



Universidad Nacional del Sur

Tesis de Doctor en Física

DETECCIÓN DE DAÑO EN ELEMENTOS MECÁNICO-ESTRUCTURALES:

MODELADO DENTRO DE LA MECÁNICA NO LINEAL
CON
INCLUSIÓN DE CONTACTO EN LA FALLA

Fernando Salvador Buezas

Bahía Blanca

Argentina

2009

Prefacio

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Física, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito de los Departamentos de Física e Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur durante el período comprendido entre el 11 de Agosto de 2004 y el 18 de Marzo de 2009, bajo la dirección del Dr. Carlos P. Filipich y la Dra. Marta B. Rosales



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el 01/06/2009, mereciendo la calificación de 10 (Diez) Sobresaliente.

Resumen

En sistemas estructurales de importancia tales como aviones o puentes, el daño detectado y reparado a tiempo podría evitar una falla estructural catastrófica. Por tal motivo, el desarrollo de técnicas de evaluación no destructiva del estado de daño en estructuras mecánicas, aeronáuticas y civiles es un tema prioritario. En esta tesis se presenta un método no destructivo de detección de daño en elementos mecánico – estructurales. Para ello se desarrolla un modelo de deformación finita en el marco de la Mecánica del Continuo bi y tridimensional en coordenadas materiales, en el que se incluye contacto tipo Signorini y fricción de Coulomb en la interfase de la fractura. La Mecánica de Contacto, una rama de la Mecánica de Sólidos extensamente estudiada y aplicada, no ha sido, sin embargo, ampliamente destinada a problemas de detección de daño. La finalidad de esta tesis es diagnosticar la magnitud y localización de fisuras incorporando el contacto y la fricción en la misma, dentro de la simulación de la dinámica del elemento estructural. La detección se efectúa mediante la minimización de la diferencia entre los resultados experimentales y los simulados. Esta diferencia (o función objetivo) presenta muchos mínimos locales por lo que las técnicas convencionales basadas en búsqueda por métodos de gradiente son inaplicables. El método de Algoritmos Genéticos es exitosamente implementado en la minimización de la función objetivo. Se muestra que esta metodología es útil tanto para el caso dinámico como el estático obteniéndose resultados muy precisos en la detección de daño. El modelo del continuo con inclusión de contacto en la falla, que tiene en cuenta la deformación y rotación finita, es aplicable a cualquier tipo de movimiento que el elemento estructural efectúe y a cualquier tipo de forma que éste presente. Esta ventaja extiende el campo de estudio a cuerpos de forma arbitraria mientras que en la literatura está mayoritariamente restringido a vigas rectas. La robustez del método es puesta a prueba simulando errores experimentales y divergencias de la forma de la fractura entre el espécimen estudiado y el modelo de comparación.

Abstract

In structural systems of importance such as airplanes or bridges, the damage detected and repaired on time could avoid a structural catastrophic collapse. For such reason, the development of non destructive evaluation techniques of damage in mechanical, aeronautical and civil structures is a relevant matter. A non destructive method of damage detection in mechanical and structural elements is presented in this thesis. In this sense, a model of finite deformation in the frame of Continuum Mechanics in two and three dimension in material coordinates is developed, a Signorini type contact and Coulomb friction in both sides of the crack are included. Contact Mechanics is a branch of solid mechanics which has been extensively studied and applied; however, it has not been widely employed in damage detection. The goal of this thesis is to incorporate the contact in the crack zone on the simulation model in order to use these results to diagnose the damage's magnitude and location. This is made through a minimization of the difference between experimental output and simulated ones. This difference (or objective function) presents several local minima so conventional techniques based at gradient search are inapplicable. A Genetic Algorithm method is successfully implemented in the minimization of the objective function. It is shown that this methodology is useful and very precise not only for the dynamic case but also for the static one. The continuum model with the inclusion of contact in the crack, that takes into account the deformation and finite rotation, is applicable to any type of motion that the structural element undergoes and any geometry that it presents. Therefore, the field of study is extended to bodies of arbitrary form while in the literature in general it is restricted to slender beams.

A Marina

Agradecimientos

Primero quiero agradecer a mi mujer Marina por su comprensión, orgullo y apoyo durante todos estos años. También estoy agradecido con mis padres y hermanos que me apoyaron en mi formación durante mis estudios de grado y me alentaron durante el transcurso del posgrado. A mis abuelas siempre orgullosas de lo que hago.

Al personal del departamento de Física que siempre me brindo un ámbito agradable y rico en discusiones de carácter científico. Y al departamento de Ingeniería que me permitió utilizar el laboratorio de vibraciones.

Estoy y estaré en deuda con mis directores de tesis Carlos y Marta que me dieron completa libertad y me permitieron participar en discusiones muy creativas e interesantes sobre temas incluso ajenos a la temática de esta tesis, siempre con gran generosidad en equipos experimentales y computacionales, y por el apoyo intelectual y económico a la hora de financiar viajes a congresos o misiones de estudio.

Por otro lado quiero agradecer al CONICET por su apoyo económico y a la Universidad Nacional del Sur por la posibilidad de realizar mis estudios haciendo uso del material y recursos que tiene disponibles.

Índice general

1. Introducción	12
1.1. Motivación	12
1.2. Importancia del Problema	14
1.3. Alcance del Estudio	15
1.4. Objetivos:	16
1.5. Metodología	17
1.5.1. Problema directo	18
1.5.2. Problema inverso	19
1.5.3. Niveles de detección	21
1.6. Contenidos de esta tesis	22
2. Revisión de la literatura	24
2.1. Modelos técnicos y Detección vía Frecuencias Naturales	25
2.1.1. Fallas en vigas tipo Bernoulli y Timoshenko	26
2.2. Problema inverso	27
2.3. Detección vía Formas Modales	28
2.4. Métodos de actualización de parámetros	29
2.5. Contacto	31
2.6. Detección vía Algoritmos Genéticos	34
3. Detección de Fallas: Estudios Preliminares	35

3.1.	Introducción	35
3.1.1.	Problema Inverso y Series de Potencias	35
3.1.2.	Detección vía Redes Neuronales Artificiales	36
3.1.3.	Detección vía descomposición ortogonal de Karhunen-Loève	36
3.2.	Problema de vibraciones de una viga con un resorte intermedio (Teoría Técnica)	36
3.3.	El problema directo e inverso	37
3.4.	Detección de daño por Redes Neuronales	40
3.5.	Detección de daño por Descomposición Ortogonal	41
3.6.	Discusión	44
4.	Ecuaciones de movimiento	45
4.1.	Introducción	45
4.2.	Modelo bi y tri-dimensional para Deformaciones Finitas	46
4.2.1.	Ecuaciones de movimiento	46
4.2.2.	Ecuaciones constitutivas	48
4.2.3.	Amortiguamiento	49
4.2.4.	Condiciones de Borde	51
4.3.	Modelos de contacto	52
4.3.1.	Superficie real de contacto	53
4.3.2.	Contacto unilateral	54
4.3.3.	Fricción	59
4.4.	Formulación débil	61
4.4.1.	Ecuaciones de movimiento en forma débil	62
5.	Implementación computacional	64
5.1.	Sobre la convergencia de la solución	65
5.2.	Ejemplos en Mecánica de Contacto con Fricción	67
5.2.1.	El péndulo y viga rotante deformable con fricción en el pivote	67

5.2.2.	Cilindro que choca y rueda contra un cuerpo rígido	80
5.2.3.	Cilindro que choca contra un cuerpo deformable	87
5.2.4.	Esfera que choca con un rígido	90
5.3.	Dinámica de un cuerpo fisurado	94
5.4.	Forma de la fisura y condición de contacto	94
5.5.	Estudio cualitativo de la dinámica lineal y no lineal de una barra fisurada	95
6.	Problema Inverso	103
6.1.	Función objetivo	104
6.2.	Las Bases de los Algoritmos Genéticos	107
6.3.	Puesta a punto de los Algoritmos Genéticos	109
6.4.	Influencia del ruido.	115
6.5.	Fisura Difusa	118
6.6.	Detección en un arco	120
6.7.	Detección en una viga recta (Experimento físico)	121
6.8.	Detección en una hélice	126
6.9.	Discusión	129
6.10.	Detección utilizando medidas estáticas	130
6.10.1.	Distribuciones Estadísticas en la Detección	132
6.10.2.	Influencia del error experimental en la medición estática	138
7.	Conclusiones	141
7.1.	Estudio Realizado y Discusión	141
7.1.1.	Modelo de deformación finita y contacto	141
7.1.2.	Detección de Daño	145
7.2.	Conclusión	147
7.3.	Comentarios Finales	149
7.4.	Trabajo Futuro	150

A. Tensores de tensiones de Piola - Kirchhoff	166
A.1. Primer tensor de Piola - Kirchhoff	166
A.2. Segundo Tensor de Piola - kirchhoff	167
B. Materiales elásticos, hiperelásticos e hipoelásticos	169
C. Restricciones Termodinámicas. Energía Interna y Desigualdad de Clausius - Planck	173
C.1. Primer Principio de la Termodinámica	174
C.2. Segundo Principio de la Termodinámica	179
C.3. Restricciones de la Termodinámica	180
D. Otros Modelos de Fricción	184
E. Método de Galerkin, Discretización en elementos polinómicos	186
E.1. Integración temporal (Método Gear)	188
F. Funcionamiento de los Algoritmos Genéticos	190

Índice de figuras

1-1. Niveles de detección	21
3-1. Esquema de la viga y el modelo de fractura simulado por un resorte de constante k	37
3-2. Curvas de β vs k para el Caso 1	39
3-3. Esquema de la red neuronal y sus capas	40
3-4. Bases empíricas de Karhunen-Loève para una viga dañada. Primeros cuatro modos Empíricos. Las flechas indican la región dañada	43
4-1. Condiciones de borde para un péndulo. El vector tensión t es nulo para todo punto que no sea el propio p . En este punto, punto p es nulo el vector desplazamiento $u(p) = 0$	52
4-2. Esquema del contacto entre un cuerpo duro y liso (arriba) contra uno blando y áspero (abajo).	53
4-3. Esquema del contacto entre un cuerpo deformable contra un obstáculo rígido.	54
4-4. Ley de Signorini	56
4-5. Regularización del problema de Signorini	58
4-6. Ley de Fricción de Coulomb	60
4-7. Tres regularizaciones de la ley de fricción con $\varepsilon = 10^{-5}$	61
4-8. Ley de Coulomb que incluye el caso estático y dinámico	62
5-1. El péndulo y sus desplazamientos.	69

5-2. Instantáneas para el movimiento del péndulo según: a) Modelo de superposición y b) Teoría general 2d para movimientos arbitrarios	71
5-3. Energía del péndulo en Joules. Curvas (1) E , (2) T , (3) U_e y (4) U_g	72
5-4. Coordenada x de la punta de la viga rotante para la primera centésima de segundo TENL: Teoría de elasticidad no lineal. MS: Modelo de Resistencia de Materiales vía principio de Hamilton	73
5-5. Variación de las primeras cinco frecuencias en función de ω . - - Teoría de la Elasticidad no lineal referencia lagrangeana. -Teoría de Resistencia de Materiales vía Hamilton.	74
5-6. Secuencia del movimiento de rotación para la viga 3D	74
5-7. Esquema de las condiciones de borde para el péndulo con fricción en el pivote	75
5-8. a) Coordenadas x e y del punto C (eje) en el tiempo. b) Trayectorias del punto B (extremo libre del péndulo).	76
5-9. Valores y direcciones de tensiones Piola – Kirchoff en una región cercana a la junta para $t = 1$ s con $k = \frac{1000}{m} E$	77
5-10. Influencia de la fricción en el eje a) variación temporal de la coordenada x del punto C, $a_1 = 0.1$ y $a_5 = 1$. b) Relación (Fuerza de fricción)/(Fuerza normal) en el punto A vs. Tiempo. $a_5 = 1$	79
5-11. Energía (en kJ) en función del tiempo para a) movimiento sin fricción, b) movimiento con fricción ($a_5 = 1$ y $k = \frac{1000}{m} E$)	79
5-12. Esquema del disco plano que rebota contra una superficie lisa.	81
5-13. Colisión contra el obstáculo rígido para distintos instantes de tiempo.	82
5-14. a) Fuerzas de contacto: Fuerza normal. b) Fuerzas de contacto. Fuerza tangencial (de fricción)	82
5-15. Energías del disco en función del tiempo durante el choque contra el sólido rígido.	83

5-16. Tiempo que permanece en contacto el disco con el rígido en función de la velocidad inicial.	84
5-17. Ángulo de rebote en función del ángulo de incidencia para distintos coeficientes de fricción dados por el parámetro de fricción a	85
5-18. Comparación de la fuerza de contacto durante el impacto del disco entre las constitutivas tipo St Venant Kirchoff y Neo Hookean. a) Velocidad de incidencia del disco: 1 m/s . b) Velocidad de incidencia del disco: 10 m/s	86
5-19. Tiempo que permanece en contacto el disco con el rígido en función de la velocidad inicial cuando el material está gobernado por la ley (4.11)	87
5-20. Instantánea del impacto entre los dos cuerpos deformables. A la izquierda se detalla la configuración deformada. A la derecha se detalla el estado tensional de los dos cuerpos según el versor normal n_y es decir $\mathbf{t}^{(n_y)} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}_y$	89
5-21. Impacto entre dos cuerpos deformables. Izquierda: fuerza correspondiente al disco impresa por el rectángulo (azul), reacción de dicha fuerza, es decir la fuerza sobre el rectángulo producida por el disco (rojo). Derecha: Tensión de Piola - Kirchoff en el cuerpo grande producida por el disco.	90
5-22. Variaciones de energía entre los dos cuerpos que impactan. a) Disco solo. b) Disco más rectángulo	91
5-23. Instantánea del choque entre una esfera tridimensional contra un rígido	91
5-24. Gráficos de energía y fuerza en función del tiempo para la esfera. A la izquierda se grafican las energías en Joules. A la derecha la fuerza de contacto en Newton	92
5-25. Comparación de las aceleraciones de los centros de masa para los discos con sus dos modelos constitutivos y la esfera 3D.	93
5-26. Esquema de la viga fallada	94
5-27. Los dos tipos de modelos para la fisura	95
5-28. Primeros 4 modos normales solución de las ecuaciones de Navier	96

5-29. Movimiento oscilatorio transversal de la barra empotrada libre en cuatro puntos	97
5-30. Logaritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) para la barra (lineal)	98
5-31. Logaritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) para la barra no lineal	99
5-32. Comparativa del espectro para grandes y pequeñas deformaciones de la misma viga no lineal. Se puede observar una multitud de nuevas frecuencias.	99
5-33. Dependencia Funcional de las primeras cuatro frecuencias naturales con la posición y profundidad de la fractura para una viga empotrada libre (sin contacto y sin fricción).	100
5-34. Espectro de la viga fracturada con fisura en forma de cuña y con contacto entre las fases de fisura.	101
5-35. Distancia entre los vértices superiores de la fractura en función del tiempo	102
6-1. Esquema del setup experimental para la detección de la falla en una estructura tipo viga	105
6-2. Fotografía del ensamble experimental con dos acelerómetros	106
6-3. Logaritmo de la función objetivo. A primera vista parece una función suave y diferenciable	107
6-4. Aglomeración de mínimos y máximos de la función objetivo d sobre la curva del canal mínimo	108
6-5. Algoritmo de detección de daño vía series temporales optimizadas por algoritmos genéticos	108
6-6. Influencia de la ventana de tiempo sobre la función objetivo d	111
6-7. Error promedio en la detección de la falla como una función de la cantidad de individuos en la población del AG	114
6-8. Error promedio en la detección del daño en función del tiempo de simulacion	115
6-9. Evolución de los Algoritmos Genéticos calculado por MatLab para un escenario de fractura con posición en $x_c = 0.9 m$ y profundidad $h_c = 0.2 m$	116

6-10. Desplazamiento transversal del ultimo "sensor" de la barra con distintas magnitudes de ruido.	117
6-11. Desplazamiento en $x = L/5$ con distintas magnitudes de ruido	117
6-12. Comparación entre una fractura real y dos modelos propuestos para la detección	119
6-13. Esquema de la fractura difusa	119
6-14. Arco plano fisurado	121
6-15. Aceleración en los dos x_1 y x_2 puntos para la barra sana. Experimento físico	124
6-16. Aceleración en los dos x_1 y x_2 puntos para la barra sana. Simulación Computacional	124
6-17. Esquema de la barra de aluminio fracturada de aluminio	125
6-18. Forma del contorno de la hélice. Construcción a partir de un spline de tercer grado	126
6-19. Esquema de la hélice 3d	128
6-20. Esquema del modelo de daño para la hélice del segundo caso	128
6-21. Esquema de la barra dañada <i>a)</i> distancia entre las dos caras de la fractura. <i>b)</i> tensión de contacto en la fractura. La variable s indica la longitud del segmento que va desde 1 a 2 en la fractura	131
6-22. Función $\log(d)$. Puede observarse un gran número de mínimos locales. . .	132
6-23. Error en función del número de sensores	133
6-24. Distribución de los errores porcentuales para una población de 40 individuos en la técnica de AG	134
6-25. Distribución de los errores porcentuales para una población de 60 individuos en la técnica de AG	134
6-26. Distribución de los errores porcentuales para una población de 80 individuos en la técnica de AG	135
6-27. Distribución de los errores porcentuales para una población de 100 individuos en la técnica de AG	135

6-28. Distribución de los errores porcentuales para una población de 120 individuos en la técnica de AG	136
6-29. Distribución de Weibull para el error de detección con una población de 60 individuos	137
6-30. Error promedio en la detección de la falla vía experimento estático, como una función de la cantidad de individuos en la población del AG	138
6-31. Error medio en la detección como una función del error experimental	139
D-1. Relaciones esquemáticas de las variantes a la ley de Coulomb	185
E-1. Forma de las celdas elementales y posición de los nodos para las aproximaciones de 1, 2 o 3 dimensiones	187

Índice de tablas

3.1. Detección de fractura vía series de potencias	40
3.2. Detección experimental de daño para una viga mediante Redes Neuronales	41
5.1. Frecuencias para la viga sana	96
6.1. Variación de la población con una ventana temporal de $t = 0.25s$	110
6.2. Variación de la población con una ventana temporal de $t = 0.1s$	111
6.3. Variación del parámetro de mutación r	112
6.4. Diferentes escenarios o casos de localización y magnitud del daño ha ser estudiados	112
6.5. Dependencia de los errores porcentuales con la población	113
6.6. Dependencia de los errores porcentuales en la detección con el tamaño de la ventana temporal	114
6.7. Error en la detección como función del error experimental	118
6.8. Resultados y errores para la detección en el caso de fractura tipo difusa .	120
6.9. Resultados y errores para la detección de daño en un arco	122
6.10. Escenarios de daño para el experimento físico	125
6.11. Escenarios de daño para la hélice	127
6.12. Resultados de detección para la hélice giratoria	127

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

A lo largo de los últimos años se ha realizado un gran esfuerzo en el problema de detección de daño en mecánica, aeronáutica y en estructuras civiles. En sistemas estructurales de importancia tales como aviones o puentes, el daño detectado y reparado a tiempo podría evitar una falla estructural catastrófica. Por tal motivo, el desarrollo de técnicas de evaluación no destructiva del estado de daño en estructuras mecánicas, aeronáuticas y civiles ha sido un tema prioritario de investigación.

Entre las técnicas usuales de estudios no destructivos pueden mencionarse, la emisión acústica, rayos X, etc. [1]. Estas técnicas acarrear algunas desventajas: Primero, la estructura, pieza mecánica o herramienta sujeto de estudio tiene que ser desmontada, lo que demanda grandes costos y tiempos muertos y no siempre es posible. Segundo, el estudio de inspección y diagnóstico tiene que ser orientado a la posición donde se encuentra la posible rotura. Tercero, la posición de la fisura puede ser físicamente inaccesible. Cuarto, una vez localizada la falla no mucho más se podrá decir de ésta y cuanto más detalle se pretenda obtener del tipo o magnitud de daño se tendrían que implementar más cantidad de dispositivos de medición y de mayor complejidad tecnológica. Carneiro [2] identifica a estas técnicas como *métodos sin modelo* ya que no se contrastan los resultados exper-

imentales con modelos pre existentes que formen parte del algoritmo de diagnóstico de daño. Los *métodos sin modelo* (medición directa) poseen, sin embargo algunas ventajas, a saber: no existen ni tiempos computacionales ni divergencias con los modelos.

Lo dicho motiva el desarrollo de nuevas herramientas de diagnóstico no destructivo que puedan ser utilizadas en piezas o estructuras en modo operativo o en servicio.

Un enfoque muy atractivo es el método basado en el análisis de las vibraciones mecánicas. Estas técnicas se basan en la observación de cambios que el daño provoca en las propiedades estructurales de rigidez, amortiguamiento y eventualmente inercia, con respecto a iguales características de la estructura no dañada. En consecuencia es posible, mediante la medición de parámetros dinámicos, registrar una alteración que puede ser correlacionada con algún daño. Sin embargo, en la literatura, los estudios sobre detección de daño están mayoritariamente restringidos a vigas rectas, modelando a la fisura como siempre abierta o en algunos de los casos proponiendo sistemas bi lineales en donde la falla está o completamente abierta o completamente cerrada (casos muy elementales y poco realistas). Los autores de esos trabajos argumentan que la excesiva simplicidad de sus modelos está justificada por el insuficiente poder de cómputo disponible ya que en general el diagnóstico de daño demanda múltiples ejecuciones del mismo modelo para escenarios de daño diferente. El autor de esta tesis, también ha trabajado, junto con los miembros del grupo al que pertenece, en modelos técnicos de detección de daño vía problema inverso en los que la fisura era considerada siempre abierta. Estos modelos muy sencillos y lineales tienen la ventaja de ser resueltos con poco poder de cómputo y la desventaja de no poder ser implementados a cuerpos de geometrías arbitrarias y en movimientos complejos en los que la propia fisura podría cerrarse.

Por otro lado existe una teoría muy completa y avanzada sobre el contacto de los cuerpos elásticos (rama de la Mecánica de Sólidos). Dichos modelos de contacto están en general desarrollados para el caso de cuerpos que sufren desplazamientos, rotaciones y deformaciones pequeñas y por lo general se usan para estudiar contacto entre un cuerpo deformable y uno rígido así como entre dos o más cuerpos deformables en forma normal

o tangencial entre los dos cuerpos que interactúan con eventuales fuerzas de fricción, efectos dinámicos e impacto. Sin embargo estos modelos complejos de contacto no han sido excesivamente implementados para detección de daño aunque sí para simular la dinámica de estructuras dañadas.

El avance constante de la computación y el significativo progreso de la Mecánica Computacional ha permitido implementar técnicas de búsqueda de daño utilizando modelos sofisticados y complejos. Esto abre nuevas posibilidades, como por ejemplo incluir la teoría de la Mecánica de Contacto a la detección de fallas. Ésta y otras ideas similares serán exploradas en esta tesis.

El autor de esta tesis se interesó en problemas de mecánica de contacto de cuerpos elásticos porque la formulación matemática parece tener incongruencias en las condiciones de borde a imponer. Esto es: tanto la región de contacto como la distribución misma de las tensiones es incógnita del problema cuando la resolución de las ecuaciones diferenciales de movimiento demandan ese dato en dichas condiciones en la frontera. La posibilidad de incorporar la teoría de contacto en el modelado de la fisura que al deformarse podría cerrarse en forma total o parcial dependiendo de las solicitaciones externas aplicadas al cuerpo, aumentó aún más el interés del autor en este problema.

1.2. Importancia del Problema

A partir de la lectura de algún parámetro dinámico (como la aceleración, velocidad o deformación) es posible diagnosticar si un elemento estructural está sano o no. La idea básica es reconstruir la solución de un problema de movimiento a partir de aquella información teniendo en cuenta en el modelo la posición y morfología de la zona dañada. Generalmente se llama a este tipo de problema de resolución inversa ya que de un experimento se podrá adquirir información de la solución pero no la causa que lo provoca. Son éstas las técnicas que Carneiro [2] identifica como *métodos con modelo* ya que los resultados experimentales se comparan con modelos computacionales que forman parte

del algoritmo de detección de daño.

Las ventajas son la reducción de los requerimientos experimentales, la capacidad de ajuste de parámetros y la capacidad de diseño del tipo de sensores y sus óptimas ubicaciones y en general, no requieren de la modificación de las instalaciones. Gracias al desarrollo de las computadoras modernas en cuanto a su capacidad y velocidad de cálculo, el diagnóstico puede ser automático, supervisando noche y día la integridad estructural del elemento que se quiera inspeccionar como, por ejemplo, en elementos como hélices de molinos de generación de energía, columnas de perforación de petróleo, motores, aeronaves, etc. Precisamente la industria aeronáutica, pionera en este campo, implementó una generación de aeronaves que tienen incorporado un sistema de diagnóstico de la salud estructural en tiempo real, provocando una gran merma en los costos operacionales ya que se minimizaron los períodos de control en tierra, extendiendo la vida útil del diseño original.

1.3. Alcance del Estudio

La aplicación concreta y estudio de esta tesis pertenece a la detección de daño en elementos estructurales. Donde se tiene en cuenta el contacto unilateral (o de desigualdad) en la zona de la fisura responsable de la no suavidad y una parte de la no linealidad de la mecánica. Las ecuaciones de movimiento son planteadas en forma *lagrangiana* para deformaciones finitas proponiéndose ecuaciones constitutivas de tipo hiperelásticas y visco elásticas para el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff. A partir de la Termodinámica de medios continuos, se realiza un estudio sobre las formas funcionales admisibles que las ecuaciones constitutivas pueden adquirir. El problema inverso de detección de daño, es resuelto planteándolo como un problema de optimización empleando la técnica de Algoritmos Genéticos.

El enfoque de esta tesis es esencialmente teórico y numérico pero se realizan experimentos físicos con el objeto de validar la implementación del método a casos reales.

El tipo de elementos estructurales que puede analizarse es bastante general ya que se implementan modelos 2D y 3D en elementos finitos. En particular en esta tesis se muestran ejemplos de aplicación en vigas rectas, arcos y hélices en movimientos rotatorios, donde el daño se simula como una fisura superficial, transversal a la superficie del elemento.

1.4. Objetivos:

El propósito de esta Tesis es el estudio de una clase particular del problema inverso perteneciente a la Mecánica del Continuo. En concreto se pretende estudiar la factibilidad de detectar daño en estructuras en situaciones de operatividad. Esto es, detectar si una estructura esta dañada a través de mediciones indirectas no destructivas de su estado de deformación o movimiento cuando la pieza mecánica está en régimen operativo.

Para poder concretar estos objetivos principales se plantearan objetivos secundarios que consistirán en:

Construcción de un modelo matemático que cumpla las leyes de la Mecánica de los Medios Continuos para una clase de sólidos elásticos e hiperelásticos. Esto es, balances de masa, momento lineal y angular así como, consistencia termodinámica en las ecuaciones constitutivas.

Reformular del problema a la forma material o *lagrangeana*.

Extender del problema de contacto a dos o más cuerpos flexibles que interactúen.

Estudiar la influencia de la fricción en distintos casos de contacto unilateral.

Estimar la capacidad de estos modelos para simular inestabilidad del tipo stick and slip (alternancia entre fricción estática y dinámica) y vibro impacto en sistemas multicuerpos independientes al estudio de daño.

Formular el problema a optimizar y construir un algoritmo de búsqueda de daño.

Estudiar la influencia de los distintos parámetros del método evolutivo (Algoritmos Genéticos).

Estudiar la robustez del método de detección frente a incertezas en el modelo y errores experimentales.

1.5. Metodología

En la dinámica clásica de partículas o cuerpos rígidos se distinguen dos tipos de problemas generales:

Problema directo: Partiendo de las fuerzas dadas que actúan sobre un sistema de masas en las que se conocen las restricciones de posición y velocidad en un instante determinado, se requiere hallar el movimiento del sistema, es decir, la posición, la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo.

Problema inverso: Partiendo del movimiento conocido de un sistema (posición y velocidad), se requiere hallar un posible conjunto de fuerzas que produciría tales movimientos.

La generalización de problemas directo e inverso en Mecánica del Continuo podría ser el siguiente:

Problema directo: Partiendo de *la forma del contorno*, las *fuerzas de cuerpo en el seno del mismo* y las *tensiones en el borde* en un instante determinado, se requiere hallar el movimiento del sistema es decir, la posición, la velocidad y la aceleración de *cada punto del cuerpo* como funciones del tiempo. Éste es el problema que generalmente se presenta en los libros de texto (al igual que el problema directo en mecánica de partículas y cuerpos rígidos).

Problema inverso: Partiendo del movimiento de *cada punto del cuerpo continuo* (posición y velocidad) en un instante dado, se requiere hallar un posible conjunto de *fuerzas de cuerpo, forma del contorno y tensiones sobre éste* que produciría tales movimientos.

En el problema inverso para el caso de cuerpos deformables (Mecánica del Continuo) es necesario conocer el movimiento en cada punto del cuerpo. Disponer de esta información

en la práctica es imposible, ya que a lo sumo se podrá medir el movimiento en algunos puntos.

En el problema inverso, la forma del contorno es una de las incógnitas, es por ello que la detección de fisura se materializa a través de un modelo del continuo en referencia puramente *lagrangiana* para deformaciones y rotaciones finitas que tiene en cuenta la fisura. El esquema matemático que consta de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, altamente complejas y no lineales junto con sus condiciones de borde no menos complicadas, se resuelve numéricamente con el programa de propósito general FlexPDE que discretiza aquellas ecuaciones diferenciales en elementos finitos. Luego el problema inverso se trata como un problema de minimización de una función objetivo que evaluará la diferencia de algunos parámetros de la solución del modelo (como la posición o aceleración en algunos puntos del cuerpo) con una medición experimental del modelo físico del que se pretende diagnosticar el daño.

Para ello se implementan Algoritmos Genéticos en el entorno del programa matemático MATLAB haciéndolo interactuar con FlexPDE. Se estudian distintas alternativas de los parámetros evolutivos y la sensibilidad del algoritmo de detección con el intervalo de tiempo empleado para construir la función objetivo. La robustez del método se pone a prueba cuando exista alguna divergencia entre el modelo computacional propuesto para detección y el eventual modelo físico.

1.5.1. Problema directo

La mecánica de problemas no suaves (ver [3]) trata sobre casos en donde las ecuaciones constitutivas o las condiciones de borde contienen algún elemento descrito matemáticamente por desigualdades o inecuaciones, también conocidos en la Mecánica Analítica como restricciones no holónomas (ver [4]). Un ejemplo de esto es el contacto unilateral, donde la tensión de contacto tendrá que ser del tipo compresivo o cero, la correspondiente separación tendrá que ser positiva (si los cuerpos están separados) o cero (si se están tocando) y al mismo tiempo sólo una de estas dos cantidades tendrá que ser nula

(ver [5]). Más aún, todo esto para cada punto del contorno de cada uno de los cuerpos

Este tipo de problemas “no suaves o no holónomos”, impulsa en este contexto, la idea de discontinuidad en el propio modelo, exigiendo la activación o desactivación de varias funciones “suaves”. Formulaciones rigurosas de la Mecánica Impulsiva, contacto y problemas de inecuaciones en mecánica son tratados por ejemplo en [3, 5–9].

En esta tesis la solución del problema directo de estructuras dañadas, se usará una única técnica (resolución del problema diferencial), ya sea para el caso dinámico como para el caso estático. Esta técnica esta basada en regularizar el problema de contacto empleando un sistema equivalente de ecuaciones de borde a través de funciones continuas de penalización.

1.5.2. Problema inverso

El problema inverso en Mecánica del Continuo, en particular en la mecánica de problemas no suaves, es formulado en esta tesis como un problema de mínimos cuadrados de la diferencia entre la solución del problema directo con el problema propuesto. Por ejemplo en el caso de detección de fisura se dispone de la solución de un caso en el que se desconocen las causas que lo generan (posición y morfología de la fisura); éste es el caso incógnita (CI). Luego se propone la posición y profundidad de la fisura en numerosas ubicaciones: Estos son los casos de prueba (CP). Se resuelve el problema directo para cada uno de los casos y se comparan estas soluciones con la correspondiente al CI. Es claro que no se podrán resolver y evaluar los cuadrados para todos los casos en forma manual.

En este esquema, se resuelve el problema inverso en dos niveles computacionales como se describe en [3]. El nivel alto consiste en la minimización del error cuadrático o cuadrados mínimos, que es la parte del algoritmo donde se resuelve el problema inverso y el nivel bajo en la solución del problema mecánico directo. Sobre estudios del problema de diseño óptimo en estructuras unilaterales, puede consultarse [10] y en problemas de identificación en estructuras elastoplásticas, [11] y [12].

En esta Tesis se presentan desarrollos en los dos campos, esto es en el método directo e inverso. En el directo se presenta un modelo basado en la mecánica de cuerpos elásticos y visco elásticos con contacto y fricción en la fisura. La construcción teórica del sistema diferencial está planteada en forma consistente con la teoría de Coleman y Mizel (1964) [13] y la Mecánica del Continuo de Truesdell [14–16] con la diferencia que los desarrollos son en forma material o *lagrangiana* (ver [17]).

Como se dijo antes, la forma más común de resolver problemas inversos es a través de cuadrados mínimos [20]. Una función de costo o función objetivo es definida a partir de los datos medidos (CI) y los calculados (CP). Luego los parámetros del daño son los que correspondan a la minimización de aquella función de costo. Generalmente se utilizan métodos de minimización basados en búsqueda vía gradientes, esto es, bajo el supuesto que la función de costo es diferenciable, se busca el punto donde el gradiente de la misma es nulo. Estas técnicas presentan dos inconvenientes: Primero, la función objetivo tiene que poseer propiedades de suavidad y diferenciability y segundo, se tiene que disponer de un valor inicial próximo (semilla) a la solución donde a partir de éste el método empieza, mediante un proceso iterativo, a buscar la solución. Lamentablemente la función de costo, en estos problemas inversos de la mecánica no suave, no cumple ninguna de las propiedades exigidas para aplicar métodos basados en búsqueda por gradiente (ver [21]). Además no siempre se dispone de un conjunto inicial de valores para la semilla.

La técnica de Algoritmos Genéticos atribuida a Holland en 1975 [22] imita la reproducción sexual de las especies vivas y el supuesto evolutivo que afirma que el más apto tendrá más posibilidades de pasar su información genética a la próxima generación. Esto es llevado adelante mediante la idea de tratar a cada CP como un individuo y al valor de la función objetivo como indicador de qué tan apto genéticamente es ese individuo. El algoritmo no requiere en ninguna etapa la evaluación de derivadas y como el cálculo de la función objetivo es independiente para cada CP es fácilmente adaptable a la computación en paralelo. Este algoritmo es relativamente nuevo [23] y se ha implementado en forma exitosa para la detección de mínimos globales cuando no se dispone de una semilla y la

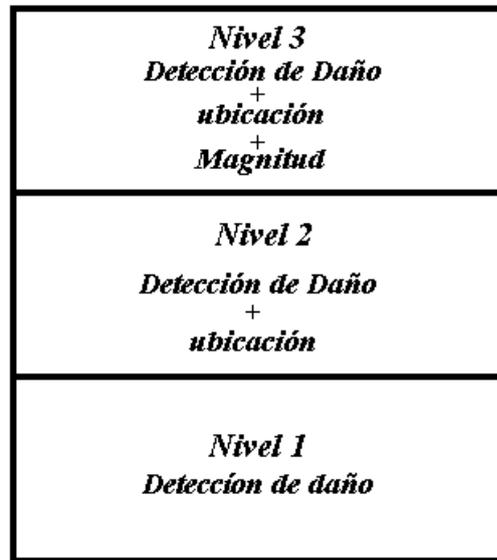


Figura 1-1: Niveles de detección

función a optimizar presenta gran número de mínimos locales. En 1989, Goldberg, uno de los alumnos de Holland, publicó [23–25] una recopilación organizada de la teoría y de sus aplicaciones. El método ganó popularidad en la comunidad de los investigadores en optimización a finales de los 80s y principios de los 90s, Bick y Schwefel (1993) [26]. El libro de Michalewicz [27] discute los distintos tipos de algoritmos evolutivos y detalles de su programación.

1.5.3. Niveles de detección

El problema de detección puede ser clasificado en diferentes niveles dependiendo de las bondades de la técnica o de las dificultades del problema específico, ya sea por la forma del cuerpo o por el tipo de material involucrado. Rytter 1993 [28] propone la siguiente clasificación. Se dice que un método alcanza el *nivel 1* si sólo es capaz de identificar la existencia del daño; *de nivel 2* si además puede determinar la ubicación de la fisura; y *de nivel 3* si además puede estimar la magnitud del daño (ver Figura 1-1). Incluso Rytter [28] define un *nivel 4* si el método tiene la capacidad de predecir la vida útil que

le resta a la pieza o estructura. Se dice que este último nivel no forma parte de la misma técnica de detección ya que la predicción sobre la vida útil restante de un determinado elemento forma parte de la Mecánica de fisura.

1.6. Contenidos de esta tesis

Esta tesis está compuesta por siete capítulos y varios apéndices.

En el Capítulo 2 se hace una revisión de la literatura correspondiente a las técnicas de identificación de daño publicadas en los últimos 30 años y a los métodos y teorías de la Mecánica de Contacto. Estos dos tópicos se encuentran estudiados en formas separadas ya que no se los ha utilizado frecuentemente juntos. Esto es: no se ha incluido la Mecánica de Contacto tipo Signorini en la formulación del problema de detección de daño. El capítulo culmina con antecedentes sobre la implementación de algoritmos genéticos en detección de daño.

En el Capítulo 3 Se presentan tres técnicas de detección muy simples para sistemas lineales dando lugar a los estudios más sofisticados donde se incluye el contacto, rotaciones y deformaciones finitas.

El Capítulo 4 trata los fundamentos y justificaciones de una descripción lagrangiana de la Mecánica del Continuo elástico y viscoelástico. Se presentan dos ecuaciones constitutivas para cuerpos hiperelásticos y se desarrolla una teoría que limita la forma funcional y justifica un caso muy simple de disipación interna (constitutiva viscoelástica) a partir de la Termodinámica del Continuo en referencia lagrangiana. Los modelos de contacto unilateral o no holónimo junto con modelos de fricción y su regularización son presentados también en este capítulo que culmina con la presentación de las ecuaciones de movimiento, sus condiciones iniciales y de contorno en forma débil.

El Capítulo 5 se presentan varios ejemplos de la implementación computacional para problemas diversos de deformaciones finitas, grandes rotaciones, contacto y fricción. Se exhiben estudios cuantitativos sobre el tiempo de contacto, balances energéticos y fuerzas

de interacción en un impacto entre un disco y un rígido en forma oblicua y normal así como entre un disco y un semi espacio flexible o una esfera tridimensional que impacta en forma normal contra un semi espacio rígido. También se estudia el movimiento de un péndulo con grandes deformaciones y fricción en el pivote contrastándolo con otras teorías técnicas. El capítulo termina con estudios cualitativos de la dinámica lineal y no lineal de una viga fisurada con inclusión del fenómeno de contacto cuando la misma se cierra.

En el Capítulo 6 se trata la implementación específica de los modelos anteriores a la dinámica de vigas fisuradas con contacto en la zona de daño. El breve estudio cualitativo del final del Capítulo 5 de las complicadas vibraciones no lineales introduce a las técnicas de optimización para detectar daño (problema inverso). Se explica en que consisten los algoritmos genéticos y como se implementan para resolver el problema inverso tanto en vigas como en cuerpos de otras formas como arcos o hélices giratorias mostrándose las virtudes de la formulación general no lineal del continuo. Se realizan estudios estadísticos sobre detección donde se estudia la influencia del error experimental y la capacidad de detección cuando el modelado no sea exactamente igual a los fenómenos que pretende simular. Dichos estudios estadísticos son llevados a cabo en experimentos simulados de detección en situaciones estáticas y dinámicas. También se estudia la influencia del número de sensores en la calidad de la detección. Un experimento para varios escenarios de daño demuestra el éxito de esta técnica en el diagnóstico de elementos dañados reales. En este experimento, se utiliza la teoría antes desarrollada para materiales visco elásticos.

En el Capítulo 7 se presentan las conclusiones de la tesis donde se exponen los beneficios y falencias de una teoría completa de la elasto y visco elasticidad con contacto aplicada a la detección de fallas y la robustez del método a ruido experimental o divergencias entre el modelo físico y el computacional. Una lista de posibles estudios futuros concluye el capítulo.

Capítulo 2

Revisión de la literatura

El problema de la detección de daño ha sido formulado en mayor frecuencia para el caso de estructuras tipo vigas o placas utilizándose las teorías técnicas de resistencia de materiales. Carneiro [2] señala que todos los modelos computacionales de detección de daño se pueden incluir en tres familias. A saber “difusos”, localizados o del continuo. En los primeros (ver [29] y [30]) se proponen modelos variacionales, que desembocan en modelos de elementos finitos, que tienen en cuenta a la fisura como una región debilitada de la estructura (generalmente vigas). En la segunda familia, los modelos proponen fragmentar la estructura en dos o más partes y unir las por elementos tipo resortes que simulan la localización de la falla. Las propiedades mecánicas de dicho resorte son derivadas de consideraciones energéticas o dadas por otras teorías como la Mecánica de Fractura dependiendo de la magnitud del daño. En 1944 Kirmser [31] propone remplazar un sistema de esfuerzos equivalentes en la región de la falla. La última familia, la correspondiente a modelos del continuo (ver en [32–34]), es la más moderna y modela a la fisura como una disminución de la sección.

Estos modelos simplificados de la estructura dañada tienen la ventaja de presentar un bajo costo computacional y un planteo sencillo del problema, y la desventaja de no poder incluir formas estructurales más generales o arbitrarias y efectos más complejos como es el contacto de la fisura cuando ésta se cierra.

Estas son desventajas que limitan la aplicación a problemas muy particulares de la detección de daño y es éste el principal motivo junto con la potencia moderna de computo, que impulsa el planteo de las ecuaciones completas de la teoría de Medios Continuos (ver Truesdell y Noll [14], Truesdell y Toupin [16, 35], Wang y Truesdell [36], Eringen [37], Mase [38], Lai y Rubbin [39] o Gurtin [40]).

Una gran ventaja de la teoría de Medios Continuos es la rigurosidad, generalidad y consistencia en los conceptos físicos utilizados. Es por ello que es posible un estudio riguroso en la deducción de las ecuaciones de movimiento y en la forma funcional de las ecuaciones constitutivas.

En esta tesis el modelo se plantea en coordenadas *lagrangianas* o materiales y para ello se transforman todos los sistemas de ecuaciones al volumen del cuerpo indeformado (detalles de estas transformaciones en [17, 39, 40]), incluso las ecuaciones de energía y segundo principio de la Termodinámica [15, 17]. Esto presenta ciertas ventajas en el modelo de contacto y en la utilización de la conservación de la energía como diagnóstico en la calidad de la solución numérica.

2.1. Modelos técnicos y Detección vía Frecuencias Naturales

Según el artículo de revisión de Doebling [41] Los primeros trabajos de detección de daño datan de 1969 y 1970, Lifshitz, Roten y Dimarigona [42], tratan sobre problemas en la industria petrolera y sobre maquinaria de generación de energía. En estos trabajos se utilizan las frecuencias naturales como información para detectar daño, específicamente el corrimiento de las frecuencias naturales. Con el paso de los años se implementaron modelos más complejos y a principios de los 80 se migró de las técnicas de cambio de frecuencias a las de variación de las formas modales como indicadores potenciales de daño. Sin embargo el método del cambio en frecuencias es el más estudiado y publicado. Un excelente resumen de técnicas y métodos basados únicamente en el corrimiento de

frecuencias naturales es condensado en Salawu [43]. En 1978 Adams y otros. [44] y un año después Cawley y Adams [45] sistematizaron la búsqueda de daño en materiales compuestos aunque sólo consiguen llegar al nivel 1 de detección. Comenzaron el análisis con la proporción entre los cambios de frecuencia para dos modos vibratorios diferentes. Una tabla de posibles posiciones de daño es considerada, y un término de error es definido al comparar estos cambios con un modelo que tiene en cuenta el cambio local de rigidez (debido a la fisura). El valor de la tabla que minimice el error es la ubicación buscada. Friswell, y otros. (1994) [46] extiende la idea de Cawley y Adams [45] haciendo un análisis estadístico. Juneja, y otros. (1997) [47] presentan una técnica llamada maximización de contraste donde la idea es compatibilizar la respuesta de la estructura dañada con una base de datos. También desarrollan una medida predictiva de la detectabilidad del daño. Gudmundson, (1982) [48], Tracy y Pardoen, (1989) [49], y Penny, y otros. (1993) [50] presentan otros avances para el método predictivo. Dicho método predictivo, que usualmente cae en el nivel 1 de identificación de daño, consiste en calcular cambios de la frecuencia para un tipo de daño conocido. Generalmente, el daño es modelado matemáticamente, y luego para determinar la integridad estructural, las frecuencias detectadas son comparadas con las frecuencias calculadas. Este método fue usado extensamente por los investigadores de industria petrolera previamente mencionados.

2.1.1. Fallas en vigas tipo Bernoulli y Timoshenko

Los primeros modelos del continuo propuestos que incluían daño fueron publicados por Christides y Barr en vigas tipo Euler-Bernoulli [32]. La idea básica era deducir un sistema diferencial ordinario de viga dañada a partir de principios variacionales para la discretización en elementos finitos tipo método Hu-Washizu-Barr [34, 51]. La deducción variacional hace posible incluir los efectos de disminución de rigidez en el entorno de la fisura como una función de la posición y profundidad. Estudios sobre la precisión en el método de detección a partir de las formas modales concluyen el resultado evidente que a mayor número de modos utilizados mejor el grado de precisión en la detección [52]. Esto

último tiene una desventaja ya que al utilizar modos normales de altas frecuencias la teoría de Euler-Bernoulli diverge de los resultados experimentales lo que motiva modelos un poco más complejos como vigas tipo Timoshenko como concluyen Christides y Barr [32] y Shen y otros [53] [54].

2.2. Problema inverso

El problema inverso, que típicamente llega a Nivel 2 de identificación daño, consiste en calcular los parámetros de daño, esto es, posición, profundidad o ambos en la fisura como una función de los cambios de frecuencias naturales.

Stubbs y Osegueda (1990) [55, 56] desarrollaron un método de detección de daño usando la sensibilidad de cambios de frecuencia modales que se basa en trabajo de Cawley y Adams (1979) [45]. En este método, una función de error para cada modo y cada elemento estructural es computada asumiendo que un único elemento está dañado. El elemento que minimiza este error es el miembro dañado. Los autores señalaron que este método de sensibilidad de cambio de frecuencia reposa en matrices de sensibilidad que son computadas aparte usando Elementos Finitos. Este requisito eleva el costo computacional incrementando la dependencia en la precisión del modelo numérico anterior. Para vencer este inconveniente, Stubbs, y otros. (1992) [57] desarrollaron un método de indexación de daño. Morassi (1997) [58] presentó un método inverso para localizar daño tipo muescas en pórticos de acero a través del cambio en las frecuencias modales. Este estudio enfoca principalmente la atención en la exactitud de la configuración estructural sana referenciando cada frecuencia medida con la calculada.

Otros ejemplos de métodos inversos para los corrimientos de frecuencias modales como indicaciones de daño se replantean en Adams, y otros. (1979) [44], Wang y Zhang (1987) [59], Stubbs, y otros. (1990) [60], Hearn y Testa (1991) [61], Richardson y Mannan (1992) [62], Narkis (1994) [63], Brincker, y otros. (1995) [64], Skjaerbaek, y otros. (1996) [65], Al-Qaisia y Meneghetti (1997) [66] y Villemure, y otros. (1996) [67].

2.3. Detección vía Formas Modales

West (1984) [68] presenta lo que es posiblemente el primer uso sistemático de la forma modal para detectar la posición de daño estructural sin uso de un modelo de elementos finitos (según Carneiro [2] entraría en la categoría de detección sin modelo). El autor usa criterios de correlación entre los modos de vibración de un alerón intacto del Orbitador Espacial (Orbiter Space Shuttle) antes y después de que ha estado expuesta a carga acústica para localizar el daño estructural. Mayes (1992) [69] presenta un método para la localización del error del modelo basado en cambios de las formas modales conocido como STRECH (structural translational y rotational error checking). STRECH puede ser aplicado para comparar los resultados de una prueba con un modelo de elementos finitos o comparar los resultados de dos pruebas. Ratcliffe (1997) [70] presenta una técnica para localizar daño en una viga que usa una aproximación en diferencias finitas de la información de las formas modales. Cobb y Liebst (1997) [71] presentan un método para fijar las posiciones optimas donde ubicar el (los) sensor (sensores) para identificación de daño estructural basada en un análisis de sensibilidad. Una idea similar es presentada por Skjaeraek, y otros. [72] que examina la localización óptima de la posición del sensor para detectar daño estructural pero basado en los cambios en formas y frecuencias modales. Yuen (1985) [73], Rizos, y otros. (1990) [74], Osegueda, y otros. (1992) [75], Kam y Lee (1992) [76], Kim, y otros.(1992) [77], Srinivasan y Kot (1992) [78], Ko, y otros. (1994) [79], Salawu y Williams (1994, 1995) [80] y [81], Lam, y otros. (1995) [82], Salawu [83]; y Saitoh y Takei [84] aportan otras técnicas al utilizar las formas modales para identificar daño.

Otra idea interesante para detectar daño es estudiar las derivadas espaciales de las formas modales ya que existe una clara dependencia de la curvatura con la tensión de flexión. En 1991 Pandey, y otros. [85] demuestra que los cambios bruscos en la curvatura de la forma modal pueden ser un buen indicador de daño para estructuras tipo viga. Los valores de curvatura son computados directamente del desplazamiento de la forma modal usando el operador de diferencias finitas de punto central. Stubbs, y otros. [54] presenta un método basado en la disminución en la energía de tensión modal (definida por la

curvatura de las formas modales). Topole y Stubbs [86] y [87] examinan la viabilidad de usar un set limitado de parámetros modales para la detección estructural de daño. Stubbs y Kim (1996) [88] examinan la viabilidad de localizar daño usando esta técnica sin implementar una puesta a punto previa de dichos parámetros modales.

2.4. Métodos de actualización de parámetros

Otra clase de métodos de identificación de daño se basan en la modificación del propio modelo estructural como masa, rigidez y amortiguamiento para reproducir tan estrechamente como sea posible la medición de la respuesta estática o dinámica de la estructura sana (algunos autores llama a este proceso zero setting o ajuste a cero). Luego estos métodos emplean los modelos actualizados o modificados para optimizar la posición y morfología del daño comparando la solución de las ecuaciones de movimiento con los datos medidos.

Algunos de estos modelos usan la idea de reemplazar las formas y frecuencias modales del cuerpo dañado en las ecuaciones de movimiento del cuerpo sano. Al no tratarse del mismo problema esos movimientos no serían solución del problema diferencial a menos que se le incorpore al modelo una fuerza particular que haga vibrar la estructura de esa manera. Luego si al modelo se le agrega el daño en alguna una ubicación y con alguna magnitud, esa fuerza incorporada será función de estos parámetros. Por último se tendría que minimizar dicha fuerza ficticia (o error). Smith y Beattie (1991a) [89], Zimmerman y Smith (1992) [90], Hemez (1993) [91], y Kaouk (1993) [92] han publicado revisiones de estos métodos. El problema es generalmente formulado como un problema de multiplicadores de Lagrange o una optimización basada en penalidad. Kabe (1985) [93], Baruch y Bar Itzhack (1978) [94], y Berman y Nagy (1983) [95] implementaron una formulación común de la “Actualización del Problema Óptimo” que es esencialmente minimización de la norma de Frobenius imponiendo nulidad en el error modal de fuerza.

Una variante de la actualización de parámetros a partir de formas y frecuencias

modales es utilizar en forma directa la respuesta dinámica temporal. La ventaja de esta técnica es que la información cruda posee valiosa información que no es reducida al ser utilizada para calcular frecuencia o formas modales y que puede ser aplicada a cualquier problema de detección de parámetros ya que no se presupone linealidad en el fenómeno estudiado. Por supuesto esta gran ventaja acarrea consigo el defecto de demandar un gran costo computacional. Defecto que por cierto cada vez lo es menos debido a la continua evolución de la herramienta computacional. Qain y otros (1990) [96] propuso un método basado en promedio móvil auto regresivo (en inglés: ARMA autoregressive moving average) para estimar daño a partir de las máximas amplitudes en la respuesta temporal. García y otros [97] Compararon las virtudes y defectos de las técnicas de dominio temporal (ARMA) con las correspondientes al dominio en frecuencia. Banks y otros. (1996) [20] desarrollaron un método basado en cuadrados mínimos de la respuesta temporal para identificar defectos circulares en vigas tipo Euler Bernoulli. Masri y otros. (1996) [98] utilizaron redes neuronales artificiales entrenadas a partir de respuestas temporales simuladas de especímenes dañados. Seibold y Weinert (1996) [99] propusieron un modelo probabilístico basado en respuesta temporal para estudiar daño en un rotor. Cattarius e Inman (1997) [100] propusieron un método de respuesta temporal para detectar diferencias en la dinámica de estructuras sanas y dañadas sin hacer uso de modelo alguno. Carneiro (2000) [2] utilizó la respuesta dinámica para detectar daño en vigas rectas tomando en cuenta las distorsiones tensionales que causa la fisura.

Recientemente se ha innovado en modelos más completos en la dinámica de cuerpos dañados e intentado variantes en las técnicas de detección. Atkinson y Aparicio 1999 [101] proponen la detección de daño en estructuras bidimensionales estudiando el tensor de energía – impulso. Dilella y Morassi 2002 [102] determinan la posición de la fisura a partir de del cambio de los nodos en las formas modales. Kim y Stubbs 2003 [103] detectan daño a partir de cambios en la energía modal. Owolabi y otros 2003 [104] proponen técnicas para detectar daño múltiple a partir de cambios en frecuencias y amplitudes reveladas en 7 puntos de una estructura tipo viga. Law y Lu 2005 [105]

detectan daño a partir de la respuesta dinámica en algunos puntos de una viga, con esta información reconstruyen la dinámica en todos los puntos de esta y luego vía problema inverso aseguran detectar la posición y profundidad de la fisura. Patil, y Maiti 2005 [106] implementan un método experimental para múltiples fisuras. Mendes y Tadeo 2006 [107] modelan la propagación y dispersión de una onda cuando incide en una fisura curva en cuerpos tridimensionales. Rao y Rahman 2006 [108] presentan un modelo basado en elasticidad lineal para identificar daño en cuerpos funcionalmente graduados (functionally graded materials) bidimensionales estudiando la intensidad de las tensiones en la zona de la fisura. Peng y otros 2007 [109] emplean frecuencias no lineales para detectar daño. Wang y He 2007 [110] implementan redes neuronales artificiales para identificar fisura en un domo curvo (represa)

2.5. Contacto

Desde el punto de vista teórico, la dinámica del contacto e impacto puede ser estudiada de dos maneras:

- Contacto y colisión de cuerpos rígidos
- Contacto y colisión de cuerpos deformables.

El enfoque de la colisión de cuerpos rígidos se basa puramente en la Mecánica de partículas y cuerpos rígidos de Newton donde se considera al impacto como un fenómeno de duración infinitesimal donde la pérdida de energía cinética en el rebote es modelada por un factor conocido como coeficiente de restitución. Las ecuaciones de movimiento son resueltas hasta el instante antes en que comienza el choque y desde el instante después que éste finaliza. Las características del tipo de rebote son obtenidas a partir de teoremas de conservación de la cantidad de movimiento y de energía, ignorándose lo que ocurra durante la propia colisión.

Desde el punto de vista de los cuerpos deformables, el impacto ya no es considerado como un fenómeno instantáneo. En este enfoque, se toma en cuenta no sólo el intervalo

finito de duración del contacto, sino que además se considera las fuerzas involucradas, tensiones internas, etc.

La Teoría de la Mecánica de Contacto de cuerpos elásticos nace en 1882 con la publicación de Heinrich Hertz de su escrito clásico *On the contact of elastic solids* [111]. En aquel entonces Hertz estaba trabajando como un auxiliar de investigación para Helmholtz en el University de Berlín. Su interés en el problema fue animado por experimentos en interferencia óptica entre lentes del vidrio. La pregunta trataba sobre que tipo de deformación elástica de los lentes bajo la acción de la fuerza que los mantenían en contacto podría tener una influencia significativa en el patrón de interferencia. Es fácil de imaginar cómo la hipótesis de un área de contacto elíptica pudo haber sido propuesta a partir de las observaciones de de las franjas de interferencia. Su conocimiento de teoría potencial electrostática le facultó a entender, por analogía, que una distribución elipsoidal - el hertziano - de presión de contacto produciría desplazamientos elásticos en los dos cuerpos que eran compatibles con un área de forma elíptica.

Hertz publico en su teoría en la Sociedad de Física de Berlín en enero de 1881 donde los miembros de la audiencia entendieron rápidamente la importancia tecnología del tema animándolo a que publique rápidamente su teoría en una revista técnica. Sin embargo no se realizo ningún avance hasta empezado el siglo XX, seguramente animados por el advenimiento del ferrocarril, maquinaria de engranajes cajas reductoras, o equipos industriales.

La teoría Hertz está restringida para superficies sin fricción y sólidos perfectamente elásticos sometidos a pequeñas deformaciones. En la segunda mitad del siglo pasado, grandes progresos se han realizado en la eliminación de estas hipótesis restrictivas a la Mecánica de Contacto. Un tratamiento correcto de fricción ha posibilitado a la teoría elástica quedar extendida para modelar deslizamiento y fricción de rodadura. Al mismo tiempo que el desarrollo de las teorías de plasticidad y de viscoelasticidad lineal han posibilitado examinar las tensiones y las deformaciones en el contacto de cuerpos inelásticos.

Algo sorprendente, en vista de la importancia tecnológica del tema, es que son pocos

los libros sobre Mecánica de Contacto hasta el año 1980. En 1953 el libro, *Contact Problems in Theory of Elasticity*, por L.A.Galin (en ruso existe traducción al inglés) [112] muestra los nuevos rumbos de Muskhelishvili en mecánica de contacto de cuerpos elásticos e incluso los Landau [113] incluye una sección donde estudia el problema de Hertz. Un tratamiento moderno y completo del mismo campo fue escrito por Gladwell, *Contact Problems in Theory of Classical Elasticity*, publicado en 1980 [114]. Estos libros excluyen contacto de rodadura y están restringidos para sólidos perfectamente elásticos. En 1987 K.L. Johnson [115] publica el excelente tratado sobre la estática y dinámica del contacto que incluye rodadura, lubricación, efectos dinámicos del impacto, efectos termoelásticos y superficies rugosas tratados desde el punto de vista analítico. Y más recientemente Wriggers [116] en 2006 lo extiende al caso computacional.

En casos específicos donde el contacto se da en cuerpos muy duros contra cuerpos blandos como goma contra vidrio se estudian fenómenos de ruido de deslizamiento por ondas de tensión en [117]. Monerie y Raous 1998 [118] Estudian fenómenos de acoplamiento entre adhesión y contacto unilateral entre interfases matriz/fibra con aplicaciones a materiales compuestos. Distintos regímenes de fricción son estudiados en Challen y otros [119]. Utilizando estas teorías Chabrand y otros. [120] modelan fenómenos de plasticidad en el conformado de metales y desarrollan varios modelos computacionales en [121]

Dados los enormes avances de las ciencias computacionales, sobre todo en lo que va del siglo XXI, en los últimos años se han publicado una extensa cantidad de artículos y trabajos relacionados con este tema [121]. Una centena de artículos referidos a la cuestión matemática, numérica y computacional de la Mecánica de Contacto se pueden encontrar en [122].

También es curioso que no se utilice la Mecánica de Contacto en la detección de daño. El Autor de esta tesis no ha encontrado trabajo alguno sobre detección de daño donde se modele el contacto en la fractura respiratoria a través de esta teoría. Sin embargo Andraeus [123] y otros lo han aplicado simplemente para modelar la dinámica de una viga recta dañada, pero no para detectar localización y magnitud de la fisura.

2.6. Detección vía Algoritmos Genéticos

En detección de fisura Larson y Zimmerman [124] en el año 1993, propusieron una técnica de búsqueda empleando Algoritmos Genéticos para la minimización de una función de costo definida como la diferencia entre las frecuencias experimentales y numéricas y sus correspondientes formas modales. Mares y Surace (1996) [125] usaron Algoritmos Genéticos para minimizar la función objetivo que Smith y Beattie (en 1991), Zimmerman y Smith (en 1992) propusieron [90]. Carlin y Garcia (1996) [126] investigaron la afinación óptima de un Algoritmo Genético para la detección de daño usando modelos elementales de masas y resortes. Ruotolo y Surace (1997) [127] aplicaron Algoritmo Genéticos para el problema de grietas múltiples, y presentaron un estudio comparativo en el uso de diferentes funciones objetivos incluyendo frecuencias naturales, formas modales e información de curvatura. Friswell y otros. (1998) [128] propusieron un método de diagnóstico de dos etapas: Algoritmo Genéticos da la posición más probable de daño y luego utilizaron este resultado como semilla para un método basado en gradientes para refinar la posición y determinar la magnitud del daño. Yap y Zimmerman (1998) [129] propusieron mejoras en la programación.

Capítulo 3

Detección de Fallas: Estudios Preliminares

3.1. Introducción

En el presente capítulo se exponen someramente tres métodos examinados tempranamente por el autor sobre detección de daño mediante teorías técnicas, Redes Neuronales Artificiales y Descomposición Ortogonal Propia. Las limitaciones que estos métodos presentan, motivan el desarrollo de un modelo muy general e interesante sobre la dinámica y detección de fallas de cuerpos viscoelásticos dañados.

3.1.1. Problema Inverso y Series de Potencias

El esquema de detección basado en la teoría técnica de Bernoulli – Euler es resuelto mediante series de potencias. El algoritmo de las series de potencias es una sistematización eficiente para resolver problemas diferenciales ordinarios. Esta característica lo hace apropiado para resolver el problema inverso de detección de daño.

En concreto, la falla es modelada como un resorte con una rigidez que depende de la magnitud del daño. Se resuelve vía series de potencia el problema diferencial de auto frecuencias descrito por este modelo. Esto es la solución del problema directo.

La solución analítica en series de potencia es luego utilizada junto con los valores de las frecuencias medidas de un experimento de una viga dañada, para dar por resultado la posición y profundidad de la falla.

3.1.2. Detección vía Redes Neuronales Artificiales

La diferencia con el método anterior es que ahora no se dispone de ningún modelo diferencial gobernante de la viga dañada. Pero por otro lado se necesita entrenar la red neuronal con alguna información. La red Neuronal artificial con una capa oculta es entrenada con resultados de más de 400 escenarios calculados por un modelo 2D de elasticidad lineal resuelto por elementos finitos.

3.1.3. Detección vía descomposición ortogonal de Karhunen-Loève

Existe una técnica llamada de descomposición ortogonal de Karhunen-Loève que el autor ha estudiado (ver [130]). Dicha técnica podría implementarse en el problema de detección de daño para cuerpos que sufran grandes deformaciones e incluso contacto en la falla.

3.2. Problema de vibraciones de una viga con un resorte intermedio (Teoría Técnica)

La influencia de la falla es simulada como una disminución de la rigidez en la zona dañada. Se introduce un resorte de constante k^* en el modelo. La viga tiene una densidad ρ y una constante elástica E . Se considera a la viga como compuesta por dos tramos L_1 y L_2 unidos por el resorte (ver Figura 3-1). Las ecuaciones gobernantes son:

$$v_1'''' - \Omega_1^2 v_1 = 0; \quad v_2'''' - \Omega_2^2 v_2 = 0 \quad (3.1)$$

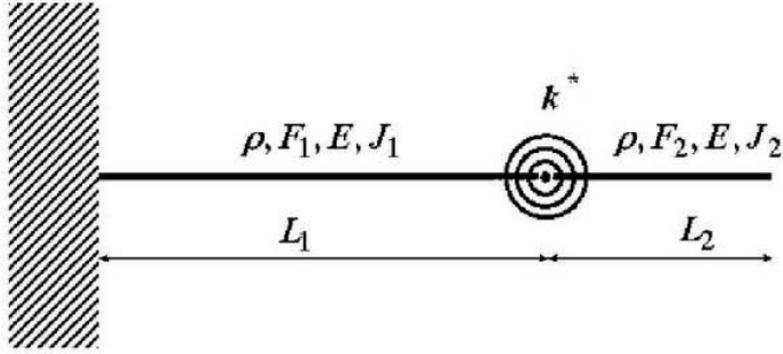


Figura 3-1: Esquema de la viga y el modelo de fractura simulado por un resorte de constante k

con las siguientes condiciones de borde

$$\begin{aligned}
 v_1(0) = 0; \quad v_1'(0) = 0; \quad v_2''(1) = 0; \quad v_2'''(1) = 0 \\
 v_1(1) = v_2(0); \quad \frac{EJ_1}{L_1}v_1''(1) + k \left[\frac{v_1'(1)}{L_1} - \frac{v_2'(0)}{L_2} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Se introducen los siguientes parametros adimensionales: $x_1 = X_1/L_1$, $x_2 = X_2/L_2$, $0 \leq X_1 \leq L_1$, $0 \leq X_2 \leq L_2$, $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$, $\Omega_j^2 = \rho F_j \omega^2 L_j^4 / E J_j$ ($j = 1, 2$) donde F_j y J_j son el área y el momento de inercia de la sección normal de cada tramo, respectivamente y $v_1(x_1)$ y $v_2(x_2)$ son la elástica de cada tramo, ω es la frecuencia angular y Ω_1, Ω_2 son las frecuencias adimensionales. Los símbolos (\prime) en las Ec.(3.1) y Ec.(3.2) denotan derivadas ordinarias respecto de x_1 o x_2 .

3.3. El problema directo e inverso

En el problema directo la constante del resorte y su posición son los datos de entrada y la frecuencia los de salida. Si se proponen series de potencias para $v_1(x_1)$ y $v_2(x_2)$

$$v_1(x_1) = \sum_i^N A_i x_1^i; \quad v_2(x_2) = \sum_i^N B_i x_2^i; \quad N \rightarrow \infty \tag{3.3}$$

que luego de ser introducidas en las ecuaciones de movimiento (3.1) y (3.2) se obtiene:

$$\begin{aligned}
B_0 &= \sum A_i; & \frac{k}{\alpha} B_1 &= \sum \varphi_{2i} A_{i+2} + k \sum \varphi_{1i} A_{i+1}; \\
2 \frac{\gamma}{\alpha^2} B_2 &= \sum \varphi_{2i} A_{i+2}; & 6 \frac{\gamma}{\alpha^3} B_3 &= \sum \varphi_{3i} A_{i+3} \\
A_{i+4} &= \Omega_1^2 \frac{A_i}{\varphi_{4i}}; & B_{i+4} &= \Omega_2^2 \frac{B_i}{\varphi_{4i}}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

donde $\varphi_{ln} = (n+l)!/n!$ con l, n números enteros, $\alpha = L_1/L_2$, $\beta = L_1/(L_1 + L_2)$, $\gamma = EJ_2/(EJ_1)$. Estas son las ecuaciones necesarias para construir la solución en series de potencias. El dato de entrada son la constante del resorte k , y su posición β o los parámetros de frecuencias Ω 's. Dando uno de ellos el otro es calculado como valor propio.

Para resolver el problema inverso, se miden las primeras tres frecuencias naturales (obtenidas en forma experimental) de la viga fisurada. Luego de introducirlas en el algoritmo de series de potencias se obtienen tres curvas de β vs k . La posición y constante del resorte se consiguen donde estas tres curvas se intersecan. El parámetro β es proporcional a L_1 y la constante k esta relacionada con la profundidad de la fisura en por la Mecánica de Fisura (ver [131]).

Como ilustración de esta técnica se proponen dos ejemplos. El primero consiste en una simulación computacional de una viga 2D en elementos finitos y el segundo en un experimento de una barra fisurada. La fisura se modela como una muesca. El paquete comercial ALGOR[®] de elementos finitos se emplea para simular el caso del primer ejemplo. Los datos de la viga de sección transversal uniforme son: largo $L = 100 \text{ cm}$, sección rectangular uniforme con un alto de 5 cm y una profundidad de 1 cm , un módulo elástico $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ y coeficiente de Poisson de $\nu = 0.3$. El parámetro de frecuencia es $\Omega = \omega L^2 \sqrt{\rho A / EJ}$.

Caso 1: Se trata de una fisura con una profundidad de $h_c = 1 \text{ cm}$. Caso 2: $h_c = 2 \text{ cm}$. Caso 3 $h_c = 3 \text{ cm}$. En todos los casos el modelo 2D de elementos finitos se construye con una fisura tipo muesca de 2 cm de espesor posicionada en $\beta = L_1/L = 0.4$. Las

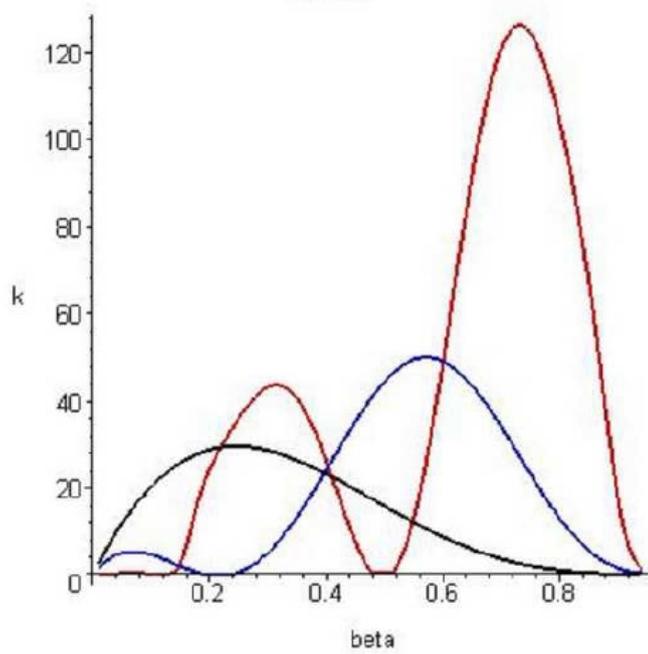


Figura 3-2: Curvas de β vs k para el Caso 1

tres primeras frecuencias calculadas por el modelo de elementos finitos, son introducidas en el algoritmo de series de potencias para dar las tres curvas de k vs β . La Figura 3-2 muestra las tres curvas del primer caso. Los otros dos casos son similares. Los puntos de intersección dan los valores de k y β . El valor de la profundidad se obtiene de la formula $k = Ebh^2/[72\pi f(r)]$ con $f(r) = 0.6384r^2 - 1.035r^3 + 3.7201r^4 - 5.1773r^5 + 7.553r^6 - 7.3324r^7 + 2.4909r^8$. Los resultados de detección se muestran en la Tabla 3.1 donde los errores son calculados por

$$error_{x_c} = \frac{(x_c^* - x_c)}{L}; \quad error_{h_c} = \frac{(h_c^* - h_c)}{h} \quad (3.5)$$

donde $x_c = L_1$ es la posición de la fisura.

Caso	Ω_1	Ω_2	Ω_3	k	Valores detectados	
					β	h_c
1	3.4905	21.7876	61.2885	23.63	0.4 (0 %)	0.906(-1.9 %)
2	3.3980	20.9411	59.9480	4.87	0.402(0.2 %)	1.901(-1.98 %)
3	3.1526	19.1435	57.2844	1.41	0.4(0 %)	3.111(2.22 %)

Tabla 3.1: Detección de fractura vía series de potencias

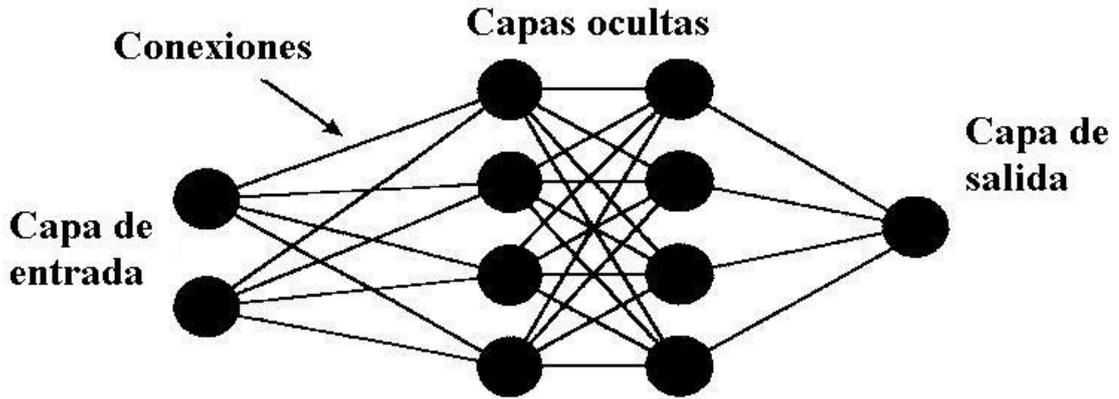


Figura 3-3: Esquema de la red neuronal y sus capas

3.4. Detección de daño por Redes Neuronales

Las Redes Neuronales Artificiales son otro enfoque diferente al método anterior. En este caso no se dispone de un sistema de ecuaciones gobernantes como en el caso anterior. La Red Neuronal Artificial es entrenada sin embargo con un modelo de elementos finitos que genera unos 400 escenarios de daño diferente. Estos casos se presentan en forma desordenada para entrenar la red neuronal. Muchos parámetros de las redes neuronales son modificados, como el número de neuronas de la capa oculta, la velocidad de aprendizaje y el número de casos que usa para la validación (Figura 3-3).

Finalmente se presentan algunos resultados experimentales de una viga empotrada – libre, de largo $L = 0.50 m$ con la fisura ubicada en $0.2 m$ desde el empotramiento con una profundidad de $0.0148 m$. Las primeras cuatro frecuencias detectadas experimentalmente son introducidas en la red neuronal entrenada con los 400 casos antes mencionados. Estas

Una sola red neuronal Dos salidas, 30 neuronas	Dos redes neuronales una salida cada una, 30 neuronas	Dos redes neuronales una salida cada una, 50 neuronas
$x_c = 0.258(14\%)$	$x_c = 0.255(5\%)$	$x_c = 0.281(9\%)$
$h_c = 0.0133(10\%)$	$h_c = 0.01584(7\%)$	$h_c = 0.01457(1.5\%)$

Tabla 3.2: Detección experimental de daño para una viaga mediante Redes Neuronales

frecuencias de valores 67.5, 358, 1187 y 2300 Hz son introducidas en la red neuronal entrenada y ésta retorna los valores de posición y profundidad de la fisura. Los resultados son detallados en la Tabla 3.2. Notable es el aumento del error en la posición de la fractura el ultimo caso, esto es debido a un sobre entrenamiento de las redes neuronales. Como es sabido: una red neuronal artificial mayor no asegura una mejor predicción de los resultados buscados

3.5. Detección de daño por Descomposición Ortogonal

Supongamos que se pudiera medir el desplazamiento para un intervalo de tiempo de una gran cantidad de puntos de un cuerpo fisurado. La técnica de reducción de Karhunen-Loève consiste en construir una base de funciones en un espacio de Hilbert que contenga gran parte de la información que tiene la solución de un problema diferencial espacial y temporal en algunas pocas funciones. El método de construcción de estas funciones bases es la siguiente: sea $\mathbf{u}(x_i, y_j, z_k, t)$ el vector de desplazamientos de cada punto x_i, y_j, z_k que son los puntos de una malla predefinida de un cuerpo posiblemente dañado (puntos donde se colocarían los sensores que medirían movimiento), $i = 1..N_x$; $j = 1..N_y$; $k = 1..N_z$. Si los sensores detectan este movimiento en esos puntos del cuerpo, se tendrán $3 \times N_x \times N_y \times N_z = N$ puntos muestrales por cada instante de tiempo. Sea M el número de instantes de tiempo que los sensores miden el movimiento. Si ordenamos la dinámica de estos puntos de la forma

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t) \tag{3.6}$$

para cada instante de tiempo, se puede escribir:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N] = \begin{pmatrix} u_1(t_1) & u_2(t_1) & \cdots & u_N(t_1) \\ u_1(t_2) & u_2(t_2) & \cdots & u_N(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(t_M) & u_2(t_M) & \cdots & u_N(t_M) \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Suponiendo que el sistema es ergódico, esto es, que los promedios temporales sean equivalentes a los promedios generales y así poder calcular la media.

$$\mathbf{E}[\mathbf{u}] = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^M u_1(t_i) & \sum_{i=0}^M u_2(t_i) & \cdots & \sum_{i=0}^M u_N(t_i) \\ \sum_{i=0}^M u_1(t_i) & \sum_{i=0}^M u_2(t_i) & \cdots & \sum_{i=0}^M u_N(t_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^M u_1(t_i) & \sum_{i=0}^M u_2(t_i) & \cdots & \sum_{i=0}^M u_N(t_i) \end{pmatrix}$$

luego con la media se calcula

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} - \mathbf{E}[\mathbf{u}] \quad (3.8)$$

y por ultimo calculamos la matriz

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{V}}{M}$$

llamada matriz de correlación.

La matriz R por su construcción es simétrica y definida positiva; por lo tanto sus autovalores son reales y positivos y sus autovectores ortogonales.

El algoritmo de implementación puede sintetizarse como sigue:

- 1- Dado un conjunto de datos $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ se discretiza en M instantes de tiempo y en N puntos del espacio.
- 2- Se calcula el promedio temporal y se construye la matriz $\mathbf{E}[\mathbf{u}]$.
- 3- Con la matriz $\mathbf{E}[\mathbf{u}]$ y la matriz \mathbf{U} se obtiene la matriz \mathbf{V} .
- 4- Con \mathbf{V} se construye la matriz de correlación \mathbf{R} .
- 5- Se calculan los autovalores y los autovectores.

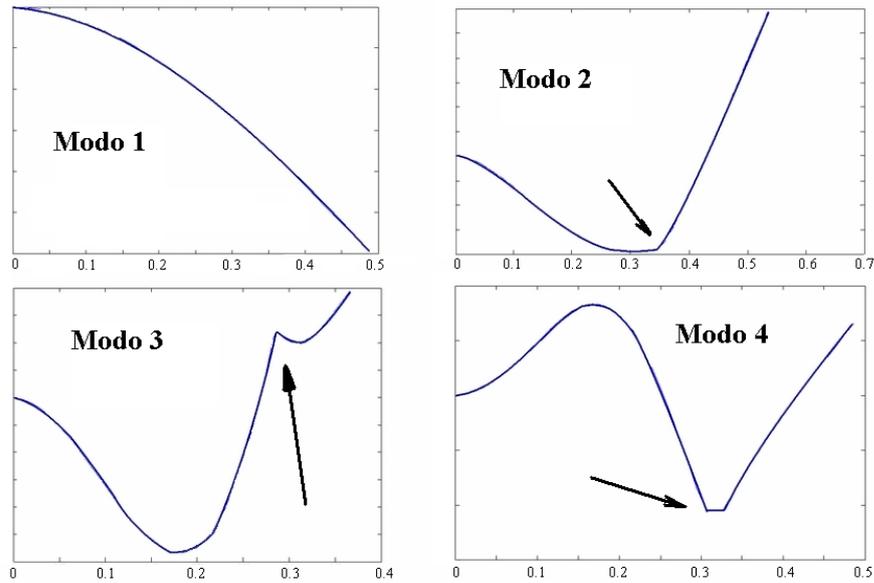


Figura 3-4: Bases empíricas de Karhunen-Loève para una viga dañada. Primeros cuatro modos Empíricos. Las flechas indican la región dañada

Los autovectores son las bases de Karhunen-Loève que son a veces llamados modos normales no lineales del problema estudiado. Si la dinámica vibratoria fuera lineal, las funciones de Karhunen-Loève coincidirían con las formas modales. Esta técnica presenta un método de medir modos normales de vibración en forma experimental si el fenómeno estudiado fuera lineal y modos empíricos no lineales si la dinámica fuera no lineal.

Sea cual fuera la dinámica, es de esperar que un quiebre en el lugar de la fisura se manifieste en las bases empíricas de Karhunen-Loève.

La Figura 3-4 muestra la fibra media de los primeros cuatro modos empíricos de Karhunen-Loève para una viga empotrada- libre de largo $L = 0.5 \text{ m}$, sección rectangular uniforme con un alto de 5 cm módulo elástico $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ y un coeficiente de Poisson de $\nu = 0.3$. La base fue calculada de la simulación de la dinámica vibratoria de una viga que tiene en cuenta el fenómeno de contacto en la fisura, con una cantidad de puntos $N = 100$ y $M = 100$ instantes de tiempo que completan dos períodos del modo fundamental de la correspondiente viga sana. Se puede observar un quiebre en $x = 0.35 \text{ m}$

que es precisamente la ubicación de la fisura. El modelo con el que se simula la dinámica, será explicado en el próximo capítulo.

3.6. Discusión

Los métodos presentados en este capítulo exhiben la virtud de ser extremadamente simples y muy precisos, y la desventaja de no ser aplicables para tratar problemas más complejos. En los dos primeros casos analizados se detecto daño a nivel tres con precisiones similares en modelos lineales. Si la fisura se cerrara, existiría contacto, produciendo un fenómeno muy complejo de vibro impacto, tornando el movimiento en no lineal; dando por resultado un número tan grande de frecuencias de resonancia que tornaría inaplicable el método. Precisamente en el último caso (descomposición ortogonal) se detecta daño a nivel 2 en un espécimen cuya dinámica es no lineal por causa del contacto en la fisura. Téngase en cuenta que la técnica de Karhunen-Loève presenta la desventaja de tener que disponer de mediciones en una gran cantidad de puntos para detectar el quiebre que indica la posición de la fisura.

La imposibilidad de utilización de estas técnicas a problemas más complejos donde existan no linealidades geometrías y materiales, y se disponga de una cantidad reducida de puntos donde se midan las respuestas dinámicas, motiva teorías más generales que se trataran en los próximos capítulos.

Capítulo 4

Ecuaciones de movimiento

4.1. Introducción

En este capítulo se plantean las ecuaciones de movimiento para desplazamientos y deformaciones finitas, sus condiciones de borde e iniciales para uno o más cuerpos de formas arbitras en dos y tres dimensiones. El tratamiento se hace para cuerpos de tipo elástico y visco elástico. Se proponen modelos constitutivos de tipo lineal y no lineal. Ya que se trata de problemas de Elasticidad Finita, se distinguen y se comparan las ventajas de un planteo en la representación material (o *lagrangiana*) y la espacial (o euleriana). El objetivo de este capítulo es doble ya que se formula el sistema de ecuaciones en derivadas parciales para deformaciones finitas (altamente no lineal) así como el modelo de contacto unilateral entre dos o más cuerpos, o entre diferentes partes de un mismo cuerpo.

En los capítulos siguientes se utilizarán estos modelos para estudios computacionales de los efectos de fricción como es la inestabilidad en el paso intermitente de la fricción estática a la dinámica (micro slip and creep o stick-slip), rodadura e impacto y sus efectos dinámicos. Así también se aplican estos modelos de contacto a cuerpos fisurados para incluir los efectos respiratorios del abrir y cerrar de la fisura que eventualmente podrían ocurrir.

4.2. Modelo bi y tri-dimensional para Deformaciones Finitas

4.2.1. Ecuaciones de movimiento

El planteo de las ecuaciones gobernantes se realiza en el marco de la Mecánica del Continuo en la representación *lagrangiana* o material con algunas ventajas respecto del planteo euleriano o espacial para problemas de mecánica de sólidos. Por ejemplo, si el problema del continuo está dado en la configuración euleriana se plantean además de las ecuaciones de movimiento (Ecuación de Cauchy) [18] (en notación directa) [37], [38]

$$\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad (4.1)$$

la correspondiente a la conservación de masa

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_x \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.2)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy ρ es la densidad de masa, \mathbf{b} son las fuerzas de cuerpo y \mathbf{a} y \mathbf{v} son los campos de aceleración y velocidad respectivamente. Téngase en cuenta que tanto \mathbf{a} como \mathbf{v} y $\frac{d\rho}{dt}$ están calculadas como derivadas materiales, lo que impone una fuerte no linealidad en las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho$. Los símbolos (∇_x) o $(\nabla_{x \cdot})$ se refieren respectivamente al gradiente o divergencia tomados respecto de las coordenadas espaciales (x) . No es ésta la principal dificultad de tal enfoque, ya que si el cuerpo realiza desplazamientos finitos en el espacio, el planteo de las ecuaciones de contorno es un problema que parece *inconsistente* ya que la posición misma es una de las incógnitas del movimiento. Sin embargo existen técnicas de actualización cuasi-estáticas de la posición del contorno que regularizan el problema [5] [19]. En cambio, si el problema se presenta en la configuración *lagrangiana* o material sólo se

tendrá que resolver el problema de movimiento [40]:

$$\nabla_X \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \mathbf{A} \quad (4.3)$$

donde \mathbf{P} [36], es el primer tensor de tensiones de Piola - Kirchhoff, $\rho_0 = \rho(\mathbf{X}, t_0)$ es la densidad en la configuración inicial y $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{V}} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2}$ ($\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ es el vector de posición) es el campo de aceleraciones que es simplemente la derivada parcial del campo de velocidades. Ahora los símbolos (∇_X) o $(\nabla_X \cdot)$ se refieren respectivamente al gradiente o divergencia tomados respecto de las coordenadas materiales (X)

En este esquema las condiciones de contorno son impuestas en el contorno inicial (cuya posición por hipótesis es conocida), quedando el planteo del problema de contorno, junto con las condiciones iniciales y las ecuaciones de movimiento consistentemente planteado. Una vez resuelto dicho problema diferencial, tanto la posición del contorno como cualquier parte del cuerpo será conocida.

Como se sabe el tensor \mathbf{P} no es simétrico. Además es de difícil interpretación física.

Puede introducirse el segundo tensor de Piola - Kirchhoff, que en cambio es simétrico, y viene dado por $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}$ donde $[\mathbf{F}]_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$ es el tensor gradiente de deformaciones, x_i es la i -ésima componente del vector de posición (campo espacial), X_j es la j -ésima componente del campo material \mathbf{X} . Luego las ecuaciones de movimiento son:

$$\nabla_X \cdot (\mathbf{F}\mathbf{S}) + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \mathbf{A}. \quad (4.4)$$

Falta relacionar \mathbf{S} con el propio movimiento para cerrar el problema diferencial que tiene por incógnita al vector \mathbf{x} .

Las relaciones entre los tensores de tensiones \mathbf{P} , \mathbf{S} y $\boldsymbol{\sigma}$ son

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} = (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T = \mathbf{P} \quad (4.5)$$

En el Apéndice A se detalla como se obtiene estas relaciones entre los tensores de tensión

\mathbf{P} , \mathbf{S} y $\boldsymbol{\sigma}$ y cual es la definición de cada uno de ellos.

Por ultimo, la ecuación de continuidad de la masa (4.2) es transformada a la representación material (o *lagrangiana*) de la siguiente manera. Dado que la masa se calcula así

$$m = \iiint_v \rho(\mathbf{x}, t) dv = \iiint_V \rho_0(\mathbf{X}, t) dV \quad (4.6)$$

donde dv y dV son los elementos de volumen espacial y material respectivamente, y teniendo en cuenta el movimiento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$

$$\iiint_v \rho(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) dv = \iiint_V \rho(\mathbf{X}, t) J dV \quad (4.7)$$

donde J es el jacobiano de la transformación que coincide con el determinante del gradiente de deformaciones $J = \det(\mathbf{F})$. Ahora si se compara (4.6) con (4.7):

$$\iiint_V \rho(\mathbf{X}, t) J - \rho_0(\mathbf{X}, t) dV = 0$$

y ya que el volumen V es arbitrario se deduce que:

$$\rho(\mathbf{X}, t) = \rho_0/J \quad (4.8)$$

Como se puede observar, la ecuación (4.8) esta desacoplada de las ecuaciones de movimiento (4.4). Luego la densidad actual es calculada una vez encontrada la función de movimiento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$.

4.2.2. Ecuaciones constitutivas

Si se abandona el modelo lineal de los materiales Hookeanos para entrar en modelos de deformaciones finitas, se podrá ver que el tipo de ecuaciones constitutivas es un universo de gran variedad [18]. Truesdell [14, 35], define tres grandes familias, todas ellas consistentes con la elasticidad lineal cuando se toman deformaciones infinitesimales: materiales

“elásticos”, “hiperelásticos” e “hipoelásticos”. En el Apéndice B se definen y detallan los materiales elásticos, hiperelásticos e hipoelásticos. A los fines prácticos de esta tesis basta decir que se tendrán en cuenta materiales elásticos, hiperelásticos y viscoelásticos con ecuaciones constitutivas del tipo:

$$\mathbf{S} = g'(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}) \quad (4.9)$$

donde $[\mathbf{E}]_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$ es el tensor de deformación finita lagrangiano (de Green). Como es costumbre, los índices repetidos indican suma de 1 a 3, en este caso el índice k , y $\mathbf{u} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$ es el vector de desplazamiento.

En particular se utilizarán:

$$\mathbf{S} = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{E} \quad (4.10)$$

donde λ y γ son constantes. La (4.10) es conocida también como modelo material de St. Venant–Kirchhoff (ver [14]). Un modelo interesante y simple de material hiperelástico es el Neo-Hookeano compresible que está definido por

$$\mathbf{S} = \gamma (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda (\ln J) \mathbf{C}^{-1} \quad (4.11)$$

donde λ y γ son constantes, $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ es el tensor de deformación de Green y $J = \det(\mathbf{F})$. Incluso si se toma $J = 1$ en la Ec.(4.11) se tiene un material Neo-Hookeano incompresible.

4.2.3. Amortiguamiento

Existen dos tipos de amortiguamiento: interno y externo. El primero representa los efectos de la viscosidad en el seno del cuerpo, por lo que se tendrá que modelar como una ecuación constitutiva para el tensor \mathbf{S} . El segundo por efectos de fricción contra el medio deberá modelarse en las condiciones de borde de tipo natural, como una tensión que dependerá de la velocidad de dicho contorno. Generalmente la fricción externa está

relacionada a la resistencia del aire o al rozamiento seco contra otro cuerpo, es por eso que se modela como condición de contorno. Por el contrario la fricción interna corresponde a la disipación del propio material, es decir, corresponde a la viscoelasticidad.

En el Capítulo 6 se implementara la técnica de detección de daño utilizando la teoría recién expuesta para un espécimen real a través de un experimento. Al existir tanto disipación interna como externa en este cuerpo, se plantea la necesidad de investigar que clase de ley constitutiva se puede implementar para modelar este fenómeno. Coleman y Mizel [13] han desarrollado una teoría muy interesante sobre la existencia de las ecuaciones calóricas de estado que limita las posibles formas que puede adoptar las ecuaciones constitutivas sin violar la Termodinámica de los Medios Continuos. Sin embargo los desarrollos dados por ellos refieren todo el estudio a la descripción euleriana de la mecánica. En el Apéndice C el autor de esta tesis desarrolla en detalle la teoría en referencia lagrangiana, que Coleman y Mizel [13] presentaron en referencia euleriana, que justifica la forma funcional de la parte visco elástica de la constitutiva dada por la Ec.(4.9)

Se propone una relación del tipo lineal

$$\mathbf{S}^d = \mu_{int} \dot{\mathbf{E}} \quad (4.12)$$

donde $\mu_{int} \geq 0$ es un coeficiente de disipación interna. Justamente la Ec.(4.12) es la forma funcional que se adoptara en la parte disipativa de la ecuación constitutiva en el experimento del Capítulo 5. La termodinámica impone (ver Apéndice C Ec's.(C.48) y (C.49)) solamente que el coeficiente $\mu_{int} \geq 0$.

En el Apéndice C de restricciones de la termodinámica a las ecuaciones constitutivas se demuestra el conjunto de restricciones que la termodinámica impone a la forma funcional de la Ec.(4.12). Y es este análisis el que da un marco riguroso en la forma funcional entre las tensiones, las deformaciones y las velocidades de deformación cuando se trate de problemas visco elásticos (disipación interna). Para ello se transformaron las ecuaciones de balance de masa, momento, energía y segundo principio de la Termodinámica a la forma material. Como es mencionado más arriba, la ventaja de esto es un tratamiento

homogéneo en el que todas las integrales son sobre el mismo dominio.

4.2.4. Condiciones de Borde

Tal como se aclaró antes, la ventaja de un planteo en coordenadas lagrangianas, es el de aportar condiciones de borde impuestas sobre el contorno del cuerpo indeformado, aunque éste efectúe movimientos finitos. Es decir, la condición impuesta en el contorno material puede ser función de las coordenadas espaciales y del tiempo. Esta característica es la principal ventaja de plantear el problema en la descripción lagrangiana para el problema de contacto.

Las condiciones de borde pueden ser del tipo *geométricas* (Dirichlet) donde se especifica el valor de cada componente del vector \mathbf{u} o \mathbf{x} ; o *naturales* donde se especifica el valor de cada componente del vector tensión. Si el vector desplazamiento \mathbf{u} o \mathbf{x} es prescripto en una parte de la superficie del contorno (∂V^1) y la tensión es dada en la otra parte (∂V^2), luego

$$\mathbf{x}(\partial V^1) = \bar{\mathbf{x}} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{t}_0(\partial V^2) = \bar{\mathbf{t}}_0 \quad (4.14)$$

Con el objeto de aclarar la generalidad del tipo de condiciones de borde que se pueden aplicar, consideraremos el ejemplo de un péndulo flexible, ejemplo que en el capítulo siguiente será estudiado mediante simulaciones para probar la potencia y alcance de la teoría.

Para un péndulo libre se imponen tensiones nulas para todo punto del contorno que no sea el punto de pivote (\mathbf{p}) y desplazamiento nulo en el propio pivote (\mathbf{p}) (ver Figura 4-1).

$$\mathbf{t}_0 = 0 \quad (4.15)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}) = 0 \quad (4.16)$$

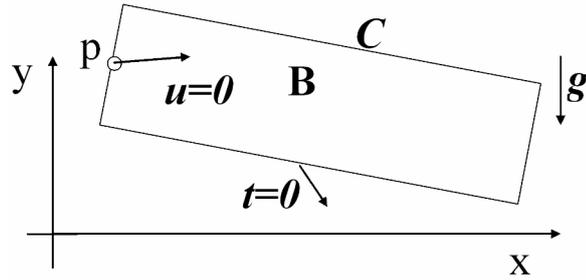


Figura 4-1: Condiciones de borde para un péndulo. El vector tensión t es nulo para todo punto que no sea el propio p . En este punto, punto p es nulo el vector desplazamiento $u(p) = 0$

Si en cambio quisiéramos estudiar un péndulo que cuelga de un punto que se mueve en el plano según una curva, se impondrían condiciones del tipo

$$\mathbf{t}_0 = 0 \quad (4.17)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}) = c_x(t)\mathbf{e}_x + c_y(t)\mathbf{e}_y \quad (4.18)$$

con \mathbf{e}_x y \mathbf{e}_y versores según x e y . Si además quisiéramos incluir una fuerza (tensión) que dependa de la posición actual del borde tendríamos

$$\mathbf{t}_0 = t_x(x, y)\mathbf{e}_x + t_y(x, y)\mathbf{e}_y \quad (4.19)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}) = c_x(t)\mathbf{e}_x + c_y(t)\mathbf{e}_y \quad (4.20)$$

4.3. Modelos de contacto

Ya disponemos de las ecuaciones y las condiciones de borde de un cuerpo elástico y visco elástico para deformaciones finitas. En esta sección se presenta un modelo de con-

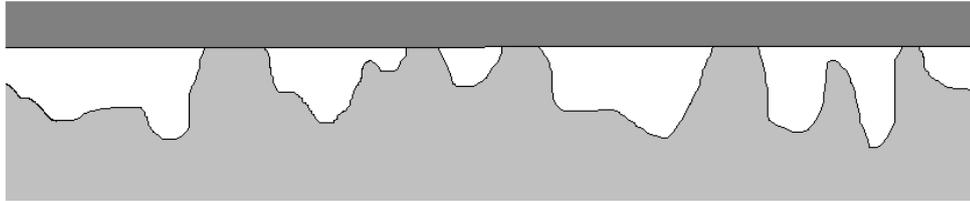


Figura 4-2: Esquema del contacto entre un cuerpo duro y liso (arriba) contra uno blando y áspero (abajo).

tacto unilateral entre cuerpos sometidos a deformaciones arbitrarias con la intención de aplicarlo luego al contacto de la fisura que abre y cierra. Este tipo de problemas presenta grandes dificultades debidas en parte a las no linealidades y en parte a la dificultad de plantear y resolver un problema de restricciones de naturaleza no holonómica como el aquí presente (ver por ejemplo [132]). La regularización a un problema holónimo lo hace resoluble y abre las puertas a modelos complejos de fricción, adhesión, etc.

4.3.1. Superficie real de contacto

La superficie real de contacto entre dos cuerpos es de tipo parcial entre las asperezas de ambos. A medida que las presiones entre los cuerpos aumentan, las irregularidades de los bordes se deforman aumentando el área de contacto. la Figura (4-2) esquematiza esta situación.

No sólo el aspecto mecánico está presente en el contacto; también existen reacciones químicas, efectos eléctricos y térmicos que en este desarrollo no se tendrán en cuenta. En el presente trabajo tampoco se considerarán aspectos tribológicos físico-químicos.

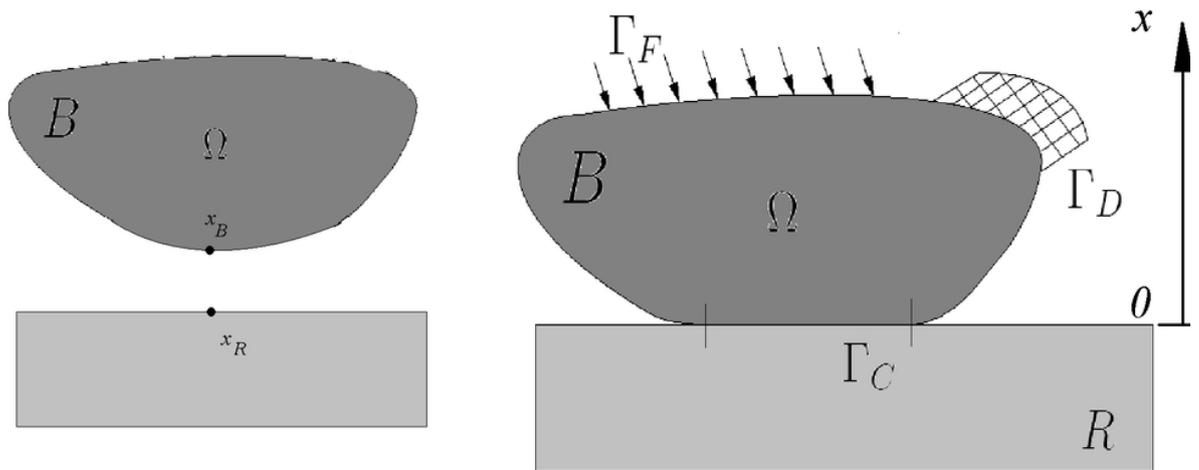


Figura 4-3: Esquema del contacto entre un cuerpo deformable contra un obstáculo rígido.

4.3.2. Contacto unilateral

Como primer acercamiento al modelo de contacto supongamos que un cuerpo deformable interactúa con obstáculos rígido y fijo. La condición de contacto es que no exista penetración de dicho cuerpo deformable contra el obstáculo rígido.

Problema de Signorini

Sea un cuerpo B que ocupa un lugar Ω en el espacio (o en el plano). El cuerpo B tiene un contorno $\Gamma = \Gamma_F \cup \Gamma_D \cup \Gamma_C$ suficientemente suave y está en contacto con otro cuerpo R que es rígido y está fijo en el espacio. La parte Γ_F del contorno Γ corresponde al borde donde las tensiones son prescritas (condiciones naturales del problema 4.3). Γ_D corresponde a la parte del contorno donde los desplazamientos son prescritos (condiciones geométricas) y Γ_C corresponde a la parte que está en contacto con el cuerpo rígido R (ver Figura 4-3)

En la región de contacto entre estos dos cuerpos Γ_C los desplazamientos \mathbf{v} (diferencia de la coordenada del punto del contorno del cuerpo deformable y el correspondiente

al cuerpo rígido con el que hará contacto $\mathbf{v} = \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_R$ ver Figura 4-3) y tensiones \mathbf{t}_c se pueden descomponer en una dirección normal y una tangencial a Γ_C de la siguiente manera

$$\mathbf{v} = v_N \mathbf{e}_n + v_T \mathbf{e}_t \quad (4.21)$$

$$\mathbf{t}_c = t_{cN} \mathbf{e}_n + t_{cT} \mathbf{e}_t \quad (4.22)$$

donde \mathbf{e}_n y \mathbf{e}_t son los versores normal y tangencial a Ω en la zona Γ_C . En la Figura 4-3 esquematiza el contacto de un cuerpo flexible contra uno rígido.

El problema de Signorini (contacto unilateral) es formulado como sigue:

$$\left. \begin{array}{l} v_N \leq 0 \\ t_{cN} \leq 0 \\ v_N t_{cN} = 0 \end{array} \right\} \quad (4.23)$$

Es fácil ver que las condiciones de Signorini (4.23) se satisfacen sólo por las siguientes dos posibilidades

1. No hay contacto $\Rightarrow v_N \leq 0$ y $t_{cN} = 0$
2. Sí hay contacto $\Rightarrow v_N = 0$ y $t_{cN} \leq 0$

Las condiciones (4.23) forman un problema no continuo o no suave ya que t_{cN} es una aplicación multivaluada del campo v_N (o simplemente t_{cN} no es función de v_N). Desde el punto de vista de la Mecánica Analítica [4], las condiciones de Signorini forman un problema de ligaduras no holonómicas dadas por desigualdades. Esto se refleja en el hecho de que ni las tensiones ni la propia superficie en contacto son conocidas antes de resolver el problema. Si éste fuera resuelto, podrían calcularse de la propia deformación pero son necesarios para el planteo clásico del problema de contorno. En otras palabras: en la Mecánica de Medios Continuos es necesario conocer las condiciones de contorno para poder resolver el problema, pero por otro lado, el problema de Signorini da a las

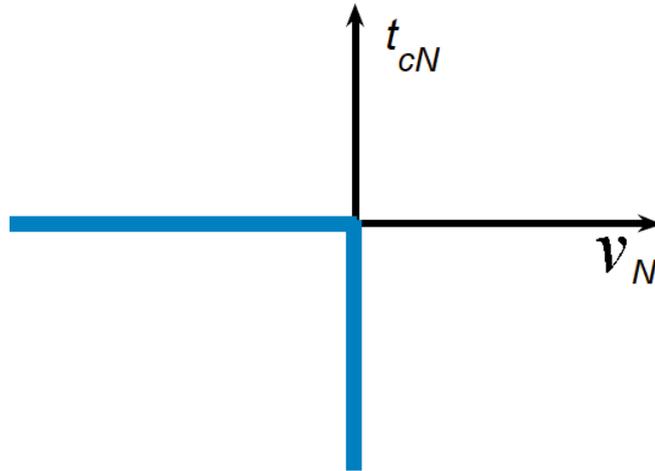


Figura 4-4: Ley de Signorini

condiciones de contorno el carácter de incógnita. En la Figura 4-4 se puede observar el carácter multivaluado de la restricción dada en 4.23.

Extensiones del problema de contacto

Contacto entre dos cuerpos deformables

En deformaciones y desplazamientos infinitesimales es posible resolver muy fácilmente el problema de contacto haciendo un cambio de variables al problema de Signorini (4.23) que ahora es doble (uno para cada cuerpo)

$$\left. \begin{array}{l} d(x_1, x_2) \geq 0 \\ t_{cN1} \leq 0 \\ x_1 t_{cN1} = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} d(x_2, x_1) &\geq 0 \\ t_{cN2} &\leq 0 \\ x_2 t_{cN2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

donde $d(x_1, x_2)$ es la distancia entre los puntos espaciales \mathbf{x}_1 que corresponde al cuerpo 1 y el \mathbf{x}_2 que corresponde al 2. Cuando se aceptan desplazamientos infinitésimos los versores $\mathbf{N}_2 = -\mathbf{N}_1$ y el par de puntos \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 son conocidos antes de resolver el problema encontrándose sobre la normal a cada superficie.

Si en cambio los desplazamientos o las deformaciones fueran finitas, ya no se sabrá qué par de puntos harán el contacto ni los correspondientes versores normales. En ese caso se tienen que calcular la menor de las distancias entre todos los puntos de la superficie de cada cuerpo con respecto a la superficie del otro y evaluar los vectores normales a ese par de puntos de distancia mínima para todo tiempo.

$$\left. \begin{aligned} \min(d(x_1, x_2)) &\geq 0 \\ t_{cN1} &\leq 0 \\ x_1 t_{cN1} &= 0 \\ \min(d(x_2, x_1)) &\geq 0 \\ t_{cN2} &\leq 0 \\ x_2 t_{cN2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Regularización del problema no holónimo de Signorini

La ley de contacto (4.23) formulada en el apartado anterior es de carácter no holónimo, ya que no existe una ecuación regular de restricción dada por una igualdad. En lugar de ello el problema de contacto tiene una restricción dada por un conjunto de desigualdades. Además, cuando se presenta el contacto, el valor de la tensión no está definido y, cuando no se establece, no está definido el valor del desplazamiento. Esta alternancia entre una condición de tipo natural con otra del tipo geométrica es lo que le da el carácter de no regular al problema del contacto ya que es incógnita del problema conocer en qué

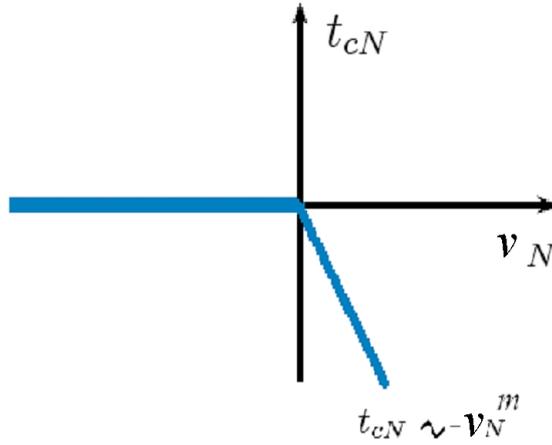


Figura 4-5: Regularización del problema de Signorini

momento vale una u otra.

La idea de la regularización del problema de contacto consiste en reemplazar la condición rígida 4.23 por una suave o regular. Se reemplaza el problema de restricción no holonómica por un problema sin ligaduras. La condición de contorno siempre será del tipo natural, imponiendo una relación funcional entre tensión y desplazamiento

$$t_{cN} = \begin{cases} -k (v_N)^m & \text{si } v_N > 0 \\ 0 & \text{si } v_N \leq 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

donde k es un número lo suficientemente grande de manera que el problema dado por la tensión dada en (4.25) se aproximará a (4.23).

4.3.3. Fricción

Fricción de Coulomb

Este modelo fue introducido por Amontons en 1699 [133] y luego fue desarrollado por Coulomb en 1785 [134]. Sin embargo el carácter global, por tratarse de cuerpos rígidos, daba a este modelo una aproximación muy burda. Sin embargo cuando se aplica a cuerpos deformables, este modelo resulta más realista, pudiéndose reproducir fenómenos como el llamado “stick and slip” que es la alternancia entre fricción estática y dinámica. La fuerza de rozamiento que un cuerpo ejerce sobre otro, es siempre menor o igual a un factor por la fuerza normal a la superficie de contacto (llamada fuerza de contacto entre los dos cuerpos). Esta fuerza de fricción es además colineal con dicha superficie de contacto y en sentido contrario a la velocidad con que los dos cuerpos deslizan.

$$t_T \leq \mu t_N \begin{cases} \text{si } t_T < \mu t_N \rightarrow \dot{v}_T = 0 \\ \text{si } t_T = \mu t_N \rightarrow \dot{v}_T = -\lambda t_T \end{cases} \quad (4.26)$$

donde μ (no confundir con el coeficiente de Lamé) es el coeficiente de fricción, λ un número real y \dot{v}_T es la componente tangencial de la velocidad. Como se puede observar, la ley de rozamiento tiene que ser expresada no sólo en términos de la fuerza normal, sino también de la velocidad ya que depende de la evolución previa. La fricción estática estará contenida en la anterior ley (4.26)

Regularización del modelo de Coulomb

La ley de fricción formulada en el apartado anterior es de carácter no regular, ya que no existe una forma funcional unívoca que relacione $t_T = t_T(\dot{v}_t)$ para todos los valores de la velocidad. Por ejemplo cuando la velocidad es nula no está definida la fuerza de fricción. Para esta situación la dependencia funcional de dicha fuerza de fricción es con respecto a otras cantidades cinemáticas; de hecho será igual y opuesta a la fuerza que tienda a hacer deslizar un cuerpo sobre el otro. Sin embargo esta ley se puede regularizar [132],

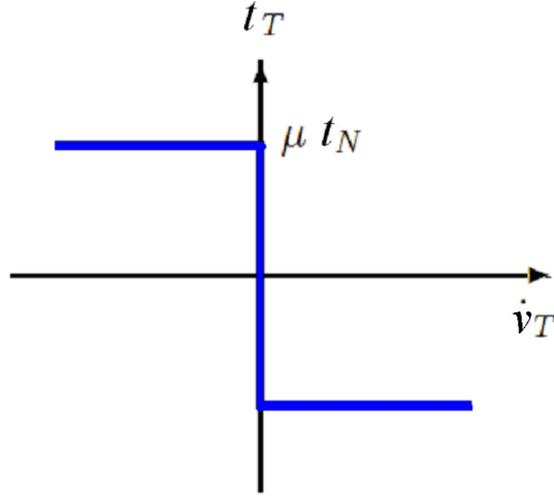


Figura 4-6: Ley de Fricción de Coulomb

aproximándola con una función $\phi(\dot{v}_T)$ similar a un escalón, de tal forma que la ley de fricción se puede escribir así

$$t_T = -\mu\phi_\varepsilon(\dot{v}_T)|t_N| \quad (4.27)$$

donde ε es un parámetro que al tender a cero hace que $\phi_\varepsilon(\dot{v}_T) \rightarrow \text{step}(\dot{v}_T)$ por ejemplo: $\phi_\varepsilon^1(\dot{v}_T) = \frac{\dot{v}_T}{\sqrt{\dot{v}_T^2 + \varepsilon^2}}$, $\phi_\varepsilon^2(\dot{v}_T) = \tanh \frac{\dot{v}_T}{\varepsilon}$ son distintas maneras de regularizar el problema (4.27). En esta tesis se usa:

$$\phi_\varepsilon^3(\dot{v}_T) = \begin{cases} -1 & \text{si } \dot{v}_T < -\varepsilon \\ \frac{\dot{v}_T}{2\varepsilon} & \text{si } -\varepsilon < \dot{v}_T < \varepsilon \\ 1 & \text{si } \dot{v}_T > \varepsilon \end{cases} \quad (4.28)$$

Desde el punto de vista numérico esta aproximación será válida tomando un ε lo suficientemente pequeño. Es fácil ver que el $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon^{1,2,3}(\dot{v}_T) = \text{step}(\dot{v}_T)$.

Como corrientemente se acepta, la fricción por contacto tiene dos comportamientos levemente diferentes cuando se trata de rozamiento estático o dinámico. Para incluir en el

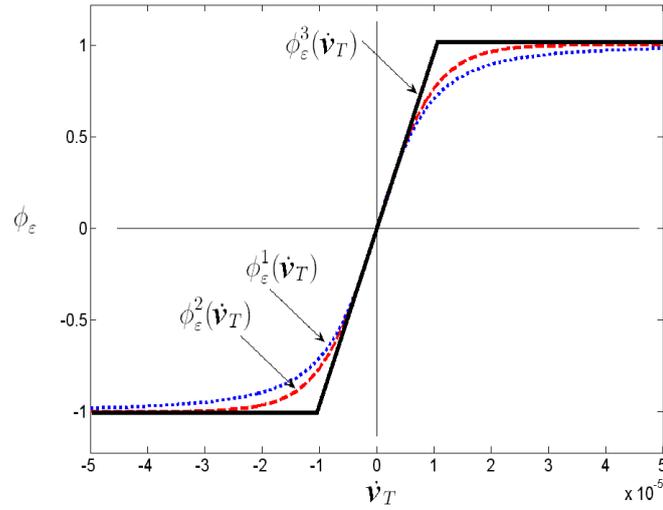


Figura 4-7: Tres regularizaciones de la ley de fricción con $\varepsilon = 10^{-5}$

modelo la fricción estática se modifica la ley (4.28). Se considera estática a la fricción en el caso en que $-\varepsilon < \dot{v}_T < \varepsilon$ y dinámica en el caso contrario. En la Ec.(4.27) se reemplaza el coeficiente μ por μ_e ó μ_d donde μ_e se corresponde con el módulo estático y μ_d con el dinámico que es generalmente inferior al primero (μ_e). En la Figura(4-8) se muestra la ley de Coulomb regularizada con fricción estática distinta a la dinámica.

En esta tesis se utiliza el modelo de Coulomb que incluye fricciones estáticas y dinámicas diferentes (Figura (4-8)). Otros modelos de fricción son presentados en el Apéndice D.

4.4. Formulación débil

Cuando se pretenda resolver un problema diferencial en derivadas parciales con múltiples complejidades en la forma del contorno, sea este lineal o no lineal, es de gran utilidad plantear estas ecuaciones en forma débil, un ejemplo de esto es el método de elementos finitos que utiliza dicha forma débil de las ecuaciones diferenciales a resolver [136] (ver

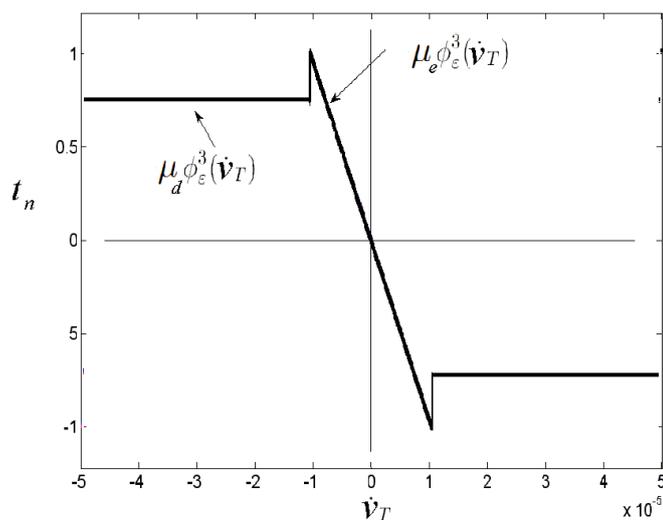


Figura 4-8: Ley de Coulomb que incluye el caso estático y dinámico

Apéndice E). Además al *integrar por partes*, utilizando los teoremas integrales del cálculo vectorial [17], se puede tener una idea clara (sin ambigüedades) del tipo de condiciones de borde a imponer.

4.4.1. Ecuaciones de movimiento en forma débil

Es muy simple pasar a la llamada forma débil o formulación débil de las ecuaciones de movimiento. Sea \mathbf{W} cualquier campo vectorial de variable perteneciente al cuerpo en su configuración indeformada (coordenadas materiales o *lagrangianas*), y de cuadrado integrable. Multiplicando escalarmente las ecuaciones de movimiento (4.3) por \mathbf{W} se obtiene:

$$\iiint (\nabla_X \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} - \rho_0 \mathbf{A}) \cdot \mathbf{W} \, dV = \mathbf{0} \quad (4.29)$$

$$\iint_{\partial V} (\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{W}) \, dA_0 + \iiint [\rho_0 (\mathbf{b} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{W} - \mathbf{P} \cdot \nabla_X \mathbf{W}] \, dV = 0 \quad (4.30)$$

donde la Ec.(4.30) se obtiene de la Ec.(4.29) al integrar por partes (usando el teorema de Gauss). Recuérdese que (∇_X) significa gradiente y $(\nabla_X \cdot)$ divergencia respecto de la coordenada X .

La integral de superficie, se divide en dos partes. Supóngase que el desplazamiento u y por consiguiente la velocidad V es prescrita en una parte de la superficie del contorno (∂V^1) y la tensión es dada en la otra parte (∂V^2) . Con el objeto de incorporar las condiciones de borde Ec's.(4.13) y (4.14) en la forma débil (4.30), primero se toman *funciones de prueba* \mathbf{W} nulas en ∂V^1 . Luego la integral de superficie en la Ec.(4.30) se reduce a

$$\iint_{\partial V} (\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{W}) \, dA_0 = \iint_{\partial V^2} (\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{W}) \, dA_0 = \iint_{\partial V^2} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \mathbf{W} \, dA_0$$

Finalmente la formulación débil consiste en las siguientes igualdades:

$$\iint_{\partial V^2} (\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{W}) \, dA_0 = \iiint_{\partial V^1} [\rho_0 (\mathbf{b} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{W} - \mathbf{P} \cdot \nabla_X \mathbf{W}] \, dV \quad (4.31)$$

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} \quad \text{en} \quad \partial V^1 \quad (4.32)$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{x}_0(\mathbf{X}) \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{V}_0(\mathbf{X}) \quad (4.33)$$

para todo \mathbf{W} nulo en ∂V^1 .

Capítulo 5

Implementación computacional

Uno de los enfoques más utilizados para la solución de las ecuaciones de movimiento altamente no lineales con geometrías que podrían modelar o aproximar la forma misma de defectos en cuerpos fisurados, es la discretización numérica con el objeto de reducir el problema en derivadas parciales a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dependientes del tiempo. En los casos estáticos, la reducción de las ecuaciones diferenciales parciales, dará un sistema algebraico.

El método de Galerkin presenta una interesante alternativa a la solución de problemas con geometrías complejas ya que la única dificultad es disponer de un conjunto de funciones que sean nulas en las partes del dominio donde las condiciones de borde sean del tipo geométricas. La técnica de elementos finitos garantiza que una discretización lo suficientemente densa podrá aproximar la forma del contorno por más compleja que esta sea.

No es el objetivo de esta tesis desarrollar técnicas novedosas en los métodos de elementos finitos sino utilizar la metodología con el fin de resolver el problema de detección de fallas teniendo en cuenta no linealidades, cierre de la fisura, etc. para luego implementar la optimización. Es por eso que se utiliza el software comercial FlexPDE de gran potencia para realizar la discretización numérica. Importantes trabajos publicados en revistas de gran prestigio utilizan esta poderosa herramienta para resolver problemas de todo tipo,

por ejemplo ver [137, 138].

FlexPDE no es un programa de diseño. El usuario tiene que comprender el problema que resuelve ya que el modelo estará construido en forma completa por éste. Condiciones de borde, condiciones iniciales, ecuaciones diferenciales y formas del contorno serán dadas por el usuario. FlexPDE discretiza estas ecuaciones en elementos finitos [136].

Sin embargo es necesario tener un entendimiento de los algoritmos involucrados para interpretar las aproximaciones en los resultados numéricos, posibles inestabilidades, efectos de amortiguamiento o falta de convergencia. En el Apéndice E se da una breve descripción de la técnica de Galerkin usando elementos triangulares con funciones aproximantes polinómicas de orden uno, dos o tres.

5.1. Sobre la convergencia de la solución

Ya que el objetivo primero de esta tesis es construir un método para modelar el contacto y detectar una falla o fisura en un elemento estructural, y que la dinámica es muy poco sensible a la posición y profundidad de la fisura, se estudia qué tanto se tendrá que refinar la precisión del cálculo.

Existen, sin embargo, diferentes estrategias de análisis para la convergencia del cálculo numérico. En este Capítulo se utilizará la conservación de la energía, cuando el sistema sea conservativo, e incluso cuando no lo sea se tendrá en cuenta el trabajo hecho por las fuerzas disipativas, sean estas internas (disipación interna) o externas (fricción por contacto “seca” o fricción con el medio: “viscosa”).

El propio software FlexPDE utiliza dos formas de evaluar el error en la resolución de cada problema diferencial. Uno de ellos es el error espacial y el otro el temporal. La estrategia de medir el primero (error espacial) consiste en definir el error local como la integral de cada celda unidad de la ecuación diferencial multiplicada por la función aproximante correspondiente a dicha celda. Luego el error global será el valor cuadrático medio de todos los errores locales. Por otra parte, el error temporal local se define como

el valor de la aproximación de 3^{er} orden en el método de Gear (ver Apéndice E.1) de 2^{do} orden (error de truncado para cada celda) y el error temporal global será el valor cuadrático medio de todos los errores temporales locales.

Cuando se implemente el mallado adaptativo se definirá un error de tolerancia o umbral; luego si el error “local” supera dicha tolerancia, la malla será refinada. Si se implementa la integración temporal adaptativa, se definirá un error temporal límite o umbral del paso de tiempo. Éste será comparado, en este caso, con el error “global” temporal. Si dicho umbral es superado, el paso de tiempo se reducirá hasta que dicho error sea inferior al umbral.

El remallado, junto con el paso de tiempo adaptativo puede provocar falta de convergencia (típico en los problemas de contacto y de fricción) ya que una malla muy fina inestabiliza al integrador temporal que reducirá el paso de tiempo haciendo crecer los errores espaciales que harán la malla más fina, etc. En los ejemplos presentados en la sección siguiente se deshabilitará la opción de remallado y se implementará el paso adaptativo.

La última opción para el estudio de convergencia consiste en fijar la malla y el paso de tiempo, e ir refinándolas hasta que para un determinado tiempo de simulación t las diferencias entre las configuraciones finales hagan

$$\iiint (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})^2 dV < \varepsilon \quad (5.1)$$

donde $\tilde{\mathbf{u}}$ corresponde a la aproximación de la configuración del cuerpo en un instante prefijado (configuración final), \mathbf{u} corresponde a la solución exacta y ε la tolerancia predefinida. Como la solución exacta es desconocida se tomara una aproximación con una malla muy refinada y un paso de tiempo muy corto.

5.2. Ejemplos en Mecánica de Contacto con Fricción

5.2.1. El péndulo y viga rotante deformable con fricción en el pivote

Con el objeto de ver las ventajas que presenta el modelo general del continuo elástico referido a coordenadas *lagrangianas* (4.4), se compara el ejemplo del péndulo (ver Figura 4-1) con condiciones de borde (4.15) y (4.16) y ecuación constitutiva (4.10), con dos modelos técnicos de pequeñas deformaciones para vigas, en donde se tienen en cuenta las rotaciones finitas.

Planteo del modelo de superposición

En este modelo, las ecuaciones de movimiento son tratadas por una superposición de dos movimientos, el de deformación y el rígido [139].

Las ecuaciones de vibración longitudinales y transversales de una viga según la teoría de la *Resistencia de Materiales* son:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f_1 \quad (5.2)$$

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial X^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f_2 \quad (5.3)$$

donde E es el módulo elástico, A e I son respectivamente el área y el momento de inercia de la sección transversal de la barra, ρ es la densidad volumétrica, u y v son los desplazamientos longitudinales y transversales respectivamente de tal forma que $\mathbf{u} = (u, v)^T$ es el vector corrimiento, y X es la coordenada del eje de la barra. Las funciones f_1 y f_2 son las eventuales fuerzas normales y transversales aplicadas.

Se asume que el movimiento del cuerpo es una superposición de un movimiento rígido y un movimiento de deformaciones pequeñas

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_d$$

donde $\mathbf{u}_r(t) = (u_r(t), v_r(t))^T$ es la parte rígida del movimiento y $\mathbf{u}_d(X, t) = (u_d(X, t), v_d(X, t))^T$ es la parte relativa a la deformación. Luego de remplazar en las Ec.(5.2) y Ec.(5.3) obtenemos

$$EA \frac{\partial^2 u_d}{\partial X^2} - \rho A \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2} \right) = f_1 \quad (5.4)$$

$$EI \frac{\partial^4 v_d}{\partial X^4} + \rho A \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v_d}{\partial t^2} \right) = f_2 \quad (5.5)$$

donde $\mathbf{u}_r(t)$ será obtenido de las ecuaciones del movimiento del cuerpo rígido que luego será remplazado en las ecs.(5.4) y (5.5). Para el caso del péndulo de largo L en la dirección y con una aceleración gravitatoria g (Figura 5-1) la ecuación del movimiento rígido del péndulo es $\ddot{\theta} + \frac{3}{2L}g \sin \theta = 0$. Una vez resuelta $\theta(t)$ se encuentra $u_r = X(\sin \theta - 1)$; $v_r = -X \cos \theta$.

Ecuaciones de movimiento deducidas del planteo del principio de Hamilton

Las ecuaciones de transformación cinemáticas son (Figura 5-1)

$$x(X, t) = X \sin \theta + u(X, t) \cos \theta + v(X, t) \cos \theta \quad (5.6)$$

$$y(X, t) = -X \cos \theta - u(X, t) \cos \theta + v(X, t) \cos \theta \quad (5.7)$$

Las contribuciones energéticas que se incluirán son las siguientes: W_1 contiene la deformación axial y torsional, W_2 es la energía generada por la tensión axial debida a la fuerza centrífuga en la deformación torsional bien conocida por ingenieros en la Resistencia de Materiales como efectos de segundo orden en la teoría de Inestabilidad del Equilibrio (pandeo). T es la energía cinética y P es la energía potencial gravitatoria. Sea

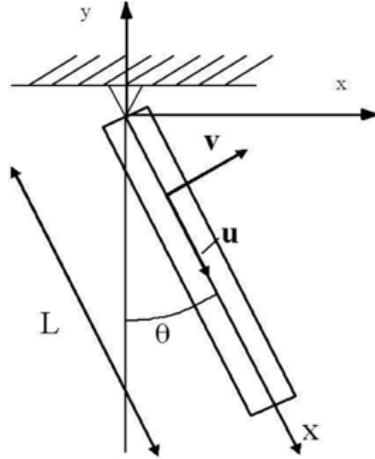


Figura 5-1: El péndulo y sus desplazamientos.

$\sigma = \rho\omega^2(L^2 - X^2)/2$ la tensión producida por la fuerza centrífuga, luego

$$2W_1 = EA \int_0^L \left(\frac{\partial u_d}{\partial X} \right)^2 dX + EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v_d}{\partial X^2} \right)^2 dX \quad (5.8)$$

$$2W_2 = \int_{(A)} \int_0^L \sigma \left(\frac{\partial v_d}{\partial X} \right)^2 dX dA \quad (5.9)$$

$$T = \rho A \int_0^L (\dot{x} + \dot{y})^2 dX \quad (5.10)$$

$$P = -\rho g \int_{(A)} \int_0^L y dX dA \quad (5.11)$$

Luego el *lagrangiano* es $\mathcal{L} = T - (W_1 + W_2 + P)$ y el principio de Hamilton [4]

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0 \quad (5.12)$$

dará las ecuaciones de movimiento

$$k_L \frac{\partial^2 u_d}{\partial z^2} - (\ddot{u} - \omega^2 u - 2\omega \dot{v}) = F(z, t) \quad (5.13)$$

$$k_v \frac{\partial^4 v_d}{\partial z^4} + (\dot{v}_d - \omega^2 v_d - 2\omega \dot{v}) + \omega^2 \left(\frac{z^2 - 1}{2} \frac{\partial^2 v_d}{\partial z^2} + z \frac{\partial v_d}{\partial z} \right) = G(z, t) \quad (5.14)$$

donde $k_L = E/\rho L^2$; $k_v = EI/\rho AL^4$; $F(z, t) = -(\omega^2 Lz + g \cos \omega t)$; $G(z, t) = -g \sin(\omega t)$.
y $z = X/L$ es la variable espacial adimensional.

Simulaciones y resultados

Ya que el modelo de superposición de efectos (5.4) y (5.5) no tiene incorporado el efecto de segundo orden Ec.(5.9) sólo es valido para movimiento pendulares suaves. El modelo deducido a partir del Principio de Hamilton sí lo incorpora y es por ello que se lo usa para simular movimientos rotatorios rápidos.

El péndulo es de largo $L = 5 \text{ m}$, con una sección normal de $A = 0.01 \text{ m}^2$, $E = 4 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-2}$, $\nu = 0.3$ y una densidad de $\rho = 7850 \text{ kg m}^{-3}$. Como condición inicial, se asume que el péndulo está en reposo en posición horizontal sin ser deformado y con velocidad nula. En este caso la barra rotante la llamaremos péndulo.

La Figura 5-2 compara el movimiento del péndulo según los modelos de a) superposición y b) teoría no lineal de en la referencia *lagrangiana*, utilizándose las ecuaciones de movimiento (4.4) con constitutiva (4.10) para el primer segundo a intervalos de $\Delta t = 0.1 \text{ s}$. En ambos casos ,los pasos de tiempo y la cantidad de elementos finitos utilizados son ajustados para que la solución no supere un error mayor a 1% definido en la Ec.(5.1) antes del primer segundo.

La variación de energía es útil en el estudio de la calidad de la solución numérica. En el problema del péndulo, no existen fuerzas de carácter disipativo, por lo que la energía total del mismo debe permanecer constante. Si bien ésta no es una condición suficiente para la exactitud de la solución, es necesaria y se la puede tomar como un parámetro más de convergencia para analizar la solución.

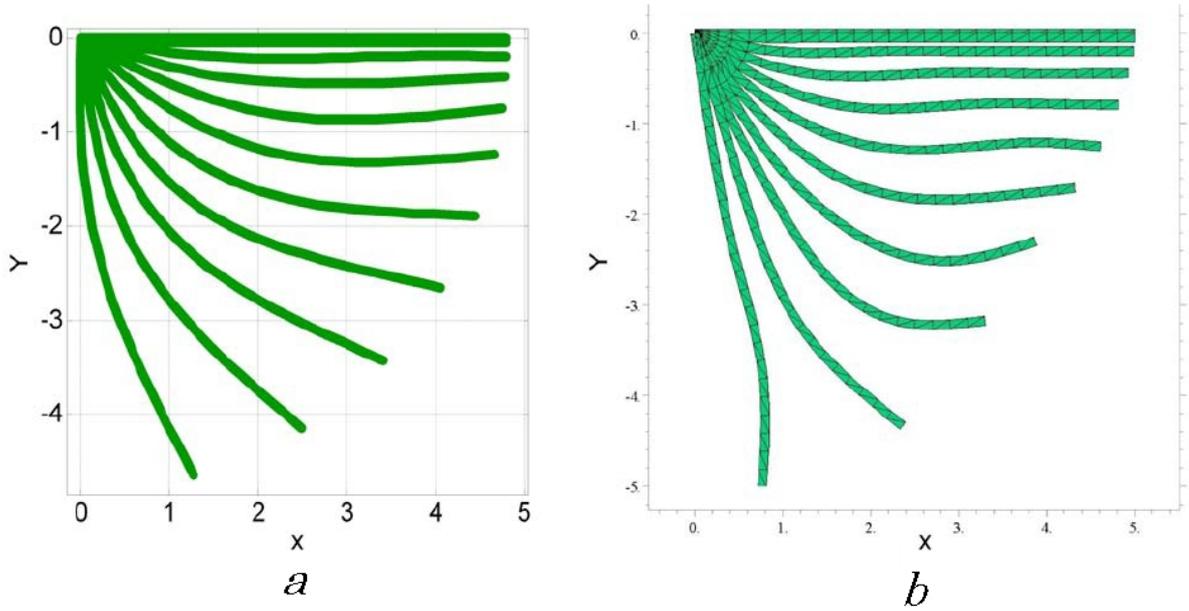


Figura 5-2: Instantáneas para el movimiento del péndulo según: a) Modelo de superposición y b) Teoría general 2d para movimientos arbitrarios

La energía total es:

$$E_{Total} = T + U_e + U_g \quad (5.15)$$

donde las energías en la referencia *lagrangiana* son: cinética

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho_0 \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \, dV \quad (5.16)$$

la potencial gravitatoria

$$U_g = g \iiint \rho_0 y \, dV \quad (5.17)$$

y la potencia elástica

$$\dot{U}_e = \iiint \text{tr} \left(\mathbf{S} \frac{D\mathbf{E}}{Dt} \right) \, dV \quad (5.18)$$

donde y es la coordenada espacial de cada punto del péndulo. Integrando una vez en el tiempo la Ec.(5.18) se puede reemplazar todo en (5.15). La Figura 5-3 muestra cada uno

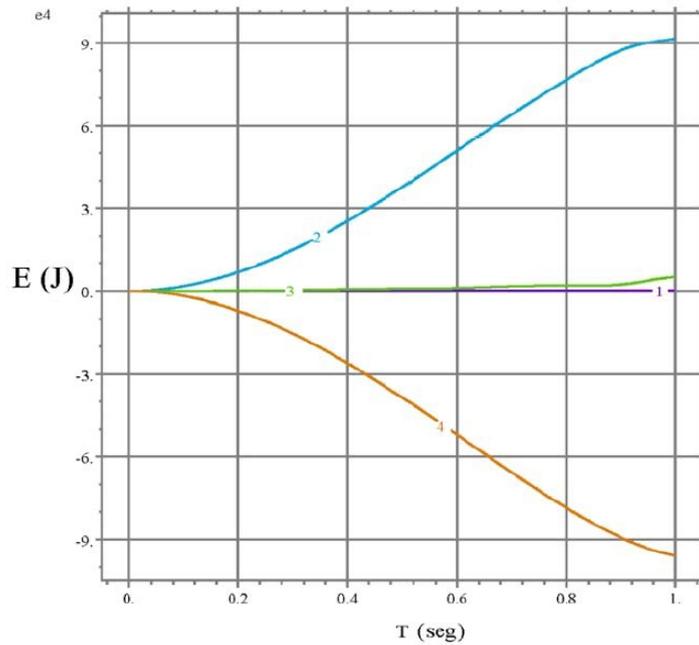


Figura 5-3: Energía del péndulo en Joules. Curvas (1) E , (2) T , (3) U_e y (4) U_g

de los términos de la energía total E (5.15). Como se puede observar E_{Total} permanece inalterado (al menos en el orden de cada término).

Se toma ahora $L = 1 \text{ m}$, $A = 0.01 \text{ m}^2$ densidad de $\rho = 7850 \text{ kg m}^{-3}$ un módulo elástico de $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$ y un $\nu = 0.3$. Se impone una velocidad angular de $\omega = 3000 \text{ rad/s}$ y en este caso lo llamamos viga rotante. Se propone condición inicial de desplazamiento nulo y velocidad consistente con los 3000 rad/s . La variación temporal de la coordenada X de la punta se muestra en la Figura 5-4. Las curvas son cualitativamente similares, pero como se puede observar las curvas correspondientes a la Resistencia de Materiales vía Principio de Hamilton, tiene picos más grandes. Esto es debido a que a pesar de usarse idénticos valores en las constantes elásticas, en el caso de la Teoría de la Elasticidad no lineal, la ley constitutiva se propone en referencia *lagrangiana* vía segundo tensor de tensiones de Piola Kirchhoff: S . Si se transforma según la Ec.(A.13) de $\mathbf{S} \mapsto \boldsymbol{\sigma}$ ($\boldsymbol{\sigma}$: tensor de tensiones de Cauchy), la relación tensión - deformación ya no es

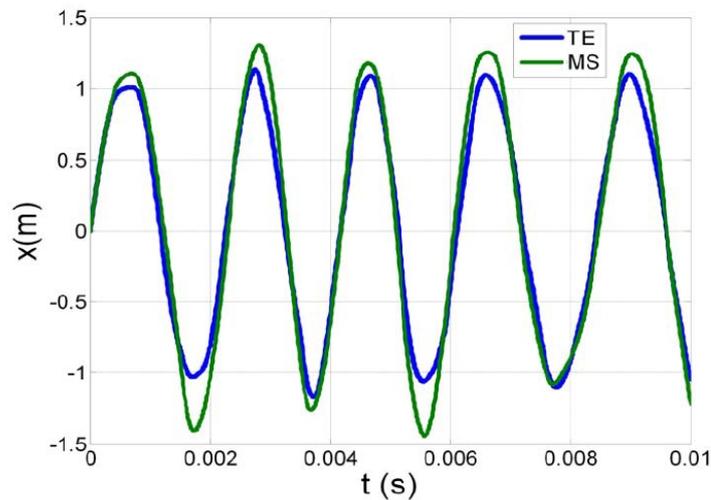


Figura 5-4: Coordenada x de la punta de la viga rotante para la primera centésima de segundo TENL: Teoría de elasticidad no lineal. MS: Modelo de Resistencia de Materiales vía principio de Hamilton

lineal sino que es de tipo rigidizadora, es decir a mayor deformación el cuerpo se comporta como si fuera cada vez más rígido.

La Figura 5-5 muestra la variación de las cinco primeras frecuencias de vibración de la viga rotante según la Elasticidad no lineal en referencia *lagrangiana* (línea punteada) y la Resistencia de Materiales (línea continua).

Como se puede observar en la Figura 5-5, los resultados son muy parecidos con un aumento en dichas frecuencias en función con la velocidad angular ω . Este efecto de rigidización que resulta natural en la teoría de la Elasticidad no lineal en referencia *lagrangiana*, no se daría en la Resistencia de Materiales si no se incluyera el aporte energético Ec.(5.9), más aun, si se lo ignorara, como en la Teoría de superposición de movimiento (5.4) y (5.5), las frecuencias *naturales* disminuirían con la velocidad angular hasta anularse por completo cuando ω coincidiera con las frecuencias de la correspondiente viga en reposo, resultado inconsistente con la experiencia.

Como se trata de un problema de movimiento plano es de esperar que las simulaciones

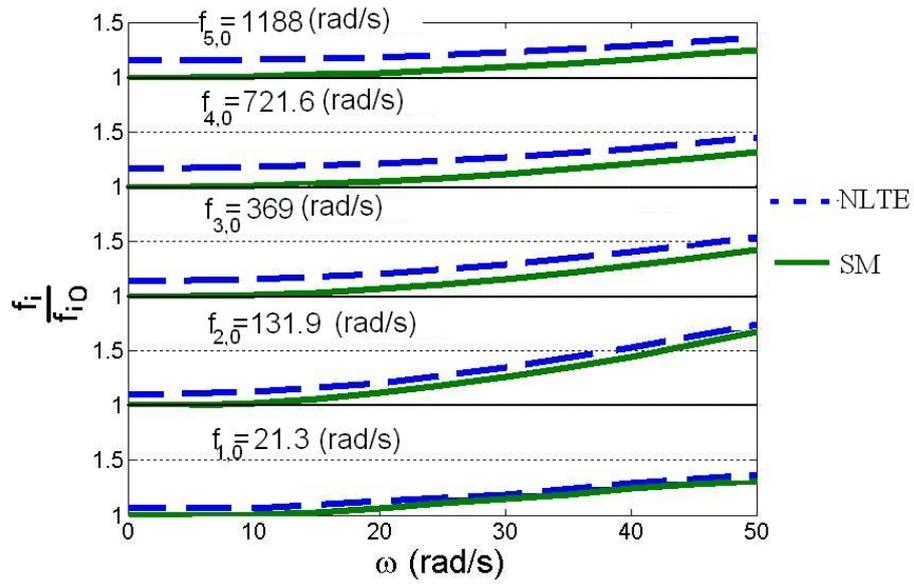


Figura 5-5: Variación de las primeras cinco frecuencias en función de ω . - - Teoría de la Elasticidad no lineal referencial lagrangeana. — Teoría de Resistencia de Materiales vía Hamilton.

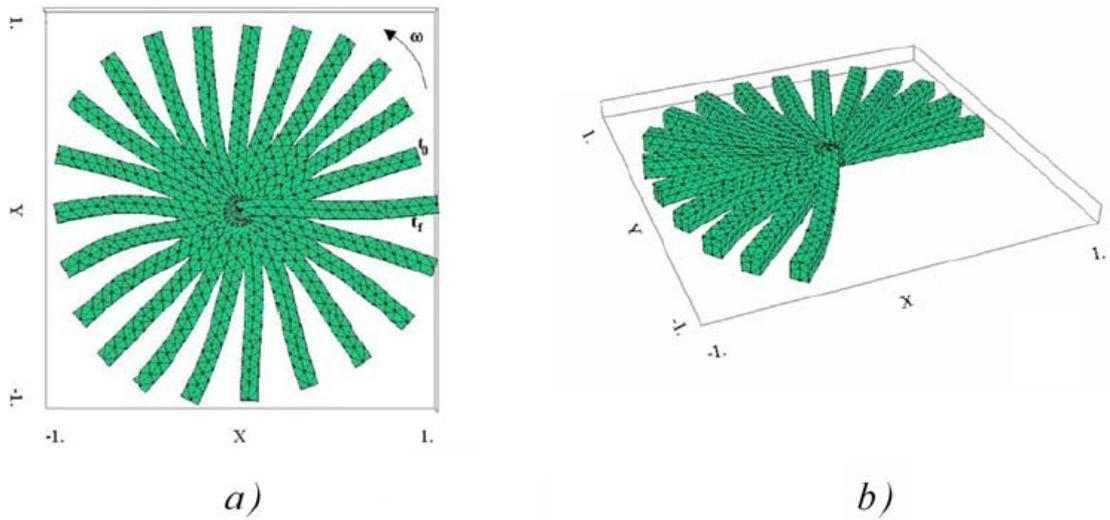


Figura 5-6: Secuencia del movimiento de rotación para la viga 3D

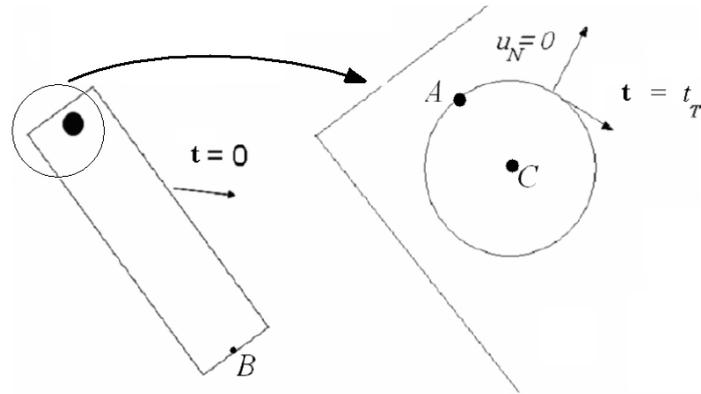


Figura 5-7: Esquema de las condiciones de borde para el péndulo con fricción en el pivote

en 3D no difieran mucho de las 2D. La Figura 5-6 muestra la secuencia de rotación para la barra en 2 y 3 dimensiones, caso a) y b) respectivamente. En el caso a) se muestran los primeros $2.3 \cdot 10^{-3} s$ del modelo 2D y en el caso b) los primeros $1.6 \cdot 10^{-3} s$.

Fricción en el eje

En lo que sigue, se tratará al péndulo utilizando un modelo 2D. El pivote (pasante del eje del péndulo) que antes era puntual se remplazará por un círculo (ver Figura 5-7). Las condiciones de borde impuestas sobre el péndulo son las siguientes. En la superficie exterior el vector tensión \mathbf{t} es nulo y en el caso que no hubiera fricción en el pivote, la componente normal del desplazamiento y la componente tangencial de la tensión también serán nulas. Para el caso que se considere la fricción, en el pivote del péndulo vale $u_n = 0$; y $\mathbf{t} = t_T \hat{\mathbf{T}}$ viene dada por (4.27).

Ya que la fuerza de fricción depende de la fuerza normal en el pivote (que es desconocida) se reformula el problema para que todas las condiciones de borde queden en término de las tensiones: se supone que a cada punto del pivote (eje) le corresponde una tensión normal proporcional al desplazamiento $t_n = -k u_n$. Luego dada una constante k

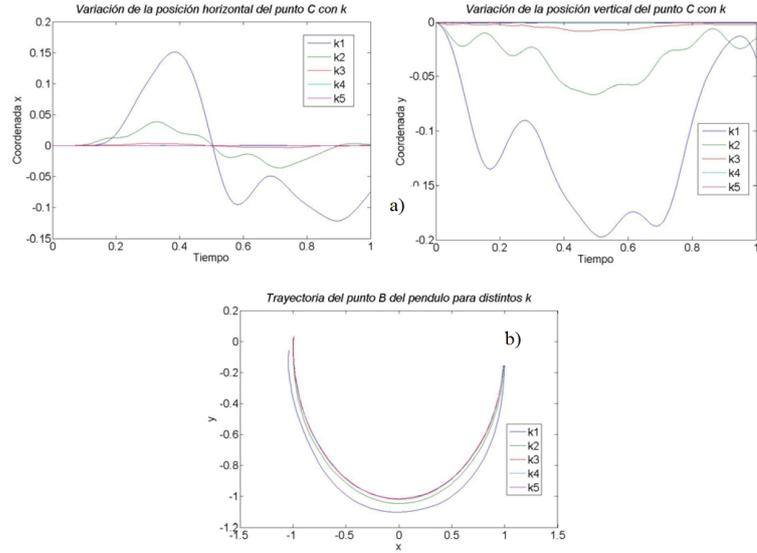


Figura 5-8: a) Coordenadas x e y del punto C (eje) en el tiempo. b) Trayectorias del punto B (extremo libre del péndulo).

lo suficientemente grande se podrá aproximar el problema anterior. Luego

$$\mathbf{t} = -k u_n \hat{\mathbf{N}} + t_T \hat{\mathbf{T}} \quad (5.19)$$

Resultados numéricos

Se trata de un péndulo plano de longitud $L = 1 \text{ m}$, ancho $d = 0.15 \text{ m}$, material con un módulo elástico de $E = 6 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ y $\nu = 0.3$ girando alrededor de un eje de radio $R = d/4$ que se supondrá con distintas flexibilidades a través de valores de rigidez k (N/m/m). También se estudian variaciones en la fricción entre péndulo y eje. Se utiliza un modelo 2D con 132 elementos cuadráticos. El péndulo es liberado desde la posición horizontal en reposo.

Influencia de la flexibilidad del eje La respuesta en el tiempo del péndulo en movimiento fue hallada para distintos valores de la rigidez del eje con $k_1 = \frac{0.1}{m} E$, $k_2 = E$, $k_3 = \frac{10}{m} E$, $k_4 = \frac{100}{m} E$, $k_5 = \frac{1000}{m} E$ (donde E es el valor del módulo de elasticidad). Esto

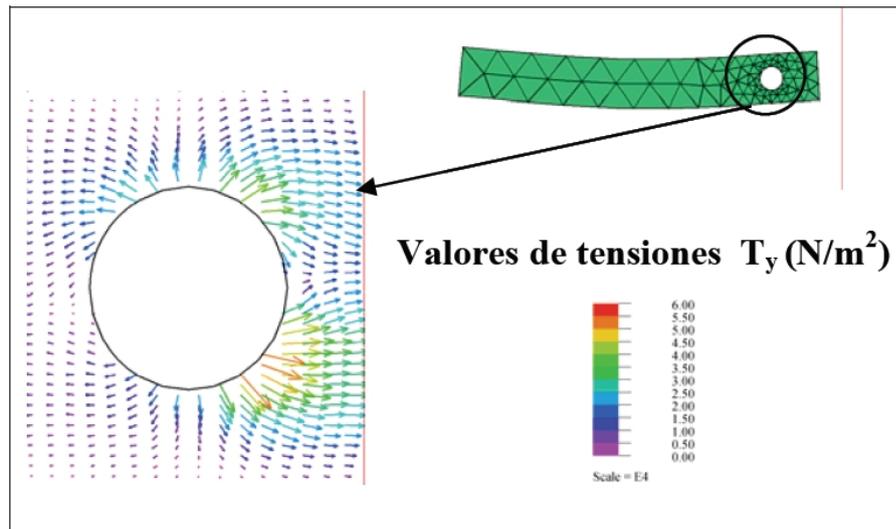


Figura 5-9: Valores y direcciones de tensiones Piola – Kirchoff en una región cercana a la junta para $t = 1$ s con $k = \frac{1000}{m} E$

es, el eje varía de más flexible a más rígido. Para evaluar la influencia de este parámetro se muestran en la Figura 5-8 a las variaciones en el tiempo de las coordenadas x e y correspondientes al punto C (ver Figura 5-7).

Puede observarse que si el eje es muy flexible (k_1) el punto sufre oscilaciones notables. A medida que se rigidiza (k_5), el punto tiende a mantenerse en reposo. El efecto de la flexibilidad es también visible en la Figura 5-8 b que representa las trayectorias del punto B (en el extremo libre del péndulo) correspondientes aproximadamente a medio período del modelo rígido análogo. Puede verse que a mayor flexibilidad del eje el punto B tiene una trayectoria más baja, como era de esperar.

Otro resultado interesante que permite evaluar el comportamiento de la junta es un mapeo de las tensiones en una región cercana al eje, en un instante. En la Figura 5-9 se muestran los vectores tensión de Piola – Kirchoff correspondientes al plano cuya normal es el eje y , para el instante $t = 1$ s con $k = \frac{1000}{m} E$, en una zona alrededor de la junta.

Influencia de la fricción en el eje La fricción entre el material del péndulo y el eje es tomada en cuenta con el modelo de fricción seca (modelo de Coulomb). Se consideran dos coeficientes, uno estático $\mu_e = 0.7 \cdot a$ y otro dinámico $\mu_d = 0.5 \cdot a$, siendo a un parámetro que puede valer $a = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1$. Durante el movimiento las superficies en contacto alternarán entre fricción estática y dinámica dependiendo de las condiciones en cada instante.

En la Figura 5-10a se muestran las coordenadas x del punto C para dos valores del parámetro a , en todos los casos con $k_5 = \frac{1000}{m} E$. Dado que el período del péndulo rígido es de aproximadamente $\tau = 1$ s, puede observarse que cada segundo se produce una inestabilidad (“stick y slip” en inglés) en el movimiento debido a una alternancia entre el rozamiento estático y dinámico que se hace más evidente cuanto mayor es el valor de los coeficientes de fricción o sea del valor del parámetro a . Se advierte que luego de 6 segundos se aumenta la inestabilidad, coincidiendo con una disminución en la velocidad pendular. La Figura 5-10b muestra los valores instantáneos de la relación Fuerza de fricción / Fuerza normal en el punto A (ver Figura 5-7). Es notable la inestabilidad a partir de los 6 segundos o sea la alternancia entre fricción estática y dinámica.

La Figura 5-11 incluye los diagramas de variación de energía para el péndulo sin rozamiento ($k_5 = \frac{1000}{m} E$) y con rozamiento para el mismo k y $a_5 = 1$. Es de notar la conservación de la energía total E_{total} en el primer caso. En forma similar que en el caso rígido, la energía cinética T va en contrafase con la energía potencial gravitatoria U_g . Una pequeña cantidad de la energía se intercambia con la energía elástica U_e . Dado que el sistema, en este caso, es conservativo, este análisis es útil para controlar la calidad de la solución numérica. En el otro caso, péndulo con fricción, se observa la disipación de la energía total.

Para resumir fue modelado el péndulo flexible con distintas flexibilidades en el eje sin y con fricción seca, teniendo en cuenta coeficientes estáticos y dinámicos en el rozamiento. En este último caso pudo reproducirse exitosamente el fenómeno de inestabilidad por fricción, llamado en inglés, stick y slip, responsable de ruidos como el emitido por una

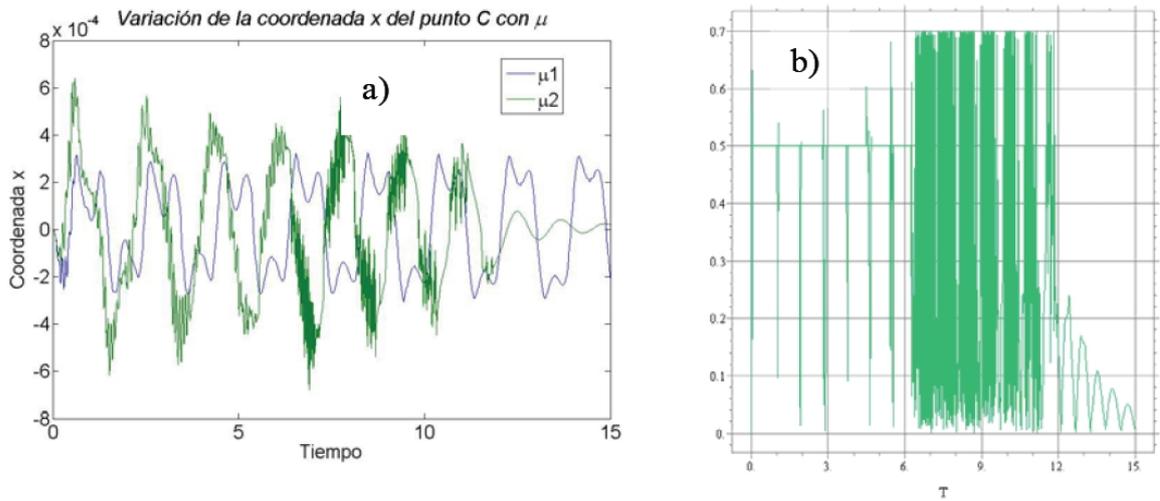


Figura 5-10: Influencia de la fricción en el eje a) variación temporal de la coordenada x del punto C, $a_1 = 0.1$ y $a_5 = 1$. b) Relación (Fuerza de fricción)/(Fuerza normal) en el punto A vs. Tiempo. $a_5 = 1$.

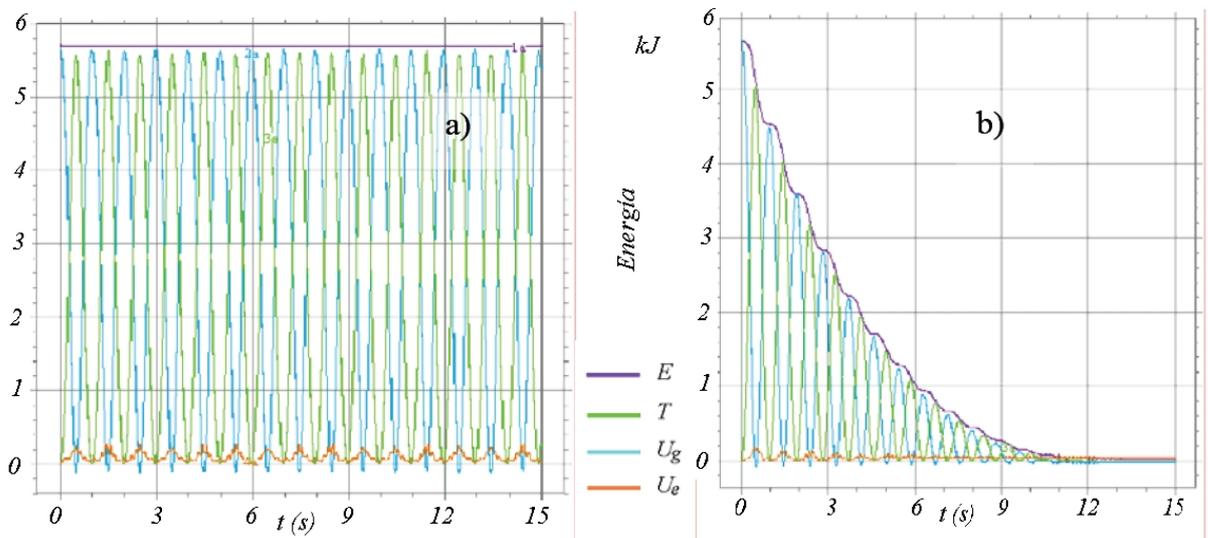


Figura 5-11: Energía (en kJ) en función del tiempo para a) movimiento sin fricción, b) movimiento con fricción ($a_5 = 1$ y $k = \frac{1000}{m} E$)

bisagra sin aceite, una rueda rozando en el pavimento al resbalar, la rueda de los trenes con la vía, etc. De hecho, la señal proveniente de este ejemplo fue procesada en MatLab para reproducir una señal cáustica lográndose percibir los sonidos propios de un vínculo rotante sin lubricación (chirrido de una bisagra seca). En definitiva, se cuenta con una herramienta que permite analizar efectivamente un problema por demás complejo y realizar estudios paramétricos como el presente, y posteriores estudios cualitativos y cuantitativos, con la potencia de haber sido derivada de principios rigurosos y generales.

5.2.2. Cilindro que choca y rueda contra un cuerpo rígido

Con el objeto de entender la dinámica de contacto entre un cuerpo flexible y otro rígido y calibrar el modelo computacional se estudia el comportamiento del impacto entre un disco plano contra un sólido rígido en el que existe fricción tipo Coulomb (seca).

Se deja caer el disco (movil) hasta impactar con un rígido. Dicho disco tiene un radio $r = 0.05 \text{ m}$. una densidad de $\rho = 1722 \text{ kg/m}^3$ y una ley constitutiva del tipo lineal (en la referencia *lagrangiana*) $\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\gamma\mathbf{E}$ con valores de λ y γ tales que en pequeñas deformaciones están en el rango de los elastómeros (gomas). Recuérdese que $\lambda = \nu E / (1 + \nu)(1 - 2\nu)$, $\gamma = E / 2(1 + \nu)$ donde E es el módulo elástico y ν es el coeficiente de Poisson, $E = 7 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-2}$ y $\nu \rightarrow 0.5$. La ecuación de movimiento en la referencia *lagrangiana* (4.4) es utilizada junto con las condiciones de borde dadas por las Ec's.(4.23) y (4.26) con las regularizaciones dadas por (4.25) y (4.27).

La Figura 5-12 esquematiza la geometría del problema, que para distintas condiciones iniciales dará dinámicas diferentes.

Disco que cae y rebota

El problema más simple de estudiar para esta dinámica, es el que corresponde al disco cayendo verticalmente. La Figura 5-13 muestra cómo el cuerpo es deformado durante la colisión contra el obstáculo rígido para distintos instantes de tiempo para un caso de incidencia oblicua con un ángulo θ_1 y una velocidad v_1 . Estudios de este tipo en modelos

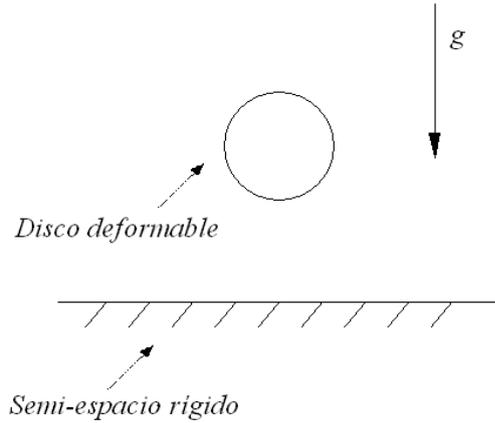


Figura 5-12: Esquema del disco plano que rebota contra una superficie lisa.

más simples se pueden encontrar en [140].

En este caso la simulación es realizada con un ángulo $\theta_1 = \pi/3$ y una velocidad de $v_1 = 12 \text{ m/s}$. Contra el cuerpo rígido existe en este caso una fricción del tipo (4.27) con un coeficiente dinámico $\mu_d = 0.5$ y uno estático $\mu_e = 0.7$.

Ya que toda la dinámica es simulada, cualquier parámetro construido a partir de ella podrá ser calculado. Por ejemplo la fuerza total que el sólido rígido transmite al disco elástico es la integral del producto las aceleraciones con las densidades en todo el dominio

$$\mathbf{F}(t) = \iiint_{Vol} \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) \rho_0 dV \quad (5.20)$$

La componente vertical de esta fuerza, que da el impulso del disco efectuado por el rígido, es graficado en la Figura 5-14 a. Las oscilaciones son debidas a las múltiples reflexiones de la onda de impacto en el contorno del disco. La fuerza de fricción se grafica en la Figura 5-14 b, el detalle corresponde a la inestabilidad entre la fricción estática y dinámica del disco mientras éste se desliza contra el rígido. Esta inestabilidad es caracterizada por una discontinuidad en la aceleración ya que repentinamente cambia entre la fricción estática y dinámica.

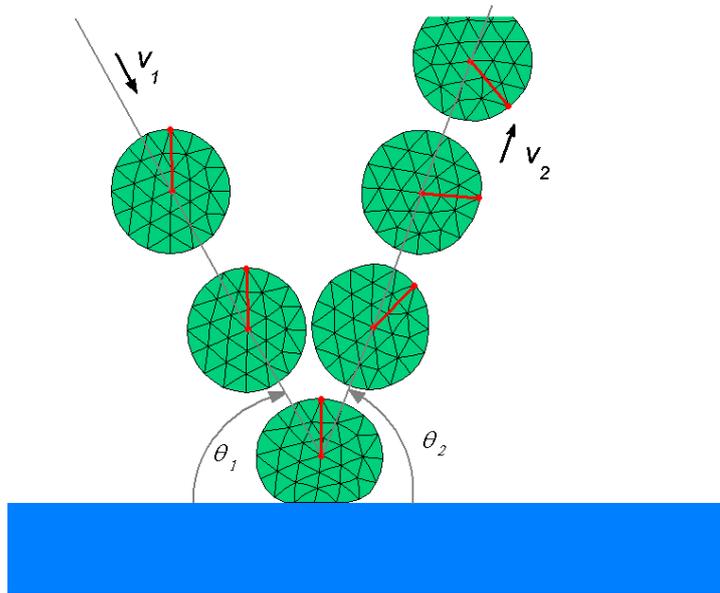


Figura 5-13: Colisión contra el obstáculo rígido para distintos instantes de tiempo.

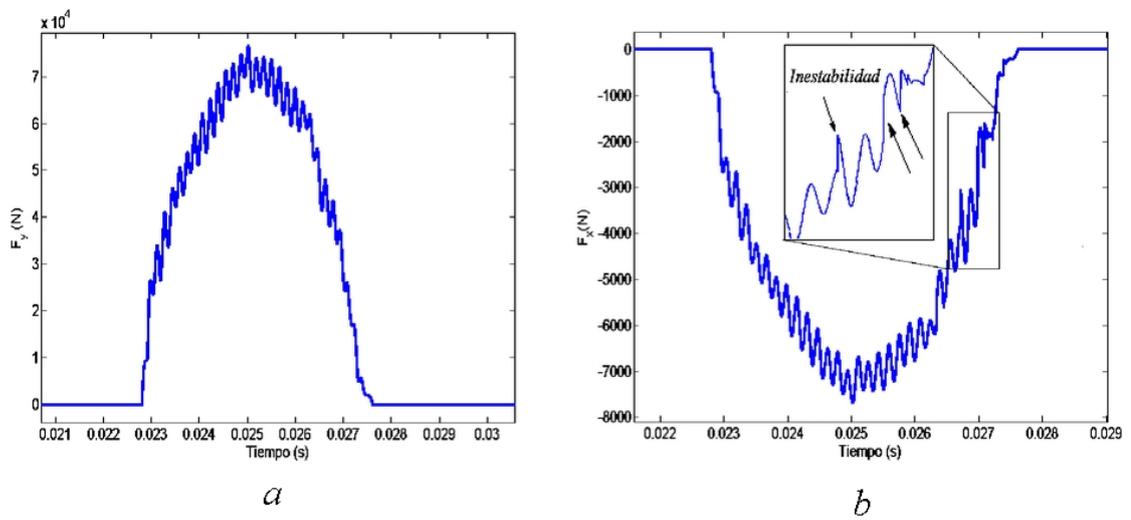


Figura 5-14: a) Fuerzas de contacto: Fuerza normal. b) Fuerzas de contacto. Fuerza tangencial (de fricción)

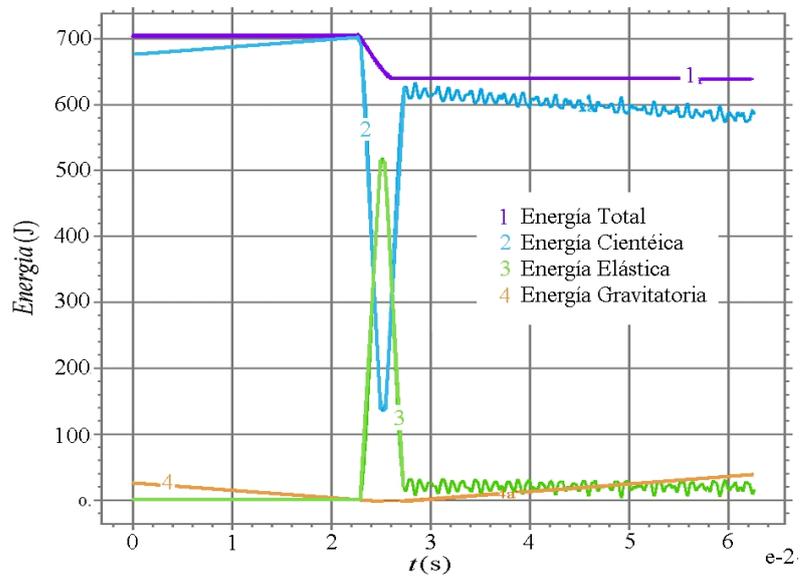


Figura 5-15: Energías del disco en función del tiempo durante el choque contra el sólido rígido.

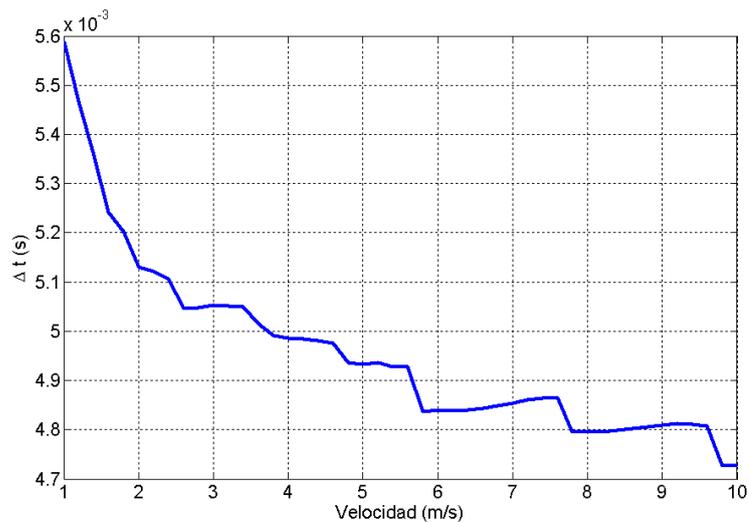


Figura 5-16: Tiempo que permanece en contacto el disco con el rígido en función de la velocidad inicial.

La variación de la energía del disco es graficada en la Figura 5-15. En ella se puede observar como la energía total es constante hasta que empieza el contacto, en ese momento comienza a disminuir y luego, antes que termine el contacto, vuelve a ser constante. Esto es porque en el primer momento la fricción es de carácter dinámica y luego, aproximadamente el último tercio del tiempo de contacto, ésta es de carácter estática que es de tipo conservativo. Es decir en el último tercio del contacto el disco gira sin deslizar. También es interesante observar como la energía elástica es nula antes del impacto y luego de éste, es fluctuante junto con la energía cinética.

Otro aspecto interesante de este estudio, es la determinación del tiempo que permanecen en contacto los dos cuerpos. Esto puede ser calculado entre los instantes en que la fuerza deja de ser nula hasta que vuelve a serlo. Por ejemplo, en este caso, el tiempo de contacto es $\Delta t = 0.0045 \text{ s}$.

La Figura 5-16 muestra el tiempo que están en contacto los dos cuerpos (disco deformable y semi-espacio rígido) en función de la velocidad inicial del disco. En este caso, el disco incide en forma normal al semi-espacio (rígido), es decir que $\theta_1 = \pi/2$, y no están

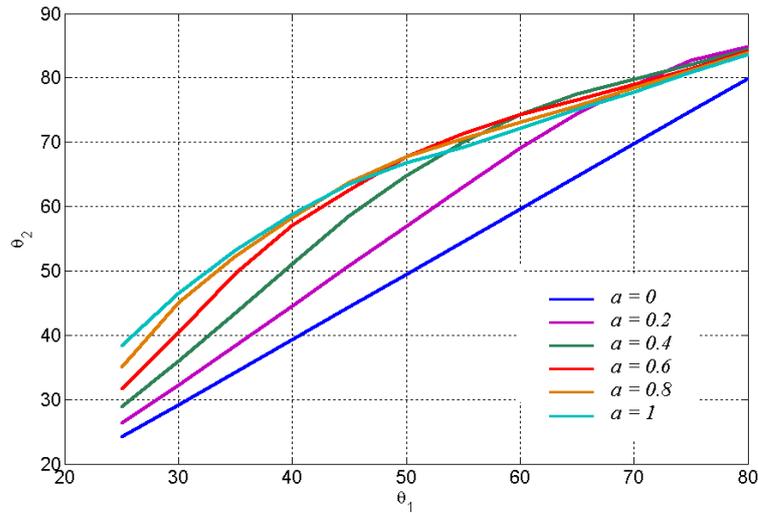


Figura 5-17: Ángulo de rebote en función del ángulo de incidencia para distintos coeficientes de fricción dados por el parámetro de fricción a

presentes ni la fricción de contacto ni la gravedad.

Puede observarse cómo en términos generales el tiempo de contacto disminuye con la velocidad de incidencia. Un resultado inesperado es que esta disminución del tiempo de contacto no es monótona, sino que parece escalonada con leves aumentos entre escalones. Esto es debido a que a medida que la velocidad aumenta, las ondas son reflejadas en el contorno del disco menos veces; estos escalones están relacionados con el número de reflexiones internas.

Cuando un cuerpo impacta en forma oblicua contra un rígido fijo y no existe fricción entre estos cuerpos, el cuerpo será reflejado con el mismo ángulo con el que incidió. Este resultado, de fácil demostración en la mecánica del rígido, puede extenderse también al caso en que la fricción sea considerada. En este último caso el ángulo de salida no tiene por qué ser el mismo. Sin embargo, si el cuerpo es deformable, es de esperar diferencias con los modelos rígidos. Precisamente en la Figura 5-13 se puede advertir que el ángulo de salida (θ_2) no es igual al de incidencia.

Un estudio paramétrico es reportado en la Figura 5-17, donde se grafican los ángulos

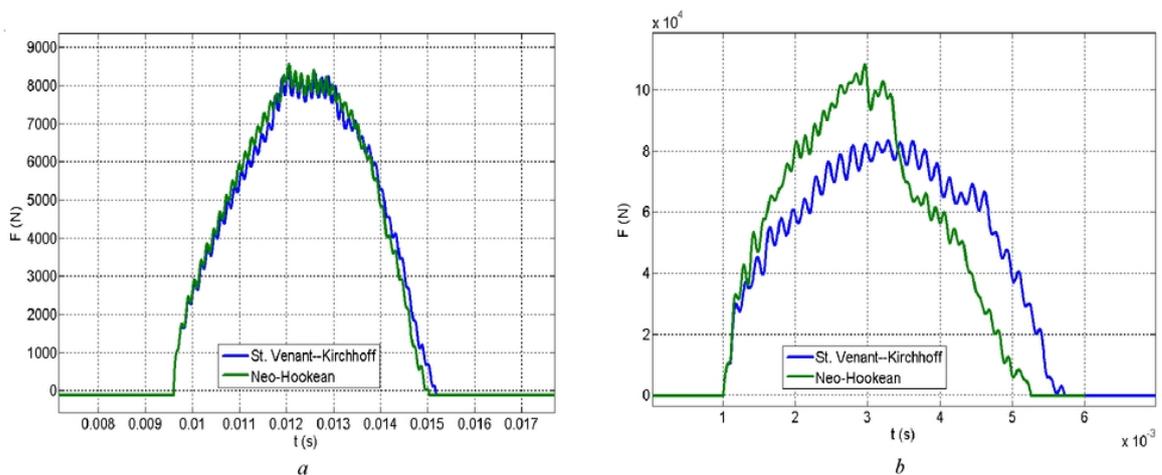


Figura 5-18: Comparación de la fuerza de contacto durante el impacto del disco entre las constitutivas tipo St Venant Kirchoff y Neo Hookean. a) Velocidad de incidencia del disco: 1 m/s . b) Velocidad de incidencia del disco: 10 m/s

de rebote en función de los ángulos de incidencia para distintos parámetros de fricción. En todos los casos el valor de la velocidad inicial es de 2 m/s . Aquí $\mu_e = 0.7 a$ y $\mu_d = 0.5 a$, y a varía entre 0 y 1. Como era de esperar, en el caso de fricción nula ($a = 0$), el ángulo de incidencia es igual al de rebote y en los otros casos (con fricción) el ángulo de rebote siempre es mayor al de incidencia ya que la fricción es en el sentido contrario a la velocidad tangente del disco sobre el semi espacio rígido.

Un modelo más realista para la deformación de un cuerpo tipo elastómero, está dado por la Ec.(4.11) donde las constantes γ y λ coinciden con λ y γ dadas por la Ec.(4.10). Este modelo constitutivo, altísimamente no lineal, insinúa un tiempo de cálculo considerablemente mayor. Sin embargo en el caso de un impacto suave, Figura 5-18 a) no presenta grandes diferencias en la respuesta dinámica. Por el contrario cuando el impacto demanda grandes deformaciones, Figura 5-18 b), las dinámicas resultan diferentes. Las fuerzas de los impactos graficados en la Figuras 5-18 a) y 5-18 b) corresponden a incidencias normales sobre el semiespacio rígido con velocidades de $v_1 = 1 \text{ m/s}$ y $v_1 = 10 \text{ m/s}$ respectivamente. En estos gráficos se puede apreciar como el tiempo de

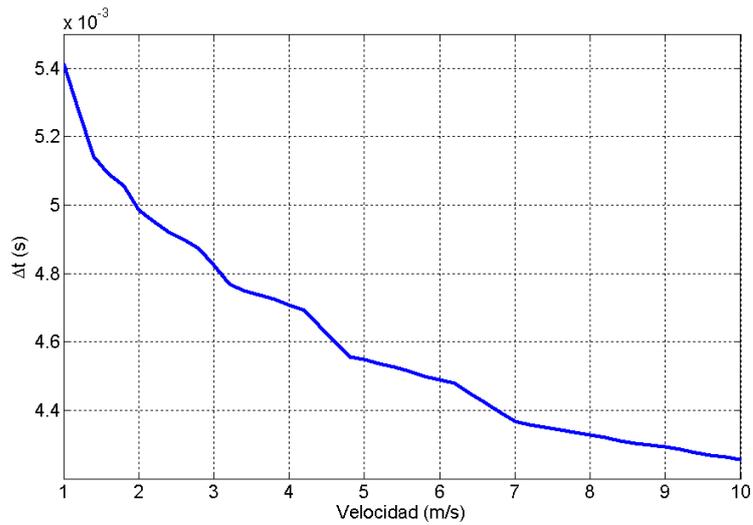


Figura 5-19: Tiempo que permanece en contacto el disco con el rígido en función de la velocidad inicial cuando el material está gobernado por la ley (4.11)

contacto es mayor para el material dado por (4.10) que para el Neo Hookeano (4.11).

La Figura 5-19 muestra el tiempo que están en contacto los dos cuerpos (disco deformable y semi-espacio rígido) cuando el disco es modelado por una ley constitutiva tipo NeoHookeano (4.11) en función de la velocidad inicial del disco. Como en el caso anterior, el disco incide en forma normal al semi-espacio (rígido), es decir que $\theta_1 = \pi/2$, y no se consideran la fricción ni la gravedad.

Puede observarse como el tiempo de contacto disminuye con la velocidad de incidencia. A diferencia de antes (Figura 5-16) la disminución ahora es monotónica.

5.2.3. Cilindro que choca contra un cuerpo deformable

Si ahora se reemplaza el cuerpo rígido (semi espacio rígido) por otro cuerpo deformable, el problema se torna más complicado ya que las posiciones de los puntos de cada contorno que efectuarán el contacto no sólo son desconocidas sino que los propios puntos que realizaran el contacto son desconocidos. Es por eso que se utiliza la (4.24), donde el precio

a pagar por tal generalidad es el considerable aumento de recursos computacionales, ya que no sólo se tienen que seguir la trayectoria de los contornos de los cuerpos para evaluar la condición de borde sino que también hay que calcular un mínimo de distancia en cada instante de tiempo.

Una estrategia que evita el cálculo del mínimo de las distancias, tal como lo indica la (4.24), es construir una nueva función $a(c)$ regularizadora del problema de contacto tal que

$$a(c_1) = \begin{cases} -k(d(x_1, x_2)) & \text{si } d < \varepsilon \\ 0 & \text{si } d > \varepsilon \end{cases} \quad a(c_2) = \begin{cases} -k(d(x_2, x_1)) & \text{si } d < \varepsilon \\ 0 & \text{si } d > \varepsilon \end{cases}$$

donde c_1 y c_2 son los contornos del cuerpo 1 y 2, $d(x_1, x_2)$ es la distancia entre el punto x_1 que corresponde a c_1 y el punto x_2 que corresponde a c_2 y ε es un número lo suficientemente pequeño. Luego la componente normal de la tensión de Piola- Kirchhoff en el borde del cuerpo 1 efectuada por la interacción con el cuerpo 2 y, la componente normal de la tensión en el borde del cuerpo 2 efectuada por la interacción con el cuerpo 1 será:

$$t_{cN_1} = \sum_{\forall x \in c_1} a(c_1) \quad (5.21)$$

$$t_{cN_2} = \sum_{\forall x \in c_2} a(c_2) \quad (5.22)$$

Si ε es aproximadamente del orden de la separación de los puntos de cada contorno y el número k es lo suficientemente grande se podrá garantizar que cada punto del cuerpo 1 interactuará con un único punto del cuerpo 2, ya que sólo existirá un $a(c_1) \neq 0$ y un $a(c_2) \neq 0$ para cada uno de los contornos y luego la suma se reducirá a esos únicos valores. De esta forma no será necesario buscar el punto que minimiza la distancia y por lo tanto, tampoco, el que efectúa el contacto.

La Figura 5-20 muestra una instantánea del impacto entre los dos cuerpos donde el correspondiente al rígido es reemplazado por uno deformable con dimensiones de $10 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ de idénticas características elásticas que el disco que tiene un radio de $r = 0.5 \text{ m}$. Dicho cuerpo no tiene vínculos externos, es decir está libre. En esta simulación no están

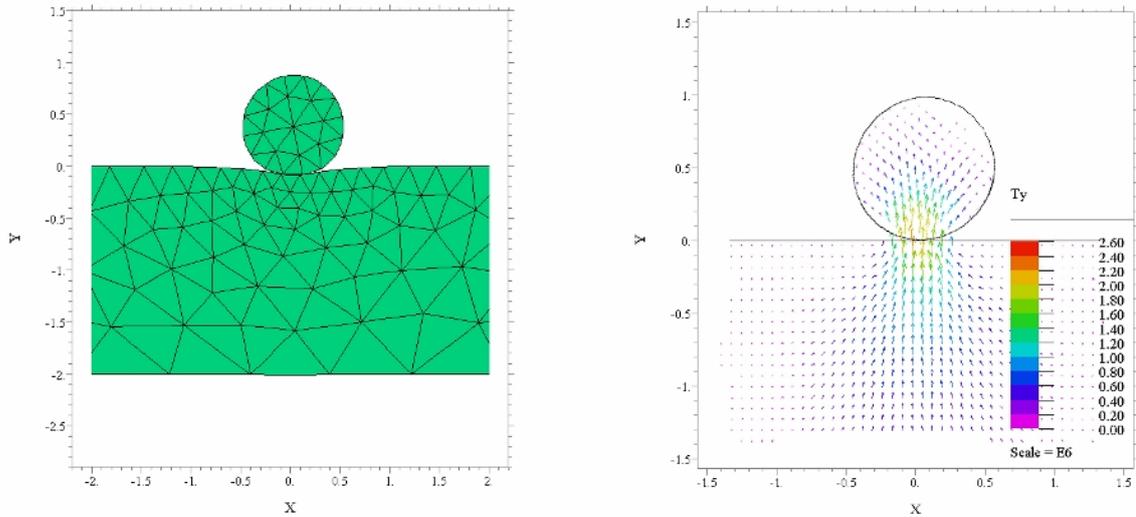


Figura 5-20: Instantánea del impacto entre los dos cuerpos deformables. A la izquierda se detalla la configuración deformada. A la derecha se detalla el estado tensional de los dos cuerpos según el versor normal n_y es decir $\mathbf{t}^{(n_y)} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}_y$

presentes las fuerzas de fricción entre los cuerpos ni la fuerzas gravitacionales y la ley constitutiva es la definida por la Ec.(4.10) con $E = 7 \cdot 10^6 Nm^{-2}$ y $\gamma \rightarrow 0.5$ y densidad de $\rho = 1722 kg/m^3$. Las condiciones iniciales del disco corresponden a un impacto con una velocidad de incidencia de $v = 10 m/s$ en dirección normal a la orientación del cuerpo grande que está en reposo. Luego del impacto, el disco es reflejado y el rectángulo (cuerpo grande) es impulsado hacia abajo. La parte derecha de dicha Figura muestra el campo tensional según el plano cuyo versor normal coincide con el eje Y .

La Figura 5-21 corresponde al mismo impacto que la Figura 5-20. En este caso se grafican las fuerzas de contacto en función del tiempo (parte izquierda de la figura) y la distribución de la tensión en el cuerpo grande (rectángulo) en el momento en que la fuerza de contacto es máxima (derecha).

Por ultimo, la Figura 5-22 muestra las variaciones de energía. En la figura de la izquierda a) se grafican las energías del disco solo, en la parte derecha (caso b) se tiene

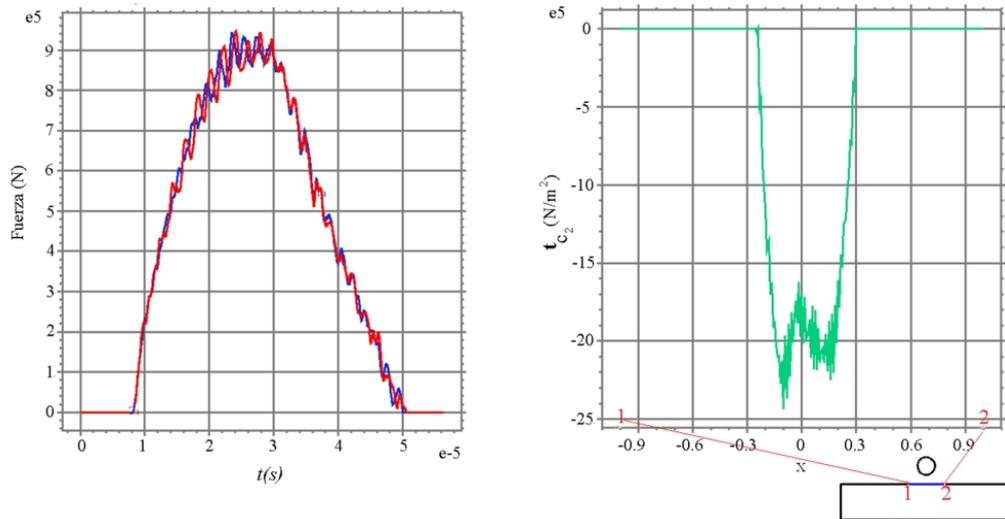


Figura 5-21: Impacto entre dos cuerpos deformables. Izquierda: fuerza correspondiente al disco impresa por el rectángulo (azul), reacción de dicha fuerza, es decir la fuerza sobre el rectángulo producida por el disco (rojo). Derecha: Tensión de Piola - Kirchoff en el cuerpo grande producida por el disco.

en cuenta la energía total, esto es disco más rectángulo. Es de notar la constancia en la energía total ya que el sistema es conservativo. Esta propiedad es usada como prueba en la convergencia numérica de las soluciones.

5.2.4. Esfera que choca con un rígido

Los ejemplos antes estudiados corresponden a modelos 2D de la dinámica no lineal de cuerpos deformables. No existe ninguna limitación, más que los requerimientos computacionales, para el modelado de cuerpos tridimensionales. El contacto se modela en forma idéntica.

La Figura 5-23 muestra una instantánea para el impacto entre la esfera contra un semi espacio rígido. La ecuación constitutiva de la esfera es del tipo (4.10) y como antes $E = 7 \cdot 10^6 Nm^{-2}$ y $\nu \rightarrow 0.5$ y densidad de $\rho = 1722 kg/m^3$ y un radio $r = 0.05 m$.

La condición inicial es de $v = 8 m/s$ en la dirección normal al plano $z = 0$ que es

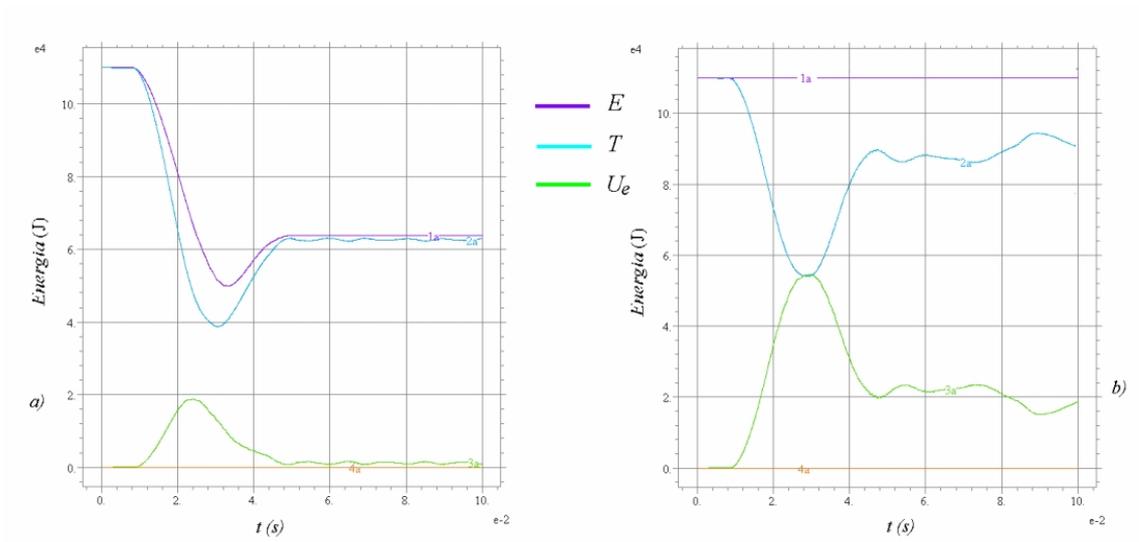


Figura 5-22: Variaciones de energía entre los dos cuerpos que impactan. a) Disco solo. b) Disco más rectángulo

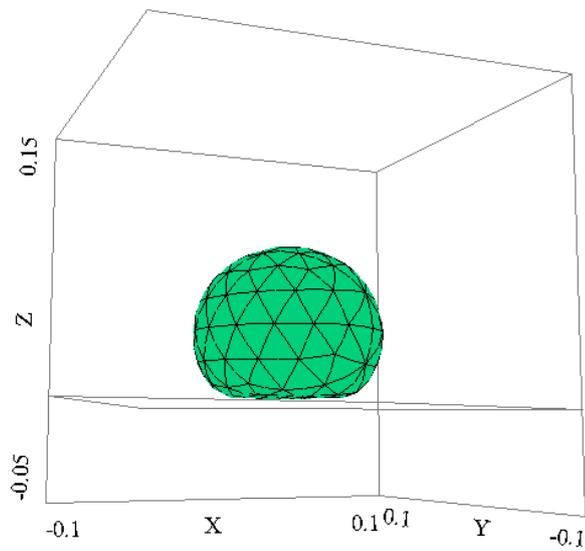


Figura 5-23: Instantánea del choque entre una esfera tridimensional contra un rígido

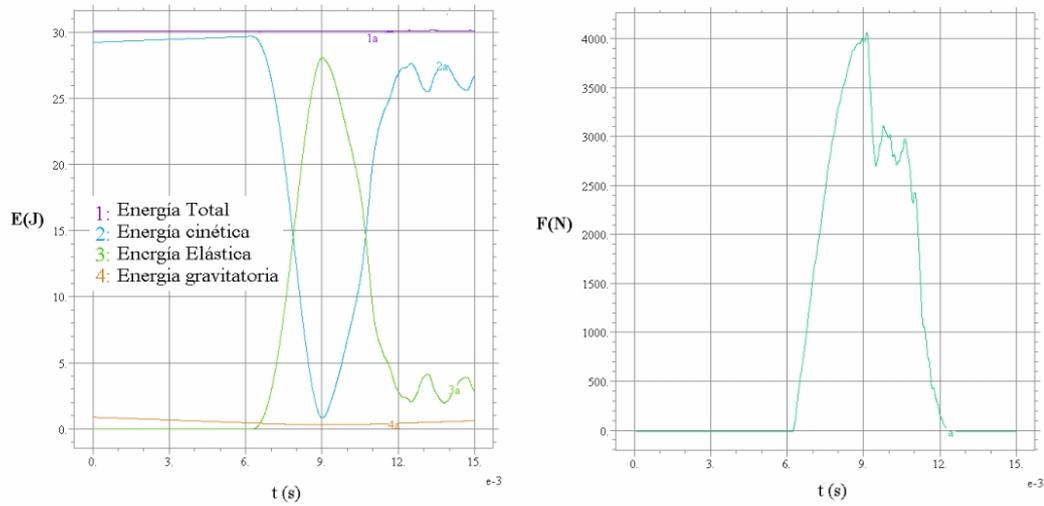


Figura 5-24: Gráficos de energía y fuerza en función del tiempo para la esfera. A la izquierda se grafican las energías en Joules. A la derecha la fuerza de contacto en Newton

donde se encuentra la interfase con el semi espacio rígido.

Para este impacto el tiempo de contacto es de $\Delta t = 0.00603$ s siendo de $\Delta t = 0.0048$ s para la simulación análoga en 2D (disco).

Como antes, los controles en el paso de tiempo adaptativo son testeados por la constancia en la energía ya que este es otro caso de choque conservativo, Figura 5-24. A la derecha de esta figura se grafica la fuerza de impacto en función del tiempo.

La aceleración del centro de masa es calculada por

$$\mathbf{A}_{CM} = \frac{1}{V} \iiint \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) dV \quad (5.23)$$

donde como siempre V es el volumen indeformado del cuerpo. La Figura 5-25 muestra las graficas de la aceleración en función del tiempo para el disco 2D con leyes constitutivas tipo (4.10) y (4.11) y la esfera 3D (que modelada con una ley constitutiva tipo Ec.(4.10)) cuando son impactados contra un semi espacio rígido. Es de notar como la aceleración en

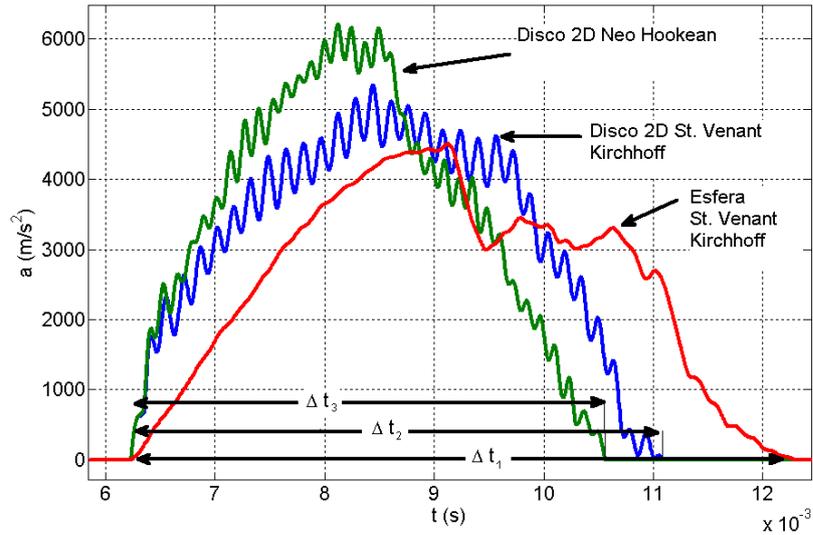


Figura 5-25: Comparación de las aceleraciones de los centros de masa para los discos con sus dos modelos constitutivos y la esfera 3D.

en caso de la esfera no es oscilatoria como en los casos de los discos ya sea con cualquiera de los dos materiales simulados. El tiempo de contacto es siempre mayor en una esfera que en un disco cuando las ecuaciones constitutivas son, al menos, similares.

La simulación del contacto, sea con fricción o no, es el paso principal para la construcción de un modelo general de cuerpo fisurado que tenga en cuenta la clausura de dicha fisura en el movimiento por deformación. Los tiempos computacionales para la resolución numérica de estos tipos de modelos altamente no lineales son considerablemente mayores que los análogos modelos 1D. Aun así, son justificables modelos 2D o 3D cuando los cuerpos a los que se les pretenda aplicar la detección de una fisura o detección de algún otro parámetro indeterminado no sean, del tipo esbeltos. Además la limitación computacional es un problema cada vez menos importante que ya la ciencia de la computación evoluciona a pasos agigantados.

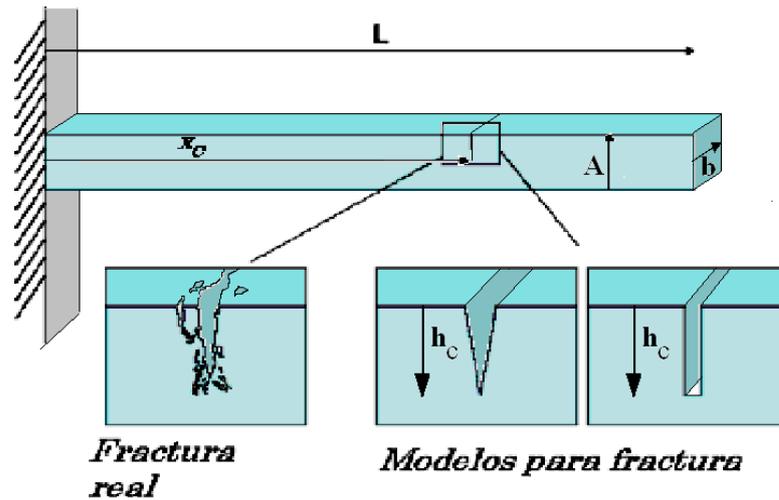


Figura 5-26: Esquema de la viga fallada

5.3. Dinámica de un cuerpo fisurado

Los modelos anteriores, correspondientes tanto a la dinámica de deformaciones finitas y contacto, serán aplicados a la simulación de cuerpos que presentan, en alguna región de su dominio, una falla o fisura. Al deformarse un cuerpo fisurado las interfases de dicha falla, podrían tocarse, por las solicitaciones externas, provocando la clausura de la fisura. Este tipo de deformaciones presenta una discontinuidad en el movimiento que se traducirá en una fuerte no linealidad de las ecuaciones gobernantes (o de sus condiciones de borde). El modelo de contacto presentado en los ejemplos anteriores es usado ahora para simular el contacto de esta fisura respiratoria. En lo que sigue no se tendrá en cuenta los efectos de fricción por contacto en la fisura.

5.4. Forma de la fisura y condición de contacto

En esta tesis se presentan distintos tipos de cuerpos con diferentes formas. Pero con el objeto de calibración del modelo, se usará un cuerpo tipo viga empotrado en un extremo y libre en el otro.

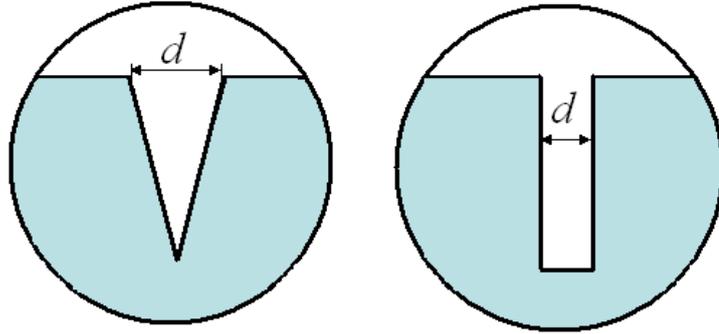


Figura 5-27: Los dos tipos de modelos para la fisura

La Figura 5-26 esquematiza los dos tipos de modelos de fisura que se usaran para simplificar el una fisura real en una viga tridimensional.

Ya sea el modelo de fisura tipo muesca o tipo cuña, será caracterizado por dos números x_c y h_c que indican la posición y profundidad de dicha fisura respectivamente. El espesor de ésta se tomara como un número fijo, (ver Figura 5-27) pero podría ser un parámetro más a determinar.

5.5. Estudio cualitativo de la dinámica lineal y no lineal de una barra fisurada

Cuando se aplica la teoría clásica de la elasticidad (ecuaciones de Navier) se pueden determinar las formas modales de una viga y sus correspondientes frecuencias propias. De hecho las ecuaciones de Navier son

$$\gamma \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \gamma) \mathbf{grad} \operatorname{div}(\mathbf{u}) = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (5.24)$$

donde λ y γ son las constantes de Lamé ya definidas en (4.10) para el caso no lineal. Si se descompone el movimiento en una parte temporal y otra espacial, esto es: $\mathbf{u} =$

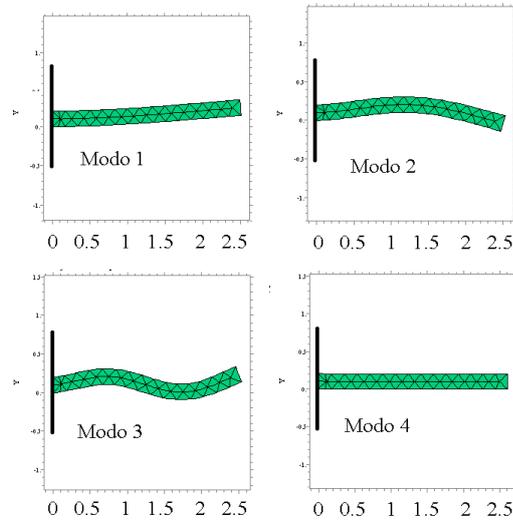


Figura 5-28: Primeros 4 modos normales solución de las ecuaciones de Navier

Modo	1	2	3	4	5	6
Frecuencias en Hz	27.76	168.84	452.5	539.6	838.5	1302

Tabla 5.1: Frecuencias para la viga sana

$\mathbf{u}_0(x) \sin(\omega t)$ las ecuaciones de Navier (5.24) se reducen al problema de valores y funciones propias

$$\gamma \nabla^2 \mathbf{u}_0 + (\lambda + \gamma) \mathbf{grad} \operatorname{div}(\mathbf{u}_0) + (\rho_0 \omega^2) \mathbf{u}_0 = 0 \quad (5.25)$$

del cual se podrán calcular los valores de las frecuencias libres y sus correspondientes formas modales una vez definidas las condiciones de borde.

La Figura 5-28 muestra las formas modales de una viga empotrada libre, solución de las ecuaciones de Navier en dos dimensiones. Con un módulo elástico $E = 7.3 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$ coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ densidad $\rho_0 = 2766 \text{ Kgm}^{-3}$ y dimensiones en metros, largo $L = 2.5 \text{ m}$ y alto $h = 0.5 \text{ m}$

Por otro lado, si se resuelven las ecuaciones completas de movimiento, es decir las dependientes del tiempo (5.24) para alguna condición inicial y se evalúa la transformada de Fourier se pueden encontrar las frecuencias de vibración. La Figura 5-29 muestra

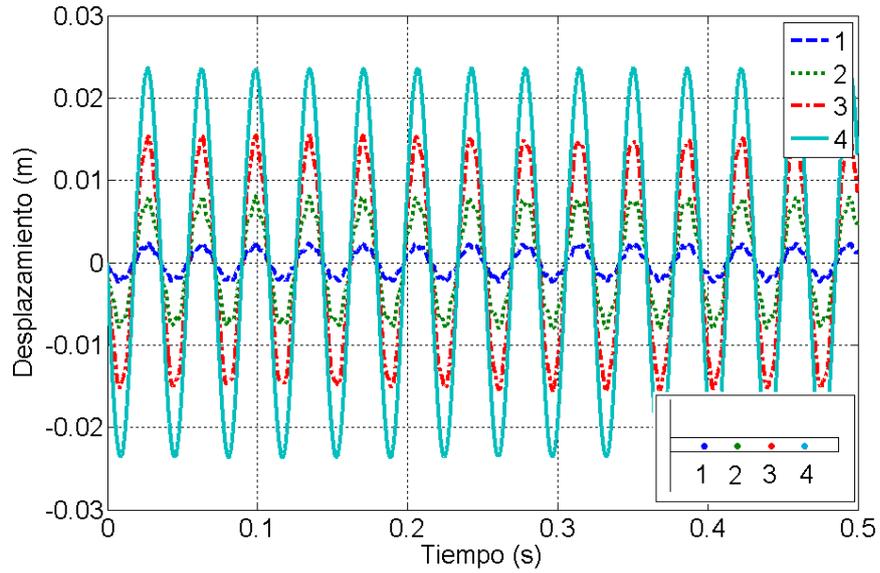


Figura 5-29: Movimiento oscilatorio transversal de la barra empotrada libre en cuatro puntos

la dinámica en cuatro puntos de una barra o viga lineal gobernada por la ecuación de Navier cuando la condición inicial es de desplazamiento nulo y velocidad transversal $v_y(X, Y) = 2 X \text{ m s}^{-1}$

La Figura 5-30 muestra el espectro de Fourier para la barra o viga en deformaciones pequeñas (lineal) sana: las frecuencias coinciden con las obtenidas a partir del cálculo modal (Tabla 5.1).

De idéntica forma se calcula la transformada de Fourier para el caso no lineal (aunque sana) (4.4), con ley constitutiva (4.10) para idéntica condición inicial (Figura 5-31). En este caso las deformaciones son muy pequeñas pero aun así se empieza a observar un interesante fenómeno no lineal: el espectro de Fourier revela nuevos picos que son combinaciones lineales de los correspondientes a la teoría lineal. El primero, de valor 56 Hz , corresponde a $2f_1 = 2 \cdot 28 \text{ Hz} = 56 \text{ Hz}$, el segundo de valor 142 Hz es $f_2 - f_1$, el tercer pico de valor 192 Hz es $f_2 + f_1$, el cuarto de valor 338 Hz corresponde a $f_2 + 6f_1$, el quinto y sexto pico de valores 426 Hz y 482 Hz son $f_3 \pm f_1$, y los últimos dos aquí

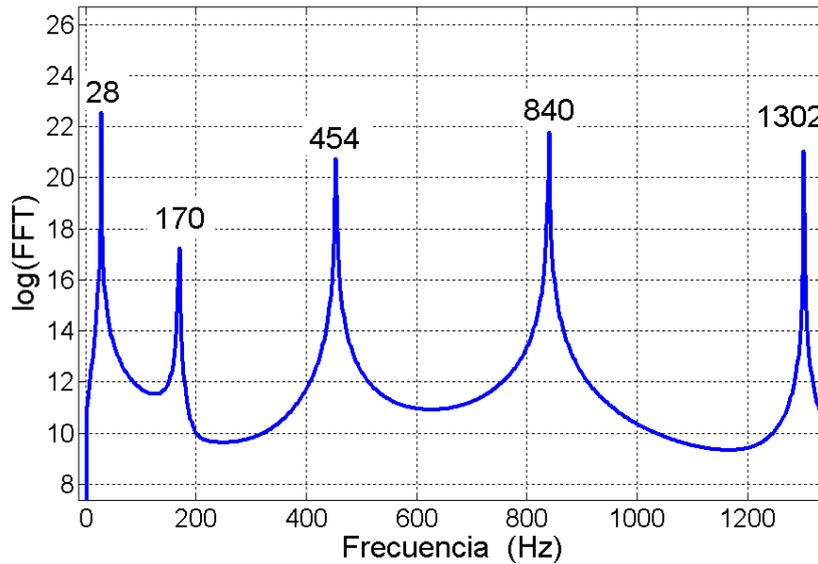


Figura 5-30: Logaritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) para la barra (lineal)

presentados 1274 Hz y 1330 Hz corresponden a $f_5 \pm f_1$.

Mucho más rico es el espectro de Fourier para el caso en que las deformaciones sean mayores a los casos antes analizados. En la Figura 5-32 se puede observar la comparativa entre el espectro de la barra correspondiente a la condición inicial de $v_y(X, Y) = 2 \text{ X ms}^{-1}$ (línea continua), donde los ejes x e y corresponden a los de la Figura 5-28, con el espectro de la misma barra pero excitada por una condición inicial de $v_y(X, Y) = 50 \text{ X ms}^{-1}$ (línea punteada). Es decir, en los dos casos, la condición inicial corresponde a una velocidad transversal (según Y) que aumenta linealmente con X .

En el caso lineal, cuando la fisura se supone siempre abierta, se puede encontrar una relación funcional suave entre la frecuencia y las características de la fisura (ya sean calculadas vía FFT o modos normales). Sin embargo la dinámica tiene que ser de pequeñas deformaciones y más importante aun es que la fisura tendrá que ser lo suficientemente grande como para permanecer abierta durante el movimiento oscilatorio. Estas hipótesis son las que se supusieron en el caso del problema inverso del Capítulo 3. En la Figura

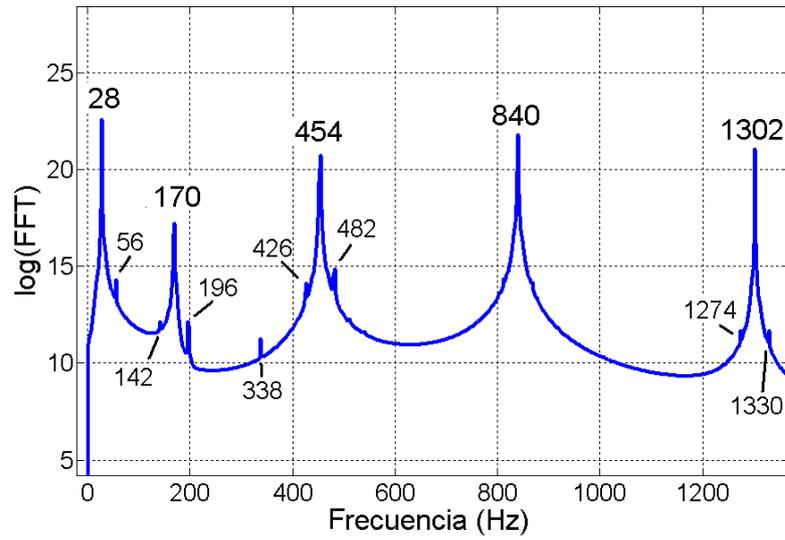


Figura 5-31: Logaritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) para la barra no lineal

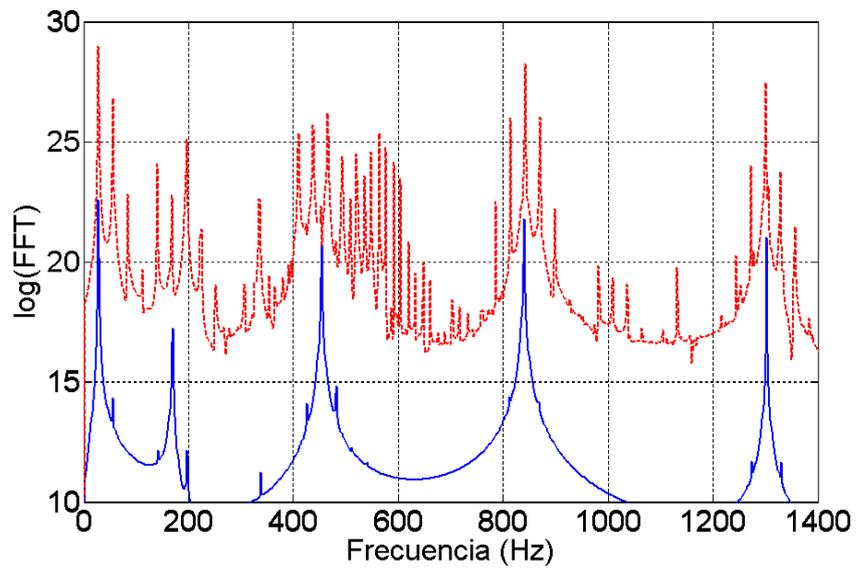


Figura 5-32: Comparativa del espectro para grandes y pequeñas deformaciones de la misma viga no lineal. Se puede observar una multitud de nuevas frecuencias.

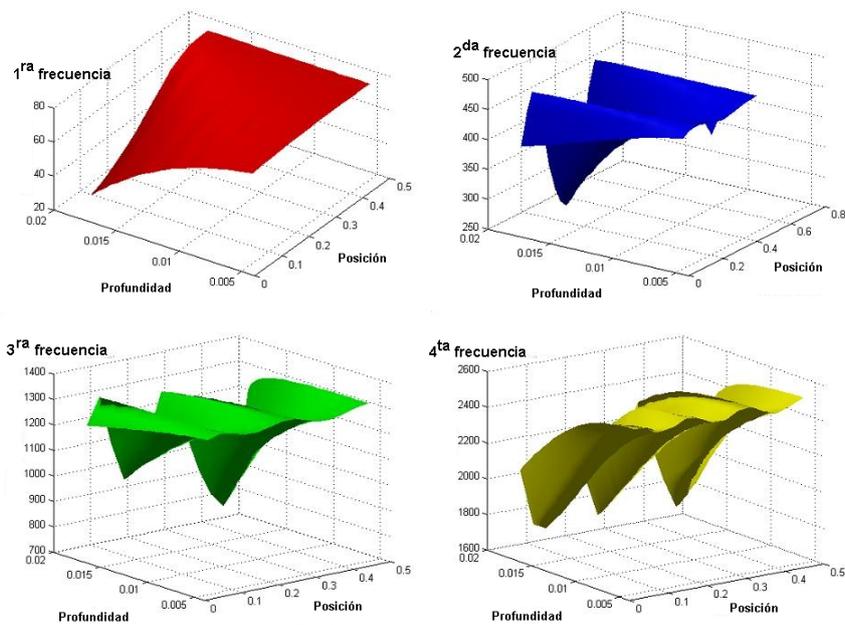


Figura 5-33: Dependencia Funcional de las primeras cuatro frecuencias naturales con la posición y profundidad de la fractura para una viga empotrada libre (sin contacto y sin fricción).

5-33 se puede observar la dependencia funcional de la frecuencia natural con la posición y profundidad de la fisura para los primeros cuatro modos normales de vibración de una viga empotrada libre, solución de las ecuaciones de Navier de auto frecuencias (5.25). Con un módulo elástico $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ densidad, $\rho_0 = 7850 \text{ Kg m}^{-3}$ y dimensiones en metros, largo $L = 1 \text{ m}$ y alto $h = 0.05 \text{ m}$

Ahora, cuando la fisura es lo suficientemente delgada o la deformación lo suficientemente grande, las superficies límites de las caras de la fisura se cerrarán. En una situación estática permanecerá cerrada pero en el caso que exista dinámica, estará presente un movimiento muy complejo de vibro-impacto. Es interesante observar que ahora no sólo estarán presentes las frecuencias de los movimientos cuasi - periódicos encontrados en las grandes deformaciones, sino que además, debido al vibro impacto de la clausura en fisura, aparecerán nuevas frecuencias de vibración como se puede observar en la Figura

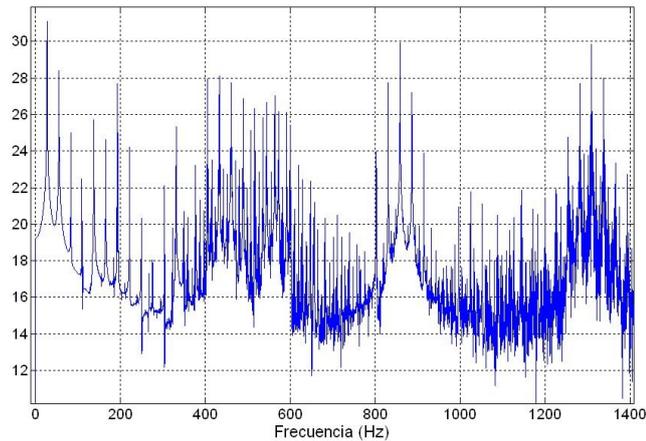


Figura 5-34: Espectro de la viga fracturada con fisura en forma de cuña y con contacto entre las fases de fisura.

5-34, que corresponde a una viga de idénticas propiedades que la tratada en el ejemplo de la Figura 5-32, pero con una fisura del tipo triangular (ver imagen izquierda de la Figura 5-27) localizada a 1.6 m del empotramiento y con una profundidad de 0.05 m .

La Figura 5-35 muestra precisamente la distancia entre los vértices de la fisura. En esta figura se puede observar cómo es la dinámica de vibro-impacto entre las superficies de la fisura cuando ésta se cierra.

En definitiva, la dinámica no lineal de un cuerpo presenta nuevas frecuencias de vibración que son combinaciones lineales de las correspondientes al caso lineal. Sin embargo, cuando el cuerpo presenta una fisura, la no linealidad debida al contacto e impacto en las interfases, da por resultado un espectro sumamente rico. Esta riqueza en el espectro hace imposible el diagnóstico de daño analizando los cambios en las frecuencias. Por lo tanto las hipótesis de linealidad del problema inverso presentado en el Capítulo 3 tienen que ser cuidadosamente estudiadas ya que, dependiendo del tipo de dinámica y forma de la falla, podría darse el caso de contacto intermitente en la fisura.

Por otro lado, al hacer un estudio en frecuencias se desecha mucha información importante. La información relevante para la resolución de este problema inverso se encuentra

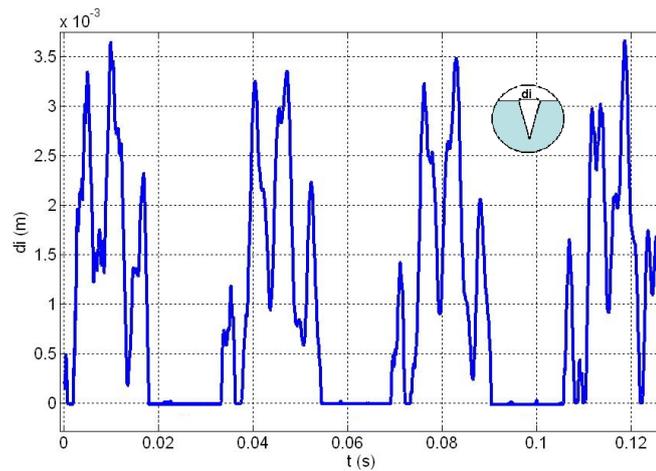


Figura 5-35: Distancia entre los vértices superiores de la fractura en función del tiempo

en las funciones dinámicas del tiempo como son por ejemplo la posición, velocidad o aceleración en algunos puntos del cuerpo. En el capítulo que sigue se implementara una técnica de optimización que dará como resultado la posición y profundidad de una fisura en un espécimen dañado.

En este capítulo se trato la dinámica de multi - cuerpos cuyas deformaciones, rotaciones y desplazamientos pueden ser arbitrariamente grandes, con contactos unilaterales fuera del equilibrio. Cualquier parámetro que se quiera caracterizar a partir del problema inverso podría ser aplicado a este tipo de modelo como se vera en el Capítulo 6.

Capítulo 6

Problema Inverso

La detección de daño puede ser abordada por distintos enfoques. Frisewell [52] hace un estudio de comparación de las bondades de distintos métodos de detección. Estos métodos podrían ser incluidos en tres categorías de diagnóstico:

1 - Series temporales: Valor temporal de algún parámetro cinemático como la posición o la aceleración, que podría ser adquirido de la propia pieza a estudiar con sensores de movimiento, acelerómetros o sensores de proximidad.

2 - Respuesta en frecuencia: Ya sea haciendo resonar la pieza o de la propia series temporales mediante transformadas de Fourier, se obtiene la respuesta en frecuencia.

3 - Parámetros modales: Obtenidos de la forma modal o de parte de esta midiendo el desplazamiento en algunos puntos.

Frisewell [52] concluye que los métodos dos y tres pierden valiosa información al condensar la riqueza de datos que se extiende en el tiempo y que como el método tres es deducible del dos resultan de predicción similar. Pero a pesar que podrían ser útiles para diagnosticar daño en los niveles 1 y 2 presentan las siguientes dos limitaciones:

1 - Insuficiente variación de frecuencia respecto al daño, lo que da una limitada resolución a la detección y además generalmente queda por debajo del nivel de ruido experimental.

2 - Se aproxima el fenómeno no lineal por un modelo que sí lo es.

Por otra parte usando series temporales Banks y otros [20] prueban que pueden detectar daño muy leve usando series temporales para lo que utilizan modelos no lineales aunque simples. Estos tienen la limitación de no modelar el contacto parcial de la fractura, ni la capacidad de implementación en detección de otro tipo de cuerpos como arcos, placas, etc, ni en movimientos que involucren grandes deformaciones y rotaciones rígidas. A continuación se presentará una técnica basada en series temporales pero en modelos más complejos que los estudiados por Banks y otros [20] donde se tendrán en cuenta los efectos de contacto total y parcial, fricción etc, en deformaciones y rotaciones finitas.

6.1. Función objetivo

Para la detección de falla se implementa, en forma exitosa, un método de optimización basado en Algoritmos Genéticos, para cuerpos en equilibrio y también en movimiento. Esto se lleva a cabo mediante cuadrados mínimos, es decir se comparan las respuestas dinámicas (o estáticas) en algunos puntos de la estructura dañada con la solución del modelo computacional (elementos finitos) donde se propone una localización y una profundidad de la fisura. De esta comparación se construye una función objetivo que luego es optimizada dando por resultado dicha posición y profundidad.

Supóngase que se desea estudiar si un cuerpo tipo viga está dañado o no y en el caso que lo esté, determinar dónde se encuentra la falla y cuál es su magnitud. Para ello se miden los desplazamientos, en caso estático o dinámico, en algunos pocos puntos (no más de 5). El problema de la detección consiste, entonces, en reconstruir la dinámica con esa limitada información para así resolver un problema inverso y utilizar como dato el movimiento, e incógnita la forma del contorno (en este caso la fisura caracterizada por dos números, profundidad y ubicación).

La Figura 6-1 esquematiza el experimento dinámico donde una perturbación (por ejemplo: un golpe con martillo) da inicio al movimiento (en este caso transversal, pero podría ser de cualquier tipo). Sensores de movimiento (en la Figura son tres), por ej.

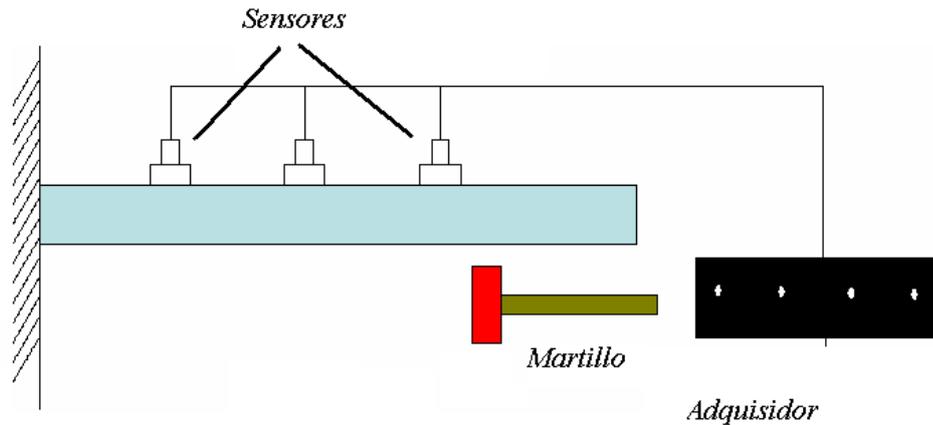


Figura 6-1: Esquema del setup experimental para la detección de la falla en una estructura tipo viga

acelerómetros, dispuestos en (dos o tres) lugares diferentes registran el movimiento. Por último un adquirente procesa estos datos para dar (dos o tres) funciones del tiempo $u(X_i, t)$ con $i = 1..n$ ($n = 3$ en la Figura 6-1 y $n = 2$ en la fotografía Figura 6-2)

Se procesa el modelo computacional para un caso de fisura arbitrario, es decir una posición y una profundidad (X_c y h_c) y se obtienen los desplazamientos $u^*(X_i, t)$ de los mismos puntos X_i que en el experimento con $i = 1..n$, y se comparan con los obtenidos experimentalmente $u(X_i, t)$.

El modelo computacional puede ser bi o tri dimensional dependiendo del tipo de ensayo a realizar. Las ventajas de un modelo 2D es un menor costo computacional en la resolución del problema de optimización aunque podría no ser suficiente para movimientos o geometrías más generales. Por supuesto las ecuaciones son las correspondientes a deformaciones finitas (4.4) con constitutivas dadas por (4.10).

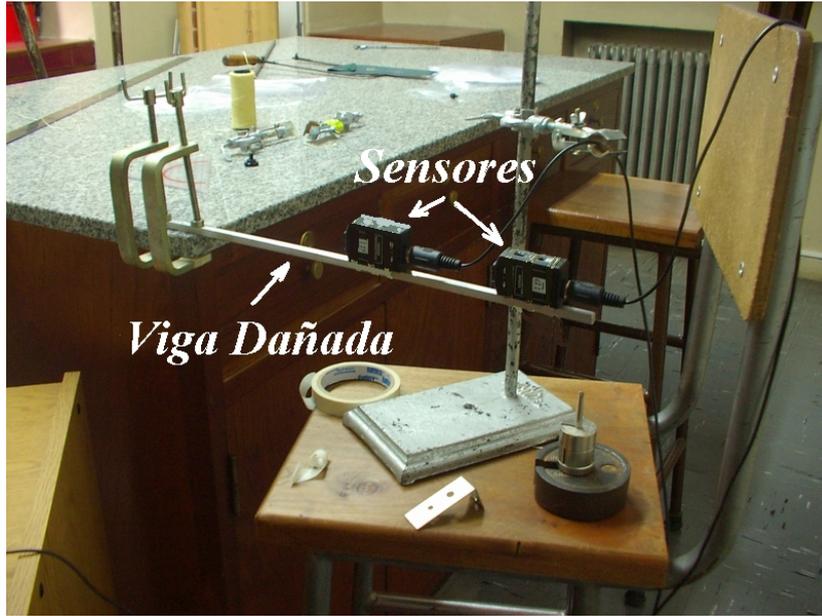


Figura 6-2: Fotografía del ensamble experimental con dos acelerómetros

La función objetivo usada en esta tesis para casos dinámicos se define por

$$d(X_C, h_C) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n [u^*(x_i, t) - u(x_i, t)]^2 dt \quad (6.1)$$

donde, como se dijo antes, $u^*(X_i, t)$ es la respuesta de la simulación y $u(X_i, t)$ es la correspondiente al experimento.

En forma esquemática el algoritmo general es el siguiente:

1-Mediante una medición experimental se determinan funciones cinemáticas del tiempo, como posición o aceleración, en algunos puntos del cuerpo.

2-Se optimiza la función objetivo $d(X_C, h_C)$.

3-El valor buscado es el correspondiente al valor óptimo de dicha función objetivo.

Estas funciones objetivo presentan un gran número de mínimos, locales. Tal es el grado de complejidad de este problema que resultan inadecuadas las técnicas convencionales de optimización (basadas en métodos de gradiente).

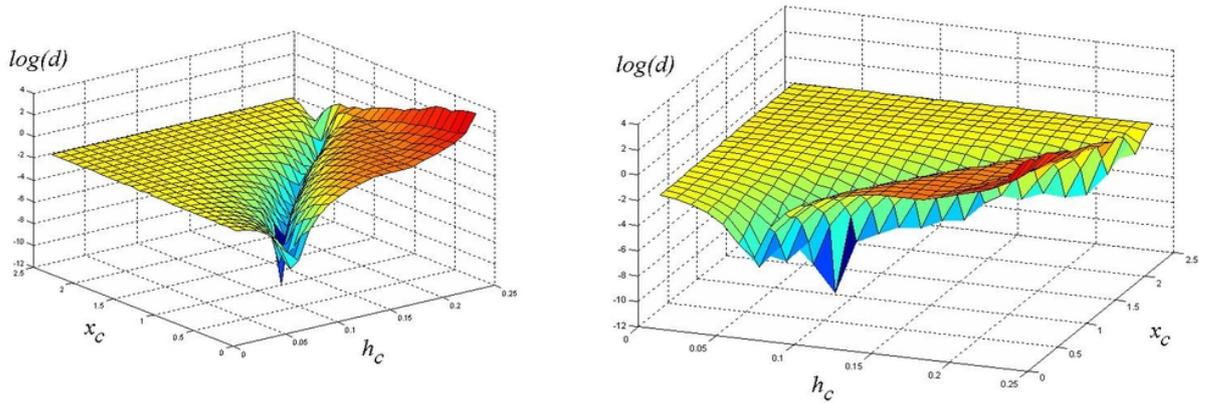


Figura 6-3: Logaritmo de la función objetivo. A primera vista parece una función suave y diferenciable

A primera vista parece una función suave y diferenciable como se puede observar en la Figura 6-3 donde se muestra la superficie del logaritmo de la función objetivo Ec.(6.1) para un tiempo $t_2 - t_1 = 0.1$ s. Se trata de un escenario de daño localizado en $x_c = 1$ m y profundidad $h_c = 0.13$ m de una viga empotrada libre (como la esquematizada en la Figura 6-1) de largo $L = 2.5$ m y alto $A = 0.25$ m

En la Figura 6-3 se puede observar una zona de mínimos con forma de canal levemente curvado. Sobre ese canal se presentan una aglomeración de mínimos y máximos y es donde se revela la falta de suavidad de la función objetivo (Figura 6-4)

La optimización de estas funciones objetivo se lleva a cabo mediante el llamado Algoritmo Genético. La Figura 6-5 esquematiza el algoritmo físico-computacional de diagnóstico e identificación de daño en el que incluso se muestra como podría ser implementado, si el resultado es usado como semilla para trabajar con otro algoritmo (método híbrido).

6.2. Las Bases de los Algoritmos Genéticos

El método de los *Algoritmos Genéticos* (AG) para resolver problemas de optimización está basado en la selección natural, proceso por el cual se da la evolución de los sistemas

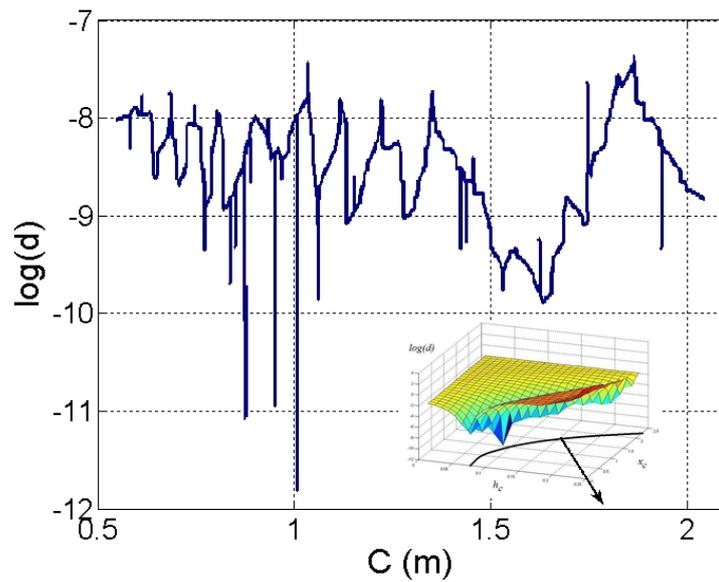


Figura 6-4: Aglomeración de mínimos y máximos de la función objetivo d sobre la curva del canal mínimo

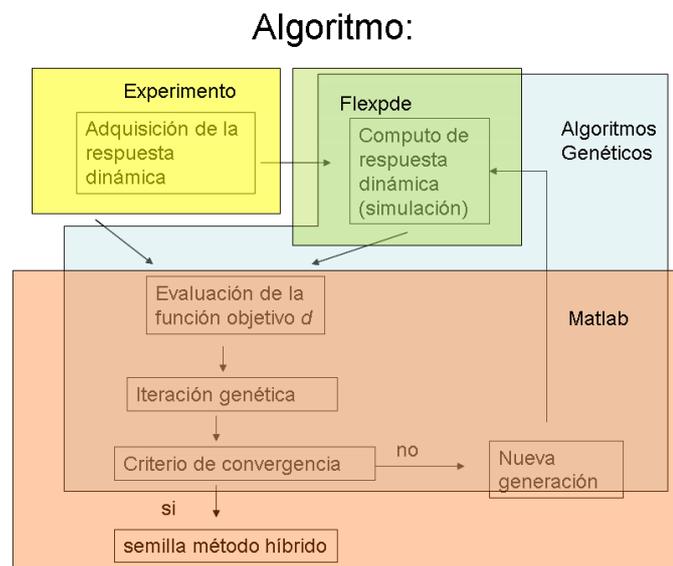


Figura 6-5: Algoritmo de detección de daño vía series temporales optimizadas por algoritmos genéticos

biológicos.

El método AG genera una *población*, es decir, un conjunto de posibles soluciones a un problema de optimización. Cada una de estas posibles soluciones se la llama *individuo*. Aquel o aquellos *individuos* que estén más cerca de la solución real estarán mejores capacitados para pasar su información (*genética*) a la próxima *generación*. En cada generación la población *evoluciona* a la solución óptima del problema entre manos y la información *genética* que pasa de generación en generación cambiara según las tres siguientes reglas:

Reglas de selección: se hace una selección los individuos, llamados *padres*, según algún criterio, que contribuye a la población en la siguiente generación.

Reglas de cruza: combinan a dos padres para crear a los *niños* para la siguiente generación.

Reglas de mutación: ejercen cambios aleatorios de los padres individuales para crear a los niños.

En el Apéndice F contiene una explicación detallada de los Algoritmos Genéticos utilizados en esta tesis.

6.3. Puesta a punto de los Algoritmos Genéticos

Se han probado distintas propuestas para ensayar la detección de fisuras. En términos generales el método usado para la puesta a punto del A-G consiste en dejar todos los parámetros fijos menos uno y hacerlo variar hasta encontrar el óptimo, luego se deja fijo este último parámetro y se hace variar otro. Estos parámetros pueden ser desde el tiempo de la simulación, la cantidad de sensores colocados en la pieza a ensayar, las posiciones y profundidades de la fisura, o cualquier otro parámetro inherente al propio algoritmo genético (ver Apéndice F), a saber, cantidad de individuos, parámetros de mutación, cantidad máxima de generaciones, tipos de cruza, etc. El objetivo es encontrar los parámetros óptimos para el problema de detección de daño.

A fin de tratar un problema específico, sea una barra empotrada-libre, modelada como

Población	20	40	120
x_c	1.026	0.53	1.86
h_c	0.051	0.031	0.194

Tabla 6.1: Variación de la población con una ventana temporal de $t = 0.25s$

antes según la elasticidad no lineal dada por la Ec.(4.4) con ley constitutivas dadas por (4.10), de dimensiones en metros; largo $L = 2.5 m$ alto $A = 0.25 m$, y material elástico con un módulo de $E = 7.3e10 Pa$ y $\nu = 0.3$ densidad $\rho = 2766 m kg^{-3}$. En este caso se toma la barra sin amortiguamiento. Se simula la dinámica y se obtiene la respuesta del movimiento $u(X_n, t)$ con $n = 4$ que simulan cuatro sensores ubicados en $X_i = iL/5$ ($i = 1..n$) que miden el desplazamiento transversal de la barra (Figura 6-1).

Escenario 1:

Tiempo de simulación $0.25 s$ (aproximadamente 9 veces el período del modo fundamental). La fisura está ubicada en $x_c = 2 m$, y tiene profundidad $h_c = 0.2 m$. El modelo de la fisura será del tipo triangular de espesor $d = 0.0002 m$.

Respecto a los parámetros de los algoritmos genéticos, se aceptan: distribución inicial uniforme, escala tipo ranking, la selección es de tipo estocástica, reproducción de elite con contador igual a 2 recordar que esto significa que los dos mejores pasan en forma inalterada a la siguiente generación (ver Apéndice F). Fracción de cruza: 0.8 (esto corresponde al 80% de la población que no sea elite) y de tipo dispersa. Recuérdese que la función objetivo es sólo función de dos variables $d(x_c, h_c)$. La mutación es de tipo gaussiana y el criterio de parada es permitir un máximo de 10 generaciones y 5 repeticiones en el que la función objetivo no mejore.

Se hace variar la población en el algoritmo de detección y los resultados obtenidos se explicitan en la Tabla 6.1. Esto indica dos cosas: o que los tiempos de simulación son muy grandes o que las poblaciones en el algoritmo genético muy chicas.

La Figura 6-6 muestra como al cambiar la ventana de tiempo la función objetivo tiene un mínimo absoluto más profundo (más definido) pero una mayor cantidad de mínimos locales.

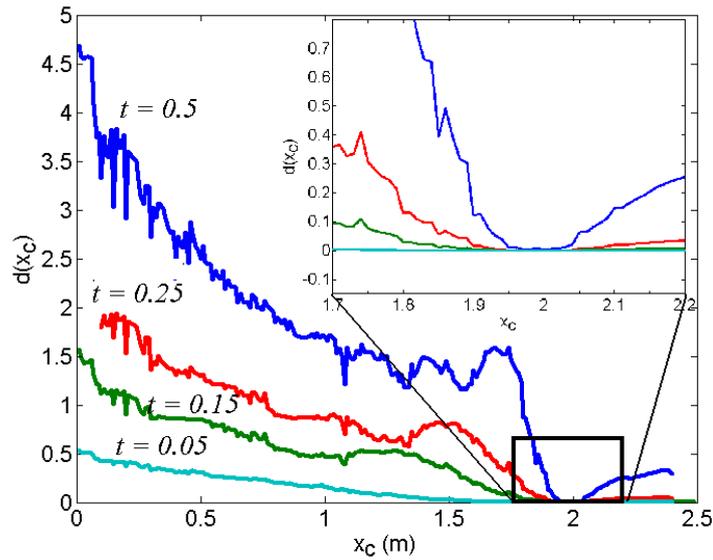


Figura 6-6: Influencia de la ventana de tiempo sobre la función objetivo d

Población	20	40	120
x_c	1.55	1.63	1.89
h_c	0.151	0.131	0.182

Tabla 6.2: Variación de la población con una ventana temporal de $t = 0.1s$

Al tomar tiempos de simulación más cortos, es de esperar que los algoritmos genéticos encuentren la solución óptima con mayor facilidad ya que la función objetivo d tendrá menos cantidades de mínimos locales. Tomando una ventana de $t = 0.1 s$ se repite el experimento anterior obteniéndose nuevos resultados (ver Tabla 6.2). La diferencia ahora es que con sólo 5 generaciones el Algoritmo Genético llega a la solución.

Ahora se cambia el tipo de cruce a heurística. Se hace variar el factor r que es la posición promedio entre el segmento que une a los dos padres (ver apéndice) y se toman 200 individuos. La fisura se ubica ahora en $x_c = 1 m$ y una profundidad de $h_c = 0.1 m$. En el criterio de parada se toma un número máximo de 10 generaciones y 5 repeticiones en el que la función objetivo no mejore. Todos los demás parámetros se dejan iguales que antes. De la Tabla 6.3 se concluye que el óptimo para el método de cruce heurístico es

r	1.2	1	0.8	0.6
x_c	0.859	0.946	0.995	1.004
h_c	0.086	0.103	0.095	0.097

Tabla 6.3: Variación del parámetro de mutación r

Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
posición de la fisura x_c	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	2
Profundidad de la fisura h_c	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1	0.2

Tabla 6.4: Diferentes escenarios o casos de localización y magnitud del daño ha ser estudiados

con $r \sim 0.6$. Este número no es absoluto, depende de cada caso, y es por eso esto que no se hace un estudio más riguroso o refinado.

En este punto es claro que una cruza heurística con factor del orden de $r \sim 0.6$ y una ventana de 5 periodos del modo fundamental del cuerpo sano puede dar resultados aceptables. Mas adelante se estudiaran con detalle la ventana optima.

Con el fin de hacer un estudio estadístico de la parametrización se proponen un conjunto de escenarios diferentes (ver Tabla 6.4). Se simulan 10 casos, usando para el AG cruza heurística con factor $r = 0.6$ y se hace variar el número de individuos. Se toma como máximo de 5 generaciones. Se usa como condición inicial una velocidad transversal $v_y = -2X \text{ m/s}$ y como ventana temporal se toma $t = 0.15 \text{ s}$. Con el fin de adimensionalizar los errores en la búsqueda de la fisura, se usara en esta tesis el siguiente criterio.

$$\begin{aligned}
e_x &= \frac{x_c - x_c^*}{L} \\
e_h &= \frac{h_c - h_c^*}{A}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

donde x_c y h_c son la posición y profundidad de la fisura reales y; x_c^* y h_c^* son la posición y profundidad que el AG encuentra respectivamente y como antes L y A son la longitud de la barra y la altura de la misma. Los valores e_x y e_h son los errores relativos de la ubicación y magnitud de la fisura. La suma $e_r = |e_x| + |e_h|$ será el error de cada escenario simulado. Debe notarse que esta es una medida del error muy exigente. Con el fin de

Caso\ Población	25	50	75	100	125	150
1	37.68	20.11	27.78	4.98	12.8	7.45
2	15.23	3.757	4.028	4.537	4.787	7.14
3	6.468	8.675	6.154	19.06	15.59	3.089
4	21.34	7.008	7.977	11.94	0.198	1.208
5	20.20	20.22	1.455	3.013	11.77	20.21
6	16.73	14.93	13.99	1.995	2.069	3.883
7	0.794	20.54	1.587	1.705	1.662	1.680
8	31.38	10.96	5.205	30.67	1.905	1.883
9	2.927	11.21	11.04	4.578	12.24	8.98
10	15.95	1.671	16.72	16.70	17.05	14.65

Tabla 6.5: Dependencia de los errores porcentuales con la población

entender cuántos individuos son necesarios para una detección aceptable, se corre el AG con diferentes poblaciones. La Tabla 6.5 muestra el error porcentual, esto es, $100 e_r$.

En la Figura 6-7 se puede apreciar el promedio de los errores porcentuales de la Tabla 6.5. Se puede observar como a medida que se aumenta la cantidad de individuos de la población, el AG detecta más eficientemente el daño, esto es, la posición y profundidad.

Un error en promedio menor al 10% según el criterio aquí utilizado, es más que suficiente, recuérdese que este error es la suma de las dos cantidades involucradas en la detección, esto es, ubicación x_c y profundidad h_c .

Con el fin de evaluar que ventana de tiempo es necesaria (cuanto tiempo hay que medir y simular) para una detección aceptable, se implementa el AG con una población de 50 individuos usando diferentes tiempos de simulación.

En la Figura 6-8 se puede apreciar el promedio de los errores porcentuales de la Tabla 6.6. Se puede observar ahora como a medida que se aumenta el tiempo de simulación, el AG detecta menos eficientemente el daño. Esto es debido a que la función objetivo $d(x_c, h_c)$ presenta un número mayor de mínimos locales a medida que aumenta el tiempo de la simulación (ver Figura 6-6) como se intuía al principio. Por lo tanto, si se desea detectar una falla por dinámicas largas, se tendrán que usar poblaciones grandes. Se toma en esta tesis, como regla empírica, un mínimo de 50 individuos por cada periodo y medio

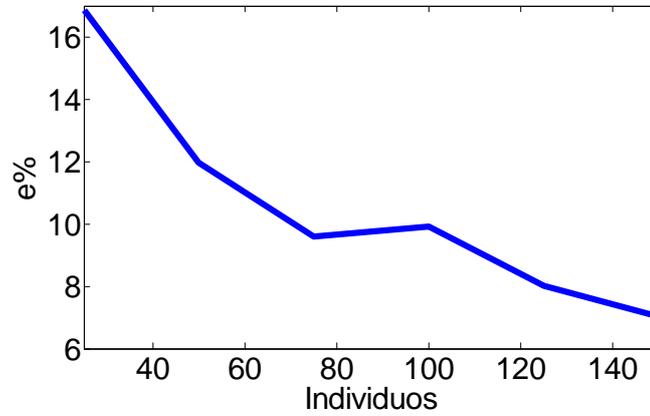


Figura 6-7: Error promedio en la detección de la falla como una función de la cantidad de individuos en la población del AG

Caso\Tiempo (s)	0.05	0.15	0.25	0.35	0.5
1	27.747	20.11	27.747	75.677	90.16
2	27.59	3.7576	11.396	63.914	39.408
3	1.0236	8.6756	10.409	12.96	36.908
4	9.0388	7.008	2.7092	15.564	26.688
5	0.8136	2.2276	57.605	73.66	66.432
6	0.0104	14.939	3.7544	15.539	27.213
7	0.7672	2.0544	0.7672	2.9996	2.9518
8	1.1516	10.967	10.793	6.832	43.732
9	4.2488	11.21	5.6768	12.684	58.324
10	1.2132	1.6716	4.96	5.64	62.2

Tabla 6.6: Dependencia de los errores porcentuales en la detección con el tamaño de la ventana temporal

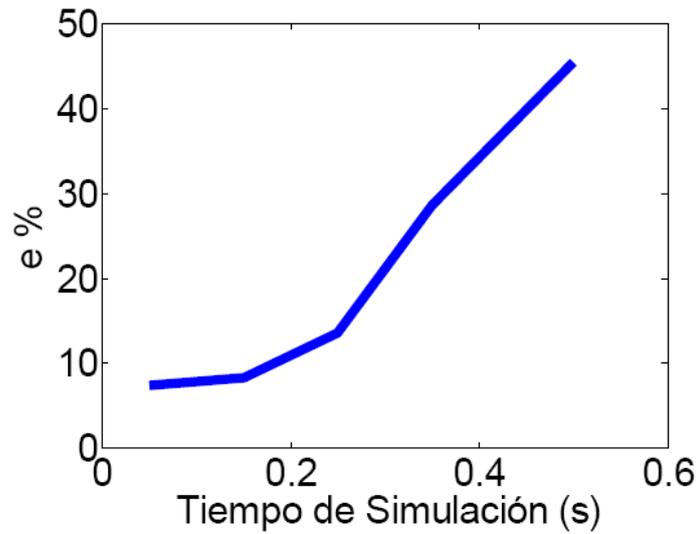


Figura 6-8: Error promedio en la detección del daño en función del tiempo de simulacion de la fundamental de la pieza sana.

La Figura 6-9 se puede observar la el diagnóstico que MatLab calcula generación tras generación durante el proceso de resolución del problema inverso. Este caso se trata de un escenario de fisura ubicado en $x_c = 0.9$ y con una profundidad de $h_c = 0.2$. En el cuadro izquierdo superior se detalla el valor de la función objetivo $d(x_c, h_c)$ a medida que el algoritmo evoluciona, se puede observar la convergencia a un valor cercano a cero. El cuadro superior derecho se reporta el valor del mejor individuo (par x_c, h_c); el cuadro inferior izquierdo muestra la distancia media entre todos los individuos de la población donde se observa como a medida que el algoritmo evoluciona los individuos se agrupan. El último cuadro (derecho inferior) ilustra el árbol genealógico en la evolución genética.

6.4. Influencia del ruido.

Hasta aquí se trataron problemas de detección de fisura de una barra recta, cuya dinámica es simulada y luego la función objetivo construida por comparación de esa

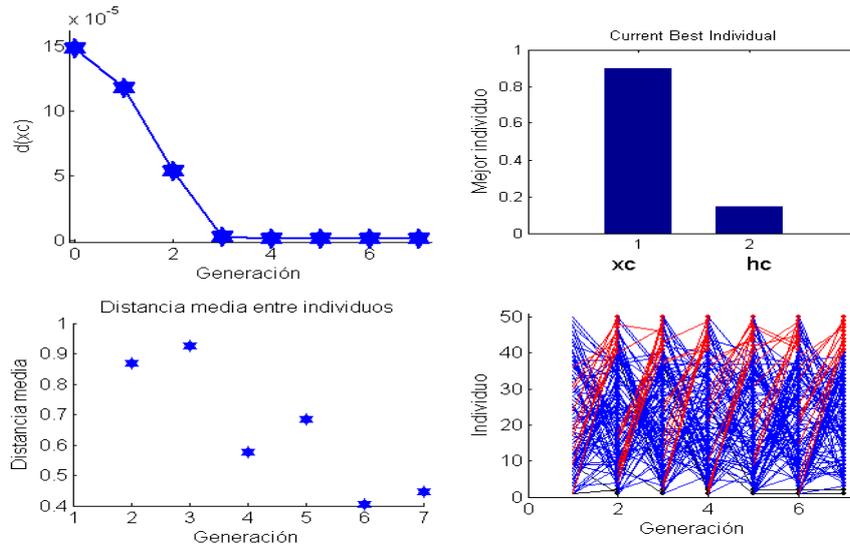


Figura 6-9: Evolución de los Algoritmos Genéticos calculado por MatLab para un escenario de fractura con posición en $x_c = 0.9 m$ y profundidad $h_c = 0.2 m$

dinámica con otras igualmente preparadas ya que se utiliza el mismo modelo computacional para simular el caso dañado como los que se implementan para detectarlo vía AG. En este caso, no se tuvieron en cuenta ni incerteza en el modelo de la dinámica de la barra, ni los inevitables errores experimentales presentes en cualquier medición experimental.

Con el fin de estudiar el desempeño del método de optimización basado en AG en mediciones más realistas, se procede a incorporar ruido blanco a la señal de la dinámica simulada, manteniendo los parámetros de población del método AG y duración de la simulación de los casos anteriores. Estos parámetros serán: número de individuos de la población en 50 y tiempo máximo 0.05 segundos (aproximadamente 1.5 periodos fundamentales de la barra sana).

La Figura 6-10 muestran el desplazamiento de la barra en el “sensor” de la extremidad y la Figura 6-11 en el primer “sensor” desde el empotramiento (punto $x = L/5$), donde se le incorporó ruido blanco. Cada uno de los ruidos tienen una magnitud relativa al desplazamiento de la punta de 0.1, 0.2 y de 0.3.

La Tabla 6.7 indica los errores promedios calculados por la suma de los dos errores

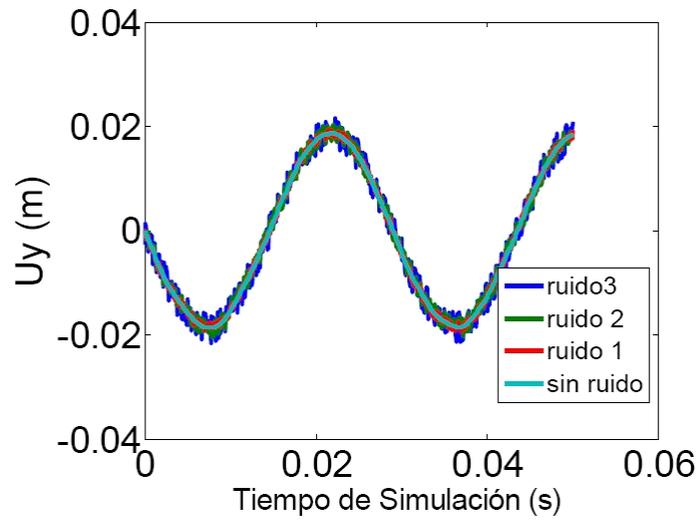


Figura 6-10: Desplazamiento transversal del ultimo "sensor" de la barra con distintas magnitudes de ruido.

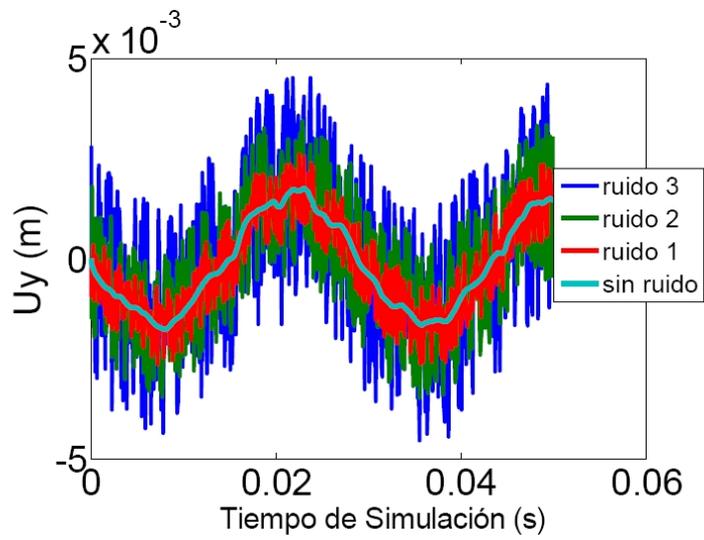


Figura 6-11: Desplazamiento en $x = L/5$ con distintas magnitudes de ruido

Ruido relativo	0.1	0.2	0.3
Error medio %	6.28	7.71	5.39

Tabla 6.7: Error en la detección como función del error experimental

definidos por 6.2 para los mismos 10 escenarios, donde se puede observar la indiferencia del método de detección a estos niveles de ruido aceptables en una medición real.

6.5. Fisura Difusa

Los resultados del apartado anterior son por demás alentadores y abren las puertas a tratar sistemas en los que se tenga cierta incerteza en el propio modelo con el que se hace la optimización. Se dispone de una teoría rigurosa, completa y muy exacta (sin aproximaciones en la magnitud de la deformación o el desplazamiento), que simula de forma muy realista la dinámica de un cuerpo fisurado. Pero por más exacto que el modelo sea, no es la realidad. En un problema real existen una variedad de incertezas en el modelo físico que serán aproximadas por ciertos modelos teóricos (resueltos vía *mecánica computacional*) que se acercaran más o menos al modelo físico. ¿Qué ocurrirá cuando se pretenda detectar una fisura real de un espécimen verdadero usando este esquema? Supóngase que la fisura real tenga una forma arbitraria como se indica en la parte inferior izquierda de la Figura 6-12. ¿Se podrá identificar dicha fisura si se proponen modelos de ésta que tengan la forma de la parte inferior derecha de la Figura 6-12?

Para responder esta pregunta se propone simular la dinámica de una barra con una fisura que difiera de la propuesta para ensayar la detección. En particular se trata de una fisura tipo *difusa* compuesta por 5 fisuras vecinas (ver Figura 6-13) como si fuera un experimento real de un cuerpo real y el modelo de única fisura como el simulado para realizar la detección. Los parámetros serán: número de individuos de la población en 50 y ventana temporal de 0.05 s (aproximadamente 1.5 periodo de la barra sana).

La Tabla 6.8 compila los 6 casos analizados donde el “Error %” es calculado, como antes, por la suma de los dos errores dados en la Ec.(6.2). sólo en el 5^{to} caso se puede

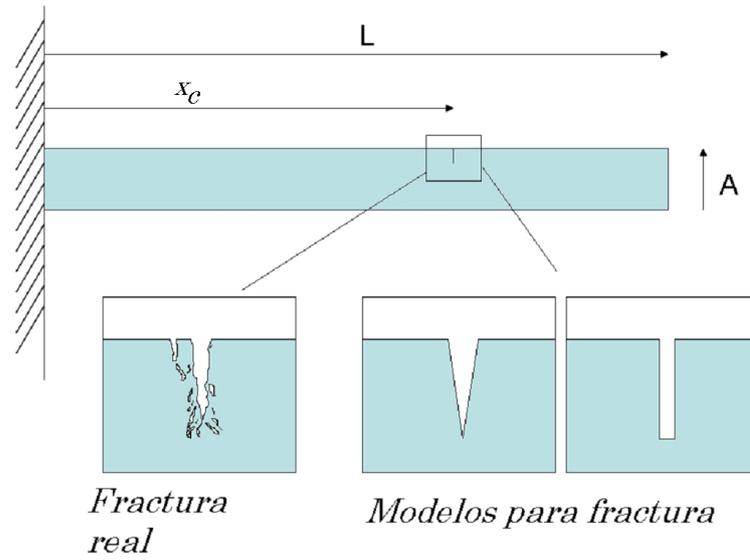


Figura 6-12: Comparación entre una fractura real y dos modelos propuestos para la detección

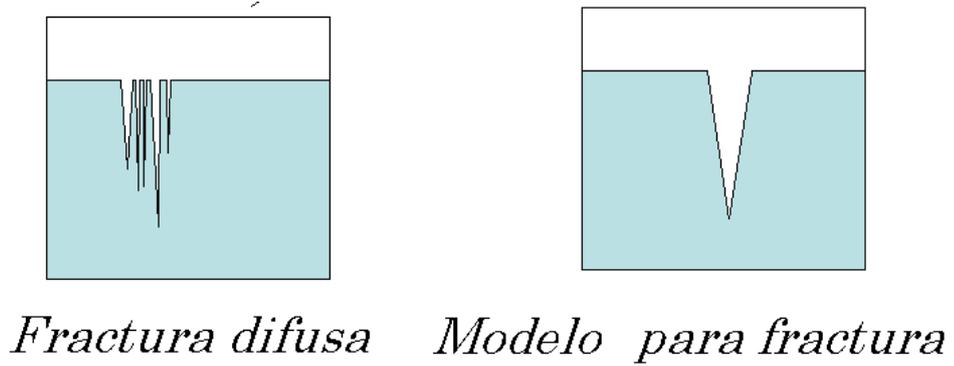


Figura 6-13: Esquema de la fractura difusa

caso (Error %)	Caso a detectar		detectados por AG	
	x_c	h_c	x_c^*	h_c^*
1 (7.16)	0.3	0.1	0.32	0.115
2 (8.12)	0.7	0.1	0.55	0.105
3 (4.64)	1.3	0.2	1.25	0.206
4 (6.72)	1.5	0.2	1.36	0.197
5 (41.3)	1.9	0.1	2.37	0.044
6 (6.51)	1	0.12	0.98	0.134

Tabla 6.8: Resultados y errores para la detección en el caso de fractura tipo difusa

considerar fracaso.

6.6. Detección en un arco

Antes de pasar a un experimento de detección de daño real, se estudiará nuevamente el problema de detección pero ahora en una estructura no recta como una viga.

En principio cualquier forma bi o tridimensional podrá ser utilizada. Un arco circular como el esquematizado en la Figura 6-14 es propuesto. Dicho arco se encuentra fijo en sus dos extremos, por lo tanto se impone nulidad en el desplazamiento u , y libre en el resto del contorno esto es tensión nula ($t_0 = 0$) en todo el borde salvo en la región de la fisura, donde, como antes, se imponen condiciones de contacto de Signorini.

Lo interesante de esta geometría es que ya no existe simetría entre la parte superior y la inferior. Y aunque, en lo tratado para el modelo de viga recta, el problema fue formulado de manera de poder detectar si la fisura se encuentra la cara superior o inferior de la viga, no fue mencionada la técnica que discriminaría entre las dos alternativas. Esta idea es muy simple. La posición de la fisura tendrá un valor que va desde 0 a L y desde L a L' es decir, se duplica el dominio de definición de la variable x_c en la función objetivo.

En particular se estudia un arco circular de 180° de circunferencia con un radio interno de 6 m y un radio externo de 9 m . Luego la parte de x_c que va desde 0 a L (radio externo) va de 0 a 9π y la correspondiente al radio interno va de 9π a $(9 + 6)\pi$. En definitiva $x_c \in (0, 15\pi)m \simeq (0, 47m)$. El modelo es plano por lo que se asume la dimensión normal

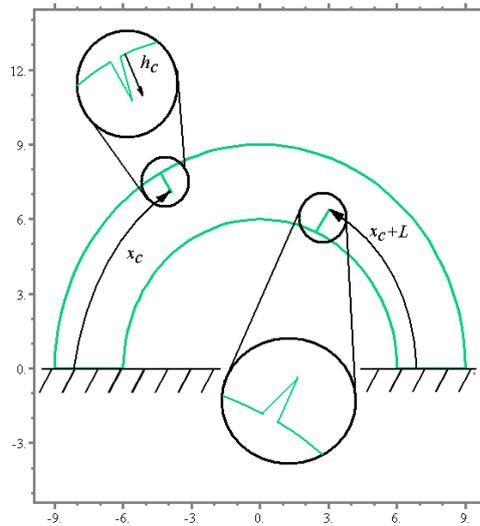


Figura 6-14: Arco plano fisurado

al plano de 1 m . En este caso el material será modelado por un módulo elástico $E = 7 \cdot 10^9 Pa$ con una densidad $\rho_0 = 2000 kg/m^3$. Se simula un $\Delta t = 0.035 s$ para construir la función objetivo (ventana temporal); intervalo que se corresponde aproximadamente a 1.5 periodos del primer modo del arco sano correspondiente al caso lineal. Se trataron seis casos o escenarios de fisura.

Los escenarios de fisura son detallados en la Tabla 6.9 donde se mantienen los parámetros de población del método AG de la simulación de los casos anteriores. Los errores resultantes para la detección de fisura en el arco son de magnitud similar a los encontrados en la viga recta.

6.7. Detección en una viga recta (Experimento físico)

Una vez elegidos los parámetros de AG, los tiempos de simulación en la dinámica y aceptando que existe cierta insensibilidad en la forma de la fisura y en el ruido experi-

caso (Error %)	Caso a detectar		Detectados por AG	
	x_c	h_c	x_c^*	h_c^*
1 (6.864)	10	0.1	12.91	0.0798
2 (36.81)	10	1	15.55	1.75
3 (9.152)	23	1.2	25.52	1.314
4 (6,724)	35.5	2	34.93	2.101
5 (9.032)	39	1	41.13	1.135
6 (9.198)	45	0.12	48.98	0.0981

Tabla 6.9: Resultados y errores para la detección de daño en un arco

mental. Se procede a la detección de fisura de un espécimen real.

Se usan dos acelerómetros pasco, cada uno con una masa $m = 34.7g$. La barra es de aluminio con una densidad de $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ y un módulo elástico $E = 63 \cdot 10^9 \text{ Pa}$. Las dimensiones son: largo $L = 41.5 \text{ cm}$ (la parte que vuela) Sección cuadrada de lado $a = 0.788 \text{ cm}$. La barra está empotrada a la mesa y los acelerómetros se ubican en $x_1 = 0.2325 \text{ m}$ y $x_2 = 0.34 \text{ m}$ del empotramiento. La Figura 6-2 es una fotografía del montaje experimental.

Proponiendo para este caso, una ecuación constitutiva del tipo (4.10) con disipación interna del tipo (4.12) y una disipación externa (viscosidad del aire) modelada por el siguiente vector tensión en las condiciones de de borde del tipo

$$\mathbf{t}_{0d} = -\mu_d \mathbf{V} \quad (6.3)$$

donde como es costumbre \mathbf{t}_{0d} es el vector tensión de Piola Kirchhoff (el sub índice d es para indicar que se trata de la disipación por fricción externa viscosa, a diferencia de μ que se utilizó antes para fricción por rozamiento) y $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ es el vector velocidad lagrangiano o material.

Dado que siempre existen incertezas en el modelo, ya sea en las condiciones de contorno, coeficientes de amortiguamiento, módulos elásticos o inhomogeneidades en el material, se realiza un ajuste (zero setting) para homogeneizar dichos parámetros de tal forma que la diferencia del modelo computacional con el modelo físico sea mínima.

Vía algoritmos genéticos (A-G) se optimiza la función

$$d(E, \mu_d, \mu_{int}) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^2 [u^*(x_i, t) - u(x_i, t)]^2 dt$$

esta vez para encontrar los parámetros de ajuste que serán, el módulo elástico E y los coeficientes de disipación externo μ_d (viscosidad del aire) e interno μ_{int} este ultimo consistente con las restricciones de la Termodinámica (ver Apéndice C). Para un periodo de $t_2 - t_1 = 0.1$ s

Los AG se fijaron con una población de 50 individuos, cruza heurística hasta 5 generaciones hallándose los siguientes parámetros óptimos: $E = 36.567 \cdot 10^9 Pa$, $\mu_d = 840.57 Pa \cdot s/m$ y $\mu_{int} = 7.35 Pa \cdot s$. De esta manera, el módulo elástico del aluminio es corregido a este nuevo valor que junto con los coeficientes de fricción viscosa μ_d y μ_{int} dan el ajuste necesario del modelo computacional haciéndolo consistente al modelo físico

Para asegurar la misma condición inicial en el experimento que en la simulación, se cuelga con un hilo una pesa de masa $m = 266.12$ g de la punta de la barra. Luego, para iniciar la dinámica, se corta el hilo quemándolo con una pequeña flama (fuego). De esta manera se garantiza una perturbación mínima en dicha condición inicial.

Los dos sensores de movimiento (acelerómetros) registran la dinámica vibratoria de la barra sana en el adquisidor. La Figura 6-15 muestra la aceleración en los puntos x_1 y x_2 para el experimento y la Figura 6-16 la correspondiente a la simulación con los parámetros óptimos encontrados por AG, donde también se tienen en cuenta las masas y ubicaciones de los acelerómetros.

Se puede observar cierta similitud en las amplitudes de las aceleraciones como también en el decaimiento producido por la disipación.

Analizaremos ahora la barra dañada. Una vez *calibrado* el modelo se practican muescas de 2.6 mm, 4 mm y 5 mm de profundo y 1 mm de ancho a unos 14 cm del empotramiento (ver Figura 6-17).

Nuevamente se optimiza vía AG la función $d(x_c, h_c)$ para un intervalo (ventana) de tiempo de $t_2 - t_1 = 0.1$ s utilizando los parámetros óptimos para el caso de la barra sana,

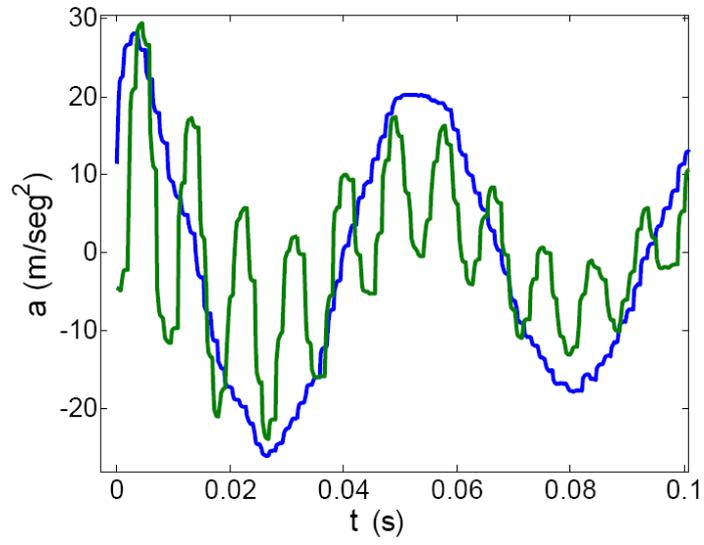


Figura 6-15: Aceleración en los dos x_1 y x_2 puntos para la barra sana. Experimento físico

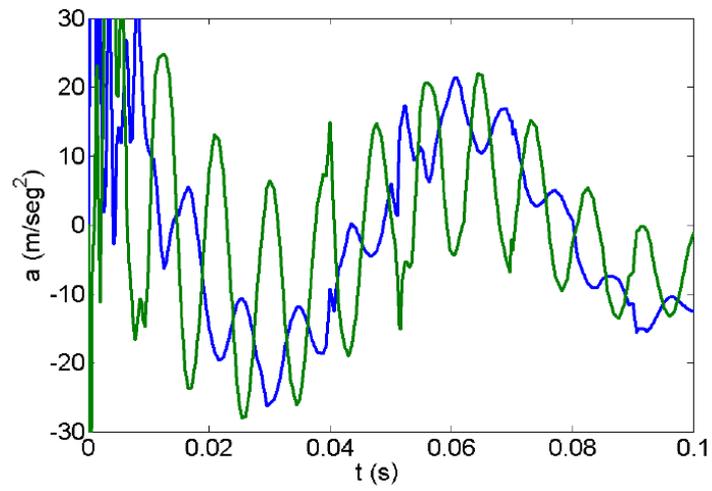


Figura 6-16: Aceleración en los dos x_1 y x_2 puntos para la barra sana. Simulación Computacional

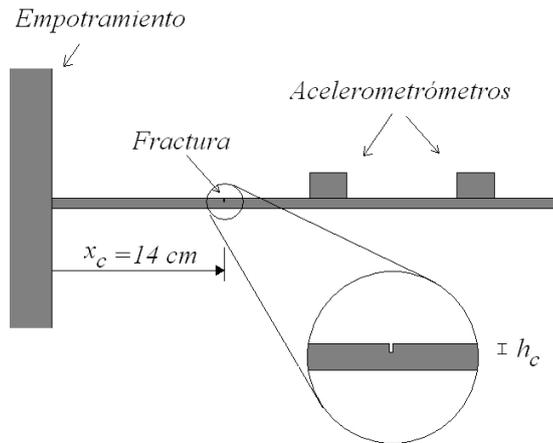


Figura 6-17: Esquema de la barra de aluminio fracturada de aluminio

Caso	x_c/L	h_c/a	x_c/L detectado	h_c/a detectado	Error %
1	0.337	0.329	0.378	0.257	11.2
2	0.337	0.507	0.282	0.366	19.6
3	0.337	0.634	0.357	0.548	10.6

Tabla 6.10: Escenarios de daño para el experimento físico

$E = 36.567 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $\mu_d = 840.57$ y $\mu_{int} = 7.35$ con los mismos parámetros evolutivos de antes, es decir: una población de 50 individuos, cruza heurística hasta 5 generaciones

Los resultados de detección para cada uno de los tres escenarios de daño son explicitados en la Tabla 6.10. Como se puede observar, los valores de posición y profundidad de daño son determinados con muy buena precisión. Esto muestra que el método puede ser utilizado para detectar posición y profundidad de una fisura que abra y cierre en un experimento dinámico de un espécimen dañado. En este caso se realizó el experimento con instrumental de poca precisión, el fenómeno de contacto en la fisura introduce fuertes no linealidades y aun así los resultados pueden considerarse alentadores ya que el error total (suma de los correspondientes a la posición y profundidad de la fisura definidos en (6.2)) no supera el 20%.

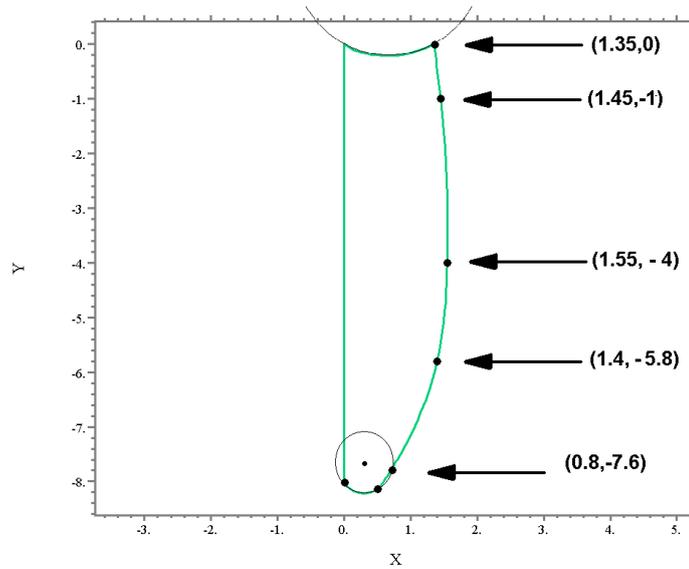


Figura 6-18: Forma del contorno de la hélice. Construcción a partir de un spline de tercer grado

6.8. Detección en una hélice

Dado que el modelo mecánico desarrollado es general en cuanto al tipo de movimiento y geometría (grandes deformaciones, rotaciones y desplazamientos), se puede implementar en modelos 3D de elementos estructurales arbitrarios para realizar el análisis y la detección de fisura en caso que exista.

En las Figuras 6-19 y 6-18 se esquematiza la pala de una hélice que podría ser, por ejemplo, de un molino eólico de generación eléctrica.

Ésta es generada por un spline de tercer grado que pasa por los cinco puntos señalados en la Figura 6-18. La punta *redondeada* es un arco circunferencial que une los puntos de coordenadas $(0, -8m)$ y $(0.55m, -8.15m)$ con centro en el punto de coordenadas $(0.3m, -7.9m)$, trazando la forma recta de la pala que tiene un largo $L = 8 m$, y una anchura máxima de $a = 1.55 m$. La pala es muy delgada, $0.04 m$ de espesor, y tiene un alabeo a lo largo de su longitud dado por las superficies construidas por las funciones $Z_{\pm}(X, Y) = \pm 0.02 + 0.04 \cdot Y \cdot (X - 1) - 0.1 \cdot X$.

Caso	x_c [m]	h_c [m]
1	3	1
2	2.3	0.1
3	2.3	0.15
4	4.3	0.15
5	7.3	0.05

Tabla 6.11: Escenarios de daño para la hélice

Caso	x_c/L	h_c/a	x_c/L detectado	h_c/a detectado	Error %
1	0.375	0.64516	0.3539	0.67806	5.4
2	0.2875	0.064516	0.31270	0.05805	3.166
3	0.2875	0.096774	0.29451	0.08857	1.521
4	0.5375	0.096774	0.767432	0.19112	32.42
5	0.9125	0.032258	0.885763	0.03363	2.811

Tabla 6.12: Resultados de detección para la hélice giratoria

La hélice gira a 10 rad/s respecto del eje Z y se simula casi una vuelta ($t = 0.5s$), sin incluir ruido. El material de dicha hélice es modelado como acero. Esto es, como antes se utiliza la ecuación de movimiento para grandes deformaciones y rotaciones (4.4) con el modelo constitutivo dado por (4.10). Aquí las constantes de Lamé son las correspondientes al acero con módulo elástico $E = 2.05 \times 10^{11} \text{ Pa}$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Recordar que $\gamma = E/2(1 + \nu)$ y $\lambda = \nu E / [(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)]$ y densidad $\rho_0 = 7580 \text{ kg/m}^3$

Se analizan 5 escenarios distintos de daño (Tabla 6.11) utilizándose como parámetros de los AG, población de 75 individuos, máximo de 10 generaciones.

Los resultados se detallan en la Tabla 6.12. Nuevamente los valores detectados son aceptables. Uno sólo de los casos (el 4^{to}) es considerado fracaso. Los casos exitosos dan un error por ciento promedio de poco más del 3.2%. Estos valores son más que aceptables si se tiene en cuenta que la detección es efectuada en una situación de operatividad de la hélice, ya que ésta se simula rotando a 10 rad/s .

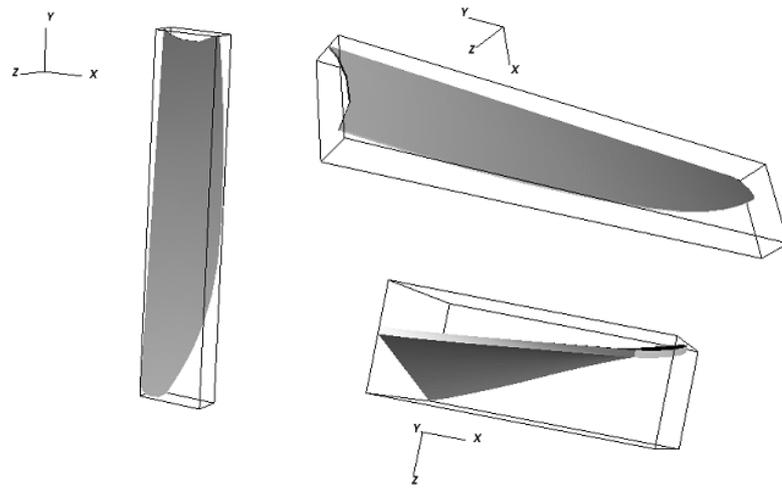


Figura 6-19: Esquema de la hélice 3d

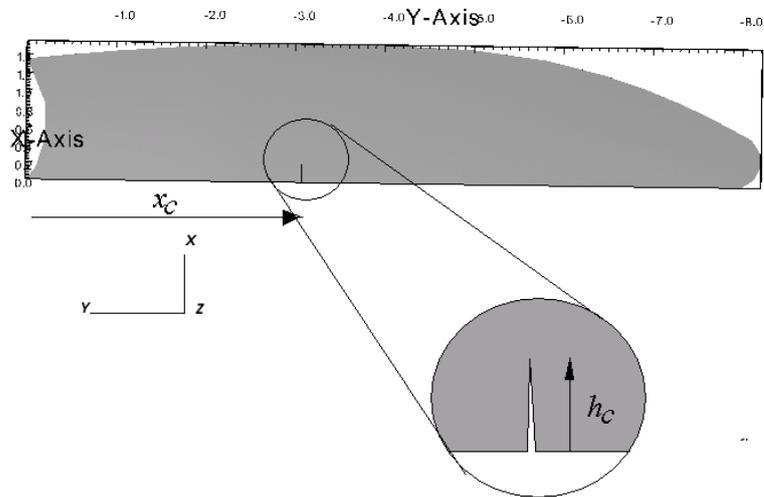


Figura 6-20: Esquema del modelo de daño para la hélice del segundo caso

6.9. Discusión

En términos generales una población entre 50 y 150 individuos con una cruza heurística con $r = 0.6$ es suficiente para detectar daño a nivel 3 en menos de 10 generaciones siempre que el lapso o ventana temporal de estudio estuviese entre 1 y 3 períodos de la frecuencia fundamental del cuerpo sano. Cuanto más largas fueran dichas ventanas temporales, más profundo sería el mínimo global de la función objetivo pero con un número mayor de mínimos locales, demandando una población proporcionalmente mayor en el método evolutivo.

La realización de estudios sobre un vasto conjunto de escenarios de fisura indica que en más del 90% de los casos es posible detectar daño con un error compuesto entre profundidad y localización menor de 7%.

Se simularon escenarios de daño con ruido experimental (ruido blanco) y curiosamente se observó que éste no modifica la precisión del método; incluso con valores de dispersión del orden del 30% del desplazamiento máximo. Esto es debido probablemente a que el ruido sólo hace menos profundo el mínimo global de la función objetivo. Por lo tanto si se presentan casos con un gran error experimental se recomienda aumentar la ventana temporal.

Una prueba exigente para el método de detección es el ensayo experimental, en este caso, de una barra de aluminio de 40 cm de largo con una sección cuadrada de 0.78 cm lado. Con el objeto de compatibilizar el modelo computacional al modelo físico, se optimiza la función objetivo para el espécimen sano vía Algoritmos Genéticos obteniéndose así los coeficientes de amortiguamiento interno y externo y el módulo elástico. Ya que las masas de los acelerómetros son del orden a la masa de la barra de aluminio fueron tenidas en cuenta en el modelo. Una vez optimizado dicho modelo sano, se provocó daño a la barra y se pudo detectar en forma exitosa la posición y profundidad de la fisura. Esto demuestra que no sólo se puede detectar daño con esta técnica, sino que también puede ser utilizada para identificación de cualquier parámetro a partir de una medición indirecta (en este caso aceleración en dos puntos).

6.10. Detección utilizando medidas estáticas

En la práctica muchas veces se puede disponer de sensores precisos de desplazamiento o deformación estática en algunos puntos específicos del cuerpo o también se pueden utilizar técnicas ópticas de medición de deformación estática, como son las técnicas de interferometría.

Para los casos en que el sea posible medir los desplazamientos en algún conjunto reducido de puntos (como en el caso dinámico donde se disponían los acelerómetros) se puede implementar la técnica antes utilizada para la detección de fisura.

Sea un cuerpo en estado de equilibrio, si la deformación es finita satisfará la ecuación de equilibrio

$$\nabla \cdot (\mathbf{FS}) + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

donde $\mathbf{S} = g'(\mathbf{E})$ es el segundo tensor de Piola-kirchhoff dado por alguna relación constitutiva como podrían ser las definidas por la Ec.(4.10) o la Ec.(4.11). Si por el contrario la deformación es infinitesimal se podrá usar la elasticidad lineal (ecuaciones de Navier).

El modelo de contacto de Signorini (4.23) y su regularización (4.25) se aplica en forma idéntica que para el caso dinámico. El caso estático es el caso particular del dinámico.

Con el fin de sistematizar la puesta a punto de los AG se procede a estudiar una barra empotrada-libre simulada de dimensiones iguales que antes, esto es: largo $L = 2.5m$ alto $A = 0.25 m$, y material elástico con un módulo de $E = 7.3e10 Pa$ y $\nu = 0.3$ densidad $\rho_0 = 2766 kg m^{-3}$.

Supóngase que se dispone de una cantidades n de sensores que miden desplazamiento transversal dispuestos a lo largo de la barra como indica la Figura 6-1 equidistantes uno de otro. Dicha barra es deformada por la aplicación de algún esfuerzo, por ejemplo un peso conocido y los sensores miden dicha deformación.

Se simulan los escenarios dados en la Tabla 6.4 aplicando en este caso, una carga de $7840 kN$ en la punta libre de la barra. La aplicación de esta carga se hace dos veces, una en cada sentido transversal (hacia arriba y hacia abajo en la Figura 6-21). Esto es debido

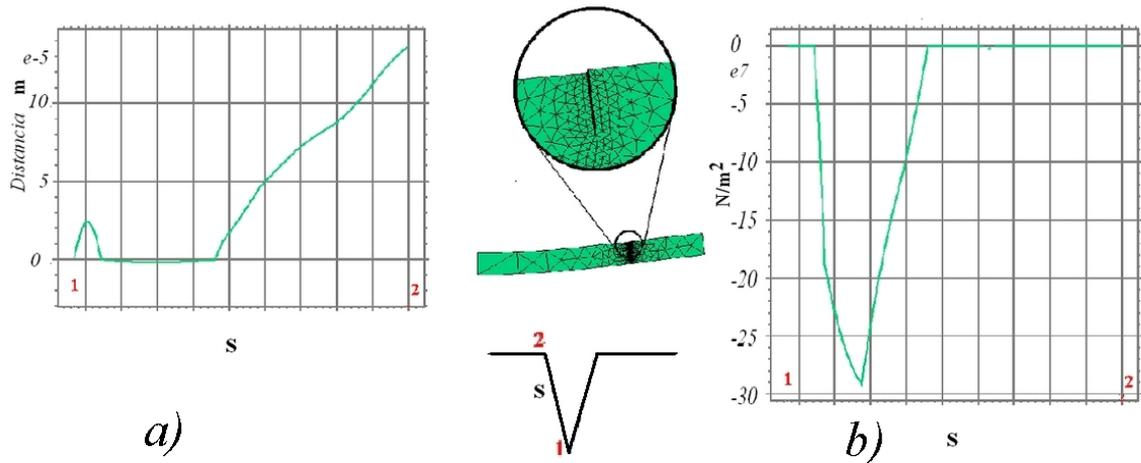


Figura 6-21: Esquema de la barra dañada a) distancia entre las dos caras de la fractura. b) tensión de contacto en la fractura. La variable s indica la longitud del segmento que va desde 1 a 2 en la fractura

a que la fisura podría estar de un lado o del otro (arriba o abajo). Esto automáticamente, daría el doble de datos para analizar teniendo en cuenta la falta de simetría del problema

La función objetivo será entonces

$$d(X_C, h_C) = \sum_{i=1}^n [u^{\uparrow*}(x_i) - u^{\uparrow}(x_i)]^2 + \sum_{i=1}^n [u^{\downarrow*}(x_i) - u^{\downarrow}(x_i)]^2 \quad (6.4)$$

Los símbolos \uparrow y \downarrow en (6.4) indican cuando la carga es hacia arriba o hacia abajo

Como en el caso dinámico, se corre el modelo para un caso de fisura arbitrario, es decir una posición y una profundidad (X_C y h_C) y se obtiene el desplazamiento en los mismos puntos x_i que en el experimento simulado $u^*(x_i)$ con $i = 1..n$ (n número de sensores). La Figura 6-21 muestra la deformación en el caso de que la carga sea hacia arriba. En dicha Figura (a- izquierda) puede observarse como los 7840 kN no son suficientes para que toda la fisura se cierre aunque sí lo son para producir una deformación mensurable. En la Figura 6-21 b) puede notarse la tensión que soportan las caras de la superficie de la fisura donde se produce el contacto.

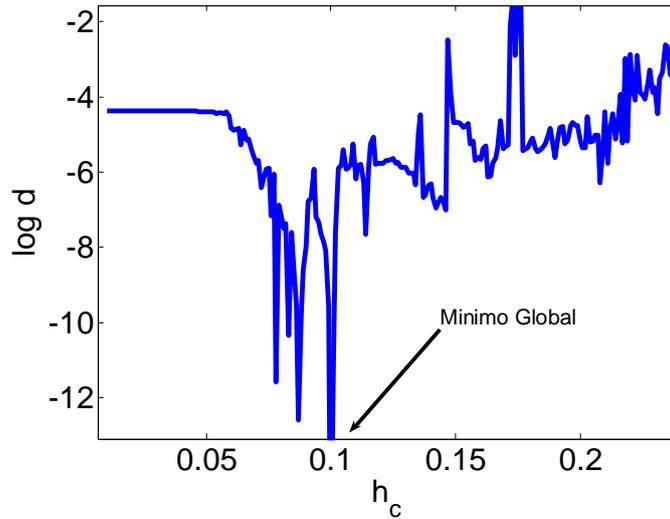


Figura 6-22: Función $\log(d)$. Puede observarse un gran número de mínimos locales.

Como antes, la función objetivo presenta un gran número de mínimos locales. La Figura 6-22 es la representación gráfica, en escala logarítmica, de la función d , fijando el valor de x_c correspondiente a la posición de la fisura y variando el valor de la profundidad h_c . Puede observarse un gran número de mínimos locales.

La Figura 6-23 muestra como disminuye el error promediado en los 10 casos dados en 6.4 a medida que se aumenta el número de sensores en el experimento. Se puede observar que cuatro sensores son suficientes para la detección en una barra recta. Recuérdese que 10% de error es más que satisfactorio ya que el convenio utilizado para el cálculo del mismo es la suma de los errores de los dos parámetros a encontrar, esto es, posición y profundidad de la fisura.

6.10.1. Distribuciones Estadísticas en la Detección

Un intenso estudio estadístico es realizado con el fin de ilustrar las distribuciones en los errores de detección en el caso de medidas estáticas a medida que se incrementa el número de individuos en el AG. Es decir, se pretende estudiar la eficiencia de los

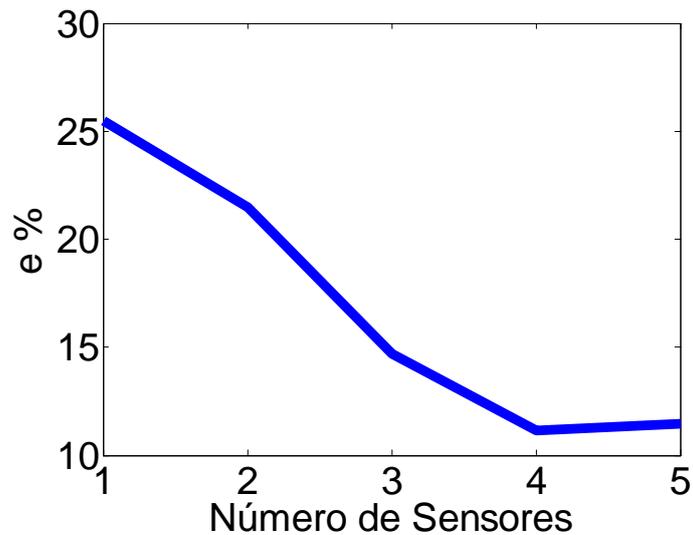


Figura 6-23: Error en función del número de sensores

algoritmos evolutivos a medida que se utilizan poblaciones más numerosas.

El estudio consiste en 70 escenarios de daño diferentes generados aleatoriamente para la viga de la Figura 6-21. La detección de daño es a partir de la función objetivo definida por la Ec.(6.4) utilizándose cuatro puntos donde se efectúa la medición del desplazamiento (es decir $n = 4$) ubicándose como en el caso de detección dinámica en $X_n = nL/5$. Este experimento numérico se efectúa cinco veces para poblaciones de 40, 60, 80, 100, y 120 individuos respectivamente. Todos los demás parámetros de los AG se mantienen inalterados. Cabe aclarar que este intenso estudio numérico - computacional implica el cálculo de $70 \times 5 = 350$ escenarios diferentes.

La Figura 6-24 corresponde al caso de 40 individuos en la detección vía AG. En dicha figura puede observarse como los errores se distribuyen en forma simétrica alrededor del centro. En este caso el promedio corresponde a 27.5% de error. La Figura 6-25 corresponde al caso de una población de 60 individuos. En este caso se puede apreciar como los errores se distribuyen en forma sesgada a la izquierda del valor máximo. El error promedio corresponde a 20.7%

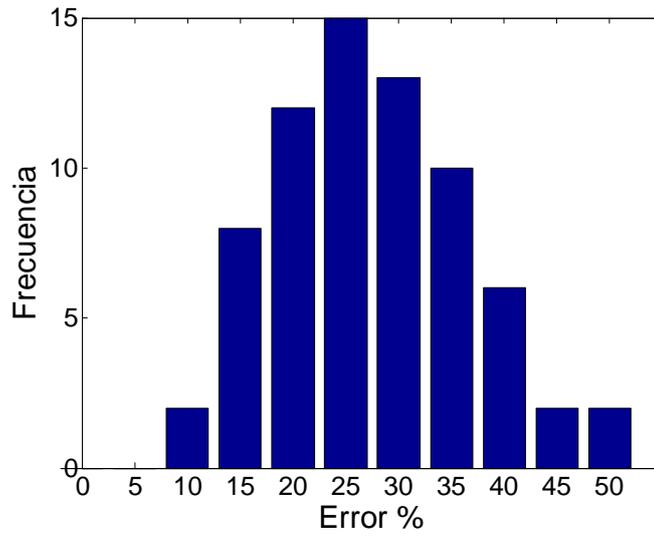


Figura 6-24: Distribución de los errores porcentuales para una población de 40 individuos en la técnica de AG

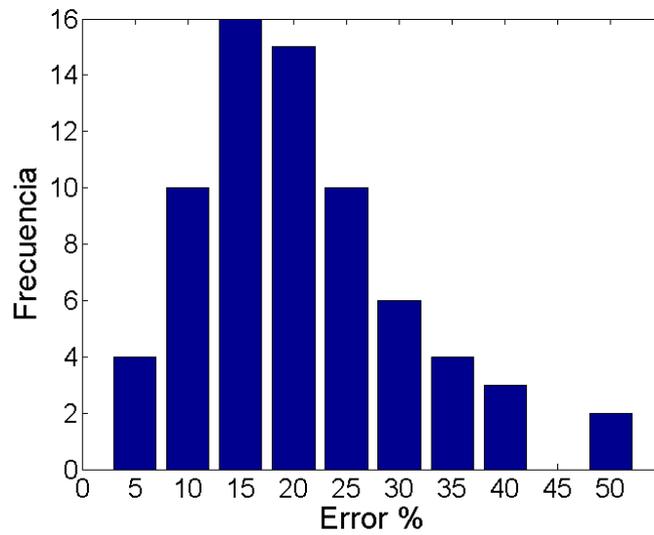


Figura 6-25: Distribución de los errores porcentuales para una población de 60 individuos en la técnica de AG

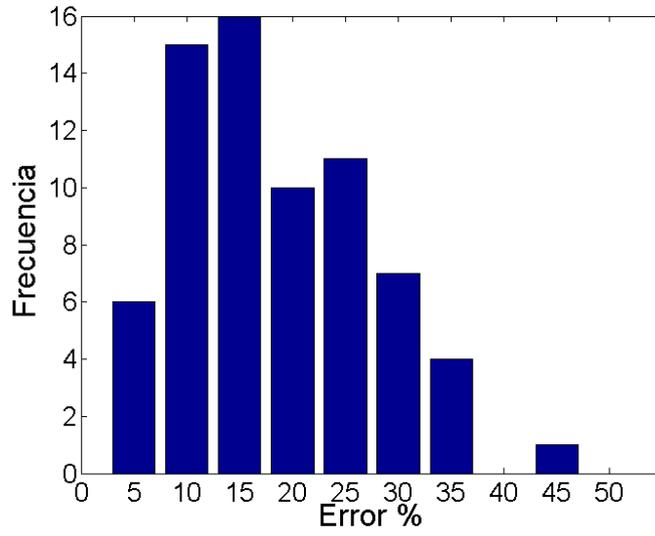


Figura 6-26: Distribución de los errores porcentuales para una población de 80 individuos en la técnica de AG

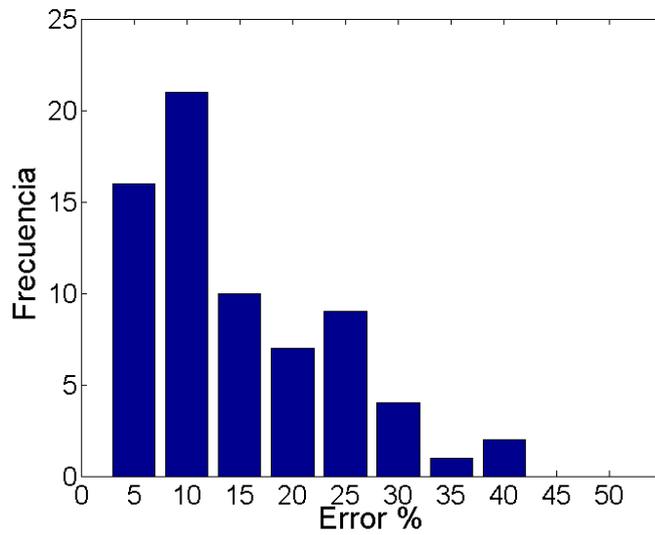


Figura 6-27: Distribución de los errores porcentuales para una población de 100 individuos en la técnica de AG

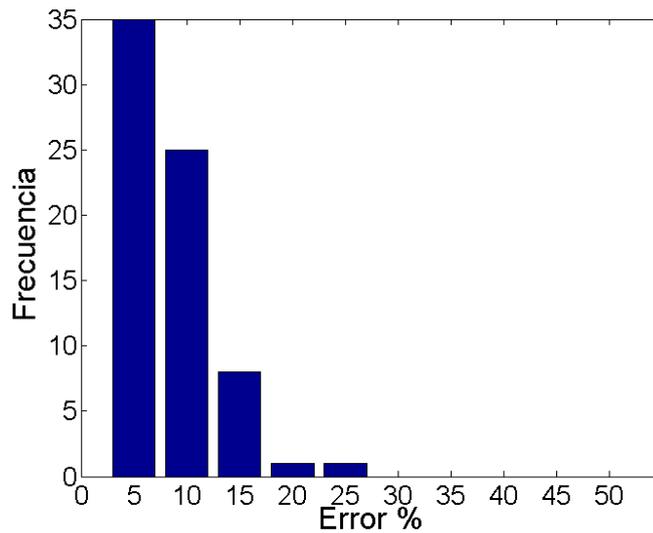


Figura 6-28: Distribución de los errores porcentuales para una población de 120 individuos en la técnica de AG

La Figura 6-26 corresponde al caso de una población de 80 individuos. Ahora se aprecia más claramente como los errores se distribuyen en forma sesgada a la izquierda del valor máximo. En este caso el promedio corresponde a 18.7% de error.

La distribución de los errores correspondiente a 100 individuos es graficada en la Figura 6-27. En esta distribución se aprecia como la máxima frecuencia de los errores se ubica entre el 5% y el 10% a pesar de ser 14.5% el promedio de los mismos. Por ultimo la distribución correspondiente al caso de 120 individuos se grafica en la Figura 6-28. En este caso la dispersión es mínima con un máximo en los entre 0% y 5% y un promedio de errores del 8.1%.

En todos los casos menos el primero, se puede apreciar como la distribución no es de tipo normal. Esto es fácil de entender ya que no pueden existir valores negativos de error y por lo tanto las distribuciones se corren a valores pequeños de error a medida que se aumenta la cantidad de individuos. Empíricamente se podría postular que la distribución de los errores de detección vía AG es del tipo de Weibull.

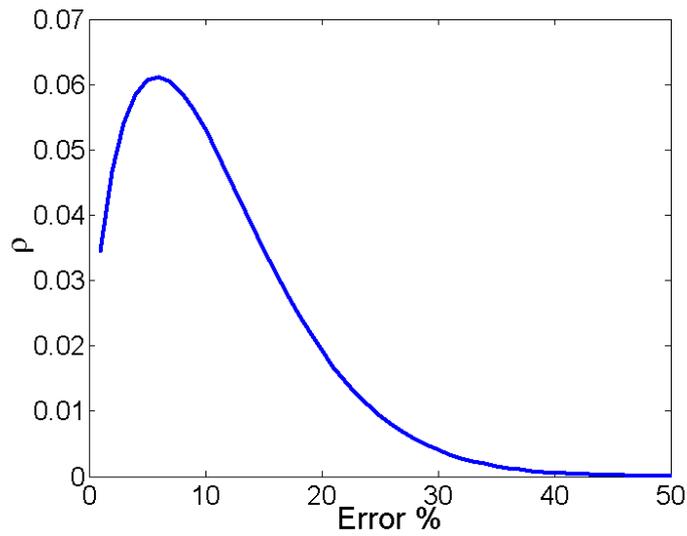


Figura 6-29: Distribución de Weibull para el error de detección con una población de 60 individuos

Dicha distribución esta definida por

$$\rho(x) = ab x^{b-1} e^{-ax^b} \quad (6.5)$$

donde a y b son dos parámetros que caracterizan la distribución definidos por la varianza σ^* y el promedio μ^*

$$\mu^* = a^{-1/b} \Gamma(1 + b)$$

$$\sigma^{*2} = a^{-2/b} [\Gamma(1 + 2/b) - \Gamma^2(1 + 1/b)]$$

Se encontró que un valor de $b = 1.45$ da una descripción razonable para todos los casos.

En la Figura 6-29 se grafica la distribución de Weibull para el error de detección con una población de 60 individuos, es decir es comparable con la Figura 6-25. Pero ultimo en la Figura 6-30 se puede apreciar el promedio de los errores porcentuales de estos experimentos numéricos para la detección vía mediciones estáticas. Se puede observar como a medida que se aumenta la cantidad de individuos de la población, el error disminuye

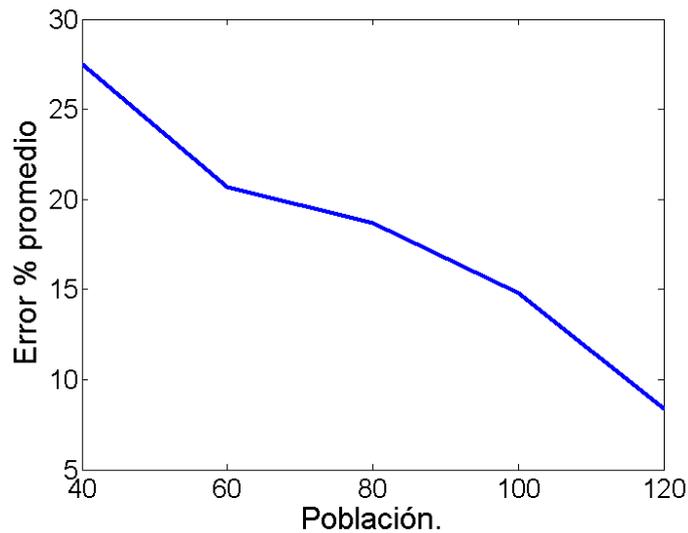


Figura 6-30: Error promedio en la detección de la falla vía experimento estático, como una función de la cantidad de individuos en la población del AG

aproximadamente en forma lineal. Comparando este resultado con el de la Figura 6-7 se puede concluir que la detección de daño vía experimentos dinámicos. Es precisamente la riqueza de la información en la medición dinámica la que da la posibilidad de una solución del problema inverso más exacta que en el caso estático.

6.10.2. Influencia del error experimental en la medición estática

Dado que en un ensayo real existen errores de medición y como el objeto último de estos estudios es la implementación experimental, se adiciona, a los resultados del experimento simulado, una incerteza, un número aleatorio r para luego intentar la búsqueda por AG. Es decir: se tomara como valor dato $u(x_i) + r$ y se busca el mínimo de (6.4) vía AG.

La Figura 6-31 muestra el error promedio en los mismos 10 escenarios de la Tabla 6.4 a medida que el error de medición aumenta. Aquí el error experimental es tomado como el porcentaje referido al desplazamiento de la punta de la barra (que es el máximo).

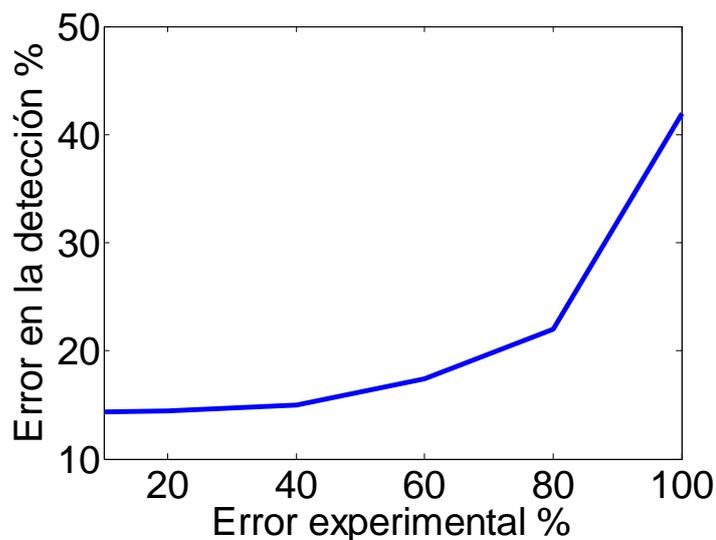


Figura 6-31: Error medio en la detección como una función del error experimental

Puede observarse como se puede detectar (en promedio) una fisura cuando se dispone de mediciones experimentales con un error hasta el 40 o 50% de la magnitud de la deformación, usando sólo cuatro sensores ($n = 4$) en un único experimento.

En casos generales el método dinámico da resultados más exactos pero computacionalmente es más caro que el estático. Por otra parte el ensamblaje experimental y la puesta a punto para un experimento de detección de daño estático es más complejo y menos exacto.

En términos generales, es interesante como una técnica basada en búsqueda de parámetros vía AG es exitosa incluso en situaciones complejas con grandes errores experimentales o con pequeñas diferencias e incertezas en entre el modelo computacional y el modelo físico.

Al utilizar AG, el modelo computacional es resuelto en tantos casos diferentes como individuos tenga la población multiplicada por la cantidad de generaciones implementadas. Por ejemplo si se utilizan 75 individuos y un máximo de 10 generaciones, el modelo de búsqueda se deberá resolver, en el peor de los casos, $75 \times 10 = 750$ veces. Se podría

argüir que esto último demandaría un gran costo computacional, sin embargo cada caso es independiente del anterior por lo que la técnica de búsqueda basada en AG puede ser fácilmente implementada en computación distribuida (Computo paralelo). Precisamente la tendencia en la manufactura de computadoras, en los últimos años se ha inclinado a equipos multi procesadores. Actualmente son muy económicas las computadoras con 4 procesadores y no es de extrañar que en dos o tres años se vendan equipos hogareños con 16 o 32 procesadores. Lo dicho justifica implementar técnicas de búsqueda que utilicen modelos complejos ya que el costo computacional será cada vez menor.

Capítulo 7

Conclusiones

7.1. Estudio Realizado y Discusión

El objetivo de la presente investigación fue estudiar y desarrollar un método de diagnóstico y detección de fisura en elementos mecánico-estructurales. El principal aporte es la construcción de un modelo general basado en la viscoelasticidad finita para detectar fisuras en cuerpos de cualquier forma sometidos a cualquier tipo de movimiento mediante algoritmos evolutivos. La mayoría de las investigaciones en este campo tratan sobre la detección de daño en cuerpos de forma particular; en general sobre vigas rectas y algunas pocas sobre placas. En algunos casos se proponen modelos más o menos realistas que incluyen el contacto en la fisura. Andreaus y otros han aplicado contacto tipo Signorini en para modelar la dinámica de una viga recta dañada, pero no para detectar localización y magnitud de la fisura. El autor de esta tesis no conoce trabajo donde se incluya el contacto de Signorini en la detección de daño.

7.1.1. Modelo de deformación finita y contacto

Si bien la mayoría de los ejemplos tratados en esta tesis se refieren a la detección de daño en elementos rectos tipo vigas, la Elasticidad finita, como rama de Mecánica del Continuo, es completamente general como lo demuestran algunos ejemplos en los que se

estudiaron cuerpos de formas curvas y en movimientos arbitrarios.

En la construcción teórica del modelo de cuerpo dañado, se intensificó la atención al problema de contacto de Signorini; un problema fascinante por su aparente complejidad pero de resolución computacional simple ya que con poco esfuerzo se puede incluir fricción de Coulomb y modelar fenómenos de contacto parcial, fenómenos de contacto intermitente, stick – slip, vibro impacto, deslizamiento suave, etc.

Aunque en primera instancia se proyectaba la construcción de un modelo basado en la teoría clásica de la Elasticidad (Elasticidad infinitesimal), se observó la posibilidad de incluirlo en la teoría no lineal de la Mecánica del Continuo. En dicho enfoque no se hace hipótesis alguna sobre la pequeñez de la deformación y no sólo da la posibilidad de tratar cuerpos que sean sometidos a grandes deformaciones, sino que también se pueden tratar movimientos arbitrarios como grandes rotaciones y desplazamientos. De no ser así, se tendría que elaborar un modelo *ad hoc* para cada caso particular. Como por ejemplo, el péndulo tratado en el Capítulo 5 donde fue comparada la teoría general con dos modelos de Resistencia de Materiales. En estos modelos técnicos las ecuaciones de deformación se tuvieron que plantear sobre un marco móvil rotatorio rígido. Dicho marco rígido era gobernado por otro conjunto de ecuaciones: las del cuerpo rígido.

Cada una de estas construcciones tiene la desventaja de estar sustentadas por un nuevo conjunto de hipótesis que muchas veces el investigador no puede asegurar que *a priori* se cumplan. Sobre todo si el problema describe un fenómeno complejo como el vibro impacto en la zona dañada o la inestabilidad en la alternancia entre fricción estática y dinámica (stick y slip). O aún más, en un fuerte impacto entre un disco y un plano.

Aunque se podría haber propuesto una relación constitutiva para el tensor de tensiones de Cauchy y luego transformarlo al tensor de Piola-Kirchhoff, al tratar el problema en coordenadas puramente *lagrangianas*, se eligió proponer dichas constitutivas en esa misma representación (material o *lagrangiana*) ya que homogeniza el planteo contribuyendo a esclarecer y simplificar el enfoque matemático del problema. El precio a pagar por esto es la interpretación de otro vector de tensión. El vector tensión de Piola Kirchhoff

que simplemente es la fuerza en la configuración deformada por unidad de área en la configuración indeformada a diferencia del conocido vector tensión de Cauchy en el que todo es referido a la configuración *actual* o deformada.

El análisis de las posibles dependencias entre los tensores de tensiones en función de las deformaciones, y de las velocidades de deformaciones, en coordenadas *lagrangianas* son tratadas en forma consistente con la teoría de Coleman y Mizel muy difundida aunque formulada en coordenadas eulerianas. En el Capítulo 4 se mencionan los resultados que son tratados en forma completa en el Apéndice C (restricciones de la termodinámica a las ecuaciones constitutivas) donde son dos los caminos que se usaron para demostrar el conjunto de restricciones que la termodinámica impone a la forma funcional de dichas relaciones. Y es este análisis el que da un marco riguroso en la forma funcional entre las tensiones, las deformaciones y las velocidades de deformación cuando de problemas visco elásticos (disipación interna) se trata. Para ello se transformaron las ecuaciones de balance de masa, momento, energía y segundo principio de la Termodinámica a la forma material. Como es mencionado más arriba, la ventaja de esto es un tratamiento homogéneo en el que todas las integrales son sobre el mismo dominio.

El beneficio más notable de la formulación *lagrangiana* es cuando se trata de problemas de contacto. Cuando el cuerpo realiza desplazamientos finitos en el espacio, el planteo de las ecuaciones de contorno es matemáticamente inconveniente si se lo trata en forma euleriana o espacial ya que la posición misma del contorno es una de las incógnitas del movimiento. Es precisamente en este contorno *lagrangiano* donde se imponen las condiciones de contacto.

En el Capítulo 4 el problema de Signorini fue generalizado para el caso que exista contacto entre dos cuerpos flexibles. Desde el punto de vista de la Mecánica Analítica, un problema de restricciones en el que las ligaduras se puedan expresar en forma de ecuaciones (que relacionen las posiciones de las partículas) se llama holónomo. Estos problemas pueden ser planteados usando un conjunto de coordenadas (generalizadas) de tal forma que sea posible integrarlos.

El problema de contacto unilateral de Signiorini es no holónimo ya que éste impone restricciones expresadas como inequaciones entre las coordenadas espaciales de las partículas; en este caso las del borde. En el Capítulo 4 se regularizaron dichas restricciones transformando el problema de ligaduras rígidas en un problema de partículas libres. Esto es: la interpenetración entre los cuerpos no está prohibida pero sí fuertemente penalizada a través de un vector de tensión que se activa cuando los cuerpos están lo suficientemente próximos. Es de esta forma que el problema de contacto pudo ser resuelto (integrado) computacionalmente.

Desde el punto de vista del tipo de condiciones de borde, la regularización del problema de contacto transforma las condiciones de desigualdad mixta entre tensiones (condiciones naturales) y desplazamientos (condiciones geométricas) en un problema puramente de condiciones naturales. Esto facilita notablemente la inclusión de fricción en el modelo ya que se imponen relaciones fenomenológicas entre tensiones normales y tangenciales en la zona donde los cuerpos se tocan.

En el Capítulo 5 se trataron varios problemas de grandes rotaciones, grandes deformaciones, fricción, contacto e impacto entre cuerpos flexibles planos y tridimensionales contra cuerpos rígidos o entre dos cuerpos flexibles. Se pudieron estudiar relaciones de fricción estática y dinámica en un mecanismo pendular flexible, tiempos y fuerzas de contacto en el caso de impacto entre dos cuerpos flexibles y entre uno flexible y otro rígido con distintas propuestas constitutivas. Se presentaron dependencias funcionales del tipo fuerzas de contacto vs. tiempo durante el impacto (fuerzas de impulsión). Se estudió exitosamente la dependencia de ángulos de retroceso en función de ángulos de incidencia para distintos coeficientes de fricción de un disco contra un plano rígido. En muchos de estos casos fueron presentados los estudios energéticos que además de ser interesantes son utilizados extensamente como herramienta de diagnóstico en la calidad de la solución numérica.

7.1.2. Detección de Daño

Un simple estudio cualitativo de la dinámica lineal y no lineal de una viga reveló que la respuesta, cuando no existía fisura, era de tipo periódica en el caso lineal, casi periódica en el caso no lineal, y no concluyente en el caso que exista fisura. La dinámica de un cuerpo dañado presenta según este modelo, no linealidad geométrica, no linealidad material y no linealidad en la condición de contacto en la que se pueden dar uniones de tipo parciales contacto e impacto.

El problema inverso de detección de fisura a partir de la dinámica o de la deformación estática es un problema mal condicionado. Incluso en el caso lineal como se anticipaba en la Introducción. Los valores de frecuencia son poco sensibles a las posiciones y profundidades de las fisuras. Es por esto que se implementó un método de comparación entre la dinámica real de un cuerpo dañado con la dinámica de un modelo computacional (modelo de prueba) a través de una función que calculaba la diferencia cuadrática de los vectores posición o aceleración en algunos puntos materiales. Tal como se idearía un experimento, colocando no sólo un número finito sino reducido de sensores de movimiento en algunos puntos.

Tanto en problemas de detección estática como dinámica, se observó que la función objetivo a optimizar presentaba una multitud de mínimos y máximos locales y posibles discontinuidades. Esta propiedad hizo fracasar cualquier técnica de minimización fundamentada en métodos de derivación como gradientes conjugados o Newton Raphson.

En el Capítulo 6 se utilizó la técnica de los Algoritmos Genéticos para optimizar la función objetivo. Esta técnica permite maximizar o minimizar una función sin recurrir a ningún método de gradiente. El algoritmo imita la reproducción sexual de las especies vivas y el supuesto evolutivo que afirma que el más apto genéticamente tendrá más posibilidades de pasar su información genética a la próxima generación.

Primero el método de Algoritmos Genéticos fue puesto a punto inspeccionando que tipo de parámetros internos hubo que seleccionar o cambiar.

Se concluyó que población y tipo de cruce suficiente para detectar daño a nivel 3 en

menos de 10 generaciones siempre que el lapso o ventana temporal de estudio estuviese relacionada con los períodos de la frecuencia fundamental del cuerpo sano. Cuanto más largas fueran dichas ventanas temporales, más profundo sería el mínimo global de la función objetivo pero con un número mayor de mínimos locales, demandando una población proporcionalmente mayor en el método evolutivo.

En la detección de daño en el dominio temporal (experimentos simulados dinámicos) se realizaron estudios sobre un vasto conjunto de escenarios de fisura y se determinó que en más del 90% de los casos es posible detectarlo con un error compuesto entre profundidad y localización menor de 7%.

Se simularon escenarios de daño con ruido experimental (ruido blanco) y curiosamente se observó que éste no modifica la precisión del método; incluso con valores del orden del 30% del desplazamiento máximo. Esto es debido a que el ruido sólo hace menos profundo el mínimo global de la función objetivo. Por lo tanto si se presentan casos con un gran error experimental se recomienda aumentar la ventana temporal.

La robustez del método fue puesta a prueba incorporando una incerteza al propio modelo. Se intentó exitosamente detectar daño en un caso en el que la fisura era del tipo difusa. Dicha fisura fue modelada como 5 fisuras delgadas cercanas de tamaños similares pero no idénticos usando el modelo prueba de fisura única.

El método fue también implementado en el caso dinámico de un arco y una hélice en régimen rotatorio demostrando que esta técnica puede ser utilizada para detectar fisura en especímenes de forma arbitraria e incluso en movimientos finitos como los rotatorios.

Una prueba exigente para el método fue el ensayo experimental de una barra de aluminio. Con el objeto de compatibilizar el modelo computacional al modelo físico, fueron dejados libres los valores de coeficientes de amortiguamiento interno y externo y el módulo elástico. Se optimizó una función objetivo para el espécimen sano vía Algoritmos Genéticos. Dado que las masas de los acelerómetros eran del orden a la masa de la barra de aluminio se tuvieron en cuenta en el modelo. Una vez optimizado dicho modelo sano, se provocó daño en forma de fisura transversal a la barra y se utilizaron los parámetros

ajustados antes para detectar en forma exitosa la posición y profundidad de la fisura. Esto demostró que no sólo se puede detectar daño con esta técnica, sino que también puede ser utilizada para identificación de cualquier parámetro a partir de una medición indirecta (en este caso aceleración en dos puntos).

También se implementó la detección de daño en caso estático, suponiendo que en el hipotético experimento sólo se puede medir desplazamiento en algunos puntos. Esta situación adversa se fuerza para justificar el empleo de la técnica de optimización vía algoritmos evolutivos, ya que si se dispone de la deformada en todos los puntos del cuerpo (elástica), el daño podría ser detectado vía problema inverso o directamente evaluando la suavidad de dicha elástica. En este último caso, se observó, por un lado, que el número de sensores mejora la precisión de detección como era de esperarse, y a diferencia del caso dinámico los resultados son sensibles al error experimental. Fue realizado un estudio paramétrico extensivo sobre 70 casos diferentes sobre la eficiencia de detección en función de la población en el AG. De este estudio se desprende que es más eficiente detectar daño en el caso dinámico que en el estático, resultado esperable ya que las series temporales aportan mayor cantidad de información a la función objetivo. En casos generales el método dinámico da resultados más exactos pero computacionalmente es más caro que el estático.

7.2. Conclusión

De los resultados de esta tesis se pueden extraer varias conclusiones concretas.

Con respecto al modelo Físico - Matemático se puede mencionar:

- 1- Implementación y formulación de una teoría de la Mecánica de Sólidos viscoelásticos consistente con la termodinámica
- 2- Implementación de la Mecánica de Contacto unilateral con deformaciones y rotaciones arbitrarias en coordenadas lagrangianas.
- 3- Capacidad de modelar fricción tipo intermitente, efecto stick – slip, vibro im-

pacto, deslizamiento suave.

4- Capacidad de estudios paramétricos en impacto y fricción entre dos cuerpos deformables como son el tiempo de contacto y fuerzas impulsivas y comparación entre diferentes modelos constitutivos.

5- Modelado simple del contacto unilateral en la fisura.

6- Planteo del problema inverso vía una función objetivo

7- Implementación exitosa de una técnica basada en Algoritmos Genéticos para la resolución del problema inverso.

Con respecto a los resultados en modelos de contacto puede concluirse

1- La implementación de un modelo completo permite incluir diferentes tipos de fricción como los observados en el ejemplo del péndulo en el que se modela la forma del eje como un círculo, y obtener resultados como el efecto de endurecimiento por la fuerza centrífuga en una barra giratoria, efecto que tiene que ser incluido *ad hoc* en los modelos técnicos.

2- Los estudios energéticos permiten monitorear la calidad de la solución en el caso que sean conservativos y entender como se disipa en fenómenos de fricción o casos no conservativos.

3- Interesante resultado del tiempo de contacto en función de la velocidad de incidencia entre un disco y un plano rígido. El tiempo de contacto disminuye con la velocidad de incidencia en forma escalonada. Esto es debido a que al impactar, las ondas elásticas se reflejan un número entero de veces entre los límites del disco, luego, al ir disminuyendo el tiempo de contacto, las ondas se reflejan una vez menos produciendo el escalón.

4- Cuando los impactos son a velocidades bajas, las deformaciones son pequeñas y los modelos elásticos de St.Venant Kirchhoff y Neo Hookeanos son similares. Pero al incrementar las velocidades el modelo Neo Hookeanos resulta menos rígido.

5- Al implementar modelos de contacto en un cuerpo dañado se puede observar un complejo fenómeno de vibración.

Por ultimo, con respecto a los resultados de detección de daño puede decirse:

- 1- La función objetivo presenta una gran complejidad de mínimos locales. En el caso de detección vía series temporales la cantidad de mínimos locales aumenta con la ventana temporal.
- 2- La implementación de AG es exitosa con una población entre 50 y 150 individuos con una cruza de tipo heurística con factor $r = 0.6$.
- 3- A medida que se incrementa el número de individuos, la detección de daño es más precisa tanto en el caso dinámico como en el estático, incrementando también el costo computacional.
- 4- En el caso de detección vía series temporales, el error experimental en la respuesta temporal no influye en la detección de daño al contrario que en el caso estático
- 5- Divergencias en el tipo de fisura entre el espécimen dañado y el modelo de detección no influyen sustancialmente en la calidad de la detección.

7.3. Comentarios Finales

El problema de detectar daño en cuerpos eventualmente rotos, es sin duda un problema interesante no sólo por las ingeniosas técnicas de resolución del problema inverso, sino que puede representar un avance tecnológico en el diagnóstico estructural en situación operativa. A pesar de existir una gran cantidad de trabajos científicos sobre el tema, seguramente por las dificultades computacionales, las técnicas de detección de daño a través de las respuestas dinámicas o estáticas en las que se resuelve el problema inverso son aún escasamente aplicadas a problemas reales. Gracias a la continua evolución de la potencia computacional, es probable que en un futuro cercano sean utilizados modelos de detección muy complejos al mismo nivel que las técnicas basadas en la emisión acústica o rayos X en situaciones reales.

La gran ventaja de un modelo del continuo con grandes deformaciones y modelos constitutivos generales es la variedad de geometrías, materiales y movimientos que se

pueden simular ya que es posible implementar en diagnóstico en tiempo real incrementando la vida útil de la estructura monitoreada. La detección de daño utilizando AG es una probable vía de solución del problema de identificar el mínimo absoluto en una función objetivo que presenta una formidable cantidad de mínimos locales. La desventaja principal de esta técnica es el gran costo computacional en los tiempos de ejecución. Desventaja por cierto cada vez menos importante.

7.4. Trabajo Futuro

Es claro que el tema de detección de fallas en elementos sometidos a rotaciones y deformaciones arbitrarias no es un tema agotado. Un paso siguiente es la implementación de la técnica de optimización vía Algoritmos Genéticos en problemas termo mecánicos. Los problemas concretos que se proponen estudiar a futuro son:

- 1- Inclusión de modelos constitutivos más sofisticados para el amortiguamiento.
- 2- Caracterización del daño a partir de indicadores en el amortiguamiento.
- 3- Extensión del modelo desarrollado en la detección de daño con el fin de implementarlo en la evolución de la fisura, esto es como herramienta de monitoreo de la integridad estructural dañada.
- 4- Extensión de la técnica para detectar múltiples fisuras desarrollando nuevas estrategias de búsqueda.
- 5- Implementación en materiales compuestos y funcionalmente graduados (en inglés Functionally Graded Materials, FGM)
- 6- Implementación experimental extensiva con el fin de identificar las posibles limitaciones de la técnica de detección de fisura y caracterización de parámetros constitutivos.
- 7- Inclusión de modelos constitutivos más sofisticados que incluyan efectos térmicos y su posible implementación en detección de daño a partir de parámetros característicos de conducción y generación de calor.

- 8- Implementación de la deformación termo-plástica en detección de fisura y caracterización de parámetros constitutivos.
- 9- Estudio de la caracterización de incertezas y modelado estocástico a la Mecánica de Contacto.
- 10- Caracterización de incertezas y modelado estocástico en la detección de daño.
- 11- Optimización de las posiciones optimas de los sensores.
- 12- Estudio e implementación de técnicas híbridas de optimización en el problema de detección.

Bibliografía

- [1] Cloetens, P., Pateyron-Salomé, M., Buffière, J. Y., Peix, G. Baruchel, J. and Peyrin, F. Observation of microstructure and damage in materials by phase sensitive radiography and tomography. *Journal of Applied Physics* 81, 5878(1997).
- [2] Carneiro S. Model-Based Vibration Diagnostic of Cracked Beams in the Time Domain. PhD thesis. Blacksburg, Virginia, Agosto (2000).
- [3] Stavroulakis, G.E. Inverse and Crack Identification Problems in Engineering Mechanics. (Kluwer Academic Pub: 2001).
- [4] Goldstein, H. *Classical Mechanics* (2d ed.); Reading. (Addison-Wesley: 1980). (Kluwer Academic Pub: 2001).
- [5] Raous, M., Cangémi, L. and Cocu, M. A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 177, 383-399(1999).
- [6] Panagiotopoulos, P.D. *Inequality Problems in Mechanics and Applications: Convex and Nonconvex Energy Functions*. (Birkhauser: 1985).
- [7] Moreau, J.J. and Panagiotopoulos, P.D. *Nonsmooth mechanics and applications. Courses and lectures*
- [8] Moreau, J.J., Panagiotopoulos, P.D. and Strang, G. *Topics in Nonsmooth Mechanics*. (Birkhauser: 1988).

- [9] Pfeiffer, F. and Glocker, C. *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. (Wiley-Interscience: 1996).
- [10] Giannessi, F., Jurina, L. and Maier, G. Quadratic Complementarity Problem Related to the Optimal Design of a Pipeline Freely Resting on a Rough Sea Bottom. *Engineering Structures* 4, 75-85(1982).
- [11] Bittanti, S., Maier, G. and Nappi, A. Inverse problems in structural elastoplasticity: a Kalman filter approach. *Plasticity Today. Modelling, Methods and Applications* 311–329(1984).
- [12] Giannessi, F., Jurina, L. and Maier, G. Quadratic Complementarity Problem Related to the Optimal Design of a Pipeline Freely Resting on a Rough Sea Bottom. *Engineering Structures* 4, 75-85(1982).
- [13] Coleman, B.D. and Mizel, V.J. Existence of Caloric Equations of State in Thermodynamics. *The Journal of Chemical Physics* 40, 1116(1964).
- [14] Truesdell, C. and Noll, W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. (Springer: 2004).
- [15] Truesdell, C. and Baierlein, R. Rational Thermodynamics. *American Journal of Physics*. 53, 1020(1985).
- [16] Truesdell, C. *A first course in rational continuum mechanics*. (Academic Press New York: 1977).
- [17] de Castro, A.B. *Continuum Thermomechanics*, volume 37 of *Progress in Mathematical Physics*. (Birkhauser Basel, Boston: 2005).
- [18] Fung, Y.C. *Foundations of Solid Mechanics*. (Prentice-Hall, Inc.: 1965).
- [19] Bonet, J. and Wood, R.D. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. (Cambridge University Press: 1997).

- [20] Banks, H.T., Inman D. J., Leo D. J. and Wang Y. An Experimentally Validated Damage Detection Theory In Smart Structures. *Journal of Sound and Vibration* 191, 859-880(1996).
- [21] Brogliato, B. *Nonsmooth Mechanics: Models, Dynamics and Control*. (Springer: 1999).
- [22] Holland, J.H. *Adaptation in natural and artificial systems*. (MIT Press Cambridge, MA, USA: 1992).
- [23] Goldberg, D.E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. (Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. Boston, MA, USA: 1989).
- [24] Ratcliffe, C.P. Damage Detection Using A Modified Laplacian Operator On Mode Shape Data. *Journal of Sound and Vibration* 204, 505-517(1997).
- [25] Munoz, A., Martorell, S. and Serradell, V. Genetic algorithms in optimizing surveillance and maintenance of components. *Reliability Engineering and System Safety* 57, 107-120(1997).
- [26] Back, T. and Schwefel, H.P. An Overview of Evolutionary Algorithms for Parameter Optimization. *Evolutionary Computation* 1, 1-23(1993).
- [27] Michalewicz, Z. *Genetic Algorithms+ Data Structures= Evolution Programs*. (Springer: 1996).
- [28] Rytter, A. *Vibration Based Inspection of Civil Engineering Structures*. PhD thesis, Aalborg University, Denmark, 1993.
- [29] Gounaris, G. and Dimarogonas, A. A finite element of a cracked prismatic beam for structural analysis. *Computers & structures* 28, 309-313(1988).
- [30] Ibrahim, F. An elastoplastic cracked-beam finite element for structural analysis. *Computers & structures* 49, 981-988(1993).

- [31] Kirmser, P.G. The Effects of Discontinuities on the Natural Frequency of Beams. (The College: 1945). In Proceedings of the American Society of Testing and Materials 44, 897-904(1944).
- [32] Christides, S. and Barr, A.D.S. One-dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams. International Journal of Mechanical Sciences 26, 639-648(1984).
- [33] Christides, S. and Barr, A. Torsional vibration of cracked beams of non-circular cross-section. International journal of mechanical sciences 28, 473-490(1986).
- [34] Hu, H. and Haichang, H. Variational Principles of Theory of Elasticity with Applications. (Gordon & Breach Science Pub: 1984).
- [35] Truesdell, C. and Toupin, R. The Classical Field Theories. (Springer: 1960).
- [36] Wang, C. and Truesdell, C. Introduction to Rational Elasticity. (Kluwer Academic Publishers: 1973).
- [37] Eringen, A.C. Mechanics of Continua. Huntington, NY, Robert E. Krieger Publishing Co. (1980).
- [38] Mase, G.E. Continuum Mechanics for Engineers. (CRC Press: 1999).
- [39] Lai, W. M., Rubin, D., Krempl, E. Introduction to continuum mechanics. (Pergamon Press New York: 1993).
- [40] Gurtin, M.E. An Introduction to Continuum Mechanics. (Academic Press: 1981).
- [41] Doebling, S.W., Farrar, C.R. and Prime, M.B. A Summary Review of Vibration-Based Damage Identification Methods. The Shock and Vibration Digest 30, 91(1998).
- [42] Dimarogonas, A.D. Vibration of cracked structures: A state of the art review. Engineering Fracture Mechanics 55, 831-857(1996).

- [43] Salawu, O.S. Detection of structural damage through changes in frequency: a review. *Engineering Structures* 19, 718-723(1997).
- [44] Adams, R. D., Cawley, P., Pye, C. J., Stone, B. J. and Davies, W. G. R. A Vibration Technique for Nondestructively Assessing the Integrity of Structures. *J. Mech. Eng. Sci.* 21, 57(1979).
- [45] Cawley, P. and Adams, R. The location of defects in structures from measurements of natural frequencies. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 14, 49-57(1979).
- [46] Friswell, M.I. and Penny, J.E.T. The practical limits of damage detection and location using vibration data. 11th VPI&SU Symposium on Structural Dynamics and Control. Blacksburg: VPI&SU (Virginia Polytechnic Institute & State University) 31-40(1997).
- [47] Juneja, V., Haftka, R.T. and Cudney, H.H. Damage Detection and Damage Detectability— Analysis and Experiments. *Journal of Aerospace Engineering* 10, 135-142(1997).
- [48] Gudmundson, P. Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 30, 339-353(1982).
- [49] Tracy, J. and Pardoen, G. Effect of delamination on the natural frequencies of composite laminates. *Journal of composite materials* 23, 1200-1215(1989).
- [50] Penny, J.E.T. and Wilson, D. Damage location in structures using vibration data. the 11 th International Modal Analysis Conference 861-867(1993).
- [51] Barr, A.D.S. An extension of the Hu–Washizu variational principle in linear elasticity for dynamic problems. *Transactions of ASME Journal of Applied Mechanics* 33, 465(1966).

- [52] Armon, D., Ben-Haim, Y. and Braun, S. Crack detection in beams by rank-ordering of eigenfrequency shifts. *Mechanical Systems and Signal Processing* 8, 81-81(1994).
- [53] Shen, M.H.H. and Pierre, C. Free Vibrations of Beams With a Single-Edge Crack. *Journal of Sound and Vibration* 170, 237-259(1994).
- [54] Shen, M.H.H. and Pierre, C. Natural modes of Bernoulli-Euler beams with symmetric cracks. *Journal of Sound and Vibration* 138, 115-134(1990).
- [55] Stubbs, N. and Osegueda, R. Global non-destructive damage evaluation in solids. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis* 5, 67-79(1990).
- [56] Stubbs, N. and Osegueda, R. Global damage detection in solids- Experimental verification. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis* 5, 81-97(1990).
- [57] Stubbs, N., Kim, J.T. and Topole, K. An efficient and robust algorithm for damage localization in offshore platforms. *ASCE 10th Structures Congress* 92, 543-546(1992).
- [58] Morassi, A. and Rovere, N. Localizing a Notch in a Steel Frame from Frequency Measurements. *Journal of Engineering Mechanics* 123, 422(1999).
- [59] Wang, W. and Zhang, A. Sensitivity analysis in fault vibration diagnosis of structures. *International Modal Analysis Conference*, 5 th, London, England 496-501(1987).
- [60] Stubbs, N., Broome, T. and Osegueda, R. Nondestructive Construction Error Detection In Large Space Structures. *AIAA Journal* 28, 146-152(1990).
- [61] Hearn, G. and Testa, R.B. Modal analysis for damage detection in structures. *Journal of Structural Engineering* 117, 3042-3063(1991).

- [62] Richardson, M.H. and Mannan, M. Remote detection and location of structural faults using modal parameters. International Modal Analysis Conference, 10 th, San Diego, CA 502-507(1992).
- [63] Narkis, Y. Identification of crack location in vibrating simply supported beams. Journal of sound and vibration 172, 549-558(1994).
- [64] Brincker, R., Kirkegaard, P.H., Andersen, P. and Martinezet,M.E. Damage Detection in an Offshore Structure. Proc. SPIE 2460, (1995).
- [65] Skjaerbaek, P.S., Nielsen, S.R.K. and Cakmak, A.S. Assessment of Damage in Seismically Excited RC-Structures from a Single Measured Response. Proceedings-Spie The International Society For Optical Engineering 133-139(1996).
- [66] Al-Qaisia, A. and Meneghetti, U. Crack detection in plates by sensitivity analysis. Proceedings of SPIE, the International Society for Optical Engineering 3089, 1831-1837(1997).
- [67] Villemure, I., Ventura, C.E. and Sexsmith, R.G. Impact and Ambient Vibration Testing to Assess Structural Damage in Reinforced Concrete Frames. Proc. SPIE 2768, (1996).
- [68] West, W.M. Illustration of the use of modal assurance criterion to detect structural changes in an Orbiter test specimen. International Modal Analysis Conference, 4 th, Los Angeles, CA, Proceedings. 1, 1-6(1986).
- [69] Mayes, R. Error localization using mode shapes: An application to a two link robot arm. International Modal Analysis Conference, 10 th, San Diego 886–891.(1992)
- [70] Ratcliffe, C.P. Damage Detection Using A Modified Laplacian Operator On Mode Shape Data. Journal of Sound and Vibration 204, 505-517(1997).
- [71] Cobb, R.G. and Liebst, B.S. Structural damage identification using assigned partial eigenstructure. AIAA Journal 35, 152-158(1997).

- [72] Skjærbæk, P.S., Nielsen, S.R.K. and Çakmak, A.S. Identification of damage in reinforced concrete structures from earthquake records—optimal location of sensors. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 15, 347-358(1996).
- [73] Yuen, M.M.F. Numerical study of the eigenparameters of a damaged cantilever. *Journal of Sound and Vibration* 103, 301-310(1985).
- [74] Rizos, P.F., Aspragathos, N. and Dimarogonas, A.D. Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. *Journal of Sound and Vibration* 138, 381-388(1990).
- [75] Osegueda, R.A., DSouza, P.D. and Qiang, Y. Damage Evaluation Of Offshore Structures Using Resonant Frequency Shifts. *Serviceability of Petroleum, Process, and Power Equipment: Presented at the 1992 Pressure Vessels and Piping Conference, New Orleans, Louisiana, June 21-25, 1992* (1992).
- [76] Kam, T. and Lee, T. Detection of cracks in structures using modal test data. *Engineering fracture mechanics* 42, 381-387(1992).
- [77] Kim, J.H., Jeon, H.S. and Lee, C.W. Applications of the Modal Assurance Criteria for Detecting and Locating Structural Faults. *Proceedings Of The International Modal Analysis Conference* 536-536(1992).
- [78] Srinivasan, M.G. and Kot, C.A. Effect of damage on the modal parameters of a cylindrical shell. *Conference: 10. international modal analysis conference (IMAC), San Diego, CA (United States), 3-6 Feb 1992* (1992).
- [79] Ko, J.M., Wong, C.W. and Lam, H.F. Damage Detection in Steel Framed Structures by Vibration Measurement Approach. *Proc. SPIE* 2251, (1994).
- [80] Salawu, O.S. and Williams, C. Damage Location Using Vibration Mode Shapes. *Proc. SPIE* 2251, (1994).

- [81] Salawu, O.S. and Williams, C. Bridge Assessment Using Forced-Vibration Testing. *Journal of Structural Engineering* 121, 161(1995).
- [82] Lam, H.F., Ko, J.M. and Wong, C.W. Detection of Damage Location Based on Sensitivity Analysis. *Proc. SPIE* 2460, (1995).
- [83] Salawu, O. Non-destructive assessment of structures using the integrity index method applied to a concrete highway bridge. *Insight(Northampton)* 37, 875-878(1995).
- [84] Saitoh, M. and Takei, B.T. Damage Estimation and Identification of Structural Faults Using Modal Parameters. *Proc. SPIE* 2768, (1996).
- [85] Pandey, A., Biswas, M. and Samman, M. Damage Detection From Changes In Curvature Mode Shapes. *Journal of sound and vibration* 145, 321-332(1991).
- [86] Topole, K.G. and Stubbs, N. Non-destructive damage evaluation of a structure from limited modal parameters. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 24, 1427-1436(1995).
- [87] Topole, K.G. and Stubbs, N. Nondestructive Damage Evaluation in Complex Structures from a Minimum of Modal Parameters. (1995).
- [88] Stubbs, N. and Kim, J.T. Damage localization in structures without baseline modal parameters. *AIAA Journal* 34, 1644-1649(1996).
- [89] Smith, S.W. and Beattie, C.A. Model Correlation and Damage Location for Large Space Truss Structures: Secant Method Development and Evaluation. (Virginia Polytechnic Institute and State University; National Aeronautics and Space Administration: 1991).
- [90] Zimmerman, D.C. and Smith, S.W. Model Refinement and Damage Location for Intelligent Structures. *Intelligent Structural Systems* 403–452(1992).

- [91] Hemez, F.M. Theoretical and Experimental Correlation Between Finite Element Models and Modal Tests in the Context of Large Flexible Space Structures. Tesis Ph.D University of Colorado (1993).
- [92] Kaouk, M. Finite Element Model Adjustment and Damage Detection Using Measured Test Data. Tesis Ph. D. Dissertation, Dept. of Aerospace Engineering Mechanics and Engineering Science, Univ. of Florida, Gainesville, FL(1993).
- [93] Kabe, A. Stiffness matrix adjustment using mode data. AIAA Journal 23, 1431-1436(1985).
- [94] Baruch, M. and Itzhack, B. Optimal weighted orthogonalization of measured modes(in dynamic structural analysis). AIAA Journal 16, 346-351(1978).
- [95] Berman, A. and Nagy, E.J. Improvement of a large analytical model using test data. AIAA Journal 21, 1168-1173(1983).
- [96] Qian, G., Gu, S. and Jian, J. The dynamic behaviour and crack detection of a beam with a crack. Journal of sound and vibration 138, 233-243(1990).
- [97] Garcia, G.V., Osegueda, R.A. and Meza, D. Comparison of damage detection results utilizing an ARMA model and an FRF model to extract the modal parameters. 3325, 244-252(1998).
- [98] Masri, S.F., Nakamura, M., Chassiakos, A.G. and Caughey, T.K. Neural network approach to detection of changes in structural parameters. Journal of engineering mechanics 122, 350-360(1996).
- [99] Seibold, S. and Weinert, K. A Time Domain Method For The Localization Of Cracks In Rotors. Journal of Sound and Vibration 195, 57-73(1996).
- [100] Cattarius, J. and Inman, Domain Analysis For Damage Detection In Smart Structures. Mechanical Systems and Signal Processing 11, 409-423(1997).

- [101] Atkinson, C. and Aparicio, N. Fracture detection problems: applications and limitations of the energy momentum tensor and related invariants. *International journal of solids and structures* 36, 4889-4899(1999).
- [102] Dilena, M. and Morassi, A. Identification Of Crack Location In Vibrating Beams From Changes In Node Positions. *Journal of Sound and Vibration* 255, 915-930(2002).
- [103] Kim, J. and Stubbs, N. Crack Detection In Beam-Type Structures Using Frequency Data. *Journal of Sound and Vibration* 259, 145-160(2003).
- [104] Owolabi, G.M., Swamidias, A.S.J. and Seshadri, R. Crack detection in beams using changes in frequencies and amplitudes of frequency response functions. *Journal of Sound and Vibration* 265, 1-22(2003).
- [105] Law, S.S. and Lu, Z.R. Crack identification in beam from dynamic responses. *Journal of Sound and Vibration* 285, 967-987(2005).
- [106] Patil, D.P. and Maiti, S.K. Detection of multiple cracks using frequency measurements. *Engineering Fracture Mechanics* 70, 1553-1572(2003).
- [107] Mendes, P.A. and Tadeu, A. Wave propagation in the presence of empty cracks in an elastic medium. *Computational Mechanics* 38, 183-199(2006).
- [108] Rahman, S. and Rao, B.N. A mode decoupling continuum shape sensitivity method for fracture analysis of functionally graded materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195, 5962-5982(2006).
- [109] Peng, Z.K., Lang, Z.Q. and Billings, S.A. Crack detection using nonlinear output frequency response functions. *Journal of Sound and Vibration* 301, 777-788(2007).
- [110] Wang, B.S. and He, Z.C. Crack detection of arch dam using statistical neural network based on the reductions of natural frequencies. *Journal of Sound and Vibration* 302, 1037-1047(2007).

- [111] Hertz, H. On the contact of elastic solids. *J. Reine Angew. Math* 92, 156-171(1881).
- [112] Galin, L.A., Moss, H. and Sneddon, I.N. *Contact Problems In The Theory Of Elasticity*. (1961).
- [113] Landau, L.D. and Lifshitz, E.M. *Theory of elasticity*. (Butterworth-Heinemann Boston: 1995).
- [114] Gladwell, G.M.L. *Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity*. (Kluwer Academic Publishers: 1980).
- [115] Johnson, K.L. *Contact Mechanics*. (Cambridge University Press: 1987).
- [116] Wriggers, P. *Computational contact mechanics*. (Springer Verlag: 2006).
- [117] Barbarin, S. *Instabilité et frottement en élasticité, application à un problème d'ondes de contrainte*. Tesis doctoral
- [118] Monerie, Y. and Raous, M. A model coupling adhesion to friction for the interaction between a crack and a fibre/matrix interface. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 80, 205-208(2000).
- [119] Challen, J.M. and Oxley, P.L.B. An Explanation of the Different Regimes of Friction and Wear Using Asperity Deformation Models. *Wear* 53, 229-243(1979).
- [120] Chabrand, P., Chabrand, P., Chertier, O., Dubois, F. and Martinet, F. Variable friction coefficient model in sheet metal forming. *NUMIFORM 98: Sixth International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes* 845-850(1998).
- [121] Chabrand, P., Dubois, F. and Raous, M. Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction. *Mathematical and computer modelling* 28, 97-108(1998).
- [122] Raous, M., Jean, M. and Moreau, J.J. *Contact Mechanics*. (Plenum Press: 1995).

- [123] Andreaus, U., Casini P. and Vestroni, F. Non-linear dynamics of a cracked cantilever beam under harmonic excitation". International Journal of Non-Linear Mechanics 42, 566-575(2007).
- [124] Larson, C., and Zimmerman, D. C. The effect of coding on genetic algorithm based structural damage detection. In Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference vol. 2, 1095- 1101. (1993).
- [125] Mares, C. and Surace, C. An Application Of Genetic Algorithms To Identify Damage In Elastic Structures. Journal of Sound and Vibration 195, 195-215(1996).
- [126] Carlin, R. A., and Garcia, E. Parameter optimization of a genetic algorithm for structural damage detection. In Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference (1996). Parameter optimization of a genetic algorithm.
- [127] Ruotolo, R. and Surace, C. Damage Assessment Of Multiple Cracked Beams: Numerical Results and Experimental Validation. Journal of Sound and Vibration 206, 567-588(1997).
- [128] Friswell, M.I., Penny, J.E.T. and Garvey, S.D. A combined genetic and eigensensitivity algorithm for the location of damage in structures. Computers and Structures 69, 547-556(1998).
- [129] Yap, K.C. and Zimmerman, D.C. The effect of coding on genetic algorithm based structural damage detection. International Modal Analysis Conference, 16 th, Santa Barbara, CA 165-171(1998).
- [130] Breuer, K.S. & Sirovich, L. The use of the Karhunen-Loeve procedure for the calculation of linear Eigenfunctions. Journal of Computational Physics 96, 277-296(1991).
- [131] Ostachowicz, W.M. & Krawczuk, M. Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. Journal of sound and vibration 150, 191-201(1991).

- [132] Raous, M. Quasistatic Signorini problem with Coulomb friction and coupling to adhesion. *New developments in contact problems* 101-178(1999).
- [133] Amontons, G. De la Resistance Cause'e dans les Machines (1). *Journal-Japanese Society Of Tribologists* 44, 229-235(1999).
- [134] Coulomb, C.A. *Théorie des machines simples*. (Librairie scientifique et technique: 2002).
- [135] Raous, M. and Barbarin, S. Stress Waves in a Sliding Contact Part 2: Modelling. *Tribology Series* 31, 39-44(1996).
- [136] FlexPDE user's manual. Version 5, 1996–2008(2008).
- [137] Bradbury, F.R., Tyryshkin, A.M., Sabouret, G. and Bokor, J. Stark tuning of donor electron spins in silicon. *Appl. Phys. Lett Phys Rev Lett* 97, 176404(2006).
- [138] Tivarus, C., Pelz, J.P., Hudait, M.K. and Ringeland, S.A. Direct Measurement of Quantum Confinement Effects at Metal to Quantum-Well Nanocontacts. *Phys. Rev. Lett* 94, 206803(2005).
- [139] Hunter, S.C. *Mechanics of continuous media*. (1976).
- [140] Jafri, S. *Modeling Of Impact Dynamics Of A Tennis Ball With A Flat Surface*. Tesis Master Of Science, Texas A&M University (2004).

Apéndice A

Tensores de tensiones de Piola - Kirchhoff

A.1. Primer tensor de Piola - Kirchhoff

Sea $d\mathbf{f}$ el elemento de fuerza que actúa en el elemento de área dA deformada:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}dA \quad (\text{A.1})$$

definiendo el vector tensión \mathbf{t} como:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (\text{A.2})$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy y \mathbf{n} es el versor normal a dA . La misma fuerza $d\mathbf{f}$ puede ser referida al elemento de área indeformada dA_0

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}_0 dA_0 \quad (\text{A.3})$$

introduciendo \mathbf{t}_0 como el vector de tensión referido al área indeformada. El vector \mathbf{t}_0 es paralelo al vector \mathbf{t} pero con diferente módulo ya que $d\mathbf{f} = \mathbf{t}_0 dA_0 = \mathbf{t}dA$. Es decir: suponer la *misma* fuerza referida a áreas diferentes (deformada e indeformada) da lugar

a vectores de tensión de igual dirección, y magnitud proporcional al cambio de área

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{t} \frac{dA}{dA_0}. \quad (\text{A.4})$$

Se obtiene el primer tensor de Piola - Kirchhoff de la relación $\mathbf{t}_0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}$, donde \mathbf{N} es el versor normal al área dA_0 , por analogía con la Ec.(A.2) del tensor de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} dA_0 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA \quad (\text{A.5})$$

Y como se sabe [37]

$$dA \mathbf{n} = (\det \mathbf{F}) dA_0 (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{N} \quad (\text{A.6})$$

se obtiene

$$\mathbf{P} = (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T. \quad (\text{A.7})$$

que es la relación entre el tensor de Cauchy y el primero de Piola - kirchhoff [18] y donde F es el tensor gradiente de deformación

A.2. Segundo Tensor de Piola - kirchhoff

Supongamos ahora que el vector de fuerza elemental $d\mathbf{f}$ es el resultado de la transformación de otro vector de fuerza elemental $d\mathbf{f}_0$ (respecto del cuerpo indeformado) a través del tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F} (de la misma forma que son transformados los vectores de desplazamiento $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$)

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F}d\mathbf{f}_0 \quad (\text{A.8})$$

con

$$d\mathbf{f}_0 = \mathbf{t}^* dA_0 \quad (\text{A.9})$$

admitamos que este nuevo vector de tensión \mathbf{t}^* está relacionado con el versor normal según un nuevo tensor \mathbf{S}

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{S}\mathbf{N}, \quad (\text{A.10})$$

entonces:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F}(\mathbf{t}^* dA_0) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}\mathbf{N} dA_0 \quad (\text{A.11})$$

y puesto que $d\mathbf{f} = \mathbf{t}dA$ (A.1) resulta que $\mathbf{t}dA = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}\mathbf{N} dA_0$ y transformando dA_0 a dA [37] (A.6) se tiene que

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}\mathbf{N} dA_0 = \boldsymbol{\sigma} n dA \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}\mathbf{N} dA_0 = \boldsymbol{\sigma} ((\det \mathbf{F}) dA_0 (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{N}) \quad (\text{A.13})$$

o sea que

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} = (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T = \mathbf{P} \quad (\text{A.14})$$

Es decir: suponer que la fuerza elemental se transforma como los vectores de desplazamiento a través de \mathbf{F} da lugar al tensor simétrico de tensiones al llamado *segundo tensor de Piola - kirchhoff*.

Apéndice B

Materiales elásticos, hiperelásticos e hipoelásticos

Los más simples de modelar son los materiales "elásticos" que vienen dados por relaciones constitutivas de la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = g(\mathbf{e}) \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{S} = g'(\mathbf{E}) \quad (\text{B.2})$$

donde

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{c}) \text{ y } \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

son los tensores de deformación finita Euleriano (de Almansi) y lagrangiano (de Green) respectivamente y $\mathbf{c} = (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot (\mathbf{F}^{-1})$ y $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ son los tensores de deformación de Cauchy. También pueden ser definidos en términos de $\mathbf{u} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$ (vector de desplazamiento) por

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}]_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \\ [\mathbf{E}]_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \end{aligned}$$

Como es costumbre, los índices repetidos indican suma de 1 a 3, en este caso el índice k .

Es decir: los materiales *elásticos* son aquellos cuyo comportamiento constitutivo es sólo función del estado de deformación del cuerpo. En las ecuaciones (B.1) y (B.2) se propone a los tensores de deformación finita \mathbf{e} y \mathbf{E} como los que caracterizan el estado de deformación, pero podrían ser cualquier par de tensores que sean función del gradiente de deformaciones \mathbf{F} , en la forma más general un material se lo denomina *elástico* si, por ejemplo el primer tensor de tensiones de Piola - kirchhoff [19] es :

$$\mathbf{P} = \vartheta (\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}, t) \quad (\text{B.3})$$

donde la dependencia en X podría caracterizar cualquier inhomogeneidad del material.

Si el trabajo efectuado por el campo tensional durante la deformación depende solamente de las configuraciones iniciales y finales (t_0 y t) el comportamiento del material es independiente de la trayectoria y se lo denomina material *hiperelástico*. La energía potencial elástica Ψ por unidad de volumen indeformado es definida como el trabajo efectuado por la tensión desde la configuración inicial (o de referencia) hasta la actual

$$\Psi(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}, t) = \int_{t_0}^t tr \left(\vartheta (\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}, t) \cdot \dot{\mathbf{F}} \right) dt \quad (\text{B.4})$$

o en forma indicial

$$\Psi(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}, t) = \int_{t_0}^t \vartheta_{ij} (\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}, t) \dot{F}_{ij} dt \quad (\text{B.5})$$

o, derivando en el tiempo, se obtiene la potencia elástica por unidad de volumen indeformado

$$\dot{\Psi} = P_{ij} \dot{F}_{ij} \quad (\text{B.6})$$

pero por otra parte la velocidad de cambio de Ψ puede expresarse como

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial F_{ij}} \dot{F}_{ij} \quad (\text{B.7})$$

y si se acepta la propia Ψ no es función explícita del tiempo $\partial \Psi / \partial t = 0$ (material

conservativo) comparando (B.7) con (B.6) se obtiene:

$$P_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial F_{ij}}. \quad (\text{B.8})$$

Muchas veces se utiliza (B.8) como definición de material *hiperelástico*. Se puede demostrar a través del principio de invarianza material (ver Truesdell y Noll [14] y Bonet y Wood [19]) dado que $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ (teorema de la descomposición polar ver, por ejemplo, [37] y [38]) donde \mathbf{R} es el denominado *tensor de rotación* y \mathbf{U} el *tensor de deformación pura* que la dependencia de Ψ con \mathbf{F} es sólo a través de \mathbf{U} e independiente de la rotación \mathbf{R} . Ya que $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$

$$\Psi(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \Psi(\mathbf{C}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) \quad (\text{B.9})$$

y así como $\dot{\mathbf{F}}$ es el conjugado de \mathbf{P} , Ec.(B.6), $\frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{E}}$ es el conjugado de \mathbf{S}

$$\dot{\Psi} = S_{ij} \dot{E}_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{ij}} \dot{E}_{ij} \quad (\text{B.10})$$

El ejemplo más simple de un material hiperelástico es el llamado *St. Venant–Kirchhoff* (ver [14] y [19]) definido a partir de la energía de deformación elástica como:

$$\Psi(\mathbf{E}) = \lambda \frac{(tr(\mathbf{E}))^2}{2} + \gamma \mathbf{E} : \mathbf{E} \quad (\text{B.11})$$

donde λ y γ son constantes si el material es homogéneo. Usando (B.10) se encuentra:

$$\mathbf{S} = \lambda tr(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\gamma \mathbf{E} \quad (\text{B.12})$$

La Ec.(B.12) es conocida también como modelo material de St. Venant–Kirchhoff [14] que para el caso de deformación infinitésima coincide con la ley de Hooke para cuerpos elásticos homogéneos e isotrópicos (si $\mathbf{E} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}$ entonces $\mathbf{S} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \lambda tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\gamma \boldsymbol{\varepsilon}$ y donde ahora λ y γ son las constantes de Lamé $\lambda = \nu E / (1 + \nu)(1 - 2\nu)$, $\gamma = E / 2(1 + \nu)$ siendo E el módulo elástico y ν el coeficiente de Poisson; además $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ es el tensor

de deformación infinitesimal).

Un modelo interesante y simple de material hiperelástico es el Neo-Hookeano compresible que está definido a partir de la energía elástica [19]:

$$\Psi = \frac{\gamma}{2} (tr(\mathbf{C}) - 3) - \gamma \ln J + \frac{\lambda}{2} (\ln J)^2 \quad (\text{B.13})$$

donde λ y γ son constantes y $J = \det(\mathbf{F})$. El segundo tensor de Piola - kirchhoff puede ser calculado a partir de la ecuación (B.10) hallándose que:

$$\mathbf{S} = \gamma (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda (\ln J) \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{B.14})$$

Por último se definen los materiales *hipolásticos* si las componentes de tensor de tensiones están definidas según una relación homogénea y lineal del tensor velocidad de deformación:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{D} \quad (\text{B.15})$$

donde $\hat{\mathbf{C}}$ es un tensor de cuarto orden y $2D_{ij} = (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidades. El lector interesado en el tema encontrará una vasta información en [14].

Apéndice C

Restricciones Termodinámicas. Energía Interna y Desigualdad de Clausius - Planck

La Termodinámica de los medios continuos [14], [15], [17] (generalización de la Termostática de los medios discretos) ofrece un enfoque riguroso para restringir las ecuaciones constitutivas con las que se pretenda modelar el comportamiento de un cuerpo. Es abundante en la literatura el tratamiento de las ecuaciones constitutivas y sus restricciones dadas por la Termodinámica cuando éstas se proponen en coordenadas espaciales o eulerianas. El enfoque dado en esta Tesis es referido a las coordenadas materiales o *lagrangianas* por lo cual se deducirán las ecuaciones de la termomecánica en dicha representación *lagrangiana*. Aplicando esta teoría se estudiará un tipo particular de disipación interna.

Como es costumbre, se define a la potencia mecánica como el producto de la fuerza por la velocidad. Esto en el continuo es

$$P = \iiint \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{V} dV + \iint \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{V} dA_0 \quad (\text{C.1})$$

donde dV y dA_0 se refieren respectivamente al elemento de volumen y área del cuerpo indeformado (no confundir con el vector velocidad \mathbf{V}). De forma análoga la potencia térmica o calorífica se define como:

$$Q = \iiint \rho_0 h \, dV - \iint \mathbf{q}_R \cdot \mathbf{N} \, dA_0 \quad (\text{C.2})$$

donde \mathbf{q}_R es el vector flujo de calor lagrangiano y h es la radiación térmica (escalar); es decir, se refiere al calor que no se conduce por efecto de contacto. Todas las cantidades y dominios están en coordenadas materiales.

C.1. Primer Principio de la Termodinámica

El *primer principio de la Termodinámica* o *Ley de la conservación de la energía* en forma global establece que la variación de la energía “Total” E (no confundir con el módulo elástico) por unidad de tiempo es igual a la suma de la potencia mecánica P más la potencia térmica o calorífica Q entrante al sistema [15]:

$$\frac{dE}{dt} = P + Q \quad (\text{C.3})$$

Se define a la energía interna total \mathcal{E} a la parte de E que no incluya la energía cinética total $T = \frac{1}{2} \iiint \rho_0 \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \, dV$ del cuerpo:

$$\mathcal{E} = E - T \quad (\text{C.4})$$

luego la parte mecánica de la potencia es:

$$P = \iiint \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{V} \, dV + \iint \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{V} \, dA_0 \quad (\text{C.5})$$

$$= \iiint \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{V} \, dV + \iint (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{N} \, dA_0 \quad (\text{C.6})$$

$$= \iiint [\rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{V} + \nabla_x \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V})] \, dV \quad (\text{C.7})$$

donde en el último paso se utilizó el teorema de la divergencia. Sea la identidad

$$\nabla_X \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}) = (\nabla_X \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{V} + tr \left(\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} \right) \quad (\text{C.8})$$

donde $tr \left(\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} \right) = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{P} : (\nabla_X \mathbf{V})$. Si se utiliza la Ec.(4.3) de movimiento y la Ec.(C.8), factorizando \mathbf{V} se podrán identificar varios términos de la Ec.(C.7.)

$$P = \iiint \left[(\rho_0 \mathbf{b} + (\nabla_X \cdot \mathbf{P})) \cdot \mathbf{V} + tr \left(\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} \right) \right] dV \quad (\text{C.9})$$

$$= \iiint \left[\rho_0 \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V} + tr \left(\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} \right) \right] dV \quad (\text{C.10})$$

$$= \iiint \left[\frac{1}{2} \rho_0 \frac{d}{dt} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) + tr \left(\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} \right) \right] dV \quad (\text{C.11})$$

El primer término de (C.11) es la derivada temporal de la energía cinética $\frac{d}{dt} \iiint \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{V}^2 dV$.

Si se reemplaza al segundo tensor de Piola - Kirchoff $\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$ en el segundo término de (C.11) $tr \left(\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} \right) = tr \left(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}} \right) = tr \left(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F} \right)$, y si se usa la propiedad de la traza (ver [17] y [40])

$$tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}) = tr(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{A}) \quad (\text{C.12})$$

para cualesquiera $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, se puede ver que $tr \left(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F} \right) = tr \left(\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}} \right)$. Ahora,

teniendo en cuenta que \mathbf{S} es simétrico, sólo aporta la parte simétrica de $\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}$. Esto es $\left(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} \right) = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \left(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} \right)^T \right) = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} \right) = \dot{\mathbf{E}}$ y entonces:

$$tr \left(\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} \right) = tr \left(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}} \right) = tr \left(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}} \right) \quad (\text{C.13})$$

propiedad que será deducida más abajo por otro camino. Luego la potencia mecánica se reescribe como

$$P = T + \iiint \left[tr \left(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}} \right) \right] dV \quad (\text{C.14})$$

En cuanto a la potencia calorífica (C.2) aplicando nuevamente el teorema de la diver-

gencia

$$Q = \iiint \rho_0 h \, dV - \iint \mathbf{q}_R \cdot \mathbf{N} \, dA_0 \quad (\text{C.15})$$

$$= \iiint (\rho_0 h - \nabla_X \cdot \mathbf{q}_R) \, dV \quad (\text{C.16})$$

Remplazando (C.14) y (C.16) en (C.4) se encuentra:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \iiint \left[\text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}}) + \rho_0 h - \nabla_X \cdot \mathbf{q}_R \right] dV \quad (\text{C.17})$$

Por último pasemos a la forma local, definamos a la energía interna local por unidad de volumen como

$$\mathcal{E} = \iiint \rho_0 e(\mathbf{X}, t) dV \quad (\text{C.18})$$

por lo cual por (C.17):

$$\rho_0 \dot{e} = \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}}) + \rho_0 h - \nabla_X \cdot \mathbf{q}_R \quad (\text{C.19})$$

La Ec.(C.19) fue deducida en forma directa a partir de las definiciones de energía interna y pasando a la forma local en coordenadas materiales. Sin embargo es muy común encontrar estas relaciones en forma espacial [17].

$$\rho \dot{e} = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) - \nabla_x \cdot \mathbf{q} + \rho h \quad (\text{C.20})$$

Para ver que la conocida ecuación de la energía interna en coordenadas espaciales, Ec.(C.20) es análoga a la Ec.(C.19), se puede transformar término a término. Como antes e en (C.20) es la energía interna pero ahora función de \mathbf{x} (espacial), $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$; o $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad, \mathbf{q} es el vector espacial del flujo de calor espacial y h es la radiación térmica (escalar). El término $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$ es conocido como potencia mecánica o potencia de la tensión. Integrando término a término, en el volumen espacial (volumen de control v) la Ec.(C.20),

transformado al volumen material y recordando que la ecuación de continuidad o conservación de la masa es en coordenadas materiales es $\rho_0(\mathbf{X}) = J \rho(\mathbf{X}, t)$ obtenemos:

$$\iiint (\rho \dot{e}(\mathbf{x}, t)) dv = \iiint \rho \dot{e}(\mathbf{X}, t) J dV = \iiint \rho_0 \dot{e}(\mathbf{X}, t) dV$$

donde $J = \det(\mathbf{F})$ es el jacobiano de la transformación y como sabemos $dv = JdV$ se refiere al elemento de volumen euleriano. Luego queda demostrado que la derivada material de la energía interna e se transforma del volumen espacial al material así:

$$\iiint_v \rho \dot{e} dv = \iiint_V \rho_0 \dot{e} dV \quad (\text{C.21})$$

Para el término $tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D})$, teniendo en cuenta la simetría de $\boldsymbol{\sigma}$

$$tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) = tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})$$

y dado que $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}\mathbf{F}$ (ver por ejemplo [37]), pasando a la descripción a material

$$\begin{aligned} \iiint tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}) dv &= \iiint tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}) J dV = \iiint tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}) J dV \quad (\text{C.22}) \\ &= \iiint tr(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}) dV = \iiint tr(\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}}) dV \end{aligned}$$

donde en el último paso se usó la Ec.(A.7) y la propiedad (C.12). Además como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2} \frac{d(\mathbf{F}^T \mathbf{F})}{dt} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) = \frac{1}{2} [(\mathbf{L}\mathbf{F})^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \mathbf{L}\mathbf{F}] \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T \mathbf{L}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \mathbf{L}\mathbf{F}] = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T [\mathbf{L}^T + \mathbf{L}] \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \mathbf{D}\mathbf{F} \end{aligned}$$

Luego por (A.14)

$$\begin{aligned} \iiint tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) dv &= \iiint tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) J dV = \iiint tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1}) J dV \quad (\text{C.23}) \\ &= \iiint tr(J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}}) dV = \iiint tr(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}}) dV \end{aligned}$$

De (C.22) y (C.23) queda demostrado que las tres formas siguientes de potencia de la tensión son equivalentes

$$\iiint tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) dv = \iiint tr(\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}}) dV = \iiint tr(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}}) dV \quad (\text{C.24})$$

La última igualdad de (C.24) fue hallada más arriba por un camino diferente (C.13).

Nuevamente quedan claros los pares conjugados de “fuerza-velocidad” o tensión-velocidad de deformación $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$, $(\mathbf{P}, \dot{\mathbf{F}})$, $(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{E}})$.

Para el término del flujo de calor se pasa por la integral de superficie y se transforma la superficie espacial a la material.

$$\iiint_v \nabla_x \cdot \mathbf{q} dv = \iint_{\partial v} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA = \iint_{\partial V} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{q} J \mathbf{N} dA_0 = \iiint_V \nabla_X \cdot (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{q} J) dV$$

como $\mathbf{q}_R = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{q} J$ el flujo de calor se transforma a coordenadas materiales de la forma

$$\iiint_v \nabla_x \cdot \mathbf{q} dv = \iiint_V \nabla_X \cdot \mathbf{q}_R dV \quad (\text{C.25})$$

La relación $\mathbf{q}_R = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{q} J$ [17] entre el flujo de calor lagrangiano y el euleriano es análoga a las relaciones entre el primer tensor de Piola-Kirchhoff y el de Cauchy.

De los últimos tres resultados se puede construir la ecuación de la energía en coordenadas materiales

$$\rho_0 \dot{e} = tr(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}}) - \nabla_X \cdot \mathbf{q}_R + \rho_0 h \quad (\text{C.26})$$

en donde todos los campos son ahora funciones de \mathbf{X} .

C.2. Segundo Principio de la Termodinámica

El segundo principio de la termodinámica establece los siguientes dos postulados

1- Existencia de una función denominada temperatura absoluta $\theta(\mathbf{x}, t)$ que es estrictamente positiva ($\theta > 0$)

2- a) Existencia de una función del tiempo denominada entropía $S(t)$ que es extensiva (la entropía del todo es la suma de las partes) por lo tanto

$$S(t) = \iiint \rho s \, dv$$

donde $s(\mathbf{x}, t)$ es la densidad de entropía local por unidad de masa.

b) La irreversibilidad se de los procesos naturales viene representada por un límite superior β en la potencia calorífica Q la cual representa conversión de calor en energía con realización de trabajo mecánico. En otras palabras existe un límite en la velocidad con la que se transforma el calor en energía. Sin embargo, no existe ningún límite para la velocidad que se transforma la energía no térmica en calor. Luego es un hecho que

$$Q \leq \beta \tag{C.27}$$

y en virtud de (C.3),

$$\dot{E} - P \leq \beta \tag{C.28}$$

Se define la entropía de un cuerpo por $\dot{S} = \beta/\theta$ que junto con (C.28) se obtiene:

$$\theta \dot{S} \geq \dot{E} - P$$

o en términos del calor,

$$\theta \dot{S} \geq Q \tag{C.29}$$

Luego, si pasamos a la forma local se cumple que

$$\dot{S} \geq \iiint \rho \frac{h}{\theta} dv - \iint \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} dA$$

Esto es un hecho Luego, transformando la integral de superficie a una de volumen usando el teorema de la divergencia se encuentra la forma local del segundo principio de la Termodinámica en coordenadas espaciales o eulerianas es

$$\rho \dot{s} + \nabla_x \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) - \frac{\rho h}{\theta} \geq 0 \quad (\text{C.30})$$

La desigualdad (C.30) es conocida también como ecuación de Clausius-Duhem o desigualdad de Truesdell [14] en descripción eulriana.

Por las transformaciones previas que desarrollamos, la desigualdad de Truesdell en coordenadas espaciales puede expresarse como:

$$\rho_0 \dot{s} + \nabla_X \cdot \left(\frac{\mathbf{q}_R}{\theta} \right) - \frac{\rho_0 h}{\theta} \geq 0 \quad (\text{C.31})$$

en coordenadas materiales. Por último si se multiplica la Ec.(C.31) por θ y se le subtrae la Ec.(C.26) se obtiene la desigualdad de Clausius Planck en su versión material.

$$\rho_0 \theta \dot{s} - \rho_0 \dot{e} + tr \left(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}} \right) - \frac{1}{\theta} \mathbf{q}_R \cdot \nabla_X \theta \geq 0 \quad (\text{C.32})$$

Cualquier modelo constitutivo que se postule deberá cumplir con estas desigualdades.

C.3. Restricciones de la Termodinámica

A continuación se aplica la teoría de Coleman y Mizel [13] muy difundida en la literatura en forma espacial. Aquí se presenta el enfoque material haciendo uso de los resultados deducidos en la última sección. Para un sólido viscoelástico se supone que las

ecuaciones constitutivas dependen de las siguientes variables impone

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(s, \mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}) \quad (\text{C.33})$$

$$\mathbf{q}_R = \mathbf{q}_R(s, \mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}) \quad (\text{C.34})$$

$$e = e(s, \mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}) \quad (\text{C.35})$$

$$\theta = \theta(s, \mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}) \quad (\text{C.36})$$

ahora se calcula

$$\dot{e} = \frac{\partial e}{\partial s} \dot{s} + \frac{\partial e}{\partial E_{ij}} \dot{E}_{ij} + \frac{\partial e}{\partial \dot{E}_{ij}} \ddot{E}_{ij} \quad (\text{C.37})$$

reemplazando y agrupando en (C.32) se obtiene

$$\left(\rho_0 \theta - \rho_0 \frac{\partial e}{\partial s} \right) \dot{s} - \left(\rho_0 \frac{\partial e}{\partial E_{ij}} - S_{ij} \right) \dot{E}_{ij} - \frac{\partial e}{\partial \dot{E}_{ij}} \ddot{E}_{ij} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q}_R \cdot \nabla_X \theta \geq 0 \quad (\text{C.38})$$

Esta inecuación es lineal en \dot{s} , $\ddot{\mathbf{E}}$ y en $\nabla_X \theta$. y ya que \mathbf{S} , \mathbf{q}_R , θ y e no son funciones que dependan de esas cantidades podrían variar en forma independiente de sus factores (cantidades que están entre paréntesis), haciendo que no se cumpla la inecuación salvo que dichos factores sean nulos, luego

$$\theta = \frac{\partial e}{\partial s} \quad (\text{C.39})$$

$$\mathbf{q}_R = 0 \quad (\text{C.40})$$

$$\frac{\partial e}{\partial \dot{E}_{ij}} = 0 \quad (\text{C.41})$$

La Ec.(C.39) es la definición de temperatura Termodinámica, la Ec.(C.40) indica que dicho sólido puede responder sólo a cambios adiabáticos y la Ec.(C.41) indica la imposibilidad de que la energía interna dependa de $\dot{\mathbf{E}}$. Las ecs.(C.40) y (C.41) son restricciones impuestas por la Termodinámica a las ecuaciones constitutivas.

El término $\left(\rho_0 \frac{\partial e}{\partial E_{ij}} - S_{ij} \right) \dot{E}_{ij}$ merece un análisis más detallado.

Aceptando que el tensor \mathbf{S} es analítico en sus variables, se puede desarrollar en una

serie de Taylor en la variable $\dot{\mathbf{E}}$ o sea, dado que $S_{ij} = S_{ij}(s, \mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}) = S_{ij}(s, E_{mn}, \dot{E}_{mn})$

$$S_{ij}(s, E_{mn}, \dot{E}_{mn}) = S_{ij}(s, E_{mn}, 0) + \frac{\partial S_{ij}}{\partial \dot{E}_{rs}}(s, E_{mn}, 0) \dot{E}_{rs} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial \dot{E}_{rs} \partial \dot{E}_{pq}}(s, E_{mn}, 0) \dot{E}_{rs} \dot{E}_{pq} + \dots$$

luego, llamando a

$$S_{ij}^e = S_{ij}(s, E_{mn}, 0)$$

y a

$$S_{ij}^d = \frac{\partial S_{ij}}{\partial \dot{E}_{rs}}(s, E_{mn}, 0) \dot{E}_{rs} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial \dot{E}_{rs} \partial \dot{E}_{pq}}(s, E_{mn}, 0) \dot{E}_{rs} \dot{E}_{pq} + \dots$$

el tensor de tensiones \mathbf{S} (segundo tensor de Piola Kirchoff) se puede descomponer en dos términos

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^e + \mathbf{S}^d \quad (\text{C.42})$$

el primero \mathbf{S}^e corresponde a la parte puramente elástica (o hiperelástica no disipativa) ver Ec.(B.10) y el segundo, \mathbf{S}^d a la parte disipativa que será función de s , \mathbf{E} y también de $\dot{\mathbf{E}}$. Es decir:

$$\mathbf{S}(s, \mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}) = \mathbf{S}^e(s, \mathbf{E}) + \mathbf{S}^d(s, \mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}) \quad (\text{C.43})$$

luego la Ec.(C.38) se reduce a

$$\left[\rho_0 \frac{\partial e}{\partial E_{ij}} - \left(S_{ij}^e(s, \mathbf{E}) + S_{ij}^d(s, \mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}) \right) \right] \dot{E}_{ij} \leq 0 \quad (\text{C.44})$$

$$\left[\rho_0 \frac{\partial e}{\partial E_{ij}} - S_{ij}^e(s, \mathbf{E}) \right] \dot{E}_{ij} - \left[S_{ij}^d(s, \mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}) \right] \dot{E}_{ij} \leq 0 \quad (\text{C.45})$$

ya que $\left[\rho_0 \frac{\partial e(s, \mathbf{E})}{\partial E_{ij}} - S_{ij}^e(s, \mathbf{E}) \right]$, por (C.43) y (C.41) no es función de $\dot{\mathbf{E}}$, se puede utilizar el mismo argumento que se utilizó antes para asegurar que el único caso admisible corresponde a la nulidad del paréntesis, luego resulta

$$S_{ij}^e(s, \mathbf{E}) = \rho_0 \frac{\partial e(s, \mathbf{E})}{\partial E_{ij}} \quad (\text{C.46})$$

esto es: cada componente de la parte puramente elástica del tensor de tensiones es igual a la derivada parcial de la energía interna respecto de cada componente del tensor de deformaciones lagrangiano \mathbf{E} . La energía interna resulta ser una función potencial (energía potencial elástica) del campo tensorial elástico S_{ij}^e .

Como el segundo término de la Ec.(C.45) \mathbf{S}^d es función de $\dot{\mathbf{E}}$, ya no se puede construir un proceso donde $\dot{\mathbf{E}}$ sea arbitrario e independiente de \mathbf{S}^d . La Ec.(C.45) se reduce a

$$S_{ij}^d(s, \mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}) \dot{E}_{ij} \geq 0 \quad (\text{C.47})$$

o sea:

$$\text{tr} \left(\mathbf{S}^d \cdot \dot{\mathbf{E}} \right) \geq 0 \quad (\text{C.48})$$

que físicamente puede interpretarse que la disipación mecánica siempre tiene que ser positiva, es decir que la el trabajo *siempre* se disipara (y nunca en dirección contraria) de manera irreversible en calor. Ningún avance más se puede realizar sin especificar la forma funcional del propio tensor \mathbf{S}^d .

Una relación del tipo lineal se propone como primera aproximación

$$\mathbf{S}^d = \mu_{int} \dot{\mathbf{E}} \quad (\text{C.49})$$

donde μ_{int} es un coeficiente de disipación interna. Luego la Ec.(C.48) se reduce a

$$\mu_{int} \text{tr} \left(\dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} \right) \geq 0 \quad \rightarrow \quad \mu_{int} \geq 0 \quad (\text{C.50})$$

La parte térmica queda completamente desacoplada de la mecánica.

Justamente la Ec.(C.49) es la forma funcional que se adopta en la parte disipativa de la ecuación constitutiva en el experimento del Capítulo 5 y la termodinámica impone solamente que el coeficiente $\mu_{int} \geq 0$.

Apéndice D

Otros Modelos de Fricción

La ley de Coulomb no tiene en cuenta los aspectos tribológicos, sólo es un modelo fenomenológico de la fricción. A pesar de eso, puede ser usada para modelar no sólo un problemas prácticos simples, sino en fenómenos complejos como inestabilidad [135].

a- Coeficiente de fricción variable con la velocidad

La regularización de la ley de Coulomb (4.28) es de alguna manera una ley de coeficiente variable con la velocidad. La forma más general es suponer una variación continua con la velocidad. Incluso se pueden incluir efectos de fricción viscosa

b-Variantes de la ley de Coulomb.

Para tener en cuenta altas presiones de contacto (por ejemplo en el maquinado de metales ref) o cambios en el contacto nominal de superficies rugosas, se modifica la ley de Coulomb (4.26) teniendo en cuenta que el coeficiente de fricción pueda ser función de algún otro parámetro.

$$t_T \leq f(t_N) \begin{cases} \text{si } t_T < f \rightarrow \dot{v}_T = 0 \\ \text{si } t_T = f \rightarrow \dot{v}_T = -\lambda t_T \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

La ley de Coulomb- Orowan se obtiene tomando a

$$f = \text{Min} [\mu\phi_\varepsilon(\dot{v}_T) |t_N|, k_o] \quad (\text{D.2})$$

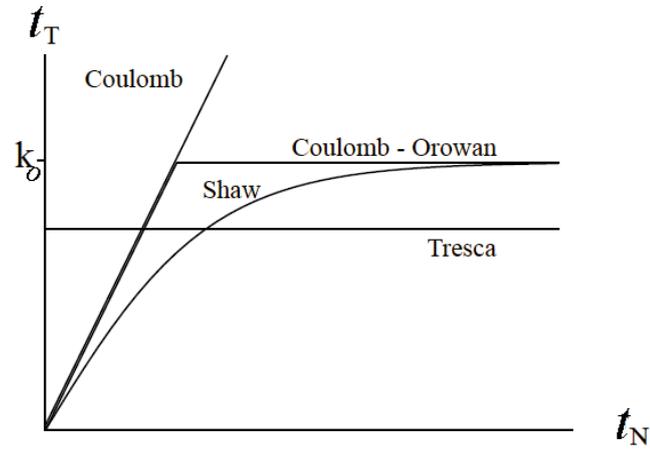


Figura D-1: Relaciones esquemáticas de las variantes a la ley de Coulomb

donde el valor k_o es la saturación de la fricción

La ley de Shaw se obtiene tomando a

$$f = \frac{\Gamma_R}{\Gamma_C} k \quad (D.3)$$

donde $\frac{\Gamma_R}{\Gamma_C}$ es la fracción de área real de contacto respecto al área aparente

La ley de Tresca es independiente del valor de la tensión normal.

Las tres variantes se esquematizan en la Figura D-1.

Apéndice E

Método de Galerkin, Discretización en elementos polinómicos

El software FlexPDE, de uso general para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales, discretiza el dominio en “celdas” ya sean en segmentos, triángulos o tetrahedros según sea el problema uni, bi o tri - dimensional respectivamente (Figura E-1). Luego utiliza el método de Galerkin, con funciones aproximantes polinómicas $\phi_i(X)$, lineales, cuadráticas o cúbicas, definidas a tozos en cada una de las celdas, de tal forma que una solución aproximada para el problema diferencial dependiente del tiempo es dada por

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \simeq \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{X}) c_i(t) \quad (\text{E.1})$$

donde $c_i(t)$ son funciones del tiempo (incógnitas).

Los polinomios $\phi_i(\mathbf{X}) = [\phi_{x_1i}(\mathbf{X}), \phi_{x_2i}(\mathbf{X}), \phi_{x_3i}(\mathbf{X})]^T$ son funciones admisibles desde el punto de vista de la formulación. Es decir cumplen con las condiciones impuestas a las *funciones de prueba* \mathbf{W} descritas en la última sección del Capítulo 3, de tal forma que cada $\phi_i(X)$ es nulo fuera del dominio i en el que esta definido. Para cada celda o elemento i -ésimo, el polinomio $\phi_i \neq 0$ y el resto de los $\phi_j = 0$ para toda $j \neq i$. El conjunto de todos los polinomios ϕ_i genera el espacio de soluciones del problema diferencial entre

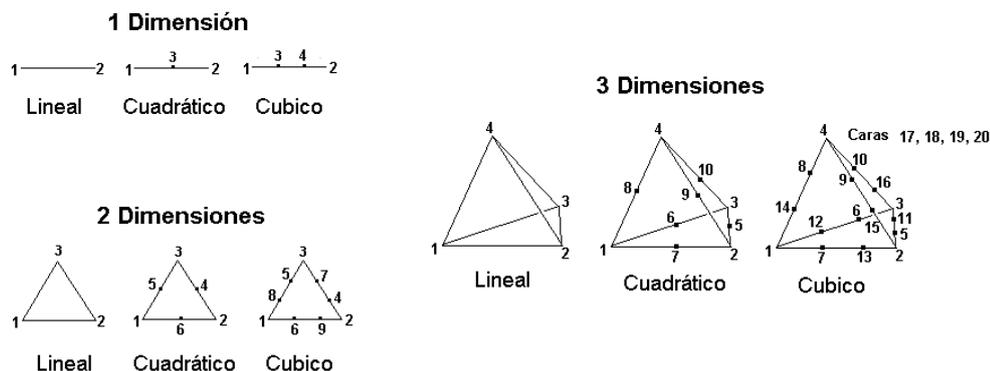


Figura E-1: Forma de las celdas elementales y posición de los nodos para las aproximaciones de 1, 2 o 3 dimensiones

manos.

Reemplazando la Ec.(E.1) en la Ec.(4.3) e integrando:

$$\iiint \left[\nabla_X \cdot \mathbf{P}(\mathbf{u}) + \rho_0 \mathbf{b} - \rho_0 \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{X}) \ddot{c}_i(t) \right) \right] \cdot \phi_i(\mathbf{X}) dV \quad (\text{E.2})$$

donde $\mathbf{P}(\mathbf{u})$ significa que el primer tensor de Piola - Kirchhoff es calculado a partir de $\mathbf{u}(\mathbf{X}, \mathbf{t})$ mediante las muy complicadas y no lineales relaciones (4.4), (B.2) y las constitutivas (4.10) o (4.11) y si existiera fricción interna también por (4.12).

La idea de integrar, en este caso las ecuaciones de movimiento, multiplicadas por los polinomios ϕ_i está basada en un teorema del álgebra lineal que afirma que dada una base completa ϕ_i (que genera todo el espacio vectorial l) y dado un elemento $\mathbf{u} \in l$ tal que si el producto escalar de \mathbf{u} con cada ϕ_i es nulo, esto es $\langle \mathbf{u} \cdot \phi_i \rangle = 0$ para todo ϕ_i , entonces \mathbf{u} es nulo.

Por último se integra por partes en el sentido general, es decir usando los teoremas del cálculo vectorial: Teoremas de Gauss, Stokes o Green según corresponda en problemas

de más de una dimensión (el software lo efectúa vía cálculo simbólico) para obtener

$$\iint_{\partial V} (\mathbf{t}_0(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\phi}_i) dA_0 + \iiint_V \left[\rho_0 \left(\mathbf{b} - \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\phi}_i \ddot{\mathbf{c}}_i \right) \cdot \boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{X}) - \mathbf{P}(\mathbf{u}) \cdot \nabla_X \boldsymbol{\phi}_i \right] dV = 0 \quad (\text{E.3})$$

igual que antes $\mathbf{t}_0(\mathbf{u})$ significa que el vector tensión de Piola - Kirchhoff es calculado a partir de $\mathbf{u}(\mathbf{X}, \mathbf{t})$ mediante la regla $\mathbf{t}_0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}$.

Por ser definidas a trozos las funciones base $\boldsymbol{\phi}_i$, la integral (E.3) se reducirá a la integración en las celdas que rodean cada nodo, desacoplando el problema global en un sistema ecuaciones ordinarias en $c_i(t)$ de segundo orden más otras dadas por la integral de superficie en el contorno de cada celda compatibilizando el valor de la incógnita \mathbf{u} en cada interfase o límite entre celdas. Al no ser un sistema lineal, no se podrán explicitar las matrices que generalmente en problemas unidimensionales se llaman de masa, de amortiguamiento y de rigidez.

Cuando las condiciones de contorno sean del tipo natural, es decir cuando se especifiquen condiciones para el vector tensión, se resolverá el problema (E.3). En las regiones del borde en que las condiciones sean del tipo geométricas, es decir se especifiquen los desplazamientos \mathbf{u} , se resolverá el problema (E.3) sin la integral de superficie ya que ésta será nula, junto con las ecuaciones del tipo (4.32)

E.1. Integración temporal (Método Gear)

El problema diferencial ordinario de condiciones iniciales es resuelto por el método Gear de segundo orden [136], también conocido por second-order implicit Backward Difference Formula.

Para un sistema de N ecuaciones no lineales de primer orden

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = f(c_1, \dots, c_N, t) \quad (\text{E.4})$$

la formula de tercer orden para la j -ésima ecuación es

$$c_j^{n+1} + a_0 c_j^n + a_1 c_j^{n-1} + a_2 c_j^{n-2} = f^{n+1} \quad (\text{E.5})$$

en donde los coeficientes a_k dependen del paso de tiempo Δt y de los valores de la funciones c_i en otros instantes de tiempo

Para medir el error temporal, se usa una aproximación de tercer orden. El valor del término de tercer orden es una estimación del error en la aproximación de segundo orden y es usado para determinar el tamaño del paso de tiempo con el objeto de mantener el error estimado por debajo de alguna cota. Esto último es usado en técnicas de paso Δt adaptativas o adaptivas.

Como es evidente el sistema (E.3) es de segundo orden en el tiempo y el método Gear (E.4) es para sistemas de primer orden. Sin embargo adaptando el sistema de segundo orden mediante la transformación

$$\begin{aligned} \mathbf{cp}(t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{c}(t) \\ \frac{d}{dt} \mathbf{cp}(t) &= f(c, \mathbf{cp}, t) \end{aligned}$$

se desdobra en un sistema de $2N$ ecuaciones de primer orden y el método puede ser implementado junto con las condiciones iniciales (4.33).

Apéndice F

Funcionamiento de los Algoritmos Genéticos

En el problema de detección de la fisura, se da un conjunto de duplas $J = (X_{cJ}, h_{cJ})$. Cada dupla es un individuo y la población es el conjunto de todas ellas. El AG comienza generando una población inicial aleatoria de individuos. Es importante garantizar que dentro de la población inicial, se tenga la diversidad estructural de estas soluciones para tener una representación de la mayor parte de la población posible o al menos evitar la convergencia prematura. Luego genera nuevas poblaciones o generaciones. Cada paso el AG usa los individuos de la generación actual para generar los nuevos de la siguiente manera:

- 1-Evalúa cada individuo de la población inicial (X_{cJ}, h_{cJ}) para obtener $d(X_{cJ}, h_{cJ})$
- 2-Ordena a los individuos dándoles mayor puntaje a aquellos que den un ajuste mejor, esto es un $d(X_{cJ}, h_{cJ})$ menor.
- 3-Selecciona los individuos de puntaje mayor (padres).
- 4-Produce nuevos individuos (*hijos*) ya sea haciendo cambios aleatorios de un sólo padre (mutación), combinando los elementos vectoriales de un par de ellos (cruza) o repitiendo de forma idéntica un hijo de un padre.
- 5-Reemplaza la población de padres por hijos (nueva generación).

6-La iteración genética termina cuando $d(X_{cJ}, h_{cJ})$ verifique algún criterio de convergencia. Normalmente se usan dos criterios: correr el AG un número máximo de iteraciones (generaciones) o detenerlo cuando no haya cambios en la población.

Existen distintas estrategias para realizar cada parte del algoritmo. En particular, en el paso 1 se puede usar:

- a) Una distribución aleatoria uniforme para un cierto rango de valores.
- b) Una distribución aleatoria no uniforme para un cierto rango de valores definiendo una función densidad de probabilidad.

En el paso dos se puede optar por cualquier criterio que el usuario de esta técnica crea conveniente o usar alguno de los siguientes criterios:

a) Una lista de individuos ordenada de menor a mayor valor $d(X_{cJ}, h_{cJ})$, tipo ranking, donde el individuo con mayor jerarquía será el primero, el siguiente el segundo, etc. Esta forma de ordenar amortigua el ruido de las puntuaciones crudas. Sin importar cuanto mejor sea el primero con respecto al segundo, etc.

b) Una lista de individuos ordenada de menor a mayor valor $d(X_{cJ}, h_{cJ})$ donde el individuo tendrá una jerarquía proporcional a la calidad de $d(X_{cJ}, h_{cJ})$.

c) Una lista de corte o escala con corte. En este caso una fracción predefinida de la población tendrá la misma jerarquía máxima. Supóngase que se define el 5%, luego, los individuos de la población que tengan un $d(X_{cJ}, h_{cJ})$ que los coloque entre el 5% de los mejores, tendrán la máxima jerarquía todos por igual. Y los que no entren en ese 5% no comunicaran sus *genes* a la próxima generación.

d) Una lista de corrimiento lineal: se modifica las calidades crudas a fin de que el puntaje del individuo más adecuado sea igual a una constante, la cuál se puede especificar como la tasa Máxima de supervivencia, multiplicado por el puntaje medio de la población. De esta forma el número de individuos que pasen sus genes a la próxima generación no será una constante.

El paso tres del algoritmo, corresponde a la selección y se puede optar por:

- a) Una selección estocástica en la que se da a cada paso (generación), un número

aleatorio en que corresponde a cuántos individuos de la lista ordenada pasan a la siguiente generación.

b) Una selección uniforme en la que se da a cada paso (generación) un número aleatorio correspondiente a cuáles individuos de la lista ordenada pasan a la próxima generación.

c) Una selección uniforme en la que se da a cada paso (generación) un número aleatorio para cada padre que será multiplicado por su jerarquía, correspondiente a cuáles individuos de la lista ordenada pasan a la próxima generación.

d) Una selección tipo *torneo* donde cada padre se selecciona aleatoriamente de una sublista cuyo tamaño es definido previamente. Es decir si la lista ordenada tiene por ejemplo 27 individuos y se define un tamaño de sublista de tres individuos, se formaran 9 grupos cada uno de 3 individuos. Para cada grupo se elije aleatoriamente un individuo que pasa a la siguiente ronda en la que competirá con los demás que han sido seleccionados hasta que dé un ganador. Luego éste será uno de los padres.

El paso 4 del algoritmo, corresponde a la reproducción. Esta compuesta por un **contador de Elite**, que garantiza que los mejores (contador) de cada generación pasen automáticamente a la siguiente generación sin cambio alguno y una fracción de individuos, que no corresponden al contador de elite, para **cruza sexual**. La fracción que quede, es decir la que no corresponde al contador de elite ni a la crusa sexual, pasara a la siguiente generación con una **mutación**.

La crusa sexual puede ser:

a) De un punto, esto es: se da un número aleatorio entre 1 y la cantidad de variables que tenga del problema a optimizar, luego se concatenan los dos padres tales que el hijo sea idéntico al primer padre hasta el número generado y el resto igual al segundo progenitor por ejemplo: si los padres a cruzar son $p_1 = [a b c d e f g h]$ y $p_2 = [1 2 3 4 5 6 7 8]$ y se genera un número aleatorio entre 1 y 8, digamos 3 luego el hijo será $h = [a b c 4 5 6 7 8]$

b) De dos puntos. La idea es similar a la anterior pero ahora se dan dos números aleatorios r_1 y r_2 tales que $1 < r_1 < r_2 < \text{número de variables}$; por ejemplo: para el problema anterior se generan dos números aleatorio entre 1 y 8, digamos 3 y 5 luego el

hijo será $h = [a \ b \ c \ 4 \ 5 \ f \ g \ h]$.

c) Cruza dispersa (Scattered, en inglés) es la generalización de lo anterior. Se da un vector de dimensión igual a la cantidad de individuos y se generan 8 números aleatorios que pueden ser 0 o 1. Luego el 1 corresponderá al primer padre y el 0 al segundo de tal forma que el hijo tenga en las posiciones donde hay un 1 los genes del primer padre y donde hay un 0 los del segundo. Por ejemplo: si los padres a cruzar son como antes $p_1 = [a \ b \ c \ d \ e \ f \ g \ h]$ y $p_2 = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8]$ y, digamos que se genera el *vector aleatorio* $= [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ el hijo será $h = [a \ b \ 3 \ 4 \ e \ 6 \ 7 \ 8]$

d) Intermedia, genera al hijo a partir de un promedio pesado y un número aleatorio de la siguiente manera: dado un factor r y un número aleatorio $0 < r_a < 1$ el *hijo* $= padre_1 + r_a r (padre_2 - padre_1)$ si el número $r_a \in (0, 1)$ entonces el hijo estará en algún punto del hipercubo donde los dos padres ocuparan vértices opuestos.

c) Cruza Heurística: crea a los hijos sobre la línea generada por los dos padres a una distancia del padre con mejor puntaje dada por un parámetro r de igual manera que la intermedia (pero sin número aleatorio) $hijo = padre_1 + r (padre_2 - padre_1)$

La mutación puede ser:

a) Uniforme: se genera un vector aleatorio y se lo suma al individuo a mutar

b) Gaussiana: se genera un vector aleatorio con distribución gaussiana y se lo suma al individuo a mutar

Criterios de Parada: El algoritmo geométrico podría evolucionar sin límites o estancarse en una posible solución. Sea cual sea el caso, la finalización del cálculo obliga al usuario de esta técnica a implementar un criterio de parada. Para ello, se puede fijar un número máximo de iteraciones (generaciones). Un umbral en el ajuste de la función objetivo es otro criterio. En este caso cuando la función objetivo es menor que un valor fijado *a priori*, el algoritmo interrumpe su ejecución. Puede también ocurrir, que nuevas generaciones no alteren el valor de la función objetivo, para este caso se usa como criterio de parada un límite máximo de generaciones en el que la función objetivo no mejora. Si se supera dicho límite, el algoritmo genético se detiene.