

CAPÍTULO 2

**Concentración de tensiones en placa cuadrada ortótropa
con un pequeño orificio circular.**

2.1 INTRODUCCIÓN.

En la etapa de diseño de estructuras o mecanismos, es importante conocer los esfuerzos y la distribución de los mismos para una adecuada selección de materiales a utilizar en su construcción. De esta manera es posible optimizar la forma geométrica, y responder a los requerimientos de su funcionamiento. En diversas disciplinas de la ingeniería es una práctica común, el realizar orificios en los elementos estructurales para alivianarlas, alterar su respuesta dinámica, permitir el pasaje de cables o conductos o el acceso a otras partes de la estructura entre otros motivos.

Asimismo, como es sabido, la presencia de orificios en estructuras produce alteraciones muy significativas en la distribución de las tensiones, de allí la singular importancia de conocer cómo se distribuyen, en los entornos de los orificios, y los valores extremos que las mismas alcanzan en sus cercanías para realizar el diseño.

2.1.1 El problema de Kirsch.

El estudio de la concentración de las tensiones que produce un orificio circular practicado en una placa delgada de dimensiones infinitas, de material isótropo, y sometida a un esfuerzo de tracción uniaxial, $N_x=N$ en su plano, ver Figura 2.1, fue resuelto por Kirsch ^{[1], [2], [3]} en el año 1898. El clásico problema, así planteado, es un estado plano de tensiones.

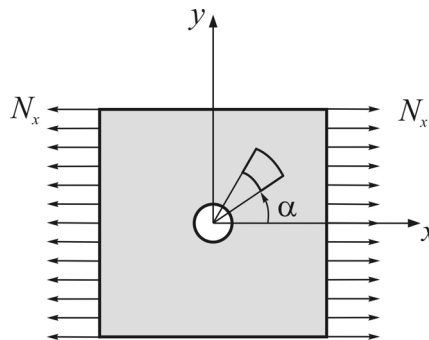


Figura 2.1. Esquema del problema de Kirsch.

La ecuación diferencial que gobierna el estado plano de tensiones es:

$$\nabla^4 F = 0 \quad (2.1)$$

Junto con las condiciones de borde del sistema.

F es la denominada tradicionalmente función tensión, o función de Airy, y en ausencia de fuerzas de volumen, se relaciona con las tensiones normales del plano σ_x , σ_y y τ_{xy} a través de las conocidas expresiones:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (2.2)$$

La solución de la ecuación biarmónica, expresión (2.1), junto con las condiciones de bordes, permite determinar las expresiones de las tensiones en el plano. Haciendo un cambio de coordenadas, de cartesianas a coordenadas polares, r y α , se expresa la tensión radial σ_r y la tensión tangencial σ_α sobre el dominio del problema en la forma:

$$\sigma_r = \frac{N}{2h} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{N}{2h} \left(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4}\right) \cos(2\alpha) \quad (2.3)$$

$$\sigma_\alpha = \frac{N}{2h} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{N}{2h} \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right) \cos(2\alpha) \quad (2.4)$$

$$\tau_{r\alpha} = -\frac{N}{2h} \left(1 + 2\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4}\right) \sin(2\alpha) \quad (2.5)$$

Siendo: a el radio del orificio circular, r la coordenada radial medida desde el centro del orificio al punto considerado en la placa, α la coordenada angular medida en sentido antihorario a partir del semieje positivo x y N el esfuerzo uniforme por unidad de longitud aplicada en los bordes.

Obviamente cuando $r = a$, los valores de $\sigma_r = \tau_{r\alpha} = 0$. Reemplazando $r = a$ y $\alpha = \pi/2$ y $(3/2)\pi$ la expresión (2.4) asume el valor $3(N/h)$. Esto es, la tensión tangencial presente en un punto del borde interior es tres veces la tensión aplicada en el borde exterior. Estos puntos están ubicados sobre el diámetro perpendicular a la dirección de la carga.

Una variante del problema anterior consiste en considerar la placa sometida a un estado biaxial y uniforme de carga en su plano, $N_x = N_y = N$. Al tratarse de un problema bidimensional la ecuación diferencial gobernante es la (2.1) sujeto a las nuevas condiciones de borde.

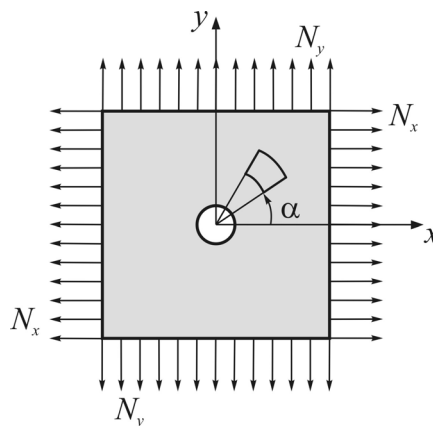


Figura 2.2. Estado biaxial de tensiones.

Las expresiones resultantes para las componentes del tensor de tensión son:

$$\sigma_r = \frac{N}{h} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (2.6)$$

$$\sigma_\alpha = \frac{N}{h} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (2.7)$$

En el contorno del orificio, cuando $r = a$ en la ecuación (2.7), lógicamente $\sigma_r = 0$ y σ_α adopta la magnitud $\sigma_\alpha = 2(N/h)$ en todo el contorno. Se observa una disminución del factor de concentración de tensiones con respecto al caso uniaxial.

Los dos problemas anteriores ilustran la problemática y variabilidad de los elementos estructurales con orificios internos, en este caso particular se trata de un orificio circular.

2.1.2 Placa de material ortótropo.

Diversas configuraciones de carga y geometría de orificios están resueltas analíticamente y por métodos aproximados en la bibliografía técnico-científica para materiales isotropos. Para formas geométricas particulares, la solución analítica del sistema diferencial se vuelve de difícil obtención o prácticamente imposible. La solución analítica se dificulta aún más, cuando el material empleado, posee características elásticas anisotrópicas. Un caso especial sucede cuando el material de un cuerpo homogéneo tiene tres planos de simetría elástica perpendiculares entre sí que pasan a través de cada punto del dominio. Entonces el material se dice ortótropo.

Lekhnitskii ^[4], resolvió el estado plano de tensiones para variadas geometrías de placas con orificios, con distintas sollicitaciones de esfuerzos. Otros autores ^{[5],[6]} han analizado concentración de tensiones en medios ortótropos ante diversas geometrías de orificio.

Este capítulo se centra en el análisis de los esfuerzos que se producen en cercanías de un orificio circular practicado en una placa delgada ortótropa de dimensiones infinitas, sujeta a una tensión uniforme de tracción “ N ” en dos direcciones ortogonales. Para este análisis, las direcciones de carga se adoptan coincidentes con los ejes coordenados “ x ” e “ y ”; tal como se muestra en la Figura 2.2.

Si las direcciones principales de elasticidad coinciden con los ejes coordenados y no se consideran fuerzas de volumen, la ecuación diferencial gobernante es:

$$\frac{1}{E_2} \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_1} \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (2.8)$$

Donde: F es la función tensión que cumple con las relaciones dadas en (2.2).

E_1 , E_2 son los módulos de Young en las direcciones principales elásticas “ x ” e “ y ” respectivamente.

$G = G_{12}$, es el módulo de elasticidad transversal, que caracteriza el cambio de ángulo entre las direcciones principales “ x ” e “ y ”,

$\nu_1 = \nu_{12}$ es el módulo de Poisson que caracteriza la disminución de longitud en la dirección “ y ” durante la tracción en dirección “ x ”, y análogamente $\nu_2 = \nu_{21}$ es el módulo de Poisson que caracteriza la disminución de longitud en la dirección “ x ” durante la tracción en dirección “ y ”.

Además existe la siguiente relación entre los módulos de Young y los módulos de Poisson debido a la simetría de los materiales ortótropos:

$$E_1 \cdot \nu_2 = E_2 \cdot \nu_1 \quad (2.9)$$

Por consiguiente para realizar el estudio de las tensiones de una placa ortótropa sujeta a un estado plano de tensiones es suficiente conocer sólo estas cuatro constantes E_1, E_2, G y ν_1 .

Resolviendo la ecuación diferencial (2.8) junto a las condiciones de bordes para el caso de la placa con un orificio circular, sin perturbaciones en sus bordes, y sujeta a tensiones de tracción “ p ” en las dos direcciones principales (tensión hidrostática en el plano xy), se obtiene para la tensión tangencial sobre el orificio:

$$\sigma_\alpha = p \frac{E_\alpha}{E_1} \left[-k + k(k+n) \cos^2(\alpha) + (1+n) \sin^2(\alpha) \right] \quad (2.10)$$

Donde:

$$k = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \quad (2.11)$$

$$n = \sqrt{2 \left(\frac{E_1}{E_2} - \nu_1 \right) + \frac{E_1}{G}} \quad (2.12)$$

α , es el ángulo polar medido desde el eje “ x ” positivo en sentido antihorario.

E_α es el módulo de Young en la dirección tangente al borde del orificio.

En función de las constantes elásticas en las direcciones principales, se puede expresar E_α como:

$$\frac{1}{E_\alpha} = \frac{\sin^4(\alpha)}{E_1} + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) + \frac{\cos^4(\alpha)}{E_2} \quad (2.13)$$

Se define como factor de tensiones a la relación $K = \sigma_\alpha / (N/h)$ y las relaciones extremas:

$$K_+ = \frac{\sigma_{\alpha+}}{(N/h)} \quad (2.14)$$

$$K_{+m} = \frac{\sigma_{\alpha+min}}{(N/h)} \quad (2.15)$$

Donde:

K_+ es el factor de concentración de tensiones máximas.

K_{+m} corresponde a las tensiones de tracción mínimas que aparecen en el borde del orificio al aplicar la tensión de tracción p .

En el presente capítulo se consideran dos situaciones cuyos resultados se exponen en tablas adecuadas. De esta manera se ofrecen soluciones de casos no encontrados en la literatura sobre la concentración de tensiones, útiles para el diseño o comparación con resultados de otros métodos existentes.

2.2 ESTADO BIAxIAL EN PLACA ORTÓTropa.

2.2.1 Diseño del mallado.

La primera situación, se trata de una placa de material ortótropo, con un pequeño orificio circular, sometida a un estado de esfuerzos biaxial en su plano. Los ejes principales

de elasticidad coinciden con los ejes coordenados como muestra la Figura 2.3. En este caso $N_x=N_y=N$.

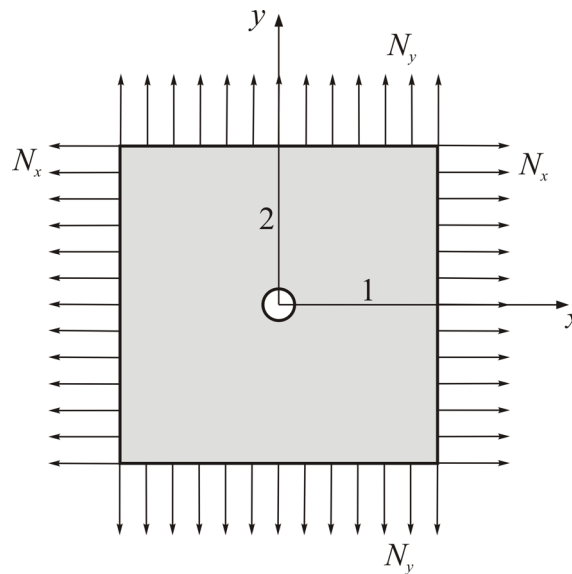


Figura 2.3. Esquema del sistema a analizar.

En el análisis del sistema, distintos módulos E_1 , E_2 , G y ν_1 fueron tomados en consideración para cubrir un gran espectro de situaciones posibles.

Para el análisis del problema propuesto se utilizó el módulo de análisis lineal perteneciente al software comercial del método de elementos finitos ALGOR^[7]. Este permite, por un lado, realizar el diseño geométrico del mallado del modelo correspondiente, efectuar el ensamble y armado de los sistemas de ecuaciones, resolverlos mediante rutinas numéricas internas y mostrar los resultados obtenidos. Dentro de las posibilidades de este módulo está permitida la utilización de dos tipos de elementos planos (2D) diferentes; los elementos cuadrangulares de cuatro nodos y los elementos triangulares de tres nodos. Ambos elementos tienen dos grados de libertad por nodo que corresponden a los corrimientos en las direcciones coordenadas, y por ello resultan adecuados para la característica bidimensional del problema. Los dos elementos son elementos conformes.

En este proceso, es importante tener presente las características del programa, antes mencionadas, para realizar un mallado acorde a los datos requeridos y a la precisión deseada para el estudio.

En este punto es importante definir: las condiciones de borde del problema y la ubicación de los puntos de interés para un correcto diseño del mallado. El objetivo del análisis es determinar el factor de concentración de tensiones máximo en el modelo, que tendrá lugar en el borde del orificio circular. Por ello es necesario discretizar la circunferencia en un número de segmentos rectos tal que permita obtener un conjunto de datos denso y homogéneo sobre el orificio. Por otro lado, se logró un mallado fino y de elementos regulares en las cercanías del agujero para asegurar la precisión del método de elementos finitos.

Con el fin antes mencionado se colocaron 400 nodos sobre la circunferencia del borde interno lo cual nos permitió obtener datos de tensiones, sobre el borde interno, cada $0,9^\circ$. También, se pudo construir un mallado denso de elementos regulares, como muestra la Figura 2.4, en las cercanías del orificio donde se espera la mayor distorsión del campo de tensiones.

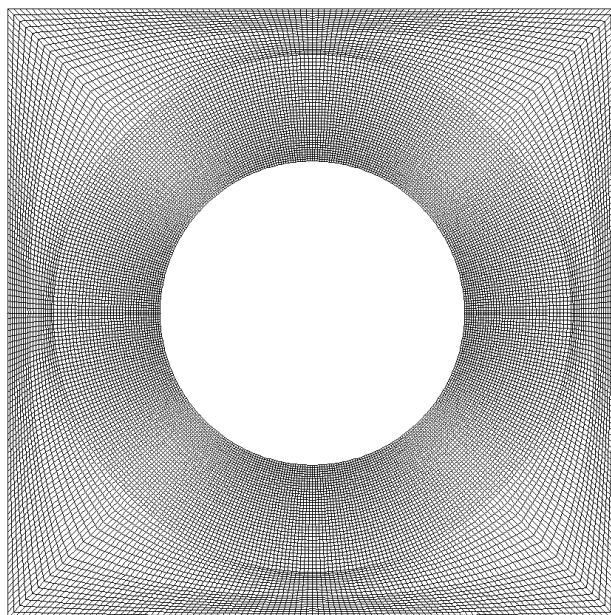


Figura 2.4. Mallado en las cercanías del orificio.

El mallado mostrado posee 22800 nodos y 22400 elementos 2D, cuadrangulares. Dos zonas componen esta parte del mallado. Una zona, la interior, está construida con una corona circular de elementos cuadrangulares y una segunda región, circundante a ésta, que permite pasar de una distribución circular de elementos a una distribución longitudinal con direcciones preponderantemente horizontal y vertical. Los elementos que rodean al orificio poseen una distorsión muy pequeña y es la misma para todo el sector de la corona circular, lo cual contribuye a la precisión del método. En cambio, la distorsión de los elementos aumenta notablemente en la zona relativamente lejana al orificio donde el campo de tensiones no sufre importantes cambios. Esto se puede apreciar mejor en la Figura 2.5, la cual muestra un cuarto del orificio.

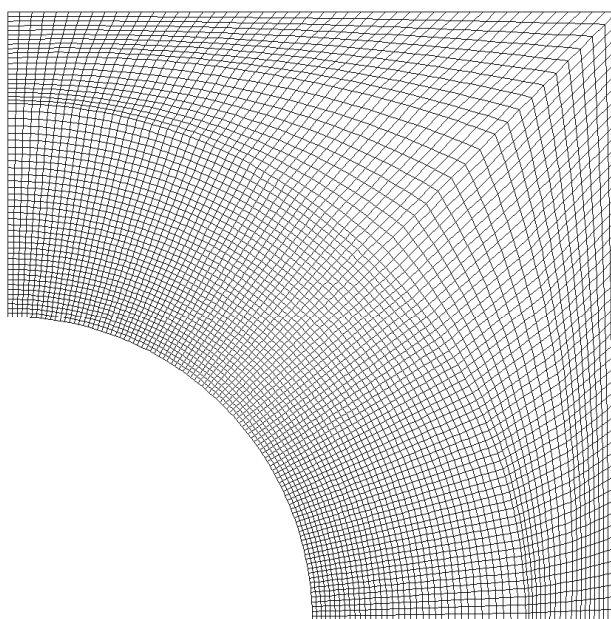


Figura 2.5. Mallado en las cercanías del orificio, detalle.

Al alejarnos del orificio el campo de tensiones será más uniforme. Este comportamiento es aprovechable desde el punto de vista del modelado numérico, ya que en zonas alejadas del agujero conviene que los elementos sean de mayor tamaño, lo cual reduce el sistema de ecuaciones a resolver. Por ello, hacia los bordes externos, se aumentó el tamaño de los elementos cercanos al orificio con la utilización de elementos triangulares. Esta transición se muestra la Figura 2.6.

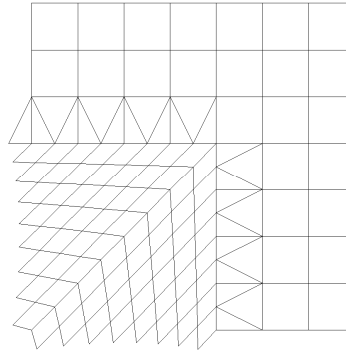


Figura 2.6. Detalle de la zona de transición.

Un factor importante en el problema planteado es el tamaño de la placa cuadrada, es decir la magnitud l en relación al diámetro d , Figura 2.7.

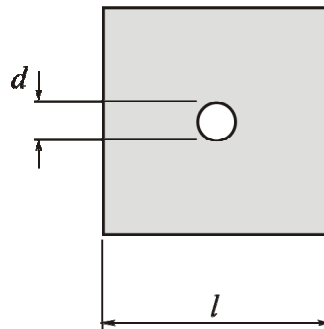


Figura 2.7. Medidas del modelo.

Como se pretende aproximar el factor de concentración de tensiones en una placa de dimensiones infinitas es importante fijar, mediante algún criterio, qué relación d/l del modelo en elementos finitos reproduce, aproximadamente, los valores de tensiones en la placa de dimensiones infinitas.

Para este fin se realizaron varios mallados con relaciones d/l decrecientes. El factor de concentración de tensiones de cada modelo se comparó con la solución dada por Lekhnitskii^[4] para un material con los siguientes valores de sus constantes elásticas:

$$E_1 = 1,2 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$E_2 = 0,6 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$G = 0,07 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\nu_1 = 0,071$$

Por consiguiente las relaciones elásticas se pueden expresar como: $E_1/E_2 = 2$ y $G/E_2 = 0,1167$

Los resultados dados por Lekhnitskii son para la máxima tensión:

$$\sigma_{\alpha+} = 4,04 N \rightarrow \alpha = 90^\circ \quad (2.16)$$

y para la mínima:

$$\sigma_{\alpha+min} = 1,09 N \rightarrow \alpha = 45^\circ \quad (2.17)$$

α indica la posición sobre el contorno del orificio en la que se produce cada una de las tensiones tangenciales, medido en sentido antihorario a partir del eje x .

Los sucesivos modelos fueron construidos agregando zonas externas de menor densidad de elementos para considerar placas de mayor tamaño, pudiéndose decir que cada modelo contiene al anterior. Todos los modelos poseen restricciones en dos nodos, para anular los movimientos de cuerpo rígido. En uno de los nodos se impone la nulidad de corrimientos en la dirección x e y , en otro, la nulidad de corrimiento en dirección y . Ambos nodos tienen coordenada $y = 0$ y se encuentran sobre los bordes verticales exteriores. Las características de los distintos modelos se detallan en la Tabla 2.1.

Modelo	d/l	Nº de elementos	Nº de nodos
1	0,160	43408	43608
2	0,082	61344	61088
3	0,055	90224	90120
4	0,041	101244	100304
5	0,033	114240	113376

Tabla 2.1. Características de los distintos modelos diseñados.

En los modelos ensayados se notó la misma distribución de tensiones aunque no los mismos valores numéricos. Se observó una perfecta concordancia en la ubicación de los puntos donde se producen las tensiones extremas en todos los modelos.

De esta manera se llegó al modelo 5 que brinda una concordancia satisfactoria con respecto a los encontrados en la literatura (2.16) y (2.17), ver Tabla 2.2, y es el adoptado para obtener los resultados numéricos de los casos analizados.

Modelo	d/l	K_+	K_{+m}
1	0,160	4,35	1,16
2	0,082	4,13	1,10
3	0,055	4,08	1,09
4	0,041	4,06	1,08
5	0,033	4,05	1,08

Tabla 2.2. Valores de K_+ y K_{+m} para cada relación d/l del modelo.

La Figura 2.8 muestra un detalle del mallado utilizado donde se aprecia la zona interior y las distintas zonas de transición a elementos de mayor tamaño hacia los bordes externos.

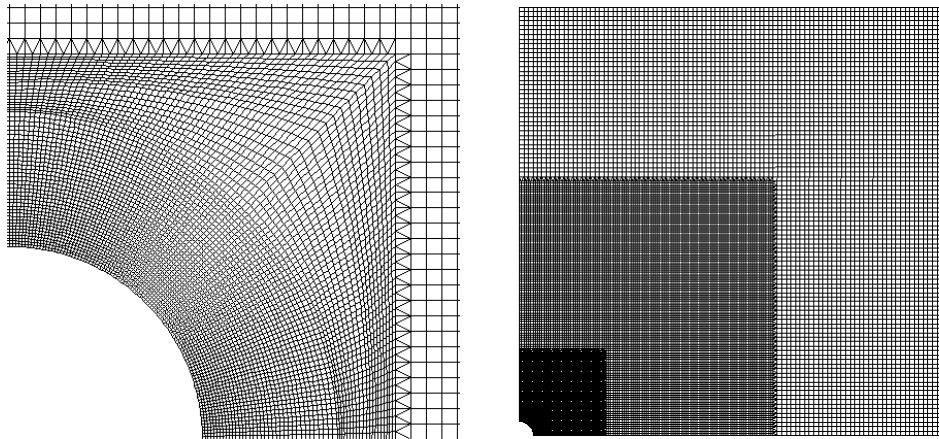


Figura 2.8. Detalle del mallado del modelo 5.

2.2.2 Resultados numéricos.

El modelo de malla de la Figura 2.8, se utilizó para resolver el problema para placas con diferentes características elásticas. Se variaron los parámetros elásticos previamente definidos, E_1/E_2 y G/E_2 , y se mantuvo constante el coeficiente de Poisson ν_1 en un valor de 0,30. Se adoptaron valores de E_1/E_2 entre 1 y 10, en forma progresiva variando de a uno y luego se analizó para dos valores E_1/E_2 de considerable magnitud, 20 y 40. Para cada una de estas relaciones entre los módulos de elasticidad, se tomaron valores de $G/E_2 = 0,1, 0,3, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9$ y 1.

En cada tabla hay cuatro grupos de resultados, el valor del factor de concentraciones de tensiones máximo, K_+ , el ángulo β_+ que determina la ubicación del punto sobre el contorno del orificio donde se produce, el valor de K_{+m} , el ángulo que indica la posición β_{+m} y el valor del factor sobre los ejes coordenados x e y , K_{0° y K_{90° . Los ángulos están indicados en grados sexagesimales.

Los resultados obtenidos ^[8], se presentan desde la Tabla 2.3 hasta la Tabla 2.10. En la Tabla 2.3, que corresponde a la relación $G/E_2=0,1$, se observan los valores más altos del factor K_+ de todas las combinaciones elegidas.

$G/E_2 = 0,1$						
E_1/E_2	K_+	β_+°	K_{+m}	β_{+m}°	K_{0°	K_{90°
1	3,40440	90	1,18503	45,0000	3,40440	3,40440
2	4,33470	90	1,01465	48,6000	3,64344	4,33470
3	5,03769	90	0,93264	50,4000	3,74477	5,03769
4	5,62442	90	0,87906	52,1999	3,80380	5,62442
5	6,13658	90	0,83889	53,9999	3,84347	6,13658
6	6,59538	90	0,80646	54,8999	3,87241	6,59538
7	7,01336	90	0,77860	56,7000	3,89469	7,01336
8	7,39876	90	0,75363	57,6000	3,91252	7,39876
9	7,75732	90	0,73075	58,5000	3,92718	7,75732
10	8,09326	90	0,70922	60,3000	3,93951	8,09326
20	10,68360	90	0,48888	69,3000	4,00486	10,68360
40	14,00100	90	0,09052	71,9999	4,04900	14,00100

Tabla 2.3. Valores numéricos de K_+ , K_{+m} , K_{0° y K_{90° y posición de los mismos según E_1/E_2 para $G/E_2=0,1$.

$G/E_2 = 0,3$						
E_1/E_2	K_+	β_+°	K_{+m}	β_{+m}°	K_0°	K_{90°
1	2,18509	90	1,84762	45,00000	2,18509	2,18509
2	2,58000	90	1,62557	48,60000	2,40814	2,58000
3	2,86837	90	1,52548	50,40000	2,49830	2,86837
4	3,10621	90	1,46389	52,19990	2,54938	3,10621
5	3,31305	90	1,41991	53,09990	2,58305	3,31305
6	3,49839	90	1,38619	53,99990	2,60727	3,49839
7	3,66767	90	1,35909	54,89990	2,62570	3,66767
8	3,82437	90	1,33639	55,79990	2,64032	3,82437
9	3,97084	90	1,31657	55,79990	2,65225	3,97084
10	4,10877	90	1,29924	56,70000	2,66222	4,10877
20	5,20086	90	1,18724	61,19990	2,71414	5,20086
40	6,67045	90	1,05101	66,59990	2,74852	6,67045

Tabla 2.4. Valores numéricos de K_+ , K_{+m} , K_0° y K_{90° y posición de los mismos según E_1/E_2 para $G/E_2=0,3$.

$G/E_2 = 0,5$						
E_1/E_2	K_+	β_+°	K_{+m}	β_{+m}°	K_0°	K_{90°
1	2,17436	45	1,85050	-	1,85050	1,85050
2	2,08923	90	1,94119	48,60000	2,06230	2,08923
3	2,25403	90	1,84063	50,40000	2,14533	2,25403
4	2,38620	90	1,78055	51,30000	2,19140	2,38620
5	2,49921	90	1,73872	53,09990	2,22128	2,49921
6	2,59934	90	1,70727	53,99990	2,24250	2,59934
7	2,69006	90	1,68250	53,99990	2,25848	2,69006
8	2,77355	90	1,66197	54,89990	2,27103	2,77355
9	2,85125	90	1,64451	55,79990	2,28120	2,85125
10	2,92420	90	1,62952	56,70000	2,28963	3,49837
20	3,49837	90	1,53855	59,39990	2,33251	3,49837
40	4,27614	90	1,44948	63,89990	2,35978	4,27614

Tabla 2.5. Valores numéricos de K_+ , K_{+m} , K_0° y K_{90° y posición de los mismos según E_1/E_2 para $G/E_2=0,5$.

$G/E_2 = 0,6$						
E_1/E_2	K_+	β_+°	K_{+m}	β_{+m}°	K_0°	K_{90°
1	2,28731	45	1,75715	-	1,75715	1,75715
2	2,05287	49	1,95100	90,0000	1,96483	1,95100
3	2,07993	90	1,95394	50,4000	2,04523	2,07993
4	2,18124	90	1,89567	51,3000	2,08943	2,18124
5	2,26673	90	1,85572	53,0999	2,11790	2,26673
6	2,34176	90	1,82592	53,9999	2,13798	2,34176
7	2,40927	90	1,80264	53,9999	2,15303	2,40927
8	2,47106	90	1,78360	54,8999	2,16479	2,47106
9	2,52832	90	1,76750	55,7999	2,17428	2,52832
10	2,58188	90	1,75457	57,6000	2,18211	2,58188
20	2,99934	90	1,67264	59,3999	2,22145	2,99934
40	3,56032	90	1,59877	63,0000	2,24585	3,56032

Tabla 2.6. Valores numéricos de K_+ , K_{+m} , K_0° y K_{90° y posición de los mismos según E_1/E_2 para $G/E_2=0,6$.

$G/E_2 = 0,7$						
E_1/E_2	K_+	β_+°	K_{+m}	β_{+m}°	K_0°	K_{90°
1	2,38005	45	1,68738	-	1,68738	1,68738
2	2,14557	49	1,84718	90,0000	1,89161	1,84718
3	2,04873	50	1,94877	90,0000	1,96979	1,94877
4	2,02648	90	1,99254	50,4000	2,01242	2,02648
5	2,09087	90	1,95466	53,0999	2,03967	2,09087
6	2,14664	90	1,92666	53,9999	2,05879	2,14664
7	2,19630	90	1,90495	53,9999	2,07304	2,19630
8	2,24139	90	1,88747	54,8999	2,08412	2,24139
9	2,28289	90	1,87278	55,7999	2,09301	2,28289
10	2,32149	90	1,86030	55,7999	2,10034	2,32149
20	2,61734	90	1,78902	59,3999	2,13658	2,61734
40	3,00781	90	1,72840	63,0000	2,15843	3,00781

Tabla 2.7. Valores numéricos de K_+ , K_{+m} , K_0° y K_{90° y posición de los mismos según E_1/E_2 para $G/E_2=0,7$.

$G/E_2 = 0,8$						
E_1/E_2	K_+	β_+°	K_{+m}	β_{+m}°	K_0°	K_{90°
1	2,45796	45,0000	1,63312	-	1,63312	1,63312
2	2,22408	48,6000	1,76613	90,0000	1,83443	1,76613
3	2,12955	50,4000	1,84609	90,0000	1,91072	1,84609
4	2,07579	52,1999	1,90509	90,0000	1,95199	1,90509
5	2,03980	53,0999	1,95272	90,0000	1,97820	1,95272
6	2,01387	55,7999	1,99313	89,0999	1,99313	1,99315
7	2,02858	90,0000	1,99353	53,9999	2,01003	2,02858
8	2,06034	90,0000	1,97749	53,9999	2,02051	2,06034
9	2,08925	90,0000	1,96437	53,9999	2,02890	2,08925
10	2,11590	90,0000	1,95315	55,7999	2,03577	2,11590
20	2,31411	90,0000	1,89161	59,3999	2,06928	2,31411
40	2,56630	90,0000	1,84341	63,0000	2,08884	2,56630

Tabla 2.8. Valores numéricos de K_+ , K_{+m} , K_0° y K_{90° y posición de los mismos según E_1/E_2 para $G/E_2=0,8$.

$G/E_2 = 0,9$						
E_1/E_2	K_+	β_+°	K_{+m}	β_{+m}°	K_0°	K_{90°
1	2,52459	45,0000	1,58966	-	1,58966	1,58966
2	2,29165	48,6000	1,70097	90,0000	1,78846	1,70097
3	2,19949	50,4000	1,76335	90,0000	1,86312	1,76335
4	2,14802	52,1999	1,80710	90,0000	1,90320	1,80710
5	2,11408	53,0999	1,84104	90,0000	1,92850	1,84104
6	2,08980	54,8999	1,86892	90,0000	1,94604	1,86892
7	2,07154	54,8999	1,89271	90,0000	1,95897	1,89271
8	2,05697	55,7999	1,91354	90,0000	1,96893	1,91354
9	2,04508	55,7999	1,93213	90,0000	1,97686	1,93213
10	2,03513	56,7000	1,94896	90,0000	1,98334	1,94896
20	2,06675	90,0000	1,98297	58,5000	2,01440	2,06675
40	2,20413	90,0000	1,94671	63,0000	2,03191	2,20413

Tabla 2.9. Valores numéricos de K_+ , K_{+m} , K_0° y K_{90° y posición de los mismos según E_1/E_2 para $G/E_2=0,9$.

$G/E_2 = 1$						
E_1/E_2	K_+	β_+°	K_{+m}	β_{+m}°	K_0°	K_{90°
1	2,58242	45,0000	1,55403	90	1,55403	1,55403
2	2,35058	48,6000	1,64739	90	1,75065	1,64739
3	2,26076	50,4000	1,69517	90	1,82387	1,69517
4	2,21154	52,1999	1,72621	90	1,86292	1,72621
5	2,17962	53,0999	1,74873	90	1,88741	1,74873
6	2,15710	53,9999	1,76614	90	1,90429	1,76614
7	2,14051	54,8999	1,78019	90	1,91668	1,78019
8	2,12738	55,7999	1,79187	90	1,92618	1,79187
9	2,11690	55,7999	1,80181	90	1,93370	1,80181
10	2,10818	56,7000	1,81041	90	1,93982	1,81041
20	2,06548	59,3999	1,86060	90	1,96869	1,86060
40	2,04039	63,8999	1,90085	90	1,98431	1,90085

Tabla 2.10. Valores numéricos de K_+ , K_{+m} , K_0° y K_{90° y posición de los mismos según E_1/E_2 para $G/E_2=1$.

En las tablas subsiguientes, Tabla 2.11 y Tabla 2.12, se presentan una serie de casos en los que se estudió con más detalle el efecto de la variación de la relación de ortotropía. Se amplió el espectro de valores para las relaciones de E_1/E_2 entre 1 y 2 para $G/E_2 = 0,1$ y $0,5$.

$G/E_2 = 0,1$						
E_1/E_2	K_+	β_+°	K_{+m}	β_{+m}°	K_0°	K_{90°
1,0	3,40440	90	1,18503	45,0000	3,40440	3,40440
1,1	3,51518	90	1,15878	45,9000	3,44333	3,51518
1,2	3,62067	90	1,13542	45,9000	3,47699	3,62067
1,3	3,72155	90	1,11502	45,9000	3,50647	3,72155
1,4	3,81838	90	1,09644	46,7999	3,53254	3,81838
1,5	3,91161	90	1,07980	46,7999	3,55582	3,91161
1,6	4,00159	90	1,06465	47,7000	3,57677	4,00159
1,7	4,08865	90	1,05060	47,7000	3,59574	4,08865
1,8	4,17304	90	1,03781	47,7000	3,61303	4,17304
1,9	4,25499	90	1,02587	48,6000	3,62887	4,25499
2,0	4,33470	90	1,01465	48,6000	3,64344	4,33470

Tabla 2.11. K_+ , K_{+m} , K_0° y K_{90° y posición de los mismos para E_1/E_2 desde 1 a 2 para $G/E_2=0,1$.

$G/E_2 = 0,5$						
E_1/E_2	K_+	β_+°	K_{+m}	β_{+m}°	K_0°	K_{90°
1,0	2,28731	45,0000	1,75715	-	1,75715	1,75715
1,1	2,13624	45,9000	1,88093	90,00000	1,88631	1,88093
1,2	2,10341	45,9000	1,90912	90,00000	1,91689	1,90912
1,3	2,07476	46,7999	1,93569	90,00000	1,94336	1,93569
1,4	2,04938	46,7999	1,96079	90,00000	1,96654	1,96079
1,5	2,02677	47,70000	1,98460	89,09990	1,98702	1,98461
1,6	2,00739	85,4999	2,00517	6,30000	2,00529	2,00732
1,7	2,02903	90,0000	1,98772	45,90000	2,02169	2,02903
1,8	2,04986	90,00000	1,97095	46,79990	2,03651	2,04986
1,9	2,06991	90,0000	1,95547	47,70000	2,04999	2,06991
2,0	2,08923	90,0000	1,94119	48,60000	2,06230	2,08923

Tabla 2.12. K_+ , K_{+m} , K_0° y K_{90° y posición de los mismos para E_1/E_2 desde 1 a 2 para $G/E_2=0,5$.

La Tabla 2.13 corresponde a la relación $G/E_2 = 0,6$, con E_1/E_2 variando de 1 a 2,5 de una forma más detallada.

$G/E_2 = 0,6$						
E_1/E_2	K_+	β_+°	K_{+m}	β_{+m}°	K_{0°	K_{90°
1,0	2,28731	45,0000	1,75715	-	1,75715	1,75715
1,1	2,24855	45,9000	1,78234	90,0000	1,79245	1,78234
1,2	2,21538	45,9000	1,80568	90,0000	1,82254	1,80568
1,3	2,18641	46,7999	1,82746	90,0000	1,84855	1,82746
1,4	2,16093	46,7999	1,84792	90,0000	1,87128	1,84792
1,5	2,13812	46,7999	1,86724	90,0000	1,89135	1,86724
1,6	2,11777	47,7000	1,88556	90,0000	1,90922	1,88556
1,7	2,09929	47,7000	1,90301	90,0000	1,92525	1,90301
1,8	2,08243	47,7000	1,91967	90,0000	1,93971	1,91967
1,9	2,06705	48,6000	1,93565	90,0000	1,95284	1,93565
2,0	2,05287	49,0000	1,95100	90,0000	1,96483	1,95100
2,1	2,03976	48,6000	1,96578	90,0000	1,97582	1,96578
2,2	2,02758	48,6000	1,98004	90,0000	1,98593	1,98004
2,3	2,01625	49,5000	1,99381	89,0999	1,99528	1,99384
2,35	2,01095	52,1999	1,99965	0,9000	1,99969	2,00057
2,4	2,00728	85,4999	2,0039	0,9000	2,00395	2,00720
2,5	2,02016	90,0000	1,99569	45,9000	2,01201	2,02016

Tabla 2.13. K_+ , K_{+m} , K_{0° y K_{90° y posición de los mismos para E_1/E_2 desde 1 a 2,5 para $G/E_2=0,6$.

En la Tabla 2.14, Tabla 2.15 y Tabla 2.16 se presentan valores de concentración de tensiones para un rango más detallado de E_1/E_2 entre 5 y 7 con $G/E_2= 0,8, 0,9$ y 1.

$G/E_2 = 0,8$						
E_1/E_2	K_+	β_+°	K_{+m}	β_{+m}°	K_{0°	K_{90°
5,0	2,03980	53,0999	1,95272	90,0000	1,97820	1,95272
5,1	2,03680	54,8999	1,95704	90,0000	1,98032	1,95704
5,2	2,03397	54,8999	1,96129	90,0000	1,98236	1,96129
5,3	2,03121	54,8999	1,96548	90,0000	1,98433	1,96548
5,4	2,02853	54,8999	1,96960	90,0000	1,98624	1,96960
5,5	2,02592	54,8999	1,97367	90,0000	1,98808	1,97367
5,6	2,02338	54,8999	1,97767	90,0000	1,98987	1,97767
5,7	2,02091	54,8999	1,98162	90,0000	1,99160	1,98162
5,8	2,01850	54,8999	1,98551	90,0000	1,99327	1,98551
5,9	2,01712	54,8999	1,98791	90,0000	1,99430	1,98791
6,0	2,01387	55,7999	1,99313	89,0999	1,99313	1,99315
6,1	2,01165	55,7999	1,99686	89,0999	1,99801	1,99689
6,2	2,00949	59,3999	2,00054	89,0999	1,99950	2,00058
6,3	2,00754	60,3000	2,00090	0,90000	2,00095	2,00423
6,4	2,00787	85,4999	2,00228	6,30000	2,00235	2,00783
6,5	2,01139	90,0000	2,00254	45,0000	2,00372	2,01139
6,6	2,01491	90,0000	2,00090	45,0000	2,00505	2,01491
6,7	2,01839	90,0000	1,99905	51,3000	2,00634	2,01839
6,8	2,02182	90,0000	1,99718	53,9999	2,00760	2,02182
6,9	2,02522	90,0000	1,99533	53,9999	2,00883	2,02522
7,0	2,02858	90,0000	1,99353	53,9999	2,01003	2,02858

Tabla 2.14. K_+ , K_{+m} , K_{0° y K_{90° y posición de los mismos para E_1/E_2 desde 5 a 7 para $G/E_2=0,8$.

$G/E_2 = 0,9$						
E_1/E_2	K_+	β_+°	K_{+m}	β_{+m}°	K_0°	K_{90°
5,0	2,11408	53,0999	1,84104	90	1,92850	1,84104
5,1	2,11130	53,0999	1,84406	90	1,93053	1,84406
5,2	2,10861	53,0999	1,84702	90	1,93249	1,84702
5,3	2,10599	53,0999	1,84993	90	1,93439	1,84993
5,4	2,10345	53,0999	1,85278	90	1,93622	1,85278
5,5	2,10099	53,0999	1,85559	90	1,93799	1,85559
5,6	2,09859	53,0999	1,85835	90	1,93970	1,85835
5,7	2,09629	53,9999	1,86106	90	1,94136	1,86106
5,8	2,09406	53,9999	1,86372	90	1,94297	1,86372
5,9	2,09188	53,9999	1,86634	90	1,94453	1,86634
6,0	2,08980	54,8999	1,86892	90	1,94604	1,86892
6,1	2,08777	54,8999	1,87146	90	1,94750	1,87146
6,2	2,08579	54,8999	1,87397	90	1,94893	1,87397
6,3	2,08386	54,8999	1,87643	90	1,95031	1,87643
6,4	2,08198	54,8999	1,87886	90	1,95165	1,87886
6,5	2,08014	54,8999	1,88125	90	1,95296	1,88125
6,6	2,07834	54,8999	1,8836	90	1,95423	1,88360
6,7	2,07658	54,8999	1,88543	90	1,95546	1,88543
6,8	2,07486	54,8999	1,88822	90	1,95666	1,88822
6,9	2,07318	54,8999	1,89048	90	1,95783	1,89048
7,0	2,07154	54,8999	1,89271	90	1,95897	1,89271

Tabla 2.15. K_+ , K_{+m} , K_0° y K_{90° y posición de los mismos para E_1/E_2 desde 5 a 7 para $G/E_2=0,9$.

$G/E_2 = 1$						
E_1/E_2	K_+	β_+°	K_{+m}	β_{+m}°	K_{0°	K_{90°
5,0	2,17962	53,0999	1,74873	90	1,88741	1,74873
5,1	2,17703	53,0999	1,75066	90	1,88937	1,75066
5,2	2,17452	53,0999	1,75255	90	1,89126	1,75255
5,3	2,17208	53,0999	1,75439	90	1,89309	1,75439
5,4	2,16971	53,0999	1,75618	90	1,89485	1,75618
5,5	2,16741	53,0999	1,75794	90	1,89656	1,75794
5,6	2,16521	53,9999	1,75965	90	1,89821	1,75965
5,7	2,16310	53,9999	1,76133	90	1,89980	1,76133
5,8	2,16105	53,9999	1,76297	90	1,90135	1,76297
5,9	2,15905	53,9999	1,76457	90	1,90284	1,76457
6,0	2,15710	53,9999	1,76614	90	1,90429	1,76614
6,1	2,15521	53,9999	1,76768	90	1,90570	1,76768
6,2	2,15336	53,9999	1,76918	90	1,90707	1,76918
6,3	2,15162	54,8999	1,77065	90	1,90839	1,77065
6,4	2,14992	54,8999	1,77210	90	1,90968	1,77210
6,5	2,14826	54,8999	1,77351	90	1,91093	1,77351
6,6	2,14664	54,8999	1,77490	90	1,91214	1,77490
6,7	2,14505	54,8999	1,77626	90	1,91332	1,77626
6,8	2,14350	54,8999	1,77759	90	1,91447	1,77759
6,9	2,14199	54,8999	1,77890	90	1,91559	1,77890
7,0	2,14051	54,8999	1,78019	90	1,91668	1,78019

Tabla 2.16. K_+ , K_{+m} , K_{0° y K_{90° y posición de los mismos para E_1/E_2 desde 5 a 7 para $G/E_2=1$.

De la observación de los resultados en las tablas precedentes, se observa que la magnitud de los factores de concentración de tensiones máximos y mínimos, así como su ubicación resultan fuertemente afectados por las relaciones elásticas del material elegido, como era de prever. Para visualizar el efecto de dichas variaciones con la ortotropía del material, se presentan los gráficos mostrados en la Figura 2.9 y la Figura 2.10.

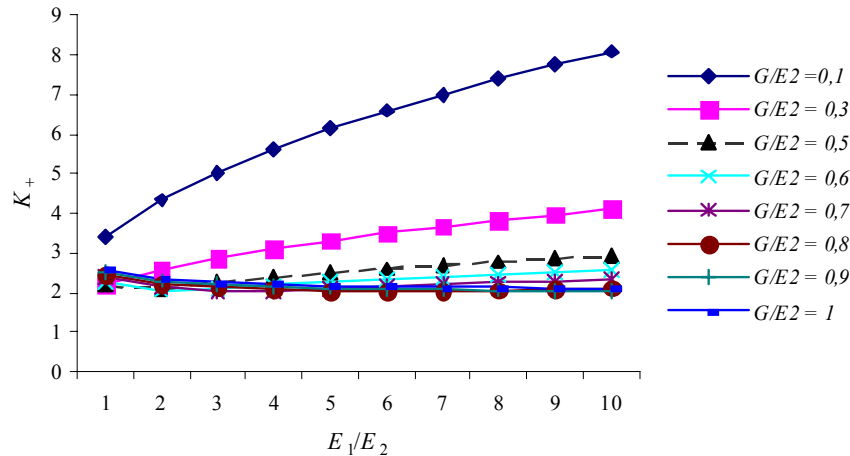


Figura 2.9. K_+ versus la relación E_1/E_2 , según distintas relaciones G/E_2 .

En la Figura 2.9 se aprecia los mayores valores de K_+ alcanzados para las relaciones $G/E_2=0,1$ y $0,3$ en comparación con los restantes valores de G/E_2 .

Un hecho digno de mención, es el diferente comportamiento del parámetro K_+ en relación con el aumento de E_1/E_2 para distintas relaciones de G/E_2 . En efecto, puede observarse que para las relaciones de $G/E_2=0,1$ más significativamente y también $G/E_2=0,3$, el valor de K_+ aumenta conforme crece la E_1/E_2 . Para los otros valores de G/E_2 considerados, se nota que el valor de K_+ no presenta grandes variaciones.

La Figura 2.10 permite, al cambiar la escala, apreciar que para valores de G/E_2 entre $0,6$ y $0,8$ la magnitud de K_+ decrece y luego crece a medida que E_1/E_2 aumenta. En cambio para $G/E_2=0,9$ y 1 , K_+ decrece monótonicamente con el crecimiento de E_1/E_2 .

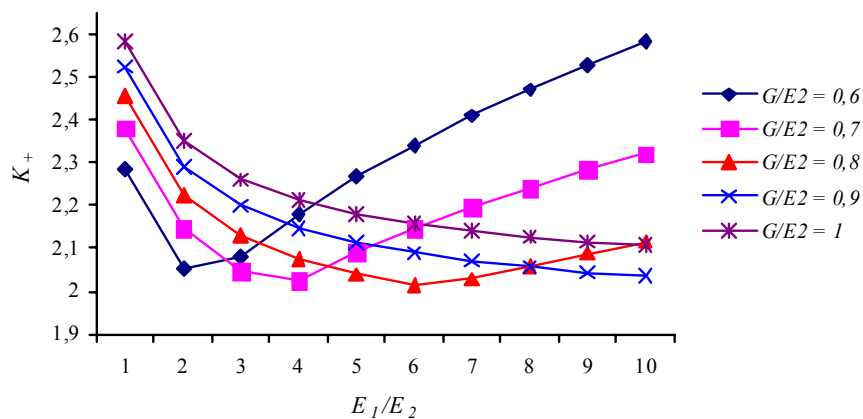


Figura 2.10. Detalle de K_+ versus la relación E_1/E_2 , para $G/E_2=0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1$.

En la Figura 2.11 se grafican los valores del ángulo β_+ en radianes, de la posición sobre el orificio donde se produce la máxima tensión, en función de las relaciones E_1/E_2 y G/E_2 . Nótese que, para valores bajos de la relación G/E_2 , es decir $0,1$ y $0,3$, el valor de β_+ permanece invariable en el valor $\pi/2$, o 90° . A medida que G/E_2 crece, valores de $G/E_2=0,5$ o superiores, el valor de β_+ se mantiene por debajo $\pi/2$ hasta una relación E_1/E_2 , según el valor de G/E_2 , a partir de la cual toma el valor $\pi/2$.

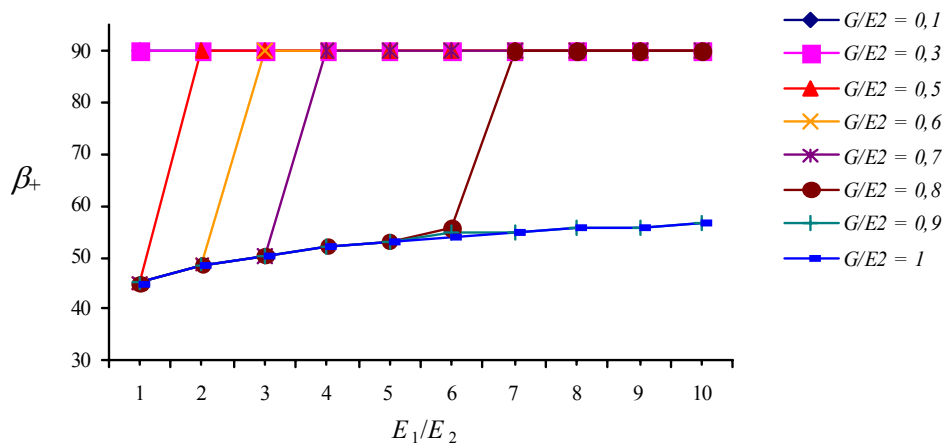


Figura 2.11. Ángulo β_+ , en grados sexagesimales, en función de la relación E_1/E_2 .

La Figura 2.12 es un detalle de la figura anterior para los valores E_1/E_2 entre 5 y 7.

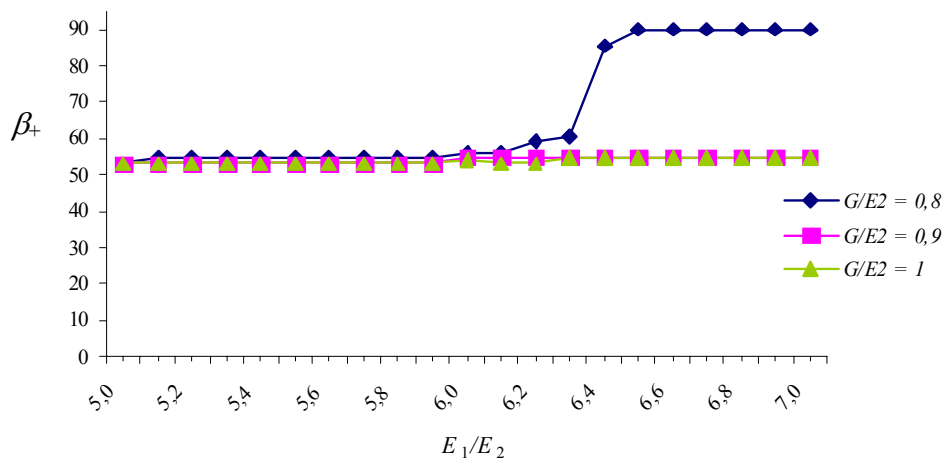


Figura 2.12. Ángulo β_+ , en grados sexagesimales, en función de la relación E_1/E_2 (detalle de Figura 2.11).

Para las relaciones de $G/E_2 = 0,1$ hasta $0,3$ los puntos de máxima tensión se producen sobre el eje coordenado “y”, en tanto que para relaciones mayores, los puntos de máxima tensión se desplazan del eje tal como se observa en la Figura 2.11. Este comportamiento requirió de un análisis más minucioso como muestra la representación gráfica de los resultados numéricos de la Tabla 2.16, Figura 2.12.

Los resultados obtenidos sobre el problema de concentración de tensiones en un pequeño orificio circular en una placa ortótropa sometida a un estado de tracción biaxial en su plano, permiten analizar la problemática desde un punto de vista global. Es decir, analizar el aumento o disminución de K_+ , con respecto a las características elásticas del material ortótropo expresadas a través de las relaciones E_1/E_2 , G/E_2 y el módulo ν_1 .

En forma general surge del análisis que las características elásticas del material del modelo en consideración afectan al valor del factor de concentración de tensiones. También es afectada, la posición, en el borde interno, del punto más comprometido.

Cabe mencionar que el módulo ν_1 se consideró constante, con valor $0,3$. Una extensión

al análisis presentado sería considerar variaciones en el módulo de Poisson.

2.3 ESTADO GENERAL DE ESFUERZOS

2.3.1 Diseño del mallado.

Otra situación analizada, más general que la anterior, trata sobre el efecto en la distribución de tensiones de un pequeño orificio circular en una placa cuadrada sometida a un estado de carga, en su borde externo, en el que se combinan esfuerzos normales N_x , N_y y esfuerzos de corte N_{xy} . Esta situación se esquematiza en la Figura 2.13. Con θ se indica el ángulo que las direcciones principales elásticas forman con las direcciones coordenadas.

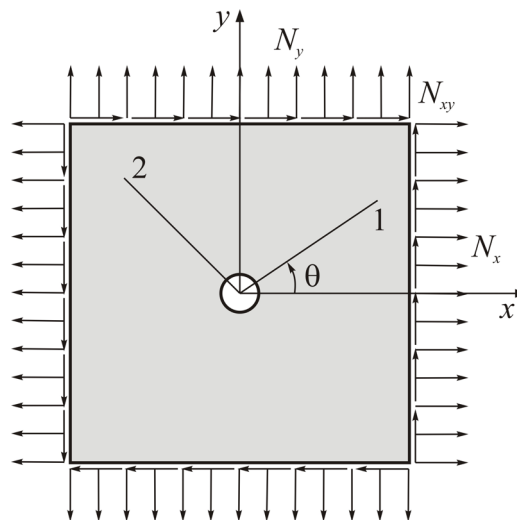


Figura 2.13. Esquema del problema.

Para dar mayor generalidad al problema se consideraron distintas orientaciones de los ejes principales de elasticidad, ángulo θ . En este punto es importante aclarar que cuando los ejes principales de elasticidad no coinciden con los ejes coordenados la expresión (1.32) se torna mucho más compleja, lo que incrementa la necesidad de recurrir a métodos aproximados.

Las diagonales de la placa de la Figura 2.13, constituyen ejes de simetría para el problema de tensiones en análisis. Consecuentemente, se han considerado orientaciones para los ejes principales de elasticidad variando entre -45° y $+45^\circ$.

Con respecto a los esfuerzos aplicados en los bordes, cuatro casos fueron analizados. Estos casos son:

- $N_x=N_y=0, N_{xy}$
- $N_x=N_y=N_{xy}$
- $N_x=N_y=2N_{xy}$
- $N_x=N_y=N_{xy}/2$

El caso a) fue resuelto por Lekhinskii^[4], y se adoptó para verificar la exactitud del modelo utilizado como se mostrará más adelante.

El esquema de carga elegido, $N_x = N_y$, con el modelo propuesto puede representar cualquier combinación de esfuerzos axiales en direcciones giradas 45° con respecto a los ejes x, y .

En la resolución del problema se utilizó nuevamente el método de Elementos Finitos, recurriéndose al módulo de análisis lineal del software comercial mencionado anteriormente, ALGOR^[7].

El mallado en elementos finitos se realizó con elementos cuadrangulares de 4 nodos con 2 grados de libertad por nodo, los corrimientos en las direcciones coordenadas. El elemento utilizado es conforme.

Anteriormente, se comprobó que $d/l = 0,03$, Figura 2.7, es la relación límite, por debajo de la cual no se observan cambios significativos en los valores del factor de concentración de tensiones y en la distribución de las tensiones. Es decir, que para relaciones d/l hasta 0,03 puede considerarse a la placa como infinita.

El diseño del mallado para este problema no es el mismo que el utilizado para el caso en que el estado de tensiones aplicados es de tracción biaxial. Esto se debe a que el mallado anterior, ensayado con las condiciones de esfuerzos esquematizados en la Figura 2.13, presentó irregularidades numéricas al considerar distintas orientaciones de los ejes principales de ortotropía. Es decir, en las zonas en donde comienzan los elementos cuadrangulares, ver Figura 2.4 y Figura 2.5, los resultados de tensiones presentaban valores muy altos. Por esta razón, se diseñó un modelo que no presentara este problema.

La geometría del mallado, en una amplia zona alrededor del agujero se obtuvo por intersección de coronas circulares con centro coincidente con el del agujero y líneas radiales, lo que resultó en elementos cuadrangulares con muy poca distorsión. En el borde del agujero, zona de interés para este estudio, se colocaron 400 elementos que permiten obtener valores de tensión cada $0,9^\circ$ sobre el borde circular. El mallado utilizado posee 92404 elementos y un número de nodos de 92960. En la Figura 2.14 se muestra un esquema del mallado sobre un cuarto de placa:

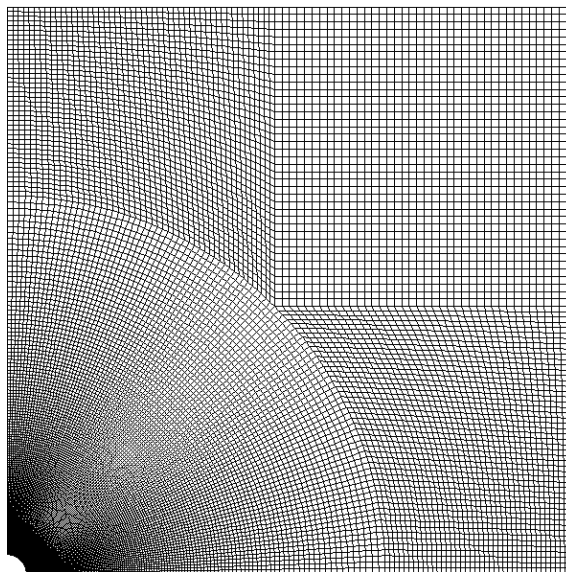


Figura 2.14. Detalle del mallado de la placa.

Cabe señalar la diferencia entre los mallados de la Figura 2.4 y Figura 2.14.

El esfuerzo de corte se impuso en el modelo como las cargas nodales equivalentes sobre los nodos del borde externo.

Los movimientos de cuerpo rígido de la placa fueron anulados restringiéndolos en un nodo ubicado sobre el punto medio del borde externo izquierdo.

2.3.1.1 Verificación de resultados para la sollicitación de corte puro, $N_x=N_y=0$ y N_{xy}

La configuración a) de esfuerzos se utilizó para validar el funcionamiento del mallado nuevo. La solución analítica para el caso de corte puro fue tomada de la literatura^[4]. Cuando los ejes de elasticidad coinciden con los ejes coordenados ($\theta=0^\circ$), la expresión de la tensión tangencial al contorno es la siguiente:

$$\sigma_\alpha = -\frac{N_{xy}}{h} \frac{E_\alpha}{2E_1} (1+k+n) n \sin(2\alpha) \quad (2.18)$$

Donde:

N_{xy} , es el valor de la tensión de corte por unidad de longitud, aplicada a los bordes de la placa.

k y n , se expresaron anteriormente con las relaciones (2.11) y (2.13).

α , es el ángulo polar medido desde el semieje x positivo en sentido antihorario.

E_α , es el módulo de Young en la dirección tangente al borde del orificio dada en la relación (2.13).

Se consideró un material ortótropo con valores de las constantes elásticas:

$$E_1 = 1,2 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$E_2 = 0,6 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$G = 0,07 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\nu_1 = 0,071$$

Utilizando la ecuación (2.18) y calculando el valor de $K_+ = \sigma_{\alpha+}/N_{xy}$ se obtuvo el valor:

$$K_+ = 4,13$$

Mientras que calculando con el modelo de elementos finitos construido para este análisis, se determinó prácticamente el mismo valor del factor $K_+ = 4,14$.

A continuación se presentan los resultados de los distintos casos resueltos, los mismos se encuentran publicados en la literatura técnico-científica^[9].

2.3.2 Resultados numéricos de los distintos casos.

2.3.2.1 Resultados para la sollicitación $N_x=N_y=N_{xy}$

Una de las sollicitaciones a considerar en el estado de esfuerzos es cuando $N_x=N_y=N_{xy}=N$. La máxima tensión principal en el modelo sin orificio, σ_1 , se tomó como la tensión con respecto a la cual se compara la tensión máxima en el modelo con agujero:

$$K_+ = \frac{\sigma_{\alpha+}}{\sigma_1} \quad (2.19)$$

$$K_- = \frac{\sigma_{\alpha-}}{\sigma_1} \quad (2.20)$$

Donde: $\sigma_{\alpha+}$ es la tensión de tracción máxima en el modelo con agujero.

$\sigma_{\alpha-}$ es la tensión de compresión máxima en el modelo con agujero.

σ_1 es la mayor de las tensiones principales en el modelo sin orificio.

De la expresión de las tensiones principales para el estado plano de tensiones^[10] se tiene:

$$\sigma_{1,2} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.21)$$

Donde:

σ_x y σ_y son las tensiones normales a los planos coordenados en el punto.

τ_{xy} es la tensión de corte en el punto considerado.

σ_1 es la tensión principal máxima y σ_2 es la mínima tensión principal en el punto.

En placa sin orificio, el estado de tensiones es constante e igual a las tensiones aplicadas sobre los bordes de la placa. Es decir que para el problema que se trata, las tensiones principales para todo punto del dominio sin orificio, quedan expresadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= N/h \\ \sigma_y &= N/h \\ \tau_{xy} &= N/h \end{aligned} \quad (2.22)$$

Utilizando las igualdades dadas en (2.22) con la expresión (2.21), se tiene la tensión principal máxima y mínima sobre todo el dominio, sin la perturbación del orificio:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2 \frac{N}{h} \\ \sigma_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Con las expresiones (2.19) y (2.20), se resume en las expresiones siguientes:

$$K_+ = \frac{\sigma_{\alpha+}}{2N} h \quad (2.24)$$

$$K_- = \frac{\sigma_{\alpha-}}{2N} h \quad (2.25)$$

Desde la Tabla 2.17 hasta la Tabla 2.19 se muestran los resultados de las relaciones K_+ , K_- junto a los parámetros angulares β_+ y β_- que indican la posición sobre el borde del orificio donde ocurre el valor respectivo.

E_1/E_2	θ°	$G/E_2 = 0,1$		$\nu_1 = 0,3$	
		K_+	β_+°	K_-	β_-°
2	-45,00	4,36	135,00	-1,43	45,00
	-22,50	3,90	152,10	-1,53	55,80
	0,00	3,51	99,90	-1,23	66,60
	22,50	5,13	117,00	-0,94	42,30
	45,00	5,76	135,00	-0,71	45,00
3	-45,00	4,33	135,00	-1,75	45,00
	-22,50	3,87	152,10	-1,87	57,60
	0,00	4,09	98,10	-1,48	71,10
	22,50	6,02	116,10	-0,87	44,10
	45,00	6,77	135,00	-0,59	45,00
4	-45,00	4,31	135,00	-2,01	45,00
	-22,50	3,85	152,10	-2,16	58,50
	0,00	4,57	98,10	-1,72	73,80
	22,50	6,77	116,10	-0,83	45,00
	45,00	7,60	45,00	-0,51	45,00
5	-45,00	4,29	135,00	-2,23	45,00
	-22,50	3,84	152,10	-2,41	58,50
	0,00	5,01	97,20	-1,94	74,70
	22,50	7,42	116,10	-0,81	45,90
	45,00	8,32	135,00	-0,45	45,00
6	-45,00	4,29	135,00	-2,44	45,00
	-22,50	3,83	152,10	-2,64	59,40
	0,00	5,40	97,20	-2,15	75,60
	22,50	7,98	116,10	-0,91	90,00
	45,00	8,97	135,00	-0,42	45,00
7	-45,00	4,28	135,00	-2,62	45,00
	-22,50	3,83	152,10	-2,84	59,40
	0,00	5,74	96,30	-2,34	76,50
	22,50	8,51	115,20	-1,03	91,80
	45,00	9,55	135,00	-0,38	45,00
8	-45,00	4,27	135,00	-2,79	45,00
	-22,50	3,82	152,10	-3,03	59,40
	0,00	6,07	96,30	-2,52	76,50
	22,50	8,99	115,20	-1,14	87,30
	45,00	10,08	135,00	-0,36	45,00
9	-45,00	4,26	135,00	-2,95	45,00
	-22,50	3,81	152,10	-3,19	59,40
	0,00	6,36	96,30	-2,68	77,40
	22,50	9,43	115,20	-1,24	86,40
	45,00	10,56	135,00	-0,34	45,00
10	-45,00	4,26	135,00	-3,09	45,00
	-22,50	3,81	152,10	-3,35	60,30
	0,00	6,63	96,30	-2,84	77,40
	22,50	9,85	115,20	-1,35	94,50
	45,00	11,02	135,00	-0,32	45,00

Tabla 2.17. Resultados numéricos para $N_x = N_y = N_{xy}$ con $G/E_2=0,1$ y $\nu_1=0,3$.

E_1/E_2	θ°	$G/E_2 = 0,2$		$\nu_1 = 0,3$	
		K_+	β_+°	K_-	β_-°
2	-45,00	3,49	135,00	-1,43	45,00
	-22,50	3,17	147,60	-1,39	54,00
	0,00	2,93	106,20	-1,12	59,40
	22,50	4,07	29,70	-0,86	46,80
	45,00	4,53	135,00	-0,71	45,00
3	-45,00	3,45	135,00	-1,75	45,00
	-22,50	3,13	148,50	-1,68	56,70
	0,00	3,30	102,60	-1,27	66,60
	22,50	4,71	117,90	-0,79	50,40
	45,00	5,26	135,00	-0,58	45,00
4	-45,00	3,43	135,00	-2,02	45,00
	-22,50	3,10	148,50	-1,94	57,60
	0,00	3,63	100,80	-1,44	69,30
	22,50	5,24	117,90	-0,76	54,00
	45,00	5,87	135,00	-0,50	45,00
5	-45,00	3,42	135,00	-2,25	45,00
	-22,50	3,08	149,40	-2,17	58,50
	0,00	3,92	99,90	-1,59	72,00
	22,50	5,71	117,00	-0,74	58,50
	45,00	6,40	135,00	-0,45	45,00
6	-45,00	3,40	135,00	-2,46	45,00
	-22,50	3,07	149,40	-2,38	58,50
	0,00	4,19	99,00	-1,75	72,90
	22,50	6,13	117,00	-0,74	71,10
	45,00	6,87	135,00	-0,41	45,00
7	-45,00	3,39	135,00	-2,65	45,00
	-22,50	3,05	149,40	-2,57	59,40
	0,00	4,45	99,00	-1,90	73,80
	22,50	6,51	117,00	-0,78	81,00
	45,00	7,30	135,00	-0,38	45,00
8	-45,00	3,38	135,00	-2,83	45,00
	-22,50	3,05	149,40	-2,74	59,40
	0,00	4,68	99,00	-2,04	74,70
	22,50	6,87	116,10	-0,83	84,60
	45,00	7,71	135,00	-0,36	45,00
9	-45,00	3,37	135,00	-3,00	45,00
	-22,50	3,04	149,40	-2,90	60,30
	0,00	4,91	98,10	-2,17	75,60
	22,50	7,21	116,10	-0,88	87,30
	45,00	8,08	135,00	-0,34	45,00
10	-45,00	3,37	135,00	-3,15	45,00
	-22,50	3,03	149,40	-3,06	60,30
	0,00	5,11	98,10	-2,30	75,60
	22,50	7,52	116,10	-0,94	89,10
	45,00	8,43	135,00	-0,32	45,00

Tabla 2.18. Resultados numéricos para $N_x = N_y = N_{xy}$ con $G/E_2=0,2$ y $\nu_1=0,3$.

E_1/E_2	θ°	$G/E_2 = 0,3$		$\nu_1 = 0,3$	
		K_+	β_+°	K_-	β_-°
2	-45,00	3,13	135,00	-1,43	45,00
	-22,50	2,91	143,10	-1,35	53,10
	0,00	2,85	113,40	-1,09	56,70
	22,50	3,67	121,50	-0,83	49,50
	45,00	4,01	135,00	-0,71	45,00
3	-45,00	3,08	135,00	-1,75	45,00
	-22,50	2,84	144,00	-1,63	55,80
	0,00	3,08	107,10	-1,22	63,00
	22,50	4,17	119,70	-0,77	54,00
	45,00	4,62	135,00	-0,58	45,00
4	-45,00	3,05	135,00	-2,02	45,00
	-22,50	2,81	144,90	-1,87	56,70
	0,00	3,32	104,40	-1,35	67,50
	22,50	4,61	118,80	-0,74	58,50
	45,00	5,12	135,00	-0,50	45,00
5	-45,00	3,03	135,00	-2,26	45,00
	-22,50	2,79	144,90	-2,09	57,60
	0,00	3,54	102,60	-1,48	69,30
	22,50	4,99	117,90	-0,74	63,00
	45,00	5,56	135,00	-0,45	45,00
6	-45,00	3,02	135,00	-2,47	45,00
	-22,50	2,76	145,80	-2,28	58,50
	0,00	3,75	101,70	-1,61	71,10
	22,50	5,34	117,90	-0,74	67,50
	45,00	5,95	135,00	-0,41	45,00
7	-45,00	3,01	135,00	-2,66	45,00
	-22,50	2,75	145,80	-2,46	59,40
	0,00	3,95	100,80	-1,73	72,90
	22,50	5,65	117,90	-0,75	72,90
	45,00	6,31	135,00	-0,38	45,00
8	-45,00	3,00	135,00	-2,84	45,00
	-22,50	2,74	145,80	-2,63	59,40
	0,00	4,14	100,80	-1,85	73,80
	22,50	5,95	117,00	-0,77	77,40
	45,00	6,65	135,00	-0,35	45,00
9	-45,00	2,99	135,00	-3,01	45,00
	-22,50	2,73	145,80	-2,79	59,40
	0,00	4,32	100,00	-1,97	74,70
	22,50	6,23	117,00	-0,80	81,00
	45,00	6,97	135,00	-0,34	45,00
10	-45,00	2,98	135,00	-3,17	45,00
	-22,50	2,72	145,80	-2,94	60,30
	0,00	4,49	99,90	-2,09	74,70
	22,50	6,48	117,00	-0,83	83,70
	45,00	7,25	135,00	-0,32	45,00

Tabla 2.19. Resultados numéricos para $N_x = N_y = N_{xy}$ con $G/E_2=0,3$ y $\nu_1=0,3$.

A continuación se exponen una serie de gráficos en los que se representan los valores de las Tablas precedentes para favorecer su análisis a través de la visualización de la influencia de los distintos parámetros involucrados. La Figura 2.15, Figura 2.16 y Figura 2.17 muestran la variación del factor K_+ con respecto a los valores del ángulo θ , según la relación E_1/E_2 para cada valor de G/E_2 modelados. De los valores volcados en las Tablas y de la observación de las Figuras, puede concluirse que a medida que G/E_2 crece, el valor de K_+ disminuye en cada relación E_1/E_2 .

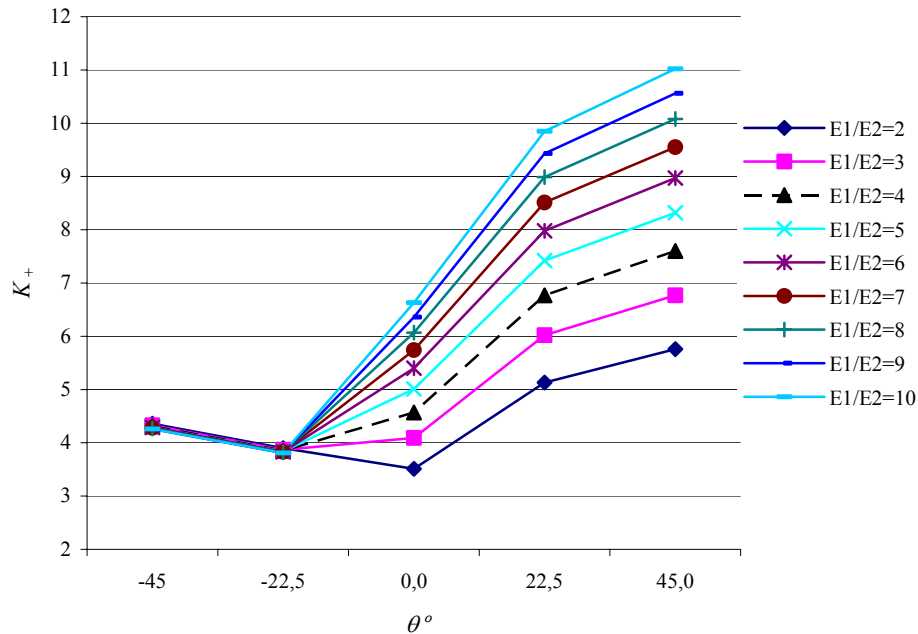


Figura 2.15. K_+ versus ángulo θ para $G/E_2=0,1$, caso $N_x=N_y=N_{xy}$.

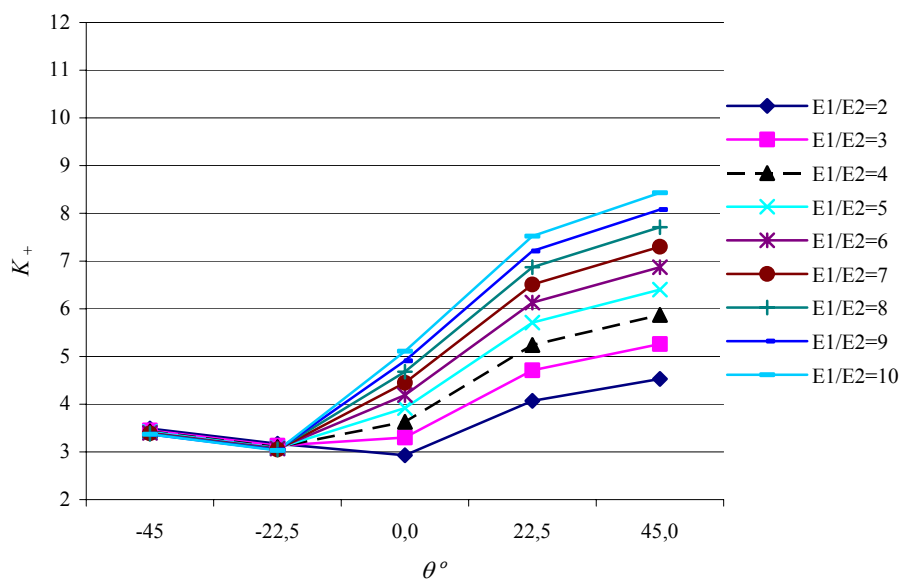


Figura 2.16. K_+ versus ángulo θ para $G/E_2=0,2$, caso $N_x=N_y=N_{xy}$.

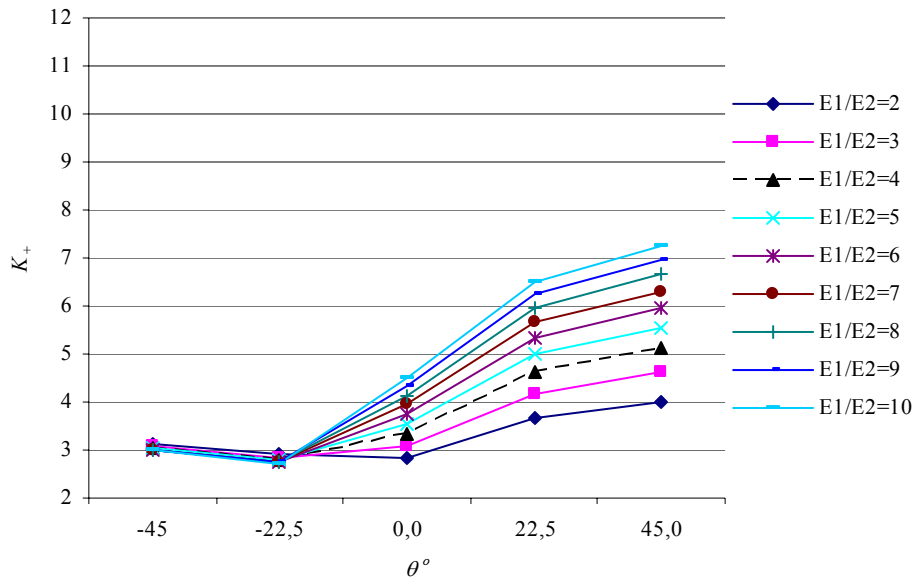


Figura 2.17. K_+ versus ángulo θ para $G/E_2=0,3$, caso $N_x=N_y=N_{xy}$.

Otro hecho destacable es que, para orientaciones de los ejes principales de elasticidad en $\theta=0^\circ$, $22,5^\circ$ y 45° , los menores valores en K_+ ocurren para la relación $E_1/E_2=2$ para cualquiera de los valores de G/E_2 considerados: 0,1, 0,2 y 0,3 y crecen con la relación E_1/E_2 . Esto no es así cuando $\theta= -45^\circ$ y $-22,5^\circ$. Para estos valores de θ , el valor de K_+ , no es afectado significativamente por la variación de E_1/E_2 como muestra la Figura 2.18 y la Figura 2.19.

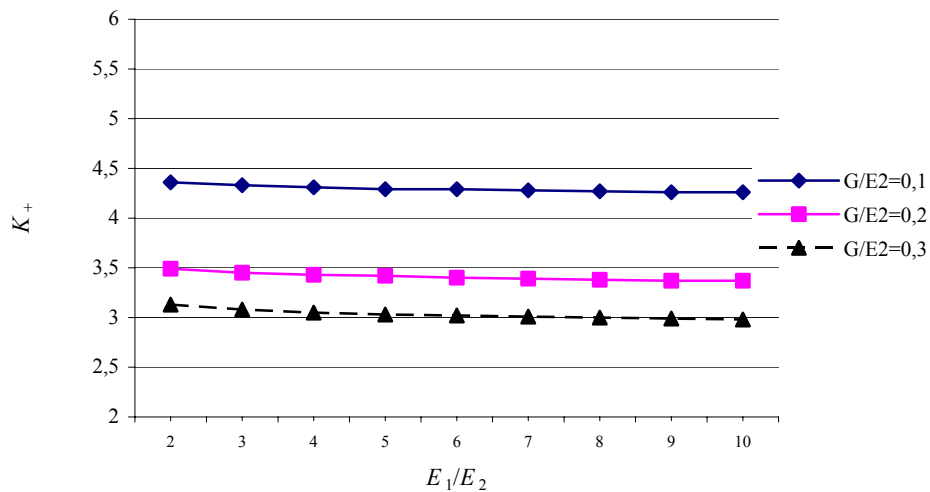
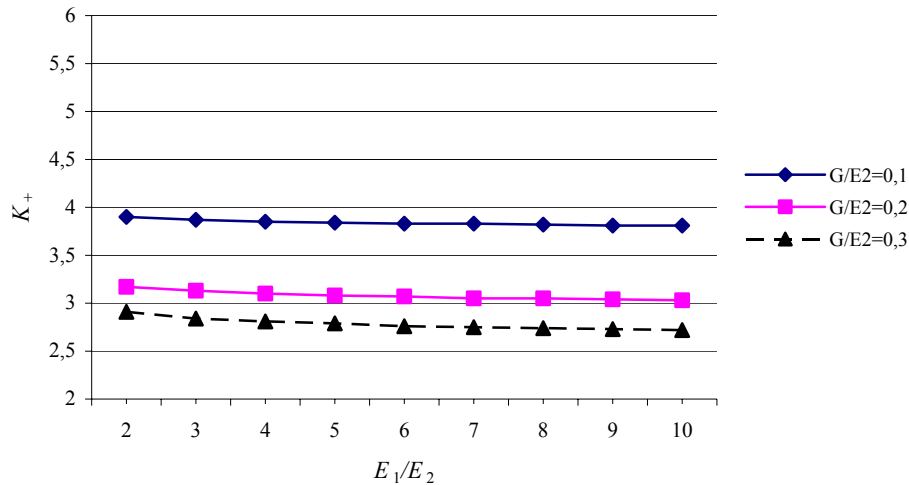
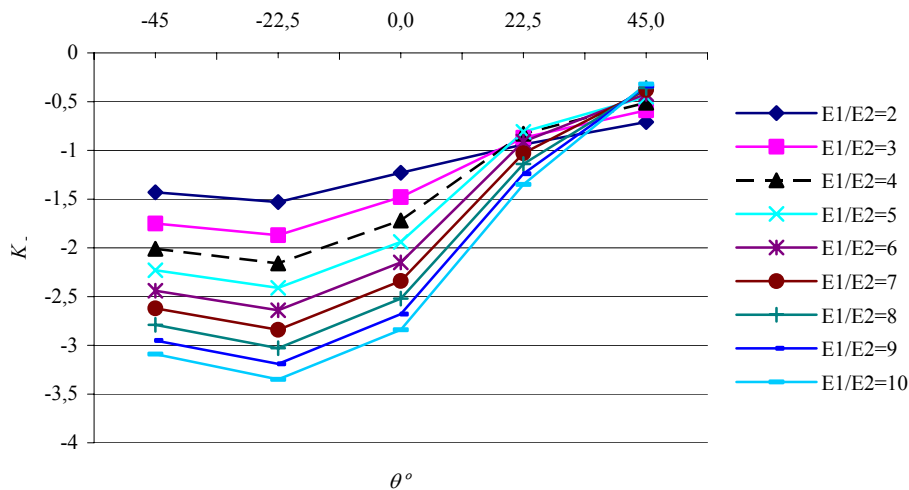


Figura 2.18. K_+ versus E_1/E_2 cuando $\theta= -45^\circ$.

Figura 2.19. K_+ versus E_1/E_2 cuando $\theta = -22,5^\circ$.

Un hecho de interés que merece ser puntualizado es la aparición de tensiones de compresión por acción de los esfuerzos de corte. Estas tensiones de compresión crecen en magnitud con el aumento de la relación E_1/E_2 y en algunos casos superan a las tensiones de tracción (ver Tabla 2.19). Esto reviste importancia en la estabilidad del equilibrio de placas delgadas. La Figura 2.20, Figura 2.21 y la Figura 2.22 ilustran el comportamiento de la concentración de tensiones de compresión, K_+ , en función de la orientación de los ejes de elasticidad, θ , para cada relación E_1/E_2 según $G/E_2=0,1, 0,2$ y $0,3$.

Figura 2.20. K_- versus ángulo θ para $G/E_2=0,1$, caso $N_x=N_y=N_{xy}$.

La relación G/E_2 afecta el valor del ángulo θ para el cual se produce el mayor valor de K_+ , en cualquiera de las relaciones E_1/E_2 . Para la relación $G/E_2=0,1$ el valor de $\theta = -22,5^\circ$ produce los mayores valores de K_+ , Figura 2.20. Para valores de $G/E_2=0,2$ y $0,3$ el mayor valor de K_+ ocurre cuando el valor $\theta = -45^\circ$. También es importante resaltar que para $\theta = -45^\circ, -22,5^\circ$ y 0° , la relación $E_1/E_2=2$ es la que produce el menor valor en K_+ , pero no es así para orientaciones de los ejes de elasticidad a $22,5^\circ$ o 45° .

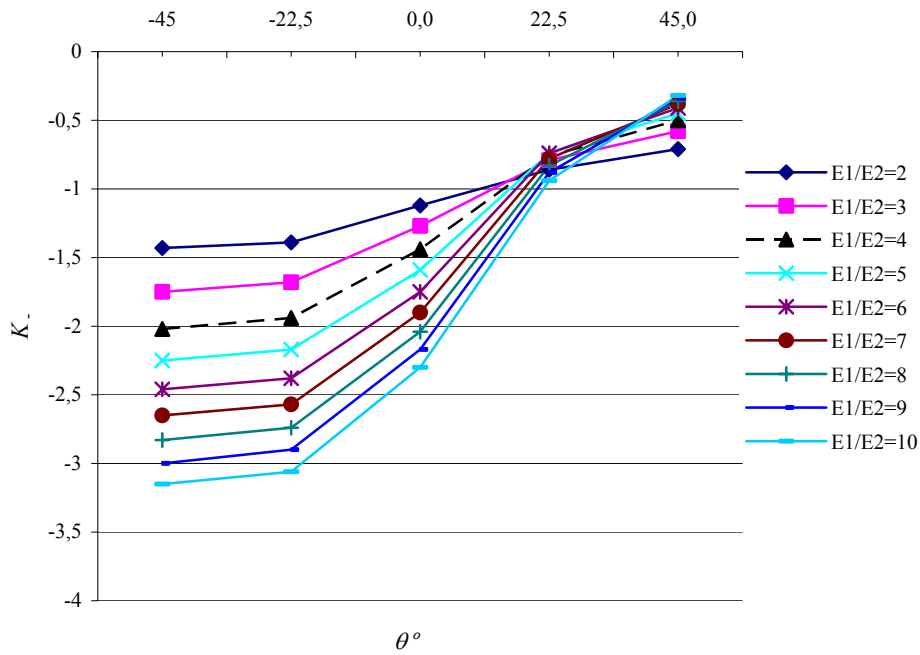


Figura 2.21. K . versus ángulo θ para $G/E_2=0,2$, caso $N_x=N_y=N_{xy}$.

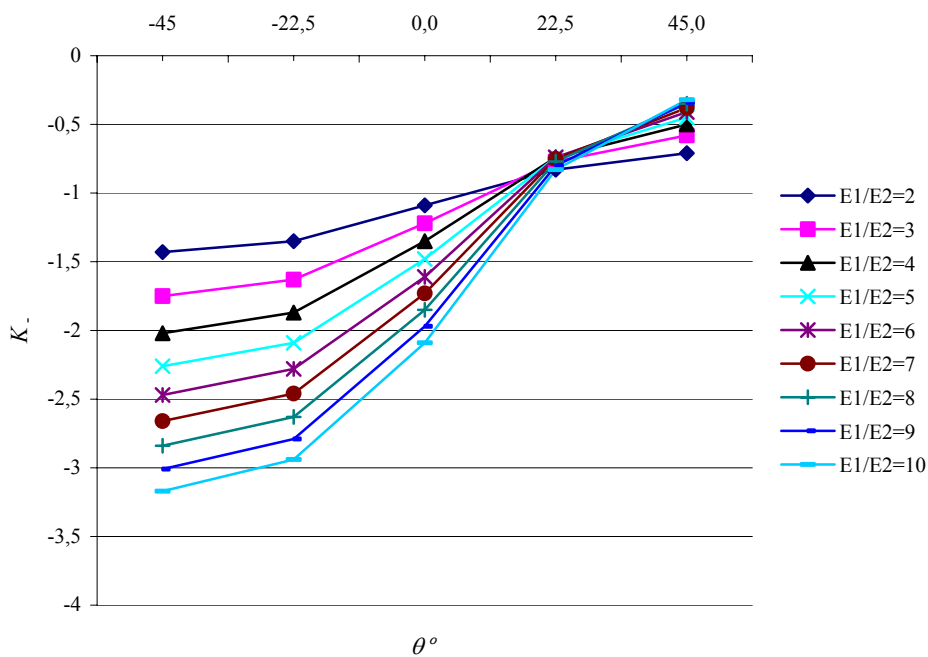


Figura 2.22. K . versus ángulo θ para $G/E_2=0,3$, caso $N_x=N_y=N_{xy}$.

Es notable que para los tres valores de la relación G/E_2 considerados, el valor del ángulo $\theta=22,5^\circ$ produce valores del factor K . relativamente cercanos. La Figura 2.23 muestra un detalle del comportamiento de K . para el valor de $\theta=22,5^\circ$:

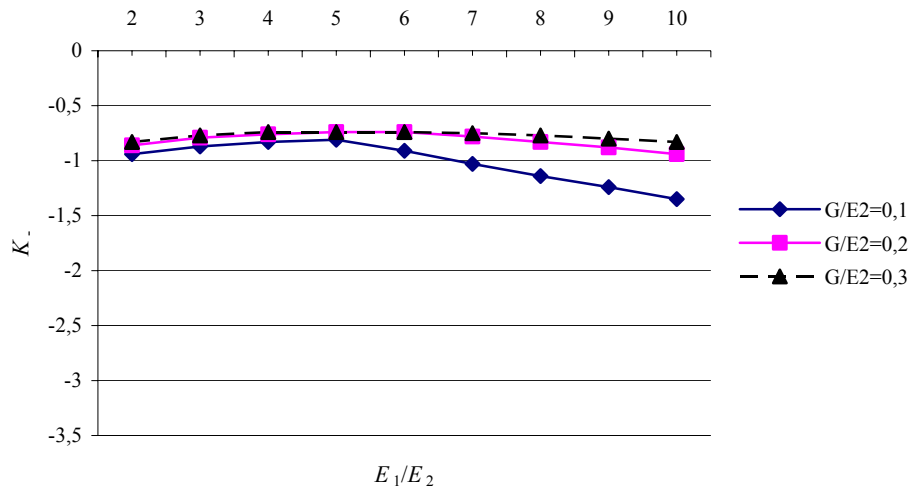


Figura 2.23. K . versus E_1/E_2 cuando $\theta = 22,5^\circ$.

2.3.2.2 Resultados para la sollicitación $N_x=N_y=2N_{xy}$

En este caso el esfuerzo normal aplicado sobre los bordes es $N_x=N_y=N$ y la tensión de corte toma el valor $N_{xy}=N/2$. Es importante aclarar el valor la tensión principal, σ_1 , en el modelo sin agujero, expresiones (2.19) y (2.20). El estado de tensiones sobre el dominio sin considerar la perturbación del orificio es:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= N/h \\ \sigma_y &= N/h \\ \tau_{xy} &= \frac{N}{2h}\end{aligned}\tag{2.26}$$

Reemplazando las igualdades anteriores en la expresión (2.21), se tiene la tensión principal máxima y mínima sobre todo el dominio, sin la perturbación del orificio:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{3}{2} \frac{N}{h} \\ \sigma_2 &= -\frac{N}{h}\end{aligned}\tag{2.27}$$

Acorde con lo explicado para el caso en que $N_x=N_y=N_{xy}$, para esta situación, la mayor tensión principal es $\sigma_1=3N/2h$, quedando las siguientes expresiones para K_+ y K_- :

$$\begin{aligned}K_+ &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_{\alpha+}}{N} h \\ K_- &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_{\alpha-}}{N} h\end{aligned}\tag{2.28}$$

La Tabla 2.20, Tabla 2.21 y Tabla 2.22 presentan los resultados obtenidos para esta sollicitación:

E_1/E_2	$G/E_2 = 0,1$			$\nu_1 = 0,3$	
	θ°	K_+	β_+°	K_-	β_-°
2	-45,00	4,12	135,00	0,47	56,70
	-22,50	3,75	153,90	-0,30	46,80
	0,00	3,49	97,20	-0,40	58,50
	22,50	4,80	116,10	-0,14	59,40
	45,00	5,28	135,00	0,50	74,70
3	-45,00	4,13	135,00	0,48	59,40
	-22,50	3,77	153,90	-0,42	50,40
	0,00	4,06	95,40	-0,53	64,80
	22,50	5,61	115,20	-0,17	66,60
	45,00	6,18	135,00	0,47	80,10
4	-45,00	4,13	135,00	0,47	60,30
	-22,50	3,78	153,90	-0,55	52,20
	0,00	4,54	95,40	-0,65	68,40
	22,50	6,28	115,20	-0,20	75,60
	45,00	6,94	135,00	0,44	82,80
5	-45,00	4,14	135,00	0,47	60,30
	-22,50	3,79	153,90	-0,65	53,10
	0,00	4,95	95,40	-0,78	71,10
	22,50	6,87	115,20	-0,25	82,80
	45,00	7,57	135,00	0,42	84,60
6	-45,00	4,14	135,00	0,47	60,30
	-22,50	3,79	153,90	-0,76	54,00
	0,00	5,32	94,50	-0,91	72,00
	22,50	7,39	115,20	-0,32	86,40
	45,00	8,16	135,00	0,40	86,40
7	-45,00	4,15	135,00	0,47	61,20
	-22,50	3,81	153,90	-0,85	54,00
	0,00	5,66	94,50	-1,02	72,90
	22,50	7,85	115,20	-0,39	89,10
	45,00	8,66	135,00	0,39	88,20
8	-45,00	4,15	135,00	0,47	61,20
	-22,50	3,81	153,90	-0,94	54,90
	0,00	5,97	94,50	-1,13	73,80
	22,50	8,30	114,30	-0,47	90,90
	45,00	9,15	135,00	0,38	90,00
9	-45,00	4,15	135,00	0,47	61,20
	-22,50	3,81	153,90	-1,02	54,90
	0,00	6,25	94,50	-1,23	73,80
	22,50	8,70	114,30	-0,55	91,80
	45,00	9,58	135,00	0,37	90,90
10	-45,00	4,15	135,00	0,47	61,20
	-22,50	3,81	153,90	-1,09	54,90
	0,00	6,51	94,50	-1,34	74,70
	22,50	9,08	114,30	-0,62	92,70
	45,00	9,99	135,00	0,36	92,70

Tabla 2.20. Resultados numéricos para $N_x=N_y=2N_{xy}$ con $G/E_2=0,1$ y $\nu_1=0,3$.

E_1/E_2	θ°	$G/E_2 = 0,2$		$\nu_1 = 0,3$	
		K_+	β_+°	K_-	β_-°
2	-45,00	3,25	135,00	0,08	45,00
	-22,50	2,99	150,30	-0,20	47,70
	0,00	2,75	101,70	-0,26	54,90
	22,50	3,69	117,90	-0,02	58,50
	45,00	4,06	135,00	0,44	45,00
3	-45,00	3,26	135,00	0,01	45,00
	-22,50	2,99	151,20	-0,34	50,40
	0,00	3,09	99,00	-0,35	60,30
	22,50	4,24	117,00	-0,04	64,80
	45,00	4,67	135,00	0,54	66,60
4	-45,00	3,26	135,00	-0,06	45,00
	-22,50	2,99	151,20	-0,44	52,20
	0,00	3,39	98,10	-0,44	64,80
	22,50	4,70	116,10	-0,06	69,30
	45,00	5,20	135,00	0,54	73,80
5	-45,00	3,27	135,00	-0,12	45,00
	-22,50	2,99	151,20	-0,55	54,00
	0,00	3,67	97,20	-0,53	67,50
	22,50	5,10	116,10	-0,09	72,90
	45,00	5,65	135,00	0,54	77,40
6	-45,00	3,27	135,00	-0,17	45,00
	-22,50	2,99	152,10	-0,64	54,00
	0,00	3,91	97,20	-0,61	69,30
	22,50	5,47	116,10	-0,13	76,50
	45,00	6,05	135,00	0,52	80,10
7	-45,00	3,27	135,00	-0,22	45,00
	-22,50	2,99	152,10	-0,73	54,90
	0,00	4,13	96,30	-0,70	70,20
	22,50	5,80	116,10	-0,16	80,10
	45,00	6,43	135,00	0,52	81,90
8	-45,00	3,27	135,00	-0,26	45,00
	-22,50	2,99	152,10	-0,80	55,80
	0,00	4,35	96,30	-0,78	71,10
	22,50	6,10	115,20	-0,19	82,80
	45,00	6,77	135,00	0,51	83,70
9	-45,00	3,27	135,00	-0,31	45,00
	-22,50	2,99	152,10	-0,87	55,80
	0,00	4,54	96,30	-0,85	72,00
	22,50	6,40	115,20	-0,23	84,60
	45,00	7,08	135,00	0,50	84,60
10	-45,00	3,27	135,00	-0,35	45,00
	-22,50	2,99	152,10	-0,96	56,70
	0,00	4,72	96,30	-0,93	72,90
	22,50	6,66	115,20	-0,26	86,40
	45,00	7,38	135,00	0,50	86,40

Tabla 2.21. Resultados numéricos para $N_x=N_y=2N_{xy}$ con $G/E_2=0,2$ y $\nu_1=0,3$.

E_1/E_2	θ°	$G/E_2 = 0,3$		$\nu_1 = 0,3$	
		K_+	β_+°	K_-	β_-°
2	-45,00	2,89	135,00	-0,09	45,00
	-22,50	2,69	146,70	-0,19	48,60
	0,00	2,56	108,90	-0,17	54,00
	22,50	3,26	120,60	-0,01	63,00
	45,00	3,53	135,00	0,33	45,00
3	-45,00	2,89	135,00	-0,21	45,00
	-22,50	2,68	147,60	-0,33	51,30
	0,00	2,78	103,50	-0,26	59,40
	22,50	3,68	118,80	-0,01	69,30
	45,00	4,04	135,00	0,44	45,00
4	-45,00	2,89	135,00	-0,32	45,00
	-22,50	2,68	148,50	-0,44	53,10
	0,00	2,99	101,70	-0,35	63,00
	22,50	4,04	117,90	-0,02	72,90
	45,00	4,45	135,00	0,52	45,00
5	-45,00	2,89	135,00	-0,40	45,00
	-22,50	2,67	148,50	-0,55	54,90
	0,00	3,19	99,90	-0,42	65,70
	22,50	4,36	117,00	-0,04	74,70
	45,00	4,81	135,00	0,55	65,70
6	-45,00	2,89	135,00	-0,48	45,00
	-22,50	2,67	149,40	-0,64	54,90
	0,00	3,37	99,90	-0,50	67,50
	22,50	4,65	117,00	-0,05	77,40
	45,00	5,13	135,00	0,56	71,10
7	-45,00	2,88	135,00	-0,56	45,00
	-22,50	2,66	149,40	-0,73	55,80
	0,00	3,55	99,00	-0,57	69,30
	22,50	4,90	117,00	-0,06	79,20
	45,00	5,43	135,00	0,56	74,70
8	-45,00	2,88	135,00	-0,62	45,00
	-22,50	2,66	149,40	-0,81	56,70
	0,00	3,70	98,10	-0,64	70,20
	22,50	5,15	116,10	-0,08	78,30
	45,00	5,70	135,00	0,56	76,50
9	-45,00	2,88	135,00	-0,70	45,00
	-22,50	2,66	149,40	-0,90	56,70
	0,00	3,86	98,10	-0,71	71,10
	22,50	5,39	116,10	-0,12	81,00
	45,00	5,96	135,00	0,56	78,30
10	-45,00	2,88	135,00	-0,75	45,00
	-22,50	2,66	149,40	-0,96	57,60
	0,00	4,00	98,10	-0,77	72,00
	22,50	5,60	116,10	-0,14	81,90
	45,00	6,20	135,00	0,55	81,00

Tabla 2.22. Resultados numéricos para $N_x=N_y=2N_{xy}$ con $G/E_2=0,3$ y $\nu_1=0,3$.

La Figura 2.24, Figura 2.25 y Figura 2.26 muestran la variación del factor K_+ con respecto a los valores del ángulo θ , según la relación E_1/E_2 para cada valor de G/E_2 modelados. De la observación de las mismas, se nota que, para el valor de $G/E_2=0,3$ los valores de K_+ son los menores para cada relación E_1/E_2 , comportamiento similar al de K_+ cuando se consideró $N_x=N_y=N_{xy}$.

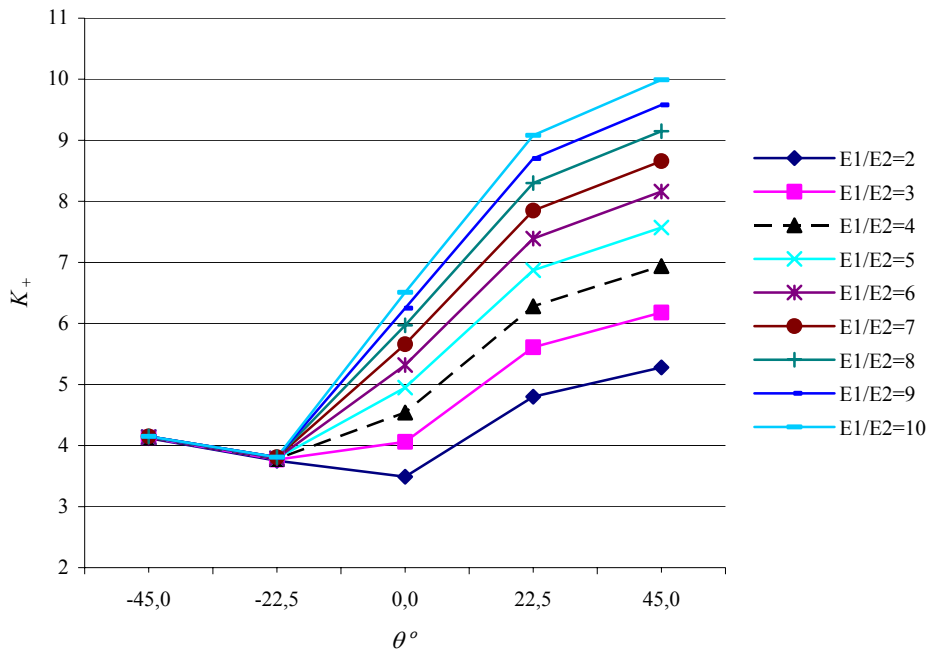


Figura 2.24. K_+ versus ángulo θ para $G/E_2=0,1$, caso $N_x=N_y=N_{xy}/2$.

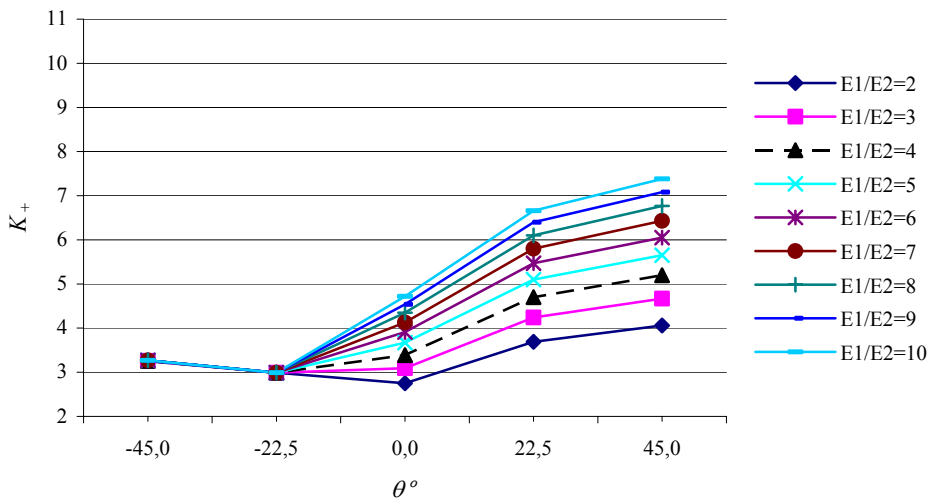


Figura 2.25. K_+ versus ángulo θ para $G/E_2=0,2$, caso $N_x=N_y=N_{xy}/2$.

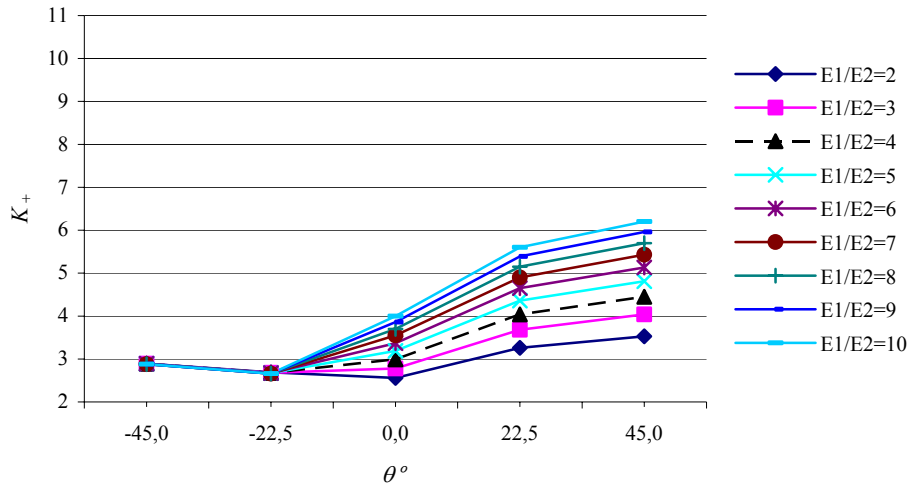


Figura 2.26. K_+ versus ángulo θ para $G/E_2=0,3$, caso $N_x=N_y=N_{xy}/2$.

De las Tablas precedentes y de los gráficos en que se han volcado sus valores, se concluye en que para orientaciones de los ejes principales de elasticidad $\theta=0^\circ, 22,5^\circ$ y 45° los valores de K_+ crecen con la relación E_1/E_2 .

En cambio para valores de $\theta= -45^\circ$ y $-22,5^\circ$, los valores de K_+ son independientes de la relación E_1/E_2 , Figura 2.27 y Figura 2.28.

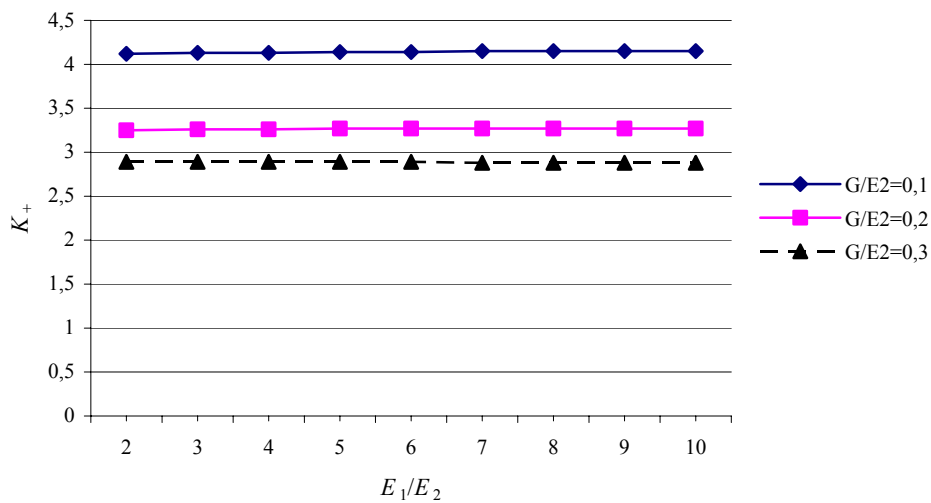


Figura 2.27. K_+ versus E_1/E_2 cuando $\theta= -45^\circ$, cuando $N_x=N_y=N_{xy}/2$.

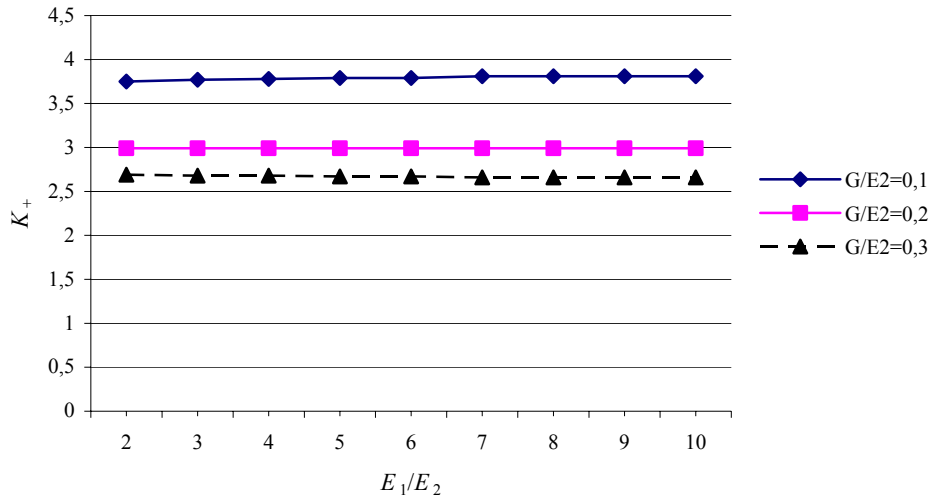


Figura 2.28. K_+ versus E_1/E_2 cuando $\theta = -22,5^\circ$, cuando $N_x=N_y=N_{xy}/2$.

En este caso, las magnitudes de las tensiones de compresión son menores que en el anterior, en virtud de que el esfuerzo de corte aplicado es menor.

Los resultados numéricos de K_+ , de la Tabla 2.20, para $G/E_2=0,1$ se muestran en forma de gráfico en la Figura 2.29. En ella se observa que para las orientaciones de los ejes de elasticidad en $\theta = -45^\circ$ y 45° no ocurren valores de compresión para ninguna relación E_1/E_2 . Además es notable que solamente para dos valores de θ se supera el valor unidad del factor K_+ . Cuando $\theta = -22,5^\circ$ con los valores de $E_1/E_2=9$ y 10 y en el caso de $\theta = 0^\circ$ con los valores de $E_1/E_2=7, 8, 9$ y 10

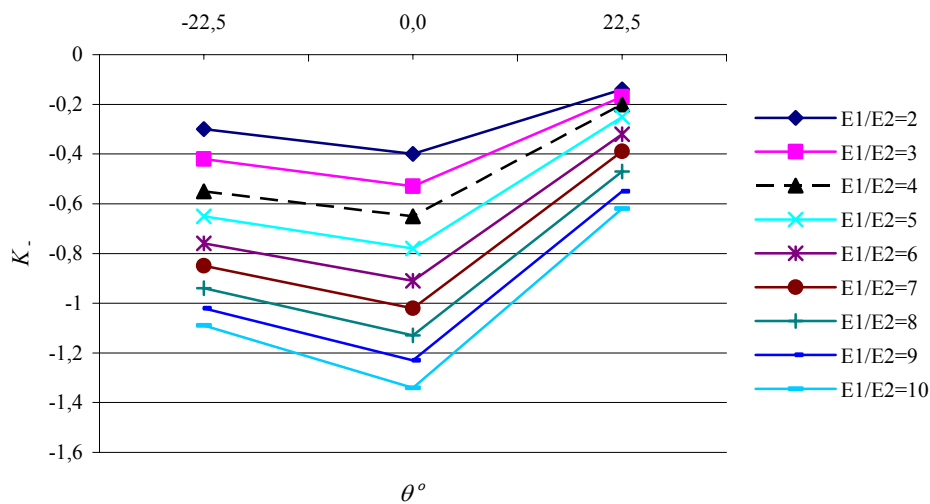


Figura 2.29. K_- versus ángulo θ para $G/E_2=0,1$, caso $N_x=N_y=N_{xy}/2$.

Los resultados numéricos de K_- , de la Tabla 2.21, para $G/E_2=0,2$ se muestran en forma de gráfico en la Figura 2.30. En ella se nota que para ninguna orientación de los ejes principales de elasticidad, θ , se obtiene valores de K_- superiores a la unidad.

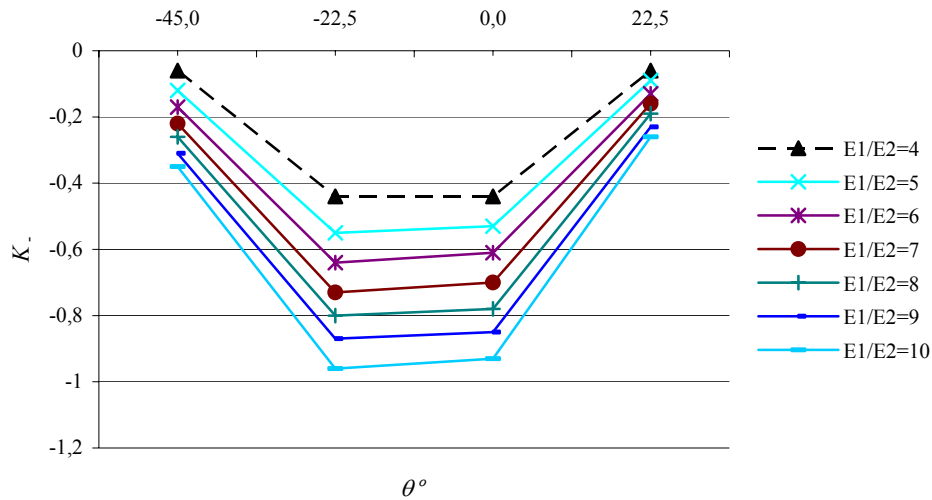


Figura 2.30. K versus ángulo θ para $G/E_2=0,2$, caso $N_x=N_y=N_{xy}/2$.

Los datos numéricos de la Tabla 2.22, caso en que $G/E_2=0,3$, se representaron gráficamente en la Figura 2.31. Cuando la orientación de los ejes de elasticidad se encuentran en $\theta=45^\circ$ no se producen valores de compresión. También se hace notar que para cualquier valor de θ , el valor de K no supera el valor unidad.

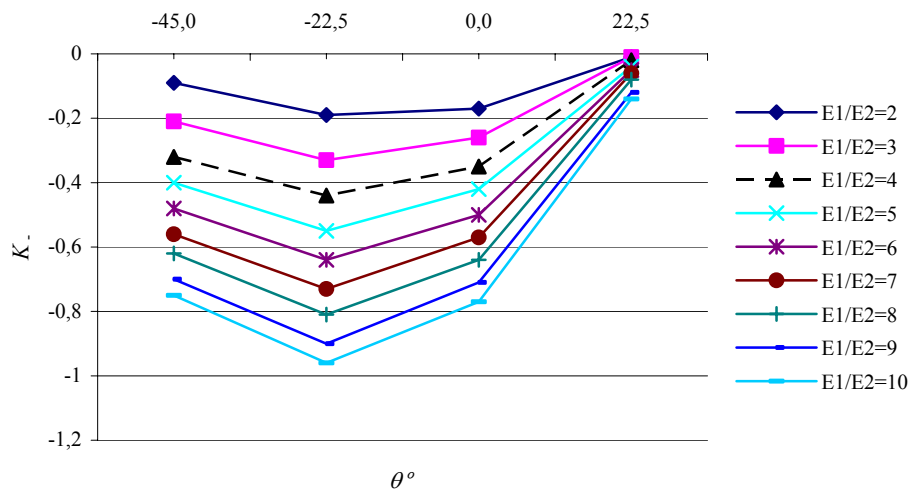


Figura 2.31. K versus ángulo θ para $G/E_2=0,3$, caso $N_x=N_y=N_{xy}/2$.

2.3.2.3 Resultados para la sollicitación $N_x=N_y=N_{xy}/2$

En este caso la tensión normal aplicada sobre los bordes es $N_x=N_y=N$ y la tensión de corte toma el valor $N_{xy}=2N$. El estado de tensiones sobre el dominio sin considerar la perturbación del orificio es:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= N/h \\
 \sigma_y &= N/h \\
 \tau_{xy} &= 2\frac{N}{h}
 \end{aligned}
 \tag{2.29}$$

Reemplazando las igualdades anteriores en la expresión (2.21), se tiene la tensión principal máxima y mínima sobre todo el dominio, sin la perturbación del orificio:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= 3\frac{N}{h} \\
 \sigma_2 &= -\frac{N}{h}
 \end{aligned}
 \tag{2.30}$$

Acorde a lo explicado para los casos anteriores, para esta situación, la mayor tensión principal es $\sigma_1=3N/h$ quedando las siguientes expresiones para K_+ y K_- :

$$\begin{aligned}
 K_+ &= \frac{1}{3} \frac{\sigma_{\alpha+}}{N} h \\
 K_- &= \frac{1}{3} \frac{\sigma_{\alpha-}}{N} h
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

Para esta sollicitación los resultados numéricos de K_+ y K_- se exponen en las siguientes tablas, Tabla 2.23, Tabla 2.24 y Tabla 2.25:

E_1/E_2	θ°	$G/E_2 = 0,1$		$\nu_1 = 0,3$	
		K_+	β_+°	K_-	β_-°
2	-45,00	4,60	135,00	-3,35	45,00
	-22,50	4,08	150,30	-3,07	58,50
	0,00	3,69	102,60	-2,18	71,10
	22,50	5,52	117,90	-2,04	36,00
	45,00	6,24	135,00	-2,17	45,00
3	-45,00	4,52	135,00	-4,01	45,00
	-22,50	4,01	150,30	-3,67	60,30
	0,00	4,31	100,80	-2,58	74,70
	22,50	6,50	117,00	-1,93	36,00
	45,00	7,35	135,00	-2,02	45,00
4	-45,00	4,48	135,00	-4,54	45,00
	-22,50	3,95	150,30	-4,18	60,30
	0,00	4,85	99,90	-2,96	75,60
	22,50	7,32	117,00	-1,87	36,00
	45,00	8,26	135,00	-1,95	45,00
5	-45,00	4,45	135,00	-5,01	45,00
	-22,50	3,93	150,30	-4,62	61,20
	0,00	5,33	99,00	-3,30	7,40
	22,50	8,02	116,10	-1,82	36,90
	45,00	9,07	135,00	-1,89	45,00
6	-45,00	4,42	135,00	-5,43	45,00
	-22,50	3,90	152,10	-5,02	61,20
	0,00	5,74	98,10	-3,60	77,40
	22,50	8,66	116,10	-1,78	36,90
	45,00	9,78	135,00	-1,84	45,00
7	-45,00	4,41	135,00	-5,81	45,00
	-22,50	3,89	151,20	-5,38	61,20
	0,00	6,13	98,10	-3,88	78,30
	22,50	9,24	116,10	-1,76	36,90
	45,00	10,42	135,00	-1,81	45,00
8	-45,00	4,39	135,00	-6,15	45,00
	-22,50	3,88	151,20	-5,69	61,20
	0,00	6,48	98,10	-4,13	78,30
	22,50	9,77	116,10	-1,86	94,50
	45,00	11,00	135,00	-1,78	45,00
9	-45,00	4,37	135,00	-6,47	45,00
	-22,50	3,87	151,20	-6,00	62,10
	0,00	6,81	98,10	-4,36	78,30
	22,50	10,26	116,10	-2,00	94,50
	45,00	11,54	135,00	-1,76	45,00
10	-45,00	4,36	135,00	-6,76	45,00
	-22,50	3,86	151,20	-6,27	62,10
	0,00	7,09	97,20	-4,60	79,20
	22,50	10,71	116,10	-2,14	84,60
	45,00	12,05	135,00	-1,74	45,00

Tabla 2.23. Resultados numéricos para $N_x=N_y=N_x/2$, con $G/E_2=0,1$ y $\nu_1=0,3$.

E_1/E_2	θ°	$G/E_2 = 0,2$		$\nu_1 = 0,3$	
		K_+	β_+°	K_-	β_-°
2	-45,00	3,73	135,00	-2,94	45,00
	-22,50	3,38	145,80	-2,69	56,70
	0,00	3,21	108,90	-2,01	63,90
	22,50	4,49	120,60	-1,82	41,40
	45,00	5,01	135,00	-1,88	45,00
3	-45,00	3,65	135,00	-3,50	45,00
	-22,50	3,30	146,70	-3,17	58,50
	0,00	3,60	105,30	-2,27	69,30
	22,50	5,21	118,80	-1,70	42,30
	45,00	5,84	135,00	-1,74	45,00
4	-45,00	3,60	135,00	-3,97	45,00
	-22,50	3,25	146,70	-3,60	59,40
	0,00	3,97	102,60	-2,52	72,00
	22,50	5,82	117,90	-1,63	43,20
	45,00	6,54	135,00	-1,64	45,00
5	-45,00	3,56	135,00	-4,39	45,00
	-22,50	3,20	146,70	-3,96	60,30
	0,00	4,31	101,70	-2,76	73,80
	22,50	6,35	117,90	-1,59	43,20
	45,00	7,15	135,00	-1,59	45,00
6	-45,00	3,54	135,00	-4,75	45,00
	-22,50	3,17	146,70	-4,31	60,30
	0,00	4,62	100,80	-2,99	75,60
	22,50	6,83	117,90	-1,74	44,10
	45,00	7,69	135,00	-1,54	45,00
7	-45,00	3,52	135,00	-5,09	45,00
	-22,50	3,15	146,70	-4,62	61,20
	0,00	4,90	100,80	-3,21	76,50
	22,50	7,27	117,00	-1,53	45,00
	45,00	8,19	135,00	-1,52	45,00
8	-45,00	3,50	135,00	-5,41	45,00
	-22,50	3,14	146,70	-4,90	61,20
	0,00	5,18	99,90	-3,43	76,50
	22,50	7,68	117,00	-1,51	45,00
	45,00	8,65	135,00	-1,49	45,00
9	-45,00	3,49	135,00	-5,69	45,00
	-22,50	3,12	147,60	-5,18	61,20
	0,00	5,43	99,90	-3,62	77,40
	22,50	8,07	117,00	-1,56	89,10
	45,00	9,08	135,00	-1,47	45,00
10	-45,00	3,48	135,00	-5,97	45,00
	-22,50	3,11	147,60	-5,43	61,20
	0,00	5,67	99,00	-3,81	77,40
	22,50	8,43	117,00	-1,64	90,90
	45,00	9,48	135,00	-1,44	45,00

Tabla 2.24. Resultados numéricos para $N_x=N_y=N_{xy}/2$ con $G/E_2=0,2$ y $\nu_1=0,3$.

E_1/E_2	θ°	$G/E_2 = 0,3$		$\nu_1 = 0,3$	
		K_+	β_+°	K_-	β_-°
2	-45,00	3,36	135,00	-2,76	45,00
	-22,50	3,14	141,30	-2,55	54,90
	0,00	3,19	116,10	-2,02	58,50
	22,50	4,09	123,30	-1,76	45,90
	45,00	4,49	135,00	-1,75	45,00
3	-45,00	3,27	135,00	-3,29	45,00
	-22,50	3,04	141,30	-2,98	56,70
	0,00	3,43	109,80	-2,20	65,70
	22,50	4,69	120,60	-1,64	47,70
	45,00	5,20	135,00	-1,61	45,00
4	-45,00	3,21	135,00	-3,73	45,00
	-22,50	2,97	142,20	-3,36	58,50
	0,00	3,70	106,20	-2,39	69,30
	22,50	5,20	119,70	-1,58	49,50
	45,00	5,79	135,00	-1,52	45,00
5	-45,00	3,18	135,00	-4,11	45,00
	-22,50	2,93	142,20	-3,70	59,40
	0,00	3,96	104,40	-2,59	72,00
	22,50	5,64	118,80	-1,54	51,30
	45,00	6,31	135,00	-1,47	45,00
6	-45,00	3,16	135,00	-4,45	45,00
	-22,50	2,90	142,20	-4,01	59,40
	0,00	4,22	103,50	-2,78	72,90
	22,50	6,05	118,80	-1,51	53,10
	45,00	6,78	135,00	-1,41	45,00
7	-45,00	3,14	135,00	-4,78	45,00
	-22,50	2,88	142,20	-4,29	60,30
	0,00	4,44	102,60	-2,96	74,70
	22,50	6,43	117,90	-1,49	54,90
	45,00	7,20	135,00	-1,39	45,00
8	-45,00	3,12	135,00	-5,06	45,00
	-22,50	2,86	142,20	-4,55	60,30
	0,00	4,67	101,70	-3,14	75,60
	22,50	6,78	117,90	-1,64	76,50
	45,00	7,60	135,00	-1,36	45,00
9	-45,00	3,10	135,00	-5,33	45,00
	-22,50	2,84	143,10	-4,80	61,20
	0,00	4,87	101,70	-3,32	75,60
	22,50	7,10	117,90	-1,51	82,80
	45,00	7,97	135,00	-1,34	45,00
10	-45,00	3,09	135,00	-5,59	45,00
	-22,50	2,82	143,10	-5,04	61,20
	0,00	5,08	100,80	-3,48	76,50
	22,50	7,40	117,90	-1,55	85,50
	45,00	8,31	135,00	-1,31	45,00

Tabla 2.25. Resultados numéricos para $N_x=N_y=N_{xy}/2$ con $G/E_2=0,3$ y $\nu_1=0,3$.

La Figura 2.32, la Figura 2.33 y la Figura 2.34 muestran la variación del factor K_+ con respecto a los valores del ángulo θ , según la relación E_1/E_2 para cada valor de G/E_2 modelados. De la observación de las mismas, se nota que los valores de K_+ son menores para cada relación E_1/E_2 a medida que G/E_2 crece, comportamiento similar al de K_+ para los casos anteriores de $N_x=N_y=N_{xy}$ y $N_x=N_y=2N_{xy}$.

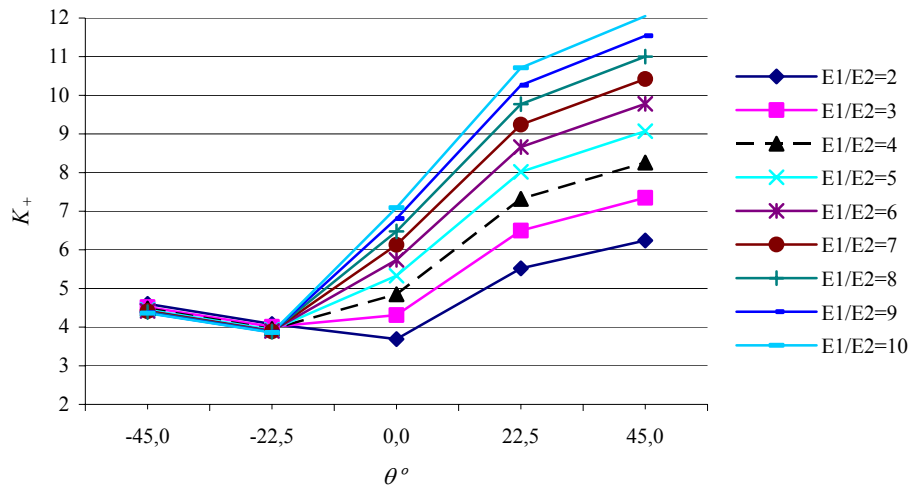


Figura 2.32. K_+ versus ángulo θ para $G/E_2=0,1$, caso $N_x=N_y=2N_{xy}$.

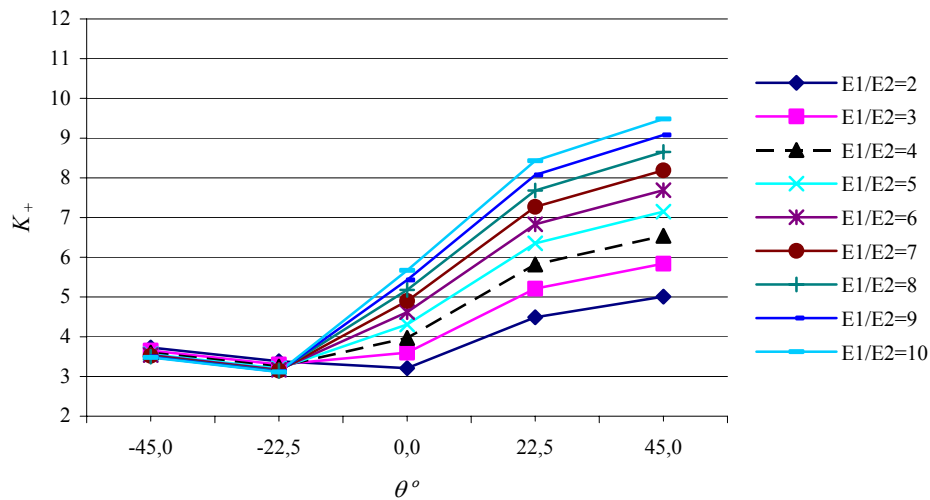


Figura 2.33. K_+ versus ángulo θ para $G/E_2=0,2$, caso $N_x=N_y=2N_{xy}$.

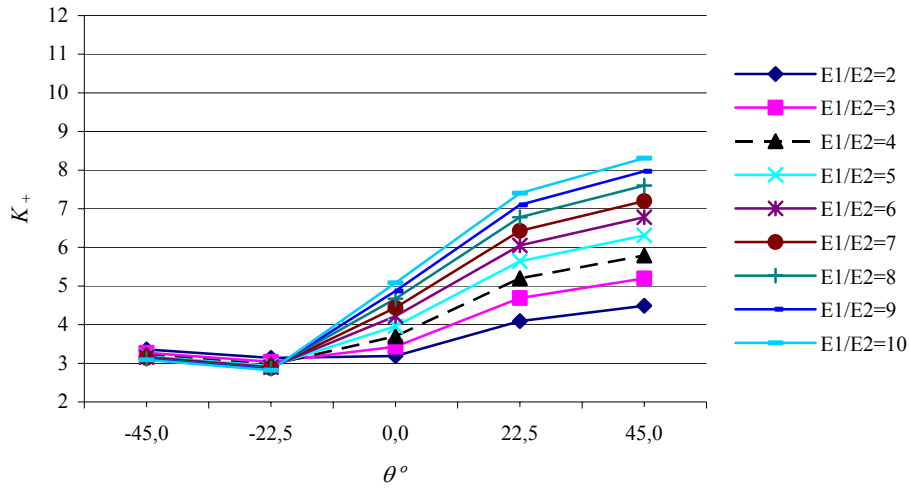


Figura 2.34. K_+ versus ángulo θ para $G/E_2=0,3$, caso $N_x=N_y=2N_{xy}$.

Se observa, al igual que el caso anterior, que para valores de $\theta=0^\circ$, $22,5^\circ$ y 45° , el factor K_+ crece con la relación E_1/E_2 .

Cuando $\theta = -45^\circ$ y $-22,5^\circ$, la relación E_1/E_2 incide muy poco (y en sentido inverso), siendo más significativa la influencia de la relación G/E_2 , Figura 2.35 y Figura 2.36.

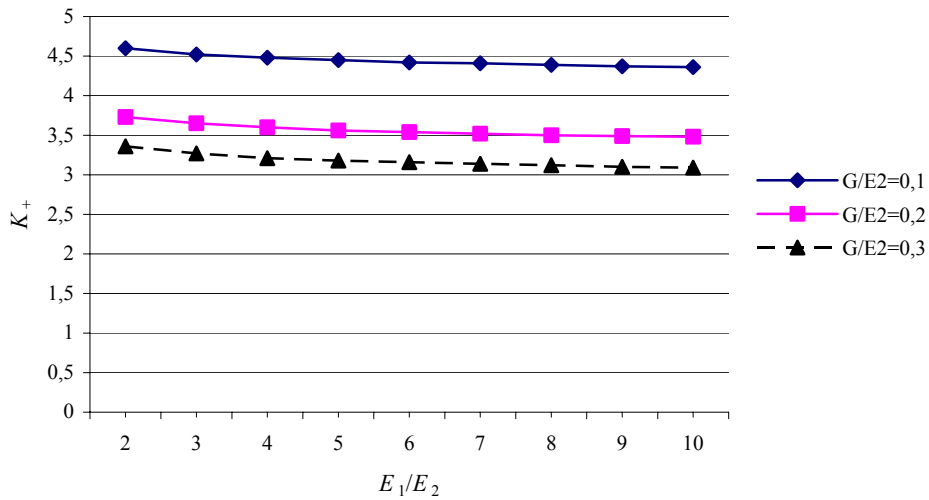


Figura 2.35. K_+ versus E_1/E_2 cuando $\theta = -45^\circ$, cuando $N_x=N_y=2N_{xy}$.

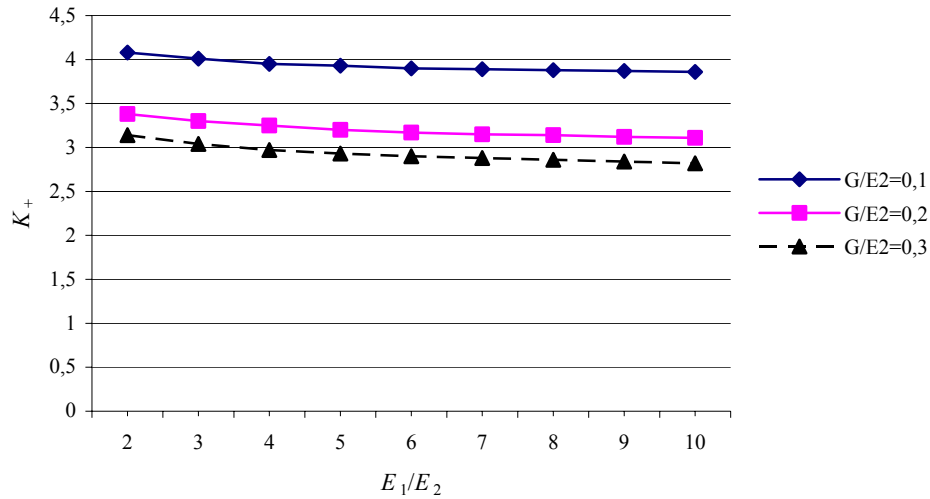


Figura 2.36. K_+ versus E_1/E_2 cuando $\theta = -22,5^\circ$, cuando $N_x=N_y=2N_{xy}$.

En cuanto a las tensiones de compresión (K_-), obviamente en este caso son mayores por la mayor magnitud de N_{xy} aplicado.

La Figura 2.37, Figura 2.38 y Figura 2.39 muestran la variación del factor K_- , para distintos valores del ángulo θ y de las relaciones E_1/E_2 y G/E_2 .

Al igual que en el caso de K_+ , los valores de K_- disminuyen en valor absoluto conforme aumenta la relación G/E_2 .

Asimismo, se observa en cada una de las figuras que K_- crece en magnitud con el aumento de E_1/E_2 . A diferencia de lo que ocurre con K_+ , este comportamiento es notorio para valores de $\theta = -45^\circ, -22,5^\circ$ y 0° .

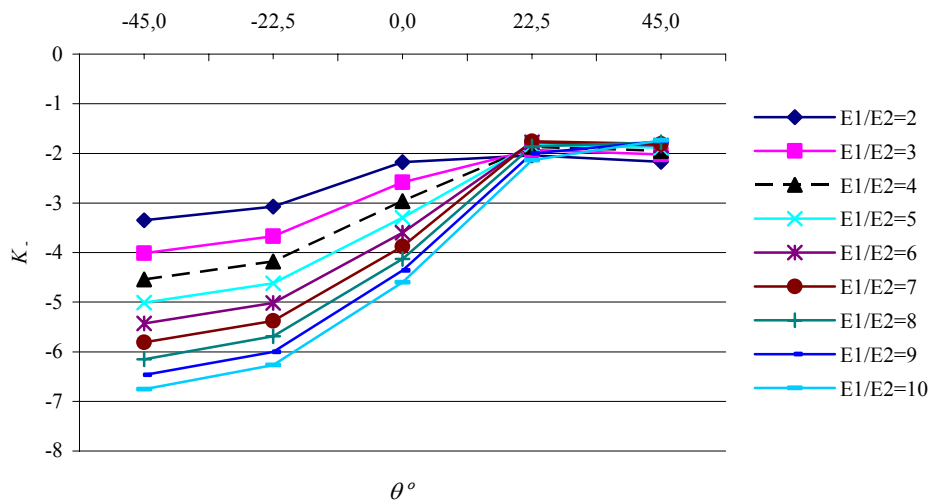


Figura 2.37. K_- versus ángulo θ para $G/E_2=0,1$, caso $N_x=N_y=2N_{xy}$.

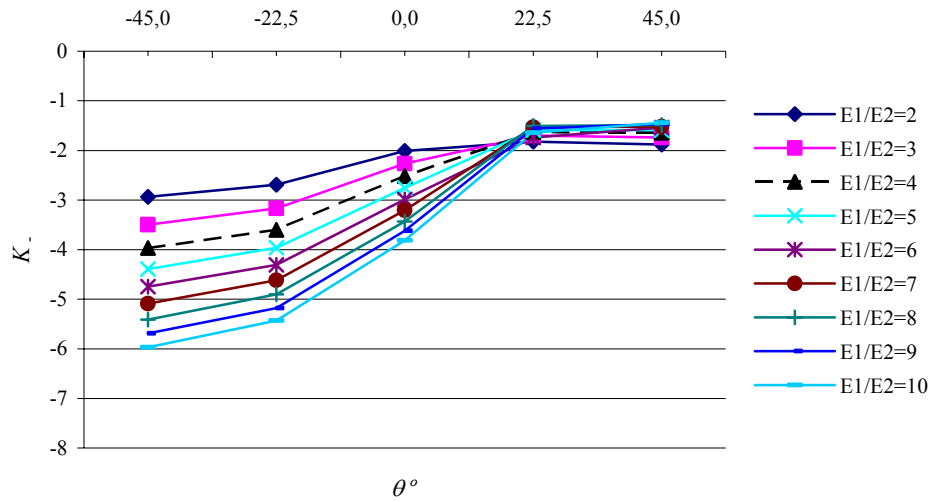


Figura 2.38. K versus ángulo θ para $G/E_2=0,2$, caso $N_x=N_y=2N_{xy}$.

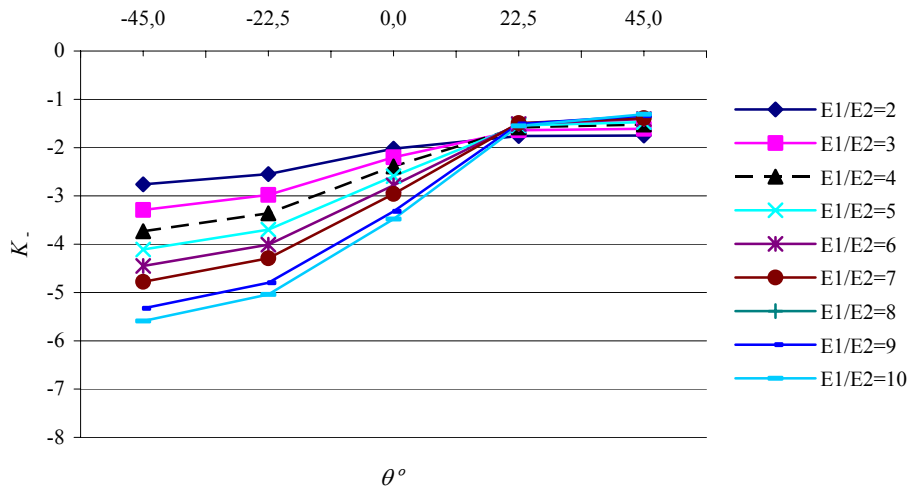


Figura 2.39. K versus ángulo θ para $G/E_2=0,3$, caso $N_x=N_y=2N_{xy}$.

En el caso de $\theta = 22,5^\circ$ y 45° , el comportamiento es similar aunque no tan evidente, Figura 2.40.

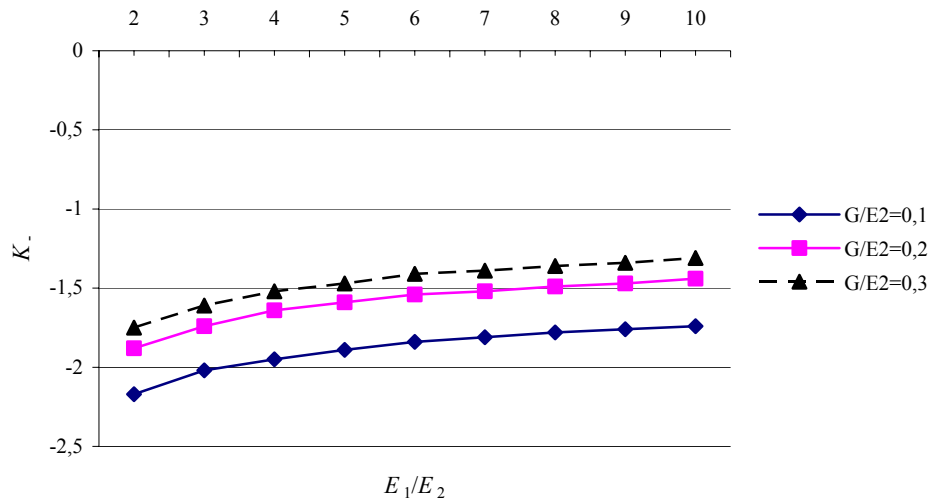


Figura 2.40. K_- versus E_1/E_2 cuando $\theta = 45^\circ$, cuando $N_x=N_y=2N_{xy}$.

2.4 CONCLUSIONES.

Distintas configuraciones de materiales ortótropos y orientaciones de los ejes de elasticidad fueron analizadas en forma individual para cada estado de cargas aplicadas en una placa cuadrada con un pequeño orificio circular. Los casos de cargas considerados son: estado de tracción biaxial, $N_x=N_y$, y una serie de situaciones con tensiones de corte, $N_x=N_y=2N_{xy}$, $N_x=N_y=N_{xy}$ y $N_x=N_y=N_{xy}/2$. En lo que sigue, se analizó la variación de K_+ según las tensiones de corte aplicadas al modelo.

Se notó una marcada influencia de la variación de los estados de carga en los valores de los parámetros determinados para las distintas relaciones de E_1/E_2 , G/E_2 y orientación de los ejes principales de elasticidad, θ . Dicha influencia se evidencia en los siguientes gráficos.

La Figura 2.41 muestra la variación de K_+ según los distintos estados de cargas aplicados al modelo para un valor de $\theta=45^\circ$ y $G/E_2=0,1$. Sobre el eje de las abscisas, se representan los distintos estados de carga. El primero de ellos es el estado de tracción biaxial, $N_x=N_y$, luego el caso en que la tensión de corte aplicada es la mitad de la tensión normal, $N_x=N_y=2N_{xy}$ hasta el último caso en que N_{xy} es el doble de la tensión normal aplicada, es decir $N_x=N_y=N_{xy}/2$. Se observa que todos los casos con N_{xy} poseen mayores valores de K_+ con respecto al estado de tracción biaxial. El caso con tensiones de corte con menor valor de K_+ es para $N_x=N_y=2N_{xy}$.

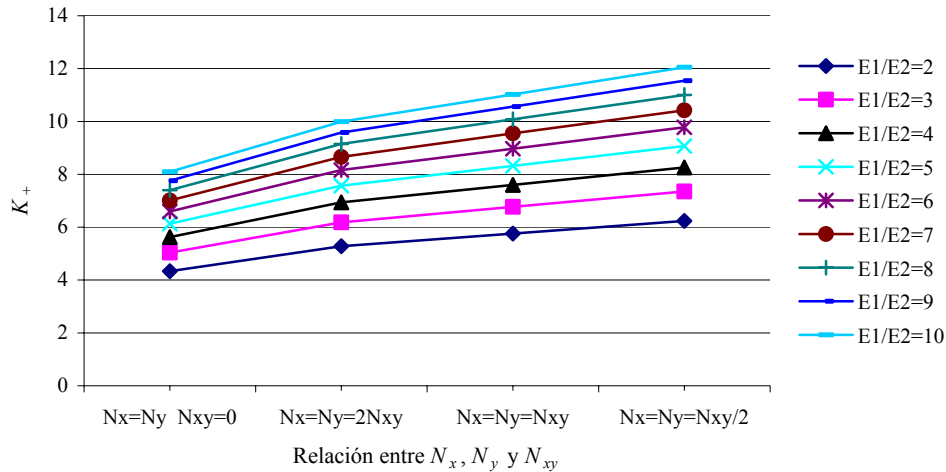


Figura 2.41. K_+ versus carga aplicada sobre la placa para $\theta=45^\circ$ y $G/E_2=0,1$.

El comportamiento es similar cuando $G/E_2=0,3$. La Figura 2.42 muestra la variación de K_+ según los distintos estados de cargas aplicados al modelo para un valor de $\theta=45^\circ$ y $G/E_2=0,3$.

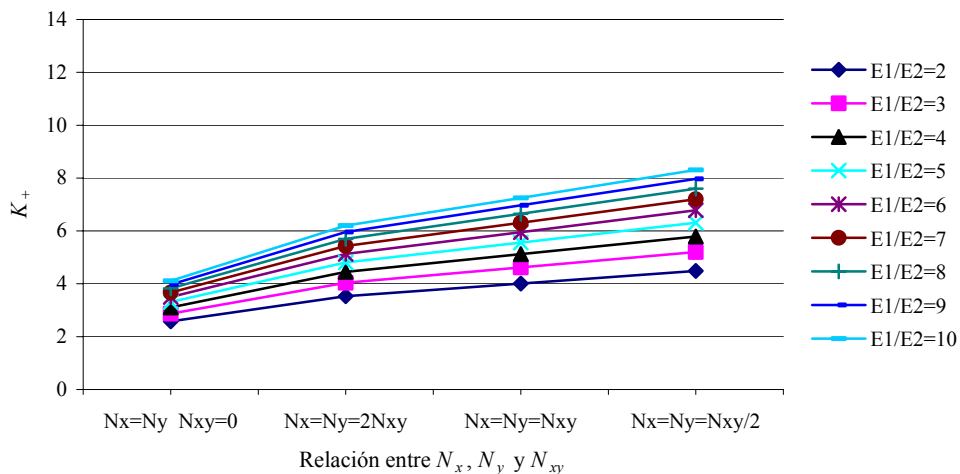


Figura 2.42. K_+ versus carga aplicada sobre la placa para $\theta=45^\circ$ y $G/E_2=0,3$.

En las figuras anteriores, se observa que la presencia de N_{xy} incrementa la magnitud de K_+ que crece con N_{xy} . Esto no es así cuando los ejes principales de elasticidad tienen una orientación de $\theta=-45^\circ$. La Figura 2.43 muestra la variación de K_+ según los distintos estados de cargas aplicados al modelo para un valor de $\theta=-45^\circ$ y $G/E_2=0,1$. En ella se hace notar que no hay diferencias apreciables del factor K_+ según las relaciones E_1/E_2 cuando están presentes las tensiones de corte N_{xy} .

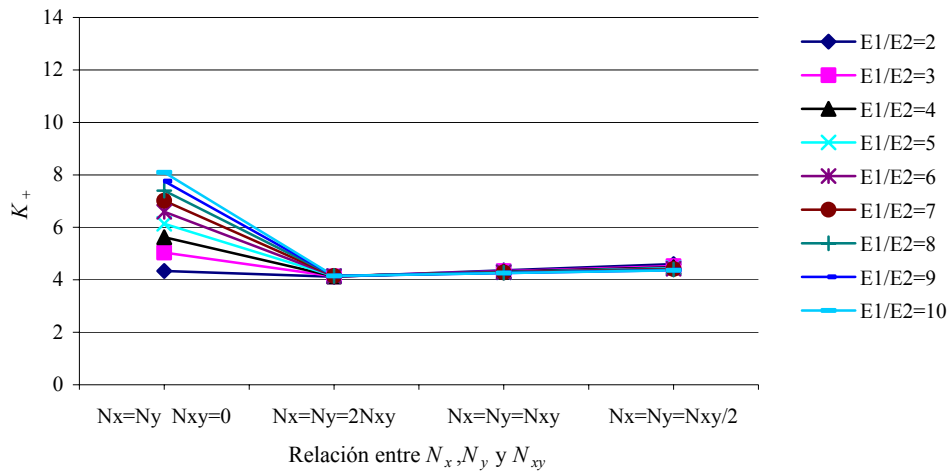


Figura 2.43. K_+ versus carga aplicada sobre la placa para $\theta=-45^\circ$ y $G/E_2=0,1$.

Un comportamiento similar, al observado en la figura anterior, se produce para el valor de $\theta=-45^\circ$ y $G/E_2=0,3$, Figura 2.44. Aunque para esta relación de G/E_2 las diferencias de K_+ para el caso de tracción biaxial, $N_x=N_y$, y $N_{xy}=0$, para distintas relaciones E_1/E_2 no son tan marcadas con respecto al caso anterior.

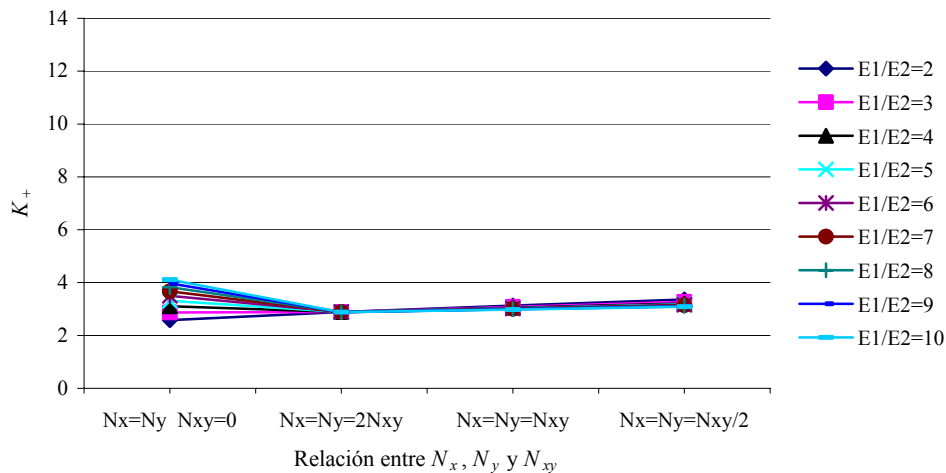


Figura 2.44. K_+ versus carga aplicada sobre la placa para $\theta=-45^\circ$ y $G/E_2=0,3$.

De los casos con tensiones de corte analizados se concluye que dada una combinación de la relación E_1/E_2 y un ángulo de orientación de los ejes principales de elasticidad, θ , para mayores valores de G/E_2 el valor de K_+ disminuye. Esta situación no es tan clara cuando la sollicitación de la placa es un estado de tracción biaxial, ver Figura 2.10.

Si el modelo posee tensiones de corte, para una combinación de relación E_1/E_2 y G/E_2 , la orientación de los ejes principales de elasticidad en $\theta=-45^\circ$ produce los menores valores de K_+ . Aunque esa orientación de los ejes principales de elasticidad, produce el mayor valor de K_- salvo para el caso en que $G/E_2=0,1$ y las tensiones de corte aplicadas tienen igual magnitud que las tensiones normales, $N_x=N_y=N_{xy}$, ver Figura 2.20, donde el valor de $\theta=-22,5^\circ$ produce el mayor valor de K_- .

Una amplia variedad de situaciones fueron consideradas en el presente capítulo. Las

mismas ponen en evidencia la importancia de la orientación de los ejes principales de elasticidad en el valor del factor de concentración de tensiones sobre un pequeño orificio circular presente en una placa ortótropa. Para algunos materiales ortótropos cuyas constantes elásticas se correspondan con las relaciones E_1/E_2 , G/E_2 presentes en este capítulo, y el valor del módulo $\nu_1=0,3$, se encontraron valores del ángulo θ para los cuales el valor de K_+ es menor al que se daría si los ejes principales de elasticidad coincidieran con los ejes coordenados. La variación del factor K también fue estudiada.

El análisis anterior se realizó con una herramienta numérica relativamente sencilla como es el método de elementos finitos aplicado a través de un código comercial.

2.5 BIBLIOGRAFÍA.

- [1] G. Kirsch, “Die theorie der elastizität und die bedürfnisse der festigkeislehre”, *Zeit Verem, Deutsch Ing.*, Vol. 42, 797-807 (1898).
- [2] P. A. A. Laura and V. Sonzogni., “Kirsch Problem and the Lower Natural Frequencies of a Clamped Square-Plate”, *Ocean Engineering*, Vol. 24 No 10, 985-988 (1997).
- [3] P. A. A. Laura, M. J. Maurizi, “*Introducción a la Mecánica de los Sólidos*”, EUDEBA, Buenos Aires (1979).
- [4] S.G. Lekhnitskii, “*Anisotropic Plates*”, Gordon and Breach Science Publishers, New York (1968).
- [5] M. Sánchez., N. Troyani, “Factor Teórico de Concentración de esfuerzos en piezas cortas de materiales anisotrópicos”, ENIEF 2003, *Mecánica Computacional*, Vol. XXII, 2135-2144 (2003).
- [6] S. Maiz, R. E. Rossi, P. A. A. Laura, D. V. Bambill, “Efectos de la ortotropía sobre el factor de concentración de tensiones: extensión del problema de Kirsch”, ENIEF 2004, *Mecánica Computacional*, Vol. XXIII, 673-692 (2004).
- [7] ALGOR 20, “*Linear dynamic analysis*”, Algor Inc. (2007).
- [8] D. V. Bambill, A. Susca, P. A. A. Laura, S. Maiz, “Concentración de tensiones en placa ortótropa sometida a esfuerzo biaxial”, MECOM 2005, *Mecánica Computacional*, Vol. XXIV, 2675-2694 (2005).
- [9] A. Susca, D. V. Bambill, C. A. Rossit, “Análisis de la concentración de tensiones en placas ortótropas con orificio circular sometidas simultáneamente a cargas normales y tangenciales”, ENIEF 2007, *Mecánica Computacional*, Vol. XXVI, 386-405 (2007).
- [10] S. Timoshenko, J. N. Goodier, “*Theory of elasticity*”, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, N. Y., (1951).