UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Tesis de Magister en Matemática

Nora Ana Oliva

BAHÍA BLANCA **ARGENTINA**

2014

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Tesis de Magister en Matemática

Algebras de De Morgan pseudocomplementadas modales 4−valuadas

Nora Ana Oliva

BAHÍA BLANCA **ARGENTINA**

2014

Prefacio

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado académico de Magister en Matemática de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática durante el período comprendido entre noviembre de 2008 y marzo de 2014, bajo la dirección de la Dra. Alicia N. Ziliani, Profesora Asociada del Departamento de Matemtica en el Area VI.

....

Universidad Nacional del Sur

Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el $\cdots/\cdots/\cdots$, mereciendo la calificación de $\cdots\cdots(\cdots\cdots\cdots)$.

A mis amados padres

Nilda y Beltrán

Agradecimientos

En primer lugar expreso mi agradecimiento a la Dra. Alicia Ziliani, quién dirigió esta tesis con incondicional dedicación y sabiduría, guiándome en mis primeros pasos en investigación en Matemática con cariño y comprensión.

Al Dr. Aldo V. Figallo, quien con generosidad me ayudó a iniciar mis estudios en lógica matemática, por sus valiosos aportes, estímulo y confianza.

A la Lic. Inés Pascual por sus enseñanzas a lo largo de mis años de estudios.

A mi amado esposo Daniel por su infinita comprensión, y a mis hijos que con amor permitieron que restara tiempo con ellos.

Finalmente, a todos los que, de una u otra forma, contribuyeron para que hoy me encuentre en esta instancia de mi carrera.

Abstract

De Morgan pseudocomplemented algebras were first considered by A. Romanowska ([66]) who called them $pM-$algebras and characterized the finite subdirectly irreducible algebras. Later on, H. Sankappanavar ([67, 68]) continued studying $pM-$algebras by examining congruences and characterizing all the subdirectly irreducible algebras.

On the other hand, A. V. Figallo and P. Landini ([23, 21]), with the aim of presenting different axiomatic for tetravalent modal algebras ([42, 43]), they proved that $pM-$algebras verifying the additional condition $x\vee \sim x \leq x \vee x^*$ admit a tetravalent modal algebra structure. Hence, they called them De Morgan pseudocomplemented modal algebras, or $mpM-$algebras, for short.

Our aim in this thesis is to study in deep the variety $\boldsymbol{mpM}$ of $mpM-$algebras. More precisely, we have organized this work in four chapters. In Chapter I, basic definitions are provided and we do also a review of the most important results in universal algebra. Furthermore, we have also included a brief discussion on Priestley's dualities for bounded distributive lattices and $p-$algebras ([60, 61, 63]). Finally, we describe W. Cornish and P. Fowler's duality ([18, 19]) for De Morgan algebras. These topics have been included not only to simplify the reading but also to fix the notations and the definitions that we will

use in this volume.

In Chapter II, we began the study of $mpM-$algebras. Here, we boarded the problem of characterizing the subdirectly irreducible members of this variety. To this aim, we determine a topological duality for these algebras which allowed us to characterize the congruence lattice. We must point out that this duality is strongly used throughout all this work. Furthermore, we prove that $mpM-$algebras constitute a locally finite, semisimple, residually small and residually finite variety. In the last section of this chapter we obtain, by means of algebraic techniques, other characterizations of the congruences by means of special subsets of the algebra. Some of the above results were presented in the Annual Meeting of the Unión Matemática Argentina in 2004 and 2006.

In Chapter III, and in order to obtain more information on the variety $\boldsymbol{mpM}$, we carried out a detailed study of the principal congruences. First, we indicate two descriptions of them by means certain subsets of the associated space to an $mpM-$algebra, which allowed us to conclude that they constitute a Boolean algebra. Next we show, among other results, that $\boldsymbol{mpM}$ is a discriminator variety which also provided us many properties of $mpM-$congruences. Later on, we prove that principal and Boolean congruences coincide and this statement allows us to determine the number of congruences in the finite $mpM-$algebras. By the end of this chapter, we determine the ternary discriminator polynomial for this variety and we also establish an equational description of the principal congruences. It is worth mentioning that some of the topics presented in this chapter were previously discussed at the *XIII Latin American Symposium on Mathematical Logic*, Oaxaca, Mexico, and in the *Annual Meeting of the Unión Matemática Argentina* in 2006 and 2007 respectively.

Chapter IV consists of 2 sections. In the first one, we focus our study on the properties of finite and finitely generated $mpM-$algebras. In the second one, we determine the structure of the free $mpM-$algebras with a finite set of free generators. Finally, we indicate a formula which allows us to calculate the cardinal number of the free $mpM-$algebras in terms of the number of the free generators of the algebras. Some of the results of this chapter were presented at the Annual Meeting of the Unión Matemática Argentina in 2008,

Some of the topics of this thesis have been accepted for publication in ([24]).

Resumen

Las álgebras de De Morgan pseudocomplementadas fueron consideradas por primera vez por A. Romanowska ([66]) quien las denominó $pM-$álgebras y caracterizó las álgebras subdirectamente irreducibles finitas. Posteriormente, H. Sankappanavar ([67, 68]) continuó con el estudio de las $pM-$álgebras examinando las congruencias y caracterizando todas las subdirectamente irreducibles.

Por otra parte, A. V. Figallo y P. Landini ([23, 21]) con el propósito de presentar distintas axiomáticas para las álgebra tetravalente modales ([42, 43]), mostraron que las $pM-$álgebras que verifican la condición adicional $x\vee \sim x \leq x \vee x^*$ admiten una estructura de álgebra tetravalente modal y las denominaron álgebras de De Morgan pseudocomplementadas modales ó $mpM-$álgebras, para abreviar.

En esta tesis hacemos un estudio detallado de la variedad de las $mpM-$álgebras. Al volumen lo hemos organizado en cuatro capítulos. En el Capítulo I, damos las definiciones básicas y hacemos un repaso de los resultados más importantes de álgebra universal. También hemos incluído una breve exposición sobre la teoría de la dualidad de Priestley para los retículos distributivos acotados y para las $p-$álgebras ([60, 61, 63]). Por último, describimos la dualidad de W. Cornish y P. Fowler ([18, 19]) para las álgebras de De

Morgan. Todos estos temas los hemos incluido tanto para facilitar la lectura como para fijar los conceptos que utilizaremos en los capítulos posteriores.

En el Capítulo II, comenzamos el estudio de las $mpM-$álgebras. En él abordamos el problema de caracterizar los miembros subdirectamente irreducibles de esta variedad para lo cual determinamos, en primer lugar, una dualidad topológica para estas álgebras la que nos permitió caracterizar al retículo de las congruencias. Cabe señalar que esta dualidad es utilizada fuertemente a lo largo de todo el trabajo. Además, probamos que las $mpM-$álgebras constituyen una variedad localmente finita, semisimple, residualmente pequeña y residualmente finita. En la última sección de este capítulo obtenemos, con técnicas algebraicas, otras caracterizaciones de las congruencias a partir de ciertos subconjuntos especiales del álgebra. Algunos de los resultados anteriores fueron expuestos en la *Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la UMA* en el 2004 y el 2006.

En el Capítulo III, y con el propósito de obtener una mayor información sobre la variedad $\boldsymbol{mpM}$ de las $mpM-$álgebras, hacemos un estudio detallado de las congruencias principales. En primer lugar, indicamos dos descripciones de las mismas por medio de ciertos subconjuntos del espacio asociado lo que nos permitió concluir que ellas constituyen un álgebra de Boole. A continuación mostramos, entre otros resultados, que $\boldsymbol{mpM}$ es discriminadora lo cual nos proporcionó numerosas propiedades de las $mpM-$congruencias en general. Posteriormente, probamos que las congruencias principales y booleanas coinciden y esta afirmación hizo posible determinar el número de congruencias de las $mpM-$álgebras finitas. Finalizamos este capítulo determinando el polinomio discriminador ternario para esta variedad y estableciendo una descripción ecuacional de las congruencias principales. Cabe mencionar que algunos de los temas investigados en esta unidad fueron presentados en el *XIII Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática*, Oaxaca, Méjico en el 2006 y en la *Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la UMA* en el 2007.

El Capítulo IV consta de dos secciones. En la primera, nos abocamos al estudio de las propiedades de las $mpM-$álgebras finitas y finitamente generadas. En la segunda, determinamos la estructura de las $mpM-$álgebras libres con un conjunto finito de generadores libres y finalmente, indicamos la fórmula que nos permite calcular el cardinal de álgebra libre con un conjunto finito de generadores libres en función del número de generadores de la misma. En la *Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la UMA* del 2008 fueron expuestos parte de los resultados anteriores.

Alguno de los temas de esta tesis han sido aceptados para su publicación en ([24]).

Índice

Introducción

Es bien sabido que en la literatura existen numerosas generalizaciones de las álgebras de Boole, entre ellas se encuentran las $p-$álgebras cuyo estudio comenzó en 1929 con V. Glivenko ([30]). En 1949, P. Ribenboim ([65]) fue el primero en probar que la clase de estas álgebras constituyen una variedad mostrando que pueden ser caracterizadas como retículos distributivos con primer elemento y una operación unaria adicional * que verifica las identidades $x \wedge (x \wedge y)^* = x \wedge y^*$, $x \wedge 0^* = x$ y $0^{**} = 0$. Un caso particular de las mismas la constituyen las álgebras de De Morgan pseudocomplementadas cuyo estudio comenzó A. Romanowska en [66] y las denominó $pM-$álgebras. Cabe destacar que en la definición de las mismas no se establece ninguna relación entre las operaciones unarias * y $\sim$. Posteriormente, H. P. Sankappanavar [67, 68] continuó con el estudio de estas álgebras obteniendo, entre otros resultados, todas las $pM-$álgebras subdirectamente irreducibles. Además, investigó las subvariedades de las $pM-$álgebras que tienen la propiedad de las congruencias principales definibles ecuacionalemente. En particular, describió los miembros subdirectamente irreducibles y el retículo de las subvariedades de V_0, es decir, de las $pM-$álgebras que verifican la condición adicional $x \wedge (\sim x)^* = (\sim (x \wedge (\sim x)^*)^*$. Una de tales subvariedades es polinómicamente equivalente a las álgebras de Lukasiewicz 3-valuadas y otra, tiene conexiones con las consideradas por R. Cignoli y M. S. de Gallego en [16].

Por otra parte, las lógicas multivaluadas fueron introducidas en 1920 por J. Łukasiewicz ([48]) quien definió un cálculo proposicional 3–valuado. Con posterioridad, este autor consideró cálculos proposicionales con una cantidad finita y, aún infinita, de valores de verdad (ver [49] o [69, Capítulo IV]). Cabe destacar que en la misma época, E. Post ([59]) también estudió cálculos proposicionales con un número finito de valores de verdad, diferentes de los de Łukasiewicz. En 1940, G. Moisil introdujo la noción de álgebra de Łukasiewicz 3–valuada con el propósito de obtener la contrapartida algebraica de la correspondiente lógica de Łukasiewicz. La definición original dada por Moisil para las álgebras de Łukasiewicz 3−valuadas fue simplificada por él en 1960, y presentada de manera diferente por diversos autores entre los que podemos citar [54, 15, 3]. Posteriormente en 1966, L. Monteiro ([56]) demostró que de los ocho axiomas indicados por A. Monteiro, siete son independientes. Para exhibir la independencia de uno de ellos consideró un ejemplo que motivó a A. Monteiro para definir una nueva variedad de álgebras a la que denominó álgebras tetravalentes modales. I. Loureiro, por sugerencia de Monteiro, inició el estudio de las mismas y los resultados obtenidos forman parte de su tesis doctoral ([43]) (ver también [41, 42, 45, 46, 47]). Ellas también fueron investigadas por diferentes autores (ver [21, 23, 28, 42, 43]). Actualmente estas álgebras continúan siendo tema de estudios de diferentes autores. Desde el punto de vista de la lógica, M. Coniglio y M. Figallo [26, 17] las estudiaron bajo la perspectiva de las lógicas paraconsistentes. Además, S. Celani en [13] probó, entre otros resultados, que las álgebras tetravalentes modales tienen la propiedad de amalgamación y superamalgamación.

En [23], A. Figallo y P. Landini probaron que las álgebras tetravalentes modales son polinómicamente equivalentes a las álgebras de De Morgan con una operación unaria adicional $\rceil$ que verifica:

(TM1) $x \wedge \rceil x = 0$,

(TM2) $x \vee \rceil x = x \vee \sim x$.

Entonces, como consecuencia directa de esta afirmación resulta que las $pM-$álgebras que verifican (TM2) son las álgebras tetravalentes modales. Más precisamente, ellas son las álgebras de Łukasiewicz trivalentes. Así, con el propósito de encontrar la subclase maximal de las álgebras De Morgan pseudcomplementadas que admiten una estructura de $TM-$algebra, Figallo and Landini ([23]) consideraron la subvariedad de las $pM-$álgebras que verifican:

(tm) $x \vee \sim x \leq x \vee x^*$,

y que ellos llamaron álgebras De Morgan pseudcomplementadas modales (o $mpM-$ álgebras). Posteriormente, A. Figallo ([21]) mostró que toda $mpM-$álgebra es una $TM-$álgebra definiendo $\nabla x = \sim (\sim x \wedge x^*)$. Sin embargo, las variedades de las $mpM-$álgebras y las $TM-$álgebras no coinciden como lo mostraremos en la Sección 2.3.

Por otra parte, cabe mencionar que estas álgebras constituyen una subvariedad propia de la variedad $\mathcal{V}_0$ descripta anteriormente ([68]). Para ello es suficiente considerar el álgebra L_4 cuyo diagrama de Hasse se indica a continuación y donde las operaciones $\sim$ y * están dadas en las siguientes tablas:

x	$\sim x$	x^*
0	1	1
a	b	0
b	a	0
1	0	0

donde $b = a \vee \sim a \not\leq a \vee a^* = a$.

Por las consideraciones antes expuestas, creemos que la variedad $\boldsymbol{mpM}$ de las $mpM-$álgebras merece ser investigada.

1. Capítulo I

Comenzaremos este capítulo haciendo un repaso de las definiciones básicas y de los resultados más importantes de álgebra universal, todos ellos necesarios en lo que sigue. También desarrollaremos una breve exposición sobre la teoría de la dualidad de Priestley para diversas clases de álgebras. Además, daremos por conocida la teoría de los retículos distributivos y para ampliar detalles sobre este tema el lector interesado puede consultar, por ejemplo [2, 7]. Comenzaremos introduciendo algunas notaciones.

Sean X, Y conjuntos. Dada una relación $R \subseteq X \times Y$, para cada $Z \subseteq X$, $R(Z)$ denotará la imagen de Z por R. Si $Z = \{x\}$, escribiremos $R(x)$ en lugar de $R(\{x\})$. Además, para cada $V \subseteq Y$, $R^{-1}(V)$ denotará la imagen inversa de V por R, i.e., $R^{-1}(V) = \{x \in X : R(x) \cap V \neq \emptyset\}$. Si $V = \{y\}$, escribiremos $R^{-1}(y)$ en lugar de $R^{-1}(\{y\})$. Por otra parte, denotaremos con R^{op} a la relación opuesta de R, i.e., $R^{op} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}$. Si R, $T \subseteq X \times X$, entonces la relación $R \circ T$ está definida por $(x, y) \in R \circ T$ si, y sólo si, existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in T$ y $(z, y) \in R$.

Si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado e $Y \subseteq X$, entonces representaremos con $(Y]\,([Y))$ el conjunto de todos los $x \in X$ tal que $x \leq y$ $(y \leq x)$ para algún $y \in Y$, y diremos que Y es creciente (decreciente) si $Y = [Y)$ $(Y = (Y])$. Escribiremos $(y]\,([y))$ en lugar de $(\{y\}]\,([\{y\}))$. Además, denotaremos con $max\, Y$ $(min\, Y)$ al conjunto de los elementos maximales (minimales) de Y.

Una relación $R \subseteq X \times X$ es creciente si para todo $(x, y) \in X \times X$ y todo $y, z \in X$, $(x, y) \in R$ e $y \leq z$ implican $(x, z) \in R$, i.e. si $R(x)$ es creciente para todo $x \in X$. Considerando la relación de orden opuesta, $Q \subseteq X \times X$ es decreciente si $(x, y) \in Q$ y $z \leq y$ implican $(x, z) \in Q$.

1.1. Elementos de álgebra universal

En esta sección expondremos algunas notaciones y resultados de álgebra universal que necesitamos en este trabajo. Los mismos pueden ampliarse en [12, 34] y en las referencias que estos autores citan.

1.1.1. Álgebras, subálgebras y homomorfismos

Álgebras

Un *tipo de similaridad* $\mathcal{F}$ es una $m-$ upla $(n_1, \ldots, n_m)$ de enteros no negativos. El orden de $\mathcal{F}$ es m y escribiremos $\mathcal{O}(\mathcal{F}) = m$.

Un *álgebra* $\mathcal{A}$ *de tipo* $\mathcal{F} = (n_1, \ldots, n_{\mathcal{O}(\mathcal{F})})$ es un par $\langle A, F\rangle$ donde A es un conjunto no vacío y F es una $\mathcal{O}(\mathcal{F})-$upla $(f_1^{\mathcal{A}}, f_2^{\mathcal{A}}, \ldots, f_{\mathcal{O}(\mathcal{F})}^{\mathcal{A}})$ tal que para cada i, $1 \leq i \leq \mathcal{O}(\mathcal{F})$, $f_i^{\mathcal{A}}$ es una operación n_i-aria sobre A. En general, cuando no haya lugar a confusión, escribiremos f_i en lugar de $f_i^{\mathcal{A}}$ y a cada álgebra $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$ la notaremos simplemente con el conjunto A.

Subálgebras

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una *subálgebra* de $\mathcal{A}$ y lo notaremos $\mathcal{B} \triangleleft \mathcal{A}$, (o simplemente $B \triangleleft A$) si $B \subseteq A$ y cada operación de $\mathcal{B}$ es la restricción de la correspondiente operación de $\mathcal{A}$.

Dada un álgebra $\mathcal{A}$, para cada $X \subseteq A$ definimos

$$[X] = \bigcap \{B : X \subseteq B \text{ y } B \text{ es una subálgebra de } A\}.$$

Entonces $[X]$ es una subálgebra de A, llamada la subálgebra generada por X.

Si $X \subseteq A$, diremos que X genera a $\mathcal{A}$ o que $\mathcal{A}$ está generada por X si $[X] = A$. El álgebra $\mathcal{A}$ es finitamente generada si tiene un conjunto finito de generadores.

Homomorfismos

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Una función $h : A \longrightarrow B$ se dice un *homomorfismo* de A en B si para cada símbolo de función n–ario f de $\mathcal{F}$ y para toda $n-$upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de elementos de A se verifica que:

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

Si h es inyectiva, diremos que h es una *inmersión* y si h es sobreyectiva, se denomina *epimorfismo*. En el caso que h sea biyectiva, el homomorfismo h es llamado *isomorfismo*, además diremos que A es *isomorfa* a B y escribiremos $A \simeq B$.

A continuación daremos diversos ejemplos de álgebras que utilizaremos más adelante y también repasaremos algunas propiedades y resultados que serán necesarios para el desarrollo posterior.

1. Álgebras de Boole

Un *álgebra de Boole* es un álgebra $\langle L, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ donde el reducto $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado y se satisfacen las siguientes condiciones:

(B1) $x \wedge x' = 0$,

(B2) $x \vee x' = 1$.

Las álgebras de Boole, introducidas por G. Boole en 1850, son los modelos algebraicos del cálculo proposicional de la lógica clásica. Para una mayor información sobre estas álgebras se pueden consultar, por ejemplo en [37].

2. Retículos distributivos pseudocomplementados

Existen en la literatura numerosas generalizaciones de las álgebras de Boole en las cuales la negación es reemplazada por diversas operaciones unarias, que satisfacen algunas de las propiedades de la operación original. Una de ellas son los retículos distributivos pseudocomplementados cuyo estudio comenzó con un trabajo de V. Glivenko ([30]) en 1929.

Un álgebra $\langle L, \vee, \wedge, ^*, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ es un *retículo distributivo pseudocomplementado* (o $p-$*álgebra*) si $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado tal que para cada $a \in L$, el elemento a^* es el pseudocomplemento de a; i.e. $x \leq a^*$ si y sólo si $a \wedge x = 0$.

Cabe destacar que numerosos autores tales como H. Lakser y G. Grätzer ([35]) denominaron a estas álgebras $p-$*álgebras distributivas* ya que el nombre de $p-$álgebras en general, es utilizado por autores tales como H. P. Sankappanavar ([67]), T. Hecht y T. Katriňák ([38]) para las no necesariamente distributivas.

En 1949, P. Ribenboim ([65]) mostró que la clase de las $p-$álgebras constituyen una variedad. Más precisamente, probó que estas álgebras son retículos distributivos acotados con una operación unaria adicional * que verifica las siguientes identidades:

(R1) $x \wedge (x \wedge y)^* = x \wedge y^*$,

(R2) $x \wedge 0^* = x$,

(R3) $0^{**} = 0$.

Es bien conocido que en toda $p-$álgebra L se verifican las siguientes propiedades para todo $a, b \in L$:

(P1) $a \wedge a^* = a^{**} \wedge a^* = 0$,

(P2) $a \wedge b = 0$ si, y sólo si, $a \leq b^*$,

(P3) $a \leqslant a^{**}$,

(P4) $a^{***} = a^*$,

(P5) $a \wedge b = 0$ si, y sólo si, $a^{**} \wedge b = 0$,

(P6) $a \leqslant b$ implica $b^* \leqslant a^*$,

(P7) $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$,

(P8) $(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}$,

(P9) $(a^{**} \vee b^{**})^{**} = (a \vee b)^{**}$,

(P10) $(a \vee a^*)^* = 0$.

3. Álgebras de De Morgan

Un *álgebra de De Morgan* (o *M–álgebra*) es un álgebra $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ donde el reducto $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado y se verifican las siguientes condiciones:

(M1) $\sim\sim x = x$,

(M2) $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$.

En lo que sigue y por simplicidad, al álgebra de De Morgan $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ la notaremos con $(L, \sim)$.

De la definición resulta que en toda M–álgebra se verifican las siguientes propiedades:

(M3) $x \leq y$ si, y sólo si, $\sim y \leq \sim x$,

(M4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$,

(M5) $\sim 1 = 0$.

(M6) Si $(L, \sim)$ es una M–álgebra con más de un elemento, se puede definir sobre el conjunto $X(L)$ de todos los filtros primos de L la transformación φ llamada *transformación de Birula y Rasiowa* que a cada $P \in X(L)$ le asigna $\varphi(P) = L \setminus \sim P \in X(L)$, donde $\sim P = \{\sim x : x \in P\}$ ([6]). Las dos propiedades importantes de φ son:

(φ_1) $\varphi\varphi(P) = P$, para cada $P \in X(L)$,

(φ_2) si P, $Q \in X(L)$ son tales que $P \subseteq Q$, entonces $\varphi(Q) \subseteq \varphi(P)$.

La noción de álgebra de De Morgan fue estudiada por A. Bialynicki-Birula y H. Rasiowa ([6]) y por H. Rasiowa ([64]) como un instrumento algebraico para el estudio de lógicas constructivas con negación fuerte. Estos autores dan en sus trabajos a las álgebras de De Morgan el nombre de *álgebras quasi–booleanas*.

4. Álgebras de De Morgan pseudocomplementadas

El estudio de álgebras más complejas en las cuales dos o más generalizaciones de las álgebras de Boole ocurren simultáneamente dieron origen, entre otras, a las álgebras de De Morgan pseudocomplementadas.

Un *álgebra de De Morgan pseudocomplementada* es un álgebra $\langle L, \vee, \wedge, \sim, ^*, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ tal que $\langle L, \vee, \wedge, ^*, 0, 1\rangle$ es una $p-$álgebra y $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es un álgebra de De Morgan.

Cabe destacar que en la definición anterior no se establece ninguna relación entre las operaciones $\sim$ y *.

En [66], A. Romanowska denominó a estas álgebras $pM-$álgebras y determinó las $pM-$álgebras subdirectamente irreducibles finitas. Posteriormente, H. Sankappanavar [68] caracterizó a todas las subdirectamente irreducibles así como también a las $pM-$congruencias principales.

5. Álgebras de Łukasiewicz trivalentes

La teoría de las álgebras de Łukasiewicz trivalentes fue introducida y desarrollada por Gr. Moisil [52]. A. Monteiro (ver [54, 55]) indicó una axiomática equivalente a la dada por Moisil y la que daremos a continuación es debida a L. Monteiro (ver [56]).

Un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, \sim, \nabla, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ se dice un *, álgebra de Łukasiewicz trivalente* si el reducto $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es un álgebra de De Morgan y se satisfacen las identidades:

(L1) $\sim x \vee \nabla x = 1$,

(L2) $\sim x \wedge \nabla x = \sim x \wedge x$,

(L3) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

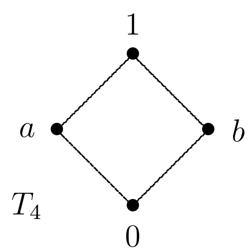
6. Álgebras tetravalentes modales

En 1978, A. Monteiro introdujo a las álgebras tetravalentes modales como una generalización de las álgebras Łukasiewicz trivalentes omitiendo la identidad $(L3)$. Más precisamente,

Un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, \sim, \nabla, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ es un *álgebra tetravalente modal* (o $TM-$*álgebra*), si el reducto $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es un álgebra de De Morgan y se satisfacen las identidades (L1) y (L2) indicadas anteriormente.

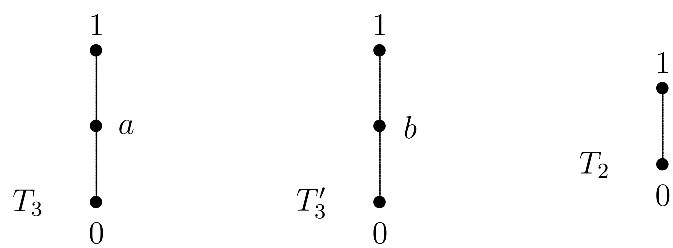
La teoría de las $TM-$álgebras ha sido desarrollada por I. Loureiro en [41, 42, 43, 44, 45, 46, 47] y A. V. Figallo en [20, 21, 22]. J. Font y M. Rius indicaron, en la introducción del importante trabajo [28], una breve pero detallada reseña sobre estas álgebras.

En [43], I. Loureiro demostró que si A es una $TM-$álgebra con más de un elemento, entonces existe un conjunto no vacío X tal que A es isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{T}_4^X$, con $\mathcal{T}_4 = \langle T_4, \vee, \wedge, \sim, \nabla, 1\rangle$, donde $T_4 = \{0, a, b, 1\}$ tiene el diagrama de Hasse indicado en la figura y $\sim, \nabla$ están definidas por medio de las siguientes tablas:



x	$\sim x$	∇x
0	1	0
a	a	1
b	b	1
1	0	1

Denotaremos con $\mathcal{T}_3$, $\mathcal{T}_3'$ y $\mathcal{T}_2$ a las únicas subálgebras de $\mathcal{T}_4$.



$\mathcal{T}_3$ y $\mathcal{T}_3'$ son álgebras isomorfas.

1.1.2. Productos directos y subdirectos

Productos directos

Sea $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ una familia de álgebras de tipo $\mathcal{F}$. Entonces el *producto directo* $\mathcal{A} = \prod\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ es un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ cuyo soporte es $\prod\limits_{i\in I} A_i$ y si $f \in \mathcal{F}$ es un símbolo de operación

$n-$ario y $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{i\in I} A_i$, se define $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)(i) = f^{\mathcal{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$, es decir $f^{\mathcal{A}}$ se define coordenada a coordenada.

La aplicación $p_j : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_j$ definida por $p_j(a) = a_j$ para cada $j \in I$ es llamada la *proyección sobre la $j-$ésima coordenada* y determina el epimorfismo $p_j : \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A}_j$.

Una clase $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ de álgebras del mismo tipo es una *variedad*, si es una clase cerrada por imágenes homomórficas, subálgebras y productos directos.

Productos subdirectos

Un álgebra $\mathcal{A}$ es *producto subdirecto* de una familia de álgebras de tipo $\mathcal{F}$ $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$, si se verifican las siguientes condiciones:

(PS1) existe una inmersión $h : \mathcal{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$,

(PS2) la composición $p_j \circ h : A \longrightarrow A_j$ es sobreyectiva, donde $p_j : \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A}_j$ es la proyección sobre la $j-$ésima coordenada para cada $j \in I$.

Un álgebra $\mathcal{A}$ es *subdirectamente irreducible*, si tiene más de un elemento y, si $\mathcal{A}$ es producto subdirecto de la familia de álgebras $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ entonces existe $i \in I$ tal que $p_i \circ h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_i$ es un isomorfismo, siendo h cualquier función que verifica (PS1) y (PS2).

1.1.3. Congruencias y álgebras cociente

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ y sea $\theta \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia. Entonces diremos que θ es una *congruencia* sobre $\mathcal{A}$, si satisface la siguiente propiedad de compatibilidad:

(PC) para cada símbolo de función $n-$ario $f \in \mathcal{F}$ y elementos $a_i, b_i \in A$, si $a_i \,\theta\, b_i$ para todo i, $1 \leq i \leq n$, entonces $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \,\theta\, f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n)$.

El conjunto de todas las congruencias sobre un álgebra $\mathcal{A}$ lo denotaremos por $Con(\mathcal{A})$ o por $Con(A)$ cuando sea conveniente. Si $\theta \in Con(\mathcal{A})$, para cada $x \in A$ representaremos con $[x]_\theta$ y $\mathcal{A}/\theta$ la clase de congruencia de x relativa a θ y el álgebra cocinte $\mathcal{A}/\theta$, respectivamente. $\mathcal{A}/\theta$ es el álgebra cuyo universo es A/θ y cuyas operaciones fundamentales están definidas por

$$f^{\mathcal{A}/\theta}([a_1]_\theta, [a_2]_\theta, \ldots, [a_n]_\theta) = [f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)]_\theta,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ y f es un símbolo de función $n-$ario en $\mathcal{F}$. Las álgebras cocientes de $\mathcal{A}$ son del mismo tipo que $\mathcal{A}$. Por lo tanto, la aplicación canónica $q : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\theta$ es un epimorfismo.

Un resultado importante es el siguiente:

Teorema 1.1.1. *$Con(\mathcal{A})$ ordenado por la relación de inclusión es un retículo acotado y completo, cuyo primer elemento es la relación id_A identidad sobre A y cuyo último elemento es $A \times A$.*

El retículo de las congruencias de un retículo es siempre distributivo aunque el retículo general no lo sea.

La siguiente caracterización de las álgebras subdirectamente irreducibles es muy útil y la usaremos con frecuencia.

Teorema 1.1.2. *Un álgebra $\mathcal{A}$ es subdirectamente irreducible si, y sólo si, existe una única $\rho \in Con(\mathcal{A})$, $\rho \neq id_A$ tal que $\rho \subseteq \theta$ para toda $\theta \in Con(\mathcal{A}) \setminus \{id_A\}$.*

Un teorema fundamental del álgebra universal debido a G. Birkhoff es el siguiente:

Teorema 1.1.3. (*Birkhoff*) *Toda álgebra A con más de un elemento es isomorfa a un producto subdirecto de álgebras subdirectamente irreducibles (las cuales son imágenes homomórficas de A).*

Como consecuencia inmediata del teorema anterior resultan los siguientes corolarios:

Corolario 1.1.4. *Toda álgebra finita es isomorfa a un producto subdirecto de un número finito de álgebra subdirectamente irreducibles finitas.*

Corolario 1.1.5. *Toda variedad está determinada por sus miembros subdirectamente irreducibles.*

Por otra parte, recordemos que una clase particular de álgebras subdirectamente irreducibles son las simples, donde un álgebra $\mathcal{A}$ con más de un elemento es *simple* si, y sólo si, las únicas congruencias de $\mathcal{A}$ son las triviales, es decir id_A y $A \times A$. Además un álgebra $\mathcal{A}$ con más de un elemento se dice *semisimple*, si es isomorfa al producto subdirecto de una familia de álgebras simples. Una *variedad* $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ es *semisimple*, si cada miembro de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ es semisimple.

Una caracterización de las variedades semisimples es la siguiente:

Teorema 1.1.6. *Una variedad $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ es semisimple si, y sólo si, cada miembro de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ subdirectamente irreducible es simple.*

Propiedad de extensión de congruencias

Un álgebra $\mathcal{A}$ tiene la *propiedad de extensión de congruencias* (PEC), si para cada subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ y cada $\theta \in Con(\mathcal{B})$ existe $\Phi \in Con(\mathcal{A})$ tal que $\Phi \cap (\mathcal{B} \times \mathcal{B}) = \theta$.
Una clase $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ de álgebras tiene la (PEC), si toda álgebra de $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ la tiene.

A continuación describiremos algunas congruencias especiales que juegan un papel importante en el desarrollo del Capítulo III.

Congruencias principales

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y $a_1, \ldots, a_n \in A$, con $\theta(a_1, \ldots, a_n)$ denotaremos la congruencia generada por $\{(a_i, a_j) : 1 \leq i, j \leq n\}$ es decir, la menor congruencia tal que $a_1, \ldots, a_n$

están en la misma clase de equivalencia. Llamaremos *congruencia principal* a $\theta(a_1, a_2)$ y notaremos con $Con_P(\mathcal{A})$ al conjunto de las congruencias principales de A.

Propiedad de congruencias principales definibles ecuacionalmente

Una variedad $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ tiene la *propiedad de congruencias principales definibles ecuacionalmente* (PCPDE), si existe un número finito de pares $(p_1, q_1), \ldots, (p_n, q_n)$ de polinomios en cuatro variables tal que para toda álgebra $\mathcal{A} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ y cualesquiera sean $a, b, c, d \in A$, $(c, d) \in \theta(a, b)$ si, y sólo si, $p_i(a, b, c, d) = q_i(a, b, c, d)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

En el Capítulo III obtendremos diversas descripciones de las congruencias principales en las álgebras objeto de nuestro estudio.

Congruencias factores

Dada un álgebra $\mathcal{A}$, $\theta \in Con(\mathcal{A})$ es una *congruencia factor*, si existe $\phi \in Con(\mathcal{A})$ tal que

(F1) $\theta \cap \phi = id_A$,

(F2) $\theta \vee \phi = A \times A$,

(F3) $\theta \circ \phi = \phi \circ \theta$.

El par θ, ϕ se denomina *par de congruencias factores* en $\mathcal{A}$.

Álgebras directamente indescomponibles

Un álgebra $\mathcal{A}$ es *directamente indescomponible* si $\mathcal{A}$ no es isomorfa al producto directo de dos álgebras no triviales.

Las congruencias factores de un álgebra $\mathcal{A}$ permiten caracterizar a las álgebras directamente indescomponibles del siguiente modo:

Teorema 1.1.7. *Un álgebra $\mathcal{A}$ es directamente indescomponible si, y sólo si, las únicas congruencias factores de $\mathcal{A}$ son id_A y $A \times A$.*

Además, se verifica

Teorema 1.1.8. *Un álgebra subdirectamente irreducible es directamente indescomponible.*

Uno de los temas importantes de álgebra universal es el estudio de ciertas propiedades de las congruencias de un álgebra. En particular, las que presentamos a continuación.

Álgebras a congruencias conmutativas

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a *congruencias conmutativas*, si se verifica que $\theta \circ \rho = \rho \circ \theta$ para toda $\theta, \rho \in Con(\mathcal{A})$. Una clase $\mathfrak{K}$ de álgebras es a congruencias conmutativas, si toda álgebra de $\mathfrak{K}$ es a congruencias conmutativas.

Álgebras a congruencias regulares

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a *congruencias regulares*, si para toda $\theta, \rho \in Con(\mathcal{A})$ se verifica la siguiente condición: $[a]_\theta = [a]_\rho$ para algún $a \in A$ implica $\theta = \rho$.

Una clase $\mathfrak{K}$ de álgebras es a congruencias regulares, si toda álgebra de $\mathfrak{K}$ es a congruencias regulares.

Álgebras a congruencias uniformes

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a *congruencias uniformes* o *normales*, si para toda $\theta \in Con(\mathcal{A})$ y para todo $a, b \in A$ $|[a]_\theta| = |[b]_\theta|$ donde $|X|$ denota el número de elementos de X.

Una clase $\mathfrak{K}$ de álgebras es a congruencias normales, si toda álgebra de $\mathfrak{K}$ es a congruencias normales.

Álgebras a congruencias distributivas

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a *congruencias distributivas* si $Con(\mathcal{A})$ es un retículo distributivo. Una clase $\mathcal{K}$ de álgebras es a congruencias distributivas si, y sólo si, toda álgebra de $\mathcal{K}$ es a congruencias distributivas.

Un resultado que vincula propiedades de las congruencias y que será de interés más adelante debido a W.J. Blok y D. Pigozzi es el siguiente

Teorema 1.1.9. ([8]) *Toda variedad con la PCPDE es a congruencias distributivas y tiene la PEC.*

Variedades directamente representables

Una variedad $\mathcal{V}$ es *directamente representable* si está finitamente generada y tiene (a menos de isomorfismo) sólo un número finito de miembros directamente indescomponibles finitos.

Un importante estudio de estas variedades fue hecha por McKenzie en [51] (ver también [12, pp. 188–189]).

Teorema 1.1.10. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad directamente representable, entonces*

(i) *todo miembro finito de $\mathcal{V}$ es a congruencias uniformes,*

(ii) *$\mathcal{V}$ es a congruencias conmutativas.*

Variedades aritméticas

Una variedad $\mathcal{V}$ es *aritmética* si es a congruencias distributivas y conmutativas.

1.2. Dualidades topológicas para varias clases de álgebras

En esta sección repasaremos la dualidad de Priestley para los retículos distributivos acotados y sus extensiones a distintas clases de álgebras.

1.2.1. Dualidad para los retículos distributivos

En lo que sigue indicaremos con $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ a la categoría de los retículos distributivos acotados y sus correspondientes homomorfismos.

Recordemos que un *espacio topológico totalmente disconexo en el orden* es una terna $(X, \tau, \leq)$ donde $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, (X, τ) es un espacio topológico y dados $x, y \in X$ tales que $x \not\leq y$, existe $U \subseteq X$ abierto, cerrado y creciente tal que $x \in U$ e $y \notin U$.

Un *espacio de Priestley* (o *P–espacio*) es un espacio topológico compacto y totalmente disconexo en el orden. Una *P–función* de un P–espacio en otro es una función continua y creciente.

A la categoría de los P–espacios y las P–funciones la denotaremos con $\boldsymbol{\mathcal{P}}$. Como es usual, a los objetos de $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ lo representaremos por su conjunto subyacente X.

H. Priestley en [60, 61] definió los funtores contravariantes $\Psi : \boldsymbol{\mathcal{P}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{L}}$ y $\Phi : \boldsymbol{\mathcal{L}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{P}}$ como sigue:

- si X es un objeto de $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, $\Psi(X) = \boldsymbol{D}(X)$ donde $\boldsymbol{D}(X) = \langle D(X), \cup, \cap, \emptyset, X \rangle$ es el retículo de los subconjuntos abiertos, cerrados y crecientes de X,

- para cada $f \in \boldsymbol{\mathcal{P}}(X_1, X_2)$, $\Psi(f)(U) = f^{-1}(U)$ para cada $U \in \boldsymbol{D}(X_2)$.

  Además,

- si L es un objeto en $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, $\Phi(L) = \boldsymbol{X}(L)$ donde $\boldsymbol{X}(L) = (X(L), \subseteq, \tau)$ el conjunto de los filtros primos de L ordenados por la relación inclusión y con la topología que tiene como sub-básicos a los conjuntos de la forma $\sigma_L(a) = \{P \in X(L) : a \in P\}$ y $X(L) \setminus \sigma_L(a)$ para cada $a \in L$,

- si $h \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(L_1, L_2)$, entonces $\Phi(h)(P) = h^{-1}(P)$ para cada $P \in X(L_2)$.

Por otra parte, $\sigma_L : L \longrightarrow \boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}(L))$ es un isomorfismo de retículos distributivos acotados y la función $\varepsilon_X : X \longrightarrow \boldsymbol{X}(\boldsymbol{D}(X))$ definida por $\varepsilon_X(x) = \{U \in D(X) : x \in U\}$ es un isomorfismo en $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, es decir, es un homeomorfismo y un isomorfismo de orden. Así, los funtores Ψ y Φ establecen una completa dualidad entre las categorías $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{P}}$.

Por otra parte H. A. Priestley caracterizó a las congruencias de los retículos distributivos acotados por medio de ciertos subconjuntos del P–espacio asociado de la siguiente manera:

Teorema 1.2.1. *Sea L un retículo distributivo acotado e Y un subconjunto cerrado de $\boldsymbol{X}(L)$. Entonces*

$$\Theta(Y) = \{(a, b) \in L \times L : \sigma_L(a) \cap Y = \sigma_L(b) \cap Y\}$$

es una congruencia en L y la correspondencia $Y \longrightarrow \Theta(Y)$ establece un anti-isomorfismo entre el retículo de todos los subconjuntos cerrados de $\boldsymbol{X}(L)$ y el retículo de las congruencias de L.

Observemos que las congruencias en los retículos distributivos acotados también pueden ser caracterizadas del siguiente modo:

Teorema 1.2.2. *Sea L un retículo distributivo acotado y G un subconjunto abierto de $\boldsymbol{X}(L)$. Entonces*

$$\Theta_O(G) = \{(a, b) \in L \times L : \sigma_A(b) \blacktriangle \sigma_A(a) \subseteq G\}$$

donde $K\blacktriangle H$ denota la diferencia simétrica de los conjuntos K y H, es una congruencia en L y la correspondencia $G \longrightarrow \Theta_O(G)$ establece un isomorfismo entre el retículo de todos los subconjuntos abiertos de $\boldsymbol{X}(L)$ y el retículo de las congruencias de L.

Esta última descripción será fundamental para el estudio de las congruencias principales en las álgebras de De Morgan modales pseudocomplementadas.

Las siguientes propiedades de los espacios de Priestley serán usados frecuentemente en este trabajo.

Proposición 1.2.3. *Sea X un espacio de Priestley y R un subconjunto cerrado de X. Entonces,*

(Pr1) $max\, R \neq \emptyset$ *y* $min\, R \neq \emptyset$,

(Pr2) *para cada* $x \in R$ *existen* $y \in min\, R$ *y* $z \in max\, R$ *tales que* $y \leq x \leq z$,

(Pr3) $[R)$ *y* $(R]$ *son subconjuntos cerrados.*

Dem. Sólo mostraremos (Pr3) ya que (Pr1) y (Pr2) pueden ser consultadas en [62].

(Pr3): Sea $P \in X\setminus[R)$. Entonces $Q \not\subseteq P$, para todo $Q \in R$. Luego, por la total disconexión en el orden, para cada $Q \in R$ existe $U_{QP} \in D(X)$ tal que $Q \in U_{QP}$ y $P \notin U_{QP}$. Como $R \subseteq \bigcup\limits_{Q\in R} U_{QP}$ y es compacto, tenemos que $R \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{Q_iP}$. Entonces, $V = X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{Q_iP}$ es abierto y decreciente. Por otra parte, es claro que $P \in V$ y $R \cap V = \emptyset$. Además, $[R) \cap V = \emptyset$. En efecto, si $T \in [R) \cap V$, entonces existe $S \in R$ tal que $S \subseteq T$ y como V es decreciente resulta que $S \in V$. De esta afirmación concluimos que $S \in R \cap V$ lo que es una contradicción. Luego, para cada $P \in X \setminus [R)$ existe V abierto tal que $P \in V$ y $V \subseteq X \setminus [R)$ y por lo tanto $[R)$ es cerrado.

La demostración de la otra afirmación es análoga. $\square$

1.2.2. Dualidad para las $\boldsymbol{p}-$álgebras

En adelante, indicaremos con $\boldsymbol{\mathcal{L}_p}$ a la categoría de las $p-$álgebras y sus correspondientes homomorfismos.

En [63], H. Priestley describió una dualidad topológica para las $p-$álgebras considerando la categoría $\boldsymbol{\mathcal{P}_p}$ cuyos objetos son los $p-$espacios y cuyos morfismos son las $p-$funciones. Más precisamente,

Un $p-$*espacio* es un espacio de Priestley $(X, \tau, \leq)$ tal que para todo $U \in D(X)$, $(U]$ es un subconjunto abierto de X. Además, una $p-$*función* f de un $p-$espacio X_1 en otro X_2 es una $P-$función tal que $f(maxX_1 \cap [x)) = maxX_2 \cap [f(x))$ para cada $x \in X_1$.

Entonces se verifica que

- Si L es un objeto en $\boldsymbol{\mathcal{L}_p}$, entonces $\boldsymbol{X}(L)$ es un objeto en $\boldsymbol{\mathcal{P}_p}$.

- Si X es un objeto en $\boldsymbol{\mathcal{P}_p}$, entonces $\langle D(X), \cup, \cap, ^*, \emptyset, X\rangle$ es un objeto en $\boldsymbol{\mathcal{L}_p}$ definiendo $U^* = X \setminus (U]$ para cada $U \in D(X)$.

Además, se probó que la categoría $\boldsymbol{\mathcal{P}_p}$ es naturalmente equivalente a la dual de la categoría $\boldsymbol{\mathcal{L}_p}$, donde σ_L y ε_X, definidas de la manera indicada anteriormente, son las equivalencias naturales correspondientes. Por otra parte, H. Priestley probó que

Teorema 1.2.4. *Si L es una $p-$álgebra, entonces el retículo de todos los subconjuntos cerrados Y de $\boldsymbol{X}(L)$ tales que $maxX(L) \cap [Y) \subseteq Y$ es isomorfo al dual de retículo de todas las congruencias de L.*

1.2.3. Dualidad para las álgebras de De Morgan

W. Cornish y P. Fowler ([18], [19]) extendieron la dualidad de Priestley a las álgebras de De Morgan de la manera que indicamos a continuación.

Un *espacio de De Morgan* (o m-*espacio*) es un par (X, g), donde X es un objeto de $\boldsymbol{\mathcal{P}}$

y $g\colon X \longrightarrow X$ es un homeomorfismo involutivo y un anti-isomorfismo de orden. Por otra parte, una *m-función* de un m-espacio (X_1, g_1) en un m-espacio (X_2, g_2) es una P-función $f : X_1 \longrightarrow X_2$ tal que verifica $f \circ g_1 = g_2 \circ f$.

Denotaremos con $\boldsymbol{m}$ a la categoría de los m–espacios y las m–funciones y con $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ a la categoría de las M–álgebras y sus correspondientes homomorfismos.

Si $(L, \sim)$ es un objeto de $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ y $g_L : X(L) \longrightarrow X(L)$ está definida por

- $g_L(P) = L \setminus \{\sim x : \ x \in P\}$ para cada $P \in X(L)$,

entonces $(\boldsymbol{X}(L), g_L)$ es un objeto de $\boldsymbol{m}$. Por otra parte, si (X, g) es un m–espacio y se define la operación $\sim : D(X) \longrightarrow D(X)$ por la prescripción

- $\sim U = X \setminus g^{-1}(U)$ para cada $U \in D(X)$,

entonces $(\boldsymbol{D}(X), \sim)$ es un objeto de $\boldsymbol{\mathcal{M}}$. Luego, las categorías $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ y $\boldsymbol{m}$ son dualmente equivalentes y los isomorfismos σ_L y ε_X son las equivalencias naturales correspondientes.

Por otra parte, Cornish y Fowler en [19] introdujeron la noción de conjunto involutivo de un m–espacio (X, g) como un subconjunto Y de X tal que $g(Y) = Y$, lo que es equivalente a decir que $y \in g(Y)$ si, y sólo si, $y \in Y$. Entonces, mostraron que

Teorema 1.2.5. *Si L es un álgebra de De Morgan, entonces el retículo de todos los subconjuntos cerrados e involutivos de $\boldsymbol{X}(L)$ es isomorfo al dual del retículo de todas las congruencias de L.*

Observación 1.2.6. *Cabe mencionar que si (X, g) es un m–espacio e $Y \subseteq X$ es involutivo entonces $\overline{Y}$ es involutivo, donde $\overline{Y}$ indica la clausura de Y. En efecto, de la hipótesis resulta que $\overline{Y} = \overline{g(Y)}$ y como g es un homeomorfismo conluimos que $\overline{Y} = g(\overline{Y})$.*

2. Capítulo II

En este capítulo comenzamos el estudio de las álgebras de De Morgan pseudocomplementadas que verifican una condición adicional y a las que se denominan álgebras de De Morgan modales pseudocomplementadas. En primer lugar, establecemos una dualidad topológica para estas álgebras teniendo en cuenta las ya conocidas para las álgebras de De Morgan ([18, 19]) y para los retículos distributivos pseudocomplementados ([60, 61, 63]). A partir de esta dualidad caracterizamos el retículo de las congruencias por medio de ciertos subconjuntos del espacio asociado. Estos resultados fueron fundamentales para determinar las álgebras subdirectamente irreducibles. Además, probamos que la variedad de las álgebras de De Morgan pseudocomplementadas modales es localmente finita, semisimple, residualmente pequeña y residualmente finita. Finalmente, obtenemos con técnicas álgebraicas otras caracterizaciones de las congruencias a partir de ciertos subconjuntos especiales del álgebra.

2.1. $mpM-$álgebras

Definición 2.1.1. *Un álgebra de De Morgan pseudocomplementada modal (o mpM− álgebra) es un algebra* $\langle A, \vee, \wedge, \sim, ^*, 1\rangle$ *de tipo* $(2, 2, 1, 1, 0)$ *que verifica las siguientes condiciones:*

A1) $x \vee 1 = 1$,

A2) $x \wedge (x \vee y) = x$,

A3) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,

A4) $\sim\sim x = x$,

A5) $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$,

A6) $x \wedge (x \wedge y)^* = x \wedge y^*$,

A7) $x \wedge 0^* = x$, *donde* $0 = \sim 1$,

A8) $0^{**} = 0$,

A9) $x \vee \sim x \leqslant x \vee x^*$.

Denotaremos con $\boldsymbol{mpM}$ a la variedad de las $mpM-$álgebras. Como es usual, indicaremos a un álgebra de esta variedad simplemente con A.

De la definición anterior se deduce que toda $mpM-$ álgebra A verifica que $\langle A, \vee, \wedge, ^*, 1\rangle$ es una $p-$álgebra y $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 1\rangle$ es un álgebra de De Morgan.

Proposición 2.1.2. *En toda mpM−álgebra se verifican las siguientes propiedades:*

A10) $\sim x^* \vee \sim x = 1$,

A11) $(\sim x)^* \leqslant \sim x^*$,

A12) $x \wedge \sim (\sim x)^* \leqslant x \wedge \sim x,$

A13) $(\sim x)^* \, \wedge \, x \wedge \sim (\sim x)^* = 0,$

A14) $\sim (\sim x)^* \vee \sim x \vee (\sim x)^* = 1,$

A15) $(\sim (\sim x)^*)^* \leqslant x,$

A16) $(\sim (x \wedge y))^* = (\sim x)^* \wedge (\sim y)^*.$

A17) $(x^* \wedge y)^{**} = x^* \wedge y^{**} = (x \vee y^*)^*.$

Dem.

A10) : Es consecuencia directa de $A5$ y $P1$.

A11) : De $A10$ y $P1$ tenemos que $(\sim x)^* = (\sim x^* \vee \sim x) \wedge (\sim x)^* = \sim x^* \wedge (\sim x)^*$. Luego, $(\sim x)^* \leqslant \sim x^*$.

A12) : De $A9$ resulta que $\sim x \vee x \leqslant \sim x \vee (\sim x)^*$, de donde concluimos $x \wedge \sim (\sim x)^* \leqslant x \wedge \sim x$.

A13) : De $A12$ y $P1$, $(\sim x)^* \wedge x \wedge \sim (\sim x)^* \leqslant \, (\sim x)^* \wedge x \wedge \sim x = 0$.

A14) : Inmediata de $A13$.

A15) : Teniendo en cuenta $A11$, $P6$, $P3$ y $P4$ inferimos que $(\sim (\sim x^*))^* \leqslant \, x^* \leqslant x$.

A16) : Resulta de $P7$.

A17) : Es consecuencia directa de $P8$, $P4$ y $P7$. $\square$

2.2. Una dualidad topológica para las $mpM-$álgebras

A continuación, describiremos una dualidad topológica para las $mpM-$álgebras teniendo en cuenta las descriptas en el Capítulo 1 para los retículos distributivos pseudocomplementados y para las álgebras de De Morgan.

Definición 2.2.1. *Un espacio de De Morgan pseudocomplementado modal (o mp_M-espacio) es un par (X,g) que es un $m-$espacio y un $p-$espacio simultáneamente y verifica la condición adicional siguiente:*

(pm1) *si $x, y \in X$ y $x \leq y$, entonces $x = y$ o $g(x) = y$.*

Si (X_1, g_1) y (X_2, g_2) son mp_M-espacios, entonces $f : X_1 \longrightarrow X_2$ es una mp_M-función si f es una $m-$función y una $p-$función simultáneamente.

Observación 2.2.2. *De* (pm1) *se infiere que todo mp_M-espacio es la suma cardinal de una familia de cadenas, cada una de las cuáles tiene a lo sumo dos elementos. Luego, todo mp_M-espacio totalmente ordenado tiene a lo sumo dos elementos.*

Sea (X,g) un $mp_M - espacio$. En lo que sigue, para cada $x \in X$ denotaremos com C_x la única cadena maximal de X tal que $x \in C_x$.

Lema 2.2.3. *Sea (X,g) un mp_M-espacio y sea x un elemento maximal de X. Entonces, $C_x = \{x\}$ y $C_{g(x)} = \{g(x)\}$ o $C_x = \{x, g(x)\}$ y $C_{g(x)} = C_x$.*

Dem. Como x es un elemento maximal de X, entonces se pueden presentar los siguientes casos: $C_x = \{x\}$ o $C_x = \{z, x\}$ con $z < x$. En el primer caso, tenemos que $g(x)$ es el único elemento de $C_{g(x)}$. En efecto, supongamos que $C_{g(x)} = \{g(x), t\}$. Luego, $g(x) < t$ o $t < g(x)$. Si $g(x) < t$, entonces $g(t) < x$ lo que contradice el hecho que $C_x = \{x\}$. Por otra parte, si $t < g(x)$ resulta que $x < g(t)$, en contradicción con la maximalidad de x. Por lo tanto, $C_{g(x)} = \{g(x)\}$. En el segundo caso, tenemos que $g(z) = x$, luego $g(x) = z < x$ y por lo tanto $C_{g(x)} = \{g(x), x\} = C_x$. $\square$

El Lema 2.2.4 es la herramienta fundamental para obtener la mencionada dualidad.

Lema 2.2.4. *Sea (X, g) un mp_M-espacio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(pm1) $x \leq y$ *implica* $x = y$ *o* $g(x) = y$,

(pm2) $(X \setminus U) \cap (U] \subseteq (X \setminus U) \cap g(U)$ *para todo* $U \in D(X)$.

Dem. (pm1) $\Rightarrow$ (pm2): Sea $p \in (X \setminus U) \cap (U]$. Entonces, existe $q \in U$ tal que $p \leq q$ y por (pm1) tenemos que $p = q$ o $g(p) = q$. Si $p = q$, inferimos que $p \in U$ lo que es una contradicción. Por lo tanto, $g(p) = q$ de donde concluimos que $p \in (X \setminus U) \cap g(U)$.

(pm2) $\Rightarrow$ (pm1): Sean $x, y \in X$ tales que $x < y$. Entonces, existe $U \in D(X)$ tal que $y \in U$ y $x \notin U$. Luego, $x \in (X \setminus U) \cap (U]$ de donde por (pm2) resulta que $x \in g(U)$. Por lo tanto, existe $z \in U$ y $z = g(x)$. Si $y \neq z$, tenemos que $y \not< z$ o $y < z$.

Supongamos que $y \not< z$. Entonces por la total disconección del orden en X concluimos que existe $V \in D(X)$ tal que $y \in V$ y $z \notin V$. Sea $W = U \cap V \in D(X)$. De las afirmaciones anteriores concluimos que $x \in (X \setminus W) \cap (W]$ y por (pm2) tenemos que $x \in g(W)$. Luego, $z \in W \subseteq V$ lo que es una contradicción. Por lo tanto, $y < z$ de donde resulta que existe $H \in D(X)$ tal que $z \in H$ e $y \notin H$. Estas afirmaciones implican que $y \in (X \setminus H) \cap (H]$, entonces por (pm2) concluimos que $y \in g(H)$. Si $y = g(y)$, inferimos que $y \in H$ lo cual es una contradicción. Luego, $y \neq g(y)$.

Si suponemos que $y \not\leq g(y)$, entonces existe $S \in D(X)$ tal que $y \in S$ y $g(y) \notin S$. Sea $R = H \cap S \in D(X)$. Luego, teniendo en cuenta que $y < z$ e $y \notin H$ inferimos que $z \in R$ de donde resulta que $y \in (X \setminus R) \cap (R]$. Entonces por (pm2) $y \in g(R)$ y por lo tanto $g(y) \in S$ lo que es una contradicción. Finalmente, en el caso que $g(y) \not\leq y$, existe $T \in D(X)$ tal que $g(y) \in T$ e $y \notin T$. Además, como $x = g(z) < y$ tenemos que $g(y) < z$ de donde resulta que $z \not\leq g(y)$. Entonces, existe $K \in D(X)$ tal que $z \in K$ y $g(y) \notin K$. Sea $M = K \cap T \in D(X)$. De estas últimas afirmaciones concluimos que $g(y) \in (X \setminus M) \cap (M]$. Luego, por (pm2) tenemos que $g(y) \in g(M)$ y teniendo en cuenta que $g^2 = id_X$ resulta que $y \in M$. Por lo tanto, $y \in T$ lo que es una contradicción. □

Proposición 2.2.5. *Si X es un mp_M-espacio, entonces* $\mathsf{mpM}(X) = \langle D(X), \cup, \cap, \sim, ^*, \emptyset, X\rangle$ *es una mpM−álgebra donde para cada $U \in D(X)$, U^* y $\sim U$ están definidos en la Sección 1.2.2 y 1.2.3 respectivamente.*

Dem. De la hipótesis sólo resta probar que $U \cup \sim U \subseteq U \cup U^*$ para todo $U \in D(X)$. De $(pm2)$ tenemos que $X \setminus ((X \setminus U) \cap g(U)) \subseteq X \setminus ((X \setminus U) \cap (U])$ y por lo tanto, $U \cup (X \setminus g(U)) \subseteq U \cup (X \setminus (U])$ de donde concluimos la demostración. □

Proposición 2.2.6. *Si A es una mpM−álgebra, entonces* $\mathsf{mp_M}(A) = (X(A), g_A)$ *es un mp_M-espacio donde para todo $P \in X(A)$, $g_A(P)$ está definida en la Sección 1.2.3. Además, la función σ_A es un mpM−isomorfismo.*

Dem. De la hipótesis, la Definición 2.2.1 y el Lema 2.2.4 sólo resta probar (pm2). De (A9) resulta que $\sigma_A(a) \cup \sim \sigma_A(a) = \sigma_A(a \vee \sim a) \subseteq \sigma_A(a \vee a^*) = \sigma_A(a) \cup (\sigma_A(a)^*)$. Luego, de esta afirmación y teniendo en cuenta que todo $U \in D(X)$ es de la forma $U = \sigma_A(a)$ para algún $a \in A$, resulta que $U \cup (X(A) \setminus g_A(U)) \subseteq U \cup (X(A) \setminus (U])$ para todo $U \in D(X)$. □

A continuación vamos a caracterizar los mp_M-isomorfismos.

Proposición 2.2.7. *Sean (X_1, g_1) y (X_2, g_2) mp_M-espacios y $f : X_1 \longrightarrow X_2$ una mp_M-función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $f(max\, X_1 \cap [x)) = max\, X_2 \cap [f(x))$, *para todo $x \in X_1$,*

(ii) $f(max\, X_1) \subseteq max\, X_2$.

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $y \in f(max\, X_1)$, entonces $y = f(x)$ con $x \in max\, X_1$. Luego, $[x) = \{x\}$. Por lo tanto, $max\, X_1 \cap [x) = \{x\}$ de donde por (i) resulta que $f(\{x\}) = max\, X_2 \cap [f(x))$ lo que implica que $y = f(x) \in max\, X_2$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea $x \in X_1$, entonces $x \in max\, X_1$ ó $x \in min\, X_1 \setminus max\, X_1$.

Si $x \in max\, X_1$, entonces $max\, X_1 \cap [x) = \{x\}$ de donde inferimos que $f(max\, X_1 \cap [x)) = \{f(x)\}$. Luego, de (ii) resulta que $f(x) \in max\, X_2$. Por lo tanto, $\{f(x)\} = max\, X_2 \cap [f(x))$, de donde concluimos que $f(max\, X_1 \cap [x)) = max\, X_2 \cap [f(x))$.

Si $x \in min\, X_1 \setminus max\, X_1$, entonces $x < g_1(x)$ y $g_1(x) \in max\, X_1$. Luego, $max\, X_1 \cap [x) = \{g_1(x)\} = max\, X_1 \cap [g_1(x))$. Entonces aplicando el caso anterior a $g_1(x)$ tenemos que $f(max\, X_1 \cap [g_1(x)) = max\, X_2 \cap [f(g_1(x)))$ lo que implica que $f(max\, X_1 \cap [x)) = max\, X_2 \cap [f(g_1(x)))$. Por otra parte como f es una mp_M-función, $f(x) \leq f(g_1(x)) = g_2(f(x))$. Luego, $max\, X_2 \cap [f(x)) = max\, X_2 \cap [f(g_1(x)))$. Por lo tanto, $f(max\, X_1 \cap [x))) = max\, X_2 \cap [f(x))$ lo que completa la demostración. $\square$

Corolario 2.2.8. *Sean (X_1, g_1) y (X_2, g_2) mp_M-espacios y f una mp_M-función de X_1 en X_2. Entonces $f(min\, X_1) \subseteq min\, X_2$.*

Dem. Sea $y \in f(min\, X_1)$, entonces existe $x \in min\, X_1$ tal que $y = f(x)$. Luego, $x \in min\, X_1 \setminus max\, X_1$ ó $x \in min\, X_1 \cap max\, X_1$.

Si $x \in min\, X_1 \setminus max\, X_1$, entonces $x < g_1(x)$. Por lo tanto, $g_1(x) \in max\, X_1$. Como f es una mp_M-función de la Proposición 2.2.7 resulta que $f(g_1(x)) = g_2(f(x)) \in max\, X_2$ y $f(x) \leq g_2(f(x))$. Luego, $f(x) \in min\, X_2$.

Si $x \in min\, X_1 \cap max\, X_1$, $x = g_1(x)$ ó $x \not\leq g_1(x)$ y $g_1(x) \not\leq x$. Si $x = g_1(x)$, entonces $f(x) = g_2(f(x))$ y por lo tanto $f(x) \in min\, X_2 \cap max\, X_2$. Si $x \not\leq g_1(x)$ y $g_1(x) \not\leq x$, por la Proposición 2.2.7 podemos afirmar que $f(x)$, $g_2(f(x)) \in max\, X_2$ de lo que concluimos por ser X_2 un mp_M-espacio que $f(x), g_2(f(x)) \in min\, X_2$. $\square$

Corolario 2.2.9. *Sean* (X_1, g_1) *y* (X_2, g_2) mp_M-*espacios y* f *una función de* X_1 *en* X_2. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f *es una* mp_M-*función,*

(ii) f *es una función isótona y continua tal que*

 (a) $f \circ g_1 = g_2 \circ f$,

 (b) $f(max\, X_1) \subseteq max\, X_2$.

Dem. Es consecuencia directa de la Proposición 2.2.7 y del hecho que f es una mp_M-función si y sólo si es una $m-$función y una $p-$función. □

Finalmente, los resultados anteriores nos permitieron obtener la caracterización de los mp_M-isomorfismos buscada.

Proposición 2.2.10. *Sean* (X_1, g_1) *y* (X_2, g_2) mp_M-*espacios y* f *una función de* X_1 *en* X_2. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) f *es un* mp_M-*isomorfismo,*

(ii) f *es un isomorfismo de orden y un homeomorfismo tal que:*

 (a) $f \circ g_1 = g_2 \circ f$,

 (b) $f(max\, X_1) = max\, X_2$.

Dem. Resulta inmediata del Corolario 2.2.9. □

Proposición 2.2.11. *Sea* (X, g) *un* mp_M-*espacio. Entonces* $\varepsilon_X : X \longrightarrow X(D(X))$ *es un* mp_M-*isomorfismo.*

Dem. Es consecuencia directa de las Proposiciones 2.2.7, 2.2.10 y los resultados establecidos en [63] y [18]. □

De las Proposiciones 2.2.5, 2.2.6 y 2.2.11, con técnicas habituales concluimos el siguiente teorema.

Teorema 2.2.12. *La categoría de los mp_M-espacios y las mp_M-funciones es naturalmente equivalente al dual de la categoría de las $mpM-$álgebras y sus correspondientes homomorfismos.*

A continuación, teniendo en cuenta la dualidad topológica obtenida anteriormente caracterizaremos el retículo $Con(A)$ de todas las $mpM-$congruencias de A. Con este propósito comenzaremos mostrando una propiedad de los subconjuntos involutivos de los mp_M-espacios.

Observación 2.2.13. *Sea (X, g) un $m-$espacio y sea Y un subconjunto involutivo de X. Entonces Y es creciente si, y sólo si, Y es decreciente. En efecto, sean $x \in X$ e $y \in Y$ tales que $x \leq y$. Luego, $g(y) \leq g(x)$ y teniendo en cuenta que Y es involutivo y creciente tenemos que $g(x) \in Y$. Por lo tanto, $x \in Y$. La otra implicación es similar.*

Lema 2.2.14. *Sea (X, g) un mp_M-espacio. Si Y es un subconjunto no vacío e involutivo de X, entonces Y es creciente y decreciente.*

Dem. Sean $x \in X$ e $y \in Y$ tales que $x \leq y$. Por (pm1), tenemos que $x = y$ o $x = g(y)$. Como Y es involutivo, entonces $g(y) \in Y$. Por lo tanto, Y es decreciente y por la Observación 2.2.13 concluimos que Y es creciente. □

Teorema 2.2.15. *Sea A una $mpM-$álgebra. Entonces, el retículo $\mathcal{C}_I(\mathsf{mp_M}(A))$ de todos los subconjuntos cerrados e involutivos de $\mathsf{mp_M}(A)$ es isomorfo al dual del retículo $Con(A)$; y el isomorfismo lo establece la función $\Theta_I : \mathcal{C}_I(\mathsf{mp_M}(A)) \longrightarrow Con(A)$ que es la restricción de la definida en el Teorema 1.2.1.*

Dem. En primer lugar observemos que si Y es un subconjunto involutivo de $X(A)$, entonces por el Lema 2.2.14 inferimos que $maxX(A)\cap[Y) = maxX(A)\cap Y \subseteq Y$. Entonces, teniendo en cuenta los resultados establecidos en la Sección 1.2.2 y 1.2.3 concluimos la demostración. $\square$

La siguiente versión del Teorema 2.2.15 nos facilitará la determinación de las congruencias principales de las $mpM-$álgebras. La misma está basada en las dos afirmaciones siguientes, de fácil comprobación:

(i) $Y \subseteq X(A)$ es cerrado (abierto) involutivo si, y sólo si, $X(A)\setminus Y$ es abierto (cerrado) involutivo,

(ii) $\sigma_A(a) \cap Y = \sigma_A(b) \cap Y$ si, sólo si, $\sigma_A(a) \blacktriangle \sigma_A(b) \subseteq X(A) \setminus Y$.

Teorema 2.2.16. *Sea A una $mpM-$álgebra. Entonces, el retículo $\mathcal{O}_I(\mathsf{mp_M}(A))$ de todos los subconjuntos abiertos e involutivos de $\mathsf{mp_M}(A)$ es isomorfo al retículo $Con(A)$; y el isomorfismo lo establece la función $\Theta_{OI} : \mathcal{O}_I(\mathsf{mp_M}(A)) \longrightarrow Con(A)$ definida por $\Theta_{OI}(G) = \{(a, b) \in A \times A : \sigma_A(b) \blacktriangle \sigma_A(a) \subseteq G\}$.*

2.3. $mpM-$álgebras subdirectamente irreducibles

En lo que sigue aplicaremos los resultados de la sección anterior para determinar las álgebras subdirectamente irreducibles de esta variedad. Con este próposito caracterizaremos los subconjuntos involutivos de los mp_M-espacios.

Proposición 2.3.1. *Sea (X, g) un mp_M-espacio y sea Y un subconjunto no vacío de X. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es involutivo,*

(ii) *Y es la suma cardinal de una familia $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ de cadenas maximales en X tal que $g(C_i) \in \mathcal{C}$ para todo $i \in I$.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Por la Observación 2.2.2, para cada $y \in Y$, existe una única cadena maximal C_y en X, tal que $y \in C_y$. Como Y es involutivo, por el Lema 2.2.14 tenemos que $C_y \subseteq Y$, luego $Y = \bigcup\limits_{y\in Y} C_y$. Luego, de la hipótesis resulta que $C_{g(y)} \subseteq Y$ y como $C_{g(y)} = g(C_y)$, concluimos que $g(C_y) \subseteq Y$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis tenemos que $Y = \bigcup\limits_{i\in I} C_i$, entonces $g(Y) = \bigcup\limits_{i\in I} g(C_i)$ y por lo tanto $Y = g(Y)$. $\square$

Proposición 2.3.2. *Sean (X, g) un mp_M−espacio e Y un subconjunto cerrado y no vacío de X. Si* $\mathsf{mpM}(X)$ *es subdirectamente irreducible, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Y es involutivo,*

(ii) *Y es la suma cardinal de una familia de cadenas maximales tal que* $\max X \subseteq Y$,

(iii) *$Y = X$.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Como Y es un subconjunto no vacío e involutivo de X, de la Proposición 2.3.1, concluimos que Y es la suma cardinal de cadenas maximales de X. Supongamos ahora que $maxX \not\subseteq Y$, entonces por el Lema 2.2.3 para cada $x \in maxX \setminus Y$ tenemos que $W_x = C_x \cup C_{g(x)}$ es un subconjunto no vacío, cerrado e involutivo de X y como Y es involutivo resulta que $W_x \cap Y = \emptyset$. Entonces, existen al menos dos subconjuntos cerrados, involutivos y no triviales de X. Esta última afirmación y el hecho que $X = \bigcup\limits_{x\in maxX} C_x$ implican que $X = Y \cup \bigcup\limits_{x\in maxX\setminus Y} W_x$, de donde resulta que no existe un subconjunto máximo, propio, cerrado e involutivo de X. De esta afirmación y el Teorema 2.2.15 concluimos que $\mathsf{mPM(X)}$ no es una mpM−algebra subdirectamente irreducible, lo que es una contradicción.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): De la Observación 2.2.2 el mp_M-espacio X es la suma cardinal de cadenas, cada una con a lo sumo dos elementos. Como Y es suma cardinal de una familia de cadenas maximales y m$ax\, X \subseteq Y$ inferimos que $Y = X$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Inmediato. $\square$

Teorema 2.3.3. *Sea (X, g) un mp_M-espacio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathsf{mPM(X)}$ *es subdirectamente irreducible,*

(ii) $\mathsf{mPM(X)}$ *es simple.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Si Y es un subconjunto no vacío, cerrado e involutivo de X, entonces por la Proposición 2.3.2 concluimos que $Y = X$. Por lo tanto, los únicos subconjuntos cerrados e involutivos de X son los triviales, de donde por el Teorema 2.2.15 concluimos la demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Inmediata por resultados bien conocidos de álgebra universal. $\square$

Corolario 2.3.4. *Toda $mpM-$álgebra A no trivial es isomorfa a un producto subdirecto de álgebras simples.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 1.1.3 de la Sección 1.1.3 y el Teorema 2.3.3. $\square$

Proposición 2.3.5. *Sea A una $mpM-$álgebra y $\mathsf{mp_M}(A) = (X(A), g_A)$. Si $X(A)$ es una anticadena, $|X(A)| = 2$ y*

(i) $g_A \neq id_{X(A)}$*, entonces A es simple,*

(ii) $g_A = id_{X(A)}$*, entonces A no es simple.*

Dem. De la hipótesis tenemos que $X(A) = \{P, Q\}$ donde $P \not\subseteq Q$ y $Q \not\subseteq P$.

(i) Como $g_A \neq id_{X(A)}$, es claro que los únicos subconjuntos involutivos de $X(A)$ son $\emptyset$ y $X(A)$, de lo que sigue por el Teorema 2.2.15 que A es simple.

(ii) Como $g_A = id_{X(A)}$, entonces tenemos que $\{P\}$ y $\{Q\}$ son subconjuntos cerrados, involutivos y no triviales de $X(A)$, de donde por Teorema 2.2.15 resulta que A no es simple. $\square$

Proposición 2.3.6. *Sea A una mpM$-$álgebra y $\mathsf{mp_M}(A) = (X(A), g_A)$. Si $X(A)$ es una anticadena y $|X(A)| > 2$, entonces A no es simple.*

Dem. Sea $X(A)$ una anticadena con más de dos elementos, entonces se pueden presentar los siguientes casos: $g_A = Id_{X(A)}$ o $g_A \neq id_{X(A)}$. En el primer caso, tenemos que, para todo $P \in X(A)$, $\{P\}$ es un subconjunto cerrado, involutivo y propio de $X(A)$. En el segundo caso, existe $P \in X(A)$ tal que $g_A(P) \neq P$ y por lo tanto $\{P, g_A(P)\}$ es un subconjunto cerrado, involutivo y propio de $X(A)$. De las afirmaciones anteriores y el Teorema 2.2.15 concluimos que, en ambos casos, A no es simple. $\square$

Proposición 2.3.7. *Sea A una mpM$-$álgebra y $\mathsf{mp_M}(A) = (X(A), g_A)$. Si $X(A)$ no es anticadena y $\mid X(A) \mid > 2$, entonces A no es simple.*

Dem. De las hipótesis y la Observación 2.2.2 existe al menos una cadena con dos elementos estrictamente contenida en $X(A)$. Luego, existen $P, Q \in X(A)$ tales que $P \neq Q$, $P \subset g_A(P)$ y $Q \neq g_A(P)$. Por lo tanto, $\{P, g_A(P)\}$ es un subconjunto propio de $X(A)$, no vacío, cerrado e involutivo, lo que implica por el Teorema 2.2.15 que A no es simple. $\square$

Finalmente, caracterizamos a los miembros subdirectamente irreducibles de ***mpM*** del siguiente modo:

Teorema 2.3.8. *Sea A una mpM$-$álgebra y $\mathsf{mp_M}(A) = (X(A), g_A)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es simple,*

(ii) $|X(A)| \leq 2$ *y* $X(A)$ *es una cadena o* $X(A)$ *es una anticadena en la cual* g_A *no es la identidad.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Si suponemos que $\mid X(A) \mid > 2$, entonces por la Observación 2.2.2 se infiere que $X(A)$ no es una cadena. Luego, por la Proposición 2.3.6 y 2.3.7 resulta que A no es simple, contradicción. Por lo tanto, $\mid X(A) \mid \leq 2$ y por la Observación 2.2.2 se tiene que $X(A)$ es una cadena con a lo sumo dos elementos ó $X(A)$ es una anticadena con dos elementos. En este último caso, como A es simple, entonces por la Proposición 2.3.5 g_A no es la identidad.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $X(A) = \{P, Q\}$ con $P \subset Q$, por (pm1) resulta $g_A(P) = Q$. Por otra parte, si $X(A) = \{P\}$, entonces $g_A(P) = P$. Además, si $X(A) = \{P, Q\}$ con $P \not\subseteq Q$ y $Q \not\subseteq P$, de la hipótesis resulta que g_A no es la identidad. Luego, en todos los casos los únicos subconjuntos cerrados e involutivos de $\mathsf{mp_M}(A)$ son los triviales y por el Teorema 2.2.15 tenemos que A es simple. $\square$

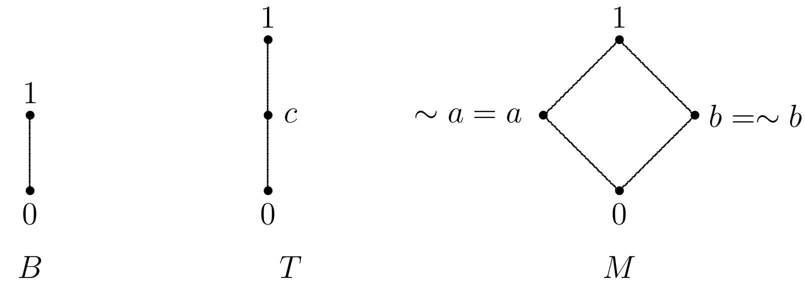
Como consecuencia directa del Teorema 2.3.8 tenemos la siguiente descripción de las $mpM-$álgebras subdirectamente irreducibles.

Corolario 2.3.9. *Las únicas $mpM-$álgebras subdirectamente irreducibles son, salvo isomorfismo, las álgebras B, T y M indicadas a continuación:*

(a) $B = \{0, 1\}$ *con* $0 < 1$, $\sim 0 = 0^* = 1$, $\sim 1 = 1^* = 0$,

(b) $T = \{0, c, 1\}$, *con* $0 < c < 1$, $\sim c = c$, $c^* = 0$, $\sim 0 = 0^* = 1$, $\sim 1 = 1^* = 0$,

(c) $M = \{0, a, b, 1\}$ *con* $a \not\leq b$, $b \not\leq a$ *y* $0 < a, b < 1$, $\sim b = a^* = b$, $\sim a = b^* = a$, $\sim 0 = 0^* = 1$, $\sim 1 = 1^* = 0$.



Observación 2.3.10. *Del Corolario 2.3.9 resulta que T no es una subálgebra de M ya que $c^* = 0$ y $a^* = b$. De esta afirmación se concluye que la variedad de las $mpM-$álgebras es diferente de la de las álgebras tetravalentes modales.*

Recordemos que una variedad $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ es *residualmente pequeña* si contiene, a menos de isomorfismo, sólo un conjunto de álgebras subdirectamente irreducibles y *residualmente finita* si todos los miembros subdirectamente irreducibles de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ son finitos. Además, una variedad $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ es *localmente finita* si para cada álgebra de la variedad se verifica que toda subálgebra finitamente generada es finita.

A continuación, a partir de los resultados anteriores, mostraremos ciertas propiedades de $\boldsymbol{mpM}$.

Teorema 2.3.11. $\boldsymbol{mpM}$ *es localmente finita, semisimple, residualmente pequeña y residualmente finita.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 2.3.3, el Corolario 2.3.9 y resultados bien conocidos de álgebra universal ([12, Theorem 10.16, Lemma 12.2] and [71, Section 2.4]). $\square$

2.4. Otras caracterizaciones de las congruencias

2.4.1. El operador $\triangle$

Si A es una $mpM-$álgebra, entonces a partir de las operaciones de negación $\sim$ y de pseudocomplemento * se puede definir una operación unaria $\triangle$ por medio de la fórmula:

$$\triangle x = (\sim x)^* \wedge x.$$

Lema 2.4.1. *En toda $mpM-$álgebra A se verifican las siguientes propiedades:*

(T1) $\triangle 0 = 0,\ \triangle 1 = 1,$

(T2) $\triangle x \leq x,$

(T3) $x \leqslant y$, *implica* $\triangle x \leq \triangle y,$

(T4) $\triangle x$ *es un elemento booleano y su complemento es* $\sim \triangle x,$

(T5) $(\sim \triangle x)^* = \triangle x,$

(T6) $(\sim \triangle x)^* = \triangle(\sim x)^*,$

(T7) $\triangle\triangle x = \triangle x,$

(T8) $(\triangle x)^* = \sim \triangle x,$

(T9) $\triangle \sim \triangle x = \sim \triangle x,$

(T10) $\triangle(x \wedge y) = \triangle x \wedge \triangle y,$

(T11) $x \in \triangle A$ *si, y sólo si,* $x = \triangle x,$

(T12) $\triangle A$ *es una subálgebra de* $A,$

(T13) $\sim x \wedge \triangle x = 0$,

(T14) $x \vee \sim \triangle x = 1$,

(T15) $\triangle(\triangle x \vee y) = \triangle x \vee \triangle y$,

(T16) $\triangle(\sim \triangle x \vee y) = \sim \triangle x \vee \triangle y$.

Dem. Sólo probaremos T3, T4, T5, T7, T10, T12, T15 y T16.

(T3) De la hipótesis y P6 tenemos que $(\sim x)^* \leqslant (\sim y)^*$, luego $\triangle x \leqslant \triangle y$.

(T4) $\triangle x \wedge \sim \triangle x = (\sim x)^* \wedge x \wedge \sim ((\sim x)^* \wedge x) = (\sim x)^* \wedge x \wedge (\sim (\sim x)^* \vee \sim x) = ((\sim x)^* \wedge x \wedge \sim (\sim x)^*) \vee ((\sim x)^* \wedge x \wedge \sim x)$, de donde por A13 y P1 resulta que $\triangle x \wedge \sim \triangle x = 0$. Además, $\sim \triangle x \vee \triangle x = \sim (\triangle x \wedge \sim \triangle x) = \sim 0 = 1$.

(T5) Por T4 tenemos que $\sim \triangle x \wedge \triangle x = 0$. Por otra parte, sea $k \in A$ tal que $k \wedge \sim \triangle x = 0$. Entonces $\triangle x = (\triangle x \vee k) \wedge (\triangle x \vee \sim \triangle x) = \triangle x \vee k$, por lo tanto $k \leq \triangle x$ lo que completa la demostración.

(T7) $\triangle\triangle x = (\sim ((\sim x)^* \wedge x))^* \wedge (\sim x)^* \wedge x = (\sim (\sim x)^* \vee \sim x)^* \wedge (\sim x)^* \wedge x = (\sim (\sim x)^*)^* \wedge (\sim x)^* \wedge x$. Luego, por A15, T6 y T5 tenemos que $\triangle\triangle x = (\sim (\sim x)^*)^* \wedge (\sim x)^* = \triangle(\sim x)^* = \triangle x$.

(T10) De T5, P7, T2 y P6 tenemos que $\triangle x \wedge \triangle y = (\sim \triangle x)^* \wedge (\sim \triangle y)^* = (\sim \triangle x \vee \sim \triangle y)^* = (\sim (\triangle x \wedge \triangle y))^* \leq (\sim (x \wedge y))^*$. Luego, $\triangle x \wedge \triangle y \leq (\sim (x \wedge y))^* \wedge (x \wedge y) = \triangle(x \wedge y)$. La otra desigualdad es inmediata.

(T12) Es consecuencia directa de T8, T9 y T10.

(T15) De T4 tenemos que $x = x \vee 0 = x \vee (\triangle y \wedge \sim \triangle y) = (x \vee \triangle y) \wedge (x \vee \sim \triangle y)$ de donde por T10 resulta (1) $\triangle x = \triangle(x \vee \triangle y) \wedge \triangle(x \vee \sim \triangle y)$. Por otra parte, de T2 concluimos que $\triangle x \vee \sim \triangle y \leq x \vee \sim \triangle y$ y por T12 y T11 tenemos que $\triangle x \vee \sim \triangle y \leq \triangle(x \vee \sim \triangle y)$. Luego, $(\triangle x \vee \sim \triangle y) \wedge \triangle(x \vee \triangle y) \leq \triangle(x \vee \sim \triangle y) \wedge \triangle(x \vee \triangle y)$, de donde por (1) inferimos que $(\triangle x \vee \sim \triangle y) \wedge \triangle(x \vee \triangle y) \leq \triangle x$. Por lo tanto, $(\triangle x \vee \sim \triangle y) \wedge \triangle(x \vee \triangle y) \vee \triangle y \leq \triangle x \vee \triangle y$ de donde concluimos que $\triangle(x \vee \triangle y) \leq \triangle x \vee \triangle y$. La otra desigualdad es inmediata.

(T16) Resulta de T9 y T15. $\square$

Cabe mencionar que en toda $mpM-$álgebra a partir de las operaciones $\sim$ y $\triangle$ se puede definir una operación unaria ∇ por medio de la fórmula:

$$\nabla x = \sim \triangle \sim x.$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la negeción en las álgebras de De Morgan resulta que ∇ es un operador dual de $\triangle$.

Esta operación desempeñará un papel fundamental en el Capítulo III para determinar ecuacionalmente a las congruencias principales de las $mpM-$álgebras.

La noción que introduciremos a continuación es fundamental para obtener una nueva descripción de las congruencias.

Definición 2.4.2. *Sea A una $mpM-$álgebra y F un filtro de A. Diremos que F es un $\triangle-$filtro de A, si verifica la siguiente condición:*

(DF) *$x \in F$ implica $\triangle x \in F$.*

Indicaremos con $\mathcal{F}(A)$ al conjunto de todos los $\triangle-$filtros de A.

Es claro que en toda $mpM-$álgebra, $\{1\}$ y A son $\triangle-$filtros de A y la intersección de una familia no vacía de $\triangle-$filtros es un $\triangle-$filtro.

Si H es un subconjunto de A, denotaremos con $F_{\triangle}(H)$ al $\triangle-$filtro de A generado por H. Si $H = \{a\}$, escribiremos $F_{\triangle}(a)$ en lugar de $F_{\triangle}(\{a\})$ y se denomina el $\triangle-$filtro principal generado por a.

Proposición 2.4.3. *Sean A una $mpM-$álgebra, $H \subseteq A$ y $a \in A$. Entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $F_{\triangle}(H) = F(\triangle H)$, *donde $F(X)$ es el filtro generado por $X \subseteq A$,*

(ii) $F_{\triangle}(a) = F(\triangle a)$,

(iii) $F_{\triangle}(H \cup \{a\}) = F(H \cup \{\triangle a\})$, *si H es un $\triangle-$filtro de A.*

Dem.

(i) Veamos que $F(\triangle H)$ es un $\triangle-$filtro de A. Si $x \in F(\triangle H)$, entonces existen $\triangle h_1$, $\triangle h_2$,..., $\triangle h_n \in \triangle(H)$ tales que $\triangle h_1 \wedge \triangle h_2 \wedge ,\dots, \wedge \triangle h_n \leq x$ lo que implica por T3, T10 y T7 que $\triangle h_1 \wedge \triangle h_2 \wedge ,\dots, \wedge \triangle h_n \leq \triangle x$ de donde $\triangle x \in F(\triangle H)$. Además, de T2 resulta que $H \subseteq F(\triangle H)$. Por otra parte, si T es un $\triangle-$filtro de A tal que $H \subseteq T$, entonces $\triangle H \subseteq T$ y como T es filtro resulta $F(\triangle H) \subseteq T$, lo que completa la demostración.

(ii) Resulta inmediata del inciso (i) tomando $H = \{a\}$.

(iii) Es de rutina teniendo en cuenta que $F(H \cup \triangle a) = \{x \in A : \text{existe } h \in H \text{ y } h \wedge \triangle a \leq x\}$. □

A continuación estableceremos un isomorfismo entre el retículo de las congruencias de una $mpM-$álgebra A y el retículo de los $\triangle-$filtros de A.

Lema 2.4.4. *Sean $A \in \boldsymbol{mpM}$. Para cada $F \in \mathcal{F}(A)$ sea $R(F) = \{(x, y) \in A \times A : \text{existe } f \in F, \text{tal que } x \wedge f = y \wedge f\}$. Entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $R(F) \in Con(A)$,

(ii) $|1|_{R(F)} = F$.

Dem.

(i) Sólo probaremos la compatibilidad con $\sim$ y *. Sea $(x, y) \in R(F)$, entonces (1) existe $f \in F$ tal que $x \wedge f = y \wedge f$, de donde por A5 tenemos que $(\sim x \vee \sim f) \wedge \triangle f = (\sim y \vee \sim f) \wedge \triangle f$. Luego, por T13 resulta $\sim x \wedge \triangle f = \sim y \wedge \triangle f$ y por la condición (DF) concluimos que $(\sim x, \sim y) \in R(F)$. Por otra parte, de (1) tenemos que $(x \wedge f)^* = (y \wedge f)^*$. Por lo tanto, $f \wedge (x \wedge f)^* = f \wedge (y \wedge f)^*$ y por A6 inferimos que $f \wedge x^* = f \wedge y^*$, entonces $(x^*, y^*) \in R(F)$.

(ii) Inmediato. $\square$

Lema 2.4.5. *Sea $A \in$ **mpM** con más de un elemento y $\Theta \in Con(A)$. Entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(i) *$F_\Theta = |1|_\Theta$ es un $\triangle-$filtro de A,*

(ii) *$R(|1|_\Theta) = \Theta$.*

Dem.

(i) Sólo probaremos que $|1|_\Theta$ verifica (DF). En efecto, sea $x \in |1|_\Theta$, entonces $(x, 1) \in \Theta$ y $((\sim x)^*, 1) \in \Theta$. Luego, $((\sim x)^* \wedge x, 1) \in \Theta$ de donde resulta que $(\triangle x, 1) \in \Theta$ y por lo tanto, $\triangle x \in |1|_\Theta$.

(ii) Sean $x, y \in A$ tales que $(x, y) \in R(|1|_\Theta)$, entonces existe $f \in |1|_\Theta$ tal que $x \wedge f = y \wedge f$. Como $(f, 1) \in \Theta$, tenemos que $(x \wedge f, x) \in \Theta$ y $(y \wedge f, y) \in \Theta$, de donde resulta que $(x, y) \in \Theta$. La otra inclusión es consecuencia del hecho que si $(x, y) \in \Theta$, entonces $f = \triangle((\sim \triangle x \vee y) \wedge (\sim \triangle y \vee x) \wedge (\sim \triangle(\sim x \vee \sim y) \vee \sim x) \wedge (\sim \triangle(\sim x \vee \sim y) \vee \sim y)) \in |1|_\Theta$ y $x \wedge f = y \wedge f$. $\square$

Teorema 2.4.6. *Sea $A \in \boldsymbol{mpM}$ con más de un elemento. Entonces se verifican:*

(i) $Con(A) = \{R(F) : F \in \mathcal{F}(A)\}$, *donde* $R(F) = \{(x, y) \in A \times A :$ *existe* $f \in F$ *tal que* $x \wedge f = y \wedge f\}$.

(ii) *Los retículos* $Con(A)$ *y* $\mathcal{F}(A)$ *son isomorfos considerando las correspondencias* $\Theta \longmapsto F_\Theta$ *y* $F \longmapsto R(F)$, *que son inversas una de la otra.*

Dem.

(i) Es consecuencia de los Lemas 2.4.4 y 2.4.5.

(ii) De las definiciones dadas tenemos que $F \subseteq F'$ implica $R(F) \subseteq R(F')$, y que $\Theta \subseteq \Theta'$ implica $F_\Theta \subseteq F_{\Theta'}$. Además, por el inciso (i) resulta que ambas correspondencias son biyectivas y como son crecientes, entonces son isomorfismos de retículos. $\square$

Proposición 2.4.7. *Sea A una mpM−álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\triangle A = \{0, 1\}$,

(ii) *A es simple.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Supongamos que existe un $\triangle-$filtro F no trivial de A y sea $x \in F$, $x \neq 1$. Como $\triangle x \in F \cap \triangle A$, entonces de la hipótesis resulta que $\triangle x = 1$ o $\triangle x = 0$. Si $\triangle x = 1$, entonces $x = 1$ lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\triangle x = 0$ de donde resulta $F = A$, contradicción.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sea $x \in A$ tal que $0 < \triangle x < 1$. Entonces por la Proposición 2.4.3 tenemos que $F(\triangle x)$ es un $\triangle-$filtro propio de A. Por lo tanto A no es simple, lo que contradice la hipótesis. $\square$

2.4.2. La implicación débil

A continuación obtendremos una nueva descripción de las $mpM-$congruencias para lo cual definimos una nueva operación binaria $\rightarrowtail$, a la que llamaremos implicación débil, por medio de la siguiente fórmula:

$$x \rightarrowtail y = \sim \triangle x \vee y.$$

La Proposición 2.4.8 resume las propiedades más importantes de $\rightarrowtail$ que serán usadas en lo que sigue.

Proposición 2.4.8. *En toda $mpM-$álgebra se verifican las siguientes propiedades:*

(W1) $1 \rightarrowtail x = x$,

(W2) $x \rightarrowtail 1 = 1$,

(W3) $x \rightarrowtail x = 1$,

(W4) $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail x) = 1$,

(W5) $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail z) = y \rightarrowtail (x \rightarrowtail z)$,

(W6) $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail z) = (x \rightarrowtail y) \rightarrowtail (x \rightarrowtail z)$,

(W7) $x \leqslant y$ *implica* $z \rightarrowtail x \leqslant z \rightarrowtail y$,

(W8) $x \leqslant y$ *implica* $x \rightarrowtail y = 1$,

(W9) $((x \rightarrowtail y) \rightarrowtail x) \rightarrowtail x = 1$,

(W10) $x \rightarrowtail (x \rightarrowtail y) = x \rightarrowtail y$,

(W11) $y \leqslant x \rightarrowtail y$, (W12) $x \leqslant y$ *implica* $y \rightarrowtail z \leqslant x \rightarrowtail z$,

(W13) $(x \vee y) \rightarrowtail z \leqslant (x \rightarrowtail z) \wedge (y \rightarrowtail z)$,

(W14) $x \rightarrowtail (y \vee z) = (x \rightarrowtail y) \vee (x \rightarrowtail z)$,

(W15) $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail (x \wedge y)) = 1$,

(W16) $x \rightarrowtail (x \wedge y) = x \rightarrowtail y$,

(W17) $\triangle x \wedge (x \rightarrowtail y) = \triangle x \wedge y$,

(W18) $x \rightarrowtail \triangle x = 1$.

Dem. Sólo probaremos W4, W6, W8, W9, W13, W15 y W17.

(W4) $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail x) = \sim \triangle x \vee \sim \triangle y \vee x = 1$ por T14.

(W6) De T16 y T4 deducimos que $(x \rightarrowtail y) \rightarrowtail (x \rightarrowtail z) = \sim \triangle(\sim \triangle x \vee y) \vee \sim \triangle x \vee z = \sim (\sim \triangle x \vee \triangle y) \vee \sim \triangle x \vee z = (\triangle x \wedge \sim \triangle y) \vee \sim \triangle x \vee z = \sim \triangle x \vee \sim \triangle y \vee z = x \rightarrowtail (y \rightarrowtail z)$.

(W8) Como $x \leqslant y$, por T3 tenemos que $\sim \triangle y \leqslant \sim \triangle x$. Luego, $\sim \triangle y \vee y \leqslant \sim \triangle x \vee y$ de donde por T14 concluimos la demostración.

(W9) Observemos que $(x \rightarrowtail y) \rightarrowtail x = \sim (\sim (\sim (\sim x)^* \vee \sim x \vee y))^* \vee ((\sim x)^* \wedge x \wedge \sim y) \vee x = \sim (\sim (\sim (\sim x)^* \vee \sim x \vee y))^* \vee x = \sim ((\sim x)^* \wedge x \wedge \sim y))^* \vee x$. Por otra parte, por P6 tenemos que $\sim ((\sim x)^* \wedge x \wedge \sim y)^* \leq \sim (\sim x)^{**}$ y por P3 resulta que $\sim (\sim x)^{**} \leq x$. Entonces, $\sim ((\sim x)^* \wedge x \wedge \sim y)^* \leq x$ de donde inferimos que $(x \rightarrowtail y) \rightarrowtail x = x$ con lo que se concluye la demostración.

(W13) Por T3 tenemos que $\triangle x, \triangle y \leqslant \triangle(x \vee y)$ de donde resulta que $\sim \triangle(x \vee y) \vee z \leqslant \sim \triangle x \vee z$ y $\sim \triangle(x \vee y) \vee z \leqslant \sim \triangle y \vee z$. Entonces $\sim \triangle(x \vee y) \vee z \leqslant (\sim \triangle x \vee z) \wedge (\sim \triangle y \vee z)$ y por lo tanto $(x \vee y) \rightarrowtail z \leqslant (x \rightarrowtail z) \wedge (y \rightarrowtail z)$.

(W15) $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail (x \wedge y)) = \sim \triangle x \vee \sim \triangle y \vee (x \wedge y) = \sim (\triangle x \wedge \triangle y) \vee (x \wedge y)$. Luego, por T10 y T14 concluimos que $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail (x \wedge y)) = \sim \triangle(x \wedge y) \vee (x \wedge y) = 1$.

(W17) Es consecuencia directa de T4. $\square$

Definición 2.4.9. *Sea $A \in \boldsymbol{mpM}$ y $D \subseteq A$. Diremos que D es un sistema deductivo débil de A (s.d.d.) si se verifican las siguientes condiciones:*

(d1) $1 \in D$,

(d2) *si x, $x \rightarrowtail y \in D$, entonces $y \in D$.*

Indicaremos con $\mathcal{D}(A)$ al conjunto de todos los sistemas deductivos débiles de A.

Proposición 2.4.10. *Sea $A \in \boldsymbol{mpM}$ y $D \in \mathcal{D}(A)$. Si $d \in D$, entonces $x \rightarrowtail d \in D$, para todo $x \in A$.*

Dem. Por W4 y d1 tenemos que $d \rightarrowtail (x \rightarrowtail d) \in D$, de donde por d2, resulta que $x \rightarrowtail d \in D$. $\square$

La siguiente proposición establece la equivalencia de las nociones de $\triangle-$filtros y sistemas deductivos débiles.

Proposición 2.4.11. *Sea $A \in \boldsymbol{mpM}$ y $D \subseteq A$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *D es un $\triangle-$filtro,*

(ii) *D es un s.d.d..*

Dem.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sean x, $x \rightarrowtail y \in D$. De la hipótesis tenemos que $\triangle x$, $\triangle x \wedge (x \rightarrowtail y) \in D$, de donde por W17 deducimos que $\triangle x \wedge y \in D$ y como $\triangle x \wedge y \leqslant y$, concluimos que $y \in D$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sean $x, y \in A$ tales que $x \in D$ y $x \leq y$. Entonces por W8 tenemos que $x \rightarrowtail y \in D$ de donde resulta que $y \in D$. Por otra parte, si $x, y \in D$ por W15 $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail (x \wedge y)) = 1 \in D$. Luego, de las hipótesis inferimos que $x \wedge y \in D$. Además, si $x \in D$ por W18 concluimos que $\triangle x \in D$. $\square$

Proposición 2.4.12. *Sea $A \in$ **mpM** y $F \subseteq A$ un $\triangle-$filtro. Entonces dados x, $y \in A$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *existe $f \in F$ tal que $x \wedge f = y \wedge f$,*

(ii) $x \rightarrowtail y \in F$, $y \rightarrowtail x \in F$, $\sim (x \wedge y) \rightarrowtail \sim y \in F$, $\sim (x \wedge y) \rightarrowtail \sim x \in F$.

Dem.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Como $f \in F$, por W16 y la Proposición 2.4.11 tenemos que $x \rightarrowtail (x \wedge f) = x \rightarrowtail (y \wedge f) \in F$. Por otra parte, como $y \wedge f \leq y$, por W7 resulta que $x \rightarrowtail (y \wedge f) \leq x \rightarrowtail y$ de donde concluimos que $x \rightarrowtail y \in F$. De manera análoga se prueba que $y \rightarrowtail x \in F$. Además, de la hipótesis inferimos que $(\sim (x \wedge y) \vee \sim f) \wedge$
$\triangle f = (\sim y \vee \sim f) \wedge \triangle f$. Luego, $((\sim (x \wedge y) \wedge \triangle f) \vee (\sim f \wedge \triangle f)) \wedge (\sim f)^* = ((\sim y \wedge \triangle f) \vee (\sim f \wedge \triangle f)) \wedge (\sim f)^*$ de donde por P1 resulta que $\sim (x \wedge y) \wedge \triangle f \wedge (\sim f)^* = \sim y \wedge \triangle f \wedge (\sim f)^*$. Teniendo en cuenta que $\triangle f \leq (\sim f)^*$ deducimos que $\sim (x \wedge y) \wedge \triangle f = \sim y \wedge \triangle f$. De esta afirmación y W16 resulta que $\sim (x \wedge y) \rightarrowtail (\sim y \wedge \triangle f) = \sim (x \wedge y) \rightarrowtail (\sim (x \wedge y) \wedge \triangle f) = \sim (x \wedge y) \rightarrowtail \triangle f$. Como $\triangle f \in F$ resulta que $\sim (x \wedge y) \rightarrowtail (\sim y \wedge \triangle f) \in F$ y como $\sim (x \wedge y) \rightarrowtail (\sim y \wedge \triangle f) \leq \sim (x \wedge y) \rightarrowtail \sim y$ concluimos que $\sim (x \wedge y) \rightarrowtail \sim y \in F$. De manera análoga tenemos que $\sim (x \wedge y) \rightarrowtail \sim x \in F$, lo que completa la demostración.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): De las hipótesis y teniendo en cuenta que F es un $\triangle-$filtro tenemos que $f = \triangle((x \rightarrowtail y) \wedge (y \rightarrowtail x) \wedge (\sim (x \wedge y) \rightarrowtail \sim x) \wedge (\sim (x \wedge y) \rightarrowtail \sim y)) \in F$. Además, se verifica que $x \wedge f = y \wedge f$. $\square$

Como consecuencia directa de las Proposiciones 2.4.11, 2.4.12 y el Teorema 2.4.6 podemos afirmar que:

Teorema 2.4.13. *Sea A una $mpM-$álgebra con más de un elemento. Entonces se verifican:*

(i) $Con(A) = \{R(D) : D \in \mathcal{D}(A)\}$, *donde* $R(D) = \{(x,y) \in A \times A : x \rightarrowtail y \in D,$ $y \rightarrowtail x \in D, \sim (x \wedge y) \rightarrowtail \sim y \in D, \sim (x \wedge y) \rightarrowtail \sim x \in D\}$.

(ii) *Los retículos $Con(A)$ y $\mathcal{D}(A)$ son isomorfos considerando las correspondencias $\Theta \longmapsto D_\Theta$ y $F \longmapsto R(F)$, que son inversas una de la otra.*

Definición 2.4.14. *Sea A una $mpM-$álgebra y D un s.d.d. propio de A. Diremos que D es un s.d.d. maximal de A si el único s.d.d. de A que contiene propiamente a D es A.*

Corolario 2.4.15. *Sea A una $mpM-$álgebra con más de un elemento. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $M \in \mathcal{D}(A)$ *es maximal,*

(ii) $A/R(M)$ *es simple.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 2.4.13 y de [12, Theorem 8.9]. □

En lo que sigue si $D \in \mathcal{D}(A)$, notaremos con A/D a $A/R(D)$ para simplificar.

Finalmente, caracterizamos a los s.d.d. maximales.

Teorema 2.4.16. *Sea A una $mpM-$álgebra no trivial y $M \in \mathcal{D}(A)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) M *maximal,*

(ii) *si* $a \notin M$, *entonces existe* $m \in M$ *tal que* $\sim \triangle a \vee \sim m = 1$,

(iii) *si* $\triangle a \vee b \in M$, *entonces* $a \in M$ *o* $b \in M$,

(iv) *si* $a \notin M$, *entonces* $\sim \triangle a \in M$,

(v) *si* $a \notin M$ *y* $b \in A$, *entonces* $a \rightarrowtail b \in M$.

Dem. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Si $\sim \triangle a \vee \sim m \neq 1$, para todo $m \in M$, entonces $\triangle a \wedge m \neq 0$, para todo $m \in M$. De esta afirmación y la Proposición 2.4.3 resulta que $F_{\triangle}(M \cup \{a\})$ es un s.d.d. propio de A y como $a \notin M$ tenemos que $M \subset F_{\triangle}(M \cup \{a\})$, contradicción.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Supongamos que $a \notin M$, entonces por (ii) existe $m \in M$ tal que $\triangle a \wedge m = 0$. Como por hipótesis $\triangle a \vee b \in M$, tenemos que $(\triangle a \vee b) \wedge m \in M$, de donde concluímos que $b \wedge m \in M$ y por lo tanto, $b \in M$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Como $\triangle a \vee \sim \triangle a = 1 \in M$ y por la hipótesis $a \notin M$, entonces por (ii) resulta que $\sim \triangle a \in M$.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): Es consecuencia directa de las hipótesis y el hecho que $a \rightarrowtail b = \sim \triangle a \vee b$.

(v) $\Longrightarrow$ (i): Sea $M \in \mathcal{D}(A)$ y supongamos que M no es maximal. Entonces existe un s.d.d. M' tal que $M \subset M' \subset A$. Luego, existen $a \in M' \setminus M$ y $b \in A \setminus M'$ y por (v) tenemos que $a \rightarrowtail b \in M'$. Por lo tanto, $b \in M'$ lo que es una contradicción. Luego, M es maximal.

$\square$

Observación 2.4.17. *De las propiedades* (W1), (W4), (W6) *y* (W9), *teniendo en cuenta un resultado bien conocido de A. Monteiro ([54]) concluimos que todo s.d.d. propio de una* $mpM-$*álgebra* A *es intersección de s.d.d. maximales, de donde resulta que* $\{1\}$ *es la intersección de todos los s.d.d. maximales de* A.

3. Capítulo III

Con el fin de profundizar el estudio de la variedad de las $mpM-$álgebras, comenzamos este capítulo obteniendo distintas caracterizaciones de las congruencias principales vía ciertos subconjuntos del espacio asociado. Además, mostramos que ellas forman un álgebra de Boole, coinciden con las congruencias compactas y tienen la propiedad de ser definibles ecuacionalmente. De las afirmaciones anteriores concluímos que $\boldsymbol{mpM}$ es una variedad discriminadora. Por otra parte probamos, entre otros resultados, que las congruencias principales coinciden con las booleanas y, en el caso finito, calculamos el cardinal de $Con(A)$. Finalmente, con técnicas algebraicas, determinamos el polinomio discriminador y el dual discriminador ternarios para $\boldsymbol{mpM}$. Esto nos facilitó el camino para obtener una descripción ecuacional de las congruencias principales y coprincipales

3.1. $\boldsymbol{mpM}-$congruencias principales

Observemos en primer lugar que si $a, b \in A$ y $\theta(a,b)$ es la congruencia principal generada por (a,b) como $\theta(a,b) = \theta(a \wedge b, a \vee b)$, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a \leq b$.

A continuación indicaremos propiedades de los mp_M-espacios que serán de utilidad para la determinación de las congruencias principales.

Lema 3.1.1. *Sea (X, g) un mp_M-espacio y $R \subseteq X$. Entonces $[R) \setminus R$ es creciente.*

Dem. Sea $x \in [R) \setminus R$ e $y \in X$ tal que $x \leq y$. Luego, existe $t \in R$ tal que $t \leq x$ de donde resulta que $y \in [R)$. Si suponemos que $y \in R$, entonces $t < x \leq y$ y por la Observación 2.2.2 tenemos que $x = y$. Por lo tanto $x \in R$, lo que es una contradicción. □

Lema 3.1.2. *Sea (X, g) un mp_M-espacio. Si $R \subseteq X$ es abierto y cerrado, entonces existe $W \in D(X)$ tal que $[R) \setminus R \subseteq W$ y $R \cap W = \emptyset$.*

Dem. Sea $x \in [R)\setminus R$. Como por el Lema 3.1.1, $[R)\setminus R$ es creciente tenemos que para cada $y \in R$, $x \not\leq y$. Entonces por la total disconexión en el orden existe $U_{xy} \in D(X)$ tal que $x \in U_{xy}$ e $y \notin U_{xy}$. Luego, $[R) \setminus R \subseteq \bigcup\limits_{x \in [R)\setminus R} U_{xy}$. Además, de la hipótesis y la Proposición 1.2.3 resulta que $[R)\setminus R$ es cerrado y por lo tanto compacto. De las afirmaciones anteriores concluimos que existen $x_1, \ldots, x_n \in [R) \setminus R$ tales que $[R) \setminus R \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_iy} = U_y$. Entonces para cada $y \in R$ existe $U_y \in D(X)$ tal que $y \notin U_y$ y $R \subseteq \bigcup\limits_{y \in R} (X \setminus U_y)$. Luego, como R es compacto existen $y_1, \ldots, y_n \in R$ tales que $R \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} (X \setminus U_{y_i}) = X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{y_i}$ y tomando $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{y_i}$ concluimos la demostración. □

3.1.1. Cerrados e involutivos asociados a congruencias principales

En esta sección describiremos a las congruencias principales de las $mpM-$álgebras por medio de ciertos subconjuntos cerrados e involutivos del espacio asociado.

Observación 3.1.3. *Sean A una $mpM-$álgebra e Y un subconjunto cerrado e involutivo de $\mathsf{mp_M}(A)$. Dados $a, b \in A$ tales que $a \leqslant b$, por el Teorema 2.2.15 tenemos que $(a, b) \in \Theta_I(Y)$ si y sólo si $(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cap Y = \emptyset$.*

Con el propósito de determinar las congruencias principales en las $mpM-$álgebras introducimos la siguiente noción considerada en [10].

Definición 3.1.4. *Sea X un mp_M-espacio, $R \subseteq X$. Diremos que $Y \in \mathcal{C}_I(X)$ es maximalmente disjunto con R si se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $Y \cap R = \emptyset$,

(ii) *para todo $T \in \mathcal{C}_I(X)$ tal que $Y \subset T$, $T \cap R \neq \emptyset$.*

Proposición 3.1.5. *Sea A una $mpM-$álgebra. Si $Y \in \mathcal{C}_I(\mathsf{mp_M}(A))$ y $a, b \in A$ son tales que $a \leqslant b$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_I(Y) = \theta(a, b)$,

(ii) *Y es maximalmente disjunto con $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis y el Observación 3.1.3 tenemos que $(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cap Y = \emptyset$. Por otra parte, si F es un subconjunto cerrado e involutivo de $X(A)$ tal que $(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cap F = \emptyset$, entonces $F \subseteq Y$. En efecto, por el Teorema 2.2.15 resulta que $\Theta_I(F)$ es una congruencia y por el Observación 3.1.3 $(a, b) \in \Theta_I(F)$. Luego, $\Theta_I(Y) \subseteq \Theta_I(F)$ y por el Teorema 2.2.15 inferimos que $F \subseteq Y$. Por lo tanto, Y es maximalmente disjunto con $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis tenemos que $(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cap Y = \emptyset$ y como $Y \in \mathcal{C}_I(\mathsf{mp_M}(A))$ por el Observación 3.1.3 tenemos que $(a, b) \in \Theta_I(Y)$. Por otra parte, si ϑ es una congruencia tal que $(a, b) \in \vartheta$, entonces por el Teorema 2.2.15 existe $F \subseteq X(A)$ cerrado e involutivo tal que $\vartheta = \Theta_I(F)$ y por el Observación 3.1.3 $(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cap F = \emptyset$. Luego, de la hipótesis inferimos que $F \subseteq Y$ y por el Teorema 2.2.15 tenemos que $\Theta_I(Y) \subseteq \vartheta$, de donde resulta que $\Theta_I(Y) = \theta(a, b)$. $\square$

En el Teorema 3.1.6 mostraremos de manera explícita como obtener el conjunto Y que determina a la congruencia principal generada por (a,b) con $a,b \in A$, $a \leqslant b$. Para ello, notaremos con $\mathcal{C}_{ab}$ a la familia de todas las cadenas maximales C de $\mathsf{mp_M}(A)$ tales que $(C \cup g(C)) \cap (V \setminus U) = \emptyset$, siendo $U = \sigma_A(a)$, $V = \sigma_A(b)$.

Teorema 3.1.6. *Sean A una mpM−álgebra y $a,b \in A$ tales que $a \leqslant b$. Si $Y = \bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}_{ab}} C$, entonces $\Theta_I(Y) = \theta(a,b)$.*

Dem. En primer lugar observemos que si $C \in \mathcal{C}_{ab}$, entonces $g_A(C) \in \mathcal{C}_{ab}$. Luego si $P \in Y$, entonces $P \in C$ para algún $C \in \mathcal{C}_{ab}$. Por lo tanto, $g_A(P) \in g_A(C)$ de donde concluimos que $g_A(P) \in Y$ lo que implica que Y es involutivo. Además, $Y \cap (V \setminus U) = \emptyset$. Por otra parte, si H es un subconjunto cerrado e involutivo de $X(A)$ tal que $H \cap (V \setminus U) = \emptyset$, entonces $H \subseteq Y$. En efecto, si $P \in H$, tenemos que $g_A(P) \in H$. Luego, $C = \{P, g_A(P)\}$ es una cadena maximal de $X(A)$ tal que $C \cap (V \setminus U) = \emptyset$. De esta última afirmación deducimos que $C \in \mathcal{C}_{ab}$ de donde resulta que $C \subseteq Y$. Luego, $P \in Y$ y por lo tanto $H \subseteq Y$. Luego, hemos probado que Y es maximalmente disjunto con $V \setminus U$. Además, teniendo en cuenta que $Y \cap (V \setminus U) = \emptyset$ y que $V \setminus U$ es cerrado en $X(A)$, inferimos que $\overline{Y} \cap (V \setminus U) = \emptyset$. Como por la Observación 1.2.6 tenemos que $\overline{Y}$ es involutivo, entonces $\overline{Y} \subseteq Y$ de donde resulta que Y es cerrado. De las afirmaciones precedentes concluimos que Y es un subconjunto cerrado e involutivo maximalmente disjunto con $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$ y por la Proposición 3.1.5, resulta que $\Theta_I(Y) = \theta(a,b)$. □

Proposición 3.1.7. *Sean A una mpM−álgebra. Si $Y \in \mathcal{C}_I(\mathsf{mp_M}(A))$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\Theta_I(Y)$ es una congruencia principal,*

(ii) *existe un subconjunto abierto y cerrado R de $X(A)$ tal que Y es maximalmente disjunto con R.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Es consecuencia inmediata de la Proposición 3.1.5 considerando $R = \sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis, la Proposición 1.2.3 y el Lema 3.1.1 resulta que $[R) \setminus R$ es cerrado y creciente. De esta afirmación y el Lema 3.1.2 existe $W \in D(X(A))$ tal que $[R) \setminus R \subseteq W$ y $R \cap W = \emptyset$. Sea $V = R \cup W$ y veamos que V es creciente. En efecto, sea $P \in V$ y $Q \in X(A)$ tal que $P \subseteq Q$. Si $P \in W$, entonces es inmediato que $Q \in W$ y por lo tanto $Q \in V$. Si $P \in R$, podemos afirmar que $Q \in [R)$. Luego, pueden presentarse los siguientes casos: $Q \in R$ o $Q \notin R$. Si $Q \in R$, resulta que $Q \in V$. Si $Q \notin R$, tenemos que $Q \in [R) \setminus R$ y por lo tanto, $Q \in W$ de donde deducimos que $Q \in V$. Luego, V es creciente. Como $V, W \in D(X(A))$, existen $a, b \in A$ con $a \leqslant b$ tales que $W = \sigma_A(a)$, $V = \sigma_A(b)$. De esta afirmación y teniendo en cuenta que $R = V \setminus W$ inferimos que $R = \sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$, de donde por la hipótesis y la Proposición 3.1.5 concluimos $\Theta_I(Y) = \theta(a, b)$. $\square$

3.1.2. Abiertos e involutivos asociados a congruencias principales

Si bien ya tenemos una descripción de las congruencias principales, en lo que sigue y con el propósito de estudiar más propiedades de las mismas, las vamos a determinar vía ciertos subconjuntos abiertos e involutivos del espacio asociado. En primer lugar tenemos que:

Observación 3.1.8. *Sean A una $mpM-$álgebra y G un subconjunto abierto e involutivo de $\mathsf{mp_M}(A)$. Dados $a, b \in A$ tales que $a \leqslant b$, por el Teorema 2.2.16 tenemos que $(a, b) \in \Theta(G)$ si y sólo si $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq G$.*

Proposición 3.1.9. *Sea $A \in$ **mpM** y sean $a, b \in A$ tales que $a \leq b$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{OI}(G) = \theta(a, b)$,

(ii) *G es el menor subconjunto de $\mathcal{O}_I(\mathsf{mp_M}(\mathsf{A}))$, en el sentido de inclusión, que contiene a $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis y la Observación 3.1.8 tenemos que $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq G$. Además, si $H \in \mathcal{O}_I(\mathsf{mp_M}(\mathsf{A}))$ es tal que $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq H$, entonces por la Observación 3.1.8 inferimos que $(a, b) \in \Theta_{OI}(H)$. Luego, por (i) $\Theta_{OI}(G) \subseteq \Theta_{OI}(H)$ de donde por el Teorema 2.2.16 concluimos que $G \subseteq H$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la Observación 3.1.8 tenemos que $(a, b) \in \Theta_{OI}(G)$. Además, si $\varphi \in Con(A)$ es tal que $(a, b) \in \varphi$, entonces por el Teorema 2.2.16 existe $H \in \mathcal{O}_I(\mathsf{mp_M}(\mathsf{A}))$ tal que $\Theta_{OI}(H) = \varphi$. De estas afirmaciones y la Observación 3.1.8 resulta que $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a) \subseteq H$. Luego, de la hipótesis y el Teorema 2.2.16 se sigue que $\Theta_{OI}(G) \subseteq \varphi$, de lo que concluimos que $\Theta_{OI}(G) = \theta(a, b)$. $\square$

En lo que sigue describiremos explícitamente a los subconjuntos del inciso (ii) de la Proposición 3.1.9.

Proposición 3.1.10. *Sea $A \in$ **mpM** y sean $a, b \in A$ tales que $a \leq b$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{OI}(G) = \theta(a, b)$,

(ii) $G = (\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup g_A(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$.

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis y la Proposición 3.1.9 tenemos que G es el menor abierto e involutivo de $\mathcal{O}_I(\mathsf{mp_M}(\mathsf{A}))$ que contiene a $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$. Además, como G es involutivo, $g_A(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \subseteq G$, de lo que se sigue que $(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup g_A(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \subseteq G$. Por otra parte, como $(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup g_A(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$ es abierto, involutivo y contiene a $\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)$, concluimos que $G = (\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a)) \cup g_A(\sigma_A(b) \setminus \sigma_A(a))$.

(ii)$\Rightarrow$(i): De la hipótesis, es claro que G verifica el inciso (ii) de la Proposición 3.1.9 de donde concluimos (i). $\square$

Corolario 3.1.11. *Sea $A \in \boldsymbol{mpM}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Theta_{OI}(G)$ *es una congruencia principal,*

(ii) *existe un subconjunto R abierto y cerrado de $\mathsf{mp_M(A)}$ tal que $G = R \cup g_A(R)$.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): De la hipótesis existen $a, b \in A$ con $a \leq b$ tales que $\Theta_{OI}(G) = \theta(a, b)$. Entonces por la Proposición 3.1.10 tomando $R = \sigma_A(b) \backslash \sigma_A(a)$ concluímos la demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (i): De la hipótesis es inmediato que $X(A) \setminus G$ es un cerrado involutivo de $\mathsf{mp_M(A)}$ tal que $(X(A) \setminus G) \cap R = \emptyset$. Además, si F es un cerrado involutivo de $\mathsf{mp_M(A)}$ tal que $F \cap R = \emptyset$, entonces $G \cap F = \emptyset$ y por lo tanto, $F \subseteq X(A) \setminus G$. Luego, $X(A) \setminus G$ es maximalmente disjunto con R de donde, por la Proposición 3.1.7, concluimos que $\Theta_I(X(A) \setminus G)$ es una congruencia principal y como $\Theta_I(X(A) \setminus G) = \Theta_{OI}(G)$ resulta (i). $\square$

3.1.3. Caracterización de las congruencias principales y propiedades

Finalmente, las distintas descripciones de las congruencias principales en las *mpM*-álgebras, indicadas anteriormente, quedan resumidas en el Teorema 3.1.12.

Teorema 3.1.12. *Sea $A \in \boldsymbol{mpM}$. Entonces el retículo $\mathcal{CO}_I(\mathsf{mp_M(A)})$ de todos los subconjuntos cerrados, abiertos e involutivos de $\mathsf{mp_M(A)}$ es isomorfo al retículo $Con_P(A)$ de todas las congruencias principales de A; y el isomorfismo, que denotaremos con Θ_{COI}, es la restricción de Θ_{OI} a $\mathcal{CO}_I(\mathsf{mp_M(A)})$.*

Dem. Si $G \in \mathcal{CO}_I(\mathsf{mp_M(A)})$, entonces $G = G \cup g_A(G)$ de donde por el Corolario 3.1.11 inferimos que $\Theta_{OI}(G) \in Con_P(A)$. Recíprocamente, sea $\rho \in Con_P(A)$. Entonces por el Teorema 2.2.16 existe $G \in \mathcal{O}_I(\mathsf{mp_M(A)})$ tal que $\rho = \Theta_{OI}(G)$. De estas afirmaciones y el Corolario 3.1.11 existe un abierto y cerrado R de $\mathsf{mp_M(A)}$ tal que $G = R \cup g_A(R)$ y como

g_A es un homeomorfismo involutivo, tenemos que $G \in \mathcal{CO}_I(\mathsf{mp_M}(\mathsf{A}))$ de donde concluimos la demostración. $\square$

Corolario 3.1.13. *Si $A \in \boldsymbol{mpM}$, entonces*

(i) *$Con_P(A)$ es un álgebra de Boole,*

(ii) *La intersección de un número finito de congruencias principales es una congruencia principal,*

(iii) *$Con_P(A) = Con_C(A)$, donde $Con_C(A)$ es el conjunto de las congruencias compactas de A.*

Dem. (i) Sea $\rho \in Con_P(A)$. Entonces por el Teorema 3.1.12 existe $G \in \mathcal{CO}_I(\mathsf{mp_M}(\mathsf{A}))$ tal que $\rho = \Theta_{COI}(G)$. Teniendo en cuenta que $X \setminus G \in \mathcal{CO}_I(\mathsf{mp_M}(\mathsf{A}))$, concluimos que $\phi = \Theta_{COI}(X \setminus G) \in Con_P(A)$ es el complemento booleano de ρ.

(ii) Es consecuencia directa de (i).

(iii) Es bien sabido que las conguencias compactas son los miembros finitamente generados de $Con(A)$ y por [12, pp. 38] ellas son el supremo de un número finito de congruencias principales. Entonces, por (i) concluimos que $Con_C(A) \subseteq Con_P(A)$. La recíproca es inmediata. $\square$

Corolario 3.1.14. *En $\boldsymbol{mpM}$ la composición de congruencias principales es conmutativa.*

Dem. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in Con_P(A)$. Entonces por el Teorema 3.1.12 existen $Y_1, Y_2 \in \mathcal{CO}_I(\mathsf{mp_M}(\mathsf{A}))$ tales que $\varphi_1 = \Theta_{COI}(Y_1)$ y $\varphi_2 = \Theta_{COI}(Y_2)$. Supongamos ahora que $(x, y) \in \varphi_2 \circ \varphi_1$, entonces existe $z \in A$ tal que $(x, z) \in \varphi_1$ y $(z, y) \in \varphi_2$. Estas últimas afirmaciones implican que $\sigma_A(x) \cap Y_1 = \sigma_A(z) \cap Y_1$ y $\sigma_A(z) \cap Y_2 = \sigma_A(y) \cap Y_2$. Sea $U = (\sigma_A(x) \cap Y_1 \cap Y_2) \cup (\sigma_A(x) \cap (Y_2 \setminus Y_1)) \cup (\sigma_A(y) \cap (Y_1 \setminus Y_2))$. Entonces, por el Lema 2.2.14, concluimos que $U \in D(X(A))$. Por lo tanto, $w = \sigma_A^{-1}(U) \in A$. Además, es simple verificar que $\sigma_A(w) \cap Y_2 = \sigma_A(x) \cap Y_2$

y que $\sigma_A(w) \cap Y_1 = \sigma_A(y) \cap Y_1$. Luego, tenemos que $(x, w) \in \varphi_2$ y $(w, y) \in \varphi_1$ de donde inferimos que $(x, y) \in \varphi_1 \circ \varphi_2$. Por lo tanto, $\varphi_2 \circ \varphi_1 \subseteq \varphi_1 \circ \varphi_2$. La otra inclusión es análoga. $\square$

El conocimiento de las congruencias principales nos permitió afirmar que

Corolario 3.1.15. ***mpM*** *tiene las congruencias principales definibles ecuacionalmente (CPDE).*

Dem. Resulta del Corolario 3.1.13 (i) y [9, Theorem 0.3]. $\square$

Corolario 3.1.16. ***mpM*** *es filtral* (ver [8, Corollary 3.7]).

Dem. Es consecuencia directa del Corolario 3.1.15, teniendo en cuenta que ***mpM*** es semisimple. $\square$

3.2. Propiedades de las congruencias

En el párrafo anterior hemos mostrado algunas propiedades de las congruencias principales. Nuestro próximo objetivo es estudiar el comportamiento de las $mpM-$congruencias en general, para lo cual se hace necesario determinar algunos resultados sobre esta variedad.

Proposición 3.2.1. *En* ***mpM*** *toda álgebra directamente indescomponible es simple.*

Dem. Sea $\rho \in Con(A)$, $\rho \neq Id_A$. Entonces existen $a, b \in A$, $a \neq b$ tal que $(a, b) \in \rho$ lo que implica que $\theta(a, b) \subseteq \rho$. Además, por el Corolario 3.1.13 (i) y el Corolario 3.1.14 tenemos que $\theta(a, b)$ es una congruencia factor, de donde por [12, p.53] concluimos que $\theta(a, b) = A \times A$. Por lo tanto, $\rho = A \times A$ lo que completa la demostración. $\square$

Proposición 3.2.2. *Sea $A \in$* ***mpM****. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es subdirectamente irreducible,*

(ii) *A es directamente indescomponible.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Inmediata del Teorema 1.1.8.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Resulta inmediata del Teorema 2.3.3 y la Proposición 3.2.1. $\square$

Teorema 3.2.3. *$\boldsymbol{mpM}$ es directamente representable.*

Dem. De la Proposición 3.2.2 y el Corolario 2.3.9 concluimos que $\boldsymbol{mpM}$ tiene solo un número finito de miembros directamente indescomponibles finitos. Luego, $\boldsymbol{mpM}$ es directamente representable. $\square$

Ahora, teniendo en cuenta resultados establecidos en el Teorema 1.1.10 y el Teorema 3.2.3 podemos afirmar que

Corolario 3.2.4. (i) *$\boldsymbol{mpM}$ es a congruencias conmutativas.*

(ii) *Todo miembro finito de $\boldsymbol{mpM}$ es a congruencias uniformes,*

A continuación, y como consecuencia de resultados anteriores, mostraremos una importante propiedad de la variedad de las mpM-álgebras para lo cual recordemos que, la función discriminadora ternaria t sobre un conjunto X está definida por las condiciones siguientes:

$$t(x,y,z) = \begin{cases} z & \text{si } x = y, \\ \\ x & \text{en otro caso.} \end{cases}.$$

Además, una variedad $\mathcal{V}$ es discriminadora, si tiene un polinomio $p(x,y,z)$ que coincide con la función discriminadora ternaria sobre cada miembro subdirectamente irreducible de $\mathcal{V}$; tal polinomio se denomina polinomio discriminador ternario para $\mathcal{V}$.

Entonces, podemos afirmar que

Teorema 3.2.5. *$\boldsymbol{mpM}$ es discriminadora.*

Dem. Es consecuencia directa del Corolario 3.2.4 (i), del Corolario 3.1.15 y el Teorema 2.3.11 y lo establecido en [9, Corollary 3.4]. □

Este último teorema y los resultados establecidos en [71] nos permiten obtener otras propiedades de las congruencias en $\boldsymbol{mpM}$.

Corolario 3.2.6. *Sea $A \in \boldsymbol{mpM}$. Entonces se verifican:*

(i) *las congruencias de A son distributivas,*

(ii) *para todo $a, b, c, d \in A$ se verifica que $(c, d) \in \theta(a, b)$ si, y sólo si, $p(a, b, c) = p(a, b, d)$,*

(iii) *cada congruencia principal de A es una congruencia factor,*

(iv) *las congruencias de A son regulares,*

(v) *las congruencias de A son normales (o uniformes),*

(vi) *las congruencias de A son filtrales,*

(vii) *$\boldsymbol{mpM}$ tiene la propiedad de extensión de congruencias.*

3.3. $\boldsymbol{mpM}-$congruencias booleanas

Del Corolario 3.2.6 sabemos que en las $mpM-$álgebras toda congruencia principal es booleana, a continuación mostraremos que vale la recíproca.

Proposición 3.3.1. *Sean $A \in \boldsymbol{mpM}$ y $\rho \subseteq A \times A$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) ρ *es una congruencia principal,*

(ii) ρ *es una congruencia booleana.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Es consecuencia directa del Corolario 3.2.6.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Por el Teorema 2.2.16 existe $Y \subseteq X(A)$ abierto e involutivo tal que $\rho = \Theta_{OI}(Y)$. Además, por la hipótesis existe $\varphi \in Con(A)$ tal que $\rho \vee \varphi = X(A) \times X(A)$ y $\rho \wedge \varphi = id_A$. Por otra parte, del Teorema 2.2.16, existe $G \subseteq X(A)$ abierto e involutivo tal que $\varphi = \Theta_{OI}(G)$. De las afirmaciones anteriores tenemos que $Y \cup G = X(A)$ y $Y \cap G = \emptyset$. Por lo tanto, $Y = X(A) \setminus G$ es cerrado, de donde por el Teorema 3.1.12 concluimos la demostración. $\square$

Corolario 3.3.2. *Sean $A \in$ **mpM** finita. Entonces $Con(A) = Con_P(A) = Con_B(A)$ donde $Con_B(A)$ es el retículo de las congruencias booleanas.*

Dem. Es consecuencia del Teorema 2.2.16, Teorema 3.1.12 y la Proposición 3.3.1 teniendo en cuenta que si A es un álgebra finita, la topología en $\mathsf{mp_M}(A)$ es la discreta. $\square$

En lo que sigue, nuestro propósito es determinar el número de congruencias de una $mpM-$álgebra finita, para lo cual la operación unaria $\triangle$ definida en la Sección 2.4 juega un rol fundamental. Previamente necesitamos mostrar algunos resultados previos.

Proposición 3.3.3. *Sea (X, g) un $mp_M -$ espacio, $\{C_i\}_{i\in I}$ el conjunto de todas las cadenas maximales de X. Entonces para cada $U \in \mathsf{mpM}(X)$ se satisfacen las siguientes identidades:*

(i) $\triangle U = U \cap g(U) = \bigcup\limits_{C_i \subseteq U \cap g(U)} C_i,$

(ii) $\nabla U = U \cup g(U) = \bigcup\limits_{\substack{C_i \cap U \neq \emptyset \\ o \\ C_i \cap g(U) \neq \emptyset}} C_i.$

Dem.

(i) Sea $y \in \triangle U = (X \setminus (X \setminus g(U)]) \cap U \subseteq g(U) \cap U$. Recíprocamente, sea $y \in U \cap g(U)$ y supongamos que $y \notin (X \setminus (X \setminus g(U)])$. De esta afirmación resulta que existe $t \in X \setminus g(U)$ tal que $y \leq t$. Como $y \in g(U)$, entonces $y < t$. Luego, por (mp1) concluimos que $t = g(y) \in g(U)$, contradicción. Por lo tanto $y \in (X \setminus (X \setminus g(U)]) \cap U$.

Además, $\triangle U = \bigcup_{C_i \subseteq U \cap g(U)} C_i$. En efecto, sea $x \in \triangle U$ y sea C_x la cadena maximal que contiene a x. Veamos que $C_x \subseteq U \cap g(U)$. Sea $y \in C_x$ y supongamos que $x \leq y$. Como $\triangle U$ es creciente, entonces $y \in U \cap g(U)$. Por otra parte, si $y < x$, entonces por (mp1) $g(y) = x \in \triangle U$ y como $\triangle U$ es involutivo $y \in U \cap g(U)$. La otra inclusión es inmediata.

(ii) De (i) resulta que $\nabla U = \sim ((X \setminus g(U)) \cap g(X \setminus g(U)) = \sim (X \setminus (U \cup g(U))) = U \cup g(U)$.

Además, $\nabla U = \bigcup_{\substack{C_i \cap U \neq \emptyset \\ o \\ C_i \cap g(U) \neq \emptyset}} C_i$. En efecto, sea $x \in \nabla U$ y sea C_x la cadena maximal que contiene a x. Como $\nabla U = U \cup g(U)$ es claro que $U \cap C_x \neq \emptyset$ o $C_x \cap g(U) \neq \emptyset$. Recíprocamente, si consideramos $x \in \bigcup_{\substack{C_i \cap U \neq \emptyset \\ o \\ C_i \cap g(U) \neq \emptyset}} C_i$, entonces $x \in C_i$ para algún C_i tal que $C_i \cap U \neq \emptyset$ o $C_i \cap g(U) \neq \emptyset$. Si $C_i \cap U \neq \emptyset$, entonces existe $u \in U$ tal que $u \in C_i$. Luego, $u \leq x$ o $x < u$. Si $u \leq x$, como U es creciente $x \in \nabla U = U \cup g(U)$. Si $x < u$, por (mp1) tenemos que $u = g(x)$, entonces $x = g(u)$ y por lo tanto, $x \in \nabla U$. Si $C_i \cap g(U) \neq \emptyset$, siguiendo un razonamiento análogo resulta que $x \in \nabla U$. □

Corolario 3.3.4. *Sea (X, g) un mp_M-espacio y sea $U \in \mathsf{mpM}(X)$. Entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $U \in \nabla(\mathsf{mpM}(X)))$ *si y sólo si* $U = \nabla U$,

(ii) $U \in \triangle(\mathsf{mpM}(X))$ *si y sólo si* $U = \triangle U$,

(iii) $\nabla(\mathsf{mpM}(X)) = \triangle(\mathsf{mpM}(X))$.

Dem. Es consecuencia directa de la Proposición 3.3.3. $\square$

Proposición 3.3.5. *Sea (X, g) un $mp_M -$ espacio. Entonces se verifican:*

(i) $U \in \triangle(\mathsf{mpM}(X))$ *si, y sólo si, U es abierto, cerrado e involutivo,*

(ii) $U \in B(\mathsf{mpM}(X))$ *si, y sólo si, U es abierto, cerrado y* $U = \bigcup\limits_{x \in U} C_x$,

(iii) $\nabla(\mathsf{mpM}(X)) = \triangle(\mathsf{mpM}(X)) \subseteq B(\mathsf{mpM}(X))$.

Dem.

(i) Si $U \in \triangle(\mathsf{mpM}(X))$, del Corolario 3.3.4 y la Proposición 3.3.3 se concluye la demostración. Recíprocamente, como U es involutivo, tenemos que $U = g(U)$ y por lo tanto, $\triangle U = U$ de donde por el Corolario 3.3.4 resulta que $U \in \triangle(\mathsf{mpM}(X))$.

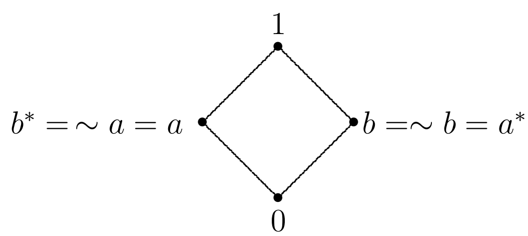
(ii) De la hipótesis tenemos que U es abierto, cerrado y existe $V \in D(X)$ tal que $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = X$. Luego, $V = X \setminus U$. Además, si $y \in \bigcup\limits_{x \in U} C_x$, entonces existe $x_0 \in U$ tal que $y \in C_{x_0}$. Si $x_0 \leq y$, como U es creciente resulta que $y \in U$. Si $y < x_0$ e $y \notin U$ tenemos que $y \in V$ y como V es creciente, entonces $x_0 \in V$, de donde resulta que $x_0 \in U \cap V$, contradicción. Luego, $y \in U$ y por lo tanto, $\bigcup\limits_{x \in U} C_x \subseteq U$. La otra inclusión es inmediata.

Recíprocamente, sean $x \in U$, $y \in X$ tales que $x \leq y$, entonces $y \in C_x$ y por lo tanto $y \in \bigcup\limits_{x \in U} C_x = U$. Luego, U es creciente. De esta afirmación y las hipótesis concluimos que $U \in D(X)$. Por otra parte, sea $V = X \setminus U$ de donde resulta que V es abierto y cerrado. Además, de la Observación 2.2.2 tenemos que $V = \bigcup\limits_{y \in X \setminus U} C_y$ y siguiendo un razonamiento análogo al anterior concluimos que V es creciente. De lo expuesto, resulta que $V \in D(X)$, $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = X$. Luego, $U \in B(\mathsf{mpM}(X))$.

(iii) Sea $U \in \triangle(\mathsf{mpM}(X))$. Entonces por (i) tenemos que U es involutivo. Además, si $y \in \bigcup\limits_{x \in U} C_x$, entonces existe $x_0 \in U$ tal que $y \in C_{x_0}$. Si $x_0 \leq y$, como U es creciente resulta que $y \in U$. Si $y < x_0$, por (pm1) tenemos que $g(y) = x_0 \in U$ y por lo tanto $y \in g(U) = U$. Luego, $\bigcup\limits_{x \in U} C_x \subseteq U$. La recíproca es inmediata, de donde concluimos que $U \in B(\mathsf{mpM}(X))$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra una $mpM-$álgebra A tal que $\nabla(A) \subset B(A)$.

Ejemplo 3.3.6. *Sea M mpM$-$álgebra indicada en la figura, entonces se verifica que* $\nabla(M) = \triangle(M) = \{0, 1\} \subset B(M) = M$.



Corolario 3.3.7. *Sea A una mpM$-$álgebra finita tal que su espacio asociado es la suma cardinal de n cadenas con dos elementos, m cadenas involutivas con un elemento y $2l$ cadenas no involutivas con un elemento. Entonces*

(i) $|\triangle(A)| = |\nabla(A)| = 2^{n+m+l}$,

(ii) $|B(A)| = 2^{n+m+2l}$.

Dem. Es consecuencia directa de la Proposición 3.3.5 teniendo en cuenta que la topología es la discreta. $\square$

Proposición 3.3.8. *Sea A una mpM$-$álgebra y $G \subseteq X(A)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $G \in \triangle(\mathsf{mpM}(X(A)))$,

(ii) *existe* $a \in \triangle A$ *tal que* $G = \sigma_A(a)$.

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Como $G \in \mathsf{mpM}(X(A))$ y σ_A es un $mpM-$isomorfismo, entonces existe $a \in A$ tal que $G = \sigma_A(a)$. Además, de la hipótesis tenemos que $\sigma_A(a) = \triangle\sigma_A(a) = \sigma_A(\triangle a)$. Luego, $a = \triangle a$ lo que completa la demostración.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Se concluye de la hipótesis teniendo en cuenta que σ_A es un $mpM-$isomorfismo. □

Corolario 3.3.9. *Sean* $A \in \boldsymbol{mpM}$. *Entonces, los retículos* $\triangle A$ *y* $\mathcal{CO}_I(\mathsf{mp_M(A)})$ *son isomorfos.*

Dem. Es consecuencia directa de la Proposición 3.3.5 y Proposición 3.3.8. □

Corolario 3.3.10. *Sea A una* $mpM-$*álgebra finita tal que su espacio asociado es la suma cardinal de* n *cadenas con dos elementos,* m *cadenas involutivas con un elemento y* $2l$ *cadenas no involutivas con un elemento. Entonces* $|Con(A)| = |Con_B(A)| = |Con_P(A)| = 2^{n+m+l}$.

Dem. Es inmediata del Corolario 3.3.9, el Corolario 3.3.2 y el Corolario 3.3.7. □

3.4. Polinomio discriminador y dual discriminador

En el Teorema 3.2.5 hemos probado que $\boldsymbol{mpM}$ es discriminadora. En lo que sigue determinaremos el polinomio discriminador ternario para esta variedad y por lo tanto, tendremos una descripción ecuacional de las congruencias principales.

Teniendo en cuenta [47], dada $A \in \boldsymbol{mpM}$ consideramos la operación binaria $\oplus$ definida por medio de la fórmula:

$$a \oplus b = (\sim \triangle(a \vee b) \vee \triangle(a \wedge b)) \wedge (\sim \nabla(a \vee b) \vee \nabla(a \wedge b)),$$

donde $\triangle$ y ∇ están definidos de la manera indicada anteriormente, es decir $\triangle x = (\sim x)^* \wedge x$ y $\nabla x = \sim x^* \vee x$.

Observemos que $\langle B, \oplus\rangle$ y $\langle T, \oplus\rangle$ son subálgebras de $\langle M, \oplus\rangle$ y la tabla de $\oplus$ sobre M es la siguiente:

$\oplus$	0	a	b	1
0	1	0	0	0
a	0	1	0	0
b	0	0	1	0
1	0	0	0	1

Proposición 3.4.1. *Sea $A \in \boldsymbol{mpM}$. Entonces, se verifican*

(S1) $x = y$ *si, y sólo si* $x \oplus y = 1$,

(S2) $x \oplus y = y \oplus x$,

(S3) $x \oplus 1 = \triangle x$,

(S4) $(x \oplus y) \wedge x = (x \oplus y) \wedge y$,

(S5) $\triangle(x \oplus y) = x \oplus y$,

(S6) $\nabla(x \oplus y) = x \oplus y$,

(S7) $\sim (x \oplus y)$ *y* $x \oplus y$ *son complementos booleanos.*

Dem. Es de rutina. □

Teorema 3.4.2. *El polinomio discriminador ternario para* $\boldsymbol{mpM}$ *es*

$$p(x, y, z) = ((x \oplus y) \wedge z) \vee (\sim (x \oplus y) \wedge x).$$

Dem. De (S1), tenemos que $p(x,x,z) = z$. Si $x \neq y$, entonces por (S1) inferimos que $x \oplus y \neq 1$, de donde por (S5) y la Proposición 2.4.7, concluimos que $x \oplus y = 0$. Entonces, $p(x,y,z) = x$. □

Del Teorema 3.4.2 y el inciso (ii) del Corolario 3.2.6 concluimos que

Corolario 3.4.3. *Sea $A \in \boldsymbol{mpM}$ y $a,b \in A$. Entonces*
$\theta(a,b) = \{(x,y) \in A \times A : (a \oplus b) \wedge x) \vee (\sim (a \oplus b) \wedge a) = (a \oplus b) \wedge y) \vee (\sim (a \oplus b) \wedge a)\}$.

Recordemos que un álgebra finita A se dice *cuasi-primal* si tiene un polinomio discriminador ([12]). Estas álgebras fueron introducidas por A. Pixley en 1970, bajo el nombre de álgebras algebraicas simples y ellas constituyen una exitosa generalización de las álgebras de Boole con dos elementos.

Corolario 3.4.4. *Cada $mpM-$álgebra subdirectamente irreducible es cuasi-primal y funcionalmente completa.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 3.4.2 y de [71, Corolary 1.9]. □

Nuestro próximo objetivo es obtener otra descripción más simple de las $mpM-$congruencias principales, para lo cual el siguiente lema ha sido fundamental.

Lema 3.4.5. *Sea $A \in \boldsymbol{mpM}$ y $a,b \in A$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(a \oplus b) \wedge x) \vee (\sim (a \oplus b) \wedge a) = (a \oplus b) \wedge y) \vee (\sim (a \oplus b) \wedge a)$,

(ii) $(a \oplus b) \wedge x = (a \oplus b) \wedge y$.

Dem. Sólo probaremos (i) $\Rightarrow$(ii). Sean $x,y \in A$ tales que verifican (i). Entonces por el Teorema 3.4.2 y el inciso (ii) del Corolario 3.2.6, inferimos que $(x,y) \in \theta(a,b)$ lo que implica que $(\sim x, \sim y) \in \theta(a,b)$. Luego, $((a \oplus b) \wedge \sim x) \vee (\sim (a \oplus b) \wedge a) = ((a \oplus b) \wedge \sim y) \vee (\sim (a \oplus b) \wedge a)$. Entonces, $((a \oplus b) \wedge \sim x) \vee \sim (a \oplus b) = ((a \oplus b) \wedge \sim y) \vee \sim (a \oplus b)$ y por lo tanto de (S7), tenemos que $\sim (a \oplus b) \vee \sim x = \sim (a \oplus b) \vee \sim y$, de donde concluimos la demostración. $\square$

Finalmente, la otra caracterización ecuacional de las congruencias principales buscada es la siguiente:

Teorema 3.4.6. *Sea $A \in$ **mpM** y $a, b \in A$. Entonces*

$$\theta(a,b) = \{(x,y) \in A \times A : \, x \wedge (a \oplus b) = y \wedge (a \oplus b)\}.$$

Dem. Es consecuencia del Corolario 3.4.3 y el Lema 3.4.5. $\square$

E. Fried y A. Pixley en [29] introdujeron el estudio de una función estrechamente relacionada con la función discriminadora ternaria t. Más precisamente, consideraron la función dual discriminadora ternaria d sobre un conjunto X definida por las condiciones siguientes:

$$d(x,y,z) = \begin{cases} x & \text{si } x = y, \\ \\ z & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y mostraron que d puede ser obtenida a partir de t del siguiente modo:

$$d(x,y,z) = t(x, t(x,y,z), z).$$

De esta afirmación se concluye que toda álgebra discriminadora es dual discriminadora. Luego, del Teorema 3.4.2, el Teorema 3.4.6 y los resultados de [29] podemos afirmar que

Teorema 3.4.7. ***mpM*** *es una variedad dual discriminadora y el polinomio dual discriminador ternario es*

$$q(x, y, z) = (\sim (x \oplus y) \wedge z) \vee ((x \oplus y) \wedge x).$$

Recordemos que, dada una variedad $\mathcal{V}$, para cada $A \in \mathcal{V}$ y $a, b \in A$ se denomina congruencia co-principal $\gamma(a, b)$ a la congruencia definida por

$$\gamma(a, b) = \{(x, y) \in A \times A : \ q(a, b, x) = q(a, b, y)\} \ ([29]).$$

Teniendo en cuenta [29, Theorem 3.8] y el hecho que $\theta(\sim (a \oplus b), 1)$, es el complemento booleano de $\theta(a, b)$ conluimos que

Proposición 3.4.8. *Sea $A \in \boldsymbol{mpM}$ y $a, b \in A$. Entonces*

$$\gamma(a, b) = \{(x, y) \in A \times A : \sim (a \oplus b) \wedge x = \sim (a \oplus b) \wedge y\}.$$

4. Capítulo IV

En este capítulo nos abocamos, en primer lugar, al estudio de las propiedades de las $mpM-$álgebras finitas y finitamente generadas. Entre los resultados que obtenemos, se destaca el Teorema 4.1.4 que nos suministra una factorización de dichas álgebras. Por otra parte, el conocimiento de las álgebras simples en una variedad localmente finita permite, en muchos casos, hallar el número de elementos del álgebra libre con un conjunto finito de generadores libres. Nosotros determinamos la estructura de dichas álgebras aplicando la técnica usada por L. Monteiro en [57, p. 20] y finalmente, en el Teorema 4.2.7 indicamos la fórmula para calcular el cardinal del álgebra libre con un conjunto finito de generadores libres, en función del número de generadores de la misma.

4.1. $mpM-$álgebras finitas y finitamente generadas

El Lema 4.1.1 y 4.1.2 serán fundamentales para la demostración del Teorema 4.1.4.

Lema 4.1.1. *Sea A $mpM-$álgebra finita. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *F es un $\triangle-$filtro de A,*

(ii) *$F = F(\triangle a)$ para algún $a \in A$.*

Dem. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Como A es finita, de la hipótesis resulta que $F = F(x)$ para algún $x \in A$ y por lo tanto, $\triangle x \in F$. Luego, por T2 tenemos que $\triangle x = x$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Es consecuencia directa de la Proposición 2.4.3. $\square$

Lema 4.1.2. *Sea A una $mpM-$álgebra finita y no trivial. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$F(\triangle a)$ es un $\triangle-$filtro maximal de A,*

(ii) *$\triangle a$ es un átomo de $\triangle A$.*

Dem. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Sea $x \in \triangle A$ tal que $0 \leq x \leq \triangle a$ y supongamos que $x \neq 0$. Entonces $F(\triangle a) \subseteq F(x) \neq A$. Por el Lema 4.1.1, $F(x)$ es un $\triangle-$ filtro de A y como $F(\triangle a)$ es maximal, entonces $F(\triangle a) = F(x)$ y por lo tanto $\triangle a = x$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Por el Lema 4.1.1 tenemos que $F(\triangle a)$ es un $\triangle-$ filtro de A. Además, $F(\triangle a)$ es maximal. En efecto, sea $F(x)$ un $\triangle-$ filtro propio de A tal que $F(\triangle a) \subseteq F(x)$. Luego $0 < \triangle x \leq \triangle a$ de donde por la hipótesis resulta $\triangle x = \triangle a$ lo que completa la demostración. $\square$

Observación 4.1.3. *Del Lema 4.1.2 resulta que si A es finita y no trivial, el número de $\triangle-$filtros maximales de A coincide con el de átomos de $\triangle A$.*

Teorema 4.1.4. *Si A es una $mpM-$álgebra finita y no trivial, entonces A es isomorfa a $\prod\limits_{i=1}^{n} A/F(\triangle a_i)$, donde $\{\triangle a_i\}_{1\leq i \leqslant n}$ es el conjunto de todos los átomos de $\triangle A$.*

Dem. Del Lema 4.1.2, la Proposición 2.4.11 y la Observación 2.4.17 inferimos que la aplicación $h : A \longrightarrow \prod\limits_{i=1}^{n} A/F(\triangle a_i)$ definida por $h(x) = (q_1(x), \ldots, q_n(x))$ es un monomorfismo, donde $q_i : A \longrightarrow A/F(\triangle a_i)$ para $1 \leq i \leq n$ es el epimorfismo canónico. Luego, sólo resta probar que h es sobreyectiva. En efecto, sea $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \prod_{i=1}^{n} A/F(\triangle a_i)$, entonces para cada $y_i \in A/F(\triangle a_i)$ existe $x_i \in A$ tal que $q_i(x_i) = y_i$ para $1 \leq i \leq n$. Sea $x = \bigvee_{i=1}^{n} (x_i \wedge \triangle a_i)$. Como $\triangle a_i \in \triangle A$, $1 \leq i \leq n$ es claro que $q_j(\triangle a_i) \in \triangle(A/F(\triangle a_i))$, de donde por la Proposición 2.4.7 tenemos que $q_j(\triangle a_i) \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Si $q_j(\triangle a_i) = \overline{1}$, con $i \neq j$, entonces $\triangle a_i \in F(\triangle a_j)$ y por lo tanto $\triangle a_j < \triangle a_i$, contradicción. Luego, $q_j(\triangle a_i) = \overline{0}$, para todo $j \neq i$, y $q_i(\triangle a_i) = \overline{1}$ lo que implica que $q_j(x) = \bigvee_{i=1}^{n} (q_j(x_i)) \wedge q_j(\triangle a_i)) = q_j(x_j) = y_j$ para todo j, $1 \leq j \leq n$. De esta afirmación concluimos que $h(x) = y$. □

Proposición 4.1.5. *Sea A una $mpM-$álgebra, $b \in A$ y $[0, b] = \{x \in A : 0 \leq x \leq b\}$. Si $b \in \triangle A$, entonces*

(i) $\langle [0, b], \wedge, \vee, -, \urcorner, 0, b \rangle$ *es una $mpM-$álgebra donde $-x = \sim x \wedge b$ y $\urcorner x = x^* \wedge b$, para todo $x \in [0, b]$,*

(ii) $L/F(b)$ *y* $[0, b]$ *son álgebras isomorfas.*

Dem.

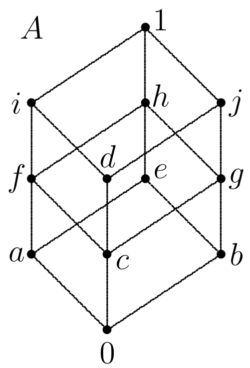
(i) Es inmediata.

(ii) Sea $h_b : A/F(b) \longrightarrow [0, b]$ definida por $h_b(\overline{x}) = x \wedge b$. Es claro que h_b está bien definida y es biyectiva. Por otra parte, h_b es un $mpM-$homomorfismo. En efecto, como $b \in \triangle A$ es booleano tenemos que $-h_b(\overline{x}) = -(x \wedge b) = \sim (x \wedge b) \wedge b = (\sim x \wedge b) \vee (\sim b \wedge b) = \sim x \wedge b = h_b(\sim \overline{x})$. Además, de (A6) resulta que $\urcorner h(\overline{x}) = (x \wedge b)^* \wedge b = x^* \wedge b = h(\overline{x}^*)$. La demostración de las restantes propiedades es de rutina. □

Corolario 4.1.6. *Sea A una $mpM-$álgebra finita y no trivial. Si $\{\triangle a_i\}_{1 \leq i \leqslant n}$ es la familia de todos los átomos de $\triangle A$, entonces A es isomorfa a $\prod_{i=1}^{n} [0, \triangle a_i]$.*

Dem. Es consecuencia directa del Teorema 4.1.4 y Proposición 4.1.5. □

Ejemplo 4.1.7. *Sea A la $mpM-$álgebra cuyo diagrama de Hasse es el indicado en la figura y donde las operaciones $\sim$ y * están dadas en la siguiente tabla:*



x	0	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	1
$\sim x$	1	i	j	h	e	d	f	g	c	a	b	0
x^*	1	j	i	e	e	d	b	a	0	b	a	0
$\triangle x$	0	0	0	0	d	e	0	0	e	d	d	1

Como $\triangle A = \{0, d, e, 1\}$ entonces $A \simeq [0, d] \times [0, e]$.

4.2. $mpM-$álgebras libres

En esta sección nuestro propósito es determinar la estructura de las $mpM-$álgebras libres finitamente generadas e indicar una fórmula para calcular su cardinal en término del número de generadores libres. Para ello se hacen necesarias algunas consideraciones previas.

Denotaremos con $\mathcal{L}(c)$ la $mpM-$álgebra libre con un conjunto G de generadores libres tal que $|G| = c$, donde c es un número cardinal. La noción de álgebra libre está definida de la manera usual, esto es:

Definición 4.2.1. ([7]) *Sea $\mathfrak{K}$ una clase de álgebras similares y $\mathcal{L} \in \mathfrak{K}$. $\mathcal{L}$ es un álgebra que tiene a G como conjunto de generadores libres, si se verifican las siguientes condiciones:*

(L1) $[G] = L$,

(L2) *para cada álgebra $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$ y cada función $f : G \longrightarrow B$ existe un homomorfismo $h : L \longrightarrow B$ que extiende a f, esto es se verifica $h(g) = f(g)$, para todo $g \in G$.*

El homomorfismo h de (L2) es único y si $\mathcal{A}'$ es un álgebra de $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ con un conjunto G' de generadores libres tal que existe una biyección de G en G', entonces $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son álgebras isomorfas.

Como las $mpM-$álgebras constituyen una variedad, para cualquier cardinal c, $c > 0$ el álgebra libre existe y es única a menos de isomorfismo (ver [7]).

En lo que resta de esta sección, y para simplificar el desarrollo de la misma, notaremos con A_i para $1 \leq i \leq 3$ a las $mpM-$álgebras simples B, T y M respectivamente.

En primer lugar, teniendo en cuenta el Teorema 2.3.11, el Corolario 1.1.4, Teorema 2.3.3, el Corolario 2.3.9 y el Corolario 2.4.15 concluimos que

(I) $\mathcal{L}(n) = {A_1}^{|\mathcal{M}_1|} \times {A_2}^{|\mathcal{M}_2|} \times {A_3}^{|\mathcal{M}_3|}$,

donde

$$\mathcal{M}_j = \{M \in \mathcal{M}(\mathcal{L}(n)) : \mathcal{L}(n)/M \simeq A_j\},\ 1 \leq j \leq 3,$$

y $\mathcal{M}(\mathcal{L}(n))$ denota al conjunto de todos los sistemas deductivos maximales de $\mathcal{L}(n)$. Luego, conocemos la estructura de los factores de $\mathcal{L}(n)$, por lo tanto sólo debemos calcular el número de veces que aparecen cada uno de ellos.

Determinación de $|\mathcal{M}_j|$

En lo que sigue si L, $L^{'}$ son $mpM-$álgebras, indicaremos con $Epi(L, L^{'})$ y $Aut(L)$ el conjunto de los epimorfismos de L en $L^{'}$ y el conjunto de los automorfismos de L respectivamente.

Lema 4.2.2. $|\mathcal{M}_j| = \dfrac{|Epi(\mathcal{L}(n), A_j)|}{|Aut(A_j)|}$, $1 \leq j \leq 3$.

Dem. Sea $\alpha : Epi(\mathcal{L}(n), A_j) \longrightarrow \mathcal{M}_j$ la aplicación definida por $\alpha(h) = Ker(h)$. Luego, α es sobre. En efecto, para cada $M \in \mathcal{M}_j$ sea $f = \gamma_M \circ q_M$, donde q_M es la aplicación canónica y γ_M es el mpM-isomorfismo de $\mathcal{L}(n)/M$ en A_j. Entonces, $f \in Epi(\mathcal{L}(n), A_j)$ y

$Ker(f) = M$ de donde resulta que $\alpha(f) = M$. Además, si $M \in M_j$ y $\alpha(h) = M$, entonces $\alpha^{-1}(M) = \{g \circ h : g \in Aut(A_j)\}$. Por lo tanto, $|\mathcal{M}_j| \cdot |Aut(A_j)| = |Epi(\mathcal{L}(n), A_j)|$ de donde concluimos la demostración. $\square$

Observación 4.2.3. *Es claro que* $|Aut(A_1)| = |Aut(A_2)| = 1$ *y que sólo existen* 2 *automorfismos de* A_3.

Lema 4.2.4. *Si* $j = 1, 2$, *entonces* $|Epi(\mathcal{L}(n), A_j)| = |F^*(G, A_j)|$ *donde* $F^*(G, A_j) = \{f : G \longrightarrow A_j : [f(G)] = A_j\}$.

Dem. Sea $\beta : Epi(\mathcal{L}(n), A_j) \longrightarrow F^*(G, A_j)$ la aplicación definida por $\beta(h) = h/G$. Es simple verificar que β es inyectiva. Por otra parte, para cada $f \in F^*(G, A_j)$ existe un único homomorfismo $h_f : \mathcal{L}(n) \longrightarrow A_j$ que extiende a f. Además, $h_f(\mathcal{L}(n)) = h_f([G]) = [f(G)] = A_j$ de donde concluimos que β es sobre. $\square$

Corolario 4.2.5. (i) $|\mathcal{M}_1| = 2^n$,

(ii) $|\mathcal{M}_2| = 3^n - 2^n$.

Dem. Es consecuencia directa del Lema 4.2.2, Lema 4.2.4 y la Observación 4.2.3. $\square$

Lema 4.2.6. $|\mathcal{M}_3| = 2^{n-1}(2^n - 1)$.

Dem. Del Lema 4.2.2, Lema 4.2.4 y la Observación 4.2.3 tenemos que

$$|\mathcal{M}_3| = \frac{|F^*(G, A_3)|}{2}.$$

Por otra parte, como la única subálgebra de A_3 es A_1 resulta que

$$|F^*(G, A_3)| = 4^n - 2^n = 2^n(2^n - 1).$$

Luego, $|\mathcal{M}_3| = 2^{(n-1)}(2^n - 1)$. $\square$

De (I) y los resultados anteriores podemos enunciar el siguiente teorema.

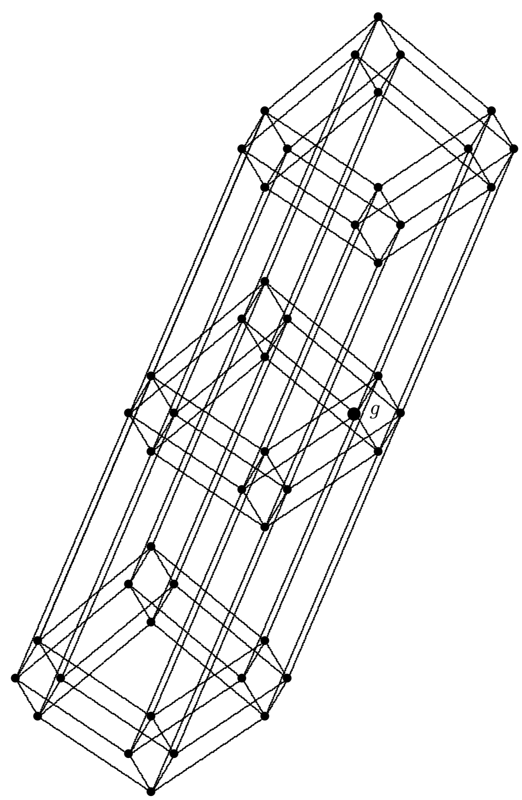
Teorema 4.2.7. *Sea $\mathcal{L}(n)$ la mpM−álgebra libre con n generadores libres. Entonces el cardinal $|\mathcal{L}(n)|$ puede expresarse por la fórmula siguiente:*

$$|\mathcal{L}(n)| = 2^{2^n} \times 3^{3^n - 2^n} \times 4^{2^{n-1}(2^n - 1)}.$$

Ejemplo 4.2.8. *Por el Teorema 4.2.7 tenemos que para $n = 1$*

$$|\mathcal{L}(1)| = 2^2 \times 3 \times 4 = 48$$

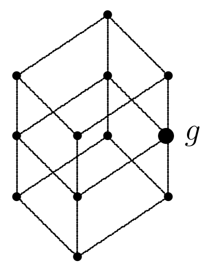
y su diagrama de Hasse es el siguiente:



Por otra parte recordemos que I. Loureiro, en su tesis doctoral determinó el álgebra tetravalente modal libre $\mathcal{T}_4(n)$ con n generadores libres y mostró que su cardinal está dado por:

- $|\mathcal{T}_4(n)| = 2^{2^n} \times 3^{3^n - 2^n} \times 4^{2^{n-1}(2^n+1) - 3^n}$.

Luego, si $n = 1$, $|\mathcal{T}_4(n)| = 12$ y su diagrama de Hasse es el siguiente:



Este resultado nos permite comprobar nuevamente que $\boldsymbol{mpM}$ es una subvariedad propia de la variedad de las álgebras tetravalentes modales.

Conclusiones y estudios futuros

En esta tesis se estudiaron las álgebras de De Morgan pseudocomplementadas modales o $mpM-$álgebras las cuales constituyen una subvariedad propia de las $pM-$álgebras ([66]) y también de la variedad de las $pM-$álgebras que satisfacen la condición adicional $x \wedge (\sim x)^* = (\sim (x \wedge (\sim x)^*)^*$ estudiadas en [68]. Las mismas son $pM-$álgebras a las que se les puede asociar un álgebra tetravalente modal ([43]) considerando el operador ∇ definido en el Capítulo III. Esta última clase de álgebras ha dado origen al estudio de lógicas tetravalentes modales por diferentes autores y con técnicas diversas ([27, 28, 5, 17, 26])

Desde esta perspectiva se plantea como trabajo futuro presentar un cálculo proposicional estilo Hilbert que tenga como contrapartida algebraica a las $mpM-$álgebras. Para la obtención del mismo conjeturamos que la implicacion débil definida en el Capítulo II jugará un papel fundamental. Otra alternativa, es proveer una teoría de prueba para la lógica naturalmente asociada a estas álgebras. Más precisamente, se puede procurar un cálculo de secuentes que sea correcto y completo con respecto a las $mpM-$álgebras. Sería muy importante que este cálculo tuviera la *Propiedad de eliminación de corte* debido a sus múltiples consecuencias positivas (como decidibilidad, consistencia, teoremas de interpolación, etc.).

Por otra parte, muchas otras cuestiones permanecen abiertas y merecen un estudio futuro, como es el caso de las $mpM-$álgebras equipadas con un cuantificador existencial. Como en el caso de las álgebras de Boole, con cada cuantificador existencial sobre una $mpM-$álgebra está asociado un cuantificador universal, por lo tanto podemos llamar $mpM-$álgebras monádicas a la nueva clase de álgebras obtenida. Las mismas resultarían ser una generalización de las álgebras de Boole monádicas introducidas por Halmos en [36]. Además, deberían presentarse de modo tal que tengan asociadas a las álgebras tetravalentes monádicas introducidas y estudiadas en [72] y que resulten ser una generalización de las álgebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas investigadas en [58].

El estudio de las $mpM-$álgebras se abordó utilizando fundamentalmente técnicas topológicas. Luego, el estudio de las $mpM-$álgebras monádicas podría encararse de maneras diversas. Por ejemplo, teniendo en cuenta los resultados anteriores y la dualidad establecida por R. Cignoli ([14]) para los $Q-$retículos o considerando la dualidad dada por R. Golblatt en [32] para el caso particular de retículos distributivos acotados con un $\vee-$hemimorfismo unario dado que los cuantificadores verifican esta última condición.

Referencias

[1] Adams, M., *Principal congruences in De Morgan algebras*, Proc. Edinb. Math. Soc. 30 (1987), 415-421.

[2] Balbes, R. and Dwinger, P., Distributive Lattices, Univ. of Missouri Press, Columbia, 1974.

[3] D. Becchio, *Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes données par A. Monteiro*, Logique et Analyse 63–64(1973), 339–344.

[4] Belnap Jr, N.D., *A useful four–valued logic*, Modern Uses of Multiple–Valued Logic, Reidel, Dordrecht, 1977.

[5] Bianco, Estela, *Una contribución al estudio de las álgebras de De Morgan modales* $4-$*valuadas*, Ms. Thesis, Universid Nacional del Sur. Argentina, 2009.

[6] Bialynicki-Birula, A. and Rasiowa, H., *On the representation of Quasi–Boolean algebras*, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Math. Astronim. Phys. 5 (1957), 259–261.

[7] Birkhoff, G., Lattice Theory, Amer. Math. Soc., Colloq. Pub., 25, 3rd ed., Providence, 1967.

[8] Blok, W. and Pigozzi, D., *On the structure of varieties with equationally definable principal congruences I*, Algebra Universalis 15 (1982), 195-227.

[9] Blok, W., Köler, P. and Pigozzi, D., *On the structure of varieties with equationally definable principal congruences II*, Algebra Universalis 18 (1984), 334–379.

[10] Blyth, T. and Varlet, J., Ockham Algebras, Oxford University Press, New York, 1994.

[11] Boisescu, V., Filipoiu, A., Georgescu, G. and Rudeanu, S., Lukasiewicz-Moisil Algebras, Annals of Discrete Mathematics 49, North-Holland, 1991.

[12] Burris, S. and Sankappanavar, H. P., A Course in Universal Algebra, Graduate Texts in Mathematics 78, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[13] Celani, S. *Classical modal de Morgan algebras*, Studia Logica 98 (2011), 251-266.

[14] Cignoli, R., *Quantifiers on distributive lattices*, Discrete Math. 96 (1991), 183–197.

[15] Cignoli, R. and Monteiro, A., *Boolean elements in Łukasiewicz algebras II*, Proc. Japan Acad. 41(1965), 676–680.

[16] Cignoli, R. and de Gallego, M.S., *Dualities for some De Morgan algebras with operators and Łukasiewicz algebras*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 34 (1983), 377–393.

[17] Coniglio, M. and Figallo, M., *Hilbert-style Presentations of Two Logics Associated to Tetravalent Modal Algebras*, por aparecer en Studia Logica.

[18] Cornish, W. H. and Fowler, P. R., *Coproducts of De Morgan Algebras*, Bull. Austral. Math. Soc. 16 (1977), 1–13.

[19] Cornish, W. H. and Fowler, P. R., *Coproducts of Kleene Algebras*, Bull. Austral. Math. Soc. Ser. A 27 (1979), 209–220.

[20] Figallo, A. V., *On the congruence in four–valued modal algebras*, Portugaliae Math. 49 (1992), 249–261.

[21] Figallo, A. V., *Tópicos sobre álgebras modales* $4-$*valuadas*, Proceeding of the IX Simposio Latino–Americano de Lógica Matemática, (Bahía Blanca, Argentina, 1992), Notas de Lógica Matemática 39 (1992), 145–157.

[22] Figallo, A. V. and Landini, P., *On generalized* $I-$*algebras and modal* $4-$*valued algebras*, Rep. Math. Logic 29 (1995), 3–18.

[23] Figallo, A. V. and Landini, P., *Notes on 4−valued modal algebras*, Preprints del Instituto de Ciencias Básicas, Univ. Nac. de San Juan, 1 (1996), 28–37.

[24] Figallo, A. V., Oliva N. and Ziliani, A., *Modal pseudocomplemented De Morgan algebras* to appear in Acta Univ. Palacki Olomouc.

[25] Figallo, A. V. and Ziliani, A., *Symmetric tetra–valued modal algebras*, Notas Soc. Mat. Chile 10, 1 (1991), 133–141.

[26] Figallo, Hipersecuentes y la Lógica tetravalente modal de Monteiro, M, Ph. D. Thesis, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 2013.

[27] Font, J. and Rius, M., *A 4–valued modal logic arising from Monteiro's last algebras*, XX International Symposium on Multiple–Valued Logic, Bahía Blanca, Argentina, 1990.

[28] Font J. and Rius M., *An abstract algebraic logic approach to tetravalent modal logics*, J. Symbolic Logic 65 (2000), 481–518.

[29] Fried, E. and Pixley, A., *The dual discriminator function in universal algebra*, Acta Sci. Math. 41 (1979), 83–100.

[30] Glivenko, V., *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer*, Bull. Acad. Sci. Belg. 15 (1929), 183–188.

[31] Goldberg, M., *Distributive p−Algebras and Ockham Algebras: A Topological Approach*, Ph. D. Thesis, La Trobe University, Australia, 1979.

[32] Goldblatt, R., *Varieties of complex algebras*, Ann. Pure Applied Logic 44 (1989), 173–242.

[33] Goldblatt, R., Topoi: The Categorial Analysis of Logic, Studies in Logic and Foundations on Mathematics, North–Holland, New York, 1983.

[34] Grätzer, G., Universal Algebra, 2nd. edition, Springer–Verlag, New York, 1979.

[35] Grätzer, G. and Lakser, H., *The structure of pseudocomplemented distributive lattices II. Congruence extension and amalgamation*, Trans. Amer. Math. Soc. 156 (1971), 343–358.

[36] Halmos, P., Algebraic Logic, Chelsea, New York, 1962.

[37] Halmos, P., Lectures on Boolean Algebra, Van Nostrand, Princeton, 1963.

[38] Hecht, T., Katriňák, T., *Principal congruences of $p-$algebras and double $p-$algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 58, (1976), 25–31.

[39] Kalman, J., *Lattice with involution*, Trans. Amer. Math. Soc., 87 (1958), 485–491.

[40] Krauss, P. and Clark, D., Global subdirect products. Memoirs Amer. Math. Soc. 210, 1979.

[41] Loureiro, I., *Homomorphism kernels of a tetravalent modal algebra*, Portugaliae Math. 39 (1980), 371–379.

[42] Loureiro, I., *Axiomatisation et propriétés des algèbres modales tétravalentes*, C.R. Acad. Sc. Paris t. 295 (1982), Série I, 555–557.

[43] Loureiro, I., *Algebras Modais Tetravalentes*, Ph. D. Thesis, Faculdade de Ciências de Lisboa, 1983.

[44] Loureiro, I., *Prime spectrum of a tetravalent modal algebras*, Notre Dame J. Formal Logic 24 3 (1983), 389–394.

[45] Loureiro, I., *Finitely generated free tetravalent modal algebras*, Discrete Math. 46 1 (1983), 41–48.

[46] Loureiro, I., *Finite tetravalent modal algebras*, Rev. de la Unión Mat. Argentina 31 4 (1984), 187–196.

[47] Loureiro, I., *Principal congruences of tetravalent modal algebras*, Notre Dame J. Formal Logic 26 (1985), 76–80.

[48] J. Łukasiewicz, *On three–valued logic* (Polish). Ruch Filozoficzny, 5 (1920), 160–171.

[49] J. Łukasiewicz y A. Tarski, Untersuchungen über den Aussagenkalkül, C.R. Acad. Scie. Lett. Varsovie, 23 (1930), 30–50 (La traducción al ingles de este artículo constituye el Capítulo IV de [69]).

[50] Mac Lane, S., Categories for the Working Mathematician, Springer Verlag, (1971).

[51] McKenzie, R., *Para-primal varieties: A study of finite axiomatizability and definable principal congruences in locally finite varieties*, Algebra Universalis 8 (1978), 336-348. 8

[52] Moisil, Gr. C., *Recherches sur les logiques non–chrysippiennes*, Ann. Sci. Uni. Jassy 26(1940), 431–466.

[53] Monteiro, A., *Axiomes independants pour les algèbres de Brouwer*, Rev. de la Unión Matemática Argentina 17 (1955), 149–160.

[54] Monteiro, A., *La sémisimplicité des algèbres de Boole topologiques et les systémes déductifs*, Revista de la Unión Matemática Argentina 25 (1975), 417–448.

[55] Monteiro, A., *Algebras de Łukasiewicz trivalentes*, Curso dictado en la Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1963.

[56] Monteiro, L., *Axiomes indépendants pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Bull. Soc. Sc. Math. R. P. Roumaine 7, 55 (1963), 199–202. (Este artículo se reprodujo en Notas de Lógica Matemática 22 (1964), Instituto de Matemática, Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina).

[57] L. Monteiro, *Sur les algèbres de Heyting trivalentes*, Notas de Lógica Matemática 19 (1964), Instituto de Matemática, Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca.

[58] Monteiro, L., *Álgebras de Łukasiewicz trivalentes monádicas*, Notas de Lógica Matemática 32 (1974), Instituto de Matemática, Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

[59] E. Post, *Introduction to a general theory of elementary propositions*, Amer. J. Math., 43 (1921), 163–185.

[60] Priestley, H. A., *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces*, Bull. London Math. Soc. 2 (1970), 186-190.

[61] Priestley, H. A., *Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices*, Proc. London Math. Soc. 4, 3 (1972), 507-530.

[62] Priestley, H. A., *Stone lattices: a topological approach*, Fund. Math. 84 (1974), 127–143.

[63] Priestley, H. A., *Ordered sets and duality for distributive lattices*, Ann. Discrete Math. 23 (1984), 39–60.

[64] Rasiowa, H., *N–lattices and constructive logic with strong negation*, Fund. Math. 46 (1958), 61–80.

[65] Ribenboim, P., *Characterization of the sup-complement in a distributive lattice with last element*, Summa Brasil Math. 2 (1949), 43–49.

[66] Romanowska, A., *Subdirectly irreducible pseudocomplemented De Morgan algebras*, Algebra Universalis 12 (1981), 70–75.

[67] Sankappanavar, H., *Pseudocomplemented Ockham and Demorgan algebras*, Z. Math. Logik Grundlagen Math. 32 (1986), 385–394.

[68] Sankappanavar, H., *Principal congruences of pseudocomplemented Demorgan algebras*, Z. Math. Logik Grundlagen Math. 33 (1987), 3–11.

[69] A. Tarski, *Logic, semantics, metamathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1956.

[70] Varlet, J., *Algèbres de Łukasiewicz trivalentes*, Bull. Soc. Roy. Liège, (1968), 9–10.

[71] Werner, H., *Discriminator–Algebras*, Algebraic representation and modal theoretic properties, Akademie–Verlag, Berlin, 1978.

[72] Ziliani, A., Álgebras de De Morgan modales 4−valuadas monádicas, Ph. D. Thesis, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 2001.