



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

Método de Dirac y sistemas diferenciales exteriores

Santiago Capriotti

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2010

Prefacio

Esta tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur, y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Matemática de la UNS durante el período comprendido entre el 11 de octubre de 2005 y el 8 de junio de 2010, bajo la dirección del Dr. Hernán Cendra, Profesor Titular del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur y del Dr. Hugo Montani, Profesor Adjunto del Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo.

Santiago Capriotti
caprios2000@gmail.com

9 de junio de 2010
Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente Tesis ha sido aprobada el .../.../..., mereciendo la calificación de (.....).

Resumen

En esta tesis se presenta un estudio de los vínculos de Dirac asociados a una teoría de campos desde el punto de vista de sistemas diferenciales exteriores (EDS).

Con este fin en mente, se estudió una clase mayor de problemas variacionales, denominados *problemas variacionales no estándar*, que permiten tratar en pie de igualdad tanto sistemas mecánicos como teorías de campos. Para ello se recurrió al concepto de problema variacional Lepage equivalente (tal como se define en [Got91b]), a través del cual fue posible representar las ecuaciones para las extremales del problema original como un sistema diferencial exterior \mathcal{I}_{H-C} .

Este sistema diferencial exterior resulta ser un objeto central en la búsqueda de los vínculos de Dirac de la teoría: introduciendo una descomposición del espacio de campos en hojas de tiempo constante, se muestra que \mathcal{I}_{H-C} permite dar dos versiones equivalentes para dichos vínculos, la usual, en término de funciones sobre un espacio de fases de dimensión infinita, y la novedosa, que los representa como un conjunto de generadores de un sistema diferencial exterior asociado a \mathcal{I}_{H-C} y la foliación introducida.

Se aplicó el esquema desarrollado al estudio de una serie de ejemplos, algunos físicamente motivados, como el campo electromagnético, el campo de Yang-Mills y el sistema Toda, como así también para el cálculo de las consecuencias diferenciales de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. Además fue posible construir un ejemplo de juguete en el cual el método de Dirac falla en alcanzar su culminación, permitiéndonos entender fenómenos presentes en teorías de campo más realistas [Got].

Abstract

In this thesis, a study of the Dirac constraints arising in the canonical treatment of a field theory, from exterior differential system (EDS) viewpoint, is presented.

Keeping this in mind, a bigger class of variational problems, the so called *non standard variational problems*, was studied, allowing us to deal with both mechanical systems and field theories. In order to achieve this task, it was necessary to use Lepage-equivalent variational problems, as defined by [Got91b], permitting us to give a representation of the equations for the extremals in terms of an exterior differential system \mathcal{I}_{H-C} .

This exterior differential system then becomes a central object in searching the Dirac constraints of the field theory: in fact, by introducing a decomposition of the field space into constant-time slices, it is shown here that \mathcal{I}_{H-C} gives two equivalent versions for these constraints, namely, the usual, written in terms of functions on an infinite-dimensional phase space, and the new one, where they are represented as generators of an exterior differential system closely related with \mathcal{I}_{H-C} and the slicing.

This scheme was applied in a number of examples, some of them physically motivated, such as the electromagnetic field, the Yang-Mills field and the Toda system, and also for the calculation of the differential consequences of a system of partial differential equations. Moreover, it was possible to formulate a toy model where the Dirac method fails in reaching a successful termination, in order to improve our understanding of more realistic field theories [Got].

Índice general

Prefacio	III
Resumen	V
Abstract	VI
Agradecimientos	IX
Capítulo 1. Introducción	1
1.1. Filosofía	1
1.2. Ingredientes involucrados	3
1.3. Antecedentes	5
1.4. ¿De qué se trata todo esto?	6
Capítulo 2. Elementos de geometría diferencial	9
2.1. Ideas geométricas sobre sistemas de PDEs	9
2.2. Jets y topología en un espacio de secciones	11
2.3. Sistemas diferenciales exteriores	14
2.4. Fibrados sobre variedades con borde	20
Capítulo 3. El cálculo variacional	23
3.1. Cálculo variacional con base compacta	23
3.2. Cálculo variacional con base no compacta	27
3.3. Expresiones locales	28
3.4. Problemas variacionales y ecuaciones de Euler-Lagrange	29
Capítulo 4. Problemas no estándar y Lepage equivalencia	33
4.1. Versión no estándar de la mecánica	33
4.2. Extremales para problemas variacionales no estándar	38
4.3. Formalismo multisimpléctico mediante Lepage equivalencia	39
Capítulo 5. Problemas Lepage equivalentes y estructuras presimplécticas	51
5.1. Justificación de nuestra construcción	51
5.2. Espacio de secciones	55
5.3. Estructuras de variedad sobre espacios de secciones	59
5.4. Un ejemplo de espacio de secciones	63
5.5. Estructura presimpléctica sobre un espacio de secciones	69
5.6. Sobre estructuras de Dirac en una teoría de campos	77
Capítulo 6. Método de Dirac	79
6.1. Descripción geométrica	79
6.2. Clasificación parcial de vínculos	80
6.3. Algoritmo de Gotay, Nester y Hinds	81
6.4. Ejemplos motivadores	83
Capítulo 7. Vínculos y sistemas diferenciales exteriores	87
7.1. Una caracterización útil de los vínculos	87
7.2. Secciones admisibles e involución	87

7.3. La subvariedad de vínculos como un espacio de secciones	92
Capítulo 8. Ejemplos importantes en mecánica no estándar	97
8.1. EDSs no regulares y fallas del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds	97
8.2. Mecánica no estándar y condiciones de integrabilidad	111
8.3. Electromagnetismo	116
8.4. Campos de Yang-Mills y espacios de fases covariantes	119
Capítulo 9. El sistema Toda como mecánica no estándar	129
9.1. El método AKS: Factorizaciones y sistemas integrables	129
9.2. Mecánica no estándar y método AKS	133
9.3. Fijación de calibre y reducción	139
Capítulo 10. Conclusiones, comentarios y nuevas direcciones	145
10.1. Conclusiones	145
10.2. Comentarios	145
10.3. Nuevas direcciones	145
Bibliografía	147
Índice alfabético	151

Agradecimientos

Esta tesis ha sido posible gracias al sustento económico otorgado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), mediante beca doctoral. Parte de las investigaciones fueron realizadas en el Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur, y otra parte en el ámbito del Centro Atómico Bariloche, dependiente de la CNEA.

Quisiera expresar mi agradecimiento a mis directores, Hugo Montani y Hernán Cendra, por su infinita paciencia y predisposición. Este modestísimo primer paso en la investigación científica nunca hubiese sido dado sin su apoyo permanente.

También me gustaría agradecer a la gente que siempre estuvo cerca, velando mi derrotero; serán agradecimientos geográficamente variados, como lo fue la realización del presente trabajo:

- De Bahía, a Franco, Juan, Sebastián, Viviana y Guillermo, los sobrinos del tío Coni.
- De Bariloche, al Cuchu y la Flaca, la Rubia y sus mujeres, Nats y Viqui, el Fresco, Pablo, Sergio, Javier, Roberto, el Rafa y Ann.
- De Villa María, no puedo olvidarme de mis hermanos, María, el Teti y la Lula, ni de mis viejos, Sergio y Martha, y mis abuelos. Ni de mi suegra preferida Raquel, Héctor, la Leti y Mabel.
- De Almafuerite, a Leandro, con quien empezamos juntos.

Todos ellos me lo han hecho mucho más llevadero. Pero necesito concluir estos agradecimientos acordándome de los imprescindibles, los que se manifiestan en lo bueno que puedan contener estas páginas (y si de eso hay poco, es toda mi culpa): Primero, mención especialísima a mis dos mentores matemáticos: El Flaco y Lisetta. Y finalmente, a mi *deus ex machina*, la Ceci. ¡Ah, casi me olvidaba, también al Panchito!

*...pero consiguió lo que anhelaba su corazón, y tardó mucho
en conseguirlo, y acaso no hay mayores felicidades.*

J.L. Borges
La Otra Muerte

Every absurdity has now a champion.

Oliver Goldsmith, 1764.

Introducción

1.1. Filosofía

AUNQUE suene paradójico, el hecho reflejado por la frase siguiente da sustento a gran parte del material incluido en este trabajo, que intenta ser un trabajo de geometría: *El lugar natural para trabajar con ecuaciones diferenciales es el análisis, y el trabajo diario de un geómetra con los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que se esconden detrás de los campos vectoriales tiende a ocultar esta particularidad.* O sea, un vector es un objeto geométrico, a través del cual podemos definir ecuaciones diferenciales ordinarias sobre variedades, mientras que el conjunto de soluciones de un sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias es un objeto analítico. Un teorema de existencia y unicidad permite asignarle a cada campo vectorial una familia de curvas que lo tienen como tangente; dicho teorema forja un vínculo entre el objeto geométrico (el campo vectorial) y el objeto analítico (la familia de curvas). Por otra parte, existen diferencias esenciales entre estos tipos de objetos, que se manifiestan cuando queremos describir ecuaciones en derivadas parciales desde un punto de vista geométrico: En tal caso, uno se ve obligado a trabajar con subespacios de las fibras del fibrado tangente, y se diluye la conexión entre dichos objetos y sus soluciones. Por lo tanto, conviene tener siempre presente que esta confusión es un producto no deseado de los alcances del teorema de existencia y unicidad de soluciones para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, que identifican fuertemente los objetos geométricos con su contraparte analítica. Esto es, el concepto de *campo vectorial* parece capturar en sí mismo todas aquellas condiciones suficientes para la existencia de soluciones de una amplia familia de ecuaciones diferenciales ordinarias, aunque no puede hacerse lo mismo para los objetos geométricos que representan ecuaciones en derivadas parciales sobre una variedad. ¿Por qué recurrimos a este tipo de consideraciones en un trabajo que intenta explorar descripciones geométricas de sistemas mecánicos? Sucede que, por un lado, las ecuaciones de movimiento de una teoría mecánica son casi siempre ecuaciones diferenciales, y que una descripción satisfactoria de su espacio de soluciones pasa por identificar un espacio que lo describa de alguna forma. De hecho, la teoría de espacio de fases covariante [CW87, Gaw91] se basa en la esperanza de que el espacio de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales cualquiera tiene una estructura simpléctica o presimpléctica subyacente. Por ejemplo, las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias asociado a un problema mecánico pueden caracterizarse por sus valores iniciales [AdA80]. La conexión de este espacio con el espacio de soluciones se efectúa via un teorema de existencia de soluciones para el sistema de ecuaciones diferenciales en cuestión. El primer elemento a tener presente para una parametrización exitosa del espacio de soluciones de una teoría de campos es disponer de un teorema de estas características. ¿Dónde se esconde la estructura (pre)simpléctica? Una razón por la que se espera que el espacio de soluciones de una teoría mecánica admita tal estructura reside en el hecho de que provienen de un problema variacional, el así llamado *principio de Hamilton-Pontrjagin* (ver sección 4.3.1). Éste es un problema variacional sobre curvas $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TQ \oplus T^*Q : t \mapsto (q(t), \dot{q}(t), p(t))$, con acción

$$S[\gamma] = \int_I [p(t) \dot{q}(t) - L(q(t), \dot{q}(t))] dt;$$

uno puede probar que las extremales de este problema están en correspondencia uno a uno con las del problema variacional de Euler-Lagrange. Las curvas en $TQ \oplus T^*Q$ pueden interpretarse

Capítulo 1. Introducción

como secciones del fibrado trivial $\tilde{\Lambda} := I \times (TQ \oplus T^*Q) \rightarrow I$, y la acción puede escribirse

$$S[\gamma] = \int_I \gamma^* \lambda,$$

donde $\lambda|_{(t;q,\dot{q},p)} := \theta|_{(q,p)} + L(q, \dot{q}) dt$ y θ es la 1-forma canónica sobre T^*Q . Entonces si $0 \in I$, uno puede identificar en $\tilde{\Lambda}$ el espacio correspondiente a las condiciones iniciales, $\tilde{\Lambda}_0 := \{0\} \times (TQ \times T^*Q)$, y la forma presimpléctica y el hamiltoniano que rigen la dinámica pueden recuperarse a partir de la forma λ mediante las fórmulas

$$H := \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \lambda|_{\tilde{\Lambda}_0},$$

$$\omega := \mathbf{d}\lambda|_{\tilde{\Lambda}_0}.$$

Puede probarse (ver ejemplo 6.4A) que al aplicar el algoritmo de Gotay, Nester y Hinds [GNH78] a estos datos se reobtienen las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Esto significa que uno puede darle contenido a la esencia de la teoría de espacios de fases covariantes, al menos en el caso en que las ecuaciones diferenciales en cuestión provienen de un problema variacional. Esto fijará parte de los alcances de nuestro trabajo: Cada vez que se discuta una ecuación diferencial, la misma estará asociada a un problema variacional.

Una vez que hemos limitado en algún sentido el alcance de nuestro estudio, es interesante preguntarse acerca del tipo de restricción que estos límites imponen. Por ejemplo, una ecuación diferencial lineal sobre $u : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$(1) \quad u_x - u_y = 0$$

¿podrá ser tratada como un problema variacional? La respuesta es sí, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.1A: Ecuaciones diferenciales y problemas variacionales. *La ecuación diferencial de arriba puede estudiarse como el problema variacional sobre el espacio $\tilde{\Lambda} := I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (I es un intervalo real compacto) con coordenadas $(x, y, u; \lambda)$, que consiste en extremar la acción*

$$S[u, \lambda] := \int_{I \times \mathbb{R}} \lambda(x, y) [u_x(x, y) - u_y(x, y)] \mathbf{d}x \mathbf{d}y$$

sobre el par de funciones $\lambda, u : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Notemos que si definimos

$$\sigma : (x, y) \mapsto (x, y; u(x, y), \lambda(x, y)),$$

esta acción puede escribirse como

$$S[\sigma] = \int_{I \times \mathbb{R}} \sigma^* \tilde{\lambda},$$

donde $\tilde{\lambda} := \lambda(\mathbf{d}u \wedge \mathbf{d}y + \mathbf{d}u \wedge \mathbf{d}x) \in \Omega^2(\tilde{\Lambda})$. De todas formas, es interesante rescatar que una ecuación como la anterior es susceptible de representarse como extremal de un problema variacional, y por lo tanto es válido preguntarse si su espacio de soluciones admite una estructura de variedad presimpléctica. Una de las consecuencias del esquema presentado en este trabajo es que la respuesta a tal pregunta es afirmativa. Si P es el subconjunto del espacio de Sobolev $H_{N,2}(I, \mathbb{R}^2)$ que sobre ∂I asumen un valor fijo $c : \partial I \rightarrow \mathbb{R}^2$ para N suficientemente grande (por definiciones, consultar la sección 5.2.2.1), entonces uno puede verificar que P es una variedad infinito-dimensional modelada sobre un espacio de Banach, tal que sobre cada $s : x \in I \mapsto (u(x), \lambda(x)) \in \mathbb{R}^2$ en P , el espacio tangente es igual a todas las secciones tipo Sobolev a orden N del fibrado pullback $s^*(\{0\} \times T\mathbb{R}^2)$ que en ∂I se anulan. Más aún, para

1.2. Ingredientes involucrados

$\delta s_i : x \mapsto (x, s(x); 0, \delta u_i(x), \delta \lambda_i(x))$, $i = 1, 2$ un par de vectores tangentes, las fórmulas

$$\begin{aligned}\omega|_s(\delta s_1, \delta s_2) &:= \int_I s^* (\delta s_1 \lrcorner \delta s_2 \lrcorner i^* \tilde{\mathbf{d}}\tilde{\lambda}) \\ &= \int_I [\delta \lambda_1(x) \delta u_2(x) - \delta \lambda_2(x) \delta u_1(x)] \mathbf{d}x \\ H[s] &:= \int_I s^* i^* \partial_y \lrcorner \tilde{\lambda} \\ &= \int_I \lambda(x) u_x(x) \mathbf{d}x\end{aligned}$$

donde $i : I \times \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \tilde{\Lambda} : (x, u, \lambda) \mapsto (x, 0; u, \lambda)$ es la inclusión de este espacio en el espacio original $\tilde{\Lambda}$ (con imagen la subvariedad $y = 0$), definen una estructura presimpléctica y una función hamiltoniana sobre P , que es el dato indispensable para aplicar el algoritmo de Gotay, Nester y Hinds. Como P está modelado sobre un espacio de Banach reflexivo, y la forma ω es topológicamente cerrada, las condiciones analíticas para la efectiva aplicación de este algoritmo se satisfacen; otro resultado alcanzado aquí tiene como consecuencia la necesaria correspondencia entre las soluciones obtenidas a partir de este algoritmo y las soluciones de la ecuación diferencial original (1). Puede verificarse que en tales condiciones $\ker \omega = 0$, de donde resulta que el campo vectorial de evolución puede determinarse (con componentes $x \mapsto (\delta u_H(x), \delta \lambda_H(x))$) a partir de la lista de ecuaciones

$$\int_I [\delta \lambda_H \delta u - \delta \lambda \delta u_H] \mathbf{d}x = - \int_I (u_x \delta \lambda - \lambda_x \delta u) \mathbf{d}x \quad \forall \delta u, \delta \lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$$

en cada sección s (se han utilizado resultados que se probarán más adelante; el propósito de este ejemplo es darle sentido al problema planteado). Por lo tanto las ecuaciones hamiltonianas de movimiento

$$u_y = \delta u_H, \lambda_y = \delta \lambda_H$$

se traducen en las ecuaciones $u_x - u_y = 0, \lambda_x - \lambda_y = 0$, que contienen a la ecuación original. ▲

¿Qué hemos ganado? A primera vista, sólo hemos construido una formulación alternativa para una ecuación diferencial en derivadas parciales. Sin embargo, el hecho de que la nueva formulación sea en términos de un sistema dinámico sobre una variedad presimpléctica nos permite utilizar métodos que no son tradicionalmente empleados en la teoría de ecuaciones diferenciales. Recíprocamente, en aquellos casos en los que la descripción dinámica tenga problemas, uno puede recurrir a una representación tradicional de las ecuaciones diferenciales para enfocar el problema desde un punto de vista diferente. En particular, nuestro enfoque se centrará en la representación de PDEs via sistemas diferenciales exteriores, ideales en el álgebra exterior de la variedad sobre la que se define la ecuación diferencial.

Gran parte del trabajo desarrollado en esta tesis consiste en aislar los diversos ingredientes que permiten justificar la construcción esbozada en el ejemplo anterior, sin perder de vista la relación entre las soluciones del sistema dinámico definido por estos nuevos datos y las extremales del problema variacional original. El éxito de esta empresa nos debería proveer con un conjunto de condiciones suficientes que aseguren sentido a la expectativa de la teoría de espacio de fases covariante.

1.2. Ingredientes involucrados

Procediendo con un orden más bien gastronómico antes que científico ni matemático, describiremos en primer lugar los ingredientes a tener en cuenta para llevar a cabo la construcción de los espacios de fases relacionados con ecuaciones diferenciales. Uno de los aspectos que el presente trabajo explora son características geométricas del así llamado *método de vínculos de Dirac*. Como en la literatura existente no hay un consenso absoluto acerca de lo que “método

de Dirac” significa, adoptaremos la siguiente convención a lo largo de este trabajo, a menos que explícitamente se diga lo contrario: “Método de Dirac” será sinónimo de “algoritmo de Gotay, Nester y Hinds”, tal como el mismo se presenta en [GNH78]. En particular, estamos interesados en una descripción del algoritmo de Dirac en teorías de campo, entendiendo por *teorías de campo* a cierto tipo de problemas variacionales sobre el espacio de secciones de algún fibrado sobre la variedad M que describe al espacio-tiempo; el tipo de fibrado da cuenta del tipo de campo que quiere describirse con la teoría. En este contexto, el plan puede describirse suscintamente como sigue:

- En primer término se provee una definición de lo que se entiende por *problema variacional no estándar*, y de esta manera se delimita el tipo de problemas variacionales con los que vamos a trabajar.
- Es indispensable por lo tanto contar con la formulación de alguna teoría multihamiltoniana adecuada para el problema variacional en cuestión. La herramienta teórica utilizada para llevar adelante esta parte es la noción de *Lepage-equivalencia*, tal como se describe en [Got91b]; cabe remarcar que un esquema análogo para el caso de problemas variacionales sobre espacios de jets fue formulado en [Got91a].
- Esta teoría multihamiltoniana conduce a la definición de un sistema dinámico sobre el espacio de secciones de un fibrado, íntimamente relacionado con el fibrado de campos mediante el punto anterior. Aquí “sistema dinámico” significa el dato mínimo necesario para la aplicación del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds, esto es, “estructura presimpléctica más un hamiltoniano”. Es necesario introducir una foliación por hojas de tiempo constante del fibrado de campos modificado para cumplir con este objetivo.
- Bajo ciertas hipótesis de regularidad, se demuestra entonces que los vínculos hallados por la aplicación del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds al sistema dinámico del punto anterior admiten una descripción como generadores de un sistema diferencial exterior¹ definido sobre la hoja de tiempo cero por el sistema diferencial exterior que describe a las secciones críticas del problema variacional Lepage-equivalente asociado al original.

Como se sugirió en la sección anterior, el hecho de admitir problemas variacionales más generales que los que surgen en el contexto de las teorías de campo usuales (i.e., como secciones de un fibrado de jets) nos permite trabajar con familias de PDEs como si fuesen sistemas mecánicos; una consecuencia interesante de esto es que uno puede aplicar el algoritmo de Gotay, Nester y Hinds para trabajar con ellas. El segundo punto de esta lista también presenta características poco usuales: La posibilidad de definir una teoría multisimpléctica para un problema variacional sin necesidad de contar con una transformación de Legendre. Como se indicará oportunamente, hay un precio que pagar por esta libertad: La prueba de equivalencia de soluciones entre un problema variacional y su Lepage-equivalente se vuelve dependiente del caso considerado. Consideramos que éste es un precio justo en relación a nuestros objetivos, que son los de establecer un marco de trabajo para problemas variacionales no estándar que tenga en cuenta los vínculos de Dirac asociados al mismo. Conviene aclarar aquí que la notación adoptada a lo largo del trabajo es la de dicho artículo, que no coincide exactamente con la notación clásica, tal como es presentada en, por ejemplo, las referencias [Kru87, Kru73]. El tercer punto es una extensión del método usual de definición de un espacio de fases para una teoría de campos, aunque sin perder de vista la conexión con las ecuaciones de movimiento de la teoría. Finalmente, se obtiene una novedosa descripción para los vínculos de Dirac: En ella estos vínculos se pueden interpretar como generadores de un ideal diferencialmente cerrado en el álgebra exterior de un fibrado relacionado al fibrado de campos. En esta interpretación de los vínculos, la cantidad de pasos necesarios para la finalización del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds está relacionada con la cantidad de prolongaciones a la que debe someterse al

¹A partir de este momento nos podremos referir a los sistemas diferenciales exteriores con este nombre o con el acrónimo EDS, indistintamente.

1.3. Antecedentes

EDS asociado a las ecuaciones de movimiento de la teoría de campos, para conseguir un EDS involutivo.

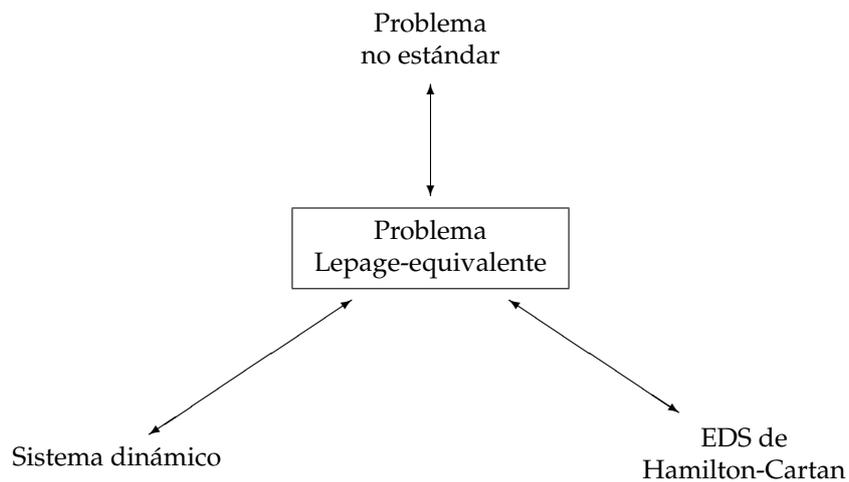
1.3. Antecedentes

La consideración de problemas variacionales no estándar aparece en [Gri98]; de acuerdo a la revisión de Hermann de este libro [Her84], las ideas centrales pueden rastrearse hasta finales del siglo XIX. Básicamente, uno trabaja con un problema variacional usual, pero considera que las funciones incógnitas son soluciones de un sistema de PDEs; claramente, esto introduce restricciones sobre las variaciones permitidas al calcular la condición de extremal. La construcción de la teoría multisimpléctica asociada a nuestro tipo de problema variacional se ha llevado adelante, como ya dijimos, hallando una forma de Cartan adecuada (sobre un espacio adecuado) con métodos de sistemas diferenciales exteriores. La idea general del formalismo es introducir coordenadas adicionales y definir un nuevo problema variacional mediante la integración de una forma (la forma de Cartan), de manera que en el nuevo espacio no hay restricción sobre las variaciones, y existe una equivalencia entre los extremales del problema original y el nuevo; por resultados y referencias, puede consultarse [dLR87]. En nuestro caso hemos utilizado la construcción de la forma de Cartan indicada en [Got91b], que es particularmente apta para el caso en que la restricción sobre las variaciones viene dada por un sistema diferencial exterior. De cualquier forma, el problema variacional Lepage-equivalente debe considerarse como una especie de principio variacional de Hamilton-Pontrjagin [YM06b]; la observación fundamental que debe hacerse aquí es que la aplicación del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds al dato dinámico consistente en el fibrado de Pontrjagin $TQ \oplus T^*Q$ y el hamiltoniano asociado a la forma de Cartan, conduce a ecuaciones dinámicas equivalentes a las hamiltonianas (que se obtendrían mediante la formulación usual via transformada de Legendre). Imitando el procedimiento detallado en [GIM97, GIM04], se utiliza una foliación del fibrado construido arriba por hojas de tiempo constante para hallar un dato dinámico equivalente a un problema variacional no estándar; el espacio de fases resulta ser el espacio de secciones de una de estas hojas, con la forma presimpléctica y el hamiltoniano definidos a partir de la forma de Cartan antes encontrada. Una fuente de inspiración para llevar adelante estas definiciones puede encontrarse en el artículo [Gaw91]; procedimientos formalmente similares abundan en la teoría de espacio de fases covariante (ver por ejemplo [CW87]), aunque en nuestro caso no se invoca la existencia *a priori* de una “variedad de soluciones” para el problema variacional dado; antes que eso, se intenta describir datos geométricos suficientes para parametrizar tales espacios. El algoritmo de Gotay, Nester y Hinds sobre el dato dinámico así construido conduce a una subvariedad² maximal respecto de la propiedad de ser estables por el flujo hamiltoniano; por otra parte, el sistema diferencial exterior asociado a las ecuaciones de Hamilton-Cartan induce un sistema diferencial exterior sobre la hoja de tiempo constante fijada. Uno de los resultados principales de este trabajo consiste en relacionar estos dos puntos de vista para las ecuaciones de movimiento: Resulta que las secciones que viven en la variedad final de vínculo obtenida por el primer procedimiento son exactamente las secciones integrales del sistema diferencial exterior construido en segundo término. Varios resultados previos han influido en la formulación de esta relación. A nivel de mecánica clásica, los trabajos pioneros [HTT91, RS96] realizan parte del programa de relacionar los vínculos de Dirac con datos geométricos asociados a las ecuaciones de movimiento; por otro lado, desde el punto de vista de la teoría formal de ecuaciones diferenciales, las referencias [ST95, GKM03] presentan resultados que en mayor o menor grado se aproximan a los alcanzados aquí desde el punto de vista de sistemas diferenciales exteriores.

²No estamos considerando aquí la pérdida de regularidad de los subconjuntos de vínculo.

1.4. ¿De qué se trata todo esto?

Esta sección se incluye como un medio de explicar la idea central de toda nuestra construcción. Sin embargo, debemos advertir al lector informado que no hemos dado con una justificación a la siguiente observación empírica: Parece ser un hecho que los espacios de soluciones de ecuaciones diferenciales contienen estructuras presimplécticas sobre ellos. Ésta es la razón por la cual las teorías de espacio de fases covariantes son existosas, dándole de esta manera sentido al presente trabajo. O sea, hemos decidido representar el espacio de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales a través de su “espacio de condiciones iniciales”, y ello nos ha conducido a una estructura de este tipo. Ahora bien, para alcanzar el éxito en tal empresa, necesitamos en particular un teorema de existencia que entre sus hipótesis incluya algo similar a un espacio de condiciones iniciales, y como conclusión la existencia de soluciones del problema de ecuaciones diferenciales en cuestión. Cuando uno busca en la literatura tal tipo de teoremas, en particular de ecuaciones en derivadas parciales, se encuentra con multitud de ellos, algunos muy poderosos, pero que adolecen de una limitación que, para el punto de vista adoptado aquí, es poco menos que fatal: Se refieren a familias restringidas de tales sistemas, cuando no directamente a uno solo de tales objetos. El único resultado que escapa a esta regla, al menos hasta donde el conocimiento del autor alcanza a discernir, es el llamado *teorema de Cartan-Kähler*, que es una reformulación del teorema de Cauchy-Kowalevsky al contexto de sistemas diferenciales exteriores. Por lo tanto se hace indispensable introducirse de lleno en el estudio de tales objetos. La idea subyacente es que, aunque el teorema de Cauchy-Kowalevsky admite hipótesis razonables (excepto por la analiticidad), su formulación exige coordenadas, por lo cual es un resultado de poco valor en el contexto de variedades; es más, esta exigencia es natural si se tiene en cuenta que las ecuaciones diferenciales parciales se formulan usualmente utilizando coordenadas. Por consiguiente, urge la necesidad de codificar geoméricamente los sistemas de PDEs, y esto fue logrado por Cartan mediante la introducción de los sistemas diferenciales exteriores (véase sección 2.1 a continuación para una breve discusión sobre el significado geométrico de los mismos).



De cualquier manera, intentemos justificar la razón por la cual esperamos poder relacionar los vínculos de Dirac de una teoría de campos con datos geométricos más directamente relacionados con la formulación variacional del mismo. El concepto clave, como ya dijimos, es quizás el espacio de soluciones del problema variacional Lepage-equivalente (por definiciones véase sección 4.3). Básicamente, un problema variacional Lepage-equivalente a uno dado se obtiene incorporando grados de libertad de manera tal que las variaciones en el mismo son totalmente arbitrarias; por contraposición, las de un problema variacional como el de Euler-Lagrange, las

1.4. ¿De qué se trata todo esto?

variaciones de las velocidades están determinadas por las de la posición. En caso de bivariancia (ver también la sección 4.3), las extremales de este problema se ponen en correspondencia biunívoca con las del problema no estándar asociado. Para cada problema Lepage-equivalente y teniendo en cuenta ciertos datos adicionales puede construirse un espacio presimpléctico y una función sobre él; llamaremos a este dato *sistema dinámico asociado*. Condiciones de regularidad e invariancia permiten establecer una correspondencia similar entre las soluciones de este problema dinámico y las extremales del problema Lepage equivalente. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para un problema Lepage-equivalente pueden expresarse como un EDS, denominado *EDS de Hamilton-Cartan*. La validez del teorema de Cartan-Kähler para secciones contenidas en este sistema dinámico asegura el mismo comportamiento entre soluciones del EDS de Hamilton-Cartan y las extremales del problema Lepage-equivalente. Estas relaciones se muestran esquemáticamente en el anterior diagrama, donde las flechas representan identificaciones entre soluciones de los problemas que las mismas unen.

Elementos de geometría diferencial

2.1. Ideas geométricas sobre sistemas de PDEs

La versión geométrica de la mecánica se debe en gran parte a la interpretación de las ecuaciones diferenciales ordinarias involucradas como campos vectoriales. Este hecho nos induce a pensar que una versión geométrica de las ecuaciones en derivadas parciales podría ser de gran utilidad a la hora de trabajar con problemas variacionales que involucren más de una variable independiente.

La clave es considerar que, cuando se interpreta una ecuación diferencial ordinaria como campo vectorial, se está considerando que dicha ecuación determina un conjunto de direcciones permitidas a lo largo de las cuales pueden pasar soluciones de la misma. De igual forma, una función $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (u^1(x), \dots, u^m(x))$ determina en cada punto un plano tangente a su gráfica; un conjunto de generadores para dicho plano está dado por

$$v_i := \partial_{x^i} + \sum_{\alpha=1}^m u_i^\alpha(x) \partial_{u^\alpha}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Un sistema de ecuaciones en derivadas parciales (de primer orden) puede ser visto entonces como una restricción a los posibles valores que en cada punto x pueden tomar las componentes libres de esta lista de vectores. Veremos a continuación que la geometría introduce condiciones sobre estas restricciones.

Ejemplo 2.1A: Un sistema sobredeterminado. Si el sistema es de la forma

$$\begin{cases} u_x = A(x, y), \\ u_y = B(x, y), \end{cases}$$

entonces los posibles planos tangentes a la gráfica de la solución en \mathbb{R}^3 con coordenadas (x, y, u) serán generados por los vectores

$$v_x = \partial_x + A(x, y) \partial_u, \quad v_y = \partial_y + B(x, y) \partial_u.$$

Uno de los aportes fundamentales de Cartan a la geometría diferencial [Car45] consiste en considerar subespacios del tangente a una variedad como el anulador de una lista de formas; concretamente, en el ejemplo anterior uno puede decir que los planos tangentes a las soluciones del sistema de PDEs son los anuladores de la forma

$$\theta|_{(x,y,u)} := \mathbf{d}u - A(x, y) \mathbf{d}x - B(x, y) \mathbf{d}y.$$

De este modo se codifican de manera más eficiente las condiciones necesarias de integrabilidad de un sistema de PDEs. Así, si existe una solución de este sistema, los vectores v_x, v_y generarán el espacio tangente a su gráfica, de donde se deduce que su corchete debe vivir allí, esto es,

$$[v_x, v_y]|_{(x,y,u)} = \mu(x, y, u) v_x + \nu(x, y, u) v_y$$

para ciertas funciones μ, ν . Pero esto equivale a pedir que $A_y - B_x = 0$. En término de la forma anuladora, la existencia de una gráfica solución equivale a que exista una superficie S en \mathbb{R}^3 tal que $\theta|_S = 0$; como la restricción conmuta con la diferencial exterior, esto implica que $\mathbf{d}\theta|_S = 0$, y esto tiene como consecuencia $(A_y - B_x) \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y = 0$. Desde el punto de vista computacional

es mucho más conveniente trabajar con diferenciales exteriores que con corchetes de Lie; esto es consecuencia de las elecciones que uno debe hacer al intentar describir un subespacio en términos de una base. ▲

De acuerdo a la discusión previa, si los posibles planos tangentes en cada punto $x \in M$ son exactamente las soluciones al problema

$$\theta_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, N$$

donde $\{\theta_1, \dots, \theta_N\} \subset \Omega^\bullet(M)$ es una colección de formas sobre M , entonces aquellos planos que sean además tangentes a alguna solución deben satisfacer las condiciones adicionales

$$d\theta_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

Sin embargo, rara vez esta nueva lista de condiciones es suficiente; por lo general, uno debe explorar la familia de consecuencias diferenciales de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales para encontrar todas las restricciones que los planos tangentes a sus soluciones deben satisfacer.

Ejemplo 2.1B: Sistema de ecuaciones diferenciales parciales con consecuencias diferenciales de orden superior. El siguiente ejemplo fue tomado de la tesis doctoral de W. Seiler [Sei94]. Consideremos el sistema sobre funciones reales con dominio en \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} u_z + yu_x = 0, \\ u_y = 0. \end{cases}$$

Notemos que dicho sistema puede representarse diferencialmente de la forma siguiente

$$\begin{cases} \theta_1 := du \wedge dy \wedge (dx - ydz) = 0, \\ \theta_2 := du \wedge dx \wedge dz = 0, \end{cases}$$

sobre el espacio \mathbb{R}^4 de coordenadas (x, y, z, u) y que además se verifican idénticamente las condiciones $d\theta_1 = d\theta_2 = 0$. Luego las condiciones necesarias de integrabilidad no agregan nada nuevo a nuestro sistema de ecuaciones. Sin embargo, notemos que existen 3-planos sobre \mathbb{R}^4 que anulan a θ_1 y θ_2 pero que no son tangentes a ninguna solución del sistema original. Efectivamente, definamos el 3-plano Π_λ , $\lambda \neq 0$ sobre (x_0, y_0, z_0, u_0) mediante

$$\Pi_\lambda := \langle \partial_x + \lambda \partial_u, \partial_y, \partial_z - y \lambda \partial_u \rangle;$$

entonces Π_λ es un espacio 3-dimensional sobre el cual se verifican las condiciones $\theta_1|_{(x_0, y_0, z_0, u_0)} = \theta_2|_{(x_0, y_0, z_0, u_0)} = 0$. Por otro lado, cualquier solución suave de la primer ecuación del sistema original puede escribirse

$$u(x, y, z) = f(x - yz) + g(y);$$

si además pedimos que Π_λ sea tangente al gráfico de u en el punto (x_0, y_0, z_0, u_0) , las funciones suaves f y g deben satisfacer las condiciones

$$\begin{cases} f(x_0 - y_0 z_0) + g(y_0) = u_0, \\ f'(x_0 - y_0 z_0) = \lambda \end{cases}$$

en dicho punto. Pero la ecuación $\theta_2 = 0$ impone la condición

$$(2) \quad -z f'(x - yz) + g'(y) = 0$$

en todo punto (x, y, z, u) sobre la gráfica de u , y esto implica en particular que

$$\begin{cases} -z f''(x - yz) = 0 & \text{derivando respecto de } y \text{ la condición (2)} \\ yz f''(x - yz) - f'(x - yz) = 0 & \text{derivando respecto de } z. \end{cases}$$

Evaluando en particular en el punto (x_0, y_0, z_0, u_0) , estas condiciones implican que $\lambda = 0$, contra lo supuesto. Luego ninguna función $(x, y, z) \mapsto u(x, y, z)$ puede ser tangente a Π_λ . En definitiva, existen planos que verifican el EDS por los cuales no pasa ninguna solución. ▲

2.2. Jets y topología en un espacio de secciones

Si uno quiere seguir adelante con el programa esbozado hasta aquí para la geometrización de los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, es necesario hallar condiciones sobre las formas que describen a los posibles planos tangentes que nos aseguren que dichos planos serán tangentes a alguna solución. Notar que en el ejemplo discutido se debió apelar a derivadas sucesivas de las funciones incógnitas para hallar las condiciones de integrabilidad “ocultas”; ésta es una de las razones por la cual las condiciones necesarias de integrabilidad no alcanzan a discernirlas. El objetivo a conseguir es el de asegurar, para un dado sistema de planos definidos por la anulación de un conjunto de formas, que por cada uno de ellos pase una solución del sistema de PDEs que se está representando; cuando tal cosa ocurre, decimos que el conjunto de planos es *involutivo*. Debido a que no hay una elección natural de condiciones suficientes para que los planos anuladores de un conjunto de formas sean tangentes a soluciones del sistema de PDE asociado, existen en la literatura muchas nociones diferentes de involutividad, dependiendo en general de la teoría que se use: Janet-Riquier, Spencer o Cartan [Pom78, BD02]. Las condiciones suficientes que adoptaremos aquí surgen de la extensión del teorema de Cauchy-Kowalevsky al nuevo contexto, el así llamado *Teorema de Cartan-Kähler*; la involutividad se verifica en tal caso apelando al *test de Cartan*.

Nota 1. Se hace importante aclarar que las condiciones de integrabilidad que surgirían a partir de una representación del sistema de PDEs como distribución generada por una colección de campos vectoriales sí serían suficientes: Para el sistema del ejemplo 2.1B, uno tiene que en el espacio de coordenadas (x, y, z, u) las soluciones serán siempre tangentes a la distribución \mathcal{D} generada por los vectores

$$X := \partial_x + f\partial_u, \quad Y := \partial_y, \quad Z := \partial_z - yf\partial_u$$

siendo f una función arbitraria (salvo cuestiones de regularidad). Las condiciones de integrabilidad $[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}$ se traducen en

$$\begin{aligned} [X, Y] &= -f_y\partial_u \\ [X, Z] &= -(f_z + yf_x)\partial_u \\ [Y, Z] &= -(f + yf_y)\partial_u. \end{aligned}$$

Como suponemos que f no es idénticamente nula, entonces $\partial_u \notin \langle X, Y, Z \rangle$ y por lo tanto resultan las ecuaciones

$$\begin{cases} f_y = 0, \\ f_z + yf_x = 0, \\ f + yf_y = 0, \end{cases}$$

cuya única solución posible es $f \equiv 0$. Desde este punto de vista hemos entonces recuperado las condiciones suficientes para la existencia de soluciones; sin embargo, para sistemas más complejos la descripción de las ecuaciones en derivadas parciales por distribuciones son difíciles de manejar.

2.2. Jets y topología en un espacio de secciones

Antes de continuar, debemos saldar una deuda que se ha generado implícitamente en la discusión previa: Probar que cualquier ecuación diferencial puede representarse como el anulador de un conjunto de formas sobre alguna variedad. Para ello, hay que introducir el concepto de *espacio de jets*.

2.2.1. Geometría del espacio de jets. Un concepto utilizado en varios lugares a lo largo de esta tesis es el de *espacio de jets de un fibrado* $\pi : E \rightarrow M$. Para introducirlo correctamente, vale la definición siguiente.

Definición 1. El espacio de secciones locales de E es el conjunto $\Gamma_{\text{loc}}(E)$ formado por todas las secciones del fibrado $\pi^{-1}(W)$, donde $W \subset M$ es alguna subvariedad abierta de M . El conjunto de todas las secciones locales de E cuyos dominios contienen a $p \in M$ se denotará mediante $\Gamma_p(E)$.

Estamos en condiciones de formular el lema siguiente, que justifica la construcción del fibrado de jets de E .

Lema 1. Sea $\pi : E \rightarrow M$ y $p \in M$; sean además $\phi, \psi \in \Gamma_p(E)$ tales que $\phi(p) = \psi(p)$. Supóngase que (x^i, u^α) e (y^j, v^β) son un par de sistemas de coordenadas adaptados a E definidos en un entorno de p . Si

$$\left. \frac{\partial^{|I|} (u^\alpha \circ \phi)}{\partial x^I} \right|_p = \left. \frac{\partial^{|I|} (u^\alpha \circ \psi)}{\partial x^I} \right|_p$$

para todo $1 \leq \alpha \leq m$ y $1 \leq |I| \leq k$, entonces

$$\left. \frac{\partial^{|J|} (v^\beta \circ \phi)}{\partial y^J} \right|_p = \left. \frac{\partial^{|J|} (v^\beta \circ \psi)}{\partial y^J} \right|_p$$

para todo $1 \leq \beta \leq m$ y $1 \leq |J| \leq k$.

Entonces puede definirse la siguiente relación de equivalencia sobre $\Gamma_p(E)$.

Definición 2. $\phi, \psi \in \Gamma_p(E)$ son k -equivalentes si y sólo si $\phi(p) = \psi(p)$ y además en algún sistema de coordenadas adaptadas (x^i, u^α) vale que

$$\left. \frac{\partial^{|I|} (u^\alpha \circ \phi)}{\partial x^I} \right|_p = \left. \frac{\partial^{|I|} (u^\alpha \circ \psi)}{\partial x^I} \right|_p$$

para todo $1 \leq \alpha \leq m$ y $1 \leq |I| \leq k$. La clase de k -equivalencia que contiene a $\phi \in \Gamma_p(E)$ se denota mediante $j_p^k \phi$.

El conjunto de estas clases de k -equivalencias es lo que denominaremos *espacio de k -jets*.

Definición 3. El espacio de k -jets de E es el conjunto

$$J^k(\pi) := \{j_p^k \phi : p \in M, \phi \in \Gamma_p(E)\}.$$

Las proyecciones fuente y objetivo están definidas, respectivamente, por

$$\pi_k : J^k(\pi) \rightarrow M : j_p^k(E) \mapsto p$$

y

$$\pi_{k,0} : J^k(\pi) \rightarrow E : j_p^k(E) \mapsto \phi(p).$$

Si $1 \leq l \leq k$, la l -proyección de un k -jet está dada por

$$\pi_{k,l} : J^k(\pi) \rightarrow J^l(\pi) : j_p^k \phi \mapsto j_p^l \phi.$$

Es interesante verificar que $J^k(\pi)$ es una variedad diferencial [MRA02]. Para hacer esto, introducimos un cubrimiento de este espacio por cartas.

Definición 4. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado y (U, u) un sistema de coordenadas adaptadas a E , de manera tal que $u = (x^i, u^\alpha)$. El sistema de coordenadas (o carta) inducido sobre $J^k(\pi)$, y denotado mediante (U^k, u^k) está definido mediante

$$U^k := \{j_p^k \phi : p \in U, \phi \in \Gamma_p(E)\},$$

$$u^k := (x^i, u^\alpha; u_I^\beta)$$

donde $x^i(j_p^k \phi) = x^i(p)$, $u^\alpha(j_p^k \phi) := u^\alpha(\phi(p))$ y

$$u_I^\alpha(j_p^k \phi) := \left. \frac{\partial^{|I|} (u^\alpha \circ \phi)}{\partial x^I} \right|_p$$

donde $1 \leq |I| \leq k$.

2.2. Jets y topología en un espacio de secciones

Para probar que estas cartas inducen una estructura diferenciable sobre $J^k(\pi)$, hay que demostrar que son *compatibles*.

Proposición 1. *Dado un atlas de cartas adaptadas (U, u) sobre E , las cartas inducidas (U^k, u^k) forman un atlas suave finito-dimensional sobre $J^k(\pi)$.*

Notemos que la definición de variedad con la que estamos trabajando no requiere de la definición de una topología sobre el espacio que se quiere describir. Sin embargo, dicha estructura está inducida por la estructura diferencial. Tal topología está definida como sigue [MRA02].

Definición 5. *Un subconjunto $V \subset J^k(\pi)$ es abierto si y sólo si, para cada $v \in V$ existe una carta (U^k, u^k) tal que $v \in U$ y $U \subset V$.*

Notar que los dominios de las cartas son una base, y que la topología sobre $J^k(\pi)$ es exactamente la asociada a dicha base [Mun00].

2.2.2. Jets y ecuaciones diferenciales. Aunque en las discusiones introductorias se ha dado por supuesto que uno puede representar una ecuación en derivadas parciales (de primer orden) mediante la anulación de una cierta cantidad de formas sobre una variedad adecuada, no es obvio que esto sea así en general. Supongamos que trabajamos con un sistema de PDEs de la forma

$$(3) \quad F_k(x; u_I(x)) = 0, \quad k = 1, \dots, M$$

donde las incógnitas son de la forma $u : x := (x^1, \dots, x^n) \mapsto (u^1(x), \dots, u^m(x))$ y los símbolos I denotan multiíndices de orden $|I| \leq k$. Si

$$(x^1, \dots, x^n; u^1, \dots, u^m; p_I : 1 \leq |I| \leq k)$$

es un conjunto de coordenadas locales sobre $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, podemos interpretar el conjunto de ecuaciones (3) como definiendo un subconjunto allí mediante

$$(4) \quad F_k(x; p_I) = 0, \quad k = 1, \dots, M;$$

bajo condiciones de regularidad, este subconjunto es una subvariedad, y el conjunto de formas que describen al sistema original proviene de la restricción de la estructura de contacto a ella, que está localmente generada por

$$\theta_J^l := \mathbf{d}u^l - p_{J,i} \mathbf{d}x^i$$

para $1 \leq l \leq m$ y $|J| < k$. De hecho, esta estructura es la que nos asegura que las variables p son derivadas de las u respecto de las x . Llamaremos al par formado por la subvariedad de $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ inducida por las condiciones (4) y la restricción a ella el *sistema diferencial exterior canónicamente asociado al sistema de PDEs* (3).

2.2.3. Topología C^∞ de Whitney. Estamos listos para introducir la topología C^∞ de Whitney [GG74, Mic78].

Definición 6. *Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado.*

1. *La familia $\{M_k(U) : U \text{ es un abierto en } J^k(\pi)\}$ donde*

$$M_k(U) := \{\phi \in \Gamma(E) : j^k \phi(M) \subset U\}$$

es una base para una topología sobre $\Gamma(E)$. Dicha topología se denomina topología C^k de Whitney; además denotemos por \mathcal{T}_k el conjunto de abiertos en $\Gamma(E)$ de esta topología.

2. *La topología C^∞ de Whitney sobre $\Gamma(E)$ es la topología con base $\mathcal{T}_\infty := \cup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_k$.*

Debemos probar que las definiciones anteriores son consistentes.

Lema 2. *Las topologías C^k y C^∞ de Whitney están bien definidas.*

DEMOSTRACIÓN. Primero probemos que, efectivamente, el conjunto

$$\{M_k(U) : U \text{ abierto en } J^k(\pi)\}$$

es una base para una topología. Luego, siguiendo la referencia [Mun00], esto significa que, por cada par $M_k(U), M_k(V)$ con U, V abiertos en $J^k(\pi)$, existe W abierto allí tal que

$$M_k(U) \cap M_k(V) \subset M_k(W).$$

Pero esto se satisface por verificarse que $M_k(U) \cap M_k(V) = M_k(U \cap V)$. Finalmente \mathcal{T}_∞ es una buena base; para probarlo, notemos que $\mathcal{T}_k \subset \mathcal{T}_l$ para todo $k \leq l$. Efectivamente, si U es un abierto de $J^k(\pi)$, entonces $M_k(U) = M_l(\pi_{l,k}^{-1}(U))$: Si $\phi \in M_k(U)$, entonces $j^k\phi(M) \subset U$ y por lo tanto $j^l\phi(M) \subset \pi_{l,k}^{-1}(U)$; inversamente, $\psi \in M_l(\pi_{l,k}^{-1}(U))$ implica que $j^l\psi(M) \subset \pi_{l,k}^{-1}(U)$ y por lo tanto $(\pi_{l,k} \circ j^l\psi)(M) = j^k\psi(M) \subset U$. Por lo tanto si $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_k$ y $\mathcal{V} \in \mathcal{T}_l$, en particular $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_l$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \mathcal{T}_l \subset \mathcal{T}_\infty$, como queríamos probar. \square

2.3. Sistemas diferenciales exteriores

Como se ha discutido en las secciones anteriores, pueden caracterizarse geoméricamente los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales si se describen como conjuntos de planos sujetos a condiciones de involutividad adecuadas. Vimos también que una manera conveniente de tener en cuenta ciertas condiciones necesarias de integrabilidad consistía en usar una representación en la cual tales planos son el espacio anulador de un cierto número de formas; ahora bien, teniendo en cuenta que si un conjunto de formas se anulan sobre una variedad, lo mismo ocurre con el ideal generado por ellas y sus diferenciales en el álgebra exterior, los objetos naturales para describir sistemas de PDEs resultan ser los ideales diferencialmente cerrados en el álgebra exterior de la variedad con la que se está trabajando. Los *sistemas diferenciales exteriores* son exactamente tales objetos; la estrategia de Cartan para trabajar con ellos se basa en medirles propiedades que aseguren condiciones suficientes de integrabilidad.

Vamos a presentar aquí las ideas centrales sobre sistemas diferenciales exteriores (EDS, por sus siglas en inglés); las referencias consultadas para elaborar esta parte del trabajo son [BCG⁺91, IL03, Kam00, Olv95, Een06]. El problema geométrico subyacente consta de dos pasos fundamentales, a saber:

1. En seleccionar, de manera suave en cada punto de una variedad, un subespacio de direcciones tangentes a la misma, y
2. en preguntarse acerca de la existencia y unicidad de subvariedades cuyo espacio tangente esté contenido en tal subespacio punto a punto.

Una manera de describir subespacios del espacio tangente es como el núcleo de formas diferenciales sobre ella.

Definición 7. *Un sistema diferencial exterior sobre una variedad M es un ideal $\mathcal{I} \subset \Omega^\bullet(M)$ cerrado con respecto del operador de derivada exterior; este hecho se indica diciendo que el ideal \mathcal{I} es diferencialmente cerrado. Una subvariedad que anula todos los elementos de \mathcal{I} se denomina subvariedad integral de M .*

Ejemplo 2.3A: Subvariedades integrales para el EDS canónico. *En particular, para el sistema diferencial exterior canónicamente asociado a un sistema de PDEs, vale el resultado siguiente [Gar69].*

Proposición 2. *Sea $\Sigma \subset J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ el subconjunto del espacio de k -jets definido por el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (3) via (4); supongamos además que Σ es subvariedad, y definamos $\mathcal{I}_\Sigma \subset \Omega^\bullet(J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ como el EDS inducido sobre Σ por la estructura de contacto. Entonces si $u : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es solución de (3), y $S_u := j^k u(V)$, vale que $\mathcal{I}_\Sigma|_{S_u} = 0$, esto es, S_u es subvariedad integral de \mathcal{I}_Σ .*

2.3. Sistemas diferenciales exteriores

Esto significa que las subvariedades integrales de la estructura de contacto son las gráficas de las prolongaciones, y que las soluciones de un sistema de PDEs pueden hallarse pidiendo que los gráficos de sus prolongaciones sean subvariedades de Σ . \blacktriangle

Notemos que para construir subvariedades integrales de una dimensión dada, encontramos primero los posibles planos tangente resolviendo algebraicamente, en cada punto de la variedad, las condiciones impuestas sobre estos planos por el EDS. Acto seguido, se buscan condiciones que aseguren que tales planos son efectivamente tangentes a alguna variedad. Para llevar adelante este plan, es útil tener en cuenta la definición siguiente.

Definición 8. Un elemento integral de dimensión k para un EDS \mathcal{I} es un subespacio $E \subset T_x M$ de dimensión k tal que $\alpha|_E = 0$ para todo $\alpha \in \mathcal{I}$. El conjunto de todos los k -elementos integrales de un dado \mathcal{I} se denotan mediante el símbolo $V_k(\mathcal{I})$, y están naturalmente incluidos en la variedad $G_k(TM)$, el grassmanniano de orden k sobre M .

La verificación de que un dado subespacio es integral para algún EDS involucra la resolución de un sistema lineal, por lo general muy grande, como se muestra a continuación.

Lema 3. Definamos $\mathcal{I}^k := \mathcal{I} \cap \Omega^k(M)$; además, fijemos

$$\left(\alpha_1^1, \dots, \alpha_{k_1}^1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{k_2}^2, \dots, \alpha_1^p, \dots, \alpha_{k_p}^p \right) \subset \Omega^\bullet(M)$$

como conjunto de generadores \mathcal{I} tal que $\{\alpha_l^1, \dots, \alpha_{k_l}^l\} \subset \mathcal{I}^l$ para todo l . Entonces

- $V_k(\mathcal{I})|_x = \{E \in G_k(T_x M) : \alpha|_E = 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{I}^k\}$.
- El subespacio $E \subset T_x M$ es r -integral para \mathcal{I} si y sólo si $\alpha_l^m|_E = 0$ para todo $1 \leq l \leq k_m$ y $1 \leq m \leq r$.

Como consecuencia importante, hay que notar que la verificación de la integrabilidad de un elemento en término de generadores algebraicos de un dado EDS, involucra probar que el subespacio dado anula todos los generadores de grado menor o igual a su dimensión. Si el EDS \mathcal{I} está definido sobre algún fibrado $F \xrightarrow{\tau} B$, es natural preguntarse sobre subvariedades integrales que además son secciones del fibrado dado, denominadas *secciones integrales*¹; si $n = \dim B$, el procedimiento que permite encontrar tales subvariedades integrales consiste en fijar un elemento no nulo $\Omega \in \Omega^n(B)$ y buscar subvariedades n -integrales para \mathcal{I} sobre las cuales $\tau^*(\Omega) \neq 0$. Los conceptos involucrados en esta discusión se definen a continuación.

Definición 9. Un EDS con condición de independencia sobre una variedad M es un par (\mathcal{I}, Ω) compuesto por un EDS \mathcal{I} y una n -forma diferencial Ω . Los elementos integrales (resp. subvariedades) de tal objeto son los elementos integrales (resp. subvariedades) de \mathcal{I} tales que $\Omega \neq 0$ sobre ellos.

La condición de independencia cambia dramáticamente el análisis de un EDS, como se verá en la discusión sobre el teorema de Cartan-Kähler.

2.3.1. Elementos integrales Kähler-ordinarios. Hablaremos aquí acerca de las nociones de regularidad que hay que tener presente para establecer el teorema de Cartan-Kähler; debe separarse estas condiciones en dos partes. La primera de ellas se refiere a la regularidad desde el punto de vista de geometría diferencial.

Definición 10. Sea $\mathcal{I} \subset \Omega^\bullet(M)$ un EDS. Un elemento n -integral $E \in V_n(\mathcal{I})$ es Kähler-ordinario si y sólo si existe un entorno $E \in U \subset G_n(TM)$ tal que $U \cap V_n(\mathcal{I})$ es una subvariedad de $G_n(TM)$.

Este requisito nos asegura que localmente el conjunto de elementos n -integrales es el conjunto de nivel de algunas funciones diferenciables. En el caso general, los conjuntos $V_n(\mathcal{I})$ son subvariedades algebraicas de $G_n(TM)$, por lo que puede esperarse la aparición de puntos singulares.

¹El conjunto de secciones integrales de un EDS sobre un fibrado se denotará mediante el símbolo $\Gamma(\mathcal{I})$.

2.3.2. Espacios polares y Kähler-regularidad. El teorema de Cartan-Kähler es una extensión a EDSs del teorema de Cauchy-Kowalevsky para ecuaciones en derivadas parciales. Esto significa que se intentará construir variedades integrales de dimensión n a partir de subvariedades integrales de dimensión $n - 1$, y por consiguiente deben estudiarse las direcciones en las cuales eso es posible.

Definición 11. Dado un elemento $E \in V_k(\mathcal{I})$, su espacio polar es el subespacio generado por todos los elementos integrales de dimensión $k + 1$ para \mathcal{I} que contienen a E . El espacio polar de un elemento E será indicado mediante $H(E)$.

El siguiente lema nos provee un método para calcular espacios polares.

Lema 4. Si $E \subset T_x X$ y $\{v_1, \dots, v_k\}$ es una base de E , entonces

$$H(E) = \{w \in T_x X : \phi(v_1, \dots, v_k, w) = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{I}^{k+1}\}.$$

Este lema nos permite explorar la manera en que se determina el espacio polar de un elemento integral. O sea, supongamos que \mathcal{I} tiene generadores como los detallados en el lema 3 y que $E = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$; el vector $x \in T_x X$ estará en $H(E)$ si y sólo si

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha_\rho^1(x) = 0, & 1 \leq \rho \leq k_1 \\ \alpha_\nu^2(v_{i_1}, x) = 0, & 1 \leq \nu \leq k_2, 1 \leq i_1 \leq n \\ \alpha_\mu^3(v_{j_1}, v_{j_2}, x) = 0, & 1 \leq \mu \leq k_3, 1 \leq j_1 < j_2 \leq n \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_\sigma^{n+1}(v_1, \dots, v_n, x) = 0, & 1 \leq \sigma \leq k_{n+1}. \end{cases}$$

Por lo tanto hemos transformado un conjunto de ecuaciones algebraicas para el elemento E en un sistema lineal cuyos coeficientes dependen de una bandera en E ; la siguiente noción tiene que ver con la regularidad de este sistema lineal, en el sentido que asegura la invariancia de su rango.

Definición 12. Un elemento Kähler-ordinario $E \in V_n(\mathcal{I})$ es Kähler-regular si

$$\text{codim} H(E) = \text{codim} H(E')$$

para todo E' en un entorno de E en $V_n(\mathcal{I}) \subset G_n(TX)$.

La siguiente proposición es útil al trabajar con ejemplos.

Proposición 3. El conjunto $V_n^o(\mathcal{I})$ de n -elementos integrales Kähler-ordinarios de un EDS \mathcal{I} es abierto relativo en el conjunto $V_n(\mathcal{I})$. Además el conjunto de n -elementos integrales Kähler-regulares es un abierto denso de $V_n^o(\mathcal{I})$.

Esta noción de regularidad es central a la hora de establecer condiciones suficientes de integrabilidad para un EDS; a fin de ganar algún tipo de intuición con el concepto, examinemos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.3B: Particularidades de un sistema no regular. Vamos a analizar desde este punto de vista el EDS no regular ya tratado en el ejemplo 2.1B. Un conjunto de generadores algebraicos para este EDS viene dado por la lista

$$\begin{cases} \theta_1 := du \wedge dy \wedge (dx - ydz), \\ \theta_2 := du \wedge dx \wedge dz, \end{cases}$$

y como vimos, existen 3-elementos integrales del mismo por los cuales no pasa ninguna solución del sistema de PDEs original. Sin embargo, el teorema de Cartan-Kähler implicaría que a través de cualquier 2-elemento integral Kähler-regular para \mathcal{I} debería pasar una solución de dicho sistema de PDEs, lo cual no ocurre en este caso. El problema con este ejemplo es que

2.3. Sistemas diferenciales exteriores

los 2-elementos integrales de \mathcal{I} que son Kähler-regulares no están contenidos en 3-elementos integrales, esto es, son inextensibles. Veamos como puede probarse esta afirmación.

Lema 5. *El conjunto*

$$U_y := \left\{ E \in G_2(T\mathbb{R}^4) : E = \langle \mathbf{v} + \lambda\partial_u, \mathbf{w} + \mu\partial_u \rangle \text{ para algún par} \right. \\ \left. \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \langle \partial_x, \partial_y, \partial_z \rangle \text{ tal que } \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \perp \partial_y \right\}$$

es un abierto denso de $G_2(T\mathbb{R}^4)$.

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, llamando $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a la proyección

$$(x, y, z, u) \mapsto (x, y, z),$$

notemos que puede escribirse $U_y = U^1 \cap U^2$, donde cada uno de los conjuntos

$$U^1 := \{ E \in G_2(T\mathbb{R}^4) : \pi_*(E) \perp \partial_y \}$$

$$U^2 := \{ E \in G_2(T\mathbb{R}^4) : E \perp \partial_u \}$$

son abiertos y densos en $G_2(T\mathbb{R}^4)$. Pero una variedad de dimensión finita es localmente compacta, por lo cual es un espacio de Baire, y la intersección de abiertos densos es densa [Dug66]. \square

Además como \mathcal{I} está generado por 3-formas, resulta que $U_y \subset V_2(\mathcal{I})$. Cualquier $E \in U_y$ puede escribirse como

$$E = \langle \partial_x + m\partial_y + \lambda\partial_u, \partial_z + n\partial_y + \mu\partial_u \rangle$$

para ciertos números reales m, n, λ, μ ; las ecuaciones que determinan $H(E)$ para un elemento de esta forma serán

$$\begin{cases} (\partial_x + m\partial_y + \lambda\partial_u) \lrcorner (\partial_z + n\partial_y + \mu\partial_u) \lrcorner \theta_1 = 0, \\ (\partial_x + m\partial_y + \lambda\partial_u) \lrcorner (\partial_z + n\partial_y + \mu\partial_u) \lrcorner \theta_2 = 0, \end{cases}$$

o equivalentemente

$$(6) \quad \begin{cases} -\mu \mathbf{d}y - n[\lambda(\mathbf{d}x - y\mathbf{d}z) - \mathbf{d}u] - y(\lambda \mathbf{d}y - m \mathbf{d}u) = 0, \\ \mu \mathbf{d}z + \lambda \mathbf{d}x - \mathbf{d}u = 0. \end{cases}$$

Supongamos ahora que E es extensible a un 3-elemento integral E^+ ; por las condiciones de transversalidad que definen a U_y , puede escribirse

$$E^+ = E + \langle \partial_y + \nu\partial_u \rangle,$$

y si $E^+ \in V_3(\mathcal{I})$, entonces debe valer que $\nu = 0, \mu = -y\lambda$. Pero esto significa que el subconjunto $Z \subset U_y$ de elementos 2-integrales extensibles a un elemento 3-integral tiene interior vacío, en tanto los elementos no extensibles de U_y forman el abierto denso

$$U'_y := \{ E \in U_y : E = \langle \mathbf{v} + \lambda\partial_u, \mathbf{w} + \mu\partial_u \rangle \text{ con } \nu + y\lambda \neq 0 \}.$$

Pero tenemos el resultado general siguiente.

Lema 6. *Sea \mathcal{J} un EDS sobre una variedad M , $n = \dim M$. Entonces el conjunto $Z_n^r(\mathcal{J})$ formado por todos los elementos n -integrales Kähler-regulares que son extensibles a un elemento $n + 1$ -integral, es abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $E \in Z_n^r(\mathcal{J})$; como $E \in V_n^r(\mathcal{J})$, existe un entorno V de E en $G_n(TM)$ tal que

$$\text{codim } H(E) = \text{codim } (E')$$

para todo $E' \in V$. Pero $E \subset E^+$ para algún $E^+ \in V_{n+1}(\mathcal{J})$ si y sólo si $\dim H(E) = n + k$ para algún $k > 0$, dado que $E \subset H(E)$; ahora bien, como

$$\text{codim } H(E) = N - \dim H(E) = N - n - k$$

resulta que $\dim H(E') = n + k$ para todo $E' \in V$. Entonces $V \subset Z_n^r(\mathcal{J})$ y este conjunto será abierto. \square

Este lema aplicado a nuestro caso nos dirá que $Z = \emptyset$, que es el único abierto con interior vacío.

▲

Veremos que probar que un elemento integral de dimensión $n - 1$ es Kähler-regular y extensible constituye condición suficiente para que por él pase una solución; éste es el contenido del teorema de Cartan y Kähler, que discutimos en la próxima subsección.

Finalmente el ejemplo discutido nos permite vislumbrar las dificultades que resultan de intentar verificar la condiciones de Kähler-regularidad. En efecto, esta condición es la más difícil de analizar en la práctica debido a que se necesita considerar abiertos en una variedad de Grassmann. El recurso teórico para manejar este problema se denomina *Test de involutividad de Cartan*.

Teorema 1 (Test de involutividad de Cartan). *Sea $E_k, 0 \leq k \leq n$ una bandera de elementos integrales para \mathcal{I} en x , y definamos*

$$c_k := \text{codim } H(E_k), 0 \leq k \leq n - 1.$$

Entonces

$$\text{codim}_{E_n} V_n(\mathcal{I}) \geq c_0 + \cdots + c_{n-1},$$

donde la codimensión de $V_n(\mathcal{I})$ en E_n se mide en sentido algebraico: Es el número máximo de funciones suaves sobre $G_n(TX)$ que se anulan sobre $V_n(\mathcal{I})$ y que tienen diferenciales independientes en E_n .

Más aún, $V_n(\mathcal{I})$ es suave y de codimensión igual a $c_0 + \cdots + c_{n-1}$ en E_n si y sólo si los elementos E_k son todos Kähler-regular para $0 \leq k \leq n - 1$.

2.3.3. Teorema de Cartan-Kähler. Ya hemos introducido los ingredientes esenciales para formular la versión que necesitamos del teorema de Cartan-Kähler [IL03, Kam00] que, como mencionamos más arriba, nos permitirá asegurar que Kähler-regularidad más extensibilidad es un buen conjunto de condiciones suficientes para la integrabilidad de un EDS.

Teorema 2 (Teorema de Cartan-Kähler). *Supongamos que \mathcal{I} es un EDS analítico sobre M y $P^n \subset M$ es una subvariedad analítica integral que es Kähler-regular y tal que, en cada $p \in P$, $H(T_p P)$ tiene dimensión $n + r + 1$. Además supongamos que $R \subset M$ es una subvariedad analítica de codimensión r tal que $P \subset R$ y $T_p R$ se interseca transversalmente con $H(T_p P)$. Entonces para cada $p \in P$ existe un entorno $U \subset R$ de p y una única subvariedad integral $(n + 1)$ -dimensional $N \subset U$ que contiene a $P \cap U$.*

El principal problema con este teorema es que es válido sólo en la categoría analítica. Aunque los sistemas con los que trabajaremos aquí satisfacen esta condición, es importante remarcar que esta es una condición fuerte a pedir para un teorema de existencia.

Necesitaremos la siguiente consecuencia del teorema de Cartan-Kähler.

Corolario 1. *Sea \mathcal{I} un EDS analítico sobre la variedad M , $P \subset M$ una variedad compacta integral Kähler-regular de dimensión n tal que $\dim H(T_p P) = n + r + 1$ para todo $p \in P$. Sea $R \subset M$ una subvariedad analítica de codimensión r tal que*

1. $P \subset R$, y
2. $T_p R$ se interseca transversalmente con $H(T_p P)$ en cada $p \in P$, esto es,

$$\dim(T_p R \cap H(T_p P)) = n + 1.$$

2.3. Sistemas diferenciales exteriores

Enonces existe una variedad integral Q para \mathcal{I} de dimensión $n + 1$ tal que $P \subset Q \subset R$.

Nota. La diferencia entre el teorema de Cartan-Kähler y este corolario es la conclusión $P \subset Q$; estamos por lo tanto intentando globalizar el teorema anterior.

DEMOSTRACIÓN. Sea $(U_p, N_p)_{p \in P}$ una colección de entornos de p y variedades integrales de dimensión $n + 1$ determinada por el teorema 2. Sean p_1, \dots, p_N tal que $\{U_{p_i} : i = 1, \dots, N\}$ cubre a P . Queremos probar que el conjunto

$$Q := \bigcup_{i=1}^N N_{p_i}$$

es una variedad integral de dimensión $n + 1$ para \mathcal{I} que satisface $P \subset Q \subset R$. Para demostrar que es variedad, recurrimos al lema siguiente.

Lema 7. Sean $V, W \subset Z$ subvariedades regulares de dimensión k . Si $V \cap W$ es subvariedad regular de dimensión k de Z , entonces $V \cup W$ también será una k -subvariedad regular de Z .

Utilizando la unicidad de soluciones a través de cada punto de P podemos probar que $N_{p_i} \cap N_{p_j}$ (cuando no es vacío) es subvariedad de R de dimensión $n + 1$, por lo cual la aplicación de este lema nos permite concluir que $Q \subset R$ es subvariedad regular de dimensión $n + 1$. Como cada N_{p_i} es integral, entonces Q será subvariedad integral, como queríamos. \square

2.3.4. Teorema de Cartan-Kuranishi. ¿Qué es lo que ocurre si nuestro sistema no verifica el test de involutividad de Cartan? En tal caso uno debe usar una construcción estándar, llamada *prolongación*, que definimos más abajo.

Definición 13. Sea $\mathcal{I} \subset \Omega^\bullet(M)$ un EDS sobre M , y $E \in V_n(\mathcal{I})$. Una bandera $0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n = E$ es una bandera regular si y sólo si E_k es un elemento k -integral regular de \mathcal{I} para $1 \leq k \leq n - 1$.

Las banderas regulares nos permiten resolver la ecuación en derivadas parciales que subyace a un dado EDS como una sucesión de problemas de Cauchy-Kowalevsky. El siguiente concepto es fundamental a la hora de tratar con la integrabilidad de este sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

Definición 14. Un EDS es n -involutivo si y sólo si cada elemento n -integral es el elemento final de una bandera regular.

La principal consecuencia de esta definición y del teorema de Cartan-Kähler es la proposición siguiente (ver por ejemplo [BCG⁺91]).

Proposición 4. Si un EDS es n -involutivo, por cualquier elemento n -integral pasa una subvariedad integral de dimensión n .

Puede probarse que existe una operación, llamada *prolongación*, que asocia a cada EDS \mathcal{I} sobre M y cada $n \in \mathbb{N}$ un nuevo EDS \mathcal{I}' sobre otra variedad M' tal que

- Existe una submersión $p : M' \rightarrow M$, y además
- los elementos n -integrales de \mathcal{I} e \mathcal{I}' están en correspondencia uno a uno por la aplicación p .

El resultado clave es provisto por el *Teorema de Cartan-Kuranishi*, el cual afirma que, bajo ciertas hipótesis de carácter técnico [BCG⁺91], aplicando un número finito de veces la operación de prolongación, cualquier EDS puede ser convertido en un EDS n -involutivo.

2.4. Fibrados sobre variedades con borde

Vamos a incluir las definiciones relevantes para trabajar con fibrados (en la categoría diferenciable) cuya base es una variedad con borde.

Definición 15 (Fibrados localmente triviales). *Un fibrado (localmente trivial) es un cuádruple*

$$(E, p, M, F)$$

donde E, M, F son variedades y $p : E \rightarrow M$ es una aplicación suave sobreyectiva, tal que para cada $m \in M$ existe un entorno $U_m \ni m$ y un difeomorfismo $F : p^{-1}(U_m) \rightarrow U_m \times F$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_m) & \xrightarrow{F} & U_m \times F \\ & \searrow p & \swarrow p_1 \\ & & U_m \end{array}$$

siendo $p_1 : U_m \times F \rightarrow U_m$ la proyección en el primer factor.

Los entornos de la definición se denominan *entornos trivializadores*, por obvias razones. El siguiente lema es una consecuencia inmediata de la definición [Sau89].

Lema 8. *Sea (E, p, M, F) un fibrado, y sea $\text{pr}_n : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la proyección en las primeras n componentes. Valen las afirmaciones siguientes:*

1. *Las dimensiones de las variedades involucradas en la definición satisfacen la restricción $\dim F + \dim M = \dim E$.*
2. *p es una submersión.*
3. *Para cada $z \in E$ existe una carta (V, ϕ) con*

$$\phi : z \in V \mapsto (x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^m),$$

donde $n = \dim M, m = \dim F$, tal que $V \subset p^{-1}(U_{p(z)})$ para algún entorno trivializador $U_{p(z)}$ alrededor de $p(z)$, y además si $z_1, z_2 \in V$ son tales que $p(z_1) = p(z_2)$, entonces $\text{pr}_n \circ \phi(z_1) = \text{pr}_n \circ \phi(z_2)$.

Las cartas del tercer punto en este lema se denominan *cartas adaptadas* a la estructura del fibrado. Si M tiene borde, entonces E también tiene borde, y vale que

$$(\partial E, p|_{\partial E}, \partial M, F)$$

es un fibrado.

La condición usual de subvariedad debe tener en cuenta lo que ocurre en el borde; de ahí la siguiente definición.

Definición 16. *Sea M una variedad con borde y A una subvariedad (embebida). Diremos que A es limpia si y sólo si $\partial A = A \cap \partial M$ y además para todo $x \in A$ se cumple que $T_x A \not\subset T_x(\partial M)$.*

Las subvariedades limpias admiten entornos tubulares [Hir76].

Teorema 3. *Sea $N \subset M$ una subvariedad limpia en M . Entonces N admite un entorno tubular en M .*

Un resultado de importancia para este trabajo es el siguiente.

Lema 9. *Si (E, p, M, F) es un fibrado (en el que su base puede tener borde no vacío) y s es una sección suave del mismo, entonces $s(M)$ es una subvariedad limpia y cerrada de E .*

2.4. Fibrados sobre variedades con borde

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $s(\partial M) \subset \partial E$, por lo cual podemos dividir el problema en dos partes: En los puntos interiores de M , se verifica que $s(M)$ es una subvariedad embebida ([Sau89], página 14), y en el borde se verifica que $T_{s(x)}s(M) \not\subset T_{s(x)}(\partial E)$. Para ver que la imagen de una sección es cerrada, notemos que si $z \in \overline{s(M)}$, entonces tomamos una carta adaptada (V, ϕ) alrededor de él, y valdrá que $s(M) \cap V$ es cerrado (es el gráfico de una función allí), de donde $z \in s(M)$. \square

El cálculo variacional

DE acuerdo al esquema presentado arriba, parte de nuestra discusión se va a centrar en problemas variacionales sobre espacios de secciones. Debemos, por lo tanto, establecer algunas definiciones y fijar notación acerca del cálculo variacional. La referencia utilizada para ello es [Kru73]. Sin embargo, el libro clásico [GF63] ha servido como inspiración permanente. La idea es tomar contacto con los aspectos geométricos del cálculo de variaciones, de manera de llegar lo más rápidamente posible a las ecuaciones que gobiernan las extremales de un problema variacional. Por otra parte, fue necesario trabajar con una definición más general de problema variacional que la que se utiliza normalmente en mecánica [AM78, Ble81], dado que el escenario de trabajo trascenderá los espacios de jets sobre fibrados. A estos efectos, se estudian las condiciones de extremo para un funcional convenientemente definido sobre las secciones de un fibrado, *sujeto a condiciones diferenciales provistas por medio de un EDS*. En mecánica, por contraposición, siempre se trabaja con el mismo EDS, a saber, el inducido por la estructura de contacto del espacio de jets subyacente al problema en cuestión.

3.1. Cálculo variacional con base compacta

Definición 17. *Un problema variacional es un triple $(\Lambda, \lambda, \mathcal{I})$, donde $\Lambda \rightarrow M$ es un fibrado sobre la variedad M compacta de dimensión n , λ es una n -forma sobre Λ e $\mathcal{I} \subset \Omega^\bullet(\Lambda)$ es un sistema diferencial exterior sobre Λ .*

Cada problema variacional tiene asociado un funcional sobre el espacio de secciones $\Gamma(\Lambda)$ mediante la fórmula

$$\Gamma(\Lambda) \ni \sigma \mapsto \int_M \sigma^* \lambda$$

que denotaremos como S_λ ; la teoría variacional estudia el comportamiento de S_λ restringido al conjunto de secciones integrales de \mathcal{I}

$$\Gamma(\mathcal{I}) := \{\sigma \in \Gamma(\Lambda) : \sigma^* \alpha = 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{I}\}.$$

En particular, se quieren estudiar los puntos críticos del funcional asociado. Para ello es necesario tomar en cuenta derivadas direccionales del mismo. Consideremos por lo tanto, para cada $\sigma \in \Gamma(\Lambda)$, el conjunto $\Gamma(\sigma^* V\Lambda)$ que consiste de todas las secciones del fibrado pullback $\sigma^* V\Lambda \rightarrow M$,

$$\begin{array}{ccc} \sigma^* V\Lambda & \longrightarrow & V\Lambda \\ \downarrow & & \downarrow \tau_\Lambda|_{V\Lambda} \\ M & \xrightarrow{\sigma} & \Lambda \end{array}$$

siendo $V\Lambda \rightarrow \Lambda$ el fibrado de vectores verticales (contenido en el fibrado tangente.)

Proposición 5. *$V \in \Gamma(\sigma^* V\Lambda)$ si y sólo si V es una aplicación de M en $V\Lambda$ tal que $\tau_\Lambda \circ V = \sigma$.*

Diremos que $V \in \Gamma(\sigma^*V\Lambda)$ es *extensible* si existe \hat{V} campo vectorial vertical sobre Λ tal que $V = \hat{V} \circ \sigma$. La existencia de extensiones para campos vectoriales está regulada por el tipo de subconjuntos sobre el que están definidos; para fibrados vectoriales, sin embargo, se dispone del siguiente lema de extensión.

Lema 10. *Sea (E, p, M, V) un fibrado vectorial, $s : M \rightarrow E$ una sección y $X : s(M) \rightarrow VE$ tal que $\tau_E \circ X = id_E$. Entonces existe $\hat{X} \in \mathfrak{X}(E)$ tal que $\hat{X} \circ s = X$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $z \in E$ identificamos V_zE con $E_{p(z)}$ mediante

$$\Phi_z : v \in E_{p(z)} \mapsto \left. \frac{\vec{d}}{dt} \right|_{t=0} (z + tv) \in T_zE.$$

Asimismo denotemos por $\Psi_s : E \rightarrow E$ la aplicación que a cada $z \in E$ le asigna el elemento $s(p(z))$. Entonces podemos definir

$$\hat{X} : z \mapsto \left[\Phi_z \circ \Phi_{\Psi_s(z)}^{-1} \right] (X \circ \Psi_s(z)).$$

Por definición $\hat{X}(z) \in V_zE$, y además es diferenciable por ser composición de operaciones diferenciables. \square

La existencia de entornos tubulares implica entonces la posibilidad de extender vectores verticales definidos sobre imágenes de secciones.

Proposición 6. *Todo elemento de $\Gamma(\sigma^*V\Lambda)$ es extensible, para todo $\sigma \in \Gamma(\Lambda)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $\sigma(M)$ es subvariedad limpia y cerrada de Λ ; luego existe un entorno tubular para esta imagen, y si $X \in \Gamma(\sigma^*V\Lambda)$, entonces tiene una extensión a todo este entorno tubular. Extendiendo por 0 fuera de dicho entorno, obtenemos lo que queríamos. \square

La perspectiva aquí es ligeramente diferente a la de [Kru73] (véase también [Kru87]), dado que en dicha referencia no se supone una estructura de fibrado entre Λ y M , que es el dato que nos asegura que la imagen de un elemento de $\Gamma(\sigma^*V\Lambda)$ es una subvariedad en $V\Lambda$; la alternativa es considerar el problema variacional como un cuádruple $(\Lambda, M, \lambda, \mathcal{I})$ y las extremales se buscan entre las aplicaciones $\phi : M \rightarrow \Lambda$ tal que $\phi^*\mathcal{I} = 0$. En tal circunstancia hace falta una condición topológica que transforme una inmersión en un embebimiento, y la condición natural es la de pedir que M sea compacta.

En cualquier caso, estamos listos para definir variaciones infinitesimales de una sección $\sigma \in \Gamma(\Lambda)$.

Definición 18. *Una variación infinitesimal de una sección σ es una sección de $\sigma^*(V\Lambda)$ tal que $V|_{\partial M} = 0$.*

Con estas herramientas definiremos la variación de un funcional. Como hemos asegurado la existencia de extensiones, uno puede tomar una variación infinitesimal y extenderla a un campo, por lo cual se tienen flujos; estos flujos pueden interpretarse como deformaciones uniparamétricas de la sección que se quiere variar, esto es, curvas en el espacio de secciones. Inversamente, una familia monoparamétrica $t \mapsto \sigma_t$ de secciones tal que $\sigma_0 = \sigma$ genera una variación infinitesimal mediante la fórmula

$$M \ni x \mapsto \left. \frac{\vec{d}}{dt} \right|_{t=0} [\sigma_t(x)] \in V_{\sigma(x)}\Lambda$$

bajo condiciones de regularidad adecuadas. Esta identificación entre variaciones infinitesimales y deformaciones de secciones da sustento heurístico a la definición siguiente [EnL92].

3.1. Cálculo variacional con base compacta

Definición 19. La primera variación de S_λ en σ a lo largo de la variación infinitesimal V es el número

$$V|_\sigma \cdot S_\lambda := \frac{d}{ds} \left[\int_M \left(\phi_s^{\hat{V}} \circ \sigma \right)^* \lambda \right] \Big|_{s=0},$$

donde \hat{V} es alguna extensión de V y $\phi_t^X : \Lambda \rightarrow \Lambda$ denota el flujo del campo X para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Es necesario asegurarse que ésta es una buena definición, esto es, que la variación no dependa de la elección de la extensión elegida para V . En el siguiente ejemplo mostramos cómo, en el caso en que M no es compacta, la definición anterior no tiene sentido, aún garantizando la existencia de extensiones para las variaciones infinitesimales.

Ejemplo 3.1A: Variación dependiente de extensiones. Sea $p_1 : E := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección en el primer factor; una sección s para E es simplemente una función $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, de manera tal que $s(x) = (x, f(x))$. Asimismo uno puede identificar a las variaciones de una tal s con funciones suaves g sobre \mathbb{R} via $\delta s : x \mapsto (x, f(x); 0, g(x)) \in V_{(x, f(x))}(\mathbb{R}^2)$, de manera que cualquier extensión para δs debe ser de la forma

$$\hat{\delta s} : (x, y) \mapsto (x, y; 0, g(x) + h(x, y))$$

donde $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ satisface

$$h(x, f(x)) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Tales extensiones dan origen a las familias de secciones

$$s_t : x \mapsto (x, Y_x(t))$$

donde $Y_x : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface $\dot{Y}_x(t) = g(x) + h(x, Y_x(t))$ y la condición inicial $Y_x(0) = f(x)$. En cualquier caso, consideremos el funcional definido mediante

$$T : s \mapsto \int_{\mathbb{R}} y(x) dx \quad \text{si y sólo si } s : x \mapsto (x, y(x)),$$

y tomemos dos posibles familias de secciones

$$s_t : x \mapsto (x, 0)$$

$$s'_t : x \mapsto (x, Y_x(t))$$

donde $Y_x(t)$ es 0 cuando $t \leq 0$, y para cada $t > 0$ es un chichón de soporte compacto $K_t \subset \mathbb{R}$ tal que

1. $Y_x(t)$ es suave como función de (x, t) ,
2. para cada t existen números reales a_t, b_t tales que $K_t \subset [a_t, b_t]$ y $a_t, b_t \rightarrow \infty$ cuando t tiende a 0, y
3. el área bajo $Y_x(t)$ es igual a t .

Incluso puede pedirse que $\max_{x \in \mathbb{R}} \{Y_x(t)\}$ tienda a cero cuando t tienda a cero, por lo cual $Y_x \rightarrow 0$ uniformemente cuando $t \rightarrow 0$. Entonces tanto $s := \lim_{t \rightarrow 0} s_t$ como $s' := \lim_{t \rightarrow 0} s'_t$ son la sección 0 en la topología compacta-abierta, y además la variación asociada es, en cada caso

$$\delta s := \lim_{t \rightarrow 0} \dot{s}_t = 0$$

$$\delta s' := \lim_{t \rightarrow 0} \dot{s}'_t = 0$$

dado que la región en donde Y no es constante yace siempre dentro del compacto K_t . Luego estas familias extienden de dos maneras diferentes a la variación nula de la sección 0, pero sin embargo

$$\delta s|_0 \cdot T = 0, \quad \delta s'|_0 \cdot T = 1.$$

Luego la variación depende de la extensión. ▲

Por otra parte, aquí tenemos disponible la compacidad de la base M .

Proposición 7. Si M es compacta, entonces $V|_{\sigma} \cdot S_{\lambda}$ no depende de la extensión elegida para V . De hecho, vale que

$$(7) \quad V|_{\sigma} \cdot S_{\lambda} = \int_M \sigma^* (\hat{V} \lrcorner d\lambda).$$

DEMOSTRACIÓN. El problema con el ejemplo anterior es que las hipótesis no nos permiten intercambiar derivación e integración. Si M es una variedad compacta, esto es posible, por lo cual si $\phi_t : M \rightarrow M$ es el flujo de un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces vale que

$$\frac{d}{dt} \left[\int_M \phi_t^* \lambda \right] \Big|_{t=0} = \int_M \mathcal{L}_X \lambda.$$

Aplicando esto a la expresión que define a la variación de S_{λ} , teniendo en cuenta el teorema de Stokes y que las variaciones infinitesimales son nulas en ∂M , resulta la expresión (7), que es independiente de la extensión. \square

Sabemos que las variaciones infinitesimales inducen deformaciones de secciones de Λ a través de los flujos de sus extensiones; sin embargo, aún cuando $\sigma \in \Gamma(\mathcal{I})$, por lo general $\phi_t^{\hat{V}} \circ \sigma \notin \Gamma(\mathcal{I})$ si V es una variación infinitesimal arbitraria.

Lema 11. Sea $X \in \mathfrak{X}(\Lambda)$ un campo vertical y $\phi_t : \Lambda \rightarrow \Lambda$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ su flujo; sea además $\sigma \in \Gamma(\mathcal{I})$. Entonces $\sigma^*(\phi_t^* \mathcal{I}) = 0$ si y sólo si $\sigma^*[\phi_t^*(\mathcal{L}_X \mathcal{I})] = 0$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Este hecho motiva la definición siguiente.

Definición 20. Una variación infinitesimal $V \in \Gamma(\sigma^* V \Lambda)$ es permitida si y sólo si admite una extensión $\hat{V} \in \mathfrak{X}(\Lambda)$ tal que $\sigma^*(\mathcal{L}_{\hat{V}} \mathcal{I}) = 0$.

Aunque esto se discute con mayor profundidad en la sección 3.4, es interesante señalar aquí que, en el caso de mecánica clásica, la condición de que una variación infinitesimal sea permitida respecto de la estructura de contacto es equivalente a pedir “que el símbolo de variación conmute con la derivación”, o dicho más precisamente, que la derivada temporal de las variaciones de las coordenadas es igual a la variación de las velocidades. En cualquier caso, estamos listos para definir lo que entendemos por extremal de un problema variacional.

Definición 21. Un punto crítico o extremal para un problema variacional

$$(\Lambda \rightarrow M, \lambda, \mathcal{I})$$

es una sección $\sigma \in \Gamma(\Lambda)$ tal que

$$\int_M \sigma^* (\hat{V} \lrcorner d\lambda) = 0$$

para todo V variación infinitesimal permitida.

Una nota de precaución acerca de las definiciones adoptadas: La condición de anulación de las variaciones sobre el borde de M puede ser una condición muy fuerte a la hora de fijar las variaciones permitidas de un problema variacional, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1B: Problemas variacionales y localización. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un disco cerrado, y Λ el fibrado $\pi : D \times \mathbb{R}^2 \rightarrow D : (x, y; u, v) \mapsto (x, y)$. Consideremos el problema variacional $(\Lambda, \lambda, \mathcal{I}_{C-R})$ donde \mathcal{I}_{C-R} está generado algebraicamente por

$$\begin{cases} \theta_+ := \mathbf{d}u \wedge \mathbf{d}x + \mathbf{d}v \wedge \mathbf{d}y = 0, \\ \theta_- := \mathbf{d}u \wedge \mathbf{d}y - \mathbf{d}v \wedge \mathbf{d}x = 0 \end{cases}$$

3.2. Cálculo variacional con base no compacta

y $\lambda|_{(x,y;u,v)} := \left[(u - x^2 + y^2)^2 + (v - 2xy)^2 \right] \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$. Las secciones integrales de \mathcal{I}_{C-R} son exactamente las funciones analíticas sobre D . Si $\sigma \in \Gamma(\Lambda)$ tiene la expresión $\sigma : (x, y) \mapsto (x, y; u(x, y), v(x, y))$, un elemento V de $\Gamma(\sigma^*V\Lambda)$ será de la forma

$$V : (x, y) \mapsto (x, y; u(x, y), v(x, y); 0, 0; f(x, y), g(x, y)),$$

y un tal V será variación infinitesimal permitida si y sólo si $(x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$ es una función analítica sobre D , dado que

$$\begin{cases} \sigma^*(\mathcal{L}_{\hat{V}}\theta_+) = \mathbf{d}f \wedge \mathbf{d}x + \mathbf{d}g \wedge \mathbf{d}y = 0, \\ \sigma^*(\mathcal{L}_{\hat{V}}\theta_-) = \mathbf{d}f \wedge \mathbf{d}y - \mathbf{d}g \wedge \mathbf{d}x = 0. \end{cases}$$

Entonces a partir de la condición $V|_{\partial D} = 0$ resulta que $V = 0$ necesariamente. Por otra parte, sin la restricción sobre el borde, las funciones componentes f, g de V son las componentes de una función analítica arbitraria sobre D , por lo cual, a partir de

$$\int_D [(u(x, y) - x^2 + y^2) f(x, y) + (v(x, y) - 2xy) g(x, y)] \mathbf{d}x \mathbf{d}y = 0,$$

debe resultar $u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy$, dado que puede elegirse en particular $f(x, y) = u(x, y) - x^2 + y^2, g(x, y) = v(x, y) - 2xy$.

Luego el problema variacional obtenido sin la restricción de las variaciones en el borde tiene como única extremal a la sección $(x, y) \mapsto (x, y; x^2 - y^2, 2xy)$, mientras que, cuando se le pide a las variaciones infinitesimales que se anulen en el borde, las únicas variaciones permitidas son la variación nula y todas las secciones integrales de \mathcal{I}_{C-R} son (trivialmente) extremales. \blacktriangle

Moraleja: Hay que tomarse en serio la definición adoptada para las variaciones infinitesimales.

3.2. Cálculo variacional con base no compacta

Ahora vamos a formular la noción de problema variacional cuando la base del fibrado en cuestión no es compacta. La idea intuitiva es localizar la discusión: esto es, analizar el funcional tomando variaciones concentradas en cada compacto suave de M . Como vimos en el ejemplo 3.1A, la noción de variación infinitesimal carece de sentido si no localizamos.

Definición 22. Una variación infinitesimal V de σ se dice K -admisibile ($K \subset M$ compacto) si y sólo si $\text{sop}V \subset K$.

Entonces podemos extender el cálculo variacional al caso en que la base no es compacta.

Definición 23. Una sección $\sigma \in \Gamma(\Lambda)$ es extremal para el problema variacional $(\Lambda \rightarrow M, \lambda, \mathcal{I})$ si y sólo si, para cada $K \subset M$ subvariedad compacta

$$\int_K \sigma^*(\hat{V} \lrcorner \mathbf{d}\lambda) = 0$$

para toda variación infinitesimal permitida V que sea K -admisibile.

La siguiente consecuencia es de mucha importancia para el resto del trabajo: Para problemas variacionales en los que no hay condiciones diferenciales, esto es, tales que $\mathcal{I} = 0$, puede caracterizarse a sus extremales mediante un EDS; dicha caracterización será de fundamental importancia en los próximos capítulos.

Proposición 8. Sea $\tilde{\Lambda} \rightarrow M$ un fibrado. Las secciones extremales del problema variacional

$$(\tilde{\Lambda} \rightarrow M, \tilde{\lambda}, 0)$$

son exactamente las secciones integrales del EDS \mathcal{I}_{H-C} generado por el conjunto

$$\{V \lrcorner \mathbf{d}\tilde{\lambda} : V \in V\tilde{\Lambda}\}.$$

Tal EDS se conoce con el nombre de EDS de Hamilton-Cartan.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sigma \in \Gamma(\mathcal{I}_{H-C})$; entonces $\sigma^*(\hat{V} \lrcorner d\tilde{\lambda}) = 0$ para todo vector vertical V , en particular, para variaciones infinitesimales K -admisibles, donde K es una subvariedad compacta arbitraria. Inversamente, si una sección σ es un extremal para el problema variacional considerado, debe valer que

$$\sigma^*(V \lrcorner d\tilde{\lambda}) = \mathbf{d}\rho_V^\sigma$$

para todo $V \in \Gamma(\sigma^*V\tilde{\Lambda})$, donde $\rho_V^\sigma \in \Omega^{n-1}(M)$. Sin embargo para $f \in C^\infty(\tilde{\Lambda})$, resulta de aquí que

$$(f \circ \sigma) \mathbf{d}\rho_V^\sigma = \mathbf{d}\rho_{fV}^\sigma,$$

por lo cual $\mathbf{d}(f \circ \sigma) \wedge \mathbf{d}\rho_V^\sigma = 0$ para toda función suave sobre $\tilde{\Lambda}$ y todo $V \in V\tilde{\Lambda}$. Luego necesariamente debe valer que $\mathbf{d}\rho_V^\sigma = 0$ para todo tal V , y σ debe ser sección integral de \mathcal{I}_{H-C} . \square

3.3. Expresiones locales

Sea $(\Lambda, \lambda, \mathcal{I})$ un problema variacional sobre el fibrado $\Lambda \xrightarrow{\pi} M$; uno puede obtener expresiones locales que codifican condiciones necesarias para que una sección sea extremal del problema variacional. Si σ es una extremal, tomamos una variación infinitesimal $V \in \Gamma(\sigma^*V\Lambda)$ tal que $\text{sop} V \subset U$ para algún entorno coordenado $U \subset M$; si $\bar{\sigma}, \bar{V}, \bar{\lambda}$ son las expresiones locales para cada uno de estos objetos, entonces vale que

$$(8) \quad \int_M \sigma^*(\hat{V} \lrcorner d\lambda) = \int_U \bar{\sigma}^*(\hat{\bar{V}} \lrcorner d\bar{\lambda}).$$

En tal caso puede utilizarse la proposición 7 para escribir las ecuaciones locales.

Ejemplo 3.3A: Ejemplo de expresiones locales de un problema variacional. Por ejemplo, supongamos que $\mathcal{I} = 0$ y $\lambda = L\omega$, con $L \in C^\infty(\Lambda)$ y ω el pullback a lo largo de la proyección de una forma de volumen sobre M . Sean $(x^1, \dots, x^n; u^1, \dots, u^m)$ coordenadas adaptadas al fibrado tales que $\bar{\omega} = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$; cualquier variación infinitesimal de la sección

$$\bar{\sigma} : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n; f^1(x), \dots, f^m(x))$$

será de la forma

$$\bar{V} : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n; f^1(x), \dots, f^m(x); \underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ ceros}}; g^1(x), \dots, g^m(x))$$

para ciertas funciones suaves g^1, \dots, g^m sobre U . La condición de extremal respecto de este tipo de variaciones infinitesimales será entonces

$$\left[\sum_{k=1}^m g^k \frac{\partial \bar{L}}{\partial u^k} \right] dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = 0.$$

Notar que una variación de este tipo es automáticamente extensible, debido a que localmente el fibrado es trivial. \blacktriangle

Para trabajar convenientemente con expresiones locales de un problema variacional, introduzcamos la notación siguiente.

Definición 24. Sea $(\Lambda \rightarrow M, \lambda, \mathcal{I})$ un problema variacional y $U \subset M$ un abierto. Una sección $\bar{\sigma} \in \Gamma(\pi^{-1}(U))$ es una extremal local (sobre U) para dicho problema variacional si y sólo si

$$\int_U \bar{\sigma}^*(\hat{V} \lrcorner d\bar{\lambda}) = 0$$

3.4. Problemas variacionales y ecuaciones de Euler-Lagrange

para toda variación infinitesimal V que sea U -admisibile.

La versión local de un problema variacional permite formular la siguiente condición necesaria para la existencia de extremales.

Proposición 9. Sea $(\Lambda \rightarrow M, \lambda, \mathcal{I})$ un problema variacional y $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento de M por abiertos. Si σ es un extremal de $(\Lambda \rightarrow M, \lambda, \mathcal{I})$, entonces la restricción de $\sigma \in \Gamma(\Lambda)$ es un extremal local para este problema variacional sobre cada U_α .

DEMOSTRACIÓN. Si σ es un extremal, entonces en particular sus restricciones son extremales locales, como se deduce de la ecuación (8). \square

No hay garantía sobre la afirmación inversa: Las extremales locales de un problema variacional pueden ser diferentes de las globales, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3B: Extremales locales versus extremales globales. Para $I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto, consideremos el fibrado $\Lambda := I \times TS^2 \rightarrow S^2$ tal que cada elemento allí puede escribirse $(\xi, v) \in \Lambda$, y la 2-forma $\lambda|_{(\xi, v)} := \xi (\|v\|^2 - (f \circ \tau_{S^2})(v)) \omega$, donde $\|\cdot\|^2$ es la norma inducida por la métrica usual de S^2 , ω es la forma de volumen allí, y f es una función suave estrictamente positiva sobre S^2 . El problema variacional a considerar es $(\Lambda, \lambda, 0)$; como probamos en la proposición 8, la condición de extremal para una sección $\sigma : p \in S^2 \mapsto (\mu(p), w(p))$ es equivalente a

$$\sigma^* (\hat{V} \lrcorner d\lambda) = 0$$

para todo $V \in \Gamma(\sigma^* V\Lambda)$. Ahora bien, cualquier vector vertical sobre $(\xi, v) \in \Lambda$ puede escribirse $V = (\Xi, W)$ para $\Xi \in \mathbb{R}$ y $W \in V_v(TS^2)$. Luego la condición de extremal para σ toma la forma

$$\Xi(p) [\|w(p)\|^2 - f(p)] \omega - \mu(p) w^* [\hat{W}(p) \lrcorner d(L\omega)] = 0$$

donde Ξ es una función suave arbitraria sobre S^2 , $L(v) := \|v\|^2 - (f \circ \tau_{S^2})(v)$ y $W \in \mathfrak{X}(TS^2)$ es un campo sobre TS^2 también arbitrario. Por consiguiente, una condición necesaria para que σ sea extremal es que

$$\|w(p)\|^2 = f(p)$$

para todo $p \in S^2$; sin embargo, hay una obstrucción topológica a la existencia de $w \in \mathfrak{X}(S^2)$ que no tenga ceros. Los problemas variacionales locales no participan de esta obstrucción, dado que cualquier subconjunto propio de S^2 es difeomorfo a un subconjunto de \mathbb{R}^2 , cuyo fibrado tangente es trivial. \blacktriangle

Este ejemplo muestra que la descripción de un extremal con condiciones locales (por ejemplo, mediante condiciones que involucren coordenadas) puede cambiar el problema. En la próxima sección estudiamos la suficiencia de condiciones locales cuando el ideal \mathcal{I} genera la relación diferencial que existe entre una coordenada y su derivada.

3.4. Problemas variacionales y ecuaciones de Euler-Lagrange

En esta sección relacionaremos el problema variacional, tal como fue presentado en las secciones anteriores, con las ecuaciones de Euler-Lagrange para la mecánica clásica. Sea Λ el fibrado $TQ \times I \rightarrow I$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo real cerrado y acotado y Q es una variedad cualquiera de dimensión n . Sean $U, V \subset Q$ un par de entornos coordenados tales que $U \cap V \neq \emptyset$, y $(q^i, v^i), (Q^j, V^j)$ las coordenadas inducidas por ellos sobre TQ . Consideremos sobre $\tau_Q^{-1}(U \cap V) \times I$ los EDSs $\mathcal{I}_{\text{cont}}(U \cap V)$ e $\mathcal{I}'_{\text{cont}}(U \cap V)$ generados respectivamente por las

coleccionas de 1-formas $\{\theta^i := \mathbf{d}q^i - v^i \mathbf{d}s\}$ y $\{\Theta^i := \mathbf{d}Q^i - V^i \mathbf{d}s\}$. Por las fórmulas de cambio de coordenadas, tenemos que

$$\Theta^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} \theta^j$$

y también

$$\theta^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q^i}{\partial Q^j} \Theta^j,$$

de donde se deduce que $\mathcal{I}_{\text{cont}}(U \cap V) = \mathcal{I}'_{\text{cont}}(U \cap V)$. Sea $\alpha \in \Omega^\bullet(\Lambda)$; diremos que $\alpha \in \mathcal{I}_{\text{cont}}$ si y sólo si $\alpha_U := \alpha|_{\tau_Q^{-1}(U)} \in \mathcal{I}_{\text{cont}}(U)$ para cada entorno coordenado $U \subset Q$. Entonces resulta que $\mathcal{I}_{\text{cont}}$ está bien definido, y es un EDS sobre Λ : Si $\alpha \in \mathcal{I}_{\text{cont}}$, entonces $(\mathbf{d}\alpha)_U = \mathbf{d}(\alpha_U) \in \mathcal{I}_{\text{cont}}(U)$ para cada entorno coordenado U , y por lo tanto $\mathbf{d}\alpha \in \mathcal{I}_{\text{cont}}$; si $\beta \in \Omega^\bullet(\Lambda)$, entonces $(\alpha \wedge \beta)_U = \alpha_U \wedge \beta_U \in \mathcal{I}_{\text{cont}}(U)$ para cada tal U , y por consiguiente $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{I}_{\text{cont}}$. Llamaremos a $\mathcal{I}_{\text{cont}}$ el EDS de contacto sobre $TQ \times I$. Una vez definido este EDS, caractericemos sus secciones integrales.

Lema 12. $\sigma : I \mapsto TQ \times I : s \mapsto (\phi(s), s)$ es una sección integral de $\mathcal{I}_{\text{cont}}$ si y sólo si $\phi = \gamma'$ para alguna curva $\gamma : I \rightarrow Q$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\gamma : I \rightarrow Q$ es una curva en Q , la sección $\sigma_\gamma : s \mapsto (\gamma'(s), s)$ es integral para $\mathcal{I}_{\text{cont}}$. Efectivamente, si $\bar{\sigma}_\gamma : s \mapsto (q^i(s), \dot{q}^i(s), s)$ es la expresión local respecto del entorno coordenado U , resulta que $(\bar{\sigma}_\gamma)^* \theta^i = 0$. Inversamente, si $\bar{\sigma} : s \mapsto (q^i(s), v^i(s), s)$ es la expresión local en las U -coordenadas de una sección integral σ , debe ser $v^i(s) = \dot{q}^i(s)$ para todo s tal que $(q^1(s), \dots, q^n(s)) \in U$. Luego la curva γ sobre Q tal que $\phi = \gamma'$ será directamente la proyección $\gamma := \tau_Q \circ \phi$. \square

Sea $\delta\sigma \in \Gamma(\sigma^*(V\Lambda))$ una variación infinitesimal; en cada entorno coordenado $\tau_Q^{-1}(U_\alpha) \times I_\alpha$ tal que $\sigma(I_\alpha) \subset \tau_Q^{-1}(U_\alpha)$ existirán funciones $\delta q^i, \delta v^i : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\delta\sigma : s \mapsto (q^i(s), \dot{q}^i(s), s, \delta q^i(s), \delta v^i(s), 0),$$

en las coordenadas locales inducidas sobre $TTQ \times I$. Si $\delta\sigma$ es I_α -admisibile, entonces será permitida si y sólo si

$$\sigma^*(\mathbf{d}\delta q^i - \delta v^i \mathbf{d}s) = 0$$

para todo $i = 1, \dots, n$, esto es, $\delta v^i = (\delta q^i)'$. Estas consideraciones son importantes a la hora de escribir localmente las condiciones de extremal ya que, de acuerdo al lema siguiente, toda variación puede escribirse como suma de variaciones locales.

Lema 13. Sea $\sigma \in \Gamma(\mathcal{I}_{\text{cont}})$, $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento de Q por abiertos coordenados y $\{I_\alpha\}$ un cubrimiento de I por abiertos tales que $\sigma(I_\alpha) \subset \tau_Q^{-1}(U_\alpha)$. Cualquier variación infinitesimal $\delta\sigma \in \Gamma(\sigma^*(V\Lambda))$ puede escribirse como

$$\delta\sigma = \sum_{\alpha} \delta\sigma_\alpha$$

donde $\{\delta\sigma_\alpha\}$ es una familia de variaciones infinitesimales tales que

1. *sup* $\delta\sigma_\alpha \subset \tau_Q^{-1}(U_\alpha) \times I_\alpha$ para todo índice α , y
2. en cada $(v, t) \in \sigma(t)$, $\delta\sigma_\alpha(v, t) \neq 0$ sólo para un número finito de índices.

Sin embargo, este lema no es suficiente, dado que no nos asegura que cualquier variación permitida pueda escribirse como suma de variaciones permitidas U_α -admisibles; para el EDS $\mathcal{I}_{\text{cont}}$ esto puede probarse como sigue.

Lema 14. Sea $\sigma \in \Gamma(\mathcal{I}_{\text{cont}})$, $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento de Q por abiertos coordenados y $\{I_\alpha\}$ un cubrimiento de I por abiertos tales que $\sigma(I_\alpha) \subset \tau_Q^{-1}(U_\alpha)$. Existe una colección $\{V_\rho\}$ de secciones de $\Gamma(\sigma^*(V\Lambda))$ tales que

3.4. Problemas variacionales y ecuaciones de Euler-Lagrange

1. cada V_ρ es una variación infinitesimal permitida sobre σ ,
2. cada V_ρ es U_α -admisibile para algún α , y
3. para cada $s \in I$ existe un entorno $W_s \subset I$ y una colección ρ_1, \dots, ρ_{2n} de índices tales que $\{V_{\rho_1}, \dots, V_{\rho_{2n}}\}$ forman una base de $V_{\sigma(s')}\Lambda$ para cada $s' \in W_s$.

DEMOSTRACIÓN. Si $v = \sigma(s_0)$ con $s_0 \in I_\alpha$, elegimos la colección de funciones

$$\{\delta q_{l,m}^1, \dots, \delta q_{l,m}^n\}$$

tal que

$$\begin{cases} \delta q_{l,m}^i(s_0) = \delta_l^i, \\ \left(\delta q_{l,m}^i\right)'(s_0) = \delta_m^i, \end{cases}$$

y sus soportes están contenidos en I_α ; definamos $V_{l,m}^{s_0} \in \Gamma(V\Lambda)$ via

$$V_{l,m}^{s_0} : s \mapsto \begin{cases} (\sigma(s); \delta q_{l,m}^i(s), \left(\delta q_{l,m}^i(s)\right)', 0), & \text{si } s \in I_\alpha \\ (\sigma(s); 0) & \text{si } s \notin I_\alpha. \end{cases}$$

Existirá un entorno $W_{s_0} \subset I$ de s_0 tal que $\{V_{l,m}^{s_0}(s')\}$ es una base de vectores verticales sobre $\sigma(s')$ para todo $s' \in W_{s_0}$. Entonces la colección buscada es

$$\{V_{l,m}^{s_0} : s_0 \in I, l, m = 1, \dots, n\}. \quad \square$$

Este lema tiene como corolario la suficiencia de las ecuaciones de Euler-Lagrange para que una sección de Λ sea extremal del problema variacional $(\Lambda, L\mathbf{d}s, \mathcal{I}_{\text{cont}})$.

Corolario 2. Una sección $\sigma \in \Gamma(\Lambda)$ es extremal para el problema variacional $(\Lambda, L\mathbf{d}s, \mathcal{I}_{\text{cont}})$ si y sólo si, para cada entorno coordinado $U \subset Q$ con coordenadas (q^i, v^i) , sus componentes locales $\sigma : s \mapsto (q^i(s), \dot{q}^i(s), s)$ satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$(9) \quad \frac{\partial \bar{L}}{\partial q^i}(q^i(s), \dot{q}^i(s)) - \frac{d}{ds} \left[\frac{\partial \bar{L}}{\partial v^i}(q^i(s), \dot{q}^i(s)) \right] = 0$$

donde \bar{L} es la versión local de la función $L \in C^\infty(TQ)$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\delta\sigma$ es una variación infinitesimal local (esto es, tal que $\text{sop}\delta\sigma \subset I_\alpha$, donde I_α cumple que $\sigma(I_\alpha) \subset \tau_Q^{-1}(U_\alpha)$ para $U_\alpha \subset Q$ un entorno coordinado), entonces vale que

$$\begin{cases} \sigma : s \mapsto (q^i(s), v^i(s); s), \\ \delta\sigma : s \mapsto (q^i(s), v^i(s), s; \delta q^i(s), \delta v^i(s); 0). \end{cases}$$

Como la variación infinitesimal se anula fuera de I_α , uno tiene, a partir de la proposición 7, que

$$\delta\sigma|_\sigma \cdot S_0 = \int_{I_\alpha} \sigma^* ((\delta q, \delta v) \lrcorner \mathbf{d}(\bar{L}\mathbf{d}s)).$$

Luego como $\mathbf{d}(\bar{L}\mathbf{d}s) = \bar{L}_{q^i} \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}s + \bar{L}_{v^i} \mathbf{d}v^i \wedge \mathbf{d}s$ resulta que

$$\delta\sigma|_\sigma \cdot S_0 = \int_{I_\alpha} \sigma^* (\bar{L}_{q^i} \delta q^i \mathbf{d}s + \bar{L}_{v^i} \delta v^i \mathbf{d}s).$$

Sabemos que la condición para esta variación de ser permitida es equivalente a pedir que

$$\sigma^* (\mathcal{L}_{(\delta q, \delta v)} \theta^i) = 0$$

donde θ^i son los generadores locales para el EDS $\mathcal{I}_{\text{cont}}$; luego $\sigma^* (\mathbf{d}(\delta q^i) - \delta v^i \mathbf{d}s) = 0$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \delta\sigma|_{\sigma} \cdot S_0 &= \int_{I_\alpha} \sigma^* (\bar{L}_{q^i} \delta q^i \mathbf{d}s + \bar{L}_{v^i} \mathbf{d}(\delta q^i)) \\ &= \int_{I_\alpha} \sigma^* (\bar{L}_{q^i} \mathbf{d}s - \mathbf{d}\bar{L}_{v^i}) \delta q^i(s). \end{aligned}$$

Luego una sección σ es extremal para nuestra acción si y sólo si $\sigma^* (\mathbf{d}q^i - v^i \mathbf{d}s) = 0$ y además

$$\sigma^* (\mathbf{d}\bar{L}_{v^i} - \bar{L}_{q^i} \mathbf{d}s) = 0.$$

La interpretación de esta ecuación en las coordenadas locales para σ da lugar a la ecuación de Euler-Lagrange (9). \square

De la prueba de arriba surge la siguiente caracterización local: Una sección σ es extremal para el problema variacional del corolario anterior si y sólo si su restricción a $\tau_Q^{-1}(U_\alpha) \times I_\alpha$ es una sección integral del EDS generado por

$$(10) \quad \begin{cases} \mathbf{d}q^i - v^i \mathbf{d}s \\ \mathbf{d}\bar{L}_{v^i} - \bar{L}_{q^i} \mathbf{d}s \end{cases}$$

para cada $U_\alpha \subset Q$ entorno coordinado. Debe tenerse en cuenta también que la posibilidad de describir localmente a la extremal del problema variacional de Euler-Lagrange proviene de la validez del Lema 14. En general, el conjunto de variaciones infinitesimales permitidas de un problema variacional $(\Lambda, \lambda, \mathcal{I})$ es un módulo sobre el anillo $C^\infty(\Lambda)$, y la posibilidad de escribir ecuaciones locales para sus extremales está ligada a la existencia de un conjunto de generadores para este módulo cuyos soportes estén contenidos en entornos coordinados. Conviene enfatizar que aún la posibilidad de escribir ecuaciones locales no nos asegura la suficiencia de dichas condiciones; en particular, el problema variacional del ejemplo 3.3B tiene como variaciones permitidas cualquier vector vertical, y el módulo de vectores verticales de cualquier fibrado admite un conjunto de generadores con soporte contenido en entornos coordinados, pese a que admite extremales locales sin tener ninguna extremal global.

Problemas no estándar y Lepage equivalencia

LOS problemas variacionales en los que centraremos nuestra atención serán llamados¹ *problemas variacionales no estándar*. Este concepto rescata el hecho de que, en una teoría mecánica (considerando con este nombre general tanto mecánica clásica como teorías de campo), los grados de libertad están divididos en dos grupos: Las “coordenadas” y las “velocidades”, y el segundo grupo tiene una relación diferencial con el primero. Sin dudas la idea de problema variacional que hemos introducido más arriba ha sido formulada teniendo presente este hecho; lo único que estamos haciendo aquí es poner énfasis en la estructura que nos interesa. Mención aparte debe hacerse del concepto de Lepage equivalencia para problemas variacionales. Dado un problema variacional $(\Lambda, \lambda, \mathcal{I})$, la idea es incorporar el sistema diferencial exterior \mathcal{I} como parte de las ecuaciones que definen al extremal. Para ello se agregan nuevos grados de libertad, una especie de multiplicadores de Lagrange, y se modifica la forma λ ; así se obtiene un nuevo problema variacional $(\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}, 0)$, y en caso favorable puede establecerse de manera natural una correspondencia entre los extremales de ambos problemas. Cuando tal cosa ocurre, se dice que el problema Lepage equivalente es *bivalente*. Como se muestra en la sección 4.3.1, es la noción de Lepage equivalencia la que permite asociar el principio variacional de Hamilton con el principio de Hamilton-Pontrjagin.

4.1. Versión no estándar de la mecánica

4.1.1. Motivaciones. El enfoque de la mecánica presentado en [Gri98], es muy interesante en tanto permite

1. Unificar la mecánica de partículas con las teorías de campo.
2. Incluir algún tipo de vínculo como estructura del espacio de velocidades.

Puede interpretarse la mecánica de partículas como la búsqueda de secciones del fibrado trivial $Q \times I \rightarrow I, I \subset \mathbb{R}$ que son extremales de la acción

$$S[\gamma] := \int_I \dot{\gamma}^*(L) dt$$

donde $L \in C^\infty(TQ \times I)$ es la función lagrangiana del sistema. Notar que la acción se calcula a partir de la curva $\dot{\gamma} : I \rightarrow TQ$, que puede interpretarse a su vez como una sección del fibrado $TQ \times I \rightarrow I$ que cubre a γ , esto es, tal que $\tau_Q \circ \dot{\gamma} = \gamma$. Además, como vimos en el lema 12, la sección $\dot{\gamma}$ es integral para el sistema diferencial exterior generado por la colección de formas

$$\theta^i|_{(q,v,t)} := dq^i - v^i dt.$$

Como estructura básica para definir una mecánica se necesita por lo tanto un fibrado doble

$$\Lambda \rightarrow \Lambda_1 \rightarrow M,$$

¹A falta de un nombre mejor..

una forma $\lambda \in \Omega^n(\Lambda)$, $n = \dim M$ y una manera de asociar a cada sección $s_1 : M \rightarrow \Lambda_1$ una sección s de Λ que la cubra; diremos que $s =: \mathbf{pr}s_1$. La acción a extremar se construye con esta estructura, de acuerdo a la prescripción

$$S[s_1] := \int_M (\mathbf{pr}s_1)^* \lambda.$$

El espacio Λ se denominará *espacio de velocidades*, y es el análogo al fibrado tangente en este contexto. Sin más información es difícil decir algo de utilidad sobre las extremales de S ; esto cambia cuando se prolongan las secciones de Λ_1 mediante el auxilio de un sistema diferencial exterior sobre Λ . En algunos casos (por ejemplo, en la teoría del campo electromagnético, ver ejemplo 4.1C) parte de los vínculos que aparecen al intentar formular una versión hamiltoniana de las ecuaciones de movimiento pueden incluirse como generadores de este sistema diferencial exterior.

4.1.2. Estructura formal de la mecánica. De acuerdo a lo dicho en la sección anterior, podemos fijar la definición siguiente.

Definición 25 (Problema variacional no estándar). *Un problema variacional no estándar es un triple $(\Lambda \rightarrow \Lambda_1 \rightarrow M, \lambda, \mathcal{I})$ compuesto por los elementos siguientes:*

- Una fibración doble

$$\Lambda \xrightarrow{\pi_1} \Lambda_1 \xrightarrow{p} M, \quad n = \dim M,$$

- Un sistema diferencial exterior $\mathcal{I} \subset \Omega^\bullet(\Lambda)$, y
- Una forma lagrangiana $\lambda \in \Omega^n(\Lambda)$.

Nota. A menos que explícitamente se diga lo contrario, cada vez que trabajemos con un problema no estándar $(\Lambda \rightarrow \Lambda_1 \rightarrow M, \lambda, \mathcal{I})$, las proyecciones intermedias se denotarán mediante $\pi_1 : \Lambda_1 \rightarrow \Lambda$, $p : \Lambda_1 \rightarrow M$, con composición $\pi := p \circ \pi_1$.

La única diferencia con la definición de problema variacional adoptada anteriormente está relacionada con la estructura del fibrado: Aquí se supone que las coordenadas “dependientes” se separan en dos conjuntos, de manera que, como mencionamos arriba, este EDS nos indica la relación de las coordenadas con las velocidades (en el sentido en que aquí entendemos a estas palabras). Esto es, el abuso de notación cometido al utilizar el símbolo $(\Lambda, \lambda, \mathcal{I})$ para describir tanto a problemas variacionales a secas como problemas variacionales no estándar es sólo aparente, en tanto que, la diferencia entre un problema y otro, reside en que el fibrado subyacente en los problemas no estándar admite un fibrado intermedio, y tal estructura está ausente en los problemas variacionales usuales. De todas formas, y como indica el ejemplo 4.1D, la distinción entre estas definiciones es una cuestión de gustos, a menos que se asuman condiciones adicionales sobre el EDS \mathcal{I} .

Definición 26 (Prolongación de una sección). *Dado un problema variacional no estándar*

$$(\Lambda \rightarrow \Lambda_1 \rightarrow M, \lambda, \mathcal{I})$$

la prolongación de una sección $\sigma \in \Gamma(\Lambda_1)$ es una aplicación

$$\mathbf{pr} : \Gamma(\Lambda_1) \rightarrow \Gamma(\Lambda)$$

tal que, para cada $\sigma \in \Gamma(\Lambda_1)$, la sección $\mathbf{pr}\sigma$ de Λ satisface las siguientes condiciones:

1. $\mathbf{pr}\sigma$ cubre a σ mediante p , esto es, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & \Lambda \\ & \nearrow \mathbf{pr}\sigma & \downarrow p \\ M & \xrightarrow{\sigma} & \Lambda_1 \end{array}$$

4.1. Versión no estándar de la mecánica

2. El gráfico de $\mathbf{pr}\sigma$ es subvariedad integral para \mathcal{I} , esto es,

$$(\mathbf{pr}\sigma)^*(\mathcal{I}) = 0.$$

Sin otras condiciones sobre \mathcal{I} no podemos asegurar que la aplicación \mathbf{pr} esté definida a partir de estas condiciones. Por ejemplo, para $\mathcal{I} = 0$ cualquier sección que cubra a σ a través de p es una buena prolongación para ella.

4.1.3. Ejemplos. El propósito de esta sección es ilustrar con ejemplos importantes la pertinencia del esquema presentado para la mecánica, de manera de adquirir cierta intuición acerca del significado de los diferentes elementos en juego. Primero mostraremos cómo nuestro modelo inicial, la mecánica clásica, nos proporciona un ejemplo de problema variacional no estándar.

Ejemplo 4.1A: Mecánica clásica. En este caso la fibrición doble es

$$I \times TQ \xrightarrow{\text{id} \times \tau_Q} I \times Q \xrightarrow{p_1} I \subset \mathbb{R}$$

con coordenadas locales (t, q^i, v^i) sobre Λ . El EDS que determina las prolongaciones está diferencialmente generado mediante

$$\mathcal{I} := \langle \theta^i := dq^i - v^i dt \rangle_{\text{diff}},$$

mientras que la forma lagrangiana es $\lambda := Ldt$, siendo L el lagrangiano del sistema. Para prolongar, tomamos $\sigma : t \mapsto (t, q^i(t))$ como sección para $I \times Q$ y proponemos la siguiente forma para su prolongación

$$\mathbf{pr}\sigma : t \mapsto (t, \alpha^i(t), \beta^i(t)).$$

Por la condición de cubrimiento, tenemos que $\alpha^i(t) = q^i(t)$ para todo $t \in I$; por otra parte

$$(\mathbf{pr}\sigma)_*|_{(t, q(t), \beta(t))} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i(t) \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{\beta}^i(t) \frac{\partial}{\partial v^i},$$

de donde concluimos que

$$\begin{aligned} 0 &= [(\mathbf{pr}\sigma)^* \left(\theta^i|_{(t, q(t), \beta(t))} \right)] \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &= \theta^i|_{(t, q(t), \beta(t))} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i(t) \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{\beta}^i(t) \frac{\partial}{\partial v^i} \right) \\ &= \dot{q}^i(t) - \beta^i(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{pr}\sigma : t \mapsto (t, q^i(t), \dot{q}^i(t)).$$

es la expresión buscada para la prolongación de secciones en mecánica clásica. ▲

Las teorías de campo también tienen cabida en este esquema: La formulación usual [GIM97, Ble81] considera que los campos son secciones de un fibrado $p : \Lambda_1 \rightarrow M$ sobre el espacio-tiempo, y la generalización natural del tangente al fibrado tangente es el espacio de 1-jets $J^1(p)$ asociado a tal fibrado. Resulta aún más sugestivo y notorio el hecho de que todo espacio de jets tiene un EDS naturalmente inducido por su estructura de contacto [Sau89]; en el siguiente ejemplo mostramos la manera en que estas estructuras forman parte de un problema variacional no estándar.

Ejemplo 4.1B: Teorías de campo de primer orden. Supongamos que los campos son secciones de un dado fibrado $F \xrightarrow{\pi} M$ sobre el espacio-tiempo. La fibrición doble es en este caso simplemente

$$\Lambda := J^1(\pi) \xrightarrow{\pi_{1,0}} \Lambda_1 := J^0(\pi) = F \rightarrow M,$$

donde $J^k(\pi)$ denota el espacio de k -jets de F . Si $U \subset F$ es un entorno coordinado adaptado con coordenadas locales (x^i, u^α) , entonces

$$\pi|U : (x, u) \mapsto x.$$

Por lo tanto existe un sistema de coordenadas inducido sobre $U_1 = \pi_{1,0}^{-1}(U) \subset J^1(\pi)$ y con coordenadas locales $(x^i, u^\alpha, u_k^\beta)$; la estructura de contacto sobre U_1 es el EDS generado por la colección de 1-formas

$$\theta^\alpha := \mathbf{d}u^\alpha - u_k^\alpha \mathbf{d}x^k.$$

Supongamos ahora que tenemos la sección $\sigma \in \Gamma(F)$; en las coordenadas introducidas tendrá la expresión

$$\sigma : x^i \mapsto (x^i, f^\alpha(x))$$

para ciertas funciones $f^\alpha \in C^\infty(\pi(U))$. Es más, la prolongación $\mathbf{pr}\sigma : \pi(U) \rightarrow U_1$ está determinada por la colección de funciones suaves $\{g^\alpha, H_l^\beta\}$ mediante

$$\mathbf{pr}\sigma : x^i \mapsto (x^i, g^\alpha(x), H_l^\beta(x)).$$

Debido a que $\mathbf{pr}\sigma$ cubre a σ , tendremos que $\pi_{1,0} \circ \mathbf{pr}\sigma = \sigma$, lo cual implica que $f^\alpha = g^\alpha$ para todo α . Además dado que el gráfico de $\mathbf{pr}\sigma$ es integral para la estructura de contacto,

$$0 = (\mathbf{pr}\sigma)^*(\theta^\beta) = \mathbf{d}f^\beta - H_k^\beta \mathbf{d}x^k,$$

y por lo tanto $H_k^\beta = \partial_k f^\beta$; esto es, la prolongación en este caso está determinada por σ via

$$\mathbf{pr}\sigma : x^i \mapsto (x^i, f^\alpha(x), \partial_k f^\beta(x)).$$

Globalmente esto puede escribirse $\mathbf{pr}\sigma = j^1\sigma$. Si $L \in C^\infty(J^1(\pi))$, la n -forma $\lambda := L\mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n$ satisface

$$(\mathbf{pr}\sigma)^*\lambda = (L \circ j^1\sigma) \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n;$$

el problema variacional consistente en hallar las extremales de

$$\sigma \mapsto \int_M (L \circ j^1\sigma) \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n$$

es el principio de Hamilton usual para teorías de campo de primer orden con densidad lagrangiana L . ▲

En la introducción a este capítulo sugerimos que el hecho de considerar estructuras de prolongación de secciones más generales que las estructuras de contacto podría utilizarse para incluir en el mismo problema variacional algunos de los vínculos que aparecen en ciertos problemas mecánicos. En el caso del campo electromagnético, trabajos que proceden en esa dirección son [Hor91, Del05]; el siguiente ejemplo muestra cómo una construcción similar puede llevarse a cabo en el contexto de problemas no estándar. Puede notarse la manera en que una parte de los vínculos que surgen en el tratamiento usual del campo electromagnético [HT94] (esto es, el hecho que F es la parte antisimétrica de j^1A , si A es el cuadripotencial y F el tensor de campo) son incorporados naturalmente en la estructura de prolongación.

Ejemplo 4.1C: Campo electromagnético. Presentamos aquí una descripción del campo electromagnético como una teoría de campo de primer orden ajustada a los lineamientos presentados anteriormente, la cual difiere de la aproximación usual en que las velocidades guardan información sólo de la derivada exterior del campo, en lugar de todas las derivadas. El fibrado doble es en este caso

$$T^*M \oplus \bigwedge^2 (T^*M) \xrightarrow{p_1} T^*M \xrightarrow{\bar{\tau}_M} M.$$

4.1. Versión no estándar de la mecánica

Para definir la estructura de levantamiento, notemos que sobre el fibrado $\bar{\tau}_M^k : \bigwedge^k (T^*M) \rightarrow M$, $k \in \mathbb{N}$, está definida la k -forma canónica

$$\Theta_k|_\alpha := \alpha \circ (\bar{\tau}_M^k)_*, \quad \alpha \in \bigwedge^k (T^*M);$$

si además M tiene una estructura (pseudo)riemanniana, existe otro tipo de k -forma canónica, esto es

$$\Theta_k^\sharp|_\alpha := (\star\alpha) \circ (\bar{\tau}_M^k)_*, \quad \alpha \in \bigwedge^k (T^*M).$$

Aquí hay un ligero abuso de notación: En rigor la estrella de Hodge es un operador sobre elementos de $\Omega^\bullet(M)$, no covectores, aunque podemos inducir un operador sobre covectores usando la siguiente definición: Para cada $\alpha \in \bigwedge^k (T_m^*M)$, se define

$$\star\alpha := (\star\hat{\alpha})|_m,$$

donde $\hat{\alpha} \in \Omega^k(M)$ es tal que $\hat{\alpha}|_m = \alpha$. Puede probarse (por ejemplo, utilizando expresiones locales) que esta definición no depende de la extensión utilizada para α . Con estas definiciones en mente podemos escribir el sistema diferencial exterior que determina la estructura de levantamiento para el campo electromagnético, esto es

$$\mathcal{I} := \langle d\Theta_1 - \Theta_2 \rangle_{\text{diff}}.$$

Si denotamos mediante $\sigma : m \in M \mapsto A|_m$ una sección del fibrado intermedio T^*M (esto es, A es una 1-forma sobre M) y con $\text{pr}\sigma : m \mapsto (A'|_m, F|_m)$ su correspondiente levantamiento, entonces la primera condición para el levantamiento equivale a pedir que $A = A'$; el gráfico de $\text{pr}\sigma$ será una subvariedad integral para \mathcal{I} si y sólo si $F = dA$. \blacktriangle

Como ya hemos advertido, la colección de problemas variacionales no estándar contiene a los problemas variacionales como caso particular, tal como mostraremos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.1D: EDS como problema no estándar. La siguiente es una observación importante desde el punto de vista de las aplicaciones de nuestro esquema: Todo EDS \mathcal{I} sobre un fibrado $F \rightarrow M$ puede considerarse como un problema no estándar si se utiliza la siguiente fibración doble

$$F \xrightarrow{\text{id}} F \rightarrow M,$$

con estructura de prolongación dada por \mathcal{I} y n -forma lagrangiana trivial $\lambda = 0$. En tal caso, el fibrado intermedio tiene sólo una sección, esto es, $\sigma_0 = \text{id}_F$, por lo cual a partir del diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & F \\ & \nearrow \text{pr}\sigma & \downarrow \text{id}_F \\ M & \xrightarrow{\sigma} & F \end{array}$$

resulta que $\text{pr}\sigma = \sigma$, y por lo tanto una sección será prolongable si y sólo si es integral para \mathcal{I} . Más adelante usaremos este hecho para utilizar el algoritmo de Gotay, Nester y Hinds en la búsqueda de las condiciones de integrabilidad de un sistema de PDEs (véase el ejemplo de la sección 8.2). \blacktriangle

Finalmente vamos a considerar un ejemplo con motivos principalmente pedagógicos: En la gravedad via tétradas [Ash91], los campos forman una cobase sobre el espacio-tiempo. Como la teoría es geométrica (en el sentido de que el lagrangiano depende de datos geométricos,

como la curvatura escalar), es natural esperar que las únicas “velocidades” relevantes se correspondan con las formas de curvatura. Desde este punto de vista, la introducción de las variables del espacio de 1-jets sobre el fibrado de cobases parece una complicación innecesaria.

Ejemplo 4.1E: Gravedad via tétradas. Sea M una 4-variedad riemanniana. Vamos a considerar una formulación del problema variacional para la gravedad via tétradas sobre M en estos términos. Los campos son en este caso las componentes $e_\mu \in \Omega^1(M)$, $\mu = 0, \dots, 3$ de un tétrada sobre el espacio-tiempo M . En lugar de tomar como “velocidades” a sus prolongaciones en $J^1(\tau_M)$, desde el punto de vista geométrico es más natural considerar como velocidades para una tétrada a las formas de conexión asociadas $\omega_{\mu\nu} \in \Omega^1(M)$. entonces podremos formular la gravedad via tétradas como un problema no estándar sobre la fibración doble

$$F_{\mathcal{O}}^*(M) \oplus (T^*M)^{\oplus 4} \rightarrow F_{\mathcal{O}}^*(M) \rightarrow M$$

donde $\bar{p}_M : F_{\mathcal{O}}^*(M) \rightarrow M$ es el fibrado de cobases sobre M , con estructura de prolongación generada por las formas

$$\Theta^\alpha := \mathbf{d}E^\alpha - \Omega_\nu^\alpha \wedge E^\nu, \nu = 0, \dots, 3.$$

Aquí las letras mayúsculas denotan las formas canónicas definidas sobre los espacios correspondientes. El lagrangiano es la curvatura escalar, por lo cual

$$\lambda := \star (E^\alpha \wedge E^\beta) \wedge (\mathbf{d}\Omega_{\alpha\beta} + \Omega_\alpha^\nu \wedge \Omega_{\nu\beta}).$$

La prolongación significa, en este caso en particular, que la conexión en cuestión no tiene torsión. ▲

4.2. Extremales para problemas variacionales no estándar

Ya hemos señalado que no hay diferencias fundamentales entre los problemas variacionales no estándar y los problemas variacionales estudiados en el capítulo 3. Esto nos allanará el camino al estudio de los problemas no estándar; por ejemplo, definiremos ahora los extremales de un problema no estándar utilizando su similitud con los problemas variacionales usuales.

Definición 27 (Extremales de un problema variacional no estándar). Una sección $s \in \Gamma(\Lambda)$ es una extremal del problema variacional no estándar

$$(\Lambda \rightarrow \Lambda_1 \rightarrow M, \lambda, \mathcal{I})$$

si y sólo si es un extremal del problema variacional $(\Lambda \rightarrow M, \lambda, \mathcal{I})$ y prolongación de alguna sección s_1 de Λ_1 .

De igual manera, para encontrar los extremales de un problema no estándar debemos utilizar las Definiciones 21 y 23, y luego quedarnos con aquellas extremales que son complementarias a las fibras de $\pi_1 : \Lambda \rightarrow \Lambda_1$. Sin embargo, vale el siguiente resultado.

Proposición 10. Sea $\Lambda \rightarrow \Lambda_1 \rightarrow M$ una fibración doble y $s \in \Gamma(\Lambda \rightarrow M)$. Entonces s es prolongación de alguna sección $s_1 \in \Gamma(\Lambda_1 \rightarrow M)$.

DEMOSTRACIÓN. Definimos la aplicación $s_1 : M \rightarrow \Lambda_1 : m \mapsto (\pi_1 \circ s)(m)$; entonces

$$p \circ s_1 = p \circ (\pi_1 \circ s) = (p \circ \pi_1) \circ s = \pi \circ s = \text{id}_M$$

y $s_1 \in \Gamma(\Lambda_1)$. Como s cubre por definición a s_1 , tenemos el resultado deseado. □

4.3. Formalismo multisimpléctico mediante Lepage equivalencia

Queremos construir una versión hamiltoniana para los problemas variacionales no estándar. La aproximación usual a este problema no es la más conveniente, debido a las siguientes características de la misma [GIM04, GIM97, Ble81]:

- El espacio de multimomentos covariante es un fibrado específicamente asociado a un espacio de jets.
- La dinámica en el espacio de multimomentos se define haciendo uso (en un modo aparentemente esencial) de una noción de transformada de Legendre.

Una manera de evitar estas dificultades es imitando el pasaje, en el contexto de mecánica clásica, desde el principio variacional de Hamilton al de Hamilton-Pontrjagin [YM06a, YM06b]: En tal pasaje se incluyen los generadores de la estructura de prolongación en la densidad lagrangiana mediante una especie de multiplicadores de Lagrange. En los siguientes párrafos, y siguiendo la referencia [Got91b], explicaremos cómo hacer esto por intermedio de *problemas Lepage equivalentes canónicos*.

4.3.1. Principio de Hamilton-Pontrjagin. Sea L una función suave sobre el fibrado tangente TQ , siendo Q el espacio de configuraciones de un cierto sistema mecánico. Para $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo real cerrado, armemos el fibrado $\Lambda := (TQ \oplus T^*Q) \times I \rightarrow I$; en coordenadas locales un punto de Λ está descrito por la $3n + 1$ -upla $(q, v, p; s)$, si $n = \dim Q$, donde (q, v) son coordenadas locales de la parte en TQ y (q, p) las correspondientes a T^*Q . En estas coordenadas la proyección viene dada simplemente por $\pi : (q, v, p; s) \mapsto s$. Definimos sobre Λ la 1-forma λ tal que en las coordenadas introducidas tiene la expresión $\lambda|_{(q,v,p;s)} := p_i (\mathbf{d}q^i - v^i \mathbf{d}s) + L \mathbf{d}s$, y podemos construir el siguiente funcional sobre curvas en Λ :

$$S[\gamma] := \int_I \gamma^* \lambda.$$

Nótese que podemos escribir

$$\lambda|_{(q,v,p;s)} = p_i \mathbf{d}q^i - (p_i v^i - L) \mathbf{d}s,$$

por lo cual λ tiene la expresión global $\lambda|_{(w,\alpha)} := \Theta|_\alpha - [\alpha(w) - L(w)] \mathbf{d}s$, siendo Θ la 1-forma canónica sobre T^*Q . El problema variacional $(\Lambda, \lambda, 0)$ es el problema de Hamilton-Pontrjagin [YM06b]; el siguiente lema relaciona sus extremales con las del problema variacional de Euler-Lagrange $(TQ \times I \rightarrow I, L \mathbf{d}s, \mathcal{I}_{\text{cont}})$, donde $\mathcal{I}_{\text{cont}}$ está localmente generado por la colección de 1-formas

$$\theta^i|_{(q,\dot{q};s)} := \mathbf{d}q^i - \dot{q}^i \mathbf{d}s.$$

Lema 15. *La proyección $j : (q, v, p; s) \mapsto (q, v)$ induce un isomorfismo entre las curvas extremales de S y las soluciones del sistema mecánico definido sobre TQ por el lagrangiano L .*

DEMOSTRACIÓN. Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\lambda &= \mathbf{d}p_i \wedge \mathbf{d}q^i - \mathbf{d}H \wedge \mathbf{d}s \\ &= \mathbf{d}p_i \wedge \mathbf{d}q^i - (H_{q^i} \mathbf{d}q^i + H_{v^i} \mathbf{d}v^i + H_{p_i} \mathbf{d}p_i) \wedge \mathbf{d}s \end{aligned}$$

con $H(q, v, p) := p_i v^i - L(q, v)$, por lo que, considerando variaciones nulas en los bordes de I

$$\begin{aligned} \delta\sigma|_\sigma \cdot S &= \int_I \sigma^* \left((\widehat{\delta}q, \widehat{\delta}v, \widehat{\delta}p) \lrcorner \mathbf{d}\lambda \right) \\ &= \int_I \sigma^* \left(-(dp_i + H_{q^i} ds) \delta q^i + (dq^i - H_{p_i} ds) \delta p_i + H_{v^i} ds \delta v^i \right). \end{aligned}$$

Una extremal σ para esta acción deberá satisfacer

$$\begin{cases} \sigma^* (dp_i + H_{q^i} ds) = 0 \\ \sigma^* (dq^i - H_{p_i} ds) = 0 \\ \sigma^* (H_{v^i} ds) = 0, \end{cases}$$

por lo cual deberá ser integral para el EDS generado por

$$(11) \quad \begin{cases} dp_i - L_{q^i} ds, \\ dq^i - v^i ds, \\ p_i - L_{v^i} = 0. \end{cases}$$

Definamos entonces la aplicación $F : (q, v; s) \mapsto (q, v, \frac{\partial L}{\partial v}; s)$; tenemos que F es una sección para j , y que además el pullback de este EDS a lo largo de F es igual al EDS de Euler-Lagrange, Ec. (10). Por lo tanto, cada extremal del problema variacional de Euler-Lagrange se levanta a un extremal de $(\Lambda, \lambda, \mathcal{I})$ via F ; recíprocamente, cada extremal de este último problema variacional, por el tercer generador en la expresión (11), es la composición de una aplicación $s \mapsto (q(s), v(s))$ con F , donde las funciones coordenadas satisfacen el EDS

$$\begin{cases} dL_{v^i} - L_{q^i} ds, \\ dq^i - v^i ds, \end{cases}$$

esto es, son extremales del problema de Euler-Lagrange. \square

4.3.2. Problemas Lepage equivalentes. Uno de los datos más antipáticos en un problema variacional es el EDS de restricción de las secciones, ya que implica la noción de *variación infinitesimal permitida*, y esto obliga a caracterizar a este espacio a la hora de calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange. Una forma de manejar eficientemente esta situación es a través de otro problema variacional equivalente, cuyas extremales estén en correspondencia uno a uno con las del problema original, y tal que su EDS de restricción es trivial. Así, los problemas variacionales quedan clasificados en clases de equivalencia por sus extremales, de manera que la noción de *Lepage equivalencia* es una relación intermedia destinada a describir, dentro de cada clase, aquel problema variacional con EDS trivial y, por lo tanto, más fácilmente soluble.

4.3.2.1. Introducción. Vamos a seguir la exposición que del tema se hace en [Got91b]. Lo primero que hay que advertir al trabajar con este concepto es que, aunque el nombre lo sugiera, *la relación de Lepage equivalencia no es una relación de equivalencia*. Como explicaremos en detalle en las secciones siguientes, podemos definir sobre la clase de problemas variacionales en, por ejemplo, las secciones de un fibrado fijo, clases de equivalencia respecto de las extremales de dichos problemas: En tal caso, dos problemas variacionales son equivalentes si y sólo si tienen las mismas secciones extremales. Entonces dar un problema Lepage equivalente bivalente canónico a uno dado es la elección de un representante con características particulares dentro de la misma clase del problema en cuestión.

Como ya hemos establecido en el capítulo 3, el símbolo $(\Lambda \xrightarrow{\pi} M, \lambda, \mathcal{I})$ refiere al problema variacional que consiste en extremar la acción

$$S[\sigma] = \int_M \sigma^* (\lambda)$$

donde $\sigma \in \Gamma(\Lambda)$ es una sección integral del EDS \mathcal{I} . Además $\mathcal{E}(\lambda)$ denotará el conjunto de extremales para el problema $(\Lambda \xrightarrow{\pi} M, \lambda, \mathcal{I})$.

Buscaremos eliminar de alguna manera los vínculos impuestos sobre las secciones del problema por el EDS \mathcal{I} ; intuitivamente esperamos entonces que el número de funciones incógnita aumente cuando esto pueda llevarse a cabo.

4.3. Formalismo multisimpléctico mediante Lepage equivalencia

Definición 28 (Problema variacional Lepage equivalente). *El Lepage equivalente de un problema variacional $(\Lambda \xrightarrow{\pi} M, \lambda, \mathcal{I})$ es otro problema variacional*

$$(\tilde{\Lambda} \xrightarrow{\rho} M, \tilde{\lambda}, \{0\})$$

junto a una submersión sobreyectiva $\nu : \tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda$ tal que

- $\rho = \pi \circ \nu, \mathbf{y}$
- si $\gamma \in \Gamma(\tilde{\Lambda})$ es tal que $\nu \circ \gamma$ es una sección integral de \mathcal{I} , entonces

$$\gamma^* \tilde{\lambda} = (\nu \circ \gamma)^* \lambda.$$

Existe una forma canónica de construir algún problema Lepage equivalente para un problema variacional dado $(\Lambda \xrightarrow{\pi} M, \lambda, \mathcal{I})$, denominado *problema variacional Lepage equivalente canónico*, descrita en la subsección siguiente.

4.3.2.2. Problema Lepage equivalente canónico. La idea subyacente a los problemas Lepage equivalentes está relacionada con multiplicadores de Lagrange: Para un problema variacional tradicional $(\Lambda \rightarrow M, \lambda, \mathcal{I})$, puede modificarse la forma λ agregando los generadores $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ de \mathcal{I} por medio de multiplicadores $\{\lambda^1, \dots, \lambda^N\}$, elegidos de manera tal que, para cada $k = 1, \dots, N$, las expresiones $\lambda^k \wedge \alpha_k$ sean n -formas. Si los multiplicadores son nuevas variables, este procedimiento permite, al variar respecto de ellas, obtener los generadores $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ como parte del conjunto completo de ecuaciones de movimiento; las ecuaciones de movimiento también pueden recuperarse a través de este procedimiento. De hecho, puede demostrarse que, al eliminar las variables adicionales, las extremales del nuevo problema variacional obedecen las mismas ecuaciones que las extremales del problema original. Sin embargo, no es inmediato probar que cada extremal del problema original está debidamente representada entre las extremales del nuevo problema. Cualquiera sea el caso, lo primero que tenemos que asegurar es que la cantidad de generadores de \mathcal{I} sea finita; para ello se introduce la siguiente *hipótesis de rango constante*.

Definición 29. *Un EDS $\mathcal{I} \subset \Omega^\bullet(\Lambda)$ es de rango constante si y sólo si está diferencialmente generado por las secciones de un subfibrado graduado I en $\Lambda^\bullet(T^*\Lambda)$.*

Nota. Un subfibrado J en $\Lambda^\bullet(T^*\Lambda)$ es *graduado* si admite una descomposición $J = J_1 \oplus \dots \oplus J_P$ en término de subfibrados vectoriales J_1, \dots, J_P , de manera tal que $J_i \wedge J_k \subset J_{i+k}$.

Sea entonces \mathcal{I} diferencialmente generado por las secciones del subfibrado graduado $I \subset \Lambda^\bullet(T^*\Lambda)$. Definamos \mathcal{I}^{alg} como el ideal algebraico en $\Omega^\bullet(\Lambda)$ generado por $\Gamma(I)$, y

$$(\mathcal{I}^{\text{alg}})^l := \mathcal{I}^{\text{alg}} \cap \Omega^l(\Lambda).$$

El ideal $(\mathcal{I}^{\text{alg}})^l$ está compuesto por todos los elementos del álgebra exterior de Λ que son suma de formas generadoras de \mathcal{I} multiplicadas exteriormente con formas arbitrarias, de manera tal que el grado total sea l . Ahora necesitamos trabajar con el conjunto de formas que están en $\lambda + (\mathcal{I}^{\text{alg}})^n$, para una forma λ fija. Por lo tanto, para $\lambda \in \Omega^n(\Lambda)$, definimos el subfibrado afín $W^\lambda \subset \Lambda^n(T^*\Lambda)$ cuya fibra sobre $p \in \Lambda$ es

$$W^\lambda|_p := \left\{ \lambda|_p + \beta|_p : \beta \in (\mathcal{I}^{\text{alg}})^n \right\}.$$

Definición 30 (Problema Lepage equivalente canónico). *Bajo las consideraciones anteriores, el problema Lepage equivalente canónico es el triple $(W^\lambda \xrightarrow{\rho} M, \tilde{\Theta}, 0)$, donde la submersión sobreyectiva ν (ver definición 28) es la proyección canónica $\bar{\tau}_\Lambda^n : \Lambda^n(T^*\Lambda) \rightarrow \Lambda$ restringida a W^λ , $\rho := \pi \circ \nu$ y $\tilde{\Theta}$ es el pullback de la n -forma canónica*

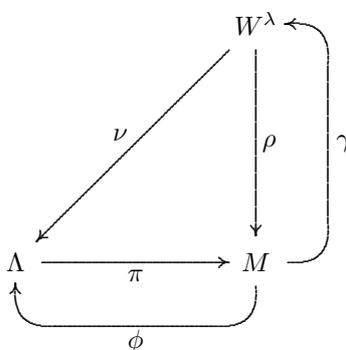
$$\Theta_n|_\alpha := \alpha \circ (\bar{\tau}_\Lambda^n)_*$$

a W^λ . La forma $\tilde{\Theta}$ es usualmente denominada forma de Cartan del problema variacional.

Para ejemplos de este procedimiento, véase sección 4.3.5. Puede demostrarse entonces que el problema Lepage equivalente canónico es un problema Lepage equivalente para $(\Lambda \xrightarrow{\pi} M, \lambda, \mathcal{I})$ de acuerdo a la definición previa, esto es, que el nombre está bien puesto.

Proposición 11. *El problema Lepage equivalente canónico es un problema Lepage equivalente en el sentido de la definición 28.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $W^\lambda \subset \bigwedge^n (T^*\Lambda)$ con la restricción de la proyección satisface la primera condición de la definición, dado que por construcción $\rho = \pi \circ \nu$. Ahora necesita verificarse la segunda condición. Para ello tomamos $\gamma \in \Gamma(W^\lambda)$ tal que $\nu \circ \gamma =: \phi \in \Gamma(\mathcal{I})$; tenemos entonces el diagrama siguiente



Utilizando un argumento similar al de la proposición 6, puede hallarse una sección

$$\mu \in \Gamma \left(\bigwedge^n (T^*\Lambda) \rightarrow \Lambda \right)$$

tal que $\gamma = \mu \circ \phi$. Por la propiedad universal de la forma canónica, se tiene que $\mu^* \Theta_n = \mu$ para toda μ , de donde

$$\gamma^* \tilde{\Theta} = (\mu \circ \phi)^* \tilde{\Theta} = \phi^* \mu.$$

Pero $\text{Im } \mu \subset W^\lambda$, por lo cual, teniendo en cuenta que $\phi \in \Gamma(\mathcal{I})$, debe valer $\phi^* \mu = \phi^* \lambda = (\nu \circ \gamma)^* \lambda$, que es lo que queríamos probar. \square

A continuación estudiaremos la manera en que se relacionan las extremales de un problema variacional y su Lepage-equivalente.

4.3.2.3. *Problemas Lepage equivalentes contravariantes y covariantes.* Vimos que no es automático que las extremales de un problema y su Lepage equivalente se correspondan; para capturar este hecho, introducimos la siguiente definición.

Definición 31 (Problemas Lepage equivalentes covariantes y contravariantes). *Decimos que un problema Lepage equivalente $(W^\lambda \xrightarrow{\rho} M, \tilde{\Theta}, \{0\})$ para el problema variacional $(\Lambda \xrightarrow{\pi} M, \lambda, \mathcal{I})$ es covariante si $\nu \circ \gamma \in \mathcal{E}(\lambda)$ para todo $\gamma \in \mathcal{E}(\tilde{\Theta})$, donde, como dijimos arriba, $\mathcal{E}(\cdot)$ denota el conjunto de extremales del problema variacional asociado a la forma correspondiente. Por el contrario, se lo denominará contravariante si cada extremal $\sigma \in \mathcal{E}(\lambda)$ es la proyección de alguna extremal en $\mathcal{E}(\tilde{\Theta})$ por ν . Un problema Lepage equivalente es bivariante si y sólo si es tanto covariante como contravariante.*

El problema Lepage equivalente canónico tiene además la propiedad de ser covariante.

Teorema 4. *El problema Lepage equivalente canónico es covariante.*

4.3. Formalismo multisimpléctico mediante Lepage equivalencia

DEMOSTRACIÓN. Sea γ una extremal del problema canónico y definamos, como antes, $\phi := \nu \circ \gamma$. Necesitamos demostrar que

1. $\phi^* \mathcal{I} = 0$, y
2. que ϕ es una extremal para el problema variacional $(\Lambda, \lambda, \mathcal{I})$.

Estamos trabajando bajo la hipótesis de rango constante; luego suponemos que existe un subfibrado graduado $I \subset \bigwedge^\bullet (T^* \Lambda)$ cuyas secciones generan \mathcal{I} . Sea $I^p := I \cap \bigwedge^p (T^* \Lambda)$; para $\beta \in \Gamma(I^n)$ tendremos que las traslaciones

$$W_m^\lambda \ni \alpha \mapsto \alpha + t\beta(m)$$

generan un flujo en W^λ con campo tangente (vertical) X_β , el cual satisface

$$X_\beta \lrcorner \mathbf{d}\tilde{\Theta} = \nu^* \beta.$$

Luego

$$\phi^* \beta = \gamma^* \nu^* \beta = \gamma^* (X_\beta \lrcorner \mathbf{d}\tilde{\Theta}).$$

Por otra parte, y dado que γ es extremal del problema $(W^\lambda, \tilde{\Theta}, \{0\})$, la proposición 8 nos asegurará que $\gamma^* (X_\beta \lrcorner \mathbf{d}\tilde{\Theta}) = 0$; entonces $\phi^* \beta = 0$. Si $\beta \in \Gamma(I^p)$ y $p > n$, entonces $\phi^* \beta = 0$ por ser $\dim M = n$; si, por otra parte, $p < n$, tomamos α una $(n-p)$ -forma arbitraria, y entonces $\beta \wedge \alpha \in \Gamma(I^n)$ debido a que \mathcal{I} es un ideal, de donde deducimos que $\phi^* \beta = 0$ en este caso también. Entonces ϕ es una sección integral de \mathcal{I} .

Resta probar que ϕ es una extremal del problema variacional $(\Lambda, \lambda, \mathcal{I})$. Consideremos para ello una curva $t \mapsto \phi_t \in \Gamma(\mathcal{I})$, junto con un levantamiento² $t \mapsto \gamma_t \in \Gamma(W^\lambda)$ tal que $\gamma_0 = \gamma$. Por ser problema Lepage equivalente, debe valer que

$$\int_K \phi_t^* \lambda = \int_K \gamma_t^* \tilde{\Theta}$$

para todo t y toda subvariedad $K \subset M$ compacta; teniendo en cuenta que γ es una extremal para el problema canónico, resulta que $\phi_0 = \phi$ es una extremal para el problema variacional original. \square

Esta demostración fue extraída de [Got91b]. La naturaleza contravariante de un problema Lepage equivalente es mucho más difícil de tratar. De hecho, es la noción de *transformada de Legendre* la que permite demostrar la contravariancia de muchos problemas mecánicos, como se muestra en [GN79] para lagrangianos *casi regulares*. El siguiente ejemplo indica este fenómeno en un contexto más reducido.

Ejemplo 4.3A: Contravariancia y transformada de Legendre. Tomemos el problema variacional no estándar $(TQ \times \mathbb{R} \rightarrow Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, L\mathbf{d}s, \mathcal{I}_{\text{cont}})$ ya estudiado en la sección 3.4. Como se mostrará en el ejemplo 4.3B más adelante, el Lepage equivalente canónico en este caso es equivalente al principio de Hamilton-Pontrjagin, sección 4.3.1. Establecer la contravariancia del problema canónico en este caso implica demostrar, para cada sección integral $\sigma : s \mapsto (s; q^i(s), v^i(s))$ del EDS de Euler-Lagrange

$$(12) \quad \begin{cases} \mathbf{d}q^i - v^i \mathbf{d}s \\ \mathbf{d}\bar{L}_{v^i} - \bar{L}_{q^i} \mathbf{d}s \end{cases}$$

que existe una colección de funciones $s \mapsto p^i(s)$ tales que

$$\Sigma : s \mapsto (s; q^i(s), v^i(s), p_i(s))$$

²Esto es consecuencia de la propiedad de levantamiento de homotopías de los fibrados.

es una sección integral del EDS de Hamilton-Cartan asociado al principio de Hamilton-Pontrjagin

$$(13) \quad \begin{cases} \mathbf{d}q^i - v^i \mathbf{d}s \\ \mathbf{d}p_i - \bar{L}_{q^i} \mathbf{d}s \\ (p_i - \bar{L}_{v^i}) \mathbf{d}s. \end{cases}$$

Así llegamos al resultado siguiente, que es una traducción del lema 15 al nuevo lenguaje.

Lema 16. El problema Lepage equivalente canónico asociado a

$$(TQ \times \mathbb{R} \rightarrow Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, L\mathbf{d}s, \mathcal{I}_{cont})$$

es contravariante.

DEMOSTRACIÓN. Se define

$$\Sigma : s \mapsto \left(s; q^i(s), v^i(s), \frac{\partial \bar{L}}{\partial v^i}(q(s), v(s)) \right),$$

donde $\sigma : s \mapsto (s; q^i(s), v^i(s))$ satisface el EDS (12), esto es

$$\begin{cases} \sigma^*(\mathbf{d}q^i - v^i \mathbf{d}s) = 0 \\ \sigma^*(\mathbf{d}\bar{L}_{v^i} - \bar{L}_{q^i} \mathbf{d}s) = 0. \end{cases}$$

Es inmediato verificar que en tal caso Σ es sección integral del EDS (13). \square

Vemos que, en este caso, la sección integral del problema canónico es el levantamiento de la sección integral del EDS de Euler-Lagrange a lo largo de la transformada de Legendre. Fórmulas similares se utilizan en la demostración de la contravariante del problema canónico en el contexto de teorías de campo, ver [Got91b]. \blacktriangle

A continuación mostraremos la construcción de otro tipo de problema Lepage equivalente, inspirada en la construcción canónica, que reduce el número de variables dependientes adicionales (i.e., el rango del fibrado $\tilde{\Lambda}$ sobre Λ) aunque manteniendo la covariancia. En general esta construcción tendrá menos chances de ser contravariante, aunque veremos con algunos ejemplos que se comporta razonablemente bien en algunos casos.

4.3.3. Otro problema Lepage equivalente canónico. El problema Lepage equivalente canónico está diseñado para lidiar con EDSs generales; en nuestro caso, las estructuras de prolonación vienen dadas usualmente por elementos en algún subfibrado particular, lo que ayuda a simplificar el formalismo. Esto es, definamos

$$Z_1(\Lambda) := \left\{ \alpha \in \dot{\bigwedge}(T^*\Lambda) : v_1 \lrcorner v_2 \lrcorner \alpha = 0 \quad \forall v_1, v_2 \in V\Lambda \right\}$$

(donde $V\Lambda$ es el fibrado vertical respecto de la estructura de fibrado $\Lambda \rightarrow M$) y supongamos que los generadores de \mathcal{I} están en $Z_1(\Lambda)$; como antes, tenemos un subfibrado $I^n \subset \bigwedge^n(T^*\Lambda)$. Sea $K^n \subset I^n$ el subfibrado cuyas fibras son los subespacios $K^n|_\gamma \subset I^n|_\gamma$ de formas de grado algebraico 1 en los generadores; definamos $\tilde{K}^n := K^n \cap Z_1(\Lambda)$. Dependiendo del EDS \mathcal{I} , esta definición puede dar lugar a un subfibrado afín \tilde{W}^λ en $\dot{\bigwedge}(T^*\Lambda)$ con fibras

$$\tilde{W}^\lambda|_\gamma := \left\{ \lambda|_\gamma + \psi : \psi \in \tilde{K}^n|_\gamma \right\}.$$

Como antes, la aplicación $\nu : \tilde{W}^\lambda \rightarrow \Lambda$ es la restricción de la proyección canónica $\bar{\tau}_\Lambda^\bullet : \dot{\bigwedge}(T^*\Lambda) \rightarrow \Lambda$. Las razones para esta elección serán evidentes más adelante: Los problemas variacionales asociados a formas en $Z_1(\Lambda)$ tienen una descripción bien comportada en términos de la dinámica sobre una variedad presimpléctica (en general de dimensión infinita, cf. prop. 5.5.4).

4.3. Formalismo multisimpléctico mediante Lepage equivalencia

Definamos el fibrado pullback $\pi^* (\bigwedge^\bullet (T^* M))$ sobre Λ ; entonces tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi^* \left(\bigwedge^\bullet (T^* M) \right) & \xrightarrow{f} & \bigwedge^\bullet (T^* M) \\ \downarrow \pi^*(\bar{\tau}_M^\bullet) & & \downarrow \bar{\tau}_M^\bullet \\ \Lambda & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

Sea $Z_0(\Lambda) \subset \bigwedge^\bullet (T^* \Lambda)$ el subfibrado de formas semibásicas sobre Λ , y defínase $Z_0^k(\Lambda) := Z_0(\Lambda) \cap \bigwedge^k (T^* \Lambda)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. El siguiente lema puede encontrarse en [Sau89] (cf. lema 3.3.5 allí).

Lema 17. *Existe una identificación natural entre los fibrados $\pi^* (\bigwedge^\bullet (T^* M))$ y $Z_0(\Lambda)$.*

Esta identificación nos provee con la aplicación f , que tiene la siguiente propiedad.

Proposición 12. *La aplicación submersiva de fibrados $f : Z_0(\Lambda) \rightarrow \bigwedge^\bullet (T^* M)$ verifica*

$$(14) \quad (f|_{Z_0^k(\Lambda)})^* \Theta_k^M = \Theta_k^\Lambda|_{Z_0^k(\Lambda)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

donde $\Theta_k^\Lambda \in \Omega^k (\bigwedge^k (T^* \Lambda))$ y $\Theta_k^M \in \Omega^k (\bigwedge^k (T^* M))$ son las k -formas canónicas sobre los espacios correspondientes.

Simplificaciones más importantes pueden realizarse si el EDS en cuestión admite un conjunto de generadores globales

$$I|_\gamma = \mathbb{R} \left\langle \alpha_1^1|_\gamma, \dots, \alpha_{k_1}^1|_\gamma, \alpha_1^2|_\gamma, \dots, \alpha_{k_2}^2|_\gamma, \dots, \alpha_1^p|_\gamma, \dots, \alpha_{k_p}^p|_\gamma \right\rangle, \quad \forall \gamma \in \Lambda,$$

donde $\langle \alpha_1^j, \dots, \alpha_{k_j}^j \rangle_{\text{diff}} = \mathcal{I}^{(j)} := \mathcal{I} \cap \Omega^j(\Lambda)$. Estamos suponiendo que aunque $\alpha_i^j \in Z_1(\Lambda)$ para todo $j = 1, \dots, p, i = 1, \dots, k_j$, ninguno de ellos está en $Z_0(\Lambda)$. Definamos ahora $\tilde{\Lambda} := \Lambda \times_M \bigoplus_{l=1}^p (\bigwedge^{m_l} T^* M)^{\oplus k_l}$ donde³ $m_l := n - l$; el lema anterior nos permite definir $F_\lambda : \tilde{W}^\lambda \rightarrow \tilde{\Lambda}$ via

$$\begin{aligned} F_\lambda : \lambda|_\gamma + \sum_{l=1}^p \sum_{i=1}^{k_l} \alpha_i^l|_\gamma \wedge \beta_{m_l}^i &\mapsto \\ &\mapsto \left(\gamma, f(\beta_{m_1}^1), \dots, f(\beta_{m_1}^{k_1}), \dots, f(\beta_{m_p}^1), \dots, f(\beta_{m_p}^{k_p}) \right). \end{aligned}$$

Sobre $\tilde{\Lambda}$ definimos además la n -forma

$$\tilde{\lambda} := \sum_{l=1}^p \left(\sum_{j=1}^{k_l} \alpha_j^l \wedge \beta_{m_l}^j \right) - \lambda;$$

Además asumiremos que la ecuación lineal

$$\sum_{l=1}^p \sum_{i=1}^{k_l} \alpha_i^l|_\gamma \wedge \beta_{m_l}^i = 0$$

admite sólo la solución trivial $\beta_{m_l}^j = 0$. En este contexto vale el resultado siguiente, que nos asegura que podemos utilizar $\tilde{\Lambda}$ como Lepage equivalente en todos los casos en los que el EDS de prolongación \mathcal{I} admita generadores globales; en cualquier caso, este lema nos provee con una descripción local para el problema Lepage equivalente canónico modificado.

³Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $p \leq \dim M = n$, porque estamos tratando con secciones integrales, que es un subconjunto de variedades integrales de dimensión n para \mathcal{I} .

Lema 18. Supóngase que I admite un conjunto de generadores con las propiedades detalladas más arriba; entonces la aplicación $F_\lambda : \tilde{W}^\lambda \rightarrow \tilde{\Lambda}$ es un difeomorfismo, y $F_\lambda^* \tilde{\lambda} = \tilde{\Theta}$.

Como mencionamos anteriormente, la diferencia principal entre nuestra construcción y la del problema Lepage equivalente canónico es que en nuestro caso el fibrado afín tiene rango menor. Esto tiene como ventaja que debemos tomar en cuenta una menor cantidad de variables dependientes, y como desventaja que aumentan las probabilidades de que el problema Lepage equivalente hallado no sea contravariante. Sin embargo será mostrado (con ejemplos) que esta prescripción funciona muy bien en casos importantes.

4.3.4. Lepage equivalente canónico para un problema no estándar. Apliquemos estas consideraciones a nuestro problema. Lo más importante a tener en cuenta es que, si un dado problema variacional no estándar admite un problema Lepage equivalente bivariante, entonces se lo puede considerar como un tipo de Principio de Hamilton-Pontrjagin; de hecho, probaremos más adelante que la construcción detallada aquí conduce en el caso de la mecánica clásica a este problema variacional (véase ejemplo 4.3B).

Enonces supongamos que tenemos el problema no estándar definidos por los siguientes datos

$$\begin{cases} \Lambda \rightarrow \Lambda_1 \rightarrow M, \\ \mathcal{I} \subset \Omega^\bullet(\Lambda), \\ S[\sigma] := \int_M (\mathbf{pr}\sigma)^*(\lambda). \end{cases}$$

Si \mathcal{I} en el problema no estándar dado satisface las condiciones adecuadas de regularidad (i.e. la hipótesis de "rango constante"), entonces el problema variacional $(\Lambda \rightarrow M, \mathcal{I}, \lambda)$ tendrá un problema Lepage equivalente canónico $(\tilde{W}^\lambda \rightarrow M, \{0\}, \tilde{\Theta})$, y podremos aplicar el esquema descrito arriba. Para llevar adelante esta tarea localmente, supongamos como arriba que las fibras del fibrado I sobre un abierto $U \subset \Lambda$ pueden escribirse como

$$I|_\gamma = \mathbb{R} \left\langle \alpha_1^1|_\gamma, \dots, \alpha_{k_1}^1|_\gamma, \alpha_1^2|_\gamma, \dots, \alpha_{k_2}^2|_\gamma, \dots, \alpha_1^p|_\gamma, \dots, \alpha_{k_p}^p|_\gamma \right\rangle, \quad \gamma \in U$$

de manera que la estructura de prolongación \mathcal{I} está diferencialmente generada por

$$\mathcal{I} = \left\langle \alpha_i^j : 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq k_i \right\rangle_{\text{diff}}$$

sobre U , donde $\left\langle \alpha_1^j, \dots, \alpha_{k_j}^j \right\rangle_{\text{diff}} = \mathcal{I}^{(j)} =: \mathcal{I} \cap \Omega^j(U)$. Entonces podemos definir para cada $1 \leq l \leq p$ los números $m_l := \dim(M) - l$ y la n -forma resulta

$$\tilde{\lambda} := \sum_{l=1}^p \left(\sum_{j=1}^{k_l} \alpha_j^l \wedge \beta_{m_l}^j \right) - \lambda$$

donde $(\beta_1^{m_1}, \dots, \beta_{k_1}^{m_1}, \dots, \beta_1^{m_p}, \dots, \beta_{k_p}^{m_p})$ denota secciones de algún fibrado $K^{m_l} \subset \Lambda^{m_l}(T^*\Lambda)$ complementario a $I^l := I \cap \Lambda^l(T^*\Lambda)$; los superíndices en estas secciones indican por lo tanto su grado (en el sentido de álgebra exterior). Se probará en los ejemplos a continuación que, en importantes casos, las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al problema no estándar definido por los datos

$$\begin{cases} \tilde{\Lambda} \xrightarrow{\text{id}} \tilde{\Lambda} \rightarrow M, \\ 0 \subset \Omega^\bullet(\tilde{\Lambda}), \\ S[\sigma] := \int_M (\mathbf{pr}\sigma)^*(\tilde{\lambda}), \end{cases}$$

4.3. Formalismo multisimpléctico mediante Lepage equivalencia

tienen una familia de soluciones isomorfa a la familia de soluciones del sistema anterior; esto es, en tales casos el problema Lepage equivalente así definido es contravariante. Por la proposición 8, las ecuaciones de Euler-Lagrange para una sección estacionaria $\sigma \in \Gamma(\tilde{\Lambda})$ son

$$(15) \quad \sigma^* (V \lrcorner \mathbf{d}\tilde{\lambda}) = 0, \quad \forall V \in \Gamma(V\tilde{\Lambda})$$

porque no hay condiciones para la admisibilidad de variaciones; estas secciones son secciones integrales para el EDS

$$(16) \quad \mathcal{I} := \left\langle V \lrcorner \mathbf{d}\tilde{\lambda} : V \in \Gamma(V\tilde{\Lambda}) \right\rangle_{\text{diff}}.$$

Llamaremos a este EDS el EDS DE HAMILTON-CARTAN (como en la proposición 8 para extremales de problemas variacionales usual).

4.3.5. Algunos ejemplos. Ilustraremos con algunos ejemplos cómo los problemas variacionales usuales encajan en nuestro esquema no estándar; además usaremos este esquema en ejemplos con descripción no estándar propiamente dicha.

Ejemplo 4.3B: Principio de Hamilton-Pontrjagin. Consideremos el problema variacional estándar de la mecánica clásica; este esquema puede encontrarse en [Gri98, HTT91]. El fibrado subyacente al problema Lepage equivalente de la mecánica clásica será

$$\dot{\bigwedge} (T^*(\mathbb{R} \times TQ)) = T^*(\mathbb{R} \times TQ) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times T^*TQ.$$

Para construir una versión local del problema Lepage equivalente canónico, fijamos un abierto coordenado $U' \subset Q$. Entonces sobre $U := \mathbb{R} \times TU'$ el EDS \mathcal{I} está generado por la colección de formas $\theta^i := \mathbf{d}q^i - \dot{q}^i \mathbf{d}t$; por lo tanto el fibrado $I \subset T^*(\mathbb{R} \times TQ)$ tendrá como fibras los subespacios

$$I|_{(t,q,\dot{q})} = \{a_i \theta^i : a_i \in \mathbb{R}^n \text{ and } i = 1, \dots, n\}.$$

Por consiguiente $I^1 = K^1$ (los elementos en I son de primer grado en los generadores); además

$$T^*(\mathbb{R} \times TQ) \subset Z_1(\mathbb{R} \times TQ)$$

lo cual implica que $\tilde{K}^1 = K^1 \cap Z_1(\mathbb{R} \times TQ) = I^1$. En término de nuestra descripción local obtenemos que $\tilde{W}^\lambda|_U = U \times \mathbb{R}^n$, donde

$$\tilde{W}^\lambda|_{(t,q,\dot{q})} = \{-L \mathbf{d}t + a_i \theta^i : a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\} \quad \forall (t, q^i, \dot{q}^i) \in U.$$

Las a 's en la fórmula anterior tienen un significado importante en relación a la variedad $\tilde{\Lambda} := \mathbb{R} \times (TQ \oplus T^*Q)$ con la 1-forma $\tilde{\lambda} \in \Omega^1(\tilde{\Lambda})$ definida mediante $\tilde{\lambda}|_{(t,v,\alpha)} := -[L(\alpha) - \alpha(v)] \mathbf{d}t + \omega^1|_{\alpha'}$, como muestra el lema siguiente.

Lema 19. La aplicación $P_L : \tilde{W}^\lambda \rightarrow \tilde{\Lambda}$ dada localmente por

$$P_L(-L \mathbf{d}t + a_i \theta^i) = \left(t, \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} \oplus a_i \mathbf{d}q^i \right)$$

es un difeomorfismo, y $P_L^* \tilde{\lambda} = \tilde{\Omega}$.

Podemos trabajar entonces directamente en el espacio $\tilde{\Lambda} = \mathbb{R} \times (TQ \oplus T^*Q)$, donde localmente

$$\tilde{\lambda} = p_i (\mathbf{d}q^i - \dot{q}^i \mathbf{d}t) - L \mathbf{d}t.$$

El problema Lepage equivalente canónico consiste en hallar secciones σ de $\mathbb{R} \times (TQ \oplus T^*Q)$ que son extremales para

$$S[\sigma] = \int_{\mathbb{R}} \sigma^* (p_i (\mathbf{d}q^i - \dot{q}^i \mathbf{d}t) - L \mathbf{d}t);$$

las ecuaciones para una sección estacionaria $\sigma : t \mapsto (q(t), \dot{q}(t), p(t))$ son por lo tanto

$$\begin{cases} \mathbf{d}q^i - \dot{q}^i dt = 0 \\ \mathbf{d}p_i - L_{q^i} dt = 0 \\ (p_i - L_{\dot{q}^i}) dt = 0. \end{cases}$$

O sea, hemos conseguido reformular el principio de Hamilton-Pontrjagin en este contexto. \blacktriangle

Ejemplo 4.3C: Teorías de campo de primer orden. Las teorías de campo de primer orden trabajan con secciones σ de un fibrado $\pi : F \rightarrow M$ con fibra típica V ; una densidad lagrangiana $L \in C^\infty(J^1(\pi))$ nos permite definir la acción

$$\begin{aligned} S[\sigma] &:= \int_M (L \circ \mathbf{pr}\sigma) \mathbf{d}x^0 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^3 \\ &= \int_M (L \circ j^1\sigma) \mathbf{d}x^0 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n \end{aligned}$$

de acuerdo a consideraciones hechas anteriormente. Sea $\mathcal{U} \subset F$ una carta coordinada adaptada, cuyas componentes son (x^k, u^β) ; entonces \mathcal{I} sobre $\hat{\mathcal{U}} := J^1(\pi)|\mathcal{U}$ tiene los generadores

$$\{\theta^\alpha := \mathbf{d}u^\alpha - u_k^\alpha \mathbf{d}x^k : \alpha = 1, \dots, \dim V\} \subset \Omega^1(\hat{\mathcal{U}}).$$

Por lo tanto el fibrado I admite sobre $\hat{\mathcal{U}}$ la siguiente descripción

$$\begin{aligned} I^n|\hat{\mathcal{U}} &= \{\beta_{\alpha_1}^{n-1} \wedge \theta^{\alpha_1} + \beta_{\alpha_1\alpha_2}^{n-2} \wedge \theta^{\alpha_1} \wedge \theta^{\alpha_2} + \cdots \\ &\quad \cdots + \beta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^0 \theta^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{\alpha_n} : \beta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{n-k} \in \Omega^{n-k}(\hat{\mathcal{U}}), k = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

y tendremos para el subfibrado K^n que

$$K^n|\hat{\mathcal{U}} = \{\beta_{\alpha_1}^{n-1} \wedge \theta^{\alpha_1} : \beta_{\alpha_1}^{n-1} \in \Omega^{n-1}(\hat{\mathcal{U}})\}.$$

También

$$Z_1(\hat{\mathcal{U}}) = \{Z_J \mathbf{d}x^J + Z_{\alpha,J} \mathbf{d}u^\alpha \wedge \mathbf{d}x^J : |J| \geq 1\}$$

dándonos la siguiente expresión local de \tilde{K}^n :

$$\tilde{K}^n|\hat{\mathcal{U}} = \{\tilde{\beta}_{\alpha_1}^{n-1} \wedge \theta^{\alpha_1} : \tilde{\beta}_{\alpha_1}^{n-1} \in Z_0^{n-1}(\hat{\mathcal{U}})\}.$$

Luego

$$\tilde{W}^\lambda|\hat{\mathcal{U}} = \{\lambda + \tilde{\beta}_{\alpha_1}^{n-1} \wedge \theta^{\alpha_1} : \tilde{\beta}_{\alpha_1}^{n-1} \in Z_0^{n-1}(\hat{\mathcal{U}})\};$$

via la aplicación F_λ podremos escribir

$$\tilde{W}^\lambda|\hat{\mathcal{U}} \simeq \hat{\mathcal{U}} \oplus \left[\bigwedge^{n-1} (T^*M) \right]^{\oplus \dim V},$$

y esta es la descripción local que adoptaremos. Por lo tanto podemos considerar la forma de Cartan sobre $\tilde{\Lambda} := \hat{\mathcal{U}} \oplus \mathcal{Z}$ con coordenadas locales $(x^k; u^\alpha, u_k^\alpha, m_\alpha)$; aquí hemos puesto $\mathcal{Z} := \left[\bigwedge^{n-1} (T^*M) \right]^{\oplus \dim V}$, denotando el conjunto de $\dim V$ formas de grado $n-1$ sobre M . Por consiguiente podremos escribir

$$\tilde{\lambda} := m_\alpha \wedge (\mathbf{d}u^\alpha - u_k^\alpha \mathbf{d}x^k) - L \mathbf{d}x^0 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{n-1}$$

4.3. Formalismo multisimpléctico mediante Lepage equivalencia

para la forma de Cartan. Si las variaciones son $(0; \delta u^\alpha, \delta u_k^\alpha, \delta m_\alpha)$ entonces las ecuaciones de Hamilton-Cartan resultan

$$(0; \delta u^\alpha, \delta u_k^\alpha, \delta m_\alpha) \lrcorner \tilde{\mathbf{d}}\tilde{\lambda} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} \delta u^\alpha + \frac{\partial L}{\partial u_k^\alpha} \delta u_k^\alpha \right) \mathbf{d}x^0 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{n-1} + \delta m_\alpha \wedge (\mathbf{d}u^\alpha - u_k^\alpha \mathbf{d}x^k) -$$

$$- \delta u^\alpha \mathbf{d}m_\alpha - m_\alpha \delta u_k^\alpha \mathbf{d}x^k = 0.$$

Ahora podemos definir la siguiente colección de $(n-1)$ -formas (Γ_α) via

$$\left(\frac{\partial L}{\partial u_k^\alpha} \delta u_k^\alpha \right) \mathbf{d}x^0 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{n-1} = \Gamma_\alpha \delta u_k^\alpha \mathbf{d}x^k, \quad \forall \delta u_k^\alpha,$$

de donde obtenemos que las soluciones

$$x^k \mapsto (x^k; u^\alpha(x), u_k^\alpha(x), m_\alpha(x))$$

deben verificar el EDS generado localmente por

$$\begin{cases} \Gamma_\alpha - m_\alpha = 0 \\ \mathbf{d}u^\alpha - u_k^\alpha \mathbf{d}x^k = 0 \\ \mathbf{d}m_\alpha - \left(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} \right) \mathbf{d}x^0 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{n-1} = 0. \end{cases}$$

Este sistema proyecta sobre la versión local de las ecuaciones de Euler-Lagrange para las teorías de campo de primer orden. El espacio de multimomentos es localmente $\hat{\mathcal{U}} \oplus \mathcal{Z}$. \blacktriangle

Ejemplo 4.3D: Electromagnetismo - Cont. La primera teoría no estándar canónica que consideraremos es el electromagnetismo, tal como lo hemos venido trabajando aquí; en este caso tenemos que $\tilde{\Lambda} := \bigwedge^2 (T^*M) \oplus \Lambda$ and $\tilde{\lambda} = p_1^* (*\Theta_2) \wedge (\mathbf{d}p_3^* \Theta_1 - p_2^* \Theta_2) + \lambda$, siendo p_i la proyección en el i -ésimo sumando de $\tilde{\Lambda}$ y λ es el pullback de la forma correspondiente sobre Λ . Como antes, supongamos que indicamos con $(P, F, A) \in \tilde{\Lambda}$ un elemento de este espacio de (multi)fases; entonces una sección $\sigma : x \mapsto (P(x), F(x), A(x))$ será una solución para las ecuaciones (15) sii

$$\begin{cases} F = \mathbf{d}A \\ P = *F \\ \mathbf{d}P = 0. \end{cases}$$

Por consiguiente el espacio de momentos coincide con el espacio de velocidades. \blacktriangle

Ejemplo 4.3E: Modelos sigma Poisson. Los modelos sigma Poisson [CF01, BS03, BZ05, Rub06] pueden analizarse desde este punto de vista. Éste es un sistema interesante, dado que su descripción usual (cf. las referencias citadas arriba) es no estándar, en el sentido de que trabaja con variaciones sin una estructura de prolongación. Concretamente, para una superficie Σ y una variedad de Poisson (M, π) tenemos la fibrición

$$\tilde{\Lambda} := \bigwedge^2 (T^*(M \times \Sigma)) \rightarrow \Sigma \times M \rightarrow \Sigma.$$

Entonces el abierto $\mathcal{S} := Z_1^2(\Sigma \times M) - Z_0^2(\Sigma \times M)$ es un subfibrado; llamemos $\nu : \mathcal{S} \rightarrow \Sigma$ la restricción de la proyección anterior. El problema variacional para el modelo Sigma Poisson es el triple $(\mathcal{S} \xrightarrow{\nu} \Sigma, 0, \tilde{\lambda})$, donde en las coordenadas locales $(\xi^\alpha, x^\mu, \eta_{\beta\nu})$ asociadas a un sistema de coordenadas sobre $M \times \Sigma$ via

$$\alpha \in \mathcal{S}|_{(x,\xi)} \mapsto -\eta_{\beta\nu} \mathbf{d}\xi^\beta \wedge \mathbf{d}x^\nu,$$

la 2-forma $\tilde{\lambda}$ viene dada por

$$\tilde{\lambda}\Big|_{(\xi, x, \eta)} := -\eta_{\beta\nu} \mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}\xi^\beta + \frac{1}{2} \pi^{\mu\nu} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} \mathbf{d}\xi^\alpha \wedge \mathbf{d}\xi^\beta.$$

La estructura de Poisson sobre M define una aplicación de fibrados $\Pi : T^*M \rightarrow TM$ y por lo tanto induce otra aplicación de fibrados (indicada por el mismo símbolo) $\Pi : T^*(M \times \Sigma) \rightarrow TM \times T^*\Sigma$; entonces la forma $\tilde{\lambda}$ puede escribirse en términos globales como

$$\tilde{\lambda}\Big|_\eta = \Theta_2|_\eta + \frac{1}{2} \langle \Pi(\eta) \frown \eta \rangle$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el “pairing” de un elemento de $TM \times T^*\Sigma$ con un elemento de $T^*(M \times \Sigma) \simeq T^*M \times T^*\Sigma$ y Θ_2 es la 2-forma canónica (restringida a S). Los generadores locales del EDS de Hamilton-Cartan EDS son en este caso

$$\begin{cases} \mathbf{d}x^\mu - \pi^{\mu\nu} \eta_{\alpha\nu} \mathbf{d}\xi^\alpha, \\ \mathbf{d}\eta_{\alpha\sigma} \wedge \mathbf{d}\xi^\alpha - \frac{1}{2} (\partial_\sigma \pi^{\mu\nu}) \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} \mathbf{d}\xi^\beta \wedge \mathbf{d}\xi^\alpha. \end{cases}$$

Por consiguiente estos sistemas están naturalmente formulados en un espacio multisimplectico. ▲

Problemas Lepage equivalentes y estructuras presimplécticas

EL objetivo de este capítulo es desarrollar una teoría hamiltoniana para cualquier problema variacional Lepage-equivalente de uno dado no estándar. El dato inicial consiste pues en un fibrado $\tilde{\Lambda} \xrightarrow{p} M$ sobre una variedad M , la cual se denominará *espacio-tiempo* debido a sus aplicaciones físicas, y una n -forma $\tilde{\lambda}$ sobre $\tilde{\Lambda}$ (donde $n = \dim M$); no es necesario (y de hecho, por lo general esto no ocurre) que $\tilde{\Lambda}$ sea un fibrado vectorial. Con estos datos armamos el problema variacional $(\tilde{\Lambda} \rightarrow M, \tilde{\lambda}, 0)$; veremos en las secciones siguientes cómo asociar a este problema variacional una variedad presimpléctica (en general, de dimensión infinita) con un hamiltoniano sobre ella. Entonces probamos que las soluciones del sistema dinámico definido así se corresponden con las extremales del problema variacional.

Aunque una discusión más completa acerca del método de Dirac y el algoritmo de Gotay, Nester y Hinds podrá encontrarse en un capítulo posterior, conviene desviarnos un poco de nuestro recorrido para describir someramente qué son los vínculos de Dirac y cuál es su lugar en el contexto de una teoría de campo.

5.1. Justificación de nuestra construcción

El problema a resolver es el de intentar una descripción en términos de geometría de dimensión finita de los vínculos de Dirac en teorías de campo. Estos vínculos aparecen cuando se intenta hallar una descripción canónica de algún problema variacional que involucre secciones de algún fibrado (que llamaremos *fibrado de campos*) sobre el espacio-tiempo [Dir65, HT92, Sun82]. Como se explicará en detalle en el capítulo 6, la construcción usual necesita una descomposición del fibrado de campos y del espacio-tiempo en *hojas de tiempo constante*; con ello y el lagrangiano de la teoría puede introducirse sobre el espacio de secciones a tiempo constante una estructura presimpléctica y una función hamiltoniana. La aplicación del así llamado *algoritmo de Gotay, Nester y Hinds* a este dato da origen a lo que denominaremos los *vínculos de Dirac* de la teoría, que resultan ser restricciones a las secciones en la hoja de tiempo elegida para la construcción. Un detalle que sin dudas llama la atención en esta descripción es el siguiente: ¿Cuál es la dependencia de los vínculos de Dirac de las elecciones hechas en su construcción? O sea, no se puede dejar de notar que hemos introducido una descomposición de todo el fibrado de campos en términos de hojas de tiempo constante, y además hemos tenido que elegir una de tales hojas. Las exigencias usuales de covariancia de la física subyacente limitan el alcance de dicha dependencia, y un buen entendimiento de la naturaleza de los vínculos no debe dejar de lado este aspecto.

Existe por otro lado en la literatura un enfoque al problema de definir una teoría hamiltoniana asociada a un problema variacional para una teoría de campos que se ajuste a los requisitos de covariancia: Son las teorías de *espacio de fases covariante* [CW87]. En ellas, y de acuerdo a una receta no muy clara, se construye una estructura presimpléctica sobre una hoja de tiempo constante, verificando que la misma es invariante por homotopías. Esto es, si se tienen un par de subvariedades correspondientes a hojas de tiempo constante respecto a dos descomposiciones del fibrado de campos que son además homotópicas entre sí, esta homotopía induce un difeomorfismo a nivel de secciones, y se prueba que la estructura presimpléctica es invariante por este difeomorfismo. Parte esencial de esta prueba necesita que se considere el fibrado tangente

a un espacio de secciones. Este hecho hace indispensable la reflexión acerca de estructuras diferenciables sobre espacios de dimensión infinita. Las definiciones usuales para estas estructuras requieren un espacio de Banach sobre el cual modelar el espacio en cuestión [Eel66, BSF98]; existen enfoques más generales [Mic78, KM97], que no consideraremos en el presente trabajo, dado que necesitamos utilizar el algoritmo de Gotay, Nester y Hinds tal como se presenta en [GNH78], que modela las variedades de dimensión infinita sobre espacios de Banach *reflexivos*. De cualquier manera, una vez que se tiene la estructura presimpléctica invariante por homotopías, es inmediato probar que la misma depende sólo de las clases de homotopía de subvariedades del fibrado de campos a dimensión espacial, y esto discretiza el conjunto de posibles estructuras presimplécticas: Si dos descomposiciones tienen sus hojas de tiempo constante en la misma clase, entonces no hay que preocuparse sobre la dependencia de la misma respecto de las elecciones necesarias para la construcción de los vínculos de Dirac.

Ejemplo 5.1A: Hojas de tiempo constante y estructura simpléctica. Consideremos un ejemplo en el que la estructura presimpléctica sobre el espacio de secciones de dos hojas de tiempo constante no homotópicas es necesariamente distinta. Para ello consideremos sobre $T^2 = S^1 \times S^1$ el fibrado lineal tal que en la dirección del primer círculo es una banda de Möbius y en la dirección del segundo un cilindro; si $M \xrightarrow{p_M} S^1$ es la banda de Möbius, estamos pensando en el fibrado $T^2 \times M \rightarrow T^2$ cuya proyección es $p := p_1 \times p_M$. Si el segundo círculo es el tiempo, las secciones de la hoja del fibrado a tiempo constante se corresponden con funciones sobre el círculo antiperiódicas. Si, en cambio, la variable tiempo se corresponde con el primer círculo, las secciones de alguna hoja a tiempo constante corresponde a secciones del cilindro, que son todas las funciones a valores reales sobre el círculo, esto es, funciones periódicas sobre el mismo. Estos espacios no son ni siquiera homeomorfos, por ejemplo, la topología compacta-abierta, dado que cualquier par de secciones antiperiódicas, si no son iguales, comparten un número impar de puntos, mientras que las periódicas pueden tener imágenes disjuntas. ▲

De cualquier forma las exigencias de covariancia tienen por lo general carácter local, por lo que cada una de las familias de formas presimplécticas asociadas a un problema variacional son estructuras válidas y su elección final dependerá de otro tipo de consideraciones. Lo destacable de la construcción del espacio de fases invariante es que provee el marco adecuado para una correcta definición de los vínculos de Dirac; la desventaja es que dicho espacio de fases es precisamente el espacio de extremales del problema variacional, en cuyo entendimiento juegan algún rol los mismos vínculos de Dirac. Para resolver este aparente círculo vicioso, apelaremos a la teoría de sistemas diferenciales exteriores descrita en el capítulo 2: El teorema de Cartan-Kähler nos permitirá establecer correspondencias entre las soluciones del problema mecánico y soluciones sobre una variedad de dimensión menor (estamos pensando específicamente en hojas de tiempo constante), que utilizaremos para describir el espacio de soluciones.

Ejemplo 5.1B: Ecuación de onda. Trataremos un caso clásico desde este punto de vista. Sobre las secciones del fibrado $F := J^1(K, \mathbb{R}) \times_K T^*K \rightarrow K$ ($K \subset \mathbb{R}^2$ la clausura de un abierto conexo y acotado) con coordenadas $(t, x, u; p, q; m, n)$, consideramos el problema variacional definido por el funcional

$$S[\sigma] := \int_K \sigma^* \lambda$$

donde $\lambda \in \Omega^2(F)$ viene dado por

$$\lambda|_{(t,x;p,q;m,n)} := (p^2 - q^2) dt \wedge dx + \alpha \wedge (du - p dt - q dx)$$

5.1. Justificación de nuestra construcción

y $\alpha := m\mathbf{d}t + n\mathbf{d}x$. Efectuando la variación respecto de todos los grados de libertad se obtiene el EDS

$$\begin{cases} \mathbf{d}u - p\mathbf{d}t - q\mathbf{d}x = 0, \\ \mathbf{d}m \wedge \mathbf{d}t + \mathbf{d}n \wedge \mathbf{d}x = 0, \\ (2p + n)\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x = 0, \\ (2q - m)\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x = 0, \end{cases}$$

sujeto a la condición de independencia $\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x \neq 0$. Esto conduce al siguiente EDS sobre $F' := J^1(K, \mathbb{R}) \rightarrow K$ dado por

$$\begin{cases} \mathbf{d}u - p\mathbf{d}t - q\mathbf{d}x = 0, \\ \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}t - \mathbf{d}p \wedge \mathbf{d}x = 0, \\ \mathbf{d}p \wedge \mathbf{d}t + \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}x = 0 \end{cases}$$

con la misma condición de independencia. Un subespacio 1-dimensional del tangente E dado por

$$E := \langle \partial_x + U_x \partial_u + P_x \partial_p + Q_x \partial_q \rangle$$

será 1-integral para este EDS si y sólo si $U_x = q$. El espacio polar asociado a un tal elemento integral estará entonces determinado por el sistema

$$\begin{cases} \mathbf{d}u - p\mathbf{d}t - q\mathbf{d}x = 0, \\ Q_x \mathbf{d}t - P_x \mathbf{d}x + \mathbf{d}p = 0, \\ P_x \mathbf{d}t + Q_x \mathbf{d}x - \mathbf{d}q = 0 \end{cases}$$

que tiene rango maximal; como esta condición se debe verificar en un abierto de $G_1(TF')$, resulta que E debe ser Kähler-regular. Finalmente, veamos que los elementos integrales de esta forma son también extensibles; definiendo

$$E^+ := E + \langle \partial_t + U_t \partial_u + P_t \partial_p + Q_t \partial_q \rangle$$

entonces E^+ será 2-integral si y sólo si

$$\begin{cases} U_t = p, \\ Q_x + P_t = 0, \\ Q_t - P_x = 0. \end{cases}$$

Por consiguiente todo elemento 1-integral será extensible, y estamos en posición para aplicar el teorema de Cartan-Kähler: Por cada subvariedad integral de dimensión 1 contenida en una hoja $t = k \in \mathbb{R}$ de F' pasa una única subvariedad integral de dimensión 2 (dado que en este caso $\dim H(E) = 2$, tenemos que $r = 0$ y no hay necesidad de imponer las condiciones adicionales provistas por R). Esto es, podemos describir las extremales del problema variacional original con curvas de la forma $x \mapsto (x, k, f(x); g(x), f'(x))$ para f, g funciones reales arbitrarias (siempre hay que admitir un grado suficiente de diferenciabilidad, sin olvidar la analiticidad indispensable por las hipótesis del teorema de Cartan-Kähler) o, de manera equivalente, mediante subvariedades 1-integrales del EDS original que viven en la hoja de tiempo constante $t = k$. ▲

La moraleja del ejemplo anterior debe quedar clara: Bajo condiciones de involutividad, uno puede reducir el estudio de las extremales de un problema variacional al estudio de las variedades integrales de un EDS asociado viviendo sobre una hoja (subvariedad de codimensión 1) del espacio en cuestión. Es más, el EDS asociado es simplemente el pullback del EDS determinado por las ecuaciones de movimiento a la hoja.

Ejemplo 5.1C: Espacio de fases invariante en mecánica clásica. Veamos un ejemplo extremo de la construcción del espacio de fases invariante: La mecánica clásica. En este caso uno trabaja sobre $(T^*Q \oplus TQ) \times I$ siendo Q el espacio de configuraciones e $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto

conteniendo 0 en su interior; en las coordenadas locales (q, v, p) la forma de Cartan que lo describe viene dada por $\lambda := Ldt + p_i(\mathbf{d}q^i - v^i dt) = -Hdt + p_i \mathbf{d}q^i$, donde $H := p_i v^i - L$. El EDS que caracteriza a sus extremales estará generado por (asumiendo la condición de independencia $dt \neq 0$ sobre ellas)

$$\begin{cases} \mathbf{d}p_i + H_{q^i} dt, \\ \mathbf{d}q^i - H_{p_i} dt, \\ H_{v^i} = 0. \end{cases}$$

Las dos primeras líneas equivalen a las ecuaciones de Hamilton; como se reducen a un sistema de ecuaciones ordinarias de primer orden, sus soluciones están en relación uno a uno con los datos iniciales. Luego existe una biyección entre el espacio de soluciones de las ecuaciones de las dos primeras líneas y, por ejemplo, $T^*Q \oplus TQ \times \{0\}$, la hoja de nuestro espacio correspondiente al instante $t = 0$. Sin embargo, nada a priori nos asegura que cada uno de los puntos de esta hoja satisfagan la tercera línea. Si, por ejemplo, el lagrangiano L es independiente de alguna de las velocidades, digamos v^k , el momento p_k correspondiente se anula, y la primera línea debe actuar en consecuencia, conduciendo a la condición algebraica $H_{q^k} = 0$. En la referencia [HTT91] se puede encontrar la manera de relacionar este hecho con la aparición de vínculos de Dirac en la teoría usual. Adelantemos, por lo pronto, que la noción de involutividad requiere que el EDS en cuestión no tenga condiciones algebraicas, por lo que se necesita restringir dicho EDS al conjunto de puntos que verifican tales condiciones; los vínculos de Dirac están asociados, por lo tanto, a la búsqueda de involutividad del EDS asociado a las ecuaciones de movimiento. ▲

Notemos entonces que la posibilidad de describir el espacio de soluciones mediante condiciones iniciales está ligada a ciertas propiedades estructurales de las mismas ecuaciones de movimiento. Queda planteada entonces la cuestión acerca de si es posible usar las ecuaciones de movimiento sólo para conocer el espacio de soluciones. La raíz del problema se puede vislumbrar sin dudas: En general cuando se mezclan condiciones diferenciales de diferente orden, no siempre alcanza con dar el dato inicial para determinar una solución. Como vimos anteriormente, un sistema de ecuaciones diferenciales (de diferente orden, y que involucre quizás condiciones algebraicas) que admite una reducción tal se dice que es *involutivo*. Luego si nos interesa trabajar con alguna descripción del espacio de soluciones mediante condiciones iniciales, es imprescindible tener en cuenta este aspecto de los sistemas de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 5.1D: Involución en sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. La noción de involutividad está pensada originalmente para sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, en donde el fenómeno es muy fácil de encontrar. Por ejemplo, consideremos el problema variacional sobre secciones del fibrado trivial $\mathbb{R}^3 \times K \rightarrow K$, K como en el ejemplo 5.1B, con coordenadas $(u, v, w; x, y) \mapsto (x, y)$ que consiste en extremar la acción asociada a la 2-forma

$$\lambda|_{(u,v,w;x,y)} := (\mathbf{d}u - A\mathbf{d}x - B\mathbf{d}y) \wedge (v\mathbf{d}y + w\mathbf{d}x)$$

siendo A, B funciones de x, y . Al efectuar la variación obtenemos que las funciones

$$u = u(x, y), v = v(x, y), w = w(x, y)$$

que caracterizan a una sección extremal deben satisfacer el sistema

$$\begin{cases} u_x - A = 0, \\ u_y - B = 0, \\ v_x - w_y = 0. \end{cases}$$

Supongamos que queremos caracterizar al espacio de soluciones de este sistema. Tomamos y constante, y resolvemos las ecuaciones que dependen de las derivadas en x ; luego tendremos

5.2. Espacio de secciones

que

$$u = a(y)$$

siendo $a(y)$ una primitiva (en la variable x) para $A(x, y)$. Reemplazando en la segunda ecuación resultará que

$$B = \frac{\partial a(y)}{\partial y}$$

o, derivando ambos miembros respecto de x

$$B_x - A_y = 0.$$

Entonces no habrá solución a menos que las funciones A y B satisfagan esta condición. ▲

Este último ejemplo caracteriza una nueva fuente de problemas a la hora de trabajar con las soluciones a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, las llamadas *condiciones de integrabilidad*. Desde el punto de vista de las ecuaciones, estas condiciones se originan en la existencia de relaciones de conmutatividad entre las derivadas parciales de orden mayor que 1 de cualquier solución; las condiciones de independencia, esto es, que las soluciones sean expresables localmente como funciones de variables en alguna subvariedad del espacio sobre el que vive el EDS, agravan la situación, dado que descartan direcciones en las que la involutividad del sistema podría estar asegurada.

La visión geométrica de las ecuaciones de movimiento provista por los EDSs codifica en la operación de *prolongación* la búsqueda de un EDS involutivo cuyas soluciones estén relacionadas con las de las ecuaciones con las que se trabaja. En cualquier caso, supongamos que el EDS asociado a las ecuaciones que describen a una extremal de un problema variacional es involutivo, y que sus elementos regulares¹ contienen al tangente a la hoja de tiempo elegida. Esto significará que si tomamos una solución del EDS que se obtiene del original al restringirlo a la hoja de tiempo constante elegida, entonces existirá al menos una extremal que corta a esta hoja en la solución elegida. Más aún, si el EDS es invariante por el campo transversal, uno puede utilizar a tales soluciones (y algún otro conjunto de funciones adicionales) para parametrizar el conjunto de extremales. En la filosofía del espacio de fases covariante, esto significa que puede tomarse el conjunto de secciones de la hoja de tiempo constante, junto a las restricciones impuestas por el EDS inducido sobre ella por las ecuaciones extremales, como espacio de fases del problema variacional.

5.2. Espacio de secciones

De la discusión previa se desprende la necesidad de poder manejar las condiciones iniciales de un problema variacional, como una manera de comprender su espacio de extremales. Cuando la dimensión del espacio base es 1, estas condiciones iniciales son puntos de una variedad de dimensión finita; en presencia de dimensiones mayores de la base, éstas son secciones de una hoja de tiempo constante en el fibrado de campos. Lo mejor que podemos esperar entonces es que el conjunto que componen dichas secciones tengan una estructura diferenciable, y esto nos coloca de lleno en el problema de determinar una estructura diferenciable conveniente sobre un espacio de funciones. Debemos advertir, sin embargo, que la discusión de este tipo de estructura no será tan detallada como quisiéramos, debido a que el tratamiento adecuado nos llevaría demasiado lejos de nuestro objetivo principal. De todas formas, debe tenerse en cuenta que estamos dejando de lado una buena cantidad de terreno virgen sin explorar por aquí.

¹La noción de regularidad de un EDS se detalla en la sección correspondiente; intuitivamente, es comparable a las que existen en ecuaciones ordinarias.

5.2.1. Consideraciones previas. El dato inicial con el que construiremos una teoría de vínculos à la Dirac es un problema variacional $(\Lambda, \lambda, \mathcal{I})$, compuesto, como ya hemos visto, por un fibrado $\Lambda \rightarrow M$, una n -forma λ sobre Λ (donde $n = \dim M$) y un sistema diferencial exterior $\mathcal{I} \subset \Omega^*(\Lambda)$, y el problema consiste en hallar las secciones Σ de Λ que extreman la acción

$$\Sigma \mapsto \int_M \Sigma^*(\lambda)$$

y que son integrales para \mathcal{I} . Como vimos en el capítulo 4, bajo ciertas condiciones de regularidad uno puede reformular este problema; o sea, puede construirse una aplicación $\nu: \tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda$ de fibrados sobre M sobreyectiva tal que las extremales del problema variacional sobre $\tilde{\Lambda}$ dado por el triple $(\tilde{\Lambda} \rightarrow M, \tilde{\lambda}, 0)$ están en correspondencia uno a uno a través de ν . A tal problema se lo denominó *Lepage equivalente*. Si a esto le agregamos un par de hipersuperficies $\tilde{\Lambda}_0 \subset \tilde{\Lambda}$, $M_0 \subset M$ tal que la proyección de $\tilde{\Lambda}$ restringida a $\tilde{\Lambda}_0$ da una estructura de fibrado de esta hipersuperficie sobre M_0 , y un campo vectorial ∂_0 definido sobre $\tilde{\Lambda}_0$ que sea complementario a ella, entonces el espacio $\Gamma(\tilde{\Lambda}_0)$ adquiere una estructura presimpléctica y una función hamiltoniana (por definiciones, ver más adelante). En cualquier caso, un resultado interesante que uno puede probar con estos datos es que las secciones de $\tilde{\Lambda}_0$ que satisfacen los vínculos de Dirac pueden ser descritas como secciones integrales de un sistema diferencial exterior sobre $\tilde{\Lambda}_0$. En este fugaz resumen uno puede distinguir ciertos hechos que deben examinarse con mayor detenimiento:

- La existencia de un problema Lepage equivalente asociado a uno dado. Esto tuvo una respuesta afirmativa (bajo hipótesis razonables) en el capítulo 4.
- La introducción de una estructura diferencial razonable sobre el espacio de secciones nos provee con una descripción muy útil para los vectores tangentes, lo cual permite precisar lo que entendemos por forma diferencial sobre el mismo espacio, y en particular con la noción de forma presimpléctica.
- Se supone también que el método de Dirac da origen a una subvariedad final de vínculos. Esto puede llegar a ser una sobresimplificación en algunos casos, en los que uno podría recurrir a otro tipo de descripción para este subconjunto (por ejemplo, en la dirección algebraica y analítica, como en [CE06].)
- La introducción del “slicing” para construir la forma presimpléctica implica la selección de ciertas banderas integrales en la verificación de involutividad al utilizar el teorema de Cartan y Kähler; esto da origen a una nueva noción de involutividad, en los que los elementos integrales regulares deben estar contenidos en algún subespacio de vectores tangentes, y ello implica modificar el criterio de Cartan para la involutividad de un EDS.

Además conviene tener presente que, en última instancia, los problemas variacionales con los que trabajaremos son de la forma $(\tilde{\Lambda} \rightarrow M, \tilde{\lambda}, 0)$, en donde la base M del fibrado subyacente es de la forma $M = \Sigma \times \mathbb{R}$, para Σ compacta y (posiblemente) con borde. Luego los espacios de secciones a considerar tendrán base compacta, lo cual simplifica razonablemente las precauciones a tomar en su construcción.

5.2.2. Estructura diferencial sobre un espacio de secciones. En esta sección tenemos por objetivo construir un tipo de estructura diferenciable sobre algún subconjunto razonable de secciones de un fibrado dado; dicha estructura debe ser modelada sobre un espacio de Banach reflexivo (para la correcta aplicación del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds), y debe contener como funciones diferenciables las funcionales del tipo

$$s \mapsto \int_{\Sigma} s^* \tilde{\lambda}.$$

5.2. Espacio de secciones

Como vimos en el ejemplo 3.1A, esta condición puede ser muy fuerte cuando Σ no es compacta; los trabajos de Michor y colaboradores [Mic78, KM97] apuntan a definir estructuras diferenciables sobre espacios de secciones de este tipo de fibrados, de manera de incluir a tales funcionales entre las funciones diferenciables. Aquí vamos a describir dos tipos de estructuras diferenciables discutidas en la literatura, una de ellas sobre las secciones con un número finito de derivadas continuas y otra definida sobre un espacio que, en rigor, no es exactamente un espacio de secciones, los así llamados *espacios de Sobolev*, pero que puede considerarse como tal a partir de un resultado importante, denominado *teorema de embebimiento*, que permite considerarlo un subconjunto de secciones con un número finito de derivadas continuas.

5.2.2.1. Espacios de Sobolev. Los requisitos para la aplicación del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds no se ajustan bien a la topología C^N , en tanto estos espacios no son en general reflexivos; esto nos lleva a considerar *espacios de Sobolev*, basándonos en las referencias [Mar74, Ada75]. Sea entonces $O \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y tal que ∂O es localmente el gráfico de una función de Lifschitz continua; el conjunto $C^N(\bar{O}, \mathbb{R}^m)$ indica el conjunto de funciones con las derivadas hasta orden N continuas². Para cada multiíndice $\alpha := (k_1, \dots, k_n)$, el operador $D^\alpha : C^N(\bar{O}, \mathbb{R}^m) \rightarrow C^{N-|\alpha|}(\bar{O}, \mathbb{R}^m)$ está definido mediante

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}.$$

Para $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \leq N$, $1 \leq p \leq \infty$ y $u \in C^N(\bar{O}, \mathbb{R}^q)$, se definen los números

$$\|u\|_{m,p} := \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}$$

$$\|u\|_{m,\infty} := \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty,$$

donde $\|\cdot\|_p$ denota la norma en el espacio $L^p(\bar{O}, \mathbb{R}^m)$. Entonces los espacios de Sobolev se definen como sigue.

Definición 32. Para cada $N \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, los espacios de Sobolev $H_{N,p}(O, \mathbb{R}^m)$ son el completamiento de $C^N(\bar{O}, \mathbb{R}^m)$ respecto de la norma $\|\cdot\|_{N,p}$.

La importancia de estos espacios residen en el lema siguiente [Ada75], ver también [ABM05].

Lema 20. Para cualquier N y $1 < p < \infty$, los espacios $H_{N,p}$ pueden describirse de la manera siguiente

$$H_{N,p}(O, \mathbb{R}^m) = \{f \in L^p(O, \mathbb{R}^m) : D^\alpha f \in L^p(O, \mathbb{R}^m) \text{ para } 1 \leq |\alpha| \leq N\}$$

entendiendo la derivada en el sentido débil. Con la norma definida por $\|\cdot\|_{N,p}$ son espacios de Banach reflexivos. Además, si $p = 2$, $H_{N,2}(O, \mathbb{R}^m)$ es un espacio de Hilbert con el producto

$$(u, v) := \sum_{1 \leq |\alpha| \leq N} (D^\alpha u, D^\alpha v),$$

donde (\cdot, \cdot) sobre funciones denota el producto L^2 .

Para enunciar los hechos que nos interesan, fijemos la notación siguiente. Sea O abierto y acotado en \mathbb{R}^n ; luego su clausura \bar{O} es un compacto. También vamos a suponer que el borde de O es bien comportado; el requisito técnico (para abiertos acotados) es que el borde pueda representarse localmente como el gráfico de una función Lipschitz continua. Denotemos entonces con el símbolo $C_B^j(O, \mathbb{R}^m)$ al conjunto de funciones con j derivadas continuas y acotadas sobre O , con la norma

$$\|u; C_B^j(O, \mathbb{R}^m)\| := \max_{0 \leq \alpha \leq j} \sup_{x \in O} \|D^\alpha u(x)\|$$

²Esto es, que existen y son continuas en algún abierto O' que contiene a \bar{O} .

Además consideraremos el subespacio cerrado $C^j(\bar{O}, \mathbb{R}^m) \subset C_B^j(O, \mathbb{R}^m)$ compuesto de las funciones que admiten j derivadas acotadas y uniformemente continuas sobre O , con la norma $\|\cdot\|; C^j(\bar{O}, \mathbb{R}^m)$ heredada del espacio ambiente. Como cualquier función acotada y uniformemente continua sobre un abierto acotado O tiene una única extensión continua y acotada a la clausura \bar{O} , resulta que la notación adoptada para el conjunto $C^j(\bar{O}, \mathbb{R}^m)$ no tiene ambigüedades; entonces podemos decir que $C^j(\bar{O}, \mathbb{R}^m)$ es el conjunto de funciones j veces diferenciable con continuidad sobre algún abierto V que contiene al disco cerrado \bar{O} .

Intuitivamente uno sabe que, manteniendo control sobre determinados órdenes de suavidad, las funciones obtenidas como sucesión de funciones con ese orden de suavidad deben ser derivables con continuidad en algún orden; suponiendo que³ $p > 1$ tenemos el teorema siguiente [Ada75, Mar74, ABM05], que es una expresión de tal intuición.

Teorema 5. *Si $Mp > n$, entonces tenemos el embebimiento*

$$i : H_{M+j,p}(O, \mathbb{R}^m) \rightarrow C^j(\bar{O}, \mathbb{R}^m).$$

Los embebimientos $H_{M,p}(O, \mathbb{R}^m) \rightarrow C^j(\bar{O}, \mathbb{R}^m)$ significan que, para cada $[u] \in H_{M,p}(O, \mathbb{R}^m)$, existe $u_0 \in [u] \cap C^j(\bar{O}, \mathbb{R}^m)$ tal que

$$(17) \quad \|u_0; C^j(\bar{O}, \mathbb{R}^m)\| \leq K \|u\|_{M,p}$$

para algún número positivo K independiente de u .

Lema 21. *El embebimiento $i : H_{M,p}(O, \mathbb{R}^m) \rightarrow C^j(\bar{O}, \mathbb{R}^m)$ es lineal y continuo.*

DEMOSTRACIÓN. Si $[u], [v] \in H_{M,p}(O, \mathbb{R}^m)$, entonces

$$i([u] + [v]) = i([u + v]) = (u + v)_0,$$

con $(u + v)_0 \in [u + v] \cap C^j(\bar{O}, \mathbb{R}^m)$; pero si $u_0 \in [u] \cap C^j(\bar{O}, \mathbb{R}^m)$, $v_0 \in [v] \cap C^j(\bar{O}, \mathbb{R}^m)$, será

$$[u_0 + v_0] = [u_0] + [v_0] = [u] + [v] = [u + v],$$

con $u_0 + v_0 \in C^j(\bar{O}, \mathbb{R}^m)$, por lo cual (y dado que dos funciones diferenciables sobre un abierto conexo que difieren en un conjunto de medida nula son iguales) $(u + v)_0 = u_0 + v_0$, de donde $i(u + v) = u_0 + v_0 = i(u) + i(v)$, y esto prueba la linealidad. La condición (17) equivale a decir que el embebimiento es acotado, y por lo tanto continuo. \square

Esto quiere decir que si pedimos suficiente regularidad, nuestros espacios, pese a ser completamente de un espacio de funciones suaves, contienen funciones derivables hasta algún orden. Más específicamente, cada uno de los puntos de los espacios de Sobolev considerados son clases de equivalencias de funciones, las cuales difieren unas de otras en un conjunto de medida nula; el teorema de embebimiento nos asegura que dentro de cada una de estas clases $[u]$ existe una función u^* continuamente derivable hasta algún orden, y que la aplicación $[u] \mapsto u^*$ es continua si sobre $C^l(\bar{O}, \mathbb{R}^m)$ se considera la norma del supremo hasta la derivada l -ésima. Esto en particular nos permite definir un operador lineal $\text{rest} : H_{N,2}(O, \mathbb{R}^m) \rightarrow C^l(\partial O, \mathbb{R}^m)$ que resulta además acotado, interpretando aquí $C^l(\partial O, \mathbb{R}^m)$ como el conjunto de funciones \mathbb{R}^m -valuadas sobre ∂O con extensión continuamente diferenciable hasta un orden l a algún abierto \hat{O} que contiene a ∂O .

³El caso $p = 1$ es un poco menos regular, y no es de nuestro interés inmediato.

5.3. Estructuras de variedad sobre espacios de secciones

Esta sección es una especie de excursión cultural, en la medida que los temas aquí tratados recibirán una atención superficial. La profundidad de estos asuntos nos obliga a ello; sin dudas, queda aquí terreno virgen a explorar. De la extensa literatura existente en la que se trabaja con variedades de aplicaciones, sólo tomaremos dos fuentes: [Mar74] y [BSF98]. Queda por estudiar la perspectiva *conveniente* de Michor y colaboradores [Mic78, KM97].

Explicaremos brevemente cuál es el procedimiento para definir una estructura diferenciable sobre el espacio de secciones globales de un fibrado. Primero se introduce una estructura de espacio de Banach sobre el espacio de secciones de un fibrado vectorial; acto seguido se proveen condiciones suficientes para que la imagen de cualquier sección en el fibrado de estudio admita entornos tubulares. Estos entornos tubulares constituyen el modelo local para el espacio de secciones del fibrado en cuestión; el isomorfismo local del entorno con un fibrado vectorial define una carta sobre todas las secciones cuyas imágenes están contenidas en el entorno tubular. Finalmente, el *lema* ω permite demostrar la compatibilidad de las cartas así introducidas.

5.3.1. Variedades modeladas sobre espacios de Banach. Antes de introducir las estructuras de variedad con las que vamos a trabajar en esta tesis, debemos referirnos brevemente a la geometría diferencial de espacios de dimensión infinita. Como es natural, la definición fundamental es equivalente al caso de dimensión finita: Uno espera que el espacio en cuestión sea localmente homeomorfo a un espacio vectorial, aunque en este caso se abandona la condición de finitud de dimensión. Esto tiene consecuencias profundas, en tanto no existe un único tipo de topología sobre tales espacios. La utilidad de trabajar con espacios de Banach (o, más generalmente, con espacios de Fréchet) proviene de que sobre ellos se puede definir lo que se entiende por *funciones diferenciables*.

Definición 33. Sean E, F espacios de Banach y $f : U \subset E \rightarrow F$ una función de un abierto U en F . Diremos que f es diferenciable en el sentido de Fréchet en el punto $x_0 \in U$ si existe una transformación lineal $Df(x_0) : E \rightarrow F$ continua tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de manera que

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)\|_F < \epsilon \|h\|_E$$

para todo $h \in E$ tal que $\|h\|_E < \delta$.

Si el conjunto $L(E, F)$ de todas las transformaciones continuas de E en F se viste con la norma

$$\|T\|_{L(E, F)} := \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F,$$

entonces uno puede utilizar inducción para definir las derivadas superiores de una función.

Por lo tanto se busca trabajar con espacios vectoriales topológicos en los que sea posible derivar funciones: De esta forma se llega a variedades modeladas sobre espacios localmente convexos [Kel74]. Los espacios de funciones diferenciables entre variedades (o, más generalmente, de secciones diferenciables de algún fibrado) forman variedades naturalmente modeladas sobre espacios de Fréchet [Mic78, Eel66]; si sólo admiten un número finito de derivadas continuas, la estructura de variedad sobre dichos espacios está modelada sobre espacios de Banach.

5.3.2. Espacio de secciones de fibrados vectoriales. Para definir la estructura de variedad sobre el conjunto de secciones (con alguna regularidad) de un fibrado $\pi : \Lambda \rightarrow M$, necesitamos en principio un modelo al cual dicho conjunto va a ser localmente homeomorfo. Para ello recurrimos al siguiente razonamiento heurístico: Si $\sigma_t : M \rightarrow \Lambda$ es una familia monoparamétrica de secciones, entonces puede definirse una sección $\dot{\sigma}_0 : M \rightarrow \sigma_0^*(V\Lambda)$ (donde $V\Lambda$ es el fibrado de vectores verticales sobre Λ) mediante la fórmula

$$x \in M \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [\sigma_t(x)] \in V_{\sigma_0}\Lambda \subset T_{\sigma_0}\Lambda$$

en caso de que tal derivada exista. Luego los vectores tangentes al espacio de secciones serán secciones del fibrado vectorial $\sigma^*(V\Lambda) \rightarrow M$, para cada sección σ . Por consiguiente se hace indispensable estudiar los espacios de secciones de fibrados *vectoriales*. Como es natural esperarse de esta discusión, seremos capaces de definir sobre tales espacios una estructura de espacio de Banach, y la geometría de los fibrados subyacentes nos proveerá las cartas buscadas.

5.3.2.1. Espacios de Sobolev de secciones de un fibrado vectorial. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial de rango m sobre una variedad compacta M (y quizás con borde); existe una manera de introducir una norma de Sobolev sobre secciones de tales fibrados vectoriales [Eel66, Weh04]. Para ello se introduce un producto interno sobre las fibras $(\cdot, \cdot)_E : E \times E \rightarrow C^\infty(M)$ sobre E , una conexión $\nabla^E : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$ y una métrica riemanniana $(\cdot, \cdot)_M$ sobre la base M (el símbolo $\Gamma(E)$ denotará el conjunto de secciones suaves de E , para cualquier fibrado vectorial E); si $\nabla^M : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes TM)$ denota la conexión de Levi-Civita, la fórmula

$$\begin{aligned} \nabla\alpha(X_0, \dots, X_l) := & \nabla_{X_0}^E(\alpha(X_1, \dots, X_l)) - \alpha(\nabla_{X_0}^M X_1, \dots, X_l) - \\ & - \dots - \alpha(X_1, \dots, \nabla_{X_0}^M X_l) \end{aligned}$$

para todo $X_0, \dots, X_l \in \mathfrak{X}(M)$ define una aplicación

$$\nabla : \Gamma\left(\bigotimes^l T^*M \otimes E\right) \rightarrow \Gamma\left(\bigotimes^{l+1} T^*M \otimes E\right).$$

Indiquemos simplemente por (\cdot, \cdot) la extensión de las métricas anteriores al fibrado vectorial $\bigotimes^l T^*M \otimes E$ para todo l ; luego si

$$|\cdot| : \Gamma\left(\bigotimes^l T^*M \otimes E\right) \rightarrow C^\infty(M)$$

denota la norma $|s| := (s, s)^{1/2}$, definimos

$$\|s\|_p := \left(\int_M |s|^p\right)^{1/p}$$

y la $H_{k,p}(E)$ -norma de $s \in \Gamma(E)$ viene dada por

$$\|s\|_{H_{k,p}} := \left(\sum_{i=1}^k \int_M |\nabla^i s|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^k \|\nabla^i s\|_p^p\right)^{1/p}.$$

Definición 34. El espacio de Sobolev $H_{k,p}(E)$ de secciones del fibrado vectorial E es el completamiento de $\Gamma(E)$ respecto de la norma $\|\cdot\|_{k,p}$.

Una consecuencia inmediata de esta definición es la siguiente.

Proposición 13. $H_{k,p}(E)$ es un espacio de Banach.

Sea $M = \bigcup_{i=1}^N U_i$ un cubrimiento de M por abiertos tales que, para cada $i = 1, \dots, N$, existe $V_i \subset \mathbb{R}^n$ y $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow V_i \times \mathbb{R}^m$ tal que Φ_i es un isomorfismo de fibrados vectoriales (esto es, $\{U_i\}$ es un cubrimiento de M por abiertos trivializantes). Introduzcamos sobre $\Gamma(E)$ la norma

$$\|s\|'_{H_{k,p}} := \sum_{i=1}^N \|(\Phi_i)_*(s)\|_{H_{k,p}(V_i, \mathbb{R}^m)}$$

y completemos dicho espacio respecto de esta norma; llamemos momentáneamente $H'_{k,p}(E)$ al espacio de Banach así definido.

Proposición 14. $H'_{k,p}(E) = H_{k,p}(E)$, esto es, las normas introducidas son equivalentes.

5.3. Estructuras de variedad sobre espacios de secciones

En particular, la última descripción de la norma sobre $H_{k,p}(E)$ no dependerá de la trivialización elegida. En este contexto también tenemos un teorema de embebimiento.

Teorema 6. *Sea $lp > n$. Existe una aplicación lineal, continua e inyectiva*

$$i : H_{k+l,p}(E) \hookrightarrow \Gamma^k(E)$$

para todo $p > 1$, donde $\Gamma^k(E)$ es el espacio de secciones con k derivadas continuas, vestido con la topología C^k de Whitney. De hecho, bajo las hipótesis actuales, esta aplicación es compacta.

Nota 2. *Debido a la compactidad de M , la topología C^k de Whitney coincide con la inducida por la norma*

$$\|s\|_{H_{k,\infty}} := \sup_{j \leq k} \left[\sup_{x \in M} |\nabla^j s(x)| \right].$$

5.3.3. Entornos tubulares y cartas. Sea ahora $\pi : \Lambda \rightarrow M$ un fibrado cualquiera, no necesariamente vectorial. Para construir la estructura diferenciable se procede como sigue: Para cada $s \in \Gamma(\Lambda)$ seleccionamos un **entorno tubular** para su imagen $s(M)$ [Lan99, Lan02], que consta de un fibrado vectorial $\epsilon : F \rightarrow M$ sobre M , un entorno abierto $V \subset F$ para la sección nula $0_M \in \Gamma(F)$, un entorno abierto N_s para $s(M) \subset \Lambda$ y un difeomorfismo j de V en N_s que preserva la fibra, cubre a la identidad en M y tal que

$$j \circ 0_M = s.$$

En términos de diagramas

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \supset N_s & \xleftarrow{j} & V \subset F \\ \pi|_{N_s} \searrow & & \epsilon|_V \searrow \\ & M & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} N_s & \xleftarrow{j} & V \\ s \searrow & & \nearrow 0_M \\ & M & \end{array}$$

Esta información nos permitirá definir una estructura diferenciable sobre ciertos conjuntos asociados a espacios de secciones de Λ .

5.3.3.1. Cartas sobre $\Gamma^k(\Lambda)$. Los espacios de secciones de fibrados vectoriales considerados serán vestidos con la topología C^k de Whitney, para algún $k \in \mathbb{N}$; la estructura diferenciable resulta de la siguiente definición.

Definición 35. *El par $(\Gamma^k(N_s), j_*^{-1})$ se denomina una carta alrededor de $s \in \Gamma^k(\Lambda)$.*

De acuerdo a esto, el modelo para nuestra variedad es el espacio vectorial topológico

$$\Gamma^k(0_M^*(VF));$$

esto no deja de ser un inconveniente, dado que el fibrado F depende esencialmente de la sección s , por lo cual diferentes puntos tendrán diferentes modelos a su alrededor.

Ejemplo 5.3A: Fibrados no equivalentes alrededor de distintas secciones. Sea L el fibrado lineal sobre el toro $T = S^1 \times S^1$ que es trivial en la dirección de uno de los círculos y una banda de Möbius en la dirección del otro (cf. ejemplo 5.1A). Sean $0_T^1, 0_T^2$ las secciones nulas de L restringidas a $S^1 \times \{e\}$ y $\{e\} \times S^1$ respectivamente. Por consiguiente uno tiene un par de secciones s_1, s_2 del fibrado trivial $S^1 \times L$ definidas mediante

$$\begin{aligned} s_1 : \theta \in S^1 &\mapsto (\theta, e) \xrightarrow{0_M} 0_M(\theta, e) \in 0_M^1 \\ s_2 : \theta \in S^1 &\mapsto (e, \theta) \xrightarrow{0_M} 0_M(e, \theta) \in 0_M^2. \end{aligned}$$

Luego cualquier entorno tubular de $s_1(S^1)$ es isomorfo a un fibrado vectorial no trivial sobre S^1 (contiene una banda de Möbius), mientras que los entornos tubulares de $s_2(S^1)$ serán todos fibrados vectoriales triviales sobre S^1 . ▲

5.3.3.2. *Cartas sobre $H_{k,p}(\Lambda)$.* Utilizaremos entornos tubulares para inducir cartas también sobre $H_{k,p}(\Lambda)$. Para ello se utiliza el teorema de embebimiento, de manera de considerar $H_{k,p}(\Lambda)$ como un subconjunto de $\Gamma^l(\Lambda)$ para todo l tal que $(k-l)p - n > 0$. Luego si $s \in H_{k,p}(\Lambda)$, tomamos $\check{s} := i(s) \in \Gamma^l(\Lambda)$, y definimos $\check{N}_s := i^{-1}(N_{\check{s}})$; además se define $\check{\phi}_s(t) := j^{-1} \circ i(t)$ para todo $t \in \check{N}_s$.

Definición 36. El par $(\check{\phi}_s, \check{N}_s)$ se denomina carta alrededor de $s \in H_{k,p}(\Lambda)$.

Notemos en particular que, visto desde este punto de vista, $H_{k,p}(\Lambda)$ puede modelarse sobre espacios de Banach de la forma $H_{l,k}(N_{\check{s}})$, para cualquier l tal que $(k-l)p - n > 0$.

5.3.4. Compatibilidad y lema ω . Aquí, y con el objetivo de simplificar notación, utilizaremos el símbolo $\Gamma(\cdot)$ para indicar un espacio de secciones con un número finito de derivadas. De cualquier manera, la aplicación tangente Tj restringida convenientemente establece un isomorfismo de fibrados vectoriales entre $0_M^*(VF)$ y $s^*(V\Lambda)$, de donde deducimos que $(Tj)_*$ identifica el modelo local para $\Gamma(\Lambda)$ con $\Gamma(s^*(V\Lambda))$ en cada $s \in \Gamma(\Lambda)$. Esto podría haberse hecho explícitamente si se hubiesen definido cartas a partir de la aplicación exponencial asociada a alguna métrica sobre el espacio total Λ : Esto es, para cada $V \in \Gamma(s^*V\Lambda)$ tenemos una sección $s_V := \exp \circ V$.

En detalle, si $t \in \Gamma(N_s)$, entonces la función coordenada $\phi_s := (j_*)^{-1}$ induce una sección de V , esto es

$$\phi_s(t) := j^{-1} \circ t \in \Gamma(V).$$

La inversa de ϕ_s , que denotaremos por ψ_s , estará dada por

$$\psi_s(f) := j \circ f$$

para toda $f \in \Gamma(V)$. Si s' es otra sección tal que $\Gamma(N_s) \cap \Gamma(N_{s'}) \neq \emptyset$, entonces $s, s' \in \Gamma(N_s \cap N_{s'})$; luego $N_s \cap N_{s'}$ resulta entorno tubular para las imágenes de ambas secciones, y existirán un par de entornos tubulares V, V' de la sección nula del fibrado vectorial auxiliar V y aplicaciones $j : N_s \cap N_{s'} \rightarrow V \subset F, j' : N_s \cap N_{s'} \rightarrow V' \subset F$ tales que $j \circ 0_M = s, j' \circ 0_M = s'$. Las cartas introducidas serán C^∞ -compatibles si las aplicaciones $\phi_s \circ \psi_{s'} : \Gamma(V') \rightarrow \Gamma(V)$ y $\phi_{s'} \circ \psi_s : \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(V')$ son ambas infinitamente diferenciables en el sentido de la definición 33. Ésto es consecuencia de un lema importante, conocido como el *lema ω* , que es válido tanto cuando los espacios de secciones de los fibrados vectoriales involucrados se consideran espacios de Sobolev [Mar74] como cuando se utilizan las normas de supremo [BSF98].

Lema 22. Si V_1, V_2 son fibrados vectoriales sobre la variedad M (todas de dimensión finita, y M compacto), y se considera sobre $\Gamma(V_1), \Gamma(V_2)$ la estructura de espacio de Banach inducida como espacios de Sobolev, o via la norma del supremo sobre las derivadas sucesivas, entonces la aplicación $f_* : \Gamma(V_1) \rightarrow \Gamma(V_2)$ inducida mediante

$$f_* : s \mapsto f \circ s$$

por la aplicación de fibrados $f : V_1 \rightarrow V_2$ que cubre a la identidad en M , es diferenciable con derivada continua.

De hecho, se puede decir aún más [Mic78].

Corolario 3. En las condiciones del lema anterior resulta la siguiente expresión

$$D(f_*)(s) = \mathbb{F}f \circ s$$

para la derivada de la aplicación inducida f_* , siendo

$$\mathbb{F}f(v) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [f(tv)] \in V_{f(v)}(V_2)$$

la derivada de f a lo largo de la fibra x en la dirección de $v \in (V_1)_x$.

5.4. Un ejemplo de espacio de secciones

Luego como

$$\begin{aligned}\phi_s \circ \psi_{s'}(f) &= [j \circ (j')^{-1}] \circ f \\ \phi_{s'} \circ \psi_s(f) &= (j' \circ j^{-1}) \circ f\end{aligned}$$

resulta la compatibilidad buscada para las cartas elegidas.

5.3.4.1. Submersiones y subvariedades. Para definir apropiadamente el concepto de subvariedad de una variedad modelada sobre un espacio de Banach de dimensión infinita, hay que tener presente que no todo subespacio cerrado de un espacio de Banach admite un complemento cerrado. Por esta razón las definiciones difieren un poco del caso de dimensión finita. Entonces adoptaremos la siguiente definición [MRA02, Mar74].

Definición 37. Sea M una variedad modelada sobre un espacio de Banach V . Un subconjunto $S \subset M$ se dice subvariedad de M modelada sobre W si y sólo si

1. $W \subset V$ es un subespacio cerrado,
2. existe $W' \subset V$ subespacio cerrado tal que $V = W \oplus W'$, y
3. para cada $p \in S$ existe (U, ϕ) entorno coordenado de p en M y $w \in W'$ tal que

$$\phi(S \cap U) = \phi(U) \cap (W \times \{w\}).$$

Queremos hallar condiciones que nos aseguren que el conjunto de nivel de funciones suaves sobre una variedad M sea una subvariedad; a nuestro rescate viene la definición siguiente.

Definición 38. Diremos que una aplicación suave $f : N \rightarrow M$ entre variedades modeladas sobre espacios de Banach es una submersión sobre S si, para cada $x \in S$, la aplicación derivada

$$f_*|_x : T_x N \rightarrow T_{f(x)} M$$

es sobreyectiva, y además existe $W \subset T_x N$ subespacio cerrado tal que

$$T_x N = \ker f_*|_x \oplus W.$$

Nota. Sabemos que la derivada de una aplicación es un operador lineal continuo entre los respectivos espacios vectoriales; de ello se deduce que su núcleo es siempre cerrado, y ésta es una buena definición.

Para este tipo de aplicaciones vale un teorema de regularidad de los conjuntos de nivel.

Teorema 7. Sean $m \in M$ y $f : N \rightarrow M$ una submersión sobre $S := f^{-1}(m) \subset N$. Entonces S es una subvariedad de N .

La demostración puede hallarse en [Mar74]. Además de la demostración de este teorema se deduce el siguiente corolario, que caracteriza los espacios tangentes a los conjuntos de nivel.

Corolario 4. Para todo $x \in S$, $T_x S = \ker f_*|_x$.

5.4. Un ejemplo de espacio de secciones

5.4.1. Esquema general. Se intenta construir una estructura diferenciable sobre algún espacio asociado al espacio de secciones del fibrado trivial $p : \tilde{\Lambda} := D \times \mathbb{R}^m \rightarrow D$, donde $D \subset \mathbb{R}^n$ es un disco abierto. La idea es conseguir que esta estructura diferenciable esté modelada sobre un espacio de Banach reflexivo, de manera de ajustarse suficientemente a las hipótesis de [GNH78]. Los espacios de funciones con un número finito de derivadas continuas, con la norma del supremo, son espacios de Banach, pero no son reflexivos. Los espacios L^p son naturalmente reflexivos, aunque resultan incómodos para trabajar, debido a que no se pueden seleccionar funciones derivables en todas sus clases, impidiendo un tratamiento simple de las condiciones de borde, y obligándonos a trabajar con la noción débil de derivada. Los espacios

de Sobolev son más amigables, debido a que los teoremas de embebimiento son más poderosos. En particular el teorema de embebimiento 5 nos permite definir, para $Mp - n > 0$, una aplicación lineal y continua

$$\text{rest} : H_{M+j,p}(D, \mathbb{R}^m) \rightarrow C^j(\partial D, \mathbb{R}^m),$$

componiendo el embebimiento con la restricción de funciones sobre \bar{D} al borde.

5.4.2. Estructura diferenciable. Empezamos con el hecho siguiente.

Proposición 15. *El conjunto $(\text{rest})^{-1}(0) \subset H_{M+j,p}(D, \mathbb{R}^m)$ es un espacio de Banach.*

DEMOSTRACIÓN. Como $(\text{rest})^{-1}(0) = \ker(\text{rest})$ y rest es lineal y continua, entonces

$$(\text{rest})^{-1}(0)$$

es un subespacio cerrado, y por lo tanto un espacio de Banach con la norma restringida. \square

Entonces tenemos el teorema.

Teorema 8. *Sea $c \in C^\infty(\partial D, \mathbb{R}^m)$. Entonces $(\text{rest})^{-1}(c)$, si no es vacía, es una variedad diferencial modelada sobre el espacio de Banach $(\text{rest})^{-1}(0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\phi_0 \in (\text{rest})^{-1}(c)$; entonces definimos la aplicación

$$\Phi_0 : (\text{rest})^{-1}(c) \rightarrow (\text{rest})^{-1}(0) : s \mapsto s - \phi_0.$$

Esta aplicación es una biyección entre $(\text{rest})^{-1}(c)$ y $(\text{rest})^{-1}(0)$, por lo cual el par

$$\left((\text{rest})^{-1}(c), \Phi_0 \right)$$

es un atlas en el sentido de la definición adoptada aquí. \square

Corolario 5. *El espacio tangente a $(\text{rest})^{-1}(c)$ en cualquier elemento s es igual a*

$$(\text{rest})^{-1}(0).$$

Si $h \in (\text{rest})^{-1}(0)$ y F es una función diferenciable sobre $(\text{rest})^{-1}(c)$, entonces tenemos la siguiente expresión

$$h|_s \cdot F = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [F(s + th)]$$

para la derivada direccional de F en s a lo largo de h .

Por comodidad definamos

$$\mathcal{F}_c^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m) := \{f \in C^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m) : f|_{\partial D} = c\}$$

para alguna función $c \in C^\infty(\partial D, \mathbb{R}^m)$. De la misma forma que se probó para $(\text{rest})^{-1}(c)$, uno puede probar que ésta es una variedad de Banach difeomorfa al espacio de Banach $\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$ (con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)}$ que proviene de la restricción de $\|\cdot\|; C^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$); este espacio será útil en las próximas secciones.

5.4.3. Estructura presimpléctica y hamiltoniano sobre $\mathcal{F}_c^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$. Usaremos el embebimiento para hacer pullback de estructuras cuya diferenciabilidad sobre un espacio de funciones propiamente dichas se conoce. Entonces tomamos el espacio de Banach $C^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$, y definimos sobre él una función y una 2-forma, para finalmente utilizarlas como medio para definir estructuras análogas sobre $(\text{rest})^{-1}(c) \subset H_{M+j,p}(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$, para ciertos números M y p que satisfacen las hipótesis del teorema de embebimiento.

5.4. Un ejemplo de espacio de secciones

5.4.3.1. *El hamiltoniano.* Para cada par $s, h \in C^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$ tal que $h|_{\partial D} = 0$, definimos la aplicación

$$h \mapsto \delta s_h := \left. \frac{\vec{d}}{dt} \right|_{t=0} (s + th) \in \Gamma^j(s^* \tilde{\Lambda}).$$

En particular tenemos que $[\delta s_{h_1}, \delta s_{h_2}] = 0$.

Sea ahora $\alpha \in \Omega^n(\tilde{\Lambda})$; sobre $C^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$ definimos la función

$$\tilde{H}_\alpha : f \mapsto \int_D f^* \alpha.$$

Entonces tenemos el resultado siguiente.

Proposición 16. *Si $j > 1$ entonces \tilde{H}_α es suave; de hecho, su k -ésima derivada tiene la expresión*

$$D^k \tilde{H}_\alpha(s)(h_1, \dots, h_k) = \int_D s^* (\mathcal{L}_{\delta s_{h_1}} \cdots \mathcal{L}_{\delta s_{h_k}} \alpha).$$

DEMOSTRACIÓN. Probemos esto primero para el caso $k = 1$. Queremos ver que $D\tilde{H}_\alpha(s)$ es una buena aproximación lineal para \tilde{H}_α en algún entorno de s , esto es, probar que

1. $D\tilde{H}_\alpha(s)$ es una transformación lineal continua. Para ello escribamos

$$\alpha = \sum_{|I|+|P|=n} a_{I,P} \mathbf{d}x^I \wedge \mathbf{d}y^P$$

donde $I \subset \{1, \dots, n\}, P \subset \{1, \dots, m\}$ denota multiíndices; si β es un índice en $\{1, \dots, m\}$, P_β denotará el multiíndice construido a partir de P al que se le ha extraído el índice β , y el símbolo $\widetilde{\delta}_{\beta,P}$ vendrá dado por

$$\widetilde{\delta}_{\beta,P} = \begin{cases} (-1)^j & \text{si } \beta \text{ está en el } i\text{-ésimo lugar en } P \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \delta s_h \lrcorner \mathbf{d}\alpha &= \left(\sum_{\gamma=1}^m h^\gamma \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \right) \lrcorner \left(\sum_{|I|+|P|=n} \mathbf{d}a_{I,P} \wedge \mathbf{d}x^I \wedge \mathbf{d}y^P \right) \\ &= \sum_{|I|+|P|=n} \sum_{\beta=1}^m h^\beta \left[\frac{\partial a_{I,P}}{\partial y^\beta} \mathbf{d}x^I \wedge \mathbf{d}y^P + (-1)^{|I|} \widetilde{\delta}_{\beta,P} \mathbf{d}a_{I,P} \wedge \mathbf{d}x^I \wedge \mathbf{d}y^{P_\beta} \right] \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\int_D |s^* (\delta s_h \lrcorner \mathbf{d}\alpha)| \leq M_\alpha(s) \mu(D) \|h; C^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)\|$$

siendo $M_\alpha(s)$ un número positivo que depende de α y s hasta las derivadas primeras, y $\mu(D)$ es la medida de D . Por lo tanto tendremos que

$$\begin{aligned} \left| \int_D s^* (\mathcal{L}_{\delta s_h} \alpha) \right| &= \left| \int_D s^* (\delta s_h \lrcorner \alpha) \right| \\ &\leq \int_D |s^* (\delta s_h \lrcorner \mathbf{d}\alpha)| \\ &\leq M_\alpha(s) \mu(D) \|h; C^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)\|, \end{aligned}$$

lo cual demuestra la continuidad.

2. Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\tilde{H}_\alpha(s+th) - \tilde{H}_\alpha(s) - tD\tilde{H}_\alpha(s)(h)| < \epsilon|t|$$

para toda $h \in C^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$ tal que $\|h; C^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)\| = 1$. Pero como \bar{D} es un compacto, tenemos la identidad

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left[\int_D (s+th)^* \alpha \right] = \int_D s^* (\delta s_h \lrcorner \mathbf{d}\alpha)$$

que puede traducirse en que, para cada $\epsilon' > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que

$$\left| \int_D (s+th)^* \alpha - \int_D s^* \alpha - t \int_D s^* (\delta s_h \lrcorner \mathbf{d}\alpha) \right| < \epsilon'|t|;$$

esto prueba que \tilde{H}_α tiene primera derivada.

Para las siguientes derivadas, basta reemplazar α con $\mathcal{L}_{\delta s_h} \alpha$ y derivar; la continuidad de la forma multilineal así obtenida resulta del principio de acotación uniforme, tal como se enuncia en [RS80], página 81. \square

5.4.3.2. *La estructura presimpléctica.* Sea ahora $\zeta \in \Omega^{n+2}(\tilde{\Lambda})$; si suponemos que

$$\sigma \in \mathcal{F}_c^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m),$$

el espacio tangente a $\mathcal{F}_c^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$ puede identificarse con $\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$, y la identificación se realiza a través de la aplicación $h \in \mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m) \mapsto \delta\sigma_h \circ \sigma \in \Gamma(\sigma^* V\tilde{\Lambda})$. Luego la $n+2$ -forma ζ induce una 2-forma sobre $\mathcal{F}_c^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$ mediante

$$\omega_\zeta|_\sigma(\delta\sigma_{h_1}, \delta\sigma_{h_2}) := \int_D \sigma^*(\delta\sigma_{h_1} \lrcorner \delta\sigma_{h_2} \lrcorner \zeta)$$

para cada par $h_1, h_2 \in \mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$.

Lema 23. *La 2-forma ω_ζ es diferenciable. Si $d\zeta = 0$, entonces $d\omega_\zeta = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathcal{F}_c^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$ es difeomorfo a un espacio de Banach, sus 2-formas son secciones del fibrado trivial $\mathcal{F}_c^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{A}^2(\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)) \rightarrow \mathcal{F}_c^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$, esto es, aplicaciones $\omega : \mathcal{F}_c^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{A}^2(\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m))$ con un grado adecuado de diferenciability. En nuestro caso la aplicación es

$$\omega_\zeta : \sigma \mapsto \omega_\zeta|_\sigma(\cdot, \cdot)$$

La demostración de continuidad para todo $\sigma \in \mathcal{F}_c^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$ resulta entonces de un corolario del principio de acotación uniforme (pág. 81 de [RS80]), que nos asegura la continuidad conjunta de una forma bilineal si se conoce la continuidad de cada entrada por separado, y ésta última puede probarse como arriba.

Para la diferenciability notemos que $\mathcal{A}^2(\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m))$ es un espacio de Banach con norma

$$\|\omega\|_{\mathcal{A}^2(\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m))} := \sup_{\|(v,w)\|_{\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)} = 1} |\omega(v, w)|$$

donde $\|(v, w)\|_{\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)} := \|v\|_{\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)} + \|w\|_{\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)}$ es la norma usual asociada al producto cartesiano de un par de espacios de Banach. Entonces uno debe verificar que existe $D\omega_\zeta : \mathcal{F}_c^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m) \rightarrow L(\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m), \mathcal{A}^2(\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)))$ tal que, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de manera que se cumple

$$\|\omega_\zeta(\sigma+h) - \omega_\zeta(\sigma) - D\omega_\zeta(\sigma)(h)\|_{\mathcal{A}^2(\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m))} < \epsilon \|h\|_{\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)}$$

5.4. Un ejemplo de espacio de secciones

para todo $\|h\|_{\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)} < \delta$. La idea es probar que

$$D\omega_\zeta(\sigma)(v, w) = \int_D \sigma^* [\mathcal{L}_{\delta\sigma_h}(v \lrcorner w \lrcorner \zeta)] = \int_D \sigma^* [\delta\sigma_h \lrcorner \mathbf{d}(v \lrcorner w \lrcorner \zeta)].$$

Notemos para ello que uno puede escribir $\sigma + th = \phi_t \circ \sigma$, donde $\phi_t : D \times \mathbb{R}^m \rightarrow D \times \mathbb{R}^m : (x, y) \mapsto (x, y + th(x))$ es el flujo del campo vertical $\delta\sigma_h : (x, y) \mapsto (x, y; 0, h(x))$; por lo tanto

$$\begin{aligned} (\sigma + th)^* (\delta\sigma_{h_1} \lrcorner \delta\sigma_{h_2} \lrcorner \zeta) - \sigma^* (\delta\sigma_{h_1} \lrcorner \delta\sigma_{h_2} \lrcorner \zeta) - \sigma^* [\mathcal{L}_{\delta\sigma_h}(\delta\sigma_{h_1} \lrcorner \delta\sigma_{h_2} \lrcorner \zeta)] &= \\ = \sigma^* [\phi_t^* (\delta\sigma_{h_1} \lrcorner \delta\sigma_{h_2} \lrcorner \zeta) - \delta\sigma_{h_1} \lrcorner \delta\sigma_{h_2} \lrcorner \zeta - \mathcal{L}_{\delta\sigma_h}(\delta\sigma_{h_1} \lrcorner \delta\sigma_{h_2} \lrcorner \zeta)] &= \\ = \sigma^* \{ \delta\sigma_{h_1} \lrcorner \delta\sigma_{h_2} \lrcorner [\phi_t^*(\zeta) - \zeta - \mathcal{L}_{\delta\sigma_h}\zeta] \} & \end{aligned}$$

dado que $[\delta\sigma_h, \delta\sigma_{h'}] = 0$ para cualquier par $h, h' \in \mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$. Luego si $\|h\|_{\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)} = 1$ y $h_1, h_2 \in \mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$, tendremos que

$$\begin{aligned} (18) \quad & \left\| \int_D \{ (\sigma + th)^* (\delta\sigma_{h_1} \lrcorner \delta\sigma_{h_2} \lrcorner \zeta) - \sigma^* (\delta\sigma_{h_1} \lrcorner \delta\sigma_{h_2} \lrcorner \zeta) - \sigma^* [\mathcal{L}_{\delta\sigma_h}(\delta\sigma_{h_1} \lrcorner \delta\sigma_{h_2} \lrcorner \zeta)] \} \right\|^2 = \\ & = \left\| \int_D \sigma^* \{ \delta\sigma_{h_1} \lrcorner \delta\sigma_{h_2} \lrcorner [\phi_t^*(\zeta) - \zeta - \mathcal{L}_{\delta\sigma_h}\zeta] \} \right\|^2 \\ & = \left\| \int_D \sigma^* \left[\sum_{|I|+|P|=n} \sum_{\alpha, \beta=1}^m (-1)^{|I|} M_{I,P} \widetilde{\delta}_{\alpha,P} \widetilde{\delta}_{\beta,P_\alpha} (h_1^\alpha h_2^\beta - h_2^\alpha h_1^\beta) \mathbf{d}x^I \wedge \mathbf{d}y^{(P_\alpha)_\beta} \right] \right\|^2 \\ & = \left\| \sum_{|I|+|P|=n} (-1)^{|I|} \sum_{\alpha, \beta=1}^m \int_D (M_{I,P} \circ \sigma) \widetilde{\delta}_{\alpha,P} \widetilde{\delta}_{\beta,P_\alpha} \left[(h_1^\alpha \circ \sigma) (h_2^\beta \circ \sigma) - (h_2^\alpha \circ \sigma) (h_1^\beta \circ \sigma) \right] \partial^{\bar{I}, (P_\alpha)_\beta} \sigma \mathbf{d}^n x \right\|^2 \\ & \leq 2 \sum_{|I|+|P|=n} \sum_{\alpha, \beta=1}^m |\widetilde{\delta}_{\alpha,P}| |\widetilde{\delta}_{\beta,P_\alpha}| \int_D |M_{I,P} \circ \sigma|^2 |h_1^\alpha \circ \sigma|^2 |h_2^\beta \circ \sigma|^2 |\partial^{\bar{I}, (P_\alpha)_\beta} \sigma|^2 \mathbf{d}^n x \end{aligned}$$

donde se ha puesto

$$\phi_t^*(\zeta) - \zeta - \mathcal{L}_{\delta\sigma_h}\zeta = \sum_{|I|+|P|=n} M_{I,P} \mathbf{d}x^I \wedge \mathbf{d}y^P,$$

$\partial^{K,R}\sigma$ indica el determinante de la submatriz de la matriz jacobiana de σ obtenida usando las columnas con índices en K y las filas con índices en R , e \bar{I} es algún complemento positivo de I (i.e. $I \cup \bar{I} = \{1, \dots, n\}$ a menos de una permutación par). Extendiendo el producto euclídeo a $\Lambda^n(T^*\bar{\Lambda})$, la definición de la derivada de Lie de una forma nos garantiza, para cada $\epsilon > 0$ y cada $x \in D$, la existencia de un número positivo δ_x tal que

$$(19) \quad \sum_{|I|+|P|=n} |M_{I,P}(x)|^2 = \|\phi_t^*(\zeta) - \zeta - \mathcal{L}_{\delta\sigma_h}\zeta\|_x^2 < \epsilon^2 |t|^2,$$

si $|t| < \delta_x$. Para probar que puede elegirse un δ positivo que valga para todo x en \bar{D} , utilizaremos la compacidad de \bar{D} como sigue. Elijamos los δ_x maximales respecto de la desigualdad (19), esto es, aquellos para los cuales cada t mayor o igual a δ_x verifica

$$\sum_{|I|+|P|=n} |M_{I,P}(x)|^2 \geq \epsilon^2 |t|^2.$$

Si (x_n) es una sucesión de puntos en \bar{D} tal que la sucesión de números positivos (δ_{x_n}) tiende a 0, existe una subsucesión de (x_n) convergente (dado que \bar{D} es compacto) tal que la colección de sus δ_x también converge a 0. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que

(x_n) es convergente; sea $x_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in D$. Luego todo entorno de x_0 contiene puntos y para los cuales δ_y toma valores arbitrariamente pequeños. Ahora bien, la forma $\tilde{\zeta} := \phi_t^*(\zeta) - \zeta - \mathcal{L}_{\delta\sigma_h}\zeta$ es, en particular, continua como aplicación de D en $\Lambda^{n+2}(T^*\bar{D})$, por lo cual, para todo número positivo $\rho > 0$ existe $r > 0$ tal que

$$\|\tilde{\zeta}(y)\| < \rho + \|\tilde{\zeta}(x_0)\|$$

si $y \in B_r(x_0)$. Sea $\delta_{x_0}^{\epsilon/2} > 0$ el número positivo que verifica la desigualdad (19) para $\epsilon/2$ en x_0 ; tomemos y en $B_r(x_0)$ tal que $\delta_y^\epsilon < \delta_{x_0}^{\epsilon/2}$. Luego de la desigualdad anterior, para t tal que $\delta_y^\epsilon < |t| < \delta_{x_0}^{\epsilon/2}$ tendremos que

$$\epsilon|t| \leq \|\tilde{\zeta}(y)\| < \rho + \|\tilde{\zeta}(x_0)\| < \rho + \frac{\epsilon}{2}|t|,$$

y tal y puede encontrarse para cualquier ρ ; tomando $\rho \leq \frac{\epsilon}{2}\delta_{x_0}^{\epsilon/2}$, obtenemos una contradicción. Luego el conjunto de números de la forma δ_x tiene una cota inferior positiva, como queríamos probar.

Volviendo al tema principal de esta demostración, juntando todo podemos probar que, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{x \in \bar{D}} |M_{I,P}(x)|^2 < \epsilon^2 |t|^2$$

si $|t| < \delta$. Además como las funciones h_1, h_2 están en $\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$ (para $N > 1$, lo cual implica que son al menos continuas) y $\|h_1\| + \|h_2\| = 1$, podemos afirmar que

$$\int_D |h_1^\alpha \circ \sigma|^2 |h_2^\beta \circ \sigma|^2 \mathbf{d}^n x \leq R$$

para R un número independiente de h_1 y h_2 . Reemplazando todo esto en la desigualdad (18), obtenemos que la integral

$$\begin{aligned} I(h_1, h_2) &:= \\ &= \int_D \{(\sigma + th)^*(\delta\sigma_{h_1} \lrcorner \delta\sigma_{h_2} \lrcorner \zeta) - \sigma^*(\delta\sigma_{h_1} \lrcorner \delta\sigma_{h_2} \lrcorner \zeta) - \sigma^*[\mathcal{L}_{\delta\sigma_h}(\delta\sigma_{h_1} \lrcorner \delta\sigma_{h_2} \lrcorner \zeta)]\} \end{aligned}$$

puede acotarse por un número proporcional a $|t|$ (si $|t|$ es suficientemente pequeño) y que es independiente de h_1 y h_2 ; como

$$\|\omega_\zeta(\sigma + h) - \omega_\zeta(\sigma) - D\omega_\zeta(\sigma)(h)\|_{\mathcal{A}^2(\mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m))} = \sup_{\|h_1\| + \|h_2\| = 1} I(h_1, h_2),$$

resulta la diferenciabilidad de ω_ζ . Finalmente, aplicando la fórmula para la derivación de formas a lo largo de campos vectoriales (y tomando como campos vectoriales a campos de la forma $\sigma \mapsto \delta\sigma_h$ para $h \in \mathcal{F}_0^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$), resulta que las formas ζ cerradas dan origen a formas cerradas sobre $\mathcal{F}_c^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$. \square

5.4.4. Sistema dinámico sobre $(\text{rest})^{-1}(c)$. Sea $\sigma \in (\text{rest})^{-1}(c)$; entonces se define la aplicación bilineal

$$\Omega_\zeta(\sigma)(h_1, h_2) := \omega_\zeta(\check{\sigma})(\delta\sigma_{\check{h}_1}, \delta\sigma_{\check{h}_2})$$

para cada par $h_1, h_2 \in (\text{rest})^{-1}(0)$, donde si $u \in H_{M+j,p}(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$, entonces $\check{u} \in C^j(\bar{D}, \mathbb{R}^m)$ indica el representativo diferenciable asignado por el embebimiento. Como la aplicación $h \mapsto \delta\sigma_{\check{h}}$ es lineal y continua (por continuidad del embebimiento) entonces ésta es una buena forma bilineal para cada σ . Es más, como el embebimiento es lineal y continuo, toda aplicación lineal y continua entre espacios de Banach es diferenciable, y la composición de aplicaciones diferenciables entre variedades de Banach es diferenciable, resulta que la aplicación

$$\Omega_\zeta : \sigma \in (\text{rest})^{-1}(c) \mapsto \Omega_\zeta(\sigma) \in \mathcal{A}^2((\text{rest})^{-1}(0))$$

5.5. Estructura presimpléctica sobre un espacio de secciones

es diferenciable. Lo mismo puede hacerse con el hamiltoniano, esto es, definir

$$H_\alpha : \sigma \in (\text{rest})^{-1}(c) \mapsto \tilde{H}_\alpha(\tilde{\sigma}),$$

que define, por análogas razones, una función diferenciable sobre $(\text{rest})^{-1}(c)$.

5.5. Estructura presimpléctica sobre un espacio de secciones

Dejemos de lado entonces el problema de definir sobre un espacio de secciones una estructura diferenciable adecuada, y supongamos por el momento que existe alguna modelada sobre un espacio de Banach reflexivo; además admitiremos que, respecto de tal estructura, los espacios tangentes en una sección⁴ $\sigma \in \Gamma(\tilde{\Lambda} \rightarrow M)$ a la variedad de secciones serán de la forma $\Gamma(\sigma^*(V\tilde{\Lambda}))$. Bajo tales hipótesis, en la presente sección se definirá, a partir de un problema variacional del tipo Lepage equivalente, un sistema dinámico sobre el espacio de secciones de un fibrado elegido cuidadosamente. Debe remarcar que esta definición contempla la introducción de una nueva estructura, que se suma a las que componen el problema variacional en cuestión: La foliación del fibrado de campos en *hojas de tiempo constante*.

5.5.1. Estructura presimpléctica y foliaciones. Para llevar adelante la construcción, es necesario introducir el concepto de *foliación compatible* [GIM04]. Este dato es indispensable para definir rigurosamente la idea intuitiva de hoja de tiempo constante en un fibrado de campos: Está compuesto de la subvariedad de tiempo constante en el espacio-tiempo Σ , la hoja de campos en ese tiempo \tilde{L} , y las direcciones de tiempo creciente Z_0, \hat{Z}_0 .

Definición 39 (Foliaciones compatibles). *Una foliación compatible para un fibrado $\tilde{\Lambda} \rightarrow M$ es un cuádruple $(\tilde{L}, \hat{Z}_0; \Sigma, Z_0)$ tal que*

1. $\tilde{L} \subset \tilde{\Lambda}, \Sigma \subset M$ son subvariedades de codimensión 1,
2. $p(\tilde{L}) \subset \Sigma$, de manera que $p|_{\tilde{L}} : \tilde{L} \rightarrow \Sigma$ es un fibrado, y
3. El campo vectorial \hat{Z}_0 está definido sobre \tilde{L} y es transversal a dicha variedad, Z_0 está definido sobre Σ , siendo transversal a ella, y además $p_*(\hat{Z}_0) = Z_0$.

Ejemplo 5.5A: Foliación compatible canónica. Sea $\tilde{p} : \tilde{L} \rightarrow \Sigma$ un fibrado cualquiera, y defínase

$$p : \tilde{L} \times \mathbb{R} \rightarrow \Sigma \times \mathbb{R} : (l, t) \mapsto (\tilde{p}(l), t).$$

Sean $\tilde{\partial}_0 \in \mathfrak{X}(\Sigma \times \mathbb{R}), \partial_0 \in \mathfrak{X}(\tilde{L} \times \mathbb{R})$ los campos vectoriales asociados a las direcciones en la variable real; la foliación compatible canónica para $\tilde{L} \times \mathbb{R}$ es $(\tilde{L}, \tilde{\partial}_0; \Sigma, \partial_0)$ ▲

Notar que la transversalidad implica que los campos transversales de una foliación de este tipo no tienen ceros. En cualquier caso, una foliación compatible nos permite definir un sistema dinámico sobre el espacio P de secciones del fibrado $\tilde{L} \xrightarrow{p|_{\tilde{L}}} \Sigma$.

Nota. Una foliación compatible para un fibrado no es una foliación en el sentido tradicional. Sin embargo, la condición de transversalidad para los campos \tilde{Z}_0 y Z_0 implica que, dada una foliación compatible $(\tilde{L}, \hat{Z}_0; \Sigma, Z_0)$, existen entornos $U_{\tilde{L}} \subset \tilde{\Lambda}$ de \tilde{L} y $U_\Sigma \subset M$ de Σ tales que $U_{\tilde{L}} \simeq \tilde{L} \times \mathbb{R}$ y $U_\Sigma \simeq \Sigma \times \mathbb{R}$, y esta identificación aplica la foliación compatible considerada en

⁴A partir de este momento, y a menos que se haga mención explícita de lo contrario, denotaremos por $\Gamma(E)$, para $E \rightarrow M$ fibrado, a la variedad de secciones del mismo con la estructura diferenciable adecuada para la aplicación del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds.

la canónica. Entonces, cuando sea necesario, consideraremos que el espacio-tiempo M admite una descomposición $M = \Sigma \times \mathbb{R}$, que algo análogo ocurre con el espacio de campos, esto es $\tilde{\Lambda} = \tilde{L} \times \mathbb{R}$, de manera tal que la fibración de \tilde{L} sobre Σ hace que ambas descomposiciones sean compatibles:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Lambda} = \tilde{L} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{p_1} & \tilde{L} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M = \Sigma \times \mathbb{R} & \xrightarrow{p_1} & \Sigma \end{array}$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$, denotaremos mediante $\tilde{\Lambda}_t$ y M_t los conjuntos siguientes

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_t &:= \tilde{L} \times \{t\}, \\ M_t &:= \Sigma \times \{t\}. \end{aligned}$$

Estas consideraciones serán útiles cada vez que se discutan propiedades locales.

Definición 40. El espacio de secciones asociado a una foliación compatible

$$\mathcal{F}(\tilde{\Lambda}) := (\tilde{L}, \hat{Z}_0; \Sigma, Z_0)$$

de un fibrado $\tilde{\Lambda} \rightarrow M$ será el conjunto de secciones $P_{\mathcal{F}(\tilde{\Lambda})} := \Gamma(\tilde{L})$ del fibrado $\tilde{L} \xrightarrow{p|\tilde{L}} \Sigma$ que sobre $\partial\Sigma$ asumen un valor fijo $s_0 : \partial\Sigma \rightarrow \tilde{L}|_{\partial\Sigma}$.

Supongamos que tenemos una foliación compatible $\mathcal{F}(\tilde{\Lambda}) = (\tilde{L}, \hat{Z}_0; \Sigma, Z_0)$ del fibrado subyacente a un problema variacional Lepage equivalente $(\tilde{\Lambda} \rightarrow M, \tilde{\lambda}, 0)$, de manera tal que Σ es compacta; entonces sobre el espacio de fases asociado $P_{\mathcal{F}(\tilde{\Lambda})}$ definiremos un sistema dinámico, al que llamaremos *sistema dinámico asociado a $\mathcal{F}(\tilde{\Lambda})$* , asumiendo implícitamente que el fibrado $\tilde{\Lambda}$ pertenece a un problema variacional Lepage equivalente.

Definición 41 (Sistema dinámico asociado a una foliación compatible). *Dada la foliación compatible $\mathcal{F}(\tilde{\Lambda})$, el sistema dinámico (sobre $P_{\mathcal{F}(\tilde{\Lambda})}$) asociado a ella es el par $(\omega^{\tilde{\lambda}}, H^{\tilde{\lambda}})$ de manera tal que, si $\delta s_1, \delta s_2 \in \Gamma(s^*V\tilde{L})$ son un par de elementos en $T_s P_{\mathcal{F}(\tilde{\Lambda})}$, la 2-forma presimpléctica está definida mediante*

$$(20) \quad \omega^{\tilde{\lambda}} \Big|_s (\delta s_1, \delta s_2) := \int_{\Sigma} s^* \left(\widehat{\delta s_1} \lrcorner \widehat{\delta s_2} \lrcorner d\tilde{\lambda} \Big|_{\tilde{L}} \right).$$

y la función hamiltoniana sobre $P_{\mathcal{F}(\tilde{\Lambda})}$ se define por la fórmula

$$(21) \quad H^{\tilde{\lambda}}(s) := \int_{\Sigma} s^* \left[\left(\hat{Z}_0 \lrcorner \tilde{\lambda} \right) \Big|_{\tilde{L}} \right].$$

Nota. En la definición anterior suponemos que el tangente al espacio de secciones $P_{\mathcal{F}(\tilde{\Lambda})}$ en una sección dada s es el conjunto de elementos en $\Gamma(s^*V\tilde{L})$ que se anulan sobre el borde de Σ .

5.5. Estructura presimpléctica sobre un espacio de secciones

Es importante demostrar que la forma definida en (20) es realmente una forma presimpléctica sobre el espacio de secciones; teniendo en cuenta que suponemos la existencia de una estructura diferenciable “buena” sobre $P_{\mathcal{F}(\tilde{\Lambda})}$, damos por sentado que vale la fórmula

$$(22) \quad \mathbf{d}\alpha(X_0, \dots, X_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i X_i \cdot \alpha(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_n)$$

para cualquier n -forma α y cualquier colección X_1, \dots, X_n de campos vectoriales. En tal caso podemos establecer el resultado siguiente.

Lema 24. *Sea $\mathcal{F}(\tilde{\Lambda})$ una foliación compatible de un problema variacional Lepage equivalente. Entonces el par $(P_{\mathcal{F}(\tilde{\Lambda})}, \omega^{\tilde{\Lambda}})$ es una variedad presimpléctica.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $s \in P_{\mathcal{F}(\tilde{\Lambda})}$ y $V_1, V_2, V_3 \in T_s P_{\mathcal{F}(\tilde{\Lambda})}$; si \mathcal{U} es un entorno de s , definimos los campos $\tilde{V}_i, i = 1, 2, 3$ sobre \mathcal{U} mediante

$$\tilde{V}_i : s' \mapsto \hat{V}_i \circ s' \quad \forall s' \in \mathcal{U}$$

con flujos $s' \mapsto \phi_t^i \circ s'$ sii $\phi_t^i : \tilde{L} \rightarrow \tilde{L}$ es el flujo de $\hat{V}_i, i = 1, 2, 3$. Entonces vale la identidad

$$V_i|_s \cdot \int_{\Sigma} s^* (V_j \lrcorner V_k \lrcorner \mathbf{d}\tilde{\lambda}) = \int_{\Sigma} s^* [\mathcal{L}_{\hat{V}_i} (\hat{V}_j \lrcorner \hat{V}_k \lrcorner \mathbf{d}\tilde{\lambda})]$$

y de la fórmula (22), obtenemos que $\mathbf{d}\omega^{\tilde{\Lambda}}|_s = 0$. □

Corolario 6. *El diferencial de la función $H^{\tilde{\Lambda}}$ puede escribirse*

$$\mathbf{d}H^{\tilde{\Lambda}}|_s (V) = \int_{\Sigma} s^* (\hat{V} \lrcorner \mathbf{d}(\hat{Z}_0 \lrcorner \tilde{\lambda}|_{\tilde{L}}))$$

para todo $V \in \Gamma(s^*(V\tilde{L}))$ que se anule sobre $\partial\Sigma$.

5.5.2. Invariancia por difeomorfismos. La dependencia en la definición anterior de la foliación compatible introducida induce a pensar que es difícil conseguir una descripción en tales términos de las extremales del problema variacional subyacente, dado que dichos extremales son enteramente indiferentes a la foliación compatible. Sin embargo, esta precaución es ilusoria si, como esperamos, las estructuras definidas en base a la foliación son el reflejo de estructuras análogas existentes en el espacio de extremales del problema variacional en consideración. Vamos a probar que esto es así, verificando que si dos hojas de tiempo constante se aplican una en la otra por un difeomorfismo del fibrado de campos, entonces las estructuras presimplécticas sobre ellas son isomorfas; vale mencionar que el argumento central en esta demostración es una reconstrucción del dado en la excelente referencia [Dir65].

Sean entonces $(\tilde{L}, \hat{Z}_0; \Sigma, Z_0), (\tilde{L}^{(1)}, \hat{Z}_0^{(1)}; \Sigma^{(1)}, Z_0^{(1)})$ un par de foliaciones compatibles para un problema Lepage equivalente $(\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}, 0)$, y supongamos por lo tanto que existe un difeomorfismo $\Phi_0 : \tilde{\Lambda} \rightarrow \tilde{\Lambda}$ que aplica \tilde{L} en $\tilde{L}^{(1)}$, y \hat{Z}_0 en $\hat{Z}_0^{(1)}$. Denotemos su restricción a \tilde{L} con el mismo símbolo. Supongamos además que existe $\phi_0 : M \rightarrow M$ difeomorfismo tal que

$$\begin{array}{ccc} \tilde{L} & \xrightarrow{\Phi_0} & \tilde{L}^{(1)} \\ p \downarrow & & \downarrow p^{(1)} \\ \Sigma & \xrightarrow{\phi_0} & \Sigma^{(1)} \end{array}$$

es conmutativo, siendo aquí ϕ_0 la restricción de dicho difeomorfismo a Σ .

Lema 25. Para $s \in \Gamma(\tilde{L})$, la aplicación definida mediante $\hat{\Phi}_0(s) := \Phi_0 \circ s \circ \phi_0^{-1}$ es una sección de $\tilde{L}^{(1)}$.

DEMOSTRACIÓN. Hay que verificar que $p^{(1)} \circ \hat{\Phi}_0(s) = \text{id}_{\Sigma^{(1)}}$, usando el diagrama anterior y $p \circ s = \text{id}_{\Sigma}$. \square

Uno puede derivar la aplicación $\hat{\Phi}_0$ inducida sobre las secciones de \tilde{L} , usando que en nuestro caso

$$T_s \Gamma(\tilde{L}) = \Gamma(s^*(V\tilde{L}))$$

y que por hipótesis estamos admitiendo que todos los elementos del espacio tangente son extensibles.

Proposición 17. La derivada de $\hat{\Phi}_0$ en una sección s en la dirección δs viene dada por la fórmula

$$\hat{\Phi}_{0*} \Big|_s (\delta s) := \Phi_{0*} \left(\hat{\delta} s \right) \circ \hat{\Phi}_0(s)$$

para cualquier extensión $\hat{\delta} s$ de δs .

DEMOSTRACIÓN. Si $\gamma_t : \tilde{L} \rightarrow \tilde{L}$ es el flujo de la extensión $\hat{\delta} s$ para δs , uno tiene que

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{0*} \Big|_s (\delta s) &= \frac{\vec{d}}{dt} \Big|_{t=0} \left[\hat{\Phi}_0(\gamma_t \circ s) \right] \\ &= \frac{\vec{d}}{dt} \Big|_{t=0} \left[\Phi_0 \circ (\gamma_t \circ s) \circ \phi_0^{-1} \right] \\ &= \frac{\vec{d}}{dt} \Big|_{t=0} \left[(\Phi_0 \circ \gamma_t \circ \Phi_0^{-1}) \circ (\Phi_0 \circ s \circ \phi_0^{-1}) \right] \end{aligned}$$

de donde resulta lo que queríamos. \square

A partir de esta proposición obtenemos el principal resultado acerca de la invariancia de la estructura presimpléctica asociada a $\Gamma(\tilde{L})$.

Lema 26. Si $\Phi_0^* \left(\vec{d}\tilde{\lambda} \Big|_{\tilde{L}^{(1)}} \right) = \vec{d}\tilde{\lambda} \Big|_{\tilde{L}}$, entonces $\hat{\Phi}_0$ es una aplicación presimpléctica.

DEMOSTRACIÓN. Sean $s \in \Gamma(\tilde{L})$, $V, W \in \Gamma(s^*(V\tilde{L}))$; luego

$$\begin{aligned} \omega^{\tilde{\lambda}} \Big|_{\hat{\Phi}_0(s)} \left(\hat{\Phi}_{0*}(V), \hat{\Phi}_{0*}(W) \right) &= \int_{\Sigma^{(1)}} \hat{\Phi}_0(s) \left(\Phi_{0*}(\hat{V}) \lrcorner \Phi_{0*}(\hat{W}) \lrcorner \vec{d}\tilde{\lambda} \right) \\ &= \int_{\phi_0(\Sigma)} (\phi_0^{-1})^* \circ s^* \left(\hat{V} \lrcorner \hat{W} \lrcorner \vec{d}\Phi_0^*(\tilde{\lambda}) \right) \\ &= \int_{\Sigma} s^* \left(\hat{V} \lrcorner \hat{W} \lrcorner \vec{d}\Phi_0^*(\tilde{\lambda}) \right) \end{aligned}$$

que demuestra lo que queríamos. \square

Las formas cerradas poseen una propiedad fundamental: Son invariantes por homotopías. Esto nos da una condición sobre las hojas de tiempo constante que nos asegura que la estructura presimpléctica definida sobre su espacio de secciones sea independiente de su elección.

Teorema 9. Si \tilde{L} y $\tilde{L}^{(1)}$ son subvariedades homotópicas, el morfismo $\hat{\Phi}_0$ sobre el espacio de secciones es presimpléctico.

5.5. Estructura presimpléctica sobre un espacio de secciones

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que \tilde{L} y $\tilde{L}^{(1)}$ son subvariedades homotópicas. O sea, supongamos que Φ_0 es homotópica a la identidad; sea $\Xi : [0, 1] \times \tilde{L} \rightarrow \Lambda$ la homotopía correspondiente. Definamos el siguiente operador Ψ sobre las N -formas en $[0, 1] \times \tilde{L}$ (N es el grado de $\tilde{\lambda}$):

$$\Psi\omega := \sum_{j_1 < \dots < j_N} \left(\int_{[0,1]} b_{j_1, \dots, j_N}(t, x) \mathbf{d}t \right) \mathbf{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{j_N}$$

si y sólo si $\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_N} b_{j_1, \dots, j_N}(t, x) \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{j_N}$. Sea $\Xi_t := \Xi(t, \cdot)$; uno puede verificar [BT82, Mor01] que este operador satisface

$$\Xi_1^* (\omega|_{\tilde{L}^{(1)}}) - \Xi_0^* (\omega|_{\tilde{L}}) = \mathbf{d}(\Psi\omega) + \Psi\mathbf{d}\omega,$$

por lo cual, si reemplazamos $\omega = \mathbf{d}\tilde{\lambda}$, obtenemos que $\Xi_1^* (\mathbf{d}\tilde{\lambda}|_{\tilde{L}^{(1)}}) = \Xi_0^* (\mathbf{d}\tilde{\lambda}|_{\tilde{L}})$. Si consideramos que $\Xi_0 = \text{id}_{\tilde{L}}$ es la inmersión de \tilde{L} en Λ y que $\Xi_1 = \Phi_0$, uno tiene que $\Phi_0^* (\mathbf{d}\tilde{\lambda}|_{\tilde{L}}) = \mathbf{d}\tilde{\lambda}|_{\tilde{L}}$. \square

Para aplicar este teorema, suponemos que para cada difeomorfismo $\phi_0 : M \rightarrow M$ de la base de Λ existe un difeomorfismo inducido sobre el fibrado total Λ (por ejemplo, cuando Λ es el fibrado de bases o alguno de sus fibrados asociados); en tal circunstancia la invariancia homotópica de formas cerradas implica que la forma presimpléctica sobre $\Gamma(\tilde{L})$ es invariante por reparametrizaciones.

Ejemplo 5.5B: Invariancia en mecánica clásica. La base en este caso es \mathbb{R} , el fibrado total $\Lambda := \mathbb{R} \times (TQ \oplus T^*Q)$, y $\lambda = p_i dq^i + Hdt$; para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ difeomorfismo, uno lo cubre con $F : \Lambda \rightarrow \Lambda : (t, q, p) \mapsto (f(t), q, p)$ y se tiene que

$$F^* (p_i dq^i + Hdt) = p_i dq^i + f'(t) Hdt,$$

por lo cual $F^* (\lambda|_{\{t=f(t_0)\}}) = \lambda|_{\{t=t_0\}}$. \blacktriangle

Notar la importancia de un dato proveniente de la propia teoría de campos: La manera en que se levantan los difeomorfismos del espacio-tiempo al espacio de campos.

5.5.3. Foliación y dinámica. Por lo tanto los problemas variacionales Lepage equivalentes asocian a cada foliación compatible del fibrado de campos una variedad presimpléctica, y si las foliaciones son homotópicas, hemos probado arriba que dichas variedades son simplectomorfas. Como además podemos definir con estos datos una función hamiltoniana, estamos en posición para definir un sistema dinámico al cual aplicarle el algoritmo de Gotay, Nester y Hinds. En el siguiente ejemplo se muestra un tipo particular de patologías que pueden desarrollarse al aplicar esta construcción, si no se toman algunos recaudos sobre las propiedades de $\tilde{\lambda}$ en relación a la foliación compatible elegida.

Ejemplo 5.5C: Vínculos de Dirac e invariancia por \tilde{Z}_0 . Retomemos el problema variacional considerado en el ejemplo 5.1D en la página 54, para $K = [0, 1] \times [0, 1]$. Intentaremos aplicar en el mismo la construcción esbozada más arriba, esto es, haciendo uso de una hipersuperficie en la base junto a un campo vectorial complementario definido sobre ella, tomaremos la porción del fibrado de campos sobre ella y calcularemos la estructura presimpléctica inducida sobre el espacio de secciones de este fibrado, así como la función hamiltoniana correspondiente. A riesgo de perder la atención del lector, adelantemos el resultado de la aplicación del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds allí: Las ecuaciones que se obtienen no son equivalentes a las originales, o dicho de otra manera, la subvariedad de vínculos en el espacio de secciones no guarda relación con las soluciones del EDS original. El entendimiento de esta particularidad nos dará

claves esenciales sobre condiciones suficientes que garanticen una conexión entre esta subvariedad de vínculos y el EDS que gobierna la dinámica de una teoría de campos. Supongamos por consiguiente que la hipersuperficie en cuestión es de la forma $\{(x, y) \in K \subset \mathbb{R}^2 : x = k\}$ para alguna constante $k \in (0, 1)$, y que el campo complementario es simplemente ∂_x . Luego la porción del fibrado (que llamaremos Λ_k) sobre esta hipersuperficie constará de todas las 5-uplas $(x, y; u, v, w)$ tales que $x = k$, y la forma presimpléctica sobre su espacio de secciones vendrá dada simplemente por

$$\omega|_s(X_1, X_2) = \int_{[0,1]} (\delta u_2 \delta v_1 - \delta u_1 \delta v_2) \mathbf{d}y$$

si y sólo si $X_i = (0, 0; \delta u_i, \delta v_i, \delta w_i)$, $i = 1, 2$. Asimismo el hamiltoniano que uno construye con la receta dada más arriba será⁵

$$H(s) = - \int_{[0,1]} (Av - w(u_y - B^k)) \mathbf{d}y.$$

El núcleo de la forma presimpléctica en una sección s contiene al vector $Z := (0, 0; 0, 0, \delta w)$, y la condición de invariancia para H nos dará

$$0 = Z|_s \cdot H = \int_{[0,1]} (\delta w(u_y - B^k)) \mathbf{d}y$$

para toda función $\delta w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Luego $u_y - B^k = 0$ es un vínculo primario. Además, de acuerdo al algoritmo, los campos vectoriales hamiltonianos (si existen) asociados a los vínculos están en el complemento simpléctico ortogonal de la superficie de vínculo; por lo tanto el campo vectorial hamiltoniano asociado a $F_h(s) := \int_{[0,1]} h(y)(u_y - B^k) \mathbf{d}y$ para $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ arbitraria. Si $X_{F_h} = (0, 0; \delta u_1, \delta v_1, \delta w_1)$, y tomando en cuenta que

$$X_2|_s \cdot F_h = - \int_{[0,1]} \delta u_2 h_y$$

via una integración por partes, resulta que

$$X_{F_h}|_s = (0, 0; 0, -h_y, 0).$$

Como ya dijimos, si $M^{(1)} := \{s \in \Gamma(\Lambda_k) : u_y - B^k = 0\}$, entonces

$$X_{F_h}|_s \in (T_s \Gamma(\Lambda_k))^\perp,$$

por lo cual tendremos la nueva condición de estabilidad

$$0 = X_{F_h} \cdot H = \int_{[0,1]} Ah_y \mathbf{d}y = - \int_{[0,1]} A_y h \mathbf{d}y$$

para toda función h . Luego aparece el vínculo $A_y = 0$, que es notoriamente diferente al correspondiente al sistema diferencial exterior original, esto es $A_y - B_x = 0$. Notar que éstos coinciden sólo cuando B es independiente de la variable x . ▲

Supongamos que tenemos el problema variacional $(\tilde{L} \times \mathbb{R} \rightarrow \Sigma \times \mathbb{R}, \tilde{\lambda}, 0)$ tal que $\mathcal{L}_{\partial_0} \lambda = 0$ (esto es, la forma de Cartan no depende explícitamente de la variable real). Entonces podemos probar que los sistemas dinámicos correspondientes a las foliaciones compatibles $(\tilde{\Lambda}_t, \tilde{\partial}_0; M_t, \partial_0)$ con $t \in \mathbb{R}$ son todos equivalentes entre sí, y equivalentes a $(\tilde{L}, \hat{\partial}_0, \Sigma, \partial_0)$.

⁵A riesgo de complicar innecesariamente la notación, escribiremos B^k para la función de variable real $y \mapsto B(k, y)$

5.5. Estructura presimpléctica sobre un espacio de secciones

Lema 27. Si λ no depende explícitamente de t , entonces la familia de aplicaciones

$$f_{t,t'} : \tilde{\Lambda}_t \rightarrow \tilde{\Lambda}_{t'} : (l, t) \mapsto (l, t')$$

inducen una familia de simplectomorfismos a nivel del espacio de fases de la foliación, y estos simplectomorfismos transforman entre sí los hamiltonianos a distintos tiempos.

DEMOSTRACIÓN. Utilizando el teorema 9 de invariancia por difeomorfismos, podemos probar la primera parte, esto es, que $f_{t,t'}$ induce simplectomorfismos. Por otra parte, si llamamos $H_t^{\tilde{\lambda}}$ al hamiltoniano inducido sobre $\Gamma(\tilde{\Lambda}_t)$, entonces para cada $s' \in \Gamma(\tilde{\Lambda}_{t'})$ tenemos que

$$\begin{aligned} H_t^{\tilde{\lambda}}(s' \circ f_{t,t'}) &= \int_{M_t} (s' \circ f_{t,t'})^* (\tilde{\partial}_0 \lrcorner \tilde{\lambda} |_{\tilde{\Lambda}_t}) \\ &= \int_{M_t} f_{t,t'}^* s'^* (\tilde{\partial}_0 \lrcorner \tilde{\lambda} |_{\tilde{\Lambda}_t}) \\ &= \int_{f_{t,t'}^*(M_t)} s'^* (\tilde{\partial}_0 \lrcorner \tilde{\lambda} |_{\tilde{\Lambda}_{t'}}) \\ &= H_{t'}^{\tilde{\lambda}}(s') \end{aligned}$$

dado que, como $\tilde{\lambda}$ es independiente de t , $\tilde{\lambda}|_{\tilde{\Lambda}_t} = \tilde{\lambda}|_{\tilde{\Lambda}_{t'}}$ para todo $t, t' \in \mathbb{R}$. \square

Dejando de lado cuestiones relativas a la estructura infinito-dimensional de los espacios involucrados, la cuestión inmediata a resolver es la siguiente: ¿Cuál es la relación entre las soluciones de este sistema dinámico y las extremales asociadas al funcional definido sobre las secciones de $\tilde{\Lambda}$ por $\tilde{\lambda}$? La respuesta es que bajo hipótesis de regularidad razonables, existe una correspondencia uno a uno entre dichas soluciones y los extremales.

5.5.4. Sistema dinámico sobre $\Gamma(\tilde{\Lambda}_t)$ y EDS de Hamilton-Cartan. Vincularemos ahora el sistema dinámico construido sobre la hoja de tiempo constante $\tilde{\Lambda}_t$ con el EDS de Hamilton-Cartan, cuyas secciones integrales, en el caso bivariante, son las extremales del problema variacional que estamos describiendo.

Primero vamos a establecer un resultado importante relativo a formas sobre un espacio de secciones. Para ello sea $F \xrightarrow{\pi} B$ un fibrado sobre B variedad compacta, y adoptemos la definición siguiente.

Definición 42. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ defínase el fibrado $Z_k^{n+k}(F) \xrightarrow{\tilde{\tau}_F^{n+k}} F$ en el cual la fibra sobre $e \in F$ viene determinada por

$$Z_k^{n+k}(F)|_e := \left\{ \alpha \in \bigwedge^{n+k} (T_e^* F) : V_1 \lrcorner \cdots V_{k+1} \lrcorner \alpha = 0 \quad \forall V_1, \dots, V_{k+1} \in V_e F \right\}.$$

Este conjunto será denominado espacio de las $n+k$ -formas k -semibásicas. Diremos que una forma no nula α pertenece a Z_k^\bullet propiamente sii $\alpha \in Z_k^\bullet$ aunque $\alpha \notin Z_{k-1}^\bullet(F)$.

Tomemos sobre F una $n+k$ -forma $\phi \in \Omega^{n+k}(F)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n = \dim B$, y sobre $\Gamma(F)$ definamos la k -forma Φ via

$$(23) \quad \Phi|_\sigma(V_1, \dots, V_k) := \int_B \sigma^* (\hat{V}_1 \lrcorner \cdots \hat{V}_k \lrcorner \phi).$$

En este contexto puede demostrarse la proposición siguiente.

Proposición 18. Supóngase que $\phi \in \Gamma(Z_k^{n+l}(F))$ propiamente para $l \leq k$, y sea Φ definido por la ecuación (23). Entonces $\Phi = 0$ sii $\phi = 0$.

Nota 3. Podemos reformular la proposición anterior de la forma siguiente: La aplicación $\phi \mapsto \Phi$ es inyectiva cuando se la restringe a las formas propias de $\Gamma(Z_k^{n+l}(F))$.

DEMOSTRACIÓN. Es inmediato probar que $\phi = 0$ implica $\Phi = 0$. Para la demostración de la afirmación recíproca, notemos que $\Phi = 0$ implica $\int_B \sigma^* (\hat{V}_1 \lrcorner \cdots \lrcorner \hat{V}_l \lrcorner \phi) = 0$ para todo $\sigma \in \Gamma(F)$, con V_1, \dots, V_l vectores verticales definidos sobre $\text{Im } \sigma$; entonces $\hat{V}_1 \lrcorner \cdots \lrcorner \hat{V}_l \lrcorner \phi = 0$ para cualquier colección de l vectores verticales, y esto implica que $\phi \in Z_{l-1}(F)$. Por lo tanto $\phi = 0$. \square

Supongamos que tenemos un problema Lepage equivalente $(\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}, 0)$ sobre el fibrado $\tilde{\Lambda} \rightarrow M$ junto a una foliación compatible $\mathcal{F}(\tilde{\Lambda})$ con Σ compacto; para cada $\tau \in \mathbb{R}$ podemos definir el siguiente EDS sobre \tilde{L}

$$(24) \quad \mathcal{I}_\tau := i_\tau^* (\mathcal{I} | \tilde{\Lambda}_\tau),$$

donde $i_\tau : \tilde{L} \hookrightarrow \tilde{\Lambda}$ es la inclusión con imagen $\tilde{\Lambda}_\tau$. Éste será un objeto fundamental en las próximas secciones, por estar íntimamente relacionado con los vínculos de Dirac obtenidos a partir del dato dinámico asociado al problema variacional en cuestión. Podemos establecer la siguiente caracterización para las soluciones del sistema dinámico asociado a estos datos.

Proposición 19. Sea el problema variacional $(\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}, 0)$ con foliación compatible $\mathcal{F}(\tilde{\Lambda})$ y Σ compacto, y para cada $\tau \in \mathbb{R}$ defínase las formas $\Omega_\tau \in \Omega^{n+1}(\tilde{\Lambda}_\tau)$, $\mathcal{H}_\tau \in \Omega^{n-1}(\tilde{\Lambda}_\tau)$ mediante

$$\begin{aligned} \Omega_\tau &:= i_\tau^* d\tilde{\lambda} | \tilde{\Lambda}_\tau, \\ \mathcal{H}_\tau &:= i_\tau^* (\hat{Z}_0 \lrcorner \tilde{\lambda}) | \tilde{\Lambda}_\tau. \end{aligned}$$

Entonces un par $(\sigma_\tau, X_\tau) \in T_{\sigma_\tau} \Gamma(\tilde{L})$ satisface las ecuaciones de Hamilton para secciones

$$(25) \quad (X_\tau \lrcorner \omega_\tau) |_{\sigma_\tau} = d\mathcal{H}_\tau |_{\sigma_\tau}$$

si y sólo si se verifica la siguiente ecuación

$$(26) \quad \sigma_\tau^* (V \lrcorner (X_\tau \lrcorner \Omega_\tau - d\mathcal{H}_\tau)) = 0, \quad \forall V \in \Gamma(\sigma_\tau^* (V\tilde{L})).$$

DEMOSTRACIÓN. Es claro que si vale la ecuación (26), entonces se verifica (25), si se utiliza el corolario 6.

Inversamente, si suponemos que vale la ecuación (25) y usamos el corolario 6, podemos escribir

$$\int_\Sigma \sigma_\tau^* (V \lrcorner X_\tau \lrcorner \Omega_\tau - V \lrcorner d\mathcal{H}_\tau) = 0$$

para todo V campo vertical definido sobre σ_τ . Como los vectores verticales pueden tener su soporte en cualquier abierto de Σ (basta multiplicarlo por una función convenientemente elegida) entonces esto implica la ecuación (26). \square

Nota 4. Para un tratamiento en profundidad del caso $n = 1$, véase [Hsu92].

¿De qué manera esta proposición relaciona extremales del problema variacional $(\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}, 0)$ con soluciones de las ecuaciones de Hamilton sobre $\Gamma(\tilde{\Lambda}_\tau)$ determinadas por el par $(\omega_\tau, \mathcal{H}_\tau)$? Bien, teniendo en cuenta el EDS de Hamilton-Cartan, Eq. (16), su conclusión es que el par (σ_τ, X_τ)

5.6. Sobre estructuras de Dirac en una teoría de campos

será una solución para las ecuaciones de Hamilton sobre $\Gamma(\tilde{\Lambda}_\tau)$ definidas a partir de ω_τ y H_τ si y sólo si

$$V_\tau := \hat{Z}_0 + X_\tau$$

está en el espacio polar del elemento $n - 1$ -integral $\sigma_{\tau^*}(T\Sigma)$ para dicho EDS. Por lo tanto si existe una bandera regular para este EDS cuyos términos finales sean

$$0 \subset \cdots \subset \sigma_{\tau^*}(T\Sigma) \subset \langle \sigma_{\tau^*}(T\Sigma), V_\tau \rangle,$$

la variedad integral de dimensión n que pasa por ella generará soluciones para la ecuación de Hamilton, y viceversa, cada solución de la ecuación de Hamilton nos permitirá construir tales variedades integrales para dicho EDS. El capítulo 7 utilizará esta relación fundamental en la búsqueda de relaciones entre el EDS (24) y los vínculos de Dirac asociados a las ecuaciones de Hamilton sobre $\Gamma(\tilde{\Lambda}_\tau)$.

5.6. Sobre estructuras de Dirac en una teoría de campos

Describiremos aquí algunas ideas que aportan al problema de definición de lo que entendemos por estructuras de Dirac [YM06a, YM06b] para una teoría de campos, que se derivan naturalmente del esquema introducido. Éste no pretende ser un análisis exhaustivo ni definitivo, mereciendo ser explorado con mayor profundidad.

5.6.1. Estructuras de Dirac en teorías de campo. La construcción esbozada en la sección anterior permite intuir la manera en la cual definir una estructura de Dirac asociada a una teoría de campos. Recordemos para ello la definición de este tipo de estructura: Dada una variedad Q , se define el producto sobre $TQ \oplus T^*Q$

$$\langle (X_1, \alpha_1), (X_2, \alpha_2) \rangle = \alpha_1(X_2) + \alpha_2(X_1).$$

Una *estructura de Dirac* en Q es un subfibrado vectorial $D \subset TQ \oplus T^*Q$ isotrópico respecto del producto. En el caso de que Q sea una variedad presimpléctica con 2-forma ω , existe una estructura de Dirac D_ω definida mediante

$$D_\omega|_m := \{(X, X \lrcorner \omega|_m) : X \in T_m Q\}.$$

Con esto en mente, tomamos $Q := \Gamma(\Lambda_0)$, esto es, el espacio de secciones del fibrado de campos a tiempo 0, junto con la estructura presimpléctica definida más arriba. Ya tenemos una idea acerca de lo que significa el espacio TQ en este caso: Uno define $T_\Sigma(\Gamma(\Lambda_0)) := \Sigma^*(V\Lambda_0)$. Por lo tanto el cotangente será algo que pueda contraerse con estos elementos y conduzca a un número real. Si $n = \dim M$ (M , recordemos, es la base del fibrado Λ) entonces podemos definir el subfibrado $\mathcal{Z}_0^{(1)} \subset \bigwedge^\bullet(T^*\Lambda_0)$ tal que

$$\mathcal{Z}_0^{(1)}|_l := \left\{ \alpha \in \bigwedge^n(T_l^*\Lambda_0) : V_1 \lrcorner V_2 \lrcorner \alpha = 0 \forall V_1, V_2 \in V_l \Lambda_0 \right\}.$$

Para Σ sección de Λ_0 y $V \in \Sigma^*(V\Lambda_0)$, uno puede definir su contracción contra un elemento $\alpha \in \Sigma^*(\mathcal{Z}_0^{(1)})$ mediante

$$\langle V, \alpha \rangle := \int_{M_0} \Sigma^*(V \lrcorner \alpha),$$

por lo cual, formalmente al menos, uno puede tomar $T_\Sigma^*\Gamma(\Lambda_0) \equiv \Sigma^*(\mathcal{Z}_0^{(1)})$, teniendo en cuenta que la contracción involucra tomar pullback a lo largo de Σ e integración a lo largo de la base M_0 .

Luego la estructura de Dirac en $\Gamma(\Lambda_0)$ asociada al problema variacional tipo Lepage será

$$D_{\Omega_0}|_\Sigma := \left\{ (V, \alpha) \in \Sigma^*(V\Lambda_0 \oplus \mathcal{Z}_0^{(1)}) : \alpha := V \lrcorner d\lambda \right\}.$$

El dato dinámico viene fijado por $\mathcal{H} := \partial_0 \lrcorner \lambda$: Una solución para las ecuaciones de Hamilton en $\Sigma \in \Gamma(\Lambda_0)$ es una sección $X \in \Gamma(\Sigma^*(V\Lambda_0))$ tal que $(X, \mathbf{d}\mathcal{H}) \in D_{\Omega_0}|_{\Sigma}$.

Nota 5. Esta estructura de Dirac puede obtenerse a partir de la usual considerando restricción a la subvariedad Λ_0 : Efectivamente, de acuerdo con [Dor93], la estructura de Dirac usual asociada a una estructura diferencial es el complejo de De Rham junto a los campos vectoriales sobre la variedad en cuestión. Aquí hemos restringido los campos a campos verticales (evaluados sobre la subvariedad) y restringimos el espacio de formas al subcomplejo

$$\mathcal{Z}_0^{(0)} \rightarrow \mathcal{Z}_0^{(1)} \rightarrow \dots$$

donde

$$\mathcal{Z}_0^{(k)} := \{\omega \in \Omega^n(\Lambda_0) \text{ tal que } V_1 \lrcorner \dots \lrcorner V_{k+1} \lrcorner \omega = 0 \text{ para todo } V_1, \dots, V_{k+1} \in V\Lambda_0\}$$

Llamemos $D_0 \subset T\Lambda_0 \oplus \bigwedge^n(T^*\Lambda_0)$ a la estructura de Dirac tal que su fibra viene dada por

$$D_0|_l := \left\{ (V, \alpha) \in V_l\Lambda_0 \oplus \mathcal{Z}_0^{(1)}|_l : \alpha = V \lrcorner \mathbf{d}\lambda|_l \right\}.$$

Entonces $D_{\Omega_0}|_{\Sigma} = \Gamma(\Sigma^*(D_0))$. Por consiguiente, uno puede considerar a las estructuras de Dirac sobre $\Gamma(\Lambda_0)$ como espacios de la forma $D|_{\Sigma} = \Gamma(\Sigma^*(D))$ para alguna estructura de Dirac D sobre M_0 .

Método de Dirac

LEGÓ la hora de describir el método de Dirac, o más precisamente, el algoritmo de Gotay, Nester y Hinds para sistemas dinámicos (M, ω, H) compuestos de una variedad presimpléctica (M, ω) y una función hamiltoniana H . Empezaremos describiendo el caso más simple, esto es, el caso de dimensión finita, para luego pasar a los casos en los que las variedades en cuestión están modeladas sobre espacios de Banach.

6.1. Descripción geométrica

Sea (M, ω) una variedad simpléctica de dimensión finita y $(N, \omega|_N)$ subvariedad simpléctica de M ; indiquemos mediante $\iota : N \hookrightarrow M$ la inmersión.

Lema 28. *El espacio tangente a M en un punto $n \in N \subset M$ puede descomponerse como sigue:*

$$(27) \quad T_n M = T_n N \oplus (T_n N)^\perp$$

donde $(\cdot)^\perp$ indica complemento ortogonal simpléctico.

DEMOSTRACIÓN. Como N es subvariedad simpléctica, la restricción de ω a $T_n N$ es no degenerada; como $\ker(\omega|_N) = T_n N \cap (T_n N)^\perp$, resulta lo que queríamos. \square

Indicaremos por V_F el campo vectorial hamiltoniano asociado a la función F (sobre la variedad que correspondiera).

Corolario 7. *Sea $\pi_N : T_N M \rightarrow TN$ el proyector inducido por el lema anterior. Si $F \in C^\infty(M)$, entonces*

$$V_{F|_N} = \pi_N(V_F).$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$\begin{aligned} d(F|_N) &= dF|_N \\ &= (V_F \lrcorner \omega)|_N \\ &= (\pi_N(V_F) \lrcorner \omega)|_N \\ &= \pi_N(V_F) \lrcorner (\omega|_N), \end{aligned}$$

lo que demuestra lo que queríamos. \square

El proyector π_N admite una descripción interesante cuando N es la superficie de nivel de una aplicación submersiva $\Psi : M \rightarrow P$.

Teorema 10. *Sea $p_0 \in P$ un valor regular para Ψ , y definamos $N := \Psi^{-1}(p_0)$. Entonces vale la siguiente descomposición*

$$T_n^* M = \omega|_n(T_n N) \oplus (\Psi_*|_n)^*(T_{p_0} P)$$

para cada $n \in N$.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $\ker(\Psi_*|_n) = T_n N$, por lo cual

$$T_n N = ((\Psi_*|_n)^*(T_{p_0} P))^0;$$

de igual manera vale que

$$(\omega|_n(T_n N))^0 = (T_n N)^\perp,$$

por lo cual la descomposición de $T_n^* M$ inducida a partir de (27) via anuladores demuestra el teorema. \square

A partir de esta demostración podemos concluir el corolario siguiente.

Corolario 8. *Las descomposiciones anteriores se conservan por la biyección $\omega|_n : T_n M \xrightarrow{\sim} T_n^* M$.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente $\omega|_n$ aplica $T_n N$ en $\omega|_n(T_n N)$; además de la demostración del teorema anterior resulta que

$$(T_n N)^0 = (\Psi_*|_n)^*(T_{p_0} P),$$

de lo cual se deduce que $\omega|_n((T_n N)^\perp) = (\Psi_*|_n)^*(T_{p_0} P)$. \square

6.2. Clasificación parcial de vínculos

Vamos ahora a suponer que tenemos una submersión $\Psi : M \rightarrow P$ y $N \subset M$ es la superficie de nivel de P :

$$N := \Psi^{-1}(p_0).$$

La naturaleza de los vínculos representados por Ψ puede clasificarse parcialmente teniendo en cuenta su interacción con la estructura simpléctica como sigue:

1. *Vínculos de primera clase* $\stackrel{\text{def}}{\iff} (T_n N)^\perp \subset T_n N$ para todo $n \in N \iff N$ es una subvariedad coisotrópica.
2. *Vínculos de segunda clase* $\stackrel{\text{def}}{\iff} T_n N \cap (T_n N)^\perp = \{0\}$ para todo $n \in N$.

Es evidente entonces que la clasificación no puede ser exhaustiva. Como vimos en la sección anterior, si N es subvariedad simpléctica, entonces Ψ representa vínculos de segunda clase; la implicación opuesta vale también. Además tenemos el teorema siguiente.

Teorema 11. *Ψ representa una colección de vínculos de segunda clase si y sólo si*

$$\omega|_n(\ker \Psi_*|_n) \cap (\Psi_*|_n)^*(T_{p_0} P) = 0$$

para todo $n \in N$.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos entonces que $T_n N \cap (T_n N)^\perp = 0$ y que $T_n N = \ker(\Psi_*|_n)$; el resto sale del corolario 8. \square

Sea (\mathcal{U}, ϕ) un entorno coordenado de p_0 tal que $\phi : p \mapsto (f_1(p), \dots, f_r(p))$ para todo $p \in \mathcal{U}$. Luego $\{df_1|_{p_0}, \dots, df_r|_{p_0}\}$ es una base para $T_{p_0} P$ y por consiguiente

$$\mathcal{B} := \{d(f_1 \circ \Psi)|_n, \dots, d(f_r \circ \Psi)|_n\}$$

será una base para $(\Psi_*|_n)^*(T_{p_0} P)$. Vale entonces el resultado siguiente.

Proposición 20. *El conjunto $\{V_{f_i \circ \Psi}(n)\}_{i=1}^r$ es una base para $(T_n N)^\perp$.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $V_{f_i \circ \Psi}(n) = (\omega|_n)^{-1}(d(f_i \circ \Psi)|_n)$ para todo $n \in N$; de aquí resulta la proposición debido a que $\omega|_n$ respeta las descomposiciones, por lo cual

$$(T_n N)^\perp = (\omega|_n)^{-1}((\Psi_*|_n)^*(T_{p_0} P))$$

para todo $n \in N$. \square

6.3. Algoritmo de Gotay, Nester y Hinds

Para $F \in C^\infty(M)$ tendremos que

$$V_{F|N}(n) = V_F(n) - \sum_{i=1}^r a^i(n) V_{f_i \circ \Psi}(n)$$

donde los coeficientes $a^i(n)$ deben satisfacer el sistema lineal

$$\{F, f_j \circ \Psi\}(n) = \sum_{i=1}^r a^i(n) \{f_i \circ \Psi, f_j \circ \Psi\}(n).$$

Dado que $C_{ij}(n) := \{f_i \circ \Psi, f_j \circ \Psi\}(n)$ son los coeficientes de una matriz que resulta de la contracción entre todos los elementos de sendas bases de un espacio y su dual, tal matriz resulta invertible, de donde resulta la siguiente expresión

$$a^i(n) = \sum_{j=1}^r C^{ji}(n) \{F, f_j \circ \Psi\}(n).$$

Por lo tanto

$$V_{F|N}(n) = V_F(n) - \sum_{i,j=1}^r C^{ji}(n) \{F, f_j \circ \Psi\}(n) V_{f_i \circ \Psi}(n)$$

y finalmente, dado que $V_{F|N}(n) \cdot G = \{F|N, G|N\}(n)$, resulta la expresión clásica

$$\{F|N, G|N\}(n) = \{F, G\}(n) - \sum_{i,j=1}^r C^{ji}(n) \{F, f_j \circ \Psi\}(n) \{f_i \circ \Psi, G\}(n)$$

6.3. Algoritmo de Gotay, Nester y Hinds

Describamos ahora el algoritmo desarrollado por Gotay, Nester y Hinds en el artículo [GNH78] (también conocido como algoritmo de Gotay, Nester y Hinds). En la sección anterior obtuvimos el corchete de una subvariedad simpléctica en un espacio de fases bajo dos hipótesis demasiado fuertes para nuestras necesidades, a saber:

1. la variedad M se supuso de dimensión finita, y
2. se supuso conocida la subvariedad en cuestión.

El algoritmo de Gotay, Nester y Hinds (o, más generalmente, el método de Dirac) provee instrucciones precisas para encontrar esta subvariedad; más aún, suponiendo que la variedad presimpléctica original está modelada sobre un espacio de Banach reflexivo, y que la forma presimpléctica es topológicamente cerrada (i.e. aplica cerrados de TM en cerrados de T^*M), este algoritmo da fórmulas bastante explícitas para describir la subvariedad de vínculos.

6.3.1. Teoría geométrica de vínculos. Como ya hemos advertido, nuestra configuración inicial es un triple (M, ω, N) , donde (M, ω) es una variedad presimpléctica modelada sobre un espacio de Banach, y $N \subset M$ es una subvariedad¹ de M .

Definición 43. El complemento simpléctico de N es el conjunto $(TN)^\perp$ definido mediante

$$(TN)^\perp := \{Z \in T_N M : (\omega|N)(Z, W) = 0 \text{ para todo } W \in TN\}.$$

Sea $j : N \hookrightarrow M$ la inclusión de N en M ; entonces tenemos la siguiente caracterización del complemento simpléctico de N .

Proposición 21. El complemento simpléctico puede describirse mediante

$$(TN)^\perp = \{Z \in T_N M : j^*(Z \lrcorner \omega) = 0\}.$$

¹En el sentido técnico de la definición 37.

Esta descripción nos permitirá escribir el algoritmo de Gotay, Nester y Hinds de una manera más conveniente para el cálculo. Para ello introduzcamos la definición siguiente.

Definición 44. Sea $S \subset E$ un subespacio de E . Su anulador $S^0 \subset E'$ es el conjunto de todos los funcionales continuos $\beta \in E'$ tales que $\beta(v) = 0$ para todo $v \in S$.

Sobre espacios de Banach reflexivos, tenemos el siguiente resultado.

Lema 29. Si E es un espacio de Banach reflexivo y $S \subset E$ es un subespacio, entonces

$$(S^0)^0 = \bar{S}.$$

Si una variedad M está modelada sobre un espacio de Banach reflexivo, entonces diremos que es una *variedad reflexiva*. Entonces tenemos la siguiente caracterización de los complementos simplécticos, útil, como ya dijimos, al aplicar efectivamente el algoritmo de Gotay, Nester y Hinds.

Proposición 22. Si (M, ω) es una variedad presimpléctica, donde M es reflexiva y la aplicación $Z \mapsto Z^b := Z \lrcorner \omega$ es topológicamente cerrada, entonces

$$(TN^\perp)^0 = (TN)^b.$$

6.3.2. Algoritmo de vínculos. Las siguientes consideraciones están basadas en parte en las notas manuscritas [Got] y en el artículo [GNH78]. Supongamos que tenemos una variedad presimpléctica (M_0, ω_0) , y una función $H_0 \in C^\infty(M_0)$. Entonces definimos la sucesión de variedades presimplécticas con hamiltoniano (M_k, ω_k, H_k) , $k \in \mathbb{N}$ mediante la fórmula recursiva

$$M_{k+1} := \left\{ m \in M_k : \mathbf{d}H_k|_m(X) = 0 \text{ para todo } X \in (T_m M_k)^\perp \right\}$$

donde para toda subvariedad $N \subset M$ de una variedad presimpléctica (M, ω) y $n \in N$ se define, como se dijo más arriba, mediante

$$(T_n N)^\perp = \{ Z \in T_n M : \omega|_n(Z, X) = 0 \text{ para todo } X \in T_n N \}.$$

Dada la caracterización introducida por la proposición 22, si M es reflexiva y ω topológicamente cerrada, tenemos que

$$M_{k+1} := \left\{ m \in M_k : \mathbf{d}H_k|_m \in (T_m M_k)^b \right\}$$

dado que, como la restricción de una aplicación cerrada es cerrada y los subespacios cerrados de un espacio de Banach reflexivo son reflexivos [Con85], cada par $(M_k, \omega|_{M_k})$ consta de una variedad reflexiva y una forma presimpléctica topológicamente cerrada. Suponiendo que M_{k+1} es una subvariedad de M_k , entonces se definen las restricciones

$$\omega_{k+1} := \omega_k|_{M_{k+1}}, \quad H_{k+1} := H_k|_{M_{k+1}}.$$

En caso de que la subvariedad M_0 sea de dimensión finita, uno tiene las alternativas siguientes:

1. $M_k = \emptyset$ para algún k , en cuyo caso no hay solución posible para el problema dinámico planteado por los datos.
2. M_k es discreto para algún k , de donde se sigue que las únicas soluciones posibles son puntos fijos del vector de evolución, o
3. $M_{k+1} = M_k =: M_f$ no vacío a partir de algún valor del índice. La variedad M_f es lo que se denomina *variedad final de vínculo*, y allí el problema dinámico tiene siempre solución (aunque por lo general ésta no es única).

El caso de dimensión infinita agrega otra alternativa: una sucesión infinita $M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots$ de variedades no vacías. La variedad que resulta de la intersección de todos los términos en la sucesión debería ser la variedad final de vínculos en tal caso.

6.4. Ejemplos motivadores

Como una introducción al capítulo siguiente, vamos a aplicar el algoritmo recién descrito a un par de problemas clásicos, esto es, para un sistema mecánico descrito por el principio de Hamilton-Pontrjagin, y el sistema dinámico subyacente al problema variacional canónico asociado a una teoría de campo de primer orden. La conclusión es importante: Se reobtiene de esta forma la teoría usual de vínculos [GIM04, HT94]. Esto motiva el método desarrollado en el capítulo siguiente en pos de relacionar los vínculos de Dirac de un problema variacional no estándar con el EDS que describe a sus ecuaciones de movimiento.

6.4.1. Principio de Hamilton-Pontrjagin revisitado. Volvemos una vez más al principio de Hamilton-Pontrjagin; en particular, estudiaremos el método general esbozado en el capítulo anterior para asociar un sistema dinámico a los datos correspondientes al problema variacional subyacente a este principio. Verificaremos que el algoritmo de Gotay, Nester y Hinds conduce en este caso a las ecuaciones correctas bajo condiciones de regularidad de la función lagrangiana.

Ejemplo 6.4A: Principio de Hamilton-Pontrjagin - Cont. Seguiremos utilizando aquí la notación del ejemplo 4.3B; como $M_0 = \mathbb{R}_0 = \{0\}$, la foliación compatible canónica de $\tilde{\Lambda}$ es $\mathcal{F}(\tilde{\Lambda}) := (TQ \oplus T^*Q, \partial_t; \{0\}, \partial_t)$, las secciones de $\tilde{\Lambda}_0 \rightarrow \{0\}$ son simplemente puntos de $\tilde{\Lambda}_0$, por lo cual $P_{\mathcal{F}(\tilde{\Lambda})} = \{0\} \times (TQ \oplus T^*Q)$, y las integrales se reducen a evaluación en dichos puntos, esto es, si $f \in \Omega^0(\tilde{\Lambda}) = C^\infty(\tilde{\Lambda})$, entonces

$$\int_{\{0\}} \sigma^*(f) = f(\sigma(0)).$$

Por consiguiente $\omega_0 = \mathbf{d}p \wedge \mathbf{d}q$ y $H_0(q, \dot{q}, p) = p\dot{q} - L(q, \dot{q})$, y podemos aplicar el algoritmo de Gotay, Nester y Hinds en $TQ \oplus T^*Q$. Como $\ker \omega_0 = \{(0, \delta\dot{q}, 0)\}$, resulta el vínculo primario $\mathbf{d}H_0(\delta\dot{q}) = 0$, por lo cual la subvariedad de vínculos correspondiente será

$$M_1 = \left\{ (q, \dot{q}, p) : p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \right\}.$$

Si M_1 es transversal a la proyección $p_2 : TQ \oplus T^*Q \rightarrow T^*Q$ (lo cual corresponde a lagrangianos regulares), dicha proyección induce un difeomorfismo entre M_1 y T^*Q , el cual aplica la estructura simpléctica de este último espacio en la forma presimpléctica $\omega_1 := \omega_0|_{M_1}$, y el algoritmo debe terminar aquí. Para ver que la condición de transversalidad adoptada es equivalente a la de regularidad sobre el lagrangiano, notemos que el espacio tangente a M_1 es el núcleo de la colección de 1-formas $\rho_i := \mathbf{d}p_i - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^i} \mathbf{d}\dot{q}^k - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^l \partial \dot{q}^i} \mathbf{d}\dot{q}^l$ (para $i = 1, \dots, n$, con $n = \dim Q$), por lo cual si $M_1 \perp p_2$, deben existir $\mu_i, \nu^i \in \mathbb{R}^n$ para cada $i = 1, \dots, n$ tales que los vectores

$$v_i := \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \sum_{j=1}^n \mu_j^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}, \quad w^i := \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{k=1}^n \nu^{ik} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}$$

son tangentes a M_1 (recordar que M_1 y las fibras de p_2 tienen dimensiones complementarias, y que además $\ker(p_2)_* = \left\langle \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} : i = 1, \dots, n \right\rangle$) y linealmente independientes. Pero esto implica que, para cada $i, j = 1, \dots, n$, debe valer que

$$\mu_j^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} = 0, \quad \nu^{ik} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^j} - \delta_j^i = 0.$$

Este par de ecuaciones sólo puede verificarse bajo condiciones de regularidad de la función L .

▲

6.4.2. Teorías de campo de primer orden. Para las teorías de campos de primer orden ocurre algo similar.

Ejemplo 6.4B: Teorías de campo de primer orden - Cont. Queremos encontrar el sistema dinámico asociado a la estructura multisimpléctica para este tipo de teorías de campos hallada en el ejemplo 4.3C; aquí designaremos genéricamente mediante $\Gamma(\cdot)$ el espacio de secciones del fibrado correspondiente, respecto de alguna estructura diferenciable no especificada. Luego localmente tenemos que $\tilde{\lambda} = m_\alpha \wedge (\mathbf{d}u^\alpha - u_k^\alpha \mathbf{d}x^k) - L \mathbf{d}x^0 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{n-1}$, por lo cual

$$\mathbf{d}\tilde{\lambda} = \mathbf{d}m_\alpha \wedge (\mathbf{d}u^\alpha - u_k^\alpha \mathbf{d}x^k) - \mathbf{d}L \wedge \mathbf{d}x^0 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{n-1} - (-1)^{n-1} m_\alpha \wedge \mathbf{d}u_k^\alpha \wedge \mathbf{d}x^k,$$

y teniendo en cuenta que $m_\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$, obtendremos

$$(u_k^\alpha \mathbf{d}m_\alpha \wedge \mathbf{d}x^k)|_{N_0} = (m_\alpha \wedge \mathbf{d}u_k^\alpha \wedge \mathbf{d}x^k)|_{N_0} = 0$$

donde $N_0 := \{P \in \hat{\mathcal{U}} \oplus \mathcal{Z} : x^0(P) = 0\}$. Por lo tanto si

$$\tilde{N}_0 := \{m \in M : x^0(m) = 0\},$$

a partir de la Ec. (20), obtendremos para la forma presimpléctica sobre $\Gamma(N_0)$ la expresión

$$\omega^x|_\sigma(X, Y) = \int_{\tilde{N}_0} (\delta m_\alpha^0 \delta v^\alpha - \delta n_\alpha^0 \delta u^\alpha) \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{n-1}$$

teniendo presente que $X := (0; \delta u^\alpha, \delta u_k^\alpha, \delta m_\alpha)$, $Y := (0; \delta v^\alpha, \delta v_k^\alpha, \delta n_\alpha)$ indica un par de vectores tangentes en $\sigma \in \Gamma(N_0)$. Introduciendo las coordenadas

$$m_\alpha := m_\alpha^k \mathbf{d}_k x,$$

con el símbolo $\mathbf{d}_k x$ definido como

$$\mathbf{d}_k x := \partial_{x^k} \lrcorner (\mathbf{d}x^0 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{n-1}) = (-1)^k \mathbf{d}x^0 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{d}x^k} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{n-1},$$

entonces veremos que, para la restricción de la $n-1$ -forma

$$\partial_{x^0} \lrcorner \tilde{\lambda} = (\partial_{x^0} \lrcorner m_\alpha) \wedge (\mathbf{d}u^\alpha - u_k^\alpha \mathbf{d}x^k) - L \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{n-1} - (-1)^{n-1} u_0^\alpha m_\alpha$$

a N_0 , puede demostrarse que vale la expresión siguiente

$$\partial_{x^0} \lrcorner \tilde{\lambda}|_{N_0} = (\partial_{x^0} \lrcorner m_\alpha)|_{N_0} \wedge (\mathbf{d}u^\alpha - u_A^\alpha \mathbf{d}x^A) - [L - (-1)^n u_0^\alpha m_\alpha^0] \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{n-1},$$

donde las letras mayúsculas toman valores en el rango $1, \dots, n-1$. Finalmente

$$\begin{aligned} (\partial_{x^0} \lrcorner m_\alpha) \wedge \mathbf{d}x^B &= m_\alpha^A (\partial_{x^0} \lrcorner \mathbf{d}_A x) \wedge \mathbf{d}x^B \\ &= (-1)^{n-1} m_\alpha^B \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{n-1} \end{aligned}$$

por lo que, a partir de la Ec. (21), la función hamiltoniana $H^x \in C^\infty(\Gamma(N_0))$ resultará

$$\begin{aligned} H^x(\sigma) &:= \int_{\tilde{N}_0} \sigma^* \left(\partial_{x^0} \lrcorner \tilde{\lambda}|_{N_0} \right) \\ &= \int_{\tilde{N}_0} \left\{ (-1)^{n-1} m_\alpha^B [(\partial_B u^\alpha) - u_B^\alpha] - L - (-1)^{n-1} u_0^\alpha m_\alpha^0 \right\} \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{n-1}. \end{aligned}$$

Estamos listos para tomar contacto con la teoría usual de vínculos para este tipo de teorías. Para hacerlo, es necesario calcular los vínculos primarios asociados al dato dinámico recién

6.4. Ejemplos motivadores

hallado. Esto puede llevarse adelante notando que $\ker \omega^x = \{(0; 0, \delta u_k^\alpha, \delta m_\alpha^A)\}$, por lo cual los vínculos primarios para este sistema dinámico serán

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{d}H^x (\delta u_k^\alpha) \\ &= \int_{\check{N}_0} \left[(-1)^n m_\alpha^k - \frac{\partial L}{\partial u_k^\alpha} \right] \delta u_k^\alpha \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{n-1}, \\ 0 &= \mathbf{d}H^x (\delta m_\alpha^A) \\ &= \int_{\check{N}_0} (-1)^{n-1} [(\partial_B u^\alpha) - u_B^\alpha] \delta m_\alpha^B \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{n-1}. \end{aligned}$$

El conjunto de vínculos primarios estará entonces definido mediante

$$C_1 := \left\{ (-1)^n m_\alpha^k - \frac{\partial L}{\partial u_k^\alpha}, (\partial_B u^\alpha) - u_B^\alpha : \right. \\ \left. : \alpha = 1, \dots, \dim V, k = 0, \dots, n-1, B = 1, \dots, n-1 \right\};$$

de modo que $M_1 \subset \Gamma(N_0)$, el lugar geométrico de los ceros de C_1 , es una variedad presimpléctica con un hamiltoniano, en donde ambas estructuras están definidas via restricción. Sea ahora \check{N}_0 el fibrado trivial $\check{N}_0 \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m(n-1)} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ sobre \check{N}_0 con coordenadas $(x; \phi^\alpha, \phi_B^\alpha, \phi_0^\alpha, \pi_\alpha)$; por consiguiente la aplicación $\Pi : N_0 \rightarrow \check{N}_0$ definida mediante

$$\Pi : \begin{cases} \phi^\alpha = u^\alpha, \\ \phi_B^\alpha = u_B^\alpha, \\ \phi_0^\alpha = u_0^\alpha, \\ \pi_\alpha = (-1)^n m_\alpha^0 \end{cases}$$

tiene las propiedades detalladas en el siguiente lema.

Lema 30. Sea $L_1 \in C^\infty(N_0)$ la única aplicación tal que $L_1 \circ \Pi = L$. El conjunto $\tilde{M}_1 := \Pi \circ (M_1)$ está compuesto por las secciones de \check{N}_0 definidas mediante

$$\sigma : x \mapsto (x; \phi^\alpha(x), \phi_B^\alpha(x), \phi_0^\alpha(x), \pi_\alpha(x))$$

y tales que

$$\pi_\alpha = \frac{\partial L_1}{\partial \phi_0^\alpha}, \quad \phi_B^\alpha = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^B}.$$

Si \tilde{M}_1 es una variedad, entonces la forma presimpléctica dada por

$$\omega_1 = \int_{\check{N}_0} \mathbf{d}\pi_\alpha \wedge \mathbf{d}\phi^\alpha \wedge \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{n-1}$$

verifica que $(\Pi \circ)^* \omega_1 = \omega^x|_{M_1}$; asimismo la función hamiltoniana

$$H_1(\sigma) = \int_{\check{N}_0} \sigma^* (\phi_0^\alpha \pi_\alpha - L_1) \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{n-1}$$

satisface $(\Pi \circ)^* H_1 = H^x|_{M_1}$. La inyectividad de $(\Pi \circ)^*$ implica que estos requisitos definen unívocamente a tales estructuras.

Entonces el problema dinámico se reduce a resolver

$$X_{H_1} \lrcorner \omega_1 = \mathbf{d}H_1$$

sobre cada $\sigma : x \mapsto (x; \phi^\alpha(x), \phi_B^\alpha(x), \phi_0^\alpha(x), \pi_\alpha(x))$ tal que

$$\pi_\alpha = \frac{\partial L_1}{\partial \phi_0^\alpha}, \quad \phi_B^\alpha = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^B},$$

Capítulo 6. Método de Dirac

y éste es el esquema básico de la teoría usual para teorías de campos de primer orden; por consiguiente, los vínculos primarios desde el punto de vista "estándar" están relacionados vía Π con los vínculos primarios hallados en el esquema no estándar. ▲

Vínculos y sistemas diferenciales exteriores

VAMOS a relacionar aquí el conjunto de vínculos obtenidos de la aplicación exitosa del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds al dato dinámico (21), (20) asociado a un problema variacional de la forma $(\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}, 0)$, con los generadores de un sistema diferencial exterior que uno construye a partir de (una prolongación del) EDS de Hamilton-Cartan y la foliación de tiempo constante con la que se definió el dato dinámico. La demostración consta de varias etapas: Primero uno debe asegurarse que el EDS con el que se trabaja es involutivo, de manera de tener una identificación completa entre extremales del problema completo y soluciones del problema reducido a una hoja de tiempo constante.

7.1. Una caracterización útil de los vínculos

Como venimos diciendo, nuestro propósito es relacionar los vínculos de Dirac que aparecen al aplicar el algoritmo de Gotay, Nester y Hinds a una teoría de campos, con datos geométricos asociados al EDS de Hamilton-Cartan. Por consiguiente, vamos a caracterizar geoméricamente dichos vínculos; la siguiente descripción resulta ser útil para alcanzar este objetivo [GIM04].

Definición 45. *Dada una variedad presimpléctica (N, ω) con un hamiltoniano $H \in C^\infty(N)$, la subvariedad de vínculos es la subvariedad de N maximal respecto de la propiedad*

$$(28) \quad dH(TC^\perp) = 0$$

donde TC^\perp denota el (quizás singular) subfibrado de TN compuesto por los complementos simplécticos de las fibras del subfibrado TC . Una subvariedad en N que satisfaga la propiedad (28) se dice que es invariante respecto de la dinámica definida por (ω, H) .

Dado que necesitamos conocer los espacios tangentes para las subvariedades $\Gamma(\mathcal{K}) \subset \Gamma(\tilde{L})$ compuestas de las secciones integrales de un dado EDS \mathcal{K} , probaremos la proposición siguiente.

Lema 31. *Si el conjunto $\Gamma(\mathcal{K})$, con $\mathcal{K} \subset \Omega^\bullet(\tilde{L})$ un dado EDS, es una subvariedad en $\Gamma(\tilde{L})$, entonces su espacio tangente en $\sigma \in \Gamma(\mathcal{K})$ es el espacio vectorial*

$$T_\sigma \Gamma(\mathcal{K}) = \left\{ X \in \Gamma(\sigma^*(V\tilde{L})) : \sigma^*(\mathcal{L}_{\tilde{X}}\mathcal{K}) = 0 \right\},$$

donde el sombrero denota alguna extensión a $\mathfrak{X}(\tilde{L})$ de un elemento de $\Gamma(\sigma^*(V\tilde{L}))$.

DEMOSTRACIÓN. Bajo nuestras hipótesis, alcanza con derivar a lo largo de una curva para obtener el lema. \square

7.2. Secciones admisibles e involución

Nuestro punto de partida es un problema variacional no estándar $(\Lambda \rightarrow M, \lambda, \mathcal{I})$; suponiendo que existe un problema Lepage equivalente bivalente $(\tilde{\Lambda} \rightarrow M, \tilde{\lambda}, 0)$ con suryección $\nu : \tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda$, pasamos nuestro problema a un problema variacional sin restricciones diferenciales sobre

el nuevo fibrado $\tilde{\Lambda} \rightarrow M$. Las ecuaciones variacionales, como vimos, definen allí un EDS $\mathcal{I} \subset \Omega^\bullet(\tilde{\Lambda})$; las secciones integrales para este EDS son las soluciones clásicas de nuestra teoría de campos. Por consiguiente tenemos el EDS

$$(\mathcal{I}, \Omega := \mathbf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^n)$$

generado por las ecuaciones de movimiento, i.e.

$$(29) \quad \mathcal{I} := \left\langle V \lrcorner \mathbf{d}\tilde{\lambda} : V \in \Gamma(V\tilde{\Lambda}) \right\rangle_{\text{diff}},$$

y haciendo uso del teorema de Cartan-Kuranishi, hallamos un fibrado $\tilde{\Lambda}' \rightarrow M$, una submersión $\Pi : \tilde{\Lambda}' \rightarrow \tilde{\Lambda}$ y un EDS $(\mathcal{I}', \Omega') \subset \Omega^\bullet(\tilde{\Lambda}')$ que es n -involutivo y verifica

$$\Pi_* (V_n(\mathcal{I}', \Omega')) = V_n(\mathcal{I}, \Omega).$$

Nota 6. Es importante destacar los puntos siguientes.

- El EDS no puede utilizarse si las direcciones posibles de engrosamiento de variedades integrales de dimensión $n - 1$ descansan en la misma hoja de tiempo constante. La manera de evitar este hecho indeseable es tomando en cuenta en $V_n(\mathcal{I})$ sólo aquellos elementos integrales que satisfacen la condición de independencia; además están las propias condiciones de integrabilidad que uno debe admitir deben verificar los elementos integrales a través de los cuales pasa alguna solución. Este subconjunto de secciones puede ser descrito por las subvariedades integrales de dimensión n para un EDS involutivo \mathcal{I}' , obtenido a partir de \mathcal{I} mediante un número suficiente de prolongaciones.
- Se supone también que no hay 0-formas que tener en cuenta en \mathcal{I} y \mathcal{I}' ; cuando ello ocurre, deben incluirse las mismas en las definiciones de los fibrados $\tilde{\Lambda}$ y $\tilde{\Lambda}'$, esto es, redefiniendo tales conjuntos teniendo presente que las nuevas 0-formas se anulan sobre ellos. Los EDS correspondientes son simplemente el pullback de los originales.
- Otra suposición es que $\tilde{\Lambda} \rightarrow M$ admite una foliación compatible; supondremos además que lo mismo ocurre para $\tilde{\Lambda}' \rightarrow M$, y que la descomposición inducida es $\tilde{\Lambda}' \simeq \mathbb{R} \times \tilde{L}'$. Este difeomorfismo será indicado mediante $s_{\tilde{\Lambda}'}$. Hay que agregar, sin embargo, una suposición adicional: la existencia de una submersión $\Pi_0 : \tilde{L}' \rightarrow \tilde{L}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Lambda}' & \xrightarrow{\Pi} & \tilde{\Lambda} \\ p_2 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ \tilde{L}' & \xrightarrow{\Pi_0} & \tilde{L} \end{array}$$

- Para cada $\tau \in \mathbb{R}$ estamos tentados por definir el EDS

$$\mathcal{I}'_\tau := i_\tau^* (\mathcal{I}'|_{\tilde{\Lambda}'_\tau}) \subset \Omega^\bullet(\tilde{L}')$$

donde $\tilde{\Lambda}'_\tau := i_\tau (\{\tau\} \times \tilde{L}')$ y

$$i_\tau : \tilde{L}' \hookrightarrow \tilde{\Lambda}' : l \mapsto s_{\tilde{\Lambda}'}(\tau, l),$$

para intentar concluir que

$$(30) \quad \Gamma_{n-1}(\mathcal{I}'_\tau, \omega') = i_\tau^* (\Gamma_n(\mathcal{I}', \Omega'))$$

donde $\omega' := \partial_0 \lrcorner \Omega'$. La inclusión fácil en esta igualdad es

$$\Gamma_{n-1}(\mathcal{I}'_\tau, \omega') \supset i_\tau^* (\Gamma_n(\mathcal{I}', \Omega')).$$

La n -involutividad de \mathcal{I}' nos asegura que cada elemento n -integral es tangente a alguna solución; sin embargo, la inclusión opuesta

$$\Gamma_{n-1}(\mathcal{I}'_\tau, \omega') \subset i_\tau^* (\Gamma_n(\mathcal{I}', \Omega'))$$

7.2. Secciones admisibles e involución

es satisfecha si cada elemento $n - 1$ -integral de \mathcal{I}'_τ puede ser “engrosado” (regularmente) a un elemento n -integral de \mathcal{I}' . El requisito de involutividad no es suficiente; en su lugar, necesitamos la regularidad de cada elemento $n - 1$ -integral del EDS \mathcal{I}'_τ .

Introduciremos ahora la noción de regularidad para una foliación. Ella nos asegurará la existencia de una extensión de cualquier variedad integral de dimensión $n - 1$ para el EDS restringido a una hoja de tiempo constante, a una variedad integral de dimensión n del EDS original; en este sentido es fundamental asegurar que la dimensión de los espacios polares sea estrictamente mayor a $n - 1$, dado que podría ocurrir un caso como el del ejemplo 2.3B, en el cual no hay involutividad porque los elementos regulares no son extensibles. De hecho, analicemos detenidamente la estructura de los vínculos de Dirac para este ejemplo.

Ejemplo 7.2A: Sistema con elementos regulares no extensibles. *Estudiamos el sistema del ejemplo 2.3B. Para ello, y utilizando la notación adoptada allí, construyamos el problema variacional Lepage equivalente que lo describe; si $\tilde{\Lambda}$ es el fibrado $\mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde en coordenadas la flecha viene dada simplemente por $\pi : (x, y, z; u, \alpha, \beta) \mapsto (x, y, z)$, y*

$$\tilde{\lambda}|_{(x,y,z;u,\alpha,\beta)} := \alpha\theta_1 + \beta\theta_2,$$

el problema variacional en cuestión será $(\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}, 0)$. Luego el EDS \mathcal{I} de Hamilton-Cartan estará generado mediante

$$\mathcal{I} = \langle \theta_1, \theta_2, \mathbf{d}\alpha \wedge \mathbf{d}y \wedge (\mathbf{d}x - y\mathbf{d}z) + \mathbf{d}\beta \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}z \rangle_{\text{alg}}.$$

Notemos entonces que, para $k \in \mathbb{R}$, podemos definir la hoja

$$\mathcal{O}_k := \{(x, y, z; u, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^6 : z = k\},$$

que es un fibrado sobre \mathbb{R}^2 por la restricción de la proyección π a la hoja. Luego resulta que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k &:= \mathcal{I}|_{\mathcal{O}_k} \\ &= \langle \mathbf{d}u \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y, \mathbf{d}\alpha \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \rangle_{\text{alg}}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que las secciones integrales de \mathcal{I}_k son todas las funciones

$$(x, y) \mapsto (u(x, y), \alpha(x, y), \beta(x, y))$$

dado que los generadores de \mathcal{I}_k son de grado 3. Sin embargo, como vimos oportunamente, las secciones integrales de \mathcal{I} están caracterizadas por $u(x, y) = U_k$ para alguna constante $U_k \in \mathbb{R}$, y tales que las funciones α, β satisfacen la ecuación diferencial

$$\alpha_z + y\alpha_x + \beta_y = 0.$$

Esto significa que $\Gamma_2(\mathcal{I}_k) \supset \Gamma_3(\mathcal{I})$, y la inclusión es estricta.

Podemos por otra parte estudiar el sistema dinámico asociado a este problema variacional; para ello tomamos $K \subset \mathbb{R}^3$ la clausura de un disco en \mathbb{R}^3 , y restringimos nuestro fibrado a K . Entonces obtenemos un nuevo fibrado $\Lambda_K := K \times \mathbb{R}^3$, y allí el problema variacional $(\Lambda_K, \bar{\lambda}, 0)$, con $\bar{\lambda} := \tilde{\lambda}|_{\Lambda_K}$. Designemos por el mismo símbolo \mathcal{O}_k al conjunto $\mathcal{O}_k \cap \Lambda_K$ (admitiendo que elegimos el número k de manera tal que el plano $z = k$ tiene intersección no vacía con $\text{Int } K$); entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\bar{\lambda}|_{\mathcal{O}_k} &= -\mathbf{d}\alpha \wedge \mathbf{d}u \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y, \\ \partial_z \lrcorner \bar{\lambda} &= \beta \mathbf{d}u \wedge \mathbf{d}x - y\alpha \mathbf{d}u \wedge \mathbf{d}y \end{aligned}$$

por lo cual si $X_i : (x, y) \mapsto (0, 0; \delta u_i(x, y), \delta \alpha_i(x, y), \delta \beta_i(x, y))$, $i = 1, 2$ indican un par de elementos tangentes en $\sigma : (x, y) \mapsto (u(x, y), \alpha(x, y), \beta(x, y))$, tendremos que

$$\begin{aligned}\omega^z|_\sigma(X_1, X_2) &:= \int_K (\delta u_1 \delta \alpha_2 - \delta u_2 \delta \alpha_1) \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y, \\ H^z(\sigma) &:= \int_K (\beta u_y + y \alpha u_x) \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y\end{aligned}$$

para la estructura presimpléctica y el hamiltoniano sobre el espacio de secciones de \mathcal{O}_k . Entonces (con la estructura de espacio de Sobolev de orden adecuado) puede probarse el resultado siguiente.

Lema 32. *El conjunto*

$$\ker(\omega^z|_\sigma) := \{X_1 \in \Gamma(\sigma^* V \Lambda_K) : \omega^z|_\sigma(X_1, X_2) = 0 \quad \forall X_2 \in \Gamma(\sigma^* V \mathcal{O}_k)\}$$

es el subespacio cerrado

$$\ker(\omega^z|_\sigma) = \overline{\{(0, 0, \delta \beta) : \delta \beta \in C^s(K)\}}$$

siendo s el orden del espacio de Sobolev considerado.

Si $Z \in \ker(\omega^z|_\sigma)$ es de la forma $Z = (0, 0, \delta \beta)$ con $\delta \beta \in C^s(K)$, entonces el vínculo primario se obtiene a partir de la ecuación $Z|_\sigma \cdot H^z = 0$, y por consiguiente

$$\begin{aligned}0 &= Z|_\sigma \cdot H^z \\ &= - \int_K \delta \beta u_y \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y.\end{aligned}$$

Esto es, el vínculo primario que las secciones deben satisfacer es $u_y = 0$. Para calcular si existen vínculos secundarios, definimos, para cada $f \in C^s(K)$, la función sobre $\Gamma(\mathcal{O}_k)$ dada por

$$F_1(\sigma) := \int_K f u_y \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y.$$

Entonces (recordando que los elementos tangentes a nuestro espacio de secciones se anulan sobre ∂K)

$$X_1 \cdot F_1 = - \int_K f_y \delta u_1 \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$$

y por lo tanto el campo X_{F_1} que a cada sección σ de \mathcal{O}_k le asigna el vector tangente

$$X_{F_1}(\sigma) : (x, y) \mapsto (\sigma(x, y); 0, 0, 0, -f_y(x, y), 0)$$

es un campo vectorial hamiltoniano para F_1 . El vínculo secundario resulta a partir de la condición de estabilidad $X_{F_1}(\sigma) \cdot H^z = 0$, por lo cual

$$\begin{aligned}0 &= X_{F_1}(\sigma) \cdot H^z \\ &= - \int_K y u_x f_y \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \\ &= \int_K (y u_x)_y f \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y,\end{aligned}$$

de donde $u_x + y u_{xy} = 0$. Como ya sabemos que sobre la superficie final de vínculos debe valer $u_y = 0$, de aquí resulta el vínculo secundario equivalente $u_x = 0$. Es más, si repetimos este procedimiento con el nuevo vínculo $u_x = 0$, no obtenemos un vínculo independiente de los anteriores, por lo cual la variedad final de vínculos en $\Gamma(\mathcal{O}_k)$ es el conjunto \mathcal{C} de secciones tales que $u_x = u_y = 0$. Ahora bien, a partir de

$$(X_1 \cdot H^z)|_{\mathcal{C}} = - \int_K (\beta_y + y \alpha_x) \delta u_1 \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$$

resulta que el campo X_H dado por

$$X_H(\sigma) : (x, y) \mapsto (\sigma(x, y); 0, 0, 0, -\beta_y - y \alpha_x, g(x, y))$$

7.2. Secciones admisibles e involución

para $g \in C^s(K)$, es un campo vectorial hamiltoniano para el hamiltoniano H^z ; las ecuaciones de movimiento para el sistema dinámico sobre \mathcal{C} serán pues

$$\begin{cases} u_z &= 0, \\ \alpha_z &= -\beta_y - y\alpha_x, \\ \beta_z &= g(x, y). \end{cases}$$

El algoritmo de Gotay, Nester y Hinds conduce pues al resultado correcto. ▲

Debido a la discusión previa, introducimos una nueva definición, con el objetivo específico de garantizar las condiciones que permitan describir los vínculos que aparecen al estudiar un problema variacional con el algoritmo de Gotay, Nester y Hinds, mediante un sistema diferencial exterior juiciosamente elegido.

Definición 46. Sea \mathcal{I} un EDS involutivo sobre M y supongamos que $M \simeq \mathbb{R} \times N$ para alguna variedad N ; como hicimos arriba, para cada $\tau \in \mathbb{R}$ definamos el siguiente EDS sobre N

$$\mathcal{I}_\tau := i_\tau^* (\mathcal{I}|_{\{\tau\}} \times N).$$

Diremos que la foliación inducida es regular con respecto al EDS \mathcal{I} si cada elemento de $V_{n-1}(\mathcal{I}_\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, es regular y $\dim H(E) > n - 1$ para cada $E \in V_{n-1}(\mathcal{I}_\tau)$.

Además, bajo las condiciones de independencia adecuadas la involutividad requerida nos asegurará que la extensión no está incluida en dicha hoja. En estos términos puede formularse el resultado siguiente.

Proposición 23. Si \mathcal{I} es un EDS involutivo sobre P , y $s_P : P \xrightarrow{\sim} Q \times \mathbb{R}$ es una foliación regular para \mathcal{I} , entonces

$$\Gamma_{n-1}(\mathcal{I}_\tau, \omega) = i_\tau^* (\Gamma_n(\mathcal{I}, \Omega)),$$

donde $\omega := \partial_0 \lrcorner \Omega$ y ∂_0 es el campo vectorial que apunta en la \mathbb{R} -dirección de la foliación.

DEMOSTRACIÓN. La inclusión difícil es

$$\Gamma_{n-1}(\mathcal{I}_\tau, \omega) \subset i_\tau^* (\Gamma_n(\mathcal{I}, \Omega)).$$

A causa de la regularidad, el teorema de Cartan-Kähler implica que cualquier sección integral de dimensión $n - 1$ de \mathcal{I}_τ puede extenderse a una sección integral de dimensión n para \mathcal{I} . \square

Necesitaremos algunas propiedades de las soluciones de un EDS; el siguiente resultado establece alguna de ellas.

Lema 33. Sea \mathcal{I} un EDS sobre la variedad M , $N \subset M$ una subvariedad integral y $X \in \Gamma(T_N M)$ tal que

$$(X \lrcorner \alpha)|_N = 0$$

para todo $\alpha \in \mathcal{I}$. Si $\hat{X} \in \mathfrak{X}(M)$ es cualquier extensión para X , entonces

$$(\mathcal{L}_{\hat{X}} \mathcal{I})|_N = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $i : N \hookrightarrow M$ es la inmersión canónica, tendremos que

$$i^* (\hat{X} \lrcorner \alpha) = i^* (X \lrcorner \alpha),$$

por lo cual

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\hat{X}} \alpha)|_N &= i^* (\hat{X} \lrcorner \mathbf{d}\alpha + \mathbf{d}(\hat{X} \lrcorner \alpha)) \\ &= i^* (X \lrcorner \mathbf{d}\alpha) + \mathbf{d}i^* (X \lrcorner \alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \mathcal{I}$. □

Utilizando la definición (24) obtenemos un EDS $(\mathcal{I}'_\tau, \omega' := \partial_0 \lrcorner \Omega')$ sobre \tilde{L}' . Como veremos en las siguientes secciones, este sistema diferencial exterior nos proporcionará otra descripción para los vínculos de Dirac, esto es, como generadores algebraicos de un EDS.

7.3. La subvariedad de vínculos como un espacio de secciones

7.3.1. Guía rápida a la demostración. Describiremos aquí los elementos esenciales involucrados en la demostración de que la subvariedad de vínculos coincide con el conjunto de aplicaciones $\Pi_0 \circ \Gamma_{n-1}(\mathcal{I}'_\tau, \omega')$. Dado que esta prueba utiliza la caracterización de C como la subvariedad invariante maximal del conjunto de secciones del fibrado \tilde{L} , es necesario demostrar que

1. $\Pi_0 \circ \Gamma_{n-1}(\mathcal{I}'_\tau, \omega')$ es invariante, y
2. $C \subset \Pi_0 \circ \Gamma_{n-1}(\mathcal{I}'_\tau, \omega')$.

Intuitivamente es razonable suponer que la primera condición se puede deducir del hecho que la PDE original (26) son satisfechas por los elementos de este conjunto. La segunda condición puede verificarse construyendo una sección de dimensión n a partir de la fórmula

$$\sigma : (\tau, x) \mapsto (\tau, \sigma_\tau(x))$$

teniendo presente que ésta es una sección integral de (\mathcal{I}', Ω') , y entonces restringiéndose a la hoja correspondiente al tiempo τ . Como fue definido previamente, una subvariedad $Q \subset P$ en nuestro espacio de fases $\Gamma(\tilde{L})$ es *invariante* si y sólo si

$$\mathbf{d}H(TQ^\perp) = 0.$$

De acuerdo a un resultado de Marsden *et al* [GIM04], la propiedad de invariancia es equivalente a la existencia de soluciones tangentes a las ecuaciones de Hamilton restringidas a Q ; esto es, para cada $q \in Q$ el sistema

$$(X_{H \lrcorner \omega})|_q = \mathbf{d}H|_q$$

tiene una solución $X_H|_q$ perteneciente a $T_q Q$. En la primera parte de la demostración uno construye las soluciones de las ecuaciones de Hamilton tangentes a la superficie de vínculos, lo cual implica la invariancia buscada. En la segunda parte la estrategia consiste en probar que nuestra subvariedad es maximal con respecto a la propiedad de invariancia; en este punto se utiliza la caracterización de invariancia en el sentido contrario, esto es, se demuestra que la subvariedad en cuestión es invariante, para poder concluir entonces que las ecuaciones de Hamilton admiten soluciones tangentes a la misma. Dado que las ecuaciones de Hamilton pueden relacionarse con generadores algebraicos del EDS de Hamilton-Cartan restringido a la hoja de tiempo constante con la que estamos trabajando, uno puede relacionar a partir de este resultado ambos puntos de vista.

Después de este precalentamiento, estamos preparados para formular el teorema y su demostración.

7.3.2. El teorema principal y su demostración. Existen muchos elementos a incluir en la demostración de este teorema. En los párrafos previos argumentamos acerca de la necesidad de tener una submersión $\Pi : \tilde{\Lambda}' \rightarrow \tilde{\Lambda}$ entre fibrados que hagan el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Lambda}' & \xrightarrow{\Pi} & \tilde{\Lambda} \\ & \searrow & \swarrow \\ & M & \end{array}$$

Acto seguido, supusimos que existe una foliación compatible (respecto de las estructuras de fibrado de ambos fibrados) de la base M que se comporta bien con las aplicaciones de este

7.3. La subvariedad de vínculos como un espacio de secciones

diagrama. Esto es, existe una aplicación $\Pi_0 : \tilde{L}' \rightarrow \tilde{L}$ que hace conmutar el diagrama detallado a continuación

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\Lambda}' & \xrightarrow{s_{\tilde{\Lambda}'}} & \tilde{L}' \times \mathbb{R} \\
 \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi_0 \times \text{id} \\
 \tilde{\Lambda} & \xrightarrow{s_{\tilde{\Lambda}}} & \tilde{L} \times \mathbb{R} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M & \xrightarrow{s_M} & \Sigma \times \mathbb{R}
 \end{array}$$

La foliación en hojas de tiempo constante de $\tilde{\Lambda}'$ nos permite por lo tanto definir el EDS

$$\mathcal{I}' := i_\tau^* \left(\mathcal{I} | \tilde{L}' \times \{\tau\} \right),$$

el cual no es otra cosa que el EDS involutivo \mathcal{I}' restringido a la hoja $\tilde{L}' \times \{\tau\}$. Para asegurarnos que $V_{n-1}(\mathcal{I}'_\tau) \subset V_{n-1}^r(\mathcal{I}')$, se pide además que la foliación supuesta sea regular respecto del EDS \mathcal{I}' . Ahora definamos

$$\Gamma(\mathcal{I}'_\tau) := \Pi_0 \circ \Gamma_{n-1}(\mathcal{I}'_\tau, \omega'),$$

Vamos a asumir además que cada sección $\sigma \in \Gamma_{n-1}(\mathcal{I}'_\tau)$ está contenida en una subvariedad $R_\sigma \subset \tilde{\Lambda}'$ de codimensión $r_\sigma := \dim H(\sigma_*(TM)) - n + 1$ que es transversal a $H(\sigma_*(TM))$, lo cual, via el corolario 1, nos garantiza la unicidad de la extensión de σ a una sección integral del fibrado total $\tilde{\Lambda}'$. Ésta es una condición fuerte, pero necesaria en vista de que estamos trabajando con secciones globales de los fibrados en cuestión. Finalmente supondremos que los conjuntos de secciones integrales con los que trabajaremos admiten estructura diferenciable; la debilitación de esta hipótesis requiere técnicas que están fuera de los alcances de este trabajo (por ejemplo, un esquema de desingularización tal como en [CE06]).

El teorema principal puede formularse como sigue.

Teorema 12. *Supongamos que el EDS \mathcal{I} definido mediante (29) es τ -invariante, esto es*

$$\mathcal{L}_{\partial_0} \mathcal{I} \subset \mathcal{I}.$$

Entonces la subvariedad de vínculos C en la variedad presimpléctica de secciones es igual a $\Gamma(\mathcal{I}'_\tau)$.

DEMOSTRACIÓN. La subvariedad de vínculos C puede caracterizarse como la subvariedad invariante maximal del conjunto de secciones de \tilde{L} [GIM04], donde la invariancia para $J \subset \Gamma(\tilde{L})$ significa que

$$\mathbf{d}H(TJ^\perp) = 0,$$

para H la función hamiltoniana para nuestro sistema dinámico y el complemento ortogonal se toma respecto de la estructura presimpléctica definida sobre el espacio de secciones. Puede demostrarse (prop. 6.9 en [GIM04]) que la invariancia de una subvariedad J en una variedad simpléctica es equivalente a pedir que a través de cualquier punto de J existan soluciones a las ecuaciones de Hamilton que sean tangentes a dicha subvariedad. Tomemos entonces $\sigma_\tau \in \Gamma(\mathcal{I}'_\tau)$; por definición de este espacio de secciones, existe una única sección $\sigma'_\tau \in \Gamma_{n-1}(\mathcal{I}'_\tau, \omega')$ tal que

$$\sigma_\tau = \Pi_0 \circ \sigma'_\tau.$$

A causa de la regularidad de la subvariedad $\text{Im}(\sigma'_\tau) \subset \tilde{\Lambda}'$, y teniendo en cuenta que asumimos la existencia de variedades de restricción $R'_{\sigma'_\tau}$, podremos aplicar el corolario 1 y encontrar una

sección integral $\sigma' \in \Gamma_n(\mathcal{I}', \Omega')$ tal que $\sigma'|(\tilde{L}' \times \{\tau\}) = \sigma'_\tau$. Si ∂_0 denota los campos vectoriales definidos mediante

$$\begin{aligned} \partial_0|_{(\lambda, \tau)} &:= (s_{\tilde{\Lambda}'})_*^{-1}|_{(\lambda, \tau)} \left(0, \frac{d}{d\tau} \Big|_\tau \right) && \text{on } \tilde{\Lambda}' \\ \partial_0|_{(m, \tau)} &:= (s_M)_*^{-1}|_{(m, \tau)} \left(0, \frac{d}{d\tau} \Big|_\tau \right) && \text{on } M \end{aligned}$$

entonces se puede definir la sección $X'_\tau \in \Gamma((\sigma'_\tau)^*(V\tilde{L}')) = T_{\sigma'_\tau}(\Gamma(\tilde{L}'))$ via

$$(31) \quad (\sigma')_*(\partial_0) = \partial_0 + i_{\tau*}(X'_\tau).$$

Por lo tanto la expresión $X_\tau := \Pi_{0*} \circ X'_\tau$ define una sección del fibrado “pullback” $(\sigma_\tau)^*(V\tilde{L})$, que está bien definida porque en procedimiento de prolongación y la proposición 23 nos asegura que la aplicación $\Pi_0 \circ (\cdot)$ entre $n - 1$ -secciones de los fibrados en cuestión es uno a uno. Más aún, proyectando ambos lados de (31) según $\Pi_* \circ (\cdot)$ se obtiene que

$$(32) \quad \sigma_*(\partial_0) = \partial_0 + i_{\tau*}(X_\tau)$$

donde $\sigma := \Pi \circ \sigma'$ es una sección n -integral para \mathcal{I} sobre $\tilde{\Lambda}$, debido a propiedad de las prolongaciones. En particular, $\sigma_*|_{(m, \tau)}(T_m M \oplus \partial_0) \subset T\tilde{\Lambda}$ es un elemento n -integral para \mathcal{I} que contiene el subespacio $\sigma_{\tau*}|_m(T_m M)$, que es a su vez $n - 1$ -integral para \mathcal{I}_τ . Por lo tanto $\sigma_*(\partial_0) \in H(\sigma_{\tau*}|_m(T_m M))$, y debemos tener que

$$(\sigma_*(\partial_0) \lrcorner \alpha)|(\sigma_{\tau*}|_m(T_m M)) = 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{I}.$$

Utilizando la Ec. (29), resulta que X_τ satisface

$$\sigma_\tau^*(V \lrcorner (X_\tau \lrcorner \Omega - \mathbf{d}\mathcal{H})) = 0, \quad \forall V \in \Gamma(\sigma_\tau^*(V\tilde{L})),$$

y esto significa, por proposición 19, que X_τ es una solución de las ecuaciones de Hamilton asociadas a H . Queda por demostrarse que esta solución es tangente a $\Gamma(\mathcal{I}'_\tau)$; de acuerdo al lema 31, esto equivale a probar que

$$\sigma_\tau^*(\mathcal{L}_{\hat{X}_\tau} \mathcal{I}_\tau) = 0$$

para alguna extensión $\hat{X}_\tau \in \mathfrak{X}(\tilde{L})$ de X_τ . Por lema 33 y teniendo en cuenta que σ_τ es una subvariedad $n - 1$ -dimensional de \mathcal{I} , concluimos que

$$(33) \quad \sigma_\tau^*(\mathcal{L}_{\hat{X}_\tau} \mathcal{I}) = 0,$$

donde $\hat{X} := \partial_0 + i_\tau(\hat{X}_\tau)$, y $\hat{X}_\tau \in \mathfrak{X}(\tilde{L})$ es alguna extensión para X_τ . La τ -invariancia

$$\mathcal{L}_{\partial_0} \mathcal{I} \in \mathcal{I}$$

implica que¹

$$(34) \quad \sigma_\tau^*(\mathcal{L}_{i_{\tau*}(\hat{X}_\tau)} \mathcal{I}) = 0,$$

y además, debido a que $X_\tau(m) \in V\tilde{L}$ para todo $m \in M$, para cada $\alpha \in \mathcal{I}$ tendremos que

$$\begin{aligned} \sigma_\tau^*(i_{\tau*}(X_\tau) \lrcorner \alpha) &= \sigma_\tau^*(i_{\tau*}(X_\tau) \lrcorner (\alpha|_{\tilde{L} \times \{\tau\}})) \\ &= \sigma_\tau^*(X_\tau \lrcorner (i_\tau^* \alpha|_{\tilde{L} \times \{\tau\}})). \end{aligned}$$

Entonces la fórmula mágica de Cartan nos permite reescribir la expresión (34) como

$$\sigma_\tau^*(\mathcal{L}_{\hat{X}_\tau} \mathcal{I}_\tau) = 0,$$

¹Aquí estamos cometiendo un abuso de lenguaje: El símbolo $i_{\tau*}(\hat{X}_\tau)$ en esta ecuación representa el campo vectorial $(l, s) \mapsto i_{s*}(\hat{X}_s(m))$ on $\tilde{\Lambda} \simeq \tilde{L} \times \mathbb{R}$, donde el número τ refiere al segundo factor en esta descomposición.

7.3. La subvariedad de vínculos como un espacio de secciones

la cual es la condición de tangencia deseada. Entonces hemos probado que $\Gamma(\mathcal{I}'_\tau)$ es una subvariedad invariante de $\Gamma(\tilde{L})$.

Nuestra siguiente tarea es probar que $\Gamma(\mathcal{I}'_\tau)$ es maximal entre todas las subvariedades invariantes del espacio de secciones $\Gamma(\tilde{L})$. Por consiguiente sea $Q \subset \Gamma(\tilde{L})$ una subvariedad invariante. Entonces para cada $\sigma_0 \in Q$ existe $X_0 \in \Gamma(\sigma_0^*(V\tilde{L}))$ tal que

- $X_0 \in T_{\sigma_0}Q$, y
- $\sigma_0^*(V \lrcorner (X_0 \lrcorner \Omega - \mathbf{d}\mathcal{H})) = 0$ para todo $V \in \Gamma(\sigma_0^*(V\tilde{L}))$.

Suponiendo que cualquier campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(Q)$, que a cada sección σ_0 le asigna un vector X_0 con estas características, tiene curvas integrales $\tau \mapsto \sigma_\tau$ que pasan por $\sigma_0 \in Q$ cuando $\tau = 0$, podremos construir la n -sección $\sigma : (\tau, x) \mapsto (\tau, \sigma_\tau(x))$ del fibrado $\tilde{\Lambda}$. Esta sección es n -integral para \mathcal{I} a causa de las ecuaciones de Hamilton. De hecho, las condiciones supuestas implican que $\sigma_{\tau*}(T_x\Sigma) \oplus \langle \partial_0|_\tau \rangle$ (para τ en algún entorno de 0) anula el conjunto de formas

$$\mathcal{S} := \left\{ V \lrcorner \tilde{\mathbf{d}}\tilde{\lambda} : V \in \Gamma(V\tilde{\Lambda}) \right\};$$

dado que $\mathcal{S} \subset \mathcal{I}$, entonces será $\langle \mathcal{S} \rangle_{\text{diff}} = \mathcal{I}$ (por definición de \mathcal{I} , véase EDS de Hamilton-Cartan, ecuación (16)) y por lo tanto $V_n(\langle \mathcal{S} \rangle_{\text{diff}}) = V_n(\mathcal{I})$. Entonces debido a las propiedades de la prolongación, podemos encontrar una sección integral σ' la cual es n -integral para \mathcal{I}' y proyecta sobre σ , esto es $\Pi \circ \sigma' = \sigma$; más aún,

$$i_0 \circ \sigma_0 = \Pi_0 \circ (\sigma'|_{\tilde{\Lambda}'_0})$$

y $\sigma'|_{\tilde{\Lambda}'_0} \in \Gamma_{n-1}(\mathcal{I}'_0)$, por lo cual $\sigma_0 \in \Pi_0 \circ \Gamma_{n-1}(\mathcal{I}'_0) = \Gamma(\mathcal{I}'_0)$. □

Ejemplos importantes en mecánica no estándar

8.1. EDSs no regulares y fallas del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds

QUEREMOS construir un ejemplo en el cual el algoritmo de Gotay, Nester y Hinds falle de alguna manera; para llevar adelante la tarea, vamos a tomar en cuenta nuestro teorema sobre la relación entre vínculos y generadores de un EDS. Como sabemos, si el EDS de Hamilton-Cartan es regular y la hoja de tiempo constante elegida para construir la teoría canónica es regular, entonces existe una correspondencia uno a uno entre los generadores del EDS restringido a la hoja elegida y los vínculos de Dirac de la teoría. Por lo tanto, para encontrar ejemplos en donde el algoritmo de Dirac falle de alguna manera, es necesario tener en cuenta EDSs no regulares. El siguiente ejemplo se construyó en base a un EDS con múltiples fuentes de no regularidad: Por una parte, existen para el mismo hojas de tiempo constante que no son regulares; además, el conjunto de elementos regulares no es una variedad, sino que puede separársele en varios estratos, y cada una de ellos presentan diferentes tipos de regularidad. Como veremos, este último hecho da origen a un comportamiento muy curioso del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds, de acuerdo al cual dicho algoritmo termina o no según los valores que asumen las funciones incógnita; podremos relacionar este hecho con los diferentes tipos de regularidad de los elementos integrales del EDS de Hamilton-Cartan.

8.1.1. Preliminares. Consideremos el EDS \mathcal{I} generado por las 1-formas

$$\theta_1 := \mathbf{d}u - q\mathbf{d}x, \theta_2 := \mathbf{d}v - q\mathbf{d}r$$

sobre $\Lambda := \mathbb{R} \times I \times \mathbb{R}^4$ con coordenadas (x, y, u, v, q, r) , donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo compacto; la condición de independencia es $\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \neq 0$. Para trabajar con este EDS como problema variacional no estándar, consideramos que \mathcal{I} es el ideal definiendo la estructura de prolongación sobre Λ con estructura de fibrado doble dada por

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda & \rightarrow & \Lambda_1 := I \times \mathbb{R}^3 & \rightarrow & M := I \times \mathbb{R} \\ (x, y, u, v, q, r) & \mapsto & (x, y, u, v) & \mapsto & (x, y), \end{array}$$

y tomamos el lagrangiano trivial $\lambda = 0$. El problema canónico Lepage equivalente se construirá sobre $\tilde{\Lambda} := (\mathbb{R} \times I \times \mathbb{R}^4) \oplus (T^*(\mathbb{R} \times I) \oplus T^*(\mathbb{R} \times I))$, con acción

$$S := \int_{\mathbb{R} \times I} (\alpha \wedge \theta_1 + \beta \wedge \theta_2),$$

donde $\alpha = a\mathbf{d}x + b\mathbf{d}y, \beta = m\mathbf{d}x + n\mathbf{d}y$. Necesitamos demostrar que éste es un problema Lepage equivalente bivariante.

Lema 34. *La proyección*

$$\nu : (x, y, u, v, q, r, \alpha, \beta) \mapsto (x, y, u, v, q, r)$$

convierte a $(\tilde{\Lambda}, 0, \alpha \wedge \theta_1 + \beta \wedge \theta_2)$ en un Lepage equivalente de $(\Lambda, \mathcal{I}, 0)$. Más aún, es bivariante, esto es, cada extremal del problema variacional definido por S sobre secciones de $\tilde{\Lambda}$ proyecta sobre una sección integral de \mathcal{I} (dado que el lagrangiano en este caso es trivial, no hay acción de la que preocuparse allí) e inversamente, cada sección integral de \mathcal{I} puede levantarse a una extremal de S .

DEMOSTRACIÓN. Las variaciones respecto de α y β nos darán los generadores para \mathcal{I} ; esto muestra que este problema es covariante. Por otra parte variaciones respecto de u, v, q y r dan lugar al siguiente sistema para α y β :

$$\begin{cases} \mathbf{d}\alpha = 0, \\ \mathbf{d}\beta = 0, \\ \beta \wedge \mathbf{d}r + \alpha \wedge \mathbf{d}x = 0, \\ \mathbf{d}(q\beta) = 0. \end{cases}$$

Para cada aplicación $(x, y) \mapsto (u, v, q, r)$ que es una sección integral de \mathcal{I} , este sistema admite solución, de donde resulta la contravariancia. \square

Sea $N_0 = I \times \mathbb{R}^8 \subset \tilde{\Lambda}$ el subconjunto sobre el cual $x = 0$. A continuación procederemos a estudiar las ecuaciones variacionales para S desde dos puntos de vista: Considerándolo un sistema dinámico sobre el espacio $\Gamma(N_0)$ formado por todas las funciones en $H_{N,2}(I, \mathbb{R}^8)$ que asumen valores fijos sobre los extremos de I , o estudiando el EDS que resulta de la restricción a N_0 del EDS de Hamilton-Cartan asociado al problema variacional anterior.

Nota. Debemos tener en cuenta los siguientes hechos:

1. A partir de este momento será de cierta importancia la consideración de problemas equivalentes al siguiente: Hallar $f_1 \in H_{N,2}(I)$ tal que

$$\int_I f_1(y) f_2(y) \mathbf{d}y = 0$$

para todo $f_2 \in H_{N,2}(I)$. Por el teorema de representación de Riesz, esto implica que necesariamente $f_1 \equiv 0$.

2. Si $f \in H_{N,2}(I, \mathbb{R}^m)$, entonces cada función coordenada pertenece a $H_{N,2}(I)$, y viceversa, una colección de m funciones f^1, \dots, f^m en $H_{N,2}(I)$ genera un elemento de $H_{N,2}(I, \mathbb{R}^m)$ via $x \mapsto (f^1(x), \dots, f^m(x))$.
3. Se utilizará repetidamente el teorema 7 y su corolario 4 para describir los espacios de vínculos obtenidos y sus espacios tangentes. En general, los vínculos que aparecen aquí son superficies de nivel de aplicaciones de la forma $D : H_{N,2} \rightarrow H_{N-k,2}$, para D algún operador diferencial.

8.1.2. Algoritmo de Gotay, Nester y Hinds I. Tomamos la hoja de tiempo constante que corresponde a $x = 0$; ésta es un fibrado sobre I , y nuestra tarea será definir una estructura presimpléctica sobre su espacio de secciones, junto a una función hamiltoniana. Para ello, lo primero que hay que tener en cuenta es que para $\tilde{\lambda} := \alpha \wedge \theta_1 + \beta \wedge \theta_2$

$$\mathbf{d}\tilde{\lambda} = \mathbf{d}\alpha \wedge (\mathbf{d}u - q\mathbf{d}x) + \alpha \wedge \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}x + \mathbf{d}\beta \wedge (\mathbf{d}v - q\mathbf{d}r) + \beta \wedge \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}r,$$

por lo que

$$\mathbf{d}\tilde{\lambda}\Big|_{N_0} = \mathbf{d}b \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}u + \mathbf{d}n \wedge \mathbf{d}y \wedge (\mathbf{d}v - q\mathbf{d}r) + n\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}r.$$

Entonces si

$$X_i = (\delta u_i, \delta v_i, \delta q_i, \delta r_i; \delta \alpha_i, \delta \beta_i), \quad i = 1, 2$$

8.1. EDSs no regulares y fallas del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds

denota un par de elementos arbitrarios en $T_\sigma\Gamma(N_0)$, la estructura presimpléctica será

$$\begin{aligned}\omega^x|_\sigma(X_1, X_2) &= \int_I \left[(\delta u_1 \delta b_2 - \delta u_2 \delta b_1) + \right. \\ &\quad \left. + (\delta v_1 - q \delta r_1) \delta n_2 - (\delta v_2 - q \delta r_2) \delta n_1 + n (\delta q_1 \delta r_2 - \delta q_2 \delta r_1) \right] \mathbf{d}y, \\ &= \int_I \left[\delta u_1 \delta b_2 - \delta u_2 \delta b_1 + \right. \\ &\quad \left. + (\delta v_1 - q \delta r_1) \delta n_2 - \delta n_1 \delta v_2 + \delta r_2 (q \delta n_1 + n \delta q_1) - n \delta q_2 \delta r_1 \right] \mathbf{d}y,\end{aligned}$$

por lo cual su kernel estará generado mediante

$$\begin{aligned}\ker \omega^x &= \\ &= \left\langle (0, 0, 0, 0; \delta a \mathbf{d}x, \delta m \mathbf{d}x) : \delta a, \delta m \in H_{N,2}(I) \text{ tal que } \delta a|_{\partial I} = \delta m|_{\partial I} = 0 \right\rangle.\end{aligned}$$

Para construir la función hamiltoniana, tomemos ∂_x como campo vectorial complementario definido sobre la hoja N_0 ; entonces

$$\partial_x \lrcorner \tilde{\lambda} = a(\mathbf{d}u - q\mathbf{d}x) + q\alpha + m(\mathbf{d}v - q\mathbf{d}r)$$

de donde podemos concluir que

$$\partial_x \lrcorner \tilde{\lambda}|_{N_0} = a\mathbf{d}u + qb\mathbf{d}y + m(\mathbf{d}v - q\mathbf{d}r).$$

La función hamiltoniana será por lo tanto

$$H^x = \int_I [au_y + qb + m(v_y - qr_y)] \mathbf{d}y.$$

8.1.2.1. *Vínculos primarios.* Estos vínculos pueden obtenerse via $\mathbf{d}H^x(\ker \omega^x) = 0$. Por consiguiente

$$\begin{aligned}0 &= \delta a \cdot H^x \\ &= \int_I \delta a u_y \mathbf{d}y && \Rightarrow u_y = 0, \\ 0 &= \delta m \cdot H^x \\ &= \int_I \delta m (v_y - qr_y) \mathbf{d}y && \Rightarrow v_y - qr_y = 0.\end{aligned}$$

El conjunto de vínculos primarios será $C_1 := \{u_y, v_y - qr_y\}$, y la subvariedad primaria M_1 es el conjunto de ceros de C_1 .

Para ver que M_1 es una subvariedad de $\Gamma(N_0)$, definamos la aplicación $G_1 : \Gamma(N_0) \rightarrow \mathcal{N}_z$ tal que a cada $s \in \Gamma(N_0)$ le asigna la función

$$G_1(s) : y \mapsto (u_y(y), v_y(y) - q(y)r_y(y)),$$

donde $\mathcal{N}_z := \{f \in H_{N-1,2}(I, \mathbb{R}^2) : \int_I f^i = z\}$; aquí $f^i : I \rightarrow \mathbb{R}$ son las funciones coordenadas de f , $z := c(b) - c(a)$, y $c : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función que provee el dato en el borde de $I = [a, b]$.

Lema 35. \mathcal{N}_z es una variedad modelada sobre \mathcal{N}_0 .

DEMOSTRACIÓN. Puede verificarse que \mathcal{N}_0 es un subespacio de $H_{N-1,2}(I, \mathbb{R}^2)$, que es además cerrado por ser la intersección de los núcleos de las funcionales lineales $f \mapsto \int_I f^i, i = 1, 2$. La carta que induce la estructura diferencial está dada por

$$\Phi : f \mapsto (f^1 - 1, f^2 - 1)$$

sobre todo \mathcal{N}_z . □

Queremos probar que G_1 es una submersión sobre $G_1^{-1}(0)$ en el sentido de la definición 38. Esto resulta del lema siguiente.

Lema 36. *La aplicación lineal*

$$D_y : H_{N,2}^0(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{N}_0 : u \mapsto u_y$$

es acotada y sobreyectiva.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $w \in \mathcal{N}_0$ se define $u(y) := \int_0^y v$; entonces puede verificarse que $u_y = v$, y que las demás condiciones se satisfacen. \square

Con este conjunto de vínculos podemos proceder con la aplicación del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds. Para ello definimos la subvariedad $M_1 := \{C_1 = 0\}$, y los nuevos vínculos provendrán de la condición

$$\mathbf{d}H^x \left((TM_1)^\perp \right) = 0,$$

donde $(TM_1)^\perp$ indica el ortogonal simpléctico de TM_1 . El tamaño de este conjunto puede medirse heurísticamente por la fórmula (válida en dimensión finita)

$$\dim (TM_1)^\perp = \dim TM - \dim TM_1 + \dim (\ker \omega^x \cap TM_1),$$

por lo cual debemos conocer el conjunto $\ker \omega^x \cap TM_1$. Puede probarse que

$$\ker \omega^x \cap TM_1 = \langle (0, 0, 0, 0; \delta a \mathbf{d}x, \delta m \mathbf{d}x) \rangle,$$

por lo que, a partir de $\dim TM - \dim TM_1 = \#C_1 = 2$ obtenemos que $\dim (TM_1)^\perp = 4$. Entonces necesitamos encontrar un par de vectores complementarios a $\ker \omega^x$ en $(TM_1)^\perp$.

8.1.2.2. *Vínculos secundarios.* Si F es una función que admite un campo vectorial hamiltoniano X_F (esto no está garantizado al trabajar sobre una variedad presimpléctica) y $F|_{M_1} = 0$, entonces X_F es un campo vectorial en $(TM_1)^\perp$. Entonces definiendo

$$F_u := \int_{\mathbb{R}} f u_y \mathbf{d}y$$

para $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ arbitraria, vemos que

$$\begin{aligned} X_2 \cdot F_u &= \int_{\mathbb{R}} f (\delta u_2)_y \mathbf{d}y \\ &= - \int_{\mathbb{R}} f_y \delta u_2 \mathbf{d}y; \end{aligned}$$

a partir de la expresión obtenida arriba para ω^x vemos que un posible campo vectorial hamiltoniano para F_u será

$$X_{F_u} = (0, 0, 0, 0; f_y \mathbf{d}y, 0)$$

que no está en $\ker \omega^x$. El vínculo asociado a este vector es

$$0 = \mathbf{d}H^x(X_{F_u}) = \int_{\mathbb{R}} q f_y \mathbf{d}y = - \int_{\mathbb{R}} q_y f \mathbf{d}y$$

para todo $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, de donde obtenemos el nuevo vínculo $q_y = 0$. Ahora definamos

$$F_v := \int_{\mathbb{R}} g (v_y - q r_y) \mathbf{d}y$$

para una función suave arbitraria g . Luego

$$\begin{aligned} X_2 \cdot F_v &= \int_{\mathbb{R}} g \left[(\delta v_2)_y - r_y \delta q_2 - q (\delta r_2)_y \right] \mathbf{d}y \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \left[g_y \delta v_2 + g r_y \delta q_2 - (g q)_y \delta r_2 \right] \mathbf{d}y \end{aligned}$$

8.1. EDSs no regulares y fallas del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds

y (suponiendo que $n \neq 0$) un campo vectorial hamiltoniano será

$$X_{F_v} = \left(0, \frac{qgr_y}{n}, \frac{gq_y}{n}, \frac{gr_y}{n}; 0, g_y \mathbf{d}y\right) \in (TM_1)^\perp.$$

Dado que H^x es independiente de n , obtenemos a partir de aquí que

$$\begin{aligned} 0 &= X_{F_v} \cdot H^x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[m \left(\frac{qgr_y}{n} \right)_y + \frac{gq_y}{n} (b - mr_y) - mq \left(\frac{gr_y}{n} \right)_y \right] \mathbf{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} g \left[\frac{q_y}{n} (b - mr_y) + (mq)_y \frac{r_y}{n} - \frac{m_y qr_y}{n} \right] \mathbf{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} g \left(\frac{q_y b}{n} \right) \mathbf{d}y \quad \Rightarrow \quad q_y b = 0. \end{aligned}$$

Esto da lugar al nuevo vínculo $q_y = 0$.

En este caso $C_2 := C_1 \cup \{q_y\}$ y $M_2 := \{C_2 = 0\}$; entonces $\ker \omega^x \cap TM_2 = \langle (0, 0, 0, 0; \delta a \mathbf{d}x, \delta m \mathbf{d}x) \rangle$, y

$$\dim (TM_2)^\perp = \#C_2 + 2 = 5.$$

Resulta que $(TM_1)^\perp \subset (TM_2)^\perp$, de donde concluimos que se debe hallar un nuevo vector complementario allí. Luego definamos

$$G_q := \int_{\mathbb{R}} h q_y \mathbf{d}y$$

y derivémosla en una dirección arbitraria X_2 ; obtenemos por lo tanto que $X_2 \cdot G_q = - \int_{\mathbb{R}} h_y \delta q_2 \mathbf{d}y$, de donde

$$X_{G_q} = \left(0, \frac{qh_y}{n}, 0, \frac{h_y}{n}; 0, 0\right).$$

El vínculo asociado a este vector será

$$\begin{aligned} 0 &= X_{G_q} \cdot H^x \\ &= \int_{\mathbb{R}} m \left[\left(\frac{qh_y}{n} \right)_y - q \left(\frac{h_y}{n} \right)_y \right] \mathbf{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{mq_y}{n} h_y \mathbf{d}y \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{mq_y}{n} \right)_y h \mathbf{d}y \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{mq_y}{n} \right)_y = 0, \end{aligned}$$

pero esta condición es idénticamente satisfecha sobre M_2 .

Las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir de $X_{H^x} \lrcorner \omega^x = \mathbf{d}H^x$; tomando en cuenta que

$$\begin{aligned} \mathbf{d}H^x(X_2) &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ u_y \delta a_2 + a (\delta u_2)_y + b \delta q_2 + q \delta b_2 + \right. \\ &\quad \left. + (v_y - qr_y) \delta m_2 + m \left[(\delta v_2)_y - q (\delta r_2)_y - r_y \delta q_2 \right] \right\} \mathbf{d}y \end{aligned}$$

el vector gobernando la evolución X_{H^x} será

$$X_{H^x} = \left(q, \frac{q}{n} (b - mr_y), 0, \frac{1}{n} (b - mr_y), \mathbf{A} \mathbf{d}x + a_y \mathbf{d}y, \mathbf{M} \mathbf{d}x + y \mathbf{d}y \right).$$

Por lo tanto las ecuaciones de movimiento en este caso serán

$$\begin{cases} u_x = q, \\ v_x = \frac{q}{n} (b - mr_y), \\ q_x = 0, \\ r_x = \frac{1}{n} (b - mr_y), \\ a_x = A, \\ b_x = a_y, \\ m_x = M, \\ n_x = m_y, \end{cases}$$

donde A, M son funciones arbitrarias sobre \mathbb{R}^2 . El problema aquí es que, aunque cualquier solución de este sistema es solución del EDS original, existen soluciones de este EDS que no aparecen aquí. Por ejemplo, tomando en el EDS original a todas las funciones incógnita como funciones de la variable x solamente, dicho EDS se reducirá a

$$u_x = q, v_x - qr_x = 0, u_y = v_y = r_y = m_y = a_y = 0, n = b = 0,$$

que admite soluciones no triviales para cada q función de x solamente. Puede demostrarse que este EDS es 2-regular en la dirección y pero no en la dirección x , de donde resulta que no hay posibilidad de construir soluciones "engrosando" 1-soluciones sobre el eje y en la dirección x .

8.1.3. Algoritmo de Gotay, Nester y Hinds II. En vista del resultado anterior, tomemos ahora como subvariedad $N_0 \subset \tilde{\Lambda}$ aquella compuesta por los puntos en $\tilde{\Lambda}$ tales que $y = 0$; de nuevo, éste es un fibrado sobre \mathbb{R} , y nuestra tarea es definir sobre su espacio de secciones una estructura presimpléctica y una función hamiltoniana. De nuevo, empezamos con $\tilde{\lambda} := \alpha \wedge \theta_1 + \beta \wedge \theta_2$, de donde

$$\mathbf{d}\tilde{\lambda} = \mathbf{d}\alpha \wedge (\mathbf{d}u - q\mathbf{d}x) + \alpha \wedge \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}x + \mathbf{d}\beta \wedge (\mathbf{d}v - q\mathbf{d}r) + \beta \wedge \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}r,$$

por lo cual

$$\mathbf{d}\tilde{\lambda}|_{N_0} = \mathbf{d}\alpha \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}u + \mathbf{d}m \wedge \mathbf{d}x \wedge (\mathbf{d}v - q\mathbf{d}r) + m\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}r.$$

Luego si

$$X_i = (\delta u_i, \delta v_i, \delta q_i, \delta r_i; \delta \alpha_i, \delta \beta_i), \quad i = 1, 2$$

indica un par de elementos arbitrarios en $TT(N_0)$, la estructura presimpléctica resultará

$$\begin{aligned} \omega^y(X_1, X_2) = \int_{\mathbb{R}} \left[-\delta a_1 \delta u_2 - \delta m_1 \delta v_2 - m \delta r_1 \delta q_2 + \right. \\ \left. + (q \delta m_1 + m \delta q_1) \delta r_2 + \delta u_1 \delta a_2 + (\delta v_1 - q \delta r_1) \delta m_2 \right] \mathbf{d}x \end{aligned}$$

y se obtiene

$$H^y = \int_{\mathbb{R}} [b(u_x - q) + n(v_x - qr_x)] \mathbf{d}x.$$

para la función hamiltoniana.

8.1.3.1. Vínculos primarios. Como antes

$$\ker \omega^y = \left\langle \underbrace{(0, 0, 0, 0; \delta b \mathbf{d}y, 0)}_{Z_1}, \underbrace{(0, 0, 0, 0; 0, \delta n \mathbf{d}y)}_{Z_2} \right\rangle$$

8.1. EDSs no regulares y fallas del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds

y los vínculos primarios resultarán a partir de $\mathbf{d}H^y$ ($\ker \omega^y$) = 0. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{d}H^y(Z_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \delta b(u_x - q) \mathbf{d}x \quad \Rightarrow \quad u_x - q = 0, \\ 0 &= \mathbf{d}H^y(Z_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \delta n(v_x - qr_x) \mathbf{d}x \quad \Rightarrow \quad v_x - qr_x = 0. \end{aligned}$$

Definamos $C_1 := \{u_x - q, v_x - qr_x\}$ y $M_1 := \{C_1 = 0\}$; por consiguiente $\ker \omega^y \cap TM_1 = \ker \omega^y$ y luego

$$\dim TM_1^\perp = \#C_1 + 2 = 4.$$

Para encontrar el par de vectores complementarios, se define

$$F_1 := \int_{\mathbb{R}} f_1(u_x - q) \mathbf{d}x, \quad F_2 := \int_{\mathbb{R}} f_2(v_x - qr_x) \mathbf{d}x;$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} X_2 \cdot F_1 &= \int_{\mathbb{R}} f_1[(\delta u_2)_x - \delta q_2] \mathbf{d}x \\ &= - \int_{\mathbb{R}} [(f_1)_x \delta u_2 + f_1 \delta q_2] \mathbf{d}x, \\ X_2 \cdot F_2 &= \int_{\mathbb{R}} f_2[(\delta v_2)_x - r_x \delta q_2 - q(\delta r_2)_x] \mathbf{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} [(qf_2)_x \delta r_2 - (f_2)_x \delta v_2 - r_x f_2 \delta q_2] \mathbf{d}x. \end{aligned}$$

Entonces, bajo la hipótesis $m \neq 0$, se obtiene que

$$\begin{aligned} X_{F_1} &= \left(0, \frac{qf_1}{m}, 0, \frac{f_1}{m}; (f_1)_x \mathbf{d}x, 0\right) \\ X_{F_2} &= \left(0, \frac{qr_x f_2}{m}, \frac{q_x f_2}{m}, \frac{r_x f_2}{m}; 0, (f_2)_x \mathbf{d}x\right), \end{aligned}$$

y esto conduce a los vínculos secundarios

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{d}H^y(X_{F_1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} n \left[\left(\frac{qf_1}{m} \right)_x - q \left(\frac{f_1}{m} \right)_x \right] \mathbf{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} n \frac{q_x f_1}{m} \mathbf{d}x \quad \Rightarrow \quad n \frac{q_x}{m} = 0 \\ 0 &= \mathbf{d}H^y(X_{F_2}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ -b \frac{q_x f_2}{m} + n \left[\left(\frac{qr_x f_2}{m} \right)_x - r_x \frac{q_x f_2}{m} - q \left(\frac{r_x f_2}{m} \right)_x \right] \right\} \mathbf{d}x \\ &= - \int_{\mathbb{R}} b \frac{q_x f_2}{m} \mathbf{d}x \quad \Rightarrow \quad b \frac{q_x}{m} = 0. \end{aligned}$$

Esto nos pone en una posición sumamente incómoda: Supongamos que definimos $C_2 := C_1 \cup \{n \frac{q_x}{m}, b \frac{q_x}{m}\}$ y $M_2 := \{C_2 = 0\}$, y para continuar con el algoritmo, intentamos calcular $\ker \omega^y \cap TM_2$. Este conjunto está compuesto por aquellos vectores en $\ker \omega^y$ que anulan los diferenciales de los nuevos vínculos; entonces $Z = (0, 0, 0, 0; \delta b \mathbf{d}y, \delta n \mathbf{d}y) \in TM_2$ si y sólo si

$$\begin{cases} \delta n \frac{q_x}{m} = 0 \\ \delta b \frac{q_x}{m} = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, si $q_x \neq 0$ el algoritmo debe parar, dado que en tal caso $TM_2^\perp = TM_1^\perp$, y continuará en aquellos puntos para los que $q_x = 0$. Éste es un comportamiento muy desagradable del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds y, como se verá más adelante, está asociado a la naturaleza singular del EDS.

8.1.4. Análisis via EDS. El análisis de este sistema de PDEs desde este punto de vista es interesante, dado que su conjunto de elementos integrales consta de varios estratos, y cada uno de ellos tiene su propio comportamiento desde el punto de vista de la regularidad. De hecho, son precisamente estas diferencias las que introducen las singularidades a nivel del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds.

Describamos brevemente el conjunto \mathcal{I} de elementos integrales. Éste se divide en dos subconjuntos: El conjunto W , que consta de aquellos elementos para los cuales $q_x = 0$, y U_3 , que es el conjunto de elementos integrales de \mathcal{I} para los cuales $n = b = 0$. Ninguno de ellos contiene elementos regulares; en particular, los elementos en U_3 tienen 0-formas en su definición, de manera que debe ser redefinido apropiadamente. El procedimiento en estos casos consiste en restringir el EDS original \mathcal{I} a la subvariedad definida por la colección de 0-formas problemáticas. Esto da origen a un nuevo EDS \mathcal{I}_3 , cuyos elementos integrales se descomponen en término de un nuevo par de subconjuntos V_1 y V_3 . El conjunto V_3 está caracterizado por el vínculo $m = 0$, que es otra 0-forma, y no será estudiado, dado que en tal caso cambia cualitativamente la forma presimpléctica; el conjunto V_1 está compuesto de elementos regulares. Finalmente, la prolongación de la porción del EDS \mathcal{I} que corresponde a los elementos en W da lugar a un EDS \mathcal{I}_W sobre $G_2(T\mathbb{R}^{10})$ que es regular.

Pasemos ahora a caracterizar apropiadamente nuestro EDS \mathcal{I} ; primero que nada, notemos que un conjunto de generadores algebraicos para \mathcal{I} será

$$\{\theta_1, \theta_2, \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}x, \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}r, \mathbf{d}\alpha, \mathbf{d}\beta, \beta \wedge \mathbf{d}r + \alpha \wedge \mathbf{d}x, \beta \wedge \mathbf{d}q\}.$$

Con ellos podemos tratar de calcular los caracteres reducidos para la bandera $E_0 := 0 \subset E_1 := \langle v_1 \rangle \subset E := \langle v_1, v_2 \rangle$, donde hemos puesto

$$\begin{aligned} v_1 &:= \partial_x + U_1 \partial_u + V_1 \partial_v + Q_1 \partial_q + R_1 \partial_r + A_1 \partial_a + B_1 \partial_b + M_1 \partial_m + N_1 \partial_n, \\ v_2 &:= \partial_y + U_2 \partial_u + V_2 \partial_v + Q_2 \partial_q + R_2 \partial_r + A_2 \partial_a + B_2 \partial_b + M_2 \partial_m + N_2 \partial_n \end{aligned}$$

para describir los vectores generadores como elementos en $T_{(x,y,u,v,q,r)}\mathbb{R}^{10}$. Por consiguiente, si E es un elemento integral de \mathcal{I} , estas componentes deben satisfacer el sistema

$$\begin{cases} v_1 \lrcorner (\mathbf{d}u - q\mathbf{d}x) = 0 & \Leftrightarrow U_1 - q = 0, \\ v_1 \lrcorner (\mathbf{d}v - q\mathbf{d}r) = 0 & \Leftrightarrow V_1 - qR_1 = 0, \\ v_2 \lrcorner (\mathbf{d}u - q\mathbf{d}x) = 0 & \Leftrightarrow U_2 = 0, \\ v_2 \lrcorner (\mathbf{d}v - q\mathbf{d}r) = 0 & \Leftrightarrow V_2 - qR_2 = 0, \\ (v_1 \wedge v_2) \lrcorner \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}x = 0 & \Leftrightarrow Q_2 = 0, \\ (v_1 \wedge v_2) \lrcorner \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}r = 0 & \Leftrightarrow Q_2 R_1 - Q_1 R_2 = 0, \\ (v_1 \wedge v_2) \lrcorner \mathbf{d}\alpha = 0 & \Leftrightarrow A_2 - B_1 = 0, \\ (v_1 \wedge v_2) \lrcorner \mathbf{d}\beta = 0 & \Leftrightarrow M_2 - N_1 = 0, \\ (v_1 \wedge v_2) \lrcorner (\beta \wedge \mathbf{d}r + \alpha \wedge \mathbf{d}x) = 0 & \Leftrightarrow nR_1 - mR_2 - b = 0, \\ (v_1 \wedge v_2) \lrcorner \beta \wedge \mathbf{d}q = 0 & \Leftrightarrow nQ_1 - mQ_2 = 0. \end{cases}$$

8.1. EDSs no regulares y fallas del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds

Esto es, $V_2(\mathcal{I})$ viene descrito por las ecuaciones

$$\begin{cases} U_1 = q, U_2 = 0, \\ V_1 = qR_1, V_2 = qR_2, \\ Q_2 = 0, Q_1R_2 = 0, \\ A_2 - B_1 = 0, \\ M_2 - N_1 = 0, \\ nR_1 - mR_2 - b = 0, \\ nQ_1 = 0. \end{cases}$$

Vamos a analizar cuidadosamente este sistema. Resulta que uno puede escribir $V_2(\mathcal{I}) = W \cup U_3$, donde

$$W : \begin{cases} U_1 = q, U_2 = 0, \\ V_1 = qR_1, V_2 = qR_2, \\ Q_1 = 0, Q_2 = 0, \\ A_2 - B_1 = 0, \\ M_2 - N_1 = 0, \\ nR_1 - mR_2 - b = 0, \end{cases} \quad U_3 : \begin{cases} U_1 = q, U_2 = 0, \\ V_1 = qR_1, V_2 = 0, \\ Q_2 = 0, R_2 = 0, \\ A_2 - B_1 = 0, \\ M_2 - N_1 = 0, \\ b = 0, \\ n = 0. \end{cases}$$

Calculemos ahora los espacios polares para los elementos integrales del elemento integral E ; tenemos entonces que

$$\begin{aligned} H(E_0) &= \{v \in T_{(x,y,u,v,q,r,a,b,m,n)}\mathbb{R}^{10} : v \lrcorner(\mathbf{d}u - q\mathbf{d}x) = 0, v \lrcorner(\mathbf{d}v - q\mathbf{d}r) = 0\}, \\ H(E_1) &= \left\{v \in H(E_0) : v \lrcorner(v_1 \lrcorner \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}x) = 0, v \lrcorner(v_1 \lrcorner \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}r) = 0, v \lrcorner(v_1 \lrcorner \mathbf{d}\alpha) = 0, \right. \\ &\quad \left. v \lrcorner(v_1 \lrcorner \mathbf{d}\beta) = 0, v \lrcorner(v_1 \lrcorner(\beta \wedge \mathbf{d}r + \alpha \wedge \mathbf{d}x)) = 0, v \lrcorner(v_1 \lrcorner \beta \wedge \mathbf{d}q) = 0\right\} \\ &= \left\{v \in H(E_0) : v \lrcorner(Q_1 \mathbf{d}x - \mathbf{d}q) = 0, v \lrcorner(Q_1 \mathbf{d}r - R_1 \mathbf{d}q) = 0, \right. \\ &\quad \left. v \lrcorner(A_1 \mathbf{d}x + B_1 \mathbf{d}y - \mathbf{d}a) = 0, v \lrcorner(M_1 \mathbf{d}x + N_1 \mathbf{d}y - \mathbf{d}m) = 0, \right. \\ &\quad \left. v \lrcorner(m \mathbf{d}r - R_1 \beta - b \mathbf{d}y) = 0, v \lrcorner(m \mathbf{d}q - Q_1 \beta) = 0\right\}. \end{aligned}$$

Con estas expresiones uno puede tratar de calcular los caracteres de Cartan reducidos para E en cada uno de los conjuntos W y U_3 ; en cada caso tenemos que $c_0(E) = 2$ y $c_1(E) = 6$ en W , suponiendo que¹ $m \neq 0$. Además uno tiene que $\text{codim}_E W = 9$, implicando vía el test de Cartan que W no contiene elementos regulares.

Sobre U_3 debemos tener presente que estos elementos integrales están definidos mediante 0-formas, concretamente, los vínculos $n = 0$ y $b = 0$. La regularidad de \mathcal{I} debe estudiarse a través de la regularidad del EDS \mathcal{I}_3 obtenido a partir de \mathcal{I} restringido a la subvariedad

$$\tilde{\Lambda}_3 := \{(x, y, u, v, q, r, a, 0, m, 0) : x, y, u, v, q, r, a, m \in \mathbb{R}\};$$

un conjunto de generadores para \mathcal{I}_3 será

$$\{\theta_1, \theta_2, \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}x, \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}r, \mathbf{d}a \wedge \mathbf{d}x, \mathbf{d}m \wedge \mathbf{d}x, m \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}r, m \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}q\}.$$

Entonces si

$$\begin{aligned} w_1 &:= \partial_x + U_1 \partial_u + V_1 \partial_v + Q_1 \partial_q + R_1 \partial_r + A_1 \partial_a + M_1 \partial_m, \\ w_2 &:= \partial_y + U_2 \partial_u + V_2 \partial_v + Q_2 \partial_q + R_2 \partial_r + A_2 \partial_a + M_2 \partial_m \end{aligned}$$

¹En los puntos para los que $m = 0$, algunos de los caracteres decrecen en una unidad.

el conjunto de 2-elementos integrales $V_2(\mathcal{I}_3)$ estará descrito por las ecuaciones

$$U'_3 : \begin{cases} U_1 = q, U_2 = 0, \\ V_1 = qR_1, V_2 = 0, \\ Q_2 = 0, Q_1 R_2 = 0, \\ A_2 = 0, M_2 = 0, \\ mR_2 = 0. \end{cases}$$

Entonces tendremos que $U'_3 = V_1 \cup V_3$, donde

$$(35) \quad V_1 : \begin{cases} U_1 = q, U_2 = 0, \\ V_1 = qR_1, V_2 = 0, \\ Q_2 = 0, R_2 = 0, \\ A_2 = 0, M_2 = 0, \end{cases} \quad V_3 : \begin{cases} U_1 = q, U_2 = 0, \\ V_1 = qR_1, V_2 = 0, \\ Q_2 = 0, Q_1 = 0, \\ A_2 = 0, M_2 = 0, \\ m = 0 \end{cases}$$

y $\text{codim}_E V_1 = 8$. Por otro lado, los espacios polares para la bandera $E'_0 := 0 \subset E'_1 := \langle w_1 \rangle \subset E' := \langle w_1, w_2 \rangle$ serán

$$\begin{aligned} H(E_0) &= \{v \in T_{(x,y,u,v,q,r,a,m)}\mathbb{R}^8 : v \lrcorner(\mathbf{d}u - q\mathbf{d}x) = 0, v \lrcorner(\mathbf{d}v - q\mathbf{d}r) = 0\}, \\ H(E_1) &= \left\{v \in H(E_0) : v \lrcorner(w_1 \lrcorner \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}x) = 0, v \lrcorner(w_1 \lrcorner \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}r) = 0, \right. \\ &\quad v \lrcorner(w_1 \lrcorner \mathbf{d}a \wedge \mathbf{d}x) = 0, v \lrcorner(w_1 \lrcorner \mathbf{d}m \wedge \mathbf{d}x) = 0, \\ &\quad \left. v \lrcorner(w_1 \lrcorner(m\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}r)) = 0, v \lrcorner(w_1 \lrcorner(m\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}q)) = 0\right\} \\ &= \left\{v \in H(E_0) : v \lrcorner(Q_1 \mathbf{d}x - \mathbf{d}q) = 0, v \lrcorner(Q_1 \mathbf{d}r - R_1 \mathbf{d}q) = 0, \right. \\ &\quad v \lrcorner(A_1 \mathbf{d}x - \mathbf{d}a) = 0, v \lrcorner(M_1 \mathbf{d}x - \mathbf{d}m) = 0, \\ &\quad \left. v \lrcorner(m\mathbf{d}r - mR_1 \mathbf{d}x) = 0, v \lrcorner(m\mathbf{d}q - mQ_1 \mathbf{d}x) = 0\right\}, \end{aligned}$$

y para $E \in V_1$ tendremos que $c_0(E) = 2$, $c_1(E) = 6$. Por consiguiente, los elementos integrales en V_1 son regulares.

Finalmente es necesario considerar la prolongación del conjunto W , para verificar si alguno de sus elementos puede ser considerado como el espacio tangente de alguna solución. La prolongación de un $\mathcal{I} \subset \Omega^\bullet(M)$ es el pullback del EDS de contacto sobre $G_2(TM)$ a la subvariedad $V_2(\mathcal{I})$. Para describir este procedimiento, introduzcamos las coordenadas

$$(x, y, u, v, q, r, a, b, m, n, u_x, v_x, q_x, r_x, a_x, b_x, m_x, n_x, u_y, v_y, q_y, r_y, a_y, b_y, m_y, n_y)$$

sobre $G_2(T\mathbb{R}^{10})$; entonces W es el subconjunto descrito por

$$W : \begin{cases} u_x = q, u_y = 0, \\ v_x = qr_x, v_y = qr_y, \\ q_x = 0, q_y = 0, \\ a_y - b_x = 0, \\ n_x - m_y = 0, \\ nr_x - mr_y - b = 0, \end{cases}$$

8.1. EDSs no regulares y fallas del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds

y su pullback \mathcal{I}_W de la estructura de contacto a W tendrá los generadores

$$\begin{cases} \theta_u := \mathbf{d}u - q\mathbf{d}x \\ \theta_v := \mathbf{d}v - q(r_x\mathbf{d}x + r_y\mathbf{d}y) \\ \theta_q := \mathbf{d}q \\ \theta_r := \mathbf{d}r - r_x\mathbf{d}x - r_y\mathbf{d}y \\ \theta_a := \mathbf{d}a - a_x\mathbf{d}x - a_y\mathbf{d}y \\ \theta_b := \mathbf{d}b - a_y\mathbf{d}x - b_y\mathbf{d}y \\ \theta_m := \mathbf{d}m - m_x\mathbf{d}x - m_y\mathbf{d}y \\ \theta_n := \mathbf{d}n - m_y\mathbf{d}x - n_y\mathbf{d}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{d}\theta_u \equiv 0 \\ \mathbf{d}\theta_v = -q(\mathbf{d}r_x \wedge \mathbf{d}x + \mathbf{d}r_y \wedge \mathbf{d}y) \\ \mathbf{d}\theta_q = 0 \\ \mathbf{d}\theta_r = -\mathbf{d}r_x \wedge \mathbf{d}x - \mathbf{d}r_y \wedge \mathbf{d}y \\ \mathbf{d}\theta_a = -\mathbf{d}a_x \wedge \mathbf{d}x - \mathbf{d}a_y \wedge \mathbf{d}y \\ \mathbf{d}\theta_b = -\mathbf{d}a_y \wedge \mathbf{d}x - \mathbf{d}b_y \wedge \mathbf{d}y \\ \mathbf{d}\theta_m = -\mathbf{d}m_x \wedge \mathbf{d}x - \mathbf{d}m_y \wedge \mathbf{d}y \\ \mathbf{d}\theta_n = -\mathbf{d}m_y \wedge \mathbf{d}x - \mathbf{d}n_y \wedge \mathbf{d}y. \end{cases}$$

Sea E la bandera $E_0 := 0 \subset E_1 := \langle v_1 \rangle \subset E := \langle v_1, v_2 \rangle$, con base

$$\begin{aligned} v_1 &:= \partial_x + U_1\partial_u + V_1\partial_v + Q_1\partial_q + R_1\partial_r + A_1\partial_a + B_1\partial_b + M_1\partial_m + N_1\partial_n + \\ &\quad + U_x^1\partial_{u_x} + V_x^1\partial_{v_x} + Q_x^1\partial_{q_x} + R_x^1\partial_{r_x} + A_x^1\partial_{a_x} + B_x^1\partial_{b_x} + M_x^1\partial_{m_x} + N_x^1\partial_{n_x} + \\ &\quad + U_y^1\partial_{u_y} + V_y^1\partial_{v_y} + Q_y^1\partial_{q_y} + R_y^1\partial_{r_y} + A_y^1\partial_{a_y} + B_y^1\partial_{b_y} + M_y^1\partial_{m_y} + N_y^1\partial_{n_y}, \\ v_2 &:= \partial_y + U_2\partial_u + V_2\partial_v + Q_2\partial_q + R_2\partial_r + A_2\partial_a + B_2\partial_b + M_2\partial_m + N_2\partial_n + \\ &\quad + U_x^2\partial_{u_x} + V_x^2\partial_{v_x} + Q_x^2\partial_{q_x} + R_x^2\partial_{r_x} + A_x^2\partial_{a_x} + B_x^2\partial_{b_x} + M_x^2\partial_{m_x} + N_x^2\partial_{n_x} + \\ &\quad + U_y^2\partial_{u_y} + V_y^2\partial_{v_y} + Q_y^2\partial_{q_y} + R_y^2\partial_{r_y} + A_y^2\partial_{a_y} + B_y^2\partial_{b_y} + M_y^2\partial_{m_y} + N_y^2\partial_{n_y}; \end{aligned}$$

entonces $V_2(\mathcal{I}_W)$ está dado por

$$\begin{cases} U_1 = q, U_2 = 0, V_1 = qr_x, V_2 = qr_y, Q_1 = 0, Q_2 = 0, R_1 = r_x, R_2 = r_y, \\ A_1 = a_x, A_2 = a_y, B_1 = a_y, B_2 = b_y, M_1 = m_x, M_2 = m_y, N_1 = m_y, N_2 = n_y, \\ R_x^2 - R_x^1 = 0, A_x^2 - A_x^1 = 0, B_x^2 - B_x^1 = 0, M_x^2 - M_x^1 = 0, N_x^2 - N_x^1 = 0. \end{cases}$$

Esto significa que $\text{codim}_E V_2(\mathcal{I}_W) = 21$. Para E elemento integral los espacios polares son

$$\begin{aligned} H(E_0) &= \left\{ v \in TW : v \lrcorner \theta_u = 0, v \lrcorner \theta_v = 0, v \lrcorner \theta_q = 0, v \lrcorner \theta_r = 0, \right. \\ &\quad \left. v \lrcorner \theta_a = 0, v \lrcorner \theta_b = 0, v \lrcorner \theta_m = 0, v \lrcorner \theta_n = 0 \right\} \\ H(E_1) &= \left\{ v \in H(E_0) : v \lrcorner (\mathbf{d}r_x + \dots) = 0, v \lrcorner (\mathbf{d}a_x + \dots) = 0, \right. \\ &\quad \left. v \lrcorner (\mathbf{d}a_y + \dots) = 0, v \lrcorner (\mathbf{d}m_x + \dots) = 0, v \lrcorner (\mathbf{d}m_y + \dots) = 0 \right\}, \end{aligned}$$

y los caracteres de Cartan reducidos resultan $c_0(E) = 8, c_1(E) = 13$; entonces E es un elemento integral regular.

8.1.4.1. *Bonus: Caso $m = 0$.* El conjunto V_3 debe ser considerado aparte; definamos

$$\tilde{\Lambda}'_3 := \{(x, y, u, v, q, r, a, 0, 0, 0) : x, y, u, v, q, r, a \in \mathbb{R}\} \subset \tilde{\Lambda}_3;$$

un conjunto de generadores para $\mathcal{I}'_3 := \mathcal{I}_3|_{\tilde{\Lambda}'_3}$ será

$$\{\theta_1, \theta_2, \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}x, \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}r, \mathbf{d}a \wedge \mathbf{d}x\}.$$

Tomando

$$\begin{aligned} w'_1 &:= \partial_x + U_1\partial_u + V_1\partial_v + Q_1\partial_q + R_1\partial_r + A_1\partial_a, \\ w'_2 &:= \partial_y + U_2\partial_u + V_2\partial_v + Q_2\partial_q + R_2\partial_r + A_2\partial_a \end{aligned}$$

el conjunto de 2-elementos integrales $V_2(\mathcal{I}'_3)$ estará descrito por las ecuaciones

$$V'_3 : \begin{cases} U_1 = q, U_2 = 0, \\ V_1 = qR_1, V_2 = 0, \\ Q_2 = 0, Q_1R_2 = 0, \\ A_2 = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto $V'_3 = W_1 \cup W_2$, y

$$W_1 : \begin{cases} U_1 = q, U_2 = 0, \\ V_1 = qR_1, V_2 = 0, \\ Q_2 = 0, Q_1 = 0, \\ A_2 = 0, \end{cases} \quad W_2 : \begin{cases} U_1 = q, U_2 = 0, \\ V_1 = qR_1, V_2 = 0, \\ Q_2 = 0, R_2 = 0, \\ A_2 = 0 \end{cases}$$

luego si E'' es la bandera $E''_0 := 0 \subset E''_1 := \langle w'_1 \rangle \subset E'' := \langle w'_1, w'_2 \rangle$ entonces $\text{codim}_E W_1 = \text{codim}_E W_2 = 7$. Para los espacios polares de E'' tendremos las expresiones

$$\begin{aligned} H(E_0) &= \{v \in T_{(x,y,u,v,q,r,a)}\mathbb{R}^7 : v \lrcorner (\mathbf{d}u - q\mathbf{d}x) = 0, v \lrcorner (\mathbf{d}v - q\mathbf{d}r) = 0\}, \\ H(E_1) &= \left\{ v \in H(E_0) : v \lrcorner (w'_1 \lrcorner \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}x) = 0, v \lrcorner (w'_1 \lrcorner \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}r) = 0, \right. \\ &\quad \left. v \lrcorner (w'_1 \lrcorner \mathbf{d}a \wedge \mathbf{d}x) = 0 \right\} \\ &= \left\{ v \in H(E_0) : v \lrcorner (Q_1 \mathbf{d}x - \mathbf{d}q) = 0, \right. \\ &\quad \left. v \lrcorner (Q_1 \mathbf{d}r - R_1 \mathbf{d}q) = 0, v \lrcorner (A_1 \mathbf{d}x - \mathbf{d}a) = 0 \right\}, \end{aligned}$$

de donde $c_0(E'') = 2$ in V'_3 y

$$c_1(E'') = \begin{cases} 4 & \text{if } E'' \in W_1 \\ 5 & \text{if } E'' \in W_2. \end{cases}$$

Por consiguiente el conjunto W_2 contiene más elementos regulares.

La prolongación de W_1 . El próximo paso es prolongar la parte del EDS correspondiente a W_1 , para individualizar allí nuevos elementos regulares. Para ello tomamos $G_2(T\mathbb{R}^7)$ con coordenadas

$$(x, y, u, v, q, r, a, u_x, v_x, q_x, r_x, a_x, u_y, v_y, q_y, r_y, a_y) \in G_2(T\mathbb{R}^7);$$

las ecuaciones a continuación definen a W_1 como un subconjunto de $G_2(T\mathbb{R}^7)$

$$W_1 : \begin{cases} u_x = q, u_y = 0, \\ v_x = qr_x, v_y = 0, \\ q_x = 0, q_y = 0, \\ a_y = 0. \end{cases}$$

El EDS correspondiente es el pullback de la estructura de contacto en este espacio a W_2 . Es de esperar, desde un punto de vista intuitivo, que este sistema resultase ser involutivo, dado que, de acuerdo al mismo, todas las funciones incógnita parecieran ser independientes de la variable y . Desde el punto de vista formal, consideremos la bandera E compuesta de los subespacios $E_0 := 0 \subset E_1 := \langle v_1 \rangle \subset E := \langle v_1, v_2 \rangle$; la base generadora es

$$\begin{aligned} v_1 &:= \partial_x + U_1 \partial_u + V_1 \partial_v + Q_1 \partial_q + R_1 \partial_r + A_1 \partial_a + U_x^1 \partial_{u_x} + V_x^1 \partial_{v_x} + \\ &\quad + Q_x^1 \partial_{q_x} + R_x^1 \partial_{r_x} + A_x^1 \partial_{a_x} + U_y^1 \partial_{u_y} + V_y^1 \partial_{v_y} + Q_y^1 \partial_{q_y} + R_y^1 \partial_{r_y} + A_y^1 \partial_{a_y}, \\ v_2 &:= \partial_y + U_2 \partial_u + V_2 \partial_v + Q_2 \partial_q + R_2 \partial_r + A_2 \partial_a + U_x^2 \partial_{u_x} + V_x^2 \partial_{v_x} + \\ &\quad + Q_x^2 \partial_{q_x} + R_x^2 \partial_{r_x} + A_x^2 \partial_{a_x} + U_y^2 \partial_{u_y} + V_y^2 \partial_{v_y} + Q_y^2 \partial_{q_y} + R_y^2 \partial_{r_y} + A_y^2 \partial_{a_y}. \end{aligned}$$

8.1. EDSs no regulares y fallas del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds

Como hemos mencionado antes, el EDS de la prolongación es la restricción del EDS de contacto a W_1 ; por consiguiente

$$\begin{cases} \mathbf{d}u - q\mathbf{d}x, \mathbf{d}v - qr_x\mathbf{d}x, \\ \mathbf{d}q, \mathbf{d}r - r_x\mathbf{d}x - r_y\mathbf{d}y, \\ \mathbf{d}a - a_x\mathbf{d}x, \\ \mathbf{d}r_x \wedge \mathbf{d}x + \mathbf{d}r_y \wedge \mathbf{d}y, \\ \mathbf{d}a_x \wedge \mathbf{d}x. \end{cases}$$

Entonces E es un elemento integral si y sólo si

$$\begin{cases} U_1 - q = 0, V_1 - qR_1 = 0, Q_1 = 0, R_1 - r_x = 0, A_1 - a_x = 0, \\ U_2 = 0, V_2 = 0, Q_2 = 0, R_2 - r_y = 0, A_2 = 0, \\ R_x^2 - R_y^1 = 0, A_x^2 = 0. \end{cases}$$

Vemos por lo tanto que $\text{codim}_E W_2 = 12$. Por otra parte, los espacios polares para este elemento son

$$\begin{aligned} H(E_0) &= \left\{ v \in TG_2(\mathbb{R}^7) : v \lrcorner (\mathbf{d}u - q\mathbf{d}x) = 0, v \lrcorner (\mathbf{d}v - qr_x\mathbf{d}x) = 0, \right. \\ &\quad \left. v \lrcorner \mathbf{d}q = 0, v \lrcorner (\mathbf{d}r - r_x\mathbf{d}x - r_y\mathbf{d}y) = 0, v \lrcorner (\mathbf{d}a - a_x\mathbf{d}x) = 0 \right\} \\ H(E_1) &= \left\{ v \in H(E_0) : v \lrcorner (v_1 \lrcorner \mathbf{d}a_x \wedge \mathbf{d}x) = 0, \right. \\ &\quad \left. v \lrcorner (v_1 \lrcorner \mathbf{d}r_x \wedge \mathbf{d}x + v_1 \lrcorner \mathbf{d}r_y \wedge \mathbf{d}y) = 0 \right\} \\ &= \left\{ v \in H(E_0) : v \lrcorner (\mathbf{d}a_x + \dots) = 0, v \lrcorner (\mathbf{d}r_x + \dots) = 0 \right\} \end{aligned}$$

donde los puntos suspensivos indican términos que pueden ser ignorados en el cálculo de los caracteres reducidos. Luego estos caracteres para E resultan $c_0(E) = 5$, $c_1(E) = 7$ y la prolongación de W_1 está compuesta de elementos regulares.

8.1.5. Vuelta al algoritmo de Gotay, Nester y Hinds. Es interesante desingularizar los vínculos surgidos durante la aplicación del algoritmo de Gotay, Nester y Hinds imitando el procedimiento que uno realiza en dimensión finita: Para ello suponemos que las secciones que satisfacen los vínculos conflictivos se separan en dos subconjuntos, por un lado, aquellas para las cuales se cumple que $n = b = 0$, y por el otro las secciones tales que $q_x = 0$. Sin cuestionarnos demasiado la validez de tal procedimiento, consideraremos la continuación del algoritmo a cada uno de estos conjuntos.

- **Caso** $n = b = 0$. Aquí vale que $C'_2 := C_1 \cup \{n, b\}$ y si M'_2 es el conjunto de ceros para C'_2 , entonces $\ker \omega^y \cap TM'_2 = 0$. Por lo tanto el algoritmo debe parar aquí, esto es, M'_2 es una variedad invariante. Para hallar las ecuaciones dinámicas, obtengamos el campo vectorial hamiltoniano para H^y sobre $\Gamma(N_0)$, restringiéndolo a la subvariedad M'_2 . Tendremos por lo tanto que

$$(36) \quad X_2 \cdot H^y = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \delta b_2 (u_x - q) + \delta n_2 (v_x - qr_x) + \right. \\ \left. + b [(\delta u_2)_x - \delta q_2] + n [(\delta v_2)_x - r_x \delta q_2 - q (\delta r_2)_x] \right\} \mathbf{d}x$$

de donde $X_2 \cdot H^y|_{M'_2} = 0$; si el campo vectorial hamiltoniano para la función H^y se escribe como $X_{H^y} = (u_y, v_y, q_y, r_y, a_y \mathbf{d}x + b_y \mathbf{d}y, m_y \mathbf{d}x + n_y \mathbf{d}y)$, las soluciones tangentes a M'_2 de las ecuaciones de Hamilton deben ser² $X_{H^y} = 0$ y las ecuaciones dinámicas

²Todos los campos hamiltonianos para H^y tienen la forma $X_{H^y} = \mu_1 Z_1 + \mu_2 Z_2$, y la condición de tangencia requiere que $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

resultan ser

$$\begin{cases} u_y = 0 \\ v_y - qr_y = 0 \\ q_y = 0 \\ a_y = 0 \\ m_y = 0. \end{cases}$$

Este sistema debe compararse con el EDS regular V_1 descrito por las ecuaciones (35): Esta rama del procedimiento de regularización encuentra aquellas soluciones asociadas con los elementos regulares en V_1 .

- **Case** $q_x = 0$. Ahora $C_2'' := C_1 \cup \{q_x\}$, y $M_2'' = \{C_2'' = 0\}$. Entonces $\ker \omega^y \cap TM_1' = \ker \omega^y \cap TM_2''$ de donde obtenemos que $\dim (TM_2'')^\perp = \#C_2'' + 2 = 5$. Si definimos

$$G := \int_{\mathbb{R}} gq_x \mathbf{d}x$$

su derivada en la dirección X_2 resulta ser

$$X_2 \cdot G = \int_{\mathbb{R}} g(\delta q_2)_x \mathbf{d}x = - \int_{\mathbb{R}} g_x \delta q_2 \mathbf{d}x.$$

Luego

$$X_G = \left(0, q \frac{g_x}{m}, 0, \frac{g_x}{m}, 0; 0, 0\right) \in (TM_2')^\perp$$

y la condición de invariancia resulta ser

$$\begin{aligned} 0 &= X_G \cdot H^y \\ &= \int_{\mathbb{R}} n \left[\left(q \frac{g_x}{m} \right)_x - q \left(\frac{g_x}{m} \right)_x \right] \mathbf{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_x \frac{nq_x}{m} \mathbf{d}x \quad \Rightarrow \quad \left(n \frac{q_x}{m} \right)_x = 0. \end{aligned}$$

Esta condición se satisface sobre M_2'' , de donde se sigue que es una subvariedad invariante para la dinámica definida por ω^y y H^y . Entonces calculemos el campo vectorial hamiltoniano X_{H^y} , restringiéndolo a M_2'' ; dada la ecuación (36) se obtiene que

$$X_2 \cdot H^y|_{M_2''} = \int_{\mathbb{R}} \left[-b_x \delta u_2 - (b - nr_x) \delta q_2 - n_x \delta v_2 (nq)_x \delta r_2 \right] \mathbf{d}x.$$

Por lo tanto las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{cases} u_y = 0 \\ v_y - qr_y = 0 \\ q_y = 0 \\ a_y = b_x \\ b_y = \delta b \\ m_y = n_x \\ n_y = \delta n. \end{cases}$$

En este caso las soluciones de las ecuaciones dinámicas están en correspondencia uno a uno con las soluciones asociadas a los elementos regulares en la prolongación \mathcal{I}_W de W ; es más, el paso adicional en el algoritmo de Gotay, Nester y Hinds está relacionado con la prolongación efectuada.

8.2. Mecánica no estándar y condiciones de integrabilidad

En [ST95] se afirma que el siguiente sistema de PDEs

$$\begin{cases} \phi_{zz} + y\phi_{xx} = 0 \\ \phi_{yy} = 0 \end{cases}$$

tiene como condiciones de integrabilidad las ecuaciones $\phi_{xxy} = \phi_{xxxx} = 0$. Notemos que el sistema puede escribirse como el EDS \mathcal{I} generado por

$$\left\{ \begin{aligned} \theta &:= \mathbf{d}\phi - p\mathbf{d}x - q\mathbf{d}y - r\mathbf{d}z, \\ \Gamma_1 &:= \mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y + y\mathbf{d}p \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z, \Gamma_2 := \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}z \end{aligned} \right\}$$

sobre el espacio \mathbb{R}^7 con coordenadas (x, y, z, ϕ, p, q, r) . Ahora bien, notemos que en \mathcal{I} no aparece más que la derivada segunda de ϕ , y que una prolongación agrega un orden más en las derivadas de las variables en juego, así que para conseguir las condiciones de integrabilidad se necesitan al menos dos prolongaciones. El propósito de estos párrafos es usar nuestra correspondencia entre EDSs y sistemas dinámicos para llevar adelante este proceso via el algoritmo de Gotay, Nester y Hinds. Para ello necesitamos un problema variacional no estándar al cual aplicarle nuestra técnica; si consideramos el fibrado doble

$$\begin{aligned} \Lambda := \mathbb{R}^7 &\rightarrow \Lambda_1 := \mathbb{R}^4 &\rightarrow M := \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, \phi, p, q, r) &\mapsto (x, y, z, \phi) &\mapsto (x, y, z), \end{aligned}$$

la estructura de levantamiento está definida allí por \mathcal{I} , y la dinámica dada por el lagrangiano trivial $\lambda = 0$, podemos intentar asociarle un problema Lepage equivalente via la prescripción usual. Esto es, construimos

$$\tilde{\Lambda} := \Lambda \oplus \bigwedge^2 (T^*M) \oplus \mathbb{R}^2$$

con coordenadas $(x, y, z, \phi, p, q, r; \alpha, \lambda, \mu)$, $\alpha = A\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y + B\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}z + C\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z$; la acción considerada sobre las secciones de este nuevo fibrado será

$$S := \int_M (\alpha \wedge \theta + \lambda\Gamma_1 + \mu\Gamma_2).$$

Debemos probar que podemos recuperar todas las soluciones del problema variacional original a partir de las soluciones de este nuevo problema, esto es, que es un problema variacional Lepage equivalente bivariante.

Lema 37. *La proyección*

$$\nu : \tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda : (x, y, z, \phi, p, q, r; \alpha, \lambda, \mu) \mapsto (x, y, z, \phi, p, q, r)$$

aplica extremales de S en secciones integrales para \mathcal{I} ; inversamente, para cada sección integral de \mathcal{I} dada por

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z, \phi, p, q, r)$$

existen $\alpha \in \Omega^2(M)$, $\lambda, \mu \in C^\infty(M)$ tal que junto con dicha sección integral forman un extremal para S .

DEMOSTRACIÓN. Las variaciones respecto de α, μ y ν dan los generadores de \mathcal{I} , de donde resulta que la proyección genera secciones integrales de \mathcal{I} . Las variaciones respecto de ϕ, p, q y r conducen a las ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{d}\alpha = 0, \\ y\mathbf{d}\lambda \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z + \alpha \wedge \mathbf{d}x = 0, \\ \mathbf{d}\mu \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}z + \alpha \wedge \mathbf{d}y = 0, \\ \mathbf{d}\lambda \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y + \alpha \wedge \mathbf{d}z = 0. \end{cases}$$

Queremos ver que este sistema tiene soluciones para cualquier valor que asuman (ϕ, p, q, r) como funciones de (x, y, z) ; el único problema es la condición de compatibilidad sobre las derivadas de λ , que aparecen a partir de la segunda y cuarta ecuación de esta lista

$$yA_x - C_z.$$

No es difícil verificar que el sistema tiene soluciones. \square

8.2.1. Sistema dinámico asociado. Como es usual, llamemos $\tilde{\lambda}$ al integrando de S , y definamos $N_0 \subset \tilde{\Lambda}$ como la subvariedad en la cual $z = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\tilde{\lambda} = & \mathbf{d}\alpha \wedge (\mathbf{d}\phi - p\mathbf{d}x - q\mathbf{d}y - r\mathbf{d}z) - \alpha \wedge (\mathbf{d}p \wedge \mathbf{d}x + \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}y + \mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}z) + \\ & + \mathbf{d}\lambda \wedge (\mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y + y\mathbf{d}p \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z) + \mathbf{d}\mu \wedge \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}z \end{aligned}$$

por lo cual

$$\mathbf{d}\tilde{\lambda}\Big|_{N_0} = \mathbf{d}A \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}\phi + \mathbf{d}\lambda \wedge \mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y;$$

esto nos permite definir sobre el espacio de secciones de N_0 la forma presimpléctica

$$\omega^z(X_1, X_2) := \int_{\mathbb{R}^2} [(\delta A_1 \delta \phi_2 - \delta A_2 \delta \phi_1) + (\delta \lambda_1 \delta r_2 - \delta \lambda_2 \delta r_1)] \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y,$$

donde

$$X_i = (\delta \phi_i, \delta p_i, \delta q_i, \delta r_i; \delta \alpha_i, \delta \lambda_i, \delta \mu_i), \quad i = 1, 2$$

denotan vectores genéricos tangentes a $\Gamma(N_0)$. Debemos caracterizar el núcleo de esta forma.

Proposición 24. *El núcleo de ω^z está dado por*

$$\ker \omega^z = \langle (0, \delta p, \delta q, 0; \delta B \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}z + \delta C \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z, 0, \delta \mu) \rangle.$$

Ahora construyamos la función hamiltoniana; contrayendo $\tilde{\lambda}$ en la dirección de la variable z

$$\partial_z \lrcorner \tilde{\lambda} = -(B \mathbf{d}x + C \mathbf{d}z) \wedge (\mathbf{d}\phi - p\mathbf{d}x - q\mathbf{d}y - r\mathbf{d}z) - r\alpha + y\lambda \mathbf{d}p \wedge \mathbf{d}y + \mu \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}x,$$

por lo que

$$\partial_z \lrcorner \tilde{\lambda}\Big|_{N_0} = -(B \mathbf{d}x + C \mathbf{d}y) \wedge \mathbf{d}\phi + (Bq - Cp) \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y - rA \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y + y\lambda \mathbf{d}p \wedge \mathbf{d}y + \mu \mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}x$$

y la función hamiltoniana será

$$H^z = \int_{\mathbb{R}^2} [(C\phi_x - B\phi_y) + (Bq - Cp - rA) + (y\lambda p_x - \mu q_y)] \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y.$$

8.2.1.1. Vínculos primarios. Los vínculos de primer orden se obtienen via

$$\mathbf{d}H^z(\ker \omega^z) = 0.$$

8.2. Mecánica no estándar y condiciones de integrabilidad

Teniendo en cuenta los cálculos previos, será

$$\begin{aligned}
 0 &= \mathbf{d}H^z(\delta p) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} [y\lambda(\delta p)_x - C\delta p] \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \\
 &= - \int_{\mathbb{R}^2} (y\lambda_x + C) \delta p \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y & \Rightarrow & \quad y\lambda_x + C = 0 \\
 0 &= \mathbf{d}H^z(\delta q) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} [B\delta q - \mu(\delta q)_y] \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} (B + \mu_y) \delta q \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y & \Rightarrow & \quad B + \mu_y = 0 \\
 0 &= \mathbf{d}H^z(\delta B) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} (q - \phi_y) \delta B \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y & \Rightarrow & \quad \phi_y - q = 0 \\
 0 &= \mathbf{d}H^z(\delta C) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} (\phi_x - p) \delta C \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y & \Rightarrow & \quad \phi_x - p = 0 \\
 0 &= \mathbf{d}H^z(\delta \mu) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} q_y \delta \mu \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y & \Rightarrow & \quad q_y = 0.
 \end{aligned}$$

Definimos por lo tanto el conjunto

$$C_1 := \{y\lambda_x + C, B + \mu_y, \phi_y - q, \phi_x - p, q_y\}$$

y la subvariedad $M_1 = \{C_1 = 0\} \subset \Gamma(N_0)$. Nótese que un vector X está en TM_1 si y sólo si sus componentes satisfacen las versiones linealizadas de las ecuaciones que definen a M_1 ; por lo tanto

$$\begin{cases}
 y(\delta\lambda)_x + \delta C = 0, \\
 \delta B + (\delta\mu)_y = 0, \\
 (\delta\phi)_y - \delta q = 0, \\
 (\delta\phi)_x - \delta p = 0, \\
 (\delta q)_y = 0
 \end{cases}$$

son las condiciones que determinan si un vector es tangente a M_1 . De aquí resulta que

$$\ker \omega^z \cap TM_1 = \left\langle (0, 0, 0, 0; -(\delta\mu)_y \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}z, 0, \delta\mu) \right\rangle$$

de donde

$$\begin{aligned}
 \dim (TM_1)^\perp &= \dim TM - \dim TM_1 + \dim (\ker \omega^z \cap TM_1) \\
 &= \#\text{ecs. en } C_1 + 1 \\
 &= 6.
 \end{aligned}$$

Heurísticamente podemos esperar describir $(TM_1)^\perp$ con 6 vectores; como $\ker \omega^x$ está contenido en este conjunto y hay 5 vectores que describen este núcleo, nos falta un vector. Para encontrarlo, vamos a utilizar el método del vector hamiltoniano para una función de vínculo. De acuerdo a este método, si F es un vínculo que tiene asociado un campo vectorial hamiltoniano X_F , entonces $X_F \in (TM_1)^\perp$. El problema es que como la forma es solo presimpléctica, no todas las funciones tienen campo hamiltoniano asociado. Pero, por otra parte, hay bastantes funciones para elegir. Por ejemplo, tomemos los vínculos $q_y = 0$ y $\phi_1 - q = 0$; aunque ninguno

de los dos tiene campo hamiltoniano asociado, podemos armar el vínculo $\phi_{yy} = 0$. En tal caso la función

$$F_1 := \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{yy} f_1 \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$$

(con $f_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ arbitraria) si tiene campo hamiltoniano. Efectivamente, a partir de la ecuación

$$\omega^z(X_{F_1}, X_2) = \mathbf{d}F_1(X_2)$$

y observando que

$$\begin{aligned} \mathbf{d}F_1(X_2) &= \int_{\mathbb{R}^2} (\delta\phi_2)_{yy} f_1 \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \delta\phi_2 (f_1)_{yy} \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \end{aligned}$$

concluimos que

$$X_{F_1} = (0, 0, 0, 0; (f_1)_{yy} \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y, 0, 0).$$

Este vector no está en $\ker \omega^z$, por lo cual provee una nueva dirección en la cual verificar invariancia.

8.2.1.2. *Vínculos de segundo orden.* Estos vínculos se obtienen a partir de

$$\mathbf{d}H^z((TM_1)^\perp) = 0;$$

entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{d}H^z(X_{F_1}) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} r (f_1)_{yy} \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} r_{yy} f_1 \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \quad \Rightarrow \quad r_{yy} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto definamos $C_2 := C_1 \cup \{r_{yy}\}$ y su conjunto de ceros $M_2 := \{C_2 = 0\}$; puede comprobarse que $\ker \omega^z \cap (TM_1) = \ker \omega^z \cap (TM_2)$. Entonces $\dim (TM_2)^\perp = 7$, por lo que necesitaremos hallar un nuevo vector complementario a $(TM_1)^\perp$. Utilizando el vínculo adicional r_{yy} definimos la función F_2 sobre $\Gamma(N_0)$ via

$$F_2 := \int_{\mathbb{R}^2} r_{yy} f_2 \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$$

por lo cual

$$\mathbf{d}F_2(X_2) = \int_{\mathbb{R}^2} (\delta r_2)_{yy} f_2 \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} \delta r_2 (f_2)_{yy} \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y;$$

el campo vectorial hamiltoniano asociado a F_2 será

$$X_{F_2} = (0, 0, 0, 0; 0, (f_2)_{yy}, 0).$$

Éste es el vector complementario buscado; la nueva condición de invariancia resultará ser

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{d}H^z(X_{F_2}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (f_2)_{yy} y p_x \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f_2 (y p_x)_{yy} \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \quad \Rightarrow \quad (y p_x)_{yy} = 0. \end{aligned}$$

8.2. Mecánica no estándar y condiciones de integrabilidad

Pero sobre M_2 vale que $p = \phi_x$, por lo cual

$$\begin{aligned} (yp_x)_{yy} &= (y\phi_{xx})_{yy} \\ &= (y\phi_{xxy} + \phi_{xx})_y \\ &= y\phi_{xxyy} + 2\phi_{xxy} \\ &= 2\phi_{xxy} \end{aligned}$$

sobre M_2 .

8.2.1.3. *Vínculos de tercer orden.* El nuevo conjunto de vínculos es $C_3 := C_2 \cup \{\phi_{xxy}\}$ y, como antes, M_3 será el conjunto de ceros para estos vínculos. De nuevo se cumple que $\ker \omega^z \cap (TM_1) = \ker \omega^z \cap (TM_3)$, de donde $\dim (TM_3)^\perp = 8$. Para continuar con el algoritmo es necesario hallar un vector adicional en el ortogonal simpléctico de TM_3 . Para ello definimos

$$F_3 := \int_{\mathbb{R}^2} f_3 \phi_{xxy} \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y,$$

y su derivada a lo largo de X_2 será

$$\begin{aligned} \mathbf{d}F_3(X_2) &= \int_{\mathbb{R}^2} f_3 (\delta\phi_2)_{xxy} \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} (f_3)_{xxy} \delta\phi_2 \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y. \end{aligned}$$

Entonces

$$X_{F_3} = (0, 0, 0, 0; - (f_3)_{xxy} \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y, 0, 0),$$

con el nuevo vínculo asociado

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{d}H^z(X_{F_3}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} r (f_3)_{xxy} \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} r_{xxy} f_3 \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \quad \Rightarrow \quad r_{xxy} = 0. \end{aligned}$$

Nota. Uno puede preguntarse por qué se ha considerado a X_{F_3} linealmente independiente de X_{F_1} , cuando ambos apuntan en la dirección $(0, 0, 0, 0; \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y, 0, 0)$. La razón reside en las posibles funciones f_1 y f_3 que se utilizan para construir las funciones F_1 y F_3 . Debido a las integraciones por partes que se realizan para reescribir los diferenciales de las funciones F_1 y F_3 , resulta indispensable pedir que f_1 y f_3 , junto con algunas de sus derivadas parciales, se anulen en el borde de la región R de integración. Esto hace que los subespacios de $H_{N,2}(R)$ dados por

$$\left\{ f_1 : f_1|_{\partial R} = (f_1)_y|_{\partial R} = (f_1)_{yy}|_{\partial R} = 0 \right\}$$

y

$$\left\{ f_3 : f_3|_{\partial R} = (f_3)_x|_{\partial R} = (f_3)_{xx}|_{\partial R} = (f_3)_{xxy}|_{\partial R} = 0 \right\}$$

no estén contenido uno en el otro.

8.2.1.4. *Vínculos de cuarto orden.* En este caso definimos $C_4 := C_3 \cup \{r_{xxy}\}$ y su conjunto de ceros $M_4 := \{C_4 = 0\}$; aún tenemos que $\ker \omega^z \cap (TM_1) = \ker \omega^z \cap (TM_4)$ por lo cual $\dim (TM_4)^\perp = 9$. Entonces definimos

$$F_4 := \int_{\mathbb{R}^2} f_4 r_{xxy} \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$$

y su derivada en la dirección de X_2 resultará $\mathbf{d}F_4(X_2) = - \int_{\mathbb{R}^2} (f_4)_{xxy} \delta r_2 \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$, por lo que el nuevo vector en $(TM_4)^\perp$ será

$$X_{F_4} = (0, 0, 0, 0; 0, - (f_4)_{xxy}, 0).$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{d}H^z(X_{F_2}) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} yp_x (f_4)_{xxy} \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (yp_x)_{xxy} f_4 \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \quad \Rightarrow \quad (yp_x)_{xxy} = 0. \end{aligned}$$

Pero sobre M_4

$$(yp_x)_{xxy} = (y\phi_{xx})_{xxy} = (y\phi_{xxxx})_y = \phi_{xxxx} + y\phi_{xxy} = \phi_{xxxx},$$

y esto conduce al nuevo vínculo $\phi_{xxxx} = 0$.

8.2.1.5. *Vínculos de quinto orden.* Con las definiciones $C_5 := C_4 \cup \{\phi_{xxxx}\}$, $M_5 := \{C_5 = 0\}$, obtenemos que $\ker \omega^z \cap (TM_1) = \ker \omega^z \cap (TM_5)$ y por lo tanto

$$\dim(TM_5)^\perp = 10.$$

De nuevo, recurriendo a la función auxiliar

$$F_5 := \int_{\mathbb{R}^2} f_5 \phi_{xxxx} \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$$

tenemos que $\mathbf{d}H^z(X_2) = \int_{\mathbb{R}^2} (f_5)_{xxxx} \delta\phi_2 \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$ por lo que puede concluirse

$$X_{F_5} = (0, 0, 0, 0; (f_5)_{xxxx} \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y, 0, 0);$$

Un nuevo vínculo se obtiene a partir de

$$0 = \mathbf{d}H^z(X_{F_5}) = \int_{\mathbb{R}^2} r_{xxxx} f_5 \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \quad \Rightarrow \quad r_{xxxx} = 0.$$

8.2.1.6. *Finalización del algoritmo.* Definamos $M_6 \subset M_5$ como el conjunto de ceros de r_{xxxx} en M_5 ; agregando el campo vectorial hamiltoniano de

$$F_6 := \int_{\mathbb{R}^2} f_6 r_{xxxx} \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$$

a $(TM_5)^\perp$, obtenemos el espacio vectorial $(TM_6)^\perp$. Puede probarse que la función $\mathbf{d}H^z(X_{F_6})$ se anula idénticamente sobre M_6 , y por lo tanto es una subvariedad invariante de $\Gamma(N_0)$. Eliminando las variables auxiliares introducidas en el conjunto de vínculos $C_6 := C_5 \cup \{r_{xxxx}\}$, de forma tal de mantener sólo las variables originales x, y, z, ϕ , vemos que las condiciones de integrabilidad resultan ser $\phi_{xxy} = 0, \phi_{xxxx} = 0$. O sea, deberíamos poder describir el conjunto que resulta de proyectar sobre el espacio de las variables originales el conjunto M_6 ; sin embargo, esto puede dar origen a problemas casi tan difíciles como el original del cálculo de condiciones de integrabilidad.

8.3. Electromagnetismo

Ejemplo 8.3A: Electromagnetismo con 2-formas. Tomemos el fibrado doble

$$\bigwedge^3 (T^*M) \oplus \bigwedge^2 (T^*M) \rightarrow \bigwedge^2 (T^*M) \rightarrow M$$

formado por pares (F, A) , junto a la estructura de prolongación

$$\mathcal{I} := \langle F - dA \rangle$$

y la dinámica determinada por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} := F \wedge *F.$$

8.3. Electromagnetismo

Las ecuaciones de movimiento asociadas a estos datos son

$$F - dA = 0, d(*F) = 0,$$

y el sistema diferencial exterior inducido por ellas es

$$\mathcal{K} := \langle F - dA, d(*F), dF \rangle.$$

Podemos probar que este sistema es involutivo. Para ello tomamos el conjunto de vectores tangentes al fibrado total

$$V^\mu := (\partial_\mu; F^\mu, A^\mu)$$

que inducen la bandera de subespacios

$$E_0 := \{0\} \subset E_1 := \langle V^1 \rangle \subset E_2 := \langle V^1, V^2 \rangle \subset E_3 := \langle V^1, V^2, V^3 \rangle \subset E$$

tangentes al fibrado total en $E := \langle V^0, \dots, V^3 \rangle \subset T_{(F,A)}\Lambda$, que es el elemento integral al que queremos calcularle los caracteres de Cartan.

Concretamente

- Dado que $\mathcal{K}^{(1)} := \mathcal{K} \cap \Omega^1(\Lambda) = \{0\}$ obtenemos

$$\begin{aligned} H(E_0) &= \left\{ v \in T_{(F,A)}\Lambda : v \lrcorner \phi = 0 \text{ for all } \phi \in \mathcal{K}^{(1)} \right\} \\ &= T_{(F,A)}\Lambda \end{aligned}$$

por lo cual $c_0 = \text{codim } H(E_0) = 0$.

- Ahora

$$H(E_1) = \left\{ v \in T_{(F,A)}\Lambda : v \lrcorner (w \lrcorner \phi) = 0 \text{ for all } \phi \in \mathcal{K}^{(2)} \text{ y } w \in E_1 \right\},$$

por lo cual $v \in H(E_1)$ si y sólo si

$$v \lrcorner ((*F^1) - \partial_1 \lrcorner \mathbf{d}(*F)) = 0;$$

entonces $c_1 = \text{rank } M(V^1) = 1$.

- En este caso

$$\begin{aligned} H(E_2) &= \left\{ v \in T_{(F,A)}\Lambda : v \lrcorner (w_1 \lrcorner \phi) = 0 \text{ y } v \lrcorner (w_2 \lrcorner w_3 \lrcorner \psi) = 0 \right. \\ &\quad \left. \text{for all } \phi \in \mathcal{K}^{(2)}, \psi \in \mathcal{K}^{(3)} \text{ y } w_1, w_2, w_3 \in E_2 \right\} \end{aligned}$$

y entonces $v \in H(E_2)$ si y sólo si es solución del sistema

$$\begin{aligned} v \lrcorner ((*F^1) - \partial_1 \lrcorner \mathbf{d}(*F)) &= 0 \\ v \lrcorner ((*F^2) - \partial_2 \lrcorner \mathbf{d}(*F)) &= 0 \\ v \lrcorner (\partial_1 \lrcorner \partial_2 \lrcorner F + \partial_1 \lrcorner A^2 - \partial_2 \lrcorner A^1 + \partial_1 \lrcorner \partial_2 \lrcorner \mathbf{d}A) &= 0; \end{aligned}$$

por lo cual $c_2 = 4$.

- Las ecuaciones que determinan $H(E_3)$ serán

$$\begin{aligned} v \lrcorner ((*F^1) - \partial_1 \lrcorner \mathbf{d}(*F)) &= 0 \\ v \lrcorner ((*F^2) - \partial_2 \lrcorner \mathbf{d}(*F)) &= 0 \\ v \lrcorner ((*F^3) - \partial_3 \lrcorner \mathbf{d}(*F)) &= 0 \\ v \lrcorner (\partial_1 \lrcorner \partial_2 \lrcorner F + \partial_1 \lrcorner A^2 - \partial_2 \lrcorner A^1 + \partial_1 \lrcorner \partial_2 \lrcorner \mathbf{d}A) &= 0 \\ v \lrcorner (\partial_1 \lrcorner \partial_3 \lrcorner F + \partial_1 \lrcorner A^3 - \partial_3 \lrcorner A^1 + \partial_1 \lrcorner \partial_3 \lrcorner \mathbf{d}A) &= 0 \\ v \lrcorner (\partial_2 \lrcorner \partial_3 \lrcorner F + \partial_2 \lrcorner A^3 - \partial_3 \lrcorner A^2 + \partial_2 \lrcorner \partial_3 \lrcorner \mathbf{d}A) &= 0 \\ v \lrcorner (\partial_1 \lrcorner \partial_2 \lrcorner F^3 + \partial_2 \lrcorner \partial_3 \lrcorner F^1 + \partial_3 \lrcorner \partial_1 \lrcorner F^2 + \partial_1 \lrcorner \partial_2 \lrcorner \partial_3 \lrcorner \mathbf{d}F) &= 0 \end{aligned}$$

y el carácter de Cartan será

$$c_3 = 7.$$

Calculemos la codimensión de la subvariedad $V_4(\mathcal{K}) \subset G_4(T\Lambda)$ en E ; en este caso esto será igual al rango del operador lineal asociado al sistema lineal³

$$\begin{aligned} V^\mu \lrcorner V^\nu \lrcorner (\mathbf{d}(*F)) &= 0 \\ V^\mu \lrcorner V^\nu \lrcorner V^\sigma \lrcorner (F - \mathbf{d}A) &= 0 \\ V^\mu \lrcorner V^\nu \lrcorner V^\sigma \lrcorner V^\tau \lrcorner (\mathbf{d}F) &= 0 \quad \forall \mu, \nu, \sigma, \tau = 0, \dots, 3. \end{aligned}$$

Las simetrías del operador de contracción nos dicen que las ecuaciones a priori independientes en este conjunto son las correspondientes a los pares de índices

$$(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3),$$

el conjunto de triples

$$(0, 1, 2), (0, 1, 3), (0, 2, 3), (1, 2, 3)$$

y la cuaterna $(0, 1, 2, 3)$. Las ecuaciones asociadas a estos pares de índices son

$$\begin{aligned} \partial_0 \lrcorner (*F^1) - \partial_1 \lrcorner (*F^0) &= 0 \\ \partial_0 \lrcorner (*F^2) - \partial_2 \lrcorner (*F^0) &= 0 \\ \partial_0 \lrcorner (*F^3) - \partial_3 \lrcorner (*F^0) &= 0 \\ \partial_1 \lrcorner (*F^2) - \partial_2 \lrcorner (*F^1) &= 0 \\ \partial_1 \lrcorner (*F^3) - \partial_3 \lrcorner (*F^1) &= 0 \\ \partial_2 \lrcorner (*F^3) - \partial_3 \lrcorner (*F^2) &= 0 \end{aligned}$$

para los triples

$$\begin{aligned} \partial_0 \lrcorner \partial_1 \lrcorner \partial_2 \lrcorner F - \partial_0 \lrcorner \partial_1 \lrcorner A^2 - \partial_1 \lrcorner \partial_2 \lrcorner A^0 - \partial_2 \lrcorner \partial_0 \lrcorner A^1 &= 0 \\ \partial_0 \lrcorner \partial_1 \lrcorner \partial_3 \lrcorner F - \partial_0 \lrcorner \partial_1 \lrcorner A^3 - \partial_1 \lrcorner \partial_3 \lrcorner A^0 - \partial_3 \lrcorner \partial_0 \lrcorner A^1 &= 0 \\ \partial_0 \lrcorner \partial_2 \lrcorner \partial_3 \lrcorner F - \partial_0 \lrcorner \partial_2 \lrcorner A^3 - \partial_2 \lrcorner \partial_3 \lrcorner A^0 - \partial_3 \lrcorner \partial_0 \lrcorner A^2 &= 0 \\ \partial_1 \lrcorner \partial_2 \lrcorner \partial_3 \lrcorner F - \partial_1 \lrcorner \partial_2 \lrcorner A^3 - \partial_2 \lrcorner \partial_3 \lrcorner A^1 - \partial_3 \lrcorner \partial_1 \lrcorner A^2 &= 0 \end{aligned}$$

y finalmente

$$\partial_0 \lrcorner \partial_1 \lrcorner \partial_2 \lrcorner F^3 + \partial_1 \lrcorner \partial_2 \lrcorner \partial_3 \lrcorner F^0 + \partial_2 \lrcorner \partial_3 \lrcorner \partial_0 \lrcorner F^1 + \partial_3 \lrcorner \partial_0 \lrcorner \partial_1 \lrcorner F^2 = 0.$$

El operador lineal es constante, y por lo tanto tiene rango máximo en todas partes; por consiguiente $\text{codim}_E V_4(\mathcal{K}) = \# \text{ecuaciones} = 11$. Resulta entonces que el EDS \mathcal{K} es involutivo, por lo cual un conjunto de vínculos de Dirac para la teoría hamiltoniana asociada al problema de Lepage definido por la 4-forma

$$\lambda := \mathcal{L} + \Gamma \wedge (F - dA)$$

sobre el fibrado $\tilde{\Lambda} := \Lambda \oplus T^*M$ (con coordenadas (F, A, Γ)) puede construirse de la siguiente manera: Definiendo

$$\begin{aligned} A &=: \mathbf{B} \wedge \mathbf{d}x^0 + \mathbf{C} \\ F &=: \mathbf{G} \wedge \mathbf{d}x^0 + \mathbf{H} \end{aligned}$$

resulta que el EDS restringido a una hoja de tiempo constante en $\tilde{\Lambda}$ está generado por

$$\{\mathbf{H} - \mathbf{d}\mathbf{C}, \mathbf{d}\mathbf{H}, \mathbf{d}(*\mathbf{G})\},$$

y éstos son los vínculos usuales de la versión hamiltoniana del campo electromagnético. \blacktriangle

³La linealidad de este sistema es una característica particular, inducida por la linealidad de las ecuaciones de Maxwell.

8.4. Campos de Yang-Mills y espacios de fases covariantes

Ejemplo 8.3B: Electrodinámica sin campos. Es interesante introducir el siguiente problema de mecánica no estándar sobre $\Lambda := \Lambda^2(T^*M)$ con coordenadas (F_1, F_1) , cuya proyección intermedia es en la primera componente:

$$\begin{cases} \Lambda^2(T^*M) \oplus \Lambda^2(T^*M) \rightarrow \Lambda^2(T^*M) \rightarrow M \\ \mathcal{I} := \langle \mathbf{d}F_1, F_1 - F_2 \rangle \\ \mathcal{L} := F_2 \wedge *F_2. \end{cases}$$

El problema variacional asociado a esta mecánica es complementario al planteado por el ejemplo anterior: Aquí se trata de levantar sólo aquellas secciones que son cerradas, mientras que el ejemplo previo provee levantamientos para cualquier sección del fibrado intermedio. ▲

8.4. Campos de Yang-Mills y espacios de fases covariantes

8.4.1. Introducción. Como hemos señalado anteriormente, existe otro método de asignar una teoría canónica a un problema variacional, que se describe en [CW87]. La construcción expuesta en esta referencia se basa en considerar como espacio de fases al conjunto de extremales del problema variacional. Como un ejemplo extremo, si se ha formulado una teoría mecánica desde el punto de vista hamiltoniano, entonces las ecuaciones de movimiento son de primer orden y están escritas en la forma normal, por lo cual las soluciones del sistema están en correspondencia uno a uno con los puntos mismos del espacio. No hay mención explícita de la estructura diferenciable a utilizar sobre este espacio de extremales; como receta general, a aplicar cada vez que se diga algo acerca de ello, se sugiere que los vectores tangentes al espacio de fases deben satisfacer la linealización de las ecuaciones de movimiento. En nuestro contexto, esta operación equivale a pedir que la sección $\delta\sigma \in \Gamma(\sigma^*(V\tilde{\Lambda}))$ satisfaga

$$\sigma^*(\mathcal{L}_{\widehat{\delta\sigma}}\alpha) = 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{I}$$

si \mathcal{I} es el EDS que representa las ecuaciones de movimiento. Notemos que la operación de linealizar una ecuación de movimiento no determina la estructura diferencial; por el contrario, el resultado de esta operación dependerá de lo que uno considere como vectores (o más en general, variaciones) de las funciones incógnita. Las formas admitidas en [CW87] como base para el fibrado cotangente al espacio de extremales no pueden existir en nuestro contexto, pero esto es así en particular porque no nos hemos tomado el (bastante dificultoso, sin dudas) trabajo de caracterizarlo por completo. En particular, en dicha referencia se consideran como base las formas que evalúan una variación infinitesimal en un punto; para introducir esto de manera consistente, se debe usar teoría de distribuciones. En cualquier caso, no parece ser indispensable para seguir la construcción de estos autores tener definidas dicha formas; en lugar de ello, uno puede conformarse con adoptar la definición provista por los autores, la cual, no depende esencialmente de la base singular que introducen previamente. Antes de enfocarnos en ejemplos particulares, debemos mencionar un aspecto global de la referencia citada: no proporcionan una construcción general para la forma presimpléctica sobre el espacio de soluciones, sino que se limitan a proveerla en los casos que se discute. Obviamente en nuestro caso damos una definición que abarca a todas aquellas teorías mecánicas en las que sus soluciones clásicas son extremales de un problema variacional tipo Lepage.

8.4.2. Estructura dinámica de la teoría de Yang-Mills.

8.4.2.1. La estructura presimpléctica de Yang-Mills. Vamos a comparar los diferentes enfoques particularizando en un ejemplo: la teoría de campos de calibre de Yang-Mills. En este caso, y usando la notación usual para estas teorías, la forma introducida es

$$(37) \quad \omega_{YM} = \int_{\Sigma} \mathbf{d}\Sigma^{\alpha} \text{tr}(\delta A^{\mu} \delta F_{\mu\alpha}).$$

Como se verá más adelante, los campos de Yang-Mills pueden describirse como extremales del siguiente problema variacional para secciones

$$\sigma : m \mapsto (A|_m, F|_m, G|_m)$$

de $T^*M \oplus \wedge^2(T^*M) \oplus \wedge^2(T^*M)$:

$$\begin{aligned} S_{YM}[\sigma] &:= \int_M \sigma^* \tilde{\lambda} \\ &= \int_M \sigma^* \left(\frac{1}{2} B(F \wedge *F) + B \left(F - \mathbf{d}A - \frac{1}{2} [A \wedge A] \wedge *G \right) \right) \end{aligned}$$

donde B es la forma de Killing sobre el álgebra de Lie del grupo de calibre. Entonces de acuerdo a nuestras prescripciones, el espacio de secciones en alguna hoja a tiempo constante $\tilde{\Lambda}_0$ sobre la subvariedad $\Sigma \subset M$ adquiere la forma (presimpléctica en general, ver más adelante)

$$\omega_0|_s(V_1, V_2) = \int_{\Sigma} s^* (\widehat{V}_1 \lrcorner \widehat{V}_2 \lrcorner \alpha_0)$$

donde $\alpha_0 := \mathbf{d}\tilde{\lambda}|_{\tilde{\Lambda}_0}$ y $V_1, V_2 \in \Gamma(s^*(V\tilde{\Lambda}))$. Notemos que como $\tilde{\Lambda}_0$ está sobre la subvariedad tridimensional $\Sigma \subset M$, uno tiene que las siguientes formas se deben anular por ser semibásicas

$$B(F \wedge *F)|_{\tilde{\Lambda}_0} = B(F \wedge *G)|_{\tilde{\Lambda}_0} = B([A \wedge A] \wedge *G)|_{\tilde{\Lambda}_0} = 0;$$

por lo tanto $\alpha_0 = B(\mathbf{d}A \wedge \mathbf{d}(*G))|_{\tilde{\Lambda}_0}$. Comparando con la ecuación (37) vemos que estamos en presencia de la misma forma (pre)simpléctica.

Resta analizar en este caso que es lo que ocurre con el núcleo de esta forma. Para ello deberemos caracterizar las transformaciones de calibre en este contexto. Siguiendo las definiciones básicas que en este sentido se dan en [Ble81], podemos asumir que una transformación de calibre está caracterizada por una función $g : M \rightarrow G$, y actúa sobre nuestros campos mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} (g \cdot A)|_m &= \text{Ad}_{(g(m))^{-1}}(A|_m) + g^*(\theta^L)|_m \\ (g \cdot F)|_m &= \text{Ad}_{(g(m))^{-1}}(F|_m) \\ (g \cdot G)|_m &= \text{Ad}_{(g(m))^{-1}}(G|_m) \end{aligned}$$

donde hemos llamado θ^L a la forma de Maurer-Cartan por izquierda sobre G . Las fórmulas

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\text{Ad}_{g^{-1}}A) &= \text{Ad}_{g^{-1}}(\mathbf{d}A) + [\text{Ad}_{g^{-1}}A \wedge g^*(\lambda)] \\ (38) \quad \mathbf{d}(g^*(\lambda)) &= -\frac{1}{2} [g^*(\lambda) \wedge g^*(\lambda)] \end{aligned}$$

sirven para verificar que estas transformaciones son compatibles con la ecuación⁴

$$F - \mathbf{d}A - \frac{1}{2} [A \wedge A] = 0.$$

Proposición 25. Sea $\xi \in C^\infty(M, \mathfrak{g})$. Los generadores infinitesimales para la acción adjunta son de la forma

$$\xi^{\Gamma(\tilde{\Lambda}_0)}|_s = (\mathbf{d}\xi - \text{ad}_\xi A, -\text{ad}_\xi F, -\text{ad}_\xi G)$$

si y sólo si $s : m \mapsto (A|_m, F|_m, G|_m)$.

DEMOSTRACIÓN. Para calcular los generadores infinitesimales para esta acción, necesitamos caracterizar el fibrado tangente al grupo de calibre. Notando que

$$C^\infty(M, G) = \Gamma(M \times G \rightarrow M),$$

podemos usar la estructura diferencial que hemos definido para este tipo de espacios, esto es, aquella respecto de la cual $T_g(C^\infty(M, G)) = \Gamma(g^*(V(M \times G \rightarrow G)))$.

⁴Los signos son todos compatibles...

8.4. Campos de Yang-Mills y espacios de fases covariantes

Lema 38. Si $(g, \xi) \in C^\infty(M, G \times \mathfrak{g})$ y $m \in M$, la aplicación

$$(m, g, \xi) \mapsto (m, g(m); 0, g(m)\xi(m))$$

establece una correspondencia uno a uno entre $C^\infty(M, \mathfrak{g})$ y $T_g(C^\infty(M, G))$.

Notemos que para $\xi \in C^\infty(M, \mathfrak{g})$, el elemento $\xi : m \mapsto (m, e; 0, \xi(m))$ en el espacio tangente $T_e(C^\infty(M, G))$ está en el álgebra de Lie del grupo de calibre; una extensión posible para el mismo es el campo vectorial

$$(m, g) \mapsto (m, g; 0, g\xi(m))$$

sobre $M \times G$, cuyas curvas integrales son simplemente

$$\gamma_t(m, g) = (m, g \exp(t\xi(m))).$$

La curva correspondiente en el grupo de calibre $C^\infty(M, G)$ es por lo tanto⁵ $\gamma_t \circ e$, esto es

$$g_t : m \mapsto (m, \exp(t\xi(m))).$$

Luego si $s : m \mapsto (A|_m, F|_m, G|_m)$, entonces por definición

$$\begin{aligned} \xi^{\Gamma(\tilde{\Lambda}_0)} \Big|_s &:= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (g_t \cdot s) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\text{Ad}_{\exp -t\xi} A + (\exp t\xi)^* (\theta^L), \text{Ad}_{\exp -t\xi} F, \text{Ad}_{\exp -t\xi} G) \end{aligned}$$

y utilizando las fórmulas (38), el generador infinitesimal asociado a una tal aplicación $\xi \in C^\infty(M, \mathfrak{g})$ resulta ser

$$\xi^{\Gamma(\tilde{\Lambda}_0)} \Big|_s = (\mathbf{d}\xi - \text{ad}_\xi A, -\text{ad}_\xi F, -\text{ad}_\xi G).$$

Entonces hemos probado la proposición. \square

8.4.2.2. Dinámica y grupo de calibre. Si bien hemos llegado a estructuras simplécticas análogas, los espacios de fases sobre los que trabajamos acá no son los mismos; de hecho, mientras que en [CW87] el espacio de fases es el espacio de soluciones, nosotros estamos en $\Gamma(\tilde{\Lambda}_0)$. A priori no existe una relación precisa entre estos espacios. Es claro que, por restricción, cada solución al problema variacional original produce una sección de $\tilde{\Lambda}_0$; si dos soluciones produciendo por restricción la misma sección de $\tilde{\Lambda}_0$ son necesariamente iguales, entonces puede considerarse al espacio de soluciones como una subvariedad de $\Gamma(\tilde{\Lambda}_0)$. Aunque en general esto no es cierto, probaremos que esto es así para los campos de Yang-Mills. Se hace indispensable investigar la naturaleza de las ecuaciones de movimiento: Esto es, básicamente, establecer si $\tilde{\Lambda}_0$ es una buena superficie de Cauchy.

De la discusión previa se desprende que no podemos comparar sin más la manera en que se trabaja con el grupo de calibre: Los generadores infinitesimales están en el núcleo de la forma presimpléctica sobre el espacio de soluciones, y si se repasa cuidadosamente la demostración de este hecho en la referencia, se descubre que es necesario tener en cuenta (al menos) una parte de las ecuaciones de movimiento. En nuestro esquema las ecuaciones de movimiento no existen, dado que aún no hemos definido el hamiltoniano que regirá la dinámica. Luego necesitamos considerar más en detalle la descomposición del espacio de campos en hojas tipo tiempo. Supongamos por lo tanto que sobre $\tilde{\Lambda}_0$ tenemos definido un campo $\partial_0 \in \Gamma(T_{\tilde{\Lambda}_0} \tilde{\Lambda})$ transversal en todo punto a $\tilde{\Lambda}_0$ y cuya proyección en la base existe (se lo denota con el mismo símbolo ∂_0), es no nula, y además es perpendicular a Σ (recordemos que M es una variedad pseudoriemanniana). Supongamos también que podemos introducir una forma $\phi^0 \in \Omega^1(M)$ tal que

1. $\phi^0(\partial_0) = 1$ en todos los puntos de Σ , y

⁵Aquí hemos indicado por e a la función que a cada punto de M le asigna la unidad en G , esto es $e : m \mapsto (m, e)$.

2. ϕ^0 es cerrada (esto se pide por conveniencia).

Entonces podemos elegir un conjunto de coordenadas más convenientes sobre $\tilde{\Lambda}_0$, definidas por la descomposición de T_{Σ}^*M inducida por α^0 y $(T\Sigma)^\perp$:

$$\begin{aligned} A &=: a_0\phi^0 + a, \\ F &=: (\star e) \wedge \phi^0 + b, \\ G &=: (\star m) \wedge \phi^0 + n \end{aligned}$$

donde \star es la 3-estrella de Hodge inducida por la métrica sobre Σ ; por lo tanto cada sección de $\tilde{\Lambda}_0$ quedará especificada por una función a_0 , una 1-forma a y las cuatro 2-formas e, b, m, n sobre Σ . Como ∂_0 es perpendicular a Σ , uno tiene que

$$\begin{aligned} \star F &=: (\star b) \wedge \phi^0 - e, \\ \star G &=: (\star n) \wedge \phi^0 - m \end{aligned}$$

La proposición siguiente nos da la expresión de los datos dinámicos en las nuevas coordenadas.

Proposición 26. *En las nuevas coordenadas la forma presimpléctica sobre $\tilde{\Lambda}_0$ es (usando la notación usual para extensión de campos)*

$$\omega_0|_s(V_1, V_2) = - \int_{\Sigma} s^* \left[\widehat{V}_1 \lrcorner \widehat{V}_2 \lrcorner B(\mathbf{d}a \frown \mathbf{d}m) \right]$$

y el hamiltoniano puede escribirse como

$$\begin{aligned} H(s) = \int_{\Sigma} s^* & \left[\frac{1}{2} B(b \frown \star b) - \frac{1}{2} B(e \frown \star e) - B(\star e \frown m) + B(b \frown \star n) + \right. \\ & \left. + B(\mathbf{d}a_0 \frown m) - B(\mathbf{d}a \frown \star n) - \frac{1}{2} B([a \frown a] \frown \star n) - B([a_0, a] \frown m) \right] \end{aligned}$$

para cualquier $s \in \Gamma(\tilde{\Lambda}_0)$.

DEMOSTRACIÓN. En tales coordenadas será

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \frac{1}{2} B(F \frown \star F) + B\left(F - \mathbf{d}A - \frac{1}{2} [A \frown A] \frown \star G\right) \\ &= \frac{1}{2} B((\star e) \wedge \phi^0 + b \frown (\star b) \wedge \phi^0 - e) + \\ &+ B\left((\star e) \wedge \phi^0 + b - \mathbf{d}a_0 \wedge \phi^0 - \mathbf{d}a - \frac{1}{2} [a_0\phi^0 + a \frown a_0\phi^0 + a] \frown (\star n) \wedge \phi^0 - m\right) \\ &= \left[\frac{1}{2} B(b \frown \star b) - \frac{1}{2} B(e \frown \star e) - B(\star e \frown m) + B(b \frown \star n) + \right. \\ & \left. + B(\mathbf{d}a_0 \frown m) - B(\mathbf{d}a \frown \star n) - \frac{1}{2} B([a \frown a] \frown \star n) - B([a_0, a] \frown m) \right] \wedge \phi^0 + B(\mathbf{d}a \frown m) \end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \partial_0 \lrcorner \tilde{\lambda} &= \frac{1}{2} B(b \frown \star b) - \frac{1}{2} B(e \frown \star e) - B(\star e \frown m) + B(b \frown \star n) + \\ &+ B(\mathbf{d}a_0 \frown m) - B(\mathbf{d}a \frown \star n) - \frac{1}{2} B([a \frown a] \frown \star n) - B([a_0, a] \frown m) \\ \tilde{\lambda}|_{\tilde{\Lambda}_0} &= B(\mathbf{d}a \frown m). \end{aligned}$$

Diferenciando la segunda de estas identidades resulta la proposición. \square

8.4. Campos de Yang-Mills y espacios de fases covariantes

Como primer consecuencia de esta proposición resulta que

$$\ker \omega|_s = \left\{ m \mapsto (m; \delta a_0(m) \phi^0|_m, \delta F|_m, \delta n|_m) : \right. \\ \left. : \delta a_0 \in C^\infty(\Sigma, \mathfrak{g}), \delta F \in \Gamma \left(\bigwedge^2 (T^*M) \otimes \mathfrak{g} \Big|_\Sigma \right), \delta n \in \Omega^2(\Sigma, \mathfrak{g}) \text{ y todas cubren a } s \right\}$$

por lo que las condiciones de invariancia $\mathbf{d}H \left(T\Gamma \left(\tilde{\Lambda}_0 \right) \right)^\perp = 0$ se reducen a

$$(39) \quad \begin{cases} \mathbf{d}H|_s(\delta n) = 0 & \Rightarrow & b - \mathbf{d}a - \frac{1}{2} [a \wedge a] = 0 \\ \mathbf{d}H|_s(\delta e) = 0 & \Rightarrow & m + e = 0 \\ \mathbf{d}H|_s(\delta b) = 0 & \Rightarrow & b + n = 0 \\ \mathbf{d}H|_s(\delta a_0 \phi^0) = 0 & \Rightarrow & \mathbf{d}m + [a \wedge m] = 0 \end{cases}$$

para las componentes de la sección s . Notar que, por la forma en que está definido el hamiltoniano H , estos vínculos (pese a que no se muestra acá) incluyen sus diferenciales. Efectivamente, supongamos que la variación δn es tal que $*\delta n = \mathbf{d}k$ para 1-formas k arbitrarias; luego

$$\begin{aligned} \delta n \cdot H &= \int_\Sigma \mathbf{B} \left(b - \mathbf{d}a - \frac{1}{2} [a \wedge a], *\delta n \right) \\ &= \int_\Sigma \mathbf{B} \left(b - \mathbf{d}a - \frac{1}{2} [a \wedge a], \mathbf{d}k \right) \\ &= - \int_\Sigma \mathbf{B} (\mathbf{d}b - [\mathbf{d}a \wedge a], k) \end{aligned}$$

y los diferenciales de los vínculos son parte de los mismos vínculos.

Definición 47. La variedad primaria de vínculos $\Gamma^{(1)}$ será el conjunto de todas aquellas secciones de $\tilde{\Lambda}_0$ que satisfacen las condiciones (39).

El grupo de calibre opera de la siguiente manera sobre las nuevas coordenadas:

$$\begin{aligned} (g \cdot a_0)|_p &= \text{Ad}_{(g(p))^{-1}} a_0(p) + \theta^L \left(g_* \left(\partial_0|_p \right) \right) \\ (g \cdot a)|_p &= \text{Ad}_{(g(p))^{-1}} a|_p + (g|_\Sigma)^* (\theta^L) \\ (g \cdot e)|_p &= \text{Ad}_{(g(p))^{-1}} e|_p \\ (g \cdot b)|_p &= \text{Ad}_{(g(p))^{-1}} b|_p \\ (g \cdot m)|_p &= \text{Ad}_{(g(p))^{-1}} m|_p \\ (g \cdot n)|_p &= \text{Ad}_{(g(p))^{-1}} n|_p \end{aligned}$$

para todo $p \in \Sigma$. Notemos que el subconjunto $\Gamma^{(1)}$ es invariante por la acción del grupo de calibre. Sin embargo $C^\infty(M, G)$ no actúa de manera efectiva sobre $\Gamma \left(\tilde{\Lambda}_0 \right)$. O sea, cualquier g en el grupo de calibre tal que $g|_\Sigma = e$ y $g_* (\partial_0) = 0$ deja invariante a todas las secciones, de acuerdo a las fórmulas de transformación de arriba. Entonces tales elementos, pese a no ser necesariamente la unidad en el grupo total, operan como la identidad sobre las secciones de $\tilde{\Lambda}_0$. De cualquier manera, podemos utilizar el mismo argumento que en la proposición 25 para calcular los generadores infinitesimales en las coordenadas $(a_0, a; e, b; m, n)$; así tendremos (para las componentes de interés) que

$$\xi^{\Gamma(\tilde{\Lambda}_0)}|_s = (*, \mathbf{d}\xi - \text{ad}_\xi a; *, *, -\text{ad}_\xi m, *).$$

Capítulo 8. Ejemplos importantes en mecánica no estándar

Sea ahora $X = (\delta a_0, \delta a; \delta e, \delta b; \delta m, \delta n)$ un vector tangente a $\Gamma^{(1)}$ en una sección s ; entonces sus secciones componentes satisfarán, en particular, la linealización de la última ecuación en (39)

$$\mathbf{d}(\delta m) + [\delta a \wedge m] + [a \wedge \delta m] = 0.$$

Luego suponiendo que $\partial\Sigma = 0$ (o que las secciones se anulan allí)

$$\begin{aligned} X \lrcorner \xi^{\Gamma(\bar{\Lambda}_0)} \lrcorner \omega_0|_s &= \int_{\Sigma} s^* [-\mathbf{B}(\mathbf{d}\xi - \text{ad}_{\xi} a \wedge \delta m) + \mathbf{B}(\delta a \wedge -\text{ad}_{\xi} m)] \\ &= \int_{\Sigma} s^* [\mathbf{B}(\xi, \mathbf{d}(\delta m) + [\delta a \wedge m] + [a \wedge \delta m])] \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo cual los generadores infinitesimales del grupo de calibre están en el núcleo de la restricción de ω_0 a $\Gamma^{(1)}$. No está claro, sin embargo, que éstas sean todas las direcciones singulares de esta estructura.

8.4.2.3. Estudio de Yang-Mills via EDS. El problema es el de siempre: ¿Hemos hallado ya todos los vínculos de Dirac en la teoría de Yang-Mills? En rigor, no disponemos de argumentos de dimensionalidad para responder a una pregunta de esta naturaleza. De hecho, miremos la subvariedad $\Gamma^{(1)}$. Sobre ella las únicas cantidades independientes son las secciones a_0 y a , dado que, de las ecuaciones (39), la primera determina b totalmente, con lo cual la tercera fija el valor de n . Luego la cuarta es una ecuación diferencial para m que uno espera resolver sin más, y la segunda nos dice cómo elegir e . La cuarta ecuación relaciona a con m , y esto advierte sobre la existencia de un núcleo no trivial en la forma presimpléctica restringida a $\Gamma^{(1)}$; la simetría de calibre provee elementos en este núcleo, dejando abierta la cuestión acerca de si es posible caracterizarlo completamente. Esto es equivalente a resolver el problema siguiente:

Problema. Encontrar todos los pares de formas $f_1 \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, $g_1 \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ relacionadas mediante

$$\mathbf{d}g_1 + [a \wedge g_1] + [f_1 \wedge m] = 0,$$

para algún par $a \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, $m \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ satisfaciendo $\mathbf{d}m + [a \wedge m] = 0$, tales que

$$\int_P [-\mathbf{B}(f_1 \wedge g_2) + \mathbf{B}(f_2 \wedge g_1)] = 0$$

para todo par f_2, g_2 relacionadas de la misma forma.

La teoría de sistemas diferenciales exteriores nos permitirá conocer si no hay más vínculos tipo Dirac que los ya hallados, si podemos probar que el EDS de Hamilton-Cartan es involutivo respecto de alguna hoja tipo tiempo.

Calculemos los caracteres de Cartan y la codimensión del espacio de elementos integrales de dimensión 4 para el EDS de Hamilton-Cartan para el campo de Yang-Mills. Debemos advertir que esto fue hecho, para el caso $SU(2)$, en [Est08], utilizando programas de cálculo numérico. De cualquier forma, efectuando variaciones en nuestra teoría obtenemos que el EDS de Hamilton-Cartan (que denotaremos aquí como \mathcal{I}) estará diferencialmente generado por

$$\begin{cases} \mathbf{d}A + \frac{1}{2}[A \wedge A] - F \\ F + G \\ \mathbf{d}(*G) + [A \wedge *G]. \end{cases}$$

Ahora bien, por simplicidad vamos a estudiar el EDS sobre $\Lambda := (\wedge^2(T^*M) \otimes \mathfrak{g}) \oplus (T^*M \otimes \mathfrak{g})$ generado por

$$\begin{cases} \Phi := \mathbf{d}A + \frac{1}{2}[A \wedge A] + G \\ \Psi := \mathbf{d}(*G) + [A \wedge *G] \end{cases}$$

8.4. Campos de Yang-Mills y espacios de fases covariantes

que es la restricción del anterior a la subvariedad $F + G = 0$. Luego usando la identidad de Jacobi

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\Phi &= [\mathbf{d}A \wedge A] + \mathbf{d}G \\ &\equiv \left[-G - \frac{1}{2} [A \wedge A] \wedge A \right] + \mathbf{d}G \quad \text{mód } \mathcal{I}_0 \\ &= -[G \wedge A] + \mathbf{d}G\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\Psi &= [\mathbf{d}A \wedge *G] - [A \wedge \mathbf{d}(*G)] \\ &\equiv \left[-G - \frac{1}{2} [A \wedge A] \wedge *G \right] - [A \wedge -[A \wedge *G]] \quad \text{mód } \mathcal{I}_0 \\ &= -[G \wedge *G] \\ &= 0\end{aligned}$$

donde \mathcal{I}_0 es el ideal algebraico generado por Φ y Ψ . Se ha utilizado también la identidad de Jacobi en la forma

$$[A \wedge [A \wedge *G]] - \frac{1}{2} [[A \wedge A] \wedge *G] = 0.$$

Luego un conjunto de generadores algebraicos para este EDS es

$$\begin{cases} \Phi := \mathbf{d}A + \frac{1}{2} [A \wedge A] + G \\ \Xi := \mathbf{d}G + [A \wedge G] \\ \Psi := \mathbf{d}(*G) + [A \wedge *G]. \end{cases}$$

Analicemos la estructura de este EDS; para ello nos basaremos en un método explicado en [Olv95]. Supongamos que un elemento integral $E \subset T_{(A,G)}(\Lambda)$ de este EDS está generado por los vectores $V_\mu := (\partial_\mu, \delta A_\mu, \delta G_\mu)$, $\mu = 0, \dots, 3$; definimos la bandera de subespacios

$$0 =: E_0 \subset E_1 := \langle V_1 \rangle \subset E_2 := \langle V_1, V_2 \rangle \subset E_3 := \langle V_1, V_2, V_3 \rangle \subset E$$

y queremos calcular la codimensión de los espacios polares asociados. Entonces:

1. El EDS \mathcal{I} no contiene formas de grado 1, por tener generadores de grado 2 y 3; luego $H(E_0) = T_{(A,G)}\Lambda$ y por lo tanto $c_0 = \text{codim}H(E_0) = 0$.
2. El EDS \mathcal{I} tiene un único generador de grado 2, esto es, Φ , por lo cual $v \in H(E_1)$ si y sólo si $v \lrcorner (V_1 \lrcorner \Phi) = 0$, o sea

$$v \lrcorner (\partial_1 \lrcorner \mathbf{d}A + \text{formas semibásicas}) = 0.$$

La codimensión de $H(E_1)$ es igual al número de ecuaciones independientes en esta lista; luego se tiene que $c_1 = \text{codim}H(E_1) = \text{dim}g$.

3. En este caso $v \in H(E_2)$ si y sólo si

$$\begin{aligned}v \lrcorner (\partial_1 \lrcorner \mathbf{d}A + \text{formas semibásicas}) &= 0 \\ v \lrcorner (\partial_2 \lrcorner \mathbf{d}A + \text{formas semibásicas}) &= 0 \\ v \lrcorner (\partial_1 \lrcorner \partial_2 \lrcorner \mathbf{d}G + \text{formas semibásicas}) &= 0 \\ v \lrcorner (\partial_1 \lrcorner \partial_2 \lrcorner \mathbf{d}(*G) + \text{formas semibásicas}) &= 0.\end{aligned}$$

Todas las ecuaciones en esta lista son independientes; esto es consecuencia de la aparición de la estrella de Hodge. Luego $c_2 = \text{codim}H(E_2) = 4\text{dim}g$.

4. Finalmente calcularemos la codimensión de $H(E_3)$; la lista de ecuaciones que determinan los elementos $v \in H(E_3)$ será

$$\begin{aligned}
 v \lrcorner (\partial_1 \lrcorner \mathbf{d}A + \text{formas semibásicas}) &= 0 \\
 v \lrcorner (\partial_2 \lrcorner \mathbf{d}A + \text{formas semibásicas}) &= 0 \\
 v \lrcorner (\partial_3 \lrcorner \mathbf{d}A + \text{formas semibásicas}) &= 0 \\
 v \lrcorner (\partial_1 \lrcorner \partial_2 \lrcorner \mathbf{d}G + \text{formas semibásicas}) &= 0 \\
 v \lrcorner (\partial_1 \lrcorner \partial_3 \lrcorner \mathbf{d}G + \text{formas semibásicas}) &= 0 \\
 v \lrcorner (\partial_2 \lrcorner \partial_3 \lrcorner \mathbf{d}G + \text{formas semibásicas}) &= 0 \\
 v \lrcorner (\partial_1 \lrcorner \partial_2 \lrcorner \mathbf{d}(*G) + \text{formas semibásicas}) &= 0 \\
 v \lrcorner (\partial_1 \lrcorner \partial_3 \lrcorner \mathbf{d}(*G) + \text{formas semibásicas}) &= 0 \\
 v \lrcorner (\partial_2 \lrcorner \partial_3 \lrcorner \mathbf{d}(*G) + \text{formas semibásicas}) &= 0.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $c_3 = 9\dim\mathfrak{g}$.

Estos números pueden compararse con los listados en [Est08] para el caso en que $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_2$. Para calcular la codimensión de la subvariedad $V_4(\mathcal{I})$ de $G_4(T\Lambda)$ determinada por el EDS \mathcal{I} en el elemento integral E , notemos que un conjunto de condiciones suficientes para describir a esta subvariedad es la lista

$$\begin{aligned}
 V_\mu \lrcorner V_\nu \lrcorner \Phi &= 0 \\
 V_\mu \lrcorner V_\nu \lrcorner V_\sigma \lrcorner \Psi &= 0 \\
 V_\mu \lrcorner V_\nu \lrcorner V_\sigma \lrcorner \Xi &= 0
 \end{aligned}$$

para todo $\mu, \nu, \sigma = 0, \dots, 3$. A lo sumo habrá aquí $10\dim\mathfrak{g}$ ecuaciones independientes, correspondientes a los pares de índices

$$(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)$$

para la primera lista de ecuaciones, y para los triples de índices

$$(0, 1, 2), (0, 1, 3), (0, 2, 3), (1, 2, 3)$$

en las restantes. Pero sabemos [IL03] que

$$\text{codim}_E V_4(\mathcal{I}) \geq c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 10,$$

de donde resulta que necesariamente debe cumplirse la igualdad, y estamos en presencia de un EDS involutivo.

8.4.2.4. Conjunto completo de vínculos de Dirac para Yang-Mills. El apartado anterior nos permite hallar un conjunto completo de vínculos para la teoría de Yang-Mills; de acuerdo a la teoría general, un EDS involutivo induce sobre alguna hoja de tiempo constante $\tilde{\Lambda}_0$ (conteniendo al elemento E_3 de una bandera regular) dicho conjunto, que no es otra cosa que algún conjunto de generadores para el EDS $\mathcal{K} := \mathcal{I}|_{\tilde{\Lambda}_0}$. Usando las coordenadas adaptadas a esta hoja, notemos que los generadores de \mathcal{I} pueden escribirse

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \mathbf{d}(a_0\phi^0 + a) + \frac{1}{2} [a_0\phi^0 + a \wedge a_0\phi^0 + a] + (\star m) \wedge \phi^0 + n \\
 &= (\mathbf{d}a_0 - [a_0, a] + \star m) \wedge \phi^0 + \mathbf{d}a + \frac{1}{2} [a \wedge a] + n \\
 \Xi &= \mathbf{d}((\star m) \wedge \phi^0 + n) + [a_0\phi^0 + a \wedge (\star m) \wedge \phi^0 + n] \\
 &= \{\mathbf{d}(\star m) + [a \wedge \star m] + [a_0, n]\} \wedge \phi^0 + \mathbf{d}n + [a \wedge n] \\
 \Psi &= \mathbf{d}((\star n) \wedge \phi^0 - m) + [a_0\phi^0 + a \wedge (\star n) \wedge \phi^0 - m] \\
 &= \{\mathbf{d}(\star n) + [a \wedge \star n] - [a_0, m]\} \wedge \phi^0 - \mathbf{d}m - [a \wedge m],
 \end{aligned}$$

8.4. Campos de Yang-Mills y espacios de fases covariantes

de donde resulta que

$$\mathcal{K} = \left\langle \mathbf{d}a + \frac{1}{2}[a \wedge a] + n, \mathbf{d}n + [a \wedge n], \mathbf{d}m + [a \wedge m] \right\rangle_{\text{alg}}.$$

De $F + G = 0$ sabemos que $n = -b$, de donde resulta que estos generadores son los vínculos primarios hallados a través del formalismo usual sobre el espacio de fases covariante. Luego $\Gamma^{(1)}$ es invariante, de donde deducimos que no hay nuevos vínculos.

El sistema Toda como mecánica no estándar

9.1. El método AKS: Factorizaciones y sistemas integrables

SUPONGAMOS que tenemos un grupo de Lie real G que factoriza de manera única en un par de subgrupos A y B :

$$G = A \cdot B.$$

En tales circunstancias (ver [Ova03] y referencias citadas allí) uno puede utilizar la factorización para hallar soluciones a problemas mecánicos canónicamente asociados a las estructuras presentes. En lo que sigue llamaremos método AKS a tal construcción, por las iniciales de los autores que lo establecieron: M. Adler, B. Kostant y W. Symes [AvM80, Kos79, Sym80].

9.1.1. El teorema principal.

9.1.1.1. *Representación transadjunta.* Vamos a tomar como punto de partida una factorización como la detallada arriba; dicha factorización induce una descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$$

en subálgebras de Lie. Supongamos además que tenemos una forma bilineal no degenerada (aunque no necesariamente Ad-invariante) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$. Por trasposición, la acción adjunta de G sobre su álgebra de Lie induce una nueva representación $\tau : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$, que llamaremos *transadjunta*:

$$\langle \tau(g) \cdot X, Y \rangle = \langle X, \text{Ad}_{g^{-1}} Y \rangle$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}, g \in G$. Si la forma bilineal es Ad-invariante, entonces ambas representaciones son equivalentes; en cualquier caso, la representación transadjunta es isomorfa a la representación coadjunta, lo cual implica las propiedades siguientes.

Proposición 27. *Sea X un elemento de \mathfrak{g} , e indiquemos mediante el símbolo \mathcal{O}_X^τ la órbita de G a través de X via la representación transadjunta. Entonces*

1. *El espacio tangente a la órbita en $Y \in \mathcal{O}_X^\tau$ está dado por*

$$T_Y \mathcal{O}_X^\tau = \{ad_Z^t Y : Z \in \mathfrak{g}\}$$

donde $ad^t : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ está definido mediante $\langle ad_Z^t X, Y \rangle = -\langle X, [Z, Y] \rangle$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

2. *El conjunto \mathcal{O}_X^τ es una variedad simpléctica con estructura simpléctica ω está dada por*

$$\omega_Y(-ad_{Z_1}^t Y, -ad_{Z_2}^t Y) = \langle Y, [Z_1, Z_2] \rangle.$$

3. *El campo vectorial hamiltoniano asociado a una función $H := f|_{\mathcal{O}_X^\tau}$ está dado por*

$$V_H|_Y = -ad_{\nabla f(Y)}^t Y$$

donde $\nabla f \in C^\infty(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ es el gradiente de $f \in C^\infty(\mathfrak{g})$ respecto a la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos sólo el tercer apartado. Tenemos que

$$\begin{aligned} dH|_Y (\text{ad}_Z^t Y) &= df|_Y (\text{ad}_Z^t Y) \\ &= \langle \nabla f(Y), \text{ad}_Z^t Y \rangle \\ &= \langle [Z, \nabla f(Y)], Y \rangle \end{aligned}$$

y por otro lado, utilizando la expresión $V_H|_Y := \text{ad}_{Z_H(Y)}^t Y$,

$$\omega_Y (V_H, \text{ad}_Z^t Y) = \langle Y, [Z_H, Z] \rangle.$$

A partir de la ecuación $dH + V_H \lrcorner \omega = 0$ entonces obtenemos que $Z_H(Y) = \nabla f(Y)$, por lo que

$$V_H|_Y = \text{ad}_{\nabla f(Y)}^t Y.$$

Esto concluye la demostración. \square

9.1.1.2. *Funciones invariantes y dinámica.* Una función suave $f \in C^\infty(\mathfrak{g})$ es τ -invariante sii

$$f(\tau(g) \cdot X) = f(X)$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$ y $g \in G$. Esta familia de funciones comparten las siguientes propiedades.

Proposición 28. Si f es una función τ -invariante, entonces

- $\nabla f(\tau(g) X) = \text{Ad}_g \nabla f(X)$ para todo $g \in G, X \in \mathfrak{g}$.
- $\text{ad}_{\nabla f(X)}^t X = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

DEMOSTRACIÓN. For $Y \in \mathfrak{g}$ arbitraria tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(\tau(g) X), Y \rangle &= df|_{\tau(g)X}(Y) \\ &= \frac{d}{dt} [f(\tau(g) X + tY)]|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} [f(X + t\tau(g^{-1}) Y)]|_{t=0} \\ &= df|_X(\tau(g^{-1}) Y) \\ &= \langle \nabla f(X), \tau(g^{-1}) Y \rangle \\ &= \langle \text{Ad}_g \nabla f(X), Y \rangle \end{aligned}$$

y de aquí es inmediata la primera parte de la proposición. La segunda parte es una versión infinitesimal de la primera. \square

9.1.1.3. *Descomposición de álgebras de Lie y dinámica.* En base a las estructuras presentes tenemos dos formas de descomponer al álgebra de Lie \mathfrak{g} :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{a}^\perp \oplus \mathfrak{b}^\perp$$

donde $\mathfrak{a}^\perp := \{Z \in \mathfrak{g} : \langle Z, X \rangle = 0 \ \forall X \in \mathfrak{a}\}$, y similar para \mathfrak{b}^\perp . Una propiedad importante de estos nuevos subespacios es su τ -invariancia.

Lema 39. Los subespacios $\mathfrak{a}^\perp, \mathfrak{b}^\perp \subset \mathfrak{g}$ son τ -invariantes.

DEMOSTRACIÓN. Sea $g \in A, Z \in \mathfrak{a}^\perp$ y X un elemento arbitrario de \mathfrak{a} . Entonces

$$\begin{aligned} \langle \tau(g) \cdot Z, X \rangle &= \langle Z, \text{Ad}_{g^{-1}} X \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

dado que $\text{Ad}_{g^{-1}} X \in \mathfrak{a}$. Una demostración similar puede utilizarse para el otro factor. \square

Además la aplicación $X \mapsto \langle X, \cdot \rangle$ induce isomorfismos $\mathfrak{g}_\pm^\perp \simeq \mathfrak{g}_\mp^*$, a lo largo de los cuales podemos trasladar la acción coadjunta de cada subgrupo G_\pm sobre el dual de su álgebra de Lie. Esto da origen a un par de acciones (que denotaremos por un único símbolo) $\tilde{\tau} : G_\mp \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}_\pm^\perp)$.

9.1. El método AKS: Factorizaciones y sistemas integrables

Lema 40. Si $\pi_+^\perp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{a}^\perp$ y $\pi_-^\perp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{b}^\perp$ son los proyectores asociados a la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}^\perp \oplus \mathfrak{b}^\perp$, entonces

1. La nueva acción puede calcularse mediante

$$(40) \quad \tilde{\tau}_A(h) \cdot Z_\pm = \pi_\pm^\perp(\tau(h)Z)$$

para todo $h \in B, Z \in \mathfrak{a}^\perp$. Una fórmula similar es válida para la acción $\tilde{\tau}_B$ de A sobre B .

2. El generador infinitesimal asociado a $Y \in \mathfrak{b}$ está dado por

$$(Y)^{\mathfrak{a}^\perp} \Big|_Z = \pi_+^\perp(-\text{ad}_Y^t Z).$$

DEMOSTRACIÓN. Probaremos sólo la primera parte del lema. Si X es un elemento arbitrario de \mathfrak{b} entonces

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\tau}_A(h)Z, X \rangle &\equiv (\text{Ad}_{h^{-1}}^* \langle Z, \cdot \rangle)(X) = \langle Z, \text{Ad}_{h^{-1}}X \rangle \\ &= \langle \tau(h)Z, X \rangle \end{aligned}$$

por lo cual $\tilde{\tau}_A(h)Z - \tau(h)Z \in \mathfrak{b}^\perp$, y esto significa que

$$\pi_+^\perp(\tilde{\tau}_A(h)Z - \tau(h)Z) = 0.$$

Dado que $\tilde{\tau}_A(h)Z \in \mathfrak{a}^\perp$, esta ecuación demuestra la primera parte del lema. \square

La órbita $\mathcal{O}_X^{\tilde{\tau}_A}$ es, como fue destacado más arriba, una variedad simpléctica, con espacio tangente

$$T_Y \mathcal{O}_X^{\tilde{\tau}_A} = \{ \pi_+^\perp(-\text{ad}_Z^t Y) : Z \in \mathfrak{b} \}.$$

La forma simpléctica está dada por

$$\omega_Y(\pi_+^\perp(-\text{ad}_{Z_1}^t Y), \pi_+^\perp(-\text{ad}_{Z_2}^t Y)) = \langle Y, [Z_1, Z_2] \rangle.$$

Tiene sentido por lo tanto plantearse el problema dinámico inducido sobre ella por funciones definidas sobre todo \mathfrak{g} ; el siguiente teorema nos da una descripción de tales problemas, y la manera de resolver los asociados a funciones τ -invariantes. Uno puede llamar a este resultado *método AKS generalizado*.

Teorema 13. Sea f una función sobre \mathfrak{g} .

1. El campo vectorial hamiltoniano para $H := f|_{\mathcal{O}_X^{\tilde{\tau}_A}}$ en un punto Y es

$$V_H|_Y = \pi_+^\perp(\text{ad}_{(\nabla f(Y))_-}^t Y)$$

donde se indicó mediante Z_\pm las componentes de un elemento $Z \in \mathfrak{g}$ respecto de la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$.

2. Si f es τ -invariante entonces el campo vectorial hamiltoniano se reduce a

$$V_H|_Y = \text{ad}_{(\nabla f(Y))_-}^t Y = -\text{ad}_{(\nabla f(Y))_+}^t Y.$$

3. El problema sobre $\mathcal{O}_X^{\tilde{\tau}_A} \subset \mathfrak{a}^\perp$ dado por

$$(41) \quad \begin{cases} \dot{X} = -\text{ad}_{(\nabla f(X))_+}^t X \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

para f una función τ -invariante, puede resolverse por factorización. De hecho, si $g_+ : \mathbb{R} \rightarrow A$ y $g_- : \mathbb{R} \rightarrow B$ son curvas sobre estos grupos definidas por la ecuación

$$\exp(t\nabla f(X_0)) = g_+(t)g_-(t)$$

la solución del sistema (41) vendrá dada por

$$X(t) := \tau(g_+(t))X_0.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $Y \in \mathcal{O}_{\tilde{X}}^A$ entonces será

$$\begin{aligned} dH|_Y (\pi_+^\perp (-\text{ad}_Z^t Y)) &= df|_Y (\pi_+^\perp (-\text{ad}_Z^t Y)) \\ &= \langle \nabla f(Y), \pi_+^\perp (-\text{ad}_Z^t Y) \rangle \\ &= \langle (\nabla f(Y))_-, -\text{ad}_Z^t Y \rangle \\ &= \langle [(\nabla f(Y))_-, Z], Y \rangle. \end{aligned}$$

Por otra parte si $V_H|_Y = \pi_+^\perp (-\text{ad}_{Z_H(Y)}^t Y)$ entonces

$$\omega_Y \left(\pi_+^\perp (-\text{ad}_{Z_H(Y)}^t Y), \pi_+^\perp (-\text{ad}_Z^t Y) \right) = \langle Y, [Z_H(Y), Z] \rangle$$

por lo cual podemos elegir $Z_H(Y) := -(\nabla f(Y))_-$ (¡cualquier otra elección nos da el mismo campo vectorial sobre la órbita!)

Si f es una función τ -invariante, usando la proposición 28 tendremos que $\text{ad}_{\nabla f(Y)}^t Y = 0$, por lo cual

$$\text{ad}_{(\nabla f(Y))_-}^t Y = -\text{ad}_{(\nabla f(Y))_+}^t Y;$$

entonces

$$\begin{aligned} V_H|_Y &= \pi_+^\perp \left(\text{ad}_{(\nabla f(Y))_-}^t Y \right) \\ &= \pi_+^\perp \left(-\text{ad}_{(\nabla f(Y))_+}^t Y \right) \\ &= -\text{ad}_{(\nabla f(Y))_+}^t Y. \end{aligned}$$

El último punto puede probarse derivando la solución propuesta, debido al teorema de unicidad de flujos para campos vectoriales. Si $Y_- \in \mathfrak{g}_-$ es arbitraria, entonces la función

$$F_{Y_-}(t) := \langle Y_-, X(t) \rangle = \left\langle \text{Ad}_{(g_+(t))^{-1}} Y_-, X_0 \right\rangle$$

tiene derivada

$$\begin{aligned} \dot{F}_{Y_-}(t) &= \left\langle \text{Ad}_{(g_+(t))^{-1}} \left(\text{ad}_{\mathbf{L}_{(g_+(t))^{-1} * \dot{g}_+(t)}} Y_- \right), X_0 \right\rangle \\ &= \left\langle Y_-, \text{ad}_{\mathbf{L}_{(g_+(t))^{-1} * \dot{g}_+(t)}}^t X(t) \right\rangle. \end{aligned}$$

Utilizando la proposición 28 obtenemos que

$$\begin{aligned} \nabla f(X(t)) &= \nabla f(\tau(g_+(t)) X_0) \\ &= \text{Ad}_{(g_+(t))^{-1}} \nabla f(X_0). \end{aligned}$$

Ahora bien, si $g(t) = \exp(t \nabla f(X_0))$ tendremos que $\nabla f(X_0) = R_{(g(t))^{-1} *} \dot{g}(t)$ por lo cual

$$\begin{aligned} \nabla f(X_0) &= R_{(g_+(t))^{-1} *} R_{(g_-(t))^{-1} *} \left(\mathbf{L}_{g_+(t) *} \dot{g}_-(t) + R_{g_-(t) *} \dot{g}_+(t) \right) \\ &= \text{Ad}_{g_+(t)} \left(R_{(g_-(t))^{-1} *} \dot{g}_-(t) + \mathbf{L}_{(g_+(t))^{-1} *} \dot{g}_+(t) \right); \end{aligned}$$

entonces

$$\nabla f(X(t)) = \mathbf{L}_{(g_+(t))^{-1} *} \dot{g}_+(t) + R_{(g_-(t))^{-1} *} \dot{g}_-(t) \in \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$$

que significa que

$$(\nabla f(X(t)))_+ = \mathbf{L}_{(g_+(t))^{-1} *} \dot{g}_+(t).$$

Por consiguiente $\dot{F}_{Y_-}(t) = \left\langle Y_-, \text{ad}_{(\nabla f(X(t)))_+}^t X(t) \right\rangle$ para cualquier $Y_- \in \mathfrak{g}_-$, y esto implica a su vez que $\dot{X}(t) = \text{ad}_{(\nabla f(X(t)))_+}^t X(t)$, como queríamos probar. \square

9.2. Mecánica no estándar y método AKS

9.2.1. Mecánica no estándar y vínculos sobre las velocidades. El propósito de esta sección es usar la mecánica no estándar como una manera de pensar los sistemas AKS. Consideremos para ello un sistema mecánico libre sobre \mathbb{R} descrito mediante el lagrangiano en $I \times T\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$L|_{(t;q,v;w)} := \left[\frac{1}{2}v^2 - v_0w \right] dt$$

y la estructura de levantamiento

$$\theta|_{(t;q,v;w)} := dq - (v - w) dt.$$

Esto significa que las variaciones satisfacen la relación $\mathbf{d}\delta q - (\delta v - \delta w) dt = 0$; variando una curva $\gamma : t \mapsto (t; q(t), v(t); w(t))$, la variación de la acción asociada será (ignorando términos de borde)

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_I \gamma^* (v\delta v - v_0\delta w) dt \\ &= \int_I \gamma^* [v(\mathbf{d}\delta q + \delta w dt) - v_0\delta w] \\ &= \int_I \gamma^* (\delta q \mathbf{d}v + (v - v_0) \delta w dt). \end{aligned}$$

Esto significa que las ecuaciones de Euler-Lagrange para esta mecánica no estándar serán

$$\begin{cases} \dot{v} = 0, \\ v = v_0. \end{cases}$$

Este ejemplo sobresimplificado señala una característica fundamental de este tipo de modificaciones a la estructura de levantamiento: La capacidad de inducir vínculos sobre las velocidades. Vamos a utilizar esta capacidad de inducir vínculos sobre velocidades para escribir un sistema mecánico del tipo AKS como un sistema no estándar. Para ello utilizaremos la referencia [FG02a], de acuerdo a la cual uno puede escribir los sistemas AKS sobre un grupo factorizable considerando una dinámica natural (digamos, la inducida por una métrica) sobre dicho grupo, y admitiendo la existencia de ciertos vínculos sobre las velocidades. Sea por consiguiente G un grupo factorizable de la forma $G = AB$, y consideremos $G \times \mathfrak{g}^*$ con la estructura simpléctica canónica (suponiendo trivialización por izquierda). La factorización supuesta induce las descomposiciones

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \\ \mathfrak{g}^* &= \mathfrak{a}^0 \oplus \mathfrak{b}^0 \end{aligned}$$

del álgebra de Lie y su dual, donde $(\cdot)^0$ denota anulador. Sean $\pi_{\mathfrak{a}^0}, \pi_{\mathfrak{b}^0}$ los proyectores en cada uno de los sumandos de la descomposición de \mathfrak{g}^* ; tomemos $\mu \in \mathfrak{b}^0, \nu \in \mathfrak{a}^0$. Entonces podemos definir la subvariedad

$$\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} := \{(g, \zeta) \in G \times \mathfrak{g}^* : \pi_{\mathfrak{b}^0}(\text{Ad}_{g^{-1}}^* \zeta) = \mu, \pi_{\mathfrak{a}^0}(\zeta) = \nu\}.$$

Veremos más adelante que esta subvariedad es de primera clase, y que el núcleo de la forma canónica restringida a ella está generado por los generadores infinitesimales asociados al levantamiento de la acción de $A_\mu \times B_\nu$ sobre G via

$$(a, b) \cdot g := agb^{-1},$$

donde A_μ (resp. B_ν) son los subgrupos de isotropía de μ (resp. ν) respecto de las acciones

$$\begin{aligned} a \cdot \phi &:= \pi_{\mathfrak{b}^0}(\text{Ad}_{a^{-1}}^* \phi), & \forall \phi \in \mathfrak{b}^0, \\ b \cdot \psi &:= \pi_{\mathfrak{a}^0}(\text{Ad}_b^* \psi), & \forall \psi \in \mathfrak{a}^0. \end{aligned}$$

Cocientando por esta acción uno obtiene por lo tanto una variedad simpléctica, cuyas ecuaciones de movimiento son las de los sistemas AKS.

9.2.2. La mecánica no estándar de AKS. Este ejemplo es importante, en tanto provee un nexo entre mecánica no estándar y sistemas integrables; está inspirado fuertemente en [FG02b]. Consideremos como espacio de velocidades

$$\Lambda := TG \oplus \mathfrak{a}_G \oplus \mathfrak{b}_G$$

donde, como antes, se supone que G admite la descomposición $G = AB$ y los fibrados sobre G denotados mediante \mathfrak{a}_G y \mathfrak{b}_G son simplemente $G \times \mathfrak{a}$ y $G \times \mathfrak{b}$; un punto de este espacio (con la trivialización por izquierda para TG) será $(g, J; \alpha, \beta)$. Allí definimos la 1-forma \mathfrak{g} -valuada

$$\theta|_{(g, J; \alpha, \beta)} := \lambda|_g - (J - \text{Ad}_{g^{-1}}\alpha - \beta) \, dt,$$

(aquí λ es la forma de Maurer-Cartan por izquierda) con la cual definiremos la estructura de levantamiento, y consideraremos el lagrangiano

$$L_{\mu\nu}|_{(g, J; \alpha, \beta)} := \left[\frac{1}{2} \mathbf{B}(J, J) - \mu(\alpha) - \nu(\beta) \right] dt$$

donde $\mu \in \mathfrak{b}^0, \nu \in \mathfrak{a}^0$ y, como ya se advirtió, $(\cdot)^0$ es el anulador de la subálgebra correspondiente.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen variando la acción

$$S_{\mu\nu}[\gamma] := \int_I \gamma^* (L_{\mu\nu} dt)$$

donde $\gamma : t \mapsto (t; g(t), J(t); \alpha(t), \beta(t))$ es una curva en $I \times \Lambda$. Una variación de tal curva es un campo vectorial

$$\widehat{\delta\gamma} : (t; g, J; \alpha, \beta) \mapsto (0; g, \xi, J, \delta J; \alpha, \delta\alpha, \beta, \delta\beta)$$

para ciertas funciones $\xi : \Lambda \rightarrow \mathfrak{g}, \delta J : \Lambda \rightarrow \mathfrak{g}, \delta\alpha : \Lambda \rightarrow \mathfrak{a}, \delta\beta : \Lambda \rightarrow \mathfrak{b}$ (estamos considerando nuevamente a TG trivializado por izquierda) tal que

$$\gamma^* (\mathcal{L}_{\widehat{\delta\gamma}} \theta) = 0.$$

De esta última condición obtenemos que sobre γ las funciones anteriores deben satisfacer la relación

$$(42) \quad d\xi + [\lambda, \xi] - (\delta J - \text{Ad}_{g^{-1}}(\delta\alpha) - [\text{Ad}_{g^{-1}}\alpha, \xi] - \delta\beta) dt = 0.$$

Como

$$\delta S_{\mu\nu}[\gamma] = \int_I \gamma^* (\widehat{\delta\gamma} \cdot L_{\mu\nu} dt)$$

y

$$\begin{aligned} \widehat{\delta\gamma} \cdot L_{\mu\nu} &= \mathbf{B}(\delta J dt, J) - [\mu(\delta\alpha) + \nu(\delta\beta)] dt \\ &= \mathbf{B}(d\xi + [\lambda + (\text{Ad}_{g^{-1}}\alpha) dt, \xi], J) + \\ &\quad + [\mathbf{B}(\text{Ad}_{g^{-1}}\delta\alpha + \delta\beta, J) - \mu(\delta\alpha) - \nu(\delta\beta)] dt. \end{aligned}$$

Para cada $\phi \in \mathfrak{g}^*$ y cada $\kappa \in \Omega^1(\Lambda, \mathfrak{g})$ definamos la 1-forma \mathfrak{g}^* -valuada $\text{ad}_\kappa^\# \phi$ mediante

$$(\text{ad}_\kappa^\# \phi)(\xi) := \phi([\xi, \kappa]), \quad \forall \xi \in \mathfrak{g},$$

indiquemos con el símbolo ξ^\flat la forma $\mathbf{B}(\xi, \cdot)$, y denotemos mediante $\text{Ad}^\# : G \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{g}^*)$ la representación coadjunta, definida via

$$(\text{Ad}_g^\# \phi)(\xi) = \phi(\text{Ad}_{g^{-1}}\xi)$$

9.2. Mecánica no estándar y método AKS

para todo $\xi \in \mathfrak{g}, \phi \in \mathfrak{g}^*, g \in G$. Con esta notación, el elemento de \mathfrak{g}^* obtenido al contraer un vector v tangente a Λ con la 1-forma satisface

$$\left(\text{ad}_{\kappa}^{\#} \phi \right) (v) = \text{ad}_{\kappa(v)}^{\#} \phi,$$

donde el elemento en el miembro de la derecha es el generador infinitesimal para la acción coadjunta asociada a $\kappa(v) \in \mathfrak{g}$ en el punto $\phi \in \mathfrak{g}^*$. Entonces las variaciones en $\delta\alpha, \delta\beta$ nos darán, respectivamente, las ecuaciones

$$\pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{Ad}_g^{\#} J^{\flat} - \mu \right) = 0, \pi_{\mathfrak{a}^0} \left(J^{\flat} - \nu \right) = 0,$$

y la variación a lo largo de TG (compatible con la restricción (42)) conduce a

$$\mathbf{d}J^{\flat} + \text{ad}_{(\lambda + \text{Ad}_{g^{-1}} \alpha \mathbf{d}t)}^{\#} \left(J^{\flat} \right) = 0.$$

Las soluciones a las ecuaciones de Euler-Lagrange son curvas integrales en $I \times \Lambda$ del EDS generado por

$$\begin{cases} \mathbf{d}J^{\flat} - \text{ad}_{\beta \mathbf{d}t}^{\#} \left(J^{\flat} \right), \\ \lambda - \left(J - \text{Ad}_{g^{-1}} \alpha - \beta \right) \mathbf{d}t, \\ \pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{Ad}_g^{\#} J^{\flat} \right) - \mu, \\ \pi_{\mathfrak{a}^0} \left(J^{\flat} \right) - \nu \end{cases}$$

que satisfacen $\mathbf{d}t \neq 0$; aquí se ha supuesto que $\text{ad}_{\zeta \mathbf{d}t}^{\#} \zeta^{\flat} = 0$ para todo $\zeta \in \mathfrak{g}$.

9.2.3. Problema hamiltoniano. Intentemos construir una teoría hamiltoniana con estos datos. Armamos $\tilde{\Lambda} := I \times (\Lambda \oplus (G \times \mathfrak{g}^*))$ y sobre ella definimos la 1-forma

$$\tilde{\lambda} \Big|_{(g, J; \alpha, \beta; \sigma)} := L_{\mu\nu} (g, J; \alpha, \beta) \mathbf{d}t + \sigma (\theta).$$

El EDS que describe a las curvas extremales del problema variacional definido por esta forma estará generado por

$$\begin{cases} \mathbf{d}\sigma + \text{ad}_{(\lambda + \text{Ad}_{g^{-1}} \alpha \mathbf{d}t)}^{\#} \sigma \\ J^{\flat} - \sigma \\ \lambda - \left(J - \text{Ad}_{g^{-1}} \alpha - \beta \right) \mathbf{d}t, \\ \pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{Ad}_g^{\#} \sigma \right) - \mu, \\ \pi_{\mathfrak{a}^0} \left(\sigma \right) - \nu, \end{cases}$$

donde ϕ^{\sharp} es el isomorfismo inverso a $(\cdot)^{\flat}$. Luego la proyección

$$\Pi : I \times \tilde{\Lambda} \rightarrow I \times \Lambda : (t; g, J; \alpha, \beta; \sigma) \mapsto (t; g, J; \alpha, \beta)$$

mapea uno a uno soluciones de este EDS en soluciones del EDS de Euler-Lagrange.

Entonces $\tilde{\Lambda} \Big|_{\{t = t_0\}}$ es una variedad presimpléctica, con forma presimpléctica

$$\begin{aligned} \omega_0 \Big|_{(g, J; \alpha, \beta; \sigma)} &:= \mathbf{d}\tilde{\lambda} \Big|_{\{t = t_0\}} \\ &= \langle \mathbf{d}\sigma \hat{\wedge} \lambda \rangle + \sigma (\mathbf{d}\lambda) \\ &= \langle \mathbf{d}\sigma \hat{\wedge} \lambda \rangle - \frac{1}{2} \sigma ([\lambda \hat{\wedge} \lambda]), \end{aligned}$$

indicando con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la contracción de \mathfrak{g}^* con \mathfrak{g} . El hamiltoniano que rige a la dinámica se obtiene de $\tilde{\lambda}$ a través de

$$\begin{aligned} H(g, J; \alpha, \beta; \sigma) &:= \left(\partial_t \lrcorner \tilde{\lambda} \right) \Big|_{\{t=t_0\}} \\ &= \sigma \left(\text{Ad}_{g^{-1}} \alpha + \beta - J \right) + L(g, J; \alpha, \beta) \\ &= -\frac{1}{2} \sigma(J) + \frac{1}{2} \left(J^{\flat} - \sigma \right) (J) + \left(\text{Ad}_g^{\sharp} \sigma - \mu \right) (\alpha) + (\sigma - \nu) (\beta). \end{aligned}$$

9.2.4. Algoritmo de Gotay, Nester y Hinds. Si $l := (g, J; \alpha, \beta; \sigma)$

$$\begin{aligned} \left(T_l \tilde{\Lambda} \right)^{\perp} &= \left\{ X = (\xi, \delta J, \delta \alpha, \delta \beta; \delta \sigma) \in T_l \tilde{\Lambda} : X \lrcorner \omega_0|_l = 0 \right\} \\ &= \left\{ X \in T_l \tilde{\Lambda} : \delta \sigma(\lambda) - \mathbf{d}\sigma(\xi) - \sigma([\xi, \lambda]) = 0 \right\} \\ &= \left\{ X \in T_l \tilde{\Lambda} : \delta \sigma = 0, \xi = 0 \right\}, \end{aligned}$$

por lo cual serán invariantes todos los puntos $l \in \tilde{\Lambda}$ tales que $X|_l \cdot H = 0$ para todo $X \in \left(T_l \tilde{\Lambda} \right)^{\perp}$, esto es

$$\begin{aligned} 0 &= X|_l \cdot H \\ &= \left(J^{\flat} - \sigma \right) (\delta J) + \left(\text{Ad}_g^{\sharp} \sigma - \mu \right) (\delta \alpha) + (\sigma - \nu) (\delta \beta) \end{aligned}$$

para todo $\delta \alpha \in \mathfrak{a}, \delta \beta \in \mathfrak{b}, \delta J \in \mathfrak{g}$. El vínculo primario es, por lo tanto

$$\begin{cases} J^{\flat} - \sigma = 0 \\ \pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{Ad}_g^{\sharp} \sigma - \mu \right) = 0 \\ \pi_{\mathfrak{a}^0} (\sigma - \nu) = 0. \end{cases}$$

Definimos

$$\tilde{\Lambda}^{(1)} := \left\{ (g, J; \alpha, \beta; \sigma) \in \tilde{\Lambda} : J^{\flat} = \sigma, \pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{Ad}_g^{\sharp} \sigma - \mu \right) = 0, \pi_{\mathfrak{a}^0} (\sigma - \nu) = 0 \right\},$$

y queremos ver si esta subvariedad es invariante por el flujo generado por el hamiltoniano dado. Para ello usaremos el resultado siguiente.

Lema 41. $\left(T_l \tilde{\Lambda}^{(1)} \right)^{\perp} \subset T_l \tilde{\Lambda}$ está generado por los campos vectoriales hamiltonianos asociados a las funciones

$$\begin{aligned} f_2^{\kappa} (g, J; \alpha, \beta; \sigma) &:= \left(\pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{Ad}_g^{\sharp} \sigma - \mu \right) - \mu \right) (\kappa) \\ f_2^{\omega} (g, J; \alpha, \beta; \sigma) &:= \left(\pi_{\mathfrak{a}^0} (\sigma - \nu) - \nu \right) (\omega) \end{aligned}$$

donde $\kappa, \omega \in \mathfrak{g}$ son elementos arbitrarios.

DEMOSTRACIÓN. La demostración se basa en el cálculo de la dimensión de $\left(T_l \tilde{\Lambda}^{(1)} \right)^{\perp}$ usando la fórmula

$$\dim (TN)^{\perp} = \dim P - \dim N + \dim (\text{Nuc } \omega_0 \cap TN)$$

válida para cada subvariedad $N \subset P$ de una variedad presimpléctica. Notemos que $\text{Nuc } \omega_0|_l = \left(T_l \tilde{\Lambda} \right)^{\perp}$, por lo que si $X = (\xi, \delta J, \delta \alpha, \delta \beta, \delta \sigma)$ está en $\left(T_l \tilde{\Lambda} \right)^{\perp}$ y respeta el vínculo impuesto por las f_1 's, entonces $X = (0, 0, \delta \alpha, \delta \beta, 0)$, por lo que es también tangente a $T_l \tilde{\Lambda}^{(1)}$. Por lo tanto

$$\dim \left(\text{Nuc } \omega_0|_l \cap T_l \tilde{\Lambda}^{(1)} \right) = \dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{b} = \dim \mathfrak{g}.$$

9.2. Mecánica no estándar y método AKS

Queda por probarse la existencia de alguna relación entre las funciones f_2 y las f_3 ; sus diferenciales son

$$\begin{aligned} \mathbf{d}f_2^\kappa &= \left(\pi_{\mathfrak{b}^\perp} \left(\text{Ad}_g^\# \left(\mathbf{d}\sigma + \text{ad}_\lambda^\# \sigma \right) \right) \right) (\kappa) \\ &= \mathbf{d}\sigma \left(\text{Ad}_{g^{-1}} \pi_{\mathfrak{a}} (\kappa) \right) - \left(\text{ad}_{\text{Ad}_{g^{-1}} \pi_{\mathfrak{a}} (\kappa)}^\# \sigma \right) (\lambda) \\ \mathbf{d}f_3^\omega &= \mathbf{d}\sigma \left(\pi_{\mathfrak{b}} (\omega) \right). \end{aligned}$$

Nótese que si, por ejemplo, σ es un elemento central, entonces podría ocurrir que estos diferenciales fuesen linealmente dependientes. En tal caso podemos asumir la siguiente hipótesis, que es válida cuando la factorización considerada proviene de una descomposición de Iwasawa:

Para cualquier $g \in G$, si $X \in \mathfrak{b} \cap \text{Ad}_g \mathfrak{a}$, entonces $X = 0$.

Con ello estamos seguros de que nuestras funciones son independientes; luego hay $\dim \mathfrak{a}$ funciones independientes de tipo f_2 y $\dim \mathfrak{b}$ de tipo f_3 . Por consiguiente

$$\dim \tilde{\Lambda}^{(1)} = \dim \tilde{\Lambda} - \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{a} - \dim \mathfrak{b},$$

y juntando todo

$$\dim (TN)^\perp = 2\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{b} = 3\dim \mathfrak{g}.$$

Finalmente escribiendo $X_{f_k^\phi} := \left(\xi_k^\phi, \delta J_k^\phi, \delta \alpha_k^\phi, \delta \beta_k^\phi, \delta \sigma_k^\phi \right)$ para el campo hamiltoniano asociado a la función f_k^ϕ , resulta que

$$X_{f_k^\phi} \lrcorner \omega_0 = \left(\delta \sigma_k^\phi + \text{ad}_{\xi_k^\phi}^\# \sigma \right) (\lambda) - \mathbf{d}\sigma \left(\xi_k^\phi \right).$$

Esto implica las siguientes expresiones para estos campos hamiltonianos:

$$\begin{aligned} X_{f_2^\kappa} &= \left(-\text{Ad}_{g^{-1}} \pi_{\mathfrak{a}} (\kappa), \delta J_2^\kappa, \delta \gamma_2^\kappa, \delta \chi_2^\kappa, 0 \right) \\ X_{f_3^\omega} &= \left(\pi_{\mathfrak{b}} (\omega), \delta J_3^\omega, \delta \gamma_3^\omega, \delta \chi_3^\omega, -\text{ad}_{\pi_{\mathfrak{b}} (\omega)}^\# \sigma \right) \end{aligned}$$

(con $\delta \gamma_k^\phi, \delta \chi_k^\phi$ funciones \mathfrak{a} y \mathfrak{b} -valuadas arbitrarias, δJ_k^ϕ función \mathfrak{g} -valuada también arbitraria) mientras que las funciones f_1 no tienen campos hamiltonianos asociados (¡recordar que estamos sobre una variedad presimpléctica!.) Como hay $3\dim \mathfrak{g}$ campos linealmente independientes aquí, y ellos pertenecen todos a $(T\tilde{\Lambda}^{(1)})^\perp$, hemos demostrado el lema. \square

Aplicamos ahora la condición de invariancia; ello implica encontrar los puntos $l \in \tilde{\Lambda}^{(1)}$ en los cuales se anulan las componentes de $\mathbf{d}H|_l$ en las direcciones de $(T_l \tilde{\Lambda})^\perp$. Ahora si $l = (g, J; \alpha, \beta; \sigma) \in \tilde{\Lambda}^{(1)}$

$$\begin{aligned} X_{f_2^\kappa}|_l \cdot H &= -\frac{1}{2} \sigma (\delta J_2^\kappa) + \frac{1}{2} \mathbf{B} (\delta J_2^\kappa, J) - \text{Ad}_g^\# \left(\text{ad}_{\text{Ad}_{g^{-1}} \pi_{\mathfrak{a}} (\kappa)}^\# J \right) (\alpha) \\ &= \sigma \left([\text{Ad}_{g^{-1}} \pi_{\mathfrak{a}} (\kappa), \text{Ad}_{g^{-1}} \alpha] \right) \\ &= \left(\text{Ad}_g^\# \sigma \right) \left([\pi_{\mathfrak{a}} (\kappa), \alpha] \right) \\ &= \left(\pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{Ad}_g^\# \sigma \right) \right) \left([\pi_{\mathfrak{a}} (\kappa), \alpha] \right) \\ &= \mu \left([\pi_{\mathfrak{a}} (\kappa), \alpha] \right) \\ &= \left(\text{ad}_{\alpha}^\# \mu \right) \left(\pi_{\mathfrak{a}} (\kappa) \right), \end{aligned}$$

por lo cual la estabilidad de los vínculos definidos por f_2 impone la condición de que α esté en \mathfrak{a}_μ , el grupo de isotropías del elemento $\mu \in \mathfrak{b}^0$ respecto de la acción¹

$$a \in A \mapsto \pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{Ad}_a^\# \mu \right).$$

Asimismo para los vínculos f_3 , y suponiendo que $\text{ad}_\zeta^\# \zeta^\flat = 0$ para todo $\zeta \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} X_{f_3^\omega} \Big|_l \cdot H &= -\frac{1}{2} \sigma (\delta J_3^\omega) + \frac{1}{2} \text{B} (\delta J_3^\omega, J) + \frac{1}{2} \left(\text{ad}_{\pi_{\mathfrak{b}}(\omega)}^\# \sigma \right) (J) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\text{ad}_{\pi_{\mathfrak{b}}(\omega)}^\# \sigma \right) (J) - \left(\text{Ad}_g^\# \text{ad}_{\pi_{\mathfrak{b}}(\omega)}^\# \sigma \right) (\alpha) - \\ &- \left(\text{ad}_{\pi_{\mathfrak{b}}(\omega)}^\# \sigma \right) (\beta) + \left(\text{Ad}_g^\# \text{ad}_{\pi_{\mathfrak{b}}(\omega)}^\# \sigma \right) (\alpha) \\ &= - \left(\text{ad}_{\pi_{\mathfrak{b}}(\omega)}^\# \sigma \right) (\beta) \\ &= \sigma ([\pi_{\mathfrak{b}}(\omega), \beta]) \\ &= \pi_{\mathfrak{a}^0} (\sigma) ([\pi_{\mathfrak{b}}(\omega), \beta]) \\ &= \left(\text{ad}_\beta^\# (\pi_{\mathfrak{a}^0} (J)) \right) (\pi_{\mathfrak{b}}(\omega)) \\ &= \left(\pi_{\mathfrak{a}^0} \left(\text{ad}_\beta^\# \nu \right) \right) (\pi_{\mathfrak{b}}(\omega)) \end{aligned}$$

de donde deducimos que β debe vivir en el álgebra de Lie del grupo de isotropías de ν respecto de la acción²

$$b \in B \mapsto \pi_{\mathfrak{a}^0} \left(\text{Ad}_b^\# \nu \right)$$

para todo $\nu \in \mathfrak{a}^0$.

Luego aparecen nuevos vínculos, y la superficie de vínculos secundarios será

$$\tilde{\Lambda}^{(2)} := \{(g, J; \alpha, \beta; \sigma) \in \tilde{\Lambda}^{(1)} : \alpha \in \mathfrak{a}_\mu, \beta \in \mathfrak{b}_\nu\}.$$

Entonces tendremos el siguiente resultado.

Proposición 29. $\tilde{\Lambda}^{(2)}$ es invariante.

DEMOSTRACIÓN. Sea $l := (g, \sigma; \alpha, \beta, \sigma) \in \tilde{\Lambda}^{(2)}$. Notemos además que $(T_l \tilde{\Lambda})^\perp = \{(\xi, \delta J, \delta \alpha, \delta \beta; \delta \sigma) \in T_l \tilde{\Lambda} : \delta \sigma = \xi = 0\}$; por lo tanto un elemento X de $(T_l \tilde{\Lambda})^\perp \cap (T_l \tilde{\Lambda}^{(2)})$ es de la forma

$$X = (0, 0; \delta \alpha, \delta \beta; 0)$$

con $\delta \alpha \in \mathfrak{a}_\mu, \delta \beta \in \mathfrak{b}_\nu$. Esto significa que $\dim \left((T_l \tilde{\Lambda})^\perp \cap (T_l \tilde{\Lambda}^{(2)}) \right) = \dim \mathfrak{a}_\mu + \dim \mathfrak{b}_\nu$. Además

$$\dim \left(\tilde{\Lambda}^{(2)} \right) = \dim \left(\tilde{\Lambda}^{(1)} \right) - (\dim (\mathfrak{a}) - \dim (\mathfrak{a}_\mu) + \dim (\mathfrak{b}) - \dim (\mathfrak{b}_\nu))$$

por lo cual

$$\dim \left(T_l \tilde{\Lambda}^{(2)} \right)^\perp = \dim \left(\tilde{\Lambda} \right) - \dim \left(\tilde{\Lambda}^{(1)} \right) + \dim (\mathfrak{a}) + \dim (\mathfrak{b}).$$

Como vimos antes $\dim \left(\tilde{\Lambda} \right) - \dim \left(\tilde{\Lambda}^{(1)} \right) = 2 \dim \mathfrak{g}$, de donde se sigue que

$$\dim \left(T_l \tilde{\Lambda}^{(2)} \right)^\perp = 3 \dim \mathfrak{g}.$$

¹Es una acción!

²Ver la nota al pie anterior!

9.3. Fijación de calibre y reducción

Sabemos que $(T_l \tilde{\Lambda}^{(1)})^\perp \subset (T_l \tilde{\Lambda}^{(2)})^\perp$ por ser $\tilde{\Lambda}^{(2)}$ subvariedad de $\tilde{\Lambda}^{(1)}$; como ambos son de la misma dimensión, serán iguales. En el lema 41 habíamos obtenido la base

$$\left\{ X_1^\kappa := (-\text{Ad}_{g^{-1}}\kappa, 0; 0, 0; 0), X_2^\omega := (\omega, 0; 0, 0; -\text{ad}_\omega^\# \sigma), \widehat{\delta J} := (0, \delta J; 0, 0; 0), \right. \\ \left. , \widehat{\delta\alpha} := (0, 0; \delta\alpha, 0; 0), \widehat{\delta\beta} := (0, 0; 0, \delta\beta; 0) : \kappa, \delta\alpha \in \mathfrak{a}, \omega, \delta\beta \in \mathfrak{b}, \delta J \in \mathfrak{g} \right\}$$

para $(T_l \tilde{\Lambda}^{(1)})^\perp$. Luego no aparecerán nuevos vínculos, ya que $\tilde{\Lambda}^{(2)}$ está definido como el subconjunto de $\tilde{\Lambda}^{(1)}$ en el cual H es invariante por elementos de $(T_l \tilde{\Lambda}^{(1)})^\perp$. \square

9.3. Fijación de calibre y reducción

De los cálculos hechos arriba tenemos que $\tilde{\Lambda}^{(2)}$ es una variedad presimpléctica, cuya forma $\omega_2 := \omega_0|_{\tilde{\Lambda}^{(2)}}$ tiene núcleo

$$\text{Nuc } \omega_2|_l = (T_l \tilde{\Lambda}^{(2)})^\perp \cap (T_l \tilde{\Lambda}^{(2)}).$$

Ahora bien, un elemento arbitrario de $(T_l \tilde{\Lambda}^{(2)})^\perp$ se escribe

$$X^\perp := (-\text{Ad}_{g^{-1}}\kappa + \omega, \delta J; \delta\alpha, \delta\beta; -\text{ad}_\omega^\# \sigma)$$

para algún $\kappa, \delta\alpha \in \mathfrak{a}, \omega, \delta\beta \in \mathfrak{b}$ y $\delta J \in \mathfrak{g}$. Como

$$T_l \tilde{\Lambda}^{(2)} = \left\{ (\xi, \delta\sigma; \delta\alpha, \delta\beta; \delta\sigma) : \delta\alpha \in \mathfrak{a}_\mu, \delta\beta \in \mathfrak{b}_\nu, \right. \\ \left. , \pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{Ad}_g^\# (\delta\sigma + \text{ad}_\xi^\# \sigma) \right) = 0, \pi_{\mathfrak{a}^0} (\delta\sigma) = 0 \right\}$$

entonces X^\perp estará en la intersección de estos espacios si y sólo si $\delta\alpha \in \mathfrak{a}_\mu, \delta\beta \in \mathfrak{b}_\nu, (\delta J)^{\mathfrak{b}} = -\text{ad}_\omega^\# \sigma$ y además

$$0 = \pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{Ad}_g^\# \left(-\text{ad}_\omega^\# \sigma + \text{ad}_{-\text{Ad}_{g^{-1}}\kappa + \omega}^\# \sigma \right) \right) \\ = -\pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{Ad}_g^\# \left(\text{ad}_{\text{Ad}_{g^{-1}}\kappa}^\# \sigma \right) \right) \\ = -\pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{ad}_\kappa^\# \left(\text{Ad}_g^\# \sigma \right) \right) \\ 0 = -\pi_{\mathfrak{a}^0} \left(\text{ad}_\omega^\# \sigma \right).$$

Teniendo en cuenta que \mathfrak{a}^0 es invariante por la $\text{ad}^\#$ -acción de \mathfrak{a} , y lo mismo ocurre con \mathfrak{b}^0 respecto de \mathfrak{b} , estas condiciones son equivalentes a

$$0 = -\pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{ad}_\kappa^\# \pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{Ad}_g^\# \sigma \right) \right) \\ = -\pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{ad}_\kappa^\# \mu \right) \\ 0 = -\pi_{\mathfrak{a}^0} \left(\text{ad}_\omega^\# \pi_{\mathfrak{a}^0} \sigma \right) \\ = -\pi_{\mathfrak{a}^0} \left(\text{ad}_\omega^\# \nu \right)$$

dado que $\kappa \in \mathfrak{a}, \omega \in \mathfrak{b}$. Luego $\kappa \in \mathfrak{a}_\mu, \omega \in \mathfrak{b}_\nu$ asegura, junto a las condiciones halladas arriba, que X^\perp sea tangente a $\tilde{\Lambda}^{(2)}$. Podemos interpretar las direcciones singulares $\widehat{\delta\alpha}, \widehat{\delta\beta}$ como generadores infinitesimales de una acción del grupo abeliano $\mathfrak{a}_\mu \times \mathfrak{b}_\nu$ sobre $\tilde{\Lambda}^{(2)}$ via

$$(\alpha', \beta') \cdot (g, \sigma; \alpha, \beta; \sigma) = (g, \sigma; \alpha + \alpha', \beta + \beta'; \sigma).$$

Si definimos $\Lambda_{\mu\nu} := \left\{ (g, \sigma) \in G \times \mathfrak{g} : \pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{Ad}_g^\# \sigma \right) = \mu, \pi_{\mathfrak{a}^0} (\sigma) = \nu \right\}$ la proyección $\Pi' : (g, \sigma; \alpha, \beta; \sigma) \in \tilde{\Lambda}^{(2)} \mapsto (g, \sigma) \in \Lambda_{\mu\nu}$ induce un difeomorfismo de variedades presimplécticas entre $\tilde{\Lambda}^{(2)} / (\mathfrak{a}_\mu \times \mathfrak{b}_\nu)$ y $\Lambda_{\mu\nu}$, esta última considerada como subvariedad de $G \times \mathfrak{g}^*$ con estructura simpléctica

$$\omega := \langle \mathbf{d}\sigma \wedge \lambda \rangle + \sigma(\mathbf{d}\lambda),$$

que es la canónica de $G \times \mathfrak{g}^*$. Luego $\Lambda_{\mu\nu}$ es presimpléctica con las direcciones singulares en (g, σ) generadas por vectores de la forma

$$X(\kappa, \omega) := \left(\text{Ad}_{g^{-1}} \kappa - \omega, \text{ad}_\omega^\# \sigma \right)$$

para todo par $(\kappa, \omega) \in \mathfrak{a}_\mu \times \mathfrak{b}_\nu$.

Lema 42. Sea $\xi^{L,R}$ el generador infinitesimal asociado al levantamiento de las traslaciones por izquierda (cuando el supraíndice es L) o las traslaciones por derecha (cuando es R) en el grupo a $G \times \mathfrak{g}^*$ considerado como el fibrado cotangente a G via traslaciones por izquierda. Luego $X(\kappa, \omega) = (\kappa^L + \omega^R)|_{(g, \sigma)}$.

Este lema permite dar sentido al esquema desde el punto de vista de reducción de Marsden-Weinstein: Efectivamente, podemos considerar a $G \times \mathfrak{g}^*$ como un $A \times B$ -espacio, si $G \times \mathfrak{g}^* \simeq T^*G$ via la trivialización por izquierda y levantamos la acción de $A \times B$ sobre G dada por

$$A \times B \times G \rightarrow G : (a, b; g) \mapsto agb^{-1}.$$

Uno puede determinar la aplicación momento para esta acción, usando que la estructura simpléctica de T^*G es exacta y que las acciones son levantadas; luego resultará que

$$\begin{aligned} J : G \times \mathfrak{g}^* &\rightarrow \mathfrak{b}^0 \times \mathfrak{a}^0 \\ (g, \sigma) &\mapsto \left(\pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{Ad}_g^\# \sigma \right), \pi_{\mathfrak{a}^0} (\sigma) \right). \end{aligned}$$

Entonces simplemente $\Lambda_{\mu\nu} = J^{-1}(\mu, \nu)$; por la teoría de reducción (veasé [AM78]) la aplicación de $\Lambda_{\mu\nu}$ sobre $\Lambda_{\mu\nu}/A_\mu \times B_\nu$ es presimpléctica, y las curvas solución del sistema mecánico definido allí por el hamiltoniano invariante $H(g, \sigma) = \frac{1}{2} \sigma(\sigma^b)$ están en relación 1-1 con las del sistema inducido sobre el cociente. Para trabajar con estas ecuaciones, introduzcamos un sistema de coordenadas conveniente; notemos que la aplicación

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} : \Lambda_{\mu\nu} &\rightarrow \mathcal{O}_\mu^A \times \mathcal{O}_\nu^B : (g, \sigma) \mapsto \left(\pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{Ad}_{g_A}^\# \mu \right), \pi_{\mathfrak{a}^0} \left(\text{Ad}_{g_B}^\# \nu \right) \right) \\ &\mapsto \left(\pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{Ad}_{g_B}^\# \sigma \right), \pi_{\mathfrak{a}^0} \left(\text{Ad}_{g_B}^\# \sigma \right) \right) \end{aligned}$$

si y sólo si $g = g_A g_B$, desciende a un difeomorfismo en el cociente $\Lambda_{\mu\nu}/(A_\mu \times B_\nu)$. Si $(g, \xi; \sigma, \eta)$ es un vector tangente a $G \times \mathfrak{g}^*$ (como siempre, todas las trivializaciones se toman por izquierda) entonces la derivada de $L_{\mu\nu}$ toma la forma

$$\begin{aligned} (43) \quad (L_{\mu\nu})_*|_{(g, \sigma)}(g, \sigma; \xi, \eta) &= \left(-\pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{ad}_{\xi_A}^\# \text{Ad}_{g_A}^\# \mu \right), \pi_{\mathfrak{a}^0} \left(\text{ad}_{\xi_B}^\# \text{Ad}_{g_B}^\# \nu \right) \right) \\ &= \left(\pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{ad}_{\xi_B}^\# \text{Ad}_{g_B}^\# \sigma \right) + \pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{Ad}_{g_B}^\# \eta \right), \pi_{\mathfrak{a}^0} \left(\text{ad}_{\xi_B}^\# \text{Ad}_{g_B}^\# \sigma \right) + \pi_{\mathfrak{a}^0} \left(\text{Ad}_{g_B}^\# \eta \right) \right) \end{aligned}$$

si y sólo si $g = g_A g_B, \xi_A = \pi_{\mathfrak{a}}(\text{Ad}_{g_B} \xi), \xi_B = \pi_{\mathfrak{b}}(\text{Ad}_{g_B} \xi)$. En este contexto nos encontramos la siguiente sorpresa.

9.3. Fijación de calibre y reducción

Proposición 30. Sea $\mathcal{O}_\mu^A \times \mathcal{O}_\nu^B$ con la estructura simpléctica producto $\omega_{\mu\nu} = \omega_\mu - \omega_\nu$, siendo $\omega_{\mu,\nu}$ las respectivas estructuras simplécticas de Kirillov-Kostant sobre cada una de las órbitas. Si $i_{\mu\nu} : \Lambda \hookrightarrow G \times \mathfrak{g}^*$ es la inclusión, entonces vale que

$$i_{\mu\nu}^* \omega = L_{\mu\nu}^* \omega_{\mu\nu}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $(\omega_1, \omega_2) = (\pi_{\mathfrak{b}^0}(\text{Ad}_a^\# \mu), \pi_{\mathfrak{a}^0}(\text{Ad}_b^\# \nu))$ es un elemento arbitrario de $\mathcal{O}_\mu^A \times \mathcal{O}_\nu^B$, entonces el espacio tangente en dicho punto viene dado por

$$T_{(\omega_1, \omega_2)}(\mathcal{O}_\mu^A \times \mathcal{O}_\nu^B) = \left\{ \left(\pi_{\mathfrak{b}^0}(\text{ad}_\xi^\# \omega_1), \pi_{\mathfrak{a}^0}(\text{ad}_\zeta^\# \omega_2) \right) : \xi \in \mathfrak{a}, \zeta \in \mathfrak{b} \right\}.$$

La estructura simpléctica $\omega_{\mu\nu}$ en estos términos viene dada por

$$(44) \quad \omega_{\mu\nu}|_{(\omega_1, \omega_2)} \left(\left(\pi_{\mathfrak{b}^0}(\text{ad}_{\xi_1}^\# \omega_2), \pi_{\mathfrak{a}^0}(\text{ad}_{\zeta_1}^\# \omega_2) \right), \left(\pi_{\mathfrak{b}^0}(\text{ad}_{\xi_2}^\# \omega_2), \pi_{\mathfrak{a}^0}(\text{ad}_{\zeta_2}^\# \omega_2) \right) \right) = \\ = \omega_1([\xi_1, \xi_2]) - \omega_2([\zeta_1, \zeta_2]).$$

Tomemos ahora un elemento $(g, \sigma; \xi, \eta)$ que sea tangente a $\Lambda_{\mu\nu}$ en el punto (g, σ) ; entonces vale que

$$(45) \quad \begin{cases} \pi_{\mathfrak{b}^0}(\text{Ad}_g^\#(\text{ad}_\xi^\# \sigma + \eta)) = 0 \\ \pi_{\mathfrak{a}^0}(\eta) = 0. \end{cases}$$

Como $g = g_A g_B$ entonces la primera condición puede reescribirse como

$$\pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{Ad}_{g_A}^\# \left(\text{ad}_{(\text{Ad}_{g_B} \xi)}^\# (\text{Ad}_{g_B} \sigma) + \text{Ad}_{g_B} \eta \right) \right) = 0$$

que, dada la condición de no degeneración³ es equivalente a pedir que

$$(46) \quad \pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\text{ad}_{(\text{Ad}_{g_B} \xi)}^\# (\text{Ad}_{g_B} \sigma) + \text{Ad}_{g_B} \eta \right) = 0.$$

Supongamos ahora que $(g, \sigma; \xi_1, \eta_1), (g, \sigma; \xi_2, \eta_2) \in T_{(g, \sigma)} \Lambda_{\mu\nu}$; entonces evaluados sobre la forma canónica tendremos que

$$\begin{aligned} \omega|_{(g, \sigma)}((g, \sigma; \xi_1, \eta_1), (g, \sigma; \xi_2, \eta_2)) &= \eta_1(\xi_2) - \eta_2(\xi_1) - \sigma([\xi_1, \xi_2]) \\ &= \pi_{\mathfrak{b}^0}(\text{Ad}_{g_B}^\# \eta_1)((\xi_2)_A) + \pi_{\mathfrak{a}^0}(\text{Ad}_{g_B}^\# \eta_1)((\xi_2)_B) - \\ &\quad - \pi_{\mathfrak{b}^0}(\text{Ad}_{g_B}^\# \eta_2)((\xi_1)_A) - \pi_{\mathfrak{a}^0}(\text{Ad}_{g_B}^\# \eta_2)((\xi_1)_A) - \\ &\quad - (\text{Ad}_{g_B}^\# \sigma)([\xi_1, (\xi_2)_A]) - (\text{Ad}_{g_B}^\# \sigma)([(\xi_1)_B, (\xi_2)_B]) - (\text{Ad}_{g_B}^\# \sigma)([(\xi_1)_A, (\xi_2)_B]) \\ &= \pi_{\mathfrak{b}^0}(\text{Ad}_{g_B}^\# \eta_1 + \text{ad}_{\xi_1}^\# (\text{Ad}_{g_B}^\# \sigma))((\xi_2)_A) + \pi_{\mathfrak{a}^0}(\text{Ad}_{g_B}^\# \eta_1)((\xi_2)_B) - \\ &\quad - \pi_{\mathfrak{b}^0}(\text{Ad}_{g_B}^\# \eta_2 + \text{ad}_{(\xi_2)_B}^\# (\text{Ad}_{g_B}^\# \sigma))((\xi_1)_A) - \pi_{\mathfrak{a}^0}(\text{Ad}_{g_B}^\# \eta_2)((\xi_1)_A) - \\ &\quad - (\text{Ad}_{g_B}^\# \sigma)([(\xi_1)_B, (\xi_2)_B]) \end{aligned}$$

donde hemos usado la notación (utilizada en párrafos previos) según la cual $(\xi_k)_{A,B} = \pi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\text{Ad}_{g_B} \xi_k)$ para $k = 1, 2$. El primer término de esta expresión se anula por la ecuación (46); el segundo y el cuarto también se anulan como consecuencia de que, a partir de la segunda ecuación en (45), resulta que $\eta_k \in \mathfrak{b}^0$, $k = 1, 2$, y este subespacio es invariante por la acción de B a través de la representación transadjunta $\text{Ad}^\#$. Asimismo para el tercer término del segundo miembro, usando nuevamente la ecuación (45), podremos escribir

$$\pi_{\mathfrak{b}^0}(\text{Ad}_{g_B}^\# \eta_2 + \text{ad}_{(\xi_2)_B}^\# (\text{Ad}_{g_B}^\# \sigma))((\xi_1)_A) = -(\text{Ad}_{g_B}^\# \sigma)([(\xi_1)_A, (\xi_2)_A]),$$

³Esto es, que $\text{Ad}_g^\# \mathfrak{a}^0 \cap \mathfrak{b}^0 = 0$ para todo $g \in G$.

por lo cual

$$\begin{aligned} \omega|_{(g,\sigma)}((g,\sigma;\xi_1,\eta_1),(g,\sigma;\xi_2,\eta_2)) &= \\ &= \pi_{\mathfrak{b}^0}(\mathrm{Ad}_{g_B}^\# \sigma) ([(\xi_1)_A, (\xi_2)_A]) - \pi_{\mathfrak{a}^0}(\mathrm{Ad}_{g_B}^\# \sigma) ([(\xi_1)_B, (\xi_2)_B]). \end{aligned}$$

A partir de la ecuación (44) y usando la fórmula (43) para la derivada a lo largo de la aplicación $L_{\mu\nu}$, probamos con esto la proposición. \square

Por lo tanto $\mathcal{O}_\mu^A \times \mathcal{O}_\nu^B$ con la estructura simpléctica producto $\omega_{\mu\nu}$ es simplectomorfo al espacio reducido de Marsden-Weinstein asociado a la acción de $A \times B$ antes definida sobre $G \times \mathfrak{g}^*$. Como ya hemos advertido, el hamiltoniano $H(g,\sigma) := \frac{1}{2}\sigma(\sigma^b)$ es invariante por dicha acción, por lo que las soluciones del sistema definido por tal hamiltoniano en $G \times \mathfrak{g}^*$ están en correspondencia uno a uno con las del sistema inducido sobre $\mathcal{O}_\mu^A \times \mathcal{O}_\nu^B$ por el hamiltoniano $H_{\mu\nu}$ [AM78] definido mediante

$$i_{\mu\nu}^* H = L_{\mu\nu}^* H_{\mu\nu}.$$

Notemos ahora que si $L_{\mu\nu}(g,\sigma) = (\omega_1, \omega_2)$, entonces $\mathrm{Ad}_{g_B}^\# \sigma = \omega_1 + \omega_2$, de donde resulta que

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{2} \left(\mathrm{Ad}_{g_B}^\# (\omega_1 + \omega_2) \right) \left[\left(\mathrm{Ad}_{g_B}^\# (\omega_1 + \omega_2) \right)^b \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathrm{Ad}_{g_B}^\# (\omega_1 + \omega_2) \right) \left[\mathrm{Ad}_{g_B} (\omega_1 + \omega_2)^b \right] \\ &= \frac{1}{2} \omega_1(\omega_1^b) + \frac{1}{2} \omega_2(\omega_2^b) + \omega_1(\omega_2^b). \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \mathbf{d}H_{\mu\nu}|_{(\omega_1, \omega_2)} \left(\pi_{\mathfrak{b}^0}(\mathrm{ad}_\xi^\# \omega_1), \pi_{\mathfrak{a}^0}(\mathrm{ad}_\zeta^\# \omega_2) \right) &= \\ &= \pi_{\mathfrak{b}^0}(\mathrm{ad}_\xi^\# \omega_1) (\omega_1^b + \omega_2^b) + \pi_{\mathfrak{a}^0}(\mathrm{ad}_\zeta^\# \omega_2) (\omega_1^b + \omega_2^b) \end{aligned}$$

por lo que el campo vectorial hamiltoniano vendrá dado por

$$(47) \quad X_{H_{\mu\nu}}|_{(\omega_1, \omega_2)} = \left(\pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\mathrm{ad}_{\pi_{\mathfrak{a}}(\omega_1^b + \omega_2^b)}^\# \omega_1 \right), \pi_{\mathfrak{a}^0} \left(\mathrm{ad}_{\pi_{\mathfrak{b}}(\omega_1^b + \omega_2^b)}^\# \omega_2 \right) \right).$$

En general la solución de sistemas mecánicos via reducción procede en dirección opuesta en la que estamos construyendo aquí: O sea, una vez que se define el sistema mecánico sobre el espacio reducido, se lo resuelve allí, ya que uno espera que sea más fácil de resolver, dado que contiene menos grados de libertad. Después se encuentra la solución del sistema original levantando de manera conveniente la solución hallada. En el caso de sistemas AKS la dirección en la que se resuelve es la opuesta: Notemos que el sistema mecánico sobre $G \times \mathfrak{g}^*$ definido por H tiene campo vectorial hamiltoniano

$$X_H|_{(g,\sigma)} = (\sigma^b, -\mathrm{ad}_{\sigma^b}^\# \sigma) = (\sigma^b, 0)$$

dada la condición $\mathrm{ad}_\xi^\# \xi^b = 0$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$. Por consiguiente la solución en el espacio sin reducir que pasa por (g,σ) a tiempo cero es simplemente

$$t \mapsto (g \exp t\sigma^b, \sigma),$$

y si este dato inicial satisface $\pi_{\mathfrak{b}^0}(\mathrm{Ad}_g^\# \sigma) = \mu$, $\pi_{\mathfrak{a}^0}(\sigma) = \nu$, entonces dicha curva estará en $\Lambda_{\mu\nu}$ para todo t . Luego la curva

$$t \mapsto \left(\pi_{\mathfrak{b}^0} \left(\mathrm{Ad}_{(g_A(t))^{-1}}^\# \mu \right), \pi_{\mathfrak{a}^0} \left(\mathrm{Ad}_{g_B(t)}^\# \nu \right) \right)$$

9.3. Fijación de calibre y reducción

donde $g_A : \mathbb{R} \rightarrow A$, $g_B : \mathbb{R} \rightarrow B$ son las curvas definidas por $g_A(t)g_B(t) = g \exp t\sigma^b$, es solución para el sistema asociado al campo vectorial (47), que es sin dudas más difícil de solucionar que el sistema original.

Conclusiones, comentarios y nuevas direcciones

10.1. Conclusiones

EN esta tesis se exploró la posibilidad de representar los vínculos de Dirac en la geometría del problema variacional subyacente. Para ello fue indispensable desarrollar un lenguaje común en el cual coexistiesen dos maneras de entender las ecuaciones de movimiento de una teoría de campos (o, más en general, problemas variacionales no estándar): Por un lado la representación de las mismas como un sistema dinámico sobre el espacio de secciones de una hoja de tiempo constante en el fibrado de campos (como se vió en el capítulo 5), y por el otro, utilizando la restricción del EDS inducido por las ecuaciones de movimiento a dicha hoja. Fue posible relacionar estas representaciones (cf. el teorema del capítulo 7), y se aplicó esta relación en el capítulo 8 a un cierto número de ejemplos, tanto de índole matemático como físicamente relevantes. El concepto de *problemas variacionales no estándar* nos permitió además incorporar el método AKS de construcción de sistemas integrables al esquema general desarrollado en esta tesis.

10.2. Comentarios

Parte de lo discutido en esta tesis fue publicado en [Cap10]; sin embargo, aquí se han incluido otros ejemplos que no fueron publicados allí por falta de espacio. Además el trabajo iniciado con Hugo Montani sobre sistemas AKS ha dado lugar a un nuevo artículo [CM10], en el que se discute el esquema de dualidad T [CM06] para grupos de Lie de dimensión finita. Si bien no hemos incluido ninguna discusión de este trabajo aquí, vale la pena indicar que parte del esfuerzo realizado durante el desarrollo de este doctorado fue dirigido a llevarlo adelante.

10.3. Nuevas direcciones

Han quedado algunas direcciones a explorar a futuro, a saber:

1. El estudio en profundidad de los sistemas dinámicos obtenidos sobre los espacios de secciones de las hojas de tiempo constante. Aquí hay dos aspectos a tener en cuenta: El estudio desde el punto de vista analítico, esto es, la exploración de las diferentes estructuras diferenciables sobre estos espacios de secciones, y el estudio desde el punto de vista global, es decir, la debilitación de las hipótesis de localidad asumidas en el teorema principal del capítulo 7.
2. Las teorías de campo de orden superior (ver [dLR87, ddSM04] y el libro [dLR85]) también pueden pensarse como problemas variacionales no estándar, tomando el fibrado doble $J^k(\Lambda) \rightarrow \Lambda \rightarrow M$ y como EDS \mathcal{I} el generado por la estructura de contacto en el espacio de k -jets. Tal vez puede ser interesante qué puede decir nuestro método en el contexto de las teorías de campo de orden superior.
3. Para ser una tesis sobre mecánica geométrica, este trabajo adolece de una omisión importante: Nada se ha dicho sobre simetrías de problemas variacionales no estándar. Sin dudas, aquí hay una discusión pendiente; el punto de partida podría ser la caracterización de simetrías para un problema variacional no estándar $(\Lambda \rightarrow \Lambda_1 \rightarrow M, \lambda, \mathcal{I})$

como transformaciones del fibrado total que mantienen la estructura intermedia y que además son simetrías infinitesimales del EDS \mathcal{I} .

4. En la descripción de la teoría del campo electromagnético y de las teorías de calibre se asumió que la relación entre el campo de calibre F y su potencial A era $F = \mathbf{d}A + A \wedge A$ sobre el fibrado principal que define a la teoría. Esto asume que tenemos un potencial A definido en todas partes; sin embargo, en general uno puede definir la forma de curvatura F proveyendo un cubrimiento por entornos trivializadores del fibrado principal con el que está trabajando, y una forma A \mathfrak{g} -valuada definida sobre cada uno de estos entornos, relacionadas entre sí por transformaciones de calibre definidas sobre las intersecciones de dichos entornos. Un caso prototípico es el campo electromagnético producido por un monopolo magnético. Sería interesante preguntarse como los EDS definidos localmente se relacionan entre sí, y si existe algún objeto global que los sustente.
5. Aunque el producto final no lo refleje, una de las motivaciones iniciales del presente trabajo fue el de disponer de un marco de referencia para extrapolar los procedimientos de desingularización utilizados en [CE06] a las teorías de campo con vínculos singulares; aunque se ha iniciado el estudio de este tipo de teorías desde este punto de vista, queda aún mucho por hacerse.
6. Las estructuras de Dirac forman un marco adecuado para el estudio de ciertos tipos de mecánica con vínculos. Aquí hemos indicado una dirección en la cual podría generalizarse esta noción al caso de teorías de campo (véase sección 5.6); uno espera profundizar a futuro este tipo de reflexiones.

Bibliografía

- [ABM05] H. Attouch, G. Buttazzo, and G. Michaille. *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces: Applications to PDEs and Optimization (Mps-Siam Series on Optimization 6)*. SIAM, 2005.
- [Ada75] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [AdA80] V. Aldaya and J. A. de Azcárraga. Geometric formulation of classical mechanics and field theory. *La Rivista del Nuovo Cimento*, 3(10):1–66, 1980.
- [AM78] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of mechanics*. Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978.
- [Ash91] A. Ashtekar. *Lectures on Non-Perturbative Canonical Gravity*. Number 6 in Advanced Series in Astrophysics and Cosmology. World Scientific Pub Co Inc, 1991.
- [AvM80] M. Adler and P. van Moerbeke. Completely integrable systems, euclidean lie algebras and curves. *Adv. Math.*, 38:267–317, 1980.
- [BCG⁺91] R.L. Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt, and P.A. Griffiths. *Exterior differential systems*. Springer-Verlag, 1991.
- [BD02] R. Baker and C. Doran. Jet bundles and the formal theory of differential equations. In L. Dorst, C. Doran, and J. Lasenby, editors, *Proceedings of the Conference on Applied Geometric Algebras in Computer Science and Engineering*, page 133. AGACSE 2001, Birkhäuser, 2002.
- [Ble81] D. Bleeker. *Gauge Theory and Variational Principles*. Addison-Wesley, 1981.
- [BS03] M. Bojowald and T. Strobl. Classical solutions for Poisson sigma models on a Riemann surface. *JHEP*, 07:002, 2003.
- [BSF98] E. Binz, J. Sniatycki, and H. Fischer. *Geometry of Classical Fields*. Number 154 in North-Holland Mathematics Studies. North-Holland, 1998.
- [BT82] R. Bott and L. W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Number 82 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1982.
- [BZ05] F. Bonechi and M. Zabzine. Poisson sigma model over group manifolds. *J. Geom. Phys.*, 54:173–196, 2005.
- [Cap10] S. Capriotti. Dirac constraints in field theory and exterior differential systems. *Journal of Geometric Mechanics*, 2(1):1–50, March 2010.
- [Car45] E. Cartan. *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*. Hermann, 1945.
- [CE06] H. Cendra and M. Etchechoury. Desingularization of implicit analytic differential equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(35):10975–11001, September 2006.
- [CF01] A.S. Cattaneo and G. Felder. Poisson sigma models and deformation quantization. *Mod. Phys. Lett.*, A16:179–190, 2001.
- [CM06] A. Cabrera and H. Montani. Hamiltonian loop group actions and T-duality for group manifolds. *J. Geom. Phys.*, 56:1116–1143, 2006.
- [CM10] S. Capriotti and H. Montani. Integrable systems and poisson-lie t-duality: a finite dimensional example. *Journal of Geometry and Physics*, 60(10):1509–1529, October 2010.
- [Con85] J.B. Conway. *A course in Functional Analysis*. Number 96 in Graduates Texts in Mathematics. Springer, New York, 1985.
- [CW87] C. Crnkovic and E. Witten. Covariant description of canonical formalism in geometrical theories. In S.W. Hawking and W. Israel, editors, *Three Hundred Years of Gravitation*, pages 676–684. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.; New York, U.S.A., 1987.
- [ddSM04] M. de Leon, D. Martín de Diego, and A. Santamaria-Merino. Symmetries in classical field theory. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 1:651, 2004.
- [Del05] D. Delphenich. Symmetries and pre-metric electromagnetism. *Annalen Phys.*, 14:663, 2005.
- [Dir65] P.A.M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Yeshiva University Press, 1965.
- [dLR85] M. de León and P. R. Rodrigues. *Generalized classical mechanics and field theory: a geometrical approach of Lagrangian and Hamiltonian formalisms involving higher order derivatives*, volume 102 of *Notas de Matemática*. Elsevier, 1985.
- [dLR87] M. de León and P. Rodrigues. A contribution to the global formulation of the higher-order Poincaré-Cartan form. *Letters in Mathematical Physics*, 14(4):353–362, november 1987.
- [Dor93] I. Dorfman. *Dirac structures and Integrability of nonlinear evolution equations*. John Wiley and Sons, 1993.

Capítulo 10. Bibliografía

- [Dug66] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.
- [Eel66] J. Eells. A setting for global analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72(5):751–807, 1966.
- [Een06] P. Eendebak. Slices of a talk given in the Utrecht University, URL <http://www.pietereendebak.nl/contact-structures/files/aio-talk.pdf>, February 2006.
- [EnL92] A. Echeverría Enriquez and M. C. Muñoz Lecanda. Variational calculus in several variables: A hamiltonian approach. *Ann. Poincaré*, 56:27–48, 1992.
- [Est08] F.B. Estabrook. Exterior differential systems for Yang-Mills Theories. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 4, 2008.
- [FG02a] L. Feher and A. Gabor. Adler–Kostant–Symes systems as Lagrangian gauge theories. *Physics Letters A*, 301:58, 2002.
- [FG02b] L. Féher and A. Gábor. Adler–Kostant–Symes systems as lagrangian gauge theories. *arXiv:math-ph/0202033v1*, 2002.
- [Gar69] R. Gardner. A differential geometric characterization of characteristics. *Comm. Pure and Applied Math.*, 23:597–626, 1969.
- [Gaw91] K. Gawedzki. Classical origin of quantum group symmetries in Wess–Zumino–Witten conformal field theory. *Commun. Math. Phys.*, 139:201–214, 1991.
- [GF63] I. M. Gelfand and S. V. Fomin. *Calculus of variations*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, 1963. Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman.
- [GG74] M. Golubitsky and V.W. Guillemin. *Stable mappings and their singularities*. Springer-Verlag New York, 1974.
- [GIM97] M.J. Gotay, J. Isenberg, and J.E. Marsden. Momentum maps and classical relativistic fields. I: Covariant field theory. 1997.
- [GIM04] M.J. Gotay, J. Isenberg, and J.E. Marsden. Momentum maps and classical relativistic fields. II: Canonical analysis of field theories. 2004.
- [GKM03] V. Gerdt, A. Khvedelidze, and D. Mladenov. On application of involution analysis of differential equations to constrained dynamical systems. *ArXiv:hep-th/0311174*, 2003.
- [GN79] M.J. Gotay and J.M. Nester. Presymplectic lagrangian systems. i: the constraint algorithm and the equivalence theorem. *Ann. Inst. H. Poincaré*, A(30):129–142, 1979.
- [GNH78] M.J. Gotay, J.M. Nester, and G. Hinds. Presymplectic manifolds and the Dirac–Bergmann theory of constraints. *J. Math. Phys.*, (19):2388, 1978.
- [Got] M.J. Gotay. unpublished notes.
- [Got91a] Mark J. Gotay. A multisymplectic framework for classical field theory and the calculus of variations ii: space + time decomposition. *Differential Geometry and its Applications*, 1(4):375 – 390, 1991.
- [Got91b] M.J. Gotay. An exterior differential system approach to the Cartan form. In P. Donato, C. Duval, J. Elhadad, and G.M. Tuynman, editors, *Symplectic geometry and mathematical physics. Actes du colloque de géométrie symplectique et physique mathématique en l’honneur de Jean-Marie Souriau, Aix-en-Provence, France, June 11-15, 1990.*, pages 160 –188. Progress in Mathematics. 99. Boston, MA, Birkhäuser, 1991.
- [Gri98] P. A. Griffiths. *Exterior Differential Systems and Calculus of Variations*. Birkhauser, 1998.
- [Her84] R. Hermann. Review: Exterior differential systems and the calculus of variations. *SIAM Review*, 26(2):304–306, 1984.
- [Hir76] M. Hirsch. *Differential Topology*. Number 33 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1976.
- [Hor91] P. Horava. On a covariant Hamilton–Jacobi framework for the Einstein–Maxwell theory. *Class. Quant. Grav.*, 8:2069–2084, 1991.
- [Hsu92] L. Hsu. Calculus of variations via the Griffiths formalism. *J. Diff. Geom.*, 36:551–589, 1992.
- [HT92] M. Henneaux and C. Teitelboim. *Quantization of Gauge Fields*. Princeton University Press, 1992.
- [HT94] M. Henneaux and C. Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, August 1994.
- [HTT91] D. Hartley, R.W. Tucker, and P.A. Tuckey. Constrained dynamics and exterior differential systems. *J. Phys.*, A24:5253–5266, 1991.
- [IL03] T. A. Ivey and J. M. Landsberg. *Cartan for beginners: differential geometry via moving frames and exterior differential systems*. Graduate Texts in Mathematics. American Mathematical Society, 2003.
- [Kam00] N. Kamran. An elementary introduction to exterior differential systems. In *Geometric approaches to differential equations (Canberra, 1995)*, volume 15 of *Austral. Math. Soc. Lect. Ser.*, pages 100–115. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [Kel74] H.H. Keller. *Differential Calculus in Locally Convex Spaces*. Number 417 in Lect. Notes in Math. Springer-Verlag, New York, 1974.
- [KM97] A. Kriegl and P.W. Michor. *The convenient setting for global analysis*, volume 53 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 1997.
- [Kos79] B. Kostant. The solution to a generalized toda lattice and representation theory. *Adv. Math.*, 34:195–338, 1979.
- [Kru73] D. Krupka. Some geometric aspects of variational problems in fibred manifolds. *Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Purk. Brunensis, Physica*, 14, 1973.
- [Kru87] D. Krupka. Geometry of Lagrangean structures. III. In *Proceedings of the 14th winter school on abstract analysis (Srní, 1986)*, number 14, pages 187–224, 1987.

- [Lan99] S. Lang. *Fundamentals of Differential Geometry*. Number 191 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [Lan02] S. Lang. *Introduction to Differentiable Manifolds*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [Mar74] J.E. Marsden. *Applications of Global Analysis in Mathematical Physics*. Publish or Perish, Inc., Boston, 1974.
- [Mic78] P. Michor. Manifolds of smooth maps. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, 19(1):47–78, 1978.
- [Mor01] S. Morita. *Geometry of Differential Forms*, volume 201 of *Iwanami Series in Modern Mathematics*. American Mathematical Society, 2001.
- [MRA02] J.E. Marsden, T. Ratiu, and R. Abraham. *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*. Springer-Verlag, 3 edition, 2002.
- [Mun00] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice-Hall, 2nd edition, 2000.
- [Olv95] P. J. Olver. *Equivalence, Invariants, and Symmetry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Ova03] G. Ovando. Invariant metrics and hamiltonian systems. *preprint arXiv:math/0301332*, 2003.
- [Pom78] J. F. Pommaret. *Systems of Partial Differential Equations and Lie pseudogroups*. Gordon and Breach, 1978.
- [RS80] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume I: Functional Analysis. Academic Press Inc., 1980.
- [RS96] D.C. Robinson and W.F. Shadwick. The Griffiths-Bryant algorithm and Dirac theory. In W.F. Shadwick, P.S. Krishnaprasad, and T.S. Ratiu, editors, *Mechanics Day*, volume 7 of *Fields Inst. Comm.*, pages 189–206. Amer. Math. Soc., 1996.
- [Rub06] I. Calvo Rubio. *Poisson sigma models on surfaces with boundary: classical and quantum aspects*. PhD thesis, Universidad de Zaragoza, Facultad de Ciencias, 2006.
- [Sau89] D. J. Saunders. *The Geometry of Jet Bundles*. Cambridge University Press, 1989.
- [Sei94] W. Seiler. *Analysis and Application of the Formal Theory of Partial Differential Equations*. PhD thesis, School of Physics and Chemistry, University of Lancaster, 1994.
- [ST95] W.M. Seiler and R.W. Tucker. Involution and constrained dynamics i: The Dirac approach. *J. Phys. A*, 28:28–4431, 1995.
- [Sun82] K. Sundermeyer. *Constrained Dynamics*. Number 169 in Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, 1982.
- [Sym80] W. Symes. Systems of toda type, inverse spectral problem and representation theory. *Inv. Math.*, 159:13–51, 1980.
- [Weh04] K. Wehrheim. *Uhlenbeck compactness*. EMS series of lectures in mathematics. European Mathematical Society, 2004.
- [YM06a] H. Yoshimura and J.E. Marsden. Dirac structures in lagrangian mechanics part i: Implicit lagrangian systems. *Journal of Geometry and Physics*, 57(1):133–156, 2006.
- [YM06b] H. Yoshimura and J.E. Marsden. Dirac structures in lagrangian mechanics part ii: Variational structures. *Journal of Geometry and Physics*, 57(1):209–250, 2006.

Índice alfabético

- Algoritmo de Gotay, Nester y Hinds
 - descripción, 90
 - en mecánica clásica, 91
 - en teorías de campo, 92
 - fallas, 105
 - teoría geométrica, 90
 - vínculos
 - clasificación parcial, 88
 - corchetes de Dirac, 89
 - de primera clase, 88
 - de segunda clase, 88
 - variedad final de vínculos, 91
 - y condiciones de integrabilidad, 120
- Bandera regular, 21
- Cartan-Kähler
 - Teorema, 20
- Cartan-Kuranishi
 - Teorema, 21
- Espacio de Banach
 - funciones diferenciables, 64
- Espacio de jets
 - cartas inducidas, 13
 - definición, 13
 - topología, 13
- Espacio de secciones
 - definición, 76
 - estructura diferenciable
 - lema ω , 68
- Espacio de velocidades, 36
- Espacios de Sobolev
 - definición, 62
 - norma, 62
 - teorema de embebimiento, 63
- Extremal
 - de un problema variacional no estándar, 41
 - definición, 27
 - definición base no compacta, 28
 - ecuaciones de Euler-lagrange, 32
 - local, 29
- Foliación compatible
 - canónica, 76
 - definición, 75
 - sistema dinámico, 77
- Forma
 - de Cartan, 44
 - semibásica, 48
- Integral
 - Elemento, 16
 - Kähler-regular, 17
 - elemento
 - espacio polar de, 17
 - Kähler-ordinario, 17
 - sección, 16
 - Subvariedad, 15
- Jet de una sección local, 12
- Lepage equivalente
 - bivariante, 45
 - canónico
 - alternativo, 47
 - definición, 44
 - hipótesis de rango constante, 44
 - principio de Hamilton-Pontryaguin, 50
 - contravariante, 45
 - covariante, 45
 - de un problema no estándar, 50
 - de un problema variacional, 43
 - para electromagnetismo, 53
 - Teorías de primer orden, 51
- Modelo sigma Poisson, 53
- Problema variacional
 - con base compacta, 23
 - ecuación de onda, 57
 - funcional a extremar, 23
 - necesidad de localización, 27
 - no estándar
 - definición, 36
 - mecánica clásica, 37
 - teorías de campo de primer orden, 38
- Prolongación
 - de una sección, 36
- Punto crítico, *véase* extremal
- Sección local, 12
- Sistema diferencial exterior
 - canónicamente asociado a una sistema de PDEs, 14
 - con condición de independencia, 16
 - con elementos no regulares, 105
 - de contacto, 31
 - secciones integrales, 31
 - de Euler-Lagrange, 33
 - de Hamilton-Cartan, 28, 50
 - Definición, 15

Capítulo 10. Índice alfabético

- Involutivo, 21
- Prolongación, 21
- Test de Cartan, 19
- Topología
 - C^∞ de Whitney, 14
 - C^k de Whitney, 14
- Vínculos y EDS
 - caracterización útil, 95
 - foliación regular, 99
 - teorema principal, 102
- Variación
 - definición, 25
 - dependiente de la extensión, 25
 - fórmula sobre variedades compactas, 26
- Variación infinitesimal
 - K -admisibles, 28
 - definición, 24
 - extensible, 24
 - permitida, 26
- Variedad reflexiva, 90