

CAPÍTULO 6

**Vibraciones libres de placas ortótropas rectangulares
con orificios y esfuerzos en su plano medio.**

6.1 INTRODUCCIÓN

Las placas rectangulares constituyen un elemento estructural de uso habitual en variados campos de la ingeniería.

En determinadas circunstancias estos elementos se utilizan en medios dinámicos y el diseñador se enfrenta al desafío de hallar frecuencias naturales, formas modales y comportamiento frente a diversas complejidades.

En virtud de ello, son numerosos los estudios realizados sobre vibraciones transversales de placas rectangulares, de materiales isótropo debiéndose mencionar la fundamental contribución de Leissa ^[1], es así que el ingeniero de diseño dispone de manuales en los que se encuentran los valores de las frecuencias naturales y las formas modales asociadas de placas rectangulares con diversas condiciones de borde, como por ejemplo el elaborado por Blevins ^[2].

Por otro lado, la presencia de orificios en placas, altera la respuesta dinámica del elemento estructural. Esto se debe a que la reducción de material produce dos efectos contrapuestos: disminución de fuerzas inerciales y disminución de la rigidez. La preeminencia de uno u otro determinará el comportamiento de la placa. En algunos casos esta situación es provocada y conduce a lo que se conoce como efecto de rigidización dinámica. En este tema varios estudios han sido realizados, Rossi ^[3], Huang et al. ^[4], pero ello no agota el permanente interés en los campos de la ingeniería donde son necesarias estructuras livianas con frecuencias fundamentales altas. Por otra parte, resultados interesantes se muestran en el estudio realizado por Laura et al. ^[5], en el que se observa, por ejemplo, el efecto de rigidización dinámica en una placa de material isótropo de geometría rectangular, empotrada en sus cuatro bordes con un orificio cuadrado centrado de bordes libres.

La presencia de esfuerzos en el plano medio de la placa es también un factor de importancia en el análisis dinámico de un elemento estructural, debido a que la distribución de tensiones puede ocasionar el efecto de disminuir o aumentar las frecuencias naturales. Por ello, deben ser considerados en la formulación del problema dinámico ^[6].

El tratamiento clásico del problema consiste en determinar previamente el campo de tensiones originado por las fuerzas que actúan en el plano medio de la placa (Laura et al. ^[7]), sobre la superficie sin deformar de la misma y luego obtener los esfuerzos en el plano N_x , N_y y N_{xy} multiplicando las componentes del vector tensión de tensiones correspondientes por el espesor h de la placa. Finalmente, los esfuerzos que resultan del análisis del estado plano de tensiones, son incluidos al formular la relación funcional gobernante del sistema vibrante (Dickinson ^[8], Bassily y Dickinson ^[9]).

El problema de las vibraciones transversales de placas delgadas, de material isótropo, sometidas a esfuerzos en su plano medio está gobernado por la ecuación (1.56), dada en el Capítulo 1, cuando no existen cargas transversales aplicadas es:

$$D\nabla^4 w - \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (6.1)$$

La complejidad matemática que involucra resolver esta ecuación diferencial conduce a que, en la mayoría de los casos, se deba recurrir a soluciones aproximadas al problema. Sin embargo, se recuerda que es posible obtener la solución exacta para algunos casos como se muestra en Leissa ^[1]. También, existe la solución exacta, en forma de serie infinita, para el caso de una placa rectangular simplemente apoyada en dos bordes opuestos y empotrada

en los dos restantes, para el caso de carga con una distribución lineal de esfuerzos normales en sus bordes simplemente apoyados, publicado por Leissa y Kang ^[10]. Para un caso similar de esfuerzos aplicados, pero en una placa rectangular simplemente apoyada en sus cuatro bordes, existen valores numéricos de la primera frecuencia, encontradas por métodos aproximados por Carnicer et al. ^[11].

Si la placa esta sometida a un estado de esfuerzos en sus bordes y en el dominio de la placa se introducen orificios, se obtienen distribuciones de tensiones particulares, como se mostró en los capítulos precedentes, que dificultan aún más la solución de la ecuación (6.1). Valores de frecuencias naturales para vibraciones transversales libres de una placa cuadrada de material isótropo, con un orificio cuadrado excéntricamente posicionado y sometido a distintos casos de esfuerzos en el plano se encuentran en un estudio previo, Sabir y Davies ^[12].

En el caso que el material de la placa sea ortótropo, la complejidad del problema aumenta significativamente, debiéndose recurrir necesariamente a soluciones aproximadas analíticas o numéricas.

En este capítulo se presenta un análisis de las vibraciones libres de placas rectangulares ortótropas, sometidas a cargas en su plano medio con orificios cuadrados centrados. Los valores calculados corresponden a placas con distintas condiciones de borde en su contorno, con cargas en dirección normal a estos bordes.

6.2 PLANTEO DEL PROBLEMA.

En el estudio se consideran placas de geometría rectangulares con un orificio cuadrado centrado de bordes libres. En los bordes exteriores de las placas, se consideraron diferentes condiciones de bordes. Para describirlas se utilizan las abreviaciones siguientes: SA para simplemente apoyada, E para borde empotrado y L para el borde libre. En cada caso, los vínculos se describen recorriendo los bordes en sentido antihorario y comenzando por el borde vertical izquierdo en la representación de la placa. Las situaciones consideradas son: SA-SA-SA-SA (Figura 6.1), SA-E-SA-E (Figura 6.2) y E-E-L-L (Figura 6.3).

El lado del orificio cuadrado se relaciona con las dimensiones de la placa a través de la relación a/l_y , donde con a es lado del cuadrado que representa el orificio y l_y es la longitud de la placa elegida como dimensión de referencia. En los bordes externos se consideran cargas distribuidas de valor constante y normales a él. Se define al coeficiente λ como el parámetro de la relación de lados de la placa l_x/l_y . Los modelos de placas se consideran de un material ortótropo definido por las correspondientes constantes elásticas $E_1, E_2, G_{12}, \nu_1, \nu_2$ y cuya dirección elástica principal 1, se encuentra orientada según lo indicado por el ángulo, θ , que forma el semieje cartesiano positivo x con dicha dirección elástica (ver Figura 1.8).

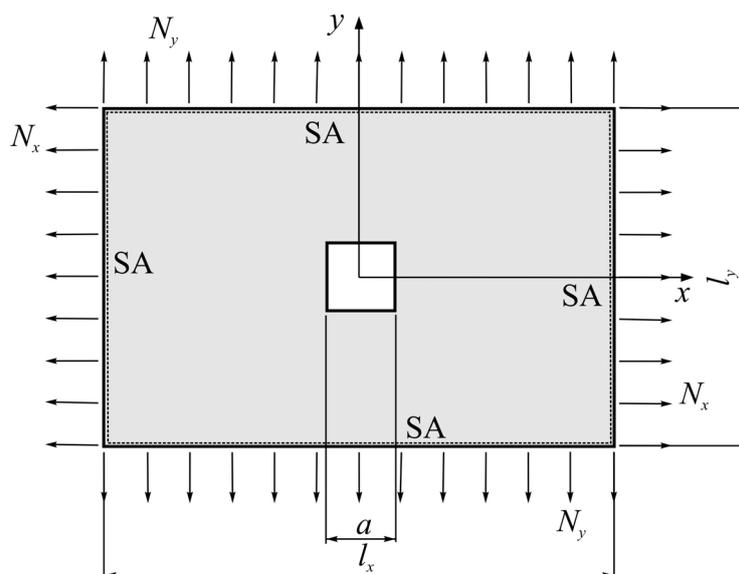


Figura 6.1. Placa rectangular SA-SA-SA-SA con orificio cuadrado central, sometida a cargas uniformes de tracción. ($\lambda = l_x/l_y$).

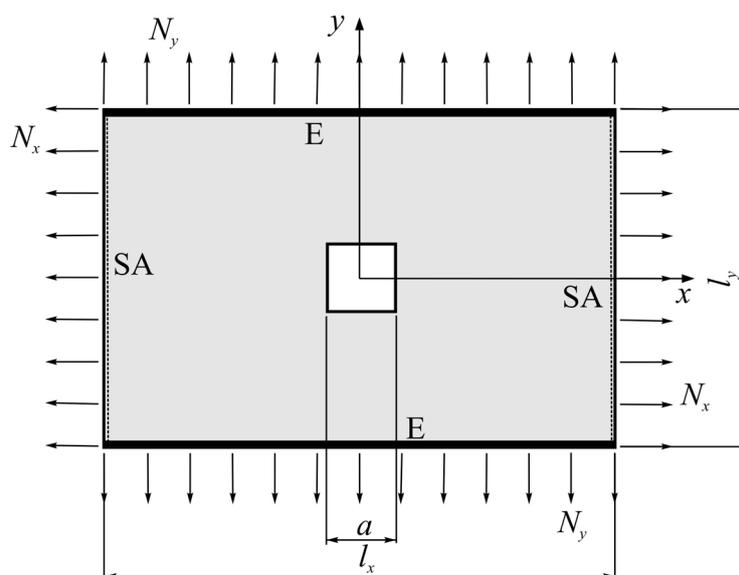


Figura 6.2. Placa rectangular SA-E-SA-E con orificio cuadrado central, sometida a cargas uniformes de tracción. ($\lambda = l_x/l_y$).

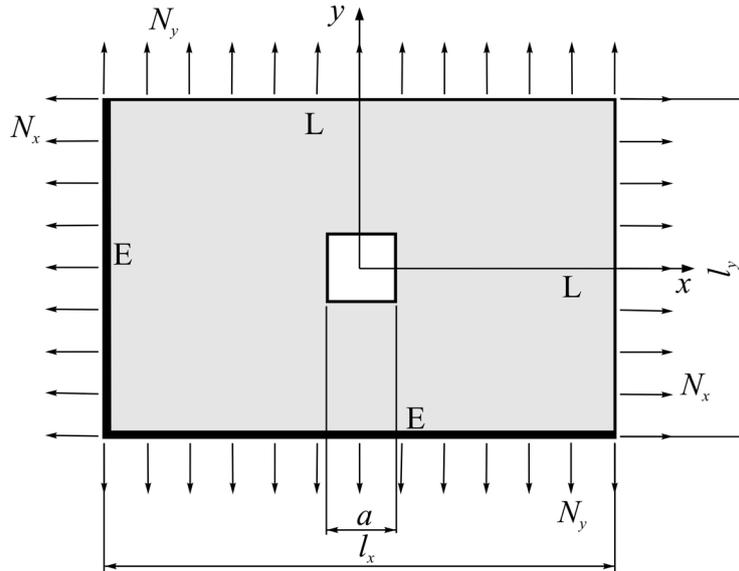


Figura 6.3. Placa rectangular E-E-L-L con orificio cuadrado central, sometida a cargas uniformes de tracción. ($\lambda = l_x/l_y$).

En los sistemas analizados se consideraron dos posiciones de los ejes principales de elasticidad. Éstas son: $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 90^\circ$, o sea se adoptaron direcciones de ortotropía paralelas a los lados del orificio cuadrado. Para los casos particulares, en que los ejes principales de elasticidad coinciden con las direcciones de los ejes coordenados, la ecuación diferencial (1.55) expresada en el Capítulo 1 gobierna los sistemas descritos, que cuando no existen cargas transversales aplicadas a la placa tiene la forma:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (6.2)$$

Donde D_1 , D_2 y D_3 son los coeficientes de rigidez a la flexión mostrados en las expresiones (1.41) del Capítulo 1.

Cuando la placa efectúa uno de sus modos normales de vibración se puede expresar:

$$w(x, y, t) = W(x, y) e^{i\omega t} \quad (6.3)$$

donde ω es la frecuencia natural circular y la expresión (6.2) se transforma en:

$$D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \left(N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) - \rho h \omega^2 W = 0 \quad (6.4)$$

Por otro lado, se consideraron distintas magnitudes de las cargas en el plano, para estudiar el efecto que tienen sobre el valor de las cuatro primeras frecuencias naturales de vibración. Se define Ω_i como el coeficiente adimensional de frecuencia según la expresión:

$$\Omega_i = \sqrt{\frac{\rho h}{D_1}} l_x^2 \omega_i \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \text{ y } 4$$

y como parámetros adimensionales de carga en el plano se adoptan las relaciones:

$$\bar{N}_x = \frac{N_x l_x^2}{D_1}; \quad \bar{N}_y = \frac{N_y l_x^2}{D_1}; \quad \bar{N}_{xy} = \frac{N_{xy} l_x^2}{D_1}. \quad (6.5)$$

que en el caso particular de carga hidrostática son:

$$\bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N} = cte; \quad \bar{N}_{xy} = 0 \quad (6.6)$$

6.3 MODELADO CON ELEMENTOS FINITOS.

El método de elementos finitos fue aplicado para resolver el problema planteado utilizando el software comercial ALGOR^[13]. Este código, posee un módulo para análisis lineal de formas modales y frecuencias naturales con rigidización por carga, que permite la utilización de elementos finitos cuadriláteros con la formulación de Veubeke, corte reducido, deformación lineal y deformación constante.

Para la resolución de los problemas se utilizó la formulación conforme de Veubeke. Estos elementos cuadriláteros tridimensionales poseen 4 nodos con 5 grados de libertad en cada uno. Estos grados de libertad se refieren a los tres corrimientos en el espacio y dos rotaciones en el plano del elemento.

Los resultados encontrados^{[14], [15]} para los diferentes casos analizados se muestran en el apartado siguiente.

6.4 RESULTADOS NUMÉRICOS.

6.4.1 Placas rectangulares SA-SA-SA-SA.

A continuación se muestra el análisis realizado para los casos de placas rectangulares SA-SA-SA-SA con un orificio cuadrado centrado y tensiones en su plano medio, Figura 6.1. Para el análisis se adoptaron dos tipos diferentes de materiales genéricos, en función de las siguientes relaciones indicadas en la Tabla 6.1.

<i>Material</i>	D_1/D_2	D_1/D_k	ν_2
Caso 1	2	2	0,30
Caso 2	10	2	0,06

Tabla 6.1. Relaciones entre las características elásticas de los materiales ortótropos adoptados.

Se consigna que dada la enorme variabilidad de parámetros elásticos involucrados en la descripción del comportamiento de los distintos materiales ortótropos, se consideraron

valores genéricos representando en el Caso 1, un material de baja ortotropía y el Caso 2, un material con una marcada relación de ortotropía.

En la Tabla 6.2 se presentan los coeficientes de frecuencia de una placa cuadrada, $\lambda = l_x/l_y = 1$, constituida del material con características ortótropas indicadas como Caso 1 en la Tabla 6.1. En ella, se muestran los coeficientes de las cuatro primeras frecuencias naturales, Ω_i , para distintos valores del esfuerzo de tracción en el plano (tanto en dirección x como y). Para todas las frecuencias se observa que las tensiones de tracción hacen elevar el valor de los coeficientes de frecuencia. En la mencionada tabla se muestran los coeficientes para una placa maciza, sin orificio ($a/l_y = 0$), y se los compara con los obtenidos por otro autor utilizando el método de Ritz, con funciones viga, Felix ^[16]. Tal como puede observarse el acuerdo es excelente. Para la placa con orificio cuadrado central, se presentan los coeficientes para dos diferentes relaciones de dimensiones ($a/l_y = 0,20, 0,50$). La orientación adoptada para las direcciones elásticas es $\theta = 0^\circ$, o sea cuando la dirección 1 coincide con la del eje x .

De los valores de la tabla puede inferirse el efecto que produce el orificio y sus dimensiones en los coeficientes de las primeras cuatro frecuencias. Se observa que el coeficiente de la frecuencia fundamental aumenta, al disminuir la masa de la placa para las dos relaciones de tamaño consideradas y se produce una rigidización dinámica. En las frecuencias superiores, la existencia de un orificio con $a/l_y = 0,20$ hace disminuir los valores de los coeficientes de la placa maciza. Con el orificio de mayores dimensiones $a/l_y = 0,50$, se produce un alivianamiento mayor (25% de reducción de la masa total de la placa llena), y el coeficiente de frecuencia fundamental es significativamente mayor que el de la placa sin orificio (entre un 26 y un 32%).

		$\frac{a}{l_y}$	\bar{N}					
		(orificio)	0,00	98,70	197,39	296,09	493,48	986,97
Ω_1	Felix ^[16]	0	19,984	48,452	65,542	79,018	100,699	141,001
	Presente estudio	0	19,985	48,449	65,538	79,013	100,692	140,990
	Presente estudio	0,20	20,030	50,030	67,850	81,880	104,430	146,310
	Presente estudio	0,50	26,480	63,280	84,780	101,570	128,390	177,850
Ω_2	Felix ^[16]	0	43,471	82,220	107,845	128,457	161,994	224,932
	Presente estudio	0	43,475	82,208	107,823	128,428	161,954	224,873
	Presente estudio	0,20	42,810	80,730	105,830	126,010	158,860	220,510
	Presente estudio	0,50	42,180	81,780	106,190	125,650	157,100	215,170
Ω_3	Felix ^[16]	0	51,189	86,549	111,181	131,269	164,233	226,550
	Presente estudio	0	51,192	86,537	111,160	131,241	164,194	226,492
	Presente estudio	0,20	49,680	84,440	108,590	128,270	160,540	221,530
	Presente estudio	0,50	44,180	81,810	106,600	126,170	157,510	215,690
Ω_4	Felix ^[16]	0	79,510	119,091	148,241	172,535	212,964	290,374
	Presente estudio	0	79,519	119,088	148,221	172,503	212,914	290,294
	Presente estudio	0,20	76,250	119,340	150,320	175,840	217,980	298,170
	Presente estudio	0,50	74,000	116,710	145,920	169,320	206,970	276,170

Tabla 6.2. Coeficientes de frecuencia de placas cuadradas con carga en el borde. Material Caso 1.

$$(\lambda = 1, \bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N}).$$

La Tabla 6.3 es similar a la Tabla 6.2, pero se refiere a una placa rectangular con relación de lados $\lambda = l_x/l_y = 1,50$. En ella también se observa el efecto que produce un orificio cuadrado central sobre los coeficientes de frecuencia. Se adoptaron dos tamaños de orificio: $a/l_y = 0,20, 0,50$. Las conclusiones a que puede arribarse para la placa rectangular son similares a las que se observaron para la placa cuadrada. Las fuerzas distribuidas de tracción en el plano producen que los coeficientes de las cuatro primeras frecuencias naturales aumenten de valor con respecto a la placa descargada. En este caso particular el orificio de relación 0,50, genera un porcentaje menor de alivianamiento ($\cong 17\%$) que en la placa cuadrada. También la concordancia con los valores de referencia (Felix ^[16]) es muy buena.

		$\frac{a}{l_y}$	\bar{N}					
		(orificio)	0,00	98,70	197,39	296,09	493,48	986,97
Ω_1	Felix ^[16]	0	30,229	63,872	85,120	102,035	129,394	180,477
	Presente estudio	0	30,231	63,870	85,117	102,031	129,388	180,467
	Presente estudio	0,20	30,140	65,330	87,330	104,810	133,040	185,700
	Presente estudio	0,50	34,860	77,000	102,930	123,410	156,330	217,290
Ω_2	Felix ^[16]	0	63,910	100,859	127,517	149,495	185,809	254,883
	Presente estudio	0	63,915	100,856	127,511	149,485	185,795	254,861
	Presente estudio	0,20	63,280	99,880	126,270	148,030	183,970	252,340
	Presente estudio	0,50	56,220	96,300	123,940	146,410	183,210	252,690
Ω_3	Felix ^[16]	0	79,510	126,739	160,635	188,533	234,577	322,073
	Presente estudio	0	79,517	126,725	160,610	188,499	234,531	322,003
	Presente estudio	0,20	78,500	125,270	158,790	186,350	231,820	318,200
	Presente estudio	0,50	73,940	125,430	159,270	186,080	228,860	306,550
Ω_4	Felix ^[16]	0	115,175	155,640	187,570	214,804	260,879	350,500
	Presente estudio	0	115,186	155,633	187,551	214,777	260,838	350,435
	Presente estudio	0,20	115,420	157,070	189,690	217,450	264,330	355,390
	Presente estudio	0,50	109,910	169,610	206,110	234,340	280,420	366,050

Tabla 6.3. Coeficientes de frecuencia de placas rectangulares con carga en el borde. Material Caso 1.

$$(\lambda = 1,5, \bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N}, \theta = 0^\circ).$$

La Tabla siguiente, Tabla 6.4, muestra para la placa cuadrada ortótropa (material Caso 2), los coeficientes de las cuatro primeras frecuencias. Es interesante hacer notar que el material propuesto tiene una ortotropía mucho más marcada que la del material Caso 1 de la Tabla 6.2, y que los coeficientes de frecuencia resultan ser más bajos.

Por ejemplo para los coeficientes de la frecuencia fundamental, con $\bar{N} = 0$, $a/l_y = 0,20$, resulta $\Omega_1 = 20,030$ (Tabla 6.2) y $\Omega_1 = 18,356$ (Tabla 6.4), comportamiento que se repite para todos los coeficientes.

En la Tabla 6.5 se presentan los coeficientes de la placa rectangular, $\lambda = 1,50$, de material Caso 1 pero orientado de tal manera que el eje principal de elasticidad 1 coincide con el eje y de la placa ($\theta = 90^\circ$, $1 \equiv y$; $2 \equiv x$).

Puede observarse en la comparación con la Tabla 6.3 que la incidencia del cambio de orientación en las direcciones principales no es significativa.

	$\frac{a}{l_y}$ (orificio)	\bar{N}					
		0,00	98,70	197,39	296,09	493,48	986,97
Ω_1	0,20	18,356	49,449	67,471	81,604	104,267	146,284
	0,50	25,440	63,613	85,404	102,329	129,142	177,702
Ω_2	0,20	32,911	76,262	102,680	123,564	157,204	219,796
	0,50	37,480	81,431	106,227	126,036	157,542	210,587
Ω_3	0,20	47,516	83,138	107,524	127,316	159,693	220,751
	0,50	43,329	81,542	107,258	126,960	158,058	217,658
Ω_4	0,20	54,907	113,680	145,973	172,204	215,169	296,320
	0,50	62,853	114,413	145,658	169,396	205,662	267,049

Tabla 6.4. Coeficientes de frecuencia de placas cuadradas con carga en el borde. Material Caso 2.

$$(\lambda = 1, \bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N}).$$

	$\frac{a}{l_y}$ (orificio)	\bar{N}					
		0,00	98,70	197,39	296,09	493,48	986,97
Ω_1	0,20	32,960	66,830	88,570	105,930	134,070	186,700
	0,50	37,190	79,070	105,230	125,990	159,470	221,830
Ω_2	0,20	59,280	97,690	124,780	146,960	183,430	252,540
	0,50	56,140	97,640	126,070	149,130	186,850	257,940
Ω_3	0,20	98,760	138,890	169,770	195,830	239,580	324,060
	0,50	85,770	132,140	164,960	191,800	235,850	318,890
Ω_4	0,20	98,760	145,610	180,650	209,890	258,620	352,010
	0,50	122,560	165,260	201,980	232,470	282,970	378,760

Tabla 6.5. Coeficientes de frecuencia de placas rectangulares con carga en el borde. Material Caso 1.

$$(\lambda = 1,5, \bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N}, \theta = 90^\circ).$$

La Tabla 6.6 y la Tabla 6.7 corresponden a la placa rectangular de material Caso2, con dos orientaciones del material ortótropo $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 90^\circ$, respectivamente. Nuevamente, a pesar de la marcada ortotropía del material, salvo en las frecuencias superiores para las mayores cargas de tracción, las diferencias no son relevantes.

A continuación, en la Figura 6.4, se muestran las primeras cuatro formas modales de la placa cuadrada con un orificio cuadrado centrado de relación $a/l_y = 0,20$. La Figura 6.4.a) corresponde al caso en que la placa no tiene fuerzas en el plano, $\bar{N} = 0$ y la Figura 6.4.b) a la carga hidrostática adimensional de 98,70. El material adoptado es el del Caso 2. Puede observarse que para las primeras tres frecuencias, la forma modal mantiene sus características; pero para la cuarta frecuencia, la presencia de carga en el plano introduce un cambio en la forma modal, pasando de dos líneas nodales de igual orientación, a dos líneas nodales que tienden a ser ortogonales. Obviamente, esto obedece a una alteración en el orden de las formas modales, producto de la acción de esfuerzos en el plano que compensa el efecto de la ortotropía (se recuerda que en la placa maciza isótropa $\Omega_{22} < \Omega_{13}$).

La Figura 6.5, muestra las primeras cuatro formas modales de la placa cuadrada con un orificio cuadrado centrado de relación $a/l_y = 0,50$. La Figura 6.5.a) corresponde al caso en

que la placa no tiene fuerzas en el plano, $\bar{N} = 0$ y la Figura 6.5.b) a la carga hidrostática adimensional de 98,70. El material adoptado es el del Caso 2. Puede observarse que, para la primera y cuarta frecuencia, la forma modal mantiene sus características, pero para la segunda y tercera frecuencia, la presencia de carga en el plano introduce un cambio en la secuencia de las formas modales.

	$\frac{a}{l_y}$ (orificio)	\bar{N}					
		0,00	98,70	197,39	296,09	493,48	986,97
Ω_1	0,20	25,490	63,080	85,480	103,120	131,480	184,170
	0,50	31,690	74,000	99,280	119,010	150,180	203,590
Ω_2	0,20	52,440	96,380	123,190	145,110	181,160	249,420
	0,50	51,890	91,610	118,270	139,820	174,940	240,790
Ω_3	0,20	58,280	110,650	147,380	176,620	223,880	312,110
	0,50	57,360	116,000	150,400	175,780	211,880	254,320
Ω_4	0,20	92,510	148,890	186,470	214,220	260,960	351,500
	0,50	89,690	154,210	194,610	219,150	253,770	296,480

Tabla 6.6. Coeficientes de frecuencia de placas rectangulares con carga en el borde. Material Caso 2.

$$(\lambda = 1,5, \bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N}, \theta = 0^\circ).$$

	$\frac{a}{l_y}$ (orificio)	\bar{N}					
		0,00	98,70	197,39	296,09	493,48	986,97
Ω_1	0,20	31,320	66,120	88,090	105,590	133,880	186,700
	0,50	36,080	79,270	105,850	126,870	160,720	223,580
Ω_2	0,20	50,050	92,670	121,110	144,040	181,390	251,570
	0,50	50,500	95,720	125,340	149,080	187,610	259,580
Ω_3	0,20	76,615	131,880	168,490	194,700	238,620	323,280
	0,50	85,880	132,590	165,980	193,440	238,700	324,480
Ω_4	0,20	96,610	137,360	169,990	200,980	251,730	347,480
	0,50	94,120	153,160	193,740	226,690	280,500	381,360

Tabla 6.7. Coeficientes de frecuencia de placas rectangulares con carga en el borde. Material Caso 2.

$$(\lambda = 1,5, \bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N}, \theta = 90^\circ).$$

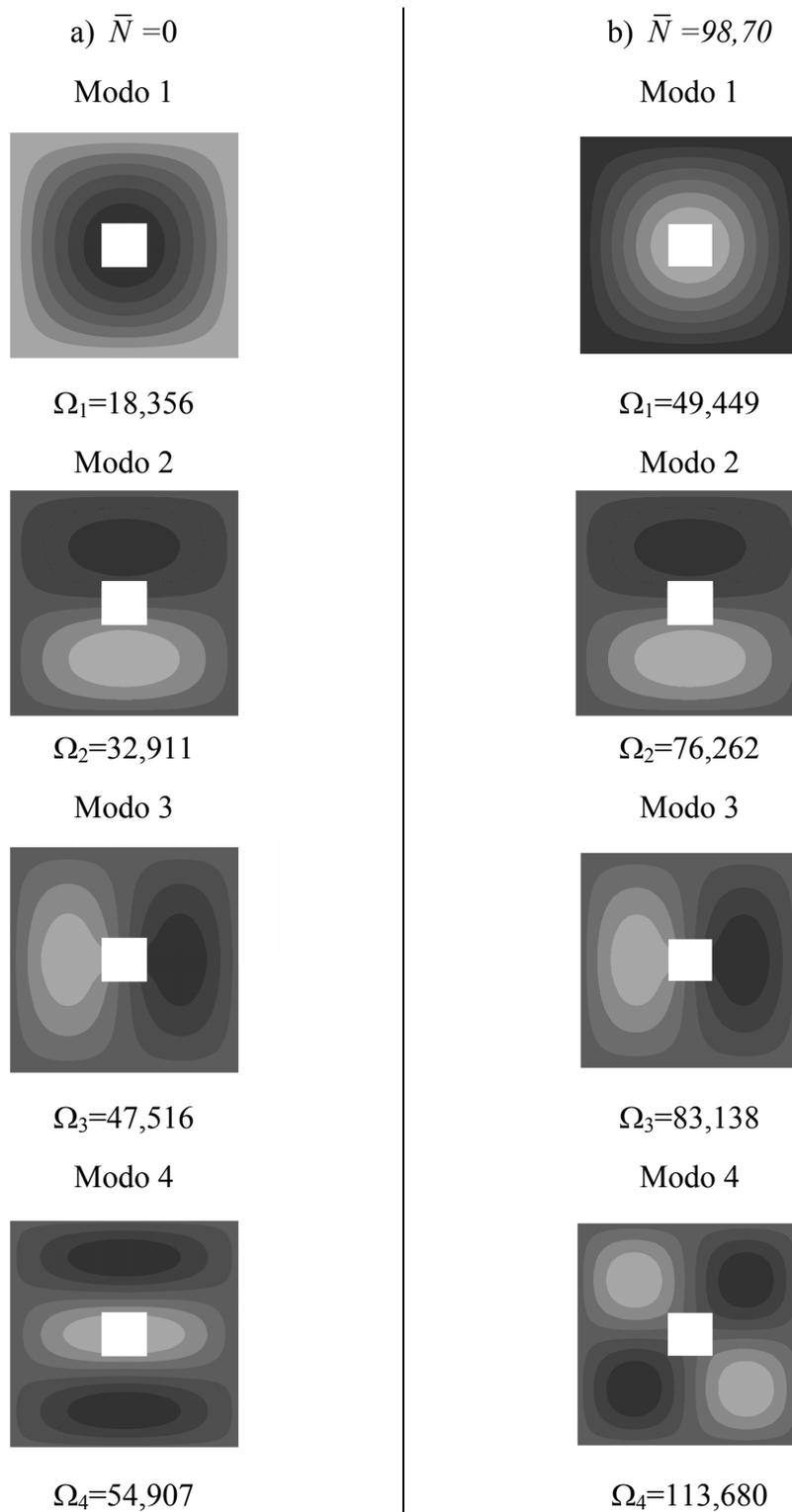


Figura 6.4. Primeros cuatro modos de vibración de placa ortótropa cuadrada SA-SA-SA-SA con orificio cuadrado, $a/l=0,20$, para el material Caso 2.

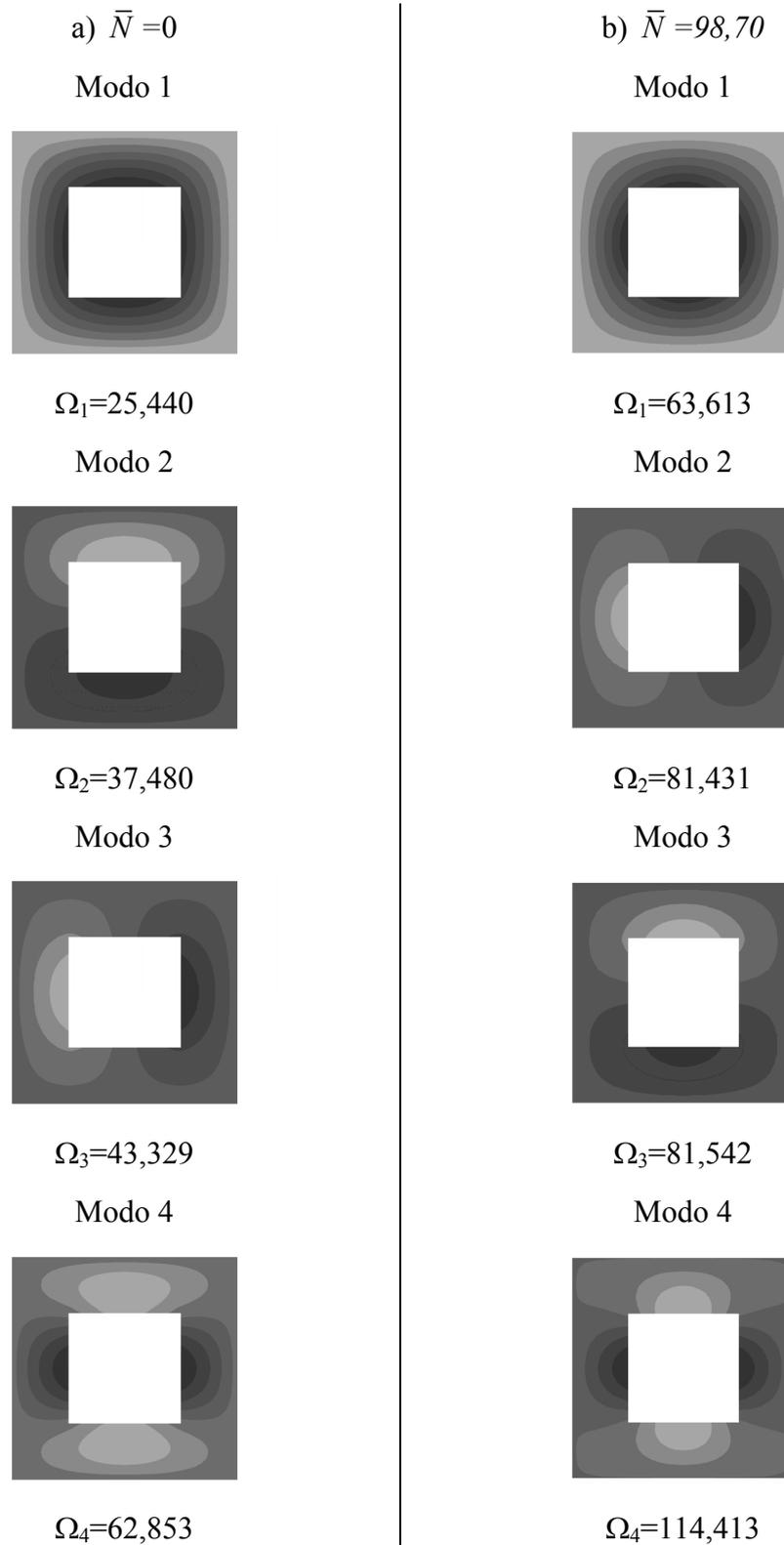


Figura 6.5. Primeros cuatro modos de vibración de placa ortótropa cuadrada SA-SA-SA-SA con orificio cuadrado, $a/l=0,50$, para el material Caso 2.

En la Figura 6.6 se presentan las formas modales de la placa rectangular $\lambda = 1,50$, con orificio cuadrado central $a/l_y = 0,20$, constituida de material ortótropo Caso 2 y orientado según $\theta = 0^\circ$. Se presentan tres situaciones: (a), cuando no existe esfuerzo en el plano $\bar{N} = 0$, (b) cuando hay aplicada una carga hidrostática de tracción de $\bar{N} = 98,70$ y (c) cuando el valor de la carga de tracción es $\bar{N} = 197,39$.

La forma modal correspondiente a la frecuencia fundamental no cambia de características con la presencia de cargas en el plano \bar{N} . En tanto que las características de los tres modos siguientes estudiados sí son alteradas por la presencia de cargas en el plano, pues tal como se observa en la figura se producen cambios en las formas modales. Para valores mayores de $\bar{N} > 98,70$ se repiten las características de las formas modales del caso (b) y del caso (c).

En la Figura 6.7 se presentan las mismas situaciones de carga y geometría de la placa que para los modelos de la Figura 6.6, el material ortótropo considerado también es el mismo pero se cambia su orientación, $\theta = 90^\circ$. La forma modal de la primera frecuencia tiene características semejantes a la de la orientación $\theta = 0^\circ$ y las de las frecuencias superiores cambian, para esta orientación de los ejes de ortotropía en que la orientación de mayor rigidez coincide con la menor dimensión de la placa.

La Figura 6.8 contiene las formas modales de la placa rectangular, $\lambda = 1,50$, con un orificio cuadrado $a/l_y = 0,50$, de material ortótropo Caso 2, con $\theta = 0^\circ$, con las mismas situaciones de carga en el plano: (a), cuando no existe esfuerzo en el plano $\bar{N} = 0$, (b) cuando hay aplicada una carga hidrostática de tracción de $\bar{N} = 98,70$ y (c) cuando el valor de la carga de tracción es $\bar{N} = 197,39$. No se manifiestan cambios en las características de las formas modales de las primeras cuatro frecuencias para $\bar{N} = 0$ y $\bar{N} = 98,70$, para la situación (c) de cargas cambian las características de la cuarta frecuencia.

Si se las compara con el caso similar de cargas y ortotropía de la Figura 6.6, en este caso en que el orificio es de mayores dimensiones, se observan diferencias en las formas modales equivalentes para algunas frecuencias, que son causadas por el cambio en la geometría.

La Figura 6.9 presenta las formas modales de situaciones análogas a la de la Figura 6.8 pero para el material ortótropo orientado según la otra dirección. $\theta = 90^\circ$

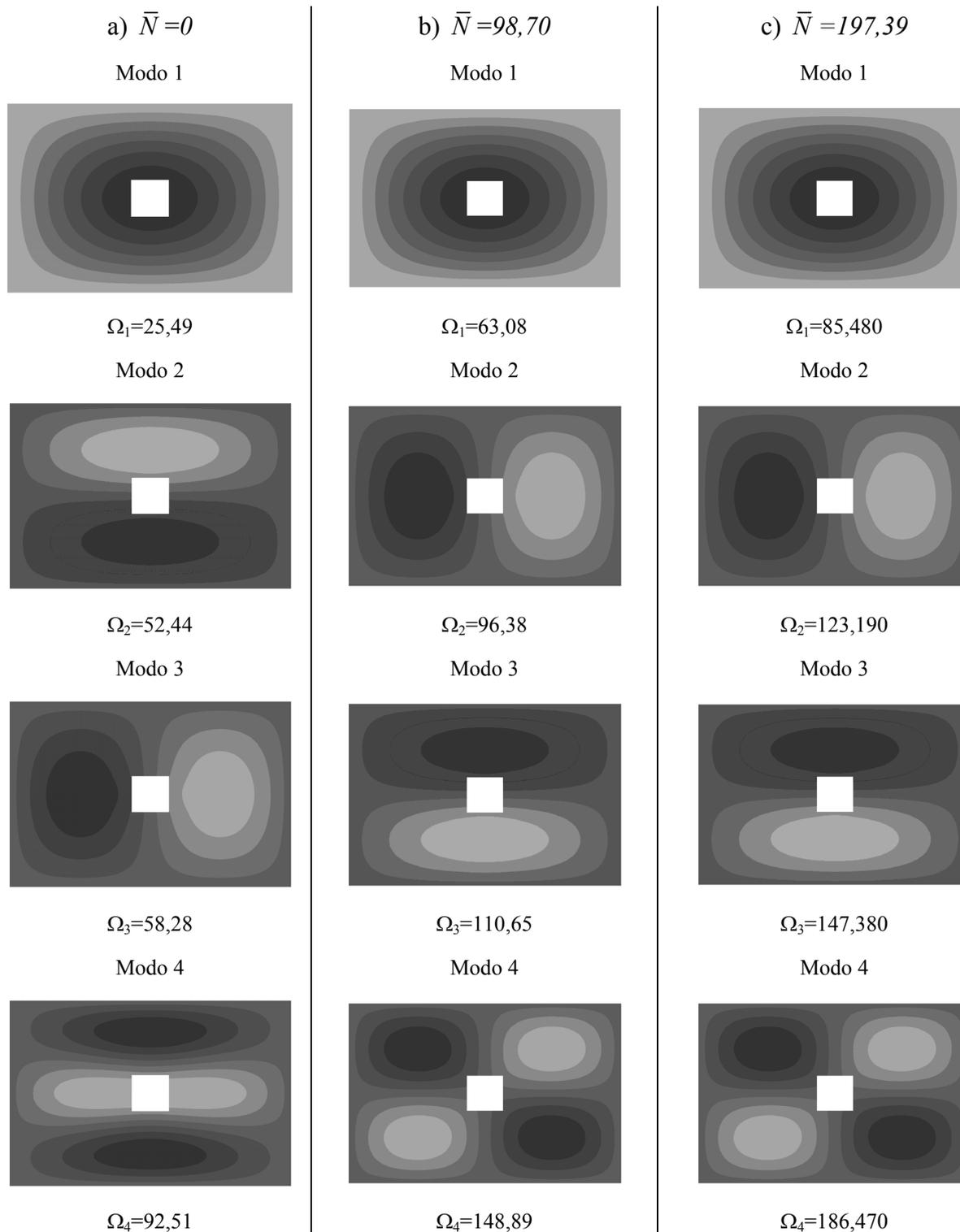


Figura 6.6. Primeros cuatro modos de vibración de placa ortótropa rectangular SA-SA-SA-SA con orificio cuadrado, $a/l_y = 0,2$, material Caso 2, $\theta = 0^\circ$.

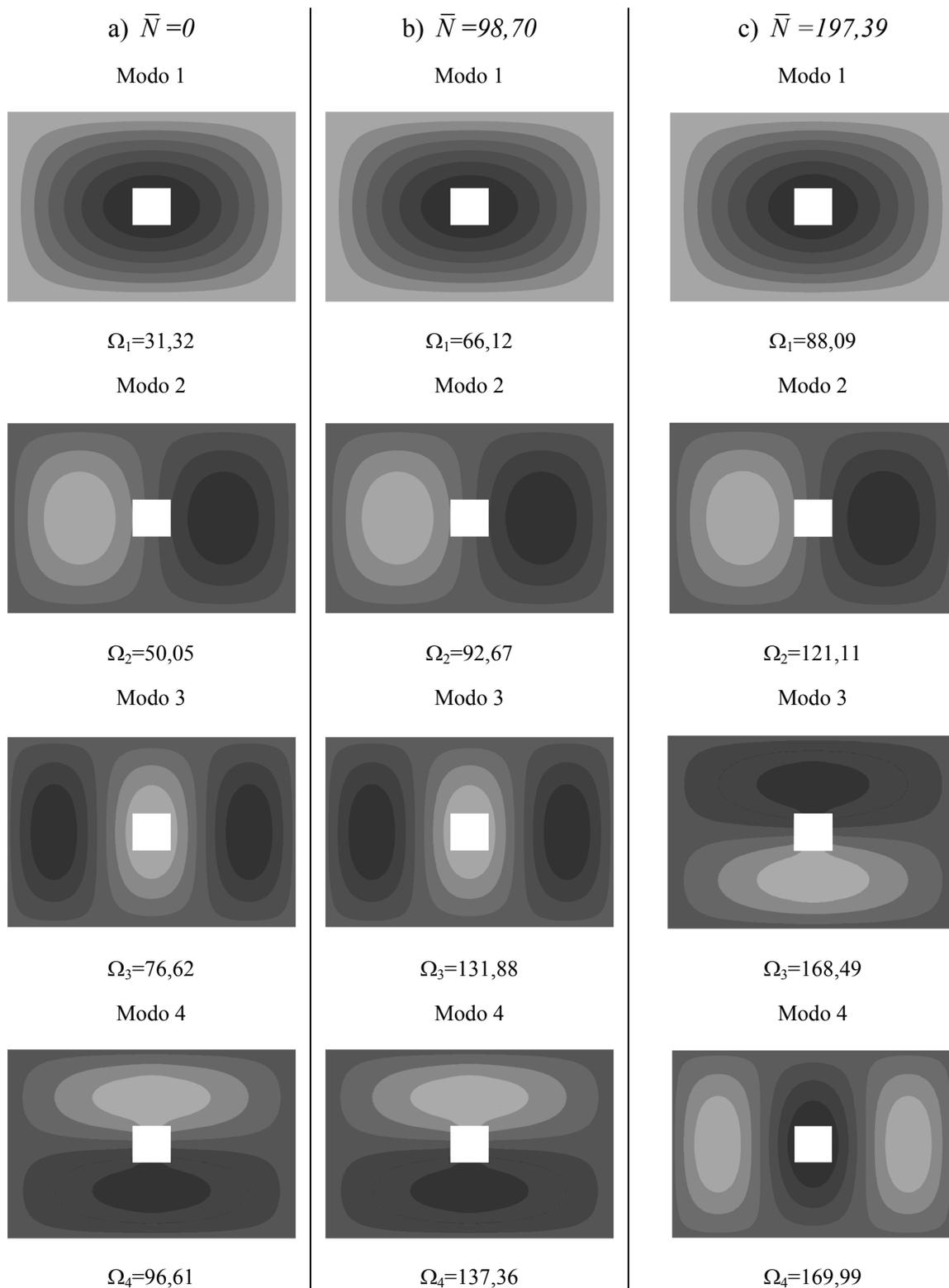


Figura 6.7. Primeros cuatro modos de vibración de placa ortótropa rectangular SA-SA-SA-SA con orificio cuadrado, $a/l_y = 0,2$, material Caso 2, $\theta = 90^\circ$.

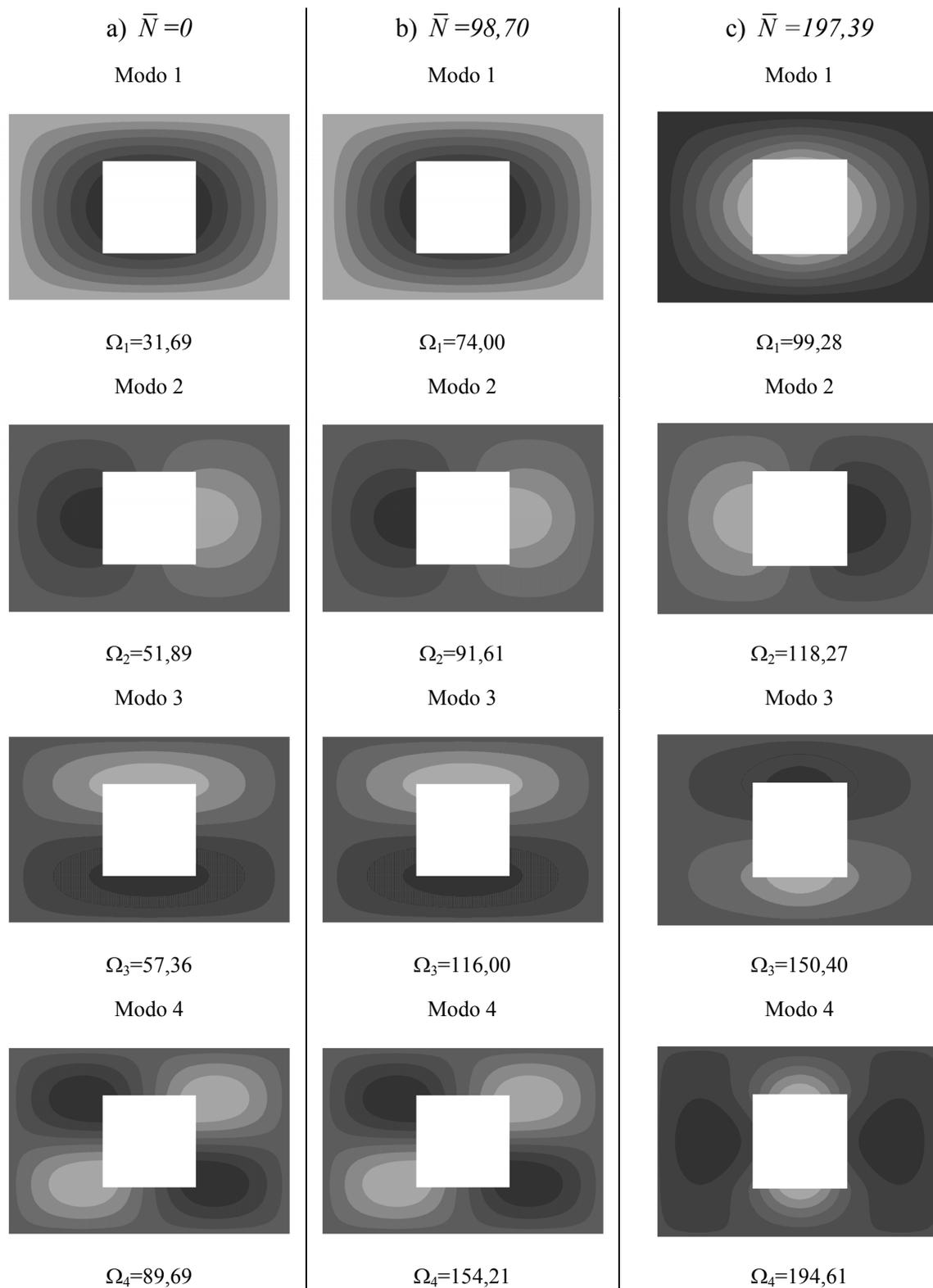


Figura 6.8. Primeros cuatro modos de vibración de placa ortótropa rectangular SA-SA-SA-SA con orificio cuadrado, $a/l_y = 0,50$, material Caso 2, $\theta = 0^\circ$.

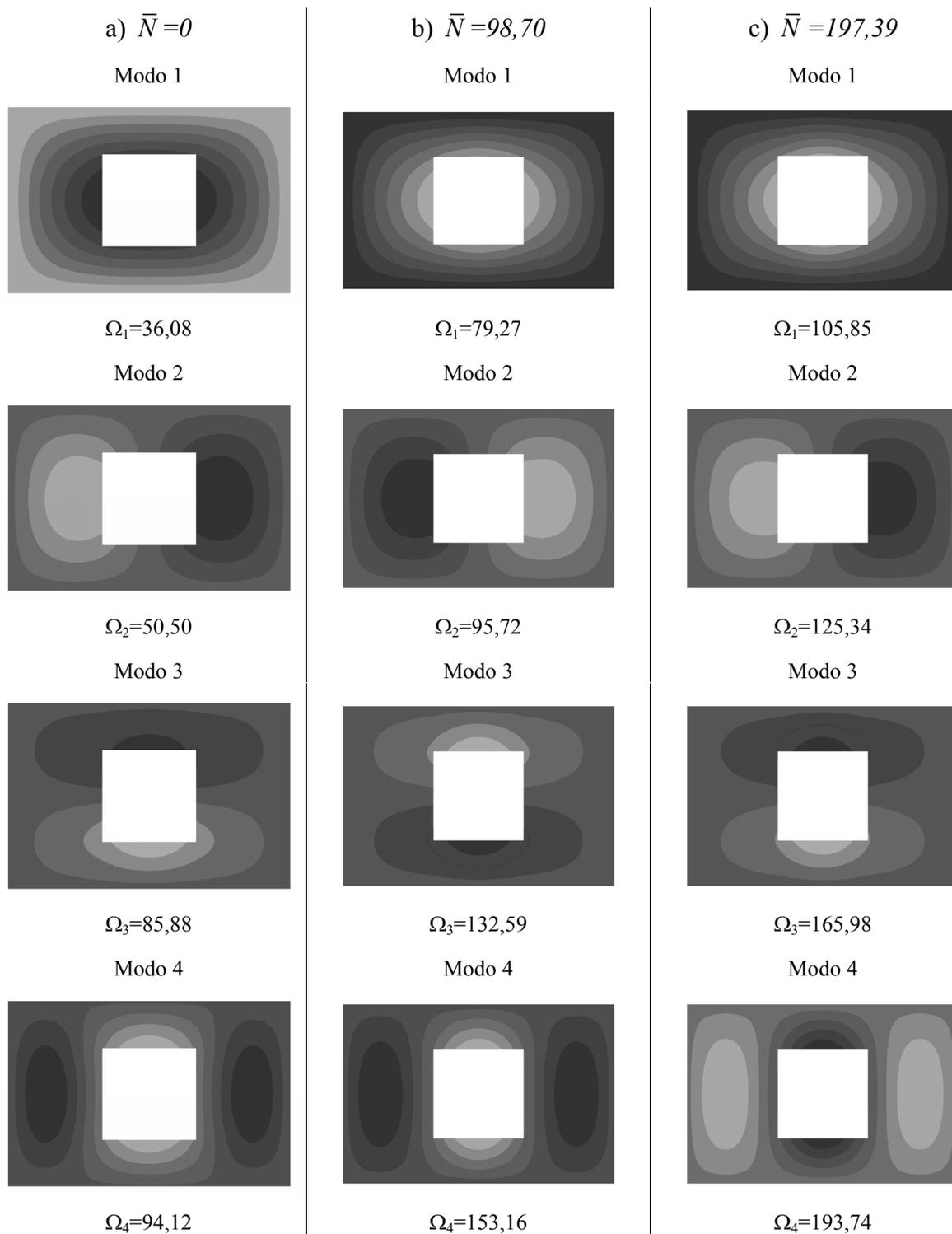


Figura 6.9. Primeros cuatro modos de vibración de placa ortótropa rectangular SA-SA-SA-SA con orificio cuadrado, $a/l_y = 0,50$, material Caso 2, $\theta = 90^\circ$.

6.4.2 Placas rectangulares SA-E-SA-E.

A continuación se muestran los resultados obtenidos para los casos de placas rectangulares SA-E-SA-E con un orificio cuadrado centrado y tensiones en su plano medio, Figura 6.2.

El modelo adoptado se aplicó en primer lugar a un caso cuyos valores de frecuencias naturales eran conocidos (Rossit et al. ^[17]): el de una placa rectangular ($\lambda = 1,5$) del material ortótropo, especificado como Caso 1 (Tabla 6.1), sin orificio. En este sistema, el eje principal de elasticidad 1 es paralelo a la dirección coordenada x . En la Tabla 6.8 se muestra la comparación efectuada que permite comprobar la pertinencia de los cálculos efectuados.

Además, en la Tabla 6.8 se vuelcan los valores de coeficientes de frecuencias para la misma placa con orificios centrados cuadrados de dos tamaños, Figura 6.2.

Lo que resulta claro de los valores de la tabla es el efecto de rigidización de la fuerza de tracción aplicada, tanto sobre la placa maciza como sobre la placa perforada.

	$\frac{a}{l_y}$	\bar{N}					
		0,00	98,70	197,39	296,09	493,48	986,97
Ω_1	0 (*)	45,452	75,035	95,409	111,923	138,891	189,632
	0	45,456	74,589	94,723	111,056	137,741	187,945
	0,20	46,062	77,105	98,232	115,298	143,111	195,341
	0,50	57,488	94,133	118,847	138,667	170,764	230,627
Ω_2	0 (*)	74,550	109,396	135,360	156,982	192,928	261,662
	0	74,562	108,982	134,671	156,075	191,670	259,737
	0,20	73,731	108,350	134,071	155,471	191,030	258,993
	0,50	66,051	104,906	132,187	154,458	191,016	260,172
Ω_3	0 (*)	111,227	152,790	184,731	211,618	256,623	343,182
	0	111,238	152,049	183,519	210,043	254,472	339,935
	0,20	109,346	150,600	182,157	208,677	253,025	338,234
	0,50	114,752	159,492	189,635	213,579	252,168	323,915
Ω_4	0 (*)	123,064	162,353	193,758	220,691	266,430	355,717
	0	123,085	161,851	192,887	219,520	264,770	353,129
	0,20	124,113	164,267	196,246	223,632	270,094	360,699
	0,50	136,550	193,655	223,585	248,792	291,274	372,862

Tabla 6.8. Coeficientes de frecuencia de placas ortótropas rectangulares SA-E-SA-E- con orificio central y carga hidrostática en el borde. ($\lambda = 1,5$, $\bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N}$, $\theta = 0^\circ$).

(*): Valores (Rossit et al. ^[17]).

A continuación, en la Figura 6.10 y la Figura 6.11 se representan los primeros cuatro modos normales de vibración de la placa para las distintas magnitudes del esfuerzo aplicado.

En la Figura 6.10 se vuelcan los gráficos correspondientes a la placa maciza., mientras que en la Figura 6.11 los de la placa con un hueco de magnitud $a/l_y = 0.2$.

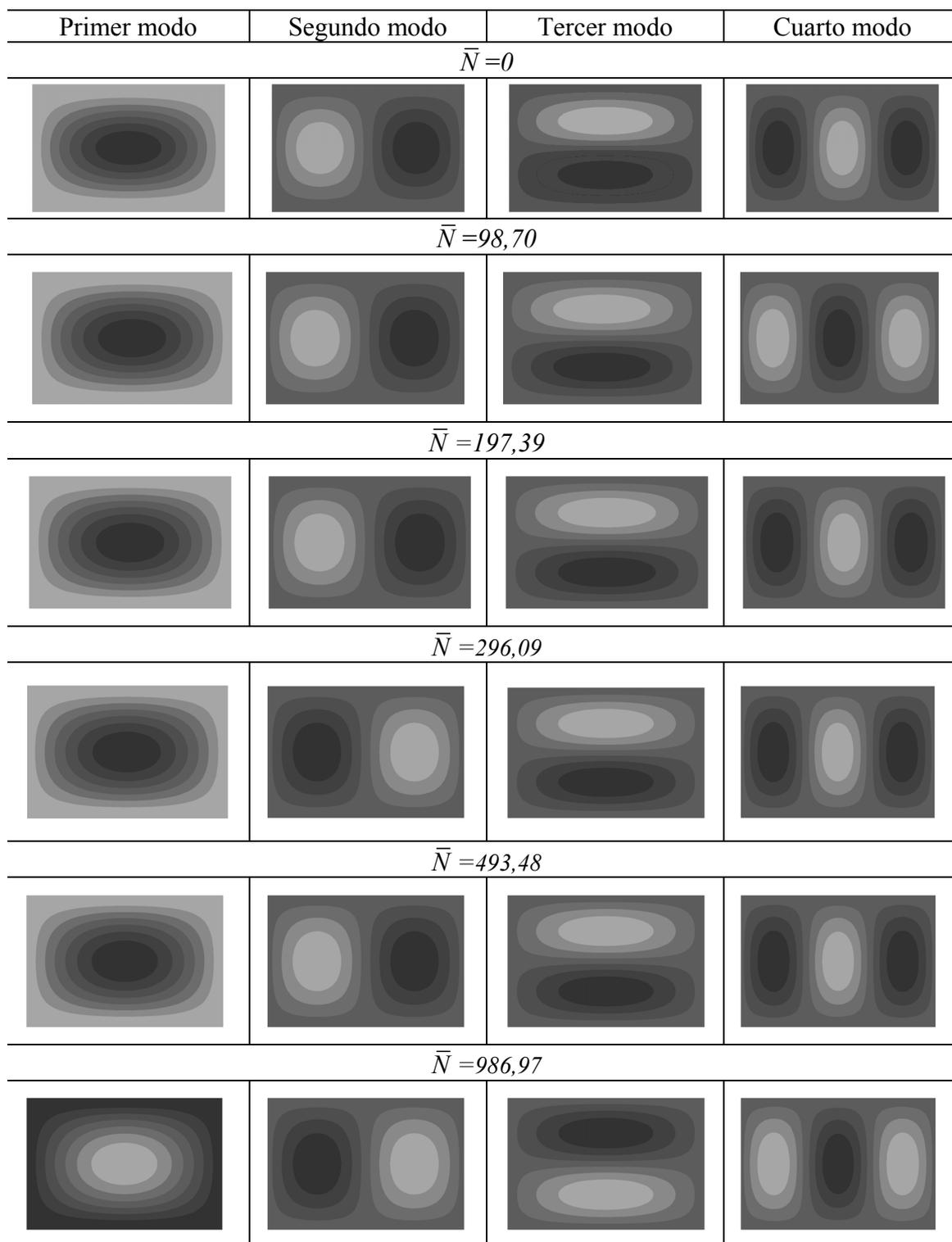


Figura 6.10. Modos normales de vibración de una placa rectangular ortótropa maciza SA-E-SA-E, sometida a esfuerzo hidrostático. Material Caso 1 ($\lambda = 1,5$, $\bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N}$, $\theta = 0^\circ$).

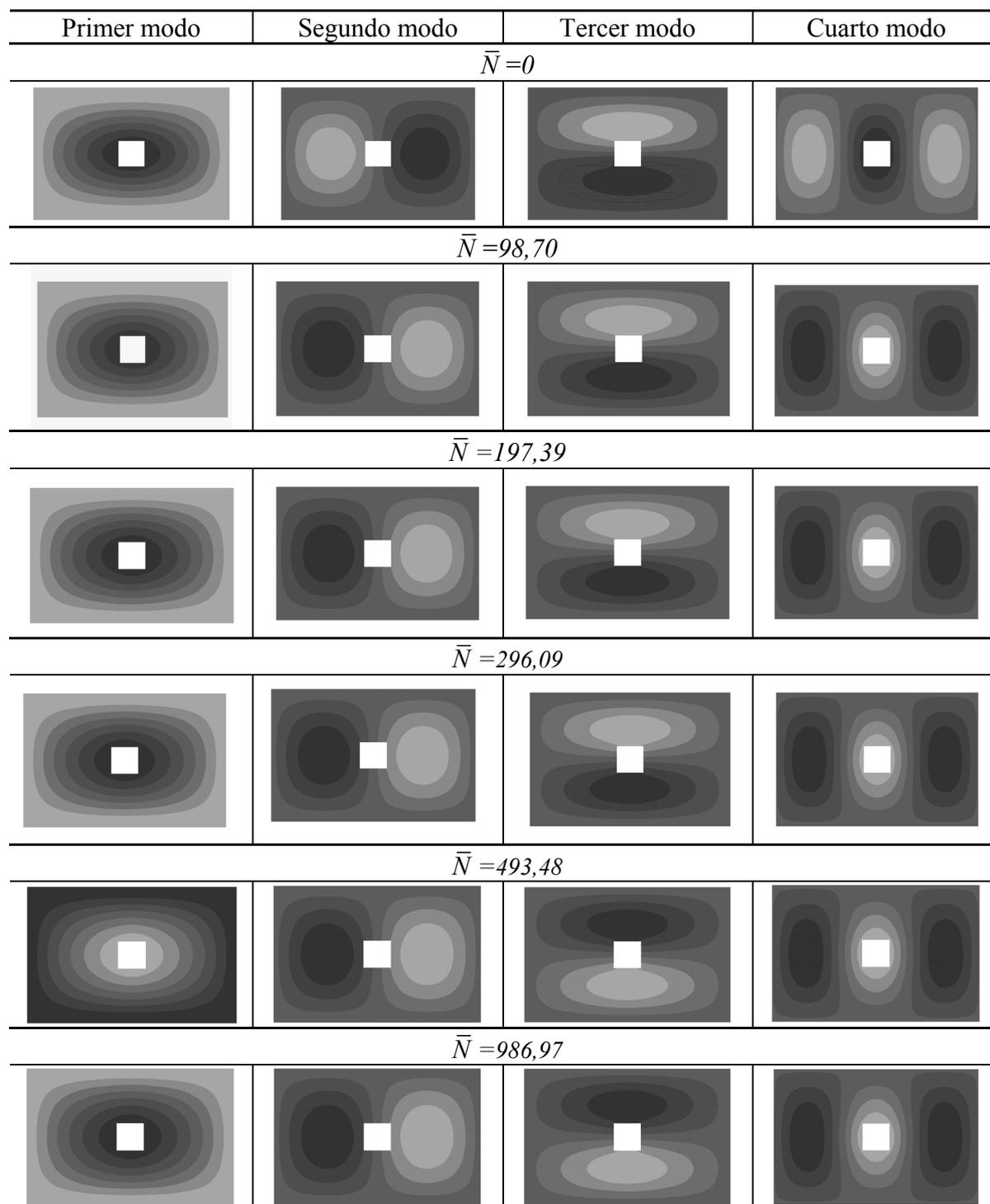


Figura 6.11. Modos normales de vibración de una placa rectangular ortótropa SA-E-SA-E, con un hueco centrado $a/l_y = 0,2$. Material Caso 1 ($\lambda = 1,5$, $\bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N}$, $\theta = 0^\circ$).

Posteriormente, se consideró el mismo material pero con el eje principal de elasticidad 1 paralelo a la dirección coordenada y .

Los coeficientes de frecuencia obtenidos se vuelcan en la Tabla 6.9.

Se hace evidente el crecimiento de la frecuencia fundamental al orientarse la dirección elástica de mayor rigidez en el sentido de la menor dimensión de la placa.

La incidencia tanto del orificio como del esfuerzo de tracción, no muestra variaciones

con respecto al caso anterior.

En la Figura 6.12 y la Figura 6.13 se indican las formas modales. Comparando con la Figura 6.10 y la Figura 6.11 se nota que al cambiar la orientación de los ejes principales se produce una permutación en el orden de la tercera y cuarta forma modal.

	$\frac{a}{l_y}$	\bar{N}					
		0,00	98,70	197,39	296,09	493,48	986,97
Ω_1	0	57,348	81,830	100,195	115,498	140,916	189,411
	0,20	58,075	85,386	105,401	121,928	149,211	200,983
	0,50	70,575	105,308	129,729	149,523	181,789	242,453
Ω_2	0	78,051	110,335	134,910	155,534	189,990	256,135
	0,20	77,605	111,658	137,287	158,699	194,362	262,636
	0,50	74,775	112,332	139,579	162,040	199,117	269,526
Ω_3	0	112,298	152,375	183,776	210,459	255,457	342,652
	0,20	114,424	157,684	191,293	219,751	267,613	353,766
	0,50	149,129	186,380	213,681	236,418	274,687	349,850
Ω_4	0	148,185	180,005	206,719	230,169	270,687	351,087
	0,20	143,766	177,510	205,422	229,731	271,473	360,113
	0,50	155,835	196,712	228,648	255,834	301,922	392,095

Tabla 6.9. Coeficientes de frecuencia de placas ortótropas rectangulares SA-E-SA-E- con orificio central y carga hidrostática en el borde. Material Caso 1 ($\lambda = 1,5 \cdot \bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N} \cdot \theta = 90^\circ$).

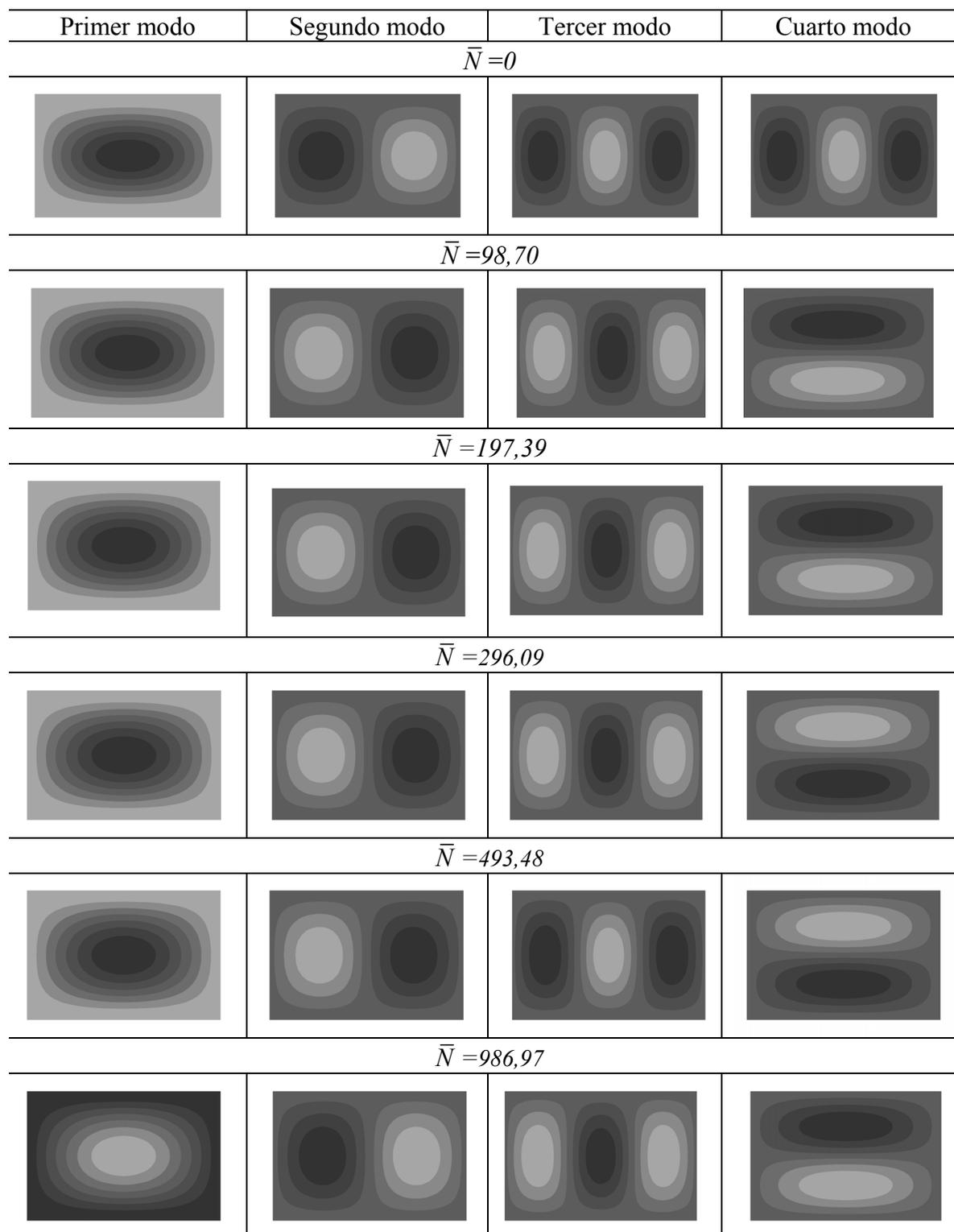


Figura 6.12. Modos normales de vibración de una placa rectangular ortótropa maciza SA-E-SA-E. Material Caso 1 ($\lambda = 1,5 \cdot \bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N}$. $\theta = 90^\circ$).

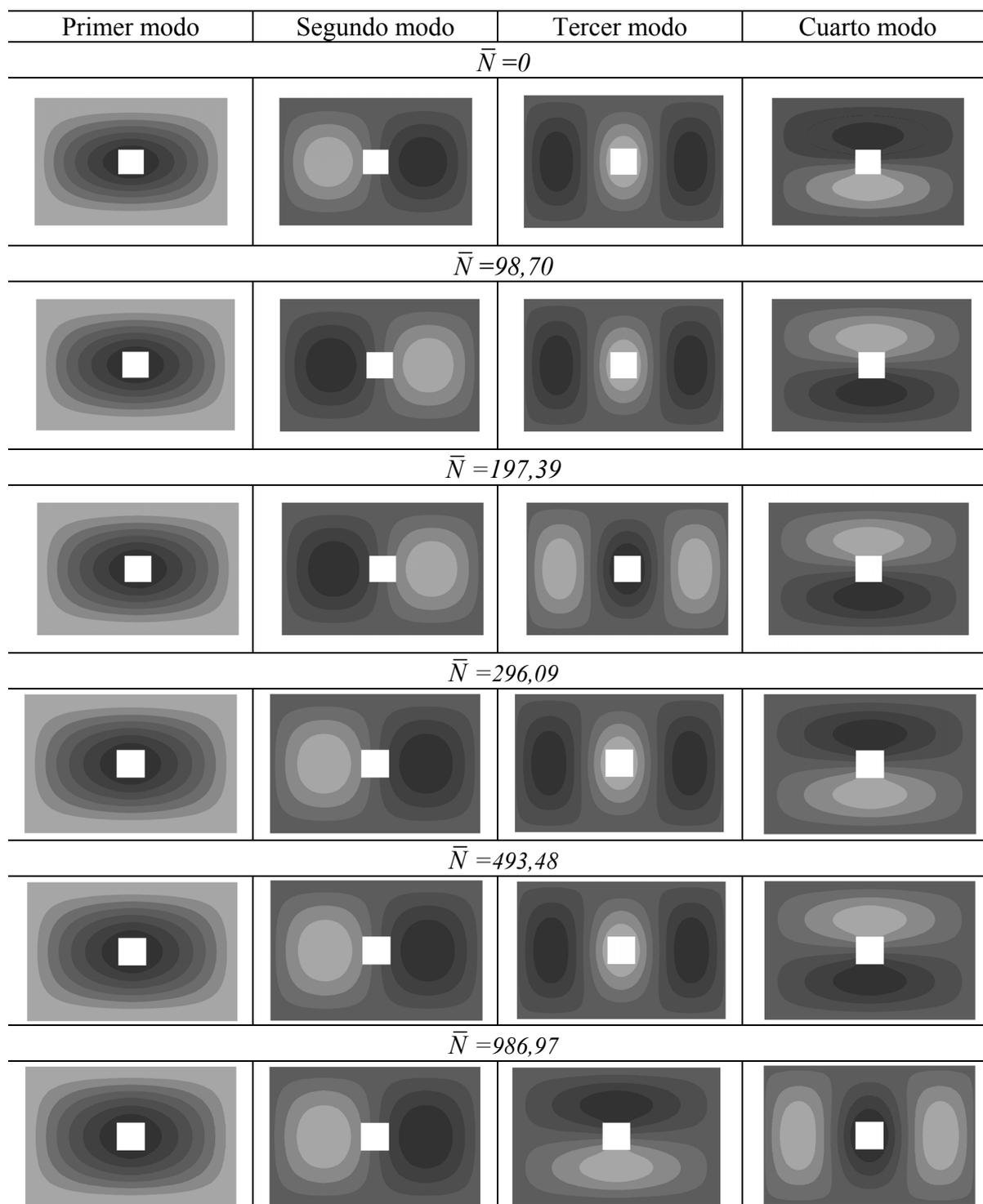


Figura 6.13. Modos normales de vibración de una placa rectangular ortótropa SA-E-SA-E, con un hueco centrado $a/l_y = 0,2$. Material Caso 1 ($\lambda = 1,5$. $\bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N}$. $\theta = 90^\circ$).

6.4.3 Placas rectangulares E-E-L-L.

Por último se muestran los resultados obtenidos para los casos de placas rectangulares E-E-L-L con un orificio cuadrado centrado y tensiones en su plano medio, Figura 6.3. En este se considera el material mostrado en la Tabla 6.1 como Caso 1.

Los resultados se vuelcan en la Tabla 6.10 y Tabla 6.11. Se observa. con respecto a los

casos anteriores (Tabla 6.3, Tabla 6.8 para $\theta=0^\circ$ y Tabla 6.5, Tabla 6.9 para $\theta=90^\circ$) una disminución general de los valores de frecuencias, en virtud de la mayor flexibilidad que otorga a la placa la vinculación considerada.

Nuevamente, al cambiar la orientación de los ejes principales de elasticidad crecen las frecuencias fundamentales y el mismo efecto vuelve a causar el incremento del esfuerzo de tracción en el plano.

Cuando no hay tensiones aplicadas, la primer frecuencia baja al aumentar el tamaño del orificio lo que significa que el efecto de pérdida de rigidez es mayor al efecto de la pérdida de masa. Sin embargo al aplicar tensiones, el efecto rigidizador provocado por la distribución de tensiones hace que para mayores tamaños de orificios se eleve la primer frecuencia de vibración del sistema.

	$\frac{a}{l_y}$	\bar{N}					
		0,00	98,70	197,39	296,09	493,48	986,97
Ω_1	0	10,434	30,737	40,823	48,580	60,888	83,513
	0,20	10,273	31,202	41,537	49,477	62,067	85,185
	0,50	9,393	34,142	45,959	54,988	69,239	95,251
Ω_2	0	30,587	60,575	77,106	89,967	110,536	148,658
	0,20	30,371	61,324	78,216	91,295	112,157	150,771
	0,50	29,917	67,157	85,309	98,544	118,381	152,062
Ω_3	0	40,756	85,766	110,028	128,334	156,432	205,427
	0,20	40,347	86,541	110,706	128,558	155,603	202,823
	0,50	41,338	94,743	117,470	131,601	153,285	192,762
Ω_4	0	68,938	106,147	129,584	148,335	179,332	239,158
	0,20	67,996	106,711	131,487	151,231	183,573	242,817
	0,50	61,069	102,286	128,255	150,842	185,801	237,855

Tabla 6.10. Coeficientes de frecuencia de placas ortótropas rectangulares E-E-L-L con orificio central y carga en el borde. Material Caso 1 ($\lambda = 1,5$. $\bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N}$. $\theta = 0^\circ$).

	$\frac{a}{l_y}$	\bar{N}					
		0,00	98,70	197,39	296,09	493,48	986,97
Ω_1	0	11,429	31,295	41,217	48,877	61,073	83,560
	0,20	11,274	31,744	41,902	49,739	62,205	85,167
	0,50	10,299	34,415	45,989	54,862	68,917	94,694
Ω_2	0	27,683	56,124	71,793	83,946	103,326	139,129
	0,20	27,638	56,955	73,042	85,493	105,332	141,981
	0,50	27,161	62,782	81,208	95,218	117,260	186,808
Ω_3	0	52,069	92,800	115,188	132,639	160,449	211,728
	0,20	51,318	93,709	117,204	135,431	164,210	216,509
	0,50	48,980	99,372	126,222	145,693	172,870	242,338
Ω_4	0	56,030	94,848	119,695	139,167	170,453	228,269
	0,20	55,162	95,702	121,122	140,865	172,336	230,271
	0,50	54,079	104,360	134,416	157,830	191,408	259,125

Tabla 6.11. Coeficientes de frecuencia de placas ortótropas rectangulares E-E-L-L con orificio central y carga en el borde. Material Caso 1 ($\lambda = 1,5$. $\bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N}$. $\theta = 90^\circ$).

6.5 CONCLUSIONES.

Como era de esperarse la presencia de esfuerzos de tracción en el plano medio de la placa tiene un efecto rigidizador en su comportamiento dinámico y elevan sus frecuencias naturales.

En cuanto a la incidencia del orificio centrado puede concluirse que en los casos de placas SA-SA-SA-SA y SA-E-SA-E se produce un incremento en la frecuencia fundamental, por lo que la remoción del material en su zona central puede constituirse en un sistema eficaz, en caso de ser necesario elevar la primera frecuencia de la placa (rigidización dinámica). Para las demás frecuencias su influencia no es tan marcada.

Las características de ortotropía del material y sus orientaciones con respecto a los lados de la placa también alteran los coeficientes de frecuencia natural.

En cuanto a las formas modales de las cuatro primeras frecuencias cambian de características en función de la orientación de las direcciones elásticas, las relaciones de ortotropía, la presencia y magnitud de las cargas en el plano y la relación de dimensiones orificio/placa.

6.6 BIBLIOGRAFÍA.

- [1] A. W. Leissa, "Vibration of plates", Gout Printing Office, Washington, DC: U.S. (1969).
- [2] R. D. Blevins, "Formulas for the Natural Frequency and Mode Shape", Van Nostrand Reinhold Company, New York (1979).

- [3] R. E. Rossi, “Transverse vibrations of thin, orthotropic rectangular plates with rectangular cutouts with fixed boundaries”, *Journal of Sound and Vibration*, 221(4):733-736 (1999).
- [4] M. Huang, T. Sakiyama, “Free vibration analysis of rectangular plates with variously-shaped holes”, *Journal of Sound and Vibration*, 226(4):769-786 (1999).
- [5] P. A. A. Laura, G. Elvira, M. Sánchez, H. C. Sanzi, D. Vega, S. Vera, “Numerical experiments on dynamic stiffening of beams and plates”, *Ocean Engineering*, 25:173-181 (1996).
- [6] S. Timoshenko, C. S. Woinowsky-Krieger, “*Teoría de Placas y Láminas*”, Ediciones Urmo, Bilbao, España (1970).
- [7] P. A. A. Laura, R. H. Gutiérrez, R. E. Rossi, “Estado plano de tensiones en un material ortótropo”, MECOM 2002, *Mecánica Computacional*, Vol. XXI, 829-840 (2002).
- [8] S. M. Dickinson, “Lateral vibration of rectangular plates subject to in-plane forces”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 16(4), 465-472 (1971).
- [9] S. F. Bassily, S. M. Dickinson, “Buckling and lateral vibration of rectangular plates subject to inplane loads-A Ritz approach”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 24(2), 219-239 (1972).
- [10] A. W. Leissa, J. H. Kang, “Exact solutions for vibrations and buckling of an SS-C-SS-C rectangular plate loaded by linearly varying in-plane stresses”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 44:1925-1945 (2002).
- [11] R. Carnicer, A. Bergmann, P. A. A. Laura, “Plane state of stress and transverse oscillations of a simply supported rectangular plate”, *Ocean Engineering*, 27:757-763 (2000).
- [12] A. B. Sabir, G. T. Davies, “Natural frequencies of plates with square holes when subjected to in-plane uniaxial, biaxial or shear loading”, *Thin-Walled Structures*, 28:321-335 (1997).
- [13] ALGOR 20, *Linear dynamic analysis*. Algor Inc. (2007).
- [14] A. Susca, D. V. Bambill, C. A. Rossit, “Vibraciones libres de placas ortótropas rectangulares con orificios y esfuerzos en su plano medio”, ENIEF 2008, *Mecánica Computacional*, Vol. XXVII, 2131-2149 (2008).
- [15] A. Susca, D. V. Bambill, R. E. Rossi, C. A. Rossit, S. Maiz, “Vibración libre de placas ortótropas rectangulares perforadas con tensiones en su plano”, aceptado para publicarse XXIX CILAMCE, Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Maceió-Al, Brasil (2008).
- [16] D. H. Felix, “*Vibraciones de placas ortótropas con diversas condiciones de vínculo y*

orificios de borde libre". Tesis doctoral en Ingeniería, Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina (2004).

- [17] C. A. Rossit, D. V. Bambill, D. H. Felix, "Comportamiento dinámico de placas ortótropas con esfuerzos en el plano", XXIX CILAMCE, Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Maceió-Al, Brasil, proceedings en CD (2008).

