

## **CAPÍTULO 4**

**Concentración de tensiones en placa cuadrada ortótropa  
de dimensiones finitas con un orificio cuadrado con  
bordes redondeados.**



## 4.1 INTRODUCCIÓN.

Un orificio presente en un elemento estructural es un elemento concentrador de tensiones. Cuando las dimensiones del concentrador de tensiones son mucho más pequeñas que las del elemento estructural, su influencia en el campo de tensiones se limita a una región relativamente pequeña en sus inmediaciones. A esta clase de problemas se lo llama “concentración de tensiones localizado”. En estos problemas, el campo de tensiones en zonas alejadas del concentrador de tensiones se considera sin perturbación. Esta clase de problemas fue tratada en los capítulos anteriores.

Por otro lado, cuando el concentrador de tensiones afecta a todo el campo de tensiones, el problema es llamado “concentración de tensiones global”. En estas situaciones, para encontrar el factor de concentración de tensiones, es necesario un detallado análisis de la distribución de tensiones en el dominio. Esto implica, generalmente, soluciones aproximadas; ya sea por métodos analíticos o numéricos.

Con respecto a lo anterior, el ingeniero de diseño encuentra en la literatura <sup>[1]</sup>, estudios del factor de concentración de tensiones de una serie de problemas para materiales isótropos pero no es así cuando se consideran materiales con características de ortotropía en sus constantes elásticas.

### 4.1.1 Tensión de tracción uniaxial en placa de material isótropo de altura finita con orificio circular.

Consideremos el caso de una placa con un orificio circular sometida a un estado de tensiones de tracción uniforme de magnitud  $N_x$ , como se muestra en la Figura 4.1. El orificio circular se encuentra centrado con respecto a la dimensión  $l_y$ .

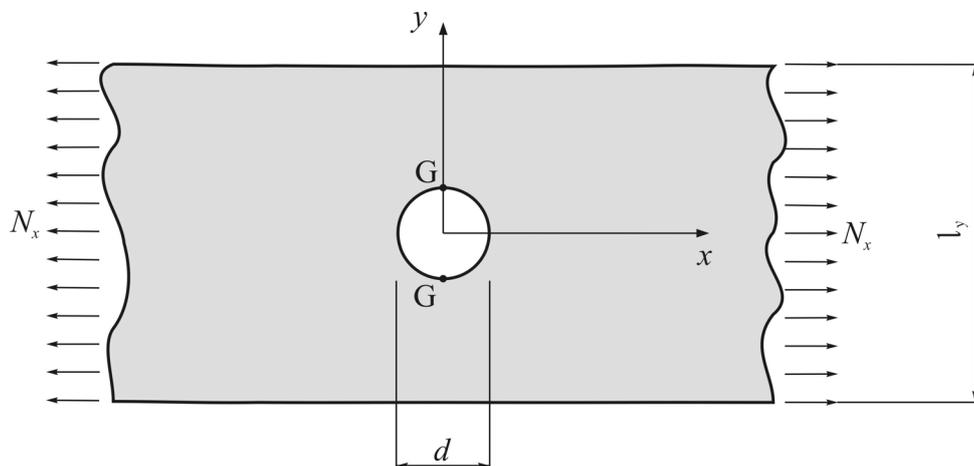


Figura 4.1. Placa sometida a un estado uniaxial de tracción en la dirección del eje cartesiano  $x$ .

Este problema, mencionado en la literatura clásica <sup>[2]</sup>, constituye un ejemplo de la variación del factor de concentración de tensiones al considerar la cercanía de los bordes externos del elemento estructural a los bordes del orificio. En este caso, los puntos sobre el borde del orificio con mayor concentración de tensiones son los indicados con la letra G, Figura 4.1. La expresión (4.1), obtenida de la literatura <sup>[1]</sup>, aproxima el valor del factor de concentración de tensiones máximo,  $K_+$ , en función de la relación  $d/l_y$ .

$$K_+ = 0,284 + 2\left(1 - \frac{d}{l_y}\right)^{-1} - 0,600\left(1 - \frac{d}{l_y}\right) + 1,32\left(1 - \frac{d}{l_y}\right)^2 \quad (4.1)$$

El gráfico de los valores de la función dada por la ecuación (4.1), Figura 4.2, permite observar el aumento de  $K_+$  a medida que la relación  $d/l_y$  aumenta.

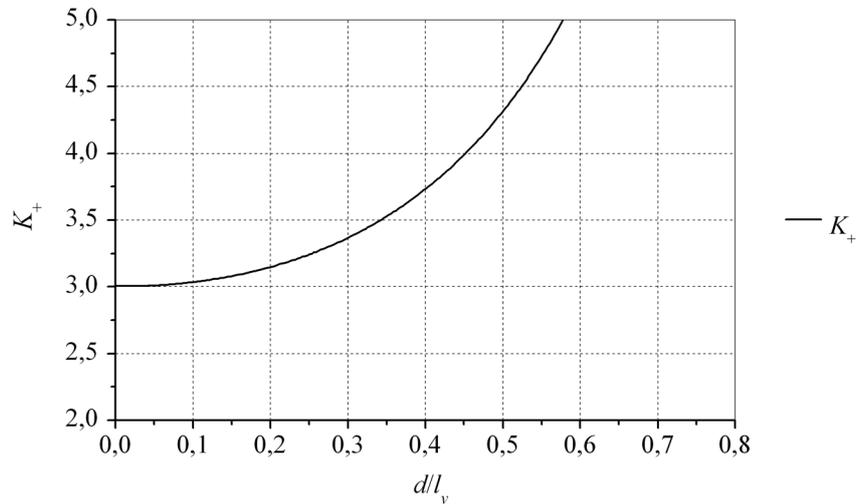


Figura 4.2. Factor de concentración de tensiones  $K_+$  versus la relación  $d/l_y$  en placa de altura finita con orificio circular sometida a un estado uniaxial de tracción.

De la Figura 4.2 resulta claro que a medida que  $d/l_y$  se acerca a cero; esto es que las dimensiones del agujero son muy pequeñas frente a las de la placa, que puede considerarse infinita, el valor que toma el coeficiente  $K_+$  es 3, determinado por Kirsch, mencionado en el capítulo 2.

Para comparar la variación del factor de concentración de tensiones entre una placa de dimensiones finitas y una placa de dimensiones infinitas o  $d/l_y$  tendiendo a cero, se define el coeficiente  $\%K_+$  en la ecuación (4.2).

$$\%K_+ = \left( \frac{K_+^{d/l_y} - K_+^0}{K_+^0} \right) 100 \quad (4.2)$$

Donde:

$K_+^{d/l_y}$ , es el mayor valor del factor de concentración de tensiones de tracción en la placa de relación  $d/l_y$ .

$K_+^0$ , es el mayor valor del factor de concentración de tensiones de tracción en la placa cuando la relación  $d/l_y$  es tal que la misma puede considerarse infinita ( $d/l_y \rightarrow 0$ ).

Por ejemplo para  $d/l_y=0,55$ ,  $K_+^0=4,75$  y el coeficiente  $\%K_+$  toma el valor de 58,33.

Este ejemplo pone de relieve la importancia de las dimensiones del orificio en la concentración de tensiones. Asimismo denota la trascendencia de determinar la relación  $d/l_y$  hasta la cual puede considerarse a la placa de dimensiones infinitas.

### 4.1.2 Tensión de tracción uniaxial en placa de material ortótropo de altura finita con orificio circular.

Soluciones aproximadas para el valor del factor de concentración de tensiones, en el problema descrito anteriormente pero considerando el material ortótropo, se encuentran en la literatura técnico científica <sup>[3],[4]</sup>.

Cuando los ejes de elasticidad principales son coincidentes con los ejes coordenados, el factor de concentración de tensiones máximo se puede obtener a través de un factor de escala <sup>[3]</sup>. Este factor de escala es definido como la relación que existe entre el factor de concentración de tensiones máximo en el modelo para el cual la relación  $d/l_y$  tiende a cero,  $K_+^0$ , y el factor de concentración de tensiones máximo para el problema con una relación  $d/l_y$  finita,  $K_+^{d/l_y}$ . La expresión resultante se muestra en la relación (4.3):

$$\frac{K_+^0}{K_+^{d/l_y}} = \frac{3 \left(1 - \frac{d}{l_y}\right)}{2 + \left(1 - \frac{d}{l_y}\right)^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{l_y} M\right)^6 \left(K_+^0 - 3\right) \left(1 - \left(\frac{d}{l_y} M\right)^2\right) \quad (4.3)$$

Donde  $M$  es un factor que depende solamente de la relación  $d/l_y$ . El valor del factor de concentración de tensiones máximo cuando  $d/l_y$  tiende a cero, se puede obtener de las expresiones dadas por Lekhnitskii <sup>[5]</sup>. Entonces, se obtiene el factor de concentración de tensiones máximo para la placa de relación  $d/l_y$ , despejando el valor de la ecuación (4.3).

Un estudio publicado <sup>[4]</sup> en el tema que analiza la variación del factor de concentración de tensiones cuando los ejes principales de ortotropía no coinciden con los ejes coordenados, muestra a su vez la influencia de la orientación de los ejes principales de elasticidad en el modelo.

### 4.1.3 Análisis realizado.

Como se ha establecido, el tamaño del orificio con respecto a las dimensiones del elemento estructural tiene influencia en el factor de concentración de tensiones.

El siguiente estudio trata sobre la variación del factor de concentración de tensiones en placas cuadradas, paneles, con un orificio cuadrado de vértices redondeados. El análisis realizado incluye la influencia de distintas orientaciones de los ejes principales de elasticidad así como también distintos materiales ortótropos. El objetivo del mismo es brindar resultados del factor de concentración de tensiones útiles para el diseño o comparación con otras metodologías de cálculo.

El análisis mencionado, se realiza para una serie de estados de cargas. En primera instancia se consideró un estado uniaxial uniforme de carga por unidad de longitud, de magnitud  $N_x$ , aplicado en la dirección del eje cartesiano  $x$ , como muestra el esquema dado en la Figura 4.3.

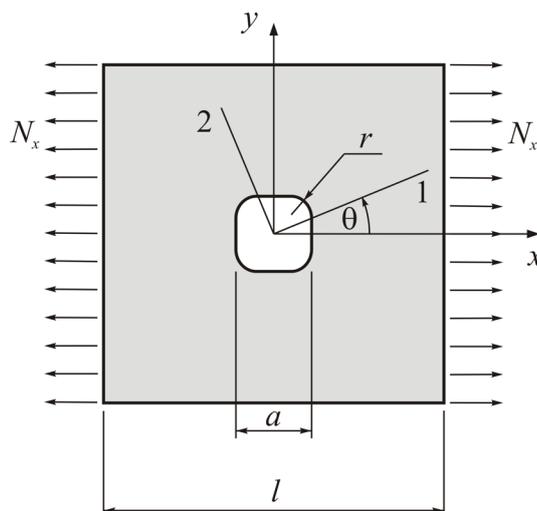


Figura 4.3. Placa cuadrada con orificio cuadrado de bordes redondeados, sometida a un estado uniaxial y uniforme de carga de magnitud  $N_x$ .

En la Figura 4.3 se muestra: los ejes principales de elasticidad en una dirección genérica designada con  $\theta$ , el radio de empalme del orificio, designado con la letra  $r$ , las dimensiones del panel,  $l$ , y del agujero,  $a$ .

También se consideró un estado de carga más general en donde se considera un estado de carga biaxial, de magnitud  $N_x=N_y=N$ , y corte de magnitud  $N_{xy}$ . El esquema del problema se muestra en la Figura 4.4.

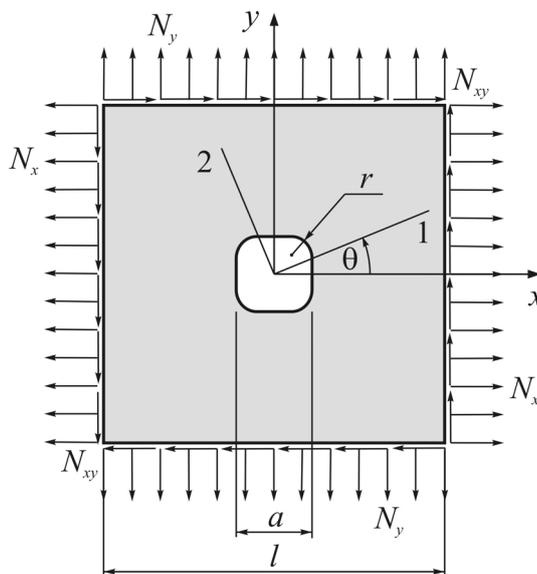


Figura 4.4. Placa cuadrada con orificio cuadrado de bordes redondeados, sometida a un estado biaxial de cargas,  $N_x=N_y=N$ , y corte puro de magnitud  $N_{xy}$ .

Cabe aclarar que el estado biaxial de tracción se obtiene como caso particular en el que  $N_x=N_y=N$  y  $N_{xy}=0$ .

La geometría del orificio se muestra en detalle en la Figura 4.5. Los vértices rectos del cuadrado de lado  $a$  se sustituyeron por arcos de circunferencias, para evitar una gran concentración de tensiones, cuyos centros se encuentran ubicados en los puntos  $(c/2, c/2)$ ,  $(-c/2, c/2)$ ,  $(-c/2, -c/2)$  y  $(c/2, -c/2)$ . El ángulo de estos segmentos de arco es igual a  $90^\circ$ .

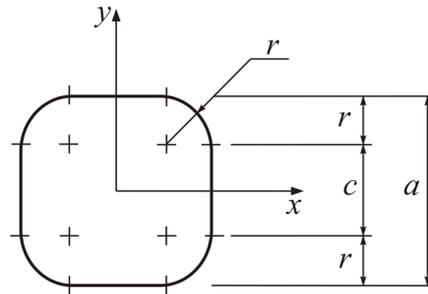


Figura 4.5. Geometría del orificio.

A continuación se especifica la geometría del orificio modelado, a través de las siguientes relaciones dimensionales:

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 0,22 \\ \frac{c}{a} &= 0,56 \end{aligned} \quad (4.4)$$

## 4.2 MODELADO CON ELEMENTOS FINITOS.

### 4.2.1 Geometría de los mallados y convergencia numérica.

Para la resolución del problema planteado se utilizó el método de elementos finitos con el módulo de análisis lineal del programa profesional ALGOR <sup>[6]</sup>. Para el diseño de los mallados se utilizaron dos tipos de elementos conformes; cuadrangulares con cuatro nodos y triangulares de tres nodos. Cada nodo tiene dos grados de libertad por nodo, referidos a los corrimientos en las direcciones coordenadas, y resultan adecuados para la característica bidimensional del problema en estudio.

En lo que continúa se detalla la construcción de los mallados y las pruebas numéricas realizadas para verificar su desempeño.

Los mallados de los modelos se realizaron de manera manual en la zona cercana al orificio y luego en la región restante con una herramienta de mallado automático (ver Figura 4.6).

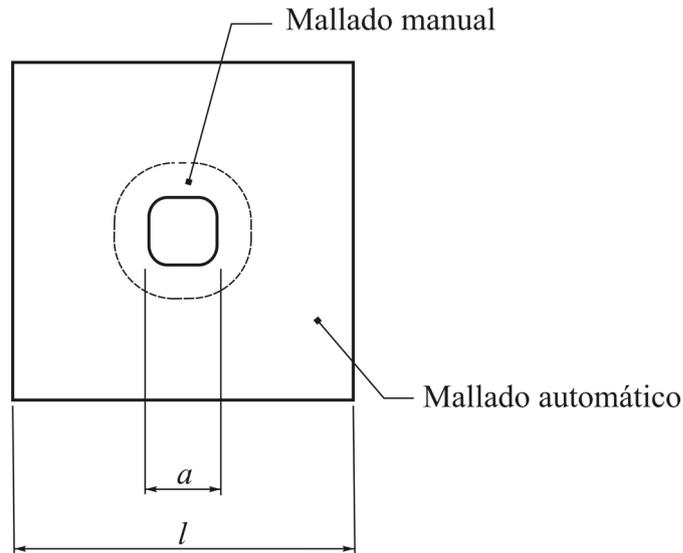


Figura 4.6. Zonas con diferentes características en el mallado.

En la región próxima al orificio, delimitada con líneas de trazos en la Figura 4.6, el mallado se construyó utilizando segmentos de rectas y arcos circulares.

En las zonas cercanas a los vértices redondeados del orificio los elementos se construyeron mediante la utilización de segmentos circulares, con centros coincidentes con el del borde redondeado del orificio, y líneas radiales con origen en el mismo centro. La distancia entre los segmentos circulares disminuye desde el arco exterior hacia el arco interior de manera de mantener la proporción en la forma de los elementos.

Sobre las regiones próximas a los bordes rectos del orificio el mallado se construyó con segmentos de rectas, cuyas intersecciones dan lugar a elementos rectangulares y triangulares.

De esta forma, en la región próxima al borde del orificio en donde se producen grandes variaciones de tensiones se construyó un mallado de elementos con poca distorsión y además se mantuvo la relación entre los lados de los elementos menor a 1,6. Esto contribuye a disminuir el error en los resultados como se muestra en la literatura <sup>[7]</sup>. La Figura 4.7 muestra un detalle del modelo 2 en donde se observa el uso de los elementos triangulares.

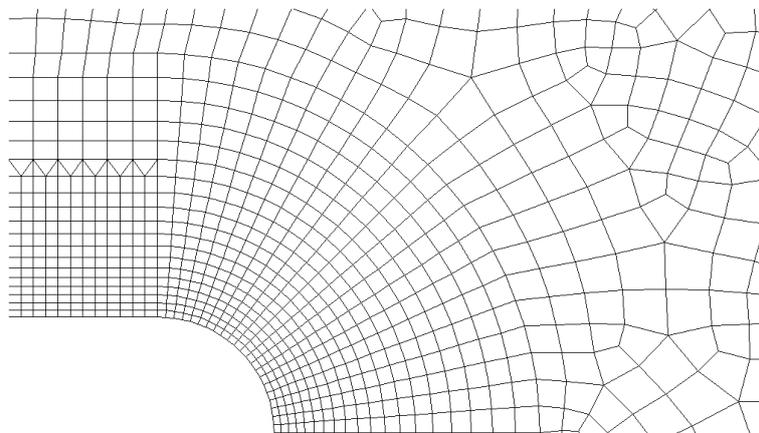


Figura 4.7. Detalle de la utilización de elementos triangulares.

En la zona restante del modelo se utilizó una herramienta del software que realiza el mallado de forma automática. Los elementos resultantes poseen alguna distorsión. Sin

embargo ningún ángulo interior de estos elementos supera los  $170^\circ$ . De esta manera se facilitó la transición de la geometría definida por los bordes exteriores e interiores. Esta característica se puede observar claramente en todos las figuras que muestran los mallados.

Siguiendo los lineamientos explicados con anterioridad se construyeron un total de 5 mallados para cada relación  $a/l$  modelada. La diferencia entre ellos es la cantidad de nodos ubicados sobre el contorno del orificio y por ende la densidad de elementos en todo el dominio. Desde la Figura 4.8, hasta la Figura 4.10 se muestran un cuarto de los modelos 1, 2 y 3 respectivamente.

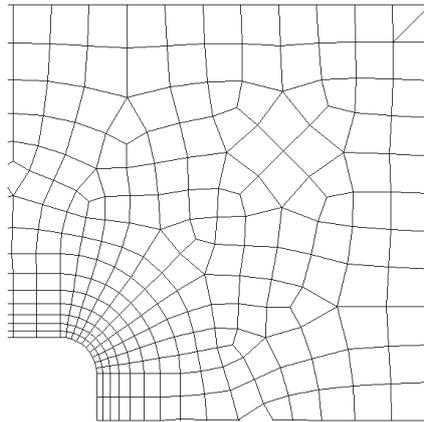


Figura 4.8. Detalle del mallado del modelo 1, mallado menos denso.

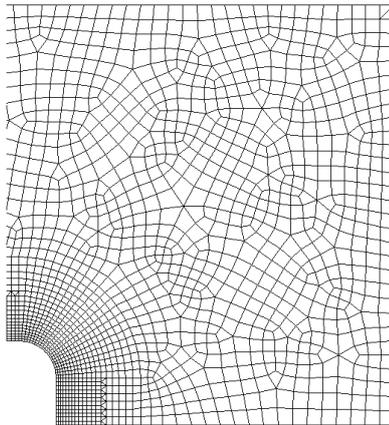


Figura 4.9. Detalle del modelo 2.

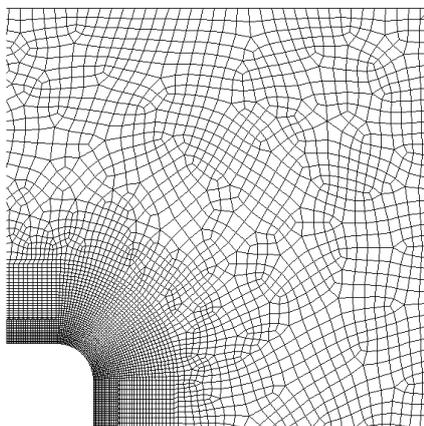


Figura 4.10. Detalle del modelo 3.

En la Figura 4.11 y Figura 4.12 se muestra en mayor detalle sobre el borde del orificio, el modelo 4 y 5 respectivamente.

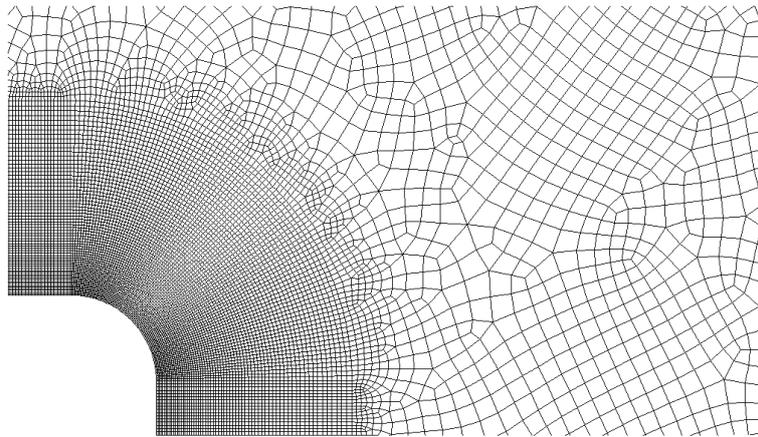


Figura 4.11. Cercanías del orificio, detalle del modelo 4.

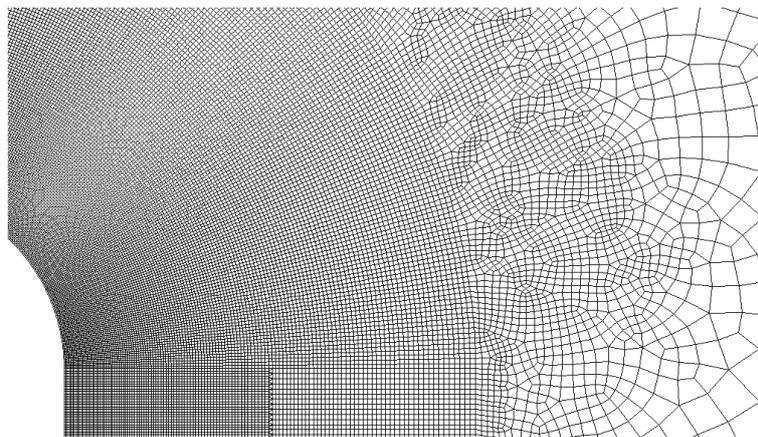


Figura 4.12. Cercanías del orificio, detalle del modelo 5.

Los movimientos de cuerpo rígido se anularon restringiendo en un nodo ubicado en el vértice inferior izquierdo de la placa los corrimientos en dirección “x” e “y” y en un nodo ubicado el vértice superior izquierdo el corrimiento en dirección “x”.

Las características de los diferentes modelos realizados, para la relación  $a/l=0,2$ , se muestran a continuación en la Tabla 4.1.

Modelo	Nº de nodos sobre el orificio	Nº de nodos sobre cuarto de circunferencia	Nº de elementos total
1	56	11	980
2	184	23	7000
3	336	45	16909
4	632	91	55122
5	1440	181	199786

Tabla 4.1. Características de los modelos realizados para la relación  $a/l=0,2$ .

Todos los modelos realizados poseen un nodo en las posiciones de los puntos A, B, C y E. La posición de los puntos A, B y C se muestran en la Figura 4.13.

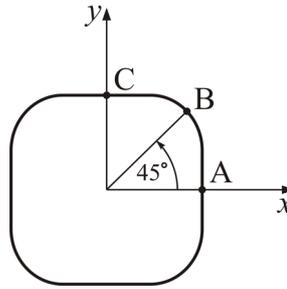


Figura 4.13. Ubicación de las posiciones A, B y C sobre el orificio.

El punto E se encuentra ubicado en el punto central del borde externo superior de la placa.

En cada modelo se evaluó el factor  $K_X = \sigma_X / \sigma_n$  donde con "X" se especifica la posición A, B, C y E antes mencionada.

El estado de carga uniaxial, Figura 4.3, se seleccionó para realizar las pruebas numéricas. El material elegido para el análisis de los modelos es el plywood y se adoptaron las constantes elásticas consideradas por Lekhnitskii <sup>[5]</sup> lo cual permitió comparar los resultados numéricos obtenidos. Los valores utilizados son:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 1,2 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \\
 E_2 &= 0,6 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \\
 G &= 0,07 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \\
 \nu_1 &= 0,071
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Por consiguiente las relaciones  $E_1/E_2$  y  $G/E_2$  son:

$$\begin{aligned}
 \frac{E_1}{E_2} &= 2 \\
 \frac{G}{E_2} &= 0,116667
 \end{aligned}$$

Los resultados para la placa de relación  $a/l=0,2$ , de los diferentes modelos se muestran en la Tabla 4.2. En ella se detalla los valores de  $K_A$ ,  $K_B$ ,  $K_C$  y los valores extremos antes definidos,  $K_+$  y  $K_-$ . También se muestra la diferencia absoluta para el mismo factor entre los sucesivos modelos, en la fila inferior a cada valor de  $K$ . Cabe aclarar que los resultados de  $K_+$  y  $K_-$ , dados por modelos diferentes no se ubican en el mismo nodo.

$a/l=0,2$					
	Modelo				
	1	2	3	4	5
$K_A$	-0,81440	-0,83554	-0,83507	-0,83647	-0,83662
$ K_{A(i-1)}-K_{A(i)} $	-	0,02113	0,00046	0,00139	0,00015
$K_B$	3,15060	3,08997	3,07995	3,07767	3,07661
$ K_{B(i-1)}-K_{B(i)} $	-	0,06063	0,01002	0,00228	0,00106
$K_C$	0,93373	0,83818	0,82867	0,82911	0,83112
$ K_{C(i-1)}-K_{C(i)} $	-	0,09555	0,00951	0,00044	0,00201
$K_-$	-0,81498	-0,83554	-0,83507	-0,83647	-0,83662
$ K_{-(i-1)}-K_{-(i)} $	-	0,02055	0,00046	0,00139	0,00015
$K_+$	4,97422	5,58977	5,79814	5,89275	5,91680
$ K_{+(i-1)}-K_{+(i)} $	-	0,61555	0,20837	0,09461	0,02405

Tabla 4.2. Resultados de los diferentes modelos para la relación  $a/l=0,2$ .

Los valores de  $K_E$  y la diferencia absoluta de los resultados entre cada modelo se detalla en la Tabla 4.3.

	Modelo				
	1	2	3	4	5
$K_E$	0,827988	0,803268	0,801326	0,799994	0,799563
$ K_{E(i-1)}-K_{E(i)} $	-	0,02472	0,001942	0,001332	0,000431

Tabla 4.3. Valores de  $K_E$  de los diferentes modelos para la relación  $a/l=0,2$ .

Como se observa en la Tabla 4.2 y Tabla 4.3 los modelos muestran una convergencia satisfactoria en todos los valores.

El valor de  $K_+$  se presentó en cada modelo en una ubicación distinta, aunque siempre sobre los sectores redondeados del borde interno.

El ángulo  $\beta_+$ , en grados sexagesimales, que indica la posición del punto de máxima tensión en cada modelo se muestra en la Tabla 4.4.

modelo	$\beta_+$
1	57,69664
2	59,37223
3	59,37223
4	59,40303
5	59,57244

Tabla 4.4. Posición del nodo donde ocurre  $K_+$  en cada modelo para una relación  $a/l=0,2$ .

A modo de ilustración se muestra la distribución de tensiones principales de tracción sobre la totalidad del modelo en la Figura 4.14.

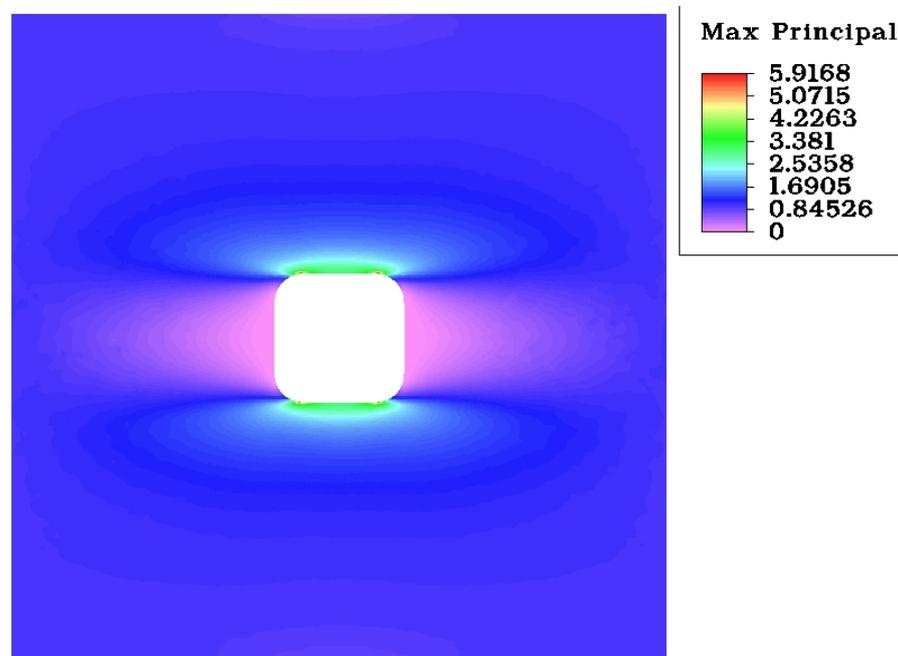


Figura 4.14. Distribución de tensiones principales de tracción para una relación  $a/l=0,2$ .

La Figura 4.15 muestra un detalle de la distribución de tensiones principales de tracción sobre el orificio.

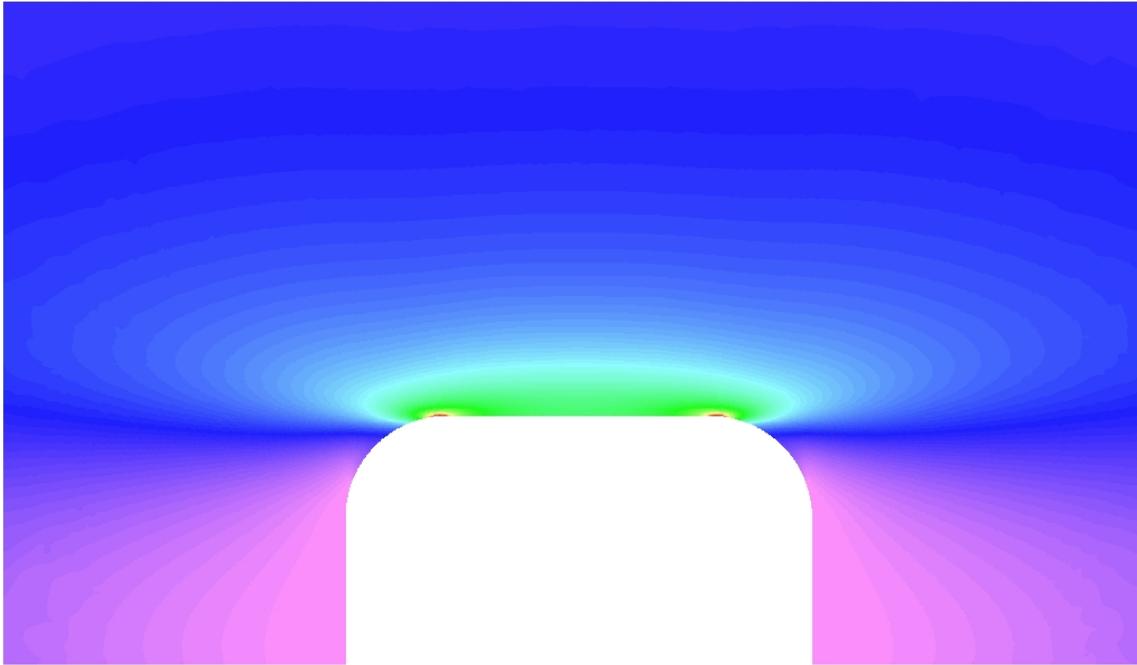


Figura 4.15. Distribución de tensiones principales de tracción para una relación  $a/l=0,2$ , detalle.

La posición del máximo valor de compresión ocurrió en los puntos medios de los bordes verticales del orificio.

Con los mismos criterios antes mencionados, se construyeron los modelos para las placas de dimensiones finitas de relaciones  $a/l=0,1, 0,05, 0,01$  y  $0,005$ . Para cada una de estas relaciones se realizó un análisis de convergencia de los mallados considerando un estado de cargas uniaxial. Un total de 25 mallados fueron construidos. A continuación, de modo resumido, se muestran las convergencias de los modelos para cada relación de  $a/l$  en las tablas siguientes:

$a/l=0,1$					
	Modelo				
	1	2	3	4	5
$K_A$	-0,61144	-0,61877	-0,61378	-0,61821	-0,61847
$ K_{A(i-1)}-K_{A(i)} $	-	0,00734	0,00499	0,00442	0,00027
$K_B$	2,74617	2,68272	2,67082	2,67021	2,66966
$ K_{B(i-1)}-K_{B(i)} $	-	0,06345	0,01190	0,00061	0,00055
$K_C$	0,81556	0,72631	0,71563	0,71772	0,71980
$ K_{C(i-1)}-K_{C(i)} $	-	0,08925	0,01067	0,00209	0,00208
$K_+$	4,35332	4,85182	5,02635	5,11188	5,13363
$ K_{+(i-1)}-K_{+(i)} $	-	0,49850	0,17453	0,08553	0,02175

Tabla 4.5. Resultados de los diferentes modelos para la relación  $a/l=0,1$ .

$a/l=0,05$					
	Modelo				
	1	2	3	4	5
$K_A$	-0,56643	-0,57216	-0,56699	-0,56962	-0,57075
$ K_{A(i-1)}-K_{A(i)} $	-	0,00573	0,00518	0,00263	0,00114
$K_B$	2,62796	2,56455	2,55022	2,55092	2,55118
$ K_{B(i-1)}-K_{B(i)} $	-	0,06341	0,01433	0,00070	0,00026
$K_C$	0,78731	0,70071	0,69005	0,69156	0,69312
$ K_{C(i-1)}-K_{C(i)} $	-	0,08660	0,01066	0,00151	0,00156
$K_+$	4,17039	4,64300	4,80673	4,88871	4,91029
$ K_{+(i-1)}-K_{+(i)} $	-	0,47261	0,16373	0,08198	0,02158

Tabla 4.6. Resultados de los diferentes modelos para la relación  $a/l=0,05$ .

$a/l=0,01$					
	Modelo				
	1	2	3	4	5
$K_A$	-0,55259	-0,55804	-0,54834	-0,55140	-0,54582
$ K_{A(i-1)}-K_{A(i)} $	-	0,00545	0,00970	0,00306	0,00558
$K_B$	2,58758	2,52447	2,50256	2,50271	2,50339
$ K_{B(i-1)}-K_{B(i)} $	-	0,06311	0,02191	0,00015	0,00068
$K_C$	0,77848	0,69291	0,67860	0,68025	0,67579
$ K_{C(i-1)}-K_{C(i)} $	-	0,08558	0,01431	0,00165	0,00447
$K_+$	4,10894	4,57317	4,71686	4,79663	4,81279
$ K_{+(i-1)}-K_{+(i)} $	-	0,46423	0,14369	0,07977	0,01616

Tabla 4.7. Resultados de los diferentes modelos para la relación  $a/l=0,01$ .

$a/l=0,005$					
	Modelo				
	1	2	3	4	5
$K_A$	-0,55217	-0,55761	-0,54791	-0,54582	-0,54894
$ K_{A(i-1)}-K_{A(i)} $	-	0,00544	0,00969	0,00209	0,00312
$K_B$	2,58630	2,52320	2,50131	2,49640	2,49581
$ K_{B(i-1)}-K_{B(i)} $	-	0,06310	0,02189	0,00491	0,00059
$K_C$	0,77821	0,69267	0,67837	0,67521	0,67986
$ K_{C(i-1)}-K_{C(i)} $	-	0,08555	0,01430	0,00316	0,00465
$K_+$	4,10699	4,57096	4,71460	4,78004	4,80430
$ K_{+(i-1)}-K_{+(i)} $	-	0,46397	0,14364	0,06544	0,02426

Tabla 4.8. Resultados de los diferentes modelos para la relación  $a/l=0,005$ .

En todos los casos se logró la convergencia deseada en los valores de  $K_+$ . Sin embargo los valores de  $K_+$  no ocurren en el mismo nodo aunque la posición no varía de forma muy significativa, para los últimos dos modelos en cada relación  $a/l$ , como se mostró en la Tabla 4.4.

La Figura 4.16, muestra la convergencia del valor  $K_C$  para cada placa finita de relación  $a/l$ . Se observa que el comportamiento es similar para las distintas relaciones  $a/l$ . También se aprecia la diferencia en los valores para la placa finita de relación  $a/l=0,2$  y la menor de estas relaciones. El valor de  $K_C$  para la mayor relación es aproximadamente un 23% mayor que para  $a/l=0,005$ .

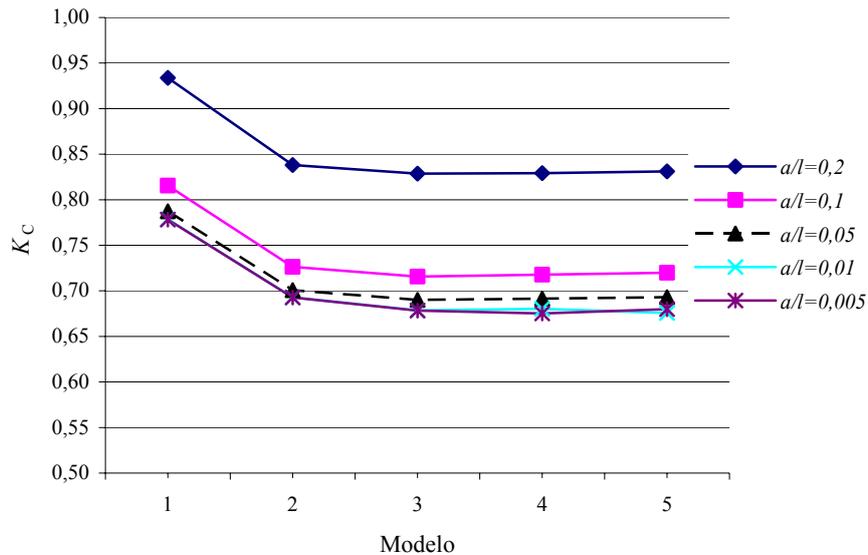


Figura 4.16. Convergencia de resultados de  $K_C$  para cada relación  $a/l$ .

La Figura 4.17 expone la convergencia de los resultados del factor  $K_+$  de los diferentes modelos, para las distintas dimensiones de las placas finitas consideradas. En ella se destaca la diferencia de  $K_+$  para las relaciones  $a/l$  extremas. El valor de  $K_+$  para la relación  $a/l=0,2$  es aproximadamente un 23% mayor que para la menor relación  $a/l$  al igual que para  $K_C$ .

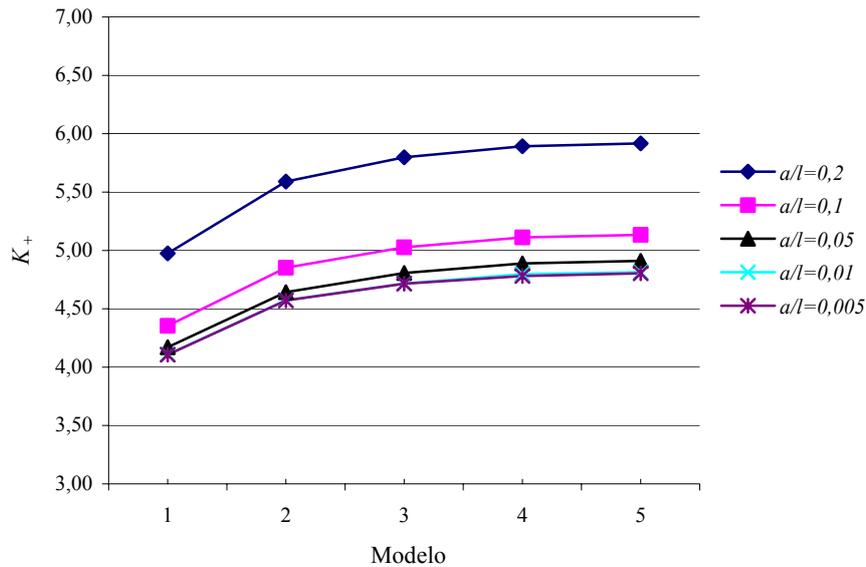


Figura 4.17. Convergencia del valor  $K_+$ , para cada relación  $a/l$ .

#### 4.2.2 Comparación de resultados con soluciones existentes en la literatura.

No se encuentran soluciones exactas, en la literatura técnico-científica, para la distribución de tensiones del problema modelado. Sin embargo, uno de los casos resueltos por Lekhnitskii<sup>[5]</sup>, es el de una placa delgada de dimensiones infinitas y ortótropa, con esfuerzo uniaxial homogéneo en dirección del eje  $x$ , como muestra el esquema en la Figura 4.18. Las direcciones principales de elasticidad son coincidentes con los ejes coordenados.

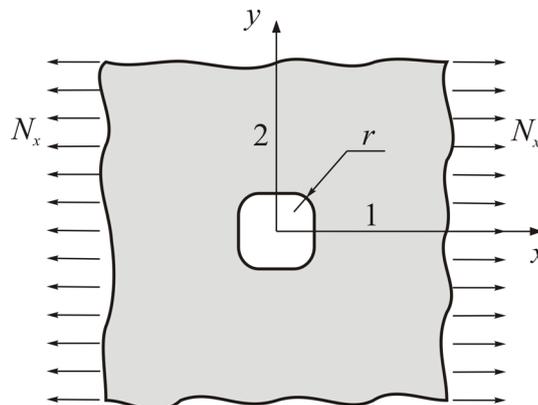


Figura 4.18. Esquema de problema resuelto por Lekhnitskii.

La misma posee un agujero modelado por las relaciones paramétricas dadas en la relaciones (3.2) en el capítulo anterior. Cuando en estas relaciones el valor de  $z=1$ ,  $\varepsilon=-1/9$  y  $M=3$ , la curva que describen se aproxima a la de un cuadrado de bordes redondeados con sus bordes paralelos a los ejes coordenados. Este orificio difiere muy poco del modelado en el presente capítulo.

La Tabla 4.9 muestra la comparación de los resultados obtenidos para las posiciones A, B y C, con los de la literatura, para un material ortótropo con constantes elásticas definidas en las igualdades (4.5), y dos posiciones de los ejes elásticos principales  $E_x=E_{máx}$  y

$E_x=E_{min}$ . Los resultados expuestos son los correspondientes a la placa de relación  $a/l=0,005$ .

Punto	$E_x=E_{máx}$		$E_x=E_{min}$	
	Lekhnitskii	Presente estudio	Lekhnitskii	Presente estudio
A	-0,57	-0,55	-1,11	-1,11
B	0,83	0,68	1,28	1,10
C	2,60	2,50	2,22	2,22

Tabla 4.9. Comparación de coeficientes de tensión para una placa infinita con orificio cuadrado y vértices redondeados.

Se observa una concordancia satisfactoria de los valores en los puntos A y B. En el punto C la diferencia obedece al hecho que la curvatura constante del modelo bajo estudio difiere de la geometría descrita por las ecuaciones (3.2) en las cercanías de los vértices.

A continuación se muestran los resultados numéricos del estudio realizado <sup>[9], [10]</sup>.

### 4.3 RESULTADOS NUMÉRICOS.

#### 4.3.1 Estado de tensión uniaxial.

Los resultados expuestos en la tablas siguientes, corresponden al caso de estado de carga uniaxial uniforme, de magnitud  $N_x$ , aplicado en la dirección del eje cartesiano  $x$ , como muestra el esquema dado en Figura 4.19. Dada la simetría del estado de carga y geometría del problema, las orientaciones de los ejes principales de elasticidad considerados son  $\theta = 0^\circ, 22,5^\circ, 45^\circ, 67,5^\circ$  y  $90^\circ$ .

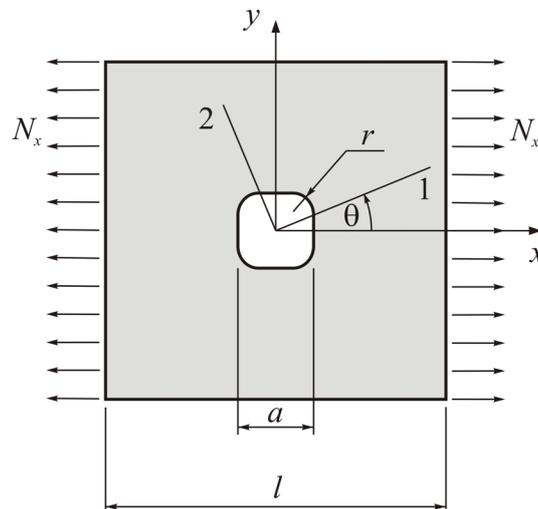


Figura 4.19. Placa cuadrada con orificio cuadrado de bordes redondeados, sometida a un estado uniaxial y uniforme de carga de magnitud  $N_x$ .

Las constantes elásticas modeladas corresponden a los materiales que se describen en la Tabla 4.10 <sup>[8]</sup>.

Material	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G$ (GPa)	$\nu_1$	$\nu_2$
Plywood	11,29	5,89	0,69	0,07	0,03652
Boron/epoxy	282,77	23,79	10,35	0,27	0,02272
Graphite/epoxy	181,00	10,30	7,77	0,28	0,01593

Tabla 4.10. Constantes elásticas de lo materiales ortótropos modelados.

En la Tabla 4.11 se exponen las relaciones  $E_1/E_2$  y  $G/E_2$  para los diferentes, materiales con lo cual se aprecia la diferencia existente entre ellos.

Material	$E_1/E_2$	$G/E_2$
Plywood	1,92	0,117
Boron/epoxy	11,89	0,4351
Graphite/epoxy	17,57	0,7544

Tabla 4.11. Relaciones entre las constantes elásticas de los materiales seleccionados para el análisis.

El primer material considerado es el plywood. La Tabla 4.12 muestra los resultados obtenidos para placas con distintas relaciones  $a/l$ . Se puntualizan los valores de  $K_+$ ,  $K$ , y los ángulos  $\beta_+$  y  $\beta$ .

$a/l$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
0,20	0,0	5,92	59,40	-0,85	0,00
	22,5	7,09	125,95	-1,09	150,42
	45,0	4,94	132,14	-1,29	147,52
	67,5	5,04	54,40	-1,61	148,04
	90,0	4,42	59,06	-1,44	0,00
0,10	0,0	5,13	59,40	-0,62	0,00
	22,5	6,34	125,95	-0,96	150,42
	45,0	4,58	132,32	-1,10	147,70
	67,5	4,60	54,23	-1,28	148,38
	90,0	4,00	59,06	-1,17	0,00
0,05	0,0	4,91	59,40	-0,57	0,00
	22,5	6,08	125,95	-0,92	150,42
	45,0	4,45	132,32	-1,05	147,87
	67,5	4,49	54,23	-1,20	148,55
	90,0	3,89	59,06	-1,10	0,00
0,01	0,0	4,81	59,57	-0,56	0,00
	22,5	5,90	125,95	-0,91	150,42
	45,0	4,35	132,32	-1,03	147,87
	67,5	4,44	54,23	-1,15	148,55
	90,0	3,85	59,06	-1,06	0,00
0,005	0,0	4,80	59,40	-0,56	0,00
	22,5	5,85	125,95	-0,91	150,42
	45,0	4,32	132,14	-1,02	148,21
	67,5	4,44	54,23	-1,14	148,72
	90,0	3,85	58,89	-1,05	0,00

Tabla 4.12.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para el estado de tracción uniaxial de magnitud  $N_x$ , en placa cuadrada con orificio cuadrado de bordes redondeados para diferentes relaciones  $a/l$  y distintas orientaciones,  $\theta$ , material plywood.

De las Tablas anteriores se observa que, cuando la relación  $a/l$  disminuye los valores obtenidos tienden a ser constantes. La Figura 4.20 y la Figura 4.21 hacen evidente este comportamiento para los casos particulares del sistema en estudio. En estas Figuras, la relación entre el tamaño del orificio y el de la placa se expresó como  $l/a$  para enfatizar el comportamiento asintótico de los parámetros  $K_+$  y  $K_-$  cuando el tamaño del orificio disminuye. Es decir, que para valores de  $a/l$  hasta 0,005, la placa puede considerarse como de dimensiones infinitas.

En la Figura 4.20 se observa que para el valor de  $\theta = 22,5^\circ$  se producen los mayores valores de  $K_+$ , mientras que los menores valores ocurren para  $\theta = 90^\circ$ , en todas las relaciones  $a/l$ . También se hace notar la proximidad en los resultados de  $K_+$  para las orientaciones de  $67,5^\circ$  y  $45^\circ$ .

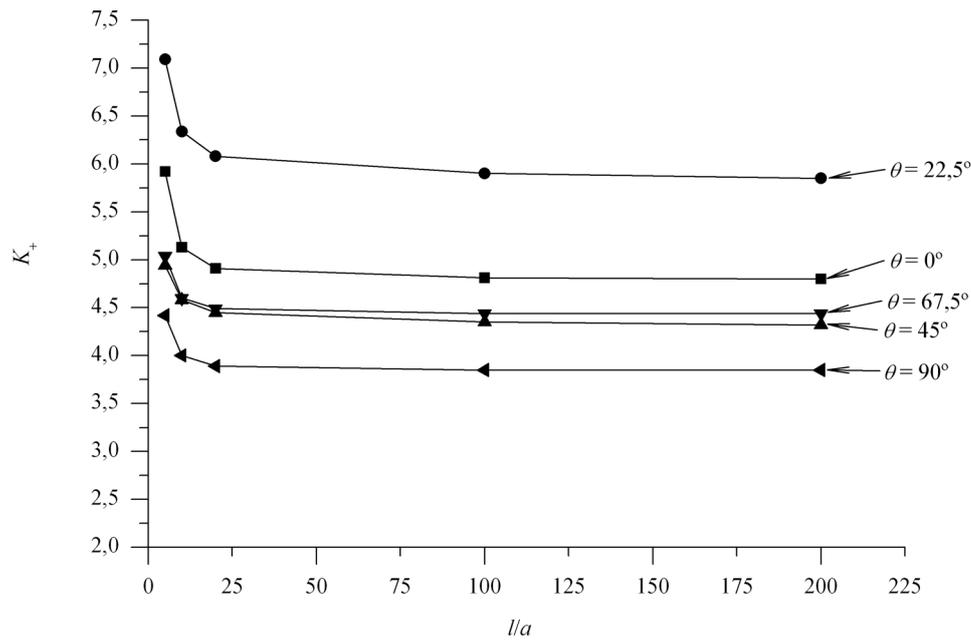


Figura 4.20.  $K_+$  versus la relación  $l/a$  según distintas orientaciones de los ejes de elasticidad,  $\theta$ , estado uniaxial de carga, material plywood.

El cambio de  $K_+$  con respecto a distintas relaciones entre el tamaño del orificio y de la placa para cada orientación de los ejes principales de elasticidad se muestra en la Figura 4.21. Aquí se observa que para el valor de  $\theta=67,5^\circ$  se producen los mayores valores de  $K_+$ , mientras que los menores valores ocurren para  $\theta=0^\circ$ , en todas las relaciones  $a/l$ .

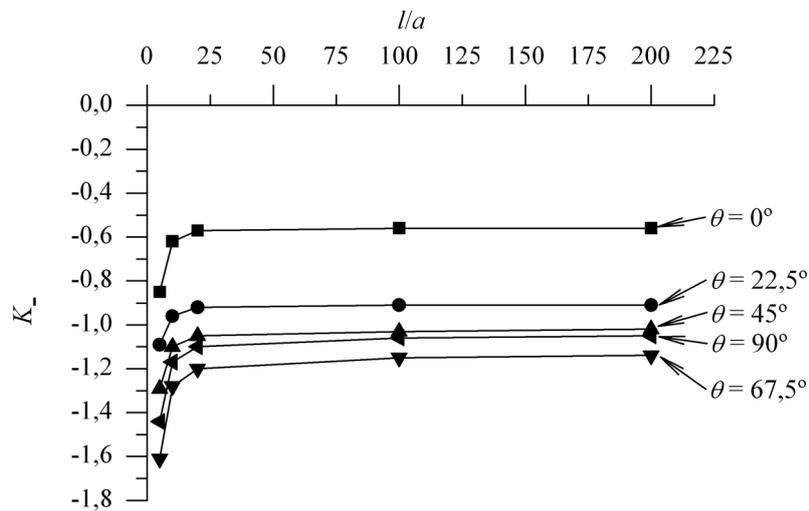


Figura 4.21.  $K_-$  versus la relación  $l/a$  según distintas orientaciones de los ejes de elasticidad,  $\theta$ , estado uniaxial de carga, material plywood.

En las figuras anteriores se observa también que el aumento del factor  $K_+$ , o  $K_-$ , al aumentar la relación  $a/l$  depende de la orientación de los ejes principales de elasticidad,  $\theta$ .

Para un análisis más claro, se redefine el parámetro  $\%K_+$ , relación (4.2), de acuerdo a las nuevas dimensiones adoptadas, es decir  $a$  y  $l$ , y se define el valor de  $\%K_+$  de la siguiente forma:

$$\%K_+ = \left( \frac{K_+^{a/l} - K_+^{a/l=0,005}}{K_+^{a/l=0,005}} \right) 100 \quad (4.6)$$

$$\%K_- = \left( \frac{K_-^{a/l} - K_-^{a/l=0,005}}{K_-^{a/l=0,005}} \right) 100 \quad (4.7)$$

Donde:

$K_+^{a/l}$ , es el mayor valor del factor de concentración de tensiones de tracción en la placa de relación  $a/l$ .

$K_+^{a/l=0,005}$ , es el mayor valor del factor de concentración de tensiones de tracción en la placa de relación  $a/l=0,005$ .

$K_-^{a/l}$ , es la mayor concentración de tensiones de compresión en la placa de relación  $a/l=0,2$ .

$K_-^{a/l=0,005}$ , es la mayor concentración de tensiones de compresión en la placa de relación  $a/l=0,005$ .

La Tabla 4.13 muestra los diferentes valores de  $\%K_+$  de todos los casos evaluados.

$\theta^\circ$	$a/l$				
	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005
0,0	23,16	6,85	2,21	0,04	0,00
22,5	21,20	8,36	3,98	0,85	0,00
45,0	14,35	5,95	3,06	0,69	0,00
67,5	13,51	3,60	1,12	0,04	0,00
90,0	14,81	3,91	1,16	0,00	0,00

Tabla 4.13.  $\%K_+$  según distintas relaciones  $a/l$  y distintos valores de  $\theta$ , para un estado uniaxial de carga, de magnitud  $N_x$ , material plywood.

La Figura 4.22 muestra un gráfico de los valores de la Tabla 4.13 según distintas orientaciones de los ejes principales de elasticidad,  $\theta$ . En el mismo se puede observar que para relaciones de  $a/l=0,05$  y  $0,01$  el aumento del valor de  $K_+$ , con respecto al modelo con  $a/l=0,005$ , es menor que el 4%. También se observa la influencia del ángulo  $\theta$  en el valor de  $\%K_+$ .

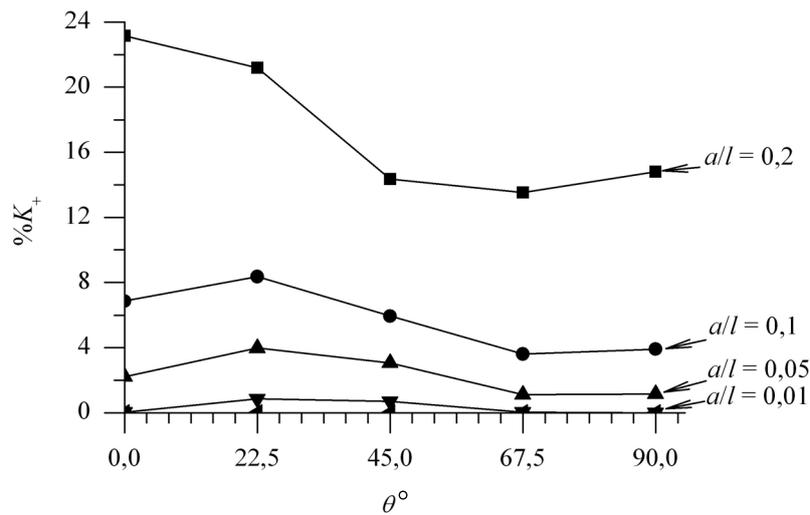


Figura 4.22.  $\%K_+$  versus ángulo  $\theta$ , para distintas relaciones  $a/l$ , material plywood.

En la Tabla 4.14 muestra los diferentes valores de  $\%K_+$  de todos los casos evaluados.

$\theta^\circ$	$a/l$				
	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005
0,0	51,79	10,39	1,98	0,00	0,00
22,5	19,78	4,98	0,93	0,00	0,00
45,0	26,47	7,83	3,02	0,98	0,00
67,5	41,23	12,69	5,49	0,88	0,00
90,0	37,14	11,40	4,49	0,95	0,00

Tabla 4.14.  $\%K_+$  según distintas relaciones  $a/l$  y distintos valores de  $\theta$ , para un estado uniaxial de carga, de magnitud  $N_x$ , material plywood.

En la Figura 4.23 se observa un gráfico de los valores de la Tabla 4.14 según el ángulo  $\theta$ . En el mismo se puede observar que para relaciones de  $a/l = 0,05$  y  $0,01$  el aumento del valor de  $K_+$ , con respecto al modelo con  $a/l = 0,005$ , es menor que el 5,5%. También se observa la influencia del ángulo  $\theta$  en el valor de  $\%K_+$ .

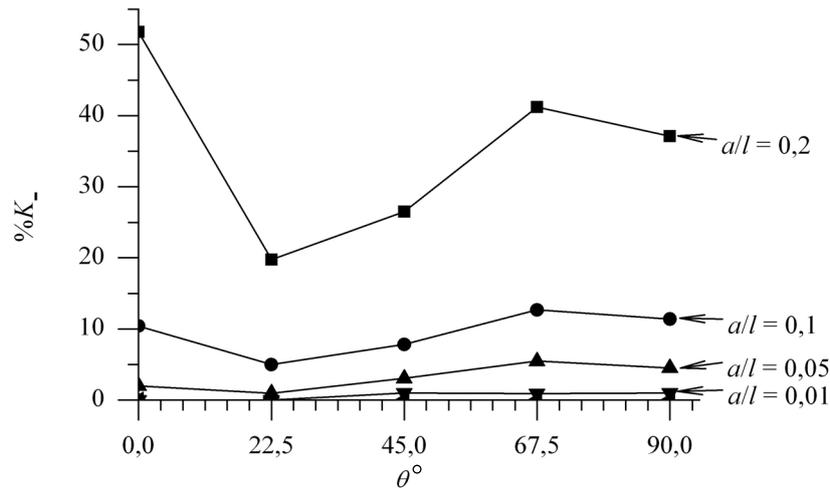


Figura 4.23.  $\%K_1$  versus ángulo  $\theta$ , para distintas relaciones  $a/l$ , material plywood.

Como se sabe, la distribución de tensiones depende de las relaciones  $E_1/E_2$ ,  $G/E_2$  y el valor de  $\nu_1$  del material ortótropo. Por esta razón se ha extendido el análisis anterior tomando otros materiales ortótropos con relaciones diferentes al analizado (Tabla 4.11).

Otro material seleccionado para realizar el análisis es el boron/epoxy. Los valores de las constantes elásticas se detallaron en la Tabla 4.10. Se hace notar la diferencia entre los valores de las relaciones entre las constantes elásticas del material denominado plywood y el boron/epoxy, Tabla 4.11. El material combinado, boron/epoxy, posee una relación  $E_1/E_2$  mayor, lo mismo para la relación  $G/E_2$  y el valor de  $\nu_1$  como se recuerda a continuación:

$$\frac{E_1}{E_2} = 11,89$$

$$\frac{G}{E_2} = 0,4351$$

$$\nu_1 = 0,27$$

El análisis para el mismo problema, arroja los valores que se muestran en la Tabla 4.15:

$a/l$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
0,20	0,0	7,79	59,57	-0,41	0,00
	22,5	9,88	125,95	-1,01	145,80
	45,0	6,69	131,97	-2,69	141,23
	67,5	3,48	136,43	-4,60	145,97
	90,0	2,94	57,01	-3,23	0,00
0,10	0,0	6,40	59,74	-0,28	0,36
	22,5	8,26	125,77	-0,90	143,86
	45,0	6,05	131,97	-2,25	141,41
	67,5	3,42	137,14	-3,68	146,14
	90,0	2,79	56,84	-2,76	0,00
0,05	0,0	5,98	59,74	-0,25	-0,71
	22,5	7,78	125,77	-0,86	143,70
	45,0	5,87	132,14	-2,14	141,41
	67,5	3,39	137,32	-3,44	146,32
	90,0	2,75	56,84	-2,63	0,00
0,01	0,0	5,78	59,74	-0,23	-2,49
	22,5	7,59	125,77	-0,85	143,17
	45,0	5,79	132,14	-2,10	141,41
	67,5	3,39	137,32	-3,34	146,32
	90,0	2,74	56,66	-2,56	0,00
0,005	0,0	5,75	59,74	-0,24	0,00
	22,5	7,50	125,77	-0,86	142,82
	45,0	5,77	131,97	-2,10	141,41
	67,5	3,39	137,32	-3,33	146,32
	90,0	2,74	56,66	-2,56	0,00

Tabla 4.15.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para el estado de tracción uniaxial de magnitud  $N_x$ , en placa cuadrada con orificio cuadrado de bordes redondeados para diferentes relaciones  $a/l$  y distintas orientaciones,  $\theta$ , material boron/epoxy.

La variación de  $K_+$  con respecto al cambio del tamaño del orificio en la placa, relación  $l/a$ , para cada orientación de los ejes principales de elasticidad se muestra en Figura 4.24. Al igual que con el material plywood, Figura 4.20, se observa que para el valor de  $\theta=22,5^\circ$  se producen los mayores valores de  $K_+$ , mientras que los menores valores ocurren para  $\theta=90^\circ$ , en todas las relaciones  $l/a$ . Es notable la poca influencia de la relación  $l/a$  en los resultados de  $K_+$  para las orientaciones de  $67,5^\circ$  y  $90^\circ$ .

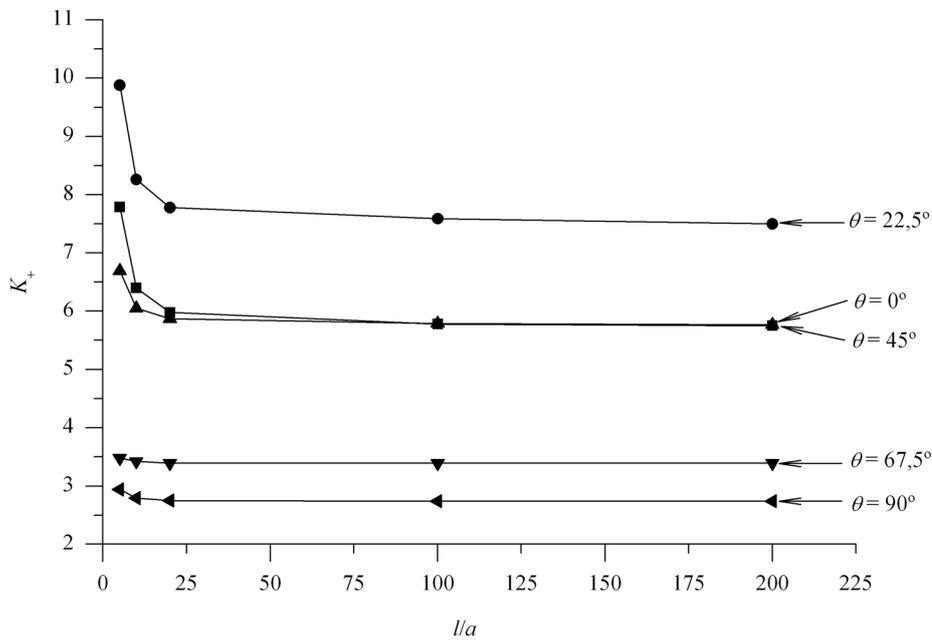


Figura 4.24.  $K_+$  versus la relación  $l/a$  según distintas orientaciones de los ejes de elasticidad,  $\theta$ , estado uniaxial de carga, material boron/epoxy.

La variación de  $K_+$  con respecto a la relación  $l/a$ , para cada orientación de los ejes principales de elasticidad se muestra en Figura 4.25. Al igual que para el material plywood, para el valor de  $\theta=67,5^\circ$  se producen los mayores valores de  $K_+$ , mientras que los menores valores ocurren para  $\theta=0^\circ$ , en todas las relaciones  $l/a$ .

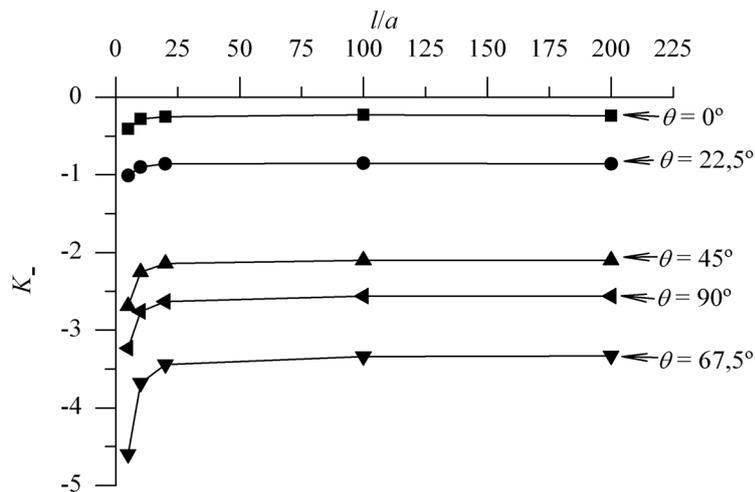


Figura 4.25.  $K_-$  versus la relación  $l/a$  según distintas orientaciones de los ejes de elasticidad,  $\theta$ , estado uniaxial de carga, material boron/epoxy.

La Tabla 4.16 muestra los diferentes valores de  $\%K_+$  de todos los casos evaluados para el material boron/epoxy.

$\theta^\circ$	$a/l$				
	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005
0,0	35,48	11,33	4,06	0,59	0,00
22,5	31,73	10,17	3,78	1,26	0,00
45,0	15,94	4,90	1,65	0,39	0,00
67,5	2,65	0,80	0,11	0,00	0,00
90,0	7,30	1,88	0,47	0,00	0,00

Tabla 4.16.  $\%K_+$  según distintas relaciones  $a/l$  y distintos valores de  $\theta$ , para un estado uniaxial de carga, de magnitud  $N_x$ , material boron/epoxy.

La Figura 4.26 muestra que para el ángulo  $\theta = 67,5^\circ$  el aumento del factor  $K_+$  para las placas de relación  $a/l=0,2, 0,1, 0,05$  y  $0,01$  con respecto al factor de  $K_+$  para una placa de relación  $a/l=0,005$  es menor al 5%. No es así para otros valores del ángulo  $\theta$ , ya que cuando los ejes de elasticidad coinciden con los ejes coordenados,  $\theta = 0^\circ$ , el valor de  $\%K_+$  asciende al 35,48%.

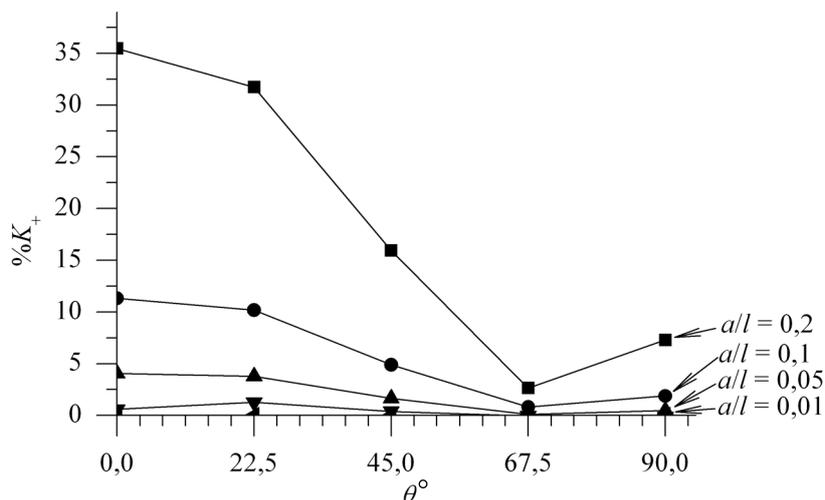


Figura 4.26.  $\%K_+$  versus ángulo  $\theta$ , para distintas relaciones  $a/l$ , material boron/epoxy.

El aumento del factor  $K_+$  para relaciones grandes de  $a/l$  se muestran en la Tabla 4.17.

$\theta^\circ$	$a/l$				
	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005
0,0	70,83	16,22	4,64	0,00	0,00
22,5	17,44	4,24	0,07	0,00	0,00
45,0	28,10	7,18	1,75	0,08	0,00
67,5	38,14	10,50	3,24	0,38	0,00
90,0	26,17	7,98	2,58	0,14	0,00

Tabla 4.17.  $\%K_+$  según distintas relaciones  $a/l$  y distintos valores de  $\theta$ , para un estado uniaxial de carga, de magnitud  $N_x$ , material boron/epoxy.

La Figura 4.27 muestra el gráfico de los valores de la Tabla 4.17 según el ángulo  $\theta$ . En el mismo se puede observar que para relaciones de  $a/l=0,05$  y  $0,01$  el aumento del valor de  $K_*$ , con respecto al modelo con  $a/l=0,005$ , es menor que el 5%. También se observa la influencia del ángulo  $\theta$  en el valor de  $\%K_*$ .

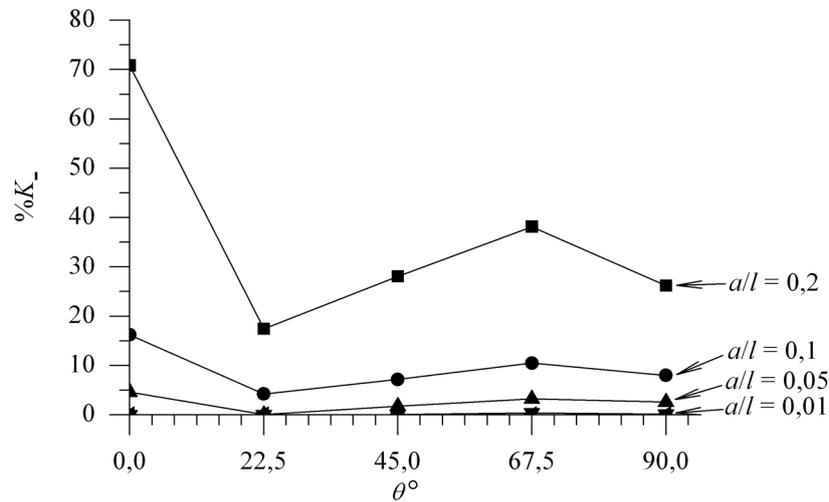


Figura 4.27.  $\%K_*$  versus ángulo  $\theta$ , para distintas relaciones  $a/l$ , material boron/epoxy.

Un material con una diferencia más acentuada aún entre los módulos de Young en las direcciones principales, es una variedad de graphite/epoxy, Tabla 4.10. Las relaciones entre las constantes elásticas son:

$$\frac{E_1}{E_2} = 17,57$$

$$\frac{G}{E_2} = 0,7544$$

$$\nu_1 = 0,28$$

Comparando las relaciones anteriores con las de los otros materiales, Tabla 4.11, se aprecia que este material posee una ortotropía más marcada. Los resultados arrojados por el modelo de elementos finitos para este material se muestran en la Tabla 4.18:

$a/l$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
0,20	0,0	7,68	59,57	-0,34	0,00
	22,5	9,58	125,60	-1,08	140,70
	45,0	6,85	131,25	-3,39	140,70
	67,5	4,01	135,36	-5,87	145,80
	90,0	2,68	53,17	-3,90	0,00
0,10	0,0	6,27	59,57	-0,23	0,36
	22,5	8,00	125,60	-0,97	139,99
	45,0	6,20	131,43	-2,78	140,88
	67,5	3,94	136,07	-4,74	145,97
	90,0	2,59	51,59	-3,39	0,00
0,05	0,0	5,86	59,57	-0,21	-0,71
	22,5	7,55	125,60	-0,93	139,81
	45,0	6,01	131,43	-2,61	140,88
	67,5	3,91	136,25	-4,42	146,14
	90,0	2,56	51,41	-3,23	0,00
0,01	0,0	5,68	59,57	-0,20	-2,85
	22,5	7,38	125,60	-0,91	139,64
	45,0	5,95	131,43	-2,56	140,88
	67,5	3,91	136,43	-4,30	146,14
	90,0	2,55	51,23	-3,16	0,00
0,005	0,0	5,66	59,57	-0,20	0,00
	22,5	7,30	125,60	-0,92	139,46
	45,0	5,93	131,43	-2,56	140,88
	67,5	3,91	136,43	-4,28	146,14
	90,0	2,55	51,23	-3,15	0,00

Tabla 4.18.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para el estado de tracción uniaxial de magnitud  $N_x$ , en placa cuadrada con orificio cuadrado de bordes redondeados para diferentes relaciones  $a/l$  y distintas orientaciones,  $\theta$ , material graphite/epoxy.

La variación de  $K_+$  con respecto a la relación  $l/a$ , para cada orientación de los ejes principales de elasticidad, se muestra en la Figura 4.28. Al igual que los dos materiales considerados anteriormente, para el valor de  $\theta=22,5^\circ$  se producen los mayores valores de  $K_+$ , mientras que los menores valores ocurren para  $\theta=90^\circ$ , en todas las relaciones  $l/a$ . Se aprecia la semejanza entre los valores de  $K_+$  para orientaciones de los ejes elásticos  $\theta=0^\circ$  y  $45^\circ$  para todas las dimensiones del orificios.

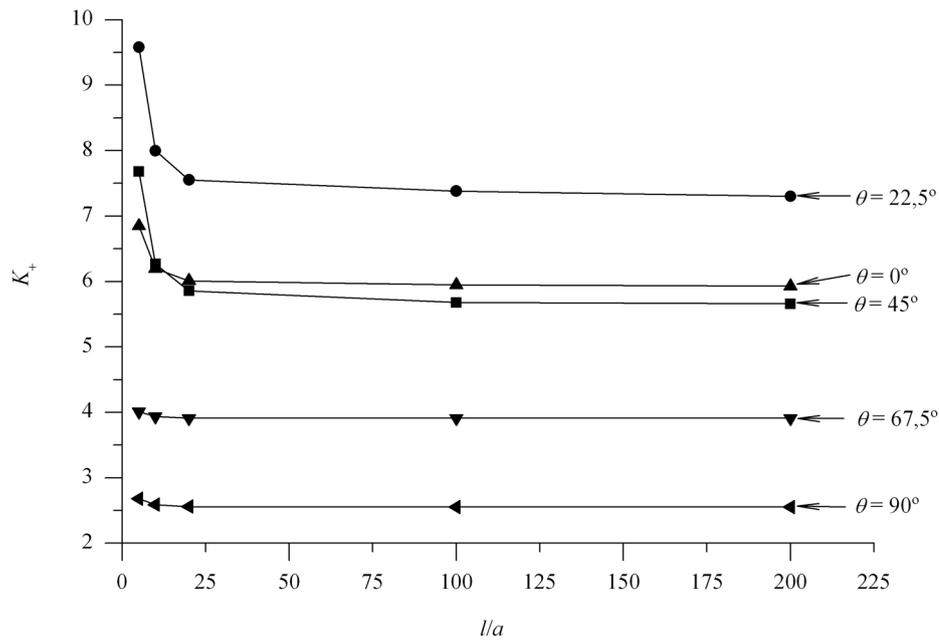


Figura 4.28.  $K_+$  versus la relación  $l/a$  según distintas orientaciones de los ejes de elasticidad,  $\theta$ , estado uniaxial de carga, material graphite/epoxy.

La variación de  $K_+$  con respecto a la relación  $l/a$ , para cada orientación de los ejes principales de elasticidad se muestra en la Figura 4.29. Los mayores valores de  $K_+$ , se producen para  $\theta=67,5^\circ$  mientras que los menores valores ocurren para  $\theta=0^\circ$ , en todas las relaciones  $l/a$ .

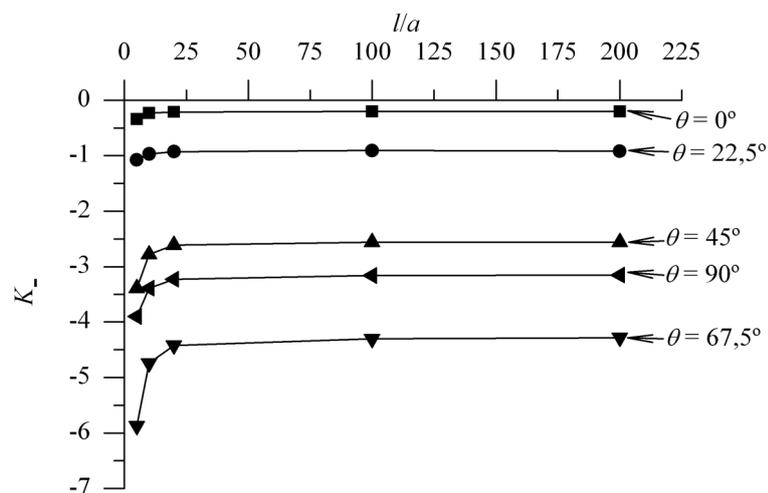


Figura 4.29.  $K_-$  versus la relación  $l/a$  según distintas orientaciones de los ejes de elasticidad,  $\theta$ , estado uniaxial de carga, material graphite/epoxy.

La Tabla 4.19 muestra los valores de  $\%K_+$  para los casos analizados con las características elásticas del material graphite/epoxy.

$\theta^\circ$	$a/l$				
	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005
0,0	35,69	10,76	3,57	0,30	0,00
22,5	31,23	9,54	3,38	1,04	0,00
45,0	15,51	4,51	1,40	0,26	0,00
67,5	2,56	0,74	0,07	0,00	0,00
90,0	5,10	1,47	0,45	0,04	0,00

Tabla 4.19.  $\%K_+$  según distintas relaciones  $a/l$  y distintos valores de  $\theta$ , para un estado uniaxial de carga, de magnitud  $N_x$ , material graphite/epoxy.

La Figura 4.30 muestra la variación de  $\%K_+$  según los distintos valores de  $\theta$  considerados para cada relación  $a/l$ . De manera general, se aprecia el mismo comportamiento que el observado para el material boron/epoxy, Figura 4.26. Se nota que para valores de  $\theta=67,5$  y  $90^\circ$  los valores de  $\%K_+$  son menores al 5,10% aún para una placa de relación  $a/l=0,2$ .

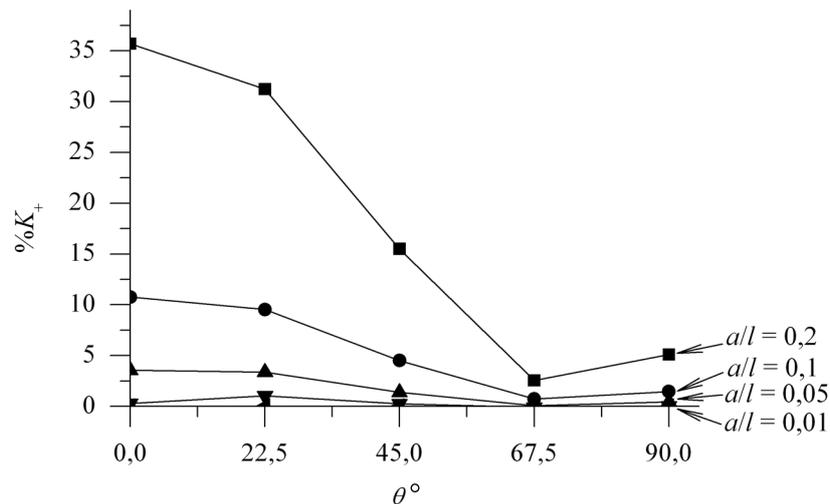


Figura 4.30.  $\%K_+$  versus ángulo  $\theta$ , para distintas relaciones  $a/l$ , material graphite/epoxy.

Los valores de  $\%K_+$  alcanzan valores mayores que los de  $\%K$ , llegando a ser de hasta un 70% para el caso de  $\theta=0^\circ$  y  $a/l=0,2$ , Tabla 4.20.

$\theta^\circ$	$a/l$				
	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005
0,0	70,00	16,54	5,39	0,00	0,00
22,5	17,39	5,11	0,69	0,87	0,00
45,0	32,42	8,42	2,07	0,00	0,00
67,5	37,15	10,64	3,35	0,43	0,00
90,0	23,81	7,58	2,55	0,33	0,00

Tabla 4.20. %K. según distintas relaciones  $a/l$  y distintos valores de  $\theta$ , para un estado uniaxial de carga, de magnitud  $N_x$ , material graphite/epoxy.

En la Figura 4.31 se observa la variación de %K. según  $\theta$  para cada relación  $a/l$ .

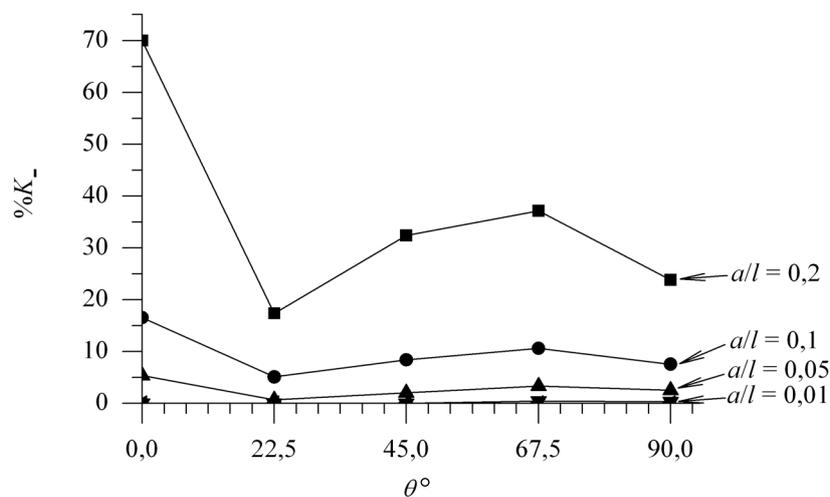


Figura 4.31. %K. versus ángulo  $\theta$ , para distintas relaciones  $a/l$ , material graphite/epoxy.

Para el estado uniaxial de tensiones se observa que en cada una de las relaciones  $a/l$  analizadas y en los tres materiales modelados, la orientación de los ejes principales de elasticidad  $\theta=22,5^\circ$  produce los mayores valores de concentración de tensiones,  $K_+$ , mientras que los menores en  $\theta=90^\circ$ .

Cabe mencionar la semejanza en los comportamientos de los parámetros  $\%K_+$  y  $\%K_-$  para los dos últimos materiales modelados. Esto se manifiesta al observar la Figura 4.26 y la Figura 4.30 referentes al comportamiento de  $\%K_+$  y por otro lado la Figura 4.27 y Figura 4.31 que se refieren a la variación de  $\%K_-$ .

### 4.3.2 Estado biaxial uniforme de tensiones.

En la Figura 4.32, se muestra el esquema de la placa ortótropa de espesor  $h$  con un orificio cuadrado centrado, sometida a un estado biaxial de tracción en sus bordes externos, de magnitud  $N$ .

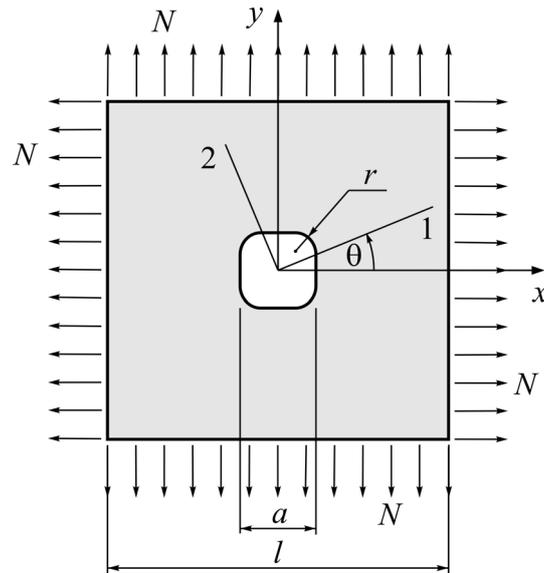


Figura 4.32. Placa cuadrada con orificio cuadrado de bordes redondeados, sometida a un estado biaxial y uniforme de carga de magnitud  $N$ .

Se recuerda que las definiciones de  $K_+$  y  $K_-$  utilizadas son las definidas en el apartado 2.3.2.1. La tensión de referencia para este caso es  $\sigma_1 = N/h$  por lo que las expresiones de  $K_+$  y  $K_-$  quedan:

$$K_+ = \frac{\sigma_{\alpha+}}{N} h \quad (4.8)$$

$$K_- = \frac{\sigma_{\alpha-}}{N} h$$

Los valores de los distintos parámetros de concentración de tensiones y sus respectivas posiciones para los tres materiales modelados se exponen en la Tabla 4.21, Tabla 4.22 y la Tabla 4.23 para placas finitas de diferentes relaciones  $a/l$ .

En la Tabla siguiente se exponen los resultados encontrados para el material denominado plywood:

$a/l$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
0,20	-45	7,38	45,00	-	-
	-22,5	7,07	52,65	-	-
	0	4,65	58,89	-	-
	22,5	7,07	127,35	-	-
	45	7,38	135,00	-	-
0,10	-45	6,91	45,00	-	-
	-22,5	6,55	127,35	-	-
	0	4,24	58,89	-	-
	22,5	6,55	127,35	-	-
	45	6,90	135,00	-	-
0,05	-45	6,76	45,00	-	-
	-22,5	6,37	52,65	-	-
	0	4,12	58,89	-	-
	22,5	6,37	127,35	-	-
	45	6,76	135,00	-	-
0,01	-45	6,70	45,00	-	-
	-22,5	6,30	52,65	-	-
	0	4,07	58,89	-	-
	22,5	6,30	127,35	-	-
	45	6,70	135,00	-	-
0,005	-45	6,69	45,00	-	-
	-22,5	6,29	52,65	-	-
	0	4,06	58,89	-	-
	22,5	6,28	127,35	-	-
	45	6,68	135,00	-	-

Tabla 4.21.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para el estado de tracción biaxial de magnitud  $N$ , en placa cuadrada con orificio cuadrado de bordes redondeados para diferentes relaciones  $a/l$  y distintas orientaciones,  $\theta$ , material plywood.

En los resultados se puede observar que para cada relación  $a/l$  el valor de  $\theta=-45^\circ$  o  $45^\circ$  produce el mayor valor de  $K_+$ , mientras que el mínimo se obtiene para  $\theta=0^\circ$ . Cabe aclarar que la semejanza de los resultados para  $\theta=-45^\circ$ ,  $-22,5^\circ$ ,  $22,5^\circ$  y  $45^\circ$  se debe a la simetría de la geometría y de las cargas. No existen valores de compresión.

Como era de esperar, los valores de  $K_+$  crecen al aumentar el tamaño del orificio. La Figura 4.33 muestra la variación de  $K_+$  con respecto a la relación  $l/a$  para distintas orientaciones del ángulo  $\theta$ . En ella se observa el aumento de  $K_+$  al disminuir la relación  $l/a$  para los diferentes valores de  $\theta$ . Para  $\theta=0^\circ$  el aumento de  $K_+$  es del 14,53% y para  $\theta=-45^\circ$  o  $45^\circ$  es del 10,31%.

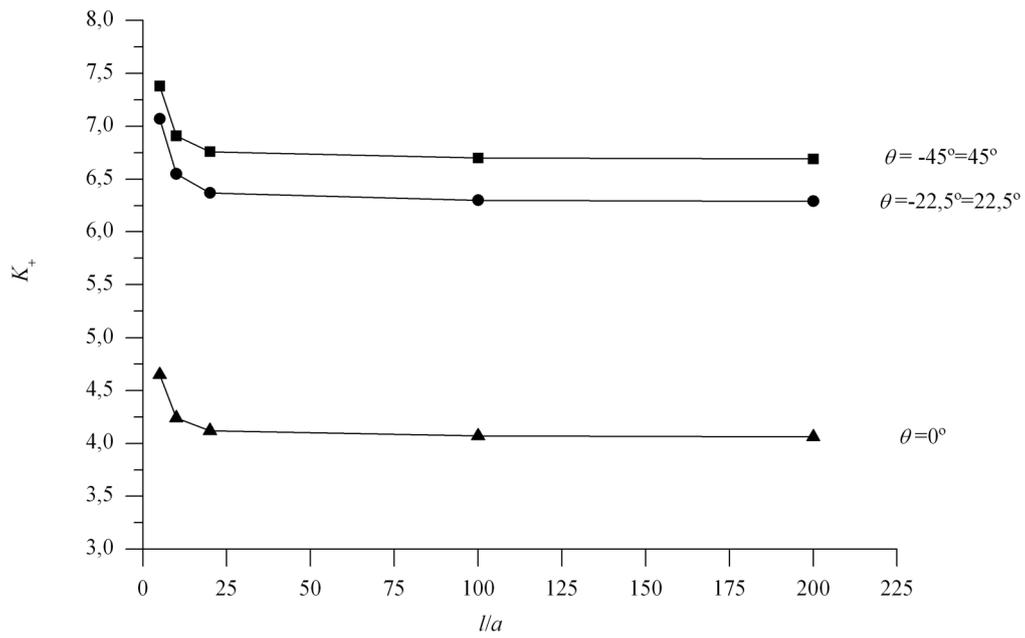


Figura 4.33.  $K_+$  versus la relación  $l/a$  según distintas orientaciones de los ejes de elasticidad,  $\theta$ , estado biaxial de carga, material plywood.

A continuación se exponen los resultados para el material denominado boron/epoxy:

$a/l$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
0,20	-45	7,46	45,00	-	-
	-22,5	7,29	52,29	-	-
	0	5,31	58,55	-	-
	22,5	7,29	127,71	-	-
	45	7,46	135,00	-	-
0,10	-45	7,08	45,00	-	-
	-22,5	6,65	52,12	-	-
	0	4,76	58,55	-	-
	22,5	6,65	127,88	-	-
	45	7,08	135,00	-	-
0,05	-45	6,94	45,00	-	-
	-22,5	6,44	52,12	-	-
	0	4,60	58,38	-	-
	22,5	6,44	127,88	-	-
	45	6,94	135,00	-	-
0,01	-45	6,87	45,00	-	-
	-22,5	6,33	52,12	-	-
	0	4,53	58,38	-	-
	22,5	6,35	127,88	-	-
	45	6,87	135,00	-	-
0,005	-45	6,85	45,00	-	-
	-22,5	6,32	52,12	-	-
	0	4,51	121,62	-	-
	22,5	6,30	127,88	-	-
	45	6,84	135,00	-	-

Tabla 4.22.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para el estado de tracción biaxial de magnitud  $N$ , en placa cuadrada con orificio cuadrado de bordes redondeados para diferentes relaciones  $a/l$  y distintas orientaciones,  $\theta$ , material boron/epoxy.

Al igual que en el caso anterior, en cada relación  $a/l$  el valor de  $\theta=-45^\circ$  o  $45^\circ$  producen el mayor valor de  $K_+$  mientras que el mínimo se obtiene para  $\theta=0^\circ$  y no existen valores de compresión.

Los valores de  $K_+$  crecen al aumentar el tamaño del orificio. La Figura 4.33 muestra la variación de  $K_+$  con respecto a la relación  $l/a$  para distintas orientaciones del ángulo  $\theta$ . En ella se observa que el aumento de  $K_+$  al disminuir la relación  $l/a$ , cuando  $\theta=0^\circ$ , es mayor que el aumento producido por las orientaciones restantes. Para  $\theta=0^\circ$  el aumento de  $K_+$  es del 17,74% y para  $\theta=-45^\circ$  o  $45^\circ$  es del 8,91%.

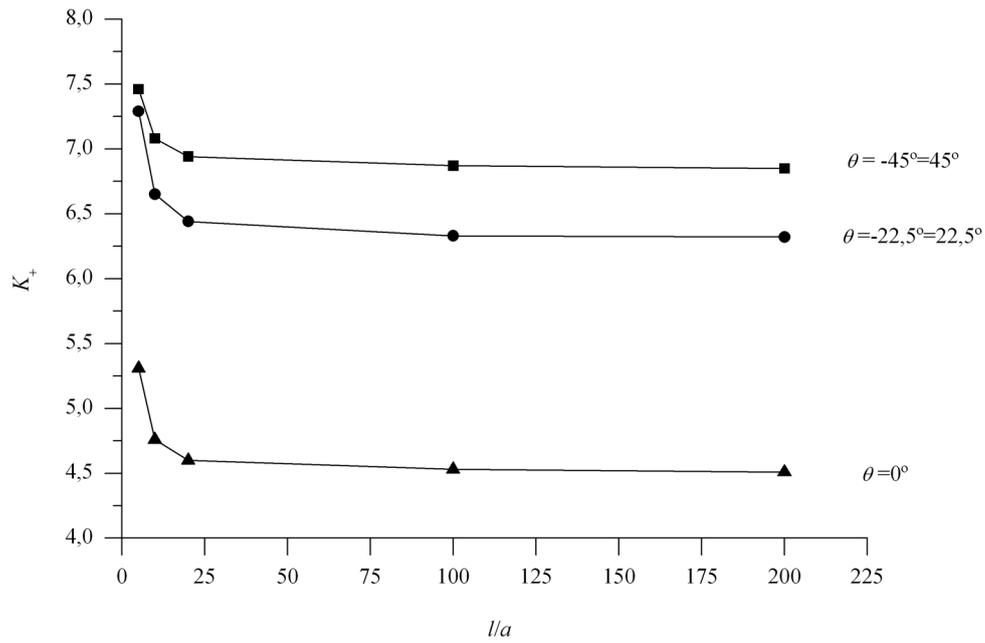


Figura 4.34.  $K_+$  versus la relación  $l/a$  según distintas orientaciones de los ejes de elasticidad,  $\theta$ , estado biaxial de carga, material boron/epoxy.

En la Tabla siguiente se muestran los resultados obtenidos para el material graphite/epoxy:

$a/l$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
0,20	-45	6,22	45,00	-	-
	-22,5	5,87	52,65	-	-
	0	5,14	57,87	-0,22	90,00
	22,5	5,87	127,36	-	-
	45	6,22	135,00	-	-
0,10	-45	5,82	45,00	-	-
	-22,5	5,52	51,41	-	-
	0	4,61	57,52	-0,40	90,00
	22,5	5,52	128,59	-	-
	45	5,82	135,00	-	-
0,05	-45	5,79	45,00	-	-
	-22,5	5,43	51,41	-	-
	0	4,51	57,35	-0,43	90,00
	22,5	5,43	128,59	-	-
	45	5,80	135,00	-	-
0,01	-45	5,77	45,00	-	-
	-22,5	5,38	51,41	-	-
	0	4,47	57,35	-0,44	90,00
	22,5	5,39	128,59	-	-
	45	5,77	135,00	-	-
0,005	-45	5,77	45,00	-	-
	-22,5	5,38	128,59	-	-
	0	4,46	122,65	-0,45	90,00
	22,5	5,37	128,59	-	-
	45	5,76	135,00	-	-

Tabla 4.23.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para el estado de tracción biaxial de magnitud  $N$ , en placa cuadrada con orificio cuadrado de bordes redondeados para diferentes relaciones  $a/l$  y distintas orientaciones,  $\theta$ , material graphite/epoxy.

En ella se observa que en cada relación  $a/l$  el valor de  $\theta=-45^\circ$  o  $45^\circ$  produce el mayor valor de  $K_+$  mientras que el mínimo se obtiene para  $\theta=0^\circ$  al igual que en los dos casos anteriores pero se encontraron valores de compresión cuando  $\theta=0^\circ$ .

También se observa que los valores de  $K_+$  crecen al aumentar el tamaño del orificio y los valores de  $K_-$  disminuyen. En la Figura 4.35 se muestra la variación de  $K_+$  con respecto a la relación  $l/a$  para distintas orientaciones del ángulo  $\theta$ . En ella se observa que el aumento de  $K_+$  al disminuir la relación  $l/a$  cuando  $\theta=0^\circ$  es mayor que el aumento producido por las orientaciones restantes. Para  $\theta=0^\circ$  el aumento de  $K_+$  es del 15,25% y para  $\theta=-45^\circ$  o  $45^\circ$  es del 7,80%.

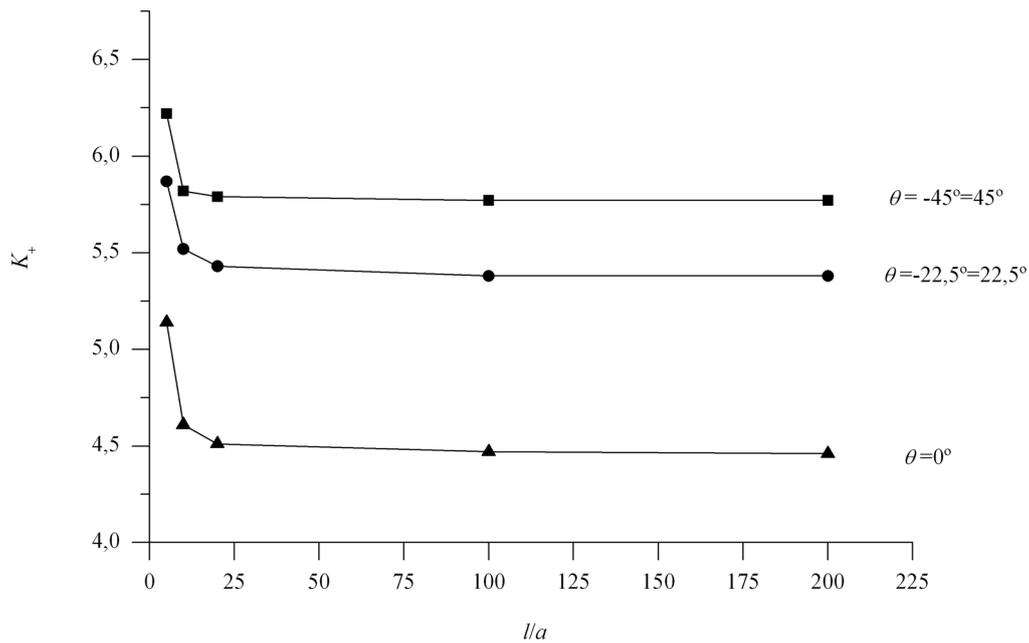


Figura 4.35.  $K_+$  versus la relación  $l/a$  según distintas orientaciones de los ejes de elasticidad,  $\theta$ , estado biaxial de carga, material graphite/epoxy.

De los resultados encontrados para los tres materiales modelados se puede concluir que el menor valor de  $K_+$  se obtiene para  $\theta=0^\circ$ , en todas las relaciones  $a/l$  modeladas y los mayores para las orientaciones  $\theta=-45^\circ$  y  $45^\circ$ .

Además, no ocurren compresiones con los materiales plywood y boron/epoxy, mientras que se obtuvieron valores de  $K_-$  con el material graphite/epoxy para  $\theta=0^\circ$ .

### 4.3.3 Estado general de tensiones.

En la Figura 4.36, se muestra el esquema de la placa ortótropa de espesor  $h$  con un orificio cuadrado centrado, sometida a una combinación de cargas normales en sus bordes externos, de magnitud  $N_x$  y  $N_y$ , y tangenciales, de magnitud  $N_{xy}$ . Con respecto a la magnitud de los esfuerzos normales uniformes,  $N_x$  y  $N_y$ , se consideró  $N_x=N_y=N$ .

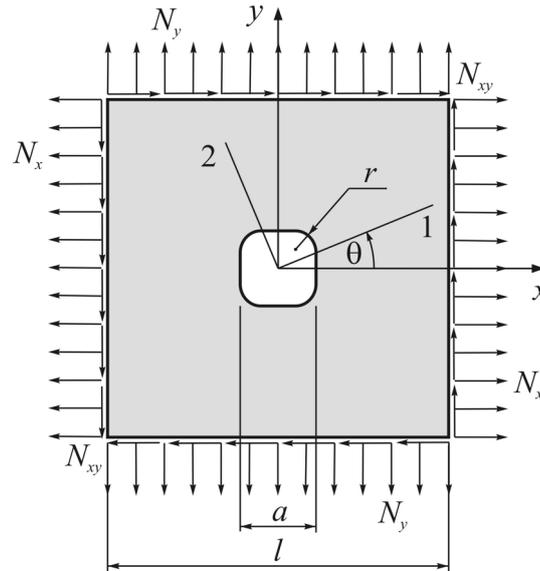


Figura 4.36. Placa cuadrada con orificio cuadrado de bordes redondeados, sometida a un estado biaxial de cargas,  $N_x=N_y=N$ , y corte de magnitud  $N_{xy}$ .

Se consideraron distintas relaciones entre las cargas normales y las cargas tangenciales, es decir  $N_{xy}/N=\xi$ . Se tomaron los siguientes valores de  $\xi = 0,25, 0,5, 0,75$  y  $1$ . Los coeficientes de tensión  $K_+$  y  $K_-$  se refieren a las relaciones definidas en (2.19) y (2.20) del capítulo 2.

De la expresión de las tensiones principales para el estado plano de tensiones se tiene:

$$\sigma_{1,2} = \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4.9)$$

Donde  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  son las tensiones normales a los planos coordenados en un punto:  $\sigma_x=\sigma_y=N/h$ ;  $\tau_{xy}$  es la tensión de corte en el punto considerado:  $\tau_{xy}=(\xi N)/h$  y  $\sigma_1, \sigma_2$  son las tensiones principales máxima y mínima respectivamente. Es decir que para el problema que se trata, las tensiones principales para todo punto del dominio sin orificio, quedan expresadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N}{h}(1 + \xi) \\ \sigma_2 &= \frac{N}{h}(1 - \xi) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Quedando entonces:

$$\begin{aligned} K_+ &= \frac{\sigma_{a+} h}{N(1 + \xi)} \\ K_- &= \frac{\sigma_{a-} h}{N(1 + \xi)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dada la simetría del estado de carga y geometría del problema, las orientaciones de los ejes principales de elasticidad considerados son  $\theta = -45^\circ, -22,5^\circ, 0^\circ, 22,5^\circ$  y  $45^\circ$ .

Los valores de los distintos parámetros de concentración de tensiones para el material denominado plywood se exponen desde la Tabla 4.24 hasta la Tabla 4.28, para placas finitas de diferentes relaciones  $a/l$ .

$N_{xy}/N$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
1,00	-45	7,25	135,00	-2,68	45,00
	-22,5	6,77	141,59	-2,62	50,52
	0	7,08	121,45	-2,49	57,70
	22,5	9,43	128,06	-1,56	41,43
	45	10,06	135,00	-1,43	45,00
0,75	-45	7,05	135,00	-1,24	45,00
	-22,5	6,58	141,59	-1,39	49,46
	0	6,73	121,45	-1,51	57,18
	22,5	9,08	128,06	-0,76	44,29
	45	9,67	135,00	-0,39	45,00
0,50	-45	6,78	135,00	-	-
	-22,5	6,33	141,76	-0,19	43,57
	0	6,26	121,45	-0,36	52,47
	22,5	8,63	127,88	-0,17	60,42
	45	9,16	135,00	-	-
0,25	-45	6,39	135,18	-	-
	-22,5	5,99	142,12	-	-
	0	5,61	121,28	-	-
	22,5	7,99	127,71	-	-
	45	8,45	135,00	-	-

Tabla 4.24.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para la placa ortótropa cuadrada finita,  $a/l=0,2$ , sometida a diferentes combinaciones de carga en el borde exterior, y distintas orientación de los ejes de ortotropía (plywood).

$N_{xy}/N$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
1,00	-45	6,56	135,00	-1,90	45,00
	-22,5	6,06	141,59	-1,97	49,99
	0	6,25	121,45	-2,07	57,70
	22,5	8,22	128,06	-1,18	42,50
	45	8,81	135,00	-1,01	45,00
0,75	-45	6,41	135,00	-0,64	45,00
	-22,5	5,93	141,76	-0,96	48,57
	0	5,96	121,45	-1,21	56,84
	22,5	7,97	128,06	-0,60	60,08
	45	8,53	135,00	-0,07	45,00
0,50	-45	6,22	135,00	-	-
	-22,5	5,77	141,94	-0,08	41,61
	0	5,58	121,28	-0,26	51,41
	22,5	7,64	127,88	-0,13	60,58
	45	8,17	135,00	-	-
0,25	-45	5,95	135,00	-	-
	-22,5	5,55	142,12	-	-
	0	5,04	121,28	-	-
	22,5	7,19	127,71	-	-
	45	7,67	135,00	-	-

Tabla 4.25.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para la placa ortótropa cuadrada finita,  $a/l=0,1$ , sometida a diferentes combinaciones de carga en el borde exterior, y distintas orientación de los ejes de ortotropía (plywood).

$N_{xy}/N$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
1,00	-45	6,39	135,00	-1,72	45,00
	-22,5	5,88	141,59	-1,80	49,99
	0	6,03	121,45	-1,96	57,70
	22,5	7,87	128,06	-1,09	42,68
	45	8,48	135,00	-0,92	45,00
0,75	-45	6,26	135,00	-0,51	45,00
	-22,5	5,77	141,76	-0,86	48,21
	0	5,75	121,45	-1,14	56,84
	22,5	7,64	128,06	-0,57	60,08
	45	8,23	135,00	-	-
0,50	-45	6,08	135,00	-	-
	-22,5	5,62	141,94	-0,05	41,25
	0	5,39	121,28	-0,23	51,23
	22,5	7,35	127,88	-0,11	60,58
	45	7,91	135,00	-	-
0,25	-45	5,84	135,00	-	-
	-22,5	5,42	142,12	-	-
	0	4,88	121,28	-	-
	22,5	6,95	127,71	-	-
	45	7,45	135,00	-	-

Tabla 4.26.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para la placa ortótropa cuadrada finita,  $a/l=0,05$ , sometida a diferentes combinaciones de carga en el borde exterior, y distintas orientación de los ejes de ortotropía (plywood).

$N_{xy}/N$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
1,00	-45	6,32	135,00	-1,65	45,00
	-22,5	5,81	141,59	-1,74	49,99
	0	5,94	121,45	-1,93	57,70
	22,5	7,73	128,06	-1,06	42,86
	45	8,35	135,00	-0,88	45,00
0,75	-45	6,20	135,00	-0,46	45,00
	-22,5	5,70	141,76	-0,82	48,21
	0	5,67	121,45	-1,12	56,84
	22,5	7,51	128,06	-0,57	60,08
	45	8,11	135,00	-	-
0,50	-45	6,03	135,00	-	-
	-22,5	5,56	141,94	-0,04	41,08
	0	5,31	121,28	-0,22	51,23
	22,5	7,23	127,88	-0,11	60,58
	45	7,80	135,00	-	-
0,25	-45	5,80	135,00	-	-
	-22,5	5,38	142,12	-	-
	0	4,81	121,28	-	-
	22,5	6,85	127,71	-	-
	45	7,36	135,00	-	-

Tabla 4.27.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para la placa ortótropa cuadrada finita,  $a/l=0,01$ , sometida a diferentes combinaciones de carga en el borde exterior, y distintas orientación de los ejes de ortotropía (plywood).

$N_{xy}/N$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
1,00	-45	6,31	135,00	-1,63	45,00
	-22,5	5,80	141,59	-1,73	49,81
	0	5,93	121,45	-1,92	57,70
	22,5	7,70	128,06	-1,05	42,86
	45	8,32	135,00	-0,87	45,00
0,75	-45	6,19	135,00	-0,45	45,00
	-22,5	5,70	141,76	-0,82	48,03
	0	5,66	121,45	-1,11	56,84
	22,5	7,49	128,06	-0,56	60,08
	45	8,08	135,00	-	-
0,50	-45	6,02	135,00	-	-
	-22,5	5,56	141,94	-0,04	41,08
	0	5,30	121,28	-0,21	51,23
	22,5	7,21	127,88	-0,11	60,58
	45	7,77	135,00	-	-
0,25	-45	5,79	135,00	-	-
	-22,5	5,37	142,12	-	-
	0	4,81	121,28	-	-
	22,5	6,83	127,71	-	-
	45	7,34	135,00	-	-

Tabla 4.28.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para la placa ortótropa cuadrada finita,  $a/l=0,005$ , sometida a diferentes combinaciones de carga en el borde exterior, y distintas orientación de los ejes de ortotropía (plywood).

Del análisis de los resultados expuestos en las tablas anteriores, se puede observar que los mayores valores de  $K_+$ , para cada una de las relaciones  $N_{xy}/N$  y  $a/l$  analizadas, ocurren para la orientación  $\theta=45^\circ$ . Para la relación  $N_{xy}/N=1$  el menor valor de  $K_+$  ocurre para el valor de  $\theta=-22,5^\circ$ , en todas la relaciones  $a/l$ . Esta situación cambia cuando  $N_{xy}/N=0,5$ , y  $0,25$  donde para todas las relaciones  $a/l$ , el menor valor de  $K_+$  ocurre cuando  $\theta=0^\circ$ . La Figura 4.37 muestra la variación de  $K_+$  según  $\theta$  para la relación  $a/l=0,2$ . Se observa que para cada relación  $N_{xy}/N$  el ángulo  $\theta$  que produce el mayor valor de  $K_+$  es  $\theta=45^\circ$ .

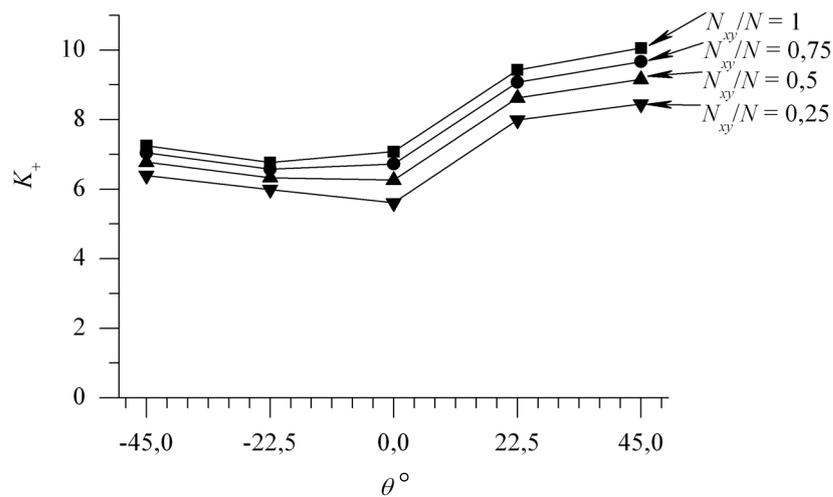


Figura 4.37.  $K_+$  versus  $\theta$  para distintas relaciones  $N_{xy}/N$  y  $a/l=0,2$ , material plywood.

Como era de esperar, la influencia del esfuerzo de corte se evidencia a través de la aparición de tensiones de compresión que aumentan conforme se incrementa  $N_{xy}$ . En efecto, en el caso donde  $N_{xy}/N=0,25$ , no hay valores de  $K_-$ , en todas las relaciones  $a/l$  estudiadas. Los casos en que  $N_{xy}/N=0,5$ ,  $0,75$  y  $1$  poseen valores de  $K_-$  y los mayores valores ocurren cuando  $\theta=0^\circ$  con la excepción del caso con  $N_{xy}/N=1$  y  $a/l=0,2$ , donde el mayor valor de  $K_-$  se da para  $\theta=-45^\circ$  y  $N_{xy}/N=1$ .

La variación de  $K_+$  según la relación  $a/l$ , para cada estado de carga, depende de la orientación de los ejes principales de elasticidad,  $\theta$ . La Figura 4.38 muestra la variación de  $K_+$  con respecto a la relación  $l/a$  para la orientación  $\theta=22,5^\circ$ . Este valor del ángulo  $\theta$  produce la mayor variación de  $K_+$  en la placa con  $a/l=0,005$  y  $a/l=0,2$  para las diferentes relaciones  $N_{xy}/N$ . Para  $N_{xy}/N=1$  el aumento de  $K_+$  es del 22,47% y para  $N_{xy}/N=0,25$  es del 16,98%.

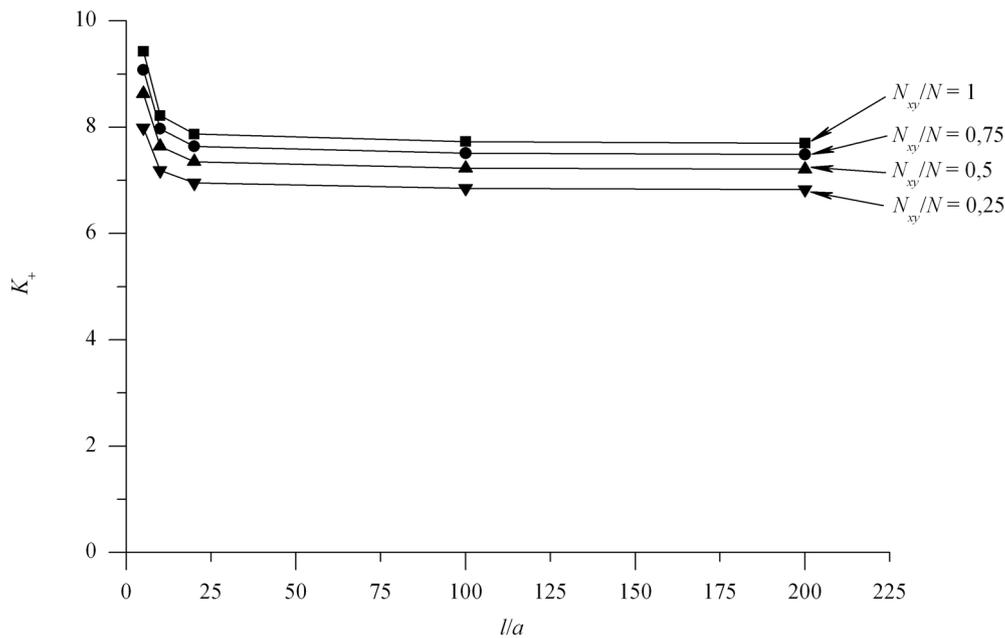


Figura 4.38.  $K_+$  versus  $l/a$  para diferentes relaciones de  $N_{xy}/N=0,25, 0,5, 0,75, 1$ , y  $\theta=22,5^\circ$ , material plywood.

La Figura 4.39 muestra la variación de  $K_+$  con respecto a la relación  $l/a$  para la orientación  $\theta=-45^\circ$ . Este valor del ángulo  $\theta$  produce el menor aumento de  $K_+$  en la placa con  $a/l=0,005$  y  $a/l=0,2$  para las distintas relaciones  $N_{xy}/N$  modeladas. Para  $N_{xy}/N=1$  el aumento de  $K_+$  es del 14,90% y para  $N_{xy}/N=0,25$  es del 10,36%.

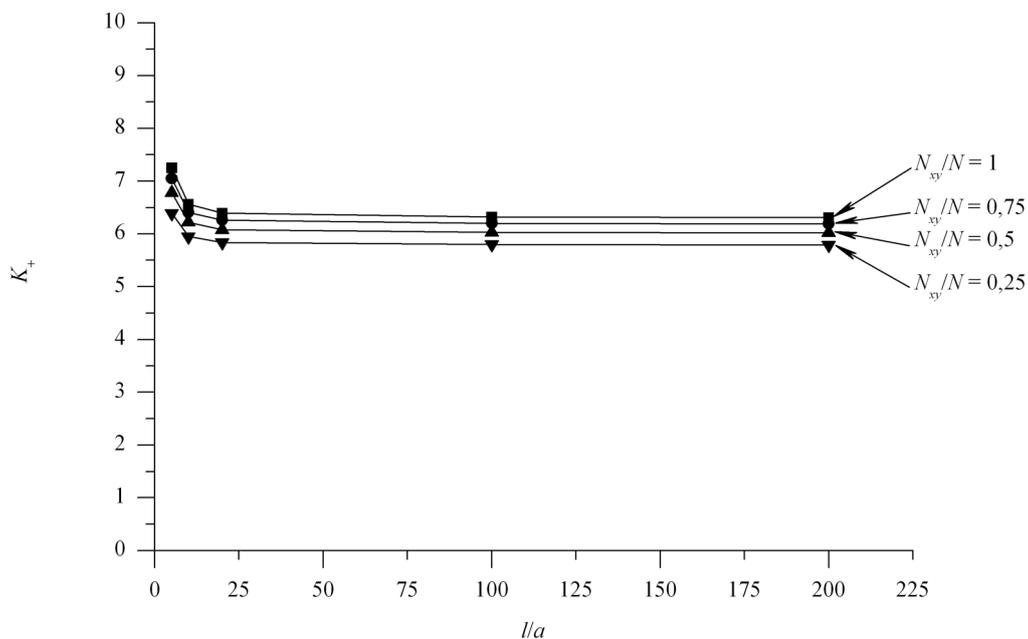


Figura 4.39.  $K_+$  versus  $l/a$  para diferentes relaciones de  $N_{xy}/N=0,25, 0,5, 0,75, 1$ , y  $\theta=-45^\circ$ , material plywood.

En el casos en que  $N_{xy}/N=0,25$  no se registraron valores de compresión en el modelo y para  $N_{xy}/N=0,5$  los valores de  $\theta=-22,5^\circ, 45^\circ$  y  $22,5^\circ$  no produce valor del factor  $K_+$ . También

se observa que para la relación  $N_{xy}/N=0,75$  y  $\theta=45^\circ$  el factor  $K$  tiene valor significativo solamente en la relación  $a/l=0,2$ .

La Figura 4.40 muestra la variación de  $K$  con respecto a la relación  $l/a$  para la orientación  $\theta=-45^\circ$  para  $N_{xy}/N=0,75$  y 1. Este valor del ángulo  $\theta$  produce la mayor diferencia de  $K$  en la placa con  $a/l=0,005$  y  $a/l=0,2$  para las relaciones  $N_{xy}/N=0,75$  y 1. Para  $N_{xy}/N=0,75$  el aumento de  $K$  es del 175,6% y para  $N_{xy}/N=1$  es del 64,42%.

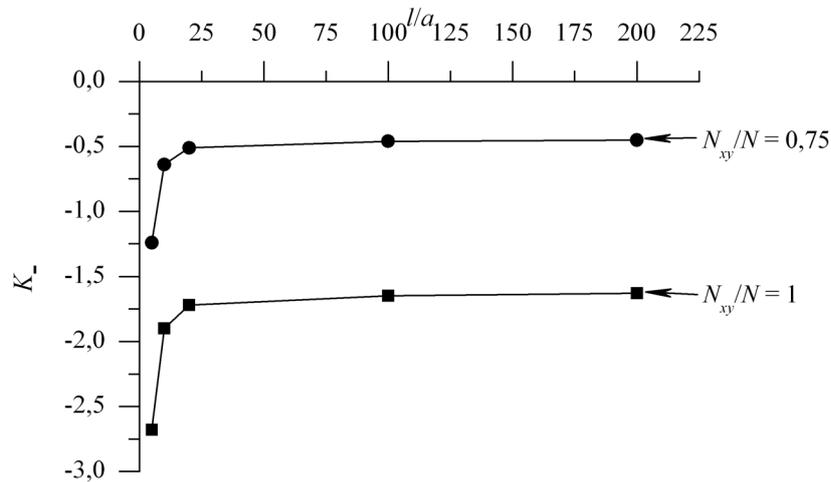


Figura 4.40.  $K$  versus  $l/a$  para las relaciones de  $N_{xy}/N=0,75$ , 1, y  $\theta=-45^\circ$ , material plywood.

Los resultados obtenidos para el material boron/epoxy se exponen desde la Tabla 4.29 hasta la Tabla 4.33.

$N_{xy}/N$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
1,00	-45	4,27	135,00	-6,61	45,00
	-22,5	4,23	119,92	-6,05	51,59
	0	10,57	121,28	-5,28	59,06
	22,5	13,30	128,06	-1,49	60,25
	45	14,07	135,00	-0,61	45,00
0,75	-45	4,18	135,00	-4,60	45,00
	-22,5	4,02	120,09	-4,16	51,59
	0	9,82	121,28	-3,78	59,06
	22,5	12,44	128,06	-0,89	60,42
	45	13,12	135,00	-	-
0,50	-45	4,06	135,00	-1,92	45,00
	-22,5	3,84	138,75	-1,66	51,23
	0	8,82	121,28	-1,78	59,40
	22,5	11,29	128,06	-0,26	86,44
	45	11,86	135,00	-	-
0,25	-45	3,90	135,00	-	-
	-22,5	3,66	139,46	-	-
	0	7,41	121,28	-	-
	22,5	9,68	127,88	-	-
	45	10,10	135,00	-	-

Tabla 4.29.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para la placa ortótropa cuadrada finita sometida a diferentes combinaciones de carga en el borde exterior, y distintas orientación de los ejes de ortotropía (boron/epoxy).  $a/l=0,2$ .

$N_{xy}/N$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
1,00	-45	3,95	135,00	-4,60	45,00
	-22,5	3,85	119,92	-4,43	51,59
	0	9,24	121,28	-4,52	59,06
	22,5	11,03	128,06	-1,28	60,25
	45	11,67	135,00	-0,42	45,00
0,75	-45	3,89	135,00	-2,93	45,00
	-22,5	3,66	120,09	-2,86	51,41
	0	8,60	121,28	-3,21	59,23
	22,5	10,41	128,06	-0,74	60,42
	45	11,02	135,00	-	-
0,50	-45	3,81	135,00	-0,70	45,00
	-22,5	3,55	138,75	-0,81	50,70
	0	7,74	121,28	-1,47	59,57
	22,5	9,57	128,06	-0,25	90,71
	45	10,14	135,00	-	-
0,25	-45	3,70	135,00	-	-
	-22,5	3,44	139,99	-	-
	0	6,54	121,28	-0,02	72,72
	22,5	8,40	128,06	-	-
	45	8,92	135,00	-	-

Tabla 4.30.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para la placa ortótropa cuadrada finita sometida a diferentes combinaciones de carga en el borde exterior, y distintas orientación de los ejes de ortotropía (boron/epoxy).  $a/l=0,1$ .

$N_{xy}/N$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
1,00	-45	3,87	135,00	-4,08	45,00
	-22,5	3,74	119,92	-3,94	51,59
	0	8,84	121,28	-4,28	59,06
	22,5	10,33	128,06	-1,22	60,42
	45	11,02	135,00	-0,37	45,00
0,75	-45	3,82	135,00	-2,50	45,00
	-22,5	3,57	120,09	-2,47	51,41
	0	8,23	121,28	-3,03	59,23
	22,5	9,77	128,06	-0,69	60,42
	45	10,44	135,00	-	-
0,50	-45	3,75	135,00	-0,40	45,00
	-22,5	3,48	138,92	-0,56	50,52
	0	7,42	121,28	-1,37	59,57
	22,5	9,03	128,06	-0,25	92,14
	45	9,66	135,00	-	-
0,25	-45	3,65	135,00	-	-
	-22,5	3,39	139,99	-	-
	0	6,29	121,45	-0,05	73,04
	22,5	7,99	128,06	-	-
	45	8,57	135,00	-	-

Tabla 4.31.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para la placa ortótropa cuadrada finita sometida a diferentes combinaciones de carga en el borde exterior, y distintas orientación de los ejes de ortotropía (boron/epoxy).  $a/l=0,05$ .

$N_{xy}/N$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
1,00	-45	3,84	135,00	-3,86	45,00
	-22,5	3,71	119,92	-3,73	51,41
	0	8,68	121,28	-4,22	59,06
	22,5	10,02	128,24	-1,20	60,42
	45	10,74	135,00	-0,35	45,00
0,75	-45	3,79	135,00	-2,32	45,00
	-22,5	3,54	120,09	-2,31	51,23
	0	8,08	121,28	-2,98	59,23
	22,5	9,49	128,06	-0,67	60,42
	45	10,19	135,00	-	-
0,50	-45	3,73	135,00	-0,28	45,00
	-22,5	3,45	138,92	-0,47	50,52
	0	7,29	121,28	-1,36	59,57
	22,5	8,79	128,06	-0,25	93,21
	45	9,45	135,00	-	-
0,25	-45	3,63	135,00	-	-
	-22,5	3,37	139,99	-	-
	0	6,18	121,45	-0,06	73,37
	22,5	7,81	128,06	-	-
	45	8,42	135,00	-	-

Tabla 4.32.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para la placa ortótropa cuadrada finita sometida a diferentes combinaciones de carga en el borde exterior, y distintas orientación de los ejes de ortotropía (boron/epoxy).  $a/l=0,01$ .

$N_{xy}/N$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
1,00	-45	3,83	135,00	-3,80	45,00
	-22,5	3,70	119,92	-3,69	51,41
	0	8,66	121,28	-4,18	59,06
	22,5	9,96	128,24	-1,19	60,42
	45	10,64	135,00	-0,35	45,00
0,75	-45	3,79	135,00	-2,28	45,00
	-22,5	3,53	120,09	-2,28	51,23
	0	8,06	121,11	-2,95	59,23
	22,5	9,44	128,06	-0,67	60,42
	45	10,10	135,00	-	-
0,50	-45	3,72	135,00	-0,25	45,00
	-22,5	3,45	138,92	-0,45	50,35
	0	7,27	121,28	-1,34	59,57
	22,5	8,74	128,06	-0,25	93,21
	45	9,37	135,00	-	-
0,25	-45	3,63	135,00	-	-
	-22,5	3,37	139,99	-	-
	0	6,16	121,45	-0,07	73,37
	22,5	7,76	128,06	-	-
	45	8,36	135,00	-	-

Tabla 4.33.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para la placa ortótropa cuadrada finita sometida a diferentes combinaciones de carga en el borde exterior, y distintas orientación de los ejes de ortotropía (boron/epoxy).  $a/l=0,005$ .

Del análisis de los resultados expuestos en las tablas anteriores, se puede observar que los mayores valores de  $K_+$  en todas las relaciones  $N_{xy}/N$  y  $a/l$  analizadas ocurren para la orientación  $\theta=45^\circ$ . Los menores valores de  $K_+$  ocurren para el valor de  $\theta=-22,5^\circ$ , en cada una de las relaciones  $N_{xy}/N$  y  $a/l$ . La Figura 4.41 muestra la variación de  $K_+$  según  $\theta$  para la relación  $a/l=0,2$ . En ella se observa que para valores de  $\theta=-22,5^\circ$  y  $-45^\circ$ , los valores de  $K_+$  para los distintos valores de  $N_{xy}/N$  son similares.

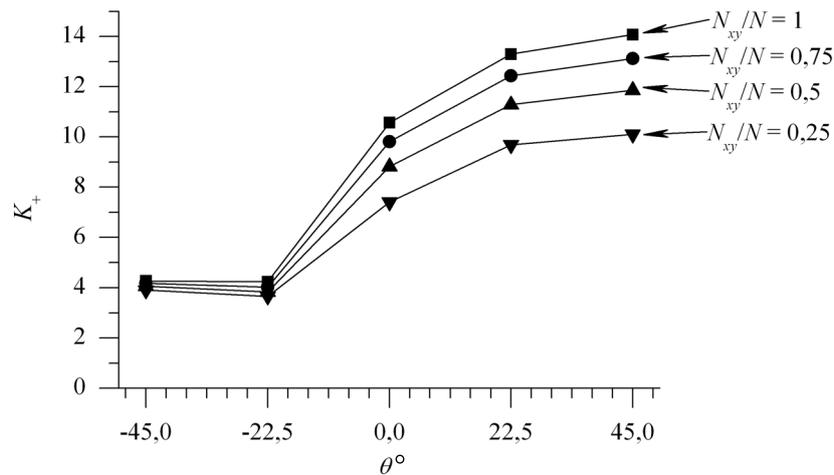


Figura 4.41.  $K_+$  versus  $\theta$  para distintas relaciones  $N_{xy}/N$  y  $a/l=0,2$ , material boron/epoxy.

La Figura 4.42 muestra la variación de  $K_+$  con respecto a la relación  $l/a$  para las orientaciones  $\theta=22,5^\circ$  y  $-45^\circ$ . El valor de  $\theta=22,5^\circ$  produce las mayores diferencias entre los factores  $K_+$  correspondientes a las relaciones  $l/a=5$  y  $200$ . Por ejemplo, las diferencias son del 33,53% para  $N_{xy}/N=1$  y del 24,74% para  $N_{xy}/N=0,25$ . Por otra parte, el ángulo  $\theta=-45^\circ$  produce las menores diferencias entre los factores  $K_+$  correspondientes a las relaciones extremas modeladas de  $l/a$ , ver Figura 4.42, siendo la variación del 11,49% para  $N_{xy}/N=1$ .

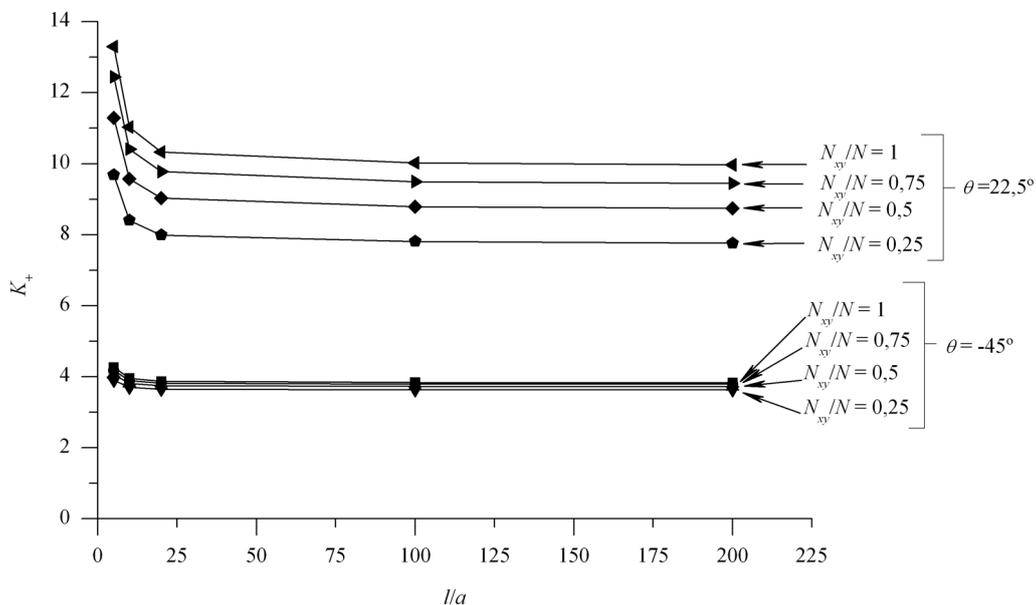


Figura 4.42.  $K_+$  versus  $l/a$  para diferentes relaciones de  $N_{xy}/N$ , y dos ángulos  $\theta=22,5^\circ$  y  $-45^\circ$ , material boron/epoxy.

Por otro lado, se observaron los valores más altos de  $K_+$ , como era de esperar, para el caso en que  $N_{xy}/N=1$ .

La Figura 4.43 muestra la variación de  $K_{-}$  con respecto a la relación  $l/a$  para  $\theta=-45^{\circ}$ . El variación de  $K_{-}$  para la relación  $N_{xy}/N=1$  y  $l/a=5$  con respecto al mismo valor, pero para la relación  $l/a=200$  es del 74%.

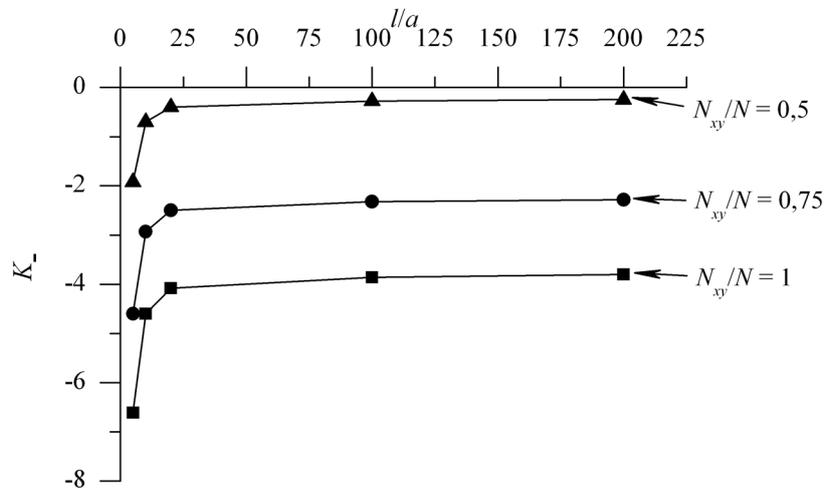


Figura 4.43.  $K_{-}$  versus  $l/a$  para las relaciones de  $N_{xy}/N=0,5, 0,75, 1$ , y  $\theta=-45^{\circ}$ , material boron/epoxy.

A continuación se vuelcan los valores de los distintos parámetros de concentración de tensiones para placas finitas de diferentes relaciones  $a/l$ , para un material de alta ortotropía como el graphite/epoxy.

$N_{xy}/N$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
1,00	-45	3,67	135,36	-7,86	45,00
	-22,5	5,09	120,09	-7,17	51,76
	0	10,99	121,45	-6,00	59,06
	22,5	13,04	128,41	-1,63	60,25
	45	14,07	135,00	-0,50	45,00
0,75	-45	3,60	135,36	-5,85	45,00
	-22,5	4,85	135,36	-5,31	45,00
	0	10,14	121,45	-4,45	59,06
	22,5	12,01	128,41	-0,91	60,42
	45	12,95	135,00	-	-
0,50	-45	3,51	135,36	-3,17	45,00
	-22,5	4,55	135,36	-2,83	45,00
	0	9,01	121,62	-2,42	59,57
	22,5	10,65	128,41	-0,31	96,04
	45	11,45	135,00	-	-
0,25	-45	3,37	135,36	-	-
	-22,5	4,12	120,09	-	-
	0	7,45	121,79	-0,48	72,07
	22,5	8,74	128,41	-	-
	45	9,35	135,00	-	-

Tabla 4.34.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para la placa ortótropa cuadrada finita sometida a diferentes combinaciones de carga en el borde exterior, y distintas orientación de los ejes de ortotropía (graphite/epoxy).  $a/l=0,2$ .

$N_{xy}/N$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
1,00	-45	3,33	135,36	-5,45	45,00
	-22,5	4,62	120,09	-5,22	51,76
	0	9,34	121,62	-4,95	59,06
	22,5	10,74	128,41	-1,35	60,25
	45	11,28	135,00	-0,34	45,00
0,75	-45	3,28	135,36	-3,84	45,00
	-22,5	4,43	120,09	-3,69	51,76
	0	8,65	121,62	-3,65	59,23
	22,5	9,99	128,41	-0,70	60,42
	45	10,50	135,00	-	-
0,50	-45	3,22	135,36	-1,69	45,00
	-22,5	4,17	120,09	-1,65	51,94
	0	7,73	121,79	-1,96	59,74
	22,5	9,00	128,41	-0,29	99,54
	45	9,46	135,00	-	-
0,25	-45	3,13	135,36	-	-
	-22,5	3,82	120,26	-	-
	0	6,46	121,96	-0,56	73,37
	22,5	7,61	128,41	-	-
	45	8,01	135,00	-	-

Tabla 4.35.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para la placa ortótropa cuadrada finita sometida a diferentes combinaciones de carga en el borde exterior, y distintas orientación de los ejes de ortotropía (graphite/epoxy).  $a/l=0,1$ .

$N_{xy}/N$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
1,00	-45	3,27	135,36	-4,84	45,00
	-22,5	4,50	120,09	-4,63	51,76
	0	8,92	121,62	-4,64	59,06
	22,5	10,05	128,41	-1,27	60,25
	45	10,64	135,00	-0,31	45,00
0,75	-45	3,22	135,36	-3,32	45,00
	-22,5	4,32	120,09	-3,20	51,76
	0	8,27	121,79	-3,40	59,29
	22,5	9,39	121,41	-0,63	60,42
	45	9,95	135,00	-	-
0,50	-45	3,17	135,36	-1,30	45,00
	-22,5	4,08	120,09	-1,29	51,94
	0	7,41	121,79	-1,80	59,74
	22,5	8,51	128,41	-0,28	100,92
	45	9,02	135,00	-	-
0,25	-45	3,08	135,36	-	-
	-22,5	3,74	120,26	-	-
	0	6,23	121,96	-0,56	74,03
	22,5	7,27	128,41	-	-
	45	7,73	135,00	-	-

Tabla 4.36.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para la placa ortótropa cuadrada finita sometida a diferentes combinaciones de carga en el borde exterior, y distintas orientación de los ejes de ortotropía (graphite/epoxy).  $a/l=0,05$ .

$N_{xy}/N$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
1,00	-45	3,24	135,36	-4,59	45,00
	-22,5	4,45	120,09	-4,39	51,76
	0	8,75	121,62	-4,54	59,06
	22,5	9,76	128,41	-1,24	60,25
	45	10,38	135,00	-0,29	45,00
0,75	-45	3,20	135,36	-3,11	45,00
	-22,5	4,27	120,09	-2,99	51,76
	0	8,13	121,79	-3,32	59,23
	22,5	9,14	128,41	-0,61	60,58
	45	9,72	135,00	-	-
0,50	-45	3,15	135,36	-1,14	45,00
	-22,5	4,04	120,09	-1,14	51,94
	0	7,29	121,79	-1,75	51,91
	22,5	8,30	128,41	-0,28	101,60
	45	8,84	135,00	-	-
0,25	-45	3,07	135,36	-	-
	-22,5	3,72	120,26	-	-
	0	6,14	121,96	-0,57	74,36
	22,5	7,13	128,59	-	-
	45	7,61	135,00	-	-

Tabla 4.37.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para la placa ortótropa cuadrada finita sometida a diferentes combinaciones de carga en el borde exterior, y distintas orientación de los ejes de ortotropía (graphite/epoxy).  $a/l=0,01$ .

$N_{xy}/N$	$\theta^\circ$	$K_+$	$\beta_+^\circ$	$K_-$	$\beta_-^\circ$
1,00	-45	3,24	135,36	-4,53	45,00
	-22,5	4,45	120,09	-4,34	51,76
	0	8,74	121,62	-4,50	59,06
	22,5	9,72	128,41	-1,23	60,25
	45	10,29	135,00	-0,28	45,00
0,75	-45	3,20	135,36	-3,06	45,00
	-22,5	4,27	120,09	-2,96	51,76
	0	8,11	121,79	-3,29	59,23
	22,5	9,10	90,79	-0,60	60,58
	45	9,65	135,00	-	-
0,50	-45	3,14	135,36	-1,10	45,00
	-22,5	4,04	120,09	-1,11	51,94
	0	7,28	121,79	-1,73	59,91
	22,5	8,27	128,41	-0,28	101,60
	45	8,78	135,00	-	-
0,25	-45	3,07	135,36	-	-
	-22,5	3,71	120,26	-	-
	0	6,13	121,96	-0,57	74,36
	22,5	7,11	128,59	-	-
	45	7,58	135,00	-	-

Tabla 4.38.  $K_+$ ,  $\beta_+$ ,  $K_-$  y  $\beta_-$  para la placa ortótropa cuadrada finita sometida a diferentes combinaciones de carga en el borde exterior, y distintas orientación de los ejes de ortotropía (graphite/epoxy).  $a/l=0,005$ .

De los resultados dados en las tablas anteriores, se puede observar que los mayores valores de  $K_+$  en cada relación  $a/l$  y  $N_{xy}/N$  ocurren para la orientación  $\theta=45^\circ$ . Los menores valores de  $K_+$  ocurren para el valor de  $\theta=-45^\circ$  en cada relación  $N_{xy}/N$  y  $a/l$ . La Figura 4.44 muestra la variación de  $K_+$  según  $\theta$  para la relación  $a/l=0,2$ . En ella se observa que para cualquier relación  $N_{xy}/N$  modelada, el factor  $K_+$  se incrementa al variar el ángulo  $\theta=-45^\circ$  hasta  $\theta=45^\circ$ . También se observa, la cercanía de los valores de  $K_+$  para los distintas relaciones  $N_{xy}/N$  cuando  $\theta=-45^\circ$ .

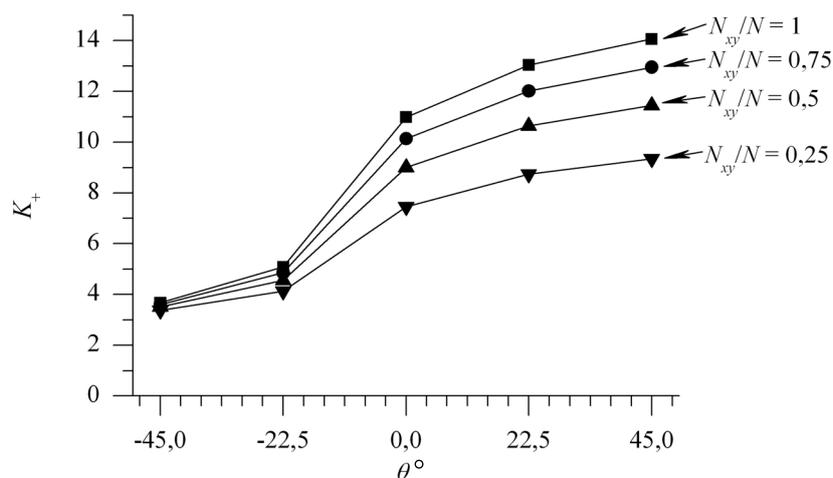


Figura 4.44.  $K_+$  versus  $\theta$  para distintas relaciones  $N_{xy}/N$  y  $a/l=0,2$ , material graphite/epoxy.

La Figura 4.45 muestra la variación de  $K_+$  con respecto a la relación  $l/a$  para las orientaciones  $\theta=45^\circ$  y  $-45^\circ$ . El valor de  $\theta=45^\circ$  produce la mayor variación de  $K_+$  al disminuir la relación  $l/a$  siendo del 36,74% para  $N_{xy}/N=1$  y el 23,35% para  $N_{xy}/N=0,25$ . Por otra parte, el ángulo  $\theta=-45^\circ$  produce menores diferencias de  $K_+$  con respecto a la variación de la relación  $l/a$ , ver Figura 4.45, siendo del 13,27% para  $N_{xy}/N=1$  y 9,77% para  $N_{xy}/N=0,25$ .

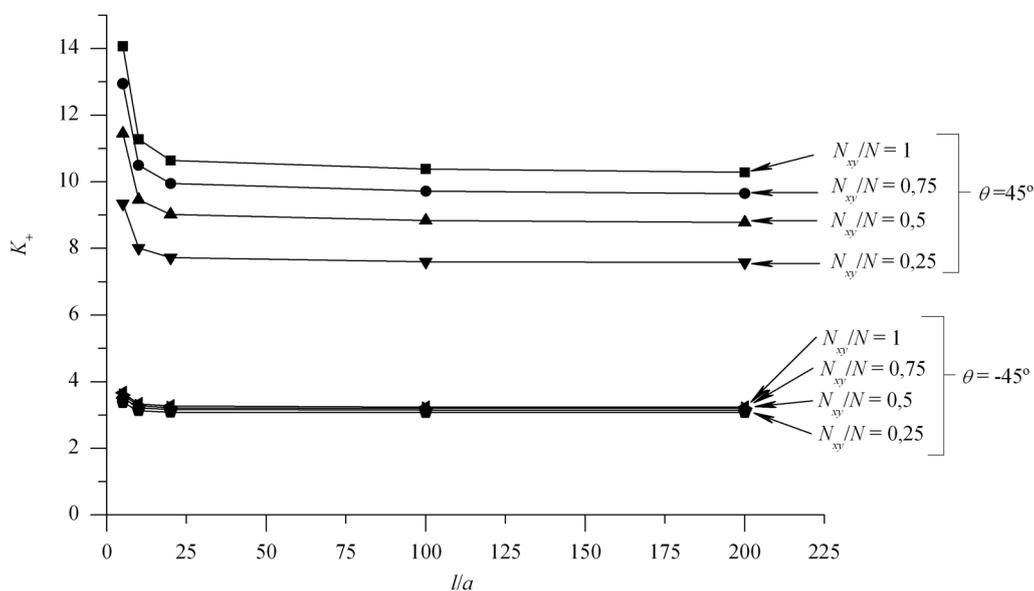


Figura 4.45.  $K_+$  versus  $l/a$  para diferentes relaciones de  $N_{xy}/N$ , y dos ángulos  $\theta=45^\circ$  y  $-45^\circ$ , material graphite/epoxy.

En lo que hace a las tensiones negativas, se observa que con el incremento del esfuerzo de corte  $N_{xy}$  y del tamaño del orificio se modifican las orientaciones para las cuales se produce el máximo  $K$ . Para valores menores de  $N_{xy}$  y orificios pequeños el máximo  $K$  se

produce para  $\theta=0^\circ$ . A medida que  $N_{xy}$  crece y el orificio aumenta de tamaño, el máximo  $K$  se produce en  $\theta=-45^\circ$ .

#### 4.4 CONCLUSIONES.

La teoría de placa infinita es aplicable a orificios muy pequeños en placas de grandes dimensiones cuando no se localizan en proximidades del borde de la placa.

De los casos estudiados, puede concluirse que la relación  $a/l=0,005$  constituye un límite hasta el cual es lícito aplicar la teoría de placa infinita<sup>[10]</sup>.

Como muestran los resultados, en cada una de las situaciones de cargas modeladas, al aumentar la relación  $a/l$  se incrementan el valor de  $K_+$ . Sin embargo, se observa que el aumento del parámetro  $K_+$  en relación a  $a/l$ , tiene una marcada dependencia de la orientación de los ejes principales de elasticidad, existiendo valores del ángulo  $\theta$  en donde este aumento es relativamente pequeño y valores de  $\theta$ , en donde el incremento es importante.

En las situaciones modeladas en donde ocurren compresiones se observa que los valores de  $K$  aumentan con la relación  $a/l$ , pero en mayor proporción en que lo hace  $K_+$ . Este aumento depende de la orientación de los ejes principales de ortotropía. La consideración del aumento de las cargas de compresión cobra interés en los casos que, dependiendo del espesor  $h$  de la placa, se pueda producir pandeo localizado.

En cada una de las situaciones modeladas se consideraron tres materiales ortótropos con características elásticas muy diferentes. Aún así, es muy difícil determinar en forma general con cuál de los materiales se logra el valor más bajo de  $K_+$  o  $K_-$ , ya que esto depende de la orientación de los ejes principales de elasticidad, ángulo  $\theta$ . Es así que, en la etapa de diseño, la selección del material ortótropo deberá considerar distintas orientaciones de los ejes principales de elasticidad y se adoptará una solución de compromiso entre los valores extremos de  $K_+$  o  $K_-$ .

En todos los casos analizados se consideró el orificio centrado en la placa cuadrada o panel. Una extensión al estudio realizado, sería el análisis de los valores de  $K_+$  o  $K_-$  al considerar distintas posiciones del orificio en la placa.

#### 4.5 BIBLIOGRAFÍA.

- [1] W. D. Pilkey, “*Peterson’s stress concentration factors*”, John Wiley & Sons, Inc., New York (1997).
- [2] S. Timoshenko, J. N. Goodier, “*Theory of elasticity*”, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York (1951).
- [3] Hwai-Chung Wu, Bin Mu, “On stress concentrations for isotropic/orthotropic plates and cylinders with a circular hole”, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 34, 127-134 (2003).

- [4] S. Maiz, R. E. Rossi, P. A. A. Laura y D. V. Bambill, “Efectos de la ortotropía sobre el factor de tensiones: extensión del problema de Kirsch”, ENIEF 2004, *Mecánica Computacional*, Vol. XXIII, 673-692 (2004).
- [5] S. G. Lekhnitskii, “*Anisotropic Plates*”, Gordon and Breach Science Publishers, New York (1968).
- [6] ALGOR 20, “*Professional Mech/VE*”, Algor Inc. (2007).
- [7] L. Logan Daryl, “*A first course in the finite element method using Algor*”, Thomson Learning, ISBN 0-534-38068-9.
- [8] V. G. Ukadgaonder, D. K. N. Rao, “Stress distribution around triangular holes in anisotropic plates”, *Composites Structures*, Vol. 45, 171-183 (1999).
- [9] D. V. Bambill, C. A. Rossit, A. Susca, “Estado tensional en torno de un orificio cuadrado en una placa ortótropa”, XXXIII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, memorias del congreso en CD (2008).
- [10] D. V. Bambill, C. A. Rossit, A. Susca, “Numerical experiments on the determination of stress concentration factors in orthotropic perforated plates subjected to in-plane loading”, *Structural Engineering and Mechanics*, sometido a publicación (2008).

