



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS DE DOCTORA EN MATEMÁTICA

**Órbitas periódicas en sistemas dinámicos
y el Método de Análisis Homotópico**

Romina Pamela Cobiaga

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2024

Prefacio

Esta tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática durante el periodo comprendido entre los meses de mayo de 2011 y junio de 2024, bajo la dirección del Dr. Walter Alberto Reartes, Profesor Titular del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

Romina Pamela Cobiaga

A Gabriel,
que debió transitar conmigo este camino,
al igual que toda nuestra carrera,
pero el destino quiso que se fuera muy pronto.

Y a mi queridísimo papá,
¡a quien extraño cada día!
Pero sé que su cariño, su ejemplo y su recuerdo
me van a acompañar la vida entera.

Agradecimientos

Quiero empezar agradeciendo a los jurados por el tiempo dedicado a la lectura de estas tesis, por sus comentarios y devoluciones que enriquecen mi trabajo.

A mi director Walter Reartes, cuya paciencia, inteligencia y predisposición sólo pueden ser superados por su buen humor y su innumerable cantidad de anécdotas (aunque muchas de ellas sean cuanto menos dudosas).

Ana Torresi merece una mención muy especial; las horas que empleó en la lectura y corrección de este manuscrito y el apoyo emocional que me dio han sido invaluable. No hay duda que sin su ayuda esto no habría sido posible. ¡Infinitas gracias, Ana!

No quiero dejar de nombrar también a mi grupo de trabajo: Beatriz y Guillermo, con Walter a la cabeza, por hacer tan divertidas las horas que compartimos.

A todo el Departamento de Matemáticas que considero mi segundo hogar. En estos tiempos en que la educación pública, la universidad y la ciencia argentina en general han sido atacadas y desfinanciadas, para mí es y será siempre un enorme privilegio pertenecer a la UNS.

El más cálido agradecimiento para todos mis amigos, y uno especial a Gise, por su amistad incondicional a lo largo de toda mi vida, y por ponerle humor siempre a los tiempos difíciles.

A mi tía Julia, que sin ser verdaderamente mi tía, se ganó un lugar en mi corazón y habría estado muy feliz con este logro.

Finalmente, el reconocimiento más grande sin duda es para mi familia: mi hermano Lucas y mi mamá, que siempre estuvieron presentes apoyándome. También quiero mencionar especialmente a mi sobrina Denise, que sin saberlo me acompañó y me distrajo.

A todos, ¡muchas gracias!

Resumen

En esta tesis, profundizamos en la exploración y análisis de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales ordinarias y con retardo, aprovechando el potencial del Método de Análisis Homotópico (HAM). La relevancia de las órbitas periódicas en diversos campos, desde la física hasta la biología, subraya su importancia para la comprensión de los comportamientos a largo plazo de los sistemas. En el ámbito de las ecuaciones no lineales, donde a menudo las soluciones analíticas resultan esquivas, el HAM emerge como una herramienta potente, ofreciendo un enfoque semianalítico para obtener soluciones aproximadas mediante la homotopía, que es un concepto clave de la topología.

Presentamos el HAM reformado, que es una adaptación original del HAM para la obtención de aproximaciones de soluciones periódicas. Una innovación importante de esta técnica radica en el rol que le asignamos al parámetro de frecuencia ω de la órbita, que al ser introducido en el operador no lineal, le otorga al HAM reformado una característica espectral. Posteriormente determinamos esta frecuencia, junto con el clásico parámetro de convergencia h del HAM, mediante un enfoque heurístico. El método que proponemos demuestra su eficiencia al proporcionar aproximaciones analíticas precisas, eliminando la necesidad de expandir la frecuencia y amplitud de la órbita en

serie respecto al parámetro de la homotopía. Este método es aplicable tanto a ecuaciones diferenciales ordinarias como con retardo.

Nuestro trabajo también se aboca al estudio detallado de un modelo biológico de interés de 6 dimensiones que captura la dinámica de la infección por el virus linfotrópico de células T de humanos tipo I (HTLV-I), la respuesta inmunitaria y el desarrollo de la leucemia de células T del adulto (ATL). Mostramos que el sistema refleja comportamientos interesantes como bifurcaciones de Hopf y oscilaciones alrededor de un centro no lineal, a la vez que indagamos en las interpretaciones desde el punto de vista médico de los resultados hallados. Este modelo biológico también sirve como campo de prueba para el Método de Análisis Homotópico por múltiples etapas (MSHAM), confirmando su efectividad en sistemas que abarcan periodos temporales prolongados.

Finalmente, presentamos el concepto de isocronía respecto de un parámetro, que involucra familias de órbitas obtenidas variando un parámetro. Este concepto se aplica a ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden, ordinarias y con retardo. Enunciamos los teoremas que permiten determinar bajo qué condiciones una familia de órbitas periódicas exhibe una frecuencia constante ante variaciones de un parámetro específico del sistema. Probamos la isocronía de la familia de ciclos analizando un sistema lineal auxiliar asociado al problema no lineal original, con una metodología esencialmente geométrica. Aplicamos el método a ODEs y discutimos la extensión de la técnica para ecuaciones con retardo.

Abstract

In this thesis, we delve into the exploration and analysis of periodic solutions in ordinary and delay differential equations, harnessing the potential of the Homotopy Analysis Method (HAM). The relevance of periodic orbits across diverse fields, from physics to biology, underscores their importance for understanding long-term behaviors of systems. In the realm of nonlinear equations, where analytical solutions are often elusive, HAM emerges as a powerful tool, offering a semi-analytic approach to obtain approximate solutions through homotopy, which is a key concept in topology.

We present the reformed HAM, which is an original adaptation of HAM for obtaining approximations to periodic solutions. An important innovation of this technique lies in the role we assign to the frequency parameter of the orbit, which, when introduced into the nonlinear operator, imparts a spectral characteristic to the reformed HAM. Subsequently, we determine this frequency, along with the classic convergence parameter h of HAM, through a heuristic approach. The method we propose demonstrates its efficiency in providing accurate analytical approximations, eliminating the need to expand the frequency and amplitude of the orbit in series with respect to the homotopy parameter. This method is applicable to both ordinary and delay differential equations.

Our work also focuses on the detailed study of a 6-dimensional biological model of interest that captures the dynamics of infection by Human T-Cell Lymphotropic Virus Type I (HTLV-I), the immune response, and the development of Adult T-Cell Leukemia (ATL). We show that the system exhibits interesting behaviors such as Hopf bifurcations and oscillations around a nonlinear center, while exploring medical interpretations of the findings. This biological model also serves as a testbed for the Multi-Stage Homotopy Analysis Method (MSHAM), confirming its effectiveness in systems spanning long time periods.

Finally, we present the concept of isochrony with respect to a parameter, which involves families of orbits obtained by varying a parameter. This concept is applied to second-order nonlinear differential equations, both ordinary and with delay. We state the theorems that allow determining under what conditions a family of periodic orbits exhibits a constant frequency in the face of variations in a specific parameter of the system. We test the isochrony of the family of cycles by analyzing an auxiliary linear system associated with the original nonlinear problem, using an essentially geometric methodology. The method applies to ODE's and we discuss the extension of the technique for a delay differential equations.

Índice general

Prefacio	I
Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	VII
1. Introducción	1
1.1. Estructura de la tesis	6
2. Método de Análisis Homotópico	10
2.1. Introducción	10
2.2. Descripción general del HAM	14
2.2.1. Búsqueda de órbitas periódicas	17
2.2.2. Parámetro de control de convergencia	20
2.3. Método por etapas múltiples (MSHAM)	22

2.4. Introducción al HAM para ecuaciones diferenciales con retardo e isocronía de soluciones	24
2.4.1. Isocronía	27
2.5. Síntesis y anticipo	28
3. Búsqueda heurística de órbitas periódicas	31
3.1. Introducción	31
3.2. Descripción del Método: HAM reformado	34
3.2.1. Búsqueda heurística de soluciones	37
3.3. Ejemplos	40
3.3.1. Oscilador anarmónico	40
3.3.2. Ecuación de van der Pol	42
3.3.3. Bifurcación de Hopf	44
3.3.4. Múltiples ciclos y equilibrios	49
3.4. Discusiones	55
3.4.1. El caso tridimensional. Sistema de Rössler	55
3.4.2. Ausencia de órbitas periódicas	58
3.5. Conclusiones	62
4. Búsqueda heurística de órbitas periódicas en ecuaciones con retardo	64
4.1. Introducción	64
4.2. Descripción del método: HAM reformado para EDRs	66
4.2.1. Búsqueda heurística de las soluciones	69
4.3. Resultados	71
4.3.1. Ecuación de van der Pol realimentada con retardo	71
4.3.2. Oscilador anarmónico realimentado con retardo	73
4.4. Discusión y conclusiones	79
5. Un modelo biológico (6-dimensional)	82
5.1. Introducción	82

5.2. Descripción del modelo de infección	85
5.3. Método de Análisis Homotópico por múltiples etapas	88
5.4. Resultados	90
5.4.1. Oscilaciones periódicas de células leucémicas, centro no lineal . . .	96
5.4.2. Equilibrio infectado y bifurcación de Hopf	98
5.5. Análisis del error	101
5.6. Efecto de saturación en la proliferación de células CTL	102
5.7. Discusión y conclusiones	103
6. Familias isocrónicas de órbitas periódicas	107
6.1. Introducción	107
6.2. El sistema auxiliar	109
6.2.1. Ejemplos	116
6.3. Ecuaciones diferenciales con retardo	123
6.3.1. Ejemplos	126
6.4. Conclusiones	130
7. Conclusiones	132

Índice de figuras

1.1. Esquema temático de la tesis.	8
2.1. h -curvas de la ecuación (2.14), orden de aproximación 10 y $\beta = 0,2$	21
2.2. HAM de orden 10 de la ecuación de Rayleigh para $\beta = 0,2$	22
2.3. HAM de orden 10 de la ecuación de Rayleigh para $\beta = 0,2$ en el plano $x-x'$	22
3.1. Resultados para el oscilador anarmónico.	42
3.2. Oscilador anarmónico.	43
3.3. Ciclos del oscilador de van der Pol, curva continua = HAM reformado, puntos = integración numérica con Mathematica.	44
3.4. Resultados de la ecuación de van de Pol para $\epsilon = 1$	45
3.5. Oscilador de Rayleigh, curva continua = HAM reformado, curva a trozos = integración numérica con Mathematica.	46
3.6. Oscilador de Rayleigh para $\beta = 1,5$	47
3.7. Diagrama de bifurcación para la ecuación (3.17): puntos = amplitudes HAM reformado, curva continua = MATCONT.	48
3.8. Dos valores diferentes de h_{min} para la ecuación de Rayleigh con $\beta = 1,7$ y HAM de orden 12.	50

3.9. Diagrama de bifurcación para el sistema 3.22.	51
3.10. Sistema de Bautin modificado 3.22.	52
3.11. Resultados del sistema de Bautin modificado (3.22) para $\beta_1 = 0,5$ y $\beta_2 = 1$ en la ecuación.	53
3.12. Ciclos del sistema de Bautin modificado (3.22), curva continua = HAM reformado, puntos = integración numérica.	54
3.13. Comparación del ciclo del sistema de Rössler (3.24) con la aproximación obtenida con el método.	56
3.14. Distintas proyecciones del oscilador de Rössler.	57
3.15. a) Resultados de la ecuación (3.24) con condición inicial $(6,5 \cos t; 6,5 \sin t, 0)$	58
3.16. Resultados para $\beta_1 = -1$ y $\beta_2 = 0$ en la ecuación (3.22) con amplitud ini- cial $a_0 = 2$	59
3.17. Resultados para $\beta_1 = -1$ y $\beta_2 = 0$ en la ecuación (3.22) con amplitud ini- cial $a_0 = 0,1$	60
3.18. Resultados para $\beta_1 = -0,86575$ y $\beta_2 = 2$ en la ecuación (3.22).	61
4.1. Oscilador de van der Pol. Amplitud de las oscilaciones en la rama de bi- furcación para $\epsilon = 0,5$ y $\tau = 1$; curva continua = DDE-BIFTOOL, puntos = HAM.	72
4.2. Frecuencia ω en función de d para la ecuación (4.11) con $\epsilon = 0,5$ y $\tau = 1$	73
4.3. Resultados de la ecuación de van der Pol para amplitud inicial $a_0 = 1,5$	74
4.4. Curvas de bifurcación en el espacio de parámetros para el oscilador anar- mónico con retardo. — equilibrio x_0 , --- equilibrios x_1 y x_2 , -·- $\tau = 2,5$	75
4.5. Amplitud de las oscilaciones en las ramas de bifurcación para los equili- brios $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$	76
4.6. Ciclos de la rama de bifurcación del equilibrio $x_0 = 0$ (ciclo externo en color rojo), $x_1 = 1$ (ciclo interno a la derecha en azul) y $x_2 = -1$ (ciclo interno a la izquierda en verde).	77

4.7. Resultados del oscilador anarmónico con $\beta = -1$, $\gamma = -1,2$ y $\tau = 2,5$, amplitud inicial 0,612.	78
5.1. Diagrama de interacción entre los tipos celulares.	87
5.2. Comparación de la solución obtenida por el HAM del sistema 5.1 con $\kappa = 0,0016$, y la solución numérica para valores grandes del tiempo t	91
5.3. Retrato de fase del sistema (5.17) para los valores de los parámetros dados en la tabla 5.2.	97
5.4. Izquierda: órbitas periódicas del sistema (5.1) para $\kappa = 0,0019$ y diferentes condiciones iniciales. Derecha: Órbita del sistema para el mismo κ	97
5.5. Células $CD4^+$ sanas a la izquierda y células leucémicas a la derecha para $\kappa = 0,0016$	99
5.6. h -curvas para $\kappa = 0,0016$	100
5.7. Diagrama de bifurcación de Hopf del equilibrio P_4 obtenido con MATCONT.	100
5.8. Error en el cálculo de la variable x_1 como una función del orden N del HAM en cada paso.	102
5.9. Error en los valores calculados de la variable x_1 como una función de la longitud Δt de los intervalos.	102
5.10. Efecto de saturación en las variables x_1 y x_5 para diferentes valores de ϵ usando la ecuación (5.21).	103
6.1. Diagrama del recorrido de $\hat{x}_1(\mu) = \hat{x}_1(0, \mu)$ cuando el parámetro μ varía.	111
6.2. Órbitas a modo de ejemplo de un sistema auxiliar y su recta asociada (6.13).	114
6.3. Órbitas del sistema (6.22) para el oscilador armónico con recta asociada horizontal $\xi_2 = -12,57$	117
6.4. Órbitas del sistema (6.24) para el oscilador anarmónico con $\mu = 1$ y recta $\xi_2 = -11,726 - 11,726\xi_1$	118
6.5. Órbitas del sistema (6.5) para la ecuación (6.25) con $\omega_0 = 1$ y $\mu = 1$	119

6.6. Órbitas del sistema (6.30) para la ecuación de van der Pol con $\mu = 1$ y su correspondiente recta (6.31).	121
6.7. Ciclo del sistema auxiliar para la ecuación de van der Pol (6.32), con $\mu = 1$	122
6.8. Órbitas del sistema auxiliar para la ecuación de Rayleigh (6.35) con $\mu = 1$ y la recta (6.36).	123
6.9. Ciclo del sistema auxiliar para la ecuación de Rayleigh (6.37), con $\mu = 1$	124
6.10. Órbita del sistema auxiliar (6.45) para $\mu = 0,1$, $\tau = 9$ y $\omega_0 = 0,99315$	127
6.11. Izquierda: ciclos del sistema auxiliar (6.48) para el péndulo rotatorio con retardo, con $\mu = -1$, $\beta = 0,5$, $\tau = 2$ y $\omega_0 = \pi/\tau$. Derecha: líneas rectas punteadas que unen diferentes ciclos.	129
6.12. Izquierda: ciclos del sistema auxiliar (6.51) para el oscilador anarmónico con retardo, con $\mu = -0,4$, $\beta = -1$, $\tau = 2,5$ y $\omega_0 = \pi/\tau$. Derecha: líneas rectas punteadas que unen diferentes ciclos.	130

Índice de tablas

3.1. Errores relativos de las variables y_1 e y_2 para la ecuación (3.18).	49
5.1. Variables del modelo	86
5.2. Parámetros del modelo	106

CAPÍTULO 1

Introducción

Existe un acuerdo general sobre la enorme utilidad que presentan las ecuaciones diferenciales en el modelado matemático de fenómenos naturales o producidos por el hombre. En la multiplicidad de comportamientos dinámicos que se presentan al estudiar un sistema de ecuaciones diferenciales, las órbitas periódicas en especial ocupan un rol central debido a su relevancia en una amplia gama de disciplinas, desde la física y la ingeniería hasta la biología y la economía. Las órbitas periódicas representan soluciones recurrentes y estables en el tiempo, brindando una comprensión profunda de los comportamientos a largo plazo en los sistemas estudiados.

En los modelos de ecuaciones diferenciales no lineales, aún en los casos más sencillos, la solución analítica puede resultar inalcanzable. Las técnicas computacionales actuales nos permiten aproximarnos a la resolución de estos sistemas mediante métodos numéricos. Sin embargo, las expresiones obtenidas con estos algoritmos sólo nos proporcionan información en puntos discretos. Es por esto que en muchos casos se hace necesario encontrar expresiones analíticas continuas de la solución aproximada, que nos conduzcan a una mejor comprensión del comportamiento del sistema.

Entre los diversos métodos disponibles para la búsqueda de soluciones en sistemas dinámicos, el Método de Análisis Homotópico (o HAM, por sus siglas en inglés) emerge como una herramienta poderosa y novedosa que permite abordar problemas complejos de una manera sistemática en la exploración de las órbitas periódicas, ver por ejemplo [71, 129, 130, 131, 134, 135, 206]. Este enfoque proporciona una perspectiva original para entender la formación, estabilidad y bifurcaciones de órbitas periódicas [31], ofreciendo una contribución valiosa al campo de los sistemas dinámicos.

El HAM es un procedimiento semianalítico útil en la resolución de ecuaciones diferenciales de diversos tipos (ordinarias, parciales, con retardo, etc.) que permite obtener la solución en series de funciones. En esta tesis consideramos solamente ecuaciones ordinarias y ecuaciones diferenciales con retardo.

En el HAM se utiliza el concepto de homotopía para descomponer un problema no lineal en un conjunto infinito de problemas lineales. Ésto se consigue a nivel teórico proponiendo una deformación continua desde una estimación inicial hasta la solución del problema no lineal. Una de sus características es la presencia de un parámetro de convergencia, que es una variable sin contenido físico, que permite controlar la convergencia hacia la solución, ver [4, 136, 195]. Además es no perturbativo, en el sentido de no depender de algún parámetro pequeño (o grande como es el caso en desarrollos asintóticos) y por lo tanto puede aplicarse a problemas altamente no lineales, ver por ejemplo [98, 133, 180]. Otra de sus ventajas, es la flexibilidad en la elección de las bases de funciones que se utilizan en las soluciones. De cierta forma se puede decir que el HAM generaliza los métodos de parámetro artificial pequeño de Lyapunov, el de expansión δ , el de descomposición de Adomian y el de perturbación homotópica [125, 130, 132].

Las características antes mencionadas le otorgan al HAM un enorme potencial, a la vez que incentivan a la exploración de posibles variantes y adaptaciones que aporten nuevos enfoques a la búsqueda y estudio de las órbitas periódicas. En ese sentido, propondremos en esta tesis una versión del HAM para la búsqueda de órbitas periódicas, que difiere significativamente de la técnica enunciada por Liao para este tipo de

soluciones. En nuestro planteo le otorgamos un rol distinguido al parámetro ω , que representa la frecuencia del ciclo que se intenta aproximar, y mediante un procedimiento fuertemente heurístico buscaremos seleccionar los valores más apropiados para la frecuencia ω y el parámetro h , al tiempo que buscaremos innovar en el uso y la interpretación de las h -curvas del HAM.

Las órbitas periódicas y los conceptos derivados de la teoría de sistemas dinámicos han encontrado aplicaciones significativas en diversas áreas de las ciencias de la vida, incluyendo los procesos biológicos relacionados con el ser humano. Algunas de las aplicaciones que se pueden nombrar son las siguientes: la modelización y análisis de la dinámica de redes neuronales [30, 103]; para modelar ciclos celulares, procesos de regulación genética o la dinámica de crecimiento tumoral [18, 112, 142, 160]; el estudio de la dinámica de poblaciones [56, 116, 166, 183]; la medicina y el estudio de arritmias cardíacas [39, 90, 88], la propagación de una infección o el desarrollo de una enfermedad en el organismo, con su correspondiente respuesta inmunitaria.

No hay duda que los modelos matemáticos son uno de los aportes más revolucionarios que nos proporcionó la matemática para ampliar nuestra comprensión del mundo que nos rodea y de nosotros mismos. Más aún, estos modelos son clave a la hora de interpretar los datos empíricos que recolectamos, sacar conclusiones y realizar predicciones en base a ellos. Sin embargo, requieren cautela en su formulación y en el análisis de sus resultados. La formulación de cualquier modelo matemático requiere asumir ciertas condiciones idealizadas y simplificadas para que nuestro modelo pueda ser estudiado con las herramientas de las que disponemos, pero sin dejar de representar el sistema físico del que partimos. Ésto es particularmente importante en biología, dado la enorme cantidad de variables a tener en cuenta en un sistema y el número aún mayor de parámetros medioambientales que influyen en ellas.

A pesar de ésto, los investigadores han empleado con éxito los modelos matemáticos para estudiar el desarrollo de infecciones en el organismo humano, y la incidencia de las células del sistema inmunitario en el avance o eliminación de la enfermedad. Aún los modelos más simples pueden aportar información sobre los procesos alta-

mente dinámicos que subyacen a la evolución de una enfermedad. No obstante, se debe ser prudente al sacar conclusiones a partir de la información que obtenemos de estos modelos. Las conclusiones intuitivas que podemos tomar al analizar los resultados nos pueden conducir a interpretaciones sesgadas que no reflejen fielmente toda la complejidad de los procesos estudiados.

Retomando una de las aplicaciones mencionadas anteriormente, uno de los fenómenos más interesantes donde se emplean los modelos matemáticos es el avance de una infección viral en el cuerpo humano. La riqueza de la interacción entre las células infectadas y aquellas que buscan combatir la infección a capturado nuestro interés. Trabajos como el de Perelson et al. [162], donde se examina un modelo de infección viral por VIH, o el de Stilianakis y Seydel [186], que plantea un modelo de ecuaciones diferenciales para representar la infección por HTLV-I, han influido notablemente en nuestra investigación. En el primero, los autores hacen un completo estudio analítico del escenario dinámico del sistema y, luego de asignarle cuidadosamente valores a los parámetros biológicos, realizan un tratamiento numérico de las soluciones, estudiando también las oscilaciones periódicas presentes en el modelo y discutiendo los efectos de la terapia antiretroviral. En el segundo, plantean la transmisión del virus célula a célula y la posible progresión a ATL, reflejando el largo estado de latencia que normalmente presentan las células T infectadas con HTLV-I mediante la introducción de una variable al sistema que represente esta población celular. Con el análisis de los resultados, los autores muestran que el modelo permite reflejar algunos de los procesos más relevantes de una infección persistente por este virus.

En la revisión de las investigaciones precedentes que nos han influenciado, debemos mencionar el artículo de Lim y Maini [137], en él los autores presentan un modelo de dinámica viral para HTLV-I con latencia celular y respuesta inmunitaria. Una de las variables del sistema representa los linfocitos citotóxicos, que proliferan frente al progreso de la infección y combaten las células afectadas por el virus. Mediante un completo análisis cualitativo del comportamiento de las soluciones realizan inferencias sobre cuestiones inherentes a la infección que revisten gran interés, como la

expresión viral espontánea, la interacción compleja del virus con la respuesta inmunitaria del huésped, o los factores clave que inciden en el desarrollo de TSP (enfermedad inflamatoria asociada al HTLV-I).

En esta tesis propondremos un modelo 6-dimensional de infección por HTLV-I, con respuesta inmunitaria y desarrollo de ATL, buscando capturar las complejas relaciones entre la replicación viral, la respuesta inmunitaria celular y las consecuencias patológicas asociadas. Trataremos de darle una interpretación biológica a los resultados que arroja el modelo, mediante una revisión sistemática de la bibliografía concierne.

Utilizaremos este sistema para probar el Método de Análisis Homotópico por múltiples etapas (MSHAM), variante del HAM que resulta más efectiva para aquellos casos en que la convergencia del HAM es lenta y por consiguiente las aproximaciones que este último arroja sólo son aceptables para tiempos muy cortos. Esta versión, que no ha sido tan ampliamente extendida como otras modificaciones del HAM, es de muy simple aplicación y otorga resultados sumamente eficientes, presentando un potencial muy interesante para estudiar una amplia gama de sistemas dinámicos que involucran procesos a largo plazo.

La búsqueda y análisis de soluciones oscilatorias, y el estudio de la frecuencia de aquellas que resultan periódicas, han contribuido a la comprensión profunda de fenómenos complejos en la dinámica no lineal, como las bifurcaciones, la teoría de estabilidad, los teoremas de existencia de órbitas periódicas, la resonancia, la sincronización de osciladores, el caos o la isocronía, entre otros. Particularmente, el concepto de isocronía considerado hace referencia al comportamiento periódico con frecuencia constante de las trayectorias de un sistema dinámico. La definición de isocronía se extiende incluso al caso de órbitas oscilatorias no periódicas, como es el caso de los focos.

Dentro de las investigaciones previas sobre este tema que han influido en nuestro enfoque y motivación, debemos destacar el trabajo de Bel y Reartes [32], donde se define la noción de bifurcación isocrónica y se emplea el HAM para probar la regularidad

de la frecuencia de los ciclos emergentes de una bifurcación de Hopf en una ecuación diferencial con retardo. Partiendo de esta idea, nos propusimos ampliar la definición de isocronía a una familia paramétrica de órbitas periódicas. Es decir, cuando una familia de ciclos dependientes de un parámetro del sistema mantienen constante su frecuencia frente a las variaciones de dicho parámetro. De esta manera, llamaremos órbitas isocrónicas a aquellas que verifican tal condición. Nuestro estudio en relación a este tema tendrá por objeto desarrollar una metodología que nos permita arrojar luz sobre la existencia o no de tales órbitas en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Al mismo tiempo, indagaremos en la posibilidad de aplicar dicho método en el caso de ecuaciones con retardo.

Con la exploración de este aspecto de las soluciones periódicas, es nuestro objetivo ampliar el entendimiento que tenemos de la rica variedad de fenómenos ligados a las trayectorias periódicas. Así mismo pretendemos enriquecer el conjunto de herramientas de las que disponemos para el estudio de tales órbitas y el cambio o invariancia que estas trayectorias presentan frente a las perturbaciones de algún parámetro del sistema.

1.1. Estructura de la tesis

En el capítulo 2 daremos una descripción del HAM de Liao, focalizándonos en la versión orientada a la búsqueda de soluciones periódicas. Éste será el punto de partida para plantear una modificación original del método en el capítulo siguiente. También describiremos en qué consiste el MSHAM, que es una variante del HAM adecuada a la obtención de soluciones válidas en intervalos temporales largos. En el mismo capítulo haremos una breve introducción a un concepto relacionado a la frecuencia de las órbitas periódicas, el de isocronía. A partir de esta idea vamos a plantear una nueva concepción de isocronía en un capítulo posterior, en este caso para una familia de órbitas periódicas paramétricas. El propósito de todo el capítulo 2 es el de exponer las bases y fundamentos para las ideas que desarrollaremos a lo largo de la tesis, pero

ofreciendo un adelanto de los resultados novedosos que se presentarán más adelante.

En el capítulo 3 vamos a plantear una variante innovadora del HAM para órbitas periódicas que llamaremos *HAM reformado*. En esta versión no será necesario expandir en serie de potencias en función del parámetro de la homotopía a la amplitud y la frecuencia del ciclo buscado, sino que será la frecuencia que tomará un rol preponderante como un parámetro dentro del operador no lineal determinado por la ecuación. Posteriormente daremos los lineamientos a seguir para hallar el valor óptimo para este parámetro, simultáneamente que obtenemos el mejor valor para el parámetro de convergencia h , readaptando así las conocidas h -curvas que constituyen un concepto clave del HAM. Pondremos a prueba nuestro método aplicándolo a diversos ejemplos.

En el capítulo 4 extendemos la aplicación del método presentado en el capítulo anterior al caso con retardo, mostrando que siguen siendo válidos los criterios de convergencia expuestos para EDOs y que conforman el proceso de búsqueda heurística que caracteriza nuestro enfoque. Elegimos dos ejemplos de interés para su aplicación, que mostrarán la efectividad y utilidad del método en ecuaciones con retardo.

En el capítulo 5 planteamos un modelo de infección por el virus linfotrópico humano de células T de tipo I (HTLV-I), que contempla la acción del sistema inmunitario y la aparición de células oncológicas como resultado de la infección prolongada. Haremos una exploración de las características dinámicas más relevantes del modelo, estimando el parámetro R_0 , hallando soluciones oscilatorias relacionadas a un centro no lineal y considerando el efecto de saturación de los linfocitos citotóxicos. Haremos uso del MSHAM como herramienta para calcular algunas soluciones del modelo, estudiando el error de éste respecto de la solución numérica.

Finalmente, en el capítulo 6 definiremos una nueva noción de isocronía de órbitas periódicas, ligada a un parámetro determinado, en un sistema de ecuaciones diferenciales en el plano. Mediante la formulación de un sistema lineal asociado a la familia paramétrica de ciclos que llamamos sistema auxiliar, mostraremos que podemos inferir la presencia de isocronía estudiando la existencia de una órbita periódica de periodo 2π del sistema auxiliar. Este resultado lo resumimos en el Teorema 6.1. Algunos

ejemplos seleccionados van a ser mostrados para ejemplificar la aplicación del método. Abordaremos también el caso de ecuaciones diferenciales con retardo, discutiendo las dificultades que surgen de intentar extender el procedimiento que desarrollamos para hallar la órbita 2π -periódica del sistema auxiliar, que debido al retardo ahora es un sistema infinito-dimensional.

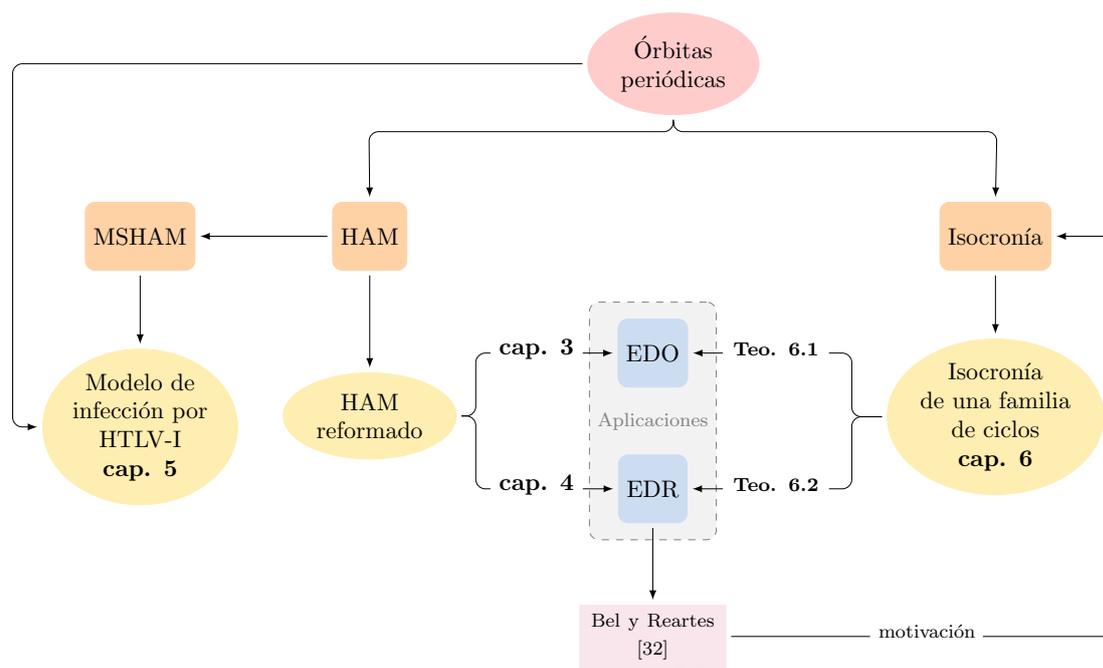


Figura 1.1: Esquema temático de la tesis.

En el desarrollo de los temas de esta tesis, se obtuvieron resultados que fueron publicados en los siguientes trabajos:

- R. Cobiaga y W. Reartes. A new approach in the search for periodic orbits. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23(11), 2013.
- R. Cobiaga y W. Reartes. Search for periodic orbits in delay differential equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(6), 2014.
- R. Cobiaga y W. Reartes. Isochronous families of limit cycles. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018(117):1–17, 2018.

- R. Cobiaga y W. Reartes. Dynamic scenario in HTLV-I infection. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 9(3):349–359, 2020.

2.1. Introducción

El Método de Análisis Homotópico (también denominado HAM que es su acrónimo inglés) es una técnica muy poderosa que permite resolver ecuaciones diferenciales no lineales. Este método fue presentado por el Dr. Shijun Liao en su tesis doctoral [127] y trabajos sucesivos [128, 131], y rápidamente se convirtió en una herramienta muy importante por la posibilidad de aplicarla a muy diversos problemas, algunos de ellos se encuentran en los siguientes trabajos [1, 3, 9, 12, 14, 28, 54, 118, 145, 148, 154, 178]. Con el HAM podemos hallar aproximaciones convergentes para soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, parciales y con retardo, entre otras. El HAM también ha sido modificado, extendido y combinado con otros métodos, con el objetivo de adaptarlo a la resolución de problemas particulares, ampliar su aplicabilidad, mejorar su eficacia o acelerar su convergencia. Los siguientes son algunos trabajos donde se aplican estas adaptaciones [29, 64, 99, 144, 151, 170, 176, 207].

Podemos resumir la idea general del método como sigue: a partir de un problema

no lineal dado, la técnica consiste en la construcción de una homotopía en un espacio de funciones que deforma la solución conocida de una ecuación lineal, elegida apropiadamente, en la solución buscada de la ecuación no lineal.

Las siguientes son algunas de las ventajas que este método presenta:

- Es aplicable a problemas altamente no lineales [133, 171].
- A diferencia de los métodos perturbativos, el HAM no depende de la introducción de parámetros pequeños o grandes al sistema [2].
- La libertad a la hora de elegir el operador lineal y la aproximación inicial nos da la posibilidad de mejorar la aproximación de la solución obtenida [70, 192].
- Se puede elegir entre diferentes bases de funciones para desarrollar la solución del problema no lineal, destacando las características del tipo de solución que se busca (periodicidad, comportamiento asintótico, etc.) [6, 156].
- Brinda un control sobre la convergencia de la serie solución a través de la inclusión de un parámetro en la homotopía denominado parámetro de control de convergencia [7, 126, 155].

El Método de Análisis Homotópico emplea la homotopía, un concepto fundamental de la topología, para reducir el problema de hallar la solución de una ecuación no lineal a resolver una serie de ecuaciones lineales más simples. Esto nos permite encontrar una aproximación en serie de funciones de la solución del sistema no lineal.

Si bien a menudo la aplicación del HAM resulta en expresiones muy largas, aún con órdenes bajos de aproximación, las altas capacidades de cálculo de las computadoras modernas y los programas de matemática simbólica disponibles, hacen posible hallar tales expresiones en pocos minutos y con una gran precisión.

El HAM es una técnica relativamente nueva y con un gran potencial. A modo de ejemplo, podemos mencionar algunos trabajos de los últimos años donde se emplea esta herramienta en sistemas dinámicos aplicados a la ciencia y la ingeniería. En [40],

los autores usan el Método de Análisis Homotópico para investigar la falla por pandeo de una tubería submarina con presencia de corrosión. Considerando tres tipos distintos de corrosión idealizada, muestran a través de ejemplos numéricos que los resultados arrojados por el HAM concuerdan muy bien con las predicciones obtenidas con otros métodos. En [161], aplican el HAM a un modelo de reacción-difusión para la dispersión espacial de células invasoras en biología, concluyendo que éste es muy superior a otros métodos analíticos debido a la presencia de un parámetro de control de la convergencia.

En [94] hacen un tratamiento analítico para el problema del flujo de Jeffery-Hamel magnetohidrodinámico con inyección/succión. Aplican con éxito el HAM y señalan una muy buena concordancia con los resultados numéricos (método de Runge-Kutta de orden 4) en todos los casos estudiados. En [121], los autores proponen un modelo para estudiar el campo de temperatura de un generador termoeléctrico y obtienen la solución mediante el Método de Análisis Homotópico. Concluyen que los resultados del HAM, comparados con los obtenidos por métodos numéricos utilizando el software COMSOL Multiphysics, presentan una alta precisión, con errores relativos de la temperatura del orden de 10^{-5} .

En [152] aplican el HAM en la búsqueda de soluciones para un modelo de dinámica viral del VIH. Utilizan las funciones de error residual y absoluto para mostrar la precisión del método. En [184], los autores analizan un modelo compartimental de transmisión de la oncocercosis con estrategias de control óptimo. Utilizan el Método de Análisis Homotópico junto con el principio del máximo de Pontryagin para derivar la existencia de una ley de control óptima de la infección.

Altaie et al. en [15] extienden el HAM a una nueva forma para obtener aproximaciones de soluciones en ecuaciones diferenciales parciales difusas (fuzzy). Prueban la técnica en ecuaciones difusas de calor y de onda, demostrando la capacidad del método. En sus conclusiones, hacen énfasis en recomendar la utilización del HAM por sobre los otros enfoques analíticos tradicionales, resaltando la rápida convergencia del método. En el artículo de Hashim et al. [97] también se extiende el Método de Análisis

Homotópico para ecuaciones diferenciales de orden fraccionario en dominio difuso. Nuevamente se resalta al HAM por sobre otros enfoques debido a la eficacia, fácil aplicación y la capacidad de controlar la región de convergencia.

Li et al. en [124] aplican un método mejorado basado en el HAM (el iHAM) para resolver ecuaciones diferenciales con no linealidades fuertes. Como aplicación, lo utilizan para obtener una solución explícita del ángulo de rotación en el caso de gran deformación de una viga en voladizo. Si bien para este problema existen soluciones exactas, éstas involucran integrales elípticas que hacen a la solución obtenida por el iHAM mucho más práctica y fácil de calcular. Por otro lado, Doeva et al. en [58], implementan tanto el HAM tradicional como el iHAM en el análisis estático de vigas apoyadas sobre cimentaciones elásticas.

Por último, también podemos nombrar el trabajo de Al-Hayani [8] donde el HAM es usado para hallar soluciones en sistemas stiff de ecuaciones ordinarias lineales y no lineales. El autor muestra la eficiencia del HAM, donde el error de este método es menor que los presentados por el método de descomposición de Adomian y los métodos numéricos.

Está claro que el Método de Análisis Homotópico, tanto en su forma tradicional como en sus múltiples variantes y adaptaciones, es una técnica analítica de gran vigencia y enorme potencialidad para atacar problemas tanto lineales como no lineales, ecuaciones ordinarias o parciales, sistemas donde los algoritmos numéricos fallan o incluso aquellos para los cuales existen soluciones exactas pero que por su forma y complejidad son poco prácticas.

En la sección 2.2 damos una descripción del HAM en su versión tradicional, enfocándonos en la búsqueda de órbitas periódicas, ya que será el objetivo principal de estudio en gran parte de esta tesis. Mostraremos las ventajas de la aplicación del método en un ejemplo. Más adelante, en el capítulo 3, propondremos una variante innovadora del HAM para la búsqueda de soluciones periódicas, introduciendo modificaciones significativas a la técnica original de Liao y comprobando la efectividad del método en ejemplos de interés.

En 2.3 explicamos brevemente en qué consiste el Método de Análisis Homotópico por múltiples etapas (MSHAM), una variación del HAM que se aplica en casos donde este último converge muy lentamente y sus soluciones no son válidas para tiempos largos. El MSHAM será una de las técnicas que usaremos en el capítulo 5 para encontrar las soluciones del modelo biológico que proponemos y analizamos en dicho capítulo.

En la sección 2.4 hablaremos de ecuaciones diferenciales con retardo (EDR), que será otro de los tópicos de interés para este trabajo. Particularmente la búsqueda y obtención de aproximaciones de las soluciones periódicas en este tipo de ecuaciones puede ser abordada con el HAM, de la misma manera que sucede con ecuaciones ordinarias. Es por esto, y considerando la relevancia fundamental que tienen este tipo de modelos para la ciencia y la ingeniería, que en el capítulo 4 adaptaremos la metodología presentada en el capítulo 3 para el caso con retardo, mostrando la efectividad de la técnica a través de varios ejemplos.

Finalmente, en 2.4.1, presentamos la noción de isocronía de una familia de órbitas periódicas respecto de un parámetro, una idea que está conectada con las ecuaciones con retardo a través de un artículo impulsor, del cual tomamos un resultado fundamental como punto de partida para construir nuestro concepto de isocronía. Posteriormente, en el capítulo 6 desarrollaremos un método que nos permite decidir sobre la isocronía de las soluciones en un sistema de ecuaciones ordinarias o con retardo en el plano.

2.2. Descripción general del HAM

En lo que sigue damos una breve descripción del HAM en su versión tradicional, comenzando por su forma general y luego dirigido a la búsqueda de soluciones periódicas.

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria

$$x' = f(x, t) \tag{2.1}$$

sujeta a la condición inicial $x(0) = y_0$, donde $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función no lineal. La variedad de problemas que pueden ser atacados con el HAM hace imposible definir la forma general que debe tener f . La ecuación a tratar puede ser una ecuación diferencial, integral, integro-diferencial, funcional, etc. Por eso aquí vamos a limitarnos a nombrar una función no lineal, en los capítulos siguientes se verán las aplicaciones que nos interesan, principalmente orientadas a la búsqueda de órbitas periódicas. Para aplicar el HAM es conveniente reescribir (2.1) en términos de un operador no lineal, cambiando x por ϕ , la ecuación anterior se transforma en

$$\mathcal{N}[\phi] = 0, \quad (2.2)$$

siendo \mathcal{N} el operador no lineal correspondiente.

Eligiendo una aproximación inicial $x_0(t)$ y un operador lineal \mathcal{L} con la propiedad

$$\mathcal{L}[y] = 0 \quad \text{cuando} \quad y = 0, \quad (2.3)$$

podemos construir la homotopía

$$\mathcal{H}_q[\phi] = (1 - q)\mathcal{L}[\phi - x_0] - qh\mathcal{N}[\phi]. \quad (2.4)$$

Aquí $q \in [0, 1]$ es el parámetro de la homotopía y h es el llamado parámetro de control de convergencia del que hablaremos más adelante.

El objetivo del método es hallar una función $\phi(t, q)$, analítica en la variable q , que verifique

$$\mathcal{H}_q[\phi] = 0 \quad \text{para todo} \quad q \in [0, 1] \quad (2.5)$$

y además verifique la condición inicial para todo q , es decir $\phi(0, q) = y_0$.

Si existe tal ϕ , cuando $q = 0$ la ecuación anterior se reduce a

$$\mathcal{H}_0[\phi] = \mathcal{L}[\phi - x_0] = 0, \quad (2.6)$$

que tiene la solución $\phi(t, 0) = x_0(t)$.

Por otro lado cuando $q = 1$ y $h \neq 0$ se tiene

$$\mathcal{H}_1[\phi] = -h\mathcal{N}[\phi] = 0 \Rightarrow \mathcal{N}[\phi] = 0. \quad (2.7)$$

De esta manera $\phi(t, 1)$ es solución de la ecuación (2.1) y verifica la condición inicial $\phi(0, 1) = y_0$. Por lo tanto, cuando el parámetro q varía de 0 a 1 la homotopía deforma continuamente la función ϕ desde la aproximación inicial x_0 a la solución buscada de la ecuación original.

Hemos supuesto que la función ϕ es analítica en q por lo tanto la podemos desarrollar en serie de potencias

$$\phi(t, q) = \sum_{m=0}^{+\infty} x_m(t) q^m \quad (2.8)$$

donde $x_m(t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(t, q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}$.

Para hallar los coeficientes x_m reemplazamos la serie anterior en (2.5), derivando $m - 1$ veces con respecto al parámetro q y evaluando en $q = 0$ obtenemos las ecuaciones

$$\mathcal{L}[x_m - (1 - \delta_{1m})x_{m-1}] = \frac{h}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\phi]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0}, \quad m = 1, \dots, \quad (2.9)$$

donde δ es la delta de Kronecker. A estas ecuaciones Liao las llama *ecuación de deformación de orden cero* para el caso especial de $m = 1$, y *ecuaciones de deformación de alto orden* para $m = 2, \dots$. Notar que de estas ecuaciones se deduce que los distintos coeficientes de (2.8), es decir los x_m , son funciones de t que también dependen algebraicamente de h . El valor de este parámetro será determinado después de manera que la serie de ϕ converja. En la siguiente sección vamos a ilustrar esto con un ejemplo y se podrá observar la dependencia de h en estos términos.

Vemos que, al evaluar en $q = 0$, el lado derecho de la ecuación (2.9) solo depende de los x_k para $k < m$, esto nos permite hallar x_m conociendo los coeficientes x_1, \dots, x_{m-1} . Por lo tanto resolviendo sucesivamente las ecuaciones que resultan de (2.9) para los diferentes órdenes, vamos hallando los términos de la serie de ϕ hasta el orden que queremos.

Llamemos x_s a la función ϕ en $q = 1$, es decir $x_s = \sum_{m=0}^{+\infty} x_m$. Tenemos el siguiente teorema de convergencia

Teorema 2.1. Sean x_m las soluciones de las ecuaciones de deformación (2.9) y x_0 una función que verifica la condición inicial $x_0(0) = y_0$. Sea \mathcal{L} un operador lineal con la

propiedad (2.3). Supongamos que la serie $\sum_{m=0}^{+\infty} x_m$ converge a x_s , supongamos además que la serie $\sum_{m=0}^{+\infty} \mathcal{L}[x_m]$ también converge. Si $\mathcal{N}[\phi]$ es analítico en q para $q \in [0, 1]$, entonces la función x_s verifica la ecuación $\mathcal{N}[x] = 0$ y la condición inicial $x_s(0) = y_0$.

Para la demostración, ver [134]. El teorema anterior nos muestra la relevancia de la convergencia de la serie de x_s obtenida con el HAM. Mediante la introducción del parámetro h en (2.4), dicha serie dependerá de h y encontrando un valor óptimo para este parámetro podemos controlar la convergencia de la serie solución, abordamos este punto en la subsección 2.2.2.

2.2.1. Búsqueda de órbitas periódicas

Como se mencionó antes, el Método de Análisis Homotópico es una herramienta muy flexible que nos permite aproximar la solución de una gran variedad de ecuaciones. En esta tesis nos interesan especialmente los sistemas que presentan soluciones oscilatorias, es por eso que en esta sección vamos a introducir las variaciones que permiten al HAM enfocarse en la búsqueda de este tipo de soluciones, siguiendo el esquema desarrollado por Liao [129]. Para lograr esto elegiremos un operador lineal \mathcal{L} y una aproximación inicial x_0 que permitan obtener coeficientes x_m de (2.8) periódicos en t . Dos magnitudes que caracterizan a una órbita periódica son su frecuencia y su amplitud, ω y a respectivamente. Introduciendo previamente estas cantidades en la ecuación mediante cambios de variables, finalmente obtendremos tres series de potencias en q : la serie solución del problema normalizado, una serie que convergerá a la frecuencia ω de la órbita original y otra que convergerá a su amplitud a . Así podemos reconstruir la solución de (2.1) con la frecuencia y amplitud correctas.

De acuerdo con lo dicho, supongamos por lo tanto que la ecuación (2.2) tiene una solución periódica de frecuencia ω y amplitud a . Podemos reescribir esta ecuación normalizando la frecuencia y la amplitud

$$\mathcal{N}[ax(t/\omega)] = 0. \quad (2.10)$$

Definiendo

$$\begin{aligned}\phi(t, q) &= x_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} x_m(t) q^m, \\ \Omega(q) &= \omega_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m q^m, \\ A(q) &= a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m q^m,\end{aligned}\tag{2.11}$$

y considerando que el operador \mathcal{N} de (2.10) depende también de Ω y A , la homotopía (2.4) se transforma en

$$\mathcal{H}_q[\phi, \Omega, A] = (1 - q)\mathcal{L}[\phi - x_0] - q h \mathcal{N}[\phi, \Omega, A].\tag{2.12}$$

Vamos a continuar con un ejemplo académico para comprender mejor la aplicación del método. Consideremos el oscilador de Rayleigh

$$y''(s) - (\beta - y'(s)^2)y'(s) + y(s) = 0,\tag{2.13}$$

que como es sabido presenta una bifurcación de Hopf supercrítica para $\beta = 0$. Llamamos ω a la frecuencia y a a la amplitud del ciclo límite que vamos a aproximar, para un cierto valor de $\beta > 0$, donde las condiciones iniciales de (2.13) serán $y(0) = a$, $y'(0) = 0$. Bajo las transformaciones $t = \omega s$ e $y = ax$ la ecuación se convierte en

$$\omega^2 x''(t) - \omega(\beta - \omega^2 a^2 x'(t)^2)x'(t) + x(t) = 0.\tag{2.14}$$

Esta ecuación diferencial tiene una solución $x(t)$ de frecuencia y amplitud 1, y verifica las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

El operador no lineal \mathcal{N} en este caso es

$$\mathcal{N}[\phi, \Omega, A] = \Omega^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Omega \left(\beta - \Omega^2 A^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right) \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi\tag{2.15}$$

Como estamos buscando una solución periódica en torno al origen tomamos la base de soluciones $\{\cos(nt), \text{sen}(nt), n = 1, 2, \dots\}$ y el operador lineal

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \phi,\tag{2.16}$$

con la propiedad

$$\mathcal{L}[c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)] = 0, \quad (2.17)$$

para c_1 y c_2 coeficientes cualquiera.

Observación 2.1. *Cuando la oscilación no es en torno al 0 haciendo una traslación se puede llevar al origen. Esta traslación se representará con un término δ , al que también hay que desarrollar en serie de potencias de q .*

Elegimos la aproximación inicial

$$x_0(t) = \cos(t). \quad (2.18)$$

De (2.9) para $m = 1$, (2.18) y (2.11) podemos despejar x_1 en función de ω_0 y a_0 mediante la ecuación

$$\mathcal{L}[x_1] = h \mathcal{N}[\phi, \Omega, A]. \quad (2.19)$$

Como las funciones $\sin(t)$ y $\cos(t)$ pertenecen al núcleo del operador lineal \mathcal{L} debemos elegir los valores de ω_0 y a_0 para que los coeficientes de estas funciones en el segundo miembro de la ecuación se anulen, de esta manera evitamos obtener términos no periódicos en x_1 . Por lo tanto resulta el sistema

$$1 - \omega_0^2 = 0, \quad \beta \omega_0 - \frac{3}{4} a_0^2 \omega_0^3 = 0, \quad (2.20)$$

que nos da $\omega_0 = 1$ y $a_0 = 2\sqrt{\beta/3}$.

Si tomamos, por ejemplo, $\beta = 0,2$ la ecuación (2.19) tiene la solución

$$x_1(t) = -\frac{h}{120} \sin(3t) + c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t). \quad (2.21)$$

Elegimos c_1 y c_2 de manera que $x_1(0) = 0$ y $x_1'(0) = 0$, luego

$$x_1(t) = \frac{1}{40} h \sin t - \frac{1}{120} h \sin 3t. \quad (2.22)$$

Volviendo a (2.9) calculamos ω_1 y a_1

$$\omega_1 = \frac{h}{400}, \quad a_1 = -\frac{h}{200\sqrt{15}}, \quad (2.23)$$

y de la misma manera obtenemos

$$x_2(t) = h \left(\frac{1}{40} + \frac{401h}{16000} \right) \text{sen}(t) - \frac{h^2}{960} \cos(t) - h \left(\frac{1}{120} + \frac{401h}{48000} \right) \text{sen}(3t) + \frac{h^2}{800} \cos(3t) - \frac{h^2}{4800} \cos(5t). \quad (2.24)$$

Repetiendo el procedimiento hallamos los sucesivos términos de las series de (2.11) que verifican $x_i(0) = 0$ y $x'_i(0) = 0$, por lo tanto se verifican las condiciones iniciales para todo $q \in [0, 1]$

$$\phi(0, q) = 1, \quad \left. \frac{\partial \phi(t, q)}{\partial t} \right|_{q=0} = 0. \quad (2.25)$$

Vemos que cuando $q = 0$ resulta

$$\phi(t, 0) = x_0(t), \quad \Omega(0) = \omega_0, \quad A(0) = a_0, \quad (2.26)$$

y cuando $q = 1$

$$\phi(t, 1) = x(t), \quad \Omega(1) = \omega, \quad A(1) = a. \quad (2.27)$$

Lo que significa que ϕ varía continuamente de la aproximación inicial que dimos a la solución buscada con frecuencia ω y amplitud a .

En este caso hemos aplicado el HAM directamente a la ecuación de segundo orden (2.13), pero también es posible transformarla en un sistema de dos ecuaciones y trabajar vectorialmente. En tal caso dicha ecuación, luego de aplicar las transformaciones para normalizarla en frecuencia y amplitud, resulta

$$\begin{aligned} \omega y'_1(t) &= y_2(t), \\ \omega y'_2(t) &= \beta y_2(t) - \alpha^2 y_2(t)^3 - y_1(t). \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.2.2. Parámetro de control de convergencia

Una vez obtenida la aproximación de $x(t)$, vemos que los coeficientes dependen del parámetro h que fue introducido cuando definimos la homotopía (2.4). Para determinar el valor de h podemos utilizar ciertas cantidades físicas relevantes en la ecuación, como por ejemplo la frecuencia y la amplitud del ciclo límite (ω y a). Es claro que

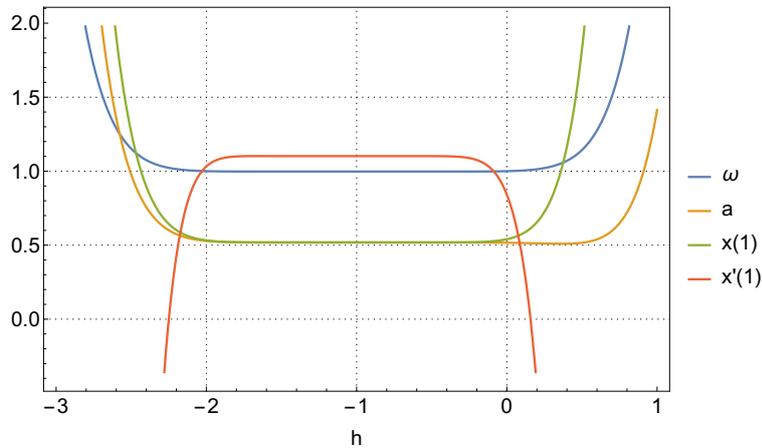


Figura 2.1: h -curvas de la ecuación (2.14), orden de aproximación 10 y $\beta = 0,2$.

si la serie $\phi(t, 1) = x(t)$ es convergente entonces estas cantidades físicas no deberían depender de h .

Consideramos por lo tanto al parámetro h como una variable independiente y graficamos, por ejemplo, ω en función de h . Si la solución es única y el orden de la aproximación es lo suficientemente grande, entonces existe un segmento aproximadamente horizontal en el gráfico donde ω se mantiene cercana a un valor constante. De esta manera podemos elegir cualquier valor de h en esta región para asegurar la convergencia de la solución. Al parámetro h lo llamamos parámetro de control de convergencia y a este tipo de gráficos los llamamos h -curvas.

En la Figura 2.1 se muestran varias h -curvas para la ecuación de Rayleigh con $\beta = 0,2$ y la aproximación de orden 10. Se observa claramente la región donde las curvas de estas cantidades elegidas, que son polinomios en h , se comportan de manera aproximadamente constante. En las Figuras 2.2 y 2.3 se muestra la comparación entre la aproximación de orden 10 obtenida por el HAM, para el valor de $\beta = 0,2$, y la solución numérica (calculada con las rutinas del programa Mathematica de Wolfram), tomando $h = -1$ en la región de validez de las h -curvas observadas.

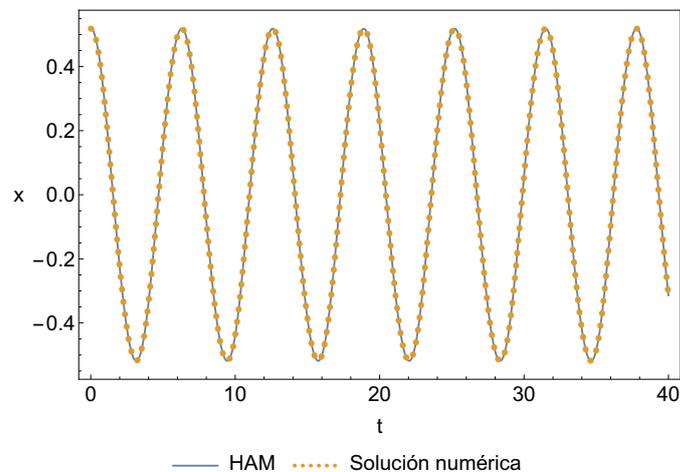


Figura 2.2: HAM de orden 10 de la ecuación de Rayleigh para $\beta = 0,2$.

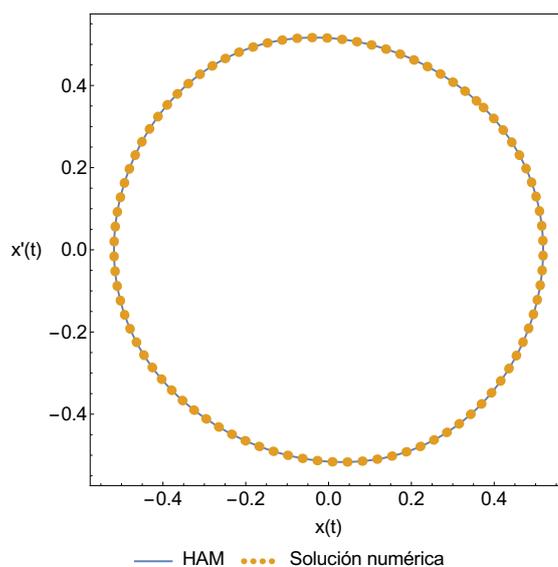


Figura 2.3: HAM de orden 10 de la ecuación de Rayleigh para $\beta = 0,2$ en el plano $x-x'$.

2.3. Método por etapas múltiples (MSHAM)

En esta sección exponemos una descripción sintética del Método de Análisis Homotópico por etapas múltiples. Esta variante del HAM busca obtener expresiones analíticas que aproximen a la solución, periódica o no, en un intervalo de tiempo más amplio, para aquellos casos en los que se necesita una solución adecuada para tiempos

largos y no se puede obtener con el HAM en un orden razonable.

En la práctica se calculan los términos sucesivos de la serie sólo hasta un cierto orden m , es decir la solución obtenida es una aproximación

$$\mathbf{x}(t) \approx \sum_{k=0}^m \mathbf{x}_k(t, h^*), \quad (2.29)$$

eligiendo el valor del parámetro de control de convergencia $h = h^*$ a través de la observación de las h -curvas.

Si bien hay una muy extensa variedad de métodos, analíticos y numéricos, que nos llevan a soluciones aproximadas para una amplia gama de problemas lineales y no lineales, es común que muchos de ellos tengan evidentes desventajas. Algunas de ellas los hacen poco convenientes para ser aplicados en cierto tipo de ecuaciones, aquellas con soluciones caóticas, problemas con no linealidades fuertes o ecuaciones diferenciales de orden fraccionario son un ejemplo de esto. A pesar de que el HAM es un método muy efectivo y de una gran precisión, no está exento de estas mismas desventajas.

Efectivamente, el carácter local del HAM hace que en algunos casos la solución (2.29) sea válida en un intervalo temporal demasiado pequeño y la convergencia se vuelva muy lenta. Esto es, por supuesto, especialmente perjudicial en problemas que demandan una duración temporal extensa. En el capítulo 5 estudiamos un ejemplo de interés en el que vemos cómo la aproximación obtenida con el HAM primero coincide con la numérica y cuando t crece más allá de un cierto valor la primera se separa rápidamente, tomando valores cada vez más grandes. Otros ejemplos se pueden encontrar en [100, 104, 205], donde se muestran gráficos de las soluciones del HAM que tienen comportamientos similares a lo observado en la Figura 5.2.

Para hacer frente a este tipo de situaciones se ha introducido una modificación al HAM, muy elemental pero a la vez eficaz, denominada Método de Análisis Homotópico por etapas múltiples (Multi-stage Homotopy Analysis Method o MSHAM, también es llamado Multi-step Homotopy Analysis Method). Esta técnica ha sido aplicada en diversos casos, ver por ejemplo [13, 57, 63, 77, 87, 95, 165, 172, 207], en todos estos trabajos los autores destacan la precisión y la fiabilidad del MSHAM al comparar sus re-

sultados con aquellos obtenidos mediante métodos numéricos en periodos de tiempo grandes. En particular, en [57] se realiza un estudio intensivo del impacto de la variación del parámetro de control h , considerando aspectos como el error, el tiempo de ejecución o el paso temporal en varios modelos de sistemas de energía.

El principio del MSHAM es muy simple, procedemos a dividir el intervalo de tiempo $[0, T)$ en el que queremos encontrar la solución en N subintervalos de igual longitud $[t_0 = 0, t_1), [t_1, t_2), \dots, [t_{N-1}, t_N = T)$ y aplicamos el HAM en cada uno de ellos. Para esto elegimos como aproximación inicial x_0^j para el segmento $[t_{j-1}, t_j)$, $j = 1, \dots, N$, el valor de la aproximación encontrada en el intervalo anterior evaluada en el extremo final, es decir $x_0^j(t) = x_m^{j-1}(t_{j-1})$ donde m es el orden de aproximación elegido. De esta manera conservamos la continuidad y sólo queda empalmar las soluciones sucesivamente. Con respecto a la elección del valor del parámetro de control de convergencia h esto lo hacemos al comienzo, observando las h -curvas obtenidas para la solución del primer intervalo $[0, t_1)$. Una vez elegido el h^* de esta forma lo utilizamos en todos los intervalos porque hemos observado, en los ejemplos que tratamos, que la región de convergencia de la serie se mantiene.

2.4. Introducción al HAM para ecuaciones diferenciales con retardo e isocronía de soluciones

En esta sección comenzaremos considerando un caso particular de las ecuaciones diferenciales funcionales, puntualmente hablaremos de la aplicación del Método de Análisis Homotópico a las ecuaciones con retardo. Como consecuencia del tratamiento de las ecuaciones con retardo vamos a citar un teorema interesante que introduce la noción de bifurcación isocrónica. Este resultado encauzará nuestra investigación hacia el concepto de familia de órbitas periódicas isocrónicas, como mencionaremos en la subsección 2.4.1.

Cuando el fenómeno a modelar no solo está influenciado por el estado presente

sino también por el pasado se emplean las ecuaciones diferenciales con retardo (EDRs) [67, 93, 183]. A diferencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias, donde la condición inicial es el valor de la solución en el punto inicial, en las EDRs esta condición es una función inicial definida sobre un intervalo de tiempo finito.

Otra diferencia fundamental entre las EDOs y las EDRs es que en éstas últimas se pueden presentar escenarios aún más complejos, como comportamientos periódicos y caos, aún en el caso de primer orden [185]. El retardo temporal ofrece una manera de representar más fielmente aquellos fenómenos reales con memoria y serán una aplicación de gran interés a lo largo de esta tesis.

Las ecuaciones diferenciales con retardo son un caso particular de las ecuaciones diferenciales funcionales. Estas últimas son de la forma

$$x'(t) = F(t, x(t + \cdot)), \quad (2.30)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $x(t + \cdot): [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la función continua $x(t + \theta)$ con $-\tau \leq \theta \leq 0$ y $F: D \subset \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua.

En el caso de ecuaciones diferenciales con retardo, el funcional F es de la forma

$$F(t, x(t + \cdot)) = h(t, x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), \dots) \quad (2.31)$$

donde $h: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{nk} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y hay una constante τ tal que $0 < \tau_i \leq \tau$, $i = 1, \dots, k$. Los τ_i son los retardos de la ecuación, en esta tesis vamos a considerar ecuaciones diferenciales con un único retardo τ . La aparente simplicidad del sistema no debe engañarnos, el sistema es todavía infinito-dimensional y su espacio de fases es $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$.

El HAM se ha utilizado también para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales con retardo (ver por ejemplo [14, 27, 110, 122, 181, 204]). En la exploración de soluciones periódicas utilizando el HAM para EDRs, se sigue un procedimiento análogo al descrito en la sección 2.2. Sin embargo, es importante destacar que se incorpora además el parámetro del retardo τ en la formulación de la ecuación diferencial.

Por otro lado, este método también constituye un instrumento teórico muy útil en el análisis de las propiedades dinámicas de un sistema. A continuación, vamos a men-

cionar un ejemplo particular de ecuaciones con retardo. Éste nos servirá tanto para ilustrar la forma que tiene una EDR, como para remitirnos a una importante cualidad de algunas órbitas oscilatorias, la isocronía.

En el trabajo [32] nos encontramos con una aplicación del HAM como herramienta teórica en un caso específico de EDRs. Los autores de este artículo inician considerando la ecuación diferencial de un movimiento unidimensional bajo la acción de una fuerza conservativa, es decir

$$x'' = -g(x, \beta), \quad (2.32)$$

siendo β un parámetro adicional. Si \hat{x} es un equilibrio de la ecuación y $\partial g / \partial x(\hat{x}, \beta) > 0$, entonces \hat{x} es un centro. En diversos trabajos (ver [38, 44, 143, 175]) se abordó el caso para el cual este centro es isocrónico, esto significa que todas las órbitas periódicas en el entorno de \hat{x} tienen la misma frecuencia.

Posteriormente, en el trabajo citado se agrega a (2.32) un término lineal proporcional a la diferencia entre la posición en el instante t y la posición retardada para un retardo τ , es decir $\gamma f(x(t) - x(t - \tau))$. El sentido de esta modificación es hacer que el término con retardo rompa el centro dando lugar a una bifurcación de Hopf para β o γ .

Recapitulando, los autores consideran una ecuación de la forma

$$x'' + g(x, \beta) = \gamma f(x - x_\tau), \quad (2.33)$$

donde la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es analítica, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, con $\tau > 0$, x_τ es la función retardada definida por $x_\tau(t) = x(t - \tau)$ y $\gamma \neq 0$. A través del HAM probarán la isocronía de las trayectorias periódicas que surgen de la bifurcación de Hopf.

Observación 2.2. *En el desarrollo de esta tesis trabajaremos con EDRs en varias oportunidades, notaremos $x_\tau(t) = x(t - \tau)$ para referirnos a la función retardada.*

El artículo antes mencionado resulta un disparador para el abordaje de un tema que atrajo especialmente nuestro interés, la isocronía de una familia de soluciones periódicas. En la siguiente subsección introducimos este concepto, el que será desarrollado en profundidad en un capítulo posterior.

2.4.1. Isocronía

Una noción fundamental que surge del estudio del movimiento periódico es la isocronía, que se refiere a la constancia del periodo de oscilación en un sistema. Este concepto ha sido ampliamente estudiado en décadas recientes [38, 43, 44, 85, 102], sin embargo la idea de la independencia del periodo de la oscilación respecto de la amplitud es mucho más antigua. De hecho fue Galileo Galilei uno de los primeros en estudiar y describir la isocronía en el péndulo, un resultado que tendría aplicaciones muy importantes en la medición del tiempo [101].

Para sistemas bidimensionales cabe mencionar los llamados centros isocrónicos, se trata de centros para los cuales todas las órbitas tienen la misma frecuencia (ver por ejemplo [16, 38, 44, 59, 80, 102, 143, 149, 159, 175]). Relacionados a los centros isocrónicos están los focos isocrónicos, en este caso no hay órbitas periódicas y se estudia el tiempo de retorno a una sección transversal a la órbita en el foco (ver [17, 84, 86, 174]).

En el artículo de Gasull et al. [81] se estudia el periodo de las órbitas emergentes de ciertas bifurcaciones, este es un caso particular de una familia de ciclos dependientes de un parámetro. Dichas familias han sido estudiadas por ejemplo en los trabajos de Duff [62] y Perko [164]. Andersen y Geer [19] también analizaron los ciclos límite de ecuaciones particulares.

En el trabajo de Bel y Reartes [32] se aborda el tema de la isocronía de una bifurcación de Hopf para un caso particular de ecuaciones diferenciales con retardo. En dicho artículo se utiliza el Método de Análisis Homotópico como una herramienta teórica para probar que en las ramas de la bifurcación, que emergen debido al retardo del sistema, todos los ciclos tienen la misma frecuencia, esto es lo que los autores llaman bifurcación isocrónica.

El resultado principal de [32] es el siguiente.

Teorema 2.2. *Consideremos la ecuación diferencial (2.33) con $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ analítica y $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , $\gamma \neq 0$ y $\tau > 0$. Supongamos que la ecuación tiene una bifurcación de Hopf en el valor μ_0 (μ es el parámetro de bifurcación β o γ) y que $f(0) = 0$ y*

$f'(0) \neq 0$. Supongamos además que para algún valor del parámetro de control de convergencia h las series obtenidas para soluciones periódicas con el HAM convergen. Entonces, en un entorno de la bifurcación, los ciclos emergentes son isocrónicos. Además, la frecuencia de estas soluciones coincide con la frecuencia en el punto de bifurcación ω_{μ_0} .

El teorema anterior establece la isocronía de las órbitas que surgen de la bifurcación para un tipo específico de ecuaciones con retardo, y es válido bajo ciertas condiciones de no degeneración y de convergencia de las soluciones periódicas obtenidas con el HAM. Partiendo de la utilidad de este resultado, surge la cuestión más general de cuándo las soluciones periódicas de un sistema son isocrónicas respecto de un parámetro determinado, es decir, cuándo la frecuencia de dichas soluciones se mantiene constante al variar este parámetro.

El estudio de la frecuencia de las órbitas de una ecuación diferencial es un problema de interés recurrente, sin embargo presenta desafíos tanto teóricos como prácticos. La determinación de expresiones analíticas del periodo en problemas no lineales es una tarea muy difícil de abordar y un tema de constante estudio [51, 52, 78, 79, 113]. La variación de los parámetros que presenta el sistema pueden provocar cambios drásticos en el comportamiento de las soluciones, y la relevancia de la isocronía también es una cuestión de creciente interés en campos como la física, la ingeniería o la biología, donde la sincronización de las soluciones periódicas son fundamentales.

Por lo expuesto anteriormente nos planteamos la problemática de determinar bajo qué condiciones las órbitas periódicas de un sistema mantienen su frecuencia cuando cambia un parámetro, esto lo desarrollamos en el capítulo 6 de esta tesis.

2.5. Síntesis y anticipo

En la versión original del HAM de Liao, se introducen dos parámetros ω y a mediante cambio de variables, representando la frecuencia y la amplitud de la solución. Posteriormente se introduce un h en la construcción de la homotopía, que es un pará-

metro que busca controlar la región de validez de la solución. El método nos permite obtener tres series en potencias del parámetro de la homotopía, a saber, la de la solución periódica, la de su frecuencia ω y la de su amplitud a . Por último se determina el valor de h , mediante el análisis de las denominadas h -curvas, para el cual estas tres series convergen y permiten construir la aproximación de la solución buscada.

Hemos hablado de la eficacia y la flexibilidad del HAM como herramienta semi-análítica para hallar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, parciales o funcionales, tanto lineales como no lineales, entre otras. Las distintas bases en las cuales podemos desarrollar dichas soluciones y la potencia del método nos permiten encontrar soluciones aproximadas a muy diversos tipos de órbitas, entre ellas las órbitas periódicas, que constituyen una parte fundamental del análisis de la dinámica del sistema estudiado modelado por las ecuaciones diferenciales correspondientes.

En esta tesis, propondremos una modificación innovadora del Método de Análisis Homotópico de Liao, enfocada específicamente en la búsqueda de órbitas periódicas. Nuestra modificación se basa en la incorporación de la frecuencia de la solución periódica buscada, representada por el parámetro ω , de una manera que difiere significativamente de la metodología original.

En nuestro enfoque, sugerimos una redefinición de la introducción del parámetro ω . A diferencia de la versión original, no desarrollaremos la frecuencia ω en una serie de potencias del parámetro de la homotopía. En cambio, nos vamos a enfocar en encontrar una única serie de potencias para la solución periódica, la cual ahora dependerá de ω y del parámetro de control h . Así mismo plantearemos un procedimiento a seguir para elegir valores de ω y h que nos lleven a la aproximación de la solución periódica buscada, en ecuaciones diferenciales ordinarias primero (capítulo 3) y posteriormente en ecuaciones con retardo (capítulo 4).

Otro punto que resulta de nuestro interés son los modelos matemáticos de interpretación biológica. En esta tesis vamos a plantear un modelo de infección por el virus linfotrópico humano de células T de tipo I (HTLV-I). Partiendo de los modelos en epidemiología, en los cuales las variables del sistema representan las diferentes po-

blaciones de individuos que intervienen en el contagio, en nuestro sistema las variables de estado serán las poblaciones de células sanguíneas relevantes en la extensión de la infección en el cuerpo del huésped. Con el objetivo de proporcionar una visión más completa de la dinámica de la infección, involucramos seis poblaciones celulares interdependientes, el posible desarrollo de una de las enfermedades más graves asociadas al virus (la leucemia de células T del adulto), y la respuesta inmunitaria del organismo frente al virus y al cáncer.

Para abordar este sistema complejo, vamos a emplear la variante del HAM llamada HAM por múltiples etapas, demostrando su eficacia y versatilidad al encontrar soluciones aproximadas del sistema. Desde una perspectiva biológica, el modelo que planteamos se enfocará en los aspectos más cruciales de la infección por el HTLV-I. Así mismo buscaremos ofrecer una interpretación de los resultados, respaldada por la literatura científica pertinente, a pesar de los desafíos inherentes a la interpretación biológica de un modelo matemático.

En otro orden de ideas, vamos a introducir un concepto destacado en el estudio de las trayectorias periódicas de un sistema en el plano, la isocronía de una familia de ciclos paramétricos. Enfocándonos en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en un principio, examinaremos el carácter isocrónico de las soluciones a través del estudio de un sistema lineal auxiliar cuyos coeficientes son periódicos. El objetivo será establecer criterios precisos para decidir sobre la isocronía de una familia de órbitas dependientes de un parámetro en un amplio rango de ecuaciones de segundo orden no lineales ordinarias. Y luego extenderemos estos criterios para el caso con retardo, buscando ofrecer resultados teóricos sólidos para la identificación y predicción de la isocronía, realizado en el capítulo 6.

Búsqueda heurística de órbitas periódicas

3.1. Introducción

El estudio de las órbitas periódicas en sistemas dinámicos modelados por ecuaciones diferenciales ha sido de permanente importancia desde sus inicios. Ésto ocurre tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Basta mencionar la teoría del índice, la teoría de Poincaré–Bendixon o el célebre problema dieciseisavo de Hilbert para comprobar la enorme repercusión de este tema en el ámbito de las matemáticas y sus aplicaciones ([89, 92, 114, 117, 187]).

Las soluciones periódicas constituyen un punto fundamental en la comprensión y el control del comportamiento de los sistemas dinámicos, y su análisis resulta importante en muy diversos campos de la ciencia. Desde las trayectorias de los cuerpos celestes hasta el movimiento del péndulo o las características de muchos de los procesos biológicos de los seres vivos, la ubicuidad de las oscilaciones en la naturaleza y la ingeniería hacen del comportamiento oscilatorio uno de los conceptos primarios que se estudian cuando se busca entender la evolución de un sistema.

Incluso en presencia de caos, situación que en principio involucra un desarrollo aperiódico e impredecible a corto plazo, se ha comprobado que las órbitas periódicas subyacentes constituyen una estructura sobre la que se sostienen los atractores caóticos [50], por lo que su comprensión es de fundamental importancia para entender el patrón caótico del sistema. Así mismo, identificar las órbitas periódicas inestables inmersas en el mar caótico es especialmente útil cuando se busca controlar el caos. La actividad sísmica, la predicción climática, el crecimiento de poblaciones, la arritmia cardíaca, el comportamiento fluctuante de la economía y las vibraciones irregulares en sistemas mecánicos son algunas de las aplicaciones de estos procedimientos de control [20, 66, 72, 76, 140, 179].

La necesidad de encontrar expresiones explícitas de las órbitas ha motivado el desarrollo de diversos métodos. Entre los métodos perturbativos podemos nombrar el método de Poincaré-Lindstedt, el de averaging y el de escalas múltiples [68, 177, 197]. Los métodos basados en el balance de energía, la técnica de iteración variacional y el método de descomposición de Adomian [105, 153, 158] también son herramientas usualmente aplicadas en la búsqueda de soluciones oscilatorias.

Cada procedimiento presenta ventajas y desventajas, es por esto que la elección de un método específico está sujeta a las características del sistema a estudiar. Una herramienta que ha sido ampliamente utilizada en diversas situaciones, debido a su flexibilidad y a su alta eficiencia, es el Método de Análisis Homotópico de Liao [130, 131]. Como ejemplos de algunas de sus aplicaciones, podemos nombrar los trabajos de Chen y Liu, donde el HAM es utilizado para aproximar el ciclo límite de la ecuación de van der Pol [42] y las oscilaciones de un perfil aerodinámico en un sistema aeroelástico [41]. En [199], Wang et al. lo usan para encontrar soluciones ondulatorias de la ecuación mKdV. Pirbodaghi et al. [167] obtienen soluciones para la ecuación de Duffing no forzada y no amortiguada con términos cúbicos y quinticos mediante el Método de Análisis Homotópico y la técnica de Homotopía-Padé. En el artículo de Bel et al. [33] se emplea el HAM para hallar ciclos alrededor de un centro para el péndulo simple. Finalmente, Cui et al. [49] utilizan el método para resolver ecuaciones oscilantes periódicas

no suaves con un término de valor absoluto.

En todos estos casos, siguiendo el espíritu del método de Poincaré–Lindstedt [109], los sucesivos términos de la solución se encuentran imponiendo condiciones que aseguren la anulación de los términos seculares en las soluciones del operador lineal elegido. Una vez construida una aproximación de cierto orden se estudia su comportamiento en función del parámetro h , éste es el rasgo distintivo del método. En el capítulo 2 dimos una versión abreviada de este procedimiento.

En la metodología propuesta, que también está basada en el HAM, procedemos de la siguiente manera: encontramos primero una solución formal que depende de dos parámetros, ω y h . Luego estudiamos la expresión obtenida con el fin de determinar los valores de dichos parámetros, si los hay, para los cuales la serie converge. Luego, evaluando la expresión en esos valores de los parámetros, finalmente tenemos la solución.

Es importante destacar que esta modificación no invalida la efectividad del Método de Análisis Homotópico de Liao, sino que agrega una dimensión novedosa a su aplicabilidad. La inclusión de la frecuencia ω como una variable independiente dentro de la serie de potencias de la solución permite una mayor flexibilidad y le confiere un carácter más espectral a la búsqueda de órbitas periódicas, más aún cuando conviven múltiples soluciones periódicas de distintas frecuencias.

En la sección 3.2, partiendo de la versión del HAM para hallar soluciones periódicas, introducimos una modificación al método que nos lleva a encontrar una solución dependiente de dos parámetros (ω y h), en lugar de sólo una solución que dependa de h como en la versión tradicional. Aquí también enumeramos algunas pautas a seguir para orientar el método a resultados más adecuados y precisos. En la subsección 3.2.1, explicamos cómo hallar los valores de h y ω de la solución, minimizando la desviación media cuadrática y analizando los gráficos de algunas expresiones relevantes, de una manera análoga al estudio de las h -curvas.

En la sección 3.3, usamos cuatro ejemplos académicos para probar el método en diferentes tipos de trayectorias, de esta manera evaluamos los resultados en un centro

no lineal, en el caso de un único ciclo límite y cuando hay presencia de varios ciclos con diferente estabilidad.

Finamente en la sección 3.4 presentamos un ejemplo en dimensión tres, con el propósito de profundizar en las limitaciones del método y en cómo se puede proceder en estos casos. También analizamos los resultados obtenidos por este HAM cuando es empleado en una región donde no hay soluciones periódicas.

Gran parte de los resultados presentados en este capítulo se encuentran publicados en el trabajo [45].

3.2. Descripción del Método: HAM reformado

En el capítulo 2 hicimos una descripción del HAM como lo presenta Liao [130], haciendo incapié en la búsqueda de órbitas periódicas. En esta sección vamos a presentar el método que proponemos, que en esencia es una reformulación del HAM para encontrar soluciones periódicas. Primeramente introduciremos con un cambio de variables un parámetro ω , que representa la frecuencia del ciclo buscado, y procederemos a calcular las ecuaciones de deformación (2.9) del HAM. Mediante la elección de un operador lineal especial para la construcción de la homotopía y ciertas consideraciones que tomaremos para seleccionar apropiadamente una condición inicial, podremos obtener la solución formal de la ecuación dependiente de ω y un parámetro de control de convergencia, h . Luego vamos a explicar los criterios a seguir para encontrar los valores de ω y h que nos llevan a una mejor solución en el caso de que ésta exista. Cuando la ecuación no tiene una solución periódica, estas mismas reglas pueden ser usadas para confirmar la no existencia de las mismas.

Consideramos la ecuación diferencial

$$x' = f(x, s), \quad (3.1)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función no lineal suficientemente diferenciable y la prima representa la derivada respecto de s . Supongamos que el sistema tiene una so-

lución periódica de frecuencia ω . Entonces luego de reemplazar $t = \omega s$, $y(t) = x(t/\omega)$ y considerando ahora la prima como derivada respecto de t , obtenemos la ecuación

$$\omega y' = f(y, t/\omega), \quad (3.2)$$

para la cual buscamos una solución de frecuencia unidad. Escribimos la ecuación anterior, cambiando y por ϕ , como $\mathcal{N}_\omega[\phi] = 0$, siendo \mathcal{N}_ω el operador no lineal que depende algebraicamente de ω .

Luego consideramos la homotopía dada por la familia de operadores \mathcal{H}_q que dependen de un parámetro de deformación $q \in [0, 1]$

$$\mathcal{H}_q[\phi] = (1 - q) \mathcal{L}[\phi - y_0] - q h \mathcal{N}_\omega[\phi], \quad (3.3)$$

donde $h \neq 0$ es un parámetro real, $y_0(t)$ es una aproximación inicial, y \mathcal{L} es el operador lineal

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi. \quad (3.4)$$

El procedimiento se basa en la búsqueda de una función $\phi(t, q, \omega)$, periódica en la variable t y analítica en q tal que $\mathcal{H}_q[\phi] = 0$ para $q \in [0, 1]$. Entonces $s(t, \omega) = \phi(t, 1, \omega)$, será solución del sistema (3.2).

Para encontrar la función analítica en q , $\phi(t, q, \omega)$, consideramos su expansión en serie

$$\phi(t, q, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k(t, \omega) q^k. \quad (3.5)$$

Reemplazando esta serie en $\mathcal{H}_q[\phi] = 0$, y tomando la k -ésima derivada con respecto a q evaluada en $q = 0$ se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones de deformación

$$\mathcal{L}[y_k - (1 - \delta_{1k})y_{k-1}] = \frac{h}{(k-1)!} \left. \frac{\partial^{k-1} \mathcal{N}_\omega[\phi]}{\partial q^{k-1}} \right|_{q=0}, \quad k = 1, \dots, \quad (3.6)$$

donde δ es la delta de Kronecker. En (3.5), $y_0(t, \omega)$ coincide con la aproximación inicial $y_0(t)$ elegida y, por ende, en realidad no depende de ω . A partir de $y_0(t)$ y (3.6) se obtiene $y_1(t, \omega)$, que sí depende de ω en este caso. Procediendo de manera recursiva se calculan las restantes funciones $y_k(t, \omega)$ hasta el orden deseado.

A continuación hacemos algunas observaciones importantes sobre las elecciones que tomamos para guiar el método a una solución aceptable y de más rápida convergencia.

- **Sobre el operador \mathcal{L} :** Elegimos el operador lineal \mathcal{L} , dado por la fórmula (3.4), debido a que éste tiene la propiedad de que para cualquier función p de frecuencia unitaria, la ecuación $\mathcal{L}[\psi] = p$ siempre tiene una solución periódica de la misma frecuencia. Entonces para cualquier ω , aplicando las últimas ecuaciones, obtenemos los sucesivos términos de una aproximación de una serie solución formal del sistema que resulta periódica.

Observación 3.1. *Aquí queremos hacer notar que el desarrollo que hemos implementado del método está orientado a la búsqueda de órbitas periódicas alrededor del origen. En general nos interesa encontrar las mismas alrededor de cualquier equilibrio fijo. En el caso de que el punto de equilibrio no sea el origen, simplemente hacemos un cambio de coordenadas para centrar el equilibrio.*

- **Sobre la aproximación inicial:** Otro punto a recalcar es que en toda búsqueda de órbitas periódicas en un sistema autónomo, cualquier solución da lugar a un continuo de soluciones variando la fase en un periodo (ver por ejemplo [24]). Por lo tanto se debe proceder a una elección arbitraria en el origen de la variable temporal. Para hacer esta elección tomamos un ciclo inicial particular, parece lógico elegir el ciclo más elemental, es decir una circunferencia. En el caso de sistemas bidimensionales elegimos una circunferencia que en $t = 0$ corte el eje positivo de la primera variable. En más dimensiones, la situación es notoriamente más complicada. De todos modos, si se tiene información sobre la forma y la ubicación del ciclo, se puede proceder a una elección análoga. En la subsección 3.4.1 profundizamos sobre este tema y presentamos un caso a modo de ejemplo.
- **Sobre la amplitud de la aproximación inicial:** Resta por fijar la amplitud de este ciclo inicial, este es un punto delicado. Mientras más cerca se encuentre esta amplitud de la del ciclo buscado más rápida será la convergencia del método. Más

aún, en el caso de existir más de un ciclo, resulta que distintas amplitudes iniciales conducen a distintos ciclos. La interpretación sugiere que cada una de las diversas soluciones posee una cuenca de atracción, y según la amplitud inicial establecida, el ciclo resultante se ubicará dentro de alguna de ellas.

Para optimizar el tiempo de procesamiento y el uso de la memoria para hallar las órbitas periódicas, en algunos casos, procedimos a un ciclo de iteraciones en la aproximación inicial. El mismo se realiza de la siguiente forma, primeramente elegimos una amplitud inicial, luego obtenemos los primeros términos de la solución. Aplicamos los criterios que se explican en la siguiente subsección, obteniendo un resultado preliminar y observamos la amplitud del ciclo obtenido. Si ésta difiere apreciablemente de la inicial hacemos otra corrida tomándola como amplitud inicial. Procedemos de este modo hasta que entre dos iteraciones la amplitud no varíe más que una cantidad prefijada. Aclaremos que, en los próximos resultados, el orden del HAM que se informa corresponde al de la última iteración.

Hacemos notar que la aproximación finita del ciclo que va obteniéndose con las fórmulas (3.6) es una serie de Fourier formal con coeficientes que, en el caso autónomo, dependen polinómicamente de h y de ω . En la siguiente subsección se describe cómo a partir de estas expresiones puede hallarse, cuando existe, una aproximación a la solución verdadera.

3.2.1. Búsqueda heurística de soluciones

Como se dijo anteriormente hemos obtenido una aproximación finita de $s(t, \omega)$, que además de depender de t y ω , depende del parámetro h . Llamamos $\tilde{y}(\omega, h)$ a esta expresión para un tiempo fijo.

Luego elegimos un rectángulo en el plano h - ω . En la dirección de ω tomamos un intervalo en donde suponemos que se encontrará la frecuencia y en la de h seleccionamos el intervalo $[-1, 0]$, que es el usual para este parámetro.

Si existe una solución periódica de (3.1) con frecuencia ω_0 entonces colocando este valor en (3.2) el Método de Análisis Homotópico procede a encontrar dicha solución y la convergencia del mismo puede ajustarse con el parámetro h .

Las aproximaciones de $y(t)$ y sus derivadas para t fijo son polinomios en h que denominamos h -curvas. Como se mostró en la subsección 2.2.2 (ver también el libro de Liao [130]) la observación del comportamiento de las h -curvas permite seleccionar un valor adecuado para h . En los valores de h para los cuales la serie converge, las h -curvas tienden, cuando el orden tiende a infinito, a un valor independiente de h . Así, graficando dichas funciones podemos tener una idea aproximada del lugar en que se encuentran estas regiones y seleccionar un valor apropiado para h . En las Figuras 3.1, 3.4 y 3.11 se muestran varias h -curvas de problemas particulares, donde se distinguen claramente las zonas mencionadas. El intervalo $[-1, 0]$ fue elegido porque allí es donde típicamente, por la forma en que escribimos la homotopía, están ubicadas las regiones aproximadamente constantes de las h -curvas.

Convertimos estas observaciones en un procedimiento que nos permite decidir sobre la presencia de órbitas periódicas y al mismo tiempo nos guía en la búsqueda de los valores óptimos para ω y h . Lo describimos a continuación.

Comenzamos calculando la función $m(\omega, h)$ que da el promedio de los valores de la superficie en la dirección de h en un intervalo de ancho 2α , de la siguiente manera

$$m(\omega, h) = \frac{1}{2\alpha} \int_{h-\alpha}^{h+\alpha} \tilde{y}(\omega, \eta) d\eta. \quad (3.7)$$

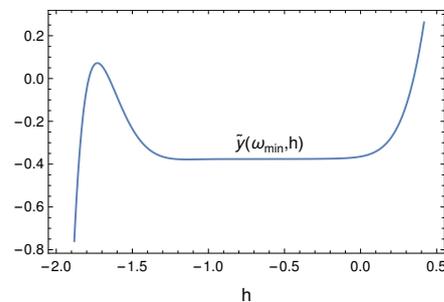
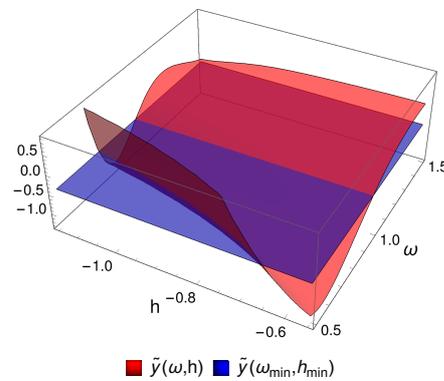
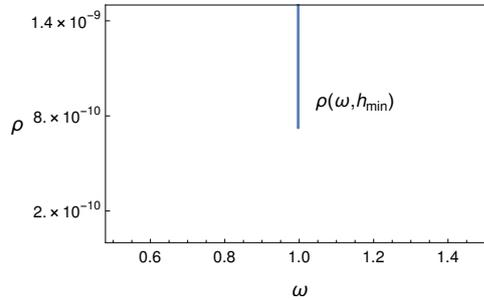
Encontramos, por ejemplo, que el valor $\alpha = 0,1$ es adecuado en la mayoría de los casos considerados. Sólo para el oscilador anarmónico cambiamos este valor a $\alpha = 0,05$.

Luego calculamos la desviación cuadrática respecto de la media con la siguiente fórmula

$$\rho(\omega, h) = \frac{1}{2\alpha} \int_{h-\alpha}^{h+\alpha} (\tilde{y}(\omega, \eta) - m(\omega, \eta))^2 d\eta. \quad (3.8)$$

Finalmente buscamos el mínimo de ρ y llamamos ω_{min} y h_{min} a las coordenadas de este mínimo. A continuación analizamos si el mismo corresponde a un ciclo. Para ello estudiamos lo siguiente:

- La curva ρ en función de ω para el valor de h_{min} . Esta curva debe tener un pico pronunciado para un valor de ω único. Es decir, debe haber una caída de varios órdenes de magnitud en el error frente a pequeñas variaciones en ω . El valor del mínimo debe aproximarse a 0.
- La superficie $\tilde{y}(\omega, h)$, que llamamos h - ω -superficie, y el plano horizontal de valor $\tilde{y}(\omega_{min}, h_{min})$. La intersección de ambas superficies debe contener un segmento horizontal aproximadamente paralelo al eje h .
- Las h -curvas $\tilde{y}(\omega_{min}, h)$. Ésta es una representación bidimensional más explícita de lo observado en el punto anterior. Las h -curvas deben mostrar el aspecto típico que siempre se observa en el HAM.



En todos los pasos, los cálculos pueden efectuarse de manera relativamente sencilla usando programas de matemática simbólica. En particular, en este capítulo usamos el programa Mathematica de Wolfram. Además, todos los resultados numéricos que presentamos en este capítulo han sido obtenidas utilizando las rutinas de dicho software.

3.3. Ejemplos

En lo que sigue vamos a probar el método descrito en ejemplos que presentan diferentes dinámicas. En el primero de ellos no hay un ciclo límite, sino que la ecuación tiene un centro no lineal, por lo tanto se obtendrá un ciclo que aproxime a una solución periódica con amplitud cercana a la fijada en la condición inicial. Luego lo aplicamos a dos ecuaciones clásicas obteniendo excelentes resultados en un amplio rango de los parámetros. Por último consideramos un ejemplo con una dinámica más rica y vemos nuevamente que el método permite hallar con mucha precisión los múltiples ciclos límite presentes, independientemente de su estabilidad.

3.3.1. Oscilador anarmónico

Consideramos la ecuación de un oscilador anarmónico con un término cúbico

$$x'' + x + x^3 = 0. \quad (3.9)$$

Se trata de la ecuación de movimiento de un sistema hamiltoniano que presenta un equilibrio con una dinámica correspondiente a un centro no lineal. El periodo de las oscilaciones puede obtenerse explícitamente con la siguiente expresión:

$$T(E) = \sqrt{2} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}}}, \quad (3.10)$$

donde E es la energía correspondiente al ciclo dada por $E = a^2/2 + a^4/4$, siendo a la amplitud del ciclo. Los límites de la integral son

$$x_{\pm} = \pm \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4E}}. \quad (3.11)$$

Para aplicar el método antes descrito a esta ecuación la escribimos como sistema en el plano e introducimos explícitamente la frecuencia ω . En este caso particular la ecuación (3.2) queda

$$\begin{aligned} \omega y_1' &= y_2 \\ \omega y_2' &= -y_1 - y_1^3. \end{aligned} \quad (3.12)$$

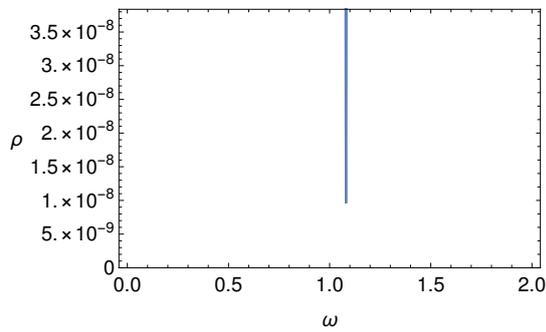
Tomamos distintas amplitudes iniciales y obtenemos los ciclos correspondientes utilizando el método descrito. Para cada amplitud se obtiene un ciclo diferente porque el sistema tiene un centro en torno al origen. En particular calculamos los periodos de estos ciclos. En la Figura 3.1 se observan la desviación cuadrática ρ en función de la frecuencia, la h - ω -superficie donde se ve el segmento horizontal, las h -curvas correspondientes y el gráfico de la aproximación de y_1 obtenida con el método, junto con la solución numérica. Todos los gráficos corresponden a la amplitud inicial 0,5 y HAM de orden 15. Las coordenadas del mínimo de ρ que obtuvimos fueron

$$(\omega_{min}, h_{min}) = (1,08094, -0,185186). \quad (3.13)$$

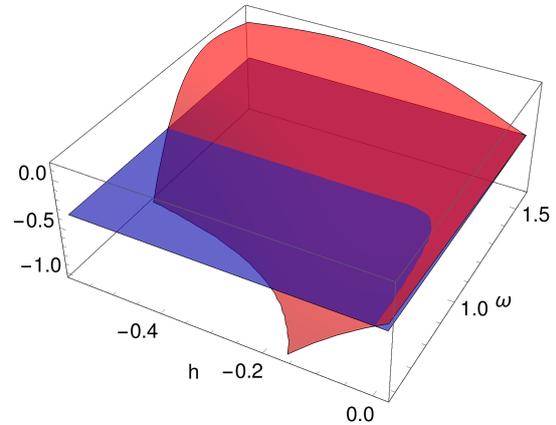
Lo primero que notamos es que la curva de $\rho(\omega, h_{min})$ presenta un pico muy pronunciado en el valor ω_{min} , además este mínimo es muy pequeño, del orden de 10^{-8} . La h - ω -superficie que mostramos, que en este caso es la coordenada y_2 de la solución evaluada en $t = \pi/4$, como se dijo tiene un segmento horizontal en la dirección de h para el valor mínimo de ω . Por último, y como es de esperarse, las h -curvas presentan la forma típica del HAM.

Observación 3.2. *Por tratarse de un centro el método no permite hallar un ciclo con una amplitud predeterminada con exactitud. En cambio al dar como condición inicial un ciclo de cierta amplitud, se obtiene una solución periódica con una amplitud cercana a la inicial. Por ejemplo, en la Figura 3.2 se muestra el ciclo que se obtuvo al fijar como condición inicial una circunferencia de radio 2, sin embargo la aproximación resultante tiene amplitud 1,66. En la misma figura se ve la frecuencia ($2\pi/T$) en función de la energía, obtenida con el método propuesto comparado con la solución exacta, esta última obtenida con la ecuación (3.10).*

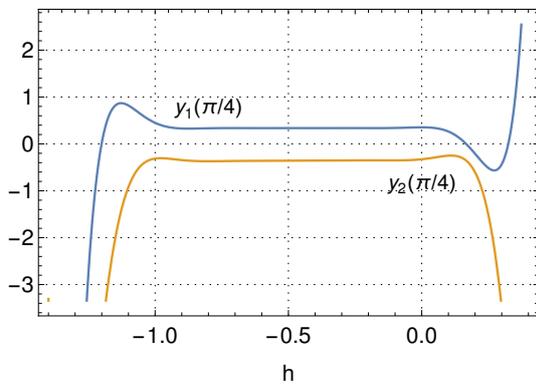
Observación 3.3. *Otra observación de interés es que la energía no es conservada exactamente por la solución obtenida. Sin embargo, la variación es pequeña, del orden del 1% para un HAM de orden 15, como se ve en la Figura 3.2.*



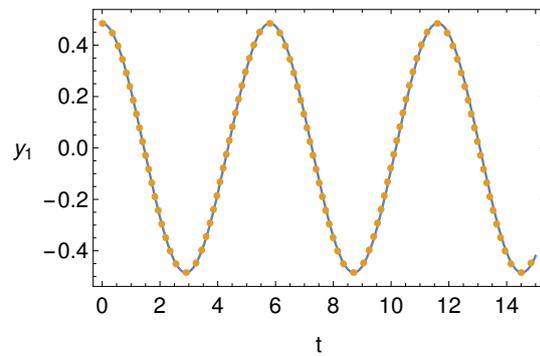
(a) Desviación cuadrática en función de la frecuencia.



(c) h - ω -superficie para amplitud inicial 0,5.



(b) h -curvas para $\omega = 1,08094$.



(d) Perfil de la solución y_1 , curva continua = HAM reformado, puntos = integración numérica

Figura 3.1: Resultados para el oscilador anarmónico.

3.3.2. Ecuación de van der Pol

Consideramos ahora un sistema dinámico muy conocido, el oscilador de van der Pol

$$x'' + \epsilon(x^2 - 1)x' + x = 0. \tag{3.14}$$

Mediante el cambio de coordenadas al plano e introduciendo la frecuencia el sistema queda

$$\begin{aligned} \omega y_1' &= y_2 \\ \omega y_2' &= -y_1 - \epsilon(y_1^2 - 1)y_2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Este sistema presenta una solución periódica estable en torno al origen para $\epsilon > 0$.

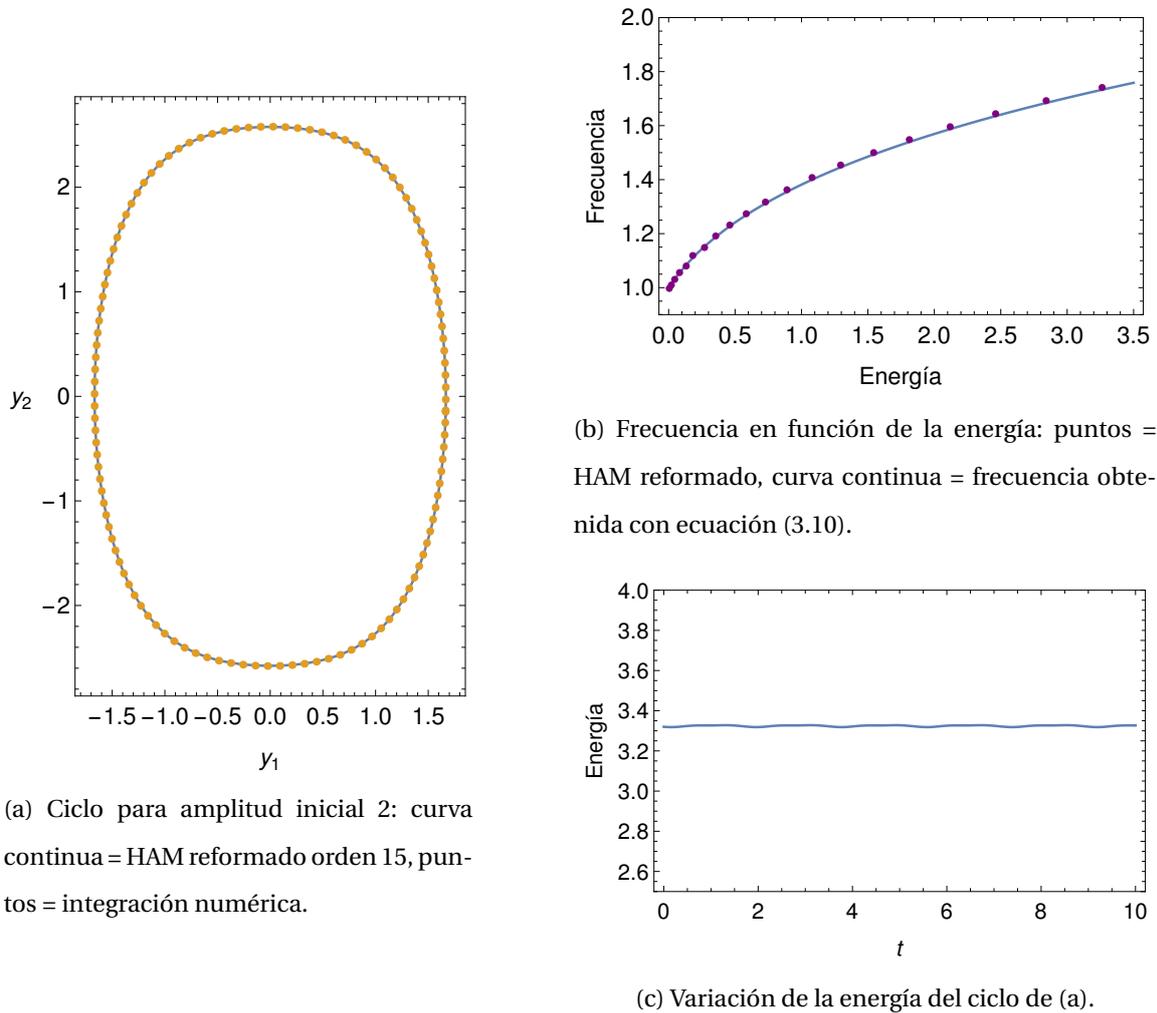


Figura 3.2: Oscilador anarmónico.

El método propuesto permite hallar este ciclo límite con mucha exactitud, aún para valores no pequeños del parámetro. En la Figura 3.3 podemos ver los ciclos correspondientes a un HAM de orden 15 para $\epsilon = 0,1$ y $\epsilon = 1$ en el espacio de fase, superpuestos a los obtenidos numéricamente con la rutina de integración de Mathematica. En la Figura 3.4 mostramos la desviación cuadrática en función de la frecuencia, la h - ω -superficie y las h -curvas correspondientes al valor de parámetro $\epsilon = 1$. Nuevamente notamos que los criterios que indican la presencia de una solución periódica se cumplen, la curva ρ tiene la forma esperada y se puede distinguir claramente el segmento aproximadamente paralelo al eje h que se obtiene al intersectar la h - ω -superficie con

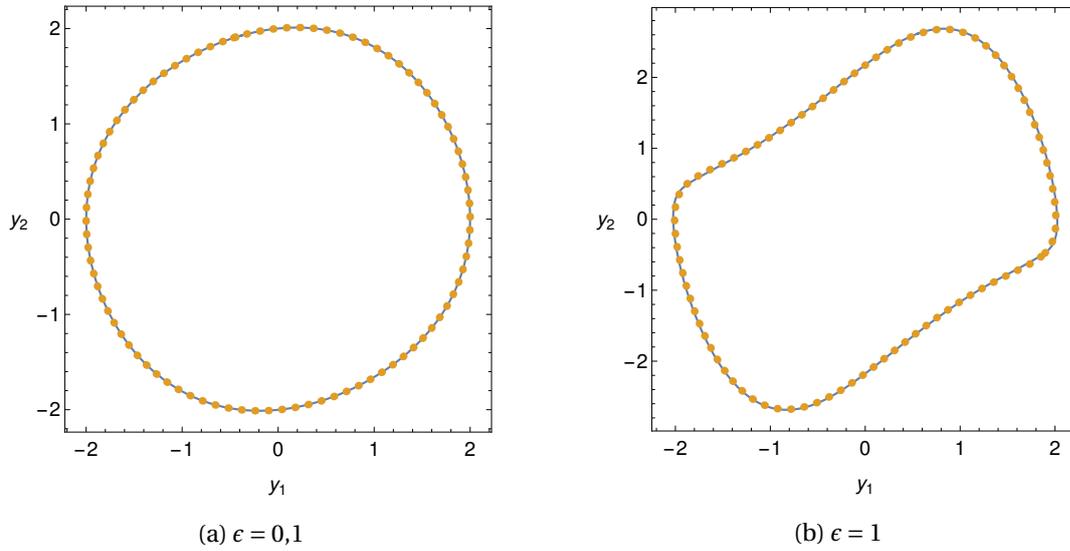


Figura 3.3: Ciclos del oscilador de van der Pol, curva continua = HAM reformado, puntos = integración numérica con Mathematica.

el plano horizontal de valor $y_1(\pi/4)$ con los siguientes valores mínimos para ω y h

$$(\omega_{min}, h_{min}) = (0,938342, -0,371754). \quad (3.16)$$

3.3.3. Bifurcación de Hopf

Consideramos el oscilador de Rayleigh, dado por la siguiente ecuación [117]:

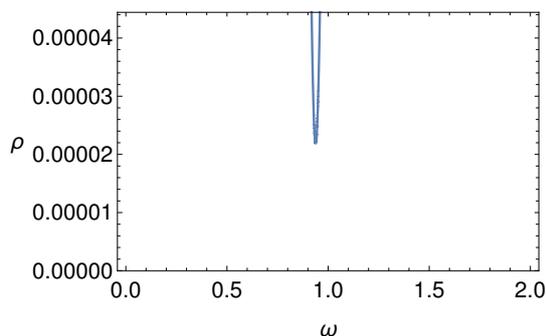
$$x'' - (\beta - x'^2)x' + x = 0. \quad (3.17)$$

En este caso, aplicando los cambios de variables para expresar el sistema en el plano e introducir la frecuencia ω , se obtiene el siguiente sistema

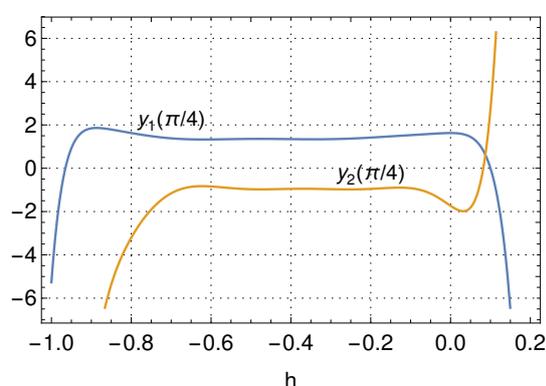
$$\begin{aligned} \omega y'_1 &= y_2 \\ \omega y'_2 &= -y_1 + (\beta - y_2^2)y_2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Éste presenta una bifurcación de Hopf supercrítica para el valor del parámetro $\beta = 0$.

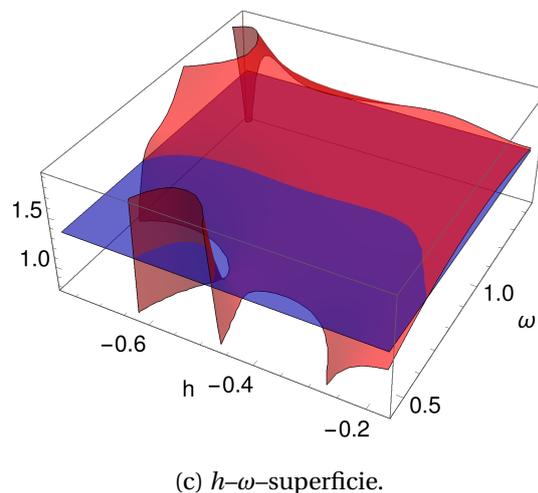
Como en los casos anteriores el método permite hallar los ciclos y las frecuencias con mucha precisión. En la Figura 3.5 observamos los ciclos correspondientes a $\beta = 0,2$



(a) Desviación cuadrática en función de ω .



(b) h -curvas para $\omega = 0,938342$.



(c) h - ω -superficie.

Figura 3.4: Resultados de la ecuación de van de Pol para $\epsilon = 1$.

y a $\beta = 1,5$ y HAM de orden 12. En la Figura 3.6 mostramos la desviación cuadrática en función de la frecuencia, la h - ω -superficie y las h -curvas correspondientes a $\beta = 1,5$. Para este caso los valores de ω y h obtenidos fueron

$$(\omega_{min}, h_{min}) = (0,885389, -0,781299). \quad (3.19)$$

Resulta interesante analizar la amplitud de la órbita emergente en función del parámetro de bifurcación. Para diferentes valores de β aplicamos el método y calculamos la amplitud de la órbita resultante en cada caso. Mostramos esas amplitudes en la Figura 3.7, comparadas con las obtenidas utilizando el programa de continuación MATCONT para MATLAB ([55]). Como puede observarse la comparación arroja un muy buen resultado para una excursión importante del parámetro. El método es capaz de funcio-

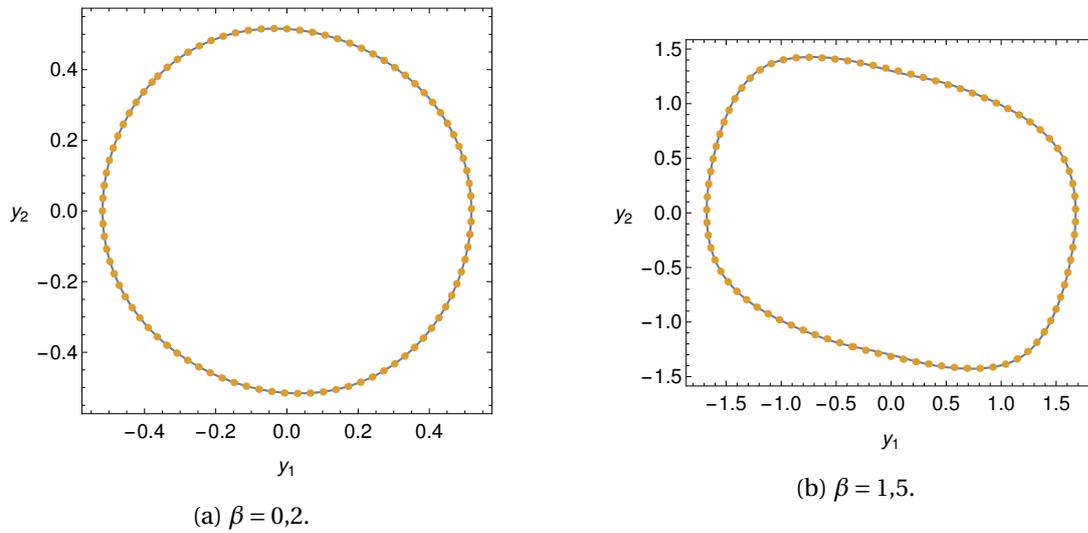


Figura 3.5: Oscilador de Rayleigh, curva continua = HAM reformado, curva a trozos = integración numérica con Mathematica.

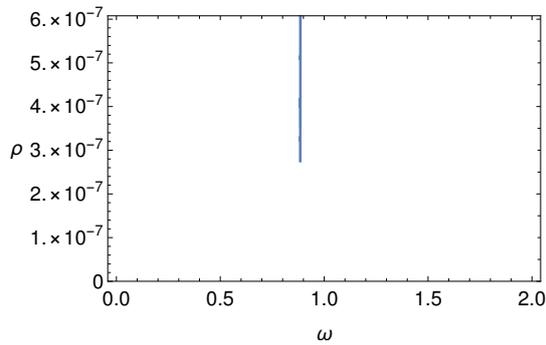
nar bien para valores del parámetro alejados del punto de bifurcación, este carácter global del método es típico del HAM.

También calculamos los errores relativos de cada variable en todo un periodo. Para esto comparamos la aproximación obtenida con el HAM frente a la solución numérica calculada con la rutina del programa Mathematica de Wolfram. La fórmula utilizada es la siguiente

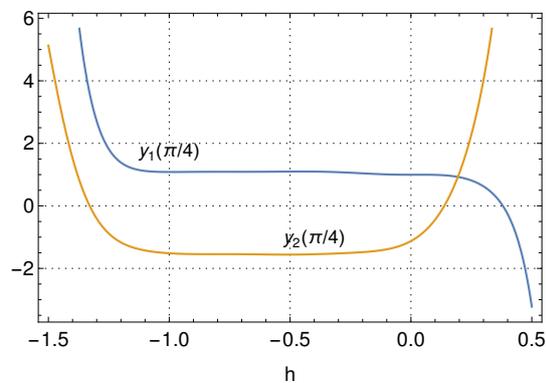
$$\delta_i^2 = \frac{\int_0^T (y_i^{num}(t) - y_i^{HAM}(t))^2 dt}{\int_0^T y_i^{num}(t)^2 dt}, \quad i = 1, 2, \quad (3.20)$$

donde (y_1^{num}, y_2^{num}) es la solución numérica del sistema, (y_1^{HAM}, y_2^{HAM}) es la solución dada por el HAM reformado y T es el periodo del ciclo numérico. En la tabla 3.1, para distintos valores de β , listamos los errores relativos de y_1 y y_2 (δ_1 y δ_2 respectivamente), el periodo numérico T y el periodo del ciclo HAM T_{HAM} . En todos los casos el orden del HAM que tomamos es 12.

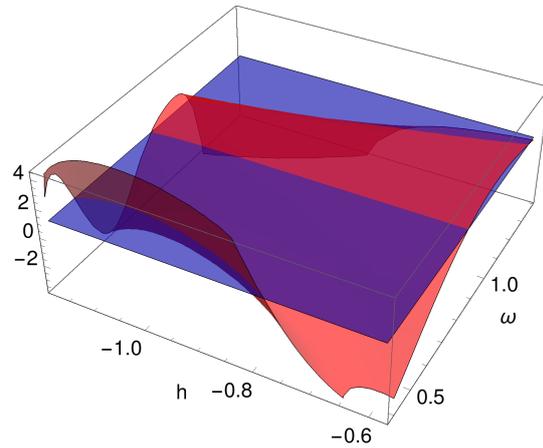
Observación 3.4. *Entre las ventajas del Método de Análisis Homotópico se encuentra la libertad para controlar la convergencia de la serie solución a través de la elección del*



(a) Desviación cuadrática en función de ω .



(b) h -curvas para $\omega = 0,885389$.



(c) h - ω -superficie.

Figura 3.6: Oscilador de Rayleigh para $\beta = 1,5$.

valor del parámetro h . El HAM proporciona una familia de soluciones dependientes de h y el análisis de las h -curvas es una herramienta fundamental que permite finalmente obtener una solución válida del problema.

En nuestro caso, además de estas curvas, también contamos con las h - ω -superficies. Al minimizar la función ρ , de manera análoga a lo que ocurre con la región de validez de las h -curvas, puede que hallemos más de un valor mínimo apropiado para el parámetro de control de convergencia h . Es decir, al ajustar la región donde se busca este extremo podrían surgir diferentes valores para h_{min} , a diferencia de ω_{min} que es en esencia único, la elección de h presenta más libertad.

Por ejemplo, para la ecuación (3.17) con $\beta = 1,7$, obtenemos dos valores adecuados para el mínimo en h pero muy diferentes, a saber $h_{min} = -0,758871$ y $h_{min} = -0,497768$.

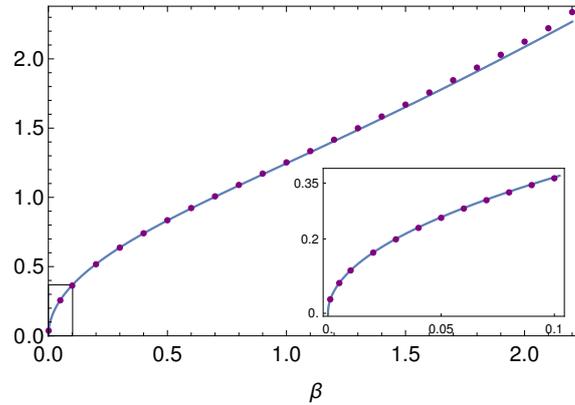


Figura 3.7: Diagrama de bifurcación para la ecuación (3.17): puntos = amplitudes HAM reformado, curva continua = MATCONT.

Ambos valores nos dan, para orden 12, aproximaciones con errores pequeños que se muestran a continuación.

h_{min}	δ_1	δ_2	T_{HAM}
-0,758871	0,053477	0,132109	7,300081
-0,497768	0,10356	0,10677	7,277833

Como podemos ver en el primer caso resulta una solución con un error más pequeño en la primera componente y un periodo más cercano al numérico (que para este β es $T = 7,300368$). Sin embargo la segunda componente, que representa la derivada de la solución, tiene un error relativo ligeramente mayor que para el segundo valor de h , esta situación se puede observar claramente en el gráfico de las soluciones. En la Figura 3.8 mostramos el gráfico de $\rho(\omega_{min}, h)$ donde se aprecian claramente dos mínimos para sendos valores de h . Además se muestran las dos aproximaciones comparadas con la solución numérica en ambos casos.

β	δ_1	δ_2	T	T_{HAM}
0,001	0,061703	0,061704	6,28319	6,28319
0,01	0,06304	0,063055	6,283226	6,283211
0,2	0,030785	0,030469	6,298877	6,300131
0,4	0,01266	0,014321	6,345743	6,346074
0,6	0,015334	0,015444	6,423101	6,423108
0,8	0,018524	0,021057	6,529638	6,528892
1,0	0,0140196	0,01458	6,663287	6,663116
1,2	0,018489	0,019879	6,82123	6,821195
1,4	0,020275	0,048898	7,000139	6,999332
1,6	0,0363	0,095804	7,196574	7,196862
1,8	0,072028	0,173894	7,407369	7,405575
2,0	0,091675	0,12068	7,629869	7,610609

Tabla 3.1: Errores relativos de las variables y_1 e y_2 para la ecuación (3.18).

3.3.4. Múltiples ciclos y equilibrios

Para este último ejemplo tomamos como punto de partida la forma normal de una bifurcación de Bautin [117]

$$\begin{aligned} x_1' &= \beta_1 x_1 - x_2 + \beta_2 x_1 (x_1^2 + x_2^2) - x_1 (x_1^2 + x_2^2)^2 \\ x_2' &= x_1 + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_2 (x_1^2 + x_2^2) - x_2 (x_1^2 + x_2^2)^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Sin embargo modificamos la misma alterando la parte lineal de la primera ecuación al multiplicar el término $\beta_1 x_1$ por un factor adicional x_2^3 , esto es

$$\begin{aligned} x_1' &= \beta_1 x_1 x_2^3 - x_2 + \beta_2 x_1 (x_1^2 + x_2^2) - x_1 (x_1^2 + x_2^2)^2 \\ x_2' &= x_1 + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_2 (x_1^2 + x_2^2) - x_2 (x_1^2 + x_2^2)^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

El objetivo de esta modificación es provocar la aparición de nuevos equilibrios además del trivial. De esta manera se genera una dinámica mucho más compleja que la del sistema original.

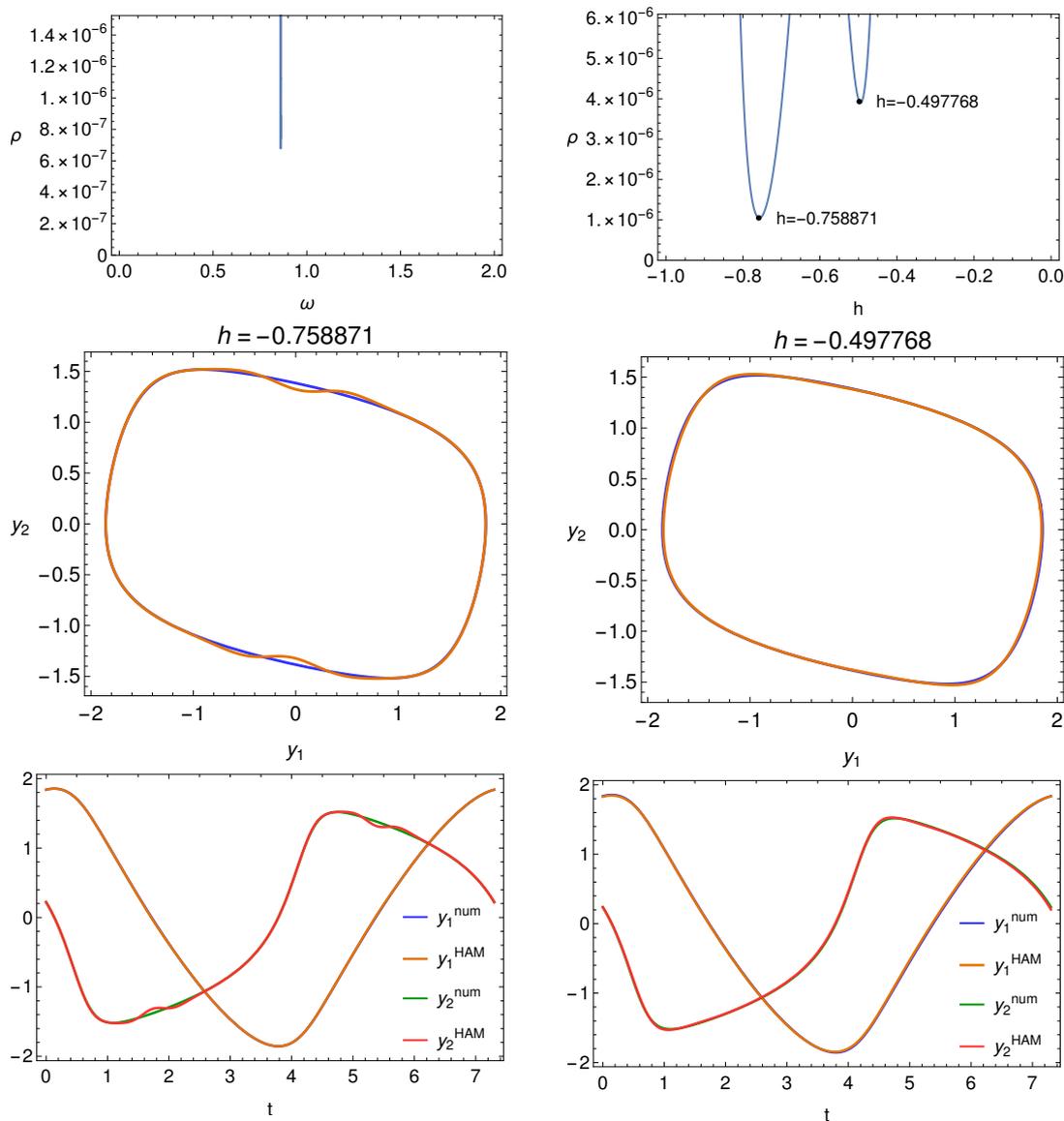


Figura 3.8: Dos valores diferentes de h_{min} para la ecuación de Rayleigh con $\beta = 1,7$ y HAM de orden 12.

Para aplicar el método aquí desarrollado transformamos la ecuación (3.22) en el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \omega y_1' &= \beta_1 y_1 y_2^3 - y_2 + \beta_2 y_1 (y_1^2 + y_2^2) - y_1 (y_1^2 + y_2^2)^2 \\ \omega y_2' &= y_1 + \beta_1 y_2 + \beta_2 y_2 (y_1^2 + y_2^2) - y_2 (y_1^2 + y_2^2)^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Este sistema presenta una bifurcación de Bautin para $\beta_1 = \beta_2 = 0$. En una región cercana a estos valores el comportamiento es similar al del sistema de ecuaciones

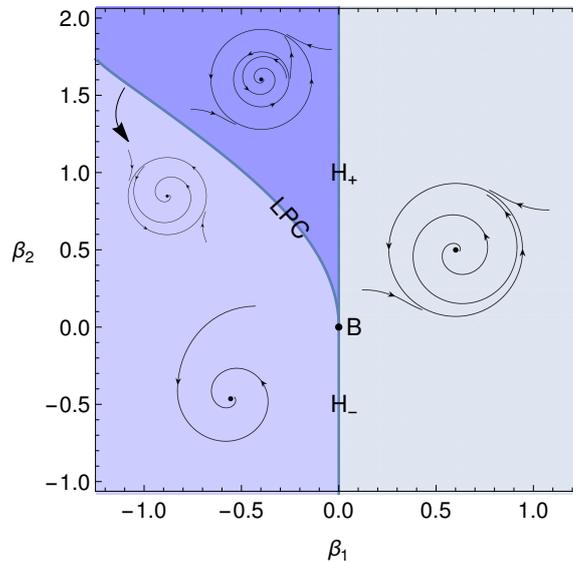


Figura 3.9: Diagrama de bifurcación para el sistema 3.22.

(3.21). El diagrama de bifurcación en esta zona lo vemos en la Figura 3.9, éste ha sido obtenido con el paquete de continuación MATCONT para MATLAB. La recta $\beta_1 = 0$ corresponde a una bifurcación de Hopf, supercrítica en H_- y subcrítica en H_+ . Se distinguen las siguientes regiones:

[Foco] Bajo la curva LPC, cuando $\beta_1 < 0$, no hay órbitas periódicas y el equilibrio es un foco estable.

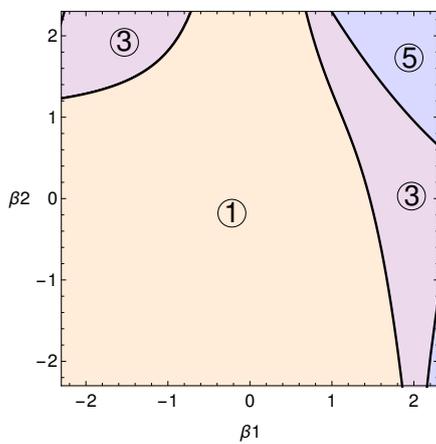
[1C] En la región $\beta_1 > 0$ hay un único ciclo límite estable que surge de la bifurcación H_- .

[LPC] La curva LPC es una bifurcación silla-nodo de ciclos, sobre ésta el sistema presenta una única órbita periódica semiestable.

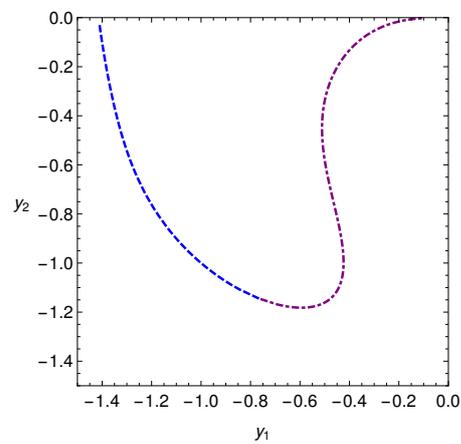
[2C] En la región por encima de la curva LPC conviven dos ciclos, el externo que es estable y uno interno que emerge de la bifurcación H_+ .

Sin embargo para valores de los parámetros más alejados al origen surgen nuevos equilibrios que dan lugar a órbitas homóclinas y heteróclinas. En la Figura 3.10 observamos el número de equilibrios para valores de los parámetros cercanos al origen y

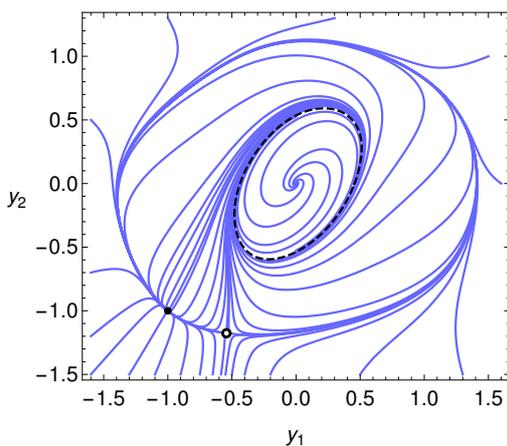
la trayectoria de dos de los equilibrios para $\beta_2 = 2$ fijo cuando β_1 varía partiendo de valores negativos grandes. Éstos colisionan para el valor de $\beta_1 = -0,86575$ donde se produce una bifurcación silla-nodo de equilibrios subcrítica. También mostramos un retrato de fase obtenido numéricamente con el programa Mathematica, se observa un ciclo límite inestable en torno al origen y una órbita homóclina por fuera. En el segundo retrato de fase, para $\beta_1 = -1$, vemos el ciclo inestable y las órbitas heteróclinas que lo rodean. Si $\beta_1 < -2,34592$ aparecen nuevos equilibrios y el sistema presenta una dinámica diferente.



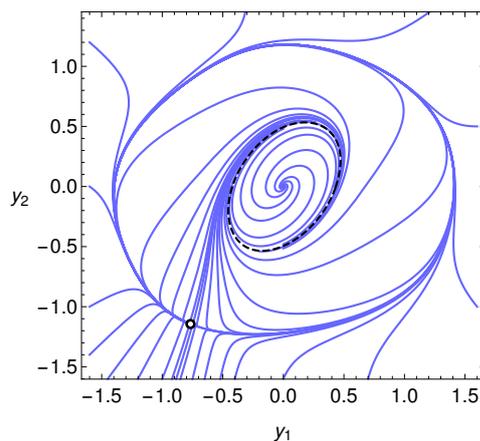
(a) Número de equilibrios al variar β_1 y β_2 .



(c) Recorrido de dos equilibrios cuando $\beta_2 = 2$ y β_1 crece hasta -0.86575 .



(b) Retrato de fase para $\beta_1 = -1$ y $\beta_2 = 2$.



(d) Retrato de fase para $\beta_1 = -0,86575$ y $\beta_2 = 2$.

Figura 3.10: Sistema de Bautin modificado 3.22.

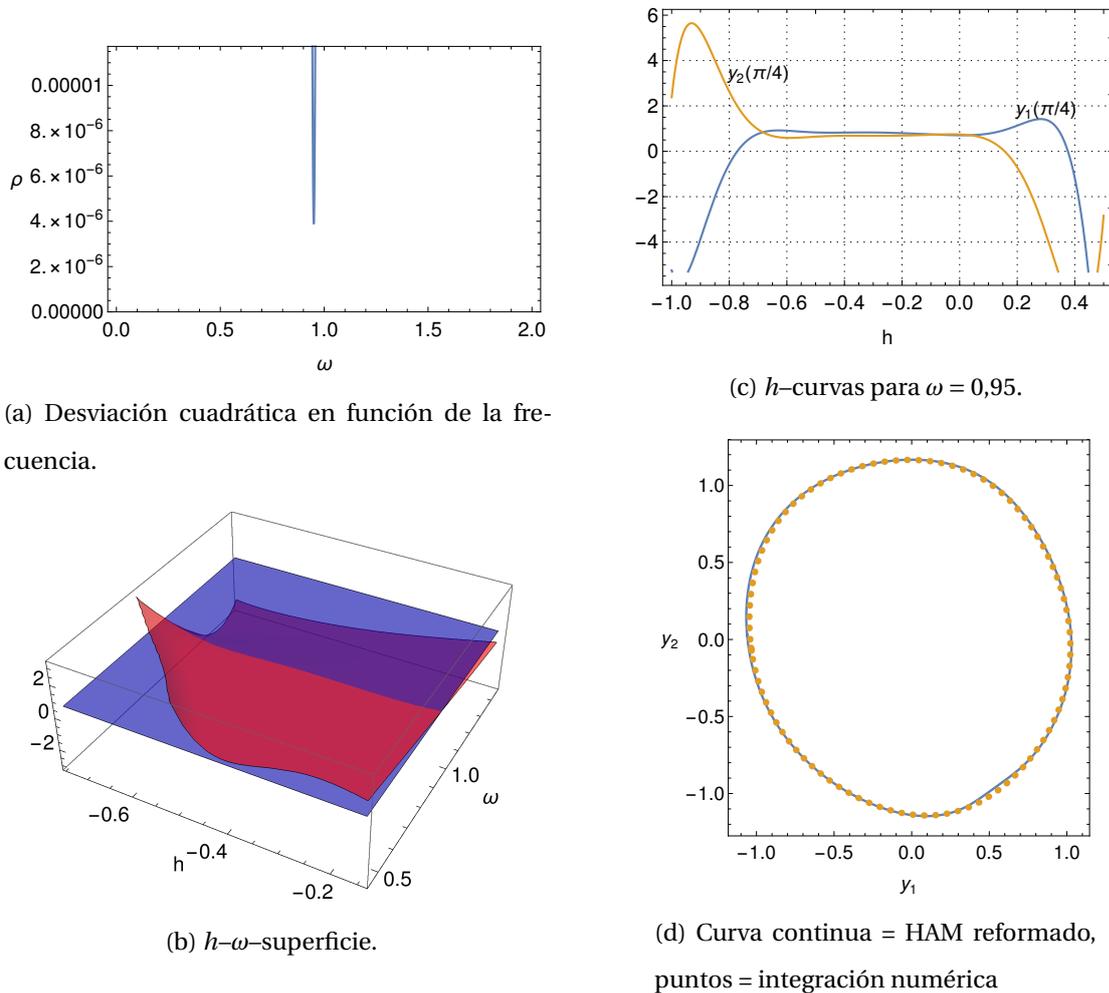


Figura 3.11: Resultados del sistema de Bautin modificado (3.22) para $\beta_1 = 0,5$ y $\beta_2 = 1$ en la ecuación.

Elegimos un punto en cada una de las regiones [1C], [2C], [LPC] de la Figura 3.9 para hallar las órbitas periódicas usando el método propuesto.

En la Figura 3.11 observamos el ciclo límite para $\beta_1 = 0,5$ y $\beta_2 = 1$. Se muestra el ciclo obtenido con el HAM de orden 12 superpuesto al obtenido numéricamente. También mostramos la desviación cuadrática en función de la frecuencia, la h - ω -superficie y las h -curvas pertenecientes al ciclo, correspondiente al caso [1C] de la Figura 3.9. Se usó orden 12. Los otros casos son similares.

En la Figura 3.12 observamos las dos soluciones periódicas existentes para $\beta_1 = -0,5$ y $\beta_2 = 2$. El ciclo interior es el obtenido con el HAM reformado de orden 18 superpues-

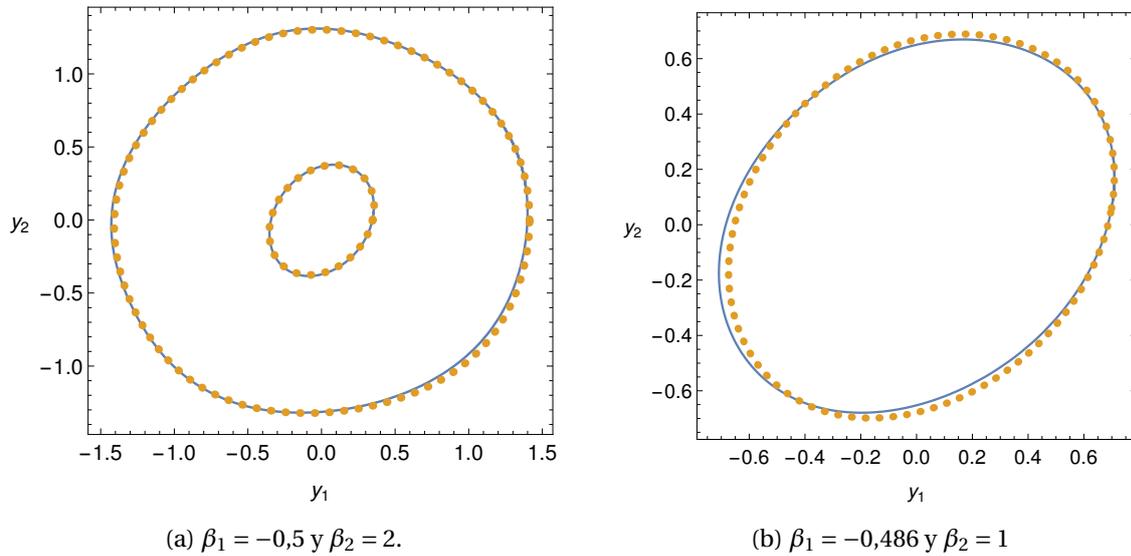


Figura 3.12: Ciclos del sistema de Bautin modificado (3.22), curva continua = HAM reformado, puntos = integración numérica.

to al obtenido numéricamente. El ciclo exterior es el correspondiente al HAM reformado de orden 9 comparado con el resultado numérico. Para obtener los distintos ciclos variamos la condición inicial, por ejemplo para el ciclo interior la amplitud inicial es $a_0 = 0,355$ y en el exterior es $a_0 = 1,4$.

En la misma figura vemos el ciclo límite en la región [LPC], es decir sobre la línea de bifurcación silla-nodo de órbitas periódicas. Los valores de los parámetros son $\beta_1 = -0,486$ y $\beta_2 = 1$. Mostramos el ciclo obtenido con el HAM de orden 9 superpuesto al obtenido numéricamente.

En todos los ejemplos mencionados aplicamos los criterios de búsqueda explicados en las secciones anteriores.

3.4. Discusiones

3.4.1. El caso tridimensional. Sistema de Rössler

En la sección 3.2 mencionamos que para sistemas de tres dimensiones la elección de una condición inicial no es tan simple como en el plano. En efecto, para un sistema bidimensional basta tomar una circunferencia que tenga la dirección correcta y una amplitud cercana a la del ciclo buscado. Sin embargo, en el espacio, elegir una circunferencia próxima a la órbita periódica del sistema no será posible en la mayoría de los casos.

Con la intención de probar el método en un sistema de tres dimensiones, buscamos un ejemplo que nos facilite la elección de la condición inicial. Consideramos el sistema de Rössler

$$\begin{aligned}x_1' &= -x_2 - x_3 \\x_2' &= x_1 + ax_2 \\x_3' &= b + x_3(x_1 - c),\end{aligned}\tag{3.24}$$

donde a , b y c son los parámetros reales de la ecuación y los siguientes son sus equilibrios

$$\begin{aligned}P_1 &= \left(\frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right), \\P_2 &= \left(\frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right).\end{aligned}\tag{3.25}$$

La ecuación (3.24) es un ejemplo conocido de sistemas caóticos. Para ciertos valores de los parámetros, en torno al equilibrio P_1 hay un atractor extraño que fue estudiado por Rössler en su artículo original [173] y en muchos trabajos posteriores de diversos autores.

Este ejemplo es en especial interesante pues, como se puede ver, la única no linealidad que presenta es el término x_1x_3 de la tercera ecuación. Es así que, si hacemos $x_3 = 0$, el sistema (3.24) se reduce a un sistema bidimensional lineal. La dinámica que generan estas ecuaciones hace que, en cierta región del espacio paramétrico, encontremos una solución periódica que se sitúa muy próxima al plano x_1 - x_2 . Vamos a tratar

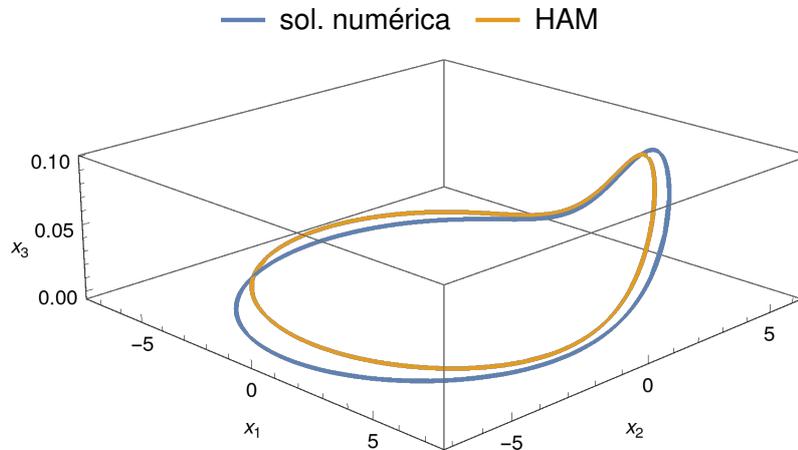


Figura 3.13: Comparación del ciclo del sistema de Rössler (3.24) con la aproximación obtenida con el método.

de hallar una aproximación a este ciclo límite con el método presentado en este capítulo.

Primeramente trasladamos el sistema para centrarlo en el equilibrio P_1 , introducimos la frecuencia ω y formando la homotopía buscamos la aproximación del ciclo estable que existe para los valores de los parámetros $a = 0,1$, $b = 0,1$ y $c = 4$. La forma particular del ciclo en este caso nos facilita la selección de una condición inicial que no está muy alejada de la órbita periódica buscada. Es así que tomamos como aproximación inicial para el HAM una circunferencia sobre el plano x_1-x_2 donde, como ya mencionamos, tiene lugar mayoritariamente la dinámica oscilatoria del sistema.

En la Figura 3.13 vemos el ciclo obtenido con el HAM reformado de orden 17, comparado con la solución obtenida mediante integración numérica. Se puede apreciar el momento en que el ciclo se aleja del plano x_1-x_2 y cómo la aproximación que obtuvimos muestra el mismo comportamiento.

Las h -curvas y la h - ω -superficie se pueden ver en la Figura 3.15, así como el gráfico de la desviación cuadrática ρ . Vemos que las h -curvas tienen la forma esperada y se distingue el pico de ρ en el valor de $\omega = 0,90664$, sin embargo en la h - ω -superficie se hace difícil distinguir el segmento horizontal paralelo al eje h . Así mismo al realizar

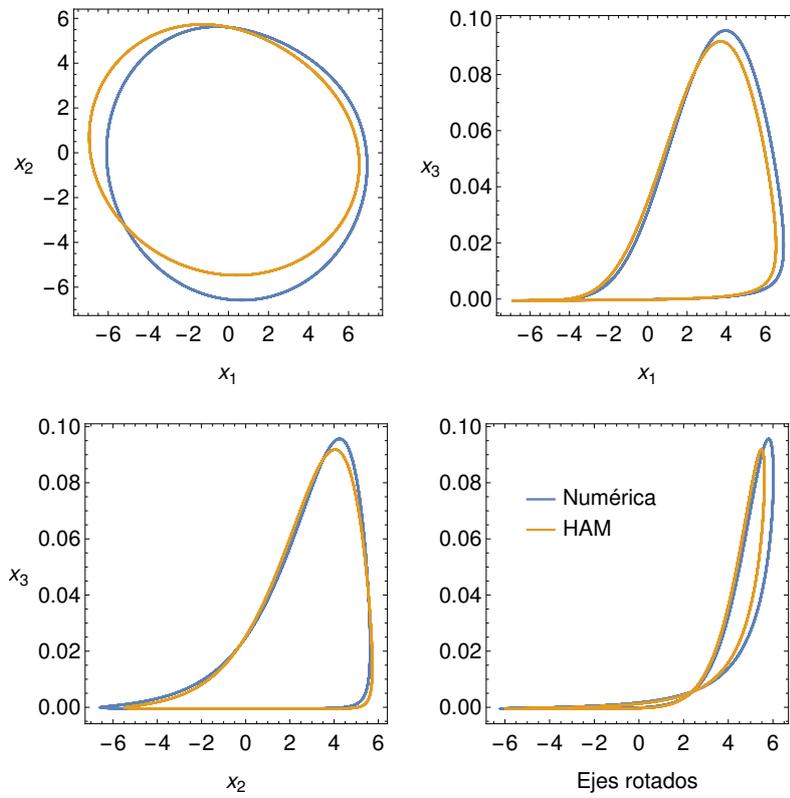
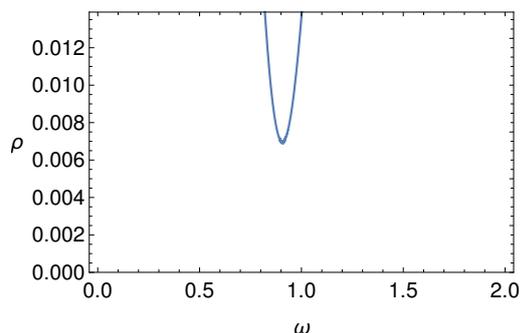


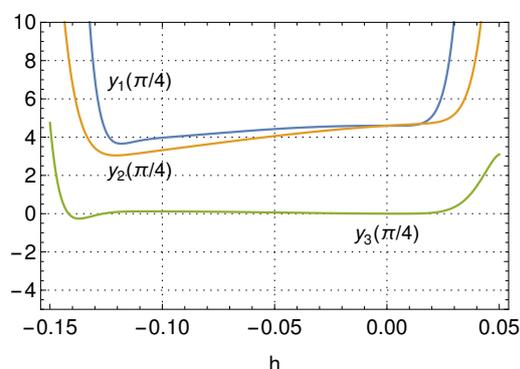
Figura 3.14: Distintas proyecciones del oscilador de Rössler.

la búsqueda de los mínimos ω_{min} y h_{min} notamos que el segmento donde se encuentran los posibles valores de h_{min} es muy pequeño, como se ve claramente al graficar las h -curvas y ubicar su región de validez (que está aproximadamente en el intervalo $-0,1 < h < 0$); y las magnitudes de h en esa región son también muy pequeñas, lo que hace que la convergencia sea muy lenta.

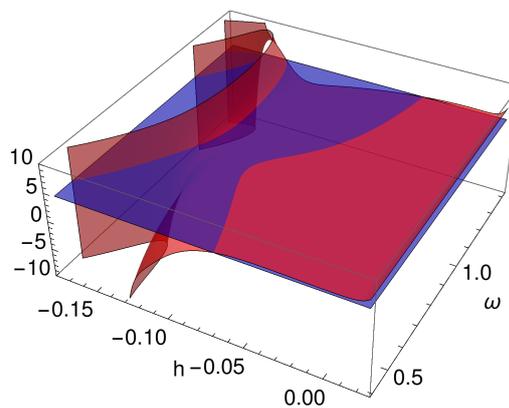
En la Figura 3.14 mostramos algunas proyecciones del ciclo de la Figura 3.13. Como vemos si bien en el plano x_1 - x_2 el HAM parece no dar muy buenos resultados, en los otros planos observamos una correlación importante. Basándonos en las dificultades que nos encontramos al intentar definir una aproximación inicial para este caso, creemos que el método nos permite obtener una solución aceptable para el oscilador de Rössler en esta región de los parámetros. Sin embargo, como ya mencionamos anteriormente, este ejemplo constituye un caso muy particular. Para abordar



(a) Desviación cuadrática en función de ω .



(b) h -curvas para $\omega = 0,90664$.



(c) h - ω -superficie.

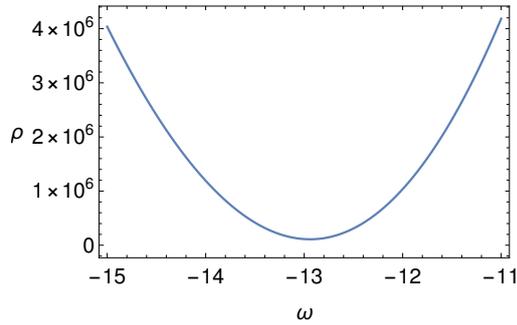
Figura 3.15: a) Resultados de la ecuación (3.24) con condición inicial $(6,5 \cos t; 6,5 \sin t, 0)$.

otros ejemplos de sistemas dinámicos en tres dimensiones se debe disponer de mucha información sobre el ciclo límite buscado y una aproximación inicial apropiada, de otra manera la obtención de una solución razonable podría ser un desafío.

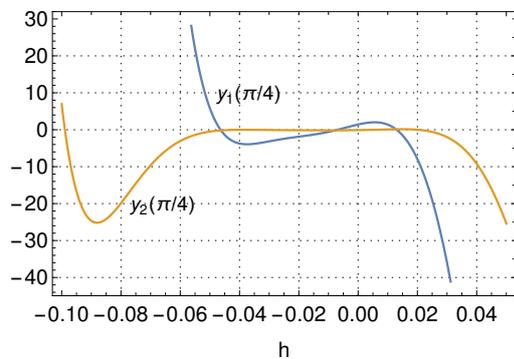
3.4.2. Ausencia de órbitas periódicas

Finalmente probamos el método en algunas regiones en las cuales no hay soluciones periódicas. Los resultados son muy interesantes y dan luz sobre cierto aspecto de la búsqueda heurística. Por ser el caso más interesante consideramos el ejemplo de la subsección 3.3.4.

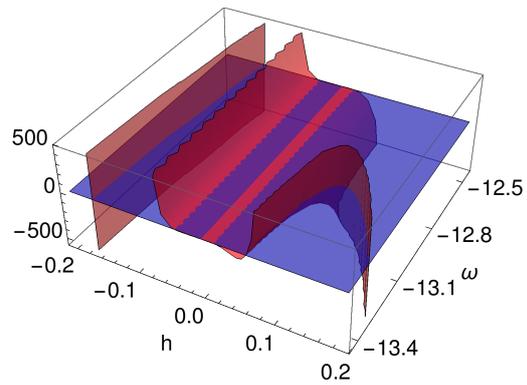
Primeramente tomamos un punto en la región [Foco] de la Figura 3.9, elegimos los valores $\beta_1 = -1$ y $\beta_2 = 0$. Para estos valores el sistema solamente tiene el equilibrio es-



(a) Desviación cuadrática en función de ω .



(b) h -curvas para $\omega = -12,9405$.

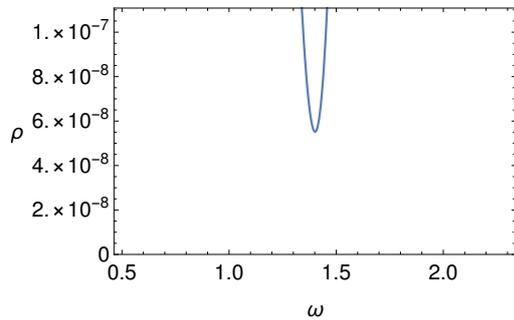


(c) h - ω -superficie.

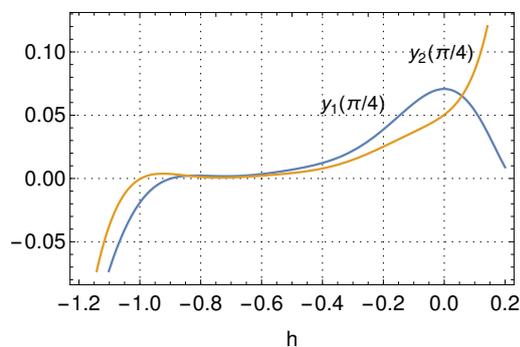
Figura 3.16: Resultados para $\beta_1 = -1$ y $\beta_2 = 0$ en la ecuación (3.22) con amplitud inicial $a_0 = 2$.

table trivial. Al asignarle un valor grande a la amplitud inicial, en este caso la elegimos igual a 2, el método no muestra indicios de convergencia. En la Figura 3.16 se puede ver que el mínimo de ρ se da para un valor negativo de la frecuencia, además el valor del error en dicho mínimo es extremadamente grande, del orden de 10^5 . La forma de la h - ω -superficie no es la esperada, lo que se manifiesta en que las mejores h -curvas posibles expresan solamente variaciones casuales de las funciones en un intervalo muy pequeño cerca del cero.

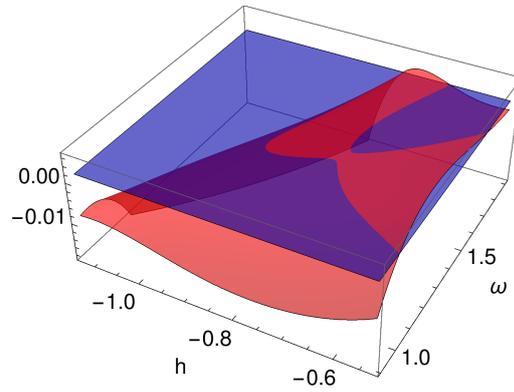
Sin embargo si la amplitud inicial es pequeña el método muestra un indicio de convergencia. En la Figura 3.17 observamos que para una amplitud inicial de 0,1 el error presenta un mínimo con forma de pico bastante pronunciado. También las h -curvas parecen indicar una pequeña región de convergencia. Este fenómeno se debe en parte a que los valores de las funciones involucradas son muy pequeños. Sin embargo de-



(a) Desviación cuadrática en función de ω .



(b) h -curvas para $\omega = 1,40495$.



(c) h - ω -superficie.

Figura 3.17: Resultados para $\beta_1 = -1$ y $\beta_2 = 0$ en la ecuación (3.22) con amplitud inicial $a_0 = 0,1$

bemos resaltar que el ciclo que se obtiene resulta con amplitud mucho menor que el inicial, en este caso más de 10 veces, lo que indicaría la necesidad de iterar corrigiendo la condición inicial tal como se describió más arriba. Al hacer ésto el proceso parece converger a un ciclo de amplitud nula. En otras palabras el equilibrio se comporta como una cuenca de atracción de ciclos en un entorno muy pequeño.

El fenómeno anteriormente mencionado vuelve a encontrarse si buscamos un ciclo en una región en donde hay una órbita homóclina. Por supuesto se trata de un caso singular y deben extremarse las precauciones al interpretar los resultados de cualquier método para estudiar la dinámica. En la Figura 3.18 podemos ver la homóclina que ocurre para los valores de $\beta_1 = -0,86575$ y $\beta_2 = 2$. En la misma figura se puede ver el ciclo obtenido por medio del método propuesto, la trayectoria de dicho ciclo mimetiza a la de la homóclina. También mostramos la desviación cuadrática, la h - ω -superficie y

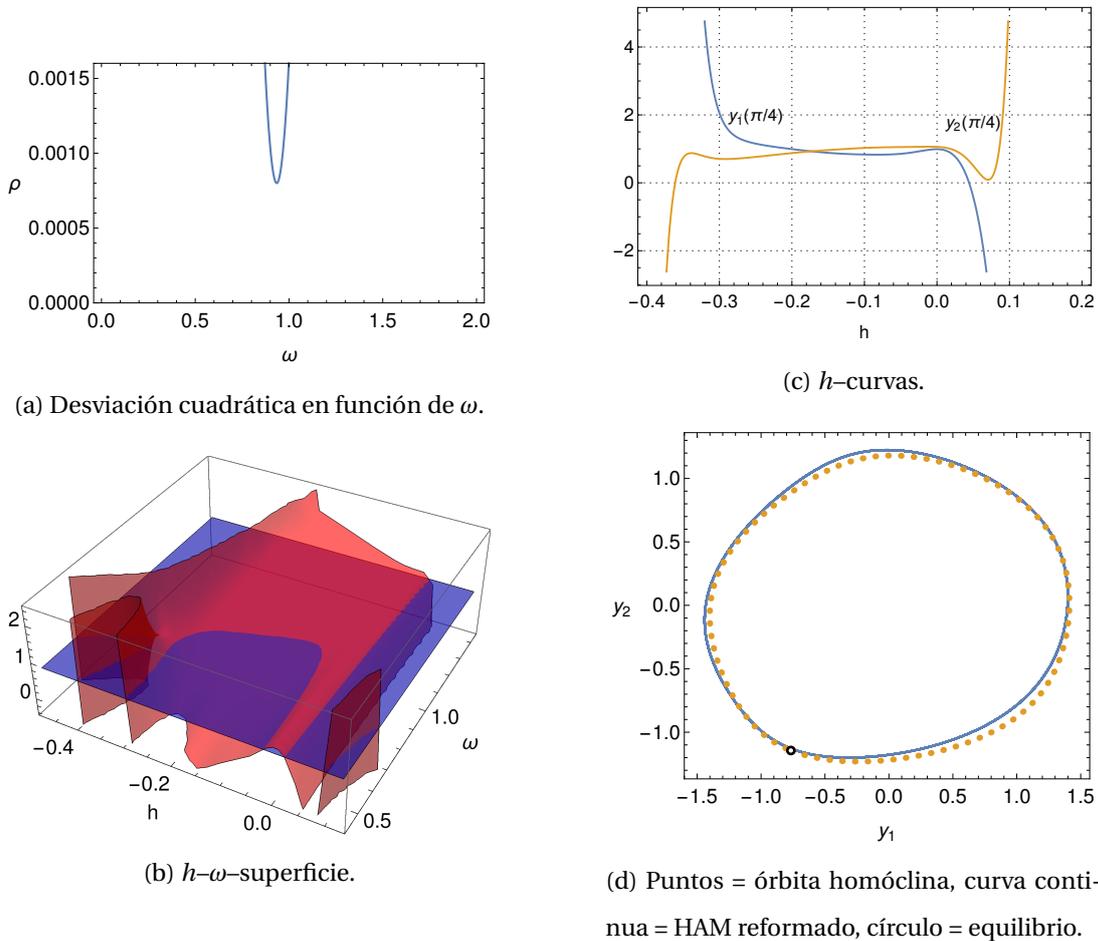


Figura 3.18: Resultados para $\beta_1 = -0,86575$ y $\beta_2 = 2$ en la ecuación (3.22).

las h -curvas correspondientes. Como puede observarse las mismas parecen indicar la convergencia sin ser del todo concluyentes, además la frecuencia obtenida no parece tender a cero como ocurre para ciclos del sistema perturbado cerca de la homóclina.

En este caso una pequeña perturbación del sistema puede conducir a la aparición de una órbita periódica. En parte la presencia de este ciclo podría justificar el resultado, sin embargo la observación del caso anterior del equilibrio y el hecho de no tener una tendencia clara en la frecuencia nos induce a pensar que la homóclina genera una cuenca de atracción de ciclos produciendo el resultado.

3.5. Conclusiones

En este capítulo desarrollamos una nueva forma de aplicar el HAM para hallar soluciones periódicas en ecuaciones diferenciales. Aplicamos el método en la búsqueda de ciclos aislados, ciclos emergentes de una bifurcación de Hopf y ciclos en un centro no lineal. En todos los casos obtuvimos aproximaciones analíticas de dichos ciclos que tienen una gran precisión, como lo muestra la comparación gráfica con resultados numéricos y la lista de errores calculados.

Así mismo probamos el método en un sistema en tres dimensiones y en ausencia de soluciones periódicas, esclareciendo ciertos aspectos del comportamiento del HAM reformado, como la manifestación de cuencas de atracción. En el caso tridimensional mostramos con un ejemplo que, a pesar de las dificultades que surgen en el planteamiento de la solución, el método es capaz de arrojar resultados satisfactorios.

El método permite hallar soluciones en un amplio rango de los parámetros y es independiente de la estabilidad de la órbita, características que son heredadas del HAM. Las frecuencias obtenidas están en excelente concordancia con las calculadas por métodos analíticos basados en la integración del sistema cuando éstos están disponibles.

El análisis del error cuadrático medio y de las h - ω -superficies, que hemos desarrollado como parte integral de nuestro enfoque, proporciona un método simple pero a la vez eficaz para determinar los valores óptimos de ω y h . Esta metodología es de un carácter marcadamente heurístico, se basa en la observación y búsqueda de ciertas características de las expresiones obtenidas. Para que dicha búsqueda sea exitosa se deben ajustar algunos valores, como el ancho del intervalo de prueba para la h -curva o la región de búsqueda, de acuerdo a los resultados observados. Las h - ω -superficies mencionadas agregan una dimensión más a las clásicas h -curvas de Liao y proveen una visión actualizada de estos gráficos, innovando en la búsqueda de los valores más eficientes para los parámetros involucrados en la validez de la aproximación de la solución obtenida con el método.

Con este trabajo, pretendemos abrir nuevas perspectivas en el campo del análi-

sis de sistemas dinámicos no lineales al presentar una metodología alternativa para la búsqueda de soluciones periódicas mediante el Método de Análisis Homotópico. La comprensión y el uso adecuado de esta modificación podrían tener implicaciones significativas en el cálculo y estudio de órbitas periódicas. Por ejemplo el carácter analítico de las soluciones obtenidas permite, entre otras cosas, decidir sobre la estabilidad con facilidad.

Búsqueda heurística de órbitas periódicas en ecuaciones con retardo

4.1. Introducción

En muchos fenómenos naturales y artificiales, puede ocurrir que las variables intervinientes y sus derivadas interactúen entre sí de manera no instantánea, es decir que los efectos del cambio de estado de algunas de ellas impactan en el sistema en un tiempo posterior. Para estos casos existe un tipo de ecuaciones funcionales denominadas ecuaciones diferenciales con retardo. Estas ecuaciones se han aplicado al modelado de problemas en ecología, biología, física, química, economía, ingeniería, entre otros.

Para entender mejor este concepto, podemos mencionar uno de los ejemplos más claros de aplicación del retardo temporal al campo de la ingeniería: los sistemas de control. En estos sistemas se monitorean las variables, o algunas de ellas, mediante un sensor y a partir de los valores obtenidos se aplica una acción que permite ajustar el valor de la o las variables controladas, con el objetivo de que el sistema se comporte

de cierta manera. Como es de esperarse es muy usual que este procedimiento no se efectúe de manera instantánea, debido a la naturaleza interna del fenómeno modelado, la propagación de señales o las componentes que actúan en el sistema físico. En estos casos existe una demora temporal que retrasa la acción de control. Dicho de otra manera, el control que se debe aplicar en cada momento depende de los valores de las variables de estado en tiempos anteriores, aquí es donde las ecuaciones con retardo adquieren importancia.

La introducción del retardo en el modelado del sistema ofrece grandes ventajas, amplía la capacidad de describir el fenómeno modelado y permite mejorar la estabilidad de las soluciones. Sin embargo, el retardo también añade complejidad a las ecuaciones, dificultando significativamente su resolución. Debido a estas consideraciones, resulta de gran importancia contar con adaptaciones de aquellos métodos conocidos para ecuaciones diferenciales ordinarias al estudio y resolución de las ecuaciones retardadas. En el capítulo anterior presentamos un método que permite encontrar aproximaciones de órbitas periódicas en sistemas dinámicos modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias. En éste mostraremos que el método puede extenderse al caso de ecuaciones diferenciales con retardo.

Muchas de las técnicas usadas para estudiar ecuaciones diferenciales con retardo son generalizaciones de las correspondientes para ecuaciones diferenciales ordinarias. Ésto ocurre en especial para la búsqueda de órbitas periódicas o en el estudio de bifurcaciones, ver por ejemplo [25, 82, 93, 201]. Así mismo el Método de Análisis Homotópico, formulado inicialmente para hallar soluciones de ecuaciones diferenciales, ha sido extendido para aplicarse en otros tipos de ecuaciones, en particular para encontrar soluciones en ecuaciones diferenciales con retardo [31].

En el capítulo anterior desarrollamos una adaptación original del HAM que cuenta con dos características principales. Por un lado, la búsqueda de la solución hacia un resultado óptimo es guiada por una fuerte estrategia heurística: explorando las propiedades de las expresiones obtenidas con el método, se añade información que permite ajustar ciertos parámetros en función de la evaluación de los resultados alcanzados

hasta ese momento. Esto permite finalmente llegar a las soluciones aproximadas ideales para el problema abordado. Por otro lado, el método tiene una cierta característica espectral, los criterios de búsqueda mencionados permiten explorar el espacio de frecuencias y hallar la que corresponde a la órbita periódica en cada caso.

En la sección 4.2 describimos la adaptación del método que presentamos en el capítulo 3 al caso de ecuaciones diferenciales con retardo. En la subsección 4.2.1, de forma análoga a lo expuesto en 3.2.1 para el caso de EDOs, se enumeran las pautas a seguir para determinar los valores de la frecuencia ω del ciclo, y del parámetro de control de convergencia h .

En la sección 4.3 probamos el método en un tipo particular de ecuaciones diferenciales con retardo: aquellas en las que se agrega un término retardado, a modo de re-alimentación, en un sistema que originalmente representa una dinámica de una ecuación de segundo orden.

Los resultados de este capítulo fueron publicados en el artículo [46].

4.2. Descripción del método: HAM reformado para EDRs

Consideremos la ecuación diferencial con un retardo y autónoma

$$x' = f(x, x_\tau), \quad (4.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $x = x(s)$ y s es la variable independiente, $x_\tau \in \mathbb{R}^n$ es la función evaluada en el tiempo retardado $s - \tau$, es decir $x_\tau(s) = x(s - \tau)$ y $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suficientemente diferenciable.

Nos interesa especialmente estudiar orbitas periódicas relacionadas con equilibrios, por ejemplo órbitas emergentes de bifurcaciones de Hopf. Para aplicar el método reescribimos la ecuación centrándola en el equilibrio, es decir, suponemos que en (4.1) se cumple $f = 0$ si $x = 0$.

Un aspecto importante a tener en cuenta es que en general los ciclos alrededor de un equilibrio no suelen estar ubicados simétricamente alrededor del mismo. Ésto es

particularmente notable en el caso de ecuaciones diferenciales con retardo. Este efecto puede ser tan marcado que, como veremos en el ejemplo 4.3.2 en un sistema con dos ecuaciones, un equilibrio del cual emerge un ciclo puede quedar afuera de dicho ciclo. Para manejar este efecto hemos hecho un corrimiento de la coordenada x mediante un término δ que calculamos en el proceso.

Supongamos además que el sistema tiene una solución periódica, x_p , con frecuencia ω , que queremos encontrar. Entonces, tomando en cuenta lo mencionado previamente, reemplazamos $t = \omega s$, $y(t) + \delta = x(t/\omega)$ en (4.1) y obtenemos la ecuación

$$\omega y' = f(\delta + y, \delta + y_{\omega\tau}). \quad (4.2)$$

Para esta ecuación buscaremos una solución de frecuencia unidad. Sustituyendo la función y con ϕ y el término δ con Δ , escribimos la ecuación (4.2) como $\mathcal{N}_\omega[\phi, \Delta] = 0$, donde el operador no lineal \mathcal{N}_ω presenta una dependencia algebraica con ω y Δ . En los capítulos previos, donde reformulamos la ecuación diferencial original en términos del operador no lineal correspondiente, éste se evaluaba sólo en la función ϕ . En este caso introducimos explícitamente un nuevo argumento Δ , pues este término también será desarrollado en serie de potencias del parámetro de la homotopía, al igual que ϕ . El objetivo del método finalmente será obtener los sucesivos términos que componen ambas series.

Ahora consideramos la familia de operadores \mathcal{H}_q que dependen del parámetro de deformación $q \in [0, 1]$

$$\mathcal{H}_q[\phi, \Delta] = (1 - q) \mathcal{L}[\phi - y_0] - q h \mathcal{N}_\omega[\phi, \Delta]. \quad (4.3)$$

Aquí $h \neq 0$ es un parámetro real, $y_0(t)$ es una aproximación inicial, y \mathcal{L} es el operador lineal

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi. \quad (4.4)$$

Como vimos en el capítulo anterior, este operador de primer orden tiene la propiedad de que para cualquier función periódica g de frecuencia uno, la ecuación $\mathcal{L}\psi = g$ tiene

una solución periódica de la misma frecuencia, la cual puede encontrarse ajustando la condición inicial.

Buscamos ahora una solución formal de $\mathcal{H}_q[\phi, \Delta] = 0$ en serie de potencias de q con coeficientes periódicos en t . Supongamos que $\Delta(q, \omega)$ y $\phi(t, q, \omega)$ son analíticas en q y que $\phi(t, q, \omega)$ es periódica in t . Supongamos además que $\mathcal{H}_q[\phi, \Delta] = 0$ se cumple para todo $q \in [0, 1]$. Entonces $s(t, \omega) = \phi(t, 1, \omega)$ y $\delta(\omega) = \Delta(1, \omega)$ es una solución formal de (4.2).

Consideremos las expansiones en serie

$$\phi(t, q, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k(t, \omega) q^k \quad \text{y} \quad \Delta(q, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k(\omega) q^k, \quad (4.5)$$

la primera correspondiente a la función $y(t)$ y la segunda al corrimiento δ . Reemplazando estas series en $\mathcal{H}_q[\phi, \Delta] = 0$, y derivando k veces con respecto a q se obtiene el siguiente sistema

$$\mathcal{L}[y_k - (1 - \delta_{1k})y_{k-1}] = \frac{h}{(k-1)!} \left. \frac{\partial^{k-1} \mathcal{N}_\omega[\phi, \Delta]}{\partial q^{k-1}} \right|_{q=0}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.6)$$

donde δ_{1k} es la delta de Kronecker, éstas son las llamadas ecuaciones de deformación.

Dada una función periódica y_0 la ecuación (4.6) permite encontrar, para cada $\omega > 0$ y cada $h \neq 0$ los sucesivos términos de una solución formal de (4.2). Los coeficientes $\delta_k(\omega)$ se obtienen imponiendo la condición

$$\int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial^{k-1} \mathcal{N}_\omega[\phi, \Delta]}{\partial q^{k-1}} \right|_{q=0} dt = 0. \quad (4.7)$$

Hacemos notar que la invariancia por traslaciones temporales de (4.1) tiene como consecuencia que cada solución periódica da lugar a un continuo de soluciones al variar la fase (ver por ejemplo [24]). La elección de una solución particular, de entre todas estas soluciones equivalentes se hace al elegir la aproximación inicial y_0 . En particular, para sistemas bidimensionales, como los mostrados en los ejemplos más adelante, elegimos una circunferencia que corte el eje y en $t = 0$. Tomando distintos valores de la amplitud de este ciclo inicial es posible encontrar distintos ciclos cuando los haya. Cada ciclo tiene su cuenca de atracción en la condición inicial.

Las expresiones finitas encontradas con la metodología anterior hasta el orden deseado, obtenidas resolviendo las ecuaciones (4.6), tienen coeficientes que dependen de ω pero también de h . En la siguiente subsección describimos cómo encontrar los valores de dichos parámetros para los cuales la solución obtenida converge, y por lo tanto poder encontrar así las soluciones de (4.1).

4.2.1. Búsqueda heurística de las soluciones

Como mencionamos anteriormente, la expresión $s(t, \omega) + \delta(\omega)$ obtenida con el método descrito es una solución de (4.2). Llamemos $\tilde{y}(\omega, h)$ a la aproximación de $s + \delta$ para un cierto orden N , calculada en un tiempo fijo \tilde{t} . Agregamos a h entre los argumentos de \tilde{y} para destacar la dependencia que dicha función tiene de este parámetro, así como de ω , pues usaremos \tilde{y} para encontrar los valores óptimos de h y ω que nos lleven a la solución buscada.

Si la ecuación (4.1) tiene una solución periódica de frecuencia ω_0 , entonces al reemplazar este valor en (4.2) el método descrito procederá a dar la solución, dependiendo la convergencia del parámetro h solamente.

De la misma manera que en el capítulo anterior para el caso de EDOs (ver sección 3.2.1), notamos que la función $\tilde{y}(\omega, h)$ se comporta de la siguiente manera: para valores de h para los cuales la serie converge, la función es aproximadamente constante; en cambio, para valores de h donde no hay convergencia, la función varía bruscamente. Analizando el comportamiento de la h -curvas, podemos hallar los valores del parámetro de control de convergencia para los cuales la serie converge.

Buscaremos la frecuencia ω_0 del ciclo, en un cierto intervalo $(0, \Omega)$, y suponemos que los valores adecuados de h se encuentran en el intervalo $(-1, 0)$, como ocurre habitualmente. A continuación definimos la función

$$m(\omega, h) = \frac{1}{2\alpha} \int_{h-\alpha}^{h+\alpha} \tilde{y}(\omega, \eta) d\eta, \quad (4.8)$$

la cual da, para cada valor de ω y de h en el rectángulo $(0, \Omega) \times (-1, 0)$, el valor del promedio de $\tilde{y}(\omega, h)$ en un intervalo de ancho 2α , centrado en ω y en la dirección de h .

Luego calculamos el error cuadrático respecto de la media en la dirección de h con la fórmula

$$\rho(\omega, h) = \frac{1}{2\alpha} \int_{h-\alpha}^{h+\alpha} (\tilde{y}(\omega, \eta) - m(\omega, \eta))^2 d\eta. \quad (4.9)$$

Finalmente buscamos el mínimo de ρ en el mencionado rectángulo. Llamamos ω_{min} y h_{min} a las coordenadas de este mínimo. Así como en el caso de EDOs, tenemos que decidir si este mínimo corresponde a una órbita periódica o no. Nuevamente las condiciones que deben cumplirse son las mismas que enumeramos en el capítulo precedente, a saber:

- La curva de la desviación cuadrática $\rho(\omega, h_{min})$, debe tener un pico muy pronunciado en un único valor de ω en el cual el error cuadrático caiga varios órdenes de magnitud, acercándose a cero.
- La intersección de la superficie $\tilde{y}(\omega, h)$, que llamamos h - ω -superficie, con el plano $\tilde{y}(\omega_{min}, h_{min})$ debe tener un segmento horizontal aproximadamente paralelo al eje h .
- Las h -curvas $\tilde{y}(\omega_{min}, h)$ deben tener el aspecto típico que tienen las h -curvas en el HAM, ésta es una representación bidimensional de la condición anterior.

Si se cumplen estas condiciones, entonces hemos encontrado los mejores valores de ω y h para los cuales se minimiza la desviación cuadrática media y se verifican los requisitos sobre h que indican la convergencia del HAM, debido a esto afirmamos que hemos encontrado una órbita periódica de frecuencia $\omega_0 = \omega_{min}$. Todos los cálculos pueden realizarse con software de programación simbólica y cálculo numérico, en este caso hemos usado el programa Mathematica de Wolfram. Más aún, en los ejemplos que mostramos a continuación, las soluciones numéricas se calcularon con dicho programa.

4.3. Resultados

4.3.1. Ecuación de van der Pol realimentada con retardo

Desde que Balthasar van der Pol introdujo su ecuación homónima en 1920, ésta se ha vuelto un ejemplo emblemático de los sistemas que presentan comportamientos oscilatorios complejos. Dada su importancia se pueden encontrar diversas aplicaciones en múltiples ramas de la ciencia y la ingeniería, debido a esto vamos a aplicar el método a este sistema.

Consideramos en este caso el oscilador de van der Pol sujeto a una retroalimentación retardada, la ecuación es la siguiente

$$x'' + \epsilon(x^2 - 1)x' + x = d\epsilon x_\tau \quad (4.10)$$

donde $d, \epsilon, \text{ y } \tau \in \mathbb{R}^+$, acá τ es el retardo y d representa la intensidad de la realimentación. Cuando $d = 0$ la ecuación (4.10) se convierte en el clásico sistema no forzado, que utilizamos como ejemplo en la subsección 3.3.2, donde aplicamos el HAM reformado como fue presentado en el capítulo anterior. Cuando $d > 0$ la ecuación también presenta soluciones periódicas para ciertas combinaciones de sus tres parámetros (ver [31]).

Para aplicar el método debemos escribir la ecuación anterior en la forma (4.2). Mediante un cambio de variables, introducimos la frecuencia ω y obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \omega y_1' &= y_2 \\ \omega y_2' &= -\epsilon(y_1^2 - 1)y_2 - y_1 + d\epsilon y_{1\tau}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Buscaremos soluciones simétricas alrededor del origen, por lo tanto no es necesario introducir el corrimiento δ . Este sistema ha sido estudiado en numerosos trabajos, por ejemplo en [23] utilizando técnicas de teoría de perturbaciones y en [201] poniendo foco en cuestiones de estabilidad. En el trabajo de Bel y Reartes [31] se estudió utilizando el HAM, pero dicho estudio se realizó en el espíritu del método de Poincaré–Lindstedt, es decir los sucesivos términos de la solución se hallan imponien-

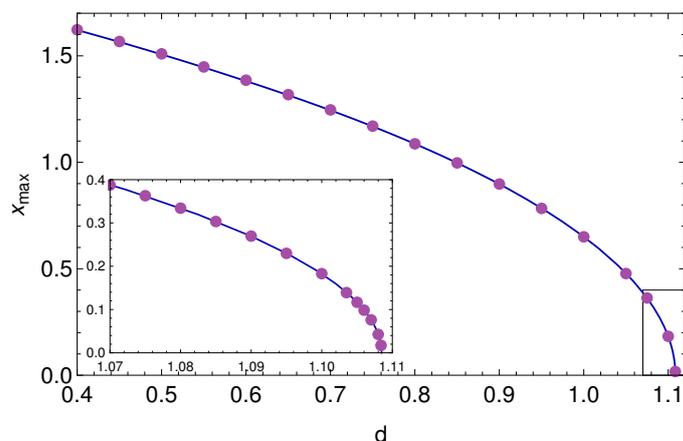


Figura 4.1: Oscilador de van der Pol. Amplitud de las oscilaciones en la rama de bifurcación para $\epsilon = 0,5$ y $\tau = 1$; curva continua = DDE-BIFTOOL, puntos = HAM.

do condiciones para la anulación de los términos seculares en las soluciones del operador lineal. También aquí se demostró la utilidad de la aplicación del HAM al estudio de bifurcaciones.

En este trabajo utilizamos la técnica presentada para encontrar los ciclos emergentes en un entorno de las bifurcaciones que surgen del equilibrio trivial. Tomando $\epsilon = 0,5$ y $\tau = 1$ se procedió a encontrar los ciclos para la bifurcación que aparece en $d = 1,1084$. En las aproximaciones obtenidas, por ejemplo, con el método de balance armónico [11, 141, 150], el error crece al alejarse de la bifurcación, debido fundamentalmente a que ese tipo de métodos se basa en desarrollos en serie de la amplitud, a diferencia de las obtenidas con el HAM reformado. En la Figura 4.1 se observan los valores de la amplitud de los ciclos obtenidos en este trabajo, comparados con los calculados con el programa DDE-BIFTOOL [65]. Como se ve éstos están en óptima concordancia en todo el rango estudiado. La distribución del error tiende a ser uniforme, esta situación es por supuesto una consecuencia del carácter no perturbativo del HAM. En la Figura 4.2 se muestran las frecuencias de los ciclos en esta bifurcación comparadas con los resultados obtenidos con DDE-BIFTOOL. Otra vez la coincidencia es excelente en todo el rango del parámetro considerado.

En ciertas regiones de los parámetros este sistema presenta numerosas soluciones

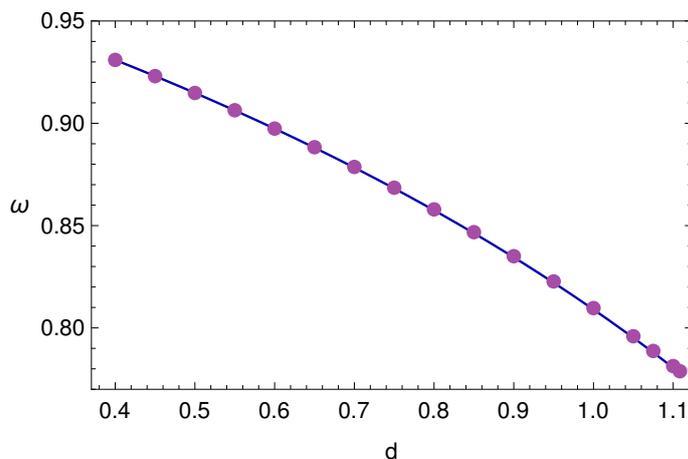
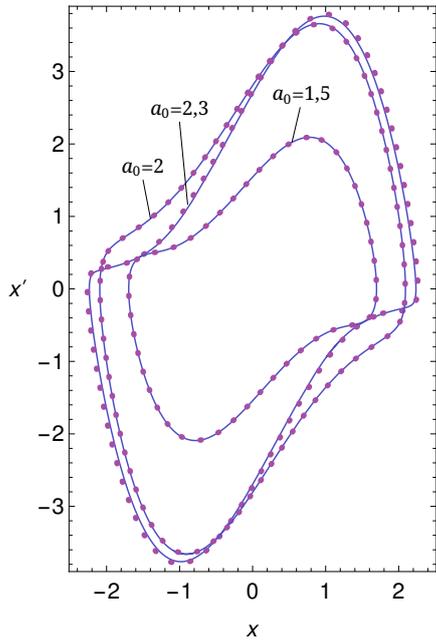


Figura 4.2: Frecuencia ω en función de d para la ecuación (4.11) con $\epsilon = 0,5$ y $\tau = 1$.

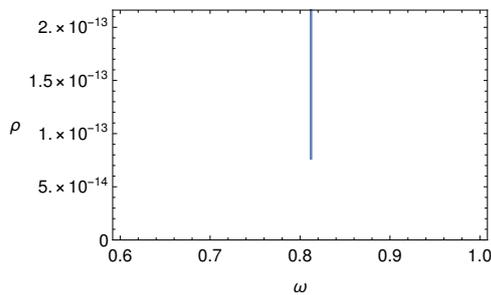
periódicas. Utilizando el método descrito hemos obtenido expresiones analíticas que aproximan las órbitas periódicas para $\epsilon = 1,4142$, $d = 0,3$ y $\tau = 9$. En esta región de los parámetros hay tres ciclos correspondientes a bifurcaciones alrededor del equilibrio trivial. En la Figura 4.3 podemos ver una comparación de estos ciclos, la curva continua corresponde al cálculo realizado con el método presentado en este capítulo y los puntos son los ciclos tomados del trabajo de Bel y Reartes [31] donde aplican el HAM en su forma original. En ambos métodos las diversas órbitas se obtienen tomando distintos valores de la amplitud de la aproximación inicial. En la misma figura se observan, para una amplitud inicial de $a_0 = 1,5$, la desviación cuadrática (4.9) en función de la frecuencia, dos h -curvas y la h - ω -superficie correspondiente. Puede apreciarse que se verifican los criterios de convergencia enunciados en 4.2.1.

4.3.2. Oscilador anarmónico realimentado con retardo

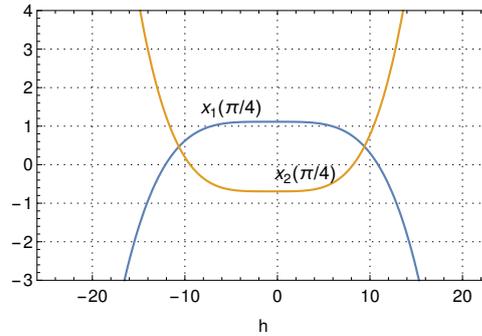
K. Pyragas propuso en 1992 un método de control de sistemas caóticos mediante una retroalimentación retardada (ver por ejemplo [73, 168, 169]). Dicha herramienta se basa en la introducción de un forzamiento al sistema determinado por la diferencia entre el valor del estado actual y el retardado, y desde su planteamiento se evidencia como un mecanismo efectivo y potente de estabilización de sistemas. Como ejemplo



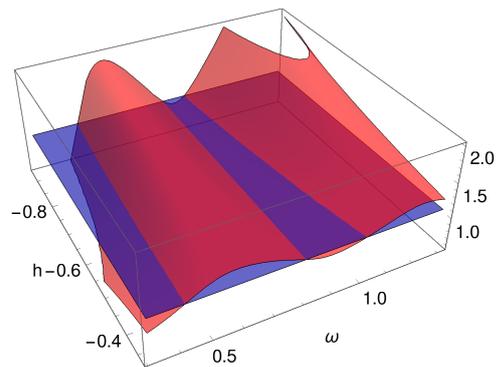
(a) Varios ciclos, curva continua = HAM clásico, puntos = HAM reformado.



(b) Desviación cuadrática en función de la frecuencia.



(c) h -curvas para $\omega = 0,812$.



(d) h - ω -superficie $x_1(\pi/4)$.

Figura 4.3: Resultados de la ecuación de van der Pol para amplitud inicial $a_0 = 1,5$.

de aplicación del HAM reformado vamos a considerar un modelo simple, aunque sin presencia de caos en este caso, que ilustra este tipo de sistemas con un término de control de Pyragas. La ecuación es la siguiente

$$x'' + x + \beta x^3 = \gamma(x - x_t), \quad (4.12)$$

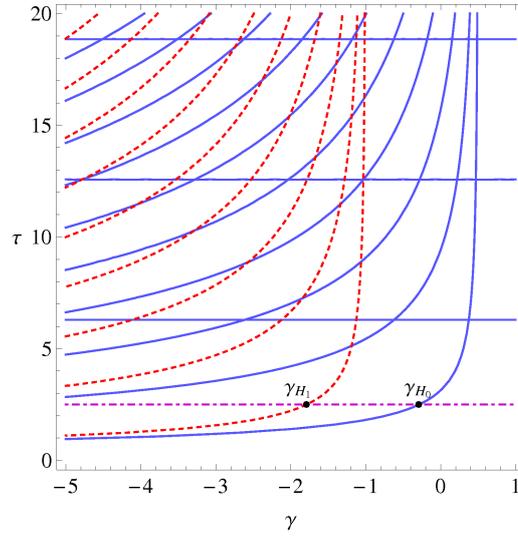


Figura 4.4: Curvas de bifurcación en el espacio de parámetros para el oscilador anarmónico con retardo. — equilibrio x_0 , --- equilibrios x_1 y x_2 , -.- $\tau = 2,5$.

donde β es el parámetro del sistema, τ es el retardo temporal y γ es el peso de la retroalimentación. Para $\beta < 0$ los equilibrios del sistema son $x_0 = 0$, $x_1 = \sqrt{-1/\beta}$ y $x_2 = -\sqrt{-1/\beta}$. Cuando $\beta > 0$ el único equilibrio es el origen.

Consideramos a la ganancia γ como parámetro de bifurcación. Para τ fijo, existe una bifurcación de Hopf del equilibrio x_0 , en los puntos

$$\gamma_H = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k^2 \pi^2}{\tau^2} \right) \quad \text{con } k = 2n + 1, n \in \mathbb{N}. \quad (4.13)$$

La frecuencia en el punto de bifurcación es $\omega_{\gamma_H} = \sqrt{1 - 2\gamma_H} = k\pi/\tau$. Para k par se obtienen curvas de bifurcación en el espacio de los parámetros γ - τ que no dependen de γ , son las rectas horizontales de la Figura 4.4.

En la Figura 4.4 vemos las curvas de Hopf en el plano γ - τ para el equilibrio $x_0 = 0$, éstas son independientes de β . En la misma figura se observan las curvas de Hopf para el equilibrio $x_1 = 1$, correspondientes al caso $\beta = -1$, éstas coinciden con las del equilibrio x_2 . La línea horizontal compuesta por guiones y puntos indica el valor $\tau = 2,5$ que se ha utilizado en los cálculos de este ejemplo, sobre la misma se indican los puntos de Hopf γ_{H_0} y γ_{H_1} .

Escribiendo la ecuación (4.12) en el plano e introduciendo el parámetro ω , como

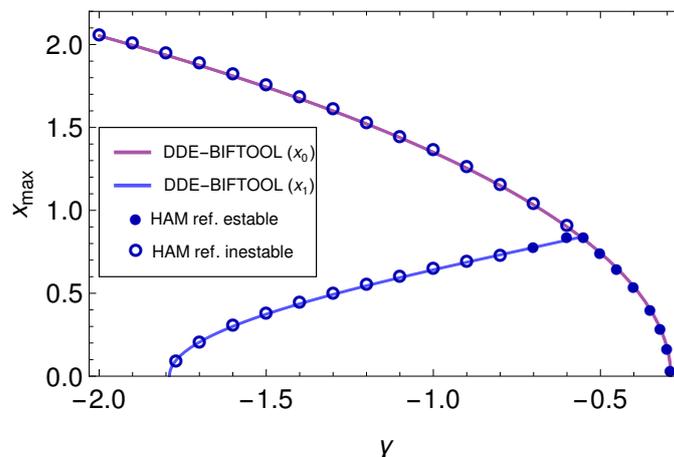


Figura 4.5: Amplitud de las oscilaciones en las ramas de bifurcación para los equilibrios $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$.

en el ejemplo anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \omega y_1' &= y_2 \\ \omega y_2' &= -y_1 - \beta y_1^3 + \gamma(y_1 - y_{1\tau}). \end{aligned} \quad (4.14)$$

El sistema escrito de esta manera es adecuado para estudiar la bifurcación de Hopf del equilibrio x_0 . Nótese que el mismo es invariante por la transformación $y \mapsto -y$.

En la Figura 4.5 se muestra la curva de amplitudes de la rama de bifurcación que surge de $\gamma_{H_0} = -0,2896$. Los puntos corresponden al cálculo con el procedimiento desarrollado en este capítulo y la curva continua al obtenido con el programa DDE-BIFTOOL. Los círculos llenos indican ciclos estables y los círculos huecos indican ciclos inestables. Como puede verse se produce un cambio de estabilidad en $\gamma = -0,558$, en este punto se produce la colisión de tres ciclos, que coinciden. El ciclo de la rama de bifurcación correspondiente al equilibrio alrededor del origen colisiona con los ciclos que provienen de las ramas de bifurcación alrededor de los equilibrios $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$.

Para calcular los ciclos emergentes del equilibrio x_1 correspondientes a $\beta = -1$, hacemos un cambio de coordenadas poniendo el origen en el equilibrio. Este cambio rompe la simetría del sistema original, ésto sugiere introducir el corrimiento δ en el

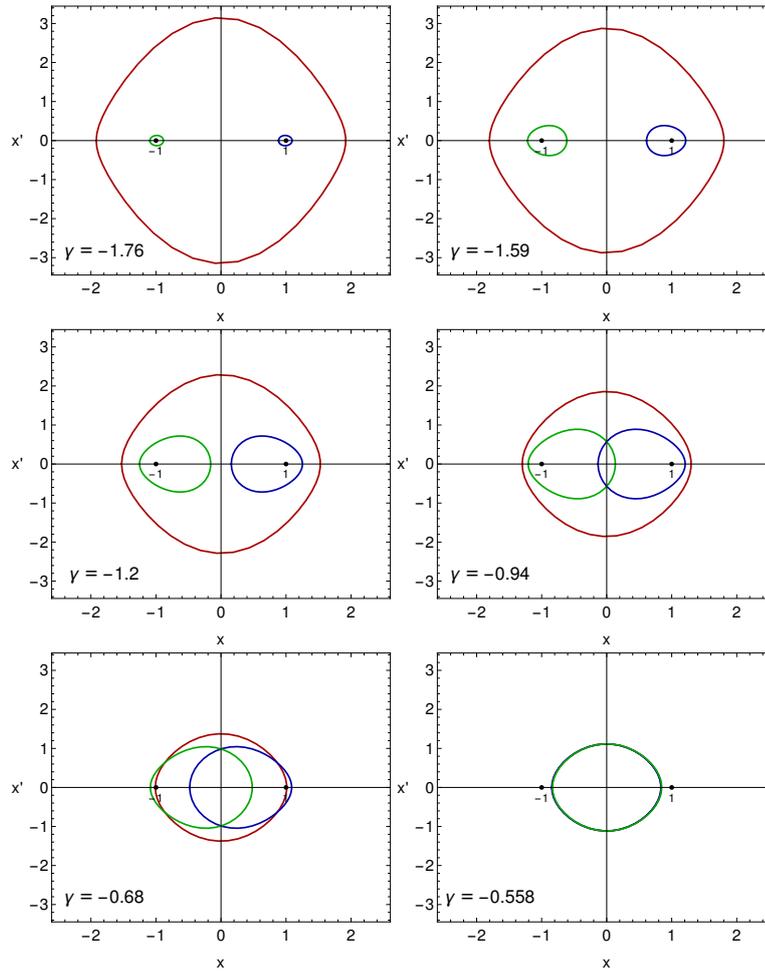
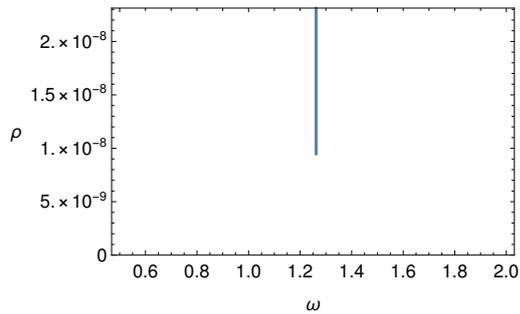


Figura 4.6: Ciclos de la rama de bifurcación del equilibrio $x_0 = 0$ (ciclo externo en color rojo), $x_1 = 1$ (ciclo interno a la derecha en azul) y $x_2 = -1$ (ciclo interno a la izquierda en verde).

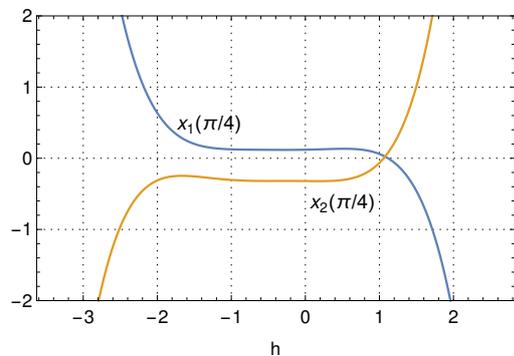
cambio de coordenadas (4.2) obteniendo

$$\begin{aligned}
 \omega y_1' &= y_2 \\
 \omega y_2' &= -\beta - 1 - (1 + 3\beta)(y_1 + \delta) - \\
 &\quad \beta(y_1^3 + \delta^3 + 3\delta y_1^2 + 3\delta^2 y_1 + 3y_1^2 + 3\delta^2 + 6y_1\delta) + \gamma(y_1 - y_{1\tau}).
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

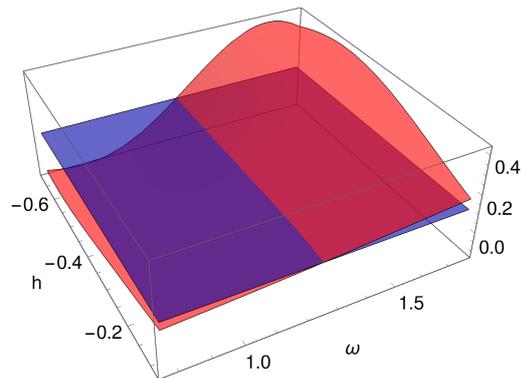
Aplicando el método aquí desarrollado se han encontrado los ciclos correspondientes a la rama de bifurcación que surge de $\gamma_{H_1} = -1,7896$ correspondiente el equilibrio x_1 . Ellos se muestran en la Figura 4.5. Como en la rama anterior la línea continua es la obtenida con DDE-BIFTOOL y los círculos, con su estabilidad indicada, los calculados con el HAM reformado. Podemos interpretar que los ciclos que surgen de los



(a) Desviación cuadrática en función de la frecuencia.



(b) h -curvas para $\omega = 1,262$.



(c) h - ω -superficie $x_1(\pi/4)$.

Figura 4.7: Resultados del oscilador anarmónico con $\beta = -1$, $\gamma = -1,2$ y $\tau = 2,5$, amplitud inicial 0,612.

equilibrios $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ crecen y se desplazan hacia el origen conforme γ crece a partir del punto de bifurcación. Al llegar al punto de colisión la rama es recorrida en sentido contrario y los ciclos se vuelven hacia el equilibrio, como si se tratase de un fold de ciclos pegado sobre sí mismo. Nótese que en $\gamma = -0,73$ se produce un cambio de estabilidad en esta rama por una bifurcación de Neimark–Sacker. En la Figura 4.6 se muestra el desplazamiento de estos ciclos al variar el parámetro γ , así como los ciclos simétricos de la bifurcación del equilibrio $x_0 = 0$.

Por la simetría del sistema los ciclos correspondientes a esta rama pero que surgen el equilibrio $x_2 = -1$ tienen un comportamiento simétrico. Por lo tanto cada punto de esta rama corresponde a dos ciclos ubicados simétricamente respecto del origen.

En la Figura 4.7 se observan la desviación cuadrática (4.9) en función de la frecuen-

cia, también se muestran dos h -curvas, y la h - ω -superficie correspondiente. Como en el ejemplo anterior se verifican los criterios de convergencia enunciados en 4.2.1.

4.4. Discusión y conclusiones

En este capítulo mostramos que el método propuesto en el capítulo anterior para ecuaciones diferenciales ordinarias es aplicable al estudio de ecuaciones diferenciales con retardo, donde valen las consideraciones generales previamente propuestas. En particular la búsqueda de la solución a través de este procedimiento conserva su carácter heurístico, sobre todo en lo que respecta a la exploración del paisaje de la h - ω -superficie y la elección de la ventana de búsqueda α .

El método presentado, al tratarse de una aplicación del HAM, es de carácter semi-analítico ya que combina técnicas analíticas y numéricas para resolver la homotopía planteada. El resultado obtenido al aplicar esta técnica es una expresión explícita en forma de polinomio trigonométrico. Una solución de este tipo tiene ciertas ventajas, por ejemplo en el análisis de la estabilidad de los ciclos. Este análisis puede realizarse de manera analítica por medio de métodos de colocación, como el de Chebyshev [31, 36].

Otra característica distintiva del método es que la obtención de las soluciones es independiente de la estabilidad de las mismas. Ésto lo diferencia de los métodos numéricos basados en la integración directa de las ecuaciones, como el método de Euler o de Runge-Kutta [34, 69, 107, 120, 147], para los que las soluciones inestables son en general difíciles de encontrar debido a la estrategia paso a paso que emplean tales métodos y el error que involucra el cálculo.

Probamos el HAM reformado en ejemplos en los cuales el análisis se centra en el estudio de las bifurcaciones que presenta el sistema. Los dos corresponden a ecuaciones de segundo orden modificadas con el agregado de un término lineal con retardo, la presencia del retardo en estos casos es la causa habitual de la aparición de bifurcaciones de Hopf de los equilibrios. El método tuvo un desempeño excepcional, aún en

situaciones complejas, con multiplicidad de ciclos y cambios de estabilidad.

Como puede apreciarse en los ejemplos, los resultados muestran una coincidencia remarcable comparada con los obtenidos numéricamente. Más aún, puede observarse que el método opera en un amplio rango de los parámetros, a diferencia de los métodos perturbativos.

Hacemos notar la importancia de las consideraciones sobre la simetría del sistema en el momento de elegir la representación particular más conveniente de las soluciones a encontrar. En particular en el ejemplo dado en 4.3.2 por la ausencia de degeneración las soluciones periódicas alrededor del equilibrio trivial deben ser simétricas. Esto implica que tenemos que buscar soluciones sin el corrimiento δ en el cambio de coordenadas que nos lleva a (4.2). Por el contrario al buscar soluciones alrededor de los equilibrios no triviales la introducción del corrimiento es necesaria.

Finalmente hay que remarcar que la solución inicial y_0 debe pertenecer a la cuenca de atracción de las distintas soluciones. Ésto no es siempre posible, al menos si tomamos como aproximación inicial una circunferencia. Más aún, en los casos en que es posible la tasa de convergencia puede ser muy baja. Ya hemos observado que la forma en que escribimos la ecuación es crucial a la hora de encontrar los distintos ciclos.

Para encontrar los ciclos estables de la rama de bifurcación del equilibrio $x_1 = 1$ resulta que tomando una amplitud inicial mayor que $\sqrt{2/3}$ no existen valores de δ_0 que cumplan con la condición (4.7). Si tomamos amplitudes más pequeñas la convergencia es muy lenta y no se llega a una solución razonable. Hemos solucionado este problema dándole un valor grande pero arbitrario a δ_0 y eligiendo δ_1 para que se cumpla (4.7).

Para mejorar la convergencia del método y ahorrar memoria recurrimos a un procedimiento iterativo, en la amplitud de la aproximación inicial, como se explicó en el capítulo 3. Se procede como sigue, primero elegimos una amplitud inicial, luego obtenemos los primeros términos de la solución. Si la amplitud del ciclo obtenido difiere significativamente de la dada inicialmente, hacemos otra corrida cambiando la amplitud inicial. Procedemos de esta forma hasta que la diferencia entre dos iteraciones no

varíe más que una cantidad predeterminada.

En conclusión, en este capítulo implementamos el HAM reformado para modelos con retardo, ampliando así la utilidad y aplicabilidad de la técnica desarrollada en el capítulo precedente. Esperamos, con esto, impulsar su empleo y estudio, confiando en que la diversidad de enfoques metodológicos incrementa y refuerza la comprensión de los investigadores dedicados a esta disciplina.

Un modelo biológico (6-dimensional)

5.1. Introducción

En este capítulo presentamos un modelo que describe la propagación de una infección por HTLV-I en el torrente sanguíneo de una persona infectada. Así como los modelos epidemiológicos reflejan las interacciones entre los grupos de individuos en los distintos estadios de infección, en este caso las variables del sistema representan a los diferentes grupos celulares que intervienen en la propagación y lucha contra el virus y contra las células que se vuelven malignas durante el proceso. El modelo que proponemos está formado por seis ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, a lo largo del capítulo analizaremos la dinámica del sistema y discutiremos sus implicaciones biológicas.

Se estima que el virus linfotrópico humano de células T de tipo I (o HTLV-I por su acrónimo inglés) infecta a casi 20 millones de personas en el mundo. Es el primer retrovirus humano descubierto, cuatro años antes del descubrimiento del HIV, y el primer virus relacionado al surgimiento de cáncer [196].

El HTLV-I está asociado al desarrollo de varias enfermedades, entre ellas podemos mencionar dos de mayor gravedad: leucemia de células T del adulto (ATL), que es un tipo muy agresivo de linfoma, y paraparesis espástica tropical (TSP), también llamada mielopatía asociada al HTLV-I.

La infección en un ser humano puede ser modelada utilizando un sistema dinámico compuesto por ecuaciones diferenciales ordinarias, donde las variables del sistema describen un comportamiento de dinámica poblacional. En este caso las especies que compiten son los distintos tipos de células del sistema inmunitario [202]. El contagio se produce por contacto celular, a diferencia de otros virus en donde el contenido de viriones en el medio celular es el responsable de la infección.

Los modelos matemáticos de dinámica de poblaciones son ampliamente utilizados para describir el curso de una infección con algunos virus porque puede considerarse a la sangre como un medio homogéneo donde conviven todos los tipos celulares [186].

El modelo que usamos en este capítulo para describir la dinámica de la infección es del tipo considerado en los siguientes trabajos [22, 37, 91, 108, 137, 162, 163, 186, 200]. En Perelson et al. [162] y Stilianakis y Seydel [186] se presentan modelos de infección por HIV y HTLV-I respectivamente que han servido de inspiración para muchos trabajos posteriores. En el trabajo de Wang y Li [200], por ejemplo, se estudia un modelo de dimensión tres basado en el trabajo de Perelson et al. [162]. En el artículo de Katri y Ruan [108] se introduce un retardo temporal al modelo de Stilianakis y Seydel [186] para representar el tiempo entre emisión de partículas de contagio y la infección de las células. En Perelson y Ribeiro [163] se hace una revisión de la evolución del modelado del HIV, mostrando las características dinámicas de la infección que son reflejadas por estos modelos. En el trabajo de Asquith y Bangham [22] se ilustra con ejemplos la aplicación del modelado a la inmunología, al mismo tiempo que se discute la robustez de los modelos matemáticos en biología. En el trabajo de Chan y Yu [37] y en el de Lim y Maini [137] se analizan dos modelos que presentan respuesta de linfocitos T citotóxicos. En el primero se hace un estudio dinámico y se buscan bifurcaciones de Hopf. En el otro se realiza un estudio exhaustivo de las implicaciones de la respuesta inmunita-

ria en el desarrollo de TSP para un modelo de infección por HTLV-I. Por último en el trabajo de Gökdoğan y Merdan [91] el Método de Perturbación Homotópica por múltiples etapas es aplicado a un sistema de dimensión cuatro que modela la infección por HTLV-I.

En lo que sigue presentaremos un modelo que considera los estadios de latencia e incorpora la respuesta por linfocitos T citotóxicos y el desarrollo de ATL. Consideramos que es de gran interés porque nos permite estudiar nuevos fenómenos que aparecen y son suficientemente simples para ser analizados exhaustivamente desde el punto de vista dinámico. Como por ejemplo, bifurcaciones, órbitas periódicas, etc. También analizamos una modificación del modelo para tomar en cuenta el efecto de saturación que se ha mencionado en el libro de Wodarz [202].

Entre los métodos analíticos o semianalíticos desarrollados para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, como las necesarias para modelar el progreso del virus en el torrente sanguíneo, se destaca el Método de Análisis Homotópico (HAM) que se describió en el capítulo 2. Si bien el HAM ha sido utilizado para resolver varios tipos de problemas [5, 31, 32, 45, 46, 83], en muy pocos casos se lo ha empleado en sistemas de más de dos ecuaciones. Esto se debe en parte a que la elección de la base de funciones para expresar la solución, el operador diferencial lineal y sobre todo la aproximación inicial son más difíciles de determinar.

Como se mencionó anteriormente, uno de los problemas que se presenta al integrar un sistema, especialmente de dimensión mayor a dos, utilizando una base de polinomios en la variable t , es que el intervalo de tiempo en el que la aproximación tiene un error aceptable suele ser pequeño. En este capítulo nos interesa observar la evolución de la infección y el desarrollo de ATL, para lo que es necesario una solución que sea válida en un periodo de tiempo significativamente largo. Por este motivo utilizamos una versión adaptada del HAM conocida como MSHAM (Multistage Homotopy Analysis Method), que fue descrita en la sección 2.3. El MSHAM consiste en aplicar el HAM en sucesivos intervalos de longitud corta conectando las soluciones obtenidas por condiciones iniciales fijas.

En la sección 5.2, presentamos el modelo propuesto, detallando los parámetros biológicos y las diferentes poblaciones celulares intervinientes. En la sección 5.3, damos una descripción breve del Método de Análisis Homotópico por etapas múltiples aplicado a este sistema. En 5.4 analizamos la estabilidad de los equilibrios, damos el número reproductivo básico R_0 y describimos dos tipos de soluciones en torno a dos de esos equilibrios. En el primer caso nos referimos a órbitas periódicas de un centro no lineal. Para el segundo tipo utilizamos el MSHAM para hallar las aproximaciones a las órbitas que convergen al equilibrio estable que representa la infección crónica con HTLV-I.

En todo este capítulo, llamaremos solución numérica a la calculada con las rutinas de integración del programa Mathematica de Wolfram. En 5.5 estudiamos el error que resulta de la aplicación del MSHAM respecto del resultado obtenido con el método numérico, en el caso de este último asumimos que tiene la precisión suficiente para considerarlo como la solución real. Obtenemos estos errores para diferentes órdenes del HAM, así como para distintos pasos temporales, con el objetivo de elegir los valores más adecuados para éstos.

Por último, en la sección 5.6, introducimos una modificación a una de las ecuaciones del modelo para tomar en cuenta el efecto de saturación de los linfocitos citotóxicos, analizando los resultados de este cambio para distintos valores del parámetro de saturación.

La mayoría de los resultados aquí desarrollados están publicados en el trabajo [48].

5.2. Descripción del modelo de infección

El HTLV-I infecta a las células T del sistema inmunitario, tiene como diana principal a los linfocitos T $CD4^+$ (helpers), que son los encargados de guiar cierta parte de la respuesta inmunitaria. Por ser el principal reservorio del virus ésta será la población celular mayoritaria que tendremos en cuenta en el modelo. Asumiremos que el organismo produce estos linfocitos a un ritmo constante. En menor medida el virus

también infecta a los linfocitos T CD8⁺ (killers), estos también son conocidos como linfocitos T citotóxicos (CTL) y su principal función es la de destruir células infectadas con virus, de cáncer o cualquier otra célula dañada. Los linfocitos T CD8⁺ tienen un rol fundamental en el control del avance del virus y del progreso del cáncer. Hay estudios que sugieren que la función de los linfocitos citotóxicos infectados con el virus se ve reducida (ver [115]). Por lo tanto resulta de interés considerar la infección de estas células dentro del modelo.

La infección de los linfocitos con el HTLV-I procede en dos etapas. Cuando el virus entra en la célula por primera vez, ésta entra en una etapa de latencia durante la cual no es blanco de los linfocitos citotóxicos y tampoco es capaz de infectar nuevas células. A pesar de que el número de linfocitos T CD4⁺ infectados latentes prevalece sobre los que expresan el virus de manera activa (ver por ejemplo [26, 186]), las células latentes se vuelven eventualmente activas. En el modelo que proponemos vamos a representar este proceso con una probabilidad de activación por unidad de tiempo fija para la población de células latentes. Un pequeño porcentaje de estas células activas pueden degenerar en células cancerosas, dando lugar a ATL.

$x_1(t)$	Linfocitos T CD4 ⁺ sanos
$x_2(t)$	Linfocitos T CD4 ⁺ infectados de manera latente
$x_3(t)$	Linfocitos T CD4 ⁺ infectados de manera activa
$x_4(t)$	Células ATL
$x_5(t)$	Linfocitos T CD8 ⁺ (CTL) sanos
$x_6(t)$	Linfocitos T CD8 ⁺ (CTL) infectados

Tabla 5.1: Variables del modelo

Para la construcción del modelo consideramos seis variables que se detallan en la tabla 5.1. Las primeras tres variables representan a los linfocitos T CD4⁺ sanos, latentes e infectados. A la población de linfocitos T CD8⁺ la dividimos en las dos subpoblaciones mencionadas, sanos e infectados. Como se dijo antes, los linfocitos T CD8⁺ que

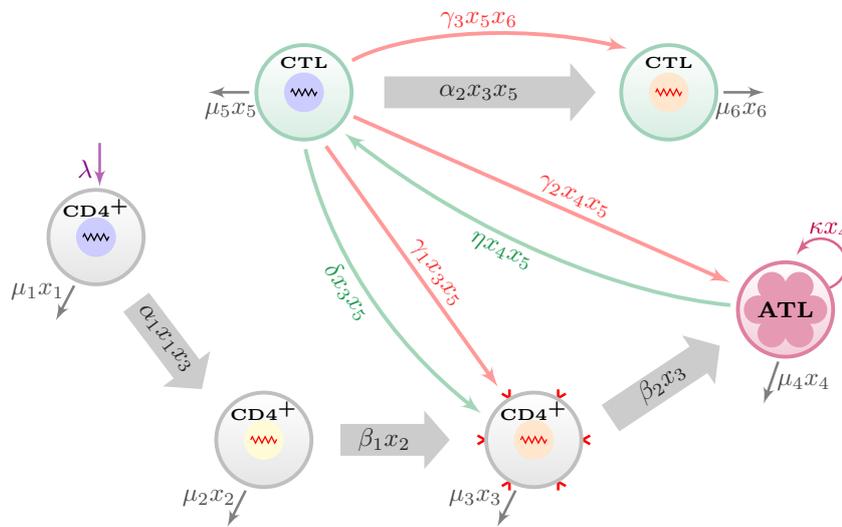


Figura 5.1: Diagrama de interacción entre los tipos celulares.

se encuentran infectados con el virus reducen su funcionalidad y además se vuelven blanco de los restantes linfocitos citotóxicos en un proceso que se denomina fratricidio [96]. Un punto que merece especial atención es la proliferación de estos linfocitos, en una primera aproximación podemos representar este fenómeno con tasas proporcionales a las células enfermas (linfocitos T CD4⁺ infectados activamente y células ATL) sin embargo esto no es del todo realista en general. Por un lado el organismo no es capaz de generar un crecimiento indiscriminado de células CTL. Por otro lado la activación de las células CTL es un proceso que puede descomponerse como una cascada de más de dos etapas de diferenciación. Este último fenómeno involucra la introducción de nuevas variables que describan las sucesivas generaciones de linfocitos hasta su activación, en este trabajo no consideraremos este caso. El problema del crecimiento de las células CTL se puede afrontar modificando la ecuación correspondiente, en la sección 5.6 analizamos este efecto.

Así mismo, nos interesa incorporar en nuestro modelo el potencial desarrollo de leucemia, es por eso que una de las variables representa la cantidad de células ATL. Las células de cáncer se caracterizan por su elevada tasa de reproducción, agregamos un término de proliferación a la cuarta ecuación del sistema, que corresponde a estas

células. Elegimos un crecimiento con tasa constante en lugar de logístico (como por ejemplo se ha tomado en [91, 108, 186]) fundamentalmente porque nos interesan situaciones en donde el número de células ATL es bajo, y para este escenario ambos modelos dan resultados similares (ver [137]). En la tabla 5.1 se identifican las seis variables y en la Figura 5.1 se representan simbólicamente las interacciones entre los distintos tipos de células.

Las ecuaciones son las siguientes

$$\begin{aligned}
 x_1' &= \lambda - \mu_1 x_1 - \alpha_1 x_1 x_3 \\
 x_2' &= \alpha_1 x_1 x_3 - \mu_2 x_2 - \beta_1 x_2 \\
 x_3' &= \beta_1 x_2 - \mu_3 x_3 - \gamma_1 x_3 x_5 - \beta_2 x_3 \\
 x_4' &= \beta_2 x_3 + \kappa x_4 - \mu_4 x_4 - \gamma_2 x_4 x_5 \\
 x_5' &= \delta x_3 x_5 + \eta x_4 x_5 - \mu_5 x_5 - \alpha_2 x_3 x_5 \\
 x_6' &= \alpha_2 x_3 x_5 - \mu_6 x_6 - \gamma_3 x_5 x_6
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

El significado de los parámetros se muestra en la tabla 5.2 al final del capítulo, allí también se dan valores típicos que fueron tomados de la literatura específica [137, 186]. La estimación de estos valores es un problema complejo ya que se necesitan una gran cantidad de datos. En el caso de las infecciones en el ser humano tales datos son difíciles de obtener, por ese motivo en algunos casos en que resulta válido se pueden utilizar los valores de algunos parámetros que han sido estimados a partir de información obtenida para retrovirus más estudiados, como es el caso del HIV.

5.3. Método de Análisis Homotópico por múltiples etapas

En esta sección vamos a aplicar el Método de Análisis Homotópico por múltiples etapas, que ya fue presentado en el capítulo 2, al sistema (5.1). Llamamos

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), x_6(t)) \tag{5.2}$$

al vector de los estados. Sea \mathcal{N} el operador no lineal para el cual el sistema (5.1) se convierte en $\mathcal{N}(\mathbf{x}) = 0$ y consideramos el operador lineal

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} \otimes I, \quad (5.3)$$

donde I es la matriz identidad de 6×6 .

Ahora podemos construirnos la homotopía

$$\mathcal{H}_q[\phi] = (1 - q)\mathcal{L}[\phi - \mathbf{x}_0] - qh\mathcal{N}[\phi], \quad q \in [0, 1], \quad (5.4)$$

para una aproximación inicial $\mathbf{x}_0(t)$. Como se describió en el capítulo 2, suponiendo que ϕ es analítica en q , la desarrollamos en serie de potencias

$$\phi(t, q) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{x}_m(t) q^m, \quad (5.5)$$

y ésta deberá verificar $\mathcal{H}_q[\phi] = 0$, $0 \leq q \leq 1$.

Los términos de la serie (5.5) los hallamos con las ecuaciones de deformación

$$\mathcal{L}[\mathbf{x}_m - (1 - \delta_{1m})\mathbf{x}_{m-1}] = \frac{h}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\phi]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0}, \quad m = 1, \dots \quad (5.6)$$

Y posteriormente, evaluando en $q = 1$ la serie (5.5) y asignándole un valor adecuado h^* a h , obtenemos la serie solución de (5.1)

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{x}_m(t). \quad (5.7)$$

Los términos de esta serie pueden ser calculados hasta un cierto orden k , por lo tanto la solución obtenida será una aproximación

$$\mathbf{x}(t) \approx \sum_{m=0}^k \mathbf{x}_m(t). \quad (5.8)$$

La flexibilidad del HAM nos permite decidir entre varias bases de funciones para desarrollar las soluciones. En este caso, por su simplicidad, hemos elegido utilizar potencias de la variable independiente t . Sin embargo, las soluciones obtenidas no son válidas para tiempos grandes, podemos ver en la Figura 5.2 que la solución se aparta bruscamente de la real luego de un intervalo de tiempo en donde las dos coinciden apreciablemente. Más aún, este fenómeno todavía se puede continuar observando cuando se cambia la base de funciones en la que se escribe la solución.

Para estos casos el MSHAM es una herramienta más apropiada. Usando este método, procedemos de la siguiente manera:

1. Dividimos el intervalo $[0, T)$ en subintervalos de la misma longitud Δt .
2. Calculamos la solución con el HAM para el orden k en el primer intervalo $[0, \Delta t)$.
3. Por medio de las h -curvas seleccionamos el valor apropiado para el parámetro de control de convergencia h .
4. Tomando el valor de la solución así obtenida en $t = \Delta t$ y usándolo como aproximación inicial constante para el HAM en el intervalo siguiente, hallamos la aproximación con el HAM de orden k en $[\Delta t, 2\Delta t)$, asignándole al parámetro h el mismo valor tomado previamente.
5. Procediendo de igual forma en cada intervalo y empalmando los resultados, construimos una serie solución que resulta continua.

En la Figura 5.5 mostramos los resultados obtenidos con este método comparados con sus respectivas soluciones numéricas, se puede observar claramente que las aproximaciones siguen siendo muy buenas aún para valores de t grandes. En la Figura 5.6 vemos las h -curvas de las variables x_i , $i = 1, \dots, 6$. Este método ha sido poco aplicado a este tipo de problemas, por lo tanto, hemos presentado un breve análisis del error de la solución, poniendo énfasis en el paso temporal y en el orden del HAM, ver Figuras 5.8 y 5.9.

Observación 5.1. *Si bien la base elegida para aproximar la solución con el HAM es una de las más simples, las expresiones que resultan de la aplicación del MSHAM son en extremo largas y no resulta posible incluir ninguna de ellas en esta tesis.*

5.4. Resultados

El escenario dinámico que surge del modelo propuesto es muy complejo. En parte debido a la cantidad de parámetros y a la dimensión del sistema, que para este tipo de

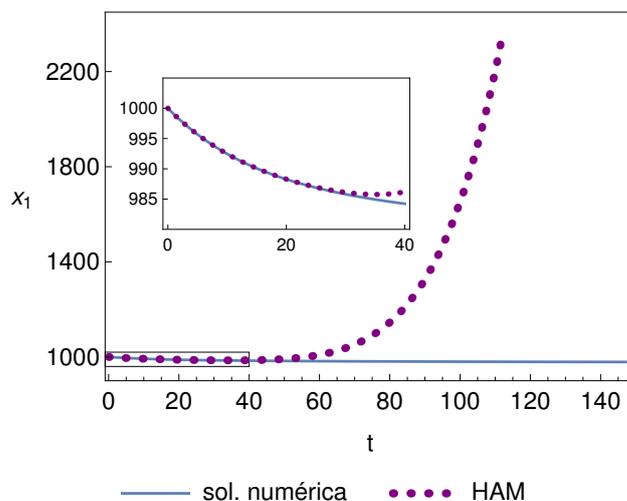


Figura 5.2: Comparación de la solución obtenida por el HAM del sistema 5.1 con $\kappa = 0,0016$, y la solución numérica para valores grandes del tiempo t .

estudios es muy alta. Por esto procedemos primero a estudiar los equilibrios y su estabilidad, seleccionando sólo los que tienen significado biológico. Encontramos cinco equilibrios que hemos llamado P_i , $i = 1, \dots, 5$.

P_1 : Este es el equilibrio libre de infección, que permite obtener el número reproductivo básico por medio del estudio de su estabilidad (ver [10, 193]).

P_2 : En este equilibrio desaparece la infección viral y queda un remanente de células cancerosas que oscilan al ser combatidas por el sistema inmunológico.

P_3 : Aquí no hay respuesta de linfocitos T citotóxicos (equilibrios de este tipo han sido reportados en [119, 123]).

P_4 : Representa el estado de infección crónica, éste exhibe una bifurcación de Hopf que analizamos en 5.4.2.

P_5 : Este equilibrio parece no tener regiones relevantes y no lo hemos considerado.

A continuación, procedemos a estudiar las dinámicas generadas por estos centros organizadores.

Como ya se dijo, el sistema (5.1) presenta cinco equilibrios

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \left(\frac{\lambda}{\mu_1}, 0, 0, 0, 0, 0 \right) \\
 P_2 &= \left(\frac{\lambda}{\mu_1}, 0, 0, \frac{\mu_5}{\eta}, \frac{\kappa - \mu_4}{\gamma_2}, 0 \right) \\
 P_3 &= \left(\frac{(\beta_1 + \mu_2)(\beta_2 + \mu_3)}{\alpha_1 \beta_1}, \frac{\alpha_1 \beta_1 \lambda - \mu_1(\beta_1 + \mu_2)(\beta_2 + \mu_3)}{\alpha_1 \beta_1(\beta_1 + \mu_2)}, \frac{\alpha_1 \beta_1 \lambda - \mu_1(\beta_1 + \mu_2)(\beta_2 + \mu_3)}{\alpha_1(\beta_1 + \mu_2)(\beta_2 + \mu_3)}, \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\beta_2(\alpha_1 \beta_1 \lambda - \mu_1(\beta_1 + \mu_2)(\beta_2 + \mu_3))}{\alpha_1(\beta_1 + \mu_2)(\beta_2 + \mu_3)(\kappa - \mu_4)}, 0, 0 \right) \\
 P_4 &= \left(\frac{\alpha_1 \beta_1 \gamma_2 \lambda (\delta - \alpha_2) + \alpha_1 \mu_5 (\beta_1 + \mu_2) (\gamma_2 (\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1 (\kappa - \mu_4)) - \mu_1 (\beta_1 + \mu_2) (\alpha_2 A + \right. \\
 &\quad \frac{\beta_2 \gamma_1 \eta - \beta_2 \gamma_2 \delta - \gamma_1 \delta \kappa + \gamma_1 \delta \mu_4 - \gamma_2 \delta \mu_3}{C} + R_1}{C(\beta_1 + \mu_2)}, \frac{2\alpha_1^2 \beta_1 \gamma_2 \lambda \mu_5 + \alpha_1 \mu_1 (\beta_1 \gamma_2 \lambda (\delta - \alpha_2) - \right. \\
 &\quad \left. A \mu_5 (\beta_1 + \mu_2)) + \mu_1 (\mu_1 (\beta_1 + \mu_2) (\alpha_2 (\gamma_2 (\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1 (\kappa - \mu_4)) + \beta_2 \gamma_1 \eta - \beta_2 \gamma_2 \delta - \gamma_1 \delta \kappa + \right. \\
 &\quad \left. C(\beta_1 + \mu_2))}{C(\beta_1 + \mu_2)}, \frac{\gamma_1 \delta \mu_4 - \gamma_2 \delta \mu_3 - R_2}{C(\beta_1 + \mu_2)}, \frac{-B \mu_1 (\beta_1 + \mu_2) - \alpha_1 \beta_1 \gamma_2 \lambda (\alpha_2 - \delta) + \alpha_1 A \mu_5 (\beta_1 + \mu_2) - R_1}{2B \alpha_1 (\beta_1 + \mu_2)}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{\alpha_1 \mu_5 (\beta_1 + \mu_2) (B - \beta_2 \gamma_1 \eta) - (\alpha_2 - \delta) (R_2 + B \mu_1 (\beta_1 + \mu_2)) - \alpha_1 \beta_1 \gamma_2 \lambda (\alpha_2 - \delta)^2}{2B \alpha_1 \eta (\beta_1 + \mu_2)}, \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha_1 \beta_1 (\alpha_1 \beta_1 \gamma_2 \lambda (\alpha_2 - \delta) + \alpha_1 \mu_5 (\beta_1 + \mu_2) (\gamma_2 (\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1 (\mu_4 - \kappa)) - R_1)}{\gamma_1 C (\beta_1 + \mu_2)} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{\alpha_1 \beta_1 (\mu_1 (\beta_1 + \mu_2) (-\alpha_2 (\gamma_2 (\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1 (\mu_4 - \kappa)) + \beta_2 \gamma_1 \eta + \beta_2 \gamma_2 \delta - \gamma_1 \delta \kappa + \gamma_1 \delta \mu_4 + \gamma_2 \delta \mu_3))}{\gamma_1 C (\beta_1 + \mu_2)}, \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha_2 (B \mu_1 (\beta_1 + \mu_2) + \alpha_1 \beta_1 \gamma_2 \lambda (\alpha_2 - \delta) - \alpha_1 A \mu_5 (\beta_1 + \mu_2) + R_1) (E - \mu_6 R_1)}{D} \right) \\
 P_5 &= \left(\frac{\alpha_1 \beta_1 \gamma_2 \lambda (\delta - \alpha_2) + \alpha_1 \mu_5 (\beta_1 + \mu_2) (\gamma_2 (\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1 (\kappa - \mu_4)) - \mu_1 (\beta_1 + \mu_2) (\alpha_2 A + \right. \\
 &\quad \frac{\beta_2 \gamma_1 \eta - \beta_2 \gamma_2 \delta - \gamma_1 \delta \kappa + \gamma_1 \delta \mu_4 - \gamma_2 \delta \mu_3}{C} - R_1}{C(\beta_1 + \mu_2)}, \frac{2\alpha_1^2 \beta_1 \gamma_2 \lambda \mu_5 + \alpha_1 \mu_1 (\beta_1 \gamma_2 \lambda (\delta - \alpha_2) - \right. \\
 &\quad \left. A \mu_5 (\beta_1 + \mu_2)) + \mu_1 (\mu_1 (\beta_1 + \mu_2) (\alpha_2 (\gamma_2 (\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1 (\kappa - \mu_4)) + \beta_2 \gamma_1 \eta - \beta_2 \gamma_2 \delta - \gamma_1 \delta \kappa + \right. \\
 &\quad \left. C(\beta_1 + \mu_2))}{C(\beta_1 + \mu_2)}, \frac{\gamma_1 \delta \mu_4 - \gamma_2 \delta \mu_3 + R_2}{C(\beta_1 + \mu_2)}, \frac{-B \mu_1 (\beta_1 + \mu_2) - \alpha_1 \beta_1 \gamma_2 \lambda (\alpha_2 - \delta) + \alpha_1 A \mu_5 (\beta_1 + \mu_2) + R_1}{2B \alpha_1 (\beta_1 + \mu_2)}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{\alpha_1 \mu_5 (\beta_1 + \mu_2) (B - \beta_2 \gamma_1 \eta) + (\alpha_2 - \delta) (R_2 - B \mu_1 (\beta_1 + \mu_2)) - \alpha_1 \beta_1 \gamma_2 \lambda (\alpha_2 - \delta)^2}{2B \alpha_1 \eta (\beta_1 + \mu_2)}, \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha_1 \beta_1 (\alpha_1 \beta_1 \gamma_2 \lambda (\alpha_2 - \delta) + \alpha_1 \mu_5 (\beta_1 + \mu_2) (\gamma_2 (\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1 (\mu_4 - \kappa)) + R_1)}{\gamma_1 C (\beta_1 + \mu_2)} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{\alpha_1 \beta_1 (\mu_1 (\beta_1 + \mu_2) (-\alpha_2 (\gamma_2 (\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1 (\mu_4 - \kappa)) + \beta_2 \gamma_1 \eta + \beta_2 \gamma_2 \delta - \gamma_1 \delta \kappa + \gamma_1 \delta \mu_4 + \gamma_2 \delta \mu_3))}{\gamma_1 C (\beta_1 + \mu_2)}, \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha_2 (B \mu_1 (\beta_1 + \mu_2) + \alpha_1 \beta_1 \gamma_2 \lambda (\alpha_2 - \delta) - \alpha_1 A \mu_5 (\beta_1 + \mu_2) - R_1) (E + \mu_6 R_1)}{D} \right)
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Donde

$$\begin{aligned}
 A &= \gamma_2(\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1(\kappa - \mu_4) \\
 B &= \beta_2\gamma_2\delta - \beta_2\gamma_1\eta + \gamma_1\delta\kappa + \gamma_2\delta\mu_3 - \alpha_2A - \gamma_1\delta\mu_4 \\
 C &= 2\alpha_1\beta_1\gamma_2(-\alpha_2\mu_1 + \delta\mu_1 + \alpha_1\mu_5) \\
 D &= 4B\alpha_1(\beta_1 + \mu_2) \left(\alpha_1 \left(\gamma_3\mu_6(\beta_1\gamma_2\lambda(\alpha_2 - \delta) + \mu_5(\beta_1 + \mu_2)(\gamma_2(\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1(\mu_4 - \kappa))) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \gamma_3^2(\beta_1\lambda((\alpha_2 - \delta)(\kappa - \mu_4) + \beta_2\eta) + \mu_5(\beta_1 + \mu_2)(\beta_2 + \mu_3)(\kappa - \mu_4)) - \gamma_1\gamma_2\mu_5\mu_6^2(\beta_1 + \mu_2)) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \mu_1(\beta_1 + \mu_2)(\gamma_3(\beta_2 + \mu_3) - \gamma_1\mu_6)((\alpha_2 - \delta)(\gamma_2\mu_6 + \gamma_3(\kappa - \mu_4)) + \beta_2\gamma_3\eta) \right) \right) \\
 E &= \mu_6 \left(\alpha_1\beta_1\gamma_2\lambda(\alpha_2 - \delta) + \alpha_1\mu_5(\beta_1 + \mu_2)(\gamma_2(\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1(\mu_4 - \kappa)) + \mu_1(\beta_1 + \mu_2) \right. \\
 &\quad \left. (-\alpha_2(\gamma_2(\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1(\mu_4 - \kappa)) + \beta_2\gamma_1\eta + \beta_2\gamma_2\delta - \gamma_1\delta\kappa + \gamma_1\delta\mu_4 + \gamma_2\delta\mu_3) \right) - \\
 &\quad 2\gamma_3((\alpha_2 - \delta)(\kappa - \mu_4) + \beta_2\eta)(\mu_1(\beta_1 + \mu_2)(\beta_2 + \mu_3) - \alpha_1\beta_1\lambda) + \\
 &\quad 2\alpha_1\gamma_3\mu_5(\beta_1 + \mu_2)(\beta_2 + \mu_3)(\kappa - \mu_4) \\
 R_1 &= \left((\alpha_1\beta_1\gamma_2\lambda(\delta - \alpha_2) + \alpha_1\mu_5(\beta_1 + \mu_2)(\gamma_2(\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1(\kappa - \mu_4)) - \mu_1\beta_1 + \mu_2) \right. \\
 &\quad \left. (-\alpha_2(\gamma_2(\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1(\kappa - \mu_4)) - \beta_2\gamma_1\eta + \beta_2\gamma_2\delta + \gamma_1\delta\kappa - \gamma_1\delta\mu_4 + \gamma_2\delta\mu_3) \right)^2 + 4\alpha_1\mu_5 \\
 &\quad \left(\beta_1 + \mu_2 \right) \left(-\alpha_2(\gamma_2(\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1(\kappa - \mu_4)) - \beta_2\gamma_1\eta + \beta_2\gamma_2\delta + \gamma_1\delta\kappa - \gamma_1\delta\mu_4 + \gamma_2\delta\mu_3 \right) \\
 &\quad \left(\mu_1(\beta_1 + \mu_2)(\gamma_2(\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1(\kappa - \mu_4)) - \alpha_1\beta_1\gamma_2\lambda \right)^{1/2} \\
 R_2 &= \left(\alpha_1^2 \left(\beta_1^2\gamma_2^2\lambda^2(\alpha_2 - \delta)^2 - 2\beta_1\gamma_2\lambda\mu_5(\beta_1 + \mu_2) \left(-\alpha_2(\gamma_2(\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1(\kappa - \mu_4)) - 2\beta_2\gamma_1\eta \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \beta_2\gamma_2\delta + \gamma_1\delta\kappa - \gamma_1\delta\mu_4 + \gamma_2\delta\mu_3 \right) + \mu_5^2(\beta_1 + \mu_2)^2(\gamma_2(\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1(\kappa - \mu_4))^2 \right) + 2\alpha_1\mu_1 \\
 &\quad \left(\beta_1 + \mu_2 \right) \left(-\alpha_2(\gamma_2(\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1(\kappa - \mu_4)) - \beta_2\gamma_1\eta + \beta_2\gamma_2\delta + \gamma_1\delta\kappa - \gamma_1\delta\mu_4 + \gamma_2\delta\mu_3 \right) \\
 &\quad \left(\beta_1\gamma_2\lambda(\alpha_2 - \delta) + \mu_5(\beta_1 + \mu_2)(\gamma_2(\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1(\kappa - \mu_4)) \right) + \mu_1^2(\beta_1 + \mu_2)^2 \\
 &\quad \left. \left(-\alpha_2(\gamma_2(\beta_2 + \mu_3) + \gamma_1(\kappa - \mu_4)) - \beta_2\gamma_1\eta + \beta_2\gamma_2\delta + \gamma_1\delta\kappa - \gamma_1\delta\mu_4 + \gamma_2\delta\mu_3 \right)^2 \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

Salvo el equilibrio trivial P_1 , los demás tienen valores negativos en algunas regiones del espacio de parámetros y por lo tanto no son biológicamente relevantes en esas zonas.

El jacobiano en un equilibrio genérico $P = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ es

$$J(P) = \begin{pmatrix} -x_3\alpha_1 - \mu_1 & 0 & -x_1\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 x_3 & -\beta_1 - \mu_2 & \alpha_1 x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & -\beta_2 - \mu_3 - \gamma_1 x_5 & 0 & -x_3\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \kappa - \mu_4 - x_5\gamma_2 & -x_4\gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta x_5 - \alpha_2 x_5 & \eta x_5 & \eta x_4 - \mu_5 + x_3(\delta - \alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 x_5 & 0 & \alpha_2 x_3 - \gamma_3 x_6 & -x_5\gamma_3 - \mu_6 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

En P_1 el jacobiano es

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -\mu_1 & 0 & -\alpha_1 \lambda / \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 - \mu_2 & \alpha_1 \lambda / \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & -\beta_2 - \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \kappa - \mu_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_6 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

y los autovalores son

$$\begin{aligned} a_1 &= -\mu_1; & a_4 &= \kappa - \mu_4; \\ a_2 &= -\frac{\sqrt{\mu_1(4\alpha_1\beta_1\lambda + \mu_1(\beta_1 - \beta_2 + \mu_2 - \mu_3)^2) + \mu_1(\beta_1 + \beta_2 + \mu_2 + \mu_3)}}{2\mu_1}; & a_5 &= -\mu_5; \\ a_3 &= \frac{\sqrt{\mu_1(4\alpha_1\beta_1\lambda + \mu_1(\beta_1 - \beta_2 + \mu_2 - \mu_3)^2) - \mu_1(\beta_1 + \beta_2 + \mu_2 + \mu_3)}}{2\mu_1}; & a_6 &= -\mu_6. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Estudiando estas expresiones vemos que si $\kappa > \mu_4$, es decir que la tasa de reproducción de las células del linfoma es mayor que la de muerte, el autovalor a_4 es siempre positivo y por lo tanto el equilibrio es inestable. Por otro lado, si $\kappa < \mu_4$ y la muerte de las células leucémicas controla su proliferación, a_4 es negativo y de a_3 se obtiene el número reproductivo básico R_0 (ver por ejemplo [53, 106, 194]). Este valor puede ser interpretado como el número promedio de células nuevas que se infectan a partir de una única célula infectada de manera activa

$$R_0 = \frac{\alpha_1 \beta_1 \lambda}{\mu_1 (\beta_1 + \mu_2) (\beta_2 + \mu_3)} \quad (5.13)$$

De esta forma si $R_0 < 1$, P_1 es estable y el virus es eliminado, y si $R_0 > 1$, P_1 es inestable y la infección se instaura.

Cuando $R_0 = 1$ los equilibrios P_1 y P_3 coinciden. Si bien P_3 existe, desde el punto de vista matemático, para casi todos los valores de los parámetros, sólo cuando $R_0 > 1$ y $\kappa < \mu_4$ sus valores son todos positivos y tiene sentido biológico. De la misma manera P_2 tiene sentido cuando $\kappa > \mu_4$. En la sección 5.4.1 veremos que en torno a este último se producen oscilaciones.

El jacobiano en P_2 es

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} -\mu_1 & 0 & -\alpha_1 \lambda / \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 - \mu_2 & \alpha_1 \lambda / \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & -\beta_2 - \mu_3 - \gamma_1 (\kappa - \mu_4) / \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & 0 & -\gamma_2 \mu_5 / \eta & 0 \\ 0 & 0 & (\delta - \alpha_2) (\kappa - \mu_4) / \gamma_2 & \eta (\kappa - \mu_4) / \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 (\kappa - \mu_4) / \gamma_2 & 0 & 0 & -\gamma_3 (\kappa - \mu_4) / \gamma_2 - \mu_6 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Los autovalores en este caso son

$$\begin{aligned} b_1 &= -\mu_1; & b_4 &= -i\sqrt{\mu_5(\kappa - \mu_4)}; \\ b_2 &= -\frac{\sqrt{\Delta} + \eta\mu_1(\gamma_2(\beta_1 + \beta_2 + \mu_2 + \mu_3) + \gamma_1(\kappa - \mu_4))}{2\gamma_2\eta\mu_1}; & b_5 &= i\sqrt{\mu_5(\kappa - \mu_4)}; \\ b_3 &= \frac{\sqrt{\Delta} - \eta\mu_1(\gamma_2(\beta_1 + \beta_2 + \mu_2 + \mu_3) + \gamma_1(\kappa - \mu_4))}{2\gamma_2\eta\mu_1}; & b_6 &= -\frac{\gamma_2\mu_6 + \gamma_3(\kappa - \mu_4)}{\gamma_2}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

con $\Delta = \eta^2 \mu_1 (4\alpha_1 \beta_1 \gamma_2^2 \lambda + \mu_1 (\gamma_2 (\beta_1 - \beta_2 + \mu_2 - \mu_3) + \gamma_1 (\mu_4 - \kappa))^2)$. Por lo tanto, si $\kappa > \mu_4$ el equilibrio P_2 existe, desde el punto de vista biológico, y será estable siempre que

$$\kappa > \mu_4 + \frac{\gamma_2 (\alpha_1 \beta_1 \lambda - \mu_1 (\beta_1 + \mu_2) (\beta_2 + \mu_3))}{\mu_1 \gamma_1 (\beta_1 + \mu_4)} \quad (5.16)$$

Cuando se cumple la igualdad en la ecuación anterior el equilibrio P_2 se cruza con P_4 . Este último representa el equilibrio infectado y es descrito en la sección 5.4.2.

Mostraremos dos tipos de soluciones de las ecuaciones (5.1). Las primeras corresponden a oscilaciones periódicas alrededor del centro no lineal en el equilibrio P_2 . Las otras soluciones describen la evolución de una infección hacia el equilibrio P_4 , que resulta ser estable.

En las próximas secciones describiremos las soluciones mencionadas.

5.4.1. Oscilaciones periódicas de células leucémicas, centro no lineal

Para analizar la dinámica alrededor del equilibrio P_2 , le asignamos a los parámetros los valores mostrados en la Tabla 5.2. En la ecuación (5.16) el segundo miembro de la desigualdad puede ser llamado κ_c , con los valores mencionados $\kappa_c = 0,001746$. Para $\kappa > \kappa_c$, la matriz jacobiana en el equilibrio P_2 tiene dos autovalores complejos imaginarios puros y el resto son reales negativos. Observando el comportamiento de las soluciones vemos que cuatro de las seis componentes convergen a valores constantes cuando t crece. Por consiguiente, la dinámica del sistema tiende a simplificarse, concentrándose en el plano formado por las variables restantes. Para poder hallar las expresiones de estas órbitas en el plano, que como se verá son periódicas, le asignamos a x_1 , x_2 , x_3 y x_6 los valores a los cuales tienden, y así podemos reducir el sistema a un sistema de Lotka-Volterra en el plano x_4 - x_5 ,

$$\begin{aligned} x_4' &= x_4(\kappa - \mu_4 - \gamma_2 x_5) \\ x_5' &= x_5(\eta x_4 - \mu_5) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Integrando obtenemos una expresión implícita de las curvas en el plano de fase x_4 - x_5 :

$$x_4^{\mu_5} x_5^{\kappa - \mu_4} e^{-\eta x_4 - \gamma_2 x_5} = C(x_4^*, x_5^*) \quad (5.18)$$

Donde $C(x_4^*, x_5^*)$ es una constante que depende de las condiciones iniciales.

Las curvas de la ecuación (5.18) son cerradas. En la Figura 5.3 mostramos el retrato de fase de (5.17). En la Figura 5.4 podemos ver una comparación entre la solución numérica de las ecuaciones (5.1) (con condiciones iniciales en el plano) representada por la línea continua, y la aproximación obtenida con el MSHAM representada por puntos. También mostramos una órbita en el espacio x_2 - x_4 - x_5 y su correspondiente evolución hacia el plano.

Cabe destacar que, en relación a la dinámica entre las células de cáncer y las citotóxicas en torno al equilibrio P_2 , no hemos encontrado en la literatura referida al tema una mención a un estado de este tipo, sin embargo, oscilaciones de este tipo se han reportado en numerosos artículos. En efecto, las oscilaciones alrededor del centro

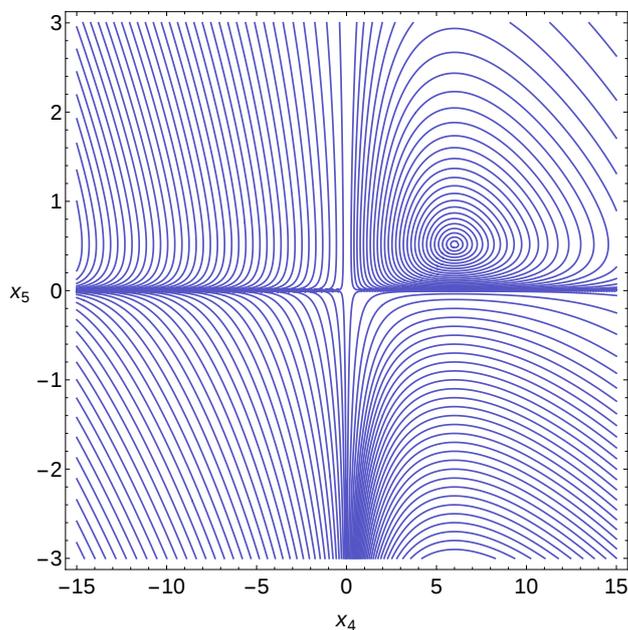


Figura 5.3: Retrato de fase del sistema (5.17) para los valores de los parámetros dados en la tabla 5.2.

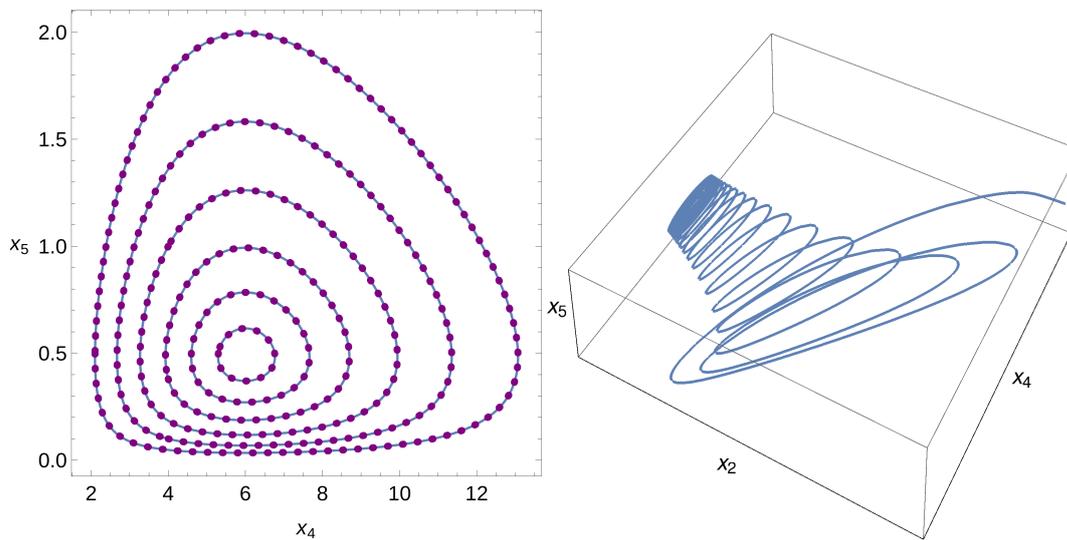


Figura 5.4: Izquierda: órbitas periódicas del sistema (5.1) para $\kappa = 0,0019$ y diferentes condiciones iniciales. Derecha: Órbita del sistema para el mismo κ .

son pequeñas pero son consistentes con la forma no aguda de ATL, ver por ejemplo [146, 157, 182].

Por otro lado, en los trabajos de Drobnjak y Fowler [61] y Fortin y Mackey [75] un régimen oscilatorio es descrito en leucemia mielógena crónica. En este tipo de leucemia el recuento de leucocitos es muy alto comparado con el de ATL, donde como ya se dijo estos recuentos pueden ser, en los casos no agudos, del orden del 1 % del total de células sanas. También en Dritschel et al. [60] y Liu et al. [138] se describen oscilaciones en otros tipos de tumores.

También podemos mencionar el trabajo de Wodarz et al. [203], donde se propone un modelo de HTLV-I con respuesta de CTL que presenta oscilaciones en la carga proviral fuertemente influidas por la eficacia de la respuesta inmunitaria. Así mismo, los autores logran comparar los resultados del modelo con datos experimentales de sólo una paciente, que exhibe oscilaciones luego de comenzar un tratamiento con fármacos (ver también [188]).

Los comportamientos oscilatorios, periódicos o no, de las células cancerosas y la correspondiente respuesta inmunológica son estudiados permanentemente. En la literatura se reportan numerosos fenómenos relacionados a estos comportamientos, como el fenómeno de Jeff, donde los niveles tumorales comienzan a oscilar de forma desincronizada con la quimioterapia (ver por ejemplo [21, 189, 191, 198]), y los ciclos límite para tumores con una antigenicidad media (ver [111]). Dilucidar la relevancia del fenómeno descrito aquí requiere más investigación desde un punto de vista biológico, sin embargo, no se puede descartar que las oscilaciones de las células leucémicas podrían representar una situación médica significativa.

5.4.2. Equilibrio infectado y bifurcación de Hopf

Para los valores dados en la tabla 5.2, el equilibrio P_4 resulta

$$P_4 = (980,62; 18,17; 0,12; 0,19; 0,39; 0,01). \quad (5.19)$$

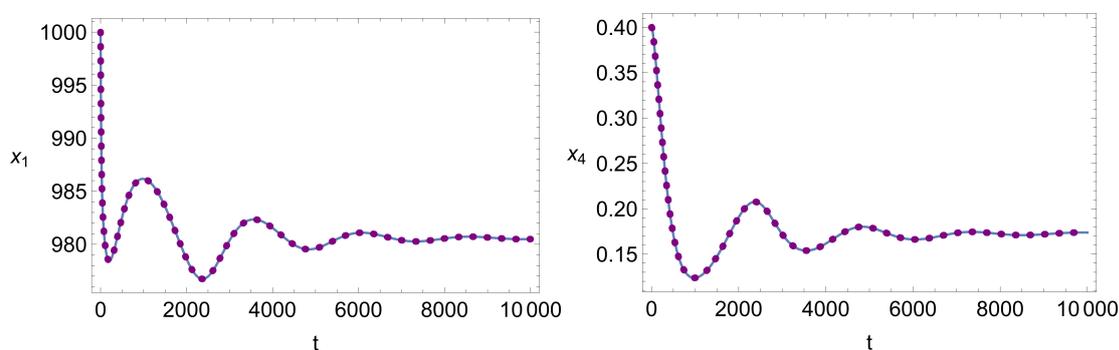


Figura 5.5: Células $CD4^+$ sanas a la izquierda y células leucémicas a la derecha para $\kappa = 0,0016$.

Calculamos la evolución de la infección desde condiciones iniciales cercanas a este equilibrio, que representa el estado de infección crónica.

En la Figura 5.5 mostramos los cálculos realizados con MSHAM para las variables x_1 y x_4 en función del tiempo t (en días). Tomamos $\mathbf{x}_0 = (1000; 20; 1; 0,4; 0,38; 0,74)$ como condición inicial fija y cercana a P_4 . Calculamos la solución hasta un tiempo $T = 10000$, dividiendo el intervalo $[0, T)$ en 1000 subintervalos de igual longitud, es decir $\Delta t = 10$. El orden del HAM en cada subintervalo es 6. Como antes la línea continua representa la solución numérica y la línea de puntos la aproximación obtenida con el MSHAM. Se observa una convergencia con oscilaciones hacia el equilibrio. En la Figura 5.6 vemos las h -curvas correspondientes a la solución para cada una de las variables del sistema, estas curvas muestran el comportamiento típico y permiten identificar el correspondiente intervalo de convergencia. Podemos identificar una región de validez $[-1,5; -0,5]$ para el parámetro de convergencia h , que es adecuado para las seis variables. En este caso seleccionamos el valor $h = -1$.

También estudiamos la dinámica alrededor de este equilibrio en otra región de los parámetros. Tomando los valores mostrados en la tabla 5.2, asignamos a κ el valor $\kappa = 0,0004$. Además, dejando libre a β_2 , tomando $\beta_1 = 10\beta_2$ y considerando β_2 como parámetro de bifurcación, hallamos una bifurcación de Hopf supercrítica en $\beta_2 = 0,1546$. La Figura 5.7 muestra los valores de las amplitudes de los ciclos en la bi-

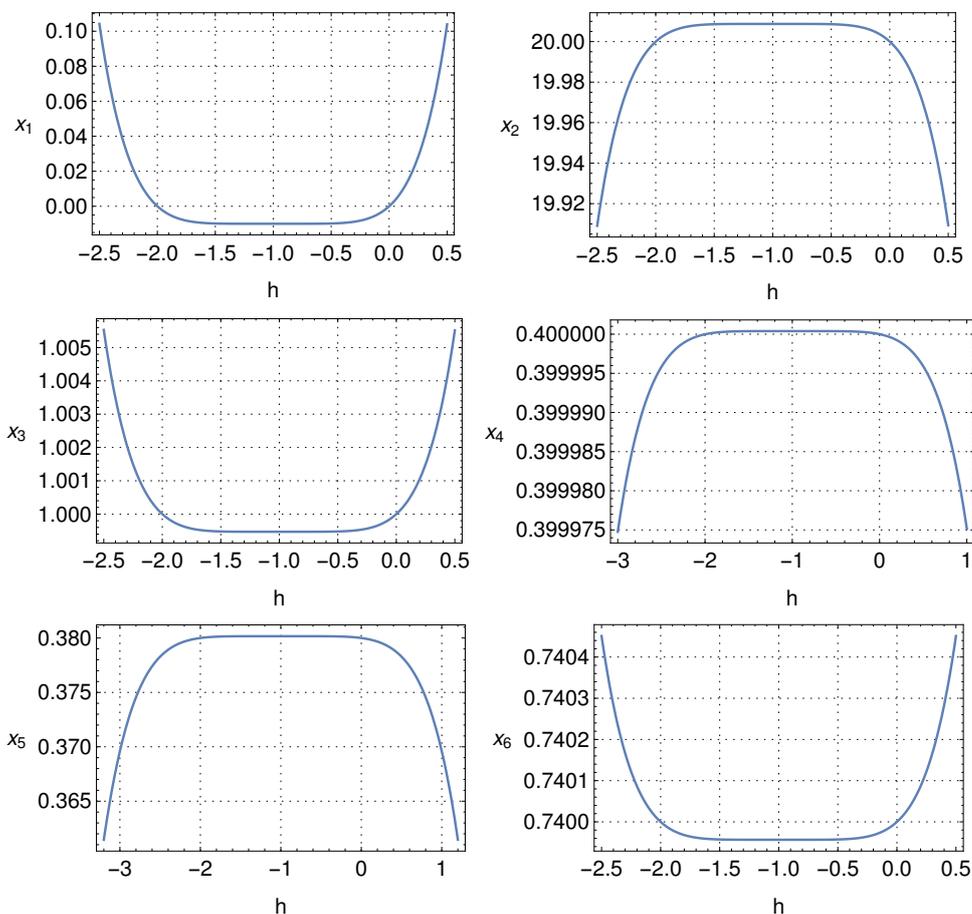


Figura 5.6: h -curvas para $\kappa = 0,0016$.

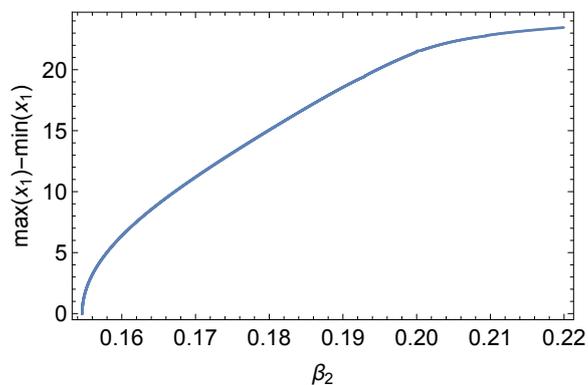


Figura 5.7: Diagrama de bifurcación de Hopf del equilibrio P_4 obtenido con MATCONT.

furcación para la variable x_1 como una función de β_2 . Los cálculos fueron realizados usando el paquete MATCONT de MATLAB [55].

5.5. Análisis del error

Para cada una de las variables x_i del sistema, calculamos el error relativo de la solución obtenida con MSHAM con respecto a la solución obtenida numéricamente. Utilizamos la siguiente expresión

$$\delta_i^2 = \frac{\int_0^T (\tilde{x}_i(t) - x_i(t))^2 dt}{\int_0^T \tilde{x}_i(t)^2 dt}, \quad (5.20)$$

donde \tilde{x}_i es la solución numérica de la variable i -ésima y x_i es la aproximación obtenida con MSHAM de orden N calculada en el $[0, T)$, donde cada subintervalo tiene una longitud Δt .

Analizamos el comportamiento del error en función del orden del HAM en cada paso y del ancho del intervalo de tiempo en cada paso. Todos los cálculos de esta sección se realizaron tomando $T = 5000$ días. En la Figura 5.8 puede observarse que hay una región entre los órdenes 5 y 9 aproximadamente donde el error es constante y pequeño. Si el orden es menor el error crece como es de esperar. El crecimiento del error para órdenes altos se debe a la representación finita de la aritmética en los cálculos. A los fines de las integraciones que realizamos para este sistema el error es aceptable con el orden 6, sin necesidad de mejorar la precisión aritmética. Este número es suficientemente pequeño para que el tiempo total de cálculo sea razonable. En la figura se muestra la variable x_1 , las otras variables tienen el mismo comportamiento. El paso temporal que tomamos en este caso es igual a 10.

También analizamos el error en función del paso temporal. En la Figura 5.9 se puede observar que el error se mantiene en valores pequeños hasta un paso del orden de 10, como puede verse en la ampliación de la primera parte de la escala temporal. No hemos mirado pasos más pequeños (menores a 1) por no considerarlo necesario ya

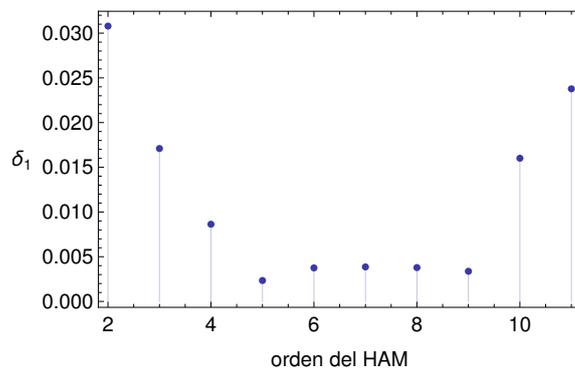


Figura 5.8: Error en el cálculo de la variable x_1 como una función del orden N del HAM en cada paso.

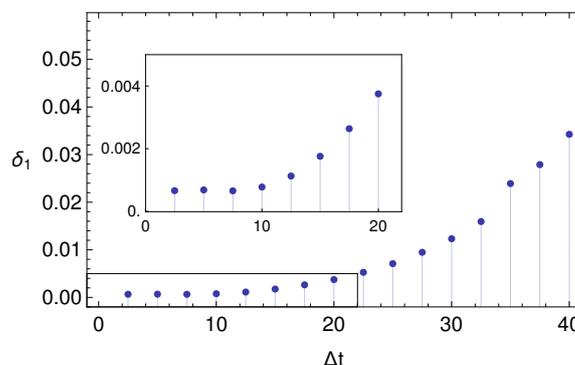


Figura 5.9: Error en los valores calculados de la variable x_1 como una función de la longitud Δt de los intervalos.

que para estos valores crece mucho el tiempo de cómputo.

5.6. Efecto de saturación en la proliferación de células CTL

Como se mencionó en la sección 5.2 la tasa de crecimiento lineal de las células CTL en función de las células enfermas puede no coincidir con los resultados experimentales, fundamentalmente porque no se tiene en cuenta el efecto de saturación en la proliferación de CTL's. Para tener en cuenta este efecto puede reemplazarse la ecuación correspondiente a la variable x_5 en el sistema (5.1) por la siguiente ecuación

$$x_5' = \frac{(\delta x_3 + \eta x_4)}{1 + \epsilon x_5} x_5 - \mu_5 x_5 - \alpha_2 x_3 x_5. \tag{5.21}$$

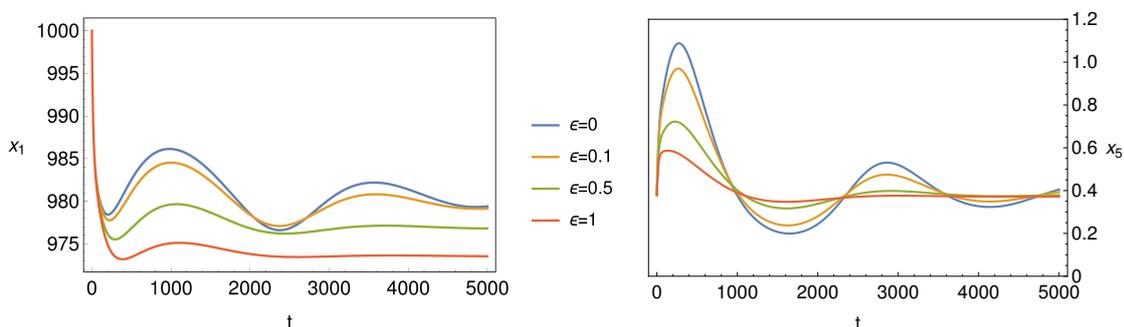


Figura 5.10: Efecto de saturación en las variables x_1 y x_5 para diferentes valores de ϵ usando la ecuación (5.21).

Aquí el parámetro ϵ expresa el nivel en el que se satura la expansión de células citotóxicas. De esta manera, cuando la cantidad de CTLs crece considerablemente, la proliferación de estas células se ve mermada por el término $1 + \epsilon x_5$.

En la Figura 5.10 pueden observarse la evolución de las variables x_1 y x_5 , para distintos valores del parámetro de saturación ϵ , en función del tiempo. El valor de este parámetro tomado de la literatura (ver [202]) es pequeño, del orden de unas milésimas. El efecto es apreciable solamente para valores mucho más grandes del mismo.

Como es de esperarse se nota una amortiguación en los valores de x_5 . Sin embargo el comportamiento es similar manteniéndose la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas que se observan para este caso. Puede decirse que las ecuaciones originales describen adecuadamente al sistema para valores realistas del parámetro ϵ .

5.7. Discusión y conclusiones

En este capítulo presentamos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que modela matemáticamente el proceso para la infección con el HTLV-I. En el mismo se considera el desarrollo de la leucemia y la respuesta inmunitaria. El modelo describe adecuadamente muchos de los fenómenos asociados con la infección por HTLV-I, permitiendo encontrar comportamientos interesantes como bifurcaciones de Hopf y oscilaciones alrededor de un centro no lineal.

Las soluciones del sistema las aproximamos utilizando el Método de Análisis Homotópico en etapas múltiples. Vemos que la integración del sistema es suficientemente precisa a los fines de analizar los resultados. Estos resultados nos ayudan a comprender el comportamiento del subsistema (5.17), dándonos a la vez la oportunidad para probar la efectividad del MSHAM para estos sistemas en los cuales el HAM está limitado. Llevamos a cabo un sucinto análisis del error que demuestra que no es necesario un alto orden en el HAM ni un paso de tiempo excesivamente pequeño, logrando tiempos de cómputo razonables.

Por otro lado, del análisis realizado surgen nuevas preguntas, a continuación describimos los puntos más importantes.

Cuando la activación de las células ATL predomina sobre su muerte natural ($\kappa > \mu_4$), el equilibrio libre de infección es inestable. Esta estabilidad ocurre independientemente del valor de otros parámetros. Esto confiere una característica preponderante a la posibilidad de activación de células ATL en el modelo, lo que conduce a la posibilidad de una forma crónica de leucemia o, eventualmente, si las condiciones cambian, a formas más agresivas.

Cuando $\kappa < \mu_4$, situación que representa una baja activación de las células ATL, aparece un equilibrio en el que no hay respuesta citotóxica. Este tipo de equilibrio ya se ha informado en la literatura [119, 123]. En este caso, a partir del estudio de la estabilidad del equilibrio sano, se puede determinar el número reproductivo básico dado en (5.13). Una expresión idéntica se muestra en [162].

El periodo de latencia afecta a R_0 a través del cociente μ_2/β_1 , como se puede ver en la expresión

$$R_0 = \frac{\alpha_1 \lambda}{\mu_1 (1 + \mu_2/\beta_1)(\beta_2 + \mu_3)}, \quad (5.22)$$

cuanto mayor sea β_1 , mayor será el R_0 como se podría esperar.

Se observa un sistema de oscilaciones Lotka-Volterra entre una baja cantidad de células ATL (presa) y linfocitos T citotóxicos (depredador), alrededor del equilibrio P_2 , sin la presencia de células infectadas. Este centro es estable. En la derecha de la Figura 5.4 se muestra la convergencia de una órbita en espiral hacia el centro, hasta donde

sabemos, hay muy poca literatura sobre este tipo de comportamiento. Dado que un fenómeno de este tipo puede ser de vital importancia en el desarrollo de la leucemia, creemos que merece más atención desde el punto de vista médico.

En resumen, nuestro modelo matemático representa una útil y poderosa herramienta para describir una variedad de fenómenos relacionados con la infección por el HTLV-I, la evolución hacia la leucemia y la respuesta inmunitaria del huésped. Nuevamente mostramos que el Método de Análisis Homotópico, en este caso en la variante por múltiples etapas, es sumamente eficiente y robusto, destacando como una técnica matemática considerable para ser aplicada a la comprensión de los procesos biológicos complejos.

Por último, la exploración de las implicaciones biológicas de los resultados presentados en este capítulo, como por ejemplo la interpretación del centro no lineal descubierto, nos señalan caminos prometedores en la investigación futura, consolidando así la originalidad de este trabajo y subrayando la importancia de una colaboración multidisciplinaria para abordar los desafíos en la investigación de enfermedades infecciosas y su impacto en la salud pública.

Parámetro	Significado	Valor
λ	producción de CD4 ⁺ independiente del virus	6 (mm ³ día) ⁻¹
α_1	contagio de CD4 ⁺	0.001 mm ³ día ⁻¹
α_2	contagio de CD8 ⁺	0.001 mm ³ día ⁻¹
μ_1	muerte natural de CD4 ⁺ sanas	0.006 día ⁻¹
μ_2	muerte natural de CD4 ⁺ infectadas latentes	0.006 día ⁻¹
μ_3	muerte natural de CD4 ⁺ infectadas activas	0.05 día ⁻¹
μ_4	muerte natural de células ATL	0.0005 día ⁻¹
μ_5	muerte natural de CD8 ⁺ sanas	0.006 día ⁻¹
μ_6	muerte natural de CD8 ⁺ infectadas	0.006 día ⁻¹
β_1	índice de activación espontánea	0.0004 día ⁻¹
β_2	índice de leucemogénesis	0.00004 día ⁻¹
γ_1	índice de lisis de CD4 ⁺ infectadas activas	0.029 mm ³ día ⁻¹
γ_2	índice de lisis de células ATL	0.0029 mm ³ día ⁻¹
γ_3	índice de lisis de CD8 ⁺ infectadas	0.001 mm ³ día ⁻¹
κ	proliferación por mitosis de células ATL	0.002 día ⁻¹
δ	producción de CD8 ⁺ dependiente del virus	0.05 mm ³ día ⁻¹
η	producción de CD8 ⁺ dependiente del cáncer	0.001 mm ³ día ⁻¹

Tabla 5.2: Parámetros del modelo

Familias isocrónicas de órbitas periódicas

6.1. Introducción

El estudio de la frecuencia de las oscilaciones, y más específicamente el concepto de isocronía aquí propuesto, esto es la invariancia de la frecuencia con respecto a ciertos parámetros o condiciones del sistema, ha despertado gran interés en diversas áreas de la ciencia; por ejemplo en el campo de la física teórica y los sistemas estelares, en el estudio de las reacciones químicas o en el ámbito de la biología y el análisis de la motricidad y la estructura rítmica en humanos o animales. Claramente los comportamientos isocrónicos son de gran utilidad porque permiten predecir y controlar un sistema, incluso ante una perturbación del mismo.

Tal como se explicó en la subsección 2.4.1, los centros y los focos isocrónicos representan dos de los conceptos más ampliamente investigados en relación con la isocronía. No obstante, también resulta de interés una noción diferente de isocronía, donde se examina la independencia de la frecuencia respecto de un parámetro y no de la amplitud de la trayectoria. Este enfoque constituirá el tema central del presente capítulo.

En 2.4.1 citamos un resultado importante de Bel y Reartes [32], el teorema 2.2, donde se muestra que para ciertas ecuaciones de segundo orden con retardo, las ramas de bifurcación que aparecen en un entorno de una bifurcación de Hopf debido al retardo resultan isocrónicas. En este caso la propiedad de isocronía hace referencia a que todos los ciclos límite emergentes de la bifurcación tienen la misma frecuencia. El conocimiento de la isocronía de las órbitas simplifica el sistema y permite la construcción de modelos matemáticos más precisos y predecibles. Esto motiva a preguntarse cuándo la frecuencia de la oscilación no depende de un parámetro particular del sistema.

En este capítulo desarrollamos una metodología que permite estudiar si la frecuencia de una órbita periódica, en sistemas bidimensionales de ecuaciones diferenciales y diferenciales con retardo, se mantiene constante al variar un parámetro. A una órbita con estas características la llamamos *órbita isocrónica respecto del parámetro*. De la misma manera a una familia de este tipo la llamamos *familia isocrónica de ciclos límite*.

En un espíritu similar al utilizado al aplicar la teoría de Floquet en la determinación de la estabilidad de un ciclo límite, mostramos que el problema de determinar si una órbita periódica es isocrónica se reduce a estudiar un sistema lineal con coeficientes periódicos. En este caso la existencia de ciertas soluciones periódicas de este nuevo sistema, que llamamos sistema auxiliar, es equivalente al carácter isocrónico de la órbita.

En la sección 6.2 derivamos el sistema lineal no autónomo asociado a la ecuación original y probamos el teorema 6.1, donde mostramos que el estudio de la isocronía de la familia de órbitas se transforma en la búsqueda de una solución 2π -periódica del sistema auxiliar, este es el resultado central del capítulo. En 6.2.1, a modo ilustrativo, aplicamos el método a varios ejemplos de familias tanto isocrónicas como no isocrónicas.

En la sección 6.3 proponemos una metodología para inferir el carácter isocrónico de las órbitas periódicas en una ecuación diferencial con retardo en el plano. La naturaleza de las ecuaciones con retardo, donde el espacio en el que se encuentra la

condición inicial es infinito-dimensional, hace que no sea posible extender directamente el método desarrollado para ecuaciones diferenciales ordinarias a este caso, así mismo es debido al retardo que se obtienen expresiones algebraicas más complejas en notación, que en EDOs. Para el caso con retardo, usamos una estrategia heurística para atacar el problema en el caso en que los ciclos sean estables. En 6.3.1 presentamos tres ejemplos que muestran la aplicación de este método para deducir la presencia o no de isocronía.

Los principales resultados de este capítulo están publicados en el trabajo [47].

6.2. El sistema auxiliar

Comenzamos estudiando el caso en que la órbita periódica es un ciclo límite en un sistema de ecuaciones diferenciales en el plano. Más adelante mostraremos las modificaciones necesarias para tratar el caso de ecuaciones diferenciales con retardo.

Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}\bar{x}'_1 &= f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \mu) \\ \bar{x}'_2 &= f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \mu).\end{aligned}\tag{6.1}$$

Aquí μ es un parámetro real destacado, \bar{x}_1 y \bar{x}_2 son funciones de la variable temporal \bar{t} y las funciones reales f_1 y f_2 son suficientemente diferenciables. Supongamos que el sistema tiene un ciclo límite con frecuencia $\omega(\mu) > 0$. Llamando $\bar{\mathbf{x}}(\bar{t}, \mu) = (\bar{x}_1(\bar{t}, \mu), \bar{x}_2(\bar{t}, \mu))$ a la μ -familia de órbitas periódicas y $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ al campo, tenemos que la misma verifica

$$\bar{\mathbf{x}}'(\bar{t}, \mu) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}(\bar{t}, \mu), \mu), \quad \text{donde} \quad \bar{\mathbf{x}}(\bar{t}, \mu) = \bar{\mathbf{x}}(\bar{t} + 2\pi/\omega(\mu), \mu),\tag{6.2}$$

y la prima significa derivada respecto de \bar{t} .

Reescalamos el tiempo haciendo $t = \omega(\mu)\bar{t}$, de esta manera el sistema (6.2) se convierte en

$$\omega(\mu) \mathbf{x}'(t, \mu) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \mu), \mu),\tag{6.3}$$

donde la función 2π -periódica $\mathbf{x}(t, \mu) = (x_1(t, \mu), x_2(t, \mu))$ es continua en la nueva variable t y ahora la prima representa derivada respecto de t .

Si llamamos Ω al espacio de funciones continuas de la circunferencia S^1 en \mathbb{R}^2 entonces la órbita que es solución del sistema (6.3) brinda una aplicación continua, $\mu \mapsto \mathbf{x}(\cdot, \mu)$, de algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ en Ω . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la órbita rodea el origen y llamemos $\hat{x}_1(t_0, \mu)$ a un punto donde interseca transversalmente al eje x_1 positivo. Debido a la invariancia S^1 de las órbitas se debe fijar una condición adicional para definir la familia \mathbf{x}_μ . Ésto puede hacerse imponiendo la condición que las órbitas crucen el eje x_1 en el tiempo $t_0 = 0$ (por supuesto para esta construcción podemos tomar cualquier recta que pase por el origen). Entonces tenemos

$$\mathbf{x}(0, \mu) = (\hat{x}_1(0, \mu), 0). \quad (6.4)$$

Asumimos que la función \hat{x}_1 es diferenciable respecto de μ . En consecuencia \mathbf{x} es continua tanto de μ como de t .

Construcción de un sistema auxiliar asociado al de la μ -familia de órbitas

Derivando (6.3) con respecto a μ y asumiendo que la frecuencia es constante, es decir $\omega(\mu) = \omega_0$, y por lo tanto $\partial\omega(\mu)/\partial\mu = 0$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no autónomas

$$\omega_0 \boldsymbol{\xi}'(t, \mu) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\xi}(t, \mu) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu}, \quad (6.5)$$

donde llamamos $\boldsymbol{\xi}$ al vector

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t, \mu) = \begin{pmatrix} \xi_1(t, \mu) \\ \xi_2(t, \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \mu}(t, \mu) \\ \frac{\partial x_2}{\partial \mu}(t, \mu) \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

y $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$ a la matriz jacobiana de \mathbf{f} respecto de x_1 y x_2 , donde los coeficientes son funciones periódicas de periodo 2π al estar evaluadas sobre la órbita periódica \mathbf{x} . A este sistema lo llamamos *sistema auxiliar asociado a la μ -familia* (6.3).

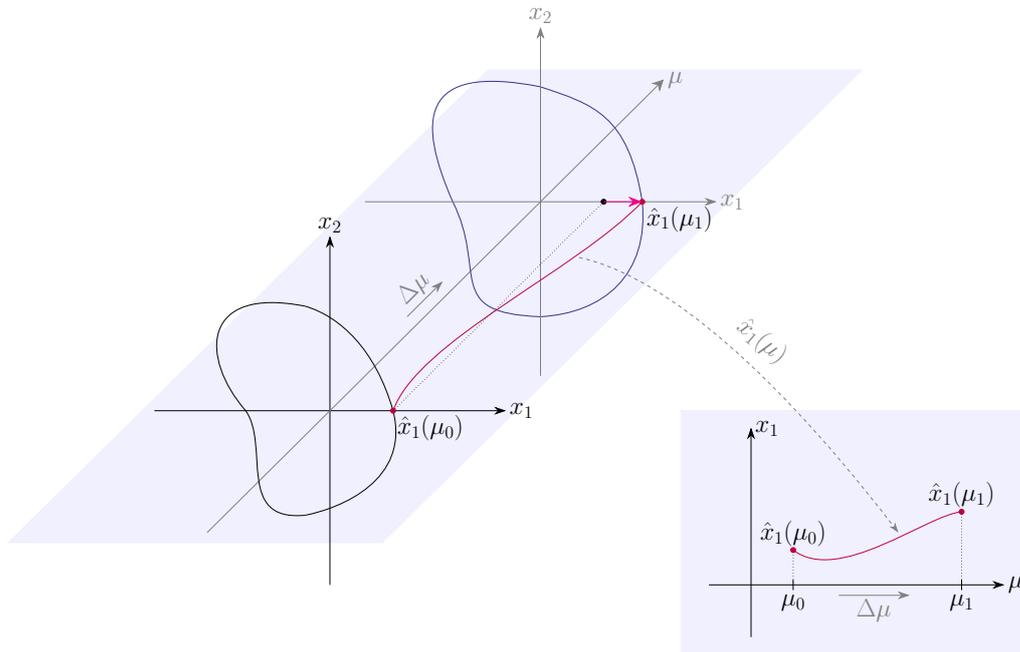


Figura 6.1: Diagrama del recorrido de $\hat{x}_1(\mu) = \hat{x}_1(0, \mu)$ cuando el parámetro μ varía.

Observación 6.1. *La variación del ciclo límite respecto a μ es tal que en $t = 0$ se mueve horizontalmente con velocidad*

$$\xi(0, \mu) = \begin{pmatrix} \partial \hat{x}_1 / \partial \mu \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Aquí $\xi(0, \mu)$ está en el eje horizontal por la elección particular (6.4) que hemos tomado.

El siguiente teorema muestra que el problema de estudiar la isocronía de la μ -familia de ciclos límite de la ecuación (6.1) se transforma en hallar soluciones periódicas, de periodo 2π , del sistema auxiliar (6.5).

Teorema 6.1. *Supongamos que el sistema (6.1) tiene un ciclo límite para todos los puntos de algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ del parámetro μ . También, supongamos que éste intersecta transversalmente el eje horizontal en $t = 0$. Entonces la familia es isocrónica respecto de μ , es decir la frecuencia no depende del parámetro en el intervalo, sí y sólo sí para algún $\mu = \mu_0$ el ciclo límite tiene frecuencia ω_0 y para todo μ en I el sistema (6.5) tienen una solución periódica de periodo 2π , con condición inicial (6.7).*

Demostración. Vamos a suponer que el sistema (6.1) tiene una familia de ciclos isocrónicos en algún intervalo del parámetro μ , es decir, tiene una solución periódica $\bar{\mathbf{x}}(t, \mu) = (\bar{x}_1(t, \mu), \bar{x}_2(t, \mu))$ de frecuencia constante $\omega(\mu) = \omega_0$. Entonces el sistema (6.3) se convierte en

$$\omega_0 \mathbf{x}'(t, \mu) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \mu), \mu), \quad (6.8)$$

con $\mathbf{x}(t, \mu) = (x_1(t, \mu), x_2(t, \mu))$ periódica de periodo 2π . Derivando con respecto a μ , obtenemos que las funciones (6.6) verifican las ecuaciones (6.5). Por lo tanto $\boldsymbol{\xi} = (\partial \mathbf{x} / \partial \mu)^T$ es la solución periódica de periodo 2π buscada.

Para la recíproca, supongamos que para cada μ el sistema (6.5) tiene una solución, $\boldsymbol{\xi}(t, \mu)$, de periodo 2π con condición inicial (6.7). Tomemos $\mu = \mu_0$ en el intervalo I y $\mathbf{x}(t, \mu_0)$ la solución periódica correspondiente a ese valor del parámetro. Definamos \mathbf{x} de la siguiente manera

$$\mathbf{x}(t, \mu) = \mathbf{x}(t, \mu_0) + \int_{\mu_0}^{\mu} \boldsymbol{\xi}(t, \nu)^T d\nu. \quad (6.9)$$

Puede verificarse fácilmente que esta \mathbf{x} es solución de (6.3) con las condiciones iniciales adecuadas y con $\omega(\mu) = \omega_0$ constante. ■

Solución periódica del sistema auxiliar

Una vez construido el sistema auxiliar (6.5), el próximo paso es hallar la solución periódica de periodo 2π que verifica la condición (6.7). Para hallar dicha órbita procedemos a calcular una recta asociada al sistema auxiliar formada por los puntos finales, a tiempo $t = 2\pi$, de las trayectorias que comienzan en el eje ξ_1 . Esta recta nos permite asegurar que no existe el ciclo límite buscado, y de existir nos ayuda a hallarlo para un valor de μ fijo.

El sistema (6.5) es lineal y puede ser escrito como

$$\boldsymbol{\xi}'(t) = A(t)\boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (6.10)$$

Remarcamos sólo la dependencia de t ya que esto se hace para cada μ . Si conocemos una matriz fundamental principal $\Phi(t)$, del sistema homogéneo asociado, tenemos la siguiente expresión para la solución

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \Phi(t)\mathbf{c} + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds, \quad (6.11)$$

donde \mathbf{c} es la condición inicial constante.

Condición geométrica

Como consecuencia de la linealidad, las órbitas que comienzan en el eje ξ_1 , es decir

$$\boldsymbol{\xi}(0) = \Phi(0)\mathbf{c} = \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \hat{\xi}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

se encuentran a tiempo $t = 2\pi$ sobre una misma recta asociada al sistema auxiliar en el plano ξ_1 - ξ_2 . Llamando $(\xi_1(2\pi), \xi_2(2\pi)) = (\xi_1^*, \xi_2^*)$ al punto final de esta trayectoria en el plano ξ_1 - ξ_2 , estos puntos obedecen a la ecuación paramétrica en función de $\hat{\xi}_1$

$$\begin{cases} \xi_1^* = \Phi_{11}\hat{\xi}_1 + \gamma_1 \\ \xi_2^* = \Phi_{21}\hat{\xi}_1 + \gamma_2 \end{cases} \quad (6.13)$$

donde

$$(\gamma_1, \gamma_2)^T = \Phi(2\pi) \int_0^{2\pi} \Phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds \quad (6.14)$$

y Φ_{ij} son las componentes de la matriz $\Phi(2\pi)$.

Como todas las trayectorias del sistema auxiliar que comienzan en el eje ξ_1 terminan sobre una misma recta para $t = 2\pi$, entonces graficando dos de ellas podemos determinar esta recta.

En los casos en que ésta no corte el eje ξ_1 podemos asegurar que la familia de ciclos no es isocrónica. Esta situación puede ocurrir cuando la recta es horizontal en un valor no nulo de la variable ξ_2 (en la Figura 6.3 vemos este escenario para el oscilador armónico, tal ejemplo se detalla más adelante). Sin embargo, el hecho de cruzar el eje

ξ_1 no garantiza la existencia de órbitas periódicas como se muestra en los ejemplos de la sección 6.2.1. En este caso, basta encontrar la órbita que parte del punto de corte para comprobar su periodicidad.

En la figura 6.2 vemos representada esta situación, donde se grafican algunas órbitas, para distintas condiciones iniciales (6.12), que finalizan sobre la recta (6.13) para $t = 2\pi$. La órbita punteada, de color azul, es la que parte del punto donde dicha recta cruza al eje ξ_1 y resulta ser la trayectoria periódica.

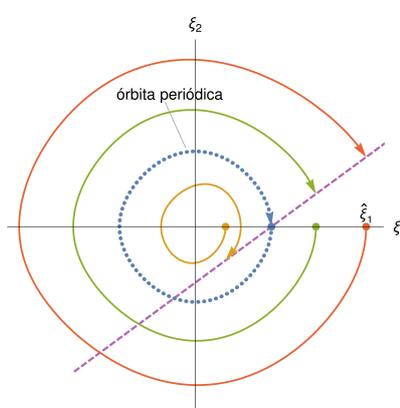


Figura 6.2: Órbitas a modo de ejemplo de un sistema auxiliar y su recta asociada (6.13).

Observación 6.2. *Observamos que al encontrar la órbita periódica en el plano ξ_1 - ξ_2 no sólo probamos que la familia de órbitas es isocrónica, también descubrimos cómo cambia el ciclo en la dirección del eje x_1 cuando varía μ . Como se indicó anteriormente, este eje puede ser cambiado por cualquiera que pase por el origen, con una adecuada sincronización de la familia de ciclos. Por otra parte, se puede elegir una dirección que no pase por el origen usando como línea de sincronización una curva diferenciable que pasa a través del origen y divide el plano en exactamente dos regiones.*

Familia isocrónica de órbitas periódicas en un centro

El concepto de familia isocrónica de ciclos límite puede ser generalizado, en principio, para el caso en que los ciclos pertenezcan a un centro. En este caso los llamaríamos

familia isocrónica de órbitas periódicas en un centro. Debemos aclarar que este concepto no se relaciona con el de centros isocrónicos, donde las diferentes órbitas, para un mismo valor del parámetro tienen la misma frecuencia. Además, se puede construir una familia de órbitas periódicas en un centro en casi cualquier centro, con la única condición de que la frecuencia de las órbitas varíe de órbita a órbita, como se verá a continuación.

Supongamos que un sistema como (6.1) tiene un centro y que además éste es estructuralmente estable. Sin pérdida de generalidad asumimos que el mismo rodea al origen, entonces podemos suponer, como en el caso de ciclos límite, que en $t = 0$ una órbita periódica particular cruza el eje x_1 en el punto \hat{x}_1 . La frecuencia de esta órbita depende del parámetro μ y del punto \hat{x}_1 . Llamamos $\bar{\mathbf{x}}(\bar{t}, \mu, \hat{x}_1)$ a la órbita, ésta verifica la ecuación

$$\bar{\mathbf{x}}'(\bar{t}, \mu, \hat{x}_1) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}(\bar{t}, \mu, \hat{x}_1), \mu), \quad \text{donde} \quad \bar{\mathbf{x}}(\bar{t}, \mu, \hat{x}_1) = \bar{\mathbf{x}}(\bar{t} + 2\pi/\omega, \mu, \hat{x}_1). \quad (6.15)$$

Análogamente al caso de ciclos límite, si llamamos $\omega(\mu, \hat{x}_1)$ a la frecuencia, entonces, reescalando el tiempo, podemos escribir

$$\omega(\mu, \hat{x}_1)\mathbf{x}'(t, \mu, \hat{x}_1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \mu, \hat{x}_1), \mu), \quad (6.16)$$

asumiendo que ahora la prima representa derivada con respecto a t .

La frecuencia de este ciclo depende del valor de $\mu = \mu_0$ y del punto $\hat{x}_1 = x_{10}$ donde cruza el eje x_1 . Si la frecuencia cambia al variar \hat{x}_1 , es decir

$$\frac{\partial \omega}{\partial \hat{x}_1}(\mu_0, x_{10}) \neq 0 \quad (6.17)$$

entonces, en un entorno de μ_0 puede hallarse una función $\hat{x}_1(\mu)$ que verifica

$$\omega(\mu, \hat{x}_1(\mu)) = \omega_0. \quad (6.18)$$

Se puede definir una familia de órbitas periódicas isocrónicas variando \hat{x}_1 con la función $\hat{x}_1(\mu)$. Esta familia da lugar a la siguiente ecuación auxiliar

$$\omega_0 \xi'(t, \mu) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \xi(t, \mu) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu}. \quad (6.19)$$

Donde llamamos ξ al vector

$$\xi = \xi(t, \mu) = \begin{pmatrix} \xi_1(t, \mu) \\ \xi_2(t, \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \mu}(t, \mu, \hat{x}_1) \\ \frac{\partial x_2}{\partial \mu}(t, \mu, \hat{x}_1) \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

Dos ejemplos serán suficientes para aclarar estos puntos. Primeramente consideramos el centro lineal en un oscilador armónico de ecuación

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -\mu^2 x_1. \end{aligned} \quad (6.21)$$

La frecuencia depende de μ pero no de la condición inicial x_0 , por lo tanto ninguna de las familias de ciclos será isocrónica. La ecuación auxiliar para (6.21) resulta

$$\begin{aligned} \xi_1'(t, \mu) &= \xi_2(t, \mu) \\ \xi_2'(t, \mu) &= -\mu^2 \xi_1(t, \mu) - 2x_1(t, \mu, x_0)\mu = -\mu^2 \xi_1(t, \mu) - 2x_0 \cos(\mu t). \end{aligned} \quad (6.22)$$

En la Figura 6.3 vemos que el sistema (6.22) (con $\mu = 1$) no tiene órbitas periódicas, ya que la recta asociada al sistema auxiliar es horizontal y no cruza el eje ξ_1 .

En cambio, si consideramos el oscilador anarmónico de ecuación

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 - \mu x_1^3, \end{aligned} \quad (6.23)$$

el sistema auxiliar resulta

$$\begin{aligned} \xi_1'(t, \mu) &= \xi_2(t, \mu) \\ \xi_2'(t, \mu) &= -(1 + 3\mu x_1^2(t, \mu, x_0))\xi_1(t, \mu) - x_1^3(t, \mu, x_0), \end{aligned} \quad (6.24)$$

En la Figura 6.4 podemos ver la presencia de una órbita periódica de periodo 2π , representada por la curva roja punteada, que comienza en $\xi_1 = -1$. Este valor negativo muestra que la amplitud del ciclo decrece cuando μ se incrementa.

6.2.1. Ejemplos

A continuación vamos a aplicar el método a dos tipos de ejemplos. En el primer caso la familia de ciclos es isocrónica. Para el segundo caso mostraremos dos ejemplos

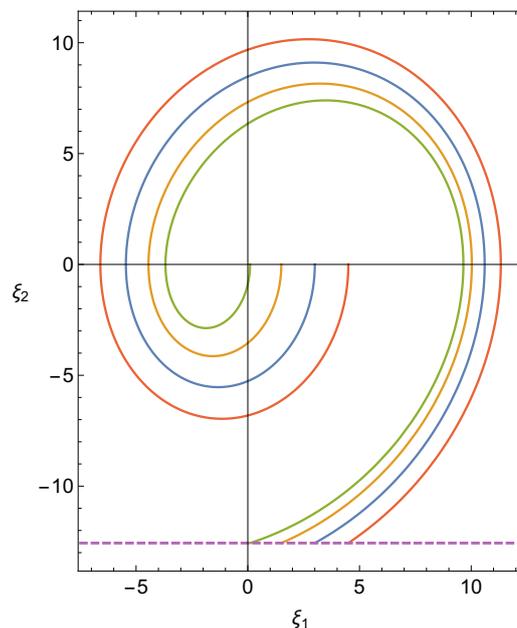


Figura 6.3: Órbitas del sistema (6.22) para el oscilador armónico con recta asociada horizontal $\xi_2 = -12,57$.

similares en donde no hay isocronía, pero se tiene una expresión para la frecuencia de las órbitas que nos permite reducir el sistema a uno con ciclos isocrónicos.

Sistemas con velocidad angular independiente del parámetro

Un tipo de sistemas que tiene una μ -familia de ciclos trivialmente isocrónicos es aquel en el cual la velocidad angular es constante e independiente de μ . Por ejemplo, vamos a considerar el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= \mu x_1 - x_2 - x_1(2x_1^2 + x_2^2) \\ x_2' &= x_1 + \mu x_2 - x_2(2x_1^2 + x_2^2), \end{aligned} \tag{6.25}$$

que presenta una bifurcación de Hopf supercrítica en $\mu = 0$.

Transformándolo a coordenadas polares obtenemos

$$\begin{aligned} r' &= \mu r - r^3 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta) \right) \\ \theta' &= 1. \end{aligned} \tag{6.26}$$

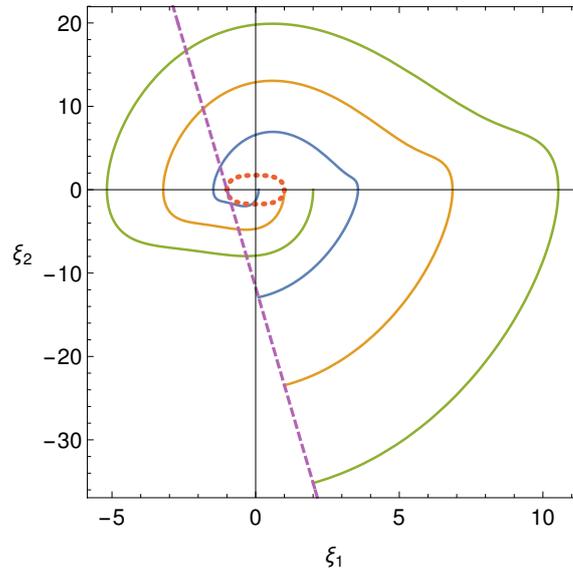


Figura 6.4: Órbitas del sistema (6.24) para el oscilador anarmónico con $\mu = 1$ y recta $\xi_2 = -11,726 - 11,726\xi_1$.

Como vemos, en este caso, la velocidad angular es constante igual a 1, es decir, el ciclo límite emergente de la bifurcación tendrá frecuencia unitaria independiente del parámetro μ . Vamos a verificar la existencia de la órbita 2π -periódica que menciona el teorema de isocronía 6.1 para algún valor de μ fijo.

Primero hallamos la ecuación auxiliar, que en este caso es

$$\begin{aligned}\xi_1'(t, \mu) &= (-6x_1^2(t, \mu) - x_2^2(t, \mu) + \mu)\xi_1(t, \mu) - (1 + 2x_1(t, \mu)x_2(t, \mu))\xi_2(t, \mu) + x_1(t, \mu) \\ \xi_2'(t, \mu) &= (1 - 4x_1(t, \mu)x_2(t, \mu))\xi_1(t, \mu) - (2x_1^2(t, \mu) + 3x_2^2(t, \mu) + \mu)\xi_2(t, \mu) + x_2(t, \mu).\end{aligned}\tag{6.27}$$

A continuación, para encontrar la órbita periódica de periodo 2π del sistema, calculamos un par de trayectorias del sistema (6.27) partiendo de condiciones iniciales sobre el eje ξ_1 positivo. En este ejemplo y en todos los demás de este capítulo las soluciones de la ecuación auxiliar se calcularon mediante simulaciones numéricas empleando las rutinas del programa Mathematica de Wolfram. Luego, evaluando esas soluciones en $t = 2\pi$ encontramos la recta asociada (6.13), que pasa por esos puntos.

En la Figura 6.5 mostramos las soluciones calculadas de la ecuación auxiliar para

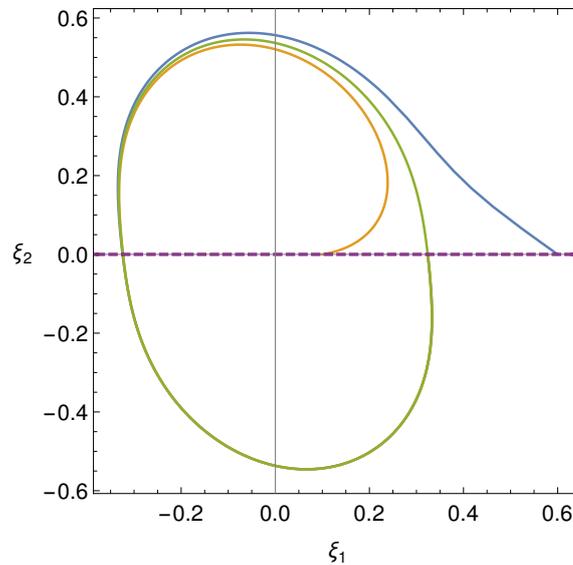


Figura 6.5: Órbitas del sistema (6.5) para la ecuación (6.25) con $\omega_0 = 1$ y $\mu = 1$.

$\mu = 1$, y vemos que la recta (6.13) no corta al eje ξ_1 de manera transversal, sino que coincide con este eje. Sin embargo, las trayectorias que parten del eje ξ_1 positivo convergen al ciclo que se muestra en la imagen, ésta es la solución 2π -periódica buscada.

Ecuaciones de van der Pol y Rayleigh

En esta sección mostraremos dos ejemplos de ecuaciones muy conocidas cuyas familias de ciclos no son isocrónicas, la ecuación de van der Pol y el oscilador de Rayleigh (ver por ejemplo [35, 190]). Sin embargo, la frecuencia de esos ciclos sí es conocida como función del parámetro con precisión arbitraria, en Andersen y Geer [19] podemos encontrar una expresión para ésta. Por consiguiente, se puede efectuar un cambio de variables para obtener sistemas donde la familia de ciclos límite es isocrónica.

Consideremos primero uno de los ejemplos clásicos de la dinámica no lineal, la ecuación de van der Pol no forzada

$$y'' + \mu(y^2 - 1)y' + y = 0. \tag{6.28}$$

Esta ecuación representa el flujo de corriente en cierto tipo de tubos de vacío y ha sido ampliamente estudiada. Para $\mu = 0$ la ecuación (6.28) se reduce al oscilador armónico.

Pero cuando $\mu > 0$ el término de amortiguamiento es proporcional al factor $y^2 - 1$, por este motivo el signo que tome este término depende de si el tamaño de las oscilaciones $|y|$ supera o no el valor 1. Debido a esto el sistema presenta oscilaciones de amplitud finita en una dinámica denominada auto-oscilatoria.

Vamos a reescribir la ecuación anterior como un sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -\mu(x_1^2 - 1)x_2 - x_1. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Como se mencionó, este sistema, que es un caso particular de las ecuaciones de Liénard, tiene un ciclo límite para $\mu > 0$ y se sabe que no es isocrónico respecto de μ .

Aquí la ecuación auxiliar toma la forma

$$\begin{aligned} \omega_0 \xi_1'(t, \mu) &= \xi_2(t, \mu) \\ \omega_0 \xi_2'(t, \mu) &= -(1 + 2\mu x_1(t, \mu)x_2(t, \mu))\xi_1(t, \mu) + \mu(1 - x_1^2(t, \mu))\xi_2(t, \mu) + \\ &\quad (1 - x_1^2(t, \mu))x_2(t, \mu). \end{aligned} \tag{6.30}$$

Hallamos numéricamente varias órbitas de esta ecuación con condición inicial sobre el eje ξ_1 , con éstas calculamos la recta asociada dada por la ecuación (6.13)

$$\xi_2 = 3174,5 \xi_1 - 42,58, \tag{6.31}$$

que intersecta al eje ξ_1 en $\hat{\xi}_1 = 0,0134$.

En la Figura 6.6 mostramos las trayectorias de la ecuación auxiliar (6.30) y la recta anterior, observando su comportamiento vemos que el sistema no tiene órbitas periódicas de periodo 2π . En efecto, al trazar la curva que comienza en el punto $(\hat{\xi}_1, 0)$, la curva verde punteada en la figura, observamos que no es una órbita cerrada (en el gráfico ampliamos este sector para que se aprecie mejor).

Como se mencionó anteriormente, la frecuencia $\omega(\mu)$ del ciclo límite se conoce con suficiente aproximación en serie de potencias del parámetro μ , ver [19]. Mediante un cambio sobre la variable t , el sistema (6.29) se transforma en

$$\begin{aligned} x_1' &= \omega(\mu)^{-1} x_2 \\ x_2' &= -\omega(\mu)^{-1} (\mu(x_1^2 - 1)x_2 - x_1), \end{aligned} \tag{6.32}$$

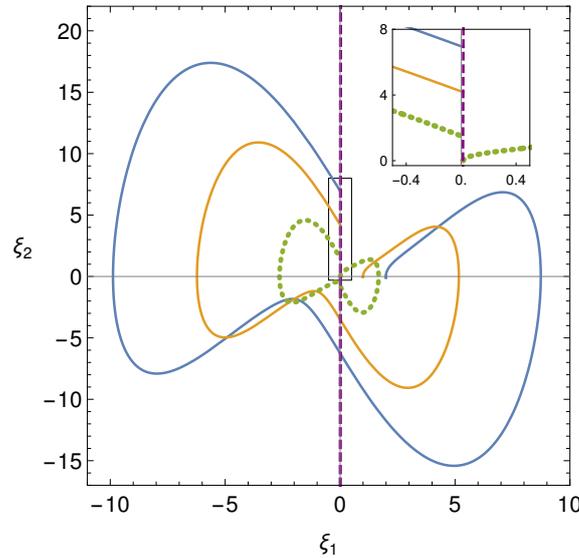


Figura 6.6: Órbitas del sistema (6.30) para la ecuación de van der Pol con $\mu = 1$ y su correspondiente recta (6.31).

donde tomamos la aproximación

$$\omega(\mu) = 1 - \frac{1}{16}\mu^2 + \frac{17}{3072}\mu^4 + \frac{35}{884736}\mu^6 - \frac{678899}{5096079360}\mu^8 + \frac{28160413}{2293235712000}\mu^{10}, \quad (6.33)$$

y se han conservado los nombres de las variables por simplicidad. En este sistema la familia de ciclos es isocrónica (considerando la aproximación dada por (6.33)). En la Figura 6.7 observamos el ciclo límite del sistema auxiliar para $\mu = 1$, éste es una órbita periódica de periodo 2π .

Otro ejemplo muy conocido es la ecuación del oscilador de Rayleigh

$$y'' + \mu(y'^2 - 1)y' + y = 0. \quad (6.34)$$

La diferencia de este sistema con el oscilador de van der Pol es que el cambio de signo del término de amortiguación se da a partir de la magnitud de la velocidad $|y'|$. A pesar de esta variación, el comportamiento es similar al de (6.28) y la ecuación de Rayleigh también presenta un único ciclo límite estable para $\mu > 0$ que no es isocrónico respecto de μ .

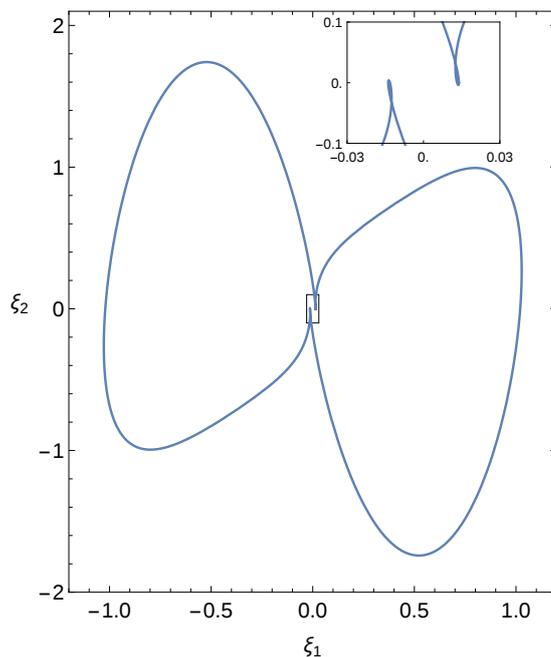


Figura 6.7: Ciclo del sistema auxiliar para la ecuación de van der Pol (6.32), con $\mu = 1$.

Transformando (6.35) a un sistema obtenemos

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -\mu(x_2^2 - 1)x_2 - x_1. \end{aligned} \tag{6.35}$$

En la Figura 6.8 podemos ver las órbitas del sistema auxiliar para este caso y la correspondiente recta asociada (6.13), que en este caso está dada por la ecuación

$$\xi_2 = -112,5 + 587,59\xi_1. \tag{6.36}$$

Esta recta intersecta el eje ξ_1 en el valor $\hat{\xi}_1 = 0,1915$, pero en el gráfico se observa que la órbita que parte de ese punto, la curva verde punteada, no es periódica con periodo 2π .

Procediendo de la misma manera que con la ecuación de van der Pol, transformamos el sistema (6.35) en el siguiente

$$\begin{aligned} x_1' &= \omega(\mu)^{-1}x_2 \\ x_2' &= -\omega(\mu)^{-1}(\mu(x_2^2 - 1)x_2 - x_1). \end{aligned} \tag{6.37}$$

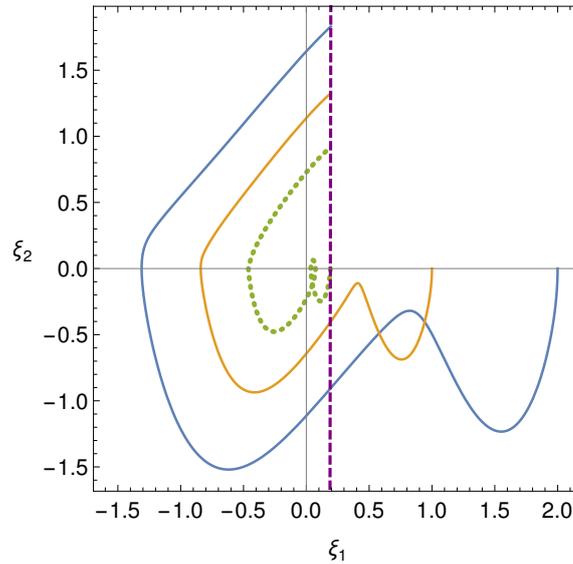


Figura 6.8: Órbitas del sistema auxiliar para la ecuación de Rayleigh (6.35) con $\mu = 1$ y la recta (6.36).

La frecuencia de esos ciclos límite puede ser aproximada con el método de Poincaré-Lindstedt (ver [197]), de hecho, la fórmula para $\omega(\mu)$ es la misma que en (6.33). Nuevamente el sistema obtenido es isocrónico, vemos en la Figura 6.9 el ciclo de periodo 2π del sistema auxiliar para $\mu = 1$.

6.3. Ecuaciones diferenciales con retardo

En esta sección discutiremos la forma de aplicar el método antes descrito para el caso de ecuaciones con retardo, algunas de las ecuaciones mostradas en [32] serán tratadas más adelante a modo de ejemplo.

Consideramos ecuaciones diferenciales con retardo en el plano, del tipo

$$\bar{\mathbf{x}}'(\bar{t}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}(\bar{t}), \bar{\mathbf{x}}_{\tau}(\bar{t}), \mu). \quad (6.38)$$

Como en la sección anterior, suponemos que el sistema tiene un ciclo límite, $\bar{\mathbf{x}}(\bar{t}, \mu)$, con frecuencia $\omega(\mu)$. Reescalando el tiempo y asumiendo que la prima ahora representa derivada respecto de la nueva variable temporal t , puede escribirse

$$\omega(\mu)\mathbf{x}'(t, \mu) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \mu), \mathbf{x}_{\omega\tau}(t, \mu), \mu). \quad (6.39)$$

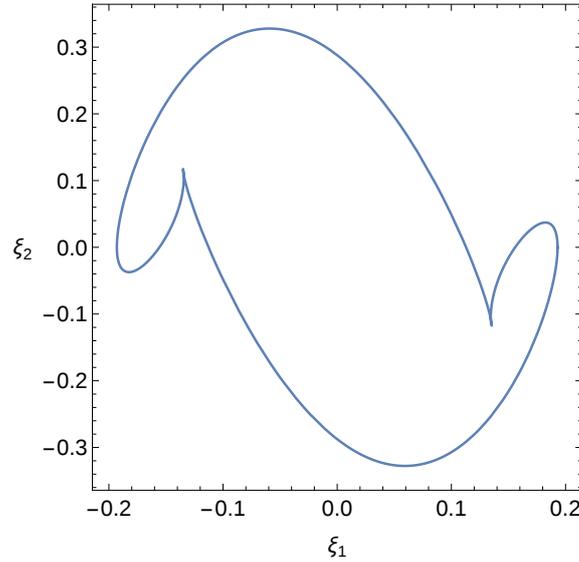


Figura 6.9: Ciclo del sistema auxiliar para la ecuación de Rayleigh (6.37), con $\mu = 1$.

Derivando respecto a μ y suponiendo que la frecuencia no depende de μ , obtenemos el siguiente sistema auxiliar con retardo

$$\omega_0 \xi'(t, \mu) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \xi(t, \mu) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_{\omega_0 \tau}} \xi_{\omega_0 \tau}(t, \mu) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu}, \quad (6.40)$$

donde ξ está dada otra vez por la ecuación (6.6) y $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$, $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}_{\omega_0 \tau}$ son los jacobianos respecto de las variables y las variables retardadas respectivamente.

Por supuesto que la interpretación de la solución del sistema (6.40) es mucho más complicada que en el caso de una ecuación diferencial ordinaria. La diferencia radica esencialmente en que la condición inicial está en un espacio de dimensión infinita y no es un punto en \mathbb{R}^2 . Utilizamos un enfoque heurístico para estudiar este problema.

Supongamos que el sistema (6.38) tiene una única solución periódica a través del punto $(\hat{x}_1, 0)$, por ejemplo desde una bifurcación de Hopf. Vamos a suponer además que con una pequeña variación de μ se obtiene otro ciclo y que estos ciclos son estables. Bajo estas condiciones, si integramos la ecuación (6.39) con una función constante en el intervalo $[-\tau, 0]$, de valor $(\hat{x}_1, 0)$, entonces la órbita probablemente convergerá al nuevo ciclo. Es interesante conocer si, con esta variación de μ , la frecuencia del nuevo ciclo permanece constante.

El sistema auxiliar (6.40) nos ayuda a responder esta pregunta. Si los puntos del eje ξ_1 son usados como el origen de órbitas con una condición inicial constante durante el tiempo de retardo, entonces esas órbitas pueden converger a órbitas periódicas de periodo 2π . Si esto ocurre podemos considerarlo como un indicativo de que la μ -familia de ciclos es isocrónica. Por otro lado, si no se puede hallar ciclos de periodo 2π con condición inicial constante del tipo aquí considerado, es una fuerte evidencia de que la familia de ciclos límite no es isocrónica. La dificultad al interpretar las soluciones del sistema auxiliar en ecuaciones con retardo radica en la imposibilidad de cubrir todas las condiciones iniciales para probar la existencia de órbitas periódicas.

Una situación interesante que hemos hallado es que puede haber infinitas órbitas de periodo 2π , como se verá en los siguientes ejemplos. Esto sucede de la siguiente manera, supongamos que ξ es una solución de periodo 2π del sistema auxiliar, así la familia $\xi + \eta$ también será solución de periodo 2π si $\eta = \eta(t, \mu)$ verifica la ecuación homogénea

$$\omega_0 \eta'(t, \mu) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \eta(t, \mu) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_{\omega_0 \tau}} \eta_{\omega_0 \tau}(t, \mu). \quad (6.41)$$

Si $\omega_0 \tau$ es múltiplo de π entonces esta ecuación tiene infinitas soluciones proporcionales de periodo 2π . Una de ellas es la que nos permite escribir a $\mathbf{x}(t, \mu)$ como función de $\mathbf{x}(t, \mu_0)$ usando la ecuación (6.9), esta es

$$\mathbf{x}(t, \mu) = \mathbf{x}(t, \mu_0) + \int_{\mu_0}^{\mu} \xi(t, \nu) d\nu.$$

Podemos enunciar el siguiente teorema

Teorema 6.2. *Supongamos que el sistema (6.38) tiene un ciclo límite para todos los puntos de algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ del parámetro μ . Además, supongamos que este ciclo cruza transversalmente el eje horizontal en $t = 0$. Entonces la familia es isocrónica con respecto a μ , es decir, la frecuencia no depende del parámetro en el intervalo, si y sólo si para algún $\mu = \mu_0$ el ciclo límite tiene frecuencia ω_0 y para todo μ en I el sistema (6.40) tiene una solución periódica de periodo 2π que es igual a la derivada de \mathbf{x} con respecto a μ para $t \in [-\omega_0 \tau, 0]$.*

Observación 6.3. *La presencia de un número infinito de ciclos de periodo 2π en el sistema auxiliar también puede ocurrir en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Aquí $\boldsymbol{\eta}$ debe verificar la ecuación*

$$\omega_0 \boldsymbol{\eta}'(t, \mu) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\eta}(t, \mu). \quad (6.42)$$

De acuerdo a la teoría de Floquet [74] la matriz fundamental de soluciones del sistema es de la forma $\mathbf{P}(t)e^{t\mathbf{R}}$, donde \mathbf{P} es una matriz 2π -periódica y \mathbf{R} es una matriz constante. Es decir, puede haber soluciones periódicas de periodo 2π sólo si alguno de los autovalores de \mathbf{R} (valores característicos) es $2\pi i$.

En lo que sigue vamos a mostrar tres ejemplos, en el primero los ciclos límite no son isocrónicos (ver [31]). Y para los otros dos fue probado en [32] que las ramas de bifurcación de Hopf son isocrónicas.

6.3.1. Ejemplos

van der Pol realimentado con retardo

Consideramos la ecuación, que fue estudiada en [31],

$$x'' + (x^2 - 1)x' + x = \mu x_\tau. \quad (6.43)$$

Cuando el parámetro μ es cero, tenemos una ecuación de van der Pol. Para μ suficientemente pequeño, el ciclo límite se mantiene pero se deforma generando una familia que no es isocrónica. Esos ciclos de frecuencia $\omega(\mu)$ dan lugar a ciclos de frecuencia 1 del sistema

$$\begin{aligned} \omega(\mu) x_1'(t, \mu) &= x_2(t, \mu) \\ \omega(\mu) x_2'(t, \mu) &= -(x_1^2(t, \mu) - 1)x_2(t, \mu) - x_1(t, \mu) + \mu x_{1\omega(\mu)\tau}(t, \mu). \end{aligned} \quad (6.44)$$

El sistema auxiliar toma la forma

$$\begin{aligned} \omega_0 \xi_1'(t, \mu) &= \xi_2(t, \mu) \\ \omega_0 \xi_2'(t, \mu) &= -(1 + 2x_1(t, \mu)x_2(t, \mu))\xi_1(t, \mu) + (1 - x_1^2(t, \mu))\xi_2(t, \mu) + \\ &\quad \mu \xi_{1\omega_0\tau}(t, \mu) + x_{1\omega_0\tau}(t, \mu). \end{aligned} \quad (6.45)$$

También aparecen bifurcaciones de Hopf en el sistema variando el parámetro μ , esas ramas tampoco son isocrónicas.

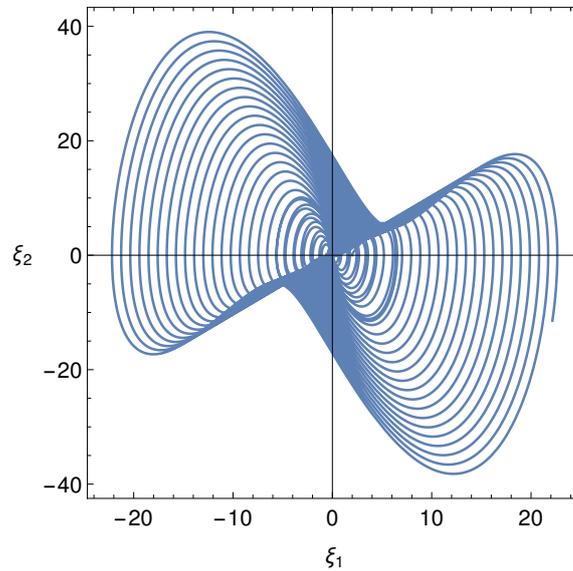


Figura 6.10: Órbita del sistema auxiliar (6.45) para $\mu = 0,1$, $\tau = 9$ y $\omega_0 = 0,99315$.

Como se puede ver en la Figura 6.10 las órbitas del sistema auxiliar (6.45) no son acotadas, se alejan del origen. Esto es un indicativo del carácter no isocrónico de la familia. La órbita de la figura fue calculada con una condición inicial constante durante el tiempo de retardo en un punto del eje ξ_1 .

Péndulo rotatorio con retardo

En [32] los autores estudian la siguiente ecuación diferencial con retardo

$$x'' + (\beta - \cos x) \operatorname{sen} x = \mu \operatorname{sen}(x - x_\tau). \quad (6.46)$$

Ésta representa el movimiento de un péndulo restringido a moverse sobre la superficie de un plano vertical que gira con velocidad angular constante. Se agregó una realimentación con retardo, que puede ser interpretada como un torque actuando sobre el pivote. Esta ecuación tiene dos equilibrios, uno alrededor de $x = 0$ y otro en $x^* = \arccos \beta$. Se probó que las ramas de bifurcación de Hopf en torno a x^* que aparecen debido al

retardo son isocrónicas, es decir, los ciclos emergentes de esta bifurcación alrededor del equilibrio no nulo tienen frecuencia constante. Las bifurcaciones de Hopf ocurren en la frecuencia $\omega = (2n + 1)\pi/\tau$ para $n = 0, 1, \dots$

Para aplicar el método desarrollado reescribimos la ecuación (6.46) alrededor del equilibrio no nulo. Después de reescalar el tiempo, las órbitas 2π -periódicas verifican la ecuación

$$\begin{aligned}\omega(\mu)x_1'(t, \mu) &= x_2(t, \mu) \\ \omega(\mu)x_2'(t, \mu) &= -(\beta - \cos(x_1(t, \mu) - x^*)) \operatorname{sen}(x_1(t, \mu) - x^*) + \mu \operatorname{sen}(x_1(t, \mu) - x_{1\omega(\mu)\tau}(t, \mu)).\end{aligned}\tag{6.47}$$

El sistema auxiliar para este problema es

$$\begin{aligned}\omega_0\xi_1(t, \mu)' &= \xi_2(t, \mu) \\ \omega_0\xi_2(t, \mu)' &= (\cos 2(x_1(t, \mu) - x^*) - \beta \cos(x_1(t, \mu) - x^*) + \mu \cos(x_1(t, \mu) - x^*))\xi_1(t, \mu) + \\ &\quad \mu \cos(x_1(t, \mu) - x^*)\xi_{1\omega_0\tau}(t, \mu).\end{aligned}\tag{6.48}$$

Las órbitas del sistema (6.48) convergen a ciclos de periodo 2π para condiciones iniciales constantes durante el tiempo de retardo en un punto del eje ξ_1 . Esto proporciona una verificación del carácter isocrónico de los ciclos de Hopf de este sistema. En este caso los ciclos no son únicos, como se detalló en la sección 6.3. Como el retardo es un múltiplo de π , se obtienen infinitas soluciones de periodo 2π de la ecuación (6.41).

Si graficamos los ciclos a los cuales convergen las soluciones de (6.48) y en un tercer eje el valor inicial de la coordenada ξ_1 donde comienza la integración, obtenemos la Figura 6.11. La superficie determinada por todos esos ciclos es una superficie reglada como también se muestra en la Figura 6.11, donde las líneas están representadas por puntos sobre las líneas rectas que unen los ciclos correspondientes. Esto es una consecuencia de la linealidad de la ecuación. Si, en lugar de tomar condiciones iniciales durante el tiempo de retardo como se mencionó arriba, se toman otras condiciones (por ejemplo una función del tiempo no constante o comenzando desde otra recta), se obtienen los mismos ciclos.

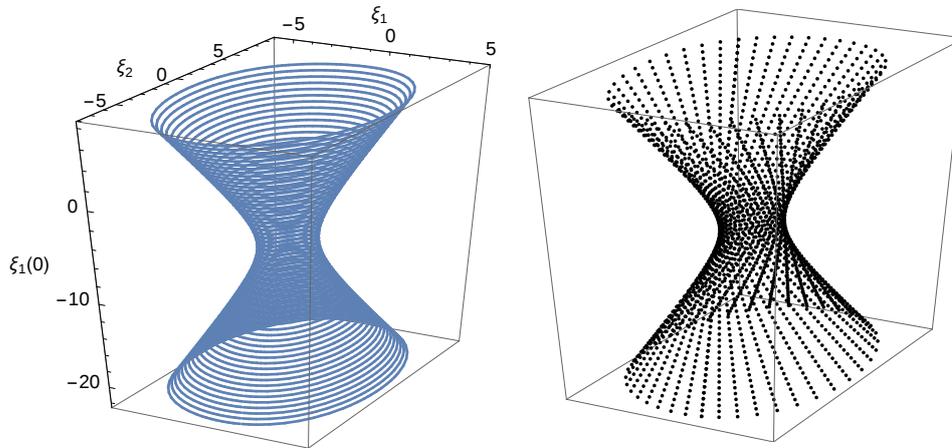


Figura 6.11: Izquierda: ciclos del sistema auxiliar (6.48) para el péndulo rotatorio con retardo, con $\mu = -1$, $\beta = 0,5$, $\tau = 2$ y $\omega_0 = \pi/\tau$. Derecha: líneas rectas punteadas que unen diferentes ciclos.

Oscilador anarmónico con retardo

Otro ejemplo similar se muestra en [32] y corresponde a la siguiente ecuación diferencial con retardo

$$x'' + x + \beta x^3 = \mu(x - x_\tau). \quad (6.49)$$

Esta ecuación también fue presentada en la subsección 4.3.2. Como en el caso anterior, cuando el parámetro μ varía esta ecuación experimenta bifurcaciones de Hopf. Los ciclos emergentes tienen frecuencia $\omega = (2n + 1)\pi/\tau$ para $n = 0, 1, \dots$. Luego del reescalado, la ecuación (6.49) se convierte en

$$\begin{aligned} \omega(\mu)x'_1 &= x_2 \\ \omega(\mu)x'_2 &= -\beta x_1^3 - x_1 + \mu(x_1 - x_{1\omega(\mu)\tau}), \end{aligned} \quad (6.50)$$

y la ecuación auxiliar es

$$\begin{aligned} \omega_0 \xi'_1(t, \mu) &= \xi_2(t, \mu) \\ \omega_0 \xi'_2(t, \mu) &= (\mu - 3\beta x_1^2(t, \mu) - 1)\xi_1(t, \mu) - \mu \xi_{1\omega_0\tau}(t, \mu) + x_1(t, \mu) - x_{1\omega_0\tau}(t, \mu). \end{aligned} \quad (6.51)$$

El comportamiento de este sistema es muy similar al anterior, en la Figura 6.12 observamos los ciclos obtenidos integrando la ecuación (6.51) desde diferentes puntos

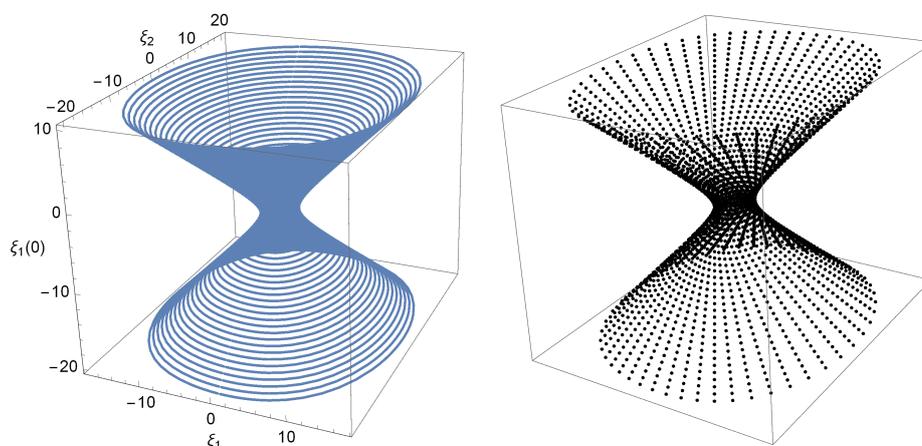


Figura 6.12: Izquierda: ciclos del sistema auxiliar (6.51) para el oscilador anarmónico con retardo, con $\mu = -0,4$, $\beta = -1$, $\tau = 2,5$ y $\omega_0 = \pi/\tau$. Derecha: líneas rectas punteadas que unen diferentes ciclos.

del eje ξ_1 (estos valores iniciales están representados en el eje vertical). Las rectas que conectan los círculos son también observadas como líneas punteadas. Nuevamente, esto muestra que los ciclos en este sistema son isocrónicos.

6.4. Conclusiones

Hemos desarrollado una metodología para indicar un tipo de comportamiento de la frecuencia de una μ -familia de ciclos límite en ecuaciones diferenciales y ecuaciones diferenciales con retardo en el plano. En particular, esta metodología nos permite conocer si la familia tiene frecuencia constante cuando el parámetro cambia. El problema se reduce a estudiar las soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas y no autónomas.

Si bien el método presentado en este capítulo funciona para sistemas en el plano, podría ser extendido a más dimensiones. Sin embargo, su utilidad se vería comprometida por el hecho de que la búsqueda de soluciones periódicas del sistema auxiliar debería realizarse en un plano.

Para el caso de ecuaciones diferenciales con retardo la búsqueda de ciclos de periodo 2π de la ecuación auxiliar es mucho más complicada que en ecuaciones ordinarias.

En particular, la recta a través de la cual pasan las soluciones después de la integración para tiempo 2π corresponde a una subvariedad lineal en el espacio de Banach de funciones continuas y, por lo tanto, no es accesible con los métodos gráficos desarrollados aquí. El problema merecería más estudio, quizás con la aplicación de técnicas topológicas tales como la teoría del grado [139].

Finalmente, creemos que el presente trabajo es muy prometedor, puesto que aumenta nuestra comprensión sobre un aspecto significativo de las familias de órbitas periódicas como es la condición de isocronía. Esta área del estudio de las soluciones oscilatorias es de fundamental importancia en varios campos de la ciencia y, en particular, el análisis de la isocronía en relación a la perturbación de un parámetro es un aspecto poco explorado. La técnica aquí presentada incrementa nuestro conocimiento del sistema tratado, potenciando la capacidad de predicción y control del mismo, por lo tanto alentamos la adopción y el examen de este procedimiento.

CAPÍTULO 7

Conclusiones

En esta tesis presentamos una metodología de búsqueda para el estudio de soluciones periódicas en ecuaciones diferenciales con y sin retardo. También se presentó el planteo y estudio detallado de un modelo biológico de interés. Además se definió y estudió un nuevo enfoque sobre la idea de isocronía para una familia de órbitas en el plano.

Propusimos una modificación del HAM de Liao, para hallar soluciones periódicas en ecuaciones diferenciales ordinarias con y sin retardo. Obtuvimos aproximaciones analíticas de gran precisión de los ciclos en varios ejemplos, que fueron seleccionados cuidadosamente para poner a prueba de manera integral el método expuesto en esta tesis. Con este nuevo procedimiento eliminamos la necesidad de expandir la amplitud y la frecuencia de la solución en serie de potencias del parámetro q de la homotopía. Desarrollamos un proceso de búsqueda heurística para determinar los valores de dicha frecuencia y del parámetro de convergencia, renovando y ampliando el análisis clásico de las h -curvas del HAM. Esta metodología está orientada a la obtención de caminos alternativos para el estudio de órbitas periódicas en sistemas dinámicos no lineales.

En el desarrollo de este enfoque, aspiramos a fomentar la investigación en la exploración y hallazgo de soluciones periódicas, y esperamos que este trabajo contribuya a enriquecer aún más este interesante campo de estudio.

El proceso de búsqueda heurística en matemática, implica explorar las posibles soluciones de manera general, con estrategias creativas, reduciendo la complejidad del problema y agregando elementos que nos conduzcan a una mejor solución aproximada. Dentro de los objetivos de las investigaciones no sólo son relevantes los resultados obtenidos al resolver problemas específicos, sino que también debemos destacar el desarrollo de métodos que nos permitan llegar a estas soluciones. Con el procedimiento de búsqueda heurística que presentamos, pretendemos aportar una estrategia innovadora que constituya un aporte valioso por sí mismo.

Además planteamos y exploramos en detalle un modelo de infección por el virus linfotrópico humano de células T de tipo I (HTLV-I). Utilizando varias herramientas, incluido el MSHAM, realizamos el estudio de este complejo sistema de ecuaciones diferenciales, dedicando especial atención a realizar una interpretación biológica de los hallazgos, con el objeto de presentar una perspectiva más completa y significativa del proceso de infección. Dentro de los resultados obtenidos se encuentran una variedad de fenómenos relacionados con la infección por el HTLV-I, la evolución hacia la leucemia y la respuesta inmunológica del huésped.

En el capítulo final, introducimos el concepto de isocronía de una familia de órbitas paramétrica en sistemas bidimensionales de ecuaciones diferenciales ordinarias con y sin retardo. Establecimos las condiciones que nos permiten decidir sobre la isocronía en un amplio rango de ecuaciones de segundo orden no lineales ordinarias, permitiendo determinar si la familia tiene frecuencia constante cuando el parámetro cambia. Discutimos la posibilidad de extender este método a ecuaciones con retardo. Las dificultades que nacen al interpretar las soluciones del sistema auxiliar a raíz del retardo destacan la necesidad de investigaciones adicionales en este campo.

En resumen, esta tesis proporciona contribuciones originales al campo de las soluciones periódicas en ecuaciones diferenciales ordinarias y con retardo. Las nuevas

variantes del HAM, el análisis de modelos relativos a procesos biológicos y el teorema sobre ciclos límite isocrónicos pretenden ampliar los conceptos relacionados a la caracterización de órbitas periódicas y las técnicas disponibles para su estudio.

Bibliografía

- [1] S. Abbasbandy. The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer. *Physics Letters A*, 360:109–113, 2006.
- [2] S. Abbasbandy. Homotopy analysis method for heat radiation equations. *International communications in heat and mass transfer*, 34(3):380–387, 2007.
- [3] S. Abbasbandy. Soliton solutions for the Fitzhugh–Nagumo equation with the homotopy analysis method. *Applied Mathematical Modelling*, 32(12):2706–2714, 2008.
- [4] S. Abbasbandy and M. Jalili. Determination of optimal convergence-control parameter value in homotopy analysis method. *Numerical Algorithms*, 64(4):593–605, 2013.
- [5] S. Abbasbandy, J. L. López, and R. López-Ruiz. The homotopy analysis method and the Liénard equation. *International Journal of Computer Mathematics*, 88(1):121–134, 2011.
- [6] S. Abbasbandy and A. Shirzadi. Homotopy analysis method for a nonlinear chemistry problem. *Studies in Nonlinear Sciences*, 1(4):127–132, 2010.

- [7] S. Abbasbandy, E. Shivanian, and K. Vajravelu. Mathematical properties of \hbar -curve in the frame work of the homotopy analysis method. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 16:4268–4275, 2011.
- [8] W. Al-Hayani. The approximate solutions for stiff systems of ordinary differential equations by using homotopy analysis method and variational iteration method. *Appl. Math*, 16(5):789–800, 2022.
- [9] A. Al-Qudah, Z. Odibat, and N. Shawagfeh. A linearization-based computational algorithm of homotopy analysis method for nonlinear reaction–diffusion systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 194:505–522, 2022.
- [10] L. J. S. Allen, F. Brauer, P. Van den Driessche, and J. Wu. *Mathematical epidemiology*, volume 1945. Springer, 2008.
- [11] J. D. Allwright. Harmonic balance and the Hopf bifurcation. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 82:453–467, 1977.
- [12] A. Alomari and R. Shraidh. Approximate analytic solution of Riccati equation with fractional order of multi-parameters. *The Eurasia Proceedings of Science Technology Engineering and Mathematics*, 20:142–148, 2022.
- [13] A. K. Alomari, M. S. M. Noorani, and R. Nazar. Adaptation of homotopy analysis method for the numeric–analytic solution of Chen system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(5):2336–2346, 2009.
- [14] A. K. Alomari, M. S. M. Noorani, and R. Nazar. Solution of delay differential equation by means of homotopy analysis method. *Acta Applicandae Mathematicae*, 108(2):395–412, 2009.
- [15] S. A. Altaie, N. Anakira, A. Jameel, O. Ababneh, A. Qazza, and A. K. Alomari. Homotopy analysis method analytical scheme for developing a solution to partial differential equations in fuzzy environment. *Fractal and Fractional*, 6(8):419, 2022.

- [16] V. V. Amel'kin and A. E. Rudenok. Centers and isochronous centers of Liénard systems. *Differential Equations*, 55(3), 2019.
- [17] V. V. Amel'kin. Isochronous and strongly isochronous foci of polynomial Liénard systems. *Differential Equations*, 58(1):1–8, 2022.
- [18] P. Amster, L. Berezansky, and L. Idels. Periodic solutions of angiogenesis models with time lags. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 13(1):299–311, 2012.
- [19] C. M. Andersen and J. F. Geer. Power expansions for the frequency and period of the limit cycle of the van der pol equation. *Siam J. Appl. Math.*, 42(3):678–693, 1982.
- [20] B. R. Andrievskii and A. L. Fradkov. Control of chaos: methods and applications. ii. applications. *Automation and remote control*, 65:505–533, 2004.
- [21] F. Ansarizadeh, M. Singh, and D. Richards. Modelling of tumor cells regression in response to chemotherapeutic treatment. *Applied Mathematical Modelling*, 48:96–112, 2017.
- [22] B. Asquith and C. R. M. Bangham. An introduction to lymphocyte and viral dynamics: the power and limitations of mathematical analysis. *Proc. R. Soc. Lond. B*, 270:1651–1657, 2003.
- [23] F. M. Atay. Van der Pol's oscillator under delayed feedback. *J. Sound and Vibration*, 2(218):333–339, 1998.
- [24] A. W. Baker, M Dellnitz, and O. Junge. A topological method for rigorously computing periodic orbits using Fourier modes. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 13(4), 2005.
- [25] B. Balachandran, T. Kalmár-Nagy, and D. E. Gilsinn, editors. *Delay Differential Equations, Recent Advances and New Directions*. Springer, 2009.

- [26] C. R. M. Bangham. The immune control and cell-to-cell spread of human T-lymphotropic virus type 1. *Journal of General Virology*, 84(12):3177–3189, 2003.
- [27] A. Barde and N. Maan. Efficient analytical approach for nonlinear system of delay differential equations. *Computer Science*, 14(3):693–712, 2019.
- [28] A. S. Bataineh. Application of adaptation HAM for nonlinear oscillator typified as a mass attached to a stretched elastic wire. *Communications in Mathematics and Applications*, 8(2):157–165, 2017.
- [29] A. S. Bataineh, M. S. M. Noorani, and I. Hashim. Modified homotopy analysis method for solving systems of second-order BVPs. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(2):430–442, 2009.
- [30] A. Bel, R. Cobiaga, W. Reartes, and H. G. Rotstein. Periodic solutions in threshold-linear networks and their entrainment. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 20(3):1177–1208, 2021.
- [31] A. Bel and W. Reartes. The homotopy analysis method in bifurcation analysis of delay differential equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(8), 2012.
- [32] A. Bel and W. Reartes. Isochronous bifurcations in second-order delay differential equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014(162):1–12, 2014.
- [33] A. Bel, W. Reartes, and A. Torresi. Global study of the simple pendulum by the homotopy analysis method. *European journal of physics*, 33(2):231, 2012.
- [34] A. Bellen and M. Zennaro. *Numerical methods for delay differential equations*. Numerical Mathematics and Scie, 2013.
- [35] M. J. Brennan, B. Tang, and J. C. Carranza. Insight into the dynamic behaviour of the van der pol/raleigh oscillator using the internal stiffness and damping forces. *Journal of Physics: Conference Series*, 744(1):012122, 2016.

- [36] E. Butcher and B. Mann. *Delay Differential Equations, Recent Advances and New Directions*, chapter Stability analysis and control of linear periodic delayed systems using Chebyshev and temporal finite element methods, pages 93–129. Springer, 2009.
- [37] B. S. Chan and P. Yu. Bifurcation analysis in a model of cytotoxic T-lymphocyte response to viral infections. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 13:64–77, 2012.
- [38] J. Chavarriga and M. Sabatini. A survey of isochronous centers. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 1:1–70, 1999.
- [39] A. Cheffer, M. A. Savi, T. L. Pereira, and A. S. de Paula. Heart rhythm analysis using a nonlinear dynamics perspective. *Applied Mathematical Modelling*, 96:152–176, 2021.
- [40] Y. Chen, S. Dong, Z. Zang, C. Ao, H. Liu, M. Gao, S. Ma, E. Zhang, and J. Cao. Buckling analysis of subsea pipeline with idealized corrosion defects using homotopy analysis method. *Ocean Engineering*, 234:108865, 2021.
- [41] Y. M. Chen and J. K. Liu. Homotopy analysis method for limit cycle flutter of airfoils. *Applied Mathematics and Computation*, 203(2):854–863, 2008.
- [42] Y. M. Chen and J. K. Liu. A study of homotopy analysis method for limit cycle of van der Pol equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(5):1816–1821, 2009.
- [43] C. Christopher and J. Devlin. On the classification of liénard systems with amplitude-independent periods. *Journal of Differential Equations*, 200(1):1–17, 2004.
- [44] A. Cima, F. Manosas, and J. Villadelprat. Isochronicity for several classes of hamiltonian systems. *Journal of Differential Equations*, 157:373–413, 1999.

- [45] R. Cobiaga and W. Reartes. A new approach in the search for periodic orbits. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23(11), 2013.
- [46] R. Cobiaga and W. Reartes. Search for periodic orbits in delay differential equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(6), 2014.
- [47] R. Cobiaga and W. Reartes. Isochronous families of limit cycles. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018(117):1–17, 2018.
- [48] R. Cobiaga and W. Reartes. Dynamic scenario in HTLV-I infection. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 9(3):349–359, 2020.
- [49] J. Cui, H. Xu, and Z. Lin. Homotopy analysis method for nonlinear periodic oscillating equations with absolute value term. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 2015.
- [50] P. Cvitanović. Periodic orbits as the skeleton of classical and quantum chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 51(1-3):138–151, 1991.
- [51] P. De Maesschalck and M. Desroches. Numerical continuation techniques for planar slow-fast systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 12(3):1159–1180, 2013.
- [52] P. De Maesschalck and F. Dumortier. The period function of classical liénard equations. *Journal of Differential Equations*, 233(2):380–403, 2007.
- [53] P. L. Delamater, E. J. Street, T. F. Leslie, Y. T. Yang, and K. H. Jacobsen. Complexity of the basic reproduction number (R_0). *Emerging infectious diseases*, 25(1):1, 2019.
- [54] K. Dhirawat and R. Meher. Semi-analytical approach to nonlinear partial differential equations using homotopy analysis technique (HAM). *Contemporary Mathematics*, pages 721–732, 2023.

- [55] A. Dhooge, W. Govaerts, and Y. A. Kuznetsov. MATCONT: A MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 29(2):141–164, 2003.
- [56] H. G. Díaz-Marín and O. Osuna. Some applications of periodic orbits for competitive systems. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 29(1):53–68, 2022.
- [57] D. L. Dinesha and G. Gurralla. Application of multi-stage homotopy analysis method for power system dynamic simulations. *IEEE Transactions on Power Systems*, 34(3):2251–2260, 2018.
- [58] O. Doeva, P. K. Masjedi, and P. M. Weaver. Static analysis of composite beams on variable stiffness elastic foundations by the homotopy analysis method. *Acta Mechanica*, 232(10):4169–4188, 2021.
- [59] G. Dong, C. Liu, and J. Yang. On the topology of isochronous centers of hamiltonian differential systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 29(06):1950099, 2019.
- [60] H. Dritschel, S. L. Waters, A. Roller, and H. M. Byrne. A mathematical model of cytotoxic and helper T cell interactions in a tumour microenvironment. *Letters in Biomathematics*, 5(sup1):S36–S68, 2018.
- [61] I. Drobnjak and A. C. Fowler. A model of oscillatory blood cell counts in chronic myelogenous leukaemia. *Bulletin of mathematical biology*, 73(12):2983–3007, 2011.
- [62] G. F. D. Duff. Limit-cycles and rotated vector fields. *Annals of Mathematics*, 57(1):15–31, 1953.
- [63] B. Ebenezer, J. K. K. Asamoah, Il. Khan, A. A. S.I Kwesi, and M. A. Khan. The multi-step homotopy analysis method for a modified epidemiological model for measles disease. *Nonlinear Sci. Lett. A*, 8(3):320–332, 2017.

- [64] M. A. El-Tawil and S. N. Huseen. The q-homotopy analysis method (q-HAM). *Int. J. Appl. Math. Mech*, 8(15):51–75, 2012.
- [65] K. Engelborghs, T. Luzyanina, and G. Samaey. DDE-BIFTOOL v. 2.00: a MATLAB package for bifurcation analysis of delay differential equations. Technical Report TW 330, Department of Computer Science, K.U. Leuven, Leuven, Belgium, 2001. <http://twr.cs.kuleuven.be/research/software/delay/ddebiftool.shtml>.
- [66] B. Erickson, B. Birnir, and D. Lavallée. A model for aperiodicity in earthquakes. *Nonlinear processes in geophysics*, 15(1):1–12, 2008.
- [67] T. Erneux. *Applied delay differential equations*. Springer, 2009.
- [68] E. Esmailzadeh, D. Younesian, and H. Askari. Analytical methods in nonlinear oscillations. *Netherlands: Springer*, 2018.
- [69] S. Fadugba, B. Ogunrinde, and T. Okunlola. Euler’s method for solving initial value problems in ordinary differential equations. *Euler’s Method for Solving Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations.*, 13(2):1–7, 2012.
- [70] M. A. Fariborzi Araghi and S. Noeiaghdam. Finding optimal results in the homotopy analysis method to solve fuzzy integral equations. In *Advances in Fuzzy Integral and Differential Equations*, pages 173–195. Springer, 2022.
- [71] J. Fei, B. Lin, S. Yan, and X. Zhang. Approximate solution of a piecewise linear–nonlinear oscillator using the homotopy analysis method. *Journal of Vibration and Control*, 24(19):4551–4562, 2018.
- [72] B. B. Ferreira, M. A. Savi, and A. S. de Paula. Chaos control applied to cardiac rhythms represented by ecg signals. *Physica Scripta*, 89(10):105203, 2014.

- [73] B. Fiedler, V. Flunkert, M. Georgi, P. Hövel, and E. Schöll. Refuting the odd number limitation of time-delayed feedback control. *Physical Review Letters*, 98(11), 2007.
- [74] G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 12:47–88, 1883.
- [75] P. Fortin and M. C. Mackey. Periodic chronic myelogenous leukaemia: spectral analysis of blood cell counts and aetiological implications. *British journal of haematology*, 104(2):336–345, 1999.
- [76] A. L. Fradkov, R. J. Evans, and B. R. Andrievsky. Control of chaos: methods and applications in mechanics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 364(1846):2279–2307, 2006.
- [77] A. A. Freihat, M. Zurigat, and A. H. Handam. The multi-step homotopy analysis method for modified epidemiological model for computer viruses. *Afrika Matematika*, 26:585–596, 2015.
- [78] J. D. García-Saldaña and A. Gasull. A theoretical basis for the harmonic balance method. *Journal of Differential Equations*, 254(1):67–80, 2013.
- [79] J. D. García-Saldaña and A. Gasull. The period function and the harmonic balance method. *Bulletin des sciences mathématiques*, 139(1):33–60, 2015.
- [80] A. Gasull, A. Guillamon, V. Manosa, and F. Mañosas. The period function for hamiltonian systems with homogeneous nonlinearities. *journal of differential equations*, 139(2):237–260, 1997.
- [81] A. Gasull, V. Mañosas, and J. Villadelprat. On the period of the limit cycles appearing in one-parameter bifurcations. *J. Differential Equations*, 213:255–288, 2005.

- [82] F. S. Gentile, J. L. Moiola, and E. E. Paolini. On the study of bifurcations in delay-differential equations: a frequency-domain approach. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(6), 2012.
- [83] M. Ghoreishi, A. M. Ismail, and A. K. Alomari. Application of the homotopy analysis method for solving a model for HIV infection of $CD4^+$ T-cells. *Mathematical and Computer Modelling*, 54:3007–3015, 2011.
- [84] J. Giné. Isochronous foci for analytic differential systems. *Internat. J. Bifur. Chaos*, 13(6):1617–1623, 2003.
- [85] J. Giné. On some open problems in planar differential systems and Hilbert’s 16th problem. *Chaos, Solitons & Fractals*, 31(5):1118–1134, 2007.
- [86] J. Giné and M. Grau. Characterization of isochronous foci for planar analytic differential systems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 135(05):985–998, 2007.
- [87] A. Gökdogan and M. Merdan. A multistage homotopy perturbation method for solving Couillet system. *World Applied Sciences Journal*, 19(12):1813–1817, 2012.
- [88] K.f Grudziński and J. J. Żebrowski. Modeling cardiac pacemakers with relaxation oscillators. *Physica A: statistical Mechanics and its Applications*, 336(1-2):153–162, 2004.
- [89] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, volume 42 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1983.
- [90] M. R. Guevara and L. Glass. Phase locking, period doubling bifurcations and chaos in a mathematical model of a periodically driven oscillator: A theory for the entrainment of biological oscillators and the generation of cardiac dysrhythmias. *Journal of mathematical biology*, 14:1–23, 1982.

- [91] A. Gökdoğan and M. Merdan. A multistage Homotopy Perturbation Method for solving human T-cell Lymphotropic Virus I(HTLV-I) infection of $CD4^+$ T-cells model. *Middle East Journal of Scientific Research*, 9(4):503–509, 2011.
- [92] J. K. Hale and H. Koçak. *Periodic Orbits*, pages 365–388. Springer New York, New York, NY, 1991.
- [93] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations*, volume 99 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1993.
- [94] S. Hamrelaine, F. Mebarek-Oudina, and M. R. Sari. Analysis of MHD Jeffery Hamel flow with suction/injection by homotopy analysis method. *Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences*, 58(2):173–186, 2019.
- [95] A. H. Handam, A. A. Freihat, and M. Zurigat. The multi-step homotopy analysis method for solving fractional-order model for HIV infection of $CD4^+$ T cells. *Proyecciones (Antofagasta)*, 34(4):307–322, 2015.
- [96] E. Hanon, J. C. Stinchcombe, M. Saito, B. E. Asquith, G. P. Taylor, Y. Tanaka, J. N. Weber, G. M. Griffiths, and C. R. M. Bangham. Fratricide among $CD8^+$ T lymphocytes naturally infected with human T cell lymphotropic virus type I. *Immunity*, 13(5):657–664, 2000.
- [97] D. J. Hashim, A. F. Jameel, and T. Y. Ying. Approximate solutions of fuzzy fractional differential equations via homotopy analysis method. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 9(1):167–187, 2023.
- [98] H. N. Hassan and M. A. El-Tawil. An efficient analytic approach for solving two-point nonlinear boundary value problems by homotopy analysis method. *Mathematical methods in the applied sciences*, 34(8):977–989, 2011.
- [99] H. N. Hassan and M. A. El-Tawil. A new technique of using homotopy analysis method for second order nonlinear differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 219(2):708–728, 2012.

- [100] W. Hu, H. Luo, C. Chen, and R. Wei. Analytic modeling for RRAM based on multistage homotopy analysis method. *IEEE Transactions on Nanotechnology*, 19:179–191, 2020.
- [101] C. Huygens. *Horologium oscillatorium*. Apud F. Muguet, 1966.
- [102] J. Itikawa, J. Llibre, A. C. Mereu, and R. Oliveira. Limit cycles in uniform isochronous centers of discontinuous differential systems with four zones. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, 22(9):3259, 2017.
- [103] E. M. Izhikevich. *Dynamical systems in neuroscience*. MIT press, 2007.
- [104] H. Jafari and M. A. Firoozjaee. Multistage homotopy analysis method for solving nonlinear integral equations. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*, 5(3):4, 2010.
- [105] N. Jamshidi and D. D. Ganji. Application of energy balance method and variational iteration method to an oscillation of a mass attached to a stretched elastic wire. *Current Applied Physics*, 10(2):484–486, 2010.
- [106] J. H. Jones. Notes on \mathcal{R}_0 . *California: Department of Anthropological Sciences*, 323:1–19, 2007.
- [107] M. Kamruzzaman and M. C. Nath. A comparative study on numerical solution of initial value problem by using Euler’s method, modified Euler’s method and Runge–Kutta method. *Journal of computer and mathematical sciences*, 9(5):493–500, 2018.
- [108] P. Katri and S. Ruan. Dynamics of human T-cell lymphotropic virus I (HTLV-I) infection of CD4⁺ T-cells. *C. R. Biologies*, 327:1009–1016, 2004.
- [109] J. Kevorkian and J. D. Cole. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, 1968.

- [110] H. Khan, S. J. Liao, R. N. Mohapatra, and K. Vajravelu. An analytical solution for a nonlinear time-delay model in biology. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(7):3141–3148, 2009.
- [111] D. Kirschner and J. C. Panetta. Modeling immunotherapy of the tumor-immune interaction. *Journal of mathematical biology*, 37:235–252, 1998.
- [112] G. Knotz, U. Parlitz, and S. Klumpp. Synchronization of a genetic oscillator with the cell division cycle. *New Journal of Physics*, 24(3):033050, 2022.
- [113] E. Köksal Ersöz, M. Desroches, C. R. Mirasso, and S. Rodrigues. Anticipation via canards in excitable systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29(1), 2019.
- [114] Ivana Kovacic. *Nonlinear oscillations*. Springer, 2020.
- [115] T. Kozako, N. Arima, S. Toji, I. Masamoto, M. Akimoto, H. Hamada, X. F. Che, H. Fujiwara, K. Matsushita, M. Tokunaga, et al. Reduced frequency, diversity, and function of human T cell leukemia virus type 1-specific CD8⁺ T cell in adult T cell leukemia patients. *The Journal of Immunology*, 177:5718–5726, 2006.
- [116] Y. Kuang. *Delay differential equations: with applications in population dynamics*. Academic press, 1993.
- [117] Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, 1995.
- [118] A. Lai, J. Jia, Z.n Zhou, X. Xu, and C. W. Lim. Homotopic analysis for post-buckling of cylindrical shells with local thickness defects. *Acta Astronautica*, 2022.
- [119] J. Lang and M. Y. Li. Stable and transient periodic oscillations in a mathematical model for CTL response to HTLV-I infection. *Journal of mathematical biology*, 65(1):181–199, 2012.
- [120] L. Lapidus and J. H. Seinfeld. *Numerical solution of ordinary differential equations*. Academic press, 1971.

- [121] H. Li, J. Yu, and H. Zhu. Power series approximation solution to thermoelectric generator temperature field by homotopy analysis method. *Journal of Electronic Materials*, pages 1–9, 2023.
- [122] J. X. Li, Y. Yan, and W. Q. Wang. Time-delay feedback control of a cantilever beam with concentrated mass based on the homotopy analysis method. *Applied Mathematical Modelling*, 108:629–645, 2022.
- [123] M. Y. Li and A. G. Lim. Modelling the role of tax expression in HTLV-I persistence in vivo. *Bulletin of mathematical biology*, 73(12):3008–3029, 2011.
- [124] Y. Li, X. Li, S. Huo, and C. Xie. Explicit solutions to large deformation of cantilever beams by improved homotopy analysis method i: rotation angle. *Applied Sciences*, 12(13):6400, 2022.
- [125] S. Liang and D. J. Jeffrey. Comparison of homotopy analysis method and homotopy perturbation method through an evolution equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(12):4057–4064, 2009.
- [126] S. Liang and D. J. Jeffrey. Comparison of homotopy analysis method and homotopy perturbation method through an evolution equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(12):4057–4064, 2009.
- [127] S. J. Liao. *The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems*. PhD thesis, Ph. D. Thesis, Shanghai Jiao Tong University Shanghai, 1992.
- [128] S. J. Liao. An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius' viscous flow problems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34(4):759–778, 1999.
- [129] S. J. Liao. An analytic approximate approach for free oscillations of self-excited systems. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 39:271–280, 2004.

- [130] S. J. Liao. *Beyond Perturbation, Introduction to Homotopy Analysis Method*. Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [131] S. J. Liao. On the homotopy analysis method for nonlinear problems. *Applied Mathematics and Computations*, 147:499–513, 2004.
- [132] S. J. Liao. Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method. *Applied Mathematics and Computation*, 169(2):1186–1194, 2005.
- [133] S. J. Liao. An optimal homotopy-analysis approach for strongly nonlinear differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(8):2003–2016, 2010.
- [134] S. J. Liao. *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations*. Springer, 2012.
- [135] S. J. Liao and Y. Tan. A general approach to obtain series solutions of nonlinear differential equations. *Studies in Applied Mathematics*, 119:297–354, 2007.
- [136] Shijun Liao. *Advances in the homotopy analysis method*. World Scientific, 2013.
- [137] A. G. Lim and P. K. Maini. HTLV-I infection: A dynamic struggle between viral persistence and host immunity. *Journal of Theoretical Biology*, 352:92–108, 2014.
- [138] D. Liu, S. Ruan, and D. Zhu. Stable periodic oscillations in a two-stage cancer model of tumor and immune system interactions. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 9(2):347–368, 2012.
- [139] N. G. Lloyd. *Degree Theory*. Cambridge University Press, 1978.
- [140] A. G. López, J. Sabuco, J. M. Seoane, J. Duarte, C. Januário, and M. A. F. Sanjuán. Avoiding healthy cells extinction in a cancer model. *Journal of theoretical biology*, 349:74–81, 2014.

- [141] N. MacDonald. Harmonic balance in delay–differential equations. *Journal of Sound and Vibration*, 186(4):649–656, 1995.
- [142] M. C. Mackey, C. a Ou, L. Pujo-Menjouet, and J. Wu. Periodic oscillations of blood cell populations in chronic myelogenous leukemia. *SIAM journal on mathematical analysis*, 38(1):166–187, 2006.
- [143] P. Mardešić, D. Marín, and J. Villadelprat. The period function of reversible quadratic centers. *J. Differential Equations*, 224:120–171, 2006.
- [144] V. Marinca, N. Herişanu, C. Bota, and B. Marinca. An optimal homotopy asymptotic method applied to the steady flow of a fourth-grade fluid past a porous plate. *Applied Mathematics Letters*, 22(2):245–251, 2009.
- [145] P. K. Masjedi and P. M. Weaver. Analytical solution for arbitrary large deflection of geometrically exact beams using the homotopy analysis method. *Applied Mathematical Modelling*, 103:516–542, 2022.
- [146] E. Matutes. Adult T-cell leukaemia/lymphoma. *Journal of clinical pathology*, 60(12):1373–1377, 2007.
- [147] J. R. Miller and J. A. Yorke. Finding all periodic orbits of maps using newton methods: sizes of basins. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 135(3-4):195–211, 2000.
- [148] H. M. Mohammed. *Application of Homotopy Analysis Method for Solving Linear and Nonlinear Differential Equations with Fractional Orders*. PhD thesis, Zarqa University, 2016.
- [149] R. Mohanasubha and M. Senthilvelan. A class of new solvable nonlinear isochronous systems and their classical dynamics. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 22(1):40, 2023.

- [150] J. L. Moiola and G. Chen. *Hopf bifurcation analysis: a frequency domain approach*, volume 15. World Scientific, 1996.
- [151] V. F. Morales-Delgado, J. F. Gómez-Aguilar, H. Yépez-Martínez, D. Baleanu, R. F. Escobar-Jimenez, and V. H. Olivares-Peregrino. Laplace homotopy analysis method for solving linear partial differential equations using a fractional derivative with and without kernel singular. *Advances in Difference Equations*, 2016:1–17, 2016.
- [152] P. A. Naik, J. Zu, and M. Ghoreishi. Estimating the approximate analytical solution of HIV viral dynamic model by using homotopy analysis method. *Chaos, Solitons & Fractals*, 131:109500, 2020.
- [153] M. Najafi, H. Massah, and M. Daemi. On the application of adomian decomposition method and oscillation equations. In *Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Applied Mathematics (MATH'06)*, 2006.
- [154] L. Noeiaghdam, S. Noeiaghdam, and D. Sidorov. Dynamical control on the homotopy analysis method for solving nonlinear shallow water wave equation. *Journal of Physics: Conference Series*, 1847(1):012010, 2021.
- [155] Z. M. Odibat. A study on the convergence of homotopy analysis method. *Applied Mathematics and Computation*, 217(2):782–789, 2010.
- [156] Zaid Odibat, Shaher Momani, and Hang Xu. A reliable algorithm of homotopy analysis method for solving nonlinear fractional differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 34(3):593–600, 2010.
- [157] P. D. Oliveira, L. Farre, and A. L. Bittencourt. Adult T-cell leukemia/lymphoma. *Revista da Associação Médica Brasileira*, 62:691–700, 2016.
- [158] I. Pakar and M. Bayat. Analytical solution for strongly nonlinear oscillation systems using energy balance method. *Int. J. Phys. Sci*, 6(22):5166–5170, 2011.

- [159] J. R. Parkavi, R. Mohanasubha, V. K. Chandrasekar, M. Senthilvelan, and M. Lakshmanan. A class of isochronous and non-isochronous nonlinear oscillators. *The European Physical Journal Special Topics*, pages 1–13, 2022.
- [160] P. Parra-Rivas, D. Ruiz-Reynés, and L. Gelens. Cell cycle oscillations driven by two interlinked bistable switches. *Molecular Biology of the Cell*, 34(6):ar56, 2023.
- [161] G. C. Paul, D. Kumar, et al. Revisiting Fisher-KPP model to interpret the spatial spreading of invasive cell population in biology. *Heliyon*, 8(10):e10773, 2022.
- [162] A. S. Perelson, D. E. Kirschner, and R. de Boer. Dynamics of HIV infection of $cd4^+$ cells. *Mathematical Biosciences*, 114:81–125, 1993.
- [163] A. S. Perelson and R. M. Ribeiro. Modeling the within-host dynamics of HIV infection. *BMC Biology*, 11, 2013.
- [164] L. M. Perko. Global families of limit cycles of planar analytic systems. *Transactions of the American Mathematical Society*, 322(2):627–656, 1990.
- [165] O. J. Peter, A. F. Adebisi, F. A. Oguntolu, S. Bitrus, and C. E. Akpan. Multi-step homotopy analysis method for solving malaria model. *Malaysian Journal of Applied Sciences*, 3(2):34–45, 2018.
- [166] Sofia H Piltz, Frits Veerman, Philip K Maini, and Mason A Porter. A predator–2 prey fast–slow dynamical system for rapid predator evolution. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 16(1):54–90, 2017.
- [167] T. Pirbodaghi, S. H. Hoseini, M. T. Ahmadian, and G. H. Farrahi. Duffing equations with cubic and quintic nonlinearities. *Computers & Mathematics with Applications*, 57(3):500–506, 2009.
- [168] K. Pyragas. Continuous control of chaos by self–controlling feedback. *Physics Letters A*, 170:421–428, 1992.

- [169] K. Pyragas. Control of chaos via an unstable delayed feedback controller. *Physical Review Letters*, 86(11):2265–2268, 2001.
- [170] Y. H. Qian, C. M. Duan, S. M. Chen, and S. P. Chen. Asymptotic analytical solutions of the two-degree-of-freedom strongly nonlinear van der pol oscillators with cubic couple terms using extended homotopy analysis method. *Acta Mechanica*, 223:237–255, 2012.
- [171] Y. H. Qian, S. K. Lai, W. Zhang, and Y. Xiang. Study on asymptotic analytical solutions using HAM for strongly nonlinear vibrations of a restrained cantilever beam with an intermediate lumped mass. *Numerical Algorithms*, 58(3):293–314, 2011.
- [172] Y. M. Rangkuti and A. K. Alomari. Analytical solution of hyperchaotic Zhou equations by multistage homotopy analysis method. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 7:1–13, 2021.
- [173] O. E. RöSSLer. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 57(5):397–398, 1976.
- [174] M. Sabatini. Non-periodic isochronous oscillations in plane differential systems. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 182(4):487–501, 2003.
- [175] M. Sabatini. On the period function of planar systems with unknown normalizers. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 134(2):531–539, 2005.
- [176] H. Saberi Nik, S. Effati, S. S. Motsa, and M. Shirazian. Spectral homotopy analysis method and its convergence for solving a class of nonlinear optimal control problems. *Numerical Algorithms*, 65:171–194, 2014.
- [177] J. A. Sanders, F. Verhulst, and J. Murdock. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, volume 59. Springer, 2007.

- [178] J. Sardanyés, C. Rodrigues, C. Januário, N. Martins, G. Gil-Gómez, and J. Duarte. Activation of effector immune cells promotes tumor stochastic extinction: A homotopy analysis approach. *Applied Mathematics and Computation*, 252:484–495, 2015.
- [179] M. A. Savi, F. H. I. Pereira-Pinto, and A. M. Ferreira. Chaos control in mechanical systems. *Shock and Vibration*, 13(4-5):301–314, 2006.
- [180] M. S. Semary and H. N. Hassan. The homotopy analysis method for strongly nonlinear initial/boundary value problems. *Int J Modern Math Sci*, 9(3):154–72, 2014.
- [181] F. Shakeri and M. Dehghan. Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method. *Mathematical and computer Modelling*, 48(3-4):486–498, 2008.
- [182] M. Shimoyama and The Lymphoma Study Group (1984-87). Diagnostic criteria and classification of clinical subtypes of adult T-cell leukaemia-lymphoma: a report from The Lymphoma Study Group (1984–87). *British journal of haematology*, 79(3):428–437, 1991.
- [183] H. Smith. *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*. springer, 2011.
- [184] O. E. Sotonwa and O. S. Obabiyi. Application of homotopy analysis method for solving the onchocerciasis (riverblindness). *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 17(2):371–387, 2021.
- [185] J. C. Sprott. A simple chaotic delay differential equation. *Physics Letters A*, 366(4-5):397–402, 2007.
- [186] N. I. Stilianakis and J. Seydel. Modeling the T-cell dynamics and pathogenesis of HTLV-I infection. *Bulletin of Mathematical Biology*, 61:935–947, 1999.

- [187] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications To Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Westview Press, 1994.
- [188] G. P. Taylor, S. E. Hall, S. Navarrete, C. A. Michie, R. Davis, A. D. Witkover, M. Rosor, M. A. Nowak, P. Rudge, E. Matutes, et al. Effect of lamivudine on human T-cell leukemia virus type 1 (HTLV-1) DNA copy number, T-cell phenotype, and anti-tax cytotoxic T-cell frequency in patients with HTLV-1-associated myelopathy. *Journal of virology*, 73(12):10289–10295, 1999.
- [189] R. H. Thomlinson. Measurement and management of carcinoma of the breast. *Clinical Radiology*, 33(5):481–493, 1982.
- [190] J. J. Thomsen. *Vibrations and stability*, volume 2. Springer, 2003.
- [191] A. Tridane, R. Yafia, and M. A. Aziz-Alaoui. Targeting the quiescent cells in cancer chemotherapy treatment: Is it enough? *Applied Mathematical Modelling*, 40(7-8):4844–4858, 2016.
- [192] M. Turkyilmazoglu. The selection of proper auxiliary parameters in the homotopy analysis method. a case study: Uniform solutions of undamped duffing equation. *Applied Mathematics*, 2(6):783, 2011.
- [193] P. Van den Driessche and J. Watmough. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical biosciences*, 180(1-2):29–48, 2002.
- [194] P. Van den Driessche and J. Watmough. Further notes on the basic reproduction number. *Mathematical epidemiology*, pages 159–178, 2008.
- [195] R. A. Van Gorder and K. Vajravelu. On the selection of auxiliary functions, operators, and convergence control parameters in the application of the homotopy analysis method to nonlinear differential equations: a general approach. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(12):4078–4089, 2009.

- [196] K. Verdonck, E. González, S. Van Dooren, A. M. Vandamme, G. Vanham, and E. Gotuzzo. Human T-lymphotropic virus 1: recent knowledge about an ancient infection. *The Lancet infectious diseases*, 7(4):266–281, 2007.
- [197] F. Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1992.
- [198] M. Villasana and A. Radunskaya. A delay differential equation model for tumor growth. *Journal of mathematical biology*, 47:270–294, 2003.
- [199] C. Wang, Y. Wu, and W. Wu. Solving the nonlinear periodic wave problems with the homotopy analysis method. *Wave Motion*, 41(4):329–337, 2005.
- [200] L. Wang and M. Y. Li. Mathematical analysis of the global dynamics of a model for HIV infection of CD4⁺ T cells. *Mathematical Biosciences*, 200:44–57, 2006.
- [201] J. Wei and W. Jiang. Stability and bifurcation analysis in van der Pol’s oscillator with delayed feedback. *Journal of Sound and Vibration*, 283:801–819, 2005.
- [202] D. Wodarz. *Killer cell dynamics: mathematical and computational approaches to immunology*, volume 32. Springer, 2007.
- [203] D. Wodarz, M. A. Nowak, and C. R. M. Bangham. The dynamics of HTLV-I and the CTL response. *Immunology today*, 20(5):220–227, 1999.
- [204] Z. K. Wu. Solution of the enso delayed oscillator with homotopy analysis method. *Journal of Hydrodynamics*, 21(1):131–135, 2009.
- [205] H. Yépez-Martínez and J. F. Gómez-Aguilar. A new modified definition of Caputo–Fabrizio fractional-order derivative and their applications to the multi step homotopy analysis method (MHAM). *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 346:247–260, 2019.

- [206] G. Zhang and Z. Wu. Homotopy analysis method for approximations of duffing oscillator with dual frequency excitations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 127:342–353, 2019.
- [207] M. Zurigat, S. Al Shara, S. Momani, and A. Alawneh. The multi-step homotopy analysis method: A powerful scheme for handling non-linear oscillators. *Iranian Journal of Science & Technology*, 37(3.1):421–429, 2013.

Índice alfabético

- aproximación inicial
 - amplitud en el HAM reformado, 35, 78
 - del HAM, 10, 14, 15
 - del HAM para el oscilador de Rayleigh, 18, 19
 - del HAM reformado, 34, 35, 65, 66
 - del HAM reformado en tres dimensiones, 57
 - del HAM reformado para EDRs, 78
 - del MSHAM, 23, 86
 - del oscilador de Rössler, 54
 - para órbitas periódicas, 16
- ATL, 80, 84, 101
- Bautin, *véase* bifurcación de Bautin
- bifurcación
 - de Bautin, 47
 - de Hopf, 17, 25, 49, 64, 74, 89, 95, 96, 105, 121, 123, 124, 126
 - isocrónica, 23, 105
 - silla-nodo de ciclos, 49, 52
 - silla-nodo de equilibrios, 50
- centro isocrónico, 26, 104, 112
- desviación cuadrática
 - del HAM reformado, 37, 68
 - del oscilador anarmónico, 40
 - del oscilador anarmónico con retardo, 76
 - del oscilador de van der Pol, 42
 - del oscilador de van der Pol con retardo, 71
 - del oscilador Rayleigh, 43
 - del sistema de Rössler, 54
 - en órbita homoclina, 60
 - para múltiples ciclos y equilibrios, 50
- ecuaciones
 - de deformación, 15, 34, 66, 86
 - diferenciales con retardo, 13, 23, 24, 62,

- 105, 121
- diferenciales funcionales, 24
- error(es) relativo(s)
 - del HAM reformado, 44, 47
 - del MSHAM, 82, 87, 98
- familia isocrónica
 - de ciclos límite, 105, 108, 111, 113, 116
 - de ciclos límite en una EDR, 122
 - de órbitas periódicas en un centro, 112
 - del oscilador de van der Pol, 118
- foco isocrónico, 26, 104
- HAM
 - de Liao, 9, 13, 24, 31, 45, 63, 81
 - para órbitas periódicas, 16
 - por múltiples etapas (MSHAM), 13, 21, 81, 86, 87, 93, 96, 101
 - reformado, 33, 45, 51, 54
 - reformado para EDRs, 64, 70, 72, 75
- h -curvas
 - del HAM, 20, 32, 45
 - del HAM reformado, 37, 38, 67, 68
 - del MSHAM, 23, 87, 96
 - del oscilador anarmónico, 40
 - del oscilador anarmónico con retardo, 76
 - del oscilador de van der Pol, 42
 - del oscilador de van der Pol con retardo, 71
- del oscilador Rayleigh, 43
- del sistema de Rössler, 54
- en ausencia de órbitas, 58
- en órbita homoclina, 60
- para múltiples ciclos y equilibrios, 50
- homotopía, 14, 34, 54, 65, 86
- Hopf, *véase* bifurcación de Hopf
- HTLV-I, 79, 95, 100
- h - ω -superficie
 - del HAM reformado, 38, 46, 68
 - del oscilador anarmónico, 40
 - del oscilador anarmónico con retardo, 76
 - del oscilador de van der Pol, 42
 - del oscilador de van der Pol con retardo, 71
 - del oscilador Rayleigh, 43
 - del sistema de Rössler, 54
 - en ausencia de órbitas, 58
 - en órbita homoclina, 60
 - para múltiples ciclos y equilibrios, 50
- isocronía
 - de soluciones, 23, 26
 - de un centro, 26, 104
 - de un foco, 26, 104
 - de una bifurcación de Hopf, 26
 - de una familia de órbitas periódicas respecto de un parámetro, 13, 23, 104,

- 125
- leucemia de células T del adulto, *véase* ATL
- Método de Análisis Homotópico, *véase* HAM
- MSHAM, *véase* HAM por múltiples etapas
- número reproductivo básico, 82, 88, 91, 101
- operador lineal
- del HAM, 10, 14, 15
 - del HAM reformado, 34, 35, 65
 - del MSHAM, 86
 - para órbitas periódicas, 16–18
- órbita
- heteróclina, 50
 - homóclina, 50, 59
 - isocrónica, 105
- oscilador
- anarmónico, 37, 39, 113
 - anarmónico con retardo, 71, 126
 - armónico, 113
 - de Rössler, 56
 - de Rayleigh, 17, 20, 43, 116, 118
 - de van der Pol, 41, 116
 - de van der Pol con retardo, 69, 123
- parámetro de control de convergencia
- del HAM, 10, 14, 19, 20
 - del HAM reformado, 33, 46, 67
 - del MSHAM, 23, 87, 96
- péndulo rotatorio con retardo, 124
- Rayleigh, oscilador(ecuación) de, 17, 20, 43, 116, 118
- recta asociada al sistema auxiliar, 109, 110, 113, 115, 117, 120
- Rössler, sistema de, 53
- sistema(ecuación) auxiliar
- asociado al péndulo rotatorio con retardo, 125
 - asociado a la μ -familia de ciclos, 105–107
 - asociado a sistemas con velocidad angular constante, 115
 - asociado a un centro, 112
 - asociado a una ecuación con retardo, 121, 122, 127
 - asociado al oscilador anarmónico, 113
 - asociado al oscilador anarmónico con retardo, 126
 - asociado al oscilador armónico, 113
 - asociado al oscilador de van der Pol, 117
 - asociado al oscilador de van der Pol con retardo, 123
 - solución periódica, 109
- teorema
- de convergencia del HAM, 15
 - de isocronía de una μ -familia de ciclos, 105, 108, 115

de isocronía de una μ -familia de ciclos
en EDRs, 122

van der Pol

oscilador(ecuación), 41, 116

oscilador(ecuación) con retardo, 69, 123

virus linfotrópico humano de células T de
tipo I, *véase* HTLV-I