

Tesis de
Doctorado en Física

Modelado y análisis de movimientos oculares:
Aplicación al estudio del proceso de lectura

Lic. Marcos Miguel Meo

Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Física, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Física durante el período comprendido entre el día 26 de septiembre de 2018 y el 31 de marzo de 2025, bajo la dirección del Dr. Gustavo Gasaneo, Profesor Titular del Departamento de Física e Investigador Principal del CONICET, y bajo la codirección del Dr. Sebastián Bouzat, Profesor Asociado de la Universidad Nacional de Río Negro e Investigador Independiente del CONICET.

Lic. Marcos Miguel Meo
marcos.meo@uns.edu.ar
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Bahía Blanca, 1 de abril de 2025



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Subsecretaría de Posgrado

La presente tesis ha sido aprobada el 08/07/2025
mereciendo la calificación de 10 (sobresaliente)

Resumen

En esta tesis se presenta un análisis exhaustivo de los movimientos oculares mediante el uso de eye tracking, con enfoque en modelado, análisis estadístico y aplicaciones en diferentes poblaciones. Este trabajo se centra en el estudio de los movimientos oculares, especialmente durante la lectura, utilizando herramientas de la física, la estadística, la neurociencia y el aprendizaje automático. El objetivo principal es describir y diferenciar las propiedades dinámicas de las series temporales asociadas a los movimientos oculares, con el fin de caracterizar las estructuras fractales e identificar propiedades que permitan distinguir comportamientos en diferentes poblaciones. La investigación se enfoca en el estudio de individuos con dislexia y nistagmo infantil, condiciones que presentan comportamientos atípicos en los movimientos oculares durante la lectura. Para ello, en primer lugar, se presenta un modelo mecánico detallado de la dinámica del movimiento ocular y la pupila, explicando las oscilaciones postsacádicas. También se introduce un modelo simplificado para analizar secuencias de movimientos sacádicos y un modelo estocástico para representar los movimientos oculares durante la lectura, considerando las amplitudes de las sacadas y los tiempos entre ellas. En segundo lugar, se introduce el análisis "multifractal detrended fluctuation analysis" (MF-DFA) para estimar el espectro multifractal de series temporales biomédicas, aplicándolo al análisis de señales de eye tracking. Se definen parámetros que caracterizan la dinámica de las series temporales y se estudia cómo se modifican en función de las características de las señales. En tercer lugar, se analizan las propiedades fractales de los movimientos oculares durante la lectura en niños con y sin dislexia. Los resultados revelan diferencias significativas en las características fractales, con una estructura fractal menos compleja en niños con dislexia. Los parámetros definidos caracterizan la complejidad de los movimientos oculares durante la lectura, identificando diferencias entre niños con y sin dislexia. Finalmente, se estudian los movimientos oculares de niños con nistagmo infantil en dos tareas diferentes: lectura y seguimiento de trayectorias. Se analizan los movimientos oculares en términos de propiedades multifractales, encontrando diferencias significativas entre niños con y sin nistagmo. Se aplican algoritmos de agrupamiento y clasificación basados en propiedades multifractales para diferenciar a los sujetos. Esta tesis destaca la importancia de considerar la estructura fractal de las señales de eye tracking como un indicador clave de la función visual y cognitiva. Los resultados demuestran la robustez del uso de características multifractales como potenciales biomarcadores para el diagnóstico y monitoreo de diversos trastornos o patologías. Estos hallazgos contribuyen a una comprensión más profunda de los mecanismos que regulan el movimiento ocular y su relación con distintas condiciones fisiológicas y patológicas.

Abstract

This thesis presents a comprehensive analysis of eye movements using eye tracking, with a focus on modelling, statistical analysis, and applications in different populations. This work focuses on the study of eye movements, particularly during reading, using tools from physics, statistics, neuroscience, and machine learning. The main objective is to describe and differentiate the dynamic properties of time series associated with eye movements, in order to characterize fractal structures and identify properties that help distinguishing behaviours in different populations. The research focuses on studying individuals with dyslexia and infantile nystagmus, conditions that exhibit atypical eye movement behaviours during reading. To achieve this, first, a detailed mechanical model of the dynamics of eye and pupil movement is presented, explaining postsaccadic oscillations. A simplified model is also introduced to analyse sequences of saccadic movements, along with a stochastic model to represent eye movements during reading, considering saccade amplitudes and the time intervals between them. Secondly, MF-DFA (multifractal detrended fluctuation analysis) is introduced to estimate the multifractal spectrum of biomedical time series, applying it to the analysis of eye tracking signals. Parameters characterizing the dynamics of time series are defined, and their variations are studied based on the characteristics of the signals. Thirdly, the fractal properties of eye movements during reading in children with and without dyslexia are analysed. The results reveal significant differences in fractal characteristics, with a less complex fractal structure in children with dyslexia. The defined parameters characterize the complexity of eye movements during reading, identifying differences between children with and without dyslexia. Finally, the eye movements of children with infantile nystagmus are studied in two different tasks: reading and trajectory tracking. Eye movements are analysed in terms of multifractal properties, revealing significant differences between children with and without nystagmus. Clustering and classification algorithms based on multifractal properties are applied to differentiate subjects. This thesis highlights the importance of considering the fractal structure of eye tracking signals as a key indicator of visual and cognitive function. The results demonstrate the robustness of using multifractal characteristics as potential biomarkers for diagnosing and monitoring various disorders or pathologies. These findings contribute to a deeper understanding of the mechanisms regulating eye movement and their relationship with different physiological and pathological conditions.

Índice general

Prefacio	II
Resumen	III
Abstract	IV
1. Introducción	1
2. Marco teórico general: Vision humana, eye tracking y análisis estadístico, fractalidad y alometría	8
2.1. Sistema visual humano	9
2.1.1. Estructura anatómica del ojo humano	9
2.1.2. Estructura óptica y formación de la imagen	15
2.1.3. Movimientos oculares	17
2.2. Eye tracking	18
2.2.1. Evolución del eye tracking	18
2.2.2. Tecnologías actuales	20
2.2.3. Aplicaciones del eye tracking	23
2.2.4. Análisis estadístico de señales de eye tracking	25
2.3. Fractalidad y alometría	27
3. Modelado de movimientos oculares	31
3.1. Modelo mecánico para el movimiento sacádico	32
3.2. Modelo simple para la activación del globo ocular	37

3.3. Descripción de movimientos oculares en lectura mediante una ecuación maestra	39
3.3.1. La ecuación maestra y sus soluciones formales	41
3.3.2. Solución analítica para un caso particular	42
3.3.3. El proceso de lectura como una caminata aleatoria de tiempo continuo	44
3.4. Conclusiones	47
4. Análisis multifractal de movimientos oculares	50
4.1. Comentarios generales	51
4.1.1. Autosimilitud	53
4.1.2. Relación de escala	54
4.1.3. Invarianza de escala	55
4.1.4. Dimensiones euclídea, topológica y fractales	56
4.2. Descripción de la metodología	56
4.3. Análisis multifractal de señales sintéticas con distintas características	63
4.3.1. Dependencia en la forma del movimiento sacádico	63
4.3.2. Dependencia en el ruido en la fijación	67
4.3.3. Dependencia en los parámetros utilizados para generar las señales	70
4.4. Conclusiones	77
5. Aplicación al estudio de dislexia	78
5.1. Participantes y experimentos	79
5.2. Datos experimentales	80
5.3. Resultados	81
5.3.1. Análisis de movimientos oculares hacia adelante y hacia atrás	82
5.3.2. Análisis de las variaciones alrededor de la tendencia de avance	84
5.4. Discusiones	88

5.5. Conclusiones	90
6. Aplicación al estudio del nistagmo infantil	92
6.1. Descripción de la patología	93
6.2. Participantes y experimentos	95
6.3. Datos experimentales	96
6.4. Resultados	99
6.4.1. Descripción estadística de los datos registrados	99
6.4.2. Exponente de Hurst	101
6.4.3. Espectro multifractal	104
6.4.4. Algoritmos de agrupamiento y clasificación basados en propiedades multifractales de los movimientos oculares	109
6.5. Discusiones y conclusiones	112
7. Conclusiones	114

Índice de figuras

2.1. Imagen del globo ocular con sus músculos en la orbita craneal. La imagen es de Patrick J. Lynch, medical illustrator, CC BY 2.5.	10
2.2. Principales componentes del ojo humano.	11
2.3. Esquema de la conformación del ojo en sus diferentes capas.	11
2.4. Perfil con las principales componentes de la túnica vascular.	13
2.5. Fotorreceptores de la retina: conos y bastones.	14
2.6. Sensibilidad de los conos y bastones en función de la luz recibida.	14
2.7. Distribución de conos y bastones en la retina. Se puede ver que los conos están ubicados principalmente en la zona de la fovea, mientras que los bastones se encuentran principalmente en la periferia.	15
2.8. Músculos extrínsecos del ojo humano.	16
2.9. Acomodación del cristalino en función de la distancia al objeto a enfocar en la retina.	16
2.10. Imagen del eye tracker EyeLink 1000 de SR research (www.sr-research.com).	22
2.11. Imagen del eye tracker Tobii Pro (Tobii AB, Sweden). Imagen tomada por Mark Hachman para el artículo https://www.pcworld.com/article/411185/tobii-eye-tracker-4c-hands-on-mousing-with-your-eyes-has-surprising-potential-for-gaming.html	22
3.1. Dinámica del globo ocular. (a) Posición del globo ocular $x(t)$ para una familia de sacadas con $\mu = 2$, $\beta = 1$, $A = 0.04$ fijos y varios valores de x_m . Los paneles (b), (c) y (d) muestran $x(t)$ calculado para $x_m = 15$, considerando diferentes valores de A , μ y β , respectivamente.	36
3.2. Ejemplos de movimiento sacádico registrado (círculos blancos), comparados con la solución del modelo para la activación del globo ocular (Ec. 3.13).	39

3.3. Gráfico de superficie de la solución del modelo analítico, donde la coordenada x aumenta de izquierda a derecha, el tiempo de atrás hacia adelante y el valor de la probabilidad se representa en el eje vertical.	45
3.4. Señales sintéticas generadas a partir de distribuciones obtenidas mediante eye tracking. La coordenada x aumenta de derecha a izquierda, el tiempo de atrás hacia adelante y el valor de la probabilidad se representa en el eje vertical.	47
4.1. Primeras 4 iteraciones de la curva de von Koch.	52
4.2. Ejemplo de fractal exacto (A) y fractal estadístico (B). En el fractal exacto cada parte es una replica exacta del conjunto completo. En el fractal estadístico los parámetros estadísticos de cada parte son iguales a los parámetros estadísticos del conjunto completo.	54
4.3. Función de fluctuación $F_q(s)$ para una serie temporal multifractal (A), una serie temporal monofractal (B) y una serie temporal compuesta por ruido blanco (C).	59
4.4. Exponente de Hurst generalizado $h(q)$ para la serie temporal multifractal (línea sólida azul), la serie temporal monofractal (línea partida roja) y la serie temporal compuesta por ruido blanco (línea punteada verde).	60
4.5. Espectros de singularidades $f(\alpha)$ para la serie temporal multifractal (línea sólida azul), la serie temporal monofractal (línea partida roja) y la serie temporal compuesta por ruido blanco (línea punteada verde).	62
4.6. Ejemplo de movimiento sacádico registrado durante el proceso de lectura (círculos negros). La línea sólida azul corresponde a la representación utilizando la Ec. 3.13 (representación 1). La línea partida naranja corresponde a considerar el movimiento como instantáneo (representación 2). La línea punteada verde corresponde a considerar un movimiento a velocidad constante (representación 3).	64
4.7. Valores del exponente de Hurst obtenidos para las series temporales generadas con las tres representaciones propuestas.	65
4.8. Valores de la fuerza de la singularidad α_0 obtenidos para las series temporales generadas con las tres representaciones propuestas.	65
4.9. Valores de la fuerza multifractal obtenidos para las series temporales generadas con las tres representaciones propuestas.	66
4.10. Valores del parámetro de asimetría obtenidos para las series temporales generadas con las tres representaciones propuestas.	66

4.11. Ejemplos de series temporales sintéticas con ruido fraccionario Browniano añadido.	67
4.12. Valores del exponente de Hurst obtenidos para las series temporales con ruidos de distintos coeficientes de Hurst añadido.	68
4.13. Valores de la fuerza de la singularidad α_0 obtenidos para las series temporales con ruidos de distintos coeficientes de Hurst añadido.	68
4.14. Valores de la fuerza multifractal obtenidos para las series temporales con ruidos de distintos coeficientes de Hurst añadido.	69
4.15. Valores del parámetro de asimetría obtenidos para las series temporales con ruidos de distintos coeficientes de Hurst añadido.	69
4.16. Valores del exponente de Hurst obtenidos para las series temporales generadas con distintos valores del parámetros σ_{sac}	71
4.17. Valores de la fuerza de la singularidad α_0 obtenidos para las series temporales generadas con distintos valores del parámetros σ_{sac}	71
4.18. Valores de la fuerza multifractal obtenidos para las series temporales generadas con distintos valores del parámetros σ_{sac}	72
4.19. Valores del parámetro de asimetría obtenidos para las series temporales generadas con distintos valores del parámetros σ_{sac}	72
4.20. Valores del exponente de Hurst obtenidos para las series temporales generadas con distintos valores del parámetros σ_{fij}	73
4.21. Valores de la fuerza de la singularidad α_0 obtenidos para las series temporales generadas con distintos valores del parámetros σ_{fij}	73
4.22. Valores de la fuerza multifractal obtenidos para las series temporales generadas con distintos valores del parámetros σ_{fij}	74
4.23. Valores del parámetro de asimetría obtenidos para las series temporales generadas con distintos valores del parámetros σ_{fij}	74
4.24. Valores del exponente de Hurst obtenidos para las series temporales generadas con distintos porcentajes de sacadas de avance.	75
4.25. Valores de la fuerza de la singularidad α_0 obtenidos para las series temporales generadas con distintos porcentajes de sacadas de avance.	75
4.26. Valores de la fuerza multifractal obtenidos para las series temporales generadas con distintos porcentajes de sacadas de avance.	76

4.27. Valores del parámetro de asimetría obtenidos para las series temporales generadas con distintos porcentajes de sacadas de avance.	76
5.1. Texto utilizado como estímulo visual en el experimento de lectura.	80
5.2. Movimientos oculares horizontales (en unidades arbitrarias) registrados en un niño con DD durante la prueba de lectura.	81
5.3. Función de autocorrelación de un registro de un niño DD (línea sólida) y un registro de un niño TD (línea punteada). La línea vertical indica una separación de 256 puntos	82
5.4. Funcione de fluctuación de dos niños DD, uno que presenta un comportamiento multifractal multiescala (panel A) y otro sin diferencias en su comportamiento multifractal a diferentes escalas (panel B).	83
5.5. Velocidad lectora <i>vs</i> exponente de Hurst de las señales correspondientes a niños DD (cruces rojas) y a niños TD (círculos azules). Los marcadores más grandes indican el valor medio de cada grupo.	84
5.6. Series temporales analizadas: concatenación de fijaciones y sacadas (línea partida azul) con una clara tendencia lineal (línea sólida roja) y fluctuaciones que resultan al eliminar la tendencia (línea punteada verde).	85
5.7. Valores del exponente de Hurst obtenidos para la variación alrededor la tendencia de avance de los movimientos oculares de niños DD y TD durante la lectura.	86
5.8. Valores del ancho del espectro de singularidades obtenidos para la variación alrededor la tendencia de avance de los movimientos oculares de niños DD y TD durante la lectura.	87
5.9. Comparación de la fuerza de la singularidad α_0 obtenida para la variación alrededor la tendencia de avance de los movimientos oculares de niños DD y TD durante la lectura.	87
5.10. Valores del ancho del espectro de singularidades obtenidos para la variación alrededor de la tendencia de avance de los movimientos oculares de niños DD y TD durante la lectura, luego de aleatorizar los puntos de la señal.	88
6.1. Texto utilizado en la primera etapa del experimento.	96
6.2. Curvas de Lissajous mostradas en la pantalla durante la segunda etapa del experimento.	97

6.3. Ejemplos de velocidad horizontal en función del tiempo para un niño del GC (A), el participante adulto (B) y un niño con NI (C) durante la realización del test de trayectorias.	98
6.4. Histograma normalizado de frecuencias de rapidez de los movimientos oculares de pacientes con NI y participantes del GC.	99
6.5. Valores de los índices propuestos para los pacientes con NI y los participantes del GC correspondientes al test de lectura. El símbolo X indica el valor obtenido para el adulto con NI.	100
6.6. Valores de los índices propuestos para los pacientes con NI y los participantes del GC correspondientes al test de trayectorias. El símbolo X indica el valor obtenido para el adulto con NI.	100
6.7. Función de fluctuación de la velocidad horizontal correspondiente a un niño del GC (A) y un niño con NI (B) para el test de trayectorias.	102
6.8. Espectro de singularidades obtenido a partir de las funciones de fluctuación de la Fig. 6.7 para un niño con NI y uno en el GC.	103
6.9. Valores del exponente de Hurst obtenidos para la componente horizontal (T_x) y vertical (T_y) de la velocidad de los movimientos oculares de niños con NI y niños del GC, para el test de trayectorias; y la componente horizontal (L_x) para el test de lectura. El símbolo X indica el valor obtenido para el adulto con NI.	104
6.10. Comparación de la fuerza de la singularidad α_0 de la componente horizontal (T_x) y vertical (T_y) entre niños con NI y niños del GC, para el test de trayectorias; y la componente horizontal (L_x) para el test de lectura. El símbolo X indica el valor obtenido para el adulto con NI.	106
6.11. Valores de la fuerza multifractal obtenidos para la componente horizontal (T_x) y vertical (T_y) de la velocidad de los movimientos oculares de niños con NI y niños del GC, para el test de trayectorias; y la componente horizontal (L_x) para el test de lectura. El símbolo X indica el valor obtenido para el adulto con NI.	107
6.12. Comparación del parámetro de asimetría de la componente horizontal (T_x) y vertical (T_y) entre niños con NI y niños del GC, para el test de trayectorias; y la componente horizontal (L_x) para el test de lectura. El símbolo X indica el valor obtenido para el adulto con NI.	107
6.13. Valores de la fuerza multifractal obtenidos para la componente horizontal (T_x) y vertical (T_y) aleatorizadas de la velocidad de los movimientos oculares de niños con NI y niños del GC, para el test de trayectorias; y la componente horizontal (L_x) para el test de lectura. El símbolo X indica el valor obtenido para el adulto con NI.	108

6.14. Comparación del parámetro de asimetría de la componente horizontal (T_x) y vertical (T_y) aleatorizadas entre niños con NI y niños del GC, para el test de trayectorias; y la componente horizontal (L_x) para el test de lectura. El símbolo X indica el valor obtenido para el adulto con NI.	109
6.15. Árbol de decisión para clasificar registros de movimientos oculares en NI o GC.	112

Índice de tablas

4.1. Parámetros utilizados en la generación de señales sintéticas	70
6.1. Valores de las medianas de los índices propuestos, $IndS$ y $IndF$, para los participantes con NI y del GC	101
6.2. Valores de las medianas del exponente de Hurst \mathcal{H} de la velocidad para los participantes con NI y del GC	104
6.3. Valores de las medianas de la fuerza de la singularidad α_0 , el parámetros de asimetría \mathcal{A} y la fuerza multifractal \mathcal{W} del espectro de singularidades de la velocidad para los participantes con NI y del GC	105
6.4. Matriz de contingencia para los métodos de clustering no supervisado. . .	110
6.5. Métricas de evaluación para los algoritmos de clustering no supervisado. .	111
6.6. Métricas de evaluación para los algoritmos supervisado	111

Capítulo 1

Introducción

Toda actividad humana donde prime la razón se fundamenta en la recepción de los datos aportados por nuestros sentidos y, en particular, por el sentido de la vista. Esta información es posteriormente analizada por procesos cerebrales conscientes e inconscientes, resultando en secuencias cognitivas que implican la interpretación de hechos y la toma de decisiones.

El estudio de los movimientos oculares y su vinculación con los procesos cognitivos ha sido objeto de investigación durante décadas. Comprender la dinámica de los movimientos oculares y su relación con los procesos cognitivos es crucial para desvelar los mecanismos subyacentes de la percepción visual y la toma de decisiones. La necesidad de investigar la relación entre los movimientos oculares y los procesos cognitivos surge de la evidencia de que estos movimientos presentan patrones característicos, los cuales están influenciados por factores cognitivos y pueden revelar información importante sobre el funcionamiento cognitivo de una persona.

De todas las tareas cognitivas que un sujeto puede realizar, la lectura es de particular interés. La lectura es un proceso complejo que involucra una función primaria oculomotora y actividades de alto nivel como el enfoque de la atención y el procesamiento del lenguaje. En particular, el movimiento ocular ha sido de particular interés para comprender el proceso de lectura, dado que representa una conexión observable entre las mecánicas de la visión y las actividades cognitivas que se llevan a cabo durante dicho proceso. Además, existe un interés particular en explorar los movimientos oculares en poblaciones con dificultades de aprendizaje, como las personas con dislexia, con el objetivo de identificar posibles diferencias en los movimientos y su relación con los procesos cognitivos alterados.

En 2008, Luna y colaboradores [1] llevaron a cabo una revisión bibliográfica que subraya la importancia del análisis de los movimientos oculares como una herramienta esencial para el estudio del desarrollo cognitivo. Las investigaciones examinadas evidencian que los patrones de los movimientos oculares pueden ser empleados para identificar dificultades de aprendizaje y para comprender el procesamiento de la informa-

ción visual por parte del individuo. De acuerdo con el reporte de Luna, el análisis del sistema oculomotor proporciona una conexión entre el control cognitivo y la actividad cerebral. Por su parte, Sweeney y colaboradores [2] concluyeron que el estudio de los movimientos oculares ofrece una metodología cuantitativa para el estudio de los trastornos del neurodesarrollo.

El ojo humano está compuesto por diversas estructuras, destacándose entre ellas la córnea, el iris, el cristalino y la retina. Esta última comparte múltiples características con el cerebro, razón por la cual en numerosas ocasiones se considera parte del mismo [3, 4]. Su estructura es singular, debido a la presencia de una región denominada fovea, que cuenta con una mayor densidad de células sensibles a la luz. Esto permite una resolución visual más alta, permitiendo al cerebro acceder a mayor información para el procesamiento. Dado que el área de visión proporcionada por la fovea es relativamente pequeña en comparación con el campo visual total, el ojo cuenta con seis músculos que permiten la rotación del globo ocular, posibilitando ajustar la proyección de la imagen sobre la retina sin la necesidad de mover la cabeza. La porción de la imagen enfocada en la región de la fovea contendrá la información más relevante para la tarea que se esté efectuando en determinado momento. Por esta razón, el estudio de los movimientos oculares resulta de gran importancia. Se ha demostrado que numerosas patologías [5, 6, 7, 8] y trastornos [9, 10, 11, 12] están relacionadas con movimientos oculares anormales.

El movimiento ocular es posible debido a la acción coordinada de un conjunto de músculos controlados por el cerebro. Estos movimientos se clasifican en varias categorías con características distintivas. Uno de estos movimientos son los denominados movimientos sacádicos o sacadas, que consisten en movimientos rápidos que posicionan la región de interés del estímulo visual en la fovea [1, 13, 14]. Enderle, en la primera de una serie de cuatro publicaciones dedicadas al estudio de movimientos oculares horizontales [14], describió el sistema sacádico como una combinación del globo ocular, sus músculos, y un generador de sacadas. Otra categoría de movimientos son las fijaciones, que se consideran como intervalos en los que la mirada se mantiene relativamente estable sobre una región delimitada, lo que permite registrar información visual de un estímulo. Durante las fijaciones, el ojo ejecuta rápidos y pequeños movimientos denominados microsacadas [15]. Estos movimientos, al igual que las sacadas, ocurren simultáneamente en ambos ojos. La similitud entre las sacadas y las microsacadas ha generado un amplio debate acerca de la naturaleza de ambos movimientos, debido a que su única diferencia es la amplitud [16, 17, 18]. En una serie de microsacadas, el objetivo visual se proyecta en cientos de fotorreceptores en la fovea en la retina. Durante una fijación, las microsacadas permiten utilizar la fovea para explorar los detalles del objetivo visual, mientras que las sacadas orientan la mirada y la atención hacia una nueva área que no era accesible con igual detalle antes del movimiento. Otros movimientos presentes en las fijaciones incluyen el drift o deriva y el temblor o temblor. El primero es un desplazamiento de poca magnitud y baja velocidad. El segundo se refiere a una oscilación de alta frecuencia con un desplazamiento de muy baja amplitud del globo ocular [16, 17].

En el caso de objetos en movimiento, el sistema visual humano es capaz de mantener dichos objetos ubicados en la fovea mediante un mecanismo denominado persecución suave o smooth pursuit. Para mantener la fijación en un objeto en movimiento, se utiliza un conjunto de movimientos oculares distintos a los mencionados anteriormente. Este tipo de movimiento requiere la estimación de la cinemática del objeto observado para poder anticipar su posición y mantener su imagen en la fovea.

Los conceptos de fijaciones y sacadas surgieron a partir de los primeros estudios sistemáticos sobre la lectura, llevados a cabo a finales del siglo XIX. Estas investigaciones fueron desarrolladas por Louis Émile Javal mediante un experimento básico que consistía en la utilización de un texto impreso y un espejo. Los resultados de sus estudios revelaron que la lectura ocurre a través de movimientos oculares rápidos e intermitentes, los sacádicos, intercalados con períodos breves en los que los ojos permanecen relativamente estáticos, las fijaciones [19]. Estos hallazgos plantearon cuestiones fundamentales, tales como el punto exacto donde se detiene la mirada, los factores que determinan la próxima posición y las causas subyacentes de estos movimientos. Dichos interrogantes sentaron las bases de un amplio campo de investigación enfocado en los mecanismos que regulan los movimientos oculares, contribuyendo significativamente al entendimiento de los procesos visuales y del procesamiento de la información visual en el ser humano.

En 1967, Yarbus evidenció que los movimientos oculares presentan variaciones incluso cuando el estímulo visual es idéntico [20]. Sin embargo, aunque la cinemática de la mirada varía entre individuos, tiende a mostrar patrones similares cuando las tareas asignadas son equivalentes. Estos hallazgos sentaron las bases para el desarrollo de modelos destinados a representar diversas tareas comunes en la vida cotidiana, siendo la búsqueda libre y la lectura dos de las más ampliamente estudiadas. En el caso de la búsqueda libre, se han desarrollado modelos estocásticos basados en caminatas aleatorias que emplean distribuciones de vuelos de Lévy [21, 22], así como modelos que se basan en mapas de saliencia [23, 24]. De todas las tareas cognitivas que el ser humano es capaz de realizar, la lectura es de particular interés. Para este proceso, existe una amplia variedad de modelos que incluye el modelo E-Z Reader desarrollado por el grupo de Rayner [25], el modelo SWIFT propuesto por el grupo de Engbert y Kliegl [26], el modelo estocástico SERIF [27], el modelo Competition/Activation [28] y el modelo SHARE desarrollado por Feng [29], entre otros.

Algunos de estos modelos tienen la capacidad de representar, en cierta medida, los movimientos oculares de individuos que presentan patologías o trastornos específicos. Entre estos, uno de particular interés es la dislexia. La dinámica ocular de las personas con dislexia ha sido objeto de numerosos estudios en diferentes lenguas, aunque predominantemente en población angloparlante. Además, la mayoría de los modelos existentes requieren una cantidad considerable de parámetros para generar señales sintéticas y han sido diseñados principalmente para lenguas distintas al español. En esta tesis, se exploran distintos modelos capaces de generar secuencias de sacadas con diversas características, resultando en señales sintéticas de movimientos oculares útiles para representar una gran variedad de procesos cognitivos. En particular, es posible ajustar los

parámetros de los modelos para reproducir señales de movimientos oculares de individuos con dislexia durante la lectura de textos en lengua española. La capacidad de simular señales de movimientos oculares en esta población resulta de gran importancia para la investigación en este campo, dado que la obtención experimental de dichas señales resulta un proceso complejo y de alto costo. Un modelo que permita simular estos movimientos facilita el análisis de los procesos cognitivos involucrados en la lectura de individuos con dislexia y contribuye al avance en la comprensión de esta condición.

Los movimientos oculares previamente mencionados son detectados mediante dispositivos denominados eye trackers. Existen diversos tipos de eye trackers; algunos dispositivos utilizan lentes de contacto y campos electromagnéticos para medir la velocidad de rotación del globo ocular, mientras que otros emplean cámaras para determinar la posición de la pupila. En todos los casos, estos dispositivos infieren la posición del ojo o el punto de fijación de la mirada basándose en una serie de parámetros medidos. Los eye trackers encuentran aplicación en numerosos ámbitos, abarcando desde la investigación básica en psicología y neurociencia hasta la industrial del diseño y la publicidad. En el contexto de la investigación en psicología, el seguimiento ocular se utiliza para investigar la atención visual y los procesos cognitivos relacionados con la percepción y el procesamiento de la información visual. En el diseño y la publicidad, se emplea para evaluar la efectividad de los anuncios y la usabilidad de productos y servicios. Los avances tecnológicos han propiciado el desarrollo de eye trackers cada vez más avanzados, como aquellos que utilizan únicamente la cámara frontal de un teléfono móvil [30]. Además, los datos recogidos por los eye trackers pueden ser analizados mediante algoritmos de aprendizaje automático para extraer información valiosa respecto a cómo las personas observan y procesan la información visual. Por estos motivos, estos dispositivos tienen aplicaciones en estudios de psicología, neurociencia, medicina, publicidad y diseño de interfaces de usuario, entre otros campos.

Como se mencionó anteriormente, la fijación es el proceso mediante el cual el ojo percibe y registra información visual a partir de un estímulo. En el contexto del análisis de datos provenientes de eye tracking, suele ser crucial diferenciar entre los movimientos oculares que permiten al cerebro procesar el estímulo visual y aquellos en los que este procesamiento no ocurre. El estímulo visual es procesado durante las fijaciones, mientras que durante las sacadas el cerebro permanece prácticamente incapaz de captar información visual. Por esta razón, el análisis de la dinámica de las fijaciones y sacadas es fundamental para el estudio de los procesos cognitivos que se llevan a cabo durante la realización de diferentes tareas. La definición precisa de estos dos tipos de movimientos oculares representa un gran desafío en el ámbito científico, debido a la falta de consenso en torno a su cuantificación objetiva. La ausencia de un acuerdo universal quedó evidenciada en el estudio de Hessel [31], quien encuestó a 124 expertos en el uso de eye trackers, obteniendo respuestas heterogéneas. Cabe destacar que los resultados de numerosos estudios sobre movimientos oculares podrían variar considerablemente dependiendo del criterio empleado para clasificar dichos movimientos.

En su tesis doctoral, Iaconis [32] propone un algoritmo capaz de clasificar de manera consistente los movimientos oculares en fijaciones y sacadas en señales obtenidas con

distintos dispositivos durante la realización de diversas tareas. Sin embargo, existen situaciones en las que esta discriminación de los movimientos es dificultosa o imposible de realizar. Uno de estos casos es el estudio de los movimientos oculares de personas que presentan nistagmo. El nistagmo [33] es una patología que produce movimientos oculares involuntarios, lo que dificulta la realización de tareas visuales. Aunque la detección de esta patología no presenta problemas [33], no existen indicadores objetivos del grado de alteración y, por lo tanto, no es posible medir objetivamente el progreso en el tratamiento o las terapias. Por este motivo, el uso de eye tracking es fundamental en el estudio de los movimientos oculares de individuos con nistagmo. Para poder obtener información valiosa de las señales de eye tracking, es necesario contar con herramientas alternativas que permitan estudiar la trayectoria de la mirada independientemente de la clasificación de los movimientos oculares. Una de estas herramientas es el análisis conocido como "multifractal detrended fluctuation analysis". Esta técnica de análisis de series temporales tiene la ventaja de poder aplicarse directamente sobre los datos crudos (sin clasificar) registrados por un eye tracker. A partir de este análisis es posible obtener una serie de parámetros que permiten caracterizar la dinámica de los movimientos oculares de distintos grupos de individuos. La utilización de estas métricas para cuantificar las características globales de las señales en un reducido número de valores permite su representación gráfica y la comparación entre múltiples individuos. Además, estas métricas pueden ser utilizadas para desarrollar diversos algoritmos de clasificación.

La presente tesis tiene como objetivo explorar nuevas metodologías de análisis de movimientos oculares que permitan describir y diferenciar las propiedades dinámicas de las series temporales asociadas a estos movimientos, sobre todo en tareas cognitivas como la lectura. Se pretende caracterizar las estructuras fractales de los movimientos oculares durante la lectura e identificar aquellas propiedades que permitan distinguir y cuantificar comportamientos característicos diferentes en grupos de señales correspondientes a distintas poblaciones. Se considera que una comprensión profunda y una caracterización detallada de los movimientos oculares de individuos que presentan determinadas condiciones o patologías pueden proporcionar elementos objetivos que puedan tenerse en cuenta al evaluar tratamientos o al diseñar estrategias de intervención. En particular, se estudiarán poblaciones de individuos con dislexia e individuos con nistagmo infantil. En ambos casos, se observan comportamiento atípicos en los movimientos oculares durante la lectura. Por ello, es fundamental contar con un conocimiento detallado del sistema oculomotor, de los dispositivos empleados para registrar la posición de la mirada y de los conceptos estadísticos necesarios para analizar e interpretar las señales obtenidas. Con este propósito, en el capítulo 2 se abordarán los conceptos fundamentales que sustentaron las investigaciones de esta tesis. Se detallará la estructura y funcionamiento del ojo humano, seguido de una descripción de los movimientos que puede realizar. Posteriormente, se examinará la historia y las aplicaciones de los dispositivos de eye tracking empleados para el análisis de los movimientos oculares. Por último, se explicarán los conceptos estadísticos aplicados en el desarrollo de herramientas de análisis empleadas en el estudio de los movimientos oculares. La comprensión y aplicación de estos conceptos es fundamental para interpretar de manera

precisa los datos obtenidos, permitiendo distinguir entre los patrones de movimientos oculares normales y atípicos.

En el capítulo 3 se introducirá, en primer lugar, un modelo mecánico diseñado para describir la dinámica del movimiento sacádico, formulado en términos de la fuerza ejercida sobre el globo ocular. En segundo lugar, se introducirá un modelo simplificado que representa el movimiento del globo ocular a partir de un único parámetro. Este enfoque resulta particularmente valioso para el análisis de secuencias de movimientos sacádicos, como en el caso del estudio de procesos cognitivos. Finalmente, se desarrollará un modelo estocástico diseñado para representar los movimientos oculares durante el proceso de lectura, proporcionando una herramienta robusta para la investigación en esta área.

En el capítulo 4 se presentará detalladamente la herramienta de análisis conocida como "multifractal detrended fluctuation analysis", una técnica robusta que permite estudiar las fluctuaciones de los registros de movimientos oculares convirtiéndolas en estimaciones del espectro multifractal de las series temporales obtenidas mediante eye tracking. Se detallará la metodología empleada, ilustrándola con ejemplos de series temporales monofractales y multifractales. Posteriormente, se evaluará cómo las propiedades multifractales se ven afectadas por diferentes características de las señales analizadas. Este enfoque pone de manifiesto la aplicabilidad de esta herramienta en el análisis de señales de eye tracking, permitiendo la obtención de parámetros que permiten caracterizar la dinámica de los movimientos oculares.

En el capítulo 5 se presentarán los resultados del estudio de las propiedades fractales de los movimientos oculares realizados durante la lectura, comparando niños disléxicos con niños típicamente desarrollados. Las series temporales registradas mediante eye tracking fueron analizadas en términos de su dinámica fractal utilizando el enfoque descrito en el capítulo 4, con el fin de estudiar el espectro multifractal o el espectro de singularidades. Del análisis se derivaron cuatro parámetros: el exponente de Hurst, la singularidad correspondiente al máximo del espectro de singularidades, la asimetría del espectro de singularidades y la fuerza multifractal. Cada uno de estos parámetros caracteriza diferentes aspectos de la dinámica de los movimientos oculares. Los resultados obtenidos muestran diferencias significativas en las características fractales entre las series temporales de seguimiento ocular de niños con y sin dislexia. En particular, los niños con dislexia presentan una estructura fractal menos compleja en comparación con los niños sin dislexia.

En el capítulo 6 se presentarán los resultados del estudio de los movimientos oculares de niños con nistagmo infantil en términos de sus propiedades fractales. En este caso se analizaron los movimientos oculares durante la realización de dos tareas diferentes. La primera consistió en una tarea de lectura con alta carga cognitiva, mientras que la segunda consistió en una tarea de laboratorio, sin demanda cognitiva. Del análisis multifractal de este conjunto de datos, se obtuvo el conjunto de parámetros utilizado para caracterizar la lectura de los niños con dislexia, encontrándose diferencias significativas al comparar niños con y sin nistagmo. En particular, los pacientes con nistagmo

presentaron valores más bajos en todos los índices. Para evaluar si la caracterización de los pacientes con nistagmo mediante índices de multifractalidad permite diferenciarlos de los niños sin patologías, se realizó un análisis de agrupamiento no supervisado y se emplearon técnicas de agrupamiento supervisado para clasificar a los sujetos. Los resultados mostraron que estos índices caracterizan de manera distintiva los movimientos oculares de los pacientes con nistagmo. Al mismo tiempo, se demuestra la robustez de esta herramienta para su aplicación en una amplia variedad de poblaciones y tareas con diferente carga cognitiva.

En el capítulo final de esta tesis se presentan las conclusiones obtenidas a partir del trabajo interdisciplinario llevado a cabo durante su desarrollo. Durante la investigación, se han empleado herramientas provenientes de distintas disciplinas como la física, la estadística, la neurociencia y el aprendizaje de máquina para el modelado de movimientos oculares y el análisis de señales de eye tracking. Esta combinación de técnicas ha dado como resultado una batería de herramientas con un elevado potencial en diferentes campos de aplicación.

Capítulo 2

Marco teórico general: Vision humana, eye tracking y análisis estadístico, fractalidad y alometría

Los sistemas fisiológicos del cuerpo humano, como el circulatorio, respiratorio, digestivo o nervioso, operan dentro de ritmos fisiológicos específicos vinculados a los procesos con los que están asociados. Por ejemplo, el sistema circulatorio se caracteriza por el ritmo cardíaco, que a su vez depende de varios aspectos de su fisiología intrínseca y está influenciado por el contexto externo en el que se encuentra el sujeto, como actividades físicas o cognitivas, o emociones. Un hecho notable es que, cuando un sujeto está sano, todos los ritmos fisiológicos se reflejan entre sí de manera evidente o sutil [34]. Por ejemplo, la frecuencia cardíaca muestra una variabilidad intrínseca incluso cuando la persona está estable y en reposo [35]. Así, a diferencia de las fluctuaciones térmicas u otras encontradas en la física (que no contienen información intrínseca), la variabilidad fisiológica está relacionada con las interacciones internas y el control alométrico [36] y, por lo tanto, frecuentemente contiene información útil.

Las propiedades fractales de los procesos fisiológicos, como los sistemas circulatorio y respiratorio, han sido ampliamente estudiadas, y los cambios en estas propiedades suelen estar relacionados con anomalías o patologías. En particular, la disminución de la multifractalidad en un proceso dado puede indicar que el mecanismo subyacente se vuelve ajeno a otros procesos en el cuerpo [36]. Basándose en la evidencia de que las alteraciones en la variabilidad de los sistemas involucrados en procesos fisiológicos son indicativas de patologías, es razonable asumir lo mismo en los procesos cognitivos. Dado que los procesos cognitivos pueden verse afectados por diferentes trastornos o patologías, estas alteraciones pueden reflejarse en la variabilidad de la dinámica de los sistemas involucrados. Esta línea de investigación se ha perseguido recientemente, enfocándose en el análisis de las características fractales de los procesos cognitivos [37, 38, 39, 40, 41, 42].

De todas las tareas cognitivas que un sujeto puede realizar, la lectura es de particular

interés. La lectura es un fenómeno cultural reciente, y por lo tanto, las áreas cerebrales que están naturalmente involucradas en otros procesos necesitan adaptarse para incorporar los procesos de lectura y escritura.

La exploración del proceso de lectura en curso puede llevarse a cabo mediante dos metodologías diferentes: un análisis lingüístico de la verbalización durante la lectura o un examen de los movimientos oculares empleados en la asimilación de la información visual inherente al contenido textual escrito. En esta última metodología, la dinámica intrincada de la lectura abarca no solo el procesamiento cognitivo de la semántica del texto, sino también el desplazamiento ocular inconsciente a través del texto. Este desplazamiento se manifiesta como una serie de movimientos rápidos y discretos, denominados sacádicos, y pausas concomitantes, conocidas como fijaciones [43]. Los atributos que rigen estos movimientos sacádicos y fijaciones pueden variar significativamente debido a varios factores que los afectan. La magnitud de los desplazamientos sacádicos y las extensiones temporales de las fijaciones conforman funciones de densidad probabilística que reflejan las actividades cognitivas relacionadas con la interpretación particular del texto [44]. Esta naturaleza estocástica inherente dentro de la dinámica del proceso de lectura genera una variabilidad que puede caracterizarse mediante propiedades fractales, las cuales, a su vez, dependen de varios factores. Estos incluyen, entre otros, los atributos lingüísticos inherentes al material textual, la edad y/o demografía del lector [45, 46] y, notablemente, la presencia o ausencia de patologías y de trastornos del aprendizaje [44, 47]. La interacción de estas variables contribuye significativamente a la variabilidad observada. Entre estas consideraciones, investigaciones recientes han destacado las características temporales de las fijaciones en el contexto de la lectura de textos en el idioma persa entre una cohorte de adultos jóvenes sin trastornos de lectura [42]. Esta identificación acentúa la intrincada simbiosis entre las características lingüísticas y la dinámica oculomotora.

En este capítulo se explicarán los conceptos necesarios a partir de los cuales se realizaron las investigaciones presentadas en esta tesis. Se describirá la estructura y el funcionamiento del ojo humano, para luego describir los movimientos que éste es capaz de realizar. A continuación se desarrollará la historia y aplicaciones de los dispositivos de seguimiento ocular utilizados para el estudio de los movimientos oculares. Para finalizar, se explicarán los conceptos estadísticos utilizados en las herramientas de análisis desarrolladas para el estudio de los movimientos oculares.

2.1. Sistema visual humano

2.1.1. Estructura anatómica del ojo humano

El ojo humano se encuentra situado en una cavidad ósea del cráneo denominada órbita (ver Fig. 2.1). La órbita tiene forma de pirámide cuyo vértice apunta hacia atrás y tiene la función de proteger al ojo. Además de alojar al ojo, la órbita contiene una serie de

estructuras que son imprescindibles para el correcto funcionamiento del órgano de la visión, como los músculos extraoculares, el músculo elevador del párpado, la glándula lagrimal, nervios, vasos sanguíneos, y grasa periorbitaria, entre otras estructuras. Los músculos extraoculares comprenden un conjunto de 6 músculos que permiten mover al ojo en cualquiera dirección. Los vasos sanguíneos proporcionan nutrientes al ojo y anexos, mientras que los nervios brindan sensación y controlan la movilidad del ojo. La grasa periorbitaria forma una envoltura que brinda estabilidad y protección. Todos estos elementos deben funcionar en coordinación para una correcta visión.

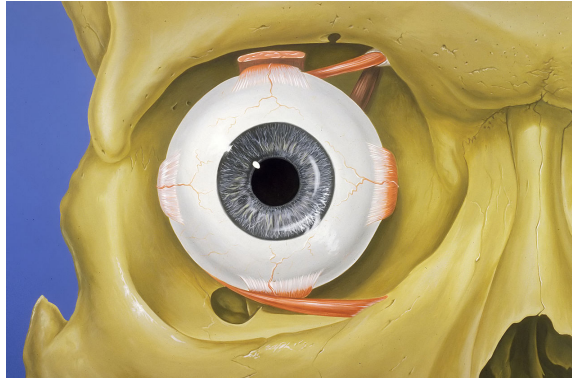


Figura 2.1: Imagen del globo ocular con sus músculos en la órbita craneal. La imagen es de Patrick J. Lynch, medical illustrator, CC BY 2.5.

El ojo tiene un diámetro aproximado de 24 mm y representa alrededor del 25% del volumen total de la órbita. Como puede verse en la Fig. 2.2, existe una cámara anterior, formada por el espacio entre la córnea y el iris y una cámara posterior entre el iris y el cristalino. Estas cámaras se comunican a través de la abertura pupilar y están ocupadas por un líquido transparente que se llama humor acuoso, cuyo nivel de presión es muy importante para el correcto funcionamiento del ojo. Este líquido es secretado en la cámara posterior, circula hacia la cámara anterior a través de la pupila y es reabsorbido por un conducto venoso circular localizado entre la cornea y el iris, llamado seno venoso escleral. El humor acuoso humedece el cristalino, garantiza su nutrición y contribuye a mantener la forma de la porción anterior del ojo. También puede distinguirse una cámara vítrea, entre el cristalino y la retina, que contiene un gel transparente llamado humor vítreo, en contacto directo con la retina. El humor vítreo ocupa la mayor parte del interior del ojo y contribuye a que este mantenga su forma [48].

El ojo está compuesto en sus paredes por varias capas membranosas, llamadas túnicas concéntricas [48], que forman un conjunto de membranas envolventes. Estas son la túnica fibrosa, la túnica vascular y la túnica nerviosa, las cuales se representan esquemáticamente en la Fig. 2.3.

La túnica fibrosa es la capa más externa y está compuesta por la esclerótica y la córnea. Es una estructura semi-elástica que forma una cápsula protectora del ojo y determina la geometría óptica del aparato visual. La esclerótica es un tejido fibroso denso, blanco y opaco que tiene principalmente una función protectora. Tiene un espesor aproxi-

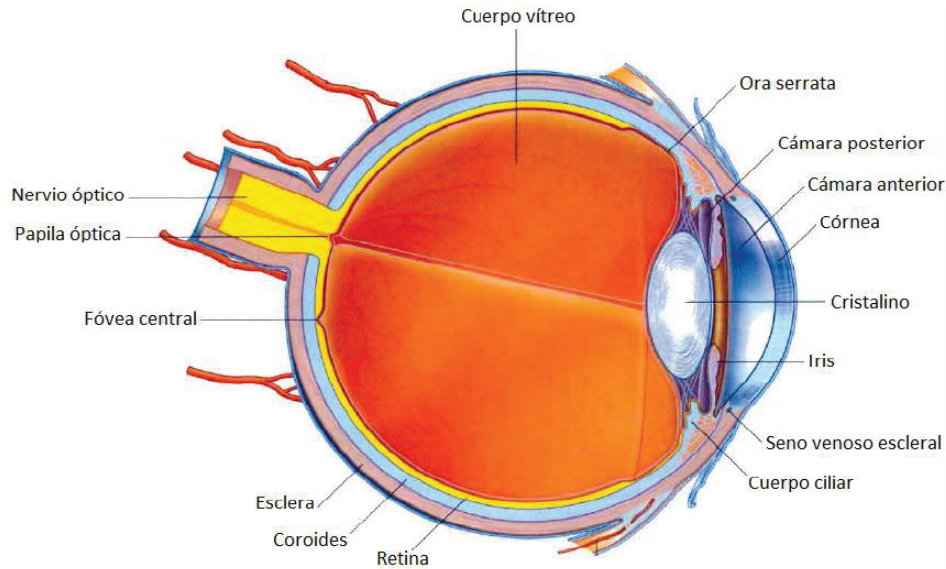


Figura 2.2: Principales componentes del ojo humano.

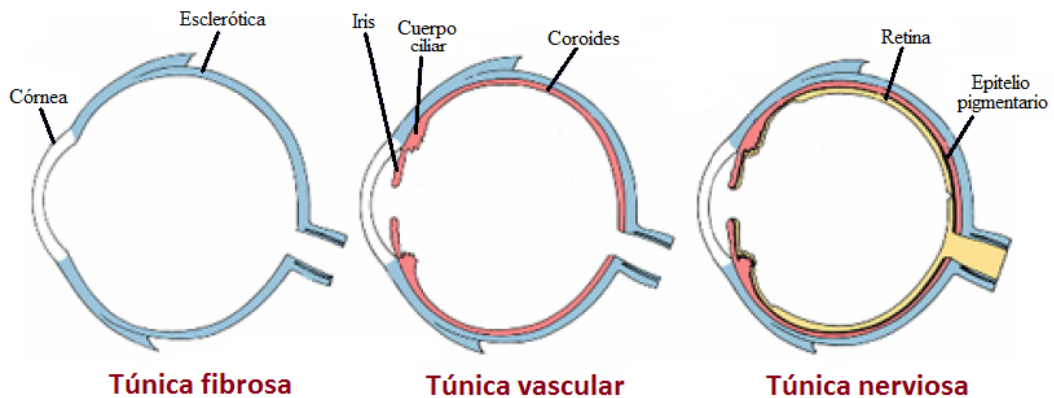


Figura 2.3: Esquema de la conformación del ojo en sus diferentes capas.

mado de 1,1 mm en la zona posterior y varía hasta los 0,4 mm aproximadamente en el ecuador, donde se insertan los músculos rectos. Se compone de fibras elásticas que permiten regular la presión intraocular y el paso de los nervios de la córnea y los autónomas vasculares [49].

La córnea es la parte anterior de la túnica fibrosa. Es un tejido sin vasos sanguíneos pero que posee abundantes nervios procedentes de la rama del nervio oftálmico [49, 50]. Tiene una forma aproximadamente esférica con un radio de curvatura de aproximadamente 8 mm. A diferencia de la esclerótica, la córnea es transparente y sus propiedades ópticas permiten la formación de una imagen en la retina, como se explicará más adelante.

En la túnica vascular, también conocida como tracto uveal, se diferencian el iris en la

parte anterior, la coroides en la parte posterior, y el cuerpo ciliar en la parte intermedia.

La coroides es un tejido sumamente vascularizado y tiene un espesor que varía de 0,1 mm a 0,15 mm [51]. Está perforada en su parte trasera por el nervio óptico, donde se adhiere firmemente a la esclerótica. Entre sus funciones se destacan nutrir la retina externa y proveer un camino para los vasos que irrigan la parte anterior del ojo. También cumple un rol importante en la regulación de la temperatura del ojo y la presión intraocular.

El cuerpo ciliar es una estructura triangular que forma un anillo completo alrededor del globo ocular, ubicado entre la coroides y el iris. Está integrado por el músculo ciliar y los procesos ciliares. Los procesos ciliares son crestas longitudinales que se proyectan desde la superficie interna del cuerpo ciliar y se encargan de la producción del humor acuoso. De los mismos se extienden las fibras zonulares, que se insertan en el cristalino brindando soporte a este último. Al igual que la córnea, el cristalino es una lente de estructura transparente, cuya curvatura varía al cambiar las tensiones producidas por el músculo ciliar. Al contraerse el músculo ciliar, la lente adopta una forma redondeada que aumenta la capacidad de enofocar objetos cercanos, mientras que cuando está relajado, la lente adopta una curvatura más plana permitiendo enfocar objetos distantes.

El iris es un diafragma regulable, encargado de controlar la cantidad de luz que entra en el ojo. Tiene un orificio central denominado pupila, cuyo diámetro varía entre 1 y 8 mm. Posee dos músculos encargados de la contracción y la dilatación de la pupila. El esfínter es un anillo plano de músculo liso que sirve para contraer la pupila. El músculo dilatador está situado por delante del epitelio de la superficie superior del iris y su contracción aumenta el tamaño de la pupila. En la Fig. 2.4 se muestra un esquema de las componentes descriptas.

La túnica nerviosa es la capa más interna del ojo y tiene como principal componente a la retina, lugar donde se forma la imagen. La retina es una extensión del sistema nervioso central y está conectada con el cerebro por el nervio óptico. Está compuesta por fotorreceptores debajo de una capa de neuronas conectadas a los mismos. Los receptores absorben a los fotones y los convierten en señales neuronales, que luego son procesadas por la red de células neuronales en el cerebro. Cuando la luz alcanza un fotorreceptor, se produce una serie de reacciones químicas que conducen a un cambio en el potencial de membrana, generando así un potencial de acción en la célula. El epitelio pigmentario de la retina es la capa más externa y tiene como función principal dar soporte metabólico primario a las células receptoras.

La densidad de los fotorreceptores en la retina no es homogénea, sino que se encuentra una mayor cantidad de estos en una región denominada fovea. Esta es la razón por la cual la visión es mejor en el centro del campo visual, en comparación con la periferia. En la retina hay dos tipos de células fotorreceptoras, capaces de transformar la luz en potenciales de acción, denominados conos y bastones por sus características morfológicas. En la Fig. 2.5 se muestra una representación de estas células junto con una imagen obtenida con un microscopio electrónico de barrido (SEM, por sus siglas en in-

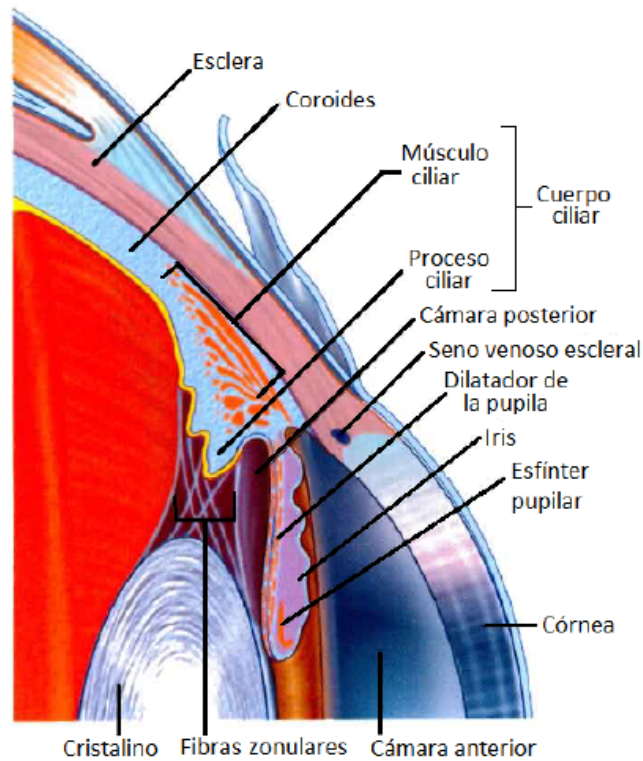


Figura 2.4: Perfil con las principales componentes de la túnica vascular.

glés).

Los bastones son más numerosos que los conos y son muy sensibles a niveles bajos de luminosidad (luminancia). Son los principales responsables de la visión nocturna. En cambio, los conos son menos sensibles que los bastones y permiten la visión del color y la capacidad para percibir detalles finos. Se pueden distinguir tres tipos de conos en función de su respuesta a las diferentes longitudes de onda de la luz que reciben (ver Fig. 2.6) Estos conos son llamados "azul", "verde" y "rojo" [52], debido a la ubicación del máximo de absorción de estas células (419 nm, 513 nm y 559 nm, respectivamente). La distribución de los conos y bastones no es la misma en toda la retina. Existe una mayor densidad de conos y ausencia de bastones en la fovea, mientras que en la periferia se encuentra una mayor cantidad de bastones y una disminución drástica de conos (ver Fig. 2.7).

La visión clara de un objeto requiere entonces que su imagen esté posicionada en la región foveal de la retina. Para lograr esto, el ojo cuenta con un conjunto de músculos, llamados músculos extrínsecos o extraoculares, que permiten rotar voluntariamente al globo ocular dentro de la órbita craneal. Entre ellos se distinguen cuatro músculos rectos, los cuales están ubicados en las regiones nasal (medial), lateral, superior e inferior, y dos músculos oblicuos (ver Fig. 2.8).

Los músculos rectos se originan en el anillo tendinoso común del vértice de la órbita,

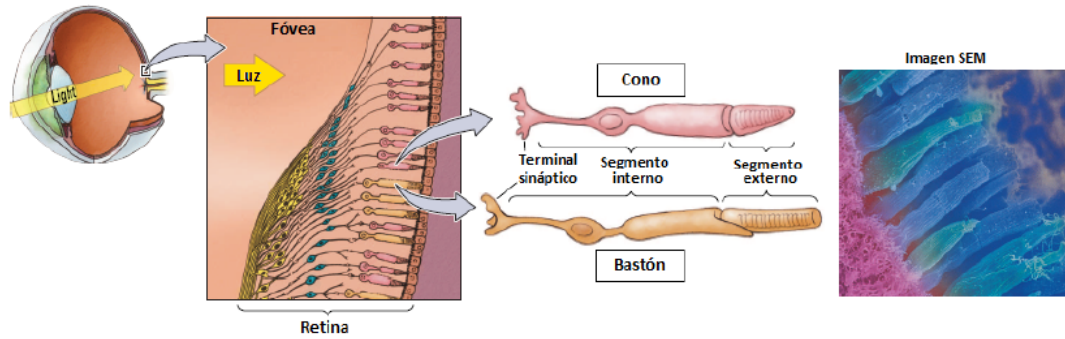


Figura 2.5: Fotorreceptores de la retina: conos y bastones.

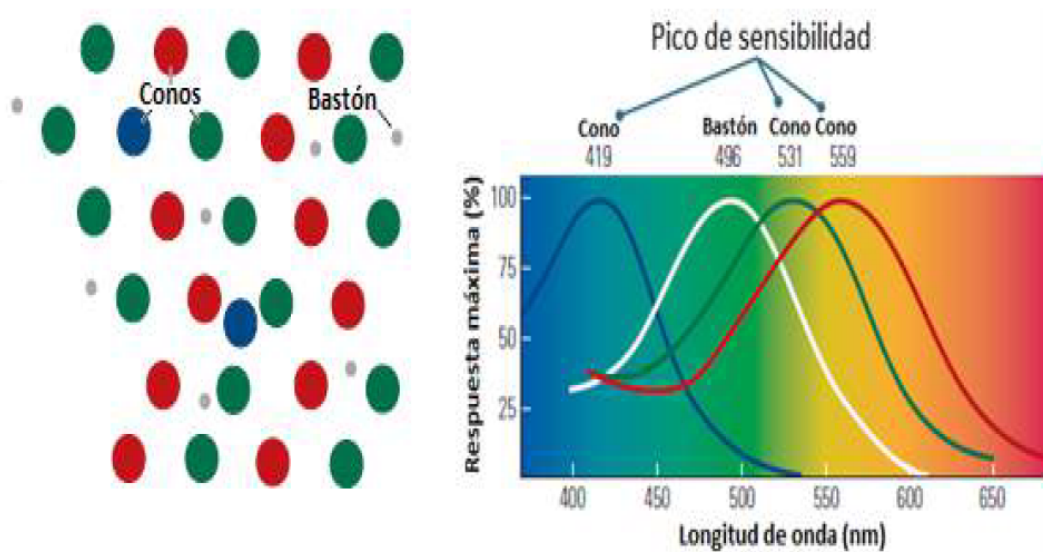


Figura 2.6: Sensibilidad de los conos y bastones en función de la luz recibida.

detrás del globo ocular, y se insertan en la parte anterior del mismo [49]. Los músculos recto superior y recto inferior tienen acciones contrarias. La contracción del músculo recto superior eleva, aduce y rota internamente el globo ocular, dirigiendo la mirada verticalmente hacia arriba, mientras que el recto inferior lo deprime, aduce y rota externamente, dirigiendo la mirada hacia abajo. Estos dos músculos son antagonistas, es decir que uno se contrae mientras el otro se relaja. De manera similar, los músculos recto medial y recto lateral también cumplen funciones opuestas. El músculo recto medial produce la aducción del globo ocular al contraerse, dirigiendo la mirada hacia adentro, mientras que el músculo recto lateral produce la abducción del globo ocular, dirigiendo la mirada hacia fuera. Estos dos músculos son también antagonistas.

A diferencia de los músculos rectos, los músculos oblicuos no se originan en el anillo tendinoso común y se insertan en la parte posterior del globo ocular [49]. El músculo oblicuo mayor o superior, se dirige hacia delante a lo largo del techo de la órbita hasta que alcanza la tróclea, un tendón fibrocartilaginoso que modifica su trayecto. Luego

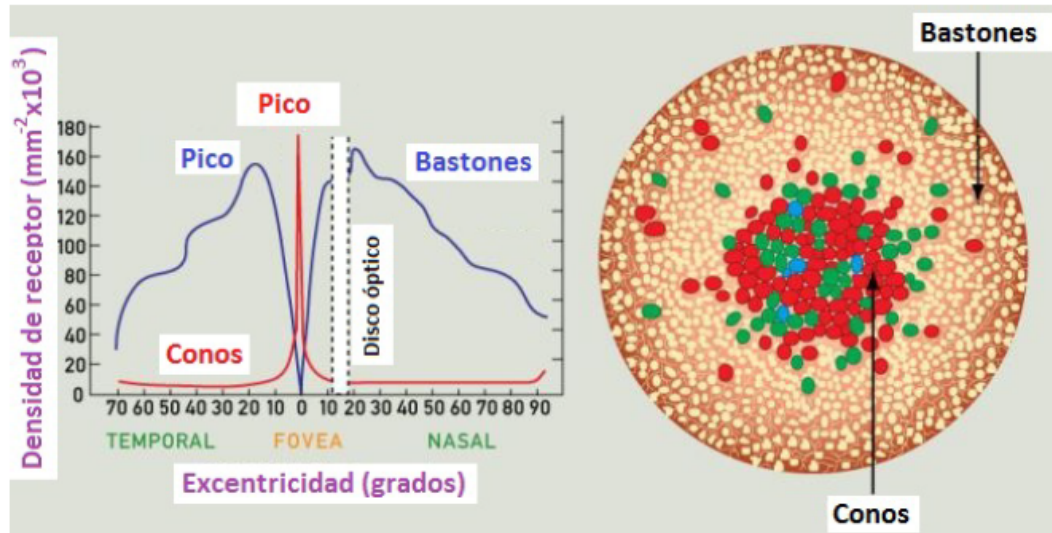


Figura 2.7: Distribución de conos y bastones en la retina. Se puede ver que los conos están ubicados principalmente en la zona de la fovea, mientras que los bastones se encuentran principalmente en la periferia.

pasa a través de la tróclea y cruza el globo ocular lateralmente. La contracción de este músculo dirige la mirada hacia dentro y abajo. El músculo oblicuo menor o inferior, es el único del conjunto que no se origina en la parte posterior de la órbita, sino que lo hace en la zona media del suelo de la órbita. Este músculo cruza el suelo orbitario siguiendo una dirección posterolateral para insertarse, por debajo del recto externo, en el globo ocular. La contracción de este músculo dirige la mirada hacia arriba y adentro.

Finalmente, en la parte superior de la órbita se encuentra el músculo elevador del párpado superior. Los músculos extraoculares actúan coordinadamente para colocar la pupila en la posición deseada.

2.1.2. Estructura óptica y formación de la imagen

En el ojo, los principios de formación de la imagen son los mismos que los de un sistema óptico convencional. La luz emitida o reflejada por los objetos atraviesa secuencialmente la córnea, el humor acuoso, la pupila, el cristalino y el humor vítreo, hasta alcanzar los fotorreceptores en la retina [48]. La luz ingresa al ojo a través de la córnea y, luego de refractarse en esta y en la lente del cristalino, es enfocada en la retina. La refracción se produce de manera muy acentuada en la superficie corneal anterior debido a que la parte esférica central posee una curvatura muy acentuada y existe una gran diferencia entre los índices de refracción del aire (1) y de la córnea (1.376), lo que la vuelve el elemento refractivo de mayor potencia. En el caso de la cara posterior de la córnea, la refracción es muy poco significativa debido a que el índice refractivo de la sustancia corneal es similar al del humor acuoso.

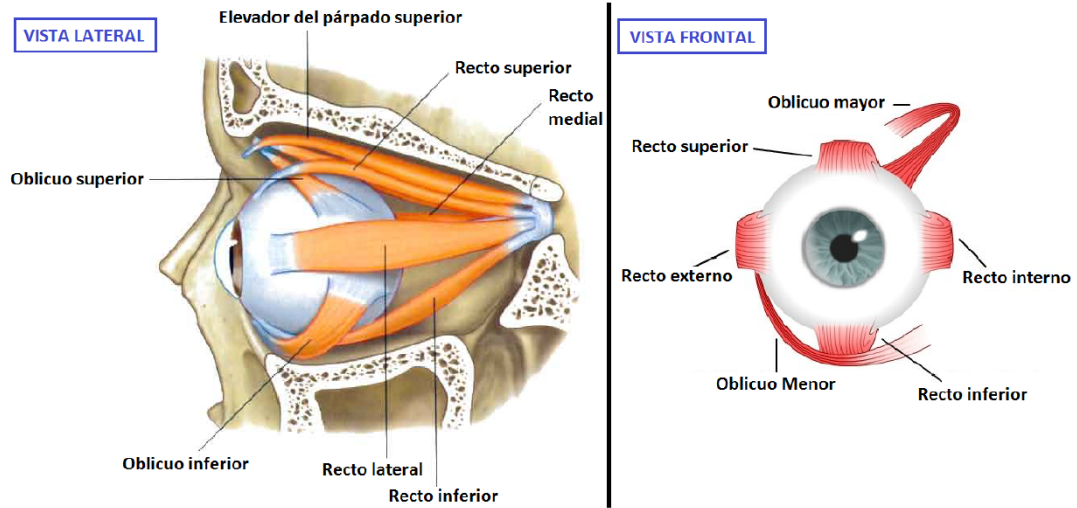


Figura 2.8: Músculos extrínsecos del ojo humano.

Seguidamente, la luz se vuelve a refractar cuando llega a la cara anterior y posterior del cristalino, cuyo índice de refracción es mayor que el de los humores acuoso y vítreo. Sin embargo, las diferencias de las interfases no son tan pronunciadas como la de la córnea y el aire, resultando en una potencia refractiva menor. De esta manera, se afirma que la mayor parte de la refracción ocular se produce en la superficie anterior de la córnea, cuyo poder refractivo (40-45 D) supera por duplicación al que presenta el cristalino (alrededor de 20 D). Sin embargo, una propiedad relevante del cristalino es que su poder de convergencia puede modificarse para enfocar la imagen en la retina, en función de la distancia al objeto. Este mecanismo se denomina acomodación y se genera debido a una alteración en la forma de la lente del cristalino. Si el objeto a visualizar se encuentra lejos, el cristalino adoptará una forma más aplanada para llevar la imagen de ese objeto a la superficie de la retina. Si el objeto se encuentra cerca, el cristalino tomará una forma más redondeada (ver Fig. 2.9). El cristalino puede perder su transparencia debido a diferentes causas y se endurece con los años, disminuyendo su capacidad de enfoque.

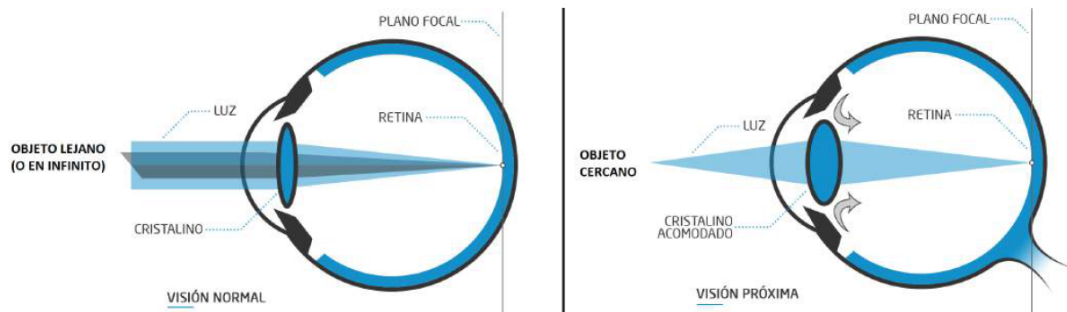


Figura 2.9: Acomodación del cristalino en función de la distancia al objeto a enfocar en la retina.

El diámetro del haz que incide puede ser controlado a través del iris, el cual constituye el diafragma del ojo. Como ocurre en todos los sistemas ópticos, el diafragma es un componente muy importante del sistema que afecta a un amplio rango de procesos ópticos.

2.1.3. Movimientos oculares

Como se mencionó anteriormente, la visión en los seres humanos se caracteriza por presentar un sector del ojo de alta resolución denominado fovea. Para poder obtener información detallada del entorno, los músculos extraoculares son capaces de realizar distintos movimientos del globo ocular de manera tal que el objeto de interés quede proyectado en la fovea. De manera general, estos movimientos oculares pueden ser clasificados en movimientos sacádicos, microsacádicos, deriva, temblor y persecución suave.

Los movimientos de deriva, temblor y microsacádicos constituyen los movimientos oculares de fijación, comúnmente llamados fijaciones, ya que sus amplitudes son tan pequeñas que los ojos parecen estar quietos [17]. Si bien en la actualidad no hay un consenso sobre las definiciones de los distintos movimientos oculares [31], a efectos prácticos las fijaciones se pueden definir como períodos de relativa estabilidad del globo ocular durante los cuales se extrae información visual del entorno [17]. Los movimientos microsacádicos, o microsacadas, son movimientos de pequeña amplitud que permiten realizar una exploración minuciosa del objeto de interés. Otra función de las microsacadas podría ser la de evitar el desvanecimiento de la visión que ocurre debido a la adaptación neuronal [53]. El temblor es un movimiento aperiódico de tipo ondulatorio y con una frecuencia de ocurrencia de alrededor de 90 Hz [54, 55]. Es el más pequeño de los movimientos oculares de fijación, siendo su amplitud del orden del tamaño de un cono. La contribución del temblor al mantenimiento de la visión está aún en discusión [56, 57, 58]. Por último, la deriva es un movimiento lento que ocurre simultáneamente con el temblor y entre las microsacadas [59]. Durante el movimiento de deriva, la imagen de un objeto puede desplazarse a través de una docena de fotorreceptores [60]. La función del movimiento de deriva aún está en discusión, aunque se cree que podría tener un rol compensatorio en el mantenimiento de la visión, evitando el desvanecimiento de la misma, en los períodos en los cuales no se registran microsacadas o cuando la compensación generada por estas no es suficiente para mantener la visión [16].

Los movimientos sacádicos, o sacadas, son movimientos de alta velocidad que permiten llevar las imágenes de posible interés a la región de mayor agudeza visual de los ojos, la fovea [61]. Estos cambios en la posición de la mirada permiten explorar la escena que se está observando para la construcción de una representación mental del entorno. Las sacadas también pueden definirse como los movimientos rápidos de los ojos que cambian la línea de observación entre dos puntos sucesivos de fijación [62]. Los movimientos sacádicos son de los movimientos más rápidos y precisos que el ser humano es

capaz de realizar, solo superado por el parpadeo. La velocidad de una sacada típica es del orden de los 900 grados por segundo y los tiempos de las sacadas toman alrededor de 200 ms dependiendo de la amplitud de la misma. La amplitud de las sacadas se define como la amplitud de la rotación realizada por el ojo entre dos fijaciones consecutivas, cualquiera sea la dirección de la rotación [63].

Muchos procesos cognitivos están relacionados con las secuencias de fijaciones y sacadas realizadas. Durante las fijaciones, se procesa información relevante, como hacia dónde enfocar la mirada a continuación, y, simultáneamente, ocurre parte del procesamiento cognitivo asociado con la tarea que se está realizando [64, 65, 66].

Finalmente, los movimientos de persecución suave son rotaciones continuas de los ojos realizadas al observar un objeto en movimiento. Cuando un objeto de interés se desplaza, los ojos rotan siguiendo al objeto de manera de ubicarlo y mantenerlo en la fovea. La persecución suave es realizada por los dos ojos simultáneamente y permite el análisis minucioso del objeto a medida que este se mueve [67, 68]. Este movimiento no está bajo control voluntario en el sentido de que no es posible iniciarlo en un entorno estacionario, o suprimirlo por completo en un entorno que consiste únicamente en objetivos en movimiento.

2.2. Eye tracking

Eye tracking refiere a la medición de la posición de la mirada con respecto a un estímulo o a la posición del globo ocular respecto a la cabeza. Existen varios dispositivos capaces de realizar dicha medición, conocidos como eye trackers, los cuales utilizan distintos métodos para determinar la posición de la mirada. Estos dispositivos utilizan softwares especializados que permiten procesar las señales registradas y facilitar su interpretación científica. Esta área de investigación se basa en la hipótesis de que existe una correlación entre los movimientos oculares y ciertos procesos cognitivos [1].

2.2.1. Evolución del eye tracking

El primer estudio data del año 1879 [69], a cargo del oftalmólogo francés Louis Émile Javal junto, quien contaba con experiencia en el estudio ocular a través de la óptica fisiológica y descubrimientos relacionados al trastorno de estrabismo. Junto con M. Lamare, Javal notó, mediante observación directa, que los ojos de los humanos no se mueven de manera fluida durante la lectura de un texto, sino que realizan rápidos movimientos seguidos de pequeñas pausas. A estos movimientos rápidos los denominó sacadas y las pausas son las que actualmente se conocen como fijaciones. Además, describió que los movimientos oculares durante la lectura son principalmente horizontales y que se realiza un movimiento sacádico cada 15 o 18 letras. Para registrar esto, se utilizó un micrófono adosado al párpado superior del lector que permitía escuchar y grabar el movi-

miento que se producía cada vez que la persona realizaba una sacada. Se podría afirmar entonces, que estos investigadores fueron los primeros en introducir un método mecánico para registrar movimientos oculares.

Más tarde, en 1898, Edmund Huey desarrolló lo que es considerado el primer eye tracker, basado en una lente de contacto con una abertura para el iris y un indicador de aluminio que marcaba los movimientos oculares. De esta manera, detectó y contabilizó las regresiones durante el proceso lector, es decir, los movimientos sacádicos de derecha a izquierda, y observó que las fijaciones no se producen en todas las palabras [19]. Este método resultó ser muy invasivo y doloroso, motivo por el cual Huey les proporcionaba cocaína a los participantes. Prácticamente al mismo tiempo, un procedimiento aún más invasivo fue desarrollado por Delabarre, quien creó un pequeño dispositivo de yeso que se pegaba al globo ocular. Este dispositivo contaba con un cable que conducía a una palanca que dibujaba los movimientos horizontales del ojo sobre una superficie carbonizada de un cilindro cinematográfico. El individuo leía el texto a través de un orificio en el yeso. En este caso también se utilizaba cocaína para disminuir el malestar.

Desde entonces, tanto la técnica como la tecnología de seguimiento ocular han avanzado significativamente, permitiendo que los dispositivos de eye tracking sean cada vez menos invasivos. Płużyczka realizó una exhaustiva revisión histórica de las diversas técnicas y dispositivos que se han desarrollado a lo largo de más de un siglo de evolución en este campo [70].

Un psicólogo estadounidense, llamado Charles H. Judd, desarrolló las primeras grabaciones de movimiento ocular cuando creó la cámara de movimiento ocular. De esta manera, estudió en diversos niveles escolares los movimientos oculares de los niños durante el proceso de lectura. En 1931 Earl, James y Carl Taylor crearon el oftalmógrafo y el metronoscopio, para asistir a que las personas leyeran más eficazmente. Luego, en 1937, Guy Thomas Buswell implementó rayos de luz que se reflejaban en los ojos de los sujetos mientras los grababan con el fin de estudiar sus movimientos y concluyó que el ojo se mueve de manera diferente según si la lectura es oral o silenciosa [71].

A través de diferentes experimentos, en la década del 50, Alfred Lukyanovich Yarbus notó que el modo de examinar visualmente una imagen depende de la tarea que se encomiende al individuo y que las fijaciones se encuentran en estrecha relación con la atención [20]. Los resultados le permitieron afirmar que las personas se detenían más veces en zonas de interés que en aquellas que no representaban interés. Generalmente estas zonas contenían elementos desconocidos, inusuales o incomprensibles.

En 1978, Reyner y colaboradores realizaron una revisión de los estudios de movimientos oculares en lectura y otras tareas que implican procesamiento de información como búsqueda visual, resolución de problemas, mirada libre y reconocimiento de patrones [72]. En dicho trabajo concluyeron que los movimientos sacádicos representan el 10% del tiempo de lectura, dato que permitió el desarrollo de algoritmos de detección de fijaciones y sacadas, útil para el análisis de movimientos oculares en diversas situaciones. Además, Reyner analizó la lectura de buenos lectores en comparación con

malos lectores y concluyó que los movimientos oculares brindan información importante acerca de las actividades de procesamiento involucradas en una tarea particular.

En 1980, M. A. Just propuso un modelo de comprensión lectora utilizando señales de movimientos oculares durante la lectura de un texto científico [73]. En este modelo, se considera la carga cognitiva necesaria para comprender un determinado texto, determinada a partir de la duración de las fijaciones realizadas en ciertas palabras o regiones del texto. De este modo, distinguió que una persona lee diferente si quiere comprender la idea principal, memorizar el texto o simplemente entretenerse. Por este motivo, Just propone que es fundamental tener en cuenta los objetivos del lector al momento de analizar los movimientos oculares.

En la década del 90, la tecnología de eye tracking fue utilizada con el fin de determinar el grado de atención hacia los programas de televisión y la influencia visual hacia ciertos productos publicitados en estos. En la década del 2000, esta tecnología cobró una importancia industrial, ya que se fundaron compañías dedicadas al desarrollo y creación de dispositivos con fines comerciales y científicos [71].

La relación entre movimientos oculares y procesos cognitivos ha sido ampliamente estudiada en los últimos años. Luna y colaboradores resumen los aportes científicos que relacionan los movimientos oculares con procesos como la memoria, planeamiento, expectativa y lectura [1]. En dicho trabajo, también se explora la relación entre los movimientos oculares y el desarrollo cognitivo o maduración cerebral.

2.2.2. Tecnologías actuales

Los dispositivos de medición de los movimientos oculares se pueden clasificar en cuatro categorías [74]:

- Los basados en lentes de contacto escleral.
- Los electro-oculógrafos (EOG).
- Los foto o video-oculógrafos (POG o VOG).
- Los basados en imágenes de video de reflejos de luz.

Lentes de contacto escleral

Uno de los métodos más precisos para medir los movimientos oculares implica la colocación de un objeto de referencia mecánico u óptico montado en una lente de contacto que se coloca directamente en el ojo. Este método también se conoce como bobina escleral de búsqueda. Las primeras mediciones de este tipo (alrededor de 1898) utilizaban un anillo de yeso adherido directamente a la córnea y conectado mediante enlaces mecánicos a plumas de registro [75]. Esta técnica evolucionó hacia el uso de

una lente de contacto moderna a la que se le adjunta un soporte. La lente de contacto es necesariamente grande, cubriendo la córnea y la esclerótica, ya que la lente puede deslizarse si solo cubre la córnea. Se han colocado varios dispositivos mecánicos u ópticos en el soporte unido a la lente: los fósforos reflectantes, los diagramas de líneas y las bobinas de alambre han sido los implementos más populares en configuraciones magneto-ópticas. El método principal emplea una bobina de alambre, que al moverse a través de un campo electromagnético genera una corriente que se correlaciona con el movimiento. Aunque la bobina escleral de búsqueda es el método más preciso para medir los movimientos oculares (unos 5-10 segundos de arco en un rango limitado de aproximadamente 5°), también es el método más intrusivo [75]. La inserción de la lente requiere cuidado y práctica, y el uso de la misma causa incomodidad. Este método también mide la posición ocular en relación con la cabeza y, generalmente, no es adecuado para medir el punto de mirada.

Electro-oculografía

La electro-oculografía se basa en la medición de las diferencias de potencial eléctrico en la piel que rodea la cavidad ocular, utilizando electrodos colocados alrededor del ojo. Esta técnica fue el método más utilizado para medir los movimientos oculares a mediados de la década de 1970 y, aunque su uso ha disminuido, se sigue utilizando hoy en día [75]. Los potenciales registrados están en el rango de 15 a 200 μV , con sensibilidades nominales del orden de 20 $\mu\text{V}/^\circ$ de movimiento ocular [74]. Esta técnica mide los movimientos oculares en relación con la posición de la cabeza, por lo que generalmente no es adecuada para medir el punto de mirada, a menos que también se mida la posición de la cabeza (por ejemplo, utilizando un rastreador de cabeza). Otra desventaja de estos dispositivos es que su precisión disminuye en los casos de movimientos oculares lentos o movimientos en direcciones que no son horizontales o verticales. Sin embargo, una ventaja de esta metodología es que permite el registro de los movimientos oculares aún con los ojos cerrados, lo que posibilita el estudio de los movimientos oculares cuando el sujeto duerme.

Foto-oculografía o video-oculografía

El tercer grupo es el de los dispositivos ópticos, que comprende a los dispositivos que se basan en la grabación de video de los ojos. Esta categoría agrupa una amplia variedad de técnicas de registro de movimientos oculares que implican la medición de características distinguibles de los ojos durante su rotación o traslación [75], como la forma aparente de la pupila o la posición del limbo (el límite entre el iris y la esclerótica). En general, estos dispositivos iluminan los ojos con luz infrarroja y graban la imagen con esta longitud de onda. Sin embargo, existen también los que utilizan luz visible como fuente de iluminación con la desventaja de que requieren altos niveles de iluminación. La principal ventaja de estos últimos es que pueden utilizar cámaras comerciales como sensor, lo que los vuelve una alternativa más económica.

En esta categoría se encuentran los eye trackers utilizados en los estudios presentados en esta tesis. Para obtener los resultados incluidos en el capítulo 3 se utilizó un

eye tracker SR Research Eye-Link 1000, con una frecuencia de muestreo de 1000 Hz. Este dispositivo consiste en un soporte que contiene un arreglo de leds infrarrojos y una cámara de alta velocidad sensible a dicha longitud de onda (ver Fig. 2.10). Con el objetivo de mantener la cabeza del sujeto estática, se utiliza otro soporte donde la persona apoya el mentón y la frente. En los estudios presentados en los capítulos 5 y 6 se utilizó un eye tracker Tobii Pro (Tobii AB, Suecia), con una frecuencia de muestreo de 90 Hz. A diferencia del Eye-Link 1000, este eye tracker es un dispositivo portable, que puede ser conectado a cualquier computadora por medio de un puerto USB (ver Fig. 2.11). El principio de funcionamiento es el mismo, utilizando una cámara y un conjunto de leds infrarrojos. Si bien la frecuencia de muestreo es menor que en el dispositivo anterior, este eye tracker es mucho más económico, además de permitir realizar estudios en diferentes entornos, como por ejemplo en escuelas.

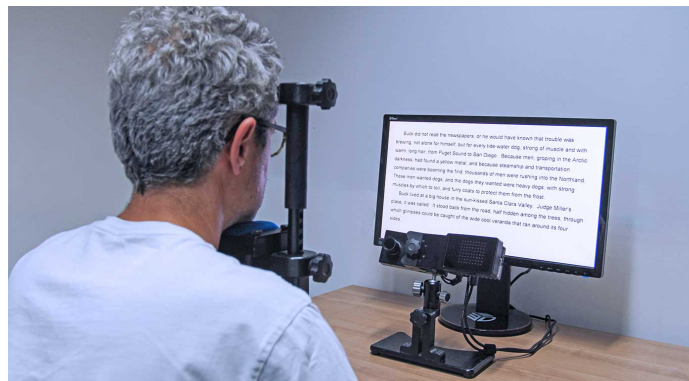


Figura 2.10: Imagen del eye tracker EyeLink 1000 de SR research (www.sr-research.com).



Figura 2.11: Imagen del eye tracker Tobii Pro (Tobii AB, Sweden). Imagen tomada por Mark Hachman para el artículo <https://www.pcworld.com/article/411185/tobii-eye-tracker-4c-hands-on-mousing-with-your-eyes-has-surprising-potential-for-gaming.html>.

Imágenes de video de reflejos de luz

Aunque las técnicas mencionadas anteriormente son en general adecuadas para medir movimientos oculares, a menudo no proporcionan la medición del punto de mirada. Para obtener esta medición, la cabeza debe estar fija para que la posición del ojo en

relación con la cabeza y el punto de mirada coincidan, o se deben medir múltiples características oculares para distinguir entre el movimiento de la cabeza y la rotación del ojo. Estas características son los reflejos (de una fuente de luz, generalmente infrarroja) que se pueden observar en el globo ocular llamados reflejos o imágenes de Purkinje [76]. Debido a la construcción del ojo, se forman cuatro reflejos de Purkinje. Estos son los que se deben a la superficie exterior de la córnea (P1), a la superficie interior de la córnea (P2), la superficie exterior del cristalino (P3) y a la superficie interior del cristalino (P4).

El primer método de medición objetiva de los movimientos oculares utilizando la reflexión corneal se reportó en 1901 [77]. Estos eye trackers suelen medir la primera imagen de Purkinje en relación con la ubicación del centro de la pupila. Con procedimientos de calibración adecuados, estos dispositivos son capaces de medir el punto de mirada de un espectador en una superficie convenientemente posicionada (perpendicularmente plana) en la que se muestran puntos de calibración.

Se necesitan dos puntos de referencia en el ojo para separar los movimientos oculares de los movimientos de la cabeza. La diferencia posicional entre el centro de la pupila y el reflejo corneal cambia con la rotación pura del ojo, pero permanece relativamente constante con pequeños movimientos de la cabeza. Debido a que la fuente de luz infrarroja suele colocarse en una posición fija en relación con el ojo, la imagen de Purkinje es relativamente estable, mientras que el globo ocular, y por lo tanto la pupila, rota en su órbita [74].

Los eye trackers de la llamada generación-V también miden la cuarta imagen de Purkinje [78]. Al medir la primera y la cuarta imagen de Purkinje, estos eye trackers de imagen dual de Purkinje (DPI, por sus siglas en inglés) separan los movimientos oculares traslacionales y rotacionales. Ambos reflejos se desplazan juntos exactamente a la misma distancia en movimientos de traslación del ojo, pero las imágenes se desplazan a diferentes distancias (cambiando así su separación) en movimientos de rotación ocular.

Los eye trackers basados en video utilizan cámaras relativamente económicas y hardware de procesamiento de imágenes para calcular el punto de mirada. La disponibilidad de hardware de procesamiento de imágenes rápido ha facilitado el desarrollo de sistemas integrados de video en tiempo real para la obtención de la posición de la mirada. El dispositivo puede estar montado en una mesa, o puede ser usado en la cabeza, y suele ser el más adecuado para su uso en sistemas interactivos.

2.2.3. Aplicaciones del eye tracking

Debido al carácter no invasivo de los eye trackers basados en videos, existe una amplia variedad de aplicaciones para el seguimiento ocular, que pueden describirse de manera general dentro de dos categorías: aplicaciones interactivas y aplicaciones de investigación [74].

Como modalidad de interfaz, el eye tracker sirve como un potente dispositivo de en-

trada, que puede ser utilizado en una serie de aplicaciones. En la interacción humano-computadora (HCI por sus siglas en inglés), se espera que un sistema interactivo responda o interactúe con el usuario. La aplicación interactiva típica de seguimiento ocular es aquella en la que la mirada del usuario se utiliza como un dispositivo de apuntado. Este tipo de interacción puede considerarse como una de un conjunto de estrategias de entrada multimodal [79, 80, 81]. Un ejemplo de un sistema que utiliza únicamente la mirada como entrada ha demostrado ser una herramienta de comunicación importante para personas con cuadriplejía [74], donde los ojos se utilizan para posicionar un cursor sobre un teclado proyectado de gran tamaño. También se ha explorado el uso de la mirada para facilitar la comunicación en sistemas de trabajo colaborativo asistido por ordenador con múltiples participantes [82].

Además de ser utilizado como un dispositivo de apuntado, el conocimiento de la mirada del usuario puede aprovecharse para modificar la pantalla con el fin de acelerar el procesamiento, como puede ser necesario en la representación de entornos virtuales complejos [83]. Otro uso del eye tracking se encuentran en la aviónica [84], donde los pilotos son capaces de seleccionar la información que desean ver o accionar interruptores sin la necesidad de utilizar miembros superiores. Aplicaciones similares de estos dispositivos se han desarrollado para el uso automotriz [85].

Dentro de las aplicaciones científicas se pueden encontrar el estudio de la atención y de procesos más complejos como la lectura, la evaluación de la efectividad publicitaria, y aplicaciones en la industria del entretenimiento [74, 86].

En el estudio del marketing, por ejemplo, los estudios que prueban la visibilidad de algún aspecto de una pantalla, como la ubicación de un banner publicitario en una página web, pueden reforzarse con evidencia objetiva de la mirada del usuario cayendo sobre (o evitando) el banner en cuestión [87]. Las mediciones estadísticas típicas pueden incluir el número de fijaciones contabilizadas sobre el banner durante un cierto período de tiempo.

En su función diagnóstica, el seguimiento ocular proporciona evidencia objetiva y cuantitativa de los procesos visuales y cognitivos del usuario, especialmente útil en presencia de patologías que afectan estos procesos [86]. Esto lo vuelve una herramienta valiosa en el diagnóstico de diversas patologías como alzheimer y autismo, así como en la evaluación de tratamientos.

En el Complejo Demencial con Inmunodeficiencia Adquirida o en la enfermedad de Alzheimer, el deterioro de la búsqueda puede funcionar como un indicador de la aparición y avance de estas patologías. Las lesiones desmielinizantes de la esclerosis múltiple en el tronco cerebral y en las vías cerebelosas que pueden progresar en oftalmoplejía internuclear, parálisis motora ocular, nistagmo patológico, intrusiones sacádicas o alteraciones en la búsqueda, son estudiadas por dispositivos de eye tracking que facilitan analizar su progresión y la efectividad del tratamiento [88].

Anormalidades en el movimiento ocular pueden estar asociadas con el deterioro del

lóbulo frontal, causando desinhibición y problemas en el trabajo. Por ejemplo, niños que padecen desórdenes de hiperactividad y déficit de atención, demostraron mayores tasas de error en el control sacádico, el cual es un índice del control inhibitorio [89]. En el ámbito de psicología del desarrollo, la utilización de eye tracking ayuda a explicar las adquisiciones de la atención, percepción visual, control de acciones, interacción social y del lenguaje, desde la infancia hasta la adultez. Debido a su carácter no invasivo, los eye trackers basados en videos son particularmente útiles para realizar estudios en niños pequeños.

2.2.4. Análisis estadístico de señales de eye tracking

Las señales obtenidas con los dispositivos mencionados anteriormente son series temporales que se corresponden con la posición de la mirada en función del tiempo. Uno de los objetivos del análisis de señales de movimiento ocular es caracterizar las señales en términos de algunas propiedades de dichos movimientos, con el objetivo de identificar patrones de comportamiento que puedan estar relacionados con determinados procesos cognitivos.

En general, los movimientos oculares registrados por un eye tracker se clasifican en fijaciones, sacadas y movimientos de persecución suave. Esta clasificación puede utilizarse para describir la señal en función de las propiedades estadísticas de estos movimientos, por ejemplo la distribución de probabilidad de las duraciones de las fijaciones o las amplitudes de las sacadas [90, 1, 91, 92]. Muchos procesos cognitivos están relacionados con la secuencia particular de ocurrencia de estos tipos de movimientos. Diferentes tipos de análisis han sido utilizados en la caracterización de procesos cognitivos, permitiendo la identificación de biomarcadores de distintas patologías neurológicas [64, 65, 66].

Sin embargo, ciertas patologías presentan un desafío significativo cuando se analizan en el contexto de su procesamiento a través del análisis de movimientos oculares, ya que las técnicas desarrolladas para detectar fijaciones y sacadas no pueden aplicarse de manera sencilla y directa. El nistagmo es un ejemplo de una de estas patologías, caracterizada por movimientos oculares involuntarios que dificultan el reconocimiento de lo que se denomina convencionalmente fijación y sacada. Además, junto con estos movimientos involuntarios, existen otros movimientos lentos de la mirada clasificados como movimientos de tipo deriva, que alteran la dinámica habitual de la posición de la mirada [33]. En el caso de estas patologías específicas, se hace imprescindible emplear una variedad de herramientas alternativas para estudiar la trayectoria de la mirada independientemente de la clasificación de los movimientos oculares.

Los datos crudos (sin clasificar) registrados con un eye tracker pueden considerarse como series temporales asociadas a un proceso biológico. Las propiedades estadísticas y las dinámicas no lineales de las series temporales biológicas han sido ampliamente estudiadas, especialmente desde 1980. El creciente interés se basa en la hipótesis de que

las alteraciones en la autorregulación del sistema bajo estudio (cardiovascular, respiratorio, motor, entre otros) pueden reflejarse en algunas características de las series temporales biológicas registradas para la evaluación de dicho sistema. De esta manera, las diferencias en estas características, con respecto a los valores normales preestablecidos, serían indicadores de la presencia de alteraciones en el sistema [36].

Se han utilizado diferentes herramientas para estudiar la estructura no lineal de los movimientos oculares. En algunos casos, el análisis se basó en la detección de fijaciones y sacadas [93, 94, 95, 42], mientras que otros prescindieron de dicha clasificación y trabajaron directamente con los datos crudos [96, 97, 98, 99, 100, 101, 102]. Medidas de información como la entropía [100], la complejidad estadística o la información de Fisher [101] se han implementado para estudiar la aleatoriedad o la existencia de estructuras ocultas en características seleccionadas. También se han explorado modelos lognormales y de ley de potencia [96, 97], estructuras fractales y de espectro de potencia [93], el índice de complejidad de Lempel-Ziv [94], el exponente de Lyapunov y el exponente de Hurst [93, 99].

Particularmente, el análisis conocido como MF-DFA ha demostrado proporcionar información relevante en el estudio de una gran diversidad de fenómenos [103]. El estudio de las propiedades fractales y multifractales de las series temporales biológicas se ha centrado, en muchos casos, en apoyar la hipótesis previamente mencionada de que la variabilidad de estos datos refleja el buen funcionamiento del proceso de autorregulación del sistema [36]. En algunos casos, medidas como la autocorrelación, la dimensión fractal o el espectro multifractal pueden ser mejores indicadores de salud o enfermedad que las mediciones habituales de valores promedio [36].

Un análisis del espectro multifractal de los registros de movimientos oculares obtenidos de tres paradigmas diferentes (una prueba de búsqueda de diferencias, una prueba atencional y una prueba que evalúa funciones ejecutivas en la resolución de problemas de física) mostró que la estructura organizacional de los datos refleja la actividad ocular realizada [98]. También se estudiaron las dinámicas multifractales de la duración de las fijaciones durante la lectura [42], y se encontró que el comportamiento multifractal de esta característica del movimiento ocular es inherente al proceso de lectura. El estudio de la multifractalidad y la correlación cruzada de movimientos microsacádicos y movimientos de cabeza simultáneos reveló que estos son procesos multiplicativos y correlacionados, originados a partir de diferentes mecanismos estocásticos [95]. Aunque existen precedentes de estudios sobre las propiedades multifractales de los movimientos oculares, los análisis se han centrado en su caracterización en relación con la tarea desarrollada. Solo unas pocas investigaciones anteriores han analizado el potencial de las propiedades fractales o multifractales para detectar alteraciones en los movimientos oculares [97, 102].

2.3. Fractalidad y alometría

Las series de datos generadas por sistemas complejos exhiben fluctuaciones en una amplia gama de escalas temporales y/o distribuciones amplias de valores. Tanto en situaciones de equilibrio como de no equilibrio, las fluctuaciones naturales a menudo siguen una relación de escala en varios órdenes de magnitud. Estas leyes de escala permiten caracterizar los datos y el sistema complejo que los genera mediante exponentes de escala fractal (o multifractal), que pueden servir como huellas características de los sistemas al compararlos con otros sistemas y con modelos [104].

El comportamiento de escala fractal se ha observado, por ejemplo, en muchas series de datos provenientes de la física experimental, la geofísica, la medicina, la fisiología e incluso en las ciencias sociales. Aunque a menudo las causas subyacentes del comportamiento fractal observado no se conocen en detalle, la caracterización fractal o multifractal puede utilizarse para generar datos sintéticos, modelar la serie temporal y derivar predicciones sobre eventos extremos o comportamientos futuros [104]. Sin embargo, la principal aplicación sigue siendo la caracterización de diferentes estados o fases del sistema complejo, basada en el comportamiento de escala observado. Por ejemplo, el estado de salud y los diferentes estados fisiológicos del sistema cardiovascular humano se representan mediante el comportamiento de escala fractal de las series temporales de los intervalos entre latidos sucesivos del corazón [105]. Asimismo, la dinámica de crecimiento en aleaciones metálicas se representa por el comportamiento de escala fractal de las intensidades observadas en la espectroscopía de rayos X.

La caracterización y comprensión de los sistemas complejos es una tarea difícil, ya que no pueden dividirse en subsistemas más simples sin alterar sus propiedades dinámicas. Algunos sistemas se caracterizan por un comportamiento periódico o casi periódico, lo cual puede deberse a componentes oscilatorios o cadenas de regulación en bucle cerrado. Sin embargo, en sistemas verdaderamente complejos, estos componentes periódicos generalmente no están limitados a una o dos frecuencias o bandas de frecuencia características. Más bien, se extienden sobre un amplio espectro, y se encuentran fluctuaciones en muchas escalas de tiempo, así como distribuciones amplias de los valores. A menudo, no se observa un límite inferior específico de frecuencia o, de manera equivalente, una escala de tiempo característica superior. En estos casos, la dinámica puede caracterizarse por leyes de escala que son válidas en un amplio rango de escalas de tiempo o frecuencias, al menos en varios órdenes de magnitud. Estas dinámicas suelen denominarse fractales o multifractales, dependiendo de si se caracterizan por un exponente de escala único o por una multitud de exponentes de escala [104].

El primer científico que aplicó el análisis fractal a series temporales naturales fue Benoit B. Mandelbrot [106, 107, 108], quien incluyó enfoques tempranos de H.E. Hurst relacionados con sistemas hidrológicos [109, 110]. En la última década, se ha informado sobre el comportamiento de escala fractal y multifractal en muchos registros de datos generados por sistemas complejos, que incluyen:

- Series temporales de geofísica (registros de temperatura, precipitación, escorrentía de agua, niveles de ozono, velocidad del viento, eventos sísmicos, patrones de vegetación y dinámicas climáticas)
- Series temporales médicas y fisiológicas (registros de latidos del corazón, respiración, presión arterial, flujo sanguíneo, intervalos de picos nerviosos, caminata humana, niveles de glucosa).
- Secuencias de ADN (aunque no son series temporales).
- Series temporales astrofísicas (fuentes de luz de rayos X y número de manchas solares).
- Series temporales técnicas (tráfico en internet, tráfico en rutas y potencia neutrónica de un reactor).
- Series temporales sociales (finanzas y economía, características del lenguaje, y fatalidades en conflictos).
- Otras áreas de la física (rugosidad superficial, espectros caóticos de átomos y registros de espectroscopía de correlación de fotones).

Si se descubre que un sistema complejo se caracteriza por una dinámica fractal (o multifractal) con exponentes de escala particulares, este hallazgo ayudará a obtener predicciones sobre el comportamiento futuro del sistema y su reacción ante perturbaciones externas o cambios en las condiciones de contorno [104]. Las transiciones de fase en el comportamiento de regulación de un sistema complejo a menudo están asociadas con cambios en su dinámica fractal, lo que permite la detección de tales transiciones (o de los estados correspondientes) mediante el análisis fractal. Un ejemplo exitoso de esta aplicación es el sistema cardiovascular humano, donde se ha demostrado que la fractalidad de las series temporales del intervalo entre latidos refleja ciertos problemas cardíacos, así como etapas del sueño [111, 105]. Además, se pueden probar y mejorar iterativamente modelos del sistema hasta que reproduzcan el comportamiento de escala observado. Un ejemplo de este enfoque es la modelización del clima, donde se ha demostrado que los modelos necesitan incorporar información sobre volcanes y radiación solar [112] para reproducir el comportamiento de escala encontrado previamente en datos observacionales de temperatura [113].

Los organismos vivos son complejos tanto en sus estructuras como en sus funciones. Los parámetros de las funciones fisiológicas humanas, como la presión arterial [114], la respiración [115] y la frecuencia cardíaca [116], no son estables, sino que fluctúan en el tiempo [34]. El patrón real de estas fluctuaciones resulta de una interacción entre perturbaciones del entorno externo o interno y las acciones de los mecanismos de control que intentan mantener el estado de equilibrio del sistema. El valor actual de un parámetro es medido por algún tipo de receptor, cuya señal es luego comparada por un centro de control con un valor de referencia interno, llamado punto de ajuste [117]. La diferencia entre ambos, la señal de error, determina la dirección y magnitud del cambio que lleva el

valor actual del parámetro controlado cerca del punto de ajuste. La visión homeostática del control fisiológico pone énfasis en la constancia del parámetro controlado a pesar de sus evidentes fluctuaciones alrededor del punto de ajuste. Sin embargo, las fluctuaciones temporales también pueden ser el resultado de fuentes intrínsecas, como la actividad del organismo o el envejecimiento, que afectan el punto de ajuste en distintos grados. Por lo tanto, el concepto de control homeodinámico parece más realista [118].

El entendimiento de los mecanismos implicados generalmente se aborda de dos maneras [117]: (i) el enfoque reduccionista identifica los elementos del sistema e intenta determinar la naturaleza de sus interacciones; (ii) el enfoque holístico examina registros detallados de las variaciones de los parámetros controlados y busca un patrón coherente que indique la presencia de un esquema de control. Estos enfoques no son mutuamente excluyentes; de hecho, a menudo se usan juntos. Ambos emplean métodos matemáticos (por ejemplo, estadísticos) y modelos matemáticos para hacer que los hallazgos sean concluyentes o para dar forma y fortalecer las hipótesis.

Las fluctuaciones en los sistemas fisiológicos no son periódicas. Los modelos estocásticos, caóticos, y caóticos con ruido pueden tratar matemáticamente estos patrones [117]. Los modelos estocásticos (aleatorios) suponen que las fluctuaciones resultan de un gran número de influencias débiles. Los modelos caóticos conceptualizan que las fuertes interacciones no lineales entre unos pocos factores dan forma a las fluctuaciones. Es posible una combinación de estos dos en un modelo caótico con ruido. Entre los enfoques estocásticos, los modelos fractales proporcionan la mejor descripción de la realidad capturando las fluctuaciones no periódicas de los sistemas fisiológicos [104].

La teoría clásica de la homeostasis se centraba en el punto de referencia determinado por la media de la señal fisiológica, por lo que las fluctuaciones alrededor de este valor se trataban como ruido". Las investigaciones de las últimas décadas han revelado que los conceptos homeodinámicos y holísticos, como los análisis fractales y no lineales, podrían ser muy útiles para comprender la complejidad de las funciones fisiológicas [117]. Estas investigaciones han mostrado que (i) los procesos fisiológicos pueden operar lejos del equilibrio; (ii) sus fluctuaciones exhiben una correlación a largo plazo que se extiende a través de muchas escalas de tiempo; (iii) y las dinámicas subyacentes pueden ser altamente no lineales. Los enfoques fractales y caóticos no son mutuamente excluyentes, ya que presentan dos maneras de observar la complejidad fisiológica [119]. El enfoque fractal está orientado a demostrar la presencia de características auto-similares invariantes de escala (correlación, memoria) en un registro detallado de variaciones temporales de un parámetro fisiológico, mientras que el mismo registro puede ser analizado según el concepto de caos determinista, intentando encontrar el conjunto mínimo de ecuaciones diferenciales, a menudo simples, capaces de producir la dinámica errática y aleatoria de las series temporales en base a principios deterministas.

En el capítulo 3 se presentará un modelo mecánico determinista del ojo capaz de describir la dinámica del movimiento sacádico, en términos de la fuerza ejercida por los músculos extraoculares. Además, se desarrolla un modelo estocástico para representar

la secuencia de sacadas que caracterizan procesos cognitivos en general, y el proceso de lectura en particular.

En el capítulo 4 se presentará una herramienta de análisis conocida como MF-DFA (multifractal detrended fluctuation analysis), capaz de estimar el espectro multifractal de una serie temporal biomédica, útil en el estudio de las fluctuaciones de los registros de movimientos oculares.

En los capítulos 5 y 6 se presentarán los resultados obtenidos del análisis de los movimientos oculares de niños con dislexia y nistagmo infantil, respectivamente, demostrando la aplicabilidad de esta herramienta para el análisis de movimientos oculares en distintas situaciones.

Capítulo 3

Modelado de movimientos oculares

El ojo humano es un dispositivo biomecánico altamente refinado [92]. Desde el punto de vista físico, puede considerarse como un cuerpo rígido casi esférico que interactúa con seis componentes dinámicas muy especializadas. Todos los movimientos oculares posibles están regulados por la actividad de los músculos adheridos a la esfera y por la amortiguación producida por el septo alrededor del ojo. Bajo condiciones estáticas de cabeza y cuerpo, los movimientos oculares asociados con el cambio de mirada se pueden clasificar en movimientos de persecución suave, sacadas y fijaciones. La persecución suave es la focalización de objetos en movimiento, lo que requiere una estimación del movimiento del objeto y el cálculo de la futura proyección de la mirada para mantener el objeto en la fovea, donde el ojo tiene máxima resolución. Las sacadas son movimientos rotacionales rápidos que el cerebro utiliza para llevar una parte relevante de una escena visual a la fovea. Estos movimientos son considerablemente diferentes a la persecución suave, ya que las sacadas son esencialmente saltos súbitos en la posición del ojo que mueven el centro de la fovea de un lugar a otro. Las fijaciones corresponden a períodos de relativa estabilidad del ojo durante los cuales se extrae la información visual.

Cuando se observa una escena, nuestra mirada no explora la imagen de manera continua en el espacio, sino que realiza una sucesión de saltos (sacadas) entre puntos relativamente distantes, intercalados con períodos de fijaciones. Cada uno de estos saltos implica una rápida rotación coordinada de los globos oculares que cambia el punto de fijación [20, 74]. La duración de una sacada suele ser del orden de 100–200 ms, mientras que las amplitudes de las sacadas van desde menos de 1° hasta 30° o más [63].

Con el avance de las técnicas modernas de eye tracking, que año tras año facilitan el registro de los movimientos oculares, el análisis de los movimientos sacádicos se ha convertido en una práctica común en muchas áreas de la ciencia, particularmente en psicología y neurociencia, así como en la industria, el marketing y los videojuegos [74]. En este contexto, el desarrollo de modelos matemáticos que permitan entender diferentes aspectos del movimiento ocular ha captado la atención de físicos, matemáticos e ingenieros en los últimos años. En particular, dentro del área de la física interdisci-

plinaria, se han hecho contribuciones relevantes respecto a la dinámica de las sacadas [21, 120, 92, 121, 122, 123], microsacadas [124, 125] y fijaciones [126, 127].

Las señales típicas registradas por los dispositivos de eye tracking muestran que, al final de una sacada, antes del régimen estable correspondiente a la fijación, la señal de la pupila suele realizar una oscilación amortiguada con uno o dos períodos observables antes de un completo amortiguamiento. Esto se conoce como oscilaciones postsacádicas (PSO, por sus siglas en inglés) [128, 129]. Las amplitudes máximas de las PSO suelen estar en el rango de $0-2^\circ$ y sus períodos son del orden de 20 ms [129].

Recientemente, el origen de las PSO se ha relacionado con deformaciones dinámicas del borde interno del iris durante las sacadas [128, 129, 130], es decir, con el movimiento de la pupila dentro del globo ocular. Este movimiento se conoce como *iris wobbling* [131] y es provocado por el movimiento relativo entre distintas partes internas del ojo durante la sacada. Los perfiles de las PSO varían entre individuos y cambian con la edad del observador [129, 132]. Además, dependen de la dirección de la sacada y están influenciadas por el tamaño de la pupila [129, 133].

Con estas consideraciones, se han desarrollado diversos modelos para la dinámica del globo ocular y de la pupila durante el movimiento sacádico [123, 63, 91]. Estos modelos permiten explorar la relación entre el movimiento de la pupila y las PSO, y entender la dependencia de los perfiles de las PSO con el tamaño y la velocidad de la sacada.

En este capítulo se presentará, en primer lugar, un modelo mecánico para describir la dinámica del movimiento sacádico, en términos de una fuerza ejercida sobre el globo ocular. En segundo lugar, se presenta un modelo simple para representar el movimiento del globo ocular en función de un solo parámetro. Este modelo es de gran utilidad para el análisis de secuencias de movimientos sacádicos, como es el caso del estudio de procesos cognitivos. Finalmente, se desarrolla un modelo estocástico para representar los movimientos oculares durante el proceso de lectura.

3.1. Modelo mecánico para el movimiento sacádico

Las oscilaciones postsacádicas pueden entenderse como oscilaciones armónicas amortiguadas inducidas por las fuerzas inerciales asociadas a la desaceleración del globo ocular al final de la sacada. Dichas fuerzas inerciales actúan de manera efectiva sobre la parte interna del iris y posiblemente sobre otras partes internas del ojo. Las oscilaciones están influenciadas por las características viscoelásticas del medio.

Debido a lo anterior, la dinámica del centro de la pupila puede modelarse en función de dos variables. A saber, $x(t)$, que describe el desplazamiento angular del globo ocular durante una sacada, e $y(t)$, que representa la posición relativa de la pupila dentro del globo ocular. Más precisamente, $x(t)$ puede considerarse como la posición angular del centro de la córnea en una descripción rígida del globo ocular (es decir, sin tener en

cuenta el hecho de que la córnea pueda deformarse durante la sacada). Mientras tanto, $y(t)$ representa el desplazamiento angular del centro de la pupila con respecto a $x(t)$ en la dirección de la sacada. De esta manera, la posición absoluta del centro de la pupila durante una sacada, para compararla, por ejemplo, con datos tomados de una señal de eye tracking, está dada por $x(t) + y(t)$.

Para definir la dinámica de $x(t)$, se asume que el movimiento del globo ocular está impulsado por los músculos extraoculares de manera sobreamortiguada [55]. Por lo tanto, $x(t)$ se define a partir de su derivada temporal, lo que da lugar a la velocidad angular del globo ocular:

$$v\dot{x} = F(t). \quad (3.1)$$

Aquí, v es la constante de viscosidad que actúa sobre el globo ocular y $F(t)$ es la fuerza producida por los músculos extraoculares. Para simplificar, se puede considerar $v = 1$ de modo que $F(t)$ incluya el valor de la viscosidad. Para reproducir una sacada, la variable $x(t)$ parte de la condición inicial (correspondiente a la fijación inicial que puede estar en cualquier punto del campo visual) y crece de manera monótona hasta el desplazamiento absoluto final x_m (es decir, el tamaño de la sacada). Como se discute en Ref. [123], dentro de una aproximación sobreamortiguada para la dinámica del globo ocular, $\dot{x}(t)$ puede considerarse proporcional a la fuerza ejercida por los músculos extraoculares.

Dado que la Ec. 3.1 tiene simetría traslacional en $x(t)$, para describir sacadas individuales se puede considerar la condición inicial $x(0) = 0$ sin pérdida de generalidad. Es importante destacar que, aunque el modelo es unidimensional, la coordenada x se mide a lo largo de la dirección de la sacada, que puede ser arbitraria. Las anisotropías y heterogeneidades que puedan afectar el movimiento del globo ocular en diferentes direcciones o regiones del campo visual pueden ser tenidas en cuenta al variar las características de $F(t)$.

Para describir el movimiento relativo de la pupila, se puede asumir que el iris está vinculado elásticamente al globo ocular y que su borde interno (que define la pupila) sufre fuerzas inerciales inducidas por el movimiento del globo ocular. La suposición principal es que, debido a esto, el borde interno del iris oscila de tal manera que el centro de la pupila se comporta efectivamente como una partícula puntual sujeta a fuerzas inerciales en el marco de referencia del globo ocular [63]. Por lo tanto, se puede considerar la siguiente ecuación para la dinámica del centro de la pupila:

$$\ddot{y} + \gamma\dot{y} + ky = -\ddot{x}. \quad (3.2)$$

Aquí, k es la constante elástica efectiva para la fuerza $-ky$, que tiende a alinear el centro de la pupila con el centro de la córnea, mientras que γ mide una viscosidad efectiva que afecta el movimiento relativo. Finalmente, $-\ddot{x}$ representa la fuerza inercial ejer-

cida sobre la pupila en el marco de referencia del globo ocular. Cabe señalar que la masa se puede establecer igual a 1 sin pérdida de generalidad. Las unidades de k , γ , y $F(t)$ pueden elegirse para expresar x e y en grados y el tiempo en milisegundos. Las condiciones iniciales pueden considerarse como $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$, de modo que la pupila está en reposo en su posición de relajación en el globo ocular, la cual coincide con el centro de la córnea.

De manera general, el movimiento de la pupila puede obedecer a fenómenos complejos asociados con movimientos tridimensionales y deformaciones [123], por lo que se deben ajustar los parámetros k y γ , y la función $F(t)$, para capturar la dinámica unidimensional efectiva registrada por los eye trackers. Sin embargo, para comprender varios de los aspectos fenomenológicos de los movimientos sacádicos, es suficiente considerar únicamente el movimiento del globo ocular a partir de la fuerza realizada por los músculos extraoculares dada por [63]:

$$F(t) = At^\beta \exp\left[-\frac{t^\mu}{\tau^\mu}\right], \quad (3.3)$$

donde $A > 0$, $\mu > 0$, $\beta \geq 1$, y $\tau > 0$ son parámetros que controlan la forma y el tamaño de la sacada, como se explicará más adelante. La forma funcional particular para $F(t)$ dada en la Ec. 3.3 se elige por dos razones. En primer lugar, tiene las características adecuadas para describir la actividad muscular promedio durante una sacada: comienza en $F(0) = 0$, luego crece hasta un valor máximo y nuevamente decae a cero. En segundo lugar, como se mostrará más adelante, al variar solo el parámetro τ , $F(t)$ genera sacadas cuya velocidad máxima crece con el tamaño de la sacada x_m como x_m^a , como se observa en resultados experimentales encontrados, por ejemplo, en Refs. [17, 92].

Con respecto al papel del parámetro β , se observa que al expandir la Ec. 3.3 para valores pequeños de t se obtiene $F(t) \simeq At^\beta + o(t^{\beta+\mu})$. Entonces, la Ec. 3.1 conduce a $\dot{x}(t) \simeq At^{\beta-1}$ para tiempos pequeños, y $\ddot{x}(t) \simeq A\beta t^{\beta-2}$. Esto muestra que el caso $\beta < 1$ no tiene sentido físico, ya que conduce a una aceleración inicial infinita. Además, vemos que la aceleración inicial coincide con el parámetro A para $\beta = 1$ y se anula para $\beta > 1$.

Usando la condición inicial $x(0) = 0$, la trayectoria del globo ocular $x(t)$ puede ser integrada de la Ec. 3.1 obteniendo

$$x(t) = A \frac{t^{\beta+1}}{\beta+1} {}_1F_1\left[\frac{\beta+1}{\mu}, \frac{\beta+\mu+1}{\mu}; -\left(\frac{t}{\tau}\right)^\mu\right], \quad (3.4)$$

donde ${}_1F_1(a, b; z)$ es la función de Kummer [134, 135]. La función de Kummer ${}_1F_1(a, b; z)$ es una serie hipergeométrica generalizada [134, 135], dada por

$${}_1F_1(a, b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{(n)}}{b_{(n)}} \frac{z^n}{n!}, \quad (3.5)$$

donde el símbolo de Pochhammer [135] $(\gamma)_n = \Gamma(\gamma + n)/\Gamma(\gamma)$ está definido en términos de la función Γ [134],

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (3.6)$$

Para valores grandes de t , la función de Kummer se comporta como $\sim \Gamma\left(\frac{\beta+\mu+1}{\mu}\right)\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\beta+1}$. Así, el límite de $x(t)$ para tiempos largos, que corresponde al tamaño de la sacádica x_m , se obtiene como:

$$x_m \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = A \frac{\tau^{\beta+1}}{\beta+1} \Gamma\left(\frac{\beta+\mu+1}{\mu}\right). \quad (3.7)$$

Para facilitar la comparación con datos experimentales, es conveniente considerar x_m como un parámetro relevante del sistema, en lugar de τ . La relación explícita se obtiene al invertir la Ec. 3.7:

$$\tau = \left(\frac{(\beta+1)x_m}{A\Gamma\left(\frac{\beta+\mu+1}{\mu}\right)} \right)^{\frac{1}{\beta+1}}. \quad (3.8)$$

Aunque el análisis de la dinámica del globo ocular se centra en el papel de x_m , para facilitar la notación, se utilizará el parámetro τ para presentar las soluciones.

La velocidad máxima del globo ocular se puede mostrar que ocurre en $t = \tau(\beta/\mu)^{1/\mu}$, resultando en $\text{Max}[\dot{x}] = A\tau^\beta (\beta/\mu)^{\beta/\mu} e^{-\beta/\mu}$. En términos de x_m , esto puede expresarse como:

$$\text{Max}[\dot{x}] = C(A, \mu, \beta) x_m^{\frac{\beta}{\beta+1}}, \quad (3.9)$$

con

$$C(A, \mu, \beta) = A \left(\frac{\beta+1}{A\Gamma\left(\frac{\beta+\mu+1}{\mu}\right)} \right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} \left(\frac{\beta}{\mu} \right)^{\frac{\beta}{\mu}} e^{-\frac{\beta}{\mu}}. \quad (3.10)$$

Cabe destacar que, para una familia de sacadas generadas con valores fijos de A , μ y β , la Ec. 3.9 predice una dependencia en ley de potencia para $\text{Max}[\dot{x}]$ respecto a la amplitud de la sacada con un exponente $\beta/(\beta+1)$ (es decir, independiente de A y μ).

Los exponentes encontrados en los experimentos en Refs. [92, 132, 17, 16] varían según los diferentes observadores, y la dirección y amplitud del movimiento sacádico. Sin embargo, en todos los casos se encuentran en el rango de 0.5 a 0.75. Esto sugiere que los valores de $\beta > 1$ en el rango de 1 a 3 pueden ser de interés.

Es importante señalar que la velocidad máxima de la pupila registrada en los experimentos corresponde en realidad a $\text{Max}[\dot{x} + \dot{y}]$, y no a $\text{Max}[\dot{x}]$. Sin embargo, como se mostró en Ref. [123], esto no hace una gran diferencia en lo que respecta a la ley de potencia involucrada.

A continuación se analizarán las predicciones del modelo para el movimiento del globo ocular y el papel de los parámetros. En la Fig. 3.1 se muestran los resultados para el perfil de la sacada del globo ocular $x(t)$, obtenido a partir de la Ec. 3.4 para diferentes valores de los parámetros. Primero, en la Fig. 3.1(a) se consideran varios valores de x_m con A , μ y β fijos. Así, el conjunto mostrado modela un conjunto de sacadas que se obtendría de un solo ojo moviéndose en una dirección fija. Es importante destacar que estas sacadas cumplen con $\text{Max}[\dot{x}] \propto x_m^{1/2}$, de acuerdo con la Ec. 3.9 con $\mu = 2$ y $\beta = 1$.

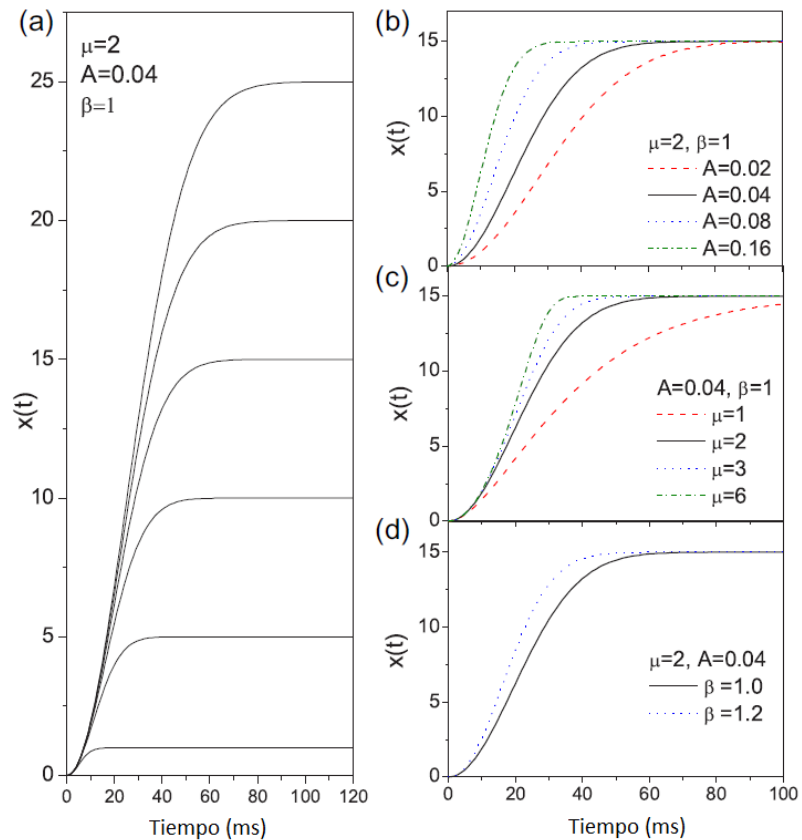


Figura 3.1: Dinámica del globo ocular. (a) Posición del globo ocular $x(t)$ para una familia de sacadas con $\mu = 2$, $\beta = 1$, $A = 0.04$ fijos y varios valores de x_m . Los paneles (b), (c) y (d) muestran $x(t)$ calculado para $x_m = 15$, considerando diferentes valores de A , μ y β , respectivamente.

Luego, en las Fig. 3.1(b), 3.1(c) y 3.1(d) se considera un tamaño de sacada fijo $x_m = 15^\circ$ y se analiza la dependencia de A , μ y β , respectivamente. En la Fig. 3.1(b) se observa que el tiempo de la sacada (es decir, el tiempo requerido para alcanzar el tamaño de la sacada) disminuye con el parámetro A . Además, la aceleración inicial (que para $\beta = 1$ coincide con A) crece trivialmente con A . En la Fig. 3.1(c) se observa que cuando μ crece, con A y β constantes, el tiempo de la sacada también disminuye, pero la aceleración inicial se mantiene constante. En este caso es igual a A , pero sería igual a cero para $\beta > 1$. Finalmente, la Fig. 3.1(d) muestra que el tiempo de la sacada también disminuye con el aumento de β . Es importante señalar que la dinámica de $x(t)$ siempre es monótona. No ocurren ni oscilaciones ni *overshoots* del globo ocular para ningún valor de los parámetros.

Los parámetros A , μ , β y τ determinan el perfil de la fuerza que actúa sobre el globo ocular. Es decir, pueden ajustarse para reproducir la actividad de los músculos extraoculares. Los parámetros k y γ caracterizan las propiedades viscoelásticas del sistema iris-globo ocular en relación con el movimiento relativo de la pupila.

En la siguiente sección se presenta un análisis de los parámetros involucrados en la dinámica del globo ocular, con el objetivo de obtener un conjunto de parámetros fijos que pueda ser utilizado para modelar los movimientos oculares en diferentes procesos cognitivos, y en particular durante la lectura.

3.2. Modelo simple para la activación del globo ocular

Una larga lista de patologías neurológicas puede relacionarse con movimientos oculares anormales, como la esclerosis lateral amiotrófica [5], la enfermedad de Alzheimer [6, 7], la esquizofrenia [8] y la enfermedad de Parkinson [136], entre muchas otras. Asimismo, trastornos del desarrollo como la dislexia pueden estar vinculados a movimientos oculares anormales que se pueden detectar mientras se lee un texto [137, 138]. En general, las oscilaciones postsacádicas no son relevantes para el estudio de estos casos. Por este motivo, es de interés contar con un modelo simple de la dinámica del globo ocular, que pueda ser usado en estos estudios.

En el estudio de procesos cognitivos como la lectura, el interés se centra en tener representaciones adecuadas de las órdenes dadas por el cerebro a los músculos oculares, en lugar de realizar descripciones precisas de los movimientos sacádicos en su totalidad. Esto permite una mejor aproximación al procesamiento temporal del cerebro durante la realización de las diferentes tareas [91].

A continuación, se presenta un análisis de los parámetros involucrados en la dinámica del globo ocular, con el objetivo de obtener un conjunto de parámetros fijos que pueda ser utilizado para modelar los movimientos oculares en diferentes procesos cognitivos, y en particular durante la lectura.

Si se ignora la dinámica de las PSO, es posible ajustar los parámetros para reproducir correctamente la velocidad de la sacada. Teniendo en cuenta la Ec. 3.9 y la Ec. 3.10 la velocidad máxima puede escribirse como

$$\text{Max}[\dot{x}] = A^{\frac{1}{\beta+1}} \left(\frac{\beta+1}{\Gamma\left(\frac{\beta+\mu+1}{\mu}\right)} \right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} \left(\frac{\beta}{e\mu} \right)^{\frac{\beta}{\mu}} x_m^{\frac{\beta}{\beta+1}}, \quad (3.11)$$

De manera general, es posible considerar una dependencia de los parámetros A , μ y β respecto a x_m . Sin embargo, el modelo más simple considera al parámetro A como función del tamaño de la sacada como $A = \alpha x_m^p$, manteniendo los otros dos parámetros constantes. De esta manera, la velocidad máxima queda $\text{Max}[\dot{x}] \sim x_m^{\frac{p+\beta}{\beta+1}}$. Fijando $p = -1$ y $\beta = 4$, se obtiene la relación conocida entre la velocidad máxima y el tamaño de la sacada, en términos de una ley de potencia con exponente 0.6. El valor de α puede obtenerse a partir de dicha relación, utilizando un conjunto de sacadas experimentales. De acuerdo con Ref. [91] un valor de $\alpha = 0.0025$ resulta adecuado para describir el parámetro A en términos de x_m .

Finalmente, el valor de μ puede ajustarse para reproducir los conjuntos de sacadas experimentales. De acuerdo con Ref. [91] un valor constante de $\mu = 1$ resulta adecuado para describir sacadas realizadas en distintos contextos, como por ejemplo durante la lectura o la exploración libre. Cabe señalar que, si bien se pueden utilizar otras combinaciones de parámetros, las expresiones son más sencillas al utilizar números enteros para p , β y μ .

Con todos los parámetros fijados, a excepción de la amplitud de la sacada, las relaciones definidas en la Ec. 3.3 y la Ec. 3.4 pueden escribirse como una función de solo dos variables libres: la amplitud de la sacada x_m y el tiempo t . Las fórmulas resultantes son:

$$F(t, x_m) = \frac{0.0025}{x_m} t^4 e^{-0.57 \frac{t}{x_m^{2/5}}} \quad (3.12)$$

$$x(t, x_m) = x - x_m e^{-0.57 \frac{t}{x_m^{2/5}}} \left(\frac{0.004 t^4}{x_m^{8/5}} + \frac{0.03 t^3}{x_m^{6/5}} + \frac{0.16 t^2}{x_m^{4/5}} + \frac{0.57 t}{x_m^{2/5}} + 1 \right), \quad (3.13)$$

donde algunos números fueron redondeados por simplicidad.

De manera similar, la Ec. 3.8 y la Ec. 3.11 quedan

$$\tau(x_m) = 1.75 x_m^{2/5} \quad (3.14)$$

$$\text{Max}[\dot{x}](x_m) = 0.11 x_m^{3/5}. \quad (3.15)$$

La Fig. 3.2 muestra dos ejemplos de sacadas ajustadas con la Ec. 3.13 del modelo. La solución ahora está completamente determinada de antemano, dado que la amplitud de la sacada x_m puede ser estimada a partir de los datos. Como se puede observar, el modelo da una excelente representación del movimiento del globo ocular, a partir de un único parámetro (x_m).

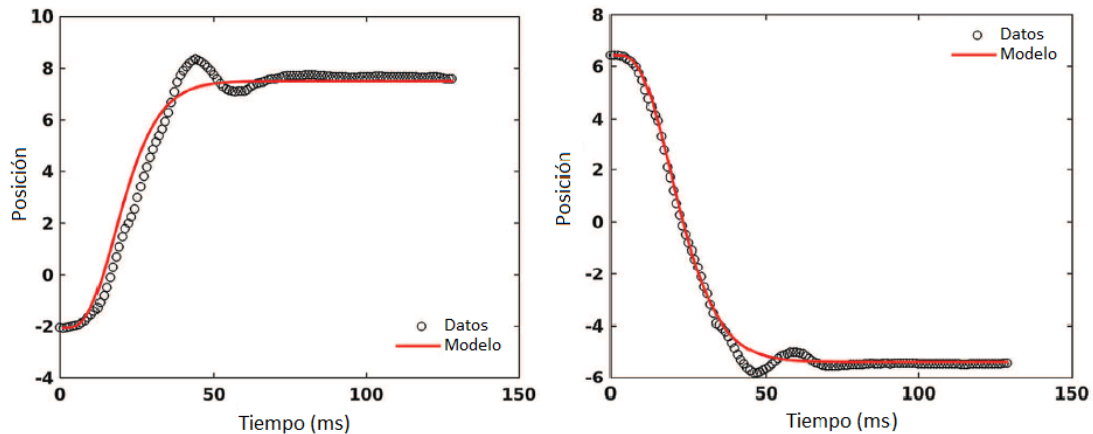


Figura 3.2: Ejemplos de movimiento sacádico registrado (círculos blancos), comparados con la solución del modelo para la activación del globo ocular (Ec. 3.13).

Una característica importante de este modelo es que permite estimar el tiempo necesario para realizar una sacada de una determinada amplitud, a través de la Ec. 3.14. Este tiempo, conocido como tiempo de vuelo [139], puede ser de utilidad al momento de analizar los movimientos oculares asociados a procesos cognitivos como la lectura en función de las amplitudes de sacadas y los tiempos intersacádicos.

3.3. Descripción de movimientos oculares en lectura mediante una ecuación maestra

El modelo presentado en la sección anterior permite obtener una buena representación de los movimientos realizados por el globo ocular. Dicho modelo permite obtener una expresión simple para los movimientos oculares que representa los datos recopilados con un eye tracker en experimentos que involucran diferentes tareas. En particular, la propuesta involucra dos parámetros (μ y β) independientes de la tarea realizada, y otros dos (A y τ) relacionados con la tarea a través de la amplitud de la sacada x_m . Una vez ajustados los parámetros, se obtiene un buen modelo de la fuerza de activación. Esta fuerza contiene la información responsable del movimiento mecánico del ojo, incluida en los parámetros μ y β . La información relacionada con la tarea cognitiva se explica por la frecuencia con la que se realiza la activación, su magnitud y también la duración de los períodos en los que no ocurre activación. Por esta razón, se puede considerar que la fuerza de activación, o los parámetros A y τ involucrados en ella, podrían ser elementos

interesantes a incluir en el análisis de los datos experimentales de eye tracking obtenidos de diferentes paradigmas cognitivos.

Por lo anterior, en esta sección se presenta una descripción de los movimientos oculares durante la lectura, teniendo en cuenta las amplitudes de las sacadas y los tiempos entre las mismas.

Los movimientos oculares durante la lectura consisten en momentos de quietud (fijaciones) seguidos de movimientos hacia adelante o hacia atrás de longitudes variables. En varios procesos cognitivos, incluida la lectura, la duración de las fijaciones y la amplitud y duración de las sacadas pueden ser consideradas como variables estocásticas [139]. Durante la lectura, las sacadas son muy cortas, por lo que su duración es muy pequeña en comparación con la duración de las fijaciones. Por lo tanto, las sacadas pueden considerarse como saltos instantáneos, y los movimientos oculares se describen bien mediante un modelo de Caminata Aleatoria de Tiempo Continuo (CTRW, por sus siglas en inglés) [139]. Si se desea analizar la duración de las sacadas o su velocidad, un modelo de Caminata Aleatoria Intermitente sería más adecuado [140].

En 1965, Montroll y Weiss extendieron los modelos de caminata aleatoria a lo que llamaron caminatas aleatorias en tiempo continuo, en las cuales no solo el tamaño del salto sigue un comportamiento estocástico, sino también el tiempo de espera entre los saltos [141]. Su novedosa propuesta impulsó el surgimiento de una línea de investigación en procesos que podían explicarse mejor mediante este tipo de dinámica, como en fenómenos de difusión o de transporte.

Numerosas investigaciones se dedicaron al análisis del modelo propuesto, profundizando en sus aspectos teóricos y proponiendo una diversidad de variantes [142, 143, 144, 145, 146, 140, 147, 148]. Además, se desarrollaron diferentes enfoques numéricos para una mejor comprensión del proceso y su solución [149, 150]. Paralelamente a estos desarrollos teóricos, surgió una gran cantidad de aplicaciones en diversas áreas de investigación más allá de la física [151]. Se hicieron distintas contribuciones con implementaciones en física biológica [152], econometría y finanzas [153, 154], ecología del movimiento [155, 156], y ciencias del comportamiento [148].

Modelar una secuencia de fijaciones y sacadas, como se hizo en Ref. [139], proporciona información sobre los aspectos microscópicos del comportamiento de los movimientos oculares durante la tarea. Sin embargo, un proceso de CTRW considera la dinámica de la probabilidad en el espacio y el tiempo, revelando así aspectos macroscópicos de una población particular. Esta descripción en términos de variables continuas de tiempo y espacio se contempla en un modelo de CTRW a través de una ecuación maestra [141].

Básicamente, la ecuación integral (ecuación maestra) que describe la dinámica macroscópica de un CTRW representa la probabilidad de encontrar al caminante en una posición y tiempo dados como una suma de una condición inicial más una integral de convolución entre la función de probabilidad de salto en espacio-tiempo y la probabi-

alidad misma. Soluciones analíticas a esta ecuación fueron encontradas en el espacio de Laplace-Fourier, pero solo para unos pocos casos particulares [141, 144, 147].

A continuación se presenta una metodología alternativa para encontrar la solución de la ecuación maestra que no ha sido estudiada en el contexto de un CTRW. Esta metodología consiste en una transformación de la ecuación maestra en la expresión de una solución como una serie infinita que involucra únicamente las cantidades conocidas del problema, reduciendo el problema a realizar la suma de la serie. Este procedimiento iterativo se asemeja a la serie de Born, solución de la ecuación de Lippmann-Schwinger en la teoría de colisiones atómicas en mecánica cuántica [157]. Finalmente, se describe la dinámica de un ensamble de lectores dentro del marco del CTRW.

3.3.1. La ecuación maestra y sus soluciones formales

En un proceso de CTRW, los caminantes aleatorios realizan saltos de longitudes aleatorias alternados con períodos de descanso de duración aleatoria. Como se explica en Ref. [144], el comportamiento estadístico de un conjunto de caminantes aleatorios puede modelarse mediante una ecuación maestra de la forma:

$$p(x, t) = \tilde{\delta}(x)\Psi(t) + \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \varphi(x - x', t - t') p(x', t'), \quad (3.16)$$

donde $\varphi(\xi, \tau)$ es la densidad de probabilidad conjunta de los saltos y los tiempos de espera, y

$$\Psi(\tau) = 1 - \int_0^{\tau} d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \varphi(\xi, \tau') \quad (3.17)$$

es la probabilidad de que el lector permanezca en una determinada densidad de probabilidad espacial inicial $\tilde{\delta}(x)$, dada como la condición inicial del problema.

Esta ecuación establece, básicamente, que la probabilidad de que el caminante esté en un estado dado tiene dos contribuciones. La primera es simplemente la probabilidad de que el estado corresponda a una posición en la distribución de la condición inicial, ponderada por la probabilidad (en el tiempo) de que el caminante aún permanezca en ella en $t > 0$. La segunda corresponde a la probabilidad de que, estando el caminante en otra posición en un cierto momento pasado, logre dar un salto al lugar presente. Esto es una convolución diferencial en todos los espacios y tiempos previos.

Una de las metodologías establecidas para resolver la Ec. 3.16 es expresarla en el espacio de Laplace-Fourier, lo cual convierte la ecuación integral en una relación lineal:

$$\tilde{p}(\kappa, s) = \tilde{\Psi}(s) \frac{1}{1 - \tilde{\varphi}(\kappa, s)}. \quad (3.18)$$

Aunque parece simple, la Ec. 3.18 involucra dos aspectos que la hacen compleja de resolver analíticamente: pocas transformadas inversas son conocidas, y, en todo caso, estas se reducen a la situación particular en la que las variables κ y s están desacopladas. Por lo tanto, la estrategia usual es implementar métodos numéricos para obtener dichas transformadas inversas, y los métodos propuestos se evalúan comparándolos con soluciones analíticas bien conocidas [144].

Un enfoque diferente, que conduce a soluciones analíticas formales, consiste en aplicar la metodología habitual implementada en la ecuación de Lippmann-Schwinger para obtener la serie de Born [158]. En este enfoque, se introduce iterativamente $p(x, t)$ en la integral de la Ec. 3.16 con todo el lado derecho de la ecuación. Este proceso permite escribir la solución como:

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x, t), \quad (3.19)$$

donde

$$p_{n+1}(x, t) = \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \varphi(x - x', t - t') p_n(x', t') \quad (3.20)$$

y $p_0(x, t) = \tilde{\delta}(x)\Psi(t)$.

A continuación, se presentará un caso particular (definido unívocamente por φ y $\tilde{\delta}$) donde se puede encontrar una expresión exacta para p_n para todo n , proporcionando una solución analítica para la ecuación. Dicha solución es de interés no solo para ilustrar el mecanismo de propagación implícito en la ecuación maestra, sino también para evaluar enfoques numéricos.

3.3.2. Solución analítica para un caso particular

La metodología utilizada para obtener la serie de Born conduce a una solución formal, como se explicó anteriormente. A continuación se presenta el caso separable $\varphi(x, t) = \lambda(x)\psi(t)$, con:

$$\lambda(x) = \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}}}{b\sqrt{\pi}}, \quad (3.21)$$

$$\psi(t) = \frac{\alpha^{m+1}}{m!} t^m e^{-\alpha t}, \quad m \in \{N \cup 0\} \quad (3.22)$$

y

$$\tilde{\delta}_\epsilon(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{\epsilon^2}}}{\epsilon\sqrt{\pi}}, \quad \epsilon \rightarrow \text{pequeño} \quad (3.23)$$

En este caso, se puede demostrar que:

$$\Psi(t) = \frac{\Gamma[m+1, \alpha t]}{\Gamma[m+1]} = e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^m \frac{(\alpha t)^k}{k!}. \quad (3.24)$$

De acuerdo con las definiciones dadas en la Ec. 3.20, $p_0(x, t)$ es:

$$p_0(x, t) = \tilde{\delta}_\epsilon(x)\Psi(t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{\epsilon^2}}}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^m \frac{(\alpha t)^k}{k!}. \quad (3.25)$$

A partir de lo anterior, es posible construir la solución en serie utilizando iterativamente la Ec. 3.20. Como $\varphi(x, t)$ es separable en las coordenadas x y t , es posible tratar cada una de ellas de manera independiente. Utilizando la Ec. 3.24, se puede demostrar que:

$$\int_0^t dt' \psi(t-t')\Psi(t') = \frac{\Gamma[2(m+1), \alpha t]}{\Gamma[2(m+1)]} - \frac{\Gamma[m+1, \alpha t]}{\Gamma[m+1]}. \quad (3.26)$$

El segundo término en el lado derecho de la Ec. 3.26 corresponde a $-\Psi(t)$, mientras que la operación sobre el primero es:

$$\int_0^t dt' \psi(t-t') \frac{\Gamma[2(m+1), \alpha t']}{\Gamma[2(m+1)]} = \frac{\Gamma[3(m+1), \alpha t]}{\Gamma[3(m+1)]} - \frac{\Gamma[m+1, \alpha t]}{\Gamma[m+1]}. \quad (3.27)$$

Combinando estos resultados, se obtiene, para la tercer componente temporal:

$$\frac{\Gamma[3(m+1), \alpha t]}{\Gamma[3(m+1)]} - \frac{\Gamma[2(m+1), \alpha t]}{\Gamma[2(m+1)]}. \quad (3.28)$$

Al repetir este procedimiento, se puede encontrar que la n -ésima componente temporal (con $n > 0$) es:

$$\frac{\Gamma[(n+1)(m+1), \alpha t]}{\Gamma[(n+1)(m+1)]} - \frac{\Gamma[n(m+1), \alpha t]}{\Gamma[n(m+1)]} = e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^m \frac{(\alpha t)^{n(m+1)+k}}{(n(m+1)+k)!}. \quad (3.29)$$

El mismo proceso iterativo se puede realizar para la componente espacial. En este caso, el dominio de las integrales es el rango de la coordenada x , y tanto los componentes iniciales como $\lambda(x)$ corresponden a distribuciones normales, cuyo producto e

integral también resultan en funciones de tipo Gaussiana. Esta propiedad hace que el n -ésimo término espacial sea fácilmente identificable como

$$\frac{e^{-\frac{(x-nx_0)^2}{nb^2+\varepsilon^2}}}{\sqrt{nb^2+\varepsilon^2}\sqrt{\pi}}. \quad (3.30)$$

Con estos resultados, se puede escribir

$$p_n(x, t) = \frac{e^{-\frac{(x-nx_0)^2}{nb^2+\varepsilon^2}-\alpha t}}{\sqrt{nb^2+\varepsilon^2}\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^m \frac{(\alpha t)^{n(m+1)+k}}{(n(m+1)+k)!}, \quad (3.31)$$

y luego la solución analítica se convierte en

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-nx_0)^2}{nb^2+\varepsilon^2}-\alpha t}}{\sqrt{nb^2+\varepsilon^2}\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^m \frac{(\alpha t)^{n(m+1)+k}}{(n(m+1)+k)!}. \quad (3.32)$$

Se puede demostrar que la expresión dada en la Ec. 3.32 está normalizada (es decir, la integral en la coordenada espacial es 1 para todo t). Como se puede ver, cada término es la combinación de una distribución normal en la coordenada x , que está desplazada nx_0 desde el origen y ensanchada por \sqrt{nb} , donde x_0 es el desplazamiento y b el ancho de la probabilidad del salto. Cada una de las n componentes temporales corresponde a un polinomio multiplicado por la exponencial $e^{-\alpha t}$ con sus valores máximos en

$$\alpha^{-1} \left(\frac{\Gamma[(1+n)(1+m)]}{\Gamma[n(1+m)]} \right) \frac{1}{1+m}. \quad (3.33)$$

Usando la fórmula de Stirling (es decir, $\Gamma(x) \simeq \sqrt{2\pi/x}(x/e)^x$ cuando $x \rightarrow \infty$) [159], se puede encontrar que las posiciones de los valores máximos de las n componentes temporales tienden a $n(1+m)\alpha^{-1}$ cuando $n \rightarrow \infty$. Estos puntos $(x_n, t_n) = (nx_0, n(1+m)\alpha^{-1})$ definen los valores máximos de p_n para $n \rightarrow \infty$, y se puede esperar que la posición de máxima probabilidad del modelo siga una relación lineal $x \simeq v \times t$ con $v = \frac{x_0\alpha}{m+1}$.

En la Fig. 3.3 se muestra un gráfico de superficie de la solución analítica dada en la Ec. 3.32 como función de x y t , para $\alpha = 0.75$, $x_0 = 0.75$, $b = 0.4$, $\varepsilon = 0.3$ y $m = 1$.

3.3.3. El proceso de lectura como una caminata aleatoria de tiempo continuo

La dinámica de las fijaciones y sacadas durante la lectura sigue distribuciones de tipo lognormal [139], lo que no permite una solución analítica de la ecuación maestra, re-

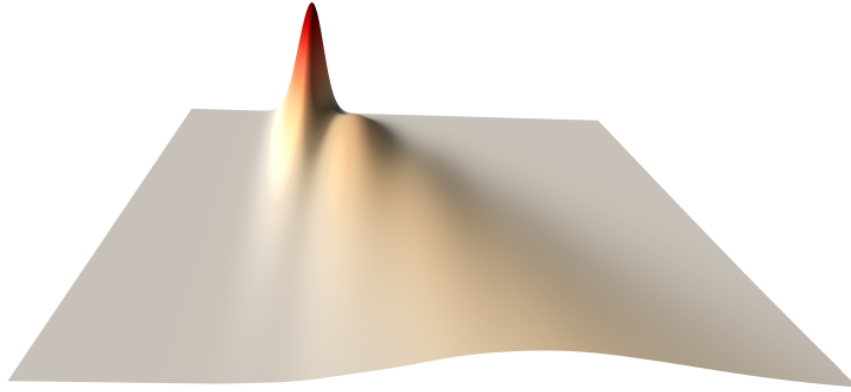


Figura 3.3: Gráfico de superficie de la solución del modelo analítico, donde la coordenada x aumenta de izquierda a derecha, el tiempo de atrás hacia adelante y el valor de la probabilidad se representa en el eje vertical.

quiriendo la utilización de métodos numéricos para su resolución. La solución analítica descrita anteriormente sirve como punto de referencia para evaluar diversos métodos numéricos.

Los movimientos oculares durante la lectura consisten en momentos de quietud (fijaciones) seguidos por movimientos hacia adelante o hacia atrás de longitudes variables (sacadas) [139]. De acuerdo con lo descrito en secciones anteriores, la ecuación que describe la dinámica de una serie de fijaciones y sacadas está dada por

$$\frac{dx}{dt} = F(t) = \sum_i f_i(t, t_i), \quad (3.34)$$

donde x es la coordenada horizontal de la posición de la mirada y $F(t)$ es la función de activación del movimiento ocular, representada por la suma de términos $f_i(t, t_i)$, siendo t_i el instante en que ocurre la i -ésima sacada. Como en la lectura los movimientos oculares son principalmente horizontales, es suficiente considerar la dinámica únicamente en esa dirección.

Como se detalló anteriormente, la función de activación $f_i(t, t_i)$ puede definirse mediante la amplitud de la sacada η_i y el tiempo de fijación τ_i . Estos dos parámetros tienen características estocásticas y cumplen con una función de densidad de probabilidad conjunta $\varphi(\eta, \tau)$.

Considerando que la duración de las fijaciones y la amplitud de las sacadas son independientes, la probabilidad conjunta puede expresarse como el producto de dos funciones de probabilidad,

$$\varphi(\eta, \tau) = \lambda(\eta)\psi(\tau), \quad (3.35)$$

donde $\lambda(\eta)$ y $\psi(\tau)$ son las funciones de densidad de probabilidad (PDF) que definen la amplitud del movimiento sacádico y la duración de la fijación, respectivamente.

Además, si se considera que el movimiento sacádico es instantáneo (debido a la corta duración de la sacada respecto a la duración de la fijación), la función de activación puede ser modelada como una función delta de Dirac $\delta(t)$. De esta manera, la Ec. 3.34 queda

$$\frac{dx}{dt} = F(t) = \sum_i \eta_i \delta(t - t_i), \quad (3.36)$$

Según este enfoque, la dinámica de la lectura es descrita mediante las siguientes ecuaciones iterativas discretas [160, 161]

$$x_i = x_{i-1} + \eta_i \quad (3.37a)$$

$$t_i = t_{i-1} + \tau_i \quad (3.37b)$$

Esencialmente, Ec. 3.37a define un conjunto de puntos (posiciones en el texto) que ocurren en intervalos de tiempo determinados por tiempos intersacádicos que siguen una dinámica descrita por Ec. 3.37b. Para recrear un proceso de tiempo continuo, es necesario considerar la posición de la mirada que permanece inmóvil hasta que se produce el nuevo movimiento [149]. Esto es:

$$x(t) = x_i, \quad \text{para } t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad (3.38)$$

Para generar señales sintéticas que simulen el movimiento ocular durante la lectura, se utilizó el algoritmo iterativo propuesto en Ref. [139]. En resumen, en cada paso se selecciona aleatoriamente una dirección de sacada con una probabilidad del 77% de que sea hacia adelante, y se elige una amplitud de sacada a partir de una distribución lognormal

$$f(a, \mu, \sigma; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x-a)} e^{-\frac{[\ln(x-a)-\mu]^2}{2\sigma^2}} \quad (3.39)$$

con los siguientes parámetros: $a = -0.072$, $\mu = -0.497$ y $\sigma = 0.547$ para sacadas hacia adelante; $a = -0.042$, $\mu = -0.727$ y $\sigma = 0.708$ para sacadas hacia atrás. Luego, se genera una posición x_i a partir de la suma de la posición anterior y la amplitud seleccionada, según la Ec. 3.37a.

Independientemente, se selecciona una duración de fijación aleatoria de una distribución lognormal (Eq. 3.39) con los siguientes parámetros: $a = -0.083$, $\mu = -1.25$ y $\sigma = 0.53$ para sacadas hacia adelante y hacia atrás. El incremento de tiempo se genera

a partir del tiempo anterior y la duración de fijación seleccionada, de acuerdo con la Ec. 3.37b.

Como resultado, se obtiene una serie temporal $\{(t_0 = 0, x_0), (t_1, x_1), \dots, (t_N, x_N)\}$ que indica la posición x_i de los ojos en el texto en cada instante t_i en el cual ocurre una sacada. Para los instantes intermedios $t \in (t_i, t_{i+1})$, se considera que los ojos permanecen quietos (Eq. 3.38). De esta manera, los movimientos oculares se representan como una función escalón.

Para obtener la distribución de probabilidad, se generaron 10000 señales sintéticas, cada una compuesta por 100 sacadas. La posición inicial se eligió aleatoriamente a partir de una distribución normal con media 0 y desviación estándar 0.5. Todos los parámetros utilizados se obtuvieron a partir del ajuste de datos reales obtenidos mediante eye tracking.

La Fig. 3.4 muestra la evolución temporal de un conjunto de fijaciones en el texto (x) durante el proceso de lectura.

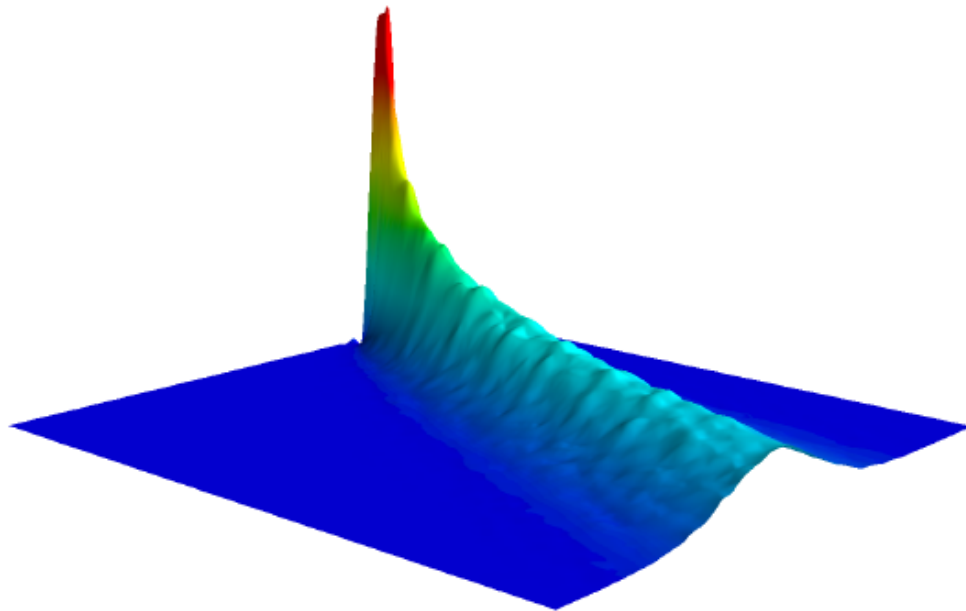


Figura 3.4: Señales sintéticas generadas a partir de distribuciones obtenidas mediante eye tracking. La coordenada x aumenta de derecha a izquierda, el tiempo de atrás hacia adelante y el valor de la probabilidad se representa en el eje vertical.

3.4. Conclusiones

En este capítulo se presentó un modelo de movimiento del globo ocular y la pupila que permite entender la PSO como consecuencia del movimiento interno del iris. Se

obtuvieron soluciones analíticas para el globo ocular y se estudiaron sus propiedades dinámicas, así como el papel de los parámetros del sistema.

El modelo desarrollado cuenta con dos elementos clave. Por un lado, la función particular $F(t)$ definida en la Ec. 3.3 que aproxima la velocidad del globo ocular durante la sacada. Por otro lado, la consideración de la pupila como una "partícula con masa", sometida a la competencia entre las fuerzas inerciales producidas por la rotación del globo ocular y las fuerzas viscoelásticas dentro del mismo. En conjunto, estas suposiciones proporcionan una descripción unificada de los hallazgos de experimentos independientes relacionados con la velocidad máxima como función del tamaño de la sacada x_m . Para obtener los comportamientos cualitativos observados en experimentos, es suficiente considerar únicamente el movimiento del globo ocular, impulsado por la fuerza $F(t)$. En este enfoque, los parámetros A , μ y β podrían variar para reproducir sacadas en diferentes direcciones en el mismo ojo.

La búsqueda de ajustes precisos de familias de sacadas de observadores particulares requiere ir más allá de este enfoque. Por ejemplo, se pueden considerar parámetros que dependan de x_m (aunque aún constantes para cada sacada), o incluir una dependencia dinámica de algunos parámetros con $F(t)$ o con la posición relativa de la pupila. Aún más, se podría pensar en proponer una función diferente para $F(t)$, asegurando que la alternativa garantice una relación adecuada entre la velocidad máxima y el tamaño de la sacada.

Dentro de este modelo, la acción del sistema nervioso se incluye a través de la función $F(t)$, que describe la actividad (gobernada por señales neuronales) de los músculos que rotan el globo ocular durante una sacada individual. Los perfiles propuestos para $F(t)$ son tales que el movimiento del globo ocular en una sacada individual es unidireccional, sin oscilaciones y sin mecanismo de retroalimentación. Según esta visión, los mecanismos de retroalimentación y las oscilaciones del globo ocular gobernadas por el sistema nervioso pueden ser insignificantes en sacadas individuales, aunque son esenciales para regular secuencias de sacadas y otros tipos de movimientos oculares como el de persecución suave.

Utilizando un enfoque diferente, se obtuvo una descripción refinada de los movimientos del globo ocular, teniendo en consideración la aplicabilidad en el estudio de procesos cognitivos. Con este enfoque, es posible ajustar el modelo físico para movimientos sacádicos horizontales con una fuerza de activación particular que involucra un solo parámetro (x_m). El modelo es lo suficientemente simple como para ser resuelto en forma cerrada y, en consecuencia, se pueden deducir analíticamente relaciones importantes, como por ejemplo el tiempo de vuelo. De esta manera, se obtiene una expresión matemática simple y general para el movimiento del globo ocular, dependiendo solo de un parámetro libre, la amplitud de la sacada, que puede obtenerse fácilmente del conjunto de datos.

Alternativamente, se presentó una descripción de los movimientos oculares durante la lectura, considerando las amplitudes de las sacadas y las duraciones de las fijaciones

como variables estocásticas. Para ello, se modelaron los movimientos oculares como un proceso de Caminata Aleatoria de Tiempo Continuo (CTRW), que considera la dinámica de la probabilidad en el espacio y el tiempo, revelando así aspectos macroscópicos de una población particular. Esta descripción en términos de variables continuas de tiempo y espacio se contempla en un modelo de CTRW a través de una ecuación maestra.

En primer lugar, se presentó una metodología para encontrar la solución de la ecuación maestra para un caso particular, donde se puede obtener una expresión exacta para la probabilidad. Esta solución es de interés para evaluar enfoques numéricos, necesarios cuando no es posible encontrar una solución analítica. Tal es el caso de la dinámica de las sacadas y fijaciones durante la lectura, que sigue distribuciones de tipo lognormal [139].

En segundo lugar, se describió la dinámica de un ensamble de lectores dentro del marco del CTRW. Se desarrolló una metodología para generar señales sintéticas que simulan el proceso lector, a partir de distribuciones de amplitudes de sacadas y duraciones de fijaciones. Esta propuesta se basa en la suposición de que la probabilidad de una amplitud sacádica es independiente de la probabilidad de la duración de fijación siguiente. Esto no implica necesariamente falta de memoria en el proceso. Como en la mayoría de los procesos cognitivos, hay una persistencia en el proceso debido a que el sujeto desea realizar la tarea asignada. Esta persistencia se incluye a través de las distribuciones de probabilidades y se analizará en el siguiente capítulo.

Las distribuciones utilizadas para describir esta dinámica no permiten resolver la ecuación maestra de forma analítica, por lo que se requieren métodos numéricos para encontrar una solución. Una alternativa, consiste en utilizar un conjunto completo de funciones base para expresar las distribuciones de probabilidad en términos de coeficientes de expansión desconocidos. Utilizando el método de Galerkin [162], la serie infinita puede convertirse en un conjunto finito de ecuaciones lineales que pueden resolverse numéricamente. Este enfoque también ha sido ampliamente aplicado en mecánica cuántica [163], así como en problemas de electrostática y mecánica del continuo, entre otros. En una implementación numérica, el valor de la distribución de probabilidad en la coordenada espacial puede considerarse como la condición inicial para un nuevo cálculo, definiendo así un esquema de propagación.

Capítulo 4

Análisis multifractal de movimientos oculares

Las características estructurales de las señales biomédicas a menudo son evidentes visualmente, pero no son capturadas por medidas convencionales como la amplitud promedio de la señal. Las señales biomédicas de una amplia gama de fenómenos fisiológicos poseen una estructura invariante a la escala. Una señal biomédica tiene una estructura invariante a la escala cuando la estructura se repite en subintervalos de la señal [164]. Formalmente, la señal biomédica $X(t)$ es invariante a la escala cuando $X(ct) = c^{\mathcal{H}} X(t)$. Los análisis fractales estiman el exponente de la ley de potencias, \mathcal{H} , que define el tipo particular de estructura invariante a la escala de la señal biomédica. Los análisis fractales se emplean frecuentemente en el procesamiento de señales biomédicas para definir la estructura invariante a la escala en ECG, EEG, imágenes de RM y rayos X [165]. Las estructuras invariantes a la escala de los intervalos entre picos de neuronas disparando, los intervalos entre pasos en la marcha humana, los intervalos entre respiraciones humanas, y los intervalos entre latidos del corazón humano han diferenciado entre condiciones saludables y patológicas [166, 167, 168, 169], y entre diferentes tipos de condiciones patológicas [170]. Las estructuras invariantes a la escala también se encuentran en fenómenos espaciales como la ramificación del sistema nervioso y los pulmones [171, 172, 173, 174], en la estructura ósea [175], y son capaces de diferenciar entre tejidos saludables y cancerosos [176]. Varios informes durante la última década sugieren que los cambios en la estructura invariante a la escala de las señales biomédicas reflejan cambios en la adaptabilidad de los procesos fisiológicos, y el tratamiento exitoso de condiciones patológicas podría cambiar la estructura fractal y mejorar la salud [177, 178]. Los análisis fractales son, por lo tanto, herramientas prometedoras para el pronóstico y diagnóstico en el procesamiento de señales biomédicas.

Las estructuras monofractales y multifractales de las señales biomédicas son tipos particulares de estructuras invariantes a la escala. Comúnmente, la estructura monofractal de las señales biomédicas se define por un único exponente de ley de potencias y supone que la invariancia a la escala es independiente del tiempo y el espacio [164]. Sin embargo, a menudo aparecen variaciones espaciales y temporales en la estructura

invariante a la escala de la señal biomédica. Estas variaciones espaciales y temporales indican una estructura multifractal de la señal biomédica que se define por un espectro multifractal de exponentes de ley de potencias. Por ejemplo, los cambios relacionados con la edad en la estructura invariante a la escala de la variabilidad de la frecuencia cardíaca se indican mediante cambios en el espectro multifractal en lugar de un único exponente de ley de potencias [179]. La amplitud y la forma del espectro multifractal también pueden diferenciar entre la variabilidad de la frecuencia cardíaca de pacientes con enfermedades cardíacas como taquicardia ventricular, fibrilación ventricular e insuficiencia cardíaca congestiva [166, 170]. Se sugiere que la estructura multifractal de la variabilidad de la frecuencia cardíaca refleja propiedades importantes de la regulación autónoma de la frecuencia cardíaca [178]. Además, el espectro multifractal de la dinámica cerebral endógena y los tiempos de respuesta es más sensible a la influencia de la edad y el rendimiento cognitivo en comparación con un único exponente de ley de potencias [180, 181]. Además, se ha podido diferenciar entre las actividades neuronales de las áreas cerebrales mediante el análisis multifractal de EEG y series de intervalos entre picos neuronales [168]. Por lo tanto, los análisis multifractales podrían ser importantes como herramienta asistida por computadora para aumentar la precisión de las neurocirugías [164].

El objetivo principal de este capítulo es introducir un análisis robusto conocido como MF-DFA (multifractal detrended fluctuation analysis) [182] que puede estimar el espectro multifractal de una serie temporal biomédica. Se pretende explicar la metodología, utilizando ejemplos de series temporales monofractales y multifractales, para luego estudiar cómo las propiedades multifractales se ven modificadas en función de distintas características de las señales analizadas. De esta manera se demuestra la aplicabilidad de esta herramienta en señales de eye tracking para la obtención de parámetros que permiten caracterizar la dinámica de los movimientos oculares.

4.1. Comentarios generales

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica se repite a diferentes escalas [183]. Es decir, si ampliamos una pequeña parte de un fractal, veremos características iguales que en el conjunto completo. La geometría fractal tiene sus raíces en los trabajos de matemáticos de finales del siglo XIX y principios del siglo XX [117], quienes generaron estructuras geométricas complejas a partir de objetos simples como una línea, un triángulo, un cuadrado o un cubo (el iniciador), aplicando una simple regla de transformación (el generador) en un número infinito de pasos iterativos. La estructura compleja que resultaba de este proceso iterativo demostraba ser igualmente rica en detalles a cualquier escala de observación, y al comparar sus partes con piezas más grandes o con el conjunto completo, resultaban similares entre sí.

Un ejemplo de estas estructuras es la curva de von Koch [184], definida recursivamente como se muestra en la Fig. 4.1. Comenzando con un segmento S_0 , se elimina el

tercio medio de S_0 y se reemplaza con los otros dos lados de un triángulo equilátero para generar S_1 . Las etapas posteriores se generan recursivamente siguiendo la misma regla. S_n se obtiene reemplazando el tercio medio de cada segmento de línea en S_{n-1} por los otros dos lados de un triángulo equilátero. El conjunto límite $K = S_{\text{inf}}$ es la curva de von Koch.

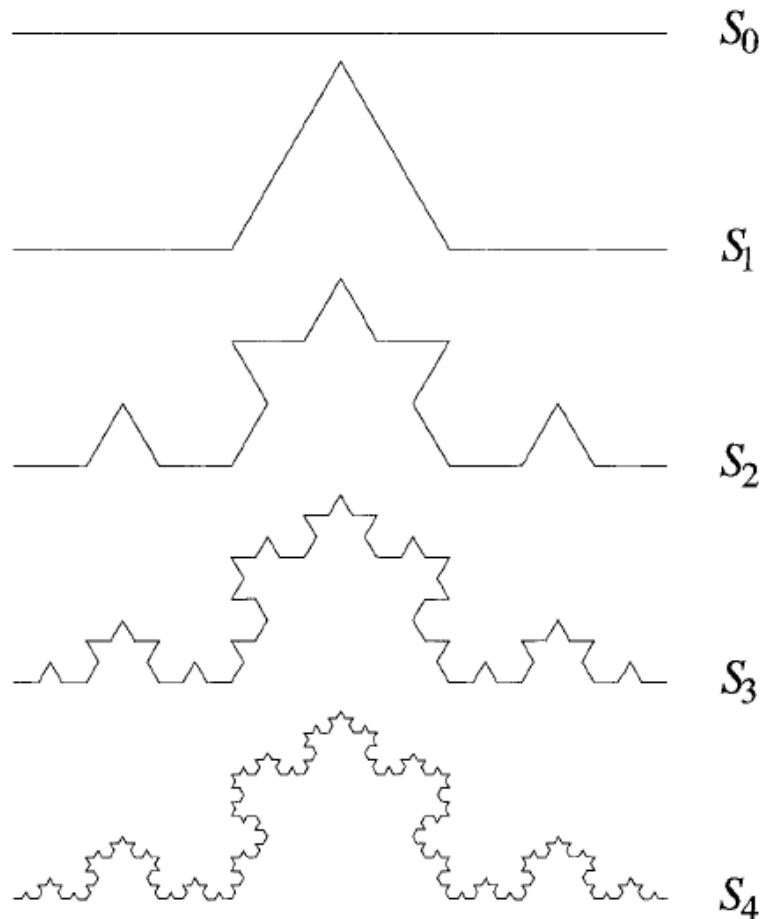


Figura 4.1: Primeras 4 iteraciones de la curva de von Koch.

El término fractal fue propuesto por el matemático Benoit Mandelbrot en 1975 [183], quien observó que estas estructuras geométricas representan un nuevo tipo de geometría adecuada para describir la esencia de las formas y estructuras complejas de la naturaleza. De hecho, la geometría euclidiana tradicional no puede describir las formas elaboradas de los objetos naturales. Como dijo Mandelbrot [183], "las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos y la corteza no es lisa, ni el rayo viaja en línea recta".

Muchas estructuras no euclidianas en la naturaleza, como las ramificaciones de los árboles, las costas oceánicas y las superficies de las montañas, son fractales [178]. Un gran número de estructuras anatómicas complejas también exhibe geometría similar

a la fractal. Ejemplos incluyen los árboles arteriales y venosos, la ramificación de ciertos haces de músculo cardíaco, y el árbol traqueobronquial [178, 173, 177, 172]. Estas estructuras cumplen al menos una función fisiológica fundamental: el transporte rápido y eficiente a través de redes complejas distribuidas espacialmente. Una variedad de otros sistemas de órganos contienen estructuras similares a fractales que facilitan la diseminación de información (sistema nervioso), la absorción de nutrientes (intestino), así como la distribución, recolección y transporte (ductos biliares, cálices renales, plexo coroideo y vellosidades coriónicas placentarias) [178].

A diferencia de la geometría euclidiana, que aplica axiomas y reglas para describir un objeto de dimensiones enteras (1, 2 y 3), los objetos geométricos fractales pueden caracterizarse mediante algoritmos recursivos que extienden el uso de la dimensión al rango no entero [185]. Los fractales no pueden definirse por axiomas, sino como un conjunto de propiedades cuya presencia indica que la estructura observada es, de hecho, fractal [186].

4.1.1. Autosimilitud

Los subconjuntos de un objeto fractal, cuando se amplían, son similares a subconjuntos más grandes o al objeto completo. Esta propiedad se denomina autosimilitud [117]. Si estos subconjuntos son réplicas idénticas reescaladas entre sí, el fractal es exacto (Fig. 4.1 A). Cuando la similitud está presente solo entre poblaciones estadísticas de observaciones de una característica dada hechas a diferentes escalas, el fractal es estadístico (Fig. 4.1 B). En estos casos, propiedades estadísticas como el valor medio o la desviación estándar de un subconjunto del objeto fractal son versiones escaladas del valor medio o la desviación estándar del conjunto completo. Los fractales matemáticos como la curva de von Koch son exactos, mientras que la mayoría de los objetos fractales naturales son estadísticos.

Estos objetos se conocen como libres de escala, debido a que no existe un tamaño característico para los subconjuntos que los componen. En su lugar, la frecuencia de aparición de un determinado tamaño es inversamente proporcional a dicho tamaño.

Es importante distinguir la autosimilitud de la autoafinidad. Los objetos autosimilares son isotrópicos, es decir, el reescalado es idéntico en todas las direcciones, por lo tanto, cuando se desea demostrar autosimilitud, los subconjuntos deben ampliarse uniformemente en todas las direcciones [117]. Los objetos autoafines también son fractales, pero el reescalado es anisotrópico, es decir, en una dirección las proporciones entre los subconjuntos ampliados son diferentes que en la otra. Las series temporales fisiológicas pueden exhibir propiedades estadísticas autosimilares. Formalmente, las series temporales son estructuras temporales autoafines, porque las unidades de su amplitud no son unidades temporales [187].

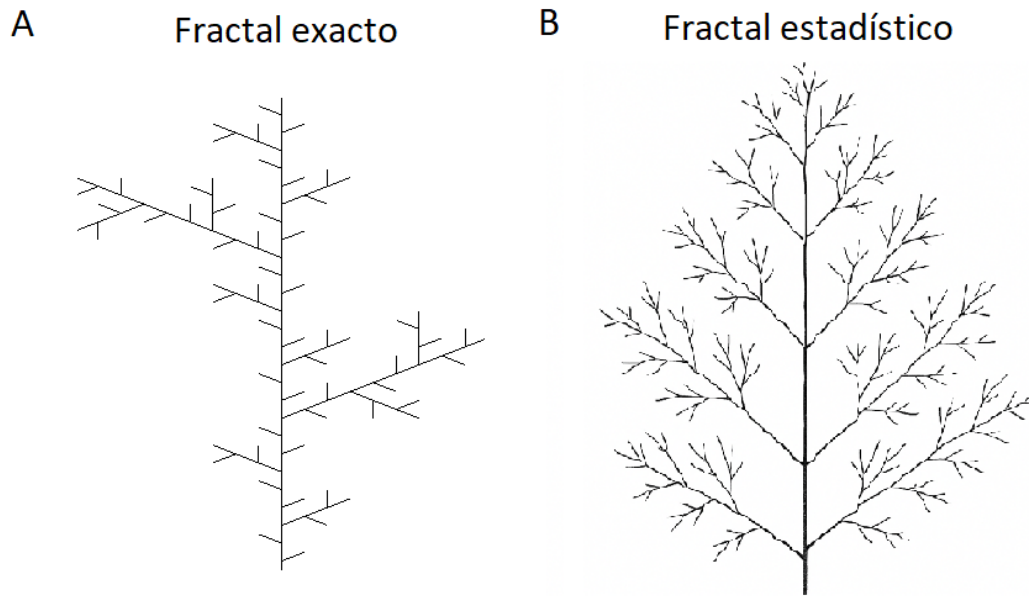


Figura 4.2: Ejemplo de fractal exacto (A) y fractal estadístico (B). En el fractal exacto cada parte es una replica exacta del conjunto completo. En el fractal estadístico los parámetros estadísticos de cada parte son iguales a los parámetros estadísticos del conjunto completo.

4.1.2. Relación de escala

Cuando una propiedad cuantitativa, q , se mide en cantidades de s (o en la escala s , o con una precisión s), su valor depende de s según la siguiente relación de escala:

$$q = f(s). \tag{4.1}$$

Cuando el objeto no es fractal, las estimaciones de q utilizando unidades de medida progresivamente más pequeñas, s , convergen a un único valor. Para los fractales, q no converge, sino que exhibe una relación de escala de ley de potencia con s , de modo que con la disminución de s , aumenta sin límite [117]:

$$q = ps^\epsilon. \tag{4.2}$$

donde p es un factor de proporcionalidad y ϵ es un número negativo, el exponente de escala. El valor de ϵ puede determinarse fácilmente como la pendiente del ajuste de regresión lineal de los pares de datos en la gráfica de $\log(q)$ frente a $\log(s)$:

$$\log(q) = \log(p) + \epsilon \log(s). \tag{4.3}$$

Mientras que los objetos con escalas características están bien definidos por su media y desviación estándar, los objetos libre de escala se describen mejor mediante el exponente de una relación de escala en forma de ley de potencia, porque captura la relación entre objetos o fluctuaciones en diferentes escalas [117].

4.1.3. Invarianza de escala

La relación entre dos estimaciones de q , q_2/q_1 , medidas en dos escalas diferentes, s_1 y s_2 , depende únicamente de la relación de escalas (escala relativa), s_2/s_1 , y no directamente de la escala absoluta, s_1 o s_2 :

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{ps_2^\epsilon}{ps_1^\epsilon} = \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^\epsilon. \quad (4.4)$$

Para fractales exactos, s_2/s_1 es una variable discreta. Por ejemplo, en el caso de la curva de von Koch s_2/s_1 solo puede asumir valores de una serie geométrica como 1/3, 1/9, etc [184]. Para fractales estadísticos, como los de la naturaleza, s_2/s_1 puede cambiar de manera continua. Esta ecuación se refiere comúnmente como la propiedad de invarianza de escala de los fractales [117]. Lo que subyace a esta invarianza de escala es la autosimilitud de los fractales: las propiedades cuantitativas de los subconjuntos dependen solo de la relación de las escalas y no de la escala absoluta.

Con respecto a la curva de von Koch, si se considera la longitud como la propiedad q y se mide con una vara 1/3 más corta, debido a la aparición de nuevos pliegues en la estructura, se encontrará que la longitud es $q_2/q_1 = 4/3$ veces más larga, lo que da un exponente de escala:

$$\epsilon = \frac{\log(4/3)}{\log(1/3)} \approx -0.2619. \quad (4.5)$$

La Ec. 4.4 solo se cumple para fractales exactos. Para fractales estadísticos, los dos lados de la ecuación Ec. 4.4 son iguales solo en distribución:

$$\frac{q_2}{q_1} \stackrel{d}{=} \frac{ps_2^\epsilon}{ps_1^\epsilon} \stackrel{d}{=} \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^\epsilon. \quad (4.6)$$

Para los fractales naturales, la invarianza de escala se mantiene solo para un rango restringido de la escala absoluta [188]. El límite superior de validez se encuentra en el rango del tamaño de la estructura misma, mientras que el límite inferior de validez se sitúa en las dimensiones de los elementos estructurales más pequeños.

4.1.4. Dimensiones euclídea, topológica y fractales

La dimensión euclídea o dimensión de inmersión, E , es un número entero que indica que el objeto geométrico considerado se encuentra en una línea ($E = 1$), en un plano ($E = 2$) o en el espacio tridimensional ($E = 3$). E da el número de coordenadas necesarias para determinar la posición de un punto del objeto en el espacio [117].

La dimensión topológica, D_T , indica el número de coordenadas necesarias para determinar la posición de un punto en la estructura geométrica real [117]. Las líneas, superficies y sólidos tridimensionales tienen D_T igual a 1, 2 y 3, respectivamente.

Las dimensiones fractales, D , tienen múltiples definiciones, sin embargo tienen una cosa en común: su valor es generalmente un número no entero [117]. Mandelbrot definió los fractales como estructuras que cumplen con $D_T \leq D \leq E$.

La dimensión fractal de autosimilitud, D_{ss} , indica cuántas unidades estructurales del objeto observado (por ejemplo, segmentos de línea de la curva de von Koch), N , se ven a una resolución dada, $R = 1/s$ [117]. Supongamos que un conjunto autosimilar está compuesto por m copias de sí mismo escaladas por un factor de r [184]. Entonces, la dimensión de autosimilitud, D_{ss} , es el exponente definido por $m = r^{D_{ss}}$, o equivalentemente,

$$D_{ss} = \frac{\log(m)}{\log(r)}. \quad (4.7)$$

Para el caso de la curva de von Koch, la misma está compuesta por cuatro piezas iguales, cada una similar a la curva original, pero escalada por un factor de 3. Por lo tanto, $m = 4$ cuando $r = 3$, obteniendo $D_{ss} = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1.26$

Como su dimensión fractal (fraccionaria) sugiere, esta estructura ocupa efectivamente más espacio que una línea ($E = 1$) pero menos que una superficie bidimensional ($E = 2$).

Es importante notar que la dimensión fractal para un segmento de línea, un cuadrado y un cubo es igual a la dimensión euclídea y a la dimensión topológica, siendo 1, 2 y 3, respectivamente. Para fractales en 2D y 3D, D_{ss} se sitúa entre estos valores de referencia y proporciona una buena caracterización de las propiedades de ocupación del espacio de la estructura [117].

4.2. Descripción de la metodología

El concepto de fractal se puede aplicar no solo a formas geométricas irregulares que carecen de una escala de longitud característica, sino también a ciertos procesos com-

plejos que carecen de una única escala temporal [183, 111, 189]. Los procesos fractales generan fluctuaciones irregulares a través de múltiples escalas de tiempo, análogas a objetos invariantes de escala que tienen una estructura ramificada o variabilidad en múltiples escalas de longitud. Un desafío metodológico importante es la detección y cuantificación de las propiedades de escala y correlación de las series temporales fisiológicas, que en general son no solo irregulares, sino también no estacionarias (es decir, sus propiedades estadísticas cambian con el tiempo) [178].

Uno de los enfoques más populares para evaluar la dinámica de escala en señales complejas es el método de análisis de fluctuaciones sin tendencia (DFA, por sus siglas en inglés) [190], que proporciona información sobre las fluctuaciones y las correlaciones de largo alcance en una serie temporal, eliminando los efectos de no estacionariedad y evitando la detección espuria de correlaciones de largo alcance. Sin embargo, su aplicación se limita a características monofractales. Para superar esta limitación, Kantelhardt y colaboradores propusieron una generalización: el Multifractal-DFA (MF-DFA) [182], que aportó una nueva perspectiva al análisis del comportamiento de escala multifractal en series temporales no estacionarias con aplicaciones en una amplia gama de disciplinas [191, 192, 193]. Posteriormente, se introdujeron una gran variedad de algoritmos basados en DFA para detectar la correlación cruzada de múltiples series temporales [194, 195, 196, 197, 198]. Además, el MF-DFA también puede aplicarse a señales estacionarias [36, 199].

Siguiendo la notación simbólica utilizada en Ref. [182], el método se puede describir globalmente de la siguiente manera. Para $X = \{x_k\}$ una serie temporal de longitud N con $x_k = 0$ casi en ningún punto, el perfil se define como $Y(n) = \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{X})$ donde \bar{X} es la media de X , y $n = 1, 2, \dots, N$. El perfil $Y(n)$ se divide en $N_s = \text{int}(N/s)$ segmentos no superpuestos ν de igual longitud s , comenzando desde el primer elemento x_1 y avanzando hacia adelante. El mismo procedimiento se realiza comenzando desde el último elemento y retrocediendo. De esta manera, se obtienen $2N_s$ segmentos para los cuales se calcula la tendencia local mediante un ajuste por mínimos cuadrados de los elementos en el segmento y se determina la varianza $F^2(s, \nu)$ para cada segmento ν . Se pueden usar polinomios lineales, cuadráticos, cúbicos o de orden superior en el procedimiento de ajuste. La función de fluctuación de orden q , $F_q(s)$, se obtiene promediando sobre todos los segmentos:

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} [F^2(s, \nu)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} \quad (4.8)$$

donde el orden q puede tomar cualquier valor real excepto 0. Para el caso $q = 0$ la función de fluctuación es [182]:

$$F_0(s) = \exp \left\{ \frac{1}{4N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} \ln [F^2(s, \nu)] \right\}, \quad (4.9)$$

Este procedimiento se repite para varios valores de escalas s con el fin de estudiar la dependencia de $F_q(s)$ en la escala s . El comportamiento de escala de la función de fluctuación se puede determinar mediante el análisis de la gráfica log-log de $F_q(s)$ frente a s para cada valor de q . Si la serie presenta una estructura multifractal, $F_q(s)$ aumenta siguiendo una ley de potencia:

$$F_q(s) \sim s^{h(q)} \quad (4.10)$$

donde el exponente de escala $h(q)$, conocido como exponente de Hurst generalizado [182], se obtiene a partir de la pendiente de la regresión lineal de $\log(F_q(s))$ frente a $\log(s)$. El exponente de Hurst generalizado $h(q)$ es una función decreciente de q para series temporales multifractales y constante para procesos monofractales. Se espera que la función $h(q)$ converja asintóticamente a un comportamiento horizontal en $q = -\infty$ y $q = +\infty$ [200]. Para valores positivos de q , $h(q)$ describe el comportamiento de escala de segmentos con grandes fluctuaciones, mientras que para valores negativos de q , $h(q)$ caracteriza el comportamiento de escala de segmentos con pequeñas fluctuaciones [182].

Para series temporales estacionarias, el exponente de escala para $q = 2$ coincide con el exponente de Hurst clásico $\mathcal{H} = h(2)$ [201], mientras que para señales no estacionarias, el exponente de Hurst es $\mathcal{H} = h(2) - 1$ [191, 199]. Este parámetro es ampliamente utilizado en el análisis de series temporales, ya que proporciona información sobre las propiedades de correlación de las señales. Si $0 < \mathcal{H} < 0.5$, la serie temporal presenta anti-correlación de largo alcance, es decir, el proceso tiende a cambiar de dirección frecuentemente. Esto se puede ver como un mecanismo de estabilización en el que cualquier acción que tome el sistema significa que, al tomar acciones futuras, es más probable que el sistema tome la acción opuesta. Si $\mathcal{H} > 0.5$, la señal presenta correlación de largo alcance, lo que significa que en tal proceso la tendencia es más probable que continúe. Es decir, cualquier acción que tome el sistema hace que sea más probable que tome esa acción en el futuro. En el caso crítico de $\mathcal{H} = 0.5$, la serie temporal no está correlacionada [182]. Además, un valor de \mathcal{H} entre 0.2 y 0.8 indica que la serie temporal tiene un comportamiento similar al ruido [164], una característica de interés en el estudio de la multifractalidad. La metodología MF-DFA funciona mejor cuando se aplica a series temporales con un comportamiento similar al ruido. Para series temporales que no poseen este comportamiento, es posible estudiar una señal alternativa derivada de ellas, como podría ser, por ejemplo, la derivada [164].

En la Fig. 4.3 se representan las funciones de fluctuación $F_q(s)$ obtenidas para tres series temporales distintas: una serie temporal multifractal (panel A), una serie temporal monofractal (panel B) y una serie temporal compuesta por ruido blanco (panel C). Cada línea en la gráfica corresponde a un valor diferente de q , que varía de $q = -5$ a $q = 5$, y su pendiente define el exponente de Hurst generalizado $h(q)$. Como se puede observar, la función de fluctuación de la serie temporal multifractal presenta distintos valores de pendiente para distintos valores de q . Para las otras dos series temporales,

todas las pendientes tienen el mismo valor.

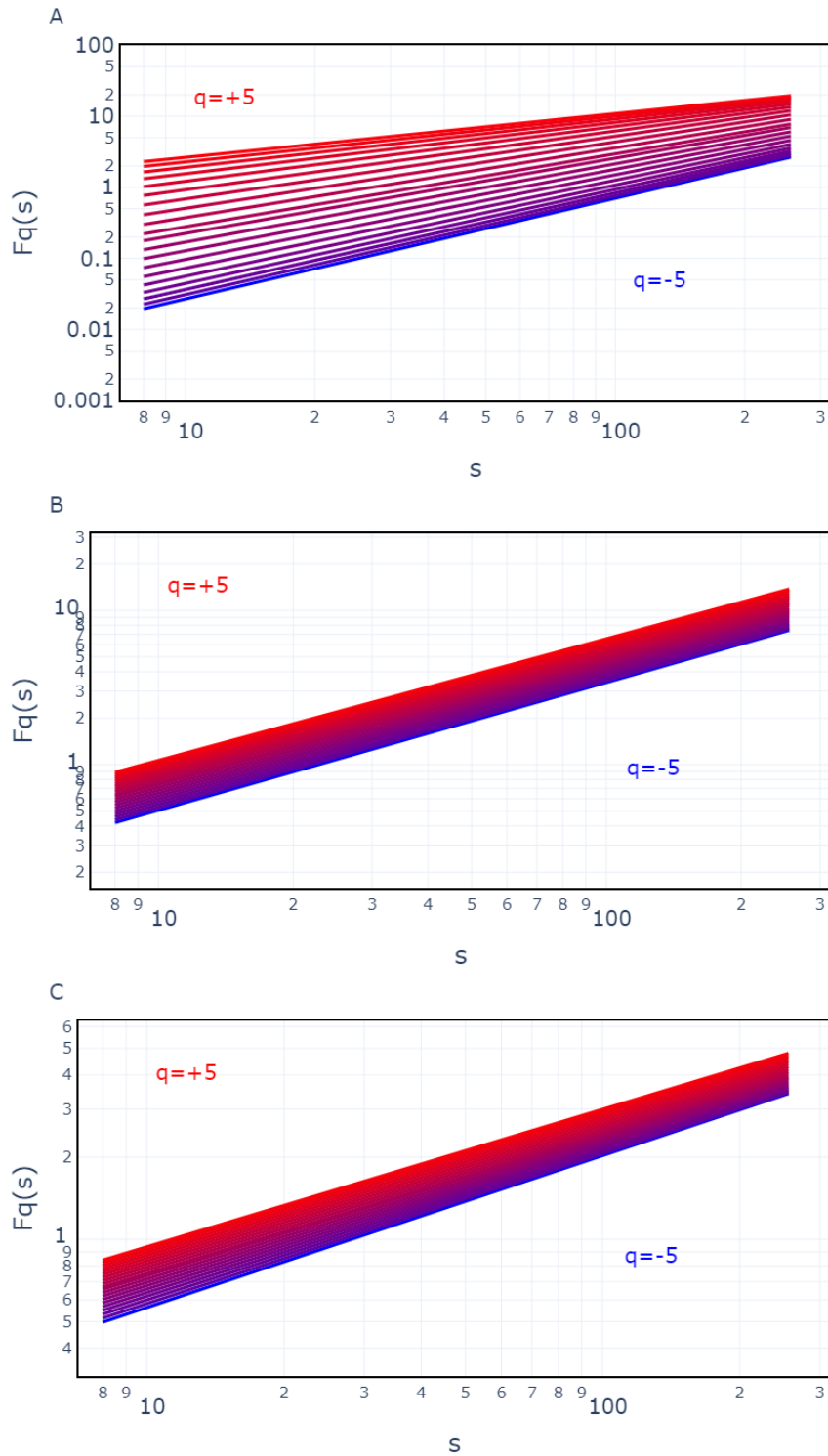


Figura 4.3: Función de fluctuación $F_q(s)$ para una serie temporal multifractal (A), una serie temporal monofractal (B) y una serie temporal compuesta por ruido blanco (C).

En la Fig. 4.4 se muestra el exponente de Hurst generalizado $h(q)$ para las tres series temporales de la Fig. 4.3. Como se observa en la figura, el exponente de Hurst generalizado $h(q)$ es una función decreciente de q para la serie temporal multifractal, mientras que para las otras dos series temporales presenta un valor aproximadamente constante.

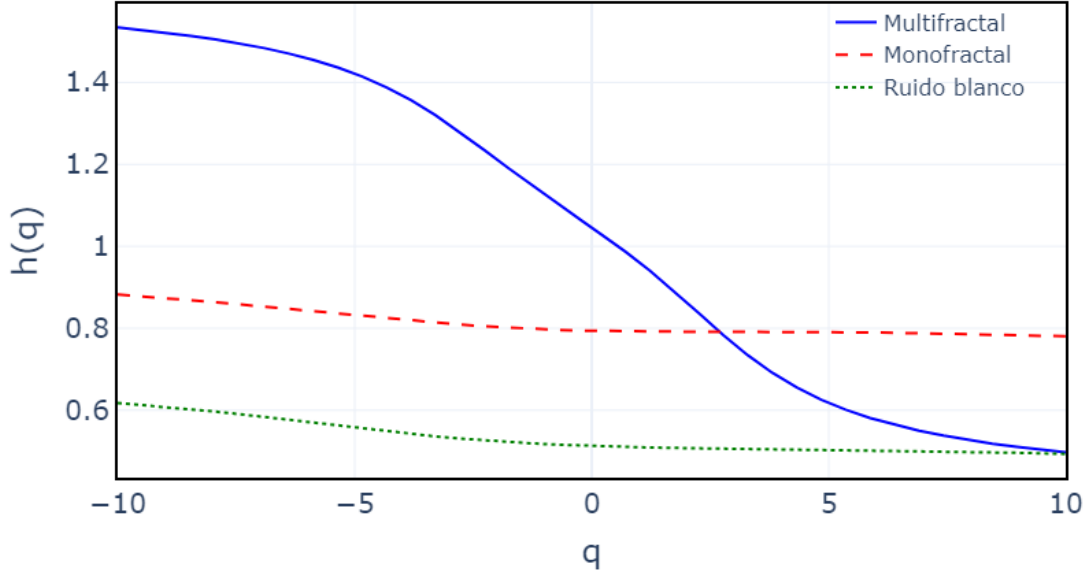


Figura 4.4: Exponente de Hurst generalizado $h(q)$ para la serie temporal multifractal (línea sólida azul), la serie temporal monofractal (línea partida roja) y la serie temporal compuesta por ruido blanco (línea punteada verde).

El comportamiento de la función de fluctuación se asume generalmente asintótico para s . Sin embargo, se ha observado que los datos experimentales pueden presentar un comportamiento multifractal diferente para escalas pequeñas que para escalas grandes. Por lo tanto, se ha propuesto considerar un comportamiento de escala bivariado $F_q(s) \sim s^{h(q,s)}$, lo que permite un análisis multifractal multiescala [202].

La idea principal del análisis multiescala consiste en utilizar una ventana móvil w_i ($i = 1, 2, \dots, n$) para realizar la regresión lineal de $\log(F_q(s))$ frente a $\log(s)$. De esta manera se obtiene un exponente de escala h_{w_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) para cada ventana de ajuste. El ajuste se realiza únicamente para los puntos dentro de las ventanas de ajuste, obteniendo n exponentes para cada valor de q , es decir, $h(q) = (h_{w_1}, h_{w_2}, \dots, h_{w_n})$. Finalmente, se repite el procedimiento para diferentes valores de q , para estudiar los cambios cuasi continuos de la dependencia de $h(q)$ en función del rango de escala s . Por lo tanto, se pueden definir las superficies de Hurst generalizadas como

$$h(q, s) = \frac{\log[F_q(s)_{w_i}]}{\log(s_{w_i})} \quad (4.11)$$

donde $F_q(s)_{w_i}$ es la función de fluctuación de orden q para los puntos que caen dentro

de la ventana w_i . Como las funciones de fluctuación $F_q(s)$ se presentan en coordenadas log-log, la ventana de ajuste móvil se expande logarítmicamente.

El exponente de Hurst generalizado $h(q)$ se puede relacionar con el exponente de escala multifractal estándar $\tau(q)$ mediante la ecuación $\tau(q) = qh(q) - 1$ [182]. Si las series temporales son monofractales, $\tau(q)$ y q están linealmente relacionados; es decir, $\tau(q) = q\mathcal{H} - 1$. Por el contrario, si las series temporales son multifractales, $\tau(q)$ y q tienen una relación no lineal. Por lo tanto, cuanto más fuerte sea esta relación no lineal, más fuertes serán las características multifractales [200].

Otra forma de caracterizar una serie multifractal es a través del espectro de singularidades $f(\alpha)$, que se relaciona con $\tau(q)$ mediante una transformación de Legendre [182]:

$$\alpha = \tau'(q); \quad f(\alpha) = q\alpha - \tau(q). \quad (4.12)$$

Aquí, α es la fuerza de la singularidad (también conocido como exponente de Hölder), y $f(\alpha)$ denota la dimensión del subconjunto de la serie caracterizado por α [182]. La forma de $f(\alpha)$ suele ser una curva cóncava hacia abajo donde el valor máximo, alcanzado en una fuerza de singularidad α_0 , corresponde al comportamiento de escala más dominante [199, 164]. Para los valores de la fuerza de la singularidad α en $[\alpha_{min}, \alpha_0]$, $f(\alpha)$ describe el comportamiento de escala de los segmentos con grandes fluctuaciones, mientras que para α en $[\alpha_0, \alpha_{max}]$, $f(\alpha)$ caracteriza el comportamiento de escala de los segmentos con pequeñas fluctuaciones [182, 164].

El ancho del espectro de singularidades

$$\mathcal{W} = \alpha_{max} - \alpha_{min} \quad (4.13)$$

es un índice que proporciona información sobre el grado de multifractalidad e indica la desviación del comportamiento monofractal [199, 164]. Cuando la serie temporal es monofractal, el ancho del espectro será cercano a cero y el conjunto que representa $f(\alpha)$ se reduce a un solo punto. [199, 200, 164] Entonces, el ancho del espectro \mathcal{W} es una medida de cuán amplio es el rango de exponentes fractales que se encuentran en la señal. Cuanto más amplio sea el rango de posibles exponentes fractales, más rica será la estructura del proceso.

La asimetría del espectro de singularidad se puede utilizar para caracterizar cuantitativamente las propiedades multifractales de una señal. Se han propuesto diferentes índices para estudiar este aspecto [203, 204, 205, 206]. Siguiendo las propuestas en Refs. [204] y [206], se puede definir un parámetro de asimetría:

$$\mathcal{A} = \frac{L - R}{L + R} \quad (4.14)$$

donde $L = \alpha_0 - \alpha_{min}$ y $R = \alpha_{max} - \alpha_0$. Una asimetría hacia la izquierda ($\mathcal{A} > 0$) del espectro de singularidades indica que hay un dominio relativo de los exponentes de escala más pequeños $h(q)$, lo que sugiere un dominio relativo de fluctuaciones de gran magnitud ($q > 0$) en la dinámica [204]. Por otro lado, si el espectro de singularidades tiene una asimetría hacia la derecha ($\mathcal{A} < 0$), hay un dominio relativo de pequeñas fluctuaciones ($q < 0$) en la dinámica. El parámetro de asimetría \mathcal{A} captura entonces el dominio de exponentes fractales bajos o altos con respecto a los demás. Un espectro asimétrico hacia la derecha indica exponentes fractales altos relativamente fuertes (con "estructura fina"), mientras que las formas asimétricas hacia la izquierda son más regulares o suaves.

Para ilustrar el espectro de singularidades típico $f(\alpha)$, en la Fig. 4.5 se representan las funciones $f(\alpha)$ obtenidas para las tres funciones de fluctuación trazadas en la Fig. 4.3. Como es de esperar, la serie temporal multifractal presenta un espectro de singularidades de mayor amplitud, en comparación con las otras dos series temporales. Además, la serie temporal monofractal y la compuesta por ruido blanco presentan una simetría que está ausente en la serie temporal multifractal, indicando un dominio relativo de fluctuaciones de pequeña amplitud.

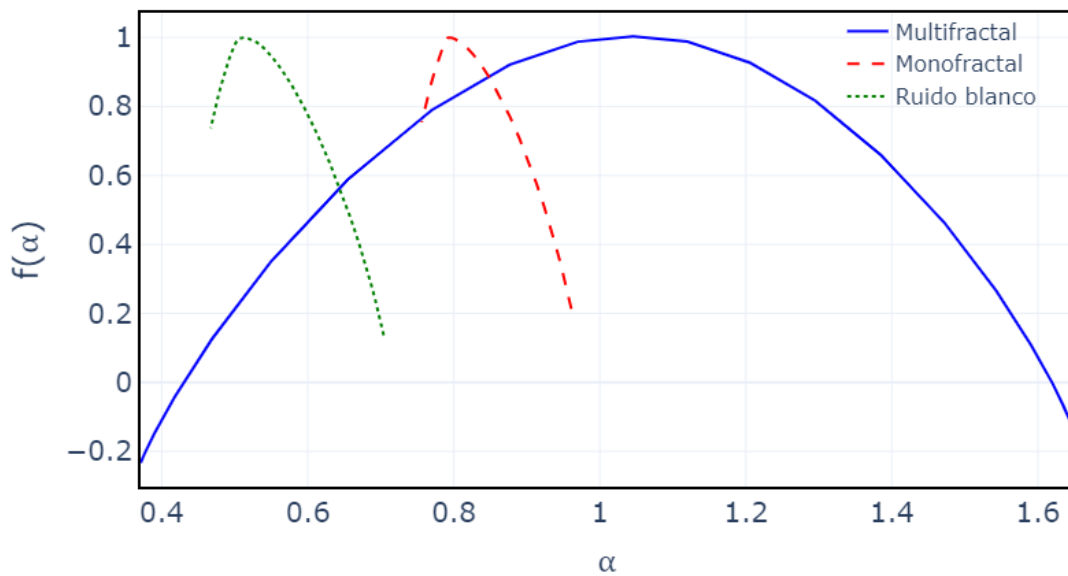


Figura 4.5: Espectros de singularidades $f(\alpha)$ para la serie temporal multifractal (línea sólida azul), la serie temporal monofractal (línea partida roja) y la serie temporal compuesta por ruido blanco (línea punteada verde).

De esta manera, del análisis multifractal es posible obtener una serie de parámetros que caracterizan la dinámica de las series temporales analizadas.

4.3. Análisis multifractal de señales sintéticas con distintas características

En series temporales correspondientes a situaciones reales, por ejemplo los movimientos oculares durante el proceso de lectura, surgen muchas fluctuaciones que pueden revelarse en diferentes escalas de tiempo y amplitud en la señal. Por un lado, en escalas pequeñas hay información relacionada con la forma de los movimientos sacádicos. Por otro lado, hay variabilidad relacionada con el tamaño de las sacadas y también con la duración de las fijaciones. En escalas más grandes, surge la combinación de secuencias de movimientos hacia adelante y hacia atrás, lo que está relacionado con la estrategia cognitiva subyacente que el sujeto realiza, consciente o inconscientemente, para llevar a cabo la tarea. También hay fluctuaciones ruidosas de diversos orígenes (temblor neurofisiológico, deriva, incertidumbres de percepción, por mencionar algunas) que son más notorias durante las fijaciones. Por último, se encuentra presente la variación debido al proceso de medición. Por lo tanto, todos estos aspectos deben ser considerados y analizados al estudiar los movimientos oculares.

En esta sección se presentan los resultados del análisis multifractal realizado a señales sintéticas que representan el proceso de lectura, generadas con distintas características. El objetivo es investigar cómo los parámetros multifractales se ven afectados en función de la forma del movimiento sacádico, el ruido de las fijaciones, y los parámetros utilizados para generar las señales (es decir, los parámetros de las distribuciones de tiempos de fijación y amplitudes de sacadas, y el porcentaje de retrocesos).

En todos los casos, se utilizaron valores de q entre $q_{min} = -10$ y $q_{max} = 10$ con un paso de 0.5. Es decir, se consideraron 41 valores de q : $q = -10, -9.5, -9, -8.5, \dots, 8.5, 9, 9.5, 10$. Este rango de valores se eligió para lograr un comportamiento asintótico definido. Para las escalas s , se utilizaron 100 valores espaciados logarítmicamente entre 64 y 256 puntos, es decir, entre 700 y 2800 ms aproximadamente. Para eliminar la tendencia se utilizó un ajuste lineal en todos los casos.

4.3.1. Dependencia en la forma del movimiento sacádico

Como se mencionó anteriormente, la lectura puede entenderse como una secuencia de movimientos sacádicos seguidos de periodos de inmovilidad, las fijaciones. Para estudiar cómo los parámetros multifractales se ven afectados en función de la forma del movimiento sacádico, se generaron 100 señales sintéticas utilizando el método descrito en el capítulo 3. Para cada señal, se utilizaron tres maneras distintas de representar el movimiento sacádico, obteniendo un total de 300 series temporales. En el primer caso se utilizó la Ec. 3.13, considerando al globo ocular como un cuerpo rígido (representación 1). En una segunda instancia se consideró al movimiento sacádico como instantáneo, siguiendo la simplificación realizada en la sección 3.3.3 (representación 2). Por último, se consideró una situación intermedia en la que el movimiento sacádico se realiza a

velocidad constante. De esta manera $x(t)$ durante una sacada puede ser representado como $x(t) = v_i t$, $t_i \leq t \leq t_f$ donde t_i y t_f son el tiempo de inicio y finalización de la sacada, respectivamente, y $v_i = \frac{x_i}{t_f - t_i}$, con x_i la amplitud de la sacada (representación 3). En la Fig. 4.6 se muestra un movimiento sacádico registrado durante el proceso de lectura, junto con las tres representaciones utilizadas.

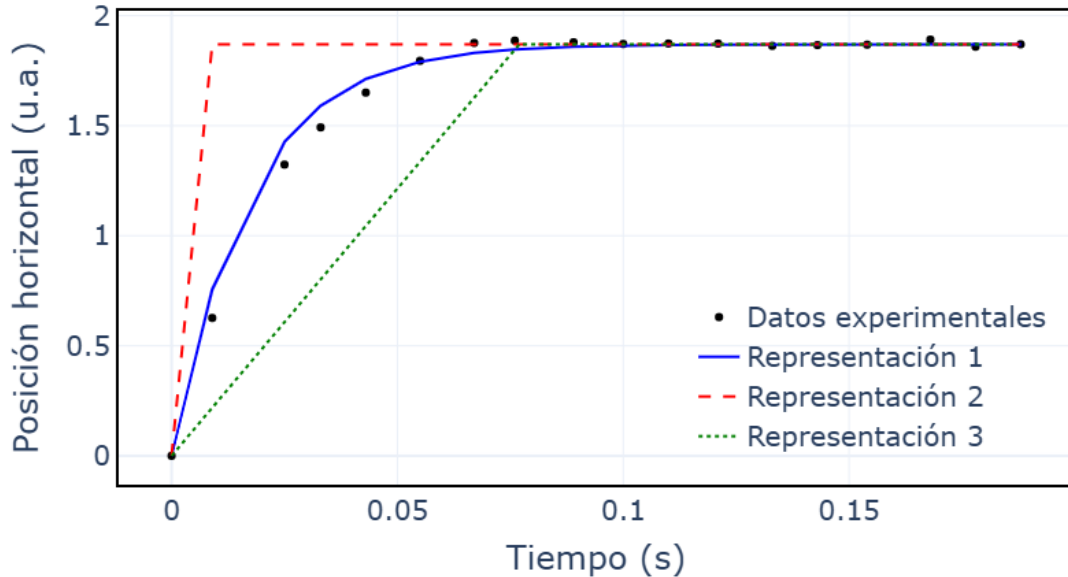


Figura 4.6: Ejemplo de movimiento sacádico registrado durante el proceso de lectura (círculos negros). La línea sólida azul corresponde a la representación utilizando la Ec. 3.13 (representación 1). La línea partida naranja corresponde a considerar el movimiento como instantáneo (representación 2). La línea punteada verde corresponde a considerar un movimiento a velocidad constante (representación 3).

Para comparar las diferentes representaciones se calculó el exponente de Hurst \mathcal{H} , la fuerza de la singularidad α_0 , la fuerza multifractal \mathcal{W} y el parámetro de asimetría \mathcal{A} . En la Fig. 4.7 se muestra un diagrama de cajas correspondiente al exponente de Hurst \mathcal{H} obtenido para las tres representaciones propuestas. La línea central indica el valor de la mediana de cada grupo.

En la Fig. 4.8, la Fig. 4.9 y la Fig. 4.10 se muestran los gráficos de cajas correspondientes a la fuerza de la singularidad α_0 , la fuerza multifractal \mathcal{W} y el parámetro de asimetría \mathcal{A} , respectivamente.

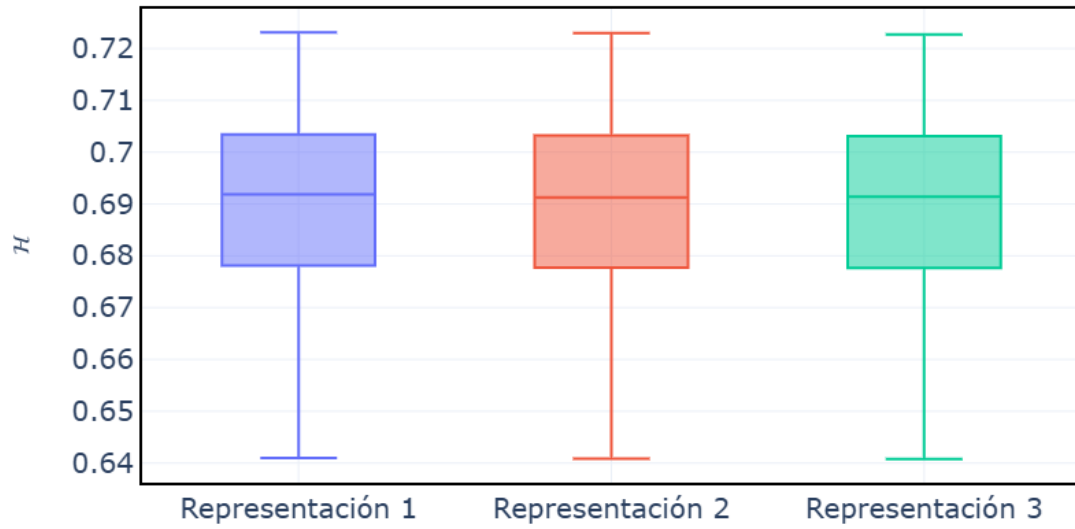


Figura 4.7: Valores del exponente de Hurst obtenidos para las series temporales generadas con las tres representaciones propuestas.

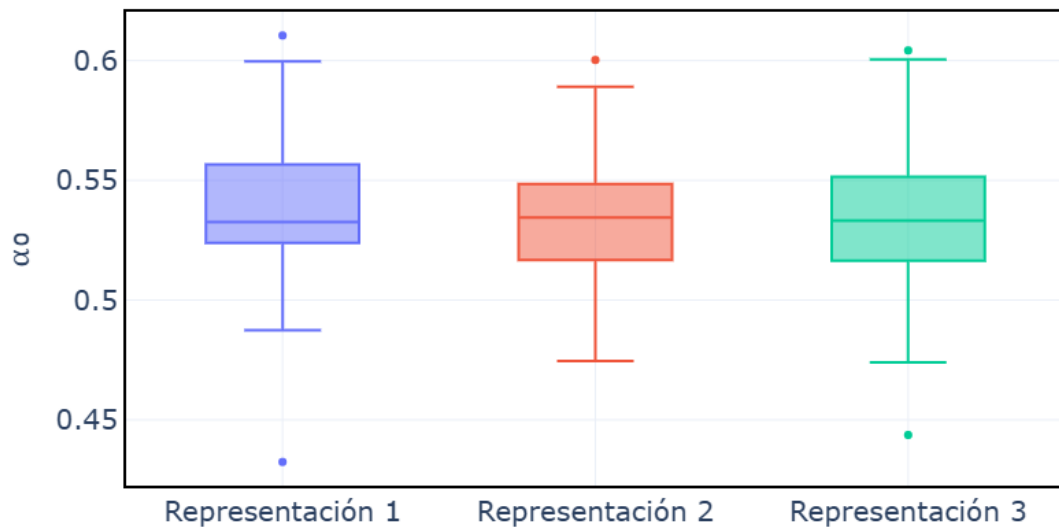


Figura 4.8: Valores de la fuerza de la singularidad α_0 obtenidos para las series temporales generadas con las tres representaciones propuestas.

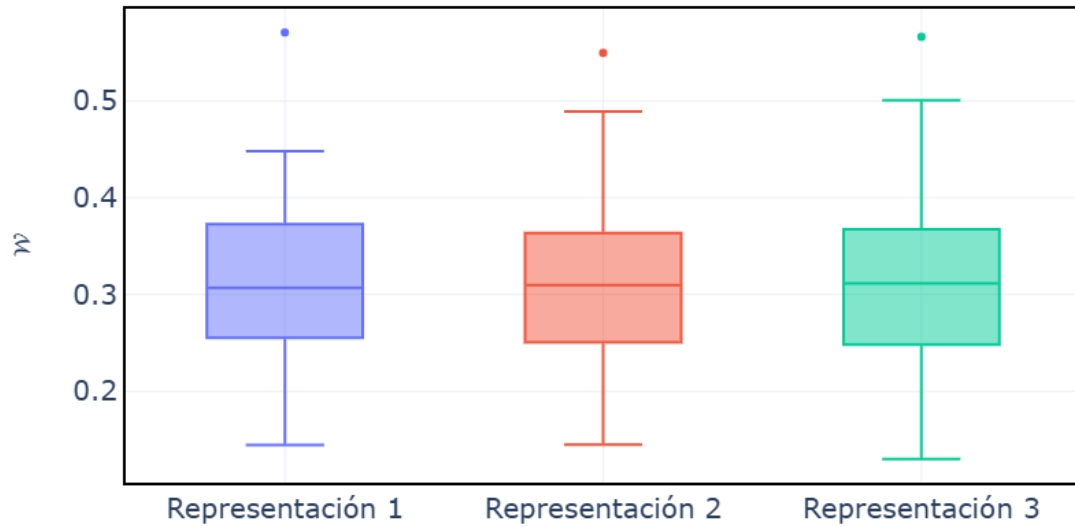


Figura 4.9: Valores de la fuerza multifractal obtenidos para las series temporales generadas con las tres representaciones propuestas.

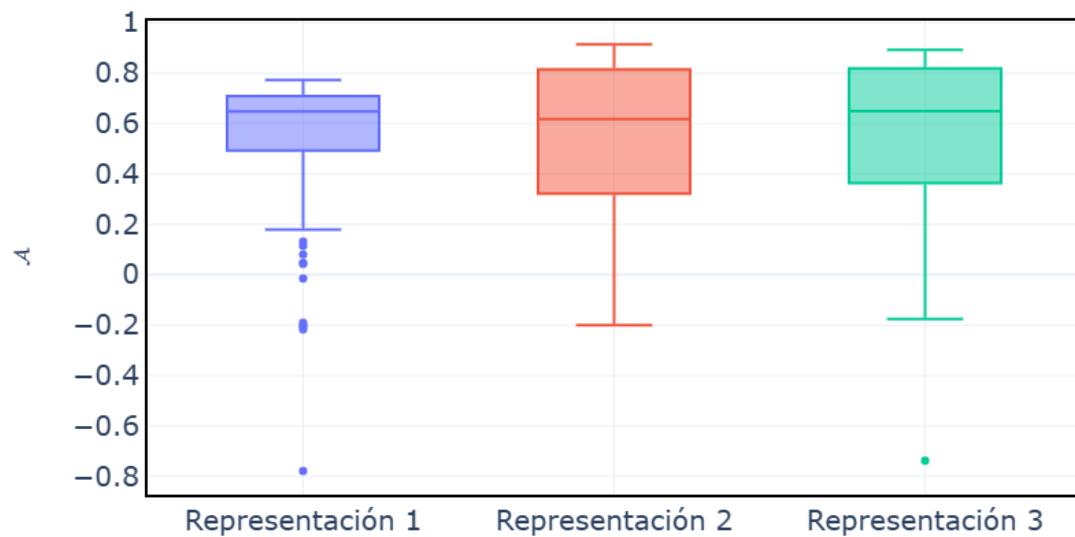


Figura 4.10: Valores del parámetro de asimetría obtenidos para las series temporales generadas con las tres representaciones propuestas.

Como se puede observar, no se obtienen diferencias significativas en ninguno de los parámetros multifractales al considerar diferentes representaciones del movimiento sacádico. Esto implica que la forma en que se producen o modelan las sacadas no afecta

las propiedades fractales de las series temporales de lectura, es decir, las características fractales están relacionadas con otros aspectos del proceso de lectura.

4.3.2. Dependencia en el ruido en la fijación

Para probar la influencia del ruido sobre las posiciones de las fijaciones, se añadieron a las señales ruidos fraccionarios de tipo Browniano [106] con diferentes coeficientes de Hurst. Se utilizaron valores de 0.5, 0.7, 1 y 1.5 para dichos coeficientes. Además, se utilizaron magnitudes variables, hasta 1/5 de la sacada más pequeña presente en las señales. En la Fig. 4.11 se muestran cuatro ejemplos de señales sintéticas, una para cada coeficiente de Hurst utilizado en la construcción del ruido fraccionario Browniano. Para cada una de estas nuevas señales se calcularon y compararon los parámetros multifractales de interés, es decir, el exponente de Hurst \mathcal{H} , la fuerza de la singularidad α_0 , la fuerza multifractal \mathcal{W} y el parámetro de asimetría \mathcal{A} .

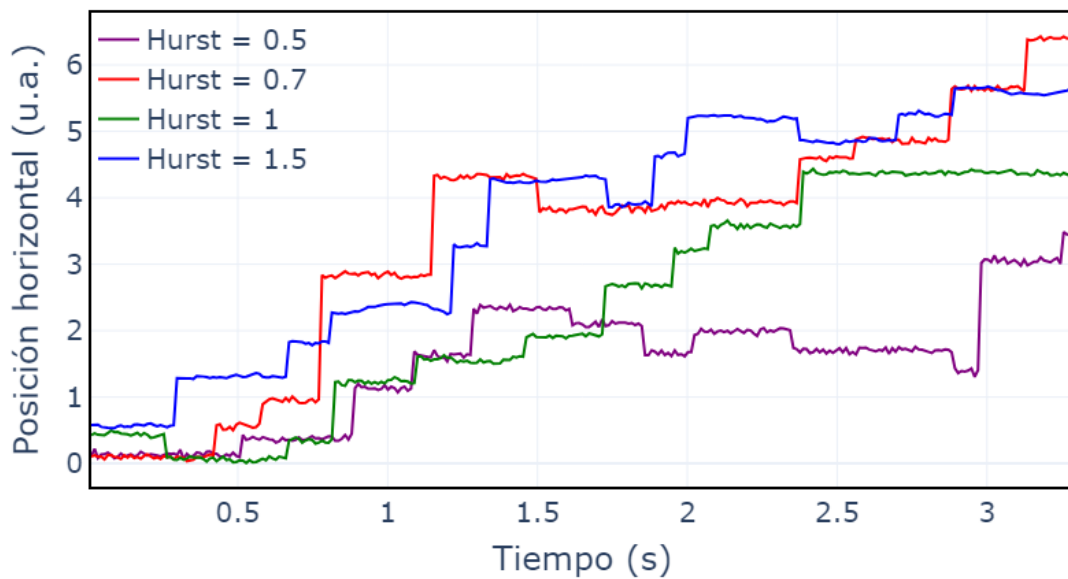


Figura 4.11: Ejemplos de series temporales sintéticas con ruido fraccionario Browniano añadido.

Como se puede observar en los diagramas de cajas de la Fig. 4.12, los valores del exponente de Hurst \mathcal{H} no presentan diferencias significativas cuando se agrega ruido a las señales. El mismo comportamiento se encuentra para el resto de los parámetros estudiados (ver Fig. 4.13, Fig. 4.14 y Fig. 4.15).

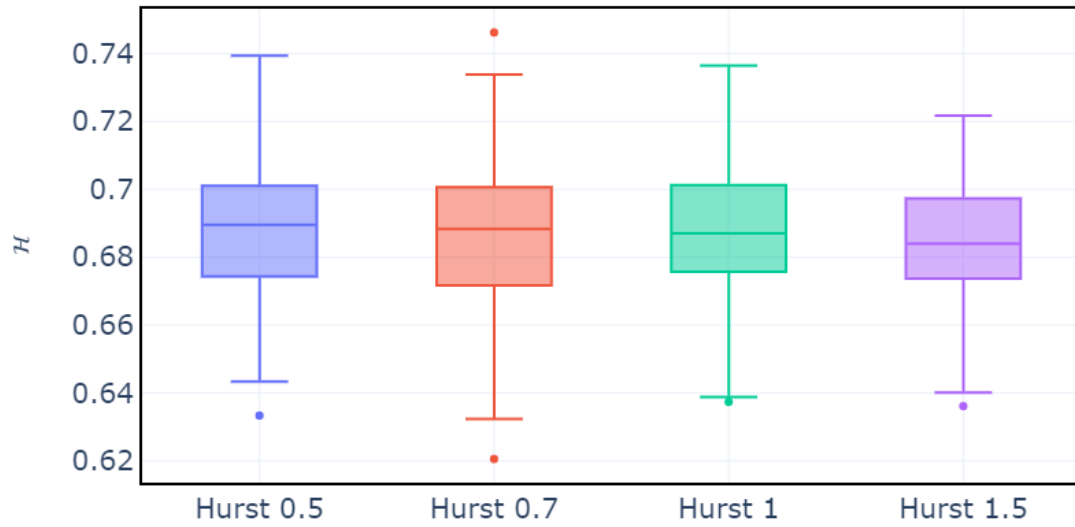


Figura 4.12: Valores del exponente de Hurst obtenidos para las series temporales con ruidos de distintos coeficientes de Hurst añadido.

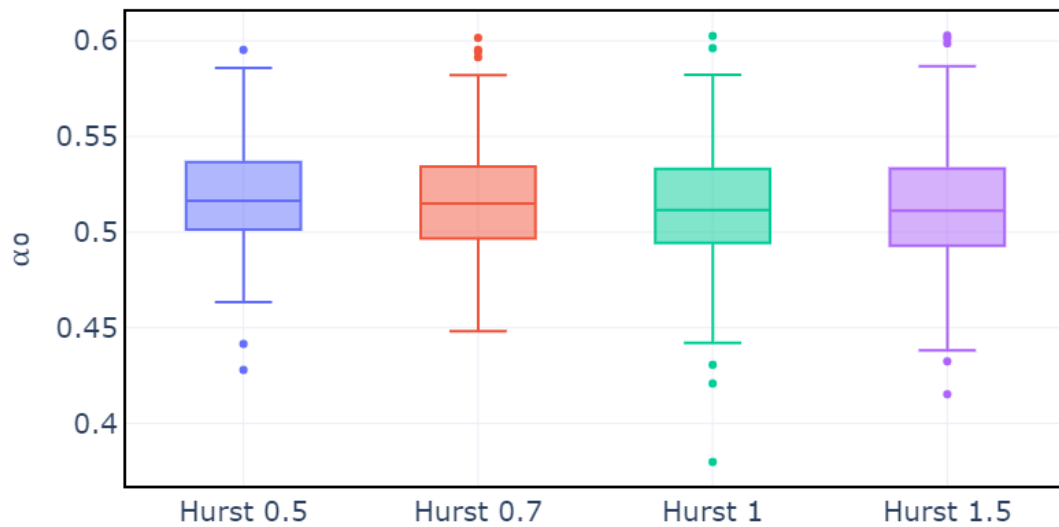


Figura 4.13: Valores de la fuerza de la singularidad α_0 obtenidos para las series temporales con ruidos de distintos coeficientes de Hurst añadido.

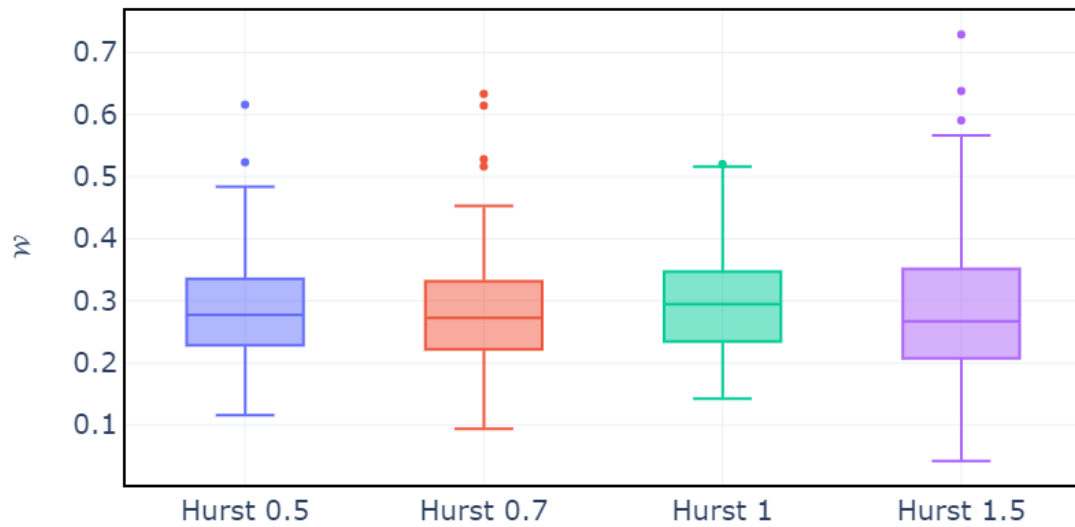


Figura 4.14: Valores de la fuerza multifractal obtenidos para las series temporales con ruidos de distintos coeficientes de Hurst añadido.

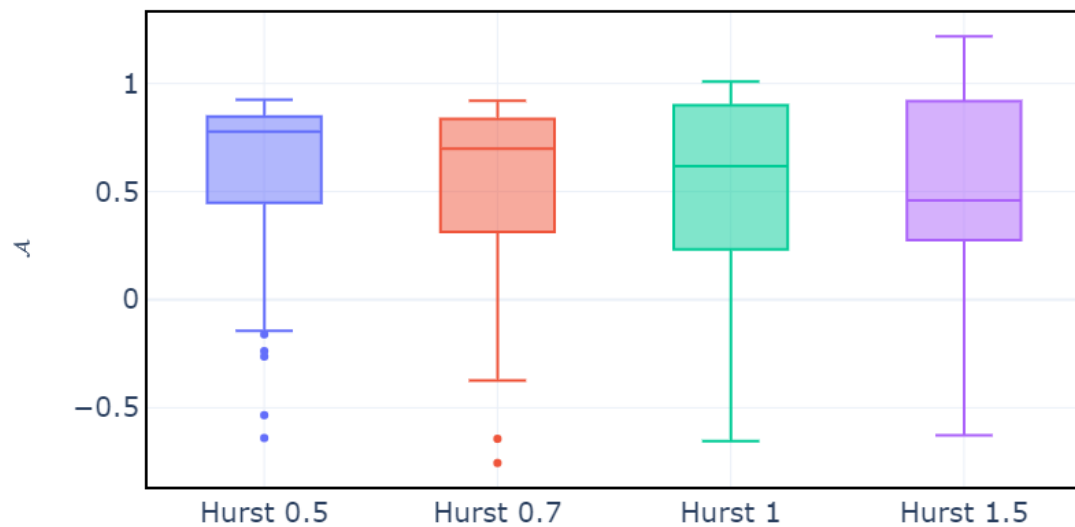


Figura 4.15: Valores del parámetro de asimetría obtenidos para las series temporales con ruidos de distintos coeficientes de Hurst añadido.

Esto implica que el análisis multifractal es una herramienta robusta para cuantificar las propiedades fractales de las series temporales de lectura, al ser poco sensible a la presencia de ruido en las señales.

4.3.3. Dependencia en los parámetros utilizados para generar las señales

En las secciones anteriores se mostró que los parámetros multifractales son insensibles a variaciones locales, como la forma del movimiento sacádico o el ruido presente en la fijación. En esta sección se mostrará que los parámetros utilizados en las distribuciones de amplitudes de sacadas y duración de fijaciones, utilizadas en la generación de señales sintéticas, producen parámetros multifractales diferentes. Estas variaciones modifican la dinámica resultante en la serie temporal, motivo por el cual es posible identificar diferencias mediante un análisis multifractal.

Como se mencionó en la sección 3.3.3, la distribución de las amplitudes de sacadas y la duración de las fijaciones puede ser representada mediante una distribución log-normal

$$f(a, \mu, \sigma; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x-a)} e^{-\frac{[\ln(x-a)-\mu]^2}{2\sigma^2}} \quad (4.15)$$

Para estudiar la variación de los parámetros multifractales obtenidos se modificó el parámetro σ en ambas distribuciones. Este parámetro es el que produce mayor variabilidad en las señales sintéticas, resultando en una mayor variación de los parámetros multifractales. Para ello, se generaron 100 señales, con 100 sacadas cada una, para cada conjunto de parámetros estudiados. En la Tabla 4.1 se muestran los parámetros utilizados para la generación de las señales.

Tabla 4.1: Parámetros utilizados en la generación de señales sintéticas

a_{sac}	μ_{sac}	σ_{sac}^*	a_{fij}	μ_{fij}	σ_{fij}^*	%ret*
-0.072	-0.497	0.547	-0.083	-1.252	0.530	77

(*) En los casos en que se mantiene constante.

En primer lugar, se modificó el parámetro σ correspondiente a la distribución utilizada para las amplitudes de sacadas, utilizando los siguientes valores: 0.0547, 0.2735, 0.547, 2.735 y 5.47. El resto de los parámetros se mantuvo constante. Como se puede observar en los diagramas de cajas de la Fig. 4.16, los valores del exponente de Hurst \mathcal{H} se mantienen constantes al incrementar el valor del parámetro σ . Sin embargo, para el resto de los parámetros estudiados, se encuentra que el valor de los mismos aumenta con el incremento del parámetro σ (ver Fig. 4.17, Fig. 4.18 y Fig. 4.19).

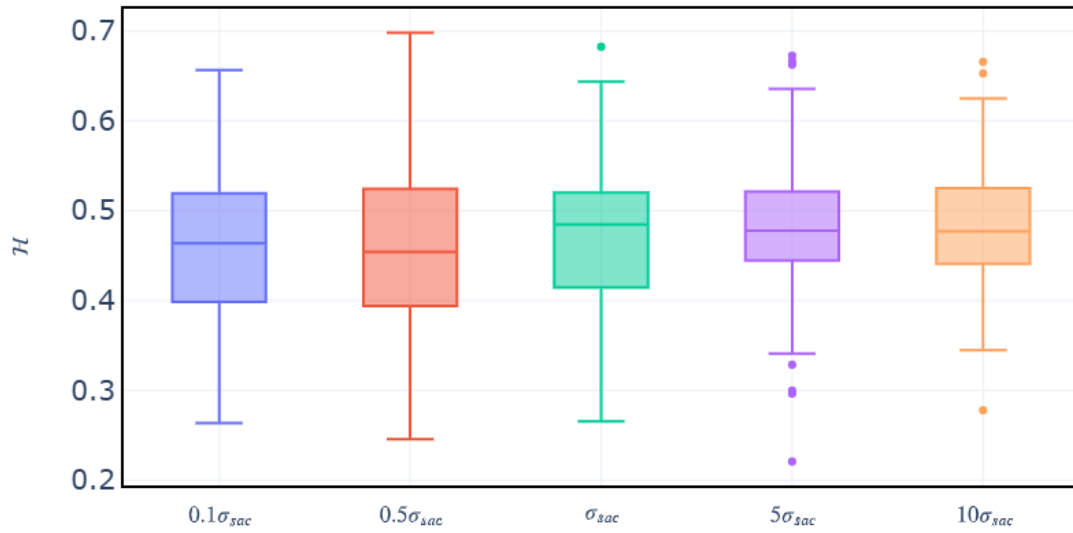


Figura 4.16: Valores del exponente de Hurst obtenidos para las series temporales generadas con distintos valores del parámetros σ_{sac} .

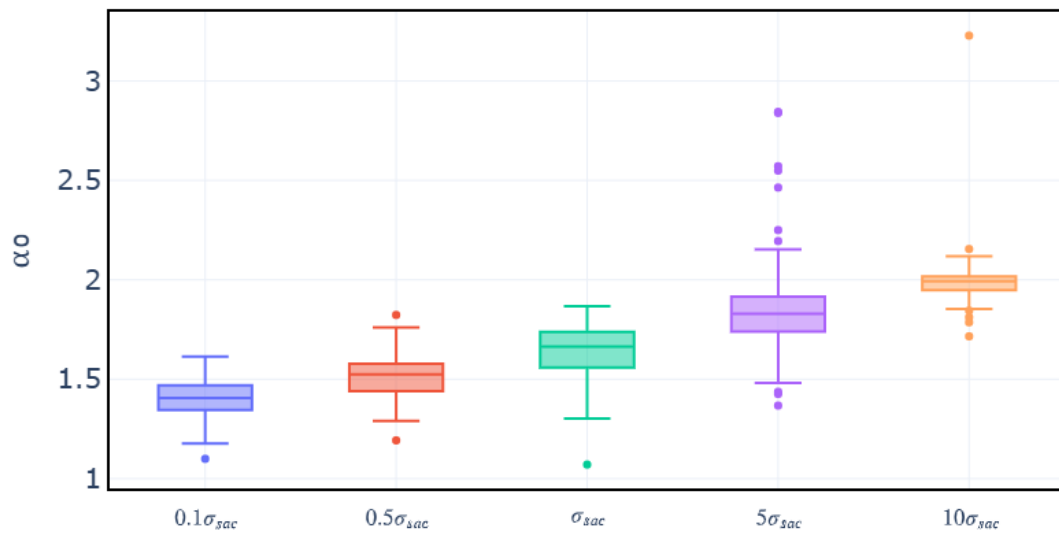


Figura 4.17: Valores de la fuerza de la singularidad α_0 obtenidos para las series temporales generadas con distintos valores del parámetros σ_{sac} .

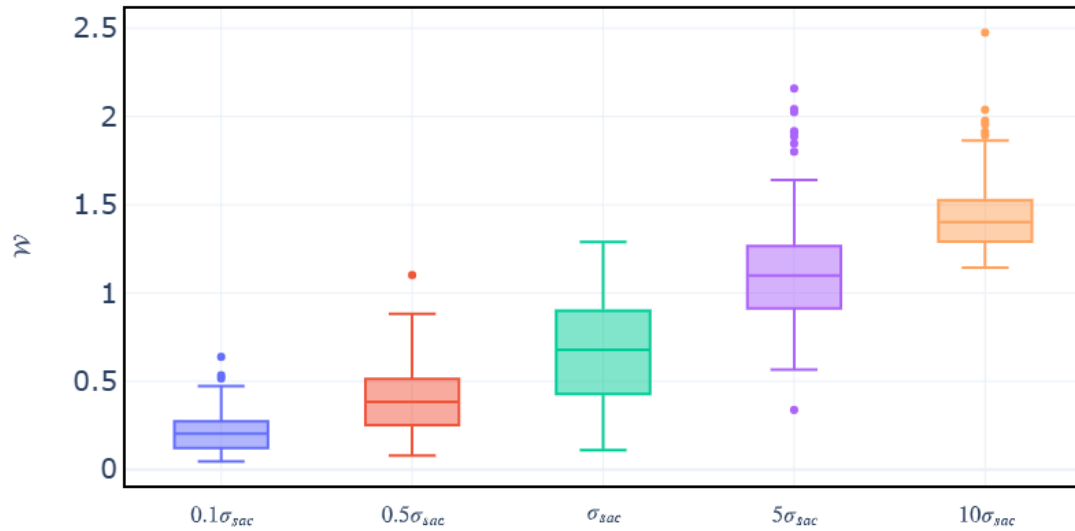


Figura 4.18: Valores de la fuerza multifractal obtenidos para las series temporales generadas con distintos valores del parámetros σ_{sac} .

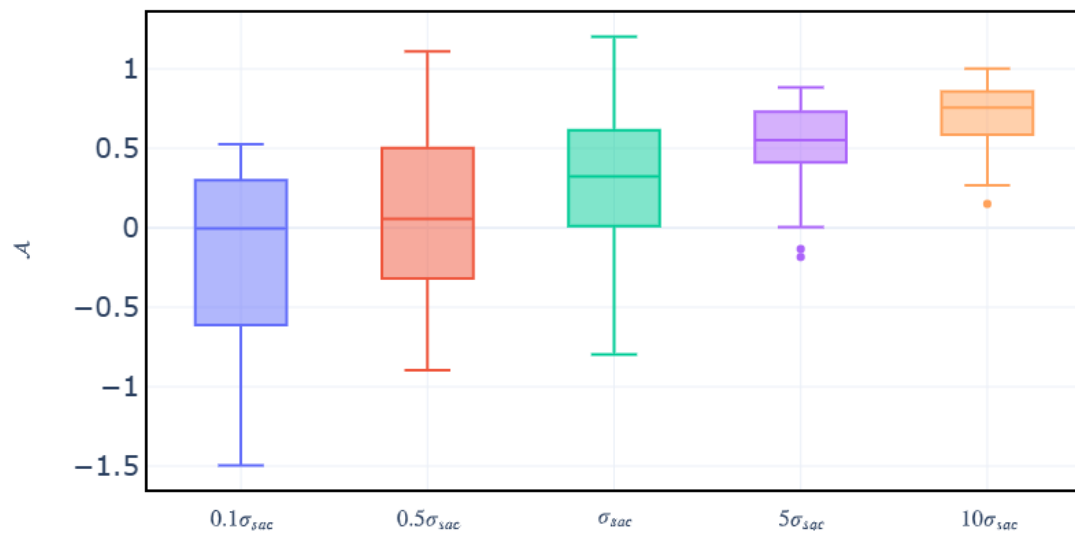


Figura 4.19: Valores del parámetro de asimetría obtenidos para las series temporales generadas con distintos valores del parámetros σ_{sac} .

En segundo lugar, se modificó el parámetro σ correspondiente a la distribución utilizada para la duración de las fijaciones, utilizando los siguientes valores: 0.053, 0.265, 0.530, 1.060 y 1.590. El resto de los parámetros se mantuvo constante. En la Fig. 4.20,

Fig. 4.21, Fig. 4.22, y Fig. 4.23 se muestran los parámetros multifractales obtenidos al modificar el valor de σ . Nuevamente los valores del exponente de Hurst \mathcal{H} se mantienen constantes al incrementar el valor del parámetro σ , mientras que el resto de los parámetros se ven modificados. En este caso α_0 y \mathcal{W} disminuyen y el parámetro de asimetría \mathcal{A} aumenta.

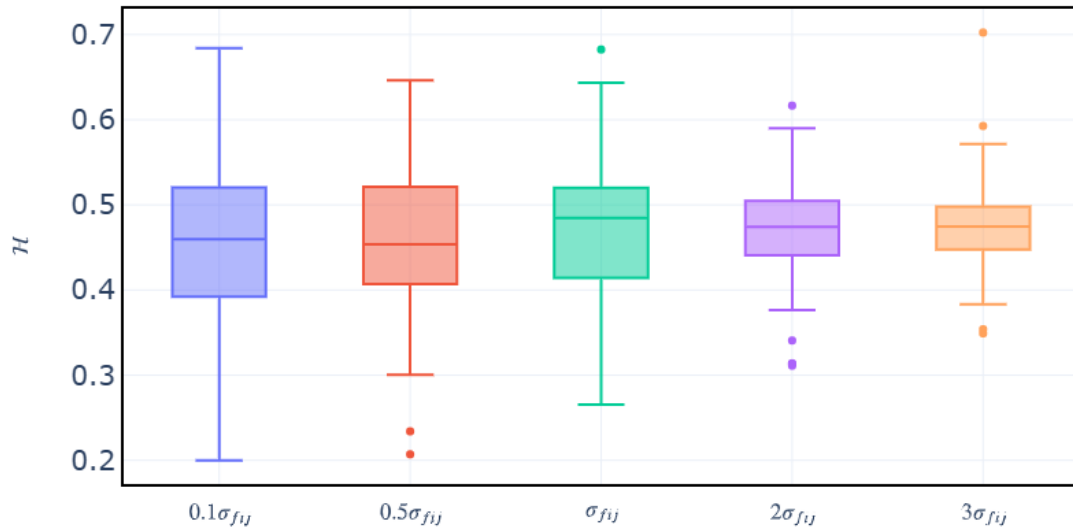


Figura 4.20: Valores del exponente de Hurst obtenidos para las series temporales generadas con distintos valores del parámetros σ_{fij} .

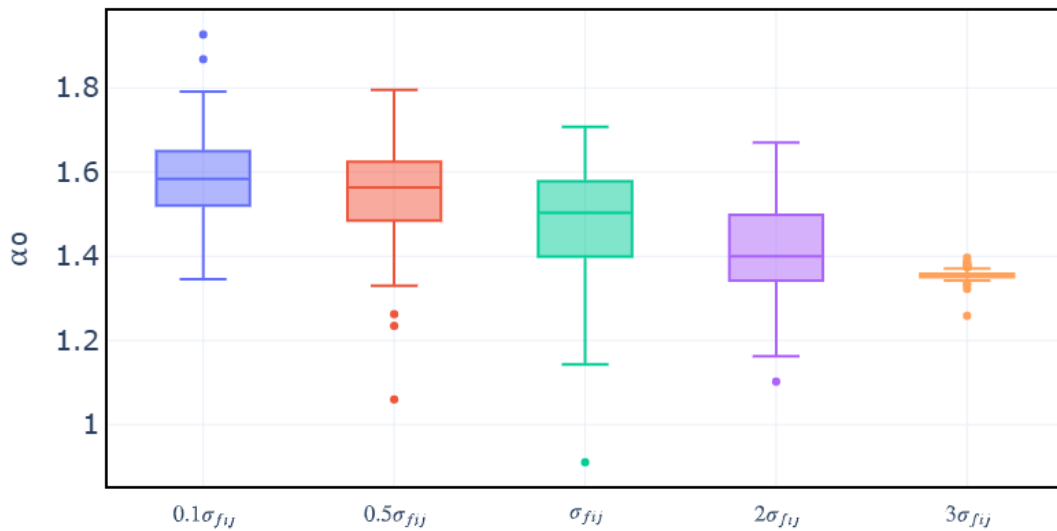


Figura 4.21: Valores de la fuerza de la singularidad α_0 obtenidos para las series temporales generadas con distintos valores del parámetros σ_{fij} .

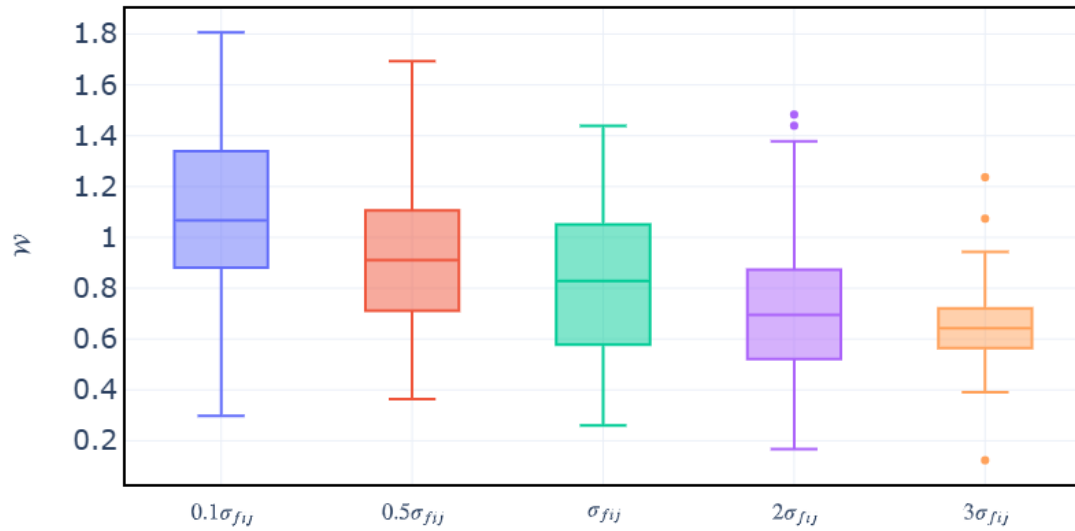


Figura 4.22: Valores de la fuerza multifractal obtenidos para las series temporales generadas con distintos valores del parámetros σ_{fij} .

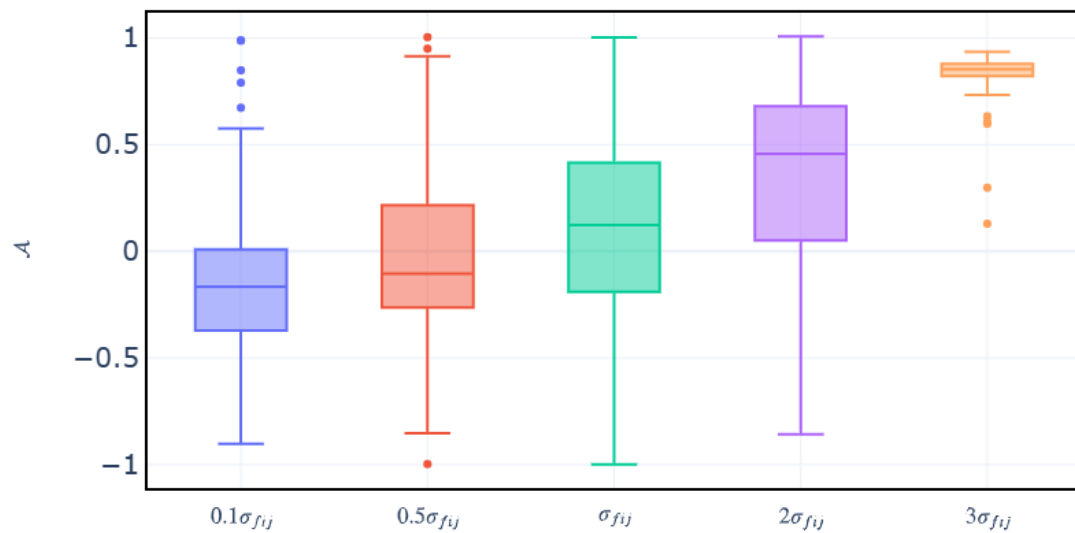


Figura 4.23: Valores del parámetro de asimetría obtenidos para las series temporales generadas con distintos valores del parámetros σ_{fij} .

Por último, se muestran en la Fig. 4.24, Fig. 4.25, Fig. 4.26, y Fig. 4.27 los parámetros multifractales obtenidos al modificar el porcentaje de sacadas de avance respecto al total de sacadas (ver sección 3.3.3), utilizando los siguientes valores: 55%, 66%, 77%, 88%

y 99%. En este caso, los valores del exponente de Hurst \mathcal{H} y el parámetro de asimetría \mathcal{A} aumentan al incrementar el porcentaje de sacadas de avance, mientras que los otros dos parámetros disminuyen su valor.

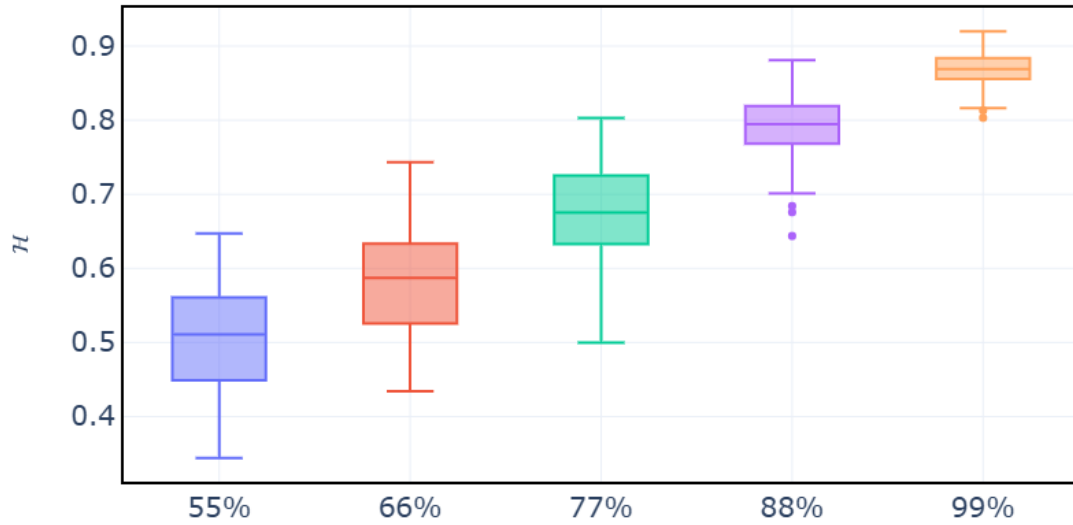


Figura 4.24: Valores del exponente de Hurst obtenidos para las series temporales generadas con distintos porcentajes de sacadas de avance.

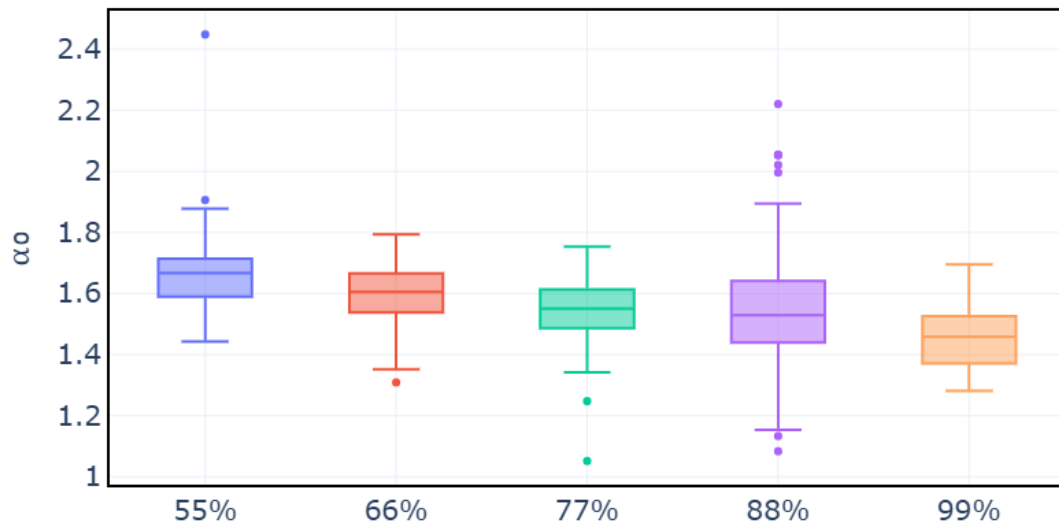


Figura 4.25: Valores de la fuerza de la singularidad α_0 obtenidos para las series temporales generadas con distintos porcentajes de sacadas de avance.

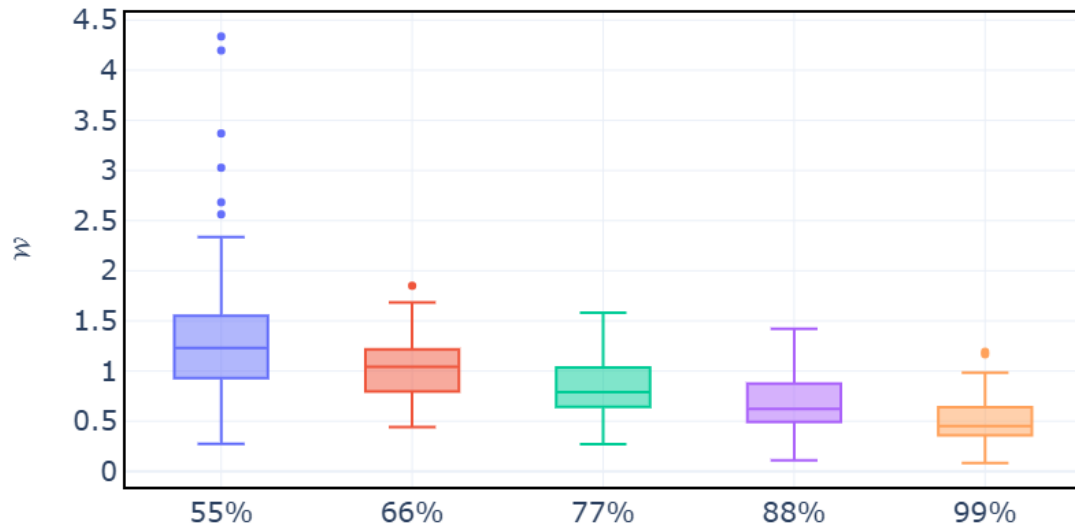


Figura 4.26: Valores de la fuerza multifractal obtenidos para las series temporales generadas con distintos porcentajes de sacadas de avance.

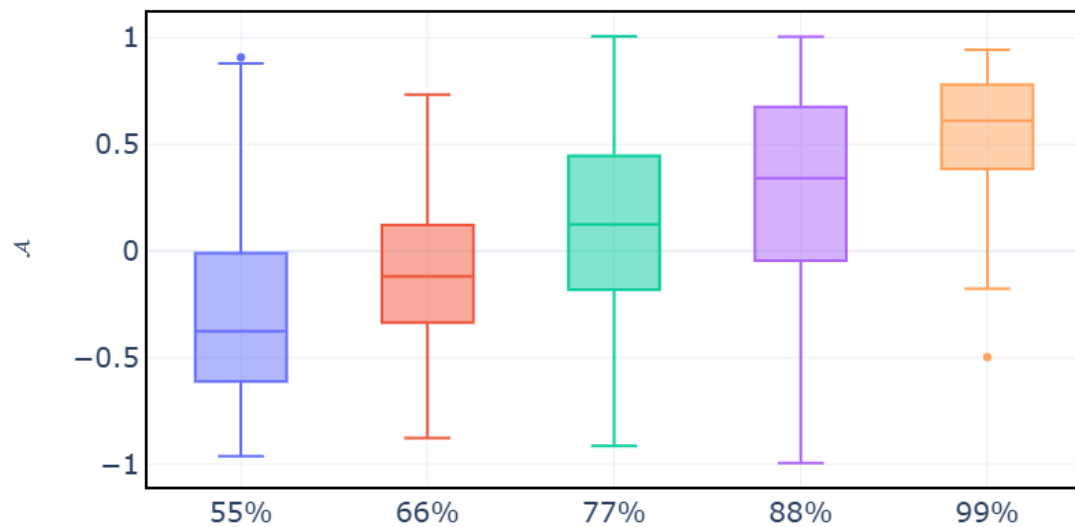


Figura 4.27: Valores del parámetro de asimetría obtenidos para las series temporales generadas con distintos porcentajes de sacadas de avance.

Con esto se muestra que pequeñas variaciones en la dinámica presente en las señales, resulta en propiedades fractales diferentes. Esto implica que el análisis multifractal puede ser utilizado para caracterizar series temporales asociadas al proceso de lectura y

cuantificar diferencias sutiles en su dinámica.

4.4. Conclusiones

En este capítulo se introdujo un análisis estadístico robusto conocido como MF-DFA (multifractal detrended fluctuation analysis) que permite estimar el espectro multifractal de una serie temporal biomédica. En particular, se analizaron señales de movimientos oculares durante el proceso de lectura. Se comenzó presentando algunos conceptos relacionados con la geometría fractal para luego explicar la metodología empleada en el análisis de señales, utilizando ejemplos de series temporales monofractales y multifractales. Se definió un conjunto de parámetros que caracterizan la dinámica presente en las series temporales y se estudió cómo los mismos se ven modificados en función de características específicas de las señales analizadas.

En primer lugar, se mostró que la forma particular del movimiento sacádico no modifica ninguno de los parámetros multifractales estudiados. De esta manera, es posible considerar al proceso de lectura como una sucesión de movimientos instantáneos, sin perder información de la dinámica subyacente.

En segundo lugar, se comprobó que los parámetros propuestos para caracterizar las series temporales son insensibles al ruido presente en la señal. Esto demuestra que el análisis multifractal presentado es una herramienta robusta para cuantificar las propiedades fractales de las series temporales de lectura. Esto es particularmente útil en estudios realizados con niños pequeños o con personas con diversas patologías.

Finalmente, se mostró que pequeñas variaciones en la dinámica presente en las señales, como la distribución de la duración de las fijaciones o las amplitudes de los movimientos sacádicos, resulta en propiedades fractales diferentes. Esto refleja la capacidad del análisis multifractal para caracterizar la complejidad inherente a los movimientos oculares en la lectura, permitiendo cuantificar sutiles diferencias en su dinámica.

Es importante destacar que el análisis multifractal se realiza a partir de los datos crudos, sin la necesidad de clasificar los movimientos en fijaciones y sacadas. Esto lo vuelve una herramienta valiosa en el estudio de movimientos oculares de personas con patologías como el nistagmo, en la que no siempre es posible realizar esta distinción de los movimientos de manera consistente.

Las variaciones en la dinámica de los movimientos oculares no solo son detectables, sino que están relacionadas con patrones de procesamiento visual específicos en distintos individuos. Esto confirma la utilidad del análisis multifractal como una herramienta eficaz para describir y diferenciar las propiedades dinámicas de las series temporales asociadas a estos movimientos, sobre todo en tareas cognitivas como la lectura. En los siguientes capítulos se empleará esta herramienta para el estudio de movimientos oculares de niños con dislexia y nistagmus, en comparación con niños con desarrollo típico.

Capítulo 5

Aplicación al estudio de dislexia

En el capítulo 3 se desarrolló un modelo capaz de producir señales artificiales que reproducen movimientos oculares con distintas características y en el capítulo 4 se presentó una herramienta que permite describir variaciones sutiles en la dinámica de los movimientos oculares. En este capítulo se aplicará lo anterior a un caso particular de interés, en el que las señales corresponden a movimientos oculares de niños con dislexia durante el proceso de lectura.

La dislexia es una dificultad específica del aprendizaje (DEA) clasificada como un trastorno del neurodesarrollo por la Asociación Estadounidense de Psiquiatría [207]. Afectando aproximadamente al 10% de la población [208], la dislexia es considerada la dificultad de aprendizaje más frecuente y se caracteriza por diversas dificultades en la lectura, como la decodificación y escritura de palabras, incluso con un desarrollo intelectual adecuado [208, 209, 210]. Durante la lectura, los movimientos oculares de las personas con dislexia presentan diferencias con respecto a los de las personas típicamente desarrolladas, independientemente del idioma considerado [11, 12, 137]. Las diferencias observadas parecen estar relacionadas con las dificultades de los individuos con dislexia para consolidar la automatización necesaria de la transformación de grafemas (unidad escrita indivisible) a fonemas (unidad fonológica indivisible). Este proceso se desarrolla sin problemas en los niños con desarrollo típico, pero no parece ocurrir fácilmente en los niños con dislexia. Por esta razón, el estudio de los movimientos oculares de los niños con dislexia se ha convertido en un tema de gran interés en diferentes comunidades científicas, motivado por la idea de que una comprensión profunda y una descripción adecuada de estos movimientos puede conducir a un diagnóstico temprano y una intervención rápida en el proceso de aprendizaje de la lectura.

Una inspección directa de las series temporales obtenidas a partir de los movimientos oculares durante la lectura mostró que el comportamiento oculomotor de los sujetos que leen con dificultad presenta menos libertad para variar o ajustarse a los requisitos de la tarea en relación con los movimientos oculares de los lectores normales [37]. Sin embargo, no existen estudios que analicen el efecto de la dislexia en las características fractales de los movimientos oculares durante la lectura. Tampoco existen estudios pre-

vios de análisis multifractal de los movimientos oculares de niños durante la lectura, ni estudios que se centren en las propiedades fractales del proceso de lectura considerado como una secuencia de movimientos sacádicos y fijaciones particularmente entrelazados.

Por esta razón, en este capítulo se presentan los resultados del estudio de las propiedades fractales de los movimientos oculares realizados durante la lectura, comparando niños disléxicos con niños típicamente desarrollados.

Para este estudio se evaluaron los movimientos oculares de 9 niños diagnosticados con dislexia (DD) y 29 niños con desarrollo típico (TD) durante la lectura. Las series temporales obtenidas se analizaron en términos de su dinámica fractal mediante un análisis multifractal (MF-DFA), teniendo en cuenta las propiedades multifractales en diferentes rangos de escala, con el fin de estudiar el espectro de singularidades. Del análisis surgen cuatro parámetros: el exponente de Hurst, la singularidad correspondiente al máximo del espectro de singularidades, la asimetría del espectro de singularidades y la fuerza multifractal, cada uno de los cuales caracteriza un aspecto particular de la dinámica de los movimientos oculares. Los resultados de este análisis revelan distinciones sustanciales en las características fractales de las series temporales de seguimiento ocular entre niños con y sin dislexia. Específicamente, los niños con dislexia exhiben una estructura fractal menos compleja (menor correlación a largo plazo y mayor fuerza de la singularidad α_0) en comparación con los niños sin dislexia.

5.1. Participantes y experimentos

Nueve niños (9-10 años) diagnosticados con dislexia (DD) y un grupo de control de 29 niños con desarrollo típico (TD) (9-10 años) participaron voluntariamente en el experimento. El experimento consistió en leer en voz alta un párrafo sencillo (85 palabras) en el idioma nativo de los participantes (español). El texto utilizado, que tiene una dificultad acorde a la edad de los participantes, se muestra en la Fig. 5.1. Estas dos cohortes fueron reunidas de manera que tuvieran la misma distribución en sexo biológico, etnicidad y otros factores que pudieran influir en el experimento. El tamaño del texto y la fuente fueron seleccionados para evitar dificultades de lectura. Los participantes se sentaron a 60 cm de distancia del mismo monitor de 14 pulgadas (1366 × 768 píxeles) de una laptop Lenovo con Windows 10 Pro (CPU Ryzen 5: 2.5 GHz, RAM de 8 GB y 64 bits) en la que se mostró el texto. Los registros binoculares de los movimientos oculares durante el experimento se realizaron con un eye tracker Tobii Pro (Tobii AB, Suecia) a una tasa de muestreo de 90 Hz en todos los casos. Los movimientos oculares de los lectores TD fueron registrados por profesionales en la escuela a la que asisten, una escuela primaria de nivel socioeconómico medio en el Área Metropolitana de Buenos Aires (Argentina). Las mediciones de los niños con dislexia se realizaron en clínicas psicopedagógicas de la misma área urbana. El diagnóstico de dislexia fue realizado por psicopedagogos especializados en trastornos de lectura. Se obtuvo el consentimiento informado de cada

participante y de su tutor legal, y la escuela autorizó la recopilación de datos dentro de la institución. Todos los sujetos fueron tratados en total conformidad con la Declaración de Helsinki.

Los delfines habitan en los mares y los océanos; también en algunos ríos. Prefieren nadar cerca de la superficie del agua y se desplazan velozmente, dando enormes saltos. Son animales mamíferos, pueden medir hasta dos metros, poseen una gran inteligencia y tienen un oído muy desarrollado. Viven en grupos. Cuando alguno de ellos se encuentra en peligro, los demás se acercan para ayudarlo. Algunos marineros cuentan que vieron cómo los delfines ayudaron a personas que estaban en situaciones peligrosas en el agua. Son muy solidarios.

Figura 5.1: Texto utilizado como estímulo visual en el experimento de lectura.

5.2. Datos experimentales

Los datos registrados son series temporales bidimensionales $\{(x_i, y_i)\}$ correspondientes a la posición de la mirada en la pantalla (un promedio entre la posición del ojo derecho y el ojo izquierdo) registrada en cada instante de tiempo t_i . El número de puntos en las señales es diferente para cada grupo, debido al mayor tiempo (o, equivalentemente, menor velocidad) requerido por los niños con dislexia para leer. La longitud promedio para el grupo DD es de 6720 puntos y para el grupo TD es de 4635 puntos. Las posiciones en la pantalla fueron normalizadas para satisfacer la relación 16:9. Así, en lo que sigue, x varía de 0 a 16 e y varía de 0 a 9. Como la lectura involucra principalmente movimientos horizontales, se analizó únicamente la componente x de los datos registrados. Un segmento de los datos registrados se muestra como ejemplo en la Fig. 5.2, correspondiente a un participante DD leyendo dos líneas del texto. Típicamente, los movimientos oculares durante la lectura consisten en una serie de movimientos sacádicos hacia adelante o hacia atrás, intercalados con períodos de quietud o fijaciones. El factor distintivo principal entre los dos grupos es la amplitud de los movimientos sacádicos [139]. Otros parámetros, como la duración de la fijación y el porcentaje de sacadas de derecha a izquierda en comparación con el número total de sacadas, no han presentado diferencias significativas. Esto sugieren la presencia de sutiles comportamientos distintivos sobre los cuales se pretende profundizar mediante un análisis multifractal.

Con el objetivo de estudiar los movimientos oculares relacionados con los requisitos cognitivos de la lectura, se concatenaron los movimientos oculares realizados en cada línea del texto, descartando los saltos de línea (sacádicos largos hacia atrás que llevan los ojos desde el final de una línea de texto hasta el comienzo de la siguiente). De esta manera, las señales resultantes son similares a las obtenidas al leer una sola línea larga (ver Fig. 5.6). En la Fig. 5.2, por ejemplo, un salto de línea ocurre en el Tiempo = 15 s.

Estos saltos largos inducen una estructura en la serie temporal que no es de interés para este análisis, e incluso pueden distorsionarlo.

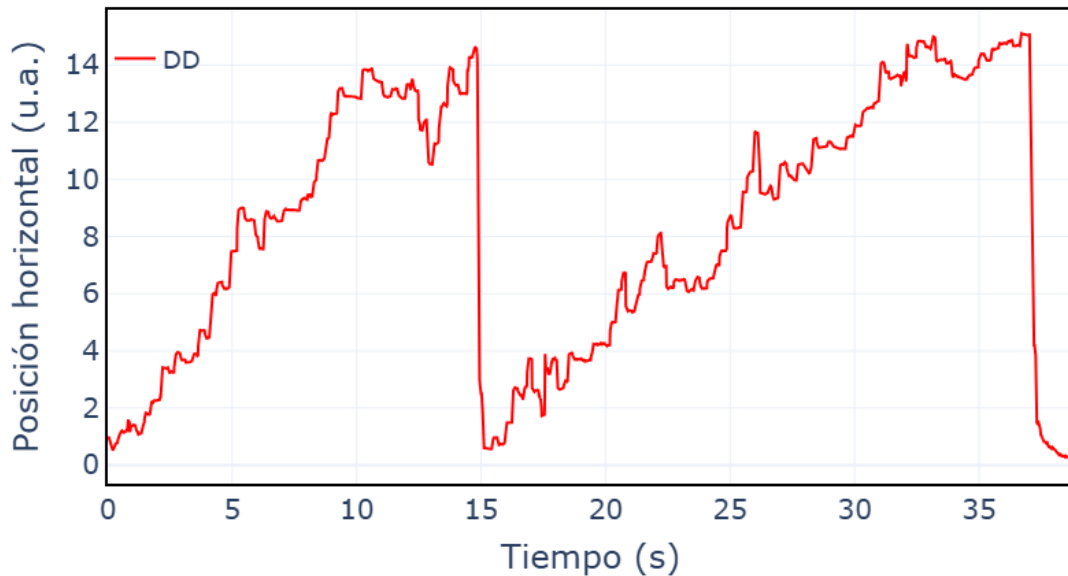


Figura 5.2: Movimientos oculares horizontales (en unidades arbitrarias) registrados en un niño con DD durante la prueba de lectura.

5.3. Resultados

El análisis multifractal se realizó siguiendo el procedimiento descrito en la sección 4.2. Los datos involucrados en este estudio son series temporales de corta longitud. Por esta razón, se investigó la autocorrelación de las señales para decidir los parámetros adecuados para el análisis multifractal, como se recomienda en estudios previos [211, 212]. En todos los casos, se observó autocorrelación para eventos separados por hasta 500 puntos (alrededor de 5 s). En la Fig. 5.3 se muestra un ejemplo que ilustra estos hallazgos. Como se puede ver, la autocorrelación decae lentamente según una ley de potencia durante al menos 256 puntos, indicado en la figura con una línea de puntos vertical. Este resultado se obtuvo tanto para los niños DD como para los TD (línea roja continua y línea azul discontinua, respectivamente).

Con base en estos resultados, se decidió realizar los cálculos utilizando 100 valores de escala diferentes, espaciados logarímicamente entre 64 y 256 puntos, es decir, entre aproximadamente 704 y 2816 ms. El valor mínimo $s = 64$ se eligió con el propósito de tener al menos un movimiento sacádico en cada segmento. El valor máximo de $s = 256$ se eligió para garantizar al menos 10 segmentos en todas las señales [164] y mantener las escalas en el rango donde la correlación está presente [211]. Para obtener el exponente de Hurst generalizado $h(q)$, se calcularon las funciones de fluctuación $F_q(s)$ usando va-

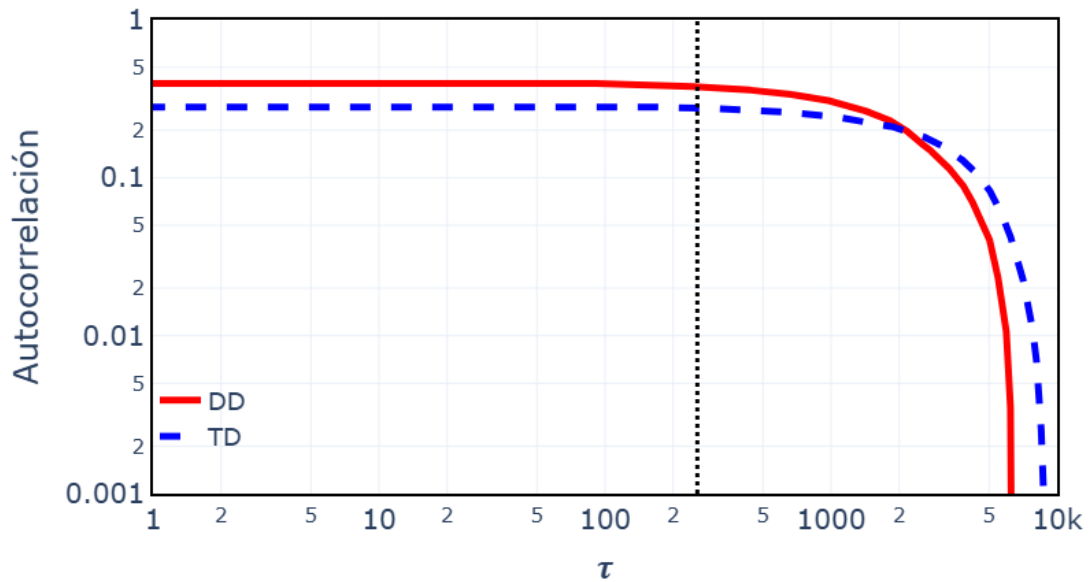


Figura 5.3: Función de autocorrelación de un registro de un niño DD (línea sólida) y un registro de un niño TD (línea punteada). La línea vertical indica una separación de 256 puntos

lores de q entre $q_{min} = -10$ y $q_{max} = 10$ con un paso de 0.5. Es decir, se consideraron 41 valores de q : $q = -10, -9.5, -9, -8.5, \dots, 8.5, 9, 9.5, 10$. Este rango de valores se eligió para lograr un comportamiento asintótico definido.

5.3.1. Análisis de movimientos oculares hacia adelante y hacia atrás

En primer lugar, se inspeccionó el comportamiento de las funciones de fluctuación $F_q(s)$ calculadas para cada conjunto de datos registrado. Se encontraron diferentes regímenes tanto en los niños TD como en los DD: el 70% de las señales en cada grupo presentan un comportamiento multifractal multiescala. En la Fig. 5.4, se representan las funciones de fluctuación $F_q(s)$ correspondientes a los movimientos oculares de dos niños con dislexia. La Fig. 5.4(A) ilustra un comportamiento multifractal multiescala, donde la pendiente para valores negativos de q y escalas pequeñas ($s < 120$) es diferente de la obtenida para escalas grandes ($s > 120$). Esto puede indicar que dos estructuras fractales no correlacionadas dominan la dinámica en diferentes escalas en la serie temporal, como se discutió en Ref. [202]. Por el contrario, en la Fig. 5.4(B), la pendiente no cambia cuando pasamos de escalas pequeñas a grandes. Sin embargo, estas series temporales son demasiado cortas para asegurar que este comportamiento no se deba a artefactos [211, 213].

Sin embargo, dado que el comportamiento multiescala se observa para valores negativos de q , el exponente de Hurst \mathcal{H} (obtenido de $q = 2$ en la Ec. 4.8) está bien defini-

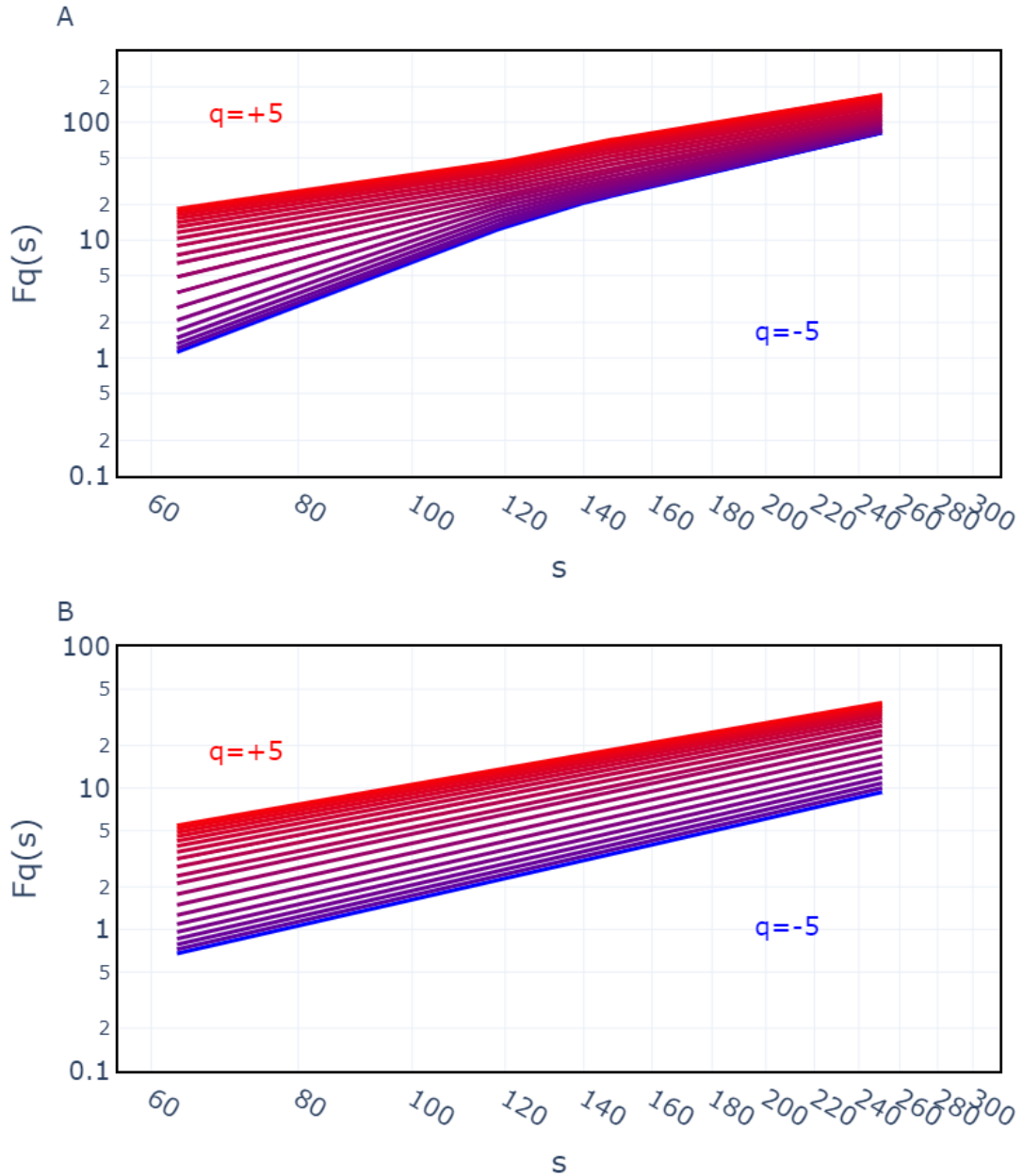


Figura 5.4: Funcione de fluctuación de dos niños DD, uno que presenta un comportamiento multifractal multiescala (panel A) y otro sin diferencias en su comportamiento multifractal a diferentes escalas (panel B).

do, independientemente del rango de escalas considerado para calcularlo. Un contraste entre los valores obtenidos para \mathcal{H} y la velocidad media de lectura de cada participante se muestra en la Fig. 5.5. La velocidad media se definió como la pendiente de la recta que mejor ajusta los valores de posición horizontal en función del tiempo. Es bien sabido que la velocidad de lectura es una de las características que distinguen a los niños DD de los TD en las tareas de lectura, un hecho que se puede observar en la Fig. 5.5. Por el contrario, la Fig. 5.5 muestra que el índice \mathcal{H} varía en el mismo rango de valores

para ambos grupos, lo que también indica un comportamiento persistente dominante ($\mathcal{H} > 0.5$). El valor medio de $\overline{\mathcal{H}}$ para ambos grupos es $\overline{\mathcal{H}} = 0.68$, mientras que el valor medio de la velocidad de lectura es 2.27 1/s para los niños TD y 1.05 1/s para los DD.

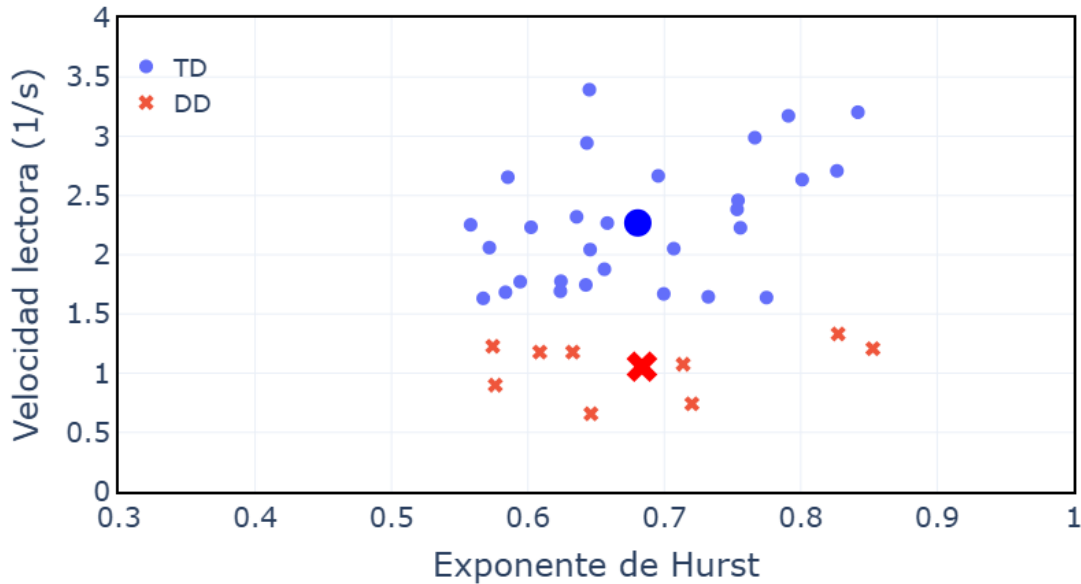


Figura 5.5: Velocidad lectora *vs* exponente de Hurst de las señales correspondientes a niños DD (cruces rojas) y a niños TD (círculos azules). Los marcadores más grandes indican el valor medio de cada grupo.

El comportamiento persistente de los movimientos oculares durante la lectura era esperado, ya que la tarea impone que los ojos se muevan mayoritariamente hacia la derecha (aún más dado que se eliminaron los saltos de línea). Aunque ambos grupos muestran esta tendencia lineal creciente, lo que varía entre ellos es la pendiente de la línea que la describe, es decir, la velocidad de lectura. Este indicador debe ser tenido en cuenta ya que es uno de los índices considerados en el diagnóstico de la dislexia. Por esta razón, se incluyó la velocidad de lectura en la Fig. 5.5 y, como se mencionó anteriormente, los dos grupos se distinguen al considerar este indicador.

5.3.2. Análisis de las variaciones alrededor de la tendencia de avance

Con el fin de estudiar las diferencias que la dislexia produce en la dinámica de la lectura, es decir, las secuencias particulares de fijaciones y sacadas hacia adelante y hacia atrás, se eliminó de los datos la tendencia de avance lineal de izquierda a derecha que caracteriza los movimientos oculares durante la lectura. De cada conjunto de datos, se restó el ajuste lineal, obteniendo así una nueva serie temporal que refleja las variaciones de los movimientos oculares alrededor de la tendencia de avance de la mirada. Para clarificar la propuesta, en la Fig. 5.6 se muestra una señal construida a partir de la concatenación de las diferentes líneas (estas son las señales estudiadas en la sección 5.3.1) con

su tendencia lineal creciente (el ajuste lineal) y la señal que resulta de restar el ajuste de los datos, resultando en una nueva serie temporal describiendo oscilaciones alrededor del eje horizontal.

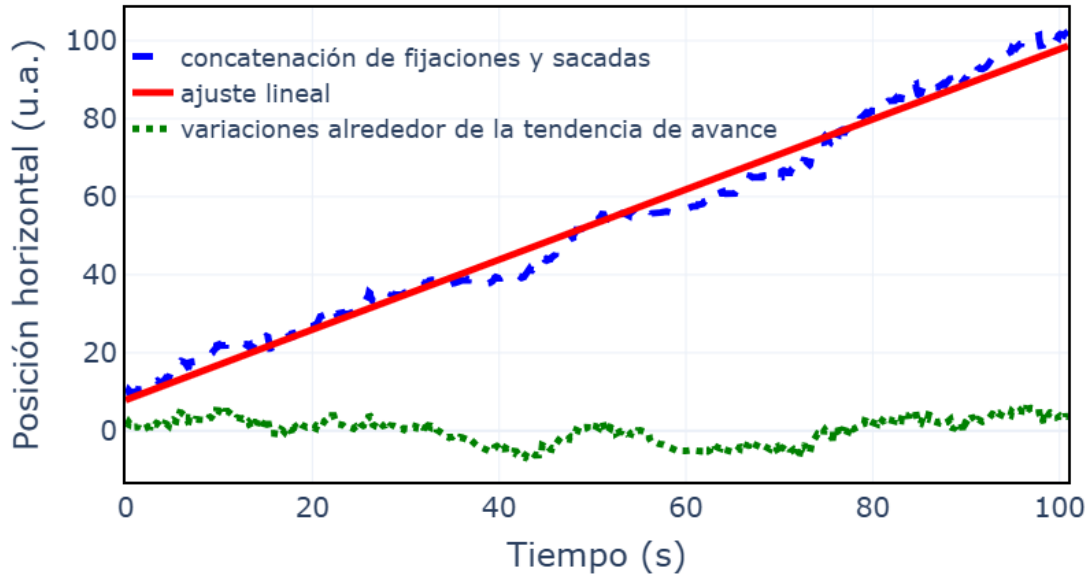


Figura 5.6: Series temporales analizadas: concatenación de fijaciones y sacadas (línea partida azul) con una clara tendencia lineal (línea sólida roja) y fluctuaciones que resultan al eliminar la tendencia (línea punteada verde).

Para estas nuevas series temporales, que se denominaron variaciones alrededor de la tendencia de avance, se realizó un análisis multifractal. Primero se estudió el exponente de Hurst clásico \mathcal{H} . Como se esperaba, este índice disminuyó a valores menores de 0.5, indicando un cambio hacia un comportamiento antipersistente. Además, se encontró que los niños TD tienen valores más bajos del exponente de Hurst que los niños DD. Los resultados se presentan en los diagramas de caja en la Fig. 5.7. El segmento central en las cajas corresponde al valor de la mediana $\overline{\mathcal{H}}$ de cada grupo: $\overline{\mathcal{H}} = 0.37$ para los niños TD y $\overline{\mathcal{H}} = 0.48$ para los niños DD. Un test U de Mann-Whitney [214] indicó que la diferencia entre estos valores es estadísticamente significativa ($p < 0.01$).

Las funciones de fluctuación $F_q(s)$, definidas en la Ec. 4.8, también fueron analizadas para las variaciones alrededor de la tendencia de avance. Se encontró que estas series temporales no presentan un comportamiento multiescala. Esto es, tienen la misma tasa de cambio (es decir, la pendiente del ajuste lineal de $F_q(s)$) a diferentes escalas s (pequeñas y grandes) para cada valor de q . Por esta razón, es posible llevar a cabo un estudio multifractal sin la necesidad de un análisis multiescala. Para cada serie temporal se calculó su espectro de singularidades $f(\alpha)$ y se caracterizó en términos de la fuerza de la singularidad (α_0) en la que ocurre el comportamiento de escala más dominante, su ancho \mathcal{W} definido en la Ec. 4.13, y su asimetría \mathcal{A} definida en la Ec. 4.14. En esta etapa del análisis se encontraron dos señales, correspondientes a niños TD, que presentaron

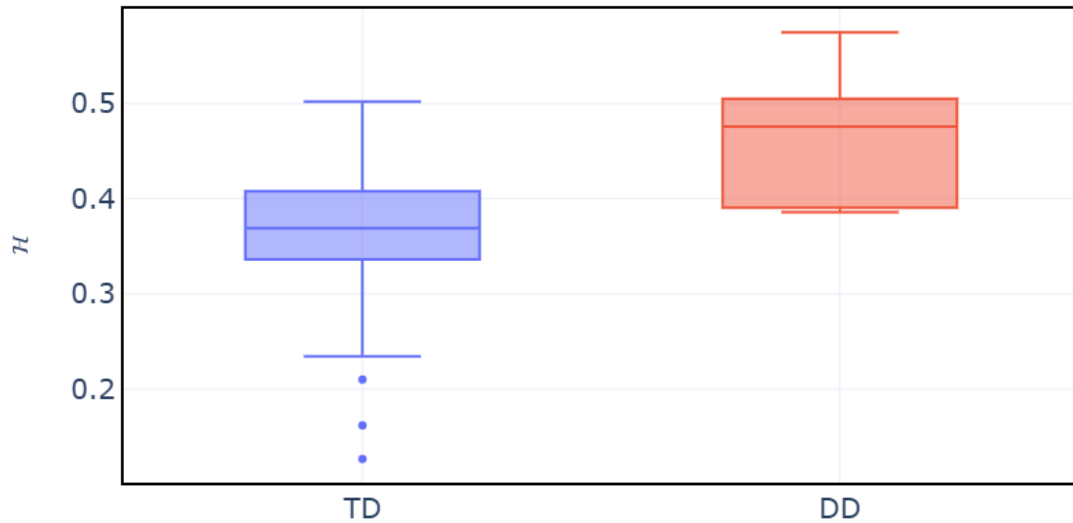


Figura 5.7: Valores del exponente de Hurst obtenidos para la variación alrededor la tendencia de avance de los movimientos oculares de niños DD y TD durante la lectura.

propiedades monofractales. Por esta razón, esas señales fueron incluidas en el análisis de \mathcal{H} y α_0 , pero excluidas del análisis de \mathcal{W} y \mathcal{A} .

En la Fig. 5.8, se muestran los diagramas de cajas correspondientes a los valores de \mathcal{W} obtenidos para cada grupo de participantes. Los valores de las medianas son 0.79 para el grupo TD y 1.06 para el grupo DD. No se encontraron diferencias significativas entre los niños DD y TD para este parámetro ($p > 0.05$ en un test U de Mann-Whitney).

El rango de valores de α_0 en cada grupo se muestra en la Fig. 5.9. Los valores de las medianas son 1.38 para el grupo TD y 1.52 para el grupo DD. La comparación de estos valores indica que la diferencia es estadísticamente significativa ($p < 0.01$ en un test U de Mann-Whitney). Según interpretaciones previas de α_0 [203], se podría pensar que la información proporcionada por este parámetro es redundante si el exponente de Hurst está incluido en el análisis. Por esta razón, se realizó un análisis de correlación encontrando que el coeficiente de correlación de Pearson fue de $r = 0.76$ para los niños TD y $r = 0.54$ para los niños DD.

Para el parámetro de asimetría \mathcal{A} , se encontró que tanto los niños TD como DD presentan comportamientos similares, con porcentajes similares de individuos con sesgo a la derecha ($\mathcal{A} < 0$) y a la izquierda ($\mathcal{A} > 0$).

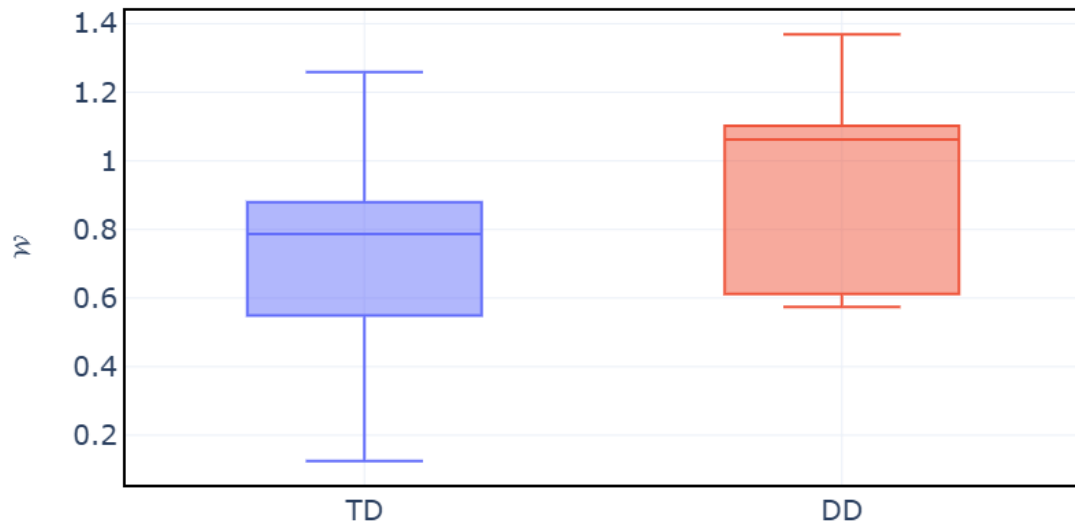


Figura 5.8: Valores del ancho del espectro de singularidades obtenidos para la variación alrededor la tendencia de avance de los movimientos oculares de niños DD y TD durante la lectura.

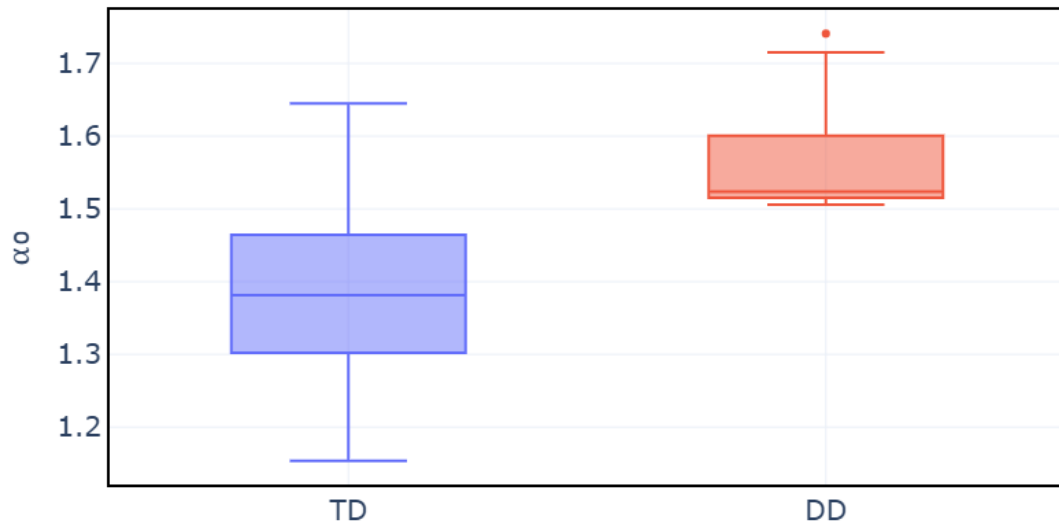


Figura 5.9: Comparación de la fuerza de la singularidad α_0 obtenida para la variación alrededor la tendencia de avance de los movimientos oculares de niños DD y TD durante la lectura.

Para analizar las fuentes de multifractalidad, se repitieron los cálculos utilizando una nueva señal generada al ordenar aleatoriamente los puntos de la señal original. Como se

explicó en Ref. [182], las estructuras multifractales generalmente emergen de una de dos fuentes: una función de densidad de probabilidad amplia o diferencias en las correlaciones a largo plazo de las fluctuaciones pequeñas y grandes. Este procedimiento destruye las correlaciones a largo plazo, por lo que si el comportamiento multifractal se debe a este fenómeno, el ancho del espectro de singularidades debería reducirse [206, 213]. Los resultados encontrados se presentan en la Fig. 5.10.

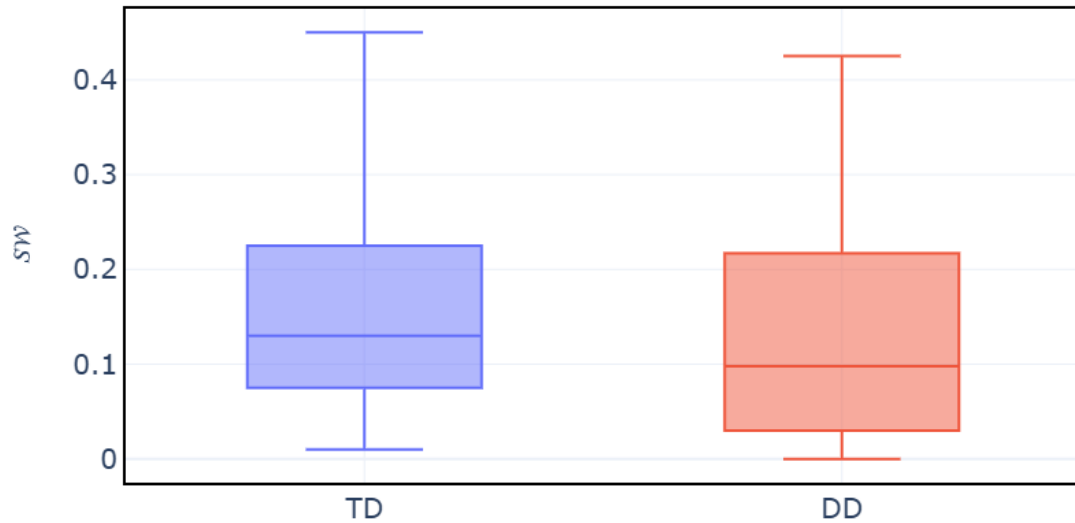


Figura 5.10: Valores del ancho del espectro de singularidades obtenidos para la variación alrededor de la tendencia de avance de los movimientos oculares de niños DD y TD durante la lectura, luego de aleatorizar los puntos de la señal.

Al comparar estos valores con los obtenidos para las variaciones alrededor de la tendencia de avance de los movimientos oculares (Fig. 5.8), se observa que el ancho del espectro de singularidades se reduce drásticamente a valores alrededor de 0.1. Esto sugiere que las series temporales aleatorizadas presentan un comportamiento similar al monofractal, lo que indica que la multifractalidad es consecuencia de la autocorrelación que caracteriza los movimientos oculares durante la lectura.

5.4. Discusiones

El análisis de los datos registrados de los niños DD y TD muestra que los movimientos oculares de ambos grupos presentan estructuras multifractales. Además, se encontraron dos tipos de tendencias fractales en diferentes escalas temporales. Una primera caracterización de los grupos, combinando la velocidad media de lectura v_L junto con el exponente de Hurst \mathcal{H} , no muestra diferencias aparte de la velocidad media de lectura entre los sujetos DD y TD. Al eliminar la tendencia lineal inducida por la tarea de lectura,

es decir, dejando solo las variaciones de la señal alrededor del movimiento dominante hacia adelante, se encontró que las series temporales resultantes, que se denominaron variaciones alrededor de la tendencia de avance, no presentan una estructura multiescala. Por lo tanto, las herramientas generales de MF-DFA pueden usarse para analizar la información contenida en estos datos tanto para DD como para TD, sin la necesidad de implementar un análisis multifractal multiescala, tomando las precauciones necesarias debido al hecho de contar con series temporales cortas.

El exponente de Hurst de las variaciones alrededor de la tendencia de avance proporciona información distintiva para los grupos TD y DD, con valores que presentan diferencias estadísticamente significativas entre ellos. El exponente de Hurst \mathcal{H} puede entenderse como la cuantificación del carácter de la aleatoriedad exhibida en la estructura de la serie temporal a través de una medida de autocorrelación. Los valores resultantes de \mathcal{H} indican que, globalmente, las dinámicas de las variaciones alrededor de la tendencia de avance presentan una correlación de largo alcance antipersistente moderada en los niños TD ($\mathcal{H} < 0.5$), pero su comportamiento no muestra correlación en los niños DD ($\mathcal{H} \sim 0.5$).

Sin embargo, aunque el exponente de Hurst contiene información relevante para caracterizar series temporales con dinámicas no lineales, una sola dimensión fractal no puede describir completamente las señales estudiadas. Por lo tanto, un análisis multifractal permite caracterizar la gama de diferentes dimensiones fractales con las que se asocia la función $f(\alpha)$, el espectro multifractal o espectro de singularidades. Esta función involucra tres parámetros relevantes: α_0 , \mathcal{W} y \mathcal{A} .

Para asegurar que la multifractalidad emergente no sea un artefacto debido a la longitud limitada de las series temporales, primero se analizó su autocorrelación. Se encontró que con escalas de hasta 256 puntos, el análisis multifractal cae dentro del rango en el que las señales presentan autocorrelación.

El análisis de α_0 mostró que los lectores DD se caracterizan por valores más altos de este parámetro en comparación con los lectores TD, y la diferencia es estadísticamente significativa ($p < 0.01$). Según discusiones previas sobre los parámetros multifractales [203], valores más bajos de α_0 indican procesos más correlacionados. El análisis de correlación de los índices α_0 y \mathcal{H} mostró una correlación positiva ($r = 0.76$) para los niños TD y ninguna correlación ($r = 0.54$) para los niños DD. Esto indica que α_0 complementa la información proporcionada por el exponente de Hurst.

Tanto α_0 como \mathcal{H} parecen indicar en los sujetos TD una tendencia intermitente a mirar hacia atrás durante la lectura. Esta tendencia no está presente en los sujetos DD, donde el movimiento parece ser ciertamente más aleatorio.

El ancho del espectro \mathcal{W} proporciona una medida del rango de exponentes de Hurst generalizados involucrados en la estructura fractal que caracteriza la señal. Valores más grandes indican estructuras fractales más ricas. Se encontró que las variaciones de los movimientos oculares alrededor de la tendencia de avance en el proceso de lectura pa-

recen presentar una estructura igualmente rica tanto para los niños TD como para los DD.

Los parámetros de asimetría \mathcal{A} capturan la dominancia de los exponentes de Hurst generalizados positivos o negativos. Se encontraron asimetrías similares para las señales correspondientes a los participantes TD y DD.

El análisis realizado permite proponer que es factible caracterizar los movimientos oculares durante la lectura principalmente con la velocidad de lectura v_L , y complementar la información con dos índices que caracterizan las variaciones de los movimientos oculares alrededor de la tendencia de avance: el exponente de Hurst \mathcal{H} y la fuerza de la singularidad α_0 en el cual el espectro de singularidades alcanza su máximo. Así, se obtiene un vector tridimensional

$$C = (v_L, \alpha_0, \mathcal{H}), \quad (5.1)$$

que caracteriza la complejidad de los movimientos oculares durante la lectura en términos de componentes relevantes derivados de los espectros multifractales cuando se elimina la tendencia global. Con esta medida es posible identificar diferencias entre niños TD y DD.

El ancho del espectro \mathcal{W} y el parámetro de asimetría \mathcal{A} no proporcionaron información diferenciadora para el análisis comparativo de los niños TD y DD. Sin embargo, proporcionan información sobre la estructura multifractal de los movimientos oculares que puede ser de interés en otros contextos.

Finalmente, un estudio de las series temporales resultantes de un proceso de aleatorización reveló que tanto para los niños TD como para los DD, la fuente de la multifractalidad (y, en consecuencia, la fuente de las diferencias encontradas entre ellos) es la auto-similaridad de las fluctuaciones de los movimientos oculares alrededor de la tendencia de avance.

5.5. Conclusiones

En este capítulo se presentaron los resultados de un análisis de señales de eye tracking en niños, comparando aquellos con dislexia con aquellos sin dislexia. El objetivo principal fue identificar y caracterizar las propiedades fractales inherentes a estas señales, particularmente aquellas que distinguen comportamientos entre los grupos. Primero, se caracterizaron las estructuras fractales de los movimientos oculares durante la lectura, un fenómeno que no ha sido explorado en profundidad en el análisis de datos de seguimiento ocular o en los procesos de lectura. El examen de los datos crudos permitió discernir distintas velocidades de lectura, lo que arrojó luz sobre cómo cada sujeto navega por el texto. La estructura fractal encontrada no se limita a una sola escala, sino que abarca múltiples escalas de multifractalidad dentro de la señal. En este estudio, se optó por emplear un análisis multifractal tradicional en lugar de un análisis multifractal

multiescala, y se focalizó en el comportamiento de los movimientos oculares en términos de sus variaciones alrededor de la tendencia de avance que caracteriza la tarea de lectura, destacando potencialmente la información más relevante dentro del texto.

Los exponentes de Hurst encontrados para cada grupo presentaron diferencias estadísticamente significativas. Este hecho permite considerar el exponente de Hurst como un posible identificador biológico de las características de lectura de los sujetos evaluados. Al profundizar en el análisis de la multifractalidad, se encontró que el parámetro α_0 también presenta diferencias significativas entre ambos grupos, lo que sugiere que el estudio de la fractalidad podría ser una herramienta poderosa para caracterizar el proceso de lectura.

En resumen, los resultados de este análisis revelan distinciones sustanciales en las características fractales de las series temporales de seguimiento ocular entre niños con y sin dislexia. Como indican muchos estudios, la pérdida de fractalidad se asocia con la presencia de una patología. De acuerdo con estos hallazgos, el presente estudio muestra que los niños con dislexia exhiben una estructura fractal menos compleja (menor correlación a largo plazo y mayor fuerza de la singularidad α_0) en comparación con los niños sin dislexia.

Capítulo 6

Aplicación al estudio del nistagmo infantil

Como se mencionó anteriormente, una de las ventajas que presenta el análisis multifractal es la independencia de la clasificación de los movimientos oculares en fijaciones y sacadas. Esto es particularmente útil en situaciones en las que esta discriminación es dificultosa o imposible de realizar. Uno de estos casos es el estudio de los movimientos oculares de personas que presentan nistagmo.

El nistagmo [33] es una patología que produce movimientos oculares involuntarios, lo que dificulta la realización de tareas visuales. Aunque la detección de esta patología no presenta problemas [33], no existen indicadores objetivos del grado de alteración y, por lo tanto, no es posible medir objetivamente el progreso en el tratamiento o las terapias.

La mayoría de los estudios que utilizan dispositivos de eye tracking consisten en pruebas de laboratorio en las que se le pide al paciente que fije un punto en la pantalla o que siga un objetivo en movimiento (persecución suave) [215, 216, 217, 218]. Estos estudios seleccionan segmentos apropiados de los datos recopilados para centrarse en el reconocimiento de las oscilaciones (formas de onda) del nistagmo, caracterizadas por una fase rápida y una fase lenta dentro de la cual se pueden reconocer los períodos de foveación [215]. En particular, los movimientos oculares de pacientes con nistagmo durante la realización de tareas cognitivas como la lectura no han sido estudiados utilizando tecnologías de eye tracking. Específicamente, no hay estudios que analicen la dinámica de las series temporales asociadas a los movimientos oculares de pacientes con nistagmo.

Por esta razón, en este capítulo se presentan los resultados del estudio de los movimientos oculares de niños con nistagmo infantil en términos de sus propiedades multifractales. Se considera que una comprensión profunda y una caracterización detallada de los movimientos oculares de los pacientes con nistagmo pueden proporcionar elementos objetivos que puedan tenerse en cuenta al diseñar estrategias de intervención o

al evaluar tratamientos para esta patología.

Para este estudio se evaluaron los movimientos oculares de 3 niños y un adulto con nistagmo infantil (NI) durante la realización dos tareas diferentes. La primera consistió en una tarea cognitiva cotidiana, lectura, mientras que la segunda consistió en una tarea de laboratorio, sin demanda cognitiva. Para realizar una comparación se evaluaron 28 niños sin patologías oculares. Del análisis surgen cuatro índices: el exponente de Hurst, la singularidad correspondiente al máximo del espectro de singularidades, la asimetría del espectro de singularidades y la fuerza multifractal, cada uno de los cuales caracteriza un aspecto particular de la dinámica de los movimientos oculares. Estos hallazgos indican que, en comparación con los niños sin patologías, los pacientes con NI presentan valores más bajos en todos los índices. Excepto por la fuerza multifractal, la diferencia en los índices restantes es estadísticamente significativa.

Los biomarcadores obtenidos del análisis multifractal de series biomédicas han demostrado ser efectivos para detectar patologías neurológicas mediante técnicas de aprendizaje automático [219]. El uso de índices derivados del estudio de los movimientos oculares en algoritmos de clasificación o agrupamiento es una estrategia de análisis cuyo uso se ha incrementado en los últimos años. Por un lado, estos biomarcadores proporcionan información fundamental sobre las respuestas de los individuos a diferentes estímulos, ofreciendo nuevas oportunidades para clasificar, agrupar o predecir comportamientos o estrategias [220]. Por otro lado, la forma relativamente natural y no invasiva en la que se pueden obtener estos biomarcadores, los ubica en una posición privilegiada para ser utilizados en el estudio de una gran cantidad de aspectos de la salud y el comportamiento humano.

Para probar si la caracterización de los pacientes con NI en términos de índices de multifractalidad permite distinguirlos de los niños sin patologías, se realizó un análisis de agrupamiento no supervisado y se clasificaron a los sujetos utilizando técnicas de agrupamiento supervisado. Los resultados indican que estos índices efectivamente caracterizan de manera distintiva los movimientos oculares de los pacientes con NI.

6.1. Descripción de la patología

El nistagmo se define por oscilaciones rítmicas e involuntarias de los ojos. Por lo general, este movimiento excesivo reduce la agudeza visual debido a la inestabilidad de la imagen retinal [33]. El nistagmo puede clasificarse en nistagmo congénito (nistagmo infantil), que aparece en los primeros 6 meses de vida, o adquirido, que puede ocurrir en cualquier momento posterior. El nistagmo infantil (NI) puede estar asociado con albinismo, privación visual en la primera infancia (cataratas congénitas, nistagmo latente), enfermedades de la retina, baja visión, hipoplasia del nervio óptico, distrofias retinales o idiopático [33, 221, 222, 223, 224]. El nistagmo adquirido puede estar relacionado con enfermedades de la mielina central, como la esclerosis múltiple, trastornos cerebelosos, enfermedad vestibular, síndrome de temblor ocular palatal, entre otras, y tumores

o toxicidad por drogas [225, 226, 227, 228].

Aunque en algunos casos el nistagmo puede ser asintomático [229], los pacientes con nistagmo comúnmente presentan deterioro visual debido a la visión borrosa causada por la oscilopsia discapacitante, lo que impide que la imagen de un objeto se mantenga estable en la fóvea, induciendo un impacto psicológico, social y en la calidad de vida significativo, especialmente en los pacientes con nistagmo adquirido [229, 230].

El nistagmo se confirma clínicamente mediante la observación directa de los ojos o mediante el registro de los movimientos oculares con técnicas como la electrooculografía, la bobina de búsqueda escleral, dispositivos de seguimiento ocular por video u otros dispositivos [33]. Se pueden identificar muchas propiedades para caracterizar el nistagmo [231, 215], tales como: el plano de movimiento (horizontal, vertical, torsional o una combinación) [232]; amplitud de movimiento; frecuencia; forma de onda [227, 229]; conjugación (diferencias en los movimientos entre ambos ojos); periodos de foveación (periodos de baja velocidad que permiten que la fóvea reciba información) y otros [226, 232, 233]. Se han propuesto diferentes modelos, métricas y algoritmos (NAF, NAFX [215] y NOFF [218]) para describir y evaluar los mecanismos que producen el nistagmo, su dinámica o morfología de la forma de onda y los efectos del tratamiento, generalmente basados en la desviación estándar, la ganancia, las frecuencias y la precisión de las sacadas [231, 215, 218, 217]. Sin embargo, estas propuestas no se han implementado en la práctica clínica para facilitar la clasificación o evaluación del nistagmo, probablemente porque requieren una calibración cuidadosa y precisa del dispositivo de seguimiento ocular [215, 218], lo cual es particularmente difícil en los pacientes con nistagmo infantil [218, 217]. Además, la caracterización del nistagmo durante las actividades cotidianas también puede ser de interés para evaluar formas adecuadas de tratamiento. Por lo tanto, nuevos enfoques para describir el nistagmo podrían ser útiles y necesarios para poder caracterizarlo durante tareas simples como la lectura. El proceso de lectura se ha descrito en base a herramientas de eye tracking en sujetos sanos, tanto jóvenes como adultos, y se reconoce como una secuencia altamente consistente de fijaciones y sacadas [234]. Las personas con nistagmo son capaces de dominar el proceso de lectura incluso con la superposición de movimientos oculares involuntarios [235, 236]. Por lo tanto, es de gran interés comparar el comportamiento de los sujetos con y sin nistagmo durante la lectura debido a la sofisticación del proceso realizado por los pacientes con nistagmo para lograr la adquisición y procesamiento de la información durante la lectura.

Hasta la fecha, los estudios de movimientos oculares durante la lectura se han llevado a cabo en pacientes con nistagmo infantil con el fin de analizar las diferencias observadas con diferentes orientaciones del texto y con idiomas distintos al español [236, 237, 238]. En este capítulo, se presenta un análisis de los movimientos oculares de niños con nistagmo infantil durante la lectura. El propósito de este estudio es proponer un nuevo método para cuantificar el nistagmo utilizando registros de eye tracking recolectados durante una tarea de lectura simple de una manera fácil, económica y objetiva que podría ser implementable en la práctica clínica para evaluar a pacientes con nistagmo infantil y adquirido, con el potencial de ser utilizado en ensayos clínicos para cuantificar

diferencias en los tratamientos. El método presentado aquí se basa en un texto escrito en español, pero podría extenderse fácilmente a otros idiomas.

6.2. Participantes y experimentos

El experimento se llevó a cabo en el Instituto Universitario de Oftalmobiología Aplicada (IOBA) de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Valladolid (España). Todos los registros fueron realizados por el mismo experimentador siguiendo el mismo protocolo. Participaron voluntariamente en el experimento 3 niños (6-7 años) y un adulto (48 años) diagnosticados con NI, y un grupo de comparación (GC) de 28 niños (6-7 años) sin patologías oculares. La inclusión de un adulto tiene como objetivo verificar que los resultados encontrados reflejan efectivamente características del nistagmo. La evaluación de los niños en tareas como las realizadas en este estudio generalmente presenta dificultades, ya que requieren que el sujeto evaluado se mantenga relativamente quieto, atendiendo a la tarea de manera sostenida durante algún período de tiempo. En la evaluación de adultos no existen tales dificultades. Por lo tanto, encontrar que un adulto con IN presenta características comparables a las encontradas en niños con IN permite concluir que los índices analizados capturan información sobre el NI y no son el resultado de alteraciones en el desarrollo de la tarea. Además, los pacientes con NI desarrollan estrategias para reducir el impacto de los movimientos oculares involuntarios, logrando un rendimiento prácticamente normal en tareas visuales tan complejas como la lectura [239, 236]. Por lo tanto, si un adulto que ha desarrollado completamente estas estrategias se asemeja más (en términos de los índices analizados) a los niños con NI que al GC, entonces se refuerza la hipótesis de que estos índices proporcionan información sobre la presencia de NI en los movimientos oculares registrados.

El experimento consistió en dos etapas. En primera instancia, llamada test de lectura, se les solicitó a los participantes que leyeran en voz alta un texto simple (82 palabras) en su lengua materna (Español). En la Fig. 6.1 se muestra el texto utilizado. Para la segunda etapa, denominada test de trayectorias, se pidió a los participantes que siguieran con la mirada un conjunto de 6 trayectorias predeterminadas: tres curvas de Lissajous con relación de períodos 1 : 1 y diferencias de fase $\alpha = 0, \pi/4, \pi/2$, y tres con relaciones de períodos 1 : 2, 2 : 3 y 3 : 4 y diferencia de fase fija $\alpha = \pi/2$. Estas trayectorias se muestran en la Fig. 6.2. En el experimento se mostraron secuencialmente del panel A al panel F, siguiendo orden alfabético. Los participantes se sentaron a 60 cm de distancia del mismo monitor de 15" (1920 x 1080 píxeles) de una laptop Lenovo con Windows 10 Pro (Intel Core i5 7200 CPU: 2.5 GHz, RAM 8GB y 64 bits) en el cual se mostraron las imágenes. Los registros binoculares de los movimientos oculares durante el experimento se realizaron utilizando un eye tracker Tobii Pro (Tobii AB, Suecia) a una frecuencia de muestreo de 90 Hz en todos los casos.

Se obtuvo el consentimiento informado de cada sujeto o de su tutor legal después de que el Comité de Ética en Ciencias Humanas del Hospital Clínico Área-Este de la Univer-

El colibrí o picaflor es un avecita asombrosa. Tiene características que la diferencian de otras aves: su tamaño, el colorido de sus plumas que refleja los colores del arco iris y la forma de volar frente a las flores.

Siempre despertó la curiosidad y la simpatía de las personas. La gente de campo cree que es un pájaro sagrado, protegido por Dios, quien lo utiliza como mensajero de buenas noticias. Por eso, los paisanos respetan su vida, su nido y sus pichones.

Figura 6.1: Texto utilizado en la primera etapa del experimento.

sidad de Valladolid (Sanidad de Castilla y León - SACYL, España) otorgara la aprobación del estudio. Todos los sujetos fueron tratados en total acuerdo con la Declaración de Helsinki.

6.3. Datos experimentales

Los niños con NI que participaron en este estudio fueron evaluados repetidamente durante un año, por lo que se obtuvieron 15 registros de movimientos oculares de niños con NI. Los datos registrados son series temporales bidimensionales $\{(x_i, y_i)\}$ que corresponden a la posición de la mirada en la pantalla (un promedio entre la posición del ojo derecho y el ojo izquierdo). x_i, y_i son las coordenadas normalizadas de la posición horizontal y vertical, respectivamente.

A partir de la posición de la mirada se derivó su velocidad, calculada en cada punto como la relación entre el desplazamiento y el tiempo desde un punto al siguiente. Se utilizó una media móvil centrada de tres puntos para suavizar los datos resultantes, y finalmente se obtuvieron para el análisis dos series temporales que caracterizan la velocidad: la componente horizontal (v_x) y la componente vertical (v_y). En este estudio se utilizó la velocidad de los movimientos oculares debido a que se ha demostrado que esta característica provee información distintiva en el estudio de pacientes con NI.

Al registrar los movimientos oculares en niños, especialmente en niños con NI, parte de la señal puede perderse. Los puntos registrados con una variación de tiempo superior a 35 ms indican que el eye tracker fue incapaz de detectar la posición de la mirada. Tales situaciones fueron analizadas cuidadosamente, encontrando que ninguno de los registros tiene más del 5% de los puntos con este problema. Para no comprometer el estudio multifractal de la velocidad, esos puntos fueron eliminados de las series temporales.

Para dar una idea visual de las series temporales estudiadas, se muestra en la Fig. 6.3 la componente horizontal de la velocidad v_x para un niño del GC (panel A), el adulto con NI (panel B) y un niño con NI (panel C), realizando la segunda etapa del experimento. Una inspección visual permite inferir que la velocidad de los movimientos oculares

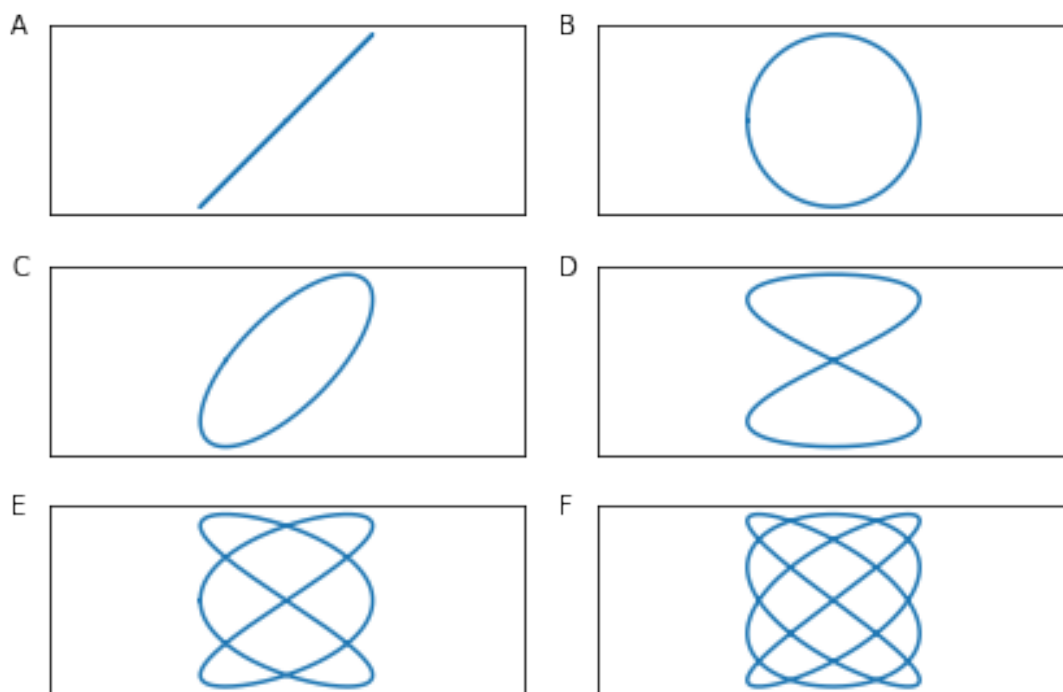


Figura 6.2: Curvas de Lissajous mostradas en la pantalla durante la segunda etapa del experimento.

presenta un comportamiento diferente en los niños con NI con respecto a los individuos del GC. Se podría decir que la velocidad horizontal del GC (panel A) toma predominantemente valores pequeños, con la aparición esporádica y regular de valores altos. Este es el comportamiento típico de la velocidad de los movimientos oculares de los niños en el GC en este experimento: la mirada permanece mayormente quieta en cada fijación, por lo que la velocidad es muy cercana a cero, y las sacadas aparecen regularmente, en su mayoría cortas y de tamaño similar, lo que permite el desplazamiento de una posición a la siguiente, y provoca picos más o menos similares en la velocidad. En contraste, los movimientos oculares en pacientes con NI presentan una estructura diferente de velocidades bajas y altas. Esta patología no permite que el ojo permanezca quieto durante mucho tiempo en la misma posición, lo que produce valores de velocidad que están más homogéneamente distribuidos entre los valores mínimos típicos de las fijaciones y los valores máximos asociados con las sacadas. Tal es el comportamiento observado en el panel C de la Fig. 6.3. El adulto (panel B) puede verse como un comportamiento intermedio entre los dos descriptos. Como se mencionó anteriormente, la razón de este comportamiento es que, en general, los pacientes con NI desarrollan estrategias para controlar los movimientos involuntarios producidos por el nistagmo. De esta manera, llegan a la adultez con movimientos oculares más similares a los de los sujetos sin la patología. Se observan comportamientos similares en la componente vertical de la velocidad.

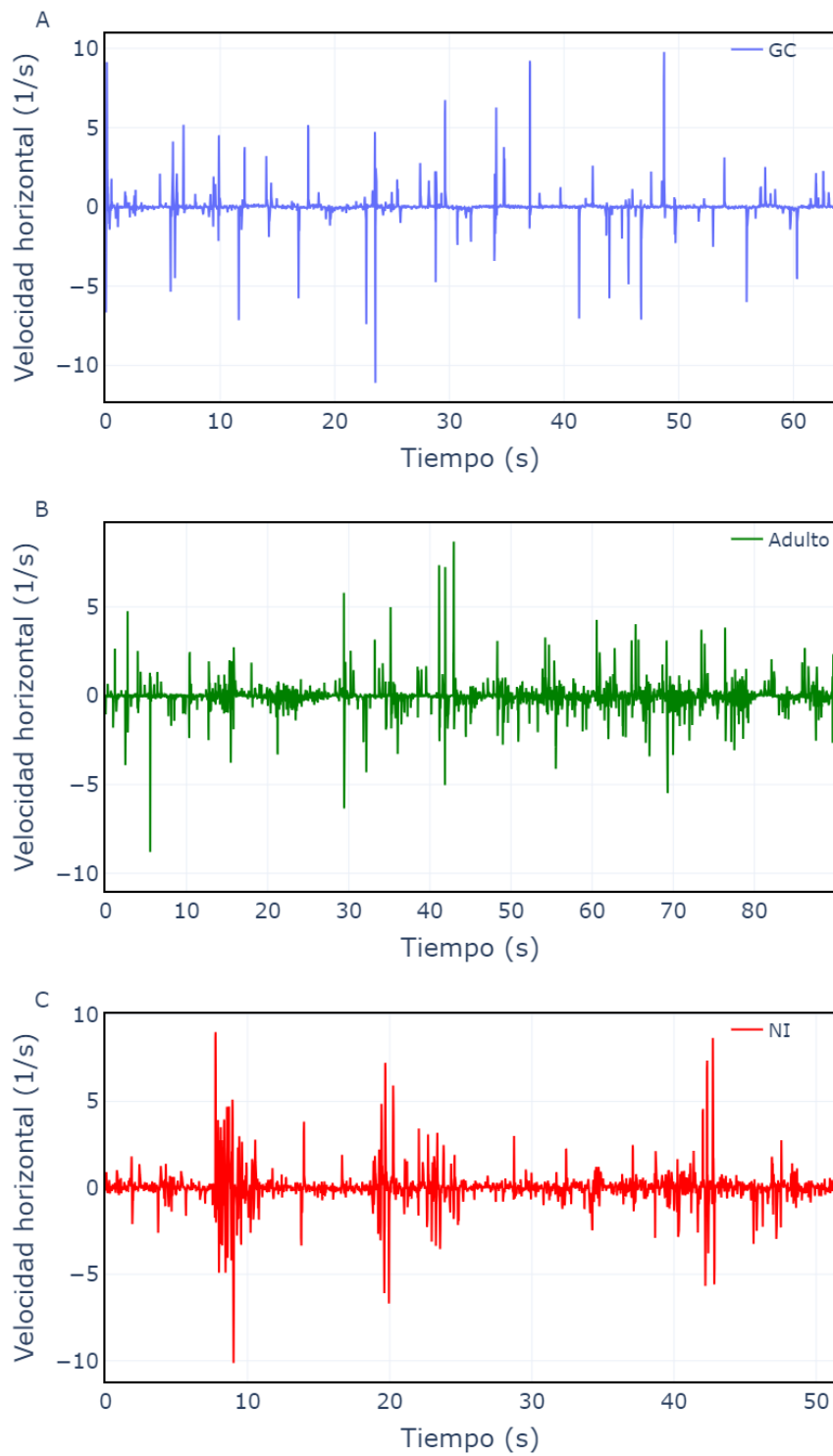


Figura 6.3: Ejemplos de velocidad horizontal en función del tiempo para un niño del GC (A), el participante adulto (B) y un niño con NI (C) durante la realización del test de trayectorias.

6.4. Resultados

6.4.1. Descripción estadística de los datos registrados

Los movimientos oculares de los pacientes con NI presentan características diferentes, en comparación con los sujetos sanos. En los pacientes con NI, los movimientos lentos son menos frecuentes que en el grupo de comparación, debido a la dificultad para mantener la mirada en la misma posición. Esto se ilustra en la Fig. 6.4 donde se presentan histogramas normalizados de la magnitud de la velocidad (rapidez) de los movimientos oculares de cada grupo, durante la realización de la segunda etapa del experimento.

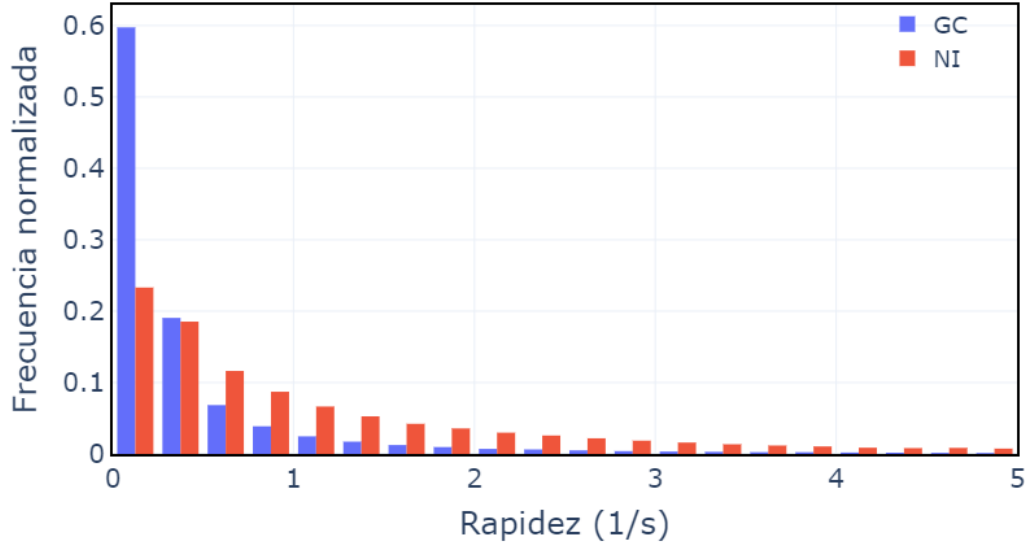


Figura 6.4: Histograma normalizado de frecuencias de rapidez de los movimientos oculares de pacientes con NI y participantes del GC.

Para cuantificar estas diferencias se definieron dos índices. El primero, denominado *IndS*, es el valor del percentil 85 de las velocidades promedio dado por $\bar{v}_i = \frac{1}{5} \sum_{j=-2}^{+2} v_{i+j}$, donde $v_i = \frac{\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + (y_{i+1}-y_i)^2}}{t_{i+1}-t_i}$.

El segundo índice, denominado *indF*, se definió como la suma de la desviación estándar de la posición con respecto a una media móvil centrada de 21 puntos consecutivos. Esto es:

$$IndF = f_x + f_y = \sqrt{\sum_{i=10}^{N-10} \frac{(x_i - \bar{x}_i)^2}{N-20}} + \sqrt{\sum_{i=10}^{N-10} \frac{(y_i - \bar{y}_i)^2}{N-20}}, \quad (6.1)$$

donde $\bar{x}_i = \frac{1}{21} \sum_{j=-10}^{+10} x_{i+j}$ e $\bar{y}_i = \frac{1}{21} \sum_{j=-10}^{+10} y_{i+j}$ definen la media móvil. Este índice propuesto mide la diferencia entre los datos registrados y la trayectoria promedio. *IndF* es mayor cuando los movimientos oculares presentan cambios abruptos y erráticos, como ocurre en los pacientes con NI.

Los valores obtenidos para estos índices resultan ser mayores para los participantes con NI, cuando se comparan con los sujetos sanos. Esto puede observarse en la Fig. 6.5 y la Fig. 6.6, donde se muestran los diagramas de caja correspondientes a los valores de los índices obtenidos para todos los participantes, agrupados en NI y GC, y para cada test. El símbolo X en la figura indica los valores de los índices correspondientes al adulto con NI. El segmento central en las cajas corresponde al valor de la mediana de los índices en cada grupo. Se realizó un test U de Mann-Whitney para estudiar si las diferencias entre los índices obtenidos, visualmente observables, son estadísticamente significativas. Se encontró que, efectivamente, estas diferencias observadas son significativas ($p < 0.01$) en todos los casos, a excepción de *IndF* en el test de lectura. La tabla 6.1 sintetiza los valores de las medianas y los p-valores obtenidos en cada caso.

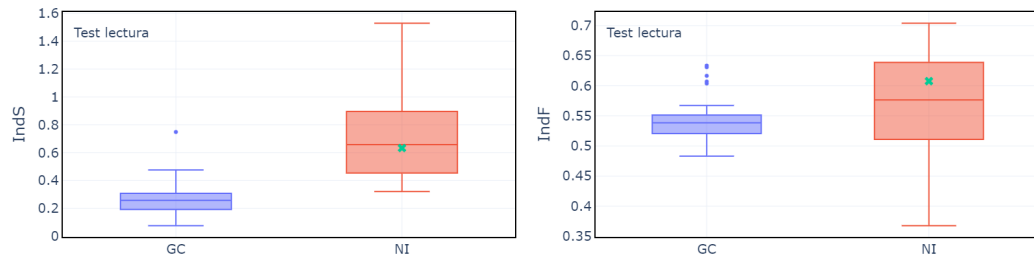


Figura 6.5: Valores de los índices propuestos para los pacientes con NI y los participantes del GC correspondientes al test de lectura. El símbolo X indica el valor obtenido para el adulto con NI.

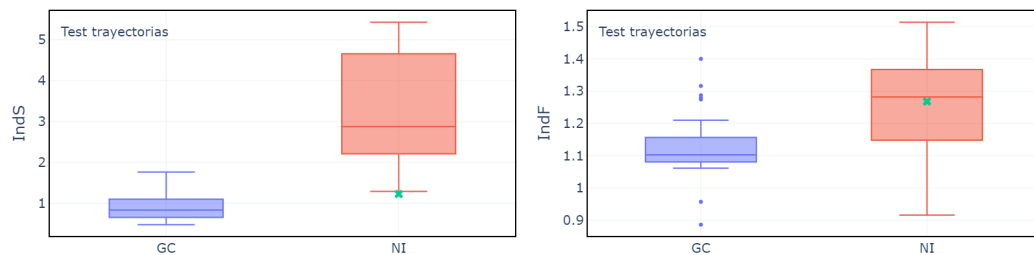


Figura 6.6: Valores de los índices propuestos para los pacientes con NI y los participantes del GC correspondientes al test de trayectorias. El símbolo X indica el valor obtenido para el adulto con NI.

Tabla 6.1: Valores de las medianas de los índices propuestos, $IndS$ y $IndF$, para los participantes con NI y del GC

		Mediana	$p^{(*)}$
		$IndS$	
$Test L$	IN	0.66	< 0.01
	CG	0.26	
$Test T$	IN	2.88	< 0.01
	CG	0.83	
		Mediana	$p^{(*)}$
		$IndF$	
$Test L$	IN	0.58	= 0.14
	CG	0.54	
$Test T$	IN	1.28	< 0.01
	CG	1.10	

(*) Test U de Mann-Whitney comparando el mismo índice entre grupos.

6.4.2. Exponente de Hurst

El exponente de Hurst clásico \mathcal{H} de cada serie temporal se calculó siguiendo el procedimiento descrito en la sección 4.2. Para obtener el exponente de Hurst generalizado $h(q)$, se calcularon las funciones de fluctuación $F_q(s)$ usando valores de q entre $q_{min} = -10$ y $q_{max} = 10$ con un paso de 0.5. Es decir, se consideraron 41 valores de q : $q = -10, -9.5, -9, -8.5, \dots, 8.5, 9, 9.5, 10$. Este rango de valores se eligió para lograr un comportamiento asintótico definido. Para las escalas s , se utilizaron 37 valores espaciados logarítmicamente entre 8 y 256 puntos, es decir, entre 90 y 2800 ms aproximadamente. Siguiendo las recomendaciones propuestas en Ref. [164], el valor mínimo $s = 8$ se eligió para evitar errores en el cálculo de las fluctuaciones. Para valores pequeños de s , la tendencia puede ser similar a la serie temporal y, por lo tanto, las fluctuaciones ser cercanas a cero, lo que resulta en grandes errores en el espectro multifractal. Además, se recomienda que el valor máximo de s debe elegirse de manera tal de garantizar al menos 10 segmentos en todas las señales. Por esta razón, se utilizó $s = 256$ como el valor máximo de la escala.

En la Fig. 6.7, se grafican las funciones de fluctuación obtenidas para dos de las señales presentadas en la Fig. 6.3, la correspondiente al niño del grupo GC (Fig. 6.3, panel A) y la correspondiente al niño con NI (Fig. 6.3, panel C). Cada línea en el gráfico corresponde a un valor diferente de q , que varía de $q = -10$ a $q = 10$, y su pendiente define el exponente de Hurst generalizado $h(q)$.

A partir de este exponente se obtuvo el espectro de singularidades siguiendo el procedimiento descrito en la sección 4.2. Para ilustrar el espectro de singularidades típico $f(\alpha)$ encontrado en este estudio, se muestra en la Fig. 6.8 los espectros $f(\alpha)$ obtenidos para las dos funciones de fluctuación representadas en la Fig. 6.7. Se puede observar que la función de fluctuación resultante para un niño con IN tiene índices α_0 y \mathcal{W} más

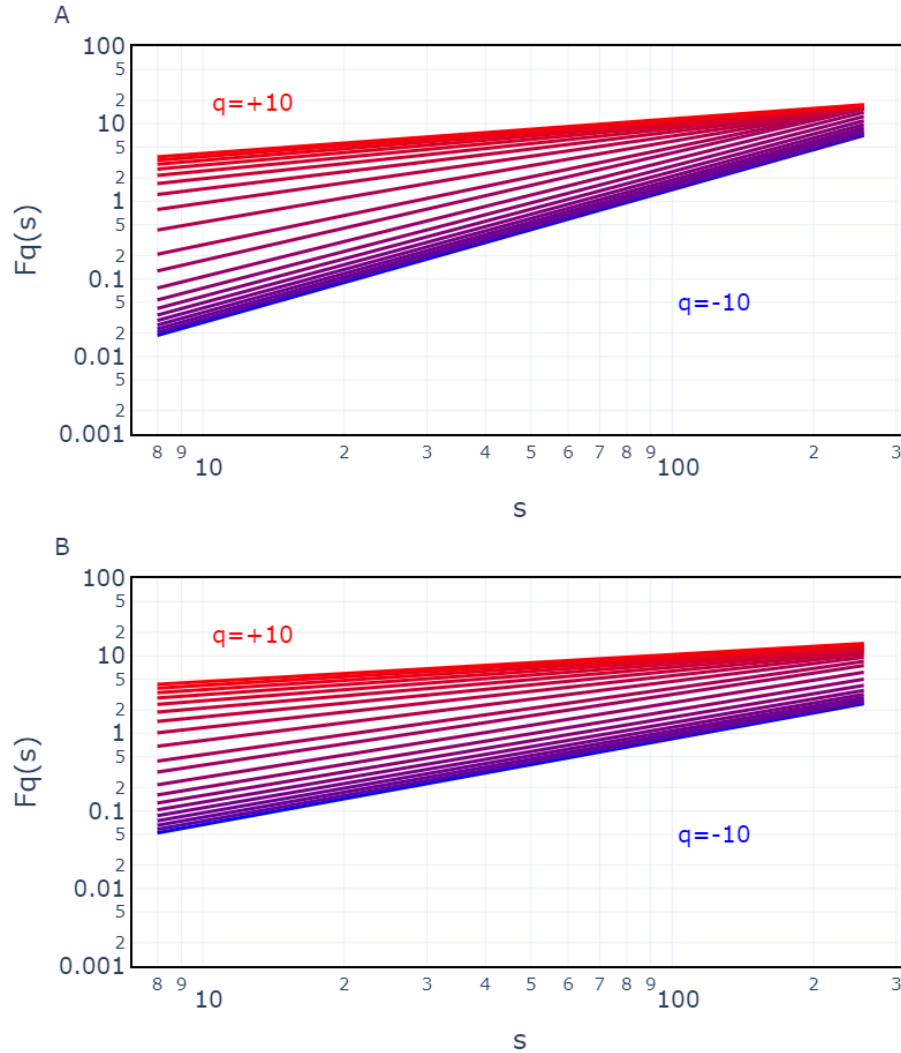


Figura 6.7: Función de fluctuación de la velocidad horizontal correspondiente a un niño del GC (A) y un niño con NI (B) para el test de trayectorias.

bajos en comparación con un niño del GC. En la siguiente sección, se mostrará que estas diferencias caracterizan a los dos grupos.

Como la lectura involucra principalmente movimientos horizontales, se analizó únicamente la velocidad en x para el test de lectura (test L). En el caso del test de trayectorias (test T) se consideraron ambas componentes de la velocidad.

En todos los casos, se encontró que $0.5 < \mathcal{H} < 1$, indicando que las componentes de la velocidad de los movimientos oculares presentan correlación a largo plazo. Esto significa que la velocidad tiene una tendencia persistente en su comportamiento. Este resultado se alinea con las expectativas, dada la naturaleza comprometida de los participantes para cumplir con la tarea asignada.

El comportamiento a largo plazo difiere al comparar ambos grupos. El exponente

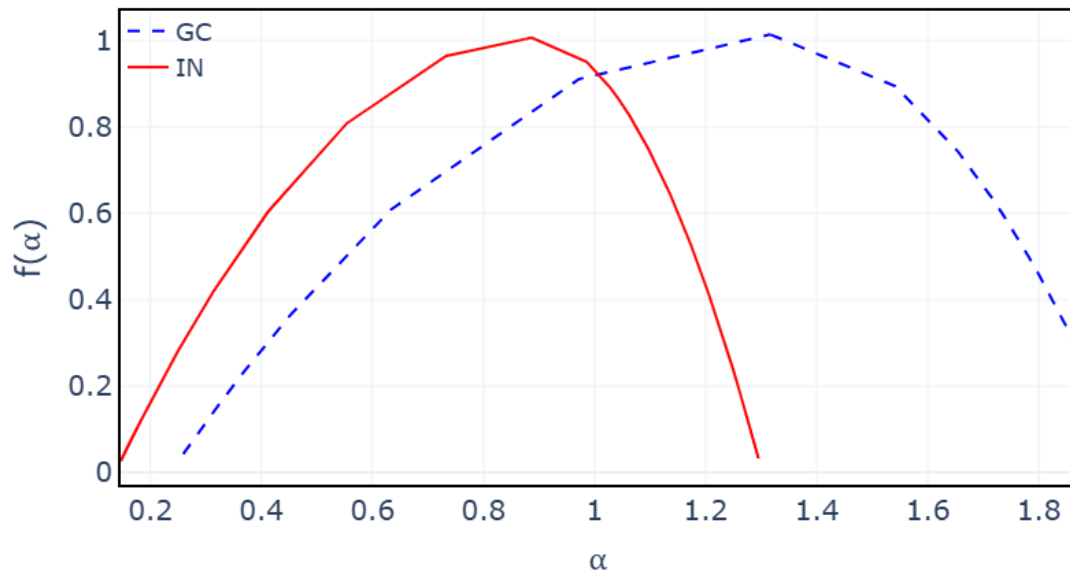


Figura 6.8: Espectro de singularidades obtenido a partir de las funciones de fluctuación de la Fig. 6.7 para un niño con NI y uno en el GC.

de Hurst de los niños con NI presenta valores más bajos en comparación con el GC, revelando que la velocidad de los movimientos oculares de los niños con NI es menos persistente que la de los niños sin esta patología. Esto puede observarse en la Fig. 6.9, donde se muestran los diagramas de caja correspondientes a los valores de \mathcal{H} obtenidos para todos los participantes, agrupados en NI y GC, y para cada componente de la velocidad estudiada en el test de trayectorias, así como para la componente x en el test de lectura. El símbolo X en la figura indica el exponente de Hurst correspondiente al adulto con NI. El segmento central en las cajas corresponde al valor de la mediana de \mathcal{H} en cada grupo.

Se realizó un test U de Mann-Whitney para estudiar si las diferencias, visualmente observables, entre los valores del exponente de Hurst obtenidos para los niños con NI y los valores resultantes para el GC son estadísticamente significativas. Se encontró que, efectivamente, esta diferencia observada es significativa ($p < 0.01$) en todos los casos estudiados. La tabla 6.2 sintetiza los valores de las medianas y los p-valores obtenidos en cada caso.

Interesantemente, los valores de \mathcal{H} obtenidos para el adulto lo sitúan en el mismo rango de valores que el grupo de niños con NI para el test de trayectorias, lo que apoya la conclusión de que la información que el exponente de Hurst está capturando en este caso está relacionada con la presencia de NI.

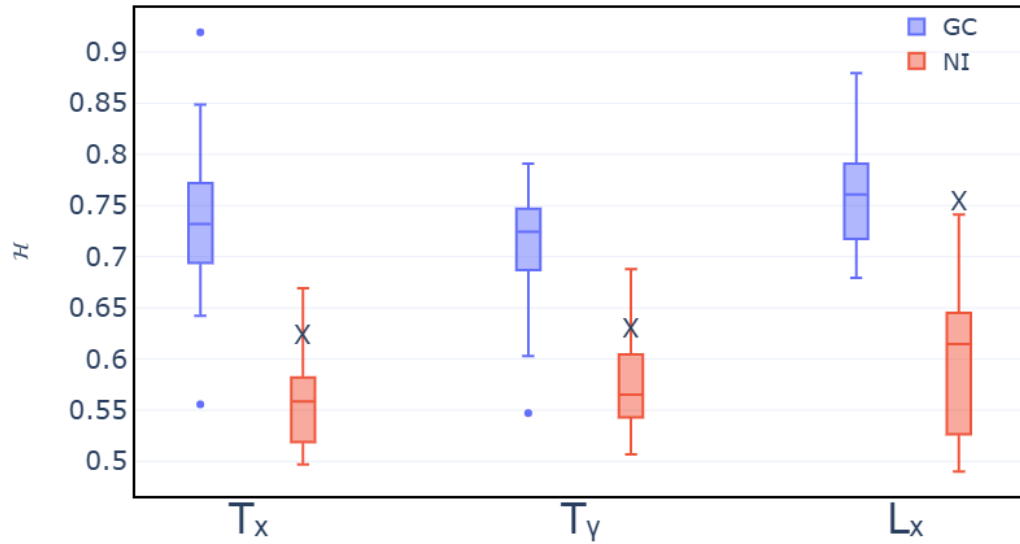


Figura 6.9: Valores del exponente de Hurst obtenidos para la componente horizontal (T_x) y vertical (T_y) de la velocidad de los movimientos oculares de niños con NI y niños del GC, para el test de trayectorias; y la componente horizontal (L_x) para el test de lectura. El símbolo X indica el valor obtenido para el adulto con NI.

Tabla 6.2: Valores de las medianas del exponente de Hurst \mathcal{H} de la velocidad para los participantes con NI y del GC

		Mediana \mathcal{H}	$p(^*)$
$v_x \text{ test } T$	IN	0.54	< 0.01
	CG	0.73	
$v_y \text{ test } T$	IN	0.57	< 0.01
	CG	0.72	
$v_x \text{ test } L$	IN	0.61	< 0.01
	CG	0.76	

(*) Test U de Mann-Whitney comparando la misma componente de velocidad entre grupos.

6.4.3. Espectro multifractal

Para investigar las propiedades multifractales de la velocidad de los movimientos oculares, se calculó el espectro de singularidades de cada señal y se caracterizó en términos de tres índices (α_0 , \mathcal{W} y \mathcal{A}).

Se compararon los valores de las medianas de los índices calculados para cada componente de la velocidad (horizontal y vertical para el test de trayectorias, y solo horizontal para el test de lectura) con el fin de evidenciar las diferencias entre la dinámica

de los movimientos oculares de los pacientes con NI y el GC. La Tabla 6.3 resume los resultados.

Tabla 6.3: Valores de las medianas de la fuerza de la singularidad α_0 , el parámetros de asimetría \mathcal{A} y la fuerza multifractal \mathcal{W} del espectro de singularidades de la velocidad para los participantes con NI y del GC

		Mediana α_0	$p(^*)$
v_x test T	IN	0.81	< 0.01
	CG	1.23	
v_y test T	IN	0.80	< 0.01
	CG	1.18	
v_x test L	IN	0.83	< 0.01
	CG	1.11	
		Mediana \mathcal{W}	$p(^*)$
v_x test T	IN	1.30	< 0.05
	CG	1.50	
v_y test T	IN	1.24	= 0.23
	CG	1.38	
v_x test L	IN	1.28	< 0.01
	CG	1.44	
		Mediana \mathcal{A}	$p(^*)$
v_x test T	IN	-0.09	< 0.01
	CG	0.27	
v_y test T	IN	0.04	< 0.01
	CG	0.32	
v_x test L	IN	-0.07	< 0.05
	CG	0.11	

(*) Test U de Mann-Whitney comparando la misma componente de velocidad entre grupos.

La fuerza de la singularidad α_0 presenta, globalmente, valores superiores a 1 para los niños del grupo GC y es inferior a 1 para los niños con NI. Esto se ilustra en los diagramas de caja en la Fig. 6.10. La comparación de los valores de las medianas en ambos grupos indica que la diferencia en estos valores es estadísticamente significativa ($p < 0.01$ en un test U de Mann-Whitney).

La fuerza multifractal \mathcal{W} , definida en la Ec. 4.13, también presenta un comportamiento distintivo en los pacientes con NI, como se puede observar en los diagramas de caja de la Fig. 6.11. Los valores obtenidos para los participantes con NI son menores que los obtenidos para el GC, y la diferencia es estadísticamente significativa para la componente horizontal de la velocidad en ambos tests ($p < 0.05$ en un test U de Mann-Whitney). Los sujetos con mayor fuerza multifractal son aquellos que realizan fijaciones (velocidad casi nula) y sacadas (picos regulares en la velocidad) bien distinguibles. Tal

variabilidad en la dinámica del movimiento genera una estructura multifractal más rica, que se refleja en una mayor desviación del comportamiento fractal promedio, una característica capturada por la fuerza multifractal. En los pacientes con NI, los movimientos lentos y rápidos no son tan claramente distinguibles, lo que resulta en una menor desviación de la estructura fractal promedio y, por lo tanto, en una menor fuerza multifractal.

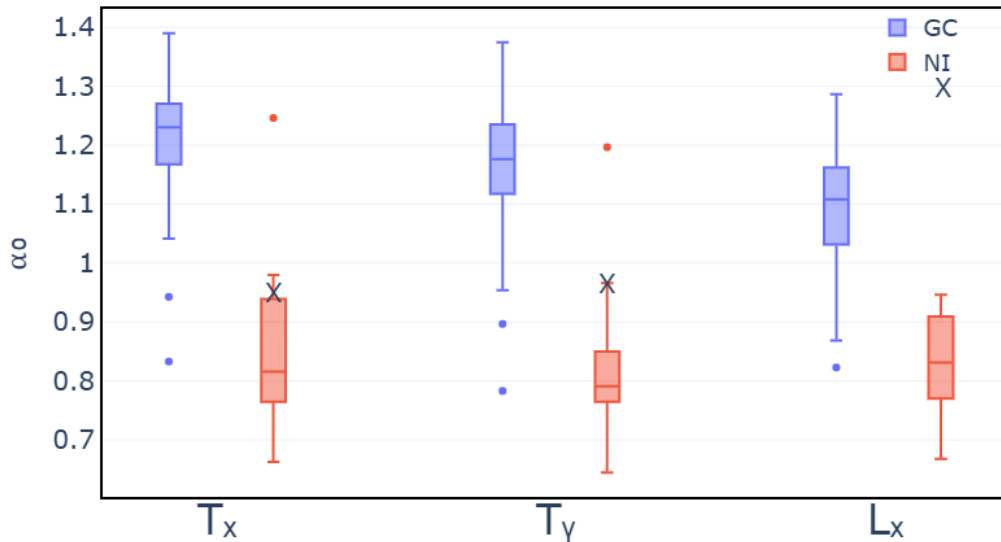


Figura 6.10: Comparación de la fuerza de la singularidad α_0 de la componente horizontal (T_x) y vertical (T_y) entre niños con NI y niños del GC, para el test de trayectorias; y la componente horizontal (L_x) para el test de lectura. El símbolo X indica el valor obtenido para el adulto con NI.

Para los parámetros de asimetría \mathcal{A} definidos en la Ec. 4.14, se encontró que los niños con NI tienen un espectro de singularidades prácticamente simétrico, mientras que los niños en el GC presentan un espectro de singularidades con sesgo a la izquierda. Esto se puede observar en los diagramas de caja de la Fig. 6.12. El sesgo a la izquierda del espectro de singularidades indica que hay un dominio relativo de las fluctuaciones de gran magnitud, correspondientes a los movimientos sacádicos. De manera equivalente, la estructura multifractal es insensible a las fluctuaciones locales de pequeña magnitud. Los pacientes con NI no presentan una predominancia de fluctuaciones grandes o pequeñas.

Como se encontró en el análisis del exponente de Hurst clásico en la sección anterior, el adulto con NI presenta valores de α_0 , \mathcal{W} y \mathcal{A} en el rango de valores de los niños con NI para el test de trayectorias. Para el test de lectura, el adulto presenta valores similares a los obtenidos para los participantes del GC. Esto se debe a que los adultos con nistagmo desarrollan estrategias para reducir el impacto de los movimientos oculares involuntarios en tareas que requieren mayor esfuerzo cognitivo, como la lectura. Estas estrategias no eran necesarias para completar satisfactoriamente el test de trayectorias, resultando en movimientos oculares similares a los niños con NI.

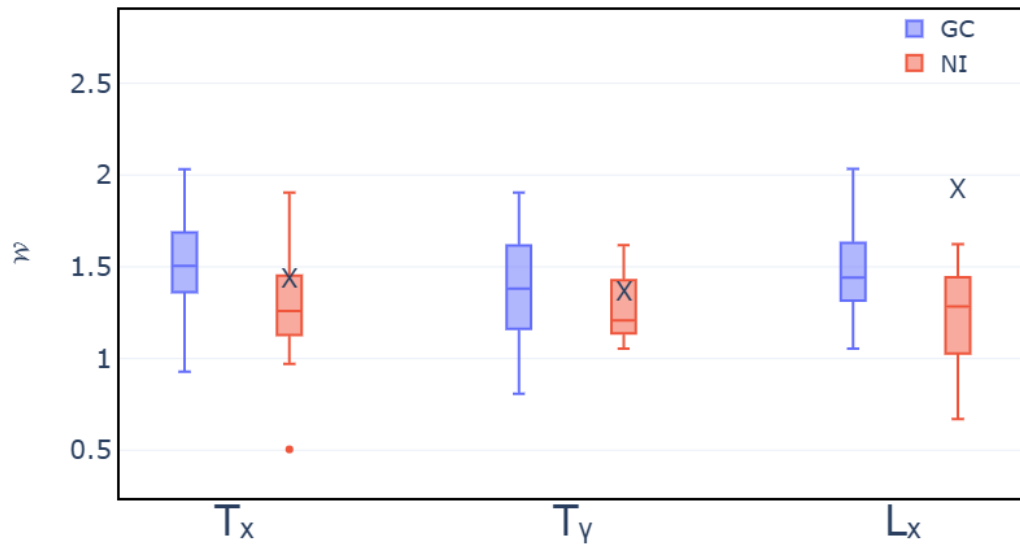


Figura 6.11: Valores de la fuerza multifractal obtenidos para la componente horizontal (T_x) y vertical (T_y) de la velocidad de los movimientos oculares de niños con NI y niños del GC, para el test de trayectorias; y la componente horizontal (L_x) para el test de lectura. El símbolo X indica el valor obtenido para el adulto con NI.

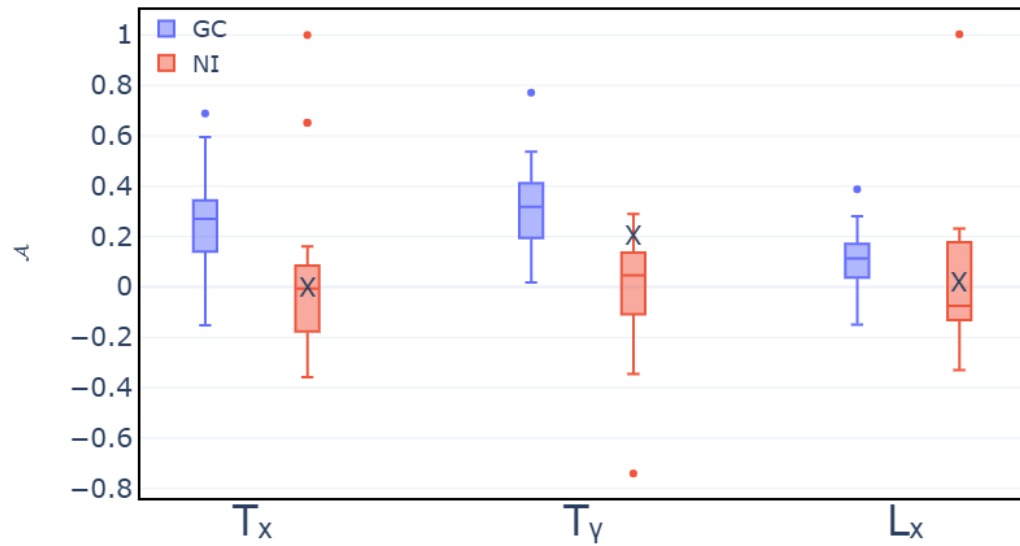


Figura 6.12: Comparación del parámetro de asimetría de la componente horizontal (T_x) y vertical (T_y) entre niños con NI y niños del GC, para el test de trayectorias; y la componente horizontal (L_x) para el test de lectura. El símbolo X indica el valor obtenido para el adulto con NI.

Para analizar las fuentes de multifractalidad, se repitieron los cálculos utilizando una

nueva señal generada al ordenar aleatoriamente los puntos de la señal original. Como se explicó en Ref. [182], las estructuras multifractales generalmente emergen de una de dos fuentes: una función de densidad de probabilidad amplia o diferencias en las correlaciones a largo plazo de las fluctuaciones pequeñas y grandes. El análisis de las series temporales aleatorizadas puede revelar la fuente de multifractalidad, ya que las señales aleatorizadas muestran una multifractalidad más débil que las series originales si están presentes ambas fuentes.

En la Fig. 6.13 se muestran los valores de la fuerza multifractal para las series temporales aleatorizadas (S^W). Se puede observar que este parámetro disminuyó al aleatorizar la señal, lo que significa que ambas fuentes de multifractalidad estaban presentes. La aleatorización causó una diferencia más significativa entre NI y GC, por lo que el comportamiento multifractal debido a la fuente asociada con la función de densidad de probabilidad es diferente en cada grupo. Con respecto a la asimetría (S^A), se encontró que prácticamente desapareció cuando se aleatorizó la señal en el test de trayectorias. Esto significa que el comportamiento de las fluctuaciones pequeñas y grandes es similar (ninguna domina) al considerar la estructura multifractal asociada con la distribución de los valores de velocidad. La multifractalidad debida a la autocorrelación de la señal presenta una predominancia de grandes fluctuaciones en comparación con las pequeñas. Para los pacientes con NI, se observa un ligero desplazamiento hacia la derecha (predominancia de pequeñas fluctuaciones). Los valores obtenidos para la asimetría de las series temporales aleatorizadas se muestran en la Fig. 6.14. Para el test de lectura no se encontraron diferencias significativas al aleatorizar las señales.

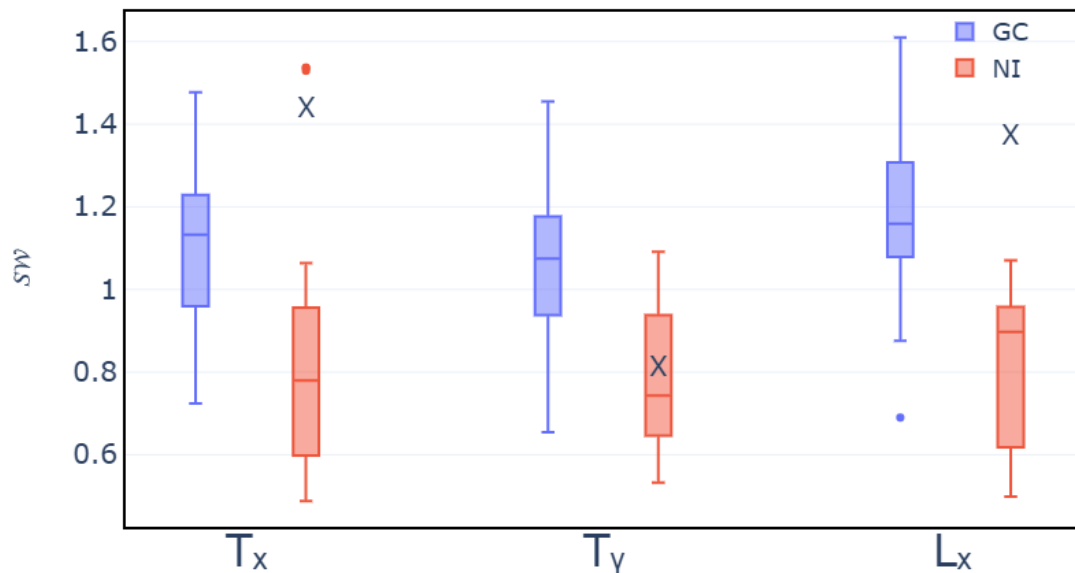


Figura 6.13: Valores de la fuerza multifractal obtenidos para la componente horizontal (T_x) y vertical (T_y) aleatorizadas de la velocidad de los movimientos oculares de niños con NI y niños del GC, para el test de trayectorias; y la componente horizontal (L_x) para el test de lectura. El símbolo X indica el valor obtenido para el adulto con NI.

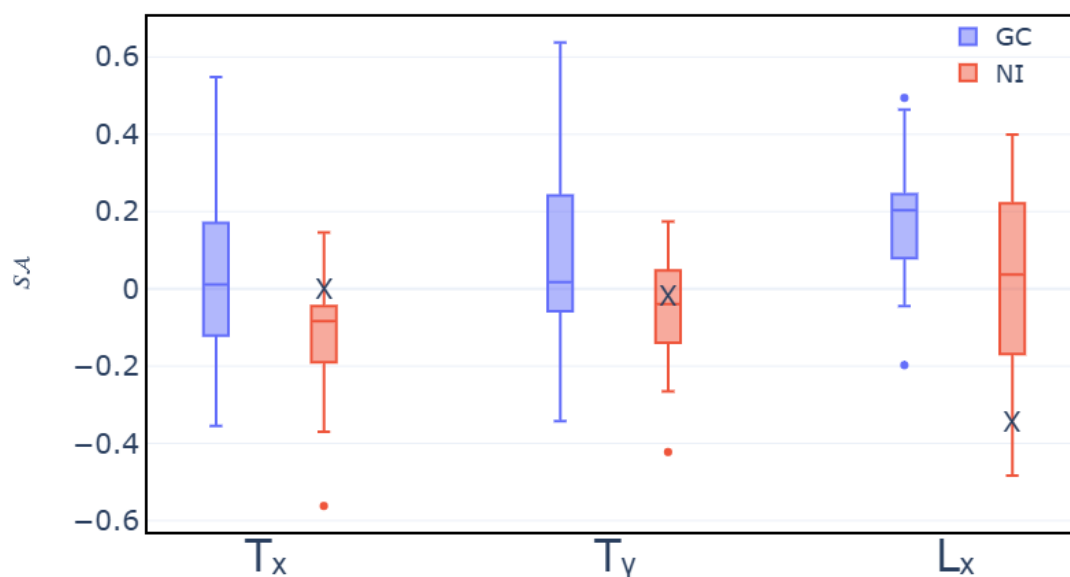


Figura 6.14: Comparación del parámetro de asimetría de la componente horizontal (T_x) y vertical (T_y) aleatorizadas entre niños con NI y niños del GC, para el test de trayectorias; y la componente horizontal (L_x) para el test de lectura. El símbolo X indica el valor obtenido para el adulto con NI.

Para la fuerza de la singularidad α_0 , no se observaron diferencias significativas cuando las señales están aleatorizadas. Se obtiene la misma distinción entre NI y GC para ambos tests en este caso.

6.4.4. Algoritmos de agrupamiento y clasificación basados en propiedades multifractales de los movimientos oculares

Los índices analizados proporcionan amplia información para agrupar los registros de movimientos oculares en el experimento propuesto, permitiendo la categorización en dos grupos: aquellos correspondientes a pacientes con NI y aquellos correspondientes a niños sin patologías. Para demostrar esto, se implementaron cuatro técnicas de clustering no supervisado: una basada en un algoritmo de partición (k-Means), que requiere especificar el número de clusters; un método de clustering basado en ejemplares (propagación de afinidad, AP); un algoritmo basado en densidad (Mean-Shift); y, finalmente, un clustering jerárquico aglomerativo calculado mediante el método de Ward. Además, para evaluar la capacidad predictiva de estos índices, se aplicaron cuatro algoritmos de aprendizaje supervisado [240]: árbol de decisión (DT) y bosque aleatorio (RF), ambos métodos basados en árboles; k-Nearest Neighbors (KNN), basado en proximidad; y, finalmente, Support Vector Machine (SVM) con un kernel lineal. En todos los casos, se utilizó una división 70/30 para entrenamiento y prueba con una opción que mantiene las clases (NI y GC) equilibradas en la porción de entrenamiento. Se reali-

zó una búsqueda en cuadrícula [241] para determinar la configuración óptima de hiperparámetros, empleando validación cruzada de 10 iteraciones. Los detalles de los algoritmos y métricas utilizados están disponibles en la documentación del módulo de Python, Scikit-learn [242]. Todos los cálculos se realizaron utilizando librerías y rutinas de Python.

Tanto las técnicas de aprendizaje supervisado como no supervisado se emplearon utilizando todas las variables obtenidas del análisis estadístico y el análisis multifractal ($IndS$, $IndF$, \mathcal{H} , α_0 , \mathcal{W} y \mathcal{A}) en ambas componentes de la velocidad para el test de trayectorias y en la componente horizontal para el test de lectura. Además, para los métodos supervisados, se utilizaron las etiquetas NI y GC.

A continuación se muestran los resultados obtenidos para el test de trayectorias. Para el test de lectura se obtuvieron resultados equivalentes.

La Tabla 6.4 muestra la matriz de contingencia de los métodos de clustering no supervisado, que coincidieron en tres de los modelos (k-Means con un número de clusters $k = 2$, AP y MS). La matriz de contingencia para k-Means, AP y MS indica que uno de los clusters resultantes incluye 14 registros correspondientes a niños con NI y 2 registros de niños en el GC. El otro cluster agrupa 26 registros de niños en el GC y uno de un niño con NI. La matriz de contingencia para el método Ward indica que uno de los clusters resultantes incluye 13 registros correspondientes a niños con NI y 1 registro de un niño en el GC. El otro cluster agrupa 27 registros de niños en el GC y 2 de niños con NI. Además, se hace explícito el hecho de que el adulto se agrupa junto con los niños con NI en todos los métodos.

Tabla 6.4: Matriz de contingencia para los métodos de clustering no supervisado.

	k-Means - MS - AP			Ward		
	Adulto	NI	GC	Adulto	NI	GC
Cluster 1	1	14	2	1	13	1
Cluster 2	0	1	26	0	2	27

Para comparar y aclarar estos resultados, y aprovechando el hecho de que el diagnóstico está disponible, se calcularon las siguientes métricas de evaluación de clustering: Homogeneidad (H), Completitud (C) y Ajuste de Información Mutua (AMI). Los resultados encontrados se presentan en la Tabla 6.5. Estos valores muestran que todos los clusters tienen la misma pureza (homogeneidad), y cada cluster está compuesto principalmente por la misma clase (en este caso, con el mismo diagnóstico). Dado que la métrica AMI evalúa la similitud entre los grupos originales y el resultado del clustering, nos permite observar que, aunque las matrices de contingencia parezcan iguales, los individuos agrupados en cada cluster por uno de los métodos pueden no ser los mismos que los agrupados por los otros.

Tabla 6.5: Métricas de evaluación para los algoritmos de clustering no supervisado.

	H	C	AMI
k-Means (k=2)	0.64	0.63	0.58
AP	0.64	0.63	0.63
MS	0.64	0.63	0.63
Ward	0.64	0.63	0.62

Los modelos supervisados se repitieron 100 veces, y en la Tabla 6.6 se compara el rendimiento de los modelos en términos de los valores medios de Exactitud (Acc), Precisión (Prec), Sensibilidad (Sens) y F1-Score. Los resultados indican que todos los modelos tienen un alto rendimiento, siendo KNN el que presenta la mejor exactitud.

Tabla 6.6: Métricas de evaluación para los algoritmos supervisado

Classifier	Acc	Prec	Sens	F1-Score
KNN	0.95	0.95	0.95	0.95
SVM	0.92	0.93	0.90	0.91
RF	0.92	0.93	0.91	0.91
DT	0.85	0.87	0.84	0.84

Se dejó el registro del adulto fuera del análisis al principio, con el fin de entrenar el clasificador con datos de niños. Una vez definidos los parámetros de clasificación, se aplicó el clasificador al registro del adulto para probar el modelo. En todos los casos, el adulto fue clasificado como NI.

Para ilustrar cómo las variables están involucradas durante las clasificaciones, se utilizó un árbol de decisión con profundidad no restringida. En la Fig. 6.15, se muestra un árbol de decisión que requirió tres variables para clasificar los registros, que son las más frecuentemente utilizadas para la clasificación durante las 100 repeticiones diferentes (\mathcal{H} 71%, \mathcal{W} 72% y α_0 21%). Este clasificador tiene el menor rendimiento en comparación con los otros algoritmos que utilizan todas las variables (KNN y SVM) y logran mejor precisión (ver Tabla 6.6).

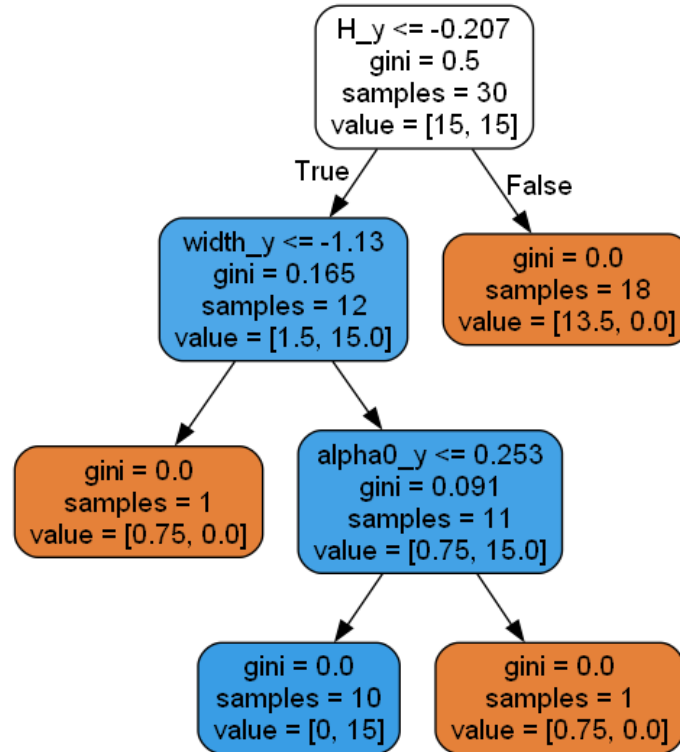


Figura 6.15: Árbol de decisión para clasificar registros de movimientos oculares en NI o GC.

6.5. Discusiones y conclusiones

En este capítulo se presentan los resultados de un estudio sobre la dinámica ocular de niños con nistagmo infantil (NI) en comparación con la de niños sin patologías oculares (GC, grupo de comparación). El enfoque utilizado involucró el uso de metodologías de análisis que permitieron evitar la dependencia explícita en el reconocimiento de sacadas y fijaciones. Para lograr esto, se adoptó un enfoque basado en el análisis multifractal (MF-DFA), partiendo directamente de datos crudos de movimientos oculares. El análisis multifractal es una técnica ampliamente adoptada en diversos estudios de señales biomédicas debido a su capacidad para discernir alteraciones sutiles en las señales [36]. La aplicación de MF-DFA a una serie temporal genera un conjunto de índices, cada uno proporcionando información sobre aspectos específicos de la estructura de los datos: el exponente de Hurst clásico (\mathcal{H}), la fuerza de la singularidad correspondiente al máximo del espectro de singularidades (α_0), la fuerza multifractal (\mathcal{W}) y la asimetría del espectro de singularidades (\mathcal{A}).

En la actualidad existe una literatura limitada que elucida la presencia y las características multifractales en señales de eye tracking. Estos hallazgos no solo confirman la presencia de estructura multifractal en los movimientos oculares durante la realización

de actividades con distinto requerimiento cognitivo, sino que también revelan diferencias en las propiedades multifractales de los sujetos con NI. Particularmente, en comparación con los niños sin patologías, los pacientes con NI presentan valores más bajos de las características estudiadas y la mayoría de las diferencias son estadísticamente significativas. Estos resultados se alinean con investigaciones previas que apoyan la hipótesis de que las dinámicas no lineales de las series temporales biológicas revelan información sobre alteraciones en el sistema, particularmente valores más bajos de propiedades fractales [36].

El exponente de Hurst para los niños con NI registra valores más bajos en comparación con el GC, lo que indica que la velocidad del movimiento ocular en niños con NI es menos persistente que en los niños sin esta patología. Esto revela que los movimientos involuntarios inducidos por el nistagmo introducen una regularidad en la velocidad de los movimientos oculares que se opone a la tendencia natural del movimiento, introduciendo así una forma de anticorrelación inherente en el movimiento.

Una mayor variabilidad a diferentes escalas en la dinámica del movimiento induce una estructura multifractal rica, resultando en una desviación pronunciada del comportamiento fractal promedio. Esta característica distintiva se refleja en la fuerza multifractal. Los hallazgos presentados en este capítulo indican que en individuos con NI la diferencia entre movimientos lentos y rápidos es menos evidente, lo que lleva a una disminución de la desviación de la estructura fractal promedio y, consecuentemente, a una reducción de la fuerza multifractal.

Examinando los parámetros de asimetría A , encontramos que los pacientes con NI no exhiben una dominancia pronunciada de fluctuaciones grandes o pequeñas en la velocidad de los movimientos oculares.

Al emplear técnicas de aprendizaje automático en estos índices, la evidencia empírica apoya su tendencia inherente a formar clusters cohesivos dentro de las cohortes de NI y GC. No obstante, algunos participantes se desvían de este patrón de clustering, exhibiendo disparidades incluso cuando comparten la misma clasificación diagnóstica.

En resumen, los resultados de esta investigación demuestran la robustez del uso de características multifractales como potenciales biomarcadores para evaluar el NI. Esta metodología no solo enriquece la caracterización de la patología, sino que también proporciona un medio eficaz para cuantificar sus características distintivas. Una ventaja importante de esta metodología es que no es necesario clasificar los movimientos oculares en términos de sacadas o fijaciones. Aunque los hallazgos son prometedores, se necesitan más estudios con un grupo de sujetos más extenso y diverso para validar y ampliar estos resultados.

Capítulo 7

Conclusiones

En la presente tesis doctoral se exploraron nuevas metodologías de análisis de movimientos oculares con el objetivo de describir y diferenciar las propiedades dinámicas de las series temporales asociadas a estos movimientos, especialmente en tareas cognitivas como la lectura. Uno de los objetivos principales fue caracterizar las estructuras fractales de los movimientos oculares durante la lectura e identificar aquellas propiedades que permitieran distinguir y cuantificar comportamientos característicos diferentes en grupos de señales correspondientes a distintas poblaciones. Adicionalmente, esta tesis buscó proporcionar elementos objetivos que pudieran tenerse en cuenta al evaluar tratamientos o al diseñar estrategias de intervención para individuos que presentan determinadas condiciones o patologías, centrándose en el estudio de poblaciones de individuos con dislexia e individuos con nistagmo infantil, donde se observan comportamientos atípicos en los movimientos oculares durante la lectura.

Para lograr estos objetivos, se abordaron los siguientes aspectos:

- **Desarrollo de modelos:** Se generaron modelos capaces de simular secuencias de sacadas con diversas características, resultando en señales sintéticas de movimientos oculares útiles para representar una gran variedad de procesos cognitivos.
- **Análisis multifractal:** Se empleó la herramienta de análisis conocida como MF-DFA (multifractal detrended fluctuation analysis) para estudiar las fluctuaciones de los registros de movimientos oculares a partir de la estimación del espectro multifractal de las series temporales obtenidas mediante eye tracking.
- **Aplicación a casos específicos:** Se aplicaron las metodologías desarrolladas al estudio de los movimientos oculares de niños con dislexia y nistagmo infantil, con el fin de identificar patrones y características distintivas en comparación con grupos de control.
- **Cuantificación y diferenciación:** Se obtuvieron métricas que permitieron cuantificar las características globales de las señales en un número reducido de pará-

metros, facilitando su comparación, y se desarrollaron algoritmos de clasificación capaces de diferenciar a los niños con patologías en función de sus movimientos oculares.

A partir de los resultados obtenidos en las investigaciones presentadas en esta tesis, es posible extraer conclusiones generales que consolidan el conocimiento sobre la dinámica ocular y sus implicaciones en diversas condiciones fisiológicas y patológicas.

En primer lugar, se desarrolló un modelo matemático detallado que describe la dinámica del movimiento ocular y la pupila, proporcionando una explicación mecánica para las oscilaciones postsacádicas (PSO). Este modelo, basado en la competencia entre fuerzas inerciales y viscoelásticas dentro del globo ocular, permitió reproducir patrones experimentales observados en diferentes estudios. La capacidad del modelo para describir con precisión los patrones de movimientos sacádicos refuerza la hipótesis de que las oscilaciones no requieren de un mecanismo de retroalimentación neural, sino que pueden explicarse mediante reacciones mecánicas internas al ojo. Por otro lado, se introdujo un modelo que representa el movimiento del globo ocular a partir de un único parámetro. Este enfoque simplificado facilita el análisis de secuencias de movimientos sacádicos, especialmente útil en el estudio de procesos cognitivos.

Alternativamente, se desarrolló un modelo estocástico diseñado para representar los movimientos oculares durante el proceso de lectura. Este modelo considera las amplitudes de las sacadas y los tiempos entre las mismas, representando los movimientos oculares como una Caminata Aleatoria de Tiempo Continuo (CTRW). La dinámica de las fijaciones y sacadas durante la lectura se modeló utilizando distribuciones de tipo lognormal. Este modelo ofrece varias utilidades como simular la variabilidad observada en los movimientos oculares reales durante la lectura, revelar aspectos macroscópicos del comportamiento de los movimientos oculares durante la lectura, obtener información sobre los procesos cognitivos que subyacen a la lectura, y generar señales sintéticas de movimientos oculares que simulan el proceso de lectura. Estas señales sintéticas pueden ser útiles para probar y validar algoritmos de análisis de movimientos oculares, comparar con datos experimentales para evaluar la validez de distintos modelos, estudiar el efecto de diferentes parámetros (como la distribución de las amplitudes de las sacadas y los tiempos de fijación) en la dinámica de la lectura.

En segundo lugar, se implementó una herramienta basada en el análisis multifractal (MF-DFA) para el estudio de señales de eye tracking, lo que permitió caracterizar la complejidad inherente a los movimientos oculares. Se demostró que las propiedades fractales de las señales de lectura no se ven afectadas por la forma específica del movimiento sacádico o el ruido presente en las fijaciones, lo que valida la robustez de esta herramienta en el análisis de dinámicas oculares complejas. Este enfoque se mostró particularmente útil en contextos donde la clasificación tradicional de fijaciones y sacadas es difícil de realizar, como en el caso de personas con nistagmo infantil. La posibilidad de aplicar el análisis multifractal directamente sobre datos crudos de eye tracking representa una ventaja metodológica significativa, al eliminar la necesidad de preprocesamiento extensivo.

A partir del análisis multifractal, se derivó un conjunto de parámetros que permite caracterizar las propiedades dinámicas de la señal. El exponente de Hurst (\mathcal{H}) cuantifica las propiedades de correlación de la señal; la fuerza de la singularidad α_0 indica la singularidad correspondiente al máximo del espectro de singularidades, donde ocurre el comportamiento de escala más dominante; el ancho del espectro de singularidades (\mathcal{W}) mide la fuerza multifractal y caracteriza la complejidad de la serie temporal; la asimetría del espectro de singularidades (\mathcal{A}) indica la dominancia de fluctuaciones grandes o pequeñas en la señal. Se analizaron señales sintéticas generadas con distintas características y se observó que los mismos son capaces de detectar las diferencias sutiles en los movimientos oculares.

Por último, se utilizaron estas herramientas para analizar la dinámica de los movimientos oculares en dos situaciones particulares. Por un lado, se aplicaron las metodologías propuestas para realizar un estudio comparativo entre los movimientos oculares de niños con y sin dislexia, en términos de sus propiedades multifractales. Por otro lado, se utilizaron los parámetros multifractales para estudiar las diferencias en la dinámica de los movimientos oculares de niños con nistagmo infantil.

En el estudio de movimientos oculares durante la lectura, se encontraron diferencias significativas en las características fractales entre niños con dislexia (DD) y niños con desarrollo típico (TD). El análisis se centró en las variaciones alrededor de la tendencia de avance de los movimientos oculares, es decir, las fluctuaciones una vez eliminada la tendencia lineal de lectura de izquierda a derecha. En particular, los niños TD mostraron valores más bajos del exponente de Hurst que los niños DD. Esto indica un cambio hacia un comportamiento antipersistente en los niños TD ($\mathcal{H} < 0.5$), mientras que en los niños DD el comportamiento no muestra correlación ($\mathcal{H} \sim 0.5$). Esta diferencia fue estadísticamente significativa, indicando una distinción en la autocorrelación presente en la señal. Además, los lectores DD se caracterizaron por valores más altos de la fuerza de singularidad α_0 , en comparación con los lectores TD. Esta diferencia también fue estadísticamente significativa. Esto sugiere que los lectores TD muestran una tendencia intermitente a mirar hacia atrás durante la lectura, tendencia que no está presente en los sujetos DD, donde el movimiento parece ser más aleatorio. Un análisis de correlación mostró que α_0 complementa la información proporcionada por el exponente de Hurst.

A partir de estos hallazgos, es posible afirmar que los niños con dislexia exhiben una estructura fractal menos compleja en comparación con los niños con desarrollo típico. Esto puede estar relacionado con sus dificultades de lectura de las siguientes maneras: dificultad en la automatización de la transformación grafema-fonema, menor capacidad para integrar información visual y lingüística, comportamiento más aleatorio y menos estratégico, menor flexibilidad para adaptarse a los requisitos de la tarea.

En el estudio de los movimientos oculares de niños con nistagmo infantil (NI), se realizó un análisis multifractal (MF-DFA) para caracterizar su dinámica, evitando la dependencia en la clasificación de los movimientos oculares en fijaciones y sacadas. Se compararon los resultados con un grupo de comparación (GC) de niños sin patologías

oculares. Los movimientos oculares se evaluaron durante la realización de dos tareas diferentes: una tarea cognitiva cotidiana (lectura) y una tarea de laboratorio sin demanda cognitiva. Los movimientos oculares de los pacientes con NI presentan características diferentes, en comparación con los sujetos sanos. En los pacientes con NI, los movimientos lentos son menos frecuentes que en el grupo de comparación, debido a la dificultad para mantener la mirada en la misma posición. Debido a esto, se encontraron diferencias significativas en los parámetros multifractales de los niños con NI al compararlos con los parámetros para el GC. En particular, los niños con NI presentaron valores más bajos del exponente de Hurst en comparación con el GC, lo que indica que la velocidad del movimiento ocular es menos persistente. Esto revela que los movimientos involuntarios inducidos por el nistagmo introducen una regularidad en la velocidad de los movimientos oculares que se opone a la tendencia natural del movimiento, introduciendo así una forma de anticorrelación inherente en el movimiento. Además, la fuerza de singularidad α_0 presentó valores superiores a 1 para los niños del grupo GC e inferior a 1 para los niños con NI, observándose una clara distinción entre los grupos. Por otro lado, los valores de la fuerza multifractal obtenidos para los participantes con NI fueron menores que los obtenidos para el GC. Esto sugiere que en individuos con NI la diferencia entre movimientos lentos y rápidos es menos evidente, lo que lleva a una disminución de la desviación de la estructura fractal promedio y, consecuentemente, a una reducción de la fuerza multifractal. Por último, los niños con NI mostraron un espectro de singularidades prácticamente simétrico, mientras que los niños en el GC presentaron un espectro de singularidades con sesgo a la izquierda, lo que indica una predominancia relativa de las fluctuaciones de gran magnitud, correspondientes a los movimientos sacádicos. Los pacientes con NI no presentan una predominancia de fluctuaciones grandes o pequeñas.

Este análisis multifractal permitió caracterizar los movimientos oculares de niños con nistagmo infantil, evidenciando diferencias significativas en sus propiedades fractales en comparación con niños sin la patología. Los resultados sugieren que los índices multifractales pueden ser útiles para cuantificar el nistagmo y distinguir entre diferentes poblaciones. A partir de estos parámetros, se realizó un análisis de agrupamiento no supervisado y se clasificaron a los sujetos utilizando técnicas de agrupamiento supervisado. Los resultados indican que estos índices efectivamente caracterizan de manera distintiva los movimientos oculares de los pacientes con NI, demostrando la robustez del uso de características multifractales como potenciales biomarcadores para evaluar el NI. Esta metodología no solo enriquece la caracterización de la patología, sino que también proporciona un medio eficaz para cuantificar sus características distintivas, lo que evidencia el potencial de estos métodos como herramientas biomarcadoras para el diagnóstico y monitoreo de la patología.

Los hallazgos presentados en esta tesis contribuyen a una comprensión más profunda de los mecanismos que regulan el movimiento ocular y su relación con distintas condiciones fisiológicas y patológicas. La combinación de modelado físico, análisis multifractal y técnicas de clasificación automática proporciona un marco integral para el estudio de la dinámica ocular, con aplicaciones tanto en la investigación fundamental

como en el ámbito clínico. En particular, los resultados obtenidos subrayan la importancia de considerar la estructura fractal de las señales de eye tracking como un indicador clave de la función visual y cognitiva, lo que puede tener implicaciones directas en el desarrollo de estrategias terapéuticas y herramientas de evaluación para trastornos de la visión y del aprendizaje.

Por un lado, el éxito del análisis multifractal para diferenciar entre grupos con y sin patologías resalta su potencial como herramienta para el diagnóstico temprano y el seguimiento de intervenciones. Además, la independencia de este análisis con respecto a la clasificación tradicional de los movimientos oculares en fijaciones y sacadas lo convierte en una herramienta valiosa para estudiar poblaciones con movimientos oculares atípicos, como los pacientes con nistagmo. Se ha demostrado que las propiedades multifractales de los movimientos oculares pueden detectar alteraciones sutiles en los estos movimientos, y los biomarcadores obtenidos del análisis multifractal de series biomédicas han demostrado ser efectivos para detectar diversas patologías mediante técnicas de aprendizaje automático.

Por otro lado, el desarrollo de modelos capaces de generar señales sintéticas de movimientos oculares con diversas características y el análisis de estas señales a través de herramientas como el MF-DFA permiten explorar la relación entre diferentes parámetros de los movimientos oculares y los procesos cognitivos subyacentes. Esto puede conducir a una mejor comprensión de los mecanismos que regulan diversos procesos cognitivos como la lectura y a la identificación de posibles biomarcadores para caracterizar trastornos en los mismos.

Aunque los hallazgos son prometedores, el tamaño relativamente pequeño de las muestras, limita la generalización de los resultados y reduce el poder estadístico para detectar diferencias sutiles entre los grupos. Ampliar el número de participantes, tanto en los grupos de dislexia como de nistagmo infantil, permitiría incrementar el poder estadístico de los análisis y reducir el riesgo de falsos positivos. Un tamaño de muestra mayor también facilitaría la identificación de subgrupos dentro de las poblaciones estudiadas y la exploración de la variabilidad individual. Las futuras investigaciones deberían tener en cuenta la heterogeneidad inherente a las poblaciones de disléxicos y pacientes con nistagmo infantil.

Los resultados obtenidos en esta tesis doctoral abren diversas y prometedoras líneas de investigación futura, que podrían profundizar en la comprensión de los movimientos oculares y su relación con procesos cognitivos y patologías. Resulta de interés realizar estudios longitudinales para evaluar la evolución de los movimientos oculares en niños con dislexia y nistagmo infantil a lo largo del tiempo, y determinar cómo los parámetros multifractales pueden predecir la respuesta a intervenciones terapéuticas. Además, es posible extender el modelado y el análisis multifractal de movimientos oculares a otros procesos cognitivos como las habilidades atencionales, así como a otras patologías para identificar patrones característicos y potenciales biomarcadores.

La principal contribución de esta tesis reside en la exploración y aplicación de nue-

vas metodologías de análisis de movimientos oculares, específicamente el análisis multifractal, para describir y diferenciar las propiedades dinámicas de las series temporales asociadas a estos movimientos, particularmente en tareas cognitivas como la lectura. Esta investigación aporta un enfoque innovador que permite cuantificar y caracterizar las estructuras fractales de los movimientos oculares, identificando propiedades que distinguen y cuantifican comportamientos característicos en diferentes poblaciones. Se espera que esta investigación tenga un impacto significativo en el futuro al mejorar el diagnóstico y seguimiento de trastornos del aprendizaje y patologías oculares, permitir el desarrollo de intervenciones más personalizadas, avanzar en la investigación sobre el modelado y la caracterización de procesos cognitivos, así como generar aplicaciones en otros campos.

Para concluir, esta tesis ha demostrado la relevancia de los enfoques interdisciplinarios en el estudio de los movimientos oculares, proporcionando modelos y herramientas innovadoras que mejoran la caracterización y comprensión de la dinámica ocular en diversos contextos. Esta investigación ha requerido la integración de conocimientos y herramientas de diversas disciplinas, como la física, la estadística, la neurociencia y el aprendizaje automático. Esta interdisciplinariedad ha sido, sin duda, uno de los pilares fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

Los resultados obtenidos no solo validan la aplicabilidad de estas metodologías en estudios experimentales, sino que también abren nuevas perspectivas para su implementación en entornos clínicos y educativos. Si bien esta tesis se ha centrado en el desarrollo de herramientas metodológicas y en la identificación de biomarcadores, el objetivo final del grupo de investigación es aplicar estos conocimientos para mejorar el diagnóstico y el tratamiento de trastornos del aprendizaje y patologías oculares. En este sentido, es fundamental establecer una colaboración estrecha entre investigadores, clínicos y educadores para transferir los resultados de la investigación al ámbito práctico. Se espera que los resultados obtenidos en esta tesis sirvan de base para futuras investigaciones y contribuyan a mejorar la calidad de vida de las personas afectadas.

Bibliografía

- [1] B. Luna, K. Velanova, and C. F. Geier, “Development of eye-movement control,” *Brain and Cognition*, vol. 68, pp. 293–308, dec 2008.
- [2] J. A. Sweeney, Y. Takarae, C. Macmillan, B. Luna, and N. J. Minshew, “Eye movements in neurodevelopmental disorders,” *Current opinion in neurology*, vol. 17, no. 1, pp. 37–42, 2004.
- [3] A. London, I. Benhar, and M. Schwartz, “The retina as a window to the brain—from eye research to cns disorders,” *Nature Reviews Neurology*, vol. 9, no. 1, pp. 44–53, 2013.
- [4] F. Z. Javaid, J. Brenton, L. Guo, and M. F. Cordeiro, “Visual and ocular manifestations of alzheimer’s disease and their use as biomarkers for diagnosis and progression,” *Frontiers in neurology*, vol. 7, p. 55, 2016.
- [5] M. Proudfoot, R. A. L. Menke, R. Sharma, C. M. Berna, S. L. Hicks, C. Kennard, K. Talbot, and M. R. Turner, “Eye-tracking in amyotrophic lateral sclerosis: a longitudinal study of saccadic and cognitive tasks,” *Amyotroph. Lateral Scler. Frontotemporal Degener.*, vol. 17, no. 1, pp. 101–111, 2016.
- [6] G. Fernández, J. Laubrock, P. Mandolesi, O. Colombo, and O. Agamennoni, “Registering eye movements during reading in alzheimer’s disease: difficulties in predicting upcoming words,” *J Clin Exp Neuropsychol*, vol. 36, no. 3, pp. 302–316, 2014.
- [7] R. J. Molitor, P. C. Ko, and B. A. Ally, “Eye movements in alzheimer’s disease,” *J Clin Exp Neuropsychol*, vol. 44, no. 1, pp. 1–12, 2015.
- [8] P. S. Holzman, L. Proctor, and D. W. Hughes, “Eye-tracking patterns in schizophrenia,” *Science*, vol. 181, no. 4095, pp. 179–181, 1973.
- [9] F. J. Martos and J. Vila, “Differences in eye movements control among dyslexic, retarded and normal readers in the spanish population,” *Reading and Writing*, vol. 2, no. 2, pp. 175–188, 1990.
- [10] M. De Luca, E. Di Pace, A. Judica, D. Spinelli, and P. Zoccolotti, “Eye movement patterns in linguistic and non-linguistic tasks in developmental surface dyslexia,” *Neuropsychologia*, vol. 37, no. 12, pp. 1407–1420, 1999.

- [11] J. Hyönä and R. K. Olson, “Eye fixation patterns among dyslexic and normal readers: Effects of word length and word frequency,” *J. Exp. Psychol. Learn. Mem. Cogn.*, vol. 21, no. 6, pp. 1430–1440, 1995.
- [12] F. Hutzler and H. Wimmer, “Eye movements of dyslexic children when reading in a regular orthography,” *Brain Lang.*, vol. 89, no. 1, p. 235–242, 2004.
- [13] B. W. Tatler, N. J. Wade, H. Kwan, J. M. Findlay, and B. M. Velichkovsky, “Yarbus, eye movements, and vision,” *i-Perception*, vol. 1, no. 1, pp. 7–27, 2010.
- [14] J. D. Enderle, “Models of horizontal eye movements, part I: Early models of saccades and smooth pursuit,” *Synthesis Lectures on Quantum Computing*, vol. 5, no. 1, pp. 1–163, 2010.
- [15] M. Rolfs, “Microsaccades: small steps on a long way,” *Vision research*, vol. 49, no. 20, pp. 2415–2441, 2009.
- [16] S. Martinez-Conde, J. Otero-Millan, and S. L. Macknik, “The impact of microsaccades on vision: towards a unified theory of saccadic function,” *Nat Rev Neurosci*, vol. 14, no. 2, pp. 83–96, 2013.
- [17] J. Otero-Millan, X. G. Troncoso, S. L. Macknik, I. Serrano-Pedraza, and S. Martinez-Conde, “Saccades and microsaccades during visual fixation, exploration, and search: Foundations for a common saccadic generator,” *Journal of Vision*, vol. 8, no. 14, p. 21, 2008.
- [18] J. Otero-Millan, S. L. Macknik, A. Serra, R. J. Leigh, and S. Martinez-Conde, “Triggering mechanisms in microsaccade and saccade generation: a novel proposal,” *Annals of the New York Academy of Sciences*, vol. 1233, no. 1, pp. 107–116, 2011.
- [19] E. B. Huey, *The psychology and pedagogy of reading*. Macmillan, 1908.
- [20] A. L. Yarbus, “Eye movements during perception of complex objects,” in *Eye Movements and Vision*, pp. 171–211, Springer US, 1967.
- [21] G. Boccignone and M. Ferraro, “Modelling gaze shift as a constrained random walk,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 331, no. 1, pp. 207–218, 2004.
- [22] G. Boccignone, *Advanced Statistical Methods for Eye Movement Analysis and Modelling: A Gentle Introduction.*, ch. 9, pp. 309–405. Studies in Neuroscience, Psychology and Behavioral Economics, Springer, Cham., 2019.
- [23] G. Underwood, T. Foulsham, E. van Loon, L. Humphreys, and J. Bloyce, “Eye movements during scene inspection: A test of the saliency map hypothesis,” *European Journal of Cognitive Psychology*, vol. 18, no. 03, pp. 321–342, 2006.
- [24] S. Rahman, S. Rahman, O. Shahid, M. T. Abdullah, and J. A. Sourov, “Classifying eye-tracking data using saliency maps,” in *2020 25th International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, pp. 9288–9295, IEEE, 2021.

- [25] K. Rayner, "Eye movements in reading and information processing: 20 years of research.," *Psychological bulletin*, vol. 124, no. 3, p. 372, 1998.
- [26] R. Engbert, A. Nuthmann, E. M. Richter, and R. Kliegl, "SWIFT: A dynamical model of saccade generation during reading," *Psychol. Rev.*, vol. 112, no. 4, pp. 777–813, 2005.
- [27] S. A. McDonald, R. Carpenter, and R. C. Shillcock, "An anatomically constrained, stochastic model of eye movement control in reading.," *Psychological review*, vol. 112, no. 4, p. 814, 2005.
- [28] S.-n. Yang, "An oculomotor-based model of eye movements in reading: The competition/interaction model," *Cognitive Systems Research*, vol. 7, no. 1, pp. 56–69, 2006.
- [29] G. Feng, "Eye movements as time-series random variables: a stochastic model of eye movement control in reading," *Cogn. Syst. Res.*, vol. 7, pp. 70–95, 2006.
- [30] K. Krafska, A. Khosla, P. Kellnhofer, H. Kannan, S. Bhandarkar, W. Matusik, and A. Torralba, "Eye tracking for everyone," in *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, pp. 2176–2184, 2016.
- [31] R. S. Hessels, D. C. Niehorster, M. Nyström, R. Andersson, and I. T. C. Hooge, "Is the eye-movement field confused about fixations and saccades? A survey among 124 researchers," *Royal Society Open Science*, vol. 5, p. 180502, aug 2018.
- [32] F. R. Iaconis, *Sensores no invasivos: aplicaciones en neurociencias cognitivas*. PhD thesis, Universidad Nacional del Sur, 2023.
- [33] E. Papageorgiou, R. J. McLean, and I. Gottlob, "Nystagmus in childhood," *Pediatr Neonatol*, vol. 55, no. 5, pp. 341–351, 2014.
- [34] L. Glass, "Synchronization and rhythmic processes in physiology," *Nature*, vol. 410, pp. 277–284, 2001.
- [35] J. Sen and D. McGill, "Fractal analysis of heart rate variability as a predictor of mortality: A systematic review and meta-analysis," *Chaos*, vol. 28, no. 7, p. 072101, 2018.
- [36] B. J. West, "Fractal physiology and the fractional calculus: a perspective," *Front Physiol*, vol. 1, no. 12, pp. 1–17, 2010.
- [37] E. T. Schmeisser, J. M. McDonough, M. Bond, P. D. Hislop, and E. D. Epstein, "Fractal analysis of eye movements during reading," *Optom. Vis. Sci.*, vol. 78, no. 11, pp. 805–814, 2001.
- [38] D. G. Stephen, R. Arzamarski, and C. F. Michaels, "The role of fractality in perceptual learning: exploration in dynamic touch.," *J. Exp. Psychol. Hum. Percept.*, vol. 36, no. 5, pp. 1161–1173, 2010.

- [39] D. G. Stephen and J. Anastas, "Fractal fluctuations in gaze speed visual search," *Atten. Percept. Psychophys.*, vol. 73, no. 3, p. 666–677, 2011.
- [40] G. C. Van Orden, J. G. Holden, and M. T. Turvey, "Human cognition and 1/f scaling," *J Exp Psychol Gen*, vol. 134, no. 1, pp. 117–123, 2005.
- [41] J. M. Riddle, "Fractal cognitive triad: the theoretical connection between subjective experience and neural oscillations," *Cosmos and History: The Journal of Natural and Social Philosophy*, vol. 11, no. 2, pp. 130–145, 2015.
- [42] M. Sharifi, H. Farahani, F. Shahbazi, M. Sharifi, C. T. Kello, and M. Zare, "Multifractality and non-gaussianity of eye fixation duration time series in reading persian texts," *Physica, A*, vol. 514, pp. 549–562, 2019.
- [43] K. Rayner, "Eye movements in reading: Models and data," *J. Eye Mov. Res.*, vol. 2, no. 5, pp. 1–10, 2009.
- [44] K. Rayner and M. H. Fischer, "Mindless reading revisited: Eye movements during reading and scanning are different," *Perception & psychophysics*, vol. 58, no. 5, pp. 734–747, 1996.
- [45] A. Shaikh and F. Ghasia, "Fixational saccades are more disconjugate in adults than in children," *PLoS One*, vol. 12, no. 4, pp. 1–13, 2017.
- [46] M. Kriber, K. D. Bartl-Pokorny, F. B. Pokorny, C. Einspieler, A. Langmann, C. Körner, T. Falck-Ytter, and P. Marschik, "The relation between reading skills and eye movement patterns in adolescent readers: Evidence from a regular orthography," *PLoS One*, vol. 11, no. 1, pp. 1–13, 2016.
- [47] G. Underwood, *Cognitive processes in eye guidance*. Oxford University Press, 2005.
- [48] M. C. Puell Marín, *Óptica Fisiológica: el sistema óptico del ojo y la visión binocular*. Universidad Complutense de Madrid, 2006.
- [49] R. Drake, *Anatomía para estudiantes*. Elsevier, 2005.
- [50] C. S. Medeiros and M. R. Santhiago, "Corneal nerves anatomy, function, injury and regeneration," *Experimental Eye Research*, vol. 200, p. 108243, 2020.
- [51] J. Fischbarg, *The biology of the eye*. Elsevier, 2005.
- [52] B. Koll and I. Q. Whishaw, *An Introduction to Brain and Behavior*. Worth Publishers, 2005.
- [53] R. Engbert and K. Mergenthaler, "Microsaccades are triggered by low retinal image slip," *Proc Natl Acad Sci U S A*, vol. 103, no. 18, pp. 7192–7, 2006.
- [54] L. A. Riggs, F. Ratliff, J. C. Cornsweet, and T. N. Cornsweet, "The disappearance of steadily fixated visual test objects," *J Opt Soc Am*, vol. 43, no. 6, pp. 495–501, 1953.

- [55] R. Carpenter, *Movements of the Eyes*. Pion, 1988.
- [56] A. Spauschus, J. Marsden, H. D. M., J. Rosenberg, and P. Brown, “The origin of ocular microtremor in man,” *Exp Brain Res*, vol. 126, no. 4, pp. 556–562, 1999.
- [57] M. Greschner, M. Bongard, P. Rujan, and J. Ammermüller, “Retinal ganglion cell synchronization by fixational eye movements improves feature estimation,” *Nat Neurosci*, vol. 5, no. 4, pp. 341–347, 2002.
- [58] S. Martinez-Conde, S. Macknik, and D. Hubel, “The function of bursts of spikes during visual fixation in the awake primate lateral geniculate nucleus and primary visual cortex,” *Proc Natl Acad Sci U S A*, vol. 99, no. 21, pp. 13920–5, 2002.
- [59] S. Martinez-Conde, S. Macknik, and D. Hubel, “The role of fixational eye movements in visual perception,” *Nat Rev Neurosci*, vol. 5, no. 3, pp. 229–40, 2004.
- [60] F. Ratliff and L. A. Riggs, “Involuntary motions of the eye during monocular fixation,” *J Exp Psychol*, vol. 40, no. 6, pp. 687–701, 1950.
- [61] S. Ramat, R. J. Leigh, D. S. Zee, and L. M. Optican, “What clinical disorders tell us about the neural control of saccadic eye movements,” *Brain*, vol. 130, no. 1, pp. 10–35, 2007.
- [62] K. Holmqvist, M. Nyström, R. Andersson, R. Dewhurst, J. Halszka, and J. van de Weijer, *Eye Tracking : A Comprehensive Guide to Methods and Measures*. United Kingdom: Oxford University Press, 2011.
- [63] J. A. Del Punta, K. V. Rodriguez, G. Gasaneo, and S. Bouzat, “Models for saccadic motion and postsaccadic oscillations,” *Phys. Rev. E*, vol. 99, p. 032422, Mar 2019.
- [64] M. D. Crutcher, R. Calhoun-Haney, C. M. Manzanares, J. J. Lah, A. I. Levey, and S. M. Zola, “Eye tracking during a visual paired comparison task as a predictor of early dementia,” *Am J Alzheimers Dis Other Demen*, vol. 24, no. 3, pp. 258–266, 2009.
- [65] B. Poletti, L. Carelli, F. Solca, A. Lafronza, E. Pedroni, A. Faini, S. Zago, N. Ticozzi, A. Ciammola, C. Morelli, P. Meriggi, P. Cipresso, D. Lulé, A. C. Ludolph, G. Riva, and V. Silani, “An eye-tracking controlled neuropsychological battery for cognitive assessment in neurological diseases,” *Neurol Sci*, vol. 38, no. 4, pp. 595–603, 2017.
- [66] A. C. Silva and C. A. Varanda, “Eye-tracking technique as an instrument in the diagnosis of autism spectrum disorder,” *Austin J Autism Rel Disab*, vol. 3, no. 3, p. 1047, 2017.
- [67] T. Haarmeier and P. Thier, “Impaired analysis of moving objects due to deficient smooth pursuit eye movements,” *Brain*, vol. 122, no. 8, pp. 1495–1505, 1999.
- [68] P. Thier and U. J. Ilg, “The neural basis of smooth-pursuit eye movements,” *Curr Opin Neurobiol*, vol. 15, no. 6, p. 645–652, 2005.

- [69] N. J. Wade and B. W. Tatler, “Did javal measure eye movements during reading?,” *Journal of Eye Movement Research*, vol. 2, may 2009.
- [70] M. Płużyczka, “The first hundred years: A history of eye tracking as a research method,” *Applied Linguistics Papers*, no. 25/4, pp. 101–116, 2018.
- [71] L. C. Martinez Quevedo and A. T. Pinto Molina, *Estado del arte de la tecnología Eye tracking en los campos de la ingeniería industrial*. Universidad Católica de Colombia, 2019.
- [72] K. Rayner, “Eye movements in reading and information processing.,” *Psychological Bulletin*, vol. 85, no. 3, pp. 618–660, 1978.
- [73] M. A. Just and P. A. Carpenter, “A theory of reading: From eye fixations to comprehension.,” *Psychological Review*, vol. 87, no. 4, pp. 329–354, 1980.
- [74] A. Duchowski, *Eye tracking methodology*. Springer, 2017.
- [75] L. R. Young and D. Sheena, “Survey of eye movement recording methods,” *Behavior Research Methods & Instrumentation*, vol. 7, pp. 397–429, 1975.
- [76] H. D. Crane, “The purkinje image eyetracker, image stabilization, and related forms of stimulus manipulation,” in *Visual science and engineering: Models and applications*, pp. 13–89, New York: Marcel Dekker, 1994.
- [77] D. A. Robinson, “The oculomotor control system: A review,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 56, no. 6, pp. 1032–1049, 1968.
- [78] H. Crane and C. M. Steele, “Generation-v dual-purkinje-image eyetracker,” *Appl Opt*, vol. 24, no. 4, p. 527, 1985.
- [79] T. Hutchinson, “Eye-gaze computer interfaces: computers that sense eye position on the display,” *Computer*, vol. 26, no. 07, pp. 65–67, 1993.
- [80] W. E. Schroeder, “Head-mounted computer interface based on eye tracking,” *Visual Communications and Image Processing*, 1993.
- [81] W. E. Schroeder, “Replacing mouse and trackball with tracked line of gaze,” *Visual Communications and Image Processing*, 1993.
- [82] R. Vertegaal, “The GAZE groupware system: mediating joint attention in multi-party communication and collaboration,” in *Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems*, CHI '99, (New York, NY, USA), p. 294–301, Association for Computing Machinery, 1999.
- [83] B. H. McCormick, D. A. Batte, and A. T. Duchowski, “A virtual environment: Exploring the brain forest,” *Computación y Sistemas*, vol. 1, no. 1, pp. 5–13, 1997.
- [84] J. Shree, L. R. D. Murthy, K. S. Saluja, and P. Biswas, “Operating different displays in military fast jets using eye gaze tracker,” *Journal of Aviation Technology and Engineering*, vol. 8, p. 31, dec 2018.

- [85] T. Poitschke, F. Laquai, S. Stamboliev, and G. Rigoll, "Gaze-based interaction on multiple displays in an automotive environment," in *2011 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, IEEE, oct 2011.
- [86] A. T. Duchowski, "A breadth-first survey of eye-tracking applications," *Behavior Research Methods, Instruments, & Computers*, vol. 34, pp. 455–470, 2002.
- [87] G. L. Loshe, "Consumer eye movement patterns on yellow pages advertising," *Journal of Advertising*, vol. 26, no. 1, pp. 61–73, 1997.
- [88] L. Popa, O. Selejan, A. Scott, D. F. Mureşanu, M. Balea, and A. Rafila, "Reading beyond the glance: eye tracking in neurosciences," *Neurol Sci*, vol. 36, no. 5, pp. 683–688, 2015.
- [89] A. S. Chan, T. L. Lee, S. S. L., N. S. Yang, and Y. M. Y. Han, "Eye-tracking training improves the learning and memory of children with learning difficulty," *Sci Rep*, vol. 12, no. 1, p. 13974, 2022.
- [90] G. W. McConkie and B. P. Dyre, "Eye fixation durations in reading: Models of frequency distributions," in *Reading as a perceptual process*, pp. 683–700, Elsevier, 2000.
- [91] A. L. Frapiccini, J. A. Del Punta, K. V. Rodriguez, L. Dimieri, and G. Gasaneo, "A simple model to analyse the activation force in eyeball movements," *The European Physical Journal B*, vol. 93, no. 2, pp. 1–10, 2020.
- [92] J. I. Specht, L. Dimieri, E. Urdapilleta, and G. Gasaneo, "Minimal dynamical description of eye movements," *The European Physical Journal B*, vol. 90, feb 2017.
- [93] D. J. Aks, G. J. Zelinsky, and J. C. Sprott, "Memory across eye-movements: 1/f dynamics in vision search," *Nonlinear Dynamics Psychol Life Sci*, vol. 6, pp. 1–25, 2002.
- [94] C. Stan, C. Astefanoaei, E. Pretegianni, L. Optican, D. Creanga, A. Rufa, and C. P. Cristescu, "Nonlinear analysis of saccade speed fluctuations during combined action and perception tasks," *J Neurosci Methods*, vol. 232, pp. 102–109, 2014.
- [95] E. Bakalis, H. Fujie, F. Zerbetto, and Y. Tanaka, "Multifractal structure of microscopic eye–head coordination," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 512, pp. 945–953, 2018.
- [96] D. G. Stephen and D. Mirman, "Interactions dominate the dynamics of visual cognition," *Cognition*, vol. 115, pp. 154–165, 2010.
- [97] D. Mirman, J. R. Irwin, and D. G. Stephen, "Eye movement dynamics and cognitive self-organization in typical and atypical development," *Cogn Neurodyn*, vol. 6, no. 1, pp. 61–73, 2012.

- [98] M. L. Freije, A. A. Jiménez Gandica, J. I. Specht, G. Gasaneo, C. A. Delrieux, B. Stosic, T. Stosic, and R. de Luis-Garcia, “Multifractal detrended fluctuation analysis of eye-tracking data,” in *VipIMAGE 2017. ECCOMAS 2017. Lecture Notes in Computational Vision and Biomechanics* (J. Tavares and R. N. Jorge, eds.), pp. 476–484, International Publishing AG, 2017.
- [99] K. Harezlak and P. Kasprowski, “Understanding eye movement signal characteristics based on their dynamical and fractal features,” *Sensors*, vol. 19, no. 3, p. 626, 2019.
- [100] F. Avila, C. Delrieux, and G. Gasaneo, “Complexity analysis of eye-tracking trajectories,” *Eur Phys J B*, vol. 92, no. 273, pp. 1–7, 2019.
- [101] F. R. Iaconis, A. A. Jiménez Gandica, J. A. Del Punta, C. A. Delrieux, and G. Gasaneo, “Information-theoretic characterization of eye-tracking signals with relation to cognitive tasks,” *Chaos*, vol. 31, no. 3, p. 033107, 2021.
- [102] M. M. Meo, F. R. Iaconis, J. A. Del Punta, C. A. Delrieux, and G. Gasaneo, “Multifractal information on reading eye tracking data,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 638, p. 129625, 2024.
- [103] A. K. Maity, R. Pratihar, A. Mitra, S. Dey, V. Agrawal, S. Sanyal, A. Banerjee, R. Sen-gupta, and D. Ghosh, “Multifractal detrended fluctuation analysis of alpha and theta EEG rhythms with musical stimuli,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 81, pp. 52–67, 2015.
- [104] J. W. Kantelhardt, *Fractal and Multifractal Time Series*, pp. 463–487. New York, NY: Springer New York, 2011.
- [105] A. Bunde, S. Havlin, J. W. Kantelhardt, T. Penzel, J.-H. Peter, and K. Voigt, “Correlated and uncorrelated regions in heart-rate fluctuations during sleep,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, pp. 3736–3739, Oct 2000.
- [106] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness, “Fractional brownian motions, fractional noises and applications,” *SIAM Review*, vol. 10, no. 4, pp. 422–437, 1968.
- [107] B. B. Mandelbrot and J. R. Wallis, “Some long-run properties of geophysical records,” *Water Resources Research*, vol. 5, no. 2, pp. 321–340, 1969.
- [108] B. B. Mandelbrot, *Multifractals and 1/f Noise*. Springer New York, NY, 1999.
- [109] H. E. Hurst, “Long-term storage capacity of reservoirs,” *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 116, no. 1, pp. 770–799, 1951.
- [110] H. E. Hurst, R. P. Black, and Y. M. Simaika, *Long-term storage, an experimental study*. Constable London, 1965.
- [111] C. K. Peng, J. Mietus, J. M. Hausdorff, S. Havlin, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger, “Long-range anticorrelations and non-gaussian behavior of the heartbeat,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, pp. 1343–1346, Mar 1993.

- [112] D. Vyushin, I. Zhidkov, S. Havlin, A. Bunde, and S. Brenner, “Volcanic forcing improves atmosphere-ocean coupled general circulation model scaling performance,” *Geophys. Res. Lett.*, vol. 31, 02 2004.
- [113] E. Koscielny-Bunde, A. Bunde, S. Havlin, H. E. Roman, Y. Goldreich, and H.-J. Schellnhuber, “Indication of a universal persistence law governing atmospheric variability,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, pp. 729–732, Jul 1998.
- [114] A. P. Blaber, R. L. Bondar, and R. Freeman, “Coarse graining spectral analysis of hr and bp variability in patients with autonomic failure,” *Am J Physiol*, vol. 271, no. 4, pp. 1555–64, 1996.
- [115] A. Dirksen, N. H. Holstein-Rathlou, F. Madsen, L. T. Skovgaard, C. S. Ulrik, T. Heckscher, and A. Kok-Jensen, “Long-range correlations of serial fev1 measurements in emphysematous patients and normal subjects,” *J Appl Physiol*, vol. 85, no. 1, pp. 259–265, 1998.
- [116] H. Huikuri, T. Mäkikallio, C. K. Peng, A. L. Goldberger, U. Hintze, and M. Møller, “Fractal correlation properties of r-r interval dynamics and mortality in patients with depressed left ventricular function after an acute myocardial infarction,” *Circulation*, vol. 101, no. 1, pp. 47–53, 2000.
- [117] A. Eke, P. Herman, L. Kocsis, and L. R. Kozak, “Fractal characterization of complexity in temporal physiological signals,” *Physiol Meas*, vol. 23, no. 1, pp. 1–38, 2002.
- [118] B. C. Goodwin, “Temporal organization and disorganization in organisms,” *Chronobiol Int*, vol. 14, no. 5, pp. 531–536, 1997.
- [119] J. Bassingthwaighe, L. Liebovitch, and B. West, *Fractal Physiology*. American Physiological Society Methods, American Physiological Society, 1994.
- [120] D. P. Shinde, A. Mehta, and R. K. Mishra, “Searching and fixating: Scale-invariance vs. characteristic timescales in attentional processes,” *Europhysics Letters*, vol. 94, p. 68001, jun 2011.
- [121] T. Amor, S. Reis, and D. Campos, “Persistence in eye movement during visual search,” *Sci Rep*, vol. 6, p. 20815, 2016.
- [122] J. Taberner and P. Artal, “Lens oscillations in the human eye. implications for post-saccadic suppression of vision,” *PLOS ONE*, vol. 9, pp. 1–6, 04 2014.
- [123] S. Bouzat, F. M. L., A. L. Frapiccini, and G. Gasaneo, “Inertial movements of the iris as the origin of postsaccadic oscillations,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 120, no. 0, p. 178101, 2018.
- [124] W.-J. Yuan, J.-F. Zhou, and C. Zhou, “Fast response and high sensitivity to microsaccades in a cascading-adaptation neural network with short-term synaptic depression,” *Phys. Rev. E*, vol. 93, p. 042302, Apr 2016.

- [125] J. F. Zhou, W. Yuan, and Z. Zhou, “Spatiotemporal properties of microsaccades: Model predictions and experimental tests,” *Phys. Rev. E*, vol. 93, p. 042302, Apr 2016.
- [126] J.-R. Liang, S. Moshel, A. Z. Zivotofsky, A. Caspi, R. Engbert, R. Kliegl, and S. Havlin, “Scaling of horizontal and vertical fixational eye movements,” *Phys. Rev. E*, vol. 71, p. 031909, Mar 2005.
- [127] K. Mergenthaler and R. Engbert, “Modeling the control of fixational eye movements with neurophysiological delays,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 138104, Mar 2007.
- [128] M. Nyström, I. Hooge, and K. Holmqvist, “Post-saccadic oscillations in eye movement data recorded with pupil-based eye trackers reflect motion of the pupil inside the iris,” *Vision Research*, vol. 92, pp. 59–66, 2013.
- [129] I. Hooge, M. Nyström, T. Cornelissen, and K. Holmqvist, “The art of braking: Post saccadic oscillations in the eye tracker signal decrease with increasing saccade size,” *Vision Research*, vol. 112, pp. 55–67, 2015.
- [130] I. Hooge, K. Holmqvist, and M. Nyström, “The pupil is faster than the corneal reflection (cr): Are video based pupil-cr eye trackers suitable for studying detailed dynamics of eye movements?,” *Vision Research*, vol. 128, pp. 6–18, 2016.
- [131] K. West, “Focus: Why your pupils wobble,” *Physics*, vol. 11, p. 41, 2018.
- [132] D. Mardanbegi, R. Killick, B. Xia, T. Wilcockson, H. Gellersen, P. Sawyer, and T. J. Crawford, “Effect of aging on post-saccadic oscillations,” *Vision Research*, vol. 143, pp. 1–8, 2018.
- [133] M. Nyström, I. Hooge, and R. Andersson, “Pupil size influences the eye-tracker signal during saccades,” *Vision Research*, vol. 121, pp. 95–103, 2016.
- [134] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied mathematics series, Dover Publications, 1965.
- [135] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions [Volumes I-III]*. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [136] E. Pretegianni and L. M. Optican, “Eye movements in parkinson’s disease and inherited parkinsonian syndromes,” *Front Neurol*, vol. 8, p. 592, 2017.
- [137] C. Prado, M. Dubois, and S. Valdois, “The eye movements of dyslexic children during reading and visual search: impact of the visual attention span,” *Vision Res*, vol. 47, no. 19, pp. 2521–30, 2007.
- [138] M. Nilsson Benfatto, G. Öqvist Seimyr, J. Ygge, T. Pansell, A. Rydberg, and C. Jacobson, “Dyslexia using eye tracking during reading,” *PLoS One*, vol. 11, no. 12, 2016.

- [139] F. R. Iaconis, M. Meo, J. A. Del Punta, and G. Gasaneo, “Modelling the eye movements of dyslexic children during reading as a continuous time random walk,” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 33, p. 083116, 08 2023.
- [140] I. Gomez Portillo, D. Campos, and V. Méndez, “Intermittent ranxom walks: transport regimes and implications on search strategies,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiments*, vol. 2011, no. 02, p. P02033, 2011.
- [141] E. W. Montroll and G. H. Weiss, “Random Walks on Lattices. II,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 6, no. 2, pp. 167–181, 1965.
- [142] V. M. Kenkre, E. W. Montroll, and F. Shlesinger, “Generalized master equations for continuous-time random walks,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 9, pp. 45–50, 1973.
- [143] M. Shlesinger, “Asymptotic solutions of continuous-time random walks,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 10, pp. 421–434, 1974.
- [144] E. Scalas, R. Gorenflo, and F. Mainardi, “Uncoupled continuous-time random walks: Solution and limiting behavior of the master equation,” *Phys. Rev. E*, vol. 69, p. 011107, Jan 2004.
- [145] M. Meerschaert and H. Scheffler, “Triangular array limits for continuous time random walks,” *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 118, pp. 1606–1633, 2008.
- [146] G. Germano, M. Politi, E. Scalas, and R. L. Schilling, “Stochastic calculus for uncoupled continuous-time random walks,” *Phys. Rev. E*, vol. 79, p. 066102, 2009.
- [147] M. Montero and J. Masoliver, “Nonindependent continuous-time random walks,” *Physical Review E*, vol. 76, p. 061115, 2007.
- [148] N. Masuda, M. A. Porter, and R. Lambiotte, “Random walks and diffusion on networks,” *Physics Reports*, vol. 716-717, pp. 1–58, 2017.
- [149] D. Kleinhans and R. Friedrich, “Continuous-time random walks: Simulation of continuous trajectories,” *Phys. Rev. E*, vol. 76, p. 061102, 2007.
- [150] H. Seckler, J. Szwabiński, and R. Metzler, “Machine-learning solutions for the analysis of single-particle diffusion trajectories,” *The journal of physical chemistry letters*, pp. 7910–7923, 2023.
- [151] O. Vilk, E. Aghion, T. Avgar, C. Beta, O. Nagel, A. Sabri, R. Sarfati, D. K. Schwartz, M. Weiss, D. Krapf, R. Nathan, R. Metzler, and M. Assaf, “Unravelling the origins of anomalous diffusion: From molecules to migrating storks,” *Physical Review Research*, 2021.
- [152] J.-H. Jeon, E. Barkai, and R. Metzler, “Noisy continuous time random walks,” *The Journal of chemical physics*, vol. 139 12, p. 121916, 2013.

- [153] E. Scalas, “The application of continuous-time random walks in finance and economics,” *Physica A-statistical Mechanics and Its Applications*, vol. 362, pp. 225–239, 2006.
- [154] H. Fallahgoul, S. Focardi, and F. Fabozzi, *Continuous-Time Random Walk and Fractional Calculus*, pp. 81–90. Academic Press, 12 2017.
- [155] D. S. Johnson, J. M. London, M. Lea, and J. Durban, “Continuous-time correlated random walk model for animal telemetry data.,” *Ecology*, vol. 89 5, pp. 1208–15, 2008.
- [156] T. Michelot and P. Blackwell, “State-switching continuous-time correlated random walks,” *Methods in Ecology and Evolution*, vol. 10, pp. 637 – 649, 2018.
- [157] R. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*. Dover Books on Physics, Dover Publications, 2002.
- [158] R. Newton, “Formal methods of solution and approximations,” in *Scattering Theory of Waves and Particles*, pp. 228–259, Dover Publications, 2nd ed., 2002.
- [159] P. J. Davis, “Leonhard euler’s integral: A historical profile of the gamma function: In memoriam: Milton abramowitz,” *The American Mathematical Monthly*, vol. 66, no. 10, pp. 849–869, 1959.
- [160] R. Metzler and J. Klafter, “The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach,” *Physics reports*, vol. 339, no. 1, pp. 1–77, 2000.
- [161] G. H. Weiss and G. H. Weiss, *Aspects and applications of the random walk*. Elsevier Science & Technology, 1994.
- [162] A. Ern and J. Guermond, *Theory and Practice of Finite Elements*. Applied Mathematical Sciences, Springer New York, 2004.
- [163] J. M. Randazzo and C. A. Rios, “Endohedrally confined hydrogen atom with a moving nucleus,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 49, p. 235003, nov 2016.
- [164] E. A. F. Ihlen, “Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in matlab,” *Front Physiol*, vol. 3, no. 141, pp. 1–18, 2012.
- [165] R. Lopes and N. Betrouni, “Fractal and multifractal analysis: a review,” *Med Image Anal*, vol. 13, no. 4, pp. 634–649, 2009.
- [166] P. Ivanov, L. Amaral, A. Goldberger, S. Havlin, M. Rosenblum, Z. Struzik, and H. Stanley, “Multifractality in human heartbeat dynamics,” *Nature*, vol. 399, no. 6735, pp. 461–465, 1999.
- [167] C. Peng, J. Mietus, Y. Liu, C. Lee, J. Hausdorff, H. Stanley, A. Goldberger, and L. Lipsitz, “Quantifying fractal dynamics of human respiration: age and gender effects,” *Ann Biomed Eng*, vol. 30, pp. 683–692, 2002.

- [168] Y. Zheng, J. Gao, J. C. Sanchez, J. C. Principe, and M. S. Okun, "Multiplicative multifractal modeling and discrimination of human neuronal activity," *Physics Letters A*, vol. 344, no. 2, pp. 253–264, 2005.
- [169] J. M. Hausdorff, "Gait dynamics, fractals and falls: finding meaning in the stride-to-stride fluctuations of human walking," *Hum Mov Sci*, vol. 26, no. 4, pp. 555–589, 2007.
- [170] G. Wang, H. Huang, H. Xie, Z. Wang, and X. Hu, "Multifractal analysis of ventricular fibrillation and ventricular tachycardia," *Med Eng Phys*, vol. 29, no. 3, pp. 375–379, 2007.
- [171] J. Bassingthwaite, J. Van Beek, and R. King, "Fractal branchings: the basis of myocardial flow heterogeneities?," *Ann N Y Acad Sci*, vol. 591, pp. 392–401, 1990.
- [172] S. Abboud, O. Berenfeld, and D. Sadeh, "Simulation of high-resolution qrs complex using a ventricular model with a fractal conduction system. effects of ischemia on high-frequency qrs potentials," *Circ Res*, vol. 68, no. 6, pp. 1751–60, 1991.
- [173] E. R. Weibel, "Fractal geometry: a design principle for living organisms," *Am J Physiol*, vol. 261, no. 6, pp. 361–369, 1991.
- [174] G. Krenz, J. Linehan, and C. Dawson, "A fractal continuum model of the pulmonary arterial tree," *J Appl Physiol*, vol. 72, no. 6, pp. 2225–37, 1992.
- [175] I. Parkinson and N. Fazzalari, "Cancellous bone structure analysis using image analysis," *Australas Phys Eng Sci Med*, vol. 17, no. 2, pp. 64–70, 1994.
- [176] C. Atupelage, H. Nagahashi, M. Yamaguchi, M. Sakamoto, and A. Hashiguchi, "Multifractal feature descriptor for histopathology," *Anal Cell Pathol (Amst)*, vol. 35, no. 2, pp. 123–126, 2012.
- [177] A. L. Goldberger, "Non-linear dynamics for clinicians: chaos theory, fractals, and complexity at the bedside," *Lancet*, vol. 347, no. 9011, pp. 1312–4, 1996.
- [178] A. Goldberger, L. Amaral, J. Hausdorff, P. Ivanov, C. Peng, and H. Stanley, "Fractal dynamics in physiology: alterations with disease and aging," *Proc Natl Acad Sci U S A*, vol. 99, pp. 2466–72, 2002.
- [179] D. Makowiec, A. Rynkiewicz, J. Wdowczyk-Szulc, M. Zarczyńska-Buchowiecka, R. Gałaska, and S. Kryszewski, "Aging in autonomic control by multifractal studies of cardiac interbeat intervals in the vlf band," *Physiol Meas*, vol. 32, no. 10, pp. 1681–99, 2011.
- [180] J. Suckling, A. M. Wink, F. A. Bernard, A. Barnes, and E. Bullmore, "Endogenous multifractal brain dynamics are modulated by age, cholinergic blockade and cognitive performance," *J Neurosci Methods*, vol. 174, no. 2, p. 292–300, 2008.

- [181] E. A. Ihlen and B. Vereijken, "Interaction-dominant dynamics in human cognition: beyond $1/f(\alpha)$ fluctuation," *J Exp Psychol Gen*, vol. 139, no. 3, pp. 436–463, 2010.
- [182] J. W. Kantelhardt, S. A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde, and H. Stanley, "Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 316, no. 1, pp. 87–114, 2002.
- [183] B. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*. San Francisco: W.H. Freeman, 1982.
- [184] H.-O. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe, *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science*. New York: Springer, 1992.
- [185] P. Hermán, L. Kocsis, and A. Eke, "Fractal branching pattern in the pial vasculature in the cat," *J Cereb Blood Flow Metab.*, vol. 21, no. 6, pp. 741–753, 2001.
- [186] K. Falconer, *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. New York: Wiley, 1990.
- [187] A. Eke, P. Herman, J. B. Bassingthwaight, G. M. Raymond, D. B. Percival, M. Cannon, I. Balla, and C. Ikrényi, "Physiological time series: distinguishing fractal noises from motions," *Physiol Meas*, vol. 439, no. 4, pp. 403–415, 2000.
- [188] D. Avnir, O. Biham, D. A. Lidar, and O. Malcai, "Is the geometry of nature fractal?," *Science*, vol. 279, pp. 39–40, 1998.
- [189] Y. Yamamoto and R. L. Hughson, "On the fractal nature of heart rate variability in humans: effects of data length and beta-adrenergic blockade," *Am. J. Physiol.*, vol. 266, no. 1, pp. R40–R49, 1994.
- [190] C. K. Peng, S. Buldyrev, A. Goldberger, S. Havlin, M. Simons, and H. Stanley, "Mosaic organization of dna nucleotides," *Phys. Rev. E*, vol. 49, no. 2, pp. 1685–1689, 1994.
- [191] M. S. Movahed, G. R. Jafari, F. Ghasemi, S. Rahvar, and M. R. R. Tabar, "Multifractal detrended fluctuation analysis of sunspot time series," *J. Stat. Mech.*, 2006.
- [192] X. J. Zhao, P. J. Shang, A. J. Lin, and G. Chen, "Multifractal fourier detrended cross-correlation analysis of traffic signals," *Physica, A*, vol. 390, no. 21, pp. 3670–3678, 2011.
- [193] F. Wang, G. P. Liao, J. H. Li, X. C. Li, and T. J. Zhou, "Multifractal detrended fluctuation analysis for clustering structures of electricity price periods," *Physica, A*, vol. 392, no. 22, pp. 5723–5734, 2013.
- [194] B. Podobnik and H. E. Stanley, "Detrended cross-correlation analysis: a new method for analyzing two nonstationary time series," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, no. 8, p. 084102, 2008.

- [195] W. X. Zhou, “Multifractal detrended cross-correlation analysis for two nonstationary signals,” *Phys. Rev. E*, vol. 77, no. 6, p. 066211, 2008.
- [196] Z. Q. Jiang and W. X. Zhou, “Multifractal detrending moving-average cross-correlation analysis,” *Phys. Rev. E*, vol. 84, no. 1, p. 016106, 2011.
- [197] L. Kristoufek, “Multifractal height cross-correlation analysis: A new method for analyzing long-range cross-correlations,” *Europhys. Lett.*, vol. 95, no. 6, p. 68001, 2011.
- [198] J. Wang, P. Shang, and W. Ge, “Multifractal cross-correlation analysis based on statistical moments,” *Fractals*, vol. 20, no. 3, pp. 271–279, 2012.
- [199] J. Gómez-Gómez, R. Carmona-Cabezas, A. B. Ariza-Villaverde, E. G. de Ravé, and F. J. Jiménez-Hornero, “Multifractal detrended fluctuation analysis of temperature in Spain (1960–2019),” *Physica, A*, vol. 578, p. 126118, 2021.
- [200] J. L. Morales Martínez, I. Segovia-Domínguez, I. Quiros Rodríguez, F. A. Horta-Rangel, and G. Sosa-Gómez, “A modified multifractal detrended fluctuation analysis (MFDEFA) approach for multifractal analysis of precipitation,” *Physica, A*, vol. 565, p. 125611, 2021.
- [201] J. Feder, *Fractals*. New York: Plenum Press, 1988.
- [202] Q. Fan, S. Liu, and K. Wang, “Multiscale multifractal detrended fluctuation analysis of multivariate time series,” *Physica, A*, vol. 532, p. 121864, 2019.
- [203] Y. Shimizu, S. Thurner, and K. Ehrenberger, “Multifractal spectra as a measure of complexity in human posture,” *Fractals*, vol. 10, no. 1, pp. 103–116, 2002.
- [204] S. Drożdż and P. Oświecimka, “Detecting and interpreting distortions in hierarchical organization of complex time series,” *Phys. Rev. E*, vol. 91, no. 3, p. 030902, 2015.
- [205] X. Zhang, M. Zeng, and Q. Meng, “Multivariate multifractal detrended fluctuation analysis of 3d wind field signals,” *Physica, A*, vol. 490, pp. 513–523, 2018.
- [206] T. Stosic, S. A. Nejad, and B. Stosic, “Multifractal analysis of Brazilian agricultural market,” *Fractals*, vol. 28, no. 05, p. 2050076, 2020.
- [207] American Psychiatric Association, *Diagnostic and Statistical manual of mental disorders*. APA, 2013.
- [208] M. Habib, “The neurological basis of developmental dyslexia: an overview and working hypothesis,” *Brain*, vol. 123, no. 12, pp. 2373–2399, 2000.
- [209] M. J. Snowling, “From language to reading and dyslexia,” *Dyslexia*, vol. 7, no. 1, pp. 37–46, 2001.

- [210] G. R. Lyon, S. E. Shaywitz, and B. A. Shaywitz, "A definition of dyslexia," *Ann. Dyslexia*, vol. 53, pp. 1–14, 2003.
- [211] S. Drożdż, J. Kwapień, P. Oświecimka, and R. Rak, "Quantitative features of multifractal subtleties in time series," *Europhysics Letters*, vol. 88, no. 6, p. 60003, 2010.
- [212] L. Kirichenko, A. S. A. Alghawli, and T. Radivilova, "Generalized approach to analysis of multifractal properties from short time series," *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, vol. 11, no. 5, 2020.
- [213] J. Kwapień, P. Blasiak, S. Drożdż, and P. Oświecimka, "Genuine multifractality in time series is due to temporal correlations," *Phys. Rev. E*, vol. 107, no. 3, p. 034139, 2023.
- [214] H. B. Mann and D. R. Whitney, "On a Test of Whether one of Two Random Variables is Stochastically Larger than the Other," *Ann. Math. Statist.*, vol. 18, no. 1, pp. 50–60, 1947.
- [215] L. F. Dell’Osso and J. B. Jacobs, "An expanded nystagmus acuity function: intra- and intersubject prediction of best-corrected visual acuity," *Doc Ophthalmol*, vol. 104, no. 3, pp. 249–276, 2002.
- [216] D. Giordano, C. Pino, C. Spampinato, M. Di Pietro, and A. Reibaldi, "Eye tracker based method for quantitative analysis of pathological nystagmus," in *2011 24th International Symposium on Computer-Based Medical Systems (CBMS)*, pp. 1–6, 2011.
- [217] J. Felius, V. L. N. Fu, E. E. Birch, R. W. Hertle, R. M. Jost, and V. Subramanian, "Quantifying nystagmus in infants and young children: relation between foveation and visual acuity deficit," *Invest. Ophthalmol. Vis. Sci.*, vol. 52, no. 12, p. 8724–8731, 2011.
- [218] W. Rosengren, M. Nyström, B. Hammar, M. Rahne, L. Sjö Dahl, and M. Stridh, "Modeling and quality assessment of nystagmus eye movements recorded using an eye-tracker," *Behav Res Methods*, vol. 52, no. 4, pp. 1729–1743, 2020.
- [219] Y. Elgammal, M. Zahran, and M. Mohamed Abdelsalam, "A new strategy for the early detection of alzheimer disease stages using multifractal geometry analysis based on K-Nearest Neighbor algorithm," *Sci Rep*, vol. 12, p. 22381, 12 2022.
- [220] J. Lim, J. Mountstephens, and J. Teo, "Eye-tracking feature extraction for biometric machine learning," *Frontiers in Neurorobotics*, vol. 15, p. 796895, 02 2022.
- [221] I. Gottlob, "Nystagmus," *Curr Opin Ophthalmol*, vol. 11, no. 5, pp. 300–305, 2000.
- [222] D. L. Nash, N. N. Diehl, and B. G. Mohney, "Incidence and types of pediatric nystagmus," *Am J Ophthalmol*, vol. 182, pp. 31–34, 2017.
- [223] G. Kommerell, "The relationship between infantile strabismus and latent nystagmus," *Eye (Lond)*, vol. 10, no. 2, pp. 274–281, 1996.

- [224] E. Birch, J. Wang, J. Felius, D. J. Stager, and R. Hertle, "Fixation control and eye alignment in children treated for dense congenital or developmental cataracts," *J AAPOS*, vol. 16, no. 2, pp. 156–160, 2012.
- [225] A. A. Tarnutzer and D. Straumann, "Nystagmus," *Curr Opin Neurol*, vol. 31, no. 1, pp. 74–80, 2018.
- [226] S. Y. Choi, J. H. Choi, and K. D. Choi, "The nystagmus of vestibular paroxysmia," *J Neurol*, vol. 265, no. 7, pp. 1711–1713, 2018.
- [227] V. E. Das, P. Oruganti, P. D. Kramer, and R. J. Leigh, "Experimental tests of a neural-network model for ocular oscillations caused by disease of central myelin," *Exp Brain Res*, vol. 133, no. 2, pp. 189–197, 2000.
- [228] S. Kang and A. G. Shaikh, "Acquired pendular nystagmus," *J Neurol Sci*, vol. 375, pp. 8–17, 2017.
- [229] M. J. Thurtell, "Treatment of nystagmus," *Semin Neurol*, vol. 35, no. 5, pp. 522–526, 2015.
- [230] L. H. Ospina, "Dealing with Nystagmus," *J Binocul Vis Ocul Motil*, vol. 68, no. 4, pp. 99–109, 2018.
- [231] L. Dell'Osso and R. B. Daroff, "Congenital nystagmus waveforms and foveation strategy," *Doc Ophthalmol*, vol. 39, no. 1, pp. 155–182, 1975.
- [232] H. Wang, Q. Yao, Z. Li, D. Yu, and H. Shi, "Characteristics of positional nystagmus in patients with horizontal canal canalolithiasis or cupulopathy," *J Neurol*, vol. 266, no. 10, pp. 2475–2480, 2019.
- [233] M. J. Thurtell and R. J. Leigh, "Therapy for nystagmus," *J Neuroophthalmol*, vol. 30, no. 4, pp. 361–371, 2010.
- [234] B. T. Carter and S. G. Luke, "Individuals' eye movements in reading are highly consistent across time and trial," *J Exp Psychol Hum Percept Perform*, vol. 44, no. 3, pp. 482–492, 2018.
- [235] N. Barot, R. J. McLean, I. Gottlob, and F. A. Proudlock, "Reading performance in infantile nystagmus," *Ophthalmology*, vol. 120, no. 6, pp. 1232–8, 2013.
- [236] M. G. Thomas, I. Gottlob, R. J. McLean, G. Maconachie, A. Kumar, and F. A. Proudlock, "Reading strategies in infantile nystagmus syndrome," *Invest Ophthalmol Vis Sci*, vol. 52, no. 11, p. 8156–65, 2011.
- [237] E. Prakash, R. J. McLean, S. J. White, K. B. Paterson, I. Gottlob, and F. A. Proudlock, "Reading individual words within sentences in infantile nystagmus," *Invest Ophthalmol Vis Sci*, vol. 60, no. 6, pp. 2226–2236, 2019.

- [238] L. Gantz, M. Sousou, V. Gavrilov, and H. E. Bedell, "Reading speed of patients with infantile nystagmus for text in different orientations," *Vision Res*, vol. 155, pp. 17–23, 2019.
- [239] S. Woo and H. E. Bedell, "Beating the beat: reading can be faster than the frequency of eye movements in persons with congenital nystagmus," *Optom Vis Sci*, vol. 83, no. 8, pp. 559–571, 2006.
- [240] I. Vajs, G. Kvascev, T. Papic, and M. Janković, "Eye-tracking image encoding: Auto-encoders for the crossing of language boundaries in developmental dyslexia detection," *IEEE Access*, vol. 11, pp. 3024–3033, 01 2023.
- [241] D. Belete and M. Huchaiah, "Grid search in hyperparameter optimization of machine learning models for prediction of HIV/AIDS test results," *International Journal of Computers and Applications*, vol. 44, pp. 875–8862, 09 2022.
- [242] F. Pedregosa, G. Varoquaux, A. Gramfort, V. Michel, B. Thirion, O. Grisel, M. Blondel, P. Prettenhofer, R. Weiss, V. Dubourg, J. Vanderplas, A. Passos, D. Cournapeau, M. Brucher, M. Perrot, and E. Duchesnay, "Scikit-learn: Machine learning in Python," *Journal of Machine Learning Research*, vol. 12, pp. 2825–2830, 2011.