemplo  $(-1,75, \frac{7\pi}{6})$  y  $(1,75, \frac{\pi}{6})$  representan el mismo punto.*

**Ejemplo 10.2.11** *Teniendo en cuenta la observación 10.2.10 analice cada uno de los marcos congelados de la animación de  $r(\theta) = 3,5 \sin \theta$  (ver Figura 10.9).*

<sup>1</sup> “Animaciones constructivas : Una propuesta visual para graficar curvas planas en coordenadas polares. (Circunferencias, espirales, cardiodes, caracoles, rosas) ”

Autores: Niel, B. I. y Chiapina M.

Presentado en la XX Reunión de Educación Matemática. U.N.C. (Córdoba, Sept. 1.997). Unión Matemática Argentina, Noticiero Número Extraordinario Año 1.997, pág. 176, R.E.M. (Nivel Universitario)

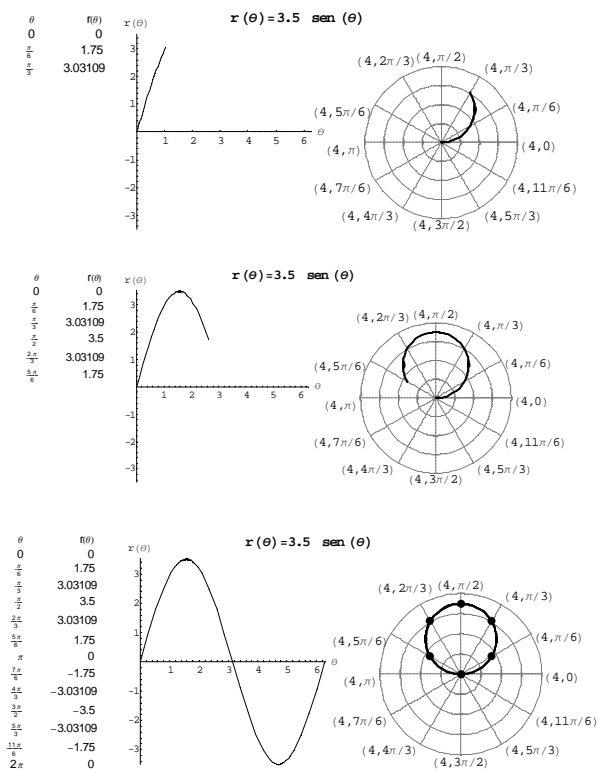


Figura 10.9: Tres cuadros de la animación  $r(\theta) = 3,5 \sin \theta$ .

### 10.2.2. Rosas

Las ecuaciones de la forma

$$r = a \sin n\theta \tag{10.2}$$

$$r = a \cos n\theta \tag{10.3}$$

representan curvas con formas esquemáticas de *flor*, llamadas *rosas*. La rosa tiene  $n$  pétalos o lazos uniformemente espaciados si  $n$  es impar (ver Figura 10.10) y  $2n$  pétalos que se agrupan en  $n$  pares formados por dos pétalos simétricos uno del otro respecto del polo, si  $n$  es par (ver Figura 10.11). La orientación de la rosa en relación con el eje polar depende del signo de la constante  $a$  y del hecho que se trate de la ecuación (10.2) o la (10.3). Si  $n = 1$  en (10.2) o en (10.3) entonces se obtiene la ecuación de una circunferencia, la cual podría considerarse como una rosa de un sólo pétalo.

10.2. Coordenadas polares de un punto en el plano

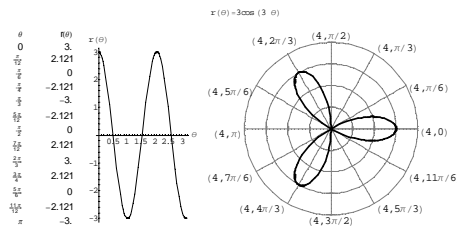


Figura 10.10:  $r(\theta) = 3 \cdot \cos 3\theta$ .

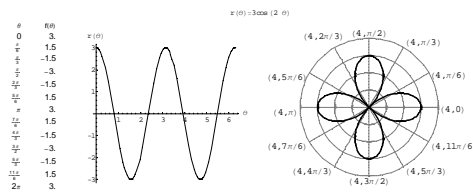


Figura 10.11:  $r(\theta) = 3 \cdot \cos 2\theta$ .

**Ejemplo 10.2.12** *Trazado de la curva  $r = 3 \sin 2\theta$  (ver Figura 10.12).*

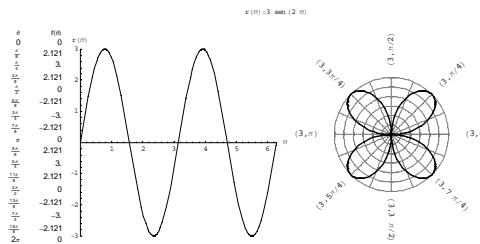


Figura 10.12:  $r(\theta) = 3 \cdot \sin 2\theta$ .

## Capítulo 10. Sistema de Coordenadas Polares

En muchos casos es posible agilizar el trazado de los gráficos en polares si observamos la variación de los valores  $r(\theta)$  en función de la variación de  $\theta$  y eventuales simetrías. Por ejemplo, en el caso de la función  $r(\theta) = 3 \sin(2\theta)$ , cuando  $\theta$  varíe desde 0 hasta  $\frac{\pi}{4}$  resulta que  $2\theta$  se incrementa desde 0 hasta  $\frac{\pi}{2}$  y consecuentemente  $r(\theta) = 3 \sin(2\theta)$  se incrementa desde 0 hasta 3, (Ver Figura 10.13).

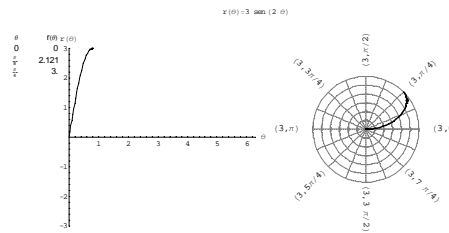


Figura 10.13:  $r(\theta) = 3 \cdot \sin 2\theta$  con  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ .

Continuando con el análisis y usando el mismo criterio notamos que cuando  $\theta$  se incrementa de  $\frac{\pi}{4}$  hasta  $\frac{\pi}{2}$  resulta que  $r(\theta) = 3 \sin 2\theta$  decrece desde 3 hasta 0, con lo cual se cierra el lazo o pétalo, (ver Figura 10.14).

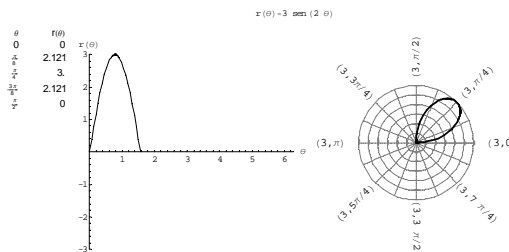


Figura 10.14:  $r(\theta) = 3 \cdot \sin 2\theta$  con  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

Conviene notar que debido a que tanto el crecimiento como el decrecimiento de la función seno son completamente simétricos, en el sentido que si observamos el gráfico de la función  $y = \sin(x)$ , el arco creciente es completamente simétrico al arco decreciente.

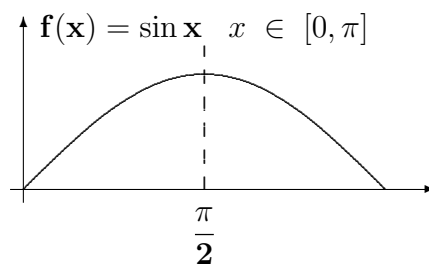


Figura 10.15: Simetría del crecimiento y decrecimiento de  $f(x) = \sin(x)$ .

Resulta entonces que, cuando  $\theta$  varíe desde 0 hasta  $\frac{\pi}{4}$   $r(\theta) = 3 \sin(2\theta)$  crecerá de 0 a 3 de manera completamente simétrica a su decrecimiento de 3 a 0 cuando  $\theta$  varíe desde  $\frac{\pi}{4}$  hasta  $\frac{\pi}{2}$ . Esto hace que el primer pétalo resulte simétrico con respecto a la semirecta  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Observar esta característica facilita el trazado de la parte restante del gráfico.

Si continuamos con el incremento de  $\theta$ , pasando de  $\frac{\pi}{2}$  a  $\frac{3\pi}{4}$ , los correspondientes valores de  $r(\theta) = 3 \sin(2\theta)$  decrecen desde 0 hasta  $-3$ , dado que  $2\theta$  pasa de  $\pi$  a  $\frac{3\pi}{2}$ . En este punto de nuestra construcción del gráfico debemos tomar en cuenta que, aún cuando los valores de  $\theta$  comprendidos entre  $\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{3\pi}{4}$  están en el segundo cuadrante, los correspondientes valores de  $r(\theta) = 3 \sin(2\theta)$  son negativos y en consecuencia los puntos  $(\theta, r(\theta))$  se ubican en el cuarto cuadrante (ver Figura 10.16).

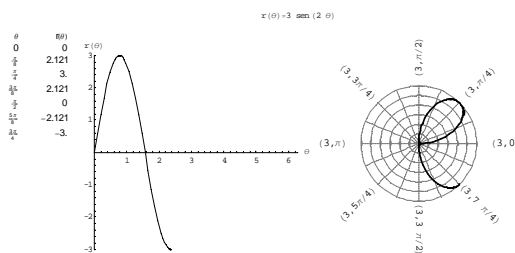


Figura 10.16:  $r(\theta) = 3 \cdot \sin 2\theta$  con  $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ .

Un nuevo incremento de  $\theta$ , pasando desde  $\frac{3\pi}{4}$  hasta  $\pi$  produce el crecimiento de  $r(\theta)$  desde  $-3$  hasta 0, con lo cual se cierra el segundo pétalo en el cuarto cuadrante (ver Figura 10.17).

## Capítulo 10. Sistema de Coordenadas Polares

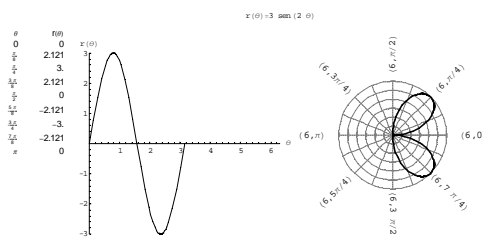


Figura 10.17:  $r(\theta) = 3 \cdot \sin 2\theta$  con  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Llegados a este grado de avance en el análisis y construcción del gráfico de la función dada, consideramos que el lector está en condiciones de concluir que cuando  $\theta$  varíe entre  $\pi$  y  $\frac{3\pi}{2}$ ,  $r(\theta)$  crece de 0 hasta 3 y luego decrece hasta 0, completando el tercer pétalo en el tercer cuadrante (ver Figura 10.19) y que, finalmente, la variación de  $\theta$  entre  $\frac{3\pi}{2}$  y  $\pi$  completa el cuarto pétalo en el segundo cuadrante (ver Figura 10.18).

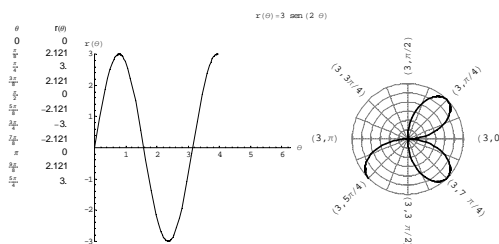


Figura 10.18:  $r(\theta) = 3 \cdot \sin 2\theta$  con  $0 \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$ .

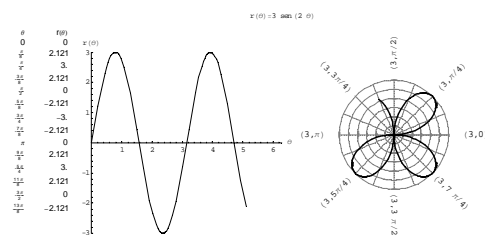


Figura 10.19:  $r(\theta) = 3 \cdot \sin 2\theta$  con  $0 \leq \theta \leq \frac{13\pi}{8}$ .

**Ejercicio 10.2.13** Efectúe un estudio análogo para trazar la gráfica de  $r(\theta) = 3 \cos 2\theta$ , ver Figura 10.10, pág. 389.



### 10.2.3. Cardioides y Limaços (Caracoles)

Las ecuaciones de la forma

$$r = a + b \sin \theta \quad \text{ó} \quad r = a - b \sin \theta \quad (10.4)$$

$$r = a + b \cos \theta \quad \text{ó} \quad r = a - b \cos \theta \quad (10.5)$$

en coordenadas polares producen curvas llamadas limaços <sup>2</sup>.

#### Mutaciones de caracoles sin rizo a cardioide, a caracol con un rizo y a circunferencia

En las siguientes representaciones gráficas mostraremos la forma en que varía el aspecto del gráfico de una función de la forma  $r(\theta) = a + \cos(\theta)$  (ver Figura 10.36), al variar el parámetro  $a$ . Este es un caso particular del más general  $r(\theta) = a + b \cos(\theta)$ , pero su estudio es más simple y resulta esclarecedor del caso general<sup>3</sup>. Veremos que:

- Si  $a > 1$  el gráfico es un caracol sin rizo que no contiene al polo (la curva no se corta a si misma) (ver Figura 10.20).

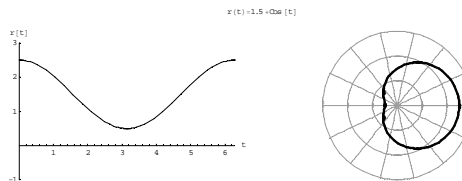


Figura 10.20:  $r(\theta) = 1,5 + \cos \theta$ .

- Si  $a = 1$  el gráfico es una cardioide (forma esquemática de corazón, con un punto anguloso en el polo) (ver Figura 10.21).
- Si  $a < 1$  el gráfico es un caracol con rizo (la curva se corta a si misma en el polo) (ver Figura 10.22).

<sup>2</sup>del vocablo latino “limax” que denota una criatura con forma de caracol.

<sup>3</sup>Notebook “polares2.nb: Animación con el software Mathematica 3.0, que visualiza dicha mutación con mayor número de imágenes.”

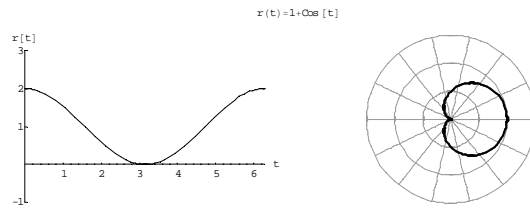


Figura 10.21:  $r(\theta) = 1 + \cos \theta$ .

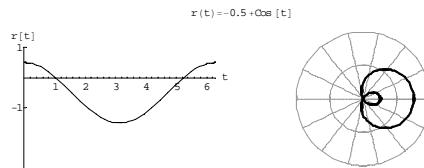


Figura 10.22:  $r(\theta) = 0,5 + \cos \theta$ .

- Si  $a = 0$  el gráfico es una circunferencia (ver Figura 10.23).

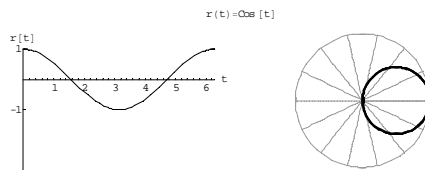


Figura 10.23:  $r(\theta) = 0. + \cos \theta$ .

Es interesante en este caso analizar que ocurre cuando  $a$  tiende a cero y también observar que cuando  $a = 0$  basta que la variable  $\theta$  tome los valores entre  $0$  y  $\pi$  para completar el gráfico, mientras que en todos los demás casos es necesario que  $\theta$  asuma todos los valores de  $[0, 2\pi)$  para completar el gráfico (ver Figuras 10.24 y 10.25).

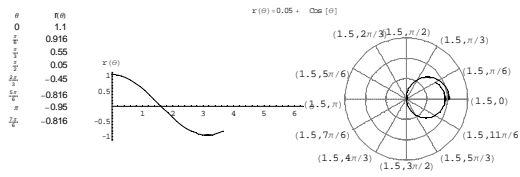


Figura 10.24: Gráfica de  $r(\theta) = 0,05 + \cos \theta$ ,  $\theta \in [0, \frac{7\pi}{6}]$ , caracol con un rizo, incompleto y con un valor de  $a$  pequeño.

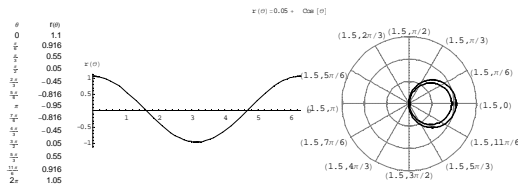
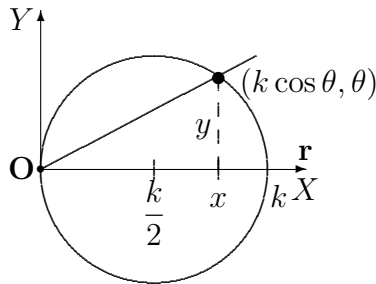


Figura 10.25: Caracol con un rizo que muta hacia la circunferencia  $r(\theta) = \cos \theta$ , pero recorrida dos veces, cuando  $a \rightarrow 0$ .



Sabemos que el gráfico en polares de la curva es de la forma que se muestra en la figura. En tal situación, será una circunferencia si y sólo si el centro es el punto  $(\frac{k}{2}, 0)$  y la distancia al mismo de un punto cualquiera del gráfico  $(k \cos \theta, \theta)$ , vale  $\frac{k}{2}$ .

Figura 10.26: Representación en polares de  $r(\theta) = k \cos \theta$ , con  $k > 0$ .

Comprobaremos ahora que efectivamente el gráfico de  $r(\theta) = k \cos \theta$ ,  $k > 0$  es una circunferencia en el plano. Esto es efectivamente así, pues si expresamos los puntos en polares por sus coordenadas cartesianas se tiene que  $\begin{cases} x = k \cos \theta \cos \theta = k \cos^2 \theta \\ y = k \cos \theta \sin \theta \end{cases}$  son las coordenadas cartesianas del punto  $(k \cos \theta, \theta)$  y  $\begin{cases} x_0 = \frac{k}{2} \\ y_0 = 0 \end{cases}$  las del centro  $(\frac{k}{2}, 0)$ , luego  $d^2((k \cos \theta, \theta), (\frac{k}{2}, 0)) = (k \cos^2 \theta - \frac{k}{2})^2 + (k \cos \theta \sin \theta - 0)^2 = \frac{k^2}{4}$ , con lo cual se completa la verificación de que el gráfico es una circunferencia.

**Ejemplo 10.2.14** Analice la situación si  $r(\theta) = k \cos \theta$  pero  $k < 0$ .

## Capítulo 10. Sistema de Coordenadas Polares

---

Luego de haber visto y analizado cada uno de los gráficos dados, hasta comprender el rol del parámetro  $a$ , seguramente el lector estará en óptimas condiciones para resolver el ejercicio siguiente.

**Ejemplo 10.2.15** Sin recurrir a una tabulación de valores esboce, trace aproximadamente, los gráficos de las siguientes funciones  $r(\theta) = -1,5 + \cos \theta$ ,  $r(\theta) = -1 + \cos \theta$  y de  $r = -0,5 + \cos \theta$ .

**Ejemplo 10.2.16** Gráficaremos en particular la curva  $r = 3 + 2 \cos \theta$ .

Para ello comencemos dibujando la gráfica de  $r(\theta) = 3 + 2 \cos \theta$  en coordenadas rectangulares sobre el intervalo  $[0, 2\pi]$  para emplearla como referencia (ver Figura 10.27).

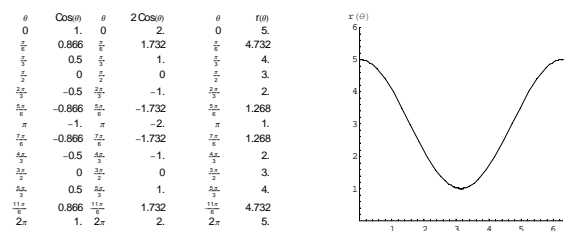


Figura 10.27:  $r(\theta) = 3 + 2 \cos \theta$ , en coordenadas cartesianas.

Obsérvese que, en este caso, se tiene  $r(\theta) = 3 + 2 \cos \theta > 0$  para todos los valores de  $\theta$ . Además, el máximo valor de  $r$  es 5 (que corresponde a  $\cos \theta = 1$ , válido para  $\theta = 0$  y  $\theta = 2\pi$ ) y el valor mínimo de  $r$  es 1 (que corresponde a  $\cos \theta = -1$ ,  $\theta = \pi$ .) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $r$ , que se pueden observar directamente en la Figura 10.27 se resumen en la siguiente tabla 10.1, en la cual se aprecia además la simetría entre los arcos creciente y decreciente. Este hecho sugiere que la semirecta  $\theta = \pi$  es eje de simetría del gráfico en polares. En las Figuras 10.28 y 10.29, se muestra cómo se

$\theta$	$\cos \theta$	$r(\theta) = 3 + 2 \cos \theta$
$[0, \frac{\pi}{2}]$	decrece desde 1 hasta 0	decrece desde 5 hasta 3
$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	decrece desde 0 hasta -1	decrece desde 3 hasta 1
$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	crece desde -1 hasta 0	crece desde 1 hasta 3
$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$	crece desde 0 hasta 1	crece desde 3 hasta 5

Cuadro 10.1: Intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $r(\theta) = 3 + 2 \cos \theta$ .

construye la gráfica de  $r(\theta) = 3 + 2 \cos \theta$  en base a toda la información ya recopilada.

**Observación 10.2.17** *Teniendo en cuenta la simetría del gráfico cartesiano de  $r(\theta) = 3 + 2 \cos \theta$  (Ver Figura 10.27, derecha y Figura 10.29, izquierda), el arco decreciente es simétrico al creciente respecto de la recta  $x = \pi$ , resulta que los valores de  $3 + 2 \cos \theta$  decrecerán desde 5 a 1, cuando  $\theta$  varíe desde 0 hasta  $\pi$ , de manera simétrica a como crecerán desde 1 hasta 5 cuando  $\theta$  varíe entre  $\pi$  y  $2\pi$ .*

*Si ahora pensamos la situación en el plano polar concluimos que la figura que resulte cuando  $\theta$  varíe entre 0 y  $\pi$  se reproduce simétricamente cuando  $\theta$  varíe entre  $\pi$  y  $2\pi$ . En otras palabras, en el plano polar el gráfico es simétrico con respecto a la recta que contiene a la semirecta  $\theta = \pi$ . Ver Figura 10.29, derecha.*

La utilidad práctica de esta observación es que para obtener el gráfico completo basta obtener la mitad, correspondiente a la variación de  $\theta$  sólo entre 0 y  $\pi$ .

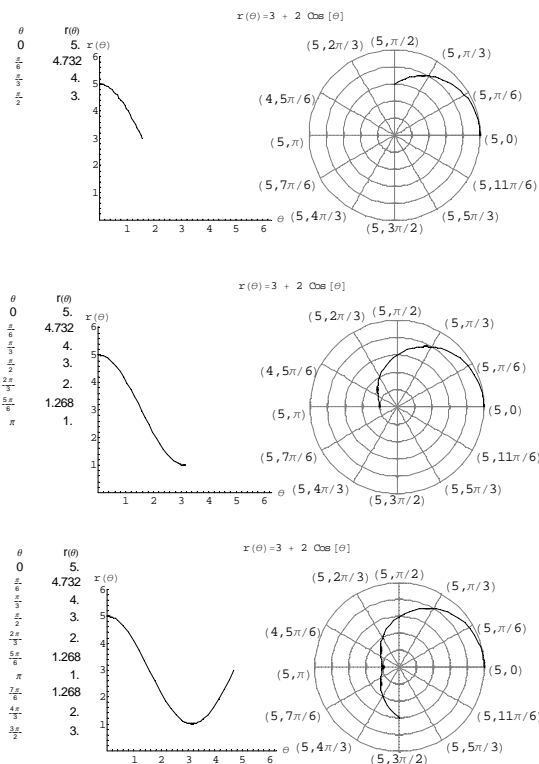


Figura 10.28: Gráficas de  $r(\theta) = 3 + 2 \cos \theta$  con  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $[0, \pi]$  y  $[0, \frac{3\pi}{2}]$ .

**Ejemplo 10.2.18** Trazado de la curva  $r = 2 - 2 \cos \theta$  en coordenadas polares.

Una ecuación de la forma (10.5) con  $a = b$  representa una cardioide. Puesto que el coseno es una función par, la ecuación no se altera cuando  $\theta$  se sustituye por  $-\theta$ ; por tanto, la cardioide es simétrica respecto al eje polar. Siendo este el caso, es posible obtener la curva completa trazando primero la parte de la cardioide que está “arriba” del eje polar y después rotarla alrededor de dicho eje polar, para completar el gráfico.

Conforme  $\theta$  varía de 0 a  $\pi$ ,  $\cos \theta$  decrece uniformemente de 1 a  $-1$ , y  $a - a \cos \theta$  incrementa consecuentemente de 0 a  $a$  (Tabla 10.2). Es decir, cuando  $\theta$  varía de 0 a  $\pi$ , el valor de  $r = a(1 - \cos \theta)$  se incrementará desde el valor inicial  $r = 0$  hasta el valor final  $r = 2a$  (ver Figura 10.30, caso  $a = 2$ ).

Al girar la curva de la Figura 10.30 sobre el eje  $\theta = \pi$  se obtiene la cardioide completa  $r(\theta) = 2(1 - \cos \theta)$ , Figura 10.31.

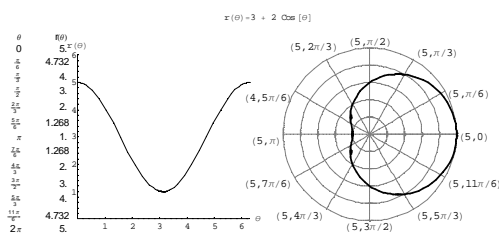


Figura 10.29: Gráfica de  $r(\theta) = 3 + 2 \cos \theta$  con  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$r(\theta)$	0	$a - \frac{\sqrt{3}a}{2}$	$\frac{a}{2}$	$a$	$\frac{3a}{2}$	$a + \frac{\sqrt{3}a}{2}$	$2a$	$a + \frac{\sqrt{3}a}{2}$	$\frac{3a}{2}$	$a$	$\frac{a}{2}$	$a - \frac{\sqrt{3}a}{2}$	0

Cuadro 10.2: Información para construir la gráfica de la cardioide  $r(\theta) = a(1 - \cos \theta)$ .

**Ejemplo 10.2.19** *Construcción paso a paso de la gráfica del caracol con rizo:  $r = 1 - 2 \sin \theta$ .*

$\theta$	$\sin \theta$	$r(\theta) = 1 - 2 \sin \theta$	cuadrante
$[0, \frac{\pi}{6}]$	crece desde 0 hasta 0,5	decrece desde 1 hasta 0	<i>I</i>
$[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$	crece desde 0,5 hasta 1	decrece desde 0 hasta -1	<i>III</i>
$[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$	decrece desde 1 hasta 0,5	crece desde -1 hasta 0	<i>IV</i>
$[\frac{5\pi}{6}, \pi]$	decrece desde 0,5 hasta 0.	crece desde 0 hasta 1	<i>II</i>
$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	decrece desde 0 hasta -1	crece desde 1 hasta 3	<i>III</i>
$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$	crece desde -1 hasta 0	decrece desde 3 hasta 1	<i>IV</i>

Cuadro 10.3: Información recopilada para graficar  $r(\theta) = 1 - 2 \sin \theta$ .

Comencemos por dibujar la gráfica de  $r(\theta) = 1 - 2 \sin \theta$  en coordenadas rectangulares (ver Figura 10.32).

Ahora estamos en condiciones de graficar la curva paso a paso, por intervalos (ver Figuras 10.33, 10.34, y 10.35), teniendo en cuenta la información recopilada en la tabla 10.3, las simetrías que presenta la curva de la Figura 10.32 y los datos de la Figura 10.32.

# Capítulo 10. Sistema de Coordenadas Polares

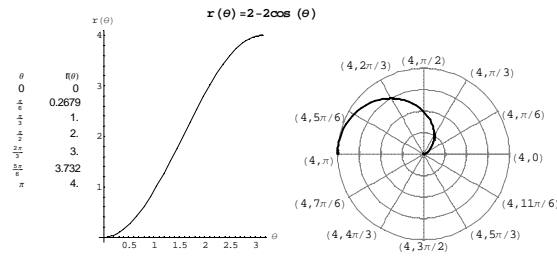


Figura 10.30:  $r(\theta) = 2 - 2 \cos \theta$ , con  $x \in [0, \pi]$ .

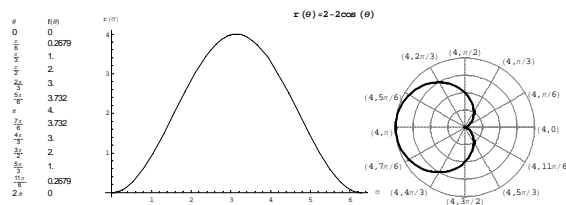


Figura 10.31:  $r(\theta) = 2 - 2 \cos \theta$ , con  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

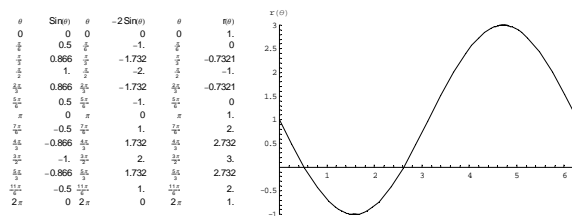


Figura 10.32: Representación cartesiana  $r(\theta) = 1 - 2 \sin \theta$  con  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

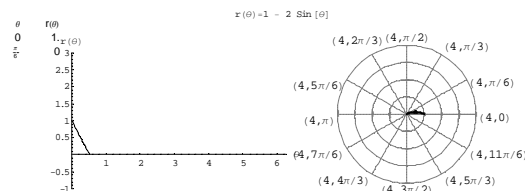


Figura 10.33: Gráfica de  $r(\theta) = 1 - 2 \sin \theta$  con  $\theta \in [0, \frac{\pi}{6}]$ .



10.2. Coordenadas polares de un punto en el plano

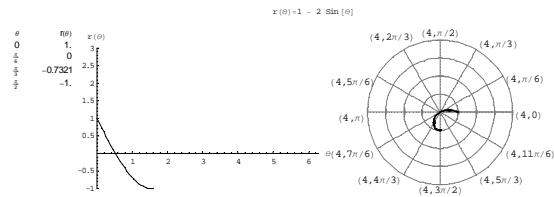


Figura 10.34: Gráfica de  $r(\theta) = 1 - 2 \sin \theta$  con  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

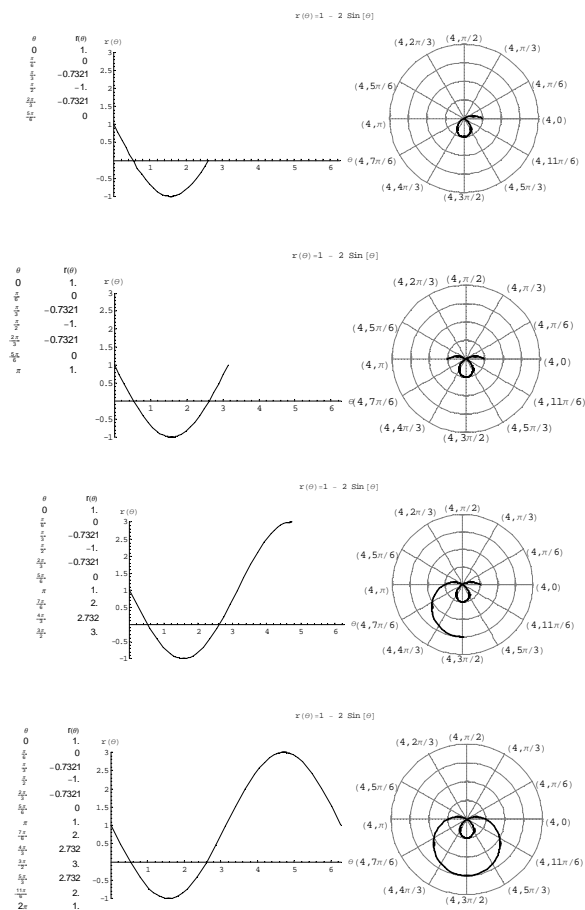


Figura 10.35: Gráficas de  $r(\theta) = 1 - 2 \sin \theta$  con  $\theta \in [0, \frac{5\pi}{6}]$ ,  $[0, \pi]$ ,  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  y  $[0, 2\pi]$ .

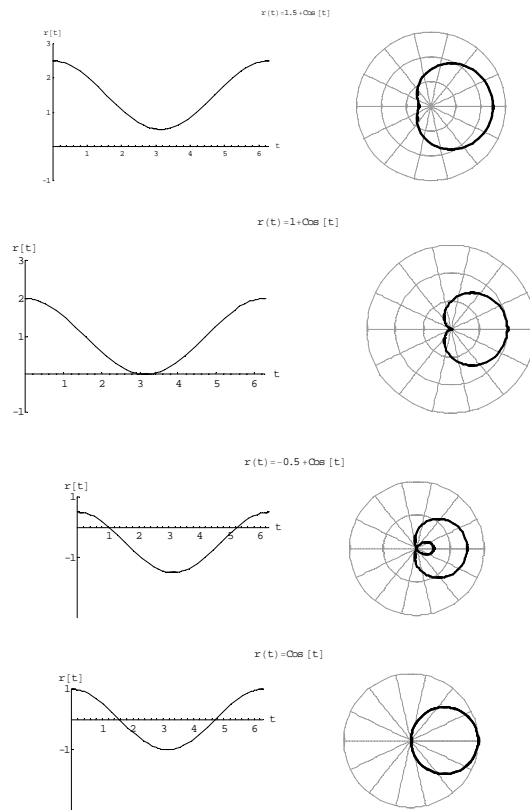


Figura 10.36: Mutaciones: Primera superior  $r(\theta) = 1,5 + \cos \theta$ , caracol sin rizo. Segunda  $r(\theta) = 1 + \cos \theta$  cardioide. Tercera  $r(\theta) = 0,5 + \cos \theta$ , caracol con un rizo. Cuarta  $r(\theta) = 0 + \cos \theta$  circunferencia.

### 10.2.4. Observaciones que facilitan la construcción de gráficos en polares

Hemos visto que conocer el gráfico de una función  $r = r(\theta)$ , en el plano cartesiano, nos da información sobre características del gráfico de la misma pero en el plano polar. Recordemos que en coordenadas cartesianas el gráfico de  $\rho(\theta) = r(\theta - \theta_0)$  es el gráfico de  $r(\theta)$  desplazado paralelamente al eje de las abscisas en  $|\theta_0|$ , hacia la derecha si  $\theta_0 > 0$  y hacia la izquierda si  $\theta_0 < 0$ . Esto se debe a que la función  $\rho$  toma en cada  $\theta$  el valor que  $r$  tomó en el punto  $\theta' = \theta - \theta_0$ , el cual está corrido  $|\theta_0|$  hacia la izquierda de  $\theta$  si  $\theta_0 > 0$  (ver Figura 10.37).

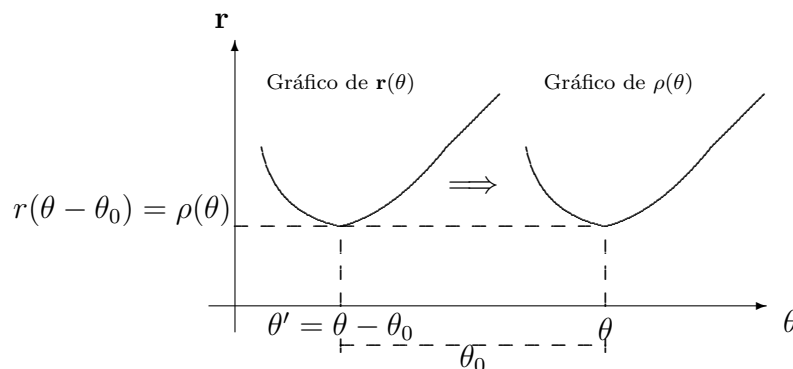


Figura 10.37: Corrimiento horizontal de un gráfico en el plano cartesiano

También puede pensarse que al cambiar de  $\theta$  a  $\theta - \theta_0$  hemos hecho un cambio de coordenadas, pasando de los ejes  $\theta, r$  a los ejes  $\theta', \rho$  donde  $\theta' = \theta - \theta_0$  y  $\rho = r$  y entonces el eje  $\theta'$  tiene su origen en el punto  $\theta_0$  del eje  $\theta$ .

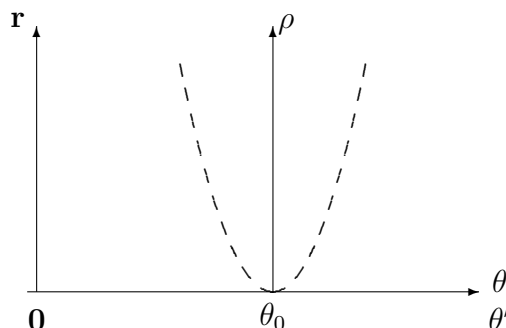


Figura 10.38: Cambio de coordenadas  $\theta' = \theta - \theta_0, \rho = r$ .

La parábola indicada en la Figura 10.38 tiene ecuación  $\rho = (\theta')^2$  en los ejes  $\theta', \rho$  pero

## Capítulo 10. Sistema de Coordenadas Polares

$r = (\theta - \theta_0)^2$  en los ejes  $\theta, r$ .

En síntesis, en coordenadas cartesianas, reemplazar  $\theta$  por  $\theta - \theta_0$  ( $\theta_0 > 0$ ) significa desplazar el eje de las abscisas  $\theta_0$  hacia la derecha y por lo tanto el gráfico de la función  $r(\theta - \theta_0)$  es el de  $r(\theta)$  desplazado  $\theta_0$  hacia la derecha.

El mismo análisis, pero en el plano polar, nos conduce a que la función  $\rho$  ( $\rho(\theta) = r(\theta - \theta_0)$ ) toma en cada valor angular  $\theta$  -es decir, sobre la semirecta que forma el ángulo  $\theta$  con el eje polar- el valor que  $r$  tomó en el valor angular  $\theta - \theta_0$ , es decir en la semirecta que forma el ángulo  $\theta - \theta_0$  con el eje polar y que es la anterior rotada  $\theta_0$  en sentido horario.

Por lo tanto el punto  $(\rho(\theta), \theta)$  se obtiene *rotando* el punto  $(r(\theta - \theta_0), \theta - \theta_0)$  el ángulo  $\theta_0$  en sentido *antihorario* (ver figura 10.39).

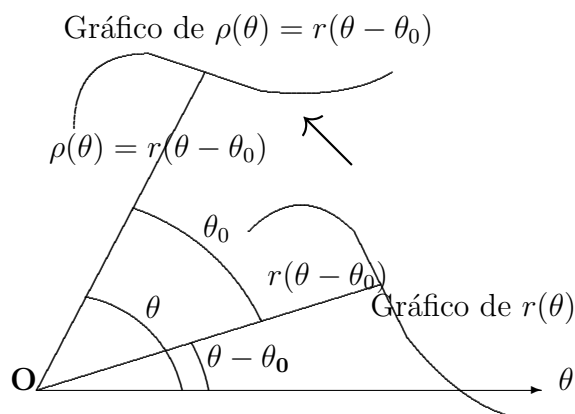


Figura 10.39: Rotación de gráfico en el plano polar

Entonces, en el plano polar, el efecto de reemplazar  $\theta$  por  $\theta - \theta_0$  ( $\theta_0 > 0$ ) es el de rotar un ángulo  $\theta_0$  en sentido antihorario.

**Ejemplo 10.2.20** *Gráficas de caracoles con un rizo y con diferentes ángulos de fase,*  
 $r(\theta) = a - b \cos(\theta - \theta_0)$ .

Consideremos el caso particular  $r(\theta) = 1 - 2 \cos(\theta - \theta_0)$ .

Conocemos ya el gráfico de  $r(\theta) = 1 - 2 \cos \theta$ , que aparece en primer lugar en la Figura 10.40 y que corresponde al ángulo de fase  $\theta_0 = 0$ . A partir de allí, tomando en cuenta las consideraciones previas a este ejemplo, es claro que los gráficos que siguen al primero corresponden respectivamente a los ángulos de fase  $\theta_0 = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\theta_0 = \pi$  y  $\theta_0 = \frac{5\pi}{3}$ .

10.2. Coordenadas polares de un punto en el plano

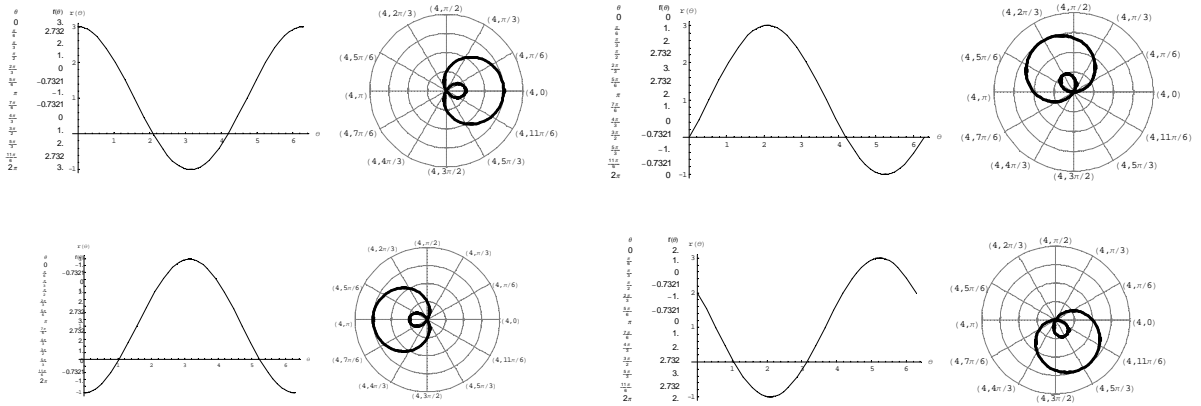


Figura 10.40: Gráficos de  $r(\theta) = 1 - 2 \cos(\theta - \theta_0)$  cuando  $\theta_0 = 0, \frac{2\pi}{3}, \pi$  y  $\frac{5\pi}{3}$ .

**Ejemplo 10.2.21** Analice el gráfico de  $r(\theta) = 1 - b \cos(\theta - \theta_0)$  para distintos valores de  $b$  y conjeture sobre el caso general  $r(\theta) = a - b \cos \theta$ .

Teniendo en cuenta la identidad  $\sin \theta = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$  analice el gráfico de  $r(\theta) = a - b \sin \theta$ .

## 10.3. Familias de curvas paramétricas: Concoides de Nicomedes

**Ejemplo 10.3.1** *Investigue la familia de curvas con ecuaciones paramétricas*

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = a \operatorname{tg} t + \sin t \end{cases} .$$

Sugerencia: Este ejercicio está propuesto como [Ejemplo 8](#) página 625 de [Stewart, J. (2008)]. Consideramos, que con los conocimientos adquiridos, el estudiante, no tendrá demasiados inconvenientes para dilucidar las bellas curvas planas con sus características distintivas al hacer variar  $a$  en el conjunto de los siguientes racionales  $\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$ . En la pág. 27 los invitamos a descubrirlas, dicha ilustración corresponde al caso  $a = 0$ , la circunferencia y a la concoide  $a = -\frac{1}{4}$ . Hemos propuesto, una interfase para la obtención de estas gráficas, portables a un Laboratorio de Matemática, que permiten su visualización, ver Cuadro 13.10, 495. Nuestra diferencia radica, en que aparecen marcos iterativos constructivos, que constan de tres representaciones cartesianas simultáneas, en un mismo cuadro, a saber:  $x(t)$  vs "t",  $y(t)$  vs "t" ( $x(t)$  vs  $y(t)$ ), con la posibilidad de variar  $a$ . Le proponemos al estudiante, indagar acerca de Nicomedes, en honor a quién, si  $a \neq 0$ , estas curvas planas son reconocidas como "concoides de Nicomedes". Ver pp. 565-573.

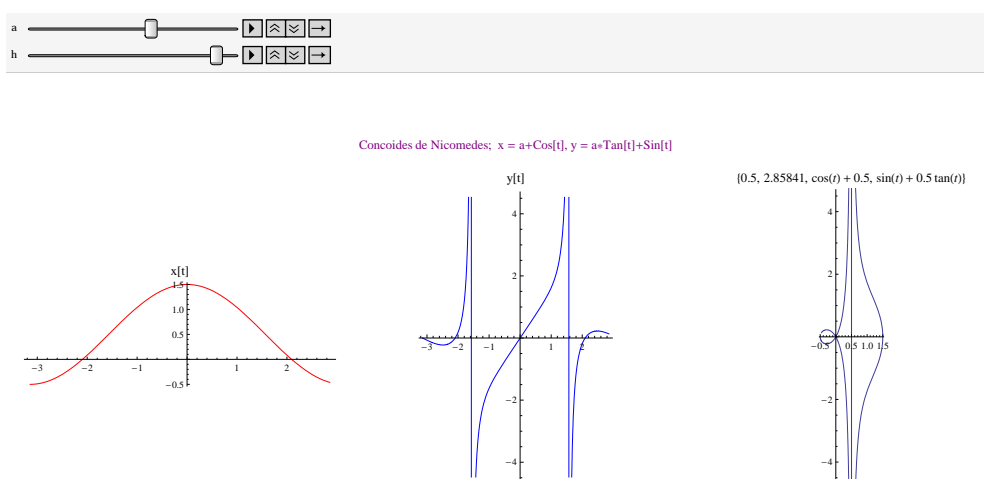


Figura 10.41: Concoide de Nicomedes  $a = \frac{1}{2}$ .

## Parte XI

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias





# Capítulo 11

## Antiderivación y E.D.O. simples

Se utilizará el acrónimo E.D.O. para simbolizar las ecuaciones diferenciales ordinarias que se resolverán con procesos de antiderivación sencillos y conceptos asequibles en el contexto del cálculo diferencial e integral de una variable real.

## 11.1. Crecimiento y/o decrecimiento en poblaciona- les

Teniendo en cuenta que la velocidad de crecimiento de una población depende del número de individuos de la especie  $N(t)$  en el instante  $t$ , a continuación se propone analizar diferentes modelos para una variación poblacional, e interpretar los mismos haciendo uso de los conceptos adquiridos. En primer lugar se utilizará la información suministrada a partir del uso de la derivación, e.g. la propuesta del TP N  $\doteq$  4 en la pág. 92, y posteriormente se precisarán los estudios mediante técnicas de antiderivación y/o integración. En este compendio elemental dedicado a un potencial y promisorio ingeniero, enfatizaremos aspectos introductorios de procesos regidos por ecuaciones diferenciales, generalmente integrables, mediante separación de variables. El alumno ha esta altura del semestre ya se halla consustanciado con vectores en el plano, desde su aprendizaje en el curso simultáneo de *Álgebra y Geometría* razón por la cual ante de embarcarnos en mayores detalles, dedicaremos un párrafo a la interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales y de sus soluciones. Obviamente, una vez más en casos muy simples, en general conocidos como sistemas autónomos (11.2), en los  $f(t, y)$  de (11.1) solamente depende de la variable independiente.

Sea la ecuación diferencial de primer orden (11.1)

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (11.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad (11.2)$$

Las soluciones de (11.1) y (11.2) serán en principio funciones diferenciables  $y = \phi(t)$  e  $y = \tilde{\phi}(t)$  que satisfagan respectivamente,  $\frac{d\phi(t)}{dt} = f(t, \phi(t))$  e  $\frac{d\tilde{\phi}(t)}{dt} = f(\tilde{\phi}(t))$ , cuyas representaciones gráficas yacerán en el plano  $(t, y)$  o en subregiones del mismo. Desde un punto de vista geométrico, la ecuación diferencial (11.1) establece que, en cada punto  $(t_*, y_*)$  la pendiente  $\frac{dy}{dt}$  de la solución buscada, en dicho punto específico es  $f(t_*, y_*)$ . Situación representable mediante un segmento lineal dirigido ubicado en el mencionado

punto e inclinado según lo indica el valor numérico  $f(t_*, y_*)$ . El conjunto de la totalidad de tales segmentos dirigidos, vectores del plano, es denominado en el mundo de las ecuaciones diferenciales como “Campo de direcciones” asociable a (11.1). Mientras, que cualquiera de nosotros, nos aburriríamos en dibujar los mencionados segmentos, afortunadamente esta es una tarea que las computadoras hacen de manera eficiente y con suma rapidez. Debemos tener presente, que el campo de direcciones dibujado en una determinada subregión da una información cualitativa respecto de las soluciones que resuelven la E.D.O.<sup>1</sup> Este es el momento de destacar que los diferentes cómputos realizados por las computadoras en el estudio de las ecuaciones diferenciales es extremadamente valioso y en muchos casos insustituible. Los alumnos de cualquier ingeniería lo confirmarán, cuando en semestres venideros asistan a cursos de Métodos Numéricos y Algoritmos Numéricos desarrollados para resolver Ecuaciones Diferencias y Sistemas de Ecuaciones Diferenciales. Por ejemplo, el software Mathematica utiliza el comando DSolve[eqn,y,x] para resolver una ecuación diferencial de la función  $y$ , utilizando a  $x$  como la variable independiente, Ver Cuadro 13.11, de la pág. 497. En particular, DSolve[y'[x] == y[x], y[x], x] e DSolve[y'[x] == -y[x], y[x], x], hace que el software devuelva como respuesta  $\{\{y[x] - > e^x C[1]\}\}$  y  $\{\{y[x] - > e^{-x} C[1]\}\}$ , le proponemos al estudiante, interpretar estas respuestas y asociarlas a los campos de direcciones bosquejados en la Figura 11.1. Simplemente, nuestro objetivo, en el presente compendio es estimular al estudiante ingresante al fabuloso mundo de los procesos y sistema, los que normalmente incluyen alguna ecuación o algún sistema diferencial, por ello no seguiremos explayándonos en técnicas y herramientas numéricas, algorítmicas y/o teóricas disponibles para el tratamiento del inconmensurable mundo de las E.D.O.

**Observación 11.1.1** *Cabe aquí mencionar que el tratamiento de los modelos poblacionales haciendo uso del Cálculo Diferencial e Integral implica la no discretización de la cantidad o del número de individuos presentes en cada instante en un determinado habitat.*

---

<sup>1</sup>Acrónimo de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: E.D.O., que es equivalente al O.D.E.: Ordinary Differential Equation para los textos en inglés.

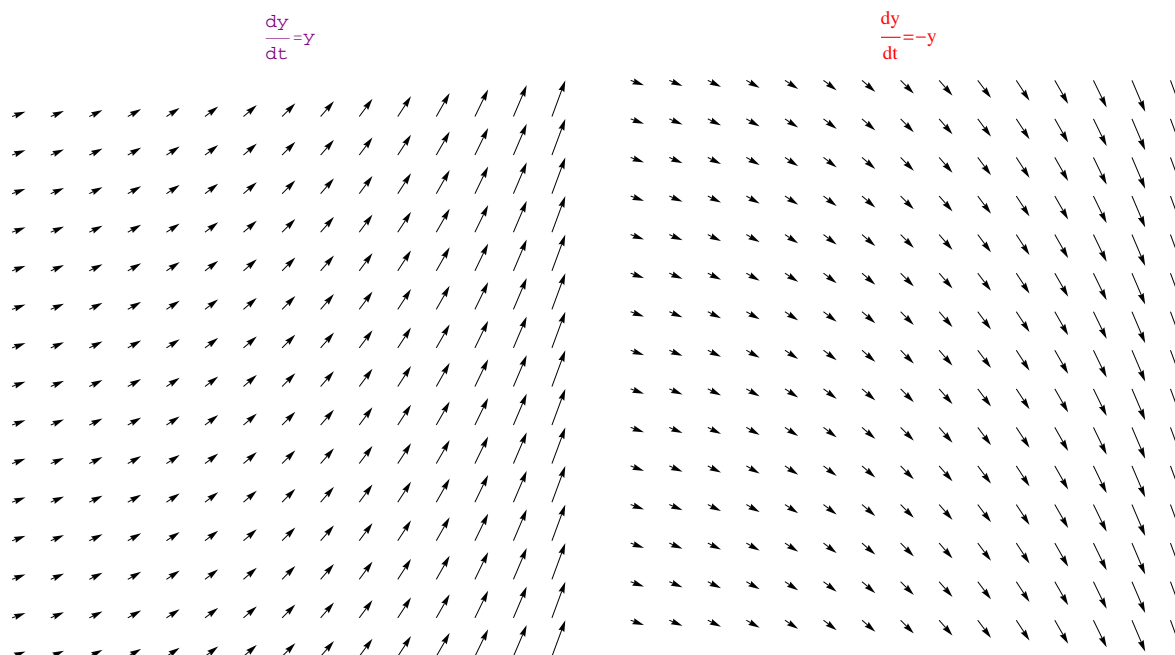


Figura 11.1: Campo de direcciones: The simplest model  $\frac{dy}{dt} = y$  e  $\frac{dy}{dt} = -y$ .

La Observación 11.1.1, en otras palabras está aseverando que las respuestas, soluciones e interpretaciones variacionales de las poblaciones serán provistas a partir de gráficas de curvas planas continuas en el semiplano  $(N(t), t)$ , cuando en realidad estos procesos requieren de las técnicas de las Dinámicas Discretas de Sistemas.

**Ejemplo 11.1.2** *La hipótesis más simple concerniente a la variación del número de integrantes de la población es suponer que la velocidad de cambio en el número de individuos es proporcional a la cantidad actual de seres vivientes, (Ejercicio propuesto en el TP N  $\doteq$  4, incisos i) y ii) de la pág. 92), i.e.,*

$$\frac{dy}{dt} = r y, \quad r > 0 \quad \text{ó} \quad r < 0. \tag{11.3}$$

(Ejercicio propuesto TP N  $\doteq$  4, incisos iii) y iv) de la pág. 93.) *Encuentre, una antiderivada y la familia de antiderivadas. Interprete el modelo para  $r > 0$  y para  $r < 0$ . (Figura 11.5).*

Normalmente un modelo más realista de la variación poblacional es el conocido como modelo logístico, cuya expresión está dada en la E.D.O. de primer orden a variables separables (11.4).

**Ejemplo 11.1.3** *La ecuación de crecimiento y/o decrecimiento logístico es la siguiente:*

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y, \quad r > 0 \quad K > 0. \quad (11.4)$$

*Encuentre una antiderivada y la familia de antiderivadas. Represente gráficamente dicha familia. Ver Figura 11.6 y Figura 11.7. Interprete este modelo poblacional.*

**Ejemplo 11.1.4** *Interprete la variación funcional del siguiente modelo en términos poblacionales o biológicos*

$$\frac{dy}{dt} = -r \left(1 - \frac{y}{T}\right) y.$$

*Halle su familia de antiderivadas utilizando la información del Ejercicio 11.1.3. Bosqueje cualitativamente sus soluciones.*

**Ejemplo 11.1.5** *Modelo de crecimiento logístico con umbral*

$$\frac{dy}{dt} = -r \left(1 - \frac{y}{T}\right) \left(1 - \frac{y}{K}\right) y, \quad r > 0 \quad K > 0 \quad 0 < T < K. \quad (11.5)$$

*Halle la familia de antiderivadas y bosqueje cualitativamente las mismas. Compare estas últimas soluciones o gráficas con las obtenidas en el Ejercicio 11.1.3, e intente una interpretación biológica del modelo.*

**Nota 11.1.6** *E.D.O. en Sistemas autónomos. Una clase importante de ecuaciones diferenciales de primer orden son aquellas en las cuales la variable independiente no aparece explícitamente. Tales ecuaciones diferenciales se reconocen como autónomas y tienen la siguiente forma:*

$$\frac{dy}{dt} = g(y) \quad (11.6)$$

Las dinámicas de poblaciones propuestas en (11.3), (11.4) y (11.5) cumplen con la definición de E.D.O. de (11.6), son por lo tanto sistemas autónomos del contexto del crecimiento o decrecimiento del número de individuos de una determinada especie. La ventaja de estos modelos es que pueden ser estudiados con las técnicas del cálculo diferencial e integral que hemos incluido en el presente compendio.

i) Velocidad de cambio proporcional al número de individuos existentes en cada instante, i.e. (11.3).

Sea  $N(t)$  la población de una determinada especie en el instante  $t$ . La hipótesis más simple para la variación de la población es que la velocidad de cambio del número de individuos en la población  $N(t)$  sea considerada proporcional al número de individuos que existen en la población en el instante  $t$ , esto es,

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} \propto N(t)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{dN(t)}{dt} \propto N(t)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = r N(t)$$

Generalmente la constante de proporcionalidad  $r$  se reconoce como la velocidad de crecimiento o decrecimiento del sistema, dependiendo si esta es positiva o negativa. Si  $r < 0$ , entonces el problema desde el punto de vista matemático coincide con el análisis de la desintegración radioactiva de un elemento químico radioactivo, e.g. el radio-carbono o C-14. Hemos llegado entonces al modelo (11.3). Suponemos primero  $r > 0$ , lo que implica que la población o el número de individuos crece a medida que transcurre el tiempo. Caso contrario, si  $r < 0$ , la población se encontraría en franca desaparición de sus integrantes, es decir en extinción.

En el caso del estudio de poblaciones, cabe mencionar que las soluciones, estarán contenidas en el cuadrante ( $N(t) \geq 0$ ,  $t = t_0 \geq 0$ ).

1. Estudio Cualitativo de la E.D.O. (11.3) con la Aplicación de las Técnicas del Cálculo Diferencial.

La ecuación diferencial (11.3) establece que  $N(t)$  es estrictamente creciente si  $r > 0$  y que resultará ser estrictamente decreciente si  $r < 0$ . Y que  $N_e(t) \equiv 0$  es la única solución de equilibrio, en cualquier caso. Procedemos, a calcular  $\frac{d^2 N(t)}{dt^2}$ , i.e.

$$\frac{d^2 N(t)}{dt^2} = r \frac{d N(t)}{dt} = r^2 N(t).$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden nos está comunicando que la concavidad de las curvas buscadas  $N(t)$  es hacia arriba, para el caso del análisis de una población  $N(t) > 0$ , independientemente del signo de la constante de la velocidad del cambio  $r$  de la población.

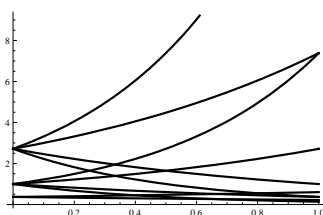


Figura 11.2:  $N(t) > 0$ : Crecimiento  $r > 0$ , decrecimiento  $r < 0$ . Cóncava.

2. Estudio de la E.D.O. (11.3) con la Aplicación de las Técnicas del Cálculo Integral.

Separando variables en (11.3), se tiene entonces para  $N(t) \neq 0$  que:

$$\frac{d N(t)}{N(t)} = r dt. \quad (11.7)$$

El paso algebraico anterior en los modelos poblacionales del los incisos i) a iv) del Ejercicio propuesto en el TP  $\cong$  4 92, i.e. E.D.O. (11.3), (11.4) y (11.5), comparten las siguientes reflexiones:

- a)  $N(t) = 0$ , para todo  $t$ , es solución de equilibrio, i.e.  $N(t + \Delta t) = N(t)$ . El eje temporal es solución de la ecuación dichas ecuaciones diferenciales de primer orden a variables separables. En otras palabras en estos modelos en los que  $N$  y  $t$  con sus respectivos diferenciales se pueden separar y la variación es proporcional, entre otras dependencias, al número de individuos presentes  $N(t) \equiv 0$  será siempre una solución de equilibrio.
- b) Entonces la interpretación de los resultados se limita a la región  $N(t) \geq 0$ ,  $t = t_0 \geq 0$ ,  $t_0$  instante de iniciación del seguimiento de los individuos. Generalmente con  $N_0 = N(t_0)$ , se representa al número inicial de integrantes de la población.

Antiderivando en cada variable (11.7), respecto de la variable dependiente  $\int \frac{dN}{N} = \ln |N(t)| + \tilde{C}$  y de la independiente  $\int dt = t + \bar{C}$ , resulta:

$$\ln |N(t)| = r t + C \tag{11.8}$$

Entonces  $|N(t)| = e^{(r t + C)}$ .

En el caso del estudio de crecimiento o decrecimiento de individuos  $N(t)$  es una cantidad entera positiva, si en cambio la variación de la  $y(t)$  en la E.D.O. (11.3) se correspondiera con algún otro fenómeno dicha cantidad pudiera tomar valores negativos, sentido más amplio en que las soluciones resultan ser:  $y(t) = e^{(k t + C)}$ , si  $y(t) > 0$ , mientras que es válida  $y(t) = -e^{(k t + C)}$ , si  $y(t) < 0$ . Y la solución de equilibrio  $y_e(t) \equiv 0$ , dividirá la búsqueda de soluciones continuas en los semiplanos  $y(t) > 0$  e  $y(t) < 0$ .

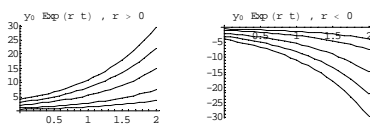


Figura 11.3:  $\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \propto y(t)$ , Soluciones  $y(t) = e^{(rt+C)}$ ,  $y(t) = -e^{(rt+C)}$   $r > 0$ .

Se propone al estudiante que compare las soluciones cualitativas graficadas en la Figura 11.5 con aquellas representadas en la Figura 11.4. Descubra la diferencia esencial en ambas presentaciones. Ayuda: Observe el “caption” de cada figura.

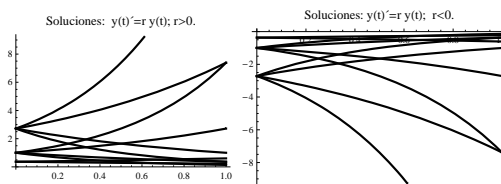


Figura 11.4:  $\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \propto y(t)$ , Soluciones  $y(t) = e^{(rt+C)}$ ,  $y(t) = -e^{(rt+C)}$  e  $y_e(t) \equiv 0$ .

Cabe mencionar que la solución de equilibrio del caso (11.7) puede ser de estabilidad asintótica o nó,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = +\infty$ , es decir el sistema se aleja



constantemente del estado de equilibrio,  $N(t) = 0$ , para  $r > 0$  o de estabilidad asintótica si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 0$ , es decir se aproxima a la solución de equilibrio  $\dot{N}(t) \equiv 0$  de la E.D.O. (11.3) en el análisis de la reproducción o procreación de una especie.

Resolver la ecuación diferencial (11.3) sujeta a la condición inicial

$$N(t = t_0) = N_0 \tag{11.9}$$

conduce a la determinación de un valor específico de la constante  $C$  en (11.8), ya que  $\ln|N(t_0)| = r t_0 + C$ , si el tratamiento lo reducimos al crecimiento o decrecimiento de poblaciones  $N_0$  simboliza el número inicial de individuos en la población,  $\ln N_0 - r t_0 = C$ . Finalmente, para el valor inicial dado en (11.9)

$$N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)} \tag{11.10}$$

Luego el *modelo matemático* consistente en el *problema de valor inicial* (11.3) y (11.9) con  $r > 0$  predice que la población crecerá exponencialmente con el tiempo, como lo muestra la Figura 11.5, pág. 417.

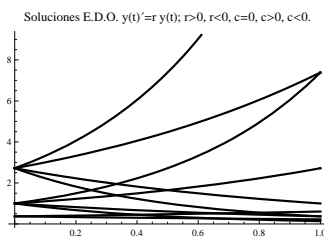


Figura 11.5:  $\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} \propto N(t) \rightarrow$  crecimiento o decrecimiento exponencial.

Bajo condiciones ideales la ecuación (11.7) ha sido observada como razonable para la interpretación de diversas poblaciones, al menos para un período de tiempo limitado e inicial. Se ha evidenciado, en general que en los habitat biológicos, las condiciones para el crecimiento exponencial no pueden continuar indefinidamente en el tiempo; eventualmente debido a limitaciones de espacio, por los suministros de nutrientes

necesarios, u otros recursos que naturalmente terminan reduciendo la velocidad de crecimiento y en consecuencia contribuirán a una finalización de todo crecimiento no limitado.

- ii) Es por ello que surgieron los modelos en los que la velocidad de cambio es proporcional al producto entre el número de individuos existentes  $N(t)$  en cada instante multiplicado por  $L - N(t)$ . Esta última cantidad explicita la diferencia entre el número máximo de individuos admisible  $L$  para la población específica analizada y el número de individuos existentes en un determinado instante. Esta interpretación da lugar a una E.D.O. de primer orden de variable separables de las reconocidas como del tipo “*ecuación diferencial logística*”.

$$\frac{d N(t)}{d t} = k N(t)(L - N(t)), \quad k > 0, \quad L > 0. \quad (11.11)$$

$$\frac{d N(t)}{d t} = k N(t)(L - N(t)), \quad k > 0, \quad L > 0, \quad N(t_0) = N_0. \quad (11.12)$$

Previamente a arribar a las conclusiones que podemos obtener desde el Cálculo Diferencial e Integral, proponemos otra interpretación ligeramente diferente de aquella que dio como resultado el modelo (11.11). Partiendo del modelo poblacional (11.3) y considerando  $r > 0$  y el estudio de una población por lo tanto la variable dependiente  $N(t)$  será positiva o nula, y una vez admitido que el crecimiento exponencial no representa la realidad para las especies cuando ha transcurrido suficiente tiempo para su evolución, pero que si es un buen modelo para los estadíos iniciales, entonces estamos buscando un modelo que cumpla con:

- I) Inicialmente  $\frac{d N(t)}{d t} \propto N(t)$ , es decir coincidir con el modelo (11.3) con  $r > 0$ .
- II) Transcurrido un tiempo suficientemente considerable el crecimiento debe disminuir y acercarse al número máximo admisible de integrantes.
- III) En caso de una iniciación con un número de individuos que superan el número admisible la población debe disminuir.

Obsérvese que  $\frac{dN(t)}{dt} = (r - aN(t))N(t)$ , con  $a > 0$   $\frac{dN(t)}{dt} = r(1 - \frac{a}{r}N(t))N(t) = r(1 - \frac{N(t)}{\frac{r}{a}})N(t) = r(1 - \frac{N(t)}{L})N(t)$  si  $\frac{r}{a} = L$ , que también puede reescribirse como  $\frac{dN(t)}{dt} = \frac{r}{L}(L - N)N = k(L - N)N$ , llegando al modelo (11.11). Lo esencial es que el factor lineal  $(r - aN(t))$  permite cumplir con las tres condiciones establecidas para impedir el crecimiento exponencial no acotado. Además  $r - aN(t)$ , con  $r$  y  $a$  constantes positivas es la función más sencilla que cumple las condiciones I), II) y III) por lo que en general se propone al lector determinar otras expresiones funcionales para definir un modelo más general al logístico, i.e. una E.D.O. de primer orden con la forma:

$$\frac{dN(t)}{dt} = f(N(t))N(t), \text{ con } f(N(t)) \text{ verificando I), II) y III).} \quad (11.13)$$

En las que resultará muy útil el cálculo y la información sobre  $N(t)$  asequibles desde la siguiente E.D.O. de segundo orden (11.14).

$$\frac{d^2N(t)}{dt^2} = f'(N(t))N(t) + f(N(t))\frac{dN(t)}{dt}. \quad (11.14)$$

1. Información que se obtiene a partir del Cálculo Diferencial.

- a) Soluciones de equilibrio:  $N(t) = 0$ ,  $N(t) = L$ . Por lo tanto, se divide el cuadrante  $(N(t) > 0, t > 0)$  en las subregiones abiertas  $0 < N(t) < L$  y  $N(t) > L$ , para la búsqueda de curvas planas continuas que resuelvan la E.D.O.
- b) Análisis del crecimiento y decrecimiento. Suponemos  $N(t) > 0$  y  $k > 0$ , luego desde (11.11) se deduce que el signo del término  $(L - N(t))$  es el que determina cuando  $N(t)$  crece y cuando decrece. Es decir, si  $0 < N(t) < L$ ,  $N(t)$  crece, mientras que si  $N(t) > L$ , resulta  $N(t)$  decreciente.
- c) Análisis de la concavidad de las soluciones a partir del signo del término de la derecha en la E.D.O. de segundo orden (11.15).

$$\frac{d^2N(t)}{dt^2} = k\frac{dN(t)}{dt}(L - N(t)) + kN(t)\frac{d(L - N(t))}{dt}$$

$$\frac{d^2N(t)}{dt^2} = k^2N(t)(L - N(t))^2 - kN(t)\frac{dN(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2 N(t)}{dt^2} = k^2 N(t)(L - N(t))(L - 2N(t)) \quad (11.15)$$

El estudio de signo de los factores lineales  $(L - N(t))$ ,  $(L - 2N(t))$  y de su multiplicación, determinan que las soluciones  $N(t)$  son cóncavas hacia arriba si  $0 < N(t) < \frac{L}{2}$ , cóncavas hacia abajo cuando  $\frac{L}{2} < N(t) < L$  y si  $N(t) > L$ .

- d) Conclusiones a partir de la información obtenida del Cálculo Diferencial. En muchas situaciones es suficiente tener la información cualitativa acerca de la solución  $y = N(t)$  de la ecuación (11.13), información completamente alcanzable desde la gráfica de  $f(N(t))$  vs.  $N(t)$ , e.g. Figura 11.6, y sin resolver precisamente la ecuación diferencial, técnica de la que dispondremos utilizando, en casos sencillos utilizando el método de separación de variables y la antiderivación. Es oportuno destacar que estamos introduciendo al estudiante en el maravilloso y amplio universo teórico y práctico de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Finalmente, utilizando un teorema fundamental sobre existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales, que garantiza que dos soluciones no pasen por el mismo punto.<sup>2</sup> Campo inevitable ha ser estudiado por cualquier ingenuo interesado en desarrollar y aportar avances al mundo tecnológico.

## 2. Información que se obtiene a partir del Cálculo Integral.

- a) Antiderivando en cada variable (11.11), se tiene que la antiderivación respecto de la variable dependiente, mediante el Método de las Fracciones Simples.

---

<sup>2</sup>**Teorema de Existencia y Unicidad:** Sean las funciones  $f(y)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  continuas en algún rectángulo  $\alpha < t < \beta$ ,  $\gamma < y < \delta$  que contienen el punto  $(t_0, y_0)$ . Entonces, en algún intervalo  $t_0 - h < t < t_0 + h$  contenido en  $\alpha < t < \beta$ , existe una única solución  $y = N(t)$  del problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

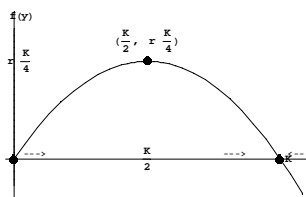


Figura 11.6:  $f(y)$  vs  $y$ ,  $\frac{dy}{dt} = r y(1 - \frac{y}{K})$ .

$$\frac{1}{N(L-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{L-N}.$$

Multiplicando por  $N$ , simplificando y reemplazando por  $N = 0$ , se obtiene el valor de la constante  $A$ ,

$$\frac{1}{(L-N)} = A + \frac{BN}{L-N}, \quad N = 0 \rightarrow A = \frac{1}{L}$$

ahora se multiplica por  $L - N$ , se simplifica y calculando en  $N = L$  se obtiene  $B$ ,

$$\frac{(L-N)}{N(L-N)} = \frac{A(L-N)}{N} + B, \quad N = L \rightarrow B = \frac{1}{L}.$$

Por lo tanto, se ha obtenido que:

$$\frac{1}{N(L-N)} = \frac{1}{L} \left( \frac{1}{N} + \frac{1}{L-N} \right)$$

Identidad que permite, efectuar la antiderivación de la variable dependiente, de la siguiente manera:

$$\int \frac{dN}{N(L-N)} = \frac{1}{L} \left( \int \frac{dN}{N} + \int \frac{dN}{L-N} \right)$$

$$\int \frac{dN}{N(L-N)} = \frac{1}{L} (\ln |N| - \ln |L-N|) = \frac{1}{L} \ln \frac{|N|}{|L-N|} + \tilde{C}.$$

Lo que conduce a  $\int \frac{dN}{N(L-N)} = \frac{\ln |N(t)|}{L} - \frac{\ln |L-N(t)|}{L} + \tilde{C}$  mientras que la antiderivación respecto de la variable independiente  $\int dt = t + \bar{C}$ , por lo

tanto resulta la siguiente ecuación:

$$\ln \frac{|N|}{|L - N|} = L(k t + C) \quad (11.16)$$

$$\frac{|N|}{|L - N|} = e^{L(k t + C)}$$

$$\frac{|N|}{|L - N|} = e^{(\tilde{k} t + \tilde{C})} \quad (11.17)$$

$$\frac{|N|}{|L - N|} = \begin{cases} \frac{N}{L-N} & \text{si } 0 < N < L \\ \frac{N}{N-L} & \text{si } N > L \end{cases}$$

Por lo tanto, las soluciones en sus expresiones implícitas son las siguientes:

$$\frac{|N|}{|L - N|} = e^{(\tilde{k} t + \tilde{C})} = \begin{cases} \frac{N}{L-N} = e^{(\tilde{k} t + \tilde{C})} & \text{si } 0 < N < L \\ \frac{N}{N-L} = e^{(\tilde{k} t + \tilde{C})} & \text{si } N > L \end{cases} .$$

Afortunadamente, es posible hallar las formas explícitas de las soluciones:

$$\begin{cases} N(t) = \frac{L}{1 + e^{-(\tilde{k} t + \tilde{C})}} & \text{si } 0 < N < L \\ N(t) = \frac{L}{1 - e^{-(\tilde{k} t + \tilde{C})}} & \text{si } N > L \end{cases} . \quad (11.18)$$

Es preciso tener presente que  $\tilde{k}$  es una constante inherente a la especie bajo seguimiento. Por lo tanto, las soluciones en (11.18) son familias de funciones de  $t$ , en las que la selección de la constante  $\tilde{C}$  determinará la evolución de un caso particular.

b) Una solución para un problema de valor inicial.

Estamos, en condiciones de resolver el Problema de Valor Inicial (11.12) análogo al Ejercicio Propuesto en el inciso [(iii)] del TP N<sup>o</sup> IV de la pág. 92, i.e.  $\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{k}\right) y$ ,  $r > 0$ ,  $y(0) = y_0$ .

Para ello, reemplazamos  $N(t_0) = N_0$  en las soluciones obtenidas en (11.18)

$$\left\{ \begin{array}{l} N(t_0) = N_0 = \frac{L}{1 + e^{-(\bar{k} t_0 + \bar{C})}} \leftrightarrow e^{-\bar{C}} = e^{\bar{k} t_0} \frac{(L - N_0)}{N_0} \quad \text{si } 0 < N_0 < L \\ N(t_0) = N_0 = \frac{L}{1 - e^{-(\bar{k} t_0 + \bar{C})}} \leftrightarrow e^{-\bar{C}} = e^{\bar{k} t_0} \frac{(N_0 - L)}{N_0} \quad \text{si } N_0 > L \end{array} \right.$$

Finalmente, reemplazando los respectivos valores para  $e^{-\bar{C}}$  obtenidos previamente en las soluciones (11.18), se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} N(t) = \frac{L}{1 + \frac{(L-N_0)}{N_0} e^{-\bar{k}(t-t_0)}} \quad \text{si } 0 < N_0 < L \\ N(t) = \frac{L}{1 - \frac{(N_0-L)}{N_0} e^{-\bar{k}(t-t_0)}} \quad \text{si } N_0 > L \end{array} \right. \quad (11.19)$$

Hemos determinado, la función  $N(t)$  que resuelve el problema de valor inicial (11.12). Es importante destacar que en (11.19) sólo se determinan las respectivas soluciones según el número inicial de individuos de la población se ubique en la banda abierta  $0 < N_0 < L$  o en su defecto en la región abierta del plano  $N_0 > L$ , y siempre se ha considerado la variable independiente temporal positiva o nula. Eventualmente, si el valor inicial dado fuese  $N_0 = 0$  el sistema no sale del equilibrio y la solución es  $N_e(t) \equiv 0$ . Análogamente, si  $N_0 = L$  el sistema no sale del equilibrio y la solución es la recta horizontal  $N_e(t) \equiv L$ .

c) Conclusiones a partir de la información obtenida del Cálculo Integral.

Las soluciones de (11.11) y del problema de valor inicial (11.12) han quedado perfectamente determinadas por (11.18) y (11.19) mediante el uso de la integración indefinida.

Resta confirmar el caracter de estabilidad o inestabilidad asintótica de las dos soluciones de equilibrio,  $N_e(t) \equiv 0$  y  $N_e(t) \equiv L$ . Para ello, se calculan los siguientes límites en las expresiones superior e inferior de (11.19):

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{L}{1 + \frac{(L-N_0)}{N_0} e^{-\bar{k}(t-t_0)}} = L, \quad \text{si } 0 < N_0 < L$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{L}{1 - \frac{(N_0 - L)}{N_0} e^{-k(t - t_0)}} = L, \quad \text{si } N_0 > L.$$

La lectura, de los resultados obtenidos para estos límites indican claramente que  $N_e(t) \equiv L$  es la asíntota estable para este caso, mientras que  $N_e(t) \equiv 0$  es inestable. Es decir, para el caso (11.11), pertenezca  $N_0$  a  $0 < N_0 < L$  o a  $N_0 > L$ , el número de integrantes de la población tiende, transcurrido un tiempo suficientemente grande, a acercarse al valor del equilibrio  $N_e(t) \equiv L$ . Por el contrario, si  $0 < N_0 < L$  las soluciones se alejan cualquiera sea el tiempo de  $N_e(t) \equiv 0$ , por lo que no resulta ser un equilibrio estable. Ver ilustración de las soluciones en la Figura 11.7 de la pág. 424 que son análogas con el caso que aquí hemos analizado, Figura 11.6, pág. 421.

Es conveniente una vez más, aclararle al lector neófito, que en las E.D.O. resueltas en este compendio hemos de una manera sutil evitado la incorporación, entre otros, de Teoremas de Existencia y Unicidad para problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales ordinarias, ya que estos postulados requieren del conocimiento del Cálculo Diferencial en Varias Variables Reales.

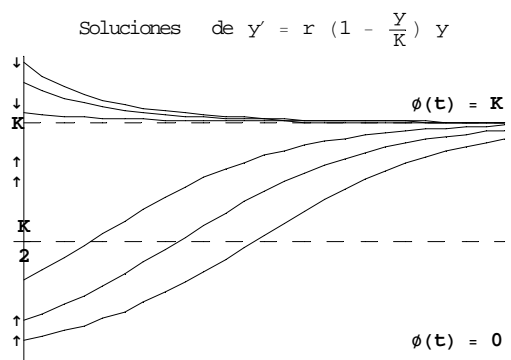


Figura 11.7:  $y$  vs  $t$  del modelo logístico  $\frac{dy}{dt} = r y \left(1 - \frac{y}{K}\right)$ ,  $r > 0$ ,  $K > 0$ .



iii) Un umbral crítico

$$\frac{d y}{d t} = -k \left(1 - \frac{y}{T}\right) y \quad (11.20)$$

iv) *Crecimiento logístico con umbral crítico.* Refer. al Ejemplo 11.1.7 en la pág. 425

**Ejemplo 11.1.7** Resolver la siguiente E.D.O. del crecimiento tipo logístico con umbral crítico, [Murio, D. et al. (1999)], págs. 67 y 68.

$$\frac{d y}{d t} = -r \left(1 - \frac{y}{T}\right) \left(1 - \frac{y}{K}\right) y, \quad r > 0, \quad 0 < T < K. \quad (11.21)$$

La resolución de este modelo se dará utilizando en primer lugar mediante la antiderivación utilizando el método de la fracciones simples, con el que se llegará a la familias de soluciones expresadas y representadas como  $t = g(y) + c$ , ver (11.24), (11.25), (11.26) y (11.27). Frente a la imposibilidad, en general, de obtener las soluciones como  $y = \tilde{g}(t) + c$  brindamos en detalle el análisis diferencial, con el que es posible arribar a las gráficas aproximadas de las soluciones. Bosquejos que deben coincidir en las características esenciales con aquellas ilustraciones obtenidas utilizando las expresiones funcionales (11.24) -(11.27).

$$\frac{d y}{d t} = -r \left(1 - \frac{y}{T}\right) \left(1 - \frac{y}{K}\right) y$$

Separando variables, utilizando el método de las fracciones simples, el plano  $(y(t), t)$  queda dividido, en virtud de las tres soluciones de equilibrio  $y_e^1(t) = 0$ ,  $y_e^2(t) = T$  e  $y_e^3(t) = K$  en las subregiones abiertas no acotadas  $(y(t) < 0, t)$ ,  $(0 < y(t) < T, t)$  e  $(y(t) > K, t)$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{d y}{-r \left(1 - \frac{y}{T}\right) \left(1 - \frac{y}{K}\right) y} &= -\frac{TK}{r} \int \frac{d y}{(T - y)(K - y)y} \\ -\frac{TK}{r} \int \frac{d y}{(T - y)(K - y)y} &= \int dt \\ \int \frac{d y}{(T - y)(K - y)y} &= -\frac{r}{TK} \int dt \\ \int \frac{d y}{(T - y)(y - K)y} &= \frac{r}{TK} \int dt \end{aligned} \quad (11.22)$$

## Capítulo 11. Antiderivación y E.D.O. simples

---

Si  $0 \neq T \neq K$ , el integrando se puede escribir como:

$$\frac{1}{(T-y)(y-K)y} = \frac{A}{y} + \frac{B}{T-y} + \frac{C}{y-K}$$

En efecto, la identidad anterior es

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(T-y)(y-K)y} = \frac{A(T-y)(y-K) + By(y-K) + Cy(T-y)}{(T-y)(y-K)y}$$

como son iguales los divisores deben ser iguales los numeradores

$$\Leftrightarrow 1 = A(T-y)(y-K) + By(y-K) + Cy(T-y), \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Pero si le damos a  $y$  los valores  $0$ ,  $T$  y  $K$  sucesivamente obtenemos:

- $1 = A \times (T) \times (-K) + B \times 0 + C \times 0 \Leftrightarrow A = \frac{-1}{TK}$
- $1 = A \times 0 + B \times (T) \times (T-K) + C \times 0 \Leftrightarrow B = \frac{-1}{T(K-T)}$
- $1 = A \times 0 + B \times 0 + C \times (K) \times (T-K) \Leftrightarrow C = \frac{-1}{K(K-T)}$

luego

$$\frac{1}{(T-y)(y-K)y} = -\frac{1}{KTy} - \frac{1}{T(K-T)(T-y)} - \frac{1}{K(K-T)(y-K)}$$

la antiderivación resulta, siempre considerando que  $0 < T < K$ , i.e.  $K-T > 0$

$$\int \frac{dy}{y(T-y)(y-K)} = -\frac{1}{KT} \int \frac{dy}{y} - \frac{1}{T(K-T)} \int \frac{dy}{T-y} - \frac{1}{K(K-T)} \int \frac{dy}{y-K}$$

$$\int \frac{dy}{y(T-y)(y-K)} = -\frac{1}{KT} \ln|y| + \frac{1}{T(K-T)} \ln|T-y| - \frac{1}{K(K-T)} \ln|y-K|$$

Reemplazando en la identidad triangular (11.22), el proceso de antiderivación a variables separables conduce a,

$$-\frac{1}{KT} \ln|y| + \frac{1}{T(K-T)} \ln|T-y| - \frac{1}{K(K-T)} \ln|y-K| = \frac{r}{TK}(t + \bar{c})$$

multiplicando por  $KT$  ambos miembros, se obtiene:

$$-\ln|y| + \frac{K}{(K-T)} \ln|T-y| - \frac{T}{(K-T)} \ln|y-K| = rt + \tilde{c}$$

sacando común denominador  $(K-T)$ , resulta

$$-(K-T) \ln|y| + K \ln|T-y| - T \ln|y-K| = (K-T)rt + \tilde{c}$$

$$\ln \left[ \frac{|T-y|^K}{|y-K|^T |y|^{(K-T)}} \right] = (K-T)rt + \tilde{c}$$

finalmente, se está en condiciones de despejar la variable independiente, ya que salvo casos en que las constantes del modelo logístico con umbral crítico sean muy particulares, en general obtener  $y(t)$  como función de  $t$  no es posible.

$$t = \frac{1}{r(K-T)} \left\{ \ln \left[ \frac{|T-y|^K}{|y-K|^T |y|^{(K-T)}} \right] \right\} + c. \quad (11.23)$$

El cálculo de los siguientes límites permite establecer que  $y_e^1(t) = 0$  y  $y_e^3(t) = K$  son ambas soluciones de equilibrio asintóticamente estables del modelo. Por el contrario,  $y_e^2(t) = T$  es un equilibrio inestable.<sup>3</sup>

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} t = +\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} t = +\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow T^+} t = -\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow T^-} t = -\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow K^+} t = +\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow K^-} t = +\infty$$

A continuación, explicitamos las expresiones de las soluciones (11.23) en cada una de las subregiones de  $y$ , i.e.  $y < 0$ ,  $0 < y < T$ ,  $T < y < K$ , e  $y > K$ , ver Figura 11.8.

<sup>3</sup>El Profesor Diego Murio, afirmó [Murio, D. et al. (1999)], que el modelo aparentemente describió cierta población de palomas mensajeras -the passenger pigeon- y recomienda ver el trabajo de Oliver L. Austin Jr., *Birds of the World*, New York, Golden Press, 1983, pp. 143-145.

1.  $y < 0$

$$t = \frac{1}{r(K-T)} \left\{ \ln \left[ \frac{(T-y)^K}{(K-y)^T (-y)^{(K-T)}} \right] \right\} + c_1. \quad (11.24)$$

2.  $0 < y < T$

$$t = \frac{1}{r(K-T)} \left\{ \ln \left[ \frac{(T-y)^K}{(K-y)^T y^{(K-T)}} \right] \right\} + c_2. \quad (11.25)$$

3.  $T < y < K$

$$t = \frac{1}{r(K-T)} \left\{ \ln \left[ \frac{(y-T)^K}{(K-y)^T y^{(K-T)}} \right] \right\} + c_3. \quad (11.26)$$

4.  $y > K$

$$t = \frac{1}{r(K-T)} \left\{ \ln \left[ \frac{(y-T)^K}{(y-K)^T y^{(K-T)}} \right] \right\} + c_4. \quad (11.27)$$

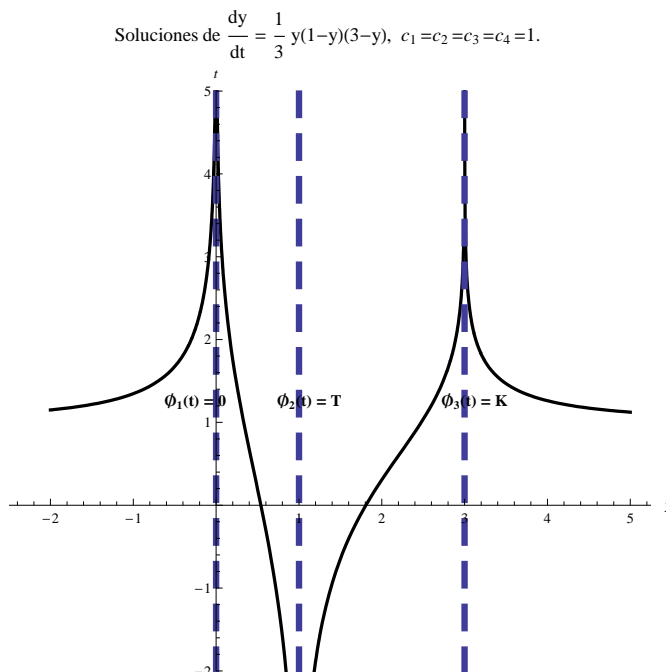


Figura 11.8: Soluciones de  $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3} y(1-y)(y-3)$ , en  $(t, y)$ .

**Nota 11.1.8** En los modelos i), ii), iii) y iv), de las respectivas páginas 414, 418, 425 y 425, hemos estado jugando con la antiderivación utilizando el método de las fracciones simples, generalmente con denominadores que poseen raíces reales de multiplicidad simple, e.g. Ejemplo 11.1.7. El Ejemplo 11.1.7, ha puesto en evidencia que no siempre es posible despejar  $y(t)$  mediante una expresión funcional explícita de  $t$ . Es precisamente, en estos

casos en los que el uso de las herramientas del cálculo diferencial es necesario, e.g. ver información del caso  $f(y) = \frac{1}{3}y(1-y)(y-3)$  en la Figura 11.9. Es decir, desde el estudio diferencial de la expresión de la función  $f(y)$  del modelo 11.1.7 se llega a tener una apariencia cualitativa de las soluciones del sistema, ver Figura 11.10.

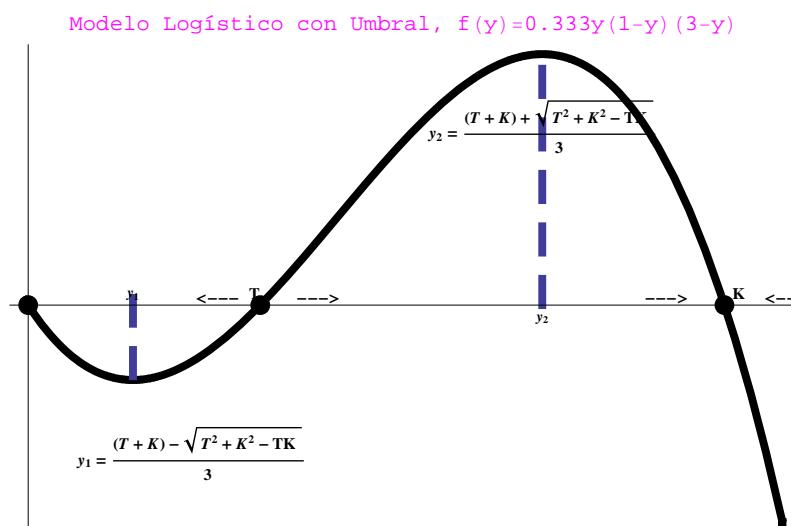


Figura 11.9:  $f(y) = \frac{1}{3}y(1-y)(y-3)$  versus  $y$ .

Atentos a la observación anterior, determinamos la expresión de  $\frac{d^2 y}{dt^2}$ , para ello derivamos en (11.21) o en su expresión equivalente

$$\frac{dy}{dt} = \frac{r}{TK}(T-y)(y-K)y \quad (11.28)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{r}{TK} \left[ -\frac{dy}{dt}(y-K)y + (T-y)\frac{dy}{dt}y + (T-y)(y-K)\frac{dy}{dt} \right]$$

sacando el factor común  $\frac{dy}{dt}$ ,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{r}{TK} \frac{dy}{dt} [-(y-K)y + (T-y)y + (T-y)(y-K)]$$

reemplazando (11.28),

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{r^2}{(TK)^2} (T-y)(y-K)y [-(y-K)y + (T-y)y + (T-y)(y-K)]$$

## Capítulo 11. Antiderivación y E.D.O. simples

---

para determinar los posibles puntos de inflexión de las soluciones, determinamos las raíces de  $\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$ , lo que implica resolver la siguiente ecuación

$$-(y - K)y + (T - y)y + (T - y)(y - K) = 0$$

ya que los ceros de  $\frac{dy}{dt}$  están bien establecidos, procedemos a

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -3\frac{r}{TK} \frac{dy}{dt} \left[ y^2 - \frac{2}{3}y(T + K) + \frac{TK}{3} \right] = 0$$

es decir, a determinar las raíces restantes de  $\frac{d^2 y}{dt^2}$ , lo que implica calcular los ceros de la siguiente cuadrática:

$$y^2 - \frac{2}{3}y(T + K) + \frac{TK}{3} = 0$$

el lector confirmará que las raíces, son:

$$y_1 = \frac{T + K}{3} - \sqrt{\left(\frac{T + K}{3}\right)^2 - \frac{TK}{3}}, \quad 0 < y < \frac{T + K}{3}$$

$$y_2 = \frac{T + K}{3} + \sqrt{\left(\frac{T + K}{3}\right)^2 - \frac{TK}{3}}, \quad y \geq \frac{T + K}{3}.$$

No hay duda de que son dos raíces reales puesto que  $(T - \frac{K}{2})^2 + \frac{3K^2}{4} \geq 0$ ,

$$y_{1,2} = \frac{(T + K) \mp \sqrt{T^2 + K^2 - TK}}{3} = \frac{(T + K) \mp \sqrt{(T - \frac{K}{2})^2 + \frac{3K^2}{4}}}{3}.$$

$$y_{1,2} = \frac{(T + K) \mp \sqrt{T^2 + K^2 - TK}}{3} \tag{11.29}$$

Un estudio del signo de  $\frac{d^2 y}{dt^2}$  permitirá confirmar que  $y_1$  e  $y_2$  son puntos de inflexión de las curvas soluciones del modelo.

Verificaremos primero que  $y_1 < T$ .

$$\frac{(T + K) - \sqrt{T^2 + K^2 - TK}}{3} < T$$

$$K - \sqrt{T^2 + K^2 - TK} < 2T$$

$$-\sqrt{T^2 + K^2 - TK} < 2T - K$$

$$\sqrt{T^2 + K^2 - TK} > -2T + K$$

puesto que  $T^2 + K^2 - TK \geq 0$

$$T^2 + K^2 - TK > (-2T + K)^2$$

que lleva a

$$T < K$$

que es verdadera por definición del modelo (11.21).

Análogamente, el lector puede verificar que  $T < y_2 < K$ .

Esta información, nos permite escribir la siguiente expresión de  $\frac{d^2 y}{dt^2}$  factorizada linealmente.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -3 \frac{r}{TK} \frac{dy}{dt} \left[ y - \left( \frac{(T+K) - \sqrt{T^2 + K^2 - TK}}{3} \right) \right] \left[ y - \left( \frac{(T+K) + \sqrt{T^2 + K^2 - TK}}{3} \right) \right] \quad (11.30)$$

En este proceso autónomo con  $f(y) = \dot{y} = \frac{r}{TK}(T-y)(y-K)y$ , continuamos con la investigación cualitativa para obtener con cierta aproximación las soluciones del modelo (11.21) desde la información del cálculo diferencial, para ello efectuamos el estudio de signos de  $f(y)$  y de  $\frac{df(y)}{dy}$ . Afortunadamente, sus respectivas expresiones son productos de factores lineales, entonces será un trabajo sencilla determinar los cambios de signos en las mismas. Los cambios de signo en (11.28), i.e. de  $\frac{r}{TK}(T-y)(y-K)y$  se producen, si existen, a derecha e izquierda de los equilibrios del caso, a saber:

- $f(y) = \dot{y}$  respecto de  $y$ , es positiva en los intervalos abiertos  $(-\infty, 0)$  y en  $(T, K)$ .

Mientras que  $f(y)$  es negativa en  $(0, T)$  y en  $(K, +\infty)$ .

Los cambios de signo en (11.30),  $\frac{d^2 y}{dt^2}$ , exigen la incorporación del signo negativo de  $-3$ , que permuta los signos obtenidos de  $f(y)$  y particionados por los ceros de la cuadrática

## Capítulo 11. Antiderivación y E.D.O. simples

$y^2 - \frac{2}{3}y(T+K) + \frac{TK}{3} = 0$ . Sin problema alguno el estudiante comprobará que el estudio de signo de (11.30), corresponde al siguiente esquema:

- $\frac{d^2 y}{dt^2}$  es negativa en los intervalos abiertos en  $y$ :  
 $(-\infty, 0)$ ,  $(\frac{(T+K)-\sqrt{T^2+K^2-TK}}{3}, T)$  e  $(\frac{(T+K)+\sqrt{T^2+K^2-TK}}{3}, K)$ .

Siendo  $\frac{d^2 y}{dt^2}$  positiva en el complemento real de los intervalos previamente mencionados:

$$(0, \frac{(T+K)-\sqrt{T^2+K^2-TK}}{3}), (T, \frac{(T+K)+\sqrt{T^2+K^2-TK}}{3}) \text{ y en } (K, +\infty).$$

Entonces los ceros (11.29) son puntos de inflexión de las soluciones del modelo. El primero  $y_1$ , es el mínimo de  $f(y)$ , y el segundo  $y_2$ , es el máximo de  $f(y)$ , ver Figura 11.9. Una vez más, advertimos que los cambios de signo de  $f(y)$  y  $\frac{d^2 y}{dt^2}$  están realizados sobre la el eje de la variable dependiente  $y$ .

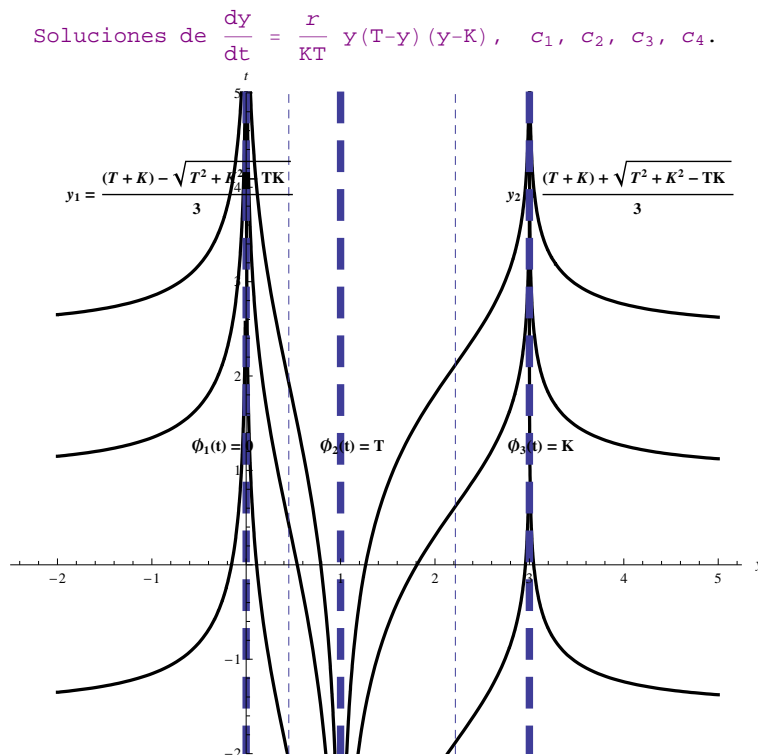


Figura 11.10: Soluciones  $t$  vs  $y$ , de  $\frac{dy}{dt} = \frac{r}{TK} y(T-y)(y-K)$ .

La recopilación de los aportes del estudio diferencial, conducen a familias de soluciones, con apariencia semejante a las ilustradas en la Figura 11.10.



El lector concluirá que en realidad sus bosquejos de las soluciones del modelo, provenientes del estudio diferencial, son coincidentes en las formas y características esenciales, con aquellos visualizados después de dar vuelta la hoja de la Figura 11.10 y mirar sus gráficas al trasluz.

**Observación 11.1.9** *El lector ya ha deducido que en estos modelos las constantes provenientes de los respectivos procesos de antiderivación, son las que en general deben determinarse para cada caso específico. Además, cuando existen curvas planas diferenciables y representables mediante una función estrictamente creciente o decreciente en las distintas subregiones abiertas del espacio  $(y(t), t)$  o  $(t, y(t))$  separables, si existieran varias soluciones de equilibrio de la E.D.O. y/o de su Modelo Recíproco.*

### 11.1.1. Familias de funciones y cuasi-asociables E.D.O.

En concordancia con la Observación 11.1.9 a continuación, volvemos sobre familias de funciones por Uds. muy conocidas <sup>4</sup>, y después de reconocer sus gráficas develaremos todos sus misterios, ver las Figuras 11.11 y 11.12. Sus respectivas asociaciones a *ecuaciones diferenciales autónomas muy simples*, evidenciará casos de características sustancialmente distintas, con aquellas que poseen las soluciones de los modelos de tipo logístico (11.4), (11.21) y (11.48). Tres de las familias de funciones, ver Figura 11.11, son continuas en  $y = 0$ , por el contrario  $t = \frac{-1}{y} + c$  y  $t = \ln |y| + c$ , no están definidas en  $y = 0$ , ver Figura 11.11.

Calculamos sus respectivas derivadas primeras y observamos que en los cinco casos no existe finita  $\frac{dt}{dy}$  en ningún caso en  $y = 0$ , ver Figuras 11.13, 11.15, 11.14, 11.16 y 11.17. Obviamente, los dos últimos casos, imposible la existencia de la derivada, si no está ni siquiera definida la función en  $y = 0$ .

En la familia de la Figura 11.13,  $t = \sqrt[3]{y} + c$ , existe derivada infinita sin cambio de signo. En términos geométricos existe recta tangente vertical única en  $y = 0$ .

<sup>4</sup>T.P. N  $\doteq$  III: Concepto de Derivada de  $y = f(x)$ , pág. 73, Ejercicio N  $\doteq$  6 de la pág. 74, ver Figura 2.17. Inciso b) de la pág. 75. T.P. N  $\doteq$  IV: [★I] Primera aplicación: Monotonía, extremos absolutos y relativos, concavidad y puntos de inflexión, pág. 84 observar y escudriñar la Figura 2.24 de la pág. 84.

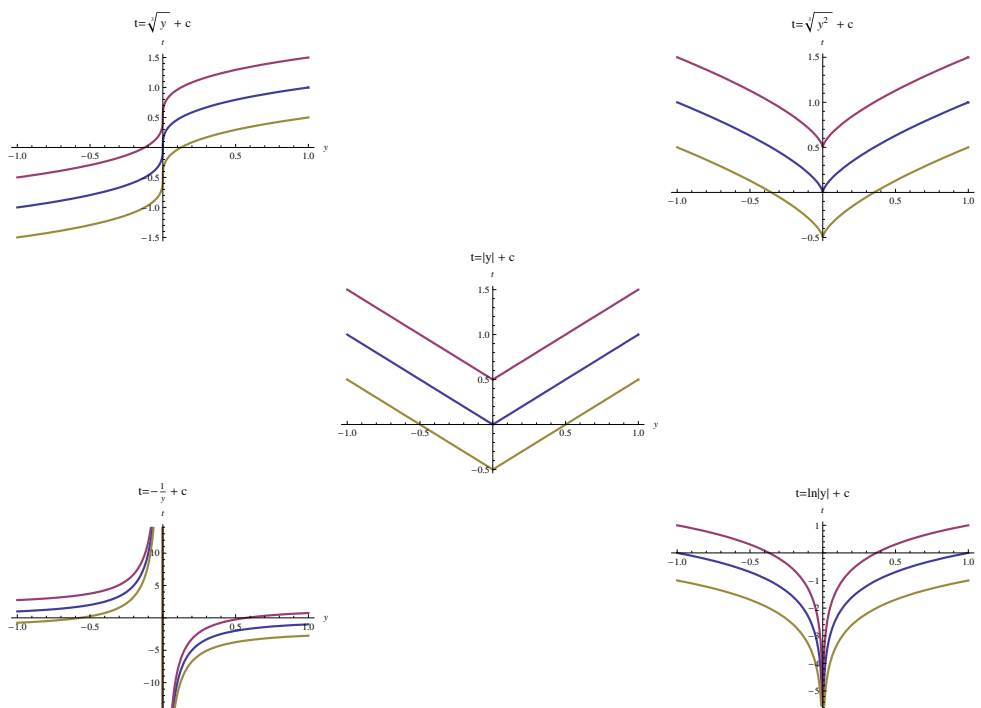


Figura 11.11:  $t = \sqrt[3]{y} + c$ ,  $t = \sqrt[3]{y^2} + c$ ,  $t = |y| + c$ ,  $t = -\frac{1}{y} + c$ ,  $t = \ln|y| + c$ .

Característica específica de esta familia y su crecimiento constante que permite despejar  $(t - c)^3 = y$  diferenciable en los reales. Como el proceso de antiderivación requiere la evaluación de una integral impropia de primer especie con integrando infinito positivo, que es convergente cuando  $y$  se aproxima a cero tanto por derecha como por izquierda, no tardaremos en verificar, las gráficas no son las únicas soluciones diferenciales para la E.D.O.  $\frac{dt}{dy} = \frac{d(\sqrt[3]{y} + c)}{dy} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$ . Ver análisis pp. 441-443, i.e. Ejemplo 11.1.12 y Ejemplo 11.1.13.

En la familia de la Figura 11.14 no existe recta tangente vertical única en  $y = 0$ . Aquí también el proceso de antiderivación requiere la evaluación de una integral impropia de primer especie con integrando infinito positivo, que es convergente cuando  $y$  se aproxima a cero tanto por derecha como por izquierda, no tardaremos en verificar, que las gráficas de la familia  $t = \sqrt[3]{y^2} + c$  no son las funciones diferenciales que resuelven la E.D.O.  $\frac{dt}{dy} = \frac{d(\sqrt[3]{y^2} + c)}{dy} = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ , ver Ejemplo 11.1.10, en la pág. 437. Además, la diferencia con el caso anterior, es que existen infinitas soluciones cuando la determinación de  $c$  se hace para cualquier punto  $(t_0, y(t_0)) = 0$ .

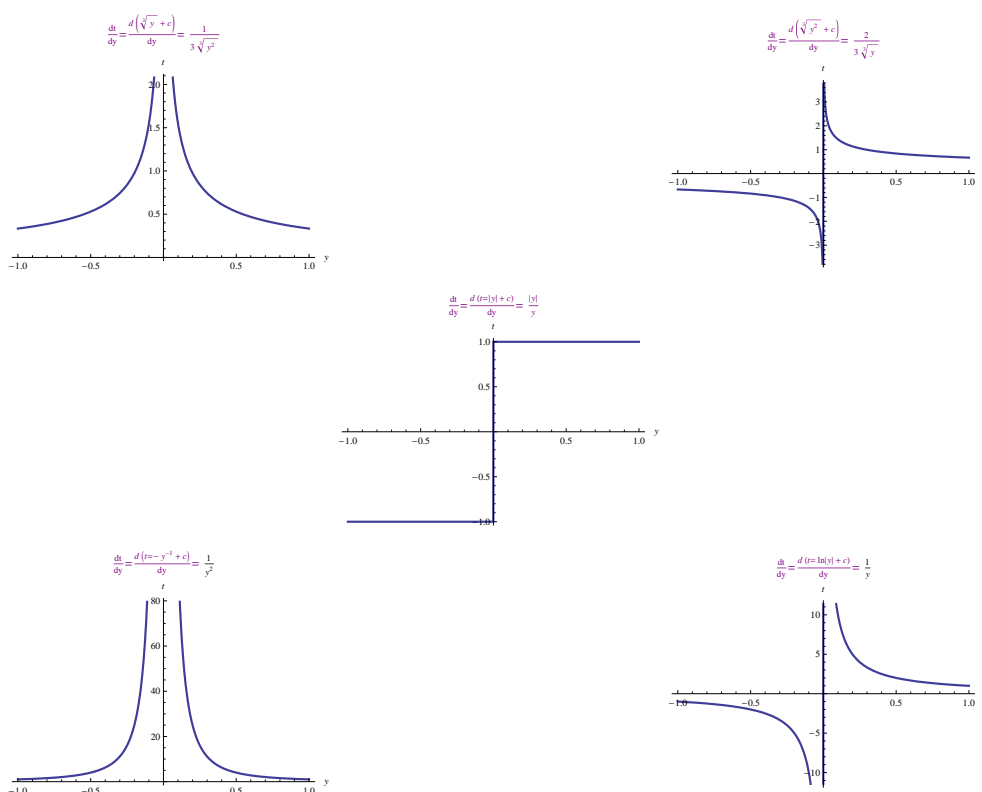


Figura 11.12:  $\frac{dt}{dy} = \frac{d(\sqrt[3]{y+c})}{dy} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y+c}}$ ,  $\frac{dt}{dy} = \frac{d(\sqrt[3]{y^2+c})}{dy} = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ ,  $\frac{dt}{dy} = \frac{d(|y|+c)}{dy} = \frac{|y|}{y}$ ,  $\frac{dt}{dy} = \frac{d(\frac{-1}{y}+c)}{dy} = \frac{1}{y^2}$ ,  $\frac{dt}{dy} = \frac{d(\ln|y|+c)}{dy} = \frac{1}{y}$ .

Por el contrario, cada vez que  $c$  sea calculada utilizando  $(t_0, y(t_0)) \neq 0$  la solución diferenciable buscada será única. Ver Ejemplo 11.1.11, pág. 440.

Las funciones  $t = |y|+c$  no son las soluciones diferenciales para la E.D.O.  $\frac{dt}{dy} = \frac{d(|y|+c)}{dy} = \frac{|y|}{y}$ . Es inmediata, que las soluciones estarán dadas para  $y > 0$  por  $t = y + c_1$ . Mientras que en la subregión abierta  $y < 0$  las soluciones son  $t = -y + c_2$ .

La familia de funciones en la Figura 11.16 son las soluciones de la E.D.O.  $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{y^2}$ . En este proceso de antiderivación la integral impropia es divergente y el equilibrio  $y(t) = 0$  es una asíntota, que es de inestabilidad para el sistema.

La familia de funciones en la Figura 11.17 son las soluciones de la E.D.O.  $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{y}$ . En este proceso de antiderivación la integral impropia es divergente y el equilibrio  $y(t) = 0$  es una asíntota, que es de estabilidad para el sistema.

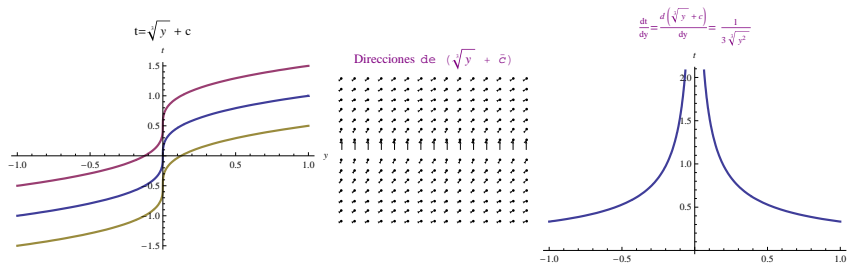


Figura 11.13: Las funciones  $t = \sqrt[3]{y} + c$  no son las únicas soluciones de  $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$ .

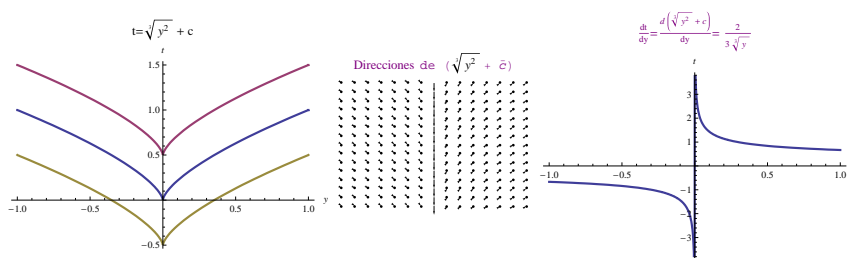


Figura 11.14: La familia  $t = \sqrt[3]{y^2} + c$ , no son las soluciones de  $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y}}$ .

Estos dos últimos modelo diferenciales en  $y = 0$ , mantienen las propiedades de los modelos de tipo logístico resueltos por el método de las fracciones simples, para raíces reales distintas (11.51),  $c < \frac{1}{4}$  y con la posible existencia de alguna raíz real con multiplicidad doble, e.g.  $c = \frac{1}{4}$ , en el modelo (11.48). Los equilibrios en estos casos son salvadas ligeras diferencias semejantes a los que acontecen en las soluciones de los modelos (11.4) y (11.21).

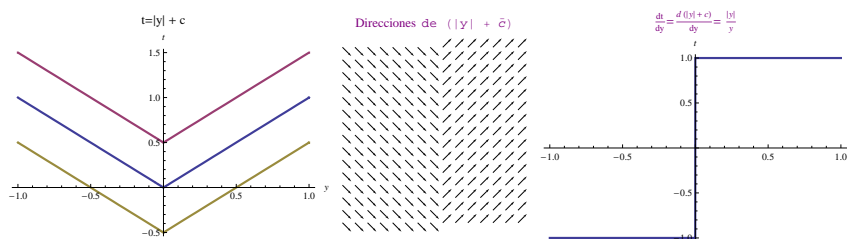


Figura 11.15: Las funciones  $t = |y| + c$ , no resuelven  $\frac{dt}{dy} = \frac{|y|}{y}$ .

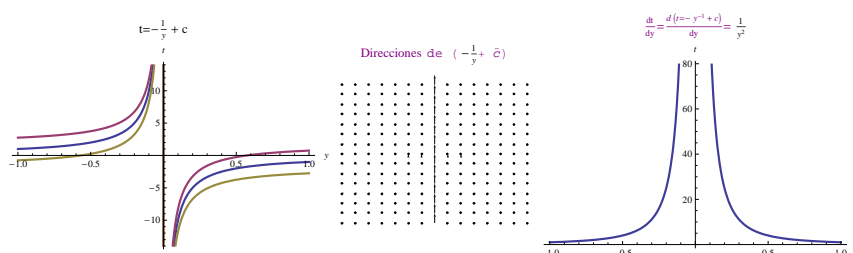


Figura 11.16: Familia de funciones  $t = \frac{-1}{y} + c$  son las soluciones  $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{y^2}$ .

### 11.1.2. Resolución de diferentes problemas de valores iniciales

**Ejemplo 11.1.10** ¿ Son únicas las soluciones del siguiente problema de valor inicial (11.31) ?

$$\frac{dy}{dt} = y^{1/3}, \quad t \geq 0, \quad y(0) = 0. \quad (11.31)$$

1. Información desde el Cálculo Diferencial

- a)  $y_e(t) \equiv 0$ , solución de equilibrio.
- b)  $y > 0$ ,  $\frac{dy}{dt} > 0$ , las soluciones en dicha región son estrictamente crecientes.
- c)  $y < 0$ ,  $\frac{dy}{dt} < 0$ , las soluciones en dicha región son estrictamente decrecientes.
- d)  $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{3}y^{1/3-1} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}y^{1/3-1} y^{1/3} = \frac{1}{3}y^{-1/3}$ , entonces

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y}}.$$

- 1)  $y > 0$ , las soluciones en dicha región son cóncava hacia arriba.
- 2)  $y < 0$ , las soluciones en dicha región son cóncava hacia abajo.

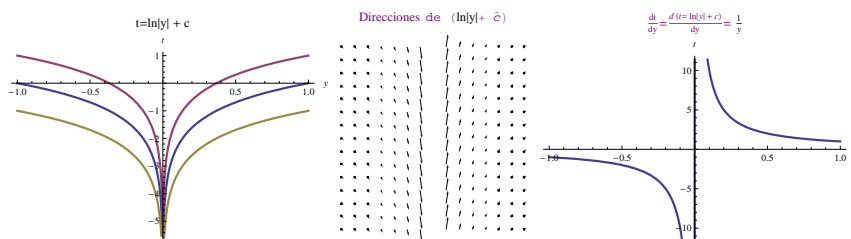


Figura 11.17: La familia  $t = \ln |y| + c$  son las soluciones  $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{y}$ .

2. Información desde el Cálculo Integral

a) Separando variables en (11.31) y trabajando según corresponda para el semiplano abierto superior o el semiplano abierto inferior, se tiene:

1)  $y > 0$ ,  $\int \frac{dy}{y^{1/3}} = \frac{3y^{-1/3+1}}{2} + c_1$ ,  $\int dt = t + c_2$ , por lo tanto,  
 $\frac{3y^{-1/3+1}}{2} + c_1 = t + c_2$  y se concluye que  $\frac{3}{2}y^{2/3} = t + \bar{c}$ , que se reescribe como la siguiente familia de antiderivadas de la región considerada:

$$y = \left[ \frac{2(t + c)}{3} \right]^{3/2}, \quad \frac{2(t + c)}{3} > 0, \quad y > 0.$$

2)  $y < 0$ , repitiendo los pasos anteriores hasta que se llega a  $\frac{3}{2}y^{2/3} = t + \bar{c}$ , de manera equivalente a  $y^2 = \left[ \frac{3(t+\bar{c})}{2} \right]^3$ , para la región inferior del plano, i.e.  $y < 0$ , debemos tener en cuenta que  $|y| = \sqrt{\left[ \frac{2(t+c)}{3} \right]^3}$ , con  $\frac{2(t+c)}{3} > 0$  e  $y = -\sqrt{\left[ \frac{2(t+c)}{3} \right]^3}$ .

b) Considerando las siguientes integrales impropias, para llegar al valor de  $y = 0$  por exceso o por defecto:

1)  $y \geq 0$ ,  $\int_0^y \frac{dy}{y^{1/3}} = \int_{t_0}^t dt$ , con  $t_0 < t$ .

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^y \frac{dy}{y^{1/3}} = t - t_0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (y^{2/3} - \epsilon^{2/3}) = \frac{2(t - t_0)}{3}$$

$$y^{2/3} = \frac{2(t - t_0)}{3}$$

$$2) \ y \leq 0, \int_{-|y|}^0 \frac{dy}{y^{1/3}} = \int_t^{t_0} dt$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \int_{-|y|}^{\epsilon} \frac{dy}{y^{1/3}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \frac{3}{2}(\epsilon^{2/3} - (-|y|)^{2/3}) = -\frac{3}{2}(-|y|)^{2/3} = t_0 - t$$

$$(-|y|)^{2/3} = \frac{2}{3}(t - t_0)$$

$$(-|y|)^2 = \left[ \frac{2}{3}(t - t_0) \right]^3$$

$$(|y|)^2 = \left[ \frac{2}{3}(t - t_0) \right]^3$$

$$\sqrt{|y|^2} = \sqrt{\left[ \frac{2}{3}(t - t_0) \right]^3}$$

$$|y| = \sqrt{\left[ \frac{2}{3}(t - t_0) \right]^3}$$

como estamos en el semiplano  $y < 0$ , resulta que:

$$-y = \sqrt{\left[ \frac{2}{3}(t - t_0) \right]^3}$$

es decir

$$y = -\sqrt{\left[ \frac{2}{3}(t - t_0) \right]^3}.$$

Con la información que hemos obtenido desde el cálculo diferencial e integral, se está en condiciones de concluir que *el p.v.i (11.31) no tiene solución única*. Las soluciones son las siguientes:

1.  $\phi_0(t) = 0$ . La solución de equilibrio de  $\frac{dy}{dt} = y^{1/3}$ .

2.  $\varphi_1(t) = \sqrt{\left[ \frac{2}{3}(t) \right]^3}$ , si  $t \geq 0$ .

3.  $\varphi_2(t) = -\sqrt{\left[ \frac{2}{3}(t) \right]^3}$ , si  $t \geq 0$ .

4. 
$$\begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < t_0 \\ \chi_1(t) = \sqrt{\left[ \frac{2}{3}(t - t_0) \right]^3}, & \text{si } t \geq t_0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < t_0 \\ \chi_2(t) = -\sqrt{\left[\frac{2}{3}(t - t_0)\right]^3}, & \text{si } t \geq t_0 \end{cases}$$

**Ejemplo 11.1.11** ¿ Existe unicidad de la solución para el problema de valor inicial (11.32)?

$$\frac{dy}{dt} = y^{1/3}, \quad y(t_0) \neq 0, \quad t \geq 0, \quad t_0 > 0. \quad (11.32)$$

En el Ejemplo 11.1.10 hemos confirmado que no hay unicidad de soluciones para el valor inicial  $y(t_0 = 0) = 0$ .<sup>5</sup>

1.

$$\frac{dy}{dt} = y^{1/3}, \quad y(t_0) > 0, \quad t \geq 0, \quad t_0 > 0.$$

$$\text{Sea } y \geq 0, \text{ e } y(t_0) > 0, \quad \int_{y(t_0)}^y \frac{dy}{y^{1/3}} = \int_{t_0}^t dt$$

$$\begin{aligned} \int_{y(t_0)}^y \frac{dy}{y^{1/3}} &= t - t_0 \\ y^{2/3} - y(t_0)^{2/3} &= \frac{2(t - t_0)}{3} \\ y^{2/3} &= \frac{2(t - t_0)}{3} + y(t_0)^{2/3} \\ y^2 &= \left( \frac{2(t - t_0)}{3} + y(t_0)^{2/3} \right)^3 \\ y &= \sqrt{\left( \frac{2(t - t_0)}{3} + y(t_0)^{2/3} \right)^3}. \end{aligned}$$

Efectuando la intersección con el eje temporal, se obtiene:

$$\begin{cases} y = \sqrt{\left( \frac{2(t-t_0)}{3} + y(t_0)^{2/3} \right)^3} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow t_n = -\frac{3}{2} y(t_0)^{2/3} + t_0.$$

Entonces la solución diferenciable del p.v.i (11.32) si  $y(t_0) > 0$  resulta ser:

$$\begin{cases} y = \sqrt{\left( \frac{2(t-t_0)}{3} + y(t_0)^{2/3} \right)^3}, & t \geq t_n = -\frac{3}{2} y(t_0)^{2/3} + t_0, \quad t_0 > 0 \\ y = 0, & t < t_n = -\frac{3}{2} y(t_0)^{2/3} + t_0, \quad t_0 > 0 \end{cases}. \quad (11.33)$$

<sup>5</sup>Recomendamos la lectura de las páginas 10 a 17, Chapter II, Some Simple Differential Equations, del libro "Ordinary differential Equations". Autor: I. G. Petrovski. Dover Publications, Inc., New York, USA 1973.



2.

$$\frac{dy}{dt} = y^{1/3}, \quad y(t_0) < 0, \quad t \geq 0, \quad t_0 > 0.$$

En el semiplano inferior yace  $y(t_0) < 0$ , por lo tanto la condición inicial en esta región la notaremos como  $y(t_0) = -|y(t_0)| < 0$ , efectuando la antiderivación en  $y \leq 0$ , e  $y(t_0) = -|y(t_0)| < 0$ ,

$$\int_{-|y(t_0)|}^{y < 0} \frac{dy}{y^{1/3}} = \int_{t_0}^t dt$$

$$y^{2/3} - (-|y(t_0)|)^{2/3} = \frac{2(t - t_0)}{3}$$

$$y^{2/3} - (|y(t_0)|)^{2/3} = \frac{2(t - t_0)}{3}$$

y luego de efectuar cálculos análogos a los del inciso anterior se concluye que la solución es la siguiente:

$$\begin{cases} y = -\sqrt{\left(\frac{2(t-t_0)}{3} + |y(t_0)|^{2/3}\right)^3}, & t \geq t_\eta = -\frac{3}{2}|y(t_0)|^{2/3} + t_0, \quad t_0 > 0 \\ y = 0, & t < t_\eta = -\frac{3}{2}|y(t_0)|^{2/3} + t_0, \quad t_0 > 0 \end{cases} \quad (11.34)$$

Se ha llegado a la conclusión de que el p.v.i. (11.32) tiene solución diferenciable única, a saber si el valor inicial es positivo (11.33) mientras que la solución es (11.34) si  $y(t_0)$  es negativo.

**Ejemplo 11.1.12** ¿ Son únicas las soluciones del siguiente problema de valor inicial (11.35)?

$$\frac{dy}{dt} = y^{2/3}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 0. \quad (11.35)$$

Trataremos los p.v.i. (11.35) y (11.36) en el presente apartado. Trabajamos utilizando las integrales impropias para dividir el estudio en las dos regiones separadas por la solución de equilibrio  $y_e(t) = 0$  y posteriormente evidenciaremos que cualquiera sea el valor inicial  $y(t_0)$  positivo, negativo o nulo, existen infinitas soluciones diferenciables para los p.v.i. Simplificaremos, los cálculos para llegar en una forma más inmediata a las expresiones que justificarán lo que acabamos de afirmar.

$$\int_{y(t_0)}^y \frac{dy}{y^{2/3}} = t - t_0$$

$$y^{1/3} - y(t_0)^{1/3} = \frac{(t - t_0)}{3}$$

$$y^{1/3} = \frac{(t - t_0)}{3} + y(t_0)^{1/3}$$

$$y = \left[ \frac{(t - t_0)}{3} + y(t_0)^{1/3} \right]^3.$$

Efectuando la intersección con el eje temporal, se obtiene:

$$\begin{cases} y = \left[ \frac{(t-t_0)}{3} + \sqrt[3]{y(t_0)} \right]^3 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow t_{\cap} = -3 \sqrt[3]{y(t_0)} + t_0.$$

En el p.v.i. (11.35), i.e.  $y(t_0) = y(0) = 0$ , las infinitas soluciones son de la siguiente forma:

1.  $\psi(t) = 0$

2.  $\psi(t) = \left[ \frac{(t-t_0)}{3} \right]^3$

3.  $\psi(t) = \begin{cases} y = \left[ \frac{(t-t_0)}{3} \right]^3, & t > t_{\cap} = t_0 \\ y = 0, & t \leq t_{\cap} = t_0 \end{cases}.$

4.  $\psi(t) = \begin{cases} y = 0, & t \geq t_{\cap} = t_0 \\ y = \left[ \frac{(t-t_0)}{3} \right]^3, & t < t_{\cap} = t_0 \end{cases}.$

5.  $\psi(t) = \begin{cases} y = \left[ \frac{(t-t_{**})}{3} \right]^3, & t > t_{**} \\ y = 0, & t_* \leq t \leq t_{**} \\ y = \left[ \frac{(t-t_*)}{3} \right]^3, & t < t_* \end{cases}.$

**Ejemplo 11.1.13** ¿ Existe unicidad de las soluciones para el problema de valor inicial (11.36) ?

$$\frac{dy}{dt} = y^{2/3}, \quad y(t_0) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11.36}$$

En el p.v.i. (11.36), si  $y(t_0) > 0$  e  $y(t_*) < 0$ , entonces las infinitas soluciones son de la forma:

$$1. \psi(t) = \left[ \frac{(t-t_0)}{3} + y(t_0)^{1/3} \right]^3$$

$$2. \psi(t) = \begin{cases} y = \left[ \frac{(t-t_0)}{3} + y(t_0)^{1/3} \right]^3, & t > t_{\cap} = -3 \sqrt[3]{y(t_0)} + t_0 \\ y = 0, & t \leq t_{\cap} = -3 \sqrt[3]{y(t_0)} + t_0 \end{cases}.$$

3.

$$\psi(t) = \begin{cases} y = \left[ \frac{(t-t_0)}{3} + y(t_0)^{1/3} \right]^3, & t > t_{\cap D} = -3 \sqrt[3]{y(t_0)} + t_0 \\ y = 0, & t_{\cap I} = t_* - \sqrt[3]{y(t_*)} \leq t \leq t_{\cap D} = -3 \sqrt[3]{y(t_0)} + t_0 \\ y = \left[ \frac{(t-t_*)}{3} + y(t_*)^{1/3} \right]^3, & t < t_{\cap I} = t_* - \sqrt[3]{y(t_*)} \end{cases}.$$

$$4. \psi(t) = \begin{cases} y = 0, & t \geq t_{\cap I} = t_* - \sqrt[3]{y(t_*)} \\ y = \left[ \frac{(t-t_*)}{3} + y(t_*)^{1/3} \right]^3, & t < t_{\cap I} = t_* - \sqrt[3]{y(t_*)} \end{cases}.$$

**Nota 11.1.14** El lector no tardará de darse cuenta que estamos esencialmente ante la búsqueda de las soluciones de E.D.O. sólo que naturalmente, en los dos últimos ejemplos, i.e. Ejemplo 11.1.12 y Ejemplo 11.1.13, resultan expresables, en base a combinaciones de las formas  $t = \bar{c}_1 \sqrt[3]{y} + \bar{c}_2$ . Mientras que en el Ejemplo 11.1.10 y en el Ejemplo 11.1.11 las soluciones son expresables desde relaciones del tipo  $t = \tilde{c}_1 \sqrt[3]{y^2} + \tilde{c}_2$ .

En ambos casos la dificultad radica en que el eje  $t$ , i.e.  $y = 0$ , divide el plano en dos regiones, en las que se puede utilizar la antiderivación en zonas donde el integrando es continuo. O en su defecto, se exigirá la evaluación de las integrales impropias  $\int_{y_0=0}^y \frac{dy}{\sqrt[3]{y}}$  e  $\int_{y_0=0}^y \frac{dy}{\sqrt[3]{y^2}}$ , para  $\lim_{y_0 \rightarrow 0^\pm}$ , las cuales en ambos casos son convergentes. La diferencia existente y visible por los resultados obtenidos, proviene del hecho que el integrando respecto a la variable dependiente, en un caso es  $\infty$  con permanencia del signo, mientras que en el otro, cambia de signo  $\pm\infty$ , ello es lo que ha generado respuestas distintivas para los respectivos problemas de condiciones iniciales, ver Figura 11.18. En términos geométricos, se está frente a la existencia de recta tangente vertical única,  $y = 0$ , si la relaciones entre las variables son del tipo  $t = \bar{c}_1 \sqrt[3]{y} + \bar{c}_2$ , en contraposición con la no existencia de recta tangente para las formas  $t = \tilde{c}_1 \sqrt[3]{y^2} + \tilde{c}_2$ .

Mientras que en la siguiente E.D.O. (11.37) las respectivas integrales impropias para  $\lim_{y_0 \rightarrow 0^\pm}$ , resultan divergentes e  $y = 0$ , será la asíntota de equilibrio para el modelo.

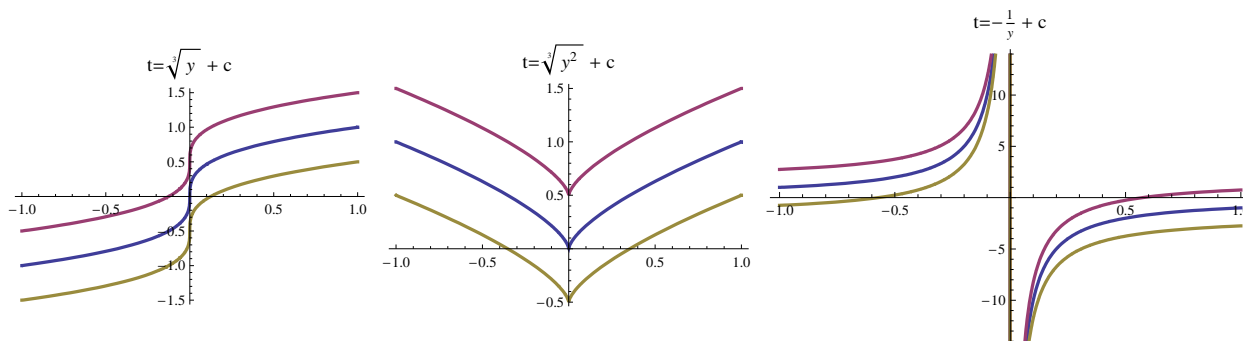


Figura 11.18:  $t = \sqrt{y} + c$ ,  $t = \sqrt[3]{y^2} + c$ ,  $t = -\frac{1}{y} + c$ .

**Ejemplo 11.1.15** ¿ Existe unicidad de las soluciones para el problema de valor inicial (11.37) ?

$$\frac{dy}{dt} = y^2, \quad y(t_0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (11.37)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^y \frac{dy}{y^2} = \int_{t_0}^t dt, \quad y > 0,$$

La integral impropia de la izquierda es divergente, de la misma manera que lo es la siguiente integral impropia

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \int_y^{\epsilon} \frac{dy}{y^2} = \int_t^{t_0} dt, \quad y < 0$$

Razón por la cuál la única solución para el p.v.i. (11.15), es la solución  $y_{\epsilon}(t) = 0$ .

**Ejemplo 11.1.16** ¿ Existe unicidad de las soluciones para el problema de valor inicial (11.39) ?

$$\frac{dy}{dt} = y, \quad y(t_0) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (11.38)$$

Supongamos que  $y(t_0) > 0$  entonces trabajando en la región  $y > 0$ , resulta la siguiente integral propia o definida

$$\int_{y(t_0) > 0}^{y > 0} \frac{dy}{y^2} = \int_{t_0}^t dt,$$

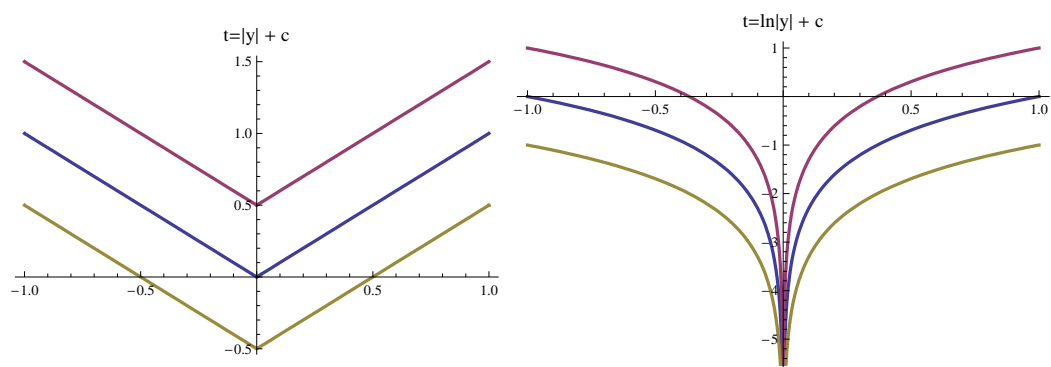


Figura 11.19:  $t = |y| + c$ ,  $t = \ln |y| + c$ .

$$\frac{-1}{y} + \frac{1}{y(t_0)} = t - t_0,$$

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{y(t_0)} = -t + t_0.$$

Por lo tanto, despejando  $y$  en función de  $t$ , se obtiene [la única solución del p.v.i. \(11.1.16\)](#), es decir:

$$y = \frac{1}{t_0 - t + (y(t_0))^{-1}}, \quad t < t_0 + (y(t_0))^{-1}.$$

Por otra parte, la solución de equilibrio  $y_e(t) = 0$  de  $\frac{dy}{dt} = y$ , es asíntota vertical de la solución del p.v.i. (11.39) cuando  $t \rightarrow [t_0 + (y(t_0))^{-1}]^-$ .

**Ejemplo 11.1.17** ¿ *Existe unicidad de las soluciones del problema de valor inicial (11.39)?*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{|y|}, \quad y(t_0) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad t_0 > 0. \quad (11.39)$$

La primera observación del caso (11.1.17), es que no está definida  $\frac{y}{|y|}$  en  $y = 0$ . En segunda instancia la aparición del  $|y|$ , exige la reescritura de (11.39) como:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{|y|} = \begin{cases} \frac{dy}{dt} = 1 & \text{si } y > 0 \\ \frac{dy}{dt} = -1 & \text{si } y < 0 \end{cases}, \quad y(t_0) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad t_0 \in \mathbb{R}. \quad (11.40)$$

Simplemente, y sin dificultad, acordaremos que las soluciones del p.v.i. (11.39) son únicas una vez fijado el valor inicial en uno de los dos semiplanos. Por otra parte, la no existencia de recta tangente en  $y = 0$ , delimitará un intervalo temporal para las soluciones, a saber:

$$\text{Solución} \rightarrow \begin{cases} y = t + y(t_0) - t_0 & \text{si } y > 0, \quad y(t_0) > 0, \quad \text{para } t > t_0 - y(t_0) \\ y = -t + y(t_0) + t_0 & \text{si } y < 0, \quad y(t_0) < 0, \quad \text{para } t > t_0 + y(t_0) \end{cases} . \quad (11.41)$$

La tercera observación, es que el modelo (11.39) no tiene solución de equilibrio.

**Observación 11.1.18** *Se recomienda estudiar en general, simultáneamente la E.D.O. recíproca, puesto que normalmente su correspondiente análisis puede aportar una mayor precisión para la interpretación definitiva de las soluciones obtenidas desde las técnicas del cálculo diferencial e integral.*

**Ejemplo 11.1.19** *El modelo recíproco de (11.42) es la E.D.O. (11.43).*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} \quad (11.42)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y} \quad (11.43)$$

Mientras que en (11.42), debe ser  $t \neq 0$ , en (11.43), resulta que  $y \neq 0$ . En otras palabras, la búsqueda de las soluciones diferenciables se realizará en principio, en cada uno de los cuatro cuadrantes, i.e. en estos cuatro conjuntos abiertos no acotados del plano,  $y$  vs  $t$ . Proponemos al lector efectuar la separación de variables y resolver este ejercicio, pues ya tiene suficientes herramientas para solucionar el caso.

### 11.1.3. Carp Population

Aquí consideramos oportuno retomar y resumir el ejemplo “Carp Population”<sup>6</sup> del libro [Tabachnikov, S. (1999)] de American Mathematical Society<sup>7</sup> analizado y atravesando

<sup>6</sup>Propuesta para el alumno interesado: “Carp ”¿ A qué pez corresponde en nuestro país y cómo lo llamamos ?

<sup>7</sup>Evolution Processes and Ordinary Differential Equations. V. I. Arnol’d, pp. 78-85. Libro Kvant Selecta: Algebra and Analysis, II. Serge Tabachnikov, Editor. Mathematical World. Volume 15. American Mathematical Society, 1999.

las secciones §3. “Carp<sup>8</sup> in a Pond (Normal Population Growth)”, §4. “Carp in the Case of Food Shortage (Logistic Curve)”, §5. “Carp Fishing”, §6. “The Introduction of Feedback” y §6. “Carp and Pike<sup>9</sup>”. La presente intención es ilustrar en este ejercicio mediante etapas consecutivas varias de las situaciones ya estudiadas en los ejemplos anteriores.

1. “Carp in a Pond (Normal Population Growth)”.

$$\frac{d N(t)}{d t} = kN(t), \quad k > 0. \quad (11.44)$$

Ecuación diferencial conocida como de crecimiento exponencial o como el modelo de crecimiento normal de Malthus, Figura 11.4. Caso precisamente analizado en el contenido del inciso i) de la página 414.

**Nota 11.1.20** *En palabras, una población con velocidad de cambio positiva proporcional al tamaño de la misma, i.e. al número de individuos que la integran, y en un habitat con fuentes alimenticias inagotables, y sin depredadores, crecerá exponencialmente.*

2. “Carp in the Case of Food Shortage (Logistic Curve)”.

$$\frac{d N(t)}{d t} = (1 - N(t)) N(t) \quad (11.45)$$

En general, las experiencias biológicas indican, que los recursos no son incommensurables. Razón por la cual, aparecen límites naturales al crecimiento. Por ejemplo si el lago o laguna (pond) es pequeña, o si existe un crecimiento marcado del tamaño de la población, surgirá la competencia entre los individuos por la comida lo que conducirá al decrecimiento de la tasa de nacimiento de la especie. Lo que implica cambiar en el modelo del crecimiento ilimitado (11.44), en su forma más simple, la constante  $k$  por una dependencia lineal decreciente con el número de individuos, i.e.  $ka - bN(t)$ , con  $a, b$  constantes positivas. De esta manera, se llega a la ecuación de cambio de la población bajo competencia  $\frac{d N(t)}{d t} = (a - bN(t)) N(t)$ .

---

<sup>8</sup>An edible freshwater. The American Heritage Dictionary. Dell Publishing Co., Inc. New York, 1985.

<sup>9</sup>Pike (pl. or pikes): A narrow-bodied freshwater game and food fish with a long snout. The American Heritage Dictionary. Dell Publishing Co., Inc. New York, 1985.

Una vez ajustados las unidades para las variables  $t$  y  $N(t)$ , podemos trabajar estas situaciones particulares, estudiando el modelo (11.45). Ver el caso analizado en el contenido del inciso ii) que comienza en la página 418 y la Figura 11.7 que ilustra las soluciones de la ecuación diferencial del modelo logístico.

A modo de reseña, y para aclarar en el contexto específico del presente estudio poblacional, a continuación recopilaremos la información matemática más relevante del caso (11.45).

a) Soluciones de equilibrio  $N_1^e(t) = 0$  y  $N_2^e(t) = 1$ .

b)

$$\begin{cases} N(t) = \frac{1}{1 - e^{-(t+k_1)}}, & N > 1 & \text{y } t > -k_1 \\ N(t) = \frac{1}{1 + e^{-(t+k_2)}}, & 0 < N < 1 & \text{y } t \in \mathbb{R} \\ N(t) = \frac{1}{1 - e^{-(t+k_3)}}, & N < 0 & \text{y } t < -k_3 \end{cases} \quad (11.46)$$

Es evidente que considerar  $N < 0$  no tiene ningún sentido, ya que en el presente contexto biológico implicaría la no existencia de individuos, o mejor dicho la existencia del número  $N < 0$ , o tamaño de la muestra biológica negativo. Por ejemplo, en caso de que el modelo se aplicara a reactantes y/o productos intervinientes en determinada reacción química podrá tener significado la consideración de la región  $(N(t) < 0, t)$ .

c) La evaluación de los siguientes límites permite establecer que  $N_2^e(t) = 1$  es un equilibrio asintóticamente estable para la población. Puesto que en caso de que el número de individuos supere el límite impuesto para la sustentabilidad pasado un tiempo razonable inexorablemente se autoeliminarán hasta llegar a la mencionada cota. De la misma manera que en caso de ser el tamaño de la población inferior a uno, el número de individuos aumentará pasado un tiempo suficientemente grande hasta aproximarse al mencionado valor.

Por otra parte, existe la barrera temporal  $t = -k_1$  en las soluciones del modelo



en la región abierta  $(N(t) > 1, t)$ , cuya interpretación diferencial e integral establece que si el número de individuos existente supera ampliamente al límite racional de la supervivencia, en este caso hemos elegido el mismo como uno, inevitablemente y abruptamente deberá extinguirse los integrantes hasta llegar a acercarse asintóticamente al equilibrio natural delimitado por los recursos necesarios para la subsistencia de la especie. Esta interpretación, en lenguaje matemático es evidenciable por el resultado del cálculo del límite que aparece en el segundo inciso y el primero límite en el primer inciso, unido a que la derivada primera es negativa, mientras que la derivada segunda es positiva en la región.

Los dos primeros límites evaluados en el primer inciso a continuación, confirman el carácter de quilibrio estable para la solución  $N_2^e(t) = 1$ .

Por el contrario  $N_1^e(t) = 0$  es un equilibrio inestable de la población, como lo explicita el valor obtenido por el segundo límite que hemos calculado en el primer inciso.

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - e^{-(t+k_1)}} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-(t+k_2)}} = 1$
- $\lim_{t \rightarrow -k_1^+} \frac{1}{1 - e^{-(t+k_1)}} = +\infty$
- $\lim_{t \rightarrow -k_3^-} \frac{1}{1 - e^{-(t+k_3)}} = -\infty$

d) Diferentes Problemas de Valor Inicial.

$$\left\{ \begin{array}{l} N(t) = \frac{N_0}{N_0 - (N_0 - 1)e^{-(t-t_0)}}, \quad N_0 = N(t_0) > 1 \quad \text{y } t > t_0 + \ln\left(\frac{N_0-1}{N_0}\right) \\ N(t) = \frac{N_0}{N_0 + (1 - N_0)e^{-(t-t_0)}}, \quad 0 < N_0 = N(t_0) < 1 \quad \text{y } t \in \mathbb{R} \\ N(t) = \frac{N_0}{N_0 - (N_0 - 1)e^{-(t-t_0)}}, \quad N_0 = N(t_0) < 0 \quad \text{y } t < t_0 + \ln\left(\frac{N_0-1}{N_0}\right) \\ N(t) = N_2^e(t) = 1, \quad N_0 = N(t_0) = 1 \quad \text{y } t \in \mathbb{R} \\ N(t) = N_1^e(t) = 0, \quad N_0 = N(t_0) = 0 \quad \text{y } t \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (11.47)$$

Es decir, mediante el modelo (11.45) hemos interpretado la situación más realista en la que los individuos de la población están sometidos a competencia en funciones de los recursos que garantizan su sustentabilidad. Esta población una vez que aparece,

$0 < N \rightarrow 0$ , comenzará a reproducirse hasta alcanzar una cantidad de individuos cercana a la unidad. Cada laguna o lago, tenderá a estabilizarse en su tamaño máximo específico en concordancia con los recursos del ecosistema.

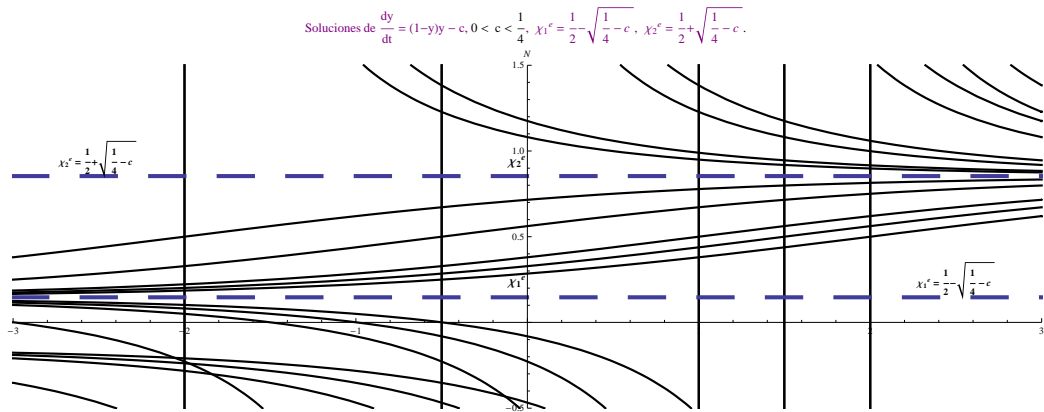


Figura 11.20: Carp Fishing Soluciones: Estabilidad, si  $c < \frac{1}{4}$ , en  $\chi_e^2(t) \rightarrow \chi_e(t) \approx 1$ .

### 3. “Carp Fishing”

$$\frac{d N(t)}{d t} = (1 - N(t)) N(t) - c, \quad c > 0. \quad (11.48)$$

El trabajo de V. I. Arnol’d, propone que esta población de peces se vea sometida a una extracción diaria para alimentar a los lugareños. En otros términos, el autor se pregunta indagar sobre las soluciones en el caso que el tamaño máximo del equilibrio ecológico, se vea alterado por una velocidad constante de extracción de los individuos debido a la presencia de los pescadores.

Además, en principio supone, que la cuota o velocidad de pesca permitida, es  $c > 0$ . Lo que se explica mediante el modelo (11.48).

En primer término reescribimos (11.48) después del completamiento de cuadrado como (11.49)

$$\frac{d N(t)}{d t} = - \left[ \left( N(t) - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( c - \frac{1}{4} \right) \right], \quad c > 0. \quad (11.49)$$

a) Información desde el Cálculo Diferencial.

- Resolver  $\frac{dN(t)}{dt} = 0$ , implica determinar si existen o no soluciones de equilibrio.

$$(1-x)x - c = 0, x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - c}, \text{ entonces:}$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - c} \begin{cases} \frac{1}{4} - c = 0 & c = \frac{1}{4}, x_1 = x_2 = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4} - c < 0, \text{ si } c > \frac{1}{4} & \nexists x_1, \nexists x_2 \in \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4} - c > 0, \text{ si } 0 < c < \frac{1}{4}, & \text{e.g. } c = \frac{3}{16}, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

- Calculamos  $\frac{d^2 N(t)}{dt^2}$ .

$$\frac{d^2 N(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dN(t)}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (1 - 2N(t)) = [(1 - N(t))N(t) - c](1 - 2N(t)).$$

$$\frac{d^2 N(t)}{dt^2} = 2(N(t) - \frac{1}{2}) \left[ (N(t) - \frac{1}{2})^2 + (c - \frac{1}{4}) \right] \quad (11.50)$$

Para desmenuzar toda la información que se dispone a partir de cada uno de los cálculos previos, dividiremos el análisis de los resultados de las técnicas diferenciales en tres casos, según sean los valores que se le asignan a la velocidad absoluta constante  $c$  de extracción de los peces.

1)  $c = \frac{1}{4}$ .

La expresión de  $\frac{dN(t)}{dt} = -(N(t) - \frac{1}{2})^2$  y de  $\frac{d^2 N(t)}{dt^2} = 2(N(t) - \frac{1}{2})^3$  establecen que existe una única solución de equilibrio  $N_e(t) = \frac{1}{2}$ , que tanto en la región abierta no acotada  $0 < N(t) < \frac{1}{2}$  como en la región  $N(t) > \frac{1}{2}$  las soluciones buscadas serán estrictamente decrecientes para todo valor de  $t$ . Mientras, que el signo de la expresión de la derivada segunda establece que la concavidad es hacia abajo en la primer franja antes mencionada y las soluciones son cóncava hacia arriba en  $N(t) > \frac{1}{2}$ .

2)  $c > \frac{1}{4}$ .

En estas situaciones, la E.D.O. (11.49) no tiene ninguna solución de equilibrio, además las soluciones serán estrictamente decrecientes. Mientras que (11.50) explicita un cambio de signo en  $N(t) = \frac{1}{2}$ , es decir, en

$0 < N(t) < \frac{1}{2}$  las soluciones son cóncavas hacia abajo y en  $N(t) > \frac{1}{2}$  son cóncavas hacia arriba, siendo  $N(t) = \frac{1}{2}$  ordenada de inflexión.

3)  $0 < c < \frac{1}{4}$ .

La E.D.O. (11.48) puede reescribirse como:

$$\frac{dN(t)}{dt} = - \left[ N(t) - \left( \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c} \right) \right] \left[ N(t) - \left( \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c} \right) \right], \quad 0 < c < \frac{1}{4}. \quad (11.51)$$

Estas situaciones explicitan las soluciones de equilibrio  $N_1^e(t) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c}$  y  $N_2^e(t) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c}$ . El estudio del signo de la expresión  $\frac{dN(t)}{dt}$  determine decrecimiento de las soluciones en  $(-\infty, N_1^e(t))$  y en  $(N_2^e(t), +\infty)$ . Mientras que en banda  $(N_1^e(t), N_2^e(t))$  son estrictamente crecientes.

Así como la (11.50) queda reescrita por el producto de tres factores lineales, a saber:

$$\frac{d^2 N(t)}{dt^2} = 2(N(t) - \frac{1}{2}) \left[ N(t) - \left( \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c} \right) \right] \left[ N(t) - \left( \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c} \right) \right], \quad 0 < c < \frac{1}{4}. \quad (11.52)$$

El estudio de signo en (11.52) determina que las soluciones son cóncava hacia abajo en  $(-\infty, N_1^e(t))$  y  $(\frac{1}{2}, N_2^e(t))$ , mientras que son cóncava hacia arriba en  $(N_1^e(t), \frac{1}{2})$  y también en  $(N_2^e(t), +\infty)$ .

b) Información desde el Cálculo Integral.

Hacer el análisis de los tres casos, según  $c = \frac{1}{4}$ ,  $c > \frac{1}{4}$  y  $0 < c < \frac{1}{4}$ , requiere la aplicación de las técnicas y métodos de integración aprendidos en el curso.

1)  $c = \frac{1}{4}$ , i.e.  $\frac{dN(t)}{dt} = -(N(t) - \frac{1}{2})^2$ . Tiene como única solución de equilibrio  $N_e(t) = \frac{1}{2}$ . En las regiones abiertas que separa esta función, resulta:

- En  $N_e(t) > \frac{1}{2}$ , separando variables y antiderivando  $\int \frac{dN(t)}{(N(t) - \frac{1}{2})^2} = \int dt$ , se tiene  $\frac{-1}{N(t) - \frac{1}{2}} = -t + K$ , se tiene que  $\frac{1}{N(t) - \frac{1}{2}} = t - K$ , para  $t - K > 0$ , es decir  $t > K$ . El carácter recíproco existente en esta relación entre la variable dependiente  $N(t)$  y la independiente  $t$ ,

permite despejar las soluciones del caso:

$$N(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{t - K}, \quad t > K. \quad (11.53)$$

En otras palabras, en la región abierta definida por  $t > K$  y  $N_e(t) > \frac{1}{2}$  las soluciones (11.53) son una rama de una hipérbola limitada por la asíntota horizontal  $N(t) = \frac{1}{2}$  y la asíntota vertical  $t = K$ .

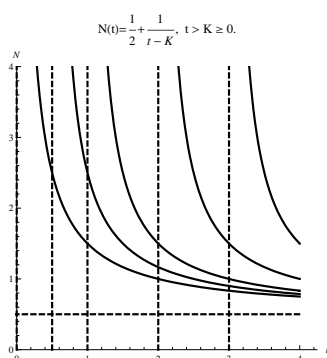


Figura 11.21: Reciprocidad funcional en las soluciones,  $c = \frac{1}{4}$ , en  $t > K \geq 0$  y  $N_e(t) = \frac{1}{2}$ .

- En  $N_e(t) < \frac{1}{2}$ , análogamente  $\int \frac{dN(t)}{(N(t) - \frac{1}{2})^2} = - \int dt$

$$N(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{t - \bar{K}}, \quad t < \bar{K}. \quad (11.54)$$

Por lo tanto, en la región abierta definida por  $t < \bar{K}$  y  $N_e(t) < \frac{1}{2}$  las soluciones (11.53) son una rama de una hipérbola limitada por la asíntota horizontal  $N(t) = \frac{1}{2}$  y la asíntota vertical  $t = \bar{K}$ .

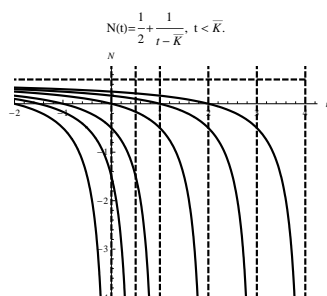


Figura 11.22: Reciprocidad funcional en las soluciones,  $c = \frac{1}{4}$ , en  $t < \bar{K}$  y  $N_e(t) = \frac{1}{2}$ .

- 2)  $c > \frac{1}{4}$ , la E.D.O. (11.49), el método de integración mediante luego de la separación de variables al evidenciar la no existencia de raíces reales del denominador  $[(N(t) - \frac{1}{2})^2 + (c - \frac{1}{4})]$ ,

$$\int \frac{dN(t)}{(N(t) - \frac{1}{2})^2 + \underbrace{(c - \frac{1}{4})}_{>0}} = - \int dt, \quad c > \frac{1}{4}. \quad (11.55)$$

Dividiendo el denominador de la identidad integral anterior por  $c - \frac{1}{4}$ , se obtiene:

$$\int \frac{dN(t)}{\left(\frac{N(t) - \frac{1}{2}}{\sqrt{c - \frac{1}{4}}}\right)^2 + 1} = -(c - \frac{1}{4}) \int dt$$

Utilizando el método de sustitución de variables  $\nu = \frac{N(t) - \frac{1}{2}}{\sqrt{c - \frac{1}{4}}}$ , diferenciando esta identidad se tiene  $d\nu = \frac{dN(t)}{\sqrt{c - \frac{1}{4}}}$  que al ser reemplazada en la identidad integral previa conduce a:

$$\sqrt{c - \frac{1}{4}} \int \frac{d\nu}{\nu^2 + 1} = -(c - \frac{1}{4}) \int dt.$$

$$\int \frac{d\nu}{\nu^2 + 1} = -\sqrt{c - \frac{1}{4}} \int dt.$$

Finalmente, antiderivado en ambos miembros y simplificando, se obtiene:

$$\text{arc tg} \left( \frac{N(t) - \frac{1}{2}}{\sqrt{c - \frac{1}{4}}} \right) = -\sqrt{c - \frac{1}{4}} (t + K_1) = -\sqrt{c - \frac{1}{4}} t - K_2.$$

$$\text{arc tg} \left( \frac{N(t) - \frac{1}{2}}{\sqrt{c - \frac{1}{4}}} \right) = -\sqrt{c - \frac{1}{4}} t - K_2. \quad (11.56)$$

La función  $\text{arc tg}(u)$  es por nosotros conocida, desde la ejercitación propuesta en el TP N<sup>o</sup>0 de repaso y el TP N<sup>o</sup>1 introductorio, es una función estrictamente creciente que cambia su concavidad en el origen, cuyo dominio son los reales y su imagen el intervalos abierto  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Dado que la relación funcional de (11.56) poseen argumentos lineales en la variable

dependiente  $N(t)$  y en la que estamos considerando como independiente  $t$ , y teniendo en cuenta los resultados del inciso 2) del caso, en la página 451, obtenidos haciendo uso de las técnicas de cálculo diferencial, se evidencia la continuidad de cada familia de las curvas que solucionan el problema (11.49) para  $c > \frac{1}{4}$ . Es decir,  $\frac{dN(t)}{dt}$  es siempre negativa, y  $\frac{d^2 N(t)}{dt^2}$  cambia de signo en los instantes en que cada curva solución de la familia atraviesa con continuidad la horizontal  $N(t) = \frac{1}{2}$ .

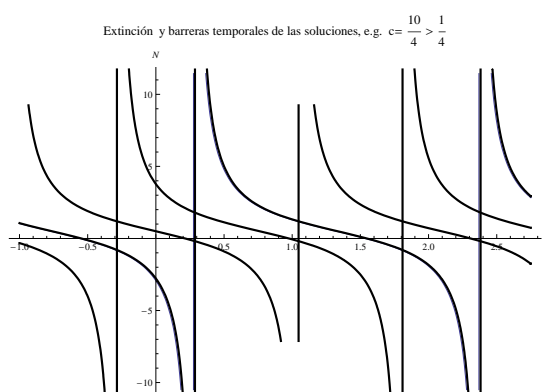


Figura 11.23: Soluciones si  $c > \frac{1}{4}$ .

Entonces, para determinar las soluciones del caso (11.49) despejaremos  $N(t)$  a continuación. Y analizamos el estudio de las gráficas de las soluciones (11.57) considerando a  $-\sqrt{(c - \frac{1}{4})t - K_2}$  perteneciendo a  $(-\frac{\pi}{2}, 0]$  y luego perteneciendo al intervalo semiabierto  $[0, \frac{\pi}{2})$ .

$$N(t) = \frac{1}{2} + \sqrt{(c - \frac{1}{4})} \operatorname{tg} \left[ -\sqrt{(c - \frac{1}{4})t - K_2} \right]. \quad (11.57)$$

- $-\sqrt{(c - \frac{1}{4})t - K_2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-K_2}{\sqrt{(c - \frac{1}{4})}}, \rightarrow N(t) = \frac{1}{2}$ .
- $-\frac{\pi}{2} < -\sqrt{(c - \frac{1}{4})t - K_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{-K_2}{\sqrt{(c - \frac{1}{4})}} < t < \frac{\frac{\pi}{2} - K_2}{\sqrt{(c - \frac{1}{4})}}, \rightarrow N(t) < \frac{1}{2}$ .
- $0 < -\sqrt{(c - \frac{1}{4})t - K_2} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{-\frac{\pi}{2} - K_2}{\sqrt{(c - \frac{1}{4})}} < t < \frac{-K_2}{\sqrt{(c - \frac{1}{4})}}, \rightarrow N(t) > \frac{1}{2}$ .

Las soluciones en (11.57) claramente explicitan la existencia de barreras

temporales, o asíntotas verticales hacia las que el número de integrantes de la población crezca indefinidamente, i.e.  $N(t) \rightarrow \pm\infty$ , ver Figura 11.24.

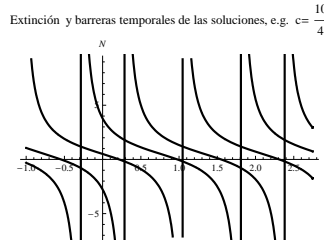


Figura 11.24: Extinción poblacional y barreras temporales en  $c = \frac{10}{4} > \frac{1}{4}$ .

En particular, es importante destacar que en este caso existe en la familia de soluciones (11.57) una barrera temporal,  $t \rightarrow \frac{\pi - K_2}{\sqrt{c - \frac{1}{4}}}$ , en cuya proximidad la población tiene a la extinción, ver ilustración en la Figura 11.25, e.g.  $c = \frac{10}{4}$ ,  $t_0 = \frac{2}{3}$ ,  $N(t_0) = 2$ ,  $k_2 = -1 + \text{arc tg}(-\frac{3}{2})$ .

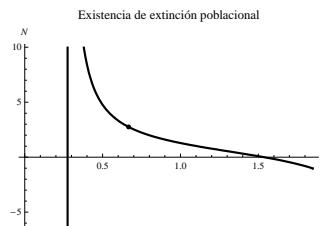


Figura 11.25: Extinción en una población particular del caso  $c = \frac{10}{4}$ .

- 3)  $0 < c < \frac{1}{4}$ , separando variables en (11.51) e integrando utilizando el método de las fracciones simples para el caso de un denominador con dos raíces reales diferentes, i.e.

$$\int \frac{dN(t)}{\left[N(t) - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c}\right)\right] \left[N(t) - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c}\right)\right]} = - \int dt. \quad (11.58)$$

La ecuación anterior (11.58) es válida para el modelo (11.51) si se satisfacen  $N(t) \neq N_1^e(t) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c}$  y  $N(t) \neq N_2^e(t) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c}$ . Utilizando el Método de las Fracciones, se tiene:

$$\frac{1}{\left[N(t) - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c}\right)\right] \left[N(t) - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c}\right)\right]} = \frac{A}{\left[N(t) - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c}\right)\right]} + \frac{B}{\left[N(t) - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c}\right)\right]}.$$



Ya hemos explicado, una manera sencilla para determinar el valor de las constantes  $A$  y  $B$  por lo tanto, directamente explicitamos sus valores. Utilizaremos  $N_2^e(t) - N_1^e(t) = 2\sqrt{\frac{1}{4} - c}$  para expresar las mencionadas constantes.  $A = \frac{-1}{N_2^e - N_1^e} = -B$ .

$$\frac{1}{[N(t) - (\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c})][N(t) - (\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c})]} = \frac{1}{N_2^e(t) - N_1^e(t)} \left\{ \frac{-1}{[N(t) - N_1^e]} + \frac{1}{[N(t) - N_2^e]} \right\}.$$

Teniendo presente, las expresiones anteriores a continuación antiderivamos (11.58), trabajando en las tres regiones en las que es natural dividir el estudio de la variable dependiente  $N(t)$ .

- $N(t) < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c}$ . En esta región la antiderivación de (11.58) resulta:

$$\ln \left[ \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c} - N}{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c} - N} \right] = \ln \left[ \frac{N_2^e - N}{N_1^e - N} \right] = (N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)$$

Por lo tanto,

$$\frac{N_2^e - N}{N_1^e - N} = \frac{N - N_2^e}{N - N_1^e} = e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)}$$

despejando  $N(t)$  se obtiene la solución de (11.58) en  $N(t) < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c}$  y  $0 < c < \frac{1}{4}$ .

$$N(t) = \frac{N_2^e - N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)}}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)}}, \quad N(t) < N_1^e \quad (11.59)$$

El denominador de (11.59) se anula cuando  $t = K_1$ , lo que establece una asíntota vertical en las soluciones de la región considerada.

Además cabe precisar, para qué valores de la variable independiente son válidas las soluciones (11.59). En términos matemáticos, esto se resuelve de la siguiente manera:

$$N(t) = \frac{N_2^e - N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)}}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)}} < N_1^e$$

equivalente a resolver la siguiente desigualdad,

$$\frac{N_2^e - N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)}}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)}} - N_1^e < 0$$

y sacando común denominador,

$$\frac{N_2^e - N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)} - N_1^e (1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)})}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)}} < 0$$

resulta

$$\frac{N_2^e - N_1^e}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)}} < 0,$$

como  $N_2^e - N_1^e > 0$ , deberá ser negativo el denominador, i.e.

$$1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)} < 0,$$

lo que implica

$$1 < e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)},$$

y aplicando  $\ln$ , función estrictamente creciente, a ambos miembros de la igualdad se obtiene:

$$0 < (N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)$$

equivalente a

$$0 < -t + K_1$$

finalmente

$$t < K_1$$

es la condición temporal para la validez de (11.59).

Hemos determinado que las soluciones de (11.58) en  $N(t) < N_1^e$ , requieren

$$N(t) = \frac{N_2^e - N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)}}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)}}, \quad N(t) < N_1^e, \quad t < K_1; \quad 0 < c < \frac{1}{4}. \quad (11.60)$$

Cabe tener en cuenta, que si lo que tratamos de modelar es la cantidad de individuos de la especie, es necesario también restringir las soluciones anteriores mediante la siguiente inecuación:

$$N(t) = \frac{N_2^e - N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)}}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)}} > 0.$$

Cuya solución implica considerar las dos situaciones siguientes:

$$\begin{cases} N_2^e - N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)} > 0 \cap 1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)} > 0, & \rightarrow (K_1, +\infty) \\ N_2^e - N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)} < 0 \cap 1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)} < 0, & \rightarrow (-\infty, K_1 - \frac{1}{N_2^e - N_1^e} \ln(\frac{N_2^e}{N_1^e})) \end{cases}$$

Las restricción temporal en (11.60) y las anteriores, determinan de manera precisa el intervalo de validez de la variable independiente del caso.

$$0 < N(t) = \frac{N_2^e - N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)}}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)}} < N_1^e, \quad t < K_1 - (N_2^e - N_1^e)^{-1} \ln(\frac{N_2^e}{N_1^e}), \quad 0 < c < \frac{1}{4}. \quad (11.61)$$

**Observación 11.1.21** *Bajo la validez de las soluciones en (11.61) existe la posibilidad de extinción de la especie.*

Por lo declarado, es necesario que nos realicemos la siguiente pregunta, existe un tiempo en que  $N(t)$  en (11.61) se acerque a cero o tome el valor nulo. Para ello debe verificarse que  $N_2^e - N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)} = 0$  en (11.61), identidad que se satisface si  $t = t_{\dagger} = K_1 - (N_2^e - N_1^e)^{-1} \ln(\frac{N_2^e}{N_1^e})$ .

**Observación 11.1.22** *En virtud de que el intervalo temporal en (11.61) es  $(-\infty, K_1 - (N_2^e - N_1^e)^{-1} \ln(\frac{N_2^e}{N_1^e}))$ , cabría preguntarse si esta acotado el número de individuos de la región asintóticamente por  $N_1^e$ .*

La respuesta la encontraremos al calcular el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{N_2^e - N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)}}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_1)}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{N_2^e e^{(N_2^e - N_1^e)(t - K_1)} - N_1^e}{e^{(N_2^e - N_1^e)(t - K_1)} - 1} = N_1^e.$$

- $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c} < N(t) < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c}$ . En esta región al antiderivar respecto de la variable dependiente, se tiene

$$\ln \left| \frac{N_2^e - N}{N_1^e - N} \right| = \ln \frac{N_2^e - N}{-(N_1^e - N)} = (N_2^e - N_1^e)(-t + K_2).$$

Finalmente, al despejar  $N(t)$  se consiguen las soluciones del caso en la región.

$$N(t) = \frac{N_2^e + N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_2)}}{1 + e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_2)}}, \quad N_1^e < N(t) < N_2^e. \quad (11.62)$$

**Observación 11.1.23** *Las soluciones (11.63) tienen como dominio de variación temporal, a todo  $\mathbb{R}$ , i.e.  $(-\infty, +\infty)$ . Además, sus imágenes son el intervalo abierto  $(N_1^e, N_2^e)$ .*

$$\frac{N_2^e + N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_2)}}{\underbrace{1 + e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_2)}}_{>1}} < N_2^e$$

Luego puede ser reescrita como:

$$N_2^e + N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_2)} < N_2^e (1 + e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_2)})$$

que conduce la siguiente inecuación

$$N_1^e < N_2^e$$

que es verdadera.

Analogamente,

$$\frac{N_2^e + N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_2)}}{1 + e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_2)}} > N_1^e$$

por las mismas razones puede ser reescrita como:

$$N_2^e + N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_2)} > N_1^e (1 + e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_2)})$$

que lleva a:

$$N_2^e < N_1^e.$$

Ambas condiciones son verdaderas en todo el espacio temporal. A las soluciones (11.62), solamente sería necesario, aunque si bien evidentes, sus dominios temporales reales.

$$N(t) = \frac{N_2^e + N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_2)}}{1 + e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_2)}}, \quad N_1^e < N(t) < N_2^e, \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad 0 < c < \frac{1}{4}. \quad (11.63)$$

■  $N(t) > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c}.$

En virtud de los signos del cociente en los factores lineales que aparecen en el argumento del  $\ln[ ]$ , el lector confirmará que se llega a la misma expresión para la solución de (11.58) en  $N(t) > \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c}$  y  $0 < c < \frac{1}{4}$ , i.e.

$$N(t) = \frac{N_2^e - N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)}}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)}}, \quad N(t) > N_2^e. \quad (11.64)$$

El denominador de (11.64) se anula cuando  $t = K_3$ , lo que establece una asíntota vertical en las soluciones de la región considerada. Falta considerar sobre que intervalos temporales las funciones (11.64) son las soluciones al problema. En lenguaje matemático, esto significa resolver la siguiente inecuación:

$$N(t) = \frac{N_2^e - N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)}}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)}} > N_2^e$$

que de manera equivalente, implica despejar la variable independiente desde la siguiente desigualdad, con los sucesivos pasos que explicitamos a continuación.

$$\frac{N_2^e - N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)}}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)}} - N_2^e > 0$$

$$\frac{N_2^e - N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)} - N_2^e (1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)})}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)}} > 0$$

$$\frac{-N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)} + N_2^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)}}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)}} > 0$$

$$-e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)} \frac{(N_1^e - N_2^e)}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)}} > 0$$

$$e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)} \frac{(N_1^e - N_2^e)}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)}} < 0$$

La respuesta resultará finalmente de encontrar en qué intervalo temporal el denominador de la anterior desigualdad posee signo positivo, ya que  $N_1^e - N_2^e$  es de signo negativo, i.e.

$$1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)} > 0$$

$$-e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)} > -1$$

$$e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)} < 1$$

$$\ln e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)} < \ln 1 = 0$$

$$(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3) < 0$$

$$-t + K_3 < 0$$

$$-t < -K_3$$

$$t > K_3$$

$$N(t) = \frac{N_2^e - N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)}}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t + K_3)}}, \quad N(t) > N_2^e, \quad t > K_3, \quad 0 < c < \frac{1}{4}. \quad (11.65)$$

**Observación 11.1.24** *En virtud de que el intervalo temporal en (11.65) es  $(K_3, +\infty)$ , cabría preguntarse el número de individuos de la región se acerca asintóticamente por  $N_2^e$ . Ya sabemos de su crecimiento exponencial cuando  $t \rightarrow K_3^+$ .*

La respuesta la encontraremos al calcular los siguiente límites:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_2^e - N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t+K_3)}}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t+K_3)}} = N_2^e.$$

$$\lim_{t \rightarrow K_3^+} N(t) = \lim_{t \rightarrow K_3^+} \frac{N_2^e - N_1^e e^{(N_2^e - N_1^e)(-t+K_3)}}{1 - e^{(N_2^e - N_1^e)(-t+K_3)}} = +\infty.$$

c) Problemas de Valor Inicial en el Modelo “Carp Fishing”<sup>10</sup>.

A continuación resolvemos diferentes Problemas de Valor Inicial, para ello dividimos los ejemplos según los tres casos del “Carp Fishing”, i.e. modelo diferencial (11.49), es decir  $c = \frac{1}{4}$ ,  $c > \frac{1}{4}$  y  $0 < c < \frac{1}{4}$ .

- $c = \frac{1}{4}$ . Nos proponemos resolver el siguiente Problema de Valor Inicial:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -(N(t) - \frac{1}{2})^2, \quad N(t_0) = N_0. \quad (11.66)$$

- 1)  $N(t_0) = N(2) = \frac{3}{4}$ . Las familia de soluciones son la determinadas por (11.53), en la página 453, por lo tanto, para determinar la solución que resuelve el problema de valor inicial (11.66) con el valor inicial  $N(2) = \frac{3}{4}$ , solo es necesario reemplazar en (11.53),  $N(t) = N(2) = \frac{3}{4}$  y a la variable independiente  $t$  por el valor 2. Con lo que se obtiene la solución específica de este p.v.i. para la condición inicial,  $N(2) = \frac{3}{4}$ .

$$N(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{t+2}.$$

- 2)  $N(t_0) = N(2) = \frac{1}{2}$ . La solución del p.v.i. con esta condición inicial es la solución de equilibrio  $N_2(t) = \frac{1}{2}$ .
- 3)  $N(t_0) = N(2) = \frac{1}{4}$ . Las familia de soluciones (11.54) son las que permitirán determinar la solución para este p.v.i. Para ello es necesario realizar los cálculos análogos a los descritos en el primer inciso para así llegar a la respuesta del caso, i.e.

$$N(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{t-6}.$$

<sup>10</sup>De aquí en más utilizaremos el acrónimo p.v.i. para simbolizar cada Problema de Valor Inicial.

- $c > \frac{1}{4}$ . Las familia de soluciones son la determinadas por (11.57), en la página 455.

Sea el siguiente p.v.i. del modelo (11.49) para  $c = \frac{10}{4}$ ,

$$\frac{dN(t)}{dt} = - \left[ (N(t) - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4} \right], \quad N_0 = N(\frac{\pi}{4}) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Reemplazando las condiciones iniciales en (11.57), el lector determinará el valor de la constante, i.e.  $K_2 = -\frac{\pi}{3}$  y luego podrá seleccionar la única solución en (11.57) que pasa por el punto  $(t_0 = \frac{\pi}{4}, N(t_0) = \frac{1+\sqrt{3}}{2})$  la que resulta ser:

$$N(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \operatorname{tg} \left[ \frac{3}{2} (t - \frac{2\pi}{9}) \right].$$

- $0 < c < \frac{1}{4}$ . Nos proponemos resolver tres Problemas de Valores Iniciales en el modelo (11.51), según las tres regiones que se originan como consecuencia de las dos raíces reales distintas que son soluciones de equilibrio en (11.48) si la velocidad absoluta de extracción del pez  $c$  varía en el rango  $0 < c < \frac{1}{4}$ .

- 1) La condición inicial localizada en la región  $0 < N(t) < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c} = N_1^e$ . La familia de soluciones está determinada en (11.61). Sus expresiones deben ser utilizadas para resolver el siguiente p.v.i. con velocidad absoluta de extracción del pescado  $c = \frac{3}{16}$ , lo que determina las soluciones de equilibrio  $N_1^e = \frac{1}{4}$  y  $N_2^e = \frac{3}{4}$ .

$$\frac{dN(t)}{dt} = -(N(t) - \frac{1}{4})(N(t) - \frac{3}{4}), \quad N_0 = N(2 \ln 2) = \frac{3}{28}.$$

Entonces, como ya lo hemos explicado, reemplazando las condiciones iniciales ahora en (11.61) se obtiene el valor para la constante  $K_1$ , precisamente  $K_1 = 2 \ln 9$ . De esta manera, se ha determinado la solución del p.v.i. planteado, i.e.

$$N(t) = \frac{3 - 9 e^{-\frac{t}{2}}}{4 - 36 e^{-\frac{t}{2}}}.$$



- 2) La condición inicial localizada en la región  $N_1^e = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c} < N(t) < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c} = N_2^e$ . La familia de soluciones son las explicitadas en (11.63). Resolver el p.v.i. dado a continuación, i.e.

$$\frac{dN(t)}{dt} = -(N(t) - \frac{1}{4})(N(t) - \frac{3}{4}), \quad N_0 = N(2 \ln 2) = \frac{5}{12}.$$

Reemplazando las condiciones iniciales en (11.63), se obtiene para la constante  $K_2$ , el valor  $K_2 = 2 \ln 4$ , y así se determina la única solución para el p.v.i. planteado, i.e.

$$N(t) = \frac{3 + 4e^{-\frac{t}{2}}}{4 + 16e^{-\frac{t}{2}}}.$$

- 3) La condición inicial localizada en la región  $N(t) > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c} = N_2^e$ . La familia de soluciones (11.65). Resolvemos el siguiente p.v.i.

$$\frac{dN(t)}{dt} = -(N(t) - \frac{1}{4})(N(t) - \frac{3}{4}), \quad N_0 = N(2 \ln 2) = \frac{7}{2} + \sqrt{2}.$$

Reemplazando las condiciones iniciales en (11.65), se obtiene para la constante  $K_3$ , el valor  $K_3 = 2 \ln \sqrt{2}$ , y así queda determinada la solución única que pasa por el punto  $(2 \ln 2, \frac{7}{2} + \sqrt{2})$ , i.e.

$$N(t) = \frac{3 - \sqrt{2}e^{-\frac{t}{2}}}{4(1 - \sqrt{2}e^{-\frac{t}{2}})}.$$

Breve reseña comparativa entre el modelo logístico (11.45), en el que la población evoluciona según las leyes intrínsecas de la especie y el modelo con cuota pesquera constante, modelo (11.48). Claramente, cuando existe alícuota pesquera está en el rango  $0 < c < \frac{1}{4}$ , hemos verificado que existen dos soluciones de equilibrio, la superior es un equilibrio estable, mientras que la inferior no lo es. Precisamente,  $N_2^e = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c}$  el equilibrio estable para la especie es un tamaño de población menor al equilibrio estable del modelo logístico (11.45), cuando no existe extracción por la pesca lugareña. Por el contrario, si la cuota de pesca es  $c > \frac{1}{4}$ , no existen equilibrios y cualquiera sea la condición inicial la especie finalmente desaparecerá, o se extinguirá. Mientras, que cuando  $c = \frac{1}{4}$ , aparece un único equilibrio no estable,

que para el modelo (11.48) es  $N_{1=2}^e = \frac{1}{2}$ . En el que la supervivencia o extinción de la población dependerá de la condición inicial. Si  $N_0$  es mayor que  $N_{1=2}^e$  la evolución del grupo con el paso de suficiente tiempo será hacia el tamaño  $N_{1=2}^e$ . Por el contrario, si  $N_0$  es menor que  $N_{1=2}^e$  para la evolución del grupo existirá un tiempo para la desaparición, es decir la extinción de la especie. Por lo tanto, no es aconsejable, seleccionar la velocidad de extracción en  $c = \frac{1}{4}$ , puesto que una pequeña inestabilidad en el número de individuos pueden culminar en la desaparición de la especie. Por lo evidenciado, en las respuestas del caso, las alícuotas de extracción de peces en  $0 < c \leq \frac{1}{4}$  son las teóricamente admisibles, ya hemos declarado que la cuota máxima de pesca  $c = \frac{1}{4}$  podría resultar en una pérdida de estabilidad y por lo tanto tampoco es desde un punto práctico permisible.

4. “*The Introduction of Feedback*”

En lugar de una velocidad absoluta constante de extracción del pescado el siguiente modelo propone una velocidad relativa  $p = \frac{c}{x}$ , resultando entonces el modelo (11.67). Aquí  $p$  representa el número de pescado extraído por unidad de tiempo, dividido por el número de individuos existentes en cada instante.

$$\frac{dN(t)}{dt} = (1 - N(t))N(t) - pN(t). \quad (11.67)$$

Reescribiendo (11.67) de la siguiente manera, se tiene:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -N(t)[N(t) - (1 - p)].$$

Si tratamos, de imitar las condiciones de supervivencia de la población en las condiciones de sus leyes naturales o intrínsecas, matemáticamente esto equivale crear situaciones semejantes a las del modelo logístico, i.e. (11.45). Esto requiere que  $N_2^e = 1 - p$  sea el equilibrio estable, mientras que  $N_1^e = 0$ , siga comportándose como el equilibrio inestable. Razón, por la cual se deduce que es necesario, en el tratamiento de poblaciones que la velocidad de extracción relativa  $p$  varíe en el intervalo abierto  $0 < p < 1$ .

Una vez más, separando variables e integrando

$$\int \frac{dN(t)}{N(t) [N(t) - (1 - p)]} = - \int dt,$$

resulta:

$$\ln \left| \frac{N(t) - (1 - p)}{N(t)} \right| = (1 - p)(-t + k)$$

expresión que en las dos regiones abiertas de interés para la evolución de la población respecto a su tamaño  $N(t)$ , es decir  $(0, 1 - p)$  y  $((1 - p), +\infty)$ , cualquiera sea  $t$  positivo, conduce, respectivamente a:

$$\begin{cases} 0 < N(t) < 1 - p, & N(t) = \frac{1 - p}{1 + e^{(1-p)(k_1-t)}} \\ 1 - p < N(t) < +\infty, & N(t) = \frac{1 - p}{1 - e^{(1-p)(k_2-t)}} \end{cases}$$

El lector, como era de esperar, fácilmente verificará que  $N_2^e = 1 - p$  es un equilibrio estable del sistema, mediante la confirmación del cálculo de los siguientes límites:

$$\begin{cases} 0 < N(t) < 1 - p, & \lim_{N(t) \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{\rightarrow +\infty} \frac{1 - p}{1 + e^{(1-p)(k_1-t)}} = 1 - p \\ 1 - p < N(t) < +\infty, & \lim_{N(t) \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{\rightarrow +\infty} \frac{1 - p}{1 - e^{(1-p)(k_2-t)}} = 1 - p \end{cases} .$$

Logrando, en principio similitud con el comportamiento del modelo logístico, respecto de la estabilidad de los dos equilibrios, el equilibrio superior  $N_2^e = 1 - p$  en (11.67) es asintóticamente estable, e inestable en el equilibrio inferior  $N_1^e = 0$ .

Siguiendo con el objetivo de este apartado, el cual es lograr que en condiciones de pesca, la especie evolucione según un comportamiento semejante al de una evolución natural, deberíamos encontrar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Cuál es la velocidad relativa  $p$  de extracción del pescado que asegura un tamaño de la población de equilibrio lo máximo posible ?

En este modelo, (11.67), hemos verificado que luego de un período de transición cualquiera sea la condición inicial  $N_0$  la población se acercará asintóticamente al valor de equilibrio  $N_2^e = 1 - p$ , que corresponde a una velocidad absoluta de extracción de los peces igual a  $c = p(1 - p)$ . Esta cantidad, se puede interpretar como la ordenada del punto de intersección de la gráfica de la función  $v(t) = (1 - N(t))N(t)$

con las gráficas de las funciones  $v(t) = pN(t)$ . El máximo valor de la cuota absoluta de pesca, es aquél correspondiente a la intersección de las rectas con el vértice de la parábola, i.e. el punto  $(v(t) = \frac{1}{4}, N(t) = \frac{1}{2})$ . Esto implica la selección de una velocidad de extracción relativa igual a  $p = \frac{1}{2}$ . Se ha seleccionado la alícuota relativa de modo tal que el tamaño de la población en el estado de equilibrio estable es la mitad de la que existiría cuando el modelo fuera el regido por las leyes naturales, o el que aquí hemos llamado modelo logístico de la especie (11.45).

5. “Carp and Pike”

Supóngase que un depredador, con un número de integrantes  $P(t)$ , existe en el habitat. Aquí el autor V. I. Arnol'd lo designó como “the pike”. Sin su depredador natural el pez, puede reproducirse exponencialmente a la velocidad del modelo (11.44), i.e.  $\frac{dN(t)}{dt} = kN(t)$  con  $k > 0$ , cuando el lago se supone inmenso y existe suficiente comida para la especie. Pero si suponemos ahora que el depredador se alimentará de nuestra especie  $N(t)$  durante los encuentros que son proporcionales al número de integrantes de las respectivas especies, entonces la velocidad de cambio de nuestra especie será entonces  $\frac{dN(t)}{dt} = kN(t) - aN(t)P(t)$ , con  $a > 0$ . Desde el presente contexto biológico, el depredador se extinguirá sin nuestra especie no estuviera presente en la laguna, en lenguaje matemático estamos afirmando un decrecimiento exponencial  $\frac{dP(t)}{dt} = -\bar{k}P(t)$  con  $\bar{k} > 0$ . Ante la presencia de su manjar favorito, se reproducirá a una velocidad proporcional al número pececitos  $N(t)$  engullidos y de tamaño  $P(t)$ , en términos matemáticos  $\frac{dP(t)}{dt} = -\bar{k}P(t) + bN(t)P(t)$ , con  $b > 0$ . Esta interpretación es el caso más simple del modelo “presa vs depredador” que conduce al siguiente modelo de sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (11.68) <sup>11</sup>.

---

<sup>11</sup>El lector interesado puede investigar sobre la historia de la matemática para asegurarse de por qué se lo reconoce como modelo de Lotka-Volterra. Sugerencia: Software Mathematica. Ref erirse al tutorial: “Numerical methods for solving the Lotka-Volterra equations”

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = kN(t) - aN(t)P(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = -\bar{k}P(t) + bN(t)P(t) \end{cases} \quad (11.68)$$

Cabe declarar, que trataremos de resolver este sistema de ecuaciones diferenciales utilizando las herramientas aprendidas en este compendio, ya que el estudio de Sistema de Ecuaciones Diferenciales es materia de tratamiento en cursos posteriores y superiores cuyos conocimientos son indispensables para la formación un estudiante de ingeniería. Para un lector neófito del tema, recomendamos una lectura “as a crow flies” sobre los conceptos y aplicaciones de libros como [Zill, D. G.(1986)] y [Murio, D. et al. (1999)].

Sugerimos, dividir el problema anterior en dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, una vez eliminada la diferenciación respecto de la variable independiente  $t$ , comenzamos reescribiendo (11.68) en la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = N(t)(k - aP(t)) \\ \frac{dP(t)}{dt} = P(t)(-\bar{k} + bN(t)) \end{cases} .$$

Dividiendo ambas expresiones, resultan para  $N(t) \neq 0$  y  $P(t) \neq 0$ , las dos ecuaciones diferenciales siguientes (11.69) y (11.70). Ellas resultan integrables una vez de realizadas la pertinente separación de variables.

$$\frac{dN(t)}{dP(t)} = \frac{k - aP(t)}{-\bar{k} + bN(t)}, \quad (-\bar{k} + bN(t)) \neq 0 \quad (11.69)$$

$$\frac{dP(t)}{dN(t)} = \frac{-\bar{k} + bN(t)}{k - aP(t)}, \quad (k - aP(t)) \neq 0 \quad (11.70)$$

Trabajando con (11.70) se obtiene

$$(k - aP(t))dP(t) = (-\bar{k} + bN(t))dN(t) \quad (k - aP(t)) \neq 0$$

y antiderivando a ambos miembros, resulta:

$$k P(t) - a \frac{P(t)^2}{2} + c_1 = -\bar{k} N(t) + b \frac{N(t)^2}{2} + c_2$$

ordenando los términos cuadráticos, lineales y las constantes se obtiene la siguiente ecuación cuadrática en las dos variables dependientes del tiempo,  $N(t)$  y  $P(t)$ , que representan respectivamente el tamaño o número de peces y el tamaño de su depredador.

$$b N(t)^2 + a P(t)^2 - 2\bar{k} N(t) - 2k P(t) + 2c = 0.$$

El completamiento de cuadrado en ambas variables dependientes conduce a la siguiente identidad (11.71) que en general, dependiendo de los valores de las constantes,  $k$ ,  $\bar{k}$ ,  $a$ ,  $b$ , inherentes al sistema biológico, así como de la constante de integración  $c$ , normalmente asociada a un punto dado o identificado  $(N_0, P_0)$  del ecosistema, representa salvo casos degenerados, la ecuación cartesiana de una curva en el plano  $N(t)$  vs  $P(t)$ , o  $P(t)$  vs  $N(t)$ .

$$b \left( N(t) - \frac{\bar{k}}{b} \right)^2 + a \left( P(t) - \frac{k}{a} \right)^2 = \frac{\bar{k}^2}{b} + \frac{k^2}{a} - 2c \quad (11.71)$$

Las curvas dadas en (11.71) son las soluciones del modelo (11.68) en el cuadrante  $N(t) > 0$  y  $P(t) > 0$ . Además, este sistema diferencial de primer orden (11.71) posee un punto crítico, a parte del trivial, precisamente  $(N_e = \frac{\bar{k}}{b}, P_e = \frac{k}{a})$ , que corresponde al tamaño de equilibrio de ambas poblaciones. Esta situación surge cuando el potencial de crecimiento del pez es balanceado por la actividad de su depredador, mientras que el crecimiento en la población de este último está compensado por su mortalidad.

## Parte XII

# Sucesiones y Series





## Capítulo 12

### Sucesiones y Series: Ejercicios resueltos

## Capítulo 12. Sucesiones y Series: Ejercicios resueltos

**Ejemplo 12.0.25** *Aquiles y la tortuga.* Aquiles, corre con una velocidad de  $10 \frac{m}{seg}$  y la tortuga con una velocidad de  $10 \frac{cm}{seg}$ . Supongamos que Aquiles parte de  $A$  para alcanzar a la tortuga que sale, en el mismo instante de  $T$ , siendo la distancia  $\overline{AT} = 990m$ .

Cuando Aquiles llegue a  $T$ , la tortuga llegará a  $T'$ ; cuando Aquiles llegue a  $T'$ , la tortuga llegará a  $T''$  y así sucesivamente.

¿ Alcanzará Aquiles a la tortuga ? En caso afirmativo ¿ Cuándo la alcanzará ?

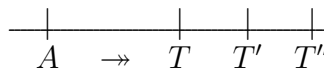


Figura 12.1: Ilustración de Aquiles y la Tortuga.

Si  $A$  corre hacia  $T$ , tardará 99 segundos en llegar a  $T$ . En esos 99 segundos la tortuga se habrá trasladado a  $T'$  con  $TT' = 99seg \times 0,1 \frac{m}{seg} = 9,9m$ . Aquiles que ha llegado a  $T$  para alcanzar  $T'$  empleará  $\frac{9,9m}{10m/seg} = 0,99seg$ . En este tiempo la tortuga estará en  $T''$  con  $T'T'' = 0,99seg \times 0,1 \frac{m}{seg} = 0,099m$  y Aquiles empleará, para recorrer esa distancia,  $\frac{0,099m}{0,1m/seg} = 0,0099seg$ .

El tiempo total que emplea Aquiles para alcanzar a la tortuga es

$$\begin{aligned}
 & 99 + 0,99 + 0,0099 + \dots, \\
 & 99 + \frac{99}{100} + \frac{99}{100^2} + \frac{99}{100^3} + \dots \\
 & 99 \left\{ 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \dots \right\} \\
 & 99 \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} \right) = 100seg.
 \end{aligned}$$

En general será

$$t = \frac{l}{v_T(n-1)}.$$

El problema, tal como lo hemos planteado requiere sumar infinitos términos, la suma de un número infinito de términos puede resultar finita. La contestación es afirmativa, de acuerdo a la teoría de series convergentes.

**Ejemplo 12.0.26** *Aquiles y la Tortuga, Caso general*

Una de las paradojas de Zenón (Elea, siglo V a.c.) plantea que: de disputarse una carrera entre Aquiles y una tortuga, si parten al mismo tiempo, pero la tortuga  $\Delta$  metros más adelante, Aquiles no la alcanza nunca, pues cuando éste llegue al punto de partida de aquella la misma estará ya en un punto  $y_1$ , que a su vez, para cuando sea alcanzado por el héroe la tortuga habrá llegado a otro punto  $y_2$ , y así sucesivamente. Por lo tanto, concluye Zenón, la tortuga está siempre por delante.

Determine en qué momento Aquiles alcanza la tortuga y en qué punto del camino.

*Respuesta:*

Consideremos que Aquiles parte del punto  $x_0$  y la tortuga del  $y_0$ , a  $\Delta$  metros más adelante. Si llamamos  $v_A$  y  $v_t$  a las velocidades (constantes) de Aquiles y la tortuga

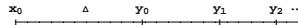


Figura 12.2: Paradoja de Aquiles y la Tortuga.

respectivamente, el primero tardaría  $t_1 = \frac{\Delta}{v_A}$  en llegar al punto  $y_0$ .

En ese tiempo la tortuga llega al punto  $y_1$ , recorriendo  $y_1 - y_0 = v_t t_2 = v_t \frac{\Delta}{v_A}$ , que a

su vez aquiles tarda  $t_2 = \frac{y_1 - y_0}{v_A} = \frac{v_t \Delta}{v_A} = \Delta \frac{v_t}{v_A^2}$  en recorrer. En  $t_2$  el animal recorre  $y_2 - y_1 = v_t t_2 = v_t \Delta \frac{v_t}{v_A^2} = \Delta \frac{v_t^2}{v_A^2}$  y Aquiles tarda  $t_3 = \frac{y_2 - y_1}{v_A} = \Delta \frac{v_t^2}{v_A^3}$  en cubrirlo. Repitiendo el procedimiento resulta:

$$y_n - y_{n-1} = \Delta \frac{v_t^n}{v_A^n} \quad \text{y} \quad t_n = \frac{\Delta}{v_A} \left( \frac{v_t}{v_A} \right)^{n-1}$$

$\therefore$  la alcanza en el punto

$$\Delta + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \left( \frac{v_t}{v_A} \right)^n = \frac{\Delta}{1 - \frac{v_t}{v_A}} = \Delta v_A \frac{1}{v_A - v_t}$$

y tarda

$$t = \frac{\Delta}{v_A} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{v_t}{v_A} \right)^{n-1} = \frac{\Delta}{v_A - v_t}.$$

## Capítulo 12. Sucesiones y Series: Ejercicios resueltos

---

**Ejemplo 12.0.27** *Un ahorrista coloca, el día 1/1/2002, \$ 1000 a interés compuesto del 10 % mensual. Si la tasa de interés se mantiene constante obtenga una fórmula que le permita conocer la cantidad de dinero que posee el ahorrista al cabo de  $t$  meses:*

- i) *Analizando la variación del capital de manera iterativa es decir, cómo varía al cabo del primer mes, al cabo del segundo, etc. (Dinámica Causa - Efecto).*
- ii) *Obtenga una expresión explícita en términos del número  $t$  de meses transcurridos desde el momento en que se colocó el capital inicial de \$1000. (Dinámica Teleológica).*
- iii) *Generalice la expresión obtenida en el inciso anterior para el caso de un capital inicial  $C$  cualquiera, colocado a un interés compuesto del  $I\%$  por unidad de tiempo o período de capitalización  $\Delta$ . ( $C_n = C_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^n$ ).*
- iv) *Si  $t$  es el número de años al cual se invierten  $C_0$  pesos a una tasa de interés del  $100i\%$  compuesto  $m$  veces por año; interprete el significado de la expresión  $C_n = C_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}$ .*
- v) *Determine el valor presente de 1000 \$ que se recibirá a los 3 años a partir de ahora si el dinero se invierte a una tasa anual del 12 % compuesto semestralmente.*
- vi) *Utilizar cualquiera de las siguientes definiciones equivalentes del número “ $e$ ”*  
*”  $\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$  ó equivalentemente  $\lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}}$  para justificar la expresión del interés “compuesto continuo”  $C = C_0 e^{it}$ .*

*Observación: Se dice que el capital se coloca a interés compuesto continuo cuando el interés incrementa continuamente el capital. Período de capitalización cero.*

- vii) *¿Cuál es el valor presente de 1000 \$ pagaderos en 3 años a partir de ahora si el dinero puede invertirse a una tasa de interés del 12 % compuesto continuamente ?*

Para resolver este ejercicio del Interés compuesto. Suponga colocar un capital  $C$  a **interés compuesto** significa, que al cabo de cada unidad de tiempo preestablecida, días, semanas, meses, horas, años, etc, el capital se incrementa con el interés obtenido y a partir

---

de ese momento los intereses deben calcularse sobre el nuevo capital y así sucesivamente. Por ejemplo, si se coloca un capital  $C$  a un interés (compuesto) del 3% ( $I\%$ ) semanal, el razonamiento para obtener la evolución del dinero es así:

- Cada 100 pesos producen un interés de \$ 3 al cabo de una semana por lo tanto cada peso produce un interés de  $\frac{3}{100} = 0,03\$$  ( $i = \frac{I}{100}$  tasa unitaria) al cabo de una semana.
- el capital de  $C$  pesos produce entonces un interés de  $C \times 0,03\$$ , que se agrega al capital (inicial)  $C$ .
- Por lo tanto, transcurrida una semana el capital es  $C + C \times 0,03 = C + Ci = C(1+i)$
- cuando transcurre la segunda semana, el nuevo capital  $C(1+i)$  produce un interés de  $[C(1+i)] \times i$ , que se capitaliza, es decir, se suma al capital que lo produjo, resultando que al cabo de la 2<sup>a</sup> semana el capital es

$$C(1+i) + C(1+i)i = C[(1+i) + (1+i)i] = C(1+i)^2.$$

Este es el nuevo capital que producirá interés durante la 3<sup>a</sup> semana, resultando  $C(1+i)^2i$ , que al capitalizarse resulta

$$C(1+i)^2 + C(1+i)^2i = C(1+i)^3.$$

- Así siguiendo, al cabo de  $n$  períodos (semanas en este caso) el capital será

$$C(1+i)^n.$$

- Un inversor puede argumentar que su dinero debería capitalizarse continuamente, en lugar de esperar a que transcurra todo un período, para incrementarse. Supongamos que se quiere capitalizar  $m$  veces por semana, en lugar de una vez por semana. Si el interés pactado es de  $I\%$  semanal la tasa unitaria es  $i = \frac{I}{100}$  semanal y entonces la tasa correspondiente a cada nuevo período de  $\frac{1}{m}$  semana será  $\frac{i}{m}$ , porque la semana se dividió en  $m$  partes.

Entonces el capital al cabo de un período será  $C \left(1 + \frac{i}{m}\right)$ , al cabo de  $m$  períodos

(una semana):  $C \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$  y al cabo de  $t$  semanas  $C \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}$ . Si hacemos tender  $m \rightarrow \infty$  el período de capitalización  $\left(\frac{1}{m}\right)$  tiende a cero y si queremos saber cuanto resulta el capital al cabo de  $t$  semanas, hallamos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} = C \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{i}{m}\right) \right]^t = C e^{it}.$$

**Ejemplo 12.0.28** *Dinámica inicial de una epidemia.*

$N$  = población total.

$I_n$  = número de personas que tienen la enfermedad en el día  $n$ .

$F_n$  = número de personas que contrajeron la enfermedad el día  $n$ .

$C_n$  = número de personas que sanaron el día  $n$ .

Luego

$$I_{n+1} = I_n + F_{n+1} - C_{n+1} \tag{12.1}$$

Si se supone que  $F_{n+1} = a I_n (N - I_n)$ , dependencia logística, y  $C_{n+1} = b I_n$  dependencia lineal, en las cuales  $a$  y  $b$  son constantes.

i) Obtenga  $I_{n+1} = f(I_n)$ .

Respuesta: Reemplazando los supuestos del modelo en (12.1) se tiene:

$$I_{n+1} = I_n + a I_n (N - I_n) - b I_n = I_n [1 - b + a(N - I_n)]$$

ii) Simplifique la expresión de  $I_{n+1}$  obtenida en i) considerando  $I_n \ll N$ .

Si se impone, el carácter de inicial a la epidemia entonces el factor lineal  $(N - I_n) \approx N$  lo que conduce a:

$$I_{n+1} = I_n [1 - b + a(N - I_n)] \approx I_n [1 - b + aN] = I_n (1 - b + \bar{a}N).$$

$$I_{n+1} = I_n (1 - b + \tilde{a}).$$

La experiencia, nos permite concluir, que bajo los supuestos efectuados, el modelo de la enfermedad se ha reducido a una dinámica discreta geométrica, cuya forma recurrente o implícita, es:

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - b + \tilde{a}. \quad (12.2)$$

Claramente, se necesita de un dato inicial del número de personas infectadas,  $I_i^0$ , para determinar cada término de la sucesión, es decir en cada unidad temporal, seguir la evolución del número de infectados, necesitamos ese dato.

*ii*<sub>1</sub>) Indique en *ii*) la razón de la sucesión geométrica.

La (12.2) evidencia que la razón o constante cociente es  $q = 1 - b + \tilde{a}$ .

*ii*<sub>2</sub>) Obtenga una expresión explícita.

Suponiendo que disponemos del valor de  $I_i^0$ , entonces utilizando (12.2), se obtienen,  $I_1 = I_i^0$ ,  $I_2 = I_1(1 - b + \tilde{a})$ , i.e.  $I_2 = I_i^0(1 - b + \tilde{a})$ , nuevamente desde (12.2), se tiene que  $I_3 = I_2(1 - b + \tilde{a})$ , i.e. reemplazando la expresión de  $I_2$ ,  $I_3 = I_i^0(1 - b + \tilde{a})(1 - b + \tilde{a})$ , luego  $I_3 = I_i^0(1 - b + \tilde{a})^2$ , una vez más  $I_4 = I_3(1 - b + \tilde{a})$ , es decir  $I_4 = I_i^0(1 - b + \tilde{a})^2(1 - b + \tilde{a})$ , entonces  $I_4 = I_i^0(1 - b + \tilde{a})^3$ , siguiendo de esta manera, se llega a la expresión explícita:

$$I_n = I_i^0(1 - b + \tilde{a})^{n-1}. \quad (12.3)$$

*ii*<sub>3</sub>) Determine de acuerdo con este modelo, en qué casos:

- a) la epidemia se extiende.
- b) la epidemia es controlable.
- c) la epidemia es estacionaria.

De acuerdo con la dinámica (12.3), las respuestas a los respectivos incisos son:

- a) la epidemia se extiende cuando  $|1 - b + \tilde{a}| > 1$ . Ya que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n = +\infty.$$

- b) la epidemia es controlable cuando  $|1 - b + \tilde{a}| < 1$ . Puesto que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

c) la epidemia es estacionaria si  $1 - b + \tilde{a} = 1$ , i.e.  $a = b$ .

$$I_n = I_i^0, \forall n.$$

iii) Suponiendo que el modelo dinámico no simplificado representa una epidemia controlable, calcule el número límite de personas infectables.

Respuesta, es decir si es válido el modelo, sin simplificación se tiene:

$$I_{n+1} = I_n + a I_n (N - I_n) - b I_n \quad (12.4)$$

y bajo el supuesto que la epidemia resulte controlable, en lenguaje matemático estamos estableciendo que existen finitos los siguientes límites y que son iguales,  $I_*$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} I_{n+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} I_n = I_*.$$

Por lo tanto calculando el  $\lim_{x \rightarrow +\infty}$  a la identidad (12.4), resulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} I_{n+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [I_n + a I_n (N - I_n) - b I_n]$$

y reemplazando en la expresión anterior, en virtud de que cada límite existe finito y vale  $I_*$ , se llega a:

$$I_* = I_* + a I_* (N - I_*) - b I_*.$$

Identidad que conduce a la obtención de la cantidad estacionaria de enfermos en la epidemia (12.4),  $I_* = N - \frac{b}{a}$ .

**Ejemplo 12.0.29** *Se pueden generar aproximaciones a  $\sqrt{N}$  con la sucesión definida en forma recurrente o implícita por medio del siguiente algoritmo:*<sup>1</sup>

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left( x_k + \frac{N}{x_k} \right), \quad x_1 = \frac{N}{2}. \quad (12.5)$$

---

<sup>1</sup>El lector todo a lo largo del presente compendio deberá conciliarse con los autores, en cuanto a que no siempre utilizará la misma notación. e.g Dinámicas Discretas, la variable suelen simbolizarse con  $n$ , pero otras veces por  $k$ .



---

a. Calcule  $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ , para  $N = 10$ .

b. Suponiendo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ , demuestre que  $L = \sqrt{N}$ .

Resolución. En virtud de lo analizado en §9.2, pág. 357, el lector confirmará que la sucesión recursiva en (12.5) es simplemente la que se origina al aplicar el “Método de Newton” considerando la función  $f(x) = x^2 - N$  en la ecuación (9.39) de la pág. 360.

Ha esta altura, tenemos en claro, la diferencia en definir una sucesión por medio de una función explícita discreta o por medio de una expresión implícita, que necesita de un iniciador o arrancador, para determinar los elementos que pertenecen a su conjunto infinito de números reales. Aquí, se ha propuesto el iniciador  $x_1 = \frac{N}{2}$ . Por lo tanto,  $x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{N}{x_1} \right)$ , al reemplazar  $x_1$  resulta  $x_2 = \frac{N+4}{4}$ , al reemplazar  $x_2$  en  $x_3 = \frac{1}{2} \left( x_2 + \frac{N}{x_2} \right)$ , se obtiene  $x_3 = \frac{N^2 + 24N + 16}{8(N+4)}$ , etc. Dejamos al estudiante, que es mucho más joven que los autores proseguir los cálculos hasta obtener  $x_6$  y luego reemplazar  $N = 10$ .

Preferimos avocarnos una vez más al inciso siguiente, el que técnica y conceptualmente es mucho más interesante. Este inciso, b., no está asegurando que la sucesión generada por (12.5) es convergente, razón por la cual sabemos que cualesquiera de los siguientes límites existen, propiedad de toda sucesión de números reales convergente.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n-1} = L.$$

Se debe probar que el valor de convergencia es  $L = \sqrt{N}$ . Para ello, en (12.5), calculamos  $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ , i.e. evaluemos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{N}{x_n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{2} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N}{2x_n}$$

$$L = \frac{L}{2} + \frac{N}{2L} \implies L^2 = N, \implies \sqrt{L^2} = \sqrt{N}, \implies |L| = \pm \sqrt{N}.$$



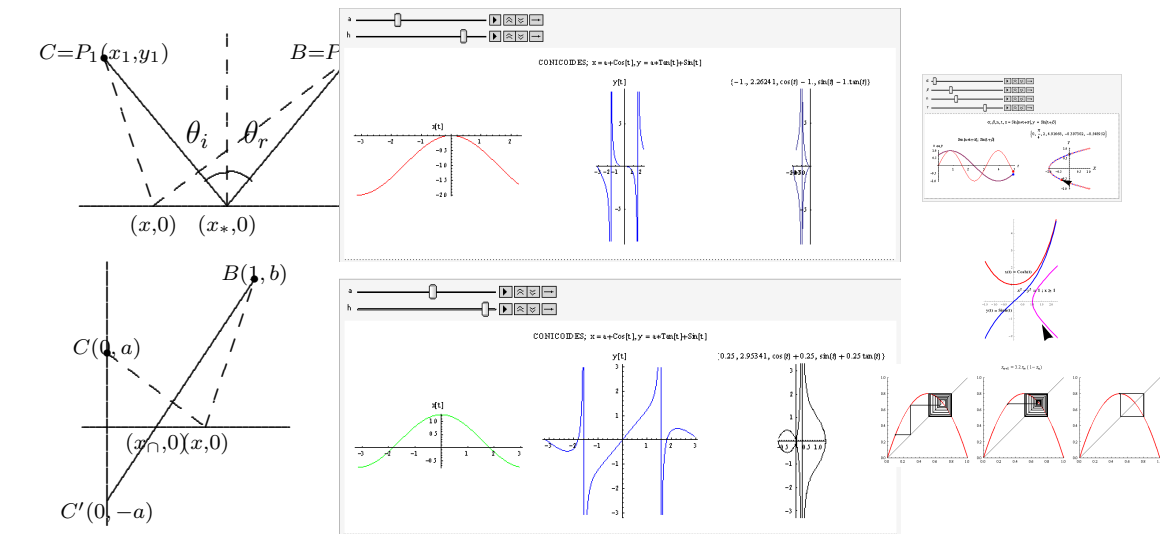
## Parte XIII

### Ilustraciones: Snapshots

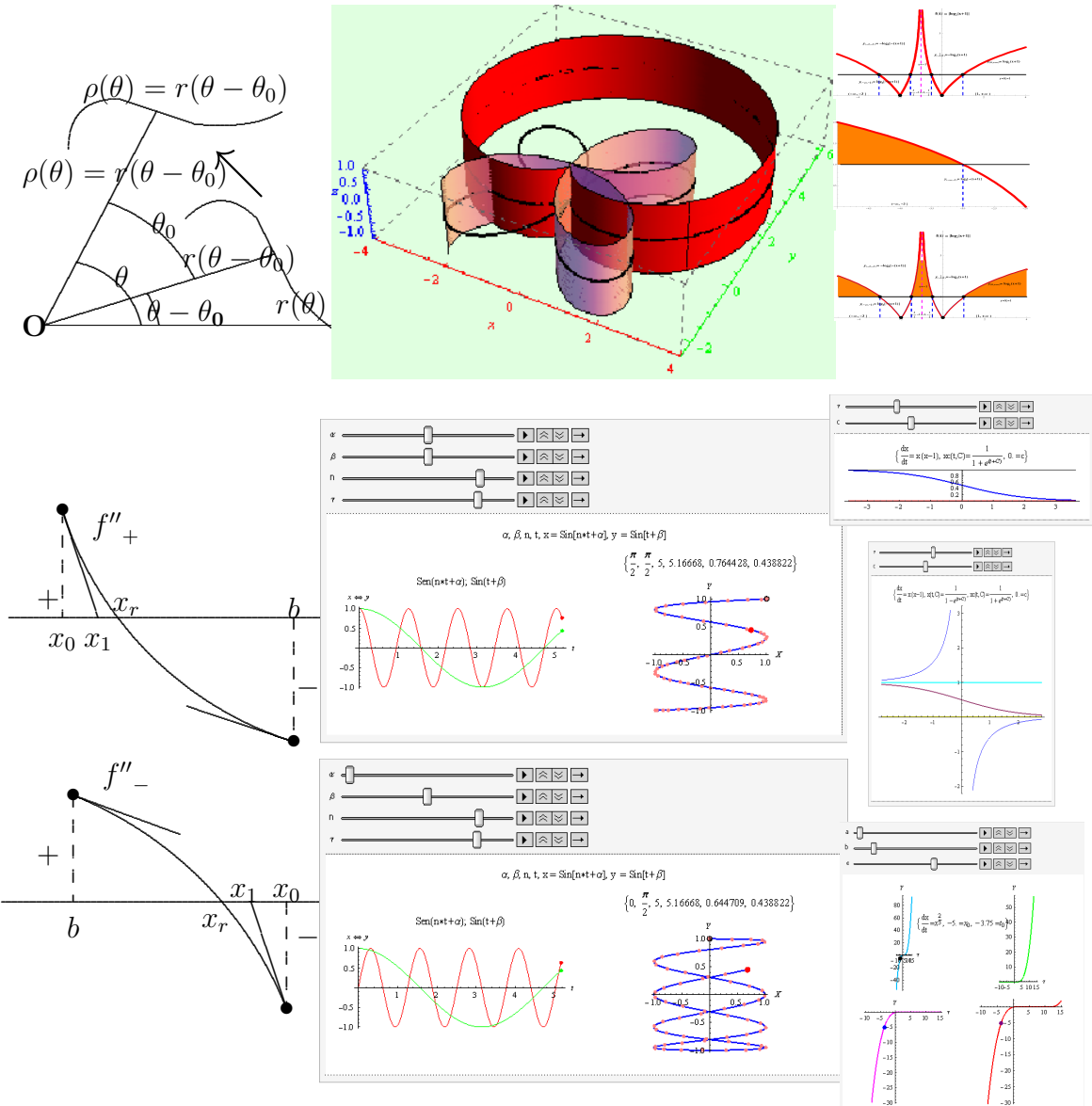


# Capítulo 13

## Gráficas



Edición de Gráficos



486  
Cuadro 13.1: A picture is worth 1000 words.

Pop-Up- Window para visualizar distintas operaciones aplicadas, utilizando reiteradamente la función valor absoluto, a una gráfica inicial de una curva plana expresable mediante una función  $y = f(x)$ . Es una ventana que se abre mostrando el efecto que sobre la gráfica de  $y = f(x)$  concretan las sucesivas aplicaciones del valor absoluto. Ver en el Trabajo Práctico N<sup>o</sup> 0 los snapshots -fotos instantáneas- en los Cuadros 2.2, 2.3 y 2.4, de la páginas 53, 56 y 57. El estudiante, selecciona la función de partida, haciendo clic sobre un botón que despliega un menú con varias opciones para la  $y = f(x)$  y como resultado obtiene un arreglo con las consecuencias las siguientes acciones  $y = |f(x)|$ ,  $y = |f(x)| - 1$ ,  $y = ||f(x)| - 1|$ ,  $y = |||f(x)| - 1| - 1|$ ,  $y = |||f(x)| - 1| - 1| - 1$  e  $y = ||||f(x)| - 1| - 1| - 1|$ .

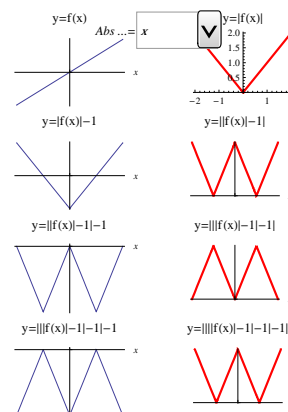
```

In[1]:= Dynamic[GraphicsArray[{
  {Plot[f, {x, -2, 2}, AxesOrigin -> {0, 0},
    AxesLabel -> Automatic, Mesh -> None,
    Ticks -> {{-6, 0, 6}, {-6, 0, 6}}, PlotLabel -> "y=f(x)",
    Plot[Abs[f], {x, -2, 2}, AxesOrigin -> {0, 0},
    PlotStyle -> {RGBColor[1., 0., 0.]}, Thick},
    PlotLabel -> "y=|f(x)|"}],
  {Plot[Abs[f] - 1, {x, -2, 2}, Ticks -> {{-6, 0, 6}, {-6, 0, 6}}, AxesOrigin -> {0, 0},
    AxesLabel -> Automatic, PlotLabel -> "y=|f(x)|-1"},
  Plot[Abs[Abs[f] - 1], {x, -2, 2}, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotStyle -> {RGBColor[1., 0., 0.]}, Thick, Ticks -> {{-6, 0, 6}, {-6, 0, 6}},
  AxesLabel -> Automatic, PlotLabel -> "y=||f(x)|-1|"}],

  {Plot[Abs[Abs[f] - 1] - 1, {x, -2, 2},
    AxesOrigin -> {0, 0}, Ticks -> {{-6, 0, 6}, {-6, 0, 6}},
    AxesLabel -> Automatic, PlotLabel -> "y=||f(x)|-1|-1"},
  Plot[Abs[Abs[Abs[f] - 1] - 1], {x, -2, 2}, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotStyle -> {RGBColor[1., 0., 0.]}, Thick, Ticks -> {{-6, 0, 6}, {-6, 0, 6}},
  AxesLabel -> Automatic, PlotLabel -> "y=|||f(x)|-1|-1|"}],

  , {Plot[Abs[Abs[Abs[f] - 1] - 1] - 1,
    {x, -2, 2}, Ticks -> {{-6, 0, 6}, {-6, 0, 6}}, AxesOrigin -> {0, 0},
    AxesLabel -> Automatic, PlotLabel -> "y=||||f(x)|-1|-1|-1"},
  Plot[Abs[Abs[Abs[Abs[f] - 1] - 1] - 1],
    {x, -2, 2}, PlotStyle -> {RGBColor[1., 0., 0.]}, Thick},
    AxesOrigin -> {0, 0}, Ticks -> {{-6, 0, 6}, {-6, 0, 6}},
    AxesLabel -> Automatic, PlotLabel -> "y=||||f(x)|-1|-1|-1|"}],
  }
  , PlotLabel -> Row[{Style["Abs ...", Italic], "=", PopupMenu[Dynamic[f],
    {x, Exp[x], Sin[x], Cos[x], Log[x + 2], 2^x, 1/2^x, 1/2^Abs[x], Sinh[x], Cosh[x],
    Tanh[x], Log[Abs[x]], (x - 1)/(x + 1), Exp[-x^2], 1 - x^2, 1 - x^3,
    Tan[x], Sec[x], Abs[Log[Abs[x]]], Csc[x]}]}]}]}]

```



Cuadro 13.2: Pop-up-Window: Aplicación reiterada de la función valor absoluto.

## Capítulo 13. Gráficas

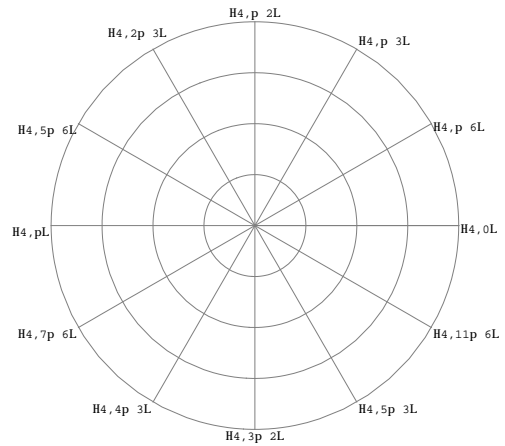
Animaciones constructivas, [Ciappina, M. y Niel, B. I. (1997)], realizadas con el software mathematica 3.0, cuya motivación es representar, mediante gráficas consecutivas en celdas interactivas y animadas el proceso generativo o constructivo de distintas curvas planas, cuyas expresiones paramétricas están relacionadas íntimamente con las coordenadas polares.

```
Needs["Graphics`Graphics`"]
Needs["Graphics`ComplexMap`"]

grilla = PolarMap[Identity, {0, 4, 1}, {0, 2  $\pi$ ,  $\pi/6$ },
  PlotStyle -> {GrayLevel[.5]}, Ticks -> False,
  Axes -> None, AspectRatio -> Automatic];

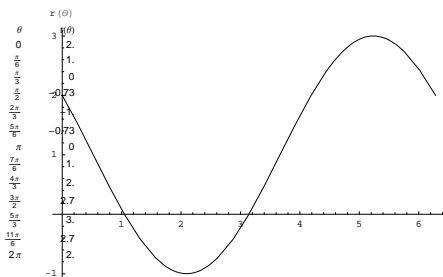
textogrilla = Show[Graphics[{Text["(4,0)", {4, 0}, {-1, .5},
  TextStyle -> {FontSize -> 12}],
  Text["(4, $\pi/6$ )", {4 Cos[ $\pi/6$ ], 4 Sin[ $\pi/6$ ]}, {-1, .5},
  TextStyle -> {FontSize -> 12}],
  Text["(4, $\pi/3$ )", {4 Cos[ $\pi/3$ ], 4 Sin[ $\pi/3$ ]}, {-1, -1},
  TextStyle -> {FontSize -> 12}],
  Text["(4, $\pi/2$ )", {4 Cos[ $\pi/2$ ], 4 Sin[ $\pi/2$ ]}, {0, -1},
  TextStyle -> {FontSize -> 12}],
  Text["(4, $2\pi/3$ )", {4 Cos[ $2\pi/3$ ], 4 Sin[ $2\pi/3$ ]}, {.5, -2},
  TextStyle -> {FontSize -> 12}],
  Text["(4, $5\pi/6$ )", {4 Cos[ $5\pi/6$ ], 4 Sin[ $5\pi/6$ ]}, {1, 1},
  TextStyle -> {FontSize -> 12}], Text["(4, $\pi$ )", {4 Cos[ $\pi$ ], 4 Sin[ $\pi$ ]}, {1, 1},
  TextStyle -> {FontSize -> 12}],
  Text["(4, $7\pi/6$ )", {4 Cos[ $7\pi/6$ ], 4 Sin[ $7\pi/6$ ]}, {1, 1},
  TextStyle -> {FontSize -> 12}],
  Text["(4, $4\pi/3$ )", {4 Cos[ $4\pi/3$ ], 4 Sin[ $4\pi/3$ ]}, {1, 1},
  TextStyle -> {FontSize -> 12}],
  Text["(4, $3\pi/2$ )", {4 Cos[ $3\pi/2$ ], 4 Sin[ $3\pi/2$ ]}, {0, 1},
  TextStyle -> {FontSize -> 12}],
  Text["(4, $5\pi/3$ )", {4 Cos[ $5\pi/3$ ], 4 Sin[ $5\pi/3$ ]}, {-1, 1},
  TextStyle -> {FontSize -> 12}],
  Text["(4, $11\pi/6$ )", {4 Cos[ $11\pi/6$ ], 4 Sin[ $11\pi/6$ ]}, {-1, 1},
  TextStyle -> {FontSize -> 12}]]];

grillafinal = Show[grilla, textogrilla, PlotRange -> All]
```



```
tabla = Table[{i, 1, 14}, {j, 1, 2}];

For[ $\alpha = 0$ ,  $\alpha <= 2\pi$ ,  $\alpha = \alpha + \pi/6$ ;
  tabla[[1, 1]] = " $\theta$ "; tabla[[1, 2]] = " $r(\theta)$ ";
  r[ $\theta_$ ] :=  $1 - 2 \sin[\theta - \alpha]$ ;
  For[u = 0, u <= 12, ++u,
     $\tau = (\pi/6) u$ ;
    tabla[[u + 2, 1]] =  $\tau$ ;
    tabla[[u + 2, 2]] = ToString[N[r[ $\tau$ ], 2]];
  ];
  tab =
  Show[Graphics[Text[FontForm[TableForm[tabla,
    TableAlignments -> Right, {"Bold", 10}],
    {0, 0}, {4, 0}], DisplayFunction -> Identity];
  preimg = Plot[ $1 - 2 \sin[\theta - \alpha]$ , { $\theta$ , 0, 2  $\pi$ },
    AspectRatio -> Automatic, AxesLabel -> {" $\theta$ ", " $r(\theta)$ "},
    DisplayFunction -> Identity];
  img = PolarPlot[ $1 - 2 \sin[\theta - \alpha]$ , { $\theta$ , 0, 2  $\pi$ },
    PlotStyle -> Thickness[1/50],
    PlotLabel -> StyleForm[Print[" $r(\theta) = 1 - 2 \sin[\theta - \alpha]$ ", N[ $\alpha$ , 2], " $\alpha$ "],
    FontSize -> 14],
    DisplayFunction -> Identity];
  final = Show[grillafinal, img, DisplayFunction -> Identity];
  inter = Show[GraphicsArray[{tab, preimg}, GraphicsSpacing -> {-0.85, 0}],
    DisplayFunction -> Identity];
  Show[GraphicsArray[{inter, final}, GraphicsSpacing -> {-0.15, 0}],
    DisplayFunction -> $DisplayFunction];
]
```

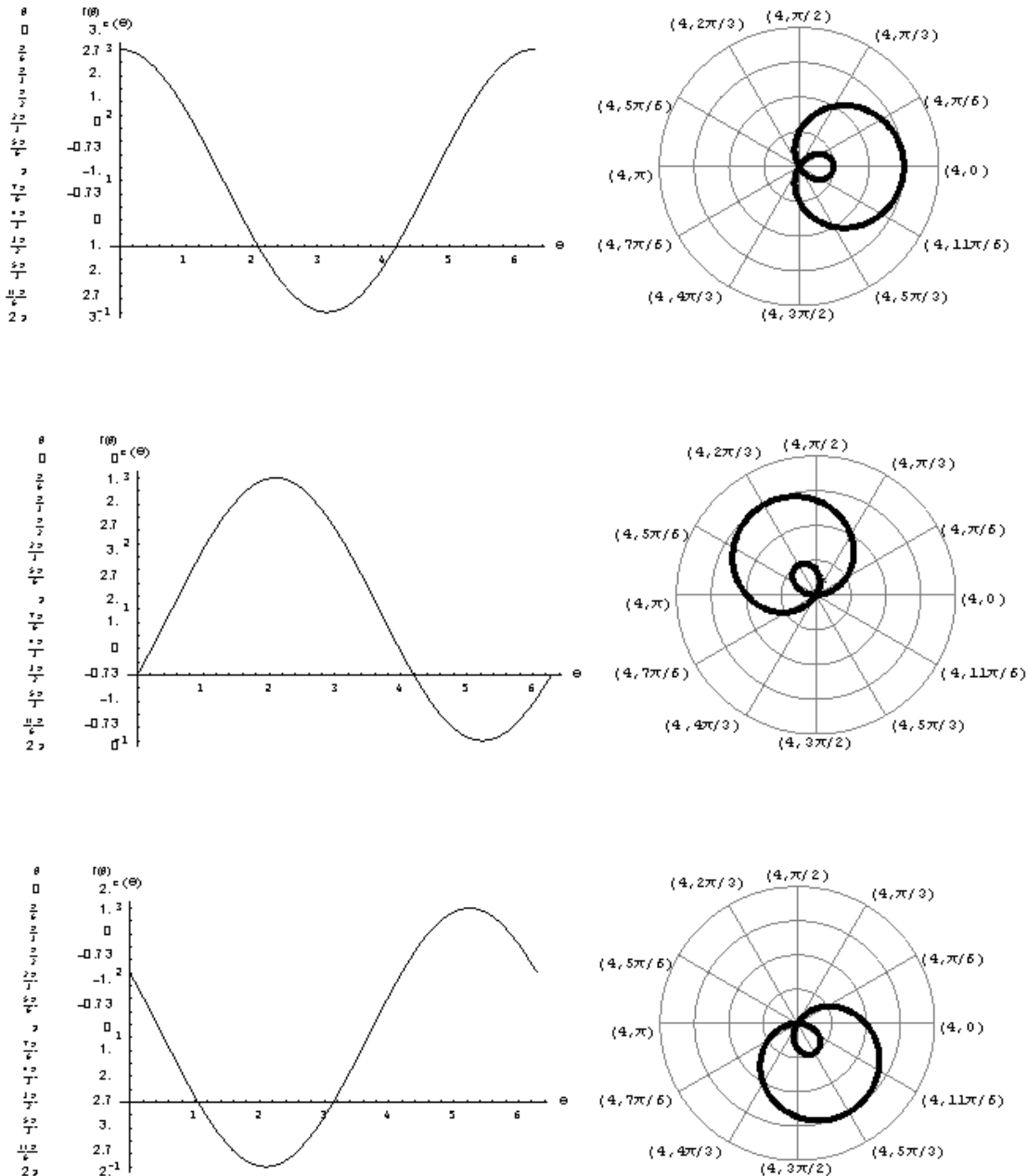


Cuadro 13.3: e.g. Grilla polar (Arriba). Tabla y Representación Cartesiana (Abajo).  
488



Ejemplos de frames (celdas) <sup>a</sup>, de una interacción iterativa y posible de ser animada. En este caso las celdas animadas tratan el efecto del ángulo  $\alpha$  en la curva de representación polar  $r(\theta) = 1 - 2\sin(\theta - \alpha)$ . La animación muestra como gira la curva plana de expresión polar  $r(\theta) = 1 - 2\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = 1 + 2\cos(\theta)$ , i.e. primer cuadro, alrededor del origen a  $r(\theta) = 1 - 2\sin(\theta)$ . Ver el tratamiento dedicado al tema en la sección § *Observaciones que facilitan la construcción de gráficos en polares*, del Capítulo 10, desde la pág. 403.

<sup>a</sup>Un “frame (celda)” es un cuadro típico, un marco entre una sucesión de marcos desplegado por la activación de las sentencias algorítmicas, mediante la supresión de las teclas  $\uparrow +$  Intro del teclado.

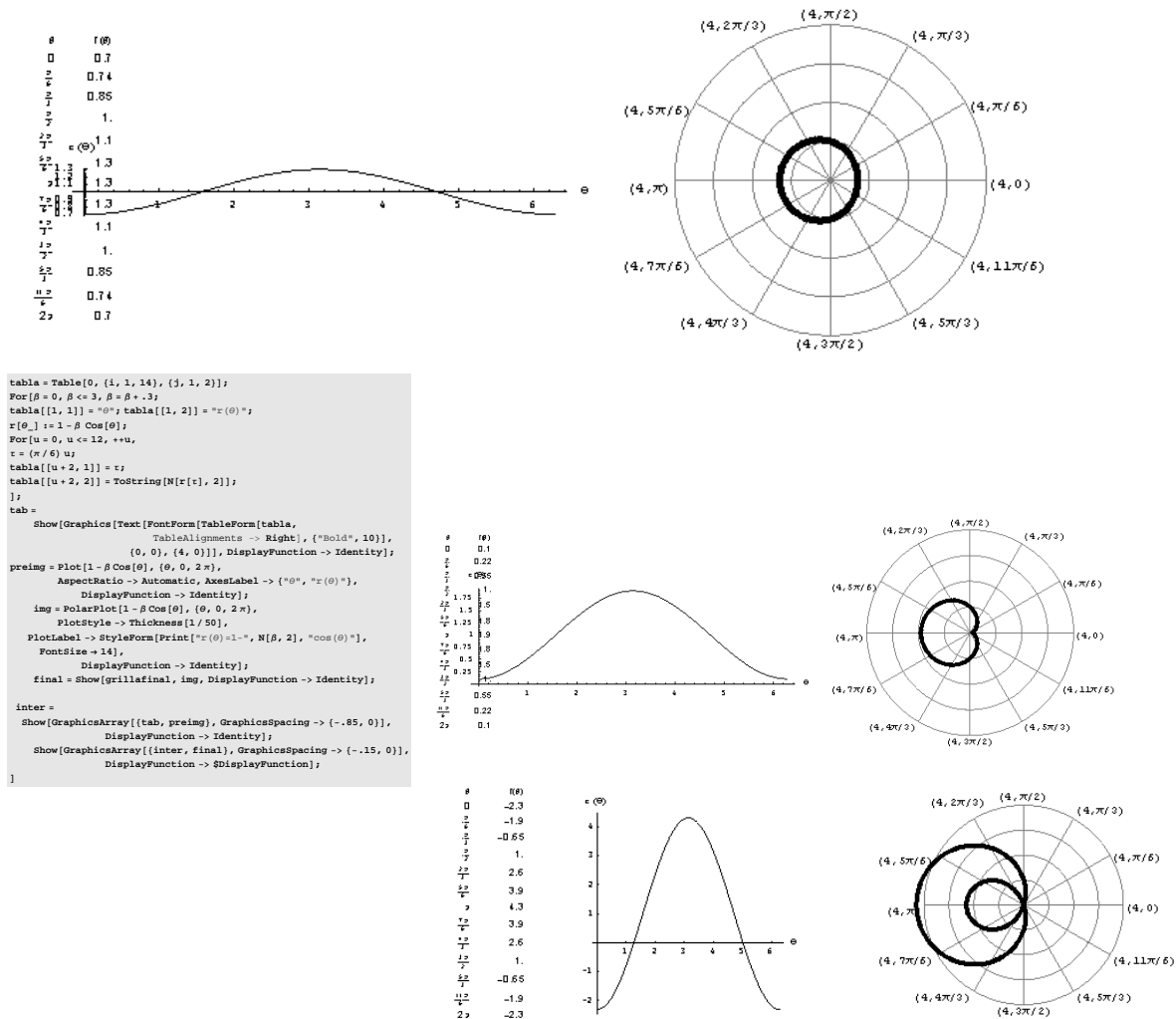


Cuadro 13.4: e.g. Un caracol girando alrededor del origen.

## Capítulo 13. Gráficas

En otra de las interacción iterativas y factibles de animación. Cambio de circunferencia a cuasi-circunferencia, caracol y a cardioide de  $r(\theta) = 1 - \beta \cos(\theta)$  En este caso las celdas animadas tratan el efecto sobre la variación del parámetro real  $\beta$  en las curvas de representación polar  $r(\theta) = 1 - \beta \cos(\theta)$ . En la subsección §10.2.3 Cardiodes y Limaços, página 393 del Capítulo 10, hemos utilizado, este grupo de sentencias algorítmicas para ilustrar los conceptos allí desarrollados con mayor dedicación en espacio y connotación teórica.

Esta animación, Cuadro 13.5, en particular, ilustra la metamorfosis (mutación) que provoca el cambio de la constante o parámetro  $\beta$  en las curvas planas  $r(\theta) = 1 - \beta \cos(\theta)$ , en las que la variable  $\theta$  en todos los casos permite un giro angular, i.e.  $\theta$  perteniente al intervalo  $[0, \pi]$ . El algoritmo mostrado, escoge el parámetro  $\beta$  entre reales del  $[0, 4]$ .



Cuadro 13.5: e.g. Mutación: Circunferencia, Cuasi-Circunferencia, Cardioide y Caracol.

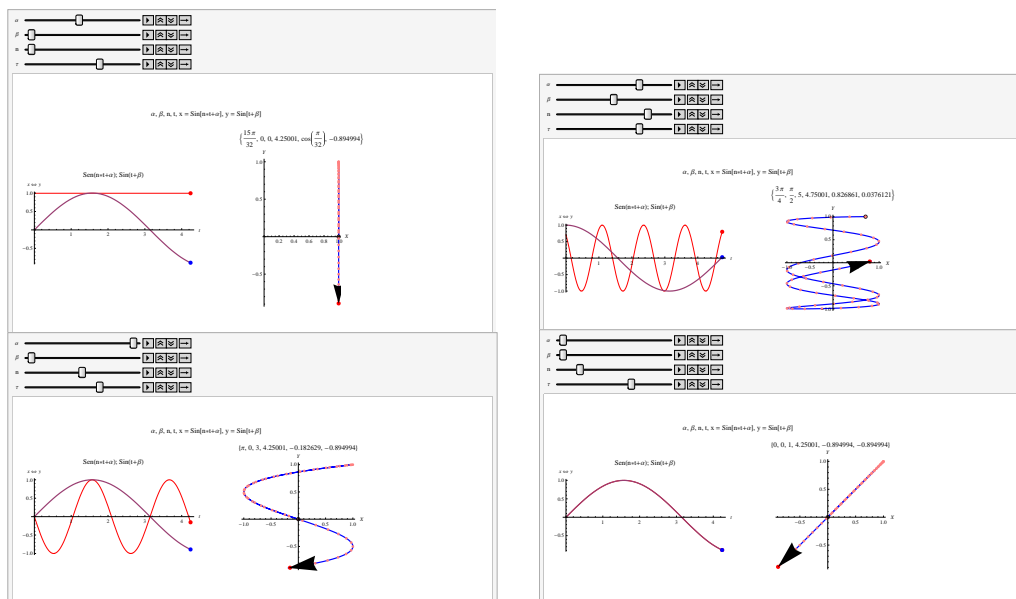
## 13.1. Sentencias perfectibles: §3, pp. 151-161.

```

xcartno[n_, α_, t_] := Sin[n*t + α];
ycartnosinn[t_, β_] := Sin[t + β];
lissajousNOSin[n_, α_, t_, β_] := {Sin[n*t + α], Sin[t + β]};

Animate[
GraphicsArray[
{
Show[
Plot[{xcartno[n, α, t], ycartnosinn[t, β]},
{t, 0, τ}, AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0},
AxesLabel -> {t, x ⊖ y}, PlotStyle -> {RGBColor[1., 0., 0.], Thick},
PlotLabel -> " Sen (n*t+α); Sin(t+β)"
,
Graphics[{PointSize[Large], Red, Point[{τ - 0.01, xcartno[n, α, τ - 0.01]}]},
AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0}},
Graphics[{PointSize[Large], Blue, Point[{τ - 0.01, ycartnosinn[τ - 0.01, β]}]},
AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0}}
]]
,
Show[
ParametricPlot[lissajousNOSin[n, α, t, β], {t, 0, τ}, AspectRatio -> Automatic,
AxesOrigin -> {0, 0},
PlotStyle -> {RGBColor[0., 0., 1.], Thick}, AxesLabel -> {X, Y},
PlotLabel -> Table[{α, β, n, τ, Sin[n*τ + α], Sin[τ + β]}]]
, Graphics[
{PointSize[Large], Red, Point[{xcartno[n, α, τ - 0.01], ycartnosinn[τ - 0.01, β]}]},
AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0}}
,
Graphics[{PointSize[Large], Black, Point[{xcartno[n, α, 0.], ycartnosinn[0., β]}]},
AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0}}
, Graphics[{PointSize[Medium], Pink,
Point[Table[{xcartno[n, α, t], ycartnosinn[t, β]}, {t, 0.0001, τ, 1/12}]}],
AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0}}
, Graphics[
{Arrowheads[.25], Arrow[{xcartno[n, α, τ - 0.1], ycartnosinn[τ - 0.1, β]},
{xcartno[n, α, τ], ycartnosinn[τ, β]}]},
AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0}}
]]
}
, PlotLabel -> "α, β, n, τ, x = Sin[n*t+α], y = Sin[t+β]"
],
{α, 0, Pi, Pi/32}, {β, 0, Pi, Pi/16}, {n, 0, 6, 1}, {τ, 0.00001, 6.3, 1/12}
]

```



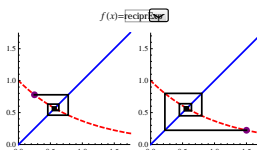
Cuadro 13.6: Sentencias perfectibles: Funciones Trigonómicas.

## 13.2. Sentencias y *Sucesiones* infinitas de reales.

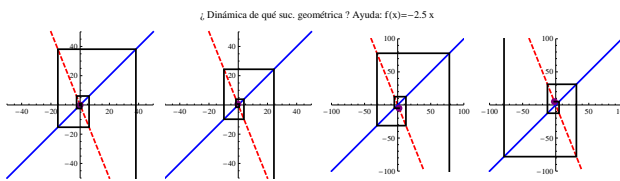
Las sucesiones geométricas y aritméticas, §2.11, Figura 2.58, pág. 123, son asociadas a Dinámicas Discretas, [Aguilera, N. E. (1995)]. La acción de presionar la misma tecla de una computadora, una vez ingresado un número real, ver Figuras 2.59, 2.64 y 2.65. El algoritmo ilustra la convergencia o divergencia de las sucesiones, e.g. 5<sup>to</sup> PARCIAL - ♣ © 5<sup>to</sup> COLOQUIO, pág. 592.

```
Clear[g];
trayectoria[g_, x0_, iteraciones_, xmin_, xmax_] :=
Block[{orbita, lineas},
orbita = NestList[g, x0, iteraciones];
lineas = Line[ Rest[ Partition[
Flatten[ Transpose[{orbita, orbita}]], 2, 1]]];
Plot[g[x], {x, xmin, xmax},
PlotRange -> {{xmin, xmax}, {xmin, xmax}},
AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0},
PlotStyle -> {RGBColor[1., 0., 0.], Thick, Dashed},
Epilog -> {Blue, Thick,
Line[{{xmin, xmin}, {xmax, xmax}}], Purple,
{AbsolutePointSize[8], Point[{x0, g[x0]}]}, Black,
{AbsoluteThickness[2], lineas}}
]]
```

```
srootdos[x_] := 0.5 (x +  $\frac{2}{x}$ )
mtresmedios[x_] := -1.5 * x
tresmedios[x_] := 1.5 * x
m[x_] := 0.5 * x
reciprExpdos[x_] := 2^-x
Id[x_] := x
mI[x_] := -x
reciprExp[x_] :=  $\frac{1}{\text{Exp}[x]}$ 
eLogu[x_] := 3.2 x (1 - x)
eLogd[x_] := 4. x (1 - x)
Dynamic[
GraphicsArray[
{trayectoria[g, 0.25, 10, 0, 1.75], trayectoria[g, 1.5, 10, 0, 1.75]}
, PlotLabel -> Row[{Style["f(x)", Italic], "=",
PopupMenu[Dynamic[g], {m, tresmedios, Cos, Sqrt, reciprExp}]}]
]
]
```



```
Clear[g];
trayectoria[g_, x0_, iteraciones_, xmin_, xmax_] :=
Block[{orbita, lineas},
orbita = NestList[g, x0, iteraciones];
lineas = Line[ Rest[ Partition[
Flatten[ Transpose[{orbita, orbita}]], 2, 1]]];
Plot[g[x], {x, xmin, xmax},
PlotRange -> {{xmin, xmax}, {xmin, xmax}},
AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0},
PlotStyle -> {RGBColor[1., 0., 0.], Thick, Dashed},
Epilog -> {Blue, Thick,
Line[{{xmin, xmin}, {xmax, xmax}}], Purple,
{AbsolutePointSize[8], Point[{x0, g[x0]}]}, Black,
{AbsoluteThickness[2], lineas}}
]]
Clear[g];
g[x_] := -2.5 * x
GraphicsArray[
{trayectoria[g, 0.025, 10, -50, 50], trayectoria[g, -0.25, 10, -50, 50],
trayectoria[g, 2, 10, -100, 100], trayectoria[g, -2, 10, -100, 100]}
, PlotLabel -> "¿ Dinámica de qué suc. geométrica ? Ayuda: f(x)=-2.5 x"
```



Cuadro 13.7: Presionando la misma tecla.

## 13.3. Optimización en compactos

Sentencias que ilustran las funciones continuas que participan en la solución del ejercicio de optimización de Miguel, el ecologista, que busca la braquistócrona. Referirse a la pág. 90, Figura 2.29 y consultar la resolución general del problema que se inicia en la pág. 259.

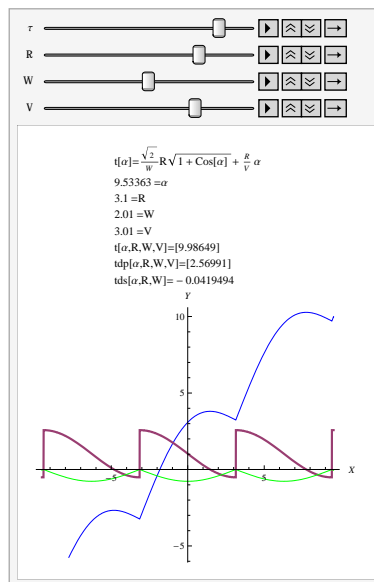
```

t[α_, R_, W_, V_] :=  $\frac{\sqrt{2}}{W} R \sqrt{1 + \text{Cos}[\alpha]} + \frac{R}{V} \alpha$ 
D[t[α, R, W, V], α];
tdp[α_, R_, W_, V_] :=  $\frac{R}{V} - \frac{R \text{Sin}[\alpha]}{\sqrt{2} W \sqrt{1 + \text{Cos}[\alpha]}}$ 
D[tdp[α, R, W, V], α];

Simplify[%]
tds[α_, R_, W_] :=  $-\frac{\sqrt{2} R \text{Cos}[\frac{\alpha}{2}]^4}{W (1 + \text{Cos}[\alpha])^{3/2}}$ 

Animate[
Plot[{t[α, R, W, V], tdp[α, R, W, V], tds[α, R, W]}, {α, -π, π}, AspectRatio -> Automatic,
AxesOrigin -> {0, 0},
PlotStyle -> {RGBColor[0., 0., 1.], Thick, RGBColor[0., 1., 0.], Thick,
RGBColor[1., 0., 0.], Thick}, AxesLabel -> {X, Y}, PlotLabel ->
Column[Table[{
"t[α] =  $\frac{\sqrt{2}}{W} R \sqrt{1 + \text{Cos}[\alpha]} + \frac{R}{V} \alpha$ ", τ = "α", "=R" R, "=W" W, "=V" V,
"t[α,R,W,V] =  $\frac{\sqrt{2}}{W} * R * \sqrt{1 + \text{Cos}[\tau]} + \frac{R}{V} \tau$ ",
"tdp[α,R,W,V] =  $\frac{R}{V} - \frac{R \text{Sin}[\tau]}{\sqrt{2} W \sqrt{1 + \text{Cos}[\tau]}}$ ", "tds[α,R,W] =  $-\frac{\sqrt{2} R \text{Cos}[\frac{\tau}{2}]^4}{W (1 + \text{Cos}[\tau])^{3/2}}$ "}],
{τ, -4 π, 4 π, 0.1}, {R, 0.1, 4, 1}, {W, 0.01, 4, 1.}, {V, 0.01, 4, 1.}]

```



Cuadro 13.8: Optimización en compactos: Miguel el ecologista.

## 13.4. O.D.E: Sentencias vs. unicidad de soluciones.

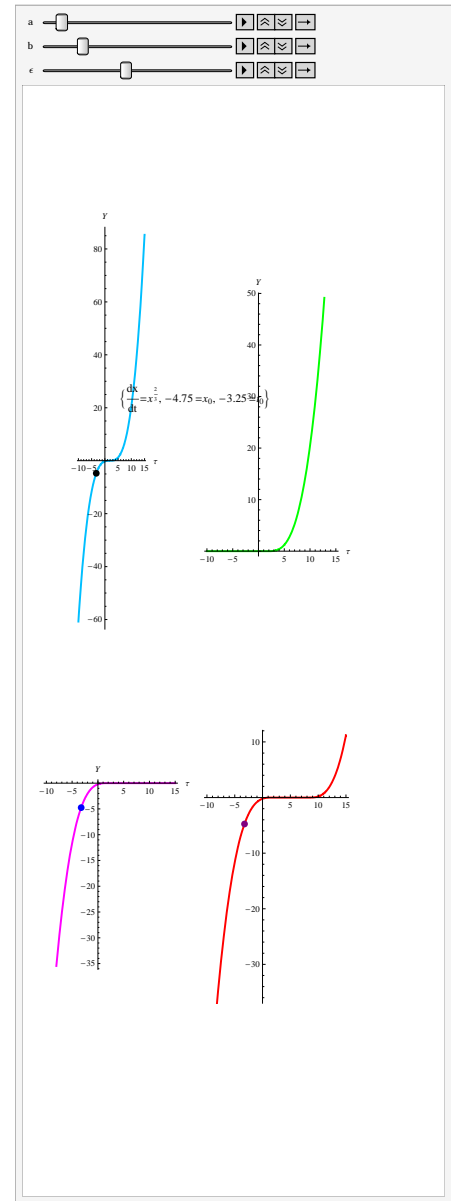
Ver Ejemplo 11.1.13, pp. 442- 443. Nivel ♣ © 5<sup>to</sup> COLOQUIO.

```

rcubica[u_] := If[u < 0, - (-u)^(1/3), u^(1/3)]
y[τ_, a_, b_] := (τ - b + 3*rcubica[a])^3
y1[τ_, a_, b_] := If[τ < b - 3*rcubica[a], 0, y[τ, a, b]]
y2[τ_, a_, b_] := If[τ > b - 3*rcubica[a], 0, y[τ, a, b]]
sol[τ_, a_, b_, ε_] := If[τ > b - 3*rcubica[a], {τ, (τ - b + 3*rcubica[a])^3},
If[τ < b - 3*rcubica[a] - ε, {τ, (τ - b + 3*rcubica[a] + ε)^3}, {τ, 0}]]

Animate[
GraphicsGrid[{{
Show[
Plot[{y[τ, a, b]}, {τ, -10, 10}, AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0},
PlotStyle -> {RGBColor[0., 0., 1.], Thick},
PlotStyle -> {RGBColor[0., 1., 0.], Thick}, AxesLabel -> {τ, Y}
], Graphics[{PointSize[Large], Black, Point[{b, a}]}],
AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0}
],
Show[
Plot[{y1[τ, a, b]}, {τ, -10, 10}, AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0},
PlotStyle -> {RGBColor[0., 1., 0.], Thick}, AxesLabel -> {τ, Y}
], Graphics[{PointSize[Large], Red, Point[{b, a}]}],
AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0}
],
Show[
Plot[{y2[τ, a, b]}, {τ, -10, 10}, AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0},
PlotStyle -> {RGBColor[1., 0., 1.], Thick}, AxesLabel -> {τ, Y}
], Graphics[{PointSize[Large], Blue, Point[{b, a}]}],
AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0}
],
Show[
ParametricPlot[
sol[τ, a, b, ε], {τ, -10, 10}, PlotStyle -> {RGBColor[1., 0., 0.], Thick}
], Graphics[{PointSize[Large], Blue, Point[{b, a}]}],
AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0}
]
}], PlotLabel -> Table[{ "dx/dt = x^(2/3)", "=x_0" a, "=t_0" b }]]
, {a, 0, 5, 0.25}, {b, -5, 5, 0.25}, {ε, 0, 10, 0.25}]

```



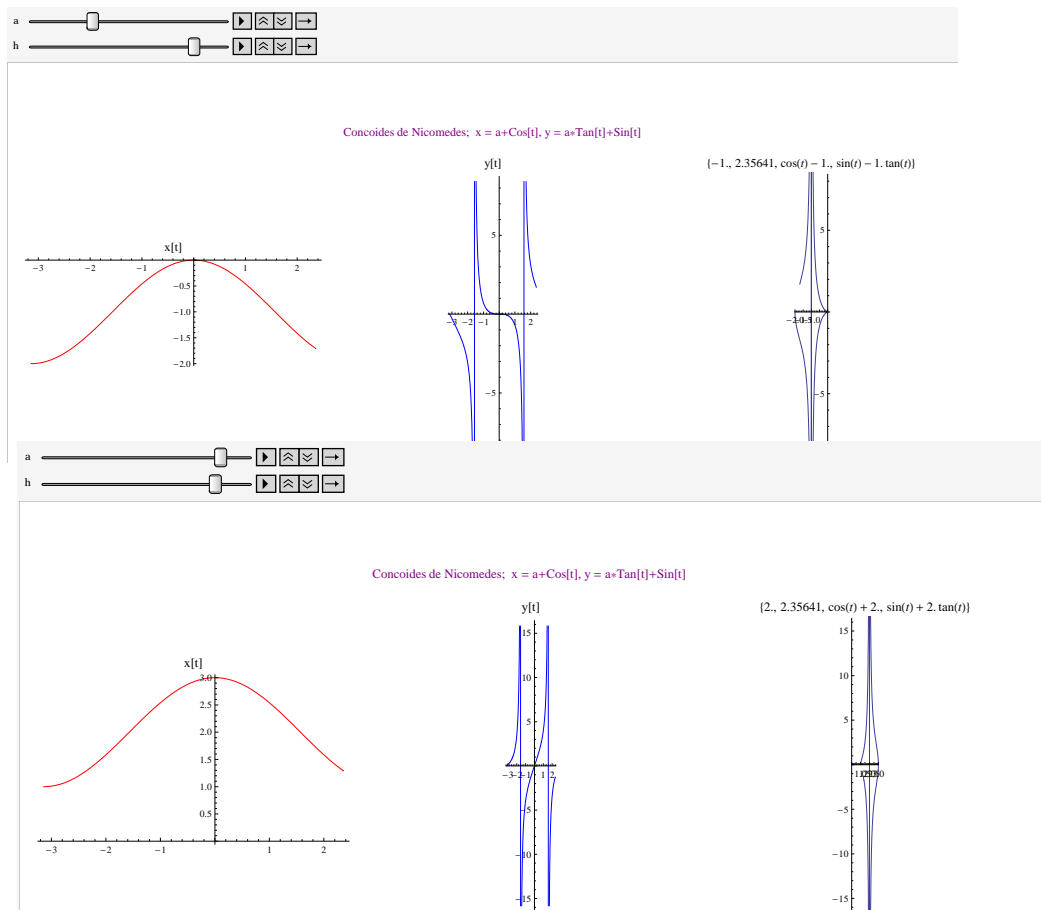
Cuadro 13.9: E.D.O.  $\frac{dx}{dt} = x^{2/3}$ .

## 13.5. Secuencias para las concoides de Nicomedes.

```

xcart[n_, m_][t_] := n + m * Cos[t];
ycart[n_, m_][t_] := n * Tan[t] + m * Sin[t];
concoides[n_, m_][t_] := {n + m * Cos[t], n * Tan[t] + m * Sin[t]}
h = -3;
Animate[
  Show[
    GraphicsArray[
      {
        Plot[xcart[-0.2, 1][t], {t, -Pi, h}, AspectRatio -> Automatic,
          AxesOrigin -> {0, 0}, PlotLabel -> "x(t)",
        Plot[ycart[-0.2, 1][t], {t, -Pi, h}, AspectRatio -> Automatic,
          AxesOrigin -> {0, 0}, PlotLabel -> "y(t)",
        ParametricPlot[concoides[-0.2, 1][t], {t, -Pi, h}, AspectRatio -> Automatic,
          AxesOrigin -> {0, 0}, PlotLabel -> "Concoide (-0.2, 1)"
      },
      GraphicsSpacing -> {-.25, 0}], PlotLabel -> "Concoide de Nicomedes"
    ],
  {h, -3, 6, 0.01}
]

```



Cuadro 13.10: Concoides de Nicomedes,  $a = -1$  y  $a = 2$ .

### 13.6. Bifurcación $\pitchfork$ en la E.D.O. de Landau.

$$x'[t] == (R - W) * x[t] - A * x[t]^3$$

DSolve[%, x[t], t]

$$x2[R_, W_, A_, C_, t_] := -\frac{e^{(R-W)(t-C)} \sqrt{R-W}}{\sqrt{1 + A e^{2(R-W)(t-C)}}$$

$$x1[R_, W_, A_, C_, t_] := \frac{e^{(R-W)(t-C)} \sqrt{R-W}}{\sqrt{1 + A e^{2(R-W)(t-C)}}$$

Animate[

```
Plot[{ x1[R, W, A, C, t], 0, x2[R, W, A, C, t] },
  {t, 0., 10}, AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotStyle ->
  {RGBColor[0., 0., 1.], Thick, RGBColor[0., 1., 0.], Thick}, AxesLabel -> {t, X},
  PlotLabel -> Table[{"Pitchfork", R, W, A, C, x1[R, W, A, 0, t], x2[R, W, A, C, t] ]],
  {R, 0.01, 8., 0.125}, {W, 0.01, 8, 0.1}, {A, 0.01, 4, 0.5}, {C, 0.01, 4, 1}]
```

$$x'[t] == (R - W) x[t] - A x[t]^3$$

$$\left\{ \left\{ x[t] \rightarrow -\frac{e^{(R-W)(t-C[1])} \sqrt{R-W}}{\sqrt{1 + A e^{2(R-W)(t-C[1])}} \right\}, \left\{ x[t] \rightarrow \frac{e^{(R-W)(t-C[1])} \sqrt{R-W}}{\sqrt{1 + A e^{2(R-W)(t-C[1])}} \right\} \right\}$$

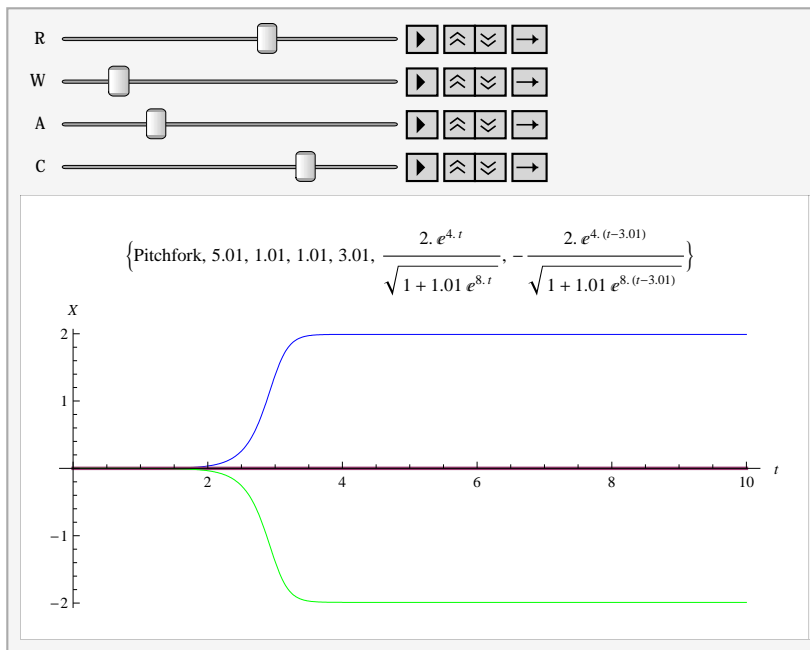


Figura 13.1: Bifurcación  $\pitchfork$  en las soluciones de la E.D.O. de Landau.



## 13.7. DSolve y E.D.O.

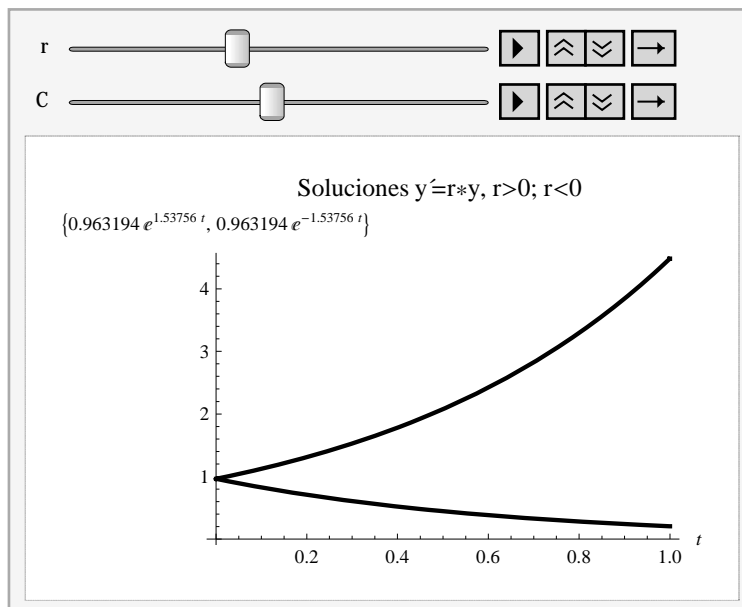
El siguiente cuadro muestra una instantánea de la animación que permite seleccionar la constante  $r$ , de crecimiento o decrecimiento del modelo poblacional más simple, i.e.  $\dot{y} = r y$ , simultáneamente con la posibilidad de escoger un valor para la constante del proceso de antiderivación, utilizando la respuesta del comando “DSolve” del mathematica, para aquellas situaciones en que  $C[1] = e^C$ . Cabe declarar que finalizada la lectura de la sección “Crecimiento y/o decrecimiento en poblacionales”, pp. 410-470, debemos tener en claro el rol de las constantes que aparecen en los procesos de determinación de las soluciones de las E.D.O.

```

y'[t] == r*y[t]
DSolve[y'[t] == r*y[t], y[t], t]
{{y[t] -> er t C[1]}}

y[t_, r_, C_] := er t eC
Animate[Plot[{y[t, r, C], y[t, -r, C]}, {t, 0, 1},
  AxesLabel -> {t, {y[t, r, C], y[t, -r, C]}},
  PlotStyle -> {{Black, Thick}, {Black, Thick}, {Blue, Thick}},
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotLabel -> "Soluciones y'=r*y, r>0; r<0 ",
  {r, 0.0001, 4}, {C, -1, 1}]

```



Cuadro 13.11: Selección de  $c$  y de  $r$  en  $\dot{y} = r y$ .

## 13.8. Cómputos y Conjeturas en el Cálculus.

Los *Cómputos* del *Calcūlus* que hemos visto, son esencialmente las evaluaciones de: límites  $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x)$ , derivadas  $\frac{d f(x)}{d x}$ , derivadas sucesivas  $\frac{d^n f(x)}{d x^n}$ , integrales indefinidas y definidas  $\int f(x) dx$ ,  $\int_a^b f(x) dx$ . Además, resolución de ecuaciones, en forma exacta o numérica, estudio de las integrales propias e impropias, e.g.  $\int_0^{+\infty} e^{-s x} dx$ ,  $\int_{-1}^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ , y el análisis de ecuaciones diferenciales muy simples. Por otra parte se asoció lo estudiado sobre convergencia de sucesiones a dinámicas discretas sencillas. Finalmente se encaró la problemática de “sumar ” los infinitos términos de una sucesión de números reales, definiendo el sentido de la expresión  $\sum_{n=c}^{+\infty} b_n$ .

<pre> N[e, 10] → 2.718281828 N[π, 5] → 3.14159 N[√2, 8] → 1.4142136 Limit[Log[1 + 1/x], x → -1] = -∞ Limit[Log[1 + 1/x] + 1/(x+1), x → +∞] = 1 Limit[(1 + 1/x)^x, x → 0] = 1 Solve[x^2 + a x + 1 == 0, x] → {{x → 1/2 (-a - √(-4 + a^2))}, {x → 1/2 (-a + √(-4 + a^2))}} Solve[{x + y = 1, x + y = 2}, {x, y}] → {} Solve[{x + y = 1, x - y = 0}, {x, y}] → {{x → 1/2, y → 1/2}} NSolve[x^5 - 2 x + 3 == 0, x] → {{x → -1.423605848523317}, {x → -0.24672925691056408 - 1.3208163474502475 I}, {x → -0.24672925691056408 + 1.3208163474502475 I}, {x → 0.95853218118673 - 0.49842777903184604 I}, {x → 0.95853218118673 + 0.49842777903184604 I}} FindRoot[Cos[x] - x, {x, 0.5}] → {x → 0.7390851332151607} FindRoot[x^2 - x, {x, 0.5}] → {x → 1} f[x_] := (1 + 1/x)^x f[x] f'[x] = D[f[x], x] = D[(1 + 1/x)^x, x] → (1 + 1/x)^x (-1/(1 + 1/2)x + Log[1 + 1/x]) f''[x] = D[f[x], {x, 2}] → ((1 + 1/x)^(2+x) + (1 + 1/x)^x (-1/(1 + 1/2)x + Log[1 + 1/x])^2) D[f, x] = D[f[x], {x, 3}] → (1 + 1/x)^x (1 + 6 x - x^2 + 3 x (-1 + x^2) Log[1 + 1/x] - 3 x^2 (1 + x)^2 Log[1 + 1/x]^2 + x^2 (1 + x)^3 Log[1 + 1/x]^3) x^2 (1 + x)^3 </pre>	<pre> Integrate[Sin[x], x] → -Cos[x] Integrate[x^n, x] → x^(n+1)/(n+1) Integrate[a x^2 + b x + c, x] → c x + (b x^2)/2 + (a x^3)/3 Integrate[x^-1, x] → Log[x] ¡ Falta la constante en cada una de las salidas del mathematica ! Log[10] → Log[10] N[Log[10]] → 2.302585092994046 Log[e] → 1 Integrate[e^-x^2, x] → 1/2 √π Erf[x] NIntegrate[e^-x^2, {x, -1, 1}] → 1.4936482656248558 DSolve[y' [x] + y[x] == x, y[x], x] → {{y[x] → -1 + x + e^-x C[1]}} Series[Sin[x], {x, 0, 8}] → x - x^3/6 + x^5/120 - x^7/5040 + O[x]^9 Normal[%] → x - x^3/6 + x^5/120 - x^7/5040 Sum[i, {i, 1, 4}] → 10 Sum[(1/2)^i, {i, 0, Infinity}] → 2 sum[(2)^i, {i, 0, Infinity}] → "Sum does not converge" </pre>
--	--

Cuadro 13.12: Cómputos y Conjeturas en el Cálculus.

Recomendamos regresar a la pág. 28 y desde ésta sobrevolar para retomar la pág. 501 del Capítulo 14, en el que las *Conjeturas* son confirmadas por métodos del *Calcūlus*.

## Parte XIV

# Hamilton vs Hamilton



## Capítulo 14

# Hamilton en la Geometría Óptica vs Hamilton en el Icosian Game

En este Capítulo conectamos dos áreas de investigación desarrolladas a partir de las contribuciones del matemático, físico y astrónomo irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805-1865). Hemos explicitado un nexo entre uno de sus postulados sobre *Geometría Óptica* y los itinerarios definidos a partir del *Icosian game*.

Hamilton postuló que los rayos luminosos no necesariamente minimizan el tiempo de recorrido de sus trayectorias, contradiciendo el Principio de Fermat, Fermat sostuvo, a partir de las experiencias de la refracciones de la luz de su época (1662), que la luz viajaba según las trayectorias que minimizaban el tiempo, es decir las braquistócronas, del griego brachistos “el más breve” y chronos “tiempo”.

Hamilton aseveró, [Hamilton, W. R. (1833)] : ... “In optics, for example, though the sum of the incident and reflected portions of the path of light, in a single ordinary reflection at a plane, is always the shortest of any, yet in reflexion at a curved mirror this economy is often violated. If an eye be placed in the interior but not at the centre of a reflecting hollow sphere, it may see itself reflected in two opposite points, of which one indeed is the nearest to it, but the other on the contrary is the furthest; so that of the two different paths of light, corresponding to these two opposite points, the one indeed is

## Capítulo 14. Hamilton en la Geometría Óptica vs Hamilton en el Icosian Game

---

the shortest, but the other is the longest of any. In mathematical language, the integral called action, instead of being always a minimum, is often a maximum; and often it is neither the one nor the other: though it has always a certain *stationary* property,” ... “yet we ought not (I think) to retain the epithet *least*: but rather to adopt the alteration proposed above, and to speak, in mechanics and in optics, of the *Law of Stationary Action*”.

Otro legado de Hamilton es el *Icosian game*, juego que inventó en 1857 y que fue distribuido comercialmente como un tablero con orificios ubicados en los vértices de una figura dodecaédrica. El jugador debía insertar clavijas en dichos agujeros de tal manera que en el recorrido consecutivo de las respectivas inserciones se visitara una sola vez cada hueco y se finalizara en el punto de partida una vez que todas las clavijas -en número coincidente con el de orificios- fueran ubicadas y por lo tanto todos los orificios estuviesen ocupados. Por esta razón, todo ciclo con la condición de formar un itinerario o tour que pase una sola vez por cada punto perteneciente a un conjunto finito de puntos fue posteriormente llamado, en su honor “*Hamiltoniano*”. Este juego matemático originó, entre otros, un campo muy diverso de estudio y aplicaciones conocido como los Problemas del Viajante de Comercio, cuyos acrónimos TSP y TSPP son normalmente aceptados sin traducción desde las expresiones en inglés, Traveling Salesman Problems (TSPs) y Traveling Salesman Path Problems, (TSPPs).

Particularmente, en este Capítulo hemos analizado fenómenos teleológicos de los rayos geométricos y luminosos en diferentes geometrías, aceptando los postulados de la Geometría Óptica [Born, M., and Wolf, F. (1990)], para el concepto idealizado de rayo luminoso. Hemos probado que en determinadas geometrías planas espejadas los rayos luminosos, cuando obedecen la *Ley de Reflexión*, ocasionalmente pueden minimizar, maximizar y en ciertas circunstancias ni minimizan ni maximizan el tiempo insumido durante el recorrido o viaje. Hemos confirmado que los fenómenos naturales pueden ser eficientes, extravagantes e inclusive en ciertas oportunidades tibios -“*mild*”.

En los desarrollos mostraremos modelos variacionales sencillos en los que existen rayos

---

luminosos cuyas trayectorias son máximos, o mínimos de la función del tiempo utilizado para recorrer el camino seguido por el rayo, pero también, que existen casos o situaciones de rayos luminosos cuyas trayectorias no corresponden al máximo ni al mínimo del tiempo insumido en sus respectivos viajes, sino a puntos estacionarios de sus funciones de propagación. Específicamente, lo hemos verificado en tres casos diferentes de la geometría de un virtual o ideal *Espejo Cuasi-Esférico* [Niel, B. I. (2002)]. El último modelo variacional aquí establecido se estudia en detalle en el Capítulo “*Geometría de los Hamiltonianos*” de [Niel, B. I. (2014)], donde confirmamos que las trayectorias Hamiltonianas Euclidianas Cíclicas conformadas por las curvas fronteras de los polígonos estrellados validan la *Ley de Reflexión* y son rayos luminosos en una geometría espejada cuasi-circular sobre las raíces  $n$ -ésimas de la unidad. En particular, las trayectorias Hamiltonianas reflexivas de máxima densidad contruídas sobre los vértices de un polígono regular de número impar de lados, a partir de estos desarrollos se presentan como únicas candidatas a resolver el Máx. TSP [Niel, B. I. (2004), Niel, B. I. (2002)] (Capítulo “*Geometría de los Hamiltonianos*”, §2.2.2 en la pág. 84, [Niel, B. I. (2014)]).<sup>1</sup>

Una vez explicitado el contexto histórico y el propósito de los desarrollos en este Capítulo, pasamos a describir los contenidos de cada una de las secciones que lo integran. En la Sección §14.2 se explica la metodología utilizada, sustentada en los principios del análisis matemático real y los modelos variacionales asumiendo las aproximaciones de la Geometría Óptica. La Sección §14.3 trata el *Problema de Heron*, mientras que en la Sección §14.4 se desarrolla un enfoque algebraico original de la *Ley de Snell*. Para ello resolvemos los polinomios de grado cuarto que permitirán detectar el punto en la interfase en el que el rayo luminoso realiza la braquistócrona cualquiera sea el conjunto de datos del problema; es decir, cualesquiera sean los puntos de partida y de llegada del rayo y las velocidades de propagación de los mismos. Obviamente se considera que los puntos de partida y llegada están ubicados en medios que tienen distintos índices de refracción.

---

<sup>1</sup>**Palabras Claves:** Geometría Óptica, Braquistócrona, Caminos Hamiltonianos, Principio de Fermat, Principio de Hamilton, Polígonos estrellados, Polinomios de cuarto grado.

Mientras que el enfoque geométrico de que la “*Ley de Refracción*” satisface el Principio de Fermat [Sundar, B., Hamilton, A. C., and Courtial, J.(2009)] ha sido ampliamente divulgado y utiliza el Principio de Huygens para la justificación, e.g. Huygens’ Solution en [Tikhomirov, V. M. (1990)], pág. 22, Ley de Snel [Santaló, L. A. (1993)], pág. 61. En las secciones §14.5.1, §14.5.2 y §14.5.3 se analizan tres situaciones geométricas diferentes en el *Espejo Cuasi-Esférico* [Niel, B. I. (2002)]. Estos casos estudiados han originado las posteriores formulaciones de variadas versiones del Problema del Viajante de Comercio en las redes completamente conectadas con nodos en los vértices de los polígonos regulares. Simbolizadas por  $\mathcal{N}(K_n(\sqrt[n]{1}), (d_{ij})_{n \times n})$  y estudiadas en los Capítulos 2, 3 y en la Sección 3.4 de [Niel, B. I. (2014)].

Trabajos que requieren del despliegue de metodologías específicas en virtud de que las trayectorias extremales en estos TSPs no son coincidentes, en general, con trayectorias luminosas o reflexivas.

### 14.1. Hamilton de la Geometría Óptica a Hamilton en un Juego Hamiltoniano

Bajo las simplificaciones asumidas por las aproximaciones de la Geometría Óptica consideraremos que: “*Un rayo luminoso conecta dos puntos atravesando una trayectoria cuya función de propagación o tiempo de recorrido es estacionaria con respecto a las variaciones del camino*”. Confirmamos en las diferentes geometrías estudiadas, utilizando el cálculo diferencial, que los rayos luminosos pueden minimizar, maximizar o simplemente hacer estacionaria la función de su tiempo total de propagación con tiempos de viaje intermedios entre el mínimo y el máximo posibles de ser alcanzados por rayos geométricos no reflexivos. Esfuerzo teórico adicional nos ha permitido determinar analíticamente las trayectorias de los rayos luminosos en cada una de las circunstancias que hemos analizado.



## 14.2. Metodología Empleada

Se comienza considerando el Problema de Heron, la Ley de Snell y la reflexión en los casos del *Espejo Cuasi-Circular* por el siguiente procedimiento [Lemons, D. S. (1997)]: En primer lugar, describimos e ilustramos mediante representaciones mono o multi-paramétricas la familia de los caminos o trayectorias de los rayos geométricos. Cada rayo geométrico de la familia debe conectar los puntos inicial y final especificados y cada trayectoria geométrica posible será identificada, según lo imponga la geometría del modelo, por uno o varios de los valores del conjunto de parámetros geométricos. En segundo término, se determina la expresión analítica de la función de propagación de los rayos geométricos. Por último, se establece la condición necesaria de primer orden para óptimos de cada problema específico. Esto caracteriza o selecciona la trayectoria luminosa. En cada uno de los casos aquí tratados la diferencial total de segundo orden nos indicará si las soluciones -rayos luminosos- minimizan, maximizan o ni minimizan ni maximizan el tiempo total del recorrido. Dado que se trata de resolver un problema de extremos locales de la función de propagación de los rayos geométricos [Miller, R. E. (2000)].

Cabe aclarar que el Problema de Heron y la Ley de Snell verifican el *Principio de Fermat* ( i.e.  $\sim$  Braquistócrona  $\sim$  Máxima eficiencia  $\sim$  Proceso expedito ).

## 14.3. Problema de Heron

Heron de Alejandría, invocando un principio de mínimo, resolvió el problema de la física óptica de un rayo, que comienza en  $P_1 = (x_1, y_1)$  encima de un espejo plano, viaja en línea recta hasta el espejo plano, rebota y se refleja dirigiéndose en línea recta hasta llegar a  $P_2 = (x_2, y_2)$ .

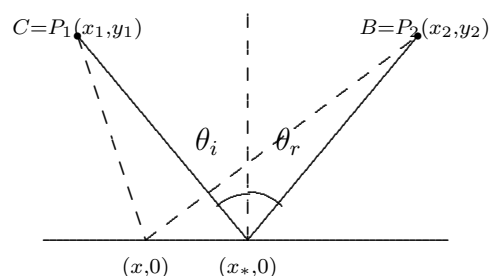


Figura 14.1: Problema de Heron.

Explicitamos aquí la matemática del método delineado en la Sección §14.2.

## Capítulo 14. Hamilton en la Geometría Óptica vs Hamilton en el Icosian Game

---

Construimos la función la función de propagación de los rayos geométricos suponiendo que  $y_1 > 0$  e  $y_2 > 0$  (14.1),

$$T(x) = \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}, \quad x_1 \leq x \leq x_2. \quad (14.1)$$

Igualando a cero la derivada primera  $T'(x)$  obtenemos (14.2)

$$\frac{(x - x_1)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} = \frac{(x_2 - x)}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}. \quad (14.2)$$

La ecuación (14.2) en términos geométricos se escribe como:

$$\theta_i = \theta_r. \quad (14.3)$$

Los cálculos condujeron a la ecuación (14.3) conocida en óptica geométrica como la “Ley de Reflexión”: *el ángulo de incidencia que el rayo forma con la normal del espejo es igual al ángulo que el rayo reflejado conforma con dicha normal.*

La derivada segunda de  $T(x)$  es positiva en todo punto, puesto que:

$$T''(x) = \frac{y_1^2}{[(x - x_1)^2 + y_1^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{y_2^2}{[(x_2 - x)^2 + y_2^2]^{\frac{3}{2}}} > 0. \quad (14.4)$$

**Proposición 14.3.1** *El Problema de Heron se resuelve por un único rayo luminoso que viaja en tiempo mínimo, i.e. la trayectoria determinada es una braquistócrona.*

*Demostración.*  $T'(x)$  es  $C_{[x_1, x_2]}$ ,  $T'(x_1) < 0$ ,  $T'(x_2) > 0$ , el Teorema de Bolzano establece la existencia de  $x_*$  en  $(x_1, x_2)$  tal que  $T'(x_*) = 0$ . Además,  $T''(x) > 0 \forall x$ , implica que  $T'(x)$  es estrictamente creciente, por lo tanto  $x_*$  es la única abscisa estacionaria, de  $T(x)$  en  $(x_1, x_2)$ , y por ser  $T''(x_*) > 0$ ,  $x_*$  es el mínimo estacionario o relativo pero además es el mínimo absoluto en  $[x_1, x_2]$ . Obviamente es el mínimo absoluto y positivo del problema. ■

La abscisa  $x_*$  construye la braquistócrona, que consiste en los siguientes dos tramos lineales: “Parte desde el punto  $P_1 = (x_1, y_1)$  en línea recta llega a la superficie del espejo plano en  $P_\Gamma = (x_*, 0)$  y desde éste punto de rebote nuevamente en línea recta llega a  $P_2 = (x_2, y_2)$ .”

**Observación 14.3.2** *La familia de rayos geométricos del Problema de Heron (Ver Figura 14.1 en la pág. 505) están condicionados a rebotar sobre la superficie especular plana una sola vez. Pues, en caso contrario la solución sería la conexión pitagórica -geodésica- del punto  $P_1 = (x_1, y_1)$  al  $P_2 = (x_2, y_2)$ .*

### 14.3.1. Obtención de la braquistócrona por cálculos algebraicos

A continuación, se obtiene por medio de manipulaciones algebraicas, el punto en el que el rayo luminoso incide en la interfase espejada plana donde se verifica la *Ley de Reflexión*. Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación (14.2), lo que resulta en la ecuación cuadrática (14.5)

$$x^2(y_1^2 - y_2^2) - 2x(x_2y_1^2 - x_1y_2^2) + y_1^2x_2^2 - x_1^2y_2^2 = 0. \quad (14.5)$$

A partir de que  $y_1 > 0$  e  $y_2 > 0$ , obtenemos las raíces  $x_{\cap} = \frac{x_2y_1 + x_1y_2}{y_1 + y_2}$  y

$$x_{\not\cap} = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_1 - y_2}.$$

La sustitución de  $x_{\not\cap}$  en el numerador de (14.2) resulta en que  $\text{Sign}(x_{\not\cap} - x_1) \neq \text{Sign}(x_2 - x_{\not\cap})$ , entonces  $x_{\not\cap}$ , es una solución que debe descartarse del problema original (14.2), se originó como consecuencia del proceso de elevación al cuadrado, por lo tanto no es la solución que estamos buscando en (14.2) que sabemos que existe y es única, por lo tanto, el valor del parámetro del Problema de Heron es el determinado por (14.6).

$$x_{\cap} = \frac{x_2y_1 + x_1y_2}{y_1 + y_2}. \quad (14.6)$$

La braquistócrona está precisamente identificada: Parte de  $P_1 = (x_1, y_1)$  en línea recta hasta  $(\frac{x_2y_1 + x_1y_2}{y_1 + y_2}, 0)$  y desde este punto de rebote en la superficie del espejo plano nuevamente en línea recta llega a  $P_2 = (x_2, y_2)$ . ■

### 14.3.2. Obtención de la braquistócrona por razones geométricas

Un razonamiento distintivo del caso [Tikhomirov, V. M. (1990)], págs. 4-5, conduce a la determinación del valor del parámetro en el que la *Ley de Reflexión* se realiza mediante consideraciones geométricas.

Por razones de simplicidad, seleccionamos rayos geométricos, que comienzan en  $(0, a)$ , viajan en línea recta hasta la superficie azogada llegando a  $(x, 0)$ , rebotan en ella dirigiéndose al punto  $(1, b)$ . Esta trayectoria es un rayo luminoso cuando colisiona con la superficie espejada en  $x_{\cap} = \frac{a}{a+b}$ . Puesto, que en el espejo plano, la búsqueda de la braquistócrona es equivalente al hallazgo de la geodésica -pues el rayo viaja en un medio uniforme- entonces la trayectoria más corta se determina dibujando la línea recta entre  $(0, -a)$  y  $(1, b)$ .

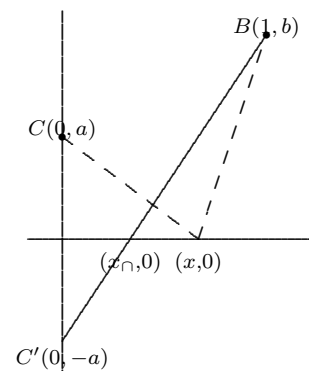


Figura 14.2: Enfoque Geométrico.

Claramente el Problema de Heron es exactamente equivalente a resolver el siguiente problema de minimización: Dada una recta y dos puntos en el plano que yacen en el mismo semiplano determínese el punto en la recta que minimiza la longitud entre el conjunto de trayectorias que comienzan en uno de dichos puntos llega a la recta y luego se dirige al otro punto. Minimizar la función (14.1) es exactamente minimizar  $\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2 - x)^2 + (-y_2)^2}$ ,  $x_1 \leq x \leq x_2$ , (Ver Figura 14.2). La respuesta es pitagórica, entre el punto  $P_1 = (x_1, y_1)$  y  $\bar{P}_2 = (x_2, -y_2)$ , i.e. “As the crow flies”, la geodésica.

## 14.4. Ley de Snell

En breve, siguiendo la metodología descrita en la Sección §14.2, la función de propagación del rayo luminoso resulta ser (14.7). Se supone que la luz viaja en una línea recta en el material de la primer interfase a velocidad  $v_1$ , desde el punto  $(x_1, y_1)$  hacia un punto en

la interfase entre ambos medios  $(x, 0)$ . A partir del cual ingresa en el segundo material y con una velocidad  $v_2$  se dirige hasta el punto  $(x_2, y_2)$ , (Ver la Figura 14.3 y su explicación en la pág. 509).

$$T(x) = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2-x)^2 + y_2^2}}{v_2} \quad (14.7)$$

Mientras que su derivada primera es:

$$T'(x) = \frac{(x-x_1)}{v_1 \sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}} - \frac{(x_2-x)}{v_2 \sqrt{(x_2-x)^2 + y_2^2}}. \quad (14.8)$$

Esta última ecuación (14.8) igualada a cero conduce a la expresión de la *Ley de Snell* en términos geométricos y físicos (14.9). Normalmente conocida como la *Ley de la Refracción*, [Tikhomirov, V. M. (1990)], pág. 123.

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}. \quad (14.9)$$

Otro de los hechos importantes de los rayos luminosos conocido en vida de Pierre de Fermat es que los rayos luminosos, cuando atraviesan un medio de menor densidad (e.g. aire) hacia uno de mayor densidad (e.g. agua), (i.e. refracción) cambian su dirección con respecto a la normal de la interfase. La Ley de Snell es derivable a partir del Principio de Fermat con la técnica delineada en la Sección §14.2. Por lo tanto, se buscan los rayos geométricos que yacen en el plano  $x-y$ , tales que conecten el punto  $C = (x_1, y_1)$  con el  $B = (x_2, y_2)$ , viviendo en medios diferentes, de modo que se minimice el tiempo de viaje.

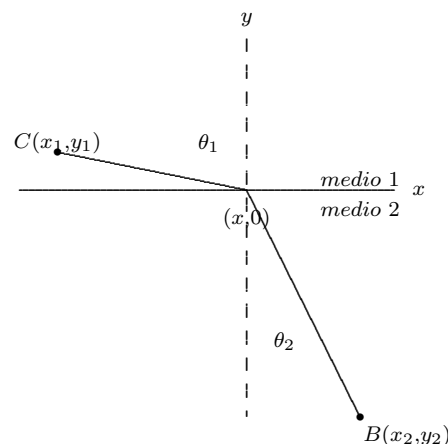


Figura 14.3: Ley de Snell.

**Proposición 14.4.1** *La Ley de Snell, i.e. el problema de óptica geométrica (14.9), es resuelto por la braquistócrona.*

## Capítulo 14. Hamilton en la Geometría Óptica vs Hamilton en el Icosian Game

---

*Demostración.* La función  $T(x)$ , ecuación (14.7), es continua,  $T(x) \rightarrow +\infty$ , estrictamente creciente para  $x \rightarrow \pm\infty$  y su segunda derivada es (14.10).

$$T''(x) = \frac{y_1^2}{v_1 ((x - x_1)^2 + y_1^2)^{3/2}} + \frac{y_2^2}{v_2 ((x_2 - x)^2 + y_2^2)^{3/2}} \quad (14.10)$$

$T''(x)$  es positiva para todo  $x$ , entonces  $T(x)$  es una función convexa. Por lo tanto  $T(x)$  tiene un mínimo relativo que es el mínimo absoluto. La abscisa donde el mínimo es realizado construye la trayectoria luminosa, i.e. la braquistócrona. ■

**Observación 14.4.2**  $T'(x_1) < 0$  y  $T'(x_2) > 0$  y de (14.10) es evidente que  $T''(x) > 0$  entonces  $T'(x)$  es una función estrictamente creciente y por el Teorema de Bolzano en  $[x_1, x_2]$  existe una única raíz tal que  $T'(x_*) = 0$ . El Problema de Snell posee una única abscisa estacionaria. Ella es la encargada de realizar el Principio de Fermat ya que  $T''(x)$  es  $\forall x$  positiva.

Elevando al cuadrado ambos lados de (14.9) obtenemos los siguientes polinomios de grado cuarto <sup>2</sup>

$$\begin{aligned} & (v_2^2 - v_1^2)x^4 + 2(x_1 + x_2)(v_1^2 - v_2^2)x^3 + \\ & [(v_2^2 - v_1^2)(x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2) + v_2^2y_2^2 - v_1^2y_1^2]x^2 + \\ & 2[(v_1^2 - v_2^2)(x_1x_2^2 + x_2x_1^2) + v_1^2x_2y_1^2 - v_2^2x_1y_2^2]x + \\ & (v_2^2 - v_1^2)(x_1^2x_2^2) + y_2^2v_2^2x_1^2 - y_1^2v_1^2x_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Es bien conocido que las ecuaciones polinomiales de grado  $n \leq 4$  se resuelven utilizando adiciones finitas, multiplicaciones, divisiones y extracciones de raíces.

### 14.4.1. Tratamiento de una interfase de ancho unitario

Ahora trataremos la situación particular en la cual  $A = (0, a)$  y  $B = (1, b)$ , con  $a > 0$ ,  $b > 0$  y  $v_2 \neq v_1$ . En tal caso la ecuación algebraica (14.11) de cuarto grado se convierte en:

$$x^4 - 2x^3 + \left[ \frac{v_2^2(b^2 + 1) - v_1^2(a^2 + 1)}{v_2^2 - v_1^2} \right] x^2 + 2 \left( \frac{v_1^2 a^2}{v_2^2 - v_1^2} \right) x - \left( \frac{v_1^2 a^2}{v_2^2 - v_1^2} \right) = 0 \quad (14.12)$$

---

<sup>2</sup>Si  $v_1 = v_2$  se obtiene la ecuación cuadrática (14.5). Esto significa que el Problema de Heron es un caso particular de la Ley de Snell.

Que reescribimos como:

$$p(x, c, c_1) = x^4 - 2x^3 + cx^2 + 2c_1x - c_1 = 0 \quad (14.13)$$

donde

$$c_1 = \frac{v_1^2 a^2}{v_2^2 - v_1^2} \quad (14.14)$$

$$c_2 = \frac{v_2^2 b^2}{v_2^2 - v_1^2} \quad (14.15)$$

y

$$c = c_2 - c_1 + 1. \quad (14.16)$$

A partir de (14.14) y (14.15) es claro que

$$\text{sign}(c_1) = \text{sign}(c_2). \quad (14.17)$$

**Proposición 14.4.3** *Existe al menos una raíz de  $p(x, c, c_1)$  en el intervalo abierto  $(0, 1)$ .*

*Demostración.* De (14.17) y como  $p(0) = -c_1$ , y  $p(1) = c_2$ , poseen distinto signo, el Teorema de Bolzano establece la existencia de  $x_* \in (0, 1)$  tal que  $p(x_*, c, c_1) = 0$ . ■

**Proposición 14.4.4** *Sea  $T(x)$  la función de propagación del rayo luminoso correspondiente al caso particular en que los rayos parten del punto  $A = (0, a)$  en el primer medio y llegan al punto  $B = (1, b)$  en el segundo, con  $a > 0$  y  $b < 0$ . Es decir,*

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(1-x)^2 + b^2}}{v_2},$$

$$T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1-x}{v_2 \sqrt{(1-x)^2 + b^2}}$$

y

$$T''(x) = \frac{a^2}{v_1 (a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{v_2 ((1-x)^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Entonces  $T'(x)$  tiene una única raíz en el intervalo abierto  $(0, 1)$ .

*Demostración.*  $T''(x)$  es positiva, por lo tanto  $T'(x)$  es una función estrictamente creciente, además  $T'(0) < 0$  y  $T'(1) > 0$ , entonces  $T'(x)$  tiene una única raíz precisamente en el intervalo abierto  $(0, 1)$ . ■

## Capítulo 14. Hamilton en la Geometría Óptica vs Hamilton en el Icosian Game

---

Llamemos  $x_*$  a la única raíz de  $T'(x)$  en  $(0, 1)$ , i.e.,  $T'(x_*) = 0$ , pero

$$T'(x_*) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_*}{v_1 \sqrt{a^2 + x_*^2}} = \frac{1 - x_*}{v_2 \sqrt{(1 - x_*)^2 + b^2}}, \quad (14.18)$$

es decir,  $x_*$  es una raíz de

$$\frac{x_*^2}{(v_1)^2 (a^2 + x_*^2)} = \frac{(1 - x_*)^2}{(v_2)^2 [(1 - x_*)^2 + b^2]}, \quad (14.19)$$

y en consecuencia, es una raíz de  $p(x)$  en el intervalo  $(0, 1)$ :

$$p(x_*) = 0, \quad x_* \in (0, 1).$$

Por otra parte,  $p(\tilde{x}_*) = 0 \not\Leftrightarrow T'(\tilde{x}_*) = 0$ , sin embargo

$$p(\tilde{x}_*) = 0 \Leftrightarrow \frac{|\tilde{x}_*|}{v_1 \sqrt{a^2 + \tilde{x}_*^2}} = \frac{|1 - \tilde{x}_*|}{v_2 \sqrt{(1 - \tilde{x}_*)^2 + b^2}} \quad (14.20)$$

Por lo tanto:

- Si,  $\tilde{x}_* < 0$

$$p(\tilde{x}_*) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\tilde{x}_*}{v_1 \sqrt{a^2 + \tilde{x}_*^2}} = \frac{1 - \tilde{x}_*}{v_2 \sqrt{(1 - \tilde{x}_*)^2 + b^2}}$$

- Si  $0 < \tilde{x}_* < 1$

$$p(\tilde{x}_*) = 0 \Leftrightarrow \frac{\tilde{x}_*}{v_1 \sqrt{a^2 + \tilde{x}_*^2}} = \frac{1 - \tilde{x}_*}{v_2 \sqrt{(1 - \tilde{x}_*)^2 + b^2}}$$

- Si  $\tilde{x}_* > 1$

$$p(\tilde{x}_*) = 0 \Leftrightarrow \frac{\tilde{x}_*}{v_1 \sqrt{a^2 + \tilde{x}_*^2}} = \frac{-(1 - \tilde{x}_*)}{v_2 \sqrt{(1 - \tilde{x}_*)^2 + b^2}}.$$

En síntesis:

$$\text{Si } 0 < \tilde{x}_* < 1, \quad p(\tilde{x}_*) = 0 \Leftrightarrow T'(\tilde{x}_*) = 0$$

$$\text{Si } \tilde{x}_* \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty),$$

$$p(\tilde{x}_*) = 0 \Leftrightarrow \frac{\tilde{x}_*}{v_1 \sqrt{a^2 + \tilde{x}_*^2}} = -\frac{(1 - \tilde{x}_*)}{v_2 \sqrt{(1 - \tilde{x}_*)^2 + b^2}}, \text{ por lo tanto } T'(\tilde{x}_*) \neq 0. \quad (14.21)$$

**Teorema 14.4.5** Si  $x_* \in (0, 1)$  y  $p(x_*) = 0$ , entonces  $T'(x_*) = 0$ .



*Demostración.* Consecuencia inmediata de la Proposición 14.4.4 y de las consideraciones en (14.21). ■

**Nota 14.4.6** *En otras palabras, la ecuación polinomial  $p(x, c, c_1) = 0$  tiene una única raíz en el intervalo  $(0, 1)$  la cual es la solución de la Ley de Snell.*

## 14.4.2. Determinando la braquistócrona en una interfase de ancho unitario

Obtenemos las raíces de (14.13) por el método de Ferrari y la fórmula de Cardan [Uspensky, J. V. (1948)], esto nos permite determinar el punto que minimiza la función de propagación luminosa (14.7). A continuación, teniendo en cuenta el Teorema 14.4.5 se determina la braquistócrona del Problema de Snell en una interfase unitaria.

Las cuatro raíces, para las condiciones de la *Ley de Snell* de la Sección 14.4.1, son:

$$\begin{aligned}
 x_1(c, c_1, c_2) &= \frac{1 + \sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)}}{2} + \frac{\sqrt{(1 + \sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)})^2 - 2 \left[ y_r(c, c_1, c_2) + \frac{(2c_1 + y_r(c, c_1, c_2))}{\sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)}} \right]}}{2} \\
 x_2(c, c_1, c_2) &= \frac{1 + \sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)}}{2} - \frac{\sqrt{(1 + \sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)})^2 - 2 \left[ y_r(c, c_1, c_2) + \frac{(2c_1 + y_r(c, c_1, c_2))}{\sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)}} \right]}}{2} \\
 x_3(c, c_1, c_2) &= \frac{1 - \sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)}}{2} + \frac{\sqrt{(\sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)} - 1)^2 - 2 \left[ y_r(c, c_1, c_2) - \frac{(2c_1 + y_r(c, c_1, c_2))}{\sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)}} \right]}}{2} \\
 x_4(c, c_1, c_2) &= \frac{1 - \sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)}}{2} - \frac{\sqrt{(\sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)} - 1)^2 - 2 \left[ y_r(c, c_1, c_2) - \frac{(2c_1 + y_r(c, c_1, c_2))}{\sqrt{1 - c + y_r(c, c_1, c_2)}} \right]}}{2}
 \end{aligned} \tag{14.22}$$

Donde  $y_r(c, c_1, c_2)$  es una de las raíces de la ecuación cúbica (14.23). [Uspensky, J. V. (1948)] Cap. V, §2 y §6; [Rey Pastor, J. et al. (1957)] Cap. IV, §3 y §4.

$$y^3 - cy^2 - 4c_1c_2 = 0. \tag{14.23}$$

## Capítulo 14. Hamilton en la Geometría Óptica vs Hamilton en el Icosian Game

---

Con la sustitución  $y = z + \frac{c}{3}$  se elimina el factor cuadrático, y resulta (14.24).

$$z^3 - \frac{c^2}{3} z - 4c_1 c_2 - 2\frac{c^3}{27} = 0. \quad (14.24)$$

Retomando la cuestión de obtener las raíces de la ecuación (14.13); con las constantes  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c$  verificando las condiciones (14.14), (14.15), (14.16) y (14.17); seleccionamos una de las raíces de la ecuación cúbica (14.23) que, de acuerdo al signo del discriminante  $\Delta = 16 c_1 c_2 (c^3 + 27 c_1 c_2)$  de (14.24), adopta la forma que corresponda, de las que se indican a continuación:

- $\Delta > 0$ , i.e. si  $c > -3\sqrt[3]{c_1 c_2} \rightarrow$

$$y_r(c, c_1, c_2) = \sqrt[3]{\frac{c^3}{27} + 2c_1 c_2 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{c_1 c_2 (c^3 + 27c_1 c_2)}} + \sqrt[3]{\frac{c^3}{27} + 2c_1 c_2 - \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{c_1 c_2 (c^3 + 27c_1 c_2)}} + \frac{c}{3} \quad (14.25)$$

- $\Delta = 0$ , i.e. si  $c = -3\sqrt[3]{c_1 c_2}$ ,  $\rightarrow$

$$y_r(c, c_1, c_2) = 2\sqrt[3]{c_1 c_2} + \frac{c}{3} \quad (14.26)$$

- $\Delta < 0^3$ , i.e. si  $c < -3\sqrt[3]{c_1 c_2} \rightarrow$

$$y_r(c, \phi) = \frac{|c|}{3} \left( 2 \cos \left( \frac{\phi}{3} \right) - 1 \right) \quad (14.27)$$

y siendo  $\phi$  determinado por

$$\tan \phi = \frac{2\sqrt{27}\sqrt{-c_1 c_2 (c^3 + 27c_1 c_2)}}{c^3 + 54c_1 c_2} \quad \text{o por} \quad \cos \phi = \frac{c^3 + 54c_1 c_2}{|c|^3}. \quad (14.28)$$

Caso en el que si  $-(c^3 + 54c_1 c_2) > 0$ , el ángulo  $\phi$  pertenece al segundo cuadrante, y mientras que si  $-(c^3 + 54c_1 c_2) < 0$ ,  $\phi$  pertenecerá al primer cuadrante. En la primera situación  $-\infty < c < -3\sqrt[3]{2c_1 c_2}$  y en la segunda circunstancia  $-3\sqrt[3]{2c_1 c_2} < c < -3\sqrt[3]{c_1 c_2}$ .

■

---

<sup>3</sup>El caso  $\Delta < 0$  se conoce como “casus irreducibilis” porque en tal situación se deben obtener una de las tres raíces reales de la ecuación cúbica (14.24), es imposible hacerlo mediante operaciones racionales y radicaciones en un número finito de veces, pues involucra las determinación de raíces cúbicas de números complejos. Es necesario calcularlas trigonómicamente, es decir, recurrir a funciones trascendentes.

**Observación 14.4.7**  $y_r(c, c_1, c_2) \neq c - 1$  puesto que en caso contrario se contradice la condición (14.17).

**Observación 14.4.8** En el caso  $\Delta = 0$ , i.e. si  $c = -3\sqrt[3]{c_1 c_2}$ , las otras dos raíces de la ecuación cúbica (14.24) coinciden en la raíz doble  $z_*(c, c_1, c_2) = -\sqrt[3]{c_1 c_2}$ , esta por lo tanto podría seleccionarse como solución de la ecuación cúbica para ser utilizada en el método propuesto por Ferrari a (14.29).

$$y_r(c, c_1, c_2) = -\sqrt[3]{c_1 c_2} + \frac{c}{3}. \quad (14.29)$$

### 14.4.3. Contribuciones auxiliares

Aquí, proponemos una técnica que permite determinar a (14.22) como la única respuesta del *Problema de Snell*.

Si es  $c = -3\sqrt[3]{c_1 c_2}$  y  $y_r(c, c_1, c_2) = \sqrt[3]{c_1 c_2} > 0$ , estos datos determinan las siguientes cotas

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{1 - c + y_r}}{2} &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt[3]{c_1 c_2}}}{2} > 1 \\ \frac{\sqrt{1 - c + y_r} - 1}{2} &= \frac{\sqrt{1 + 4\sqrt[3]{c_1 c_2}} - 1}{2} > 0. \end{aligned} \quad (14.30)$$

que permiten reescribir (14.22) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{2x_1}{1 + \sqrt{1 - c + y_r}} &= 1 + \sqrt{1 - \frac{2y_r}{(1 + \sqrt{1 - c + y_r})^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - c + y_r}}\right) - \frac{4c_1}{(1 + \sqrt{1 - c + y_r})^2 \sqrt{1 - c + y_r}}} \\ \frac{2x_2}{1 + \sqrt{1 - c + y_r}} &= 1 - \sqrt{1 - \frac{2y_r}{(1 + \sqrt{1 - c + y_r})^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - c + y_r}}\right) - \frac{4c_1}{(1 + \sqrt{1 - c + y_r})^2 \sqrt{1 - c + y_r}}} \\ \frac{2x_3}{\sqrt{1 - c + y_r} - 1} &= -1 + \sqrt{1 + \frac{2y_r}{(\sqrt{1 - c + y_r} - 1)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - c + y_r}} - 1\right) + \frac{4c_1}{\sqrt{1 - c + y_r} (\sqrt{1 - c + y_r} - 1)^2}} \\ \frac{2x_4}{\sqrt{1 - c + y_r} - 1} &= -1 - \sqrt{1 + \frac{2y_r}{(\sqrt{1 - c + y_r} - 1)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - c + y_r}} - 1\right) + \frac{4c_1}{\sqrt{1 - c + y_r} (\sqrt{1 - c + y_r} - 1)^2}}. \end{aligned} \quad (14.31)$$

Aquí existe la relación

$$-3\sqrt[3]{c_1 c_2} = c_2 - c_1 + 1, \quad (14.32)$$

que al sustituir  $c_2 = t^3$  se expresa como

$$t^3 + 3\sqrt[3]{c_1}t + 1 - c_1 = 0. \quad (14.33)$$

- $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ . La Regla de Descartes aplicada a (14.13), junto con el Teorema 14.4.5, establece que hay dos posibilidades para la raíces de la ecuación (14.13): Existen tres raíces positivas y una negativa, o bien una raíz negativa, una positiva y dos complejas conjugadas. Demostramos que  $x_3$  y  $x_4$  son números reales. Si  $x_3$  y  $x_4$  pertenecen a  $\mathbb{R}$  y  $x_1, x_2$  pertenecen a  $\mathbb{C}$ , entonces de (14.31)  $x_4$  es una raíz negativa y  $x_3$  debe ser positiva según la Regla de Descartes. Finalmente, el *Teorema 14.4.5* debe cumplirse, lo que selecciona  $x_3$  como la solución de la *Proposición 14.4.1*. Si las cuatro raíces son reales, de (14.31)  $x_4$  es una raíz negativa garantizada por la Regla de Descartes, y las tres restantes deben ser positivas,  $x_1$  es mayor o igual que uno, luego la selección final debe estar entre  $x_2$  y  $x_3$ .
- $c_1 < 0$ ,  $c_2 < 0$ . También aquí la Regla de Descartes aplicada a (14.13), junto con el Teorema 14.4.5, establece que hay dos posibilidades para las cuatro raíces: Cuatro raíces reales, con dos negativas y dos positivas, o bien que existan dos raíces reales positivas y dos complejas conjugadas. En la primer situación  $x_1 > 1$ ,  $x_4 < 0$ , por lo cual las raíces postuladas serían  $x_2$  o  $x_3$ . Confirmamos que la nominación corresponde a  $x_2$ . Para  $x_3$  y  $x_4$  en  $\mathbb{C}$ , la Regla de Descartes establece que  $x_1 > 1$  y  $x_2$  positiva, en consecuencia esta es la que soluciona el problema. Es indudable que suponer a  $x_1$  y  $x_2$  en  $\mathbb{C}$  con  $x_3$  y  $x_4$  en  $\mathbb{R}$  es una situación que contradice lo establecido por la Regla de Descartes.

**Ejemplo 14.4.9** *Dados  $c_1 = \frac{5-3\sqrt{3}}{4}$ ,  $c_2 = \frac{1}{2(5-3\sqrt{3})}$ , entonces resultan  $c = -\frac{3}{2}$  e  $y_r = \frac{1}{2}$ . Situación de discriminante nulo  $\Delta = 0$ , en la que las cuatro raíces de (14.13) son reales. De manera concreta  $x_3 = x_4 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ , raíz doble real negativa. Mientras que  $x_1$  y  $x_2$  son reales positivas, una de ellas mayor que la unidad,  $x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{15-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}$  y la otra  $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{15-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} \approx 0,314521$  la que realiza la braquistócrona del caso.*

El “casus irreducibilis  $c < -3\sqrt[3]{c_1 c_2}$ ”,  $c = \sqrt[3]{2}(-3\sqrt[3]{c_1 c_2})$ . La resolvente puede escogerse como  $y_r(c, c_1, c_2) = -\sqrt[3]{2c_1 c_2}$ . Bajo la restricción

$$-3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{c_1 c_2} = c_2 - c_1 + 1. \quad (14.34)$$

- $c_1 > 0, c_2 > 0 \rightarrow c_1 > 1$ .  $x_3$  y  $x_4 \notin \mathbb{C}$ . Si  $x_1$  y  $x_2 \in \mathbb{C}$ , la solución es  $x_3$ . Si  $x_1$  y  $x_2 \in \mathbb{R}$ , entonces la solución debe encontrarse entre  $x_2$  y  $x_3$ .
- $c_1 < 0, c_2 < 0$   $x_1$  y  $x_2 \notin \mathbb{C}$ . Si  $x_1$  y  $x_2 \in \mathbb{R}$ , entonces  $x_1 > 1$  y esto obliga a que  $x_2$  sea positiva. Si  $x_4 < 0, x_1 > 1$  permanece la incertidumbre respecto a los signos de  $x_2$  y  $x_3$ . Se demuestra que en este caso  $x_2 < 0$ , y que  $x_3$  resulta ser la solución del problema.

**Proposición 14.4.10** En el “casus irreducibilis”,  $\Delta < 0$ , es decir si  $c$  pertenece al intervalo  $(-\infty, -3\sqrt[3]{c_1 c_2})$ , resulta ser  $y_r(c, \phi) > 0$ .

*Demostración.* Directa desde las ecuaciones (14.27) y (14.28) ya que  $\cos\left(\frac{\phi}{3}\right) > \frac{1}{2}$ . ■

De  $y_r(c, \phi) > 0$ , y  $c$  tal que  $c < -3\sqrt[3]{c_1 c_2}$  el valor  $\sqrt{y_r + 1 - c}$  vive en  $\mathbb{R}$ , en consecuencia resulta

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{1 - c + y_r}}{2} &> 1 \\ \frac{\sqrt{1 - c + y_r} - 1}{2} &> 0 \end{aligned} \quad (14.35)$$

entonces las ecuaciones (14.22) pueden ser reescritas como (14.31), bajo (14.17) la predicción es análoga a la del caso previo para  $c = -3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{c_1 c_2}$ .

**Proposición 14.4.11** En el “casus irreducibilis”,  $c$  en  $(-\infty, -3\sqrt[3]{c_1 c_2})$ :

Si  $c_1 > 0, c_2 > 0$ . La Regla de Descartes, junto con el Teorema 14.4.5, aplicados a la ecuación (14.13) conduce a dos situaciones: existen tres raíces positivas y una negativa o bien, una raíz positiva, una negativa y dos complejas conjugadas. De (14.31) es claro que

$x_3$  y  $x_4$  no pertenecen a  $\mathbb{C}$ , entonces  $x_3$  y  $x_4$  pertenecen a  $\mathbb{R}$ , e indudablemente  $x_4 < 0$  y  $x_3$  debe ser positiva. Si suponemos que  $x_1$  y  $x_2$  pertenecen a  $\mathbb{C}$ , la solución de la Proposición 14.4.4 resulta ser  $x_3$ . Alternativamente, si se supone que  $x_1$  y  $x_2$  pertenece a  $\mathbb{R}$ , de (14.31), es claro que  $x_4 < 0$ ,  $x_1 > 1$ , por lo que la solución debe ser  $x_2$  o bien  $x_3$ .

Si  $c_1 < 0$ ,  $c_2 < 0$ . También en este caso la Regla de Descartes y el Teorema 14.4.5 señalan dos alternativas para la ecuación (14.13): existen dos raíces positivas y dos complejas conjugadas, o bien cuatro raíces reales, dos positivas y dos negativas. Una vez más, si se tiene en cuenta que  $y_r$  y  $c_1$  son negativos, de (14.31) obtenemos que  $x_1$  y  $x_2$  no están en  $\mathbb{C}$ , entonces son reales, y además  $x_1 > 1$ , entonces necesariamente  $x_2$  es positiva y por lo tanto la solución buscada. En la segunda alternativa,  $x_4 < 0$ ,  $x_1 > 1$  pero hay incertidumbre acerca de los signos de  $x_2$  y  $x_3$ . Probamos que  $x_2 < 0$ , entonces  $x_3$  resulta ser la solución del problema.

■

#### 14.4.4. Caracterización de $p(x, c, c_1)$

La caracterización de los polinomios de cuarto grado en (14.36)

$$p(x, c_1, c_2, c) = x^4 - 2x^3 + cx^2 + 2c_1x - c_1 \quad (14.36)$$

$$p'''(x) = 24\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad (14.37)$$

$p'''(x) = 0$  establece que en  $x = \frac{1}{2}$ ,  $p'(x, c)$  cambia de cóncava a convexa.

$$p''(x, c) = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (2c - 3) \quad (14.38)$$

$i_1)$  Si  $c \geq \frac{3}{2} \Rightarrow p(x, c_1, c_2, c)$  es convexa.

$i_2)$  Si  $c < \frac{3}{2} \Rightarrow p(x, c_1, c_2, c)$  cambia su concavidad en:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{6-4c}\right); \alpha_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{6-4c}\right), \text{ por lo tanto}$$

$$p''(x, c) = 12 \left[ x - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{6 - 4c} \right) \right] \left[ x - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{6 - 4c} \right) \right].$$

Luego,  $p(x, c_1, c_2, c)$  es cóncava en  $(\alpha_1, \alpha_2)$  y convexa en  $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, +\infty)$ , con las siguientes peculiaridades:

$$i_{21}) \text{ Si } c < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 < 0 \\ \alpha_2 > 1 \end{cases} \Rightarrow p(x, c_1, c_2, c) \text{ es cóncava en } (0, 1).$$

$$i_{22}) \text{ Si } c = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow p(x, c_1, c_2, c) \text{ es cóncava en } (0, 1).$$

$$i_{23}) \text{ Si } 0 < c < \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 > 0 \\ \alpha_1 < \alpha_2 \\ \alpha_2 < 1 \end{cases} \Rightarrow p(x, c_1, c_2, c) \text{ cambia de convexa en } (0, \alpha_1) \text{ es cóncava en } (\alpha_1, \alpha_2) \text{ y de nuevo a convexa en } (\alpha_2, 1).$$

La ecuación cuadrática  $p''(x, c) = 0$  distingue en  $\alpha_1(c)$  y  $\alpha_2(c)$ , el máximo relativo y el mínimo relativo de  $p'(x, c, c_1)$ , respectivamente.

Ahora, analizamos toda la información en  $p'(x, c, c_1)$ :

$$p'(x, c, c_1) = 4x^3 - 6x^2 + 2cx + 2c_1 \quad (14.39)$$

$$\begin{aligned} p'(0, c, c_1) &= 2c_1 \\ p'(\alpha_1(c), c, c_1) &= (c_1 + c_2) + \left(1 - \frac{2c}{3}\right)^{3/2} \\ p'(\frac{1}{2}, c, c_1) &= c_1 + c_2 \\ p'(\alpha_2(c), c, c_1) &= (c_1 + c_2) - \left(1 - \frac{2c}{3}\right)^{3/2} \\ p'(1, c, c_1) &= 2c_2 \end{aligned} \quad (14.40)$$

Finalmente, consideramos ciertos detalles específicos de  $p(x, c, c_1, c_2)$ :

$$\begin{aligned}
 p(x, c, c_1) &= x^4 - 2x^3 + cx^2 + 2c_1x - c_1 \\
 p(0, c, c_1) &= -c_1 \\
 p\left(\frac{1}{2}, c, c_1\right) &= \frac{1}{4}\left(c - \frac{3}{4}\right) \\
 p(1, c, c_1) &= c_2 \\
 p(\alpha_1(c), c, c_1) &= -\frac{\sqrt{6-4c}}{2\sqrt{6}}(c_1 + c_2) - \frac{5}{36}\left(c - \frac{3}{5}(4 - \sqrt{6})\right)\left(c - \frac{3}{5}(4 + \sqrt{6})\right) \\
 p(\alpha_2(c), c, c_1) &= \frac{\sqrt{6-4c}}{2\sqrt{6}}(c_1 + c_2) - \frac{5}{36}\left(c - \frac{3}{5}(4 + \sqrt{6})\right)\left(c - \frac{3}{5}(4 - \sqrt{6})\right)
 \end{aligned} \tag{14.41}$$

**Proposición 14.4.12** *La trayectorias luminosas -braquistócronas- de la Ley de Snell se obtienen en la abscisa  $x_* = \frac{1}{2}$  para todas las constantes admisibles  $c_1 = \frac{v_1^2 a^2}{v_2^2 - v_1^2}$  y  $c_2 = \frac{v_1^2 b^2}{v_2^2 - v_1^2}$  bajo la restricción  $-\frac{1}{4} = c_2 - c_1$ .*

■

**Proposición 14.4.13** *El Teorema 14.4.5, los ítems  $i_1)$  e  $i_{23})$  indicados en la pág. 519, y la Regla de Descartes determinan que  $p(x, 0) < c < +\infty, c_1 > 0)$  tiene una única raíz positiva, una única raíz negativa y un par imaginarias conjugadas. Mientras que  $p(x, 0) < c < +\infty, c_1 < 0)$  tiene dos raíces positivas y un par de imaginarias conjugadas.*

■

### 14.4.5. Resolución del caso palíndromo

**Proposición 14.4.14** *Si  $c_1 = -1$  la ecuación (14.13) se reduce a la siguiente ecuación de cuarto grado, i.e. el palíndromo (14.42).*

$$x^4 - 2x^3 + cx^2 - 2x + 1 = 0, \quad c < 2. \tag{14.42}$$

*Cuyas cuatro raíces son, [Christianson, B. (1991)]:*

$$x_{1,3} = \frac{1 + \sqrt{3-c}}{2} \pm \frac{\sqrt{(1 + \sqrt{3-c})^2 - 4}}{2} \tag{14.43}$$

$$x_{2,4} = \frac{1 - \sqrt{3-c}}{2} \pm \frac{\sqrt{(1 - \sqrt{3-c})^2 - 4}}{2}.$$



La braquistócrona del Problema de Snell es realizada por  $x_3$ .

*Demostración.*

Las siguientes reescrituras de las cuatro raíces:

$$x_{1,3} = \frac{1 + \sqrt{3-c}}{2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{(1 + \sqrt{3-c})^2}} \right\}$$

$$x_{2,4} = \frac{1 - \sqrt{3-c}}{2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{(1 - \sqrt{3-c})^2}} \right\},$$

las identidades  $\frac{1 + \sqrt{3-c}}{2} > 1$ ,  $\frac{1 - \sqrt{3-c}}{2} < 0$  y la Regla de Descartes permite la selección de  $x_3$ , como aquella raíz que construye la trayectoria luminosa. ■

#### 14.4.6. Solución en una interfase de ancho arbitrario

La *Ley de Refracción* en una interfase de ancho arbitrario “ $\alpha$ ” no conlleva cambios substanciales en su formulación, como se explicita a continuación, siguiendo el procedimiento establecido en la Sección (14.1) :

$$T(x, \alpha) = \frac{\sqrt{\tilde{a}^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(\alpha - x)^2 + \tilde{b}^2}}{v_2} \quad (14.44)$$

$$T'(x, \alpha) = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + \tilde{a}^2}} - \frac{\alpha - x}{v_2 \sqrt{(\alpha - x)^2 + \tilde{b}^2}} \quad (14.45)$$

El punto estacionario debe obtenerse de la resolución de la siguiente ecuación polinomial de cuarto grado :

$$x^4 - 2\alpha x^3 + \left( \alpha^2 + \frac{v_2^2 \tilde{b}^2 - v_1^2 \tilde{a}^2}{v_2^2 - v_1^2} \right) x^2 + 2\alpha \frac{\tilde{a}^2}{v_2^2 - v_1^2} x - \alpha^2 \frac{\tilde{a}^2}{v_2^2 - v_1^2} = 0 \quad (14.46)$$

Si  $\bar{x}$  denota la solución de (14.12), i.e., la refracción en una interfase de ancho unitario, proponiendo  $\alpha \bar{x}$  como la solución del Problema general de Snell (14.44), ya que la geometría del problema sugiere que una contracción o expansión de la interfase se corresponderá con valores proporcionales en  $a$  y  $b$ .

Entonces, al reemplazar  $\alpha \bar{x}$  en (14.46) obtenemos:

$$\alpha \bar{x}^4 - 2\alpha^4 \bar{x}^3 + \alpha^4 \bar{x}^2 + \alpha^2 \left( \frac{v_2^2 \tilde{b}^2 - v_1^2 \tilde{a}^2}{v_2^2 - v_1^2} \right) \bar{x}^2 + 2 \frac{\tilde{a}^2 \alpha^2}{v_2^2 - v_1^2} \bar{x} - \frac{\alpha^2 \tilde{a}^2}{v_2^2 - v_1^2}. \quad (14.47)$$

Lo que requiere la selección de

$$\begin{cases} \tilde{a} =: \alpha a \\ \tilde{b} =: \alpha b \end{cases} \quad (14.48)$$

con la finalidad de hacer nula (14.47) mientras  $\bar{x}$  satisface (14.12)

$$\alpha^4 \left( \bar{x}^4 - 2\bar{x}^3 + \bar{x}^2 \left( 1 + \frac{v_2^2 b^2 - v_1^2 a^2}{v_2^2 - v_1^2} \right) + 2 \frac{a^2}{v_2^2 - v_1^2} \bar{x} - \frac{a^2}{v_2^2 - v_1^2} \right) = \quad (14.49)$$

$$\alpha^4 (\bar{x}^4 - 2\bar{x}^3 + \bar{x}^2 (c_2 - c_1 + 1) + 2 c_1 \bar{x} - c_1) = \alpha^4 0 = 0.$$

Se ha probado, por lo tanto, la siguiente afirmación :

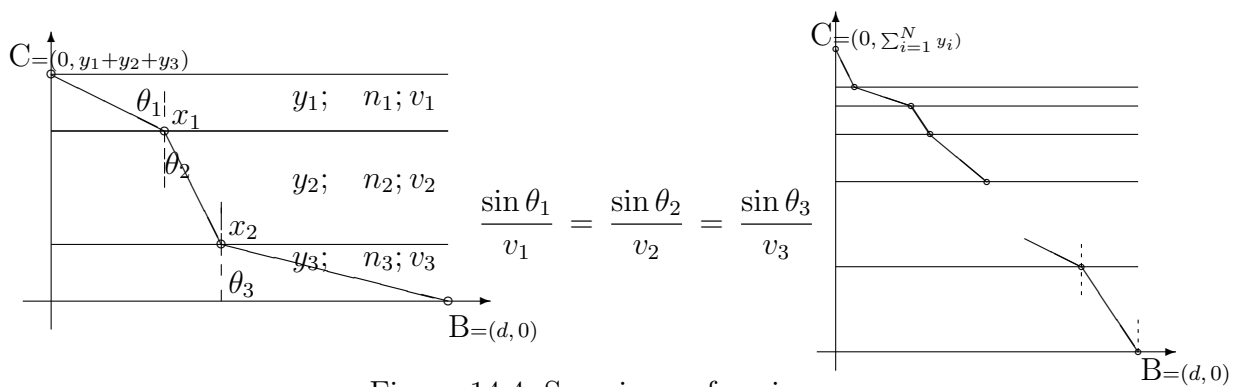
**Teorema 14.4.15** *Dadas constantes positivas  $\alpha$ ,  $a$  y  $\tilde{a}$  y constantes negativas  $b$  y  $\tilde{b}$ , la braquistócrona entre los puntos  $P_1(0, \tilde{a})$  y  $P_2(\alpha, \tilde{b})$  con velocidades  $v_1$  en el medio que contiene a  $P_1$  y  $v_2$  en el medio que contiene a  $P_2$  se determina a partir de la braquistócrona encontrada en el mismo contexto pero con  $P_1(0, a)$ ,  $P_2(\alpha, b)$ . De manera precisa, si el tiempo mínimo en la interfase unitaria (14.12) es realizado en  $\bar{x}$ , entonces en  $\alpha \bar{x}$  el mínimo absoluto es alcanzado en cualquier interfase de ancho arbitrario con  $P_1(0, \alpha a)$  y  $P_2(\alpha, \alpha b)$  como puntos extremos.*

■

#### 14.4.7. Refracciones sucesivas: Braquistócrona.

Descartes, Fermat y Snell, entre otros, sustentados en experimentos ópticos de la época asumían que cuando la luz atraviesa capas yuxtapuestas de medios no homogéneos, cuanto más denso se vuelve el medio menor es la velocidad con la que la luz viaja. En los casos en que el rayo luminoso atraviesa diferentes medios contiguos e.g., aire, agua y aceite; Fermat postuló que la luz atravesaba, desde un punto en un primer medio hasta

un punto en otro medio no homogéneo con el de partida, siguiendo el camino que insume tiempo mínimo, [Wolf, K. B., and Krötzsch, G. (1995)]. Es decir, la trayectoria de este tipo de fenómenos ópticos es la *braquistócrona*. Dado el carácter teleológico del problema, el rayo luminoso parte de  $C$  y llega a  $B$ , luego de atravesar un número finito de  $N$  medios de distintos índices de refracción, (Ver Figura 14.4), los cálculos de la metodología §14.2 confirman la existencia de un punto crítico estacionario que realiza el mínimo de la función de propagación de la luz, por ejemplo en [Niel, B. I. (2002)], pág. 134-135.



$$T(x_1, \dots, x_{N-1}) = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{v_1} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\sqrt{y_i^2 + (x_i - x_{i-1})^2}}{v_i} + \frac{\sqrt{(d - x_{N-1})^2 + y_N^2}}{v_N} \quad (14.50)$$

$$\frac{\partial T(x_1, \dots, x_{N-1})}{\partial x_i} = 0; \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (14.51)$$

$$T_{x_1} = \frac{\partial T(x_1, \dots, x_{N-1})}{\partial x_1} = \frac{x_1}{v_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}} - \frac{(x_2 - x_1)}{v_2 \sqrt{y_2^2 + (x_2 - x_1)^2}}$$

$$T_{x_i} = \frac{\partial T(x_1, \dots, x_{N-1})}{\partial x_i} = \frac{(x_i - x_{i-1})}{v_i \sqrt{y_i^2 + (x_i - x_{i-1})^2}} - \frac{(x_{i+1} - x_i)}{v_{i+1} \sqrt{y_{i+1}^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}}; \quad 2 \leq i \leq N-2$$

$$T_{x_{N-1}} = \frac{\partial T(x_1, \dots, x_{N-1})}{\partial x_{N-1}} = \frac{(x_{N-1} - x_{N-2})}{v_{N-1} \sqrt{(x_{N-1} - x_{N-2})^2 + y_{N-1}^2}} - \frac{(d - x_{N-1})}{v_N \sqrt{y_N^2 + (d - x_{N-1})^2}}$$

La función de propagación (14.50) es indefinidamente diferenciable ya que en ninguna de sus derivadas parciales sucesivas se anulan los denominadores dado que cada  $y_i > 0$ , el espesor de cada medio es de longitud no nula.

La nulidad del gradiente de la función de propagación (14.50) requiere resolver las siguientes identidades:

$$\frac{x_1}{v_1 \sqrt{y_1^2 + x_1^2}} = \dots = \frac{(x_i - x_{i-1})}{v_i \sqrt{y_i^2 + (x_i - x_{i-1})^2}} = \dots = \frac{(d - x_{N-1})}{v_N \sqrt{y_N^2 + (d - x_{N-1})^2}}; \quad 2 \leq i \leq N-1 \quad (14.52)$$

Sean  $x_{c_i}^e$  las abscisas críticas estacionarias que resuelven el sistema de ecuaciones (14.51) equivalente a resolver las identidades en (14.52), dado que no existen abscisas críticas singulares en  $\underbrace{(0, d) \times \dots \times (0, d)}_{N-1}$  debido a que los espesores de los distintos medios son supuestos no nulos, i.e.  $|y_i| > 0$ . El signo positivo de cada una de las expresiones en los denominadores de (14.52) junto al hecho de que  $x_{c_1}^e$  debe ser positiva, debido a que el rayo geométrico debe salir de  $C$  para llegar hasta  $B$  atravesando las  $N-1$  interfases distintas, imponen que las abscisas críticas estacionarias verifiquen  $0 < x_{c_{i-1}}^e < x_{c_i}^e < d$ ,  $1 \leq i \leq N-1$ .

Utilizaremos una notación conveniente para reducir las expresiones de los determinantes de las matrices hessianas tridiagonales, [Golub, G. H., Van Loan, C. F. (1996)] y simétricas de la función de propagación (14.50), que contienen las derivadas parciales de segundo grado, con diagonal principal positiva y las diagonales superior e inferior a la principal conformada por términos negativos.

Sean  $A_i$  los términos positivos definidos a continuación

$$A_i = \frac{y_i^2}{v_i [y_i^2 + (x_i - x_{i-1})^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad x_0 = 0, \quad x_N = d.$$

Las evaluaciones de los determinantes del hessiano de  $T(x_1, \dots, x_{N-1})$ , (14.50), de distintos órdenes resultan tener las expresiones (14.53).

$$|H_{(M-1) \times (M-1)}(x_1, \dots, x_{N-1})| = \sum_{j=1}^M \left( \prod_{i=1, i \neq j}^M A_i \right), \quad 3 \leq M \leq N-1. \quad (14.53)$$

$$T_{x_1 x_1} = \frac{y_1^2}{v_1 (y_1^2 + x_1^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y_2^2}{v_2 (y_2^2 + (x_2 - x_1)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (14.54)$$

A partir de (14.54), y como cada uno de los determinantes menores principales del hessiano (14.53) son positivos en  $\underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{N-1}$ . Por lo tanto, la función de propagación  $T(x_1, \dots, x_{N-1})$ , (14.50) es una función convexa pues posee su diferencial de segundo orden estrictamente positivo, i.e.  $d^2(T(x_1, \dots, x_{N-1})) > 0$  en cualquier región, en particular en el conjunto abierto  $\underbrace{(0, d) \times \dots \times (0, d)}_{N-1}$ , y las identidades en (14.52) determinan un mínimo global, §3.5.2, pág. 137 [Miller, R. E. (2000)]. En otras palabras, la braquistócrona de las refracciones sucesivas es única y los puntos en donde el rayo luminoso atraviesa cada interfase de espesor  $|y_i|$  queda determinado por la abscisa  $x_{c_i}^e$ . En este fenómeno de la refracción de la luz en un medio no homogéneo, la naturaleza es expedita, y su trayectoria resulta ser la *braquistócrona*. Otro proceso natural expedito es el plegamiento de los ARN y ADN [Fernández, A., and Niel, B.(1997), Fernández, A., Niel, B., and Burastero, T.(1998)].

## 14.5. Naturaleza no necesariamente expedita

En [Hamilton, W. R. (1833)], Hamilton declaraba: “... It was known to Euclid and to Ptolemy, that the communication between visible objects and a beholding eye is usually effected in straight lines; and that when the line of communication is bent, by reflexion, at any point of a plane or of a spheric mirror, the angle of bending at this point, between the two straight parts of the bent line, is bisected by the normal to the mirror. It was known also that this law extends to successive reflections...”

Asumida la creación idealizada del espejo cuasi-esférico en [Niel, B. I. (2002)] y bajo los supuestos de [Hamilton, W. R. (1833)] y con el propósito de confirmar el comportamiento extravagante de la naturaleza, estudiamos la ley de la reflexión sobre tres superficies espejadas esféricas y/o cuasi-esféricas diferenciadas, [Lemons, D. S. (1997), Niel, B. I. (2004)].

### 14.5.1. Primer ejemplo en el espejo circular

Aquí, trataremos, los rayos luminosos sobre el conjunto de los rayos geométricos que comienzan en  $C$  en el espejo circular de radio  $R$ , rebotan una vez sobre la superficie espejada, en cualquier punto de la concavidad circular espejada, e.g. en  $D$  -con excepción de los extremos  $C$  y  $B$ - y finalizan en el punto  $B$ . En particular, el punto inicial  $C$  se ha localizado en  $(-R, 0)$  -sin pérdida de generalidad- y el punto final  $B$  es de ubicación arbitraria en la superficie circular a excepción de ser coincidente con  $C$ .

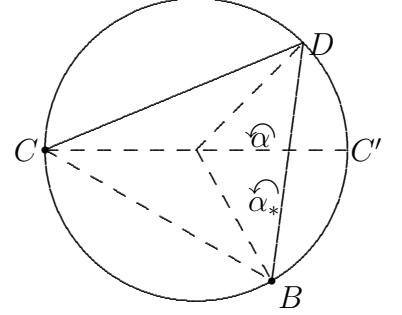


Figura 14.5: Primer ejemplo en el espejo cuasi-esférico,  $\pi < \alpha_* < 2\pi$ .

En este modelo variacional se ha tomado al ángulo  $\alpha$ , que se mide en sentido antihorario, a partir de la antípoda de  $C$ , como parámetro de la función de propagación de los rayos geométricos (Ver Figura 14.5). El tiempo consumido, o la longitud de recorrido,  $T(\alpha)$ , de estos rayos geométricos está constituido por dos segmentos lineales  $t_1(\alpha)$  y  $t_2(\alpha)$ , es decir:

$$t_1(\alpha)^2 = [R + R \cos(\alpha)]^2 + R^2 \sin^2(\alpha) = 2R^2(1 + \cos(\alpha))$$

$$t_2(\alpha)^2 = [R(\cos(\alpha) - \cos(\alpha_*))]^2 + [R(\sin(\alpha) - \sin(\alpha_*))]^2 = 2R^2(1 - \cos(\alpha_* - \alpha)),$$

con el ángulo  $\alpha_*$  medido en sentido antihorario de igual manera a como se mide el parámetro de variaciones y en particular, para que  $B$  viva en el semicírculo inferior, supondremos su rango de variación en el intervalo  $\pi < \alpha_* < 2\pi$ , (Ver Figura 14.5). En consecuencia, la función de propagación de los rayos  $T(\alpha)$ , tiene la siguiente expresión:

$$T(\alpha) = t_1(\alpha) + t_2(\alpha) = \sqrt{2}R[\sqrt{1 + \cos(\alpha)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha - \alpha_*)}] \quad (14.55)$$

y su función derivada primera  $T'(\alpha)$  está dada por:

$$T'(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}R \left[ \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha)}} - \frac{\sin(\alpha - \alpha_*)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha - \alpha_*)}} \right], \quad \alpha \neq \pi \text{ y } \alpha \neq \alpha_* \quad (14.56)$$

## Capítulo 14. Hamilton en la Geometría Óptica vs Hamilton en el Icosian Game

---

La derivada de segundo orden de la función de propagación de los rayos geométricos (14.55) tiene la siguiente expresión:

$$T''(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{4} R \left\{ \frac{1 + \cos(\alpha)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha)}} + \left[ \frac{1 - \cos(\alpha - \alpha_*)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha - \alpha_*)}} \right] \right\}. \quad (14.57)$$

Claramente  $T''(\alpha) < 0$  excepto en las abscisas singulares, por lo tanto la función (14.55),  $T(\alpha)$  es cóncava en los intervalos  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, \alpha_*)$  y  $(\alpha_*, 2\pi)$ .

Descartando, en principio, los múltiplos periódicos, los puntos críticos del problema son:

1. Puntos críticos frontera del problema  $\{ \alpha_1^F = 0, \alpha_2^F = 2\pi \}$
2. Puntos críticos estacionarios del problema  $\left\{ \alpha_1^e = \frac{\alpha_* - \pi}{2}, \alpha_2^e = \frac{\alpha_* + \pi}{2} \right\}$
3. Puntos críticos singulares  $\{ \alpha_1^s = \pi, \alpha_2^s = \alpha_* \}$

En consecuencia, el conjunto de abscisas críticas del problema son:

$$\left\{ \alpha_I = 0, \alpha_1 = \frac{\alpha_* - \pi}{2}, \alpha_2 = \pi, \alpha_3 = \frac{\alpha_* + \pi}{2}, \alpha_4 = \alpha_*, \alpha_F = 2\pi \right\}.$$

A continuación delineamos las trayectorias de los rayos geométricos o luminosos desplegadas por cada uno de las abscisas críticas del parámetro variacional  $\alpha$ , a saber:

1.  $\alpha_I = 0$ . Despliega la trayectoria de dos tramos lineales, que comienza en  $C = (-R, 0)$  llega a  $C' = (R, 0)$  y de aquí se dirige a  $B = (R \cos \alpha_*, R \sin \alpha_*)$ .
2.  $\alpha_1 = \frac{\alpha_* - \pi}{2}$ . Es uno de los dos rayos luminosos que rebota en el círculo cumpliendo la *Ley de Reflexión* respecto de la normal a la circunferencia espejada en el punto de choque.
3.  $\alpha_2 = \pi$ . Este rayo geométrico, constituido por un solo segmento lineal, rebota en  $C = (-R, 0)$  y se dirige a  $B = (R \cos \alpha_*, R \sin \alpha_*)$ .



4.  $\alpha_3 = \frac{\alpha_* + \pi}{2}$ . Es el otro rayo luminoso que verifica la *Ley de Reflexión* en las antípodas del rebote de  $\alpha_1 = \frac{\alpha_* - \pi}{2}$ .
5.  $\alpha_4 = \alpha_*$ . Esta trayectoria, parte directamente desde  $C = (-R, 0)$  hacia  $B = (R \cos \alpha_*, R \sin \alpha_*)$ , no choca en ningún otro lugar del círculo, por lo tanto también está constituida por un solo segmento lineal.
6.  $\alpha_F = 2\pi$ . Despliega el mismo recorrido que  $\alpha_I = 0$ .

El estudio del signo de  $T'(\alpha)$  en cada vecindad de las abscisas críticas permite caracterizar si son óptimos locales o relativos.

En efecto,  $T'(\frac{\alpha_* - \pi}{2}) = 0$  y  $\begin{cases} \alpha < \frac{\alpha_* - \pi}{2} \rightarrow T'(\alpha) > 0 \\ \alpha > \frac{\alpha_* - \pi}{2} \rightarrow T'(\alpha) < 0 \end{cases}$ , por lo tanto en  $\frac{\alpha_* - \pi}{2}$ ,  $T(\alpha)$  tiene un máximo relativo estricto. En  $\pi$  el signo de  $T'(\alpha)$  cambia de negativo a positivo lo que resulta en un mínimo relativo estricto de  $T(\alpha)$ . Además,  $\begin{cases} \alpha < \frac{\alpha_* + \pi}{2} \rightarrow T'(\alpha) > 0 \\ \alpha > \frac{\alpha_* + \pi}{2} \rightarrow T'(\alpha) < 0 \end{cases}$ , en consecuencia en  $\frac{\alpha_* + \pi}{2}$ ,  $T(\alpha)$  tiene un máximo relativo estricto. Finalmente de  $\alpha < \alpha_*$  a  $\alpha > \alpha_*$  el signo de  $T'(\alpha)$  cambia de negativo a positivo, entonces  $T(\alpha)$  tiene un mínimo estricto en  $\alpha_*$ .

**Observación 14.5.1** Si  $\pi < \alpha_* < 2\pi$  entonces  $T(\alpha)$  posee dos máximos estacionarios estrictos locales de valores respectivos  $T(\frac{\alpha_* - \pi}{2})$  y  $T(\frac{\alpha_* + \pi}{2})$ . Además posee, en principio, dos mínimos estrictos locales coincidentes en su valor en ambas abscisas críticas singulares  $T(\alpha_*) = T(\pi)$ . Por último, en las abscisas críticas fronteras el valor alcanzado es también coincidente  $T(0) = T(2\pi)$ .

**Nota 14.5.2** La expresión (14.57), si  $\pi < \alpha_* < 2\pi$ , es indiscutible en cuanto a confirmar que en las abscisas críticas estacionarias existen máximos locales o relativos, ambos rayos luminosos del problema, es decir que verifican la *Ley de Reflexión*. En las abscisas críticas singulares una de las dos expresiones de las dos componentes de la longitud total se anulan, mientras que las abscisas frontera del problema, claramente no definen un rayo luminoso.

## Capítulo 14. Hamilton en la Geometría Óptica vs Hamilton en el Icosian Game

---

Por tratarse, (14.55) de una función continua y aceptando la variación del parámetro  $\alpha$  en el compacto  $[0, 2\pi]$ , la validez de las hipótesis del Teorema de Bolzano-Weierstrass nos asegura la existencia del mínimo y del máximo absoluto. El estudio de la concavidad deducido de (14.57), si  $\pi < \alpha_* < 2\pi$ , permite confirmar que el mínimo absoluto de  $T(\alpha)$  es alcanzado en ambas abscisas singulares,  $T(\alpha_*) = T(\pi)$ , y el máximo absoluto en el rayo luminoso determinado por  $\frac{\alpha_* - \pi}{2}$  con valor  $T(\frac{\alpha_* - \pi}{2})$

El único parámetro  $\alpha$  de la función de propagación  $T(\alpha)$ , (14.55), si  $\pi < \alpha_* < 2\pi$ , exhibe dos rayos luminosos consistentes con la *Ley de Reflexión*, en estas trayectorias  $T(\alpha)$ , alcanza el máximo relativo que es el absoluto  $T(\frac{\alpha_* - \pi}{2})$ , es decir la naturaleza luminosa es extravagante. Mientras que el otro rayo luminoso es un máximo local de  $T(\alpha)$  (14.55) que no realiza el mínimo absoluto de la función de propagación. En otras palabras, la naturaleza se muestra en este problema extravagante y tibia dentro de los caminos posibles. Por otra parte, si  $\pi < \alpha_* < 2\pi$ , en los puntos de abscisas singulares las trayectorias no conforman rayos admisibles, bajo el supuesto del concepto ideal de rayo luminoso.

En consecuencia, se obtiene la siguiente Proposición 14.5.3.

**Proposición 14.5.3** *El primer caso de la geometría óptica en este espejo cuasi-esférico tiene dos trayectorias luminosas,  $(C \rightarrow \acute{D} = (\cos(\frac{\alpha_* + \pi}{2}), \sin(\frac{\alpha_* + \pi}{2})) \rightarrow B)_{\alpha = \frac{\pi + \alpha_*}{2}}$ , y el rayo de recorrido más largo  $(C \rightarrow D = (\cos(\frac{\alpha_* - \pi}{2}), \sin(\frac{\alpha_* - \pi}{2})) \rightarrow B)_{\alpha = \frac{\alpha_* - \pi}{2}}$ . ■*

### 14.5.2. Segundo ejemplo en el espejo cuasi-esférico

Estudiamos los rayos geométricos que comienzan en el centro  $C(0,0)$  de un espejo cuasi-esférico de radio  $R$ , que se reflejan una vez, y finalizan en el punto  $B(R/n,0)$   $n > 1$ , del eje y a la derecha del centro. Se define la función de propagación en términos del ángulo central  $\alpha$  y de la distancia  $\overline{CB}$  entre el centro del espejo  $C$  y el punto final  $B$ .

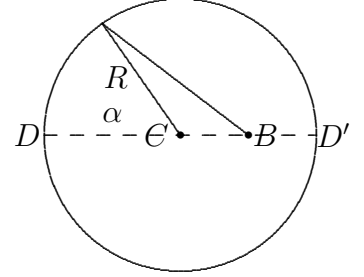


Figura 14.6: Segundo caso en el espejo cuasi-esférico.

La función de propagación de los rayos geométricos del caso es (14.58),

$$T(\alpha) = R + \sqrt{R^2 + \overline{CB}^2 + 2R\overline{CB} \cos(\alpha)} \quad (14.58)$$

y al igualar a cero la primera derivada de  $T(\alpha)$

$$T'(\alpha) = \frac{-R\overline{CB} \sin \alpha}{\sqrt{R^2 + \overline{CB}^2 + 2R\overline{CB} \cos \alpha}} = 0 \quad (14.59)$$

se determinan los ángulos estacionarios  $0$  y  $\pi$ . Como  $T'(\alpha) = 0$  si y solo si  $\alpha = 0$  y  $\alpha = \pi$ , ya que hemos descartado los múltiplos periódicos. En este caso la derivada primera (14.59) no posee puntos cuspidales, puesto que  $0 < \overline{CB} < R$ . El test de la derivada segunda caracteriza los parámetros estacionarios:

$$T''(\alpha) = -\frac{R\overline{CB} \cos(\alpha)(R^2 + \overline{CB}^2 + 2\overline{CB}R \cos \alpha) + R^2\overline{CB}^2 \sin^2 \alpha}{(R^2 + \overline{CB}^2 + 2\overline{CB}R \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

$$T''(\alpha = 0) = -\frac{R\overline{CB}}{(R^2 + \overline{CB}^2 + 2\overline{CB}R)} < 0$$

$$T''(\alpha = \pi) = -T''(\alpha = 0) > 0.$$

Finalmente, de las técnicas usuales del cálculo sigue la validez de la siguiente Proposición 14.5.4.

**Proposición 14.5.4** *El segundo ejemplo en el espejo cuasi-esférico, (Ver Figura 14.6), tiene dos rayos luminosos admisibles consistentes con la Ley de Reflexión, ( $C \rightarrow D \rightarrow$*

## Capítulo 14. Hamilton en la Geometría Óptica vs Hamilton en el Icosian Game

---

$C \rightarrow B)_{\alpha=0}$  el máximo de  $T(x) = R + R + \overline{CB} = 2R + \overline{CB}$ , y la braquistócrona  $(C \rightarrow B \rightarrow \acute{D} \rightarrow B)_{\alpha=\pi}$ , el mínimo de  $T(x) = \overline{CB} + (R - \overline{CB}) + (R - \overline{CB}) = 2R - \overline{CB}$ .

■

**Observación 14.5.5** *Los infinitos rayos luminosos que parten del centro del espejo cuasi-esférico se reflejan una vez -rebotando en cualquier punto del círculo- y que retornan al centro tienen la misma longitud o el mismo tiempo de recorrido, caso en el que  $C$  y  $B$  son coincidentes y la función de propagación (14.58) se reduce a  $T(\alpha) = 2R$ . Todos los caminos geoméricamente admisibles son rayos.*

En otros términos, todos los caminos geoméricamente admisibles de este caso particular del problema aquí analizado,  $C \equiv B$ , son rayos luminosos ni expeditos ni extravagantes.

**Observación 14.5.6** *Si  $B$  coincide con  $D'$  la función de propagación (14.58) se reduce a  $T(\alpha) = R + \sqrt{2}R\sqrt{1 + \cos\alpha}$ . El rayo luminoso extravagante recorre  $(C \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow D')_{\alpha=0}$ , insumiendo  $T(\alpha = 0) = 3R$  y el rayo luminoso expedito, la braquistócrona  $(C \rightarrow \acute{D})_{\alpha=\pi}$ , que gasta  $T(\alpha = \pi) = R$ , con rebote en el punto final  $\acute{D}$ .*

### 14.5.3. Tercer ejemplo en el espejo cuasi-esférico

Aquí estudiamos en primer lugar los tres ejemplos más sencillos de la geometría de los rayos reflexivos o luminosos sobre el dispositivo virtual el espejo cuasi-esférico, Ver Figura 14.7, cuando los rayos comienzan y finalizan sus trayectorias en las antípodas de la circunferencia. Analizamos, de manera consecutiva tres ejemplos. En el Ejemplo 14.5.7 se permite un sólo rebote en la superficie espejada, en el Ejemplo 14.5.8 dos choques y en el Ejemplo 14.5.10 tres contactos en la superficie azogada, en todos los casos no se contabilizan los contactos de partida y de llegada.

La última afirmación en la cita de Hamilton transcrita en la pág. 526 una vez más es evidenciable en los resultados que la metodología propuesta arroja sobre los rayos geométricos en el espejo cuasi-esférico que comienzan en  $C = (-R, 0)$  y colisionan  $n - 1$  veces en cualquier lugar del mismo -exceptuados los puntos extremos  $C, B$ - y que finalizan en  $B = (R, 0)$ , (e.g. Figuras 14.15 , 14.16).

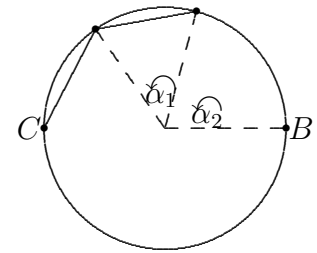


Figura 14.7: Rayos geométricos con parámetros  $\alpha_i \ i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ .

**Ejemplo 14.5.7** *Longitud del recorrido:*

$$L(\alpha_1) = \sqrt{2} R \left\{ \sqrt{1 + \cos(\alpha_1)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_1)} \right\} \quad (14.60)$$

$$\frac{dL(\alpha_1)}{d\alpha_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{2}} R \left\{ \frac{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)} - \sqrt{1 - \cos(\alpha_1)}}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_1)} \sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} \right\}$$

*Abcisas críticas singulares:*

$$\nabla \frac{dL(\alpha_1)}{d\alpha_1}$$

$$1 - \cos(\alpha_1) = 0$$

$$1 + \cos(\alpha_1) = 0$$

## Capítulo 14. Hamilton en la Geometría Óptica vs Hamilton en el Icosian Game

---

*Abcisas críticas estacionarias:*

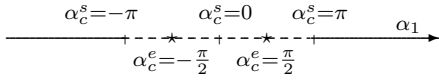
$$\frac{dL(\alpha_1)}{d\alpha_1} = 0$$
$$\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)} - \sqrt{1 - \cos(\alpha_1)} = 0$$

*Concavidad:*

$$\frac{d^2 L(\alpha_1)}{d\alpha_1^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} R \left\{ \frac{1 - \cos(\alpha_1)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_1)}} + \frac{1 + \cos(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} \right\} < 0$$

Análisis en el compacto  $\mathcal{K}_1 = [-\pi, \pi]$ .

Máx. Absoluto  $L(\frac{\pi}{2}) = L(-\frac{\pi}{2}) = 2\sqrt{2}R$ , realizado por dos rayos reflexivos (Ver Figura 14.9).



Mín. Absoluto  $L(\pi) = L(-\pi) = L(0) = 2R$ , realizado por rayos geométricos con rebotes en  $C$  o en  $B$ .

Figura 14.8: Antípodas: Ejemplo 14.5.7,  $\alpha_1 \in [-\pi, \pi]$ .

A partir de la expresión de  $\frac{d^2 L(\alpha_1)}{d\alpha_1^2}$  es evidente el carácter de máximos locales de las dos abscisas críticas estacionarias. Ambas abscisas frontera del compacto  $\mathcal{K}_1 = [-\pi, \pi]$  son puntos singulares del problema, además  $\alpha_c^s = 0$ , También, es otra abscisa singular interior, las tres caracterizables como mínimos locales, por el cambio de signo de  $\frac{dL(\alpha_1)}{d\alpha_1}$  en un entorno las mismas. Sumando el Teorema del Bolzano-Weierstrass como instrumento de análisis de  $L(\alpha_1)$ , (14.60), en  $\mathcal{K}_1$  es simple determinar que en los puntos críticos estacionarios se alcanza el Máx. Abs. y en los puntos críticos singulares el Mín. Abs.

En las abscisas críticas singulares en el compacto  $\mathcal{K}_1$ , i.e.  $\alpha_c^s = \pi$ ,  $\alpha_c^s = 0$  y  $\alpha_c^s = -\pi$ , la longitud del recorrido  $L(\alpha_1)$ , (14.60), alcanza su valor Mín. Absoluto,  $L(\alpha_1) = 2R$ , la distancia desde  $C = (-R, 0)$  a  $B = (R, 0)$ . En cada una de las dos abscisas críticas estacionarias en  $\mathcal{K}_1$ , i.e.  $\alpha_c^e = \frac{\pi}{2}$  y  $\alpha_c^e = -\frac{\pi}{2}$ ,  $L(\alpha_1)$ , (14.60), alcanza el Máx. Absoluto, con trayectorias reflexivas en el punto de contacto.

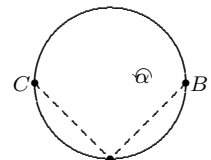
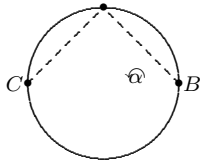


Figura 14.9: Rayos del Ejemplo 14.5.7.

### Ejemplo 14.5.8

$$L(\alpha_1, \alpha_2) = \sqrt{2}R \left\{ \sqrt{1 + \cos(\alpha_1)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_2)} \right\} \quad (14.61)$$

$$L_{\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}R \left\{ \frac{-\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} + \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} \right\}$$

$$L_{\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} R \left\{ \frac{-\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} + \frac{\sin(\alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2)}} \right\}$$

$$L(\alpha_1, \alpha_2)_{\alpha_1} = L(\alpha_1, \alpha_2)_{\alpha_2} = 0$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} = \frac{\sin(\alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2)}} \quad (14.62)$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} = \frac{\sin(\alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2)}} \Leftrightarrow \alpha_2 \equiv \pm\pi - \alpha_1 \quad (14.63)$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} \Leftrightarrow \alpha_2 - \alpha_1 \pm \pi \equiv \alpha_1 \quad (14.64)$$

Entonces, resolver (14.62) implica solucionar simultáneamente (14.63) y (14.64):

$$\begin{cases} \alpha_2 \equiv \pm\pi - \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \pm \pi \equiv \alpha_1 \end{cases} \quad (14.65)$$

Se indican a continuación los valores de las variables  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  para los cuales la función (14.61) no es diferenciable:

$$\alpha_1 \equiv \pm\pi, \quad \alpha_2 \equiv \alpha_1, \quad \alpha_2 \equiv 0. \quad (14.66)$$

$$L_{\alpha_1\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{\sqrt{2}}{4} R \left\{ \frac{1 + \cos(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} + \frac{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} \right\}$$

$$L_{\alpha_1\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\sqrt{2}}{4} R \frac{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}}$$

$$L_{\alpha_2\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{\sqrt{2}}{4} R \left\{ \frac{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} + \frac{1 - \cos(\alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2)}} \right\}$$

Análisis en el compacto  $\mathcal{K}_2 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ .



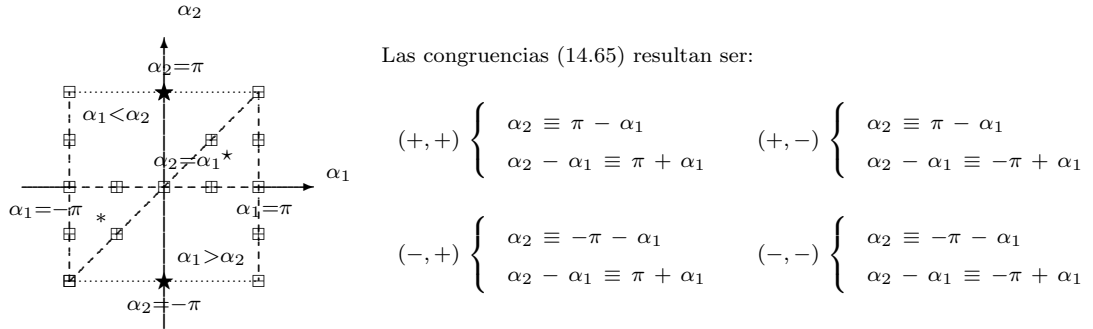


Figura 14.10: Antípodas: Ejemplo 14.5.8,  $\alpha_1 \in [-\pi, \pi]$  y  $\alpha_2 \in [-\pi, \pi]$ .

En el siguiente arreglo, precisamos las duplas de los ángulos críticos estacionarios que en cada una de las cuatro congruencias definen en  $\mathcal{K}_2 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$  un rayo reflexivo y en la Figura 14.11 pueden apreciarse el bosquejo de las respectivas trayectorias<sup>4</sup>.

$$\begin{aligned}
 (+, +) \star \curvearrowright (0, \pi) &\cong 6R & (+, -) \star \curvearrowright \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) &\cong 3R \\
 (-, +) * \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right) \curvearrowright &\cong 3R & (-, -) \star \curvearrowright (0, -\pi) &\cong 6R.
 \end{aligned}$$

Las abscisas críticas singulares en  $\mathcal{K}_2$  son  $\alpha_2 = \alpha_1$ ,  $\alpha_1 = \pm\pi$  y  $\alpha_2 = 0$  (Ver Figura 14.10 las líneas discontinuadas). Si  $\alpha_2 = \alpha_1$  técnicamente el problema se reduce al ejemplo anterior. Entonces en dicho subconjunto lineal en los puntos  $(0, 0)$ ,  $(-\pi, -\pi)$ ,  $(\pi, \pi)$  hay mínimos locales singulares (Ver Figura 14.10 los  $7 \boxplus \cong 2R$ ), mientras que en los puntos  $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$  y  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  hay máximos locales singulares (Ver Figura 14.10 los  $8 \boxplus \cong 2\sqrt{2}R$ ). En las singularidades sobre las recta verticales  $\alpha_1 = \pm\pi$  técnicamente el caso implica los cálculos y análisis del ejemplo anterior. Con los máximos locales singulares en  $(\pm\pi, -\frac{\pi}{2})$  y  $(\pm\pi, \frac{\pi}{2})$  y mínimos locales singulares en  $(\pm\pi, -\pi)$ ,  $(\pm\pi, \pi)$  y  $(\pm\pi, 0)$ .

El determinante de la matriz Hessiana  $\mathcal{H}_{2 \times 2}$ , i.e.  $|\mathcal{H}_{2 \times 2}|$ , en la región de diferenciabilidad de  $L(\alpha_1, \alpha_2)$ , (14.61), y en particular, en el compacto  $\mathcal{K}_2$  es positivo. Entonces en las abscisas críticas angulares estacionarias (14.65) poseen máximos locales ya que además

<sup>4</sup> $\cong$  Correspondencia: Entre los ángulos variacionales, indicados a su izquierda, con el valor de la longitud euclídea de la trayectoria desplegada por tales ángulos, indicada a su derecha.

## Capítulo 14. Hamilton en la Geometría Óptica vs Hamilton en el Icosian Game

---

$L_{\alpha_1\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2) < 0$ . Como resulta de los siguientes cálculos.

$$\mathcal{H}_{2 \times 2} = \frac{R^2}{2} \left\{ \sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}\sqrt{1 - \cos(\alpha_2)} + \sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_2)}\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \right\}$$

Entonces, satisfechas las condiciones (14.65),  $L_{\alpha_1\alpha_1}(\alpha_{c1}^e, \alpha_{c2}^e) = -\frac{\sqrt{2}}{2}R\sqrt{1 + \cos(\alpha_{c1}^e)}$  y  $|\mathcal{H}_{2 \times 2}(\alpha_{c1}^e, \alpha_{c2}^e)| = \frac{3\sqrt{2}}{8}R\sqrt{1 + \cos(\alpha_{c1}^e)}$ .

La aplicación del Teorema de Bolzano-Weierstrass en  $\mathcal{K}_2$  determina, dada la sencillez de las evaluaciones, que  $L(\alpha_1, \alpha_2)$ , (14.61) alcanza su valor Máx. Absoluto  $6R$ , realizado en las abscisas críticas estacionarias  $(0, \pi)$  y  $(0, -\pi)$ . Al mismo tiempo, es claramente visible que el Mín. Absoluto de  $L(\alpha_1, \alpha_2)$  en  $\mathcal{K}_2$  es  $2R$  y se alcanza sobre las abscisas críticas singulares:  $(-\pi, \pi)$ ,  $(\pi, -\pi)$ ,  $(\pm\pi, 0)$ ,  $(\alpha_2, \alpha_2)$  si  $\alpha_2 = 0$ ,  $(\alpha_1, \alpha_1)$  si  $\alpha_1 = \pm\pi$ .

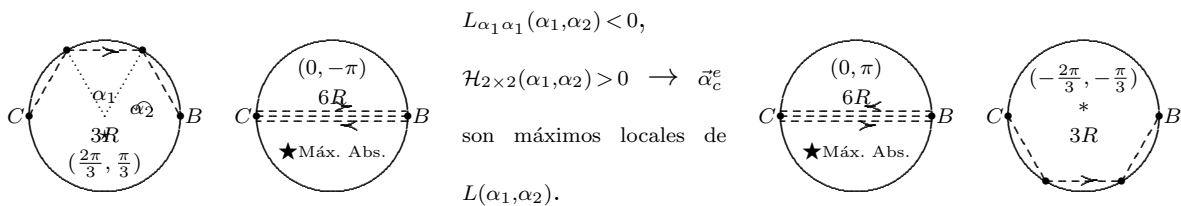
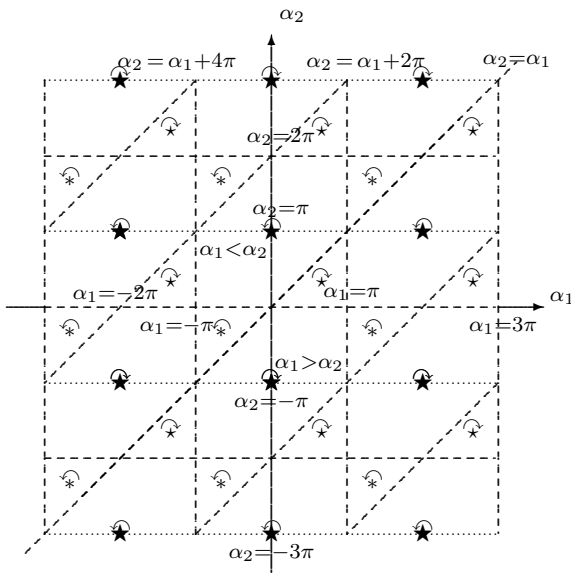


Figura 14.11: Rayos del Ejemplo 14.5.8

Análisis en  $\mathcal{R}^2 = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$

**Observación 14.5.9** Escogiendo  $\bar{\mu} = 0$  y  $\mu = 0$  en (14.67) la trayectoria reflexiva del tipo  $\curvearrowright \star$  una de las que alcanza el Máx. Abs. de  $L(\alpha_1, \alpha_2)$  está encerrada en el conjunto abierto acotado delimitado por las siguientes fronteras lineales singulares:  $\alpha_1 = \pi, \pi \leq \alpha_2 \leq 2\pi$ ;  $\alpha_1 = -\pi, 0 \leq \alpha_2 \leq \pi$ ;  $\alpha_2 = \alpha_1, 0 \leq \alpha_1 \leq \pi$ ;  $\alpha_2 = \alpha_1 + 2\pi, -\pi \leq \alpha_1 \leq 0$ ;  $\alpha_2 = 0, -\pi \leq \alpha_1 \leq 0$  y  $\alpha_2 = 2\pi, 0 \leq \alpha_1 \leq \pi$ , Ver Figura 14.12.



Las congruencias en (14.65) resultan en el caleidoscopio de trayectorias reflexivas (14.67).

$$\begin{aligned}
 & (+, -) \curvearrowright \star \\
 (\alpha_{c_1}^e, \alpha_{c_2}^e) &= \left[ \frac{2\pi}{3} + 2\bar{k}\pi, \frac{4\pi}{3} - \pi(2k+1) \right], \bar{k}, k \in \mathbb{Z} \\
 & (-, +) \curvearrowright \star \quad (14.67) \\
 (\alpha_{c_1}^e, \alpha_{c_2}^e) &= \left[ -\frac{2\pi}{3} + 2\bar{\lambda}\pi, -\frac{4\pi}{3} + \pi(1-2\lambda) \right], \bar{\lambda}, \lambda \in \mathbb{Z} \\
 & (+, +) \curvearrowright \star \equiv \curvearrowright (-, -) \\
 (\alpha_{c_1}^e, \alpha_{c_2}^e) &= [2\bar{\mu}\pi, \pi(1-2\mu)], \bar{\mu}, \mu \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Claramente las singularidades (14.66) de la función  $L(\alpha_1, \alpha_2)$  del problema (14.61), separan las tres formas de las trayectorias reflexivas del caso, (Ver. Figura 14.11).

Figura 14.12: Caleidoscopio del Ejemplo 14.5.8,  $\alpha_1 \in (-\infty, +\infty)$  y  $\alpha_2 \in (-\infty, +\infty)$ .

**Ejemplo 14.5.10**

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sqrt{2} R \left\{ \sqrt{1 + \cos(\alpha_1)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_3)} \right\} \quad (14.68)$$

$$L_{\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\sqrt{2}}{2} R \left\{ \frac{-\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} + \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} \right\}$$

$$L_{\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\sqrt{2}}{2} R \left\{ \frac{-\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} + \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}} \right\}$$

$$L_{\alpha_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\sqrt{2}}{2} R \left\{ \frac{-\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}} + \frac{\sin(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3)}} \right\}$$

$$L_{\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = L_{\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = L_{\alpha_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}} = \frac{\sin(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3)}} \quad (14.69)$$

Planos en los que la función (14.68) no es diferenciable:

$$\alpha_1 \equiv \pm \pi, \quad \alpha_2 \equiv \alpha_1, \quad \alpha_3 \equiv \alpha_2, \quad \alpha_3 \equiv 0. \quad (14.70)$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} = \frac{\sin(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3)}} \Leftrightarrow \alpha_3 \equiv \pm \pi - \alpha_1 \quad (14.71)$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}} \Leftrightarrow \alpha_3 - \alpha_2 \pm \pi \equiv \alpha_1 \quad (14.72)$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} \Leftrightarrow \alpha_2 - \alpha_1 \pm \pi \equiv \alpha_1 \quad (14.73)$$

$$\begin{cases} \alpha_3 \equiv \pm \pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv \pm \pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv \pm \pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (14.74)$$

$$L_{\alpha_1\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -\frac{\sqrt{2}}{4} R \left\{ \frac{1 + \cos(\alpha_1)}{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1)}} + \frac{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} \right\}$$

$$L_{\alpha_1\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\sqrt{2}}{4} R \frac{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}}$$

$$L_{\alpha_1\alpha_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

$$L_{\alpha_2\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -\frac{\sqrt{2}}{4} R \left\{ \frac{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}} + \frac{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}} \right\}$$

$$L_{\alpha_2\alpha_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\sqrt{2}}{4} R \frac{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}}$$

$$L_{\alpha_3\alpha_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -\frac{\sqrt{2}}{4} R \left\{ \frac{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)}} + \frac{1 - \cos(\alpha_3)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_3)}} \right\}$$

$$|\mathcal{H}_{2 \times 2}| = \frac{R^2}{8} \left\{ \sqrt{1 + \cos(\alpha_1)} \sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} + \sqrt{1 + \cos(\alpha_1)} \sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)} \right\}$$

$$|\mathcal{H}_{3 \times 3}| = L_{\alpha_1\alpha_1} L_{\alpha_2\alpha_2} L_{\alpha_3\alpha_3} - L_{\alpha_1\alpha_1} L_{\alpha_2\alpha_3}^2 - L_{\alpha_3\alpha_3} L_{\alpha_1\alpha_2}^2$$

Análisis en el compacto  $\mathcal{K}_3 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ .

Notamos con  $\mathcal{D}_3$  la región acotada en donde resulta diferenciable la función (14.68), i.e.  $\mathcal{D}_3 = \mathcal{K}_3 - \{\alpha_1 = \pm\pi, \alpha_2 = \alpha_1, \alpha_3 = \alpha_2, \alpha_3 = 0\}$ .

En cada terna de parámetros críticos variacionales estacionarios localizada en  $\mathcal{D}_3 \subset \mathcal{K}_3$ , utilizando (14.74) resulta:

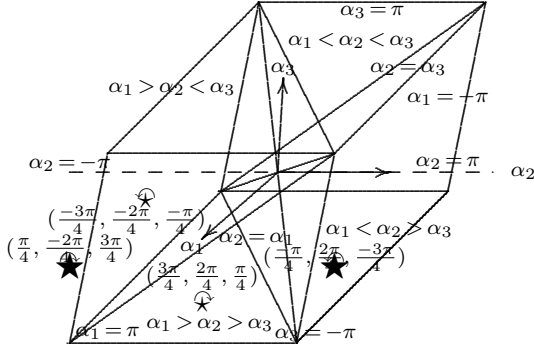
$$L_{\alpha_1\alpha_1}(\alpha_{c1}^e, \alpha_{c2}^e, \alpha_{c3}^e) = -\frac{\sqrt{2}}{2} R \sqrt{1 + \cos(\alpha_{c1}^e)}, |\mathcal{H}_{2 \times 2}(\alpha_{c1}^e, \alpha_{c2}^e, \alpha_{c3}^e)| = 3\frac{\sqrt{2}}{8} R \sqrt{1 + \cos(\alpha_{c1}^e)}$$

y  $|\mathcal{H}_{3 \times 3}(\alpha_{c1}^e, \alpha_{c2}^e, \alpha_{c3}^e)| = -\frac{\sqrt{2}}{4} R \sqrt{1 + \cos(\alpha_{c1}^e)}$ .

## Capítulo 14. Hamilton en la Geometría Óptica vs Hamilton en el Icosian Game

---

Entonces, en cada terna angular crítica estacionaria hay un máximo estricto local de  $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , (14.68), (Teorema §70-5, pág. 213, [Rey Pastor, J. et al. (1957)]).



Las congruencias (14.74) en el compacto  $\kappa_3 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$  definen las siguientes trayectorias reflexivas determinadas por las ternas de ángulos variacionales  $(\frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  radicada en  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \pi$ ,  $(\frac{-3\pi}{4}, \frac{-2\pi}{4}, \frac{-\pi}{4})$  que vive en  $-\pi > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0$ ,  $(\frac{\pi}{4}, \frac{-2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$  localizado en  $\alpha_1 > \alpha_2 < \alpha_3$  y  $(\frac{-\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4})$  en la subregión  $\alpha_1 > \alpha_2 < \alpha_3$ , cada una proviene de las asignaciones de signos  $+, -, -; -, +, +; +, +, -$  y  $-, -, +$  en (14.74).

Figura 14.13: Antípodas: Ejemplo 14.5.10,  $\alpha_1 \in [-\pi, \pi]$ ,  $\alpha_2 \in [-\pi, \pi]$  y  $\alpha_3 \in [-\pi, \pi]$ .

Las congruencias en (14.74) implican la resolución de los siguientes ocho sistemas:

$$A^{+++} = \begin{cases} \alpha_3 \equiv \pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv \pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv \pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (14.75)$$

$$B^{-++} = \begin{cases} \alpha_3 \equiv -\pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv \pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv \pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (14.76)$$

$$C^{++-} = \begin{cases} \alpha_3 \equiv \pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv \pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv -\pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (14.77)$$

$$D^{-+-} = \begin{cases} \alpha_3 \equiv -\pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv +\pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv -\pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (14.78)$$

$$E^{+--} = \begin{cases} \alpha_3 \equiv \pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv -\pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv -\pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (14.79)$$

$$F^{---} = \begin{cases} \alpha_3 \equiv -\pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv -\pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv -\pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (14.80)$$

$$G^{--+} = \begin{cases} \alpha_3 \equiv -\pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv -\pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv \pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (14.81)$$

$$H^{++} = \begin{cases} \alpha_3 \equiv \pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv -\pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv \pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (14.82)$$

$A^{+++}$ ,  $D^{+-}$  y  $G^{--+}$  corresponde una trayectoria reflexiva de la misma forma y orientación, aunque sólo  $G^{--+}$  es la que pertenece a  $\mathcal{K}_3 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ .

Puesto que si a  $\alpha_3$  en (14.75) se le resta  $2\pi$  se convierte en (14.81) o recíprocamente si a  $\alpha_3$  en (14.81) se le suma  $2\pi$  se convierte en  $A^{+++}$ . Del mismo modo, si se adiciona  $2\pi$  simultáneamente a  $\alpha_3$  y a  $\alpha_2$  en (14.78) se obtiene la congruencia reconocida en  $A^{+++}$ . También si a  $\alpha_2$  en (14.78) se le suma  $2\pi$  se transforma en el sistema de congruencias (14.81). Entonces el grupo de congruencias en (14.83) definen la misma figura reflexiva.

$$G^{--+} \equiv A^{+++} \equiv D^{+-} \quad (14.83)$$

Algo semejante ocurre con las congruencias  $F^{---}$ ,  $H^{++}$  y  $C^{+-}$  que son también trayectorias reflexivas y solamente  $C^{+-}$  está localizada en  $\mathcal{K}_3$ . De manera análoga a lo explicado en el agrupamiento anterior, por ejemplo si a  $\alpha_3$  en (14.77) se le resta  $2\pi$ , el sistema de congruencias en (14.77) se convierte en el sistema de congruencias angulares que hemos asociado con la notación  $F^{---}$ , i.e. (14.80). Si en  $H^{++}$ , a  $\alpha_3$  se le resta  $2\pi$  y simultáneamente se le resta  $2\pi$  a  $\alpha_2$ , el sistema (14.82) se transforma en las congruencias (14.80).

$$C^{+-} \equiv F^{---} \equiv H^{++} \quad (14.84)$$

Geométricamente, lo que se está haciendo es desplazar una o dos coordenadas en  $2\pi$  o  $-2\pi$  según corresponda, con lo cual se muestra que coinciden en una misma figura dos



trayectorias reflexivas distintivas del problema. Esto por lo tanto, justifica la aparición de un caleidoscopio, esta vez tridimensional en  $\alpha_1 \in (-\infty, +\infty)$ ,  $\alpha_2 \in (-\infty, +\infty)$  y  $\alpha_3 \in (-\infty, +\infty)$ . Región en la que los planos de las singularidades (14.70) separarán los caminos reflexivos.

Por lo tanto las congruencias en (14.78) y en (14.75) equivalen a estudiar el sistema (14.81) en  $\mathcal{K}_3$ . Así como (14.82) y (14.80) son coincidentes en  $\mathcal{K}_3$  con la solución de (14.77).

Además, geoméricamente, es fácil de interpretar que existen trayectorias reflexivas que resultan ser de a pares una la imagen especular de la otra, con respecto del diámetro que conecta  $C$  con  $B$ .

Simplemente, si por ejemplo a partir de (14.75) se considera (14.85).

$$\bar{A}^{+++} = \begin{cases} \bar{\alpha}_3 \equiv \pi - (2\pi - \alpha_1) \\ \bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_2 \equiv \pi + (2\pi - \alpha_1) \\ \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \equiv \pi + (2\pi - \alpha_1) \end{cases} \quad (14.85)$$

Resulta que la relación entre las coordenadas de (14.75) y (14.85) satisfacen (14.86).

$$\begin{aligned} \alpha_3 &\equiv -\bar{\alpha}_3 \\ \alpha_3 - \alpha_2 &\equiv -(\bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_2) \\ \alpha_2 - \alpha_1 &\equiv -(\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1) \end{aligned} \quad (14.86)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &\equiv -\bar{\alpha}_3 \\ \alpha_2 &\equiv -\bar{\alpha}_2 \\ \alpha_1 &\equiv -\bar{\alpha}_1 \end{aligned} \quad (14.87)$$

Reemplazando las ecuaciones (14.87) en (14.75) se tiene:

$$\bar{A}^{+++} = \begin{cases} -\bar{\alpha}_3 \equiv \pi - (-\bar{\alpha}_1) \\ -\bar{\alpha}_3 + \bar{\alpha}_2 \equiv \pi - \bar{\alpha}_1 \\ -\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1 \equiv \pi - \bar{\alpha}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\alpha}_3 \equiv -\pi - \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_2 \equiv -\pi + \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \equiv -\pi + \bar{\alpha}_1 \end{cases} \Leftrightarrow F^{---} \quad (14.88)$$

Claramente  $\bar{A}^{+++}$  es exactamente  $F^{---}$ , (14.80). Cómputos semejantes, verifican la validez de (14.89).

$$\bar{B}^{-++} \equiv E^{+--} \quad \bar{C}^{++-} \equiv G^{-+-} \quad \bar{G}^{-+-} \equiv C^{++-} \quad (14.89)$$

Por lo tanto, en términos de la forma de los rayos reflexivos, reduciendo la multiplicidad en coordenadas existen cuatro figuras reflexivas distintivas para el Ejemplo 14.5.10, las que resultan de las congruencias (14.76), (14.79), (14.77) y (14.81), (Ver Figura 14.14).

En general, si en todas las congruencias (14.74) buscamos la existencia de trayectorias simétricas respecto al diámetro que une  $C$  con  $B$ , resulta sencillo confirmar que cada trayectoria reflexiva posee su imagen especular respecto de la línea  $\bar{C}\bar{B}$ . Reemplazando  $2\pi - \alpha_1 \equiv -\alpha_1$  en (14.74), buscamos las coordenadas angulares para esta inversión de imagen.

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_3 \equiv \pm\pi + \alpha_1 \\ \bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_2 \equiv \pm\pi - \alpha_1 \\ \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \equiv \pm\pi - \alpha_1 \end{cases} \quad (14.90)$$

A partir de (14.74) sabemos que

$$\begin{cases} -\alpha_3 \equiv \mp\pi + \alpha_1 \\ -(\alpha_3 - \alpha_2) \equiv \mp\pi - \alpha_1 \\ -(\alpha_2 - \alpha_1) \equiv \mp\pi - \alpha_1 \end{cases} \quad (14.91)$$

Comparando (14.90) y (14.91) resulta (14.92) y finalmente (14.93).

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_3 \equiv -\alpha_3 \equiv \mp\pi + \alpha_1 \\ \bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_2 \equiv -(\alpha_3 - \alpha_2) \equiv \mp\pi - \alpha_1 \\ \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \equiv -(\alpha_2 - \alpha_1) \equiv \mp\pi - \alpha_1 \end{cases} \quad (14.92)$$

$$\begin{cases} \alpha_3 \equiv \mp\pi - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \equiv \mp\pi + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \equiv \mp\pi + \alpha_1 \end{cases} \quad (14.93)$$

Brevemente si a  $\alpha_3$  en  $A^{+++}$  se le resta  $2\pi$  pasamos a la congruencia  $G^{-+-}$  y si a  $\alpha_2$  de esta congruencia se le resta  $2\pi$  pasamos a la congruencia  $D^{-+-}$ , con la forma reflexiva representada en la tercer ilustración de la Figura 14.14. Sus respectivas congruencias

simétricas respecto de la horizontal, i.e.  $\bar{A}^{+++} = F^{---}$ ,  $\bar{G}^{--+} = C^{+-}$  y  $\bar{D}^{-+-} = H^{+-}$  tienen la forma de la segunda representación gráfica de la Figura 14.14. Mientras que  $E^{+--}$  y su simétrica construyen las respectivas formas de la última y primera representación en la Figura 14.14.

Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass la función  $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , (14.68), debe alcanzar en  $\mathcal{K}_3$  el Máx. Abs.  $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  y el Mín. Abs.  $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , e.g.  $\mathcal{K}_3 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ . La función  $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , (14.68), es una función periódica continua y diferenciable salvo en los planos (14.70) y sus intersecciones. En cada plano de (14.70) contenido en  $\mathcal{K}_3$  siempre se anulará al menos una de las distancias componentes de (14.68), por lo tanto el máximo absoluto será alcanzado en la frontera de  $\mathcal{K}_3$  o en la zona diferenciable del mismo la que hemos acordado previamente en simbolizar por  $\mathcal{D}_3$  en la pág. 541. Si notamos con  $\partial(\mathcal{K}_3)$  la frontera del compacto seleccionado para el presente estudio, las respectivas restricciones de  $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , (14.68), resultan ser:

$$L(\pm\pi, \alpha_2, \alpha_3) = \sqrt{2} R \left\{ \sqrt{1 + \cos \alpha_2} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_2)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_3)} \right\} \quad (14.94)$$

$$L(\alpha_1, \pm\pi, \alpha_3) = \sqrt{2} R \left\{ 2 \sqrt{1 + \cos \alpha_1} + \sqrt{1 + \cos \alpha_3} + \sqrt{1 - \cos \alpha_3} \right\} \quad (14.95)$$

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \pm\pi) = \sqrt{2} R \left\{ \sqrt{1 + \cos \alpha_1} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} + \sqrt{1 + \cos \alpha_2} + \sqrt{2} \right\} \quad (14.96)$$

En las fronteras  $\alpha_1 = \pm\pi$ , el análisis y caracterización de óptimos se reduce al Ejemplo 14.5.8 ya que vale (14.94). Si se consideran  $\alpha_2 = \pm\pi$ , el estudio debe efectuarse sobre (14.95). Y finalmente sobre los planos del compacto en que  $\alpha_3 = \pm\pi$ , debe estudiarse (14.95). A partir del Ejemplo 14.5.8 resulta que el Máx. Abs. sobre las fronteras  $\alpha_1 = \pm\pi$  será alcanzado para las abscisas críticas  $(\alpha_2, \alpha_3) = (0, \pm\pi)$  y por lo tanto en cualquiera de dichos planos fronterizos el valor máximo es  $L(\pm\pi, 0, \pm\pi) = 6R$ . Los puntos críticos estacionarios en la restricción (14.95) deben satisfacer la siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{1 + \cos \alpha_1}} &= 0 \\ \sin \alpha_3 \left( \frac{\sqrt{1 + \cos \alpha_3} - \sqrt{1 - \cos \alpha_3}}{\sqrt{1 - \cos \alpha_3} \sqrt{1 + \cos \alpha_3}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

## Capítulo 14. Hamilton en la Geometría Óptica vs Hamilton en el Icosian Game

---

Las duplas del tipo  $\alpha_1 = k_1 \pi$  con  $\alpha_3 = k_2 \pi$  quedan descartadas por tratarse de abscisas singulares que anulan ramas y por lo tanto no alcanzarán el máximo absoluto buscado. Las duplas del tipo  $\alpha_1 \equiv 0$  y  $\alpha_3 \equiv \pm \frac{\pi}{2}$  alcanzan el valor  $L(0, \pm \pi, \pm \frac{\pi}{2}) = (4 + 2\sqrt{2}) R$ . En la frontera determinada por  $\alpha_3 \equiv \pm \pi$ , la restricción (14.96) tiene abscisas estacionarias en las congruencias en (14.97).

$$\begin{cases} \alpha_2 \equiv -\alpha_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \equiv \pm \pi - \alpha_1 \end{cases} \quad (14.97)$$

Estas congruencias se satisfacen, salvo multiplicidad, por las abscisas críticas estacionarias  $(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$  y  $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$  que determinan el valor  $L(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \pm \pi) = (2 + 3\sqrt{3}) R$ . Las restantes líneas fronteras de esta restricción son singularidades que anulan una de las ramas positivas que conforman la restricción analizada. Finalmente, sobre los planos y rectas singulares contenidas en  $\mathcal{K}_3$  por la misma razón no es posible la obtención del máximo absoluto. Entonces el máximo absoluto se alcanza en la zona diferenciable interior del compacto y es el mayor de los máximos relativos estacionarios, es decir la función  $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , (14.68), alcanza su máximo absoluto en  $\mathcal{K}_3 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$  sobre la trayectoria reflexiva determinada por  $G^{-+}$  y su simétrica  $C^{++}$ , i.e.  $L(-\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}) = L(\frac{\pi}{4}, -\frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) = 4R \sqrt{2 + \sqrt{2}}$  (Ver Figura 14.14).

$$\text{Análisis en } \mathcal{R}^3 = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$$

Se concluye entonces, por todo lo anteriormente explicado que en este caso es suficiente en principio, para investigar las formas de las trayectorias reflexivas, analizar la mitad de las posibilidades de signos, y aún dentro de este subconjunto distinguir la existencia de desplazamientos angulares múltiplos de  $2k\pi$ . En este ejemplo el caleidoscopio está construido por las imágenes reflexivas en (14.98) separadas por los planos singulares del problema (14.70).

$$\begin{aligned}
 & G^{-+} \sim (-, -, +) \curvearrowright \star \\
 (\alpha_{c_1}^e, \alpha_{c_2}^e, \alpha_{c_3}^e) &= \left[-\frac{\pi}{4} + 2k_1\pi, \frac{2\pi}{4} + 2k_2\pi, -\frac{3\pi}{4} + 2k_3\pi\right], k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z} \\
 & C^{+-} \sim (+, +, -) \curvearrowright \star \\
 (\alpha_{c_1}^e, \alpha_{c_2}^e, \alpha_{c_3}^e) &= \left[\frac{\pi}{4} + 2\bar{k}_1\pi, -\frac{2\pi}{4} + 2\bar{k}_2\pi, \frac{3\pi}{4} + 2\bar{k}_3\pi\right], \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3 \in \mathbb{Z} \quad (14.98) \\
 & B^{-++} \sim (-, +, +) \curvearrowright \star \\
 (\alpha_{c_1}^e, \alpha_{c_2}^e, \alpha_{c_3}^e) &= \left[-\frac{3\pi}{4} + 2\tilde{k}_1\pi, -\frac{2\pi}{4} + 2\tilde{k}_2\pi, -\frac{\pi}{4} + 2\tilde{k}_3\pi\right], \tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3 \in \mathbb{Z} \\
 & E^{+--} \sim (+, -, -) \curvearrowright \star \\
 (\alpha_{c_1}^e, \alpha_{c_2}^e, \alpha_{c_3}^e) &= \left[\frac{3\pi}{4} + 2\varkappa_1\pi, \frac{2\pi}{4} + 2\varkappa_2\pi, \frac{\pi}{4} + 2\varkappa_3\pi\right], \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

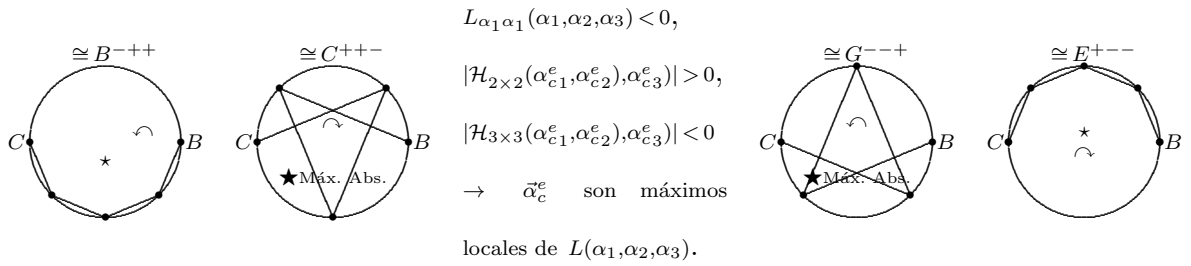


Figura 14.14: Rayos del Ejemplo 14.5.10

## Capítulo 14. Hamilton en la Geometría Óptica vs Hamilton en el Icosian Game

---

Luego de los casos particulares estudiados en los Ejemplos 14.5.7, 14.5.8 y 14.5.10 se presentan las conclusiones generales de la sección §14.5.3, [Niel, B. I. (2005b)]. Particularmente, estos resultados se centralizan en las formas de las distintas trayectorias reflexivas del caso.

Si  $T(\alpha_i)$  representa la longitud total recorrida por los rayos geométricos que comienzan en  $C = (-R, 0)$  en el espejo cuasi-esférico (Ver Figura 14.7) y colisionan su superficie  $n-1$  veces -en cualquier lugar con excepción de los puntos extremos  $C, B$ - y que finalizan en el punto  $B = (R, 0)$ , entonces  $T(\alpha_i)$  es determinada por la expresión (14.99) en la que los parámetros variacionales son los  $n-1$  ángulos  $\alpha_i$  medidos en sentido antihorario a partir del segmento que une el  $(0, 0)$  con el punto  $B = (R, 0)$ .

$$T(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1} = \sqrt{2}R \left\{ \sqrt{1 + \cos \alpha_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \sqrt{1 - \cos(\alpha_{i-1} - \alpha_i)} + \sqrt{1 - \cos(\alpha_{n-1})} \right\}. \quad (14.99)$$

$T(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}$  es una función continua.

$T(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}$  tiene  $n$  puntos críticos estacionarios. Los parámetros estacionarios críticos,  $\alpha_{c_i}(k)$ , son:

$$\alpha_{c_i} = i(2k-1) \frac{\pi}{n} + \pi \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (14.100)$$

Los puntos estacionarios (14.100),  $\alpha_{c_i} \ 1 \leq i \leq n-1$ , resultan de la resolución de las siguientes identidades trigonométricas, para  $n \geq 2$ ,

$$-\frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{1 + \cos \alpha_1}} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}} = \dots = \frac{\sin(\alpha_{i-1} - \alpha_i)}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_{i-1} - \alpha_i)}} = \dots = \frac{\sin(\alpha_{n-1})}{\sqrt{1 - \cos(\alpha_{n-1})}}. \quad (14.101)$$

Cada punto crítico estacionario despliega una trayectoria de  $n$  tramos lineales, i.e.,

$$\begin{aligned} &(-R, 0) \rightarrow (R \cos \alpha_{c_{1k}}, R \sin \alpha_{c_{1k}}) \rightarrow (R \cos \alpha_{c_{2k}}, R \sin \alpha_{c_{2k}}) \rightarrow \dots \\ &\rightarrow (R \cos \alpha_{c_{ik}}, R \sin \alpha_{c_{ik}}) \rightarrow \dots \rightarrow (R \cos \alpha_{c_{n-1k}}, R \sin \alpha_{c_{n-1k}}) \rightarrow (R, 0). \end{aligned} \quad (14.102)$$

Además, estas  $n$  trayectorias, tienen longitud total de recorrido (o su equivalente al tiempo total de tránsito  $\frac{T(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}}{v}$ ) calculable por la siguiente expresión:

$$T(\alpha_{c_i}(k))_{1 \leq i \leq n-1} = \sqrt{2}Rn\sqrt{1 - \cos(\Delta\alpha_{c_i}(k))}. \quad (14.103)$$

con

$$\Delta\alpha_{c_i}(k) = \alpha_{c_i}(k) - \alpha_{c_{i-1}}(k) = \frac{\pi}{n}(2k - 1) \quad (14.104)$$

Además, a partir de (14.103) y (14.104), las trayectorias en (14.102) resultan ser  $n$  trayectorias estacionarias reflexivas, constituidas por  $n$  trayectos lineales en  $n - 1$  puntos de choque sobre la superficie circular espejada. Reflexivas, pues en sus  $n - 1$  colisiones con la superficie espejada circular, cada uno de estos rayos luminosos verifica la *Ley de Reflexión*, respecto de la normal radial.

Entre estos  $n$  rayos reflexivos (14.102), existen trayectorias con la misma longitud total si se mantiene la relación entre los pares  $k$  y  $\tilde{k} = n + 1 - k$ , si  $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

De manera precisa,

- i) Si  $n$  es par existen exactamente  $\frac{n}{2}$  pares de  $(k, \tilde{k})$  correspondientes a trayectorias luminosas que verifican que  $T(\alpha_c(k)) = T(\alpha_c(n + 1 - k))$  para  $k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ .

Además, los tiempos de tránsito de los rayos están ordenados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T(\alpha_c(1)) = T(\alpha_c(n)) < T(\alpha_c(2)) = T(\alpha_c(n - 1)) < T(\alpha_c(3)) = T(\alpha_c(n - 2)) < \\ \dots < T(\alpha_c(\frac{n}{2} - 1)) = T(\alpha_c(\frac{n}{2} + 2)) < T(\alpha_c(\frac{n}{2})) = T(\alpha_c(\frac{n}{2} + 1)) < 2nR. \end{aligned} \quad (14.105)$$

Entonces, si  $n$  es par, los tiempos de (14.105) se calculan a partir de las siguientes desigualdades angulares:

$$0 < \Delta\alpha_c(1) < \Delta\alpha_c(2) < \cdots < \Delta\alpha_c\left(\frac{n}{2}\right) < \pi \quad (14.106)$$

$$\pi < \Delta\alpha_c\left(\frac{n}{2} + 1\right) < \cdots < \Delta\alpha_c(n) < 2\pi.$$

ii) Si  $n$  es impar existen exactamente  $\frac{n-1}{2}$  pares de  $(k, \tilde{k})$  tales que  $T(\alpha_c(k)) = T(\alpha_c(n+1-k))$  para  $k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ .

Estos rayos luminosos tienen tiempos de tránsito ordenados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T(\alpha_c(1) = T(\alpha_c(n))) < T(\alpha_c(2)) = T(\alpha_c(n-1)) < \cdots \\ < T(\alpha_c\left(\frac{n-1}{2}\right)) = T(\alpha_c\left(\frac{n+3}{2}\right)) < T(\alpha_c\left(\frac{n+1}{2}\right)) = 2nR. \end{aligned} \quad (14.107)$$

Entonces, si  $n$  es impar, los tiempos en (14.107) se calculan a partir de las siguientes desigualdades angulares:

$$\begin{aligned} 0 < \Delta\alpha_c(1) < \cdots < \Delta\alpha_c\left(\frac{n-1}{2}\right) < \Delta\alpha_c\left(\frac{n+1}{2}\right) = \pi \\ \pi < \Delta\alpha_c\left(\frac{n+3}{2}\right) < \cdots < \Delta\alpha_c(n) < 2\pi. \end{aligned} \quad (14.108)$$

En caso de ser  $n$  impar si  $k = \frac{n+1}{2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$  la trayectoria reflexiva está construida por  $n-1$  colisiones entre  $C$  y  $B$  con longitud de recorrido  $T(\alpha_c\left(\frac{n+1}{2}\right)) = 2nR$  máxima.

Simultáneamente, las trayectorias reflexivas definidas por cada uno de los pares  $(k, \tilde{k} = n+1-k)$ , para  $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , corresponden a poligonales abiertas pero recorridas en sentido contrarios y sobre puntos en la circunferencia espejada con la mismas abscisas  $\cos(\alpha_{c_i}(k)) = \cos(\alpha_{c_i}(\tilde{k}))$  y con ordenadas de signo contrario  $-\sin(\alpha_{c_i}(k)) = \sin(\alpha_{c_i}(\tilde{k}))$ , si  $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  (e.g. Figuras 14.15 , 14.16).

Por todo lo expuesto, estamos en condiciones de afirmar el siguiente resultado.



**Proposición 14.5.11**  $T(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ , (14.99), Figura 14.7, *obtiene su mínimo absoluto en la abscisa crítica singular  $\alpha_{c_i}^s = \pi$ ,  $\forall 1 \leq i \leq n-1$  -(exceptuando múltiplos periódicos)- y con el valor  $T(\pi, \dots, \pi) = 2R$ .*

*Si el número  $n-1$  de colisiones en el espejo circular es par,  $T(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}$  obtiene su máximo absoluto en la abscisa crítica estacionaria  $\alpha_{c_i}^e(\tilde{k} = \frac{n+1}{2})$  (14.100) y con longitud de recorrido reflexiva  $T(\alpha_{c_i}^e(\frac{n+1}{2}))_{1 \leq i \leq n-1} = 2nR$  -extravagancia luminosa-, (e.g. Figura 14.15,  $k = 3$ ).*

*Si el número  $n-1$  de colisiones en el espejo circular es impar,  $T(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}$  obtiene su máximo absoluto en las abscisas críticas estacionarias  $\alpha_{c_i}^e(\frac{n}{2})_{1 \leq i \leq n-1}$  y  $\alpha_{c_i}^e(\frac{n}{2} + 1)_{1 \leq i \leq n-1}$  en (14.100) -(exceptuando sus múltiplos periódicos). Entonces, los recorridos más largos insumen la longitud  $T(\alpha_{c_i}^e(\frac{n}{2}))_{1 \leq i \leq n-1} = T(\alpha_{c_i}^e(\frac{n}{2} + 1))_{1 \leq i \leq n-1} = \sqrt{2}Rn\sqrt{1 - \cos(\Delta\alpha_{c_i}(\frac{n}{2}))}$   
 $= \sqrt{2}Rn\sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{n})} = \sqrt{2}Rn\sqrt{1 - \cos(\Delta\alpha_{c_i}(\frac{n}{2} + 1))}$ , (e.g. Figura 14.16,  $k = 3$  y  $k = 4$ ). En esta situación la extravagancia luminosa se realiza según las dos trayectorias (14.102) definidas por ambos conjuntos críticos estacionarios,  $\alpha_{c_i}^e(\frac{n}{2})_{1 \leq i \leq n-1}$  y  $\alpha_{c_i}^e(\frac{n}{2} + 1)_{1 \leq i \leq n-1}$ , con un número impar  $n-1$  de rebotes sobre el espejo circular que son puntos simétricos, respectivamente, respecto del diámetro que une  $(-R, 0)$  con  $(R, 0)$ , la primera poligonal es recorrida en sentido horario <sup>5</sup> desde  $C$  y la que se corresponde con  $\alpha_{c_i}^e(\frac{n}{2} + 1)_{1 \leq i \leq n-1}$  recorrida en sentido antihorario, (e.g. Figura 14.16,  $k = 3$  y  $k = 4$ ). Las restantes abscisas críticas estacionarias son rayos luminosos, de este tercer ejemplo en el espejo cuasi-esférico  $T(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ , (14.99), Figura 14.7, que ni maximizan ni minimizan la longitud total (14.99) en sus recorridos, según lo establecido por las expresiones (14.107) y (14.108) al ser sustituidas en (14.103), (e.g. Figura 14.15,  $k = 1$ ,  $k = 2$ ,  $k = 4$  y  $k = 5$ ; e.g. Figura 14.16,  $k = 1$ ,  $k = 2$ ,  $k = 5$  y  $k = 6$ ). ■*

<sup>5</sup>Normalmente, utilizamos las abreviaturas del inglés cw. de clockwise y ccw. de counterclockwise para señalar el sentido de recorrido de ciclos y caminos en las representaciones gráficas. e.g. Figura 14.16.

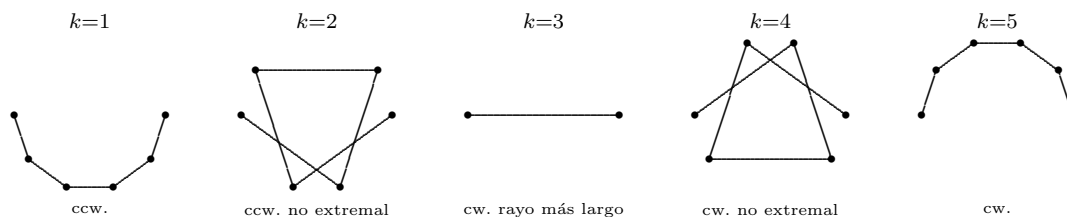


Figura 14.15: Representación de los rayos reflexivos para  $n - 1 = 4$  colisiones.

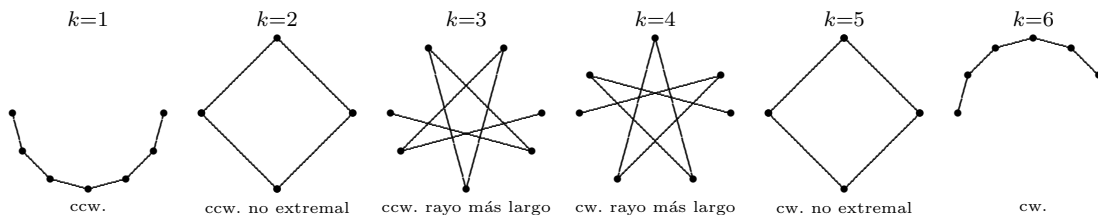


Figura 14.16: Representación de los rayos reflexivos para  $n - 1 = 5$  colisiones.

## 14.6. Confluencia de dos áreas de investigación de Hamilton

En este Capítulo se han expuesto ejemplos precisos de la geometría óptica en el que el rayo luminoso -una construcción ideal- no necesariamente minimiza el tiempo de propagación. Simultáneamente, se determinan las trayectorias luminosas para cada sistema óptico expresándolas en función de los parámetros físicos y geométricos naturales del caso (i.e. la velocidad de la luz en un medio específico, la posición de la fuente luminosa, la localización de los puntos extremos del trayecto y la geometría de la superficie o interfase espejada considerada). A partir de ahora, nos dedicaremos a destacar ciertos detalles y enfoques de esta presentación.

Es importante mencionar una vez más, que la tarea de encontrar los puntos estacionarios de la función de propagación en el Problema de Heron y en los distintivos casos analizados en el espejo cuasi-esférico, es equivalente a realizar la exploración de los puntos críticos estacionarios sobre la función distancia total recorrida por los rayos -módulo la velocidad de la luz en el medio uniforme. En términos simples, en estos casos, la búsqueda de las braquistócronas es coincidente con la determinación de las geodésicas. Por otra parte, las braquistócronas han sido singularizadas en la *Ley de Refracción* conocida como *Ley de Snell*.

Se ha verificado la unicidad de la braquistócrona del hallazgo de W. Snell en refracciones entre dos medios uniformes distintos, con principios del análisis matemático. En este problema de la naturaleza óptica nuestra propuesta se diferencia de la de otros muchos autores, entre ellos [Tikhomirov, V. M. (1990), Santaló, L. A. (1993)], quienes normalmente transcriben los fundamentos geométricos de la demostración sustentada bajo el Principio de C. Huygens. De manera precisa, explicitamos la braquistócrona para un sistema óptico geométrico de interfase de ancho arbitrario. A tal efecto, se encuentra la raíz real que anula la ecuación polinómica de cuarto grado, que se plantea al estudiar la *Ley de la Refracción* y que determina la trayectoria luminosa. Además, la afirmación en el *Teorema 14.4.15*, establece que para caracterizar la braquistócrona de un sistema con interfase de ancho arbitrario es suficiente conocer la respuesta del problema en una interfase unitaria. En la subsección §14.4.3 denominada *Contribuciones Auxiliares*, se ha obtenido la expresión analítica de las raíces que realizan el Problema de Snell en función de las constantes de las posiciones iniciales y finales de los rayos, i.e.  $a$  y  $b$ , y de los parámetros físicos  $v_1$  y  $v_2$ , i.e. la velocidad de los rayos luminosos en cada uno de los dos medios que componen del sistema óptico. Los casos de colisión en el punto medio de la interfase y el sistema óptico que deviene en un polinomio de grado cuarto palíndromo - pág. 520 y §14.4.5- se trataron especialmente por ser dos casos particulares de sencilla resolución.

La metodología propuesta en la §14.2 nos ha permitido lograr el objetivo propuesto en la geometría plana y circular. Los métodos de Ferrari y Cardan nos permitieron evidenciar y proponer la competitividad entre (14.22), (14.25), (14.26) y (14.27) para poder exhibir el curso del rayo luminoso en el *Problema de Snell*. En [Faucete, W. M. (1996)], por otra parte se encara la resolución de los polinomios de grado cuarto con coeficientes racionales, aunque en las situaciones particulares que se estudian, la tarea de seleccionar la raíz que realiza el tiempo de tránsito mínimo para parámetros ópticos  $-v_1, v_2-$  y físico-geométricos  $-a, b-$  arbitrarios del sistema, requirió esfuerzo algebraico no menor. Cuando se estudia el polinomio palíndromo de cuarto grado (14.13) no se usa la fórmula de Cardan [Christianson, B. (1991)] para determinar una raíz de la resolvente cúbica, i.e.  $y^3 - cy^2 - 4c_1c_2 = 0$ , porque los cálculos algebraicos resultan en extremo complicados. Por tal razón, en esta circunstancia, es necesaria la selección de una raíz cúbica

## Capítulo 14. Hamilton en la Geometría Óptica vs Hamilton en el Icosian Game

---

$\sqrt[3]{\frac{c^2}{3} + \sqrt{16c_1c_2\left(\frac{c^3}{27} + c_1c_2\right)}}}{2|c|^2}$ , debiéndose adicionar a su propia recíproca. Cabe aclarar que el anterior procedimiento no facilitaría el hallazgo de la expresión de la raíz que resuelve el *Problema de Snell* en una interfase espejada de ancho unitario para valores arbitrarios de los parámetros geométricos y ópticos  $a$ ,  $b$ ,  $v_1$ , y  $v_2$ .

Los seguidores de Descartes fueron los primeros en declarar que el proclamado *Principio de Tiempos Mínimos de Fermat*, no era siempre sustentable en las experiencias naturales, ellos sostuvieron que: “the law of reflection, is sometimes consistent with the greatest rather than the least propagation time”. Este postulado de la geometría óptica es el que verifican los ejemplos primero y segundo que hemos estudiado. Este es el contexto adecuado en las superficies espejadas cuasi-esféricas. Aún más evidente es nuestra tercer aplicación en la que se coincide con la ideas de Hamilton, i.e. “the stationary property of the transit time of light rays ” [Niel, B. I. (2001)]. En las afirmaciones de la *Proposición* 14.5.3, existen muchos detalles a observar bajo la validez de los postulados de la geometría óptica, las Figuras 14.15 y 14.16 bosquejan de manera simbólica lo que se ha destacado a lo largo del análisis del tercer ejemplo.

Entonces, en un espejo cóncavo ideal, [Niel, B. I. (2002)], que damos en llamar cuasi-esférico o cuasi-circular al suponer la colocación de  $n$  espejos planos cuyas normales coinciden con las  $n$ -ésimas raíces de la unidad, los rayos que satisfacen la Ley de Reflexión en sus  $n$  colisiones sobre esta construcción ideal, que empiezan y finalizan en el mismo punto en la circunferencia, tienen la forma de las poligonales regulares frontera de polígonos y de polígonos estrellados (Ver Figura 14.17). En consecuencia, la naturaleza, suele minimizar, o a veces maximizar recursos y en muchas situaciones ni es eficiente, ni extravagante, es de conducta intermedia. Entre las poligonales reflexivas [Niel, B. I. (2003)], se hallan las que minimizan el Recorrido del Viajante, así como aquellas del recorrido más ineficiente de un viajante que visitara un número impar de puntos, i.e. la trayectoria coincidente con la poligonal estrellada de máxima densidad [Kirillov, A. (1999)]. Por otra parte, las poligonales estrelladas de densidad intermedia ni minimizan ni maximizan el tiempo total de propagación de los rayos luminosos. La interpretación de estos resultados así como el

estudio de ciertos problemas de los Hamiltonianos Euclídeos óptimos, son explicados con precisión en el Capítulo 2, Capítulo 3 y su Sección 3.4 en [Niel, B. I. (2014)].

Es importante destacar que en este enfoque Hamiltoniano de la Geometría Óptica en un espejo cuasi-esférico, la generalización de la tercera aplicación del método de variación de los parámetros de los rayos geométricos, ha confluído en las trayectorias hamiltonianas abiertas y cerradas recorridas por el viajante sobre los vértices de polígonos regulares.<sup>6</sup>

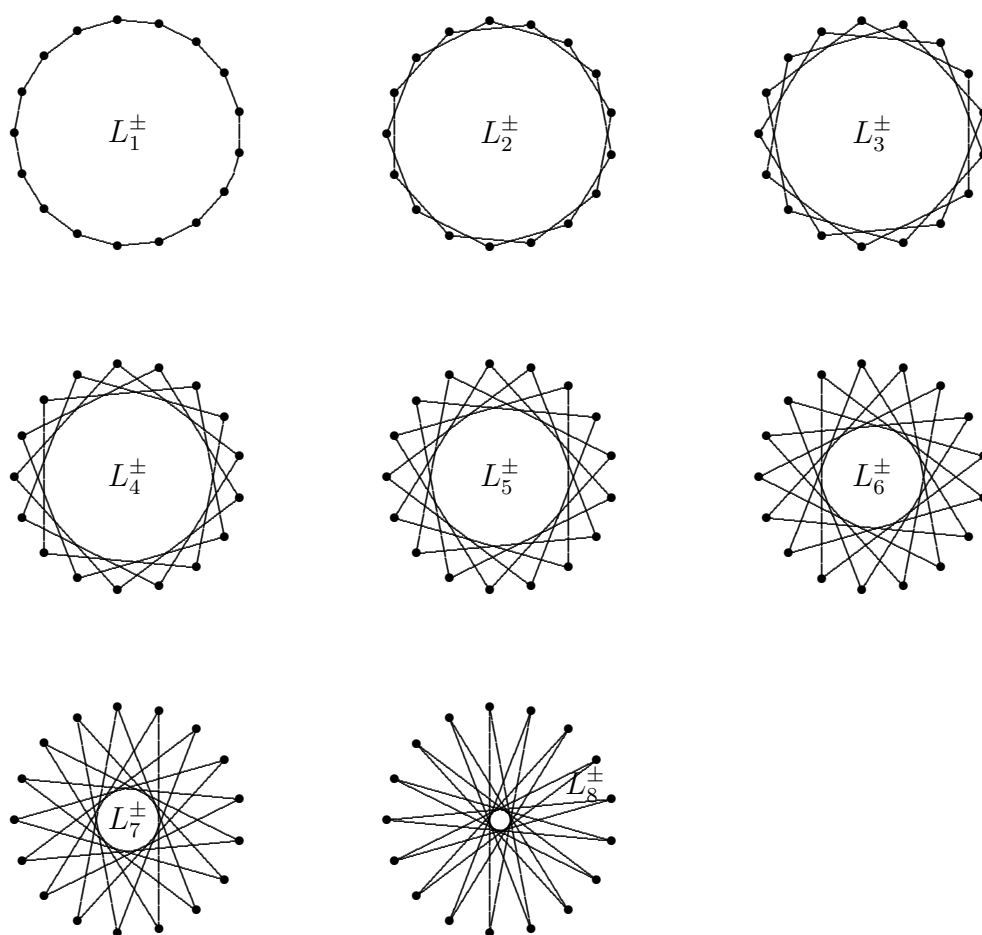


Figura 14.17: Número primo de Fermat  $n = 17$ : Recorridos del viajante  $\sim$  Rayos en el espejo cuasi-esférico  $e^{i\pi} \sqrt[17]{1}$ .

<sup>6</sup>Normalmente conocidas como problemas del Travelling Salesman Problem, TSP, en sus versiones Mín. (Mín. TSP) y Máx. (Máx. TSP) ya sean en circuitos (cycles) o en caminos no cíclicos, es decir Mín. TSPP y Máx. TSPP. Acrónimos que agregan una “P” proveniente de Path.

## 14.7. Comunicaciones y publicaciones de las ideas del Capítulo 14

1. Niel, B. I. Mathematical analysis to elucidate Fermat's Principle circumstances. Actas del Séptimo Congreso Dr. Antonio A. R. Monteiro, Bahía Blanca. Departamento de Matemática. Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur, 2003. (Resumen en la pág. 100, 2003). Autor-Expositor.
2. Niel, B. I. Hallazgos de Hamilton en óptica geométrica en un juego Hamiltoniano. LIII Reunión de Comunicaciones Científicas, U.M.A. 2003. Autor-Expositor.
3. Niel, B. I. Hamilton's real finds on geometric optics in a Hamiltonian play . *Proceedings of MS' 2004 University Claude Bernard - Lyon I, LNSS, CNRS, 5-7 July 2004*. France. (Full article at pg. 9.9-9.13). Autor-Expositor.
4. Paper publicado en [Niel, B. I. (2005a), Niel, B. I. (2005b)], bajo el título: *Fermat, Snell and Hamilton on Geometric Optics Circumstances*.

## Parte XV

# Parciales-Coloquios





# Capítulo 15

## Parciales y/o Coloquios

Ponemos a disposición del alumno interesado modelos semejantes a los parciales y coloquios que hemos utilizado para la evaluación durante las cátedras del primer cuatrimestre del año 2012, 2013 y 2014. Además, en algunos de los ejercicios, presentamos las claves que llevarían al estudiante a lograr las respuestas, de manera directa y eficiente. En otros, presentaremos sugerencias. Así como también, una vez más, habrá selección de ejercicios o incisos de los mismos que aparecerán resueltos de manera completa. En general, estas nuevas consideraciones y /o desarrollos, aparecerán al final de cada uno de los niveles del PARCIAL y/o COLOQUIO escogido.

## 15.1. ♣ © 1<sup>er</sup> COLOQUIO OPTATIVO

Ing. Electrónica, Ing. Electricista y Prof. en Matemática

♣ © 1<sup>er</sup> COLOQUIO OPTATIVO ANALISIS MATEMATICO I 25/04/2013

APELLIDOS Y NOMBRES :	D.N.I. N <sup>o</sup> :
CARRERA :	L.U. N <sup>o</sup> :

1. ♣ © Interprete gráficamente la solución de la inecuación  $2 < |2^{-|x|} - 1| + 2 < \frac{3}{2}$ .  
Ver en §4.1 la Figura 4.1, pág. 170.
- 

2. ♣ © Determine, cuando existan, los siguientes límites, Solución en §3 pp. 171-172:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] - x}{x} \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[x]}{x} \quad (c) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{[x] - 1}$$


---

3. ♣ © Determine el dominio de definición de  $f(x) = \frac{\sqrt{x - [x]}}{x}$ , clasifique, si existen, las discontinuidades y redefina  $f(x)$  si es posible extender su dominio de continuidad. Resolución: Ver §3, pp. 173-174, Figura 4.9 pág. 175.
- 

4. ♣ © Resuelva analíticamente la inecuación  $|\log_2|(x + 1)|| \geq K$ , si  $K \gg 0$ .  
Resolución pp. 175 - 178, Figura 4.11, Figura 4.12, Figura 4.13 y Figura 4.14.
- 

5. ♣ © Estudie analíticamente el siguiente recorrido, Ver Ejemplo 3.1.4, pág. 157:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(t + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \iff \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \sin t \\ y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin(t) + \cos(t)) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Sugerencia: El recorrido se realiza sobre parte de la curva plana  $2y^2 - 1 - x = 0$ .

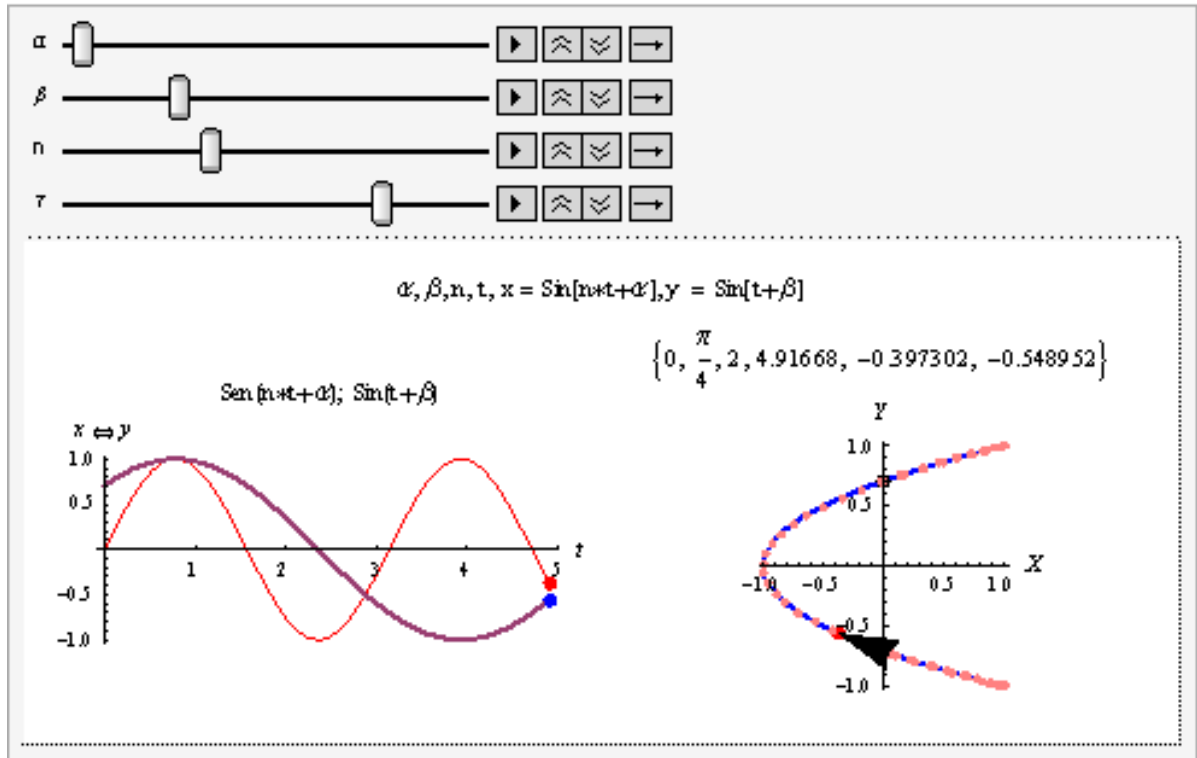


Figura 15.1:  $x(t) = \sin(2t)$  e  $y(t) = \sin(t + \frac{\pi}{4})$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

6. ♣© Estudie analíticamente el siguiente recorrido:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases} \quad t \in [-\infty, +\infty]$$

Sugerencia: El recorrido se realiza sobre parte de la curva plana  $x^2 - y^2 - 1 = 0$ .

Resolución en §4.1, pág. 180, ver Figura 4.17 de la pág. 180.

Indique la cantidad de hojas entregadas

Firme la última hoja

## 15.2. ♣ © 2<sup>do</sup> COLOQUIO OPTATIVO

Ing. Electrónica, Ing. Electricista y Prof. en Matemática

♣ © 2<sup>do</sup> COLOQUIO OPTATIVO ANALISIS MATEMATICO I 21/05/2013

APELLIDOS Y NOMBRES :	D.N.I. N <sup>o</sup> :
CARRERA :	L.U. N <sup>o</sup> :

1. ♣ © Determine los puntos críticos estacionarios, singulares y fronteras de  $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$  en el intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, 3\pi]$ . Caracterice todos los puntos críticos y determine el máximo y el mínimo absoluto de  $f(x)$ .

---

2. ♣ © Justifique el Teorema de Rolle y Enuncie el Teorema del Valor Medio de Lagrange.

---

3. ♣ © Sea  $y = f(x)$  continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Interprete geométricamente que cambios produce la sustracción del factor lineal  $\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a)$  a  $f(x)$ .

---

4. ♣ © Estudio completo de  $f(x) = x^2 \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ .

*Opción:* La Figura 15.2 representa los puntos de la curva plana  $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ . Puede utilizar razonamientos geométricos, proposiciones y teoremas conocidos para esbozar la gráfica de  $f(x) = x^2 \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$  a partir de datos de esta representación gráfica.

---

5. ♣ © Sea la conicoide de Nicomedes: 
$$\begin{cases} x(t) = -1/4 + \cos(t) \\ y(t) = -1/4 \tan(t) + \sin(t) \end{cases}$$

a) Determine la expresión cartesiana de esta conicoide de Nicomedes.

b) Determine la ecuación de la asíntota vertical.

c) Determine las ecuaciones de las rectas tangentes en  $(0, 0)$ .

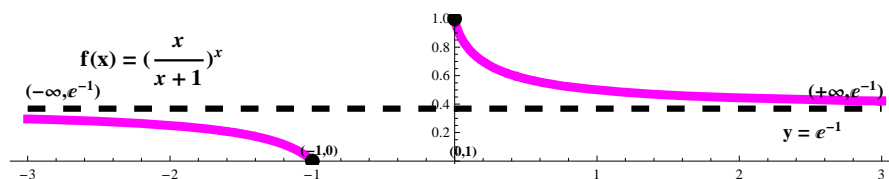


Figura 15.2: Gráfica de  $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ .

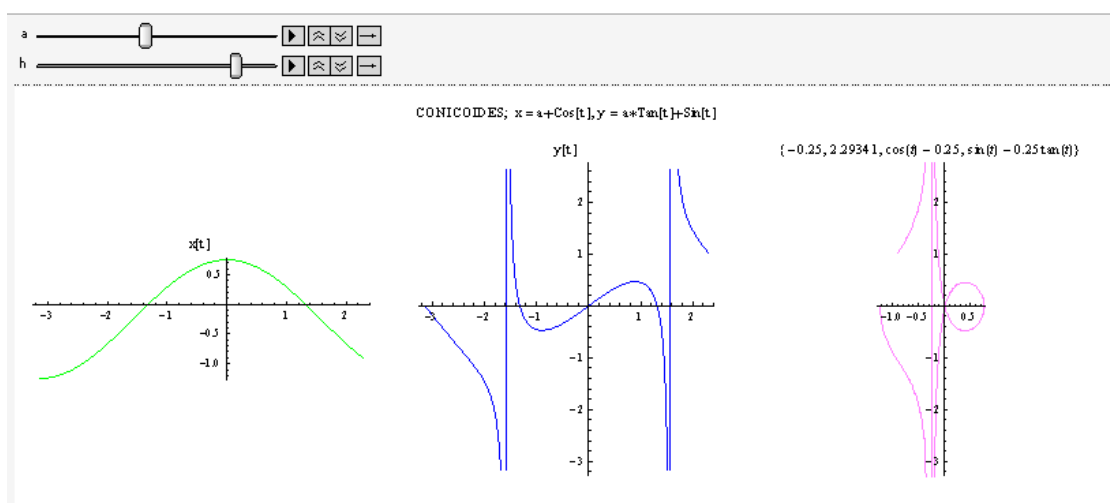


Figura 15.3: Gráfica de  $f(x) = \pm \sqrt{1 - (x + 1/4)^2} \left(1 - \frac{1/4}{x + 1/4}\right)$ .

Resolución del Ejercicio N<sup>o</sup> 5 de este ♣© COLOQUIO OPTATIVO.

Aquí desarrollaremos una visión más general, no estudiaremos solamente la curva con  $a = -\frac{1}{4}$  de la Figura 15.3, sino que analizaremos como las formas de las curvas dadas por la parametrización (15.1) cambian al variar el parámetro  $a$ . Claro está que lo realizaremos dentro del contexto teórico conceptual adquirido. Estas curvas planas, i.e. (15.1), [Stewart, J. (2008)], pp. 625-626, son reconocidas como **Concoides de Nicomedes**. Sugerencia: Ver ilustraciones en §13.5 Cuadro 13.10 pág. 495 y recordemos aquella intención inicial §1.1 de la pág. 28.

$$\begin{cases} x(t) = a + \cos(t) \\ y(t) = a \tan(t) + \sin(t) \end{cases} \quad (15.1)$$

Puede ser reescrita como:

$$\begin{cases} x(t) = a + \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \left( \frac{a + \cos(t)}{\cos(t)} \right) \end{cases} \quad (15.2)$$

Desde  $y(t) = \sin(t) \left( \frac{a + \cos(t)}{\cos(t)} \right)$  y de  $x(t) - a = \cos(t)$ , entonces elevando al cuadrado esta última ecuación, aunque podamos ingresar ciertas soluciones no deseas,  $(x(t) - a)^2 = \cos^2(t)$ , y utilizando la identidad trigonométrica fundamental, ver en §3, Figura 3.1, pág 151, tenemos que  $\sin^2(t) = 1 - (x(t) - a)^2$ , se llega a:

$$y^2 = \frac{[1 - (x - a)^2] x^2}{(x - a)^2} \quad (15.3)$$

$$y^2 (x - a)^2 = [1 - (x - a)^2] x^2, \quad x \neq a \quad (15.4)$$

$$x^4 + y^2 x^2 - 2y^2 x a - 2a x^3 + a^2 y^2 + x^2 (a^2 - 1) = 0 \quad (15.5)$$

$$|y| = \sqrt{[1 - (x - a)^2]} \frac{|x|}{|x - a|} \quad (15.6)$$

Esta identidad puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{cases} y = \sqrt{[1 - (x - a)^2]} \frac{|x|}{|x - a|} & \text{si } y \geq 0 \\ y = -\sqrt{[1 - (x - a)^2]} \frac{|x|}{|x - a|} & \text{si } y < 0 \end{cases} \quad (15.7)$$

Finalmente la reescribimos como:

$$\begin{cases} y = \sqrt{-(x - (a - 1))(x - (a + 1))} \frac{|x|}{|x - a|} & \text{si } y \geq 0 \\ y = -\sqrt{-(x - (a - 1))(x - (a + 1))} \frac{|x|}{|x - a|} & \text{si } y < 0 \end{cases} \quad (15.8)$$

En virtud de (15.7), estudiaremos las formas de las curvas en el semiplano no acotado y cerrado  $y \geq 0$  y luego reflejaremos la imagen respecto al eje de las abscisas, i.e. con respecto del eje  $x$ . Conclusión válida, que ha quedado explícita desde (15.3) y de (15.4),

ya que cuando en estas representaciones cartesianas de las curvas estudiadas, es reemplazada  $y$  por  $-y$ , las ecuaciones permanecen inalteradas, por lo que el gráfico posee simetría respecto del eje de las abscisas. Estamos, estableciendo, que las curvas de Nicomedes tiene simetría respecto del eje  $x$ .

Por el contrario, las curvas estudiadas no presentan simetría respecto del eje de las ordenadas, ya que el cambio en (15.3) y en (15.4) de la variable  $x$  por  $-x$ , altera las identidades.

En lenguaje matemático, aclaramos que efectuaremos varios de los cálculos esenciales del cálculo diferencial sobre:

$$y = \sqrt{[1 - (x - a)^2]} \frac{|x|}{|x - a|}, \text{ si } y \geq 0 \quad (15.9)$$

1. Al reemplazar  $a = 0$ , en (15.1),  $\rightarrow \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 = 1.$

Dejamos al lector precisar una variación para  $t$  que recorra parte de la circunferencia unitaria o que la recorra completa. Sugerencia: Ver §1.1, pág. 28.

2. Observemos  $x(t) = a + \cos(t)$  nos impone, en una primera y ligera mirada, analizar dos regiones para la variación del parámetro, a saber  $|a| \leq 1$  y  $|a| > 1$ .
3. En (15.2), es necesario extraer las abscisas donde se anula la función coseno. ¿ Es necesario preguntarse entonces cuando  $\cos(t) = 0$  ? La respuesta es visible en (15.6),  $x = a$  es abscisa candidata a determinar una asíntota vertical, de todos los casos, excepto cuando  $a = 0$ .
4. En (15.6),  $\lim_{x \rightarrow a} |y| = +\infty$ , en (15.9)  $\lim_{x \rightarrow a^+} y = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a^-} y = +\infty$ . Luego, efectivamente  $x = a$  es asíntota vertical de las Nicomedes (15.1), si  $a \neq 0$ .
5. Claramente en (15.3) y (15.9), resulta que la extensión o rango de variabilidad de  $x$  para cada  $a$  especificado, es acotado, precisamente  $0 < |x(t) - a| \leq 1$ . Por lo tanto, gráficamente, en nuestra hojita de trabajo, marcaremos los siguientes intervalos de  $x$ , una vez escogido un valor para el parámetro  $a$ ,  $[a - 1, a]$  y  $(a, a + 1]$ . Levantaremos luego, una banda vertical, limitada por  $x = a - 1$  y  $x = a + 1$ ,

descartando que la curva atraviese ningún punto de  $x = a$  a la cual, se aproxima la curva, en los hipotéticos mundos de los imaginados puntos  $(x \rightarrow a^-, +\infty)$  y  $(x \rightarrow a^+, +\infty)$ , ver §5.3 pág. 206, Figura 5.14.

6. Estamos ahora, en condiciones de establecer que el rango o extensión de la variable  $y$  es  $\mathbb{R}$ , i.e.  $(-\infty, +\infty)$ .
7. Observemos que (15.3) e inclusive (15.7), nos llevarían a pensar que el punto  $(0, 0)$  siempre pertenece a las Nicomedes (15.1). Absurdo, el origen de coordenadas es un punto de la curva sólo cuando tratemos las curvas con el parámetro en la región  $|a| \leq 1$  y  $a \neq 0$ . Se justifica a partir del rango de variabilidad de  $x$ , que efectuamos previamente.
8. La derivación en forma implícita de (15.3), pensando en que existe  $x(y)$ , y efectuado la derivación respecto de  $y$  conduce a:

$$y = -x \frac{dx}{dy} \left[ 1 + \frac{a}{(x-a)^3} \right] \quad (15.10)$$

9. Las expresiones en (15.8) nos ayudan a reducir ciertos cálculos, en virtud de la simetría especular que poseen los gráficos de las curvas respecto de las asíntotas verticales según se consideren el caso  $a > 0$  y el caso  $b = -a < 0$ . Por lo tanto, el presente razonamiento, en realidad debería reducir los estudios específicos a los casos en que el parámetro  $a$  sea positivo y simetría respecto del eje asíntótico se obtienen las figuras de las curvas cuando el parámetro sea negativo. Supongamos  $a > 0$  y  $b = -a$ , además consideremos que  $b - 1 < x < b$ , entonces por (15.8) y siempre considerando el estudio en la región  $y \geq 0$ .

$$y = \sqrt{-(x - (b - 1))(x - (b + 1))} \frac{|x|}{|x - b|}, \quad b - 1 < x < b$$

Luego, utilizando la definición del valor absoluto en los factores lineales considerando el intervalo de variación de  $x$  que está siendo considerado, se tiene:

$$y = \sqrt{-(x - (b - 1))(x - (b + 1))} \frac{-(x)}{-(x - b)}, \quad b - 1 < x < b$$



$$y = \sqrt{-(x - (b - 1))(x - (b + 1))} \frac{x}{(x - b)}, \quad b - 1 < x < b$$

Como, en realidad hemos seleccionado  $b$  como el opuesto de un parámetro  $a > 0$ , lo reemplazamos en la expresión anterior, y se tiene:

$$y = \sqrt{-(x - (-a - 1))(x - (-a + 1))} \frac{x}{(x - (-a))}, \quad -a - 1 < x < -a$$

Ahora teniendo en cuenta que  $-a - 1 < x < -a$ , implica  $a < -x < a + 1$ , obtenemos:

$$y = \sqrt{-(-x - (-a - 1))(-x - (-a + 1))} \frac{-x}{(-x - (-a))}, \quad a < -x < a + 1$$

finalmente reordenado los signos, se concluye que:

$$y = \sqrt{-(x - (a - 1))(x - (a + 1))} \frac{x}{(x - a)}, \quad a < x < a + 1.$$

Analogamente se puede justificar que si  $b < x < b + 1$ , los valores de  $y$  son los que se obtienen en  $a - 1 < x < a$ , considerando al parámetro  $b$  como el opuesto en signo del  $a$ , i.e.  $b = -a$ .

10. En (15.5) debemos investigar respecto del rol del parámetro  $a$ . Obsérvese, que si  $a = \pm 1$ , el término cuadrático en  $x^2$  desaparece. ¿Qué característica le impone esta desaparición a las curvas de Nicomedes? Por otra parte, si  $|a| < 1$  o si  $|a| > 1$  ¿Cuál es la diferenciación que matemáticamente debemos explicitar en los gráficos que pretendemos obtener? Todo parece conducirnos al hecho de que cuando el origen pertenece a las curvas, es decir para  $|a| \leq 1$  en él las curvas poseen propiedades diferenciadas? Intentemos ir por una respuesta, llegado el momento, e.g. cuando estudiemos el caso  $a = 1$  y los casos en los cuales  $0 < a < 1$ .

**Ejercicio 15.2.1** *Proponemos esbozar los gráficos de las curvas de la Nicomedes de las ilustraciones en las págs. 28 y 495 utilizando esta característica entonces diagramar sus gemelas, i.e. respectivamente  $a = \frac{1}{4}$ ,  $a = 1$  y  $a = -2$ .*

11. Estudio de los parámetros en la región  $|a| > 1$ .

¡ Solo estudiaremos los parámetros en la región  $a > 1$ !

El  $(0, 0)$  no pertenece a la región donde se despliega la curva (15.1). Evidenciado también en (15.5), si  $|a| > 1$ .

- ¿ Existen abscisas en las que  $y = 0$  en (15.9) ? La respuesta es afirmativa, son aquellas en las cuales  $1 - (x - a)^2 = 0$ . Es decir  $|x - a| = 1$ , i.e.  $x_{\cap}^1 = a - 1$  y  $x_{\cap}^2 = a + 1$ . Ver Nicomides con  $a = 2$ , snapshot inferior del Cuadro 13.10, en la pág. 495. Desde (15.8), es evidente que  $((a - 1), 0)$  y  $((a + 1), 0)$  son los dos únicos puntos de la curva que intersecan al eje de las abscisas.
- Reemplazando las coordenadas del punto  $((a + 1), 0)$  en la expresión (15.10) resulta que  $\frac{dx}{dy} = 0$ . Es decir, existe recta tangente única en el punto  $((a + 1), 0)$ .
- Reemplazando las coordenadas del punto  $((a - 1), 0)$  en la expresión (15.10) resulta que  $\frac{dx}{dy} = 0$ . Es decir, existe recta tangente única en el punto  $((a - 1), 0)$ .
- Si reescribimos (15.10), se tiene:

$$y \frac{dy}{dx} = -x \left[ 1 + \frac{a}{(x - a)^3} \right] \quad (15.11)$$

Resulta sencillo verificar que si  $y > 0$  el signo de  $y \frac{dy}{dx} < 0$ ,  $x \in (a, a + 1]$ . Puesto que  $x$  es positiva, y también lo es  $1 + \frac{a}{(x - a)^3}$  en dicho intervalo, por lo tanto el signo negativo de la expresión (15.11) prevaleció. En cambio si  $x \in [a - 1, a)$ ,  $1 + \frac{a}{(x - a)^3}$  es negativa y entonces  $y \frac{dy}{dx} > 0$ .

La conclusión que se obtiene es que a derecha de la asíntota vertical las curvas de Nicomedes con  $a > 1$ , considerando  $y > 0$  decrecen desde el  $+\infty$  a cero a medida que las abscisas crecen naturalmente en el intervalo acotado ni abierto ni cerrado  $(a, a + 1]$ . Por el contrario, en el intervalo acotado ni abierto ni cerrado  $[a - 1, a)$ , considerando  $y > 0$ , la coordenada  $y$  crece desde el punto  $((a - 1), 0)$  hasta un crecimiento no acotado en el  $+\infty$  en la que las curvas se aproximan una vez mas a la asíntota vertical  $x = a$ . Un bosquejo que

provoque una reflexión respecto del eje de las abscisas, al ya delineado para  $y > 0$ , conducirá a ilustraciones del tipo Cuadro 13.5, pág. 495, snapshot inferior. Sugerencia: Aconsejamos, no perderse de prestar atención en cada caso de la riqueza en el acompañamiento de la evolución de cada coordenada según las expresiones paramétricas en (15.1).

12. Estudio de los parámetros en la región  $|a| \leq 1$  y  $a \neq 0$ .

¡ Solo estudiaremos los parámetros en la región  $0 < a < 1!$

El  $(0, 0)$  pertenece a la curva (15.1).

- $a = \pm 1$ .

Las abscisas adicionales al origen de coordenadas por el que pasan las curvas verifican para el caso  $a = 1$  y  $a = -1$ , son repectivamente  $x_{\cap}^1 = 0$ ,  $x_{\cap}^2 = 2$  y  $x_{\cap}^1 = -2$ ,  $x_{\cap}^2 = 0$ . Ver Nicomides con  $a = -1$ , snapshot superior del Cuadro 13.10, en la pág. 495.

En (15.5), claramente  $a = \pm 1$ , implica:

$$x^4 + y^2 x^2 - 2 a y^2 x - 2 a x^3 + a^2 y^2 = 0 \quad (15.12)$$

Si reemplazamos en (15.12)  $a = 1$ , obtenemos:

$$x^4 + y^2 x^2 - 2 y^2 x - 2 x^3 + y^2 = 0. \quad (15.13)$$

Aquí, seleccionamos estudiar el caso  $a = 1$ , i.e. cuando (15.1) se convierte en:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \cos(t) \\ y(t) = \tan(t) + \sin(t) \end{cases} \quad (15.14)$$

y (15.9) en:

$$y = \sqrt{[1 - (x - 1)^2]} \frac{|x|}{|x - 1|}, \quad \text{si } y \geq 0 \quad (15.15)$$

y (15.8) en:

$$\begin{cases} y = \sqrt{-x(x-2)} \frac{|x|}{|x-1|} & \text{si } y \geq 0 \\ y = -\sqrt{-x(x-2)} \frac{|x|}{|x-1|} & \text{si } y < 0 \end{cases} \quad (15.16)$$

La característica esencial que diferencia esta curva, y también el caso  $a = -1$ , con los casos  $|a| > 1$  es que el punto de intersección  $((a-1), 0)$ , i.e.  $(0, 0)$  es un punto en el que al evaluar (15.10) que indeterminada  $\frac{dx}{dy}$  y  $\frac{dy}{dx}$ ,

$$0 = -0 \frac{dx}{dy} \left[ 1 + \frac{1}{(0-1)^3} \right] = 0 \frac{dx}{dy}.$$

En la representación algebraica (15.13), no aparecen los términos lineales  $a_1 x + b_1 y$ , y los términos cuadráticos son  $(0x^2 - 0xy + y^2)$ , por lo tanto, el origen se caracteriza como un punto singular doble, [Ayres, F. (1950)], §“Curve Tracing” pág. 123-124. Además, se lo reconoce como un [punto cuspidal](#), ya que la curva no atraviesa al origen al proseguir su evolución.

En cambio, en los casos  $|a| < 1$ , en la representación algebraica (15.12) los términos cuadráticos son  $((a^2 - 1)x^2 - 0xy + a^2 y^2)$ , por lo tanto, el origen se caracteriza como un punto singular doble, [Ayres, F. (1950)], §“Curve Tracing” pág. 123-124. Más precisamente, se lo reconoce como un [punto nodo](#), y con rectas tangentes  $y = \pm \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}$ . Esta singularidad en el origen, pertenece a cualquiera de las Nicomides analizadas, ver ilustración superior del Cuadro 1.1 en la pág. 28 y en la Figura 10.41 de la §10.3, pág. 406.

- $|a| < 1$ .

Las abscisas adicionales al origen de coordenadas por el que pasan las curvas verifican la ecuación  $y = 0$  en (15.9), es decir intersectan al eje de las abscisas son las que satisfacen  $1 - (x - a)^2 = 0$ , i.e.  $x_{\cap}^1 = a - 1$  y  $x_{\cap}^2 = a + 1$ . Ver Nicomides con  $a = -\frac{1}{4}$ , snapshot del Cuadro 1.1, en la pág. 28.

**Ejercicio 15.2.2** *Proponemos hacer una representación cartesiana de la curva  $x(t) = \underbrace{a}_{|a|<1} + \cos(t)$  para recién luego empezar a bosquejar el gráfico de Nicomedes con el parámetro  $|a| < 1$ .*

En definitiva en (15.5) si el parámetro  $|a| < 1$  el origen es un punto singular de la curva, en la que ella pasa dos veces por él, atravesando los semiplanos de izquierda a derecha y recíprocamente, el origen en un punto nodal.

**Recuerde: ¡ Solo estudiaremos los parámetros en la región  $0 < a < 1$ !**

Dejamos al lector confirmar que si  $0 < a < 1$ , computar (15.10) en  $(a + 1, 0)$  y en  $(a - 1, 0)$  implica reconocer que existencia de rectas tangentes únicas en ambos punto de la curva. Efectivamente,

$$0 = -(a - 1) \frac{dx}{dy} \left[ 1 + \frac{a}{(a - 1) - a^3} \right] = -(a - 1) \frac{dx}{dy} [1 - a].$$

$$0 = -(a + 1) \frac{dx}{dy} \left[ 1 + \frac{a}{(a + 1) - a^3} \right] = -(a + 1) \frac{dx}{dy} [1 + a].$$

mientras que en el origen la expresión (15.10) que indeterminada. El cambio de signo en la variación de la coordenada  $x(t) = \underbrace{a}_{|a|<1} + \cos(t)$ , la natural evolución o involución desde el origen cuya consecuencia provoca la aparición de un bucle completo en la subregión de  $x$ , de signo antagónico en lo que a esta coordenada concierne, con el resto del gráfico de la curva. El bucle pertenece al intervalo definido entre las abscisas  $a - 1$  y cero si  $0 < a < 1$ , mientras que si  $-1 < a < 0$ , entre las abscisas  $a + 1$  y cero.

**Ejercicio 15.2.3** Proponemos estudiar los cambio de signo de la derivada primera haciendo uso de las expresiones (15.10) o de su recíproca. Aún más, les dejamos como propuesta que determinen derivando implícitamente una vez más alguna relación que involucre a la  $\frac{d^2x}{dy^2}$  o  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

**Nota 15.2.4** Puntualizamos que: **Si la construcción de las curvas (15.1), se visualizan mediante un dispositivo de graficación en el laboratorio de computadores o en un video, muchos de los detalles de estas curvas planas serán aprendido por nosotros en forma muy animada, pero siempre deberemos justificar, al menos parte de lo que vimos, con las herramientas del cálculo que conocemos.**

### 15.3. 3<sup>er</sup> PARCIAL - ♣ © 3<sup>er</sup> COLOQUIO

3<sup>er</sup> PARCIAL - ♣ © 3<sup>er</sup> COLOQUIO ANALISIS MATEMATICO I26/06/2012

APELLIDOS Y NOMBRES :	D.N.I. N <sup>o</sup> :
CARRERA :	L.U. N <sup>o</sup> :

1. i) Utilice el *Método de Integración* adecuado para resolver las integrales:

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} ; \quad \int (\sqrt{e})^{-\sqrt{\pi}z} dz ; \quad \int \frac{\sqrt{5} dy}{\sqrt{(y-1)^2 + 16}}$$

(ii) Calcule cada una de las siguientes integrales definidas:

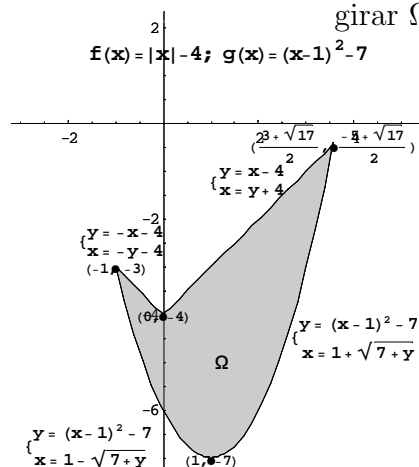
$$\int_{-2}^0 |x+1| - 2 dx ; \quad \int_{-2}^0 \frac{|(x+1)|}{x+1} dx ; \quad \int_{-2}^0 \lfloor x+1 \rfloor dx$$

2. ¡ NO RESUELVA LAS INTEGRALES DEFINIDAS ! Rta: pp. 577-578.

a) Determine el área de  $\Omega$ ,

$$\begin{cases} f(x) = |x| - 4 \\ g(x) = (x-1)^2 - 7 \end{cases}$$

b) Determine el volumen al girar  $\Omega$  alrededor del eje  $x$ .



c) Determine el volumen del sólido si las secciones perpendiculares al eje  $x$  son semicírculos.

3. Determine, si existen, los siguientes límites:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right)$     (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\ln x}$     (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x^4)^{\frac{1}{x}}$     (d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$

4. Verifique e Interprete gráficamente el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para las siguientes casos:

$$f(x) = -x, [-1, 1]; \quad f(x) = -1, [-1, 1]; \quad f(x) = -|x|, [-1, 1]; \quad f(x) = \ln x, [1, e].$$

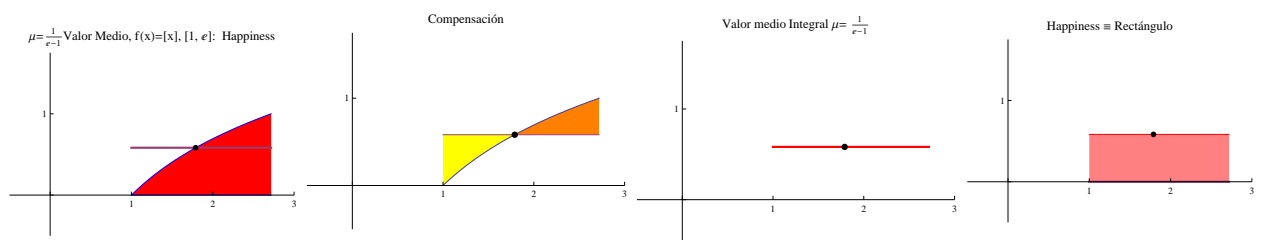
5. Sea  $\frac{dx(t)}{dt} = x(t)$ . Es decir  $\dot{x} = x$ .

(i) Resuelva  $\frac{dx(t)}{dt} = x(t)$ .

(ii) Resuelva  $\frac{dx(t)}{dt} = x(t)$  si  $t_* \in \mathfrak{R}$  y  $\begin{cases} \text{ii}_1) & (t_*, x_*) = (t_*, 0) \\ \text{ii}_2) & (t_*, x_*) = (t_*, x_* > 0) \\ \text{ii}_3) & (t_*, x_*) = (t_*, x_* < 0) \end{cases}$ .

Antes de que pasen a observar y resolver los ejercicios propuestos en el 3<sup>er</sup> COLOQUIO OPTATIVO de la evaluación correspondiente al primer cuatrimestre del año 2012, les presentamos la interpretación gráfica relacionada con dos casos particulares de aplicación del Teorema del Valor Medio Integral para funciones continuas.

**Ejemplo 15.3.1** *La función que elegimos en primer término corresponde al último inciso del Ejercicio N  $\hat{=}$  4 de este parcial, i.e.  $f(x) = \ln x$ , con  $x$  en el intervalo  $[1, e]$ .*



Cuadro 15.1: Valor Medio Integral  $\mu = \frac{1}{e-1}$  de  $f(x) = \ln x$ ,  $x$  en el intervalo  $[1, e]$ .

**Ejercicio 15.3.2** *Verifique analíticamente, que el valor medio integral de  $f(x) = \ln x$ ,  $x$  en el intervalo  $[1, e]$ , es  $\mu = \frac{1}{e-1}$ , y que corresponde a la abscisa  $x = e^{\frac{1}{e-1}}$ .*

## Capítulo 15. Parciales y/o Coloquios

Solución:

$$\int_1^e \ln dx = \ln(x_\xi)(e-1), \quad \text{con } x_\xi \in [1, e].$$

Recordemos la *fórmula de integración por partes* para obtener la familia de antiderivadas del  $\ln x$ , i.e.

$$\int \ln dx = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + \mathbb{C}.$$

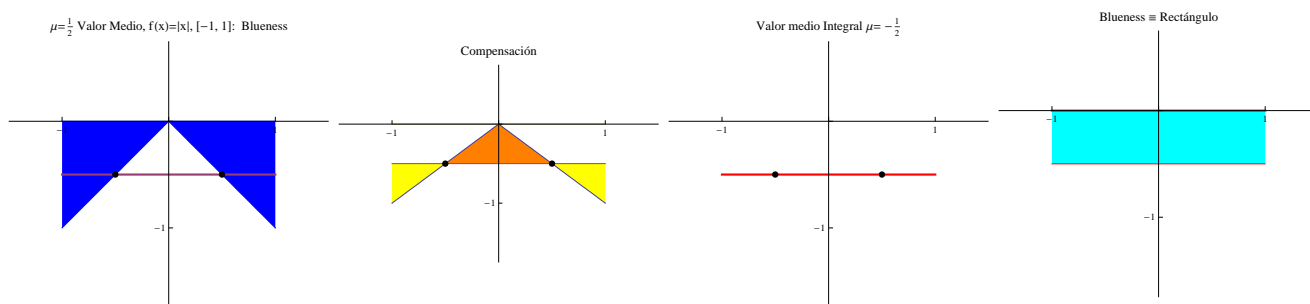
$$\int_1^e \ln dx = x(\ln x - 1) \Big|_1^e = e(\ln e - 1) - 1(\ln 1 - 1) = e(1 - 1) - 1(0 - 1) = 1.$$

$$\int_1^e \ln dx = 1 = \ln(x_\xi)(e-1), \quad \text{con } x_\xi \in [1, e].$$


Por lo tanto el valor medio es:

$$\mu = \ln(x_\xi) = \frac{1}{e-1}, \quad \rightarrow \quad x_\xi = e^{\frac{1}{e-1}}.$$

**Ejemplo 15.3.3** La función que elegimos en segundo término corresponde al penúltimo inciso del Ejercicio N<sup>o</sup> 4 de este parcial, i.e.  $f(x) = -|x|$ , con  $x$  en el intervalo  $[-1, 1]$ .



Cuadro 15.2: Valor Medio Integral  $\mu = -\frac{1}{2}$  de  $f(x) = -|x|$ ,  $x$  en el intervalo  $[-1, 1]$ .

**Ejercicio 15.3.4** Verifique analíticamente, que el valor medio integral de  $f(x) = -|x|$  si  $x$  pertenece al intervalo  $[-1, 1]$ , es  $\mu = -\frac{1}{2}$ , y que corresponde a las abscisas  $x = \pm \frac{1}{2}$ .  
 ¿ El Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para funciones continuas en  $[a, b]$  es de existencia ? o de ¿ Existencia y Unicidad ? ¡  !



Solución:

$$\int_{-1}^1 -|x| dx = -|x_{\zeta}|(1 - (-1)), \quad \mu = -|x_{\zeta}|.$$

$$\int_{-1}^1 -|x| dx = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^1 (-x) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = -1.$$

$$\int_{-1}^1 -|x| dx = -1 = -|x_{\zeta}|(1 - (-1)), \quad \mu = -|x_{\zeta}| = -\frac{1}{2} \rightarrow x_{\zeta_{\mp}} = \mp \frac{1}{2}.$$

Solución del Ejercicio N  $\hat{=}$  2: Se requieren plantear las integrales definidas que permitan determinar el área  $\Omega$ , volúmen de un sólido de revolución y un volúmen con secciones semicirculares.

1. Primero determinamos los puntos de intersección entre ambas curvas, pues serán necesarios para determinar los extremos de las respectivas integrales definidas.

$$|x| - 4 = (x - 1)^2 - 7 : \begin{cases} x - 4 = (x - 1)^2 - 7, & x \geq 0; \quad x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow x_{\cap D} = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \\ -x - 4 = (x - 1)^2 - 7, & x < 0; \quad x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x_{\cap D} = -1 \end{cases}$$

2. Cada punto de la función  $y = |x| - 4$  :  $\begin{cases} (x, x - 4) \text{ o } (y + 4, y) & x \geq 0 \\ (x, -x - 4) \text{ o } (-y - 4, y) & x < 0 \end{cases}$

3. Para la función  $y = (x - 1)^2 - 7$ ,  $y + 7 = (x - 1)^2$ ,  $\sqrt{y + 7} = \sqrt{(x - 1)^2}$ , i.e.  $\sqrt{y + 7} = |x - 1|$ , luego cada punto de esta curva plana puede expresarse:

$$\begin{cases} (x, (x - 1)^2 - 7) \text{ o } (1 + \sqrt{y + 7}, y) & \text{si } x \geq 1, y \geq -7 \\ (x, (x - 1)^2 - 7) \text{ o } (1 - \sqrt{y + 7}, y) & \text{si } x < 1, y \geq -7 \end{cases}$$

4. Área( $\Omega$ )

$$= \int_{-1}^0 \{-x - 4 - [(x - 1)^2 - 7]\} dx + \int_0^{\frac{3 + \sqrt{17}}{2}} \{x - 4 - [(x - 1)^2 - 7]\} dx$$

5. Volúmen del sólido de revolución:

$$V = \int_{-1}^0 \pi \{[(x - 1)^2 - 7]^2 - (-x - 4)^2\} dx + \int_0^{\frac{3 + \sqrt{17}}{2}} \pi \{[(x - 1)^2 - 7]^2 - (x - 4)^2\} dx$$

Capítulo 15. Parciales y/o Coloquios

6. Volúmen del sólido por secciones:

$$V = \int_{-1}^0 \pi \left\{ \frac{(-x-4) - [(x-1)^2 - 7]}{2} \right\}^2 dx + \int_0^{\frac{3+\sqrt{17}}{2}} \pi \left\{ \frac{(x-4) - [(x-1)^2 - 7]}{2} \right\}^2 dx$$

♣ © 3<sup>er</sup> COLOQUIO

ANALISIS MATEMATICO I

26/06/2012

1. ♣ © Calcule:  $\int \frac{e^{2u} du}{\sqrt{e^u + 1}}$ ;  $\int e^{-st} t dt, s > 0$ .

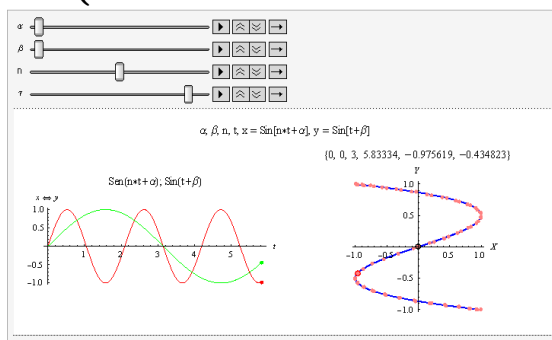
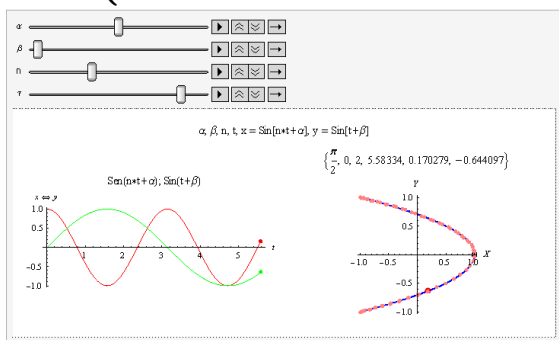
2. ♣ © Enuncie el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

Verifique e Interprete gráficamente el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para:

$$\int_1^{5/2} x - [x] dx; \quad \int_1^{5/2} \frac{x}{[x]} dx; \quad \int_1^{5/2} [x] - 1 dx.$$

3. ♣ © Determine las integrales definidas que le permite calcular la longitud y el recorrido de las siguientes curvas planas<sup>1</sup>:

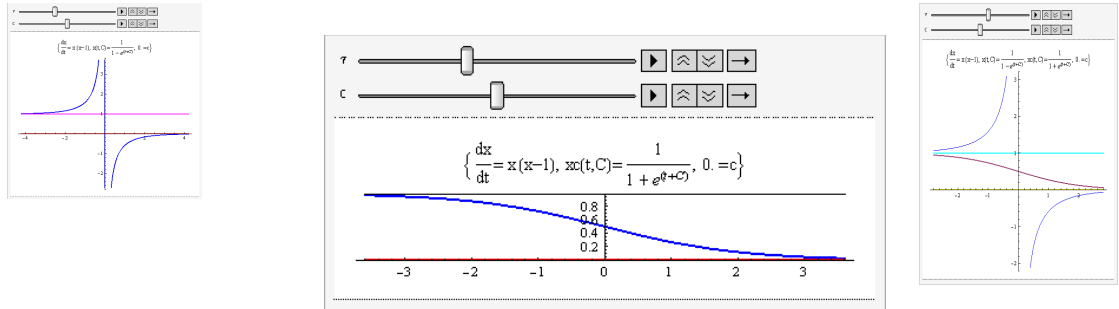
i)  $\begin{cases} x(t) = \sin(2t + \frac{\pi}{2}) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$     ii)  $\begin{cases} x(t) = \sin(3t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$ .



Cuadro 15.3: Ejercicio N<sup>o</sup> 3 del 3<sup>er</sup> ©. Longitud y recorrido en curvas parametrizadas.

<sup>1</sup> ¡NO RESUELVAS LAS INTEGRALES DEFINIDAS !

4. ♣ ©  $\frac{dx}{dt} = x(x-1)$ . Antiderive dividiendo el espacio real  $x$  en  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, +\infty)$ .



Cuadro 15.4: Ejercicio N<sup>o</sup> 4 del 3<sup>er</sup> © OPTATIVO,  $\frac{dx}{dt} = x(x-1)$ .

5. ♣ © ¿ Bajo qué condiciones son válidas las siguientes desigualdades ?
- $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$  donde  $m$  y  $M$  son el mínimo y el máximo absoluto de  $y = f(x)$  en  $[a, b]$ . Justifique dicha desigualdad.
  - $s(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S(b-a)$  donde  $s$  y  $S$  son el ínfimo y el supremo de  $y = f(x)$  en  $[a, b]$ . Justifique dicha desigualdad.

Utilice una de las desigualdades anteriores que le permita justificar la versión más amplia del Teorema del Valor Medio Integral.

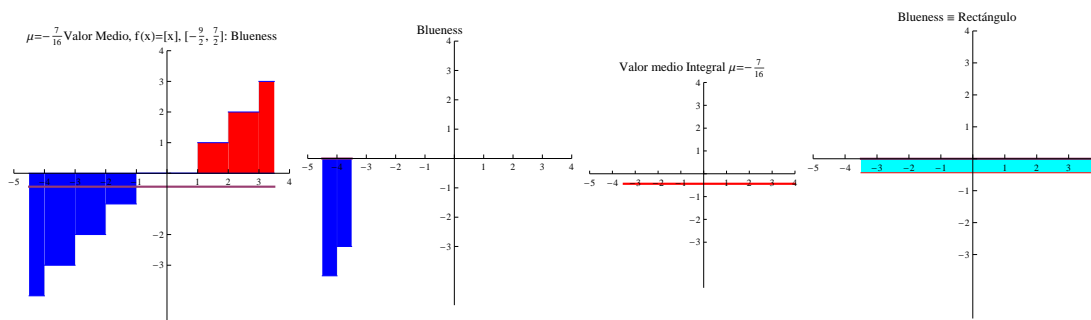
**Sugerencia:** Para justificar la primer desigualdad, se utiliza el Teorema de Bolzano Weierstrass, Teorema 5.4.2, pág. 221. Si  $f(x)$  es continua en  $[a, b]$ , entonces sabemos que  $m \leq f(x) \leq M$  luego integrando  $\int_a^b (\dots) dx$ , en cada término de esta inequación, se obtiene la desigualdad del primer inciso. Ver §8, pág. 308.

Continuamos ahora con la representación e interpretación gráfica de casos particulares del Teorema del Valor medio del Cálculo Integral para funciones discontinuas con un

## Capítulo 15. Parciales y/o Coloquios

número finito de discontinuidades de tipo salto. La idea es que el lector al observar la interpretación en estos ejemplos consiga luego resolver los incisos del Ejercicio N  $\doteq$  2 de este ♣ © 3<sup>er</sup> COLOQUIO OPTATIVO.

**Ejemplo 15.3.5** Interpretación gráfica del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para  $f(x) = [x]$ ,  $x$  en el intervalo  $[-\frac{9}{2}, \frac{7}{2}]$ .



Cuadro 15.5: Valor Medio Integral  $\mu = -\frac{7}{16}$  de  $f(x) = [x]$ ,  $x$  en el intervalo  $[-\frac{9}{2}, \frac{7}{2}]$ .

**Ejemplo 15.3.6** Verificación del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para  $f(x) = [x]$ ,  $x$  en el intervalo  $[-\frac{9}{2}, \frac{7}{2}]$ .

Solución: **Blueness**

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{9}{2}}^{\frac{7}{2}} [x] dx &= \int_{-\frac{9}{2}}^{-4} -4 dx + \int_{-4}^{-3} -3 dx + \int_{-3}^{-2} -2 dx + \int_{-2}^{-1} -1 dx + \int_{-1}^1 0 dx + \\ & \int_1^2 dx + \int_2^3 2 dx + \int_3^{\frac{7}{2}} 3 dx = \int_{-\frac{9}{2}}^{-4} -4 dx + \int_{-4}^{-\frac{7}{2}} -3 dx + \int_{-\frac{7}{2}}^{-3} -3 dx + \int_3^{\frac{7}{2}} 3 dx = \\ & \int_{-\frac{9}{2}}^{-4} -4 dx + \int_{-4}^{-\frac{7}{2}} -3 dx + \int_{-\frac{7}{2}}^{-3} -3 dx + \int_3^{\frac{7}{2}} 3 dx = \int_{-\frac{9}{2}}^{-4} -4 dx + \int_{-4}^{-\frac{7}{2}} -3 dx = \\ & -4x \Big|_{-\frac{9}{2}}^{-4} + -3x \Big|_{-4}^{-\frac{7}{2}} = -4(-4 - (-\frac{9}{2})) - 3(-\frac{7}{2} - (-4)) = -\frac{7}{2}. \end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{9}{2}}^{\frac{7}{2}} [x] dx = -\frac{7}{2}.$$

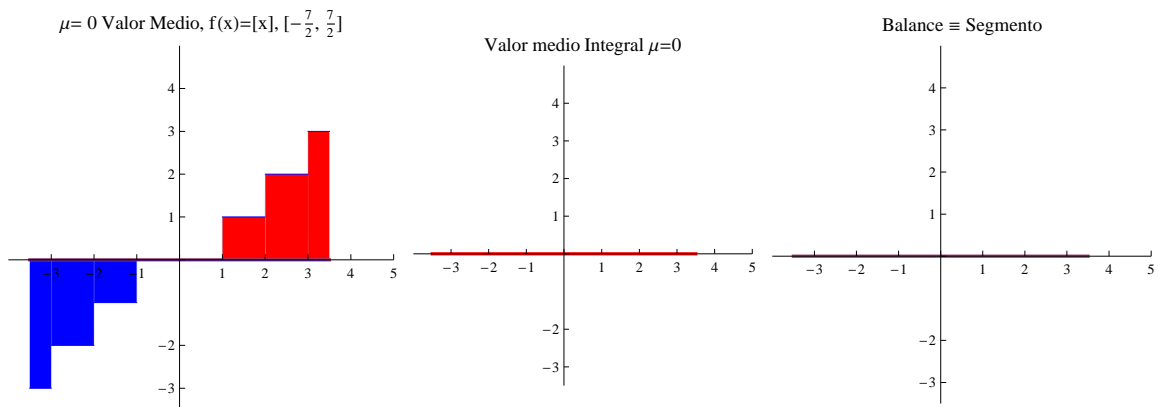
La identidad del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para  $f(x) = [x]$ , función discontinua, para  $x$  en el intervalo  $[-\frac{9}{2}, \frac{7}{2}]$  establece que:

$$\int_{-\frac{9}{2}}^{\frac{7}{2}} [x] dx = \mu \left( \frac{7}{2} - \left(-\frac{9}{2}\right) \right), \quad -\frac{7}{2} = \mu \left( \frac{7}{2} - \left(-\frac{9}{2}\right) \right).$$

El valor medio del caso, resulta entonces:

$$\mu = \frac{-\frac{7}{2}}{\frac{7}{2} + \frac{9}{2}} = -\frac{7}{16}.$$

**Ejemplo 15.3.7** Interpretación gráfica del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para  $f(x) = [x]$ ,  $x$  en el intervalo  $[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}]$ .



Cuadro 15.6: Valor Medio Integral  $\mu = 0$  de  $f(x) = [x]$ ,  $x$  en el intervalo  $[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}]$ .

**Ejemplo 15.3.8** Verificación del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para  $f(x) = [x]$ ,  $x$  en el intervalo  $[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}]$ .

Solución: Equilibrium or Balance

$$\int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}} [x] dx = \int_{-\frac{7}{2}}^{-3} -3 dx + \int_{-3}^{-2} -2 dx + \int_{-2}^{-1} -1 dx + \int_{-1}^1 0 dx + \int_1^2 dx + \int_2^3 2 dx + \int_3^{\frac{7}{2}} 3 dx = 0.$$

Cada una de las integrales definidas delimitadas por una caja de color oscuro, da como resultado, luego de aplicar la Regla de Barrow un valor positivo, y tiene su contrapartida

## Capítulo 15. Parciales y/o Coloquios

- su resultado un real negativo - en una integral definida delimitada por un rectángulo coloreado en tonos más suaves.

$$\int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}} [x] dx = 0.$$

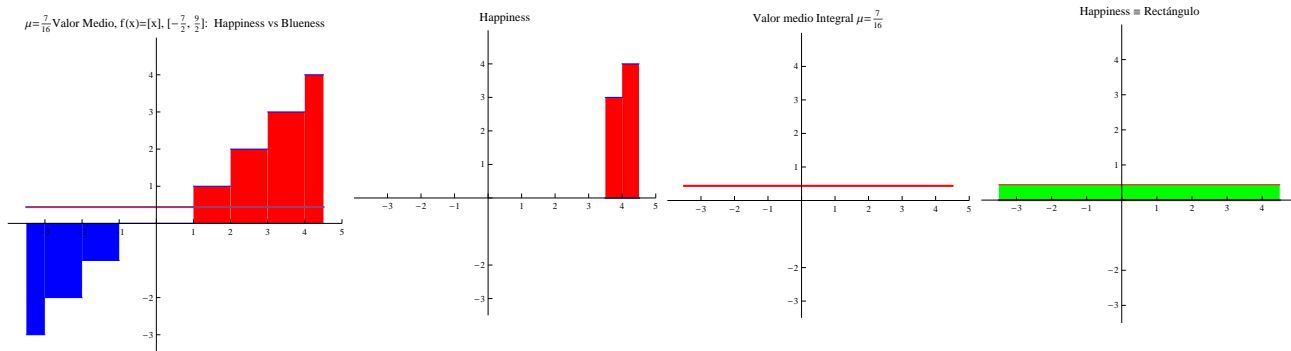
La identidad del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para  $f(x) = [x]$ , función discontinua, para  $x$  en el intervalo  $[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}]$  establece que:

$$\int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}} [x] dx = \mu \left( \frac{7}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right), \quad 0 = \mu \left( \frac{7}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right).$$

El valor medio del caso, resulta entonces:

$$\mu = \frac{0}{\frac{7}{2} + \frac{7}{2}} = 0.$$

**Ejemplo 15.3.9** Interpretación gráfica del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para  $f(x) = [x]$ ,  $x$  en el intervalo  $[-\frac{7}{2}, \frac{9}{2}]$ .



Cuadro 15.7: Valor Medio Integral  $\mu = \frac{7}{16}$  de  $f(x) = [x]$ ,  $x$  en el intervalo  $[-\frac{7}{2}, \frac{9}{2}]$ .

**Ejemplo 15.3.10** Verificación del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para  $f(x) = [x]$ ,  $x$  en el intervalo  $[-\frac{7}{2}, \frac{9}{2}]$ .

Solución: **Happiness**

$$\int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} [x] dx = \int_{-\frac{7}{2}}^{-3} -3 dx + \int_{-3}^{-2} -2 dx + \int_{-2}^{-1} -1 dx + \int_{-1}^1 0 dx + \int_1^2 dx + \int_2^3 2 dx +$$

$\int_3^4 3 dx + \int_4^{\frac{9}{2}} 4 dx$ . Puesto que  $\int_3^4 3 dx = \int_3^{\frac{7}{2}} 3 dx + \int_{\frac{7}{2}}^4 3 dx$ , se obtiene que la evaluación de cada uno de los trozos puede reordenarse como:

$$\int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} [x] dx = \underbrace{\int_{-\frac{7}{2}}^{-3} -3 dx + \int_3^{\frac{7}{2}} 3 dx}_{=0} + \underbrace{\int_{-3}^{-2} -2 dx + \int_2^3 2 dx}_{=0} + \underbrace{\int_{-2}^{-1} -1 dx + \int_1^2 dx}_{=0} + \underbrace{\int_{-1}^1 0 dx}_{=0} + \int_{\frac{7}{2}}^4 3 dx + \int_4^{\frac{9}{2}} 4 dx.$$

$$\int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} [x] dx = \int_{\frac{7}{2}}^4 3 dx + \int_4^{\frac{9}{2}} 4 dx = 3x \Big|_{\frac{7}{2}}^4 + 4x \Big|_4^{\frac{9}{2}} = 3\left(4 - \frac{7}{2}\right) + 4\left(\frac{9}{2} - 4\right) = \frac{7}{2}.$$

$$\int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} [x] dx = \frac{7}{2}.$$

La identidad del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para  $f(x) = [x]$ , función discontinua, para  $x$  en el intervalo  $[-\frac{7}{2}, \frac{9}{2}]$  establece que:

$$\int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} [x] dx = \mu \left(\frac{9}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right)\right), \quad \frac{7}{2} = \mu \left(\frac{9}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right)\right).$$

El valor medio del caso, resulta entonces:

$$\mu = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} = \frac{7}{16}.$$

## 15.4. 4<sup>to</sup> PARCIAL - ♣ © 4<sup>to</sup> COLOQUIO OPTATIVO

### TEMA I

4<sup>to</sup> PARCIAL - ♣ © 4<sup>to</sup> COLOQUIO ANALISIS MATEMATICO I 05/07/2012

APELLIDOS Y NOMBRES :	D.N.I. N $\doteq$ :
CARRERA :	L.U. N $\doteq$ :

#### 1. Fórmula de Taylor

- i) Sea  $f(x) = \cos x$  y  $x_0 = 0$ . Determine la expresión general para los polinomios de Taylor de orden  $n$ .
- ii) Determine la expresión general del término complementario de la Fórmula de Taylor según Lagrange, si  $x_0 = 0$ .
- iii) Si  $-1 < x < 1$  determine una cota para la expresión del término complementario de la Fórmula de Taylor según Lagrange que Ud. halló en el inciso ii).
- iv) Utilice un polinomio de Taylor de orden adecuado para estimar la raíz positiva de la ecuación  $\cos x = x$ . Interprete gráficamente su respuesta analítica.

#### 2. Determine la convergencia o divergencia de las siguientes **sucesiones** de reales:

$$a_n = n^n; \quad a_n = \frac{1}{n} + 2^n; \quad a_n = (-1)^n \sqrt{3}^n; \quad a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right);$$

$$a_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n; \quad a_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right); \quad a_n = \frac{n}{n-1}; \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

#### 3. Determine la convergencia o divergencia de las siguientes **series** de números reales:

$$\sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n; \quad \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n + \sum_{n=c}^{\infty} K \left(\frac{1}{10}\right)^n; \quad \sum_{n=c}^{\infty} (10)^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}; \quad \sum_{n=c}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$$

$$\sum_{n=c}^{\infty} c; \quad \sum_{n=c>2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}; \quad \sum_{n=c}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}; \quad \sum_{n=c}^{\infty} n; \quad \sum_{n=c}^{\infty} \frac{1}{n-1}$$



4. Calcule, si es posible, las siguientes sumas de números reales, si  $c > 0$ ,  $K > 0$ ,

$$\begin{array}{cccc}
 c < K: & & & \\
 \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n; & \sum_{n=c}^K \left(\frac{1}{10}\right)^n; & \sum_{n=c}^K (10)^n; & \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}; \\
 \sum_{n=c}^K c; & \sum_{n=c}^K \frac{1}{n(n-1)}; & \sum_{n=c}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}; & \sum_{n=c}^K n.
 \end{array}$$


---

5. Sea  $x_{n+1} \propto x_n$ , donde  $\propto$  simboliza “proporcional”

- (i) Justifique por qué entonces  $x_{n+1} = k x_n$ .
  - (ii) Determine la expresión explícita de  $x_n$ .
  - (iii) Determine para qué valores de  $k$  la sucesión es convergente, para cuáles es oscilante y cuándo resulta ser divergente.
  - (iv) Determine la presencia o ausencia de puntos fijos y/o ciclos.
- 

♣© 4<sup>to</sup> COLOQUIO: ANALISIS MATEMATICO I. 26/06/2012

---

1. ♣© Polinomios de Taylor y Fórmula de Taylor

- i) Si  $P_n(x)$  es el Polinomio de Taylor de orden  $n$  de  $y = f(x)$ , establezca la veracidad o falsedad de la siguiente proposición:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x - x_0} = 0 \rightarrow f(x) - P_n(x) = f^{(n+1)}(c) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}; \quad c \text{ entre } x \text{ y } x_0.$$

- ii) Justifique analíticamente la veracidad o falsedad de la siguiente proposición:

Suponga que  $f'(x_c) = f''(x_c) = f'''(x_c) = \dots = f^n(x_c) = 0$  y  $f^{n+1}(x_c) \neq 0$  donde  $n$  es impar y  $f^{n+1}(x)$  es continua en un entorno de  $x_c$ .

- i) Si  $f^{n+1}(x_c) < 0$ ,  $f(x_c)$  es un valor máximo local.
- ii) Si  $f^{n+1}(x_c) > 0$ ,  $f(x_c)$  es un valor mínimo local.

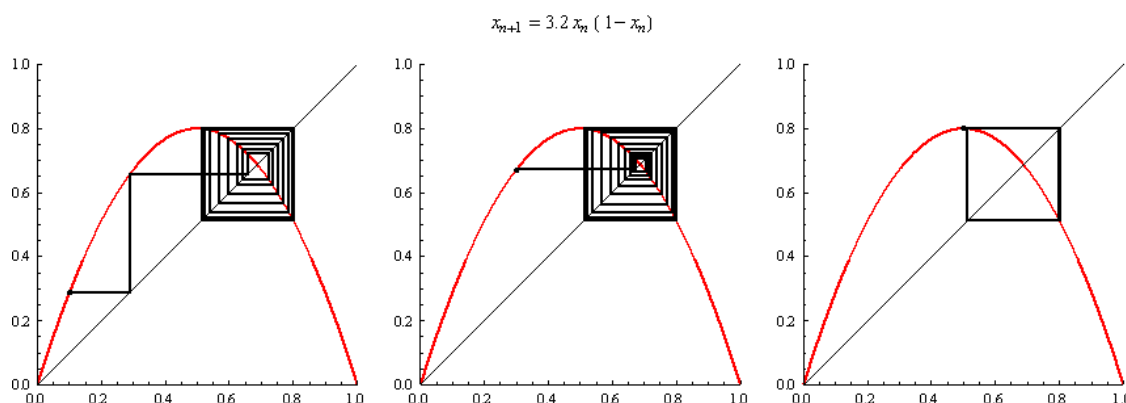
Aplique el resultado anterior a  $f(x) = x^{17} - k$  y a  $f(x) = x^{32} + k$ .

2. ♣ © Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes Integrales Impropias:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u(L-u)}, \quad L > 0; \quad \int_0^{+\infty} e^{-st} t dt, \quad s > 0; \quad \int_0^{+\infty} \frac{w^{p-1}}{1+w} dw, \\ 0 < p < 1.$$

3. ♣ © Ecuación Logística es la sucesión recurrente:  $f(x_n) = x_{n+1} = cx_n(1 - x_n)$ .

- i) Determine sus puntos fijos si  $c \neq 0$ . Determine el máximo de  $x_{n+1}$  para  $c > 0$ .
- ii) Analice e interprete gráficamente en un diagrama  $x_*$  vs  $c$ , el comportamiento de los puntos fijos en función de la constante  $c$  de proporcionalidad.
- iii) Determine la expresión de la identidad  $f^2(x_n) = f(f(x_n)) = x_n$ . Compruebe que es una función polinómica de cuarto grado con  $x_n = 0$  y  $x_n = 1 - c^{-1}$  como raíces simples. Encuentre una expresión para las dos raíces restantes.
- iv) Si  $c = 3.2$ , caracterice los puntos  $x = 0$ ,  $x = 0,513045$ ,  $x = 0,6875$  y  $x = 0,799455$ .



Cuadro 15.8: Dinámica logística  $x_{n+1} = 3,2x_n(1 - x_n)$ , sin convergencia, para los inicios  $x_0 = 0,1$ ,  $x_0 = 0,3$  y  $x_0 = 0,5$ .

1. En la Snapshot “Sentencias y *Sucesiones* infinitas de reales” de la pág. 492, si bien no se ilustra el caso del Ejercicio N<sup>o</sup> 3 ♣ ©, de este COLOQUIO, i.e. Ecuación Logística es la sucesión recurrente:  $f(x_n) = x_{n+1} = cx_n(1 - x_n)$  del presente coloquio, han sido utilizadas para efectura la ilustración el Cuadro 15.8. Recomendamos al lector interesado leer en [Aguilera, N. E. (1995)], pp. 72-77. Ver [Stewart, J. (2008)], pp. 685-687, §11.1. Sucesiones. Sucesiones logísticas: Proyecto de Laboratorio.
2. Antes de proseguir, nos dicaremos a justificar la versión del Teorema del Punto Fijo que apareció en la §5.4.5, pág. 224.

*Justificación:* Refiriéndonos al enunciado en la pág. 224, establecemos que si  $g(a) = a$  o  $g(b) = b$ , ya tendríamos el punto fijo, por lo tanto, consideremos los casos en los que ninguna de estas condiciones sean ciertas. Definimos la función continua  $h(x) = g(x) - x$ , observemos que  $h(a) = g(a) - a$  y  $h(b) = g(b) - b$ , como los casos que estamos considerando implican que  $g(a) \neq a$  y  $g(b) \neq b$ , y como por hipótesis la imagen de  $g(x)$  es el intervalo cerrado  $[a, b]$ , resulta que  $h(a) > 0$ , y  $h(b) < 0$ . Por el Teorema del Valor Intermedio, o Teorema de Bolzano, Teorema 5.4.15, y su justificación en la págs. 230-231, tenemos garantizada la existencia (no necesariamente la unicidad) de una abscisa  $x_r$  tal que en ella  $h(x_r) = 0$ ; es decir  $g(x_r) = x_r$ . Por lo tanto hemos demostrado la primera afirmación del teorema. Sabemos que  $|g'(x)| \leq M < 1$  para toda  $x$  en  $[a, b]$  y sea  $x_r$  el punto fijo de  $g(x)$ , entonces utilizando el Teorema del Valor Medio de Lagrange, (ver §7 pág. 267 y pág. 340), se puede escribir

$$g(x) - g(x_r) = g'(x_\xi)(x - x_r), \quad x_\xi \text{ entre } x \text{ y } x_r.$$

Al utilizar la hipótesis sobre la cota de la derivada primera, luego de aplicar la función absoluto a la expresión anterior, resulta:

$$|g(x) - g(x_r)| = |g'(x_\xi)(x - x_r)| = |g'(x_\xi)||x - x_r| \leq M|x - x_r|.$$

Por hipótesis  $x_1$  pertenece al intervalo  $[a, b]$ , a partir esta abscisa proponemos la generación de la sucesión  $x_{n+1} = g(x_n)$ , es decir

$$|g(x_1) - g(x_r)| \leq M |(x_1 - x_r)|,$$

entonces desde que  $x_2 = g(x_1)$ , obviamente por ser  $g(x) : [a, b] \rightarrow [a, b]$  es  $x_2$  perteneciente al intervalo  $[a, b]$  y

$$|x_2 - g(x_r)| \leq M |(x_1 - x_r)|,$$

puesto que  $g(x_r) = x_r$ , se tiene finalmente

$$|x_2 - x_r| \leq M |(x_1 - x_r)|.$$

Nuevamente, por el Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial, resulta que

$$g(x_2) - g(x_r) = g'(x_\zeta)(x_2 - x_r), \quad x_\zeta \text{ entre } x_2 \text{ y } x_r.$$

Utilizando la acotación de  $g'(x)$  de la hipótesis del teorema, se obtiene

$$|x_3 - x_r| = |g(x_2) - g(x_r)| \leq M |(x_2 - x_r)|.$$

Afortunadamente, conocemos una acotación para  $|(x_2 - x_r)|$ , que nos permite obtener, la siguiente desigualdad para la inecuación anterior.

$$|x_3 - x_r| \leq M |(x_2 - x_r)| \leq M^2 |(x_1 - x_r)|.$$

Reiteramos una vez más la lógica y el razonamiento de un nuevo paso iterativo.

$x_4 = g(x_3)$ ,  $x_4 \in [a, b]$ , por el Teorema de Lagrange,  $g(x_3) - g(x_r) = g'(x_\nu)(x_3 - x_r)$ ,  $x_\nu$  entre  $x_3$  y  $x_r$ , y por la validez la acotación para la derivada primera de la  $g(x)$  en el intervalo considerado, resulta,  $|g(x_3) - g(x_r)| \leq M |x_3 - x_r|$ , siendo  $g(x_r) = x_r$  y obtenemos  $|x_4 - x_r| \leq M |x_3 - x_r|$  y utilizando la cota del paso previo se llega a

$$|x_4 - x_r| \leq M^3 |x_1 - x_r|.$$

Continuando, de esta forma, llegaremos a que:

$$|x_n - x_r| \leq M^{n-1} |x_1 - x_r|.$$

Por hipótesis  $0 < M < 1$ , entonces, tomando el límite siguiente de la sucesión generada, en la inecuación previa, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - x_r| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} M^{n-1} |x_1 - x_r| = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - x_r| = 0, \rightarrow \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x_r) \right|, \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_r.$$

Es decir, la sucesión generada, por los sucesivos pasos iterativos, en caso de permitir infinitos pasos, converge a  $x_r$ . Si decidimos, detenernos antes, en general para un número finito de pasos el proceso iterativo dará un valor aproximado del  $x_r$ . La precisión, y/o estimación del error, será objeto de estudio en asignaturas del Análisis Numérico, cuyos tópicos, son imprescindibles para un futuro ingeniero, físico, químico, etc.

Antes, de pasar a resolver Ejercicios particulares de Parciales y/o Coloquios, detengámonos un poquito más, respecto de las condiciones dadas por esta versión que hemos justificado del Teorema del Punto Fijo.

- No siempre es posible expresar  $x = g(x)$ .
- La sucesión obtenida depende demasiado, en cuanto a la rapidez de su convergencia, del valor  $|g'(x_r)| < 1$ . Es decir, en casos prácticos, puede que el algoritmo propuesto, no resulte eficiente.
- ¿ El algoritmo del punto fijo puede producir una sucesión divergente ?

Sugerencia: La respuesta se encontrará después de analizar los siguientes resultados que están extraídos de [Spivak, M. (1999)], pp. 634-635.

a) Supóngase que  $f(x)$  es una función sobre  $\mathbb{R}$  tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \forall x \text{ e } y, \text{ donde } 0 < c < 1.$$

Una función con las características anteriores recibe el nombre de “*contracción*”. Y posee las siguientes propiedades:

- Es una función continua.
- $f(x)$  posee a lo sumo un punto fijo.
- La sucesión

$$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots, \quad (15.17)$$

para cualquier  $x$  del intervalo  $[a, b]$  permite demostrar que efectivamente  $f(x)$  posee un punto fijo.

- b) • Si  $f(x)$  es derivable y  $|f'(x)| < 1$ ,  $f(x)$  posee a lo sumo un punto fijo.
- Si  $|f'(x)| \leq c < 1$  para todos los  $x$ , entonces  $f(x)$  posee un punto fijo.
  - La hipótesis  $|f'(x)| \leq 1$  no es suficiente para que  $f(x)$  tenga un punto fijo.

3. Veamos, luego del análisis previo, si es posible dar respuesta al Ejercicio N<sup>o</sup> 3, del presente COLOQUIO.

Ecuación Logística (15.18), ver [Aguilera, N. E. (1995)], pág. 62.

$$f(x_n) = x_{n+1} = cx_n(1 - x_n) \quad (15.18)$$

A continuación daremos las respuestas a cada uno de los incisos del ejercicio seleccionado.

- i) Si  $c \neq 0$ , encontrar los puntos fijos de (15.18) es resolver la ecuación  $cx(1 - x) = x$ , una respuesta es  $x_F^1 = 0$ , y la otra es  $x_F^2 = \frac{c-1}{c}$ , este último existe si, la constante del modelo verifica la condición  $c > 1$ . Observemos que  $x_F^2 = 1 - \frac{1}{c}$  y por lo tanto aún para  $c \gg 1$ , i.e.  $c \rightarrow +\infty$  el punto fijo  $x_F^2$  siempre se mantendrá menor que uno.

Además, la gráfica de  $f(x) = cx(1 - x)$ ,  $c > 0$  es la de una parábola que alcanza su máximo en  $x = \frac{1}{2}$  con el valor  $\frac{c}{4}$ .

- ii) Claramente, ya la hemos dado, por otra parte a esta altura, de los conocimientos adquiridos por el estudiante la representación de  $x_F^2 = 1 - \frac{1}{c}$  vs  $c$ , no presenta

dificultad. En general, la ecuación (15.18) se utiliza para describir la evolución en el tiempo de una determinada población. (Ver enfoque continuo y diferencial dados en los ejemplos resueltos en la §11.1, e.g. pp. 447 - 450.)

- iii) La función polinómica de grado cuarto es  $c(cx - c + 1)(-1 - c + x(c^2 + c) - c^2x^2) = 0$ . Y las dos soluciones nuevas son  $x_{3,4} = \frac{c + c^2 \mp \sqrt{[c^2(c^2 - 2c - 3)]}}{2c^2}$
- iv) Si  $c = 3.2$ ,  $x_3 \approx 0.513$ ,  $x_4 \approx 0.799$ ,  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 1 - \frac{1}{c} \approx 0.6875$ . En este caso, las secuencias del algoritmo propuesto, para los iniciadores en la Figura 15.8, no se aproximan a ninguno de los dos puntos fijos del modelo  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 1 - \frac{1}{3,2}$ .
- Si  $c = 4$ , o  $c = 4,1$ , partiendo de un mismo arrancador, e.g.  $x_0 = 0,1$  las trayectoria que definen los puntos de la sucesión de reales generados por la *ecuación logística* puede originar gráficos muy difíciles de interpretar y justificar con las herramientas que disponemos al momento. Cita de la propuesta “*Proyecto de Laboratorio*” en [Stewart, J. (2008)], pág. 687, si  $c$  se escoge entre 3.6 y 4, para  $x_0 = 0,001$  el tipo de comportamiento de los términos de la sucesión se llama *caótico* y lo muestran poblaciones de insectos en ciertas condiciones.

**Ejercicio 15.4.1** *A continuación proponemos utilizar el llamado **algoritmo del punto fijo** (15.17) para tratar de lograr una aproximación razonable para solución las siguientes identidades de la forma  $f(x) = x$ :*

- $\cos x = x$ , iniciador  $x_0 = \frac{1}{4}$ .
- $e^{-x} = x$ , iniciador  $x_0 = \frac{1}{2}$ .
- $\cos 2x = 3x$ , iniciador  $x_0 = \frac{1}{2}$ .
- $2 - \ln x = x$ , en el intervalo  $[1, 2]$ . Luego de hacer una interpretación gráfica de la ecuación a resolver, elija un iniciador del proceso iterativo dentro del intervalo estipulado.
- Interprete, a la luz de este algoritmo, los procesos iterativos que ilustran los ejercicios del T.P. N<sup>o</sup> IX: Sucesiones. §2.11 en las pág. 123 y 126.

# 15.5. 5<sup>to</sup> PARCIAL - ♣ © 5<sup>to</sup> COLOQUIO OPTATIVO

5<sup>to</sup> PARCIAL: ANALISIS MATEMATICO I.

13/07/2012.

APELLIDOS Y NOMBRES :	D.N.I. N <sup>o</sup> :
CARRERA :	L.U. N <sup>o</sup> :

## 1. Teoremas del Cálculo Diferencial

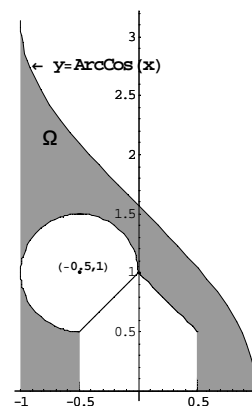
- Justifique el Teorema de Rolle
- Enuncie el Teorema de Lagrange y el Teorema de Cauchy.
- Enuncie la Consecuencia Fundamental del Teorema de Lagrange.
- Justifique que si  $n > 1$ ,  $(1 + x)^n > 1 + nx$  para  $-1 < x < 0$  y  $0 < x$ .

## 2. ¡ NO RESUELVA LAS INTEGRALES DEFINIDAS !

¡ Solamente plantee las integrales definidas !

El área  $\Omega$  a determinar es la acotada por  $y = \arccos(x)$  si  $x \in [-1, 1]$ , y por fuera del sol y la casita, delimitados ellos, por la circunferencia  $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$ , y las rectas  $x = -\frac{1}{2}$ , si  $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{1}{2}$ , si  $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ ,  $y - x - 1 = 0$ , si  $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$ ,  $y + x - 1 = 0$ , si  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ .

- Determine el área sombreada  $\Omega$ , de la figura.
- Determine el volumen al girar  $\Omega$  alrededor del eje  $x = 10$ .
- Determine el volumen del sólido si las secciones perpendiculares al eje  $y$  son triángulos equiláteros.



Cuadro 15.9: El complemento de mi casita y el sol bajo el cielo de  $y = \arccos(x)$ ,  $x \in [-1, 1]$ .



### 3. Velocidades Relacionadas

Area superficial total  $\mathbf{S}$  de un cono circular recto en función del radio  $\mathbf{r}$  y de la altura  $\mathbf{h}$ .

**Ayuda:**  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{Base} + \mathbf{S}_{Lateral}$  y que  $\mathbf{S}_{Lateral} = \pi \mathbf{r} g$ , con la generatriz  $g = \sqrt{\mathbf{h}^2 + \mathbf{r}^2}$ .

- i) Obtenga el area superficial total  $\mathbf{S}$  de un cono circular recto en función del radio  $\mathbf{r}$  y de la altura  $\mathbf{h}$ .
  - ii) Si  $\mathbf{h}$  es constante obtenga la relación entre  $\frac{d\mathbf{S}}{dt}$  y  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ .
  - iii) Si  $\mathbf{r}$  es constante obtenga la relación entre  $\frac{d\mathbf{S}}{dt}$  y  $\frac{d\mathbf{h}}{dt}$ .
  - iv) La relación entre  $\frac{d\mathbf{S}}{dt}$ ,  $\frac{d\mathbf{h}}{dt}$  y  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  si varían  $\mathbf{h}$  y  $\mathbf{r}$ .
  - v) Si  $\mathbf{S}$  es constante obtenga la relación entre  $\frac{d\mathbf{h}}{dt}$  y  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ .
- 

### 4. Estudio y gráfico de $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$ .

- (a) Realice el estudio completo de  $y = f(x)$ . Dominio e Imágen, asíntotas, simetrías, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos críticos, extremos y concavidad. Grafique la curva con los datos obtenidos. [Respuesta en pág. 595.](#)
  - (b) ¿Cuál es la relación entre los puntos críticos de  $y = f(x)$  e  $y = f(x)^2$  ?
- 

♣© 5<sup>to</sup> COLOQUIO: ANALISIS MATEMATICO I. 13/07/2012

---

1. ♣© Extremos locales y globales. Si  $\alpha \in [0, 4\pi]$  determine el Mínimo y el Máximo Absoluto de cada una de las funciones anteriores y las abscisas en las que los mismos son realizados.

a)  $h(\alpha) = 1 - 2 \cos(\alpha) + \alpha$ ;  $l(\alpha) = |1 - 2 \cos(\alpha)| + \alpha$

b)  $h(\alpha) = \alpha [1 - 2 \cos(\alpha)]$ ;  $l(\alpha) = \alpha |1 - 2 \cos(\alpha)|$

c)  $h(\alpha) = \sqrt{1 + \cos(\alpha)}$ ;  $l(\alpha) = \sqrt{1 + \cos(\alpha)} + \alpha$

**Nota 15.5.1** Al lector, se le recomienda observar detalles e ilustración de la Snapshot “Optimización en compactos” en la pág. 493.

2. ♣© Analice los procesos iterativos  $x_{n+1} = f(x_n)$  de la Figura 15.4 y Figura 15.5.

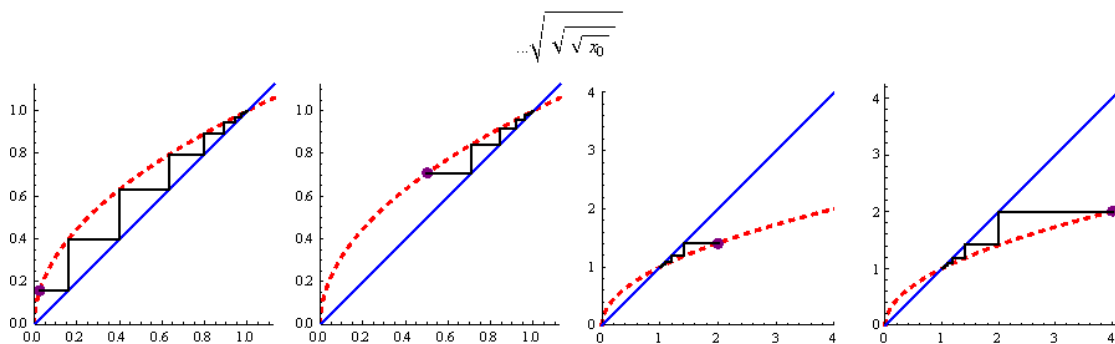


Figura 15.4: Proceso iterativo  $\{\sqrt{x_0}, \sqrt{\sqrt{x_0}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{x_0}}}, \dots\}$  iniciado en distinto  $x_0$ .

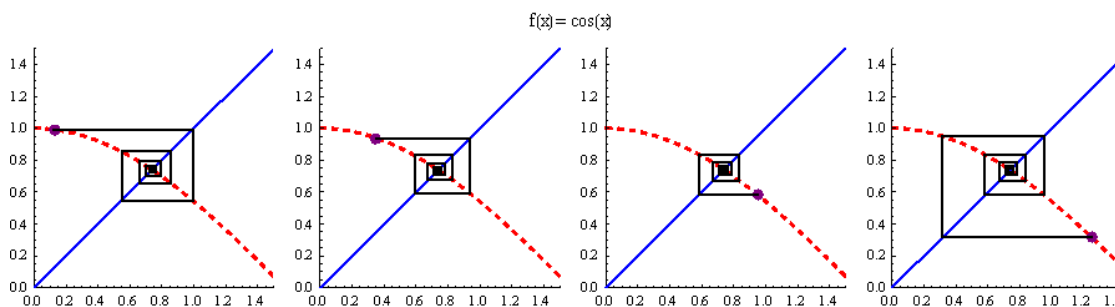


Figura 15.5: Proceso iterativo  $\{x_0, \cos(x_0), \cos(\cos(x_0)), \cos(\cos(\cos(x_0))), \dots\}$ , iniciados en diferentes  $x_0$ ,  $x_* \rightarrow 0,739085$ .

## 3. ♣© Fórmulas recurrentes.

- i) Halle el algoritmo o expresión de las iteraciones de Newton que le permitiría encontrar una aproximación de la raíz real de la ecuación  $x^2 - 2 = 0$ .
- ii) Suponga que el algoritmo iterativo  $x_{n+1}$  obtenido en el inciso anterior verifica que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1}$  existe y es finito. ¿Cuál es este valor? ¿Qué relación tiene este número real con la ecuación  $x^2 - 2 = 0$ ?

Algunas pautas para que un newcomer<sup>2</sup> encuentre el camino más allanado para resolver algunos de los ejercicios propuestos.

1. Ejercicio N<sup>o</sup> 4 del PARCIAL, [Spivak, M. (1999)], §Sección “Significado de la derivada”, 4. c)\* en la pág. 285. Aquí va nuestra resolución.

- $Dom(f(x))$  todos los reales.

Observemos que no se anulan los denominadores, ni tampoco el denominador, pues reescrita como  $f(x) = \frac{(|x| + 1) + (1 + |x - 1|)}{(|x| + 1)(1 + |x - 1|)} = \frac{2 + |x| + |x - 1|}{(|x| + 1)(1 + |x - 1|)}$ . En caso contrario  $|x| + |x - 1| = -2$ , absurdo, puesto que dos cantidades positivas o nulas nunca pueden sumar un entero negativo. Análogamente, el denominador no se anula, ya que  $(|x| + 1)(1 + |x - 1|) = 0 \leftrightarrow |x| + |x - 1| + |x||x - 1| = -1$ , tres cantidades positivas o nulas sumadas no pueden ser idénticas a un entero negativo.

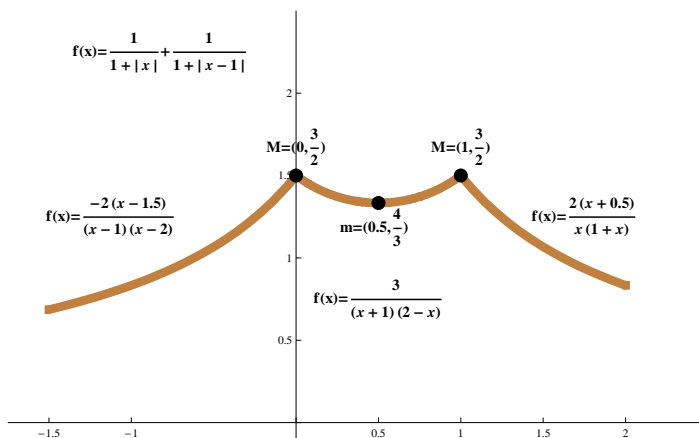
- $Im(f(x))$ , en principio, está claro que  $f(x) > 0$ .
- $f(x)$  es una función continua en todos los reales.
- La experiencia que hemos logrado, a esta altura del cursado, en el manejo de expresiones con valores absolutos, nos indica que debemos expresar a  $f(x)$  por tramos y para las siguientes tres regiones de  $x$ ,  $(-\infty, 0)$ ,  $[0, 1)$  y  $[1, +\infty)$ .

<sup>2</sup>newcomer. n. One who has only recently arrived. The American Heritage. Dell Publishing Co., Inc. New York. 2<sup>nd</sup> Edition, 1985.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-(x-1)} & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-(x-1)} & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+(x-1)} & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

Simplificando y sacando común denominador, resulta  $f(x)$  expresable por<sup>3</sup>:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2(x - \frac{3}{2})}{(x-1)(x-2)} & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{3}{(1+x)(2-x)} & x \in [0, 1) \\ \frac{2(x + \frac{1}{2})}{x(1+x)} & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$



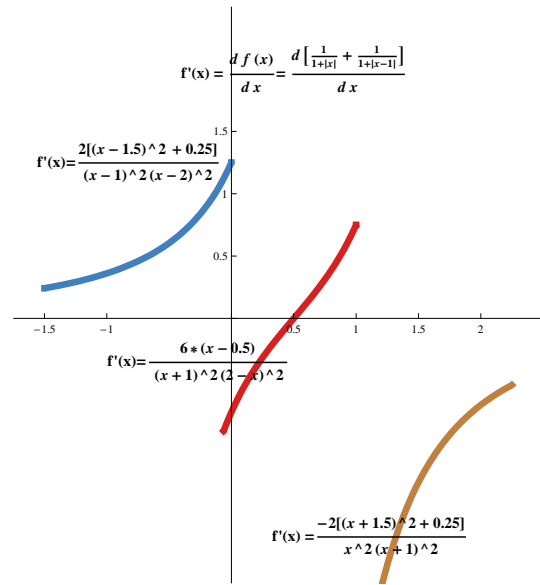
Cuadro 15.10: Estudio completo de  $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$ .

- Ahora obtenemos la derivada primera en cada intervalo abierto, de las respectivas regiones

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2(x - \frac{3}{2})}{(x-1)(x-2)} & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{3}{(1+x)(2-x)} & x \in (0, 1) \\ \frac{2(x + \frac{1}{2})}{x(1+x)} & x \in (1, +\infty) \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} \frac{-2[(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}]}{(x-1)^2(x-2)^2} & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{6(x - \frac{1}{2})}{(1+x)^2(2-x)^2} & x \in (0, 1) \\ \frac{-2[(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}]}{x^2(x+1)^2} & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

<sup>3</sup>Aquí revelamos el final de la novela. Esto no debería ser así, pero como estamos usando esta lista de ejercicios para repasar conceptos, manipulaciones de cálculos, etc., nos hemos permitido anticiparles el desenlace, i.e. Figura 15.10.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2[(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}]}{(x-1)^2(x-2)^2} & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{6(x - \frac{1}{2})}{(1+x)^2(2-x)^2} & x \in (0, 1) \\ \frac{-2[(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}]}{x^2(x+1)^2} & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$



Cuadro 15.11: La derivada primera de  $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$ .

- Respecto de la concavidad de  $f(x)$ , si en cada uno de los intervalos abiertos  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, +\infty)$  trazamos las rectas tangentes a las respectivas gráficas de  $f'(x)$  en la Figura 15.11, confirmaremos que el signo de la derivada segunda en cada uno de dichos intervalos abiertos es positivo. Por lo tanto, sin necesidad de efectuar los respectivos cálculos, es evidenciable que la concavidad de la función es hacia arriba. Proponemos al lector, efectuar el cálculo de  $f''(x)$  en cada uno de los mencionados abiertos.
- Dejamos al lector, la confirmación analítica de los siguientes cálculos:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1}$

Deseamos que el estudiante, confirme si la ilustración que hemos obtenido

utilizando el software *mathematica* es cabal, en cuanto a lo que efectivamente está padeciendo nuestra función en las abscisas  $x = 0$  y  $x = 1$ . Esperamos vuestra respuesta!

## Parte XVI

# Conclusiones Generales





## 15.6. Contribuciones del compendio.

Llegados a este punto con nuestra lectura seguramente estaremos todos de acuerdo en que en el título, CRESTOMATÍA: UN CALEIDOSCOPIO DEL CALCULUS (ver §1.1 en la página 27), la palabra *Calcūlus*, complementada con Cómputo y Conjetura, nos indica de manera precisa que involucra las operaciones de evaluar límites, derivadas, integrales indefinidas, integrales definidas y resolver ecuaciones en forma analítica o numérica. Pero involucra también determinar la convergencia o divergencia de una sucesión infinita de números reales, comprender que significa, cuando es posible, sumar infinitos números reales. Tenemos ahora claro que en el párrafo anterior nos referimos a “Cómputos” cuya concreción exitosa requiere inevitablemente de “Conjeturas”, sustentadas en razonamientos lógicos y generalmente simples, muchas veces sugeridos por imágenes y/o procesos naturales muy conocidos de la física, biología, química, etc., etc. Pero también hablamos de “Cómputos” cuando tratamos con sentencias como las que figuran en el Cuadro 13.12 del §13.8 en la pág. 498.

Confiamos en que resulte ya evidente nuestra intención de generar e incentivar una mentalidad creativa e ingeniosa por parte del lector, que le fomente la intuición y la capacidad de exploración y consolidación de, por ejemplo, las técnicas de diferenciación e integración en el cálculo de una variable y sus aplicaciones en el maravilloso mundo tecnológico actual. Todo esto a través de los conceptos teóricos desarrollados, los ejemplos resueltos, los ejercicios propuestos y la profusa presentación de gráficos e imágenes.

Consideramos que es este un buen momento para incorporar algunas sentencias rectoras enunciadas por notables pensadores:

- “Lo esencial es invisible a los ojos”. Antoine de Saint-Exupéry.
- “Buscar la perfección en mi obra es una utopía”. Tomás Moro.
- “Genius is one percent inspiration, ninety nine percent perspiration”.<sup>4</sup>
- “Wherever there is number, there is beauty”. -Proclus (412-485 A.D.), ams.org, póster 2010.

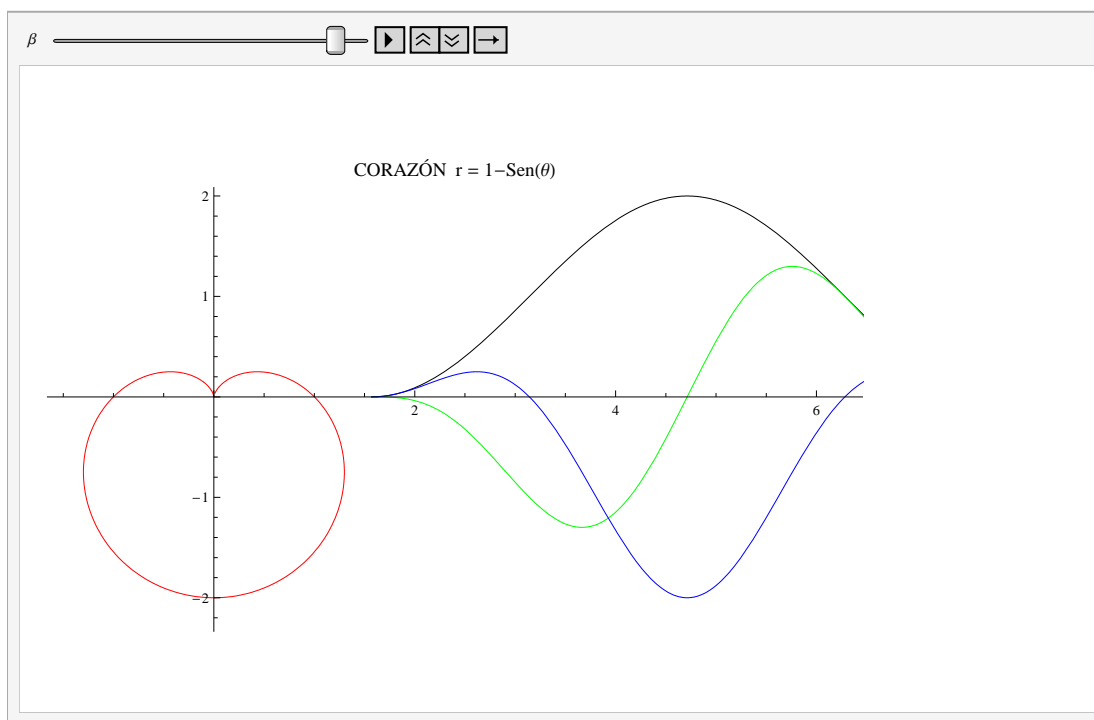
<sup>4</sup>Thomas A. Edison, US inventor (1847-1931), Harper’s Monthly, 1932.

En este momento ya deberíamos percibir la sensación que hemos avanzado, que nos sentimos más seguros y que no va más aquello de “la Matemática no es para mí”. Más aún, luego de leer “Contribuciones del Compendio” y observar las ilustraciones de la pág. 606, decirnos: Ya estamos listos para el *Calcūlus de Varias Variables* ¡Pongamos corazón y vamos por él!

```

Animate[Show[
  Plot[1 - Sin[θ], {θ, N[π/2], β},
    AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotStyle -> RGBColor[0, 0., 0.1],
  Plot[(1 - Sin[θ]) * Cos[θ], {θ, N[π/2], β},
    AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotStyle -> RGBColor[0, 1., 0.1],
  Plot[(1 - Sin[θ]) * Sin[θ], {θ, N[π/2], β},
    AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotStyle -> RGBColor[0., 0., 1.],
  ParametricPlot[{(1 - Sin[θ]) * Cos[θ], (1 - Sin[θ]) * Sin[θ]}, {θ, N[π/2], β},
    AspectRatio -> Automatic, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotStyle -> RGBColor[1., 0., 0.1]
, PlotLabel -> " CORAZÓN r = 1-Sen(θ) ", PlotRange -> {{-1.5, 6.3}, {-2.25, 2.}}
]
, {β, N[π/2], N[2*π + π/2], 0.25}]

```



Cuadro 15.12: Corazón ♡.

# Parte XVII

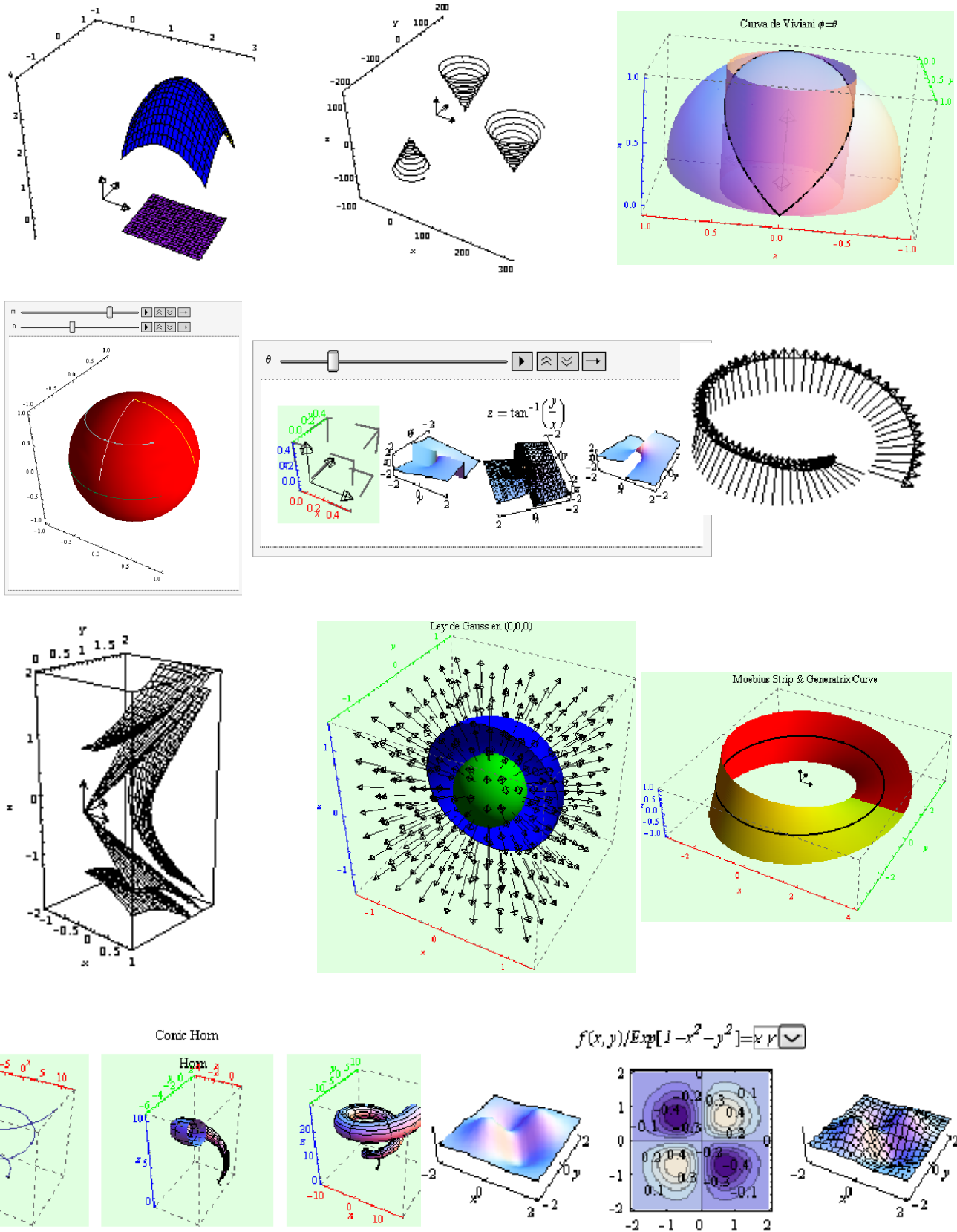
## Forthcoming Issue



# Capítulo 16

## Calculus en varias variables

Capítulo 16. Calculus en varias variables



Cuadro 16.1: GRÁFICOS - ANALISIS MATEMATICO II  
606

# Parte XVIII

## Bibliografía





# Bibliografía

- [Aguilera, N. E. (1995)] Aguilera, N. E. Invitación al Cálculo con computación usando el Mathematica. Red Olimpiada. 1995.
- [Aguilera, N. E. (1995)] Aguilera, N. E. Un paseo por el Jardín de los Fractales. Red Olimpiada. 1995.
- [Apostol, T. (1972)] Apostol, T. *Calculus*. Tomo I. 1972. Editorial Reverté.
- [Ayres, F. (1950)] Ayres, F. *Theory and Problems of Differential and Integral Calculus*. Second Edition. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill Book Company.
- [Born, M., and Wolf, F. (1990)] Born, M. and Wolf, E. *Principles of Optics*. Pergamon Press, 1970.
- [Carmo, M. P. (1976)] *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, Inc. New Jersey, U.S.A. 1976.
- [Christianson, B. (1991)] Christianson, B. *Solving quartics using palindromes*. Mathematical Gazette, Vol. 75, pp. 327-328, October 1991, The Mathematical Association.
- [Ciappina, M. y Niel, B. I. (1997)] Ciappina, M. y Niel, B. I. “Animaciones constructivas: Una propuesta visual para graficar curvas plana en coordenadas polares. (Circunferencias, espirales, cardiodes, caracoles, rosas)”. Reunión Anual de Educación Matemática. Presentado en la XX Reunión de Educación Matemática. Nivel Universitario. Universidad Nacional de Córdoba, Sept. 1.997. Noticiero U.M.A. Número Extraordinario Año 1.997, pág. 176.

## Bibliografía

---

- [Cordero, L. A., Fernández, M. y Gray, A. (1995)] Cordero, L. A., Fernández, M. y Gray, A. *Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica*. Editorial Addison Wesley Iberoamericana. 1995. Wilmington, Delaware, E.U.A.
- [Courant, J. (1958)] [Courant, J. *Cálculo diferencial e integral, Vol I, Limusa*.
- [Coxeter, H. S. M. (1963)] Coxeter, H. S. M. *Introduction to Geometry*. John Wiley and Sons, Inc., 1963.
- [D'Attellis, C. E. (1997)] Visualización de distintas funciones mediante el uso del Mathematica 3.0. Notas del Grupo D'Attellis, 1997. U.T.N.
- [Demidovich, D. (1980)] *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático*. Tercera edición, Editorial Paraninfo. Madrid. 1.980. Código Biblioteca Central UNS, 517 D395-1.
- [Dudley, U. (1997)] Dudley, U. *Numerology or, what Pythagoras wrought*. Mathematical Association of America, 1997.
- [Faucete, W. M. (1996)] Faucete, W. M. *A Geometric Interpretation of the Solution of the General Quartic Polynomial*. The American Mathematical Monthly, Vol. 103, No. 1, January 1996, pp. 51-57.
- [Germani, A. y Brignole, D. (2000)] Germani, A. y Brignole, D. *Análisis Matemático I, primera y segunda parte*. Editorial de la Universidad Nacional del Sur. Edi UNS. 2000. ISBN 987-9281-25-X. Biblioteca Central de la UNS código 517 G317 v.1-2
- [Faucete, W. M. (1996)] Faucete, W. M. *A Geometric Interpretation of the Solution of the General Quartic Polynomial*. The American Mathematical Monthly, Vol. 103, No. 1, January 1996, pp. 51-57.
- [Fernández, A., and Niel, B.(1997)] Fernández, A., and Niel, B. *Folding pathways as brachistochrones*. Proceedings of the Fourth “Dr. Antonio A. R. Monteiro” Congress on Mathematics. Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, 1997, pp. 179-186.

- 
- [Fernández, A., Niel, B., and Burastero, T.(1998)] Fernández, A., Niel, B., and Burastero, T. *The RNA folding problem: a variational problem within an adiabatic approximation*. Biophysical Chemistry. Vol. 74, April 1998, Printed in U.S.A., pp. 89-98.
- [Germani, A. y Brignole, D. (2000)] Germani, A. y Brignole, D. *Análisis Matemático I, tercera y cuarta parte*. Editorial de la Universidad Nacional del Sur. 2000. ISBN 987-9281-25-X. Biblioteca Central de la UNS códigos 517 G317 v.3 y F 517 It8 v.2.
- [Golub, G. H., Van Loan, C. F. (1996)] Golub, G. H., Van Loan, C. F. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 1996, USA.
- [Hamilton, W. R. (1833)] Hamilton, W. R. *On a general Method of expressing the Paths of Light, and of the Planets, by the Coefficients of a Characteristic Function*. Dublin University Review and Quarterly Magazine, Vol. I, 1833, pp. 795-826.
- [Howard, A. (1991)] Howard, A. *Cálculo y Geometría Analítica*. México. Limusa 1991, Vol. I. ISBN 968 18 1536 6. Código Biblioteca Central UNS, 517 An88-1 v.1
- [Iturrioz, L. (1972)] *Apuntes de análisis matemático*. Bahía Blanca. Editorial Othaz. Vol I,II,III, y IV. Biblioteca Central de la UNS código 517 It8-1a2 v.2
- [Kirillov, A. (1999)] Kirillov, A. *On Regular Polygons, Euler's Function, and Fermat Numbers*. Kvant Selecta: Algebra and Analysis, I, pp. 87-98, American Mathematical Society, 1999.
- [Kreyszig, E. (2006) ] *Advanced Engineering Mathematics*. Novena edición. Editotial Hoboken, N.J. John Wiley, 2006. Biblioteca Central de la UNS código 517 K889a9. 7<sup>th</sup> edition, John Wiley & Sons, Inc. Biblioteca del Instituto de Matemática, A-7.047.
- [Larson, R. P. Hosteler, y Edwards B. H. (2010)] Larson, R. P. Hosteler, y Edwards B. H. *Cálculo*. Novena Edición. McGraw-Hill/Interamericana. México. 2010. Biblioteca Central de la UNS código 517 L329-2a9 v.1.
- [Larson, R. P. Hosteler, y Edwards B. H. (2006)] Larson, R. P. Hosteler, y Edwards B. H. *Cálculo*. Octava Edición. McGraw-Hill/Interamericana. México. 2006. Biblioteca Central de la UNS código 517 L329-2a8 v.1.

## Bibliografía

---

- [Leithold, L. (1988)] Leithold, L. *Cálculo para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales*. México. Editorial HARLA, 1988. Biblioteca Central de la UNS código 517 L522-1
- [Leithold, L. (1984)] Leithold, L. *Cálculo para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales*. Pepperdine University, E.U.A. Harla. México.
- [Lemons, D. S. (1997)] Lemons, D. S. *Perfect Form. Variational Principles, Methods, and Applications in Elementary Physics*. Pricenton University Press, Inc. 1997.
- [Markushevich, A. I. (1975)] Markushevich, A. I. *Areas y logaritmos*. Editorial Mir. 1975. Moscú.
- [Marsden, J. E. y Weinstein, A. (1985)] Marsden, J. E. y Weinstein, A. *Calculus*. Segunda edición. Springer-Verlag. New York. 1985. Biblioteca Central de la UNS código 517 M335a2 v.1.
- [Marsden, J. E. y Hoffman, M. J. (1993)] Marsden, J. E. y Hoffman, M. J. *Análisis Clásico Elemental 2<sup>da</sup> edición*, Addison-Wesley Iberoamericana. Biblioteca del Instituto de Matemática A-8073. ISBN 0-201-65369-9.
- [Marsden, J. E. y Tromba, A. J. (2004)] Marsden, J. E. y Tromba, A. J. *Cálculo Vectorial*. Pearson Addison Wesley. 2004. Biblioteca central UNS, código 517.6 M335a5.
- [Miller, R. E. (2000)] Miller, R. E. *Optimization Foundations and Applications*. John Wiley and Sons, Inc., 2000.
- [Murio, D. et al. (1999)] Murio, D., Boyce, W. E. y DiPrima, R. C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley Custom Services, USA. 1999.
- [Murio, D. (1999)] Murio, D. *CD to accompany Differential Equations with Mathematica Notebooks*. Wiley Custom Services, USA. 1999.
- [Niel, B. I. (2014)] Niel, B. I. *Caracterización de caminos hamiltonianos en problemas específicos*. Tesis doctoral en matemática. 20/08/2014. Biblioteca central UNS, código R 040 B148 2014-1318.

- 
- [Niel, B. I. (2005a)] Niel, B. I. *Geometry of the euclidean hamiltonian subptimal and optimal paths in the N's networks*. Proceedings of the VIII Dr. Antonio A. R. Monteiro, Congress of Mathematics, pp. 67 - 84, 2006, Mathematics Department, Universidad Nacional del Sur, 8000 Bahía Blanca, Argentina.
- [Niel, B. I. (2005b)] Niel, B. I. *Fermat, Snell and Hamilton on Geometric Optics Circumstances*. AMSE, Modelling, Measurement and Control, Serie A: A General Physics and Electrical Applications, Vol. 78, Number 3-4, 2005.
- [Niel, B. I. (2004)] Niel, B. I. *Hamilton's real finds on geometric optics in a Hamiltonian play*. Proceedings of MS' 2004 University Claude Bernard - Lyon I, LNSS, CNRS, pp. 9.9-9.13, 5-7 July 2004, Lyon, France.
- [Niel, B. I. (2003)] Niel, B. I. *Hallazgos de Hamilton en óptica geométrica en un juego Hamiltoniano*. LIII Reunión de Comunicaciones Científicas, U.M.A. 2003. Sesión: Teoría de Grafos, Combinatoria y Convexidad. Índice de Comunicaciones Científicas pág. 77.
- [Niel, B. I. (2002)] Niel, B. I. *Hamiltonian path paradigms mirrored at the Fermat's Principle*. Proceedings of the Fourth International Conference on Modelling and Simulation. Victoria University. pp. 132-138. 11-13 November, 2002, Melbourne, Australia.
- [Niel, B. I. (2002)] Niel, B. I. *"Bases Recíprocas locales, su lectura implícita desde el Teorema de la Función Inversa, para  $F_i(x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_i) = 0, i = 3$ "*. Expuesto en la XXV Reunión de Educación Matemática. Nivel Universitario. Universidad Nacional del Litoral, Sept. 2.002. Índice de comunicaciones en educación R.E.M 2.002, pág. 38.
- [Niel, B. I. (2001)] Niel, B. I. *The geometry of the Euclidean Hamiltonian trajectories on  $\sqrt[n]{1}$  points*. Actas del VI Congreso Dr. Antonio A. R. Monteiro, Bahía Blanca. Departamento de Matemática. Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur, pp. 33-49, 2001.
- [Niel, B. I. (1998)] Niel, B. I. *"Visualizaciones gráficas del éxito y del fracaso en un juego sobre las raíces n-ésimas de la unidad"*. Expuesto en la XXI Reunión de Educación

## Bibliografía

---

- Matemática. Centro Regional Universitario Bariloche, Univ. Nac. del Comahue. R.E.M, Nivel Universitario, Sept. 1.998. Noticiero Número Extraordinario Año 1.998, pág. 171.
- [Niel, B. I. (1996)] Niel, B. I. “¿ *Es posible lograr una visualización interactiva del concepto de la integral definida ?*” Presentado en la XIX Reunión de Educación Matemática. Nivel Universitario. Universidad Nacional de Salta, Sept. 1.996. U. M. A, Noticiero Número Extraordinario Año 1.996, pág. 168. (págs. totales: 170).
- [Niel, B. I. (1995)] Niel, B. I. “*Imágenes Gráficas: su contribución al aprendizaje de Cálculo II para estudiantes en ciencias exactas y naturales*”. Presentado en el III Ateneo de Prof. Universitarios de Computación y Sistemas. U.N.S, Oct. 1.995. Expuesto en la XVIII Reunión de Educación Matemática. Nivel Univ., U.N.R.C, Oct. 1.995. Unión Matemática Argentina, Noticiero Nro Extraordinario Año 1.995, pág. 172. Aceptado como comunicación en la III Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur. Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Salta, 07/96.
- [Noriega, R. J. (1991)] Noriega, R. J. *Cálculo diferencial e integral*. Matemática Universitaria. Centro de Investigaciones y Acción Educativa. Editorial Docencia S.A. 1991. Buenos Aires. Código Biblioteca Central UNS, 517.3 N774.
- [Petrovski, I. G. (1973)] Petrovski, I. G. *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, Inc. New York, 1973.
- [Poole, D. (2003)] . Poole, D. *Álgebra Lineal. Una introducción moderna*. Editorial Thomson. 2003.
- [Purcell, E. J., Varberg, D. et. al. ( 1993)] Purcell, E. J. y Varberg, D. *Cálculo con Geometría Analítica*. Sexta Edición. Editorial Prentice Hall Hispanoamericana, S. A. México - Englewood Cliffs, 1993. Biblioteca Central U.N.S. código: 517, P971.
- [Rabuffetti, H. (1995)] Rabuffetti, H. *Introducción al Análisis Matemático (Cálculo 1)*. Editorial El Ateneo. Decimotercera edición. Buenos Aires. 1995. Biblioteca Central de la UNS, código 517 R114 2.

- 
- [Rey Pastor, J. et al. (1957)] Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. and Trejo, C. A. *Análisis Matemático 1. Análisis Algebraico. Teoría de Ecuaciones. Cálculo infinitesimal de una variable*. Editorial Kapelusz S. A., 1957. Biblioteca Central de la UNS, código
- [Rey Pastor, J. et al. (1957)] Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. and Trejo, C. A. *Análisis Matemático 2. Cálculo infinitesimal de varias variables*. Editorial Kapelusz S. A., 1957. Biblioteca Central de la UNS, código 517 R33 1.
- [Rosenfeld, B. A. y Sergeeva, N. D. (1973)] Rosenfeld, B. A. y Sergeeva, N. D. *Proyección Estereográfica*. Editorial Mir. 1973. Moscú.
- [Rudin, W. (1953)] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw Hill, Inc. 1976. Biblioteca Central de la UNS, código 517 R834.
- [Sadosky, M. y Guber, R. (1971)] *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral*. Fascículo I y II. Librería y Editorial Alsina. Buenos Aires, 1971.
- [Santaló, L. A. (1993)] Santaló, L. A. *La Geometría en la formación de profesores*. Red Olímpica 1993.
- [Shílov, G. E. (1975)] Shílov, G. E. *Análisis matemático en el campo de funciones racionales*. Editorial Mir. 1975. Moscú.
- [Sherk, F. A. et al. (1995)] Sherk, F. A., McMullen, P., Thompson, A. C. and Weiss, A. I. (1995) *Kaleidoscopes*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and advanced texts. A Wiley-Interscience Publication 1995.
- [Shervátov, V. G. (1975)] Shervátov, V. G. *Funciones hiperbólicas*. Editorial Mir. 1975. Moscú.
- [Sominski, I. S. (1975)] *Método de inducción matemática*. Editorial Mir. 1975. Moscú.
- [Spivak, M. (1999)] *Calculus. Cálculo Infinitesimal*. C Tomo I, 5<sup>ta</sup> Edición 1.999. Reverté. ISBN 84-291-5136-2.

## Bibliografía

---

- [Sundar, B., Hamilton, A. C., and Courtial, J.(2009)] Sundar, B., Hamilton, A. C., and Courtial, J. *Fermat's principle and the formal equivalence of local light-ray rotation and refraction at the interface between homogeneous media with a complex refractive index ratio*. Optics Letters. Vol. 34, No. 3, 2009, pp. 374-376.
- [Stewart, J. (2010)] Stewart, J. *Cálculo de una variable : conceptos y contextos*. Cuarta Edición. México, D.F. Editorial Cengage Learning, 2010. Biblioteca Central de la UNS, código 517 St49-5a4.
- [Stewart, J. (2008)] Stewart, J. *Cálculo de varias variables*. Sexta Edición. Cuarta Edición, Editorial Thomson Learning, 2008. México.
- [Stewart, J. (2008)] Stewart, J. *Cálculo: trascendentes tempranas*. Sexta edición. México, D. F. Editorial Cengage Learning. 2008. Biblioteca Central de la UNS, código 517 St49-2a6r.
- [Stewart, J. (2007)] Stewart, J. *Precálculo: matemáticas para el cálculo*. Quinta Edición. México, D. F. Editorial Cengage Learning, 2007. Biblioteca Central de la UNS, código 517 St49-4a5
- [Stewart, J. (2001)] Stewart, J. *Cálculo de varias variables*. Cuarta Edición. Cuarta Edición, Editorial Thomson Learning, 2001. México. Código Biblioteca Central UNS, código 517 St49-2.
- [Stewart, J. (1998)] Stewart, J. *Cálculo*. Tercera Edición. 1998. International Thomson Editores. ISBN 968-7529-12-1. Biblioteca Central de la U.N.S., Código 517, St49.
- [Strang, G. (2010)] Strang, G. *Calculus*. Segunda Edición. Wellesley, Mass. Wellesley-Cambridge Press, 2010. Biblioteca Central de la UNS, código 517 St81a2.
- [Tabachnikov, S. (1999)] Tabachnikov, S. *Kvant Selecta: Algebra and Analysis, II. Serge Tabachnikov, Editor. Mathematical World. Volume 15*. American Mathematical Society, 1999.



- 
- [Thomas, G. B. y Finney, R. L. (1.998)] Thomas, G. B. y Finney, R. L. *Cálculo: Una variable*. 9a. ed. México, D.F. Editorial Addison Wesley Longman de México. 1.998. Código Biblioteca Central UNS, 517 T363-4
- [Thomas, G. B. y Finney, R. L. (1.987)] *Calculus and Analytic Geometry*. Sexta Edición en español. Wilmington, Del. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- [Tikhomirov, V. M. (1990)] Tikhomirov, V. M. *Stories about maxima and minima*. AMS and Mathematical Association of America, 1990.
- [Treatman, S., and Wickham, C. (2000)] Treatman, S. and Wickham, C. *Constructible Approximations of Regular Polygons*. The American Mathematical Monthly, Volume 107, Number 10, pp. 911-922, December 2000. Serge Tabachnikov, Editor, AMS.
- [Uspensky, J. V. (1948)] Uspensky, J. V. *Theory of Equations*. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1948.
- [Vilenkin, N. (1972)] Vilenkin, N. *¿ De cuántas formas ? Combinatoria*. Editorial MIR, MOSCU 1972.
- [Vinogradov, I. (1971)] Vinogradov, I. *Fundamentos de la teoría de los números*. Editorial MIR, MOSCU 1971.
- [Wolf, K. B., and Krötzsch, G. (1995)] Wolf, K. B., and Krötzsch, G. *Geometry and dynamics in refracting systems*. European Journal of Physics. Vol. 16, No. 1, 1995, 14-20.
- [Zill, D. G.(1986)] Zill, D. G. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamericana. México D.F. 1986.
- [Zill, D. G.(1987)] Zill, D. G. *Cálculo con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Americana. 1987. ISBN 968-7270-37-3. Biblioteca Central U.N.S., Sign: 517, Z65.