UNS UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

2025
Bahía Blanca, Argentina

Tesis de Doctorado en Matemática

Un estudio sobre lógicas basadas en t-normas continuas

Gabriel Felix SAVOY GONZALEZ

Director: José Patricio DÍAZ VARELA

Prefacio

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática durante el período comprendido entre el 13 de abril de 2018 y el 5 de marzo de 2025, bajo la dirección del Dr. José Patricio Díaz Varela, Profesor Titular del Departamento de Matemática en el Área I.

Licenciado en Matemática
Gabriel Savoy

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Subsecretaría de Posgrado

La presente tesis ha sido aprobada el .....

mereciendo la calificación de .....

Abstract en español

Esta tesis se centra en el estudio de la lógica de primer orden de t-normas continuas y algunos de sus fragmentos monádicos. Contribuye al campo de las lógicas difusas, una rama de las lógicas no clásicas, que permite deducciones lógicas con un grado de vaguedad o imprecisión. Investigadores como Hájek han propuesto el uso de t-normas, operaciones definidas en el intervalo real $[0, 1]$, para lograr esto. En la lógica difusa estándar, las t-normas modelan conjunciones fuertes, mientras que otros conectivos se interpretan a través de operaciones derivadas del orden y/o la t-norma.

Nos concentramos en las t-normas continuas, que poseen una rica estructura algebraica, a saber, la estructura de las BL-álgebras, una variedad de retículos residuados generados por t-normas continuas. La lógica básica, o lógica BL, sirve como la contraparte sintáctica de las lógicas con semántica en BL-álgebras. Notablemente, otras lógicas no clásicas estudiadas previamente, como la lógica de Łukasiewicz, son casos particulares de lógicas basadas en BL-álgebras. Si las BL-álgebras tienen negación involutiva, forman MV-álgebras, correspondientes a la lógica proposicional de Łukasiewicz.

El estudio de las lógicas de primer orden basadas en t-normas continuas, o lógicas de predicados difusos, es crucial en la lógica difusa. Siguiendo la tradición de Mostowski, interpretamos los cuantificadores como supremos e ínfimos en un conjunto ordenado. Comenzamos con el sistema $BL\forall$ de Hájek, que axiomatiza la lógica de primer orden de BL-álgebras totalmente ordenadas. Una característica de estas lógicas es su naturaleza infinitaria, lo que nos lleva a introducir $BL\forall_\infty$, una extensión que incorpora una regla y un axioma infinitarios. Demostramos que $BL\forall_\infty$ es fuertemente completa con respecto a las t-normas continuas, y sus extensiones a la lógica de primer orden producto y la lógica de Łukasiewicz también son fuertemente completas.

Además, exploramos extensiones modales de la lógica de Łukasiewicz, particularmente la extensión S5, equivalente al fragmento monádico de la lógica de primer orden de Łukasiewicz. Realizamos un estudio algebraico de las MMV-álgebras, MV-álgebras enriquecidas con operadores $\Box$ y $\Diamond$, mostrando que las álgebras finitamente subdirectamente irreducibles en esta variedad son álgebras funcionales. Esto lleva a un resultado de completitud fuertemente finita para la t-norma de Łukasiewicz. Al extender la lógica S5 de Łukasiewicz con una regla infinitaria, logramos completitud fuerte con respecto a la t-norma de Łukasiewicz.

Finalmente, presentamos extensiones axiomáticas para modelos de universo acotado, incorporando un axioma esquema que limita el número de factores subdirectos de la MV-álgebra subyacente, permitiendo de esta manera conseguir resultados de completitud para esta extensión.

Abstract

This thesis focuses on the study of first-order logic of continuous t-norms and some of their monadic fragments. It contributes to the field of fuzzy logics, a branch of non-classical logics, which allows for logical deductions with a degree of vagueness or imprecision. Researchers like Hájek have proposed using t-norms, operations defined on the real interval $[0, 1]$, to achieve this. In standard fuzzy logic, t-norms model strong conjunctions, while other connectives are interpreted through operations derived from order and/or the t-norm.

We concentrate on continuous t-norms, which possess a rich algebraic structure, namely, the structure of BL-algebras, a variety of residuated lattices generated by continuous t-norms. The basic logic, or BL logic, serves as the syntactic counterpart of logics with semantics in BL-algebras. Notably, other previously studied non-classical logics, such as Łukasiewicz logic, are particular cases of logics based on BL-algebras. If BL-algebras have involutive negation, they form MV-algebras, corresponding to propositional Łukasiewicz logic.

The study of first-order logics based on continuous t-norms, or fuzzy predicate logics, is crucial in fuzzy logic. Following Mostowski's tradition, we interpret quantifiers as suprema and infima in an ordered set. We start with Hájek's $BL\forall$ system, which axiomatizes the first-order logic of totally ordered BL-algebras. A characteristic of these logics is their infinitary nature, leading us to introduce $BL\forall_\infty$, an extension incorporating an infinitary rule and an axiom. We demonstrate that $BL\forall_\infty$ is strongly complete concerning continuous t-norms, and its extensions to first-order product logic and Łukasiewicz logic are also strongly complete.

Additionally, we explore modal extensions of Łukasiewicz logic, particularly the S5 extension, equivalent to the monadic fragment of first-order Łukasiewicz logic. We conduct an algebraic study of MMV-algebras, enriched MV-algebras with operators $\Box$ and $\Diamond$, showing that finitely subdirectly irreducible algebras in this variety are functional algebras. This leads to a finitely strong completeness result for the Łukasiewicz t-norm. By extending S5 Łukasiewicz logic with an infinitary rule, we achieve strong completeness concerning the Łukasiewicz t-norm.

Finally, we present axiomatically complete extensions for bounded universe models, incorporating an axiom scheme that limits the number of subdirect factors of the underlying MV-algebra, leading to completeness results.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Esta tesis esta enfocada en estudiar la lógica de primer orden de las t-normas continuas y algunos de sus fragmentos monádicos.

El estudio de las lógicas difusas [17], al cual este trabajo intenta contribuir, es una rama dentro de las llamadas lógicas no clásicas [18]. Como es sabido, las lógicas difusas buscan permitir deducciones lógicas que admitan cierto grado de vaguedad o imprecisión. Diversos investigadores, como Hájek [24], han propuesto el uso de t-normas para lograr este objetivo. Las t-normas son operaciones definidas en el intervalo real $[0, 1]$ que respetan el orden usual de los números reales. Mientras que en la lógica clásica los valores de verdad se determinan mediante el álgebra de Boole de dos elementos, en la lógica difusa *estándar*, las t-normas modelan la interpretación de una conjunción fuerte y el resto de las conectivas se interpretan mediante operaciones derivadas del orden y/o de la t-norma.

En esta tesis nos enfocaremos en las t-normas que son continuas. Hájek [24] demuestra que las t-normas continuas poseen una estructura algebraica rica. Esto lo lleva a definir una clase más general de álgebras de posibles valores de verdad, las BL-álgebras, que son la variedad de reticulados residuados generada por la clase de las t-normas continuas [12] [29]. Además, introduce la lógica básica, o lógica BL, un sistema formal que es la contraparte sintáctica de las lógicas con semántica en BL-álgebras. Curiosamente, otras lógicas no clásicas multivaluadas ya estudiadas previamente, resultan ser casos particulares de lógicas basadas en BL-álgebras. De especial interés para esta tesis, hacemos notar el caso de la lógica de Łukasiewicz. Originalmente estudiada por autores como Łukasiewicz, Post y Tarski [43], [46], esta lógica resulta ser un caso particular de las lógicas difusas. Si a las BL-álgebras les pedimos que su negación sea involutiva, conseguimos la clase de las *MV-álgebras* [15], y resulta que la lógica de Łukasiewicz proposicional se corresponde con la clase de las MV-álgebras. Esta clase está generada por una t-norma continua especial, llamada *t-norma de Łukasiewicz*. Otros casos notables de lógicas no clásicas que están dentro del marco de las lógicas básicas son la lógica producto basada en la t-norma producto, t-norma donde el producto es el producto usual de los números reales, y la lógica de Gödel, donde la conjunción fuerte y la conjunción débil coinciden.

El estudio de las lógicas de primer orden basadas en t-normas continuas, o lógicas de predicado difusas, constituye un aspecto importante de la lógica difusa. Varios autores han contribuido a su desarrollo [24], [25], [31], [38], [36]. En esta tesis seguiremos la tradición empezada por Mostowski [40] de interpretar los cuantificadores como supremos

e ínfimos en un conjunto ordenado. El sistema formal del cual partiremos, es el sistema $BL\forall$ propuesto por Hájek en [24], donde el autor muestra además que la lógica $BL\forall$ permite axiomatizar la lógica de primer orden de las BL-álgebras totalmente ordenadas.

Una caracteristica de la mayoría de las lógicas basadas en t-normas continuas es que resultan *infinitarias*. Diversas reglas infinitarias se han propuesto para su estudio [34] [27] [37]. En esta tesis, introduciremos la lógica $BL\forall_\infty$, como la extensión de $BL\forall$ mediante la incorporación de la regla infinitaria

$$\{\phi \vee (\alpha \to \beta^n) : n \in \mathbb{N}\} \rhd \phi \vee (\alpha \to \alpha\&\beta),$$

y el axioma

$$\forall x(\phi\&\phi) \to ((\forall x\phi)\&(\forall x\phi)).$$

Nuestro interés principal es obtener resultados de completitud respecto a t-normas continuas. Mostraremos que la lógica $BL\forall_\infty$ es fuertemente completa respecto a la clase de las t-normas continuas (Teorema 5.3.1). Gracias a este resultado, también demostraremos que las extensiones de $BL\forall_\infty$ a la lógica producto de primer orden y a la lógica de Łukasiewicz de primer orden son fuertemente completas respecto a sus respectivas t-normas (Corolario 5.4.2 y Corolario 5.4.1). Algunos de estos resultados forman parte de nuestro trabajo «Strong completeness for the predicate logic of the continuous t-norms» publicado en la revista *Fuzzy Sets and Systems* [9].

Por otro lado, diversos autores han estudiado extensiones modales de la lógica de Łukasiewicz [44], [30], [6], [47]. En particular, la extensión modal S5 de la lógica de Łukasiewicz fue estudiada originalmente por Rutledge [44]. Dicho autor muestra que esta extensión es equivalente al fragmento monádico de la lógica de Łukasiewicz de primer orden y da un teorema de completitud *débil* respecto a la t-norma de Łukasiewicz. Con el objetivo de obtener teoremas de completitud fuerte, realizamos un estudio algebraico de las MMV-álgebras, que son MV-álgebras enriquecidas con dos operadores $\Box$ y $\Diamond$. Mostraremos que las álgebras finitamente subdirectamente irreducibles de esta variedad son álgebras funcionales, un tipo especial de álgebra que tiene una conexión estrecha con los modelos de Kripke utilizados para la interpretación semántica. Gracias a esto, logramos demostrar un resultado de completitud finitamente fuerte respecto a la t-norma de Łukasiewicz (Teorema 6.4.7). Asimismo, extenderemos la lógica S5 de Łukasiewicz con una regla infinitaria similar a la que introdujimos en el caso de primer orden para obtener una extensión fuertemente completa respecto a la t-norma de Łukasiewicz (Teorema 6.5.4).

Finalmente, para los dos extensiones S5 de Łukasiewicz mencionadas en el párrafo anterior, mostraremos extensiones axiomáticas completas respecto de modelos de universo acotado (Teorema 6.6.5 y Teorema 6.6.6). Estas extensiones se logran gracias a la incorporación del axioma esquema correspondiente a la ecuación

$$\bigwedge_{1\le i<j\le k+1} \Box(x_i \vee x_j) \to \bigvee_{i=1}^{k+1} \Box x_i \approx 1,$$

que acota el número de factores subdirectos de la MV-álgebra subyacente a una MV-álgebra monádica finitamente subdirectamente irreducible. Los resultados mencionados

en los últimos dos párrafos fueron publicados en nuestro artículo «Strong standard completeness theorems for S5-modal Łukasiewicz logics» de la revista *Annals of Pure and Applied Logic* [10].

Estructura de la tesis

La tesis está organizada de manera que las estructuras algebraicas necesarias se introducen junto con sus lógicas de interés. Los capítulos se desarrollan de la siguiente forma:

- **Capítulo 1: Introducción.**
- **Capítulo 2: Preliminares.** Presentamos un resumen de algunos resultados básicos de álgebra universal y reticulados residuados. Nuestro objetivo principal con este capítulo es establecer la notación y terminología que utilizaremos en el resto de la tesis.
- **Capítulo 3: Conceptos generales de lógica.** Introducimos la noción de lenguajes, que nos permitirá construir fórmulas. La intención es que esta noción sea lo suficientemente general para abarcar todos los lenguajes de interés en esta tesis. En particular, la definición que daremos de lenguaje nos permitirá dar un tratamiento unificado de las lógicas tanto proposicionales como de primer orden, algo no muy habitual en la literatura. Definimos entonces el concepto de lógica, y mostramos como definir lógicas tanto basadas en álgebras como en sistemas axiomáticos. Finalmente, hacemos un breve repaso de algunos resultados de lógica algebraica abstracta y explicamos en qué condiciones podemos aplicarlos.
- **Capítulo 4: Lógicas proposicionales de las t-normas continuas.** Introducimos las lógicas proposicionales relevantes para esta tesis. A medida que presentamos las lógicas, también introducimos las álgebras relevantes y describimos algunas de sus propiedades necesarias para las secciones futuras. Comenzamos el capítulo con las t-normas continuas y la lógica básica. Continuamos recordando resultados de completitud para algunas extensiones axiomáticas de la lógica básica: lógica de Łukasiewicz, lógica producto y lógica de Gödel. Finalmente, concluimos recordando resultados de completitud para la lógica de la clase de las t-normas continuas.
- **Capítulo 5: Lógicas de primer orden.** Mostramos la lógica $BL\forall$, introducida por Hájek como la extensión al primer orden de su lógica proposicional básica. Con el objetivo de tener un teorema de completitud fuerte respecto a las t-normas continuas, estudiamos propiedades de las t-normas. Esto nos muesta la necesidad de agregar una regla esquema infinitaria y un axioma esquema. Estudiamos las propiedades sintácticas de la extensión resultante, en particular las relacionadas con la disyunción. A pesar de que agregar una regla infinitaria hace más difícil mostrar que existen teorías de tipo Henkin, mostramos que esto es posible. Construimos el álgebra de Lindenbaum y obtenemos diversos resultados algebraicos que nos permiten encontrar una inmersión de esta álgebra en la clase de las t-normas continuas, demostrando así la completitud fuerte deseada. Como corolario, exploramos el caso

de la extensión al primer orden de la lógica de Łukasiewicz y la lógica producto. Los resultados de este capítulo forman parte del trabajo [9].

- **Capítulo 6: Lógicas Monádicas.** Exploramos el fragmento monádico de la lógica $BL\forall$. Comenzamos explicando algunos detalles relacionados con el lenguaje. Luego, introducimos la extensión modal S5 de la lógica básica, el sistema axiomático $S5(BL)$, equivalente al fragmento monádico de $BL\forall$. Presentamos la contraparte algebraica de $S5(BL)$, las BL-álgebras monádicas, y revisamos algunas de sus propiedades, además de definir las álgebras funcionales, clave para el resto del capítulo. A continuación, definimos la clase de las MV-álgebras monádicas, demostrando que posee la propiedad de inmersión finita y mostrando que se genera como cuasivariedad a partir de diferentes conjuntos de álgebras funcionales. Todo lo anterior nos permite trabajar con la extensión axiomática de $S5(BL)$, que denotamos como $S5(Ł)$. Esta extensión es la extensión modal S5 de la lógica de Łukasiewicz y también el fragmento monádico de la lógica de primer orden de Łukasiewicz. Probamos que esta lógica es finitamente fuertemente completa respeto a la t-norma de Łukasiewicz. Extendemos esta lógica con una regla infinitaria con el objetivo de conseguir completitud fuerte. Luego de mostrar propiedades sintácticas de esta lógica obtenemos un álgebra de Lindenbaum que resulta ser una MV-álgebra monádica simple. En virtud de resultados algebraicos concernientes a MV-álgebras monádicas simples, obtenemos el teorema de completitud fuerte deseado. Finalmente, exploramos las extensiones de las lógicas anteriores mediante un axioma esquema, que fuerza a que el universo de los modelos sea acotado. Probamos sobre estas lógicas resultados de completitud fuerte. Los resultados de este capítulo forman parte del trabajo [10].

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Álgebra universal

Asumimos que el lector está familiarizado con algunos conceptos básicos del álgebra universal, específicamente las nociones de *álgebra* y *tipo*; así como las nociones de *subálgebras*, *productos directos*, *cocientes* y *ultraproductos*; y la noción de *homomorfismos* y *congruencias*. El libro de Burris y Sankappanavar [4] aborda estas nociones en detalle en sus primeros capítulos.

Utilizaremos las letras $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ para referirnos a álgebras. Si el universo de un álgebra no tiene un nombre específico, emplearemos la misma letra que designa al álgebra, pero sin resaltar, para referirnos a su universo. Denotaremos a los homomorfismos con las letras f, g y h. En el caso de que estos homomorfismos sean proyecciones, utilizaremos generalmente π en su lugar. Llamaremos *inmersiones* a los homomorfismos inyectivos, y si además son sobreyectivos, los denominaremos *isomorfismos*. Para las congruencias, emplearemos el símbolo θ y designaremos el reticulado de congruencias de un álgebra $\mathbf{A}$ con la notación $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$. Denominamos Δ a la menor congruencia de $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ y ∇ a la mayor congruencia de $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$. Si $\mathcal{K}$ es una clase de álgebras del mismo tipo, utilizaremos los siguientes operadores de clases:

- $I(\mathcal{K})$ es la clase de todas las álgebras isormorfas a algún álgebra de $\mathcal{K}$,
- $S(\mathcal{K})$ es la clase de todas las álgebras que sean subálgebra de algún álgebra de $\mathcal{K}$,
- $H(\mathcal{K})$ es la clase de todas las álgebras que sean la imagen homomorfa de algún álgebra de $\mathcal{K}$,
- $P(\mathcal{K})$ es la clase de todas las álgebras que sean el producto directo de una familia de álgebras en $\mathcal{K}$,
- $P_U(\mathcal{K})$ es la clase de todas las álgebras que sean el ultraproducto de una familia de álgebras en $\mathcal{K}$.

Diremos que un álgebra $\mathbf{A}$ de tipo $\mathcal{F}$ *es un subreducto* del álgebra $\mathbf{B}$ de tipo $\mathcal{F}'$ si $A \subseteq B$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ y además $f^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{B}}$ para todo $f \in F$.

Ecuaciones y cuasi-ecuaciones

Una clase $\mathcal{K}$ de álgebras del mismo tipo se denomina *variedad* cuando es cerrada bajo subálgebras, homomorfismos y productos directos. Por otro lado, si la clase es cerrada bajo subálgebras, isomorfismos, productos directos y ultraproductos, entonces se dice que $\mathcal{K}$ es una *cuasivariedad*. Notar que toda variedad, es en particular, una cuasivariedad.

Si $\mathcal{K}$ es una clase de álgebras de un mismo tipo, definimos $V(\mathcal{K})$ como la menor variedad, en términos de inclusión, que contiene a la clase $\mathcal{K}$. De manera similar, definimos $Q(\mathcal{K})$ como la menor cuasivariedad que incluye a la clase $\mathcal{K}$.

Teorema 2.1.1 (Tarski)**.** *Para toda clase de álgebras $\mathcal{K}$ del mismo tipo,*

$$V(\mathcal{K}) = HSP(\mathcal{K}).$$

Teorema 2.1.2 (Maltsev)**.** *Para toda clase de álgebras $\mathcal{K}$ del mismo tipo,*

$$Q(\mathcal{K}) = ISPP_U(\mathcal{K}).$$

Dado un tipo $\mathcal{F}$ y un conjunto de variables X (disjunto de $\mathcal{F}$), el conjunto de los *términos de tipo $\mathcal{F}$ sobre el conjunto X* es el menor conjunto $T_{\mathcal{F}}(X)$ (en el sentido de la inclusión) tal que

- $X \subseteq T_{\mathcal{F}}(X)$;
- si $c \in \mathcal{F}$ es 0-ario, entonces $c \in T_{\mathcal{F}}(X)$; y
- si $f \in \mathcal{F}$ es n-ario y $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T_{\mathcal{F}}(X)$, entonces $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in T_{\mathcal{F}}(X)$.

Recordemos que si $\mathbf{A}$ es un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ y $f \in \mathcal{F}$ tiene aridad n, entonces $f^{\mathbf{A}}$ es una operación n-aria en A. Para un término $t \in T_{\mathcal{F}}(X)$, escribimos $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para indicar que las variables presentes en t están entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Además, dada un álgebra $\mathbf{A}$ de tipo $\mathcal{F}$ y elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, definimos el elemento

$$t^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

de A de manera recursiva, basándonos en la estructura del término, de la siguiente forma:

1. Si t es una variable x_i, entonces $t^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) := a_i$.
2. Si $t \in \mathcal{F}$ y es 0-ario, entonces $t^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) := t^{\mathbf{A}}$.
3. Si $t = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, entonces

$$t^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) := f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}, t_2^{\mathbf{A}}, \ldots, t_n^{\mathbf{A}}).$$

Una *cuasi-ecuación generalizada de tipo $\mathcal{F}$* es una expresión Φ de la forma

$$\&_{i \in I}(t_i(\overline{x}) \approx s_i(\overline{x})) \implies u(\overline{x}) \approx v(\overline{x}),$$

donde t_i, s_i son términos de tipo $\mathcal{F}$ para todo i, y u, v también es un término de tipo $\mathcal{F}$; $\overline{x}$ es una sucesión de variables. La expresión Φ es *válida* en un álgebra $\mathbf{A}$ de tipo $\mathcal{F}$ cuando, para toda sucesión $\overline{a}$ en A,

$$\text{si } t_i^{\mathbf{A}}(\overline{a}) = s_i^{\mathbf{A}}(\overline{a}) \text{ para todo } i \in I, \text{ entonces } u^{\mathbf{A}}(\overline{a}) = v^{\mathbf{A}}(\overline{a}).$$

En este caso, decimos que $\mathbf{A}$ *satisface* Φ. Una cuasi-ecuación generalizada se denomina *cuasi-ecuación* cuando el conjunto de índices I es finito. Una cuasi-ecuación generalizada se denomina *ecuación* cuando el conjunto de índices I es vacío.

Dada una clase de álgebras $\mathcal{K}$ del mismo tipo, decimos que la clase puede ser *axiomatizada* por un conjunto de cuasi-ecuaciones generalizadas si existe un conjunto de cuasi-ecuaciones generalizadas Γ tal que $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ si y solo si $\mathbf{A}$ satisface todas las cuasi-ecuaciones generalizadas de Γ.

Teorema 2.1.3 (Maltsev)**.** *Una clase de álgebras del mismo tipo es una cuasivariedad si y solo si puede ser axiomatizada por un conjunto de cuasi-ecuaciones.*

Teorema 2.1.4 (Birkhoff)**.** *Una clase de álgebras del mismo tipo es una variedad si y solo si puede ser axiomatizada por un conjunto de ecuaciones.*

Productos subdirectos

Una *inmersión subdirecta* de un álgebra $\mathbf{A}$ en un producto directo de álgebras $\prod_{i\in I} \mathbf{B}_i$ es una inmersión $f : \mathbf{A} \to \prod_{i\in I} \mathbf{B}_i$ tal que, para todo $i \in I$, el homomorfismo $\pi_i \circ f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}_i$ es sobreyectivo, donde π_i es la proyección sobre la i-ésima coordenada. En estos casos, donde existe la inmersión subdirecta, afirmamos que $\mathbf{A}$ es un *producto subdirecto* de las álgebras $\mathbf{B}_i$.

Un álgebra $\mathbf{A}$ se considera *subdirectamente irreducible* si no puede expresarse como un producto subdirecto (no trivial) de ningún conjunto de álgebras. Si en cambio solo sabemos que no es un producto subdirecto de ninguna clase **finita** de álgebras, diremos que es *finitamente subdirectamente irreducible*. Los productos subdirectos estan íntimamente relacionados con la estructura del reticulado de congruencias, un ejemplo de esto es el siguiente lema:

Lema 2.1.1 (Lema 8.2 [4])**.** *Si $\theta_i \in Con(\mathbf{A})$ para todo $i \in I$ y $\bigcap_{i\in I} \theta_i = \Delta$, entonces el homomorfismo natural*

$$\nu : \mathbf{A} \to \prod_{i\in I} \mathbf{A}/\theta_i$$

definido por

$$\nu(a)(i) := a/\theta_i$$

es una inmersión subdirecta.

Una inmersión subdirecta que siempre podemos utilizar se fundamenta en el siguiente teorema:

Teorema 2.1.5 (Birkhoff)**.** *Toda álgebra* $\mathbf{A}$ *es isomorfa a un producto subdirecto de álgebras que son subdirectamente irreducibles.*

Como Corolario tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.1.6. *Toda álgebra* $\mathbf{A}$ *es isomorfa a un producto subdirecto de álgebras que son* ***finitamente*** *subdirectamente irreducibles.*

Finalmente, presentamos algunas definiciones adicionales que utilizaremos más adelante. Un álgebra $\mathbf{A}$ se denomina *simple* si solo posee dos congruencias. Un álgebra $\mathbf{A}$ se denomina *semisimple* si es isomorfa a un producto subdirecto de álgebras simples.

Dada un álgebra $\mathbf{A}$ y un subconjunto X de A, el álgebra $\mathbf{B}$ *generada* por X es la subálgebra de $\mathbf{A}$ más pequeña (en el sentido de la inclusión) que contiene a X. Además vale que $b \in B$ si y solo si existe un término t y elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en X tales que $b = t^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Por último, decimos que $\mathbf{A}$ es *finitamente generada* si esta generada por uno de sus subconjuntos es finito.

Inmersiones parciales

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$, y consideremos un subconjunto S de A. Definimos una *inmersión parcial de* S *en* $\mathbf{B}$ como una función inyectiva $h : S \to B$ que cumple las siguientes condiciones:

1. Para cualquier operación n-aria f de $\mathcal{F}$ y para toda n-upla de elementos $a_1, \ldots, a_n$ en S, con $n \in \mathbb{N}$, que satisface $f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in S$, se tiene que
$$h(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathbf{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$
2. Para toda operación 0-aria $c^{\mathbf{A}} \in S$, se cumple que $h(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$.

Sea $\mathcal{K} \cup \{\mathbf{A}\}$ una clase de álgebras del mismo tipo. Decimos que $\mathbf{A}$ es *parcialmente inmersible* en $\mathcal{K}$ si y solo si para cualquier subconjunto finito $S \subseteq A$, existe un álgebra $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ y una inmersión parcial de S en $\mathbf{B}$. Si la clase $\mathcal{K}$ solo contiene un álgebra $\mathbf{B}$, entonces decimos que $\mathbf{A}$ es parcialmente inmersible en $\mathbf{B}$.

A continuación, presentamos un resultado conocido que establece una relación entre las inmersiones parciales y los ultraproductos.

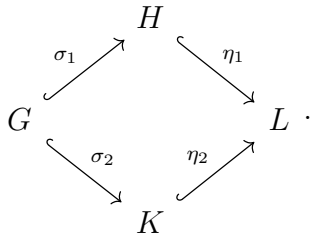
Proposición 2.1.1. *Sea* $\mathcal{K} \cup \{\mathbf{A}\}$ *una clase de álgebras del mismo tipo tal que* $\mathbf{A}$ *es parcialmente inmersible en* $\mathcal{K}$*. Entonces*

- *existe una inmersión de* $\mathbf{A}$ *en un ultraproducto de álgebras de* $\mathcal{K}$*, y*
- *si* $\mathbf{A}$ *no satisface la cuasi-ecuación* Φ*, entonces* $\mathcal{K}$ *tampoco satisface* Φ*.*

Consideremos una clase $\mathcal{K}$ de álgebras de un mismo tipo. Decimos que $\mathcal{K}$ tiene la *propiedad de inmersión finita* si, para cada álgebra $\mathbf{A}$ en $\mathcal{K}$ y cualquier conjunto finito $S \subseteq A$, existe una álgebra finita $\mathbf{B}$ en $\mathcal{K}$ y una inmersión parcial $h : S \to B$. En inglés esta propiedad se conoce como *finite embedability property* por lo que comúnmente se abrevia como FEP. Nosotros también optamos por utilizar esta abreviatura.

Amalgamación

Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras del mismo tipo. Decimos que $\mathcal{K}$ posee la *propiedad de amalgamación* si, para cualquier elección de álgebras $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ y $\mathbf{K}$ en $\mathcal{K}$, y para cualquier par de inmersiones $\sigma_1 : G \to H$ y $\sigma_2 : G \to K$, existe un álgebra $\mathbf{L}$ en $\mathcal{K}$ junto con inmersiones $\eta_1 : H \to L$ y $\eta_2 : K \to L$ que satisfacen la condición $\eta_1 \circ \sigma_1 = \eta_2 \circ \sigma_2$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:



Consideremos una clase $\mathcal{K}$ de álgebras del mismo tipo, un álgebra $\mathbf{G}$ en $\mathcal{K}$ y un conjunto no vacío I. Si para cada $i \in I$ tenemos un álgebra $\mathbf{A}_i$ de $\mathcal{K}$ y una inmersión $\sigma_i : G \to A_i$, denominamos como *I-formación en $\mathcal{K}$* a la 3-upla $(\mathbf{G}, \{\mathbf{A}_i \mid i \in I\}, \{\sigma_i \mid i \in I\})$. Si dada una I-formación existe un álgebra $\mathbf{L}$ en $\mathcal{K}$ e inmersiones $\eta_i : A_i \to L$ para todo $i \in I$ tales que

$$\eta_i \circ \sigma_i = \eta_j \circ \sigma_j \text{ para todo } i, j \in I$$

entonces decimos que $(\mathbf{L}, \{\eta_i \mid i \in I\})$ es una *amalgama en $\mathcal{K}$* para la I-formación $(\mathbf{G}, \{\mathbf{A}_i \mid i \in I\}, \{\sigma_i \mid i \in I\})$. Decimos que $\mathcal{K}$ posee la *propiedad de amalgamación infinita* si toda I-formación en $\mathcal{K}$ tiene una amalgama en $\mathcal{K}$.

2.2. Reticulados residuados

Las lógicas subestructurales, lógicas donde los sistemas de demostración carecen de alguna regla «estructural», tienen una base algebraica firme en lo que se conoce como *reticulados residuados*. En esta sección damos la noción de reticulado residuado que usaremos en esta tesis. Para más detalles consultar, por ejemplo, [22].

Definición 2.2.1. Un *reticulado residuado* es un álgebra $(A, \wedge, \vee, \cdot, \to, 0, 1)$ tal que

- $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un reticulado con último elemento 1 y primer elemento 0,
- $(A, \cdot, 1)$ es un monoide conmutativo,
- $c \leq (a \to b) \iff a \cdot c \leq b$ para todo $a, b, c \in A$.

A la operación $\to$ la llamamos *residuo* de $\cdot$, o simplemente *residuo*.

Algunas propiedades básicas de los reticulados residuados son recopiladas en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. *Sea* $\mathbf{A}$ *un reticulado residuado y sean* $a, b, c \in A$. *Entonces*

- $1 \to a = a$,

- $a \leq b$ *si y solo si* $a \to b = 1$,
- $\cdot$ *es monótono, es decir, si* $a \leq b$, *entonces* $a \cdot c \leq b \cdot c$,
- $a \cdot b \leq a$, *y en particular* $a \cdot b \leq a \wedge b$,
- $b \leq a \to b$,
- $a \to (b \to c) = (a \cdot b) \to c$,
- $a \cdot (a \to b) \leq a \wedge b$,
- $a \vee b \leq (a \to b) \to b$,
- $((a \to b) \to b) \to b = a \to b$,
- $\to$ *es decreciente en el primer argumento y creciente en el segundo, es decir, si* $a \leq b$, *entonces* $b \to c \leq a \to c$ *y* $c \to a \leq c \to b$,
- *si* $Z \subseteq A$ *y* $\bigvee Z$ *existe, entonces* $a \cdot \bigvee Z = \bigvee\{a \cdot z \mid z \in Z\}$,
- *si* $Z \subseteq A$ *y* $\bigvee Z$ *existe, entonces* $\bigvee Z \to a = \bigwedge\{z \to a \mid z \in Z\}$,
- *si* $Z \subseteq A$ *y* $\bigwedge Z$ *existe, entonces* $a \to \bigwedge Z = \bigwedge\{a \to z \mid z \in Z\}$.

Teorema 2.2.1. *La clase de los reticulados residuados forma una variedad.*

Una base ecuacional es (ver [26]):

- Ecuaciones para la variedad de los reticulados acotados,
- Ecuaciones para la variedad de los monoides conmutativos,
- $(x \cdot y) \to z \approx x \to (y \to z) \approx y \to (x \to z)$,
- $x \cdot (x \to y) \leq y$, es decir, $x \cdot (x \to y) \wedge y \approx x \cdot (x \to y)$,
- $(x \wedge y) \to y \approx 1$.

Filtros implicativos

Un subconjunto no vacío F de un reticulado residuado $\mathbf{A}$ se denomina *filtro implicativo* (o simplemente *filtro*) si cumple las siguientes condiciones para todo $a, b \in A$:

1. Si $a \leq b$ y a pertenece a F, entonces b también pertenece a F.
2. Si tanto a como b pertenecen a F, entonces el producto $a \cdot b$ también pertenece a F.

También se pueden definir los filtros implicativos pidiendo que para todo $a, b \in A$ se cumplan las siguientes condiciones (ambas definiciones son equivalentes):

1. El elemento 1 pertenece a F.

2. Si a y $a \to b$ pertenecen a F, entonces b también pertenece a F.

Sea S un subconjunto de A, donde $\mathbf{A}$ es un reticulado residuado. Llamamos *filtro generado por* S al conjunto

$$\mathrm{Fg}(S) := \{b \in A \mid a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \leq b \text{ para } a_1, \ldots, a_k \in S\}.$$

Es fácil demostrar que $\mathrm{Fg}(S)$ es un filtro, que S está contenido en $\mathrm{Fg}(S)$ y que, además, $\mathrm{Fg}(S)$ es el filtro más pequeño que contiene a S. Más precisamente, la última propiedad significa que si F es un filtro de $\mathbf{A}$ tal que $S \subseteq F$, entonces se cumple que $\mathrm{Fg}(S) \subseteq F$.

Las congruencias en un reticulado residuado $\mathbf{A}$ están dadas por los filtros. Más precisamente:

- si F es un filtro de $\mathbf{A}$ la relación

  $$a \sim b \text{ si y solo si } a \to b, b \to a \in F$$

  es una congruencia de $\mathbf{A}$ que notamos como θ_F,

- si θ es una congruencia de $\mathbf{A}$ la clase de equivalencia $1/\theta$ es un filtro,

- se cumple para todo filtro F de $\mathbf{A}$ que $1/\theta_F = F$,

- se cumple para toda congruencia θ de $\mathbf{A}$ que $\theta_{(1/\theta)} = \theta$.

Filtros primos y filtros maximales

Decimos que un filtro F de un reticulado residuado $\mathbf{A}$ es *primo* si $F \neq A$ y para todo $a, b \in A$ se tiene que $a \vee b \in F$ implica $a \in F$ ó $b \in F$.

Decimos que un filtro F de un reticulado residuado $\mathbf{A}$ es *maximal* si $F \neq A$ y dado cualquier filtro G de $\mathbf{A}$ se tiene que $F \subseteq G$ implica $G = F$ o $G = A$. Llamamos *radical* de $\mathbf{A}$ al conjunto

$$\mathrm{Rad}(\mathbf{A}) := \bigcap \{M \mid M \text{ es un filtro maximal de } \mathbf{A}\}.$$

Proposición 2.2.2. *Sea* $\mathbf{A}$ *un reticulado residuado y* F *un filtro de* $\mathbf{A}$.

- $\mathbf{A}/F$ *es finitamente subdirectamente irreducible si y solo si* F *es primo.*

- $\mathbf{A}/F$ *es simple si y solo si* F *es maximal.*

- $\mathbf{A}$ *es finitamente subdirectamente irreducible si y solo si* 1 *es* $\vee$*-irreducible, es decir, si siempre que* $a \vee b = 1$ *para* $a, b \in A$*, entonces* $a = 1$ *o* $b = 1$.

- $\mathbf{A}$ *es subdirectamente irreducible si y solo si existe un elemento* $a \neq 1$ *tal que para todo* $b \neq 1$ *existe un entero positivo* m *tal que* $b^m \leq a$.

- $\mathbf{A}$ *es simple si y solo si para todo* $b \neq 1$ *existe un entero positivo* m *tal que* $b^m = 0$.

- **A** *es semisimple si y solo si* $Rad(\mathbf{A}) = \{1\}$.

Teorema 2.2.2 (Teorema del Filtro Primo)**.** *[Lema 5.26 de [22]] Sea* **A** *un reticulado residuado y* F *un filtro. Si* $a \in A - F$*, entonces existe un filtro primo* P *tal que* $F \subseteq P$ *y* $a \notin P$*.*

Del Teorema se desprende como consecuencia que, si **A** es un reticulado residuado, entonces

$$\bigcap\{P \mid P \text{ es filtro primo de } \mathbf{A}\} = \{1\}.$$

2.2.1. Hoops

Los $\{\cdot, \to, 1\}$-subreductos de los reticulados residuados son los *pocrims* (en inglés «partially ordered commutative residuated integral monoids») [3]. Estos subreductos tienen un orden parcial $\leq$ dado por

$$x \leq y \iff x \to y = 1.$$

Los *hoops* son una subclase de los pocrims. Estos son aquellos pocrims que satisfacen la siguiente condición

$$x \leq y \text{ si y solo si existe un } z \text{ tal que } x = y \cdot z.$$

Esta condición se conoce como *divisibilidad*, por lo que decimos que un hoop es un pocrim divisible.

Denotamos la clase de los hoops como $\mathbb{HO}$. Llamamos *hoops totalmente ordenados* a aquellos hoops cuyo orden sea total, y representamos la clase de todos estos hoops como $\mathbb{HO}_{\text{to}}$.

Se puede demostrar que un hoop es un álgebra $\mathbf{A} = (A, \cdot, \to, 1)$ que cumple con las siguientes propiedades:

- $(A, \cdot, 1)$ es un monoide conmutativo,
- $x \to x = 1$,
- $x \to (y \to z) = (x \cdot y) \to z$,
- $x \cdot (x \to y) = y \cdot (y \to x)$.

Luego la clase de los hoops es una variedad.

Los primeros estudios sistemáticos de las propiedades estructurales de los hoops se encuentran en la tesis doctoral de Ferreirim [20] y en un trabajo posterior de Blok y Ferreirim [2].

Observemos que todo hoop es un $\wedge$-semirreticulado y que el ínfimo se puede definir mediante

$$x \wedge y := x \cdot (x \to y).$$

En el siguiente lema recopilamos algunas propiedades básicas de los hoops (ver [20] [2]).

Lema 2.2.1. *Sea* $\mathbf{A} = (A, \cdot, \to, 1)$ *un hoop. Para todo* $a, b, c \in A$*, se cumple:*

(a) $1 \to a = a$,

(b) $a \to 1 = 1$,

(c) $a \to b \leq (c \to a) \to (c \to b)$,

(d) $a \leq b \to a$,

(e) $a \leq (a \to b) \to b$,

(f) $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$,

(g) $a \to b \leq (b \to c) \to (a \to c)$,

(h) *si* $a \leq b$*, entonces* $b \to c \leq a \to c$ *y* $c \to a \leq c \to b$.

Hoops de Wajsberg

Una subvariedad importante de $\mathbb{HO}$ es la variedad de los *hoops de Wajsberg*, los cuales se definen como aquellos hoops que satisfacen la identidad

$$(x \to y) \to y \approx (y \to x) \to x.$$

El orden parcial subyacente a un hoop de Wajsberg es el de un reticulado distributivo (ver [20]) y el supremo queda definido como

$$x \vee y := (x \to y) \to y.$$

El siguiente lema enuncia algunas propiedades que verifican las operaciones de reticulado en un hoop de Wajsberg.

Lema 2.2.2. *Sea* $\mathbf{A} = (A, \cdot, \to, 1)$ *un hoop de Wajsberg. Para todo* $a, b, c \in A$*, se cumple:*

(a) $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$,

(b) $c \to (a \vee b) = (c \to a) \vee (c \to b)$,

(c) $(a \wedge b) \to c = (a \to c) \vee (b \to c)$,

(d) $c \to (a \wedge b) = (c \to a) \wedge (c \to b)$.

Una propiedad importante que poseen los hoops de Wajsberg es la FEP (propiedad de inmersión finita). Blok y Ferreirim demostraron esta propiedad en [2]. A continuación, presentamos el resultado para referencia futura.

Teorema 2.2.3 (Teorema 3.10 de [2])**.** *La clase de los hoops de Wajsberg tiene la propiedad de inmersión finita.*

Un hoop $\mathbf{A}$ es un *hoop de Wajsberg acotado* si $\mathbf{A}$ es un hoop de Wajsberg y tiene primer elemento.

Hoops cancelativos

Un hoop $\mathbf{A} = (A, \cdot, \to, 1)$ es *cancelativo* si $(A, \cdot, 1)$ es cancelativo como monoide, es decir, si $a \cdot c = b \cdot c$ implica $a = b$ para todo $a, b, c \in A$.

La clase de los hoops cancelativos es una variedad que queda axiomatizada dentro de $\mathbb{HO}$ por la identidad (ver [2])

$$x \to (x \cdot y) \approx y.$$

Además, todo hoop cancelativo es un hoop de Wajsberg [2].

Se puede demostrar que el conjunto de los enteros no positivos, denotado con $\mathbb{Z}^-$, junto con la suma y el orden usuales, forma un hoop. Específicamente, definimos el producto con $x \cdot y := x + y$, donde $+$ representa la suma usual de números enteros. El orden es el orden usual de los enteros. La implicación se define con $x \to y := \text{mín}(y - x, 0)$, y el ultimo elemento 1 es el número $0 \in \mathbb{Z}$. Denotamos a este hoop con $\mathbf{C}_\infty$. Resulta que $\mathbf{C}_\infty$ genera la variedad de los hoops cancelativos (ver [2]).

Si un hoop es cancelativo, entonces no puede tener un primer elemento, excepto en el caso de que sea un hoop trivial. Por lo tanto, la clase de hoops cancelativos es disjunta con respecto a la clase de hoops de Wajsberg acotados (salvo por el hoop trivial). Además, se puede demostrar que todo hoop de Wajsberg totalmente ordenado es cancelativo o acotado.

Congruencias en hoops

Es un hecho conocido que las congruencias en un hoop están determinadas por la clase de equivalencia del 1. Adicionalmente, de forma análoga a como se define la noción de filtro implicativo en los reticulados residuados, es posible establecer dicha noción en un hoop. Se deduce que, para cada congruencia θ en un hoop $\mathbf{A}$, $1/\theta$ constituye un filtro implicativo. Recíprocamente, para cualquier filtro implicativo F de $\mathbf{A}$ la relación binaria

$$\theta_F = \{(a, b) \in A^2 : a \to b, b \to a \in F\}$$

es una congruencia sobre $\mathbf{A}$ tal que $F = 1/\theta_F$. La correspondencia $\theta \mapsto 1/\theta$ es un isomorfismo de orden entre la familia de todas las congruencias de $\mathbf{A}$ y la familia de todos los filtros implicativos de $\mathbf{A}$, ambas ordenadas por inclusión.

Una característica distintiva de los hoops es que, dado que los filtros implicativos incluyen al elemento 1 y son cerrados bajo las operaciones $\to$ y $\cdot$, constituyen también subálgebras.

Suma ordinal

Definimos ahora la *suma ordinal* de hoops. Sea $(I, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado. Para cada $i \in I$ sea $\mathbf{A}_i = (A_i, \cdot_i, \to_i, 1)$ un hoop de manera que $A_i \cap A_j = \{1\}$ siempre que $i \neq j$. Definimos la suma ordinal como el hoop $\bigoplus_{i \in I} \mathbf{A}_i := (\bigcup_{i \in I} A_i, \cdot, \to, 1)$ donde

$$x \cdot y := \begin{cases} x \cdot_i y & \text{si } x, y \in A_i, \\ x & \text{si } x \in A_i - \{1\}, y \in A_j \text{ e } i < j, \\ y & \text{si } y \in A_i - \{1\}, x \in A_j \text{ e } i < j \end{cases}$$

$$x \to y := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_i - \{1\}, y \in A_j \text{ e } i < j, \\ x \to_i y & \text{si } x, y \in A_i, \\ y & \text{si } y \in A_i, x \in A_j \text{ e } i < j. \end{cases}$$

Diremos que un hoop totalmente ordenado es *irreducible* cuando no puede ser escrito como la suma ordinal de dos hoops totalmente ordenados no triviales.

Proposición 2.2.3 ([1])**.** *Para un hoop totalmente ordenado* **A** *las siguientes condiciones son equivalentes:*

- **A** *es irreducible;*
- *para todo* $a, b \in A$, $b \to a = a$ *implica* $b = 1$ *ó* $a = 1$*;*
- **A** *es un Wajsberg hoop.*

Capítulo 3

Conceptos generales de lógica

En este capítulo, presentaremos definiciones básicas que son comunes a todas las lógicas que se abordarán más adelante en la tesis. Definiremos el concepto de lenguaje, los métodos para construir e interpretar fórmulas, y los conceptos de lógica y sistema deductivo.

3.1. Lenguajes

En esta tesis, abordaremos lógicas proposicionales, lógicas de primer orden y lógicas modales. Para clarificar las diferencias entre estos distintos lenguajes, hemos decidido considerarlos como casos particulares de una definición de lenguaje más general.

Definimos un *lenguaje* $\mathcal{L}$ de tipo $\mathcal{F}$ como un conjunto de símbolos que incluye lo siguiente:

- El conjunto $\mathcal{F}$, cuyos elementos denominaremos *conectivas*;
- Un subconjunto, posiblemente vacío, del conjunto de símbolos de *cuantificación* $\{\forall, \exists\}$;
- Un conjunto, posiblemente vacío, de *variables*;
- Un conjunto, posiblemente vacío, de *constantes*;
- Un conjunto, posiblemente vacío, de símbolos de *predicado*. Cada símbolo de predicado tiene asociada una *aridad* (un entero no negativo).

Observación 3.1.1. En algunas ocasiones utilizaremos algún símbolo de variable, como la letra x, para referirnos al símbolo en sí, y en otras ocasiones la emplearemos para aludir a una variable genérica del lenguaje (metavariable). Aplicaremos un tratamiento similar para los predicados y las constantes.

Llamaremos *términos* tanto a las variables como a las constantes de un lenguaje.

Dado un lenguaje $\mathcal{L}$ de tipo $\mathcal{F}$, llamaremos *fórmulas* del lenguaje a cadenas de símbolos construidas recursivamente a partir de símbolos del lenguaje, siguiendo las siguientes reglas:

- Si P es un símbolo de predicado de aridad 0, entonces P es una fórmula.
- Si P es un símbolo de predicado de aridad n y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos, entonces $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ es una fórmula.
- Si $F \in \mathcal{F}$ es una conectiva de aridad 0, entonces F es una formula.
- Si $\phi_1, \ldots, \phi_n$ son fórmulas y $F \in \mathcal{F}$ es una conectiva de aridad n, entonces $F(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ también es una fórmula.
- Si ϕ es una fórmula, x es alguna variable y $\square$ es un cuantificador, entonces $\square x\phi$ es una fórmula.

Utilizaremos la notación Fm para referirnos al conjunto de todas las fórmulas de un lenguaje.

Usaremos las letras griegas α, β, γ, δ, θ, ϕ, χ y ψ para referirnos a fórmulas. Para referirnos a conjuntos de fórmulas usaremos las letras griegas mayúsculas Γ y Δ.

3.2. Interpretación

Veamos cómo interpretar fórmulas de un lenguaje utilizando álgebras. Interpretaremos las fórmulas cuantificadas empleando supremos e ínfimos, siguiendo el enfoque que Hájek presenta en [24]. Históricamente, Mostowski fue uno de los pioneros en proponer la interpretación de los cuantificadores a través de supremos e ínfimos en estructuras ordenadas [40].

Sea un lenguaje $\mathcal{L}$ de tipo $\mathcal{F}$ y un álgebra $\mathbf{B}$ de tipo $\mathcal{F}'$, donde $\mathcal{F}$ contiene la conectiva 0-aria 1 y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Una $\mathbf{B}$-*estructura* $\mathbf{M} = (M, f)$ se compone de un conjunto M, que llamamos *universo* de la estructura, y una función f, que llamamos *asignación*, que satisface las siguientes condiciones:

- A cada predicado P de aridad n de $\mathcal{L}$ le corresponde una función $f(P) : M^n \to B$,
- A cada constante c de $\mathcal{L}$ se le asigna un elemento $f(c) \in M$.

Dada una $\mathbf{B}$-estructura $\mathbf{M} = (M, f)$, definimos una *valuación* como una función v que asigna a cada variable de $\mathcal{L}$ un elemento de M. Si v y w son valuaciones y x es una variable, utilizamos la notación $v \equiv_x w$ para indicar que v y w son idénticas, salvo posiblemente por el valor que asignan a x.

Consideremos la $\mathbf{B}$-estructura $\mathbf{M}$ y una valuación v. A continuación, explicamos cómo interpretamos una fórmula en la estructura $\mathbf{M}$ y la valuación v. Definimos la *interpretación* de cada constante c como $c^{\mathbf{M},v} := f(c)$ y la interpretación de cada variable x como $x^{\mathbf{M},v} := v(x)$. Para una fórmula ϕ, definimos su interpretación $\|\phi\|^{\mathbf{M},v}$ de manera recursiva de la siguiente forma:

- Si ϕ tiene la forma $P(t_1, \ldots, t_n)$, donde $t_1, \ldots, t_n$ son términos y P es un símbolo de predicado de aridad n, entonces

$$\|\phi\|^{\mathbf{M},v} := f(P)(t_1^{\mathbf{M},v}, \ldots, t_n^{\mathbf{M},v}).$$

De manera similar, si ϕ es un predicado P de aridad 0, se tiene que

$$\|\phi\|^{\mathbf{M},v} := f(P),$$

- Si $\phi = F(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, donde F es un conectivo de aridad n, entonces $\|\phi\|^{\mathbf{M},v}$ se define si y solo si para todo $1 \leq i \leq n$ se cumple que $\|\psi_i\|^{\mathbf{M},v}$ está definida. En tal caso, se tiene que
$$\|\phi\|^{\mathbf{M},v} := F^{\mathbf{B}}(\|\psi_1\|^{\mathbf{M},v}, \ldots, \|\psi_n\|^{\mathbf{M},v}).$$
De manera similar, si ϕ es un conectivo F de aridad 0, entonces $\|\phi\|^{\mathbf{M},v} = F^{\mathbf{B}}$,

- Si $\phi = \forall x\psi$, entonces $\|\phi\|^{\mathbf{M},v}$ se define si se cumplen las siguientes condiciones:
  - Para toda valuación $w \equiv_x v$, $\|\psi\|^{\mathbf{M},w}$ está definida, y
  - $\bigwedge_{w \equiv_x v} \|\psi\|^{\mathbf{M},w}$ existe en $\mathbf{B}$.

  Si ambas condiciones se satisfacen, entonces
$$\|\phi\|^{\mathbf{M},v} := \bigwedge_{w \equiv_x v} \|\psi\|^{\mathbf{M},w}.$$

- Si $\phi = \exists x\psi$, entonces $\|\phi\|^{\mathbf{M},v}$ se define si se cumplen las siguientes condiciones:
  - Para toda valuación $w \equiv_x v$, $\|\psi\|^{\mathbf{M},w}$ está definida, y
  - $\bigvee_{w \equiv_x v} \|\psi\|^{\mathbf{M},w}$ existe en $\mathbf{B}$.

  Si ambas condiciones se satisfacen, entonces
$$\|\phi\|^{\mathbf{M},v} := \bigvee_{w \equiv_x v} \|\psi\|^{\mathbf{M},w}.$$

Escribimos $\|\phi\|^{\mathbf{M}} = 1^{\mathbf{B}}$ si $\|\phi\|^{\mathbf{M},v} = 1^{\mathbf{B}}$ para toda valuación v.

Una $\mathbf{B}$-estructura $\mathbf{M} = (M, f)$ se dice *segura* si $\|\phi\|^{\mathbf{M},v}$ está definida para todas las fórmulas ϕ y valuaciones v.

Llamaremos $\mathbf{B}$-*modelo* de una fórmula ϕ a toda $\mathbf{B}$-estructura segura $\mathbf{M}$ que satisfaga $\|\phi\|^{\mathbf{M}} = 1$. De manera similar, llamaremos $\mathbf{B}$-*modelo* de un conjunto de fórmulas Γ a toda $\mathbf{B}$-estructura segura $\mathbf{M}$ que satisfaga $\|\phi\|^{\mathbf{M}} = 1$ para todo $\phi \in \Gamma$.

3.3. Lógicas

En esta sección, definimos el concepto general de lógica que usaremos.

Definición 3.3.1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje. Una *lógica* en $\mathcal{L}$ es una relación de consecuencia $\Vdash \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{Fm}) \times \mathrm{Fm}$ que cumple las siguientes propiedades para todo conjunto de fórmulas Γ, conjunto de fórmulas Δ y fórmula ϕ:

Identidad Si $\phi \in \Gamma$, entonces $\Gamma \Vdash \phi$.

Monotonía Si $\Gamma \Vdash \phi$ y $\Gamma \subseteq \Delta$, entonces $\Delta \Vdash \phi$.

Transitividad Si $\Gamma \Vdash \phi$ y $\Delta \Vdash \psi$ para todo $\psi \in \Gamma$, entonces $\Delta \Vdash \phi$.

Como es costumbre, si $\Gamma = \emptyset$ denotamos $\Gamma \Vdash \phi$ como $\Vdash \phi$. Si escribimos $\phi \Vdash \Gamma$, queremos decir que $\phi \Vdash \psi$ para todo $\psi \in \Gamma$. Si en cambio escribimos $\Delta \Vdash \Gamma$, donde Δ es un conjunto de fórmulas, queremos decir que $\Delta \Vdash \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Usamos la notación $\Gamma \dashv\Vdash \Delta$ para decir que $\Gamma \Vdash \Delta$ y $\Delta \Vdash \Gamma$.

Decimos que $\Vdash$ es *finitaria* si, para cualquier conjunto de fórmulas Γ y cualquier fórmula ϕ, siempre que se cumple $\Gamma \Vdash \phi$, existe un subconjunto finito $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma' \Vdash \phi$. En caso de que $\Vdash$ no sea finitaria, decimos que es *infinitaria*.

Lógicas basadas en álgebras

Usando la noción de interpretación y la noción de modelos de la sección anterior definimos una relación de consecuencia lógica.

Definición 3.3.2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de tipo $\mathcal{F}$ y sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras de tipo $\mathcal{F}'$, donde $\mathcal{F}$ contiene la conectiva 0-aria 1 y $\mathcal{F}'$ contiene a $\mathcal{F}$. Llamamos *lógica* en $\mathcal{L}$ *basada en* $\mathcal{K}$ y la denotamos por $\vDash_{\mathcal{K}}$, a toda lógica $\vDash_{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{Fm}) \times \mathrm{Fm}$ que verifique lo siguiente:

$$\Gamma \vDash_{\mathcal{K}} \phi \iff \text{para todo } \mathbf{B} \in \mathcal{K}, \text{ todo } \mathbf{B}\text{-modelo de } \Gamma \text{ es también un } \mathbf{B}\text{-modelo de } \phi,$$

donde Γ es un conjunto de fórmulas y ϕ es una fórmula.

Una fórmula ϕ se considera una *tautología* de $\vDash_{\mathcal{K}}$ si se cumple que $\vDash_{\mathcal{K}} \phi$.

Lógicas sintácticas

Damos ahora las definiciones para poder hablar de la contraparte sintáctica de una lógica semántica.

Consideremos un lenguaje $\mathcal{L}$. Utilizaremos la notación $\Gamma \rhd \phi$ para indicar que el par (Γ, ϕ) constituye una *regla* (para el lenguaje $\mathcal{L}$), donde Γ representa un conjunto de fórmulas, llamadas *premisas*, y ϕ es una fórmula. Cuando $\Gamma = \emptyset$, denominaremos a la fórmula ϕ y a la regla $\Gamma \rhd \phi$ como *axioma*. Llamaremos *sistema axiomático* (para un lenguaje $\mathcal{L}$) a un conjunto de reglas.

Los sistemas axiomáticos permiten la construcción de lo que denominamos *demostraciones*. Sea H un sistema axiomático en un lenguaje $\mathcal{L}$, Γ un conjunto de fórmulas y ϕ una fórmula. Una *demostración* de ϕ a partir de Γ en H consiste en una sucesión $\{\phi_i\}_{i \leq \xi}$ de fórmulas, donde ξ es un ordinal, tal que se cumplen las siguientes condiciones:

- El último elemento de la sucesión es ϕ, es decir, $\phi_\xi = \phi$.
- Para todo $j \leq \xi$, se verifica al menos una de las siguientes opciones:
  - $\phi_j \in \Gamma$.
  - Existe un conjunto Δ de fórmulas que aparecen en la sucesión $\{\phi_i\}_{i \leq \xi}$ antes de ϕ_j, tal que $(\Delta \rhd \phi_j) \in H$.

Al ordinal ξ lo llamaremos *longitud* de la demostración.

Definición 3.3.3. Sea H un sistema axiomático en un lenguaje $\mathcal{L}$. Llamamos *lógica sintáctica* asociada a H y la denotamos por $\vdash_H$, a toda lógica $\vdash_H \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{Fm}) \times \mathrm{Fm}$ que verifique lo siguiente:

$$\Gamma \vdash_H \phi \iff \text{existe una demostración de } \phi \text{ a partir de } \Gamma \text{ en } H,$$

donde Γ es un conjunto de fórmulas y ϕ es una fórmula.

Una fórmula ϕ se considera un *teorema* de $\vdash_H$ si se cumple que $\vdash_H \phi$.

Si H y J son sistemas axiomáticos en un mismo lenguaje, con $H \subseteq J$, entonces diremos que la lógica $\vdash_J$ es una *extensión* de $\vdash_H$. Si además sabemos que todos los elementos de $J - H$ son axiomas, entonces decimos que $\vdash_J$ es una *extensión axiomática* de $\vdash_H$. Si Γ es un conjunto de fórmulas y H es un sistema axiomático, entonces al escribir $H + \Gamma$ nos referimos a la extensión de H que se obtiene al añadir las fórmulas de Γ como axiomas al sistema axiomático H. Si Γ es el conjunto de todas las instancias de un conjunto de fórmulas esquema, entonces llamamos a $H + \Gamma$ *extensión esquematica de* H.

Las sucesiones que utilizamos para representar demostraciones son, en general, infinitas. Sin embargo, si todas las reglas del sistema axiomático tienen un conjunto finito de premisas, el siguiente resultado garantiza que siempre podemos sustituir una demostración infinita por una finita.

Proposición 3.3.1. *Sea H un sistema axiomático y $\vdash_H$ el sistema deductivo asociado. Si para cada regla $\Gamma \rhd \phi$ de H se cumple que Γ es un conjunto finito, entonces $\vdash_H$ es finitaria.*

Demostración. Demostraremos el resultado utilizando inducción transfinita sobre la longitud de la demostración ξ. Específicamente, probaremos que para todo ordinal ξ, si Γ es un conjunto de fórmulas y ϕ es una fórmula tal que existe una demostración de ϕ a partir de Γ de longitud ξ, entonces existe un subconjunto finito $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma' \vdash_H \phi$.

El resultado se cumple claramente si la longitud es 1. Consideremos ahora la siguiente hipótesis inductiva: el resultado se verifica si la longitud de la demostración es menor que el ordinal ξ. Sea Γ un conjunto de fórmulas y ϕ una fórmula tal que existe una demostración de ϕ a partir de Γ de longitud ξ. Por la definición de demostración, tenemos dos casos posibles: que $\phi \in \Gamma$ o que exista una regla $\Delta \rhd \phi \in H$ donde las fórmulas de Δ aparecen en la demostración antes de ϕ.

Si $\phi \in \Gamma$, entonces $\{\phi\} \subseteq \Gamma$ y se cumple que $\{\phi\} \vdash_H \phi$, lo que satisface el resultado.

Si, en cambio, existe una regla $\Delta \rhd \phi \in H$ con todas las fórmulas de Δ presentes en la demostración antes de ϕ, se verifica que para cada $\psi \in \Delta$ existe una demostración de ψ a partir de Γ con longitud menor que ξ. Por hipótesis inductiva, para cada $\psi \in \Delta$ existen conjuntos finitos $\Gamma_\psi \subseteq \Gamma$ tales que $\Gamma_\psi \vdash_H \psi$. Es evidente que $\bigcup_{\psi \in \Delta} \Gamma_\psi \vdash_H \phi$, y dado que Δ es un conjunto finito, llegamos a la conclusión deseada. □

La siguiente definición expresa a lo que nos referimos con que una lógica sintáctica sea la contraparte sintáctica de una lógica basada en álgebras.

Definición 3.3.4. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de tipo $\mathcal{F}$ y $\mathcal{K}$ una clase de álgebras de tipo $\mathcal{F}'$, donde $\mathcal{F}'$ contiene la conectiva 0-aria 1 y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Sea $\vdash$ una lógica sintáctica en $\mathcal{L}$ y $\models$ una lógica en $\mathcal{L}$ basada en $\mathcal{K}$, decimos que $\vdash$

- es *fuertemente completa respecto a* $\mathcal{K}$ si para todo conjunto Γ de fórmulas y toda fórmula ϕ se cumple que $\Gamma \vdash \phi \iff \Gamma \models \phi$;
- es *finitamente fuertemente completa respecto a* $\mathcal{K}$ si para todo conjunto **finito** Γ de fórmulas y toda fórmula ϕ se cumple que $\Gamma \vdash \phi \iff \Gamma \models \phi$;
- es *completa respecto a* $\mathcal{K}$ (o *débilmente completa*) si para toda fórmula ϕ se cumple que $\vdash \phi \iff \models \phi$;
- es *adecuada respecto a* $\mathcal{K}$ si para todo conjunto Γ de fórmulas y toda fórmula ϕ se cumple que $\Gamma \vdash \phi \implies \Gamma \models \phi$.

En inglés, se utiliza la expresión «sound» en lugar de «adecuada». Hemos decidido traducir esta terminología de esta manera, aunque algunos autores prefieren emplear otros términos.

Observemos que si una lógica es fuertemente completa respecto a alguna clase $\mathcal{K}$, entonces es finitamente fuertemente completa respecto a la clase $\mathcal{K}$, y de manera similar, si una lógica es finitamente fuertemente completa respecto a $\mathcal{K}$, entonces es débilmente completa respecto a $\mathcal{K}$. Notemos también que si una lógica es finitaria, entonces la noción de completitud fuerte y completitud finitamente fuerte coinciden.

Dada una lógica $\models$ basada en una clase de álgebras $\mathcal{K}$, siempre existe una manera trivial de obtener una lógica sintáctica fuertemente completa con respecto a $\mathcal{K}$. Para lograrlo, basta con considerar el sistema axiomático compuesto por las reglas $\Gamma \rhd \phi$ tales que $\Gamma \models \phi$. Sin embargo, cuando nos interesamos en resultados de completitud, buscamos demostrar la completitud para sistemas axiomáticos que sean «más simples» que el sistema axiomático recién mencionado.

3.4. Lógicas proposicionales

En esta sección, definimos lo que entendemos por un *lenguaje proposicional* y explicamos cómo se presentan las nociones de interpretación y modelo en este contexto. Además, enunciamos un resultado de lógica algebraica abstracta relacionado con ciertas lógicas proposicionales, específicamente las lógicas *implicativas*, que será útil en los capítulos siguientes. Para obtener más detalles sobre lógica algebraica abstracta, recomendamos consultar el libro de Font [21].

Diremos que un lenguaje $\mathcal{L}$ de tipo $\mathcal{F}$ es un *lenguaje proposicional* de tipo $\mathcal{F}$ si cumple lo siguiente:

- El conjunto de cuantificadores, el conjunto de variables y el conjunto de constantes es vacío.
- Todos los símbolos de predicado son de aridad 0.

A los predicados de aridad 0 de un lenguaje proposicional los denominamos *letras proposicionales* y a las fórmulas de un lenguaje proposicional las llamamos *proposiciones*. Denotamos el conjunto de todas las proposiciones como Prop. A las lógicas definidas sobre lenguajes proposicionales, las llamamos, por supuesto, *lógicas proposicionales*.

Debido a que el lenguaje proposicional es más simple, la noción de interpretación se simplifica considerablemente. En particular, cuando consideramos **B**-estructuras, donde **B** es un álgebra de tipo $\mathcal{F}$, el universo de las estructuras y las valuaciones no influyen en la interpretación. Además, si **M** es una **B**-estructura, la asignación f de **M** es una función de dominio {letras proposicionales} y codominio B. Con estas consideraciones en cuenta, en el contexto proposicional, podemos pensar las **B**-estructuras como funciones f de dominio {letras proposicionales} y codominio B.

Podemos decir aún más. Consideremos el conjunto de todas las proposiciones Prop para lenguaje dado de tipo $\mathcal{F}$. De manera natural, podemos definir operaciones en Prop, una por cada símbolo de $\mathcal{F}$. Denotamos el álgebra determinada por estas operaciones como **Prop**. Notemos que esta álgebra es un álgebra de tipo $\mathcal{F}$. Luego no es dificil ver que la interpretación $\|.\|^f$ asociada a una **B**-estructura f, donde **B** es un álgebra de tipo $\mathcal{F}$, no es más que un homomorfismo de **Prop** en **B** que extiende la asignación f.

Lógicas implicativas

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de tipo $\mathcal{F}$. Llamamos a todos los homomorfismos $\sigma : \mathbf{Prop} \to \mathbf{Prop}$ *sustituciones proposicionales*. Si Γ es un conjunto de proposiciones y σ una sustitución proposicional, escribimos $\sigma(\Gamma)$ para representar al conjunto $\{\sigma(\phi) \mid \phi \in \Gamma\}$. Si un conjunto de proposiciones Γ satisface la condición $\sigma(\Gamma) = \Gamma$, entonces decimos que Γ es *cerrado bajo sustituciones*.

Definición 3.4.1. Sea $\vdash$ una lógica proposicional sintáctica. Diremos que $\vdash$ es *estructural* si para todo conjunto de proposiciones Γ y toda proposición ϕ se cumple que:

$$\text{Si } \Gamma \vdash \phi, \text{ entonces } \sigma(\Gamma) \vdash \sigma(\phi) \text{ para toda sustitución } \sigma.$$

Una clase de lógicas que nos resultará de gran utilidad es la clase de las lógicas *implicativas*. Esto se debe a un poderoso resultado de la lógica algebraica abstracta que, para cada lógica implicativa, proporciona una clase de álgebras con respecto a la que la lógica es fuertemente completa.

Definición 3.4.2. Una *lógica implicativa* es una lógica proposicional sintáctica estructural $\vdash$ en un lenguaje de tipo $\mathcal{F}$ que contiene una conectiva $\to$ de aridad 2 tal que las siguientes condiciones se verifican:

- $\vdash p \to p$,
- $p \to q, q \to r \vdash p \to r$,
- para cada conectiva $F \in \mathcal{F}$ con aridad $n \geq 1$ se cumple que

$$p_1 \to q_1, q_1 \to p_1, \ldots, p_n \to q_n, q_n \to p_n \vdash F(p_1, \ldots, p_n) \to F(q_1, \ldots, q_n),$$

- $p, p \to q \vdash q$,
- $p \vdash q \to p$,

donde $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n, p, q, r$ son letras proposicionales.

Teorema 3.4.1 (Proposición 2.7 de [21])**.** *Sea H un sistema axiomático en un lenguaje de tipo $\mathcal{F}$. Si $\vdash_H$ es una lógica implicativa finitaria, entonces $\vdash_H$ es fuertemente completa respecto a la clase $\mathcal{K}$ de álgebras de tipo $\mathcal{F}$ dada por las siguientes cuasi-identidades generalizadas:*

- $x \to y \approx 1, y \to x \approx 1 \Rightarrow x \approx y$.
- $\underset{\phi \in \Gamma}{\&} \phi \approx 1 \Rightarrow \psi \approx 1$, *donde* $\Gamma \rhd \psi \in H$.

Capítulo 4

Lógicas proposicionales de las t-normas continuas

En este capítulo haremos una breve excursión por algunos resultados y definiciones conocidos concernientes a proposiciones interpretadas en clases de *BL-álgebras*. De particular interés nos resultarán las proposiciones interpretadas en clases de *t-normas continuas*.

Los resultados presentados en este capítulo no son originales; sin embargo, es fundamental desarrollarlos, ya que establecen el contexto y la metodología que hemos utilizado para obtener los resultados que aparecen en los capítulos posteriores de esta tesis.

4.1. t-normas continuas

Una *t-norma* es una operación binaria, denotada por $\cdot$, definida en el intervalo real $[0, 1]$, que satisface las siguientes propiedades para todo $a, b, c \in [0, 1]$:

1. *Conmutatividad:* $a \cdot b = b \cdot a$ para todos $a, b \in [0, 1]$.
2. *Asociatividad:* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ para todos $a, b, c \in [0, 1]$.
3. *Monotonía:* Si $b \leq c$, entonces $a \cdot b \leq a \cdot c$ para todos $a, b, c \in [0, 1]$. El orden $\leq$ es el orden usual de los números reales.
4. *Elemento neutro:* $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in [0, 1]$.

Las t-normas fueron introducidas por primera vez en un contexto no relacionado con la lógica [35]. Desde entonces, han sido investigadas utilizando herramientas de álgebra y ecuaciones funcionales, y se han aplicado en diversas disciplinas matemáticas, incluyendo teoría de juegos, teoría de medidas e integrales no aditivas, teoría de conjuntos difusos, lógica difusa, control difuso, modelado de preferencias y análisis de decisiones, e inteligencia artificial. El lector puede encontrar una excelente revisión sobre las t-normas en [33], que incluye referencias a los campos mencionados anteriormente.

En esta tesis nos enfocaremos exclusivamente en las t-normas que son **continuas** (continuas en el sentido usual). Los resultados que describen las t-normas continuas y sus propiedades fueron presentados originalmente en [39]. Si la t-norma es continua, podemos definir las siguientes operaciones en el intervalo $[0, 1]$:

- $\to$ como el residuo de $\cdot$, es decir, la operación binaria $\to$ que cumple

$$x \cdot y \leq z \iff x \leq y \to z,$$

- $x \wedge y := x \cdot (x \to y)$,
- $x \vee y := ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)$.

Estas operaciones nos permiten establecer una estructura algebraica en el intervalo $[0, 1]$ del tipo $(\wedge, \vee, \cdot, \to, 0, 1)$. A esta estructura también la denominamos t-norma continua. Denotamos la clase de todas las t-normas continuas con $\mathcal{T}_{\text{cont}}$.

Llamaremos *lenguaje proposicional BL* a cualquier lenguaje proposicional de tipo $(\&, \to, 0)$ cuyo conjunto de letras proposicionales es infinito numerable. A lo largo de este capítulo, a menos que se indique lo contrario, asumiremos que trabajamos con un lenguaje proposicional BL. Cada vez que utilicemos estos lenguajes, emplearemos de manera intercambiable las siguientes notaciones:

- Usaremos $\phi \wedge \psi$ en lugar de $\phi\&(\phi \to \psi)$,
- Usaremos $\phi \vee \psi$ en lugar de $((\phi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \phi) \to \phi)$,
- Usaremos $\neg\phi$ en lugar de $\phi \to 0$,
- Usaremos $\phi \leftrightarrow \psi$ en lugar de $(\phi \to \psi)\&(\psi \to \phi)$,
- Usaremos, para todo $n < \omega$, ϕ^n en lugar de $\underbrace{\phi\&\phi\&\ldots\&\phi}_{n \text{ veces}}$,

donde ϕ y ψ denotan proposiciones.

El siguiente lema presenta algunas propiedades que son válidas para todas las t-normas continuas.

Lema 4.1.1 (Lema 2.1.6 y Lema 2.1.10 de [24])**.** *Sea $\cdot$ una t-norma continua. Entonces, para todo $a, b \in [0, 1]$, se verifican las siguientes propiedades:*

- $1 \to a = a$.
- $\min(a, b) = a \wedge b = a \cdot (a \to b)$.
- $\max(a, b) = a \vee b = ((a \to b) \to b) \wedge ((b \to a) \to a)$.

Observemos que el lema nos dice que las operaciones $\wedge$ y $\vee$ son las funciones máximo y mínimo habituales en $[0, 1]$, respectivamente.

Al considerar una t-norma continua $\mathbf{B}$, denominamos *elementos idempotentes*, o simplemente *idempotentes*, a aquellos elementos $u \in B$ que satisfacen la condición $u \cdot u = u$.

Lema 4.1.2. *Sea $\cdot$ una t-norma continua. Entonces, para todo $a, b, u \in [0, 1]$, se cumple:*

$$\textit{Si } a \leq u \leq b \textit{ y } u \textit{ es idempotente entonces } a \cdot b = a.$$

Las siguientes t-normas continuas serán muy importantes para nosotros:

- La t-norma de Łukasiewicz $[0,1]_{\text{Ł}}$ con su producto dado por $a \cdot b = \text{máx}(a + b - 1, 0)$. La lógica basada en la t-norma de Łukasiewicz es conocida como la *lógica de Łukasiewicz* y la denotamos con $\vDash_{\text{Ł}}$. Esta fue la primera lógica infinitamente valuada, es decir, con una cantidad infinita de posibles valores de verdad, que aparece en la literatura [48].

- La t-norma de Gödel $[0,1]_G$ con su producto dado por $a \cdot b = \text{mín}(a, b)$. La lógica basada en la t-norma de Gödel, que llamaremos *lógica de Gödel*, no es más que la versión infinitamente valuada de las lógicas finito valuadas introducidas por Gödel [23]. Denotaremos la lógica de Gödel con $\vDash_G$.

- La t-norma producto $[0,1]_{\Pi}$ con su producto dado por el producto usual de números reales. La lógica basada en la t-norma producto la denotamos con $\vDash_{\Pi}$.

El siguiente resultado clásico de Mostert y Shields [39] nos muestra que estas t-normas continuas se constituyen como los elementos fundamentales a partir de los cuales es posible construir cualquier t-norma continua.

Teorema 4.1.1. *Sea $\cdot$ una operación binaria en $[0,1]$. Entonces $\cdot$ es una t-norma continua si y solo si existe una sucesion $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ en $[0,1]$ tal que para todo numero natural i :*

- *los intervalos (a_i, b_i) son disjuntos dos a dos,*

- *$[a_i, b_i]$ es isomorfo a $[0,1]_{\text{Ł}}$ o a $[0,1]_{\Pi}$, donde en $[a_i, b_i]$ estamos considerando el producto $\cdot$ restringido a $[a_i, b_i]$ junto con el orden usual de los reales,*

- *si $x, y \in [0,1]$ no pertenecen simultáneamente a ningún intervalo (a_i, b_i), entonces $x \cdot y = \text{mín}(x, y)$,*

4.2. Lógica básica

Hájek, en su libro [24], menciona varias lógicas infinitovaluadas existentes hasta ese momento y las utiliza como punto de partida para proponer un marco general de estudio. Entre estas lógicas se encuentran algunas ya mencionadas, como la lógica de Łukasiewicz y la lógica de Gödel. El marco general que Hájek propone se basa en la *lógica básica*, una lógica sintáctica que introduce con el objetivo de que actúe como la contraparte sintáctica de la lógica basada en $\mathcal{T}_{\text{cont}}$.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional BL. Denominaremos *sistema axiomático BL*, representado por BL, al sistema axiomático en $\mathcal{L}$ definido por los siguientes *axiomas esquema* y *regla esquema*, donde ϕ, ψ y χ son proposiciones:

- transitividad: $(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$,

- simplificación de la conjunción fuerte: $(\phi \& \psi) \to \phi$,

- conmutatividad de la conjunción fuerte: $(\phi \& \psi) \to (\psi \& \phi)$,

- conmutatividad de la conjunción débil: $(\phi\&(\phi \to \psi)) \to (\psi\&(\psi \to \phi))$,
- residuación a: $(\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi\&\psi) \to \chi)$,
- residuación b: $((\phi\&\psi) \to \chi) \to (\phi \to (\psi \to \chi))$,
- prelinealidad: $((\phi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \phi) \to \chi) \to \chi)$,
- primer elemento: $0 \to \phi$.

La regla esquema es $\phi, \phi \to \psi \rhd \psi$, conocida como *Modus Ponens*.

Denominamos *lógica básica*, o *lógica proposicional BL*, a la lógica $\vdash_{BL}$, que es la lógica sintáctica asociada al sistema axiomático BL.

Observación 4.2.1. Al definir el sistema axiomático BL, empleamos *axiomas esquema* y una *regla esquema*. Esto implica que, para cada fórmula ϕ, ψ y χ, cada axioma esquema determina un axioma particular. Definir el sistema axiomático BL de esta manera asegura que $\vdash_{BL}$ sea invariante bajo sustituciones proposicionales, es decir, que sea estructural.

El siguiente lema reúne varios teoremas de $\vdash_{BL}$.

Lema 4.2.1 (cf. Sección 2.2 [24])**.** *Las siguientes proposiciones son teoremas de* $\vdash_{BL}$*, donde* ϕ*,* ψ *y* χ *son proposiciones:*

- $\phi \to \phi$,
- $\phi \to (\psi \to \phi)$,
- $(\phi \to \psi) \to ((\phi\&\chi) \to (\psi\&\chi))$.

Recordemos que $\vdash_{BL}$ es estructural. Este lema permite mostrar que $\vdash_{BL}$ es una lógica implicativa.

BL-álgebras

Las BL-álgebras son introducidas por Hájek como la contraparte algebraica de la lógica básica.

Definición 4.2.1. Un reticulado residuado $(B, \wedge, \vee, *, \to, 0, 1)$ es una *BL-álgebra* si y solo si las siguientes dos identidades se satisfacen:

1. (Divisibilidad) $x \wedge y \approx x \cdot (x \to y)$,
2. (Prelinearidad) $(x \to y) \vee (y \to x) \approx 1$.

Denotamos con $\mathbb{BL}$ a la clase de todas las BL-álgebras, y con $\mathbb{BL}_{\text{to}}$ a la clase de todas las BL-álgebras totalmente ordenadas. Además, nos referiremos a las BL-álgebras totalmente ordenadas como *BL-cadenas*.

Del Lema 4.1.1 tenemos que las t-normas continuas son BL-álgebras totalmente ordenadas. También las álgebras de Boole son casos particulares de BL-álgebras.

Describamos brevemente algunas de las propiedades de la clase de las BL-álgebras. Recordemos que los reticulados residuados forman una variedad (Teorema 2.2.1). Luego

Teorema 4.2.1. *La clase* $\mathbb{BL}$ *es una variedad.*

En la sección sobre reticulados residuados, establecemos que las BL-álgebras finitamente subdirectamente irreducibles son aquellas en las que el elemento 1 es $\vee$-irreducible (Proposición 2.2.2). Dado que en toda BL-álgebra se cumple la ecuación de Prelinearidad, concluimos que cualquier BL-álgebra finitamente subdirectamente irreducible debe ser totalmente ordenada. En consecuencia, las álgebras subdirectamente irreducibles también deben ser totalmente ordenadas. Aplicando el teorema de Birkhoff, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.2.2. *Para una BL-álgebra* $\mathbf{B}$*, existen BL-cadenas* $\mathbf{B}_i$*, donde* $i \in I$*, tales que* $\mathbf{B}$ *puede expresarse como un producto subdirecto de las álgebras* $\{\mathbf{B}_i\}_{i\in I}$*.*

Observamos que esto nos indica que $\mathbb{BL} = ISP(\mathbb{BL}_{\text{to}})$. En particular, se cumple que $\mathbb{BL} = V(\mathbb{BL}_{\text{to}})$ y $\mathbb{BL} = Q(\mathbb{BL}_{\text{to}})$. Luego una cuasi-ecuación es válida en $\mathbb{BL}$ si y solo si es válida en $\mathbb{BL}_{\text{to}}$. El siguiente teorema nos muestra que esto sigue siendo válido para cualquier subvariedad de $\mathbb{BL}$.

Teorema 4.2.3. *Sea* V *una subvariedad de* $\mathbb{BL}$ *y sea* V_{to} *la subclase de las álgebras totalmente ordenadas de* V*. Entonces una cuasi-ecuación es válida en* V *si y solo si es válida en* V_{to}*.*

Volviendo a la lógica básica, Hájek probó que cualquier extensión axiomática mediante axiomas esquema de la lógica $\vdash_{BL}$ es fuertemente completa respecto a la subvariedad de $\mathbb{BL}$ determinada por los nuevos axiomas. El siguiente teorema muestra esto con precisión.

Teorema 4.2.4 (Teorema 2.3.22 de [24])**.** *Sea* Γ *un conjunto de proposiciones cerrado bajo sustituciones. Sea* V *la subvariedad de BL que satisface las ecuaciones* $\phi \approx 1$ *para todo* $\phi \in \Gamma$*. Tenemos entonces que* $\vdash_{\mathcal{BL}+\Gamma}$ *es fuertemente completo respecto a* V*.*

Tres aplicaciones interesantes de este resultado provienen de considerar las siguientes extensiones axiomáticas:

- La extensión de $\vdash_{BL}$ dada por el axioma esquema

  $$\neg\neg\phi \to \phi.$$

  Denotaremos esta extensión con $\vdash_{\text{Ł}}$.

- La extensión de $\vdash_{BL}$ dada por los axiomas esquema

  $$\neg\neg\chi \to ((\phi\&\chi \to \psi\&\chi) \to (\phi \to \psi)),$$
  $$\phi \wedge \neg\phi \to 0.$$

  Denotaremos esta extensión con $\vdash_{\Pi}$.

- La extensión de $\vdash_{BL}$ dada por el axioma esquema

  $$(\phi \wedge \psi) \to (\phi\&\psi).$$

  Denotaremos esta extensión con $\vdash_{G}$.

En las próximas secciones exploraremos cada una de estas extensiones por separado. Finalmente volveremos al problema de probar completitud para $\vdash_{BL}$ respecto a las t-normas continuas.

4.3. Estudio de completitud en $[0,1]_{Ł}$: débil, fuerte y finitamente fuerte

Por el Teorema 4.2.4 sabemos que la lógica $\vdash_{Ł}$ es fuertemente completa respecto a la subvariedad de $\mathbb{BL}$ dada por la identidad

$$\neg\neg x \to x \approx 1.$$

Denotaremos esta variedad con $\mathbb{MV}$ y nos referiremos a sus elementos como *MV-álgebras*. Llamaremos *MV-álgebras totalmente ordenadas* a aquellas MV-álgebras que posean un orden total. Representaremos la clase de todas las MV-álgebras totalmente ordenadas con $\mathbb{MV}_{\text{to}}$.

Por supuesto, la t-norma de Łukasiewicz $[0,1]_{Ł}$ es un MV-álgebra, al igual que cualquier álgebra de Boole. Más ejemplos de MV-álgebras se pueden encontrar al considerar subálgebras de $[0,1]_{Ł}$. Los números racionales en el intervalo $[0,1]$ constituyen una subálgebra de $[0,1]_{Ł}$. Además, para cada entero $n \geq 2$, los conjuntos con n elementos

$$Ł_n := \{0, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$$

también determinan una subálgebra de $[0,1]_{Ł}$.

A menudo, al trabajar con MV-álgebras, resulta muy útil considerar el siguiente término:

$$x \oplus y := \neg(\neg x \cdot \neg y).$$

Se puede demostrar que, si $\mathbf{B}$ es una MV-álgebra, entonces las álgebras $(B, \cdot, 1)$ y $(B, \oplus, 0)$ son monoides abelianos isomorfos. El isomorfismo se define mediante la función $f(x) = \neg x$. Además, para cualesquiera $a, b \in B$, si $a \leq b$, entonces se cumple que $f(b) \leq f(a)$.

Notemos que en $[0,1]_{Ł}$, la operación $\oplus$ es simplemente la suma usual truncada. Una consecuencia inmediata de esto, es que para todo $a \in (0,1]$, se cumple que $\underbrace{a \oplus \ldots \oplus a}_{n \text{ veces}} = 1$ para algún natural n. Luego el siguiente lema es inmediato:

Lema 4.3.1. *Sea $a \in [0,1]_{Ł}$ con $a \neq 1$, entonces existe un natural n tal que $a^n = 0$.*

Por lo mencionado al comienzo de la sección, sabemos que $\vdash_{Ł}$ es fuertemente completa respecto a la variedad $\mathbb{MV}$. El próximo teorema nos dice que también es completa respecto a la t-norma $[0,1]_{Ł}$.

Teorema 4.3.1 (Teorema 2.5.3 de [15])**.** *Una ecuación es válida en $[0,1]_{Ł}$ si, y solo si, es válida en cualquier MV-álgebra.*

De este resultado podemos también decir que la variedad $\mathbb{MV}$ está generada por la t-norma $[0,1]_{Ł}$.

ℓ-grupos

Otra fuente significativa de ejemplos y resultados relacionados con las MV-álgebras proviene del uso del *funtor de Mundici*. Para esto vamos a introducir brevemente los *ℓ-grupos.*

Un *grupo abeliano parcialmente ordenado* es un grupo abeliano $(G, +, -, 0)$ dotado de una relación de orden $\leq$ que satisface la siguiente propiedad de *invarianza bajo traslación*

$$\text{Si } a \leq b \text{ entonces } t + a \leq t + b,$$

para todo $a, b, t \in G$.

Si la relación de orden es total, entonces decimos que $\mathbf{G}$ es un *grupo abeliano totalmente ordenado*. Si la relación de orden determina una estructura de reticulado, entonces decimos que $\mathbf{G}$ es un *ℓ-grupo* abeliano.

Por ejemplo, los grupos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ con su estructura aditiva de grupo usual y su orden usual son ℓ-grupos abelianos totalmente ordenados.

Se puede demostrar que los ℓ-grupos abelianos constituyen una variedad, lo que implica que los productos directos, cocientes y subálgebras de ℓ-grupos abelianos también serán ℓ-grupos abelianos. Una construcción similar al producto directo es el *producto lexicográfico* de ℓ-grupos abelianos, que resulta particularmente interesante cuando los ℓ-grupos están totalmente ordenados.

Consideremos dos ℓ-grupos abelianos totalmente ordenados, $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$. Denominamos *producto lexicográfico* de $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ al ℓ-grupo abeliano cuya estructura de grupo corresponde al producto directo de $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$, y cuyo orden se define de la siguiente manera:

$$(g_1, h_1) \leq (g_2, h_2) \text{ si y solo si } g_1 < g_2 \text{ o bien } g_1 = g_2 \text{ y } h_1 \leq h_2,$$

donde $g_1, g_2 \in G$ y $h_1, h_2 \in H$. Denotamos el producto lexicográfico de $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ con $\mathbf{G}\vec{\times}\mathbf{H}$. Es fácil demostrar que el producto lexicográfico de dos ℓ-grupos abelianos totalmente ordenados resulta en otro ℓ-grupo abeliano totalmente ordenado. En particular, los productos lexicográficos $\mathbb{Z}\vec{\times}\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\vec{\times}\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z}\vec{\times}\mathbb{Q}$ son ℓ-grupos abelianos totalmente ordenados.

Para todo elemento a de un ℓ-grupo abeliano $\mathbf{G}$, la *parte positiva* a^+, la *parte negativa* a^-, y el *valor absoluto* $|a|$ de a se definen como:

$$a^+ := 0 \vee a, \quad a^- := 0 \vee -a, \quad |a| := a^+ + a^- = a \vee -a.$$

Una *unidad de orden* del ℓ-grupo abeliano $\mathbf{G}$ es un elemento $0 \leq u \in G$ tal que para todo $a \in G$, existe un entero $n \geq 0$ tal que $|a| \leq \underbrace{u + \ldots + u}_{n\text{-veces}} = nu$.

Sean $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ ℓ-grupos abelianos. Decimos que una función $h : G \to H$ es un homomorfismo de ℓ-grupos si h actúa como un homomorfismo tanto de grupos como de reticulados. Además, si u es una unidad de orden en $\mathbf{G}$ y v es una unidad de orden en $\mathbf{H}$, y se cumple que $h(u) = v$, entonces llamamos a h un homomorfismo *unitario* de $(\mathbf{G}, u)$ en $(\mathbf{H}, v)$.

Sea $\mathbf{G}$ un ℓ-grupo abeliano y $0 < u \in G$. Sea el conjunto

$$[0, u] := \{x \in G \mid 0 \leq x \leq u\},$$

y para todo $a, b \in [0, u]$ definimos,

$$a \oplus b := u \wedge (a + b), \text{ y } \neg a := u - a.$$

A la estructura $([0, u], \oplus, \neg, 0)$ la denotamos con $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{G}, u)$. Se puede probar que $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{G}, u)$ es una MV-álgebra (Proposición 2.1.2 de [15]). Además, si consideramos la categoría $\mathcal{A}$ formada por pares $(\mathbf{G}, u)$ con $\mathbf{G}$ un ℓ-grupo abeliano con unidad de orden u, y cuyos homomorfimos son los homomorfismos unitarios, entonces $\mathbf{\Gamma}$ es un funtor de $\mathcal{A}$ en la categoria de las MV-álgebras llamado *funtor de Mundici*.

Algunos ejemplos:

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbb{R}, 1) = [0, 1]_{\text{Ł}}, \qquad \mathbf{L}_n^\omega := \mathbf{\Gamma}(\mathbb{Z}\vec{\times}\mathbb{Z}, (n, 0)).$$

El siguiente resultado destaca la relevancia del ℓ-grupo $\mathbb{R}$.

Teorema 4.3.2 ([41])**.** *Cualquier ℓ-grupo abeliano totalmente ordenado es parcialmente inmersible en $\mathbb{R}$.*

Utilizando el funtor de Mundici y considerando que $\mathbf{\Gamma}(\mathbb{R}, 1) = [0, 1]_{\text{Ł}}$, concluimos que toda MV-álgebra totalmente ordenada es parcialmente inmersible en $[0, 1]_{\text{Ł}}$. A partir de esto, y de acuerdo con la Proposición 2.1.1 y el Teorema 4.2.3, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.3.3 (Completitud finitamente fuerte)**.** *La lógica $\vdash_{\text{Ł}}$ es finitamente fuertemente completa con respecto a $[0, 1]_{\text{Ł}}$.*

Además, podemos afirmar que $[0, 1]_{\text{Ł}}$ genera como cuasi-variedad a la clase de las MV-álgebras.

Otro resultado importante que necesitaremos se relaciona con los ℓ-grupos arquimedianos. Un ℓ-grupo abeliano totalmente ordenado $\mathbf{G}$ se denomina *arquimediano* si, para cualesquiera elementos $a, b \in G$ con $a, b > 0$, existe un entero positivo n tal que

$$\underbrace{a \oplus \ldots \oplus a}_{n \text{ veces}} > b.$$

Sean $\mathbf{A} = (A, \leq)$ y $\mathbf{B} = (B, \preceq)$ conjuntos ordenados, y sea f una inmersión de orden de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$. Decimos que f es *completa respecto al supremo* si, para todo subconjunto S de A que tiene supremo en $\mathbf{A}$, se cumple que $f(\sup_{\leq} S) = \sup_{\preceq}(f(S))$. De manera dual, definimos *completa respecto al ínfimo*. Finalmente, si f es completa tanto respecto al ínfimo como al supremo, simplemente decimos que f es *completa*.

Teorema 4.3.4 (Proposición 3 de [37])**.** *Si $\mathbf{G}$ es un ℓ-grupo abeliano arquimediano totalmente ordenado, existe una inmersión completa de $\mathbf{G}$ en $\mathbb{R}$.*

Gracias al funtor de Mundici tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.3.1. *Toda MV-álgebra simple puede ser inmersa en $[0, 1]_{\text{Ł}}$ mediante una inmersión completa.*

Extensión infinitaria de $\vdash_{\text{Ł}}$

La lógica $\vDash_{\text{Ł}}$ es infinitaria. Para probar esto, basta encontrar un par (Γ, ϕ), donde Γ es un conjunto **infinito** de proposiciones y ϕ una proposición, de manera que $\Gamma \vDash_{\text{Ł}} \phi$ y que para todo subconjunto **finito** Δ de Γ se cumpla que $\Delta \nvDash_{\text{Ł}} \phi$.

Lema 4.3.2. *Sea $\mathcal{K}$ una clase no vacía de t-normas continuas. Entonces*

$$\{\alpha \to \beta^n : n < \omega\} \vDash_{\mathcal{K}} \alpha \to (\alpha \& \beta),$$

donde α y β son proposiciones.

Demostración. Consideremos una $\mathbf{B}$-estructura f, donde $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$, tal que se cumple:

$$||\alpha \to \beta^n||^f = 1, \quad \text{para todo } n < \omega.$$

Definamos $a = ||\alpha||^f$ y $b = ||\beta||^f$. Entonces, se tiene que $a \leq b^n$ para todo $n < \omega$.

Según el Teorema 4.1.1, $B = \bigcup_{i \in J}(a_i, b_i) \cup I$, donde:

- J es un conjunto numerable totalmente ordenado de índices.
- Los conjuntos $I, (a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$ son disjuntos dos a dos, con $a_i < a_j$ y $b_i < b_j$ si $i < j$.
- El conjunto I es el conjunto de los elementos idempotentes de $\mathbf{B}$.
- Para todo $i \in J$, los intervalos $[a_i, b_i]$ determinan álgebras isomorfas a la t-norma producto $[0,1]_{\Pi}$ o a la t-norma de Łukasiewicz $[0,1]_{\text{Ł}}$, donde en $[a_i, b_i]$ estamos considerando el producto $\cdot$ restringido a $[a_i, b_i]$ y el orden usual de los números reales.

Si $a \in I$ o $b \in I$, entonces, por el Lema 4.1.2, se tiene que $a \cdot b = a$, lo que implica que $||\alpha \to (\alpha \& \beta)||^f = 1$. Supongamos ahora que $a \notin I$ y $b \notin I$, lo cual nos lleva a dos posibles escenarios:

1. Existen $i, j \in J$ con $i < j$ tales que $a \in (a_i, b_i)$ y $b \in (a_j, b_j)$.
2. Existe un $i \in J$ tal que $a, b \in (a_i, b_i)$.

En el caso 1, es fácil ver que b_i es un idempotente que cumple $a < b_i < b$. Por el Lema 4.1.2, se concluye que $a \cdot b = a$.

Consideremos el caso 2. En este caso, $[a_i, b_i]$ determina un álgebra isomorfa a $\mathbf{C}$, donde $\mathbf{C}$ es la t-norma producto $[0,1]_{\Pi}$ o la t-norma de Łukasiewicz $[0,1]_{\text{Ł}}$. Se puede probar que, para todo $c \in C$ con $c \neq 1$, se verifica que:

$$\lim_{n \to \infty} c^n = a_i.$$

Dado que $b \notin I$, sabemos que $b \neq b_i$. Además, como $a \leq b^n$ para todo n, se tiene que:

$$a \leq \lim_{n \to \infty} b^n = a_i,$$

lo que implica que $a = a_i$, contradiciendo la suposición de que $a \notin I$. Por lo tanto, este caso no puede ocurrir. Así, hemos demostrado que:

$$\{\alpha \to \beta^n : n < \omega\} \vDash_{\mathcal{K}} \alpha \to (\alpha \& \beta).$$

□

Proposición 4.3.1. *Sea $\mathcal{K}$ una clase no vacía de t-normas continuas tal que $\nvDash_{\mathcal{K}} \phi \to (\phi \& \phi)$. Entonces, la lógica $\vDash_{\mathcal{K}}$ es infinitaria.*

Demostración. Consideremos el subconjunto finito $\{p \to q^n : n \in J\}$ de $\{p \to q^n : n < \omega\}$, donde p y q son letras proposicionales y J es un conjunto finito de números naturales. Definimos M como el máximo de J. Dado que $\nvDash_{\mathcal{K}} \phi \to (\phi \& \phi)$, debe existir una t-norma continua $\mathbf{A}$ en $\mathcal{K}$ y un elemento $c \in A$ tal que $c \cdot c < c$. Según el Teorema 4.1.1, existen $a, b \in [0, 1]$, con $a < c < b$, tales que la restricción de $\mathbf{A}$ a $[a, b]$ determina un álgebra isomorfa a la t-norma producto $[0, 1]_\Pi$ ó a la t-norma de Łukasiewicz $[0, 1]_Ł$. Consideramos dos casos:

Primer caso: $[a, b]$ determina un álgebra isomorfa a la t-norma producto $[0, 1]_\Pi$. Denotemos por g al isomorfismo de $[0, 1]_\Pi$ en $[a, b]$. Sea f una $\mathbf{A}$-estructura tal que $f(p) = g(\frac{1}{2^M})$ y $f(q) = g(\frac{1}{2})$. Es evidente que $||p \to q^n||^f = 1$ para todo $n \in J$ y que $||p \to (p \& q)||^f \neq 1$. Esto implica que $\{p \to q^n : n \in J\} \nvDash_{\mathcal{K}} p \to (p \& q)$, lo que, junto con el lema anterior, indica que la lógica $\vDash_{\mathcal{K}}$ es infinitaria.

Segundo caso: $[a, b]$ determina un álgebra isomorfa a la t-norma de Łukasiewicz $[0, 1]_Ł$. Denotemos por g al isomorfismo de $[0, 1]_Ł$ en $[a, b]$. Sea f una $\mathbf{A}$-estructura tal que $f(p) = g(\frac{1}{M+1})$ y $f(q) = g(\frac{M}{M+1})$. Observamos que $f(q^n) = \frac{M-n+1}{M+1}$ para todo $n \in J$. Es claro que $f(p) \leq f(q^n)$ para todo $n \in J$, lo que implica que $||p \to q^n||^f = 1$ para todo $n \in J$. Sin embargo, no se cumple que $||p \to (p \& q)||^f = 1$, ya que, de ser así, tendríamos que $f(p) \cdot f(q) = f(p)$, pero

$$f(p) \cdot f(q) = g\left(\frac{1}{M+1} \cdot \frac{M}{M+1}\right) = g(0) = a.$$

Esto demuestra que $\{p \to q^n : n \in J\} \nvDash_{\mathcal{K}} p \to (p \& q)$, lo que, junto con el lema anterior, indica que la lógica $\vDash_{\mathcal{K}}$ es infinitaria. □

Tenemos entonces que la lógica $\vDash_Ł$ es infinitaria. Luego para conseguir un resultado de completitud fuerte es necesario construir una lógica sintáctica infinitaria. Con estos fines en mente, Kułacka [34], extiende la lógica $\vdash_Ł$ con la regla esquema infinitaria

$$\{\phi \vee (\alpha \to \beta^n) \mid n < \omega\} \rhd \phi \vee (\alpha \to \alpha \& \beta)$$

consiguiendo una nueva lógica infinitaria que denotamos con $\vdash_{Ł_\infty}$.

Teorema 4.3.5 (Teorema 33 de [34])**.** *La lógica $\vdash_{Ł_\infty}$ es fuertemente completa respecto a $[0, 1]_Ł$.*

Durante el resto de la sección, exploramos más propiedades de las MV-álgebras. Aunque estas propiedades no son necesarias para demostrar ningún resultado de completitud a nivel proposicional, las utilizaremos en los capítulos posteriores.

MV-álgebras simples, MV-álgebras finitas y FEP para MV-álgebras

Recordemos que una MV-álgebra es simple si posee exactamente dos filtros.

Teorema 4.3.6 (Teorema 3.5.1 de [15])**.** *Para toda MV-álgebra* $\mathbf{A}$ *las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathbf{A}$ *es simple;*
2. *A contiene más de un elemento, y para todo elemento* $a \in A$*, con* $a \neq 0$*, existe un natural* n *tal que* $\underbrace{a \oplus \ldots \oplus a}_{n \text{ veces}} = 1$*;*
3. $\mathbf{A}$ *es isomorfa a una subálgebra de* $[0,1]_{\text{Ł}}$*.*

Proposición 4.3.2 (Proposición 3.6.5 de [15])**.** *Una MV-álgebra* $\mathbf{A}$ *es finita si y solo si*

$$\mathbf{A} \cong \text{Ł}_{d_1} \times \ldots \times \text{Ł}_{d_u},$$

donde $d_1, \ldots, d_u$ *son enteros que cumplen* $2 \leq d_1 \leq \ldots \leq d_u$*. Esta representación es única, excepto por el orden de los factores.*

De esto se deduce inmediatamente que, si la MV-álgebra es finita y además es totalmente ordenada, entonces debe ser isomorfa a algún Ł_m, donde m es un número natural.

Una fácil consecuencia del Teorema 2.2.3 es que las MV-álgebras poseen la FEP (propiedad de inmersión finita).

Teorema 4.3.7. *La clase de las MV-álgebras posee la propiedad de inmersión finita.*

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ una MV-álgebra y S un subconjunto finito de A. Dado que $\mathbf{A}$ es un hoop de Wajsberg acotado, podemos aplicar el Teorema 2.2.3 para encontrar una inmersión parcial h de S en un hoop de Wajsberg finito $\mathbf{B}$. Es evidente que $\mathbf{B}$ es acotado, por ser finito. Por lo tanto, es una MV-álgebra. □ .

Propiedad de amalgamación

El Corolario 2.2 de [42] establece que la clase de los ℓ-grupos abelianos totalmente ordenados posee la propiedad de amalgamación. Utilizando el funtor de Mundici, es sencillo conseguir el siguiente resultado:

Proposición 4.3.3. *La clase de las MV-álgebras totalmente ordenadas posee la propiedad de amalgamación.*

Además, en [8], los autores demuestran que también se cumple la siguiente versión del resultado:

Proposición 4.3.4. *La clase de las MV-álgebras totalmente ordenadas posee la propiedad de amalgamación infinita.*

4.4. Estudio de completitud en $[0,1]_\Pi$: débil, fuerte y finitamente fuerte

Nuevamente, por el Teorema 4.2.4, sabemos que la lógica $\vdash_\Pi$ es fuertemente completa respecto a la subvariedad de $\mathbb{BL}$ dada por las identidades

$$\neg\neg z \to ((x\&z \to y\&z) \to (x \to y)) \approx 1,$$

$$(x \wedge \neg x) \to 0 \approx 1.$$

Denotaremos esta variedad con Π y nos referiremos a sus elementos como *álgebras producto*. Llamaremos *álgebras producto totalmente ordenadas* a aquellas álgebras producto que posean un orden total. Representaremos la clase de todas las álgebras producto totalmente ordenadas con Π_{to}. La variedad Π fue introducida por Hájek, Godo y Esteva en [32].

La t-norma producto $[0,1]_\Pi$ es un álgebra producto. La suma ordinal de hoops $\{0\} \oplus \mathbf{C}_\omega$, extendiendo el tipo de manera natural, es un álgebra producto.

Dado un ℓ-grupo abeliano totalmente ordenado $\mathbf{G}$ llamamos a los conjuntos

$$G^+ := \{x \in G \mid 0 \leq x\}, \qquad\qquad G^- := \{x \in G \mid x \leq 0\}$$

parte positiva de $\mathbf{G}$ (o cono positivo) y *parte negativa de* $\mathbf{G}$ (o cono negativo), respectivamente.

Sea $\mathbf{G}$ un ℓ-grupo abeliano totalmente ordenado y consideremos un elemento $\bot$ que no pertenece a G. En el conjunto $G^- \cup \{\bot\}$, definimos las operaciones binarias $\cdot$ y $\to$ de la siguiente manera:

Para la operación $\cdot$, tenemos:

$$x \cdot y := \begin{cases} x + y & \text{si } x, y \in G^-, \\ \bot & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Para la operación $\to$, definimos:

$$x \to y := \begin{cases} \text{mín}(0, y - x) & \text{si } x, y \in G^-, \\ 0 & \text{si } x = \bot, \\ \bot & \text{si } x \in G^- \text{ y } y = \bot. \end{cases}$$

Las operaciones $\vee$ y $\wedge$ se definen de manera natural, garantizando que $\bot$ actúe como el elemento mínimo. Con estas definiciones, resulta sencillo comprobar que $(G^- \cup \{\bot\}, \wedge, \vee, \cdot, \to, \bot, 1)$ forma un álgebra producto totalmente ordenada. Denotamos esta álgebra con $\mathfrak{P}(\mathbf{G})$. En [11], los autores demuestran que $\mathfrak{P}$ es un funtor entre los ℓ-grupos abelianos y una subcategoría de las álgebras producto. Además, como caso particular, muestran que $\mathfrak{P}$ es un funtor entre los ℓ-grupos abelianos **totalmente ordenados** y las álgebras producto **totalmente ordenadas**.

Usando el funtor $\mathfrak{P}$ y el Teorema 4.3.2 tenemos que toda álgebra producto totalmente ordenada es parcialmente inmersible en $[0,1]_\Pi$. Luego por la Proposición 2.1.1 y el Teorema 4.2.3 tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.4.1. *La lógica $\vdash_{\Pi}$ es finitamente fuertemente completa con respecto a $[0,1]_{\Pi}$.*

Aplicando el funtor $\mathfrak{P}$ junto con el Teorema 4.3.4, obtenemos el siguiente corolario que nos será de utilidad en el próximo capítulo:

Corolario 4.4.1. *Si $\mathbf{A}$ es un álgebra producto totalmente ordenada y $(A-\{0\}, \cdot_{\mathbf{A}}, \to_{\mathbf{A}}, 1_{\mathbf{A}})$ forma un hoop simple, entonces existe una inmersión completa de $\mathbf{A}$ en $[0,1]_{\Pi}$.*

Extensión infinitaria de $\vdash_{\Pi}$

La lógica $\vDash_{\Pi}$ es infinitaria, al igual que la lógica $\vDash_{Ł}$, según lo establecido en la Proposición 4.3.1. Kułacka [34] introduce la regla esquema infinitaria

$$\{\phi \vee (\alpha \to \beta^n) \mid n < \omega\} \rhd \phi \vee (\alpha \to \alpha\&\beta)$$

en la lógica $\vdash_{\Pi}$, lo que da lugar a la lógica $\vdash_{\Pi_\infty}$.

Teorema 4.4.2 (Teorema 35 de [34])**.** *La lógica $\vdash_{\Pi_\infty}$ es fuertemente completa con respecto a $[0,1]_{\Pi}$.*

4.5. Estudio de completitud en $[0,1]_G$: débil, fuerte y finitamente fuerte

Concentremos nuestra atención ahora sobre la lógica $\vdash_G$, la cual se obtiene a partir de la lógica básica agregando el axioma esquema

$$(\phi \wedge \psi) \to (\phi\&\psi).$$

Por el Teorema 4.2.4, sabemos que la lógica $\vdash_G$ es fuertemente completa respecto a la subvariedad de $\mathbb{BL}$ dada por la identidad

$$(x \wedge y) \to (x\&y) \approx 1.$$

Denotamos esta variedad con $\mathcal{G}$ y llamamos álgebras de Gödel a sus elementos. Denotamos con $\mathcal{G}_{\text{to}}$ a la clase de las álgebras de Gödel totalmente ordenadas.

Observar que cuando trabajamos con álgebras de Gödel, las operaciones $\wedge$ y $\&$ coinciden.

La t-norma de Gödel es un álgebra de Gödel. Cualquier conjunto totalmente ordenado acotado es naturalmente un álgebra de Gödel totalmente ordenada, donde $a \to b = b$ si $b < a$ y $a \to b = 1$ si $a \leq b$.

El siguiente resultado muestra una de las particularidades de la lógica $\vdash_G$.

Teorema 4.5.1 (Teorema 4.2.10 de [24])**.** *La lógica $\vdash_G$ cumple con el Teorema de la Deducción Clásico. Esto significa que, para cualquier conjunto de proposiciones Γ y proposiciones ϕ y ψ, se tiene que:*

$$\Gamma \cup \{\phi\} \vdash_G \psi \iff \Gamma \vdash_G (\phi \to \psi).$$

Además, si $\Vdash$ es una extensión de la lógica básica que también cumple con el Teorema de la Deducción Clásico, entonces $\vdash_G \subseteq \Vdash$.

A diferencia de las lógicas $\vDash_{\text{Ł}}$ y $\vDash_{\Pi}$, la lógica $\vDash_G$ es finitaria. Además tenemos el siguiente resultado de completitud:

Teorema 4.5.2 (Teorema 4.2.17 de [24])**.** *La lógica $\vdash_G$ es fuertemente completa respecto a la t-norma continua $[0,1]_G$.*

4.6. Estudio de completitud en $\mathcal{T}_{\text{cont}}$: débil, fuerte y finitamente fuerte

Al estudiar la lógica $\vdash_{\mathcal{T}_{\text{cont}}}$, resultó fundamental descomponer las BL-cadenas en sumas ordinales de BL-cadenas o hoops *arquimedianos*. Decimos que un hoop totalmente ordenado o una BL-cadena es *arquimediano* si tiene, como máximo, dos elementos idempotentes: su primer y/o último elemento, en caso de que existan.

En [13], los autores presentan un resultado de descomposición para BL-cadenas «saturadas», con el objetivo de generalizar el resultado de descomposición de t-normas continuas (Teorema 4.1.1). Sin embargo, preferimos enunciar y utilizar el teorema de descomposición propuesto por Busaniche en [5]. Este teorema fue originalmente enunciado, y demostrado de manera más compleja, utilizando, entre otras ideas, el axioma de elección, por Aglianó y Montagna en [1].

Teorema 4.6.1. *Toda BL-cadena $\mathbf{A}$ es isomorfa a un álgebra de la forma $\bigoplus_{i\in I}\mathbf{C}_i$, donde*

- *$(I,\leq)$ es un conjunto totalmente ordenado con un primer elemento 0,*
- *para cada $i\in I$, se cumple que*

  $$\mathbf{C}_i=(C_i,\cdot_i,\to_i,\top)$$

  es un hoop irreducible,
- *$C_i\cap C_j=\{\top\}$ para todo $i\neq j$, y*
- *$\mathbf{C}_0$ es un hoop acotado.*

Observación 4.6.1. Aunque $\mathbf{A}$ y $\bigoplus_{i\in I}\mathbf{C}_i$ son álgebras de tipos diferentes, podemos extender naturalmente el tipo de $\bigoplus_{i\in I}\mathbf{C}_i$ para que coincida con el tipo de las BL-álgebras, dado que tiene un primer elemento. Por lo tanto, el isomorfismo mencionado en el teorema es un isomorfismo de BL-álgebras.

Usando, entre otras ideas, la conexión entre los ℓ-grupos abelianos totalmente ordenados y las BL-álgebras mediante los funtores Γ y $\mathfrak{P}$, el Teorema 4.3.2 y el teorema de descomposición para BL-cadenas saturadas, los autores prueban en [12] que toda BL-cadena es parcialmente inmersible en la clase de las t-normas continuas. Luego por la Proposición 2.1.1 y el Teorema 4.2.3 tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.6.2. *La lógica $\vdash_{BL}$ es finitamente fuertemente completa respecto a $\mathcal{T}_{cont}$.*

Observación 4.6.2. En ese mismo trabajo, en el apéndice, Cignoli y Torrens muestran cómo podría haberse conseguido el mismo resultado usando en cambio la descomposición de BL-cadenas en hoops irreducibles.

Como consencuencia inmediata tenemos que $\mathcal{T}_{\text{cont}}$ genera como cuasivariedad a las BL-álgebras.

Extensión infinitaria de $\vdash_{BL}$

Por la Proposición 4.3.1, sabemos que la lógica $\vDash_{\mathcal{T}_{\text{cont}}}$ es infinitaria.

Kułacka, en su trabajo [34], extiende la lógica $\vdash_{BL}$ incorporando la regla esquema infinitaria

$$\{\phi \vee (\alpha \to \beta^n) \mid n < \omega\} \rhd \phi \vee (\alpha \to \alpha\&\beta)$$

y así obtiene una nueva lógica, que denominamos $\vdash_{BL_\infty}$.

Teorema 4.6.3 (Teorema 12 de [34])**.** *La lógica $\vdash_{BL_\infty}$ es fuertemente completa respecto a la clase $\mathcal{T}_{cont}$.*

Capítulo 5

Lógicas de primer orden

Empezamos el capítulo explorando los cambios en el lenguaje que el contexto de primer orden impone. Luego procedemos a definir la lógica $BL\forall$ de Hájek y citar algunos de sus resultados. También mencionamos algunas extensiones de interés, como la lógica de primer orden de Łukasiewicz, la lógica de primer orden producto y la lógica de primer orden de Gödel. Dedicamos el resto del capítulo a construir la contraparte sintáctica de la lógica de primer orden de las t-normas continuas.

El objetivo es poder definir las extensiones $BL\forall_\infty$, $Ł\forall_\infty$ y $\Pi\forall_\infty$ de $BL\forall$ y demostrar que $BL\forall_\infty$ es fuertemente completa con respecto a la clase de las t-normas continuas. Luego, utilizando las herramientas desarrolladas, mostrar que la extensión $Ł\forall_\infty$ es fuertemente completa en relación con la t-norma de Łukasiewicz, y que la extensión $\Pi\forall_\infty$ es fuertemente completa respecto a la t-norma producto. Parte de los resultados originales de este capítulo fueron publicados en [9].

Las extensiones que consideramos surgen de la incorporación de una regla infinitaria. Esta regla está fuertemente motivada por trabajos previos, como el de Kułacka, donde se emplea una regla similar en el contexto proposicional [34]; el de Montagna, quien la explora en un lenguaje de BL extendido con un nuevo operador [38]; y el de Hay donde aparece en el contexto de la lógica de primer orden de Łukasiewicz.

Además, como parte de la extensión $BL\forall_\infty$, será necesario incorporar un axioma en el lenguaje propio de primer orden, el cual fue explorado por Hájek y Montagna [25] en el contexto de tautologías de primer orden para BL-cadenas completas y t-normas continuas.

5.1. Lenguajes de primer orden

Llamaremos *lenguaje de primer orden de tipo* $\&, \to, 0$ o simplemente *lenguaje de primer orden* a cualquier lenguaje de tipo $\&, \to, 0$ que cumpla con las siguientes condiciones:

- El conjunto de cuantificadores es $\{\forall, \exists\}$;
- El conjunto de variables es un conjunto infinito numerable, que incluye, entre otros, a los símbolos u, v, w, x, y y z;
- El conjunto de constantes es un conjunto infinito numerable, que incluye, entre otros, a los símbolos a, b, c, d y e;

- El conjunto de predicados, que puede incluir, entre otros, a los símbolos P, Q, R, S y T. Cada símbolo de predicado tiene asociada una *aridad* (un entero no negativo). Pedimos que el lenguaje tenga al menos un predicado de aridad mayor ó igual que 1.

Sea ϕ una fórmula, x una variable libre en ϕ y t un término. Definimos $\phi\{x \mapsto t\}$ como la fórmula resultante de sustituir todas las ocurrencias libres de la variable x por el término t en ϕ. En el caso donde t es una variable, la sustitución solo se puede hacer si las ocurrencias libres de x no se transforman en ocurrencias ligadas de t.

Denominaremos *sentencias* a las fórmulas que no poseen variables libres, y representaremos al conjunto de todas las sentencias con Sen.

Si ϕ es una sentencia, podemos definir $\|\phi\|^{\mathbf{M}} := \|\phi\|^{\mathbf{M},v}$ para cualquier valuación v.

En relación a la lógica proposicional

Recordemos que las deducciones en una lógica basada en una clase de álgebras $\mathcal{K}$ dependen de los modelos que se pueden construir a partir de las álgebras de $\mathcal{K}$. Al pasar de un lenguaje proposicional a uno de primer orden, surge la pregunta sobre la influencia de este cambio de lenguaje en los modelos y cómo afecta a las deducciones lógicas. En el resto de esta sección, veremos que, para algunas fórmulas, no se produce ningún cambio.

Podemos dotar al conjunto de sentencias Sen de una estructura algebraica considerando las conectivas como operaciones en Sen. Así, obtenemos el álgebra $(\text{Sen}, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1)$. De manera similar, al considerar el conjunto Prop de todas las proposiciones para algún lenguaje proposicional $\mathcal{L}'$, obtenemos el álgebra $(\text{Prop}, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1)$. Observamos que ambas álgebras, $(\text{Sen}, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1)$ y $(\text{Prop}, \wedge, \vee, \&, \rightarrow, 0, 1)$, comparten el mismo tipo.

Si $t \in T_{(\wedge,\vee,\&,\rightarrow,0,1)}$ es un término de aridad n (observar que término aquí es en el contexto de álgebra univeral, mirar Sección de Álgebra Universal en Preliminares), y $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ son sentencias en $\mathcal{L}$, mientras que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son proposiciones en $\mathcal{L}'$, entonces $t(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ pertenece a Sen y $t(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ pertenece a Prop. A estos términos $t \in T_{(\wedge,\vee,\&,\rightarrow,0,1)}$ los denominamos *términos proposicionales*.

Consideremos una BL-cadena $\mathbf{B}$, un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ y un lenguaje proposicional $\mathcal{L}'$. Supongamos que tenemos una $\mathbf{B}$-estructura $\mathbf{M}$ en $\mathcal{L}$ y un conjunto de sentencias Γ en $\mathcal{L}$. Asignamos, de manera inyectiva, a cada $\gamma \in \Gamma$ una letra proposicional p_γ en $\mathcal{L}'$. Definimos una $\mathbf{B}$-estructura $\mathbf{N}$ en $\mathcal{L}'$ de tal manera que $||\gamma||^{\mathbf{M}} = ||p_\gamma||^{\mathbf{N}}$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Llamamos a $\mathbf{N}$ un *modelo proposicional de* $\mathbf{M}$ *y* Γ.

Es importante notar que si Γ es un conjunto de sentencias, $\mathbf{M}$ es una estructura y $\mathbf{N}$ es un modelo proposicional de $\mathbf{M}$ y Γ, entonces para cualquier subconjunto de sentencias $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ de Γ, existen proposiciones $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que para cualquier término proposicional t de aridad n, se cumple que $||t(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)||^{\mathbf{M}} = ||t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)||^{\mathbf{N}}$.

De manera análoga, definimos ahora, dada una $\mathbf{B}$-estructura $\mathbf{M}$ en $\mathcal{L}'$ y un conjunto de proposiciones Δ en $\mathcal{L}'$, un *modelo de primer orden de* $\mathbf{M}$ *y* Δ. Sea P una letra de predicado de aridad mayor o igual a 1. Por simplicidad, asumamos que la aridad es exactamente 1. Asignamos, de manera inyectiva, a cada proposición δ en Δ una constante c_δ de $\mathcal{L}$. Sea $\mathbf{N}$ una $\mathbf{B}$-estructura en $\mathcal{L}$ tal que $||P(c_\delta)||^{\mathbf{N}} = ||\delta||^{\mathbf{M}}$. Decimos entonces que $\mathbf{N}$ es un modelo

de primer orden de $\mathbf{M}$ y Δ.

A continuación, presentamos un lema que nos permitirá aplicar deducciones lógicas válidas en lógicas proposicionales a lógicas de primer orden.

Proposición 5.1.1. *Consideremos un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ y un lenguaje proposicional $\mathcal{L}'$. Sea $\mathcal{K}$ una clase de BL-cadenas y $R \cup \{t\}$ un conjunto de términos proposicionales de aridad n.*

Para cualquier conjunto $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de proposiciones en $\mathcal{L}'$ se cumple que

$$\{r(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid r \in R\} \vDash_{\mathcal{K}} t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ en } \mathcal{L}',$$

si y solo si para cualquier conjunto de sentencias $\phi_1, \ldots, \phi_n$ en $\mathcal{L}$ se cumple que

$$\{r(\phi_1, \ldots, \phi_n) \mid r \in R\} \vDash_{\mathcal{K}} t(\phi_1, \ldots, \phi_n) \text{ en } \mathcal{L}.$$

Demostración. Probamos la implicación directa. La recíproca se prueba de manera análoga. Sea $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$. Consideremos un conjunto de sentencias $\phi_1, \ldots, \phi_n$ en $\mathcal{L}$ y una $\mathbf{B}$-estructura $\mathbf{M}$ que es modelo de $\{r(\phi_1, \ldots, \phi_n) \mid r \in R\}$. Sea $\mathbf{N}$ el modelo proposicional de $\mathbf{M}$ y $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Existen proposiciones $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$||\phi_i||^{\mathbf{M}} = ||\alpha_i||^{\mathbf{N}} \text{ para todo } i \leq n,$$

y además

$$||s(\phi_1, \ldots, \phi_n)||^{\mathbf{M}} = ||s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)||^{\mathbf{N}} \text{ para todo } s \in R \cup \{t\}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{N}$ es modelo de $\{r(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid r \in R\}$, y por hipótesis, $\mathbf{N}$ debe ser modelo de $t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Así, $||t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)||^{\mathbf{N}} = 1$, lo que implica que $||t(\phi_1, \ldots, \phi_n)||^{\mathbf{M}} = 1$. Esto demuestra que $\mathbf{M}$ es modelo de t. Por lo tanto, hemos probado que $\{r(\phi_1, \ldots, \phi_n) \mid r \in R\} \vDash_{\mathcal{K}} t(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ en $\mathcal{L}$. □

Extensión de la lógica básica a primer orden

Con las definiciones previamente establecidas, estamos en condiciones de definir $\vdash_{BL\forall}$, la extensión a primer orden de la lógica $\vdash_{BL}$. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Denominaremos *sistema axiomático* $BL\forall$, representado por $BL\forall$, al sistema axiomático en $\mathcal{L}$ definido por los siguientes *axiomas esquema* y *regla esquema*, donde ϕ, ψ y χ son fórmulas, x es una variable y t un término:

Axiomas:

(BL): todos los axiomas esquema de BL,

($\forall$1): $(\forall x\phi) \to \phi\{x \mapsto t\}$,

($\exists$1): $\phi\{x \mapsto t\} \to \exists x\phi$,

($\forall$2): $(\forall x(\psi \to \phi)) \to (\psi \to \forall x\phi)$, x no es libre en ψ,

($\exists$2): $(\forall x(\phi \to \psi)) \to ((\exists x\phi) \to \psi)$, x no es libre en ψ,

($\forall$3): $(\forall x(\phi \vee \psi)) \to ((\forall x\phi) \vee \psi)$, x no es libre en ψ.

Reglas de Inferencia:

Modus Ponens: $\phi \to \psi, \phi \rhd \psi$,

Generalización: $\phi \rhd \forall x \phi$.

Llamamos lógica básica de primer orden a $\vdash_{BL\forall}$. Esta lógica fue introducida por Hájek en su libro [24].

Teorema 5.1.1 (Teorema 5.2.9 de [24])**.** *Sea Γ un conjunto de fórmulas en el lenguaje proposicional BL cerrado bajo sustituciones. Sea V la subvariedad de BL que satisface las ecuaciones $\phi \approx 1$ para todo $\phi \in \Gamma$. Tenemos entonces que $\vdash_{\mathcal{BL}\forall+\Gamma}$ es fuertemente completo respecto a V_{to}, donde V_{to} es la clase de las álgebras totalmente ordenadas de V.*

En particular, cuando $\Gamma = \emptyset$, se tiene que $\vdash_{BL\forall}$ es fuertemente completa con respecto a $\mathbb{BL}_{\text{to}}$.

5.2. Algunas extensiones de $BL\forall$

Si extendemos la lógica $\vdash_{BL\forall}$ análogamente a lo hecho en el caso proposicional obtenemos las versiones de primer orden de las lógicas $\vdash_{\text{Ł}}$, $\vdash_{\Pi}$ y $\vdash_{G}$. Más precisamente:

- Si agregamos a $\vdash_{BL\forall}$ el axioma esquema

$$\neg\neg\phi \to \phi,$$

  obtenemos la extensión $\vdash_{\text{Ł}\forall}$.

- Si agregamos a $\vdash_{BL\forall}$ los axiomas esquema

$$\neg\neg\chi \to ((\phi\&\chi \to \psi\&\chi) \to (\phi \to \psi)),$$

$$\phi \wedge \neg\phi \to 0,$$

  obtenemos la extensión $\vdash_{\Pi\forall}$.

- Si agregamos a $\vdash_{BL\forall}$ el axioma esquema

$$(\phi \wedge \psi) \to (\phi\&\psi),$$

  obtenemos la extensión $\vdash_{G\forall}$.

Tenemos entonces por el Teorema 5.1.1 que

- La lógica $\vdash_{\text{Ł}\forall}$ es fuertemente completa respecto a $\mathbb{MV}_{\text{to}}$.
- La lógica $\vdash_{\Pi\forall}$ es fuertemente completa respecto a Π_{to}.
- La lógica $\vdash_{G\forall}$ es fuertemente completa respecto a G_{to}.

En relación a la t-norma $[0,1]_{\text{Ł}}$ en el contexto de primer orden

En la Sección 4.3, mostramos que la lógica proposicional basada en $[0,1]_{\text{Ł}}$ es infinitaria. Según la Proposición 5.1.1, esta propiedad también se extiende a la lógica de primer orden basada en $[0,1]_{\text{Ł}}$. Esto implica que, al igual que en el caso proposicional, es necesario incluir una regla infinitaria en el sistema axiomático para alcanzar un resultado de completitud fuerte.

El caso de primer orden presenta desafíos aún mayores que el caso proposicional. En su trabajo, Scarpellini [45] demuestra que las tautologías de $\vDash_{[0,1]_{\text{Ł}}}$ en primer orden no son axiomatizables. Esto significa que no existe un conjunto de reglas que sea recursivamente enumerable del cual se puedan derivar todas las tautologías de $\vDash_{[0,1]_{\text{Ł}}}$. En particular, esto indica que añadir una cantidad finita de axiomas esquema a la lógica $\vdash_{\text{Ł}\forall}$ nunca será suficiente para lograr un resultado de completitud respecto a la t-norma $[0,1]_{\text{Ł}}$.

En [27], Hay propone un sistema axiomático de primer orden que permite derivar todas las tautologías de $\vDash_{[0,1]_{\text{Ł}}}$ utilizando, como máximo, una única aplicación de la regla infinitaria

$$\{\phi \oplus \phi^n : n \in \mathbb{N}\} \rhd \phi$$

al final de cada derivación. Más precisamente, la autora establece el siguiente teorema:

Teorema 5.2.1 (Hay)**.** *Existe una lógica sintáctica finitaria* $\vdash$ *tal que para toda fórmula* ϕ*,*

$$\vdash_{[0,1]_{\text{Ł}}} \phi \text{ si y solo si para todo entero positivo } n \text{ se cumple que } \vdash \phi \oplus \phi^n.$$

En [37] Montagna da una lógica sintáctica infinitaria que es fuertemente completa respecto a $[0,1]_{\text{Ł}}$, sin embargo para lograrlo agrega un operador nuevo al lenguaje junto con nuevos axiomas relacionados al operador.

Más adelante en este capítulo, presentaremos una lógica sintáctica infinitaria que es fuertemente completa con respecto a $[0,1]_{\text{Ł}}$, sin necesidad de agregar nuevas operaciones.

En relación a la t-norma $[0,1]_{\Pi}$ en el contexto de primer orden

En el Corolario 5.4.35 de [24], Hájek presenta una inmersión que asigna a cada tautología de primer orden de $\vDash_{[0,1]_{\text{Ł}}}$ una tautología correspondiente en $\vDash_{[0,1]_{\Pi}}$. Dado que sabemos que las tautologías de $\vDash_{[0,1]_{\text{Ł}}}$ no son axiomatizables, concluimos que tampoco pueden serlo las tautologías de $\vDash_{[0,1]_{\Pi}}$.

Nuevamente, Montagna [37] da una lógica sintáctica infinitaria que es fuertemente completa respecto a $[0,1]_{\Pi}$, sin embargo para lograrlo agrega un operador nuevo al lenguaje junto con nuevos axiomas relacionados al operador.

Más adelante en este capítulo, introduciremos una lógica sintáctica infinitaria que es fuertemente completa con respecto a $[0,1]_{\Pi}$, sin necesidad de agregar nuevas operaciones.

En relación a la t-norma $[0,1]_{G}$ en el contexto de primer orden

En 1969, Horn [28] muestra que la lógica $\vdash_{G\forall}$ es debilmente completa respecto a $[0,1]_{G}$. En [24], Hájek prueba la completitud fuerte.

Teorema 5.2.2 (Teorema 5.3.3 de [24]). *La lógica $\vdash_{G\forall}$ es fuertemente completa respecto a $[0,1]_G$.*

5.3. La lógica de primer orden de las t-normas continuas

En esta sección, estudiamos la lógica de primer orden $\vDash_{\mathcal{T}_{\text{cont}}}$, es decir, la lógica de primer orden de las t-normas continuas.

A lo largo de esta sección, justificamos la incorporación de nuevas reglas y axiomas a la lógica $BL\forall$, y definimos la extensión $BL\forall_\infty$. Para esta extensión, demostramos varias propiedades sintácticas que aseguran que el álgebra de Lindenbaum de la lógica posea las características deseadas. Finalmente, presentamos resultados algebraicos relacionados con la saturación de BL-cadenas, con el objetivo de construir una inmersión del álgebra de Lindenbaum en una t-norma continua. Habremos probado entonces, que la lógica $BL\forall_\infty$ es fuertemente completa con respecto a la clase de las t-normas continuas.

Este resultado de completitud fuerte mejora el logro previamente alcanzado por Montagna [37], donde fue necesaria la inclusión de una operación adicional en el lenguaje.

5.3.1. Extendiendo $BL\forall$

Recordemos que la Proposición 4.3.1 nos indicaba, entre otras cosas, que la lógica **proposicional** de la clase de todas las t-normas continuas es infinitaria. Demostramos esto a partir del hecho de que, para cualesquiera proposiciones α y β, se cumple que:

$$\{\alpha \to \beta^n : n < \omega\} \vDash_{\mathcal{T}_{\text{cont}}} \alpha \to (\alpha\&\beta),$$

mientras que, si sustituimos el conjunto $\{\alpha \to \beta^n : n < \omega\}$ por un subconjunto finito, la consecuencia lógica deja de ser válida. Según la Proposición 5.1.1, podemos entonces afirmar que la lógica de **primer orden** de las t-normas continuas también es infinitaria.

En el contexto proposicional, Kułacka [34] logró obtener completitud fuerte al añadir la regla esquema

$$\{\phi \vee (\alpha \to \beta^n) : n \in \mathbb{N}\} \rhd \phi \vee (\alpha \to \alpha\&\beta) \tag{Inf}$$

a la lógica $\vdash_{BL}$. No obstante, incorporar esta regla a la lógica sintáctica de primer orden $\vdash_{BL\forall}$ no es suficiente para alcanzar completitud fuerte. Una explicación de por qué ocurre esto es considerar las diferencias entre las BL-cadenas y las t-normas continuas (vale recordar que la lógica $\vdash_{BL\forall}$ es fuertemente completa respecto a las BL-cadenas). En el caso de primer orden, los cuantificadores pueden comportarse de manera diferente en una t-norma continua en comparación con una BL-cadena genérica. En [25], los autores comparan las tautologías de primer orden en t-normas continuas con las tautologías de primer orden en BL-cadenas. Concluyen que son equivalentes si se consideran BL-cadenas completas que satisfacen la fórmula

$$\forall x(\phi\&\phi) \to ((\forall x\phi)\&(\forall x\phi)). \tag{RC}$$

Una **B**-estructura satisface (RC) si

$$\bigwedge_i (a_i^2) = (\bigwedge_i a_i)^2$$

para toda sucesión $\{a_i\}_i$ en B. Si **B** es una t-norma continua, esta igualdad se cumple debido a la continuidad de la operación $\cdot$. Sin embargo, si consideramos la BL-álgebra dada por la suma ordinal $Ł_3 \oplus \mathbf{C}_\infty$ y la sucesión $\{a_i\}_i = \{-1, -2, -3, \ldots\}$ en $\mathbb{Z}^-$, obtenemos que

$$\bigwedge\{(-1)^2, (-2)^2, (-3)^2, \ldots\} = \bigwedge\{-2, -4, -6, \ldots\} = \frac{1}{2}_{Ł_3},$$

mientras que

$$(\bigwedge\{-1, -2, -3, \ldots\})^2 = (\frac{1}{2}_{Ł_3})^2 = 0_{Ł_3}.$$

$Ł_3 \oplus \mathbf{C}_\infty$:

Además, el álgebra $Ł_3 \oplus \mathbf{C}_\infty$ satisface la cuasi-identidad generalizada

$$(\&_{n\in\mathbb{N}}(\alpha \to \beta^n) \approx 1) \Rightarrow (\alpha \to \alpha \cdot \beta \approx 1).$$

Por lo tanto, agregar la regla infinitaria (Inf) no será suficiente para lograr completitud.

Definimos ahora entonces la lógica sintáctica $\vdash_{BL\forall_\infty}$. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Sea $\vdash_{BL\forall_\infty}$ la lógica sintáctica que se obtiene al extender el sistema axiomático $BL\forall$ con la regla esquema

$$\{\phi \vee (\alpha \to \beta^n) : n \in \mathbb{N}\} \rhd \phi \vee (\alpha \to \alpha\&\beta), \tag{Inf}$$

donde ϕ, α y β son **sentencias** de $\mathcal{L}$, y el axioma esquema

$$\forall x(\phi\&\phi) \to ((\forall x\phi)\&(\forall x\phi)), \tag{RC}$$

donde ϕ es una fórmula de $\mathcal{L}$.

5.3.2. La lógica $\vdash_{BL\forall_\infty}$ es adecuada

Veamos ahora que la lógica $\vdash_{BL\forall_\infty}$ es adecuada respecto la clase de las t-normas continuas.

Proposición 5.3.1. *Si ϕ, α y β son fórmulas, entonces:*

$$\{\phi \vee (\alpha \to \beta^n) : n \in \mathbb{N}\} \vDash_{\mathcal{T}_{cont}} \phi \vee (\alpha \to \alpha\&\beta).$$

Demostración. Consideremos una t-norma continua $\mathbf{B} = ([0,1], \cdot)$ y una $\mathbf{B}$-estructura, $\mathbf{M}$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M}$ es un modelo de la fórmula $\phi \vee (\alpha \to \beta^n)$. Sea v una valuación. Nuestro objetivo es demostrar que $\|\phi \vee (\alpha \to \alpha\&\beta)\|^{\mathbf{M},v} = 1$.

Dado que $\mathbf{M}$ es un modelo de $\phi \vee (\alpha \to \beta^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\|\phi \vee (\alpha \to \beta^n)\|^{\mathbf{M},v} = \|\phi\|^{\mathbf{M},v} \vee (\|\alpha\|^{\mathbf{M},v} \to (\|\beta\|^{\mathbf{M},v})^n) = 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para simplificar, llamemos $a = \|\alpha\|^{\mathbf{M},v}$, $b = \|\beta\|^{\mathbf{M},v}$ y $c = \|\phi\|^{\mathbf{M},v}$. Sustituyendo en la última expresión, obtenemos $c \vee (a \to b^n) = 1$.

Si $c = 1$, es evidente que $1 = c \vee (a \to a \cdot b) = \|\phi \vee (\alpha \to \alpha\&\beta)\|^{\mathbf{M},v}$.

Si $c < 1$, dado que $\mathbf{B}$ está totalmente ordenada, tenemos $a \to b^n = 1$ para todo n, lo que implica $a \leq b^n$ para todo n, y entonces

$$a \wedge \bigwedge_n b^n = a.$$

Ahora, sustituyendo, obtenemos

$$a \cdot b = (a \wedge \bigwedge_n b^n) \cdot b = (\bigwedge_n b^n \cdot (\bigwedge_n b^n \to a)) \cdot b.$$

Como $\cdot$ es continua, tenemos $(\bigwedge_n b^n) \cdot b = \bigwedge_n b^{n+1} = \bigwedge_n b^n$. Por lo tanto,

$$a \cdot b = (\bigwedge_n b^n \cdot (\bigwedge_n b^n \to a)) \cdot b = \bigwedge_n b^n \cdot (\bigwedge_n b^n \to a) = a \wedge \bigwedge_n b^n = a.$$

Por lo tanto, $1 = a \to (a \cdot b) = c \vee (a \to (a \cdot b)) = \|\phi \vee (\alpha \to (\alpha\&\beta))\|^{\mathbf{M},v}$. □

Observemos que la regla esquema que acabamos de probar «adecuada», no coincide exactamente con la regla (Inf). En realidad, es un caso más general, ya que nos limitamos a considerar la regla (Inf) únicamente para sentencias.

Corolario 5.3.1. *La lógica $BL\forall_\infty$ es adecuada respecto a la clase de las t-normas continuas.*

5.3.3. Propiedades de $BL\forall_\infty$

Por simplicidad, en el resto de la sección utilizaremos el símbolo $\vdash$ para denotar $\vdash_{BL\forall_\infty}$.

Agregar constantes

La definición de un lenguaje de primer orden requiere un conjunto infinito numerable de constantes. Por lo tanto, al añadir un conjunto numerable de nuevas constantes a un lenguaje de primer orden, obtenemos un nuevo lenguaje de primer orden. El resultado más relevante de esta subsección se logrará, en parte, gracias a la capacidad de agregar nuevas constantes al lenguaje. Por ello, haremos un breve análisis de lo que ocurre a nivel de deducciones lógicas al modificar el lenguaje de esta manera.

Supongamos que $\mathcal{L}$ es un lenguaje de primer orden y $\mathcal{L}'$ es el lenguaje resultante al agregar un conjunto infinito numerable de nuevas constantes. Queremos demostrar que, para todo conjunto $\Gamma \cup \{\phi\}$ de fórmulas de $\mathcal{L}$, se cumple que $\Gamma \vdash \phi$ en $\mathcal{L}$ sii $\Gamma \vdash \phi$ en $\mathcal{L}'$. Observemos que esta propiedad es inmediata para la contraparte semántica $\vDash_{\mathcal{K}}$, donde $\mathcal{K}$ es una clase de BL-álgebras.

Primero, necesitaremos algunos resultados. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea $\mathcal{L}_{\text{term}}$ el conjunto de todas las constantes y variables de $\mathcal{L}$. Si $^{\#} : \mathcal{L}_{\text{term}} \to \mathcal{L}_{\text{term}}$ es una función, entonces definimos para toda fórmula ψ de $\mathcal{L}$ la fórmula $\psi^{\#}$ que resulta de reemplazar cada aparición del término t por $t^{\#}$. Si Γ es un conjunto de fórmulas, $\Gamma^{\#}$ se define de la manera natural.

Sea $\Gamma \cup \{\phi\}$ un conjunto de fórmulas en $\mathcal{L}$. Es evidente que si $\Gamma \vdash \phi$ en $\mathcal{L}$, entonces $\Gamma \vdash \phi$ en $\mathcal{L}'$, ya que si $\Gamma \vdash \phi$, existe una demostración D de ϕ a partir de Γ, donde cada fórmula de la demostración es una fórmula de $\mathcal{L}$. Como toda fórmula de $\mathcal{L}$ es también una fórmula de $\mathcal{L}'$, entonces D también es una demostración de ϕ a partir de Γ en el lenguaje $\mathcal{L}'$.

Probemos ahora la recíproca.

Proposición 5.3.2. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y $\mathcal{L}'$ el lenguaje que se obtiene al agregar un conjunto infinito numerable de nuevas constantes a $\mathcal{L}$. Consideremos un conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\phi\}$ en $\mathcal{L}$. Si $\Gamma \vdash \phi$ en $\mathcal{L}'$, entonces también $\Gamma \vdash \phi$ en $\mathcal{L}$.*

Demostración. Supongamos que $\{\psi_i\}_{i\leq\xi}$ es una demostración de ϕ a partir de Γ en $\mathcal{L}'$. Enumeremos las constantes de $\mathcal{L}$ como $c_1, c_2, \ldots$ y las variables de $\mathcal{L}$ como $v_1, v_2, \ldots$. Asimismo, enumeremos las constantes de $\mathcal{L}' - \mathcal{L}$ como $c'_1, c'_2, \ldots$. Definamos la inyección $^{\#_1}$ mediante $v_i^{\#_1} = v_{2i}$ y $c_i^{\#_1} = c_i$ para todo i. Es fácil demostrar que $\{\psi_i^{\#_1}\}_{i\leq\xi}$ constituye una demostración de $\phi^{\#_1}$ a partir de $\Gamma^{\#_1}$. Cabe destacar que en $\{\psi_i^{\#_1}\}_{i\leq\xi}$ no aparecen variables con índice impar.

Ahora, definamos $^{\#_2}$ mediante $c_i'^{\#_2} = v_{2i-1}$, $c_i^{\#_2} = c_i$ y $v_i^{\#_2} = v_i$ para todo i. De nuevo, $\{\psi_i^{\#_1\#_2}\}_{i\leq\xi}$ es una demostración de $\phi^{\#_1\#_2}$ a partir de $\Gamma^{\#_1\#_2}$. Además, dado que $\Gamma^{\#_1} \cup \{\phi^{\#_1}\}$ están en $\mathcal{L}$, se cumple que $\phi^{\#_1\#_2} = \phi^{\#_1}$ y $\Gamma^{\#_1\#_2} = \Gamma^{\#_1}$. También observamos que $\{\psi_i^{\#_1\#_2}\}_{i\leq\xi}$ pertenece a $\mathcal{L}$. Por lo tanto, hemos demostrado que $\Gamma^{\#_1} \vdash \phi^{\#_1}$ en $\mathcal{L}$.

Para completar la demostración, notemos que $\Gamma^{\#_1} \dashv\vdash \Gamma$ en $\mathcal{L}$ y $\phi^{\#_1} \dashv\vdash \phi$ en $\mathcal{L}$. Por la transitividad de $\vdash$, obtenemos el resultado deseado. □

Sentencias en lugar de fórmulas

En ocasiones, preferimos trabajar con sentencias en lugar de fórmulas. Sea ϕ una fórmula; si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las variables libres de ϕ, definimos ϕ^c como la sentencia

$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \phi$. Por supuesto, si Γ es un conjunto de fórmulas, entonces Γ^c es el conjunto $\{\phi^c \mid \phi \in \Gamma\}$.

Lema 5.3.1. *Sea $\Gamma \cup \{\phi\}$ un conjunto de fórmulas. Entonces, se cumple que*

$$\Gamma \vdash \phi \iff \Gamma^c \vdash \phi^c \iff \Gamma \vdash \phi^c \iff \Gamma^c \vdash \phi.$$

Demostración. Demostraremos únicamente $\Gamma \vdash \phi \iff \Gamma^c \vdash \phi^c$.

Si ϕ es una fórmula, por el principio de Generalización, tenemos que $\phi \vdash \forall x \phi$. Por otro lado, el axioma $(\forall 1)$ establece que $\vdash (\forall x \phi) \to \phi$. Luego, aplicando Modus Ponens, obtenemos que $\forall x \phi \vdash \phi$.

Es evidente, entonces, que para cualquier fórmula ϕ, se cumple que $\phi \vdash \phi^c$ y $\phi^c \vdash \phi$. Por lo tanto, si $\Gamma \cup \{\phi\}$ es un conjunto de fórmulas y $\Gamma \vdash \phi$, dado que $\Gamma^c \vdash \Gamma$ y $\phi \vdash \phi^c$, por transitividad, tenemos que $\Gamma^c \vdash \phi^c$. La recíproca se demuestra de manera similar. □

Propiedades de la disyunción

Probemos ahora que la disyunción satisface la conocida *propiedad de prueba por casos*. Comenzaremos presentando un lema auxiliar, y luego procederemos a demostrar el lema principal.

Lema 5.3.2. *Sea α una sentencia, ψ y β fórmulas, y Γ un conjunto de fórmulas.*

$$\textit{Si } \Gamma, \beta \vdash \psi, \textit{ entonces } \Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \alpha \vee \psi.$$

Demostración. Procedamos mediante inducción transfinita sobre la longitud de la demostración de ψ a partir de Γ y β. Más precisamente, demostraremos que la propiedad $P(\xi)$ es válida para todo ordinal ξ. La propiedad $P(\xi)$ se define como:

Si $\Gamma \cup \{\psi, \beta\}$ es un conjunto de fórmulas y α es una sentencia, y existe una demostración D de ψ a partir de Γ y β con longitud ξ, entonces se cumple que $\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \alpha \vee \psi$.

Supongamos entonces que $\Gamma \cup \{\psi, \beta\}$ es un conjunto de fórmulas, α es una sentencia, y existe una demostración D de ψ a partir de Γ y β de longitud 1. Se deduce entonces que ψ es un axioma, un miembro de Γ, o igual a β.

- Supongamos que ψ es un axioma. Debido a que $\vdash \psi \to (\alpha \vee \psi)$ es un teorema de $\vdash_{BL}$, es también trivialmente un teorema de $\vdash_{BL\forall}$, entonces por Modus Ponens obtenemos una demostración de $\alpha \vee \psi$.

- Supongamos que ψ es un elemento del conjunto Γ. Se prueba de manera similar al caso anterior.

- Supongamos que $\psi = \beta$. Entonces claramente $\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \alpha \vee \beta$, donde la demostración consiste unicamente de la fórmula $\alpha \vee \beta$.

Ahora, pasemos al paso inductivo. Supongamos que $P(\xi)$ es cierta para todo ordinal ξ menor que η. Sea ψ una fórmula con una demostración D a partir de Γ, β de longitud η, donde $\eta > 1$.

- Si ψ se deduce por Modus Ponens de las fórmulas $\theta \to \psi$ y θ. Entonces Γ, β demuestra $\theta \to \psi$ y θ con una longitud de demostración menor que η. Por la hipótesis inductiva, $\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \alpha \vee (\theta \to \psi)$ y $\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \alpha \vee \theta$. Dado que $(\alpha \vee \theta) \to ((\alpha \vee (\theta \to \psi)) \to (\alpha \vee \psi))$ es un teorema de $\vdash_{BL\forall}$, concluimos que $\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \alpha \vee \psi$.

- Si ψ se deduce por Generalización, entonces ψ debe ser de la forma $\forall x \chi$ y $\Gamma, \beta \vdash \chi$ con una longitud de demostración menor que η. Por la hipótesis inductiva, tenemos $\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \alpha \vee \chi$, y mediante Generalización, obtenemos $\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \forall x(\alpha \vee \chi)$. Dado que α es una sentencia, podemos aplicar el axioma (Lin) para derivar $\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \alpha \vee \forall x \chi$.

- Si ψ es un resultado de la Regla Infinitaria, entonces:

  - ψ debe tener la forma $\rho \vee (\gamma \to (\gamma \& \delta))$ para algunas sentencias ρ, γ, δ, y
  - se cumple que $\Gamma, \beta \vdash \rho \vee (\gamma \to \delta^i)$ con una demostración D_i cuya longitud es menor que η para todo i.

  Por la hipótesis inductiva, tenemos que $\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \alpha \vee (\rho \vee (\gamma \to \delta^i))$ para todo i. Luego, usando asociatividad y la Regla Infinitaria, podemos construir una demostración de $\alpha \vee \psi$ a partir de $\Gamma, \alpha \vee \beta$. Por lo tanto, se puede demostrar $\alpha \vee \psi$ a partir de $\Gamma, \alpha \vee \beta$.

□

Lema 5.3.3. *Sea α una sentencia, ϕ, ψ y β fórmulas, y Γ un conjunto de fórmulas.*

$$\textit{Si } \Gamma, \alpha \vdash \phi \textit{ y } \Gamma, \beta \vdash \psi, \textit{ entonces } \Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \phi \vee \psi.$$

Demostración. Procedamos por inducción transfinita sobre la longitud de la demostración de la fórmula ϕ, de manera similar a lo hecho en la demostración del lema anterior.

En el caso en que la longitud de la demostración sea 1, la fórmula ϕ puede ser un axioma, un miembro del conjunto Γ, o igual a la fórmula α. Los métodos para demostrar estos casos son similares a los demostrados en el lema anterior (ver Lema 5.3.2), con la excepción del caso en que $\phi = \alpha$. En este escenario particular, el Lema 5.3.2 aborda este caso.

Pasemos al paso inductivo. Sea ϕ una fórmula con una demostración a partir de Γ, α de longitud η, donde $\eta > 1$. Asumiremos que nuestro resultado deseado se cumple para ordinales menores que η.

Nos centraremos en el caso en que ϕ se deriva mediante Generalización, ya que los otros casos son análogos a los ya demostrados en el lema anterior (ver Lema 5.3.2). Si ϕ es una consecuencia de la Generalización, entonces ϕ es de la forma $\forall x \chi$ para alguna fórmula χ tal que $\Gamma, \alpha \vdash \chi$ con una longitud de demostración menor que η. Aplicando generalización a $\Gamma, \beta \vdash \psi$, derivamos que $\Gamma, \beta \vdash \forall \psi$, y por nuestra hipótesis inductiva, concluimos que $\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \chi \vee \forall x \psi$. Supongamos que ψ contiene una sola variable libre x, lo que hace que $\forall x \psi$ sea una sentencia. Esta suposición es suficiente, ya que el caso con más variables libres es directo. Por lo tanto, mediante Generalización y (Lin), $\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \forall x \chi \vee \forall x \psi$.

Finalmente, dado que $(\forall x\chi \vee \forall x\psi) \to (\forall x\chi \vee \psi)$ es un teorema, podemos deducir que $\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \forall\chi \vee \psi$. □

Corolario 5.3.2. *Sean α y β sentencias, y ϕ una fórmula. Si $\Gamma, \alpha \to \beta \vdash \phi$ y $\Gamma, \beta \to \alpha \vdash \phi$, entonces $\Gamma \vdash \phi$.*

Demostración. Por el lema anterior, tenemos $\Gamma, (\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha) \vdash \phi \vee \phi$. Entonces $\Gamma, (\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha) \vdash \phi$. Y dado que $(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)$ es un teorema de $BL\forall$, tenemos que $\Gamma \vdash \phi$. □

Construcción de una teoría Henkin

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y sea Γ un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$. Denotemos por $\mathrm{cl}(\Gamma)$ al conjunto de todas las fórmulas ϕ de $\mathcal{L}$ para las cuales $\Gamma \vdash \phi$ y que contienen exclusivamente constantes presentes en Γ.

Una *teoría* es cualquier conjunto de fórmulas. Una *teoría prelineal* o *teoría completa* en el lenguaje $\mathcal{L}$ es una teoría Γ que satisface, para cada par de sentencias α y β, que

$$\Gamma \vdash \alpha \to \beta \text{ o } \Gamma \vdash \beta \to \alpha.$$

Una *teoría de Henkin* Γ en el lenguaje $\mathcal{L}$ es una teoría Γ que satisface, para todas las sentencias $\forall x\chi$, que

$$\text{si} \quad \Gamma \nvdash \forall x\chi, \quad \text{entonces} \quad \Gamma \nvdash \chi\{x \mapsto c\}$$

para alguna constante c de $\mathcal{L}$.

Lema 5.3.4. *Sea Γ una teoría y ϕ una sentencia en el lenguaje $\mathcal{L}$ tal que $\Gamma \nvdash \phi$. Entonces, existe un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}'$ que extiende a $\mathcal{L}$ agregando un número infinito numerable de nuevas constantes y una teoría Γ^* en $\mathcal{L}'$ que contiene a Γ tal que $\Gamma^* \nvdash \phi$ y Γ^* es prelineal y de Henkin en $\mathcal{L}'$.*

Demostración. Sea $\mathcal{L}'$ el lenguaje de primer orden obtenido al añadir una cantidad infinito numerable de constantes a $\mathcal{L}$. Sea $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ una enumeración de todas las fórmulas en $\mathcal{L}'$. Procederemos inductivamente, construyendo conjuntos Γ_i y sentencias ϕ_i para cada número natural i. La unión de estos conjuntos será el conjunto Γ^* que buscamos.

Tomemos $\Gamma_0 = \Gamma$ y $\phi_0 = \phi$. Supongamos que Γ_i y ϕ_i están definidos. Tenemos varios casos:

1. ψ_i es una sentencia de la forma $\forall x\chi$:

   a) si $\Gamma_i \nvdash \forall x\chi$: Tenemos dos posibles escenarios:

   1) si $\Gamma_i \nvdash \phi_i \vee \forall x\chi$, definimos

   $$\Gamma_{i+1} = \mathrm{cl}(\Gamma_i) \text{ y } \phi_{i+1} = \phi_i \vee \chi\{x \mapsto c\},$$

   donde c es una constante del lenguaje que no aparece en $\Gamma_i \cup \{\phi_i, \psi_i\}$.

2) si $\Gamma_i \vdash \phi_i \vee \forall x\chi$, definimos

$$\Gamma_{i+1} = \mathrm{cl}(\Gamma_i \cup \{\phi_i \to \forall x\chi\}) \text{ y } \phi_{i+1} = \phi_i.$$

b) si $\Gamma_i \vdash \forall x\chi$, definimos

$$\Gamma_{i+1} = \mathrm{cl}(\Gamma_i) \text{ y } \phi_{i+1} = \phi_i.$$

2. ψ_i es una sentencia de la forma $\gamma \vee (\alpha \to (\alpha \& \beta))$:

   a) si $\Gamma_i, \psi_i \nvdash \phi_i$, definimos

   $$\Gamma_{i+1} = \mathrm{cl}(\Gamma_i \cup \{\psi_i\}) \text{ y } \phi_{i+1} = \phi_i.$$

   b) si $\Gamma_i, \psi_i \vdash \phi_i$, definimos

   $$\Gamma_{i+1} = \mathrm{cl}(\Gamma_i) \text{ y } \phi_{i+1} = \phi_i \vee \gamma \vee (\alpha \to \beta^k),$$

   donde k es tal que $\Gamma_i \nvdash \phi_i \vee \gamma \vee (\alpha \to \beta^k)$. La existencia de este k se justifica en el Hecho 1.

3. ψ_i no es de la forma de los ítems 1 y 2:

   a) si $\Gamma_i, \psi_i \vdash \phi_i$, definimos

   $$\Gamma_{i+1} = \mathrm{cl}(\Gamma_i) \text{ y } \phi_{i+1} = \phi_i.$$

   b) si $\Gamma_i, \psi_i \nvdash \phi_i$, definimos

   $$\Gamma_{i+1} = \mathrm{cl}(\Gamma_i \cup \{\psi_i\}) \text{ y } \phi_{i+1} = \phi_i.$$

Hecho 5.3.1. Para cada número natural i:

1. Γ_i contiene solo un número finito de nuevas constantes,
2. $\Gamma_i \nvdash \phi_i$,
3. Bajo las condiciones de 2.(b), existe un número natural k tal que

   $$\Gamma_i \nvdash \phi_i \vee \gamma \vee (\alpha \to \beta^k).$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre i. El caso $i = 0$ es inmediato (podemos asumir que ψ_0 se elige de tal manera que $\Gamma_0, \psi_0 \nvdash \phi_0$).

Supongamos ahora que el resultado es cierto para un natural i.

1. Tenemos que Γ_{i+1} puede ser uno de los siguientes conjuntos:

   $$\mathrm{cl}(\Gamma_i), \mathrm{cl}(\Gamma_i \cup \{\phi_i \to \psi_i\}), \mathrm{cl}(\Gamma_i \cup \{\phi_i\}).$$

   Dado que ϕ_i y ψ_i contienen solo un número finito de constantes, Γ_i contiene solo un número finito de nuevas constantes por hipótesis, y cl no añade nuevas constantes, podemos concluir que Γ_{i+1} contiene solo un número finito de nuevas constantes.

2. Demostramos que $\Gamma_{i+1} \nvdash \phi_{i+1}$ en el caso en que ψ_i es una sentencia de la forma $\forall x\chi$ con $\Gamma_i \nvdash \psi_i$ y $\Gamma_i \vdash \phi_i \vee \forall x\chi$; el resto de los casos son directos. En este caso, la construcción nos dice que $\Gamma_{i+1} = \mathrm{cl}(\Gamma_i \cup \{\phi_i \to \forall x\chi\})$ y $\phi_{i+1} = \phi_i$. Entonces, solo debemos probar que $\Gamma_i, \phi_i \to \forall x\chi \nvdash \phi_i$.

   Supongamos que esto es falso, es decir, que $\Gamma_i, \phi_i \to \forall x\chi \vdash \phi_i$. Observe que, por hipótesis, tenemos que $\Gamma_i \vdash \phi_i \vee \forall x\chi$, por lo que, dado que $(\forall x\chi \to \phi_i) \to ((\phi_i \vee \forall x\chi) \to \phi_i)$ es un teorema, inferimos que $\Gamma_i, \forall x\chi \to \phi_i \vdash \phi_i$.

   Así, tenemos que $\Gamma_i, \forall x\chi \to \phi_i \vdash \phi_i$ y que $\Gamma_i, \phi_i \to \forall x\chi \vdash \phi_i$. Dado que tanto $\forall x\chi$ como ϕ_i son sentencias por construcción, según el Corolario 5.3.2 podemos deducir que $\Gamma_i \vdash \phi_i$, lo cual contradice la hipótesis inductiva.

3. Supongamos las condiciones de 2.(b) y que no existe k tal que $\Gamma_i \nvdash \phi_i \vee \gamma \vee (\alpha \to \beta^k)$. Por la Regla Infinitaria, vemos que $\Gamma_i \vdash (\phi_i \vee \gamma) \vee (\alpha \to (\alpha \& \beta))$, es decir, $\Gamma_i \vdash \phi_i \vee \psi_i$.

   Recordemos que por Reflexividad tenemos $\Gamma_i, \phi_i \vdash \phi_i$, y, por hipótesis, tenemos $\Gamma_i, \psi_i \vdash \phi_i$, entonces, usando el Corolario 5.3.3, obtenemos $\Gamma_i, \phi_i \vee \psi_i \vdash \phi_i$, y dado que $\Gamma_i \vdash \phi_i \vee \psi_i$, podemos afirmar que $\Gamma_i \vdash \phi_i$, contradiciendo la hipótesis inductiva.

□

La afirmación recién demostrado muestra que los pasos 1.(a).i y 2.(b) de la construcción son válidos.

Hecho 5.3.2. Para todos los números naturales i, j tales que $i \leq j$, tenemos que

1. $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$,
2. $\vdash \phi_i \to \phi_j$.

Demostración. Es inmediato a partir de la construcción. □

Hecho 5.3.3. Sea $\Gamma^* = \bigcup_i \Gamma_i$. Si $\Gamma^* \vdash \theta$ para una fórmula θ, entonces $\theta \in \Gamma^*$.

Demostración. Procedamos por inducción sobre la longitud de la prueba de θ. Para el caso inicial, tenemos que θ es un axioma o pertenece a Γ^*. Dejamos estos casos al lector cuidadoso.

Consideremos una prueba de θ desde Γ^* con longitud η. Tenemos 3 casos:

- θ se deduce por Modus Ponens de γ y $\gamma \to \theta$. Entonces, Γ^* prueba γ y $\gamma \to \theta$ con longitudes de prueba menores que η. Luego, por la hipótesis inductiva, obtenemos $\gamma \in \Gamma^*$ y $\gamma \to \theta \in \Gamma^*$. Así, existe i tal que $\gamma \in \Gamma_i$ y $\gamma \to \theta \in \Gamma_i$. Dado que $\mathrm{cl}(\Gamma_i) \subseteq \Gamma_{i+1}$, obtenemos que $\theta \in \Gamma_{i+1}$. Podemos concluir que $\theta \in \Gamma^*$.

- θ se deduce por Generalización. Este caso se puede demostrar de manera similar al caso anterior.

- θ se deduce por la Regla Infinitaria. Entonces, θ debe ser de la forma $\gamma \vee (\alpha \to (\alpha \& \beta))$ para algunas sentencias α, β, γ.

  Supongamos que $\theta \notin \Gamma^*$. Sea i tal que $\psi_i = \theta$. Entonces, $\psi_i \notin \Gamma_{i+1}$, por lo tanto, por construcción, tenemos que

  $$\Gamma_i, \psi_i \vdash \phi_i \text{ y } \phi_{i+1} = \phi_i \vee \gamma \vee (\alpha \to \beta^k)$$

  para algún k. Dado que ψ_i se deduce por la Regla Infinitaria, tenemos que Γ^* prueba $\gamma \vee (\alpha \to \beta^k)$ con longitud de prueba menor que η. Luego, por la hipótesis inductiva, $\gamma \vee (\alpha \to \beta^k) \in \Gamma^*$. Así, existe j tal que $\gamma \vee (\alpha \to \beta^k) \in \Gamma_j$, por lo que $\Gamma_j \vdash \phi_i \vee \gamma \vee (\alpha \to \beta^k)$, es decir, $\Gamma_j \vdash \phi_{i+1}$. Tenemos dos casos:

  $j \leq i+1$**:** Por el Hecho 2, tenemos que $\Gamma_j \subseteq \Gamma_{i+1}$, luego, por la monotonía de $\vdash$, obtenemos $\Gamma_{i+1} \vdash \phi_{i+1}$, contradiciendo el Hecho 1.

  $j > i+1$**:** Por el Hecho 2, tenemos que $\vdash \phi_{i+1} \to \phi_j$, luego $\Gamma_j \vdash \phi_j$, contradiciendo el Hecho 1.

□

Hecho 5.3.4. $\Gamma^* \nvdash \phi_i$ para todo i.

Demostración. Supongamos que $\Gamma^* \vdash \phi_i$. Por el Hecho 3, tenemos $\phi_i \in \Gamma^*$. Esto muestra que existe j tal que $\phi_i \in \Gamma_j$. Entonces, $\Gamma_j \vdash \phi_i$. Podemos proceder desde este punto y obtener una contradicción de manera similar a lo que se hace al final de la prueba de la afirmación anterior. □

Como consecuencia inmediata de el Hecho anterior, tenemos que $\Gamma^* \nvdash \phi$.

Hecho 5.3.5. Γ^* es una teoría de Henkin.

Demostración. Sea $\forall x \chi$ una sentencia tal que $\Gamma^* \nvdash \forall x \chi$. Queremos probar que existe una constante c tal que $\Gamma^* \nvdash \chi\{x \mapsto c\}$.

Sea i tal que $\psi_i = \forall x \chi$. Entonces, tenemos tres casos:

- $\Gamma_i \vdash \psi_i$: Esto contradice que $\Gamma^* \nvdash \forall x \chi$.

- $\Gamma_i \nvdash \psi_i$ y $\Gamma_i \vdash \phi_i \vee \forall x \chi$: En este caso, la construcción nos dice que $\phi_i \to \forall x \chi \in \Gamma_{i+1}$.

  Luego, dado que $(\phi_i \vee \forall x \chi) \to ((\phi_i \to \forall x \chi) \to \forall x \chi)$ es un teorema, deducimos que $\Gamma_{i+1} \vdash \forall x \chi$. Así, $\Gamma^* \vdash \forall x \chi$, una contradicción.

- $\Gamma_i \nvdash \psi_i$ y $\Gamma_i \nvdash \phi_i \vee \forall x \chi$: En este caso, la construcción nos dice que $\phi_{i+1} = \phi_i \vee \chi\{x \mapsto c\}$, donde c es una constante que no aparece en $\Gamma_i \cup \{\phi_i, \psi_i\}$. Por el Hecho 4, obtenemos que $\Gamma^* \nvdash \phi_i \vee \chi\{x \mapsto c\}$. Entonces, $\Gamma^* \nvdash \chi\{x \mapsto c\}$, ya que $\chi\{x \mapsto c\} \to (\phi_i \vee \chi\{x \mapsto c\})$ es un teorema.

□

Hecho 5.3.6. Γ^* es prelineal.

Demostración. Sean α, β sentencias. Sean i, j tales que $\alpha \to \beta = \psi_i$ y $\beta \to \alpha = \psi_j$. Supongamos que $\Gamma^* \nvdash \psi_i$ y que $\Gamma^* \nvdash \psi_j$. Esto nos dice que $\psi_i \notin \Gamma^*$ y que $\psi_j \notin \Gamma^*$. Entonces, por construcción, obtenemos $\Gamma_i, \psi_i \vdash \phi_i$ y $\Gamma_j, \psi_j \vdash \phi_j$. Sea $l = \text{máx}(i, j)$. Por el Hecho 2, deducimos que $\Gamma_l, \psi_i \vdash \phi_l$ y $\Gamma_l, \psi_j \vdash \phi_l$. Luego, dado que $\psi_i = \alpha \to \beta$ y $\psi_j = \beta \to \alpha$, y usando el Corolario 5.3.2, concluimos que $\Gamma_l \vdash \phi_l$, contradiciendo el Hecho 1. □

Esto concluye la demostración del lema. □

5.3.4. Completitud respecto a las t-normas continuas

Consideremos el álgebra $\mathbf{Sen} = (Sen, \cdot, \to, \wedge, \vee, 0, 1)$, donde $\phi \cdot \psi = \phi \& \psi$. Dada una teoría Γ, definimos la relación de equivalencia $\equiv_\Gamma$ en **Sen** como

$$\phi \equiv_\Gamma \psi \iff \Gamma \vdash \phi \to \psi \text{ y } \Gamma \vdash \psi \to \phi.$$

Denotamos con $[\phi]$ a la clase de equivalencia de ϕ módulo $\equiv_\Gamma$. Recordemos del Capítulo 4, que la lógica $\vdash_{BL}$ es implicativa. De esto se deduce que la lógica $BL\forall$, y en particular la extensión $\vdash$, es implicativa. Tenemos entonces que la relación $\equiv_\Gamma$ es una congruencia de **Sen**. Definimos entonces la BL-álgebra $\mathbf{L}_\Gamma := {}^{\mathbf{Sen}}/_{\equiv_\Gamma}$. Llamamos a esta álgebra *álgebra de Lindenbaum asociada a* Γ.

Referenciamos el Lema 5.2.6 de [24] para uso futuro.

Lema 5.3.5 (Hájek)**.**

1. *Si* Γ *es una teoría de Henkin, entonces*

$$[\forall x \phi] = \inf_c [\phi\{x \mapsto c\}] \text{ y } [\exists x \phi] = \sup_c [\phi\{x \mapsto c\}],$$

   donde c *recorre todas las constantes en* Γ*.*

2. *Si* Γ *es una teoría prelineal, entonces* $\mathbf{L}_\Gamma$ *es una cadena, es decir, un conjunto totalmente ordenado.*

Sea entonces Γ una teoría prelineal y $\mathbf{L}$ el álgebra de Lindenbaum asociada. Ahora proporcionamos algunos lemas que nos permiten encontrar una inmersión de esta álgebra en una t-norma continua.

Recordemos que un álgebra se llama *simple* cuando sus únicos filtros son triviales.

Lema 5.3.6. *Toda BL-cadena que satisface la cuasi-identidad generalizada*

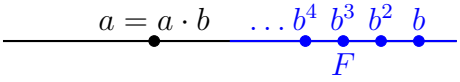
$$(\&_{n \in \mathbb{N}}(\alpha \to \beta^n) \approx 1) \Rightarrow (\alpha \to \alpha \& \beta \approx 1) \tag{K}$$

es una suma ordinal de hoops simples.

Demostración. El Lema 4.6.1 indica que podemos representar cada BL-cadena como una suma ordinal de hoops de Wajsberg totalmente ordenados. Si una BL-cadena cumple con (K), entonces los hoops en su descomposición también lo cumplen. Ahora demostraremos que cada hoop de Wajsberg totalmente ordenado que satisface (K) es simple.

Sea **H** un hoop de Wajsberg totalmente ordenado que cumple con la cuasi-identidad generalizada (K). Para llegar a una contradicción, supongamos que **H** no es simple.

Caso no acotado: Supongamos que **H** no está acotado, por lo que **H** es un hoop cancelativo. Dado que **H** no es simple, existe un filtro F en **H** tal que hay elementos $a, b \in H$ donde $a \notin F$, $b \in F$ y $b \neq 1$. Como $a \leq b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, al aplicar (K), obtenemos que $a \leq a \cdot b$. Esto implica que $a = a \cdot b$. Dado que **H** es un hoop cancelativo y $a = a \cdot b$, concluimos que $1 = b$. Esto contradice la suposición de que $b \neq 1$, por lo tanto, en este caso, **H** debe ser simple.



Caso acotado: Supongamos ahora que **H** está acotado, por lo que tiene un elemento mínimo 0. Nuevamente, como **H** no es simple, existe un filtro F en **H** tal que hay un elemento $b \in H$ donde $b \in F$ y $b \neq 1$. Sea $a = b \to 0$, y observemos que como $b \in F$, entonces $b \to 0 \notin F$. Como $a \leq b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, al aplicar (K), obtenemos que $a \leq a \cdot b$. Tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot (a \to 0) \\ &= a \cdot ((a \cdot b) \to 0) \\ &= a \cdot (a \to (b \to 0)) \\ &= a \wedge (b \to 0) \\ &= a \wedge a = a. \end{aligned}$$

Esto lleva a la conclusión de que $a = 0$. Pero $a = b \to 0$, luego $0 = b \to 0$. Pero entonces $b = 1$, una contradicción. Concluimos entonces que **H** debe ser simple.

□

Recordemos que un elemento a en una BL-álgebra es *idempotente* si $a \cdot a = a$. La siguiente definición proviene del trabajo [12].

Definición 5.3.1. Un par (X, Y) se llama un *corte* en una BL-cadena **A** si se cumplen las siguientes condiciones:

- $X \cup Y = A$,
- $a \leq b$, para todo $a \in X$ y $b \in Y$,
- Y es cerrado bajo $\cdot$, y
- $a \cdot b = a$, para todo $a \in X$ y $b \in Y$.

Un corte en una BL-cadena $\mathbf{A}$ se llama *saturado* si existe un idempotente $u \in A$ tal que $a \leq u \leq b$ para todo $a \in X$ y $b \in Y$. Una BL-cadena $\mathbf{A}$ se llama *saturada* si cada corte (X, Y) en $\mathbf{A}$ es saturado.

La siguiente definición proviene del trabajo [25].

Definición 5.3.2. Una BL-cadena $\mathbf{A}$ se dice *débilmente saturada* si se cumple lo siguiente:

- Si $c \in A$ no es idempotente, entonces existen idempotentes a, b tales que $a < c < b$ y el conjunto
$$[a, b] := \{x \in A : a \leq x \leq b\}$$
es el dominio de una MV-álgebra o de un álgebra producto, denotado por $\mathbf{A}_{[a,b]}$, con respecto a las operaciones
$$x \cdot_{[a,b]} y := x \cdot y \text{ y } x \to_{[a,b]} y := \text{mín}(x \to y, b). \tag{5.1}$$
Además, $\mathbf{A}_{[a,b]}$ es arquimediana, es decir, si $a < r < s < b$, entonces existe n tal que $s^n < r$.

- Si $c \in A$ es idempotente, entonces existen $a \leq c$ y $b \geq c$ tales que $[a, b]$ consiste enteramente de idempotentes y
  - para todo $h < a$ existe h' tal que $h \leq h' < a$ y h' no es idempotente;
  - para todo $k > b$ existe k' tal que $b < k' \leq k$ y k' no es idempotente; así, si $a < b$, entonces $\mathbf{A}_{[a,b]}$ definida como en (5.1) es un álgebra de Gödel.

El siguiente resultado es una variación del Teorema 4 que aparece en [12].

Lema 5.3.7. *Para toda BL-cadena* $\mathbf{A}$ *existe una inmersión en una BL-cadena saturada* $\overline{\mathbf{A}}$*. Además:*

1. *los nuevos elementos son todos idempotentes,*
2. *si* $C \subseteq A$ *y* $\bigwedge^{\mathbf{A}} C$ *existe y es idempotente, entonces* $\bigwedge^{\overline{\mathbf{A}}} C$ *existe y* $\bigwedge^{\mathbf{A}} C = \bigwedge^{\overline{\mathbf{A}}} C$*. Lo mismo es cierto para el supremo.*

Demostración. Este resultado se basa en el Teorema 4 de [12] donde no se prueba (2). Proporcionaremos la prueba para esta afirmación.

Sea $\mathbf{A}$ una BL-cadena y S el conjunto de todos los cortes no saturados de $\mathbf{A}$. Para cada $\alpha \in S$, la parte superior de α se denotará α^+, y la parte inferior, por α^-. En $\overline{A} = A \cup S$ definimos la relación binaria $\leq$ de la siguiente manera:

$$x \leq y \iff \begin{cases} x, y \in A \text{ y } x \leq^{\mathbf{A}} y, \\ x, y \in S \text{ y } x^- \subseteq y^-, \\ x \in A, y \in S \text{ y } x \in y^-, \\ x \in S, y \in C \text{ y } y \in x^+. \end{cases}$$

Se sigue que $\leq$ es un orden total en $\overline{A}$. Las operaciones se extienden de manera natural. Para más detalles, consulte [12].

Sea $C \subseteq A$ tal que $\bigwedge^{\mathbf{A}} C$ existe y es idempotente. En la extensión $\overline{\mathbf{A}}$, pueden insertarse nuevos elementos que no están presentes en $\mathbf{A}$ entre $\bigwedge^{\mathbf{A}} C$ y C. Sea H el conjunto de estos nuevos elementos. Tomemos un elemento h en H. Dado que h es un nuevo elemento, debe ser un corte no saturado de $\mathbf{A}$, lo que significa que los conjuntos $\{x \in A \mid x \leq h\}$, $\{x \in A \mid h \leq x\}$ forman un corte no saturado de $\mathbf{A}$. Sin embargo, el elemento idempotente $\bigwedge^{\mathbf{A}} C$ ya satura este corte, lo que lleva a una contradicción. Por lo tanto, H debe estar vacío, lo que implica $\bigwedge^{\mathbf{A}} C = \bigwedge^{\overline{\mathbf{A}}} C$.

□

Si $\mathbf{A} = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{H}_i$ es una BL-cadena representada con una suma ordinal de hoops de Wajsberg y $C \subseteq A$ es un subconjunto tal que $\bigwedge C$ existe, entonces decimos que C es $\wedge$-*conectado* si existe $i \in I$ y $c \in C$ tal que $\bigwedge C \in H_i$ y $c \in H_i$. El concepto de $\vee$-conectado se define de manera dual.

Lema 5.3.8. *Sea $\mathbf{A} = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{H}_i$ una BL-cadena numerable que es una suma ordinal de hoops de Wajsberg simples totalmente ordenados. Entonces existe una inmersión f de $\mathbf{A}$ en una BL-cadena débilmente saturada numerable $\mathbf{A}^*$. Además, si C es un subconjunto de A tal que $\bigwedge^{\mathbf{A}} C$ existe y C es $\wedge$-conectado o $\bigwedge^{\mathbf{A}} C$ es idempotente, entonces $f(\bigwedge^{\mathbf{A}} C) = \bigwedge^{\mathbf{A}^*} f(C)$. Lo mismo es cierto para el supremo.*

Demostración. Sea $\mathbf{A} = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{H}_i$ una BL-cadena representada con una suma ordinal de hoops de Wajsberg simples totalmente ordenados. Por el Lema 5.3.7 podemos encontrar una inmersión de $\mathbf{A}$ en una BL-cadena saturada $\overline{A}$. Del Lema 3 en [12], sabemos que $\overline{\mathbf{A}}$ es débilmente saturada. Entonces, para cada $c \in \overline{A} - \mathrm{idp}(\overline{A})$, existen elementos $a_c, b_c \in \mathrm{idp}(\overline{A})$ tales que $c \in [a_c, b_c]$ y $\overline{\mathbf{A}}_{[a_c, b_c]}$ es un álgebra MV o un álgebra producto, y para cada $c \in \mathrm{Idp}(\overline{\mathbf{A}})$, tenemos elementos $a_c, b_c \in \mathrm{Idp}(\overline{A})$ tales que $c \in [a_c, b_c]$ y $\overline{\mathbf{A}}_{[a_c, b_c]}$ es un álgebra Gödel máximal.

Definimos el conjunto $S = \{a_c, b_c \mid c \in A\}$. Dado que A es numerable, S es numerable. Todos los elementos de S son idempotentes, entonces $\mathbf{S} \cup \mathbf{A}$ es un subálgebra de $\overline{\mathbf{A}}$. Es fácil ver que el álgebra $\mathbf{S} \cup \mathbf{A}$ es débilmente saturada.

Consideremos ahora un subconjunto $C \subseteq A$ tal que $\bigwedge^{\mathbf{A}} C$ existe. Primero, supongamos que C es $\wedge$-conectado. Entonces, existe $i \in I$ y $c \in C$ tal que $\bigwedge^{\mathbf{A}} C \in H_i$ y $c \in H_i$. Si c no es idempotente, se puede observar fácilmente que el conjunto $\{x \in S \mid \bigwedge^{\mathbf{A}} C < x < c\}$ está vacío, dado que el único posible elemento idempotente en H_i es su primer elemento. Esto implica que $\bigwedge^{\mathbf{A}} C = \bigwedge^{\mathbf{A}^*} C$. Si c es idempotente, debe ser el primer elemento de H_i, lo que lleva a $\bigwedge^{\mathbf{A}} C = \bigwedge^{\mathbf{A}^*} C = c$. Ahora, supongamos que $\bigwedge^{\mathbf{A}} C$ es idempotente. Es una consecuencia del Lema 5.3.7 que $\bigwedge^{\mathbf{A}} C = \bigwedge^{\mathbf{A}^*} C$. La prueba del caso del supremo es similar.

□

Lema 5.3.9. *Sea $\mathbf{A}$ una BL-cadena y $\{a_x\}_{x \in X}$ una sucesión en A.*

- *Si $(\inf_x a_x)^2 = \inf_x a_x^2$, entonces $\{a_x\}$ es $\wedge$-conectado o $\inf_x a_x$ es idempotente.*

- *Si el supremo de $\{a_x\}$ existe, entonces $\{a_x\}$ es $\vee$-conectado o $\sup_x a_x$ es idempotente.*

Demostración. Sea $\mathbf{A} = \bigoplus_{i\in I} \mathbf{H}_i$ una BL-cadena representada con una suma ordinal de hoops de Wajsberg.

1) Sea $y \in X$. Entonces $a_y \in H_i$ y $\inf_x a_x \in H_j$ para algunos $i, j \in I$, y en consecuencia $a_y^2 \in H_i$. Si la secuencia $\{a_x\}$ no es $\wedge$-conectada, entonces $j < i$, lo que implica $\inf_x a_x < a_y^2$. Dado que y fue elegido arbitrariamente, tenemos $\inf_x a_x \leq \inf_x a_x^2$. La otra desigualdad es trivial. Por lo tanto, $\inf_x a_x = \inf_x a_x^2 = (\inf_x a_x)^2$.

2) Tenemos que $\sup_x a_x \in H_i$ para algún i. Sea $b \in H_i$. Si la secuencia $\{a_x\}$ no es $\vee$-conectada, entonces $b > a_x$ para todo $x \in X$, lo que implica $b \geq \sup_x a_x$. Por lo tanto, $\sup_x a_x$ es el elemento mínimo de H_i, y así, un elemento idempotente. □

Sean A y B conjuntos parcialmente ordenados. Recordemos que una función $f : A \to B$ es una *inmersión completa* si y solo si $\inf_{s\in S} f(s) = f(\inf_{s\in S} s)$ y $\sup_{t\in T} f(t) = f(\sup_{t\in T} t)$ siempre que $\bigwedge S$ exista en A y $\bigvee T$ exista en A.

Necesitamos ahora el Lema 3.6 y el Lema 3.7 de [25]. Por conveniencia, enunciamos en cambio el siguiente lema, el cual es una consecuencia inmediata de los lemas recien mencionados.

Lema 5.3.10 ([25])**.** *Toda BL-cadena numerable y débilmente saturada* $\mathbf{A}$ *es inmersible en una t-norma continua mediante una inmersión completa.*

Teorema 5.3.1 (Completitud)**.** *Sea* Γ *una teoría y* ϕ *una sentencia. Entonces*

$$\Gamma \vdash \phi \iff \Gamma \vDash_{\mathcal{T}_{cont}} \phi.$$

Demostración. Solo tenemos que probar que $\Gamma \vDash_{\mathcal{T}_{\text{cont}}} \phi \implies \Gamma \vdash \phi$. Supongamos que tenemos una teoría Γ y una sentencia ϕ tal que $\Gamma \nvdash \phi$. Por el Lema 5.3.4, podemos establecer la existencia de una teoría Γ^* que contiene a Γ, satisface $\Gamma^* \nvdash \phi$, y es tanto prelineal como de Henkin.

A continuación, sea $\mathbf{L}$ el álgebra de Lindenbaum asociada a Γ^*. Aplicando el Lema 5.3.5, deducimos que $\mathbf{L}$ es totalmente ordenada. Dado que la lógica $\vdash$ tiene la regla infinitaria (Inf), es claro que $\mathbf{L}$ satisface la cuasi-identidad generalizada $(\&_{n\in\mathbb{N}}(\alpha \to \beta^n) = 1) \Rightarrow (\alpha \to \alpha\&\beta = 1)$. Entonces, por el Lema 5.3.6, tenemos que $\mathbf{L} = \bigoplus_{i\in I} \mathbf{H}_i$, donde I es un poset totalmente ordenado con un mínimo y cada $\mathbf{H}_i$ es un hoop simple.

Dado que el lenguaje es numerable, L también es numerable. Esto nos permite aplicar el Lema 5.3.8 para obtener una inmersión $f : \mathbf{L} \to \mathbf{L}^*$, donde $\mathbf{L}^*$ es una BL-cadena débilmente saturada numerable y si $C \subseteq A$ es $\wedge$-conectado o si $\bigwedge^{\mathbf{A}} C$ es idempotente, entonces $\bigwedge^{\mathbf{A}} C = \bigwedge^{\mathbf{A}^*} C$ (lo mismo es cierto para el supremo). Subsecuentemente, según el Lema 5.3.10, existe una inmersión completa g de $\mathbf{L}^*$ en una t-norma continua $([0,1], \cdot)$.

Ahora procedemos a construir un modelo basado en $([0,1], \cdot)$. Sea M el conjunto de todas las constantes del lenguaje. Para cada constante c definimos $c^{\mathbf{M}} = c$. Para cada símbolo de predicado R de aridad n definimos $R^{\mathbf{M}}(c_1, \ldots, c_n) = g(f([R(c_1, \ldots, c_n)]))$. Esto completa la definición de $\mathbf{M} = (M, .^{\mathbf{M}})$.

Nuestro objetivo es probar que el valor $g(f([\psi]))$ de cualquier sentencia ψ es igual a su interpretación en la estructura $\mathbf{M}$, es decir, $g(f([\psi])) = ||\psi||^{\mathbf{M}}$. Procedemos por inducción sobre la estructura de la sentencia ψ. Para cualquier fórmula atómica, la afirmación se

sigue por definición, y el paso inductivo para los conectivos es directo. Consideremos una sentencia cuantificada universalmente $\psi = \forall x \chi$. Por el Lema 5.3.5 tenemos

$$g(f([\forall x \chi])) = g(f(\inf_c [\chi\{x \mapsto c\}])).$$

Dado que (RC) es un axioma y el Lema 5.3.5, se sigue que $(\inf_c[\chi\{x \mapsto c\}])^2 = \inf_c[\chi\{x \mapsto c\}]^2$. Sabiendo esto, el Lema 5.3.9 implica que el conjunto $\{\chi\{x \mapsto c\}\}_c$ es $\wedge$-conectado o $\inf_c[\chi\{x \mapsto c\}]$ es idempotente. Por lo tanto, como f preserva el ínfimo en conjuntos que son $\wedge$-conectados o producen elementos idempotentes,

$$g(f(\inf_c [\chi\{x \mapsto c\}])) = g(\inf_c f([\chi\{x \mapsto c\}])),$$

y dado que g es completo,

$$g(\inf_c f([\chi\{x \mapsto c\}])) = \inf_c g(f([\chi\{x \mapsto c\}])).$$

Aplicando la hipótesis inductiva y la definición de la interpretación del ínfimo se completa la prueba para las sentencias cuantificadas universalmente. El caso donde ψ es una sentencia cuantificada existencialmente sigue de la misma manera, excepto que el axioma (RC) no es necesario.

Tenemos $[\psi] = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$ y, dado que $\Gamma^* \nvdash \phi$, también tenemos $[\phi] < 1$. Entonces $||\psi||^{\mathbf{M}} = g(f([\psi])) = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$ y $||\phi||^{\mathbf{M}} = g(f([\phi])) < 1$. Por lo tanto, $\Gamma \nvdash \phi$. □

Recordemos que la regla infinitaria (Inf) esta definida únicamente para sentencias. Como un corolario sencillo del resultado de completitud y de la Proposición 5.3.1, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.3.3. *La regla*

$$\{\phi \vee (\alpha \to \beta^n) : n \in \mathbb{N}\} \rhd \phi \vee (\alpha \to \alpha \& \beta),$$

*donde ϕ, α y β son **fórmulas**, es admisible en la lógica $\vdash$.*

5.4. Completitud en el contexto de las t-normas $[0,1]_{\mathbf{Ł}}$ y $[0,1]_{\Pi}$

En esta sección, daremos dos extensiones de la lógica $BL\forall$ y utilizaremos los resultados desarrollados anteriormente para probar completitud respecto a las t-normas continuas más relevantes.

Recordemos que en [37], Montagna estudia las lógicas de primer orden asociadas a las t-normas de Łukasiewicz y Producto. En su trabajo, introduce una regla infinitaria, así como un nuevo operador y axiomas correspondientes a dicho operador. En el Problema 1 de [37], se plantea la cuestión de si es posible obtener un resultado de completitud para las lógicas Producto y Łukasiewicz sin la necesidad de incorporar un operador adicional. En esta sección, demostramos que la respuesta a esta pregunta es afirmativa.

Procedemos a definir dos extensiones de $BL\forall$:

- Al añadir a $\vdash_{BL\forall}$ el axioma esquema

$$\neg\neg\phi \to \phi.$$

y la regla esquema infinitaria (Inf) obtenemos una extensión que denotamos con $\vdash_{Ł\forall_\infty}$.

- Si incorporamos a $\vdash_{BL\forall}$ los axiomas esquema

$$\neg\neg\chi \to ((\phi\&\chi \to \psi\&\chi) \to (\phi \to \psi)),$$

$$\phi \wedge \neg\phi \to 0,$$

y la regla esquema infinitaria (Inf) obtenemos una extensión que denotamos con $\vdash_{\Pi\forall_\infty}$.

Es importante notar que en ninguna de las lógicas recien definidas hemos incluido el axioma (RC).

Las observaciones que damos a continuación nos serán de utilidad para probar los próximos resultados.

Observación 5.4.1. Consideremos una BL-cadena $\mathbf{B}$ y su descomposición como suma ordinal de hoops de acuerdo a los resultados de la Sección 2.2.1. Necesitaremos los siguientes dos casos:

- Si $\mathbf{B}$ es una MV-álgebra, la descomposición se reduce a un único hoop de Wajsberg acotado.
- Si $\mathbf{B}$ es un álgebra producto, la descomposición está dada por un hoop de dos elementos y un hoop de Wajsberg cancelativo.

Observación 5.4.2. Observemos que el Lema 5.3.4 se mantiene válido si consideramos una extensión axiomática de $\vdash$ mediante esquemas de axiomas de un lenguaje proposicional BL. En particular, el lema seguirá siendo válido para las lógicas $\vdash_{Ł\forall_\infty}$ y $\vdash_{\Pi\forall_\infty}$.

Los siguientes resultados son variaciones del Teorema 5.3.1.

Corolario 5.4.1. *Sea Γ una teoría y ϕ una sentencia. Entonces*

$$\Gamma \vdash_{Ł\forall_\infty} \phi \iff \Gamma \vDash_{[0,1]_Ł} \phi.$$

Demostración. Demostraremos que si $\Gamma \vDash_{[0,1]_Ł} \phi$, entonces $\Gamma \vdash_{Ł\forall_\infty} \phi$. Supongamos que existe una teoría Γ y una sentencia ϕ tal que $\Gamma \nvdash_{Ł\forall_\infty} \phi$. Según la Observación 5.4.2, podemos encontrar una teoría Γ^* que contiene a Γ, cumple $\Gamma^* \nvdash_{Ł\forall_\infty} \phi$, y es tanto prelineal como de Henkin.

Sea $\mathbf{L}$ el álgebra de Lindenbaum asociada a Γ^*. Aplicando el Lema 5.3.5, concluimos que $\mathbf{L}$ es totalmente ordenada. Dado que la lógica $\vdash_{Ł\forall_\infty}$ incluye el axioma $\neg\neg\phi \to \phi$ para toda fórmula ϕ, es evidente que $\mathbf{L}$ es una MV-álgebra. Además, debido a la regla infinitaria (Inf), $\mathbf{L}$ satisface la cuasi-identidad generalizada $(\&_{n\in\mathbb{N}}(\alpha \to \beta^n) = 1) \Rightarrow (\alpha \to \alpha\&\beta = 1)$. Por lo tanto, según el Lema 5.3.6 y la Observación 5.4.1, $\mathbf{L}$ es una MV-álgebra simple.

El Corolario 4.3.1 garantiza la existencia de una inmersión completa de $\mathbf{L}$ en $[0,1]_Ł$. A partir de aquí, el resultado se sigue de manera directa. □

Corolario 5.4.2. *Sea* Γ *una teoría y* ϕ *una sentencia. Entonces*

$$\Gamma \vdash_{\Pi\forall_\infty} \phi \iff \Gamma \vDash_{[0,1]_\Pi} \phi.$$

Demostración. Demostraremos que si $\Gamma \vDash_{[0,1]_\Pi} \phi$, entonces $\Gamma \vdash_{\Pi\forall_\infty} \phi$. Supongamos que existe una teoría Γ y una sentencia ϕ tal que $\Gamma \nvdash_{\text{Ł}\forall_\infty} \phi$. Siguiendo un razonamiento similar al de la demostración anterior, llegamos a un álgebra de Lindenbaum $\mathbf{L}$, que es un álgebra producto totalmente ordenada, tal que $\mathbf{L} = \mathbf{B} \oplus \mathbf{C}$, donde $\mathbf{B}$ es el álgebra de dos elementos y $\mathbf{C}$ es un hoop cancelativo simple. Según el Corolario 4.4.1, existe una inmersión completa de $\mathbf{L}$ en $[0,1]_\Pi$. A partir de aquí, el resultado se sigue de manera directa. □

5.5. Comentarios finales

En este capítulo, hemos logrado los siguientes resultados de completitud fuerte:

- La extensión $BL\forall_\infty$ de $BL\forall$, obtenida mediante la incorporación de la regla (Inf) y el axioma (RC), es fuertemente completa con respecto a $\mathcal{T}_{\text{cont}}$.
- La extensión $\text{Ł}\forall_\infty$ de $\text{Ł}\forall$, obtenida mediante la incorporación de la regla (Inf), es fuertemente completa con respecto a $[0,1]_\text{Ł}$.
- La extensión $\Pi\forall_\infty$ de $\Pi\forall$, obtenida mediante la incorporación de la regla (Inf), es fuertemente completa con respecto a $[0,1]_\Pi$.

Aún queda por abordar el caso en el que se considera una clase arbitraria de t-normas continuas.

Capítulo 6

Lógicas monádicas

En este capítulo nos enfocamos en el estudio del fragmento monádico de la lógica de primer orden $BL\forall$. Comenzamos definiendo lo que consideraremos como lenguaje monádico y lenguaje modal, destacando la estrecha relación entre ambos. A continuación, describimos diversas formas de interpretar semánticamente las fórmulas de estos lenguajes.

Procedemos con un repaso de las BL-álgebras monádicas, con el objetivo de preparar el terreno para el estudio de una de sus subvariedades: la clase de las MV-álgebras monádicas. Esta clase representa la contraparte algebraica de la extensión $S5$ de la lógica de Łukasiewicz, conocida como $S5(Ł)$, que es equivalente al fragmento monádico de la lógica de Łukasiewicz de primer orden. Demostraremos diversas propiedades de la clase de las MV-álgebras monádicas, como el hecho de que las álgebras finitamente subdirectamente irreducibles pueden ser parcialmente inmersibles en potencias de la t-norma $[0,1]_Ł$. Posteriormente, utilizaremos estos resultados para demostrar que el fragmento monádico de $BL\forall$ es finitamente fuertemente completo con respecto a la t-norma de Łukasiewicz.

El resto del capítulo se dedica al estudio de algunas extensiones de $S5(Ł)$: las lógicas $S5(Ł)_\infty$, $S5_k(Ł)$ y $S5_k(Ł)_\infty$. La lógica $S5(Ł)_\infty$ es una extensión infinitaria que permite alcanzar la completitud fuerte estándar. Por otro lado, la lógica $S5_k(Ł)$ es una extensión axiomática que captura la noción de tamaño o ancho del universo de una estructura. Finalmente, la lógica $S5_k(Ł)_\infty$ es la extensión infinitaria de la lógica anterior, para la cual probamos un resultado de completitud fuerte respecto a potencias de $[0,1]_Ł$ de grado menor o igual que k. Demostraremos estos resultados utilizando y ampliando los desarrollos algebraicos presentados en las secciones previas.

Los resultados originales de este capítulo forman parte del trabajo [10].

6.1. Lenguajes monádicos

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden de tipo $(\&, \to, 0)$. Diremos que el lenguaje $\mathcal{L}_{\text{mon}}$ de tipo $(\&, \to, 0)$ es el *lenguaje monádico de* $\mathcal{L}$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

- El conjunto de cuantificadores es $\{\forall, \exists\}$.
- El conjunto de variables solo contiene la variable x.

- El conjunto de predicados solo contiene los predicados de $\mathcal{L}$ de aridad 1.
- El conjunto de constantes es vacío.

Interpretación del lenguaje monádico como lenguaje proposicional

Sea un lenguaje monádico $\mathcal{L}_{\text{mon}}$. Diremos que un lenguaje $\mathcal{L}_{\Box}$ de tipo $(\Diamond, \Box, \&, \rightarrow, 0)$ es el *lenguaje modal de* $\mathcal{L}_{mon}$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

- El conjunto de cuantificadores es vacío.
- El conjunto de predicados solo contiene predicados 0-arios. Además, existe una correspondencia biyectiva entre predicados de $\mathcal{L}_{\Box}$ y predicados de $\mathcal{L}_{\text{mon}}$.
- El conjunto de variables es vacío.
- El conjunto de constantes es vacío.

Observemos que $\mathcal{L}_{\Box}$ es un lenguaje proposicional. Recordemos entonces que llamamos proposiciones a sus fórmulas y letras proposicionales a sus predicados.

Existe una traducción natural entre las fórmulas monádicas en $\mathcal{L}_{\text{mon}}$ y las proposiciones en $\mathcal{L}_{\Box}$. Basta sustituir cada aparición de los símbolos $\forall x$ y $\exists x$ por $\Box$ y $\Diamond$, respectivamente, además de reemplazar cada aparición de $P(x)$ por su correspondiente predicado 0-ario p. Por ejemplo, si $\forall x Q(x)$ es una fórmula de $\mathcal{L}_{\text{mon}}$, su correspondiente proposición en $\mathcal{L}_{\Box}$ sería $\Box q$.

El lenguaje modal $\mathcal{L}_{\Box}$ permite dos cosas: un estudio algebraico de la lógica monádica mediante las *álgebras monádicas*, y un estudio modal mediante marcos de Kripke.

Interpretación con marcos de Kripke

Sea $\mathcal{L}_{\text{mon}}$ un lenguaje monádico y $\mathcal{L}_{\Box}$ su respectivo lenguaje modal. En esta sección, mostraremos que nuestra noción de interpretación en $\mathcal{L}_{\text{mon}}$ coincide con una interpretación mediante marcos de Kripke en $\mathcal{L}_{\Box}$. Para obtener más detalles que no se abordarán aquí, consulte, por ejemplo, [24].

Consideremos una BL-álgebra $\mathbf{B}$. Un $\mathbf{B}$-*marco de Kripke* es una estructura (W, e, r), donde W es un conjunto no vacío denominado conjunto de *mundos posibles*, e es una función que asocia a cada elemento de W y a cada letra proposicional un elemento de B, y r es una relación binaria en W, conocida como *relación de accesibilidad*.

Definimos la interpretación modal $\|\phi\|^{\mathbf{K},w}$ de una proposición ϕ en $\mathcal{L}_{\Box}$ de manera inductiva, considerando que $\mathbf{B}$ es una BL-álgebra, $\mathbf{K}$ es un $\mathbf{B}$-marco de Kripke y w es un mundo posible:

- Si ϕ tiene la forma p, donde p es una letra proposicional, entonces
$$\|\phi\|^{\mathbf{K},w} = e(w, p).$$
- Si $\phi = 0$, entonces $\|\phi\|^{\mathbf{K},w} = 0^{\mathbf{B}}$.

- Si $\phi = 1$, entonces $\|\phi\|^{\mathbf{K},w} = 1^{\mathbf{B}}$.
- Si $\phi = \psi \circ \gamma$, donde $\circ$ representa alguno de los conectivos $\wedge$, $\vee$, $\&$ o $\rightarrow$, entonces $\|\phi\|^{\mathbf{K},w}$ se define si y solo si $\|\psi\|^{\mathbf{K},w}$ y $\|\gamma\|^{\mathbf{K},w}$ están definidas. En tal caso, se cumple que $\|\phi\|^{\mathbf{K},w} = \|\psi\|^{\mathbf{K},w} \circ^{\mathbf{B}} \|\gamma\|^{\mathbf{K},w}$.
- Si $\phi = \Box\psi$, entonces $\|\phi\|^{\mathbf{K},w}$ se define si se satisfacen las siguientes condiciones:
  - Para todo $v \in W$ tal que $(w, v) \in r$, se debe cumplir que $\|\psi\|^{\mathbf{K},v}$ está definido.
  - El ínfimo $\bigwedge_{v,(w,v)\in r} \|\psi\|^{\mathbf{K},v}$ debe existir en $\mathbf{B}$.

  Si ambas condiciones se cumplen, entonces $\|\phi\|^{\mathbf{K},w} = \bigwedge_{v,(w,v)\in r} \|\psi\|^{\mathbf{K},v}$.
- Si $\phi = \Diamond\psi$, entonces $\|\phi\|^{\mathbf{K},w}$ se define si se satisfacen las siguientes condiciones:
  - Para todo $v \in W$ tal que $(w, v) \in r$, se debe cumplir que $\|\psi\|^{\mathbf{K},v}$ está definido.
  - El supremo $\bigvee_{v,(w,v)\in r} \|\psi\|^{\mathbf{K},v}$ debe existir en $\mathbf{B}$.

  Si ambas condiciones se cumplen, entonces $\|\phi\|^{\mathbf{K},w} = \bigvee_{v,(w,v)\in r} \|\psi\|^{\mathbf{K},v}$.

Si $\mathbf{K}$ es un $\mathbf{B}$-marco de Kripke de manera que existe $\|\phi\|^{\mathbf{K},w}$ para todo w y toda proposición ϕ, entonces decimos que $\mathbf{K}$ es un *marco de Kripke seguro*.

Con el propósito de demostrar la existencia de una biyección entre estructuras y marcos de Kripke, consideremos una BL-álgebra $\mathbf{B}$, un conjunto M, una $\mathbf{B}$-estructura $\mathbf{M}$ y una valuación v. A esta estructura le asignamos el $\mathbf{B}$-marco de Kripke $\mathbf{K} = (M, e, r)$, definido de la siguiente manera:

- La función e se define como $e(w, p) = \|P(x)\|^{\mathbf{M},v'}$, donde v' es la valuación que asigna el elemento $w \in M$ a la variable x y P es el predicado unario asociado a p.
- La relación r es una relación de equivalencia total, es decir, $r = M \times M$.

Luego, si ϕ es una fórmula en $\mathcal{L}_{\text{mon}}$, y ϕ' su traducción en $\mathcal{L}_{\Box}$, es evidente que se cumple la igualdad

$$\|\phi'\|^{\mathbf{K},v(x)} = \|\phi\|^{\mathbf{M},v}.$$

Esta construcción es facilmente inversible. Por lo tanto, ambas nociones de interpretación son equivalentes.

6.2. El fragmento monádico de $BL\forall$

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Definimos el *fragmento monádico de la lógica* $BL\forall$ como la restricción de la lógica $BL\forall$ al lenguaje monádico $\mathcal{L}_{\text{mon}}$. Si $\Gamma \cup \{\phi\}$ son fórmulas de $\mathcal{L}_{\text{mon}}$ y se cumple que $\Gamma \vdash_{BL\forall} \phi$, entonces el par (Γ, ϕ) pertenece al fragmento monádico. Es importante notar que, aunque ϕ y Γ esten en el lenguaje monádico, la demostración de ϕ a partir de Γ en $BL\forall$ podría involucrar fórmulas que utilicen más de una variable.

En [24], Hájek demuestra que la fórmula

$$(\exists x\phi \& \exists x\phi) \equiv (\exists x\phi)\&(\exists x\phi), \tag{6.1}$$

es demostrable en $BL\forall$. Aunque la fórmula contiene solo una variable, Hájek no logró encontrar una demostración que empleara solo una variable.

Esto lleva a Hájek a proponer el siguiente sistema axiomático para el fragmento monádico:

- Los esquemas de axiomas de $BL\forall$,
- El esquema de axioma $(\exists x\phi \& \exists x\phi) \equiv (\exists x\phi)\&(\exists x\phi)$,
- La regla de inferencia Modus Ponens, y
- La regla Generalización.

Denotamos este sistema con $BL\forall_{\text{mon}}$.

Para demostrar que la lógica $\vdash_{BL\forall_{\text{mon}}}$ es efectivamente el fragmento monádico de $BL\forall$, es necesario probar que es fuertemente completa respecto a las BL-cadenas. En [30], Hájek prueba este hecho, aunque la demostración que presenta ha resultado poco convincente para varios investigadores.

La lógica $S5(BL)$

Al traducir al lenguaje modal, el sistema axiomático $BL\forall_{\text{mon}}$ adopta la siguiente forma:

- Axiomas esquema de BL.
- Los axiomas adicionales:
  - $\Box\phi \to \phi$,
  - $\phi \to \Diamond\phi$,
  - $\Box(\nu \to \phi) \to (\nu \to \Box\phi)$,
  - $\Box(\phi \to \nu) \to (\Diamond\phi \to \nu)$,
  - $\Box(\phi \vee \nu) \to (\Box\phi \vee \nu)$,
  - $\Diamond(\phi \wedge \phi) \equiv (\Diamond\phi) \wedge (\Diamond\phi)$.

  Aquí, ϕ representa cualquier proposición de $\mathcal{L}_\Box$, y $\nu = t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, donde t es un término proposicional, α_i es una proposición de $\mathcal{L}_\Box$ que comienza con $\Box$ o $\Diamond$, y $\alpha \equiv \beta$ es una abreviatura para $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$.
- Regla de inferencia Modus Ponens: $\phi, \phi \to \psi \rhd \psi$, donde ϕ y ψ son proposiciones de $\mathcal{L}_\Box$.
- Regla de inferencia de Generalización: $\phi \rhd \Box\phi$, donde ϕ es una proposición de $\mathcal{L}_\Box$.

Denotamos este sistema como $S5(BL)$. Si Δ es un conjunto de axiomas esquema en un lenguaje proposicional BL, definimos la extensión $S5(BL + \Delta)$ de manera natural.

En [6], los autores presentan un ejemplo para demostrar la necesidad del axioma $\Diamond(\phi \wedge \phi) \equiv (\Diamond\phi) \wedge (\Diamond\phi)$.

Ejemplo 6.2.1. Consideremos $\mathbf{A}$, la MV-álgebra de tres elementos, cuyo universo es el conjunto $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Denotemos por $\mathbf{B}$ al álgebra $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$, donde $\Box 0 = \Box\frac{1}{2} = \Diamond 0 = 0$ y $\Box 1 = \Diamond\frac{1}{2} = \Diamond 1 = 1$. Es fácil demostrar que el álgebra $\mathbf{B}$ satisface las identidades asociadas a todos los axiomas de $S5(BL)$, excepto algunas derivadas del axioma $\Diamond(\phi\wedge\phi) \equiv (\Diamond\phi) \wedge (\Diamond\phi)$. Por lo tanto, concluimos que este axioma es independiente de los otros axiomas.

Al trasladar esto al lenguaje monádico, el Axioma (6.1) resulta ser independiente del resto de los axiomas de $BL\forall_{\text{mon}}$.

Como hemos discutido anteriormente, si ϕ es una fórmula en un lenguaje $\mathcal{L}_{\Box}$, interpretar la traducción de ϕ en el lenguaje monádico es equivalente a interpretar ϕ en marcos de Kripke en los que la relación de accesibilidad es total. En lógica modal, los sistemas axiomáticos $S5$ se utilizan para describir modalidades dadas por modelos de Kripke con relaciones de accesibilidad total. Luego la notación $S5(BL)$ es apropiada.

6.3. BL-álgebras monádicas

En [6], los autores presentan la variedad $\mathbb{MBL}$ de *BL-álgebras monádicas*. Esta variedad se compone de BL-álgebras que incorporan dos nuevas operaciones unarias, $\Box$ y $\Diamond$, las cuales cumplen con las siguientes identidades.

- **M1:** $\Box x \to x \approx 1$,
- **M2:** $\Box(x \to \Box y) \approx \Diamond x \to \Box y$,
- **M3:** $\Box(\Box x \to y) \approx \Box x \to \Box y$,
- **M4:** $\Box(\Diamond x \vee y) \approx \Diamond x \vee \Box y$,
- **M5:** $\Diamond(x \cdot x) \approx \Diamond x \cdot \Diamond x$.

En una BL-álgebra monádica $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$, definimos los conjuntos $\Diamond A = \{\Diamond a \mid a \in A\}$ y $\Box A = \{\Box a \mid a \in A\}$.

En el resto de la sección, nos enfocaremos en repasar las propiedades más importantes de las BL-álgebras monádicas.

Lema 6.3.1 (Lema 2.3 de [6])**.** *Sea* $(\mathbf{A}, \Box, \Diamond)$ *una BL-álgebra monádica, y sean* $a, b \in A$ *y* $c \in \Box A$*. Entonces*

- ***(1):*** $\Box 1 = \Diamond 1 = 1$ *y* $\Box 0 = \Diamond 0 = 0$.
- ***(2):*** $\Box c = \Diamond c = c$.
- ***(3):*** $\Box a \leq a \leq \Diamond a$.
- ***(4):*** *si* $a \leq b$*, entonces* $\Box a \leq \Box b$ *y*

$\Diamond a \leq \Diamond b$.

- ***(5):*** $\Box(a \vee c) = \Box a \vee c$.
- ***(6):*** $\Diamond(a \vee b) = \Diamond a \vee \Diamond b$.
- ***(7):*** $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$.
- ***(8):*** $\Diamond(a \wedge c) = \Diamond a \wedge c$.
- ***(9):*** $\Box(a \to c) = \Diamond a \to c$.
- ***(10):*** $\Diamond(a \to c) \leq \Box a \to c$.
- ***(11):*** $\Box(c \to a) = c \to \Box a$.
- ***(12):*** $\Diamond(c \to a) \leq c \to \Diamond a$.
- ***(13):*** $\Box\neg a = \neg\Diamond a$.
- ***(14):*** $\Diamond\neg a \leq \neg\Box a$.

Como corolario del lema anterior, podemos concluir que para cualquier BL-álgebra monádica $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$, se cumple que $\Diamond A = \Box A$. Además, el conjunto $\Box A$ es cerrado bajo las operaciones de las BL-álgebras, lo que implica que $\Box A$ forma una subálgebra de $\mathbf{A}$, la cual denotamos con $\Box\mathbf{A}$.

Lema 6.3.2 (Lema 2.9 de [6]). *Sea $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ una BL-álgebra monádica. Entonces el reticulado de congruencias de $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ es isomorfo al reticulado de congruencias de la BL-álgebra $\Box\mathbf{A}$.*

Como consecuencia del lema anterior tenemos que toda BL-álgebra monádica $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ cumple las siguientes propiedades:

- Es simple si y solo si $\Box\mathbf{A}$ es simple.
- Es subdirectamente irreducible si y solo si $\Box\mathbf{A}$ es subdirectamente irreducible.
- Es finitamente subdirectamente irreducible si y solo si $\Box\mathbf{A}$ es finitamente subdirectamente irreducible.

En particular, dado que una BL-álgebra es finitamente subdirectamente irreducible si y solo si es totalmente ordenada, podemos afirmar que $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ es finitamente subdirectamente irreducible si y solo si $\Box\mathbf{A}$ es una BL-álgebra totalmente ordenada.

Teorema 6.3.1 (Teorema 2.13 de [6]). *Sea $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ una BL-álgebra monádica que es **finitamente subdirectamente irreducible**. Entonces, existe una inmersión subdirecta α de $\mathbf{A}$ en un producto directo de BL-cadenas $\prod \mathbf{A}_i$. Además, para cada i, la composición $\pi_i \circ \alpha$ constituye una inmersión de $\Box\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}_i$.*

Álgebras monádicas m-relativamente completas

Dada una BL-álgebra $\mathbf{A}$, decimos que una subálgebra $\mathbf{C} \leq \mathbf{A}$ es *m-relativamente completa* si se cumplen las siguientes condiciones:

- (s1): Para todo $a \in A$, el subconjunto $\{c \in C \mid c \leq a\}$ tiene máximo y el subconjunto $\{c \in C \mid c \geq a\}$ tiene mínimo.
- (s2): Para todo $a \in A$ y $c, d \in C$ tal que $c \leq d \vee a$, existe un $c' \in C$ tal que $c \leq d \vee c'$ y $c' \leq a$.

- (s3): Para todo $a \in A$ y $c \in C$ tal que $a \cdot a \leq c$, existe un $c' \in C$ tal que $c' \cdot c' \leq c$ y $c' \geq a$.

El interés de las subálgebras m-relativamente completas proviene de la siguiente propiedad. Si $\mathbf{A}$ es una BL-álgebra y $\mathbf{C} \leq \mathbf{A}$ es una subálgebra m-relativamente completa, entonces $\mathbf{A}$ junto con las operaciones

$$\Diamond a = \text{mín}\{c \in C \mid c \geq a\}, \qquad \Box a = \text{máx}\{c \in C \mid c \leq a\},$$

es una BL-álgebra monádica, donde $\Box\mathbf{A} = \mathbf{C}$. Además, se puede probar que, en cualquier BL-álgebra monádica, la subálgebra $\Box\mathbf{A}$ es m-relativamente completa. Esta caracterización de los cuantificadores se logró inicialmente en [19], en el contexto de las MV-álgebras monádicas. La versión que presentamos aquí proviene de [6].

Álgebras funcionales

Consideremos una BL-álgebra $\mathbf{B}$ y un conjunto no vacío X. Definimos S como el conjunto de funciones f en B^X para las cuales existen $\text{ínf}\, f := \text{ínf}_{x\in X} f(x)$ y $\sup f := \sup_{x\in X} f(x)$. Para cada $f \in S$, definimos $(\Box_\wedge f)(x) = \text{ínf}\, f$ y $(\Diamond_\vee f)(x) = \sup f$ para todo $x \in X$. Denominamos *álgebra* $\mathbf{B}$*-funcional* a cualquier subálgebra $\mathbf{A}$ de $\mathbf{B}^X$, donde $A \subseteq S$, que satisface la condición de que $(\mathbf{A}, \Box_\wedge, \Diamond_\vee)$ constituye un álgebra monádica.

De particular interés es el caso en que $\mathbf{B}$ es una BL-álgebra totalmente ordenada. Sea $\mathcal{L}_{\text{mon}}$ un lenguaje monádico, $\mathcal{L}_\Box$ su respectivo lenguaje modal y $\mathbf{B}$ una BL-álgebra totalmente ordenada. Podemos encontrar para cada $\mathbf{B}$-estructura **segura** (X, f) en $\mathcal{L}_{\text{mon}}$ una $\mathbf{A}$-estructura $f_\Box$ en $\mathcal{L}_\Box$ de manera que, si ϕ es una fórmula de $\mathcal{L}_{\text{mon}}$ y ϕ' su traducción en $\mathcal{L}_\Box$, se cumple que

(X, f) es modelo de la fórmula ϕ si y solo si $f_\Box$ es modelo de la proposición ϕ'. (*)

La BL-álgebra monádica $\mathbf{A}$ es un álgebra $\mathbf{B}$-funcional que se construye de la siguiente manera: Consideramos el conjunto A formado por las sucesiones $\{b_x\}_{x\in X}$ de elementos de $\mathbf{B}$ que cumplen que para alguna fórmula ϕ de $\mathcal{L}_{\text{mon}}$ se tiene que

$$||\phi||^{(X,f),x} = b_x$$

para todo $x \in X$. Las operaciones $\Box$ y $\Diamond$ se definen de la siguiente manera:

$$(\Box\{b_x\}_{x\in X})_x := \inf_{x\in X}\{b_x\}_{x\in X}, \text{ para todo } x,$$

$$(\Diamond\{b_x\}_{x\in X})_x := \sup_{x\in X}\{b_x\}_{x\in X} \text{ para todo } x.$$

Debido a que la estructura es segura, estos ínfimos y supremos existen para todas las sucesiones de A. Se puede probar que la BL-álgebra $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}^X$, enriquecida con las operaciones $\Box$ y $\Diamond$ recién definidas, es una BL-álgebra monádica.

Definamos ahora quién es $f_\Box$. Si P es un predicado de $\mathcal{L}_{\text{mon}}$ y p en $\mathcal{L}_\Box$ es su correspondiente letra proposicional, definimos $f_\Box(p) := f(P)$.

De forma análoga, se puede construir una **B**-estructura a partir de un álgebra **B**-funcional de manera que se cumpla (*). Esta correspondencia entre modelos nos permite afirmar lo siguiente: si denotamos con $\mathrm{Func}(\mathbb{BL}_{\mathrm{to}})$ la clase de todas las álgebras **B**-funcionales, donde **B** es una BL-cadena, la lógica $\vDash_{\mathbb{BL}_{\mathrm{to}}}$ en $\mathcal{L}_{\mathrm{mon}}$ es *equivalente* a la lógica $\vDash_{\mathrm{Func}(\mathbb{BL}_{\mathrm{to}})}$ en $\mathcal{L}_{\Box}$. Más precisamente, si $\Gamma \cup \{\phi\}$ es un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathrm{mon}}$ y $\Gamma' \cup \{\phi'\}$ es el conjunto de proposiciones correspondientes en $\mathcal{L}_{\Box}$, entonces

$$\Gamma \vDash_{\mathbb{BL}_{\mathrm{to}}} \phi \iff \Gamma' \vDash_{\mathrm{Func}(\mathbb{BL}_{\mathrm{to}})} \phi'.$$

Por supuesto, si en la discusión anterior reemplazamos $\mathbb{BL}_{\mathrm{to}}$ por una clase $\mathcal{K}$ cualquiera de BL-álgebras totalmente ordenadas, todo sigue siendo válido.

Completitud fuerte mediante álgebras funcionales

No resulta complicado demostrar que la lógica $\vdash_{S5(BL+\Delta)}$ es implicativa. Para ello, basta con recordar que $\vdash_{BL+\Delta}$ ya era una lógica implicativa y observar que para cualquier par de letras proposicionales p y q, se cumple lo siguiente:

$$p \to q, q \to p \vdash_{S5(BL+\Delta)} \Box p \to \Box q,$$
$$p \to q, q \to p \vdash_{S5(BL+\Delta)} \Diamond p \to \Diamond q.$$

Llamemos $\mathbb{MBL} + \Delta$ a la subvariedad de $\mathbb{MBL}$ caracterizada por las identidades $\delta \approx 1, \delta \in \Delta$. Dado que la lógica $\vdash_{S5(BL+\Delta)}$ es implicativa, el Teorema 3.4.1 establece que esta lógica es fuertemente completa con respecto a la variedad $\mathbb{MBL} + \Delta$.

En el trabajo [8], los autores enuncian el siguiente resultado.

Teorema 6.3.2 (Teorema 2.1 de [8])**.** *Sea $\mathcal{L}_{\Box}$ un lenguaje modal y Δ un conjunto de axiomas esquema en el lenguaje proposicional BL.*

$\vdash_{S5(BL+\Delta)}$ *en $\mathcal{L}_{\Box}$ es fuertemente completa con respecto a $Func((\mathbb{BL}+\Delta)_{to})$ si y solo si $Func((\mathbb{BL}+\Delta)_{to})$ genera como cuasivariedad a $\mathbb{MBL}+\Delta$,*

donde $\mathbb{BL}+\Delta$ es la subvariedad de $\mathbb{BL}$ caracterizada por las identidades $\delta \approx 1, \delta \in \Delta$ y $(\mathbb{BL}+\Delta)_{to}$ son las álgebras de $\mathbb{BL}+\Delta$ totalmente ordenadas.

6.4. MMV-álgebras

En esta sección, analizamos la subvariedad de las álgebras monádicas que se define mediante la identidad

$$\neg\neg x \approx x. \tag{Idemp}$$

Esta variedad nos permite el estudio algebraico de la extensión $S5$ de la lógica de Łukasiewicz.

Presentaremos un resumen de algunas propiedades de las MMV-álgebras, enfocándonos en ciertos resultados de [8]. En dicho trabajo, los autores proponen un teorema de

representación funcional para las álgebras que son finitamente subdirectamente irreducibles y demuestran que las MMV-álgebras poseen la propiedad de inmersión finita. Gracias a esto, logran demostrar que la clase de las MMV-álgebras se genera como cuasivariedad a partir de sus álgebras funcionales.

Definición y algunas propiedades

Denotamos $\mathbb{MMV}$ a la subvariedad de $\mathbb{MBL}$ que se caracteriza por la identidad

$$\neg\neg x \approx x.$$

Rutledge fue el primero en estudiar esta variedad en su tesis doctoral [44]. Nos referimos a los elementos de $\mathbb{MMV}$ como MMV-álgebras o también como MV-álgebras monádicas.

Al inicio del capítulo, describimos los operadores modales de las BL-álgebras monádicas utilizando las subálgebras m-relativamente completas. Esta descripción se aplica también a $\mathbb{MMV}$, lo que nos permite interpretar las MMV-álgebras como MV-álgebras que poseen una subálgebra m-relativamente completa.

El siguiente lema contiene algunas propiedades de las MV-álgebras monádicas que nos serán de utilidad más adelante.

Lema 6.4.1. *Sea* $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ *una MV-álgebra monádica y* $a, b \in A$*. Entonces*

- $\Diamond a = \neg\Box\neg a$ *y* $\Box a = \neg\Diamond\neg a$*;*
- $\Diamond(\Diamond a \to b) = \Diamond a \to \Diamond b$*;*
- $\Diamond(\Diamond a \to a) = 1$*;*
- $\Diamond a^n = (\Diamond a)^n$ *y* $\Diamond(na) = n(\Diamond a)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*
- $\Box a^n = (\Box a)^n$ *y* $\Box(na) = n(\Box a)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

donde $na = \underbrace{a \oplus a \oplus \ldots \oplus a}_{n\text{-veces}}$.

Demostración. El ítem 1 es una consecuencia directa de del Item (13) del Lema 6.3.1 y de la identidad $\neg\neg x \approx x$. El ítem 2 proviene de [6]. El ítem 3 se sigue del ítem anterior. Los ítems 4 y 5 se pueden encontrar en el Lema 4.2 de [16]. □

El siguiente resultado será fundamental para las discusiones futuras.

Teorema 6.4.1 (Corolario 3.7 de [8])**.** *Dada una MV-álgebra monádica* $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ ***finitamente subdirectamente irreducible****, existe una inmersión subdirecta* $\alpha : \mathbf{A} \to \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$*, donde*

- *cada* $\mathbf{A}_i$ *es una MV-álgebra totalmente ordenada,*
- *para todo* i *la proyección restringida* $\pi_i \circ \alpha|_{\Diamond\mathbf{A}} : \Diamond\mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$ *es una inmersión,*
- *para todo* $a \in A$ *existe* $i \in I$ *tal que* $(\pi_i \circ \alpha)(\Diamond a) = (\pi_i \circ \alpha)(a)$*,*
- *para todo* $a \in A$ *existe* $i \in I$ *tal que* $(\pi_i \circ \alpha)(\Box a) = (\pi_i \circ \alpha)(a)$*.*

Representación funcional

Sea $\mathbf{C}$ una MV-cadena. En la clase $\mathbb{MMV}$, un álgebra $\mathbf{C}$-funcional es un álgebra $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ tal que existe un conjunto no vacío X con $\mathbf{A} \leq \mathbf{C}^X$ y se cumple lo siguiente:

$$(\Diamond a)(x) = \bigvee\{a(y) : y \in X\} \qquad \text{y} \qquad (\Box a)(x) = \bigwedge\{a(y) : y \in X\} \qquad (*)$$

para todo $a \in A$, $x \in X$.

Debido a que $\mathbf{C}$ es una MV-álgebra totalmente ordenada, estas álgebras funcionales son MV-álgebras monádicas finitamente subdirectamente irreducibles.

Ejemplo 6.4.1. Consideremos un conjunto no vacío X y la MV-álgebra $[0,1]_{\text{Ł}}^X$, que consiste en todas las funciones de X en la t-norma de Łukasiewicz $[0,1]_{\text{Ł}}$. Dado que $[0,1]$ es un conjunto ordenado completo, podemos definir las siguientes funciones para todo $f \in [0,1]^X$ y $x \in X$:

$$\Diamond_\vee(f)(x) := \bigvee\{f(y) \mid y \in X\} \quad \text{y} \quad \Box_\wedge(f)(x) := \bigwedge\{f(y) \mid y \in X\}.$$

El álgebra $\mathbf{A} = ([0,1]_{\text{Ł}}^X, \Diamond, \Box)$ es un álgebra $[0,1]_{\text{Ł}}$-funcional. Para cualquier función $f \in [0,1]^X$, las funciones $\Diamond_\vee(f)$ y $\Box_\wedge(f)$ son constantes. Por lo tanto, el conjunto $\Box\mathbf{A}$ coincide exactamente con el conjunto de todas las funciones constantes de $[0,1]_{\text{Ł}}^X$.

Si dos conjuntos X e Y son isomorfos, es decir, tienen la misma cardinalidad, entonces $[0,1]_{\text{Ł}}^X$ es isomorfo a $[0,1]_{\text{Ł}}^Y$ como MMV-álgebras. De manera similar, si existe una inyección de X en Y, entonces $[0,1]_{\text{Ł}}^X$ puede inmersarse en $[0,1]_{\text{Ł}}^Y$ como MMV-álgebra. Consideremos, sin pérdida de generalidad, el caso en que $X \subseteq Y$ y tomemos un elemento $x_0 \in X$. La inmersión se define asignando a cada función $f : X \to [0,1]$ la función $f' : Y \to [0,1]$, donde

$$f'(y) := \begin{cases} f(y) & \text{si } y \in X, \\ f(x_0) & \text{si } y \in Y - X. \end{cases}$$

Si X tiene un número finito k de elementos, escribimos simplemente $[0,1]_{\text{Ł}}^k$. Si X es infinito, entonces $[0,1]_{\text{Ł}}^X$ genera a $\mathbb{MMV}$ como variedad ([8], [44]).

Recordemos que la MV-álgebra Ł_m es la subálgebra de $[0,1]_{\text{Ł}}$ cuyo universo está dado por el conjunto $\{0, \frac{1}{m-1}, \ldots, \frac{m-2}{m-1}, 1\}$. De manera similar a la definición de $([0,1]_{\text{Ł}}^X, \Diamond, \Box)$, definimos para todo conjunto no vacío X las álgebras Ł-funcionales $(\text{Ł}_m^X, \Diamond, \Box)$. Claramente, las álgebras $(\text{Ł}_m^X, \Diamond, \Box)$ son inmersibles en $([0,1]_{\text{Ł}}^X, \Diamond, \Box)$.

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra $\mathbf{C}$-funcional, donde $\mathbf{C}$ es una MV-cadena. Si $\mathbf{A}$ satisface que para cada $a \in A$ existe $x_a \in X$ tal que $(\Box a)(x) = a(x_a)$ para todo $x \in X$, decimos que $\mathbf{A}$ es una *álgebra funcional con testigos*. Observemos que, dado que la identidad $\Diamond x \approx \neg\Box\neg x$ se cumple en cada MV-álgebra monádica, la condición recién mencionada es equivalente a la correspondiente para $\Diamond$.

En [8], combinando 6.4.1 junto con la propiedad de amalgamación infinita (Proposición 4.3.4) los autores llegan al siguiente resultado.

Teorema 6.4.2. *Toda MV-álgebra monádica finitamente subdirectamente irreducible es isomorfa a un álgebra funcional con testigos.*

Demostración. Se deduce de la demostración del Teorema 3.8 en [8]. □

Corolario 6.4.1. *La clase de álgebras funcionales con testigos genera* $\mathbb{MMV}$ *como una cuasivariedad.*

Denotemos con S5(Ł) a la lógica S5$(BL + \neg\neg\phi \to \phi)$. Recordemos que la lógica $\vdash_{S5(Ł)}$ es fuertemente completa con respecto a la clase Func$(\mathbb{MV}_{\text{to}})$ si y solo si Func$(\mathbb{MV}_{\text{to}})$ genera a $\mathbb{MMV}$ como cuasivariedad. Entonces, como consecuencia del corolario anterior, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.4.3. *La lógica* $\vdash_{S5(Ł)}$ *es fuertemente completa con respecto a la clase Func*$(\mathbb{MV}_{to})$.

Al traducir al lenguaje monádico, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 6.4.4. *La lógica* $\vdash_{Ł\forall_{mon}}$ *es fuertemente completa con respecto a* $\mathbb{MV}_{to}$*, donde* $\vdash_{Ł\forall_{mon}}$ *es la extensión axiomática de* $\vdash_{BL\forall_{mon}}$ *mediante el esquema de axioma* $\neg\neg x \to x$.

6.4.1. Propiedad de inmersión finita

En esta sección, probamos que la clase $\mathbb{MMV}$ tiene la FEP.

Gracias al Teorema 2.1.6, podemos afirmar que toda MV-álgebra monádica se representa como un producto subdirecto de álgebras FSI. Si la clase $\mathbb{MMV}_{FSI}$, que corresponde a las álgebras finitamente subdirectamente irreducibles de $\mathbb{MMV}$, posee la FEP, entonces no resulta difícil concluir que la clase de todas las MV-álgebras monádicas también posee la FEP. Recordar, además, que en la sección anterior vimos que las álgebras FSI de $\mathbb{MMV}$ son las álgebras $\mathbf{C}$-funcionales con testigos, donde $\mathbf{C}$ es una MV-álgebra totalmente ordenada.

A continuación, demostramos que la clase de las álgebras funcionales con testigos es parcialmente inmersible en álgebras finitas de la forma $(Ł_m^n, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)$ (estas álgebras fueron introducidas en el Ejemplo 6.4.1).

Lema 6.4.2. *Sea* $\mathbf{C}$ *una MV-cadena. Sea* $\mathbf{B} := (\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ *un álgebra* $\mathbf{C}$*-funcional con testigos, y supongamos que* X *es un conjunto no vacío tal que para cada* $a \in A$ *existe* $x_a \in X$ *tal que* $(\Box a)(x) = a(x_a)$ *para todo* $x \in X$*. Entonces:*

Para cualquier subconjunto finito $S \subseteq A$ *existen un álgebra* $\mathbf{D} := (Ł_m^n, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)$*, donde* n *y* m *son números naturales,* $n \leq |X|$*, y una función biyectiva* $h\colon S \to L_m^n$ *tal que:*

- $h(0^{\mathbf{B}}) = 0^{\mathbf{D}}$ *si* $0^{\mathbf{B}} \in S$,
- $h(a_1 \to^{\mathbf{B}} a_2) = h(a_1) \to^{\mathbf{D}} h(a_2)$ *si* $a_1, a_2, a_1 \to^{\mathbf{B}} a_2 \in S$,
- $h(\Box^{\mathbf{B}} a) = \Box^{\mathbf{D}} h(a)$ *si* $a, \Box^{\mathbf{B}} a \in S$.

Demostración. Sea X_0 un subconjunto finito de X tal que:

- $x_a \in X_0$ para $a \in S$,

- para $a, b \in S$ con $a \neq b$, existe $x \in X_0$ tal que $a(x) \neq b(x)$.

Definamos $C_0 := \{a(x) : a \in S, x \in X_0\} \cup \{0, 1\}$. Dado que la clase de MV-cadenas tiene la propiedad de inmersión finita (Teorema 4.3.7), existe una MV-cadena finita Ł_m y una función biyectiva $f\colon C_0 \to L_m$ tal que

- $f(0^{\mathbf{C}}) = 0^{\text{Ł}_m}$, $f(1^{\mathbf{C}}) = 1^{\text{Ł}_m}$,
- $f(c_1 \to^{\mathbf{C}} c_2) = f(c_1) \to^{\text{Ł}_m} f(c_2)$ si $c_1, c_2, c_1 \to^{\mathbf{C}} c_2 \in C_0$.

Consideremos el álgebra $\mathbf{D} := (\text{Ł}_m^{X_0}, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)$. Definamos $h\colon S \to L_m^{X_0}$ por $h(a)(x) := f(a(x))$ para $a \in S$, $x \in X_0$. Demostramos ahora que h tiene las propiedades deseadas.

- h es biyectiva: Sean $a, b \in S$ con $a \neq b$. Existe $x \in X_0$ tal que $a(x) \neq b(x)$. Dado que f es biyectiva, $f(a(x)) \neq f(b(x))$, por lo que $h(a)(x) \neq h(b)(x)$. Esto demuestra que $h(a) \neq h(b)$.
- Supongamos $0^{\mathbf{B}} \in S$. Entonces, para todo $x \in X_0$ tenemos $h(0^{\mathbf{B}})(x) = f(0^{\mathbf{B}}(x)) = f(0^{\mathbf{C}}) = 0^{\text{Ł}_m} = 0^{\mathbf{D}}(x)$. Esto demuestra que $h(0^{\mathbf{B}}) = 0^{\mathbf{D}}$.
- Supongamos $a_1, a_2, a_1 \to^{\mathbf{B}} a_2 \in S$. Entonces, para todo $x \in X_0$ tenemos que

$$\begin{aligned} h(a_1 \to^{\mathbf{B}} a_2)(x) &= f((a_1 \to^{\mathbf{B}} a_2)(x)) \\ &= f(a_1(x) \to^{\mathbf{C}} a_2(x)) \\ &= f(a_1(x)) \to^{\text{Ł}_m} f(a_2(x)) \\ &= h(a_1)(x) \to^{\text{Ł}_m} h(a_2)(x) \\ &= (h(a_1) \to^{\mathbf{D}} h(a_2))(x). \end{aligned}$$

  Esto demuestra que $h(a_1 \to^{\mathbf{B}} a_2) = h(a_1) \to^{\mathbf{D}} h(a_2)$.
- Supongamos $a, \Box^{\mathbf{B}} a \in S$. Por suposición, $(\Box^{\mathbf{B}} a)(x) = a(x_a)$ para todo $x \in X$. En particular, para todo $x \in X_0$ tenemos que $a(x_a) \to^{\mathbf{C}} a(x) = 1^{\mathbf{C}}$, y, dado que $a(x_a), a(x), 1 \in C_0$, se sigue que $f(a(x_a) \to^{\mathbf{C}} a(x)) = f(a(x_a)) \to^{\text{Ł}_m} f(a(x)) = f(1^{\mathbf{C}}) = 1^{\text{Ł}_m}$. Esto demuestra que $f(a(x_a)) \leq^{\text{Ł}_m} f(a(x))$ para todo $x \in X_0$, es decir, $h(a)(x_a) \leq^{\text{Ł}_m} h(a)(x)$ para todo $x \in X_0$. Por lo tanto, para todo $x \in X_0$ tenemos que $(\Box^{\mathbf{D}} h(a))(x) = h(a)(x_a) = f(a(x_a)) = f((\Box^{\mathbf{B}} a)(x)) = h(\Box^{\mathbf{B}} a)(x)$. Esto demuestra que $\Box^{\mathbf{D}} h(a) = h(\Box^{\mathbf{B}} a)$.

□

Corolario 6.4.2. *Las* $\mathbb{MMV}$ *tienen la propiedad de inmersión finita.*

Familias que generan a $\mathbb{MMV}$ como cuasivariedad

Como otra consecuencia del Lema 6.4.2, mostramos varias familias de MV-álgebras monádicas que generan $\mathbb{MMV}$ como una cuasivariedad.

Teorema 6.4.5. $\mathbb{MMV}$ *es generada como una cuasivariedad por* $\{(Ł_m^n, \Diamond_\vee, \Box_\wedge) \mid m, n \geq 1\}$.

Demostración. Sea

$$\varphi := \Box x_1, \ldots, x_n \, (s_1(\bar{x}) = t_1(\bar{x}) \,\&\, \ldots \,\&\, s_n(\bar{x}) = t_n(\bar{x}) \Rightarrow s(\bar{x}) = t(\bar{x}))$$

una cuasi-identidad que no es válida en $\mathbb{MMV}$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que φ está en el lenguaje $\{\rightarrow, 0, \Box\}$, ya que todas las demás operaciones básicas son expresables por términos en este sublenguaje.

Por el Corolario 6.4.1, φ no se cumple en alguna álgebra funcional $\mathbf{B} := (\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ con testigos. Por lo tanto, existen elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $s_i^{\mathbf{B}}(\bar{a}) = t_i^{\mathbf{B}}(\bar{a})$ para $1 \leq i \leq n$, pero $s^{\mathbf{B}}(\bar{a}) \neq t^{\mathbf{B}}(\bar{a})$. Sea $S := \{r^{\mathbf{B}}(\bar{a}) : r(\bar{x})$ subtérmino de un término que aparece en $\varphi\}$. Por el Lema 6.4.2, existen números naturales m, q y una función biyectiva $f \colon S \to L_m^q$ tal que:

- $h(0^{\mathbf{B}}) = 0^{\mathbf{C}}$ si $0^{\mathbf{B}} \in S$,
- $h(a \rightarrow^{\mathbf{B}} b) = h(a) \rightarrow^{\mathbf{C}} h(b)$ si $a, b, a \rightarrow^{\mathbf{B}} b \in S$,
- $h(\Box^{\mathbf{B}} a) = \Box^{\mathbf{C}} h(a)$ si $a, \Box^{\mathbf{B}} a \in S$,

donde $\mathbf{C} := (Ł_m^q, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)$. Una simple inducción demuestra que para cada subtérmino $r(\bar{x})$ de un término en φ, $h(r^{\mathbf{B}}(\bar{a})) = r^{\mathbf{C}}(h(\bar{a}))$, donde $h(\bar{a})$ representa $(h(a_1), \ldots, h(a_n))$. Por lo tanto, para $1 \leq i \leq r$ tenemos que $s_i^{\mathbf{C}}(h(\bar{a})) = h(s_i^{\mathbf{B}}(\bar{a})) = h(t_i^{\mathbf{B}}(\bar{a})) = t_i^{\mathbf{C}}(h(\bar{a}))$; sin embargo, dado que $s^{\mathbf{B}}(\bar{a}) \neq t^{\mathbf{B}}(\bar{a})$ y h es biyectiva, tenemos que $h(s^{\mathbf{B}}(\bar{a})) \neq h(t^{\mathbf{B}}(\bar{a}))$, por lo que $s^{\mathbf{C}}(h(\bar{a})) \neq t^{\mathbf{C}}(h(\bar{a}))$. Esto demuestra que φ no se cumple en $\mathbf{C}$. □

Corolario 6.4.3.

(1) $\mathbb{MMV}$ *se genera como una cuasivariedad por el conjunto* $\{(Ł_m^\omega, \Diamond_\vee, \Box_\wedge) \mid m \geq 1\}$.

(2) $\mathbb{MMV}$ *se genera como una cuasivariedad por el conjunto* $\{([0,1]_Ł^k, \Diamond_\vee, \Box_\wedge) \mid k \geq 1\}$.

(3) $\mathbb{MMV}$ *se genera como una cuasivariedad por el conjunto* $\{([0,1]_Ł^\omega, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)\}$.

Demostración. La demostración es inmediata a partir del hecho de que existe una inmersión de $(Ł_m^k, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)$ en $(Ł_m^\omega, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)$, en $([0,1]_Ł^k, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)$ y en $([0,1]_Ł^\omega, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)$ (ver Ejemplo 6.4.1). □

Como consecuencia del Corolario anterior, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.4.6. *La lógica* $\vdash_{\mathrm{S5}(Ł)}$ *es finitamente fuertemente completa con respecto a la clase* $Func([0,1]_Ł)$.

Traduciendo al lenguaje monádico, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.4.7. *La lógica* $\vdash_{Ł\forall_{mon}}$ *es finitamente fuertemente completa con respecto a la t-norma* $[0,1]_Ł$.

Teorema de deducción

Sea $\mathcal{L}_{\text{mon}}$ un lenguaje monádico y $\mathcal{L}_{\Box}$ su respectivo lenguaje modal.

La siguiente versión del teorema de deducción se puede demostrar fácilmente como verdadera en la lógica S5(Ł): para cualquier conjunto de fórmulas Γ en $\mathcal{L}_{\Box}$ y fórmulas φ y ψ en $\mathcal{L}_{\Box}$, se cumple que

$$\Gamma, \varphi \vdash_{\text{S5(Ł)}} \psi \iff \Gamma \vdash_{\text{S5(Ł)}} (\Box\varphi)^n \to \psi, \text{ para algún } n.$$

El resultado de completitud previamente demostrado nos permite derivar una versión semántica, donde para cualquier conjunto finito Γ en $\mathcal{L}_{\text{mon}}$ y fórmulas φ y ψ en $\mathcal{L}_{\text{mon}}$, se tiene que

$$\Gamma, \varphi \vDash_{[0,1]_{\text{Ł}}} \psi \iff \Gamma \vDash_{[0,1]_{\text{Ł}}} (\Box\varphi)^n \to \psi, \text{ para algún } n. \tag{DT}$$

6.5. Una lógica monádica fuertemente completa respecto a $[0,1]_{\text{Ł}}$

Recordemos de capítulos anteriores que, en un lenguaje de primer orden, la lógica $\vDash_{[0,1]_{\text{Ł}}}$ es infinitaria. Al aplicar un razonamiento similar al que presentamos en la Sección 5.3.1, podemos concluir que la lógica monádica $\vDash_{[0,1]_{\text{Ł}}}$ también posee esta característica. Por consiguiente, la lógica modal $\vDash_{\text{Func}([0,1]_{\text{Ł}})}$ es también infinitaria.

En la sección anterior vimos que la lógica $\vdash_{S5(\text{Ł})}$ es **finitamente** fuertemente completa respecto a la clase $\text{Func}([0,1]_{\text{Ł}})$.

En esta sección, estudiamos una extensión infinitaria de $S5(\text{Ł})$, para la cual probaremos completitud fuerte respecto a $\text{Func}([0,1]_{\text{Ł}})$.

La lógica $\text{S5}(\text{Ł})_\infty$

Nuevamente, imitando la regla infinitaria que aparece en [34], incorporamos una regla infinitaria para tratar de conseguir un teorema de completitud fuerte. Consideramos la siguiente modificación de la regla infinitaria de Kułacka:

$$\Box\text{Inf: } \{\Box\varphi \vee (\Box\alpha \to (\Box\beta)^n) \mid n \in \omega\} \rhd \Box\varphi \vee (\Box\alpha \to \Box\alpha \& \Box\beta).$$

Definimos la lógica $\text{S5}(\text{Ł})_\infty$ como el resultado de añadir $\Box$Inf a S5(Ł).

Si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto de fórmulas de $\text{S5}(\text{Ł})_\infty$, recordemos que la notación

$$\Gamma \vdash_{\text{S5(Ł)}_\infty} \varphi$$

indica que existe una demostración $\{\psi_i : i \leq \xi\}$ indexada por un ordinal sucesor ξ^+ tal que $\psi_\xi = \varphi$ y para cada $i \leq \xi$, la fórmula ψ_i pertenece a Γ, es una instancia de un axioma o es la fórmula inferior de una instancia de una regla de inferencia cuyas fórmulas superiores están contenidas en el conjunto $\{\psi_j : j < i\}$.

Para evitar la notación engorrosa $\vdash_{\text{S5(Ł)}_\infty}$, simplemente escribimos $\vdash$ en el resto de la sección.

Comenzamos probando que esta nueva regla infinitaria es adecuada.

Teorema 6.5.1. *Sea* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *un conjunto de proposiciones en un lenguaje* $\mathcal{L}_\Box$*, entonces*

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ implica } \Gamma \vDash_{Func([0,1]_{\text{Ł}})} \varphi.$$

Demostración. Es suficiente demostrar que

$$\{\Box\varphi \vee (\Box\alpha \to (\Box\beta)^n) : n \in \omega\} \vDash_{\text{Func}([0,1]_{\text{Ł}})} \Box\varphi \vee (\Box\alpha \to \Box\alpha\&\Box\beta)$$

para cualquier proposición α, β, φ en $\mathcal{L}_\Box$.

Sea $\mathbf{A} := [0,1]_{\text{Ł}}^X$ un álgebra $[0,1]_{\text{Ł}}$-funcional. Sea $\mathbf{M}$ un $\mathbf{A}$-modelo de $\Box\varphi \vee (\Box\alpha \to (\Box\beta)^n$ para todo $n \in \omega$, es decir, $\|\Box\varphi \vee (\Box\alpha \to (\Box\beta)^n)\|^{\mathbf{M}}(x) = 1$ para todo $x \in X$ y $n \in \omega$.

Fijemos $x \in X$. Si $\|\Box\varphi\|^{\mathbf{M}}(x) = 1$, entonces $\|\Box\varphi \vee (\Box\alpha \to \Box\alpha\&\Box\beta)\|^{\mathbf{M}}(x) = 1$. Por lo tanto, podemos suponer que $\|\Box\varphi\|^{\mathbf{M}}(x) \neq 1$. Entonces, $\|\Box\alpha \to (\Box\beta)^n\|^{\mathbf{M}}(x) = 1$ para todo $n \in \omega$, así que $\|\Box\alpha\|^{\mathbf{M}}(x) \leq (\|\Box\beta\|^{\mathbf{M}})^n(x)$ para todo $n \in \omega$. Dado que $[0,1]_{\text{Ł}}$ es simple, concluimos que $\|\Box\beta\|^{\mathbf{M}}(x) = 1$ o $\|\Box\alpha\|^{\mathbf{M}}(x) = 0$. En cualquier caso, $\|\Box\varphi \vee (\Box\alpha \to \Box\alpha\&\Box\beta)\|^{\mathbf{M}}(x) = 1$. □

Observación 6.5.1. Sea α cualquier proposición y $\nu = t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ donde t es un término proposicional y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son proposiciones que comienzan con $\Box$ o $\Diamond$. En las pruebas siguientes utilizamos los siguientes hechos:

(1) $\vdash \Box(\alpha \vee \nu) \to (\Box\alpha \vee \nu)$,

(2) $\vdash \Box(\nu \vee \alpha) \to (\nu \vee \Box\alpha)$,

(3) $\vdash \nu \leftrightarrow \Box\nu$.

Demostración. (1) es un axioma de S5(Ł), mientras que (2) y (3) son evidentes. □

Damos ahora unos lemas que nos describen como se comporta la disyunción en esta lógica. En particular, nos interesa que se cumpla la propiedad de demostración por casos.

Lema 6.5.1. *Sea* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \psi\}$ *un conjunto de proposiciones. Entonces,*

$$\Gamma, \Box\beta \vdash \psi \text{ implica } \Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \Box\alpha \vee \psi.$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre la longitud de la prueba de ψ a partir de $\Gamma, \Box\beta$.

Supongamos primero que existe una prueba de ψ a partir de $\Gamma, \Box\beta$ de longitud 1. Si ψ es un axioma o $\psi \in \Gamma$, entonces $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \Box\alpha \vee \psi$ ya que $\psi \vdash \Box\alpha \vee \psi$. Si $\psi = \Box\beta$, entonces $\Box\alpha \vee \psi = \Box\alpha \vee \Box\beta$ y la conclusión es trivial.

Supongamos ahora que existe una prueba de ψ a partir de $\Gamma, \Box\beta$ de longitud ξ y que la conclusión se cumple para proposiciones ψ' cuyas pruebas a partir de $\Gamma, \Box\beta$ son más cortas que ξ. Podemos suponer que ψ se deriva por Modus Ponens, Necesitación o $\Box$Inf.

En el primer caso, existe una proposición θ tal que $\Gamma, \Box\beta \vdash \theta$ y $\Gamma, \Box\beta \vdash \theta \to \psi$ con pruebas más cortas que ξ. Por la hipótesis inductiva, $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \Box\alpha \vee \theta$ y $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \Box\alpha \vee (\theta \to \psi)$. Dado que $\vdash (\chi \vee \theta) \to ((\chi \vee (\theta \to \psi)) \to (\chi \vee \psi))$ (esto se cumple en la lógica BL), obtenemos que $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \Box\alpha \vee \psi$.

Si ψ se deriva de aplicar Necesitación, entonces $\psi = \Box\chi$ y $\Gamma, \Box\beta \vdash \chi$ en menos de ξ pasos. Por la hipótesis inductiva, $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \Box\alpha \vee \chi$. Usando Necesitación, la Observación 6.5.1 (2) y Modus Ponens, obtenemos que $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \Box\alpha \vee \Box\chi$, como se quería demostrar.

Finalmente, si ψ se deriva de aplicar $\Box$Inf, entonces $\psi = \Box\chi \vee (\Box\rho \to \Box\rho\&\Box\sigma)$ y $\Gamma, \Box\beta \vdash \Box\chi \vee (\Box\rho \to (\Box\sigma)^n)$ en menos de ξ pasos para cada $n \in \omega$. Por la hipótesis inductiva, $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \Box\alpha \vee \Box\chi \vee (\Box\rho \to (\Box\sigma)^n)$ para cada $n \in \omega$. Usando la Observación 6.5.1. (3), obtenemos que $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \Box(\Box\alpha \vee \Box\chi) \vee (\Box\rho \to (\Box\sigma)^n)$ para cada $n \in \omega$. Usando ahora $\Box$Inf, obtenemos que $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \Box(\Box\alpha \vee \Box\chi) \vee (\Box\rho \to \Box\rho\&\Box\sigma)$. Dado que $\vdash (\Box\gamma \vee \delta) \to (\gamma \vee \delta)$, finalmente obtenemos $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \Box\alpha \vee \Box\chi \vee (\Box\rho \to \Box\rho\&\Box\sigma)$, es decir, $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \Box\alpha \vee \psi$. □

Lema 6.5.2. *Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \varphi, \psi\}$ un conjunto de proposiciones. Entonces,*

$$\Gamma, \Box\alpha \vdash \varphi \text{ y } \Gamma, \Box\beta \vdash \psi \text{ implican } \Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \varphi \vee \psi.$$

Demostración. Procedemos por inducción transfinita sobre la longitud de una prueba de φ a partir de $\Gamma, \Box\alpha$.

Supongamos primero que existe una prueba de longitud 1. Luego φ es un axioma o pertenece a Γ, entonces claramente $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \varphi \vee \psi$ ya que $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$. Si $\varphi = \Box\alpha$, la conclusión se sigue del lema anterior.

Supongamos ahora que existe una prueba de φ a partir de $\Gamma, \Box\alpha$ de longitud ξ y que el teorema se cumple (para todas β y ψ) si esta longitud es menor que ξ. Podemos suponer que φ se deriva por Modus Ponens, Necesitación o $\Box$Inf. El primer caso se sigue como antes y se deja al lector.

En caso de que φ se derive de Necesitación, tenemos que $\varphi = \Box\chi$ y $\Gamma, \Box\alpha \vdash \chi$. Dado que $\Gamma, \Box\beta \vdash \psi$, también tenemos que $\Gamma, \Box\beta \vdash \Box\psi$. Usando la hipótesis inductiva sobre $\Gamma, \Box\alpha \vdash \varphi$ y $\Gamma, \Box\beta \vdash \Box\psi$, obtenemos que $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \chi \vee \Box\psi$. Por Necesitación, $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \Box(\chi \vee \Box\psi)$ y, usando el axioma $\Box(\chi \vee \Box\psi) \to (\Box\chi \vee \Box\psi)$ y Modus Ponens, obtenemos que $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \Box\chi \vee \Box\psi$. Finalmente, del hecho de que $\vdash (\gamma \vee \Box\delta) \to (\gamma \vee \delta)$, concluimos que $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \Box\chi \vee \psi$.

En caso de que φ se derive de $\Box$Inf, tenemos que $\varphi = \Box\chi \vee (\Box\rho \to \Box\rho\&\Box\sigma)$ y que $\Gamma, \Box\alpha \vdash \Box\chi \vee (\Box\rho \to (\Box\sigma)^n)$ en menos de ξ pasos para cada $n \in \omega$. Al igual que en el segundo caso, tenemos que $\Gamma, \Box\beta \vdash \Box\psi$, por lo que la hipótesis inductiva implica que $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash (\Box\chi \vee (\Box\rho \to (\Box\sigma)^n)) \vee \Box\psi$. Conmutando la última disyunción y procediendo como en el párrafo anterior, obtenemos que $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \Box\psi \vee \Box\chi \vee (\Box\rho \to \Box\rho\&\Box\sigma)$. Usando nuevamente la conmutatividad y el hecho de que $\vdash (\gamma \vee \Box\delta) \to (\gamma \vee \delta)$, concluimos que $\Gamma, \Box\alpha \vee \Box\beta \vdash \Box\chi \vee (\Box\rho \to \Box\rho\&\Box\sigma) \vee \psi$, como se quería demostrar. □

Corolario 6.5.1. *Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \varphi\}$ un conjunto de proposiciones. Entonces,*

$$\Gamma, \Box\alpha \to \Box\beta \vdash \varphi \text{ y } \Gamma, \Box\beta \to \Box\alpha \vdash \varphi \text{ implican } \Gamma \vdash \varphi.$$

Demostración. Aplicamos el lema notando que $\vdash \Box(\Box\alpha \to \Box\beta) \leftrightarrow (\Box\alpha \to \Box\beta)$ para obtener que $\Gamma, (\Box\alpha \to \Box\beta) \vee (\Box\beta \to \Box\alpha) \vdash \varphi \vee \varphi$. Luego, usamos Lógica Básica para obtener el resultado final. □

Corolario 6.5.2. *Sea* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \varphi\}$ *un conjunto de proposiciones. Entonces,*

$$\Gamma \vdash \varphi \vee \Box\psi \text{ y } \Gamma, \Box\psi \vdash \varphi \text{ implican } \Gamma \vdash \varphi.$$

Demostración. Dado que $\Gamma, \Box\varphi \vdash \varphi$ y $\Gamma, \Box\psi \vdash \varphi$, por el Lema 6.5.2 y el hecho de que $\vdash (\varphi \vee \varphi) \to \varphi$, tenemos que $\Gamma, \Box\varphi \vee \Box\psi \vdash \varphi$. Por hipótesis, $\Gamma \vdash \varphi \vee \Box\psi$, así que, usando Necesitación, la Observación 6.5.1.(1) y Modus Ponens, obtenemos que $\Gamma \vdash \Box\varphi \vee \Box\psi$. Por lo tanto, $\Gamma \vdash \varphi$. □

Un conjunto de proposiciones Γ se dice que es una *teoría cerrada de* $\mathrm{S5}(Ł)_\infty$ si para cada proposición φ tal que $\Gamma \vdash \varphi$, se cumple que $\varphi \in \Gamma$. Decimos que una teoría cerrada Γ es $\Box$-*prelineal* si para cada par de proposiciones α, β se cumple que $\Box\alpha \to \Box\beta \in \Gamma$ o $\Box\beta \to \Box\alpha \in \Gamma$. El siguiente teorema es una adaptación de [34, Teorema 14] al caso monádico.

Teorema 6.5.2. *Sea* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *un conjunto de proposiciones tal que* $\Gamma \nvdash \varphi$. *Entonces, existe una teoría cerrada* Γ^* $\Box$-*prelineal que contiene a* Γ *tal que* $\Gamma^* \nvdash \varphi$.

Demostración. Definimos una secuencia de conjuntos $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots$ y una secuencia de proposiciones $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ tal que $\Gamma_n \nvdash \varphi_n$ para cada $n \geq 0$. Sea $\Gamma_0 := \Gamma$ y $\varphi_0 := \varphi$. Sea $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ una enumeración de todas las proposiciones. Supongamos que Γ_n y φ_n ya han sido definidas de modo que $\Gamma_n \nvdash \varphi_n$. Definimos Γ_{n+1} y φ_{n+1} de acuerdo con las siguientes reglas:

- Si $\Gamma_n, \alpha_n \nvdash \varphi_n$, entonces

  $$\Gamma_{n+1} := \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} \quad \text{y} \quad \varphi_{n+1} := \varphi_n.$$

  Por lo tanto, $\Gamma_{n+1} \nvdash \varphi_{n+1}$ en este caso.

- Si $\Gamma_n, \alpha_n \vdash \varphi_n$, entonces

  $$\Gamma_{n+1} := \Gamma_n$$

  y

  - si α_n no es de la forma $\Box\psi \vee (\Box\alpha \to \Box\alpha \& \Box\beta)$, entonces

    $$\varphi_{n+1} := \varphi_n.$$

    Por lo tanto, $\Gamma_{n+1} \nvdash \varphi_{n+1}$ en este caso.

  - si α_n es de la forma $\Box\psi \vee (\Box\alpha \to \Box\alpha \& \Box\beta)$, entonces

    $$\varphi_{n+1} := \varphi_n \vee \Box\psi \vee (\Box\alpha \to (\Box\beta)^k)$$

    donde k es el menor número natural tal que $\Gamma_n \nvdash \varphi_n \vee \Box\psi \vee (\Box\alpha \to (\Box\beta)^k)$ (*).

(*) Tal k existe porque, si

$$\Gamma_n \vdash \varphi_n \vee \Box\psi \vee (\Box\alpha \to (\Box\beta)^m) \text{ para cada } m \in \omega,$$

entonces, usando Necesitación, la Observación 6.5.1.(1) y Modus Ponens, obtenemos que

$$\Gamma_n \vdash \Box(\varphi_n \vee \Box\psi) \vee (\Box\alpha \to (\Box\beta)^m) \text{ para cada } m \in \omega;$$

así, por $\Box$Inf, tenemos que

$$\Gamma_n \vdash \Box(\varphi_n \vee \Box\psi) \vee (\Box\alpha \to \Box\alpha \& \Box\beta).$$

Dado que $\vdash (\Box\gamma \vee \delta) \to (\gamma \vee \delta)$, concluimos que

$$\Gamma_n \vdash \varphi_n \vee \Box\psi \vee (\Box\alpha \to \Box\alpha \& \Box\beta),$$

es decir, $\Gamma_n \vdash \varphi_n \vee \alpha_n$. Notemos que α_n es una combinación proposicional de proposiciones BL que comienzan con $\Box$; por lo tanto, por la Observación 6.5.1.(3), tenemos que $\vdash \alpha_n \leftrightarrow \Box\alpha_n$. Usando propiedades de Lógica Básica, podemos derivar que $\Gamma_n \vdash \varphi_n \vee \Box\alpha_n$. Además, dado que $\Gamma_n, \alpha_n \vdash \varphi_n$, también tenemos que $\Gamma_n, \Box\alpha_n \vdash \varphi_n$. Usando el Corolario 6.5.2, obtenemos $\Gamma_n \vdash \varphi_n$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\Gamma_{n+1} \nvdash \varphi_{n+1}$.

Observemos que, por construcción, para $n \leq m$ tenemos que $\Gamma_n \subseteq \Gamma_m$ y $\vdash \varphi_n \to \varphi_m$. Claramente, $\Gamma_n \nvdash \varphi_n$ para cada $n \geq 0$. Además, para cada $n, m \geq 0$ tenemos que $\Gamma_n \nvdash \varphi_m$. De hecho, supongamos que $\Gamma_n \vdash \varphi_m$. Si $n \leq m$, entonces $\Gamma_n \subseteq \Gamma_m$ y $\Gamma_m \vdash \varphi_m$, lo cual es una contradicción. Si $m \leq n$, entonces $\vdash \varphi_m \to \varphi_n$ y $\Gamma_n \vdash \varphi_n$, nuevamente una contradicción.

Definimos $\Gamma^* := \bigcup \Gamma_n$. Demostraremos que Γ^* es una teoría cerrada de S5(Ł)$_\infty$. Es suficiente mostrar que Γ^* contiene todas las instancias de axiomas y es cerrada bajo las reglas de inferencia. Sea α una instancia de un axioma de S5(Ł)$_\infty$. Entonces, existe $n \geq 0$ tal que $\alpha_n = \alpha$. Siendo α_n una instancia de un axioma, si $\Gamma_n, \alpha_n \vdash \varphi_n$, entonces $\Gamma_n \vdash \varphi_n$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\Gamma_n, \alpha_n \nvdash \varphi_n$, de donde, por construcción, $\alpha_n \in \Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma^*$. Supongamos ahora que $\alpha, \alpha \to \beta \in \Gamma^*$. Sea n tal que $\beta = \alpha_n$. Si $\Gamma_n, \alpha_n \nvdash \varphi_n$, entonces $\beta = \alpha_n \in \Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma^*$ y hemos terminado. De lo contrario, $\Gamma_n, \beta \vdash \varphi_n$. Sea m suficientemente grande tal que $n \leq m$ y $\alpha, \alpha \to \beta \in \Gamma_m$. Entonces, $\Gamma_m \vdash \beta$ y $\Gamma_m, \beta \vdash \varphi_n$, por lo que $\Gamma_m \vdash \varphi_n$, lo cual es una contradicción. Esto demuestra que Γ^* es cerrada bajo Modus Ponens. Ahora mostramos que Γ^* es cerrada bajo Necesitación. Supongamos que $\alpha \in \Gamma^*$ y sea n tal que $\alpha_n = \Box\alpha$. Si $\Gamma_n, \alpha_n \nvdash \varphi_n$, entonces $\Box\alpha = \alpha_n \in \Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma^*$ y hemos terminado. De lo contrario, $\Gamma_n, \Box\alpha \vdash \varphi_n$. Sea m suficientemente grande tal que $m \geq n$ y $\alpha \in \Gamma_m$. Entonces, $\Gamma_m \vdash \alpha$ y $\Gamma_m, \Box\alpha \vdash \varphi_n$. De $\Gamma_m \vdash \alpha$ y Necesitación, obtenemos que $\Gamma_m \vdash \Box\alpha$, por lo que $\Gamma_m \vdash \varphi_n$, lo cual es una contradicción. Finalmente, probemos que Γ^* es cerrada bajo $\Box$Inf. Supongamos que $\Box\psi \vee (\Box\alpha \to (\Box\beta)^m)) \in \Gamma^*$ para cada $m \in \omega$. Sea n tal que $\alpha_n = \Box\psi \vee (\Box\alpha \to \Box\alpha \& \Box\beta)$. Si $\Gamma_n, \alpha_n \nvdash \varphi_n$, entonces $\alpha_n \in \Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma^*$ y hemos terminado. De lo contrario, $\Gamma_n, \alpha_n \vdash \varphi_n$. Por construcción, existe $k \in \omega$ tal que $\varphi_{n+1} = \varphi_n \vee \Box\psi \vee (\Box\alpha \to (\Box\beta)^k)$. Dado que $\Box\psi \vee (\Box\alpha \to (\Box\beta)^k) \in \Gamma^*$, existe un m suficientemente grande tal que $m \geq n$ y $\Box\psi \vee (\Box\alpha \to (\Box\beta)^k) \in \Gamma_m$. Por lo tanto, dado que $\vdash \delta \to (\gamma \vee \delta)$, tenemos que $\Gamma_m \vdash \varphi_{n+1}$, lo cual es una contradicción.

Resta demostrar que Γ^* es $\Box$-prelineal. Sean α, β proposiciones y sean n, m tales que $\alpha_n = \Box\alpha \to \Box\beta$ y $\alpha_m = \Box\beta \to \Box\alpha$. Si $\Gamma_n, \alpha_n \nvdash \varphi_n$, entonces $\alpha_n \in \Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma^*$ y hemos

terminado. De manera análoga, en caso de que $\Gamma_m, \alpha_m \nvdash \varphi_m$, tenemos que $\alpha_m \in \Gamma^*$. Por lo tanto, podemos suponer que $\Gamma_n, \alpha_n \vdash \varphi_n$ y $\Gamma_m, \alpha_m \vdash \varphi_m$. Sea $k := \text{máx}\{m, n\}$, tenemos que $\Gamma_k, \alpha_n \vdash \varphi_k$ y $\Gamma_k, \alpha_m \vdash \varphi_k$. Por el Corolario 6.5.1, $\Gamma_k \vdash \varphi_k$, lo cual es una contradicción. □

Observemos que la lógica $\text{S5}(Ł)_\infty$ es implicativa, ya que es una extensión de S5(Ł), que es implicativa. Dado un conjunto $\Gamma \subseteq Prop$, definimos la relación $\equiv_\Gamma$ en $Prop$ dada por $\varphi \equiv_\Gamma \psi$ si y solo si $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ y $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$. Entonces, $\equiv_\Gamma$ es una relación de equivalencia en $Prop$. Escribimos $[\varphi]_\Gamma$ para la clase de equivalencia de φ módulo $\equiv_\Gamma$. Podemos definir un álgebra $\mathbf{L}_\Gamma := (Prop/\equiv_\Gamma, \wedge, \vee, \cdot, \to, 0, 1, \Diamond, \Box)$ donde

- $0 := [0]_\Gamma$, $1 := [1]_\Gamma$,
- $[\varphi]_\Gamma \star [\psi]_\Gamma := [\varphi \star \psi]_\Gamma$ para $\star \in \{\wedge, \vee, \cdot, \to\}$,
- $\Box[\varphi]_\Gamma := [\Box\varphi]_\Gamma$, $\Diamond[\varphi]_\Gamma := [\Diamond\varphi]_\Gamma$.

Entonces, como la lógica $\text{S5}(Ł)_\infty$ es implicativa, $\mathbf{L}_\Gamma$ es una MV-álgebra monádica.

Lema 6.5.3. *Sea* $\mathbf{A}$ *una MV-cadena con la siguiente propiedad: para* $a, b \in A$*, si* $a \leq b^n$ *para cada* $n \geq 1$*, entonces* $a = a \cdot b$*. Entonces,* $\mathbf{A}$ *es simple.*

Demostración. Fijemos $b \in A$ con $b \neq 1$. Si a es una cota inferior del conjunto $\{b^n : n \in \omega\}$, entonces, por hipótesis, $a = a \cdot b$. Por lo tanto, $\neg a = \neg a \oplus \neg b = b \to \neg a$. Así, $b \vee \neg a = (b \to \neg a) \to \neg a = \neg a \to \neg a = 1$. Dado que $\mathbf{A}$ es una cadena y $b \neq 1$, concluimos que $\neg a = 1$, es decir, $a = 0$. Esto prueba que $\text{ínf}\{b^n : n \in \omega\} = 0$. Ahora, dado que $b \neq 1$, tenemos que $\neg b \neq 0$, por lo que debe existir $n \in \omega$ tal que $b^n \leq \neg b$, así que $b^{n+1} \leq b \cdot \neg b = 0$. □

Lema 6.5.4. *Si* Γ *es* $\Box$*-prelinear, entonces* $\mathbf{L}_\Gamma$ *es una MV-álgebra monádica simple.*

Demostración. Claramente, la $\Box$-prelinealidad implica que $\Diamond\mathbf{L}_\Gamma$ es totalmente ordenada. Sin embargo, la regla $\Box$Inf implica una condición más fuerte sobre $\mathbf{L}_\Gamma$. Notemos que al tomar $\varphi = \bar{0}$ en $\Box$Inf, tenemos que $\Gamma \vdash \Box\alpha \to \Box\alpha \& \Box\beta$ siempre que $\Gamma \vdash \Box\alpha \to (\Box\beta)^n$ para cada $n \in \omega$. Esto se traduce en la siguiente propiedad de $\mathbf{L}_\Gamma$: para $a, b \in L_\Gamma$, si $\Box a \leq (\Box b)^n$ para cada $n \in \omega$, entonces $\Box a = \Box a \cdot \Box b$. El Lema 6.5.3 implica que $\Diamond\mathbf{L}_\Gamma$ es un álgebra MV simple y, por lo tanto, $\mathbf{L}_\Gamma$ es un álgebra MV monádica simple. □

Las MV-álgebras monádicas simples admiten una representación funcional agradable que se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 6.5.3. *Sea* $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ *una MV-álgebra monádica simple. Entonces, existe un conjunto* I *y una inmersión de* $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ *en* $([0,1]^I_Ł, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)$*. Además, el conjunto* I *puede tomarse como el conjunto de filtros maximales de* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. Sea I el conjunto de filtros maximales de $\mathbf{A}$. Recordemos que el filtro $R = \bigcap\{M : M \in I\}$ se conoce como el *radical* de $\mathbf{A}$. Es conocido que $R = \{a \in A : 2a^n = 1 \text{ para cada } n \in \omega\}$ (ver Lema 1.8 en [14]). Supongamos que existe $a \in R$

con $a \neq 1$. Entonces, $2a^n = 1$ para cada $n \in \omega$. Usando el Lema 6.4.1, tenemos que $1 = \Box 1 = \Box(2a^n) = 2(\Box a)^n$ para cada $n \in \omega$. Por lo tanto, $\Box a \in R$. Dado que $\Box a \leq a < 1$ y $\Diamond \mathbf{A}$ es una MV-álgebra simple, debe existir $m \in \omega$ tal que $(\Box a)^m = 0$. Por lo tanto, $1 = 2(\Box a)^m = 0$, lo cual es una contradicción. Esto demuestra que $R = \{1\}$.

Para cada $M \in I$, sea $g_M \colon \mathbf{A}/M \to [0,1]_{\text{Ł}}$ la inmersión única de la MV-álgebra simple $\mathbf{A}/M$ en $[0,1]_{\text{Ł}}$ (ver [15, Teorema 3.5.1 y Corolario 7.2.6]). Además, dado que $M \cap \Diamond A$ es un filtro propio de la MV-álgebra simple $\Diamond \mathbf{A}$, tenemos que $M \cap \Diamond A = \{1\}$. Definiendo q_M como la restricción a $\Diamond A$ de la inmersión canónica, tenemos que $g_M \circ q_M \colon \Diamond \mathbf{A} \to [0,1]_{\text{Ł}}$ es una inmersión. Dado que existe una única inmersión de $\Diamond \mathbf{A}$ en $[0,1]_{\text{Ł}}$, debemos tener que $(g_M \circ q_M)(\Diamond a) = (g_{M'} \circ q_{M'})(\Diamond a)$, es decir, $g_M((\Diamond a)/M) = g_{M'}((\Diamond a)/M')$ para cada $a \in A$ y $M, M' \in I$.

Definimos $f \colon \mathbf{A} \to [0,1]_{\text{Ł}}^I$ por $f(a)(M) = g_M(a/M)$ para cada $M \in I$. Como $R = \{1\}$, la función f es una inmersión. Para demostrar que $f \colon (\mathbf{A}, \Diamond, \Box) \to ([0,1]_{\text{Ł}}^I, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)$ es una inmersión, resta mostrar que $f(\Diamond a)(M) = \sup\{f(a)(M') : M' \in I\}$ y $f(\Box a)(M) = \text{ínf}\{f(a)(M') : M' \in I\}$ para cada $a \in A$ y $M \in I$. Por el Lema 6.4.1, sabemos que $\Box x = \neg\Diamond\neg x$ en toda MV-álgebra monádica, por lo que es suficiente mostrar la primera de las igualdades anteriores. Fijemos $a \in A$. Notemos que $(\Diamond a \to a)^n \neq 0$ para cada $n \in \omega$. De hecho, si $(\Diamond a \to a)^n = 0$, entonces, usando el Lema 6.4.1, obtenemos que $0 = \Diamond 0 = \Diamond(\Diamond a \to a)^n = (\Diamond(\Diamond a \to a))^n = 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, debe existir $M^* \in I$ tal que $\Diamond a \to a \in M^*$. Dado que $a \leq \Diamond a$, tenemos que $a \to \Diamond a = 1 \in M^*$ también; así que $a/M^* = (\Diamond a)/M^*$. Por lo tanto, $f(a)(M^*) = g_{M^*}(a/M^*) = g_{M^*}((\Diamond a)/M^*) = f(\Diamond a)(M^*)$. Además, para cada $M' \in I$ tenemos que $a/M' \leq (\Diamond a)/M'$, por lo que $f(a)(M') = g_{M'}(a/M') \leq g_{M'}((\Diamond a)/M') = g_{M^*}((\Diamond a)/M^*) = f(\Diamond a)(M^*)$. Esto demuestra que $\sup\{f(a)(M') : M' \in I\} = f(\Diamond a)(M^*) = f(\Diamond a)(M)$ para cada $M \in I$.

□

Finalmente, estamos preparados para demostrar el teorema de completitud fuerte que hemos estado buscando.

Teorema 6.5.4. *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de proposiciones en un lenguaje modal $\mathcal{L}_\Box$, entonces*

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ si y solo si } \Gamma \vDash_{Func([0,1]_{\text{Ł}})} \varphi.$$

Demostración. La implicación respectiva a probar adecuamiento ya se demostró en el Teorema 6.5.1.

Supongamos que $\Gamma \nvdash \varphi$. Por el Teorema 6.5.2, existe una teoría cerrada Γ^* $\Box$-prelineal que contiene a Γ tal que $\Gamma^* \nvdash \varphi$, y, por el Lema 6.5.4, $\mathbf{L}_{\Gamma^*}$ es una MV-álgebra monádica simple. Usando ahora el Teorema 6.5.3, sea $h \colon \mathbf{L}_{\Gamma^*} \to ([0,1]_{\text{Ł}}^I, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)$ una inmersión para algún conjunto no vacío I. Sea la $([0,1]_{\text{Ł}}^I, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)$-estructura f, de manera que $f(p) := h([p]_{\Gamma^*})$ para toda letra proposicional p. Luego se sigue que $\|\psi\|^f = h([\psi]_{\Gamma^*})$ para toda $\psi \in Prop$. Por lo tanto, f es un modelo seguro de Γ^*, y también de Γ. Sin embargo, dado que $\Gamma^* \nvdash \varphi$, tenemos que $[\varphi]_{\Gamma^*} \neq 1$, así que $\|\varphi\|^f = h([\varphi]_{\Gamma^*}) \neq 1$. Esto demuestra que $\Gamma \nvDash_{\text{Func}([0,1]_{\text{Ł}})} \varphi$. □

Axiomatización alternativa de $\mathrm{S5}(\mathbf{Ł})_\infty$

Consideremos la regla (introducida por Kułacka en [34]):

Inf: $\{\varphi \vee (\alpha \to \beta^n) \mid n \in \omega\} \rhd \varphi \vee (\alpha \to \alpha\&\beta)$

Definimos $\mathrm{S5}(Ł)'_\infty$ como la extensión de S5(Ł) que incluye la regla Inf.

Teorema 6.5.5. *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop$. Entonces, se cumple que*

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{S5}(Ł)_\infty} \varphi \text{ si y solo si } \Gamma \vdash_{\mathrm{S5}(Ł)'_\infty} \varphi.$$

Demostración. Dado que cada instancia de $\Box$Inf es también una instancia de Inf, la implicación directa resulta trivial. Para la implicación recíproca, supongamos que $\Gamma \vdash_{\mathrm{S5}(Ł)'_\infty} \varphi$. De manera análoga a lo que se demuestra en el Teorema 6.5.1, concluimos que $\Gamma \vDash_{\mathrm{Func}([0,1]_Ł)} \varphi$. Finalmente, aplicando el Teorema 6.5.4, obtenemos que $\Gamma \vdash_{\mathrm{S5}(Ł)_\infty} \varphi$. $\Box$

6.6. $[0,1]_{\mathbf{Ł}}$-estructuras de universo acotado

Sea $\mathcal{L}_{\mathrm{mon}}$ un lenguaje monádico. Podemos definir una lógica interesante de $[0,1]_Ł$ al restringir los universos de los modelos. Más precisamente, dado un número natural k, decimos que una $[0,1]_Ł$-estructura $\mathbf{M} = (M, f)$ en $\mathcal{L}_{\mathrm{mon}}$ es una $[0,1]_Ł$-estructura con *universo acotado por k* si se cumple que $|M| \leq k$. De manera similar, definimos un $[0,1]_Ł$-*modelo con universo acotado por k*.

Con estas nuevas estructuras, podemos introducir una nueva lógica en el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathrm{mon}}$.

Definición 6.6.1. Denotamos con $\vDash^k_{[0,1]_Ł}$ a la lógica en $\mathcal{L}_{\mathrm{mon}}$ que cumple: $\Gamma \vDash^k_{[0,1]_Ł} \phi$ sii todo $[0,1]_Ł$-modelo con universo acotado por k de Γ es también un $[0,1]_Ł$-modelo de ϕ, donde Γ es un conjunto de proposiciones en $\mathcal{L}_{\mathrm{mon}}$ y ϕ es una proposición en $\mathcal{L}_{\mathrm{mon}}$.

Las nociones de k-completitud fuerte y k-completitud finitamente fuerte se definen de la manera esperable.

Denotemos con $\mathrm{Func}^k([0,1]_Ł)$ al conjunto formado por todas las subálgebras de álgebras $[0,1]_Ł$-funcionales $([0,1]^X, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)$ donde $|X| \leq k$. Observemos que, la lógica $\vDash^k_{[0,1]_Ł}$ en $\mathcal{L}_{\mathrm{mon}}$ es equivalente a la lógica $\vDash_{\mathrm{Func}^k([0,1]_Ł)}$ en $\mathcal{L}_\Box$.

En esta sección, demostramos que basta con añadir un axioma a S5(Ł) para obtener una lógica que sea finitamente fuertemente completa respecto a $\mathrm{Func}^k([0,1]_Ł)$. Además, mostramos la relación entre esta lógica y las MV-álgebras monádicas de ancho $\leq k$, ya estudiadas en [16].

Definimos $\mathrm{S5}_k(Ł)$ como la extensión axiomática de S5(Ł) mediante el axioma esquema

$$\bigwedge_{1 \leq i < j \leq k+1} \Box(\varphi_i \vee \varphi_j) \to \bigvee_{i=1}^{k+1} \Box\varphi_i. \tag{W_k}$$

Como S5(Ł) es una lógica implicativa, se deduce que $\mathrm{S5}_k(Ł)$ es fuertemente completa respecto a $\mathbb{MMV}_k$, donde $\mathbb{MMV}_k$ es la subvariedad de $\mathbb{MMV}$ determinada por la ecuación:

$$\bigwedge_{1\leq i<j\leq k+1} \Box(x_i \vee x_j) \to \bigvee_{i=1}^{k+1} \Box x_i \approx 1. \tag{W_k}$$

Una MV-álgebra monádica que satisface la identidad W_k se dice que tiene *ancho* menor o igual a k. El siguiente teorema explica esta terminología. Un *conjunto ortogonal* en una MV-álgebra (monádica) $\mathbf{A}$ es un subconjunto $S \subseteq A \setminus \{1\}$ tal que $x \vee y = 1$ para cada $x, y \in S$, con $x \neq y$.

Teorema 6.6.1. *Sea $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ una MV-álgebra monádica FSI. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *$(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ satisface la identidad (W_k);*

(2) *cualquier conjunto ortogonal en $\mathbf{A}$ tiene como máximo k elementos;*

(3) *Existen filtros primos $P_1, \ldots, P_r$ en $\mathbf{A}$, con $r \leq k$, tales que $\bigcap_{i=1}^{r} P_i = \{1\}$ y $P_i \cap \Diamond A = \{1\}$ para $1 \leq i \leq r$.*

Demostración. La demostración es idéntica a la de [7, Teorema 2.1]. □

Como consecuencia del último teorema, es evidente que $\mathbb{MMV}_k \subseteq \mathbb{MMV}_{k+1}$ para todo k. Si una MV-álgebra monádica satisface W_k pero no satisface W_{k-1}, decimos que tiene *ancho k*. Observa que, según el último teorema, una MV-álgebra monádica FSI de ancho k debe tener k filtros primos $P_1, \ldots, P_k$ que satisfacen las condiciones del ítem (3).

Para obtener el teorema de representación necesario para las álgebras FSI en $\mathbb{MMV}_k$, que da lugar al teorema de completitud deseado, primero necesitamos el siguiente teorema de representación.

Lema 6.6.1. *Sea $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ una MV-álgebra monádica FSI y sea $\{P_i : i \in I\}$ una familia de filtros primos de $\mathbf{A}$ tal que $P_i \cap \Diamond A = \{1\}$ para cada $i \in I$ y $\bigcap_{i\in I} P_i = \{1\}$. Entonces, existe una familia de filtros primos $\{Q_i : i \in I\}$ de $\mathbf{A}$ tal que:*

(1) *$P_i \subseteq Q_i$ para cada $i \in I$,*

(2) *$Q_i \cap \Diamond A = \{1\}$ para cada $i \in I$,*

(3) *$\bigcap_{i\in I} Q_i = \{1\}$,*

(4) *Para cada $i \in I$ y $a \in A \setminus Q_i$, existen un entero positivo n y un elemento $c \in \Diamond A \setminus \{1\}$ tal que $a^n \to c \in Q_i$.*

Demostración. Primero probamos una propiedad de la familia $\{P_i : i \in I\}$: para cada $a \in A$, existe $i \in I$ tal que $a^2 \to \Box a \in P_i$. Supongamos que $a^2 \to \Box a \notin P_i$ para cada $i \in I$. Entonces, $\Box a \to a^2 \in P_i$ para cada $i \in I$, por lo que $\Box a \leq a^2$. Así, $\Box a \leq \Box(a^2) = (\Box a)^2 \leq \Box a$, lo que muestra que $(\Box a)^2 = \Box a$. Dado que $\Diamond\mathbf{A}$ es una MV-cadena, se deduce que $\Box a = 0$ o $\Box a = 1$. Por hipótesis, $\Box a \neq 1$, así que $\Box a = 0$ y $2(\neg a) = \neg a^2 = a^2 \to 0 \notin P_i$

para cada $i \in I$. Sin embargo, $2a \vee 2(\neg a) = 2(a \vee \neg a) = 1 \in P_i$, por lo que $2a \in P_i$ para cada $i \in I$. Por lo tanto, $2a = 1$, y $1 = \Box 2a = 2\Box a = 0$, lo que es una contradicción.

Para definir el filtro Q_i, primero definimos un filtro F_i del álgebra cociente $\mathbf{A}/P_i$. Para cada $i \in I$, definimos

$$F_i := \{a/P_i \in A/P_i : c/P_i < a^n/P_i \text{ para cada } c \in \Diamond A \setminus \{1\} \text{ y cada entero positivo } n\}.$$

Afirmamos que F_i es un filtro de $\mathbf{A}/P_i$. Es fácil ver que $1/P_i \in F_i$ y que F_i es un subconjunto creciente de $\mathbf{A}/P_i$. Además, sean $a_1/P_i, a_2/P_i \in F_i$, y consideremos un entero positivo n y un elemento $c \in \Diamond A \setminus \{1\}$. Dado que, como P_i es un filtro primo, $\mathbf{A}/P_i$ es totalmente ordenado, podemos suponer que $a_1/P_i \leq a_2/P_i$. Por lo tanto, $(a_1a_2)^n/P_i \geq (a_1 \wedge a_2)^{2n}/P_i = a_1^{2n}/P_i > c/P_i$. Así, $a_1a_2/P_i \in F_i$.

Ahora definimos $Q_i := \{a \in A : a/P_i \in F_i\}$ para $i \in I$. Claramente, Q_i es un filtro primo en $\mathbf{A}$ que contiene a P_i. Solo queda demostrar que la familia $\{Q_i : i \in I\}$ tiene las propiedades 2-4 mencionadas en el Lema. Para demostrar la propiedad 2, supongamos que $Q_i \cap \Diamond A \neq \{1\}$. Sea $c \in \Diamond A \setminus \{1\}$ tal que $c \in Q_i$. t Entonces, $c/P_i \in F_i$, lo que contradice la definición de F_i (tomando $n = 1$). Ahora probamos la propiedad 3. Sea $a \in \bigcap_{i \in I} Q_i$. Usando la propiedad de la familia $\{P_i : i \in I\}$ demostrada al inicio de la prueba, existe $i \in I$ tal que $a^2 \to \Box a \in P_i$, por lo que $a^2 \to \Box a \in Q_i$. Dado que $a \in Q_i$, se sigue que $\Box a \in Q_i$. Por lo tanto, $\Box a = 1$, así que $a = 1$. Finalmente, probamos la propiedad 4. Sea $a \in A \setminus Q_i$. Entonces, existe $c \in \Diamond A \setminus \{1\}$ y un entero positivo n tal que $a^n/P_i \leq c/P_i$, es decir, $a^n \to c \in P_i \subseteq Q_i$. □

Observemos que, si aplicamos el Teorema 6.4.2 a una MV-álgebra monádica FSI $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ de ancho k, obtenemos una MV-cadena $\mathbf{C}$ y un conjunto no vacío X tal que $\mathbf{A} \leq \mathbf{C}^X$ y se satisfacen las ecuaciones

$$(\Diamond a)(x) = \bigvee\{a(y) : y \in X\} \qquad \text{y} \qquad (\Box a)(x) = \bigwedge\{a(y) : y \in X\}.$$

Sin embargo, el Teorema 6.4.2 no dice nada sobre $|X|$. El siguiente teorema garantiza que podemos tomar $|X| = k$ para álgebras de ancho k.

Teorema 6.6.2. *Sea $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ una MV-álgebra monádica FSI de ancho k. Entonces existe una MV-álgebra totalmente ordenada $\mathbf{V}$ y una inmersión $\alpha\colon (\mathbf{A}, \Diamond, \Box) \to (\mathbf{V}^k, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)$.*

Demostración. Dado que $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ es una MV-álgebra monádica FSI de ancho k, existen filtros primos $P_1, \ldots, P_k$ tales que $\bigcap P_i = \{1\}$ y $P_i \cap \Diamond A = \{1\}$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por el Lema 6.6.1, existen filtros primos $Q_1, \ldots, Q_k$ que cumplen las propiedades 1-4 mencionadas en el Lema. Afirmamos que para cada $a \in A$, existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $\Diamond a \to a \in Q_i$. Supongamos que $\Diamond a \to a \notin Q_i$ para ningún $i \in \{1, \ldots, k\}$. Usando la propiedad 4, existen elementos $c_1, \ldots, c_k \in \Diamond A \setminus \{1\}$ y enteros positivos $n_1, \ldots, n_k$ tales que $(\Diamond a \to a)^{n_i} \to c_i \in Q_i$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$. Sea $n := \text{máx}\{n_1, \ldots, n_k\}$ y $c := \text{máx}\{c_1, \ldots, c_k\}$, obtenemos que $(\Diamond a \to a)^n \to c \in \bigcap Q_i = \{1\}$. Por lo tanto, $(\Diamond a \to a)^n \leq c$. Así, $c \geq \Diamond((\Diamond a \to a)^n) = (\Diamond(\Diamond a \to a))^n = 1$, lo que es una contradicción.

Ahora consideramos las inmersiones $\nu_i|_{\Diamond A}\colon \Diamond\mathbf{A} \to \mathbf{A}/Q_i$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$, obtenidas por restricción de los mapeos canónicos $\nu_i\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}/Q_i$. Dado que la clase de MV-álgebras

totalmente ordenadas tiene la propiedad de amalgamación, existe una MV-álgebra totalmente ordenada $\mathbf{V}$ e inmersiones $\beta_i\colon \mathbf{A}/Q_i \to \mathbf{V}$ tales que $\beta_i \circ \nu_i|_{\Diamond a} = \beta_j \circ \nu_j|_{\Diamond a}$ para $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Definimos $\alpha\colon \mathbf{A} \to \mathbf{V}^k$ como la inmersión dada por $\alpha(x) := (\beta_1(x/Q_1), \ldots, \beta_k(x/Q_k))$. Afirmamos que $\alpha(\Diamond a) = \Diamond_\vee \alpha(a)$ para cada $a \in A$. De hecho, para $a \in A$, existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $\Diamond a \to a \in Q_i$, por lo que $a/Q_i = \Diamond a/Q_i$, lo que implica que $\beta_j(a/Q_j) \leq \beta_j(\Diamond a/Q_j) = \beta_i(\Diamond a/Q_i) = \beta_i(a/Q_i)$ para cualquier $j \in \{1, \ldots, k\}$. □

Teorema 6.6.3. *La clase $\mathbb{MMV}_k$ esta generada como cuasivariedad por el conjunto $\{(\mathbf{L}^k_m, \Diamond_\vee, \Box_\wedge) \mid 1 \leq m\}$.*

Demostración. La demostración es la misma que la del Teorema 6.4.5 utilizando el Teorema 6.6.2 y el Lema 6.4.2. □

Corolario 6.6.1. *La clase $\mathbb{MMV}_k$ esta generada como cuasivariedad por el álgebra $([0,1]^k_{\text{Ł}}, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)$. En particular, la clase $\mathbb{MMV}_k$ esta generada como cuasivariedad por la clase $Func^k([0,1]_{Ł})$.*

Tenemos entonces el siguiente teorema.

Teorema 6.6.4. *La lógica $\vdash_{\text{S5}_k(\text{Ł})}$ es finitamente fuertemente completa respecto a la clase $Func^k([0,1]_{Ł})$.*

Traduciendo al lenguaje monádico obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.6.5. *La lógica $\vdash_{Ł\forall_{mon}}$ es finitamente fuertemente k-completa respecto a la t-norma $[0,1]_{Ł}$.*

Extensión infinitaria

Dado un número natural k, definimos $\text{S5}_k(\text{Ł})_\infty$ como la extensión axiomática de $\text{S5}(\text{Ł})_\infty$ mediante el axioma (W_k). Probaremos en esta subsección que $\vdash_{\text{S5}_k(\text{Ł})_\infty}$ es fuertemente completa respecto a $\text{Func}^k([0,1]_{\text{Ł}})$.

Comenzamos con el siguiente resultado básico.

Lema 6.6.2. *Sea $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ una MV-álgebra monádica FSI de ancho $\leq k$. Entonces, $\mathbf{A}$ tiene como máximo k filtros maximales.*

Demostración. De acuerdo con el Teorema 6.6.1, $\mathbf{A}$ es un producto subdirecto de como máximo k MV-cadenas. Por lo tanto, probamos lo que buscabamos. □

Como consecuencia de este lema y del Teorema 6.5.3, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.6.2. *Sea $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ una MV-álgebra monádica simple de ancho $\leq k$. Entonces, existe una inmersión de $(\mathbf{A}, \Diamond, \Box)$ en $([0,1]^r_{\text{Ł}}, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)$ para algún número natural $r \leq k$.*

Estamos listos para demostrar el resultado de completitud fuerte.

Teorema 6.6.6. *La lógica* $\vdash_{\mathrm{S5}_k(\mathrm{Ł})_\infty}$ *es fuertemente completa respecto a la clase* $Func^k([0,1]_{Ł})$.

Demostración. La implicación que nos dice que el sistema axiomático es adecuado se sigue como en las pruebas de los Teoremas 6.6.4 y 6.5.1.

Para la implicación de completitud, supongamos que $\Gamma \nvdash_{\mathrm{S5}_k(\mathrm{Ł})_\infty} \varphi$. Observamos que el Teorema 6.5.2 y los lemas necesarios en su demostración también son válidos para la extensión axiomática $\mathrm{S5}_k(\mathrm{Ł})_\infty$. Por lo tanto, existe una teoría cerrada $\Box$-prelineal Γ^* de $\mathrm{S5}_k(\mathrm{Ł})_\infty$ que extiende Γ tal que $\Gamma^* \nvdash_{\mathrm{S5}_k(\mathrm{Ł})_\infty} \varphi$. Así, por el Lema 6.5.4 y dado que Γ^* es una teoría cerrada de $\mathrm{S5}_k(\mathrm{Ł})_\infty$, concluimos que $\mathbf{L}_{\Gamma^*}$ es una MV-álgebra monádica simple que satisface la ecuación (W_k), es decir, $\mathbf{L}_{\Gamma^*}$ tiene ancho $\leq k$. Por lo tanto, según el Corolario 6.6.2, existe una inyección $h\colon \mathbf{L}_{\Gamma^*} \to ([0,1]^r_{\mathrm{L}}, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)$ para algún número natural $r \leq k$. Finalmente, procedemos como en la prueba del Teorema 6.5.4 y definimos una $([0,1]^r_{\mathrm{L}}, \Diamond_\vee, \Box_\wedge)$-estructura $\mathbf{M}$ que es modelo de Γ^* y que no es un modelo de φ. $\Box$

6.7. Comentarios finales

En este capítulo, hemos logrado los siguientes resultados de completitud:

- La lógica $S5(\mathrm{Ł})$ es finitamente fuertemente completa respecto a $\mathrm{Func}([0,1]_{\mathrm{Ł}})$.
- La extensión $S5(\mathrm{Ł})_\infty$ de $S5(\mathrm{Ł})$, obtenida mediante la incorporación de la regla $\Box(\mathrm{Inf})$, es fuertemente completa respecto a $\mathrm{Func}([0,1]_{\mathrm{Ł}})$.
- La extensión $S5_k(\mathrm{Ł})$ de $S5(\mathrm{Ł})$, obtenida mediante la incorporación de el axioma W_k, es finitamente fuertemente completa respecto a $\mathrm{Func}_k([0,1]_{\mathrm{Ł}})$.
- La extensión $S5_k(\mathrm{Ł})_\infty$ de $S5(\mathrm{Ł})$, obtenida mediante la incorporación de la regla $\Box(\mathrm{Inf})$ y el axioma W_k, es fuertemente completa respecto a $\mathrm{Func}_k([0,1]_{\mathrm{Ł}})$.

La pregunta de si la extensión $S5$ de la lógica producto tiene resultados de completitud respecto a su t-norma continua aún no ha sido resuelta.

Bibliografía

[1] P. Agliano and F. Montagna. Varieties of BL-algebras I: general properties. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 181(2–3):105–129, June 2003.

[2] W. J. Blok and I. M. A. Ferreirim. On the structure of hoops. *Algebra Universalis*, 43(2-3):233–257, 2000.

[3] W. J. Blok and C. J. Van Alten. The finite embeddability property for residuated lattices, pocrims and BCK-algebras. *Algebra Universalis*, 48(3):253–271, Oct. 2002.

[4] S. Burris and H. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra*. Dover Publications, Incorporated, 2012.

[5] M. Busaniche. Decomposition of BL-chains. *algebra universalis*, 52:519–525, 2005.

[6] D. Castaño, C. Cimadamore, J. P. Díaz Varela, and L. Rueda. Monadic BL-algebras: the equivalent algebraic semantics of Hájek's monadic fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems*, 320:40–59, 2017.

[7] D. Castaño, C. Cimadamore, J. P. Díaz Varela, and L. Rueda. An algebraic study of S5-modal Gödel logic. *Studia Logica*, 109(5):937–967, 2021.

[8] D. Castaño, C. Cimadamore, J. P. Díaz Varela, and L. Rueda. Completeness for monadic fuzzy logics via functional algebras. *Fuzzy Sets and Systems*, 407:161–174, 2021.

[9] D. Castaño, J. P. Díaz Varela, and G. Savoy. Strong completeness for the predicate logic of the continuous t-norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 500:109193, Jan. 2025.

[10] D. Castaño, J. P. Díaz Varela, and G. Savoy. Strong standard completeness theorems for S5-modal Łukasiewicz logics. *Annals of Pure and Applied Logic*, 176(3):103529, Mar. 2025.

[11] R. Cignoli and A. Torrens. An algebraic analysis of product logic. *Multiple Valued Logic*, 5:45 – 65, 01 2000.

[12] R. Cignoli and A. Torrens. Standard completeness of Hajek basic logic and decompositions of BL-chains. *Soft Computing*, 9:862–868, 2005.

[13] R. Cignoli and A. Torrens. Standard completeness of Hájek basic logic and decompositions of BL-chains. *Soft Computing*, 9(12):862–868, May 2005.

[14] R. Cignoli and A. Torrens. Varieties of commutative integral bounded residuated lattices admitting a boolean retraction term. *Studia Logica*, 100(6):1107–1136, Nov. 2012.

[15] R. L. O. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano, and D. Mundici. *Algebraic foundations of many-valued reasoning*, volume 7 of *Trends in Logic—Studia Logica Library*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[16] C. R. Cimadamore and J. P. Díaz Varela. Monadic MV-algebras I: a study of subvarieties. *Algebra universalis*, 71(1):71–100, Jan. 2014.

[17] P. Cintula, P. Hájek, and C. Noguera. *Handbook of Mathematical Fuzzy Logic*. Number v. 1 in Handbook of Mathematical Fuzzy Logic. College Publications, 2011.

[18] P. Cintula and C. Noguera. *Logic and Implication: An Introduction to the General Algebraic Study of Non-classical Logics*. Springer International Publishing, 2021.

[19] A. Di Nola and R. Grigolia. On monadic mv-algebras. *Annals of Pure and Applied Logic*, 128(1–3):125–139, Aug. 2004.

[20] I. M. A. Ferreirim. *On varieties and quasivarieties of hoops and their reducts.* PhD thesis, 3 2014.

[21] J. Font. *Abstract Algebraic Logic: An Introductory Textbook*. Studies in logic and the foundations of mathematics. College Publications, 2016.

[22] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski, and H. Ono. *Residuated Lattices: an algebraic glimpse at substructural logics*. 01 2007.

[23] K. Gödel. Zum intuitionistischen aussagenkalkül. *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien*, 69:65–66, 1932.

[24] P. Hájek. *Metamathematics of fuzzy logic*, volume 4 of *Trends in Logic—Studia Logica Library*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[25] P. Hajek and F. Montagna. A note on the first-order logic of complete BL-chains. *Mathematical Logic Quarterly*, 54:435–446, 2008.

[26] J. B. Hart, L. Rafter, and C. Tsinakis. The structure of commutative residuated lattices. *International Journal of Algebra and Computation*, 12(04):509–524, Aug. 2002.

[27] L. S. Hay. An axiomatization of the infinitely many-valued predicate calculus. Master's thesis, Cornell University, 1963.

[28] A. Horn. Logic with truth values in a linearly ordered heyting algebra. *Journal of Symbolic Logic*, 34:395–409, 1969.

[29] P. Hájek. Basic fuzzy logic and bl-algebras. *Soft Computing - A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications*, 2(3):124–128, Sept. 1998.

[30] P. Hájek. On fuzzy modal logics. *Fuzzy Sets and Systems*, 161(18):2389–2396, Sept. 2010.

[31] P. Hájek and P. Cintula. On theories and models in fuzzy predicate logics. *Journal of Symbolic Logic*, 71(3):863–880, Sept. 2006.

[32] P. Hájek, L. Godo, and F. Esteva. A complete many-valued logic with product-conjunction. *Archive for Mathematical Logic*, 35:191–208, 01 1996.

[33] E. P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. *Triangular Norms*. Springer Netherlands, 2000.

[34] A. Kułacka. Strong standard completeness for continuous t-norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 345:139–150, 2018.

[35] K. Menger. Statistical metrics. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 28:535–537, 1942.

[36] F. Montagna. Three complexity problems in quantified fuzzy logic. *Studia Logica*, 68(1):143–152, 2001.

[37] F. Montagna. *Notes on Strong Completeness in Łukasiewicz, Product and BL Logics and in Their First-Order Extensions*, volume 4460 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.

[38] F. Montagna. Notes on strong completeness in Łukasiewicz, product and BL logics and in their first-order extensions. pages 247–274, 2007.

[39] P. S. Mostert and A. L. Shields. On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary. *Ann. of Math. (2)*, 65:117–143, 1957.

[40] A. Mostowski. Axiomatizability of some many valued predicate calculi. *Fundamenta mathematicae*, 50:165–190, 1961.

[41] D. Mundici and R. Cignoli. Partial isomorphisms on totally ordered abelian groups and Hajek completeness theorem for basic logic. 2001.

[42] K. R. Pierce. Amalgamations of lattice ordered groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 172:249–260, 1972.

[43] E. L. Post. Introduction to a general theory of elementary propositions. *American Journal of Mathematics*, 43(3):163, July 1921.

[44] J. D. Rutledge. *A preliminary investigation of the infinitely-many-valued predicate calculus*. PhD thesis, Cornell University, 1959.

[45] B. Scarpellini. Die nichtaxiomatisierbarkeit des unendlichwertigen Prädikatenkalküls von Łukasiewicz. *Journal of Symbolic Logic*, 27:159 – 170, 1962.

[46] G. N. T. Jan Łukasiewicz. selected works. *Review of Metaphysics*, 26(1):164–165, 1972.

[47] A. Vidal. Undecidability and non-axiomatizability of modal many-valued logics. *The Journal of Symbolic Logic*, 87(4):1576–1605, Apr. 2022.

[48] J. Łukasiewicz. Zagadnienia prawdy (the problems of truth). *Ksiega pamiatkowa XI zjazdu lekarzy i przyrodników polskich*, pages 84–85, 1922.