Universidad Nacional del Sur

Tesis de Doctora en Matemática

ESTIMACIONES CUANTITATIVAS EN ANÁLISIS ARMÓNICO

Diana Jorgelina Recchi

Bahía Blanca Argentina

2013

Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática durante el período comprendido entre el 26 de junio de 2007 y el 9 de diciembre de 2013, bajo la dirección de Carlos Pérez Moreno, Catedrático de Universidad de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, España y Sheldy Ombrosi, Profesor Titular del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

Diana Jorgelina Recchi

A Cristian y Santiago.

Agradecimientos

A mi director Carlos Pérez Moreno, por su apoyo, generosidad y dedicación, porque a pesar de la distancia siempre estuvo muy cerca, por valorarme, escucharme y por esos hermosos gestos que nunca olvidaré.

A mi co-director Sheldy Ombrosi, porque siempre confió en mí y me guió, porque cada vez que lo necesito está y porque descubrí que detrás de su gran capacidad profesional, hay una excelente persona.

A mi hijo Santiago, porque es el motor de mi vida y quien ha llegado para llenarme de felicidad, porque espero que cuando crezca pueda entender lo difícil que fue resignar momentos juntos para lograr este objetivo y porque su presencia me completa.

A mi esposo Cristian, porque es mi compañero de vida y quien ha sabido entenderme, esperarme y apoyarme en cada decisión que he tomado. Porque siempre fue mi gran contención y quien me aguanta con amor en esos días en los que todo se ve gris, ayudándome a reponerme y alentándome a seguir.

A mis padres, Claudia y Roberto, porque siempre apoyaron mis decisiones, porque están incondicionalmente a mi lado y porque son los mejores padres que un hijo puede tener. Gracias por hacerme crecer en un marco de amor y contención, y gracias por darme las alas para emprender mi propio vuelo.

A mis hermanos, Damián y Moni, porque siempre están cuando los necesito, porque me acompañan en todo lo que hago y porque son parte fundamental en mi vida.

A mis compañeros de oficina, Melina, Natalia y Diego, porque siempre están para ayudarme, porque he encontrado en ellos buenos amigos y sobre todo excelentes personas. Especialmente quiero agradecerle a *Diego*, por compartir conmigo sus conocimientos de Latex que han sido de gran utilidad para esta tesis.

Al Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur y al Instituto de Matemática de Bahía Blanca, por haberme brindado todo su apoyo tanto en lo académico como en lo personal.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, cuya ayuda económica facilitó la realización de esta tesis.

Resumen

Probamos estimaciones cuantitativas para diferentes operadores clásicos dentro del marco de la teoría de pesos. Concretamente, nos centramos en la búsqueda de estimaciones óptimas respecto a la dependencia de los pesos de tipo A_p.

Para el operador integral fraccionario probamos, en el caso extremo de los parámetros (p, q), una acotación $L^p(w^p) \to L^q(w^q)$ con dependencia óptima de la constante del peso $A_{1,q}$. También probamos la acotación del operador maximal fraccionaria reflejando la dependencia mixta de las constantes del peso.

Probamos estimaciones óptimas en lo que se conoce como desigualdades mixtas débiles ya sea para la el operador maximal de Hardy-Littlewood o para operadores de Calderón-Zygmund. Este tipo de desigualdades se encuentra en el marco del Teorema de Sawyer dentro de la teoría de pesos que estima la norma $L^{1,\infty}(uv)$ de $v^{-1}T(fv)$.

Estudiamos el decaimiento de funciones conjunto de nivel que involucran diversos tipos de operadores y sus operadores tipo maximal de control. Probamos que el decaimiento de estas funciones es de tipo exponencial para algunos pares de operadores y estudiamos el comportamiento de estas funciones cuando se involucra un peso en la clase A_∞.

Abstract

We prove quantitative estimates for different classical operators within the framework of weight theory. Specifically we focus on the search for sharp estimates with respect to the dependency on the A_p weights.

For fractional integral operators and in the extreme case of the parameters (p, q), we find an $L^p(w^p) \to L^q(w^q)$ bound with sharp dependency on the $A_{1,q}$ constant. We also exhibit mixed dependency weight constants bounds for fractional maximal operators.

We determine sharp estimates for the so-called mixed weak type inequalities, both for the Hardy-Littlewood maximal operator and for Calderón-Zygmund operators. This type of inequalities are in the spirit of Sawyer's Theorem estimating the $L^{1,\infty}(uv)$ norm of $v^{-1}T(fv)$.

We study the decay of level-set functions involving different operators and their control maximal type operators. We show that the decay is of exponential type for some pairs of operators and study the behavior of these level-set functions when the weight involved belongs to the A_∞ class.

Índice general

Introducción

Los operadores más básicos del análisis armónico están acotados en $L^p(\mathbb{R}^n)$ donde la medida subyacente es la medida de Lebesgue. De forma natural surge estudiar esos operadores básicos en espacios $L^p(\mu)$ donde μ es una medida. En la mayoría de los casos esta medida es absolutamente continua, y por lo tanto, estamos considerando realmente los espacios $L^p(w)$, donde w es un peso, por lo que se trataría en realidad de estudiar propiedades de clases de pesos. En muchas situaciones el estudio de estos problemas o sus variaciones se traducen en cuestiones que no son simplemente meras generalizaciones de la teoría porque tienen muchas aplicaciones de gran alcance. Por ejemplo, la teoría de pesos juega un papel importante en el estudio de los valores frontera del operador de Laplace en dominios Lipchitz, o en el estudio de la regularidad de las ecuaciones elípticas con elipticidad degenerada. Por otro lado también aparecen de forma natural en el estudio de las series de Fourier generalizadas o en el estudio de las extensiones vectoriales de operadores.

Uno de estos operadores básicos es el operador maximal de Hardy-Littlewood definido por la expresión

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \, dy.$$

Como es bien sabido este operador juega un papel central en Análisis Armónico porque, por ejemplo, de su comportamiento cuantitativo (por ejemplo que el operador sea de tipo débil $(1,1)$) se pueden deducir propiedades cualitativas de la función tales como el teorema de diferenciación de Lebesgue. Uno de estos comportamientos cuantitativos es la acotación en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p > 1$ siendo uno de los resultados mas clásicos del área. Desde nuestro punto de vista, el avance más importante en la teoría y que causó un gran impacto fue descubierto por B. Muckenhoupt a principio de la década de los setenta. Se trata del estudio de la acotación de M en $L^p(w)$ y la condición clave es la famosa condición A_p de Muckenhoupt:

$$[w]_{A_p} := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) \, dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} \, dx \right)^{p-1} < \infty$$

y a este número se conoce como la constante A_p del peso. El teorema establece lo siguiente

$$M : L^p(w) \longrightarrow L^p(w) \qquad \text{si y sólo si} \qquad w \in A_p$$

Una vez que se obtuvo este resultado se abría la posibilidad de considerar el estudio de otros operadores más singulares como la transformada de Hilbert que realmente era el objeto de deseo porque está ligado íntimamente a la convergencia en L^p de las series de Fourier generalizadas. En efecto, así fue, un segundo impacto vino de la mano de Hunt, Muckenhoupt y Wheeden en [HMW] donde desarrollaron la teoría de pesos adecuada para la transformada de Hilbert. Este operador viene definido de la siguiente forma

$$Hf(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{x-y}\, dy.$$

Estos autores probaron que la condición A_p caracteriza las acotaciones en $L^p(w)$ de este operador exactamente igual al caso del operador maximal, esto es

$$H : L^p(w) \longrightarrow L^p(w) \qquad \text{si y sólo si} \qquad w \in A_p$$

Poco después, o puede que simultáneamente, la teoría se entendió mucho mejor a raíz de un trabajo también muy famoso de Coifman y Fefferman [CoF] donde extendieron la teoría A_p para los operadores de Calderón-Zygmund (mirar Capítulo 1, Sección 1.2). Este era el punto de vista clásico. Desde hace pocos años hay un resurgimiento de la teoría donde se hace énfasis en otros problemas que vamos a explicar brevemente a continuación. Para ello observamos que en estos resultados clásicos, arriba mencionado, la norma del operador no está relacionada con la constante A_p. Diremos que esta es una propiedad cualitativa. Mucho tiempo después, casi veinte años más tarde, fue que R. Fefferman le preguntó a S. Buckley, estudiante de doctorado en la Universidad de Chicago, por la relación que había entre la norma del operador maximal, esto es $\|M\|_{L^p(w)}$, y la constante A_p, $[w]_{A_p}$. Buckley [Bu] probó que para todo $1 < p < \infty$,

$$\|M\|_{L^p(w) \to L^p(w)} \leq c_{n,p}\, [w]_{A_p}^{1/(p-1)}$$

y que el exponente $1/(p-1)$ es el mejor posible. Diremos que este es un resultado cuantitativo. En el mismo trabajo, Buckley también prueba otro resultado cuantitativo aunque más fácil. Muestra la siguiente acotación de tipo débil del operador maximal:

$$\|M\|_{L^p(w) \to L^{p,\infty}(w)} \leq c_n\, [w]_{A_p}^{1/p},$$

aunque en realidad este caso no era más que una aplicación sencilla de los lemas de cubrimientos clásicos. Más aún, en este caso se puede probar fácilmente que son comparables ambas cantidades, cosa que no era posible en el caso previo y de hecho el resultado es falso ([HP]).

Aunque un resultado de este tipo fue considerado por J. Wittwer, también en su tesis y también dirigida por R. Fefferman, para el operador martingala y la función cuadrado ([W1] y [W2] respectivamente), a nosotros nos interesa más los problemas relacionados con las integrales singulares pues conforman uno de los ejes centrales del Análisis Armónico. Realmente, el siguiente paso histórico de relevancia vino de la mano de la transformada de Beurling (también conocida por Ahlfors-Beurling) en el trabajo de Astala, Iwaniec y Sacksman [AIS]. Este operador viene definido por la expresión

$$Bf(z) = v.p. \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^2}\, d\omega$$

y es uno de los operadores integrales singulares más importantes por su relación íntima con la variable compleja y particularmente con la teoría de aplicaciones cuasi-conformes. Desde los trabajos de los años 70 mencionado antes se sabe que este operador está acotado en $L^p(w)$, $1 < p < \infty$, pero el punto clave de [AIS] es obtener un resultado cuantitativo en función de la constante $[w]_{A_p}$ para $p \geq 2$. Esta cuantificación tiene consecuencias importantes en la teoría de las aplicaciones cuasi-conformes. Siendo más precisos, los autores están interesados en encontrar el menor $q < 2$ para el cual todas las soluciones de la ecuación de Beltrami

$$\bar{\partial} f = \mu . \partial f$$

que pertenecen al espacio de Sobolev $W^{1,q}_{loc}$ se automejoran para pertenecer a $W^{1,2}_{loc}$, es decir, son cuasi-regulares. Aquí μ es una función acotada con $\|\mu\|_\infty = k < 1$. Un importante resultado de Astala [As] dice que $q > 1 + k$ es suficiente. Por otro lado, Iwaniec y Martin [IM] encontraron ejemplos que muestran que en general, el resultado no es válido para $q < 1 + k$. En [AIS] los autores indicaron que en el caso dudoso $q = 1 + k$ la cuasi-regularidad sería una consecuencia de la cota lineal de $\|B\|_{L^p(w)}$ para $p \geq 2$ en términos de la constante del peso w. De hecho conjeturaron que se debería verificar lo siguiente

$$\|B\|_{L^p(w) \to L^p(w)} \leq c[w]_{A_p} \qquad p \geq 2.$$

es decir, que haya una dependencia lineal respecto de la constante. Esto fue probado por S. Pettermichl y A. Volberg en [PV]. A partir de este momento se entendió que era muy importante entender la relación que existe entre la norma del operador bajo estudio y las constantes de tipo A_p involucradas en la acotación del operador y en especial los operadores de Calderón-Zygmund.

Gracias a una versión cuantitativa del teorema de extrapolación de Rubio de Francia que se obtuvo en el trabajo [DGPP] se puede obtener la dependencia óptima de la constante del peso en todo el rango, si se tiene la dependencia lineal para el caso $p = 2$. Toma más importancia entonces lo que se conocía como "conjetura A_2" que dice que si $w \in A_2$ y si T es un operador de Calderón-Zygmund, entonces

$$\|T\|_{L^2(w)} \leq c_T \, [w]_{A_2},$$

y como consecuencia de este teorema de extrapolación se deduce el teorema cuantitativo más famoso:

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_{p,T} [w]_{A_p}^{\max\{1/(p-1),1\}} \qquad 1 < p < \infty.$$

De hecho durante mucho tiempo estuvo abierto el caso de la transformada de Hilbert hasta que S. Pettermichl lo probó en [Pet07] constituyendo un pilar básico en el desarrollo moderno de la teoría, además del caso de la transformada de Riesz [Pet08]. Posteriormente este resultado se mejoró en [LPR] usando otras técnicas y para el caso de núcleos de convolución suaves que posteriormente fue muy mejorado usando métodos bien distintos en [C-UMP11] siendo más flexible porque se puede aplicar a muchos operadores como se puede ver en [C-UMP12]. Aún así y todo todavia faltaba el caso de operadores de Calderón-Zygmund asumiendo solamente la condición de Lipschitz en el núcleo. Finalmente fue Hytönen quien probó la conjetura [Hy] usando un método distinto y muy interesante (existe una nueva prueba de la conjetura más simple e interesante obtenida por Lerner en [Le13a].) Poco tiempo después se mejoró este resultado en [HP] donde se obtuvo

$$\|T\|_{L^2(w)} \leq C_n\,[w]_{A_2}^{\frac{1}{2}}([w]_{A_\infty}^{\frac{1}{2}} + [w^{-1}]_{A_\infty}^{\frac{1}{2}}),$$

teniendo en cuenta que $[w]_{A_\infty} \leq c_n[w]_{A_2}$,. Éste es el primer ejemplo modelo del tipo de desigualdades cuantitativas mixtas en el sentido de que se reemplaza una fracción de la constante A_2 por una nueva constante, A_∞, que es más pequeña.

Otro tipo de resultados cuantitativos se puede obtener asumiendo condiciones más fuertes en el peso como A_1. En tal sentido, el trabajo [LOP09a] se prueba que

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_T\, p\, p'\, [w]_{A_1}.$$

Enfatizamos de nuevo que el crecimiento es lineal para todo p resultado mejor que el caso previamente considerado porque se asume una condición más fuerte en el peso. Esta dependencia lineal del peso es óptima y además prueban un resultado para la norma de tipo débil $(1,1)$ dónde la dependencia de la constante es de la forma $[w]_{A_1}\log(e+[w]_{A_1})$ que no se ha podido mejorar aún si pensamos en la constante A_1 "pura", lo que si se ha logrado en el trabajo [HP] es una mejora en el sentido de combinar la constante A_1 con la A_∞ puesto que $[w]_{A_\infty} \leq [w]_{A_1}$ de la siguiente forma:

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_T\, pp'\, [w]_{A_1}^{1/p}[w]_{A_\infty}^{1/p'} \tag{1}$$

y

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_T\, [w]_{A_1}\, \log(e+[w]_{A_\infty})\|f\|_{L^1(w)}. \tag{2}$$

En este trabajo nosotros nos planteamos estudiar estimaciones de este tipo para varios operadores y las denotaremos como resultados cuantitativo de tipo $A_p - A_\infty$. En tal sentido, en el Capítulo 2 estudiamos el operador integral fraccionario I_α (Ver sección 1.5 del Capítulo de Preliminares) donde obtenemos resultados cuantitativos del estilo a las presentadas en los trabajos [LOP08], [LOP09a] y [HP], las cuales forman parte de nuestro trabajo [Rec13].

En el trabajo [LMPT] los autores prueban algunos resultados óptimos para el operador integral fraccionario y para la maximal fraccionaria sobre los cuales damos más información en el Capitulo de preliminares.

Nosotros diremos que un peso w está en la clase $A_{\infty,q}$ si

$$[w]_{A_{\infty,q}} \equiv \sup_Q \frac{1}{w^q(Q)} \int_Q M(\chi_Q w^q)dx < \infty$$

También recordemos que $w \in A_{1,q}$ si existe una constante $c > 0$ tal que

$$Mw^q \leq c\, w^q \qquad \text{a.e.}$$

y llamaremos constante $A_{1,q}$ del peso w y lo notaremos con $[w]_{A_{1,q}}$, a la menor de las constantes c posibles.

Una relación importante que se verifica entre estas clases de pesos es que $[w]_{A_{\infty,q}} \leq [w]_{A_{1,q}}$ con lo cual se puede obtener

$$\| I_\alpha f \|_{L^q(w^q)} \leq c[w]_{A_{1,q}}^{1-\frac{\alpha}{n}} \| f \|_{L^p(w^p)},$$

como corolario de haber podido probar que

$$\| I_\alpha f \|_{L^q(w^q)} \leq c[w]_{A_{\infty,q}}^{1/p'}[w]_{A_{1,q}}^{1/q} \| f \|_{L^p(w^p)} .$$

Estas desigualdades que hemos probado son ambas óptimas en el sentido de la dependencia de la constante del peso involucrado y para el caso $\alpha = 0$, donde el comportamiento de la integral fraccionaria es en algún sentido como el de las integrales singulares, estaríamos "recuperando"las desigualdades (2) y (1).

La muy conocida conjetura de Muckenhoupt y Wheeden

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, Mw(x)dx,$$

la cual se sabe hoy que es falsa, tiene su análogo para el caso de la integral fraccionaria

$$\|I_\alpha f\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c \int_{\mathbb{R}^n} f(x) M_\alpha w(x)dx,$$

y en este caso su falsedad fue probada en [CPSS]. En ese mismo trabajo los autores conjeturaron que vale

$$\|I_\alpha f\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c \int_{\mathbb{R}^n} f(x) M_\alpha M w(x)dx.$$

Observemos que si esta desigualdad fuera cierta, para el caso $w \in A_1$ tendríamos el siguiente resultado:

$$\|I_\alpha f\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c \, [w]_{A_1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) M_\alpha w(x)dx$$

que probamos en el Capítulo 2. En el mismo capítulo probamos un teorema cuantitativo con dos pesos para el operador maximal fraccionario usando constantes mixtas. De forma más precisa el Teorema 2.1.4 establece

$$\|M_\alpha(f\sigma)\|_{L^q(w)} \leq C_{n,p,q} \left([w,\sigma]_{A_{p,q}^\alpha}[\sigma]_{A_\infty}\right)^{1/p} \|f\|_{L^p(\sigma)}.$$

Por último, en ese capítulo damos una nueva prueba simple de la desigualdad de Hölder al revés cuando un peso está en la clase A_∞ pero usando la constante exponencial.

Como mencionamos antes, Muckenhoupt probó que el operador maximal de Hardy-Littlewood está acotado en norma $L^p(w)$, para w un peso si y sólo si el peso verifica la condición que hoy se conoce en la literatura como condición A_p de Muckenhoupt. Posteriormente en [Jo] Jones probó que un peso w está en la clase A_p si y sólo si admite una factorización de la forma $w_0 w_1^{1-p}$, con w_0 y w_1 en la clase A_1. En busca de probar que la condición de factorización implica la acotación en norma $L^p(w)$ (ver más información en la introducción del Capítulo 3), Sawyer prueba en [Sa85] que

$$\left\|\frac{M(fv)}{v}\right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq \int_{\mathbb{R}} f(x)u(x)v(x)dx, \tag{3}$$

para toda f no negativa y dónde u y v son pesos en la clase A_1. En ese trabajo Sawyer conjetura que esta desigualdad también es válida en más dimensiones e incluso si reemplazamos el operador maximal por la transformada de Hilbert. Años después en [C-UMP05] Cruz-Uribe, Martell y Pérez prueban las conjeturas dadas por Sawyer y más, puesto que demuestran que podemos reemplazar en (3) el operador maximal por un operador de Calderón-Zygmund cuando u está en A_1 y v está en A_1 o en $A_\infty(v)$. Otro problema que queda abierto en el trabajo [C-UMP05], el cual es el motivador principal de nuestro capítulo 3, es la siguiente conjetura que se conoce dentro de la teoría de desigualdades mixtas con pesos como "Conjetura de Sawyer"y dice que si u es un peso en la clase A_1 y v es un peso en la clase A_∞ entonces vale la desigualdad (3). Motivados por esta conjetura y la dificultad de la prueba original de Sawyer para el caso en el que los dos pesos están en A_1 es donde se centro nuestro trabajo en el Capítulo 3. Por un lado trabajamos para entender el problema de donde surgieron resultados alternativos al mismo tiempo que hicimos foco en la dependencia de las constantes de los pesos en las desigualdades del estilo (3) tanto para el operador maximal de Hardy-littlewood como para los operadores de Calderón-Zygmund obteniendo resultados muy interesantes como por ejemplo

$$\left\|\frac{T(fv)}{v}\right\|_{L^{1,\infty}(v)} \leq \ C_n\,[v]_{A_p}\,\text{máx}\{p,\ \log(e+[v]_{A_p})\}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|v(x)\,dx$$

cuando v es un peso en la clase A_p para $p>1$. Además pudimos probar la dependencia lineal óptima en la siguiente desigualdad

$$\left\|\frac{M(fv)}{v}\right\|_{L^{1,\infty}(v)} \leq C\ [v]_{A_1}\int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)\,dx.$$

También obtuvimos resultados que reflejan la dependencia de las constantes mixtas de los pesos, clases muy actuales que combinan la parte A_p con la parte A_∞ (ver sección 1.3.3).

Por otro lado, uno de los problemas clásicos, es el de poder controlar los operadores de Calderón-Zygmund usando operadores de tipo maximal, ejemplo de esto es la desigualdad de Coifman-Fefferman, que controla los operadores de Calderón-Zygmund con la maximal de Hardy-littlewood. (ver [CoF]). Una herramienta muy útil para ello es la de poder entender el comportamiento asintó tico de la siguiente función conjunto de nivel

$$\varphi(t) := \frac{1}{|Q|}|\{x\in Q : |T_1f(x)| > t|T_2f(x)|\}| \qquad t>0$$

dónde T_1 es típicamente un operador con alguna singularidad y T_2 es el operador de tipo maximal que lo controla. Una de las razones por las que interesa entender el comportamiento de esta función se debe a que está conectado con desigualdades de tipo "good-λ"como la siguiente que probó Buckley en [Bu]:

$$|\{x\in Q : |Tf(x)| > 2\lambda, Mf(x)\leq \gamma\lambda\}| \leq ce^{-c/\gamma}|Q| \tag{4}$$

donde T es un operador de Calderón-Zygmund.

Este tipo de desigualdades permite obtener resultados de control como el de Coifman-Fefferman y también vale mencionar que el decaimiento exponencial (4.3) ha sido un elemento muy importante a la hora de probar estimaciones óptimas para A_1 en los trabajos [LOP08] y [LOP09b]. En [O-CPR13] se extiende la desigualdad a otros casos pares de operadores (T_1, T_2). Respecto a este problema nosotros probamos en el capítulo 4 un decaimiento de tipo exponencial para el operador integral fraccionario controlándolo con la maximal fraccionaria y también para el conmutador fraccionario y su operador control natural que es la maximal fraccionaria para espacios de Orlicz.

Otro problema que abordamos en el último capítulo fue tratar de generalizar los resultados obtenidos en [O-CPR13] cambiando la función conjunto de nivel por una función conjunto de nivel pesada del tipo

$$\varphi_w(t) := \frac{1}{w(Q)} w(\{x \in Q : |T_1 f(x)| > t|T_2 f(x)|\}) \quad t > 0$$

donde w es un peso en la clase A_∞ de Muckenhoupt.

En este caso recuperamos el decaimiento de tipo exponencial y reflejamos cómo era la dependencia de la constante del peso w.

En este trabajos suponemos que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de la teoría de pesos dentro del análisis real que pueden encontrarse en [GCRdF], [G1], [G2] entre otros. De todas maneras, en el primer capítulo recordaremos las nociones y resultados necesarios para la comprensión de esta tesis.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo recordaremos las definiciones y resultados básicos necesarios para poder entender la teoría que desarrollaremos en los siguientes capítulos. Daremos las demostraciones de los resultados que no son tan conocidos y sólo mencionaremos los teoremas clásicos del área que sean necesarios en esta tesis.

1.1. Maximal de Hardy-Littlewood

Dada una función f localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, se define el operador maximal de Hardy-Littlewood como

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q que contienen al punto x. Cuando hablamos de cubos, siempre haremos referencia a cubos cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados. También podemos considerar tomar el supremo sobre bolas o sobre bolas centradas en el punto x. En todo los casos son equivalentes salvo constantes dimensionales.

La función maximal surge de forma natural dentro del análisis tanto para probar teoremas de existencia de límites en casi todo punto como para controlar operadores singulares, algunos puntualmente y otros en norma.

Un ejemplo modelo de existencia de limite en casi todo punto es el teorema de diferenciación de Lebesgue:

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy.$$

Una de las desigualdades más clásicas que verifica el operador maximal de Hardy-Littlewood y que permite probar otros importantes resultados es la siguiente desigualdad de tipo débil.

Teorema 1.1.1 (Hardy-Littlewood-Wiener) *Existe una constante dimensional C tal que para todo λ positivo vale la siguiente desigualdad*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx$$

Como consecuencia de este teorema y del teorema de interpolación de Marcinkiewicz se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.1.2 *Sea* $1 < p < \infty$ *entonces existe una constante* C *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx$$

Nosotros diremos que w es un peso si es, en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$, una función no negativa localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Además, si E es un conjunto medible,

$$w(E) = \int_E w(x) dx.$$

teniendo en cuenta estas definiciones, podemos mencionar el siguiente teorema que muestra la validez de dos desigualdades muy importantes que verifica la maximal y se pueden encontrar en [FS].

Teorema 1.1.3 *(a) para todo* $\lambda > 0$, *existe una constante dimensional* C *tal que*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| Mw(x) dx \tag{1.1}$$

(b) Sea $1 < p < \infty$, *entonces existe una constante dimensional* C *tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \leq p' C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p Mw(x) dx \right)^{1/p}, \tag{1.2}$$

donde p' *es el exponente dual de* p, $p' = \frac{p}{p-1}$.

Como detallaremos la una de las secciones siguientes, un peso w se dice que está en la clase A_1 si verifica que

$$Mw(x) \leq Cw(x),$$

en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. Además llamaremos constante del peso w y lo notaremos con $[w]_{A_1}$ a la mejor constante C posible.

Uno de los resultados que utilizaremos más adelante referido al operador maximal de Hardy-Littlewood es el siguiente dado por Coifman y Rochberg en [CR].

Proposición 1.1.4 *Sea* $0 < \delta < 1$ *entonces* $(Mf)^\delta \in A_1$, *con*

$$[(Mf)^\delta] \leq \frac{c_n}{1 - \delta}. \tag{1.3}$$

1.2. Operadores de Calderón-Zygmund

En esta sección recordaremos algunos resultados clásicos de los operadores de Calderón-Zygmund. Estos operadores vienen definidos a través de un núcleo $K(x,y)$ que es una función localmente integrable definida fuera de la diagonal $x = y$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, que satisface la condición de tamaño

$$|K(x,y)| \leq \frac{c}{|x-y|^n}, \tag{1.4}$$

y para algún $\epsilon > 0$, la condición de regularidad

$$|K(x,y) - K(z,y)| + |K(y,x) - K(y,z)| \leq C\frac{|x-z|^\epsilon}{|x-y|^{n+\epsilon}}, \tag{1.5}$$

siempre que $2|x-z| < |x-y|$.

Un operador lineal $T : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ es un operador de Calderón-Zygmund si se extiende a un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y si existe un núcleo K que satisface las condiciones de tamaño (1.4) y regularidad (1.5) y tal que

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy,$$

para toda $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $x \notin Sop(f)$. La teoría clásica dice que estos operadores son de tipo débil $(1,1)$:

$$T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

y son de tipo (p,p):

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) \qquad 1 < p < \infty.$$

1.3. Pesos

1.3.1. Clase A_p de Muckenhoupt

Sea w un peso, diremos que w satisface la condición A_p de Muckenhoupt para $1 < p < \infty$ si

$$[w]_{A_p} := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{p-1} < \infty$$

donde p' es el exponente dual de p definido por la ecuación $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

También recordemos w es un peso en la clase A_1 si existe una constante $c > 0$ tal que $Mw(x) \leq cw(x)$ en c.t.p.; a la menor constante c posible la notaremos como $[w]_{A_1}$ y será la constante A_1 del peso w. En la siguiente proposición recordaremos algunas propiedades de los pesos que cuyas demostraciones se pueden encontrar en [G2].

Proposición 1.3.1 *Sea w un peso en A_p para algún $1 \leq p < \infty$. Entonces valen las siguientes afirmaciones.*

(1) $[\delta^\lambda(w)]_{A_p} = [w]_{A_p}$, donde $\delta^\lambda(w)(x) = w(\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.

(2) $[\tau^z(w)]_{A_p} = [w]_{A_p}$, *donde* $\tau^z(w)(x) = w(x-z)$, *con* $z \in \mathbb{R}^n$.

(3) $[\lambda w]_{A_p} = [w]_{A_p}$ *para todo* $\lambda > 0$.

(4) Cuando $1 < p < \infty$, *la función* $w^{-\frac{1}{p-1}}$ *es un peso en la clase* $A_{p'}$ *cuya constante es*

$$[w^{-\frac{1}{p-1}}]_{A_{p'}} = [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}$$

En particular, $w \in A_2$ *si y sólo si* $w^{-1} \in A_2$ *y ambas constantes son iguales.*

(5) $[w]_{A_p} \geq 1$ *para todo* $w \in A_p$. *Además* $[w]_{A_p} = 1$ *si y sólo si* w *es constante.*

(6) Las clases A_p *son crecientes respecto a* p. *Esto se deduce de que si* $1 \leq p < q < \infty$ *entonces*

$$[w]_{A_q} \leq [w]_{A_p}.$$

(7) $\lim_{q \to 1+} [w]_{A_q} = [w]_{A_1}$ *si* $w \in A_1$.

(8) La siguiente es una caracterización equivalente de la constante del peso A_p *dada.*

$$[w]_{A_p} = \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \sup_{\substack{f \in L^p(Q, wdx) \\ |f| > 0 en\ c.t.p\ x \in Q}} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)|dt\right)^p}{\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(t)|^p w(t)dt} \right\}.$$

(9) La medida $w(x)dx$ *es duplicante: precisamente, para todo* $\lambda > 1$ *y para todo* Q *vale que*

$$w(\lambda Q) \leq \lambda^{np}[w]_{A_p} w(Q).$$

donde λQ *denota el cubo con el mismo centro que* Q *y de lado* λ *por la medida del lado del cubo* Q.

1.3.2. Clase A_∞ de Muckenhoupt

Como las clases A_p son crecientes respecto a p, es natural tratar de ver qué sucede cuando $p \to \infty$. Surge así la definición de la clase A_∞,

$$A_\infty := \bigcup_{p \geq 1} A_p.$$

Recordemos la siguiente consecuencia de la desigualdad de Jensen:

$$\left(\int_X |h(t)|^q d\mu(t)\right)^{1/q} \geq \exp\left(\int_X \log|h(t)| d\mu(t)\right),$$

que vale para toda función medible h en un espacio de probabilidad (X, μ) y para todo $0 < q < \infty$. Además se puede probar que cuando hacemos tender q a cero, el límite de la expresión de la izquierda es igual a la expresión del lado derecho de la desigualdad antes mencionada.

Ahora, si pensamos $h = w^{-1}$ para algún $w \in A_p$ y sea $q = \frac{1}{p-1}$, resulta que tenemos la siguiente desigualdad

$$\frac{w(Q)}{|Q|}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(t)^{-\frac{1}{p-1}}dt\right)^{p-1} \leq \frac{w(Q)}{|Q|}\exp\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \log w(t)^{-1}dt\right),$$

donde el límite cuando $p \to \infty$ de la expresión izquierda coincide con la expresión del lado derecho.

Esta observación que hemos dado es la que da lugar a considerar la siguiente definición introducida por Hruščev [Hr] (ver también [GCRdF]).

Definición 1.3.2 *Un peso w se dice que está en la clase A_∞ si*

$$\|w\|_\infty := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\exp\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \log w^{-1}\right) < \infty$$

Algunas propiedades básicas y caracterizaciones que verifica esta constante están dadas en las siguientes dos proposiciones (ver [G2, Capítulo 9]).

Proposición 1.3.3 *Sea $w \in A_\infty$. Entonces,*

1. $\|\delta^\lambda(w)\|_{A_\infty} = \|w\|_{A_\infty}$, *donde* $\delta^\lambda(w)(x) = w(\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.
2. $\|\tau^z(w)\|_{A_\infty} = \|w\|_{A_\infty}$, *donde* $\tau^z(w)(x) = w(x-z)$, *con* $z \in \mathbb{R}^n$.
3. $\|\lambda w\|_{A_\infty} = \|w\|_{A_\infty}$ *para todo* $\lambda > 0$.
4. $\|w\|_{A_\infty} \geq 1$.
5. *La siguiente es una caracterización de la constante A_∞ de w:*

$$\|w\|_{A_\infty} = \sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} \sup_{\substack{\log|f|\in L^1(Q)\\ |f|>0 \text{ en c.t.p de } Q}} \left\{\frac{w(Q)}{\int_Q |f(t)|w(t)dt}\exp\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \log|f(t)|dt\right)\right\}.$$

6. *La medida $w(x)dx$ es duplicante; precisamente, para todo $\lambda > 1$ y para todo cubo Q tenemos que*

$$w(\lambda Q) \leq 2^{\lambda^n}\|w\|_{A_\infty}^{\lambda^n} w(Q).$$

Antes de continuar, tengamos en cuenta la siguiente notación que utilizaremos con frecuencia.

$$w_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx.$$

Proposición 1.3.4 *Sea w un peso, diremos que w está en la clase A_∞ si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

(a) Existen $0 < \gamma, \delta < 1$ tal que para todo cubo Q se tiene que

$$|\{x \in Q : w(x) \leq \gamma w_Q\}| \leq \delta|Q|.$$

(b) *Existen* $0 < \alpha, \beta < 1$ *tal que para todo cubo* Q *y para todo subconjunto medible* A *de* Q*, vale que*

$$|A| \leq \alpha|Q| \implies w(A) \leq \beta w(Q).$$

(c) *Vale la desigualdad de Hölder al reves; es decir, existen* $0 < C_1, \epsilon < \infty$ *tal que para todo cubo* Q

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(t)^{1+\epsilon}dt\right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \leq \frac{C_1}{|Q|}\int_Q w(t)dt.$$

(d) *Existen constantes* $0 < C_2, \epsilon_0 < \infty$ *tal que para todo cubo* Q *y para todo subconjunto medible* A *de* Q*, se tiene que*

$$\frac{w(A)}{w(Q)} \leq C_2\left(\frac{|A|}{|B|}\right)^{\epsilon_0}.$$

(e) *Existen constantes* $0 < \alpha', \beta' < 1$ *tal que para todo cubo* Q *y para todo subconjunto medible* A *de* Q*,*

$$w(A) < \alpha' w(Q) \implies |A| < \beta'|Q|.$$

(f) *Existe un* $p \in [1, \infty)$ *tal que* w *es un peso* A_p*.*

Si bien la constante introducida por Hruščev [Hr] fue la constante A_∞ estándar, desde hace poco tiempo se comienza a trabajar con una “nueva”constante A_∞ que es más precisa que la dada por Hruščev. Esta nueva constante que aparece primero con una notación distinta en el trabajo de Fujii [F], después en en algunos trabajos de Wilson [W87, W89, W08] y es recién formalizada como constante A_∞ por Lerner [Le11, Section 5.5], se define de la siguiente manera.

$$[w]_{A_\infty} := \sup_Q \frac{1}{w(Q)}\int_Q M(\chi_Q w). \tag{1.6}$$

Aunque la constante de Hruščev $\|w\|_\infty$ ha sido más utilizada en la literatura que $[w]_{A_\infty}$ y también suele ser más flexible. Se puede ver que vale la siguiente proposición que es más fina la de Fujii-Wilson que.

Proposición 1.3.5 *Existe una constante dimensional* c_n *tal que*

$$c_n[w]_{A_\infty} \leq \|w\|_\infty \leq [w]_{A_p} \qquad p \geq 1.$$

La segunda desigualdad es elemental y la primera fue probada en [HP, Prop. 2.2]. En ese trabajo se prueba también que esta desigualdad puede ser estricta. Para ser más preciso, si consideramos la familia de pesos $\{w_t\}_{t>0}$ definidos por

$$w_t = t.\chi_E + \chi_{\mathbb{R}\setminus E}$$

resulta que

$$[w_t]_{A_\infty} \leq 4\log(t) \quad \text{y} \quad \|w_t\|_{A_\infty} \sim t/\log(t) \quad t \gg 1$$

donde $E \subset \mathbb{R}$ es un conjunto medible, con la condición de tener tanto E como $\mathbb{R}\setminus E$ medida Lebesgue positiva (ver [HP, section 8]). Una propiedad que va a jugar un papel importante es la desigualdad de Hölder al revés cuantitativa donde la constante involucrada es la de Fuji-Wilson (ver en el capitulo 2, Lema 2.5.1).

1.3.3. Pesos Mixtos $A_p - A_r$

Si llamamos

$$A_p(w;Q) := \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{p-1} \qquad (1 < p < \infty)$$

es claro que

$$[w]_{A_p} = \sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} A_p(w;Q).$$

De la misma manera Hytönen y Lacey en [HL], Lerner en [Le13c] y Lerner y Moen en [LM] definen las siguientes cantidades

$$A_\infty^{exp}(w;Q) := \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\exp\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \log w^{-1}\right) = \lim_{p\to\infty} A_p(w,Q).$$

$$A_\infty^{W}(w;Q) := \frac{1}{w(Q)}\int_Q M(\chi_Q w)$$

$$A_1(w;Q) := \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)(\inf_Q w)^{-1} = \lim_{p\to 1} A_p(w,Q).$$

Teniendo en cuenta estas cantidades, recuperamos las constantes del peso de la siguiente manera.

$$[w]_{A_1} = \sup_Q A_1(w;Q),$$

$$\|w\|_{A_\infty} = \sup_Q A_\infty^{exp}(w,Q)$$

y

$$[w]_{A_\infty} = \sup_Q A_\infty^{W}(w;Q).$$

Vale aclarar también, que si bien ya vimos que $[w]_{A_\infty} \le C_n\|w\|_{A_\infty}$, no está claro cual es la relación entre $A_\infty^{exp}(w,Q)$ y $A_\infty^{W}(w;Q)$ para un cubo fijo Q.

Teniendo en cuenta la notación que hemos adoptado, podemos dar las siguientes definiciones.

Definición 1.3.6 *Dado $1 \le p < \infty$ y sean $\alpha, \beta \ge 0$. Definimos la constante mixta:*

$$[w]_{(A_p)^\alpha(A_r)^\beta} = \sup_Q A_p(w;Q)^\alpha A_r(w;Q)^\beta, \quad 1 \le r < \infty,$$

la constante mixta exponencial:

$$[w]_{(A_p)^\alpha(A_\infty^{exp})^\beta} = \sup_Q A_p(w;Q)^\alpha A_\infty^{exp}(w;Q)^\beta,$$

y la constante mixta de Fujii-Wilson:

$$[w]_{(A_p)^\alpha(A_\infty^{W})^\beta} = \sup_Q A_p(w;Q)^\alpha A_\infty^{W}(w;Q)^\beta.$$

Si $\alpha > 0$, la clase de pesos que satisface

$$[w]_{(A_p)^\alpha (A_\infty^{exp})^\beta} < \infty, \ \text{ o } \ [w]_{(A_p)^\alpha (A_\infty^W)^\beta} < \infty,$$

es simplemente A_p, ya que

$$\text{máx}([w]_{A_p}^\alpha, [w]_{A_\infty}^\beta) \leq [w]_{(A_p)^\alpha (A_\infty^W)^\beta} \leq [w]_{A_p}^{\alpha+\beta}$$

y similarmente vale la desigualdad para la constante mixta exponencial. Para la clase exponencial tenemos una monotonía en las constantes,

$$[w]_{(A_p)^\alpha (A_\infty^{exp})^\beta} \leq [w]_{(A_p)^\alpha (A_r)^\beta} \leq [w]_{(A_p)^\alpha (A_s)^\beta} \quad 1 \leq s \leq r < \infty.$$

La siguiente observación fue probada en [LM].

Observación 1.3.7 *Sea* $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ *y* $w \in A_p$, *entonces*

$$[w]_{(A_p)^\alpha (A_\infty^{exp})^{1-\alpha}} \leq [w]_{(A_p)^\alpha (A_\infty^{exp})^{1-\beta}}.$$

1.3.4. Pesos RH_∞

En este caso vamos a generalizar la definición de Maximal de Hardy-Littlewood y pesos A_p que dimos antes para una medida μ que no tiene que ser necesariamente la de Lebesgue.

Dada una medida duplicante μ, definimos el operador maximal M_μ como

$$M_\mu f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)| d\mu(y).$$

Para $1 < p < \infty$, nosotros diremos que un peso w esta en la clase $A_p(\mu)$ si para todo cubo Q,

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w(x)\, d\mu(x) \right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w(x)^{1-p'}\, d\mu(x) \right)^{p-1} \leq C.$$

Diremos que $w \in A_1(\mu)$ si

$$M_\mu w(x) \leq C w(x).$$

Llamaremos entonces $[w]_{A_p(\mu)}$ a la mejor contante C posible y notaremos con $A_\infty(\mu)$ a la unión de todas las clases $A_p(\mu)$. Es decir,

$$A_\infty(\mu) = \cup_{p \geq 1} A_p(\mu).$$

Se puede observar también que como μ es una medida duplicante, entonces M_μ es un operador acotado en $L^p(w d\mu)$, con $1 < p < \infty$, si y sólo si $w \in A_p(\mu)$.

Cuando μ es la medida de Lebesgue, se omite el subíndice μ y se escribe simplemente M y A_p como hemos mencionado antes. Recordemos también que si $w \in A_p$ entonces verifica una la desigualdad de Hölder al revés

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^s dx \right)^{1/s} \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q w(x) dx,$$

para algún $s > 1$ que depende de $[w]_{A_p}$.

Definición 1.3.8 *Decimos que un peso w esta en RH_s si w verifica*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^s dx\right)^{1/s} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q w(x)dx,$$

y notaremos como $[w]_{RH_s}$ a la mejor constante C posible. Además, llamaremos RH_∞ a la clase de pesos tal que

$$\frac{C}{|Q|}\int_Q w(x)dx \geq \sup_Q es\, w(x).$$

Observemos que si $s > 1$, $RH_\infty \subset RH_s$. Para más información sobre esta clase de pesos se puede ver el trabajo [C-UN] de Cruz-Uribe y Neugebauer.

Los siguientes lemas fueron probados por Cruz-Uribe, Martell y Pérez en [C-UMP11].

Lema 1.3.9 *Si $u \in A_1$ y $v \in A_\infty(u)$, entonces $uv \in A_\infty$. En particular, si $v \in A_p(u)$, con $1 \leq p < \infty$, entonces $uv \in A_p$.*

Observación 1.3.10 *Si $u \in A_1$, entonces $v \in A_\infty(u)$ si y sólo si $uv \in A_\infty$. (ver [G2])*

Lema 1.3.11 *Si $u \in A_1$ y $v \in A_p$, con $1 \leq p < \infty$, entonces existe $0 < \epsilon_0 < 1$ que depende solo de la constante $[u]_{A_1}$ tal que $uv^\epsilon \in A_p$ para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$.*

La prueba del siguiente lema puede verse en [C-UN].

Lema 1.3.12 *Las siguientes afirmaciones son válidas.*

1. *$w \in A_\infty$ si y sólo si $w = w_1 w_2$, donde $w_1 \in A_1$ y $w_2 \in RH_\infty$.*

2. *Si $w \in A_1$, entonces $w^{-1} \in RH_\infty$.*

3. *Si u y v están en RH_∞, entonces $uv \in RH_\infty$.*

Lema 1.3.13 *Si $u \in A_1$ y $uv \in A_\infty$, entonces $v \in A_\infty$.*

Demostración. Este lema se obtiene usando el Lema 1.3.12. Como $uv \in A_\infty$, $uv = w_1 w_2$, donde $w_1 \in A_1$ y $w_2 \in RH_\infty$. Como $u \in A_1$ entonces $u^{-1} \in RH_\infty$ y entonces $w_2 u^{-1} \in RH_\infty$. Luego, de esto y como $w_1 \in A_1$ podemos tener que $v = w_1(w_2 u^{-1}) \in A_\infty$. □

1.4. Teorema de factorización cuantitativo

Muckenhoupt mostró en [Mu] que si $w_1, w_2 \in A_1$, entonces

$$w = w_1 w_2^{1-p}$$

es un peso en la clase A_p. Además tenemos que

$$[w]_{A_p} \leq [w_1]_{A_1}[w_2]_{A_1}^{p-1}. \tag{1.7}$$

También conjeturó que todo peso en A_p se puede escribir de esa manera y fue Jones quien probó dicha conjetura en [Jo]. Una prueba más elegante y con un enfoque totalmente diferente fue dada por Rubio de Francia y se puede encontrar en [G2] [GCRdF]. A continuación presentaremos una versión de esta prueba que se encuentra en [Pe] y que hace enfoque en las mejores constantes usando algunas ideas [He].

Lema 1.4.1 *Sea $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$, entonces existen pesos $u, v \in A_1$, tal que*

$$w = u\, v^{1-p}$$

para los cuales

$$[u]_{A_1} \leq c_n [w]_{A_p} \quad \& \quad [v]_{A_1} \leq c_n [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \tag{1.8}$$

con lo cual $[w]_{A_p} \leq [u]_{A_1}[v]_{A_1}^{p-1} \leq c_n\,[w]_{A_p}^2$

Demostración.
Vamos a utilizar en este caso el algoritmo de Rubio de francia. Definamos

$$S_1(f)^{p'} \equiv w^{1/p}\, M(\frac{|f|^{p'}}{w^{1/p}}),$$

y

$$S_2(f)^p \equiv \frac{1}{w^{1/p}}\, M(|f|^p w^{1/p}),$$

Observemos que $S_i : L^{pp'}(\mathbb{R}^n) \to L^{pp'}(\mathbb{R}^n)$ con constante

$$\|S_i\|_{L^{pp'}(\mathbb{R}^n)} \leq c_n [w]_{A_p}^{1/p} \qquad i = 1, 2$$

gracias al Teorema de Buckley dado en [Bu] y sobre el cual daremos más detalles en la sección 1.8.

Ahora, el operador $S = S_1 + S_2$ está acotado en $L^{pp'}(\mathbb{R}^n)$ con

$$\|S\|_{L^{pp'}(\mathbb{R}^n)} \leq c_n [w]_{A_p}^{1/p}.$$

Usando el algoritmo de Rubio de francia, definimos el operador R de la siguiente manera

$$R(h) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{S^k(h)}{(\|S\|_{L^{pp'}(\mathbb{R}^n)})^k}.$$

Observe que R es acotado en $L^{pp'}(\mathbb{R}^n)$.Luego, si $h \in L^{pp'}(\mathbb{R}^n)$ es fijo, $R(h) \in A_1(S)$. Más precisamente,

$$S(R(h)) \leq 2 \|S\|_{L^{pp'}(\mathbb{R}^n)} \leq c_n[w]_{A_p}^{1/p}.$$

En particular $R(h) \in A_1(S_i)$ $i = 1, 2$, con

$$S_i(R(h)) \leq c_n[w]_{A_p}^{1/p} R(h) \quad i = 1, 2$$

con lo cual

$$M(R(h)^{p'} w^{-1/p}) \leq c_n[w]_{A_p}^{p'/p} R(h)^{p'} w^{-1/p}$$

y

$$M(R(h)^p w^{1/p}) \leq c_n[w]_{A_p} R(h)^p w^{1/p}.$$

Finalmente, tomando

$$u \equiv R(h)^p w^{1/p} \quad \& \quad v \equiv R(h)^{p'} w^{-1/p}$$

tenemos que $u, v \in A_1$ $w = uv^{1-p}$ con

$$[u]_{A_1} \leq c_n[w]_{A_p} \quad \& \quad [v]_{A_1} \leq c_n[w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}$$

□

1.5. Integral fraccionaria y maximal fraccionaria

Dado $0 < \alpha < n$, el operador integral fraccionario o potencial de Riesz I_α, se define como:

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

y el operador maximal fraccionario:

$$M_\alpha f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{|Q|^{\alpha/n}}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

Estos operadores juegan un rol muy importante dentro del análisis, particularmente en el estudio de algunas propiedades de diferenciabilidad o suavidad de una función. Para ver propiedades básicas de estos operadores se pueden consultar los libros de Stein [St70] o Grafakos [G1].

Ahora bien, cuando pensamos en desigualdades con pesos para estos operadores o operadores potenciales más generales hay muchos trabajos que estudian estos problemas. Ejemplo de ello son el trabajo de Muckenhoupt y Wheeden [MW74], Sawyer [Sa84] y [Sa88], Gabidzashvili y kokilashvili [GK], Sawyer y Wheeden [SW], y Pérez [Pe94a] y [Pe95a]. Estas estimaciones aparecen naturalmente en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales y en la mecánica cuántica.

1.5.1. Pesos $A_{p,q}$

Muckenhoupt y Wheeden caracterizaron en [MW74] las desigualdades de tipo fuerte con pesos para los operadores fraccionarios en termino de la condición $A_{p,q}$ para los pesos. De forma más precisa, para $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ y q definido por la ecuación $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, ellos probaron que para toda $f \geq 0$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} T_\alpha f(x)^q w(x)^q \, dx \right)^{1/q} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p w(x)^p \, dx \right)^{1/p},$$

donde $T_\alpha = I_\alpha$ o $T_\alpha = M_\alpha$, si y sólo si $w \in A_{p,q}$. Esto significa que,

$$[w]_{A_{p,q}} \equiv \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^q \, dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-p'} \, dx \right)^{\frac{q}{p'}} < \infty.$$

Notemos que $w \in A_{p,q}$ si y sólo si $w^q \in A_{1+\frac{q}{p'}}$ con

$$[w]_{A_{p,q}} = [w^q]_{A_{1+\frac{q}{p'}}}. \tag{1.9}$$

También diremos, para $1 \leq q < \infty$, que el peso w está en la clase $A_{1,q}$ si satisface

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^q dx \right) \leq c \inf_Q w^q, \tag{1.10}$$

donde $[w]_{A_{1,q}}$ es la menor constante c para la cual la desigualdad (1.10) es válida.

Usando (1.10), se puede ver que $w \in A_{1,q}$ si y sólo si $w^q \in A_1$. Además,

$$[w]_{A_{1,q}} = [w^q]_{A_1}. \tag{1.11}$$

1.5.2. Estimaciones cuantitativas

Motivado por la respuesta a la conjetura A_2 se estudiaron en [LMPT] las siguientes desigualdades cuantitativas para los operadores fraccionarios.

Teorema 1.5.1 *Sea $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ y q definido por la ecuación $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Si $w \in A_{p,q}$. Entonces,*

$$\| I_\alpha f \|_{L^q(w^q)} \leq c[w]_{A_{p,q}}^{(1-\alpha/n)\max\{1,p'/q\}} \| f \|_{L^p(w^p)}, \tag{1.12}$$

$$\| I_\alpha f \|_{L^{q,\infty}(w^q)} \leq c[w]_{A_{p,q}}^{(1-\alpha/n)} \| f \|_{L^p(w^p)}, \tag{1.13}$$

y

$$\| M_\alpha f \|_{L^q(w^q)} \leq c[w]_{A_{p,q}}^{p'/q(1-\alpha/n)} \| f \|_{L^p(w^p)} . \tag{1.14}$$

Siendo además estos exponentes óptimos.

La clave para probar estas desigualdades de tipo fuerte óptimas para la integral fraccionaria, está en el hecho de que es suficiente con probar desigualdades de tipo débil óptimas. Esta posibilidad está dada gracias a la caracterización de las desigualdades en norma con dos pesos dada por Sawyer para I_α. De hecho, él probó en [Sa88] que dado dos pesos u y v, y si $1 < p \leq q < \infty$,

$$I_\alpha : L^p(v) \to L^q(u)$$

si y sólo si u y la función $\sigma = v^{1-p'}$ satisfacen las condiciones de testeo local:

$$[u,\sigma]_{S_{p,q}} := \sup_Q \sigma(Q)^{-1/p} \|\chi_Q I_\alpha(\chi_Q \sigma)\|_{L^q(u)} < \infty$$

$$[\sigma,u]_{S_{q',p'}} := \sup_Q u(Q)^{-1/q'} \|\chi_Q I_\alpha(\chi_Q u)\|_{L^{p'}(\sigma)} < \infty.$$

Además, implícito en la demostración se deduce

$$\|I_\alpha\|_{L^p(v)\to L^q(u)} \simeq [u,\sigma]_{S_{p,q}} + [\sigma,u]_{S_{q',p'}}. \tag{1.15}$$

Por otro lado, en su caracterización de las desigualdades de tipo débil con dos pesos para la integral fraccionaria, Sawyer prueba en [Sa84] que:

$$\|I_\alpha\|_{L^p(v)\to L^{q,\infty}(u)} \simeq [\sigma,u]_{S_{q',p'}}. \tag{1.16}$$

Combinando (1.15) y (1.16), se tiene que

$$\|I_\alpha\|_{L^p(v)\to L^q(u)} \simeq \|I_\alpha\|_{L^{q'}(u^{1-q'})\to L^{p',\infty}(v^{1-p'})} + \|I_\alpha\|_{L^p(v)\to L^{q,\infty}(u)}.$$

Si tomamos $u = w^q$ y $v = w^p$, se obtiene que

$$\|I_\alpha\|_{L^p(w^p)\to L^q(w^q)} \simeq \|I_\alpha\|_{L^{q'}(w^{-q'})\to L^{p',\infty}(w^{-p'})} + \|I_\alpha\|_{L^p(w^p)\to L^{q,\infty}(w^q)},$$

lo cual permite a los autores en [LMPT] probar sus resultados.

De la misma manera que lo hicimos con la clase de pesos A_∞, podemos definir de manera natural la clase $A_{\infty,q}$

$$A_{\infty,q} := \bigcup_{p\geq 1} A_{p,q}.$$

Dado un peso w en la clase $A_{\infty,q}$, definimos la constante del peso $w \in A_{\infty,q}$ de tipo Fujii-Wilson,

$$[w]_{A_{\infty,q}} := \sup_Q \frac{1}{w^q(Q)} \int_Q M(\chi_Q w^q)dx < \infty.$$

Observemos que $w \in A_{\infty,q}$ si y sólo si $w^q \in A_\infty$. También podemos concluir por la Proposición 1.3.5 y la igualdad (1.9) que:

$$c_n\, [w]_{A_{\infty,q}} \leq [w]_{A_{p,q}} \leq [w]_{A_{1,q}}.$$

1.6. Reordenada y operadores maximales

La reordenada decreciente f^* de una función medible f se define como

$$f^*(t) = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \mu_f(\lambda) < t\right\}, \qquad t > 0,$$

donde

$$\mu_f(\lambda) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|, \qquad \lambda > 0,$$

es la función distribución de f. De manera general, para un peso (o medida) w, se define

$$f_w^*(t) = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : w_f(\lambda) < t\right\}, \qquad t > 0,$$

donde

$$w_f(\lambda) = w(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}), \qquad \lambda > 0.$$

Una propiedad importante es que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, w dx = \int_0^\infty f_w^*(t)^p \, dt,$$

o más general, si E es un conjunto medible:

$$\int_E |f|^p \, w dx = \int_0^{w(E)} f^*(t)^p \, dt.$$

Similarmente,

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(w)} = \sup_{t>0} t \, w\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}^{1/p} = \sup_{t>0} t^{1/p} f_w^*(t).$$

Si f es una función medible y sea Q un cubo, entonces definiremos la siguiente cantidad

$$(f\chi_Q)^*(\lambda|Q|) \qquad 0 < \lambda. \leq 1.$$

Usando la definición de reordenada, es fácil ver que para todo $\delta > 0$ y $0 < \lambda \leq 1$

$$(f\chi_Q)^*(\lambda|Q|) \leq \left(\frac{1}{\lambda|Q|} \int_Q |f|^\delta \, dx\right)^{1/\delta}. \tag{1.17}$$

Definición 1.6.1 *Sea f una función medible*

$$m_\lambda f(x) = \sup_{x \in Q \in \mathcal{D}} (f\chi_Q)^*(\lambda|Q|) \qquad (0 < \lambda < 1),$$

es el operador maximal local (diádico).

Teniendo en cuenta la definición del operador maximal local, podemos obtener la siguiente propiedad

$$|f(x)| \leq m_\lambda f(x) \quad \text{c.t.p. } x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.18}$$

que se puede ver en el trabajo [Le04a, Lema 6].

Dado un cubo Q, definimos el valor medio $m_f(Q)$ de la función f sobre el cubo Q, el cual posiblemente no sea único, como el número para el cual

$$|\{x \in Q : |f(x)| > m_f(Q)\}| \leq |Q|/2$$

y

$$|\{x \in Q : |f(x)| < m_f(Q)\}| \leq |Q|/2.$$

este valor medio satisface las siguientes propiedades.

Proposición 1.6.2 *Sea f una función medible y dado un cubo Q*

(a) $|m_f(Q)| \leq (f\chi_Q)^*\big(|Q|/2\big)$. Con lo cual, para todo $\delta > 0$ vale que

$$|m_f(Q)| \leq \left(\frac{1}{\lambda|Q|}\int_Q |f|^\delta\, dx\right)^{1/\delta}. \tag{1.19}$$

(b) Si f es una función no negativa

$$m_f(Q) = (f\chi_Q)^*\big(|Q|/2\big)$$

.

(c) Para toda constante c,

$$m_f(Q) - c = m_{f-c}(Q). \tag{1.20}$$

Además, se puede verificar la siguiente cadena de desigualdades.

$$|m_f(P) - m_f(Q)| \leq \big((f - m_f(Q))\chi_P\big)^*\big(|P|/2\big) \leq \left(\frac{2}{|P|}\int_P |f - m_f(Q)|^\delta\, dx\right)^{1/\delta}. \tag{1.21}$$

El siguiente operador fue introducido por Fefferman y Stein.

Definición 1.6.3 *Sea f una función medible, definimos el operador maximal sharp $M^\#$ como:*

$$M^\# f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - f_Q|dy,$$

donde $f_Q = \dfrac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q f(y)dy$.

Se puede ver en [GCRdF, page 155], que esta definición que dimos es equivalente a las siguientes

$$\sup_{Q \ni x} \inf_c \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - c|dy \sim \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|^2}\int_Q\int_Q |f(y) - f(x)|dydx \tag{1.22}$$

Vamos a definir también el siguiente operador: $M^\#_\delta f = (M^\#(f^\delta))^{1/\delta}$. Si el supremo se restringe solo a los cubos diádicos, usaremos entonces la notación $M^{\#,d} y M^{\#,d}_\delta$ respectivamente.

El siguiente lema fue probado por D. Adams en [Ad].

Lema 1.6.4 *Sean $0 < \alpha < n$, $1 < p < \infty$ y q definido por la ecuación $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Entonces,*

$$M^{\#}(I_\alpha f(x)) \leq c_n M_\alpha f(x). \tag{1.23}$$

Además, para toda $f \geq 0$ con $\int I_\alpha f(x)(1+|x|)^{-n-\alpha}dx < \infty$,

$$M_\alpha f(x) \leq c_n M^{\#}(I_\alpha f(x))$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Mostraremos una prueba muy similar, pero más general, a la dada por Adams de la desigualdad (1.23). Concretamente, probaremos que si $0 < s \leq 1$ vale que

$$M_s^{\#}(I_\alpha f(x)) \leq c_n M_\alpha f(x),$$

donde $M_s^{\#}(f) = \left(M^{\#}(f^s)\right)^{1/s}$

Usando una de las definiciones equivalentes dadas en (1.22), basta ver que dado $0 < s \leq 1$ y $B = B(x_0, Nr)$:

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B ||I_\alpha f(x)|^s - |t|^s| dx\right)^{1/s} \leq C\, M_\alpha f(x_0)$$

para algún t y donde C es independiente de B.
Dada f, definimos f_1 y f_2 tal que $f_1 = f\chi_B$ y $f = f_1 + f_2$.

Tomemos $t = (I_\alpha f_2)_B$

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B ||I_\alpha f(x)|^s - |(I_\alpha f_2)_B|^s| dx\right)^{1/s} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B ||I_\alpha f_1(x)|^s dx\right)^{1/s} + \left(\frac{1}{|B|}\int_B ||I_\alpha f_2(x)|^s - |(I_\alpha f_2)_B|^s| dx\right)^{1/s} = I + II$$

$$I = \frac{\left(\int_B |I_\alpha f_1(x)|^s dx\right)^{1/s}}{|B|^{1/s-1/h}|B|^{1/h}} \leq \frac{1}{|B|^{1/h}}\left(\frac{h}{h-s}\right)^{1/s} \|I_\alpha f_1\|_{L^{h,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq$$

donde $h = \frac{n}{n-\alpha} > 1$ y la última desigualdad se obtuvo usando el Lema 2.8 de la pág 485 de [GCRdF]

$$\leq \frac{C}{|B|^{1/h}}\left(\frac{h}{h-s}\right)^{1/s} \|f_1\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{h}{h-s}\right)^{1/s} \frac{C}{|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_B f(x)dx \leq C_{n,\alpha,s} M_\alpha f(x_0)$$

$$II = \left(\frac{1}{|B|}\int_B ||I_\alpha f_2(x)|^s - |(I_\alpha f_2)_B|^s| dx\right)^{1/s} \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B \left|\frac{1}{|B|}\int_B (I_\alpha f_2(x) - I_\alpha f_2(y))dy\right|^s dx\right)^{1/s}$$

$$= \left[\frac{1}{|B|}\int_B \left|\frac{1}{|B|}\int_B \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_2(z)}{|x-z|^{n-\alpha}}dz - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_2(w)}{|y-w|^{n-\alpha}}dw\right) dy\right|^s dx\right]^{1/s}$$

$$\leq \left[\frac{1}{|B|^2}\int_B\left(\int_B\int_{\mathbb{R}^n}|f_2(z)|\left|\frac{1}{|x-z|^{n-\alpha}}-\frac{1}{|y-z|^{n-\alpha}}\right|dzdy\right)^s dx\right]^{1/s}$$

$$=\left[\frac{1}{|B|^2}\int_B\left(\int_B\int_{B^c}|f(z)|\left|\frac{1}{|x-z|^{n-\alpha}}-\frac{1}{|y-z|^{n-\alpha}}\right|dzdy\right)^s dx\right]^{1/s}$$

Ahora como $\frac{1}{s}\geq 1$, por Jensen resulta:

$$II\leq \frac{1}{|B|^2}\int_B\int_B\int_{B^c}|f(z)|\left|\frac{1}{|x-z|^{n-\alpha}}-\frac{1}{|y-z|^{n-\alpha}}\right|dzdydx$$

$x,y\in B(x_0,Nr)$, $z\in B(x_0,Nr)^c$ y $|x-y|<2Nr$. Usando el Teorema del Valor Medio primero y luego definiendo $G_m=\{z: 2^{m-1}Nr<|z-x_0|<2^mNr\}$ tenemos que,

$$\int_{B^c}|f(z)|\left|\frac{1}{|x-z|^{n-\alpha}}-\frac{1}{|y-z|^{n-\alpha}}\right|dz\leq 2Nr\int_{B^c}\frac{|f(z)|}{|h-z|^{n-\alpha+1}}dz\leq$$

$$\leq 2Nr\sum_{m=1}^{\infty}\int_{G_m}\frac{|f(z)|}{|h-z|^{n-\alpha+1}}dz\leq 2Nr\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(r(2^{m-1}N-1))^{n-\alpha+1}}\int_{G_m}|f(z)|dz$$

Luego, tomando $N=2$ y observando que $2^{n-\alpha+1}\leq 2^{n+1}$

$$\int_{B^c}|f(z)|\left|\frac{1}{|x-z|^{n-\alpha}}-\frac{1}{|y-z|^{n-\alpha}}\right|dz\leq C_n\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^{(m+1)(n-\alpha)}}{2^{m(n-\alpha+1)}(r2^{(m+1)})^{(n-\alpha)}}\int_{|z-x_0|<2^{m+1}r}|f(z)|dz$$

$$\leq C_n\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m}M_\alpha f(x_0)\leq C_nM_\alpha f(x_0)$$

□

Si bien el siguiente resultado fue probado en [CPSS, Teorema 3.7] (el caso $\delta=1$ fue probado previamente en [Pe95a]), nosotros daremos una demostración diferente.

Proposición 1.6.5 *Sea $0<\delta\leq 1$, entonces vale que*

$$\int_{\mathbb{R}^n}|I_\alpha f|^\delta w(x)dx\leq c_{n,\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}(M_\alpha f)^\delta Mw(x)dx. \tag{1.24}$$

Demostración.

Recordemos que la función maximal sharp local $m_\lambda^\# f$ se define para una función medible f

$$m_\lambda^\# f(x)=\sup_{Q\ni x}\inf_{c\in\mathbb{R}}\left((f-c)\chi_Q\right)^*(\lambda|Q|)\qquad (0<\lambda<1).$$

También se puede ver que $m_\lambda^\# f\leq c_\lambda M^\# f, 0<\lambda\leq 1$. Otro resultado que necesitaremos es el siguiente, probado por Lerner en [Le04b, Teorema 1.1]

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f|wdx\leq c_n\int_{\mathbb{R}^n}(m_{\lambda_n}^\# f)Mwdx.$$

Usando estos resultados y la desigualdad (1.23), se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f|^\delta w(x)dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} m^{\#}_{\lambda_n}(|I_\alpha f|^\delta) Mw(x)dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} M^{\#}(|I_\alpha f|^\delta) Mw(x)dx \leq$$

$$\leq c \int_{\mathbb{R}^n} (M_\alpha f(x))^\delta Mw(x)dx.$$

□

1.7. Espacios de Orlicz

En esta sección daremos algunas nociones básicas de la teoría de espacios de Orlicz. Para más detalles el lector puede consultar los libros de Krasnosel'skiǐ y Rutickiǐ [KR], Maligranda [Ma] o Rao y Ren [RR]. También vale aclarar que gran parte del contenido de esta sección se puede ver en forma más detallada en el libro [C-UMP11].

Definición 1.7.1 *Una función $B : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es una función de Young si es continua, convexa, estrictamente creciente y si $B(0) = 0$ y si $B(t)/t \to \infty$ cuando $t \to \infty$.*

Si A y B son funciones de Young, nosotros escribiremos $A(t) \simeq B(t)$ si existen constantes c_1 y c_2 positivas tal que

$$c_1 A(t) \leq B(t) \leq c_2 A(t)$$

para $t \geq t_0 > 0$. También diremos que B es dominante sobre A y lo notaremos $A(t) \preceq B(t)$, si existe una constante positiva c tal que para todo $t \geq t_0 > 0$,

$$A(t) \leq B(ct).$$

(En la práctica, uno puede asumir $t_0 = 1$.) Para toda función de Young B, $t \preceq B(t)$. Más aún, si para algún $c > 1$, $A(t) \leq cB(t)$, entonces $A(t) \leq B(ct)$ por convexidad.

Dado p, con $1 \leq p < \infty$, diremos que una función de Young B es una p-función Young, si $\phi(t) = B(t^{1/p})$ es una función de Young. Ahora, si B es una p-función de Young entonces $t^p \preceq B(t)$ y $B(t)/t^p$ es no-decreciente.

Definición 1.7.2 *Una función F se dice que es cuasi-creciente si existe una constante $c > 1$ tal que para todo $t < s$, $F(t) \leq cF(s)$. Similarmente, F es cuasi-decreciente si existe $c > 1$ tal que $F(s) \leq cF(t)$ para todo $t < s$.*

Una función de Young B se dice que es duplicante si existe una constante positiva C tal que

$$B(2t) \leq CB(t) \quad \forall t > 0.$$

También diremos que B es submultiplicativa si $B(st) \leq CB(s)B(t)$ para todo s y t positivos. Claramente $B(t) = t^r$, $r \geq 1$, es submultiplicativa. Ya con un poco más de trabajo, se puede ver que $B(T) = t^a[\log(e + t)]^b$, con $a \geq 1$ es duplicante y si $b \geq 0$, también es submultiplicativa.

Definición 1.7.3 *Dada una función de Young B y un cubo Q, se define la norma de Luxemburg de una función f sobre el cubo Q como:*

$$\|f\|_{B,Q} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|Q|}\int_Q B(\frac{|f(x)|}{\lambda})dx \leq 1\right\}.$$

Cuando $B(t) = t^p,\ 1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_{B,Q} = \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|^p dx\right)^{1/p} = \|f\|_{p,Q},$$

la norma de Luxemburg coincide con la norma L^p normalizada.

Proposición 1.7.4 *Dada una función de Young A, para todo $r > 0$,*

$$\|f^r\|_{A,Q} = \|f\|_{B,Q}^r,$$

donde $B(t) = A(t^r)$. En particular, si A es una p-función de Young, entonces

$$\|f^{1/p}\|_{A,Q} = \|f^{1/r}\|_{B,Q}^{r/p},$$

donde $B(t) = A(t^{r/p})$ es una r-función de Young.

Por convexidad, también vale que para todo $\tau > 1$ y para todo cubo Q,

$$\|f\|_{A,Q} \leq \tau^n \|f\|_{A,\tau Q}.$$

Si $A(t)/t^p$ es cuasi-creciente para algún $p > 1$, podemos afinar esta desigualdad, reemplazando τ^n por $\tau^{n/p}$.

Si $A \preceq B$, entonces existe una constante C, que depende de A y de B, tal que para todo cubo Q y función f, $\|f\|_{A,Q} \leq C\|f\|_{B,Q}$. Esta desigualdad se obtiene por la definición y por la convexidad; aunque vale aclarar que gracias a estar trabajando con la norma de Luxemburgo normalizada, la constante C es independiente de Q y solo depende de A y B para valores grandes de t.

Definición 1.7.5 *Dada una función de Young B, la función de Young complementaria $\bar{B}$ se define como*

$$\bar{B}(t) = \sup_{s>0}\{st - B(s)\}, \quad t > 0.$$

B y $\bar{B}$ satisfacen la siguiente desigualdad

$$t \leq B^{-1}(t)\bar{B}^{-1}(t) \leq 2t.$$

1.7.1. Operador maximal de Orlicz

Dada una función de Young ϕ, definimos el operador maximal para espacios de Orlicz M_ϕ como

$$M_\phi f(x) = \sup_{Q \ni x} \|f\|_{\phi,Q}, \tag{1.25}$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q que contienen a x. Cuando $\phi(t) = t$, M_ϕ es el operador de Hardy-littlewood clásico. Cuando $\phi(t) = t^r$, con $r > 1$, $M_\phi f = M_r f = M(|f|^r)^{1/r}$. Si $\phi(t) \prec \psi(t)$, entonces para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $M_\phi f(x) \leq c\, M_\psi f(x)$.

Observación 1.7.6 *Tengamos en cuenta que cuando trabajemos con el operador maximal en espacios de Orlicz M_ϕ, siempre asumiremos que la función f sobre la que estamos trabajando es tal que $M_\phi f(x) < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Esta condición implica también que las normas $\|f\|_{\phi,Q}$ son finitas para todo cubo Q.*

Un operador maximal de Orlicz satisface una desigualdad de tipo débil modular que generaliza la desigualdad de tipo débil $(1,1)$ del operador maximal de Hardy-Littlewood. Este resultado fue probado originalmente en [BP] [Pe95c].

Teorema 1.7.7 *Dada una función de Young ϕ, para toda f que satisface $\|f\|_{\phi,Q} \to 0$ cuando $|Q| \to \infty$, y para todo $\lambda > 0$,*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_\phi f(x) > \lambda\}| \leq 3^n \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda/2\}} \phi\left(\frac{2{,}4^n |f(x)|}{\lambda}\right) dx.$$

Para $p > 1$, la función maximal de Orlicz es de tipo débil (p,p) probando que ϕ satisface una condición de tamaño natural.

Proposición 1.7.8 *Dada una función de Young ϕ y sea $1 < p < \infty$, la maximal M_ϕ satisface la desigualdad débil (p,p)*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_\phi f(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx$$

si y sólo si $\phi \preceq t^p$.

Mucho más interesante es la acotación de estos operadores en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Para ello necesitamos la siguiente definición.

Definición 1.7.9 *Dado $1 < p < \infty$, diremos que una función de Young f está en B_p, si para algún $c > 0$,*

$$\int_c^\infty \frac{A(t)}{t^p} \frac{dt}{t} < \infty. \tag{1.26}$$

Observemos que si (1.26) es finito para algún valor c, entonces es finito para todo $c > 0$. Un ejemplo de una función en B_p es

$$A(t) = \frac{t^p}{\log(e+t)^{1+\theta}} \quad \theta > 0.$$

Teniendo en cuenta la definición de B_p, se puede ver que vale el siguiente teorema, el cual fue probado en [Pe95c].

Teorema 1.7.10 *Si $1 < p < \infty$, vale que*

$$M_\phi : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) \quad \textit{si y sólo si} \quad \phi \in B_p.$$

Como generalización de dicho teorema se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.7.11 *Sea $1 < p < \infty$ y sean ϕ, B y C funciones de Young tal que $B^{-1}(t)C^{-1}(t) \leq c\phi^{-1}(t)$, $t \geq t_0 > 0$ y sea $C \in B_p$. Si (u, v) son un par de pesos tal que para todo cubo Q,*

$$\sup_Q \|u^{1/p}\|_{p,Q}\|v^{-1/p}\|_{B,Q} < \infty,$$

entonces para toda función $f \in L^p(v)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} M_\phi f(x)^p u(x)dx \leq c_\phi \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x)dx.$$

1.7.2. Operador maximal fraccionario de Orlicz

Definición 1.7.12 *Dada una función de Young ϕ y sea α, $0 < \alpha < n$, definimos el operador maximal fraccionario para espacios de orlicz como*

$$M_{\alpha,\phi} f(x) = \sup_{Q \ni x} |Q|^{\alpha/n} \|f\|_{\phi,Q}.$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos que contienen a x.

Cuando $\phi(t) = t$ este operador se reduce al clásico operador maximal fraccionario M_α introducido por Muckenhoupt y Wheeden. Cuando $\alpha = 0$, estos operadores coinciden con los operadores maximales de Orlicz que mencionamos en la sección anterior.

De la misma manera que para el caso de los operadores maximales de Orlicz, siempre que hablemos de una función f, será una para la cual $M_{\alpha,\phi} f(x) < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. En particular, $|Q|^{\alpha/n}\|f\|_{\phi,Q}$ es acotado para todo cubo Q y es uniformemente acotado cuando $|Q| \to \infty$.

El operador maximal fraccionario tiene propiedades muy similares a las de los operadores maximales de Orlicz. Se puede agregar que satisface una estimación fuera de la diagonal, mandando L^p en L^q cuando $p \leq q$. La desigualdad para dos pesos clave es la siguiente generalización del Teorema 1.7.11. Esta fue probado primero en [C-UFi03], donde fueron introducidos los operadores maximales fraccionarios de Orlicz.

Teorema 1.7.13 *Dado p y q, con $1 < p \leq q < \infty$, y sea $0 < \alpha < n$, si ϕ, B y C son funciones de Young tal que $B^{-1}(t)C^{-1}(t) \leq c\phi^{-1}(t)$, $t > t_0 > 0$, y $C \in B_p$. Si (u, v) son un par de pesos para los cuales vale que para todo cubo Q,*

$$|Q|^{\alpha/n+1/q-1/p}\|u^{1/q}\|_{q,Q}\|v^{-1/p}\|_{B,Q} \leq K < \infty, \tag{1.27}$$

entonces para toda función $f \in L^p(v)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} M_{\alpha,\phi} f(x)^q u(x)\, dx\right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x)\, dx\right)^{1/p}.$$

Cuando $\phi(t) = t$, entonces la hipótesis se simplifica a pedir $\bar{B} \in B_p$. Cuando $p = q$ y $\alpha = 0$, el teorema se reduce al Teorema 1.7.11.

La condición (1.27) es una generalización de la condición $A^{\alpha}_{p,q}$. Un par de pesos $(u, v) \in A^{\alpha}_{p,q}$ si

$$|Q|^{\alpha/n+1/q-1/p} \|u^{1/q}\|_{q,Q} \|v^{-1/p}\|_{p',Q} \leq K < \infty.$$

Para más información sobre este operador el lector puede consultar el libro [C-UMP11] o el trabajo [C-UFi03].

1.8. Mejoras del Teorema de Buckley

En [Bu] Buckley prueba una desigualdad en norma $L^p(w)$ de la maximal de Hardy-Littlewood óptima respecto a la dependencia de la constante A_p del peso w, la cual ha sido de mucha utilidad para probar otros resultados óptimos a lo largo de estos años. Este es el primer resultado de estimación cuantitativa.

Teorema 1.8.1 *Sea w un peso en la clase A_p de Muckenhoupt, con $1 < p < \infty$. Si es M la maximal de Hardy-Littlewood, entonces*

$$\|Mf\|_{L^p(w)} \leq c_n p' [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \|f\|_{L^p(w)}, \tag{1.28}$$

donde el exponente de $[w]_{A_p}$ es el mejor posible y c_n sólo depende de la dimensión.

La manera de ver que la dependencia del exponente de la constante es óptima era a través de un ejemplo construido ad hoc. En [LPR] se muestra un método general y el punto clave para dicha optimalidad es que $\|M\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \sim O(\frac{1}{p-1})$ $p \to 1$.

Posteriormente, se prueba en [HP] una mejora de este resultado utilizando la clase A_∞ de los pesos. La mejora radica en fraccionar la constante A_p utilizando la constante A_∞ de Fujii-Wilson. Para ser más preciso, lo que se obtiene es el siguiente teorema.

Teorema 1.8.2 *Sea $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$ entonces,*

$$\|M\|_{L^p(w)} \leq c_n p' \left([w]_{A_p} [w^{1-p'}]_{A_\infty}\right)^{1/p} \|f\|_{L^p(w)}$$

donde c_n solo depende de la dimensión y $[w]_{A_\infty}$ es la constante A_∞ definida por Fujii y Wilson.

Otro resultado que se puede encontrar en el trabajo [HP] es una versión del Teorema de Buckley pero para pesos mixtos.

Teorema 1.8.3 *Sea $1 < p < \infty$ y si w es un peso en la clase A_p. Entonces,*

$$\|M\|_{L^p(w)} \leq c_n p' \left[w^{1-p'}\right]_{(A_{p'})^{\frac{1}{p'}} (A_\infty^{exp})^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{L^p(w)}.$$

Tanto el Teorema 1.8.2 como el Teorema 1.8.3 mejoran el Teorema de Buckley 1.8. Ahora, si queremos una versión del Teorema de Buckley pero para pesos mixtos con la constante de Fujii-Wilson reemplazando la constante exponencial, el mejor resultado que se conoce hasta el momento es el siguiente, obtenido en [LM] por Lerner y Moen.

Teorema 1.8.4 *Sea $1 < p < \infty$ y sea $w \in A_p$, entonces*

$$\|M\|_{L^p(w)} \leq c_n p' \, \phi([w^{1-p'}]_{A_{p'}})^{\frac{1}{p}} [w^{1-p'}]_{(A_{p'})^{\frac{1}{p'}}(A_\infty)^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{L^p(w)}.$$

donde $\phi(t) = 1 + \log(t)$.

Si bien no se ha podido probar aún, el resultado que se cree que debería ser cierto es el siguiente que quita la parte logarítmica del resultado anterior y que fue conjeturado por Lerner y Moen en el mismo trabajo antes mencionado.

Conjetura 1.8.5 *Sea $1 < p < \infty$ y sea $w \in A_p$, entonces*

$$\|M\|_{L^p(w)} \leq c_n p' \, [w^{1-p'}]_{(A_{p'})^{\frac{1}{p'}}(A_\infty)^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{L^p(w)}.$$

1.9. Mejoras del teorema A_2

Hytönen en [Hy] resolvió la conjetura A_2 logrando probar que todo operador de Calderón-Zygmund T satisface

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_{n,p} [w]_{A_p}^{\max(1, \frac{1}{p-1})} \tag{1.29}$$

Posteriormente, la desigualdad (1.29) fue mejorada en el sentido de poder utilizar las llamadas "constantes mixtas". En tal dirección se conocen los siguientes resultados.

Teorema 1.9.1 (([HP, HL, HLP])) *Si $1 < p < \infty$ y sea T un operador de Calderón-Zygmund y w un peso en la clase A_p. Entonces*

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq C_{n,p} \, [w]_{A_p}^{\frac{1}{p}} ([w]_{A_\infty}^{\frac{1}{p'}} + [\sigma]_{A_\infty}^{\frac{1}{p}}). \tag{1.30}$$

Teorema 1.9.2 ([Le13b, Le13c]) *Si $1 < p, r < \infty$ y sea T un operador de Calderón-Zygmund y w un peso en la clase A_p. Entonces*

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq C_{n,p} \, [w]_{(A_p)^{\frac{1}{p-1}}(A_r)^{1-\frac{1}{p-1}}} + [\sigma]_{(A_{p'})^{\frac{1}{p'-1}}(A_r)^{1-\frac{1}{p'-1}}}. \tag{1.31}$$

Teniendo en cuenta que

$$[w]_{A_p}^{\max(1, \frac{1}{p-1})} \simeq [w]_{A_p} + [\sigma]_{A_{p'}},$$

es fácil ver que las desigualdades (1.30) y (1.31) mejoran la desigualdad (1.29).

Por otro lado, para el caso $r = \infty$, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.9.3 ([LM]) *Si $1 < p, r < \infty$ y sea T un operador de Calderón-Zygmund y w un peso en la clase A_p. Entonces*

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq C_{n,p} \, [w]_{(A_p)^{\frac{1}{p-1}}(A_\infty^{exp})^{1-\frac{1}{p-1}}} \tag{1.32}$$

Capítulo 2

La integral fraccionaria y su maximal

El propósito de este capítulo es estudiar estimaciones cuantitativas con pesos relacionadas con el operador integral fraccionario, las cuales fueron publicadas en [Rec13], y el operador maximal fraccionario.

2.1. Introducción

Recordemos que el operador integral fraccionario I_α, se define como

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

y el operador maximal fraccionario,

$$M_\alpha f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{|Q|^{\alpha/n}}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

donde $0 < \alpha < n$.

En el trabajo [LOP09a] se prueba que si T es un operador de Calderón-Zygmund y $1 < p < \infty$,

$$\| T \|_{L^p(w)} \leq c_T \, pp' [w]_{A_1}. \tag{2.1}$$

Esta estimación mejora los resultados obtenidos previamente por los mismos autores en [LOP08], la cual es una verdadera mejora puesto que permite obtener el siguiente resultado:

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_{d,T} \, [w]_{A_1} \log(e + [w]_{A_1}) \|f\|_{L^1(w)}. \tag{2.2}$$

Recientemente estas desigualdades fueron mejorados en [HP] donde en la desigualdad (2.1) se reemplaza una fracción de la constante A_1 por la constante A_∞ de Fujii-Wilson (1.6) y en la desigualdad (2.2) se cambia la constante A_1 por la constante A_∞ que se encuentra dentro del función logaritmo. Concretamente, se probaron las siguientes estimaciones en [HP]:

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_T \, pp' \, [w]_{A_1}^{1/p} [w]_{A_\infty}^{1/p'}$$

y

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_T \ \log(e+[w]_{A_\infty})\|f\|_{L^1(Mw)}. \tag{2.3}$$

Observemos que esta última estimación no aparece como tal en [HP]. Lo que ellos publican en realidad es que:

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_T \, [w]_{A_1} \ \log(e+[w]_{A_\infty})\|f\|_{L^1(w)} \tag{2.4}$$

lo cual resulta de (2.3) solo aplicando el hecho de ser w un peso A_1. Sin embargo con una pequeña modificación en la prueba presentada en [HP] facilmente se obtiene (2.3).

En este capítulo probaremos desigualdades similares para el operador integral fraccionario. Antes de enunciar los resultados recordemos que un peso w se dice que está en la clase $w \in A_{\infty,q}$ si:

$$[w]_{A_{\infty,q}} \equiv \sup_Q \frac{1}{w^q(Q)} \int_Q M(\chi_Q w^q)dx < \infty$$

También recordemos que $w \in A_{1,q}$ si existe una constante $c > 0$ tal que

$$Mw^q \leq c\, w^q \qquad \text{a.e.}$$

y llamaremos constante $A_{1,q}$ del peso w y lo notaremos con $[w]_{A_{1,q}}$, a la menor de las constantes c posibles.

Teorema 2.1.1 *Sean $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ y q definido por la ecuación $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Si $w \in A_{1,q}$, entonces*

$$\| \, I_\alpha f \, \|_{L^q(w^q)} \leq c[w]^{1/p'}_{A_{\infty,q}} [w]^{1/q}_{A_{1,q}} \, \| \, f \, \|_{L^p(w^p)} \, . \tag{2.5}$$

Además, los exponentes de esta desigualdad son óptimos.

Este resultado se puede ver como la versión fraccionaria del teorema 1.14 de [HP]. Sin embargo vale aclarar que usamos una notación diferente de la constante A_∞ a la utilizada en el trabajo de Hytönen y Pérez. Recientemente se ha publicado otra prueba de (2.5) pero basada en otras técnicas totalmente diferentes a las nuestras, dicha prueba fue dada por Cruz Uribe y Moen en [C-UM].

Como consecuencia del Teorema 2.1.1 nosotros podemos obtener el siguiente resultado.

Corolario 2.1.2 *Bajo las mismas condiciones que en el teorema anterior, tenemos que:*

$$\| \, I_\alpha f \, \|_{L^q(w^q)} \leq c[w]^{1-\frac{\alpha}{n}}_{A_{1,q}} \, \| \, f \, \|_{L^p(w^p)} \tag{2.6}$$

donde los exponentes de esta desigualdad son óptimos.

Este corolario es una estimación análoga a la desigualdad (2.1) cuando T es el operador integral fraccionario. Sin embargo cuando queremos encontrar desigualdades similares a (2.2) o a (2.3) pero reemplazando T por la integral fraccionaria, nos encontramos con algunas dificultades. Más precisamente uno puede ver en [CPSS] que no es posible un resultado análogo. Más precisamente, ellos prueban que la siguiente desigualdad

$$\|I_\alpha f\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c \int_{\mathbb{R}^n} f(x) M_\alpha w(x) dx \tag{2.7}$$

no es válida en general. Ahora, cuando T es el operador de Calderón-Zygmund y M es el operador maximal de Hardy Littlewood, la desigualdad análoga a (2.7) era la muy conocida conjetura de Muckenhoupt-Wheeden,

$$\sup_{t>0} tw(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > t\}) \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f|Mw(x)dx. \tag{2.8}$$

Respecto a dicha conjetura, ya en el trabajo [Pe94b] el autor había probado que para todo $\varepsilon > 0$, existe una constante $c > 0$ que depende de ε y de T tal que

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_{\varepsilon,T} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, M_{L(\log L)^\epsilon}(w)(x)\, dx, \quad w \geq 0. \tag{2.9}$$

En este trabajo se conjetura que no era válida la desigualdad (2.9) cuando $\varepsilon = 0$, lo cual significaría que (2.8) sería falsa. Muchas años después se obtiene una respuesta negativa a (2.8), la cual fue dada por Reguera in [Reg11] cuando T es un multiplicador de Haar especial y por Reguera y Thiele en [RT] cuando T es la transformada de Hilbert. Ahora, sabiendo que la desigualdad (2.8) es falsa, la desigualdad (2.9) toma mayor relevancia, siendo hasta el momento la desigualdad más precisa que se conoce en tal sentido, de hecho se sabe que $c_{\epsilon,T} \approx \frac{1}{\epsilon}$.

En [CPSS] los autores conjeturaron que la siguiente desigualdad es válida:

$$\|I_\alpha f\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c \int_{\mathbb{R}^n} f(x) M_\alpha M w(x)dx. \tag{2.10}$$

Si (2.10) fuese válida, en particular, cuando $w \in A_1$ tendríamos el siguiente resultado:

$$\|I_\alpha f\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c\,[w]_{A_1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) M_\alpha w(x)dx. \tag{2.11}$$

Tratando de dar respuesta a esta conjetura, nos planteamos ponerle alguna condición al peso. Concretamente vimos que la desigualdad (2.11) es válida cuando $w \in A_1$.

Teorema 2.1.3 *Sea $w \in A_1$, entonces*

$$\|I_\alpha f\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c\,[w]_{A_1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) M_\alpha w(x)dx. \tag{2.12}$$

En la Sección 2.3 daremos la prueba de este resultado.

Siguiendo en esta línea de investigación estudiamos el problema de dos pesos (w, σ) asumiendo que los pesos no están relacionados. Para ello seguiremos las ideas del trabajo [PR] donde se estudia el operador maximal de Hardy-Littlewood. Uno de los puntos de interés de este trabajo es que cuando los pesos son iguales el resultado coincide con el de [HP] pero se evita el uso de la desigualdad de Hölder al revés.

Dado un cubo Q y un par de pesos (w, σ) definimos el siguiente funcional

$$A^\alpha_{p,q}(w, \sigma, Q) := \left(\fint_Q \sigma \right)^{p-1} w(Q)^{p/q} |Q|^{\frac{p\alpha}{n}-1}$$

y la siguiente condición de tipo A_p

$$[w, \sigma]_{A^\alpha_{p,q}} := \sup_Q A^\alpha_{p,q}(w, \sigma, Q) < \infty$$

El teorema que probaremos es el siguiente.

Teorema 2.1.4 *Sea $0 \leq \alpha < n$ y $1 < p \leq q < \infty$, entonces para todo par de pesos (w, σ)*

$$\|M_\alpha(f\sigma)\|_{L^q(w)} \leq C_{n,p,q} \left([w,\sigma]_{A^\alpha_{p,q}}[\sigma]_{A_\infty}\right)^{1/p} \|f\|_{L^p(\sigma)}.$$

2.2. Acotaciones óptimas $A_{1,q} - A_{\infty,q}$ para la integral fraccionaria

Vamos a necesitar un lema relacionado con la muy conocida propiedad "reverse Holder al revés", dicha desigualdad se debe a Muckenhoupt (ver [Mu]) aunque también fue probado por F. Gehring independiente y en un contexto muy diferente pero casi simultáneamente en [Gh]. Posteriormente Coifman y Fefferman (ver [CoF], [GCRdF]) obtuvieron diferentes caracterizaciones de dicho resultado que completaron la teoría de forma muy satisfactoria pero de forma cualitativa. Un ejemplo es el siguiente: supongamos que $w \in A_1$, la desigualdad clásica de Hölder al revés dice que existen constantes $r > 1$ y $c \geq 1$ tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{c}{|Q|}\int_Q w\,dx.$$

Las pruebas habituales no dan buena información sobre el control de ambas constantes c y r. Sin embargo, se puede probar un resultado cuantitativo bien preciso usando ideas clásicas y que se puede encontrar en [LOP08] jugando un papel central en ese artículo.

Lema 2.2.1 *Si $w \in A_1$, y sea $r_w = 1 + \frac{1}{2^{n+1}[w]_{A_1}}$, entonces*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{r_w}\,dx\right)^{\frac{1}{r_w}} \leq \frac{2}{|Q|}\int_Q w\,dx$$

y por lo tanto

$$M_{r_w}w(x) \leq 2[w]_{A_1}\,w(x)$$

Demostración. Sea $w_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q w$ y M^d_Q el operador maximal diádico restringido al cubo Q. Sabemos que para $\lambda > w_Q$ (ver [St69]),

$$\int_{\{x\in Q:M^d_Q w(x)>\lambda\}} w(x)dx \leq 2^n\lambda|\{x \in Q : M^d_Q w(x) > \lambda\}|$$

Multiplicando ambas partes de la desigualdad por $\lambda^{\delta-1}$ e integrado sobre Q, tenemos

$$\int_{\{\lambda>w_Q\}} \lambda^{\delta-1}\int_{\{x\in Q:M^d_Q w(x)>\lambda\}} w(x)dxd\lambda \leq 2^n\int_{\{\lambda>w_Q\}} \lambda^{\delta}\int_{\{x\in Q:M^d_Q w(x)>\lambda\}} dxd\lambda$$

lo cual es equivalente, por Teorema de Fubini, a decir

$$\int_Q w(x)\int_{\{\lambda<M^d_Q w(x)\}} \lambda^{\delta-1}d\lambda dx \leq 2^n\int_Q\int_{\{\lambda<M^d_Q w(x)\}} \lambda^{\delta}d\lambda dx,$$

de donde obtenemos,

$$\int_Q (M_Q^d w(x))^\delta w(x)dx \leq (w_Q)^\delta \int_Q w(x)dx + \frac{2^n\delta}{\delta+1}\int_Q (M_Q^d w(x))^{\delta+1}dx$$

tomando $\delta = \frac{1}{2^{n+1}[w]_{A_1}}$, resulta

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{\delta+1}dx \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q (M_Q^d w(x))^\delta w(x)dx \leq 2(w_Q)^{\delta+1},$$

lo cual prueba el lema puesto que $w \in A_1$. □

Usando este lema y (1.11) nosotros obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.2.2 *Sea $w \in A_{1,q}$, y si definimos $r_w = 1 + \frac{1}{2^{n+1}[w]_{A_{1,q}}}$. Entonces,*

$$M_{r_w} w^q(x) \leq 2[w]_{A_{1,q}} w^q(x).$$

En el trabajo [HP, Teorema 2.3] (ver [HPR] para otra prueba) los autores dan una nueva prueba de la desigualdad de Hölder al revés para pesos en A_∞, óptima respecto a la dependencia de la constante del peso que nosotros usaremos y la cual involucra a la constante A_∞ de Fujii-Wilson. En la Sección 2.5 daremos más información.

Una versión muy interesante de este resultado se pueden encontrar en [LO] y establece que si $w \in A_p$ entonces si $\sigma = w^{1-p'}$ y $r_w = 1 + \frac{1}{2^{n+2}\|M\|_{L^{p'}(\sigma)}}$, entonces

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{r_w}\,dx\right)^{\frac{1}{r_w}} \leq \frac{2}{|Q|}\int_Q w\,dx.$$

Este resultado es interesante porque la constante depende esencialmente del inverso de la siguiente norma del operador maximal, $\|M\|_{L^{p'}(\sigma)}$ que a su vez está controlado por la constante $[w]_{A_p}$.

Hacia el final del capítulo daremos una prueba diferente y muy sencilla de la desigualdad de Hölder al revés que hemos probado para un peso en la clase A_∞ pero con la constante de Hruščev.

El siguiente lema (que se puede encontrar en [LOP09a]) se basa en una aplicación del algoritmo de Rubio de Francia que nos permite obtener pesos muy especiales con propiedades útiles.

Lema 2.2.3 *Sea $1 < s < \infty$ y si v es un peso.Entonces existe un operador sublineal no negativo R que satisface las siguientes propiedades:*

(i) $h \leq R(h)$;

(ii) $\|R(h)\|_{L^s(v)} \leq 2\|h\|_{L^s(v)}$;

(iii) $R(h)v^{1/s} \in A_1$ *con* $[R(h)v^{1/s}]_{A_1} \leq c\, s'$,

donde s' es tal que $1/s + 1/s' = 1$, *Demostración.* Si consideramos el operador

$$S(f) = \frac{M(fv^{1/s})}{v^{1/s}},$$

como $\|M\|_{L^s}$ se comporta como s', resulta que

$$\|S(f)\|_{L^s(v)} \leq cs'\|f\|_{L^s(v)}.$$

Ahora bien, si definimos el operador de Rubio de Francia R como

$$R(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{S^k(h)}{(\|S\|_{L^s(v)})^k},$$

se puede ver que R satisface las propiedades que buscábamos. $\square$

Teorema 2.2.4 *Sean $0 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $0 < \delta \leq 1$ y $w \in A_q$. Supongamos que f es una función tal que*

$$|\{x : |f(x)| > t\}| < \infty, \qquad t > 0.$$

Entonces

$$\|f\|_{L^p(w)} \leq cp\,[w]_{A_q}\|M_\delta^{\#,d} f\|_{L^p(w)}. \tag{2.13}$$

La prueba de este teorema se puede encontrar en [Pe].

Corolario 2.2.5 *Sean $0 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ and $w \in A_q$.Supongamos además que f es una función tal que para todo $\lambda > 0$, $|\{x : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}| < \infty$. Entonces,*

$$\|I_\alpha f(x)\|_{L^p(w)} \leq cp\,[w]_{A_q}\|M_\alpha f\|_{L^p(w)}. \tag{2.14}$$

Demostración. Usando las desigualdades (2.13) y (1.23), se tiene que:

$$\|I_\alpha f\|_{L^p(w)} \leq cp\,[w]_{A_q}\|M_\delta^{\#}(I_\alpha f)\|_{L^p(w)} \leq cp\,[w]_{A_q}\|M_\alpha f\|_{L^p(w)}.$$

$\square$

Lema 2.2.6 *Sea $t > 1$ y $p > 1$, entonces*

$$\left\|\frac{I_\alpha f}{M_t w}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c_{n,\alpha}\, p \left\|\frac{M_\alpha f}{M_t w}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Demostración.

$$\left\|\frac{I_\alpha f}{M_t w}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|I_\alpha f\|_{L^p((M_t w)^{-p})} = \sup_{\|h\|_{L^{p'}((M_t w)^{-p})}=1} \int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f| h (M_t w)^{-p} dx.$$

Si en el Lema 2.2.3, tomamos $s = p'$ y $v = (M_t w)^{-p}$, resulta que existe un operador R para el cual valen:

(i) $h \leq R(h)$,

(ii) $\|R(h)\|_{L^{p'}((M_t w)^{-p})} \leq 2\|h\|_{L^{p'}((M_t w)^{-p})}$,

(iii) $R(h)(M_t w)^{-p/p'} \in A_1$ con $[R(h)(M_t w)^{-p/p'}]_{A_1} \leq cp$.

Ahora, usando el Lema 2.2.5 con $q = 3$ y las desigualdades (1.3) y (1.7), se obtiene:

$$[R(h)(M_t w)^{-p}]_{A_3} = [(R(h)(M_t w)^{1-p})((M_t w)^{1/2})^{1-3}]_{A_3} \leq$$

$$\leq [R(h)(M_t w)^{1-p}]_{A_1}[(M_t w)^{1/2}]^2_{A_1} \leq Cp(2t)',$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f| h (M_t w)^{-p} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f| R(h)(M_t w)^{-p} dx \leq$$

$$\leq c[R(h)(M_t w)^{-p}]_{A_3} \int_{\mathbb{R}^n} |M_\alpha f| R(h)(M_t w)^{-p} dx \leq$$

$$\leq cp(2t)' \, \|M_\alpha f\|_{L^p((M_t w)^{-p})} \, \|R(h)\|_{L^{p'}((M_t w)^{-p})} \leq$$

$$\leq cp \left\| \frac{M_\alpha f}{M_t w} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Lo cual completa la demostración.

□

Utilizando el método de la prueba de caracterización para un par de pesos de las desigualdades en norma para el operador maximal, dado por Sawyer en [Sa82], K. Moen probó en [M, Lemma 4.6] el siguiente lemma.

Lema 2.2.7 *Supongamos que $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ y si q esta definido por la ecuación $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Si (u, v) son un par de pesos que satisfacen:*

$$[u, v]_{T_q} := \sup_Q \frac{\left(\int_Q M(\chi_Q \sigma)^{1+q/p'} u dx\right)^{1/q}}{\sigma(Q)^{1/q}} < \infty$$

donde $\sigma = v^{1-p'}$, entonces $M_\alpha : L^p(v) \to L^q(u)$ con

$$\| M_\alpha \| \sim [u, v]_{T_q}.$$

Lema 2.2.8 *Sea $r > 1$,*

$$\left\| \frac{M_\alpha f}{M_{rq} w} \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq [w]^{1/p'}_{A_{\infty,q}} \left\| \frac{f}{w} \right\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Demostración. Para probar este lema, usaremos el Lema 2.2.7 con $u = (M_{rq}w)^{-p'}$ and $v = w^{-q'}$, entonces

$$[(M_{rq}w)^{-p'}, w^{-q'}]_{T_{p'}} := \sup_Q \frac{\left(\int_Q M(\chi_Q w^q)^{1+p'/q}(M_{rq}w)^{-p'}dx\right)^{1/p'}}{(\int_Q w^q)^{1/p'}}.$$

primero notemos que, como $r > 1$,
$\dfrac{1}{|B|}\displaystyle\int_B \chi_Q(x)w^q(x)dx \le \left(\dfrac{1}{|B|}\displaystyle\int_B w^{qr}\right)^{1/r}$, tenemos entonces que:

$$M(\chi_Q w^q)^{p'/q} \le M_{rq}(w)^{p'}.$$

Además, ya que $w \in A_{\infty,q}$, sabemos que $\int_Q M(\chi_Q w^q) \le [w]_{A_{\infty,q}} w^q(Q)$. Con lo cual,

$$\left(\int_Q M(\chi_Q w^q)^{1+p'/q}(M_{rq}w)^{-p'}dx\right)^{1/p'} \le \left(\int M(\chi_Q w^q)dx\right)^{1/p'} \le [w]_{A_{\infty,q}}^{1/p'}\left(\int_Q w^q dx\right)^{1/p'}.$$

□

Demostración del Teorema 2.1.1. Combinando los Lemas 2.2.6 y 2.2.8 tenemos que:

$$\left\|\frac{I_\alpha f}{M_{rq}w}\right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \le cp'\left\|\frac{M_\alpha f}{M_{rq}w}\right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \le cp'[w]_{A_{\infty,q}}^{1/p'}\left\|\frac{f}{w}\right\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Como I_α es auto-adjunto, la desigualdad previa es equivalente a la siguiente,

$$\| I_\alpha f \|_{L^q(w^q)} \le cp'[w]_{A_{\infty,q}}^{1/p'} \| f \|_{L^p((M_{rq}w)^p)}.$$

Tomando $r = r_w$ en el Corolario 2.2.2, se obtiene:

$$(M_{rq}w)^p = (M_r w^q)^{p/q} \le (2[w]_{A_{1,q}} w^q)^{p/q} \le 2\,[w]_{A_{1,q}}^{p/q} w^p,$$

entonces

$$\| I_\alpha f \|_{L^q(w^q)} \le cp'\,[w]_{A_{\infty,q}}^{1/p'}[w]_{A_{1,q}}^{\frac{1}{q}} \| f \|_{L^p(w^p)}.$$

Esto prueba la desigualdad (2.5). Para concluir con la demostración del teorema, nos resta probar que la dependencia de la constante del peso es óptima.

Sea $n = 1$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$. Si $w(x) = |x|^{\frac{\delta-1}{q}}$, entonces $w^q(x) = |x|^{\delta-1} \in A_1$, con $[w]_{A_{1,q}} = [w^q]_{A1} \sim \frac{1}{\delta}$ y $[w]_{A_{\infty,q}} \sim \frac{1}{\delta}$.

Considerando la función $f(x) = |x|^{\alpha(\delta-1)}\chi_{(0,1)}(x)$, podemos calcular su norma:

$$\| f \|_{L^p(w^p)}^p = \int_0^1 x^{\alpha p(\delta-1)} x^{\frac{(\delta-1)p}{q}} dx = \int_0^1 x^{\delta-1}dx = \frac{1}{\delta}.$$

Sea $x \in (0, x_\delta)$, con $x_\delta < 1$

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{(0,1)}(y)|y|^{\alpha(\delta-1)}}{|x-y|^{1-\alpha}}dy \ge \int_{(0,1)-(0,x)} \frac{|y|^{\alpha(\delta-1)}}{|x-y|^{1-\alpha}}dy \ge \int_x^1 \frac{|y|^{\alpha(\delta-1)}}{(2|y|)^{1-\alpha}}dy =$$

$$= \frac{1}{2^{1-\alpha}} \int_x^1 |y|^{\alpha\delta - 1} dy = \frac{1}{2^{1-\alpha}} \frac{(1 - |x|^{\alpha\delta})}{\alpha\delta}.$$

Si $x_\delta = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{\alpha\delta}}$, observe que $I_\alpha f(x) \geq \frac{1}{2^{2-\alpha}} \frac{1}{\alpha\delta}$. Luego se tiene que:

$$\| I_\alpha f \|_{L^q(w^q)} \geq \frac{1}{2^{2-\alpha}} \frac{1}{\alpha\delta} \left(\int_0^{x_\delta} x^{\delta-1} dx \right)^{\frac{1}{q}} = c_\alpha \left(\frac{1}{\delta} \right)^{1+1/q} \geq$$

$$\geq c_\alpha \left(\frac{1}{\delta} \right)^{1+1/q-1/p} \| f \|_{L^p(w^p)} = c_\alpha \left(\frac{1}{\delta} \right)^{1/p'} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{1/q} \| f \|_{L^p(w^p)}$$

lo cual muestra que (2.5) es óptimo.

□

Demostración del Corolario 2.1.2.

Como $[w]_{A_{\infty,q}} \leq [w]_{A_{1,q}}$ la desigualdad (2.6) vale pues $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$ and $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$.

□

2.3. Acotación de tipo débil para el operador fraccionario

Como mencionamos antes, nuestro propósito original era probar la Conjetura 2.10 establecida en [CPSS]. Una respuesta positiva a esta conjetura cuando $w \in A_1$ se da en el Teorema 2.1.3.

Para la prueba del Teorema necesitaremos dos lemas. El primero de ellos es interesante por sí mismo y puede verse como una versión del algoritmo de Rubio de Francia pero en el contexto de los espacios de Lorentz.

Lema 2.3.1 *Dada $h \in L^{p,1}(w)$ con $1 < p < \infty$ y $w \in A_1$. Existe un operador sublineal no negativo R, tal que:*

(i) $h \leq R(h)$,

(ii) $\|R(h)\|_{L^{p,1}(w)} \leq 2\|h\|_{L^{p,1}(w)}$,

(iii) $R(h)w \in A_1$ *con* $[R(h)w]_{A_1} \leq c[w]_{A_1}$.

Demostración. Sea

$$S(f)(x) = \frac{M(fw)(x)}{w(x)}$$

con $w \in A_1$, entonces $\|Sf\|_{L^\infty(w)} \leq [w]_{A_1} \|f\|_{L^\infty(w)}$. Además, S es un operador acotado en $L^{p_0}(w)$ para todo $1 < p_0 < \infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} Sf(x)^{p_0} w(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} M(fw)^{p_0} w^{1-p_0} dx \leq [w^{1-p_0}]_{A_{p_0}}^{\frac{p_0}{p_0-1}} \int_{\mathbb{R}^n} (fw)^{p_0} w^{1-p_0} dx.$$

Combinando esto con que $[w^{1-p_0}]_{A_{p_0}} \leq [w]_{A_1}^{p_0-1}$ es válida, podemos concluir que

$$\|Sf\|_{L^{p_0}(w)} \leq [w]_{A_1}\|f\|_{L^{p_0}(w)}.$$

Aplicando la proposición A.1 (Apéndice A) de [C-UMP05] con $T = S$, $C_0 = C_1 = c(p_0)[w]_{A_1}$, tenemos para todo $p_0 < p < \infty$

$$\|Sf\|_{L^{p,1}(w)} \leq c(p)[w]_{A_1}\|f\|_{L^{p,1}(w)}.$$

Sea $h \geq 0$, $h \in L^{p,1}(w)$, definimos el operador de Rubio de francia R como:

$$R(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k h(x)}{2^k K_0^k},$$

donde $K_0 = c(p)[w]_{A_1} = \|S\|_{L^{p,1}(w)}$.

Es claro que $h \leq R(h)$. Además,

$$\|R(h)\|_{L^{p,1}(w)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|S^k(h)\|_{L^{p,1}(w)}}{K_0^k} \leq 2\|h\|_{L^{p,1}(w)}.$$

Finalmente, usando que $M(R(h)w) \leq [w]_{A_1} R(h)w$, tenemos que:

$$S(R(h)) = S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k h(x)}{2^k K_0^k}\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^{k+1} h(x)}{2^k K_0^k} \leq 2K_0 R(h).$$

Observe que la primer desigualdad es válida ya que S es un operador sublineal.

$\square$

El segundo lema es una simple consecuencia de un lema clásico de cubrimiento (ver [FS]).

Lema 2.3.2 *Para todo peso w,*

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\alpha f(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| M_\alpha w(x) dx. \tag{2.15}$$

Demostración del Corolario 2.1.3.

$$\|I_\alpha f\|_{L^{1,\infty}(w)}^{1/p} = \|(I_\alpha f)^{1/p}\|_{L^{p,\infty}(w)} = \sup_{\|g\|_{L^{p',1}(w)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} (I_\alpha f)^{1/p} g(x) w(x) dx.$$

Sea $g \in L^{p',1}(w)$ con $\|g\|_{L^{p',1}(w)} = 1$, usando los Lemas 2.3.1 y 2.2.5, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (I_\alpha f)^{1/p} g(x) w(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (I_\alpha f)^{1/p} R(g)(x) w(x) dx \leq$$

$$\leq c[R(g)w]_{A_1}^{1/p} \int_{\mathbb{R}^n} (M_\alpha f)^{1/p} R(g)(x) w(x) dx.$$

Luego, por la propiedad (iii) del Lema 2.3.1 y la desigualdad de Hölder,

$$[R(g)w]_{A_1}^{1/p} \int_{\mathbb{R}^n} (M_\alpha f)^{1/p} R(g)(x) w(x) dx \leq c[w]_{A_1}^{1/p} \|(M_\alpha f)^{1/p}\|_{L^{p,\infty}(w)}^{1/p} \|R(g)\|_{L^{p',1}(w)}$$

Por lo tanto,

$$\|I_\alpha f\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c[w]_{A_1} \|M_\alpha f\|_{L^{1,\infty}(w)}.$$

Entonces, usando el Lema 2.3.2, resulta que:

$$\|I_\alpha f\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c[w]_{A_1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| M_\alpha w(x) dx.$$

□

2.4. Operador maximal fraccionaria: teorema cuantitativo de dos pesos.

En esta sección daremos una acotación en norma (p, q) para la maximal fraccionaria controlando la constante de los pesos involucrados. Para ello vamos a necesitar un resultado que se encuentra en [M, Corlorario 4.2] el cual prueba el siguiente lema que es una adaptación de la caracterización para dos pesos obtenida por Sawyer.

Lema 2.4.1 *Sea $0 \leq \alpha < n$ y $1 < p \leq q < \infty$. Se considera el par de pesos (w, v) y sea $\sigma = v^{1-p'}$, entonces*

$$\|M_\alpha^d(f)\|_{L^q(w)} \leq C\|f\|_{L^p(v)}$$

si y sólo si

$$[w, \sigma]_{S_{p,q}} := \sup_{Q \in \mathcal{D}} \frac{\left(\int_Q M_\alpha^d(\chi_Q \sigma)(x)^q w(x) dx\right)^{1/q}}{\sigma(Q)^{1/p}} < \infty.$$

Además,

$$\|M_\alpha^d\| \sim [w, \sigma]_{S_{p,q}}$$

Dado un cubo Q, definimos

$$A_{p,q}^\alpha(w, \sigma, Q) := \left(\fint_Q \sigma\right)^{p-1} w(Q)^{p/q} |Q|^{\frac{p\alpha}{n} - 1}.$$

Teniendo en cuenta esta notación, daremos la siguiente definición.

Definición 2.4.2 *Dado el par de pesos (w, v) y teniendo en cuenta que $\sigma = v^{1-p'}$ diremos que el par de pesos (w, v) están el la clase $A_{p,q}^\alpha$ si*

$$[w, \sigma]_{A_{p,q}^\alpha} := \sup_Q A_{p,q}^\alpha(w, \sigma, Q) < \infty.$$

Reemplazando f por $f\sigma$ en el Lema 2.4.1 y teniendo en cuenta que $\sigma = v^{1-p'}$ podemos ver que vale la siguiente acotación del operador maximal fraccionario

$$\|M_\alpha^d(f\sigma)\|_{L^q(w)} \leq [w,\sigma]_{S_{p,q}} \|f\|_{L^p(\sigma)}. \tag{2.16}$$

Ahora sí estamos en condiciones de probar el Teorema cuantitativo de dos pesos.

Demostración del Teorema 2.1.4. Gracias al [GCRdF, Lema 4.8.] que sigue las ideas de [FS], basta ver que la acotación en norma vale para el operador maximal fraccionaria diádico. Para simplificar la notación llamaremos M_α a M_α^d.

Usando la desigualdad (2.16), basta con probar que

$$([w,\sigma]_{S_{p,q}})^p \leq [w,\sigma]_{A_{p,q}^\alpha} [\sigma]_{A_\infty}$$

Fijamos un cubo Q y sea $a > 1$ que fijaremos posteriormente, denotamos con k_0 el entero para el cual

$$a^{k_0} \leq |Q|^{\alpha/n} \fint_Q \sigma < a^{k_0+1}.$$

Entonces, si llamamos $A = \{x \in Q : M_\alpha(\sigma\,\chi_Q) \leq a^{k_0}\}$, resulta que

$$\begin{aligned}
\int_Q M_\alpha(\sigma\,\chi_Q)^q w\,dx &= \int_A M_\alpha(\sigma\,\chi_Q)^q w\,dx + \sum_{k=k_0}^{\infty} \int_{\{x\in Q: a^k < M_\alpha(\sigma\,\chi_Q) \leq a^{k+1}\}} M_\alpha(\sigma\,\chi_Q)^q w\,dx \\
&\leq \left(|Q|^{\alpha/n} \fint_Q \sigma\right)^q w(Q) + a^q \sum_{k=k_0}^{\infty} a^{kq} w(\{x \in Q : M_\alpha(\sigma\,\chi_Q) > a^k\}) \\
&\leq \left(\fint_Q \sigma\right)^q w(Q)|Q|^{\frac{\alpha q}{n}} + a^q \sum_{k=k_0}^{\infty} a^{kq} w(\{x \in Q : M_\alpha(\sigma\,\chi_Q) > a^k\}) \\
&\leq [w,\sigma]_{A_{p,q}^\alpha}^{q/p} \sigma(Q)^{q/p} + a^q \sum_{k=k_0}^{\infty} a^{kq} w(\{x \in Q : M_\alpha(\sigma\,\chi_Q) > a^k\})
\end{aligned}$$

Ahora podemos hacer, para cada nivel k, una descomposición de Calderón-Zygmund respecto al cubo Q obteniendo entonces una familia $\{Q_j^k\}_j$ de cubos diádicos para los cuales

$$a^k < \frac{|Q_{k,j}|^{\alpha/n}}{|Q_{k,j}|} \int_{Q_{k,j}} f(y)\,dy \leq 2^{n-\alpha} a^k. \tag{2.17}$$

Si llamamos

$$A_k = \cup_j Q_{k,j} = \{x \in \mathbb{R}^n : M_\alpha^d f(x) > a^k\},$$

se puede ver que

$$A_{k+1} \subset A_k.$$

Para continuar, vamos a necesitar un resultado muy útil que fue una herramienta importante en trabajos como [Pe94a] y actualmente se ha usado mucho para probar algunos resultados recientes del análisis armónico. Ejemplo de ellos es la utilización del mismo en [Le13a].

El resultado dice que existe una familia de conjuntos medibles $\{E_{k,j}\}_{k,j}$ con las siguientes propiedades:

(1)

$$E_{k,j} \subset Q_{k,j}$$

(2)

$$|Q_{k,j}| \approx |E_{k,j}|$$

(3) Las componentes de la familia $\{E_{k,j}\}_{j,k}$ son disjuntos dos a dos.

Una terminología que se usa ahora nos diría que la familia de cubos de Calderón-Zygmund $\{Q_{k,j}\}$ tienen la propiedad de dispersión o de "sparsness".

Para su prueba, se elige $E_{k,j} = Q_{k,j} \backslash Q_{k,j} \cap D_{k+1}$, de tal forma los $E_{k,j}$ son una familia disjunta dos a dos que satisface:

$$|Q_{k,j} \cap D_{k+1}| < \frac{2^{n-\alpha}}{a} |Q_{k,j}|, \tag{2.18}$$

y si consideramos $a > 2^{n-\alpha}$ se tiene

$$|Q_{k,j}| < \frac{1}{1 - \frac{2^{n-\alpha}}{a}} |E_{k,j}|. \tag{2.19}$$

Usando simples propiedades de los cubos diádicos y la maximalista de ellos se puede obtener:

$$\begin{aligned}
\frac{|Q_{k,j} \cap D_{k+1}|}{|Q_{k,j}|} &= \sum_i \frac{|Q_{k,j} \cap Q_{k+1,i}|}{|Q_{k,j}|} = \sum_{i:Q_{k+1,i} \subset Q_{k,j}} \frac{|Q_{k+1,i}|}{|Q_{k,j}|} \\
&\leq \frac{1}{|Q_{k,j}|} \frac{1}{a^{k+1}} \sum_{i:Q_{k+1,i} \subset Q_{k,j}} |Q_{k+1,i}|^{\alpha/n} \int_{Q_{k+1,i}} f(y)\, dy \\
&\leq \frac{1}{|Q_{k,j}|} \frac{1}{a^{k+1}} |Q_{k,j}|^{\alpha/n} \int_{Q_{k,j}} f(y)\, dy \leq \frac{2^{n-\alpha}}{a}.
\end{aligned}$$

Esto prueba (2.18) y si elegimos $a > 2^{n-\alpha}$ se tiene (2.19). Teniendo todo esto presente, podemos continuar con nuestra acotación.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=k_0}^{\infty} a^{kq} w(\{x \in Q : M_\alpha(\sigma\, \chi_Q) > a^k\}) &\leq \textstyle\sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} w(Q_j^k) |Q_j^k|^{\frac{q\alpha}{n}} \left(⨍_{Q_j^k} \sigma \right)^q \\
&\leq \textstyle\sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} [w,\sigma]_{A_{p,q}^{\alpha}}^{q/p} (\sigma(Q_j^k))^{q/p} \\
&\leq [w,\sigma]_{A_{p,q}^{\alpha}}^{q/p} \textstyle\sum_{k,j} \left(|E_j^k| ⨍_{Q_j^k} \sigma \right)^{q/p} \\
&\leq c[w,\sigma]_{A_{p,q}^{\alpha}}^{q/p} \textstyle\sum_{k,j} \left(\int_{E_j^k} M(\chi_Q \sigma) \right)^{q/p} \\
&\leq c[w,\sigma]_{A_{p,q}^{\alpha}}^{q/p} \left(\int_Q M(\chi_Q \sigma) \right)^{q/p} \\
&\leq c[w,\sigma]_{A_{p,q}^{\alpha}}^{q/p} [\sigma]_{A_\infty}^{q/p} \sigma(Q)^{q/p}.
\end{aligned}$$

Con esto podemos concluir que

$$\left(\int_Q M_\alpha(\sigma\chi_Q)^q w dx\right)^{1/q} \leq C_{n,q,p}[w,\sigma]^{1/p}_{A^\alpha_{p,q}}[\sigma]^{1/p}_{A_\infty}\sigma(Q)^{1/p}$$

con lo cual probaríamos nuestro resultado. □

2.5. Una prueba simple de la desigualdad de Hölder al revés

Como mencionamos antes, en [HP, Teorema 2.3] (también se puede ver [HPR] para una prueba diferente) se probó una versión óptima de RHI para $w \in A_\infty$ con la constante de Fujii-Wilson $[w]_{A_\infty}$.

Si definimos

$$r_w := 1 + \frac{1}{\tau_n [w]_{A_\infty}}$$

donde τ_n es una constante dimensional que puede ser $\tau_n = 2^{11+n}$. Observemos también que $r'_w \simeq [w]_{A_\infty}$.

Lema 2.5.1 ([HP, Teorema 2.3])

a) Si $w \in A_\infty$, entonces

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{r_w} dx\right)^{1/r_w} \leq \frac{2}{|Q|}\int_Q w.$$

b) Más aún, el resultado es óptimo salvo por un factor dimensional: si un peso w satisface la RHI

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^r dx\right)^{1/r} \leq \frac{K}{|Q|}\int_Q w,$$

entonces $[w]_{A_\infty} \leq c_n.K.r'$.

En esta sección daremos una prueba más simple de la desigualdad de Hölder al revés pero usando la constante $\|w\|_{A_\infty}$. Si bien esta prueba es muy sencilla, la dada por Hytönen y Pérez es más precisa ya que $[w]_{A_\infty} \leq \|w\|_{A_\infty}$.

Esta prueba esta basada en una idea de A. de la Torre [dT] para probar la desigualdad de Hölder al revés, pero para pesos en la clase A_p .

Lema 2.5.2 *Dado $w \in A_\infty$, existe $r_w = 1 + \frac{1}{c_n\|w\|_\infty}$ para el cual se verifica:*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{r_w}\right)^{1/r_w} \leq \frac{2}{|Q|}\int_Q w.$$

Demostración. Recordemos una consecuencia simple de la desigualdad de Jensen:

$$\exp\left(\int_X \log|h(x)|d\mu\right) \leq \left(\int_X |h|^q d\mu\right)^{1/q},$$

la cual vale para toda función medible h en un espacio de probabilidad (X,μ) y para todo $0 < q < \infty$.

Ahora, nosotros podemos aplicar esta desigualdad para la función $h = w$, en el espacio $X = Q$ y $d\mu = \frac{dx}{|Q|}$, de donde surge

$$\exp\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \log w\right) < \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^s\right)^{1/s}. \tag{2.20}$$

Usando la definición de $\|w\|_\infty = A$ combinada con (2.20), se tiene

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w \leq A\exp\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \log w\right) \leq A\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^s\right)^{1/s},$$

y por lo tanto

$$(Mw)^s \leq A^s M w^s. \tag{2.21}$$

Cubriendo $\{x \in Q : Mw > t\}$ con cubos diádicos maximales, tenemos

$$w(\{x \in Q : Mw > t\}) \leq C2^n t|\{x \in Q : Mw > t\}| \leq Ct|\{x \in Q : A^s Mw^s > t^s\}|. \tag{2.22}$$

Usando un lema clásico de cubrimiento es fácil ver que:

$$|\{x \in Q : Mv > t\}| \leq \frac{c_n}{t} v(\{x \in Q : v > t/2\})$$

Combinando la desigualdad previa con (2.22), surge que:

$$w(\{x \in Q : Mw > t\}) \leq C_n t^{1-s} A^s w^s(\{x \in Q : w^s(x) > \frac{d^s}{2A^s}\}). \tag{2.23}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\delta}(x)dx &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q (Mw)^{\delta}(x)w(x)dx \\
&= \frac{\delta}{|Q|}\int_0^{\infty} t^{\delta-1}w(\{x\in Q : Mw > t\})dt \\
&\leq \frac{\delta}{|Q|}\int_0^{w_Q} t^{\delta-1}w(\{x\in Q : Mw > t\})dt \\
&+ \frac{\delta}{|Q|}\int_{w_Q}^{\infty} t^{\delta-1}w(\{x\in Q : Mw > t\})dt \\
&\leq (w_Q)^{\delta+1} + c_nA^s\frac{\delta}{|Q|}\int_{w_Q}^{\infty} t^{\delta-s}w^s(\{x\in Q : w > \frac{t}{2^{1/s}A}\})dt \\
&= (w_Q)^{\delta+1} + c_nA^{\delta+1}2^{\frac{\delta}{s}-1+\frac{1}{s}}\frac{\delta}{|Q|}\int_{\frac{w_Q}{2^{1/s}A}}^{\infty} u^{\delta-s}w^s(\{x\in Q : w > u\})du \\
&\leq (w_Q)^{\delta+1} + \frac{c_nA^{\delta+1}\delta 2^{\frac{\delta}{s}-1+\frac{1}{s}}}{|Q|(\delta-s+1)}\int_Q w^{\delta-s+1}(x)w^s(x)dx.
\end{aligned}
$$

Si elegimos $\delta = \frac{1}{c_n2^5A}$ y $s = 1/2$, obtenemos $\frac{c_nA^{\delta+1}\delta 2^{\frac{\delta}{s}-1+\frac{1}{s}}}{(\delta-s+1)} \leq 1/2$, lo cual prueba nuestro teorema. $\square$

Capítulo 3

Conjetura de Sawyer: estimaciones cuantitativas

En este capítulo vamos a probar estimaciones cuantitativas relacionadas con la "Conjetura de Sawyer"(ver 3.2.1). Estos resultados se pueden encontrar [Rec14].

3.1. Introducción

Recordamos que en 1972 Muckenhoupt publicó un trabajo [Mu] en el cual caracterizó los pesos w en $\mathbb{R}$ para los cuales la siguiente desigualdad se satisface

$$\int_{\mathbb{R}} Mf(x)^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x)dx \qquad f \geq 0, \tag{3.1}$$

donde M es la maximal de Hardy-Littlewood de f. Dichos pesos son los que verifican la condición A_p:

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|}\int_I w\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{1-p'}\right)^{p-1} < \infty,$$

y un resultado similar en el caso $p = 1$.

$$M : L^1(w) \to L^{1,\infty}(w) \quad \text{si y sólo si} \quad w \in A_1.$$

En 1977, Muckenhoupt y Wheeden en [MW77] probaron las siguientes desigualdades para la maximal de Hardy-Littlewood y para la transformada de Hilbert en la recta real.

Teorema 3.1.1 *Si $w \in A_1$, entonces existe una constante c tal que,*

$$\left\|M(fw^{-1})w\right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} \leq c \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx, \tag{3.2}$$

y

$$\left\|H(fw^{-1})w\right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} \leq c \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx, \tag{3.3}$$

Como ya mencionamos en el primer Capítulo un peso w satisface la condición A_p si y sólo si admite una factorización de la siguiente forma

$$w = w_0 w_1^{1-p} \qquad \text{donde} \qquad w_0, w_1 \in A_1 \tag{3.4}$$

Un acercamiento natural para poder obtener (3.1) directamente de la factorización (3.4) es tratar de probarlo via el teorema de interpolación con cambio de medida de Stein-Weiss [SW]. Para ello, si suponemos válida la desigualdad (3.4) y si definimos

$$Sf = \frac{M(w_1 f)}{w_1}$$

se observa que (3.1) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\int |Sf|^p w_0 w_1 \leq C \int |f|^p w_0 w_1 \qquad f \geq 0. \tag{3.5}$$

Ahora bien, como $Mw_1 \leq Cw_1$ se tiene que S es acotado en $L^\infty(w_0 w_1)$, con lo cual si probamos que S es de tipo débil $(1,1)$ respecto a la medida $w_0(x)w_1(x)dx$, por el teorema de interpolación de Marcinkiewicz, tendríamos probado (3.5). Motivado por esta forma de probar el teorema de Muckenhoupt, Sawyer prueba en [Sa85] el siguiente teorema.

Teorema 3.1.2 *Sean u y v dos pesos en la clase A_1 de Muckenhoupt. Entonces*

$$\left\| \frac{M(g)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c \int_{\mathbb{R}} |g(x)| u(x) dx \qquad g \geq 0,$$

donde c depende solamente de $[u]_{A_1}$ y $[v]_{A_1}$. Esto muestra que el operador $Sf = v^{-1}M(vf)$ es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a la medida $v(x)u(x)dx$.

En el mismo trabajo, Sawyer conjetura que este teorema también es válido en más dimensiones y cuando reemplazamos M por H, donde H es la transformada de Hilbert.

En [C-UMP05] se generaliza el Teorema 3.1.2 extendiéndolo a $\mathbb{R}^n$ y prueban las conjeturas enunciadas por Sawyer sobre la transformada de Hilbert como corolario de un teorema mucho más general para operadores de Calderón-Zygmund. Precisamente, lo que ellos probaron fue el siguiente teorema.

Teorema 3.1.3 *Si $u \in A_1$ y v está en A_1 o en $A_\infty(u)$, entonces existe una constante c tal que,*

$$\left\| \frac{M(fv)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| u(x) v(x) dx \tag{3.6}$$

y

$$\left\| \frac{T(fv)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| u(x) v(x) dx, \tag{3.7}$$

donde M es la maximal de Hardy-Littlewood y T es un operador de Calderón-Zygmund.

Observemos que si aplicamos (3.7) para la transformada de Hilbert en $\mathbb{R}$, resolvemos la conjetura que había dado Sawyer en [Sa85].

Se puede ver también que el Teorema 3.1.3 extiende el Teorema 3.1.1 de Muckenhoupt y Wheeden, fijando $w \in A_1$ y tomando $u = w$ y $v = w^{-1}$. Entonces resulta que $uv = 1 \in A_\infty$, con lo cual $v \in A_\infty(u)$ (ver Lema 1.3.9 y Observación 1.3.10).

Para probar el Teorema 3.1.3, los autores dividieron la demostración en dos pasos. Primero probaron la desigualdad (3.6) reemplazando el operador maximal por el operador maximal diádico. Es decir, ellos prueban el siguiente teorema.

Teorema 3.1.4 *Si $u \in A_1$ y v está en A_1 o en $A_\infty(u)$, entonces existe una constante c tal que,*

$$\left\| \frac{M_d(fv)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|u(x)v(x)dx, \tag{3.8}$$

Para probar la desigualdad (3.8) cuando $u \in A_1$ y $v \in A_\infty(u)$, ellos usan una simple descomposición de Calderón-Zygmund inspirada en la prueba que dan Muckenhoupt y Wheeden del Teorema 3.1.1. Para el caso $u \in A_1$ y $v \in A_1$, la prueba es una adaptación de la dada por Sawyer en la recta, la cual se realiza usando un muy delicado argumento de descomposición.

El segundo paso para probar el Teorema 3.1.3 fue obtener un teorema de tipo extrapolación usando técnicas de [C-UMP04]. El teorema es el siguiente,

Teorema 3.1.5 *Dada una familia $\mathcal{F}$, supongamos que para algún p, $0 < p < \infty$, y para todo $w \in A_\infty$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^p w(x)dx,$$

para todo par $(f, g) \in \mathcal{F}$ tal que el lado derecho de la desigualdad es finito y donde C depende solo de la constante A_∞ de w. Entonces para todo peso $u \in A_1$ y $v \in A_\infty$,

$$\|fv^{-1}\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq C\|gv^{-1}\|_{L^{1,\infty}(uv)} \quad (f, g) \in \mathcal{F}.$$

Donde $\mathcal{F}$ denota una familia de pares ordenados de funciones medibles no negativas (f, g). La prueba del Teorema 3.1.3 es ahora inmediata, considerando el par $(M(fv), M_d(fv))$ y usando que para $w \in A_\infty$ y para todo $p > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} M(fv)(x)^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} M_d(fv)(x)^p w(x)dx,$$

tenemos entonces que $\forall u \in A_1$ y $v \in A_\infty$ vale que

$$\|M(fv)v^{-1}\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq C\|M_d(fv)v^{-1}\|_{L^{1,\infty}(uv)}. \tag{3.9}$$

Luego, el Teorema 3.1.3 se tiene por el teorema 3.1.4. Si $v \in A_1$ entonces $v \in A_\infty$, con lo cual la desigualdad (3.9) vale y tenemos entonces probada la desigualdad (3.6) del Teorema 3.1.3. Similarmente, si $v \in A_\infty(u)$ por el Lema 1.3.9 y Lema 1.3.4, $v \in A_\infty$ y entonces vale la desigualdad (3.9).

Para probar la desigualdad (3.7) los autores proceden de la misma manera. En este caso consideran la familia $\mathcal{F}$ que consiste en los pares $(|T(fv)|, M(fv))$ y por el teorema de Coifman- Fefferman (ver [CoF]) sabemos que para todo peso $w \in A_\infty$ y para todo $p > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T(fv)(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} M(fv)(x)^p w(x)dx;$$

luego, por el Teorema 3.1.5 y la desigualdad (3.6) se puede probar la validez de la desigualdad (3.8).

En [C-UMP05] los autores también prueban como corolario una extensión a valores vectoriales del Teorema 3.1.3.

Corolario 3.1.6 *Sea $u \in A_1$ y sea v en A_1 o en $A_\infty(u)$, entonces para todo $1 < q < \infty$,*

$$\left\| \frac{\left(\sum_j M(f_j v)^q\right)^{\frac{1}{q}}}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_j |f(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} u(x)v(x)dx$$

y

$$\left\| \frac{\left(\sum_j |T(f_j v)|^q\right)^{\frac{1}{q}}}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_j |f(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} u(x)v(x)dx,$$

donde M es la maximal de Hardy-Littlewood y T es un operador de Calderón-Zygmund.

3.2. Dependencia de las constantes de los pesos en el teorema de Sawyer

En [C-UMP05] los autores conjeturan que el teorema 3.1.4 se sigue verificando cuando debilitamos la hipótesis sobre el peso v. Par ser más preciso, los autores conjeturan y que hoy se conoce como "Conjetura de Sawyer", aunque Sawyer nunca la llegó a formular, es la siguiente.

Conjetura 3.2.1 *Si $u \in A_1$ y $v \in A_\infty$, entonces existe una constante c tal que,*

$$\left\| \frac{M_d(fv)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|u(x)v(x)dx. \tag{3.10}$$

Note que si $v \in A_\infty(u)$ entonces $v \in A_\infty$ (ver lemas 1.3.9 y 1.3.4). Esta conjetura lleva varios años y ha sido estudiada por diferentes autores y aún hoy no se conoce si es válida o no. El propósito de este capítulo es por un lado tratar de entender las dificultades de dicha conjetura y dar caminos alternativos para lograr su prueba y por otro lado estudiar cómo afectan las constantes de los pesos u y v en dichas desigualdades, es decir buscar versiones cuantitativas de este tipo de desigualdades.

Uno de nuestros propósitos será ver el comportamiento de las constantes de los pesos y poder conjeturar cuál sería la dependencia óptima en cada caso.

3.2.1. La mejor dependencia de las constantes para la maximal diádica

La primera pregunta que nos planteamos en relación al teorema de Sawyer es

> ¿cuál será la dependencia óptima de las constantes de los pesos u y v cuando ambos están en A_1?.

Siguiendo la prueba dada en [C-UMP05], que es una adaptación de la demostración original dada por Sawyer en [Sa85] para la recta, mostraremos cómo queda la dependencia de las constantes de los pesos. Específicamente, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.2 *Si $u \in A_1$ y $v \in A_1$, entonces existe una constante dimensional c tal que,*

$$\left\|\frac{M_d(fv)}{v}\right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c\, [u]_{A_1}^2 [v]_{A_1}^4 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|u(x)v(x)\, dx.$$

Demostración. Fijamos $t > 0$ y sea $g = fv/t$; entonces necesitamos probar que:

$$uv(\{x \in \mathbb{R}^n :\ M_d(g)(x) > v(x)\}) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|u(x)\, dx \tag{3.11}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que g es acotada y tiene soporte compacto. Fijo $a > 2^n$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea $\{I_j^k\}$ la colección de cubos diádicos maximales, cuya unión es el conjunto:

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : M_d v(x) > a^k\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : M_d g(x) > a^k\}$$

Esta descomposición existe ya que g es acotada y de soporte compacto.
El segundo conjunto está contenido en la unión de los cubos diádicos maximales.
Defino:

$$\Gamma = \{(k, j) :\ |I_j^k \cap \{x : v(x) \leq a^{k+1}\}| > 0\}$$

Como $v \in A_1$ tenemos que: $Mv(x) \leq [v]_{A_1} v(x)$ a.e. de aquí, para $(k, j) \in \Gamma$

$$\frac{a^k}{[v]_{A_1}} \leq \frac{1}{[v]_{A_1}} \operatorname*{inf\,es}_{x \in I_j^k} M_d v(x) \leq [v]_{A_1} a^{k+1} \tag{3.12}$$

(Intuitivamente, si $(k, j) \in \Gamma$, entonces I_j^k se comporta como un cubo en la descomposición de Calderón-Zygmund de v para $t = a^k$). Entonces, salvo un conjunto de medida cero, tenemos la siguiente conclusión: Para cada k,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^k < v(x) \leq a^{k+1}\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : M_d g(x) > v(x)\} \subset \bigcup_{j:(k,j)\in\Gamma} I_j^k$$

Combinando ésto con (3.12) obtenemos que:

$$uv(\{x \in \mathbb{R}^n : M_d g(x) > v(x)\}) \leq a[v]_{A_1} \sum_{(k,j)\in\Gamma} |I_j^k|^{-1} v(I_j^k) u(I_j^k)$$

Fijo $N < 0$ y defino $\Gamma_N = \{(k,j) \in \Gamma : k \geq N\}$. Veamos que:

$$\sum_{(k,j)\in\gamma_N} |I_j^k|^{-1} v(I_j^k) u(I_j^k) \;\leq\; C \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| u(x) dx$$

donde la constante C no depende de N. Luego, tomando $N \to -\infty$ obtenemos (3.11). Para probar esto, nosotros vamos a reemplazar el conjunto de cubos $\{I_j^k\}$ por un subconjunto con mejores propiedades. Primero, como $v \in A_1$ puedo tomar $\epsilon = (1 + 2^{n+1}[v]_{A_1})^{-1} > 0$ tal que dado algún cubo I y $E \subset I$

$$\frac{v(E)}{v(I)} \leq 2 \left(\frac{|E|}{|I|} \right)^{\epsilon} \tag{3.13}$$

Fijo δ tal que $0 < \delta < \epsilon$
Defino: $\Delta_N = \{I_j^k : (k,j) \in \Gamma_N\}$. Los cubos en Δ_N son todos diádicos. Para $k > t$, ya que $\Omega_k \subset \Omega_t$ y ya que los cubos I_j^k son maximales en Ω_k, si $I_s^t \cap I_j^k \neq \emptyset$ entonces $I_j^k \subset I_s^t$. En particular, cada cubo $I_j^k \in \Delta_N$ esta contenido en $\cup_j I_j^N \subset \{x : M_d g(x) > a^N\}$. Como el último conjunto es acotado, Δ_N contiene una subsucesión de cubos disjuntos maximales.
Formamos una sucesión de conjuntos $\{G_n\}$ por inducción. Sea G_0 el conjunto de todos los pares $(k,j) \in \Gamma_N$ tal que I_j^k es maximal en Δ_N. Para $n \geq 0$, dado el conjunto G_n, defino el conjunto G_{n+1} como el conjunto de pares $(k,j) \in \Gamma_N$ tal que existe $(t,s) \in G_n$ con $I_j^k \subsetneq I_s^t$ y

$$\frac{1}{|I_j^k|} \int_{I_j^k} u(x) dx \;>\; a^{(k-t)\delta} \frac{1}{|I_s^t|} \int_{I_s^t} u(x) dx \tag{3.14}$$

$$\frac{1}{|I_i^l|} \int_{I_i^l} u(x) dx \leq a^{(l-t)\delta} \frac{1}{|I_s^t|} \int_{I_s^t} u(x) dx \tag{3.15}$$

Cualquiera que sea $(l,i) \in \Gamma_N$ y $I_j^k \subsetneq I_i^l \subset I_s^t$.
Sea $P = \cup_{n \geq 0} G_n$. Dado $(s,t) \in P$, decimos que el cubo I_s^t es un cubo principal ya que todo cubo en Δ_N está contenido en un cubo maximal, todo cubo en Δ_N esta contenido en uno o más cubos principales.
Ahora, la demostración se dividirá en varios pasos, como ya ha sido probado en el el trabajo de Cruz-Uribe, Martell y Pérez. Solo nos centraremos en dejar claro como se comporta la constante C en cada paso.
Paso 1
Afirmamos que:

$$\sum_{(k,j)\in\Gamma_N} |I_j^k|^{-1} v(I_j^k) u(I_j^k) \;\leq\; C_\epsilon \sum_{(k,j)\in P} |I_j^k|^{-1} v(I_j^k) u(I_j^k) \tag{3.16}$$

Para probar esto, fijo $(t,s) \in P$ y sea $Q = Q(t,s)$ es el conjunto de índices $(k,j) \in \Gamma_N$ tal que: $I_j^k \subset I_s^t$ y I_s^t es el menor cubo principal contenido en I_j^k. En particular, cada I_j^k no es un cubo principal, a menos que sea igual a I_s^t.
Así, por (3.15) y ya que $I_j^k \subset \{x : M_d v(x) > a^k\}$, tenemos:

$$\sum_{(k,j)\in Q} |I_j^k|^{-1} v(I_j^k) u(I_j^k) \;\leq\; |I_s^t|^{-1} u(I_s^t) \sum_{k \geq t} a^{(k-t)\delta} v(I_s^t \cap \{x : M_d v(x) > a^k\})$$

Por (3.13) y (3.12) y ya que $v \in A_1$:

$$v(I_s^t \cap \{x : M_d v(x) > a^k\}) \ \leq \ 2[v]_{A_1}^{2\epsilon} a^{\epsilon} a^{(t-k)\epsilon} v(I_s^t)$$

Combinando estas inecuaciones, se prueba:

$$\sum_{(k,j)\in Q} |I_j^k|^{-1} v(I_j^k) u(I_j^k) \ \leq \ C_\epsilon |I_s^t|^{-1} u(I_s^t) v(I_s^t)$$

donde $C_\epsilon = \frac{a^{2\epsilon-\delta}}{(a^{\epsilon-\delta}-1)} 2[v]_{A_1}^{2\epsilon}$
Si ahora sumamos sobre todos los $(s,t) \in P$, tenemos (3.16) ya que $\cup_{(t,s)\in P} Q(t,s) = \Gamma_N$
Paso 2 Para cada k, sea $\{J_i^k\}$ la colección de cubos diádicos maximales cuya unión es $\{x : M_d g(x) > a^k\}$. entonces

$$a^k < \frac{1}{|J_i^k|} \int_{J_i^k} g(x)dx$$

Para cada j, $I_j^k \subset \{x : M_d g(x) > a^k\}$, existe un único $i = i(j,k)$ tal que $I_j^k \subset J_i^k$. De aquí en más, i siempre estará en función de (k,j). Por (3.16) y (3.12) obtenemos:

$$\sum_{(k,j)\in \Gamma_N} |I_j^k|^{-1} v(I_j^k) u(I_j^k) \ \leq \ C_\epsilon a[v]_{A_1} \int_{\mathbb{R}^n} h(x) g(x) dx$$

donde $h(x) = \sum_{(k,j)\in P} |J_i^k|^{-1} \chi_{J_i^k}(x) u(I_j^k)$
Para completar la demostración mostraremos que para cada x, $h(x) \leq Cu(x)$.
Fijo $x \in \mathbb{R}^n$; Sin pérdida de generalidad, puedo asumir que $u(x)$ es finito. Para cada k, existe a lo sumo un cubo J_b^k tal que $x \in J_b^k$.Si este existe, lo notaremos como J^k.
Definimos: $P_k = \{(k,j) \in P : I_j^k \subset J^k\}$ y $G = \{k : P_k \neq \emptyset\}$. Formamos por inducción, una sucesión de $\{k_m\}$. Si $k \in G$, entonces $k \geq N$, sea k_0 el menor entero en G. Dado K_m,$m \geq 0$, elegimos $k_{m+1} > k_m$ en G tal que:

$$\frac{1}{|J^{k_{m+1}}|} \int_{J^{k_{m+1}}} u(y)dy > \frac{2}{|J^{k_m}|} \int_{J^{k_m}} u(y)dy \tag{3.17}$$

$$\frac{1}{|J^l|} \int_{J^l} u(y)dy \leq \frac{2}{|J^{k_m}|} \int_{J^{k_m}} u(y)dy, \qquad k_m \leq l < k_{m+1}, l \in G \tag{3.18}$$

Dado que $u(x)$ es finito, la sucesión $\{K_m\}$ solo contiene un número finito de términos.Luego, por (3.18):

$$h(x) \leq \sum_m \frac{2}{|J^{k_m}|} \int_{J^{k_m}} u(y)dy \sum_{l\in G, k_m \leq l < k_{m+1}} \sum_{(l,j)\in P_l} \frac{u(I_j^l)}{u(J^l)}$$

Si probamos que

$$\sum_{l\in G, k_m \leq l < k_{m+1}} \sum_{(l,j)\in P_l} \frac{u(I_j^l)}{u(J^l)} \leq C_9, \tag{3.19}$$

como la sucesión $\{k_m\}$ es finita, podemos llamar m al mayor índice. Entonces por (3.17) y (3.19):

$$h(x) \leq 2C_9(2 - (\frac{1}{2})^m)[u]_{A_1} u(x)$$

Luego, para completar la demostración debemos probar (3.19). Lo cual haremos en dos pasos:
Paso 3 Se prueba que si $(l,j) \in P_l$, $k_m \leq l < k_{m+1}$, entonces:

$$\frac{1}{|I_j^l|}\int_{I_j^l} u(y)dy > \frac{a^{(l-k_m)\delta}}{2[u]_{A_1}}\frac{1}{|J^l|}\int_{J^l} u(y)dy \tag{3.20}$$

Paso 4 Ahora probaremos (3.19). Por (3.20) y otra vez como $u \in A_1$, si $y \in I_j^l$, entonces

$$\lambda = \frac{a^{(l-k_m)\delta}}{2[u]_{A_1}}\frac{u(J^l)}{|J^l|}\frac{1}{[u]_{A_1}} < u(y)$$

de aquí,

$$\cup_{j:(l,j)\in P_l} I_j^l \subset \{x \in J^l : u(x) > \lambda\}$$

Para l fijo, los cubos I_j^l son disjuntos. Luego, como $u \in A_1$ existe $\nu = (1 + 2^{n+1}[u]_{A_1})^{-1}$ tal que:

$$\sum_{j:(l,j)\in P_l} u(I_j^l) \leq 2^{1+\nu}u(J^l)[u]_{A_1}^{2\nu}a^{(k_m-l)\delta\nu}$$

tenemos entonces que:

$$\sum_{l\in G, k_m\leq l<k_{m+1}}\ \sum_{(l,j)\in P_l}\frac{u(I_j^l)}{u(J^l)} \leq C_9$$

donde $C_9 = 2^{1+\nu}[u]_{A_1}^{2\nu}\frac{a^{\delta\nu}}{a^{\delta\nu}-1}$
Luego, la constante C del teorema es de la forma:

$$\frac{a^{\epsilon-\delta}}{a^{\epsilon-\delta}-1}2^{3+\nu}a^{\epsilon+2}[v]_{A_1}^{2\epsilon+2}[u]_{A_1}^{2\nu+1}\frac{a^{\delta\nu}}{a^{\delta\nu}-1}(2-(\frac{1}{2})^m) \approx [v]_{A_1}^4[u]_{A_1}^2$$

□

La dependencia de las constantes que se desprende de la prueba dada en [C-UMP05] no parece ser la adecuada. Con el propósito de entender esta cuestión hemos investigado el caso $u = 1$ y como resultado logramos una demostración distinta a la de Sawyer que además permite obtener la linealidad de la constante del peso v siendo óptimo el resultado. Nuestro teorema es el siguiente.

Teorema 3.2.3 *Sea $v \in A_1$. Entonces existe una constante dimensional C, independiente de $[v]_{A_1}$ tal que:*

$$\left\|\frac{M(fv)}{v}\right\|_{L^{1,\infty}(v)} \leq C\,[v]_{A_1}\int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)\,dx.$$

Además, la dependencia lineal de la constante del peso v es óptima.

Demostración.
En primer lugar, veamos que

$$v\{x \in \mathbb{R} : M(fv)(x) > t.M(v)(x)\} \leq \frac{c}{t}\int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)\,dx,$$

con c independiente de t y $[v]_{A_1}$.

Como la medida involucrada es doblante, basta ver que:

$$v\{x \in \mathbb{R} : M^c(fv)(x) > t.M^c(v)(x)\} \leq \frac{c}{t}\int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)\, dx$$

donde M^c es la Maximal centrada.

Sea $Q = Q(x, r)$

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)v(x)dx = \frac{v(Q)}{|Q|}\frac{1}{v(Q)}\int_Q f(x)v(x)dx \leq M^c(v)(x)M_v(f)(x)$$

donde

$$M_v(f)(x) = \sup_{Q \ni x}\frac{1}{v(Q)}\int_Q f(x)v(x)dx.$$

Como vale cualquiera sea el Q, tenemos que

$$M^c(fv)(x) \leq M^c(v)(x).M_v(f)(x)$$

entonces,

$$v\{x \in \mathbb{R} : M^c(fv)(x) > t.M^c(v)(x)\} \leq v\{x \in \mathbb{R} : M_v(f)(x) > t\} \leq \frac{c}{t}\int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx$$

Ahora, como hemos probado que

$$v\{x \in \mathbb{R} : M(fv)(x) > t.Mv(x)\} \leq \frac{c}{t}\int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)\, dx,$$

donde c es independiente de t y $[v]_{A_1}$ y sabiendo que $M(v) \leq [v]_{A_1}v$ obtenemos:

$$\{x \in \mathbb{R} : M(fv)(x) > tv(x)\} \subset \{x \in \mathbb{R} : M(fv)(x) > t\frac{M(v)(x)}{[v]_{A_1}}\}$$

de donde se desprende,

$$v\{x : M(fv)(x) > t.v(x)\} \leq \frac{c[v]_{A_1}}{t}\int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)\, dx.$$

Ahora veamos que la dependencia de la constante del peso v es óptima, para ello basta tomar $f(x) = \frac{1}{\delta}\chi_{(0,1)}(x)$ y $v(x) = |x|^{\delta-1}$ con $0 < \delta < 1$. Observemos que

$$[v]_{A_1} \sim \frac{1}{\delta}.$$

Po otro lado se puede calcular que

$$M(fv) \geq \begin{cases} \frac{1}{\delta}\frac{1}{x^{1-\delta}} & \text{Si } x \in (0,1) \\ \\ \frac{1}{\delta^2}\frac{1}{x} & \text{Si } x \in (1,\infty) \\ \\ \frac{1}{\delta^2}\frac{1}{1-x} & \text{Si } x \in (-\infty,0) \end{cases}$$

con lo cual, $(0,\delta^{-2/\delta})\subset\{x: M(fv)>v\}$, donde resulta que

$$v\{x: M(fv)>v\}\geqslant v(0,\delta^{-2/\delta})=\int_0^{\delta^{-2/\delta}} x^{\delta-1}dx=\frac{1}{\delta^3}=[v]_{A_1}\frac{1}{\delta^2},$$

pero $\int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx=\int_0^1 \frac{1}{\delta}x^{\delta-1}dx=\frac{1}{\delta^2}$ □

Ahora, volviendo al teorema de Sawyer cuando $u\in A_1$ y $v\in A_1$, para mirar ¿cuál sería la dependencia esperada?. Motivados por el Teorema anterior, nosotros tenemos nuestra conjetura al respecto.

Conjetura 3.2.4 *Sea $u\in A_1$ y $v\in A_1$ entonces existe una constante c tal que*

$$\left\|\frac{M_d(fv)}{v}\right\|_{L^{1,\infty}(uv)}\leq\ c\,[u]_{A_1}[v]_{A_1}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|u(x)v(x)\,dx,$$

donde C no depende de los pesos u y v.

Para ver que la dependencia no puede ser mejor que $[u]_{A_1}[v]_{A_1}$ probamos el siguiente resultado que fortalece más nuestra conjetura.

Teorema 3.2.5 *Sea $u\in A_1, v\in A_1$. Si:*

$$uv\{x: M(fv)>v\}\lesssim\varphi([u]_{A_1},[v]_{A_1})\int_{\mathbb{R}} f(x)u(x)v(x)\,dx,$$

entonces:

$$\varphi([u]_{A_1},[v]_{A_1})\gtrsim[u]_{A_1}.[v]_{A_1}$$

Demostración. Sea $f(x)=\frac{1}{\delta}\chi_{(0,1)}(x)$ y los pesos $u(x)=\alpha\chi_{(0,1)}(x)+\chi_{(0,1)^c}(x)$, con $0<\alpha<1$ y $v(x)=|x|^{\delta-1}$, con $0<\delta<1$. Observemos que

$$[u]_{A_1}\sim\frac{1}{\alpha}\qquad\text{y}\qquad[v]_{A_1}\sim\frac{1}{\delta}.$$

Tenemos también que

$$M(fv)\geq\begin{cases}\frac{1}{\delta}\frac{1}{x^{1-\delta}} & \text{Si } x\in(0,1)\\[2ex] \frac{1}{\delta^2}\frac{1}{x} & \text{Si } x\in(1,\infty)\\[2ex] \frac{1}{\delta^2}\frac{1}{1-x} & \text{Si } x\in(-\infty,0)\end{cases}$$

Luego, $(0,\delta^{-2/\delta})\subset\{x: M(fv)>v\}$. De donde resulta que:

$$uv\{x: M(fv)>v\}\geqslant uv(1,\delta^{-2/\delta})=\int_1^{\delta^{-2/\delta}} x^{\delta-1}dx=\frac{1}{\delta}(\delta^{-2}-1)\approx\frac{1}{\delta^3}$$

Además,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)u(x)v(x)dx=\frac{\alpha}{\delta}\int_0^1 x^{\delta-1}dx=\frac{\alpha}{\delta^2}$$

Entonces $\varphi([u]_{A_1},[v]_{A_1})\gtrsim[u]_{A_1}[v]_{A_1}$ □

Observación 3.2.6 *Para $\alpha=\delta$ tenemos que $\varphi([u]_{A_1},[v]_{A_1})$ no puede ser el* $\text{máx}([u]_{A_1},[v]_{A_1})$

3.2.2. Caso especial de la conjetura de Sawyer para M_d

En esta sección estudiamos un caso especial de la Conjetura 3.2.1 planteada por Sawyer en [Sa85]. Para ello consideremos el caso $u = 1$ que ya es muy interesante en sí mismo.

Problema 3.2.7 *Sea $\varphi : [1, \infty] \to [1, \infty]$ una función creciente. Si $v \in A_\infty$, entonces se verifica la siguiente desigualdad:*

$$\left\| \frac{M_d(fv)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(v)} \leq \; c\,\varphi([v]_{A_\infty}) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|v(x)\,dx$$

donde c es una constante que depende de la dimensión.

Observemos primero que como $u = 1$ entonces $v \in A_\infty(1)$ con lo cual, por el Teorema 3.1.3, el problema tiene solución. Ahora bien, nuestro objetivo es estudiar cuál es la mejor dependencia de la constante del peso v, o dicho de otra manera, cuál es la función φ más pequeña. Recordamos que $A_\infty = \cup_{p \geq 1} A_p$ y que si $w \in A_\infty$

$$[w]_{A_\infty} := \sup_Q \frac{1}{w(Q)} \int_Q M(\chi_Q w).$$

Además, $[w]_{A_\infty} \leq [w]_{A_p}$ para todo $p \geq 1$, con lo cual también es válido plantearse ¿cómo depende de la constante $[v]_{A_p}$ si nuestra hipótesis fuera que $v \in A_p$ para algún $p \geq 1$?. Tengamos presente que el Teorema 3.2.3 nos da la dependencia óptima en la recta para el caso $v \in A_1$. Todo esto nos permite plantear la siguiente conjetura.

Conjetura 3.2.8 *Sea $v \in A_p$, $p \geq 1$, entonces existe una constante dimensional c tal que,*

$$\left\| \frac{M_d(fv)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(v)} \leq \; c\,[v]_{A_p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|v(x)\,dx.$$

No podemos probar esta conjetura pero obtenemos el siguiente resultado usando una descomposición de Calderón-Zygmund adecuada y que involucra a la constante A_∞ del peso.

Teorema 3.2.9 *Sea $v \in A_p$, $p \geq 1$, existe una constante dimensional c tal que,*

$$\left\| \frac{M_d(fv)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(v)} \leq \; c\,[v]_{A_\infty} \max\{p, \log(e + [v]_{A_p})\} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|v(x)\,dx.$$

Demostración. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que f es una función acotada no negativa con soporte compacto.
Como $v \in A_p$ entonces $\forall r > p$, vale que $v \in A_r$, con $[v]_{A_r} \leq [v]_{A_p}$.
Fijo $t > 0$ y sea $r > p$, al cual después le daremos un valor especifico, como $v \in A_r$, en particular $v(x)dx$ es una medida duplicante y puedo hacer una descomposición de Calderón-Zygmund de f a nivel t respecto a la medida $v(x)dx$.

Encontramos así una colección de cubos diádicos maximales $\{Q_j\}$, tales que para todo Q_j:

$$t < \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)v(x)dx \leq \frac{v(2Q_j)}{v(Q_j)v(2Q_j)} \int_{2Q_j} f(x)v(x)dx \leq 2^{nr}[v]_{A_r} t$$

donde la última desigualdad se obtiene por la proposición 9.1.5 de [G2] y por la maximalidad de los Q_j.

Si llamamos $\Omega := \cup_j Q_j$, entonces $f(x) \leq t$ en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Si descomponemos f como $g + b$, donde

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)v(x)dx & \text{Si } x \in Q_j \\ \\ f(x) & \text{Si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

y sea $b(x) = \sum_j b_j(x)$, con

$$b_j(x) = \left(f(x) - \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)v(x)dx \right) \chi_{Q_j}(x).$$

Usando estas definiciones, tenemos que $g(x) \leq 2^{nr}[v]_{A_r} t$ en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ y que

$$\int_{Q_j} b_j(x)v(x)dx = 0$$

.

Sea Q un cubo diádico, entonces $\forall x \in Q$,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)v(x)dx = \frac{1}{|Q|} \int_Q g(x)v(x)dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q b(x)v(x)dx \leq M(gv) + \widetilde{M}(bv),$$

donde

$$\widetilde{M}(h)(x) = \sup_{x \in Q} \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q h(y)dy \right|.$$

Luego, si tomamos sobre el lado izquierdo el supremo sobre todos los cubos diádicos, obtenemos que:

$$M(fv) \leq M(gv) + \widetilde{M}(bv)$$

Ahora,

$$v(\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M(fv)(x)}{v(x)} > t\}) \leq v(\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M(gv)(x)}{v(x)} > t/2\}) +$$

$$+ v(\{x \in \Omega : \frac{\widetilde{M}(bv)(x)}{v(x)} > t/2\}) + v(\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega : \frac{\widetilde{M}(bv)(x)}{v(x)} > t/2\}) = I_1 + I_2 + I_3$$

Si usamos primero la desigualdad de Chebyshev y después el Lema 1.8.2, podemos ver que:

$$I_1 \leq \frac{2^{r'}}{t^{r'}} \int_{\mathbb{R}^n} M(gv)^{r'} v^{1-r'} dx \leq \frac{c_n^{r'}}{t^{r'}} r^{r'} [v]_{A_r}^{r'-1} [v]_{A_\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g^{r'} v dx$$

Luego, como $g(x) \leq 2^{nr}[v]_{A_r} t$ y $[v]_{A_r} \leq [v]_{A_p}$, tenemos que:

$$I_1 \leq \frac{c_n^{r'}}{t} r^{r'} [v]_{A_\infty} [v]_{A_r}^{2r'-2} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)v(x)dx \leq \frac{c_n^{r'}}{t} r^{r'} [v]_{A_\infty} [v]_{A_p}^{2r'-2} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)v(x)dx$$

Por último, como tenemos la libertad de elegir $r > p$, tomemos

$$r = 1 + \text{máx}\{p, \log(e + [v]_{A_p})\},$$

luego

$$r' = 1 + \frac{1}{\text{máx}\{p, \log(e + [v]_{A_p})\}}.$$

Por lo cual, $r^{r'}$ se comporta como $\text{máx}\{p, \log(e + [v]_{A_p})\}$ y $[v]_{A_p}^{2r'-2}$ esta acotado. Además $c_n^{r'} \leq c_n^2$, con lo cual:

$$I_1 \leq \frac{C_n}{t}[v]_{A_\infty} \text{máx}\{p, \log(e{+}[v]_{A_p})\} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} f(x)v(x)dx + \sum_j \left(\frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)v(x)dx \right) v(Q_j) \right)$$

$$\leq \frac{C_n}{t}[v]_{A_\infty} \text{máx}\{p, \log(e + [v]_{A_p})\} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)v(x)dx.$$

La acotación de I_2 sale directamente de las propiedades de los Q_j:

$$I_2 \leq v(\Omega) = \sum_j v(Q_j) \leq \sum_j \frac{1}{t} \int_{Q_j} f(x)v(x)dx \leq \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)v(x)dx.$$

Finalmente veamos que $I_3 = 0$. Para ver esto, fijo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, como el soporte de b esta en Ω, para calcular $\widetilde{M}(bv)$ solo necesitamos considerar cubos cuya intersección con Ω sea no nula. Fijo tal Q, y para cada j, $Q_j \subset Q$ o $Q \cap Q_j = \emptyset$. Luego, como $\int_{Q_j} b_j(x)v(x)dx = 0$,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q b(x)v(x)dx = \frac{1}{|Q|} \sum_j \int_{Q \cap Q_j} b_j(x)v(x)dx = \frac{1}{|Q|} \sum_{Q_j \subset Q} \int_{Q_j} b_j(x)v(x)dx = 0$$

□

Teniendo en cuenta simplemente que $[v]_{A_\infty} \leq [v]_{A_p}$, $p \geq 1$ se concluye el siguiente corolario.

Corolario 3.2.10 *Sea $v \in A_p$, $p \geq 1$, existe una constante dimensional c tal que,*

$$\left\| \frac{M_d(fv)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(v)} \leq C_n [v]_{A_p} \text{máx}\{p, \log(e + [v]_{A_p})\} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|v(x)\, dx.$$

Ahora, trataremos de mejorar la dependencia de la constante del peso, utilizando constantes más finas que fueron introducidas en [HP] y formalizadas en el trabajo de Lerner y Moen [LM]. Para ello necesitamos probar el siguiente lema.

Lema 3.2.11 *Sea v un peso en la clase A_p, entonces vale la siguiente desigualdad,*

$$[v]_{(A_p)^{1/p}(A_\infty^{exp})^{1/p'}} \leq [v]_p \leq [v]^p_{(A_p)^{1/p}(A_\infty^{exp})^{1/p'}}$$

Demostración. La primera desigualdad sale directamente si tenemos presente que

$$[v]_{A_\infty^{exp}} \leq [v]_{A_p}.$$

Para obtener la segunda desigualdad, utilizaremos una consecuencia de la desigualdad de Jensen que nos dice que:

$$e^{\frac{1}{|Q|}\int_Q \log w(x)dx} \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx,$$

luego $\left[(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx)e^{\frac{1}{|Q|}\int_Q \log w^{-1}(x)dx}\right]^{p-1} \geq 1$ y resulta que:

$$(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx)(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-p'}dx)^{p-1} \leq$$

$$\leq (\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx)^p(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-p'}dx)^{p-1}(e^{\frac{1}{|Q|}\int_Q \log w^{-1}(x)dx})^{p-1},$$

de donde se obtiene que

$$[v]_p \leq [v]^p_{(A_p)^{1/p}(A_\infty^{exp})^{1/p'}}$$

□

El siguiente lema es una mejora del resultado de Buckley dado en [Bu] y fue probado en [HP] (de hecho se puede encontrar una versión de dos pesos).

Lema 3.2.12 *Sea $1 < p < \infty$ y $v \in A_p$ entonces,*

$$\|M\|_{L^p(v)} \leq c_n p' \, [v^{1-p}]_{(A_{p'})^{1/p'}(A_\infty^{exp})^{1/p}}$$

donde c_n solo depende de la dimensión.

Este lema jugará un papel relevante en la prueba del siguiente teorema.

Teorema 3.2.13 *Sea $v \in A_p$, $p \geq 1$, existe una constante dimensional c tal que,*

$$\left\|\frac{M_d(fv)}{v}\right\|_{L^{1,\infty}(v)} \leq \; c\,p\,[v]_{(A_p)^{1/p}(A_\infty^{exp})^{1/p'}} \log(e + [v]_{(A_p)^{1/p}(A_\infty^{exp})^{1/p'}}) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|v(x)\,dx.$$

Si bien la prueba de este teorema es muy similar a la del teorema 3.2.9. Es interesante detenernos en ella para ver cómo aplicamos los lemas antes mencionados y cómo perdemos, por ejemplo, la posibilidad de acotar con el máximo entre p y la constante del peso y debemos quedarnos con el producto. Con lo cual, el teorema 3.2.9 no se obtiene directamente de este.

Demostración. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que f es una función acotada no negativa con soporte compacto.

Como $v \in A_p$ entonces $\forall r > p$, vale que $v \in A_r$, con $[v]_{A_r} \leq [v]_{A_p}$.

Fijamos $t > 0$ y sea $r > p$, al cual después le daremos un valor especifico, como $v \in A_r$, en particular $v(x)dx$ es una medida duplicante y puedo hacer una descomposición de Calderón-Zygmund de f a nivel t respecto a la medida $v(x)dx$.

Encontramos así una colección de cubos diádicos maximales $\{Q_j\}$, tales que para todo Q_j:

$$t < \frac{1}{v(Q_j)}\int_{Q_j} f(x)v(x)dx \leq \frac{v(2Q_j)}{v(Q_j)v(2Q_j)}\int_{2Q_j} f(x)v(x)dx \leq 2^{nr}[v]_{A_r}t$$

donde la última desigualdad se obtiene por la proposición 9.1.5 de [G2] y por la maximalidad de los Q_j.

Si llamamos $\Omega := \cup_j Q_j$, entonces $f(x) \leq t$ en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Si descomponemos f como $g + b$, donde

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{v(Q_j)}\int_{Q_j} f(x)v(x)dx & \text{Si } x \in Q_j \\ \\ f(x) & \text{Si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

y sea $b(x) = \sum_j b_j(x)$, con

$$b_j(x) = \left(f(x) - \frac{1}{v(Q_j)}\int_{Q_j} f(x)v(x)dx\right)\chi_{Q_j}(x).$$

Usando estas definiciones, tenemos que $g(x) \leq 2^{nr}[v]_{A_r}t$ en casi todo punto$x \in \mathbb{R}^n$ y que $\int_{Q_j} b_j(x)v(x)dx = 0$.

Sea Q un cubo diádico, entonces $\forall x \in Q$,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)v(x)dx = \frac{1}{|Q|}\int_Q g(x)v(x)dx + \frac{1}{|Q|}\int_Q b(x)v(x)dx \leq M(gv) + \widetilde{M}(bv),$$

donde

$$\widetilde{M}(h)(x) = \sup_{x\in Q}\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q h(y)dy\right|.$$

Luego, si tomamos sobre el lado izquierdo el supremo sobre todos los cubos diádicos, obtenemos que:

$$M(fv) \leq M(gv) + \widetilde{M}(bv)$$

Ahora,

$$v(\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M(fv)(x)}{v(x)} > t\}) \leq v(\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M(gv)(x)}{v(x)} > t/2\}) +$$

$$+ v(\{x \in \Omega : \frac{\widetilde{M}(bv)(x)}{v(x)} > t/2\}) + v(\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega : \frac{\widetilde{M}(bv)(x)}{v(x)} > t/2\}) = I_1 + I_2 + I_3$$

Si usamos primero la desigualdad de Chebyshev y después el lema 3.2.12 podemos ver que:

$$I_1 \leq \frac{2^{r'}}{t^{r'}}\int_{\mathbb{R}^n} M(gv)^{r'}v^{1-r'}dx \leq \frac{2^{r'}}{t^{r'}}r^{r'}[v]^{r'}_{(A_r)^{1/r}(A_\infty^{exp})^{1/r'}}\int_{\mathbb{R}^n} g^{r'}vdx$$

Luego, como $g(x) \leq 2^{nr}[v]_{A_r}t$ tenemos que:

$$I_1 \leq \frac{2^{r'(1+n)}}{t}r^{r'}[v]^{r'-1}_{A_r}[v]^{r'}_{(A_r)^{1/r}(A_\infty^{exp})^{1/r'}}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)v(x)dx$$

Antes de definir r, como ya sabemos que es mayor a p, podemos acotar $[v]_{A_r}$ con $[v]_{A_p}$ y $[v]_{(A_r)^{1/r}(A_\infty^{exp})^{1/r'}}$ con $[v]_{(A_p)^{1/p}(A_\infty^{exp})^{1/p'}}$. Por último, como tenemos la libertad de elegir $r > p$, tomemos

$$r = 1 + \max\{p,\, \log(e + [v]_{A_p})\},$$

luego

$$r' = 1 + \frac{1}{\max\{p, \log(e + [v]_{A_p})\}}.$$

Por lo cual, $r^{r'}$ se comporta como

$$\max\{p,\, \log(e + [v]_{A_p})\},$$

$[v]^{r'}_{(A_p)^{1/p}(A_\infty^{exp})^{1/p'}}$ como $[v]_{(A_p)^{1/p}(A_\infty^{exp})^{1/p'}}$ y $[v]^{r'-1}_{A_p}$ está acotado. Además $2^{r'(1+n)} \leq 2^{2(1+n)}$, con lo cual:

$$I_1 \leq \frac{C_n}{t} [v]_{(A_p)^{1/p}(A_\infty^{exp})^{1/p'}} \max\{p,\, \log(e + [v]_{A_p})\} \times$$

$$\times \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} f(x)v(x)dx + \sum_j \left(\frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)v(x)dx \right) v(Q_j) \right)$$

Usando el Lema 3.2.11 tenemos que:

$$\max\{p,\, \log(e+[v]_{A_p})\} \leq \max\{p,\, p\log(e+[v]_{(A_p)^{1/p}(A_\infty^{exp})^{1/p'}})\} = p\log(e+[v]_{(A_p)^{1/p}(A_\infty^{exp})^{1/p'}}).$$

Luego,

$$I_1 \leq \frac{C_n}{t}\, p\, [v]_{(A_p)^{1/p}(A_\infty^{exp})^{1/p'}} \log(e + [v]_{(A_p)^{1/p}(A_\infty^{exp})^{1/p'}}) \int_{\mathbb{R}^n} f(x)v(x)dx.$$

La acotación de I_2 sale directamente de las propiedades de los Q_j:

$$I_2 \leq v(\Omega) = \sum_j v(Q_j) \leq \sum_j \frac{1}{t} \int_{Q_j} f(x)v(x)dx \leq \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)v(x)dx.$$

Finalmente veamos que $I_3 = 0$. Para ver esto, fijo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, como el soporte de b esta en Ω, para calcular $\widetilde{M}(bv)$ solo necesitamos considerar cubos cuya intersección con Ω sea no nula. Fijo tal Q, y para cada j, $Q_j \subset Q$ o $Q \cap Q_j = \emptyset$. Luego, como

$$\int_{Q_j} b_j(x)v(x)dx = 0,$$

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q b(x)v(x)dx = \frac{1}{|Q|} \sum_j \int_{Q \cap Q_j} b_j(x)v(x)dx = \frac{1}{|Q|} \sum_{Q_j \subset Q} \int_{Q_j} b_j(x)v(x)dx = 0$$

□

3.2.3. Caso espacial de la conjetura de Sawyer para un C-Z

Por último nos planteamos la siguientes preguntas: ¿Qué sucede si reemplazamos la maximal de Hardy-Littlewood por un operador de Calderón-Zygmund? ¿la dependencia $t\log(t)$ de la constante del peso en A_p se mantendrá para $p \geq 1$? Un resultado relacionado con el problema que nos planteamos es el siguiente dado en [HP].

Teorema 3.2.14 *Sea $v \in A_1$ y T un operador de Calderón-Zygmund, entonces*

$$\left\| \frac{T(fv)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(v)} \leq \; C_n \, [v]_{A_1} \log(e + [v]_{A_\infty}) \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \, dx.$$

Este teorema mejora el dado en [LOP09b] donde ellos probaban que

$$\left\| \frac{T(fv)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(v)} \leq \; C_n \, [v]_{A_1} \log(e + [v]_{A_1}) \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \, dx.$$

Dando respuesta a nuestros interrogantes pudimos extender este resultado para pesos en la clase A_p con $p > 1$ y mantener el tipo de dependencia de la constante del peso. Es decir, probamos que vale

$$\left\| \frac{T(fv)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(v)} \leq \; C_n \, [v]_{A_p} \, \text{máx}\{p, \; \log(e + [v]_{A_p})\} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| v(x) \, dx.$$

Para ello necesitaremos los siguientes resultados. El primero, que ya mencionamos en los preliminares, fue probado por Hytonen en [Hy] y el segundo se encuentra en el libro de García Cuerva y Rubio de francia [GCRdF, pág.413].

Teorema 3.2.15 *Sea $1 < p < \infty$, w un peso en A_p y T un operador de Calderón-Zygmund, entonces*

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq c_n \, p \, p' \, [w]_{A_p}^{\text{máx}(1, \frac{1}{p-1})}$$

Lema 3.2.16 *Existe una constante dimensional c_d tal que para todo cubo Q y para toda función f soportada en el cubo Q tal que $\int_Q f(x)dx = 0$ y para w un peso, vale:*

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q} |Tf(y)| w(y) dy \leq c_n \int_Q |f(y)| Mw(y) dy$$

Ahora si estamos en condiciones de probar el siguiente teorema cuya prueba sigue las mismas técnicas que aplicamos para el caso de la maximal de Hardy-Littlewood.

Teorema 3.2.17 *Sea $v \in A_p$, $p > 1$, existe una constante dimensional c tal que,*

$$\left\| \frac{T(fv)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(v)} \leq \; c \, [v]_{A_p} \, \text{máx}\{p, \; \log(e + [v]_{A_p})\} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| v(x) \, dx.$$

Demostración. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que f es una función acotada no negativa con soporte compacto.
Como $v \in A_p$ entonces $\forall r > p$, vale que $v \in A_r$, con $[v]_{A_r} \leq [v]_{A_p}$.
Fijamos $t > 0$ y sea $r > p$, al cual después le daremos un valor especifico, como $v \in A_r$, en particular $v(x)dx$ es una medida duplicante y puedo hacer una descomposición de Calderón-Zygmund de f a nivel t respecto a la medida $v(x)dx$.

Encontramos así una colección de cubos diádicos maximales $\{Q_j\}$, tales que para todo Q_j:

$$t < \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)v(x)dx \leq \frac{v(2Q_j)}{v(Q_j)v(2Q_j)} \int_{2Q_j} f(x)v(x)dx \leq 2^{nr}[v]_{A_r} t$$

donde la última desigualdad se obtiene por la proposición 9.1.5 de [G2] y por la maximalidad de los Q_j.

Si llamamos $\Omega := \cup_j Q_j$ y $\tilde{\Omega} := \cup_j 2Q_j$, entonces $f(x) \leq t$ en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$.
Si descomponemos f como $g + b$, donde

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)v(x)dx & \text{Si } x \in Q_j \\ \\ f(x) & \text{Si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

y sea $b(x) = \sum_j b_j(x)$, con

$$b_j(x) = \left(f(x) - \frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)v(x)dx \right) \chi_{Q_j}(x).$$

Usando estas definiciones, tenemos que $g(x) \leq 2^{nr}[v]_{A_r} t$ en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ y que

$$\int_{Q_j} b_j(x)v(x)dx = 0.$$

Luego,

$$v(\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|T(fv)(x)|}{v(x)} > t\}) \leq v(\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|T(gv)(x)|}{v(x)} > t/2\}) +$$

$$+ v(\{x \in \tilde{\Omega} : \frac{|T(bv)(x)|}{v(x)} > t/2\}) + v(\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \tilde{\Omega} : \frac{|T(bv)(x)|}{v(x)} > t/2\}) = I_1 + I_2 + I_3$$

Para poder acotar a I_1, primero usaremos la desigualdad de Chebyshev y después el Lema 3.2.15, teniendo en cuenta que como $v \in A_r$ entonces $v^{1-r'} \in A_{r'}$ con

$$[v^{1-r'}]_{A_{r'}} = [v]_{A_r}^{r'-1}.$$

Como el exponente de la constante $[v]_{A_{r'}}$ en el Lema 3.2.15 varia según sea $p > 2$ o $p \leq 2$, vamos a dividir la prueba en dos casos:

caso $p > 2$**:** En este caso tenemos $r > 2$, con lo cual $r' < 2$ y $\max(1, \frac{1}{r'-1}) = \frac{1}{r'-1}$

$$I_1 \leq \frac{2^{r'}}{t^{r'}} \int_{\mathbb{R}^n} |T(gv)(x)|^{r'} v(x)^{1-r'} dx \leq \frac{c_n^{r'}}{t^{r'}} r^{r'} [v]_{A_r}^{r'} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{r'} v(x) dx,$$

luego, como $g(x) \leq 2^{nr}[v]_{A_r}t$ y $[v]_{A_r} \leq [v]_{A_p}$tenemos que:

$$I_1 \leq \frac{C_n^{r'}}{t} r^{r'} [v]_{A_r}^{2r'-1} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)v(x)dx \leq \frac{2^{r'(1+n)}}{t} r^{r'} [v]_{A_p}^{2r'-1} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)v(x)dx,$$

como tenemos la libertad de elegir $r > p > 2$, tomemos

$$r = 1 + \max\{p, \log(e + [v]_{A_p})\},$$

luego

$$2 > r' = 1 + \frac{1}{\max\{p, \log(e + [v]_{A_p})\}}.$$

Por lo cual, $r^{r'}$ se comporta como $\max\{p, \log(e + [v]_{A_p})\}$ y $[v]_{A_p}^{2r'-1}$ como $[v]_{A_p}$.

$$I_1 \leq \frac{C_n}{t} [v]_{A_p} \max\{p, \log(e+[v]_{A_p})\} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} f(x)v(x)dx + \sum_j \left(\frac{1}{v(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)v(x)dx \right) v(Q_j) \right)$$

$$\leq \frac{C_n}{t} [v]_{A_p} \max\{p, \log(e + [v]_{A_p})\} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)v(x)dx.$$

caso $p \leq 2$: En este caso podemos tomar $r = 1 + 2\log(e + [v]_{A_p}) > 2 \geq p$, con lo cual

$$r' = 1 + \frac{1}{2\log(e + [v]_{A_p})} < 2$$

y $\max(1, \frac{1}{r'-1}) = \frac{1}{r'-1}$. Procediendo de manera análoga al caso anterior,

$$I_1 \leq \frac{C_d^{r'}}{t} r^{r'} [v]_{A_p}^{2r'-1} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)v(x)dx,$$

de donde resulta que:

$$I_1 \leq \frac{c_d}{t} \log(e + [v]_{A_p}) \int_{\mathbb{R}^n} f(x)v(x)dx$$

La acotación de I_2 sale directamente de las propiedades de los Q_j y teniendo en cuenta que $v(2Q) \leq 2^{np}[v]_{A_p} v(Q)$:

$$I_2 \leq v(\tilde{\Omega}) \leq \sum_j v(2Q_j) \leq 2^{np}[v]_{A_p} \sum_j \frac{1}{t} \int_{Q_j} f(x)v(x)dx \leq 2^{np}[v]_{A_p} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)v(x)dx.$$

Finalmente veamos que sucede con I_3. Usaremos el Lema 3.2.16 con $w \equiv 1$.

$$I_3 \leq \frac{2}{t} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \tilde{\Omega}} |T(bv)(x)|dx \leq \frac{2}{t} \sum_j \int_{\mathbb{R}^n \setminus 2Q_j} |T(b_j v)(x)|dx \leq \frac{2}{t} \sum_j \int_{Q_j} |b_j(x)|v(x)dx,$$

por último, usando la definición de los b_j, tenemos:

$$I_3 \leq \frac{c_d}{t} \|fv\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

$\square$

Capítulo 4

Decaimiento exponencial de los conjuntos de nivel

4.1. Introducción

Como ya se ha venido mencionando a lo largo de este trabajo, uno de los problemas clásicos en la teoría de Calderón-Zygmund, es la de poder controlar los operadores singulares, usando operadores de tipo maximal. Un ejemplo de esto es la desigualdad de Coifman-Fefferman, que controla los operadores de Calderón-Zygmund con el operador maximal de Hardy-littlewood. (ver [CoF]).

Teorema 4.1.1 (Coifman-Fefferman) *Para todo peso $w \in A_\infty$, la siguiente desigualdad es válida:*

$$\|T^* f\|_{L^p(w)} \leq c\|Mf\|_{L^p(w)}$$

donde $0 < p < \infty$ y $c = c_{w,n,p}$ una constante que depende de la dimensión, el exponente p y de la constante $[w]_{A_\infty}$.

T^* es el operador integral singular maximal de T,

$$T^* f(x) = \sup_{\epsilon > 0} |T_\epsilon f(x)|$$

con T_ϵ la integral singular truncada.

Este teorema nos permite ver que el operador maximal M juega el rol de "operador control"sobre los operadores de C-Z. Lo que complica este control es la constante $c = c_{p,n}$, la cual en muchos casos trunca la aplicación de dicho teorema, más aún hoy, que se busca saber con precisión cuál es la mejor dependencia respecto a p y $[w]_{A_\infty}$ y en general, de él no se obtienen acotaciones óptimas en tal sentido. La demostración original del teorema de Coifman-Fefferman se basa en una técnica "good-λ"introducida por Burkholder y Gundy en [BG] donde la clave es probar que valen estimaciones como la siguiente:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : T^* f(x) > 2\lambda,\ Mf(x) \leq \gamma\lambda\}| \leq c\gamma|\{x \in \mathbb{R}^n : T^*(x) > \lambda\}| \tag{4.1}$$

para todo $\lambda > 0$ y para $\gamma > 0$ suficientemente pequeña.

La idea principal de la prueba de (4.1) es localizar usando los cubos de Whitney los conjuntos de nivel $\{x \in \mathbb{R}^n : T^*f(x) > \lambda\}$. Entonces el problema se reduce al estudio de estimaciones locales de la forma:

$$|\{x \in Q : T^*f(x) > 2\lambda,\ Mf(x) \leq \gamma\lambda\}| \leq c\gamma|Q| \tag{4.2}$$

donde Q es un cubo de la descomposición de Whitney y f está soportada en Q. Luego, por métodos clásicos, la desigualdad en norma con pesos para T y M se pueden obtener.

En el trabajo [O-CPR13] se hace foco en el comportamiento de γ. De hecho, la desigualdad (4.2) tampoco es buena ya que la constante $c = c_{n,p}$ que se obtiene en el teorema de Coifman-Fefferman tampoco es óptima ni respecto de la dependencia de la constante del peso w, ni respecto de p. (Bagby y Kurtz [BK2])

En busca de dependencias óptimas de la constante A_p de un peso para la norma de un operador integral singular, Buckley mejora la desigualdad good-λ (4.2) obteniendo un decaimiento exponencial local en γ:

$$|\{x \in Q : T^*f(x) > 2\lambda, Mf(x) \leq \gamma\lambda\}| \leq ce^{-c/\gamma}|Q| \tag{4.3}$$

La prueba de Buckley usa desigualdades clásicas dadas por Hunt para la función conjugada, las cuales fueron inspiradas en un resultado de Carleson [Ca].

El decaimiento exponencial (4.3) es muy interesante en sí mismo pero es que además es muy útil en las aplicaciones. Por ejemplo ha sido un elemento muy importante a la hora de probar estimaciones óptimas para la clase de pesos A_1 en los trabajos [LOP08] y [LOP09b] que ya se mencionaron en el Capítulo 2.

Otro resultado diferente, que mejora la desigualdad (4.3), fue dada por Karagulyan en [K]:

$$|\{x \in Q : T^*f(x) > tMf(x)\}| \leq ce^{-\alpha t}|Q| \tag{4.4}$$

Si bien la prueba de Karagulyan es muy interesante en sí misma, no está claro que se pueda extender a otros pares de operadores. En busca de esa extensión, se da una nueva prueba en el trabajo [O-CPR13] de Ortiz-Caraballo, Pérez y Rela, que permite extender la desigualdad a otros casos. Para ser más precisos, si consideramos un par de operadores T_1 y T_2 y un cubo fijo Q, la función conjunto de nivel

$$\varphi(t) := \frac{1}{|Q|}|\{x \in Q : |T_1f(x)| > t|T_2f(x)|\}| \quad t > 0$$

donde f puede ser una función escalar o una función n-vectorial, o bien T_1 podría ser un operador vectorial; en cualquiera de los casos el soporte de la función esta en el cubo Q.

Los autores probaron estimaciones óptimas del decaimiento de $\varphi(t)$ para diferentes pares T_1 y T_2, incluyendo el caso de operadores de Calderón-Zygmund, extensión a valores vectoriales de la función maximal u operadores de C-Z, conmutadores de integrales singulares con funciones en BMO y conmutadores de orden superior. También obtuvieron resultados para funciones cuadrado continuas, cuadrado diádicas y para operadores de C-Z multilineales.

Vale aclarar que el decaimiento que obtuvieron depende del operador involucrado en cada caso. Los resultados dados en [O-CPR13] son los siguientes:

Teorema 4.1.2 (Operadores de C-Z) *Sea T un operador de Calderón-Zygmund con su operador integral singular maximal T^*. Sea Q un cubo y sea $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $Sop(f) \subseteq Q$. Entonces existen constantes c_1 y $c_2 > 0$ tal que*

$$|\{x \in Q : |T^* f(x)| > tMf(x)\}| \leq c_1 e^{-c_2 t}|Q|, \quad t > 0.$$

Teorema 4.1.3 (Operadores multilineales de C-Z) *Sea T un operador m-lineal de C-Z. Sea Q un cubo y $\vec{f}$ una función de m- vectorial, donde $f_j \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $Sop(f_j) \subseteq Q$ para todo $1 \leq j \leq m$. Entonces existen constantes c_1 y $c_2 > 0$ tal que*

$$|\{x \in Q : |T\vec{f}(x)| > t\mathcal{M}\vec{f}\}| \leq c_1 e^{-c_2 t}|Q|, \quad t > 0.$$

Teorema 4.1.4 (Extensión a valores vectoriales de T) *Sea $1 < q < \infty$ y sea $\overline{T}_q$ la extensión a valores vectoriales de T, donde T es un operador de C-Z. Entonces existen constantes c_1 y c_2 tal que para todo cubo Q y para toda función vectorial $f = \{f_j\}_{j=1}^\infty$ con $sop(f_j) \subseteq Q$:*

$$|\{x \in Q : |\overline{T}_q f(x)| > tM(|f|_q)(x)\}| \leq c_1\, e^{-c_2 t}|Q| \quad t > 0.$$

Teorema 4.1.5 (Extensión a valores vectoriales de M) *Sean $1 \leq q \leq \infty$, $\overline{M}_q$ la extensión a valores vectoriales de M. Existen constantes c_1 y c_2 positivas tales que para todo cubo Q y para toda función vector $f = \{f_j\}_{j=1}^\infty$ con $sop(f_j) \subseteq Q$:*

$$|\{x \in Q : |\overline{M}_q f(x)| > tM(|f|_q)(x)\}| \leq c_1\, e^{-c_2 t^q}|Q| \quad t > 0.$$

Teorema 4.1.6 (Funciones cuadrado Littlewood-Paley) *Sean S la función cuadrado diádica y g^*_μ la función cuadrado de Littlewood-Paley continua, con $\mu > 3$. Sean Q un cubo y $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ tal que el $sop(f) \subseteq Q$. Entonces existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que*

$$|\{x \in Q : Sf(x) > tMf(x)\}| \leq c_1\, e^{-c_2 t^2}|Q| \quad t > 0.$$

$$|\{x \in Q : |g^*_\mu f(x)| > tMf(x)\}| \leq c_1\, e^{-c_2 t^2}|Q| \quad t > 0.$$

Teorema 4.1.7 (Conmutador para Operadores de C-Z) *Sean T un operador de Calderón-Zygmund y $b \in BMO$. Si f es una función tal que el $sop(f) \subseteq Q$, entonces existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que*

$$|\{x \in Q : |[b,T]f(x)| > tM^2 f(x)\}| \leq c_1\, e^{-\left(\frac{c_2 t}{\|b\|_{BMO}}\right)^{1/2}}|Q| \quad t > 0.$$

De manera similar,

$$|\{x \in Q : |T^k_b f(x)| > tM^{k+1} f(x)\}| \leq c_1\, e^{-\left(\frac{c_2 t}{\|b\|_{BMO}}\right)^{1/(k+1)}}|Q| \quad t > 0.$$

Resumiendo, los resultados probados en [O-CPR13] son los siguientes.

T_1	T_2	$\varphi(t)$
Función maximal vectorial $\overline{M}_q(.),\ 1 < q < \infty$	$M(\lvert . \rvert_q)$	e^{-ct^q}
Función cuadrado diádica	M	e^{-ct^2}
Función cuadrado continuo $g^*_\mu,\ 1 < \mu < \infty$	M	e^{-ct^2}
Operador de C-Z T	M	e^{-ct}
Operador de C-Z Multilineal T	Maximal multilineal $\mathcal{M}$	e^{-ct}
Extensión vectorial $\overline{T}_q(.),\ 1 < q < \infty$	$M(\lvert . \rvert_q)$	e^{-ct}
Conmutador $[b, T]$	$M^2 = M \circ M$	$e^{-\sqrt{ct}}$
Conmutador de orden superior T_b^k	$M^{k+1} = M \circ ... \circ M$ ($k+1$ términos)	$e^{-(ct)^{\frac{1}{k+1}}}$

Si bien en [O-CPR13] se dan dos pruebas diferentes, nosotros nos inspiramos en la segunda prueba, la que les permite obtener el resultado para conmutadores, para obtener el decaimiento para otros pares de operadores que ellos no prueban y además probamos un decaimiento exponencial respecto de t pero con una función de conjunto de nivel pesada:

$$\varphi_w(t) := \frac{1}{w(Q)} w(\{x \in Q : |T_1 f(x)| > t|T_2 f(x)|\}) \ \ t > 0$$

donde w es un peso en la clase A_∞ de Muckenhoupt. Concretamente, probaremos lo siguiente:

T_1	T_2	$\varphi_w(t)$
Función maximal vectorial $\overline{M}_q(.),\ 1 < q < \infty$	$M(\lvert . \rvert_q)$	$e^{\frac{-ct^q}{[w]_{A_\infty}}}$
Función cuadrado diádica	M	$e^{\frac{-ct^2}{[w]_{A_\infty}}}$
Función cuadrado continuo $g^*_\mu,\ 1 < \mu < \infty$	M	$e^{\frac{-ct^2}{[w]_{A_\infty}}}$
Operador de C-Z T	M	$e^{\frac{-ct}{[w]_{A_\infty}}}$
Operador de C-Z Multilineal T	Maximal multilineal $\mathcal{M}$	$e^{\frac{-ct}{[w]_{A_\infty}}}$
Extensión vectorial $\overline{T}_q(.),\ 1 < q < \infty$	$M(\lvert . \rvert_q)$	$e^{\frac{-ct}{[w]_{A_\infty}}}$
Conmutador $[b, T]$	$M^2 = M \circ M$	$e^{-\frac{\sqrt{ct}}{[w]_{A_\infty}}}$
Conmutador de orden superior T_b^k	$M^{k+1} = M \circ ... \circ M$ ($k+1$ términos)	$e^{-\frac{(ct)^{\frac{1}{k+1}}}{[w]_{A_\infty}}}$
Integral fraccionaria I_α	M_α	$e^{\frac{-ct}{[w]_{A_\infty}}}$
Conmutador fraccionario $[b, I_\alpha]$	$M_{\alpha,B}$	$e^{-\frac{c\sqrt{t}}{[w]_{A_\infty}}}$

4.2. Decaimiento de la integral fraccionaria

Siguiendo las líneas del trabajo de Ortiz Carballo, Pérez y Rela, probaremos el decaimiento de la función conjunto de nivel cuando los operadores involucrados son la integral fraccionaria I_α y su operador "control", la maximal fraccionaria M_α. Para ello debemos probar primero algunos resultados que son los "ingredientes"necesarios para probar luego el decaimiento buscado. Para ser más precisos, nuestro objetivo será obtener un decaimiento exponencial respecto de t de la función

$$\varphi(t) := \frac{1}{|Q|}|\{x \in Q : |I_\alpha f(x)| > t|M_\alpha f(x)|\}| \quad t > 0$$

El siguiente lema es el algoritmo de Rubio de Francia, en la versión dada en [LOP09a] por Lerner, Ombrosi y Pérez que mencionamos en el Capítulo 2 (Lema 2.2.3) en forma más general.

Lema 4.2.1 *Sea M el operador maximal de Hardy-Littlewood y sea $1 < r < \infty$. Si definimos el operador $R : L^r(R^n) \to L^r(\mathbb{R}^n)$ como:*

$$R(h) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{M^k h}{\|M\|^k_{L^r(\mathbb{R}^n)}},$$

para cada $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Resulta que R verifica

1. *$h \leq R(h)$;*
2. *$\|R(h)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq 2\|h\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$;*
3. *Para toda función no negativa $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$, tenemos que $R(h) \in A_1$ con*

$$[R(h)]_{A_1} \leq 2\|M\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq c_n r'.$$

Antes de dar el siguiente teorema, conocido como la fórmula de Lerner (ver[Le10]), recordemos que si fijo un cubo Q_0, $\mathcal{D}(Q_0)$ denota todos los subcubos diádicos respecto del cubo Q_0. Además, si $Q \in \mathcal{D}(Q_0)$ y $Q \neq Q_0$, $\hat{Q}$ es el cubo diádico antecesor de Q, es decir, es el único cubo en la familia $\mathcal{D}(Q_0)$ que contiene a Q y tal que $|\hat{Q}| = 2^n|Q|$.

Teorema 4.2.2 *Sea f una función medible en R^n y sea Q_0 un cubo. Existe una colección de cubos $\{Q_j^k\}_{j,k} \in \mathcal{D}(Q_0)$, posiblemente vacía, para la cual*

(I) *Para casi todo $x \in Q_0$,*

$$|f(x) - m_f(Q_0)| \leq 4m^{\#}_{1/4;Q_0} f(x) + 4\sum_{k=1}^{\infty}\sum_j \omega_{1/2^{n+2}}(f; \hat{Q}_j^k)\chi_{Q_j^k}(x); \tag{4.5}$$

(II) *Para cada k, los cubos Q_j^k son disjuntos dos a dos;*

(III) *Si $\Omega_k = \cup_j Q_j^k$, entonces $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$;*

(IV) $|\Omega_{k+1} \cup Q_j^k| \leq \frac{1}{2}|Q_j^k|$.

Mencionamos que otra familia de cubos satisfaciendo propiedades muy similares fueron definidas y usadas en el tercer captítulo en la sección 2.4. De hecho la siguiente propiedad juega un papel crucial: si definimos para cada j, k el conjunto $E_j^k := Q_j^k \setminus \Omega_{k+1}$, tenemos que $\{E_j^k\}$ es una familia de subconjuntos disjuntos dos a dos que además satisface,

$$|Q_j^k| \leq 2|E_j^k|, \tag{4.6}$$

El siguiente resultado, que se puede ver en [O-CPR13], se prueba utilizando el teorema anterior y nos será de mucha utilidad para probar el decaimiento de la función conjunto de nivel.

Corolario 4.2.3 *Sea f una función medible tal que $Sop(f) \subset Q$, donde Q es un cubo fijo. Si $0 < \delta < 1$ y suponiendo que w es un peso en la clase A_q. Entonces tenemos que,*

$$\|f - m_f(Q)\|_{L^1(w,Q)} \leq c2^q[w]_{A_q}\|m_\delta^{\#,d}(f)\|_{L^1(w,Q)} \tag{4.7}$$

Demostración. Usando el Teorema 4.2.2 y la desigualdad (1.17), se tiene que

$$|f(x) - m_f(Q)| \leq c\, m_\delta^{\#}(f)(x) + c\sum_{k,j} \inf_{Q_j^k} m_\delta^{\#}(f)\chi_{Q_j^k}(x).$$

Luego, tomando normas,

$$\|f(x) - m_f(Q)\|_{L^1(w,Q)} \leq c\|m_\delta^{\#}(f)\|_{L^1(w,Q)} + c\sum_{k,j}\int_{Q_j^k} \inf_{Q_j^k} m_\delta^{\#}(f)(x)w(x)dx.$$

Podemos usar la propiedad de los pesos que están en la clase A_q, cuando Q es un cubo y E es un subconjunto medible de Q:

$$w(Q) \leq \left(\frac{|Q|}{|E|}\right)^q [w]_{A_q} w(E).$$

Luego, teniendo en cuenta que la familia $\{E_j^k\}$ satisface (4.6), vale que

$$w(Q_j^k) \leq 2^q[w]_{A_q}w(E_j^k);$$

Si aplicamos esto a cada término de la suma, obtenemos

$$\int_{Q_j^k} \inf_{Q_j^k} m_\delta^{\#}(f)(x)w(x)dx \leq c2^q[w]_{A_q} \inf_{Q_j^k} m_\delta^{\#}(f)w(E_j^k).$$

Finalmente, como los $\{E_j^k\}$ son disjuntos dos a dos, resulta que

$$\|f - m_f(Q)\|_{L^1(w,Q)} \leq c2^q[w]_{A_q}\|m_\delta^{\#}(f)\|_{L^1(w,Q)}$$

$\square$

Para poder usar el resultado anterior, vamos a necesitar probar el siguiente lema que permite mayorar el valor medio de la integral fraccionaria sobre un cubo Q, con la maximal fraccionaria para todo punto x perteneciente a dicho cubo.

Lema 4.2.4 *Sean I_α y M_α la integral fraccionaria y la maximal fraccionaria respectivamente, Q un cubo fijo y sea f una función medible tal que $Sop(f) \subset Q$. Entonces para todo $x \in Q$*

$$m_{I_\alpha f}(Q) \leq M_\alpha f(x)$$

Demostración. Teniendo en cuenta la siguiente desigualdad para $0 < q < p$, que se puede encontrar en [G1] (que muchas veces es referida como de Cotlar-Kolmogorov),

$$\left(\frac{2}{|Q|}\int_Q |f|^p\right)^{1/p} \leq c_{p,q}\|f\|_{L^{q,\infty}(Q,\frac{dx}{|Q|})}$$

y usando la desigualdad (1.19), tenemos que

$$\begin{aligned}
m_{I_\alpha f}(Q) &\leq \|I_\alpha f\|_{L^{\frac{n}{n-\alpha},\infty}(Q,\frac{dx}{|Q|})} \\
&= \sup_{t>0}\left\{t\left(\frac{|\{x\in Q : |I_\alpha f(x)| > t\}|}{|Q|}\right)^{\frac{n-\alpha}{n}}\right\} \\
&= \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\sup_{t>0}\left\{t|\{x\in Q : |I_\alpha f(x)| > t\}|^{\frac{n-\alpha}{n}}\right\} \\
&\leq \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\|I_\alpha(f\chi_Q)\|_{L^{\frac{n}{n-\alpha},\infty}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\|f\|_{L^1(Q)} \\
&\leq M_\alpha f(x),
\end{aligned}$$

donde las últimas desigualdades salen de la desigualdad en norma débil $(1, \frac{n}{n-\alpha})$ que verifica el operador integral fraccionario y de la definición de la maximal fraccionaria.

□

El siguiente teorema nos dará una desigualdad de tipo "Coifman-Fefferman local"entre el operador integral fraccionario y la maximal fraccionaria. Este teorema será ingrediente fundamental para probar el teorema de decaimiento.

Teorema 4.2.5 *Sea w un peso en la clase A_q de Muckenhoupt, con $1 \leq q < \infty$. Sea Q un cubo fijo y f una función tal que $Sop(f) \subset Q$. Entonces*

$$\|I_\alpha f\|_{L^1(w,Q)} \leq c_{n,\alpha}[w]_{A_q}\|M_\alpha f\|_{L^1(w,Q)}$$

donde $c_{n,\alpha}$ solo depende de α y de la dimensión.

Demostración.

$$\|I_\alpha f\|_{L^1(w,Q)} \leq \|I_\alpha f - m_{I_\alpha f}(Q)\|_{L^1(w,Q)} + \|m_{I_\alpha f}(Q)\|_{L^1(w,Q)}.$$

Usaremos el Corolario 4.2.3, tenemos

$$\|I_\alpha f - m_{I_\alpha f}(Q)\|_{L^1(w,Q)} \leq c[w]_{A_q}\|m_\delta^\#(I_\alpha f)\|_{L^1(w,Q)} \leq c[w]_{A_q}\int_Q m_\delta^\#(I_\alpha f)w(x)dx,$$

como $m_\lambda^\# f \leq c_\lambda M^\# f$ para $0 < \lambda \leq 1$, podemos usar la desigualdad (1.23) de donde resulta que

$$\|I_\alpha f - m_{I_\alpha f}(Q)\|_{L^1(w,Q)} \leq c[w]_{A_q}\|M_\alpha f\|_{L^1(w,Q)}.$$

Con esta acotación y el Lema 4.2.4, tenemos probado el teorema.

$\square$

En [Pe90], probó que la maximal fraccionaria era un peso en la clase A_1 de Muckenhoupt. Más aún, lo que se probó en ese trabajo es el siguiente lema.

Lema 4.2.6 *Sean $0 \leq \alpha < n$ y $0 \leq \gamma \leq \frac{n}{n-\alpha}$. Si μ es una medida Borel positiva con $M_\alpha \mu(x) < \infty$ en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$, entonces la función $(M_\alpha \mu(x))^\gamma$ es un peso A_1 con constante que depende de γ, α y la dimensión.*

Teniendo en cuento todo lo antes mencionado, estamos en condiciones de probar el decaimiento de la función conjunto de nivel cuando los operadores involucrados son la integral fraccionaria y la maximal fraccionaria.

Teorema 4.2.7 *Sea $0 \leq \alpha < n$, I_α el operador integral fraccionario, entonces:*

$$|\{x \in Q : |I_\alpha f(x)| > t|M_\alpha f(x)|\}| \quad \leq \quad e^{-dt}|Q|$$

donde d depende de α y de la dimensión.

Demostración. Dado $p > 1$ se verifica que:

$$\begin{aligned}
|\{x \in Q : |I_\alpha f(x)| > t|M_\alpha f(x)|\}| &\leq \frac{1}{t^p}\int_Q \left|\frac{I_\alpha f(x)}{M_\alpha f(x)}\right|^p dx \\
&= \frac{1}{t^p}\left\|\frac{I_\alpha f}{M_\alpha f}\right\|_{L^p(Q)}^p \\
&= \frac{1}{t^p}\left(\sup_{\|h\|_{L^{p'}(Q)}=1}\int_Q \frac{I_\alpha f(x)}{M_\alpha f(x)}h(x)dx\right)^p,
\end{aligned}$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones h no negativa tal que $\|h\|_{L^{p'}(Q)} = 1$. Luego utilizando el Lema 4.2.1, resulta que:

$$\int_Q \frac{I_\alpha f(x)}{M_\alpha f(x)}h(x)dx \;\leq\; \int_Q I_\alpha f(x)(M_\alpha f(x))^{-1}R(h)(x)dx$$

como $R(h) \in A_1$ y $(M_\alpha f)^{-1} = (M_\alpha f)^{1-2}$ resulta que $R(h)(M_\alpha f)^{1-2} \in A_2$ puesto que $M_\alpha f \in A_1$ (por lema 4.2.6). Además,

$$[R(h)(M_\alpha f)^{-1}]_{A_2} \leq [R(h)]_{A_1}[M_\alpha f]_{A_1}^{2-1}$$

Luego, usando el Teorema 4.2.5 y teniendo en cuenta que $[M_\alpha f]_{A_1}^{2-1} \leq c_{n,\alpha}$

$$\begin{aligned}
\int_Q I_\alpha f(x)(M_\alpha f(x))^{-1}R(h)(x)dx &\leq C[R(h)(M_\alpha f)^{-1}]_{A_2}\int_Q M_\alpha f(x)(M_\alpha f(x))^{-1}R(h)(x)dx \\
&= C[R(h)(M_\alpha f)^{-1}]_{A_2}\int_Q R(h)(x)dx \\
&\leq C[R(h)]_{A_1}[M_\alpha f]_{A_1}^{2-1}|Q|^{1/p} \\
&\leq C_{n,\alpha}p\,|Q|^{1/p}
\end{aligned}$$

Ahora, como teníamos libertad sobre p, si lo elegimos de forma tal que $e^{-1} = \frac{C_{n,\alpha}p}{t}$ resulta que:

$$\begin{aligned}
|\{x \in Q : |I_\alpha f(x)| > t|M_\alpha f(x)|\}| &\leq \frac{1}{t^p}(C_{n,\alpha}p|Q|^{1/p})^p \\
&= e^{-dt}|Q|,
\end{aligned}$$

con d dependiendo de α y de la dimensión. □

4.3. Decaimiento del conmutador fraccionario

Siguiendo el mismo esquema que en la sección anterior, vamos a probar los ingredientes necesarios para poder obtener un decaimiento de tipo exponencial, en este caso, para el conmutador fraccionario. Antes de introducir la definición del conmutador fraccionario, daremos algunas definiciones y propiedades básicas que necesitaremos más adelante.

Definición 4.3.1 *Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$,*

$$\|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q en $\mathbb{R}^n$.

La función f se dice que tiene oscilación media acotada si $\|f\|_{BMO} < \infty$ y $BMO(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de todas las funciones f localmente integrables en $\mathbb{R}^n$ que tienen $\|f\|_{BMO} < \infty$.

Una observación importante es que $\|.\|_{BMO}$ no es una norma. El problema es que si $\|f\|_{BMO} = 0$ no implica que la función $f = 0$, sin embargo si se puede ver que f tiene que ser constante. Si se verifica que $\|f + g\|_{BMO} \leq \|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO}$ y $\|\lambda f\|_{BMO} = |\lambda|\|f\|_{BMO}$, para $\lambda \in \mathbb{C}$.

Proposición 4.3.2 *Algunas propiedades básicas del espacio $BMO(\mathbb{R}^n)$ son:*

1. *Si $\|f\|_{BMO} = 0$, entonces f es constante en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.*

2. *$L^\infty(\mathbb{R}^n)$ está contenido en $BMO(\mathbb{R}^n)$ y $\|f\|_{BMO} \leq 2\|f\|_{L^\infty}$.*

3. *Supongamos que existe una constante $A > 0$ tal que para todo cubo Q en $\mathbb{R}^n$ existe una constante c_Q tal que*

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c_Q| dx \leq A.$$

Entonces $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ y $\|f\|_{BMO} \leq 2A$.

4. *Para toda f localmente integrable, tenemos*

$$\frac{1}{2}\|f\|_{BMO} \leq \sup_Q \frac{1}{|Q|} \inf_{c_Q} \int_Q |f(x) - c_Q| dx \leq \|f\|_{BMO}.$$

5. *Si $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ y $h \in \mathbb{R}^n$, entonces $\tau^h(f)$, definida como $\tau^h(f) = f(x-h)$, está también en $BMO(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\|\tau^h(f)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}. \tag{4.8}$$

6. *Sea $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda > 0$, entonces la función $\delta^\lambda(f)$, definida como $\delta^\lambda(f)(x) = f(\lambda x)$, está en $BMO(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\|\delta^\lambda(f)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}. \tag{4.9}$$

Definición 4.3.3 *Sea $0 < \alpha < n$, I_α el operador integral fraccionario, definimos el conmutador fraccionario como*

$$[b, I_\alpha]f(x) := b(x)I_\alpha(f)(x) - I_\alpha(bf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y)) \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy,$$

donde $b \in BMO$.

Como $b \in L^p(K)$ para todo $p > 1$ y K compacto, esta integral converge para toda $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

El conmutador fraccionario $[b, I_\alpha]$ fue introducido por Chanillo (ver [Cha]) quien probó que para todo $1 < p < n/\alpha$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$,

$$[b, I_\alpha] : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$$

Observe que esta desigualdad en norma la satisface también la integral fraccionaria I_α. Sin embargo, si bien vale que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > t\}| \leq C \left(\frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \right)^{\frac{n}{n-\alpha}},$$

cuando tomamos $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ y $b(x) = \log(1+x)\chi_{(1,\infty)}$ se puede ver que el conmutador fraccionario $[b, I_\alpha]$ no es de tipo débil $(1, \frac{n}{n-\alpha})$. Lo que si verifica es el siguiente teorema que es una versión en el contexto fraccionario del trabajo [Pe95b].

Teorema 4.3.4 *Dado* $0 < \alpha < n$ *y dada una función* $b \in BMO$*, si* $B(t) = t\log(e+t)$ *y* $\psi(t) = [t\log(e + t^{\alpha/n})]^{n/(n-\alpha)}$*. Entonces existe una constante* C *tal que*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |[b, I_\alpha]f(x)| > t\}| \leq C\psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} B\left(\|b\|_{BMO}\frac{|f(x)|}{t}\right)dx\right). \tag{4.10}$$

Además, este resultado es óptimo: si (4.10) vale cuando reemplazamos ψ *por una función creciente* ψ_0*, entonces existen constantes positiva* γ *y* K *tal que* $\psi(t/\gamma) \leq K\psi_0(t)$*,* $t > 0$*.*

Tengamos presente que tanto B como ψ son submultiplicativas. Para más información sobre el conmutador se puede ver el trabajo de Cruz-Uribe y Fiorenza ([C-UFi03]) donde se prueba también el siguiente teorema.

Teorema 4.3.5 *Sean* $B(t) = t\log(e+t)$*,* $0 < \alpha < n$*,* $b \in BMO$ *y* f *una función no negativa, existe una constante* C *tal que para todo* x*:*

$$M^{\#}([b, I_\alpha]f(x)) \leq C\|b\|_{BMO}(I_\alpha f(x) + M_{\alpha,B}f(x)).$$

Dada una función de Young B, por la definición 1.7.5, sabemos que la función de Young complementaria $\bar{B}$ se define como:

$$\bar{B}(t) = \sup_{s>0}\{st - B(s)\}, \quad t > 0.$$

Recuerde también que, como vimos en los preliminares, B y $\bar{B}$ satisfacen la siguiente desigualdad: $t \leq B{-}1(t)\bar{B}^{-1}(t) \leq 2t$.

La siguiente es una generalización de la desigualdad de Hölder para espacios de Orlicz dada por O'Neil en [ON65].

Lema 4.3.6 *Dada una función de Young* B*, entonces para toda funciones* f *y* g *y para todo cubo* Q*,*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |fg|dx \leq 2\|f\|_{B,Q}\|g\|_{\bar{B},Q}$$

Más general, si A*,* B *y* C *son funciones de Young tales que para todo* $t > 0$ *se verifica que:*

$$B^{-1}(t)C^{-1}(t) \leq A^{-1}(t),$$

Entonces,

$$\|fg\|_{A,Q} \leq 2\|f\|_{B,Q}\|g\|_{C,Q}.$$

Si nosotros elegimos $g \equiv 1$ en el Lema 4.3.6, inmediatamente se tiene que para toda función de Young B, α, $0 \leq \alpha < n$ y $x \in \mathbb{R}^n$:

$$M_\alpha f(x) \leq CM_{\alpha,B}f(x), \tag{4.11}$$

donde $M_{\alpha,B}$ es la maximal fraccionaria para espacios de Orlicz que ya definimos antes, para una función de Young B, como

$$M_{\alpha,B} = \sup_{Q\ni x}|Q|^{\alpha/n}\|f\|_{B,Q}.$$

Como es de esperar, el operador que toma el rol de “operador control”sobre el conmutador fraccionario es la maximal fraccionaria para espacios de Orlicz antes definida. Teniendo en cuenta que este operador jugará el rol de operador control, necesitamos entonces que $M_{\alpha,B}$ sea un peso A_1. Es decir, queremos ver que para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$

$$M(M_{\alpha,B}f)(x) \leq M_{\alpha,B}f(x)$$

Esta desigualdad se puede encontrar en el Libro de Cruz-Uribe, Martell y Pérez [C-UMP11]. Para ser más precisos, ellos probaron el siguiente teorema.

Teorema 4.3.7 *Dado α, $0 < \alpha < n$, sea B una función de Young tal que $\frac{B(t)}{t^{n/\alpha}}$ es cuasi-decreciente y $\frac{B(t)}{t^{n/\alpha}} \to 0$ cuando $t \to \infty$. Si $\exists r \in [1, n/\alpha)$ tal que $\frac{B(t)}{t^r}$ es cuasi-creciente, entonces $(M_{\alpha,B}f)^s \in A_1$ para todo $0 < s < \frac{rn}{n-\alpha}$. La constante A_1 depende solo de B, s y n.*

Observemos ahora que $B(t) = t\log(e+t)$ verifica el teorema anterior con $r = 1$. Luego $(M_{\alpha,B}f)^s \in A_1$ para todo $s \in (0, \frac{n}{n-\alpha})$. Por esta razón se verifica el siguiente corolario:

Corolario 4.3.8 *Sean $0 < \alpha < n$ y $B(t) = t\log(e+t)$ una función de Young. Entonces $M_{\alpha,B}f$ es un peso en la clase A_1 cuya constante no depende de f. Es decir,*

$$[M_{\alpha,B}f]_{A_1} \leq a_{B,n}.$$

para toda función f.

Ahora que hemos probado que el operador control es un peso en la clase A_1 de Muckenhoupt, nos restaría probar que vale una desigualdad de tipo “Coifman-Fefferman local”. En busca de ello, probemos primero siguiente teorema.

Teorema 4.3.9 *Sean $[b, I_\alpha]$ y $M_{\alpha,B}$ el conmutador fraccionario y la maximal fraccionaria como los definimos anteriormente. Si Q es un cubo, entonces para todo $x \in Q$*

$$m_{[b,I_\alpha]f}(Q) \leq c_{n,\alpha}\|b\|_{BMO}M_{\alpha,B}f(x).$$

Demostración. Por la desigualdad (1.19) sabemos que

$$m_{[b,I_\alpha]f}(Q) \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q [b, I_\alpha]f(x)\,dx,$$

con lo cual bastaría con ver que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q [b, I_\alpha]f(x)\,dx \leq c_{n,\alpha}\|b\|_{BMO}M_{\alpha,B}f(x). \tag{4.12}$$

Dividiremos la demostración en tres casos.
Caso 1: Veamos que vale (4.12) cuando Q es un cubo centrado en el origen con $|Q| = 1$. En tal caso veremos que vale

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q [b, I_\alpha]f(x)\,dx \leq c_{n,\alpha}\|b\|_{BMO}\|f\|_{B,Q}. \tag{4.13}$$

Para ello usaremos la desigualdad (4.10) y la submultiplicatividad de B y ψ.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q [b, I_\alpha]f(x)\,dx &= \frac{1}{|Q|}\int_0^\infty \delta t^{\delta-1}|\{x \in Q : |[b, I_\alpha]f(x)| > t\}|\,dt \\
&= 1 + \int_1^\infty \delta t^{\delta-1}|\{x \in Q : |[b, I_\alpha]f(x)| > t\}|\,dt \\
&\leq 1 + \int_1^\infty \delta t^{\delta-1}\psi\left(\int_Q B\left(\|b\|_{BMO}\frac{f(x)}{t}\right)\,dx\right)\,dt \\
&\leq 1 + \psi(B(\|b\|_{BMO}))\int_1^\infty \delta t^{\delta-1}\psi\left(B\left(\frac{1}{t}\right)\right)\,dt\;\psi\left(\int_Q B(f)\,dx\right).
\end{aligned}$$

Como $B\left(\frac{1}{t}\right) \leq 2/t$ y $\psi\left(\frac{2}{t}\right) \simeq \left(\frac{2}{t}\right)^{n/(n-\alpha)}$ para $t > 1$, entonces

$$\int_1^\infty \delta t^{\delta-1}\psi\left(B\left(\frac{1}{t}\right)\right)\,dt \simeq C_{n,\alpha}$$

Además, por homogeneidad, podemos suponer que $\|b\|_{BMO} = 1$ y que $\|f\|_{B,Q} = 1$. Con lo cual, $\psi(B(\|b\|_{BMO})) \leq C$ y

$$\int_Q B(f)dx = \frac{1}{|Q|}\int_Q B(f)dx \leq 1.$$

Luego tenemos que cuando Q está centrado en el origen y $|Q| = 1$, la desigualdad (4.13) es válida.

Caso 2: Veamos que vale (4.12) para cualquier cubo Q centrado en el origen.

Si Q es un cubo centrado en el origen, llamaremos $Q_0 = \{y \in \mathbb{R}^n : ly \in Q\}$, donde $l = l(Q)$. Se puede ver fácilmente que Q_0 es un cubo centrado en el origen con $|Q_0| = 1$.

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q [b, I_\alpha]f(x)dx = \frac{1}{l^n|Q_0|}\int_Q [b, I_\alpha]f(x)dx = \frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0} [b, I_\alpha]f(lz)dz,$$

haciendo el cambio de variable $x = lz$. Pero además,

$$[b, I_\alpha]f(lz) = \int_{\mathbb{R}^n}(b(y) - b(lz))\frac{f(y)}{|lz - y|^{n-\alpha}}dy = \int_{\mathbb{R}^n}(b_l(y/l) - b_l(z))\frac{f_l(y/l)}{l^{n-\alpha}|z - (y/l)|^{n-\alpha}}dy,$$

donde $b_l(w) = lw$ y $f_l(w) = lw$. Haciendo el cambio de variable $y = lt$, tenemos que

$$[b, I_\alpha]f(lz) = l^\alpha[b_l, I_\alpha]f_l(z),$$

con lo cual resulta que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q [b, I_\alpha]f(x)dx = \frac{l^\alpha}{|Q_0|}\int_{Q_0} [b_l, I_\alpha]f_l(x)dx,$$

y como Q_0 es un cubo centrado en el origen con $|Q| = 1$, resulta que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q [b, I_\alpha]f(x)dx \leq c_{\alpha,b_l}|Q|^{\alpha/n}\|f_l\|_{B,Q_0}$$

por último, como $\|b_l\|_{BMO} = \|b\|_{BMO}$ y

$$\begin{aligned}\|f_l\|_{B,Q_0} &= \text{ínf}\{\lambda > 0 : \frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0} B\left(\frac{f(lx)}{\lambda}\right)\, dx \leq 1\} \\ &= \text{ínf}\{\lambda > 0 : \frac{l}{|Q|}\int_Q B\left(\frac{f(z)}{\lambda}\right)\, \frac{dz}{l} \leq 1\} \\ &= \|f\|_{B,Q},\end{aligned}$$

vale (4.12) para cualquier cubo centrado en el origen.
Caso 3: Veamos que (4.12) vale para cualquier cubo Q. Sea x_Q el centro del cubo Q, entonces $Q' = \{y \in \mathbb{R}^n : (y + x_Q) \in Q\}$ es un cubo centrado en el origen.

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q [b, I_\alpha]f(x)\, dx = \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} [b, I_\alpha]f(z + x_Q)\, dz,$$

haciendo el cambio de variable $x = z + x_Q$. Ahora,

$$\begin{aligned}[b, I_\alpha]f(z + x_Q) &= \int_{\mathbb{R}^n} (b(y) - b(z + x_Q))\frac{f(y)}{|z + x_Q - y|^{n-\alpha}}\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (b(t + x_Q) - b(z + x_Q))\frac{f(t + x_Q)}{|z - t|^{n-\alpha}}\, dy,\end{aligned}$$

haciendo el cambio $t = y - x_Q$. Pero entonces,

$$[b, I_\alpha]f(z + x_Q) = [\tau^{-x_Q}(b), I_\alpha]\tau^{-x_Q}(f)(z),$$

donde $\tau^{-x_Q}(h)(z) = h(z + x_Q)$. Con lo cual,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q [b, I_\alpha]f(x)\, dx \leq c_{\alpha,\tau^{-x_Q}(b)}l^\alpha\|\tau^{-x_Q}(f)\|_{B,Q'}$$

Por último, como $\|\tau^{-x_Q}(b)\|_{BMO} = \|b\|_{BMO}$ y

$$\begin{aligned}\|\tau^{-x_Q}(f)\|_{B,Q'} &= \text{ínf}\{\lambda > 0 : \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} B\left(\frac{f(x + x_Q)}{\lambda}\right)\, dx\} \\ &= \text{ínf}\{\lambda > 0 : \frac{1}{|Q|}\int_Q B\left(\frac{f(z)}{\lambda}\right)\, dz\} \\ &= \|f\|_{B,Q},\end{aligned}$$

resulta que (4.12) vale para cualquier cubo Q.

□

Teorema 4.3.10 *Sea $0 < \alpha < n$, I_α el operador integral fraccionario, $w \in A_q$, $B(t) = t.\log(e+t)$ y $b \in BMO$. Entonces:*

$$\|[b, I_\alpha]f\|_{L^1(w,Q)} \leq C[w]_{A_q}^2 \|b\|_{BMO} \|M_{\alpha,B}f\|_{L^1(w,Q)}$$

Demostración.

$$\|[b, I_\alpha]f\|_{L^1(w,Q)} \leq \|[b, I_\alpha]f - m_{[b,I_\alpha]f}(Q)\|_{L^1(w,Q)} + \|m_{[b,I_\alpha]f}(Q)\|_{L^1(w,Q)}.$$

Por el corolario 4.2.3 sabemos que

$$\|[b, I_\alpha]f - m_{[b,I_\alpha]f}(Q)\|_{L^1(w,Q)} \leq c[w]_{A_q} \|m_\delta^{\#,d}([b, I_\alpha]f)\|_{L^1(w,Q)},$$

luego como $m_\lambda^{\#} f \leq c_\lambda M^{\#} f$ para $0 < \lambda \leq 1$, podemos usar el Teorema 4.3.5 de donde resulta que

$$\begin{aligned}
\|[b, I_\alpha]f - m_{[b,I_\alpha]f}(Q)\|_{L^1(w,Q)} &\leq C[w]_{A_q} \|M^{\#}([b, I_\alpha]f)\|_{L^1(w,Q)} \\
&\leq C[w]_{A_q} \|b\|_{BMO} \|I_\alpha f + M_{\alpha,B}f\|_{L^1(w,Q)} \\
&= C[w]_{A_q} \|b\|_{BMO} \left(\|I_\alpha f\|_{L^1(w,Q)} + \|M_{\alpha,B}f\|_{L^1(w,Q)}\right)
\end{aligned}$$

Ahora podemos usar el Lema 2.2.5 y la desigualdad (4.11), de donde surge que

$$\begin{aligned}
\|[b, I_\alpha]f - m_{[b,I_\alpha]f}(Q)\|_{L^1(w,Q)} &\leq C[w]_{A_q} \|b\|_{BMO} \left(C'[w]_{A_q} \|M_\alpha f\|_{L^1(w,Q)} + \|M_{\alpha,B}f\|_{L^1(w,Q)}\right) \\
&\leq C[w]_{A_q}^2 \|b\|_{BMO} \|M_{\alpha,B}f\|_{L^1(w,Q)}.
\end{aligned}$$

Con este resultado y el que se obtuvo en el Teorema 4.3.9 tenemos probado el teorema. □

Ahora si estamos en condiciones de probar el resultado central de esta sección que nos da el decaimiento de la función conjunto de nivel cuando los operadores involucrados son el conmutador fraccionario y la maximal fraccionaria para espacios de Orlicz.

Teorema 4.3.11 *Sean I_α y $M_{\alpha,B}$ el operador integral fraccionario y el operador maximal fraccionario para espacios de Orlicz respectivamente, donde $B(t) = t\log(e+t)$ es una función de Young, $b \in BMO$ y $0 < \alpha < n$. Resulta entonces que:*

$$|\{x \in Q : |[b, I_\alpha]f(x)| > t|M_{\alpha,B}f(x)|\}| \leq e^{-\frac{d_{\alpha,B,n}}{\|b\|_{BMO}^{1/2}}\sqrt{t}} |Q|.$$

Demostración. Dado $p > 1$ se verifica que:

$$\begin{aligned}
|\{x \in Q : |[b, I_\alpha]f(x)| > t|M_{\alpha,B}f(x)|\}| &\leq \frac{1}{t^p} \int_Q \left|\frac{[b, I_\alpha]f(x)}{M_{\alpha,B}f(x)}\right|^p dx \\
&= \frac{1}{t^p} \left\|\frac{[b, I_\alpha]f}{M_{\alpha,B}f}\right\|_{L^p(Q)}^p \\
&= \frac{1}{t^p} \left(\sup_{\|h\|_{L^{p'}(Q)}=1} \int_Q \frac{[b, I_\alpha]f(x)}{M_{\alpha,B}f(x)} h(x)dx\right)^p,
\end{aligned}$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones h no negativa tal que $\|h\|_{L^{p'}(Q)} = 1$. Utilizando la versión del Algoritmo de Rubio de Francia enunciada en el Teorema 4.2.1, resulta que existe $R(h)$ (un operador sublineal) que verifica las siguientes condiciones, para toda $h \in L^{p'}(Q)$,

1. $h \leq R(h)$
2. $\|R(h)\|_{L^{p'}(Q)} \leq \|h\|_{L^{p'}(Q)}$
3. $R(h) \in A_1$ con $[R(h)]_{A_1} \leq c_n p$

De aquí y teniendo en cuenta que $M_{\alpha,B}f \in A_1$ (Corolario 4.3.8), resulta que:

$$[R(h)(M_{\alpha,B}f)^{-1}]_{A_2} = [R(h)(M_{\alpha,B}f)^{1-2}]_{A_2} \leq [R(h)]_{A_1}[M_{\alpha,B}f]_{A_2}^{2-1} \leq c_n p\, a_{\alpha,B,n}.$$

Teniendo en cuenta lo antes mencionado, podemos utilizar el teorema 4.3.10 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int_Q \frac{[b, I_\alpha]f(x)}{M_{\alpha,B}f(x)} h(x)dx &\leq \int_Q [b, I_\alpha]f(x)(M_{\alpha,B}f(x))^{-1}R(h)(x)dx \\
&\leq C[R(h)(M_{\alpha,B}f)^{-1}]_{A_2}^2 \|b\|_{BMO} \int_Q M_{\alpha,B}f(x)(M_{\alpha,B}f(x))^{-1}R(h)(x)dx \\
&\leq C(p\, C_{n,\alpha,B})^2 \|b\|_{BMO} \int_Q R(h)(x)dx \\
&\leq 2C(p\, C_{n,\alpha,B}\|b\|_{BMO}^{1/2})^2 |Q|^{1/p}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|\{x \in Q : |[b, I_\alpha]f(x)| > t|M_{\alpha,B}f(x)|\}| \leq \left(\frac{p\, c_{n,\alpha,B}\|b\|_{BMO}^{1/2}}{t^{1/2}} \right)^{2p} |Q|,$$

eligiendo p tal que $e^{-1} = \left(\frac{p\, c_{n,\alpha,B}\|b\|_{BMO}^{1/2}}{t^{1/2}} \right)^2$, resulta que:

$$|\{x \in Q : |[b, I_\alpha]f(x)| > t|M_{\alpha,B}f(x)|\}| \leq e^{-\frac{d_{\alpha,B,n}}{\|b\|_{BMO}^{1/2}}\sqrt{t}} |Q|.$$

□

4.4. Decaimiento de tipo exponencial con pesos

Siguiendo el trabajo de Ortiz-Carballo, Pérez y Rela [O-CPR13] y viendo la utilidad de estudiar el comportamiento de la función conjunto de nivel para los distintos pares de operadores, nos preguntamos ¿cómo sería el decaimiento de los mismos conjuntos de nivel que ellos estudiaron pero poniéndole un peso $w \in A_\infty$?. Más concretamente, podremos conservar el decaimiento exponencial cuando reemplazamos tomar la medida de Lebesgue del conjunto por

$$w(\{x \in Q : |T_1 f(x)| > t|T_2 f(x)|\}),$$

donde w es un peso en la clase $A_\infty = \cup_{p\geq 1} A_p$ de Muckenhoupt. Más aún ¿cómo se verá reflejada la constante $[w]_{A_\infty}$ en ese decaimiento?.

Si bien podíamos tratar de probarlo para cada cada en particular, tratamos de obtener un resultado general que se pueda aplicar a todos los casos.

Dado un cubo Q y sea E un subconjunto de Q. En [W08] (pág. 45) se probó que dado $\lambda > 0$,

$$\frac{|E|}{|Q|} < e^{-\lambda} \quad \text{implica} \quad \frac{w(s)}{w(Q)} < \frac{2^{d+2}[w]_{A_\infty}}{\lambda} + e^{-\lambda/2},$$

donde la $[w]_{A_\infty}$ es la constante de Fujii-Wilson que hemos mencionado en los capítulos anteriores. Usando este resultado podríamos obtener un decaimiento de tipo lineal, con lo cual no tendríamos el decaimiento exponencial buscado. Tratando de mejorar este resultado para poder aplicarlo a nuestros conjunto y usando resultados óptimos que se conocen actualmente pudimos obtener el siguiente lema.

Lema 4.4.1 *Dado un cubo Q y sea E un subconjunto de Q. Si w un peso en A_∞ entonces:*

$$w(E) \leq 2\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\frac{1}{c_n[w]_{A_\infty}}} w(Q)$$

Demostración. Para la demostración utilizaremos la versión óptima de la desigualdad de Hölder al revés dada en [HP]. La cual dice que si $w \in A_\infty$ y sea $r(w) := 1 + \frac{1}{c_n[w]_{A_\infty}}$, donde c_n es una constante dimensional, entonces:

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{r(w)}(x)dx\right)^{1/r(w)} \leq 2\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx.$$

Además, se puede ver que $r(w)' \approx [w]_{A_\infty}$. Teniendo en cuenta lo antes mencionado, resulta:

$$w(E) = \int_E w(x)dx \leq |E|^{1/r(w)'}|Q|^{1/r(w)}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{r(w)}(x)dx\right)^{1/r(w)}$$

$$\leq 2\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{1/r(w)'} w(Q),$$

donde la primer desigualdad sale de hacer Hölder con $r(w)$ y $r(w)'$ y teniendo en cuenta que $\int_E w(x)dx = \int_Q \chi_E(x)w(x)dx$ pues $E \subset Q$. □

Observemos que este resultado vale para cualquier subconjunto del cubo Q, con lo cual podemos generalizar todos los resultados que teníamos para los distintos pares de operadores (T_1, T_2) que fueron mencionados en [O-CPR13] y los que nosotros probamos. Concretamente, resultan válidos los siguientes Corolarios:

Corolario 4.4.2 (Operadores de C-Z) *Sea T un operador de Calderón-Zygmund y sea T^* el operador integral maximal singular. Si Q es un cubo y sea $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que sop(f) $\subseteq Q$. Entonces hay constantes c_1, c_2 tal que para todo $w \in A_\infty$:*

$$w(\{x \in Q : |T^* f(x)| > tMf(x)\}) \leq c_1\, e^{\frac{-c_2 t}{[w]_{A_\infty}}} w(Q) \quad t > 0.$$

Corolario 4.4.3 (Operadores multilineales de C-Z) *Sea T un operador de Calderón-Zygmund m-lineal. Sea Q un cubo y $\vec{f}$ el vector de m funciones $f_j \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que sop(f_j) $\subseteq Q$ para todo $1 \leq j \leq m$. Sea w un peso en A_∞, existen c_1 y c_2 constantes tal que:*

$$w(\{x \in Q : |T\vec{f}(x)| > t\mathcal{M}\vec{f}(x)\}) \leq c_1\, e^{\frac{-c_2 t}{[w]_{A_\infty}}} w(Q) \quad t > 0.$$

Dado un operador T y $0 < q < \infty$ definido como una extensión vector–valorado $\overline{T}_q$ como

$$\overline{T}_q f(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |Tf_j(x)|^q \right)^{1/q} = |Tf(x)|_q,$$

donde $f = \{f_j\}_{j=1}^\infty$ es una función vectorial.

Corolario 4.4.4 (Extensión a valores vectoriales) *Sea $1 < q < \infty$ y sea $\overline{T}_q$ la extensión a valores vectoriales de T, donde T es un operador de C-Z. Sea $w \in A_\infty$, entonces existen constantes c_1 y c_2 tal que para todo cubo Q y para toda función vectorial $f = \{f_j\}_{j=1}^\infty$ con sop(f) $\subseteq Q$:*

$$w(\{x \in Q : |\overline{T}_q f(x)| > tM(|f|_q)(x)\}) \leq c_1\, e^{\frac{-c_2 t}{[w]_{A_\infty}}} w(Q) \quad t > 0.$$

Corolario 4.4.5 *Sean $1 \leq q \leq \infty$, $\overline{M}_q$ la extensión a valores vectoriales de M y $w \in A_\infty$. Existen constantes c_1 y c_2 positivas tales que para todo cubo Q y para toda función vector $f = \{f_j\}_{j=1}^\infty$ con sop(f_j) $\subseteq Q$:*

$$w(\{x \in Q : |\overline{M}_q f(x)| > tM(|f|_q)(x)\}) \leq c_1\, e^{\frac{-c_2 t}{[w]_{A_\infty}}} w(Q) \quad t > 0.$$

Corolario 4.4.6 (Funciones cuadrado Littlewood-Paley) *Sean S la función cuadrado diádica y g_μ^* la función cuadrado de Littlewood-Paley continua, con $\mu > 3$. Sean $w \in A_\infty$, Q un cubo y $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que el sop(f) $\subseteq Q$. Entonces existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que:*

$$w(\{x \in Q : Sf(x) > tMf(x)\}) \leq c_1\, e^{\frac{-c_2 t^2}{[w]_{A_\infty}}} w(Q) \quad t > 0.$$

$$w(\{x \in Q : |g_\mu^* f(x)| > tMf(x)\}) \leq c_1\, e^{\frac{-c_2 t^2}{[w]_{A_\infty}}} w(Q) \quad t > 0.$$

Corolario 4.4.7 (Conmutador para Op. de C-Z) *Sean T un operador de Calderón-Zygmund, $b \in BMO$ y $w \in A_\infty$. Si f es una función tal que el sop$(f) \subseteq Q$, entonces existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que:*

$$w(\{x \in Q : |[b,T]f(x)| > tM^2 f(x)\}) \leq c_1\, e^{\frac{-\sqrt{c_2 t}}{\|b\|_{BMO}^{1/2}[w]_{A_\infty}}} w(Q) \quad t > 0.$$

De manera similar,

$$w(\{x \in Q : |T_b^k f(x)| > tM^{k+1} f(x)\}) \leq c_1\, e^{\frac{-c_2 t^{1/(k+1)}}{\|b\|_{BMO}^{1/(k+1)}[w]_{A_\infty}}} w(Q) \quad t > 0.$$

Corolario 4.4.8 (Operador fraccionario) *Sean $0 \leq \alpha \leq \infty$, I_α el operador integral fraccionario y $w \in A_\infty$ entonces:*

$$w(\{x \in Q : |I_\alpha f(x)| > t|M_\alpha f(x)|\}) \;\; \leq \;\; c_1 e^{\frac{-c_2 t}{[w]_{A_\infty}}} w(Q),$$

donde c_1 y c_2 dependen de α y de la dimensión.

Corolario 4.4.9 *Sean I_α y $M_{\alpha,B}$ el operador integral fraccionario y el operador maximal fraccionario para espacios de Orlicz respectivamente, donde $B(t) = t\log(e+t)$ es una función de Young, $b \in BMO$, $0 < \alpha < n$ y $w \in A_\infty$. Resulta entonces que:*

$$w(\{x \in Q : |[b, I_\alpha]f(x)| > t|M_{\alpha,B} f(x)|\}) \leq c_1 e^{-\frac{c_2\sqrt{t}}{[w]_{A_\infty}\|b\|_{BMO}^{1/2}}} w(Q),$$

donde c_1 y c_2 dependen de $\|b\|_{BMO}$, de α y de la dimensión.

Bibliografía

[Ad] D.R. Adams, *A note on Riesz potencials*, Duke Math. Jounal, **42** (4) (1975), 765-778.

[As] K. Astala, Area distortion of quasiconformal mapping, Acta Math. **173** (1994), 37-60.

[AIS] K. Astala, T. Iwaniec y E. Sacksman, *Beltrami operators in the plane*, Duke Math. Journals, **107** (2001), 27-56.

[BK1] R.J. Bagby y D.S. Kurtz, *Covering lemmas and the sharp function*, Proc. Amer. Math. Soc., **93** (1985), 291-296.

[BK2] R.J. Bagby y D.S. Kurtz, *A rearranged good-λ ¸ inequality,* Trans. Amer. Math. Soc., **293** (1986), 71-81.

[BP] R.J. Bagby y J.D. Parson. *Orlicz spaces and rearranged maximal functions*, Math. Nachr., **132** (1987), 15-27.

[Be] O.V. Beznosova, *Linear bound for the dyadic paraproduct on weighted Lebesgue space L2(w)*, J. Funct. Anal., **255**(4) (2008), 994-1007.

[Bu] S.M. Buckley, *Estimates for operator norms on weighted spaces and reverse Jensen inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc., **340** (1) (1993), 253-272.

[BG] D.L. Burkholder y R.F. Gundy, *Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on nartingales*, Acta Math., **124** (1970), 249-304.

[Ca] L. Carleson, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math., **116** (1966), 135-157.

[CPSS] M.J. Carro, C. Pérez, F. Soria y J. Soria, *Examples and counterexamples for fractional operators*, Ind. Univ. Math. Journal **54** (2005), 627-644.

[Cha] S. Chanillo, *A note on conmutators*, Ind. Univ. Math. Journal., **31** (1) (1982), 7-16.

[CoF] R. Coifman y C. Fefferman, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Math., **51** (1974), 241-250.

[CoF] R. Coifman y C. Fefferman, *Some maximal inequalities*, Amer. J. Math. **93** (1971), 107-115.

[CR] R. Coifman y R Rochberg, *Another characterization of BMO,* Proc. Amer. Math. Soc., **79** (1980), 249-254.

[C-UFi03] D. Cruz-Uribe y A.Fiorenza, *Endpoint estimates and weighted norm inequalities for commutators of fractional integral*, Publ. Math.,**47** (1) (2003), 103-131.

[C-UMP04] D. Cruz-Uribe, SFO, J.M. Martell y C. Pérez, *Extrapolation from A_∞ weights with applications*, J. Funct. Anal. **213** (2004), 412-439.

[C-UMP05] D. Cruz-Uribe, SFO, J.M. Martell y C. Pérez, *Weighted weak-type inequalities and a conjetura of Sawyer*, Int. Math. Research Notices, **30** (2005), 1849-1871.

[C-UMP10] D. Cruz-Uribe,SFO, J.M. Martell, C. Pérez, *Sharp weighted estimates for approximating dyadic operators*, Electron. Res. Announc. Math. Sci., **17** (2010), 12-19.

[C-UMP11] D. Cruz-Uribe, J.M. Martell y C. Pérez, *Weights, Extrapolation and the Theory of Rubio de Francia*, Birkhäuser Basel, (2011).

[C-UMP12] D. Cruz-Uribe, J.M. Martell y C. Pérez, *Sharp weighted estimates for classical operators*, Adv. Math., **229**(1) (2012), 408-441.

[C-UM] D. Cruz-Uribe, SFO, K. Moen, *One and two weight norm inequalities for Riesz Potentials*, Illinois J. Math, en prensa.

[C-UN] D. Cruz-Uribe, SFO, y C.J. Neugebauer, *The structure of reverse Hölder classes,* Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 2941-2960.

[dT] A. de la Torre, comunicación personal.

[DGPP] O. Dragičević, L. Grafakos, M.C. Pereyra and S. Petermichl, *Extrapolation and sharp norm estimates for classical operators on weighted Lebesgue spaces*, Publ. Math., **49**(1) (2005), 73-91.

[FS] C. Fefferman y E.M. Stein, *Some maximal inequalities*, Amer. J. Math., **93** (1971), 107-115.

[F] N. Fujii, *Weighted bounded mean oscillation and singular integrals*, Math. Japon, **22** (5) (1977/78), 529-534.

[GK] M. Gabidzashvili y V. kokilashvili, *Two weight weak type inequalities for fractional type integrals*, Ceskoslovenska Akademie Ved., **45**(1989), 1-11.

[GCRdF] J. García-Cuerva y J.L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North Holland Math. Studies **116**, North Holland, Amsterdam, (1985).

[Gh] F. W. Gehring, *The Lp-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping*, Acta Math., **130** (1973), 265-277.

[G1] L.Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics **249**, segunda edición (2008).

[G2] L.Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics **250**, segunda edición (2008).

[He] E. Hernandéz*Factorization and extrapolation of pairs of weights*, Studia Math, **95** (1989), 179-193.

[Hr] S.V.Hruščev, *A description of weights satisfying the A_∞ condition of Muckenhoupt*, Proc. Amer. Math. Soc., **90** (2) (1984), 253-257.

[HuKN] R. Hunt, D. Kurtz y C. Neugebauer, *A note on the equivalence of A_p and Sawyer's condition for equal weights,* Proc. Conf. on Harmonic Analysis in Honor of A. Zygmund (1981: Chicago, III), Vol. 1, Wadsworth Math. Ser., 1983, 156-158.

[Hy] T. Hytönen, *The sharp weighted bound for general Calderón-Zygmund operators*, Ann. of Math. (2), **175** (3), (2012). 1473-1506. 2

[HL] T. Hytönen y M. Lacey, *The $A_p - A_\infty$ inequality for general Calderón-Zygmund operators*, Indiana Univ. Math. Journal, en prensa. arXiv:1106.4797.2

[HLP] T. Hytönen, M. Lacey y C. Pérez, *Non-propabilistic proof of the A_2 theorem, and sharp weighted bounds for the q-variation of singular integrals.* Bull. Lond. Math. Soc., en prensa, doi:10.1112/blms/bds114 2

[HMW] R. Hunt, B. Muckenhoupt y R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform*, Trans. Amer. Math. Soc., **176** (1973), 227-251.

[HP] T. Hytöonen and C. Pérez *Sharp weighted bounds invloving A_∞*, Analysis and Partial Differential Equations, **6** (2013), 777–818.

[HPR] T. Hytönen, C. Pérez y E. Rela, *Sharp Reverse Hölder property for A_∞ weights on spaces of homogeneous type*, J. Func. Anal., **263** (2012), 3883-3899.

[IM] T. Iwaniec y G. Martin, *Quasiregular mappings in even dimensions*, Acta Math., **170** (1993), 29-81.

[Ja] B. Jawerth, *Weighted inequalities for maximal operators: linearization, localization and factorization*, Amer. J. Math., **108** (1986), 361-414.

[Jo] P. Jones, *Factorization of A_p weights*, Ann. of Math., **111** (2) (1980), 511-530.

[K] G.A. Karagulyan, *Exponential estimates for the Calderón-Zygmund operator and related problems of Fourier series*, Math. Zametki, **71** (3) (2002), 398-411. 1,2

[KR] M.A. Krasnosel'skiĭ y Y.B. Rutickiĭ, *Convex functions and Orlisz spaces*, P. Noordhoff Ltd., Groningen, (1961).

[LPR] M. Lacey, S. Petermichl, M. C. Reguera, *Sharp A_2 inequality for Haar shift operators*, Math. Ann., **348**(1) (2010), 127-141.

[LMPT] M. Lacey, K. Moen, C. Pérez y R.H. Torres, *Sharp weighted bounds for fractional integral operators*, Journal of Functional Analysis, **259** (2010) 1073-1097.

[Le04a] A.K. Lerner, *On some pointwise inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **289** (1) (2004), 248-259.

[Le04b] A.K. Lerner, *Weighted norm inequalities for the local sharp maximal function*, J. Fourier Anal. Appl., **10** (5) (2004), 465-474.

[Le10] A.K. Lerner, *A pointwise estimate for the local sharp maximal function with applications to singular integrals*, Bull. Lond. Math. Soc., **42** (5) (2010), 843-856.

[Le11] A.K. Lerner, *Sharp weighted norm inequalities for Littlewood-Paley operators and singular integral*, Adv in Math, **226**, (2011).

[Le13a] A.K. Lerner, *A simple proof of the A_2 conjecture*, C. R. Acad. Sci. Paris,**351**(1) (2013), 463-466.

[Le13b] A.K. Lerner, *On an estimate of Calderón-Zygmund operators by dyadic positive operators*, journal Anal. Math., en prensa.

[Le13c] A.K. Lerner, *Mixed $A_p - A_r$ inequalities for Classical Singular Integrals and Littlewood-Paley Operators*, Journal of Geom. Analysis, **23** (3) (2013), 1343-1354.

[LM] A. Lerner y K. Moen, *Mixed $A_p - A_\infty$ estimates with one supremum,* Studia Mathematica, en prensa.

[LO] A.K. Lerner y S. Ombrosi, *An extrapolation theorem with applications to weighted estimates for singular integrals,* Journal of Functional Analysis, **262** (2012) 4475–4487.

[LOP08] A.K. Lerner, S. Ombrosi y C. Pérez, *Sharp A_1 bounds for Calderón-Zygmund operators and the relationship with a problem of Muckenhoupt and Wheeden*, International Mathematics Research Notices **6** (2008), Art. ID rnm161, 11p, 2.

[LOP09a] A.K. Lerner, S. Ombrosi y C. Pérez, *A_1 bounds for Calderón-Zygmund operators related to a problem of Muckenhoupt and Wheeden*, Math. Res. Lett. **16** (2009), 149-156.

[LOP09b] A.K. Lerner, S. Ombrosi y C. Pérez, *Weak type estimates for singular integral related to a dual problem of Muckenhoupt-Wheeden*, J. Fourier Anal. Appl., **15** (3), (2009) 394-403. 2

[LPR] T. Luque, C. Pérez and Ezequiel Rela, *Optimal exponents in weighted estimates without examples,* Math. Res. Lett., en prensa.

[Ma] L. Maligranda, *Orlicz spaces and interpolation*, Seminars in Math. 5, IMECC, Univ. Estadual de Campinas, Campinas, Brasil (1989).

[Mu] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequaliteies for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc., **165** (1972), 207-226.

[MW74] B. Muckenhoupt y R. Wheeden, *Weighted norm inequaliteies for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., **192** (1974), 261-274.

[MW77] B. Muckenhoupt y R. Wheeden, *Some weighted weak-type inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function and the Hilbert transform*, Indiana Math. J. **26** (1977), 801-816.

[M] K. Moen, *Sharp one-weight and two-weight bounds for maximal operators*, Studia Math. **194** (2) (2009), 163-180.

[ON65] R.O'Neil, *Fractional integration in Orlicz spaces,* Trans. Amer. Math. Soc., **115** (1965), 300-328.

[O-CPR] C. Ortiz-Caraballo, C. Pérez y Ezequiel Rela, *Improving bounds for singular operators via Sharp Reverse Hölder Inequality for A_∞* , Advances in Harmonic Analysis and Operator Theory, serie Birkhäuser OT, en prensa.

[O-CPR13] C.Ortiz-Carballo, C.Pérez y E.Rela, *Exponential decay estimates for Singular Integral operators*, Mathematische Annalen, en prensa.

[Pe90] C.Pérez, *Two weighted norm inequalities for Riesz potentials and uniform L^p-weigthed Sobolev inequalities*, Ind.Univ.Math.Journal, **39** (1990), 31-44.

[Pe94a] C.Pérez, *Two weighted inequalities for potentials and fractional type maximal operators*, Ind. Univ. Math. Journal, **43** (2) (1994), 663-683.

[Pe94b] C. Pérez, *Weighted norm inequalities for singular integral operators*, J. London math. soc., **49** (1994), 296-308.

[Pe95a] C. Pérez, *L^p-weighted Sobolev inequalities*, Ann. Inst. Fourier, **45**(3) (1995), 1-16.

[Pe95b] C. Pérez, *Endpoint estimates for commutators of singular integral operators*, Journal of Functional Analysis, **128** (1), (1995), 163-185.

[Pe95c] C. Pérez, *On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted L^p-spaces with different weights*, Proc. London Math. Soc. (3), **71** (1) (1995), 135-157.

[Pe] C. Pérez, *A course on Singular Integrals and weights*, Advanced Courses in Mathematics- CRM Barcelona. Birkhäuser, Basel, en prensa.

[PR] C. Pérez and Ezequiel Rela, *A new quantitative two weight theorem for the Hardy-Littlewood maximal operator*, Proc. Amer. Math. Soc., en prensa.

[Pet07] S. Petermichl, *The sharp bound for the Hilbert transform on weighted Lebesgue spaces in terms of the classical Ap characteristic*, Amer. J. Math., **129**(5) (2007), 1355-1375.

[Pet08] Stefanie Petermichl, *The sharp weighted bound for the Riesz transforms*, Proc. Amer. Math. Soc., **136**(4) (2008), 1237-1249.

[PV] S. Petermichl y A. Volberg, *Heating of the Beurling operator: weakly quasiregular maps on the plane are quasiregular*, Duke Math. Journal, **112** (2) (2002), 281-305.

[RR] M.M Rao y Z.D. Ren, *Theory of Orlicz spaces*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., **146**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.

[Rec13] J. Recchi, *Mixed A_1-A_∞ bounds for fractional integrals*, J. Math. Anal. Appl., **403** (2013), 283-296.

[Rec14] J. Recchi, *Quantitative weighted mixed weak-type inequalities for classical operators*, en preparación.

[Reg11] M. Reguera, *On Muckennhoupt-Wheeden conjeture*, Advances in Math., **227** (2011), 1436-1450.

[RT] M. Reguera y C. Thiele,*The Hilbert transform does not map $L^1(Mw)$ to $L^{1,\infty}(w)$*, Math. Res. Lett., **19** (1) (2012), 1-7.

[Sa82] E. Sawyer, *A characterization of a two-weight norm inequality for maximal operators*, Studia Math., **75** (1) (1982), 1-11.

[Sa84] E. Sawyer, *A two weight weak type inequality for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., **281**(1) (1984), 339-345.

[Sa85] E. Sawyer,*A weighted weak type inequality for the maximal function*, Proc. Amer. Math. Soc., **93** (1985), 610-614.

[Sa88] E. Sawyer, *A Characterization of a two-weight norm inequality for fractional and poisson integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., **308** (2) (1988), 533-545.

[SW] E. Sawyer y R. Wheeden, *Weighted inequalities for fractional integrals on euclidean and homogeneous spaces*, Amer. J. Math., **114** (1992), 813-874.

[St69] E.M. Stein,*Note on the class L logL*, Studia Math.**32** (1969), 305-310.

[St70] E.M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Prinnceton, New Jersey, (1970).

[SW] E.M. Stein y G. Weiss, *Interpolation of operators with change of measures*, Trans. Amer. Math. Soc., **87** (1958), 159-172.

[W87] J.M. Wilson, *Weighted inequalities for the dyadic square function without dyadic A_∞*, Duke Math. J., **55** (1) (1987), 19-50.

[W89] J.M. Wilson, *Weighted norm inequalities for the continuous square function*, Trans. Amer. Math. Soc., **314** (2) (1989), 661-692.

[W08] J.M. Wilson, *Weigthed Littlewood-Paley theory and exponential-square integrability*, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, **1924** (2008).

[W1] J. Wittwer, *A sharp estimate on the norm of the martingale transform*, Math. Res. Lett., 7(1):1–12, 2000.

[W2] J. Wittwer, *A sharp estimate on the norm of the continuous square function* Proc. Amer. Math. Soc., 130(8):2335–2342 (electronic), 2002.