



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Análisis y reducción de la distorsión para técnicas de
modulación de pulsos

TESIS DE DOCTOR EN INGENIERÍA

Mg. Ing. Fernando Chierchie

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2016

Prefacio

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Instituto de Investigaciones en Ingeniería Eléctrica “Alfredo Desages” (UNS-CONICET), durante el período comprendido entre el 1 de Abril de 2011 y el 30 de Octubre de 2015, bajo la dirección del Ing. Eduardo Paolini, Profesor Adjunto del Departamento de Ingeniería Eléctrica y de computadoras, Área 1, Campos y Circuitos, Procesamiento Digital de Señales.

Fernando Chierchie
Bahía Blanca, 2016.



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el/...../....., mereciendo
la calificación de(.....)

Resumen

La modulación digital por ancho de pulso (PWM por sus siglas en inglés) utilizada en amplificadores conmutados convierte las muestras de una señal discreta en una señal binaria compuesta por pulsos de ancho variable que posee intrínsecamente altos niveles de distorsión en banda base. En esta tesis se estudian y proponen técnicas de modulación digital de tiempo real que presentan muy baja distorsión incluso cuando se utilizan frecuencias de conmutación de apenas el doble de la máxima frecuencia de la señal moduladora.

Se obtiene un modelo discreto no lineal de la modulación PWM que captura en forma precisa el comportamiento de la modulación en banda base, desde frecuencia cero hasta la mitad de la frecuencia de conmutación. El modelo se extiende para modelar también otros fenómenos prácticos como variaciones en la amplitud de los pulsos y corrimientos en los flancos ascendentes y descendentes de la señal PWM. Una serie de simplificaciones permite obtener modelos basados en estructuras tipo Hammerstein generalizadas conformadas por la conexión paralela de potencias y filtros lineales que modelan la dinámica del modulador.

Utilizando estos modelos se desarrollan algoritmos digitales que permiten determinar los ciclos de trabajo de la señal PWM a partir de las muestras de la señal de entrada garantizando distorsión nula de la señal PWM en banda base.

Un modulador basado en el método iterativo de Newton permite obtener una estructura sencilla capaz de ser implementada en tiempo real en procesadores digitales de señales. Este modulador se extiende para compensar variaciones en las amplitudes de los pulsos. Se presenta también otro método de modulación basado en una estructura de predistorsión adaptiva conocida como arquitectura de aprendizaje indirecto que estima la inversa del modelo de la modulación PWM utilizando un algoritmo de cuadrados mínimos recursivo. Estos métodos de modulación junto con otro método basado en una inversa de Volterra se comparan en diferentes condiciones de operación mediante simulaciones y mediciones experimentales a partir de implementaciones en tiempo real y utilizando procesadores digitales de señales.



Abstract

Digital pulse width modulation (PWM) used in switched amplifiers converts samples of a discrete-time signal into a binary signal composed of pulses of variable width, introducing high levels of baseband distortion. In this thesis real-time digital PWM modulators having very low distortion even when the switching frequency is just twice the maximum frequency of the modulating signal are presented.

A nonlinear discrete-time model capturing in detail the baseband behavior (from zero Hertz to half the switching frequency) of the PWM modulator is developed. The model is extended to model other practical phenomena such as variations in the amplitude of the pulses and shifts in the switching times (rising and falling edges of the PWM signal). A number of simplifications allows to obtain a generalized Hammerstein structure composed of the parallel connection of power and linear filters which models the dynamics of the system.

Using this model, modulation algorithms to determine the duty cycle of the PWM signal from the samples of the input signal ensuring zero baseband distortion are developed. A modulator based on the Newton iterative method, enables a simple structure that can be implemented in real time on digital signal processors. This modulator is extended to compensate for variations in the amplitudes of the pulses. Another modulation method based on an structure known as indirect learning architecture that estimates an inverse model of PWM modulator using a recursive least squares algorithm is also presented. These modulation algorithms and another method based on Volterra inverse are compared in different operating conditions through simulations and experimental measurements from a real-time implementation using digital signal processors.



Índice general

Índice de figuras	v
Índice de tablas	ix
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes y enfoque de la Tesis	2
1.1.1. Variación en la amplitud de los pulsos	5
1.1.2. Variaciones de los tiempos de conmutación: tiempos muertos	6
1.2. Organización de la Tesis	7
2. Modelos de moduladores digitales por ancho de pulso	9
2.1. Modelo del modulador PWM ideal	10
2.1.1. Notación matricial	13
2.1.2. Modelo Hammerstein generalizado	14
2.1.3. Modelo Hammerstein finito dimensional para el cálculo en tiempo real	15
2.1.3.1. Truncación de las respuestas impulsivas $c_{i,n}$	15
2.1.3.2. Truncación del orden del modelo	16
2.1.4. Comportamiento del modelo del modulador PWM ideal	18
2.2. Modulador PWM con pulsos de amplitud variable	20
2.2.1. Modelo Hammerstein para pulsos de amplitud variable	23
2.2.2. Simplificaciones del modelo Hammerstein generalizado para pulsos de amplitud variable	24
2.2.3. Comportamiento del modelo del modulador PWM con pulsos de amplitud variable	24
2.3. Modulador PWM incluyendo variaciones de los tiempos de conmutación	25
2.3.1. Modelo que incluye variaciones en los tiempos de conmutación	27

ÍNDICE GENERAL

2.3.2.	Modelo Hammerstein incluyendo variaciones en los tiempos de conmutación	28
2.3.3.	Simplificaciones del modelo Hammerstein generalizado incluyendo variaciones en los tiempos de conmutación	29
2.3.4.	Un caso particular de variación de los tiempos de conmutación: tiempos muertos	32
2.3.4.1.	Limitaciones del modelo con tiempo muerto	34
2.3.5.	Comportamiento del modelo con tiempo muerto	35
3.	Modulación digital PWM sin distorsión en banda base	39
3.1.	Modulador PWM basado en método iterativo de Newton	40
3.1.1.	Solución iterativa	41
3.1.1.1.	Ejemplos de aplicación de los Teoremas 1 y 2	43
3.1.2.	Procesamiento por bloques	43
3.1.2.1.	Error debido al procesamiento por bloques	45
3.1.3.	Simulaciones del modulador PWM Newton por bloques con Jacobiano completo	46
3.1.3.1.	Análisis espectral	48
3.1.4.	Alternativas para el cómputo del Jacobiano	51
3.1.5.	Modulador PWM Newton basado en el Jacobiano diagonal: método iterativo escalar	55
3.1.5.1.	Selección de los parámetros del modulador PWM Newton	57
3.1.6.	Análisis de un caso práctico que no satisface la restricción de amplitud	59
3.2.	Modulador PWM Newton incluyendo compensación de la variación de amplitud	60
3.2.1.	Modulador en tiempo real	61
3.2.1.1.	Extrapolador	62
3.2.1.2.	Diagrama en bloques	62
3.2.2.	Método de igualado de área (IA)	64
3.2.3.	Simulaciones del modulador PWM Newton con compensación de variación de amplitud de los pulsos	65
3.3.	Modulador PWM adaptivo	66
3.3.1.	Postinversa y preinversa de sistemas no lineales	68
3.3.2.	Identificación adaptiva de la estructura Hammerstein paralelo	69

3.3.2.1. Un comentario sobre el problema de modelado inverso	72
3.4. Modulador PWM basado en la inversa de Volterra de orden p	73
3.5. Simulaciones	74
4. Resultados experimentales	87
4.1. Aspectos prácticos de la implementación y de las mediciones	88
4.1.1. Señal digital de entrada	90
4.1.2. Configuración experimental para las mediciones	92
4.1.3. Estructura de los algoritmos implementados en los DSPs	95
4.1.4. Algoritmos complementarios: <i>noise-shaping</i> y <i>dithering</i>	96
4.2. Verificación experimental del PWM Newton	98
4.2.1. Mediciones espectrales	99
4.2.2. Distorsión armónica total más ruido (THD+N) en función de la frecuencia	105
4.3. Verificación experimental del PWM Volterra	108
4.3.1. Distorsión armónica total más ruido (THD+N) en función de la frecuencia	111
4.3.2. PWM Volterra operando a $f_s = 88$ kHz	111
4.4. Verificación experimental del PWM adaptivo F.L.	114
4.5. Limitaciones de la técnica propuesta	119
5. Conclusiones	121
A. Demostraciones de los teoremas	125
A.1. Definiciones y propiedades de las funciones involucradas	125
A.1.1. Notación matricial y sistema de dimensión finita	126
A.1.2. Propiedades de la función ρ y de su Jacobiano $D\rho$	127
A.2. Prueba de los teoremas del modulador PWM Newton	134
A.2.1. Prueba del Teorema 1 del Capítulo 3	134
A.2.2. Prueba del Teorema 2 del Capítulo 3	135
A.3. Prueba del Teorema 3	136
A.4. Análisis de convergencia del modulador PWM adaptivo	138
A.4.1. Prueba del Teorema 4 del Capítulo 3	138
Referencias	141

ÍNDICE GENERAL

Índice de figuras

1.1. Diagrama en bloques de un amplificador clase D.	1
2.1. Esquema utilizado para obtener el modelo discreto de la modulación PWM. .	11
2.2. Convolución entre un pulso $p_k(t)$ y $h_{LP}(t)$	12
2.3. Respuestas impulsivas de los filtros $c_{i,n}$ para i entre 1 y 11.	16
2.4. Respuestas en frecuencia $H_i(e^{j\omega})$ de los filtros con respuesta impulsiva $h_{i,n}$. .	17
2.5. Modelo discreto modulador PWM	17
2.6. Comparación espectros (ancho de banda extendido) modelo y señal PWM . .	19
2.7. Comparación espectros modelo y señal PWM	21
2.8. Ejemplo de una señal PWM donde la amplitud de los pulsos no es constante.	22
2.9. Convolución entre un pulso $v_k p_k(t) = (1 + \Delta v_k) p_k(t)$ y $h_{LP}(t)$	22
2.10. Modelo de banda base del PWM con pulsos de amplitud variable $v_n = 1 + \Delta v_n$.	24
2.11. Comparación espectros modelo y señal PWM con amplitud de pulsos variable	26
2.12. Convolución incluyendo variaciones en los tiempos de conmutación	28
2.13. Modelo del PWM incluyendo variaciones en los tiempos de conmutación . . .	31
2.14. Amplificador de potencia conmutado para la señal PWM (estructura básica).	32
2.15. Formas de onda con tiempo muerto	33
2.16. Discretización de la salida y de la corriente.	34
2.17. Modelo discreto para el modulador PWM incluyendo tiempos muertos.	35
2.18. Comparación espectros modelo y señal PWM con tiempos muertos	36
2.19. Simulación tiempos muertos con señal moduladora aleatoria	37
3.1. Arquitectura para el procesamiento por bloques.	44
3.2. Alternativa para la implementación del procesamiento por bloques.	45
3.3. Cota para el error de procesamiento por bloques \bar{e}_B	46

ÍNDICE DE FIGURAS

3.4. Error de procesamiento por bloques para las cuatro señales simuladas	47
3.5. Espectro en frecuencia. Señal moduladora 1: senoide $f_m = 0,1f_s$	49
3.6. Espectro en frecuencia. Señal moduladora 2: multitono.	50
3.7. Espectro en frecuencia. Señal moduladora 3: ruido aleatorio.	52
3.8. Espectro en frecuencia. Señal moduladora 4: IMD.	53
3.9. Representación en bloques de la iteración k -ésima	56
3.10. Etapas del modulador PWM Newton.	56
3.11. Gráfico del THD+N [dB]	58
3.12. Experimento con señal de audio	59
3.13. Representación gráfica de la extrapolación	62
3.14. Diagrama en bloques del PWM Newton con compensación de amplitud.	63
3.15. THD+N [dB] en función del largo N de los filtros FIR para $f_{max}\{v_n\} = 0,003$	66
3.16. THD+N [dB] en función de la máxima frecuencia de v_n para $N = 23$	67
3.17. PWM adaptivo en línea, basado en la arquitectura ILA	67
3.18. PWM adaptivo fuera de línea	68
3.19. Representación gráfica de la matriz \mathbf{R}_P	72
3.20. Espectro de la señal de entrenamiento para el PWM adaptivo fuera de línea.	75
3.21. SNR en función de la longitud de los filtros FIR, señal aleatoria	77
3.22. Espectros de los moduladores PWM para una excitación aleatoria pasa banda	78
3.23. SNR en función de la longitud de los filtros FIR, señal musical	79
3.24. Espectros de los moduladores PWM para una excitación musical	80
3.25. SNR en función de la longitud de los filtros FIR, señal multitono.	82
3.26. Espectros de los moduladores PWM para una excitación multitono	83
3.27. SNR en función de la longitud de los filtros FIR, señal IMD	84
3.28. Espectros de los moduladores PWM para una excitación IMD	85
4.1. Fotos configuraciones experimentales	89
4.2. Kit del DSP TMS320F28335	90
4.3. Foto de la placa construida. Incluye DSP y etapa de potencia.	91
4.4. Espectro de la fuente del Kit SHARC 21469 EZ-KIT	93
4.5. Espectro de la batería utilizada.	94
4.6. Estructura del programa implementado en el DSP de Texas Instruments.	95
4.7. Estructura del programa implementado en el DSP SHARC de Analog Devices.	96

4.8. Diagrama en bloques del algoritmo de <i>noise-shaping</i>	97
4.9. Medidas espectrales IMD PWM Newton	100
4.10. Medidas espectrales (rango extendido) IMD PWM Newton	101
4.11. Señal multitono temporal, demodulada y capturada con osciloscopio.	102
4.12. Medidas espectrales multitono PWM Newton	103
4.13. Medidas espectrales (rango extendido) multitono PWM Newton	104
4.14. Medición con osciloscopio del ruido Gaussiano pasa banda	105
4.15. Medidas espectrales de ruido PWM Newton	106
4.16. Medidas de THD+N para el PWM Newton	107
4.17. Medidas espectrales IMD PWM Volterra	109
4.18. Medidas espectrales ruido PWM Volterra	110
4.19. Medidas de THD+N para el PWM Volterra	112
4.20. Medidas espectrales IMD PWM Volterra con $f_s = 88$ kHz	113
4.21. Medidas espectrales ruido PWM adaptivo F.L.	115
4.22. Medidas espectrales sinusoidal de 1750 Hz PWM adaptivo F.L.	117
4.23. Medidas espectrales sinusoidal de 3125 Hz PWM adaptivo F.L.	118
A.1. Derivada segunda $f_m''(w)$ en función de w para $m = 0, 1, 2$ y 3	128
A.2. Cotas para los términos a y b que conforman $(-1)^{m+1} f_m''(w) = a + b$ para $m > 1$	129
A.3. $h = \alpha\beta\gamma/2 = 1$ en función de x_b y w_b	135

ÍNDICE DE FIGURAS

Índice de tablas

2.1. Respuestas impulsivas filtros FIR	15
2.2. Respuestas impulsivas filtros FIR incluyendo variaciones en los tiempos de conmutación	30
3.1. THD+N y variaciones de los ciclos de trabajo.	51
3.2. THD+N en dB y complejidad de las alternativas propuestas	55
3.3. Componentes del sistema inverso de Volterra de orden p	74

ÍNDICE DE TABLAS

Capítulo 1

Introducción

El objetivo general de la tesis es aplicar técnicas de procesamiento digital de señales para mejorar la respuesta espectral de señales moduladas por ancho de pulso (PWM por sus siglas en inglés) que excitan etapas de potencia de gran eficiencia. Estas etapas poseen elementos electrónicos activos que trabajan al corte y a la saturación y que por lo tanto consumen muy poca energía. Tanto la modulación como la etapa de potencia introducen distorsión en la banda de frecuencias de interés (banda base). Las fuentes de distorsión reconocen tres orígenes: aquellas causadas por el algoritmo de modulación, las que se producen por limitaciones electrónicas de la etapa de potencia, y por las variaciones en la tensión de alimentación.

En esta tesis se prestan resultados de análisis y compensación de la distorsión causada por la modulación digital por ancho de pulsos utilizada en amplificadores conmutados tipo clase D. Se deja de lado la visión tradicional de que la señal PWM se obtiene a partir de comparar la señal moduladora con una señal portadora tipo diente de sierra, triangular o un contador para el caso de la señal moduladora digital.

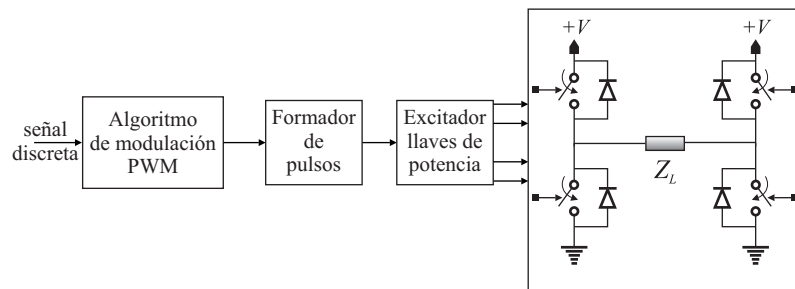


Figura 1.1: Diagrama en bloques de un amplificador clase D.

1. INTRODUCCIÓN

En primer lugar se encuentra que la relación entre los ciclos de trabajo de la señal PWM y las muestras de la señal demodulada puede modelarse como una relación no lineal con dinámica. Una vez obtenida la descripción matemática (un modelo), se proponen técnicas para compensar la distorsión no lineal causada por la modulación.

En la Fig. 1.1 se muestra un diagrama en bloques del sistema estudiado. El bloque “algoritmo de modulación PWM” es el encargado de convertir la señal discreta de entrada en los valores de anchos de pulso. Posteriormente el bloque “formador de pulsos” genera efectivamente la señal PWM a partir de los valores de ancho de pulso. El bloque “excitador llaves de potencia” es el encargado de generar las señales que manejan las llaves (transistores de potencia) del bloque de la derecha. Estas llaves se encargan de conectar y desconectar la carga Z_L a la fuente de alimentación de potencia $+V$ o la tierra del circuito, amplificando en potencia los pulsos generados por el formador de pulsos. En paralelo con las llaves se conecta un diodo que permite la circulación de corriente cuando las dos llaves que están conectadas en serie se encuentran abiertas.

Esta tesis se enfoca en la modulación PWM digital aunque también se discuten algunos fenómenos causados por la etapa de potencia al amplificar los pulsos de la señal PWM.

1.1. Antecedentes y enfoque de la Tesis

La amplificación de potencia de manera eficiente ha atraído la atención de los investigadores desde los esfuerzos pioneros de Black [9], para formalizar varias alternativas de modulación por pulsos. Una de las técnicas más utilizadas es la modulación por ancho de pulsos (PWM por sus siglas en inglés), con un gran número de variantes y alternativas que permiten, a partir de una señal moduladora de entrada, obtener otra señal formada por un tren de pulsos, normalmente uniformemente espaciados, cuyos anchos o ciclos de trabajo dependen de la señal moduladora.

A lo largo del tiempo, la modulación PWM ha estado presente en diferentes áreas siendo la electrónica de potencia, en particular aplicaciones como convertidores conmutados y fuentes de alimentación, una de las más importantes. En 1975 la presentación del primer circuito integrado comercial para el control mediante PWM de una fuente de alimentación comenzó con el desarrollo de una nueva industria [8].

La idea de utilizar técnicas de conmutación para amplificadores de potencia de señales despertó el interés de los especialistas en la década de 1960 [22, 70]. La principal ventaja del

amplificador clase D comparado con otro tipo de amplificadores electrónicos es su alta eficiencia alcanzando más del 90 % en implementaciones prácticas (teóricamente 100 % eficientes). Esto representa una gran diferencia frente a otras topologías como los amplificadores clase A y clase B con 25 % y 78,5 % de eficiencia teórica máxima respectivamente. Los amplificadores clase AB por su parte ofrecen un compromiso entre la linealidad del amplificador clase A y la eficiencia del amplificador clase B y poseen una eficiencia máxima teórica inferior al 78,5 % [59]. Los amplificadores clase D son utilizados en aplicaciones portables para aumentar la autonomía del dispositivo [7], y en aplicaciones de potencias medias o altas donde permiten reducir el tamaño del amplificador y de los disipadores de calor [6].

Se han propuesto diferentes alternativas para implementar la modulación PWM [35]. La forma analógica tradicional conocida como PWM natural se obtiene a partir de la señal moduladora analógica, una señal portadora tipo diente de sierra o triangular cuya frecuencia determina la frecuencia de conmutación de las llaves y un comparador electrónico. El PWM natural posee un reducido contenido armónico en la banda base si la frecuencia de conmutación es varias veces mayor que la máxima frecuencia de la señal moduladora (usualmente mayor a 10/15 veces). La distorsión remanente está compuesta por bandas laterales de la frecuencia portadora. Su impacto en banda base puede reducirse incrementando la frecuencia portadora aunque esto disminuye la eficiencia debido al incremento de las pérdidas por conmutación en los semiconductores de la etapa de potencia.

La implementación discreta o digital de la modulación PWM resulta actualmente de gran interés debido a que la señal de entrada es, en la mayoría de los casos, digital. Su versión más difundida se conoce como PWM uniforme, y se trata de una relación afín entre los ciclos de trabajo y las muestras de la señal de entrada. El PWM uniforme exhibe una mayor distorsión no lineal que el PWM natural. Esta distorsión está compuesta no solo por las bandas laterales de la frecuencia portadora sino también por armónicos de la señal moduladora [11, 16, 47, 50, 65], que no pueden reducirse en la misma magnitud mediante el incremento de la frecuencia portadora. En cualquiera de los casos (PWM natural o PWM uniforme) la distorsión en banda base producida por el proceso de modulación no puede ser eliminada en las etapas posteriores del amplificador clase D, compuestas por la etapa de potencia (transistores), por el filtro demodulador pasivo y por el actuador (el altavoz).

Los esfuerzos de investigación recientes están orientados a desarrollar variantes del modulador PWM digital para reducir o eliminar la distorsión dentro de cierta banda de frecuencias. Algunos de estos enfoques están diseñados para atenuar ciertos armónicos específicos [28], o

1. INTRODUCCIÓN

para emular digitalmente el comportamiento de la modulación PWM natural, una técnica conocida como PWM pseudonatural [3, 40, 63]. Estos esquemas suponen que la frecuencia de conmutación es mucho mayor que la máxima frecuencia de la señal moduladora.

Una alternativa diferente consiste en diseñar un algoritmo de modulación que no produzca distorsión en banda base independientemente de la frecuencia de modulación PWM. Esto permite obtener curvas de distorsión armónica total mas ruido (THD+N) planas en función de la frecuencia, incluso para frecuencias bajas de conmutación.

Este enfoque es de interés también en otras áreas, por ejemplo, en el campo de la neurociencia donde se han desarrollado algoritmos para la codificación y decodificación temporal de señales de banda limitada con recuperación perfecta [43, 44]; sin embargo, el proceso de demodulación propuesto en este caso no es útil para aplicaciones de potencia. Uno de los primeros intentos por resolver este problema fue la modulación click [46, 69]. Basándose en las propiedades de las señales analíticas, este esquema de modulación complejo es capaz de representar señales de banda limitada utilizando formas de onda tipo PWM con distorsión nula en la banda base. No ha recibido mucha atención por varios años, pero recientemente este método ha capturado la consideración de los investigadores [69, 73]. Aunque la modulación no parece directamente adecuada para la aplicación en línea, nuevos desarrollos podrían cambiar este escenario [67, 68].

En esta dirección, resultados recientes muestran que una señal de banda limitada y acotada en amplitud puede representarse utilizando una señal PWM sin distorsión en banda base y utilizando una frecuencia de conmutación tan baja como el doble de la máxima frecuencia de la señal moduladora en forma análoga al criterio de Nyquist para el muestreo de señales [38].

En [29] se estudia el problema de determinar la duración y la posición de los pulsos para reducir al mínimo la frecuencia media de conmutación. La solución requiere resolver un sistema de ecuaciones no lineales simultáneas basados en la serie de Fourier. El resultado es una señal PWM de frecuencia variable, donde la frecuencia media de conmutación puede ser ligeramente mayor que la frecuencia máxima de la señal moduladora. Aunque se proporcionan algunas consideraciones para la modulación de señales no periódicas, no se presenta un algoritmo de modulación adecuado para aplicación en línea.

Por otra parte en [1, 2] la relación entre las muestras de la señal moduladora y las muestras de la señal PWM demodulada se modela con un filtro de Volterra y su inversa es utilizada

como un prefiltro para reducir la distorsión en banda base. Este método se discute con más detalle en la Sección 3.4.

En esta tesis se obtiene un modelo para el modulador PWM digital, válido para señales moduladoras discretas acotadas y de banda limitada. A partir de este modelo se presentan moduladores PWM digitales que operan en tiempo real y presentan nula o baja distorsión en banda base incluso para bajas frecuencias de conmutación. La estrategia propuesta se basa en determinar los ciclos de trabajo de la señal PWM tal que las muestras de la señal PWM filtrada con un filtro pasa bajos ideal, que representan el contenido de banda base de la señal PWM, coincidan con las muestras de la señal moduladora.

Utilizando esta perspectiva se presentan dos moduladores diferentes. El resultado principal es un modulador PWM que extiende el trabajo previo presentado en la literatura realizando las siguientes contribuciones: 1) demostración de que este enfoque puede ser reformulado como la solución de un problema de función inversa multidimensional que se puede resolver utilizando métodos iterativos, 2) cuantificación del nivel de distorsión que es alcanzable luego de ajustar los ciclos de trabajo en cada iteración, 3) desarrollo de una arquitectura basada en filtros FIR para implementar el algoritmo de modulación propuesto en tiempo real. El otro método propuesto se basa en una estructura no lineal adaptiva que utiliza el método de cuadrados mínimos recursivo para obtener sus coeficientes. Los métodos son verificados experimentalmente operando en tiempo real utilizando un procesador digital de señales.

Además, se estudian algunos otros fenómenos presentes en los amplificadores clase D, se analiza el impacto negativo que causan sobre la calidad de la señal y en uno de los casos se propone una alternativa para reducir sus efectos.

1.1.1. Variación en la amplitud de los pulsos

Los amplificadores clase D presentan una alta sensibilidad a las variaciones y ruido de la fuente de alimentación $+V$ que afectan directamente la amplitud de los pulsos de la señal PWM. Pueden encontrarse en la literatura diferentes técnicas para su compensación. En [5] se mide la fuente de alimentación utilizando un conversor A/D y se presenta una técnica de corrección en tiempo real del error basado en escalar los ciclos de trabajo. En [30, 62] se modelan en forma lineal las variaciones de amplitud de la fuente que alimenta un amplificador clase D analógico y se presentan expresiones para el índice de rechazo de fuente y para la intermodulación producida por la variación de fuente. Para la compensación se propone un circuito analógico que modifica la generación de la señal portadora, mejorando el rechazo a las

1. INTRODUCCIÓN

variaciones de fuente. En [4] el ruido o variación de fuente se compensa ajustando el ancho de los pulsos: si aumenta la tensión de la fuente los pulsos se angostan, mientras que si la tensión disminuye los pulsos se ensanchan, para mantener el área constante (igualado de áreas). En [64] se muestrea y extrapola la amplitud de la tensión de la fuente de alimentación y esta información es utilizada para modificar una versión interpolada de la señal de entrada. Otro esquema de compensación en tiempo real de las variaciones de la fuente de alimentación se presenta en [10], en donde se muestrea y realimenta al modulador PWM una versión escalada de la tensión de alimentación. El retardo del conversor A/D es el principal limitante del algoritmo propuesto. En [23] se presenta una compensación de lazo abierto basada en una descripción lineal del amplificador conmutado.

En general todos estos métodos se basan en un análisis lineal del modulador PWM y en compensar el error producido por las variaciones de fuente aumentando o disminuyendo el ancho de los pulsos para mantener el área constante (igualado de áreas).

En esta tesis se presenta un modelo que incluye simultáneamente los efectos de la modulación PWM y de la variación de amplitud de los pulsos. Utilizando este modelo, se propone una extensión del algoritmo de modulación PWM propuesto para incluir y compensar los efectos de la variación en la amplitud. Se muestra además que el igualado de áreas no es suficiente para eliminar completamente la distorsión causada por las variaciones de amplitud de los pulsos.

1.1.2. Variaciones de los tiempos de conmutación: tiempos muertos

En aplicaciones prácticas existen diferentes fenómenos que pueden producir corrimientos de los tiempos de conmutación, es decir desplazamientos en la ubicación de los flancos ascendentes y descendentes de la señal PWM, modificando tanto los anchos de los pulsos como su ubicación. Dentro de los fenómenos prácticos más conocidos pueden mencionarse: (1) fluctuaciones en el reloj utilizado para generar la señal PWM (conocido por su nombre en inglés como *jitter*), (2) resolución temporal finita en la generación digital de los pulsos y (3) tiempos muertos, necesarios para evitar la conducción simultánea de las llaves conectadas en serie en el esquema de la Fig. 1.1 lo que causaría un cortocircuito en la fuente de alimentación.

Uno de los mayores causantes de distorsión en etapas de potencia es el tiempo muerto. Para modelar este fenómeno normalmente se utilizan modelos promediados que solo capturan parte del comportamiento del sistema. Estos modelos son utilizados para el análisis y simulación del efecto del tiempo muerto [39] y también para el diseño de métodos de compensación

[34, 76]. Existen también métodos de análisis en el dominio frecuencia [16, 21, 42]. Estos modelos permiten conocer las características de las componentes frecuenciales de distorsión introducida por el tiempo muerto. En general la simulación de este tipo de sistemas operando a altas frecuencias de conmutación resulta en largos tiempos de simulación y/o problemas de convergencia [39] especialmente cuando se pretende incorporar el comportamiento detallado del circuito, como es el caso de los tiempos muertos. Por esta razón resulta útil disponer de un modelo discreto más adecuado para simulación, análisis o diseño de compensadores. Los modelos discretos también encuentran aplicación en esquemas de compensación de tiempos muertos como modelos de referencia de algoritmos adaptivos [34]. En esta tesis se presenta un modelo que permite capturar el efecto de las variaciones en los tiempos de conmutación, tanto del flanco ascendente como el flanco descendente de los pulsos. Como un caso particular se presenta un modelo discreto para los tiempos muertos que permite analizar su impacto en la calidad del amplificador.

1.2. Organización de la Tesis

En el Capítulo 2 se obtienen modelos para la modulación PWM digital. Esto incluye un modelo del modulador PWM ideal (sin perturbaciones), un modelo del modulador PWM con variaciones en la amplitud de los pulsos y un modelo del modulador PWM con variaciones en los tiempos de conmutación.

En el Capítulo 3 se presentan moduladores PWM que teóricamente no presentan distorsión en banda base, que operan en tiempo real y que preservan su característica de cero distorsión incluso cuando se utilizan frecuencias de PWM bajas en relación a la máxima frecuencia de la señal, lo que en general no es posible con otras técnicas presentadas en la literatura. Desde el punto de vista de la implementación práctica se espera que la distorsión producida por la modulación PWM sea reducida a niveles despreciables. El resultado principal se presenta en la Sección 3.1 y se extiende en la Sección 3.2 para el caso en que los pulsos poseen amplitud variable. Un algoritmo alternativo utilizando filtrado adaptivo se desarrolla en la Sección 3.3. En la Sección 3.4 se resumen los principios básicos de un método presentado recientemente en la literatura [1, 2]. Este método se implementó experimentalmente durante una estadía de investigación en Noruega¹.

¹Programa BEC.AR de estadías cortas en el exterior para doctorandos en ciencia, tecnología e innovación productiva. Jefatura de Gabinete de Ministros. Banco Interamericano de Desarrollo (BID). Del 15 de agosto de 2014 al 29 de diciembre de 2014. Tutor: profesor Sven Ole Aase de la University of Stavanger, Noruega.

1. INTRODUCCIÓN

En el Capítulo 4 se presentan resultados experimentales de los moduladores PWM digitales propuestos y estudiados en el Capítulo 3 utilizando procesadores digitales de señales. Las mediciones se obtuvieron mediante analizadores espectrales de señales. Utilizando señales de pruebas típicas se obtienen los espectros de la señal PWM producidos por los métodos de modulación estudiados y también por la modulación PWM uniforme lo que permite observar la presencia o no de las componentes espurias en banda base en uno u otro caso. También se realizaron mediciones cuantitativas de distorsión armónica total mas ruido (THD+N). En este capítulo también se discuten algunas cuestiones prácticas así como algoritmos auxiliares utilizados y las plataformas y prototipos construidos.

Las conclusiones se presentan en el Capítulo 5 y las demostraciones de los principales resultados del Capítulo 3 se encuentran en el Apéndice.

Capítulo 2

Modelos de moduladores digitales por ancho de pulso

La modulación digital por ancho de pulso se basa en obtener los ciclos de trabajo de una onda cuadrada (señal PWM) a partir de las muestras de la señal de entrada (señal moduladora) de banda limitada. Este proceso es inherentemente no lineal dado que se pasa de una señal de banda limitada a una señal tipo tren de pulsos cuyo contenido frecuencial es infinito.

En este capítulo se obtienen modelos no lineales de tiempo discreto para la modulación PWM y también se estudian algunos fenómenos prácticos que se presentan al usar modulación PWM en amplificadores clase D. Estos modelos sirven como base para los métodos de compensación y reducción de la distorsión producida por los moduladores digitales PWM que se presentan en el Capítulo 3.

La modulación PWM digital es un proceso de conversión digital/analógico (D/A). Los modelos discretos obtenidos modelan el comportamiento de la modulación en “banda base”, es decir en el rango de frecuencia desde 0 hasta $f_s/2$ siendo f_s la frecuencia de muestreo que, por simplicidad, se considera que coincide con la frecuencia de la modulación PWM. Los modelos desarrollados establecen la relación matemática entre las muestras de la señal moduladora y las muestras de la señal PWM luego de aplicar a la misma un filtro pasa bajos para evitar solapamiento espectral (aliasing) de las componentes de alta frecuencia de la señal PWM.

En la Sección 2.1 se obtiene un modelo discreto no lineal de la modulación PWM digital. Se lo denomina “modelo del modulador PWM ideal” porque representa el proceso de conversión

2. MODELOS DE MODULADORES DIGITALES POR ANCHO DE PULSO

de una señal de banda limitada a las muestras de la señal PWM demodulada asumiendo condiciones ideales de operación: la fuente de alimentación de CC que genera el nivel alto de la señal PWM no posee distorsión y los tiempos de conmutación de la señal PWM no se ven afectados por ningún fenómeno práctico como por ejemplo cuantización o tiempos de conmutación no nulos de los semiconductores.

En la Sección 2.2 se obtiene un modelo discreto no lineal de la modulación PWM que tiene en cuenta una posible variación de la amplitud de los pulsos. Esta variación puede ser causada, por ejemplo, por perturbaciones en la fuentes de alimentación de CC. Se considera un caso particular en que la amplitud del pulso se mantiene constante pero puede variar entre un pulso y el otro.

Finalmente, en la Sección 2.3 se analiza el fenómeno de corrimiento de los flancos ascendentes y descendentes de la señal PWM. En particular se estudia el caso en que este corrimiento es producido por los tiempos muertos necesarios en las etapas de potencias de los amplificadores clase D para evitar el cortocircuito de la fuente de alimentación [17].

2.1. Modelo del modulador PWM ideal

La señal PWM $p_{id}(t)$ producida por un modulador PWM ideal toma valores 0 (nivel bajo) y 1 (nivel alto) y puede representarse como

$$p_{id}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[u\left(t - \left[n - \frac{w_n}{2}\right]T\right) - u\left(t - \left[n + \frac{w_n}{2}\right]T\right) \right] \quad (2.1)$$

donde $u(t)$ es la función escalón y $0 \leq w_n \leq 1$ es el ciclo de trabajo normalizado por el período de conmutación $T = 1/f_s$ y f_s es la frecuencia de conmutación. Los centros de los pulsos que conforman la señal PWM están espaciados T segundos uno de otro.

En el caso de la modulación PWM uniforme los ciclos de trabajo w_n se calculan directamente a partir de las muestras x_n de la señal de entrada como $w_n = x_n$ con $0 \leq x_n \leq 1$. Si se tiene que la amplitud de la entrada varía en el rango $-1 \leq x_n \leq 1$ entonces los ciclos de trabajo del PWM uniforme se calculan como $w_n = (x_n + 1)/2$. A lo largo de la tesis se asume que $0 \leq w_n \leq 1$ y que $0 \leq x_n \leq 1$ salvo que se indique lo contrario.

Para modelar el comportamiento del sistema en el rango de frecuencias entre 0 y $f_s/2$ se obtiene la señal demodulada $y(t)$ filtrando la señal $p_{id}(t)$ con un filtro pasa bajos ideal cuya frecuencia de corte es $f_s/2$ y su respuesta impulsiva es $h_{LP}(t) = f_s \text{sinc}(f_s t) = f_s \text{sen}(\pi f_s t)/(\pi f_s t)$.

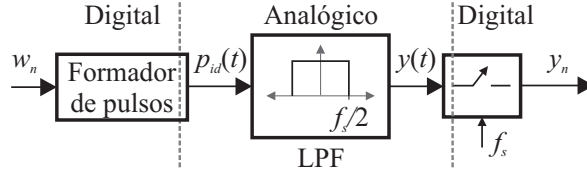


Figura 2.1: Esquema utilizado para obtener el modelo discreto de la modulación PWM.

Es decir,

$$y(t) = h_{LP}(t) * p_{id}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{LP}(\tau) p_{id}(t - \tau) d\tau, \quad (2.2)$$

donde “*” indica el cálculo de la convolución. La señal $y(t)$ es de banda limitada ya que no tiene contenido frecuencial por encima de $f_s/2$, y por lo tanto puede muestrearse a f_s para obtener la señal discreta $y_n = y(t)|_{t=nT}$, dada por

$$y_n = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{LP}(\tau) p_{id}(nT - \tau) d\tau. \quad (2.3)$$

En la Fig. 2.1 se muestra el esquema utilizado para obtener el modelo discreto. El bloque “formador de pulsos” transforma los anchos de pulsos w_n en la señal PWM $p_{id}(t)$. Posteriormente el filtro pasa bajos ideal (LPF) con frecuencia de corte $f_s/2$ da como resultado la señal analógica de banda limitada $y(t)$. Finalmente el muestreo de la señal $y(t)$ permite obtener la señal discreta y_n que modela en el dominio discreto el contenido de $p_{id}(t)$ en el rango de frecuencias $[0, f_s/2)$.

Para calcular la convolución en (2.3) es conveniente expresar la señal $p_{id}(t)$ como,

$$p_{id}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k(t), \quad (2.4)$$

donde $p_k(t)$ representa un pulso de altura unitaria y ancho $w_k T$ centrado en kT como se muestra en la Fig. 2.2(a).

Reemplazando (2.4) en (2.3) es posible calcular la convolución entre $p_{id}(t)$ y $h_{LP}(t)$ como la suma de convoluciones entre los pulsos $p_k(t)$ que conforman la señal PWM y la respuesta impulsiva $h_{LP}(t)$. Una representación del cálculo gráfico de una de estas convoluciones se

2. MODELOS DE MODULADORES DIGITALES POR ANCHO DE PULSO

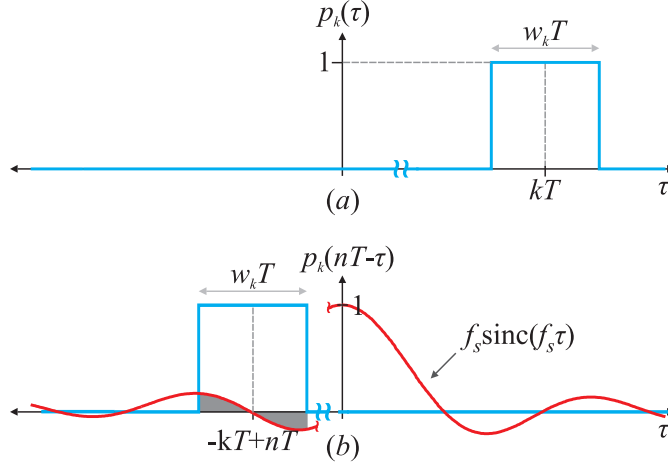


Figura 2.2: Convolución entre un pulso $p_k(t)$ y $h_{LP}(t)$.

muestra en la Fig. 2.2(b). La salida y_n puede calcularse como

$$\begin{aligned}
 y_n &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{LP}(\tau) p_k(nT - \tau) d\tau \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(-k+n-w_k/2)T}^{(-k+n+w_k/2)T} f_s \operatorname{sinc}(f_s \tau) d\tau \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{(m-w_n-m/2)T}^{(m+w_n-m/2)T} f_s \operatorname{sinc}(f_s \tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

obteniendo finalmente

$$y_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(w_{n-m}) \tag{2.6}$$

donde

$$f_m(w) = \frac{1}{\pi} (\operatorname{Si}[\pi(m+w/2)] - \operatorname{Si}[\pi(m-w/2)]) \tag{2.7}$$

y $\operatorname{Si}(z) = \int_0^z \frac{\operatorname{sen}(\tau)}{\tau} d\tau = \int_0^z \operatorname{sinc}(\tau/\pi) d\tau$ es la función seno integral.

La ecuación (2.6) describe la relación entre las muestras y_n de la señal demodulada con los ciclos de trabajo w_n y representa un modelo discreto no lineal que describe el comportamiento de la modulación PWM en el rango de frecuencias desde 0 hasta $f_s/2$.

2.1.1. Notación matricial

Como lo indica la ecuación (2.6), la señal y_n está relacionada con los ciclos de trabajo w_n a través de la función $f_m(w)$. Matricialmente es posible expresar al vector \mathbf{y} de muestras de salida como

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{w}) \quad (2.8)$$

donde \mathbf{w} es el vector de ciclos de trabajo. En forma explícita se tiene que

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \vdots \\ y_{-n} \\ \vdots \\ y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \cdots + f_{-2n}(w_n) + \cdots + f_{-n-1}(w_1) + f_{-n}(w_0) + f_{-n+1}(w_{-1}) + \cdots + f_0(w_{-n}) + \cdots \\ \vdots \\ \cdots + f_{-n-1}(w_n) + \cdots + f_{-2}(w_1) + f_{-1}(w_0) + f_0(w_{-1}) + \cdots + f_{n-1}(w_{-n}) + \cdots \\ \cdots + f_{-n}(w_n) + \cdots + f_{-1}(w_1) + f_0(w_0) + f_1(w_{-1}) + \cdots + f_n(w_{-n}) + \cdots \\ \cdots + f_{-n+1}(w_n) + \cdots + f_0(w_1) + f_1(w_0) + f_2(w_{-1}) + \cdots + f_{n+1}(w_{-n}) + \cdots \\ \vdots \\ \cdots + f_0(w_n) + \cdots + f_{n-1}(w_1) + f_n(w_0) + f_{n+1}(w_{-1}) + \cdots + f_{2n}(w_{-n}) + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Si se supone que las señales w_n e y_n son de longitud finita $Q = 2G + 1$, es posible definir el vector de muestras de salida como $\mathbf{y} = [y_{-G}, \dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots, y_G]^T$ y el vector de ciclos de trabajo $\mathbf{w} = [w_{-G}, \dots, w_{-1}, w_0, w_1, \dots, w_G]^T$. Por otra parte $\mathbf{g}(\cdot)$ es una matriz cuyos elementos dependen de \mathbf{w}

$$[\mathbf{g}(\mathbf{w})]_{i,j} = f_{i-j}(w_{-G+j-1}). \quad (2.10)$$

Más específicamente se tiene que

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_{-G} \\ \vdots \\ y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{-2G}(w_G) + \cdots + f_{-G-1}(w_1) + f_{-G}(w_0) + f_{-G+1}(w_{-1}) + \cdots + f_0(w_{-G}) \\ \vdots \\ f_{-G-1}(w_G) + \cdots + f_{-2}(w_1) + f_{-1}(w_0) + f_0(w_{-1}) + \cdots + f_{G-1}(w_{-G}) \\ f_{-G}(w_G) + \cdots + f_{-1}(w_1) + f_0(w_0) + f_1(w_{-1}) + \cdots + f_G(w_{-G}) \\ f_{-G+1}(w_G) + \cdots + f_0(w_1) + f_1(w_0) + f_2(w_{-1}) + \cdots + f_{G+1}(w_{-G}) \\ \vdots \\ f_0(w_G) + \cdots + f_{G-1}(w_1) + f_G(w_0) + f_{G+1}(w_{-1}) + \cdots + f_{2G}(w_{-G}) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

La ecuación (2.8) representa en forma matricial la relación no lineal que existe entre el vector de muestras de salida \mathbf{y} y el vector de ciclos de trabajo \mathbf{w} . En la Sección A.1 del Apéndice A se estudia en forma más detallada la representación matricial del modelo del modulador PWM.

2. MODELOS DE MODULADORES DIGITALES POR ANCHO DE PULSO

2.1.2. Modelo Hammerstein generalizado

Es posible obtener un modelo Hammerstein generalizado a partir de la descripción matemática dada por (2.6). Este tipo de sistemas está formado por la conexión de dos o más subsistemas tipo Hammerstein en paralelo en donde cada sistema tipo Hammerstein está compuesto por una no linealidad estática seguida de un filtro lineal que modela la dinámica del sistema.

La función $f_m(w)$ definida en (2.7) puede expandirse en series de potencias impares

$$f_m(w) = \begin{cases} c_{1,0}w + c_{3,0}w^3 + c_{5,0}w^5 + \dots, & \text{si } m = 0, \\ c_{3,m}w^3 + c_{5,m}w^5 + \dots, & \text{si } m \neq 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

donde $c_{i,m}$ son los coeficientes de la serie de potencia de $f_m(w)$ para cada valor de m . Utilizando esta expansión, el modelo obtenido en (2.6) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} y_n &= f_0(w_n) + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} f_m(w_{n-m}) \\ &= (c_{1,0}w_n + c_{3,0}w_n^3 + \dots) + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} (c_{3,m}w_{n-m}^3 + c_{5,m}w_{n-m}^5 + \dots) \\ &= c_{1,0}w_n + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (c_{3,m}w_{n-m}^3 + c_{5,m}w_{n-m}^5 + \dots). \end{aligned}$$

Cada término de la última línea representa el cálculo de una convolución discreta entre la potencia i -ésima w_n^i del ciclo de trabajo y un filtro cuya respuesta impulsiva es $c_{i,n}$, de modo que y_n puede calcularse como:

$$y_n = w_n c_{1,0} + w_n^3 * c_{3,n} + w_n^5 * c_{5,n} + \dots \quad (2.13)$$

donde “*” indica el cálculo de la suma de convolución. Es decir, que las muestras de la señal de salida resultan de la suma de los aportes de las potencias de las muestras de la señal w_n filtradas por los filtros $c_{i,n}$ con respuesta infinita al impulso. En otras palabras, por la conexión en paralelo de infinitos sistemas Hammerstein. Las ecuaciones para calcular las respuestas impulsivas $c_{i,n}$ para las potencias $i = 1$ a $i = 11$ se listan en la Tabla 2.1 y se muestran en la Fig. 2.3 donde se aprecia la característica de simetría y también puede observarse como decrece la amplitud de $|c_{i,n}|$ a medida que aumenta la potencia i y/o el valor de $|n|$.

La longitud infinita de las respuestas impulsivas $c_{i,n}$ indica que cada muestra de la señal y_n , que representa el contenido en banda base de la señal PWM $p_{id}(t)$, depende no solo del valor de ciclo de trabajo en el mismo instante de tiempo sino también de los ciclos de trabajo

2.1 Modelo del modulador PWM ideal

Tabla 2.1: Respuestas impulsivas de los filtros IIR $c_{i,n}$ y de los filtros FIR $h_{1,n}$ con soporte $0 \leq n < N - 1 = 2M$.

	Respuesta impulsiva $h_{i,n}$	
$h_{1,n}$	$c_{1,0} = 1$	si $n = M$
	0	si $n \neq M$
$h_{3,n}$	$c_{3,0} = -\pi^2/72$	si $n = M$
	$c_{3,m} = -(-1)^m/(12m^2) _{m=n-M}$	si $n \neq M$
$h_{5,n}$	$c_{5,0} = \pi^4/9600$	si $n = M$
	$c_{5,m} = \frac{(-1)^m}{480m^4} (-6 + m^2\pi^2) _{m=n-M}$	si $n \neq M$
$h_{7,n}$	$c_{7,0} = -\pi^6/2257920$	si $n = M$
	$c_{7,m} = -\frac{(-1)^m}{53760m^6} (120 - 20m^2\pi^2 + m^4\pi^4) _{m=n-M}$	si $n \neq M$
$h_{9,n}$	$c_{9,0} = \pi^8/836075520$	si $n = M$
	$c_{9,m} = \frac{(-1)^m}{11612160m^8} (-5040 + 840m^2\pi^2 - 42m^4\pi^4 + m^6\pi^6) _{m=n-M}$	si $n \neq M$
$h_{11,n}$	$c_{11,0} = -\pi^{10}/449622835200$	si $n = M$
	$c_{11,m} = -\frac{(-1)^m}{4087480320m^{10}} (362880 - 60480m^2\pi^2 + 3024m^4\pi^4 - 72m^6\pi^6 + m^8\pi^8) _{m=n-M}$	si $n \neq M$

pasados y futuros. Como la amplitud de las respuestas impulsivas decrece rápidamente es posible obtener un modelo aproximado para la modulación PWM.

2.1.3. Modelo Hammerstein finito dimensional para el cálculo en tiempo real

Para obtener un modelo causal e implementable que permita el cálculo en tiempo real de y_n se presentan dos simplificaciones. Por una parte se truncan y causalizan las respuestas impulsivas $c_{i,n}$ y por otra parte se limita el orden del modelo, es decir la máxima potencia utilizada en (2.13) para el cálculo de y_n .

2.1.3.1. Truncación de las respuestas impulsivas $c_{i,n}$

Las respuestas impulsivas $h_{i,n}$ se definen a partir de las respuestas impulsivas $c_{i,n}$ truncando el soporte entre $-M$ y M y causalizando (desplazando M muestras), obteniendo filtros con respuesta finita al impulso (FIR) definidos como

$$h_{i,n} = \begin{cases} c_{i,n-M}, & \text{si } 0 \leq n \leq 2M = N - 1 \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

2. MODELOS DE MODULADORES DIGITALES POR ANCHO DE PULSO

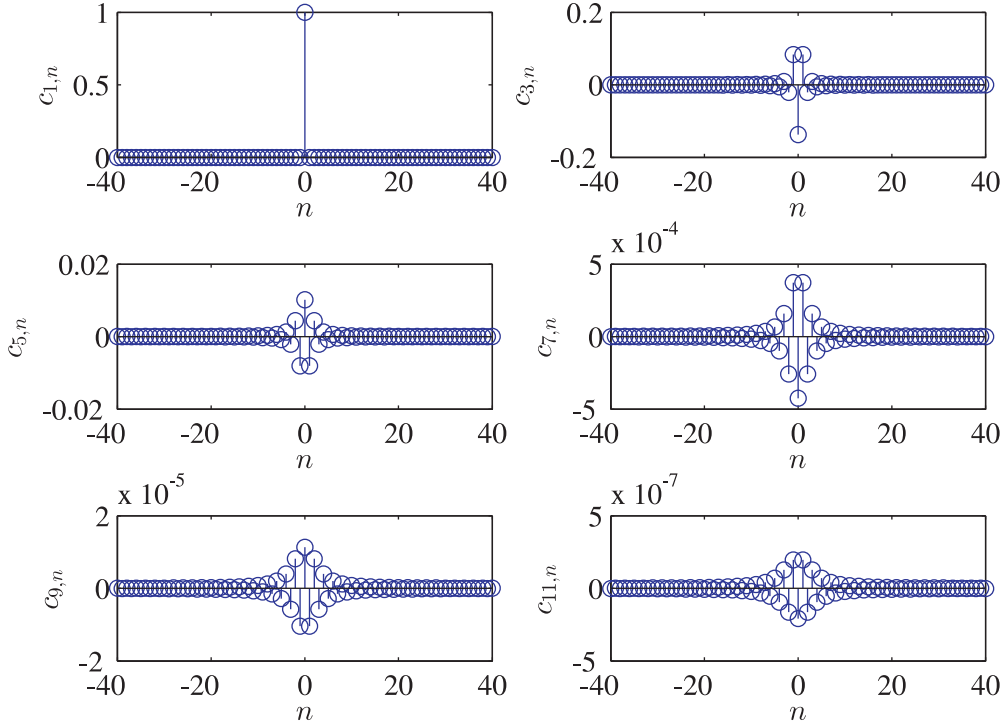


Figura 2.3: Respuestas impulsivas de los filtros $c_{i,n}$ para i entre 1 y 11.

Las respuestas impulsivas de los filtros FIR son simétricas alrededor de $n = M$ lo que se corresponde con un FIR de tipo I con retardo de grupo constante e igual a M . De esta forma se obtienen filtros causales con respuesta finita al impulso y las muestras de la señal PWM filtrada se pueden calcular como

$$y_n = h_{1,n} * w_n + h_{3,n} * w_n^3 + h_{5,n} * w_n^5 + \dots, \quad (2.14)$$

Cada término de la suma en (2.14) representa la convolución de un filtro FIR con respuesta impulsiva $h_{i,n}$ de largo $N = 2M + 1$ con la i -ésima potencia de w_n .

2.1.3.2. Truncación del orden del modelo

Los términos de la forma $y_{i,n} = h_{i,n} * w_n^i$ que aparecen en (2.14) están acotados y su magnitud decrece a medida que crece la potencia w_n^i como lo afirma el siguiente lema.

Lema 1. La contribución $y_{i,n}$ de la i -ésima potencia (2.14) a la salida y_n está acotada,

$$y_{i,n} \leq (w_b)^i |H_i(e^{j\pi})| \quad (2.15)$$

donde w_b es la cota del ciclo de trabajo $w_n \leq w_b < 1$ y $|H_i(e^{j\pi})|$ es la magnitud de la respuesta de frecuencia del filtro $h_{i,n}$ evaluada en $\omega = \pi$.

2.1 Modelo del modulador PWM ideal

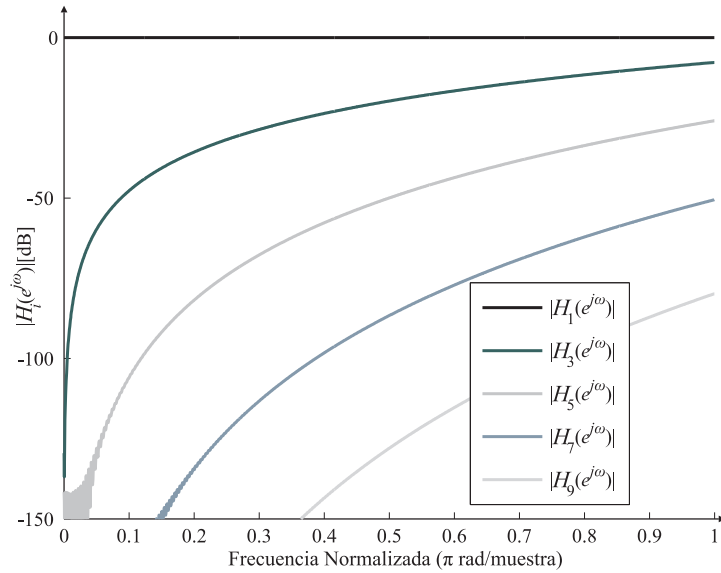


Figura 2.4: Respuestas en frecuencia $H_i(e^{j\omega})$ de los filtros con respuesta impulsiva $h_{i,n}$.

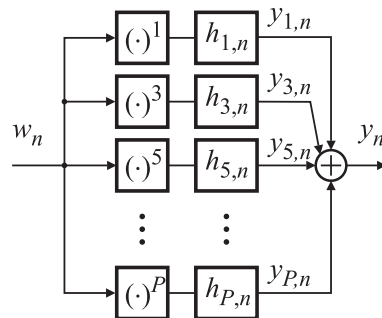


Figura 2.5: Modelo discreto de la modulación digital PWM correspondiente a la ecuación (2.17).

2. MODELOS DE MODULADORES DIGITALES POR ANCHO DE PULSO

Demostración. La contribución de la i -ésima potencia puede ser acotada utilizando la suma de convolución,

$$\begin{aligned} |y_{i,n}| &= \left| \sum_k h_{i,k} (w_{n-k})^i \right| \\ &\leq \sum_k |h_{i,k}| |(w_{n-k})^i| \\ &\leq (w_b)^i \sum_k |h_{i,k}| = (w_b)^i |H_i(e^{j\pi})|. \end{aligned} \quad (2.16)$$

La última identidad se basa en la definición de la transformada de Fourier de tiempo discreto y en el signo alternante de $h_{i,n}$ debido al factor $(-1)^n$, como se muestra en la Tabla 2.1: $|H_i(e^{j\pi})| = |\sum_k h_{i,k} (-1)^k| = \sum_k |h_{i,k}|$. \square

Observación. De acuerdo al Lema 1, la magnitud de la contribución $y_{i,n}$ de cada rama del modelo Hammerstein generalizado decrece para potencias de orden creciente. Por ejemplo, las potencias de $(w_n)^i$ mayores a $i > 7$ producen una contribución $y_{i,n}$ a y_n que podría considerarse despreciable. Esto se debe a que $w_n \leq w_b < 1$ y por lo tanto $(w_n)^i \ll 1$ y también porque el filtro asociado, con respuesta al impulso $h_{i,n}$, atenúa cada vez más a la señal $(w_n)^i$ a medida que i crece. El módulo de la respuesta en frecuencia $|H_i(e^{j\omega})|$ de los filtros FIR se muestra en la Fig. 2.4. Por ejemplo, si $i = 9$ y $w_b = 0,6$ entonces, $|H_9(e^{j\pi})| \approx 1 \times 10^{-4}$ y $(w_n)^9 < 0,01$. Aplicando el Lema 1, la contribución de la novena potencia es menor que $|y_{i,n}| \leq 1 \times 10^{-6}$. La Fig. 2.4 también muestra que si el ancho de banda de la señal se reduce, o si las señales son del tipo pasa bajo (como suele ocurrir por ejemplo para las señales musicales), la contribución de las potencias superiores se reducirá aún más.

La aplicación del Lema 1 junto con la truncación de las respuestas impulsivas permite aproximar la salida y_n truncando la suma (2.14) en la potencia P

$$y_n \approx h_{1,n} * w_n + h_{3,n} * w_n^3 + h_{5,n} * w_n^5 + \dots + h_{P,n} * w_n^P. \quad (2.17)$$

El modelo PWM simplificado dado por (2.17) puede representarse por el diagrama en bloques de la Fig. 2.5, que es un modelo de Hammerstein generalizado en donde la rama i -ésima esta compuesta por una no linealidad estática (potencia) seguida de un filtro FIR de tipo I con respuesta impulsiva $h_{i,n}$ (Tabla 2.1).

2.1.4. Comportamiento del modelo del modulador PWM ideal

En esta sección se compara el modelo de la ecuación (2.17) con una simulación numérica del modulador PWM. Para una señal de entrada discreta se construye la señal $p_{id}(t)$ que

2.1 Modelo del modulador PWM ideal

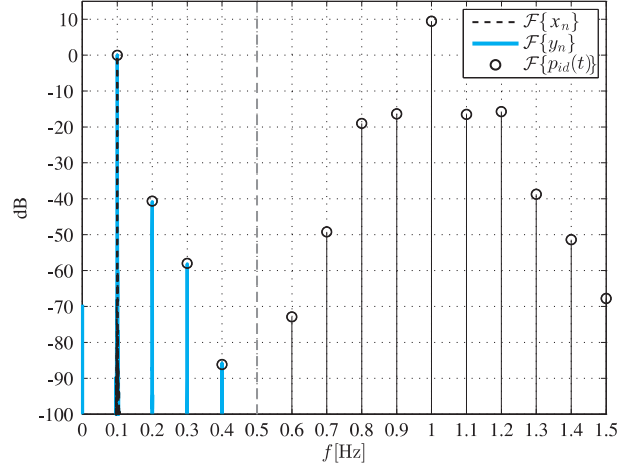


Figura 2.6: Espectros de la señal y_n obtenida con el modelo, la señal PWM $p_{id}(t)$ y de la entrada $x_n = w_n$. Ancho de banda extendido desde 0 hasta $1,5f_s$. La señal $x_n = w_n$ es una sinusoidal de frecuencia $0,1f_s$.

posteriormente se filtra (para evitar aliasing) y se muestrea. Se comparan los espectros calculados utilizando FFT, lo que permite apreciar el comportamiento no lineal de la modulación ya que se detectan componentes frecuenciales que no están presentes en la señal de entrada. Se realizaron tres simulaciones con señales moduladoras sinusoidales de frecuencias $f_m = 0,02f_s$, $f_m = 0,1f_s$ y $f_m = 0,45f_s$. Se utilizan señales sinusoidales de prueba porque permiten interpretar de manera relativamente sencilla los fenómenos subyacentes; sin embargo, el modelo desarrollado es válido para señales arbitrarias acotadas y de banda limitada. Estos tres casos permiten analizar los espectros y comparar el modelo para tres relaciones de la frecuencia portadora y frecuencia moduladora: alta con $f_s/f_m = 50$, media con $f_s/f_m = 10$ y baja $f_s/f_m \approx 2,2$, esta última muy cercana a la frecuencia de Nyquist. Se utilizó una frecuencia normalizada $f_s = 1$, y para el modelo se utilizó hasta la potencia $P = 7$ y longitud $N = 59$ para los filtros FIR $h_{i,n}$.

En la Fig. 2.6 se muestran los espectros para la señal sinusoidal de frecuencia $f_m = 0,1f_s$ en un rango de frecuencias que se extiende más allá de la banda base llegando hasta $1,5f_s$. El propósito de esta simulación es mostrar que, si bien el modelo no captura el comportamiento del modulador por encima de $f_s/2$, sí permite modelar todas las componentes que aparecen en banda base. La simulación numérica del modulador PWM permite obtener el espectro fuera de la banda base mientras que el modelo discreto captura el comportamiento del modulador PWM digital en banda base, entre 0 y $f_s/2$. En la figura se observa la componente de la frecuencia portadora, ubicada en f_s y las bandas laterales, ubicadas en $f_s \pm kf_m$.

Los espectros de banda base para las tres señales sinusoidales se muestran en las Fig. 2.7(a),

2. MODELOS DE MODULADORES DIGITALES POR ANCHO DE PULSO

Fig. 2.7(b) y Fig. 2.7(c). En el caso de la sinusoidal de baja frecuencia $f_m = 0,02f_s$ se observan dos componentes armónicas en $0,04f_s$ y $0,06f_s$. La presencia de estos armónicos de la señal moduladora en banda base son características de la modulación PWM digital cuando la relación entre la frecuencia moduladora y la frecuencia portadora ($f_s/f_m = 50$) es relativamente grande [65]. Cuando la relación es menor, como en el caso en que $f_m = 0,1f_s$, la amplitud de las componentes armónicas se incrementa. En este caso es posible observar tres armónicos en las frecuencias $0,2f_s$, $0,3f_s$ y $0,4f_s$. Para el caso de la señal sinusoidal de alta frecuencia $f_m = 0,45f_s$, los armónicos de la señal moduladora caen fuera de la banda base, sin embargo se detecta la presencia de bandas laterales de la portadora: $f_s \pm kf_m$ y también de múltiplos de la portadora: $nf_s \pm kf_m$ que si se manifiestan en banda base.

Estos resultados muestran que el modelo propuesto se ajusta a las simulaciones numéricas incluso cuando se utiliza una potencia $P = 7$ y longitud de filtros $N = 59$, valores relativamente bajos. Muestran también que tanto para el caso de la señal de baja frecuencia como para el caso de la señal de alta frecuencia la modulación PWM digital genera componentes espurias en banda base entre 0 y $f_s/2$ que no pueden eliminarse con un filtro pasa bajos típicamente utilizado en amplificadores de potencia clase D para la demodulación de la señal PWM.

2.2. Modulador PWM con pulsos de amplitud variable

En esta sección se considera que el nivel alto de los pulsos de $p_{id}(t)$ puede verse afectado por una perturbación $\Delta v(t)$, resultando en una señal PWM $p(t)$ con un nivel alto de los pulsos de valor $v(t) = 1 + \Delta v(t)$. En un amplificador clase D esta representación puede modelar las variaciones de tensión en la fuente de alimentación de la etapa de potencia.

Se supone que el valor de la perturbación es constante durante el período de conmutación $T = 1/f_s$, es decir: $\Delta v(t) = \Delta v_n$ para $nT < t < (n+1)T$. En la Fig. 2.8 se representa una señal PWM formada por pulsos cuya amplitud varía entre pulso y pulso, afectada por una variación Δv_n sinusoidal.

La amplitud del pulso difiere en Δv_n respecto del valor nominal y la señal $p(t)$ puede representarse como

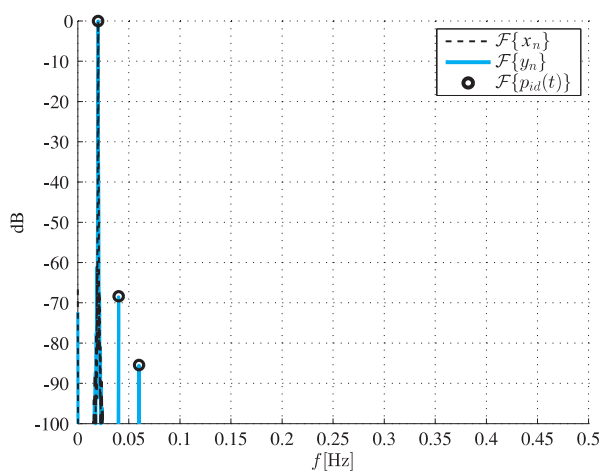
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n \left[u\left(t - \left[n - \frac{w_n}{2}\right]T\right) - u\left(t - \left[n + \frac{w_n}{2}\right]T\right) \right]. \quad (2.18)$$

donde $v_n = 1 + \Delta v_n$, que es similar a (2.1) pero en este caso cada pulso tiene amplitud v_n .

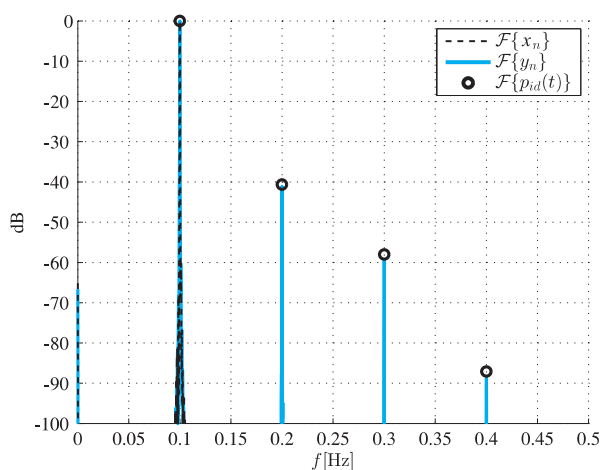
Repitiendo el procedimiento de la Sección 2.1, pero teniendo en cuenta que

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k p_k(t), \quad (2.19)$$

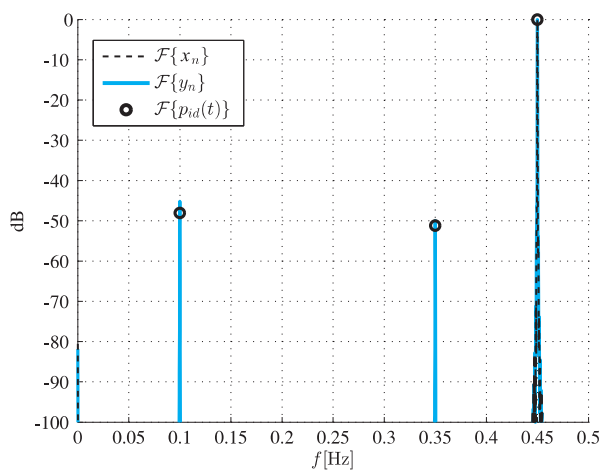
2.2 Modulador PWM con pulsos de amplitud variable



(a)



(b)



(c)

Figura 2.7: Comparación del espectro de banda base de la señal y_n obtenida con el modelo dado por (2.17), la señal PWM $p_{id}(t)$ y de la entrada $x_n = w_n$ que es una sinusoidal de frecuencia: (a) $f_m = 0,02f_s$; (b) $f_m = 0,1f_s$ y (c) $f_m = 0,45f_s$.

2. MODELOS DE MODULADORES DIGITALES POR ANCHO DE PULSO

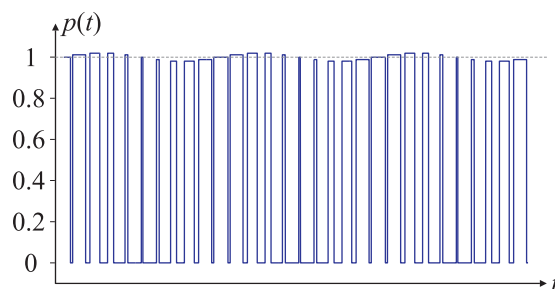


Figura 2.8: Ejemplo de una señal PWM donde la amplitud de los pulsos no es constante.

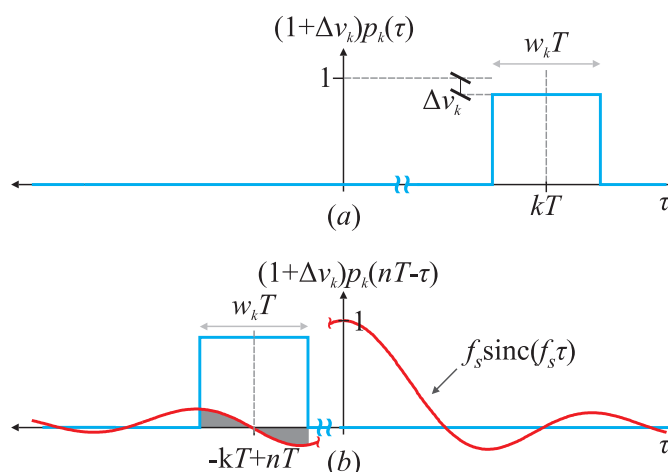


Figura 2.9: Convolución entre un pulso $v_k p_k(t) = (1 + \Delta v_k) p_k(t)$ y $h_{LP}(t)$.

donde $p_k(t)$ representa un pulso de altura unitaria y ancho $w_k T$ centrado en kT como se muestra en la Fig. 2.9(a) y $v_k = 1 + \Delta v_k$.

La salida y_n se calcula como la suma de los aportes producidos por cada uno de los pulsos que conforman la señal PWM. La representación gráfica del cálculo de una de estas convoluciones se muestra en la Fig. 2.9(b) dando como resultado

$$\begin{aligned}
 y_n &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{LP}(\tau) v_k p_k(nT - \tau) d\tau \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v_{n-m} \int_{(m-w_{n-m}/2)T}^{(m+w_{n-m}/2)T} f_s \operatorname{sinc}(f_s \tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.2 Modulador PWM con pulsos de amplitud variable

obteniendo finalmente

$$y_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v_{n-m} f_m(w_{n-m}) \quad (2.21)$$

donde $f_m(w)$ está dada por (2.7).

La ecuación (2.21) describe la relación de las muestras y_n de la señal demodulada con los ciclos de trabajo w_n y con la amplitud de los pulsos v_n . Es un modelo discreto no lineal que describe el comportamiento de la modulación PWM, afectada por v_n , en el rango de frecuencias desde 0 hasta $f_s/2$. En la derivación del modelo no se impusieron restricciones sobre la señal $v_n = 1 + \Delta v_n$. Como el modelo es discreto con frecuencia de muestreo f_s , el contenido frecuencial de v_n es menor a $f_s/2$, lo que es consistente con el hecho de suponer que la amplitud de los pulsos puede variar entre pulso y pulso pero es constante para un pulso (los pulsos siguen siendo rectangulares).

2.2.1. Modelo Hammerstein para pulsos de amplitud variable

Utilizando la expansión en series de potencia de $f_m(w)$ dada por (2.12) la salida del modelo con variación de amplitud de los pulsos puede calcularse como

$$\begin{aligned} y_n &= v_n f_0(w_n) + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} v_{n-m} f_m(w_{n-m}) \\ &= v_n (c_{1,0} w_n + c_{3,0} w_n^3 + \dots) + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} v_{n-m} (c_{3,m} w_{n-m}^3 + c_{5,m} w_{n-m}^5 + \dots) \\ &= v_n c_{1,0} w_n + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v_{n-m} (c_{3,m} w_{n-m}^3 + c_{5,m} w_{n-m}^5 + \dots). \end{aligned}$$

Cada término de la última línea representa el cálculo de una convolución discreta entre $v_n w_n^i$ y un filtro cuya respuesta impulsiva es $c_{i,n}$, de modo que y_n puede calcularse como:

$$y_n = v_n w_n c_{1,0} + v_n w_n^3 * c_{3,n} + v_n w_n^5 * c_{5,n} + \dots \quad (2.22)$$

La ecuación (2.22) es análoga a la obtenida previamente para el PWM ideal en (2.13), la diferencia es que en este caso aparece la amplitud de pulso v_n multiplicando a w_n y también a sus potencias w_n^i . Para el término lineal, el producto $v_n w_n$ representa una modulación de amplitud (AM) producida por la variación de amplitud de los pulsos. Esta interpretación también puede extenderse a los términos restantes de la forma $v_n w_n^i$ en donde la modulación de amplitud se produce sobre las potencias de w_n . La modulación AM producirá bandas laterales en las componentes frecuenciales de w_n y sus potencias w_n^i , como se analiza mediante simulaciones en la Sección 2.2.3.

2. MODELOS DE MODULADORES DIGITALES POR ANCHO DE PULSO

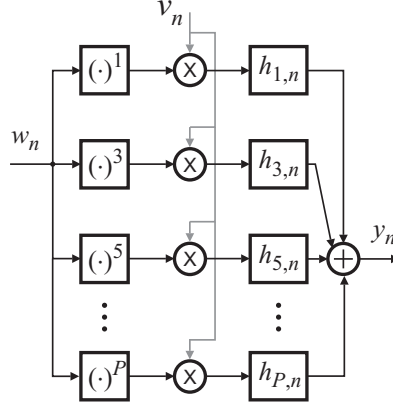


Figura 2.10: Modelo de banda base del PWM con pulsos de amplitud variable $v_n = 1 + \Delta v_n$.

2.2.2. Simplificaciones del modelo Hammerstein generalizado para pulsos de amplitud variable

Como en la Sección 2.1, para simplificar el cálculo de y_n y permitir el cálculo en tiempo real, se truncan y causalizan las respuestas impulsivas $c_{i,n}$ y por otra parte se trunca el orden, es decir la máxima potencia utilizada en (2.22) para el cálculo de y_n .

Las respuestas impulsivas $h_{i,n}$ resultantes coinciden con las obtenidas en la Sección 2.1.3 (Tabla 2.1). De esta manera la salida y_n puede calcularse como

$$y_n = v_n w_n h_{1,0} + v_n w_n^3 * h_{3,n} + v_n w_n^5 * h_{5,n} + \dots + v_n w_n^P * h_{P,n}. \quad (2.23)$$

En la Fig. 2.10 se muestra el diagrama en bloques del modelo Hammerstein generalizado donde la amplitud v_n de cada pulso ingresa al modelo multiplicando a las potencias de la señal de entrada w_n antes de la etapa de filtrado.

2.2.3. Comportamiento del modelo del modulador PWM con pulsos de amplitud variable

En esta sección se compara el modelo de la ecuación (2.23) con una simulación numérica del modulador PWM. Para una señal de entrada discreta se construye la señal $p(t)$ con una amplitud de pulsos variable dada por una señal v_n . Los parámetros utilizados para el modelo y las señales de prueba son las mismas que se utilizaron para las simulaciones del modelo del modulador PWM ideal en la Sección 2.1.4. La variación de amplitud Δv_n de los pulsos está dada por una señal sinusoidal de frecuencia $0,005f_s$ y amplitud 0,01 resultando en una amplitud de pulsos $v_n = 1 + 0,01 \text{sen}(0,01\pi n)$.

2.3 Modulador PWM incluyendo variaciones de los tiempos de conmutación

Los espectros para cada una de las tres señales moduladoras de frecuencias $f_m = 0,02f_s$, $f_m = 0,1f_s$ y $f_m = 0,45f_s$ se muestran en la Fig. 2.11(a), la Fig. 2.11(b) y Fig. 2.11(c) respectivamente. En el caso de la sinusoidal de baja frecuencia $f_m = 0,02f_s$ se observan los armónicos propios de la modulación, la componente de variación de amplitud en $0,005f_s$ y componentes de intermodulación que esta variación produce en $f_m \pm 0,005f_s$.

Para el caso $f_m = 0,1f_s$ se observan componentes armónicas en $0,2f_s$, $0,3f_s$ y $0,4f_s$ propias de la modulación. Además se observa la componente de variación de amplitud de los pulsos ubicada en $0,005f_s$ y las bandas laterales que esta componente produce no solo en la componente fundamental de $0,1f_s$ sino también en el armónico ubicado en $0,2f_s$.

Para el caso de la señal sinusoidal de alta frecuencia $0,45f_s$ se detecta la presencia de bandas laterales de la portadora como en el caso del modulador PWM ideal presentado en la Fig. 2.7(c), la componente de v_n ubicada en $0,005f_s$ y las respectivas bandas laterales generadas por la variación de amplitud.

Las simulaciones muestran que el modelo propuesto con variación de amplitud de los pulsos se ajusta a las simulaciones numéricas.

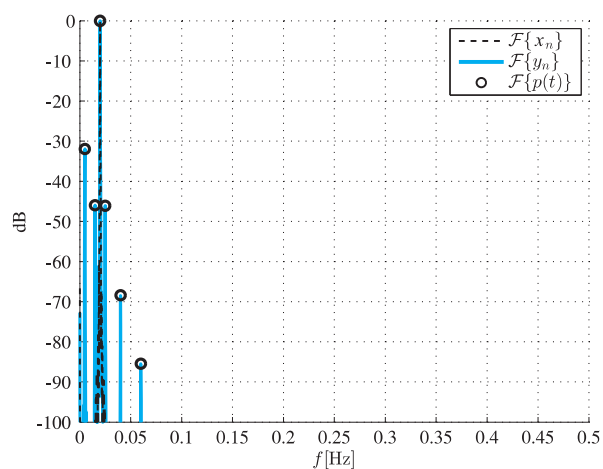
2.3. Modulador PWM incluyendo variaciones de los tiempos de conmutación

En aplicaciones prácticas existen diferentes fenómenos que pueden producir corrimientos de los tiempos de conmutación, es decir, alteraciones en la ubicación de los flancos ascendentes y descendentes de la señal PWM $p_{id}(t)$, modificando tanto los anchos de los pulsos como su ubicación. Dentro de los fenómenos prácticos más conocidos pueden mencionarse: (1) fluctuaciones en el reloj (jitter) utilizado para generar la señal PWM, (2) resolución temporal finita en la generación digital de los pulsos y (3) tiempos muertos, necesarios para evitar el cortocircuito de fuente de alimentación en las topologías clásicas de amplificación de potencia conmutadas.

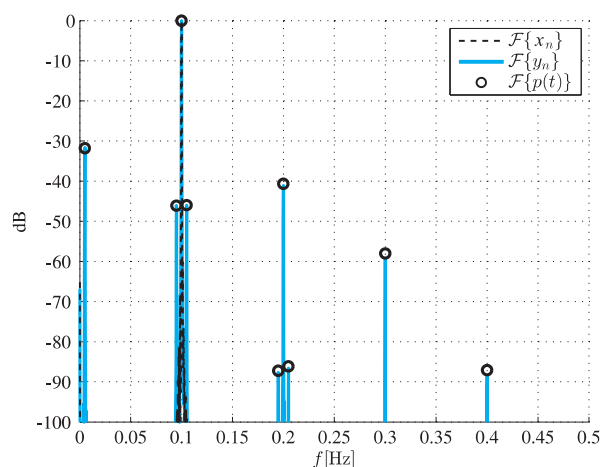
En general cuando la modulación digital PWM se realiza utilizando un procesador digital de señales, las mayores perturbaciones en los tiempos de conmutación son causadas por la resolución temporal finita, que suele causar una degradación mayor que la producida por las fluctuaciones en el reloj. Existen alternativas para reducir la distorsión producida por este fenómeno. Estas pueden basarse en soluciones electrónicas que utilizan líneas de retardos [24, 51] para aumentar la resolución de la señal PWM o soluciones algorítmicas basadas en técnicas de procesamiento de señales conocidas por sus nombres en inglés como “dithering” y “noise shaping”. Estas técnicas se describen en la Sección 4.1.4 del Capítulo 4.

Por otra parte, las topologías más difundidas para la amplificación de potencia poseen

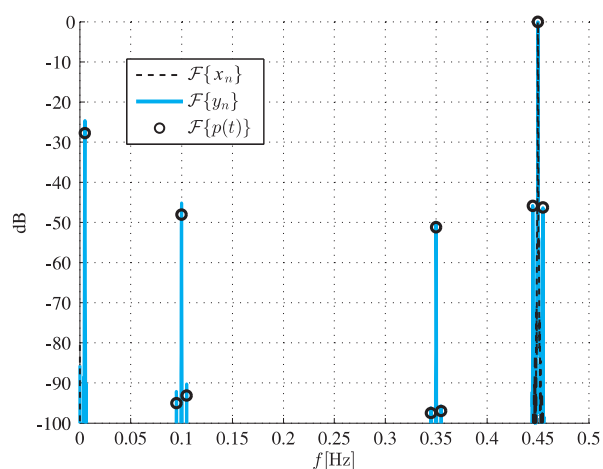
2. MODELOS DE MODULADORES DIGITALES POR ANCHO DE PULSO



(a)



(b)



(c)

Figura 2.11: Comparación del espectro de banda base, con amplitud de pulsos variable dada por $v_n = 1 + 0,01 \sin(0,01\pi n)$, de la señal y_n obtenida con el modelo dado por (2.23), la señal PWM $p(t)$ y de la entrada $x_n = w_n$ que es una sinusoidal de frecuencia: (a) $f_m = 0,02f_s$; (b) $f_m = 0,1f_s$ y (c) $f_m = 0,45f_s$.

2.3 Modulador PWM incluyendo variaciones de los tiempos de conmutación

dos o más llaves (semiconductores) conectadas en serie y alimentadas por la fuente de alimentación. Debido a los tiempos de encendido y apagado de las llaves, se requiere demorar el encendido para evitar un cortocircuito. Esto produce un corrimiento de los tiempos de conmutación que suele ser una de las principales causantes de distorsión.

En esta sección se extiende el modelo de la Sección 2.1 para incluir variaciones en los tiempos de conmutación, tanto en el flanco ascendente como en el descendente de los pulsos. Luego se analiza el caso particular en que estas variaciones se deban a los tiempos muertos, lo que permite evaluar el impacto que producen en la señal PWM.

2.3.1. Modelo que incluye variaciones en los tiempos de conmutación

La señal PWM resultante $p(t)$ que incluye la variación en los tiempos de conmutación puede escribirse como

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[u\left(t - \left[n - \frac{w_n}{2} + \Delta a_n\right]T\right) - u\left(t - \left[n + \frac{w_n}{2} + \Delta d_n\right]T\right) \right] \quad (2.24)$$

donde Δa_n y Δd_n modelan el corrimiento de los flancos ascendentes y descendentes de $p(t)$ respecto de $p_{id}(t)$. También se definen wa_n como el ancho desde el flanco ascendente hasta el centro del pulso (normalizado por T) y wd_n como el ancho, también normalizado, entre el centro del pulso y el flanco descendente:

$$\begin{aligned} wa_n &= \frac{w_n}{2} - \Delta a_n, \\ wd_n &= \frac{w_n}{2} + \Delta d_n. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para obtener el modelo se procede de la misma manera que en la Secciones 2.1 y 2.2, es decir se calcula la salida $y(t) = h_{LP}(t) * p(t)$ que se obtiene al filtrar la señal $p(t)$ con un filtro pasa bajos ideal. En la Fig. 2.12(a) se muestra el pulso $p_k(t)$ ubicado en kT y se indica la ubicación del flanco ascendente en $kT - wa_kT$ y descendente en $kT + wd_kT$.

Repitiendo el cálculo de la convolución realizado en las Secciones 2.1 y 2.2 es posible obtener la expresión para el cálculo de y_n en función de wa_n y wd_n . La diferencia en este caso se encuentra en los límites de integración:

$$y_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{(m-wd_{n-m})T}^{(m+wa_{n-m})T} f_s \operatorname{sinc}(f_s \tau) d\tau.$$

La representación gráfica del cálculo de una de estas convoluciones se muestra en la Fig. 2.12(b) y resulta en

$$y_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(wa_{n-m}, wd_{n-m}) \quad (2.26)$$

2. MODELOS DE MODULADORES DIGITALES POR ANCHO DE PULSO

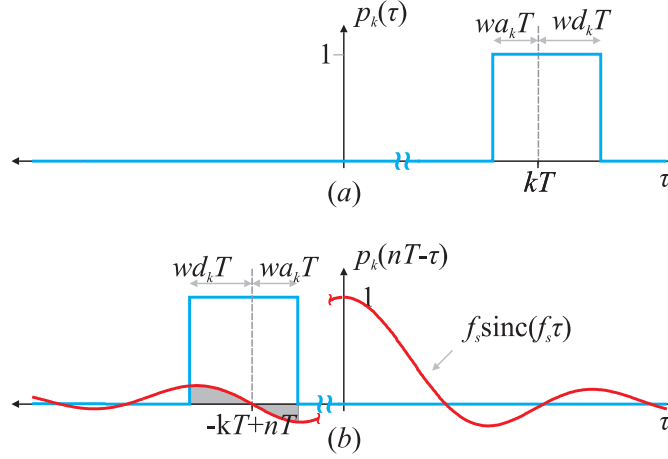


Figura 2.12: Convolución entre un pulso $p_k(t)$ y $h_{LP}(t)$ incluyendo variaciones en los tiempos de conmutación.

donde en este caso

$$f_m(wa, wd) = \frac{1}{\pi} (\text{Si}[\pi(m + wa)] - \text{Si}[\pi(m - wd)]) \quad (2.27)$$

depende de dos variables wa y wd .

La Ec. (2.26) representa el modelo discreto para el comportamiento en el rango de frecuencias $[0, f_s/2)$ del sistema incluyendo una posible variación Δa_n y Δd_n en los flancos ascendentes y descendentes. Las muestras de salida dependen del ciclo de trabajo w_n y de las variaciones Δa_n y Δd_n a través de la función $f_m(wa, wd)$, que depende de wa y wd , los flancos ascendentes y descendentes normalizados.

2.3.2. Modelo Hammerstein incluyendo variaciones en los tiempos de conmutación

La expansión en series de potencia de la función $f_m(wa, wd)$ en función de wa y wd permite obtener un modelo del PWM con una estructura similar a la obtenida para el modulador PWM ideal y el modulador PWM con variación de amplitud de los pulsos. La función $f_m(wa, wd)$ puede expandirse en series de potencia de wa y wd como

$$f_m(wa, wd) = \begin{cases} \sum_{k=2}^{+\infty} \hat{c}_{k,m} (wa^k - (-1)^k wd^k) & \text{si } m \neq 0, \\ \sum_{k=1}^{+\infty} \hat{c}_{2k-1,0} (wa^{2k-1} + wd^{2k-1}) & \text{si } m = 0, \end{cases}$$

2.3 Modulador PWM incluyendo variaciones de los tiempos de conmutación

donde $\hat{c}_{k,m}$ son los coeficientes de la expansión. Los primeros términos de la sumatoria son

$$f_m(wa, wd) = \begin{cases} \hat{c}_{2,m} (wa^2 - wd^2) + \hat{c}_{3,m} (wa^3 + wd^3) + \dots & \text{si } m \neq 0, \\ \hat{c}_{1,0} (wa + wd) + \hat{c}_{3,0} (wa^3 + wd^3) + \dots & \text{si } m = 0. \end{cases}$$

Con esta expansión en serie de potencias dada por los coeficientes $\hat{c}_{k,m}$ es posible reescribir (2.26) como

$$y_n = \hat{c}_{1,0} (wa_n + wd_n) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\hat{c}_{2,m} (wa_{n-m}^2 - wd_{n-m}^2) + \hat{c}_{3,m} (wa_{n-m}^3 + wd_{n-m}^3) + \dots]. \quad (2.28)$$

La sumatoria puede reescribirse utilizando convolución y de esta forma se obtiene el modelo Hammerstein generalizado que relaciona a las muestras de salidas y_n con los ciclos de trabajo normalizados wa_n y wd_n

$$y_n = \hat{c}_{1,0} (wa_n + wd_n) + \hat{c}_{2,n} * (wa_n^2 - wd_n^2) + \hat{c}_{3,n} * (wa_n^3 + wd_n^3) + \hat{c}_{4,n} * (wa_n^4 - wd_n^4) + \dots \quad (2.29)$$

Debido a la variación en los tiempos de conmutación, que causa una pérdida de simetría respecto del centro de los pulsos, aparecen en el modelo las potencias pares. Si las variaciones son nulas, $\Delta a_n = \Delta d_n = 0$, y entonces de (2.25) se tiene que $wa_n = wd_n$ y por lo tanto y_n en (2.29) solo conserva las potencias impares, coincidiendo con el modelo presentado en la Sección 2.1 para el modulador PWM ideal.

2.3.3. Simplificaciones del modelo Hammerstein generalizado incluyendo variaciones en los tiempos de conmutación

Procediendo en forma similar que para los modelos previos es posible simplificar el cómputo de y_n y permitir el cálculo en tiempo real, limitando tanto la máxima potencia P de la expansión en series de potencia de $f_m(wa, wd)$ como la longitud de los coeficientes $\hat{c}_{k,n}$. Se tiene entonces que

$$y_n \approx \hat{h}_{1,0} (wa_n + wd_n) + \hat{h}_{2,n} * (wa_n^2 - wd_n^2) + \hat{h}_{3,n} * (wa_n^3 + wd_n^3) + \dots + \hat{h}_{P,n} * (wa_n^P \pm wd_n^P), \quad (2.30)$$

donde

$$\hat{h}_{k,n} = \begin{cases} \hat{c}_{k,n-M} & \text{si } 0 \leq n \leq 2M = N - 1, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

2. MODELOS DE MODULADORES DIGITALES POR ANCHO DE PULSO

Tabla 2.2: Respuestas impulsivas de los filtros IIR $\hat{c}_{i,n}$ y de los filtros FIR $\hat{h}_{i,n}$ con soporte $0 \leq n < N - 1 = 2M$, incluyendo variaciones en los tiempos de conmutación.

	Respuesta impulsiva $\hat{h}_{i,n}$	
$\hat{h}_{1,n}$	$\left\{ \begin{array}{l} \hat{c}_{1,0} = 1 \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } n = M \\ \text{si } n \neq M \end{array} \right.$
$\hat{h}_{2,n}$	$\left\{ \begin{array}{l} \hat{c}_{2,0} = 0 \\ \hat{c}_{2,m} = \frac{(-1)^m}{(2m)} \Big _{m=n-M} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } n = M \\ \text{si } n \neq M \end{array} \right.$
$\hat{h}_{3,n}$	$\left\{ \begin{array}{l} \hat{c}_{3,0} = -\pi^2/18 \\ \hat{c}_{3,m} = \frac{-(-1)^m}{(3m^2)} \Big _{m=n-M} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } n = M \\ \text{si } n \neq M \end{array} \right.$
$\hat{h}_{4,n}$	$\left\{ \begin{array}{l} \hat{c}_{4,0} = 0 \\ \hat{c}_{4,m} = \frac{-(-1)^m}{24m^3} (-6 + m^2\pi^2) \Big _{m=n-M} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } n = M \\ \text{si } n \neq M \end{array} \right.$
$\hat{h}_{5,n}$	$\left\{ \begin{array}{l} \hat{c}_{5,0} = \pi^4/600 \\ \hat{c}_{5,m} = \frac{(-1)^m}{30m^4} (-6 + m^2\pi^2) \Big _{m=n-M} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } n = M \\ \text{si } n \neq M \end{array} \right.$
$\hat{h}_{6,n}$	$\left\{ \begin{array}{l} \hat{c}_{6,0} = 0 \\ \hat{c}_{6,m} = \frac{(-1)^m}{(720m^5)} (120 - 20m^2\pi^2 + m^4\pi^4) \Big _{m=n-M} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } n = M \\ \text{si } n \neq M \end{array} \right.$
$\hat{h}_{7,n}$	$\left\{ \begin{array}{l} \hat{c}_{7,0} = -\pi^6/35280 \\ \hat{c}_{7,m} = -\frac{(-1)^m}{840m^6} (120 - 20m^2\pi^2 + m^4\pi^4) \Big _{m=n-M} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } n = M \\ \text{si } n \neq M \end{array} \right.$

2.3 Modulador PWM incluyendo variaciones de los tiempos de conmutación

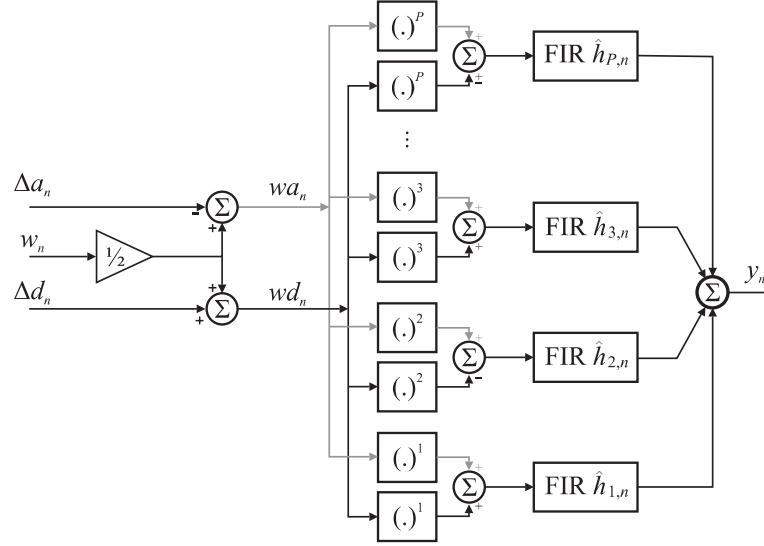


Figura 2.13: Modelo de banda base del PWM incluyendo variaciones en los tiempos de conmutación, $wa_n = \frac{w_n}{2} - \Delta a_n$ y $wd_n = \frac{w_n}{2} + \Delta d_n$.

Un diagrama en bloques de la ecuación (2.30) se muestra en la Fig. 2.13, en donde las entradas del sistema son el ciclo de trabajo nominal w_n , y las variaciones en la ubicación de los flancos ascendentes Δa_n y descendente Δd_n . La etapa de salida posee una estructura tipo Hammerstein generalizada compuesta por la conexión en paralelo de una no linealidad estática (potencias de wa_n y wd_n) más una etapa dinámica dada por los filtros FIR $\hat{h}_{k,n}$ que representa la memoria del sistema. Los coeficientes $\hat{h}_{k,n}$ de los filtros con respuesta finita al impulso (FIR) se listan en la Tabla 2.2. Las diferencias entre estos coeficientes y los coeficientes listados en la Tabla 2.1 para el modelo del modulador PWM ideal son:

- Para el modelo con variaciones en los tiempos de conmutación se incluyen también las potencias pares y por lo tanto los coeficientes $\hat{h}_{k,n}$ con k par.
- Para las potencias impares, los respectivos coeficientes $\hat{h}_{3,n}, \hat{h}_{5,n}, \hat{h}_{7,n}, \dots$ que aparecen en la Tabla 2.2 aparecen multiplicados por un factor de escala 2^{k-1} si se los compara con los coeficientes $h_{k,n}$ de la Tabla 2.1. Si se considera que la variación es nula, entonces $\Delta a_n = 0$ y $\Delta d_n = 0$. Siguiendo el diagrama en bloques de la Fig. 2.13 para las potencias impares se calcula la entrada de los filtros como $(w_n/2)^k + (w_n/2)^k = w_n^k/(2^{k-1})$. De esta forma dicha atenuación se cancela con la ganancia adicional de los filtros en la Tabla 2.2 y por lo tanto ambos modelos (con y sin variaciones en los tiempos de conmutación) son iguales cuando la variación es cero.

2. MODELOS DE MODULADORES DIGITALES POR ANCHO DE PULSO

2.3.4. Un caso particular de variación de los tiempos de conmutación: tiempos muertos

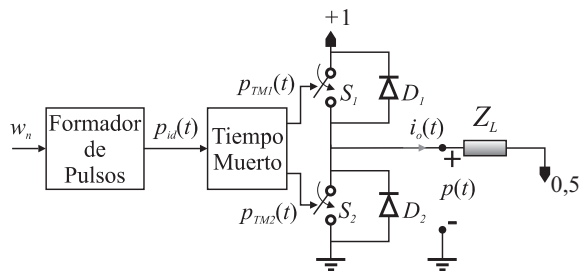


Figura 2.14: Amplificador de potencia conmutado para la señal PWM (estructura básica).

En la topología de amplificador conmutado más básica la señal PWM se utiliza para manejar una etapa de potencia compuesta por dos llaves controladas (transistores) conectadas en serie (S_1 y S_2 en la Fig. 2.14) y que funcionan en forma complementaria. Cuando se utiliza esta topología y debido al comportamiento no ideal de los transistores, es necesario adicionar un determinado tiempo Δ , denominado tiempo muerto, para asegurarse que una llave esté completamente apagada antes de encender la llave complementaria.

La Fig. 2.14 muestra que los anchos de pulsos son utilizados para obtener, con el bloque “Formador de Pulsos”, la señal PWM ideal $p_{id}(t)$, que no incluye a los tiempos muertos. El bloque “Tiempo Muerto” es el encargado de generar las señales $p_{TM1}(t)$ y $p_{TM2}(t)$ que comandan las llaves superior e inferior de la pierna. La señal $p_{TM1}(t)$ se genera retrasando los flancos ascendentes de la señal $p_{id}(t)$ y $p_{TM2}(t)$ negando la señal $p_{id}(t)$ y retrasando los flancos ascendentes de la señal resultante.

En la Fig. 2.15(a)-(c) se muestran formas de ondas típicas para las señales $p_{id}(t)$, $p_{TM1}(t)$ y $p_{TM2}(t)$. La señal PWM sin tiempo muerto $p_{id}(t)$, está formada por pulsos de ancho $w_n T$ cuyos centros se encuentran separados cada $T = 1/f_s$. Para las señales $p_{TM1}(t)$ y $p_{TM2}(t)$ puede observarse que los flancos ascendentes se encuentran retrasados por el valor del tiempo muerto Δ .

La señal de salida $p(t)$ (tensión en el punto medio de la pierna) será una señal de dos niveles. Durante los intervalos de tiempo muerto Δ , en donde las señales de control de las llaves $p_{TM1}(t)$ y $p_{TM2}(t)$ son cero, el valor de $p(t)$ dependerá del signo de la corriente de carga $i_o(t)$. Ésta, a su vez, depende de la impedancia de carga $Z_L(s) = Y(s)^{-1}$. Si durante el intervalo de tiempo muerto $i_o(t) > 0$ entonces $i_o(t)$ circulará por el diodo D_2 y $p(t)$ tomará el valor 0 (tierra) mientras que si $i_o(t) < 0$ la corriente circulará por el diodo D_1 y $p(t)$ tomará el valor +1.

2.3 Modulador PWM incluyendo variaciones de los tiempos de conmutación

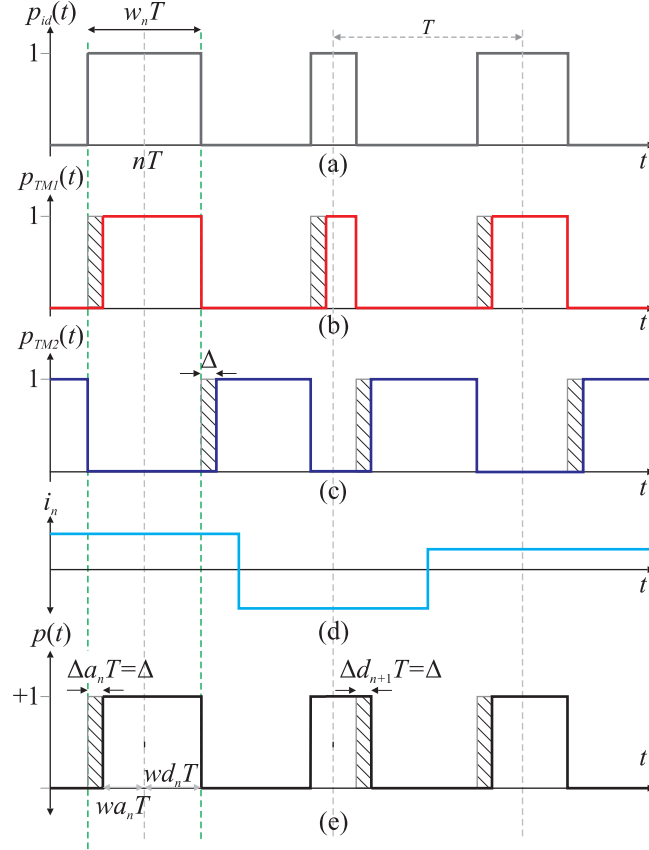


Figura 2.15: Formas de onda: (a) señal PWM ideal; (b) y (c) señales para disparo de las llaves; (d) corriente discreta i_n y (e) señal PWM resultante.

El modelo desarrollado para el modulador PWM incluyendo variaciones en los tiempos de conmutación puede utilizarse para modelar el fenómeno de los tiempos muertos. Se debe determinar la dependencia de las variaciones Δd_n y Δa_n con la corriente. Como se busca obtener un modelo discreto, las muestras de $i_o(t)$ se aproximan con la señal i_n a partir del contenido de banda base de $p(t)$ dado por y_n y un modelo discreto de $Y(z)$ de la admitancia $Y(s)$ como se indica en la Fig. 2.16. Aproximar $i_o(t)$ con i_n introduce cierto error en el modelo del sistema con tiempo muerto porque se asume que el signo de la corriente se mantiene constante durante el período de conmutación T . Esto puede no ser correcto en algunos períodos de conmutación debido a las componentes de alta frecuencia presentes en $i_o(t)$ conocidas como ondulación de corriente. El modelo es más preciso cuando el sistema opera en condiciones de baja ondulación de corriente, es decir cuando la amplitud de la ondulación de corriente sea varias veces menor que el valor RMS (o la varianza) de $i_o(t)$. Este último modo de operación

2. MODELOS DE MODULADORES DIGITALES POR ANCHO DE PULSO

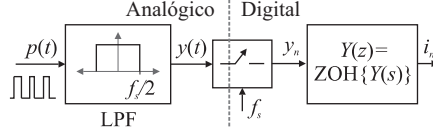


Figura 2.16: Discretización de la salida y de la corriente.

es en general el utilizado en la práctica.

El corrimiento producido por el tiempo muerto de Δ segundos en ambos flancos permite establecer las variaciones de los tiempos de conmutación en función del signo de la corriente

$$\Delta a_n = \begin{cases} \Delta/T, & \text{si } i_n > 0, \\ 0, & \text{si } i_n < 0, \end{cases} \quad \Delta d_n = \begin{cases} \Delta/T, & \text{si } i_n < 0, \\ 0, & \text{si } i_n > 0 \end{cases}$$

dando como resultado los anchos de pulsos normalizados desde los flancos hasta el centro del pulso (ver Fig. 2.15(e)):

$$\begin{aligned} wa_n &= \frac{w_n}{2} - \Delta a_n = \frac{w_n}{2} - \frac{\Delta}{2T} [\text{sgn}(i_n) + 1] \\ wd_n &= \frac{w_n}{2} + \Delta d_n = \frac{w_n}{2} + \frac{\Delta}{2T} [1 - \text{sgn}(i_n)] \end{aligned} \quad (2.31)$$

con

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z > 0, \\ -1 & \text{si } z < 0 \text{ y} \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

La Fig. 2.17 muestra un diagrama en bloques del modelo con tiempo muerto. El esquema es similar al presentado en la Fig. 2.13 pero en este caso con los ciclos de trabajo w_n y con la corriente i_n se determinan wa_n y wd_n definidos en (2.31). Luego wa_n y wd_n se utilizan para calcular las muestras y_n de la señal PWM $p(t)$ usando (2.29) con los coeficientes $\hat{h}_{k,n}$. La corriente i_n se calcula utilizando y_n y la versión discretizada $Y(z)$ de la admitancia $Y(s)$.

2.3.4.1. Limitaciones del modelo con tiempo muerto

El modelo presentado es adecuado para modelar el comportamiento para señales moduladoras arbitrarias (muestreadas a f_s) en un rango de frecuencias $[0, f_s/2)$. Si las componentes de alta frecuencia (ondulación de corriente) de la corriente $i_o(t)$ tiene un valor comparable al de su valor medio entonces el modelo con tiempo muerto puede presentar resultados menos precisos porque la aproximación de $i_o(t)$ utilizando i_n calculada como se muestra en la Fig. 2.16 puede no ser adecuada. Si se dispone del valor de la corriente en el instante de muestreo, entonces ésta podría considerarse como una entrada externa del sistema, que en

2.3 Modulador PWM incluyendo variaciones de los tiempos de conmutación

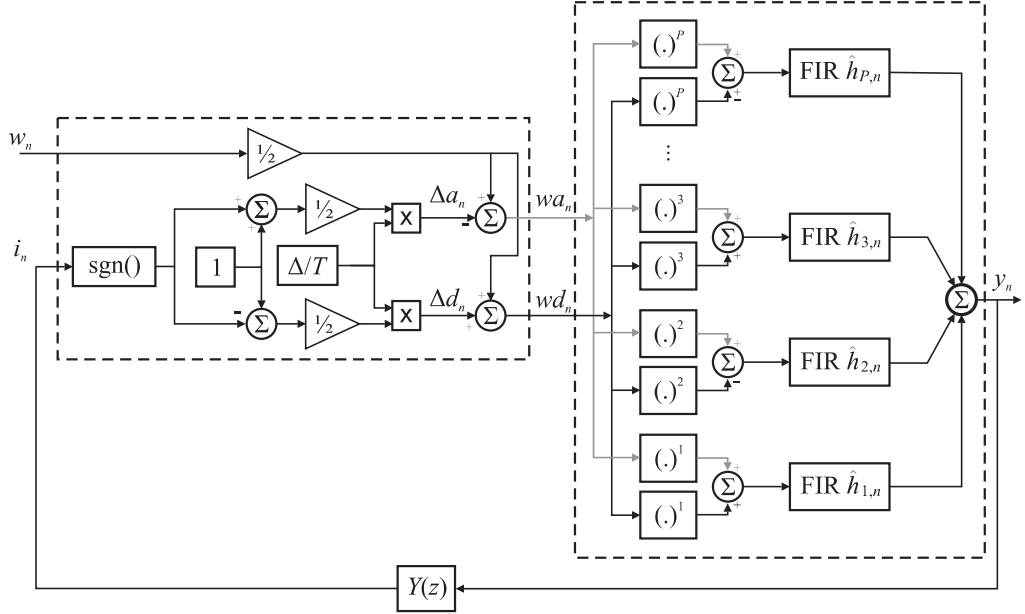


Figura 2.17: Modelo discreto para el modulador PWM incluyendo tiempos muertos.

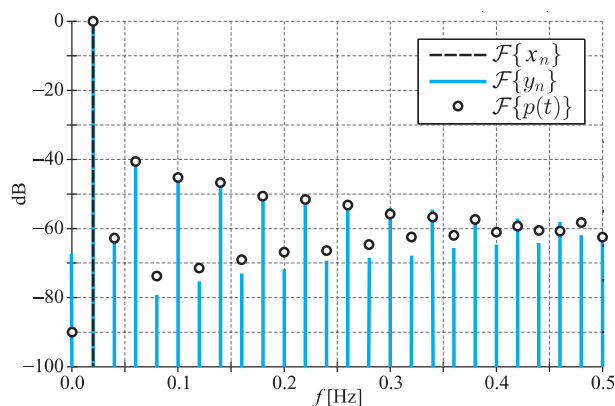
este caso constaría de dos entradas i_n y w_n . A continuación se compara el modelo (utilizando la aproximación para el cálculo de i_n) con simulaciones numéricas del sistema de la Fig. 2.14.

2.3.5. Comportamiento del modelo con tiempo muerto

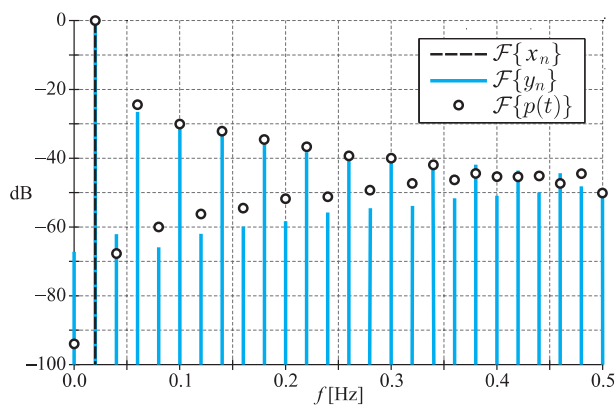
Se simuló el modelo propuesto utilizando los mismos parámetros que en las simulaciones de la Sección 2.1.4 y 2.2.3: potencia máxima $P = 7$ y longitud de los filtros FIR $\hat{h}_{k,n}$ $N = 59$. Para la comparación se simuló el sistema de la Fig. 2.14 utilizando “SimPowerSystems” de Matlab. En todos los casos la frecuencia de conmutación normalizada es $f_s = 1$. La carga Z_L es un filtro pasivo LC con una resistencia de carga R , cuyos valores normalizados son $L = 10$, $C = 1 \times 10^{-2}$ y $R = 1$. Se utilizó una discretización tipo mantenedor de orden cero para obtener $Y(z)$.

Para conocer el efecto que los corrimientos en los tiempos de conmutación, causados por el tiempo muerto, produce sobre el espectro de la señal se utilizaron dos señales moduladoras diferentes. En primer lugar se observa el comportamiento del modelo utilizando como señal moduladora un tono puro de frecuencia $f_m = 0,02f_s$. La relación entre el tiempo muerto y el período de conmutación es $\Delta/T = 1/100$. En la Fig. 2.18(a) se comparan los espectros de la señal y_n del modelo, la señal $p(t)$ del sistema completo y la señal moduladora $x_n = w_n$. En el rango de frecuencias de interés $[0, f_s/2)$ el espectro de las señales y_n y $p(t)$ es muy similar. Debido a la modulación PWM y al tiempo muerto se introducen armónicos de la

2. MODELOS DE MODULADORES DIGITALES POR ANCHO DE PULSO



(a)



(b)

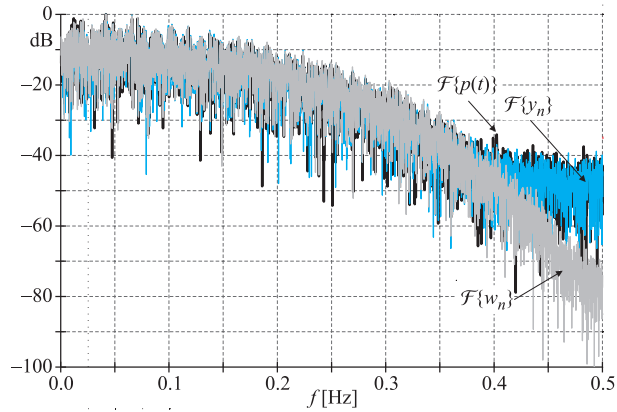
Figura 2.18: Comparación del espectro de banda base de la señal y_n obtenida con el modelo que incluye a los tiempos muertos, la señal PWM $p(t)$ y la entrada $x_n = w_n$ que es una sinusoidal de frecuencia $f_m = 0,02f_s$. Espectros para: (a) $\Delta/T = 1/100$ y (b) $\Delta/T = 5/100$.

señal moduladora. Si se compara este espectro con el obtenido en la Fig. 2.7(a) para el caso del PWM ideal (en donde solo se detectan dos componentes armónicas) se observa que el tiempo muerto introduce una gran cantidad de componentes de distorsión adicionales.

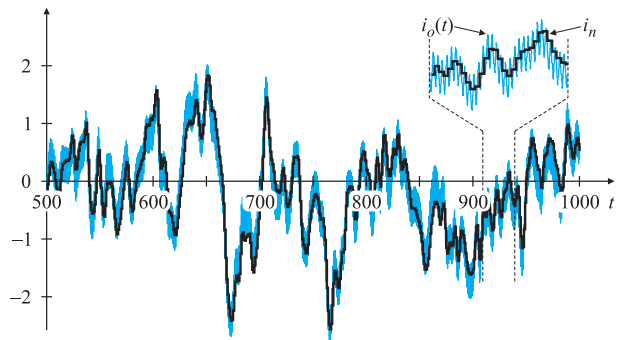
En la Fig. 2.18(b) se muestra el espectro de las mismas señales pero con un tiempo muerto del 5% del período de conmutación ($\Delta/T = 5/100$). Nuevamente el modelo refleja adecuadamente el comportamiento del sistema en la banda de frecuencias de interés. La amplitud de los armónicos es mayor que en el ejemplo de la Fig. 2.18(a) debido al incremento del valor de tiempo muerto.

Por último se realizaron simulaciones con una señal moduladora w_n más compleja: ruido Gaussiano filtrado con un filtro FIR pasa bajos con frecuencia de paso de $0,023f_s$, frecuencia de rechazo de $0,45f_s$ y atenuación en la banda de rechazo de 1×10^{-7} , cuyas características

2.3 Modulador PWM incluyendo variaciones de los tiempos de conmutación



(a) Espectros.



(b) Corriente.

Figura 2.19: Simulación utilizando ruido Gaussiano tipo pasa bajos. (a) Comparación del espectro de banda base de la señal y_n obtenida con el modelo que incluye a los tiempos muertos, la señal PWM $p(t)$ y la entrada $x_n = w_n$. (b) corriente $i_o(t)$ y su aproximación discreta i_n .

espectrales resultantes se aprecian en la Fig. 2.19(a). Los espectros de la señal PWM y de la señal producida por el modelo también se muestran en la Fig. 2.19(a) para $\Delta/T = 1/100$. El efecto del tiempo muerto puede observarse más claramente a partir de $0,4f_s$ en donde tanto el espectro de y_n como el de $p(t)$ se incrementan por encima del espectro de w_n . En la Fig. 2.19(b) se comparan la corriente $i_o(t)$ y la corriente i_n . Se observa que i_n captura el comportamiento de $i_o(t)$ en baja frecuencia, específicamente en la banda $[0, f_s/2)$, que no incluye a la ondulación de corriente como se muestra en el detalle de la zona ampliada.

La comparación del modelo propuesto con una simulación numérica del sistema muestra que éste es adecuado para modelar el comportamiento en el rango $[0, f_s/2)$ para cualquier señal w_n (no necesariamente sinusoidal) cuya máxima frecuencia sea $f_s/2$.

2. MODELOS DE MODULADORES DIGITALES POR ANCHO DE PULSO

Capítulo 3

Modulación digital PWM sin distorsión en banda base

En el Capítulo 2 se presentaron modelos para la modulación digital PWM y también se modelaron cierto tipos de variaciones de amplitud de los pulsos y de los tiempos de conmutación. Los modelos muestran que el proceso de modulación, con características no lineales, introduce cierta distorsión en banda base que no puede ser removida en las etapas posteriores de amplificación o demodulación. En este capítulo se presentan diferentes moduladores PWM que permiten reducir la distorsión de banda base causadas por las no linealidades de la modulación. Son aptos para su cálculo en línea y pueden funcionar utilizando una baja frecuencia de conmutación lo que no es posible utilizando moduladores PWM convencionales.

En la Sección 3.1 se desarrolla un modulador PWM basado en el algoritmo iterativo de Newton que permite obtener los ciclos de trabajo de la señal PWM a partir de las muestras de la señal moduladora garantizando distorsión nula en banda base [18]. Se presenta el desarrollo teórico del método de modulación propuesto basado en el modelo presentado en la Sección 2.1. El problema se formula matricialmente y se presentan dos teoremas que garantizan la convergencia del algoritmo y establecen una cota del error alcanzado para un número de iteraciones dado. También se presenta en la Sección 3.1.2 una alternativa para implementar el algoritmo de modulación en tiempo real tomando datos por bloques. Posteriormente se introducen simplificaciones para reducir la carga computacional llegando a una implementación escalar en la Sección 3.1.5 [20]. Esta implementación requiere de la elección de tres parámetros fundamentales que afectan su desempeño y carga computacional por lo que en la Sección 3.1.5.1 se analiza esta relación de compromiso. Simulaciones del método de modulación propuesto utilizando diferentes tipos de señales moduladoras se presentan en las Secciones 3.1.3 y 3.1.6.

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

En la Sección 3.2 se presenta la extensión del modulador basado en el algoritmo iterativo de Newton para compensar tanto los efectos de la no linealidad de la modulación PWM como los efectos de la variación de amplitud de los pulsos provocados por una posible perturbación en la fuente de alimentación [19]. Se analiza también el algoritmo de igualado de áreas presentado en la literatura para la compensación de la variación de amplitud y se muestra que no permite cancelar completamente la distorsión causada por la variación de amplitud de los pulsos. En la Sección 3.2.3 se presentan simulaciones y comparaciones entre el método propuesto y el algoritmo de igualado de áreas.

En la Sección 3.3 se presenta un modulador PWM basado en una estructura adaptiva de predistorsión [15]. Se consideran dos alternativas, en la primera los coeficientes se adaptan fuera de línea utilizando una señal de entrenamiento, en la segunda se adaptan los coeficientes en línea, en simultáneo con su operación.

En la Sección 3.4 se resume un método de modulación PWM basado en el cómputo del modelo inverso utilizando la teoría de Volterra [27], presentado recientemente [1, 2, 14].

Finalmente en la Sección 3.5 se presentan simulaciones y comparaciones de todos los métodos de modulación incluyendo también a la modulación PWM uniforme como referencia.

3.1. Modulador PWM basado en método iterativo de Newton

En esta sección se presenta un modulador PWM basado en el método iterativo de Newton que permite obtener distorsión cero en banda base, por simplicidad será denominado “PWM Newton”.

En [38] se muestra que toda señal de banda limitada $x(t)$ de ancho de banda f_m , y acotada entre $-2/\pi \leq x(t) \leq 2/\pi$, puede ser representada por una señal PWM con frecuencia de conmutación $f_s \geq 2f_m$, y que $x(t)$ puede ser recuperada a partir de la señal PWM sin distorsión en banda base utilizando un filtro pasa bajos ideal. La cota $2/\pi$ es una condición suficiente pero no necesaria que asegura que cualquier señal de banda limitada puede ser representada mediante una señal PWM sin distorsión de banda base. Esta cota depende de la relación entre la frecuencia portadora de la señal PWM y la máxima frecuencia de la señal moduladora. El valor más restrictivo de la cota ($2/\pi$) se alcanza cuando la frecuencia PWM es igual a la frecuencia de Nyquist $f_s = 2f_m$ y para una señal moduladora específica.

Para el caso analizado en esta tesis en donde $0 \leq w_n \leq 1$ y la señal de entrada es $0 \leq x_n \leq 1$ el resultado presentado en [38] establece que la condición suficiente sobre el rango de variación de la señal de entrada es $[-(2/\pi) + 1]/2 \leq x_n \leq [(2/\pi) + 1]/2$.

Aunque esta restricción teórica en la amplitud de la señal de entrada puede parecer severa, muchas señales con picos de amplitud fuera de este rango pueden representarse exactamente

3.1 Modulador PWM basado en método iterativo de Newton

utilizando señales PWM. Cuando se utiliza el método PWM Newton propuesto en esta sección la violación de la cota resulta en un desempeño disminuido, que aún así supera ampliamente al que se consigue con la modulación PWM uniforme como se muestra mediante un ejemplo práctico en la Sección 3.1.6.

En esta sección se muestra que el problema de determinar los ciclos de trabajo de la señal PWM de tal manera que los valores de las muestras de la señal PWM filtrada (con un filtro pasa bajos ideal) coincidan con las muestras de la señal moduladora puede ser reformulado como un problema de función inversa. La ventaja de adoptar este marco de trabajo es que pueden utilizarse varios resultados disponibles en la literatura basados en soluciones iterativas, en donde las tasas de convergencia y cotas de error son conocidas y pueden usarse para cuantificar el nivel de distorsión logrado en la aplicación.

Como se mostró en el Capítulo 2 la señal y_n , que representa el contenido en banda base de la señal PWM, es función de los ciclos de trabajo w_n . Esta relación está dada por (2.6) o, en su forma simplificada por (2.17), utilizando la notación matricial presentada en la Sección 2.1.1 se tiene que

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{w})$$

en donde el mapeo $\mathbf{g} : \mathbb{R}^Q \rightarrow \mathbb{R}^Q$ relaciona el vector de ciclos de trabajo $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^Q$ con las muestras de la señal PWM filtrada $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^Q$ y donde Q es la dimensión de los vectores considerados.

En este escenario la determinación del vector de ciclos de trabajo \mathbf{w} para obtener cero distorsión de banda base puede plantearse como:

Dado el vector \mathbf{x} de muestras de la señal moduladora, encontrar el vector \mathbf{w}^ de ciclos de trabajo tal que $\mathbf{g}(\mathbf{w}^*) - \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si \mathbf{w}^* existe entonces la señal PWM $p(t)$ no posee distorsión en el rango de frecuencias $[0, f_s/2)$.*

La solución al problema de modulación PWM está dado por $\mathbf{w}^* = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x})$, pero la inversión explícita generalmente no es práctica para valores grandes de Q . A continuación se propone un procedimiento numérico iterativo para calcular \mathbf{w}^* .

3.1.1. Solución iterativa

Los ceros $\mathbf{w} = \mathbf{w}^*$ de $\mathbf{g}(\mathbf{w}) - \mathbf{x} = \mathbf{0}$ se pueden calcular de forma iterativa usando el método de Newton-Raphson. La convergencia de la recursión está garantizada por el Teorema 1 que se presenta en esta sección. El análisis está basado en considerar el error de peor caso para lo que se utiliza la norma infinito aplicada a vectores, $\|\mathbf{x}\|_\infty \triangleq \max_{1 \leq i \leq Q} (|x_i|)$, y la

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

correspondiente norma inducida en las matrices $\|\mathbf{X}\|_{\infty i} \triangleq \max_{1 \leq j \leq Q} (\sum_{i=1}^Q |x_{ij}|)$. En lo que sigue los superíndices entre paréntesis (k) se utilizan para indicar el número de iteración.

Teorema 1. Dado $\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{x}$, $\|\mathbf{w}\|_{\infty} \leq w_b$, $\|\mathbf{x}\|_{\infty} \leq x_b$, y siempre que $D\mathbf{g}(\mathbf{w})$ (el Jacobiano de \mathbf{g} respecto de \mathbf{w}) sea no singular, entonces la recursión

$$\mathbf{w}^{(k+1)} \triangleq \mathbf{w}^{(k)} - D\mathbf{g}(\mathbf{w}^{(k)})^{-1} [\mathbf{g}(\mathbf{w}^{(k)}) - \mathbf{x}] \quad (3.1)$$

está bien definida para $k = 0, 1, \dots$. En particular $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{w}^*$ tal que $\mathbf{g}(\mathbf{w}^*) - \mathbf{x} = 0$. Finalmente para todo $k \geq 0$

$$\|\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^*\|_{\infty} \leq \alpha \frac{h^{2^k - 1}}{1 - h^{2^k}}, \quad (3.2)$$

donde

$$\alpha = \sec\left(\frac{\pi x_b}{2}\right) \left[x_b - \frac{2}{\pi} \text{Si}\left(\frac{\pi x_b}{2}\right) + \mu(x_b) \right]$$

donde $\mu(x_b)$ (ver Apéndice A.2) está dado por

$$\mu(x_b) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{1+m} f_m(x_b)$$

y

$$h = \alpha\beta\gamma/2 < 1$$

con $\gamma = 1,69$ y $\beta = \sec\left(\frac{\pi w_b}{2}\right)$.

Demostración. Ver Apéndice A.2.1. □

El Teorema 1 garantiza la convergencia de la recursión. Comenzar con una estimación inicial $\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{x}$ (i.e., comenzando con los ciclos de trabajo iguales a las muestras de la señal moduladora, que corresponde a la forma típica de realizar la modulación PWM uniforme), asegura la convergencia en menos pasos porque el punto de partida está más cerca de \mathbf{w}^* . El teorema también proporciona una cota para la diferencia entre los ciclos de trabajo de la iteración k y los ciclos de trabajo \mathbf{w}^* que logran la distorsión cero.

El siguiente teorema establece una cota sobre el error máximo definido como la diferencia entre \mathbf{x} (las muestras de la señal moduladora) e $\mathbf{y}^{(k)}$ (las muestras de la señal PWM filtrada en la iteración $k > 0$). También demuestra que una pequeña corrección de los ciclos de trabajo produce una reducción significativa en la distorsión de banda base.

Teorema 2. Si $\|\mathbf{w}\|_{\infty} \leq w_b$ y $\|\mathbf{x}\|_{\infty} \leq x_b$, entonces

$$\|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{x}\|_{\infty} \leq \frac{\gamma}{2} \|\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^*\|_{\infty}^2 \leq \frac{\gamma\alpha^2}{2} \left(\frac{h^{2^k - 1}}{1 - h^{2^k}} \right)^2 \quad (3.3)$$

donde γ , α y h se definen en el Teorema 1.

Demostración. Ver Apéndice A.2.2. □

3.1.1.1. Ejemplos de aplicación de los Teoremas 1 y 2

Además de garantizar la existencia y permitir el cálculo de los ciclos de trabajo que aseguran distorsión nula en banda base, los Teoremas 1 y 2 puede ser útiles en la fase de diseño. Por ejemplo, si se fija la cantidad de iteraciones debido a limitaciones en la capacidad de procesamiento, el Teorema 1 establece una cota de la máxima diferencia entre los ciclos de trabajo en la iteración k -ésima y el vector de ciclo de trabajo ideal \mathbf{w}^* . Este valor puede ser útil para definir la resolución necesaria para el PWM: el número b de bits debe elegirse de manera que la distancia $\|\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^*\|_\infty > 2^{-b}$, i.e. que quede comprendido dentro de la resolución del PWM. El Teorema 2 proporciona una cota del error máximo $\|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty$ que es alcanzable con este diseño. En otro escenario, el diseñador elige una cota máxima para el error $\|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty$. El Teorema 2 establece el número de iteraciones k requeridas, y el Teorema 1 puede usarse para estimar la resolución del PWM.

Por ejemplo, si se asume que el valor máximo de la entrada es $x_b = 0,5$ y que $w_b = 0,95$ entonces se tiene que: $\alpha \approx 0,07$, $\gamma \approx 1,69$ y $\beta = 12,74$, por lo tanto $h \approx 0,76 < 1$. Como ejemplo del primer escenario, si el diseñador decide realizar una única iteración ($k = 1$), entonces (3.3) en el Teorema 2 muestra que el máximo error entre las muestra de entrada y las muestras demoduladas está acotado por $\|\mathbf{y}^{(1)} - \mathbf{x}\|_\infty < 0,013$. Si se realizan $k = 3$ iteraciones entonces $\|\mathbf{y}^{(3)} - \mathbf{x}\|_\infty < 1,12 \times 10^{-4}$.

Para la modulación PWM uniforme en donde las muestras de la señal moduladora son los ciclos de trabajo (lo que se corresponde con la iteración inicial $k = 0$ del algoritmo) el error correspondiente está acotado por $\|\mathbf{y}^{(0)} - \mathbf{x}\|_\infty = \|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\|_\infty \leq 0,05$ (ver Lema 4 en el Apéndice A.2). Este ejemplo muestra que la cota del error máximo disminuye rápidamente utilizando unas pocas iteraciones.

Del Teorema 1 la máxima diferencia entre los ciclos de trabajo corregidos y el límite \mathbf{w}^* está dado por (3.2): $\|\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^*\|_\infty < 0,13$ por lo que se requieren al menos $b = 3$ bits. Para tres iteraciones se tiene que $\|\mathbf{w}^{(3)} - \mathbf{w}^*\|_\infty < 0,01$ requiriendo un PWM con resolución mayor a $b = 7$ bits.

3.1.2. Procesamiento por bloques

En la sección anterior se abordó el problema de calcular los ciclos de trabajo w_n para alcanzar distorsión cero, es decir para lograr que $y_n = x_n$. La solución iterativa propuesta en el Teorema 1 requiere el conocimiento del vector completo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^Q$ de muestras de la señal moduladora por lo que no resulta adecuado para el procesamiento en línea (en tiempo real),

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

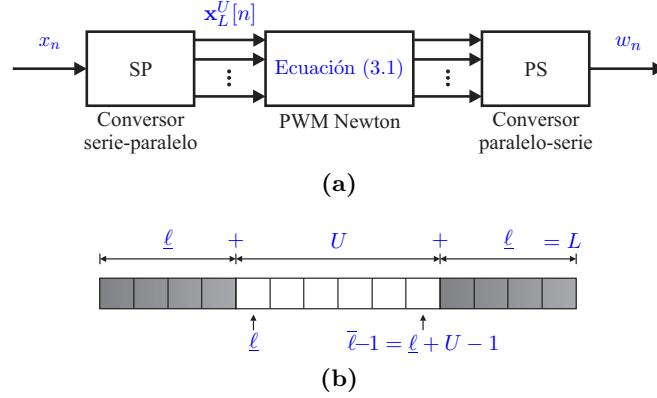


Figura 3.1: Arquitectura para el procesamiento por bloques.

más aún si la dimensión Q del vector es grande. En esta sección se propone una alternativa para calcular los ciclos de trabajo de una señal de longitud Q arbitraria pero finita usando segmentos de largo $L \ll Q$ y utilizando técnicas de procesamiento por bloques. Por ejemplo, si se dispone de una pista de audio digital de 4 minutos de duración muestreada a 44,1 kHz entonces $Q > 10 \times 10^6$. En estos casos el problema es de dimensión finita pero extremadamente grande: por esta razón se prefiere procesar bloques de largo L con $L \ll Q$, y concatenar adecuadamente las salidas.

La arquitectura de procesamiento por bloques se basa en la conversión serie a paralelo (SP) y paralelo a serie (PS) como se muestra en la Fig. 3.1(a). A partir de las muestras x_n de la señal de entrada el bloque SP genera el vector $\mathbf{x}_L^U[n]$ dado por

$$\mathbf{x}_L^U[n] = [x_{nU}, x_{nU-1}, \dots, x_{nU-L+1}]^T,$$

compuesto por L muestras consecutivas tomadas cada U muestras. Si $L = U$ no hay solapamiento, si $U > L$ se pierden muestras y si $L > U$ las últimas $(L - U)$ muestras del bloque $\mathbf{x}_L^U[n]$ se solapan con las primeras $(L - U)$ muestras de $\mathbf{x}_L^U[n - 1]$.

Esta última configuración se elige para la implementación por bloques del modulador PWM Newton. Se utilizan L muestras consecutivas para calcular U ciclos de trabajo y se descartan $\underline{\ell} = (L - U)/2$ muestras en los bordes de cada bloque para reconstruir la señal unidimensional con el bloque PS de la Fig. 3.1(a). En la Fig. 3.1(b) se muestra un bloque de muestras de la señal moduladora de largo L . En este bloque las muestras descartadas se indican con cuadrados de color gris ($\underline{\ell}$ muestras en cada extremo del bloque) y las U muestras recuperadas se muestran con cuadrados blancos. Sin pérdida de generalidad se asume que $L - U$ es par.

La arquitectura de procesamiento por bloques de la Fig. 3.1(a) requiere la implementación de los bloques SP y PS; una alternativa se muestra en la Fig. 3.2. Los bloques SP y PS se

3.1 Modulador PWM basado en método iterativo de Newton

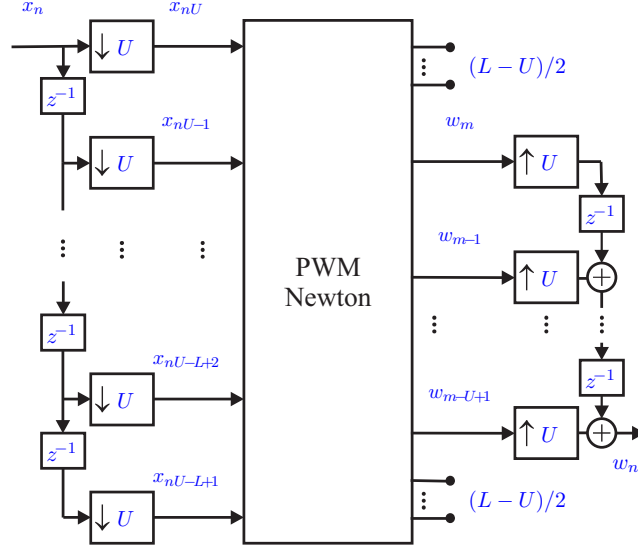


Figura 3.2: Alternativa para la implementación del procesamiento por bloques.

construyen utilizando líneas de retardos, L bloques de decimación por U (indicados como $\downarrow U$), y U bloques de interpolación por U (indicados como $\uparrow U$). Estos bloques se utilizan normalmente en sistemas de procesamiento de señales que operan con diferentes frecuencias de muestreo [25], pero podrían también utilizarse otros algoritmos para concatenar los sucesivos bloques de una señal arbitrariamente larga.

3.1.2.1. Error debido al procesamiento por bloques

Cuando el modulador PWM Newton se calcula utilizando la arquitectura de procesamiento por bloques descrita anteriormente es de esperar que se introduzca un error en el cálculo de las muestras de salida y_n porque se utilizan solo L muestras en lugar del total de las Q muestras. El siguiente teorema presenta una cota del error introducido debido al procesamiento por bloques.

Teorema 3. El error máximo de procesamiento por bloques e_B está acotado por $e_B \leq \bar{e}_B$ que puede aproximarse por

$$\bar{e}_B \approx a_3(L, U)w_b^3 + a_5(L, U)w_b^5 + a_7(L, U)w_b^7 \quad (3.4)$$

donde $a_3(L, U)$, $a_5(L, U)$ y $a_7(L, U)$ son función de L y de U y se definen en (A.38) y $w_b = \|\mathbf{w}\|_\infty$.

Demostración. Ver Apéndice A.3. □

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

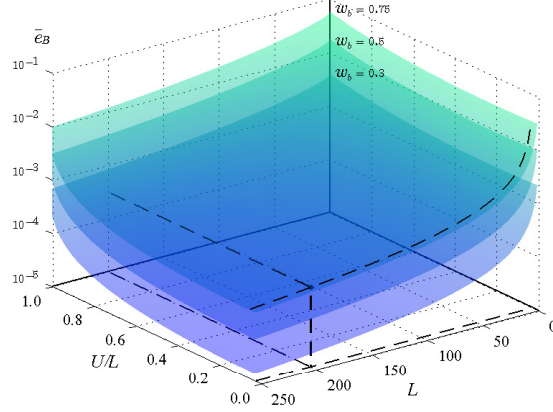


Figura 3.3: Cota para el error de procesamiento por bloques \bar{e}_B en función de U/L y L , para $w_b = 0,3, 0,5$, y $0,75$.

En la Fig. 3.3 se muestra una representación de \bar{e}_B en función del largo del bloque L y de la relación U/L para tres valores $w_b = \|\mathbf{w}\|_\infty$ de ciclo de trabajo máximo. De la Fig. 3.3 se observa que el error de procesamiento por bloques puede reducirse aumentando el largo L del bloque o descartando un gran número de muestras (U/L pequeño). El gráfico de superficie también revela que el principal factor para reducir el error de procesamiento por bloques es un valor máximo de ciclo de trabajo w_b pequeño. En las aplicaciones prácticas, éste puede ser un requisito conflictivo debido a la resolución temporal limitada de los moduladores PWM digitales y también porque se subutiliza la tensión de CC que alimenta la etapa de potencia.

3.1.3. Simulaciones del modulador PWM Newton por bloques con Jacobiano completo

En esta sección se presentan simulaciones del modulador PWM Newton utilizando la arquitectura de procesamiento por bloques de la Sección 3.1.2 y dos iteraciones ($K = 2$). Si bien la obtención de la inversa del Jacobiano requiere una carga computacional elevada, en esta sección se muestra la capacidad del PWM Newton para reducir a niveles despreciables la distorsión armónica total más ruido (THD+N). El THD+N se calcula como el logaritmo de la relación entre la energía de los armónicos más el ruido y la energía de la señal:

$$\text{THD+N [dB]} = 10 \log \left(\frac{\sum (y_n - x_n)^2}{\sum (x_n)^2} \right). \quad (3.5)$$

El largo de bloque se fija en $L = 200$, con $\underline{\ell} = (L - U)/2 = 97$ muestras descartadas en ambos extremos del bloque lo que representa $U/L = 0,03$. Por lo tanto, $U = 6$ muestras son

3.1 Modulador PWM basado en método iterativo de Newton

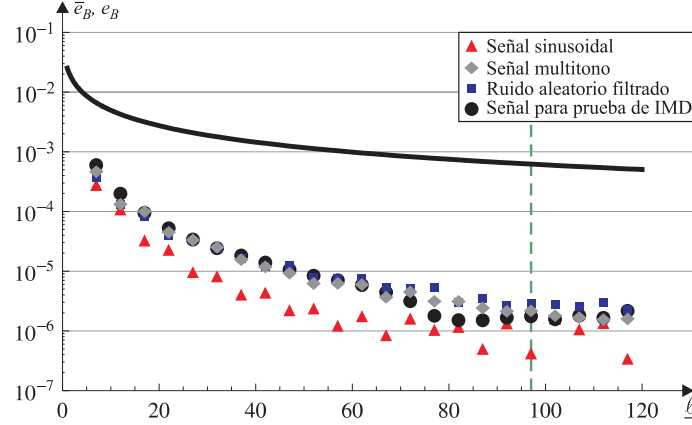


Figura 3.4: Cota del error de procesamiento por bloques \bar{e}_B en función de $(L-U)/2$ para $U = 6$ y $w_b = 0,75$ (—) y error de procesamiento por bloques e_B para las cuatro señales simuladas. La línea punteada vertical indica el punto de operación utilizado para las simulaciones de la Sección 3.1.3.

tomadas por el bloque de conversión paralelo a serie (PS). Para el cálculo de la salida $y_n^{(k)}$ mediante (2.6) se utiliza hasta la potencia séptima en la expansión en serie de potencias de la función $f_m(w)$ definida en (2.12).

Las simulaciones se realizaron utilizando una frecuencia de muestreo y PWM normalizada $f_s = 1$. Las señales modificadoras utilizadas son: (1) señal sinusoidal de frecuencia $f_m = 0,1f_s$, (2) señal multitono compuesta por nueve sinusoides espaciadas en octavas comenzando con $1 \times 10^{-3}f_s$, (3) ruido aleatorio con distribución normal filtrado entre $5,7 \times 10^{-3}f_s$ y $0,272f_s$ (lo que equivale a 250 Hz y 12 kHz si se utiliza $f_s = 44,1$ kHz) y (4) señal para prueba de distorsión por intermodulación (IMD) que corresponde a la norma DIN 45403 para medidas de IMD, utilizada generalmente para la verificación de equipamiento de audio [48]. La señal está compuesta por la suma de una sinusoidal de baja frecuencia y una sinusoidal de alta frecuencia (usualmente 250 Hz y 8 kHz), en donde la componente de alta frecuencia tiene una amplitud 12,04 dB menor que la componente de baja frecuencia. Se eligieron las frecuencias normalizadas $5,7 \times 10^{-3}$ y 0,181, respectivamente.

Debido a la baja relación que existe entre la máxima frecuencia de la señal moduladora y la frecuencia de la modulación PWM f_s se ponen de manifiesto las no linealidades de la modulación PWM lo que permite observar el desempeño del PWM Newton ante condiciones de operación exigentes.

La cota teórica debido al error de procesamiento por bloques dada por (3.4) en función de $\underline{\ell} = (L-U)/2$ se muestra en la Fig. 3.4 para $w_b = 1/2 + 0,8/\pi \approx 0,75$. Los valores de error de procesamiento por bloques para las cuatro señales de prueba también se muestran

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

en la Fig. 3.4; la línea punteada vertical indica el punto de funcionamiento elegido para los ejemplos ($L = 200$, $U = 6$). Los valores de e_B para las cuatro señales se encuentra por debajo de la cota teórica \bar{e}_B dada por (3.4), que es conservativa porque se obtiene a partir de un análisis de peor caso.

3.1.3.1. Análisis espectral

Para evaluar el desempeño del PWM Newton con Jacobiano completo se genera la señal PWM mediante Simulink a partir de los ciclos de trabajos calculados. Generar la señal PWM en lugar de utilizar el modelo presentado en la Sección 2.1 para evaluar el desempeño del modulador hace que las simulaciones sean más lentas porque se requiere una gran resolución temporal, la ventaja es que permite obtener espectros en un rango de frecuencias superior a $f_s/2$. Los espectros se calculan mediante el uso de la FFT: luego de filtrar la señal PWM con un filtro pasa bajos de orden 8 y frecuencia de corte $2f_s$ para evitar aliasing, la señal se muestrea a $100f_s$ y posteriormente se ventanea para prevenir efectos de fuga espectral y pérdidas por ondulación [54]. En una medición real todas o parte de estas operaciones son realizadas por la etapa de entrada de un analizador de espectro.

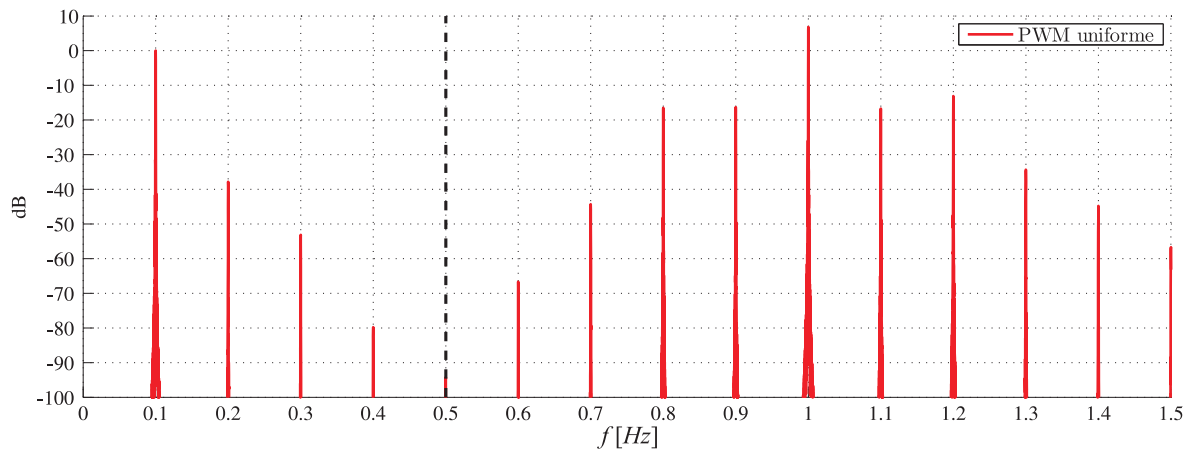
Las figuras 3.5 a 3.8 muestran los espectros para las cuatro señales bajo análisis. La línea a tramos ubicada en la frecuencia $f_s/2 = 0,5$ indica el límite superior de la banda base. La amplitud del espectro se escaló por el valor máximo del contenido en banda base (0 dB). Para apreciar el efecto del modulador PWM Newton se incluye también el espectro de la modulación PWM uniforme. Los espectros se muestran en un rango de frecuencias que se extiende hasta $1,5f_s$ más allá de la banda base para observar el contenido espectral de la señal $p(t)$.

La Fig. 3.5 muestra el espectro de la señal PWM cuando la señal moduladora es una senoide de frecuencia $f_m = 0,1f_s$. Las ventajas del PWM Newton quedan evidenciadas por la ausencia de componentes de distorsión en la banda base que alcanza un THD+N de $-132,05$ dB, mucho menor que el obtenido mediante modulación PWM uniforme de $-44,24$ dB, mayormente debido a la presencia del segundo, tercero y cuarto armónico.

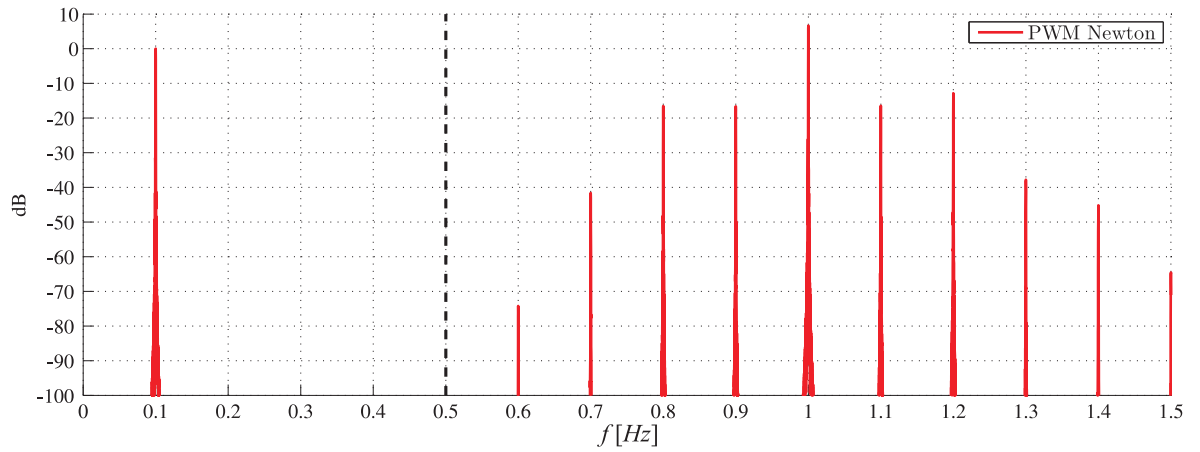
La Fig. 3.6 muestra el espectro de la señal PWM para la señal moduladora multitono. El THD+N pasa de $-43,6$ dB para el PWM uniforme a $-115,11$ dB para el PWM Newton. Se observa en la Fig. 3.6(b) que se eliminan o reducen por debajo de los -100 dB todas las componentes de distorsión que presenta el PWM uniforme en banda base.

Para el ruido aleatorio filtrado (señal 3) la modulación PWM uniforme exhibe un piso de ruido de distorsión que comienza en $0,3f_s$ y se extiende por encima de la frecuencia de Nyquist $f_s/2 = 0,5$ como lo muestra la Fig. 3.7. La distorsión de banda base se reduce por debajo de los -100 dB para el PWM Newton. El THD+N pasa de $-45,78$ dB a $-119,41$ dB.

3.1 Modulador PWM basado en método iterativo de Newton



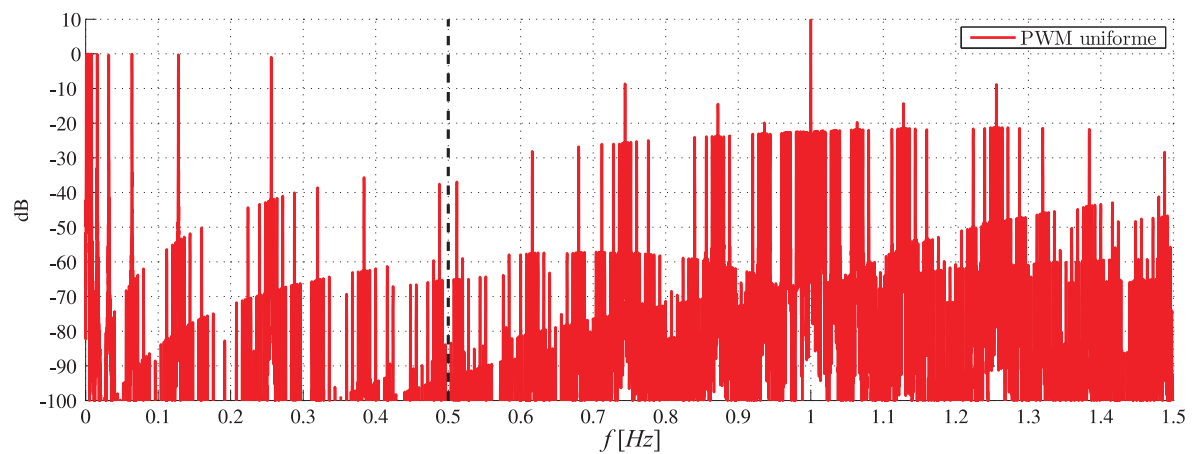
(a) PWM uniforme



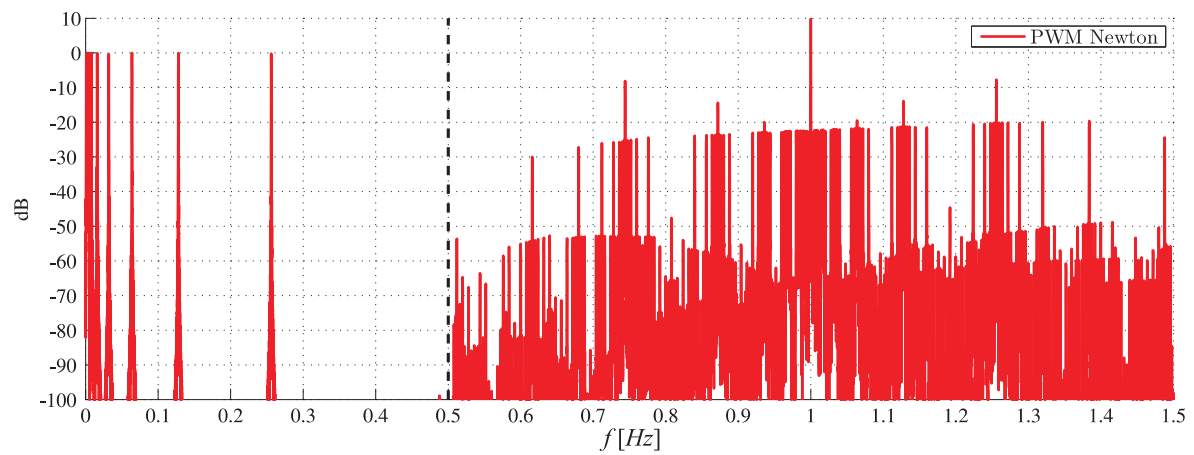
(b) PWM Newton

Figura 3.5: Espectro en frecuencia de la señal PWM. Señal moduladora 1: senoide de frecuencia $f_m = 0,1f_s$.

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE



(a) PWM uniforme



(b) PWM Newton

Figura 3.6: Espectro en frecuencia de la señal PWM. Señal moduladora 2: señal multitono.

3.1 Modulador PWM basado en método iterativo de Newton

Tabla 3.1: THD+N y variaciones de los ciclos de trabajo.

Señal de Prueba	THD+N [dB]		$\overline{\Delta w}$ %	máx(Δw) %
	PWM Newton	PWM uniforme		
1 (Fig.3.5)	-132,05	-44,24	0,29	0,79
2 (Fig.3.6)	-115,11	-43,67	0,31	1,32
3 (Fig.3.7)	-119,41	-45,78	0,22	1,90
4 (Fig.3.8)	-118,17	-49,20	0,15	0,54

Los espectros para la señal de IMD (señal 4) mostrados en la Fig. 3.8 también revelan el buen desempeño del modulador PWM Newton. El espectro para la modulación PWM uniforme (THD+N = -49,20 dB) exhibe bandas laterales alrededor de $f_{m2} = 0,18$, una componente en $2f_{m2} = 0,36$ y sus bandas laterales y otra componente de distorsión alrededor de $0,45f_s$. El PWM Newton elimina estas componentes espurias y logra un THD+N de -118,17 dB.

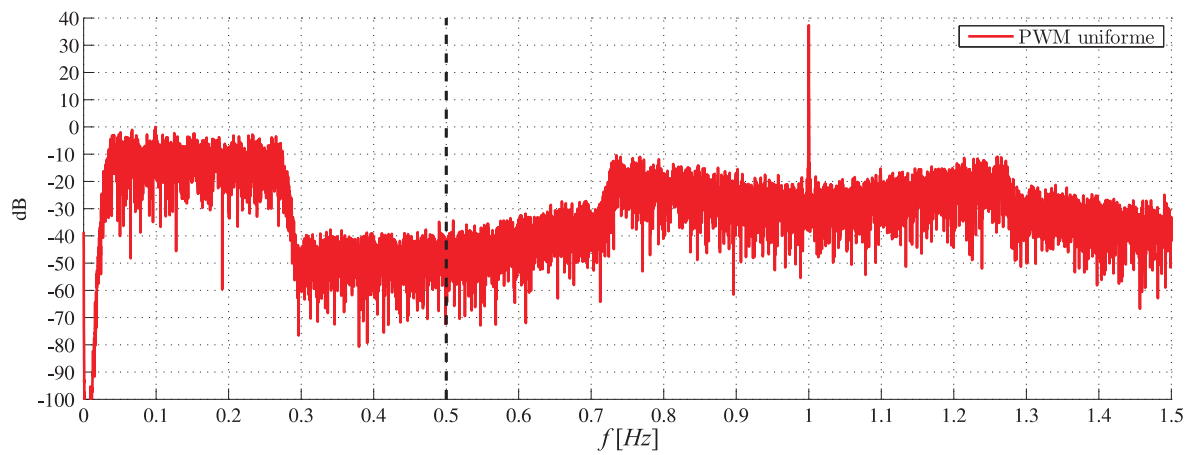
Los resultados obtenidos se sintetizan en la Tabla 3.1, que listan el valor de THD+N para el PWM uniforme y para el PWM Newton. En todos los casos el PWM Newton utilizando dos iteraciones y el Jacobiano completo logra una distorsión por debajo de los -115 dB para las señales simuladas. Se incluye también la variación media y máxima entre los ciclos de trabajo definidas como: $\overline{\Delta w} \% = 100 \overline{|\mathbf{w}^{(i)} - \mathbf{w}^{(0)}|}$, $\text{máx}(\Delta w) \% = 100 \text{máx} |\mathbf{w}^{(i)} - \mathbf{w}^{(0)}|$. Es notable que la sustancial mejora lograda con el PWM Newton pueda obtenerse mediante ajustes mínimos de los valores de ancho de pulso de la señal PWM. Estos resultados, sin embargo, coinciden con los postulados de los Teoremas 1 y 2.

Las simulaciones muestran que el PWM Newton permite reducir la distorsión de banda base a niveles despreciables incluso cuando solo se utilizan dos iteraciones y para señales moduladoras con contenido frecuencial alto (cercano a $f_s/2$). El principal desafío para una implementación en tiempo real del PWM Newton es la carga computacional requerida para invertir el Jacobiano. A continuación se estudian algunas alternativas para simplificar el cálculo del modulador.

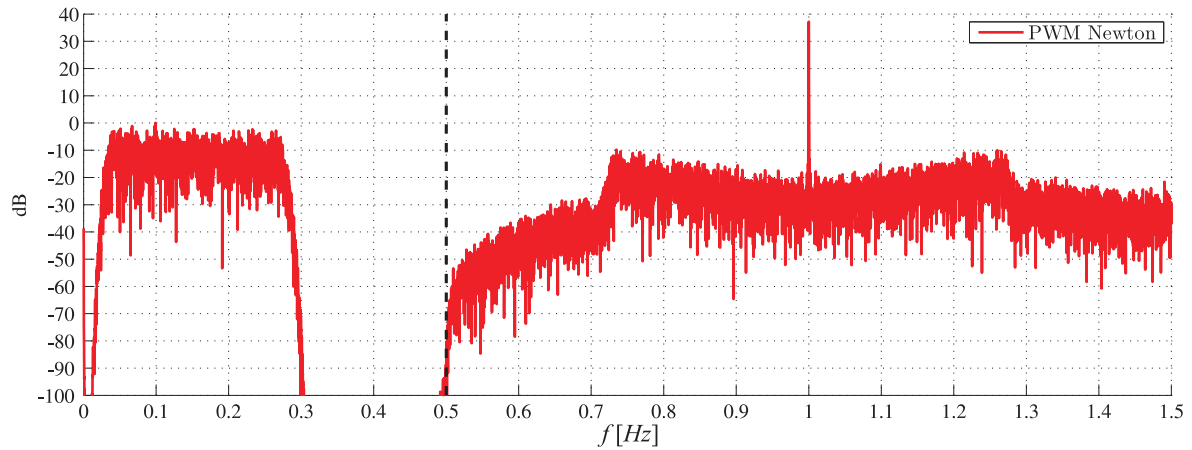
3.1.4. Alternativas para el cómputo del Jacobiano

De acuerdo con la ecuación (3.1), el cómputo de los ciclos de trabajo utilizando el modulador PWM Newton requiere de dos etapas: el cálculo de las muestras de la señal demodulada y_n que componen el vector $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{g}(\mathbf{w}^{(k)})$ y el cálculo del término de corrección de Newton

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE



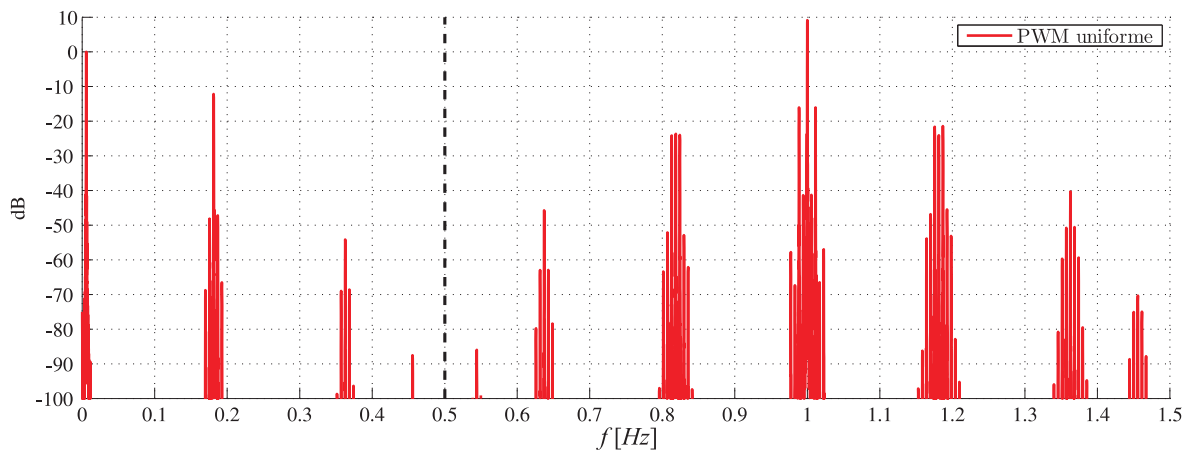
(a) PWM uniforme



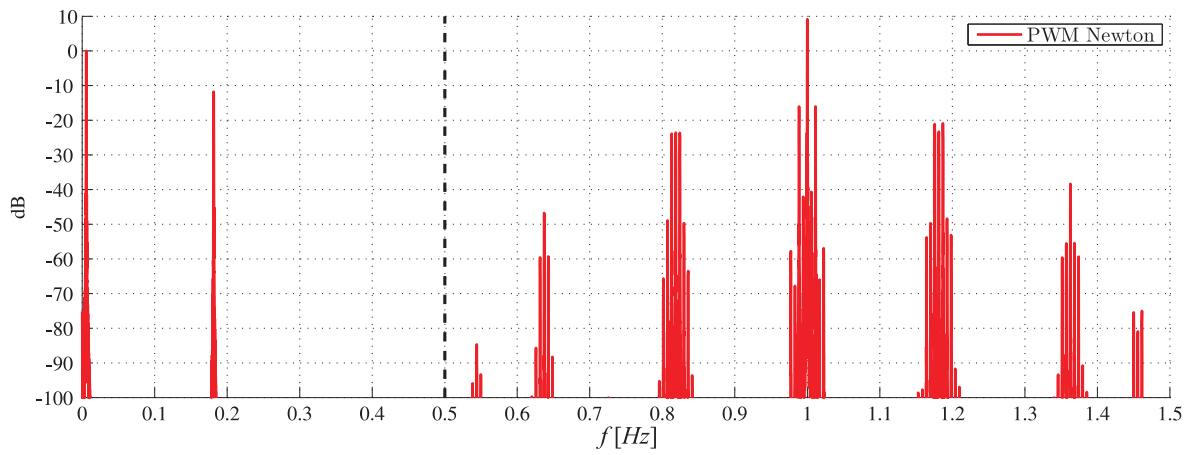
(b) PWM Newton

Figura 3.7: Espectro en frecuencia de la señal PWM. Señal moduladora 3: ruido aleatorio de banda-limitada.

3.1 Modulador PWM basado en método iterativo de Newton



(a) PWM uniforme



(b) PWM Newton

Figura 3.8: Espectro en frecuencia de la señal PWM. Señal moduladora 4: Prueba de IMD.

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

$D\mathbf{g}(\mathbf{w}^{(k)})^{-1} [\mathbf{g}(\mathbf{w}^{(k)}) - \mathbf{x}]$. Una implementación directa del término de corrección puede ser computacionalmente muy intensiva (porque requiere el cálculo de la inversa de la matriz Jacobiano) pero pueden considerarse varias alternativas para reducir la carga computacional. Un análisis numérico de la matriz Jacobiano cuyos elementos se calculan mediante (A.9), revela que la misma es diagonal dominante lo que justifica la utilización de métodos de Newton con el Jacobiano incompleto (IJN por sus siglas en inglés) [32]. Se define una matriz invertible $H(\mathbf{w}^{(k)})$ como

$$[H(\mathbf{w}^{(k)})]_{i,j} = \begin{cases} [D\mathbf{g}(\mathbf{w}^{(k)})]_{i,j}, & \text{si } i, j \in \mathbf{c}^{(k)}, \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

donde $\mathbf{c}^{(k)}$ es un conjunto de índices y $H(\mathbf{w}^{(k)})$ es una matriz no nula. Las propiedades de convergencia del método IJN dependen de la elección de $\mathbf{c}^{(k)}$ [32]. El procedimiento requiere implementar (3.1) usando $H(\mathbf{w}^{(k)})$ como una aproximación del Jacobiano. A continuación se discuten algunas alternativas para la selección del conjunto de índices $\mathbf{c}^{(k)}$ y se analiza la carga computacional requerida en cada caso.

Jacobiano completo. El cálculo de la inversa del Jacobiano usando eliminación de Gauss-Jordan tiene una complejidad $\mathcal{O}(L^3)$. Alternativamente, $(D\mathbf{g})^{-1}$ puede calcularse utilizando un número finito de términos de la expansión en serie de potencias: $(D\mathbf{g})^{-1} \approx I + (I - D\mathbf{g}) + (I - D\mathbf{g})^2$, pero la complejidad se mantiene $\mathcal{O}(L^3)$ debido al término que depende del cuadrado de la matriz.

Jacobiano tridiagonal. La carga computacional puede reducirse a orden $\mathcal{O}(L)$ y aún así mantener una buena característica de convergencia del algoritmo, eligiendo $H(\mathbf{w}^{(k)})$ como una matriz tridigaonal [72]. Se preservan las tres diagonales principales del Jacobiano $D\mathbf{g}$ mientras que se anulan los elementos restantes.

Jacobiano diagonal. En este caso $H(\mathbf{w}^{(k)})$ está formada por la diagonal principal del Jacobiano $D\mathbf{g}$. Su inversa es $[H(\mathbf{w}^{(k)})^{-1}]_{j,j} = \text{sinc}(w_j/2)^{-1}$, resultando en una complejidad $\mathcal{O}(1)$.

Jacobiano con diagonal constante. Como una alternativa a las aproximaciones previas, $H(\mathbf{w}^{(k)})$ puede elegirse como una matriz diagonal constante [75] llevando también la complejidad computacional a $\mathcal{O}(1)$ pero sin la necesidad de calcular ningún elemento del Jacobiano.

El modulador PWM Newton utilizando el procesamiento por bloques descrito anteriormente y alguno de los Jacobianos propuestos se resume en el Algoritmo 1.

Los métodos alternativos al Jacobiano completo reducen notablemente la carga computacional del algoritmo pero pueden requerir más de una iteración para reducir la distorsión

3.1 Modulador PWM basado en método iterativo de Newton

Algoritmo 1 Pseudo-código del modulador PWM Newton por bloques

Require: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L$: vector con las muestras de la señal moduladora

```

 $\mathbf{w}^{(0)} \leftarrow \mathbf{x}$ 
for  $i = 1$  to  $K$  do
  for  $n = \underline{\ell}$  to  $\bar{\ell} - 1$  do
     $y_n \leftarrow [\mathbf{g}(\mathbf{w}^{(i-1)})]_n$  usando (2.17).
  end for
  Actualizar  $H(\mathbf{w}^{(i-1)})$  utilizando el método Jacobiano elegido
   $\mathbf{w}^{(i)} \leftarrow \mathbf{w}^{(i-1)} - H(\mathbf{w}^{(i-1)})^{-1}(\mathbf{g}(\mathbf{w}^{(i-1)}) - \mathbf{x})$ 
end for

```

Tabla 3.2: THD+N en dB y complejidad de las alternativas propuestas

Jacobiano	Iteración			Complejidad
	$K = 1$	$K = 2$	$K = 3$	
Completo	-117	-167	-237	$\mathcal{O}(L^3)$
Tridiagonal	-80	-122	-160	$\mathcal{O}(L)$
Diagonal	-69	-101	-128	$\mathcal{O}(1)$
Constante	-65	-88	-109	$\mathcal{O}(1)$

armónica total más ruido (THD+N) a los niveles deseados. Sin embargo, incluso utilizando dos o tres iteraciones, el número de operaciones requeridas por estos métodos alternativos es más bajo que el cómputo del modulador PWM Newton utilizando el Jacobiano completo. A modo de ejemplo, la Tabla 3.2 muestra los valores de THD+N obtenidos para una señal aleatoria de banda limitada, cuando se utilizan los diferentes Jacobianos propuestos y para $K = 1$, $K = 2$ y $K = 3$ iteraciones. Esta tabla muestra que utilizar el Jacobiano diagonal con $K = 3$ iteraciones resulta en un buen compromiso entre desempeño y carga computacional. En general se utilizará esta configuración en lo que sigue salvo que se indique lo contrario.

3.1.5. Modulador PWM Newton basado en el Jacobiano diagonal: método iterativo escalar

Cuando se utiliza el Jacobiano diagonal el sistema matricial dado por (3.1) puede simplificarse en una ecuación escalar dada por

$$w_n^{(k+1)} = w_n^{(k)} - r(w_n^{(k)}) \left[y_n^{(k)} - x_{n-(k+1)M} \right] \quad (3.6)$$

donde $r(w_n) = [\text{sinc}(w_n/2)]^{-1}$. La ecuación (3.6) puede representarse por el diagrama en bloques de la Fig. 3.9 que muestra cómo calcular el próximo ciclo de trabajo $w_n^{(k+1)}$ teniendo

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

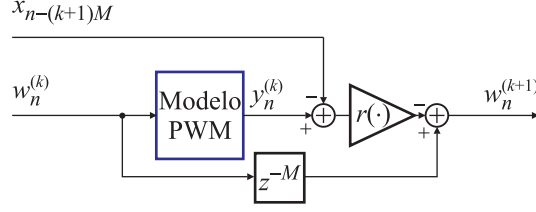


Figura 3.9: Representación en bloques de la iteración k -ésima de la ecuación (3.6). El bloque “Modelo PWM” implementa (2.17) que se corresponde con la Fig. 2.5.

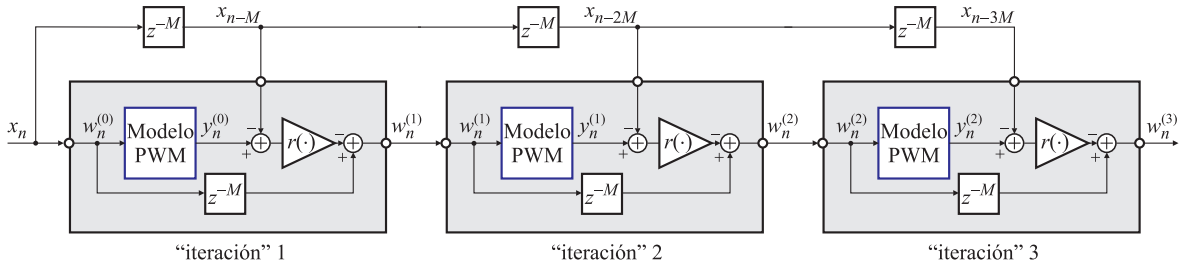


Figura 3.10: Etapas del modulador PWM Newton.

como entrada el valor actual $w_n^{(k)}$ y corrigiendo este valor por una versión escalada de la diferencia entre la muestra de salida $y_n^{(k)}$ y la muestra de entrada $x_{n-(k+1)M}$. Esta última se retrasa $M = (N - 1)/2$ muestras teniendo en cuenta el retardo de grupo constante de los filtros FIR que se utilizan para el cálculo de y_n usando (2.17) en el bloque “Modelo PWM”.

La estructura base del modulador PWM Newton está compuesta por el cálculo de $y_n^{(k)}$ y por otra parte la utilización de (3.6) para el cálculo del ciclo de trabajo $w^{(K)}$, donde K es el número de iteraciones que se utiliza en la implementación.

El modulador completo está formado por la conexión en cascada de K bloques como el de la Fig. 3.9. Para tres iteraciones ($K = 3$) la estructura completa se muestra en el diagrama en bloques de la Fig. 3.10. Debido al retardo introducido por los filtros FIR presentes en el modelo discreto del PWM dado por (2.17) las muestras de entrada x_n se retrasan M muestras en cada iteración antes de compararlas con $y_n^{(k)}$. La primera etapa del algoritmo utiliza $w_n^{(0)} = x_n$. Las muestras de la señal de salida y_n se calculan utilizando la estructura Hammerstein generalizada que se representa en la Fig. 2.5.

El proceso se repite K veces: el ciclo de trabajo $w_n^{(k-1)}$ producido por la etapa previa se utiliza como entrada a la próxima etapa $w_n^{(k)}$. En cada etapa la magnitud $|y_n^{(k)} - x_{n-(k+1)M}|$ se reduce, lo que se traduce en sucesivas disminuciones de la distorsión de banda base producida por el proceso de modulación.

3.1.5.1. Selección de los parámetros del modulador PWM Newton

Tres parámetros del algoritmo deben seleccionarse al momento de realizar una implementación del modulador PWM Newton con Jacobiano diagonal. Estos parámetros son: el largo N de los filtros FIR, la potencia máxima impar P utilizada para el modelo de la modulación PWM dado por (2.17), y el número de etapas K del modulador PWM Newton. La distorsión de banda base se reduce para valores crecientes de todos estos parámetros pero la complejidad computacional también se incrementa. En esta sección, el rendimiento del modulador PWM Newton se analiza en términos de la distorsión armónica total más ruido (THD+N por sus siglas en inglés) en función de N , P y K .

Se realizó una simulación numérica para valores impares de $9 \leq N \leq 99$, $3 \leq P \leq 13$ y para $1 \leq K \leq 4$. Los ciclos de trabajo w_n que resultan del algoritmo se utilizan como entrada del modelo de PWM de la Fig. 2.5. Las muestra de salida y_n junto con una versión retrasada de las muestras de la señal de entrada x_{n-KM} son utilizadas para calcular THD+N utilizando (3.5).

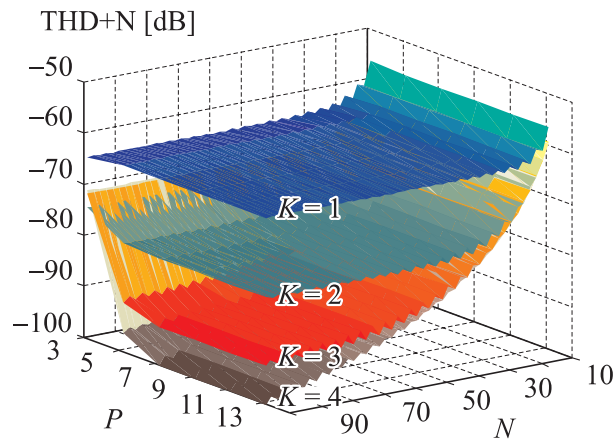
Para estas simulaciones se utilizaron dos tipos de señales moduladoras x_n : una señal aleatoria de tipo pasa banda y una señal multitonal. La señal aleatoria es generada mediante el filtrado de ruido Gaussiano resultando en una señal con contenido frecuencial en el rango $0,01f_s$ a $0,3f_s$. Por otra parte la señal multitono se genera sumando nueve sinusoides comenzando por la frecuencia $1 \times 10^{-3}f_s$ y con cada tono subsiguiente duplicando la frecuencia anterior (sinusoidales espaciadas en octavas).

La Fig. 3.11 muestra el resultado de las simulaciones en función de N , P y K . En la Fig. 3.11(a) se observan las superficies de THD+N en dB como función de N y P para $K = 1, \dots, 4$ para la señal moduladora ruido de banda limitada. Aunque el THD+N se reduce con cada etapa K , es deseable no incrementar demasiado este valor dado que cada nueva etapa implica calcular el modelo PWM de la Fig. 2.5, lo que requiere el cálculo de $(P - 1)/2$ filtros FIR de largo N .

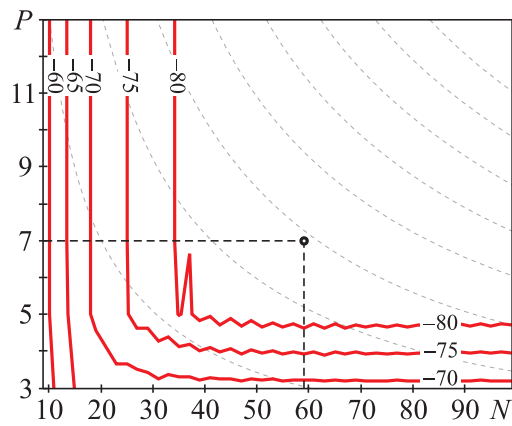
No se aprecia una reducción notable de la distorsión si la máxima potencia P del modelo se incrementa por encima de $P = 7$ como fuera analizado a partir del Lema 1 en el Capítulo 2. El efecto de P junto con el efecto del largo N de los filtros FIR en el THD+N [dB] puede observarse más claramente en la Fig. 3.11(b) y Fig. 3.11(c) que corresponden a las señales aleatoria y multitono respectivamente, ambas para $K = 3$ etapas (iteraciones). Estas figuras muestran las curvas de nivel del THD+N como función de N y de P . Para ambas señales la elección de N por encima de 50 es adecuada para alcanzar bajos niveles de distorsión con una carga computacional moderada.

El número de multiplicaciones por muestra N requerido para calcular cada ciclo de trabajo

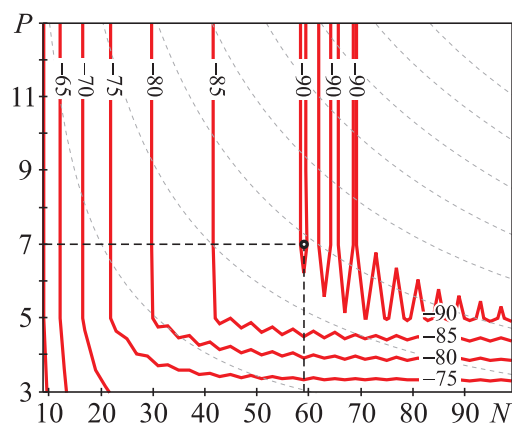
3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE



(a)



(b)



(c)

Figura 3.11:]

(a) gráfico del THD+N [dB]. Curvas de nivel para $K = 3$: (b) señal aleatoria de banda limitada y (c) señal multitono.

3.1 Modulador PWM basado en método iterativo de Newton

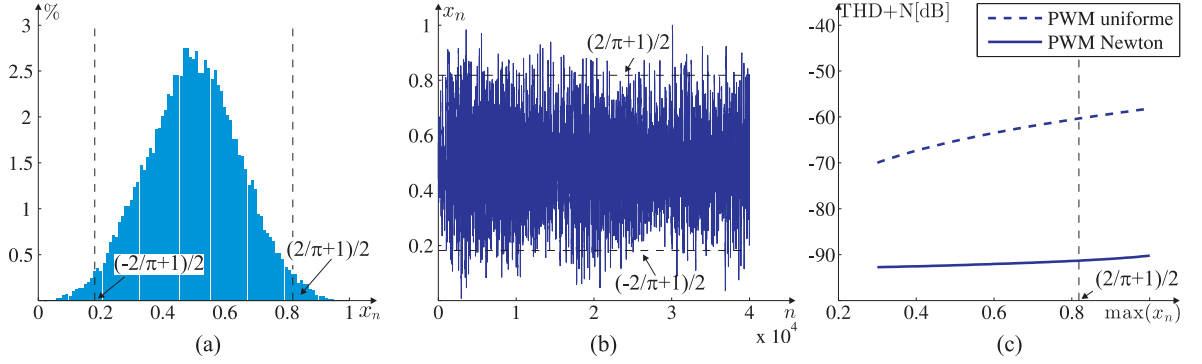


Figura 3.12: Experimento con señal de audio: (a) histograma; (b) señal temporal; (c) THD+N en función de $x_b = \max(|x_n|)$

w_n en función de N , P y K está dado por

$$\mathcal{N} = \frac{K}{4}(P-1)(N+1) + K. \quad (3.7)$$

Para cada una de las K etapas se computan $(P-1)/2$ filtros FIR simétricos lo que requiere $(N+1)/2$ multiplicaciones por filtro. Una multiplicación adicional se necesita para pesar la diferencia $y_n^{(k)} - x_{n-(k+1)M}$. La Fig. 3.11(b) y la Fig. 3.11(c) también muestran, con líneas a trazos, las curvas de nivel de \mathcal{N} como función de N y P para $K=3$ etapas.

3.1.6. Análisis de un caso práctico que no satisface la restricción de amplitud

La restricción de amplitud [38] de valor $2/\pi$ o equivalentemente $(2/\pi+1)/2$ para el PWM de dos niveles, analizado en esta tesis, garantiza que absolutamente cualquier señal de banda limitada con contenido frecuencial menor a $f_s/2$ puede representarse sin distorsión en banda base mediante una señal PWM de frecuencia f_s . Esta cota está basada en un análisis de peor caso y se trata de una condición suficiente pero no necesaria que asegura que cualquier señal de banda limitada puede ser representada mediante una señal PWM sin distorsión de banda base. Muchas señales con picos de amplitud fuera de este rango teórico pueden representarse exactamente utilizando señales PWM.

En esta sección se analiza el efecto de violar la restricción de amplitud utilizando una señal musical (“Like a Rolling Stone” de Bob Dylan), también usada en [1] como señal de prueba. La señal está muestreada a 44,1 kHz con una resolución de 16 bits y la frecuencia de PWM también es de $f_s = 44,1$ kHz. La señal se escala de manera que $0 \leq x_n \leq 1$.

El valor máximo de la señal moduladora $\|\mathbf{x}\|_\infty = x_b = \max(x_n)$ se varía en el rango 0,3 a 1. La restricción de amplitud es violada cuando $x_b > (2/\pi+1)/2$. Los parámetros del

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

modulador PWM Newton son: largo de filtros $N = 59$, potencia máxima $P = 7$ y Jacobiano diagonal utilizando $K = 3$ iteraciones. El histograma de la señal de entrada se muestra en la Fig. 3.12(a). La señal escalada al mayor índice de modulación posible ($x_b = 1$) se muestra en la Fig. 3.12(b), donde también se indica la cota de amplitud con una línea punteada. La Fig. 3.12(c) muestra el THD+N en función del valor de pico de la señal. Tanto cuando se utiliza el modulador PWM Newton como cuando se utiliza el modulador PWM uniforme el THD+N aumenta para valores crecientes de $x_b = \max(x_n)$. Sin embargo, cuando se utiliza el modulador PWM Newton el THD+N es claramente menor incluso cuando no se cumple con la restricción de amplitud.

3.2. Modulador PWM Newton incluyendo compensación de la variación de amplitud

En base al modelo desarrollado en la Sección 2.2 que incluye una posible variación en la amplitud de los pulsos de la señal PWM, se presenta una extensión del modulador PWM Newton para calcular los ciclos de trabajo que eliminan simultáneamente la distorsión producida por la no linealidad intrínseca del PWM y por las variaciones de amplitud que producen una señal PWM con amplitudes de pulsos que pueden variar entre un pulso y otro. Finalmente, se desarrolla una versión del modulador capaz de operar en tiempo real y su desempeño se evalúa mediante simulaciones. Los resultados se comparan con un algoritmo sencillo, habitualmente utilizado en la literatura, que consiste en extender o acortar el ancho de los pulsos en función de la variación de amplitud para preservar el área del pulso (método de igualado de áreas).

La relación vectorial entre las muestras de la señal demodulada \mathbf{y} , los ciclos de trabajo \mathbf{w} y las amplitudes de los pulsos \mathbf{v} pueden escribirse siguiendo la notación en (2.8) como

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{w}) \mathbf{v}. \quad (3.8)$$

donde \mathbf{v} es el vector que contiene las amplitudes de los pulsos. Es posible extender los resultados presentados en la Sección 3.1 para obtener un modulador PWM Newton que a partir del vector de muestras de la señal moduladora \mathbf{x} y de amplitud de los pulsos \mathbf{v} permita calcular un vector de ciclos de trabajo \mathbf{w}^* tal que

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{w}^*) \mathbf{v} = \mathbf{x}, \quad (3.9)$$

es decir, que al demodular la señal $p(t)$ se obtiene la señal \mathbf{y} que coincide con \mathbf{x} eliminando los efectos no lineales de la modulación PWM y de la variación de amplitud en el rango de frecuencias entre 0 y $f_s/2$.

3.2 Modulador PWM Newton incluyendo compensación de la variación de amplitud

Algoritmo 2 Pseudo-código del modulador PWM Newton incluyendo variación de amplitud en los pulsos

Require: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^L$: vector con las muestras de la señal moduladora

$\mathbf{w}^{(0)} \leftarrow \mathbf{x}$

for $i = 1$ to K **do**

for $n = \underline{\ell}$ to $\bar{\ell} - 1$ **do**

$y_n \leftarrow [\mathbf{g}(\mathbf{w}^{(i-1)})\mathbf{v}]_n$.

end for

 Actualizar $H(\mathbf{w}^{(i-1)})$ utilizando el método Jacobiano elegido

$\mathbf{w}^{(i)} \leftarrow \mathbf{w}^{(i-1)} - H(\mathbf{w}^{(i-1)})^{-1}(\mathbf{g}(\mathbf{w}^{(i-1)})\mathbf{v} - \mathbf{x})$

end for

El Algoritmo 2 es una extensión del Algoritmo 1 que incluye los efectos de la variación de amplitud de los pulsos. La única diferencia entre ambos métodos es que se incorpora al vector \mathbf{v} con información de amplitud de los pulsos al momento de calcular el vector de muestras de la señal demodulada utilizando (3.8).

El problema con este algoritmo, más allá de su complejidad computacional, es que requiere conocer completamente el vector \mathbf{v} de muestras de amplitud de los pulsos y el vector de muestras de la entrada \mathbf{x} , lo que en general no es posible en una aplicación en tiempo real, por ejemplo en el caso en que las perturbaciones Δv_n sean causadas por variaciones en la fuente de alimentación. Es posible causalizar el algoritmo para utilizar sólo las muestras pasadas de v_n y x_n pero de todas maneras es necesario estimar el valor que tendrá v_n al momento de finalizar el cálculo.

3.2.1. Modulador en tiempo real

Para que el modulador pueda implementarse en tiempo real se introducen dos modificaciones. Por una parte se utiliza un extrapolador para calcular las muestras futuras de v_n y por otra parte, como en la Sección 3.1.5, se utiliza la diagonal del Jacobiano. Con estas modificaciones el Algoritmo 2 puede resolverse en forma escalar calculando el ciclo de trabajo de la k -ésima iteración como

$$w_n^{(k)} = w_n^{(k-1)} - \frac{r(w_n^{(k-1)})}{v_n} \left(y_n^{(k-1)} - x_n^{(k-1)} \right) \quad (3.10)$$

donde $r(w_n^{(k-1)}) = (\text{sinc}(w_n^{(k-1)}/2))^{-1}$ y la salida $y_n^{(k-1)}$ se calcula utilizando (2.23). La ecuación (3.10) es similar a (3.6) pero en este caso aparece la amplitud del pulso v_n dividiendo en el término de corrección del método de Newton.

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

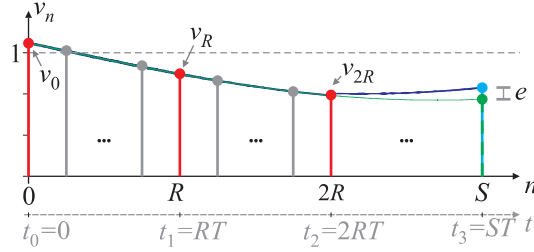


Figura 3.13: Representación gráfica de la extrapolación calculada con (3.11).

3.2.1.1. Extrapolador

Debido al retardo de M muestras introducido en cada iteración k del algoritmo el valor de v_n no será el mismo al momento de iniciar el cálculo que al momento de finalizarlo. Es necesario entonces extrapolar el valor de v_n algunas muestras hacia adelante.

Para calcular la extrapolación se propone utilizar un polinomio de segundo orden, utilizando tres muestras de v_n espaciadas cada R muestras: v_0 , v_R y v_{2R} correspondientes a los instantes de tiempo $t_0 = 0$, $t_1 = RT$ y $t_2 = 2RT$ para estimar el valor de v_n en un tiempo t_3 . El valor de amplitud de pulso v_S en el tiempo $t_3 = ST$ puede calcularse como:

$$v_S = v_0 - \frac{S}{2R}(3v_0 - 4v_R + v_{2R}) + \frac{S^2}{2R^2}(v_0 - 2v_R + v_{2R}). \quad (3.11)$$

En la Fig. 3.13 se muestra gráficamente el proceso de extrapolación en donde se comete un error e al estimar v_S . Una vez fijados los valores de t_3 y R la ecuación (3.11) puede implementarse como un filtro FIR de 3 muestras. Debe tenerse en cuenta el propio retardo introducido por este filtro al momento de fijar t_3 .

3.2.1.2. Diagrama en bloques

El diagrama en bloques del algoritmo completo para $K = 3$ iteraciones se muestra en la Fig. 3.14. Cada uno de los bloques representa una iteración.

En el bloque k -ésimo el ciclo de trabajo $w_n^{(k-1)}$ ingresa al bloque “Modelo PWM” donde se calcula la salida $y_n^{(k-1)}$ como se muestra en el diagrama en bloques de la Fig. 2.10. Como el bloque “Modelo PWM” se calcula en tiempo real se introduce un retardo de M muestras en el cómputo. El modelo también requiere como entrada el valor de v_n . El valor de v_n se extrapola mediante el bloque “Extrapolación $(K - k + 1)M$ ” que computa el extrapolador en (3.11), donde $(K - k + 1)M$ es el número de muestras extrapoladas en la iteración k y K es el número total de etapas o iteraciones utilizadas. Para el caso del diagrama en bloques de

3.2 Modulador PWM Newton incluyendo compensación de la variación de amplitud

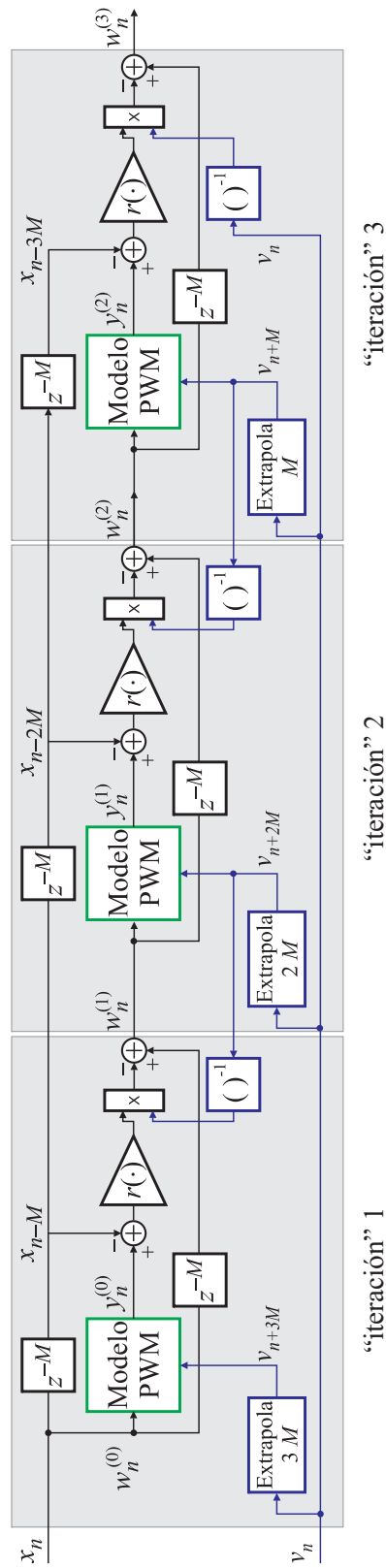


Figura 3.14: Diagrama en bloques del modulador PWM Newton incluyendo compensación de la variación de amplitud de los pulsos.

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

la Fig. 3.14 se tiene que $K = 3$. En la etapa $k = 1$ se extrapolan $3M$ muestras, en la etapa $k = 2$ se extrapolan $2M$ muestras y en la última etapa $k = 3$ se extrapolan M muestras.

Luego se calcula el error entre la salida esperada $y_n^{(k-1)}$ y la entrada x_n apropiadamente retardada para ecualizar los retardos introducidos por el cálculo del “Modelo PWM”. Este error es pesado por la función $r(w_n^{(k-1)})$ y por $(v_n)^{-1}$ de acuerdo a (3.10) para obtener el valor de corrección del ciclo de trabajo.

Finalmente el nuevo ciclo de trabajo $w_n^{(k)}$ se calcula como el ciclo de trabajo anterior $w_n^{(k-1)}$ menos la corrección.

3.2.2. Método de igualado de área (IA)

Un método habitual para compensar la variación de amplitud de los pulsos consiste en medir el valor de la amplitud de pulso $v_n = 1 + \Delta v_n$ (ver Sección 2.2) y luego escalar el valor del ciclo de trabajo como w_n/v_n . De esta manera el área del pulso resultante coincide con el área del pulso ideal (el área que se obtendría con $\Delta v_n = 0$, es decir $v_n = 1$). Debido a su relativa simplicidad, este método ha sido utilizado ampliamente [4, 5, 53, 64]. En general es necesario extrapolar el valor de v_n algunas muestras hacia adelante debido a los retardos introducidos por los algoritmos vinculados a la modulación PWM (interpoladores, PWM pseudonatural, etc.) y por el conversor A/D.

Incluso suponiendo que se conoce exactamente el valor de la variación Δv_n , no se ha presentado en la literatura un análisis del efecto del IA sobre la distorsión de la señal de salida. El modelo no lineal dado por (2.23) permite ver que

$$\begin{aligned}\hat{y}_n &= v_n \frac{w_n}{v_n} h_{1,0} + v_n \frac{w_n^3}{v_n^3} * h_{3,n} + \cdots + v_n \frac{w_n^P}{v_n^P} * h_{P,n} \\ &= w_n h_{1,0} + \frac{w_n^3}{v_n^2} * h_{3,n} + \cdots + \frac{w_n^P}{v_n^{P-1}} * h_{P,n}\end{aligned}$$

donde se reemplazó el ciclo de trabajo w_n por w_n/v_n utilizando el criterio de compensación IA. Este método logra cancelar el efecto en la parte lineal de la salida, pero no sobre las potencias superiores de w_n^i . Incluso, dependiendo del valor de v_n , el método de igualado de áreas puede “exaltar” el comportamiento no lineal de la modulación PWM, incrementando la amplitud de algunas componentes frecuenciales no deseadas.

Lo que sucede en la práctica es que bajo condiciones normales de operación, la reducción del error en el término lineal supera el posible incremento causado por las no linealidades de orden superior resultando, en la mayoría de los casos prácticos, en una reducción del THD+N. De todas maneras el análisis anterior muestra que el método de IA no elimina completamente el efecto de la variación de amplitud de los pulsos sobre las muestras de la señal demodulada.

3.2.3. Simulaciones del modulador PWM Newton con compensación de variación de amplitud de los pulsos

Por una parte se simula el algoritmo IA, es decir cuando el ciclo de trabajo w_n se escala como w_n/v_n de acuerdo al valor de v_n medido para cada período de PWM. Por otra parte se simula el modulador PWM Newton de la Sección 3.2.1 cuando se utiliza el extrapolador de segundo orden (3.11). Se simula también el PWM Newton considerando un “extrapolador ideal”, suponiendo que se conoce el valor exacto que tomará v_n al momento de finalizar el cálculo del algoritmo; a tal fin se retarda la señal v_n en la simulación. De esta manera es posible observar el desempeño teórico del método de modulación propuesto independientemente del extrapolador utilizado.

Para evaluar cuantitativamente el desempeño de los algoritmos se calcula la distorsión armónica total más ruido en dB utilizando (3.5).

Para las simulaciones se utiliza una frecuencia normalizada de PWM $f_s = 1/T = 1$ y una señal de entrada x_n sinusoidal de frecuencia $f_m = 0,1$. La señal de variación de amplitud utilizada es $v_n = 1 + 0,03[\sin(2\pi f_0 nT) + \sin(4\pi f_0 nT) + \sin(6\pi f_0 nT)]$ con $f_0 = 0,001$, esta señal representa una variación de amplitud máxima de aproximadamente un 8% y con una frecuencia máxima de $3f_0$. Se observa que $3f_0 \ll f_s$, es decir la frecuencia máxima de variación de amplitud de los pulsos es mucho menor que la frecuencia de conmutación. Por ejemplo si en una aplicación se utiliza una frecuencia de muestreo y PWM de $f_s = 50$ kHz, entonces f_0 es equivalente a una frecuencia de 50 Hz. En este caso la señal v_n podría representar una perturbación en la amplitud de los pulsos producida por la tensión de red (50 Hz) junto con el segundo (100 Hz) y tercer armónico (150 Hz).

En la Fig. 3.15 se muestra el THD+N [dB] en función del largo $N = 2M + 1$ de los filtros FIR $h_{i,n}$ utilizados en el modulador. Los resultados muestran que el algoritmo IA logra reducir el error producido por la variación de amplitud en unos 14 dB, por otra parte el algoritmo con extrapolador “ideal” reduce el error en unos 34 dB para $N = 11$ llegando a una reducción de 51 dB para $N = 43$. Cuando se utiliza el extrapolador real (3.11) el desempeño se mantiene en forma similar hasta $N \approx 25$. A medida que N crece, el extrapolador debe estimar un valor más alejado de v_n lo que incrementa el error de extrapolación. Esto se traduce en una limitación en la capacidad de reducir la distorsión para $N > 25$. De cualquier forma la reducción del THD+N [dB] es mucho mayor que en el caso del algoritmo de IA.

El efecto en el THD+N [dB] causado por la variación de la frecuencia de la señal v_n se muestra en la Fig. 3.16, donde se utilizó $N = 23$ para el modulador PWM Newton. En este caso el desempeño utilizando el extrapolador ideal es independiente de la frecuencia de v_n . El algoritmo con extrapolador real disminuye su capacidad de reducir el error a medida que la frecuencia de v_n aumenta, debido a que el error de extrapolación también se incrementa

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

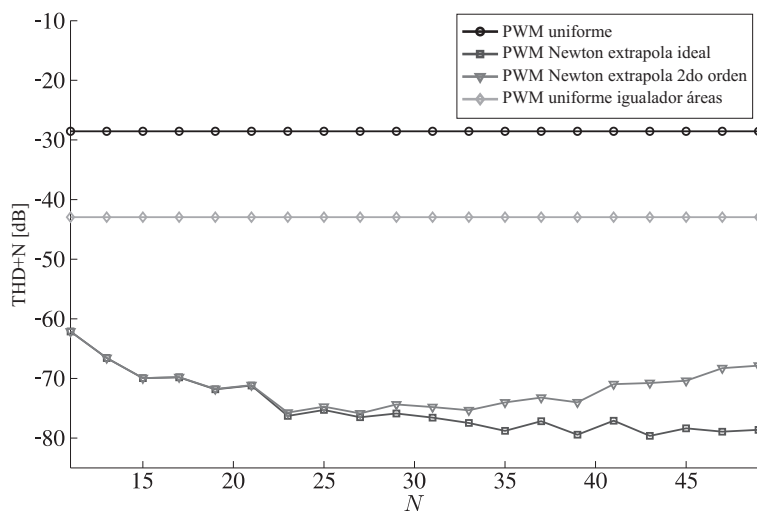


Figura 3.15: THD+N [dB] en función del largo N de los filtros FIR para $f_{max}\{v_n\} = 0,003$.

al aumentar la frecuencia de v_n . Por otra parte, el algoritmo IA reduce en más de 15 dB el THD+N [dB] respecto del PWM uniforme aunque su capacidad se ve limitada por las no linealidades propias de la modulación PWM.

3.3. Modulador PWM adaptivo

En esta sección se presentan dos métodos de modulación PWM basados en estructuras Hammerstein paralelo adaptivas. Uno de los métodos adapta sus coeficientes fuera de línea utilizando una señal de entrenamiento y luego opera en línea con sus coeficientes fijos, método que será denominado “PWM adaptivo fuera de línea” o “PWM adaptivo F.L.”. El otro método opera y adapta sus coeficientes en línea por lo que será denominado “PWM adaptivo en línea” o “PWM adaptivo E.L.”.

El modulador PWM adaptivo en línea esta basado en la arquitectura de aprendizaje indirecto (ILA por sus siglas en inglés) usualmente utilizado para la predistorsión digital (DPD por sus siglas en inglés) [12]. Un diagrama en bloques de esta arquitectura se muestra en la Fig. 3.17. En este esquema el DPD debe aproximar la inversa del sistema (en este caso el modelo de banda base para el PWM), generando los ciclos de trabajo w_n a partir de la entrada x_n de manera tal que la señal de salida y_n del modelo PWM verifique que $y_n \approx x_n$. [58]. Como se muestra en el diagrama en bloques de la Fig. 3.17 un predistorsionador de entrenamiento (A) se utiliza para calcular los coeficientes que son utilizados en el DPD “copia de (A)”. La salida del sistema, y_n , es la entrada al bloque de entrenamiento (A). Su salida, z_n , es

3.3 Modulador PWM adaptivo

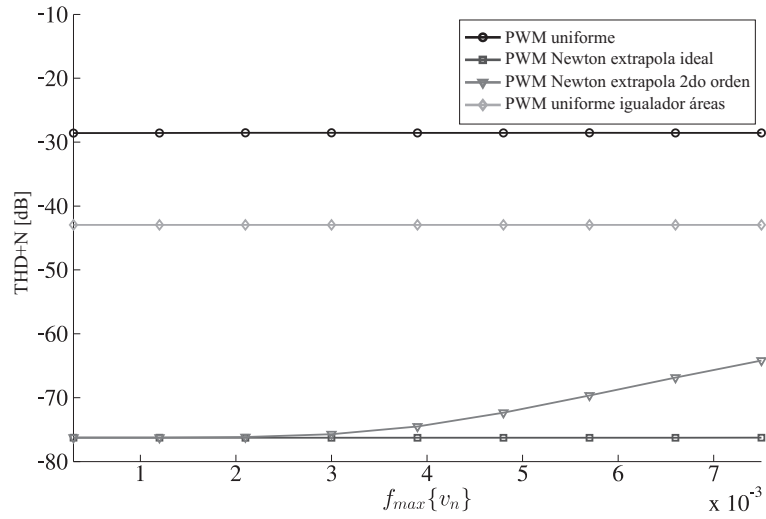


Figura 3.16: THD+N [dB] en función de la máxima frecuencia de v_n para $N = 23$.

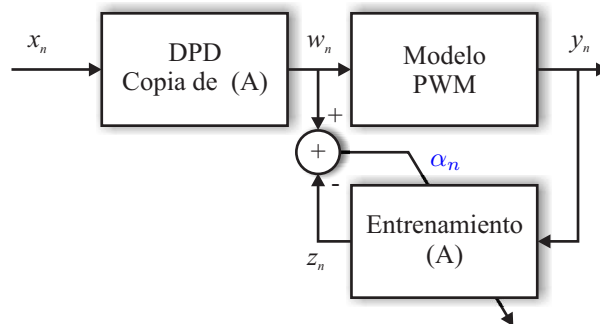


Figura 3.17: PWM adaptivo en línea, basado en la arquitectura de aprendizaje indirecto (ILA por sus siglas en inglés).

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

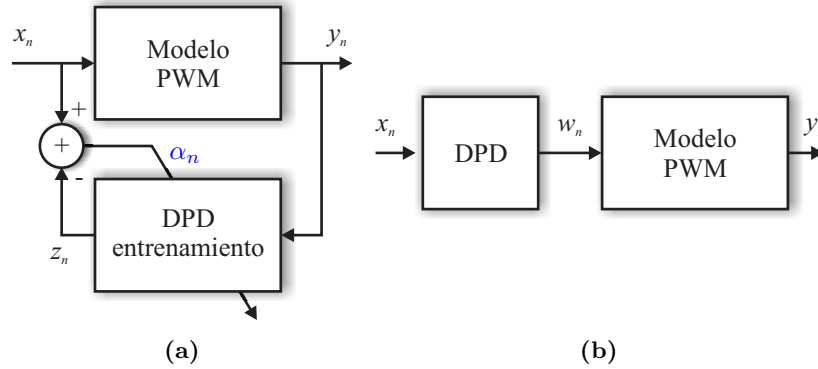


Figura 3.18: PWM adaptivo fuera de línea: (a) durante el entrenamiento y (b) durante el funcionamiento.

comparada con la entrada w_n al bloque DPD. Si el bloque de entrenamiento aproxima a la inversa del sistema entonces la diferencia $\alpha(n)$ entre la entrada al modelo PWM w_n y la salida del bloque de entrenamiento z_n se aproxima a cero dado que $z_n \approx w_n$. Este esquema basado en la arquitectura ILA será denominado PWM adaptivo en línea.

En algunas aplicaciones el esquema de adaptación en tiempo real de la arquitectura ILA puede tener un costo computacional muy alto o quizás pueda ser innecesario. En estas situaciones puede considerarse el entrenamiento fuera de línea del PWM adaptivo. El diagrama en bloques para este modo de operación se muestra en la Fig. 3.18. La operación durante el entrenamiento se muestra en la Fig. 3.18(a): los pesos de una estructura tipo Hammersstein paralelo (“DPD entrenamiento”) se calculan adaptativamente. Una vez que se alcanza la convergencia, el PWM adaptivo funciona como se muestra en la Fig. 3.18(b). La señal w_n es obtenida a partir de la señal de entrada x_n y debe ser tal que $y_n \approx x_n$. Este esquema será denominado PWM adaptivo fuera de línea.

3.3.1. Postinversa y preinversa de sistemas no lineales

Tanto en el PWM adaptivo E.L. de la Fig. 3.17 como el PWM adaptivo F.L. de la Fig. 3.18 el bloque DPD trabaja como una postinversa durante el entrenamiento y como una preinversa durante el funcionamiento. Para sistemas no lineales arbitrarios la preinversa y la postinversa podrían ser diferentes. Debe imponerse como restricción que [12]: si $x_n \neq y_n$ entonces, $w_n \neq z_n$ y si $x_n = y_n$ entonces, $w_n = z_n$. Con estas restricciones, si $\alpha_n = w_n - z_n$ se aproxima a cero, entonces también lo hace $y_n - x_n$ y la postinversa puede funcionar también como preinversa. Este problema se estudia de igual manera en [49] (para un amplificador de potencia de RF) donde el intercambio del postfiltro con el prefiltro se justifica en un resultado

de Schetzen [61, Cap. 7] que muestra que la postinversa de orden p de un sistema general tipo Volterra es idéntica a su preinversa del mismo orden.

En general, el esquema mencionado funcionará correctamente si la señal de salida y_n es suficientemente parecida a la señal de entrada x_n que fue utilizada durante la etapa de entrenamiento [58]. En el caso de la modulación PWM esto se verifica bajo condiciones de operación típica, es decir, cuando la frecuencia de PWM f_s es varias veces mayor que la máxima frecuencia de la señal de entrada x_n y por lo tanto la distorsión introducida por la modulación PWM es moderada como lo muestra el Lema 1 presentado en el Capítulo 2.

A continuación se estudian la operación del PWM adaptivo F.L. basado en la estructura de la Fig. 3.18 mientras que el PWM adaptivo E.L. basado en la estructura ILA se evaluará mediante simulación en la Sección 3.5.

3.3.2. Identificación adaptiva de la estructura Hammerstein paralelo

Aunque el PWM adaptivo F.L. está constituido por un filtro adaptivo no lineal, el error de estimación es lineal en los parámetros (los coeficientes de las respuestas impulsivas del DPD). Por ello, es posible obtener una solución óptima utilizando el método de mínimos cuadrados. Con Q pares de datos entrada-salida, la relación entre la salida z_n y la entrada y_n del bloque del DPD de entrenamiento en la Fig. 3.18(a) puede escribirse en forma matricial como

$$\mathbf{z} = \mathbf{Y}\mathbf{d}, \quad (3.12)$$

siendo \mathbf{d} el vector de coeficientes del DPD definido como

$$\mathbf{d} = [d_{1,0}, d_{1,1}, \dots, d_{1,(N-1)}, d_{3,0}, d_{3,1}, \dots, d_{3,(N-1)}, \dots, d_{P,0}, d_{P,1}, \dots, d_{P,(N-1)}]^T, \quad (3.13)$$

donde N es la longitud de los filtros FIR utilizados para el DPD, P es la potencia máxima y $d_{i,j}$ son los coeficientes de los filtros que corresponden al retardo j de la potencia i -ésima de la entrada.

Como solo se consideran las potencias impares para el DPD, el número de coeficientes que deben ser estimados es $N \times (P + 1)/2$. El vector de muestras de salida del filtro adaptivo es

$$\mathbf{z} = [z_0, z_1, \dots, z_{Q-1}]^T$$

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

y la matriz de datos de la entrada y_n al DPD de entrenamiento y de sus potencias impares es

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_0 & y_{-1} & \cdots & y_{-(N-1)} & y_0^3 & y_{-1}^3 & \cdots & y_{-(N-1)}^3 & \cdots & y_0^P & y_{-1}^P & \cdots & y_{-(N-1)}^P \\ y_1 & y_0 & \cdots & y_{-(N-2)} & y_1^3 & y_0^3 & \cdots & y_{-(N-2)}^3 & \cdots & y_1^P & y_0^P & \cdots & y_{-(N-2)}^P \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{Q-1} & y_{Q-2} & \cdots & y_{Q-N} & y_{Q-1}^3 & y_{Q-2}^3 & \cdots & y_{Q-N}^3 & \cdots & y_{Q-1}^P & y_{Q-2}^P & \cdots & y_{Q-N}^P \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

que puede escribirse como

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_{1,0}, \mathbf{y}_{1,1}, \cdots, \mathbf{y}_{1,(N-1)}, \mathbf{y}_{3,0}, \mathbf{y}_{3,1}, \cdots, \mathbf{y}_{3,(N-1)}, \cdots, \mathbf{y}_{P,0}, \mathbf{y}_{P,1}, \cdots, \mathbf{y}_{P,(N-1)}] \quad (3.15)$$

donde $\mathbf{y}_{k,m} = [y_{0-m}^k, y_{1-m}^k, \cdots, y_{Q-1-m}^k]^T$. La solución de mínimos cuadrados que minimiza

$$\varepsilon = (\mathbf{z} - \mathbf{Y}\mathbf{d})^T (\mathbf{z} - \mathbf{Y}\mathbf{d}) \quad (3.16)$$

se puede obtener como

$$\hat{\mathbf{d}} = (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^T \mathbf{z}. \quad (3.17)$$

En general, $\hat{\mathbf{d}}$ puede calcularse utilizando métodos más rápidos y estables que evitan el cálculo de la inversa $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$ en (3.17). En particular, el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo (RLS) solución de (3.16) se calcula como [12, 33]

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}(n) &= \hat{\mathbf{d}}(n-1) + \mathbf{k}(n)\alpha(n). \\ \mathbf{k}(n) &= \frac{\mathbf{P}(n-1)\mathbf{Y}(n,:)}{\lambda + \mathbf{Y}^T(n,:) \mathbf{P}(n-1)\mathbf{Y}(n,:)} \\ \alpha(n) &= x_n - \hat{\mathbf{d}}(n-1)\mathbf{Y}^T(n,:) \\ \mathbf{P}(n) &= \lambda^{-1} [\mathbf{P}(n-1) - \mathbf{k}(n)\mathbf{Y}^T(n,:) \mathbf{P}(n-1)] \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde n es el número de iteración, $0 < \lambda < 1$ es el factor de olvido, e $\mathbf{Y}(n,:)$ denota la n -ésima fila de \mathbf{Y} . El algoritmo es inicializado con $\mathbf{P}(0) = \delta^{-1}\mathbf{I}$, donde δ es una constante positiva pequeña.

Dado que el error de estimación es lineal en los parámetros, el análisis de convergencia de la estructura Hammerstein paralelo es similar al del algoritmo RLS estándar [33]. Las principales diferencias se deben a las potencias de la estructura Hammerstein. Como se describe en [77], la convergencia en media cuadrática depende de la distribución estadística de la señal de entrada del sistema Hammerstein. Se supone que:

H1. El fenómeno físico bajo identificación responde a un modelo de la forma

$$z_n = e_n + \mathbf{d}_0^T \mathbf{Y}(n,:) \quad (3.19)$$

donde e_n es ruido aditivo, \mathbf{d}_0 es el vector de parámetros (coeficientes) que se busca estimar e $\mathbf{Y}(n,:)$ es el vector de datos de entrada dado por la n -ésima fila de la matriz \mathbf{Y} definida en la ecuación (3.14).

H2. El ruido e_n es iid y satisface $\mathbf{E}[e_n] = 0$.

H3. La señal de entrada y_n al filtro DPD tiene media cero y es un proceso aleatorio iid con distribución estadística arbitraria simétrica.

H4. Se consideran solo no linealidades de potencia impares para el DPD.

Las hipótesis H1-H3 se asumen en el análisis lineal del algoritmo RLS junto con el supuesto de independencia [33] que presume que los vectores de retardos de la entrada son estadísticamente independientes. La identificación de los sistemas tipo Hammerstein generalizados y para entradas no iid sigue siendo un problema abierto [26, 77]. Los coeficientes \mathbf{d} en (3.13) de la estructura Hammerstein generalizada descrita por (3.12) que son adaptados por el algoritmo RLS definido por (3.18) convergen en media cuadrática a los valores de parámetros deseados \mathbf{d}_0 bajo las hipótesis H1-H4. La convergencia depende de los autovalores de la matriz de correlación \mathbf{R}_P .

Para la estructura Hammerstein paralelo, la matriz de correlación \mathbf{R}_P del vector de datos $\mathbf{Y}(n, :)$ depende no solamente de la entrada actual y sus muestras pasadas sino también de sus potencias impares. La matriz de correlación de $\mathbf{Y}(n, :)$ puede definirse como una matriz por bloques de la forma

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{E}[\mathbf{Y}(n, :)\mathbf{Y}^T(n, :)] = \mathbf{E} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,1} & \mathbf{B}_{1,2} & \cdots & \mathbf{B}_{1,q} \\ \mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{B}_{2,2} & \cdots & \mathbf{B}_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{q,1} & \mathbf{B}_{q,2} & \cdots & \mathbf{B}_{q,q} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

donde \mathbf{E} es el operador esperanza, $q = (P + 1)/2$ (P es la máxima potencia utilizada) y $\mathbf{B}_{a,b}$ es una matriz de dimensión $N \times N$, donde N es el número de coeficientes de los filtros FIR utilizados para el DPD. La matriz $\mathbf{B}_{a,b}$ puede definirse como el producto externo de dos vectores,

$$\mathbf{B}_{a,b} = \begin{bmatrix} y_i^{2a-1} \\ y_{i-1}^{2a-1} \\ \vdots \\ y_{i-N+1}^{2a-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i^{2b-1} & y_{i-1}^{2b-1} & \cdots & y_{i-N+1}^{2b-1} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

En base a estas definiciones, el siguiente teorema establece las características de convergencia del vector de coeficientes del DPD.

Teorema 4. La convergencia en media cuadrática del vector de coeficientes depende de la distribución estadística de la entrada del sistema Hammerstein adaptivo, particularmente en los momentos pares hasta el orden $2P$: $\mathbf{E}[y_n^{2P}]$.

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

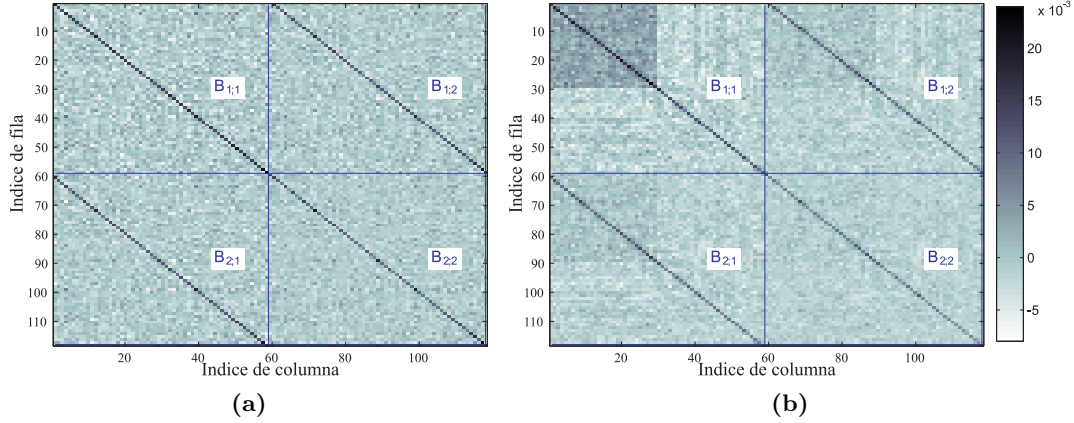


Figura 3.19: Representación gráfica de la matriz \mathbf{R}_P cuando: (a) y_n es ruido blanco pseudo-aleatorio y (b) y_n coloreado por el modelo PWM.

Demostración. Ver Apéndice A.4.1. □

3.3.2.1. Un comentario sobre el problema de modelado inverso

El modelado inverso o problema de filtrado inverso representado en Fig. 3.18(a) es común a muchas aplicaciones, siendo la ecualización de un canal de comunicaciones (deconvolución) un ejemplo típico. El objetivo en general es encontrar la mejor aproximación de mínimos cuadrados de la inversa del sistema, en este caso particular la inversa del modulador PWM digital.

Aunque la entrada al sistema pueda ser iid la salida y_n , que es la entrada al filtro adaptivo de acuerdo con el diagrama de la Fig. 3.18(a), queda correlacionada por el sistema; para el caso del modelo de la modulación PWM de la Fig. 2.5 esta correlación es causada por los filtros $H_i(e^{j\omega})$ cuya respuesta en frecuencia se muestra en la Fig. 2.4. El filtro $h_{1,n}$ no posee memoria y por esta razón la salida del filtro no presenta correlación. Cierta grado de correlación es introducido por los otros filtros $h_{3,n}, h_{5,n}, \dots$ pero, como lo muestra el Lema 1, esta contribución es acotada. En la Fig. 3.19 se muestra la representación gráfica obtenida a partir de una simulación numérica de la matriz \mathbf{R}_P dada por (3.20) cuando y_n es ruido blanco Gaussiano pseudoaleatorio (Fig. 3.19(a)) y cuando y_n está coloreado por el modelo de PWM con parámetros $P = 3$ y $N = 59$ (Fig. 3.19(b)). En ambos casos las submatrices $B_{a,b}$ que componen la matriz \mathbf{R}_P definida en (3.20) son diagonales dominantes. En la Fig. 3.19(b) puede observarse algo de correlación en la esquina superior izquierda de la matriz representada con un color más oscuro.

Cuando existe cierto grado de correlación la matriz \mathbf{R}_P puede pensarse como la suma de

dos matrices: $\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_P^{iid} + \mathbf{\Delta}$, donde \mathbf{R}_P^{iid} es la matriz que se obtendría cuando la entrada al filtro adaptivo es iid y $\mathbf{\Delta}$ es una matriz de perturbación con diagonal nula. Si los autovalores de \mathbf{R}_P^{iid} son $v_1 \geq \dots \geq v_{qM}$ y los autovalores de $\mathbf{\Delta}$ son $\rho_1 \geq \dots \geq \rho_{qM}$ entonces, en base al teorema de Weyl [36, p. 181] los autovalores μ_i de \mathbf{R}_P satisfacen la inecuación $v_i + \rho_1 \leq \mu_i \leq v_i + \rho_{qM}$. Más aún, de acuerdo al teorema de Geršgorin [36, p. 344], si $\Delta_{i,j}$ es pequeño, los autovalores ρ_i de $\mathbf{\Delta}$ se encuentran en un disco de radio $\|\mathbf{\Delta}\|_1$ centrado en cero. En otras palabras, si los elementos de la matriz de perturbación son pequeños entonces solo habrá una pequeña dispersión de los autovalores de \mathbf{R}_P comparado con los de \mathbf{R}_P^{iid} .

3.4. Modulador PWM basado en la inversa de Volterra de orden p

En esta sección se resume brevemente el algoritmo presentado en [1, 2] que se basa en obtener un modelo de Volterra para la modulación PWM y luego calcular su inversa de orden p [27]. Por simplicidad este algoritmo será denominado “modulador PWM de Volterra” o “PWM Volterra”.

El procedimiento general seguido en [1, 2] para la obtención del modelo de Volterra de la modulación PWM es similar al presentado en el Capítulo 2 y al utilizado en [38] para obtener la restricción en la amplitud de la señal moduladora. Se calculan las muestras de la señal demodulada utilizando un filtro pasa bajos ideal [1] y también se propuso utilizar un filtro real de bajo orden [2]. Ambos métodos dan como resultado modelos con estructuras de Volterra diagonales (tipo Hammerstein paralelo) como fuera presentado en el Capítulo 2. La diferencia es que al utilizar el filtro real de bajo orden la dinámica queda representada por filtros IIR en lugar de filtros FIR. Para obtener el modelo del modulador PWM utilizando un filtro real de bajo orden es necesario incorporar en el desarrollo un filtro antialiasing y restringir la frecuencia mínima de PWM para evitar el solapamiento espectral que se produce al utilizar un filtro de bajo orden. En lo que sigue se considera el método propuesto en [1] basado en el filtro pasa bajos ideal.

El PWM Volterra se basa en calcular la inversa de orden p del modelo de Volterra para obtener un “prefiltro” no lineal que procesa la señal moduladora y obtener así los ciclos de trabajo. La inversa se basa en un resultado de Fang *et al.* [27] que presenta, en forma general, el cálculo del sistema inverso de orden p utilizando una formulación de transformada Z multidimensional. En el trabajo de Fang *et al* se demuestra también que el error de aproximación tiende a cero a medida que p tiende a infinito para un rango finito de valores de amplitud de entrada.

El procedimiento para la obtención del prefiltro es tedioso pero el sistema resultante es

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

Tabla 3.3: Componentes del sistema inverso de Volterra de orden p . $\hat{w}_n = w_{1,n} + w_{3,n} + w_{5,n} + \dots$. El símbolo “*” indica el cálculo de la convolución discreta.

Componente $w_{i,n}$	Cómputo “orden recursivo”
$w_{1,n}$	$h_{1,n}^{\text{inv}} * x_n$
$w_{3,n}$	$-h_{1,n}^{\text{inv}} * (h_{3,n} * (w_{1,n})^3)$
$w_{5,n}$	$-h_{1,n}^{\text{inv}} * (3h_{3,n} * (w_{1,n}^2 w_{3,n}) + h_{5,n} * w_{1,n}^5)$

relativamente sencillo si el orden p de la inversa se mantiene bajo. La salida del prefiltro se calcula como la contribución de las componentes de diferente orden:

$$\hat{w}_n = w_{1,n} + w_{3,n} + w_{5,n} + \dots \quad (3.22)$$

Las ecuaciones resultantes para el cómputo de las componentes $w_{i,n}$ son de orden recursivo ya que para calcular la componente de orden p $w_{p,n}$ de la salida del prefiltro se requieren conocer $w_{1,n}, w_{3,n}, \dots, w_{p-1,n}$.

El cálculo de las componentes $w_{1,n}, w_{3,n}$ y $w_{5,n}$ se resumen en la Tabla 3.3. Las respuestas impulsivas $h_{1,n}, h_{3,n}, h_{5,n}, \dots$ son las respuestas impulsivas del sistema Hammerstein generalizado presentado en el Capítulo 2.

La respuesta impulsiva $h_{1,n}^{\text{inv}}$ es la respuesta impulsiva del sistema inverso de $h_{1,n}$ y es tal que el cómputo de la convolución da como resultado $h_{1,n}^{\text{inv}} * h_{1,n} = \delta_n$, donde δ_n es un impulso discreto. Como se observa en la Tabla 3.3 la complejidad crece rápidamente a medida que crece el orden p de la inversa debido a la característica de orden recursivo que presenta el PWM Volterra.

3.5. Simulaciones

En esta sección se simulan y comparan los diferentes algoritmos de modulación PWM propuestos y estudiados en el capítulo. Para evaluar el desempeño de estos se utilizó el modelo del PWM presentando en la Sección 2.1 con longitud de filtros FIR $N_{\text{modelo}} = 999$ y máxima potencia $P_{\text{modelo}} = 11$. Estos valores garantizan que el modelo es lo suficientemente preciso asegurando así una correcta evaluación de los algoritmos. La señal de entrada x_n es procesada por el modulador (PWM adaptivo F.L., PWM adaptivo E.L., PWM Volterra, PWM Newton y PWM uniforme) y posteriormente por el modelo para obtener la salida y_n .

Para el modulador PWM Newton se utilizó la estructura presentada en la Sección 3.1.5 con $K = 3$ etapas como lo muestra el diagrama de la Fig. 3.10. Para el modulador PWM adaptivo F.L. se utilizó una señal de entrenamiento cuyo espectro se muestra en la Fig. 3.20. Se obtuvo

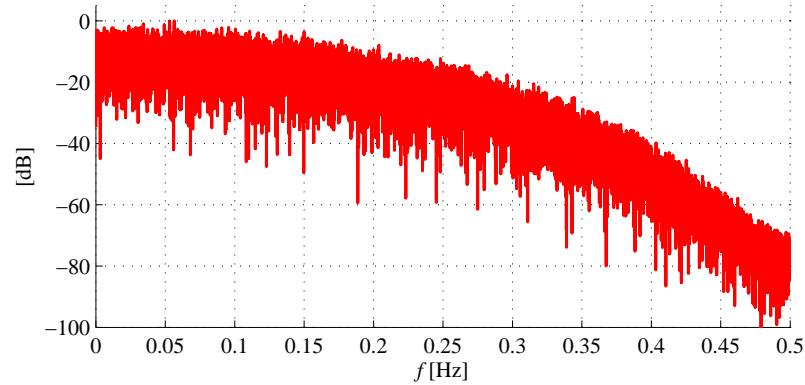


Figura 3.20: Espectro de la señal de entrenamiento para el PWM adaptivo fuera de línea.

a partir de ruido blanco con distribución Gaussiana, filtrado con un filtro FIR pasa bajos con frecuencia de paso de $0,023f_s$, frecuencia de rechazo de $0,45f_s$ y atenuación en la banda de rechazo de 1×10^{-7} . Esta señal posee mayor energía en las bajas frecuencias decayendo hacia las altas frecuencias, una característica encontrada en muchas señales musicales.

La frecuencia de muestreo y PWM se normaliza a $f_s = 1$ y las comparaciones se realizan utilizando cuatro señales diferentes:

- Señal aleatoria pasa banda. Construida a partir de filtrar una señal aleatoria con distribución Gaussiana con un filtro pasa banda con las siguientes frecuencias esquina: frecuencia de rechazo inferior de $0,001f_s$, frecuencia de paso inferior de $0,041f_s$, frecuencia de paso superior de $0,06f_s$, frecuencia de rechazo superior de $0,1f_s$, atenuación en las bandas de rechazo 100 dB y ripple en la banda de paso 1 dB. El espectro de la señal resultante se muestra en la Fig. 3.22(a). La máxima frecuencia de la señal es $f_m = 0,1f_s$, por lo que esta señal permite observar el comportamiento de los diferentes moduladores ante una señal de baja frecuencia ($f_s/f_m = 10$), aunque relativamente alta comparada con aplicaciones típicas de PWM en donde usualmente $f_s/f_m > 20$.
- Señal musical: “Like a Rolling Stone” (LARS) de Bob Dylan obtenida de un CD de audio con 16 bits de resolución y con frecuencia de muestreo 44,1 kHz. Esta señal de prueba fue utilizada en [1]. El espectro de la señal se muestra en la Fig. 3.24(a). El espectro posee contenido frecuencial hasta $f_m \approx 0,42f_s$ aunque la amplitud del espectro decrece a medida que aumenta la frecuencia.
- Señal multitono: se genera sumando nueve sinusoides comenzando por la frecuencia $1 \times 10^{-3}f_s$ y con cada tono duplicando la frecuencia anterior (sinusoidales espaciadas en octavas). El espectro de la señal resultante se muestra en la Fig. 3.26(a). La máxima

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

frecuencia de estas señales $f_m = 0,256f_s$ lo que da una relación $f_s/f_m < 4$ baja para aplicaciones de PWM. Este punto de operación resalta las no linealidades de la modulación y por lo tanto representa un escenario complejo para los moduladores estudiados.

- Señal para medir distorsión por intermodulación (señal IMD). Basada en la norma DIN 45403, utilizada para verificación de equipamiento de audio. La señal de prueba se compone de dos sinusoides, un tono de baja frecuencia (por lo general 250 Hz) y un tono de alta frecuencia (8 kHz) con una amplitud que es 12,04 dB inferior (1/4) de la amplitud de la sinusoidal de baja frecuencia. El espectro de la señal se muestra en la Fig. 3.28(a).

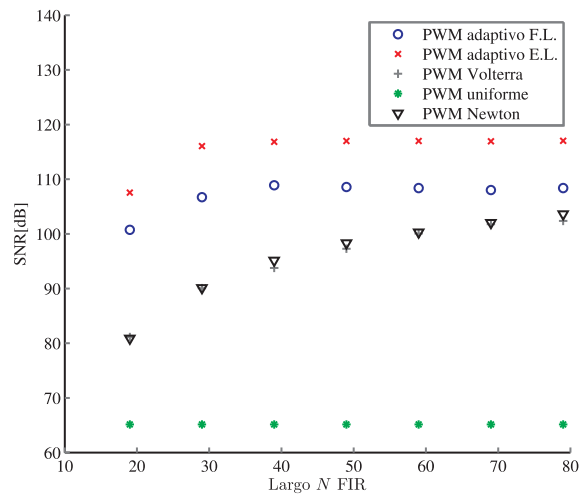
Se realizaron simulaciones variando la longitud N de los filtros FIR de los moduladores y para tres valores de potencias máximas $P = 3$, $P = 5$ y $P = 7$ y se obtuvieron las curvas de la inversa del $(\text{THD+N [dB]})^{-1}$ definido en (3.5), que es igual a relación señal a ruido entre la entrada x_n y la salida y_n dada por

$$(\text{THD+N [dB]})^{-1} = \text{SNR [dB]} = 10 \log \left(\frac{\sum x_n^2}{\sum (x_n - y_n)^2} \right). \quad (3.23)$$

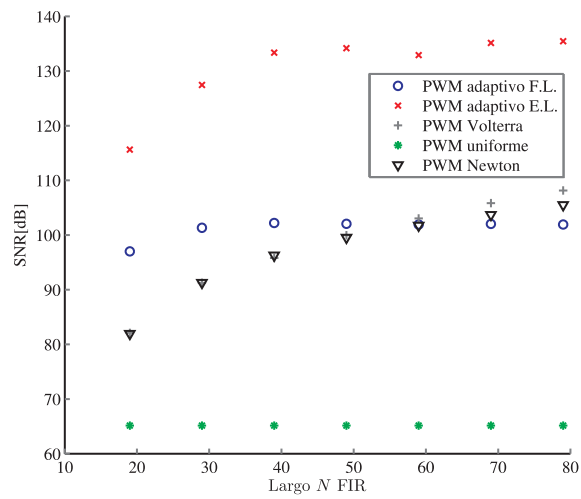
De esta forma, para valores crecientes de N se espera observar valores crecientes de SNR [dB]. El nivel de la señal moduladora se escala para obtener $(-2/\pi + 1)/2 < x_n < (2/\pi + 1)/2$ que coincide con la cota de amplitud presentada en [38] para PWM de dos niveles. Por esta razón las simulaciones en esta sección representan un análisis de peor caso. Si las señales se escalan a valores menores entonces se podrían obtener valores de SNR incluso más altos que los presentados.

Los resultados para la señal aleatoria pasa banda se muestran en la Fig. 3.21. Si se utiliza un modulador de bajo orden $P = 3$, entonces el PWM adaptivo tanto fuera de línea (F.L.) como en línea (E.L.) presentan los mejores resultados. Al incrementar el orden P de los moduladores el PWM adaptivo E.L. mejora su desempeño aunque el PWM adaptivo F.L. empeora siendo superado por el PWM Newton y PWM Volterra para valores crecientes de N . En todos los casos los moduladores superan ampliamente el desempeño del modulador PWM uniforme. En la Fig. 3.22 se muestran los espectros de la señal y_n producidos por los diferentes moduladores, para $P = 7$ y $N = 79$. Se observa en la Fig. 3.22(b) la distorsión producida por el PWM uniforme, mientras que en la Fig. 3.22(d) el PWM adaptivo E.L. presenta el espectro más limpio.

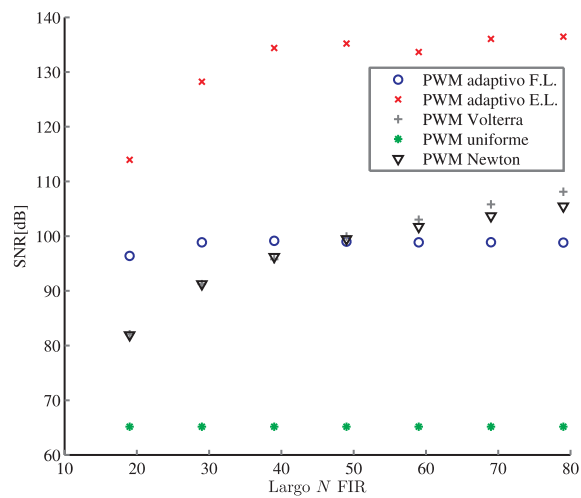
La Fig. 3.23 muestra las simulaciones para la señal musical LARS, que permite apreciar el comportamiento de los moduladores en un caso de funcionamiento práctico. Como no se realiza un incremento de la frecuencia de muestreo (*upsampling*) de la señal, la frecuencia



(a) $P = 3$



(b) $P = 5$



(c) $P = 7$

Figura 3.21: SNR en función de la longitud de los filtros FIR del algoritmo para una señal aleatoria pasa banda.

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

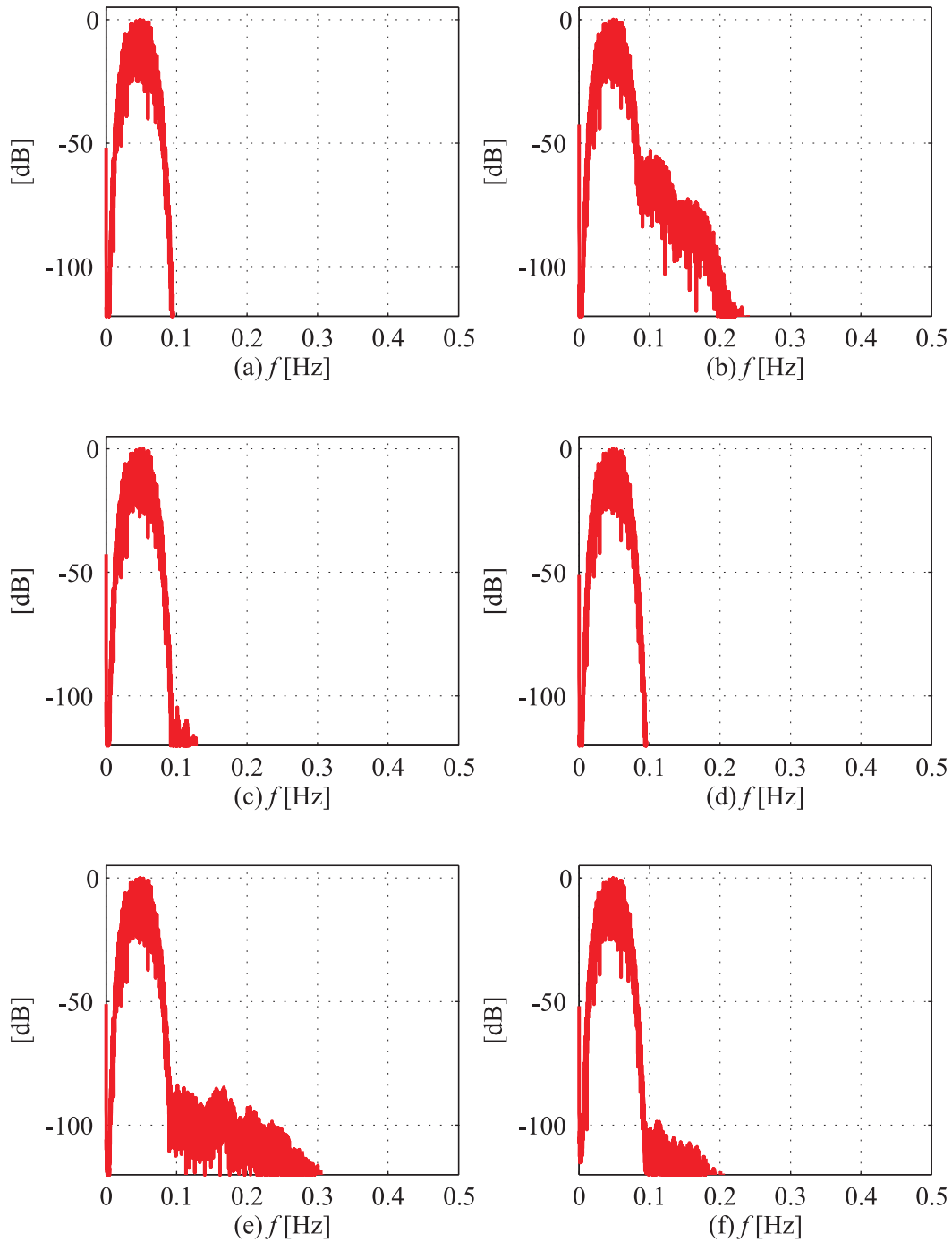
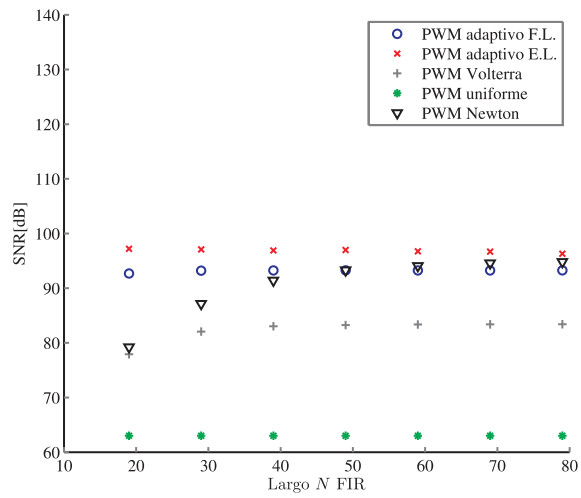
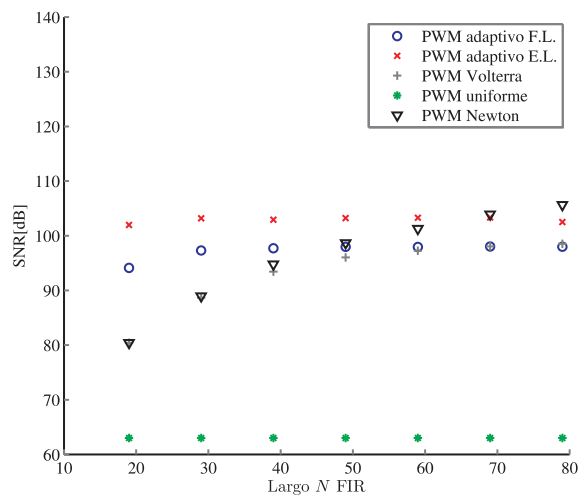


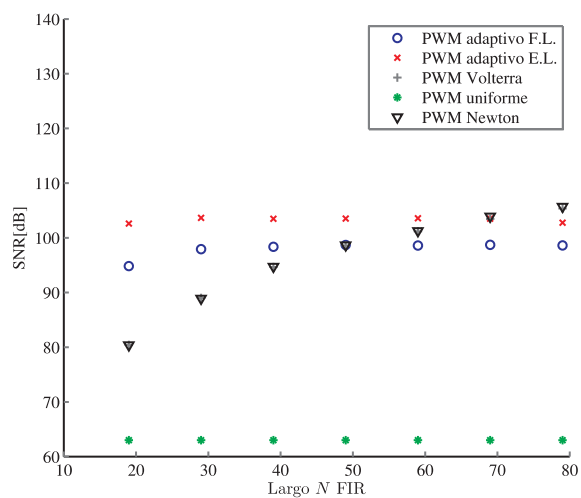
Figura 3.22: Espectros de la salida del modulador PWM para una excitación aleatoria pasa banda obtenidos para $P = 7$ y $N = 79$. (a) Señal moduladora (entrada), (b) PWM uniforme, (c) PWM Volterra, (d) PWM adaptivo E.L., (e) PWM adaptivo F.L. y (f) PWM Newton.



(a) $P = 3$



(b) $P = 5$



(c) $P = 7$

Figura 3.23: SNR en función de la longitud de los filtros FIR del algoritmo para una señal musical: LARS.

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

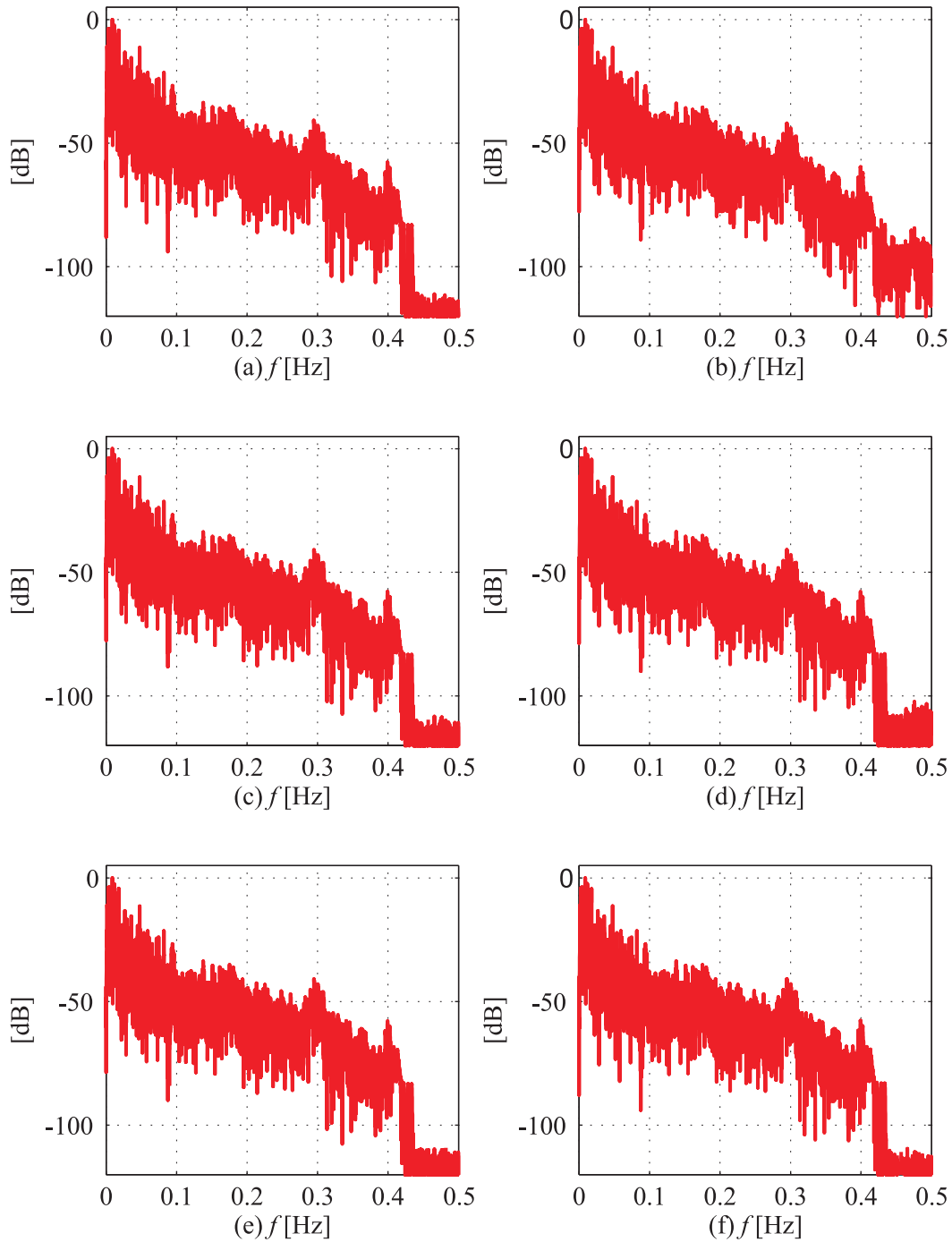


Figura 3.24: Espectros de la salida del modulador PWM para una excitación musical (LARS) obtenidos para $P = 7$ y $N = 79$. (a) Señal moduladora (entrada), (b) PWM uniforme, (c) PWM Volterra, (d) PWM adaptivo E.L., (e) PWM adaptivo F.L. y (f) PWM Newton.

de muestreo/PWM es relativamente baja comparada con aplicaciones típicas de PWM. Nuevamente para $P = 3$ los PWM adaptivos presentan los mejores resultados, aunque en este caso el PWM Newton también presenta un buen desempeño para valores de $N \geq 50$. Al incrementar P el PWM Volterra aumenta el SNR alcanzando un comportamiento similar al del PWM Newton. Los espectros para el caso $P = 7$ y $N = 79$ se muestran en la Fig. 3.24. Para esta señal se hace más difícil comparar los espectros de la señal de entrada con los espectros producidos por los moduladores y así detectar la distorsión introducida, aunque si es claro que para el PWM uniforme se observa un incremento del piso de ruido para frecuencias mayores a $0,4f_s$.

Las simulaciones para la señal multitonal compuesta por nueve sinusoidales espaciadas en octavas se muestran en la Fig. 3.25. Esta señal representa uno de los casos más complicados para los moduladores porque posee un contenido frecuencial alto con valores de energía que no decrecen al aumentar la frecuencia (como si ocurre para la señal LARS). Para $P = 3$ el PWM Newton alcanza un desempeño similar al del PWM adaptivo E.L. superando a todos los moduladores cuando se incrementa el valor de P . Para esta señal de prueba los espectros de la Fig. 3.26 permiten apreciar la distorsión resultante para cada uno de los moduladores. El PWM uniforme presenta grandes niveles de distorsión que ocupan toda la banda base. El modulador PWM uniforme alcanza con esta señal el nivel más bajo de SNR (alrededor de 40 dB). La diferencia en el SNR entre cualquiera de los métodos propuestos y el PWM uniforme es superior a los 30 dB.

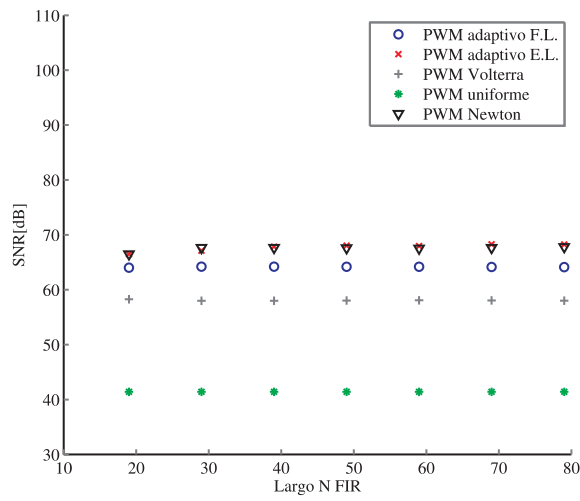
En la Fig. 3.27 se muestran los resultados de simulación para la señal IMD con una frecuencia máxima de $f_m = 0,18f_s$. El PWM adaptivo E.L. presenta los mejores resultados para los tres valores de P y el PWM Newton también presenta un buen desempeño que es equiparado por el PWM Volterra para $P = 7$. Los espectros para la señal de intermodulación utilizando $P = 7$ y $N = 79$ se muestran en la Fig. 3.28: para estos valores de parámetros el PWM adaptivo E.L. presenta el espectro más limpio seguido por el PWM Newton.

Comparaciones

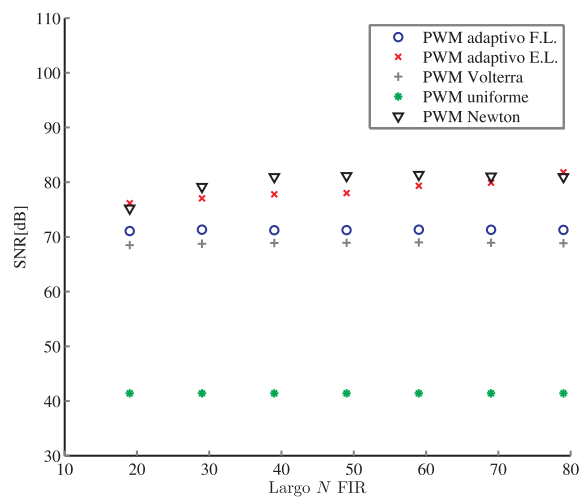
En términos generales y en base a las simulaciones presentadas puede concluirse que el PWM adaptivo E.L. presenta los mejores resultados, aunque al mismo tiempo es el modulador computacionalmente más demandante ya que requiere adaptar en línea los coeficientes de su estructura. El PWM adaptivo E.L. solo es superado por el PWM Newton para la señal multitono que representa uno de los casos más complicados por la presencia de componentes de alta frecuencia con niveles altos de energía.

El comportamiento del PWM Volterra mejora notablemente al incrementar el valor de la máxima potencia P utilizada, igualando para algunas de las señales el desempeño del PWM

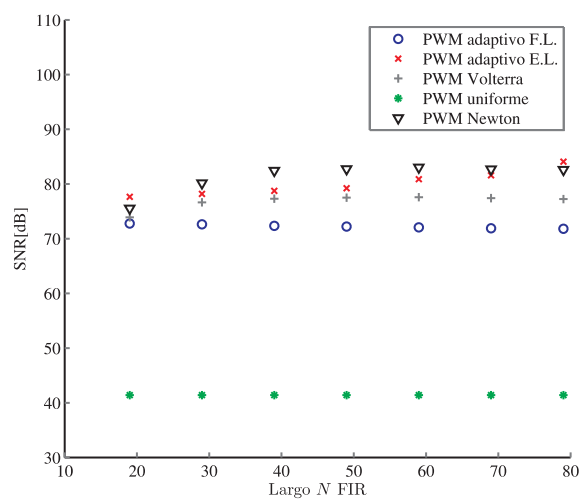
3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE



(a) $P = 3$



(b) $P = 5$



(c) $P = 7$

Figura 3.25: SNR en función de la longitud de los filtros FIR del algoritmo para una señal multitono.

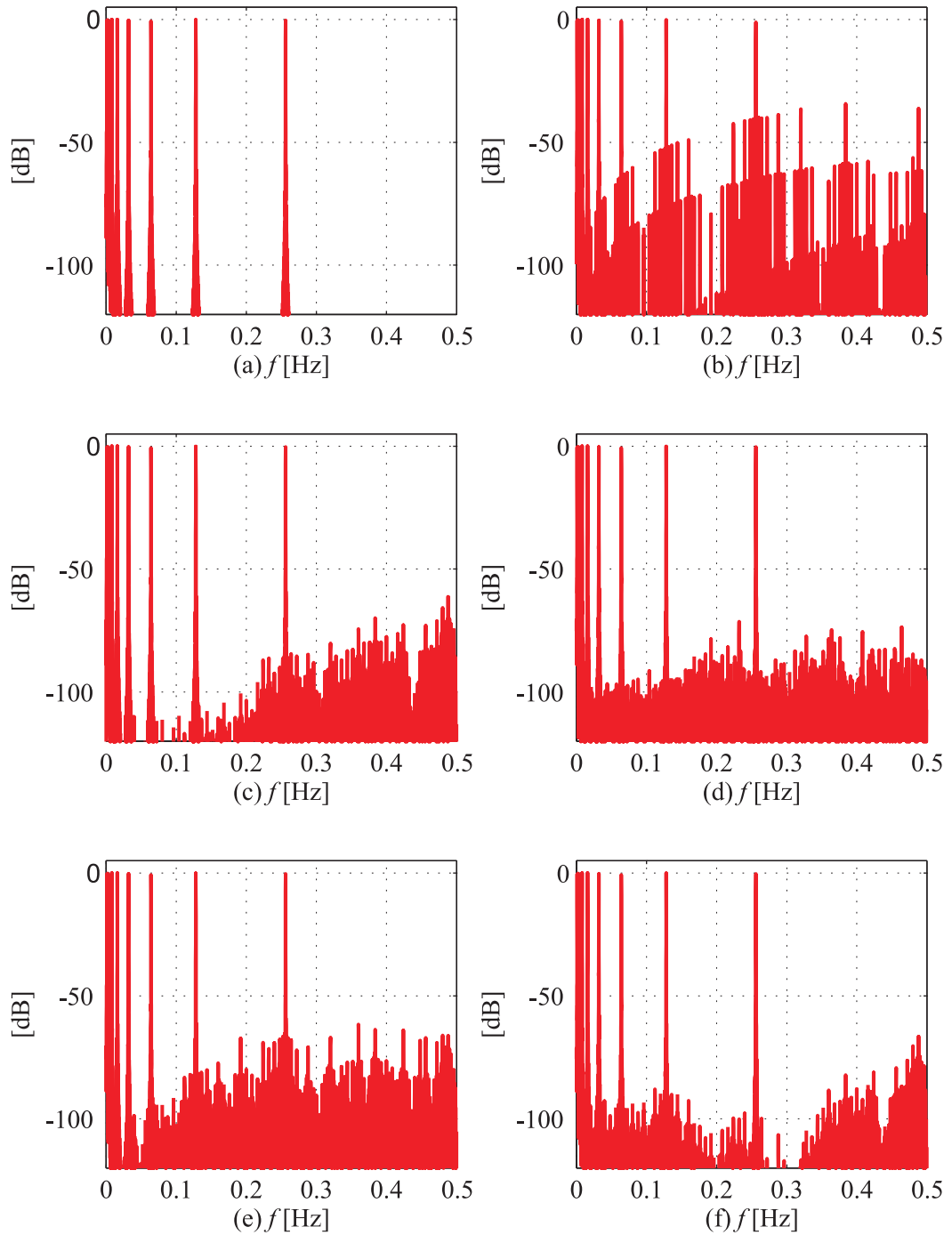
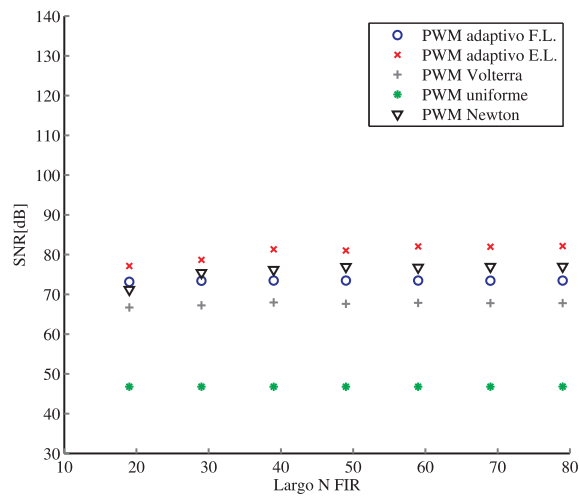
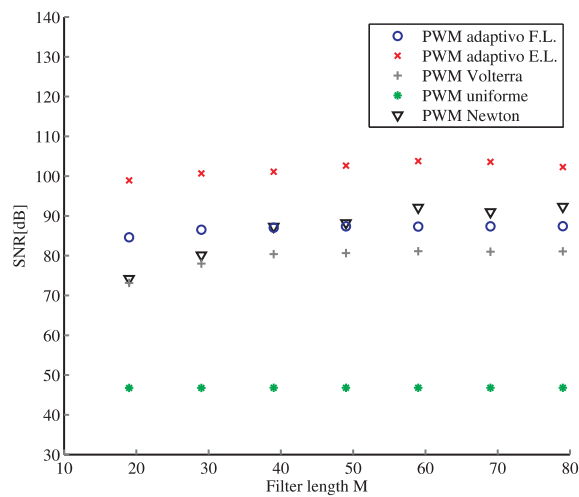


Figura 3.26: Espectros de la salida del modulador PWM para una excitación multitono obtenidos para $P = 7$ y $N = 79$. (a) Señal moduladora (entrada), (b) PWM uniforme, (c) PWM Volterra, (d) PWM adaptivo E.L., (e) PWM adaptivo F.L. y (f) PWM Newton.

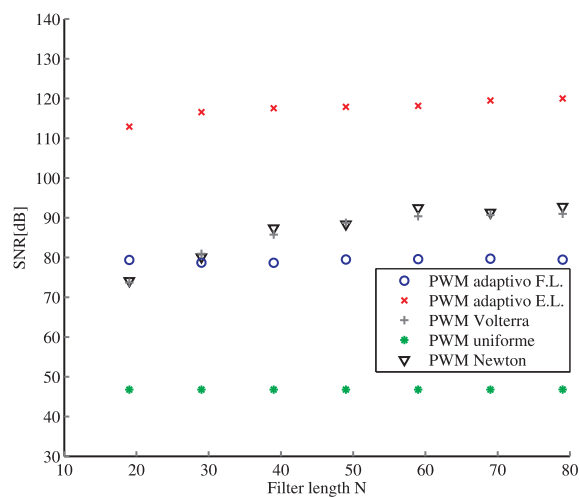
3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE



(a) $P = 3$



(b) $P = 5$



(c) $P = 7$

Figura 3.27: SNR en función de la longitud de los filtros FIR del algoritmo para una señal IMD.

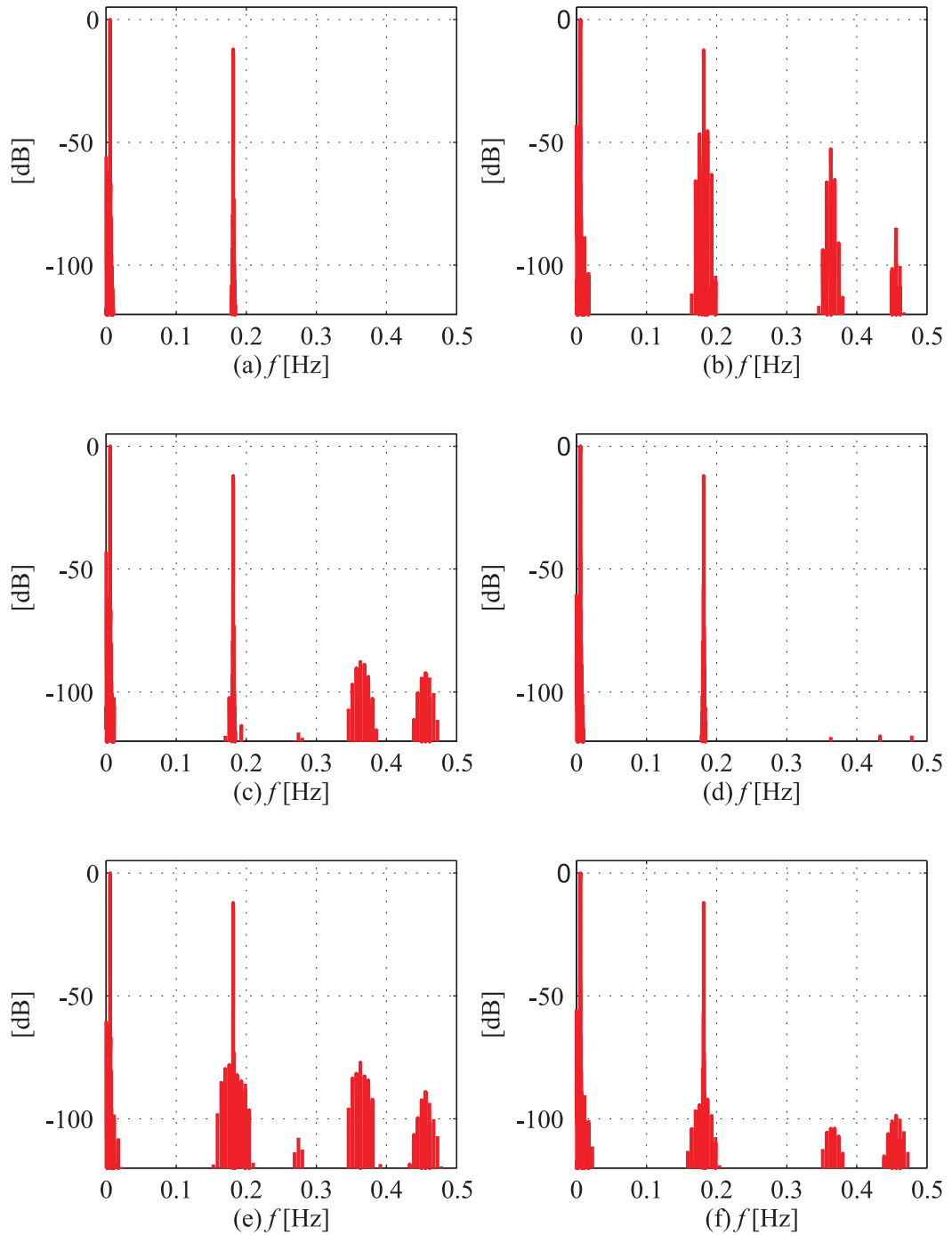


Figura 3.28: Espectros de la salida del modulador PWM para una excitación IMD obtenidos para $P = 7$ y $N = 79$. (a) Señal moduladora (entrada), (b) PWM uniforme, (c) PWM Volterra, (d) PWM adaptivo E.L., (e) PWM adaptivo F.L. y (f) PWM Newton.

3. MODULACIÓN DIGITAL PWM SIN DISTORSIÓN EN BANDA BASE

Newton. En términos de la complejidad de cálculo, para $P = 7$ el PWM Volterra requiere calcular 7 filtros FIR de largo N mientras que el PWM Newton requiere calcular 9 filtros FIR (3 por cada etapa de la Fig. 3.10). Si bien el cálculo del PWM Newton es levemente más complejo su estructura es repetitiva lo que permite implementarla en forma relativamente sencilla. Por otra parte, aumentar el orden del PWM Newton para mejorar su desempeño no introduce modificaciones en la estructura (se aumenta el orden del bloque “Modelo PWM” en la Fig. 3.10 y/o se incrementa el número de iteraciones). La complejidad del PWM Volterra crece a medida que aumenta el orden P , por ejemplo para $P = 9$ se requiere calcular 14 filtros FIR de largo N mientras que el PWM Newton requiere calcular 12 filtros FIR si se mantiene en 3 iteraciones y 16 filtros FIR si se incrementa a 4 iteraciones. Por otra parte, la característica de “orden recursiva” (la componente de salida debido a la potencia de orden P utiliza la salida debido a la potencia $P - 1$) del PWM Volterra, que se lista en la Tabla 3.3 para $P = 1$ a $P = 5$, requiere la ecualizar los diferentes retardos producidos en los distintos caminos de la señal.

El PWM adaptivo F.L. presenta un muy buen desempeño para valores bajos de P . Para $P = 3$ resulta en la mejor relación costo beneficio porque requiere calcular solo 2 filtros FIR cuyos coeficientes se obtienen utilizando una señal de entrenamiento fuera de línea y que luego se mantienen fijos durante la operación.

Capítulo 4

Resultados experimentales

En este capítulo se verifican experimentalmente tres de los moduladores estudiados en el Capítulo 3:

- En la Sección 4.2 se presenta la verificación experimental del modulador PWM Newton que se propuso en la Sección 3.1.5. El algoritmo se implementó en tiempo real, utilizando un procesador digital de señales (DSP) de Texas Instruments. Específicamente se utilizó el kit de desarrollo de Spectrum Digital eZdsp F28335 basado en el DSP TMS320F28335.
- Se implementó también el modulador PWM Volterra basado en la inversa de orden p que fue resumido Sección 3.4; los resultados se presentan en la Sección 4.3. Para estos experimentos se utilizaron DSPs ADSP-21469/ADSP-21479 de la línea SHARC del fabricante Analog Devices¹.
- Se incluyen también resultados para el PWM adaptivo fuera de línea (PWM adaptivo F.L.) propuesto en la Sección 3.3 utilizando el mismo DSP TMS320F28335 que se utilizó para el modulador PWM Newton. Estos resultados se presentan en la Sección 4.4.

En la Sección 4.1 se presentan algunas cuestiones prácticas referidas a la implementación de los algoritmos de modulación PWM digital y las mediciones. El método de análisis consiste en comparar las diferencias entre los espectros de la señal PWM cuando se utilizan los métodos de modulación ensayados (PWM Newton, PWM Volterra y PWM adaptivo F.L.) y cuando se utiliza PWM uniforme utilizando señales típicas para este tipo de pruebas. Para capturar los

¹Estos algoritmos se implementaron durante una estancia de investigación en la Universidad de Stavanger en Noruega.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

espectros se emplearon dos analizadores de alta precisión, por un lado el analizador dinámico de señales SRS-785 de Stanford Research Systems (Ancho de banda: 0 Hz hasta 102,4 kHz, dos canales, 90 dB rango dinámico). También se utilizó el analizador SYS-2722 de Audio Precision (Ancho de banda: 10 Hz-204 kHz, dos canales, THD+N residual a 1 kHz de -112 dB).

Las mediciones presentadas a lo largo del capítulo corresponden a la señal PWM antes de la etapa de potencia para evitar incluir otros fenómenos prácticos, como los tiempos muertos, y permitir de esta manera evaluar el desempeño de los algoritmos para compensar los efectos no lineales de la modulación PWM digital.

4.1. Aspectos prácticos de la implementación y de las mediciones

Para implementar los moduladores en tiempo real se utilizaron dos procesadores digitales de señales. Ambos poseen arquitectura de punto flotante por lo que se evitan efectos de desborde (*overflow*) y errores de redondeo en las operaciones realizadas para el cálculo de los algoritmos. No obstante, no se evita el efecto de cuantización temporal del ciclo de trabajo producido al momento de generar la señal PWM utilizando los módulos provistos por los DSPs. Este fenómeno se mitiga utilizando algoritmos auxiliares que se discuten en la Sección [4.1.4](#).

En la Fig. [4.1](#) se incluyen algunas fotografías con varias de las configuraciones experimentales utilizadas. Por una parte se utilizó un sistema de desarrollo de Spectrum Digital basado en el DSP de Texas Instruments TMS320F28335 para implementar el PWM Newton y el PWM adaptivo F.L. (Fig. [4.2](#)). Esta familia de DSPs está pensada para su utilización en aplicaciones de electrónica de potencia, fundamentalmente para el control de motores. Por esta razón no dispone de algunas características propias de los DSPs utilizados en aplicaciones de audio como FFT por hardware, cálculo de filtros por hardware, entradas de audio digital, conversores A/D con calidad de audio de 16 bits, etc. Sin embargo, dispone de módulos para obtener múltiples salidas PWM por lo que es útil para realizar pruebas de concepto de los algoritmos de modulación digital PWM.

Para implementar el modulador PWM Volterra se utilizó el sistema de desarrollo SHARC 21469 EZ-KIT Lite de Analog Devices. También se diseñó una placa de circuito impreso (PCB) que incluye al DSP SHARC 21479 (similar al DSP 21469 pero con un encapsulado diferente y menor frecuencia de reloj), una etapa de potencia tipo puente H con los circuitos asociados para el manejo de los transistores mosfets y la etapa de demodulación compuesta

4.1 Aspectos prácticos de la implementación y de las mediciones

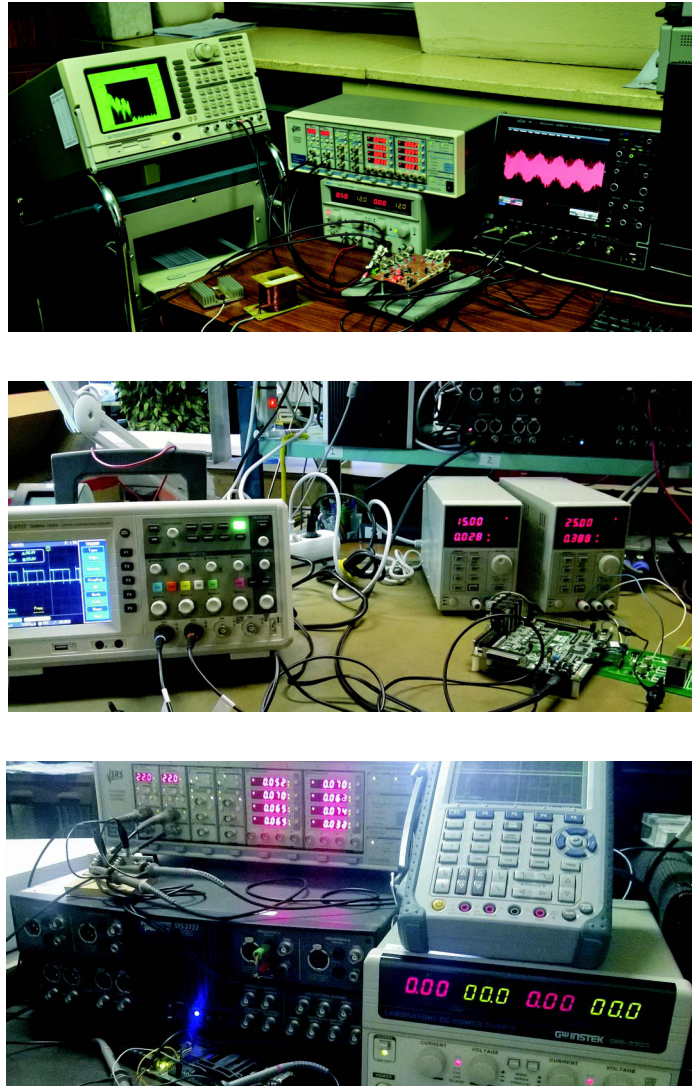


Figura 4.1: Varias configuraciones experimentales utilizadas durante la obtención de las mediciones.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

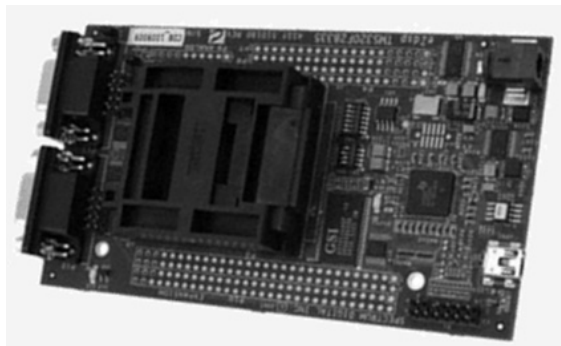


Figura 4.2: Kit de desarrollo de Spectrum Digital basado en el DSP de Texas Instruments TMS320F28335.

por un filtro pasa bajos LC¹. En la Fig. 4.3(a) se muestra una foto del PCB y en la Fig. 4.3(b) un detalle del DSP. Estos DSPs están diseñados para aplicaciones de audio, poseen aceleradores por hardware para filtros FIR, IIR, y para FFT. Además disponen de puertos serie, en particular la norma de audio digital I2S y bloques dedicados denominados “asynchronous sample rate converter” (ASRC) que permiten detectar automáticamente las frecuencias de muestreo de la señal digital de entrada y modificar la misma. El bloque ASRC sirve al mismo tiempo como interfaz entre el reloj externo, incluido en el formato serie de la señal de entrada y el reloj del DSP. Todas estas y otras características hacen que la implementación de algoritmos de procesamiento digital de señales sean más sencilla.

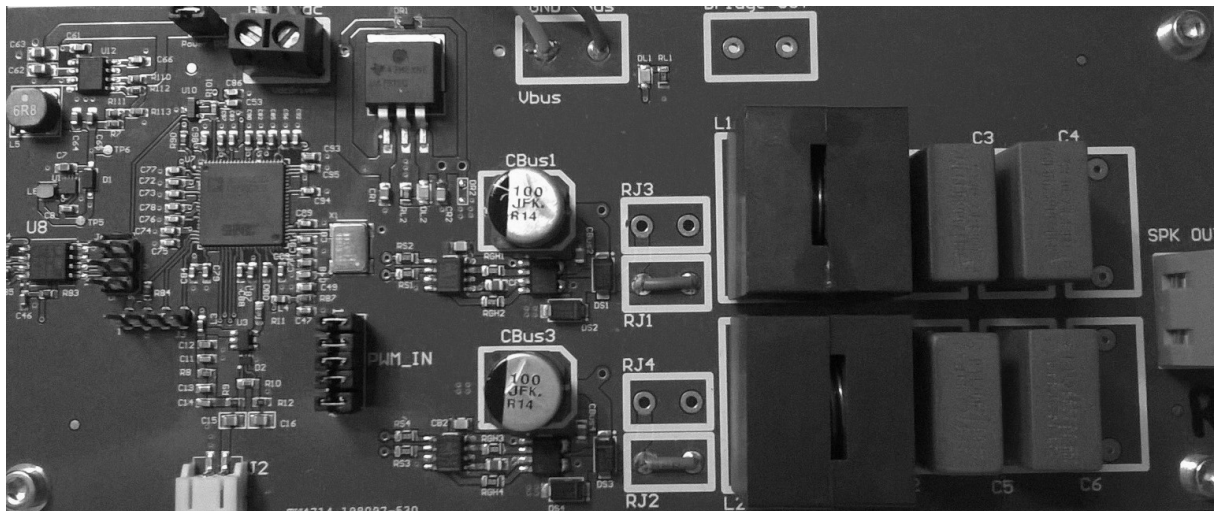
4.1.1. Señal digital de entrada

Un formato muy difundido entre fabricantes de circuitos integrados de audio para transmitir señales digitales es el I2S, nombre derivado del inglés “Inter Integrated-circuit Sound”. Es una norma de transmisión de datos serial usado para interconectar circuitos de audio digital. La trama de I2S consta de una señal de reloj, una señal de canal derecho/izquierdo y una línea de datos donde se envían los bits que forman la palabra correspondiente a las muestras de la señal. A nivel comercial un formato utilizado para transmitir audio digital es el formato S/PDIF (del inglés Sony/Philips Digital Interface Format) que utiliza una única señal. Los bits de información se transmiten según una codificación BMC (del inglés Biphasic Mark Code) que permite utilizar diferentes frecuencias de muestreo y cuyo soporte físico suele ser un cable coaxial o fibra óptica.

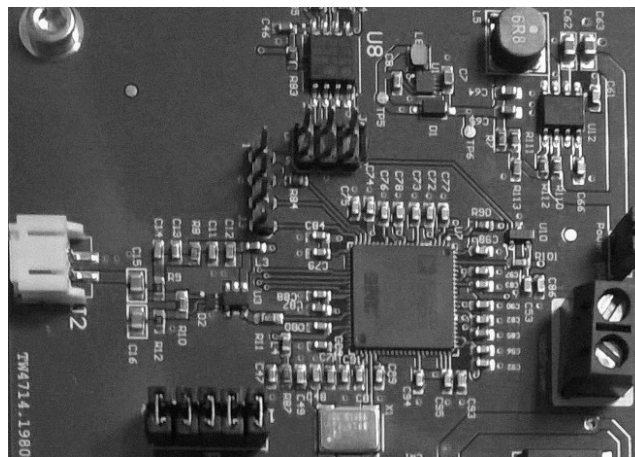
En el caso del DSP TMS320F28335 no se dispone de entrada de audio digital I2S o S/PDIF. Si bien se dispone de un puerto serie, no se cuenta con un bloque de conversión

¹Estos trabajos se realizaron durante la estancia de investigación en Noruega.

4.1 Aspectos prácticos de la implementación y de las mediciones



(a) Placa incluyendo DSP y etapa de potencia.



(b) DSP Sharp 21479 Analog Devices en la placa construida.

Figura 4.3: Foto de la placa construida. Incluye DSP y etapa de potencia.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

asincrónica de datos que permita, de manera sencilla, convertir los datos de entrada digitales con su propio dominio de reloj al dominio de reloj del DSP con el que se genera la señal PWM. Por esta razón se optó por generar las señales digitales de pruebas utilizando el mismo DSP. Estas pueden obtenerse utilizando tablas o librerías de funciones provistas por el fabricante (por ejemplo para generar señales sinusoidales o sumas de éstas) o algoritmos específicos, como en el caso de una señal aleatoria de banda limitada, donde la señal moduladora fue generada utilizando un algoritmo numérico que opera en tiempo real. Este algoritmo se basa en generar ruido pseudo aleatorio [57, pp. 279] y luego filtrar la señal generada con un filtro FIR para limitar el contenido frecuencial al ancho de banda deseado. En todos los casos estos algoritmos insumen cierta carga computacional y por lo tanto disminuyen la capacidad disponible en el DSP para implementar el algoritmo de modulación.

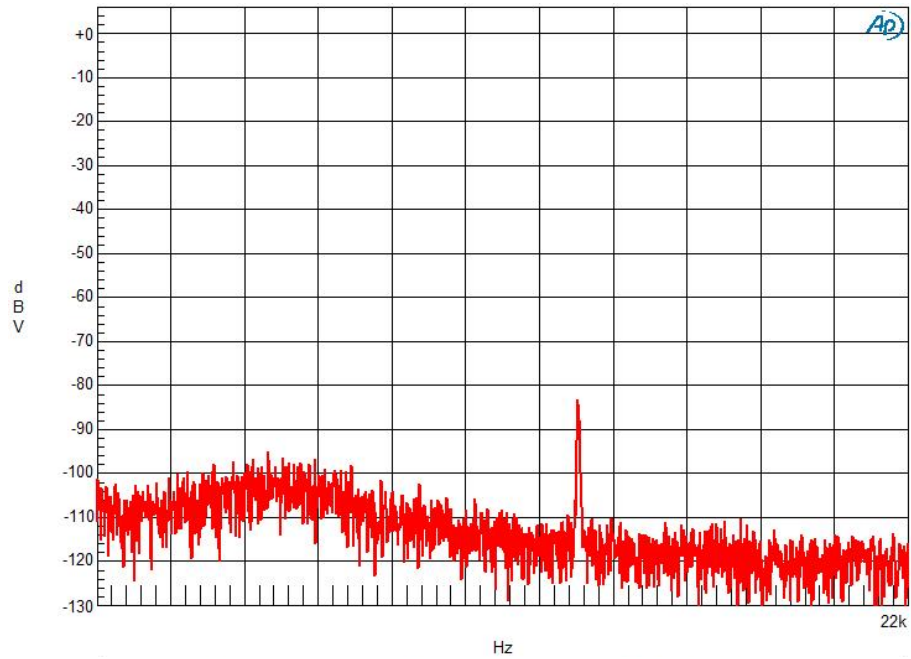
En el caso de los DSP de la familia SHARC de Analog Devices se dispone de un bloque interno que permite obtener las señales de reloj, canal y datos del formato I2S a partir de una entrada S/PDIF. También se dispone de bloques convertidores de frecuencia de muestreo asíncronos (ASRC) que permiten ajustar (aumentar o reducir en un rango específico) la frecuencia de muestreo y al mismo tiempo sirve de interfaz entre el dominio de reloj de la entrada y el dominio del reloj del DSP. Esto facilita sensiblemente la tarea y permite utilizar señales digitales externas que pueden provenir de cualquier dispositivo de audio con salida digital. En particular se utilizó el formato S/PDIF y se generaron las señales digitales con el analizador espectral de Audio Precision.

4.1.2. Configuración experimental para las mediciones

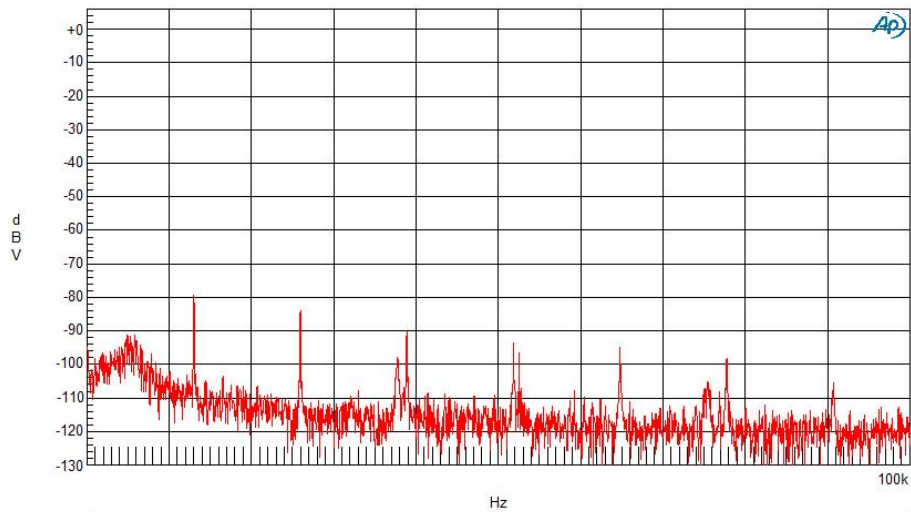
Las mediciones espectrales de las Secciones 4.2, 4.3 y 4.4 se realizaron sobre la señal modulada PWM antes de la etapa de potencia. Como la metodología empleada utiliza FFT es necesario limitar el ancho de banda de la señal PWM antes de realizar el muestreo. Para el caso de las mediciones realizadas con el analizador espectral de señales SRS-785 de Stanford Research System el filtrado es realizado directamente por la etapa de entrada del analizador. Para el caso del analizador SYS-2722 de Audio Precision el fabricante recomienda no excitar directamente las etapas de entrada del instrumento con formas de onda de tipo cuadrada, por lo que se utilizó un filtro pasivo RC de primer orden para atenuar las componentes de alta frecuencia. Una segunda etapa de filtrado es realizada por el mismo analizador para evitar solapamiento espectral (*aliasing*).

Otro factor práctico a tener en cuenta es que en los sistemas de desarrollo de los DSPs de ambos fabricantes las fuentes de CC utilizadas para generar el nivel alto de la señal PWM presentan componentes frecuenciales espurias que afectan la calidad de la medición, confundándose con la distorsión generada por la modulación PWM. El efecto causado por

4.1 Aspectos prácticos de la implementación y de las mediciones



(a) Rango de frecuencias de audio: 0 a 22 kHz.



(b) Rango de frecuencias extendido: 0 a 100kHz.

Figura 4.4: Espectro de la fuente 3,3 V del Kit SHARC 21469 EZ-KIT Lite de Analog Devices para generar el nivel alto de la señal PWM.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

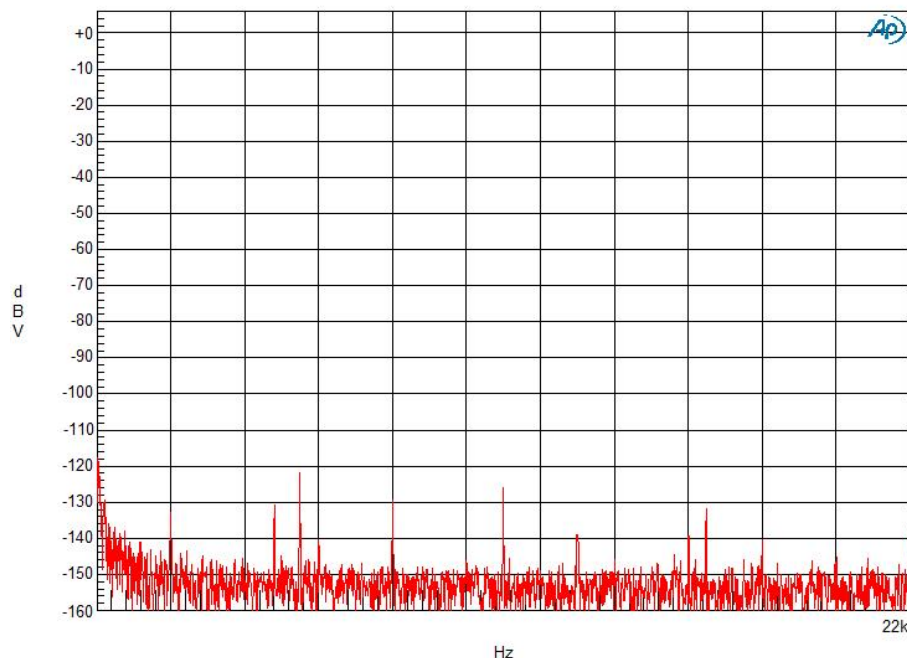


Figura 4.5: Espectro de la batería utilizada.

variaciones en la fuente de alimentación en banda base fue analizado teóricamente en la Sección 2.2 donde se modeló el efecto de tener una amplitud de pulso variable. Para ilustrar este fenómeno práctico en la Fig. 4.4 se muestra el espectro medido en la fuente de 3,3 V del kit del DSP de Analog Devices. La Fig. 4.4(a) muestra que en banda base existe una componente con amplitud cercana a los -80 dB. Por otra parte en la Fig. 4.4(b) que muestra el espectro extendido hasta 100 kHz se observa que existen otras componentes no deseadas en frecuencias superiores. Estas perturbaciones en la fuente de CC pueden ser causadas por los relojes y conmutaciones digitales presentes en el sistema de desarrollo del DSP y afectan la calidad de la modulación por lo que se reconstruyó la señal PWM utilizando una compuerta lógica alimentada mediante una batería. El espectro medido en terminales de la batería se muestra en la Fig. 4.5, donde se detectan algunos componentes inducidas pero éstas se encuentran por debajo de los -120 dB.

El problema en la fuente de CC del kit del DSP no es un problema práctico del amplificador clase D ya que los circuitos excitadores utilizados para manejar las llaves de potencia cumplen la función de la compuerta lógica utilizada para las mediciones. Sin embargo, debe garantizarse la utilización de una fuente de CC de calidad para la etapa de potencia o de lo contrario la utilización de algoritmos de compensación como los estudiados en la Sección 3.2 o esquemas de control por realimentación.

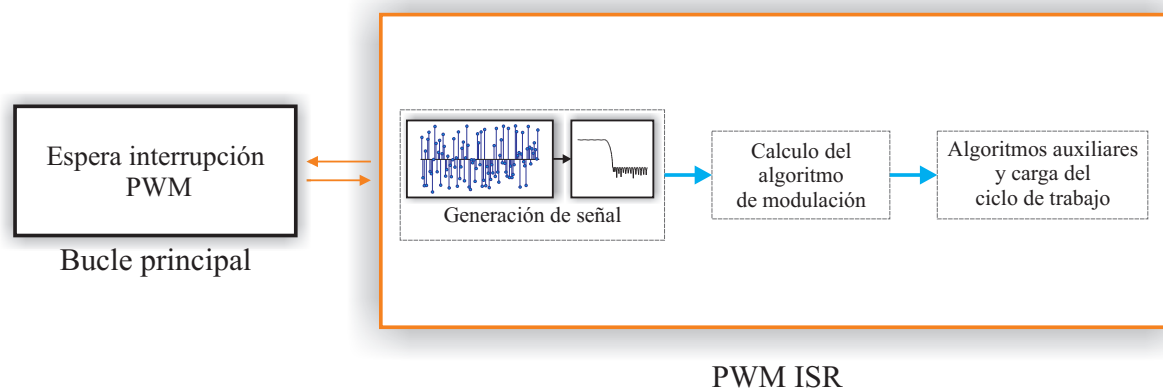


Figura 4.6: Estructura del programa implementado en el DSP de Texas Instruments.

4.1.3. Estructura de los algoritmos implementados en los DSPs

En la Fig. 4.6 se muestra la estructura del programa implementado en el DSP de Texas Instruments¹. El programa se mantiene en espera en su bucle principal hasta que se dispara la interrupción del PWM (PWM ISR). Esta interrupción se fija en forma periódica (frecuencia de PWM 50 kHz) utilizando un temporizador interno del DSP. Dentro de la interrupción se genera la señal moduladora seleccionada (sinusoidal, multitono, IMD, ruido) y se calcula el algoritmo de modulación utilizando la librería de filtros FIR que provee el fabricante. Finalmente se calculan los algoritmos auxiliares que se describen en la Sección 4.1.4 y se carga el valor del ciclo de trabajo resultante en el registro correspondiente del módulo PWM.

En la Fig. 4.7 se muestra la estructura del programa implementando en los DSPs de la línea SHARC de Analog Devices. La señal de entrada es procesada por el bloque S/PDIF que da como salida las señales de reloj, canal derecho/izquierdo (frecuencia de muestreo) y datos. Estas señales ingresan al bloque “Asynchronous sample rate converter” (ASRC) que cumple dos funciones: por un lado realizar una conversión de la frecuencia de muestreo (máximo 192 kHz) y por otra parte pasar del dominio de reloj de la entrada (señal SRC1_CLK_IP_O) al dominio del reloj del DSP (señal SRC1_CLK_OP_I) que es generado por el bloque dedicado PCG (por las siglas en inglés de “Precision Clock Generator”). Los datos de salida del bloque ASRC ingresan a otro bloque interno del DSP; un puerto serie SPORT0 que se encarga mediante un proceso de acceso directo a memoria (DMA) de almacenar los datos en la memoria del DSP.

El algoritmo se procesa por bloques para reducir la sobrecarga (*overhead*) que implica llamar a las rutinas muestra a muestra. El bloque SPORT0 es el encargado de disparar una

¹Se agradece la colaboración del Dr. Leandro Stefanazzi para la implementación de los algoritmos.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

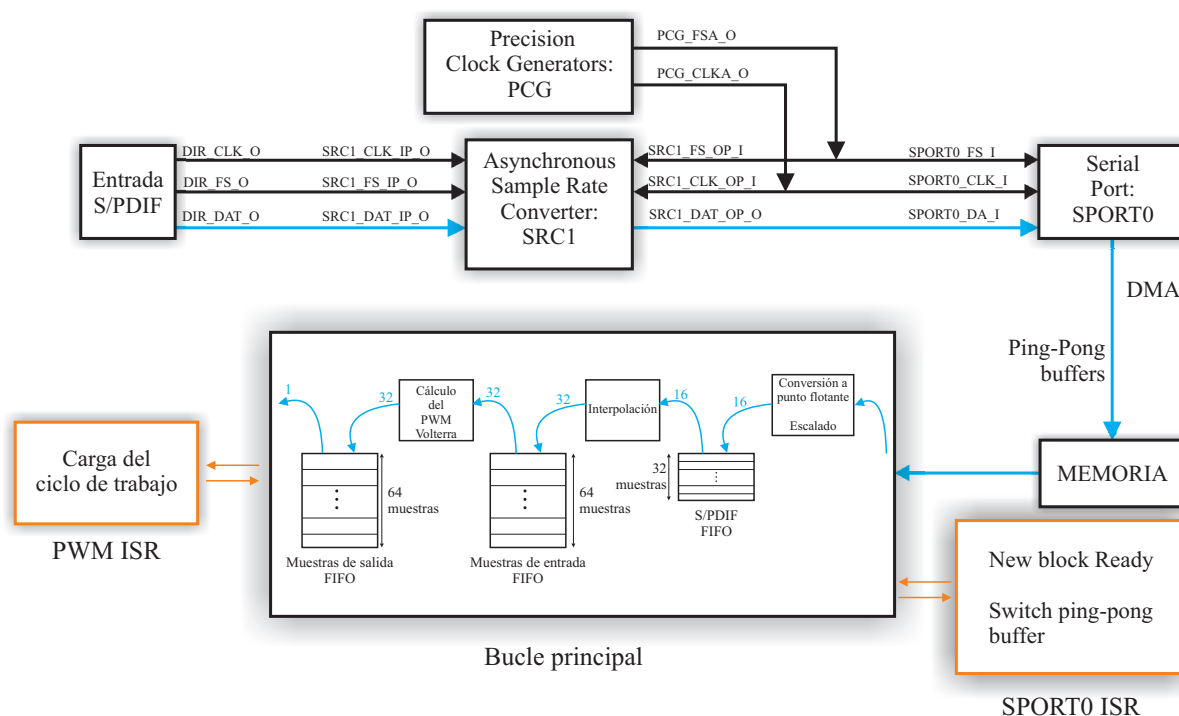


Figura 4.7: Estructura del programa implementado en el DSP SHARC de Analog Devices.

interrupción (SPORT0 ISR) cuando un bloque de nuevos datos está disponible. En primer lugar el bloque de datos se escala, se convierte al formato numérico de punto flotante con el que opera el DSP y se almacena en un *buffer* de datos del tipo “primero en entrar, primero en salir” o FIFO por sus siglas en inglés (bloque S/PDIF FIFO). Si se requiere una frecuencia de PWM superior a 192 kHz debe realizarse una interpolación manual (representada con el bloque “interpolación”) porque la frecuencia máxima del bloque ASRC es 192 kHz. El paso final consiste en calcular las potencias y filtros del PWM Volterra y los algoritmos auxiliares que se detallan en la Sección 4.1.4.

Todo este procesamiento se realiza en forma asincrónica en el bucle principal del programa. El sincronismo se recupera mediante la interrupción generada por el bloque PWM (PWM ISR) que recibe el ciclo de trabajo correspondiente y genera la señal PWM de salida.

4.1.4. Algoritmos complementarios: *noise-shaping* y *dithering*

Si bien los DSPs son de punto flotante, el ciclo de trabajo obtenido a partir de los moduladores queda cuantizado por el formador de pulsos al momento de generar la señal PWM. En general, la señal PWM se obtiene a partir de la utilización de un contador que se incrementa con cada ciclo de reloj y un valor de comparación (ciclo de trabajo). Cuando el valor del con-

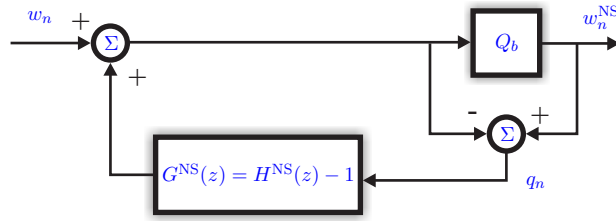


Figura 4.8: Diagrama en bloques del algoritmo de *noise-shaping*

tador es igual al valor de comparación entonces se produce una transición de la señal PWM. Por esta razón la resolución temporal de la señal PWM estará limitada por la frecuencia de reloj utilizada para generarla. Existen métodos alternativos reportados en la literatura para obtener resoluciones mayores sin aumentar la frecuencia de reloj [24, 51], pero generalmente no están disponibles en procesadores digitales de señales.

Se utilizaron dos tipos de algoritmos auxiliares. Para el PWM Newton y PWM adaptivo F.L. implementado en el DSP de Texas Instruments operando a 50 kHz se utilizó la técnica de *dithering*, que consiste en agregar intencionalmente una pequeña cantidad de ruido antes de cuantizar la señal para “aleatorizar” el error de cuantización. Se utiliza un algoritmo de generación de ruido pseudo aleatorio [57, pp. 279] con una amplitud pico a pico del ruido equivalente a la resolución del PWM. De esta forma se logra que al utilizar señales sinusoidales el ruido de cuantización no aparezca como armónicos de la señal moduladora lo que en general es indeseable.

Para los algoritmos implementados en los DSPs de la familia SHARC de Analog Devices se utilizaron algoritmos de moldeo del ruido de cuantización conocidos por su nombre en inglés como *noise-shaping* [2, 31]. Este algoritmo se encarga de desplazar el ruido de cuantización fuera de la banda de frecuencias de interés. Si la máxima frecuencia de interés es f_m y la frecuencia de muestreo y PWM es f_s con $f_s/2 > f_m$ entonces es posible desplazar el ruido de cuantización de la banda $[0, f_m]$ a la banda $(f_m, f_s/2)$. Para la implementación en el DSP de Texas a $f_s = 50$ kHz esta última banda es (20, 25) kHz que es extremadamente estrecha y por esta razón no se aplicó el algoritmo.

Los algoritmos de *noise-shaping* se basan en introducir el error de cuantización q_n en un lazo de realimentación. Un diagrama en bloques se muestra en la Fig. 4.8; el error de cuantización q_n se obtiene a partir de calcular la diferencia entre la salida y la entrada del bloque de cuantización de b bits Q_b . En el caso de la modulación PWM esto es la diferencia de los ciclos de trabajo cuantizados y sin cuantizar. Se filtra q_n con un filtro con respuesta impulsiva g_n^{NS} y transformada Z dada por $G^{NS}(z)$. La salida del algoritmo de *noise-shaping*

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

puede calcularse como

$$w_n^{\text{NS}} = Q_b\{w_n + g_n^{\text{NS}} * q_n\} \quad (4.1)$$

donde w_n son los ciclos de trabajo antes de la cuantización y $Q_b\{x\}$ indica la cuantización en b bits del argumento x . Una elección típica para el filtro es

$$G^{\text{NS}}(z) = H^{\text{NS}}(z) - 1 \quad (4.2)$$

con $H^{\text{NS}}(z) = (1 - z^{-1})^N$. Típicamente el orden del filtro se mantiene bajo entre $N = 3$ a $N = 5$. En [31] se indica que con $N = 5$ y $f_s = 352,8$ kHz y una cuantización Q_b de 8 bits es posible obtener un piso de ruido en banda base equivalente a 16 bits.

En [2] se presenta una estrategia diferente para diseñar el filtro $H^{\text{NS}}(z)$ basado en el conocimiento del modelo no lineal de la modulación PWM. Es posible mejorar el desempeño del algoritmo de *noise-shaping* si se tiene en cuenta que el ruido de cuantización también será afectado por las potencias del modelo no lineal presentado en el Capítulo 2, particularmente el diagrama en bloques de la Fig. 2.5. Mediante simulaciones, se analiza en [2] que el modelo del PWM genera componentes de ruido de cuantización de diferentes órdenes. A partir de este análisis se determina que una estrategia práctica para minimizar el ruido de cuantización y sus potencias en el rango de frecuencias de audio consiste en mantener el orden del filtro $H^{\text{NS}}(z)$ bajo y con buena atenuación en la banda base. Mediante un análisis cuidadoso de las componentes de ruido de cuantización de 3er orden se seleccionan los coeficientes de $H^{\text{NS}}(z)$ que permiten lograr un mejor desempeño que el diseño típico. Estos coeficientes fueron utilizados para implementar el filtro $H^{\text{NS}}(z)$ en las mediciones del PWM Volterra.

4.2. Verificación experimental del PWM Newton

El PWM Newton, representado por el diagrama en bloque de la Fig. 3.10, que utiliza internamente el modelo de la Fig. 2.5, fue implementada en el DSP de bajo costo TMS320F28335 para evaluar su comportamiento en tiempo real. La función $r(w_n)$ en (3.6) se calcula usando una tabla entrada/salida. No se requiere calcular $r(w_n)$ con gran precisión ya que como se discutió en la Sección 3.1.4, su valor podría reemplazarse incluso por una constante como en el caso del algoritmo iterativo con Jacobiano de diagonal constante. Los filtros FIR se implementan usando librerías provistas por el fabricante del procesador. El algoritmo no requiere ningún otro tipo de herramientas de procesamiento digital de señales, por lo que su implementación es relativamente sencilla.

El formador de pulsos, encargado de convertir los ciclos de trabajo en la señal PWM, se implementa con el módulo provisto en el DSP que utiliza un contador ascendente/descendente con una frecuencia de conmutación $f_s = 50$ kHz que coincide con la frecuencia de muestreo

de la señal moduladora de entrada. La resolución temporal de la señal PWM queda fija por la relación entre la frecuencia del PWM $f_s = 50$ kHz y la frecuencia de reloj utilizada por el módulo PWM $f_{clk} = 150$ MHz, lo que resulta en $b = \log_2(f_{clk}/f_c) \approx 11,55$ bits. Aunque esta resolución puede limitar el desempeño de la implementación, es suficiente para mostrar con claridad los beneficios producidos por el modulador PWM propuesto. La resolución del modulador PWM es un problema típico en todas las implementaciones digitales de algoritmos de modulación PWM y se han reportado en la literatura varias alternativas para aumentar la resolución sin aumentar la frecuencia de reloj [24, 51]. También suelen aplicarse técnicas de *noise-shaping* (moldeo del ruido), que desplazan el ruido de cuantización fuera de la banda de frecuencias de interés [41].

Basado en el análisis de la Sección 3.1.5.1 y teniendo en cuenta la resolución limitada del modulador PWM que introduce un piso de ruido de alrededor de -80 dB se seleccionan los siguientes parámetros del algoritmo: $K = 3$ etapas, con una aproximación de orden $P = 7$, y filtros FIR de largo $N = 59$. El punto de operación marcado con un punto en la Fig. 3.11, resulta en un THD+N que excede los -80 dB (0,01 %) por lo que se espera que la distorsión remanente del PWM Newton sea despreciable quedando por debajo del piso de ruido.

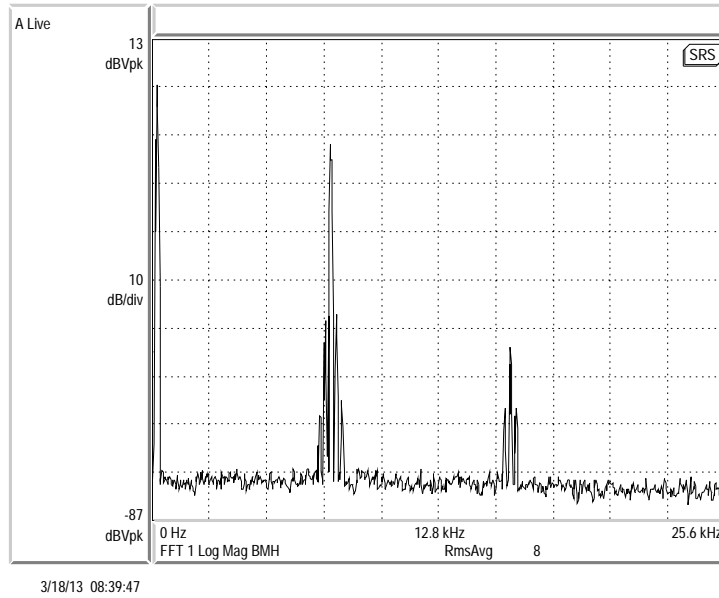
4.2.1. Mediciones espectrales

Para verificar el desempeño del PWM Newton se utilizaron diferentes señales de banda limitada con contenido frecuencial inferior a $f_s/2 = 25$ kHz. La señal PWM $p(t)$ se mide en una salida del DSP usando el analizador espectral de señales.

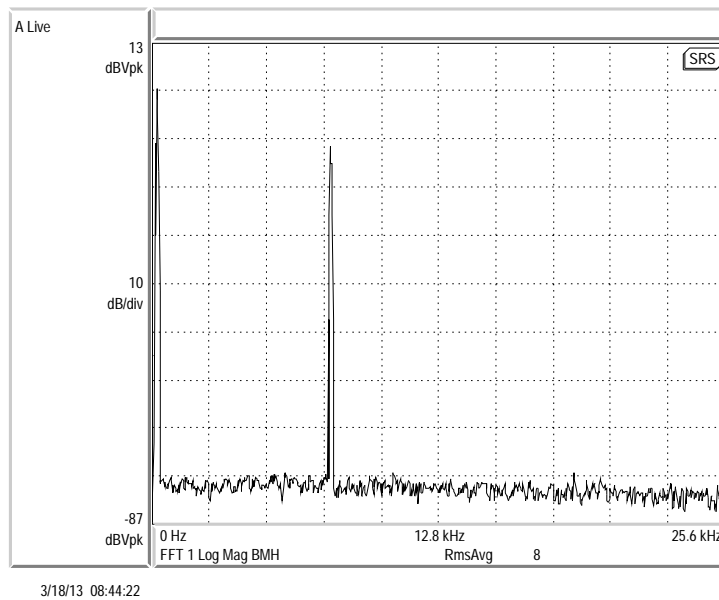
En primer lugar, se realizaron medidas de distorsión por intermodulación (IMD por sus siglas en inglés) utilizando el estándar DIN 45403 [48]. La señal moduladora está compuesta por dos señales sinusoidales, una de baja frecuencia y otra de alta frecuencia: para este experimento se seleccionaron $f_1 = 250$ Hz y $f_2 = 8$ kHz respectivamente, donde la componente de alta frecuencia tiene una amplitud 12,04 dB menor que la componente de baja frecuencia. Esta señal es la misma que se utilizó para las simulaciones de la Sección 3.5. Debido a la naturaleza no lineal de la modulación PWM, aparecen productos de intermodulación en frecuencias dadas por $\lambda f_1 \pm \eta f_2$ (con λ y η enteros); se espera que el PWM Newton reduzca a niveles despreciables todas las componentes de distorsión que el PWM uniforme genera en la banda base en el rango de frecuencias entre 0 y $f_s/2$.

Los espectros de banda base medidos para la prueba de IMD, tanto para el modulador PWM uniforme como para el modulador PWM Newton se muestran en la Fig. 4.9(a) y en la Fig. 4.9(b) respectivamente. Para la modulación PWM uniforme se observa la presencia de cuatro bandas laterales de la frecuencia de 8 kHz ubicadas en las frecuencias $f_2 \pm f_1$ y $f_2 \pm 2f_1$. También se observa un armónico en $2f_2 = 16$ kHz y sus bandas laterales en $2f_2 \pm f_1$.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES



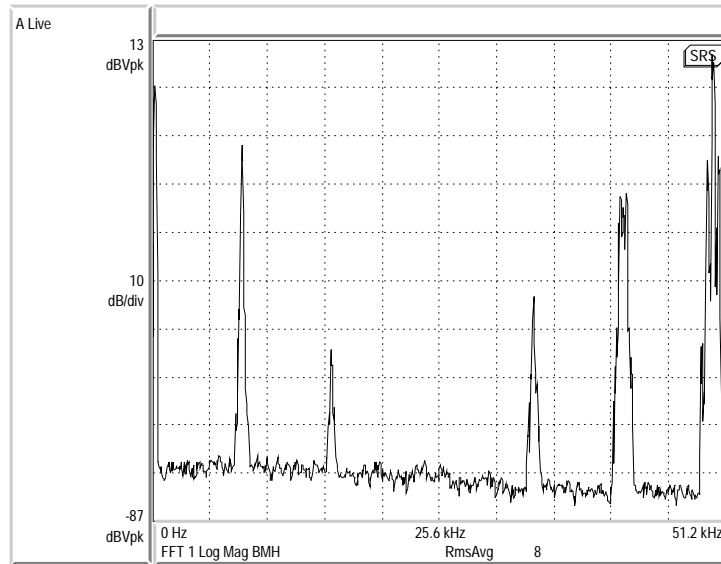
(a) PWM uniforme. Banda base.



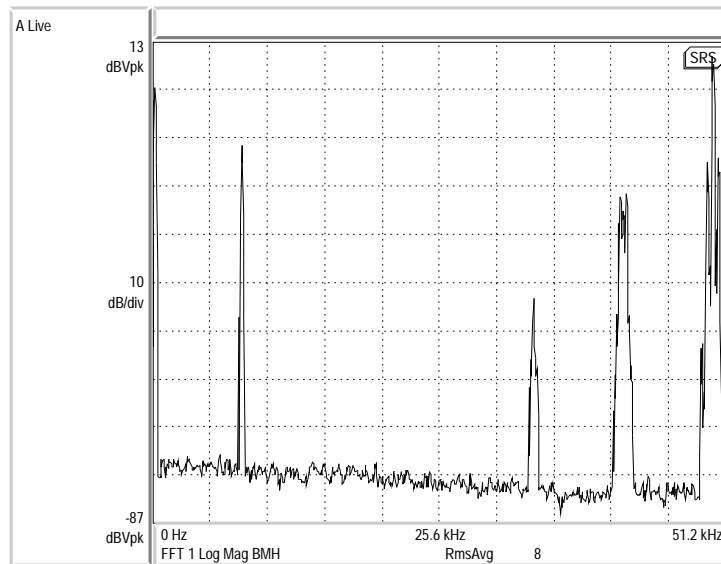
(b) PWM Newton. Banda base.

Figura 4.9: Medidas espectrales IMD: (a) PWM uniforme y (b) PWM Newton. $f_s = 50$ kHz.

4.2 Verificación experimental del PWM Newton



(a) PWM uniforme. Rango de frecuencias extendido.



(b) PWM Newton. Rango de frecuencias extendido.

Figura 4.10: Medidas espectrales IMD (rango de frecuencias extendido): (a) PWM uniforme y (b) PWM Newton. $f_s = 50$ kHz.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

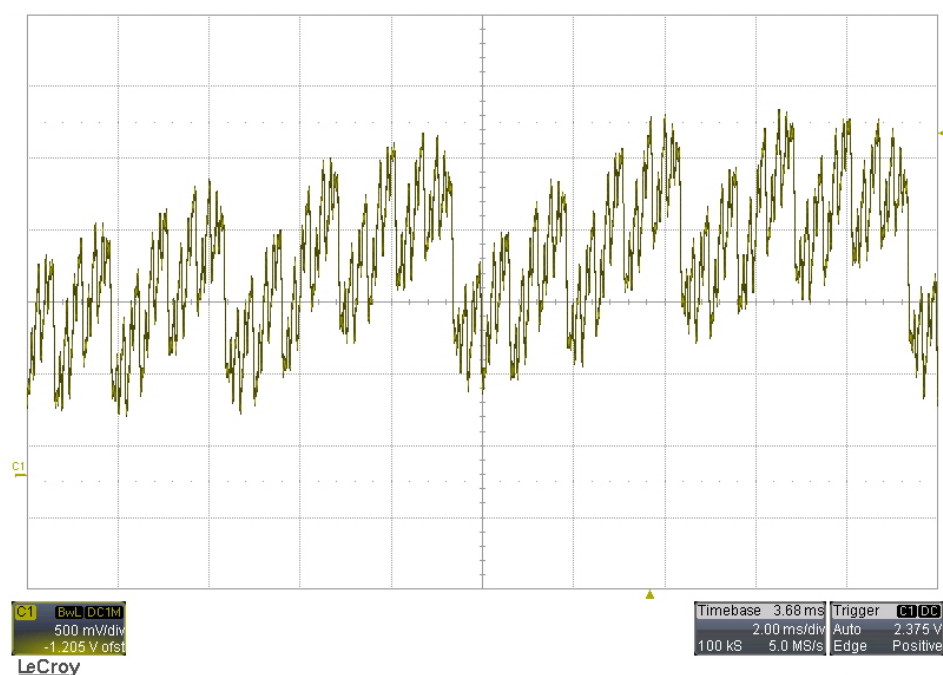
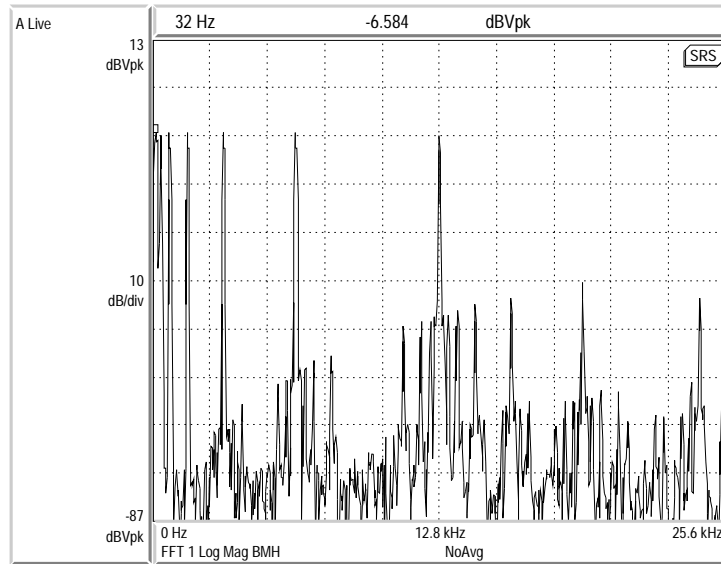


Figura 4.11: Señal multitono temporal, demodulada y capturada con osciloscopio.

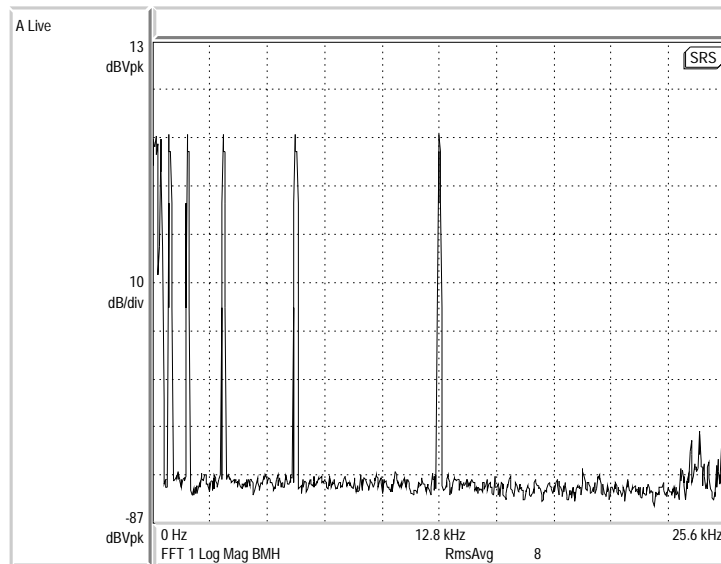
El PWM Newton elimina completamente las componentes de intermodulación espurias. En la Fig. 4.10(a) y en la Fig. 4.10(b) se muestran los mismos espectros pero en un rango de frecuencias más amplios. En este caso es posible apreciar la frecuencia portadora (50 kHz) y sus bandas laterales ubicadas fuera de la banda base, que no son modificadas por el PWM Newton.

En segundo lugar se empleó una señal multitono típicamente utilizada en la verificación y prueba de equipos de audio [48]. Esta señal está compuesta por la suma de nueve sinusoides espaciadas en octavas comenzando con $f = 50$ Hz y alcanzando una frecuencia máxima de 12,8 kHz. En la Fig. 4.11 se muestra la señal multitono capturada con un osciloscopio luego de demodular la señal PWM con un filtro pasa bajos. El espectro medido se muestra en la Fig. 4.12(a) y en la Fig. 4.12(b) para PWM uniforme y PWM Newton respectivamente. Cuando se utiliza el modulador propuesto la mejora es notable ya que en el espectro de la señal PWM únicamente se observan las componentes frecuenciales propias de la señal de modulación. Por otra parte, cuando se utiliza PWM uniforme una gran cantidad de componentes espurias contaminan la banda de base. Estas mediciones experimentales presentan resultados similares a los obtenidos en las simulaciones que se muestran en la Fig. 3.26. El rango de frecuencias extendido que se muestra en la Fig. 4.13(a) y en la Fig. 4.13(b) permite apreciar que el modulador PWM Newton solo posee componentes frecuenciales causadas por

4.2 Verificación experimental del PWM Newton



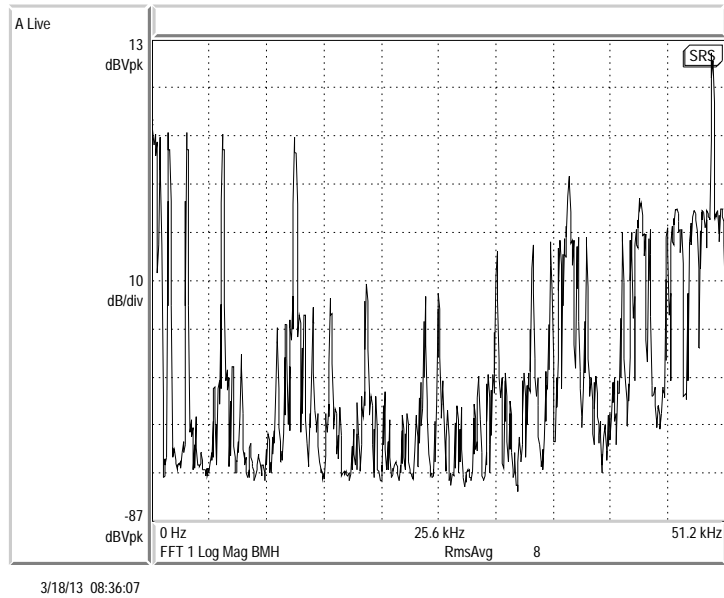
(a) PWM uniforme. Banda base.



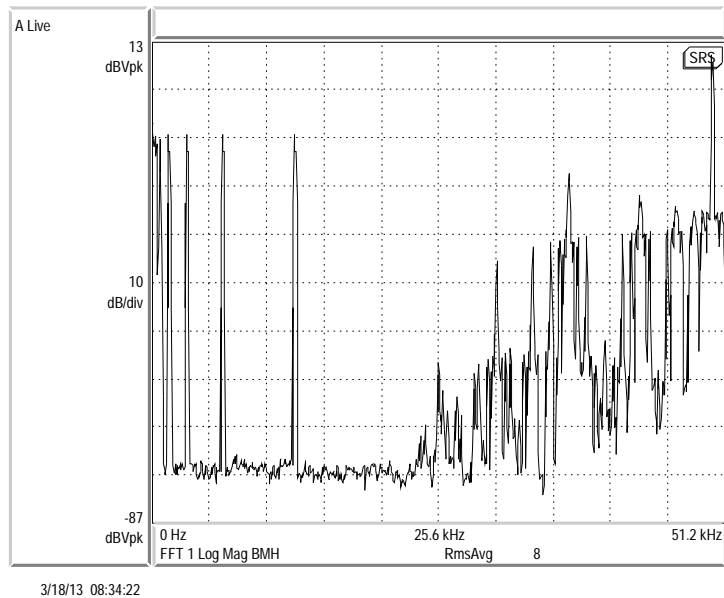
(b) PWM Newton. Banda base.

Figura 4.12: Medidas espectrales multitono: (a) PWM uniforme y (b) PWM Newton. $f_s = 50$ kHz.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES



(a) PWM uniforme. Rango de frecuencias extendido.



(b) PWM Newton. Rango de frecuencias extendido.

Figura 4.13: Medidas espectrales multitono (rango de frecuencias extendido): (a) PWM uniforme y (b) PWM Newton. $f_s = 50$ kHz.

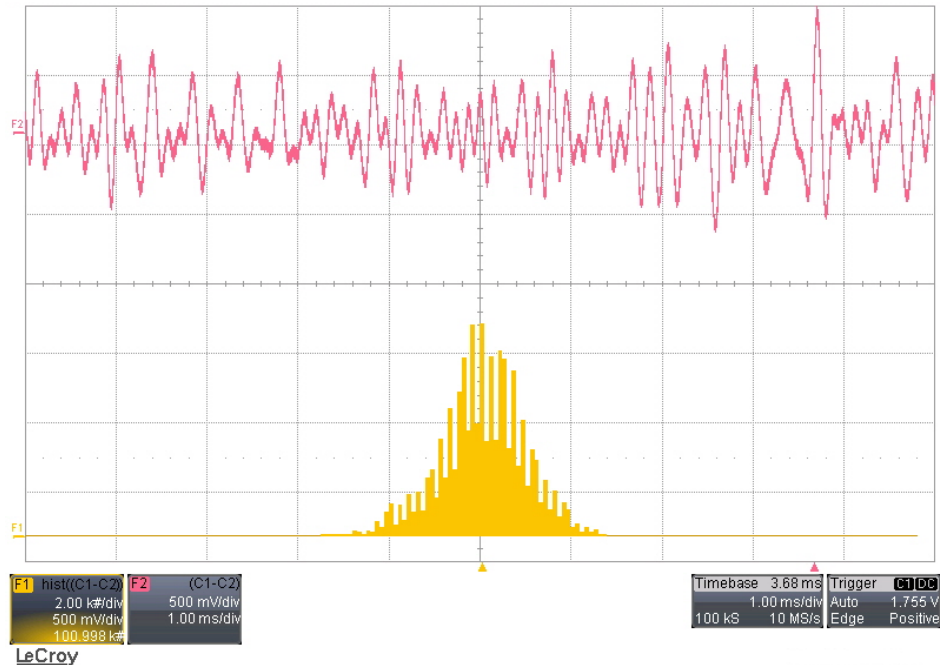


Figura 4.14: Señal temporal e histograma correspondiente al ruido Gaussiano pasa banda, demodulado y capturada con osciloscopio.

la modulación PWM fuera de la banda base (por encima de 25 kHz).

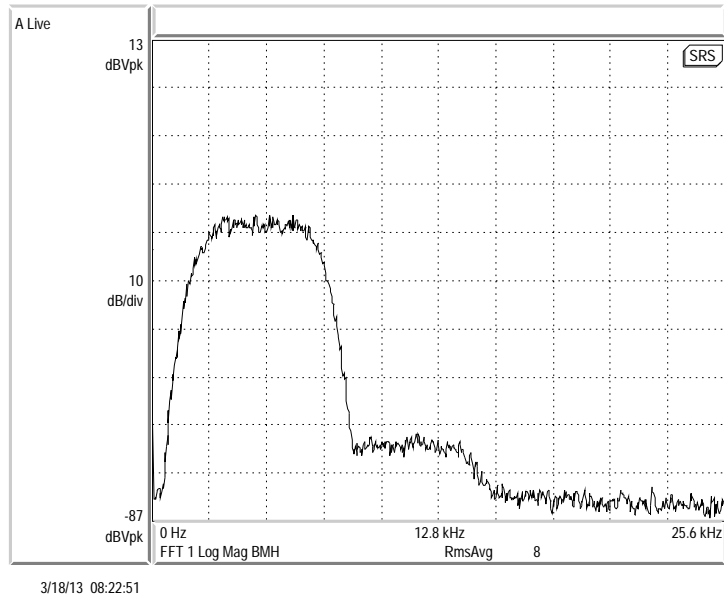
Por último se utilizó ruido aleatorio con distribución gaussiana filtrado con un filtro pasa banda con frecuencias de corte en 200 Hz y 10 kHz. En la Fig. 4.14 se muestra una captura de osciloscopio de la señal PWM demodulada con un filtro pasa bajos y también se incluye un histograma calculado en el osciloscopio. Las mediciones espectrales se muestran en la Fig. 4.15(a) y en la Fig. 4.15(b) revelando que el PWM Newton elimina el ruido que aparece en el rango de frecuencias entre 9 kHz y 15,3 kHz causado por la no linealidad de la modulación PWM uniforme.

Estos experimentos muestran que el PWM Newton es capaz de eliminar la distorsión de banda base, o al menos reducirla al nivel del piso de ruido causado por la resolución temporal finita.

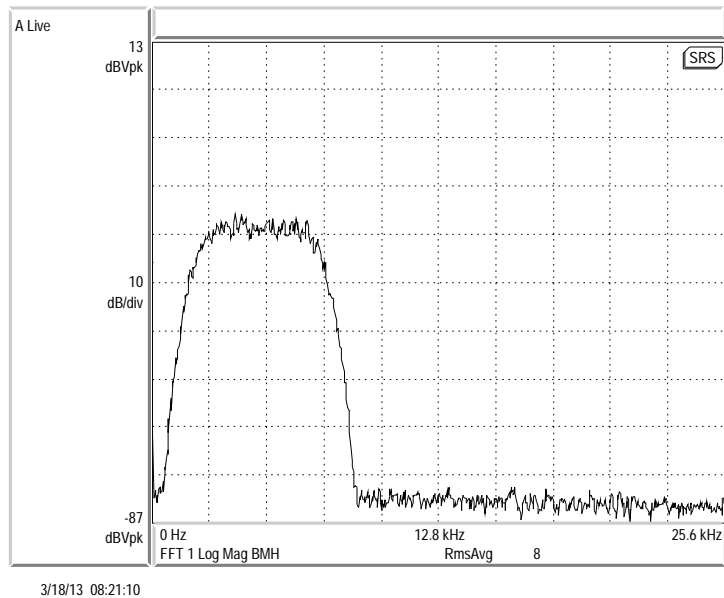
4.2.2. Distorsión armónica total más ruido (THD+N) en función de la frecuencia

Para esta prueba se utiliza una señal moduladora sinusoidal. La frecuencia de la señal se varía en el rango comprendido entre 250 Hz y 20 kHz. El THD+N se mide utilizando una función del analizador de espectro como el cociente entre la potencia de los armónicos más

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES



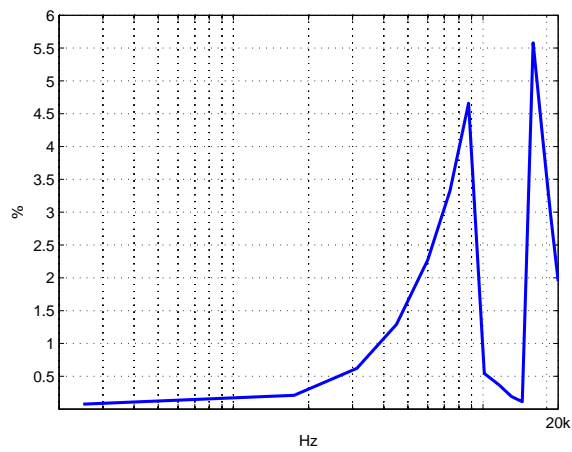
(a) PWM uniforme.



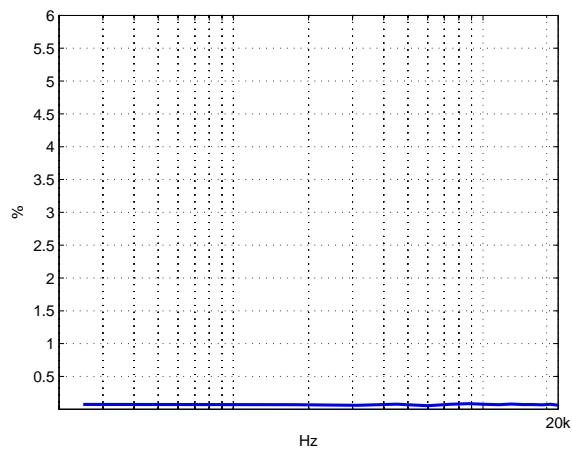
(b) PWM Newton.

Figura 4.15: Medidas espectrales ruido de banda limitada: (a) PWM uniforme y (b) PWM Newton. $f_s = 50$ kHz.

4.2 Verificación experimental del PWM Newton



(a) PWM uniforme.



(b) PWM Newton.

Figura 4.16: Medidas de THD+N: (a) PWM uniforme y (b) PWM Newton. $f_s = 50$ kHz.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

ruido y la potencia de la señal completa (señal sinusoidal más armónicos más ruido).

Las mediciones de THD+N obtenidas con el modulador PWM uniforme y el modulador PWM Newton se muestran en la Fig. 4.16. Con el modulador PWM Newton se observa que el THD+N permanece prácticamente constante, con un valor de aproximadamente 0,07 % en toda la banda base. Cuando se utiliza el modulador PWM uniforme la curva de THD+N se comporta de forma irregular en el rango de frecuencias 9 kHz a 15 kHz debido a que para este rango de frecuencias los armónicos de mayor amplitud aparecen fuera de la banda base, donde se realiza la medición de THD+N. Para frecuencias por encima de 15 kHz las bandas laterales de la frecuencia portadora comienzan a aparecer en banda base lo que incrementa nuevamente el valor de THD+N. Este comportamiento no ocurre cuando se utiliza el modulador PWM Newton debido a que se remueven los armónicos de la señal moduladora y también cualquier otra componente de distorsión no lineal que pudiera aparecer en banda base, por ejemplo las bandas laterales de la frecuencia portadora $f_s = 50$ kHz.

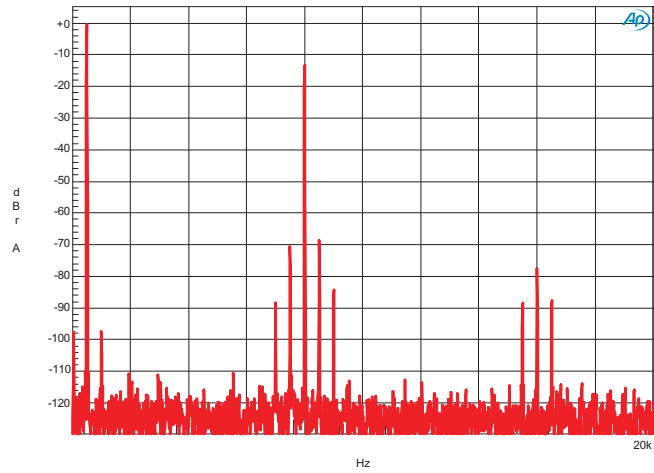
El comportamiento constante del THD+N en función de la frecuencia en una implementación real, alcanzado incluso para frecuencias bajas de conmutación (como en este caso), se ha presentado anteriormente en la literatura (con mediciones experimentales) utilizando la modulación click [66, 67, 74]. Esas implementaciones son computacionalmente exigentes dado que requieren más de un DSP o FPGA, o reducir el rango de frecuencia de audio utilizable o la restricción de su operación para el cálculo fuera de línea. El enfoque propuesto utiliza filtros FIR y su implementación no requiere de otras herramientas de procesamiento, como un modulador exponencial analítico o un detector de cruce por cero que son bloques fundamentales de la modulación click. Otros métodos de modulación digital PWM tales como los reportados en [60], y aquellos basados en la modulación analógica (PWM pseudonatural) [55] requieren de la utilización de frecuencias de conmutación muy altas para evitar que bandas laterales de la portadora aparezcan en banda base.

4.3. Verificación experimental del PWM Volterra

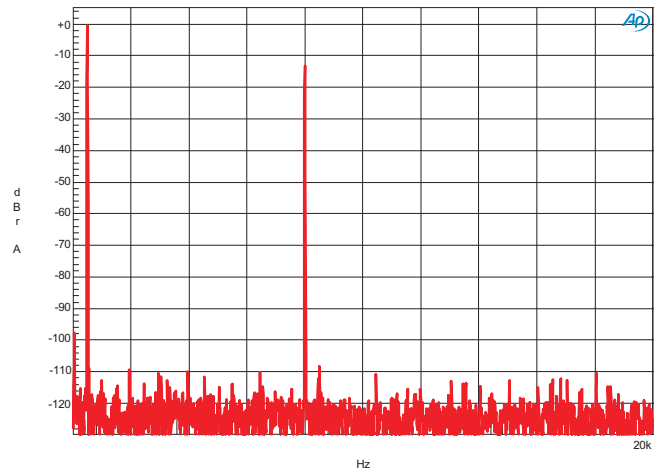
EL PWM Volterra descrito en la Sección 3.4 se verificó experimentalmente utilizando dos frecuencias de conmutación (frecuencia PWM) de 176 kHz y 88 kHz. El algoritmo fue implementado en tiempo real en los DSPs Sharc ADSP-21469 y Sharc ADSP-21479 de Analog Devices. Los espectros fueron obtenidos utilizando un analizador de señales de alto desempeño (Audio Precision SYS-2722).

En la Fig. 4.17 se muestran los espectros medidos para la prueba de IMD similar a la presentada para el PWM Newton en la Fig. 4.9. En la Fig. 4.17(a) se muestra el espectro obtenido para el PWM uniforme. Las componentes de baja frecuencia y de alta frecuencia de

4.3 Verificación experimental del PWM Volterra



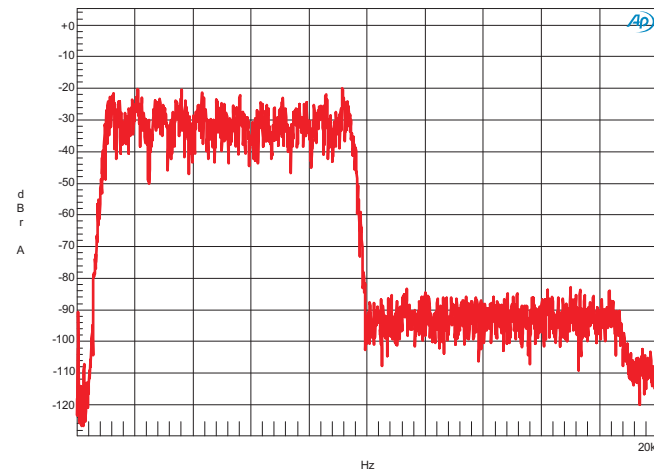
(a) PWM uniforme.



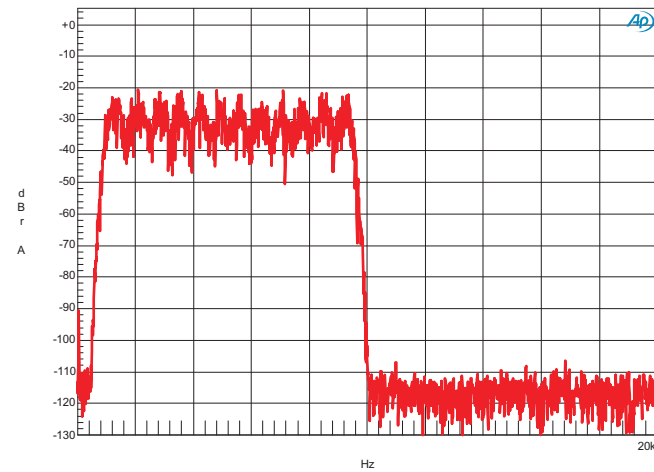
(b) PWM Volterra.

Figura 4.17: Medidas espectrales IMD: (a) PWM uniforme y (b) PWM Volterra de 5to orden. $f_s = 176$ kHz.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES



(a) PWM uniforme.



(b) PWM Volterra.

Figura 4.18: Medidas espectrales ruido de banda limitada: (a) PWM uniforme y (b) PWM Volterra de 5to orden. $f_s = 176$ kHz.

la señal IMD utilizadas son: $f_1 = 500$ Hz y $f_2 = 8$ kHz respectivamente, donde la componente de alta frecuencia está atenuada 12,04 dB respecto a la componente de baja frecuencia. Se observa la presencia de cuatro bandas laterales de la señal de frecuencia 8 kHz. También se observa un armónico en $2f_2 = 16$ kHz y sus bandas laterales en $2f_2 \pm f_1$. Cuando se utiliza el PWM Volterra de 5to orden se obtiene el espectro de la Fig. 4.17(b) donde todas las componentes espurias han sido eliminadas por el algoritmo.

En los espectros de la Fig. 4.17(a) y la Fig. 4.9(a) se utiliza PWM uniforme; en el primer caso la frecuencia de conmutación es $f_s = 176$ kHz y en el segundo caso es $f_s = 50$ kHz. Esta diferencia se aprecia en la amplitud de las componentes espurias que tienen mayor amplitud cuando la frecuencia de conmutación es más baja.

En la Fig. 4.18 se muestran los espectros para una señal moduladora tipo ruido Gaussiano de banda limitada. En este caso el ruido se ha filtrado con un filtro pasa banda con frecuencias de corte de 1 kHz y 9,5 kHz. La comparación del espectro de la Fig. 4.18(a) cuando se utiliza la modulación PWM uniforme y la Fig. 4.18(b) para el PWM Volterra revela que este último remueve el ruido residual que aparece entre 10 kHz y 19 kHz en la medición de la Fig. 4.18(a). Esa medición es similar a la presentada para el PWM Newton en la Fig. 4.15 y el efecto producido por ambos algoritmos es similar.

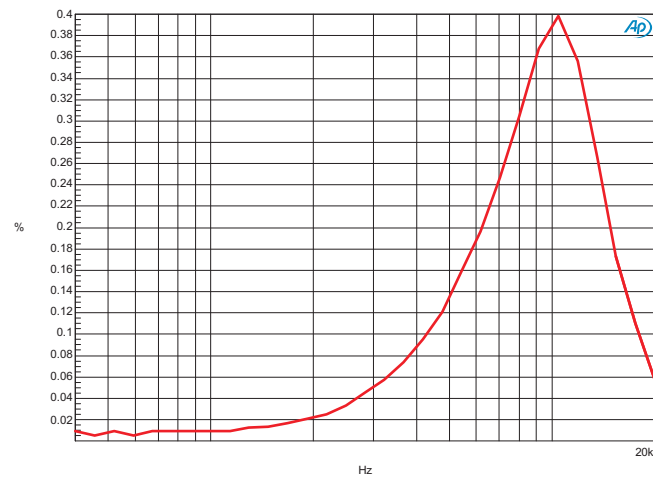
4.3.1. Distorsión armónica total más ruido (THD+N) en función de la frecuencia

El último experimento que se realizó con el el PWM Volterra de 5to orden operando a 176 kHz es una medición de THD+N porcentual en función de la frecuencia. Estas mediciones se muestran en la Fig. 4.19(a) y en la Fig. 4.19(b) para el PWM uniforme y PWM Volterra respectivamente. La utilización del PWM Volterra permite obtener una respuesta de THD+N plana en contraste a la medición del PWM uniforme en donde el THD+N crece rápidamente hasta llegar a su máximo en alrededor de 10 kHz. Esta medición puede compararse con la medición realizada para el PWM Newton presentada en la Fig. 4.16 (aunque el PWM Newton opera a una frecuencia de PWM varias veces menor). Tanto para el PWM Volterra como para el PWM Newton se observa un comportamiento plano del THD+N en función de la frecuencia.

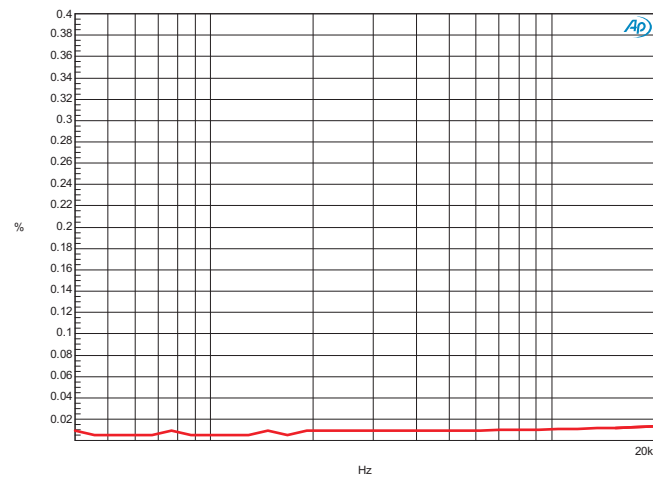
4.3.2. PWM Volterra operando a $f_s = 88$ kHz

También se experimentó utilizando el PWM Volterra de 5to orden a la mitad de la frecuencia de conmutación, es decir $f_s = 88$ kHz. Esta situación representa un escenario más complicado para el modulador ya que las no linealidades de la modulación PWM digital se in-

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES



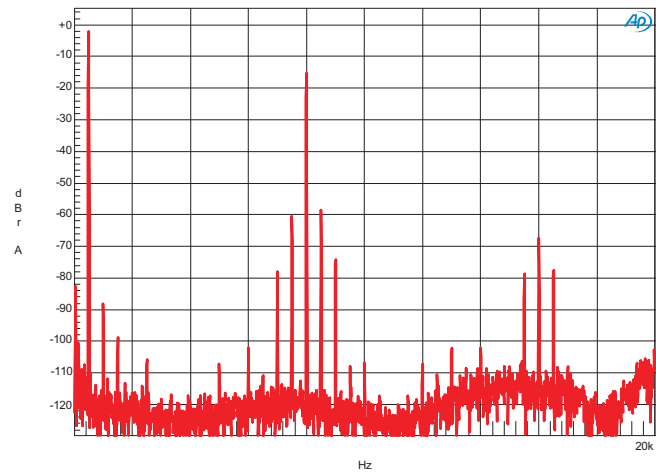
(a) PWM uniforme.



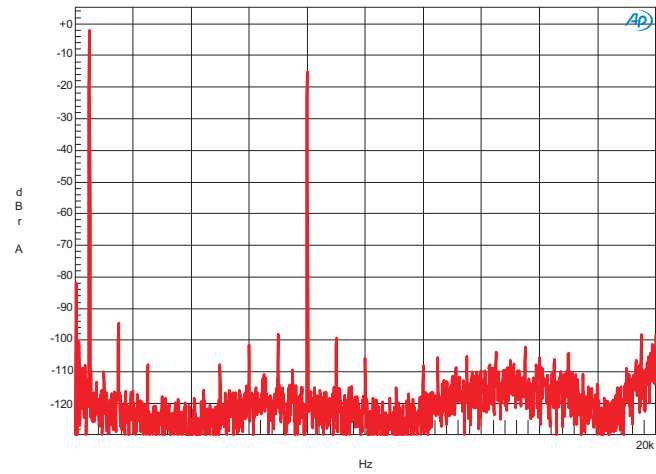
(b) PWM Volterra.

Figura 4.19: Medidas de THD+N: (a) PWM uniforme y (b) PWM Volterra de 5to orden. $f_s = 176$ kHz.

4.3 Verificación experimental del PWM Volterra



(a) PWM uniforme.



(b) PWM Volterra.

Figura 4.20: Medidas espectrales IMD: (a) PWM uniforme y (b) PWM Volterra de 5to orden (b). $f_s = 88$ kHz.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

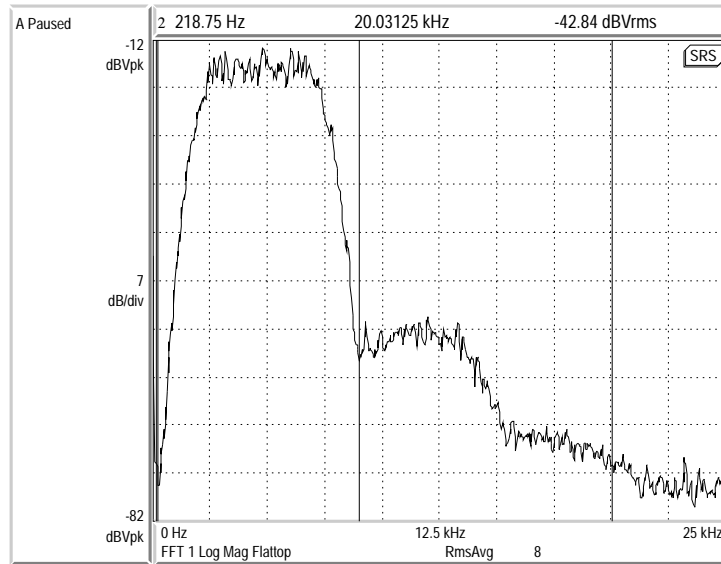
crecientan a medida que se reduce la frecuencia de PWM. Esta característica se mostró teóricamente a partir de la obtención del modelo en el Capítulo 2, específicamente con el Lema 1 y se pone de manifiesto en la Fig. 2.4 donde se observa que las ganancias de los filtros que modelan la dinámica de la no linealidad del PWM aumentan a medida que el contenido frecuencial de la señal moduladora está más cerca de $f_s/2$. En el caso del PWM Volterra operando a $f_s = 88$ kHz los espectros para la señal de IMD se muestran en la Fig. 4.20. Resulta interesante comparar los espectros del PWM uniforme a 88 kHz en la Fig. 4.20(a) y del PWM uniforme a 176 kHz en la Fig. 4.17(a); la utilización de una menor frecuencia de PWM incrementa la amplitud de las componentes frecuenciales espurias. También se aprecia una componente de 1,5 kHz que no se manifiesta para $f_s = 176$ kHz. Cuando el PWM Volterra opera a 88 kHz las componentes frecuenciales espurias debidas a la no linealidad de la modulación son reducidas por debajo de los -95 dB respecto de la fundamental. En este caso se observan algunas componentes residuales (debajo de -95 dB) que pueden deberse tanto a la modulación como a la cuantización de los ciclos de trabajo. Al igual que en el caso del PWM Volterra operando a 176 kHz se utilizó un algoritmo de *noise-shaping* para desplazar el ruido de cuantización fuera de la banda (0-20 kHz). La diferencia es que cuando el modulador opera a 88 kHz solo se dispone del rango 20 kHz a 40 kHz para desplazar el ruido. La característica ondulada del piso de ruido se debe al filtro de *noise-shaping* que se discutió en la Sección 4.1.4.

4.4. Verificación experimental del PWM adaptivo F.L.

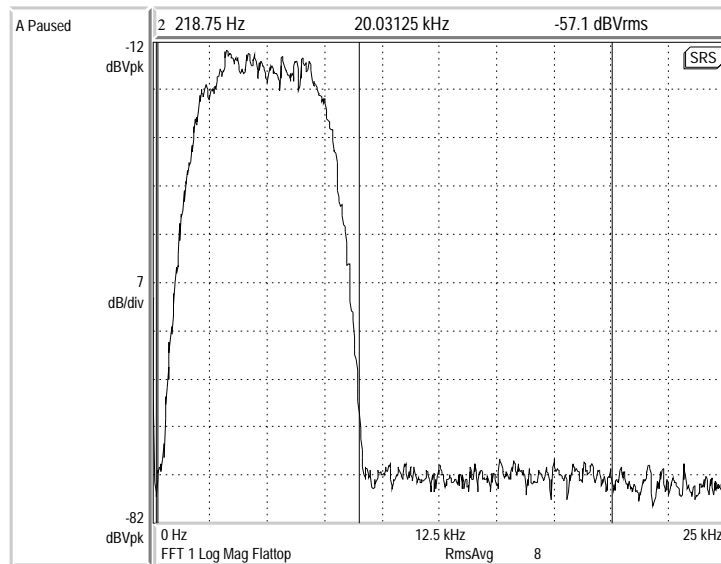
El PWM adaptivo con entrenamiento fuera de línea propuesto en la Sección 3.3 del Capítulo 3 con largo de filtros $N = 39$ y máxima potencia $P = 3$ fue verificado experimentalmente utilizando el DSP TMS320F28335. Se eligieron estos valores de parámetros ya que las simulaciones de la Sección 3.5 muestran que el PWM adaptivo F.L. presenta un mejor desempeño cuando se utilizan valores bajos de máxima potencia P y longitud de filtros N . El PWM adaptivo F.L. se calcula en tiempo real a una frecuencia de 50 kHz que coincide con la frecuencia de PWM. La señal PWM es medida utilizando el analizador dinámico de señales (SR785) para obtener el espectro en banda base.

La primera prueba utiliza como señal de entrada la señal que se utilizó en las simulaciones de la Sección 3.5 y para evaluar el desempeño del PWM Newton en la Fig. 4.15. El ruido Gaussiano es limitado al rango de frecuencias entre 1,25 kHz y 8,75 kHz. La relación entre la máxima frecuencia de la señal moduladora (8,75 kHz) y la frecuencia de PWM (50 kHz) es menor a 6 veces lo que es relativamente bajo para aplicaciones de PWM. Los resultados se muestran en la Fig. 4.21 en el rango de frecuencias entre 0 Hz y 25 kHz. El espectro del PWM

4.4 Verificación experimental del PWM adaptivo F.L.



(a) PWM uniforme.



(b) PWM adaptivo F.L.

Figura 4.21: Medidas espectrales ruido de banda limitada: (a) PWM uniforme y (b) PWM adaptivo F.L. $f_s = 50$ kHz.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

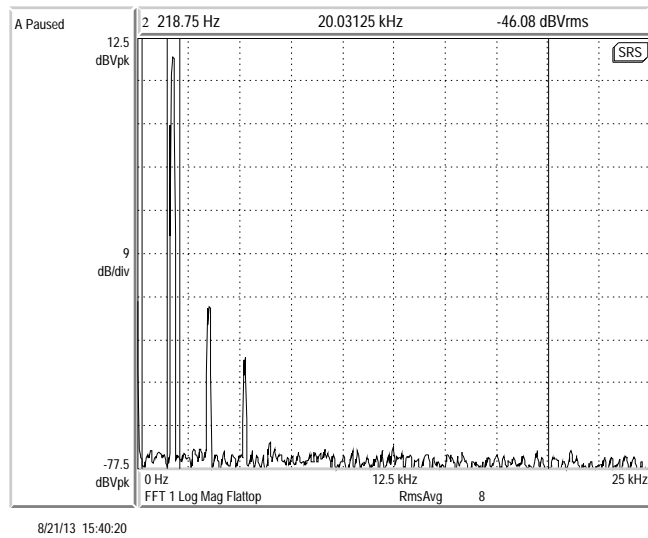
uniforme en la Fig. 4.21(a) presenta distorsión que se observa como un crecimiento del piso de ruido que aparece, dentro de la banda base, entre 8,75 kHz (3,5 divisiones) y 20 kHz (8 divisiones). Estas componentes no son parte del contenido espectral de la señal moduladora x_n sino que son causadas por la no linealidad propia de la modulación PWM uniforme. Para el PWM adaptivo F.L., estas componentes son removidas y se confunden con el piso de ruido como puede apreciarse en la Fig. 4.21(b).

Un segundo ensayo del PWM adaptivo F.L. se realizó utilizando señales sinusoidales. Los coeficientes del PWM adaptivo F.L. se mantuvieron fijos y no fueron adaptados. En la Fig. 4.22 se muestran los espectros medidos al utilizar una señal sinusoidal de 1750 Hz. Como se muestra en la Fig. 4.22(a) para el PWM uniforme se observan por encima del piso de ruido el segundo y tercer armónico de aproximadamente -55 dB y -65 dB respecto de la amplitud de la componente fundamental. Cuando se utiliza el PWM adaptivo F.L. estos armónicos se reducen por debajo del piso de ruido, como lo muestra la medición de la Fig. 4.22(b). En la Fig. 4.23 se muestran los espectros para una señal sinusoidal de 3125 Hz. La modulación PWM uniforme presenta componentes armónicas de mayor amplitud: -42 dB y -52 dB aproximadamente para la segunda y tercer armónica (Fig. 4.23(a)). La medición para el PWM adaptivo F.L. de la Fig. 4.23(b) muestra que la amplitud de las componentes armónicas es reducida, aunque aún pueden detectarse componentes residuales por debajo de los -75 dB respecto de la fundamental.

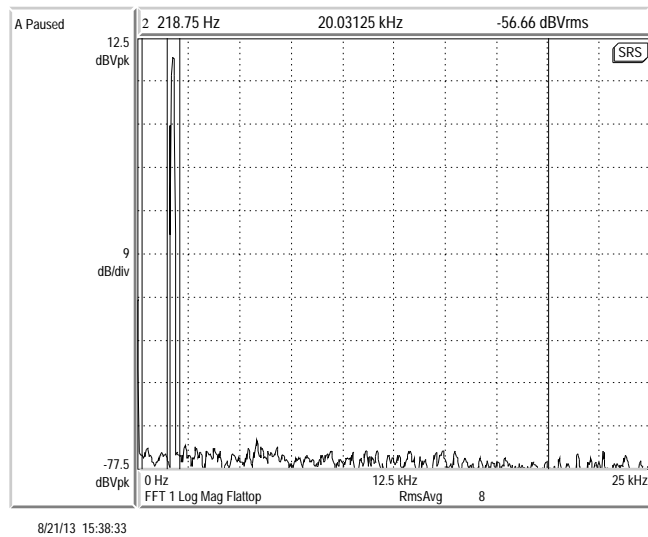
El comportamiento del PWM adaptivo F.L. ante señales sinusoidales es relativamente bueno teniendo en cuenta que el entrenamiento se realizó fuera de línea y utilizando una señal de tipo ruido pasa bajos, con contenido espectral similar al que puede encontrarse en señales musicales. Si el modulador PWM se utiliza en una amplificador de audio entonces el entrenamiento utilizado para el PWM adaptivo F.L. funcionará adecuadamente para eliminar la distorsión y también reducirá las componentes no lineales ante excitaciones sinusoidales. Por otra parte si se utilizara la modulación PWM en otro tipo de aplicaciones, por ejemplo en convertidores de potencia en donde las señales son mayormente sinusoidales, podrían considerarse otras señales de entrenamiento, como por ejemplo señales tipo chirp o multitonales para mejorar el desempeño del PWM adaptivo F.L.

Comparado con los otros métodos de modulación presentados puede decirse que el PWM adaptivo F.L. presenta una menor carga computacional pero debe entrenarse adecuadamente para la aplicación en particular para obtener un mejor desempeño.

4.4 Verificación experimental del PWM adaptivo F.L.



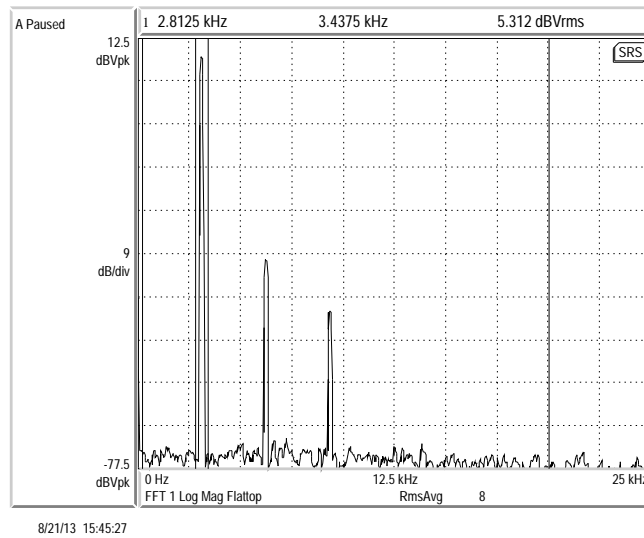
(a) PWM uniforme.



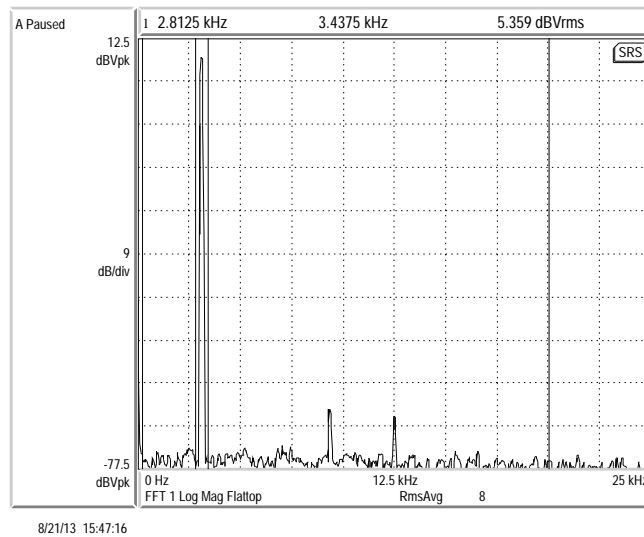
(b) PWM adaptivo F.L.

Figura 4.22: Medidas espectrales sinusoidal de 1750 Hz: (a) PWM uniforme y (b) PWM adaptivo F.L. $f_s = 50$ kHz.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES



(a) PWM uniforme.



(b) PWM adaptivo F.L.

Figura 4.23: Medidas espectrales sinusoidal de 3125 Hz: (a) PWM uniforme y (b) PWM adaptivo F.L. $f_s = 50$ kHz.

4.5. Limitaciones de la técnica propuesta

Como se mostró en las secciones anteriores, la técnica propuesta permite obtener señales PWM con muy baja distorsión incluso cuando se utilizan frecuencias de conmutación bajas. La amplificación de potencia de la señal PWM se realiza, en general, utilizando topologías compuestas por al menos un par de llaves (transistores) conectados en serie que conforman una pierna. La pierna se alimenta con una fuente de CC de potencia por lo que se requiere incluir tiempos muertos para evitar un posible cortocircuito si ambas llaves quedan encendidas simultáneamente. Este puede ocurrir durante el encendido y apagados de los transistores de una pierna ya que las transiciones no ocurren instantáneamente. Como se estudió en la Sección 2.3 los tiempos muertos producen variaciones en los instantes de conmutación que degradan notablemente el espectro de la señal PWM amplificada. Si se pretende mantener una baja distorsión cuando la señal PWM se amplifica en potencia, entonces deben reducirse los efectos causados por los tiempos muertos o utilizar otras topologías de amplificación.

La dependencia del efecto de los tiempos muertos con los cruces por cero de la corriente complica la remoción o disminución de los efectos causados mediante la utilización de técnicas digitales. Se han presentado en la literatura algoritmos de compensación del efecto del tiempo muerto, basado en general en estrategias que compensan el área de los pulsos [53], y suelen ser útiles para reducir la distorsión causada por el tiempo muerto en aplicaciones de convertidores de potencia.

Existen también técnicas que buscan resolver el problema a nivel circuital, evitando la inclusión de los tiempos muertos en base a modificaciones en la forma en la que se controlan las llaves que forman la pierna [13, 45]. Estas técnicas permiten eliminar la necesidad de incluir los tiempos muertos siempre y cuando se puedan medir en forma directa o indirecta los cruces por cero de la corriente de carga, lo que en general es complicado de realizar con precisión.

En las últimas décadas han surgido nuevas topologías circuitales como el convertidor “Z-source” [56] que presenta una impedancia de acople entre la fuente de alimentación y las piernas lo que en principio evita la utilización de tiempos muertos. Más aún, esta topología utiliza la conducción simultánea de las llaves para elevar la tensión de salida. No se ha presentado en la literatura un estudio sobre la utilización de la topología Z-source para la amplificación de señales aunque podría ser una área interesante para aplicar y extender la estrategia de modulación.

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Capítulo 5

Conclusiones

Objetivos iniciales

El objetivo principal es el de aplicar técnicas de procesamiento digital de señales para mejorar la respuesta espectral de señales moduladas en formas de onda binarias; específicamente, diseñar moduladores PWM digitales que procesando la señal moduladora y alterando el método de modulación, permitan reducir la distorsión en banda base de la señal PWM resultante.

Resultados alcanzados

A partir de una descripción matemática detallada (modelo) del comportamiento de la modulación PWM digital se presentaron algoritmos de modulación que partiendo de las muestras de la señal moduladora (entrada) permiten calcular los ciclos de trabajo que producen una señal PWM tal que las muestras de esta señal filtrada con un pasa bajos ideal coinciden con las muestras de la señal de entrada. Esto se traduce en distorsión nula en banda base. Realizando algunas simplificaciones se obtuvieron algoritmos factibles de ser implementados en procesadores digitales de señales. Se construyeron prototipos y se evaluaron los algoritmos experimentalmente obteniendo resultados satisfactorios.

Además del estudio del modulador PWM digital se incluyó también el análisis de otros fenómenos como variaciones de la amplitud de los pulsos causadas por perturbaciones en la fuente de alimentación. Este análisis permitió concluir que un método de compensación habitualmente utilizado en la literatura que consiste en modificar los anchos de los pulsos para compensar la variación de área producida por el cambio en la amplitud (igualado de áreas) puede no ser efectivo para eliminar toda la distorsión. Se presentó una extensión para uno de los métodos de modulación propuestos que permite compensar las variaciones de amplitud de los pulsos.

5. CONCLUSIONES

Se estudió también el efecto que producen en la señal PWM las variaciones en los tiempos de conmutación, es decir, alteraciones en la ubicación de los flancos ascendentes y descendentes de los pulsos. En particular se analizó el caso en que estas variaciones son causadas por los tiempos muertos necesarios en las topologías clásicas de amplificación de potencia utilizada en amplificadores clase D.

Implicancia de los resultados en el campo de estudio

En esta tesis se aplican técnicas de procesamiento de señales para mejorar el desempeño de moduladores PWM digitales. La modulación PWM digital puede interpretarse como un proceso de conversión digital/analógico en donde la señal digital de entrada queda representada en el temporizado de los flancos ascendentes y descendentes de una onda cuadrada. La característica binaria de la señal PWM permite su amplificación eficiente utilizando circuitos conmutados compuestos por elementos activos que trabajan como llaves. Las técnicas de modulación estudiadas mejoran los métodos previos presentados en la literatura ya que permiten garantizar nula o muy baja distorsión en la banda de frecuencias de interés incluso para frecuencias de conmutación muy bajas y son adecuadas para funcionar en tiempo real. Se presentan además verificaciones experimentales de los moduladores propuestos.

Dado que las estrategias de modulación permiten obtener nula o muy baja distorsión hasta la mitad de la frecuencia de conmutación es posible extender el rango de operación de las aplicaciones de PWM; ya sea operar con bajas frecuencias de conmutación para reducir el consumo o pérdidas por conmutación o mantener alta la frecuencia de conmutación y disponer de una banda de guarda libre de distorsión lo que permite utilizar filtros demoduladores más sencillos y/o obtener señales demoduladas de mayor calidad.

Aunque como caso particular de estudio se utilizó el amplificador de audio clase D, estas técnicas podrían extenderse a otras aplicaciones como amplificadores de potencia de radio frecuencia, convertidores de potencia conmutados, generadores de forma de onda arbitrarios, etc.

Aplicación de las técnicas propuestas en otras áreas

Variaciones de la técnicas propuestas también podrían utilizarse en sistemas de comunicaciones. La tendencia en transmisores inalámbricos de radio frecuencia (RF) es extender el dominio digital lo más cerca posible de la antena de transmisión. Este concepto incluye la utilización de moduladores digitales y de técnicas conmutadas para la conversión digital/analógica de potencia, buscando reducir la complejidad del circuito analógico, aumentar la eficiencia energética y aprovechar las ventajas del escalamiento tecnológico de los circuitos digitales. Estas arquitecturas involucran la combinación de los algoritmos de modulación

propios del transmisor con los algoritmos de modulación PWM propios de los amplificadores conmutados.

Otro campo de aplicación para la modulación digital por ancho de pulsos es el de aumentar el rango dinámico de convertidores digitales/analógicos o en síntesis de señales analógicas utilizando señales binarias PWM. El aumento constante en las velocidades de los circuitos digitales permiten una mayor resolución temporal a costa de una menor relación señal a ruido limitado por el piso de ruido electrónico y las bajas tensiones de alimentación. Por esta razón la utilización de moduladores PWM digitales en donde la señal queda codificada temporalmente en los anchos de pulsos resulta de gran interés.

Publicaciones

Los resultados de esta tesis fueron publicados en los siguientes artículos que se listan en orden cronológico:

- Chierchie F. y Paolini E. E.. “Modelo discreto no lineal de un sistema PWM con tiempo muerto”. *XV Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control RPIC*, 16 al 20 de Septiembre de 2013, San Carlos de Bariloche, Río Negro, Argentina, ISBN: 978-987-27739-7-7, pp. 983-988.
- Chierchie, F.; Paolini, E.E.. “Real-Time Digital PWM With Zero Baseband Distortion and Low Switching Frequency”. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 60, no. 10, pp. 2752-2762, Oct. 2013.
- Chierchie, F.; Paolini, E.; Stefanazzi, L.; Oliva, A.. “Simple Real-Time Digital PWM Implementation for class-D Amplifiers With Distortion-free Baseband”. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, no. 10, pp. 5472-5479, Oct. 2014.
- Chierchie F. y Paolini E.. “Modulación PWM digital con distorsión reducida y rechazo de fuente para amplificadores Clase-D”. *XXIV Congreso Argentino de Control Automático AADECA 2014*, del 27 al 29 de Octubre de 2014, Buenos Aires, Argentina. Trabajo Nro 065. ISBN 978-950-99994-8-0.
- Chierchie, F.; Aase S.O.. “Volterra models for digital PWM and their inverses”. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 62, no. 10, pp. 2606-2616, Oct. 2015.
- Chierchie, F.; Cousseau, J.; Paolini, E.E.; and Werner S.. “Mitigation of pulse-width-modulation distortion using a digital predistorter based on memory polynomials”. *Aceptado para su publicación en Signal Processing*

5. CONCLUSIONES

Apéndice A

Demostraciones de los teoremas

En la Sección A.1 de este apéndice se definen de forma detallada algunos de las funciones utilizada en los Capítulos 2 y 3 así como algunas de sus propiedades. En la Sección A.2 se utilizan las definiciones y propiedades para la demostración de los dos teoremas centrales (Teoremas 1 y 2) del modulador PWM Newton presentado en el Capítulo 3.

En la Sección A.3 se demuestra el Teorema 3 que establece una cota del error producido por el procesamiento por bloques presentado en la Sección 3.1.2 del Capítulo 3.

En la Sección A.4 se analiza la convergencia del modulador PWM adaptivo presentado en la Sección 3.3.

A.1. Definiciones y propiedades de las funciones involucradas

Cada elemento del vector de muestras de salida $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{w})$, que relaciona el vector de ciclos de trabajo $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^Q$ con las muestras de la señal PWM filtrada $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^Q$, se calcula idealmente utilizando la ecuación (2.6) que puede expandirse como

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m(w_{n-m}) \\ &= \cdots + f_{-2}(w_{n+2}) + f_{-1}(w_{n+1}) + f_0(w_n) + f_1(w_{n-1}) + f_2(w_{n-2}) + \cdots \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Si en la sumatoria de (A.1) para el calculo de y_n se suman todos los términos excepto el correspondiente al valor del ciclo de trabajo w_n en el mismo instante de muestreo n , entonces la suma $\sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{+\infty} f_m(w_{n-m}) < \mu$ puede interpretarse como la contribución de los restantes ciclos de trabajo a la muestra actual y_n de la señal demodulada. En [38] μ se asocia a una cota sobre la interferencia intersímbolo (ISI por sus siglas en inglés) debido a que se trata del aporte producido en la muestra y_n por los ciclos de trabajo de otros instantes

A. DEMOSTRACIONES DE LOS TEOREMAS

de tiempo. El valor máximo de la cota μ depende del valor máximo del ciclo de trabajo $w_b = \|\mathbf{w}\|_\infty \triangleq \max_{1 \leq i \leq Q} (|w_i|)$:

$$\mu(w_b) \triangleq 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{1+m} f_m(w_b). \quad (\text{A.2})$$

La cota $\mu(w_b)$ presentada en [38] obtiene su valor máximo $\mu_{\max} \approx 0,236$ cuando $w_b = 1$.

A.1.1. Notación matricial y sistema de dimensión finita

En la práctica solo se dispone de Q valores de w_n y por lo tanto (A.1) se aproxima con un número finito de términos. Teniendo en cuenta que $Q = 2G + 1$, la ecuación (A.1) puede escribirse en forma matricial como

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_{-G} \\ \vdots \\ y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{-2G}(w_G) + \cdots + f_{-G-1}(w_1) + f_{-G}(w_0) + f_{-G+1}(w_{-1}) + \cdots + f_0(w_{-G}) \\ \vdots \\ f_{-G-1}(w_G) + \cdots + f_{-2}(w_1) + f_{-1}(w_0) + f_0(w_{-1}) + \cdots + f_{G-1}(w_{-G}) \\ f_{-G}(w_G) + \cdots + f_{-1}(w_1) + f_0(w_0) + f_1(w_{-1}) + \cdots + f_G(w_{-G}) \\ f_{-G+1}(w_G) + \cdots + f_0(w_1) + f_1(w_0) + f_2(w_{-1}) + \cdots + f_{G+1}(w_{-G}) \\ \vdots \\ f_0(w_G) + \cdots + f_{G-1}(w_1) + f_G(w_0) + f_{G+1}(w_{-1}) + \cdots + f_{2G}(w_{-G}) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Se define la función vectorial

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{w}) \triangleq \mathbf{g}(\mathbf{w}) - \mathbf{x}. \quad (\text{A.4})$$

El Jacobiano de $\boldsymbol{\rho}$ respecto de \mathbf{w} se nota $D\boldsymbol{\rho}$ y se verifica fácilmente que $D\boldsymbol{\rho} = D\mathbf{g}$. Con esta notación el sistema recursivo dado por (3.1)

$$\mathbf{w}^{(i+1)} = \mathbf{w}^{(i)} - D\mathbf{g}(\mathbf{w}^{(i)})^{-1} \left[\mathbf{g}(\mathbf{w}^{(i)}) - \mathbf{x} \right] \quad (\text{A.5})$$

donde $^{(i)}$ indica el número de iteración, puede escribirse como

$$\begin{aligned} D\boldsymbol{\rho}(\mathbf{w}^{(i)})\Delta\mathbf{w}^{(i)} &= -\boldsymbol{\rho}(\mathbf{w}^{(i)}), \\ \mathbf{w}^{(i+1)} &= \mathbf{w}^{(i)} + \Delta\mathbf{w}^{(i)}. \end{aligned}$$

Cada elemento del Jacobiano $D\boldsymbol{\rho}$ está dado por

$$[D\boldsymbol{\rho}(\mathbf{w})]_{i,j} = \frac{dy_i}{dw_j} = \frac{d}{dw_j} (f_{i-j}(w_j)) = f'_{i-j}(w_j). \quad (\text{A.6})$$

A.1 Definiciones y propiedades de las funciones involucradas

En el caso infinito dimensional, tomando como elemento $i = 0$, $j = 0$ el elemento central de la matriz dado por $f'_0(w_0)$, la expansión del Jacobiano es

$$D\rho(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & f'_0(w_{-2}) & f'_{-1}(w_{-1}) & f'_{-2}(w_0) & f'_{-3}(w_1) & f'_{-4}(w_2) & \cdots \\ \cdots & f'_1(w_{-2}) & f'_0(w_{-1}) & f'_{-1}(w_0) & f'_{-2}(w_1) & f'_{-3}(w_2) & \cdots \\ \cdots & f'_2(w_{-2}) & f'_1(w_{-1}) & f'_0(w_0) & f'_{-1}(w_1) & f'_{-2}(w_2) & \cdots \\ \cdots & f'_3(w_{-2}) & f'_2(w_{-1}) & f'_1(w_0) & f'_0(w_1) & f'_{-1}(w_2) & \cdots \\ \cdots & f'_4(w_{-2}) & f'_3(w_{-1}) & f'_2(w_0) & f'_1(w_1) & f'_0(w_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Cuando y_n se calcula a partir de un número finito $Q = 2G + 1$ de ciclos de trabajo w_n , por ejemplo $Q = 5$ entonces el Jacobiano de dimensión finita es

$$D\rho(\mathbf{w}) = \begin{matrix} \downarrow j \rightarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} f'_0(w_{-2}) & f'_{-1}(w_{-1}) & f'_{-2}(w_0) & f'_{-3}(w_1) & f'_{-4}(w_2) \\ f'_1(w_{-2}) & f'_0(w_{-1}) & f'_{-1}(w_0) & f'_{-2}(w_1) & f'_{-3}(w_2) \\ f'_2(w_{-2}) & f'_1(w_{-1}) & f'_0(w_0) & f'_{-1}(w_1) & f'_{-2}(w_2) \\ f'_3(w_{-2}) & f'_2(w_{-1}) & f'_1(w_0) & f'_0(w_1) & f'_{-1}(w_2) \\ f'_4(w_{-2}) & f'_3(w_{-1}) & f'_2(w_0) & f'_1(w_1) & f'_0(w_2) \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (\text{A.8})$$

El elemento i, j del Jacobiano de dimensión finita es

$$[D\rho(\mathbf{w})]_{i,j} = f'_{i-j}(w_{-G+j-1}). \quad (\text{A.9})$$

La derivada $f'_m(w)$ puede computarse fácilmente a partir de la definición de $f_m(w)$ en (2.7) como

$$f'_m(w) = \frac{1}{2} \left(\text{sinc} \left(m - \frac{w}{2} \right) + \text{sinc} \left(m + \frac{w}{2} \right) \right). \quad (\text{A.10})$$

A.1.2. Propiedades de la función ρ y de su Jacobiano $D\rho$

Lema 2. $D\rho$ es Lipschitz: $\|D\rho(\mathbf{w}) - D\rho(\mathbf{v})\|_{\infty_i} \leq \gamma \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{\infty}$.

Demostración. Teniendo en cuenta la definición de la norma inducida para matrices y la definición de cada elemento de la matriz Jacobiano dada por (A.9) se tiene que,

$$\begin{aligned} \|D\rho(\mathbf{w}) - D\rho(\mathbf{v})\|_{\infty_i} &= \max_{1 \leq i \leq Q} \sum_{j=1}^Q |f'_{i-j}(w_{-G+j-1}) - f'_{i-j}(v_{-G+j-1})| \\ &= \max_{1 \leq i \leq Q} [|f'_{i-1}(w_{-G}) - f'_{i-1}(v_{-G})| + |f'_{i-2}(w_{-G+1}) - f'_{i-2}(v_{-G+1})| + \cdots + |f'_{i-Q}(w_G) - f'_{i-Q}(v_G)|]. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A. DEMOSTRACIONES DE LOS TEOREMAS

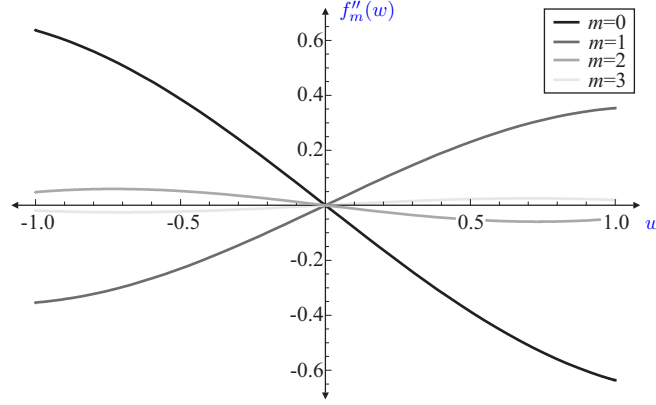


Figura A.1: Derivada segunda $f''_m(w)$ en función de w para $m = 0, 1, 2$ y 3 .

Es posible acotar cada uno de los términos $|f'_{i-j}(w_{-G+j-1}) - f'_{i-j}(v_{-G+j-1})|$ utilizando el teorema del valor medio dado por

$$|f'_m(b) - f'_m(a)| = |f''_m(c_m)| |b - a| \quad (\text{A.12})$$

en donde se aplicó valor absoluto en ambos lados de la igualdad y $c_m \in (a, b)$ para cada valor de m . Acotando por el máximo de la derivada segunda se obtiene

$$|f'_m(w) - f'_m(v)| \leq \max_{\sigma \in (0,1)} (|f''_m(\sigma)|) |w - v| \leq \gamma_m |w - v|, \quad (\text{A.13})$$

donde

$$\max_{\sigma \in (0,1)} |f''_m(\sigma)| \leq \gamma_m. \quad (\text{A.14})$$

La derivada segunda de $f_m(w)$ en función de m y w es

$$f''_m(w) = \frac{(-1)^m (\pi w (-4m^2 + w^2) \cos [\frac{\pi w}{2}] - 2 (4m^2 + w^2) \sin [\frac{\pi w}{2}])}{\pi (-4m^2 + w^2)^2}. \quad (\text{A.15})$$

Pueden verificarse las siguientes propiedades respecto de la derivada segunda $f''_m(w)$:

- $f''_m(w)$ es una función impar de w : $f''_m(w) = -f''_m(-w)$.
- $f''_m(w) = f''_{-m}(w)$ porque en (A.15) solo aparecen potencias pares de m .
- $|f''_m(w)| = (-1)^{m+1} f''_m(w) \geq 0$ para $0 \leq w \leq 1$.

En la Fig. A.1 se muestra $f''_m(w)$ en función de w para $m = 0, 1, 2$ y 3 .

Es posible obtener una cota sobre la derivada segunda $f''_m(w)$. A partir de la definición de la ecuación (A.15) se tiene que

A.1 Definiciones y propiedades de las funciones involucradas

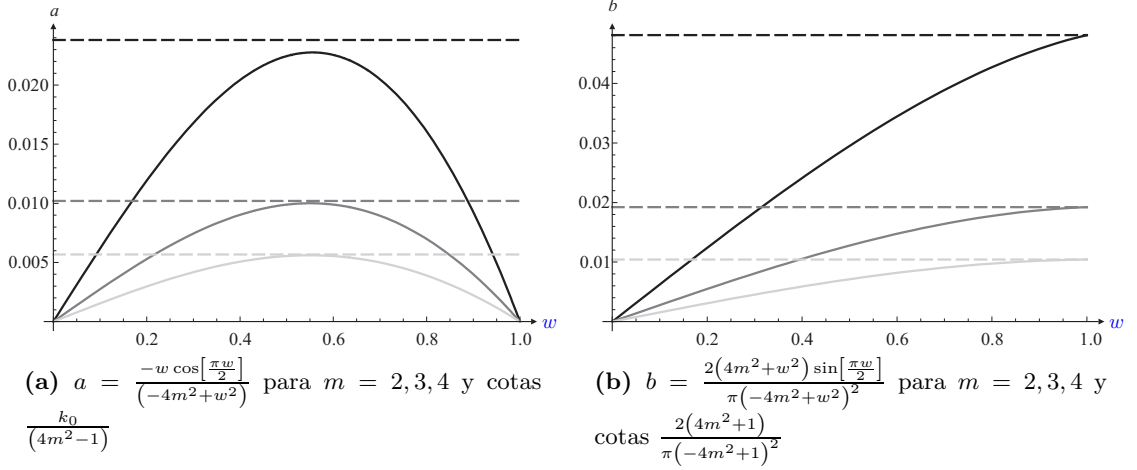


Figura A.2: Cotas para los términos a y b que conforman $(-1)^{m+1}f_m''(w) = a + b$ para $m > 1$.

$$|f_m''(w)| = (-1)^{m+1}f_m''(w) = \underbrace{\frac{-w \cos\left[\frac{\pi w}{2}\right]}{(-4m^2+w^2)}}_a + \underbrace{\frac{2(4m^2+w^2) \sin\left[\frac{\pi w}{2}\right]}{\pi(-4m^2+w^2)^2}}_b \quad (\text{A.16})$$

Se analizan por separado los casos $m = 0$, $m = 1$ y por último el caso $m > 1$:

- Para $m = 0$ puede encontrarse que $\gamma_0 = 2/\pi$ que se obtiene para $w = 1$ y coincide con el máximo de la derivada segunda $(-1)^{0+1}f_0''(w)$.
- Para $m = 1$ resulta que $\gamma_1 = \frac{10}{9\pi}$ que se obtiene para $w = 1$ y coincide con el máximo de la derivada segunda $(-1)^{1+1}f_1''(w)$.
- Para $m > 1$ los correspondientes máximos de las derivadas segundas se alcanzan para valores de $w \in (0, 1)$. No es sencillo obtener una expresión cerrada para los máximos en función de m . En esta situación ($m > 1$) ambos términos “ a ” y “ b ” de la ecuación (A.16) son positivos por lo que es posible acotar cada uno por separado.

- El término a puede acotarse por

$$a = \frac{-w \cos\left[\frac{\pi w}{2}\right]}{(-4m^2+w^2)} \leq \frac{-\text{máx}(w \cos\left[\frac{\pi w}{2}\right])}{(-4m^2+1^2)} = \frac{k_0}{(4m^2-1)} \quad (\text{A.17})$$

donde $k_0 = \text{máx}(w \cos\left[\frac{\pi w}{2}\right]) \approx 0,357205$ para $w \approx 0,547705$. La Fig. A.2(a) muestra el término a para $m = 2, 3, 4$ y las respectivas cotas.

A. DEMOSTRACIONES DE LOS TEOREMAS

- El término b alcanza el valor máximo para $w = 1$ y

$$b = \frac{2(4m^2 + w^2) \sin\left[\frac{\pi w}{2}\right]}{\pi(-4m^2 + w^2)^2} \leq \frac{2(4m^2 + 1)}{\pi(-4m^2 + 1)^2}. \quad (\text{A.18})$$

La Fig. A.2(b) muestra el término b para m entre 2 y 4 y las respectivas cotas.

Con las ecuaciones (A.17) y (A.18) se define entonces para $m > 1$

$$\gamma_m = \frac{k_0(4m^2 - 1) + (2/\pi)(4m^2 + 1)}{(4m^2 - 1)^2} \quad \text{si } m > 1. \quad (\text{A.19})$$

Para $m > 1$ la cota γ_m provista por (A.19) es tal que $\gamma_m \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$ según $1/m^2$.

Utilizando la cota para la derivada segunda es posible acotar la norma de la diferencia de los Jacobianos para verificar que es Lipschitz. Partiendo de (A.11) y aplicando (A.12) se tiene que

$$\begin{aligned} \|D\rho(\mathbf{w}) - D\rho(\mathbf{v})\|_{\infty_i} &= \max_{1 \leq i \leq Q} \sum_{j=1}^Q |f'_{i-j}(w_{-G+j-1}) - f'_{i-j}(v_{-G+j-1})| \\ &= \max_{1 \leq i \leq Q} \sum_{j=1}^Q |f''_{i-j}(c_{i-j})| |w_{-G+j-1} - v_{-G+j-1}|. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la definición de $\|\cdot\|_{\infty}$ para vectores y utilizando la cota obtenida para la derivada segunda resulta

$$\begin{aligned} \|D\rho(\mathbf{w}) - D\rho(\mathbf{v})\|_{\infty_i} &= \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{\infty} \max_{1 \leq i \leq Q} \sum_{j=1}^Q |f''_{i-j}(c_{i-j})| \\ &\leq \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{\infty} \max_{1 \leq i \leq Q} \sum_{j=1}^Q \gamma_{i-j} \\ &\leq \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{\infty} \sum_{j=1-Q}^{Q-1} \gamma_j \\ &\leq \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

donde el último paso se justifica ya que $\gamma_m \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$ según $1/m^2$. Con las cotas

A.1 Definiciones y propiedades de las funciones involucradas

γ_m obtenidas es posible calcular

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j = \gamma_0 + 2\gamma_1 + 2 \sum_{j=2}^{+\infty} \gamma_j \\
&= \frac{2}{\pi} + 2\frac{10}{9\pi} + 2 \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{k_0}{(4m^2 - 1)} + \frac{2(4m^2 + 1)}{\pi(-4m^2 + 1)^2} \right) \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{20}{9\pi} + 2 \left(\frac{k_0}{6} + \frac{-76 + 9\pi^2}{36\pi} \right) \\
&= \frac{1}{6}(2k_0 + 3\pi) \\
&\approx 1,69
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Finalmente utilizando (A.20) y (A.21) se concluye que

$$\begin{aligned}
\|D\rho(\mathbf{w}) - D\rho(\mathbf{v})\|_{\infty_i} &\leq \gamma \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{\infty} \\
&\leq 1,69 \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{\infty}.
\end{aligned} \tag{A.22}$$

□

Lema 3. $\|D\rho^{-1}\|_{\infty_i}$ está acotado.

Demostración. Una cota para $\|(I - D\rho)\|_{\infty_i}$ se puede obtener utilizando la definición del Jacobiano de dimensión $Q = 2G + 1$ en (A.9)

$$\begin{aligned}
\|(I - D\rho)\|_{\infty_i} &= \max_{1 \leq n \leq Q} \sum_{m=1}^Q |[I - D\rho]_{n,m}| \\
&= \max_{1 \leq n \leq Q} [|1 - f'_0(w_{-G+n-1})| + \sum_{m=1; m \neq n}^Q |f'_{n-m}(w_{-G+m-1})|] \\
&\leq |1 - f'_0(w_b)| + \sum_{m=1; m \neq n}^Q f'_{n-m}(w_b)(-1)^{m+1} \\
&= 1 - f'_0(w_b) + 2 \sum_{k=1}^G f'_k(w_b)(-1)^{m+1} \\
&\leq 1 - f'_0(w_b) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} f'_m(w_b)(-1)^{m+1} \\
&= 2 \sin\left(\frac{\pi w_b}{4}\right)^2,
\end{aligned} \tag{A.23}$$

A. DEMOSTRACIONES DE LOS TEOREMAS

donde $w_b = \|\mathbf{w}\|_\infty \triangleq \max_{1 \leq i \leq Q} (|w_i|)$. Utilizando la serie de Neumann [71, p. 54-55] para expandir $D\rho^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - D\rho)^n$ y utilizando el resultado en (A.23), puede mostrarse que $D\rho^{-1}$ está acotada por

$$\begin{aligned} \|D\rho^{-1}\|_{\infty i} &\leq \|I\|_{\infty i} + \sum_{n=1}^{\infty} \|I - D\rho\|_{\infty i}^n \\ &\leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \sin\left(\frac{\pi w_b}{4}\right)\right)^n \\ &= \sec\left(\frac{\pi w_b}{2}\right) \triangleq \beta. \end{aligned} \tag{A.24}$$

□

Lema 4. La norma $\|\rho(\mathbf{w}^{(0)})\|_\infty$ del vector $\rho(\mathbf{w}^{(0)})$ está acotada.

Demostración. A partir de la definición y teniendo en cuenta que $\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{x}$ y que $x_b = \|\mathbf{x}\|_\infty \triangleq \max_{1 \leq i \leq Q} (|x_i|)$

$$\begin{aligned} \|\rho(\mathbf{w}^{(0)})\|_\infty &= \|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\|_\infty \\ &= \max_j (|\mathbf{g}(\mathbf{x})]_j - [\mathbf{x}]_j|). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la salida y_j en el instante j , elemento del vector (A.3) puede escribirse como

$$[\mathbf{g}(\mathbf{x})]_j = y_j = \sum_{k=-G+j}^{G+j} f_k(x_{j-k}) = f_0(x_j) + \sum_{k=-G+j; k \neq 0}^{G+j} f_k(x_{j-k}) \tag{A.25}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} |[\mathbf{g}(\mathbf{x})]_j - [\mathbf{x}]_j| &= |y_j - x_j| \\ &= |f_0(x_j) + \sum_{k=-G+j; k \neq 0}^{G+j} f_k(x_{j-k}) - x_j| \\ &\leq |f_0(x_j) - x_j| + \left| \sum_{k=-G+j; k \neq 0}^{G+j} f_k(x_{j-k}) \right| \\ &< |f_0(x_j) - x_j| + \mu(x_b) \\ &= x_b - \frac{2}{\pi} \text{Si}\left(\frac{\pi x_b}{2}\right) + \mu(x_b). \end{aligned}$$

A.1 Definiciones y propiedades de las funciones involucradas

donde $\mu(x_b)$ es la cota indicada en (A.2). Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\rho}(\mathbf{w}^{(0)})\|_\infty &= \|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\|_\infty \\ &\leq x_b - \frac{2}{\pi} \text{Si}\left(\frac{\pi x_b}{2}\right) + \mu(x_b). \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Esta cota representa la máxima diferencia posible entre las muestras de la señal de entrada y las muestras de salida de la señal PWM demodulada cuando los ciclos de trabajo son iguales a las muestras de entrada (PWM uniforme). □

Lema 5. Si $D\boldsymbol{\rho}(\mathbf{w})$ está bien definida para todo \mathbf{w} en una región convexa $C_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ y

$$\|D\boldsymbol{\rho}(\mathbf{u}) - D\boldsymbol{\rho}(\mathbf{v})\|_{\infty_i} \leq \gamma \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_\infty \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in C_0,$$

entonces

$$\|\boldsymbol{\rho}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{v}) - D\boldsymbol{\rho}(\mathbf{v})(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_\infty \leq \frac{\gamma}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_\infty^2.$$

Demostración. Ver [72, p. 269-270]. □

Teorema 5. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y C_0 un conjunto convexo tal que $\overline{C_0} \subseteq C$. Dada la función diferenciable $\boldsymbol{\rho} : C \rightarrow \mathbb{R}^n \forall \mathbf{w} \in C_0$ y continua para $\mathbf{w} \in C$, sea $S_r(\mathbf{w}^{(0)}) \triangleq \{\mathbf{w} : \|\mathbf{w} - \mathbf{w}^{(0)}\|_\infty < r\} \in C_0$, $h \triangleq \alpha\beta\gamma/2 < 1$ y $r \triangleq \alpha/(1-h)$. Si $D\boldsymbol{\rho}$ es Lipschitz: $\|D\boldsymbol{\rho}(\mathbf{w}) - D\boldsymbol{\rho}(\mathbf{v})\|_{\infty_i} \leq \gamma \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_\infty$ y $\|(D\boldsymbol{\rho}(\mathbf{w}))^{-1}\|_{\infty_i} \leq \beta$ y $\|(D\boldsymbol{\rho}(\mathbf{w}^{(0)}))^{-1} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{w}^{(0)})\|_{\infty_i} \leq \alpha$, entonces la recursión

$$\mathbf{w}^{(k+1)} \triangleq \mathbf{w}^{(k)} - \left(D\boldsymbol{\rho}(\mathbf{w}^{(k)})\right)^{-1} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{w}^{(k)})$$

está bien definida para $k = 0, 1, \dots$ y verifica $\mathbf{w}^{(k)} \in S_r(\mathbf{w}^{(0)}) \forall k \geq 0$. También $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{w}^{(k)} = \xi$ tal que $\boldsymbol{\rho}(\xi) = 0$. Finalmente para todo $k \geq 0$

$$\|\mathbf{w}^{(k)} - \xi\|_\infty \leq \alpha \frac{h^{2^k - 1}}{1 - h^{2^k}}. \quad (\text{A.27})$$

Demostración. Ver [72, p. 270-272]. □

El Teorema 5 establece las condiciones para la convergencia en forma cuadrática del método de Newton en varias variables. Como $0 < h < 1$, si la cota en la ecuación (A.27) es

$$\Upsilon(k) = \alpha \frac{h^{2^k - 1}}{1 - h^{2^k}} \quad (\text{A.28})$$

A. DEMOSTRACIONES DE LOS TEOREMAS

verifica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\Upsilon(k+1) - 0|}{|\Upsilon(k) - 0|^2} = h/\alpha < \infty \quad (\text{A.29})$$

Lo que muestra que bajo las condiciones impuestas por el Teorema 5 la recursión utilizando el método de Newton es (al menos) cuadráticamente convergente.

A.2. Prueba de los teoremas del modulador PWM Newton

En esta sección se demuestran los Teoremas 1 y 2 utilizando los resultados y propiedades presentados en la Sección A.1.

A.2.1. Prueba del Teorema 1 del Capítulo 3

El Teorema 1 establece que si los ciclos de trabajo iniciales de la iteración son iguales a las muestras de entrada $\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{x}$ con $\|\mathbf{w}\|_\infty = w_b$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = x_b$ y siempre que $D\mathbf{g}(\mathbf{w})$ (el Jacobiano de \mathbf{g} en \mathbf{w} donde $D\mathbf{g} = D\rho$) sea no-singular, entonces,

$$\mathbf{w}^{(k+1)} \triangleq \mathbf{w}^{(k)} - D\mathbf{g}(\mathbf{w}^{(k)})^{-1} [\mathbf{g}(\mathbf{w}^{(k)}) - \mathbf{x}] \quad (\text{A.30})$$

está bien definida para $k = 0, 1, \dots$. También $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{w}^*$ tal que $\mathbf{g}(\mathbf{w}^*) - \mathbf{x} = 0$. Finalmente para todo $k \geq 0$

$$\|\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^*\|_\infty \leq \alpha \frac{h^{2^k - 1}}{1 - h^{2^k}}, \quad (\text{A.31})$$

Demostración. La demostración es directa aplicando el Teorema 5, usando el Lema 2, el Lema 3 y el Lema 4 para verificar las hipótesis del mismo,

$$\begin{aligned} \|D\rho(\mathbf{w}^{(0)})^{-1}\rho(\mathbf{w}^{(0)})\|_\infty &\leq \|D\rho(\mathbf{w}^{(0)})^{-1}\|_{\infty_i} \|\rho(\mathbf{w}^{(0)})\|_\infty \\ &\leq \sec\left(\frac{\pi x_b}{2}\right) \left[x_b - \frac{2}{\pi} \text{Si}\left(\frac{\pi x_b}{2}\right) + \mu(x_b) \right] \triangleq \alpha \end{aligned}$$

donde $x_b = \|\mathbf{x}\|_\infty \triangleq \max_{1 \leq i \leq Q} (|x_i|)$.

Por lo tanto a modo de síntesis las cotas obtenidas son

- Cota Lipschitz

$$\|D\rho(\mathbf{w}) - D\rho(\mathbf{v})\|_{\infty_i} \leq \gamma \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \gamma = 1,69. \quad (\text{A.32})$$

- Cota sobre la inversa del Jacobiano

$$\|(D\rho(\mathbf{w}))^{-1}\|_{\infty_i} \leq \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \sec\left(\frac{\pi w_b}{2}\right). \quad (\text{A.33})$$

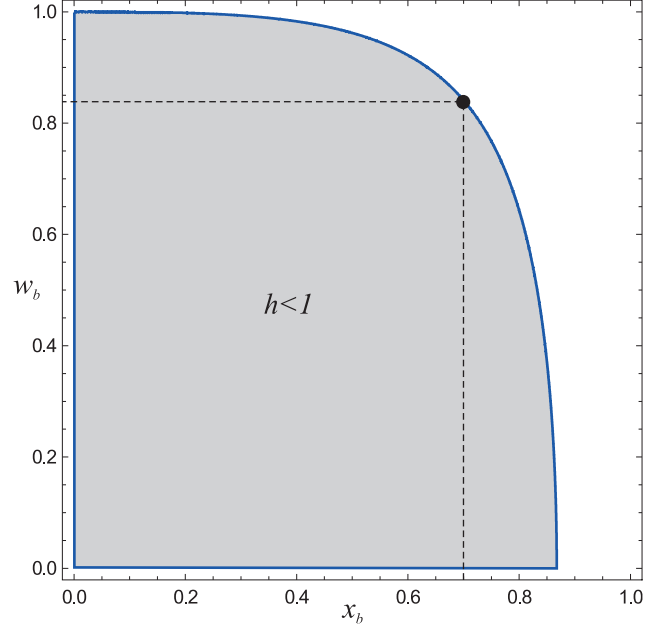


Figura A.3: $h = \alpha\beta\gamma/2 = 1$ en función de x_b y w_b .

- Cota sobre $\|D\rho(\mathbf{w}^{(0)})^{-1}\rho(\mathbf{w}^{(0)})\|_\infty$

$$\|D\rho(\mathbf{w}^{(0)})^{-1}\rho(\mathbf{w}^{(0)})\|_\infty \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sec\left(\frac{\pi x_b}{2}\right) \left[x_b - \frac{2}{\pi} \text{Si}\left(\frac{\pi x_b}{2}\right) + \mu(x_b) \right] \quad (\text{A.34})$$

donde $w_b = \|\mathbf{w}\|_\infty \triangleq \max_{1 \leq i \leq Q} (|w_i|)$ y $x_b = \|\mathbf{x}\|_\infty \triangleq \max_{1 \leq i \leq Q} (|x_i|)$.

Resta verificar que $h = \alpha\beta\gamma/2 < 1$. En la Fig. A.3 se muestra la curva $h = \alpha\beta\gamma/2 = 1$ en función de x_b y w_b , indicando la región en la que $h < 1$. Por ejemplo, se tiene que si $x_b = 0,7$ entonces $w_b < 0,84$. De esta forma se verifican todas las hipótesis del Teorema 5 y por lo tanto el Teorema 1 queda demostrado. \square

A.2.2. Prueba del Teorema 2 del Capítulo 3

El Teorema 2 establece una cota sobre el error máximo entre las muestras de la señal moduladora \mathbf{x} y las muestras de la señal PWM filtrada en la iteración k : $\mathbf{y}^{(k)}$. También establece que una pequeña corrección de los ciclos de trabajo produce una reducción significativa en la distorsión.

Demostración. Dado que:

- $\rho(\mathbf{w}^*) = 0$,

A. DEMOSTRACIONES DE LOS TEOREMAS

- $\Delta \mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{w}^{(k)}$ y
- $\rho(\mathbf{w}^{(k-1)}) = -D\rho(\mathbf{w}^{(k-1)})\Delta \mathbf{w}^{(k-1)}$,

una cota en la diferencia entre las muestras de la señal PWM filtrada $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{g}(\mathbf{w}^{(k)})$ que resulta de utilizar el ancho de pulso de la k -ésima iteración $\mathbf{w}^{(k)}$ y las muestras de la señal moduladora $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{w}^*)$ puede calcularse como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty &= \|\mathbf{g}(\mathbf{w}^{(k)}) - \mathbf{g}(\mathbf{w}^*)\|_\infty \\ &= \|\rho(\mathbf{w}^{(k)}) - \rho(\mathbf{w}^*)\|_\infty \\ &= \|\rho(\mathbf{w}^{(k)}) - \rho(\mathbf{w}^{(k-1)}) + \rho(\mathbf{w}^{(k-1)})\|_\infty \\ &= \|\rho(\mathbf{w}^{(k)}) - \rho(\mathbf{w}^{(k-1)}) - D\rho(\mathbf{w}^{(k-1)})\Delta \mathbf{w}^{(k-1)}\|_\infty. \end{aligned}$$

Usando el Lema 5,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty &\leq (\gamma/2)\|\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^{(k-1)}\|_\infty^2 \\ &\leq (\gamma/2)\|\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}^*\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando el Teorema 1,

$$\|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty \leq \frac{\gamma\alpha^2}{2} \left(\frac{h^{2^k-1}}{1-h^{2^k}} \right)^2.$$

□

A.3. Prueba del Teorema 3

En esta sección se obtiene la cota para el error de procesamiento por bloques que se establece en el Teorema 3.

Demostración. Las muestras de salida del modelo del PWM calculadas mediante la arquitectura de procesamiento por bloques se notarán como \check{y}_n . En cada bloque se calculan U ciclos de trabajo: w_n con $n \in [\underline{\ell}, \bar{\ell} - 1]$, donde $\underline{\ell} = (L - U)/2$ y $\bar{\ell} \triangleq (L + U)/2$ (como se indica en el esquema de la Fig. 3.1(b)), utilizando L muestras de la señal moduladora. Se descartan $\underline{\ell}$ muestras sobre cada borde del bloque de datos. Se define el error debido al procesamiento por bloques como $e_B = \|y_n - \check{y}_n\|_\infty$ que alcanza su valor máximo en la muestra $n = \underline{\ell}$ y/o $n = \bar{\ell} - 1$ porque en ese caso todas las muestras a la izquierda o derecha respectivamente son descartadas.

Sin pérdida de generalidad se asume que el error de peor caso ocurre para la muestra $n = \underline{\ell} = (L - U)/2$. La muestra $y_{\underline{\ell}}$ de salida del modelo PWM en este instante se puede calcular a partir de (A.1) como

$$y_{\underline{\ell}} = f_0(w_{\underline{\ell}}) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(w_{\underline{\ell}-k}) + f_k(w_{\underline{\ell}+k})$$

y el valor de esta muestra cuando se utiliza la arquitectura de procesamiento por bloques es

$$\check{y}_{\underline{\ell}} = f_0(w_{\underline{\ell}}) + \sum_{k=1}^{L-1-\underline{\ell}} f_k(w_{\underline{\ell}+k}) + \sum_{k=1}^{\underline{\ell}} f_k(w_{\underline{\ell}-k}) \quad (\text{A.35})$$

donde, como se mencionó previamente \check{y} es la muestra de salida del modelo PWM calculada utilizando solo un bloque de la señal de entrada. Cada una de las sumatorias en (A.35) representa el aporte de los ciclos de trabajo a la derecha e izquierda del ciclo de trabajo $w_{\underline{\ell}}$ en el bloque de datos. El error en el instante $\underline{\ell} = (L - U)/2$ es

$$e_B = y_{\underline{\ell}} - \check{y}_{\underline{\ell}} = \sum_{k=L-\underline{\ell}}^{\infty} f_k(w_{\underline{\ell}+k}) + \sum_{k=\underline{\ell}+1}^{\infty} f_k(w_{\underline{\ell}-k}), \quad (\text{A.36})$$

que corresponde al aporte de los ciclos de trabajo que no se tienen en cuenta para el cálculo utilizando un bloque de datos. El error máximo se alcanza cuando las áreas de los lóbulos laterales de la función sinc en la ecuación (2.7) se suman con el mismo signo, que corresponde a la misma situación contemplada para el cómputo de μ dado por (A.2). En este caso únicamente se suman los aportes de los ciclos de trabajo fuera del bloque de datos. En esta condición, (A.36) puede reescribirse utilizando la definición de μ en la ecuación (A.2) y restando el área aportada por las muestras que se encuentran dentro del bloque para obtener

$$\bar{e}_B = \mu + \sum_{k=1}^{\bar{\ell}-1} (-1)^k f_k(w_b) + \sum_{k=1}^{\underline{\ell}} (-1)^k f_k(w_b). \quad (\text{A.37})$$

Si se reemplaza la función $f_m(w)$ dada por (2.12) en (A.36) para $m > 0$, la función \bar{e}_B puede aproximarse por

$$\bar{e}_B \approx a_3(L, U)w_b^3 + a_5(L, U)w_b^5 + a_7(L, U)w_b^7.$$

Los coeficientes a_i que dependen de L y U están dados por

$$\begin{aligned} a_3(L, U) &= [\psi^1(\underline{\ell} + 1) + \psi^1(\bar{\ell})]/12 \\ a_5(L, U) &= [-12\pi^2 a_3(L, U) + \psi^3(\underline{\ell} + 1) + \psi^3(\bar{\ell})]/480 \\ a_7(L, U) &= \{36\pi^4 a_3(L, U) - 10\pi^2 [\psi^3(\underline{\ell} + 1) + \psi^3(\bar{\ell})] + 3[\psi^5(\underline{\ell} + 1) + \psi^5(\bar{\ell})]\}/161280 \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

donde $\psi^m(z) = (-1)^{m+1} m! \sum_{k=0}^{\infty} (z+k)^{-m-1}$ es la función poly gamma de orden m . \square

A.4. Análisis de convergencia del modulador PWM adaptivo

El error medio cuadrático $\mathbf{E}[|\mathbf{d}_0 - \hat{\mathbf{d}}(n)|^2]$ como una función de la matriz de autocorrelación $\mathbf{R}_P = \mathbf{E}[\mathbf{Y}(n, :) \mathbf{Y}^T(n, :)]$ es [33]:

$$\xi(n) = \frac{\sigma_0^2}{n} \text{tr}(\mathbf{R}_P^{-1}). \quad (\text{A.39})$$

A.4.1. Prueba del Teorema 4 del Capítulo 3

Demostración. Como se asume que y_n es un proceso aleatorio iid con media cero (H3), cada elemento de la matriz \mathbf{R}_P en (3.20) cae en uno de los siguientes casos

$$\mathbf{E}[y_i^{2a-1} y_j^{2b-1}] = \begin{cases} m_{2(a+b-1)}, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

donde $m_{2(a+b-1)}$ es el momento de orden $2(a+b-1)$ de y_i , *i.e.*, $m_{2(a+b-1)} = \mathbf{E}[y_i^{2(a+b-1)}]$. Siempre que $i \neq j$, y_i^{2a-1} es independiente de y_j^{2b-1} dado que $2a-1$ y $2b-1$ son números impares y $\mathbf{E}[y_n] = 0$. Entonces para una distribución estadística simétrica (H3) $\mathbf{E}[y_i^{2a-1}] = 0$ y $\mathbf{E}[y_j^{2b-1}] = 0$ y por lo tanto $\mathbf{E}[y_i^{2a-1} y_j^{2b-1}] = 0$. Con estas simplificaciones, la matriz de correlación \mathbf{R}_P puede reformularse utilizando los momentos pares de la señal aleatoria de entrada y en bloques como:

$$\mathbf{R}_P = \begin{bmatrix} m_2 \mathbf{I}_N & m_4 \mathbf{I}_N & \cdots & m_{P+1} \mathbf{I}_N \\ m_4 \mathbf{I}_N & m_6 \mathbf{I}_N & \cdots & m_{P+3} \mathbf{I}_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{P+1} \mathbf{I}_N & m_{P+3} \mathbf{I}_N & \cdots & m_{2K} \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

con \mathbf{I}_N una matriz identidad de $N \times N$. La matriz \mathbf{R}_P puede escribirse de forma más compacta utilizando producto de Kronecker:

$$\mathbf{R}_P = \begin{bmatrix} m_2 & m_4 & \cdots & m_{P+1} \\ m_4 & m_6 & \cdots & m_{P+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{P+1} & m_{P+3} & \cdots & m_{2K} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_N = \mathbf{\Theta} \otimes \mathbf{I}_N \quad (\text{A.42})$$

donde $\mathbf{\Theta}$, la matriz de momentos, es una matriz del tipo Hankel, *i.e.*, con todas sus diagonales (de pendiente positiva) con valores constantes. Las matrices de Hankel comúnmente surgen en problemas que implican potencias de momentos [36], por ejemplo, en problemas de identificación utilizando filtros de Volterra [52].

A.4 Análisis de convergencia del modulador PWM adaptivo

El error medio cuadrático $\mathbf{E}[||\mathbf{d}_0 - \hat{\mathbf{d}}(n)||^2]$ es dependiente de la traza de la inversa de \mathbf{R}_P , y por lo tanto en la suma de la inversa de sus autovalores:

$$\xi(n) = \mathbf{E}[||\mathbf{d}_0 - \hat{\mathbf{d}}(n)||^2] = \frac{\sigma_0^2}{n} \text{tr}(\mathbf{R}_P^{-1}) = \frac{\sigma_0^2}{n} \sum_{i=1}^{qN} \frac{1}{\mu_i} \quad (\text{A.43})$$

donde μ_i , $i = 1, 2, \dots, qN$, son los autovalores de \mathbf{R}_P . Los autovalores μ_i pueden calcularse usando (A.42) y un resultado conocido para el producto de Kronecker [37]: si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ son los autovalores de Θ y $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ los de \mathbf{I}_N entonces $\mu_n = \lambda_i \gamma_j$ para $i = 1, \dots, q$ y $j = 1, \dots, N$. Dado que \mathbf{I}_N es una matriz identidad $\gamma_i = 1$ para todo i y por lo tanto los autovalores de \mathbf{R}_P son los autovalores de Θ cada uno con multiplicidad N . El error medio cuadrático se calcula entonces como

$$\xi(n) = \frac{\sigma_0^2}{n} \sum_{i=1}^q \frac{N}{\lambda_i}. \quad (\text{A.44})$$

Por lo tanto (A.44) revela que $\xi(n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. La convergencia depende de los autovalores λ_i de Θ , la matriz de momentos del proceso aleatorio de entrada dada por (A.42). □

A. DEMOSTRACIONES DE LOS TEOREMAS

Referencias

- [1] S.O. Aase. A prefilter equalizer for pulse width modulation. *Signal Process.*, 92(10):2444–2453, Octubre 2012.
- [2] S.O. Aase. Digital removal of pulse-width-modulation-induced distortion in class-D audio amplifiers. *IET Signal Processing*, 8(6):680–692, Agosto 2014.
- [3] E. Alarcon, D. Fernandez, A. Garcia i Tormo, J. Madrenas, y A. Poveda. Continuous-time cmos adaptive asynchronous $\Sigma\Delta$ modulator approximating low- f_s low-inband-error on-chip wideband power amplifier. In *IEEE International Symposium on Circuits and Systems ISCAS*, pages 301–304, Mayo 2011.
- [4] P. Balmelli, J.M. Khoury, E. Viegas, P. Santos, V. Pereira, J. Alderson, y R. Beale. A low-EMI 3-W audio class-D amplifier compatible with AM/FM radio. *IEEE J. Solid-State Circuits*, 48(8):1771–1782, Agosto 2013.
- [5] R. Bassoli, F. Guanziroli, C. Crippa, y G. Nicollini. Supply-feedback fully-digital class-D audio amplifier featuring 100 dba+ snr and 0.5 w to 1 w selectable output power. In *Audio Engineering Society Convention 135*, Octubre 2013.
- [6] M. Berkhout. An integrated 200-W class-D audio amplifier. *IEEE J. Solid-State Circuits*, 38(7):1198–1206, Julio 2003.
- [7] M. Berkhout y L. Dooper. Class-D audio amplifiers in mobile applications. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers*, 57(5):992–1002, Mayo 2010.
- [8] A. Bindra. Pulswidth modulated controller integrated circuit: Four decades of progress [a look back]. *IEEE Power Electron. Mag.*, 1(3):10–44, Septiembre 2014.
- [9] H.S. Black. *Modulation theory*. Van Nostrand New York, 1953.
- [10] R. Boudreaux, J. Gaboriau, M. Hagge, J. Melanson, y L. Zhang. Real-time power supply compensation for noise-shaped class-D amplifier. In *Audio Engineering Society Convention 117*, Octubre 2004.

REFERENCIAS

- [11] S. Caporale, R. Rovatti, y G. Setti. Representation of PWM signals through time warping. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 3589–3592, Marzo 2012.
- [12] E. Changsoo y E.J. Powers. A new Volterra predistorter based on the indirect learning architecture. *IEEE Trans. Signal Process.*, 45(1):223–227, Enero 1997.
- [13] L. Chen y F.Z. Peng. Dead-time elimination for voltage source inverters. *IEEE Trans. Power Electron.*, 23(2):574–580, Marzo 2008.
- [14] F. Chierchie y S.O. Aase. Volterra models for digital PWM and their inverses. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers*, 62(10):2606–2616, Octubre 2015.
- [15] F. Chierchie, J. Cousseau, E.E. Paolini, y Werner S. Mitigation of pulse-width-modulation distortion using a digital predistorter based on memory polynomials. *Aceptado para su publicación en Signal Processing*, 2015.
- [16] F. Chierchie y E.E. Paolini. Quasi-analytical spectrum of PWM signals with dead-time for multiple sinusoidal input. In *IEEE International Symposium on Circuits and Systems ISCAS*, pages 1033–1036, Rio de Janeiro, Brazil, Mayo 2011.
- [17] F. Chierchie y E.E. Paolini. Modelo discreto no lineal de un sistema PWM con tiempo muerto. In *XV Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control RPIC*, Septiembre 2013.
- [18] F. Chierchie y E.E. Paolini. Real-time digital PWM with zero baseband distortion and low switching frequency. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers*, 60(10):2752–2762, Octubre 2013.
- [19] F. Chierchie y E.E. Paolini. Modulación PWM digital con distorsión reducida y rechazo de fuente para amplificadores clase-d. In *XXIV Congreso Argentino de Control Automático AADECA 2014*, Octubre 2014.
- [20] F. Chierchie, E.E. Paolini, L. Stefanazzi, y A.R. Oliva. Simple real-time digital PWM implementation for class-D amplifiers with distortion-free baseband. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 61(10):5472–5479, Octubre 2014.
- [21] F. Chierchie, L. Stefanazzi, E.E. Paolini, y A.R. Oliva. Frequency analysis of PWM inverters with dead-time for arbitrary modulating signals. *IEEE Trans. Power Electron.*, 29(6):2850–2860, Junio 2014.

- [22] W.J. Chudobiak y D.F. Page. Frequency and power limitations of class-D transistor amplifiers. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 4(1):25–37, Febrero 1969.
- [23] A.I. Colli-Menchi, J. Torres, y E. Sanchez-Sinencio. A feed-forward power-supply noise cancellation technique for single-ended Class-D audio amplifiers. *IEEE J. Solid-State Circuits*, 49(3):718–728, Marzo 2014.
- [24] D. Costinett, M. Rodriguez, y D. Maksimovic. Simple digital pulse width modulator under 100 ps resolution using general-purpose fpgas. *IEEE Trans. Power Electron.*, 28(10):4466–4472, Octubre 2013.
- [25] P.S.R. Diniz, E.A.B. Da Silva, y S.L. Netto. *Digital signal processing: system analysis and design*. Cambridge Univ. Pr., 2010.
- [26] B. Er-Wei y L. Kang. Convergence of the iterative algorithm for a general Hammerstein system identification. *Automatica*, 46(11):1891–1896, Noviembre 2010.
- [27] Y. Fang, L. Jiao, X. Zhang, y J. Pan. On the convergence of volterra filter equalizers using a pth-order inverse approach. *IEEE Trans. Signal Process.*, 49(8):1734–1744, Agosto 2001.
- [28] J. Fritzin, C. Svensson, y A. Alvandpour. Design and analysis of a class-D stage with harmonic suppression. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Paper*, 59(6):1178–1186, Junio 2012.
- [29] A. Garcia i Tormo, A. Poveda, E. Alarcon, y F. Guinjoan-Gispert. Fundamental modulation limits for minimum switching frequency inband-error-free high-efficiency power amplifiers. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Paper*, 58(10):2543–2555, Octubre 2011.
- [30] T. Ge y J. S. Chang. Modeling and technique to improve psrr and ps-imd in analog PWM class-D amplifiers. *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs*, 55(6):512–516, Junio 2008.
- [31] J.M. Goldberg y M.B. Sandler. New high accuracy pulse width modulation based digital-to-analogue convertor/power amplifier. *IEE Proceedings Circuits, Devices and Systems*, 141(4):315–324, Agosto 1994.
- [32] L. Hao y N. Qin. Incomplete Jacobian Newton method for nonlinear equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(1):218–227, Julio 2008.
- [33] S. Haykin. *Adaptive filter theory*. 4 ed., Prentice Hall, 2002.

REFERENCIAS

- [34] M.A. Herran, J.R. Fischer, S.A. Gonzalez, M.G. Judewicz, y D.O. Carrica. Adaptive dead-time compensation for grid-connected PWM inverters of single-stage pv systems. *IEEE Trans. Power Electron*, 28(6):2816–2825, Junio 2013.
- [35] D.G. Holmes y T.A. Lipo. *Pulse width modulation for power converters: principles and practice*, volume 18. John Wiley & Sons, 2003.
- [36] R.A. Horn y C.R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge university press, 1990.
- [37] R.A. Horn y C.R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge university press, 1991.
- [38] J. Huang, K. Padmanabhan, y O.M. Collins. The sampling theorem with constant amplitude variable width pulses. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers*, 58(6):1178–1190, Enero 2011.
- [39] T. Itkonen, J. Luukko, A. Sankala, T. Laakkonen, y R. Pollanen. Modeling and analysis of the dead-time effects in parallel PWM two-level three-phase voltage-source inverters. *IEEE Trans. Power Electron*, 24(11):2446–2455, Noviembre 2009.
- [40] Y. Jun, T.T. Meng, L.G. Wang, y S.M. Cox. A dual-feedforward carrier-modulated second-order class-D amplifier with improved THD. *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs*, 59(1):35–39, Enero 2012.
- [41] R.L. Kirilin, C. Lascu, y A.M. Trzynadlowski. Shaping the noise spectrum in power electronic converters. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 58(7):2780–2788, Julio 2011.
- [42] F. Koeslag, H. D. Mouton, y J. Beukes. Analytical modeling of the effect of nonlinear switching transition curves on harmonic distortion in class-D audio amplifiers. *IEEE Trans. Power Electron*, 28(1):380–389, Enero 2013.
- [43] A.A. Lazar, E.K. Simonyi, y L.T. Toth. An overcomplete stitching algorithm for time decoding machines. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Paper*, 55(9):2619–2630, Octubre 2008.
- [44] A.A. Lazar y L.T. Toth. Perfect recovery and sensitivity analysis of time encoded band-limited signals. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Paper*, 51(10):2060–2073, Octubre 2004.
- [45] Y.K. Lin y Y.S. Lai. Dead-time elimination of PWM-controlled inverter/converter without separate power sources for current polarity detection circuit. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 56(6):2121–2127, Junio 2009.

- [46] B.F. Logan Jr. Click modulation. *AT&T Bell Laboratories Technical Journal*, 63(3):401–423, Marzo 1984.
- [47] M. Margaliot y G. Weiss. The low-frequency distortion in D-class amplifiers. *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs*, 57(10):772–776, Octubre 2010.
- [48] B. Metzler. *Audio measurement handbook*. Audio Precision, 1993.
- [49] D.R. Morgan, M. Zhengxiang, K. Jaehyeong, M.G. Zierdt, y J. Pastalan. A generalized memory polynomial model for digital predistortion of RF power amplifiers. *IEEE Trans. Signal Process.*, 54(10):3852–3860, Octubre 2006.
- [50] H. Mouton y B. Putzeys. Understanding the PWM nonlinearity: Single-sided modulation. *IEEE Trans. Power Electron.*, 27(4):2116–2128, Abril 2012.
- [51] D. Navarro, O. Lucía, L.A. Barragán, J.I. Artigas, I. Urriza, y O. Jiménez. Synchronous FPGA-based high-resolution implementations of digital pulse-width modulators. *IEEE Trans. Power Electron.*, 27(5):2515–2525, Mayo 2012.
- [52] R.D. Nowak y B.D. Van Veen. Invertibility of higher order moment matrices. *IEEE Trans. Signal Process.*, 43(3):705–708, Marzo 1995.
- [53] A.R. Oliva, H. Chiacchiarini, A. Aymonino, y P. Mandolesi. Reduction of total harmonic distortion in power inverters. *Latin American applied research*, 35(2):89–93, Octubre 2005.
- [54] A.V. Oppenheim y R. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall, New Jersey, 1989.
- [55] C. Pascual, Zukui Song, P.T. Krein, D.V. Sarwate, P. Midya, y W.J. Roeckner. High-fidelity PWM inverter for digital audio amplification: Spectral analysis, real-time dsp implementation, and results. *IEEE Trans. Power Electron.*, 18(1):473–485, Enero 2003.
- [56] F.Z. Peng. Z-source inverter. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 39(2):504–510, Octubre 2003.
- [57] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, y B.P. Flannery. *Numerical Recipes in C (2d ed.)*. Cambridge Univ. Press, 1992.
- [58] D. Psaltis, A. Sideris, y A. Yamamura. A multilayered neural network controller. *IEEE control systems magazine*, 8(2):17–21, Abril 1988.
- [59] M. Rashid. *Microelectronic Circuits: Analysis & Design*. Cengage Learning, 2010.

REFERENCIAS

- [60] L. Risbo y H.K. Andersen. Conversion of a PCM signal into a UPWM signal, Diciembre 2003. US Patent 6,657,566.
- [61] M. Schetzen. *The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems*. John Wiley & Sons, 1980.
- [62] W. Shu y J.S. Chang. Power supply noise in analog audio class-D amplifiers. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers*, 56(1):84–96, Enero 2009.
- [63] G. Smecher y B. Champagne. Optimum crossing-point estimation of a sampled analog signal with a periodic carrier. *Signal Processing*, 91(8):1951–1962, Agosto 2011.
- [64] K.M. Smith, K.M. Smedley, y Yunhong M. Realization of a digital PWM power amplifier using noise and ripple shaping. In *Power Electronics Specialists Conference, 1995. PESC '95 Record., 26th Annual IEEE*, volume 1, pages 96–102, Enero 1995.
- [65] Z. Song y D.V. Sarwate. The frequency spectrum of pulse width modulated signals. *Signal Processing*, 83(10):2227–2258, Octubre 2003.
- [66] K.P. Sozanski. Digital realization of a click modulator for an audio power amplifier. *Przeglad Elektrotechniczny*, 86(2):353–357, Febrero 2010.
- [67] L. Stefanazzi, F. Chierchie, E.E. Paolini, y A.R. Oliva. Low distortion switching amplifier with discrete-time click modulation. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 61(7):3511–3518, Julio 2014.
- [68] L. Stefanazzi, A. Oliva, y E. Paolini. Alias-free digital click modulator. *IEEE Trans. Ind. Informat*, 9(2):1074–1083, Mayo 2013.
- [69] L. Stefanazzi, E.E. Paolini, y A. Oliva. Click modulation: an off-line implementation. In *Midwest Symposium on Circuits and Systems. MWSCAS*, pages 946–949, Knoxville, USA, Agosto 2008.
- [70] M.L. Stephens y J.P. Wittman. Switched-mode transistor amplifiers. *Trans. of the American IEE, Part I: Communication and Electronics*, 82(4):470–472, Septiembre 1963.
- [71] G.W. Stewart. *Matrix Algorithms: Volume 1, Basic Decompositions*, volume 1. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- [72] J. Stoer y R. Bulirsch. *Introduction to numerical analysis*. Springer Verlag, New York, 1992.

- [73] M. Streitenberger, H. Bresch, y L. Mathis. Theory and implementation of a new type of digital power amplifier for audio applications. In *IEEE International Symposium on Circuits and Systems ISCAS*, volume 1, pages 511–514, Geneva, Switzerland, Mayo 2000.
- [74] M. Streitenberger, F. Felgenhauer, H. Bresch, y W. Mathis. Class-D audio amplifiers with separated baseband for low-power mobile applications. In *IEEE International Conference on Circuits and Systems for Communications*, pages 186–189, 2002.
- [75] M.Y. Waziri, W.J. Leong, M.A. Hassan, y M. Monsi. Jacobian computation-free Newton method for systems of non-linear equations. *Journal of numerical Mathematics and stochastic*, 2(1):54–63, Septiembre 2010.
- [76] P. Yongsoon y S. Seung-Ki. A novel method utilizing trapezoidal voltage to compensate for inverter nonlinearity. *IEEE Trans. Power Electron*, 27(12):4837–4846, Diciembre 2012.
- [77] C. Zhijun y B. Er-Wei. Making parametric Hammerstein system identification a linear problem. *Automatica*, 47(8):1806–1812, Agosto 2011.