REGLAS Y DIÁLOGOS. UNA DISCUSIÓN LÓGICA

JORGE ALFREDO ROETTI[1]

[1]Doctor en filosofía, académico correspondiente de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires, investigador principal jubilado del CONICET, jorge.roetti@speedy.com.ar.

JORGE ALFREDO ROETTI

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS DE BUENOS AIRES
CONICET

Centro de Estudios Filosóficos Eugenio Puciarelli
Buenos Aires
2016

Roetti, Jorge Alfredo
Reglas y diálogos. Una discusión lógica / Jorge Alfredo Roetti. – 1ª ed. – Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires, 2016.
Libro digital, PDF
431 p.; 16 x 21,75 cm.
Archivo Digital: online
ISBN 978-987-537-143-9
1. Filosofía. I. Título.
CDD 190

CENTRO DE ESTUDIOS FILOSÓFICOS
EUGENIO PUCCIARELLI
Director: Dr. Roberto J. Walton

La publicación de los trabajos de los académicos y disertantes invitados se realiza bajo el principio de libertad académica y no implica ningún grado de adhesión por parte de otros miembros de la Academia, ni de ésta como entidad colectiva, a las ideas o puntos de vista de los autores.

Todos los derechos reservados
Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
IMPRESO EN LA ARGENTINA
© JORGE ALFREDO ROETTI y ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS DE BUENOS AIRES.
e-mail: jorge.roetti@speedy.com.ar
ISBN 978-987-537-143-9

Por cierto el filósofo llega mejor a su fin
cuando supone que los hombres son racionales;
pero el hombre no es racional,
llega a serlo sólo tardíamente,
cuando el mundo ya está establecido.
Johann Christoph Friedrich von Schiller[2]

[2] *Der Philosoph kommt freilich am besten zu seinem Zweck, wenn er den Menschen gleich als vernünftig voraussetzt; aber der Mensch ist nicht vernünftig, er wird es erst spät, und wenn die Welt schon eingerichtet ist.* Schiller, *Sämtliche Werke*, Sanssouci-Ausgabe, vol. 7, *Schriften zur Kunst und Philosophie*, p. ix, Potsdam und Berlin, Müller & Kiepenheuer –Verlag, s. d.

Filippo Roetti Carutti di Cantogno
Adelina Salvi de Roetti
In memoriam

Mesa Directiva

2015-2017

Presidente

Dr. Marcelo Urbano Salerno

Vicepresidente 1º

Dr. Fausto T. Gratton

Vicepresidente 2º

Ing. Luis A. de Vedia

Secretario

Dr. Mario J. Solari

Prosecretario

Dr. Alberto C. Riccardi

Tesorero

Ing. Juan Carlos Ferreri

Protesorero

Dr. Federico M. Pérgola

INDICE

PRÓLOGO.

Necessaria est Methodus
ad rerum veritatem investigandam.
René Descartes[3]

Al menos dos condiciones *trascendentes*[4] muy generales se exige que satisfaga todo sistema simbólico merecedor del nombre de 'lógica'. Ellas son:

1. neutralidad metafísica y ontológica, y
2. neutralidad gnoseológica.

A pesar de su generalidad estas condiciones caracterizan bastante bien lo que se intenta expresar cuando se dice que los estudios lógicos son 'formales'. Hasta no hace mucho más de un siglo una gran parte de los filósofos y científicos creía, en forma que hoy parece algo ingenua, que la lógica, sea en su forma tradicional, sea en su forma matemática inicial, satisfacía esas condiciones sin restricciones, y esto a pesar de las importantes críticas que numerosas tesis lógicas tradicionales habían recibido ya desde la antigüedad. Esta situación no se ha modificado demasiado hasta nuestros días, no obstante los enormes progresos sistemáticos y críticos que ha tenido la lógica en el último siglo. Consideremos algunos ejemplos conocidos de *quaestiones logicae disputatae* desde la antigüedad:

[3] DESCARTES, René: *Regulae ad directionem ingenii*, Regula IV: *Necesario es el método para investigar la verdad de las cosas*. Edición de ADAM ET TANNERY, 1965, 45.
[4] La condición se revelará ciertamente también como "trascendental", es decir como condiciones de posibilidad de la lógica misma, pero aquí nos referimos sólo a su carácter "trascendente" respecto del uso de la lógica, respecto de los fines para los que es instrumento. Las concepciones de lo lógico mencionadas más abajo son en cambio problemas principalmente inmanentes de la misma lógica.

(i) La "*cuestión de la verdad*", de su caracterización y de su definición, fundamentalmente en el caso de los enunciados, pues otros aspectos tradicionales importantes del tema han sido prácticamente dejados de lado en las discusiones lógicas desde su "resurgimiento" en el siglo XIX.

Un subtema particularmente importante para los estudios lógicos fue el de la discusión de los llamados 'valores de verdad' de los enunciados, que tiene sus antecedentes, tanto en la tesis de *bivalencia*, atribuida a Crisipo de Soloi (*281-†208 a.C.), como en la de la *no-bivalencia*, que algunos llegan a atribuir incluso a Aristóteles (ca. *384/3-†322 a.C.).[5] Ésta es una discusión que se puede plantear tanto en el terreno gnoseológico como en el metafísico, que ha llegado hasta nuestros días y que la podemos considerar en la actualidad como resuelta en cierto modo.

(ii) La cuestión de la naturaleza de la constante lógica de *implicación* o *subjunción* y de la relación de *consecuencia lógica*, de amplio tratamiento desde la época helenística hasta la actualidad.

(iii) La cuestión de la naturaleza de la constante lógica de *negación* y de su relación con la *implicación* y con la relación de *consecuencia lógica*, que es también un tema crítico de toda lógica. A lo largo de este trabajo nos veremos obligados a considerar algunas variantes de estas constantes lógicas, de sus relaciones mutuas y con la relación metalógica de consecuencia lógica.

(iv) La cuestión de las llamadas "regla y ley de adición" $A \vdash A \vee B$ y $\vdash A \rightarrow A \vee B$, que se admiten en la mayoría de los sistemas lógicos, pero que se discuten en los sistemas lógicos

[5] Cf. por una parte los orígenes de las lógicas polivalentes en el siglo XX que surgen con la identificación entre la "posibilidad" y un tercer valor de verdad debida a Jan ŁUKASIEWICZ y por otra la tesis iniciada por MENNE, pero desarrollada en ÖFFENBERGER 1990, sobre la tetravalencia, y finalmente una cierta "pentavalencia" aristotélica.

llamados “relevantes”. Aceptar esta regla y esta ley, como haremos, reclamará explicar el modo en que comprenderemos la disyunción inclusiva. Algo semejante ocurrirá con el tratamiento de la cuantificación existencial.

(v) La discusión acerca de la universalidad de la validez de los “principios” o su restricción, por ejemplo del *principio de no contradicción* (que abreviaremos **pnc**), con sus supuestos gnoseológicos, metafísicos y ontológicos, pero también del *principio de tercero excluido* (o *tertium non datur*, que abreviaremos **tnd**), también dependiente de supuestos metafísicos – como en la querella entre los aristotélicos y algunos estoicos – o gnoseológicos – especialmente en la querella más próxima a nosotros entre matemáticos “clásicos” y “formalistas” por una parte e “intuicionistas” o constructivistas por la otra.

(vi) Una cuestión emparentada con la mencionada en (ii), que es la de la admisibilidad de ciertas supuestas “leyes” que ya se pueden rastrear en Aristóteles, como por ejemplo:

(1) $\neg(\neg A \Rightarrow A)$ y (2) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(\neg A \Rightarrow B)$,
o en Boecio, como
(3) $\neg(A \Rightarrow \neg A)$ y (4) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg B)$.

Éstas no son leyes de la lógica de primer orden, ni intuicionista ni clásica, como fácilmente se advierte. Ellas sólo valdrían “*en materia necesaria e imposible*”, como se dice en la terminología aristotélica, y hoy soy retomadas por las llamadas lógicas conexas. El signo ‘$\Rightarrow$’ es aquí el de la implicación ‘conexa’. Aristóteles efectivamente afirma al menos la fórmula (1) en *An. Pr.* B 4, 57a36-b18, donde dice que una conclusión que se sigue de premisas falsas no debe ser necesariamente verdadera y su fundamento para ello consiste en el rechazo como imposible (*adýnaton*) de la forma de enunciado que en lógica conexa escribiríamos así $\neg A \Rightarrow A$. Consideraremos brevemente este asunto de la conexidad en la última parte de este trabajo.

Éstos no son ciertamente los únicos problemas, ni de la historia de la lógica, ni de la lógica contemporánea. Recuérdense solamente los problemas ligados a las antinomias de diverso origen, los problemas metateóricos de los sistemas formalizados, los teoremas de limitación y otros más. De modo que sería muy difícil, si no imposible, dar una lista actualizada de sus problemas fundamentales, aunque una muy conveniente es presentada en libros como el de Stephen READ mencionado en la bibliografía.[6] Por los motivos que señalaremos a lo largo de este trabajo nos ocuparemos sólo de algunos de esos problemas. Nuestro énfasis principal estará puesto, aunque no exclusivamente, en el mencionado en el punto (ii) acerca de las interpretaciones de la constante lógica de *implicación* o *subjunción* y de la relación de *consecuencia lógica* y, con menor detalle, en los relativos a (i), sobre la *verdad*, a (v), sobre los límites de vigencia de los "principios" lógicos y a (vi), sobre la cuestión de la conexidad. Otros problemas que deberemos considerar obligatoriamente son algunos problemas metateóricos de los cálculos considerados. En cambio los restantes serán considerados sólo tangencialmente. En todo caso un propósito constante de nuestro trabajo será el de:

(a) Explicitar al menos algunas *condiciones necesarias* que debe satisfacer toda constante lógica que merezca el nombre de conjuntor, disyuntor inclusivo, implicador, negador, cuantor universal, o existencial.

(b) Determinar las *convenciones* adicionales de índole metafísica, ontológica, gnoseológica o pragmática que se adoptan por conveniencia o comodidad en dominios teóricos determinados.

Éste es nuestro objetivo fundamental, aunque la experiencia nos enseña las dificultades y los límites de esta tarea, como ya lo recordara Heyting respecto de otro gran problema, el de la adecuación de los sistemas axiomáticos para caracterizar precisamente las relaciones de deducción: "*Siempre permanece*

[6] Ver READ 1995.

un residuo de ambigüedad en la interpretación de los signos y nunca se puede demostrar con rigor matemático que los sistemas de axiomas realmente contienen todo método válido de demostración."[7] Esto nos sugiere que las soluciones imperfectas a estos problemas tienen el estilo de las discusiones acerca de la "hermenéutica" dialéctica de textos. En el caso de las constantes lógicas esta ambigüedad y los inevitables restos de convención son especialmente conspicuos en los casos del implicador o subjuntor, del negador, del disyuntor inclusivo y del cuantor existencial.

Es fácil de advertir que las primeras y más fuertes convenciones, como la convención clásica e incluso la intuicionista para el implicador, son fáciles de criticar. Es cierto que en una *regulación* mínima del lenguaje coloquial podemos concebir a la implicación

(5) ‘$A \to B$’,

como la abreviatura de una *promesa condicional teórica* entre contertulios de la forma:

(6) ‘Si me conceden A, entonces me comprometo a presentar una defensa de B’.

Ésta también es una convención, pero es una convención mínima, es decir una convención tal, que sin ella simplemente ya no tendríamos implicación. Es decir, es una convención que nos permite usar enunciados de forma implicacional. No obstante es una convención muy ambigua, que se presta a muchas interpretaciones diferentes y que, por lo tanto, permite presentar "defensas" de B, una vez concedida A, que el otro contertulio puede considerar inaceptables, o incluso tramposas o "falaces". En primer lugar no está claro qué quiere decir

[7] HEYTING 1956, 102: "*There always remains a residue of ambiguity in the interpretation of the signs, and it can never be proved with mathematical rigour that the system of axioms really embraces every valid method of proof.*"

'defender' un enunciado. Pero luego, una vez que acordemos qué entenderemos por ello, se puede a su vez interpretar (6) de varias maneras, que ya no son necesarias para posibilitar el uso de la implicación. Por ejemplo, puede acontecer que hayamos acordado entender 'defender' como 'deducir' en alguno de los sentidos disponibles del término, y que quien hizo la propuesta, luego de que su contertulio le haya concedido 'A', se ocupe de:

(7) deducir 'B', pero *sin usar* 'A' en esa deducción, y a partir de ello afirmar que ha deducido '$A \to B$', o también de

(8) atacar la expresión A y mostrar que ella es indefendible y, a partir de ello, pretender que él tiene "derecho" a afirmar que ha deducido '$A \to B$'.

Estas dos "estrategias" convencionales de argumentación son discutibles y no son universalmente aceptadas: son rechazadas por ejemplo, entre otros, por los "lógicos de la relevancia", pero son precisamente las que pretenden justificar la admisibilidad de las leyes llamadas tradicionalmente del *verum sequitur ex quolibet*

(9) $B \to (A \to B)$

y del *ex falso sequitur quodlibet*

(10) $\neg A \to (A \to B)$

respectivamente. Incluso una forma más débil del *ex falso sequitur quodlibet*, como el axioma del "cálculo mínimo" de JOHANSSON 1936:

(11) $\neg A \to (A \to \neg B)$,

que no comete ninguno de los dos excesos de arriba, tampoco se salva de la crítica, porque también es cuestionable que, si una fbf. no es defendible, de ello se siga que de ella se deduzca toda fbf. negativa, como valdría en el sistema de lógica "no aristotélica" de Jan ŁUKASIEWICZ de 1912. Otra de las "leyes" de la implicación que no es admisible sin una convención bastante osada es la siguiente:

(12) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$,

que con las tres anteriores constituyen las cuatro principales "paradojas de la implicación" que se dan en el cálculo clásico; la cuarta será inadmisible en el cálculo intuicionista y *a fortiori* en el de Johansson. Volveremos sobre este tema en la última parte de este trabajo.

Como advertimos, las condiciones ya mencionadas de neutralidad metafísica, ontológica y gnoseológica son fáciles de formular pero difíciles de cumplir – en forma plena o perfecta tal vez imposibles de cumplir. En efecto, hoy todos los lógicos saben por experiencia que existen numerosos sistemas simbólicos que se proponen como cálculos lógicos, pero que son mutuamente incompatibles *in toto* y que, cuando se los considera detenidamente, se advierte que muchas de sus reglas y leyes se fundan en *decisiones* gnoseológicas o metafísicas (o incluso ontológicas) que implican un abandono, al menos parcial, de las neutralidades arriba citadas. Por lo tanto la búsqueda de "*lo lógico puro*", previo e independiente de tales decisiones, se vincula con la posibilidad de *determinar un fragmento de lenguaje simbólico, de reglas y principios que sea absolutamente necesario y común a todo sistema posible de argumentación y fundamentación de expresiones de contenido teórico, práctico o técnico*. Aquí defenderemos la tesis de que ese núcleo lógico común, *en la medida en que sea determinable* (nótese que no afirmamos que sea posible determinarla completamente), coincidiría con lo que actualmente algunos autores suelen denominar 'protológica' y que representaría uno de los sentidos que asignamos al término 'razón'.

Conviene agregar además que en las exposiciones habituales de los manuales de lógica se pueden encontrar diferentes concepciones *inmanentes* muy generales acerca de la naturaleza de lo lógico y sus subdivisiones, concepciones que han orientado la reflexión y la construcción de sus sistemas.

Las primeras concepciones surgen de la misma historia de la filosofía. Reconocemos tres tesis iniciales que parecen constituir el marco general de discusión hasta nuestros días:

En primer lugar una cierta tradición asignó a Aristóteles y los peripatéticos una concepción de la lógica como *órgano* o instrumento para la ciencia *sensu stricto*, es decir en el sentido griego fuerte de *epistéme* o saber perfectamente fundado. En este caso se suele considerar como "lógica" exclusivamente a los contenidos de los *Primeros analíticos* y sus extensiones, con lo que se olvidaría injustamente la considerada primera lógica aristotélica, la de los *Tópicos*.

Por otra parte, otra versión de la tradición asigna a la escuela estoica la concepción de la lógica como parte de la filosofía. La lógica adopta entonces el papel de *primera parte formal de la metafísica* u *ontología general*. Esta tradición se continúa hasta nuestros días. Y aunque la tradición aristotélica haya hecho suya la concepción instrumental de la lógica, la reflexión aristotélica acerca de los principios, como el de no-contradicción, nos presenta sus dimensiones complementarias de principio metafísico y lógico, con lo que la posibilidad de admitir el carácter dual instrumental-sistemático de la lógica no siempre se interpretó como incompatible con la concepción aristotélica de la misma. En nuestros días gran parte de los lógicos intenta evitar una versión metafísica de la lógica, aunque haya excepciones. Sin embargo las versiones semánticas de la lógica, tan predominantes por ejemplo desde la obra de Tarski, cumplen el papel de un sucedáneo inconfeso y vergonzante de metafísica general o formal, en forma aparentemente acrítica y por ello "irracional". Para colmo la metafísica tácita de las semánticas formales de la lógica contemporánea es en la mayoría de sus casos elemental, primitiva, sin detalles. Este es un defecto que buscaron superar Husserl en sus primeros trabajos y algunos discípulos polacos, como Lesniewski con su mereología.

Finalmente la tradición neoplatónica admitiría que la lógica era ambas cosas: un instrumento de la ciencia *sensu stricto* y ella misma ciencia. En el platonismo originario ya se encontraba en germen esta concepción dual de la lógica instrumental-sistemática, con la diferencia de que en ese estadio previo de desarrollo aún era dialéctica y ésta servía no sólo para la fundamentación de la *epistéme*, sino también de la *pístis*, es decir de la creencia o saber imperfectamente fundado. Esta tercera concepción dual de la lógica instrumental-científica parece plenamente aceptable, pero en este trabajo nos concentraremos en su aspecto instrumental.

Otro aspecto ambiguo de la historia de la concepción instrumental de la lógica es que no distingue claramente el aspecto de *instrumento de invención* del aspecto de *instrumento de justificación o fundamentación* del conocimiento. Aquí no nos ocuparemos del presunto papel de la lógica como instrumento de invención, sino que nos confinaremos al de justificación, pero a éste lo consideraremos en sus dos formas: la justificación perfecta de la *epistéme* en gran parte del texto y la imperfecta de la *pístis* en la última y menor parte del mismo. Apoyándonos en la clasificación tradicional ya considerada discutiremos una clasificación tripartita más próxima a nosotros:

1. Una concepción que pone énfasis en la lógica como saber acerca de "*contenidos*", en este caso fundamentalmente como sistema de "*verdades lógicas*" (también denominadas "*verdades formales*")[8] y sus conexiones: ésta es la hoy denominada

---

[8] La lógica como teoría de la "verdad formal" se desarrolló en tiempos recientes, especialmente a partir de Frege y de la reintroducción de las "tablas de verdad" por Łukasiewicz y Post y su popularización por Wittgenstein y, consecuentemente, con el reverdecer del concepto de 'verdad formal'. Muchos sistemas deductivos de lógica bivalente y de lógicas multivalentes se presentan como teorías acerca de las verdades formales. En el caso de la silogística aristotélica es clásica la interpretación de Łukasiewicz como sistema de leyes (verdades) lógicas y no de reglas de deducción, interpretación que, sin embargo, no es universalmente aceptada. La interpretación de los silogismos como reglas de deducción, que es la que predomina en la tradición lógica, parece ser mucho más compatible con la concepción de "lo lógico" que tuvo el Estagirita.

concepción *semántica* de la lógica, que siempre supone un *cálculo* semántico, de mayor o menor complejidad y mayor o menor convencionalismo, con el que se intenta determinar el carácter de verdad o falsedad formal, o de contingencia, de las expresiones o fórmulas bien formadas (abreviamos 'fbf.s') de un lenguaje. El conjunto de las expresiones a las que tal cálculo semántico permite asignar el predicado de "formalmente verdadero" constituye el núcleo teórico del "objeto formal" de la lógica en esta concepción. Esto es un sucedáneo inconfeso de la metafísica general u ontología formal. Tal dimensión "metafísica", confesa o inconfesa, no falta jamás: una discusión que intenta buscar la verdad en cierta región del ser debe usar un instrumento que de alguna manera se adecue a la estructura de tal región.

Las variantes de los cálculos semánticos determinan las distintas semánticas lógicas. Los textos elementales de introducción a la lógica consisten habitualmente de una forma simplificada de semántica lógica que corresponde a la llamada lógica clásica. Pero también el método de los "*tableaux sémantiques*" de Beth, que se considera un procedimiento sintáctico para el tratamiento de cuestiones semánticas de los cálculos lógicos, está íntimamente conectado con esta concepción. Incluso las caracterizaciones usuales de la semántica de la lógica intuicionista dependen de la admisión de una semántica con infinitos valores de verdad.[9] Sin embargo los límites de la concepción de la lógica como sistema de verdades formales son muchos y conocidos. Recordemos aquí los casos más claros de la lógica de exclamaciones, la lógica de preguntas (o lógica erotética), la de imperativos, la lógica normativa y jurídica, las lógicas de ficciones o lógicas libres, etc. En estos casos es posible presentar auténticas deducciones sin que debamos admitir simultáneamente un valor de verdad para

[9] El desarrollo posterior dio lugar a los "cuadros analíticos" o "*analytic tableaux*", de índole ya sintáctica, ya semántica, que reposan sobre una admisión del principio de no contradicción en forma irrestricta. Estos cuadros analíticos serán tratados en la primera parte de este trabajo. Para ellos véase p. ej. SMULLYAN 1968.

todas las expresiones de éstas. Los positivistas, desde Hume, y sus epígonos los neopositivistas, han rechazado que los juicios morales pudieran ser verdaderos o falsos. Frente a ellos los partidarios del derecho natural consideraron necesario para la construcción de un *jus gentium*, derecho de gentes o de los pueblos, que fuera posible la aplicación de esos predicados semánticos a las proposiciones morales y jurídicas. La cuestión es difícil y disputada, y provocó el famoso "dilema de Joergensen", que reza así:

(13) "*O consideramos a las deducciones sobre expresiones prácticas como auténticas deducciones y ampliamos así el concepto de lógica más allá de la lógica como sistema de verdades formales deductivamente encadenadas, o bien conservamos esa noción restringida de lógica y negamos el carácter de deducciones a los encadenamientos de expresiones prácticas*".[10]

De todos modos, a pesar de que es posible conceder la verdad o falsedad a algunas clases de expresiones del discurso práctico, éste no es un fenómeno universal. Por lo tanto en numerosas disciplinas, y no sólo en las prácticas, tendremos que tratar con expresiones de carácter proposicional que no tienen un valor de verdad (al menos universalmente admitido) y que sin embargo son parte de deducciones de carácter práctico, sobre las que se puede discutir y llegar a acuerdos bien fundados acerca de su admisibilidad o inadmisibilidad. Esto nos obligará a tomar partido por uno de los cuernos del dilema de Joergensen y ampliar el concepto de lógica más allá del de las verdades lógicas, aunque no solamente por motivos relativos al discurso práctico.

Otras concepciones, sin rechazar necesariamente su dimensión semántica, ponen énfasis en la lógica como saber de "*procesos*". A éstas las podemos subdividir en:

---

[10] Cf. p. ej. KALINOWSKI 1972, 57-61.

2. Los "procesos" que estudia la lógica son los de la teoría general de la "*deducción*"[11] (procesos de deducción de unas expresiones a otras), que nosotros subdividiremos en:

2.1. Los "*cálculos del tipo Hilbert*"[12], que son fundamentalmente "lógicas de leyes", es decir cálculos en los que se pone énfasis en los axiomas como puntos de partida de la deducción, y secundariamente en las reglas.

2.2. Y los "*cálculos del tipo Gentzen*"[13], que son "lógicas de reglas" o cálculos donde el énfasis está puesto en las reglas y no en los axiomas. Entre éstos tomamos en cuenta no sólo los *cálculos secuenciales* (*Sequenzenkalküle*) sino también los *cálculos de deducción natural* de Gentzen y Jaškowski, los *cuadros analíticos* (originados en los "*tableaux sémantiques*" de Beth y perfeccionados en los "*analytical tableaux*" de Smullyan) y naturalmente los *juegos dialógicos* (*Dialogspiele*) de Lorenzen, Lorenz y sus discípulos.

Ésta no es la única manera en que se pueden subdividir las formas de la lógica considerada como teoría de la deducción, pero es la que parece adecuarse más a nuestro propósito actual[14], pues considera al concepto de *deducción*, que es genérico y con muchas diferencias específicas posible, como el *correspondiente sintáctico* de la *noción pragmática* de *fundamento suficiente*.

---

[11] "*Allgemeine Beweistheorie*", "*théorie générale de la preuve*", "*general proof theory*": estas expresiones provienen de la tradición hilbertiana y han sido generalizadas para la lógica. En fundamentos de matemática habitualmente se la identifica con la "metamatemática" (*Metamathematik*).

[12] "*Satzlogik*" o "*Hilberttypkalkülen*". Gentzen los denomina '*logistische Kalküle*' o '*cálculos logísticos*'.

[13] "*Regellogik*" o *Gentzentypkalkülen*".

[14] Para otras presentaciones ver p. ej. STEGMÜLLER-VARGA VON KIBED 1984.

3. Los "procesos" que estudia la lógica son los de la teoría general del "*fundamento*"[15], que no sólo es una concepción más amplia que la teoría general de la deducción, sino que se desarrolla a partir de una noción básicamente pragmática como es la noción general de "*fundamento*". Esta noción no sólo incluye la noción de fundamento suficiente sino también la de fundamento insuficiente. Esta última noción pragmática incluye en sus correspondientes variantes sintácticas y semánticas temas tales como el de la inducción, la semejanza, la analogía, la abducción, las lógicas probabilistas, las no monótonas con sus sistemas de argumentación rebatible, pero también sus formas históricas tradicionales, como las fundamentaciones dialécticas, las formas no sofísticas de la retórica, tanto en la historia de la razón en la tradición llamada occidental, como en otras tradiciones, como la india, con sus conceptos de '*prakrti*' (lo originario o el fundamento) y '*vyapti*' (relaciones semejantes a la noción de consecuencia).[16]

Esta cuestión filosófica y lógica de los "fundamentos" ha causado muchas dificultades teóricas. Los "clásicos" por ejemplo, de un modo bastante ingenuo, han insistido constantemente en la necesidad de un "criterio" consistente en una lógica "infalible" para poder juzgar si nuestros razonamientos son sólidos. Los intuicionistas han insistido por su parte en que la lógica no puede ser el fundamento sobre los que nos colocamos, porque requeriría a su vez una fundamentación que implicaría principios mucho más intrincados y menos directos que aquellos de la misma matemática[17], y por ello se dedicaron a la construcción de los

---

15 "*Theorie des Grundes*" (o "*der Begründung*"). La palabra alemana '*Grund*' = 'fundamento' (o '*Begründung*' = 'fundamentación') se entiende aquí referida a procesos teóricos, prácticos o técnicos, como la *colección de enunciados y reglas que se proponen para* "*defender*" *a otro enunciado*: ellos constituyen su "fundamento" o *Grund*.

16 Ver la última parte.

17 HEYTING 1995, 6: "*I regret to disappoint you. Logic is not the ground upon which I stand. How could it be? It would in turn need a foundation, which would involve principles much more intricate and less direct than those of mathematics itself.*"

recursos deductivos en el ámbito de las construcciones matemáticas mismas. Esto puede ser adecuado con los recursos lógicos requeridos para la construcción de la matemática, pero esperamos mostrar que para las actividades más generales de argumentación es posible resolver el problema de forma adecuada mediante un estudio de las condiciones inevitables de la práctica argumentativa en una discusión racional, es decir de las condiciones "pragmáticas trascendentales" de un diálogo que llamaremos "cooperativo". Como ya adelantáramos más arriba no pretenderemos presentar un método de "aprender a pensar", ni menos aún de "aprender a fundamentar", que es lo que ingenuamente se pide de la lógica (como método de descubrimiento) y que ella se la mostrado en buena medida incapaz de proporcionar[18], sino sólo esbozar un método para decidir si un intento de fundamentación, sea de índole suficiente o insuficiente, merece ser considerado como tal.

Las lógicas asociadas a las concepciones lógicas arriba citadas no tienen por qué ser igualmente extensas. La primera concepción da lugar a "lógicas de *leyes*" o de "verdades lógicas" (que en algunos casos se pueden considerar formas vergonzantes de ontología formal) y se solapa con las asociadas a la segunda concepción, que da lugar a lógicas de "*consecuencias*" o "*deducciones*": téngase en cuenta que hay "verdades lógicas" a las que no corresponden (inmediatamente) deducciones (aunque siempre hay ardides técnicos para hacerles corresponder alguna), como por ejemplo a los principios clásicos de no contradicción $\neg(A\wedge\neg A)$ y de tercero excluído $A\vee\neg A$, que tradicionalmente se entendieron como "verdades" universales de carácter metafísico o gnoseológico, pero a los que se les puede hacer corresponder las deducciones '$v \vdash \neg(A\wedge\neg A)$' y '$v \vdash A\vee\neg A$', donde '$v$' se interpreta como "lo lógicamente verdadero".

Y además hay deducciones a las que no corresponden (inmediatamente) verdades lógicas, como ocurre con deducciones de la lógica de predicados cuando se trabaja con

[18] Cf. FEYERABEND 1994, cap. 11, p. 127.

fórmulas "abiertas", es decir con apariciones de "variables libres" o "parámetros" (aunque también hay ardides técnicos para hacerles corresponder tales verdades). Además hay sistemas lógicos, como los normativos, que difícilmente se puedan transformar totalmente en sistemas de verdades lógicas. Por ello podemos afirmar, como se muestra en muchos otros trabajos y como lo recordamos también aquí, que la noción de verdad lógica es más estrecha que la de consecuencia o deducción, y que esta última es a su vez más limitada que la de fundamento, siendo esta última noción la más amplia de todas.

En efecto, se pueden dar fundamentos en favor de tesis que no son verdades lógicas mediante argumentos a los que no corresponden deducciones lógicas. Un ejemplo antiguo es el de la *inducción*. Otro, puesto de moda por Charles Sanders Pierce, es el de la *abducción* o invención de la hipótesis o ley intermedia entre los casos particulares y la ley universal ya admitida, un procedimiento de progreso científico muy común en ciencias naturales como la física.

Ambos, inducción y abducción, son formas de conclusión sintéticas a las que no corresponde ninguna regla de deducción lógica *sensu stricto* o "fuerte". Por otra parte ambas suelen ser consideradas como procedimientos de las llamadas 'lógicas del descubrimiento', aunque esto es más claro en el caso de la abducción y no tanto en el de la inducción, que bien puede considerarse como exclusivamente una regla de fundamentación "débil" y no como una regla de descubrimiento.

Otro ejemplo más general es el de la *analogía* (no "constitutiva" en sentido *kantiano*), a la que tampoco corresponde una regla lógica suficiente o "fuerte". Éstos son ejemplos de *fundamentaciones imperfectas*, pero que abundan no sólo en las argumentaciones cotidianas y filosóficas, sino que están presente en gran número en la totalidad de las ciencias, especialmente en las llamadas 'empíricas'.

La noción de fundamento es también la más filosófica, pues está íntimamente vinculada con el llamado *principio de razón* o de *fundamento* y a sus especificaciones (*suficiente* e *insuficiente*), y por ello con la noción de *razón* como instrumento. Un autor que se ha movido en esta dirección, aunque no con las herramientas preferidas en nuestro trabajo, que son los diálogos, ha sido Toulmin, quien consideró que la lógica trata de la solidez de los fundamentos o argumentos que presentamos para sostener nuestras aseveraciones y, como 'fundamento' y 'respaldo' (*backing*) son términos que Toulmin recibe de la jurisprudencia, consideró a la lógica en sentido lato con la siguiente comparación: "*la lógica es una jurisprudencia generalizada,*" es decir una *prudencia de la razón*.[19] Esto da espacio no sólo para la tarea de la fundamentación suficiente o absoluta, que es la que se puede considerar como una teoría de la deducción, sino también a la tarea más humilde de la fundamentación insuficiente, que es la que más abunda en las actividades argumentativas de los seres humanos, y no sólo en las discusiones de la vida cotidiana o en las del derecho y la política, sino también en gran parte de las ciencias empíricas, de la filosofía y aún, como veremos, en fragmentos de la propia matemática. Ésta es una tarea esencial del hombre: construir medios para buscar cooperativamente los *transcendentalia*, como la verdad, el bien, la belleza, la unidad, y sus formas inferiores análogas, como lo verosímil, lo justo o lo semejante a lo justo, etc. Esto nos lo recuerda casi toda la historia de la filosofía, incluido el propio Kant. La propia etimología nos lo recuerda: si bien la palabra latina '*homo*' está emparentada con '*humus*', su correspondiente griega, '*ánthropos*', tiene que ver con el ver o mirar "hacia arriba", hacia los trascendentales. Y el medio o instrumento de esta tarea común es la técnica del fundamento, la lógica en sentido amplio.

Respecto del segundo problema, el de la deducción como fundamentación suficiente, Paul Lorenzen ve muy claramente la dificultad de determinar lo que es una conclusión lógica cuando dice: "*Primeramente existe la dificultad de definir qué sea una deducción lógica. Una deducción lógica es de todos modos el paso de ciertos enunciados* (*las premisas*) *a otro*

[19] TOULMIN 1964, 7-8.

enunciado ulterior (*la conclusión*). *Pero resta preguntar cuáles de estos pasos deben llamarse 'lógicos'.*"[20] Obviamente esta caracterización del problema encamina la investigación hacia la segunda concepción intermedia de la lógica como teoría de la *deducción*, lo que por ende también determinará en gran parte el carácter de este trabajo. Los cálculos secuenciales de Gentzen son un ejemplo perfecto del estudio de ciertas pasos de una colección de expresiones en otra colección de expresiones y a ellos dedicaremos la segunda parte del libro. Por su parte los diálogos lógicos de Lorenzen y Lorenz surgieron, pasada la mitad del siglo XX, motivados – desde un punto de vista filosófico – por una teoría de la razón y – desde una perspectiva técnica – por dichos cálculos secuenciales y como una (incompleta) "inversión" de éstos. A este tema de los diálogos lógicos dedicaremos la tercera parte del mismo. Sin embargo advertiremos rápidamente que la noción de 'diálogo', más precisamente la de 'diálogo cooperativo' (opuesta esencialmente a la de 'diálogo erístico' y de modo accidental pero con mucha frecuencia a la de 'retórica') es más amplia que las nociones de deducción que se fundan en los cálculos secuenciales y está íntimamente relacionada con la noción filosófica de 'fundamento' (en uno de sus sentidos) y con la de 'razón'.

El tema de la *autofundación* se desarrolla por caminos inesperados. Ocurre que *al ingresar en el ámbito de la razón lo único necesariamente requerido para la presencia de razón* (fundada trascendental-pragmáticamente) *es un principio de razón insuficiente* (en alemán *Prinzip vom unzureichenden Grunde*) como aspecto constitutivo y *no del mismo modo de uno de razón suficiente* (*Prinzip vom zureichenden Grunde*). Este último, el principio de fundamento suficiente, se presentará como principio regulativo en sentido husserliano que sólo en algunos casos se puede alcanzar. De ese modo lo que primero se

---

[20] LORENZEN 1974, 81: "*Es besteht zunächst die Schwierigkeit, zu definieren, was ein logischer Schluß ist. Ein logischer Schluß ist jedenfalls ein Übergang von gewissen Aussagen (den Prämissen) zu einer weiteren Aussage (der Konklusion). Es bleibt aber zu fragen, welche dieser Übergänge 'logisch' heißen sollen.*"

instaura como razón mínima es la '*pístis*' platónica o la silogística dialéctica aristotélica *lato sensu*. Esto parece estar en conflicto con la tradición filosófica más difundida. La decisión facultativa de las partes de exigir algo más que *pístis* o *doxa* fundada y de alcanzar la epistéme, es siempre una idea *regulativa* de la fundamentación, pero no es necesariamente *constitutiva*. La determinación de alcanzarla es una *decisión voluntaria no obligatoria* – no necesaria – de los dialogantes por la fundación apodíctica, que implica entre otras cosas:

i. Restringirse a cuestiones para las que existe sólo un número finito de objeciones, o a lo sumo un conjunto infinito bien ordenable y recursivo de éstas, de todas las cuales el proponente pueda salir victorioso, y también la finitud "esquemática" del diálogo. Nuestra discusión de este tema aclara la estructura dialéctica platónica y permite proponer algunas precisiones para el discurso hegeliano sobre el tema.

ii. Otro tema interesante es que, entre los principios, los principios dianoéticos suponen una fundamentación noética, sea trascendental-pragmática, eidética (fenomenológica) o de otra naturaleza, dentro de las posibilidades de fundamentación suficiente propuestas a lo largo de la historia de la filosofía.

El origen de esta obra es múltiple. En primer lugar hay que mencionar a los colegas, estudiantes y discípulos de la Universidad Nacional del Sur, en Bahía Blanca, Argentina, ante quienes durante varios años, a partir del 1997, pude exponer un boceto de este libro en seminarios de postgrado y en cursos de Lógica II en el Departamento de Humanidades de esa universidad. En el año 2000 tuve la oportunidad de exponer la teoría de los juegos dialógicos en la Universidad de los Andes en Santiago de Chile y en la Universidad de Montevideo. Luego tuve la oportunidad de exponer los sucesivos bocetos de la obra en otras universidades, como la Universidad Católica Santo Tomás de Aquino de Tucumán y la Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional, en ambos casos en el año 2007.

Además de la importancia de las teorías expuestas en la obra es notoria la carencia en castellano de exposiciones sobre *tableux*, cálculos secuenciales y diálogos lógicos. Tampoco abundaban los trabajos sobre la noción de razón desde un punto de vista lógico. Todos estos estímulos y muchos otros determinaron exteriormente los contenidos principales de esta obra. Muchos de los desarrollos y las reformas que sufrió la obra fueron sugeridos por las preguntas y discusiones sostenidas en la cátedra, por lo que el autor tiene que agradecer especialmente a los estudiantes y colegas.

Pero por supuesto hay otras determinaciones internas que determinan su contenido: en primer lugar existe una íntima conexión genética y estructural entre los cálculos secuenciales y los diálogos lógicos, de modo que es natural presentar un texto que reúna ambos desarrollos. Pero, en segundo lugar, el tema de los diálogos lógicos está íntimamente emparentado con los conceptos de dialéctica y retórica, y con los orígenes de la noción de razón como teoría del fundamento. Por ello el libro se estructura de modo natural en una introducción y tres partes:

La introducción considera algunos propósitos e instrumentos que utilizamos en el libro, como las estructuras de árboles con sus variantes, el lema de König y las reglas de inducción de diversas especies.

La primera parte se acerca a la lógica desde la teoría de los "cuadros analíticos", especialmente en la versión de Smullyan. Allí presentamos especialmente la lógica clásica en dos capítulos. Dedicamos el capítulo I a la presentación de la teoría de la lógica de primer orden. El capítulo II se dedica a la metateoría, principalmente de la lógica clásica de enunciados. La pregunta obvia del lector sería por qué no hemos desarrollado también la metateoría de la lógica de predicados de primer orden. Esto tiene motivos didácticos y de economía expositiva, pues la presentación de Smullyan de esa metateoría es más compleja que la que se puede realizar en los cálculos que le siguen. En efecto, los cálculos secuenciales y los juegos dialógicos permiten una aproximación más simple a los problemas metateóricos y favorecen su solución en aquellos casos en que ello es posible.

La segunda parte del libro está dedicada a los cálculos secuenciales y sus variantes fundamentales. Por razones históricas se exponen someramente sus antecedentes teóricos inmediatos, que son los cálculos de deducción natural. Éstos se exponen brevemente en el capítulo III y en el capítulo IV se desarrolla la teoría de los cálculos secuenciales. La metateoría comienza en el capítulo V con el clásico metateorema de corte, o teorema fundamental de Gentzen, en sus variantes, a lo que sigue en el capítulo VI las aplicaciones del teorema y sus consecuencias metateóricas.

La tercera parte está dedicada a los juegos de diálogos lógicos y sus variantes, que incursiona en la teoría de la razón y sus formas desde una perspectiva dialógica. Comenzamos el capítulo VII con la arquitectura de los juegos dialógicos fundamentales. Se trata ciertamente de un ensayo incompleto que se completa con su metateoría. En el capítulo VIII exponemos en forma breve la relación entre la teoría de diálogos lógicos y las nociones de fundamento y de razón en sus diversas formas. Un desarrollo extenso de este tema reclamaría un tratado completo.

El libro trata pues de los temas mencionados de un modo que pretende ser sistemático, mostrando qué características de los sistemas son efectivamente aceptables por condiciones pragmáticas necesarias de la argumentación en un diálogo cooperativo y qué características son en cambio convencionales o incluso "bien fundadas" en base a "razonables" prejuicios metafísicos o gnoseológicos. Varias de las cuestiones tratadas no están completamente resueltas y posiblemente algunas de ellas no sean completamente resolubles, como acontece con muchas cuestiones hermenéuticas. Esperamos sin embargo que la exposición revele algunos aspectos imprescindibles de todos los modos de argumentación racional. La mayoría de los resultados presentados se fundan en desarrollos previos de grandes lógicos y de grandes filósofos, a los que debe darse el mérito. Los defectos y errores, que sin duda se encontrarán, se deben atribuir solamente al autor.

Concluído en Bahía Blanca, el 29 de abril de MMXVI.

NOTACIÓN.

Abreviaturas y símbolos varios.

Todos los cálculos que consideramos son de primer orden.

CS	Cálculo secuencial.
CSC	Cálculo secuencial clásico.
CSE	Cálculo secuencial estricto.
CSI	Cálculo secuencial estricto.
CSP	Cálculo secuencial paraconsistente.
D#	Definición número #.
D, *D*	Dominio, Deducción.
Dem.	Demostración.
DN	Sistema de deducción natural.
DNC	Sistema de deducción natural clásico.
DNCE	Sistema de deducción natural clásico de enunciados.
DNCP	Sistema de deducción natural clásico de predicados.
DNI	Sistema de deducción natural intuicionista.
DNIE	Sistema de deducción natural intuicionista de enunciados.
DNIP	Sistema de deducción natural intuicionista de predicados.
$\mathcal{F}$	Conjunto de las fbf.s.
fbf. fbf.s	Fórmula(s) bien formada(s).
hip.	Hipótesis.
hip. aux.	Hipótesis auxiliar.
$\mathcal{L}$	Lenguaje.
MT#	Metateorema número #.
P	Demostración o "prueba".
Rd	Regla directa o regla derivada.
Rp	Regla primitiva.
Rs	Regla subsidiaria.
syss	... si y sólo si ...
T#	Teorema o tesis número #.
#	Signo de número.
*	Señal de regla, tesis o transformación inaceptable en un sistema más exigente (como el intuicionista o constructivista respecto del clásico).
A*	Signo de fórmula dual A* de una fbf. dada A.
$\square$	Fin de una demostración (QDE: *quod demonstrandum erat*).

Notación de teoría de conjuntos.

$\{a, b, ...\}$	Definición extensional de un conjunto (finito).
$\{a: Pa\}$	Definición intensional de un conjunto (incluso infinito)
$\in$	Relación de pertenencia a un conjunto o secuencia.
$\notin$	Negación de la relación de pertenencia.
$\{a, b\}$	Par no ordenado.
$\langle a, b\rangle$	Par ordenado.
$\{a, b, c\}$	Terna no ordenada
$\langle a, b, c\rangle$	Terna ordenada.
$\{a_1, ..., a_n\}$	n-tupla no ordenada.
$\langle a_1, ..., a_n\rangle$	n-tupla ordenada.
$\subseteq$	Inclusión *lato sensu* entre conjuntos, clases o listas de enunciados.
$\subset$	Inclusión *stricto sensu* entre conjuntos, clases o listas de enunciados.
$\not\subset$	No inclusión.
$=$	Igualdad de conjuntos.
$\neq$	Desigualdad de conjuntos.
$\leq$	Menor o igual.
$\geq$	Mayor o igual.
$\cap$	Intersección de conjuntos.
$\cup$	Unión de conjuntos.
$\{A_i\}_{i \varepsilon I}$	Familia indexada de conjuntos, donde 'I' es una sucesión de índices.
$\cap_{i=1}^{n} A_i$	Generalización finita de la intersección de conjuntos.
$\cup_{i=1}^{n} A_i$	Generalización finita de la unión de conjuntos.
$\cap_{i \varepsilon I} A_i$	Generalización (posiblemente infinita) de la intersección de conjuntos.
$\cup_{i \varepsilon I} A_i$	Generalización (posiblemente infinita) de la unión de conjuntos.
$-$	Diferencia de conjuntos.
'	Complemento (relativo) de un conjunto.
$\sim$	Equivalencia entre conjuntos = correspondencia 1-1.
$\varnothing$	Conjunto vacío, o clase vacía, o lista vacía de fbf.s.
$M \times N$	Producto cartesiano (existe clásicamente, puede no existir constructivamente).
U(M)	Conjunto potencia del conjunto M (*idem*).
$\aleph_0$	"Alef sub cero": número cardinal de un conjunto

transfinito enumerable.

ω_0 "ómega sub cero": primer número ordinal transfinito (es el primer número mayor que todos los números naturales y el menor de los ordinales transfinitos enumerables).

Notación del lenguaje de la lógica clásica de primer orden
(variante de la notación de Hilbert y elementos de notación polaca).

$\rightarrow$ Subjuntor o implicador clásico (condicional filónico o "material").
$\leftarrow$ Subjuntor o implicador converso clásico.
$\leftrightarrow$ Bisubjuntor o biimplicador o "equivalencia filónica".
$\wedge$ Conjuntor
$\vee$ Disyuntor inclusivo
$\neg$ Negador.
$|$ Incompatibilidad (barra de Sheffer).
$\downarrow$ Negación conjunta (flecha de Peirce).
w Disyuntor exclusivo.

Variables de enunciado: p, q, r, s, …, p_1, p_2, ..., p_l, …, q_1, q_2, ..., q_m, …, r_1, r_2, ..., r_n, …
Parámetros (o variables libres) de individuo: *a*, *b*, *c*, …, a_1, ..., a_l, …, b_1, ..., b_m, …, c_1, ..., c_n, …
Constantes de individuo u objetos extralingüísticos de la semántica: a, b, c, …, s, …, a_1, ..., a_n, …
Variables (ligadas) de individuo: *u*, *v*, *x*, *y*, *z*, …, x_1, ..., x_l, …, y_1, ..., y_m, …, z_1, ..., z_n, …
Términos de individuo: t_1, t_2, ..., t_n, … (pueden ser variables, parámetros, constantes o descripciones).
Interpretaciones de variables, parámetros o constantes de individuo: a_1, ..., a_n, (son elementos de un universo U).

P^n_m, Q^n_m, R^n_m, Predicadores con *n* argumentos y subíndice *m*.
f^n_m, g^n_m, h^n_m, Functores con *n* argumentos y subíndice *m*.

$\bigwedge xA(x)$ Cuantor universal: "para todo *x*, *x* es *A*".
$\bigvee xA(x)$ Cuantor existencial: "existe al menos un *x* tal, que *x* es *A*".
$\bigvee! xA(x)$ Cuantor unitario: "existe exactamente un *x* tal, que *x* es *A*".
$=$ Predicado binario de *identidad*.
$\neq$ Predicado binario de *no-identidad*.

ɩx Descriptor definido: “el x tal que ...”.
Δ Operador de necesidad.
∇ Operador de posibilidad.

Notación del metalenguaje del cálculo clásico de primer orden.

vp Signo metalingüístico de variable proposicional.

$*, *_1, ..., *_n$, Variable metalingüística de constante de la lógica de enunciados (juntor, functor veritativo) monádico, ..., n-ádico.

A, B, C, ...,
A_1, ..., A_n, ...Variables metalingüísticas de fbf.s cualesquiera.

C_k Signo metalingüístico de cuantor con $1 \leq k \leq n$.

$A(t)$ fbf. en la que aparece al menos una vez el término de individuo t.

$A(B)$ fbf. en la que aparece al menos una vez la subfórmula B.

Γ, Δ, Π, Θ, Σ, Letras metalingüísticas para listas *finitas o infinitas* (también etc. posiblemente vacías) de fbf.

Γ_n, Δ_m, etc. Letras metalingüísticas que denotan listas *finitas*, con n, m, miembros de fbf.

Γ(A) Lista de fbf.s en la que aparece al menos una vez la fórmula A.

G(A) Grado lógico de A.

P(C(A)) Profundidad de una aparición de A en C.

$S^B_p(A)$ Substitución de cada aparición de p en la verdad formal o teorema A por la fbf. B, regla que abreviamos RS.

$V^C_B(A)$ Variante del teorema A, que consiste en reemplazar cada aparición de la fbf. B en A por la fbf. C.

$\vdash$ Relación asimétrica de deducción sintáctica. En una escritura vertical se usa una línea simple horizontal ‘__’.

Si a la izquierda de $\vdash$ no hay ninguna fbf., la que le sigue es un teorema o ley del cálculo.

$\nvdash$ Negación de la relación asimétrica de deducción sintáctica.

$\dashv\vdash$ Regla simétrica de deducción sintáctica: de la fbf. izquierda se deduce la derecha y viceversa. En una escritura vertical se recurre a una doble línea horizontal ‘$=$’.

$\vDash$ Relación asimétrica de consecuencia semántica: de la verdad de las fbf.s izquierdas se sigue la verdad de la fbf. derecha (si a la izquierda no hay ninguna fbf., la que le sigue es una "verdad lógica").

$\nvDash$ Negación de la relación asimétrica de consecuencia semántica.

$\leftrightharpoons$ Signo de definición (por equivalencia o identidad).

$\Rightarrow$ Signo de implicador (si...entonces) metalingüístico. También signo de regla.

$\Leftrightarrow$ Signo de biimplicador (...si y sólo sí...) metalingüístico.

$\cdot$ Signo de conjuntor metalingüístico.

$+$ Signo de disyuntor inclusivo metalingüístico.

$\sim$ Signo de negador o de equivalencia metalingüística.

$\top$ Signo de verdad lógica.

$\bot$ Signo de falsedad lógica.

i, i', i^1, ..., i^n Signos para las funciones de interpretación o evaluación de una fbf.

v, 1 Predicado semántico "es verdadero" para una interpretación.

f, 0 Predicado semántico "es falso" para una interpretación.

$\circ$, $\otimes$, $\oplus$, ... Variables para operaciones.

$\mathbb{N}$ Conjunto construible de los números naturales.

$\mathbb{Z}$ Conjunto construible de los números enteros.

$\mathbb{Q}$ Conjunto construible de los números racionales.

$\mathbb{R}$ Dominio no construible de los números reales.

$\mathbb{C}$ Dominio no construible de los números complejos.

Puntuación: Se usan paréntesis. Se ahorran paréntesis conviniendo que ´$\neg$´ conecta más fuertemente que ´$\wedge$´, ésta que ´$\vee$´, ésta que ´$\rightarrow$´ y ésta que ´$\leftrightarrow$´. Si aparecen otras constantes lógicas o hay ambigüedad, se agregan paréntesis, corchetes, o llaves. Luego de un cuantor y sus variables se coloca un punto para separarlo de la expresión predicativa que le sigue.

CAPÍTULO 1.
INTRODUCCIÓN – ALGUNOS INSTRUMENTOS.

1.1. Propósitos.

La construcción y presentación de cualquier teoría requiere el uso de varios instrumentos más o menos tácitamente adoptados, algunos triviales y otros que no lo son. Esos instrumentos no son cuestionados habitualmente, e incluso muchos no reparan en ellos, pero siempre son instrumentos que posibilitan la construcción de las teorías o, como suelen decir los filósofos, son "condiciones de posibilidad". Para evitar malentendidos nos proponemos exponer en las secciones siguientes las bases teóricas necesarias de los principales instrumentos que utilizaremos a lo largo del libro, como las estructuras de árbol, el lema de König y algunas de sus variantes, los procedimientos de inducción finita y transfinita, etc. Para facilitar la comparación con textos en otras lenguas hemos agregado las traducciones de numerosos términos básicos al alemán, francés e inglés.

1.2. Árboles abstractos.

La estructura de árbol, de la cual todos tenemos una pre-comprensión ingenua, constituye un capítulo de una teoría más general, que es la de grafos, que desde un punto de vista genético surge como una generalización de la noción de sucesión. Ella fue desarrollada a partir de la mitad del s. xix por numerosos autores y tomó su forma canónica principalmente por obra del matemático húngaro Dénes König.[21] La noción de grafo se puede definir como sigue:

D.1.2.1. "Sea $\{A, B, C, ...\}$ un conjunto de entidades cualesquiera denominadas "puntos". Si se relacionan o "conectan" ciertos pares formados por dos de estos diferentes

[21] V. KÖNIG 1936, caps. iv y v.

puntos con una o varias “líneas”, entonces se denomina un grafo a la formación resultante.”[22]

En esta sección nos proponemos caracterizar el término ‘*árbol*’ (*Baum*, *arbre*, *tree*) de modo más preciso.

D.1.2.2. Un *árbol* (abstracto) A es una especie del género grafo que, desde un punto de vista formal, se puede considerar una *generalización de la noción de sucesión* (*Folge*, *sequence*), en la cual el sucesor de un elemento o punto, o nodo, puede ser, o bien un conjunto vacío, o uno no vacío, y en este último caso o finito, o infinito (para árboles no ordenados) o bien una sucesión, vacía o no vacía, y en este caso o finita, o infinita (para árboles ordenados).

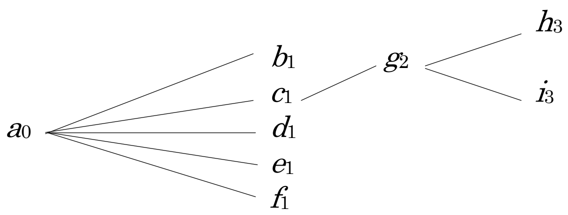
El concepto genérico de ‘árbol’ en sentido abstracto se puede especificar de varias maneras. La más importante es aquella que distingue entre árbol no ordenado y árbol ordenado:

D.1.2.2.1. Un *árbol* A *no ordenado* es una sucesión en la cual a cada elemento le corresponde un conjunto enumerable como sucesor y que consta de
(1) un conjunto M de elementos llamados *puntos* (*Punkte*, *points*, *points* o *dots*),
(2) una función monádica ‘$n(...)$’ definida en M, que asigna a cada punto a un número natural $n(a)$ llamado ‘nivel de a’,
(3) una relación binaria ‘$a\mathrm{P}b$’ definida en M, que leemos ‘a es *predecesor* (*Vorgänger*, *predecessor*) de b’ o ‘b es *sucesor* (*Nachfolger*, *successor*) de a’, que satisface las siguientes condiciones:
(3.1) hay un solo punto a_0 de nivel 0, que llamanos *origen* (*Ursprung*, *origin*) del árbol, es decir: $\bigvee a \bigwedge b(n(a) = 0 \wedge (n(b) = 0 \rightarrow a = b))$,

[22] KÖNIG 1936, cap. 1, § 1, p. 1: *Es sei {A, B. C, ...} eine Menge von “Punkten”. Verbindet man gewisse aus zwei verschiedenen dieser Punkten gebildeten Paare durch eine oder mehrere “Linien”, so nennt man das so entstehende Gebilde einen Graphen.*

(3.2) cada punto diferente del origen tiene un único *predecesor*, que simbolizamos:
$\bigwedge b((b \neq a_0) \rightarrow \bigvee a \bigwedge c(a\mathrm{P}b \wedge c\mathrm{P}b \rightarrow a = c))$.
(3.3) para todos los puntos a y b, si b es un sucesor de a, entonces $n(b)=n(a)+1$, en símbolos: $\bigwedge a \bigwedge b(a\mathrm{P}b \rightarrow (n(b)=n(a)+1))$.

Un ejemplo de árbol finito podría ser el siguiente:



Ejemplo 1

Los elementos del conjunto de sucesores de un elemento dado son llamados por algunos autores 'puntos *hermanos*' (*Geschwisterpunkte*, *points frères*, *brother points*), por tener el mismo "padre".

Algunas de las propiedades de los árboles en general, tanto de los no ordenados, como de los ordenados, son las que definimos a continuación:

D.1.2.2.2. *Punto final* (*Endpunkt*, *dernier point*, *suprême*, *end point*) es el que no tiene sucesor, *punto simple* (*einfacher Punkt*, *point simple*, *simple point*) es el que tiene exactamente un sucesor, *punto de ramificación* (*Verzweigungspunkt*, *point de ramification*, *junction point*) es el que tiene más de un sucesor. Si un punto de ramificación tiene un número finito de sucesores se llama *punto de ramificación finita*, si tiene un número infinito de sucesores se llama *punto de ramificación infinita*.

En el ejemplo 1 de arriba el punto de origen a_0 es un punto de ramificación finita, pues tiene los puntos b_1, c_1, d_1, e_1 y f_1 como únicos sucesores de nivel 1.

D.1.2.2.3. Un *sendero* S(a_n) (*Weg*, *sentier*, *path*) de a_0 hasta a_n es toda sucesión finita de puntos a_0, ..., a_i, a_{i+1},..., a_n, cuyo primer elemento es a_0, el último es a_n y cada a_{i+1} es sucesor de a_i.

D.1.2.2.4. Una *rama* R o *sendero máximo* (*Ast*, *branche*, *branch* o *maximal path*) es toda sucesión finita o infinita enumerable de puntos a_0, ..., a_n, cuyo primer elemento es el origen a_0 y cada a_{i+1} es sucesor de a_i y cuyo último elemento, si existe, es un punto final.

El punto final no existe en caso de tratarse de una rama infinita. Las ramas se individualizan obviamente por sus puntos finales, si los hay.

1.3. Algunas propiedades de los árboles.

Relación de dominación: De las propiedades (3.1), (3.2) y (3.3) de D.1.2.2.1. se obtiene que, para cualquier punto *b*, si $b \in$ S(a_n) (si *b* pertenece al sendero S(a_n)), entonces *b domina* a a_n o a_n *es dominado* por *b* (la relación de dominación es reflexiva, antisimétrica y transitiva).

Relación de superioridad: Si *b* domina a a_n y $b \neq a_n$, entonces decimos que *b es superior* de a_n o a_n *es inferior* de *b*. (La relación de superioridad es irreflexiva, asimétrica y transitiva.)

Relación de comparabilidad: Dos puntos *a* y *b* de un árbol son *comparables* si, o bien *a* domina a *b* o bien *b* domina a *a*.

Relación de intermediación: Dados tres puntos *a*, *b*, *c* de un árbol decimos que '*b* está entre *a* y *c*' si *b* es superior a un elemento del par {*a*, *c*} e inferior al otro elemento de dicho par.

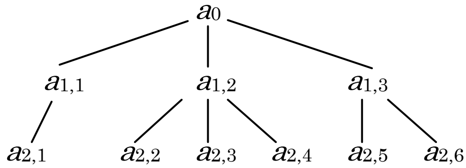
D.1.3.1. Un árbol es *finitamente ramificado* cuando solo tiene finitos puntos de ramificación. En caso contrario es *infinitamente ramificado*.

D.1.3.2. *Niveles de un árbol*: el elemento origen tiene nivel 0, sus puntos sucesores, de existir, tienen nivel 1 y en general los sucesores de un punto de nivel n, si existen, son de nivel n+1. Esto permite dividir al árbol transversalmente por niveles (no discutimos aquí las cuestiones de ordenación dentro de cada nivel).

D.1.3.3. Si un árbol $\mathbf{A}_1$ es parte propia de otro árbol $\mathbf{A}_2$, entonces $\mathbf{A}_2$ se llama una '*extensión propia*' de $\mathbf{A}_1$. Un árbol **A** se puede extender propiamente agregando un elemento c al conjunto de puntos M del árbol y ampliando la relación predecesor con el par ordenado $b\mathrm{P}c$ en que b es un punto origen o intermedio o final de **A** y extendiendo la función nivel con $n(c) = n(b)+1$.

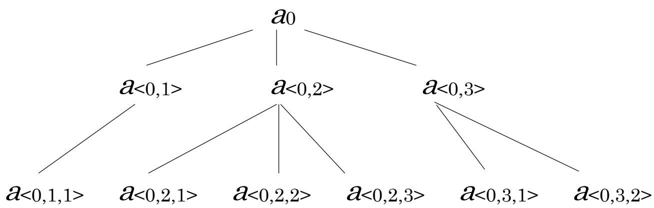
D.1.3.4. Un *árbol ordenado* es un árbol que tiene todas las características de uno no ordenado, pero en el cual los conjuntos sucesores de un elemento son conjuntos bien ordenados enumerables, es decir sucesiones finitas o infinitas.

En lo que sigue emplearemos preferentemente árboles ordenados. En éstos se individualizan sus elementos mediante un subíndice. Hay varias convenciones posibles para identificar sus elementos. La primera que usaremos es más simple, pero sólo es completamente adecuada para los *árboles finitamente ramificados*. Ella bastará para muchos de nuestros problemas de notación y consiste en un subíndice que es un *par ordenado* de números, el primero de los cuales indica su *nivel* y el segundo el *orden dentro del nivel*. El origen podríamos notarlo $a_{0,1}$, pero puesto que el nivel 0 tiene uno y sólo un elemento, es más cómodo notarlo simplemente a_0, como hacemos.



Ejemplo 2

La segunda convención para individualizar los elementos de un árbol ordenado será mediante subíndices que consiste en n-tuplas ordenadas <0, a_1, a_2, ..., a_n> cuyo primer elemento es el subíndice 0 del origen a_0 y, si a_i es el número ordinal del predecesor en su sucesión, a_{i+1} es el número ordinal de su sucesor en su sucesión. El nivel del punto con subíndice <0, a_1, a_2, ..., a_n> será obviamente n+1.



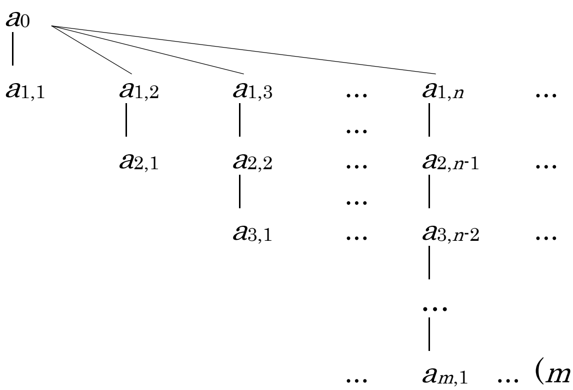
Ejemplo 3

La comparación de los ejemplos 2 y 3 muestra que la segunda convención es más compleja, pero describe con precisión la estructura del árbol del caso.

No existe una sola manera de representar árboles. En algunas ocasiones los representaremos gráficamente en su posición "normal" con las "raíces" abajo, como ocurre en algunas versiones de cálculos de deducción natural y en los cálculos secuenciales, en otras en cambio los representaremos "cabeza abajo", con el origen a_0 en la parte superior. Así aparecen en los "*cuadros semánticos*" (*tableaux sémanthiques*) de Beth, en los "*cuadros analíticos*" (*analytical tableaux*) de Smullyan y en los "*juegos dialógicos*" (*Dialogspiele*) de Lorenzen y Lorenz, en los procedimientos de descomposición de fbf.s, etc. En lógica también se emplean métodos de búsqueda y exposición didáctica con árboles ubicados horizontalmente, como cuando en una clase se exponen todas las interpretaciones que pueden tomar n variables de enunciados en un cálculo veritativo m-valente, o cuántas funciones veritativas existen para n variables con m valores de verdad ($n,m \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq n \wedge 2 \leq m$). En los árboles la relación predecesor-sucesor se indica siempre mediante una línea que une cada elemento con su predecesor, si éste existe.

1.4. Árboles infinitos.

Como ya sabemos, los árboles pueden ser finita o infinitamente ramificados. Consideremos ahora un árbol infinitamente ramificado, con infinitos puntos, pero sin ninguna rama "accesible" o "construible" infinita, que se genera conforme a una regla ilustrada en el siguiente grafo:



(m es la cota del árbol).

....

Ejemplo 4

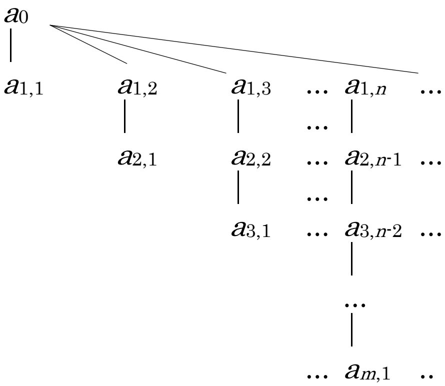
Por arbitrio constructivo establecemos aquí:

(1) que el origen a_0 sea un punto de ramificación infinita, e. d. que sus sucesores sean los de la sucesión $\{a_{1,n}\}$ con $n \in \mathbb{N}$, que no tiene último elemento;
(2) que todos los demás puntos del árbol sean simples y
(3) que todas sus ramas sean *acotadas*, es decir que exista una longitud máxima m para ellas;

Es inmediato que el árbol anterior es infinito (tiene infinitos puntos) a pesar de que cada rama determinada tiene longitud finita.

Sea en cambio el árbol construido con las mismas condiciones (1) y (2) pero con la condición:

(3’): la rama enésima tiene longitud n.



(ramas de longitud no acotada).

Ejemplo 5

En este árbol no hay cota superior para la longitud de las ramas: cualquier rama construible es de longitud finita, pero la longitud de las ramas no es acotada y la rama infinita “posible” es *inaccesible*.[23] Esta situación se modifica cuando nos limitamos a árboles finitamente ramificados con infinitos puntos, como veremos en la sección siguiente.

1.5. Árboles binarios.

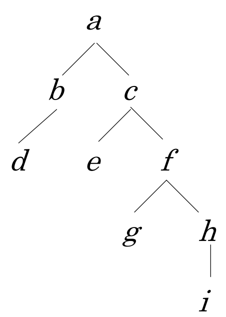
Entre los árboles ordenados finitamente ramificados nos interesarán especialmente los llamados “*árboles binarios*”, que definimos de la siguiente manera:

D.1.5.1. Un *árbol binario* es un árbol ordenado finitamente ramificado en el cual cada punto puede ser simple o ramificado,

[23] Por surgir del extremo derecho de la ramificación de a_0, cuyo ordinal es el primer ordinal inaccesible ω_0.

y cada punto de ramificación, llamado '*punto de bifurcación*', tiene exactamente dos sucesores, llamados respectivamente *sucesor izquierdo* y *sucesor derecho*.

Si en un árbol binario un punto de bifurcación tiene un sucesor izquierdo que domina a un punto *a* y un sucesor derecho que domina a un punto *b*, entonces decimos que *a* está a la izquierda de *b*.

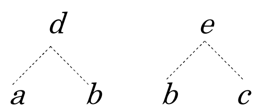


Ejemplo 6.

En nuestro ejemplo *a* es un punto de bifurcación cuyo sucesor izquierdo es *b* y el derecho es *c*. Se dice que los puntos dominados por *b* están a la izquierda de todos los dominados por *c*, *e, f, g* y *h*. Así un punto de bifurcación establece una *partición* entre sus dominados izquierdos y sus dominados derechos.

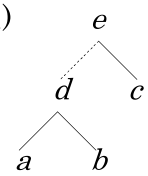
Un teorema inmediato para árboles binarios es la siguiente ley de transitividad: "si *a* está a la izquierda de *b* y *b* a la izquierda de *c*, entonces *a* está a la izquierda de *c*".

Dem. Si *a* está a la izquierda de *b* y *b* a la izquierda de *c*, entonces existe un punto de bifurcación *d* que domina a *a* y *b*, y otro diferente *e*, ya que el árbol es binario, que domina a *b* y a *c*:

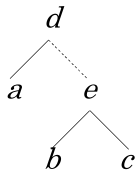


Además valen las siguientes pertenencias para los senderos: $d \in S(a)$, $d \in S(b)$, $e \in S(b)$, $e \in S(c)$. Como para cada punto del árbol existe un solo sendero que conduce hasta él, entonces *d* y *e* pertenecen al mismo sendero. Puesto que el árbol es binario, sus puntos de ramificación son a lo sumo bifurcaciones, entonces necesariamente $d \neq e$ y ambos están en un sendero que va del origen a *b*. Entonces tenemos dos casos posibles:

(1)



(2)



(1) es el caso en que el punto de bifurcación *d* domina a *a* y *b*, y además *e* domina a *d* y a *c*. Por las particiones en izquierda y derecha que los puntos de bifurcación establecen entre sus dominados, sabemos que *a* está a la izquierda de *b* y *d* está a la izquierda de *c*, pero por transitividad en la relación de dominación sabemos que *e* domina a *b* y también que *b* está a la izquierda de *c*. Además por las mismas razones *a* está a la izquierda de *c*. El caso (2) se resuelve de forma similar. En ambos casos se cumple el teorema. Como estos casos agotan las posibilidades queda demostrada la relación. □

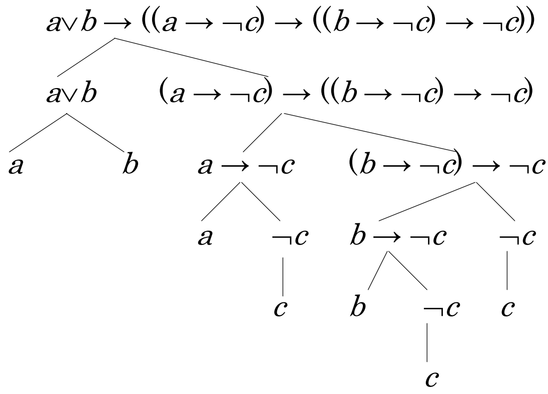
Un caso típico de árboles binarios en lógica son los *árboles de descomposición* o de *formación* de fbf.s en los cálculos lógicos. Como caso particular para la *lógica de primer orden* un árbol de descomposición para una fbf. *A* es un árbol binario de apariciones de fbf.s en cuyo origen aparece la fbf completa *A* y tal que satisface las siguientes condiciones:

(1) cada punto final de una rama es una aparición de una variable proposicional o de un predicado *n*-ario seguido de *n* parámetros;

(2) cada punto simple es de la forma $\neg B$ ó $\bigwedge xBx$ ó $\bigvee xBx$ y tiene como único sucesor una aparición de *B*; ó de *Bc*.

(3) cada punto de bifurcación es de la forma *B** *C*, donde '*' es una constante lógica '→' '∧' o '∨' (por economía podemos evitar las restantes constantes por medio de sus definiciones) y tiene como sucesores apariciones de *B* y de *C*.

Consideremos el siguiente ejemplo del cálculo de enunciados:



Ejemplo 7

Las generalizaciones para la lógica de primer orden son inmediatas.

1.6. Arboles lógicos.

Los árboles abstractos **A** que hemos caracterizado son estructuras de las teorías de grafos y de tipos de orden. Los árboles que nosotros utilizaremos serán en general *árboles lógicos* **B**, casos específicos de los primeros, cuyos puntos o elementos serán expresiones bien formadas (fbf.s) de un lenguaje previamente construido para un cálculo lógico. En los lenguajes que nos ocuparán nuestros puntos o nodos serán expresiones que representan enunciados cualesquiera o formas de enunciado: éstos son también denominados frecuentemente '*árboles de enunciados*' (en alemán *Satzbäume*). El proceso de paso de los árboles abstractos a los árboles lógicos supone la existencia de funciones **B**(N) = φ(**A**(M)) cuyos dominios son árboles abstractos **A** sobre sus conjuntos M de puntos y sus codominios son árboles lógicos **B** sobre conjuntos de elementos N que constan de expresiones bien formadas del lenguaje del cálculo. Si $a \in$**A**, entonces φ(a) = f, donde $f \in$**B**. Las funciones 'φ' *no tienen por qué ser inyectivas*, ya que se puede asignar a varios puntos diferentes *a*, *b*, *c* de M de **A** un mismo elemento del conjunto N de expresiones de **B**. Es decir la fbf. $f_0 = \varphi(a_0) \in \mathbf{B}$ será la fbf. inicial de **B** y, si *a*, *b*, *c* pertenecen a M de **A** y *a*P*b* y *a*P*c*, entonces $\varphi(a) = f_i$, $\varphi(b) = f_j$ y $\varphi(c) = f_k$ y f_i es predecesor de f_j y de f_k en **B**, pero eso no implica que f_i , f_j y f_k sean diferentes fbf.s. Que un árbol lógico **B** sea una función de un árbol abstracto **A**(M) sobre un lenguaje es una precisión conceptual propuesta por lo menos desde Stegmüller y Varga von Kibéd[24], que permite apariciones múltiples de la misma fbf. en un árbol lógico **B**, lo que no sería posible en una estructura abstracta de árbol **A**, en la que todos los puntos deben ser diferentes. De todos modos la construcción efectiva de los árboles lógicos es un proceso que se realiza paso a paso, por posición sucesiva de fbf.s a partir de la raíz o a partir de los extremos, según el tipo de cálculo considerado.

1.7. El lema de König y sus variantes.

Una propiedad importante de los árboles (abstractos) finitamente ramificados es el llamado "*lema de König*", que expondremos a continuación. La forma fuerte del lema, que sólo vale clásicamente, afirma lo siguiente:

Lema de König clásico: *Sea* **A** *un árbol finitamente ramificado con infinitos puntos. Entonces existe al menos una rama R infinita.*

El esquema habitual de demostración clásica es el siguiente:

Por hipótesis **A** es un árbol infinito finitamente ramificado. Por lo tanto por hipótesis su origen a_0 domina infinitos puntos pero, por ser finitamente ramificado, tiene k sucesores $a_{1,1}$, ..., $a_{1,k}$ con $k \in \mathbb{N}$. Si todos estos sucesores dominasen finitos puntos, entonces su unión sería un conjunto finito, contra la hipótesis. Por lo tanto *existe al menos* un sucesor de a_0, que "elegimos" y denominamos $a_{1,i}$, que domina infinitos puntos. Este proceso se reitera para cada nivel: si un punto $a_{n,i}$ de nivel n domina

[24] STEGMÜLLER-VARGA VON KIBÉD 1984, 109.

infinitos puntos, entonces hay al menos un punto $a_{n+1,j}$ de nivel n+1, que "elegimos", que también domina infinitos puntos. Esto supone usar en forma consciente o inconsciente el llamado 'axioma de elección', que es el que permite afirmar la existencia no constructiva, por no "exponible", de una rama R infinita, digamos a_0, $a_{1,i}$, .., $a_{n,j}$, $a_{n+1,k}$, ... □

Una "demostración" como la mencionada sólo la podría "exponer" una inteligencia infinita (divina), porque, si hay infinitos puntos en el árbol, entonces no hay método constructivo capaz de recorrer los infinitos puntos y *elegir* a un sucesor que efectivamente domine infinitos puntos, salvo en el caso de un entendimiento que pudiese realizar en tiempo finito infinitas operaciones de control, lo que nos está vedado como entendimientos finitos. Por lo tanto la "demostración" no usa críticamente un procedimiento de elección (supone la validez del llamado axioma de elección), por lo que no hay proceso efectivo (es decir un algoritmo) para construir la rama infinita. El lema es a lo sumo un teorema de existencia matemática "débil". Por ello nos limitaremos a la siguiente versión débil del lema:

Lema de König constructivo: *Sea* A *un árbol finitamente ramificado con infinitos puntos. Entonces no todas las ramas R de* A *son finitas*.

Dem. Aquí proponemos una variante de la demostración originaria de König que utiliza Smullyan, para lo que modificamos algunos de sus recursos.[25] Este autor comienza distinguiendo hipotéticamente entre puntos "*buenos*" y "*malos*" (es decir "*no buenos*"). Un punto es *bueno* si domina infinitos puntos y *malo* en caso contrario. Si un árbol finitamente

[25] KÖNIG 1936, vi, 81-82, presenta la proposición más general 6 para una sucesión infinita enumerable de grafos finitos conectados de tal manera que cada punto de un grafo Gn+1 está conectado por un "canto" con un punto de Gn (la proposición 3 en p. 80 también es importante). Éste es también el procedimiento utilizado en SMULLYAN 1968, 32 y es netamente superior al utilizado por STEGMÜLLER-VARGA VON KIBÉD 1984, 108, por no suponer un procedimiento no constructivo como el axioma de elección.

ramificado con origen a_0 tiene infinitos puntos, entonces por hipótesis a_0 es un punto bueno (Ba_0). Si todos los finitos sucesores de a_0 fuesen malos, entonces sus conjuntos de puntos dominados serían todos finitos. Pero la cardinalidad de la unión de finitos conjuntos finitos es finita, por lo tanto a_0 sería malo (¬Ba_0), contra la hipótesis. Por lo tanto *no todos los puntos sucesores de* a_0 *pueden ser malos*. Por hipótesis llamemos a un punto tal $a_{1,i}$ (que no podemos individualizar metódicamente, pero al que hemos podido asignar *existencia débil* por reducción al absurdo: *no es el caso que no exista un punto* $a_{n,i}$ "*bueno*"). Pero para esto a su vez debe existir débilmente al menos un sucesor bueno, por otra reducción al absurdo, pues nuevamente, si todos sus sucesores fuesen malos también él lo sería, etc., *in infinitum*. Por lo tanto *no todas las ramas R del árbol son finitas*, lo que equivale a decir que existe débilmente una rama *R no construible* a_0, $a_{1,i}$, $a_{2,j}$, $a_{3,k}$, ... infinita. □

NB. Esta demostración del lema de König *no usa el axioma de elección* ni ningún procedimiento no constructivo, a diferencia de la demostración originaria de König y la que proponen Stegmüller y Varga von Kibéd. Además esta versión constructiva del lema de König es un teorema de existencia, pero sólo de existencia débil, pues sus pasos de reducción al absurdo concluyen la negación de una expresión universalmente cuantificada, que a su vez está negada, lo que implica constructivamente sólo la doble negación de una fórmula existencial:

$$\bigwedge a_{1,i}.\neg \mathrm{B}a_{1,i} \to \neg \mathrm{B}a_0,\ \mathrm{B}a_0 \vdash \neg\bigwedge a_{1,i}\neg \mathrm{B}a_{1,i} \vdash \neg\neg\bigvee a_{1,i}.\mathrm{B}a_{1,i}\ (\text{con } 1 \leq i \leq n)$$

por *mt* y deducción cuantorial constructiva. Este *modus tollens* se repite inductivamente en cada nivel del árbol,

$$\bigwedge a_{k+1,j}.\neg \mathrm{B}a_{k+1,j} \to \bigwedge a_k.\neg \mathrm{B}a_{k,\mathrm{i}},\ \neg\bigwedge a_k.\neg \mathrm{B}a_{k,\mathrm{i}} \vdash \neg\bigwedge a_{k+1,\mathrm{j}}.\neg \mathrm{B}a_{k+1,\mathrm{j}} \vdash \neg\neg\bigvee a_{k+1,j}.\mathrm{B}a_{k+1,j}\ (\text{con } 1 \leq j \leq n),$$

asegurando la *existencia recursiva débil* de al menos una rama *R* de infinitos niveles:

$\mathrm{B}a_0, \neg\bigwedge a_{k,i}.\neg\mathrm{B}a_{k,i} \rightarrow \neg\bigwedge a_{k+1,j}.\neg\mathrm{B}a_{k+1,j} \vdash \neg\bigwedge a_{n,k}.\neg\mathrm{B}a_{n,k}\ (\vdash \neg\neg\bigvee a_{n,k}.\mathrm{B}a_{n,k})$

para todo nivel *n*. Por lo tanto, lo que dice el teorema es que "*no todas las ramas son finitas*", pero no existe un algoritmo universal para construir efectivamente una rama tal en base a las hipótesis de este teorema. Esta versión constructiva del lema de König nos dice que si toda rama de un árbol finitamente ramificado es finita, entonces existe una cota superior para la longitud de sus ramas. (Compárese con las estructuras que Brouwer denomina "*abanicos*".[26])

1.8. Las reglas de "inducción".

En esta sección no expondremos ciertas generalidades de los lenguajes lógicos, sino que las daremos por conocidas, como por ejemplo el lema de unicidad de la descomposición: "toda fbf. de un lenguaje para un cálculo lógico determinado admite una y sólo una descomposición"[27], o el concepto de "grado lógico" de una fbf. A, $\mathrm{G}(A)$, es decir el número de constantes lógicas que posee. En cambio la importancia de los procedimientos de demostración por "inducción" – o mejor dicho por "recursión" –, torna aconsejable tratarlos con cierto detenimiento y discriminar sus principales formas y las condiciones bajo las cuales se justifica su utilización. En primer lugar definiremos qué entendemos por una regla de inducción en general:

D.1.8.1. Una regla de inducción es una regla de un cálculo que permite demostrar enunciados universales de la forma $\bigwedge xA(x)$, cuando:

(1) para ciertos objetos iniciales m_i de una clase o conjunto de objetos del cálculo son verificables las fbf.s elementales de la forma $A(m_i)$ con $1 \leq i \leq k$,

[26] P. ej. cf. HEYTING 1956, 42-48.
[27] Tratamientos completos se pueden encontrar, por ejemplo, en CHURCH 1956 y KLEENE 1952.

(2) existen reglas del cálculo que permiten pasar de objetos m_1, m_2, ..., m_k, para los cuales son verificables las fbf.s $A(m_1)$, $A(m_2)$, ..., $A(m_n)$, a objetos n_1, n_2, ..., n_p, para los cuales también son defendibles $A(n_1)$, $A(n_2)$, ..., $A(n_p)$, y estas reglas permiten defender $A(\ldots)$ para cualquier objeto de la clase de objetos. (Esto significa que las reglas del cálculo permiten que los objetos n_1, n_2, …, n_p *hereden* la propiedad A de las premisas.)

Un ejemplo finito típico y muy intuitivo de estos procesos inductivos son los juegos de abatimiento de una clase de fichas de dominós, que materialmente deben ser siempre finitos, pero que "idealmente", es decir, de acuerdo a las meras reglas de construcción de los mismos, pueden carecer de último elemento.

Las formas más simples de inducción se dan para conjuntos ordenados cuyo tipo de orden es el *buen orden*. Recordemos pues estos conceptos:

D.1.8.2. Un conjunto M es *ordenado* respecto de una relación binaria ρ(x,y), si para todo par de elementos de M se satisface que
(1) $\rho(x, x)$,
(2) $\rho(x, y)$ y $\rho(y, x)$, entonces $x = y$, y
(3) $\rho(x, y)$ y $\rho(y, z)$, entonces $\rho(x, z)$
(es decir, una relación ρ es de orden, si es reflexiva, antisimétrica y transitiva en M).

D.1.8.3. Un conjunto es *bien ordenado* cuando es ordenado y todo subconjunto del mismo tiene primer elemento.

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, n, \ldots ..\}$ está bien ordenado respecto de la magnitud, en cambio el de los enteros $\mathbb{Z} = \{.. \ldots, -m, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots ..\}$ no lo está respecto de la magnitud, porque no todos sus subconjuntos tienen primer elemento, como por ejemplo el subconjunto $\{.. \ldots, -m, \ldots, -1, 0, 1\}$. Un buen orden puede ser *finito*, como son los tipos de orden de los números naturales (llamados también ordinales finitos), o *transfinito*, como son los tipos de orden de los ordinales transfinitos a partir del primer ordinal transfinito ω_0.

En primer lugar consideraremos la

1.8.1. Regla de inducción finita.

D.1.8.4. El *buen orden* y la *enumerabilidad* son las propiedades que necesariamente deben poseer los conjuntos sobre los que se puede aplicar nuestra regla más simple de inducción finita. El conjunto característico para la forma más simple de inducción finita es el de los números naturales $\mathbb{N}$. Si se quiere probar una propiedad A para todos los números naturales, se procede del modo siguiente:

1. Se parte de un *caso base*, que dice que la propiedad A vale para el primer elemento de la secuencia, enumerado con la cifra 0, o 1, o i, si se parte del i-ésimo elemento de la sucesión natural.

2. Luego en el *paso inductivo* se supone la hipótesis inductiva A para un k-ésimo elemento cualquiera de la sucesión y se deduce que, si la propiedad A vale para ese elemento k-ésimo elemento, entonces vale para el elemento k+1-ésimo.

Con ello se arriba a la *conclusión* de que para todo elemento n-ésimo de la sucesión vale $A(n)$. Esto se expresa simbólicamente del modo siguiente:

$$\mathrm{A}(0), \qquad A(k) \rightarrow A(k+1) \quad \vdash \bigwedge n A(n),$$
(para un k cualquiera)

En esta regla las premisas son el caso base $A(0)$ (o bien $A(i)$) y el paso general inductivo $A(k) \rightarrow A(k+1)$. Se deben demostrar ambas hipótesis. La conclusión es el enunciado universal sobre todos los elementos del conjunto $\mathbb{N}$ que se sigue de ellas. La inducción matemática está íntimamente relacionada con la primera forma de inducción apodíctica aristotélica, cuando se agrega la buena ordenación al conjunto (o al menos un esquema de recursión sobre un conjunto ordenado) y se demuestra el (o los) caso(s) base. La inducción apodíctica aristotélica se funda en el esquematismo de la hipótesis inductiva.

Desde la obra de Giuseppe Peano es habitual presentar la inducción finita como un *axioma de inducción* que se suele expresar de la siguiente forma:

$\vdash A(0) \wedge \bigwedge k(A(k) \rightarrow A(k+1)) \rightarrow \bigwedge n A(n).$

Así lo hizo Peano en su presentación de la aritmética elemental. Por su parte Henri Poincaré, a finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX, fue uno de los primeros en insistir en su carácter de regla constructiva y en que estos procesos inductivos eran los que diferenciaban a la matemática de la lógica y hacían de la matemática una ciencia fructífera, frente a la hasta entonces aparente esterilidad de la lógica. Hoy esa opinión ya no es defendible, porque los procesos de inducción son imprescindibles en la lógica y se han borrado los límites arbitrarios entre lógica y matemática, como también son borrosos los límites entre lógica y filosofía y entre ésta y las restantes ciencias. Por su parte Lorenzen es uno de los que enseñó cómo dicho axioma de inducción finita se podía fundamentar constructivamente. A partir del caso base y del paso inductivo Lorenzen defendió la conclusión de la siguiente manera:

Tomamos los "*números fundamentales*" (en alemán *Grundzahlen*): $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \ldots, n, \ldots ..\}$ y los representamos con palotes, como hace David Hilbert. Comenzamos la "sucesión fundamental" escribiendo '|', luego agregamos otro '|' a su derecha, y así siguiendo.

Si decimos que para un número fundamental n cualquiera vale $A(n)$, entonces debemos comenzar construyendo hasta n la sucesión fundamental en finitos pasos:

(1) $|, \quad ||, \quad \ldots, \quad k, \quad k|, \quad \ldots, \quad n,$

donde k y n son sucesiones finitas de palotes (éstas son las únicas "fabricables"). Ahora escribamos en correspondencia uno a uno con esa sucesión fundamental la siguiente sucesión:

(2) $A(|), A(||), \quad ..., \quad A(k), \quad A(k|), \quad ..., \quad A(n).$

De este modo se verifica paso a paso la verdad de un enunciado cualquiera $A(n)$ para un número cualquiera finito n de la sucesión (es decir para *todos* los números naturales), por cierto, sólo una vez que se han verificado el caso base $A(|)$ y el paso inductivo $A(k) \rightarrow A(k|)$ para un k finito cualquiera.[28]

Como bien sabemos las demostraciones por inducción finita se realizan no sólo sobre la sucesión fundamental $\mathbb{Z}^+$, sino también sobre el conjunto $\mathbb{N}$, y sobre todo conjunto de objetos que se puedan bien ordenar finitamente (como ocurre con inducciones sobre fbf.s con índices naturales, o inducciones sobre el grado lógico de las fbf.s, etc.), por lo que estas demostraciones aparecen en numerosos campos de la matemática y de la lógica. Cada vez que tenemos un conjunto de índices bien ordenados y sin límite infinito que pertenezca al conjunto podemos intentar la prueba por inducción finita. De ella haremos un empleo asiduo.

1.8.2. Regla de descenso (probablemente infinito).

Una variante aparentemente inocente de la regla de inducción completa y aparentemente equivalente a la regla de inducción finita de 1.8.1. es la denominada *regla de descenso*,[29] que caracterizamos así:

D.1.8.5. Sea Γ un conjunto finito o infinito de fbf.s. y sea A una propiedad que deseamos probar que vale para todas las fbf.s de Γ. Para demostrarlo basta con mostrar que se satisfacen las dos condiciones siguientes:

---

[28] Véase para ello por ejemplo LORENZEN 1965, 7-8.
[29] V. MITTELSTRAß 1995, t. I, 639 y II., 235-6.

(1) Todo elemento de grado 0 de Γ tiene la propiedad *A*.

(2) Si algún elemento de grado β mayor que 0 de Γ no tiene la propiedad *A*, entonces algún elemento de grado α *menor que* β tampoco tiene la propiedad *A*.

No sabemos quién fue el primero en usar esta regla de descenso – que no tiene por qué ser solamente finita o infinita potencial, sino que bien puede ser infinita actual – pero es muy antigua. Algunos de los ejemplos más antiguos conocidos de descenso finito aparecen en los *Elementos* de Euclides. Por ejemplo en el libro VI, proposición 31, donde se lee: “Cada número compuesto es medido por algún número primo”. Euclides supone que un número entero positivo *a* es “compuesto”, es decir producto de dos o más números enteros tales. Por lo tanto debe “ser medido” por al menos un número entero positivo *b*. Si éste es primo, se ha encontrado la solución, si no lo es, entonces es compuesto, y por lo tanto será medido por otro número *c*, que por carácter transitivo también medirá a *a*. *c* será primo o no lo será. Si lo es se habrá encontrado la solución, si no, se continúa el descenso. Si no hubiera un primo que mide *a*, entonces el descenso sería infinito, lo que es imposible para números enteros positivos. Por lo tanto debe existir al menos un número primo que mida *a*. Adviértase que este teorema es constructivo de existencia fuerte, pues la factorización de estos números es siempre un proceso efectivo y el descenso es finito, por lo que el factor primo es efectivamente calculable. □

Una forma moderna de la regla de descenso inductivo es la que Pierre de Fermat (*1601-†1665) denomina la “*méthode de la descente infinie*”, que aplica a los números naturales y que afirma lo siguiente:

$$\neg A(1), \bigwedge_n \bigvee_m (1 < n \rightarrow (A(n) \rightarrow (m<n \wedge A(m)) \vdash \bigwedge_n \neg A(n).$$

Es decir, si para 1 no vale *A* y en el supuesto inductivo descendente de que sí valiese *A*(*n*) para 1<*n*, entonces se dedujese que existe en sentido débil al menos un $m<n$ tal que vale $A(m)$, entonces A no valdría para ningún n (Fermat no necesitaría distinguir entre las dos formas de existencia, porque el proceso de descenso es siempre finito).

Sin embargo la regla que enunciamos más arriba es esencialmente más fuerte que cualquier regla de inducción finita, pues no se limita a conjuntos bien ordenados del tipo de orden del conjunto $\mathbb{N}$, sino que se extiende a tipos de orden transfinitos: se trata en verdad de una variante de las *reglas de inducción transfinita* que trataremos a continuación.

1.8.3. Las reglas de inducción transfinita.

1.8.3.1. Una regla ascendente de inducción (posiblemente) transfinita.

D.1.8.6. Sea un dominio de números ordinales M: si $A(0)$ y si para un $k\in$M cualquiera vale $\bigwedge_{j<k}(A(j)) \rightarrow A(k)$, entonces también vale $\bigwedge_{n\in \mathrm{M}}.A(n)$.[30]

Es claro que el dominio M puede contener "ordinales límites"[31] y que si vale el caso base $A(0)$ y la condición hipotética, entonces los saltos descendentes $j<k$ pueden no ser finitos y también vale $A(n)$ incluso para ordinales transfinitos.

En este libro no usaremos en general versiones transfinitas de la regla, sino sólo formas finitas, pero el uso de la inducción

---

[30] $\bigwedge_{j<k}(A(j)) \rightarrow A(k)$ es una abreviatura para $\bigwedge_j(j<k\rightarrow A(j))\rightarrow A(k)$ y $\bigwedge_{n\in \mathrm{M}}.A(n)$ una para $\bigwedge n(n\in \mathrm{M}\rightarrow A(n))$. Cf. p. ej. SUPPES 1960, cap. 7, p. 195.

[31] Ordinales límites son aquellos ordinales diferentes de '0' que no tienen predecesor inmediato. El primero de los ordinales límites es 'ω_0', que es por definición el *límite* al que "tiende" la sucesión de los números naturales y por lo tanto el primero de los ordinales transfinitos: si ω_0 tuviera predecesor inmediato, éste debería ser (1) o bien un número natural (ordinal finito), (2) o bien un ordinal transfinito. (1) Si es un número natural, su sucesor será también un número natural y por lo tanto ω_0 no sería transfinito, contra la hipótesis. (2) Y si su predecesor inmediato fuese transfinito, entonces ω_0 no sería el primero de los transfinitos, contra la hipótesis. En consecuencia ω_0 no tiene predecesor inmediato. En general α es un ordinal límite si y sólo si $0 \neq \alpha$ y $\neg\bigvee\beta(\beta' = \alpha)$, donde β' es el sucesor inmediato de β.

transfinita será necesario en la deducción del *teorema fundamental* (o *Hauptsatz*) de los cálculos secuenciales de Gentzen.

Para ver claramente la diferencia entre los tipos de inducción finita e infinita consideremos un ejemplo simple de propiedad que se hereda finitamente, pero que no vale para el límite y que por lo tanto no vale en la "segunda clase ordinal", es decir en el campo de los ordinales transfinitos. Sea la siguiente sucesión $\{a_n\}$, con $0 \leq n$:

$$\begin{aligned} a_0 &= F(0) &&= 0, \\ a_1 &= F(1) &&= 1, \\ a_{n+2} &= F(n+2) &&= F(n)+F(n+1) \quad (\text{con } 0 \leq n). \end{aligned}$$

Ésta función define la sucesión de Fibonacci (1170-1250)[32] o "sucesión armónica": 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Esta sucesión tiene la propiedad hereditaria finita de que a_0 es finito y que si a_k es finito, entonces a_{k+1} también lo es. Entonces a_n es finito para cualquier n natural. Sin embargo el límite a_{ω_0} de la sucesión, con índice ordinal límite ω_0, no tiene la propiedad de la finitud, porque la sucesión no tiene crecimiento acotado, de modo que aquí nos encontramos con un caso en el que una inducción transfinita no vale. Éstos abundan.

1.8.3.2. Otras formas de inducción transfinita.

Consideremos ahora los tres casos siguientes:
Primer caso: el de una sucesión para la que efectivamente se pueda demostrar:(1) que vale la inducción finita para los ordinales que tienen predecesor inmediato ($A(\alpha)$, $A(\alpha+k) \rightarrow A(\alpha+k+1) \vdash \wedge_n A(\alpha+n)$, donde k y n son números naturales y α es 0 o un ordinal límite) y

[32] El italiano Leonardo da Pisa, llamado "Fibonacci" por "figlio di Bonaccio" (hijo de Bonaccio) fue un mercader que estudió matemática en sus viajes a oriente. A su regreso escribió sus obras *Liber abaci* (1202) y *Practica geometriae* (1220). Fue el primer matemático importante de la llamada edad media europea.

(2) es posible deducir que $\bigwedge_n A(\alpha+n) \vdash A(\alpha+\omega_0)$,
Segundo caso: el de una sucesión para la que se demuestre efectivamente

(1') $\neg A(\alpha), \neg A(\alpha+k) \rightarrow \neg A(\alpha+k+1) \vdash \bigwedge_n \neg A(\alpha+n)$ y

(2') $A(\alpha+\omega_0) \vdash \bigvee_n . A(\alpha+n) \vdash \neg\bigwedge_n \neg A(\alpha+n)$,
entonces deducimos por contraposición constructiva

$\bigwedge_n \neg A(\alpha+n) \vdash \neg\bigvee_n . A(\alpha+n) \vdash \neg A(\alpha+\omega_0)$,
Tercer caso: el de una sucesión para la que se demuestre:

(1") $A(\alpha), A(\alpha+k) \rightarrow A(\alpha+k+1) \vdash \bigwedge_n A(\alpha+n)$ y

(2") $\neg A(\alpha+\omega_0) \vdash \bigvee_n . \neg A(\alpha+n) \vdash \neg\bigwedge_n A(\alpha+n)$,
de donde por contraposición constructiva se sigue

$\bigwedge_n A(\alpha+n) \vdash \neg\bigvee_n . \neg A(\alpha+n) \vdash \neg\neg A(\alpha+\omega_0)$.

Estas son formas constructivamente aceptables de inducción transfinita. Una versión *clásica* de esta última sería la que dedujese de (1") y (2") de la deducción anterior por doble negación *clásica*:

$\bigwedge_n A(\alpha+n) \vdash \neg\bigvee_n . \neg A(\alpha+n) \vdash A(\alpha+\omega_0)$.

Para una ampliación de este tema, especialmente en sus variantes clásicas, que son las más usadas, véase dentro de la numerosa bibliografía disponible, el libro de Suppes, que es especialmente didáctico y que se menciona en la nota 10 de esta introducción y en la bibliografía al final de este libro.

PRIMERA PARTE.
LÓGICA DE REGLAS: CUADROS.

CAPÍTULO 2.
TEORÍA DE LOS CUADROS ANALÍTICOS.

2.1. Cuadros analíticos en la lógica clásica de primer orden.

En esta primera parte trataremos brevemente la teoría y la metateoría del método de "*cuadros analíticos*" ("*tableaux analytiques*" en francés y "*analytical tableaux*" en inglés) para la exposición y fundamentación de los cálculos lógicos básicos. El capítulo presente expone principalmente esa teoría en sus versiones semántica (o "signada") y sintáctica (o "no-signada"). La primera versión fue creada por el lógico y filósofo holandés Evert Willem BETH (*1908-†1964) con el nombre de "*tableaux logiques*" o "*sémantiques*" y la segunda fue desarrollada por el estadounidense Raymond Merrill SMULLYAN[33] (*1919-…) a partir de la de Beth. Nuestro tratamiento seguirá en lo esencial la versión de SMULLYAN ^{1}1968, ^{2}1971, que se ha tornado una exposición clásica, especialmente de la metateoría. Nos apartaremos empero en el orden de algunos desarrollos, adoptaremos variantes de las demostraciones, agregaremos explicaciones adicionales sugeridas fundamentalmente por motivos didácticos e intentaremos separar más netamente la teoría de la metateoría, aunque esta tarea sea muchas veces difícil de realizar. Por ello dedicaremos otro capítulo especialmente a la metateoría.

El método de cuadros analíticos es un interesante ejemplo de desarrollo en árbol para fundamentaciones lógicas semánticas y sintácticas. La idea de estos cuadros parte de la concepción de que la no contradicción es una ley lógica válida sin restricciones, por lo que la aplicabilidad de este método, al menos en la forma en que lo ofrecemos, sólo se extiende a los

---

[33] Smullyan fue matemático, lógico, filósofo taoísta, mago y humorista.

cálculos absolutamente no contradictorios o, como suele decirse, *plenamente consistentes respecto de la negación*, que ciertamente son los más usados y cuyos ejemplos más conspicuos son los cálculos clásicos y los intuicionistas o constructivistas. Al reposar sobre el principio de no contradicción (que abreviamos '**pnc**') esta versión del método de cuadros analíticos no ofrece demostraciones directas, sino que las reduce todas al método de la prueba indirecta por reducción al absurdo (que abreviamos '*raa*'). Otros métodos, como el de cálculos secuenciales y el de juegos de diálogos, reposan en cambio sobre la ley de identidad, que sí es una ley verdaderamente irrestricta y tiene por lo tanto un ámbito de aplicabilidad absolutamente universal.

En la versión inicial de los "*tableaux sémantiques*" de Beth se trabajaba con "*fórmulas signadas*", es decir fórmulas precedidas por alguno de los dos únicos predicados semánticos admitidos 'v...' (...es verdadero) o 'f...' (...es falso). Nosotros expondremos muchos cuadros con fórmulas signadas, por la facilidad de demostración que frecuentemente proporcionan, pero en ciertos temas usaremos los cuadros con fórmulas *no signadas*, por su mejor adecuación a la solución de importantes problemas. De todos modos debemos recordar que en la lógica clásica de enunciados son métodos equivalentes. Debemos remarcar aquí que las reglas de desarrollo para los cuadros analíticos son traducciones semánticas (en el caso de las fbf.s signadas) y sintácticas (en el de las no signadas) de las reglas semánticas de la lógica clásica bivalente, es decir:

Si A es una fbf., entonces vA y fA serán las únicas dos fbf.s signadas que admitiremos. Esto es una abreviatura del método de modelos de Tarski con su procedimiento de construcción de evaluaciones mediante funciones de interpretación o evaluación binaria clásica para todas las fbf.s elementales del lenguaje, e.d.

$\mathrm{v}A \leftrightharpoons i(A) = 1$ y

$\mathrm{f}A \leftrightharpoons i(A) = 0.$

El doble acceso, semántico o signado y sintáctico o no-signado, es importante para el establecimiento de la metateoría de los cálculos, como veremos.

Si queremos poner a prueba si una fbf. A es una "fórmula válida", una "tesis", "ley" o "teorema" de un cálculo, escribimos, para un cuadro semántico, la fbf signada fA, y para un cuadro sintáctico su negación $\neg A$. En cada caso desplegamos el cálculo conforme a las reglas de desarrollo que daremos en la sección siguiente. También pondremos a prueba las "consecuencias semánticas" o las "deducciones", suponiendo su incorrección y escribiendo en consecuencia,

– *en un cuadro semántico*: para las premisas, las fbf.s signadas vA_1, ..., vA_n y para la conclusión, la fbf. signada fC,

– *en un cuadro sintáctico*: para las premisas, las fbf.s no-signadas A_1, ..., A_n y para la conclusión, su negación $\neg C$.

De este modo una fbf. A será una tesis de la lógica clásica de primer orden cuando, o bien todas las ramas del árbol de su cuadro semántico sean "*clausuradas*" – es decir cuando cada rama contenga al menos un par de fbf.s elementales signadas de la forma va y fa –, o bien cada rama de su cuadro sintáctico contenga al menos una fbf. elemental y su negación. Eso significa semánticamente que fA no es satisfacible y por lo tanto $\vDash A$ y sintácticamente que $\neg A$ implica necesariamente contradicción y por lo tanto $\vdash A$.

En cambio, cuando al menos una rama del árbol del cuadro semántico o sintáctico de $\neg A$ no clausure, es decir no contenga fbf.s signadas elementales va y fa, o no contenga fbf.s elementales a y $\neg a$, entonces $\neg A$ será satisfacible y A no será una tesis.

De modo semejante para las deducciones: cuando el desarrollo para el conjunto de sus premisas y su conclusión (vA_1, ..., vA_n, fC para el cuadro semántico y A_1, ..., A_n, $\neg C$ para el sintáctico) dé lugar a un árbol con todas sus ramas clausuradas, la deducción originaria se considerará semánticamente válida A_1, ..., $A_n \vDash C$ y sintácticamente correcta A_1, ..., $A_n \vdash C$.

Hasta aquí sólo hemos mencionado cuadros analíticos para conjuntos finitos de fbf.s. Sin embargo será importante más adelante – cuando tratemos problemas de compacidad, entre otros de la extensión de primer orden –, considerar cuadros analíticos para conjuntos infinitos enumerables de fbf.s. Como el desarrollo de una fbf. cualquiera del conjunto puede en principio realizarse en cualquier momento del desarrollo del árbol completo, podemos definir un cuadro completo para un conjunto infinito enumerable de fbf.s de la siguiente manera:

D.2.1. Sea $\Gamma = \{A_1, A_2, ..., A_n , ...\}$ un conjunto finito o infinito enumerable de fbf.s. Un cuadro analítico para Γ es un árbol construido como sigue:
Colocamos al comienzo cualquier $A_i \in \Gamma$, que desarrollamos de acuerdo a las reglas (de los tipos A, B, C o D) que se exponen abajo. Si alguna rama quedara abierta, la extenderemos con otra fbf. $A_j \in \Gamma$ y la desarrollaremos, continuando con otra fbf. $A_k \in \Gamma$ si resta alguna rama abierta, y así sucesivamente hasta agotar las ramas abiertas, si esto fuera posible.

El procedimiento dado en la definición anterior es equivalente al de colocar todas las fbf.s que pertenecen a Γ al comienzo y hacer el desarrollo de cada fbf. una vez que se haya completado el desarrollo para las fórmulas anteriores. Como estamos eligiendo el orden del desarrollo, si generamos las fbf.s del conjunto, nos podremos adecuar al orden de desarrollo de reglas que daremos más abajo.

Un punto de un árbol está desarrollado, si consta de una fbf. de grado lógico 0 o, si es de grado mayor que 0, le sigue su desarrollo según las reglas (A, B, C o D) expuestas más abajo. Y un cuadro es completo cuanto todos los puntos de su árbol de desarrollo están desarrollados.[34]

Naturalmente no habrá reglas de desarrollo para las fbf.s elementales (variables proposicionales *a*, *b*, *c*, ... y predicadores seguidos de *n* términos de individuos $A^n t_1 \ldots t_n$). Indicaremos la "clausura" de una rama del árbol mediante una doble barra '='. Para facilitar la lectura, a la izquierda de cada fbf. escribiremos en negrita el número de aparición de la fórmula, seguido entre paréntesis del número de fbf. de la que es un desarrollo: ***n***(*m*).

2.2. Desarrollos en árbol.

Los desarrollos del árbol de una fbf. de la lógica clásica de primer orden que se quiere poner a prueba podrán ser de cuatro tipos diferentes[35]:

A: $\dfrac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$, B: $\dfrac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$, C: $\dfrac{\gamma}{\gamma(a)}$, D: $\dfrac{\delta}{\delta(a)}$.

Las reglas de tipo A y B son propias de la lógica de enunciados, y las C y D propias de la de predicados de primer orden. En las reglas de tipo C '*a*' es un parámetro o variable libre cualquiera y en las reglas de tipo D *a* es un nuevo parámetro o nueva variable libre. Las reglas A y D se llaman "conjuntivas" y no ramifican. Las reglas de tipo B y C se llaman "disyuntivas" y necesariamente ramifican (las de tipo B, de la lógica de enunciados, ramifican finitamente y las C, de la lógica de predicados, pueden ramificar finita o infinitamente, lo que depende de la cardinalidad del dominio de objetos: por generalidad se presume su infinitud en las eliminaciones de cuantores en lógica elemental). Las reglas de tipo C y D corresponden a las eliminaciones de cuantores. Las de tipo C serán incondicionadas y las de tipo D condicionadas, es decir,

---

[34] Ver más abajo en el tratamiento de las propiedades de compacidad.
[35] V. SMULLYAN 1968, 53.

que deben introducir una variable libre o parámetro nuevo (en la versión estricta de esas reglas). Las reglas que utilizaremos son las siguientes[36]:

Para *cuadros semánticos* (o sea con fbf.s signadas) de la lógica clásica de enunciados tenemos:

$$\text{A: }\quad \begin{array}{lllll} \underline{\mathrm{v}\neg A} & \underline{\mathrm{f}\neg A} & \underline{\mathrm{v}(A\wedge B)} & \underline{\mathrm{f}(A\vee B)} & \underline{\mathrm{f}(A\rightarrow B)} \\ \mathrm{f}A & \mathrm{v}A & \mathrm{v}A & \mathrm{f}A & \mathrm{v}A \\ (\mathrm{f}A) & (\mathrm{v}A) & \mathrm{v}B & \mathrm{f}B & \mathrm{f}B \end{array}$$

NB. Para conservar la simetría con las restantes reglas “conjuntivas” hemos escrito entre paréntesis una segunda línea de desarrollo en las reglas A para la negación: éstas son superfluas, por lo que habitualmente sólo desarrollaremos la primera línea.

$$\text{B: }\quad \frac{\mathrm{v}\neg A}{\mathrm{f}A \mid (\mathrm{f}A)} \qquad \frac{\mathrm{f}\neg A}{\mathrm{v}A \mid (\mathrm{v}A)} \qquad \frac{\mathrm{f}(A\wedge B)}{\mathrm{f}A \mid \mathrm{f}B} \qquad \frac{\mathrm{v}(A\vee B)}{\mathrm{v}A \mid \mathrm{v}B} \qquad \frac{\mathrm{v}(A\rightarrow B)}{\mathrm{f}A \mid \mathrm{v}B}$$

También por simetría hemos agregado a las reglas de tipo B dos reglas de desarrollo para la negación, que tampoco son necesarias, porque estrictamente podemos considerar que no bifurcan. Sin embargo estos agregados son importantes, porque nos permitirán definir oportunamente la operación de “conjugación”, como veremos enseguida. Adviértase que las reglas de tipo A y B para la falsedad de la negación

$$\begin{array}{l} \underline{\mathrm{f}\neg A} \\ \mathrm{v}A \\ (\mathrm{v}A) \end{array} \qquad \text{y} \qquad \frac{\mathrm{f}\neg A}{\mathrm{v}A \mid (\mathrm{v}A)}$$

corresponden a la eliminación clásica de la doble negación, por lo que el sistema presentado aquí es de lógica clásica.

Para los desarrollos de las fbf.s de la lógica clásica de primer orden agregamos:

[36] V. SMULLYAN 1968, 20 y 54.

C: $\dfrac{\text{v}\bigwedge x.Ax}{\text{v}Aa}$ $\dfrac{\text{f}\bigvee x.Ax}{\text{f}Aa}$, en las que *a* es un parámetro cualquiera,

D: $\dfrac{\text{v}\bigvee xAx}{\text{v}Aa}$ $\dfrac{\text{f}\bigwedge xAx}{\text{f}Aa}$, en las que *a* es un parámetro nuevo (en la versión estricta).

Ahora presentaremos las reglas para cuadros sintácticos (o con fbf.s no signadas) de la lógica clásica de enunciados:

A: $\dfrac{\neg\neg A}{\begin{matrix}A\\(A)\end{matrix}}$ $\dfrac{A\wedge B}{\begin{matrix}A\\B\end{matrix}}$ $\dfrac{\neg(A\vee B)}{\begin{matrix}\neg A\\\neg B\end{matrix}}$ $\dfrac{\neg(A\rightarrow B)}{\begin{matrix}A\\\neg B\end{matrix}}$

B: $\dfrac{\neg\neg A}{A\,|\,(A)}$ $\dfrac{\neg(A\wedge B)}{\neg A\,|\,\neg B}$ $\dfrac{A\vee B}{A\,|\,B}$ $\dfrac{A\rightarrow B}{\neg A\,|\,B}$

Y para la lógica clásica de primer orden agregamos:

C: $\dfrac{\bigwedge x.Ax}{Aa}$ $\dfrac{\neg\bigvee x.Ax,}{\neg Aa}$ en las que *a* es un parámetro cualquiera,

D: $\dfrac{\bigvee x.Ax}{Aa}$ $\dfrac{\neg\bigwedge x.Ax,}{\neg Aa}$ en las que *a* es un parámetro nuevo (en la versión estricta).

Por otra parte una regla de tipo B que ramifica se puede transformar en una de tipo A cuando ambas ramas son idénticas, como ocurre en los casos:

$\dfrac{\text{v}(A\vee A)}{\text{v}A\,|\,\text{v}A}$ y $\dfrac{A\vee A,}{A\,|\,A}$ que se reducen a $\dfrac{\text{v}(A\vee A)}{\text{v}A}$ y $\dfrac{A\vee A}{A}$ y

$\dfrac{\text{f}(A\wedge A)}{\text{f}A\,|\,\text{f}A}$ y $\dfrac{\neg(A\wedge A)}{\neg A\,|\,\neg A}$, que se reducen a $\dfrac{\text{f}(A\wedge A)}{\text{f}A}$ y $\dfrac{\neg(A\wedge A)}{\neg A}$.

Hasta aquí hemos considerado sólo las constantes lógicas '¬' '∧' '∨' '→' '⋀' y '⋁', que son todas las mutuamente irreducibles de la lógica intuicionista o constructiva. Como sabemos en la lógica clásica las posibilidades de reducción son mayores y podemos dar cuenta de todas las constantes lógicas con alguna de las ternas siguientes:

$\langle\neg, \wedge, \bigwedge\rangle$, $\langle\neg, \wedge, \bigvee\rangle$, $\langle\neg, \vee, \bigwedge\rangle$, $\langle\neg, \vee, \bigvee\rangle$, $\langle\neg, \rightarrow, \bigwedge\rangle$, o $\langle\neg, \rightarrow, \bigvee\rangle$.

Como a su vez cualquiera de los tres pares de constantes del fragmento de lógica de enunciados es reducible a las constantes de Sheffer y de Peirce, podríamos contentarnos con algunas de las cuatro duplas siguientes:

$\langle|, \bigwedge\rangle$, o $\langle|, \bigvee\rangle$, o $\langle\downarrow, \bigwedge\rangle$, o $\langle\downarrow, \bigvee\rangle$.

No obstante podríamos completar los sistemas de reglas anteriores con las reglas correspondientes a los operadores mencionados, y también con los que no hemos considerado explícitamente hasta ahora, como son el biimplicador '↔' y la disyunción exclusiva 'w', que es lo que discutimos a continuación.

Puesto que la biimplicación o equivalencia se define como una conjunción de dos implicaciones, $A \leftrightarrow B \rightleftharpoons (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$, su desarrollo con las reglas ya conocidas se realiza de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l}
\mathrm{v}(A \leftrightarrow B)\\
\mathrm{v}(A \rightarrow B)\\
\mathrm{v}(B \rightarrow A)\\
\begin{array}{l|l}
\mathrm{f}A & \mathrm{v}B\\
\begin{array}{l|l} \mathrm{f}B & \mathrm{v}A\\ & = \end{array} & \begin{array}{l|l} \mathrm{f}B & \mathrm{v}A\\ = & \end{array}
\end{array}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
\mathrm{f}(A \leftrightarrow B)\\
\begin{array}{l|l}
\mathrm{f}(A \rightarrow B) & \mathrm{f}(B \rightarrow A)\\
\mathrm{v}A & \mathrm{v}B\\
\mathrm{f}B & \mathrm{f}A
\end{array}
\end{array}$$

Cada uno de los desarrollos no clausura en dos ramas, por lo que podemos abreviarlos en la forma de las siguientes reglas semánticas y sintácticas:

$$\frac{\mathrm{v}(A \leftrightarrow B)}{\begin{array}{l|l} \mathrm{v}A & \mathrm{f}A\\ \mathrm{v}B & \mathrm{f}B \end{array}}
\qquad
\frac{\mathrm{f}(A \leftrightarrow B)}{\begin{array}{l|l} \mathrm{v}A & \mathrm{f}A\\ \mathrm{f}B & \mathrm{v}B \end{array}}
\qquad
\frac{A \leftrightarrow B}{\begin{array}{l|l} A & \neg A\\ B & \neg B \end{array}}
\qquad
\frac{\neg(A \leftrightarrow B)}{\begin{array}{l|l} A & \neg A\\ \neg B & B \end{array}}$$

La disyunción exclusiva se define como la negación de una biimplicación, es decir $A\text{w}B \leftrightharpoons \neg(A \leftrightarrow B)$, por lo que las correspondientes reglas de desarrollo serán:

$$\dfrac{\text{v}(A\text{w}B)}{\begin{array}{c|c} \text{v}A & \text{f}A \\ \text{f}B & \text{v}B \end{array}} \qquad \dfrac{\text{f}(A\text{w}B)}{\begin{array}{c|c} \text{v}A & \text{f}A \\ \text{v}B & \text{f}B \end{array}} \qquad \dfrac{A\text{w}B}{\begin{array}{c|c} A & \neg A \\ \neg B & B \end{array}} \qquad \dfrac{\neg(A\text{w}B)}{\begin{array}{c|c} A & \neg A \\ B & \neg B \end{array}}$$

Puesto que las constantes de Sheffer y Peirce se pueden definir de la siguiente manera: $A|B \leftrightharpoons \neg(A\wedge B)$ y $A\downarrow B \leftrightharpoons (\neg(A\vee B))$, reemplazando los *definienda* por sus *definientes* y aplicando las reglas correspondientes obtenemos los siguientes desarrollos:

$$\dfrac{\text{v}(A|B)}{\begin{array}{c|c} \text{f}A & \text{f}B \end{array}} \qquad \dfrac{\text{f}(A|B)}{\begin{array}{c} \text{v}A \\ \text{v}B \end{array}} \qquad \dfrac{A|B}{\begin{array}{c|c} \neg A & \neg B \end{array}} \qquad \dfrac{\neg(A|B)}{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}$$

$$\dfrac{\text{v}(A\downarrow B)}{\begin{array}{c} \text{f}A \\ \text{f}B \end{array}} \qquad \dfrac{\text{f}(A\downarrow B)}{\begin{array}{c|c} \text{v}A & \text{v}B \end{array}} \qquad \dfrac{A\downarrow B}{\begin{array}{c} \neg A \\ \neg B \end{array}} \qquad \dfrac{\neg(A\downarrow B)}{\begin{array}{c|c} A & B \end{array}}$$

Así completamos las reglas de desarrollo de tipo A y B para todas las constantes lógicas que podemos llegar a usar, aunque usualmente nos limitaremos a las seis que hemos considerado inicialmente.

2.3. Fórmulas conjugadas.

D.2.2. La operación de conjugación entre fbf.s signadas consiste en intercambiar v por f y f por v, de modo que la fbf. conjugada de vA es fA y la conjugada de fA es vA. Simbolizaremos la conjugada de una fbf. signada A con A'. Las propiedades 'p' de la operación de conjugación son las siguientes (ver comienzo de la sección 2.2):

p_1 (1) $A' \neq A$ (la conjugada es diferente de la fórmula original),

(2) $A'' = A$ (la conjugada de la conjugada es idéntica a la fórmula original),

p_2 (1) La conjugada de una fbf. de tipo α es una fbf. de tipo β,

(2) La conjugada de una fbf. de tipo β es una fbf. de tipo α,

(3) La conjugada de una fbf. de tipo γ es una fbf. de tipo δ,

(4) La conjugada de una fbf. de tipo δ es una fbf. de tipo γ.

p_3 (1) $(\alpha')_1 = (\alpha_1)'$, $(\alpha')_2 = (\alpha_2)'$,

(2) $(\beta')_1 = (\beta_1)'$, $(\beta')_2 = (\beta_2)'$.

Las propiedades p_1 resultan inmediatamente de la definición de fórmula conjugada de una fórmula signada. Las p_2 (1), (2), (3) y (4) me dicen que una fórmula α de una regla de tipo A tiene por conjugada una fbf. β de una regla de tipo B, y viceversa, una fbf. γ de una regla de tipo C tiene por conjugada una fbf. δ de una regla de tipo D y viceversa: es decir, v$\neg A$, f$\neg A$, v$(A \wedge B)$, f$(A \vee B)$, f$(A \rightarrow B)$, v$\bigwedge x.Ax$ y f$\bigvee x.Ax$ tienen por conjugadas a f$\neg A$, v$\neg A$, f$(A \wedge B)$, v$A \vee B$, v$(A \rightarrow B)$, f$\bigwedge xAx$ v$\bigvee xAx$ respectivamente, y viceversa. La p_3 (1) dice que el resultado de formar la conjugada de una fbf. α de una regla de tipo A y luego elegir la primera componente de su desarrollo es igual a tomar la primera componente del desarrollo de α y luego formar su conjugada, y lo correspondiente en p_3 (2) para las fbf.s β de tipo B. Si α = f$(A \rightarrow B)$, entonces α' = v$(A \rightarrow B)$, luego $(\alpha')_1$ = fA, y además α_1 = vA, y $(\alpha_1)'$ = fA, con lo que verificamos que $(\alpha')_1 = (\alpha_1)'$. Del mismo modo se procede con los demás casos de fbf.s α para reglas de tipo A y con los correspondientes para las fbf.s β para reglas de tipo B, lo que dejamos como ejercicio. Estas nociones fueron utilizadas por Smullyan por primera vez en su tratamiento de los conjuntos de fbf.s consistentes y saturados.

2.4. Algunas características de las reglas de desarrollo.

Las reglas de tipo A (con fbf.s signadas f$\neg A \Rightarrow$ vA y no signadas $\neg\neg A \Rightarrow A$), B (con fbf.s signadas f$(A \wedge B) \Rightarrow$ f$A \mid$ fB y no signadas $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \mid \neg B$), las de tipo D (con fbf.s signadas v$\bigvee xAx \Rightarrow$ vAa y f$\bigwedge xAx \Rightarrow$ fAa y no signadas $\bigvee xAx \Rightarrow Aa$ y $\neg\bigwedge xAx \Rightarrow \neg Aa$), sólo son clásicamente válidas, por lo que un sistema con estas reglas sólo será adecuado para la lógica clásica de primer orden. Una simetría notoria del sistema de reglas semánticas es que contiene dos reglas de desarrollo para '$\neg$', en tanto que la versión sintáctica es asimétrica, con sólo una regla para '$\neg$'. En la variante sintáctica no hay regla para la simple negación por superflua, pues le correspondería la regla sintáctica idéntica: $\neg A \Rightarrow \neg A$, aunque sí hay la regla semántica v$\neg A \Rightarrow$ fA para fórmulas signadas, que corresponde a la anterior.

Los árboles para cuadros analíticos se pueden desarrollar de varias maneras. Nosotros adoptaremos, siempre que sea posible, la forma más simple, que resulta de desarrollar las reglas de tipo A antes que de las de tipo B, y las de tipo D (que son las condicionadas en las que el desarrollo exige un nuevo parámetro o variable libre) antes que las de tipo C.

Smullyan dio una definición de cuadro analítico (en sus dos variantes, semántica o sintáctica) que adoptaremos a continuación:

D.2.3. Sean B_i y B_j dos árboles (diádicos en la lógica de enunciados e incluso infinitamente ramificados en la lógica de primer orden) cuyos puntos son apariciones de fbf.s (signadas en los árboles semánticos y no signadas en los sintácticos). Llamamos a B_j una extensión directa de B_i si B_j se obtiene de B_i por aplicación de alguna de las reglas de tipo A, B, C o D de arriba. B será un cuadro analítico (semántico o sintáctico) para A si y sólo si existe una secuencia finita $B_1 \subset B_2 \subset ... \subset B_n = B$ tal que B_1 es el árbol de un solo punto para la fórmula del origen A y tal que, para todo $i<n$, B_{i+1} es una extensión directa de B_i.

2.5. Algunos ejemplos de desarrollo de fbf.s.

A continuación consideramos algunos ejemplos de los fragmentos proposicional y cuantorial de la lógica clásica de primer orden. Los desarrollos se realizan de acuerdo con las reglas anteriores.

Ej. 2.1. Consideremos algunas de las leyes más elementales de la lógica de enunciados y desarrollemos sus cuadros semánticos:

1	f$(A \to A)$	1	f$\neg(A \wedge \neg A)$	1	f$(A \vee \neg A)$
2(1)	vA	2(1)	v$(A \wedge \neg A)$	2(1)	fA
3(1)	fA	3(2)	vA	3(1)	f$\neg A$
	=	4(2)	v$\neg A$	4(3)	vA
		5(4)	fA		=
			=		

Estos cuadros semánticos muestran que los tres principios tradicionales de la lógica, de identidad, de no contradicción y de tercero excluido, son fórmulas válidas (verdades lógicas) en esta versión clásica de los cuadros semánticos (y obviamente también teoremas en los correspondientes cuadros sintácticos, como es fácil de comprobar). Si modificáramos una regla de desarrollo para el negador, por ejemplo no admitiéramos la regla semántica f$\neg A \Rightarrow$ vA equivalente a la regla sintáctica $\neg\neg A \Rightarrow A$, entonces el principio de tercero excluido carecería de desarrollo clausurado. Una restricción como la de las reglas siguientes, semántica f$\neg\neg A \Rightarrow$ v$\neg A$ (f$\neg\neg A \Rightarrow$ fA) y sintáctica $\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A$ (compárese con f$\neg A \Rightarrow$ v$\neg\neg A$, que equivale a $\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg A$), nos aproximaría a la lógica intuicionista o constructiva.

Ej. 2.2. Nuestro segundo ejemplo nos permite demostrar la base axiomática de un sistema axiomático para la lógica clásica de primer orden como el llamado por Alonzo Church sistema F^1, que consta de dos axiomas para la implicación, uno clásico para la negación y dos para la cuantificación. Se trata en realidad de un sistema metalingüístico con esquemas de axiomas y de reglas.[37]

Sea el metaaxioma 1. $A \to (B \to A)$, primera paradoja de la implicación, que la tradición escolástica llamó '*verum sequitur ex quolibet*'. Desarrollaremos para ella sus cuadros semántico y

[37] Cf. CHURCH 1956, 172.

sintáctico. Para el primero comenzamos con una fbf. signada y para el segundo con la negación del metaaxioma.

Cuadro semántico:		Cuadro sintáctico:	
1	$f(A \rightarrow (B \rightarrow A))$	1	$\neg(A \rightarrow (B \rightarrow A))$
2(1)	vA	2(1)	A
3(1)	$f(B \rightarrow A)$	3(1)	$\neg(B \rightarrow A)$
4(3)	vB	4(3)	B
5(3)	fA	5(3)	$\neg A$
	=		=

El desarrollo de estos cuadros lineales es inmediato: la fbf. 1 desarrolla por una regla de tipo A, que da lugar en **2** a una fbf. elemental que no desarrolla y en **3** a otra fbf. que desarrolla por la misma regla, lo que nos proporciona **4** y **5**. Las fbf.s **2** y **5** son contradictorias, por lo que los cuadros clausuran.

Sea el metaaxioma 2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ o "ley de autodistribución de la implicación". Desarrollaremos sus cuadros semántico y sintáctico como en el ejemplo anterior.

Cuadro semántico:

1	$f((A \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$				
2(1)	$v(A \rightarrow (B \rightarrow C))$				regla de tipo A
3(1)	$f((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$				”
4(3)	$v(A \rightarrow B)$				”
5(3)	$f(A \rightarrow C)$				”
6(5)	vA				”
7(5)	fC				”
8(2)	fA	9(2) $v(B \rightarrow C)$			regla de tipo B
	=	10(4) fA	11(4) vB		”
		=	12(9) fB	13(9) vC	
			=	=	

Cuadro sintáctico:

1	$\neg((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$			
2(1)	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$			
3(1)	$\neg((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$			
4(3)	$A \rightarrow B$			
5(3)	$\neg (A \rightarrow C)$			
6(5)	A			
7(5)	$\neg C$			
8(2)	$\neg A$	9(2) $B \rightarrow C$		
	=	10(4) $\neg A$	11(4) B	
		=	12(9) $\neg B$	13(9) C
			=	=

El desarrollo de la fbf. 1 con la regla de tipo A para $\neg(A \rightarrow B)$ me da las fbf.s de las filas 2 y 3. La regla de desarrollo de la fbf. 2 para $A \rightarrow B$ es de tipo *B*, por lo que ramifica, de modo que posponemos su uso, desarrollando primero la fbf 3 para $\neg(A \rightarrow B)$, lo que me proporciona las fbf.s 4 y 5, de las cuales nuevamente 4 ramifica y 5 no lo hace, por lo que desarrollamos esta última previamente con $\neg(A \rightarrow B)$. Aquí completamos el desarrollo de todas las reglas que no ramifican, por lo que el árbol tiene una sola rama hasta la fbf. *7*. Comenzamos ahora con el desarrollo de las reglas que ramifican de arriba hacia abajo. La fbf. 2 que me da las fórmulas 8 y 9 en dos ramas del árbol. La rama izquierda "clausura", porque aparece en la rama la fórmula elemental *a* en 6 y su negación en 8. La rama derecha ni es elemental ni clausura, por lo que seguimos con el desarrollo de la fbf. 4 que desarrolla para $A \rightarrow B$ con las fbf.s 10 y 11. En esta ramificación clausura la rama izquierda nuevamente, porque otra vez aparece $\neg A$ luego de haber aparecido *a* en 6 en la misma rama. En cambio la rama derecha aún no clausura, por lo que procedemos a desarrollar la última fbf. de tipo B, que es la 9, a partir de la única rama aún no clausurada desde 11, que con la regla para $A \rightarrow B$ nos da las fbf.s 12 y 13, que clausuran ambas ramas: 12 por la contradicción con 11 en la rama izquierda y 13 por la contradicción con 7 en la rama derecha.

Los cuadros para este metaaxioma 2 muestran que el orden del desarrollo no es esencial: la siguiente variante de desarrollo del cuadro sintáctico anterior, que representamos a partir de la fila **6**(5), así lo certifica:

6(5)	A						
7(5)	$\neg C$						
8(2)	$\neg A$	**9**(2)	$B \to C$				
	=	**10**(9)	$\neg B$			**11**(9)	C
		12(4)	$\neg A$	**13**(4)	B		=
			=		=		

El metaaxioma 3 es $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$, que es la llamada contraposición "clásica" o no intuicionista, cuyo cuadro sólo sintáctico desarrollamos así:

1	$\neg((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))$			
2(1)	$\neg A \to \neg B$			regla de tipo A
3(1)	$\neg(B \to A)$			"
4(3)	B			"
5(3)	$\neg A$			"
6(2)	$\neg\neg A$	**7**(2)	$\neg B$	regla de tipo B
8(6)	A		=	regla de tipo A o B (para la negación).
	=			

El cuadro clausura en sus dos ramas por las contradicción entre **5**(3) y **8**(6), y entre **4**(3) y **7**(2).

El metaaxioma 4 es $\wedge x(A \to B(x)) \to (A \to \wedge xB(x))$,[38] si x es una variable de individuo que no aparece libre en A. El desarrollo del cuadro sintáctico, a partir de su negación es el siguiente:

---

[38] La forma más simple de este esquema de axioma en el cálculo funcional puro de primer orden F^{1p} es $\wedge x(a \to B(x)) \to (a \to \wedge xB(x))$, donde *a* es una variable de enunciado. Cf. CHURCH 1956, p. 219, †408. Para una clasificación de los cálculos de primer orden clásicos cf. *ibidem*, p. 173-4.

1	$\neg(\bigwedge x(A \to B(x)) \to (A \to \bigwedge xB(x)))$	
2(1)	$\bigwedge x(A \to B(x))$	regla de tipo A
3(1)	$\neg(A \to \bigwedge xB(x))$	”
4(3)	A	”
5(3)	$\neg\bigwedge xB(x)$	”
6(5)	$\neg B(a)$	regla de tipo D con a parámetro nuevo
7(2)	$A \to B(a)$	regla de tipo C sin restricciones
8(7)	$\neg A$ = | 9(7) $B(a)$ =	regla de tipo B.

El cuadro clausura en sus dos ramas por la contradicción entre 4(3) y 8(7) en la primera rama y la contradicción entre 6(5) y 9(7) en la segunda rama.

El metaaxioma 5 es $\bigwedge xA(x) \to A(a)$, donde a es un término de individuo (variable o constante) y, si a es una variable, no hay ninguna aparición libre de x en ninguna parte bien formada de A de la forma $\bigwedge aB(a)$. Su desarrollo sintáctico es el siguiente:

1	$\neg(\bigwedge xA(x) \to A(a))$	
2(1)	$\bigwedge xA(x)$	regla de tipo A
3(1)	$\neg A(a)$	”
4(2)	$A(a)$ =	regla de tipo C

Puesto que la presentación de F1 es metalingüística, no necesitaremos reglas de substitución, por lo que las únicas metareglas de que habremos menester serán el *modus ponens* $A \to B, A \vdash B$ y la de generalización $A(a) \vdash \bigwedge xA(x)$.

Sus pruebas mediante cuadros son las siguientes:

1	$A \to B$	
2	A	
3	$\neg B$	
4(1)	$\neg A$ = | 5(1) B =	regla de tipo B

1	$A(a)$	
2	$\neg\bigwedge xA(x)$	
3(2)	$\neg A(a)$ =	regla de tipo D

Ambas metareglas clausuran.

Ej. 2.3. Otro ejemplo de la lógica clásica de enunciados es el siguiente:

$(A \wedge B \rightarrow \neg A \vee \neg\neg B) \vee (B \rightarrow \neg A)$.

Para poner a prueba el carácter de esta fbf. la negamos, lo que me da la negación de una disyunción inclusiva. A ésta fbf. se aplican sólo reglas de tipo A. El desarrollo resultante es el siguiente:

1	$\neg((A \wedge B \rightarrow \neg A \vee \neg\neg B) \vee (B \rightarrow \neg A))$	
2(1)	$\neg(A \wedge B \rightarrow \neg A \vee \neg\neg B)$	regla de tipo A
3(1)	$\neg(B \rightarrow \neg A)$	”
4(2)	$A \wedge B$	”
5(2)	$\neg(\neg A \vee \neg\neg B)$	”
6(3)	B	”
7(3)	$\neg\neg A$	”
8(5)	$\neg\neg A$	”
9(5)	$\neg\neg\neg B$	”
10(9)	$\neg B$	”
	=	

No hemos desarrollado todas las fbf.s por ser innecesario para alcanzar la contradicción. El árbol no ramifica y clausura, por lo que la fbf. originaria es una tesis.

Ej. 2.4. Las paradojas de la implicación son leyes para estos cuadros analíticos. La primera paradoja de la implicación $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ es el metaaxioma 1 y ya fue demostrado. El segundo $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$, o *ex falso sequitur quodlibet*, se desarrolla como sigue:

1	$\neg(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$	
2(1)	$\neg A$	regla de tipo A
3(1)	$\neg(A \rightarrow B)$	”
4(3)	A	”
5(3)	$\neg B$	”
	=	

Para desarrollarlo hasta una contradicción hubiese bastado alcanzar la fbf. 4.

Las dos paradojas mencionadas valen en numerosos sistemas, entre ellos el de la lógica intuicionista o constructiva. En cambio la tercera forma $(A \to B) \vee (B \to A)$, no vale para esa última, aunque sí para la lógica clásica, cuyo cuadro sintáctico desarrollamos a continuación:

1	$\neg((A \to B) \vee (B \to A))$
2(1)	$\neg(A \to B)$
3(1)	$\neg(B \to A)$
4(2)	A
5(2)	$\neg B$
6(3)	B
7(3)	$\neg A$
	=

El cuadro no ramifica, porque todas las reglas son de tipo A y clausura (para demostrarlo hubiese bastado con desarrollarlo hasta la fbf. 6). Como este desarrollo no es válido en la lógica intuicionista y las reglas de desarrollo decisivas son la del disyuntor inclusivo y de la negación, que no clausure reclamaría modificar al menos una de las reglas de desarrollo para esas constantes lógicas.

Ej. 2.5. Las leyes para la doble negación $\neg\neg A \to A$ y $A \to \neg\neg A$ son trivialmente demostrables con las reglas clásicas propuestas, como mostramos a continuación:

1	$\neg(\neg\neg A \to A)$		1	$\neg(A \to \neg\neg A)$	
2(1)	$\neg\neg A$	regla de tipo A	2(1)	A	regla de tipo A
3(1)	$\neg A$	”	3(1)	$\neg\neg\neg A$	”
4(2)	A	”	4(3)	$\neg A$	”
	=			=	

La primera ley, sólo clásica, usa la regla clásica de desarrollo para el negador $\neg\neg A \Rightarrow A$ y elimina una doble negación, en cambio la segunda usa la versión intuicionista $\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A$ que permite eliminar una triple negación y reemplazarla por una simple.

Ej. 2.6. Un ejemplo de árbol analítico para la fbf. $\bigwedge x(Ax \rightarrow Bx) \rightarrow (\bigwedge xAx \rightarrow \bigwedge xBx)$ de la lógica de predicados es la siguiente:

1	$\neg(\bigwedge x(Ax \rightarrow Bx) \rightarrow (\bigwedge xAx \rightarrow \bigwedge xBx))$			
2(1)	$\bigwedge x(Ax \rightarrow Bx)$			regla de tipo A
3(1)	$\neg(\bigwedge xAx \rightarrow \bigwedge xBx)$			”
4(3)	$\bigwedge xAx$			”
5(3)	$\neg\bigwedge xBx$			”
6(5)	$\neg Ba$			regla de tipo D
7(2)	$Aa \rightarrow Ba$			regla de tipo C
8(4)	Aa			”
9(7)	$\neg Aa$	10(7)	Ba	regla de tipo B
	=		=	

Como clausuran las únicas dos ramas del árbol para la negación de la fbf. originaria, entonces $\bigwedge x(Ax \rightarrow Bx) \rightarrow (\bigwedge xAx \rightarrow \bigwedge xBx)$ es una tesis lógica. Su correspondiente cuadro semántico informa que también es una fbf. válida de la lógica de primer orden). El cuadro para la fbf. conversa del ejemplo 2.6, $(\bigwedge xAx \rightarrow \bigwedge xBx) \rightarrow \bigwedge x(Ax \rightarrow Bx)$, sería el siguiente:

1	$\neg((\bigwedge xAx \rightarrow \bigwedge xBx) \rightarrow \bigwedge x(Ax \rightarrow Bx))$			
2(1)	$\bigwedge xAx \rightarrow \bigwedge xBx$			regla de tipo A
3(1)	$\neg\bigwedge x(Ax \rightarrow Bx)$			”
4(2)	$\neg\bigwedge xAx$	5(2)	$\bigwedge xBx$	regla de tipo B
6(3)	$\neg(Aa \rightarrow Ba)$	7(3)	$\neg(Aa \rightarrow Ba)$	regla de tipo D
8(6)	Aa	10(7)	Aa	regla de tipo A
9(6)	$\neg Ba$	11(7)	$\neg Ba$	”
12(4)	$\neg Ab$ regla de tipo D	13(5)	Ba	regla de tipo C
			=	

Como la rama izquierda del desarrollo de la fbf. de origen no clausura la conversa del ej. 2.6 no es sintácticamente un teorema, ni semánticamente una fórmula válida.

Ej. 2.7. Consideremos algunas fbf.s típicas de la lógica clásica que no son leyes intuicionistas o constructivas. Comenzamos con el cuadro semántico para la ley clásica denominada “ley de Peirce”: $(((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$.

1	$\mathrm{f}(((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$				
2(1)	$\mathrm{v}((A \rightarrow B) \rightarrow A)$				regla de tipo A
3(1)	$\mathrm{f}A$				”
4(2)	$\mathrm{f}(A \rightarrow B)$		5(2)	$\mathrm{v}A$	regla de tipo B
6(4)	$\mathrm{v}A$	regla de tipo A		=	regla de tipo A
7(4)	$\mathrm{f}B$				
	=				

La prueba recurre a una regla de desarrollo de tipo A para $\mathrm{f}(\alpha \rightarrow \beta)$ y otra de tipo B para $\mathrm{v}(\alpha \rightarrow \beta)$, y clausura necesariamente en ambas ramas. Eso nos muestra que, si quisiéramos evitar desarrollar resultados clásicos que no son aceptables desde un punto de vista constructivo, deberíamos modificar esa regla. Si recordamos la definición de Russell de la disyunción $A \vee B \leftrightharpoons (A \rightarrow B) \rightarrow B$ vemos que la ley de Peirce equivale a la fbf. $(A \rightarrow B) \vee A$, fbf. que a su vez esconde al tercero excluido, si se recuerda que B es aquí una fórmula cualquiera, pues una de las definiciones de la negación (propuesta por Curry) es la siguiente:

$\neg A \leftrightharpoons$ para todo B, $A \rightarrow B$.

Consideremos ahora la mitad sólo clásica de una equivalencia de Ockham: $\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$.

Su desarrollo mediante un cuadro semántico será el siguiente:

1	$\mathrm{f}(\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B)$			
2(1)	$\mathrm{v}\neg(A \wedge B)$			
3(1)	$\mathrm{f}\neg A \vee \neg B$			regla de tipo A
4(2)	$\mathrm{f}A \wedge B$			”
5(3)	$\mathrm{f}\neg A$			”
6(3)	$\mathrm{f}\neg B$			”
7(5)	$\mathrm{v}A$			”
8(6)	$\mathrm{v}B$			”
9(4)	$\mathrm{f}A$	10(4)	$\mathrm{f}B$	regla de tipo B
	=		=	

La fbf. clausura sólo clásicamente, pues los pasos **7** y **8** sólo surgen por aplicación de reglas equivalentes a la eliminación de la doble negación.

2.6. Formas normales disyuntivas (fnd).

Los cuadros analíticos, que nos recuerdan a la semántica de funciones de verdad, nos proporcionan un método simple de construcción de formas normales disyuntivas. Para ello desarrollamos un cuadro sintáctico completo para la fbf. no signada. Si el cuadro carece de ramas abiertas, entonces la fbf. es contraválida y su *fnd* es nula. Si hay al menos una rama abierta, entonces su **fnd** no es nula y constará de tantas conjunciones cuantas sean las ramas abiertas. Cada conjunción constará de las variables que aparecen en la rama y de las negaciones de las variables que aparecen negadas en la rama. Consideremos un ejemplo:

1 $((a\to c)\land(b\to c))\land(a\lor b)\to c$			
2(1) $\neg((a\to c)\land(b\to c))\land(a\lor b)$			3(1) c
4(2) $\neg((a\to c)\land(b\to c))$		5(2) $\neg(a\lor b)$	
6(4) $\neg(a\to c)$	7(4) $\neg(b\to c)$	8(5) $\neg a$	
9(6) a	10(7) b	11(5) $\neg b$	
12(6) $\neg c$	13(7) $\neg c$		

Este cuadro para la **fnd** de **1** es un árbol completo con todas sus ramas abiertas, por lo que la **fnd** equivalente a la fbf **1** $(a\land\neg c)\lor(b\land\neg c)\lor(\neg a\land\neg b)\lor c$, que es una ley de dilema constructivo simple, por lo que será un teorema y una fbf. válida de la lógica clásica de enunciados.

2.7. Conjuntos consistentes y saturados de fbf.s.

D.2.4. Sea Γ un conjunto de fbf.s. de un lenguaje $\mathcal{L}$. Decimos que Γ es un *conjunto consistente y saturado* de fbf.s de $\mathcal{L}$ si satisface las siguientes condiciones:

(1) Dada una fbf. A cualquiera del lenguaje $\mathcal{L}$, al menos $A \in \Gamma$ o $\neg A \in \Gamma$ (condición de saturación);
(2) dada una fbf. A cualquiera del lenguaje $\mathcal{L}$, a lo sumo $A \in \Gamma$ o $\neg A \in \Gamma$ (condición de consistencia respecto de la negación);
(3) si α es una fbf. de $\mathcal{L}$ que desarrolla una regla de tipo A, $\alpha \in \Gamma$ **syss** $\alpha_1 \in \Gamma$ y $\alpha_2 \in \Gamma$;
(4) si β es una fbf. de $\mathcal{L}$ que desarrolla una regla de tipo B, $\beta \in \Gamma$ **syss** $\beta_1 \in \Gamma$ o $\beta_2 \in \Gamma$;
(5) si $\gamma(x)$ es una fbf. de $\mathcal{L}$ que desarrolla una regla de tipo C, $\gamma \in \Gamma$ **syss** $\gamma(a) \in \Gamma$ para todo parámetro a;
(6) si $\delta(x)$ es una fbf. de $\mathcal{L}$ que desarrolla una regla de tipo D, $\delta \in \Gamma$ **syss** $\delta(a) \in \Gamma$ para al menos un parámetro a.

Las cuatro primeras condiciones caracterizan a los conjuntos de fbf.s consistentes y saturados de la lógica de enunciados. Las dos restantes completan esa caracterización para los conjuntos de fbf.s consistentes y saturados de la lógica de predicados (que pueden ser infinito-enumerables). La definición correspondiente para las fbf.s signadas se deriva inmediatamente de la definición anterior y la puede desarrollar fácilmente el lector.

Una consecuencia inmediata de la definición anterior es que, si todas las fbf.s *elementales* de la lógica clásica de enunciados (e.d. variables de enunciados a, b, c, ...) satisfacen las condiciones (1) y (2) de arriba y las fbf.s *compuestas* satisfacen las condiciones de (3) a (4), entonces el conjunto de fbf.s es consistente y saturado, lo que se demuestra mediante una simple inducción finita.

La definición de arriba tiene condiciones redundantes, pues en la lógica de enunciados basta que un conjunto de fbf.s satisfaga las condiciones (1), (2) y (3), o (1), (2) y (4) para que sea consistente y saturado. Esto se demuestra por reducción al absurdo. Para la primera parte se supone que se satisfacen las condiciones (1), (2) y (3) y se deduce que entonces se satisface también la condición (4):

Supongamos que el conjunto de fbf.s Γ satisface las condiciones (1), (2) y (3) y que la fbf. β se desarrolla por una regla de tipo B y que $\beta \in \Gamma$. Si ni β_1 ni β_2 pertenecen a Γ, entonces por (1) $\neg\beta_1$ y $\neg\beta_2$, que corresponden al desarrollo de una regla de tipo A, pertenecerán a Γ, por lo que $\neg\beta \in \Gamma$. Pero entonces tenemos que $\beta \in \Gamma$ y $\neg\beta \in \Gamma$, lo que transgrede la condición (2), contra la hipótesis.

Supongamos ahora que al menos β_1 o β_2 pertenecen a Γ. Sea $\beta_1 \in \Gamma$ (una deducción similar vale en el caso β_2). Si β no pertenece a Γ, entonces por (1) $\neg\beta \in \Gamma$. Pero $\neg\beta$ se desarrolla por una regla de tipo A, por lo que tanto $\neg\beta_1 \in \Gamma$ como $\neg\beta_2 \in \Gamma$. Como por hipótesis $\beta_1 \in \Gamma$, se transgrede la condición (2), en contra de la hipótesis.

Para la segunda parte se supone que se satisfacen las condiciones (1), (2) y (4) y se deduce de modo similar que entonces se satisface también la condición (3). □

Llamaremos a un conjunto de fbf.s *cerrado hacia abajo* (*downward closed*) si para toda fbf. α que desarrolla por una regla de tipo A y toda fbf. β que desarrolla por una regla de tipo B:

(1) si $\alpha \in \Gamma$, entonces $\alpha_1 \in \Gamma$ y $\alpha_2 \in \Gamma$ y
(2) si $\beta \in \Gamma$, entonces al menos $\beta_1 \in \Gamma$ o $\beta_2 \in \Gamma$.

Llamaremos a un conjunto de fbf.s *cerrado hacia arriba* (*upward closed*) si para toda fbf. α_1, α_2 y β_1, β_2:

(3) si $\alpha_1 \in \Gamma$ y $\alpha_2 \in \Gamma$, entonces $\alpha \in \Gamma$ y
(4) si al menos $\beta_1 \in \Gamma$ o $\beta_2 \in \Gamma$, entonces $\beta \in \Gamma$.

Todo conjunto cerrado hacia abajo que satisface las condiciones (1) y (2) es consistente y saturado y todo conjunto cerrado hacia arriba que satisfaga las condiciones (3) y (4) también es consistente y saturado.

CAPÍTULO 3.
METATEORÍA DE LOS CUADROS ANALÍTICOS.

3.1. Consistencia de la lógica clásica.[39]

La noción de consistencia es multívoca. Este término designa en lógica a varias propiedades de conjuntos Γ de fbf.s de un lenguaje $\mathcal{L}$. Los dos géneros fundamentales de consistencia son los siguientes:

D.3.1. La *consistencia semántica*, que es la propiedad de un conjunto Γ de $\mathcal{L}$ de tener un *modelo*, es decir de que exista al menos una función "interpretación" 'i' bajo la cual todas las fbf.s de Γ son verdaderas.

D.3.2. La *consistencia sintáctica* o "en sentido deductivo"[40] es una propiedad que deben tener los sistemas formales con una relación de deducibilidad. Sea un sistema formal con relación de deducibilidad '$\mathbf{S} = <\mathcal{L}, B, \vdash>$', donde '$\mathcal{L}$' es el lenguaje con sus reglas de buena formación, 'B' es una "base" del sistema y '$\vdash$' la relación de deducibilidad (que consiste habitualmente de una colección finita de reglas de inferencia).

Generalmente se proponen dos variantes fundamentales de D.3.2.:

D.3.2.1. Un conjunto Γ de fbf.s de **S** se dice sintácticamente consistente si de Γ no se deduce en **S** ninguna contradicción, es decir, si no es el caso que $\Gamma \vdash_S A \wedge \neg A$ para ninguna fbf. A (o equivalentemente, que no es el caso que $\Gamma \vdash_S A$ y $\Gamma \vdash_S \neg A$).
D.3.2.2. Un conjunto Γ de fbf.s de **S** se dice sintácticamente consistente, si para no toda fbf. A de **S** vale $\Gamma \vdash_S A$.

[39] En alemán '*Widerspruchsfreiheit*' o '*Konsistenz*', en francés '*consistance*', y en inglés '*consistency*'.
[40] *Konsistenz* "*im deduktiven Sinne*" (consistencia "en sentido deductivo"), así caracterizada en HILBERT-BERNAYS [1]1934-9, [2]1968, 19, por lo que suele recibir el nombre de "consistencia de Hilbert".

D.3.2.1. es la consistencia sintáctica respecto de la negación y D.3.2.2. es la consistencia sintáctica "absoluta". Ambas son equivalentes en los sistemas formales con negación que son plenamente consistentes. En cambio en los sistemas paraconsistentes la consistencia D.3.2.1. no equivale a la D.3.2.2.: mientras en ellos D.3.2.1. es rechazable, D.3.2.2. es una condición necesaria. Y en los sistemas de "lógica positiva" (o sin negación) D.3.2.1. carece de sentido y D.3.2.2. es una condición necesaria. La propiedad de consistencia D.3.2.2. es necesaria para cualquier discurso teórico, práctico o técnico, pues un sistema del cual se deduce toda fbf. carece de toda capacidad informativa.[41] Simplemente desaparece todo lenguaje informativo, porque ya no puede comunicar nada.

Para el método de cuadros analíticos utilizaremos algunas variantes que son más apropiadas para dichos cuadros, que las anteriores definiciones de los conceptos de consistencia:

C.3.1. Para la *consistencia semántica* usamos la propiedad de los cuadros que dice que *toda* fbf. *A cuyo cuadro semántico con origen* f*A* *clausura en todas sus ramas* (e. d., f*A* es insatisfacible y por tanto v*A* es satisfacible) *es clásicamente válida*, lo que expresamos así: $\vDash A$.

[41] Existen otros conceptos de consistencia. Uno de los más fuertes es el de *consistencia máxima*, que es la que tiene un conjunto Γ de fbf.s que es consistente y no admite extensiones propias consistentes. Otro es el de la *consistencia*-ω, concepto que fue introducido por Kurt Gödel en 1931 para su formalización de la aritmética de Peano y que dice así: un conjunto de fbf.s M de la aritmética de números naturales es *consistente*-ω, si no existe ninguna función numérica $A(x)$ tal que, para todo $n\in\Gamma$, $M \vdash A(n)$ y $M \vdash \neg\Lambda x A(x)$. Un sistema puede ser inconsistente-ω pero finitamente consistente. Tal es el caso de la interpretación canónica de la aritmética de los números naturales, como lo muestra la propiedad de finitud de cada término de la sucesión de Fibonacci, que no vale cuando se la extiende a la segunda clase numérica ordinal. Incluso puede ser máximamente consistente sin ser consistente-ω.

C.3.2. Para la *consistencia sintáctica* recordamos la propiedad de los cuadros (respecto de la negación), que dice que: si una fbf. A es demostrable por un cuadro sintáctico (e.d. un cuadro con origen $\neg A$ que clausura en todas sus ramas), entonces su negación $\neg A$ no es demostrable, lo que expresamos así: $\vdash A$.

Para comenzar nos limitaremos a demostrar esas dos formas de consistencia para la lógica clásica de enunciados utilizando el método de cuadros analíticos. En dicho cálculo estas dos variantes, sintáctica y semántica, son isomorfas. Además las reglas que les dan origen reflejan la estructura de la semántica habitual bivalente de la lógica clásica, por lo que la clausura de un cuadro sintáctico equivale a la clausura de su correspondiente cuadro semántico, y la clausura de éste refleja en forma de árbol la determinación de la validez de la fbf. del caso según las semánticas de la lógica clásica bivalente de enunciados. Comenzamos nuestra tarea definiendo para árboles **B** de fbf.s signadas lo siguiente.

D.3.3. Llamamos *verdadera* a una rama R de **B** (vR) si todos los puntos de esa rama son verdaderos. (Recuérdese que una fbf. signada 'fA' puede ser verdadera, si A es efectivamente falsa).

D.3.4. Llamamos *satisfacible* al árbol **B** (Sat($\mathbf{B}_1$)) si al menos una de sus ramas es verdadera.

Lema 3.1.: Si un cuadro $\mathbf{B}_2$ es una extensión de $\mathbf{B}_1$ – conforme a las reglas de desarrollo de tipo A y D conjuntivas, o de tipo B y C disyuntivas – entonces, si $\mathbf{B}_1$ es satisfacible, entonces $\mathbf{B}_2$ es satisfacible.

Dem. Si $\mathbf{B}_1$ es satisfacible debe existir al menos una rama R verdadera. Sea $\mathbf{B}_2$ una extensión de $\mathbf{B}_1$ por adición de uno o dos sucesores al punto final de alguna rama R de $\mathbf{B}_1$.

(1) Si R_i no es una extensión en $\mathbf{B}_2$ de R, entonces por ser $R_i = R$ y R es todavía una rama de $\mathbf{B}_2$, por lo que $\mathbf{B}_2$ contiene al menos una rama R verdadera y por lo tanto $\mathbf{B}_2$ es satisfacible.

(2) Si R_i es una extensión en $\mathbf{B}_2$ de R, entonces fue extendida por una regla de tipo A o B, o C, o D.

(2.1) Si fue extendida por una regla de tipo A o conjuntiva:

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{l}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}},$$

entonces α aparece como una fbf. de R y R fue extendida con α_1 y con α_2; pero α_1 y α_2 son ambas verdaderas por condición de la regla de tipo A, por lo que R_i es una rama verdadera de $\mathbf{B}_2$, que por lo tanto es satisfacible.

(2.2) Si fue extendida por una regla de tipo B:

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2},$$

entonces β aparece como una fbf. de R y β_1 en una rama R_i y β_2 en una rama R_j de $\mathbf{B}_2$. Considerando que β es verdadera por hipótesis, entonces por condición de la regla de tipo B disyuntiva al menos β_1 o β_2 es verdadera, por lo que o bien R_i o bien R_j será verdadera y por lo tanto $\mathbf{B}_2$ será satisfacible.

(2.3) Si fue extendida por una regla de tipo C disyuntiva para cuantores universales:

$$\frac{\gamma}{\gamma(a)}$$

donde a es un parámetro cualquiera, entonces γ aparece como una fbf. de R y $\gamma(a)$ en una rama R_i de $\mathbf{B}_2$. Considerando que γ es verdadera por hipótesis, entonces todo desarrollo $\gamma(a)$ será obligatoriamente verdadero y por lo tanto toda extensión R_i será verdadera, por lo que también será satisfacible $\mathbf{B}_2$.

(2.4) Si fue extendida por una regla de tipo D conjuntiva para cuantores existenciales:

$$\frac{\delta}{\delta(a)}$$

donde a es un parámetro nuevo, entonces δ aparece como una fbf. de R que fue extendida a R_i con $\delta(a)$, que por la regla D debe ser verdadera. Por lo que R_i es una rama verdadera de $\mathbf{B}_2$, que por lo tanto es satisfacible.

En consecuencia: cualquier extensión de un cuadro semántico satisfacible conforme a las reglas de desarrollo A, B, C y D es un cuadro semántico satisfacible. Aunque no sea inmediatamente evidente, la demostración se realizó por inducción finita: partiendo de que el origen es satisfacible (caso base), por inducción resultó que cualquier cuadro semántico, cuyo origen es satisfacible bajo una interpretación determinada i_i, también es satisfacible bajo esa interpretación i_i. En símbolos decimos haber demostrado:

$\mathrm{Sat}(\mathbf{B}_1) \wedge R \in \mathbf{B}_1 \wedge \mathrm{v}R \Rightarrow (R_i$ es extensión de $R \Rightarrow \mathrm{v}R_i \wedge \mathrm{Sat}(\mathbf{B}_2))$. □

3.2. Metateorema de corrección o consistencia semántica.

T.3.1. Por contraposición, si un cuadro semántico **B** clausura en todas sus ramas, entonces ninguna de sus ramas es verdadera y por lo tanto **B** no es satisfacible bajo ninguna interpretación, e. d. $\neg \mathrm{V}R_i.\mathrm{v}R_i. \Rightarrow \neg\mathrm{Sat}(\mathbf{B})$. Pero si **B** no es satisfacible, entonces su origen $\neg A$ no es satisfacible $\neg\mathrm{Sat}(\neg A)$, lo que implica que A es satisfacible en todas sus ramas y es una fbf. válida: $\vDash A$. Con esto queda demostrado para cualquier fbf. de la lógica de enunciados clásica que

(1) $\vdash A \Rightarrow\ \vDash A$ (si una fbf. A es demostrable, entonces es válida),

que es el metateorema de corrección semántica (*semantische Korrektheit*, *correction sémantique*, *soundness*). □

3.3. Metateorema de consistencia sintáctica.

T.3.2. Es un corolario del anterior. Tomemos como hipótesis:

(2) $\vdash A$.

Supongamos como hipótesis auxiliar para una *raa* metateórica

(3) $\vdash \neg A$.

Entonces tendremos como variante del metateorema (1) a:

(4) $\vdash \neg A \Rightarrow \vDash \neg A$.

De las expresiones (1) a (4) y *mp* metateórico obtenemos

(5) $\vDash A$ y (6) $\vDash \neg A$.

Por las reglas de construcción de los cuadros semánticos y por la semántica habitual de la lógica clásica de enunciados sabemos que, si una fbf. es válida, entonces su negación no es satisfacible y, *a fortiori*, no es válida; en símbolos:

(7) $\vDash A \Rightarrow \nvDash \neg A$.

De (5) y (7) obtenemos:

(8) $\nvDash \neg A$.

Y de (4) y (8) por *mt* metateórico obtenemos:

(9) $\nvdash \neg A$,

que contradice la hipótesis (3) de la *raa*. Por lo tanto, por *raa* metateórica:

(10) $\vdash A \Rightarrow \nvdash \neg A$ (si una fbf. A es demostrable, entonces su negación no es demostrable).

Éste es el metateorema de consistencia sintáctica para la lógica clásica de enunciados. □

3.4. El problema de la completitud.

El problema inverso de la consistencia semántica es el de completitud: se trata de determinar si toda fbf. válida es demostrable. Para el caso particular de la lógica clásica de enunciados el método de cuadros analíticos nos da el siguiente resultado:

Supongamos una fórmula válida A de acuerdo a la semántica usual de la lógica clásica de enunciados (de estilo tarskiano) y construyamos su cuadro sintáctico con el origen $\neg A$ (o semántico con origen fA, es equivalente). Demostrar A significa obtener un árbol para $\neg A$ que clausura en todas sus ramas. Pero ¿clausura todo árbol completo para $\neg A$ de cada fórmula válida A? Si eliminamos algunas reglas de desarrollo todavía valdrá que para una fbf. A válida un cuadro para $\neg A$ clausura, pero si eliminamos demasiadas reglas ocurrirá que una fórmula válida A puede no tener un cuadro para $\neg A$ que clausure. Así, si eliminamos la regla de tipo A para la conjunción

$$\frac{A \wedge B}{\begin{array}{l} A \\ B \end{array}}$$

no podemos demostrar la fbf. válida $a \wedge b \to a$, pues su desarrollo requiere esa regla, pero aún podemos demostrar $a \to (b \to a \wedge b)$. En cambio, si eliminamos la regla de tipo B para la conjunción

$$\frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \mid \neg B}$$

podremos demostrar la primera fórmula, pero no la segunda, como muestran los cuadros siguientes:

1	$\neg(a \wedge b \rightarrow a)$	1	$\neg(a \rightarrow (b \rightarrow a \wedge b))$
2(1)	$a \wedge b$	2(1)	a
3(1)	$\neg a$	3(1)	$\neg(b \rightarrow a \wedge b)$
4(2)	a	4(3)	b
	*	5(3)	$\neg(a \wedge b)$
			El desarrollo no puede continuar por ausencia de la regla B para la conjunción.

Por lo tanto nuestro actual problema de completitud para los cuadros analíticos es el de determinar si la colección de reglas de desarrollo A y B de que disponemos es suficiente para demostrar todas las fórmulas válidas de la lógica clásica de enunciados. Comencemos añadiendo las siguientes definiciones:

D.3.5. Una rama R de un cuadro sintáctico es *completa*, si para cada fbf. α que aparece en R, entonces α_1 y α_2 aparecen en R y para cada fbf. β que aparece en R, entonces β_1 o β_2 aparecen en R.

D.3.6. Un cuadro **B** es *completo*, si cada rama R que aparece en **B** es cerrada o es completa.

El problema se resuelve por contraposición. Entonces debemos demostrar que, si un cuadro **B** es completo y abierto (es decir, no cerrado o clausurado), entonces la fórmula del caso será satisfacible en su origen. Comenzamos con el siguiente teorema:

T.3.3. *Toda rama completa y abierta de un cuadro es simultáneamente satisfacible*.

Sea R una rama completa y abierta del árbol **B** de un cuadro y H el conjunto de fbf.s de R. Entonces por construcción H tendrá las siguientes propiedades para las fbf.s α que desarrollan con reglas A y β que desarrollan con reglas B:

H_1. En R no aparece ningún par de fbf.s que sean una variable de enunciado a y su negación $\neg a$ (o ningún par de fbf.s signadas vA y fA), pues es abierta.
H_2. Si $\alpha \in H$, entonces, por ser completa, $\alpha_1 \in H$ y $\alpha_2 \in H$.
H_3. Si $\beta \in H$, entonces, por ser completa, $\beta_1 \in H$ o $\beta_2 \in H$.

Los conjuntos H, finitos o infinitos enumerables, de fbf.s que tienen las propiedades H_1, H_2 y H_3 se llaman "*conjuntos H*" o "*de Hintikka*" o "*saturados hacia abajo*" (pero *no absolutamente saturados*) y las sucesiones cuyos conjuntos de términos son conjuntos de Hintikka se llaman "*sucesiones H*" o "*de Hintikka*". En consecuencia los conjuntos de fbf.s de las R completas y abiertas son por construcción conjuntos H. La demostración del teorema depende de la demostración del "lema de Hintikka" que damos más abajo. □

El anterior teorema T.3.3. vale también para conjuntos infinitos enumerables, y no sólo para fbf.s que desarrollan por reglas de tipo A y B, sino también para fbf.s γ, que desarrollan con reglas de tipo C, y fbf.s δ, que desarrollan con reglas de tipo D, por lo que será utilizado también en la lógica clásica de primer orden; *a fortiori* vale para los casos finitos de la clásica de enunciados.

Los conjuntos consistentes y saturados definidos arriba (ver § 2.6., D.2.4.) son *absolutamente saturados* y como tales son casos particulares de los conjuntos H porque contienen la condición más fuerte 'si y sólo si' en sus cláusulas y las cláusulas 1 y 2 son más fuertes que la cláusula H_1. Por lo tanto todo conjunto consistente y saturado será un conjunto H, pero no todo conjunto H será consistente y saturado. Por ejemplo, un conjunto de variables o sus negaciones que satisface la condición H_1 también satisface vacuamente H_2 y H_3, pero en cambio no satisface las condiciones 3 y 4 de los conjuntos consistentes y saturados (en la lógica de enunciados), dado que cada variable de enunciado o su negación debe provenir de una regla de tipo A o B.

Un lema importante que necesitamos para completar la demostración de T.3.3. es el que damos en la sección siguiente.

3.5. El lema de Hintikka.

Lema 3.2. de Hintikka: *Todo conjunto H (o saturado hacia abajo), finito o infinito, es satisfacible*. (Este lema es equivalente a la afirmación de que todo conjunto H se puede extender a un conjunto consistente y saturado.)

Dem.: Que todos los elementos de H son simultáneamente satisfacibles se demuestra por inducción sobre el grado lógico de las fbf.s. Sea H un conjunto de Hintikka. Hay que construir una interpretación que haga verdadera a cada elemento de H. Para facilitar la demostración de éste y los siguientes lemas, teoremas y corolarios comenzaremos con fbf.s signadas para las que el grado lógico G(va) = G(fa) = 0 (las demostraciones con fbf.s no signadas son sólo un poco más trabajosas).

Caso base: G(A) = 0 (si usamos fbf.s no signadas G(A) ≤ 1). Por lo tanto A será o bien una va o bien fa. Asignemos a cada variable o negación de variable que aparece en H los siguientes valores:
1. si aparece en H va, entonces damos a a el valor verdadero,
2. si aparece H fa, entonces damos a a el valor falso,
3. si no aparece en H ni va, ni fa, entonces damos a a un valor *a elección* (verdadero o falso).

Por la hipótesis H_1 de arriba para una rama completa y abierta aparecerá en H 1 o 2, pero no ambos. Por lo tanto, cada variable signada que aparece en H es verdadera en nuestra interpretación, lo que verifica el caso base.

Paso inductivo:
Consideremos una fbf. A de G(A) ≤ n que aparece en H, y supongamos por hipótesis inductiva que todas las fbf.s de H de grado $m<n$ son verdaderas. Puesto que A es, o bien una fbf. α que desarrolla por regla de tipo A, o una fbf. β que desarrolla por regla de tipo B, tenemos dos casos:

Caso 1: A = α. Entonces, por H_2, α_1 y α_2 también deben aparecer en H. Pero α_1 y α_2 son de grado $m < n$ y por hipótesis inductiva son ambas verdaderas, por lo que también lo será α.

Caso 2: A = β. Entonces, por H_3, o bien β_1, o bien β_2 aparecerá en H. Pero β_1 y β_2 son de grado $m < n$ y por hipótesis inductiva cualquiera de ellas que aparezca en H será verdadera, por lo que también lo será β. Con esto concluye la demostración. □

3.6. Teorema de completitud para cuadros.

T.3.4. (*Teorema de completitud para cuadros de la lógica de enunciados*).
Primera parte: *Si A es una fbf. válida, entonces todo cuadro completo que comienza con* f*A clausura en todas sus ramas*. Segunda parte: *Toda fbf. válida A es demostrable mediante el método de cuadros.*

Dem.: La primera parte se deduce del teorema anterior por *raa*. Consideremos un cuadro semántico **B** y supongamos que *A es una fbf. válida* y que **B** sea un cuadro completo cuyo origen es f*A*. Si **B** fuese abierto (es decir, no clausurara en al menos una rama), entonces, por el teorema anterior T.3.3., f*A* sería satisfacible y por lo tanto *A* no sería una fbf. válida, contra la hipótesis. Por lo tanto, por contraposición metalingüística, si *A* es una fbf. válida, entonces **B** clausura en todas sus ramas. Para una rama *R* cuyas fbf.s son un conjunto *H* la demostración del lema de Hintikka nos da una interpretación que satisface a *R*. En consecuencia, si *A* no es una fbf. válida, entonces un cuadro completo para f*A* nos da una interpretación que falsifica a *A*. La segunda parte se sigue de la primera, puesto que ella se ha demostrado para una fbf. válida cualquiera. □

Ej.3.8. Sea $A = a \vee b \to a \wedge b$. El cuadro para ella será:

1	f($a \vee b \to a \wedge b$)		
2(1)	v($a \vee b$)		
3(1)	f($a \wedge b$)		
4(2) va		5(2) vb	
6(3) fa	7(3) fb	8(3) fa	9(3) fb
=			=

Se advierte que el cuadro tiene dos ramas abiertas, es decir satisfacibles que tornan satisfacible a *A*, por lo que son dos contraejemplos para *A*, pues v*a* y f*b*, o v*b* y f*a* hacen verdadera a $\neg(a \vee b \rightarrow a \wedge b)$ y falsa a $a \vee b \rightarrow a \wedge b$.

3.7. Cuadros para conjuntos finitos de fbf.s en la lógica clásica de enunciados.

Para la lógica clásica de enunciados son importantes los cuadros para conjuntos finitos de fbf.s. Sea *M* un conjunto finito de fbf.s $\{A_1, ..., A_n\}$. Un cuadro para *M* es uno que comienza con

$$\begin{array}{l} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{array}$$

y continua mediante el uso de las reglas de tipo conjuntivo A o disyuntivo B. Para estos conjuntos finitos se deduce en forma inmediata un teorema muy sencillo que proponemos a continuación:

T.3.5. *Un conjunto* M *es insatisfacible syss existe un cuadro cerrado para* M.

Dem.: Supongamos que M sea satisfacible. Pero entonces existirá un cuadro completo abierto, es decir con al menos una rama R abierta, para M, y viceversa. Si no hay rama abierta, el cuadro es cerrado y M es insatisfacible, y viceversa. □

3.8. Algunos corolarios y teoremas.

C.3.8.1. *Si existe un cuadro cerrado para* $M \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$, *entonces existe un cuadro cerrado para* $M \cup \{\alpha\}$.

Dem.: es inmediata. El cuadro **B** cerrado para $M \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ termina en forma lineal, por completar su desarrollo con una regla de tipo A. Pero entonces una parte propia **B'** de ese cuadro, cerrada por definición, será el cuadro para $M\cup\{\alpha\}$. □

C.3.8.2. *Si existen dos cuadros cerrados para* $M\cup\{\beta_1\}$ *y* $M\cup\{\beta_2\}$, *entonces existe un cuadro cerrado para* $M\cup\{\beta\}$.

Dem.: semejante a la anterior, pero para una regla de tipo B, que ramifica. Si existen cuadros cerrados para $M\cup\{\beta_1,\}$ y $M\cup\{\beta_2\}$, entonces existirá el cuadro para $M\cup\{\beta\}$, como un subcuadro de $M\cup\{\beta_1,\}$ y $M\cup\{\beta_2\}$. Entonces también $M\cup\{\beta\}$ es cerrado. □

C.3.8.3. *Si todas las fbf.s A de* M son de grado $G(A) = 0$ ($G(A) \leq 1$ *para fbf.s no signadas*) *y* M *es insatisfacible, entonces existe un cuadro cerrado para* M.

Dem.: La demostración es trivial, pues se trata de un conjunto de fbf.s que son o bien de la forma v*a* o bien f*a*. Si es insatisfacible significa que en M aparece al menos una v*a* y una f*a*, pero esto es condición necesaria y suficiente para la clausura del cuadro. □

Se demuestra por inducción que:

T.3.6. *Si* M_n *es insatisfacible, entonces existe un cuadro cerrado para* M_n.

Dem.: Sea $G(M_n)$ el grado lógico de un conjunto finito de fbf.s M_n, es decir la suma de los grados lógicos de sus fbf.s componentes. Demostramos el teorema por inducción.

Caso base: $G(M_n) = 0$ para fbf.s signadas (o bien $G(M_n) \leq 1$, para fbf.s no signadas). Si M_n es insatisfacible se sigue inmediatamente del corolario C.2.8.3. que existe un cuadro cerrado para M_n.

Paso inductivo: Supongamos que $G(M_n) = n>0$ y que por hipótesis inductiva, si M_n es insatisfacible, entonces existe un cuadro cerrado para M_n. El hecho de que $G(M_n) = n>0$ significa que en el cuadro existe al menos una fbf. α que se desarrolla mediante una aplicación de una regla de tipo A o una fbf. β que desarrolla por una regla de tipo B.

Subcaso 1: $G(M_n) = n>0$. Hay una fbf. α en M_n, por lo que llamamos $M_n(\alpha)$ al conjunto de fbf.s. Si $M_n(\alpha)$ es insatisfacible y tiene un cuadro cerrado, quiere decir que contiene al menos una v*a* y una f*a*, entonces su extensión con $M_n(\alpha)\cup\{\alpha_1,\alpha_2\}$ también contendrá esas fbf.s y será por lo tanto insatisfacible y su cuadro cerrado. El $G(M_n(\alpha)\cup\{\alpha_1,\alpha_2\})$ es mayor o igual a *n*. Si es mayor a *n* ya está demostrado el subcaso. Si es igual, formamos una extensión cualquiera $M_{n+1}(\alpha)$ de $M_n(\alpha)\cup\{\alpha_1,\alpha_2\}$ con $G(M_{n+1}(\alpha)) > n$ que contendrá también al par v*a* y f*a*, y por lo tanto es insatisfacible y el cuadro cerrado.

Subcaso 2: $G(M_n) = n>0$. Hay en M_n una fbf. β que desarrolla por una regla de tipo B. Se demuestra de modo semejante al subcaso 1 pero con reglas de tipo B. □

Llamamos '*atómicamente cerrado*' a un cuadro en el que cada rama contiene una fbf. atómica y su conjugada (*va* y f*a*, para fbf.s signadas y *a* y una $\neg a$ para fbf.s no signadas).

Sea M_n un conjunto finito de fbf.s y construyamos un cuadro **B** completo para M_n. Una rama R de **B** se considerará cerrada sólo si es atómicamente cerrada; en caso contrario la llamamos atómicamente abierta. Supongamos ahora que **B** contiene al menos una rama R atómicamente abierta. Pero entonces el conjunto de elementos de R es un conjunto de Hintikka, porque por ser completo se cumplen las condiciones H_2 y H_3, y por ser abierto no contiene v*a* y f*a* y por lo tanto también cumple H_1. Por lo tanto M_n es satisfacible por el lema de Hintikka. Entonces por contraposición tenemos:

T.3.7. *Si* M_n *es insatisfacible, entonces existe un cuadro atómicamente cerrado para* M_n.

De los dos teoremas anteriores se sigue el siguiente corolario:

C.3.8.4. *Si existe un cuadro cerrado para* M_n, *entonces existe un cuadro atómicamente cerrado para* M_n.

Esta importante consecuencia se puede demostrar también por inducción sobre el grado lógico de las fbf.s de M_n.

3.9. Conjuntos de verdad.

Una noción importante para lo que sigue es la de los 'conjuntos de verdad' V. Si F es el conjunto de fbf.s de un lenguaje L que admite valuaciones semánticas, i una valuación booleana y V el conjunto de todas las fbf.s de M que son verdaderas bajo la valuación i, entonces V cumple las siguientes condiciones clásicas: para cualesquiera fbf.s a, b de F:
(1) Exactamente una fbf. del par $\{a, \neg a\}$ pertenece a V, es decir $a \in V \Leftrightarrow \neg a \notin V$.
(2) $a \wedge b$ pertenece a V syss a pertenece a V y b pertenece a V.
(3) $a \vee b$ pertenece a V syss a pertenece a V o b pertenece a V.
(4) $a \rightarrow b$ pertenece a V syss a no pertenece a V o b pertenece a V.

Un conjunto V que satisface estas condiciones es un conjunto de verdad y es saturado. En realidad si i es una valuación cualquiera y V es el conjunto de todas las fbf.s verdaderas bajo i, entonces son equivalentes las condiciones
(i) i es una valuación booleana y
(ii) V es saturada.

Si trabajamos con fbf.s no signadas, entonces podemos reescribir lo anterior de la siguiente manera:
Sea a una fbf. cualquiera de F, A una regla conjuntiva y B una regla disyuntiva. V es un conjunto de verdad syss satisface las tres siguientes propiedades:
(1) O bien a, o bien $\neg a$ pertenece a V, pero no ambos.
(2) Si a desarrolla por una regla A, entonces a pertenece a V syss a_1 y a_2 pertenecen ambos a V.
(3) Si a desarrolla por una regla B, entonces a pertenece a V syss a_1 o a_2 o ambos pertenecen a V.

3.10. Compacidad.

En numerosos cálculos lógicos son demostrables algunas propiedades denominadas de *compacidad* o *finitud*. Sea Γ un conjunto infinito enumerable de fbf.s, Δ un subconjunto finito de éste y A una fbf. La cuestión general de la compacidad o finitud se puede expresar de la siguiente manera:

Sea un conjunto infinito enumerable Γ *de fbf.s tal que cada uno de sus subconjuntos finitos* Δ_k *es satisfacible, es decir, existe una evaluación* i_k *que satisface a* Δ_k*. ¿Se sigue entonces que el conjunto infinito enumerable* Γ *también es satisfacible, es decir, que existe una evaluación* i *que satisface* Γ?

En el cálculo lógico clásico algunos de los teoremas de finitud o compacidad importantes son los siguientes, dos de ellos sintácticos y dos semánticos:

T.3.8. *Teorema de finitud para la relación sintáctica de deducibilidad*: $\Gamma \vdash B$, si y sólo si existe al menos un subconjunto finito $\Delta \subset \Gamma$, tal que $\Delta \vdash B$.

Dem. Demostramos las dos implicaciones:

(1) Si vale que $\Delta \vdash B$, entonces, puesto que Γ es un superconjunto de Δ, entonces también $\Gamma \vdash B$, puesto que en Γ están todos los supuestos para la deducción de la conclusión. Ésta es la propiedad usualmente denominada 'monotonía'.

(2) Hay ciertas condiciones de posibilidad de una demostración (que se denominan 'pragmáticamente necesarias'). Por ejemplo, que la misma comience y termine, es decir consista de un número *finito* de expresiones (un conjunto finito Θ), la última de las cuales sea la conclusión y las primeras las premisas, *a fortiori* un conjunto finito Δ, pues $\Delta \subset \Gamma$. De modo que si de $\Gamma \vdash B$, entonces, si tal deducción efectivamente existe, entonces "existe" (en sentido constructivo débil, es decir "no ostensivo":

no es el caso que no exista) un subconjunto finito $\Delta\subset\Gamma$ tal que $\Delta \vdash B$. □

T.3.9. *Teorema de finitud para la relación semántica de consecuencia*: $\Gamma \vDash B$, si y sólo si existe al menos un subconjunto finito $\Delta\subset\Gamma$, tal que $\Delta \vDash B$.

Dem. La primera parte se demuestra de manera semejante a la de la primera parte del teorema anterior. La conversa se puede demostrar de la siguiente manera: decimos que B es una consecuencia semántica de un conjunto Γ ($\Gamma\vDash B$), si (por las mismas razones del teorema anterior) existen finitas fbf.s A_1, ..., A_n de Γ tales que $A_1\wedge...\wedge A_n \rightarrow B$ es una fbf. válida. Pero $\Delta = \{A_1, ..., A_n\}$. Entonces $\Delta \vDash B$. □

T.3.10. *Teorema de finitud para la consistencia*: tiene dos partes:
(1) Una colección de fbf.s Γ es consistente, si $A\in\Gamma$ si y sólo si $\neg A\notin\Gamma$ y viceversa.
(2) Γ es consistente si y sólo si, para cada subconjunto finito $\Delta\subset\Gamma$, Δ es consistente.[42]

T.3.11. *Teorema de finitud para la satisfacibilidad*:
Γ es satisfacible si y sólo si, para cada subconjunto finito $\Delta \subset \Gamma$, Δ es satisfacible.[43] (Ésta se suele llamar la primera forma del teorema de compacidad.)

El problema se resuelve afirmativamente en numerosos cálculos, por ejemplo en el que nos ocupa. Supongamos que Γ

[42] En el caso de cálculos paraconsistentes el teorema de compacidad para la consistencia será reemplazado por el de compacidad para la consistencia absoluta, recordando que lo único que éste exige es que la clausura deductiva de un conjunto Γ sea un subconjunto propio del conjunto de fbf.s ($C(\Gamma)\subset\mathcal{F}$).

[43] Este último teorema es especialmente importante como instrumento en la metamatemática del álgebra introducida por Alfred Tarski y Abraham Robinson.

fuese un conjunto infinito enumerable bien ordenado A_1, A_2, ..., A_n, ... Si cada subconjunto finito es satisfacible eso significa que, para cada k, $\Delta_k = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ es satisfacible, es decir, existe una evaluación i_k tal que $i_k(A_1) = i_k(A_2) = i_k(A_i) = 1$. Naturalmente para cada k la evaluación i_k puede ser diferente. La reformulación para cuadros analíticos del problema la desarrollamos siguiendo a SMULLYAN 1968 (30-36). En la sección correspondiente lo hemos estudiado con conjuntos consistentes y saturados. Aquí extendemos la definición de consistencia para conjuntos infinitos enumerables:

D.3.9. Un conjunto infinito de fbf.s Γ es *finitamente consistente*, si todo conjunto finito $\Delta_n \subset \Gamma$ es satisfacible.

Esto equivale a decir que no existe ningún cuadro analítico para ningún $\Delta_n \subset \Gamma$ que clausure para $v(\Delta_n) = v(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n)$. El problema de compacidad será entonces el de determinar si, dada la consistencia *finita* para Γ, entonces Γ es *infinitamente* consistente, es decir existe una evaluación que hace verdadera a cada fbf. de Γ. Aquí demostramos la llamada primera forma del teorema de compacidad presentada arriba, a saber T.3.11. (Γ es satisfacible si y sólo si es satisfacible cada subconjunto finito $\Delta \subset \Gamma$).

Dem. La primera forma de prueba recurre a extender a Γ un conjunto de Hintikka y mostrar que éste, por el lema de Hintikka, se puede extender a un conjunto de verdad.[44] Consideremos a Γ como conjunto infinito enumerable bien ordenado, es decir una sucesión $<A_1, A_2, ..., A_n, ...>$ sin último elemento, y supongamos por hipótesis que cada sucesión finita $<A_1, A_2, ..., A_n>$ sea satisfacible.

En primer lugar construyamos un cuadro semántico para $v(A_1)$, el que no puede clausurar por ser por hipótesis satisfacible, es decir, debe tener al menos una rama abierta.

---

[44] Un segundo tipo de prueba recurre al teorema de Lindenbaum y sus construcciones. A éste lo expondremos en los apéndices.

Agreguemos entonces A_2 a cada rama abierta del cuadro y completémoslo para v(A_1, A_2). Su cuadro completo debe tener también al menos una rama abierta, pues en caso contrario {A_1, A_2} sería insatisfacible, contra la hipótesis.

Este proceso lo continuamos para los siguientes A_i. Ninguno de los cuadros extendidos resultantes v(A_1, A_2, ..., A_n) puede ser clausurado, porque entonces $<A_1, A_2, ..., A_n>$ no sería satisfacible para algún n finito, lo que es contrario a la hipótesis.

Por recursión obtenemos un árbol infinito, el cual, por el lema de König, contiene al menos una rama R infinita obviamente abierta. Esta rama R contiene, por la regla de construcción de las extensiones del árbol, a todo A_i de Γ y a todos sus desarrollos por las reglas de cuadros semánticos. Además el conjunto de fbf.s de R es un conjunto de Hintikka, pues, por la no clausura y las reglas de desarrollo, cumple las condiciones H_1 (En R no aparece va y fa), H_2 (Si $\alpha\in\Delta$, entonces $\alpha_1\in\Delta$ y $\alpha_2\in\Delta$) y H_3 (Si $\beta\in\Delta$, entonces $\beta_1\in\Delta$ o $\beta_2\in\Delta$). Pero este conjunto R es satisfacible por el lema de Hintikka, y como $\Gamma\subseteq R$ por lo tanto también lo es su subconjunto Γ, como queríamos demostrar. (Esta prueba ha utilizado el procedimiento de construir un cuadro completo para un conjunto infinito enumerable que viéramos más arriba.) □

Otra de las formas del teorema de compacidad – o finitud – que es especialmente importante en la lógica de primer orden, es la siguiente:

T.3.12. *Si b es verdadera en todas las evaluaciones que satisfacen a* Γ, *entonces* $\Gamma \vDash b$.

Dem. Por la hipótesis del antecedente de este teorema el par {Γ, b} es satisfacible y por lo tanto no lo es {Γ, $\neg b$}. La contraposición del anterior teorema de compacidad dice: existe (clásicamente, es decir en sentido débil)[45] al menos un subconjunto finito $\Delta\subset\Gamma$ tal que Δ no es satisfacible si y sólo si Γ no es satisfacible. Por lo tanto existiría al menos un subconjunto finito $\Delta\subset\Gamma$ tal que $\{\Delta, \neg B\}$ no es satisfacible. Supongamos que $A_1, ..., A_n$, son los elementos de Δ diferentes de $\neg B$, si es que $\neg B$ apareciera en Δ. Entonces $\{A_1, ..., A_n, \neg B\}$ es insatisfacible y por lo tanto $A_1\wedge...\wedge A_n \rightarrow B$ es una fbf. válida. Pero entonces $A_1,..., A_n \vDash B$. *A fortiori* $\Delta \vDash B$. De aquí *a fortiori* $\Gamma \vDash B$. □

3.11. El álgebra y el teorema de Lindenbaum.

Un álgebra de Lindenbaum es un álgebra de Boole definida del modo siguiente:

D.3.10. Sea '$\sim_\Sigma$' la relación de "equivalencia demostrable (en Σ)", es decir, respecto de un conjunto de fbf.s $\Sigma \subseteq F$ definida para fbf.s de un lenguaje formal, donde F es el conjunto de las fbf.s de ese lenguaje. Definimos esta relación de equivalencia así:

$$A \sim_\Sigma B \leftrightharpoons \Sigma \vdash A \leftrightarrow B.$$

En el conjunto $F/\sim_\Sigma$ de las clases de equivalencia de esta relación establecemos la relación de orden '$\leq$' del modo siguiente:

D.3.11. $|A|_\Sigma \leq |B|_\Sigma \leftrightharpoons \Sigma \vdash A \rightarrow B$. (donde $|A|_\Sigma$ y $|B|_\Sigma$ son las clases de equivalencia para A y B respecto del conjunto Σ).

El conjunto '$F/\sim_\Sigma$' de clases de equivalencia con la relación de orden '$\leq$' forma un *reticulado booleano*, es decir, distributivo y complementario, que se llama 'álgebra de Lindenbaum para Σ'. Para sus elementos unitario y nulo vale:

[45] Es claro que constructivamente la contraposición es más débil, pues sólo podríamos decir: "no todo subconjunto finito $\Delta\subset\Gamma$, es tal que $\{\Delta, \neg B\}$ sea satisfacible".

$|A|_{\Sigma} = 1$ syss $\Sigma \vdash A$,

$|A|_{\Sigma} = 0$ syss $\Sigma \vdash \neg A$.

Esta propiedad característica de las álgebras de Lindenbaum es un instrumento importante para varios teoremas algebraicos de la lógica clásica de enunciados y de predicados de primer orden.

D.3.12. Una *extensión propia* de un conjunto M es un superconjunto de M que contiene al menos un elemento que no pertenece a M.

D.3.13. Un conjunto M de fbf.s es *máximamente consistente* si es consistente y si ninguna extensión propia de M es consistente.

Todo conjunto de verdad V (o conjunto de todas las fbf.s verdaderas del conjunto F) es obviamente consistente, puesto que es satisfacible y por lo tanto lo son trivialmente todos sus subconjuntos. Además todo elemento que no pertenece a un conjunto de verdad no es verdadero y por lo tanto no se puede agregar a V sin destruir la consistencia. Por lo tanto:

Lema 3.3. *Todo conjunto de verdad* V *es máximamente consistente*.

Ahora debemos demostrar el lema converso, pero antes de hacerlo recordemos las siguientes propiedades de la consistencia:

C1. Si M es consistente bajo una interpretación i, entonces cada subconjunto S finito de M es satisfacible bajo esa interpretación.
Dem. Esta propiedad se sigue inmediatamente de la definición de consistencia.

C2. Si M es consistente bajo i, entonces para cada fbf. a al menos uno de los conjuntos $M \cup \{a\}$ o $M \cup \{\neg a\}$ es consistente.

Dem. Esto lo demostramos por *raa*. Supongamos que tanto $M\cup\{a\}$ como $M\cup\{\neg a\}$ son ambos inconsistentes bajo una interpretación i. Para que ello sea posible debe haber un subconjunto finito satisfacible S_1 de M tal que $S_1\cup\{a\}$ es insatisfacible bajo i y un subconjunto finito satisfacible S_2 de M tal que $S_2\cup\{\neg a\}$ es insatisfacible bajo i. Formemos ahora el conjunto $S_3 = S_1\cup S_2$, que es un subconjunto finito satisfacible de M bajo i. Pero entonces, puesto que $S_1\subset S_3$, entonces $S_3\cup\{a\}$ es insatisfacible bajo i y puesto que $S_2\subset S_3$, también lo es $S_3\cup\{\neg a\}$ bajo i. Pero si $S_3\cup\{a\}$ es insatisfacible bajo i, entonces $\neg a\in S3$ y si $S_3\cup\{\neg a\}$ es insatisfacible bajo i, entonces $a\in S3$. Pero entonces S_3 es insatisfacible, por lo que M deberá ser inconsistente, contra la hipótesis. □

De lo anterior se sigue:

C3. Si M es máximamente consistente, entonces para toda fbf. a, o bien $a\in M$, o bien $a\notin M$.

Ahora podemos demostrar el siguiente lema converso de:

Lema 3.4. *Todo conjunto* M *máximamente consistente es un conjunto de verdad.*

Dem. Sea M un conjunto máximamente consistente. Entonces por ser satisfacible y por (1) para una fbf. cualquiera a al menos $a\notin M$ o $\neg a\notin M$ o ninguna de ambas. Pero por (3) al menos $a\in M$ o $\neg a\in M$ o ambas. Por lo tanto se cumple la condición (1) de los conjuntos de verdad V, de que para cualquier par de fbf.s $\{a, \neg a\}$ exactamente una de ellas pertenece al conjunto de verdad. Supongamos ahora que $a\in M$ y desarrolla por una regla conjuntiva en a_1 y a_2. Si $\neg a_1\notin M$, entonces $\{a, \neg a_1\}$ sería insatisfacible. Luego, por (3) $a_1\in M$. Del mismo modo se procede para a_2. Ahora tenemos que $a_1\in M$ y $a_2\in M$. Pero entonces $\neg a\notin M$, pues $\{a_1, a_2, a\}$ es satisfacible por la regla conjuntiva, entonces $\{a_1, a_2, \neg a\}$ no lo es. Entonces por (3) $a\in M$. Además ya sabemos que si a desarrolla por una regla disyuntiva, entonces $a\in M$ syss $a_1\in M$ o $a_2\in M$. □

Las propiedades siguientes de la consistencia para una interpretación i son triviales:

C4. *Un conjunto finito M es consistente si y sólo si es satisfacible*. En efecto, si M es consistente, entonces, por definición, todos sus subconjuntos finitos, incluido él mismo, son satisfacibles. Y si todos los subconjuntos finitos de M son satisfacibles, incluido él mismo, entonces por definición es consistente.

C5. *Un conjunto* (*finito o infinito*) M *es consistente si y sólo si todos sus subconjuntos finitos son consistentes*. Esta propiedad se sigue de C1 por unión de subconjuntos consistentes.

D.3.14. Una propiedad *P* para conjuntos es *de carácter finito*, si para cualquier conjunto M éste tiene la propiedad *P* syss todos sus subconjuntos finitos tienen la propiedad *P*.[46]

Esto significa que C2 afirma que *la consistencia es una propiedad de carácter finito*. Esta propiedad finita de la consistencia es esencial para demostrar el teorema de Lindenbaum o teorema de ampliación[47], que se puede considerar una consecuencia del lema de Tukey, que trataremos a continuación.

La forma general del lema de Tukey admite universos U cualesquiera, finitos o infinitos, enumerables o no enumerables. Consideremos ahora una propiedad *P* que pueden tener al menos algunos subconjuntos de U. Un conjunto máximo que tiene la propiedad *P* es un conjunto M que tiene esa propiedad pero tal que ninguna extensión propia de M dentro de U tiene

---

[46] Obviamente no todas las propiedades son de carácter finito. Por ejemplo la misma propiedad de finitud de conjuntos carece trivialmente de carácter finito, pues todos los subconjuntos finitos de un conjunto infinito tienen esa propiedad, pero el conjunto infinito obviamente no lo tiene. Este fenómeno está íntimamente relacionado por los de consistencia y completitud ω.

[47] En alemán '*Erweiterungssatz*'.

esa propiedad. El lema de Tukey dice que si la propiedad *P* es de carácter finito, entonces cualquier subconjunto M de U que tenga la propiedad *P* se puede extender a un subconjunto máximo que tenga esa propiedad *P*. En la literatura se demuestra que este lema es equivalente (o consecuencia) del axioma de elección. También se demuestra que si el universo U es a lo sumo infinito enumerable entonces no se necesita dicho axioma para su demostración. Por lo tanto, siguiendo el tratamiento de Smullyan, se demuestra el lema para universos infinitos enumerables, es decir, sin recurrir al axioma de elección. Estos universos enumerables son los únicos que necesitamos para nuestros propósitos.

Lema 3.5. (Lema de Tukey para universos enumerables): *Para cualquier universo enumerable* U *y cualquier propiedad P de carácter finito para subconjuntos de* U*, cualquier subconjunto* M *de* U *que tenga la propiedad P se puede extender a un subconjunto máximo* **M** *de* U *que tiene la propiedad P*.

Dem. En primer lugar bien-ordenamos los elementos de U como secuencia enumerable a_1, a_2, ..., a_n, ... Luego generamos una sucesión enumerable M_0, M_1, M_2, ..., M_n, ... de subconjuntos de U según el siguiente esquema inductivo:

Caso base: $M_0 = M$, que por hipótesis tiene la propiedad *P* de carácter finito.

Paso inductivo: Supongamos definido a M_n y definamos a M_{n+1} de la siguiente manera:

si $M_n \cup \{a_{n+1}\}$ tiene la propiedad *P*, entonces $M_{n+1} = M_n \cup \{a_{n+1}\}$, y
si $M_n \cup \{a_{n+1}\}$ no tiene la propiedad *P*, entonces $M_{n+1} = M_n$, por no ser extensible con a_{n+1} (es obvio que muchos subconjuntos de la colección pueden ser idénticos).

A continuación seguimos con los siguientes elementos de U, a_{n+2}, a_{n+3}, ... Mediante esta construcción obtenemos la siguiente sucesión de subconjuntos de U: $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq M_{n+1} \subseteq$ ..., cada uno de los cuales tiene por construcción la propiedad *P*.

Definamos ahora $\mathbf{M} = M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n \cup M_{n+1} \cup \ldots$, es decir, un $a_i \in \mathbf{M}$ syss existe al menos un M_j, con $0 \leq j$, tal que $a_i \in M_j$. Obviamente **M** es por construcción una extensión de M_0. Ahora debemos demostrar que **M** es el conjunto máximo que tiene la propiedad *P*.

(1) Sea L cualquier subconjunto finito de **M**. Por lo tanto L debe ser, por la definición D.3.14, un subconjunto de algún M_n (M_n tiene la propiedad *P* syss todos sus subconjuntos finitos, entre los que está L, tienen la propiedad *P*). Luego todo subconjunto finito L de **M** tiene la propiedad *P* y entonces también **M** tiene la propiedad *P*, pues es una propiedad de carácter finito.

(2) Supongamos ahora algún a_i tal que $\mathbf{M} \cup \{a_i\}$. Entonces existe al menos un subconjunto $M_i \cup \{a_i\}$ que tiene la propiedad *P*, porque para cualquier propiedad de carácter finito, por la D.3.14., si un conjunto tiene esa propiedad, todos sus subconjuntos también la tienen. Pero entonces $M_{i+1} = M_i \cup \{a_i\}$ y por lo tanto $a_i \in M_{i+1}$ y
en consecuencia $a_i \in \mathbf{M}$.

Con eso se demuestra que **M** es el conjunto máximo para la propiedad finita *P*. □

T.3.14. *El teorema de Lindenbaum*. Todo conjunto M consistente se puede extender a un conjunto máximamente consistente M^{mc}.

Siguiendo a Smullyan haremos una demostración "analítica" del teorema de Lindenbaum, es decir, una que no usa la regla de corte, que es una regla de la que aún no disponemos, pues recién la estudiaremos con los cálculos secuenciales.

Consideremos previamente ciertas características importantes de las subfórmulas y de sus negaciones:

D.3.15. *b* es un *descendiente directo* de *a* si, *a* es alguna fbf. α de una regla conjuntiva y *b* es o bien α_1 o bien α_2, o *a* es alguna fbf. β de una regla disyuntiva y *b* es β_1 o β_2.

D.3.16. *b* es un *descendiente* de *a* si existe una secuencia finita que comienza con *a* y termina con *b*, tal que cada término de la secuencia distinto de *a* es un descendiente directo de su precedente.

Por las reglas conjuntivas A y disyuntivas B sabemos que, si *b* es descendiente directo de *a*, entonces *b* es, o bien una subfórmula de *a* (p. ej. para las reglas conjuntivas $\neg\neg A$ y $A \wedge B$ o las disyuntivas $\neg\neg A$ y $A \vee B$), o bien la negación de una subfórmula de *a* (p. ej. para las reglas conjuntivas $\neg(A \vee B)$ y $\neg(A \rightarrow B)$ o las disyuntivas $\neg(A \wedge B)$ o $A \rightarrow B$).

Sea M^d el conjunto de todos los descendientes de los elementos de M. La construcción sólo usará elementos de M^d. Supongamos que M es consistente. Puesto que la propiedad de consistencia es de carácter finito, podemos extender M a un conjunto máximamente consistente M^{mc}, que es subconjunto de M^d, es decir, a un subconjunto consistente de M^d que no tiene extensiones propias que sean subconjuntos de M^d consistentes. □

Este subconjunto máximamente consistente M^{mc} de M^d no será en general un conjunto de verdad, pero se puede demostrar que:

T.3.15. *Todo subconjunto máximamente consistente* M^{mc} *de* M^d *es un conjunto de Hintikka.*

Dem. Por los desarrollos anteriores sabemos que la consistencia tiene las siguientes propiedades:

C_1 – Todo conjunto que contenga una variable proposicional y su negación es inconsistente.

C_2 – Si $M \cup \{\alpha\}$ es consistente, entonces $M \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ también lo es; por contraposición si $M \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ es inconsistente, también lo es $M \cup \{\alpha\}$.

C_3 – Si $M \cup \{\beta\}$ es consistente, entonces o bien $M \cup \{\beta_1\}$, o $M \cup \{\beta_2\}$, o ambos, también lo serán; por contraposición si $M \cup \{\beta_1\}$ y $M \cup \{\beta_2\}$ son ambos inconsistentes, también lo será $M \cup \{\beta\}$.

Sea M^{mc} un subconjunto máximamente consistente de M^d. Puesto que M^{mc} es consistente, entonces, por C_1, M^{mc} no contiene una variable a y su negación $\neg a$, es decir cumple H_0: "Ninguna variable signada y su conjugada están ambas en M^{mc}".

Supongamos ahora que $\alpha \in M^{mc}$. Entonces $M^{mc} \cup \{\alpha\} = M^{mc}$, de modo que $M^{mc} \cup \{\alpha\}$ es consistente. Entonces, por C_2, $M^{mc} \cup \{\alpha_1\}$ es consistente, de donde $\alpha_1 \in M^{mc}$ por la propiedad de maximalidad, puesto que $\alpha_1 \in M^d$. Del mismo modo se demuestra que $\alpha_2 \in M^{mc}$.

Supongamos ahora que $\beta \in M^{mc}$. Entonces $M^{mc} \cup \{ \beta \} = M^{mc}$. Por lo tanto $M^{mc} \cup \{ \beta \}$ es consistente. Entonces, por C_3, o bien $M^{mc} \cup \{\beta_1\}$, o bien $M^{mc} \cup \{\beta_2\}$ es consistente, o ambos. Entonces o bien β_1 o bien β_2 pertenecen a M^{mc}, puesto que M^{mc} es un subconjunto consistente máximo y β_1 y β_2 pertenecen a M^d. Por lo tanto M^{mc} satisface todas las condiciones de un conjunto de Hintikka. Con esto concluye la demostración. □

Hay algunas formas especialmente útiles del teorema de compacidad, como la que propondremos a continuación. Sabemos que una fbf. c se deduce de un conjunto de fbf.s M si existen finitas fbf.s a_1, ..., a_n que pertenecen a M tales que la fbf. $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \rightarrow c$ es una tautología. O lo que es equivalente, que c se deduce de M, si $\neg c$ es incompatible con M o, lo que es lo mismo por la definición de conjunto inconsistente[48], si $\neg c$ es incompatible con algún subconjunto finito de M.

[48] Recordemos que un conjunto M es inconsistente, si al menos alguno de sus subconjuntos es inconsistente o insatisfacible.

T.3.16. Teorema de compacidad (segunda forma). *Si c es verdadero en todas las valuaciones booleanas* i *que satisfacen a* M, *entonces c se deduce de* M.

Dem. Sea insatisfacible por hipótesis $M \cup \{\neg c\}$. Entonces por el llamado primer teorema de compacidad T.3.11.[49], algún subconjunto finito M_0 de $M \cup \{\neg c\}$ es insatisfacible. Sean $a_1, \ldots, a_n$, los elementos de M_0 distintos de $\neg c$, si es que $\neg c \in M_0$. Entonces $\{ a_1, \ldots, a_n, \neg c\}$ es insatisfacible y por lo tanto $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \rightarrow c$ es una tautología. □

[49] Γ es satisfacible syss, para cada subconjunto finito $\Delta \subset \Gamma$, Δ es satisfacible. (Ésta se suele llamar la primera forma del teorema de compacidad.)

SEGUNDA PARTE.
LÓGICA DE REGLAS: DEDUCCIÓN NATURAL Y CÁLCULOS SECUENCIALES.

CAPÍTULO 4.
DEDUCCIÓN NATURAL.

4.1. Antecedentes históricos.

Los cálculos de "deducción natural" son una forma de presentación y desarrollo de las teorías lógicas. Se trata de un tipo de "lógica de reglas", presentación que no era nueva en la historia de la disciplina, pero que cayó parcialmente en desuso cuando se puso de moda la presentación axiomática en la segunda mitad del siglo XIX. Desde los primeros tratados de la lógica que hoy llamamos 'lógica simbólica' y hasta bien entrado el siglo XX su elaboración y presentación fue preponderantemente axiomática, por la influencia de autores tales como Gottlob Frege y Giuseppe Peano en el s. XIX, y Alfred North Whitehead, Bertrand Russell, y muy especialmente David Hilbert y su escuela de formalismo finitista, y Jan Łukasiewicz y la escuela polaca, con sus axiomáticas especiales para lógicas polivalentes, en el siglo XX. Los años treinta del siglo XX se constituyeron en un momento de inflexión en esta cuestión, con la aparición en la lógica matemática de los cálculos lógicos de reglas.

Aristóteles concibió a la ciencia en general, y a su silogística en particular, como un sistema axiomático en un sentido que hoy llamaríamos analítico, es decir un método que procede de las consecuencias a los principios. Por su parte Euclides de Tiro (*365?-†275?)[50], según una opinión habitual acerca de su obra,

[50] No son seguras las fechas de su nacimiento y muerte. Lo que sí es seguro, es que vivió entre los tiempos de Platón (*427- †347) y Arquímedes (*287-†212). Proclo ubica su actividad más importante en los años del reino de Ptolomeo I (*323-†283) y relata la famosa anécdota de que dicho rey le habría preguntado a Euclides si no

presentó la primera exposición histórica conocida de sistema axiomático de la geometría y la aritmética griegas, en un sentido que llamaríamos sintético, es decir como método que procede de los principios a las consecuencias.[51] La diferencia cualitativa entre la arquitectura axiomática y la de los sistemas de reglas para las teorías fue descripta muy elegantemente por Gisbert Hasenjaeger: "Los enunciados son en cierta medida reglas 'congeladas' y las reglas enunciados 'derretidos'."[52] El primer ejemplo histórico establecido de una lógica construida como sistema de reglas fue el de los estoicos, y el segundo el de lógicos escolásticos. En el siglo XX renació esta forma de construir la lógica merced a dos trabajos independientes, el primero el del lógico polaco Stephan Jaśkowski, en el año 1934, y el segundo el del lógico alemán Gerhard Gentzen, en los años 1934-5.[53] Tal coincidencia temporal no es fortuita. La cuestión, como se suele decir, "estaba en el ambiente", pues es posible encontrar antecedentes en Paul Herz (1922-3)[54] y Jacques Herbrand (1930)[55] para Gentzen, y en Łukasiewicz (1926) para

---

existía un camino más breve para aprender Geometría que sus Elementos, a lo que nuestro sabio habría contestado: "*Majestad, en geometría no hay caminos reales*" (esta anécdota también se atribuye a otros sabios de la antigüedad).

[51] Para una interpretación diferente ver LORENZEN 1987, p. 194.

[52] "*Sätze sind gewissermaßen 'eingefrorene' Regeln und Regeln sind 'aufgetaute' Sätze*", en HASENJAEGER 1962, p. 78. (En la traducción española de Manuel Sacristán, *Introducción a los conceptos fundamentales y los problemas de la lógica moderna*, p. 73, hay una versión no literal diferente a la nuestra.)

[53] JAŚKOWSKI, Stephan, *Studia logica* 1 (1934), 5-32, Varsovia (reproducido por MCCALL 1967, 232-258, "On the rules of suppositions in formal logic") y GENTZEN 1934-1935 (reproducido por BERKA-KREISER 1986, 206-262).

[54] "Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme", *Mathematische Annalen* 87 (1922), 246-269, 89 (1923), 76-102 y 101 (1929), 457-514.

[55] HERBRAND, Jacques (1930) : *Recherches sur la théorie de la démonstration*, tesis, Université de Paris 1930 (y en Travaux Soc. des Sci. et L. de Varsovia). Online en inglés: *Investigations in proof theory: the properties of true dispositions*, 1930. También en Jean Van Heijenoort (ed.) *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, 1967, p. 525.

Jaśkowski.[56] Los cálculos de deducción natural son *formalizaciones del usual proceso de deducción a partir de hipótesis, premisas o supuestos*. En su forma general se trata de "*cálculos a partir de supuestos*" (en alemán *Annahmenkalküle*) y en una de sus formas particulares son cálculos que demuestran (teoremas) mediante la "eliminación", "descarga" o "cancelación" de supuestos en el transcurso de la demostración. Dicha cancelación se señala, según el sistema, mediante diversos tipos de marcas. Esta forma de demostrar teoremas con introducción y descarga de hipótesis es la que, según Gentzen, corresponde al concluir natural, efectivo o real en matemáticas: "Queremos redactar un formalismo que reproduzca tan exactamente como sea posible el concluir lógico real en las demostraciones matemáticas".[57] Como es habitual, en esta exposición presentamos su forma general. Estos "*cálculos a partir de supuestos*" comienzan con conjuntos de fbf.s de un lenguaje, que son los supuestos, de los que se obtiene mediante reglas una nueva fórmula, que es la conclusión. El desarrollo de una deducción "natural" en los sistemas del tipo Gentzen tienen forma de "árbol genealógico", lo que se aparta algo de la forma habitual del concluir real, pues:

(1) En el concluir real se da una sucesión necesariamente bien ordenada y finita de las fbf.s, basada en la temporalidad (unidimensional) del pensamiento.

---

[56] Los primeros resultados de Jaśkowski son anteriores a los de Gentzen, pues se remontan al menos a exposiciones sostenidas en 1926 en el seminario de Łukasiewicz, cuyos resultados fueron presentados en el primer congreso polaco de matemáticas de 1927 (cuyas actas se publicaron en 1929), según lo indican JAŚKOWSKI 1934 en MCCALL 1967, 232, n. 1 y KNEALE y KNEALE 1962, 539, n. 1. Véase también BOBENRIETH 1996, 149, n. 1. Los Kneale también recuerdan en el pasaje citado que las presentaciones habituales de los sistemas de deducción natural siguen el estilo de Jaśkowski antes que el de Gentzen.

[57] GENTZEN 1934-5, 183: "*Wir wollen einen Formalismus aufstellen, der möglichst genau das wirkliche logische Schließen bei mathematischen Beweisen wiedergibt.*"

(2) Es usual utilizar varias veces un resultado ya deducido, mientras que el "árbol genealógico" sólo permite la utilización por única vez de una fbf. deducida en una rama.

Jaśkowski realiza un desarrollo semejante al de Gentzen en su "cálculo de suposiciones", que se sirve de demostraciones subordinadas, en las cuales deducciones parciales completas – juntamente con sus supuestos – pueden hacer las veces de premisas de reglas de deducción.

Gentzen presenta dos "cálculos de deducción natural" (que llama *Kalküle des natürlichen Schließens*), el *NJ* (intuicionista) y el *NK* (clásico), que nosotros abreviaremos con *DNI* y *DNC* respectivamente. Estos cálculos pretendieron aproximar la deducción lógica a la forma en que ésta acontece usualmente en la actividad matemática. Posteriormente esta aproximación requirió reformas que dieron lugar al desarrollo de los correspondientes "cálculos de secuencias" o "cálculos secuenciales" (en alemán *Sequenzenkalküle*) *LJ* y *LK*, que comenzaremos a considerar en el capítulo próximo. Todo el esfuerzo de Gentzen se proponía demostrar la consistencia de la axiomática de Peano para la aritmética de los números naturales.[58] Gentzen realizó esta tarea sólo a medias en su trabajo de 1934-5, pues allí sólo alcanzó a demostrar de manera irreprochable la consistencia de la axiomatización de la aritmética de Peano *sin el axioma de inducción finita*.[59] La demostración de la consistencia de la aritmética de Peano con ese axioma de inducción fue presentada en GENTZEN 1936, y en GENTZEN 1938. No obstante ello, su trabajo de 1934-5 es uno de los más importantes de la lógica del s. XX y de todos los tiempos.

---

[58] Cf. PEANO 1889 y PEANO 1891. En este último trabajo formula sus axiomas para los enteros positivos.

[59] Ese intento de demostración no es en cambio irreprochable, pues tiene un paso de inducción transfinita que algunos autores discuten. Una versión que evita la peculiar inducción transfinita presente en el trabajo de Gentzen de 1936 y 1938 se encuentra en LORENZEN 1969. Véase también KLEENE 1952.

Las lógicas de reglas, como son entre otras[60] los cálculos de deducción natural, difieren de los cálculos axiomáticos, de los cálculos secuenciales y de otros, por carecer de axiomas. La *base primitiva* de su lenguaje consta de un alfabeto de signos primitivos, con variables, parámetros y signos de puntuación, que aquí serán los paréntesis, redondos '(', ')' – aunque para facilitar la lectura en ocasiones usaremos también corchetes '[', ']' y llaves '{', '}' –, reglas de formación y una lista inicial de reglas de deducción llamadas 'reglas primitivas'. Las reglas de deducción son de dos tipos:

(1) *Instrucciones* (o *normas*) *para producir una nueva* fbf., llamada *conclusión*, a partir de una o más fbf.s, llamada(s) *hipótesis*, *premisa*(*s*), *supuesto*(*s*), o bien

(2) *Instrucciones para producir una nueva regla de deducción* a partir de una o más reglas de deducción previamente admitidas.

Las reglas de la primera especie se denominan '*reglas directas*' (que abreviamos *Rd*), las de la segunda '*reglas subsidiarias*' (que abreviamos *Rs*). Obviamente las subsidiarias son "metareglas", pues permiten derivar nuevas reglas a partir de reglas ya dadas.

Las reglas subsidiarias *Rs* nos permitirán *reducir* el número de premisas. Si el número de las premisas es finito, como ocurre en la mayoría de los casos, podremos obtener, como última expresión de un desarrollo, una fórmula que se derive de una *lista* de cero premisas (o, como suele decirse, del "conjunto vacío" o de la "clase vacía" de premisas ∅). Dichas expresiones se denominarán entonces 'teoremas' ('tesis' o 'leyes') del cálculo.

---

[60] Otros ejemplos son los "*tableux semantiques*" de Beth, los "*analytic tableux*" de SMULLYAN 1968, que consideramos más arriba, y los "*logische Dialogspiele*" (juegos de diálogos lógicos) de LORENZEN 1959, que consideraremos en la última parte de este trabajo.

En las siguientes versiones de sistemas de deducción natural para la lógica de primer orden utilizaremos una notación lógica del estilo de la notación de Hilbert y Ackermann, con algunas modificaciones debidas a Lorenzen y autores más contemporáneos, aunque ciertas limitaciones tipográficas nos son impuestas por la costumbre.

Es habitual, desde Gentzen, presentar a los cálculos de deducción natural como "*semiformalismos*"[61], en los que la notación distingue entre '*variables propias*' (*Eigenvariablen*), que son las variables de individuo libres, que muchos llaman '*parámetros*', y las '*variables de individuo ligadas*', llamadas a veces simplemente '*variables*'. Aquí haremos uso de esa distinción entre 'variables libres' (o 'parámetros') y 'variables propias', pues facilita la deducción, aunque algunos puedan considerar que conspira contra la "pureza" lógica del sistema. Más "puro" sería un sistema cuya notación no hiciera esa diferencia y sólo utilizara variables, es decir un "*formalismo pleno*"[62]. Una ventaja de la notación de los semiformalismos es que la diferente notación de las apariciones de parámetros – o apariciones libres de variables de individuo – y de variables ligadas permite simplificar las restricciones que se imponen a las reglas de introducción y eliminación de cuantores.

[61] Es decir '*Halbformalismus*' o '*semi-formal system*' es un sistema de reglas para la generación de fbf.s en el que al menos una regla puede contener infinitas premisas. En el caso de los sistemas de deducción natural las reglas (E⋁) de eliminación del cuantor existencial y (I⋀) de introducción del cuantor universal son de tal tipo, pues el dominio de variación de las variables propias suele ser infinito. En estas reglas el paso finitista de las hipótesis a la conclusión requiere estrictamente una consideración metalingüística por la que se disponga que un predicado específico aplique a cada elemento del dominio de variación, o por la que se demuestre una regla de inducción sobre ese dominio.

[62] La noción de 'parámetro' ha sido ambigua. Así por ejemplo Kleene afirma que "*Sometimes symbols which are constant throughout an important subcontext, but variable for the theory as a whole, are called "parameters" or "arbitrary constants".*" (KLEENE 1952, 150).

Por simplicidad el tratamiento será metalingüístico, lo que evitará el uso de engorrosas operaciones de substitución de variables proposicionales o de letras predicativas por fbf.s complejas adecuadas, pues, dada una expresión metalingüística de una fbf., podremos hacer uso de lo que denominamos sus "variantes" – esto es, fbf.s que tienen su mismo esquema formal[63] – sin utilizar ninguna regla de substitución. De todos modos en algunas ocasiones, cuando su ausencia dificulte la comprensión, indicaremos las substituciones que producen las variantes a partir de las formas generales de las reglas o tesis del caso. Las letras mayúsculas itálicas A, B, C, ... serán letras metalingüísticas que designen fbf.s cualesquiera y las mayúsculas griegas Γ, Δ, Π, Θ, Σ, etc. letras metalingüísticas que designen "sistemas" o "listas" *finitas o infinitas*[64], o incluso vacías, de fbf.s. En ocasiones indicaremos con un número natural n como subíndice cuántas fbf.s tiene una lista Γ_n. Así p. ej. $\Gamma_n = A_1, A_2, ..., A_n$. En esos casos se trata de listas finitas de fbf.s. Cuando queramos resaltar que en una fbf. A aparece (al menos una vez) un término de individuo t (variable propia o ligada) escribiremos $A(t)$. Del mismo modo escribiremos $A(B)$ para indicar que en una fbf. A aparece como subfórmula al menos una vez la fbf. B y $\Gamma(A)$ para indicar que en la lista de fbf. Γ aparece al menos una vez la fbf. A.

De acuerdo con la caracterización que hace Gentzen, la deducción en un cálculo de deducción natural "*consiste de fórmulas ordenadas como árbol genealógico*."[65] La reglas de deducción primitivas de un cálculo tal se presentarán

---

[63] Este método de usar "esquemas de fórmulas" en lugar de fórmulas parece ser originario de Johann VON NEUMANN, quien ya lo empleó en 1927 al utilizar esquemas de axiomas (cf. VON NEUMANN, "Zur Hilbertschen Beweistheorie", *Mathematische Zeitschrift* 26 (1927), 1-46.

[64] Los conjuntos finitos se construyen por abstracción a partir de "listas" de constantes. Ver LORENZEN 1987, 167-168. En tal texto "listas" infinitas carecerían de sentido. Aquí las usamos en sentido figurado o no constructivo.

[65] GENTZEN 1934-5, 184: "*Eine NJ-Herleitung besteht aus Formeln in stammbaumförmiger Anordnung*".

entonces de esa manera arbórea, que se prefiere por sus ventajas didácticas para la comprensión de las reglas, aunque la versión no arbórea, sino lineal vertical sea más usual en los manuales por su utilidad al momento de deducir. En la presentación de un árbol genealógico utilizaremos el signo metalingüístico de deducción de Frege (llamado "*Urteilsstrich*" o "trazo de juicio") '$\vdash$', que leemos 'de las expresiones a la izquierda de '$\vdash$' se deduce la expresión a la derecha de '$\vdash$''. A la izquierda de dicho signo aparece una colección o lista (Γ, o Δ, o Π, o Θ, o Σ, etc.) de expresiones del lenguaje, llamadas *hipótesis*, *premisas* o *supuestos*, y a la derecha aparece una y sólo una fbf. (A, o B, o C, etc.) del mismo lenguaje, llamada *conclusión*. Dichas listas de premisas pueden ser vacías o no vacías y, en este último caso, finitas o infinitas. Como ya lo advirtiéramos la longitud de la sucesión se puede indicar con un subíndice, como por ejemplo Γ_n en el caso de una sucesión finita de premisas. La forma general de una regla "directa" *Rd* será $\Gamma \vdash C$, donde Γ es una lista de premisas (generalmente no vacía) y C es la fbf. llamada conclusión.

4.2. Algunas definiciones.

En caso de que Γ sea una lista no vacía de premisas, tendremos una *deducción hipotética* de la conclusión C a partir de Γ. En cambio, si la lista Γ es vacía, es decir si obtenemos la deducción $\varnothing \vdash C$ (que abreviamos $\vdash C$) tendremos una *demostración* o *prueba* de la fbf. C, que entonces llamaremos '*teorema*' ('*tesis*', o '*ley*'), como lo precisan las siguientes definiciones que describen nuestra práctica convencional de deducción en estos cálculos:

D.4.1. Una *deducción D* del cálculo *DN* es una ordenación de fbf.s en forma de árbol genealógico, a partir de una lista de fbf.s Γ de un lenguaje $\mathcal{L}$, llamadas hipótesis, premisas o supuestos, conforme a reglas de deducción, que produce una nueva fbf. C del mismo lenguaje, llamada conclusión.

Esta definición sigue la línea dada por GENTZEN 1934-5, 184, pero puesto que muchos de los sistemas de deducción natural se presentan linealmente, podemos admitir también una variante como la siguiente:

D.4.1'. Una *deducción* D del cálculo DN es una sucesión finita de fórmulas o "pasos", a partir de una lista de fbf.s Γ de un lenguaje $\mathcal{L}$, llamadas hipótesis, premisas o supuestos, conforme a reglas de deducción, que produce una nueva fbf. C del mismo lenguaje, llamada conclusión. Esto lo simbolizamos horizontalmente:

$A_1, A_2, ..., A_m, ..., A_n,$

es decir, como sucesión de n fbf.s, donde A_n es C, o bien verticalmente:

$$\begin{array}{l} A_1, \\ A_2, \\ \vdots \\ A_m, \\ \vdots \\ A_n, \end{array}$$

en la que A_n es la conclusión C. En esta presentación vertical se suele separar con una barra horizontal la conclusión de sus premisas y las consecuencias anteriores.

Una deducción directa se puede abreviar de la siguiente manera:

$\Gamma \vdash C,$

donde Γ es la lista de premisas y C la conclusión: aquí se prescinde de los pasos intermedios entre las premisas y la conclusión. Si la lista de premisas es finita (es decir, si $\Gamma = \Gamma_m = H_1, H_2, ..., H_m$), entonces podemos escribir:

$H_1, H_2, ..., H_m \vdash C$

Si m es el número de premisas y n es el número de fbf.s. de la deducción, entonces $m < n$. La *longitud* de una deducción mide el número n de fbf.s. que ésta contiene, es decir $n = m + p$, donde m es el número de premisas y p el número de fbf.s deducidas que se obtienen de las premisas mediante aplicación de reglas de deducción.[66] Por simplicidad identificamos el número *n* de fbf.s de una deducción con su longitud o "número de pasos". Cuando necesitemos indicar la longitud o número de pasos de la deducción lo haremos mediante un subíndice *n* colocado luego del signo de deducción: $\Gamma \vdash_n C$.

D.4.2. *Deducción inmediata* es una deducción *D* que resulta de una sola aplicación de una regla de deducción *R* a las premisas. Es decir, si el número de premisas fuese *m*, la longitud o número de pasos de una deducción inmediata sería $n = m+1$.

D.4.3. Una *demostración* o *prueba P* es una deducción *D* a partir de una lista vacía de premisas o hipótesis: $\vdash C$. (Podemos decir que una demostración o prueba *P* nos proporciona una "regla (derivada) con un número vacío de premisas".)

D.4.4. Una *deducción hipotética* es una deducción *D* a partir de una lista no vacía de premisas o hipótesis: $\Gamma \vdash C$, con $\Gamma \neq \varnothing$.

Es inmediato por construcción que una demostración o una deducción hipotética siempre tendrá una longitud o número de pasos entero positivo.

D.4.5. *Ley, teorema* o *tesis T* es la fórmula conclusión *C* de una demostración o prueba *P*.

No todas las deducciones serán demostraciones o pruebas: si **D** fuese la "clase" de las deducciones *D* realizadas conforme a las reglas de deducción del cálculo y **P** la de las demostraciones o "pruebas" *P* obtenidas de la misma manera, entonces: $\mathbf{P} \subset \mathbf{D}$ (donde $\subset$ es el signo de inclusión estricta) es un metateorema inmediato.

[66] Es número *m* de premisas puede ser finito o infinito, en cambio el número *p* de pasos es necesariamente finito, como se demostrará adelante, pero aquí sólo consideramos un número finito de premisas. Si fuese necesario indicar un número infinito de premisas convendría emplear su correspondiente ordinal transfinito, como haremos.

Y si **T** fuese la clase de las conclusiones de las demostraciones o pruebas en **P** (es decir, **T** fuese la clase de los teoremas) y **C** la clase de las conclusiones de las deducciones **D**, entonces tenemos inmediatamente que

$\mathbf{T} \subset \mathbf{C}$.

(1) Cuando la deducción *D* es una *demostración P*, su conclusión *C* será una ley, teorema o tesis *T*, y

(2) si la deducción *D* no es una demostración, entonces *D* será una *regla derivada*, que abreviamos *Rd*, y su conclusión *C* será una *conclusión hipotética*. En símbolos:

(1) $D \in \mathbf{P} \Rightarrow (C$ es conclusión de $D \Rightarrow C \in \mathbf{T})$,

(2) $D \in (\mathbf{D}\text{-}\mathbf{P}) \Rightarrow (C$ es conclusión de $D \Rightarrow C \in (\mathbf{C}\text{-}\mathbf{T}))$.[67]

Para facilitar la lectura de las deducciones que nos servirán de ejemplos utilizaremos los recursos de notación usuales en la literatura.[68]

Entre las reglas iniciales o *primitivas* (que abreviamos *Rp*) de un cálculo de deducción natural de primer orden *DN*, se distingue, por una parte, entre *reglas de introducción* y *reglas de eliminación* del operador lógico del caso y, por la otra, como señaláramos más arriba, entre *reglas directas Rd* y *subsidiarias Rs*. Las *reglas directas* constan de una sola regla de deducción y *no* "*descargan*" o "*cancelan*" *premisas*; las reglas *subsidiarias* en cambio constan de una o más deducciones previamente admitidas de las cuales se deduce como conclusión otra deducción, y *permiten descargar o cancelar premisas*. Para indicar en un desarrollo que la regla inferior se deduce de la(s) superior(es) emplearemos la convención de usar trazos horizontales simples entre ellas. Para indicar que la

[67] El signo '⇒' es el implicador filónico *metalingüístico* (y en otros capítulos el signo de regla). Cuando sean posibles confusiones distinguiremos, como en este caso, entre operadores del lenguaje objeto y operadores metalingüísticos. Cuando no existan tales riesgos, simplificaremos nuestra notación restringiéndonos a la notación para operadores lógicos del lenguaje objeto.

[68] Estos recursos suelen denominarse 'análisis de una deducción'. Cf. KLEENE 1952, 87: "*an analysis of a deduction consists of the explanations employed to justify each occurrence of a formula in it.*"

deducción ocurre en ambos sentidos, de arriba abajo y viceversa, usaremos trazos dobles.

Las reglas de deducción se pueden presentar de varias maneras, con diferentes grados de facilidad para su comprensión. Nosotros preferimos una versión que nos parece la más intuitiva para comprender las reglas, aunque luego, en la práctica deductiva podamos utilizar otras versiones más breves. En las reglas de deducción subsidiarias, tanto las expresiones superiores cuanto la inferior designarán reglas de deducción. En todas las *presentaciones* de reglas que utilizaremos tendremos letras griegas mayúsculas Γ, Δ, ..., para listas de premisas y letras mayúsculas itálicas *A*, *B*, ..., para premisas y conclusiones de cualquier grado lógico. Para fbf.s elementales, o de grado lógico cero, utilizaremos letras itálicas minúsculas *a*, *b*, ... Cuando se quiera indicar verticalmente que una fbf. o una regla inferior es conclusión de otras fbf.s o de otras reglas superiores, se lo hará mediante un horizontal.

Como recordáramos, el desarrollo de una deducción "natural" en la presentación de Gentzen es esencialmente *arbórea*, pero en la práctica deductiva muchos autores prefieren, por simplicidad, transformar esos árboles con ramificaciones esquemáticas finitas en sucesiones lineales. De lo anterior debe resultar claro que en cualquier presentación de una deducción, sea arbórea, u horizontal o vertical, toda fbf. o regla que resulte de la aplicación de alguna regla de deducción es una conclusión. La distinción entre 'conclusión provisional' y 'conclusión definitiva' es pues sólo una *distinción pragmática* para nosotros, que diferencia entre la fbf. o regla *que nos hemos propuesto deducir* (o "conclusión buscada") y los pasos intermedios previamente deducidos que conducen a ella (o "conclusiones intermedias").

4.3. Algunas condiciones de posibilidad pragmáticas.

Los metateoremas siguientes se utilizan a veces inadvertidamente en el desarrollo de los cálculos lógicos. Ellos se fundamentan en ciertas condiciones que deben cumplir las acciones que se necesitan para producir una deducción, es decir, condiciones *pragmáticas trascendentales*, es decir *a priori* de la materia de la demostración. Son condiciones necesarias para todo cálculo lógico, condiciones sin las cuales no puede existir una deducción o demostración. Puesto que la demostración de esas condiciones pragmáticas trascendentales – algunas de ellas triviales – consiste en mostrar al lector su necesidad, la denominaremos simplemente "*fundamento*". La abreviatura que damos para 'metateorema #' será 'MT#.'.

MT4.1. (*Longitud no nula de una deducción.*) El número de pasos p de una deducción es un número natural mayor que cero ($p \in \mathbb{N} \wedge 0 < p$).

Fundamento. La práctica de deducir consiste en obtener una conclusión. Esto puede ocurrir de dos maneras:
(1) o bien a partir de al menos una premisa mediante al menos una regla de deducción ya admitida en el cálculo,
(2) o bien mediante la escritura de al menos una fbf., cuando ésta ya es una conclusión del cálculo (por ejemplo cuando es un axioma en un sistema que los tiene, o es un teorema ya demostrado en un cálculo como los de deducción natural, para los que una regla muchas veces tácita admite que puedan ser aseverados en cualquier desarrollo sin requerir una justificación).

Esto implica que toda deducción consiste de al menos una fbf. Como vimos en la D.4.3. de arriba el número de fbf.s de una deducción es su longitud o número de pasos p, es decir $p \in \mathbb{N} \wedge 0 < p$. □

MT4.2. (*Finitud del número de premisas de toda regla de deducción*) Toda regla de deducción (primitiva o derivada) de un cálculo de deducción natural tiene, al menos en su metalenguaje, un número natural de premisas: e. d. si m es el número de premisas de la regla de deducción, entonces $m \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq m$.[69]

Fundamento. El uso de una regla de deducción agrega un paso a la deducción, que es su conclusión *C*. Pero una conclusión *C* en un cálculo de deducción natural se obtiene, por la arquitectura del cálculo, a partir de fbf.s previamente dadas, y
(1) depende de al menos una premisa, si se trata de varias reglas primitivas (como se observará en la lista de las reglas directas que daremos más adelante) o de algunas reglas derivadas, o
(2) cancela una premisa anterior, si se trata de las restantes reglas primitivas subsidiarias u otras reglas derivadas, lo que disminuye el número entero positivo de premisas del caso, llevándolo en el caso límite a 0. Con esto se muestra trivialmente que $0 \leq m$.

Además el número de premisas no puede ser infinito, al menos en el metalenguaje, pues el *uso* de cualquier regla de deducción consiste en
(3) *recorrer* las premisas, o al menos sus esquemas y
(4) *reconocer* si entre éstas se encuentran las que tienen las formas lógicas requeridas para fundar la conclusión. Si el número de premisas de una regla en el metalenguaje fuera infinito no podríamos cumplir ni siquiera con la condición (3) de recorrer las premisas, por lo que tampoco podríamos reconocer aquellas que tienen las formas lógicas requeridas para fundar la conclusión. Con esto se advierte que es una condición de posibilidad pragmática que el número de premisas sea un número natural. □

---

[69] Puesto que estos cálculos y muchos otros son semiformalismos, es decir cálculos que contienen al menos una regla con infinitas premisas, la condición de finitud no se cumple en el lenguaje objeto del cálculo, sino el metalenguaje en el que esquemáticamente se maneja de manera finita la potencial infinitud de las reglas del cálculo.

NB. Este metateorema MT4.2. no elimina la diferencia entre reglas y teoremas, pero sí establece que estos últimos pueden ser considerados como reglas con cero premisas.

Conforme a MT4.1. el número mínimo de pasos de una deducción es 1, pero no hay número máximo de pasos, es decir, la longitud de una deducción no está acotada. Sin embargo, aunque su longitud no tenga cota superior, una deducción no puede constar de infinitas aplicaciones de reglas de deducción (aunque admitiremos en los semiformalismos que se deduzca una conclusión a partir de un número infinito de premisas, pero ello no ocurrirá en el metalenguaje de los cálculos que consideramos), como lo muestra el siguiente metateorema:

MT4.3. (*Finitud del número de uso de reglas en una deducción.*) Una deducción es construible cuando la conclusión C se obtiene de las premisas Γ mediante la aplicación de las reglas de deducción admisibles previamente establecidas. Sea una deducción construible $\Gamma\vdash C$ en la cual se han usado p reglas. Entonces $p\in\mathbb{N}$.

Fundamento. Supongamos que $0 < p$ y $p\notin\mathbb{N}$, es decir p debería ser un número ordinal transfinito. Eso significaría que la conclusión C se ha alcanzado luego de un número p infinito de aplicaciones de reglas de deducción. Pero una deducción con un número infinito actual de pasos no es construible (al menos para un entendimiento finito, como es el humano), puesto que todas las tareas que podemos realizar, incluidas las deducciones, son tareas finitas. De modo que si el número de usos de reglas de deducción p es infinito, entonces la deducción de C no es completable. Por lo tanto, si la deducción de C es completable – como lo es por hipótesis –, entonces p es un número finito de usos de reglas ($p\in\mathbb{N}$). □

MT4.4. (*Debilitamiento o monotonía.*[70]) Si $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\Gamma \vdash C$, entonces $\Delta \vdash C$.

Fundamento. Puesto que $\Gamma \subseteq \Delta$, tenemos dos casos, el segundo de los cuales también tiene dos subcasos:

(1) $\Gamma = \Delta$. Este caso es trivial, pues $\Gamma \vdash C$ es idéntico a $\Delta \vdash C$.
(2) $\Gamma \subset \Delta$ y sea $\Delta - \Gamma = \alpha \neq \varnothing$. Para α hay entonces dos posibilidades:

(2.1) $\Delta - \Gamma$ es un conjunto *finito* (es decir: $\varnothing \neq \Delta - \Gamma = \alpha \in \mathbb{N}$), o

(2.2) $\Delta - \Gamma$ es un conjunto *infinito* (es decir: $\varnothing \neq \Delta - \Gamma = \alpha \notin \mathbb{N}$).

El subcaso más general, que comprende al otro, es el segundo, que por lo tanto será el único que consideraremos. Si hemos podido establecer constructivamente que $\Gamma \subset \Delta$, eso implica que poseemos un algoritmo para encontrar en Δ cada fbf. H que pertenece a Γ. Entonces sabemos trivialmente, para toda premisa H, que si $H \in \Gamma$, entonces $H \in \Delta$. Y puesto que de las $H \in \Gamma$ se deduce C, entonces de las $H \in \Delta$ también se deduce C. □

NB. Este metateorema permite el "debilitamiento a la izquierda" o del lado de las premisas, regla estructural que no se admite en ciertos cálculos, por algunas de sus consecuencias a veces discutibles. MT4.4. nos señala, en virtud de su carácter pragmático constructivo, que es mejor recurrir a otras restricciones que a la prohibición de este debilitamiento a la izquierda.

MT4.5. (*Finitud del número de premisas para una deducción.*) $\Delta \vdash C$ si y sólo si existe un subconjunto finito $\Gamma \subseteq \Delta$, tal que $\Gamma \vdash C$ (en el caso de un semiformalismo la finitud se satisface con el esquema de premisas que se usa en el metalenguaje).

[70] La expresión "debilitamiento" es la traducción que se ha dado en español a la expresión alemana "*Verdünnung*", o sea "adelgazamiento". En los trabajos escritos en inglés se la tradujo con "*thinning*", que equivale al original alemán. Sin embargo la traducción española es muy atinada.

Fundamento. Puesto que se trata de una condición necesaria y suficiente debemos considerar dos implicaciones que nos dan los dos casos siguientes:

(1) Si $\Gamma \subseteq \Delta$, Γ es finito y $\Gamma \vdash C$, por MT4.4., entonces $\Delta \vdash C$.

(2) Si $\Delta \vdash C$, entonces existe un subconjunto finito $\Gamma \subseteq \Delta$, tal que $\Gamma \vdash C$, pues, por MT4.3. el número de usos de reglas de deducción p de toda deducción es finito, pero además por MT4.2. cada regla de deducción (primitiva o derivada) tiene como premisas un número finito de fbf.s – digamos que su máximo sea m. Por lo tanto el número de premisas necesarias para deducir C a partir de Δ será $\leq pm$, que es un número finito. Por lo tanto existe al menos un conjunto finito Γ tal que $\Gamma \vdash C$. □

MT4.3. y MT4.5. aseguran que toda deducción efectivamente construible consta, al menos en su esquema metalingüístico, de un número finito de pasos de deducción y no requiere sino un conjunto finito de premisas. Todo ello se funda en que la construcción de una deducción reposa sobre la *finalización de un proceso finito de aplicación de reglas de deducción*, cada una de las cuales sólo puede manipular un número finito de premisas. La fundamentación es entonces de carácter pragmático trascendental. Como corolario de los dos metateoremas anteriores podemos afirmar:

MT4.6. Toda deducción construible es equivalente a una deducción que consta de un número finito de fbf.s A_1, ... A_n, con $n \in \mathbb{N}$ y donde A_n es la conclusión C.

Fundamento. Por los metateoremas anteriores. Este es uno de los teoremas de finitud o compacidad considerados en el capítulo anterior. □

4.4. Reglas de deducción para el cálculo intuicionista de primer orden DNI.

Damos una presentación arbórea de las reglas primitivas de “introducción” y “eliminación” de Gentzen para *DNI*. En primer lugar de las constantes lógicas de la lógica de enunciados, a saber el implicador ‘→’, el conjuntor ‘∧’, el disyuntor inclusivo ‘∨’, el negador ‘¬’ y la constante proposicional ‘f’ (o ‘lo lógicamente falso’), y luego de la parte cuantorial de las lógicas de primer orden intuicionista o “efectiva” o “constructiva”, el cuantor universal ‘Λ’ y el cuantor existencial ‘V’:

Reglas de introducción — *Reglas de eliminación*

(I→) $\dfrac{\Gamma, [A] \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$

(E→) $\Gamma, A, A \to B \vdash B$

(I∧) $\Gamma, A, B \vdash A \wedge \mathrm{B}$

(E∧i) $\Gamma, A \wedge B \vdash A$

(E∧d) $\Gamma, A \wedge B \vdash B$

(I∨d) $\Gamma, A \vdash A \vee B$

(I∨i) $\Gamma, B \vdash A \vee B$

(E∨) $\dfrac{\Gamma, [A] \vdash C \,.,\, \Gamma, [B] \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C \quad .}$

(I¬) $\dfrac{\Gamma, [A] \vdash f}{\Gamma, \vdash \neg A}$

(E¬) $\Gamma, A, \neg A \vdash f$

(*f*) $f \vdash A$.[71]

(IΛ) $\Gamma, A(a) \vdash \Lambda x A(x)$
(1) si‘*a*’ no aparece en Γ
(2) ni en $\Lambda x A(x)$[72].

(EΛ) $\Gamma, \Lambda x A(x) \vdash A(a)$

---

[71] En un apéndice presentamos las reglas para la lógica clásica en la versión de Kleene. En cálculos más estrictos, como el cálculo mínimo de JOHANSSON, no se admite esta regla, como mostramos más abajo. La letra ‘*f*’ designa ‘lo lógicamente falso’. Cf. GENTZEN 1934-5, 186.

(IV)[73] $\Gamma, A(a) \vdash \mathsf{V}xA(x)$ (EV) $\dfrac{\Gamma, [A(a)] \vdash B}{\Gamma, \mathsf{V}xA(x) \vdash B}$
(1) si '*a*' no aparece en Γ,
(2) ni en $\mathsf{V}xA(x)$,
(3) ni en la conclusión *B*.

Las fbf.s entre corchetes indican que está permitido que fórmulas de esa forma aparezcan en cualquier cantidad de veces (también cero veces) como supuestos o premisas. En sentido estricto las reglas anteriores no son reglas de "introducción" y "eliminación" de constantes lógicas, sino de reglas en las que, en las llamadas de "introducción", la constante del caso aparece en la conclusión, en tanto que en las de "eliminación" la constante aparece como "premisa principal". Esto es importante tener en cuenta para entender algunas reglas.

Las *reglas directas* (*Rd*) constan de *una sola fila* y las *reglas subsidiarias* (*Rs*) constan de *dos filas*. Las reglas subsidiarias son *metareglas* que afirman que, *si existen una o dos deducciones correctas con las formas dadas en la fila superior*, *entonces también existe una deducción correcta con la forma dada en la fila inferior*, que es la que introduce o elimina en su conclusión la constante lógica de que trata la metaregla. Las supuestas deducciones superiores correctas son las reglas hipotéticas de la metaregla subsidiaria, cuya deducción inferior es la regla deducida. Hay dos reglas subsidiarias de introducción, (I→) y (I¬), y dos de eliminación, (E∨) y (EV), todas las cuales tienen la importante propiedad de que la

---

[72] Una segunda condición para (IΛ) y primera para (IV), que habitualmente reza "si '*x*' no aparece en *A*", no es aquí necesaria, porque las letras que representan variables ligadas y las que representan variables libres se reemplazan unas a otras en fbf.s distintas por la convención notacional de este semiformalismo.

[73] Este cuantor también suele llamarse '*cuantor unitario*' (*Einsquantor* en alemán), pues en realidad lo que realmente afirma es que existe en sentido fuerte (al menos) un objeto de la especie del caso.

deducción de la regla de la línea inferior tiene una premisa menos que la (o las) deducción(es) de la línea superior. Eso significa que estas cuatro reglas disminuyen el número de premisas de las que depende la conclusión de la deducción resultante o, como se dice técnicamente, 'cancelan' o 'descargan' premisas. Esta importante propiedad es la que permite obtener teoremas en un sistema de deducción natural.

En los cálculos de deducción natural no se dan en general reglas para la introducción y la eliminación de la *constante de equivalencia* (llamada también *bisubjuntor*, *biimplicador* o *coimplicador*), que es un operador lógico muy usado por corresponder a la "condición necesaria y suficiente", ni tampoco de su negación, o 'disyuntor exclusivo', ni las de la negación del conjuntor y de la del disyuntor inclusivo, que son respectivamente el operador de 'incompatibilidad' y el de 'negación conjunta', simbolizados por la "barra" de Sheffer y la "flecha" de Peirce. En rigor podríamos agregar reglas adicionales para esos operadores o constantes lógicas, pero eso no es necesario, pues nos basta agregar las muy conocidas definiciones[74] siguientes a partir de los cuatro operadores considerados arriba:

D.4.6. $A \leftrightarrow B \quad \risingdotseq \quad (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$,[75]

D.4.7. $A \mathrm{w} B \quad \risingdotseq \quad (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$,

D.4.8. $A \mid B \quad \risingdotseq \quad \neg(A \wedge B)$,

D.4.9. $A \downarrow B \quad \risingdotseq \quad \neg(A \vee B)$.

Como es bien sabido, en un cálculo clásico, tanto la barra de Sheffer como la flecha de Peirce, permiten definir la totalidad

---

74 Una definición funciona en un cálculo como una regla simétrica de deducción: si en una fila aparece el *definiendum*, permite escribir en una fila posterior el *definiens*, y viceversa.

75 Usamos la expresión $\risingdotseq$ como signo metalingüístico de definición. Puesto que las definiciones son, o bien identidades, o bien (meta)equivalencias, el signo ambiguo $\risingdotseq$ suple la posibilidad que corresponda.

de las constantes lógicas del cálculo clásico de enunciados. Esto ya no es posible en un cálculo intuicionista. Cada una de las reglas anteriores merece una breve explicación:

(I→) es la *regla de introducción del implicador* o *subjuntor*, que permite formar enunciados condicionales. La estructura de esta regla indica que se trata de una metaregla subsidiaria (*Rs*) que descarga o cancela una premisa, en nuestro caso A, la que pasa a formar parte, como antecedente, de la nueva conclusión $A \rightarrow B$, cuyo consecuente es a su vez la anterior conclusión provisoria B. Este operador *no supone ninguna conexión de sentido ni una conexión deductiva d i r e c t a entre la premisa cancelada o antecedente y la conclusión inicial o consecuente*, ni siquiera en los cálculos intuicionistas. Eso provoca la admisibilidad teórica de leyes y reglas de deducción que se suelen considerar paradojales en tales cálculos (y que son rechazadas por ejemplo en los cálculos de relevancia: en éstos la regla (I→) se debe modificar para asegurar la "relevancia" de la fbf. cancelada).

Otro nombre que recibe esta regla es el de *regla de condicionalización*. Como muchas otras reglas de deducción fue usada correcta, pero inadvertidamente – o como suele decirse, "intuitivamente" – en muchas oportunidades por lógicos y filósofos. Hay ejemplos de su uso ya en Aristóteles. Esa regla fue demostrada por primera vez en 1928 como metateorema dentro de un cálculo por el matemático francés Jacques Herbrand. En 1934 los matemáticos alemanes David Hilbert y Paul Bernays, olvidándose de Herbrand, lo bautizaron "teorema de la deducción", denominación que ha perdurado.[76] Eso fue una injusticia histórica, de la que dejamos nota. Sin embargo el nombre de Herbrand no se olvidará, por ser el autor del hoy considerado *teorema fundamental de la lógica de predicados*, que lleva su nombre. Hoy es frecuente usar la abreviatura '*TD*' o '*td*', por teorema de la deducción, para referirse a la regla (I→). En los cálculos de deducción natural se la considera una regla subsidiaria primitiva, es decir una *metaregla* inicial no

---

[4] Cf. HILBERT-BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, vol. I, p. 155.

demostrada.[77] La metaregla (I→) tiene una importante propiedad: puesto que A puede no aparecer en la regla superior, lo que se indica por los corchetes [...], entonces, la regla permite que de $\Gamma, \vdash B$ obtengamos $\Gamma \vdash A \rightarrow B$. Esta propiedad es muy fuerte, pues permite deducir, a partir de la regla de identidad $B \vdash B$, la primera de las paradojas de la implicación $B \vdash A \rightarrow B$, llamada *verum ex quolibet*.

(E→) es la *regla de eliminación del implicador*, más conocida por el nombre latino de *modus ponens* o *modus ponendo ponens* (*mp*)[78], Russell la denominó "*regla de separación*", puesto que lo que dice la regla es que, si se dispone de dos premisas, una de forma condicional $A \rightarrow B$ y la otra su antecedente A, entonces se puede *separar* como conclusión al consecuente B del enunciado condicional. Por ello en algunos textos se la abrevia '*sep*', por regla de separación.

(I∧) es la *regla de introducción del conjuntor*, que da el "producto lógico", o "conjunción". Muchas veces se la abrevia con '*conj*'.

(E∧) es la *regla de eliminación del conjuntor* (o de "simplificación", que se abrevia con '*simp*'). Tiene dos variantes: $E\wedge_i$ o "simplificación a la izquierda" y $E\wedge_d$ o "simplificación a la derecha". Cuando no dé lugar a confusión prescindiremos de los subíndices.

---

77 Como indicáramos más arriba la longitud de una deducción o demostración ***D*** se mide en *pasos*. Consideramos a los pasos de una deducción como su número de filas, que será siempre un número natural.

78 En la lógica tradicional escolástica el verbo latino '*pono*' significa 'propongo' o 'afirmo'. La expresión '*modus ponendo ponens*' puede ser traducida como 'que afirma con lo que ha de ser afirmado'. La expresión '*modus ponens*' es una abreviatura (el modo que afirma). De modo semejante se analizan las expresiones '*modus tollendo tollens*' y su abreviatura '*modus tollens*', en donde el verbo '*tollo*' se usa en su sentido de 'retirar' o 'negar'.

(I∨) es la *regla de introducción del disyuntor inclusivo* (o de "adición lógica", que podemos abreviar '*ad*'). Esta regla tiene también dos variantes: $I\vee_i$ o "adición a la izquierda" y $I\vee_d$ o "adición a la derecha", pero cuando no dé lugar a confusiones, como en (E∧), prescindiremos de los subíndices.

(E∨) es la que se suele llamar *regla de eliminación del disyuntor inclusivo*. Lo que afirma la metaregla es que, cuando $A\vee B$ es demostrable, entonces, si C es demostrable (aun si no lo fuera a partir de A o a partir de B), entonces es demostrable también a partir de $A\vee B$. La regla no exige que C se deduzca a partir de A o de B, lo que señalamos usando los corchetes $[A]$ y $[B]$, sino simplemente que C se deduzca.

La regla (E∨) no parece ser una regla de eliminación, por lo que parecería más adecuada la denominación más usual de regla de '*prueba por casos*', que se suele abreviar con '*cas*'. En alemán se llama 'distinción de casos': '*Fallunterscheidung*'. Sin embargo es fácil de advertir su carácter "eliminativo". Para ello recordemos que en las reglas de introducción la constante lógica del caso aparece en la conclusión de una regla y en las reglas de eliminación en las premisas de una regla. Y eso acontece en la regla (E∨): la disyunción aparece *entre las premisas* en la regla conclusión, pero no en la conclusión. Eso muestra que, aun en el caso en que no haya una disyunción previamente demostrada, *por aparecer la disyunción en las premisas y no aparecer en la conclusión de la regla derivada, se la puede considerar una regla de eliminación*. La regla (E∨) o *cas* se denomina también '*regla del dilema constructivo simple*'.

La regla (I¬) es la *regla de introducción del negador*, o de "reducción al absurdo" (en latín *reductio ad absurdum*), que abreviamos '*raa*'.[79] Es una de las formas del proceso de demostración indirecta más común en todas las ciencias demostrativas cuya lógica subyacente sea, o bien la lógica

---

[79] Al menos desde Aristóteles se la conoce también como *reductio ad impossibile*, traducción latina de la expresión griega aristotélica 'ἀπαγογή ἔις τὸ ἀδύνατον', v. *An. Pr.* 44, 50a29-38.

clásica, o alguna forma de lógica "constructiva" u "operativa".[80] Lo importante (y discutible) de la versión intuicionista de la metaregla (que es la que da Gentzen) es que admite incluso la siguiente versión simplificada en que A no aparece entre las premisas:

$$\frac{\Gamma \vdash f}{\Gamma \vdash \neg A}\ .$$

La regla (E¬) corresponde al principio fuerte de no contradicción: la aserción de dos enunciados contradictorios implica lo lógicamente falso. En el sistema *DNI* de Gentzen esto sería una consecuencia funcional de la reducción al absurdo.

El uso de las reglas '(E¬)' y (I¬)' permite deducir la versión débil – o de Johansson – de la segunda paradoja de la implicación, llamada también *ex falso sequitur quodlibet* (de lo falso se sigue lo que gustéis), como lo muestra la siguiente deducción:

1	$\underline{B, \neg B \vdash f}$	variante de (E¬): $\Gamma, A, \neg A \vdash f$
2	$\underline{B, \neg B \vdash \neg A}$	1, (I¬) (pues A puede faltar entre las premisas de (I¬)),
3	$\underline{B \vdash \neg B \rightarrow \neg A}$	2, (I→),
4	$\vdash B \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	3, (I→).

Éste teorema es el axioma característico del sistema mínimo de Johansson.[81]

La regla (f) es especial por dos motivos:
(1) introduce una asimetría en el sistema de reglas de *DNI* y
(2) no define una constante lógica, sino que determina el sentido en *DNI* de la expresión "es lo lógicamente falso" o constante enunciativa 'f', pues afirma que, *si se puede demostrar un enunciado lógicamente falso, entonces se puede demostrar todo enunciado*. La regla (f), una forma fuerte del *ex falso quodlibet*, no se deduce, como (E¬), de (I¬). El agregado de esta regla

[80] En general es una regla válida en los cálculos plenamente consistentes, que son los que utilizamos habitualmente.
[81] JOHANSSON 1936.

permite deducir otra forma clásica del *ex falso quodlibet*, como muestra el siguiente desarrollo:

1	$\underline{B, \neg B \vdash f}$	variante de (E¬),
2	$\underline{f \vdash A}$	(f),
3	$\underline{B, \neg B \vdash A}$	1, 2, transitividad de '⊢',
4	$\underline{B \vdash \neg B \rightarrow A}$	3, (I→),
5	$\vdash B \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$.	4, (I→)

La transitividad de '⊢' se demuestra como metateorema en el desarrollo de *DNI*. El sistema mínimo de Johansson carece de esta ley, por lo que constará a lo sumo de las doce reglas para constantes lógicas de arriba, pero carecerá de la regla (f).

Dos ejemplos antiguos de *raa* debidos a la escuela pitagórica en el s. VI a. C. son:
(1) la demostración de que no existe un número (entero positivo) que sea el mayor de todos los números primos. Hoy se suele expresar esto diciendo que "el conjunto de los números primos es infinito (de cardinalidad $\aleph_0$)", y
(2) la demostración de que la relación de los catetos y la hipotenusa de un triángulo (euclidiano plano) isósceles recto no es conmensurable, es decir no se puede expresar como una "razón" o proporción m/n de dos enteros positivos. Hoy se dice que "la $\sqrt{2}$ es irracional".

(E⋀) $\Gamma, \bigwedge x A(x) \vdash A(a)$ y (I⋁) $\Gamma, A(a) \vdash \bigvee x A(x)$ son reglas irrestrictas sin complicaciones, de modo que consideraremos las dos restantes:

(I⋀) $\Gamma, A(a) \vdash \bigwedge x A(x)$, si '$a$' no aparece ni en $\bigwedge x A(x)$ ni en Γ. Si a no aparece en Γ, es decir en ninguna premisa, significa que la variable a no está tomada de manera restringida, sino universal, por lo que la podemos cuantificar universalmente. La otra condición es obvia: si la variable a no fuera substituida en todas sus apariciones por x, se podría modificar la forma lógica de la expresión, lo que puede producir falsedades.

(E$\vee$) Γ, $[A(a)] \vdash B \Rightarrow \Gamma$, $\vee x A(x) \vdash B$, si a no aparece en Γ, ni en $\vee x A(x)$, ni en B. Supongamos que podemos defender $\vee x A(x)$ y además que podemos aseverar B, sea a partir de un cierto $A(a)$, sea con independencia de ello. Si B no contiene a, ni depende de ninguna premisa que contenga a, ni a aparece en $\vee x A(x)$, entonces podemos deducir B a partir de $\vee x A(x)$ y "cancelar" $A(a)$, en caso de que aparezca entre las premisas de la deducción subsidiaria inicial.

Hay muchas versiones de los cálculos de deducción natural para la lógica intuicionista. Dirk Van Dalen[82] por ejemplo deduce las reglas (I$\neg$) y (E$\neg$) a partir de las reglas (f), (I$\rightarrow$) y (E$\rightarrow$) y de la siguiente definición para la negación:

(D$\neg$) $\neg A \Leftrightarrow A \rightarrow f$.

Lo hace del modo siguiente, cuando reemplazamos B por f en (I$\rightarrow$) y (E$\rightarrow$):

1	$\underline{\Gamma, [A] \vdash f}$		1	$\underline{\Gamma, A, A \rightarrow f \vdash f}$	(E$\rightarrow$)
2	$\underline{\Gamma, \vdash A \rightarrow f}$	(I$\rightarrow$)	2	$\Gamma, A, \neg A \vdash f$	(D$\neg$)
3	$\Gamma, \vdash \neg A$	(D$\neg$)			

De este modo, si en una deducción de *DNI* se eliminan todos los signos '$\neg$' y se los reemplaza por '$\rightarrow f$', entonces surge otra deducción de *DNI* en la que *las reglas de negación son casos especiales de las reglas de implicación*: por lo tanto la *reductio ad absurdum* pasa a ser un caso particular de la condicionalización, y el principio de no contradicción uno particular del *modus ponens*. Nótese empero que esto sólo vale en aquellos casos en que admitamos la definición de negación (D$\neg$) de arriba, lo que no se admite en todo cálculo. Esta definición de la negación tampoco basta para justificar la eliminación de la doble negación, ni permite derivar leyes

[82] VAN DALEN 1986.

deductivamente conexas, como el tercero excluido, por lo que caracteriza a la lógica intuicionista, pero no a la clásica.

Gentzen hace algunas consideraciones interesantes sobre el cálculo *DNI* que recordamos aquí brevemente: él admite que *DNI* tiene ciertas "fealdades formales" (por ejemplo las varias asimetrías), pero insiste en que, a pesar de ello, es adecuado para formalizar las deducciones matemáticas y en que éstas resultan más cortas, pues en ellas una fórmula aparece la menor cantidad de veces posible. Aquí podríamos agregar que, en la representación de las deducciones de fórmulas mediante grafos la economía es aún mayor, pero los grafos son más difíciles de usar como instrumentos deductivos, por lo que sirven más como presentación didáctica y menos como método heurístico.

Otra característica importante de *DNI*, que Gentzen enfatiza, es el *carácter sistemático* de su sistema de reglas primitivas por poseer una propiedad fundamental. Dice Gentzen que *las reglas de introducción serían las definiciones de las constantes lógicas y las de eliminación sus meras consecuencias*. Su argumento es el siguiente: cuando eliminamos una constante la fórmula resultante sólo se puede transformar de acuerdo con lo establecido en la regla de introducción correspondiente. Eso significaría que *las reglas de eliminación serían f u n c i o n e s de sus correspondientes reglas de introducción*.

Gentzen da un ejemplo que se refiere a la correspondencia funcional entre la regla de condicionalización y su imagen, la de *modus ponens*: cuando usamos (E→) suponemos previamente deducidas A y $A \rightarrow B$. Pero la última fórmula implica, según (I→), que se cuenta con una deducción de B a partir de A (o al menos con una deducción de B a partir de otros supuestos), que es el resultado al que llegamos por (E→).

Los ejemplos correspondientes a la negación se pueden deducir de aquél mediante restricciones especiales, como la definición de negación dada arriba. Cuando usamos la regla de no contradicción

(E¬) suponemos que previamente se han deducido las fbf.s A y $\neg A$, y a partir de ellas se deduce f. Pero por la (D¬) esto equivale a tener demostradas A y $A \rightarrow f$, y esto último implica por (I→) que de $A \vdash f$ y por (D¬) equivale a $\vdash \neg A$.

Respecto de la conjunción podemos decir que, si conforme a (I∧), de A y B podemos deducir $A \wedge B$, entonces toda vez que tenemos $A \wedge B$ es porque previamente hemos tenido A y B por separado, lo que justifica las dos versiones de la regla (E∧).

Si las reglas de eliminación dependen funcionalmente de las de introducción, entonces en las primeras no debe aparecer nada que no se derive de estas últimas. Eso nos obliga a considerar a la regla de eliminación (E¬) de Gentzen como la única adecuada a su regla de introducción (I¬), pues no contiene nada adicional a lo dado en esta última. Esto implica que una regla habitual en los cálculos de deducción natural intuicionista, como $\Gamma, A, \neg A \vdash B$, tampoco será admitida por Gentzen por conspirar contra el carácter funcional de la relación entre reglas de introducción y de eliminación. Mucho menos podría admitir una regla de eliminación de la doble negación como la habitual en las presentaciones elementales de la lógica clásica – como $\Gamma, \neg\neg A \vdash A$, – porque ignora completamente ese carácter funcional entre la regla de introducción y la de eliminación.

Por lo tanto al sistema de deducción natural clásico *DNC* lo definirá Gentzen de la siguiente manera:

$DNC = DNI + A \vee \neg A$ (donde A es una fbf. cualquiera),

es decir, *DNC* será el sistema intuicionista al que se agrega como *esquema de axioma* la ley de tercero excluido. Por lo tanto cualquier expresión de la forma $A \vee \neg A$ podrá aparecer como fórmula inicial no hipotética sin ninguna justificación. Ello hace que *DNC* no sea ya un sistema puro de deducción natural, sino un sistema axiomático mínimo con un solo esquema de axioma, la ley de tercero excluido, que de este modo adquiere una posición especial.

Como ya hemos comentado, otras versiones de *DNC* agregan la regla de eliminación de la doble negación mencionada arriba, pero esta estrategia, que siguieron Hilbert, Heyting y otros, introduce una regla que no se justifica como consecuencia funcional de la de introducción. El sistema *DNC* resulta así un sistema más complejo, parcialmente axiomático y con asimetrías en la relación funcional entre reglas de introducción y eliminación.

El sistema más simétrico en este aspecto sería el de Johansson, que carece de la regla (*f*) y que es también un sistema paraconsistente mínimo, pues no colapsa con la admisión de cualquier contradicción, sino que torna superflua la constante de negación, con lo que se transforma en un sistema de lógica afirmativa con algunos signos adicionales.

CAPÍTULO 5.
CÁLCULOS SECUENCIALES.

5.1. Generalidades.

El desarrollo de los cálculos secuenciales se debe en gran medida a Gerhardt Gentzen (*1909-†1945)[83]. Decíamos en el capítulo anterior que él comenzó ocupándose del problema de la deducción y desarrolló, simultáneamente con Stanislaw Jaśkowski, los primeros cálculos de reglas sin axiomas, que llamó cálculos de deducción *natural*. Luego se ocupó con cálculos cuyo único esquema de axioma corresponde a diversas formas del principio de identidad, a los que llamó *cálculos secuenciales*, que desarrollaremos a continuación. Un antecedente de la noción de secuencia se encuentra en los trabajos de Paul Hertz, según han mostrado varios estudiosos.[84]

A continuación expondremos los resultados iniciales de Gentzen, publicados en 1934-1935 bajo el título de "Investigaciones sobre la deducción lógica".[85] Gentzen puso de relieve que la axiomatización de la deducción, tal como la presentan autores como Frege, Peano, Russell y Hilbert, difiere mucho del modo de deducir que efectivamente realizan los matemáticos y otros científicos, a pesar de las ventajas metateóricas que dichos sistemas presenten. El propósito de Gentzen consistió en construir un formalismo cuya estructura deductiva fuese tan próxima al "deducir real" como fuera posible, pero que conservase las ventajas de los "antinaturales" sistemas axiomáticos. Para ello buscó un cálculo axiomático con el número mínimo de axiomas que conservara la clasificación de

[83]Gentzen, matemático alemán, fue literalmente condenado a morir de hambre por los soviéticos en un campo de concentración comunista al final de la segunda guerra mundial.
[84]El dato inicial me fue comunicado por Ignacio Angelelli. En Argentina Javier Legris se interesó en estudiar esos trabajos lógicos de Hertz.
[85]"Untersuchungen über das logische Schließen", en *Mathematische Zeitschrift* 39 (1934-1935), 178-210 y 405-431.

reglas de deducción de los cálculos de deducción natural. Un procedimiento frecuente para hacer eso había sido el de reemplazar una regla de deducción cualquiera, cuyo esquema general es

(1) $\dfrac{A_1, \ldots, A_n}{B,}$

por un axioma correspondiente de la forma

(2) $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B.$

Sin embargo en ese caso aparecen en el axioma al menos dos constantes '$\wedge$' y '$\rightarrow$', que deforman todo el sistema de reglas de deducción natural, cuya característica fundamental es que en las reglas no aparecen otras constantes lógicas que la que se introduce o elimina. Para evitar ese problema introdujo Gentzen la noción de 'secuencia' y la simbolizó reemplazando a las reglas de la forma (2) por una entidad simbólica que escribiremos así:

(3) $A_1, \ldots, A_n > B,$

Según Gentzen la secuencia (3) no diferirá de la fbf. (2) en cuanto a su interpretación, pero sí formalmente, como veremos a continuación.

5.2. Notación, interpretaciones y definiciones.

Comenzamos con la notación y algunas definiciones:

Sean A, B, C, D, ... fbf.s y Γ, Δ, Θ, Λ, Σ, Ξ, Ψ, Ω, ... *sucesiones finitas* de fbf.s, es decir sucesiones cuyas cardinalidad es un número natural.

D5.1. Una *secuencia* es una sucesión finita de fbf.s de la forma $\Gamma > \Theta$, donde Γ es $A_1, \ldots, A_m$ (con $0 \leq m$), Θ es $B_1, \ldots, B_n$ (con $0 \leq n$) y ',' y '>' son signos auxiliares, generalmente denominados 'signos de puntuación'.

Llamaremos a ‘>’ ‘signo de secuencia’.[86] La sucesión de fbf.s ‘Γ’ de la izquierda se denomina ‘antecedente’ y la ‘Θ’ de la derecha ‘sucedente’. Hay una definición más abstracta de secuencia como par ordenado $<\Gamma_m; \Theta_n>$, donde m y n son los números cardinales de los conjuntos de fbf.s del antecedente Γ_m y del sucedente Θ_n y a estos conjuntos los separamos mediante ‘;’. A las fbf.s del antecedente Γ_m y del sucedente Θ_n las separamos con comas. Las comas a la izquierda de ‘;’ tendrán un sentido sintáctico (y semántico) diferente de las comas a su derecha.

Desde Gentzen se da una interpretación denominada “intuitiva” de cómo se debe entender una secuencia. Para una secuencia como

$$A_1, ..., A_m > B_1, ..., B_n,$$

Gentzen propone la siguiente interpretación “semántica” en la lógica de primer orden:

$$A_1 \wedge ... \wedge A_m \rightarrow B_1 \vee ... \vee B_n,$$

donde ‘∧’, ‘→’ y ‘∨’ representan respectivamente al conjuntor, al implicador y al disyuntor inclusivo de los cálculos lógicos habituales (es decir, intuicionista o clásico) de primer orden. De ese modo las comas del antecedente Γ_m se interpretan como

---

[86]Gentzen utilizaba ‘→’ como signo de secuencia. Como éste se confunde con el subjuntor o implicador de Hilbert se lo ha reemplazarlo por otros signos, como ‘∵’, ‘∷’, ‘|’, ‘⇒’, etc. Lamentablemente todos se confunden con otros signos con sentido técnico ya establecido. Aquí hemos decidido usar un signo como ‘>’, que habitualmente significa ‘...mayor que---’, pero al que aquí asociamos sólo con la idea de *dirección*, de la que no queremos privar al signo secuencial. Sin embargo se puede prescindir de ese aspecto de dirección en un cálculo secuencial considerado de manera más abstracta, es decir de modo “algebraico”, como se dice ocasionalmente. Hacemos lugar parcialmente a dicho tratamiento cuando caracterizamos una secuencia como un conjunto totalmente ordenado $<\Gamma_m; \Theta_n>$ con m expresiones a la izquierda separadas por comas y n expresiones también separadas por comas a la derecha, y el punto y coma entre Γ_m y Θ_n, con lo que evitamos incluso la distinción entre antecedente y sucedente. Dedicamos un apéndice de este capítulo a una breve explicación de esta cuestión.

conjuntores, las del sucedente Θ_n como disyuntores inclusivos y el signo de secuencia '>' (o ';') como un implicador. Esto señala una correspondencia entre signos de puntuación y operadores lógicos, que luego explotarían autores como Kosta Došen. La de Gentzen es una interpretación ligada a la lógica como teoría de la verdad formal. Otra interpretación posible, igualmente "intuitiva" pero más ligada a la concepción de la lógica como teoría general de la deducción, es la que adoptamos de aquí en adelante y que escribimos así:

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \vdash B_1 \vee \ldots \vee B_n,$$

donde '$\vdash$' recuerda al signo metalingüístico de deducibilidad adoptado de Frege. Esta es una interpretación sintáctica de una secuencia.

Sin embargo existen importantes diferencias entre las secuencias y las deducciones lógicas, pues en una secuencia tanto el antecedente como el sucedente, o ambos, pueden ser vacíos, en tanto que en una deducción *stricto sensu*, ni el antecedente puede constar de una lista vacía de premisas, ni el consecuente puede ser vacío, ni constar de más de una fórmula. Cuando al antecedente $A_1, \ldots, A_m$ (ó Γ_m) es vacío, es decir cuando la secuencia se puede esquematizar con el par $<\Gamma_0; \Theta_n>$, Gentzen lo interpreta semánticamente como '*v*' (*verum*, lo verdadero). Y cuando el sucedente $B_1, \ldots, B_n$ (ó Θ_n) es vacío (es decir Θ_0), se lo interpreta como '*f*' (*falsum*, lo falso). Por lo tanto Gentzen interpreta semánticamente una secuencia con antecedente vacío como:

$$v \rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_n.$$

Aquí la interpretamos sintácticamente así:

$$\vdash B_1 \vee \ldots \vee B_n.$$

Si el antecedente no es vacío y el sucedente consta de una sola fbf. B podemos escribir $\Gamma_m \vdash B$, es decir, *la secuencia cuyo sucedente consta de una sola fbf., equivale a una regla de deducción*. Si el antecedente es vacío y el sucedente consta de una sola fbf. B podemos escribir $\vdash B$, esto es, *la secuencia* *equivale a un teorema de un cálculo*, que en nuestro caso será un cálculo de una lógica de primer orden. Gentzen la interpreta como el enunciado $v \to B$. Aquí le podemos adjudicar la regla $v \vdash B$. Una secuencia con sucedente vacío es interpretada semánticamente por Gentzen como:

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \to f,$$

que, conforme a la regla para la negación (>¬), que en seguida consideraremos, también podemos interpretar sintácticamente como:

$$\vdash \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m).$$

Del mismo modo, si el antecedente consta de una sola fbf. A, una secuencia con sucedente vacío $A \vdash$ se puede interpretar, en la mayoría de los cálculos que consideraremos, como $\vdash \neg A$.

Si tanto el antecedente como el sucedente son vacíos, la secuencia '>' se puede interpretar semánticamente como en enunciado '$v \to f$', que se reduce a 'f' o "lo lógicamente falso".

5.3. La forma general de los esquemas de deducción para cálculos secuenciales.

Antes de desarrollar las principales variantes de cálculos secuenciales expongamos los tipos de secuencias que pueden servir como puntos de partida de toda deducción o "desarrollo" secuencial. Los desarrollos comienzan con '*secuencias iniciales*' (en alemán Gentzen las denomina *Anfangssequenzen*) que hacen las veces de "axiomas" en estos cálculos. Las siguientes son las variantes de tales secuencias:

(A1) $a > a$, donde a es una fbf. elemental, atómica o prima del lenguaje del caso, o
(A2) $A > A$, donde A es cualquier fbf., elemental o compleja, del lenguaje del caso, o
(A3) $\Gamma > \Gamma$, donde Γ es una sucesión finita no vacía de fbf.s cualesquiera, o

(A4) $\Gamma(A) > \Theta(A)$, donde Γ y Θ son sucesiones finitas no vacías de fbf.s y A es una fbf. cualquiera que aparece al menos una vez en Γ y en Θ, o
(A5) $\Gamma(A) > A$, donde A es una fbf. cualquiera que aparece al menos una vez en la sucesión Γ, o
(A6) $A > \Theta(A)$, donde A es una fbf. cualquiera que aparece al menos una vez en la sucesión Θ.

Se pueden construir cálculos secuenciales a partir de cada una de las seis opciones mencionadas. Éste es un tema que discutiremos con cierto detalle en la sección 5.7. En cambio en nuestra exposición general prescindiremos del tema y, al estilo de Gentzen, comenzaremos la descripción de los cálculos a partir de la variante (A2), es decir admitiremos secuencias iniciales en las cuales aparezca una fbf. cualquiera tanto en el '*antecedente*' o la izquierda de '>', como en el '*sucedente*' o la derecha de '>'.[87] (Como ya dijéramos, cuando hay una sola fbf. delante y detrás del signo '>', éste se puede interpretar como el signo de deducción '⊢' en una regla con una sola premisa.)

Estos "axiomas" de nuestros cálculos secuenciales recuerdan a la ley de identidad en la lógica elemental y ciertamente están sintácticamente vinculados con ésta. Debe advertirse sin embargo que no se trata, como en los cálculos lógicos habituales, de *enunciados* verdaderos iniciales, o verdades formales, sino de secuencias, que aquí concebimos como un *pasaje* o *tránsito* de las expresiones que se encuentran en el 'antecedente' de '>' a las que se encuentran en el 'sucedente' de '>', por lo que estrictamente corresponde a la relación de deducibilidad '⊢' sólo en el caso en que el sucedente ni sea vacío, ni contenga más de una fbf.

---

[87] GENTZEN 1934-5, 191: "*Die Anfangssequenzen der Herleitung sind Grundsequenzen der Form $D > D$, wobei D eine beliebige Formel sein kann.*" (Las secuencias iniciales de la deducción son secuencias fundamentales de la forma $D > D$, en las que D puede ser una fórmula cualquiera.)

También hemos advertido arriba que, si ni el antecedente ni el sucedente son vacíos, y el sucedente contiene una sola expresión, podemos interpretar una secuencia de tipo $<\Gamma_m; \Theta_1>$ como una regla de deducción, y que, si el antecedente es vacío y el sucedente contiene una sola expresión, entonces podemos interpretar una secuencia de tipo $<\Gamma_0; \Theta_1>$ como un teorema. Resumiendo, el signo secuencial ‘>’ es más general que el habitual signo de deducción ‘$\vdash$’ por dos características formales:

(1) Tanto el antecedente como el sucedente del signo ‘>’ pueden ser vacíos, tanto el primero como el segundo, o ambos.
(2) Además el sucedente de ‘>’ puede contener más de una expresión.

5.4. Reglas de desarrollo generales para cálculos secuenciales clásicos.

Estas reglas son de dos tipos: *estructurales* y *para constantes lógicas*. Las más generales y simétricas son del *cálculo secuencial clásico de primer orden* o ***CSC***, que son las siguientes:

*Reglas de desarrollo estructurales de **CSC**.*

En el antecedente   *En el sucedente*

Debilitamiento[88] (*Verdünnung* o *Abschwächung*, *thinning*) D:

(D>) $\dfrac{\Gamma > \Theta}{A, \Gamma > \Theta}$ (>D) $\dfrac{\Gamma > \Theta}{\Gamma > \Theta, A}$

Contracción (*Zusammenziehung* o *Kontraktion*, *contraction*) C:

(C>) $\dfrac{A, A, \Gamma > \Theta}{A, \Gamma > \Theta}$ (>C) $\dfrac{\Gamma > \Theta, A, A}{\Gamma > \Theta, A}$

[88] La regla de debilitamiento en el antecedente se denomina también ‘*regla de monotonía*’. Ésta vale en cálculos lógicos estrictamente demostrativos, incluso ampliativos, como los que admiten construcciones sintéticas *a priori*, por ejemplo pragmáticas.

Permutación o intercambio (*Vertauschung*, *interchange*, *permutation*) I:

$$(\mathrm{P}>)\quad \frac{\Delta, A, B, \Gamma > \Theta}{\Delta, B, A, \Gamma > \Theta} \qquad\qquad (>\mathrm{P})\quad \frac{\Gamma > \Theta, A, B, \Lambda}{\Gamma > \Theta, B, A, \Lambda}$$

Corte (*Schnitt*, *cut*) S:

$$(\mathrm{S})\qquad \frac{\Gamma > \Theta, [M] \;,, \qquad [M], \Delta > \Lambda}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}$$ [89].

Con $[M]$ indicamos que la regla de corte no exige que aparezca M necesariamente ni como última fbf. del sucedente de la secuencia izquierda, ni como primera fbf. del antecedente de la secuencia derecha, pues sigue siendo correcta aun si no aparece en ninguno de esos lugares, pues las siguientes son reglas de corte triviales, sin $[M]$ en la primera, la segunda, o ambas posiciones:

$$(\mathrm{I})\ \frac{\Gamma > \Theta, M \;,, \quad \Delta > \Lambda}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}\ , \qquad (\mathrm{II})\ \frac{\Gamma > \Theta \;,, \quad M, \Delta > \Lambda}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}\ , \qquad (\mathrm{III})\ \frac{\Gamma > \Theta \;,, \Delta > \Lambda}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}\ ,$$

que equivalen a alguno de los siguientes desarrollos correctos con la misma secuencia final, que se deducen a partir de alguna de las secuencias superiores mediante sucesivas aplicaciones de (D>) y (>D) de las dos maneras siguientes:

$$(\mathrm{IV})\quad \frac{\Gamma > \Theta}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda} \qquad\qquad (\mathrm{V})\quad \frac{\Delta > \Lambda}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}$$

(I) se obtiene de (V) agregando la secuencia izquierda, (II) de (IV) agregando la secuencia derecha, y (III) de cualquiera de esas dos maneras. De este modo se demuestra que se puede eliminar la regla S cuando no aparece M en algunos de los lugares de la regla. El problema del capítulo próximo será el de

---

[89] Una variante de esta regla de corte será $\dfrac{\Gamma > M \;,, \quad M, \Gamma > C}{\Gamma > C}$, una de cuyas versiones veremos en la sección correspondiente a los juegos de diálogos constructivos, efectivos o intuicionistas.

su eliminación en el caso no trivial, cuando en la regla S aparece una o más veces la fbf. común *M* en cada sucedente izquierdo y el antecedente derecho de las secuencias superiores.

Reglas de desarrollo para constantes lógicas.

En el antecedente	*En el sucedente*
($\wedge$>) $\dfrac{A, \Gamma > \Theta}{A \wedge B, \Gamma > \Theta}$, $\dfrac{B, \Gamma > \Theta}{A \wedge B, \Gamma > \Theta}$	(>$\vee$) $\dfrac{\Gamma > \Theta, A}{\Gamma > \Theta, A \vee B}$, $\dfrac{\Gamma > \Theta, B}{\Gamma > \Theta, A \vee B}$
($\vee$>) $\dfrac{A, \Gamma > \Theta,, \ B, \Gamma > \Theta}{A \vee B, \Gamma > \Theta}$	(>$\wedge$) $\dfrac{\Gamma > \Theta, A,, \quad \Gamma > \Theta, B}{\Gamma > \Theta, A \wedge B}$
($\bigwedge$>) $\dfrac{F(a), \Gamma > \Theta}{\bigwedge x F(x), \Gamma > \Theta}$	(>$\bigvee$) $\dfrac{\Gamma > \Theta, F(a)}{\Gamma > \Theta, \bigvee x F(x)}$
*($\bigvee$>) $\dfrac{Fa, \Gamma > \Theta}{\bigvee x F(x), \Gamma > \Theta}$	*(>$\bigwedge$) $\dfrac{\Gamma > \Theta, F(a)}{\Gamma > \Theta, \bigwedge x F(x)}$
($\rightarrow$>) $\dfrac{\Gamma > \Theta, A,, \ B, \Delta > \Lambda}{A \rightarrow B, \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}$	(>$\rightarrow$) $\dfrac{A, \Gamma > \Theta, B}{\Gamma > \Theta, A \rightarrow B}$

En las reglas de desarrollo para cuantores '*F*' es un predicado *n*-ádico posiblemente no primitivo. Las letras itálicas minúsculas *a*, *b*, *c*, ... que aparecen en las fórmulas '*F*' no cuantificadas de las reglas de introducción de los cuantores son parámetros o *variables propias*, es decir variables libres, en tanto que las letras itálicas minúsculas *x*, *y*, *z*, ... que aparecen dentro del alcance de un cuantor son *variables aparentes* o ligadas. El cálculo se presenta así como un "semiformalismo".[90] Las reglas de introducción de cuantores *($\bigvee$>) y *(>$\bigwedge$), que hemos marcado con '*', son reglas críticas que deben respetar la restricción siguiente:

[90] Ya hemos caracterizado más arriba al '*Halbformalismus*' o '*semi-formal system*' como un sistema de reglas para la generación de fbf.s en el que al menos una regla puede contener infinitas premisas. En el caso del cálculo secuencial considerado las reglas ($\bigvee$>) y (>$\bigwedge$) tienen esa posibilidad, pues el dominio de variación de las variables propias puede ser infinito. En ellas el paso de la suprasecuencia a la subsecuencia requiere entonces un tratamiento metalingüístico.

La variable propia *a* de las figuras de deducción (V>) y (>Λ) *no puede aparecer en la secuencia inferior de esas figuras de deducción* (es decir, no puede aparecer ni en Γ, ni en Θ, ni en $F(x)$).

Esta sencilla restricción impide deducciones sintácticamente incorrectas o semánticamente inválidas en los respectivos cálculos, como veremos en ejemplos próximos. Cuando al ejemplificar una deducción secuencial no respetemos alguna de esas restricciones en una regla crítica, lo indicaremos agregando el supraíndice ‘i’ de ‘inválido’ al nombre del paso.

El cálculo de primer orden se completa con las reglas de introducción del negador, que son también completamente simétricas (o duales).

En el antecedente

$$(\neg >)\quad \frac{\Gamma > \Theta, A}{\neg A, \Gamma > \Theta}$$

En el sucedente

$$(> \neg)\quad \frac{A, \Gamma > \Theta}{\Gamma > \Theta, \neg A}$$

5.5. Variantes de los cálculos secuenciales.

A partir de los esquemas secuenciales anteriores se pueden obtener variantes de diversas maneras. La primera de ellas es la de establecer restricciones en el número de fbf.s que se admiten en el antecedente de una secuencia, en el sucedente de ella, o en ambos, o no hacerlo.

(1) Si, como se hizo en la sección anterior 5.4, no se establecen restricciones para el número de fbf.s en el antecedente y el sucedente (es decir si las secuencias son conjuntos bien ordenados de expresiones del tipo $<\Gamma_m; \Theta_n>$ con m y n números naturales cualesquiera), entonces el sistema lógico que resulta de éste cálculo secuencial es el cálculo lógico clásico, que denominaremos con la abreviatura ‘***CSC***’.

(2) Si no se establecen restricciones para el número de fbf.s en el antecedente, pero se permite a lo sumo una fbf. en el sucedente (es decir si las secuencias deben ser del tipo $<\Gamma_m; \Theta_1>$, con m número natural cualquiera), entonces el sistema lógico resultante de este cálculo secuencial equivale a un cálculo lógico

intuicionista (es decir, constructivo o efectivo) de primer orden. A dicho cálculo lo abreviaremos mediante '*CSI*'.

Los restantes esquemas los consideraremos más abajo. A continuación trataremos los esquemas de desarrollo de tipo (2), del cálculo intuicionista *CSI*, que difieren de los de *CSC* por la liberalización de los sucedentes. Ya dimos arriba las reglas de *CSC*. Las de *CSI* son las siguientes:

Reglas de desarrollo estructurales en ***CSI****.*

En el antecedente | *En el sucedente*

Debilitamiento D (monotonía en el antecedente):

(D>) $\dfrac{\Gamma > C}{A, \Gamma > C}$ (>D) $\dfrac{\Gamma >}{\Gamma > A}$

Contracción C (sólo en el antecedente):

(C>) $\dfrac{A, A, \Gamma > C}{A, \Gamma > C}$ no hay

Permutación o intercambio P (sólo en el antecedente):

(P>) $\dfrac{\Delta, A, B, \Gamma > C}{\Delta, B, A, \Gamma > C}$ no hay

Corte S:

(S) $\dfrac{\Gamma > M \,,, \, M, \Delta > C}{\Gamma, \Delta > C}$

Reglas de desarrollo para constantes lógicas en ***CSI****.*

En el antecedente | *En el sucedente*

(∧>) $\dfrac{A, \Gamma > C}{A \wedge B, \Gamma > C}$, $\dfrac{B, \Gamma > C}{A \wedge B, \Gamma > C}$ (>∨) $\dfrac{\Gamma > A}{\Gamma > A \vee B}$, $\dfrac{\Gamma > B}{\Gamma > A \vee B}$

(∨>) $\dfrac{A, \Gamma > C \,,, \quad B, \Gamma > C}{A \vee B, \Gamma \quad > \quad C}$ (>∧) $\dfrac{\Gamma > A \,,, \quad \Gamma > B}{\Gamma > A \wedge B}$

$$(\wedge>)\ \frac{F(a), \Gamma > C}{\wedge x F(x), \Gamma > C} \qquad (>\vee)\ \frac{\Gamma > F(a)}{\Gamma > \vee x F(x)}$$

$$^{*}(\vee>)\ \frac{Fa, \Gamma > C}{\vee x F(x), \Gamma > C} \qquad ^{*}(>\wedge)\ \frac{\Gamma > F(a)}{\Gamma > \wedge x F(x)}$$

$$(\rightarrow>)\ \frac{\Gamma > A,,\ B, \Delta > C}{A \rightarrow B, \Gamma, \Delta > C} \qquad (>\rightarrow)\ \frac{A, \Gamma > B}{\Gamma, > A \rightarrow B}$$

$$(\neg>)\ \frac{\Gamma > A}{\neg A, \Gamma >} \qquad (>\neg)\ \frac{A, \Gamma >}{\Gamma > \neg A}$$

(3) Si no se establecen restricciones para el número de fbf.s en el sucedente, pero se permite a lo sumo una fbf. en el antecedente (es decir, si el esquema de las secuencias es $<\Gamma_1; \Theta_n>$, con n número natural cualquiera), entonces el cálculo secuencial resultante tiene algunas características que son propias de los cálculos lógicos paraconsistentes de primer orden. Por ello a los dos cálculos que surgen, según se adopte el esquema de secuencias iniciales (A1) o el (A2), los denominaremos ‘***CSP*** y ‘***CSP’***.

Reglas de desarrollo estructurales en ***CSP*** y ***CSP’***.

En el antecedente | *En el sucedente*

Debilitamiento D:

$$(D>)\ \frac{> \Theta}{A > \Theta} \qquad (>D)\ \frac{C > \Theta}{C > \Theta, A}$$

Contracción C (sólo en el sucedente):

no hay

$$(>C)\ \frac{C > \Theta, A, A}{C > \Theta, A}$$

Permutación o intercambio P (sólo en el sucedente):

no hay

$$(>P)\ \frac{C > \Theta, A, B, \Lambda}{C > \Theta, B, A, \Lambda}$$

Corte S:

$$(S)\ \frac{C > \Theta, M\ ,, \quad M > \Lambda}{C > \Theta, \Lambda}$$

*Reglas de desarrollo para constantes lógicas en **CSP** y **CSP'**.*

En el antecedente

$$(\wedge>)\quad \frac{A > \Theta}{A\wedge B > \Theta}\ ,\ \frac{B > \Theta}{A\wedge B > \Theta}$$

$$(\vee>)\quad \frac{A > \Theta,, \quad B > \Theta}{A\vee B \ > \ \Theta}$$

$$(\bigwedge>)\quad \frac{F(a) > \Theta}{\bigwedge xF(x) > \Theta}$$

$$*(\bigvee>)\quad \frac{F(a) > \Theta}{\bigvee xF(x) > \Theta}$$

$$(\rightarrow>)\quad \frac{> \Theta, A,, \ B > \Lambda}{A \rightarrow B > \Theta, \Lambda}$$

$$(\neg>)\quad \frac{> \Theta, A}{\neg A > \Theta}$$

En el sucedente

$$(>\vee)\quad \frac{C > \Theta, A}{C > \Theta, A\vee B}\ ,\ \frac{C > \Theta, B}{C > \Theta, A\vee B}$$

$$(>\wedge)\quad \frac{C > \Theta, A\ ,, \quad C > \Theta, B}{C > \Theta, A\wedge B}$$

$$(>\bigvee)\quad \frac{C > \Theta, F(a)}{C > \Theta, \bigvee xF(x)}$$

$$*(>\bigwedge)\quad \frac{C > \Theta, F(a)}{C > \Theta, \bigwedge xF(x)}$$

$$(>\rightarrow)\quad \frac{A > \Theta, B}{> \Theta, A \rightarrow B}$$

$$(>\neg)\quad \frac{A > \Theta}{> \ \Theta, \neg A}$$

(4) Si se establecen restricciones para el número de fbf.s tanto en el antecedente como en el sucedente, permitiéndose en ambos a lo sumo una fbf. (es decir si las secuencias son del tipo $<\Gamma_m; \Theta_n>$ con $m \leq 1 \geq n$), entonces los cálculos secuenciales resultantes equivalen a cálculos lógicos que podemos denominar 'estrictos de primer orden'. Denominaremos dichos cálculos '***CSE*** y '***CSE'***.[91]

[91] Estos cálculos reúnen todas las restricciones, tanto las de los cálculos intuicionistas, cuanto las de los paraconsistentes.

*Reglas de desarrollo estructurales en **CSE** y **CSE'**.*

En el antecedente — *En el sucedente*

Debilitamiento D:

(D>) $\dfrac{> C}{A > C}$ [92]

(>D) $\dfrac{C >}{C > A}$ [93]

La contracción C y la permutación o intercambio P son imposibles en ***CSE*** y ***CSE'***.

Corte S:

$$(S)\ \frac{C > M,,\ M > D}{C > D}$$ [94]

*Reglas de desarrollo para constantes lógicas en **CSE** y **CSE'**.*

En el antecedente — *En el sucedente*

(∧>) $\dfrac{A > C}{A \wedge B > C}$, $\dfrac{B > C}{A \wedge B > C}$

(>∨) $\dfrac{C > A}{C > A \vee B}$, $\dfrac{C > B}{C > A \vee B}$

(∨>) $\dfrac{A > C,,\ B > C}{A \vee B > C}$

(>∧) $\dfrac{C > A,,\ C > B}{C > A \wedge B}$

(⋀>) $\dfrac{Fa > C}{\bigwedge x Fx > C}$

(>⋁) $\dfrac{C > Fa}{C > \bigvee x Fx}$

*(⋁>) $\dfrac{Fa > C}{\bigvee x Fx > C}$

*(>⋀) $\dfrac{C > Fa}{C > \bigwedge x Fx}$

(→>) $\dfrac{> A,,\ \mathrm{B} > C}{A \rightarrow B > C}$ [95]

(>→) $\dfrac{A > B}{> A \rightarrow B}$

---

[92] Ésta es una versión de la regla '*verum sequitur ex quolibet*' en ***CSE*** y en los restantes cálculos.

[93] Y ésta es una versión de la regla '*ex falso sequitur quodlibet*' en ***CSE*** y en los restantes cálculos.

[94] En este cálculo la regla de corte corresponde exactamente a la transitividad de la relación de deducción.

[95] Como es fácil de advertir ni en ***CSE*** ni en ***CSP*** se podrá deducir en forma explícita ni la regla de *modus ponens* ni ninguna otra regla que admita más de una premisa. Dichas reglas sólo serán posibles en versiones en las que la pluralidad de premisas se reduzca a una sola por conjunción. Esto también

Los esquemas de introducción del negador son los siguientes:

$$(\neg>)\ \frac{> A}{\neg A >} \qquad\qquad (>\neg)\ \frac{A >}{> \neg A}$$

5.6. Dualidad.

Una ligera consideración de las reglas de deducción de *CSC* permite advertir que, con excepción de las reglas (→>) y (>→), las restantes se presentan de a pares con una relación que Gentzen denominó 'simétrica por imagen de espejo' (*spiegelbildlich-symmetrisch*) y que corresponde en estos cálculos a las clásicas relaciones de dualidad de la lógica clásica de primer orden. Así se advierte que en *CSC* son reglas duales los pares de reglas estructurales (D>) y (>D), (C>) y (>C), y (P>) y (>P), los pares de reglas para constantes lógicas (∧>) y (>∨), (∨>) y (>∧), ($\bigwedge$>) y (>$\bigvee$), *($\bigvee$>) y *(>$\bigwedge$), y (¬>) y (>¬), siendo (S) una regla autodual. De dicha relación de dualidad se deduce el siguiente metateorema:

MT 5.1. Si un desarrollo correcto de *CSC* sin ninguna aparición de (→>) ni de (>→) se transforma de la siguiente manera: (1) se reemplaza cada secuencia $A_1, ..., A_m > B_1, ..., B_n$ por $B_n, ..., B_1 > A_m, ..., A_1$, (2) en las reglas de deducción con dos secuencias superiores se conmuta además el orden de esas secuencias y (3) cada aparición de ∧, ∨, $\bigwedge$ y $\bigvee$, se reemplaza por una aparición de ∨, ∧, $\bigvee$ y $\bigwedge$, respectivamente, dejando inalteradas las apariciones de ¬, entonces se obtiene un nuevo desarrollo correcto de *CSC* que es dual o "imagen de espejo" del original.

Dem. Es una sencilla prueba por casos que muestra que la transformación de cada una de esas reglas en su dual nos conserva la corrección del desarrollo. Consideramos los

muestra la poca utilidad de estos cálculos, a los que tratamos sólo como estructuras límites posibles.

ejemplos desde la regla de corte hasta la de negación, dejando los casos anteriores al lector:

(S)	$\dfrac{\Gamma > \Theta, M,, M, \Delta > \Lambda}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}$	se transforma autodualmente en	(S)	$\dfrac{\Lambda > \Delta, M,, M, \Theta > \Gamma}{\Lambda, \Theta > \Delta, \Gamma}$
($\wedge$>)	$\dfrac{A, \Gamma > \Theta}{A \wedge B, \Gamma > \Theta}$	se transforma en (y viceversa)	(>$\vee$)	$\dfrac{\Theta > \Gamma, A}{\Theta > \Gamma, A \vee B}$
($\vee$>)	$\dfrac{A, \Gamma > \Theta,, B, \Gamma > \Theta}{A \vee B, \Gamma > \Theta}$	se transforma en (y viceversa)	(>$\wedge$)	$\dfrac{\Theta > \Gamma, B,, \Theta > \Gamma, A}{\Theta > \Gamma, B \wedge A}$
($\bigwedge$>)	$\dfrac{F(a), \Gamma > \Theta}{\bigwedge x F(x), \Gamma, > \Theta}$	se transforma en (y viceversa)	(>$\bigvee$)	$\dfrac{\Theta > \Gamma, F(a)}{\Theta > \Gamma, \bigvee x F(x)}$
*($\bigvee$>)	$\dfrac{F(a), \Gamma > \Theta}{\bigvee x F(x), \Gamma, > \Theta}$	se transforma en (y viceversa)	*(>$\bigwedge$)	$\dfrac{\Theta > \Gamma, F(a)}{\Theta > \Gamma, \bigwedge x F(x)}$
($\neg$>)	$\dfrac{\Gamma > \Theta. A}{\neg A, \Gamma > \Theta}$	se transforma en (y viceversa)	(>$\neg$)	$\dfrac{A, \Theta > \Gamma}{\Theta > \Gamma, \neg A}$

Agotado los casos, queda demostrado el metateorema. □

Que la dualidad no existe entre ($\rightarrow$>) y (>$\rightarrow$) se advierte al intentar las transformaciones correspondientes:

La regla válida ($\rightarrow$>) $\dfrac{\Gamma > \Theta, A,, B, \Delta > \Lambda}{A \rightarrow B, \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}$ se transforma en una pseudo-regla inválida $\dfrac{\Lambda > \Delta, B,, A, \Theta > \Gamma}{\Lambda, \Theta > \Delta, \Gamma, B \rightarrow A}$	La regla válida (>$\rightarrow$) $\dfrac{A, \Gamma > \Theta, B}{\Gamma > \Theta, A \rightarrow B}$ se transforma en la pseudo-regla inválida $\dfrac{B, \Theta > \Gamma, A}{B \rightarrow A, \Theta > \Gamma}$

Los sistemas intermedios ***CSI*** y ***CSP*** no conservan la dualidad, pero ésta se conserva (para las reglas posibles) en el sistema estricto ***CSE***:

(D>)	$\dfrac{> C}{A > C}$	se transforma en (y viceversa)	(>D)	$\dfrac{C >}{C > A}$
(S)	$\dfrac{A > M,, M > B}{A > B}$	se autodualiza en	(S)	$\dfrac{B > M,, M > A}{A > B}$
($\wedge$>)	$\dfrac{A > C}{A \wedge B > C}$	se transforma en (y viceversa)	(>$\vee$)	$\dfrac{C > A}{C > A \vee B}$

(∨>) $\dfrac{A > C,, B > C}{A \vee B > C}$ se transforma en (y viceversa) (>∧) $\dfrac{C > B,, C > A}{C > \Gamma, B \wedge A}$

(⋀>) $\dfrac{Fa > C}{\bigwedge xFx > C}$ se transforma en (y viceversa) (>⋁) $\dfrac{C > Fa}{C > \bigvee xFx}$

*(⋁>) $\dfrac{Fa > C}{\bigvee xFx > C}$ se transforma en (y viceversa) *(>⋀) $\dfrac{C > Fa}{C > \bigwedge xFx}$

(¬>) $\dfrac{> A}{\neg A >}$ se transforma en (y viceversa) (>¬) $\dfrac{A >}{> \neg A}$

Las reglas (→>) y (>→) no son duales en ningún cálculo, pues por las citadas transformaciones de las reglas correctas de ***CSE***

(I) (→>) $\dfrac{> A,, B > C}{A \to B > C}$ (II) (>→) $\dfrac{A > B}{> A \to B}$

se obtendrían las reglas claramente inválidas

(I') $\dfrac{C > B,, A >}{C > B \to A}$ (II') $\dfrac{B > A}{B \to A >}$

En el cálculo ***CSC*** correspondiente a la lógica clásica se pueden reducir los casos faltantes de dualidad de la siguiente manera:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma > \Theta, A}{\neg A, \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda} \;,,\; \dfrac{B, \Delta > \Lambda}{B, \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}}{\neg A \vee B, \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}}{A \to B, \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}$$

(este desarrollo corresponde a la regla (→>) y la justifica).

Ésta se dualiza de la siguiente manera:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Lambda > \Delta, B}{\Lambda, \Theta > \Delta, \Gamma, B} \;,,\; \dfrac{A, \Theta > \Gamma}{\Lambda, \Theta > \Delta, \Gamma, \neg A}}{\Lambda, \Theta > \Delta, \Gamma, B \wedge \neg A}}{\Lambda, \Theta > \Delta, \Gamma, \neg(B \to A)}$$

(que aplica (>¬) a la secuencia inferior de la regla (→>)).

Una abreviatura clásica, simplificada y trivial de los desarrollos anteriores es:

$$\dfrac{\dfrac{A > B \;,,\; C > D}{B \to C, A > D}}{A > D, \neg(B \to A)}$$

De modo semejante para (>→):

$\underline{A, \Gamma > \Theta, B}$
$\underline{\underline{\Gamma > \Theta, B, \neg A}}$
$\underline{\Gamma > \Theta, \neg A \vee B}$
$\Gamma > \Theta, A \to B$, cuya dualización es la siguiente:

$\underline{B, \Theta > \Gamma, A}$
$\underline{\underline{\neg A, B, \Theta > \Gamma}}$
$\underline{B \wedge \neg A, \Theta > \Gamma}$
$\neg(B \to A), \Theta > \Gamma$.

Es decir, la dual de (→>) es (>¬ (→)) y la de (>→) es (¬ (→)>).

5.7. Relaciones de deducibilidad entre los esquemas de axiomas.

En la sección 5.3 mencionamos seis esquemas de axiomas posibles. Consideremos ahora sus posibilidades de desarrollo. Partamos del esquema de axioma con enunciados primitivos o atómicos:

(A1) $a > a$.

Si admitimos sólo una fbf. en el antecedente y también en el sucedente de la secuencia (es decir, esquemas de secuencias de la forma $<m, n>$ con $m \leq 1 \geq n$), advertimos que podemos utilizar las siguientes reglas:

$\underline{a > a} \quad \underline{b > b}$
(∧>) $\underline{a \wedge b > a,, \quad a \wedge b > b}$
(>∧) $a \wedge b > a \wedge b$

$\underline{a > a} \quad \underline{b > b}$
(>∨) $\underline{a > a \vee b,, \quad b > a \vee b}$
(∨>) $a \vee b > a \vee b$

$\underline{F(a) > F(a)}$
(⋀>) $\underline{\bigwedge x F(x) > F(a)}$
(>⋀) $\bigwedge x F(x) > \bigwedge x F(x)$

$\underline{F(a) > F(a)}$
(>⋁) $\underline{F(a) > \bigvee x F(x)}$
(⋁>) $\bigvee x F(x) > \bigvee x F(x)$

$\underline{a > a}$
(>→) $\underline{> a \to a}$
(D>) $a \to a > a \to a$

Es decir, que a partir de (A1) deducimos en ***CSE*** secuencias de la forma (A2) $A > A$ con una fbf. A compleja, *sólo si ésta está construida con las constantes lógicas* ‘∧’ ‘∨’ ‘⋀’ y ‘⋁’. También podemos obtener secuencias de la forma (A2) donde A tenga como constante lógica principal a ‘→’, pero sólo si esa fórmula es una implicación ya demostrada en el cálculo, es decir, si es una secuencia de tipo <0, 1>. En cambio en ***CSE*** no es posible obtener esquemas de axiomas de la forma (A2) $A > A$, con A de la forma $\neg B$ y con B una fbf. cualquiera, porque deberíamos partir de una secuencia previamente deducida $B > B$ y luego aplicar, o bien la sucesión de reglas (¬>), (>¬), lo que supone la admisión de secuencias de la forma <2, 0> con al menos dos fbf. en el antecedente, o bien (>¬), (¬>), que supone admitir secuencias de la forma <0; 2> con al menos dos fbf.s en el sucedente, y ambas cosas están prohibidas en ***CSE***. En consecuencia las únicas secuencias demostrables en ***CSE*** de la forma $\neg B > \neg B$ son aquellas en las que $\neg B >$ (secuencia de la forma <1, 0>) o $> \neg B$ (secuencia de la forma <0, 1>) son secuencias deducibles, de las que se obtiene la anterior por debilitamiento.

Si bajo esas mismas condiciones, partimos de (A2) $A > A$, entonces construimos una variante más fuerte de ***CSE***, que hemos denominado ***CSE'***, en la que desaparecen las restricciones anteriores relativas al implicador y al negador. De todos modos las reglas de introducción del implicador en el antecedente y ambas reglas para el negador permanecen con sus restricciones, que no dan lugar a sucesiones de los tipos <2, 0> ó <2, 1> ó <1, 2> ó <0, 2>, lo que impide la deducción de reglas de deducción con más de una premisa explícita (incluso la regla de *modus ponens* $A \rightarrow B, A > B$, que requiere usar la regla (→>), no es deducible) y tampoco hace posible el debilitamiento para ninguna de esas formas. Por lo tanto en el *segundo cálculo secuencial más débil* ***CSE'***, que tiene estas características, (A1) y (A2) serán las únicas formas de esquemas de axiomas irrestrictas admisibles, de las no se puede deducir ninguna de las restantes formas.

En caso de que admitamos un número indefinido de fbf.s en el antecedente, pero sólo una en el sucedente (es decir, a lo sumo secuencias del tipo <m, 1>), puesto que en tal caso la regla de debilitamiento en el antecedente y las de introducción del ‘→’ y del ‘¬’ en el antecedente no tienen restricciones, entonces de (A1) podremos deducir la forma (A2) $A > A$ y la forma (A5) $\Gamma(A) > A$ sin restricciones, que serán las únicas formas de esquemas de axiomas admisibles en ese *cálculo secuencial intuicionista* ***CSI***, pero no las formas (A3), (A4) y (A6). De modo que no habrá, como en ***CSE***, una diferencia entre un sistema intuicionista más débil ***CSI*** y otro más fuerte ***CSI'***. La deducción de (A2) a partir de (A1) para ∧, ∨, ⋀, ⋁ y para la forma peculiar de → es la misma que en ***CSE***. Para fbf.s generales con '→' como constante lógica principal el paso de (A1) a (A2) en ***CSI*** se desarrolla de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lll}
 & \underline{a > a \quad ,, \quad b > b} & \\
(\to>) & \underline{a \to b, a > b} & (mp) \\
(P>) & \underline{a, a \to b > b} & (mp) \\
(>\to) & a \to b > a \to b, &
\end{array}
$$

desarrollo en el que las secuencias segunda y tercera son formas del *modus ponens*. La deducción de la forma (A2) a partir de (A1) con '¬' como constante lógica principal se deduce mediante el desarrollo siguiente

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{a > a} \\
(\neg>) & \underline{\neg a, a >} \\
(P>) & \underline{a, \neg a >} \\
(>\neg) & \neg a > \neg a
\end{array}
$$

Si admitimos un número indefinido de fbf.s en el sucedente, pero sólo una en el antecedente (es decir, a lo sumo secuencias del tipo <A; Θ_n> propias de ***CSP***), entonces tenemos los mismos casos para el paso de (A1) a (A2) para ∧, ∨, ⋀, ⋁ y para la forma peculiar de →, que vimos en ***CSE***. Como en ***CSP*** tenemos debilitamiento irrestricto e introducción de '¬' en el sucedente, aunque tenemos (¬>) restricta, podemos obtener de la forma (A1) la forma (A2) para la negación, pues podemos realizar la siguiente derivación:

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{a > a} \\
(>\neg) & \underline{> a, \neg a} \\
(>P) & \underline{> \neg a, a} \\
(\neg>) & \neg a > \neg a
\end{array}
$$

No obstante se conserva la restricción para '→' como en ***CSE*** (tampoco es deducible la regla de *modus ponens*). La forma (A6) $A > \Theta(A)$ se deduce sin restricciones a partir de (A2). Por otra parte no son admisibles las formas (A3), (A4) y (A5). De modo que las únicas formas de esquemas de axiomas admisibles sin restricciones en el *cálculo secuencial paraconsistente* ***CSP*** serán las formas (A1) y (A6). Y para la forma (A2) tendremos la misma restricción para '→' que en ***CSE***. Si partimos en cambio de la forma irrestricta (A2), obtendremos el sistema levemente diferente ***CSP’***, en el que serán admisibles sin restricciones las formas (A1), (A2) y (A6).

En caso de que admitamos un número indefinido de fórmulas tanto en el antecedente como en el sucedente, entonces dispondremos de plena aplicación de todas las reglas de introducción de constantes lógicas y de ambas reglas de debilitamiento sin restricciones y podremos deducir de (A1) las formas de los esquemas de axiomas (A2), (A3), (A4), (A5) y (A6), que serán todas formas admisibles en el *cálculo secuencial clásico* ***CSC***. Por lo tanto tampoco podremos diferenciar entre un sistema ***CSC*** y otro ***CSC’***.

Lo anterior nos muestra que bajo las condiciones consideradas hay seis variantes de ***CS***, a saber ***CSE***, ***CSE’***, ***CSP***, ***CSP’***, ***CSI*** y ***CSC***. Éstas no son las únicas variantes de ***CS*** que surgen por limitación del número de fbf.s en antecedente y sucedente. Como hemos visto, si es m el número máximo de fbf.s admitidas en el antecedente y n el máximo de fbf.s admitidas en el sucedente, un sistema de ***CS*** que conserve todos los restantes esquemas de deducción para constantes lógicas inalterados se caracteriza por el par ordenado $<m, n>$ con $1 \leq m$, $1 \leq n$, Cuando $<m, n> = <1, 1>$ tendremos ***CSE*** ó ***CSE’***, según partamos de los esquemas de axioma (A1) ó (A2). Cuando $<m, n> = <1, n>$, con n tan grande como se quiera, tendremos ***CSP*** ó ***CSP’***, según partamos de (A1) ó (A2). Si $<m, n> = <m, 1>$ con m tan grande como se quiera, tendremos ***CSI***. Y con $<m, n>$, con m y n tan grande como se quiera, tendremos a ***CSC***. *Es importante advertir la unicidad de* ***CSI*** y de ***CSC***, *frente a los pares* ***CSE***, ***CSE’*** y ***CSP***, ***CSP’***, *lo que ubica a esos cálculos en una situación privilegiada entre los cálculos secuenciales*. Otro motivo que nos impulsa a aceptar los sistemas ***CSI*** y de ***CSC*** y rechazar los restantes es la *falta de argumentos para justificar la decisión de admitir una sola fbf. en el antecedente, lo que equivale a admitir sólo reglas con una premisa o hipótesis. En principio no hay motivos para limitar el número de premisas para una conclusión. Esto se presenta como una restricción arbitraria para una lógica o para cualquier sistema de diálogos. En realidad habría que presentar algún argumento para limitar el número de premisas, por ejemplo, por razones pragmáticas*. Eso nos lleva a limitarnos a los cálculos con secuencias caracterizadas por pares ordenados desde $<m, 1>$ a $<m, n>$, es decir ***CSI*** y ***CSC***. Sin embargo en lo que sigue inmediatamente consideraremos brevemente los restantes casos, por las enseñanzas que sacamos de estas limitaciones respecto a la relación de deducibilidad. Más abajo consideraremos los últimos cálculos mencionados y haremos aproximaciones diferentes a problemas tales como el de la paraconsistencia.

Pueden existir otras variantes de esquemas de axiomas en las de los *CS* admitan secuencias con esquemas de tipo $<\Gamma_m; \Theta_n>$, con m, ó n, o ambos, *acotados*, pero no las desarrollaremos aquí. Así serían posibles infinitos sistemas intermedios entre *CSE* y *CSI*, con esquemas de secuencias admisibles $<\Gamma_2; \Theta_1>$, $<\Gamma_3; \Theta_1>$, $<\Gamma_4; \Theta_1>$, etc. e infinitos sistemas intermedios entre *CSP* y *CSC*, con esquemas de secuencias admisibles $<\Gamma_2; \Theta_n>$, $<\Gamma_3; \Theta_n>$, $<\Gamma_4; \Theta_n>$, etc., con n no acotado. Si admitimos dos premisas en el antecedente de una secuencia $<\Gamma_2; \Theta_n>$, ya podemos traducir en forma implícita al menos cualquier secuencia con un número de fbf.s antecedente m tan grande como se quiera. Eso se demuestra en la siguiente sección. Además no hay sistemas intermedios entre los que admiten secuencias con esquemas máximos $<\Gamma_m; \Theta_2>$ y $<\Gamma_m; \Theta_n>$ con m y n no acotados, pues ambos caracterizan a *CSC*, ya que a partir de $<\Gamma_m; \Theta_2>$ se pueden demostrar todas las leyes que hacen la diferencia entre *CSI* y *CSC*, como veremos más adelante.

5.8. La conjunción de premisas.

En *CSI* y *CSC* tenemos respectivamente los esquemas $<\Gamma_m; \Theta_1>$ y $<\Gamma_m; \Theta_n>$ con m y n no acotados. En estos sistemas se puede demostrar el metateorema

T5.1 $A_1, A_2, \ldots, A_m > B \Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m > B$. para *CSI* y
$A_1, A_2, \ldots, A_m > \Theta \Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m > \Theta$. para *CSC*.

Dem. Lo demostramos para *CSI*, pues la versión para *CSC* es una consecuencia trivial de ésta por uso reiterado de (>D). Se demuestra por inducción finita, partiendo de un antecedente de dos premisas (Γ_2) considerando como subcasos las dos implicaciones metalingüísticas entre secuencias.

Caso base: $k = 2$. Debemos demostrar $A_1, A_2 > B \Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 > B$.

El primer subcaso del caso base es $A_1, A_2 > B \Rightarrow A_1 \wedge A_2 > B$, que se demuestra fácilmente:

1.		$\underline{A_1, A_2 > B}$
2.	(∧>)	$\underline{A_1 \wedge A_2, A_2 > B}$
3.	(P>)	$\underline{A_2, A_1 \wedge A_2 > B}$
4.	(∧>)	$\underline{A_1 \wedge A_2, A_1 \wedge A_2 > B}$
5.	(C>)	$A_1 \wedge A_2 > B$

El segundo subcaso es $A_1 \wedge A_2 > B \Rightarrow A_1, A_2 > B$, que se divide a su vez en tres subcasos, pues $A_1 \wedge A_2 > B$ debe haber surgido previamente como secuencia inferior de alguno de los tres desarrollos siguientes:

(1) $\dfrac{A_1 > B}{A_1 \wedge A_2 > B}$ (2) $\dfrac{A_2 > B}{A_1 \wedge A_2 > B}$ (3) $\dfrac{A_1, A_2 > B}{A_1 \wedge A_2 > B.}$

El subcaso (3) ya fue considerado en el caso anterior y el (2) es una variante del subcaso (1), por lo que nos limitaremos a este subcaso:

1 $\underline{A_1 > B}$
2. (D>) $\underline{A_2, A_1 > B}$
3. (P>) $\underline{A_1, A_2 > B}$
4. (∧>) $\underline{A_1 \wedge A_2, A_2 > B}$
5. (P>) $\underline{A_2, A_1 \wedge A_2 > B}$
6. (∧>) $\underline{A_1 \wedge A_2, A_1 \wedge A_2 > B}$
7. (C>) $A_1 \wedge A_2 > B$

El desarrollo de la tercera a la séptima secuencia nos da la implicación del primer subcaso. Como dicho subcaso debió surgir ***necesariamente*** de (1), (2) o (3), el resultado es que *la existencia de la secuencia $A_1 \wedge A_2 > B$ implica la previa existencia* ***necesaria*** *de la secuencia $A_1, A_2 > B$*, la que, o bien es la originaria, o surge directamente por (D). Es decir, si tenemos $A_1 \wedge A_2 > B$, es porque previamente tuvimos $A_1, A_2 > B$. $A_1 \wedge A_2 > B$ no pudo haber surgido de otra secuencia: es decir, el desarrollo es lineal, no tiene ramificaciones. Si hubiera ramificaciones, de modo que de dos secuencias superiores diferentes se pudiera deducir una misma secuencias, entonces no podríamos demostrar la implicación conversa. Como no hay ramificaciones completamos la prueba del segundo subcaso del caso base.

Paso inductivo: $k \leq m+1$. La hipótesis inductiva es $A_1, A_2, A_m > B \Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m > B$.

El primer subcaso es $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1} > B \Rightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge A_{m+1} > B$. Éste se resuelve mediante una generalización finita del procedimiento usado en el primer subcaso del caso base.

El segundo subcaso es $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge A_{m+1} > B \Rightarrow A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1} > B$. Aquí distinguimos dos subcasos:

(1) $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_m \wedge A_{m+1} > B$ es una secuencia cuyo sucedente depende de todas las fbf.s de la conjunción antecedente, por lo tanto es una generalización finita del segundo subcaso del caso base.

(2) $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_m \wedge A_{m+1} > B$ es una secuencia cuyo sucedente depende de un subconjunto propio de las fbf.s de la conjunción antecedente. Por lo tanto habrá una secuencia $A_{1'} \wedge A_{2'} \wedge ... \wedge A_{k'} > B$. Como $k' \leq m$ entonces por hipótesis inductiva vale:
$A_{1'}, A_{2'}, A_{k'} > B \Leftrightarrow A_{1'} \wedge A_{2'} \wedge ... \wedge A_{k'} > B$. Mediante m-k' aplicaciones de (D>) y el número adecuado de aplicaciones de (P>) obtenemos A_1, A_2, ..., A_m, $A_{m+1} > B$, del cual por uso reiterado de ($\wedge$>) y (P>) obtenemos $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_m \wedge A_{m+1} > B$. Esta fórmula implica entonces a A_1, A_2, ..., A_m, $A_{m+1} > B$, en el caso base, lo que completa la prueba. □

5.8.1. Corolario.

Los desarrollos de las secuencias de forma $<\Gamma_2; \Theta_1>$ son equivalentes a los de las secuencias de la forma $<\Gamma_m; \Theta_1>$ y los de la forma $<\Gamma_2; \Theta_n>$ a los de la forma $<\Gamma_m; \Theta_n>$.

Dem. De las primeras partes del teorema anterior $A_1, A_2, ..., A_m > B \Rightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_m > B$ para ***CSI*** y $A_1, A_2, ..., A_m > \Theta \Rightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_m > \Theta$ para ***CSC*** se sigue inmediatamente. Basta con comenzar con dos fbf.s en el antecedente y hacer las conjunciones, permutaciones y contracciones adecuadas para pasar de dos a una fbf. en el antecedente, luego agregar una tercera fbf. y repetir el proceso tantas veces como sea necesario para alcanzar la conjunción $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_{m-1}$, A_m en el antecedente, que es parte de una secuencia de la forma $<\Gamma_2; \Theta_n>$. Que se pueda alcanzar las sucesiones inferiores buscadas depende de la adecuada elección de las fbf.s del antecedente de manera de utilizar las reglas adecuadas para desarrollar la secuencia final buscada. Todo esto es posible por la *propiedad estructural* de los ***CS*** de que *ninguna regla de desarrollo*, *ni estructural ni para constantes lógicas*, *depende de más de dos fbf.s en el antecedente o en el sucedente*. De este modo se demuestra que con secuencias de la forma $A_1, A_2 > \Theta_n$ se puede obtener secuencias con los mismos sucedentes que las de la forma $A_1, A_2, ..., A_m > \Theta_n$. □

Esto muestra de forma clara que *en lo que respecta a las leyes deducibles no existen lógicas intermedias entre* ***CSE*** y ***CSI***, *ni entre* ***CSP*** y ***CSC***. Sin embargo en otro sentido existe una diferencia: a saber, en la *deducibilidad o no de reglas de deducción con un número* *determinado de premisas e x p l í c i t a s*, que es lo que varía con la cota de fbf.s del antecedente del par ordenado.

5.8.2. Las tres premisas.

Si bien lo anterior vale para los *resultados* de los desarrollos secuenciales por conjunción, en algún paso intermedio puede ser necesario tener tres fbf.s en el antecedente, como lo muestra una de las reglas fundamentales de la deducción, que es la transitividad de la implicación o silogismo hipotético (*sh*). Si admitimos en el desarrollo secuencias con tres premisas en el antecedente $<\Gamma_2; \Theta_n>$ podemos obtener la regla *sh*:

1. $\underline{a > a \quad ,, \quad b > b}$
2. (→>) $\underline{a \rightarrow b, a > b \quad ,, \quad c > c}$
3. (→>) $\underline{b \rightarrow c, a \rightarrow b, a > c}$
4. (P>) $\underline{a \rightarrow b, b \rightarrow c, a > c}$
5. (P>) $\underline{a \rightarrow b, a, b \rightarrow c > c}$
6. (P>) $\underline{a, a \rightarrow b, b \rightarrow c > c}$
7. (>→) $a \rightarrow b, b \rightarrow c > a \rightarrow c$

Las dos primeras secuencias tienen una fbf. a la izquierda, la del segundo paso tiene dos, las de los pasos 3, 4, 5 y 6 tienen tres fbf.s en el antecedente y la última secuencia tiene dos. Una vez que tenemos este resultado podemos poner en conjunción las fbf.s del antecedente de la penúltima secuencia, agregar otra secuencia $d > d$, y seguir los procedimientos anteriores hasta alcanzar $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c), c \rightarrow d > a \rightarrow c$, y así sucesivamente. De todos modos, contar con la posibilidad de introducir tantas fbf.s en el antecedente como queramos es más natural, pues no hay ninguna justificación formal plausible para la limitación del número de premisas, pero bastan tres para no perder ninguna ley ni regla, aunque más no sea en forma al menos parcialmente conjuntiva.

5.9. Las leyes de negación en los cálculos secuenciales.

Comenzaremos con los cálculos con reglas más restrictivas.

5.9.1. Las leyes de negación en los cálculos *CSE* y *CSE'*.

Los esquemas de desarrollo para la negación no son siempre aplicables en el caso de *CSE*, sino sólo en el caso de secuencias con antecedente o sucedente vacío. Esto acontece por la doble restricción en este cálculo de que aparezca *a lo sumo* una sola fbf. a cada lado del signo '>', es decir que se trate de secuencias que sean, o bien teoremas '$\vdash A$' o bien expresiones que implican "lo lógicamente falso" '$A \vdash$'. Para tomar un ejemplo, las secuencias que parten de un esquema de axioma con enunciados elementales son deducibles en *CSE* y tienen por resultado como teoremas la forma *no universal* (es decir, limitadas a fbf.s elementales 'a') del **pi**

(1) $\vdash a \to a$ y su doble negación

(2) $\vdash \neg\neg(a \to a)$,

como se advierte por el siguiente desarrollo secuencial:

$$\begin{array}{ll} & \underline{a > a} \\ (>\to) & \underline{> a \to a} \\ (\neg>) & \underline{\neg(a \to a) >} \\ (>\neg) & > \neg\neg(a \to a) \end{array}$$

En realidad este procedimiento se puede reiterar para cualquier teorema que sea demostrable en *CSE*. Esto nos muestra que en este cálculo tan mínimo son fundables como metateoremas las siguientes *reglas* metalingüísticas:

T2. $$\cfrac{\cfrac{\vdash A}{\neg A \vdash}}{\vdash \neg\neg A}$$ y sus generalizaciones:

T3. $$\frac{\vdash A}{\vdash \neg^{2n} A}$$

T4. $$\frac{\vdash A}{\neg^{2n+1} A \vdash}$$

T5. $$\frac{\neg A \vdash}{\vdash \neg^{2n} A}$$

T6. $$\frac{\neg A \vdash}{\neg^{2n+1} A \vdash}$$

(donde $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq n$ y $\neg^{2n}$, y $\neg^{2n+1}$ simbolizan la iteración de '$\neg$' $2n$ y $2n+1$ veces). De las formas de las secuencias inferiores de T3 y T5 mediante casos particulares de debilitamiento obtenemos los siguientes desarrollos:

T7. $$\begin{array}{l} \underline{\vdash A \qquad\quad} \\ \underline{B \ \vdash\ \neg^{2n}A} \\ \vdash\ B \to \neg^{2n}A \qquad , \end{array}$$ T8. $$\begin{array}{l} \underline{\neg A \quad \vdash \qquad\qquad} \\ \underline{\neg^{2n+1}A \quad \vdash B} \\ \vdash\ \neg^{2n+1}A \to B\ , \end{array}$$

donde B es una fbf. cualquiera. Un caso particular de T7 y T8 son:

$$\begin{array}{l} \underline{\vdash A \qquad\qquad\qquad} \\ \underline{\neg^{m}A\ \vdash\ \neg^{2n}A} \\ \vdash\ \neg^{m}A \to \neg^{2n}A \quad , \end{array} \qquad \begin{array}{l} \underline{\neg A \quad \vdash \qquad\qquad} \\ \underline{\neg^{2n+1}A \quad \vdash\ \neg^{m}A} \\ \vdash\ \neg^{2n+1}A \to \neg^{m}A\ , \end{array}$$

con $0 \leq m \in \mathbb{N}$. Casos específicos son:

$$\begin{array}{l} \underline{\vdash A \qquad\quad} \\ \underline{\neg^{2n}A\ \vdash\ \neg^{2n}A} \\ \vdash\ \neg^{2n}A \to \neg^{2n}A \quad , \end{array} \qquad \begin{array}{l} \underline{\neg A \quad \vdash \qquad\qquad\qquad} \\ \underline{\neg^{2n+1}A \quad \vdash\ \neg^{2n+1}A} \\ \vdash\ \neg^{2n+1}A \to \neg^{2n+1}A \quad . \end{array}$$

En todos estos casos las secuencias finales son esquemas de teorema sometidos respectivamente a las condiciones iniciales $\vdash A$ y $\neg A \vdash$ (donde obviamente la segunda depende de la primera).

Es inmediata la validez de los siguientes desarrollos:

T9. $$\begin{array}{ll} \underline{\vdash A \qquad\qquad\quad} & \\ \underline{\neg^{2n+1}A \quad \vdash \quad} & \\ \underline{\neg^{2n+1}A \quad \vdash \neg^{2n+1}A} & (>D) \\ \vdash \neg^{2n+1}A \to \neg^{2n+1}A & (>\to) \end{array}$$ T10. $$\begin{array}{l} \underline{\neg A \quad \vdash \qquad\quad} \\ \underline{\neg^{2n+1}A \quad \vdash \qquad\qquad\qquad} \\ \underline{\neg^{2n+1}A \quad \vdash\ \neg^{2n+1}A} \\ \vdash \neg^{2n+1}A \to \neg^{2n+1}A \end{array}$$

En consecuencia vale en ***CSE*** el teorema siguiente:

T11. Si $\vdash A$, entonces $\vdash \neg^{n}A \to \neg^{n}A$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

De los anteriores desarrollos secuenciales T3 y T4 obtuvimos por debilitamiento como casos generales los desarrollos:

$$\begin{array}{c} \underline{\qquad \vdash\ A \qquad} \\ B\ \vdash\ \neg^{2n}A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \underline{\qquad\qquad \vdash\ A\ } \\ \neg^{2n+1}A \quad \vdash\ B\ , \end{array}$$

y por lo tanto los teoremas para la negación:

T12. Si $\vdash A$, entonces, $\vdash B \to \neg^{2n}A$ y
T13. Si $\vdash A$, entonces, $\vdash \neg^{2n+1}A \to B$.

Es fácil advertir que en *CSE* no se pueden demostrar teoremas tan simples como $\vdash a \to \neg\neg a$ y $\vdash \neg\neg a \to a$, pues cada uno de ellos implica el uso, o bien de la regla ($\neg$>) sobre un antecedente no vacío, o bien de la regla (>$\neg$) sobre un sucedente no vacío, operaciones ambas prohibidas en este cálculo. *A fortiori* resulta obvio en este cálculo, que si $m \neq n$, toda fbf. $\neg^{2m}A$ no implica $\neg^{2n}A$, ni $\neg^{2m+1}A$ implica $\neg^{2n+1}A$.

Si consideramos en cambio el sistema *CSE'*, es decir aquel que difiere de *CSE* en que en él es admisible el esquema de axioma (A2) $A > A$, donde A es cualquier fbf., es inmediato que serán desarrollables, además de (1') $\vdash A \to A$,(2') $\vdash \neg\neg(A \to A)$, T2-T13 y las secuencias iniciales $\neg^{n}A > \neg^{n}A$, con $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto la forma de teorema

T14. $\vdash \neg^{n}A \to \neg^{n}A$, con $n \in \mathbb{N}$ y donde A no tiene porqué ser un teorema, sino sólo una fbf. cualquiera.

5.9.2. Las leyes de negación en los cálculos *CSP, CSP' y CSI*.

Por su parte en los cálculos *CSP* y *CSI*, en los cuales se admiten al menos dos fbf., o bien en el sucedente, o bien en el antecedente, se liberaliza el uso de los esquemas de deducción para la negación, como vemos en los siguientes ejemplos:

$$\textit{CSP}\quad \begin{array}{ll} \underline{a > a} & \\ \underline{> a, \neg a} & (>\neg) \\ \underline{\neg\neg a > a} & (\neg>) \\ > \neg\neg a \to a & (>\to) \end{array} \qquad\qquad \textit{CSI}\quad \begin{array}{ll} \underline{A > A} & \\ \underline{\neg A, A >} & (\neg>) \\ \underline{A > \neg\neg A} & (>\neg) \\ > A \to \neg\neg A & (>\to) \end{array}$$

De modo que

(3)	$\vdash \neg\neg a \to a$	es teorema en *CSP* y
(4)	$\vdash A \to \neg\neg A$	lo es en *CSI*.

En cambio las implicaciones conversas de estos teoremas no son derivables en esos cálculos.

También de la forma general de los axiomas con enunciados elementales se deduce en ambos cálculos mencionados una forma particular del mismo con negación, como lo muestra la siguiente deducción:

CSP	$\underline{a \;>\; a}$		***CSI***	$\underline{A \;>\; A}$	
	$\underline{\underline{>\; a, \neg a}}$	$(>\neg)$		$\underline{\underline{\neg A,\; A \;>}}$	$(\neg>)$
	$\underline{\neg a > \;\neg a}$	$(>P\,,\neg>)$[96]		$\underline{\neg A \;>\; \neg A}$	$(P>,>\neg)$
	$>\; \neg a \to \neg a$	$(>\to)$		$>\; \neg A \to \neg A$	$(>\to)$

Esto nos muestra que

(5) $\vdash \neg a \to \neg a$ es teorema en *CSP* y

(6) $\vdash \neg A \to \neg A$ lo es en *CSI*.

Como a partir de las terceras filas de los desarrollos anteriores este proceso de reiteración de la aplicación de una regla de negación, posterior intercambio o permutación de fbf. en el sucedente para *CSP* y en el antecedente para *CSI*, aplicación de la otra regla de negación, etc., se puede continuar *in indefinitum*, mediante simples aplicaciones de $(>\to)$ se obtienen en ambos cálculos teoremas de la forma:

T14'. $\vdash \neg^n a \to \neg^n a$,

donde '$\neg^n$' es una reiteración de *n* apariciones del negador. T14' coincide con T14 en *CSI* y *CSP'*, pero no en *CSP*, pues en éste resta la restricción para la deducción de (A2) a partir de (A1) sobre las fbf. con '$\to$' como constante lógica principal, por lo que no se puede reemplazar una fbf. elemental *a* por una fbf. cualquiera *A*. (En *CSP* se desarrolla obviamente todo lo desarrollado en *CSE*, incluido T11.)

---

[96] Hasta la tercera fila tenemos aquí una abreviatura de la deducción de la forma del esquema de axioma para *CSP* $\neg a > \neg a$ del § anterior.

Por otra parte, si partimos de la segunda fila de los desarrollos secuenciales de arriba se obtienen los siguientes teoremas:

$$\begin{array}{lll} \textit{CSP} & \underline{>\ \ a, \neg a} & (>\neg) \\ & \underline{\neg\neg a\ \ >\ \ a} & (\neg>) \\ & \underline{\underline{>\ \ a, \neg\neg\neg a}} & (>\neg) \\ & \underline{\neg a\ \ \ \ >\ \ \neg\neg\neg a} & (>\mathrm{P}, \neg>) \\ & >\ \ \neg a \rightarrow \neg\neg\neg a & (>\rightarrow) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \textit{CSI} & \underline{\neg A,\ \ \ A\ >} & (\neg>) \\ & \underline{A\ >\ \ \neg\neg A} & (>\neg) \\ & \underline{\underline{\neg\neg\neg A, A>}} & (\neg>) \\ & \underline{\neg\neg\neg A\ \ \ >\ \ \neg A} & (\mathrm{P}>, >\neg) \\ & > \neg\neg\neg A \rightarrow \neg A & (>\rightarrow), \end{array}$$

es decir, que en estos cálculos son teoremas respectivamente:

(7) $\vdash \neg a \rightarrow \neg\neg\neg a$ en *CSP* y

(8) $\vdash \neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$ en *CSI*.

A partir de la penúltima fila de la deducción de los teoremas
(5) $\vdash \neg a \rightarrow \neg a$ y
(6) $\vdash \neg A \rightarrow \neg A$ para los dos cálculos *CSP* y *CSI* deducimos:

$$\begin{array}{lll} \textit{CSP} & \underline{\neg a>\ \ \neg a\ \ \ \ } & \\ & \underline{>\ \ \neg a, \neg\neg a} & (>\neg) \\ & \underline{\neg\neg\neg a>\ \ \neg a,} & (\neg>) \\ & >\ \ \neg\neg\neg a \rightarrow \neg a & (>\rightarrow) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \textit{CSI} & \underline{\neg A\ \ \ >\ \neg A} & \\ & \underline{\neg\neg A, \neg A>\ \ } & (\neg>) \\ & \underline{\neg A\ \ \ >\ \ \neg\neg\neg A} & (>\neg) \\ & >\ \ \neg A \rightarrow \neg\neg\neg A & (>\rightarrow), \end{array}$$

que son los teoremas

(9) $\vdash \neg\neg\neg a \rightarrow \neg a$ para *CSP* y

(10) $\vdash \neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$ para *CSI*,

conversos de los anteriores. Esto nos muestra que, de acuerdo con la definición de biimplicador, obtenemos como teorema válido en los cálculos *CSP* y *CSI* la equivalencia:

(11) $\vdash \neg a \leftrightarrow \neg\neg\neg a$,

y en los cálculos *CSP’* y *CSI* la equivalencia:

(12) $\vdash \neg A \leftrightarrow \neg\neg\neg A$.

Estos resultados se generalizan con el siguiente teorema:

T15. Si $1 \leq m$, $1 \leq n$ y $|m\text{-}n| = 2k$ $(0 \leq k)$,

entonces en ***CSP*** y ***CSI*** se deduce:

$\vdash \neg^m a \leftrightarrow \neg^n a$,

y en en ***CSP'*** y ***CSI*** se deduce:

$\vdash \neg^m A \leftrightarrow \neg^n A$, (*a fortiori* ambas formas se deducen en ***CSC***).

Dem.: La demostración se hace por inducción finita. Comenzamos con el caso para los dos primeros cálculos ***CSP*** y ***CSI***.

Caso base: donde $0 = k$, es decir $\vdash \neg^m a \leftrightarrow \neg^n a$ será la secuencia $\vdash \neg^n a \leftrightarrow \neg^n a$, puesto de $m = n$, que es consecuencia inmediata de T14' $\vdash \neg^n a \rightarrow \neg^n a$.

Paso inductivo: la hipótesis inductiva supone que el teorema se cumple para los números i y j de negaciones tales que $j = i{+}2k$ $(0 \leq k)$, es decir que es deducible el teorema $\vdash \neg^i a \leftrightarrow \neg^j a$. Tenemos dos subcasos: uno para el cálculo ***CSP*** y otro para el cálculo ***CSI***.

Caso 1 (para ***CSP***): partimos de nuestra hipótesis inductiva: $\vdash \neg^i a \leftrightarrow \neg^j a$, con $j = i{+}2k$ $(0{\leq}k)$. Tenemos que deducir $\vdash \neg^{i+1} a \leftrightarrow \neg^{j+1} a$, con $j = i{+}2k$ $(0{\leq}k)$. Si vale nuestra hipótesis inductiva, entonces existen últimas secuencias de deducciones con las formas $\neg^i a > \neg^j a$ y $\neg^j a > \neg^i a$, respectivamente. Ha partir de aquí realizamos los siguientes desarrollos:

$$\begin{array}{l} \underline{\neg^i a \quad > \quad \neg^j a \quad} \\ \underline{> \quad \neg^j a, \neg^{i+1} a} \\ \underline{> \quad \neg^{i+1}\, a, \neg^j a \quad} \\ \neg^{j+1} a \;\; > \;\; \neg^{i+1} a \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \underline{\neg^j a \quad > \quad \neg^i a} \\ \underline{> \quad \neg^i a, \neg^{j+1} a} \\ \underline{> \quad \neg^{j+1} a, \neg^i a \quad} \\ \neg^{i+1} a \;\; > \;\; \neg^{j+1} a \end{array}$$

De estas secuencias finales por (>→) y la interpretación en estos casos de Gentzen para '>' obtenemos los teoremas

$$\vdash\ \neg^{j+1}a \rightarrow \neg^{i+1}a \qquad\qquad \vdash\ \neg^{i+1}a \rightarrow \neg^{j+1}a\ ,$$

de los que por conjunción (>∧) y definición de '↔' obtenemos para ***CSP***

$$\vdash\ \neg^{i+1}a \leftrightarrow \neg^{j+1}a.$$

Caso 2 (para ***CSI***): de la misma hipótesis inductiva tenemos que deducir la misma consecuencia. Por la hipótesis inductiva valen las mismas últimas secuencias de deducciones, a partir de las cuales ahora realizamos los siguientes desarrollos:

$$\begin{array}{l} \underline{\neg^{i}a \quad > \quad \neg^{j}a \qquad} \\ \underline{\neg^{j+1}a, \neg^{i}a>} \\ \underline{\neg^{i}a, \neg^{j+1}a> \qquad\qquad\qquad} \\ \neg^{j+1}a \ > \ \neg^{i+1}a \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \underline{\neg^{j}a \quad > \quad \neg^{i}a} \\ \underline{\neg^{i+1}a, \neg^{j}a>} \\ \underline{\neg^{j}a, \neg^{i+1}a> \qquad\qquad\qquad} \\ \neg^{i+1}a \ > \ \neg^{j+1}a, \end{array}$$

de donde obtenemos los mismos teoremas que en el caso 1 y por conjunción (>∧) y definición de '↔' obtenemos también $\vdash\ \neg^{i+1}a \leftrightarrow \neg^{j+1}a$ para ***CSI***. Esto completa la primera parte de la demostración para ***CSP*** y ***CSI***. Como en ***CSI*** (A2) se deduce de (A1) y en ***CSP'*** se puede utilizar (A2), entonces en la demostración anterior podemos reemplazar '*a*' por '*A*' en todas sus apariciones y así obtenemos la segunda forma más general de T15. Esto completa la demostración. □

La diferencia fundamental entre los cálculos ***CSP***, ***CSP'***, ***CSI*** y ***CSC*** es que en los tres primeros la afirmación, la negación y la doble negación son expresiones no equivalentes, por lo que recién a partir de una iteración con tres o más negaciones tenemos equivalencias que tornan reducibles las negaciones de orden superior, en tanto que en el cálculo ***CSC*** ya la doble negación es equivalente con la simple afirmación, por lo que toda iteración de negadores es redundante. Además en ***CSC*** la deducibilidad de (A2) a partir (A1) permite utilizar todos los teoremas anteriores reemplazando las fbf. elementales *a* por fbf. *A* cualesquiera.

Los resultados anteriores nos han dado una visión de conjunto acerca de las leyes aceptables de negación en los seis sistemas considerados. Luego de esa discusión y con el compromiso de aceptar plenamente la forma de axioma (A2) nos limitaremos a los cuatro cálculos *CSE'*, *CSP'*, *CSI* y *CSC*, cuyas reglas y leyes fundamentales para negadores las podemos resumir así:

1. En *CSE'* (generalización de *CSE*) son limitadas las leyes de reducción o aumento de negadores, es decir valen $\vdash \neg^{m}A \;\rightarrow\; \neg^{2n}A$ por T7 y T8, donde m es un número cualquiera mayor o igual a 0 de negadores, pero sólo bajo la condición de que $\vdash A$. Esto hace que ninguna iteración de negadores sea superflua y no hay ninguna equivalencia entre dos fbf. $\neg^{m}A$ y $\neg^{n}A$: en el caso de que $m \neq n$, ni $\neg^{2m}A$ implica $\neg^{2n}A$, ni $\neg^{2m+1}A$ implica $\neg^{2n+1}A$, salvo en el caso de que A sea teorema. En consecuencia en estos cálculos hay infinitas negaciones iteradas no equivalentes.

En *CSE'* se deducen:

(1) $\vdash A \rightarrow A$ la forma general de **pi**,

(2) $\vdash \neg\neg(A \rightarrow A)$ su doble negación,

los metateoremas siguientes:

T2. Si $\vdash A$, entonces $\vdash \neg\neg A$

T3. Si $\vdash A$, entonces $\vdash \neg^{2n}A$

T4. Si $\vdash A$, entonces $\neg^{2n+1}A \vdash$

T5. Si $\neg A \vdash$, entonces $\vdash \neg^{2n}A$

T6. Si $\neg A \vdash$, entonces $\neg^{2n+1}A \vdash$

T12. Si $\vdash A$, entonces $\vdash B \rightarrow \neg^{2n}A$ y

T13. Si $\vdash A$, entonces, $\vdash \neg^{2n+1}A \rightarrow B$
(T7 a T10 son casos especiales de T13).

T14. $\vdash \neg^{n}A \rightarrow \neg^{n}A$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. En *CSP'*, que agrega a *CSP* la variante (A2) de esquema de axioma, donde A es una fbf. cualquiera. Por lo tanto en *CSP'* se agregan los siguientes teoremas a los de *CSE'*:

(3) $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$,

(12) $\vdash \neg A \leftrightarrow \neg\neg\neg A$,

T15. Si $1 \leq m$, $1 \leq n$ y $|m\text{-}n| = 2k\ (0 \leq k)$, entonces: $\vdash \neg^m A \leftrightarrow \neg^n A$.

3. En *CSI* no sólo no vale (3) de *CSP'*, sino que en cambio vale:

(4) $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$.

4. *CSC*: puesto que (3) $\vdash \neg\neg \rightarrow A$ es teorema en *CSP'* y (4) $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$ lo es en *CSI* y éstos son subsistemas de *CSC*, entonces en este último sistema, además de todas las reglas y leyes para la negación de los sistemas anteriores, aún podemos agregar

(14) $\vdash A \leftrightarrow \neg\neg A$.

5.10. Algunos desarrollos en los cálculos secuenciales considerados.

5.10.1. Algunos desarrollos en *CSE'*.

Como vimos arriba, la ley lógica más simple de deducir es la forma general de la ley de identidad **pi**, que corresponde a la secuencia final del desarrollo trivial

$$(>\rightarrow)\ \frac{A\ >\ A}{>A \rightarrow A}\ .$$

De aquí se seguían inmediatamente su doble negación y sus generalizaciones. Algunas otras deducciones inmediatas son las siguientes:

$$(\wedge>)\ \frac{A > A}{A\wedge B > A}\ , \qquad (\wedge>)\ \frac{B > B}{A\wedge B > B}\ ,$$

que justifican las leyes de simplificación de '$\wedge$',

$$(>\vee)\ \frac{A > A}{A > A\vee B}\ , \qquad (>\vee)\ \frac{A > A}{A > B\vee A}\ ,$$

que justifican las leyes de adición de '$\vee$'.

De desarrollos elementales como:

$$(\wedge>)\ \frac{A > A}{A\wedge A > A}\ ,\qquad (>\wedge)\ \frac{A > A\ ,,\quad A > A}{A\ >\ A\wedge A}\ ,$$

derivamos la idempotencia para '$\wedge$'. Y de los siguientes

$$(>\vee)\ \frac{A > A}{A > A\vee A}\ ,\qquad (\vee>)\ \frac{A > A\ ,,\quad A > A}{A\vee A\ >\ A}$$

derivamos la idempotencia para '$\vee$'. Por su parte de los desarrollos:

$$\begin{array}{ll} & \dfrac{\dfrac{B > B}{A\wedge B > B}\ (\wedge>) \ ,, \quad \dfrac{A > A}{A\wedge B > A}\ (\wedge>)}{A\wedge B > B\wedge A}\ (>\wedge) \end{array}$$

se deriva la conmutatividad de '$\wedge$', como de los siguientes:

$$\dfrac{\dfrac{A > A}{A > B\vee A}\ (>\vee)\ ,, \quad \dfrac{B > B}{B > B\vee A}}{A\vee B > B\vee A}\ (\vee>)$$

se deriva la conmutatividad de '$\vee$'.

El desarrollo secuencial siguiente es interesante:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A > A}{> A \to A}\ (>\to)\ ,, \qquad B > B}{(A\to A) \to B > B}\ (\to>)}{> ((A \to A) \to B) \to B}\ (>\to)$$

La secuencia final dice algo obvio: que si una fórmula se sigue de la ley de identidad, entonces es un teorema. *No hay que confundir esta secuencia con la ley clásica de Peirce*, cuya forma es: $(A \to B) \to A) \to A$, la que equivale clásicamente a $(A \to B)\vee A$ y a $\neg A\vee A$, fórmulas que no son deducibles ni en *CSE'* ni en *CSI*.

Del resultado anterior, observando las expresiones marcadas y generalizando de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} & > A,\qquad B > B \\ \cline{2-2} (\to>) & A \to B > B \\ \cline{2-2} (>\to) & > (A \to B) \to B, \end{array}$$

resulta que en *CSE'* vale la regla metateórica siguiente:

R1. Si $\vdash A$, entonces $\vdash (A \to B) \to B$.[97]

Consideremos ahora brevemente algunos desarrollos secuenciales de *CSE'* que proporcionan reglas y leyes de la lógica de cuantores:

$$\begin{array}{ll} & Fa > Fa \\ \cline{2-2} (\wedge>) & \wedge xFx > Fa \\ \cline{2-2} (>\vee) & \wedge xFx > \vee xFx \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & Fa > Fa \\ \cline{2-2} (>\vee) & Fa > \vee xFx \\ \cline{2-2} (\wedge>) & \wedge xFx > \vee xFx \end{array}$$

que son las dos deducciones permitidas de la ley de pendiente cuantorial.

La necesidad de la restricción para las figuras de deducción *(>∧) y *(∨>) se advierte al considerar ejemplos que no respetan dicha restricción, como los siguientes:

$$\begin{array}{ll} & Fa > Fa \\ \cline{2-2} (>\wedge)^{i} & Fa > \wedge xFx \\ \cline{2-2} (\vee>) & \vee xFx > \wedge xFx \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & Fa > Fa \\ \cline{2-2} (\vee>)^{i} & \vee xFx > Fa \\ \cline{2-2} (>\wedge) & \vee xFx > \wedge xFx \end{array}$$

Estos desarrollos falaces producen secuencias inferiores que corresponden a tres fórmulas lógicamente inválidas:

* $Fa \to \wedge xFx$,
* $\vee xFx \to Fa$ y
* $\vee xFx \to \wedge xFx$.

Señalamos con el supraíndice 'i' los usos incorrectos de las reglas críticas, que lo son porque la variable propia *a* aparece en la secuencia inferior de (>∧) y (∨>), lo que resaltamos con '*a*'.

[97] Puesto que la fbf. derecha es (sólo) clásicamente equivalente con $A \vee B$, se advierte que la regla R1 equivale clásicamente a la siguiente: Si $\vdash A$, entonces $\vdash A \vee B$, lo que es deducible incluso en en *CSE'*.

En cambio el uso correcto de las reglas críticas produce subsecuencias a las que corresponden fórmulas lógicas válidas, cuando su uso no deja apariciones de la variable propia del caso en las subsecuencias, como se observa en los siguientes ejemplos:

$$\begin{array}{ll} & \underline{Fa > Fa} \\ (\wedge>) & \underline{\wedge xFx > Fa\quad} \\ (>\wedge) & \wedge xFx > \wedge xFx \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & \underline{Fa > Fa\quad} \\ (>\vee) & \underline{Fa > \vee xFx} \\ (\vee>) & \vee xFx > \vee xFx \end{array} \quad ,$$

cuyas secuencias finales son leyes lógicas variantes del principio de identidad **pi** $\vdash \wedge xFx \rightarrow \wedge xFx$ y $\vdash \vee xFx \rightarrow \vee xFx$.

Los resultados anteriores dan los siguientes teoremas y reglas generales para ***CSE***:

$\vdash A \rightarrow A$	**pi**
$\vdash \neg\neg(A \rightarrow A)$	forma débil del **pi**
$\vdash \neg^{2n}(A \rightarrow A)$	formas débiles sucesivas del **pi**
$\vdash A \wedge B \rightarrow A$	simplificación de '$\wedge$'
$\vdash A \wedge B \rightarrow B$	
$\vdash A \rightarrow A \vee B$	adición de '$\vee$'
$\vdash A \rightarrow B \vee A$	
$\vdash A \leftrightarrow A \wedge A$	idempotencia para '$\wedge$'
$\vdash A \leftrightarrow A \vee A$	idempotencia para '$\vee$'
$\vdash A \wedge B \rightarrow B \wedge A$	conmutación de '$\wedge$'
$\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$	conmutación de '$\vee$'

R1. Si $\vdash A$, entonces $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow B$.

$\vdash \wedge xFx \rightarrow Fa$	leyes de la pendiente cuantorial
$\vdash Fa \rightarrow \vee xFx$	
$\vdash \wedge xFx \rightarrow \vee xFx$	

5.10.2. Algunos desarrollos en *CSP*.

Una característica esencial de este cálculo son las “figuras de deducción idénticas” (*identische Schlußfiguren*), que permiten derivar de una secuencia cualquiera (con un número cualquiera de fbf.s en el sucedente) $A > \Theta$ la misma secuencia $A > \Theta$. Para demostrarla supongamos que en la lista de fórmulas Θ del sucedente aparece al menos una vez la fórmula B. Aplicando las figuras de deducción admisibles en *CSP’* debilitamiento y contracción en el sucedente obtenemos el desarrollo secuencial:

$$\begin{array}{ll} & \underline{A > \Theta(B)} \\ (>\mathrm{D}) & \underline{A > \Theta(B), B} \\ (>\mathrm{C}) & A > \Theta(B) \end{array}$$

Esto muestra que las figuras de deducción idénticas son deducibles en este cálculo clásico paraconsistente: basta con que en el sucedente sean admisibles esas reglas estructurales.

1.		$\underline{B > B}$	
2.		$\underline{A > A}$,, $\underline{B > B, A}$	(>D)
3.	(>D)	$\underline{A > A, B}$,, $\underline{B > A, B}$	(>P)
4.	(∨>)	$\underline{A \vee B > A, B}$	
5.	(>¬)	$\underline{\underline{> A, B, \neg(A \vee B)}}$	
6.	(>P, 2 veces)	$\underline{> \neg(A \vee B), A, B}$	
7.	(¬>)	$\underline{\neg B > \neg(A \vee B), A}$	
8.	(>→)	$\underline{> \neg(A \vee B), \neg B \to A}$	
9.	(>P)	$\underline{> \neg B \to A, \neg(A \vee B)}$	
10.	(¬>)	$\underline{\neg\neg (A \vee B) > \neg B \to A}$	
11.	(→>)	$> \neg\neg (A \vee B) \to (\neg B \to A)$	

Así obtenemos la ley $\vdash \neg\neg(A \vee B) \to (\neg B \to A)$. Si en la sexta secuencia permutamos A y B, obtenemos $\vdash \neg\neg(A \vee B) \to (\neg A \to B)$. Éstas son dos formas de leyes de “silogismo disyuntivo” ‘*sd*’. El carácter clásico de la demostración está determinado por condiciones estructurales, pues aparece más de una fbf. en algunos sucedentes de las secuencias. Obviamente en *CSP’* no es deducible la ley clásica $A \vee B \to (\neg B \to A)$, pues en este cálculo no vale (4) $A \to \neg\neg A$, que es deducible en *CSI* y que permitiría esa deducción mediante la regla de corte. Esto es fácil de comprender, porque que en este cálculo vale la implicación $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$ pero no la equivalencia $\neg\neg A \leftrightarrow A$.

En *CSP’* la forma con doble negación como prefijo es deductivamente más fuerte que la simple afirmación (a la inversa de lo que ocurre en *CSI*), con lo que el paso del antecedente doblemente negado al simplemente afirmado constituye aquí un debilitamiento del antecedente, lo que no garantizaría la deducibilidad del sucedente de la secuencia.

En *CSP’* se deduce obviamente el *tertium non datur*:

1. $\underline{A > A}$
2. (>¬) $\underline{> A\ \neg A}$
3. (>∨) $\underline{> A,\ A\vee\neg A}$
4. (>P) $\underline{> A\vee\neg A,\ A}$
5. (>∨) $\underline{> A\vee\neg A,\ A\vee\neg A}$
6. (>C) $> A\vee\neg A$

y las siguientes variantes de la primera forma de las paradojas de la implicación:

1. $\underline{A > A}$
2. $\underline{> A,\ \neg A}$
3. $\underline{B > A,\ \neg A}$
4. $\underline{> A,\ B \rightarrow \neg A}$
5. $\underline{> B \rightarrow \neg A,\ A}$
6. $\underline{\neg A > B \rightarrow \neg A}$
7. $> \neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$

1. $\underline{A > A}$
2. $\underline{> A,\ \neg A}$
3. $\underline{B > A,\ \neg A}$
4. $\underline{B > \neg A,\ A}$
5. $\underline{> \neg A,\ B \rightarrow A}$
6. $\underline{> B \rightarrow A,\ \neg A}$
7. $\underline{\neg\neg A > B \rightarrow A}$
8. $> \neg\neg A \rightarrow (B \rightarrow A)$

5.10.3. Algunos desarrollos en *CSI*.

También en este cálculo se deducen las "figuras de deducción idénticas". Para demostrarla supongamos que en la lista de fórmulas Γ del antecedente aparece al menos una vez la fórmula A. Aplicando debilitamiento y contracción en el antecedente obtenemos el desarrollo:

$$\begin{array}{ll} & \underline{\Gamma(A) > B} \\ (D>) & \underline{A, \Gamma(A) > B} \\ (C>) & \Gamma(A) > B \end{array}$$

El desarrollo

$$\begin{array}{llll} & \underline{\quad A \ > \ A} & & \\ (D>) & \underline{B, A \ > \ A} & \underline{\quad B \ > \ B} & \\ (P>) & \underline{A, B \ > \ A,, \quad A, B \ > \ B} & & (D>) \\ (>\wedge) & \underline{A, B \ > \ A \wedge B} & & \\ (P>) & \underline{\underline{B, A \ > \ A \wedge B}} & & \\ (>\rightarrow \text{ dos veces}) & > \ A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B) & & \end{array}$$

es intuicionista y corresponde a la ley de conjunción

$$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B).$$

La deducción intuicionista de una de las formas del silogismo disyuntivo se obtiene mediante el siguiente desarrollo:

$$\begin{array}{llll} 1. & & \underline{B \ > \ B} & \\ 2. & & \underline{\underline{\neg B, B >}} & (\neg >) \\ 3. & & \underline{A \ > \ A \ ,, \ \ B, \neg B > A} & (P>D) \\ 4. & (\vee >) & \underline{A \vee B, \neg B > \ A} & \\ 5. & (P>) & \neg B, A \vee B > \ A. & \end{array}$$

De 5 y dos aplicaciones de $(>\rightarrow)$ obtenemos el *sd* $\vdash A \vee B \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$. Como los sucedentes de *CSI* sólo contienen una fórmula, $\vdash A \vee B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ se obtiene intercambiando en el desarrollo anterior A por B y viceversa.

Las leyes de adición no relevante $\vdash A \rightarrow A \vee B$ y $\vdash A \rightarrow B \vee A$ se obtienen de forma inmediata:

$$\frac{A\ >\ A}{A\ >\ A\vee B}\ (>\vee)\qquad \frac{A\ >\ A}{A\ >\ B\vee A}$$

El *verum sequitur* $\vdash A \to (B \to A)$ se deduce por (D>) y (>→):

1. $\underline{A\ >\ A}$
2. (D>) $\underline{B, A\ >\ A}$
3. (>→) $\underline{A\ >\ B \to A}$
4. (>→) $>\ A \to (B \to A)$

Sin debilitamiento en el antecedente es imposible derivarla, de modo que la decisión de evitar que esta paradoja de la implicación sea una ley, se puede lograr de diversas maneras. La primera es restringiendo de algún moda la regla de debilitamiento. Existen sin embargo otras formas de evitar la deducibilidad de esa paradoja, por ejemplo mediante la *restricción de los usos aceptables de la introducción del implicador en el sucedente, prohibiendo por ejemplo que se pueda "descargar" como antecedente de una implicación del nuevo sucedente a*:
(1) fbf.s *que hayan aparecido por debilitamiento o,*
(2) *sus consecuencias deductivas*.
Con estas restricciones no podríamos descargar B y en consecuencia no obtendríamos la ley del *verum sequitur*. Estas restricciones se pueden utilizar en las "lógicas relevantes".

Otra paradoja de la implicación, $\vdash A \to (\neg A \to B)$, el *ex falso sequitur quodlibet*, se obtiene en ***CSI*** con (¬>), (>D) y (>→):

$\underline{A\ >\ A}$
(¬>) $\underline{\neg A, A >}$
(>D) $\underline{\underline{\neg A, A >\ B}}$
(>→ dos veces) $>\ A \to (\neg A \to B)$

La otra versión, $\vdash \neg A \to (A \to B)$, se obtiene como la anterior con una regla (P>) luego de (¬>).

La deducción de estas paradojas se puede evitar, o bien restringiendo la regla de introducción del negador en el antecedente, o bien el debilitamiento en el sucedente. Esta última es una estrategia sugerida por varios autores.[98]

5.10.4. Algunos desarrollos en *CSC*.

Las figuras de deducción idénticas de $\Gamma > \Theta$ (con un número cualquiera de fbf.s tanto en el antecedente como en el sucedente) a $\Gamma > \Theta$ se desarrollan *a fortiori* en *CSC*, puesto que los desarrollos de *CSP'* y *CSI* valen necesariamente en este cálculo para cualquier fbf. A del antecedente o B del sucedente:

$$\begin{array}{ll}
 & \underline{\Gamma > \Theta} \\
(D>) & \underline{A, \Gamma > \Theta} \\
(C>) & \Gamma > \Theta
\end{array}
\quad , \qquad
\begin{array}{ll}
 & \underline{\Gamma > \Theta} \\
(>D) & \underline{\Gamma > \Theta, B} \\
(>C) & \Gamma > \Theta
\end{array}$$

Las reglas clásicas del silogismo disyuntivo se obtienen así:

$$\begin{array}{lllll}
1. & & & \underline{B > B} & \\
2. & & \underline{A > A} \;,, & \underline{B > B, A} & (>D) \\
3. & (>D) & \underline{A > A, B} \;,, & \underline{B > A, B} & (>P) \\
4. & (\vee>) & \underline{A \vee B > A, B} & & \\
5. & (\neg>) & \underline{\underline{\neg B, A \vee B > A}} & & \\
6. & (>\to \text{ 2 veces}) & > A \vee B \to (\neg B \to A) & &
\end{array}$$

Así obtenemos la ley $\vdash A \vee B \to (\neg B \to A)$. Si luego de la cuarta fila permutamos en el sucedente (>P), obtendremos finalmente $\vdash A \vee B \to (\neg A \to B)$. Éstas son dos formas clásicas de "silogismo disyuntivo", que abreviamos '*sd*'. El carácter clásico de la demostración está determinado por las condiciones estructurales, pues aparece más de una fbf. en algunos sucedentes de secuencias.

Es superfluo reiterar que todos los desarrollos secuenciales de los sistemas *CSI* y *CSP'*, y sus correspondientes reglas y leyes lógicas, también son desarrollos secuenciales, reglas y leyes de *CSC*, por lo que no reiteraremos su deducción.

---

[98] Cf. p. ej. TENNANT 1994, 127-33 y 1997, X, esp. § 10.3, 322-5.

5.11. La regla de "mezcla" (M).

La generalización de la regla de corte (S) es la regla de "mezcla" (M), que traduce el nombre alemán que le diera Gentzen: '*Mischung*' (en inglés *mix*). Su esquema es el siguiente:

$$(\mathrm{M})\qquad \frac{\Gamma > \Theta(M),, \quad \Delta(M) > \Lambda}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda},$$

donde $\Theta(M)$ y $\Delta(M)$ son sucesiones de fbf.s en las que puede aparecer *cero o más veces* una fórmula común M, llamada '*fórmula de la mezcla*' (*Mischformel*), y Θ y Δ son las sucesiones en las que se han eliminado *todas las posibles apariciones* de M.

Por operaciones sucesivas de debilitamiento, permutación y contracción se establece la equivalencia entre las reglas (S) y (M) en *CSC*, de modo que la segunda es una regla derivada equivalente a la primera. Partimos de (M) y suponemos que tanto $\Theta(M)$ como $\Delta(M)$ contienen al menos una aparición de M. Mediante un número finito de permutaciones y contracciones obtenemos:

$$(\mathrm{S})\qquad \frac{\Gamma > \Theta, M,, \quad M, \Delta > \Lambda}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda.}$$

El camino opuesto de realiza mediante un número finito de debilitamientos y permutaciones.

Si una o ambas de las dos secuencias superiores carecen de apariciones de M, es decir si $\Theta(M) = \Theta$ y/o $\Delta(M) = \Delta$, entonces por sucesivos debilitamientos y permutaciones se obtiene

$$(\mathrm{I})\qquad \frac{\Gamma > \Theta(M)}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda} \qquad \text{o bien} \qquad (\mathrm{II})\qquad \frac{\Delta(M) > \Lambda}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda},$$

y de éstas, colocando la secuencia faltante a derecha o a izquierda, se obtiene nuevamente (M). De modo que, como en el caso de (S), si falta M en alguno o en ambos lados de (M), entonces es eliminable y equivale a una deducción más sencilla sin mezcla. El caso general de la eliminabilidad de (M) cuando la fbf. M aparece en ambas secuencias en los lugares adecuados lo resuelve el teorema fundamental del capítulo siguiente.

También en *CSI* son equivalentes (S) y (M), como se muestra a continuación: Se alcanza la misma secuencia final de (S) mediante (M) y usos reiterados de (D>) y (P>):

$$(S)\ \frac{\Gamma > M,, \quad M, \Delta(M) > A}{\Gamma, \Delta(M) > A} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma > M,, \quad M, \Delta(M) > A}{\Gamma, \Delta > A}\ (M)}{\Gamma, \Delta(M) > A}\ (D,P>)$$

Se obtiene la misma secuencia final de (M) mediante usos reiterados de (S) (P>) y (C>):

$$(M)\ \frac{\Gamma > M,, \quad M, \Delta(M) > A}{\Gamma, \Delta > A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma > M,, \quad M, \Delta(M) > A}{\Gamma > M,, \quad \Gamma, \Delta(M) > A}\ (S)}{\Gamma, \Gamma, \Delta(M)' > A}\ (S)}{\Gamma, \Delta(M)' > A}\ (C>)$$

Si en la secuencia derecha de la segunda fila $\Delta(M) = \Delta$, entonces ya (S) = (M). Si $\Delta(M) \neq \Delta$, entonces aparecerá al menos una fbf. M en $\Delta(M)$, En tal caso agregamos a la izquierda nuevamente la secuencia $\Gamma > M$, usamos (S) y (C>) y obtenemos Γ, $\Delta(M)'$>A, donde $\Delta(M)'$ es una sucesión de fbf.s que contiene una aparición menos de M que $\Delta(M)$

Si $\Delta(M)' = \Delta$, hemos alcanzado el resultado buscado. Si en cambio $\Delta(M)' \neq \Delta$, agregamos otra vez la secuencia $\Gamma > M$ a la izquierda, reiteramos el desarrollo anterior y obtenemos la secuencia final Γ, $\Delta(M)'' > A$, , donde $\Delta(M)''$ contiene una aparición menos de M que $\Delta(M)'$. Si $\Delta(M)'' = \Delta$, entonces $\Gamma, \Delta > A$ y alcanzamos el resultado buscado. En caso contrario reiteramos el procedimiento. Puesto que el proceso es finito, $\Delta(M)$ sólo puede tener un número finito de apariciones de M, por lo que habrá algún $\Delta(M)^n = \Delta$, que se alcanza en un número finito de reiteraciones del proceso anterior.

En la demostración del "teorema fundamental" de eliminación de la regla de corte, que veremos en el capítulo siguiente, se utiliza mucho la regla (M) para facilitar la deducción. Un ejemplo de aplicación de (M) es el siguiente:

$$(M)\quad \frac{A \ > \ A\vee B, \neg B, \qquad B, A\vee B, \ \neg(A\vee B), A\vee B, C\vee\neg B \ >}{A,\ B, \neg(A\vee B),\ C\vee\neg B \ > \ \neg B}$$

Tenemos muchos ejemplos de deducciones que utilizan la regla (S) o la (M) y otras que tienen la misma secuencia final pero carecen de ella, como lo muestra el siguiente ejemplo para ***CSI*** propuesto por Gentzen:

$$\begin{array}{llll}
 & & \underline{\bigvee xFx > \bigvee xFx} & \\
 & \underline{Fa > Fa} & \underline{\neg\bigvee xFx, \bigvee xFx >} & (\neg>) \\
(>\bigvee) & \underline{Fa > \bigvee xFx} & \underline{\bigvee xFx, \neg\bigvee xFx >} & (P>) \\
(S) & \underline{Fa, \neg\bigvee xFx >} & & \\
(>\neg) & \underline{\neg\bigvee xFx > \neg Fa} & & \\
(>\bigwedge) & \underline{\neg\bigvee xFx > \bigwedge x\neg Fx} & & \\
(>\rightarrow) & >\neg\bigvee xFx \rightarrow \bigwedge x\neg Fx & &
\end{array}$$

Ésta es la deducción de una ley de la lógica intuicionista de primer orden que usa una vez la regla de corte. En cambio la siguiente deducción tiene la misma secuencia final y carece de todo uso de dicha regla:

$$\begin{array}{ll}
 & \underline{Fa > Fa} \\
(>\bigvee) & \underline{Fa > \bigvee xFx} \\
(\neg>) & \underline{\neg\bigvee xFx,\ Fa >} \\
(P>) & \underline{Fa, \neg\bigvee xFx >} \\
(>\neg) & \underline{\neg\bigvee xFx > \neg Fa} \\
(>\bigwedge) & \underline{\neg\bigvee xFx > \bigwedge x\neg Fx} \\
(>\rightarrow) & >\neg\bigvee xFx \rightarrow \bigwedge x\neg Fx
\end{array}$$

En ambas deducciones hemos resaltado las secuencias comunes. Como se advierte el uso de la regla de corte en la deducción superior sólo ha servido para evitar (P>) en la fila 4 de la deducción inferior. Otro ejemplo trivial es el siguiente:

$$
\begin{array}{ll}
 & A, > A \\
 & \neg A, A > \quad (\neg>) \\
 & A > A \,,,\quad A, \neg A > \quad (P>) \\
(S) & A, \neg A > \\
(\wedge>) & A\wedge\neg A, \neg A > \\
(P>) & \neg A, A\wedge\neg A > \\
(\wedge>) & A\wedge\neg A, A\wedge\neg A > \\
(C>) & A\wedge\neg A > \\
(>\neg) & > \neg(A\wedge\neg A)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
 & A, > A \\
(\neg>) & \neg A, A > \\
(\wedge>) & A\wedge\neg A, A > \\
(P>) & A, A\wedge\neg A > \\
(\wedge>) & A\wedge\neg A, A\wedge\neg A > \\
(C>) & A\wedge\neg A > \\
(>\neg) & > \neg(A\wedge\neg A)
\end{array}
$$

Ambos desarrollos demuestran una secuencia final equivalente al principio universal de no contradicción, pero la de la izquierda usa de manera trivialmente innecesaria una aparición de (S). La generalización de esta eliminación de apariciones particulares de (S) o de (M) a la eliminación sistemática de todas sus apariciones, es lo que constituye el *teorema fundamental* de Gentzen, que demostraremos en el capítulo siguiente.

Una propiedad que deben cumplir las deducciones secuenciales para que se les puedan aplicar sin problemas las transformaciones necesarias para demostrar ese teorema es la siguiente: *que la variable propia* (*a*, *b*, *c*, ...) *de una regla crítica como* (>Λ) *o* (V>) *sólo aparezca en sus secuencias superiores y no aparezca en ninguna otra regla crítica* (>Λ) o (V>) *como su variable propia*.

Esta propiedad se asegura mediante la operación denominada '*cambio de nombre*' de las variables libres[99], que se realiza del modo siguiente: recorremos el árbol deductivo de arriba abajo hasta encontrar la primera regla (>Λ) o (V>). Si su variable propia es la misma que la de la aplicación de una regla crítica considerada, entonces la reemplazamos – en todas las secuencias superiores a las secuencias inferiores en las que aparece – por otra variable libre que no haya aparecido aún en la deducción. Realizamos el mismo procedimiento con cada regla crítica en el orden en que aparezcan, hasta completar este

[99] *Umbenennung von freien Gegenstandsvariablen*: cf. GENTZEN 1934-5, 3.10, 198-9.

procedimiento, que es necesariamente finito. Siguiendo el procedimiento la deducción conserva la corrección, su secuencia final y no modifica, ni lo que llamaremos en el próximo capítulo el 'grado', ni lo que llamaremos el 'rango' de ninguna regla. Así podemos justificar el lema auxiliar siguiente:

Lema: *Una secuencia inicial o una regla de deducción se transforma en otra secuencia inicial u otra regla de deducción de la misma especie, cuando se reemplaza una variable libre, que no sea la variable propia de la regla, en cada una de sus apariciones en la secuencia inicial o en la regla de deducción, por otra variable libre, si ésta última tampoco es la variable propia de la regla.*

El lema es inmediato porque se respetan las condiciones para las variables: no se puede sustituir por la variable propia y no se puede cambiar la variable propia. Si consideramos el siguiente ejemplo:

$$\frac{Fab, \Gamma > \Theta}{\forall xFax, \Gamma > \Theta} \qquad\qquad \frac{Fcb, \Gamma > \Theta}{\forall xFcx, \Gamma > \Theta}$$

donde se conservan las restricciones para las reglas críticas.

De manera semejante a la utilizada en los ejemplos considerados se pueden proponer desarrollos secuenciales que corresponden a reglas y teoremas de los sistemas lógicos fundamentales. Nosotros consideraremos dos sistemas: el clásico, y el intuicionista o constructivo. Sin embargo con adecuadas restricciones los cálculos secuenciales permiten justificar otros cálculos lógicos, como el mínimo de Johansson, etc. Los desarrollos secuenciales que justifican reglas y teoremas conocidos y no desarrollados son una buena ejercitación para el lector, por lo que quedarán como tarea práctica. Por otra parte los cálculos secuenciales estrictos y paraconsistentes, que hemos discutido brevemente sólo por razones estructurales, carecen de "razonabilidad", al no poderse presentar ningún argumento formal convincente de una restricción del número de premisas.

5.12. Apéndice: una visión puramente algebraica del cálculo secuencial.

Como ya anticipamos en un párrafo anterior las reglas de deducción en los cálculos secuenciales clásicos ***CSC*** se pueden expresar de modo puramente algebraico de la siguiente manera:

Reglas de deducción estructurales.

$$(\mathrm{D};)\quad \frac{\langle \Gamma_m; \Theta_n\rangle}{\langle A, \Gamma_m; \Theta_n\rangle} \qquad (;\mathrm{D})\quad \frac{\langle \Gamma_m; \Theta_n\rangle}{\langle \Gamma_m; \Theta_n, A\rangle}$$

$$(\mathrm{C};)\quad \frac{\langle A, A, \Gamma_m; \Theta_n\rangle}{\langle A, \Gamma_m; \Theta_n\rangle} \qquad (;\mathrm{C})\quad \frac{\langle \Gamma_m; \Theta_n, A, A\rangle}{\langle \Gamma_m; \Theta_n, A\rangle}$$

$$(\mathrm{P};)\quad \frac{\langle \Delta, A, B, \Gamma_m; \Theta_n\rangle}{\langle \Delta, B, A, \Gamma_m; \Theta_n\rangle} \qquad (;\mathrm{P})\quad \frac{\langle \Gamma_m; \Theta_n, A, B, \Lambda\rangle}{\langle \Gamma_m; \Theta_n, B, A, \Lambda\rangle}$$

$$(\mathrm{S})\quad \frac{\langle \Gamma_k; \Theta_l, M\rangle,, \langle M, \Delta_m; \Lambda_n\rangle}{\langle \Gamma_k, \Delta_m; \Theta_l, \Lambda_n\rangle}$$

Reglas de deducción para constantes lógicas.

$$(\wedge;)\quad \frac{\langle A, \Gamma_m; \Theta_n\rangle}{\langle A\wedge B, \Gamma_m; \Theta_n\rangle}, \frac{\langle B, \Gamma_m; \Theta_n\rangle}{\langle A\wedge B, \Gamma_m; \Theta_n\rangle} \qquad (;\vee)\quad \frac{\langle \Gamma_m; \Theta_n, A\rangle}{\langle \Gamma_m; \Theta_n, A\vee B\rangle}, \frac{\langle \Gamma_m; \Theta_n, B\rangle}{\langle \Gamma_m; \Theta_n, A\vee B\rangle}$$

$$(\vee;)\quad \frac{\langle A, \Gamma_m; \Theta_n\rangle,, \langle B, \Gamma_m; \Theta_n\rangle}{\langle A\vee B, \Gamma_m; \Theta_n\rangle} \qquad (;\wedge)\quad \frac{\langle \Gamma_m; \Theta_n, A\rangle,, \langle \Gamma_m; \Theta_n, B\rangle}{\langle \Gamma_m; \Theta_n, A\wedge B\rangle}$$

$$(\bigwedge;)\quad \frac{\langle Fa, \Gamma_m; \Theta_n\rangle}{\langle \bigwedge xFx, \Gamma_m; \Theta_n\rangle} \qquad (;\bigvee)\quad \frac{\langle \Gamma_m; \Theta_n, Fa\rangle}{\langle \Gamma_m; \Theta_n, \bigvee xFx\rangle}$$

$$*(\bigvee;)\quad \frac{\langle Fa, \Gamma_m; \Theta_n\rangle}{\langle \bigvee xFx, \Gamma_m; \Theta_n\rangle} \qquad *(;\bigwedge)\quad \frac{\langle \Gamma_m; \Theta_n, Fa\rangle}{\langle \Gamma_m; \Theta_n, \bigwedge xFx\rangle}$$

$$(\rightarrow;)\quad \frac{\langle \Gamma_k; \Theta_l, A\rangle ,, \langle \mathrm{B}, \Delta_m; \Lambda_n\rangle}{\langle A \rightarrow B, \Gamma_k, \Delta_m; \Theta_l, \Delta_m\rangle} \qquad (;\rightarrow)\quad \frac{\langle A, \Gamma_m; \Theta_n, B\rangle}{\langle \Gamma_m; \Theta_n, A \rightarrow B\rangle}$$

$$(\neg;)\quad \frac{\langle \Gamma_m; \Theta_n, A\rangle}{\langle \neg A, \Gamma_m; \Theta_n\rangle} \qquad (;\neg)\quad \frac{\langle A, \Gamma_m; \Theta_n\rangle}{\langle \Gamma_m; \Theta_n, \neg A\rangle}$$

Todos los desarrollos que hemos realizado arriba en los diferentes cálculos secuenciales se pueden realizar obviamente también para esta presentación algebraica. Para alguien interesado en los aspectos estrictamente algebraicos de los cálculos secuenciales es de importancia investigar las propiedades de estos sistemas. Para nosotros, que tenemos por objetivo construir cálculos lógicos que sirvan a la deducción de teoremas y reglas de deducción útiles en la filosofía y las ciencias, no es tan importante ese tratamiento algebraico, por lo que continuaremos con la presentación más tradicional y lógica de los cálculos secuenciales.

CAPÍTULO 6.
EL TEOREMA FUNDAMENTAL.

6.1. Nociones previas.

Al estudiar los cálculos de deducción natural Gentzen advirtió que era posible expresar toda deducción de la lógica de primer orden en una forma determinada, que llamamos '*forma normal*' o '*forma canónica*', o *deducción que* "*no hace rodeos*", es decir, *que en su desarrollo no hay pasos que agreguen fbf.s que no aparecen en su conclusión*. El teorema fundamental o '*Hauptsatz*' se propone esa tarea: mostrar que todo desarrollo secuencial se puede transformar en otro de forma canónica o normal, o que "no hace rodeos". Las reglas de corte (S) y de mezcla (M) son las únicas que hacen desaparecer en la secuencia inferior a fórmulas que aparecen en las secuencias superiores: por lo tanto son las únicas reglas que "hacen rodeos". Por eso el teorema fundamental afirma que *para cada desarrollo secuencial correcto en el que se usa al menos una vez una regla* (S) *o* (M), *se puede construir otro desarrollo secuencial correcto con la misma secuencia final que no usa nunca una regla* (S) *o* (M).

La demostración de este teorema no es posible en un cálculo de deducción natural clásico, por la situación especial del *tertium non datur* como axioma, pero es posible para su versión intuicionista.[100] En cambio el recurso a los cálculos secuenciales aligera la tarea, porque en ellos la derivabilidad o no-derivabilidad del *tertium non datur* no depende de un axioma especial, sino sólo de la *forma* que pueden adoptar los sucedentes de las secuencias (que pueden tener sólo una, o más de una fbf.).

Al considerar las reglas para constantes lógicas de los cálculos secuenciales tenemos que distinguir entre '*fórmulas principales*', '*subfórmulas*' y '*fórmulas parciales*':
(1) A las fbf.s de la forma $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $\bigwedge xFx$, o $\bigvee xFx$, las denominamos '*fórmulas principales*'.

---

[100] Ver Cap. 4, § 4.4.

(2) A las fbf.s de forma A, B, o Fa, que son *partes propias* de una fórmula principal (1) – $A*B$ o $*A$ donde '*'[101] es una constante lógica – las denominamos '*subfórmulas*'.
(3) A *cualquier subfórmula, parte propia o impropia de una fórmula principal* la denominamos '*fórmula parcial*', e. d., si A, y B son fbf.s y $A \subseteq B$, entonces A es una fórmula parcial.

De modo que *la noción de subfórmula es un caso particular de la de formula parcial*. Con estas precisiones se advierte fácilmente para cada regla de constantes lógicas que:
1. la fórmula principal aparece siempre en la secuencia inferior y sus subfórmulas lo hacen en la(s) secuencia(s) superior(es) de la regla;
2. si una fbf. aparece en una secuencia superior de una regla y
(1) no es una subfórmula de una fórmula principal,
(2) ni es la fórmula que se elimina por una regla de corte (S) o de mezcla (M), entonces también aparece en la secuencia inferior.

De esto resulta que, si en un desarrollo de ***CSI*** (o de ***CSC***) aparece una fbf. y se sigue la rama considerada del desarrollo hasta la secuencia final, entonces esa fórmula sólo puede desaparecer en esta rama si ella es: (1) la fórmula que se elimina por una aplicación de la regla de corte o (2) la subfórmula de la fórmula principal de una regla para constantes lógicas. En este caso en la secuencia inferior aparece la fórmula principal de la regla. Por lo tanto podemos afirmar:

Propiedad de las fórmulas parciales: *En un desarrollo* ***CSI*** (*o* ***CSC***) ***sin corte****, que parte de axiomas de tipo* A2*, todas las fbf.s de la deducción son f ó r m u l a s p a r c i a l e s de las fbf.s que aparecen en la secuencia final.*[102]

Esto significa que en las deducciones sin corte las fbf.s de una secuencia nunca se tornan más simples hacia abajo, sino

---

[101] Donde '*' es una variable metalingüística para las constantes lógicas '$\neg$', '$\wedge$', '$\vee$', '$\rightarrow$', 'Λ', o 'V'.
[102] Suplemento al teorema fundamental (*Zusatz zum Hauptsatz*): propiedad de las fórmulas parciales (*Teilformeln-Eigenschaft*). Cf. GENTZEN 1934-5, 2.513, 195.

que, cuando se modifican, se tornan más complejas: las fbf.s finales de una deducción se construyen paulatinamente a partir de sus componentes. Una deducción con esta propiedad fue llamada por Gentzen una "*deducción sin rodeos*". En ellas las fórmulas parciales no desaparecen; todas las expresiones que aparecen en alguna secuencia también aparecen en la secuencia final, como tales o como subfórmulas.

6.2. El teorema fundamental para *CSC*.

Comenzamos enunciando el teorema fundamental o *Hauptsatz* para el *CSC*.

Teorema fundamental (primera versión): *Para todo desarrollo secuencial correcto de* ***CSC*** *se puede construir otro desarrollo secuencial correcto del mismo cálculo con la misma secuencia final en el cual no se utiliza la regla de corte* (S).

La demostración se simplifica al utilizar la regla de mezcla (M) en lugar de la regla de corte (S), que son equivalentes, como demostramos en el capítulo anterior. De modo que podemos expresar el teorema fundamental de la siguiente manera:

Teorema fundamental (segunda versión): *Para todo desarrollo secuencial correcto de* ***CSC*** *se puede construir otro desarrollo secuencial correcto del mismo cálculo con la misma secuencia final en el cual no se utiliza la regla de mezcla* (M).

6.3. Un lema para demostrar el teorema fundamental en *CSC*.

Para demostrar el teorema fundamental necesitamos demostrar previamente un lema para el caso en que la fórmula M de la mezcla aparece al menos una vez en las dos secuencias superiores, pues, como vimos en el capítulo anterior, la eliminabilidad de (S) o (M) es trivial cuando M no aparece en una o ambas secuencias superiores.

Lema: *Si hay un desarrollo secuencial correcto en* ***CSC*** *cuya última regla de deducción es la única aparición de la regla* M *de mezcla* (*e. d. en la que la fórmula M de la mezcla aparece al menos una vez en el sucedente de la secuencia superior izquierda y al menos una vez en el antecedente de la secuencia superior derecha*), *entonces se puede construir otro desarrollo secuencial correcto en* ***CSC*** *con la misma secuencia final que no tiene ninguna aparición de* (M) *como regla de deducción*.

Para construir el nuevo desarrollo secuencial necesitamos las siguientes definiciones:
(1) *Grado* G(*M*) *de la mezcla*: es el número de constantes lógicas que aparecen en la fbf. *M* de la mezcla (M).
(2) *Rango izquierdo* ***m*** *de la mezcla*: es el número de secuencias que están en una rama cuya secuencia inferior es la secuencia superior *izquierda* de la mezcla y cada una de las cuales contiene la fbf. *M* de la mezcla en el *sucedente*.
(3) *Rango derecho* ***n*** *de la mezcla*: es el número de secuencias que están en una rama cuya secuencia inferior es la secuencia superior *derecha* de la mezcla y cada una de las cuales contiene la fbf. *M* de la mezcla en el *antecedente*.
(4) *Rango* ***r*** *de la deducción*: es la suma del rango izquierdo ***m*** y del rango derecho ***n*** de la deducción (es decir: ***r*** = ***m***+***n***).

Un diagrama del fragmento final de esta deducción es el siguiente:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{m} \\ \\ (\mathrm{M}) \end{array} \left\{ \begin{array}{cc} \ldots > \ldots, M, \ldots,, & \ldots, M, \ldots > \ldots \\ \vdots & \vdots \\ \underline{\Gamma > \Theta(M),,} & \underline{\Delta(M), > \Lambda} \\ \multicolumn{2}{c}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda} \end{array} \right\} \boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$$

Por el capítulo anterior sabemos que esto equivale a:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{m} \\ \\ (\mathrm{S}) \end{array} \left\{ \begin{array}{cc} \ldots > \ldots, M, \ldots,, & \ldots, M, \ldots > \ldots \\ \vdots & \vdots \\ \underline{\Gamma > \Theta, M,,} & \underline{M, \Delta > \Lambda} \\ \multicolumn{2}{c}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda} \end{array} \right\} \boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$$

Puesto que $\boldsymbol{m} \geq 1 \leq \boldsymbol{n}$, obviamente el rango $\boldsymbol{r}$ mínimo de una deducción será $\boldsymbol{r} = 2$.

Dem. El lema se demuestra mediante una doble inducción:
(1) sobre el grado G(M) de la fbf. M de la mezcla y
(2) sobre el rango $\boldsymbol{r}$ de la aparición de M.

En el caso base consideramos los subcasos elementales en que se elimina la mezcla, aunque, como veremos, en los pasos inductivos aparecerán algunos casos más que la eliminan. En el segundo caso se trata la inducción sobre el grado lógico G(M) cuando el rango es $\boldsymbol{r} = 2$. Luego se consideran los casos que tienen un rango mayor que 2, en cuyo caso habrá que considerar los subcasos de los rangos a la izquierda y la derecha. La inducción sobre el rango $\boldsymbol{r}$ de la mezcla la subdividiremos en dos casos, lo que nos da para el lema los cuatro casos que consideramos a continuación. Comenzamos con el caso base:

Caso 1 (caso base): $\boldsymbol{r} = 2$. Los subcasos elementales que eliminan la mezcla son los siguientes:

Caso 1.1. Una secuencia superior es secuencia inicial (un esquema de axioma de tipo A2). Este caso tiene dos subcasos interesantes, el tercero es trivial.

Caso 1.1.1. La secuencia superior *izquierda* de (M) es una secuencia inicial. Entonces la parte final del desarrollo (en el cual $\Gamma = \Theta(M) = M$ y por lo tanto $\Theta = \varnothing$) es el siguiente:

$$\text{(M)}\quad \frac{M > M \text{ ,, } \Delta(M) > \Lambda}{M, \Delta > \Lambda} \qquad .$$

$M > M$ es una secuencia inicial y la deducción es correcta por hipótesis. Luego la secuencia superior derecha $\Delta(M) > \Lambda$ es correcta por hipótesis y $\Delta(M)$ tiene al menos una aparición de M. Mediante un número finito de permutaciones tenemos $M, \ldots, M, \Delta$ y mediante finitas contracciones dejamos una sola M, y obtenemos la secuencia $M, \Delta > \Lambda$. Entonces reemplazamos el desarrollo anterior por el siguiente:

$$(\mathrm{P,C>})\quad \frac{\Delta(M) > \Lambda}{M, \Delta > \Lambda} \quad \text{(eventualmente reiteradas)},$$

que parte de la misma secuencia superior derecha, prescinde de la secuencia superior izquierda, tiene la misma secuencia final, pero carece de toda mezcla (M).

Caso 1.1.2. La secuencia superior *derecha* de (M) es una secuencia inicial (es decir $\Delta(M) = \Lambda = M$, por lo tanto $\Delta = \varnothing$) y el fragmento final es el siguiente:

$$(\mathrm{M})\quad \frac{\Gamma > \Theta(M) \;,, \quad M > M}{\Gamma > \Theta, M}$$

Con las mismas transformaciones que en **1.1.1.** obtenemos el fragmento final:

$$(\mathrm{>P,C})\quad \frac{\Gamma > \Theta(M)}{\Gamma > \Theta, M} \quad \text{(eventualmente reiteradas)},$$

que tiene la misma secuencia final y carece de toda mezcla.[103]

Caso 1.2. Ninguna de las secuencias superiores de (M) es una secuencia inicial. Como $r = 2$, entonces $m = n = 1$. En consecuencia la fbf. M aparece por primera vez en el sucedente izquierdo y en el antecedente derecho de las secuencias superiores de (M). Esto puede ocurrir de dos maneras:

Caso 1.2.1. M aparece por debilitamiento en al menos una de las secuencias superiores de la mezcla. Este subcaso nos da dos subcasos interesantes, pues el tercero es trivial:

Caso 1.2.1.1. Las apariciones de M en la secuencia superior izquierda de (M) ocurren por debilitamiento, lo que nos da el siguiente final del desarrollo:

$$\begin{array}{ll} & \underline{\underline{\Gamma > \Theta}} \\ (\mathrm{>D}) & \underline{\Gamma > \Theta(M) ,, \quad \Delta(M) > \Lambda} \\ (\mathrm{M}) & \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda \, , \end{array}$$

[103] El subcaso trivial **1.1.3.** con ambas secuencias superiores son iniciales: $M > M$,, $M > M$ / (M) $M > M$, que obviamente se reduce a una transformación idéntica sin (M) $M > M$ / $M > M$.

Este fragmento final de desarrollo lo reemplazamos por:

$$\frac{\Gamma > \Theta}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda,}\ \text{(P, D)}$$

desarrollo correcto con la misma secuencia final que surge mediante un número finito de permutaciones y debilitamientos a partir de la secuencia superior $\Gamma > \Theta$. El desarrollo elimina la regla (M).

Caso 1.2.1.2. Las apariciones de M en la secuencia superior derecha de (M) ocurren por debilitamiento, lo que nos da el siguiente final del desarrollo:

$$\text{(M)}\ \frac{\Gamma > \Theta(M),\quad \dfrac{\Delta > \Lambda}{\Delta(M) > \Lambda}\ \text{(D>)}}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}\ .$$

Este final de desarrollo lo reemplazamos por el siguiente:

$$\text{(P, D)}\ \frac{\Delta > \Lambda}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}$$

que surge de $\Delta > \Lambda$ por un número finito de permutaciones y debilitamientos, tiene la misma secuencia final, y elimina (M). Con esto concluimos el caso base.

Caso 2. (**paso inductivo** sobre $G(M)$ con $\mathbf{r} = 2$.) En este caso se muestra cómo reducir el grado lógico de la fbf. M de la mezcla (M). Por hipótesis M es la fórmula principal de una regla de introducción de constante lógica en ambas secuencias superiores de (M) como fbf. del sucedente de la secuencia superior izquierda y como fbf. del antecedente de la secuencia superior derecha. Según cuál sea la constante principal de M ($\wedge$, $\vee$, $\bigwedge$, $\bigvee$, $\neg$ ó $\rightarrow$) tendremos los siguientes seis subcasos:

Caso 2.1. $M \Leftrightarrow A\wedge B$. Una de las variantes del final del desarrollo es la siguiente:

$$\text{(I)}\quad \text{(M)}\ \frac{(>\wedge)\ \dfrac{\Gamma_1 > \Theta_1(A), A \quad,,\quad \Gamma_1 > \Theta_1(A), B}{\Gamma_1 > \Theta_1(A), A\wedge B} \qquad \dfrac{A, \Gamma_2(A) > \Theta_2}{A\wedge B, \Gamma_2(A) > \Theta_2}\ (\wedge>)}{\Gamma_1, \Gamma_2(A) > \Theta_1(A), \Theta_2\ ,}$$

en la que, por ser $\mathbf{r} = 2$, no puede aparecer $A\wedge B$ ni en $\Theta_1(A)$, ni en $\Gamma_2(A)$. La reducción de $G(M)$ se realiza a partir de las secuencias $\Gamma_1 > \Theta_1(A)$, A y A, $\Gamma_2(A) > \Theta_2$ (eliminando la secuencia $\Gamma_1 > \Theta_1(A), B)$, con lo que obtenemos el siguiente final de desarrollo:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(II)} & \underline{\Gamma_1 > \Theta_1(A), A \quad ,, \quad A, \Gamma_2(A) > \Theta_2} \\
\quad\text{(M)} & \underline{\underline{\Gamma_1, \Gamma_2 > \Theta_1, \Theta_2}} \\
\quad\text{(D,P)} & \Gamma_1, \Gamma_2(A) > \Theta_1(A), \Theta_2 \,.
\end{array}
$$

En este desarrollo $G(A) = G(A \wedge B) - 1$, con lo que hemos reducido el grado lógico de la nueva (M), por lo que ésta puede tener una o más apariciones de A en secuencias superiores tanto de $\Gamma_1 > \Theta_1(A), A$ como de $A, \Gamma_2(A) > \Theta_2$ y por lo tanto *su rango* **r** *puede ser mayor que* 2, lo que más adelante nos obligará a mostrar por inducción que es posible reducir el rango. En consecuencia para eliminar las mezclas se deberán alternar las inducciones sobre el grado y sobre el rango. (La otra variante, con B en lugar de A, se resuelve de manera análoga.)

Caso 2.2. $M \leftrightharpoons A \vee B$. Una de las variantes del final de la deducción es la siguiente:

$$
\begin{array}{llll}
\text{(I)} & \underline{\Gamma_1 > \Theta_1(A), A} & \underline{A, \Gamma_2(A) > \Theta_2 \;,, \; B, \Gamma_2(A) > \Theta_2} & \\
\quad(>\vee) & \underline{\Gamma_1 > \Theta_1(A), A \vee B} & \underline{A \vee B, \Gamma_2(A) > \Theta_2} & (\vee>) \\
\quad\text{(M)} & \Gamma_1, \Gamma_2(A) > \Theta_1(A), \Theta_2 \,, & &
\end{array}
$$

en la que, por ser $\mathbf{r} = 2$, no puede aparecer $A \vee B$ ni en $\Theta_1(A)$, ni en $\Gamma_2(A)$, La reducción de $G(M)$ se realiza a partir de las secuencias $\Gamma_1 > \Theta_1(A), A$ y $A, \Gamma_2(A) > \Theta_2$, eliminando la secuencia $B, \Gamma_2(A) > \Theta_2$, con lo que obtenemos el siguiente final de deducción:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(II)} & \underline{\Gamma_1 > \Theta_1(A), A \;,, \; A, \Gamma_2(A) > \Theta_2} \\
\quad\text{(M)} & \underline{\underline{\Gamma_1, \Gamma_2 > \Theta_1, \Theta_2}} \\
\quad\text{(D,P)} & \Gamma_1, \Gamma_2(A) > \Theta_1(A), \Theta_2
\end{array}
$$

En esta deducción $G(A) = G(A \vee B) - 1$, con lo que hemos reducido el grado lógico de la nueva (M), pero ésta puede diferir de la anterior, pues las secuencias superiores tanto a $\Gamma_1 > \Theta_1(A), A$ como a $A, \Gamma_2(A) > \Theta_2$ pueden tener apariciones de A y por lo tanto su rango **r** puede ser mayor que 2, lo que nos conduciría a los pasos inductivos sobre el rango, como en el caso anterior. (La otra variante, con B en lugar de A, se resuelve de manera análoga.)

Caso 2.3. $M \leftrightharpoons \wedge x A(x)$. El desarrollo con la regla crítica (>∧) en la secuencia superior izquierda y la regla irrestricta (∧>) en la secuencia superior derecha, debe concluir de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & \underline{\Gamma_1 > \Theta_1(A(b)), A(a)} \quad \underline{A(b), \Gamma_2(A(b)) > \Theta_2} & \\ (>\wedge) & \underline{\Gamma_1 > \Theta_1(A(b)), \wedge x A(x) \;,, \quad \wedge x A(x), \Gamma_2(A(b)) > \Theta_2} & (\wedge>) \\ \text{(M)} & \Gamma_1, \Gamma_2(A(b)) > \Theta_1(A(b)), \Theta_2 & \end{array}$$

A este desarrollo lo transformamos en el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{(II)} & \underline{\Gamma_1 > \Theta_1(A(b)), A(b) \;,, \quad A(b), \Gamma_2(A(b)) > \Theta_2} \\ \text{(M)} & \underline{\underline{\Gamma_1, \Gamma_2 > \Theta_1, \Theta_2}} \\ \text{(D,P)} & \Gamma_1, \Gamma_2(A(b)) > \Theta_1(A(b)), \Theta_2 \end{array}$$

En el desarrollo (I) aparecían las variables libres diferentes a y b en la secuencia superior izquierda, para posibilitar el uso correcto de la regla (>∧), por lo que se habrán distinguido esas variables en todas las secuencias superiores a $\Gamma_1 > \Theta_1(A(b)), A(a)$, para satisfacer la regla de cambio de nombre de variables libres discutida en el capítulo anterior. El desarrollo (II) que lo reemplaza carece de la regla crítica (>∧), por lo que, para obtener la secuencia final buscada, podemos tener la variable libre b en la secuencia izquierda (y en todas las secuencias superiores en que aparece $A(b)$) y en la secuencia derecha. Aplicamos la mezcla y obtenemos $\Gamma_1, \Gamma_2 > \Theta_1, \Theta_2 \Gamma_1$. De aquí por debilitamientos y permutaciones obtenemos la secuencia final buscada $\Gamma_1, \Gamma_2(A(b)) > \Theta_1(A(b)), \Theta_2$. La mezcla del desarrollo (II) tiene un grado lógico inferior, por lo que se la eliminará finalmente conforme a la hipótesis inductiva sobre el grado, aunque el rango puede ciertamente aumentar.

Caso 2.4. $M \leftrightharpoons \vee x A(x)$. La deducción, con la regla irrestricta (>∨) en la secuencia superior izquierda y la regla crítica (∨>) en la secuencia superior derecha concluye de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & \underline{\Gamma_1 > \Theta_1(A(a)), A(a)} \quad \underline{A(b), \Gamma_2(A(a)) > \Theta_2} & \\ (>\vee) & \underline{\Gamma_1 > \Theta_1(A(a)), \vee x A(x) \;,, \quad \vee x A(x), \Gamma_2(A(a)) > \Theta_2} & (\vee>) \\ \text{(M)} & \Gamma_1, \Gamma_2(A(a)) > \Theta_1(A(a)), \Theta_2 & \end{array}$$

Reemplazamos esta deducción por la siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{(II)} & \underline{\Gamma_1 > \Theta_1(A(a)), A(a) \;,, \quad A(a), \Gamma_2(A(a)) > \Theta_2} \\ \text{(M)} & \underline{\underline{\Gamma_1, \Gamma_2 > \Theta_1, \Theta_2}} \\ \text{(D,P)} & \Gamma_1, \Gamma_2(A(a)) > \Theta_1(A(a)), \Theta_2 \end{array}$$

Las variables libres en el desarrollo superior satisfacen las condiciones de corrección de la regla (V>) (con los necesarios cambios de nombres de variables libres hacia arriba). Los cambios se realizan de la misma manera que en el subcaso anterior, para conservar la corrección de la deducción. La mezcla resultante tiene un grado menor. Esto posibilita la aplicación de la hipótesis inductiva sobre el grado lógico a fin de eliminar la mezcla, aunque el rango ciertamente puede aumentar temporariamente.

Caso 2.5. $M \leftrightharpoons \neg A$. El final del desarrollo es el siguiente:

(I)
$$\dfrac{\dfrac{A, \Gamma_1(A) > \Theta_1 \qquad \Gamma_2 > \Theta_2(A), A}{\Gamma_1(A) > \Theta_1, \neg A \;,,\; \neg A, \Gamma_2 > \Theta_2(A)}\,(>\neg)}{\Gamma_1(A), \Gamma_2 > \Theta_1, \Theta_2(A)}\,(M)$$

Cambiando el orden de las secuencias superiores reemplazamos este final de deducción por el siguiente:

(II)
$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_2 > \Theta_2(A), A \;,,\; A, \Gamma_1(A) > \Theta_1}{\Gamma_2, \Gamma_1 > \Theta_2, \Theta_1}\,(M)}{\Gamma_1(A), \Gamma_2 > \Theta_1, \Theta_2(A)}\,(D,P),$$

que tiene las mismas secuencias iniciales, disminuye el grado de (M), pero posiblemente aumenta el rango de la deducción.

Caso 2.6. $M \leftrightharpoons A \rightarrow B$. Por ser $\boldsymbol{r} = 2$ el final del desarrollo toma la siguiente forma:

(I)
$$\dfrac{\dfrac{A, \Gamma_1(A) > \Theta_1(B), B}{\Gamma_1(A) > \Theta_1(B), A \rightarrow B}\,(>\rightarrow) \;,,\; \dfrac{\Gamma_2 > \Theta_2(A), A \;,,\; B, \Delta(A, B) > \Lambda}{A \rightarrow B, \Gamma_2, \Delta(A,B) > \Theta_2(A), \Lambda}\,(\rightarrow>)}{\Gamma_1(A), \Gamma_2, \Delta(A,B) > \Theta_1(B), \Theta_2(A), \Lambda}\,(M)$$

Reemplazamos este final de desarrollo por el siguiente:

(II)
$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_2 > \Theta_2(A), A \;,,\; \dfrac{A, \Gamma_1(A) > \Theta_1(B), B \;,,\; B, \Delta(A, B) > \Lambda}{A, \Gamma_1(A), \Delta(A) > \Theta_1, \Lambda}\,(M)}{\Gamma_2, \Gamma_1, \Delta > \Theta_1, \Theta_2, \Lambda}\,(M)}{\Gamma_1(A), \Gamma_2, \Delta(A,B) > \Theta_1(B), \Theta_2(A), \Lambda}\,(D,P).$$

Las dos mezclas resultantes son de menor grado que $G(A \rightarrow B)$, aunque el rango puede ser mayor. En las eliminaciones posteriores se comenzará aplicando las hipótesis inductivas sobre la (M) superior en el orden que corresponda hasta eliminarla, y luego se hará lo mismo con la inferior.

A los resultados de estos seis casos de reducciones del grado de la mezcla deberemos aplicar la reducción de su rango, que puede haber aumentado, hasta llegar otra vez a los casos con $\boldsymbol{r}$ = 2, y una vez hecho esto, reducir nuevamente el grado lógico y así sucesivamente, hasta llegar a mezclas sobre secuencias iniciales o debilitamientos, que son los casos básicos para los que podemos eliminar simplemente (M).

Caso 3. (***Primer paso inductivo sobre el rango***: $2 < \boldsymbol{r}$, $1 \leq \boldsymbol{m}$ y $1 < \boldsymbol{n}$). En este caso la secuencia superior derecha de la regla (M) es tal que en al menos una de sus secuencias superiores aparece M en el antecedente. La forma general del final del desarrollo es el siguiente:

$$\dfrac{\Gamma > \Theta(M) \quad \dfrac{\Delta_1(M) > \Lambda_1 \quad \Delta_2(M) > \Lambda_2}{\Delta(M) > \Lambda}\,(R)\ \text{(R es una regla de } \mathit{CSC}\text{)}}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}\,(M)$$

Lo que debemos construir es otro desarrollo con la misma secuencia final pero que desplace a la mezcla (M) al menos un paso hacia arriba, de modo que disminuya su rango y se pueda aplicar así la hipótesis inductiva sobre el rango $\boldsymbol{r}$.

Caso 3.1. La secuencia izquierda de (M) es una secuencia inicial ($1 = \boldsymbol{m}$), M aparece por encima de $\Delta(M) > \Lambda$ ($2 \leq \boldsymbol{n}$) y puede ser la fórmula principal de (R), o no serlo. Además (R) puede tener una o dos secuencias superiores, de modo que tenemos dos esquemas posibles, (1) y (2), de final de desarrollo:

(I)
$$\dfrac{M > M \quad \dfrac{\Delta_1(M) > \Lambda_1}{\Delta(M) > \Lambda}\,(R)}{M, \Delta > \Lambda}\,(M)$$

(II)
$$\dfrac{M > M \quad \dfrac{\Delta_1(M) > \Lambda_1 \quad \Delta_2(M) > \Lambda_2}{\Delta(M) > \Lambda}\,(R)}{M, \Delta > \Lambda}\,(M)$$

Consideramos en primer lugar el esquema final de (I), que podemos reemplazar por el siguiente final de desarrollo:

(I')
$$\dfrac{\dfrac{\Delta_1(M) > \Lambda_1}{\Delta(M) > \Lambda}\,(R)}{M, \Delta > \Lambda}\,(P,C>)$$

Para (I) y (I') se nos presentan dos subcasos:

(a) Si M **es** la fbf. de (R), entonces ésta regla será (D>), o (C>), o (P>) y $\Lambda_1 = \Lambda$ (son las únicas reglas que, por no introducir una constante lógica, no modifican la fbf. M del caso). La secuencia final se alcanza por aplicaciones de (P>) y de (C>), posiblemente reiteradas.

(b) Si M **no es** la fbf. de (R), entonces la fórmula principal aparecerá en Δ o en Λ, y en consecuencia sus subfórmulas aparecerán en Δ_1 y/o en Λ_1, y la última secuencia se obtiene igualmente por posiblemente reiteradas apariciones de (P>) y de (C>).

Al transformar el subcaso **3.1.**(1) en **3.1.**(1') eliminamos (M), por lo que éste es un subcaso más de la especie de los del caso base, que de este modo amplía.

Consideramos ahora el esquema de final (II):

(II) $$\dfrac{M > M,, \quad \dfrac{\Delta_1(M) > \Lambda_1 \quad ,, \quad \Delta_2(M) > \Lambda_2}{\Delta(M) > \Lambda}\,(R)}{M, \Delta > \Lambda}\,(M) \quad .$$

Puesto que (R) requiere dos secuencias superiores, entonces (R) no puede ser (D), o (C), o (P) ni en el antecedente ni en el sucedente, y por lo tanto M no puede ser la fórmula principal de (R). La fórmula principal aparecerá entonces en Δ o en Λ, y en consecuencia sus subfórmulas aparecerán en Δ_1, o en Λ_1, o en Δ_2, o en Λ_2. Además, dado que M aparece en al menos una de las secuencias superiores derechas por ser $2 \leq \boldsymbol{n}$, se la puede transformar en la *siguiente* deducción final con dos (M) de menor rango y con la misma secuencia final:

(II') $$\dfrac{(M)\,\dfrac{M > M\,,, \Delta_1(M) > \Lambda_1}{M, \Delta_1 > \Lambda_1} \quad ,, \quad \dfrac{M > M\,,, \Delta_2(M) > \Lambda_2}{M, \Delta_2 > \Lambda_2}\,(M)}{M, \Delta > \Lambda}\,(R) \quad .$$

Caso 3.2. M aparece en el antecedente de la secuencia izquierda de (M). Como en el caso anterior tenemos dos esquemas finales posibles:

(I)

$$\frac{\Gamma(M) > \Theta(M) \quad \dfrac{\Delta_1(M) > \Lambda_1}{\Delta(M) > \Lambda}\,(R)}{\Gamma(M), \Delta > \Theta, \Lambda}\,(M)\ .$$

(II)

$$\frac{\Gamma(M) > \Theta(M) \quad \dfrac{\Delta_1(M) > \Lambda_1 \quad \Delta_2(M) > \Lambda_2}{\Delta(M) > \Lambda}\,(R)}{\Gamma(M), \Delta > \Theta, \Lambda}\,(M)\ .$$

Podemos reemplazar (I) por el siguiente desarrollo:

(I')

$$\frac{\dfrac{\Delta_1(M) > \Lambda_1}{\Delta(M) > \Lambda}\,(R)}{\Gamma(M), \Delta > \Theta, \Lambda}\,(D,C,P)\ .$$

El antecedente de la secuencia final se desarrolla mediante permutación en $\Delta(M)$ de modo que todas las apariciones de M aparezcan a su izquierda, luego debilitamientos o contracciones para igualar el número de las M al de sus apariciones en $\Gamma(M)$, luego debilitamientos para introducir las fbf.s de Γ diferentes de M, y finalmente las permutaciones necesarias para obtener $\Gamma(M)$. El sucedente de la secuencia final se logra mediante debilitamientos y permutaciones hasta agregar Θ a la izquierda de Λ. La transformación el subcaso 3.2.(I) en 3.1.(I') elimina (M), por lo que éste es otro subcaso más de la especie de los del caso base, que también amplía.

Consideremos ahora el segundo subcaso:

(II)

$$\frac{\Gamma(M) > \Theta(M) \quad \dfrac{\Delta_1(M) > \Lambda_1 \quad \Delta_2(M) > \Lambda_2}{\Delta(M) > \Lambda}\,(R)}{\Gamma(M), \Delta > \Theta, \Lambda}\,(M)\ .$$

Puesto que M no puede ser fórmula principal de (R), pues en tal caso no aparecería en las secuencia superiores, podemos transformar (II) así:

(II')

$$\frac{\dfrac{\Gamma(M) > \Theta(M) \quad \Delta_1(M) > \Lambda_1}{\Gamma(M), \Delta_1 > \Theta, \Lambda_1}\,(M) \quad \dfrac{\Gamma(M) > \Theta(M) \quad \Delta_2(M) > \Lambda_2}{\Gamma(M), \Delta_2 > \Theta, \Lambda_2}\,(M)}{\Gamma(M), \Delta > \Theta, \Lambda}\,(R)\ ,$$

con lo que obtenemos la misma secuencia final, pero con dos nuevas mezclas de rango disminuido.

Caso 3.3. M no aparece en el antecedente de la secuencia izquierda de (M). Aquí distinguimos los siguientes subcasos:

Caso 3.3.1. (R) es (D>), o (C>), o (P>). En estos casos el final del desarrollo tendrá el siguiente aspecto:

(I)
$$\dfrac{\Gamma > \Theta(M) \quad ,, \quad \dfrac{\Delta(M) > \Lambda}{\Pi(M) > \Lambda}\ \text{(R)}}{\Gamma, \Pi > \Theta, \Lambda}\ \text{(M)} \quad ,$$

final que transformamos del modo siguiente:

(I')
$$\begin{array}{lll}
 & \underline{\Gamma > \Theta(M) \quad ,, \quad \Delta(M) > \Lambda} & \\
\text{(M)} & \underline{\underline{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}} & \\
\text{(P>)} & \underline{\Delta, \Gamma > \Theta, \Lambda} & \text{(eventualmente varias permutaciones),} \\
 & \underline{\underline{\Pi, \Gamma > \Theta, \Lambda}} & \text{(ver reglas posibles abajo en (a) y (b)),} \\
\text{(P>)} & \Gamma, \Pi > \Theta, \Lambda & \text{(eventualmente varias permutaciones).}
\end{array}$$

(a) Si M hubiese sido la fbf. objeto de la regla (R) en (I), ésta regla habría sido (D>), (C>), o (P>) y entonces el paso de la tercera a la cuarta secuencia en (I') es una deducción idéntica, pues Δ será igual a Π, al carecer ambas de M por (M).[104]
(b) Si M no hubiese sido la fbf. objeto de la regla (R) en (I), entonces el paso de la tercera a la cuarta secuencia en (I') no es (D>), o (C>), o (P>) y el desarrollo (R) será idéntico al de (I).[105]

El rango izquierdo de la nueva mezcla se conserva, pero el rango derecho disminuye, lo que permitirá aplicar la hipótesis inductiva sobre ese rango.

Caso 3.3.2. (R) es una regla con una sola secuencia superior que no es ni (D>), ni (C>), ni (P>) *en el antecedente*. El esquema general del final de la deducción será:

(I)
$$\dfrac{\Gamma > \Theta(M) \quad ,, \quad \dfrac{\Delta(M), \Sigma(M) > \Lambda}{\Pi(M), \Sigma(M) > \Xi}\ \text{(R)}}{\Gamma, \Pi, \Sigma > \Theta, \Xi}\ \text{(M)} \quad .$$

[104] Ver el desarrollo completo de este caso 3.3.1. en el apéndice correspondiente.
[105] Ver el desarrollo completo de este caso 3.3.2. en el apéndice correspondiente.

$\Sigma(M)$ es el conjunto que fbf.s que corresponde a Γ en las reglas del sistema, es decir que $\Sigma(M)$ no contiene ni una subfórmula, ni la fórmula principal de (R). Por lo tanto $\Delta(M)$ puede ser, o bien vacío, o consistir en la subfórmula de (R), y $\Pi(M)$ puede ser, o bien vacío o consistir en la fórmula principal de (R). Por la forma de la sucesión $\Delta(M)$ y $\Pi(M)$ consistirán de una sola fbf. y alguna de ellas puede coincidir con M, pero no ambas: si $\Delta(M) = M$, entonces $\Pi(M)$ es, o bien vacío, o es una fórmula principal diferente de M; y si $\Pi(M) = M$ es la fórmula principal, entonces $\Delta(M)$ es, o bien vacío, o bien no es M (M puede aparecer en $\Delta(M)$ y en $\Sigma(M)$, o en $\Pi(M)$ y en $\Sigma(M)$, pero no en ambos pares). Por lo tanto (R) puede ser, o bien (>D), (>C), o (>P), o bien ($\wedge$>), (>$\vee$), ($\wedge$>), (>$\wedge$), ($\vee$>), (>$\vee$), ($\neg$>), (>$\neg$), o (>$\rightarrow$).[106] El esquema de deducción transformada sería el siguiente:

(I') $\underline{\Gamma > \Theta(M) ,, \quad \Delta(M), \Sigma(M) > \Lambda}$

(M) $\underline{\Gamma, \Delta, \Sigma, > \Theta, \Lambda\ \ }$

(P,D>) $\underline{\Delta(M), \Sigma, \Gamma > \Theta, \Lambda}$ (eventualmente múltiples)

(R) $\Pi(M), \Sigma, \Gamma > \Theta, \Xi$.

La (M) de este caso es de rango inferior y la última regla de este fragmento de deducción es la misma (R) de arriba. Pero aún no tenemos la secuencia final originaria $\Gamma, \Pi, \Sigma > \Theta, \Xi$. Entonces podemos continuar el desarrollo de dos maneras, según que $\Pi(M)$ contenga a M o no.

Caso 3.3.2.1. $\Pi(M)$ no contiene a M. Entonces, por lo ya indicado arriba, $\Pi(M) = \Pi = \varnothing$ y por lo tanto mediante múltiples aplicaciones de (P>) obtenemos la secuencia final buscada $\Gamma, \Pi, \Sigma > \Theta, \Xi$.

Caso 3.3.2.2. $\Pi(M)$ contiene a M. Entonces, por lo señalado arriba, $\Pi(M) = M, \Pi$ y M es la fórmula principal de (R), con lo que la secuencia final anterior será: $M, \Sigma, \Gamma > \Theta, \Xi$. Agregamos entonces a la izquierda nuevamente el desarrollo previo de $\Gamma > \Theta(M)$:

[106] Un buen ejercicio es analizar separadamente cada uno de esos subcasos.

(I) $\underline{\Gamma > \Theta(M) \;,, \quad M, \Sigma, \Gamma > \Theta, \Xi}$

(M) $\underline{\underline{\Gamma, \Sigma, \Gamma > \Theta, \Theta, \Xi}}$

(P,C) $\Gamma, \Sigma > \Theta, \Xi$ (eventualmente múltiples),

que es la secuencia final buscada, pues $\Pi(M) = \Pi$, $\Pi = \varnothing$ y entonces $\Gamma, \Pi, \Sigma > \Theta, \Xi = \Gamma, \Sigma > \Theta, \Xi$. La nueva mezcla también es de rango inferior a la original, pues $\boldsymbol{m}$ es idéntico al del caso original y $1 = \boldsymbol{n}$, ya que en Δ no aparece M por ser, o bien vacío, o bien subfórmula de M, y Σ y Γ tampoco contienen M, por haberse eliminado todas sus apariciones en la anterior aplicación de (M). Cuando (R) = (>∧) o (R) = (∨>) hay que considerar los nombres de variable necesarios para mantener la corrección deductiva. La mezcla resultante es de menor rango, lo que habilita la aplicación de la hipótesis inductiva sobre el rango derecho.

Caso 3.3.3. (R) es una regla con dos secuencias superiores. Por lo tanto (R) es o bien (>∧), o (∨>), o bien (→>). Las peculiaridades del cálculo intuicionista nos aconsejan considerar aquí en detalle estos tres casos:

Caso 3.3.3.1. (R) = (>∧). Sea el final de la deducción:

(I) $\underline{\Delta(M) > \Lambda, A \;,, \quad \Delta(M) > \Lambda, B}$

$\underline{\Gamma > \Theta(M) \;,, \qquad \Delta(M) > \Lambda, A \wedge B}$ (>∧)

(M) $\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda, A \wedge B$,

que transformamos de la siguiente manera:

(I') $\underline{\Gamma > \Theta(M) \;,, \quad \Delta(M) > \Lambda, A}$ $\quad$ $\underline{\Gamma > \Theta(M) \;,, \quad \Delta(M) > \Lambda, B}$

(M) $\underline{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda, A \quad ,, \qquad \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda, B}$ (M)

(>∧) $\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda, A \wedge B$,

final de deducción cuyas dos mezclas son de rango derecho inferior al originario, por lo que se aplica la hipótesis inductiva sobre el rango derecho a ambas.

Caso 3.3.3.2. (R) = (∨>). Sea el final del desarrollo:

(I) $\underline{A, \Delta(M) > \Lambda \;,, \quad B, \Delta(M) > \Lambda}$

$\underline{\Gamma > \Theta(M) \;,, \quad A \vee B, \Delta(M) > \Lambda}$ (∨>)

(M) $(A \vee B)', \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda$,

donde (a) si $A \vee B \neq M$, entonces $(A \vee B)' = A \vee B$ y

(b) si $A \vee B = M$, entonces $(A \vee B)' = \varnothing$.

M aparece necesariamente en $\Delta(M)$, pues en caso contrario sería $A \vee B = M$ y ésta sería la primera aparición de M en la rama, con lo que 1 = $\boldsymbol{n}$ y 2 = $\boldsymbol{r}$, contra la hipótesis.

Reemplazamos la deducción anterior por la siguiente:

(I') $\quad \underline{\Gamma > \Theta(M) \;,,\; A, \Delta(M) > \Lambda} \quad \underline{\Gamma > \Theta(M) \;,,\; B, \Delta(M) > \Lambda}$

(M) $\quad \underline{\underline{\Gamma, A', \Delta > \Theta, \Lambda}} \quad \underline{\underline{\Gamma, B, \Delta > \Theta, \Lambda}}$ (M)

(P,D>) $\quad \underline{A, \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda \;,,\; B, \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}$ (P,D> repetidas veces)

(∨>) $\quad A \vee B, \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda$

Si en la segunda secuencia izquierda de la primera fila $A = M$, entonces $A' = \varnothing$, en cuyo caso se vuelve a obtener A en la tercera fila mediante (D>), y si $A \neq M$, entonces $A' = A$ y no necesitamos usar (D>). Procedemos del mismo modo en caso de que en la segunda secuencia derecha de la primera fila $B = M$ o $B \neq M$. Los rangos de ambas mezclas son menores que los de las originarias, por los que se puede aplicar la hipótesis inductiva sobre el rango derecho $\boldsymbol{n}$. Ahora consideramos los dos casos (a) y (b) de arriba:

(a) si $A \vee B \neq M$, entonces $(A \vee B)' = A \vee B$ y la secuencia final es idéntica a la del desarrollo original.
(b) si $A \vee B = M$, entonces continuamos el desarrollo (I') de la siguiente manera:

(I'') $\quad \underline{\Gamma > \Theta(M) \;,,\; A \vee B, \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}$

(M) $\quad \underline{\underline{\Gamma, \Gamma, \Delta > \Theta, \Theta, \Lambda}}$

(C) $\quad \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda$ (posiblemente en reiteradas oportunidades).

La secuencia final $\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda$ es idéntica a la secuencia final $(A \vee B)', \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda$ por ser en este caso en I $(A \vee B)' = \varnothing$. Ahora tenemos una nueva (M) y debemos determinar su rango: la secuencia izquierda $\Gamma > \Theta(M)$ es la misma que la original, por lo tanto no se modifica el rango de $\boldsymbol{m}$, y la secuencia derecha $A \vee B, \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda$ tiene rango $\boldsymbol{n}$ menor pues, dado que $A \vee B = M$, entonces $A \neq M$ y $B \neq M$, Γ no contiene M por hipótesis y Δ no contiene M por la (M) anterior. Por lo tanto el rango $\boldsymbol{r}$ de esta (M) es menor, con lo que estamos en condiciones de aplicar la inducción sobre el rango derecho.

Caso 3.3.3.3. (R) = (→>). Sea el final del desarrollo:

(I)

$$
\dfrac{\Gamma > \Theta(M) \;,,\; \dfrac{\Delta_1(M) > \Lambda_1, A \;,,\; B, \Delta_2(M) > \Lambda_2}{A \to B\, \Delta_1(M), \Delta_2(M) > \Lambda_1, \Lambda_2}\ (\to>)}{\Gamma, (A \to B)', \Delta_1, \Delta_2 > \Theta, \Lambda_1, \Lambda_2}\ (\mathrm{M})\quad ,
$$

donde (a) si $A \to B \neq M$, entonces $(A \to B)' = A \to B$ y
(b) si $A \to B = M$, entonces $(A \to B)' = \varnothing$.

Comenzamos considerando dos subcasos principales:

Caso 3.3.3.3.1. M aparece tanto en $\Delta_1(M)$ como en $\Delta_2(M)$. Entonces reemplazamos el final del desarrollo (I) por el siguiente:

(II)

$$
\dfrac{\dfrac{\Gamma > \Theta(M) \;,,\; \Delta_1(M) > \Lambda_1, A}{\Gamma, \Delta_1 > \Theta, \Lambda_1, A}\ (\mathrm{M}) \;,,\; \dfrac{\dfrac{\Gamma > \Theta(M) \;,,\; B, \Delta_2(M) > \Lambda_2}{\Gamma, B', \Delta_2 > \Theta, \Lambda_2}\ (\mathrm{M})}{B, \Gamma, \Delta_2 > \Theta, \Lambda_2}\ (\mathrm{P,D}>)}{\dfrac{A \to B, \Gamma, \Delta_1, \Gamma, \Delta_2 > \Theta, \Lambda_1, \Theta, \Lambda_2}{\Gamma, A \to B, \Delta_1, \Delta_2 > \Theta, \Lambda_1, \Lambda_2}}
$$

Si $B = M$, entonces $B' = \varnothing$. En tal caso se usa (D>) a la derecha en la tercera fila para volver a tener B en la secuencia. Si $B \neq M$, entonces $B' = B$ y no es necesario el debilitamiento. Ambas mezclas tienen menor rango y por lo tanto se puede utilizar la hipótesis inductiva respecto del rango derecho, quedando la del rango izquierdo para más adelante. El problema restante es que la secuencia final no coincide con la original, que tiene $(A \to B)'$ en lugar de $A \to B$. Entonces hay que considerar los dos subcasos de más arriba:
(a) $A \to B \neq M$ y $(A \to B)' = A \to B$. Entonces la secuencia final de la última deducción $\Gamma, A \to B, \Delta_1, \Delta_2 > \Theta, \Lambda_1, \Lambda_2$ coincide con la original $\Gamma, (A \to B)', \Delta_1, \Delta_2 > \Theta, \Lambda_1, \Lambda_2$.
(b) $A \to B = M$ y $(A \to B)' = \varnothing$. Entonces la secuencia final de la última deducción $\Gamma, A \to B, \Delta_1, \Delta_2 > \Theta, \Lambda_1, \Lambda_2$ no coincide con la original $\Gamma, (A \to B)', \Delta_1, \Delta_2 > \Theta, \Lambda_1, \Lambda_2$.

Para obtener esta última continuamos la deducción (II) de la siguiente manera:

(III)

$$
\dfrac{\dfrac{\Gamma > \Theta(M) \;,,\; \Gamma, A \to B, \Delta_1, \Delta_2 > \Theta, \Lambda_1, \Lambda_2}{\Gamma, \Gamma, (A \to B)', \Delta_1, \Delta_2 > \Theta, \Theta, \Lambda_1, \Lambda_2}\ (\mathrm{M})}{\Gamma, (A \to B)', \Delta_1, \Delta_2 > \Theta, \Lambda_1, \Lambda_2}\ (\mathrm{P,C})\quad \text{(reiteradas veces).}
$$

Esta es la secuencia final buscada. Se aplicará las hipótesis inductivas sobre las mezclas superiores y luego sobre esta nueva mezcla.

Caso 3.3.3.3.2. M no aparece simultáneamente en $\Delta_1(M)$, $\Delta_2(M)$. Entonces hay dos subcasos, pues M debe aparecer en una de las dos secuencias superiores, ya que en caso contrario la única M que aparecería sería $A \rightarrow B$ y el rango de la secuencia derecha sería $1 = n$, en contra de la hipótesis de que $1 < n$.

Caso 3.3.3.3.2.1. M aparece en $\Delta_2(M)$, pero no en Δ_1 (por lo tanto $\Delta_1(M) = \Delta_1$). Reemplazamos la deducción (I) por:

(IV)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta_1 > \Lambda_1, A \quad ,, \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma > \Theta(M) \quad ,, \quad B, \Delta_2(M) > \Lambda_2}{\Gamma, B', \Delta_2 > \Theta, \Lambda_2}\,(\mathrm{M})}{B, \Gamma, \Delta_2 > \Theta, \Lambda_2}\,(\mathrm{P,D})}{A \rightarrow B, \Delta_1, \Gamma, \Delta_2 > \Lambda_1, \Theta, \Lambda_2}\,(\rightarrow >)}{\Gamma, A \rightarrow B, \Delta_1, \Delta_2 > \Theta, \Lambda_1, \Lambda_2}$$

En la nueva mezcla, si $B = M$, entonces $B' = \varnothing$, en cuyo caso es necesario el debilitamiento para alcanzar la secuencia derecha de la tercera fila. Esta mezcla es de rango menor a la de (I), por lo que se puede utilizar la hipótesis inductiva. Dado que por hipótesis $\Delta_1(M) = \Delta_1$, la única diferencia entre la secuencia final de (I) y la de (IV) es que aquí aparece $A \rightarrow B$ en lugar de $(A \rightarrow B)'$. Para lograr la misma secuencia final de (I) debemos considerar dos casos:

Caso 3.3.3.3.2.1.1. $A \rightarrow B \neq M$, entonces $A \rightarrow B = (A \rightarrow B)'$, con lo que la secuencia final de (IV) coincide con la secuencia final de (I).

Caso 3.3.3.3.2.1.2. $A \rightarrow B = M$, entonces $(A \rightarrow B)' = \varnothing$. Para obtener la secuencia final de (I) agregamos a la secuencia final de (IV) la siguiente deducción:

(V)

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma > \Theta(M) \quad ,, \quad \Gamma, A \rightarrow B, \Delta_1, \Delta_2 > \Theta, \Lambda_1, \Lambda_2}{\Gamma, \Gamma, (A \rightarrow B)', \Delta_1, \Delta_2 > \Theta, \Theta, \Lambda_1, \Lambda_2}\,(\mathrm{M})}{\Gamma, (A \rightarrow B)', \Delta_1, \Delta_2 > \Theta, \Lambda_1, \Lambda_2}\,(\mathrm{P,C})\quad ,$$

que es la secuencia final buscada.

Caso 3.3.3.3.2.2. M aparece en $\Delta_1(M)$, pero no en Δ_2 (por lo tanto $\Delta_2(M) = \Delta_2$). Reemplazamos la deducción (I) por:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(VI)} & \underline{\Gamma > \Theta(M) \;,,\; \Delta_1(M) > \Lambda_1, A} \\
\text{(M)} & \underline{\Gamma, \Delta_1 > \Theta, \Lambda_1, A'} \\
\text{(>D)} & \underline{\Gamma, \Delta_1 > \Theta, \Lambda_1, A \;,,\; B, \Delta_2 > \Lambda_2} \\
(\to>) & \underline{\underline{A \to B, \Gamma, \Delta_1, \Delta_2, > \Theta, \Lambda_1, \Lambda_2}} \\
\text{(P>)} & \Gamma, A \to B, \Delta_1, \Delta_2, > \Theta, \Lambda_1, \Lambda_2
\end{array}
$$

En (VI) tenemos la misma secuencia final de (IV). Por lo tanto continuamos la deducción como en (V), con lo que llegamos a la secuencia final buscada. Las mezclas son de menor rango y se puede usar la hipótesis inductiva.

Caso 4: (*Segundo paso inductivo sobre el rango izquierdo*: $2 < r$, $1 < m$). Este caso es básicamente una "imagen de espejo" del *paso inductivo* 1 *sobre el rango derecho*. Las reglas que no son "figuras de espejo" o duales entre sí son $(>\to)$ y $(\to>)$, por lo que deberemos encontrar un tratamiento especial para ellas. Pero primero ejemplifiquemos las reducciones de rango por imagen de espejo considerando el *caso* 3.3.3.1. para $(>\wedge)$, de reducción del rango derecho. El final de deducción para $(>\wedge)$ era así:

$$
\begin{array}{llr}
\text{(I)} & \qquad\qquad\qquad \underline{\Delta(M) > \Lambda, A \;,,\; \Delta(M) > \Lambda, B} & \\
 & \underline{\Gamma > \Theta(M) \;,,\; \Delta(M) > \Lambda, A \wedge B} & (>\wedge) \\
\text{(M)} & \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda, A \wedge B & ,
\end{array}
$$

y reducíamos su rango derecho así:

$$
\begin{array}{llll}
\text{(II)} & \underline{\Gamma > \Theta(M) \;,,\; \Delta(M) > \Lambda, A} & \underline{\Gamma > \Theta(M) \;,,\; \Delta(M) > \Lambda, B} & \\
\text{(M)} & \underline{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda, A \;,,} & \underline{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda, B} & \text{(M)} \\
(>\wedge) & \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda, A \wedge B & & .
\end{array}
$$

Ahora escribimos los desarrollos duales de los anteriores, que nos proporcionan la reducción de rango izquierdo para $(\vee>)$

$$
\begin{array}{llr}
\text{(I')} & \underline{B, \Lambda > \Delta(M) \;,,\; A, \Lambda > \Delta(M)} & \\
(>\vee) & \underline{B \vee A, \Lambda > \Delta(M) \;,, \qquad\qquad \Theta(M) > \Gamma} & \\
\text{(M)} & B \vee A, \Lambda, \Theta > \Delta, \Gamma & ,
\end{array}
$$

y reducimos su rango izquierdo así:

$$
\begin{array}{llll}
\text{(II')} & \underline{B, \Lambda > \Delta(M) \;,,\; \Theta(M) > \Gamma} & \underline{A, \Lambda > \Delta(M) \;,,\; \Theta(M) > \Gamma} & \\
\text{(M)} & \underline{B, \Lambda, \Theta > \Delta, \Gamma \;,,} & \underline{A, \Lambda, \Theta > \Delta, \Gamma} & \text{(M)} \\
(>\vee) & B \vee A, \Lambda, \Theta > \Delta, \Gamma & &
\end{array}
$$

De modo semejante se procede en los restantes casos de reglas duales. Ahora vayamos a las reglas excepcionales (→>) y (>→), que no tienen duales.

Caso 4.1. (R) = (→>). Es semejante al ***caso* 3.3.3.3**. El final del desarrollo con rango 1 < ***m*** es:

(I) $\underline{\Gamma_1 > \Theta_1(M), A \;,,\; B, \Gamma_2 > \Theta_2(M)}$

(→>) $\underline{A \rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2 > \Theta_1(M), \Theta_2(M) \;,,\; \Delta(M) > \Lambda}$

(M) $A \rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta > \Theta_1, \Theta_2, \Lambda$

Caso 4.1.1. M aparece tanto en $\Theta_1(M)$ como en $\Theta_2(M)$. Modificamos como sigue el final anterior:

(II) $\underline{\Gamma_1 > \Theta_1(M), A \;,,\; \Delta(M) > \Lambda}$

(M) $\underline{\Gamma_1, \Delta > \Theta_1, A', \Lambda}$ $\qquad$ $\underline{B, \Gamma_2 > \Theta_2(M) \;,,\; \Delta(M) > \Lambda}$

(P,D) $\underline{\Gamma_1, \Delta > \Theta_1, \Lambda, A \;,, \qquad B, \Gamma_2, \Delta > \Theta_2, \Lambda}$ $\quad$ (M)

(→>) $\underline{\underline{A \rightarrow B, \Gamma_1, \Delta, \Gamma_2, \Delta > \Theta_1, \Lambda, \Theta_2, \Lambda}}$

(P,C) $A \rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta > \Theta_1, \Theta_2, \Lambda$.

Caso 4.1.2. M aparece o bien en $\Theta_1(M)$ o bien en $\Theta_2(M)$, pero no en ambos. Tenemos dos subcasos:

Caso 4.1.2.1. M aparece en $\Theta_1(M)$, pero no en Θ_2. Construimos el siguiente final:

(III) $\underline{\Gamma_1 > \Theta_1(M), A \;,,\; \Delta(M) > \Lambda}$

(M) $\underline{\Gamma_1, \Delta > \Theta_1, A', \Lambda}$

(P,D) $\underline{\Gamma_1, \Delta > \Theta_1, \Lambda, A \;,, \quad B, \Gamma_2 > \Theta_2}$

(→>) $\underline{\underline{A \rightarrow B, \Gamma_1, \Delta, \Gamma_2 > \Theta_1, \Lambda, \Theta_2}}$

(P) $A \rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta > \Theta_1, \Theta_2, \Lambda$

Caso 4.1.2.2. M aparece o bien en $\Theta_2(M)$, pero no en Θ_1: transformamos el final de (I) de la siguiente manera:

(IV) $\qquad\qquad \underline{B, \Gamma_2 > \Theta_2(M) \;,,\; \Delta(M) > \Lambda}$

$\underline{\Gamma_1 > \Theta_1, A \;,,\; B, \Gamma_2, \Delta > \Theta_2, \Lambda}$ $\quad$ (M)

(→>) $A \rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta > \Theta_1, \Theta_2, \Lambda$

En los tres finales transformados (II), (III) y (IV) tenemos la misma secuencia final y además las mezclas que aparecen son todas de rango inferior a la de (I), por lo que se puede aplicar la hipótesis inductiva.

Caso 4.2. (R) = (>→).

$$\begin{array}{ll}
\text{(I)} & \underline{A, \Gamma > \Theta(M), B} \\
(>\to) & \underline{\Gamma > \Theta(M), A \to B \,,, \quad \Delta(M) > \Lambda} \\
\text{(M)} & \Gamma, \Delta > \Theta, (A \to B)', \Lambda \qquad .
\end{array}$$

Transformamos este final de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll}
\text{(II)} & \underline{A, \Gamma > \Theta(M), B \,,, \quad \Delta(M) > \Lambda} \\
\text{(M)} & \underline{\underline{A, \Gamma, \Delta > \Theta, B, \Lambda}} \\
\text{(P)} & \underline{A, \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda, B} \\
(>\to) & \underline{\underline{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda, A \to B}} \\
\text{(P)} & \Gamma, \Delta > \Theta, A \to B, \Lambda \qquad .
\end{array}$$

La secuencia final de (I) difiere de la de (II) en que en aquella aparece $(A \to B)$' y en ésta $A \to B$. Como $A \to B$ puede ser M, esto nos lleva a considerar dos casos:

Caso 4.2.1. $A \to B \neq M$. En tal caso $(A \to B)' = A \to B$ y por lo tanto la secuencia final de (II) es idéntica con la de (I). Como el rango de la mezcla es menor a la izquierda se puede aplicar la hipótesis inductiva.

Caso 4.2.2. $A \to B = M$, en cuyo caso $(A \to B)' = \varnothing$ y las secuencias finales de (II) y de (I) difieren. Para lograr la secuencia final de (I) agregamos a la de (II) el siguiente desarrollo:

$$\begin{array}{ll}
\text{(III)} & \underline{\Gamma, \Delta > \Theta, A \to B, \Lambda \,,, \quad \Delta(M) > \Lambda} \\
\text{(M)} & \underline{\underline{\Gamma, \Delta, \Delta > \Theta, (A \to B)', \Lambda, \Lambda}} \\
\text{(P,C)} & \Gamma, \Delta > \Theta, (A \to B)', \Lambda
\end{array}$$

La secuencia final de (III) coincide nuevamente con la de (I) pero aparece una nueva mezcla. Una vez eliminada la mezcla superior se le aplicará también a ésta la hipótesis inductiva. Con esto concluye la demostración del lema para *CSC*. □

6.4. El teorema fundamental o 'Hauptsatz' para el *CSC*.

Demostrado el lema, el teorema fundamental se deduce inmediatamente, pues él dice:

(1) Si hay una única mezcla, se puede construir otro desarrollo con la misma secuencia final donde el rango de toda mezcla que aparezca se reduzca a $\boldsymbol{r} = 2$.
(2) Si el grado de una mezcla es mayor que 0, se puede construir otro desarrollo con mezclas de grado 0, y
(3) Las mezclas de grado 0 se eliminan por otros desarrollos equivalentes sin mezclas.

Como un desarrollo secuencial es finito, contendrá un número finito de mezclas. En consecuencia se comienza con la primera (M) desde arriba a la izquierda y se le aplica el lema. Luego se sigue con la segunda a la derecha y se aplica el lema. Se prosigue hasta agotar las mezclas en el primer nivel. Luego se desciende de nivel y se procede la misma manera, hasta agotar las mezclas del desarrollo. Con ello habremos obtenido un desarrollo secuencial con la misma secuencia final del desarrollo secuencial inicial, pero sin ninguna mezcla. □

6.5. El teorema fundamental para *CSI*.

Este es un caso particular del teorema anterior. Un desarrollo en *CSI* consiste de secuencias del tipo $<\Gamma_m; \Theta_1>$, que son casos particulares de los desarrollos $<\Gamma_m; \Theta_n>$ de *CSC*. Se debe demostrar que todo desarrollo de *CSI* con uno o más (S) o (M) se transforma en otro desarrollo de *CSI* sin (S) o (M).

Si en un desarrollo de *CSI* se hace algún cambio de nombre de variable libre, se transforma trivialmente en otro desarrollo de *CSI*. Procedemos como en los correspondientes casos considerados anteriormente de *CSC*, lo que conserva la corrección deductiva.

Caso 1 (*caso base*: $2 = r$). En él tendrán lugar inducciones sobre el grado lógico de la fbf. *M* de la mezcla (M). El caso tiene varios subcasos:

Caso 1.1. Casos particulares para secuencias iniciales.

Caso 1.1.1. La secuencia superior izquierda de la mezcla es una secuencia fundamental:

$$\text{(M)}\quad \frac{M > M,, \ \Delta(M) > A}{M, \Delta > A} \ ,$$

y (M) se elimina de la siguiente manera:

$$\text{(P,C)}\quad \frac{\Delta(M) > A}{M, \Delta > A} \ ,$$

es decir, mediante las permutaciones y contracciones que sean necesarias. La deducción pertenece a *CSI* por tener todas sus secuencias a lo sumo una fbf. en el sucedente.

Caso 1.2. La secuencia superior derecha de la mezcla es una secuencia fundamental:

$$\text{(M)}\quad \frac{\Delta > M,, \ \ M > M}{\Delta > M}$$

y obviamente se elimina la mezcla por un desarrollo idéntico:

$$\frac{\Delta > M}{\Delta > M}$$

Subcaso 2. M aparece por debilitamiento en al menos una de las secuencias superiores de (M). (Este subcaso nos da dos subcasos interesantes, pues el tercero es trivial.):

Subcaso 2.1. A la izquierda de la mezcla hay un debilitamiento en el sucedente. El final de la deducción será:

$$\begin{array}{ll} & \dfrac{\Gamma >}{\ } \\ \text{(>D)} & \dfrac{\Gamma > M,, \ \ \Delta(M) > A}{\Gamma, \Delta > A} \\ \text{(M)} & \end{array}$$

La misma secuencia final se deduce así

$$\text{(D>, P>, >D)}\quad \frac{\Gamma >}{\Gamma, \Delta > A} \ ,$$

con (D>) y (P>) posiblemente reiteradas y una única aplicación de (>D). Ésta es también una deducción de *CSI*. La deducción no modifica la deducción superior y elimina la regla (M).

Subcaso 2.2. Las apariciones de M en la secuencia superior derecha de (M) ocurren por debilitamiento, lo que nos da el siguiente final de deducción:

$$\text{(M)}\quad \frac{\Gamma > M,, \ \ \dfrac{\Delta > A}{\Delta(M) > A}\ \text{(D>)}}{\Gamma, \Delta > A} \ ,$$

Este final de deducción lo reemplazamos por el siguiente:

$$(\mathrm{D}{>})\quad \frac{\Delta > A}{\Gamma, \Delta > A}\ ,$$

que tiene la misma secuencia final, resulta de $\Delta > A$ mediante un número finito de debilitamientos en el antecedente, no modifica la deducción superior y elimina la regla (M).

Ahora pasamos a considerar los casos inductivos interesantes, cuando el grado de la fbf. de la mezcla es mayor que cero ($0 < \mathrm{G}(M)$) y el rango $\boldsymbol{r} = 2$.

Caso 3.1. $M = A \wedge B$. Puesto que $2 = \boldsymbol{r}$, una de las dos variantes posibles del final del desarrollo será:

$$(\mathrm{M})\quad \dfrac{(>\wedge)\ \dfrac{\Gamma_1 > A \quad \Gamma_1 > B}{\Gamma_1 > A \wedge B} \qquad \dfrac{A, \Gamma_2 > C}{A \wedge B, \Gamma_2 > C}\ (\wedge>)}{\Gamma_1, \Gamma_2 > C}$$

Reemplazamos este final por el siguiente:

$$(\mathrm{D}{>}, \mathrm{P}{>})\quad \dfrac{(\mathrm{M})\ \dfrac{\Gamma_1 > A \quad A, \Gamma_2 > C}{\Gamma_1, \Gamma 2' > C}}{\Gamma_1, \Gamma_2 > C}\ ,$$

donde $\Gamma_2' = \Gamma_2$, si A no aparece en Γ_2, pero $\Gamma_2' \neq \Gamma_2$, si A aparece en Γ_2. En el segundo caso volvemos a obtener la secuencia final $\Gamma_1, \Gamma_2 > C$ mediante D> y P> las veces que sean necesarias. Este final de desarrollo tiene una mezcla de grado menor, pero es posible que $2 < \boldsymbol{r}$, pues A puede haber aparecido en secuencias superiores a $\Gamma_1 > A$, e.d. con $1 < \boldsymbol{m}$, y a $A, \Gamma_2 > C$, e.d. con $1 > \boldsymbol{n}$.

Caso 3.2. $M = A \vee B$. Una de las variantes del final de la deducción es la siguiente:

$$(\mathrm{M})\quad \dfrac{(>\vee)\ \dfrac{\Gamma_1 > A}{\Gamma_1 > A \vee B} \qquad \dfrac{A, \Gamma_2(A) > C \quad B, \Gamma_2(A) > C}{A \vee B, \Gamma_2(A) > C}\ (\vee>)}{\Gamma_1, \Gamma_2(A) > C}\ ,$$

en la que, por ser $\boldsymbol{r} = 2$, no puede aparecer $A \vee B$ en secuencias superiores. La eliminación de esta (M) se realiza partiendo sólo de las secuencias $\Gamma_1 > A$ y $A, \Gamma_2(A) > C$ (eliminando la secuencia $B, \Gamma_2(A) > C$), con lo que obtenemos el siguiente final de deducción:

$$\dfrac{\Gamma_1 > A \quad ,, \quad A, \Gamma_2(A) > C}{\dfrac{(\mathrm{M}) \quad \Gamma_1, \Gamma_2 > C}{(\mathrm{D,I}) \quad \Gamma_1, \Gamma_2(A) > C}}$$

En este desarrollo $G(A) + 1 = G(A \vee B)$, con lo que hemos reducido el grado lógico de la nueva (M), pero ésta puede diferir de la anterior, pues A pueden aparecer en secuencias superiores a las secuencias $\Gamma_1 > A$ y $A, \Gamma_2(A) > C$ y por lo tanto su rango **r** puede ser mayor que 2, lo que nos conduce a los pasos inductivos sobre el rango, que tratamos más abajo. (La otra variante, con B en lugar de A, se resuelve de manera análoga.)

Caso 3.3. $M = \wedge x A(x)$. La deducción, con la regla crítica (>∧) en la secuencia superior izquierda y la regla irrestricta (∧>) en la secuencia superior derecha, concluye de la siguiente manera:

$$\dfrac{(>\wedge)\ \dfrac{\Gamma_1 > A(a)}{\Gamma_1 > \wedge x A(x)} \quad ,, \quad \dfrac{A(b), \Gamma_2(A(b)) > C}{\wedge x A(x), \Gamma_2(A(b)) > C}\ (\wedge>)}{(\mathrm{M}) \quad \Gamma_1, \Gamma_2(A(b)) > C}$$

A esta deducción la transformamos en la siguiente:

$$\dfrac{\Gamma_1 > A(b) \quad ,, \quad A(b), \Gamma_2(A(b)) > C}{\dfrac{(\mathrm{M}) \quad \Gamma_1, \Gamma_2 > C}{(\mathrm{D, I}) \quad \Gamma_1, \Gamma_2(A(b)) > C}}$$

Lo primero que hicimos fue reemplazar la variable libre a por b en $A(a)$ para posibilitar (M), y consecuentemente reemplazamos b por a en todas sus apariciones por encima de $\Gamma_1 > A(b)$ desde su primera aparición, de modo que se conserve correcta la deducción. La mezcla resultante tiene un grado inferior, por lo que se la podrá finalmente eliminar conforme a la hipótesis inductiva sobre el grado, pero el rango puede aumentar.

Caso 3.4. $M = \vee x A(x)$. La deducción, con la regla irrestricta (>∨) en la secuencia superior izquierda y la regla crítica (∨>) en la secuencia superior derecha concluye de la siguiente manera:

$$\dfrac{(>\vee)\ \dfrac{\Gamma_1 > A(a)}{\Gamma_1 > \vee x A(x)} \quad ,, \quad \dfrac{A(b), \Gamma_2(A(a)) > C}{\vee x A(x), \Gamma_2(A(a)) > C}\ (\vee>)}{(\mathrm{M}) \quad \Gamma_1, \Gamma_2(A(a)) > C}$$

Reemplazamos esta deducción por la siguiente:

$$\begin{array}{ll} & \underline{\Gamma_1 > A(a) \;,, \quad A(a), \Gamma_2(A(a)) > C} \\ \text{(M)} & \underline{\underline{\Gamma_1, \Gamma_2 > C}} \\ \text{(D,I)} & \Gamma_1, \Gamma_2(A(a)) > C \end{array}$$

Los cambios de nombres de variables libres se realizan de la misma manera que en el subcaso anterior, de modo de conservar la corrección de la deducción. La mezcla resultante tiene un grado menor. Esto posibilitará la aplicación de la hipótesis inductiva sobre el grado lógico y eliminar la mezcla, aunque el rango puede aumentar.

Caso 3.5. $M = \neg A$. El final de la deducción es el siguiente:

$$\begin{array}{llll} & \underline{A, \Gamma_1(A) >} & \underline{\Gamma_2 > A} & \\ (>\neg) & \underline{\Gamma_1(A) > \neg A \;,,} & \underline{\neg A, \Gamma_2 >} & (\neg>) \\ \text{(M)} & \Gamma_1(A), \Gamma_2 > & & \end{array}$$

Reemplazamos este final de deducción por el siguiente:

$$\begin{array}{ll} & \underline{\Gamma_2 > A \quad ,, \quad A, \Gamma_1(A) >} \\ \text{(M)} & \underline{\underline{\Gamma_2, \Gamma_1 >}} \\ \text{(D,P)} & \Gamma_1(A), \Gamma_2 >, \end{array}$$

que tiene las mismas secuencias iniciales, disminuye el grado de (M), aunque posiblemente aumenta el rango de la deducción.

Caso 3.6. $M = A \to B$. El final de la deducción se ve de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llll} & \underline{A, \Gamma_1(A) > B} & \underline{\Gamma_2 > A \;,, \quad B, \Delta(A,B) > C} & \\ (>\to) & \underline{\Gamma_1(A) > A \to B \;,,} & \underline{A \to B, \Gamma_2, \Delta(A,B) > C} & (\to>) \\ \text{(M)} & \Gamma_1(A), \Gamma_2, \Delta(A,B) > C & . & \end{array}$$

Reemplazamos este final de deducción por el siguiente:

$$\begin{array}{lll} & \qquad\qquad \underline{A, \Gamma_1(A) > B \;,, \quad B, \Delta(A,B) > C} & \\ & \underline{\Gamma_2 > A \;,, \quad A, \Gamma_1(A), \Delta(A) > C} & \text{(M)} \\ \text{(M)} & \underline{\underline{\Gamma_2, \Gamma_1, \Delta > C}} & \\ \text{(D,P)} & \Gamma_1(A), \Gamma_2, \Delta(A,B) > C. & \end{array}$$

Las dos mezclas resultantes son de menor grado que $A \to B$, aunque el rango puede ser mayor. En las eliminaciones posteriores se comenzará aplicando las hipótesis inductivas sobre la (M) superior en el orden que corresponda hasta eliminarla, y luego se hará lo mismo con la inferior.

A las mezclas restantes de estos seis casos debemos aplicar a continuación la reducción de su rango, hasta llegar otra vez a los casos con $r = 2$, y una vez hecho esto, reducir nuevamente el grado lógico y así sucesivamente, hasta llegar a mezclas sobre secuencias iniciales o debilitamientos, que son los casos básicos para los que ya hemos eliminado (M). Esto se realiza del mismo modo que en el teorema para *CSC*. □

6.6. El teorema fundamental para formas normales prenexas (teorema fundamental "fortificado") para *CSC*.

Sea un desarrollo en *CSC* cuya secuencia final '*Sf*' sea tal que cada fbf. de ella esté en forma normal prenexa. Entonces ese desarrollo se puede transformar en otro equivalente con la misma secuencia final que tiene las siguientes propiedades:
(1) el desarrollo no contiene ningún corte;
(2) existe en el desarrollo una secuencia media '*Sm*' tal que: (a) su desarrollo carece de cuantores '⋀' y '⋁', y (b) a partir de la *Sm*, y excluida ella misma, las únicas reglas de desarrollo que aparecen son (⋀>), (>⋀), (⋁>), (>⋁) y las restantes reglas estructurales (pero ningún corte).

En un desarrollo tal la *Sm* lo divide en dos partes: la superior, que pertenece al *CSC* de enunciados, y la inferior, que pertenece a la parte cuantificacional del mismo. Como todas las reglas de introducción de cuantores y las reglas *estructurales* diferentes del corte tienen una única secuencia superior, el desarrollo *a partir de Sm* será lineal (constará de "un solo hilo"). Cada fbf. de la *Sm*, tanto del antecedente como del sucedente, surge de las fbf.s de *Sf* cuando se eliminan las variables ligadas por variables libres. (Esto es una consecuencia de la propiedad de las fórmulas parciales en un desarrollo sin cortes)

Dem. La demostración se realiza en varios pasos.

(1) Se utiliza el teorema fundamental en su forma para *CSC*, a fin de transformar el desarrollo originalmente dado en un desarrollo sin cortes.
(2) Si en el desarrollo original hubiese alguna secuencia inicial de la forma $\bigwedge xA(x) > \bigwedge xA(x)$ ó $\bigvee xA(x) > \bigvee xA(x)$, se las transforma de la siguiente manera:

$$\dfrac{\dfrac{A(a) > A(a)}{\bigwedge xA(x) > A(a)}\ (\bigwedge>)}{\bigwedge xA(x) > \bigwedge xA(x)}\ (>\bigwedge) \qquad \dfrac{\dfrac{A(a) > A(a)}{A(a) > \bigvee xA(x)}\ (>\bigvee)}{\bigvee xA(x) > \bigvee xA(x)}\ (\bigvee>)$$

Reiterando este procedimiento se evita la aparición de cuantores en todas las secuencias iniciales.
(3) Definimos el "orden" de un desarrollo 'o(*D*)' de la siguiente manera:
(3a) distinguimos entre las reglas "enunciativas" '*Re*' (que introducen '$\wedge$' '$\vee$' '$\rightarrow$' y '$\neg$') y las reglas "cuantoriales" '*Rq*' (que introducen '$\bigwedge$' y '$\bigvee$').
(3b) Las reglas de deducción cuantoriales reciben un número de orden 'o(*Rq*)' de la manera siguiente: se considera el "hilo" del desarrollo que va desde la secuencia inmediatamente inferior a la secuencia en que aparece el cuantor hasta la *Sf* y se cuentan las reglas de deducción enunciativas *Re* que aparecen: ese número es el *número de orden de la regla cuantorial* o(*Rq*) del caso.
(3c) La suma de los números de orden de todas las reglas de deducción cuantorial del desarrollo es el *orden del desarrollo* o(*D*).

Una de las condiciones para demostrar el teorema es reducir a cero el orden del desarrollo, pues en tal caso todas las reglas enunciativas *Re* aparecerán por encima de toda regla cuantificacional *Rq*. La deducción se realiza por inducción sobre el orden de deducción o(*D*):

Caso base: 0 = o(*D*), es decir el orden del desarrollo es 0 ó ya ha sido reducido a 0. Procedemos desde la secuencia final *Sf*, cuyas fbf.s cuantificadas por hipótesis del teorema ya están todas en *forma normal prenexa* (*fnp*) y nos desplazamos hacia arriba. Nos detenemos cuando encontramos una secuencia que, o bien (1) es la secuencia inferior de la aplicación de una regla de desarrollo proposicional *Re*, o bien (2) es una secuencia inicial $A > A$.

Llamemos '*Se*' a esta secuencia. Para obtener la secuencia media *Sm* transformamos a *Se* de la manera siguiente:

En las secuencias superiores a *Se* eliminamos todas fbf.s que contengan cuantores (que obviamente no pueden ser secuencias iniciales, porque previamente las habríamos reemplazado por los desarrollos (2) de arriba, ni pueden haber surgido por aplicación de ninguna regla de introducción de cuantores pues, si así fuera, o(D) ≠ 0; por lo tanto, si hay alguna fbf. con cuantores, debe haber aparecido por debilitamiento). Luego de esta eliminación el desarrollo permanece correcto porque:

(1) Las secuencias iniciales no se modifican, por ser de la forma $Fa > Fa$ por la transformación ya efectuada y por hipótesis del caso base o(D) = 0.
(2) Tampoco se eliminan ni fórmulas principales ni subfórmulas de una regla de deducción proposicional, pues si una subfórmula tuviera un cuantor, entonces también lo tendría la fórmula principal – por tratarse de una *Re* que no introduce cuantores. Pero como por hipótesis las fbf.s de más abajo están en *fnp*, entonces una fbf. con cuantores no puede ser subfórmula de esa *Re*. Por lo tanto las *Re* no utilizan como subfórmulas a ninguna fbf. cuantificada. Esto significa que podemos eliminar la fbf.s cuantificadas sin afectar la corrección del desarrollo.

De este modo obtenemos un desarrollo inicial hasta una nueva secuencia *Se'* que carece de toda fbf. cuantificada. *Se'* será nuestra *Sm*, que llena todas las condiciones del teorema: carece de cortes, todas las fbf.s en las que aparecen cuantores son *fnp*, arriba de *Se'* = *Sm* no aparecen cuantores y las únicas reglas del desarrollo inferior son *Rq* o reglas estructurales.

Paso inductivo: 0 < o(D). Ahora se trata de reducir el orden del desarrollo. El primer paso consistirá en el cambio de nombre de las variables libres, de modo que el desarrollo tenga la siguiente propiedad: para cada *Rq* (>∧) y (∨>) vale que su variable libre sólo aparece en las secuencias superiores de la aplicación de esas reglas y no aparece como variable propia en ninguna otra aplicación de (>∧) o (∨>) en el desarrollo. Esto, como ya demostráramos más arriba, conserva la corrección del desarrollo y, además, no modifica el orden o(D) del mismo.

Dado que por hipótesis 0 < o(D), entonces, si partimos de *Sf*, habrá en el desarrollo una primera *Rq* con la siguiente propiedad: si se sigue el hilo del desarrollo desde la secuencia inferior de esa *Rq* hasta *Sf*, entonces la secuencia siguiente en el desarrollo es secuencia inferior de una *Re*: si no fuera así, el orden de la deducción de la regla *Rq* sería cero, contra la hipótesis.

La reducción del orden se realiza desplazando *Rq* más abajo que *Re*. Para ello debemos considerar los siguientes subcasos:

Subcaso 1: la secuencia inferior de esa *Re* tiene una sola secuencia superior, por lo que *Re* será (∧>), (>∨), (>→), (¬>) ó (>¬). Como hay cuatro reglas cuantificacionales *Rq* posibles (>⋀), (⋀>), (>⋁) y (⋁>) las variantes posibles de este subcaso son 5.4 = 20. Para evitar esa complejidad haremos un desarrollo esquemático para esas cinco *Re*.

Modificamos el fragmento para la *Rq* crítica (>⋀):

(I) $\underline{\Gamma \;>\Theta,\, Fa}$

$\underline{\underline{\Gamma \;>\Theta,\, \bigwedge xFx}}$ (>⋀)

$\Delta \;>\Lambda$ (*Re*, con eventuales reglas estructurales)

de la siguiente manera:

(II) $\underline{\underline{\Gamma \;>\Theta,\, Fa}}$

$\underline{\underline{\Gamma \;> Fa,\, \Theta,\, \bigwedge xFx}}$ tal vez con varias (>P) y ⋀*xFx* aparece por (>D),

$\underline{\underline{\Delta \;> Fa,\, \Lambda}}$ *Re*, con eventuales reglas estructurales,

$\underline{\Delta \;>\Lambda,\, Fa}$ tal vez varias (>P),

$\underline{\underline{\Delta \;>\Lambda,\, \bigwedge xFx}}$ (>⋀)

$\Delta \;>\Lambda$ con permutaciones y contracciones,

pues ⋀*xFx* ya debe aparecer en Λ, pues la aplicación de *Re* en (I), al ser una regla proposicional, no podía hacer desaparecer la fbf. cuantificada, y tampoco la pueden hacer desaparecer las eventuales reglas de deducción estructurales. Pero además *Re* no puede tener como subfórmula a ⋀*xFx*, pues en tal caso con *Re* aparecería una fbf. cuantificada que no está en *fnp*, contra la hipótesis. Por lo tanto podemos reemplazar (II) por el siguiente desarrollo:

$$\begin{array}{lll}
\text{(III)} & \underline{\underline{\Gamma \ > \Theta, Fa\qquad}} & \\
& \underline{\underline{\Gamma \ > Fa, \Theta,}} & \text{tal vez varias (>P),} \\
& \underline{\underline{\Delta \ > Fa, \Lambda^*}} & \textit{Re}\text{, con eventuales reglas estructurales,} \\
& \underline{\Delta \ > \Lambda^*, Fa} & \text{tal vez varias (>P),} \\
& \underline{\underline{\Delta \ > \Lambda^*, \bigwedge xFx}} & (>\bigwedge) \\
& \Delta \ > \Lambda & \text{con eventuales permutaciones y contracciones.}
\end{array}$$

De este modo hemos cambiado el orden de *Re* y la *Rq* (>⋀) y hemos reducido en una unidad el orden del desarrollo *D* (la condición de cambio de nombre de la variable libre se ha realizado).

El caso para la *Rq* (>⋁) es semejante al anterior:

$$\begin{array}{lll}
\text{(I)} & \underline{\Gamma \ > \Theta, Fa\qquad} & \\
& \underline{\underline{\Gamma \ > \Theta, \bigvee x Fx}} & (>\bigvee) \\
& \Delta \ > \Lambda & (\textit{Re}\text{, con eventuales reglas estructurales).}
\end{array}$$

Las condiciones son las mismas del caso anterior y por lo tanto el paso a los desarrollos (II) y (III) se realiza del mismo modo.

Por su parte las *Rq* (⋀>) y (⋁>) se justifican por ser imágenes de espejo de las dos anteriores.

Subcaso 2: la secuencia inferior de la primera *Re* tiene dos secuencias superiores. En este caso *Rp* puede ser (>∧), (∨>) ó (→>) y *Rq* puede ser (>⋀), (⋀>), (>⋁) y (⋁>). Los esquemas de la parte de desarrollo para (>⋀) que nos interesan serían los siguientes:

$$\begin{array}{llllll}
\text{(I)} & \underline{\qquad > \Theta, Fa\qquad} & & \text{(I')} & \underline{\Gamma \ > \Theta, Fa\qquad} & \\
(>\bigwedge) & \underline{\underline{\Gamma \ > \Theta, \bigwedge xFx \quad ,, \quad \Delta \ > \Lambda}} & & & \underline{\underline{\Delta \ > \Lambda ,, \ \Gamma > \Theta, \bigwedge xFx}} & (>\bigwedge) \\
(\textit{Re}) & \Xi \ > \Pi & & & \Xi \ > \Pi & (\textit{Re})
\end{array}$$

(con eventuales reglas de deducción estructurales).

Cada uno de estos casos esquemáticos se resuelve de forma semejante; sólo se requiere el uso adicional de algunas reglas de deducción estructurales. □

NB. Se pueden lograr otras "fortificaciones" del teorema fundamental que tienen que ver con la sucesión de las constantes lógicas en el desarrollo y en *Sf.* Por lo tanto también con la forma peculiar de la *fnp* que se deduce: esto se conecta obviamente con los teoremas de normalización en la lógica clásica de enunciados y las soluciones parciales del problema de decisión en la lógica de primer orden (teorema de Herbrand).

6.7. Apéndice 1: Desarrollo completo del caso 3.3.1. del teorema fundamental.

Si M es una fbf. objeto de la regla (R), que es (D>), (C>), o (P>), entonces el final

$$\text{(M)}\quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma > \Theta(M)_{,,}\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Delta(M) > \Lambda\end{matrix}}{\Pi(M) > \Lambda}\ \text{(R)}}{\Gamma, \Pi > \Theta, \Lambda} \quad ,$$

tiene las tres siguientes posibilidades:

3.3.1.1.

$$\text{(M)}\quad \dfrac{\Gamma > \Theta(M)_{,,} \qquad \dfrac{\Delta(M) > \Lambda}{M, \Delta(M) > \Lambda}\ \text{(D>)}}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda} \quad ,$$

que transformamos así:

$$\text{(M)}\quad \dfrac{\Gamma > \Theta(M)_{,,} \qquad \Delta(M) > \Lambda}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda} \ ,$$

que es un desarrollo con la misma secuencia final y una mezcla de menor rango.

3.3.1.2.

$$\text{(M)}\quad \dfrac{\Gamma > \Theta(M)_{,,} \qquad \dfrac{M, \Delta(M) > \Lambda}{\Delta(M) > \Lambda}\ \text{(C>)}}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda} \quad ,$$

que transformamos así:

$$\text{(M)}\quad \dfrac{\Gamma > \Theta(M)_{,,} \qquad M, \Delta(M) > \Lambda}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda} \quad .$$

Éste es un desarrollo con la misma secuencia final y una mezcla de menor rango.

3.3.1.3.

$$\dfrac{\Gamma > \Theta(M),, \quad \dfrac{D, M, \Delta(M) > \Lambda}{M, D, \Delta(M) > \Lambda}\ (P>)}{\Gamma, D, \Delta > \Theta, \Lambda}\ (M),$$

que transformamos así:

$$\dfrac{\Gamma > \Theta(M),, \quad D, M, \Delta(M) > \Lambda}{\Gamma, D, \Delta > \Theta, \Lambda}\ (M),$$

desarrollo con la misma secuencia final y una mezcla de menor rango. Como vemos todos estos subcasos son triviales. □

6.8. Apéndice 2: Desarrollo completo del caso 3.3.2 del mismo teorema.

Si M no es una fbf. objeto de la regla (R), que es (D>), (C>), o (P>), entonces el final

$$\dfrac{\Gamma > \Theta(M),, \quad \dfrac{\Delta(M) > \Lambda}{\Pi(M) > \Lambda}\ (R)}{\Gamma, \Pi > \Theta, \Lambda}\ (M),$$

tiene las tres siguientes posibilidades:

3.3.2.1. El primer desarrollo puede ser entonces:

$$\dfrac{\Gamma > \Theta(M),, \quad \dfrac{\Delta(M) > \Lambda}{D, \Delta(M) > \Lambda}\ (D>)}{\Gamma, D, \Delta > \Theta, \Lambda}\ (M),$$

donde $\Pi(M) = D, \Delta(M)$ y $\Pi = D, \Delta$. Lo reemplazamos por:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma > \Theta(M),, \quad \Delta(M) > \Lambda}{\Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}\ (M)}{D, \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}\ (D>)}{\Gamma, D, \Delta > \Theta, \Lambda}\ (P>)$$

(posiblemente en reiteradas oportunidades),

3.3.2.2. El segundo desarrollo puede ser:

$$\dfrac{\Gamma > \Theta(M),, \quad \dfrac{D, D, \Delta(M) > \Lambda}{D, \Delta(M) > \Lambda}\ (C>)}{\Gamma, D, \Delta > \Theta, \Lambda}\ (M),$$

que reemplazamos por:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma > \Theta(M),, \quad D, D, \Delta(M) > \Lambda}{\Gamma, D, D, \Delta > \Theta, \Lambda}\ (M)}{D, D, \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}\ (P>)}{D, \Gamma, \Delta > \Theta, \Lambda}\ (C>)}{\Gamma, D, \Delta > \Theta, \Lambda}\ (P>)$$

(P>) (en reiteradas ocasiones), (posiblemente en reiteradas ocasiones).

3.3.2.3. El tercer desarrollo puede tener la forma:

$$\dfrac{\Gamma > \Theta(M)\,,, \qquad \dfrac{D, E, \Delta(M) > \Lambda}{E, D, \Delta(M) > \Lambda}\ (P>)}{\Gamma, E, D, \Delta > \Theta, \Lambda}\ (M)\ ,$$

que reemplazamos por:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma > \Theta(M)\,,, \ D, E, \Delta(M) > \Lambda}{\Gamma, D, E, \Delta > \Theta, \Lambda}\ (M)}{\Gamma, E, D, \Delta > \Theta, \Lambda}\ (P>)$$

(posiblemente en reiteradas ocasiones).

Como vemos el grado lógico de las fbf.s no se modifica, pero las mezclas resultantes en los desarrollos transformados de los tres casos son de menor rango, lo que permite aplicar la hipótesis inductiva sobre el rango. □

CAPÍTULO 7.
APLICACIONES DEL TEOREMA FUNDAMENTAL.

7.1. La consistencia sintáctica de los cálculos de predicados clásico e intuicionista.

Damos dos versiones de la consistencia de esos cálculos de naturaleza puramente sintáctica. La primera, menos general, parte de la hipótesis de que las fbf.s involucradas son atómicas o elementales, y no necesita utilizar el teorema fundamental. La segunda es la demostración general cuya deducción requiere utilizar ese teorema. Por un desarrollo anterior sabemos que es desarrollable la secuencia $A\wedge\neg A$ >, que equivale al principio de no contradicción > $\neg(A\wedge\neg A)$. La hipótesis para la reducción al absurdo será en ambos casos que tanto en ***CSC*** como en ***CSI*** es deducible la secuencia vacía ">", lo que, por (S), implicaría que es desarrollable también la secuencia "> $A\wedge\neg A$". El desarrollo general que obtendríamos sería el siguiente:

				$A > A$	
				$\neg A, A >$	$(\neg>)$
		$>$	(*)	$A\wedge\neg A, A >$	$(\wedge>)$
(*)	$>$	$A >$	(D>)	$A, A\wedge\neg A >$	(P>)
(>D)	$> A$,,	$> \neg A$	$(>\neg)$	$A\wedge\neg A, A\wedge\neg A >$	$(\wedge>)$
$(>\wedge)$	$> A\wedge\neg A$		,,	$A\wedge\neg A >$	(C>)
			$>$		(S)

T 7.1. *Los cálculos secuenciales* ***CSI*** y ***CSC*** *son consistentes respecto de la negación* (lo que equivale a que ninguna secuencia final es de la forma > $A\wedge\neg A$).

Dem. Primera versión (*especial*). Partimos del supuesto (perfectamente aceptable) de que el grado lógico de A es 0, es decir es una fbf. elemental, o bien una variable de enunciado a, o bien una fórmula predicativa Fa. La parte derecha del desarrollo de arriba es correcta, en tanto que la secuencia inferior de la parte izquierda sólo puede surgir de un desarrollo que comience con secuencias '>', que hemos marcado con '(*)', y que no están permitidas, por no ser secuencias iniciales. Por lo tanto el desarrollo supone dos círculos viciosos, pues para llegar a la secuencia final ‘>’ debimos partir de dos secuencias iniciales ‘>’. Es decir, un desarrollo de ‘>’ con corte comete dos círculos viciosos y no parte de las secuencias iniciales, como es obligatorio en estos cálculos. Si con corte no se deduce correctamente ‘>’, tampoco se deduce ‘> $A\wedge\neg A$’. En esta primera versión no hemos utilizado el teorema fundamental. □

Dem. Segunda versión (general). El teorema es una simple consecuencia del teorema fundamental de eliminación de los cortes. Sea ‘A’ una fbf. de grado lógico cualquiera. Si mediante corte fuera posible una demostración de ‘>’, entonces por el teorema fundamental debe haber otra demostración de ‘>’ sin corte. Nos preguntamos entonces de qué secuencias puede surgir la secuencia nula en un desarrollo sin cortes. En primer lugar, no puede surgir de ninguna de las otras reglas estructurales, porque éstas, o bien por (D) aumentan el número de fbf.s, o bien por (P) cambian su orden, o bien por (C) lo disminuyen, pero nunca lo reducen a cero. Tampoco puede surgir por ninguna de las doce reglas de deducción para constantes lógicas, pues éstas introducen al menos una formula principal compleja en la secuencia inferior, pero no eliminan fbf.s por la *propiedad de las subfórmulas*, que ya demostramos. Por lo tanto sin corte no hay una deducción correcta equivalente de ‘>’. Pero por el teorema fundamental, si no es deducible ‘>’ sin corte, tampoco lo es con corte y, como sí es deducible ‘$A\wedge\neg A$ >’, entonces no es deducible ‘> $A\wedge\neg A$’. Esto concluye la demostración. □

7.2. El problema de decisión en la lógica intuicionista de enunciados.

La lógica, ya desde PEIRCE en 1885, había resuelto el problema de decisión para la lógica clásica de enunciados de modo semántico informal (por ejemplo con tablas de verdad bivalentes), hasta HILBERT-ACKERMANN 1928.[107] El

[107] Cf. CHURCH 1955, 164.

correspondiente problema de decisión para la lógica intuicionista de enunciados no se mostró tan fácil de resolver, una vez que, con Gödel en primer lugar y Jaśkowski después, se mostró la inadecuación de toda semántica finito-valente para dicho cálculo. El problema intuicionista (y también el clásico) se resuelve empero fácilmente mediante el teorema fundamental de Gentzen. El procedimiento es el siguiente:
(1) se define lo que denominamos una "secuencia reducida" y
(2) se demuestra un "lema" (*Hilfsatz*).

D.7.1. *Secuencia reducida* es una secuencia en la que no aparece ninguna fbf. de la secuencia más de tres veces en el antecedente, ni más de tres veces en el sucedente.

Para entender esta restricción hay que recordar cuál es la estructura general de una secuencia:

$$\Gamma, A, \Delta > \Theta, B, \Lambda.$$

Una secuencia reducida será entonces aquella en la que A aparece a lo sumo una vez en Γ y en Δ, y B aparece a lo sumo una vez en Θ y en Λ.

Lema: Cada desarrollo secuencial del *CSI* (o del *CSC*), cuya secuencia final es reducida, se puede transformar en un desarrollo secuencial del *CSI* (o del *CSC*) con la misma secuencia final, en la cual cada una de las secuencias es reducida (y no contiene ningún uso de regla de corte o mezcla, si la original no lo contiene).

Dem.: El uso de secuencias reducidas torna forzosamente finito un desarrollo de los *CSI* y *CSC* cuyas fbf.s son del cálculo de enunciados.[108] A una secuencia que se desarrolla a partir de otra cuando en el antecedente o en el sucedente se eliminan aquellas fórmulas que aparecen más de una vez, de modo que sólo aparecen una, dos o tres veces, la designamos secuencia

[108] Esta finitud es lo que las secuencias reducidas no puede garantizar para los correspondientes cálculos de predicados, que es lo que, a su vez, *causa la indecidibilidad de dichos cálculos*.

reducida de la original. El paso de una a otra secuencia se realiza por oportunos debilitamientos, contracciones y permutaciones, de tal modo que sólo aparezcan secuencias reducidas. Por lo tanto realizamos las transformaciones del modo siguiente:

(1) las secuencias iniciales $A > A$ se conservan idénticas, ya que son reducidas por definición, y las finales, en caso de no serlo, se transforman en reducidas trivialmente por contracción. Por lo tanto conservamos ese comienzo y ese final del desarrollo que son secuencias reducidas.

(2) las restantes secuencias que pertenecen al desarrollo se transforman en reducidas de la siguiente manera: si una secuencia no reducida pertenece a una o dos figuras de desarrollo, se reemplaza esos lugares por otra u otras reducidas. En ello no hay dificultad, pues se lo hace mediante debilitamientos, contracciones y permutaciones, de modo que se conserva la corrección del desarrollo. Las transformaciones se realizan así:

Si una fbf. aparece en Γ más de una vez, se la elimina de Γ en la secuencia superior e inferior tantas veces, hasta que aparezca sólo una vez en Γ. Lo mismo se hace en Δ, Θ y Λ en los esquemas de figuras de desarrollo estructurales y de signos lógicos. Entonces resta sólo un desarrollo que contiene solamente secuencias reducidas. Como en el antecedente sólo puede aparecer una vez A separada, una vez en Γ y una vez en Δ, y lo mismo ocurre en el sucedente con B separada, una vez en Θ y una vez en Λ, todas las secuencias se transforman en reducidas. Una excepción podría representar una permutación de D y E cuando $D = E$, pero sería regla de deducción idéntica que se puede reducir por debilitamiento:

$$\begin{array}{lcl} \underline{\Gamma, D, E, \Delta > \Theta} & \text{ó} & \underline{\Gamma > \Theta, D, E, \Lambda} \\ \Gamma, E, D, \Delta > \Theta & \text{ó} & \Gamma > \Theta, E, D, \Lambda \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \underline{\Gamma, D, D, \Delta > \Theta} & \text{ó} & \underline{\Gamma > \Theta, D, D, \Lambda} \\ \Gamma, D, \Delta > \Theta & \text{ó} & \Gamma > \Theta, D, \Lambda \end{array}$$

Estos fragmentos de desarrollos son un tipo especial de identidad, por lo que se pueden eliminar del desarrollo general y conservar en él sólo las secuencias inferiores $\Gamma, D, \Delta > \Theta$ ó $\Gamma > \Theta, D, \Lambda$. Esto completa la demostración del lema. □

A partir del teorema fundamental, la propiedad de las fórmulas parciales en un desarrollo sin cortes y el lema recién demostrado es trivial el corolario siguiente:

Corolario: Para cada secuencia reducida intuicionista o clásica existe un desarrollo sin corte que consta sólo de secuencias reducidas y cuyas fbf.s de la derivación son fórmulas parciales de la secuencia final.

T 7.2. *Las lógicas de enunciados intuicionista y clásica son decidibles*.

Dem.: Sea una secuencia con fbf.s del cálculo de enunciados intuicionista o clásico. Queremos determinar si es deducible en sentido intuicionista o clásico. Para ello la reemplazamos primeramente por una secuencia reducida equivalente. Formamos ahora el conjunto de las secuencias reducidas cuyas fbf.s son fórmulas parciales de las fbf.s de esa secuencia reducida. Esas fórmulas, que por su condición de reducidas, serán un conjunto finito. Por lo tanto el procedimiento de decisión se realiza de la siguiente manera:

Tomamos ese sistema finito de secuencias reducidas y buscamos primeramente cuáles de ellas son secuencias iniciales. Luego controlamos cada una de las restantes secuencias para ver si existe una regla de deducción de la cual ella sea una secuencia inferior y si una o dos de las secuencias ya reconocidas como desarrollables, son secuencias superiores. En tal caso se agrega la secuencia inferior a las desarrollables. Por la finitud de las secuencias el procedimiento es decidible. Continuamos hasta que, o bien la secuencia final se reconoce como desarrollable, o bien el procedimiento no conduce a ninguna secuencia desarrollable más a partir del sistema dado, en cuyo caso se ha demostrado que la secuencia originaria no es desarrollable. Por lo tanto esto demuestra la decidibilidad del cálculo secuencial de enunciados intuicionista, y *a fortiori*, del clásico. □

7.3. La ley de tercero excluido en la lógica intuicionista.

Como sabemos esta ley, que vale universalmente en la lógica clásica y en otros cálculos lógicos, como p. ej. en algunas lógicas paraconsistentes, sólo vale para casos especiales en la lógica intuicionista, es decir, su justificación *no es formal*, sino que se debe justificar por motivos *materiales*. No obstante hay formas débiles de tercero excluido formalmente válidas en la lógica intuicionista, como su siguiente forma débil:

$$> \neg\neg(A\vee\neg A),$$

que ya hemos desarrollado anteriormente de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{rcll}
A & > & A & \\ \hline
A & > & A\vee\neg A & (>\vee), \\ \hline
\neg(A\vee\neg A),\ A & > & & (\neg>), \\ \hline
A,\ \neg(A\vee\neg A), & > & & (\mathrm{P}>), \\ \hline
\neg(A\vee\neg A), & > & \neg A & (>\neg), \\ \hline
\neg(A\vee\neg A), & > & A\vee\neg A & (>\vee), \\ \hline
\neg(A\vee\neg A),\ \neg(A\vee\neg A), & > & & (\neg>), \\ \hline
\neg(A\vee\neg A), & > & & (\mathrm{C}>), \\ \hline
 & > & \neg\neg(A\vee\neg A) & (>\neg).
\end{array}
$$

Obsérvese que la penúltima secuencia intuicionistamente correcta $\neg(A\vee\neg A) >$ nos dice que "la negación del tercero excluido implica lo falso", es decir que no se puede negar el tercero excluido en la lógica intuicionista, lo que es obvio, pues por la equivalencia de De Morgan intuicionistamente demostrable $\neg(A\vee B) \leftrightarrow \neg A\wedge\neg B$, la fórmula $\neg(A\vee\neg A)$ equivale a la forma particular de contradicción $\neg A\wedge\neg\neg A$, que también implica lo falso.

Por otra parte la demostración del no desarrollo formal de la forma fuerte $> A\vee\neg A$, en *CSI*, se realiza de la siguiente manera:

T 6.3. *La ley de* tertium non datur $A\vee\neg A$ *no es deducible en la lógica intuicionista*.

Puesto que casos especiales del *tertium non datur*, como $\neg\neg(A\vee\neg A)$, valen en la lógica intuicionista, se trata de mostrar la imposibilidad de desarrollar la secuencia $> A\vee\neg A$ para una fbf. A cualquiera. El caso general es aquel en el que el grado lógico $G(A) \geq 0$, por lo que bastaría con mostrar que el tercero excluido no vale para las fbf.s primas. Lo demostramos por *raa*.

Dem. Supongamos que existe un desarrollo secuencial intuicionista de $> A\vee\neg A$. Entonces, por el teorema fundamental, existirá también un desarrollo equivalente de $> A\vee\neg A$ sin corte. En ese caso la última regla de deducción que se usó debe haber sido $(>\vee)$, pues:

1. '$> A\vee\neg A$' no puede haber surgido por permutación (>P), pues carece de sentido al no tratarse de dos fbf.s en el sucedente en *Sf*, ni por contracción (>C), pues ello supondría la existencia de al menos dos fbf.s en la secuencia superior a *Sf*, lo que es imposible en un sistema secuencial intuicionista. Tampoco puede haber surgido por debilitamiento (>D), pues el final de la deducción se vería así:

$$\frac{>}{> A\vee\neg A,}$$

pero ya sabemos que '>' no es derivable, por la ya demostrada consistencia del cálculo.

2. '$> A\vee\neg A$' tampoco puede derivarse mediante las otras reglas de deducción para constantes lógicas, pues en todas ellas, o bien el antecedente de la secuencia inferior no es vacío (para las reglas $(\wedge>)$, $(\vee>)$, $(\rightarrow>)$, $(\neg>)$, $(\bigwedge>)$ o $(\bigvee>)$), o bien aparece otra constante lógica principal en el sucedente (para las reglas $(>\wedge)$, $(>\rightarrow)$, $(>\neg)$, $(>\bigwedge)$ o $(>\bigvee)$).

Por lo tanto el final del desarrollo sin corte debe ser uno de los dos siguientes:

$$\text{(I)} \quad \frac{\dfrac{}{> A}}{> A\vee\neg A,} \ (>\vee) \qquad \text{(II)} \quad \frac{\dfrac{A\ >}{> \neg A}\ (>\neg)}{> A\vee\neg A} \ (>\vee),$$

pues para que una disyunción > $A\vee B$ sea intuicionistamente deducible es preciso que, o bien > A sea deducible, o bien > B lo sea. Consideremos cada uno de esos dos casos:

(I) '> A', con G(A) = 0, no es una secuencia inicial y no puede ser secuencia inferior de ninguna regla de deducción intuicionista, ni de las reglas estructurales (>C) o (>P), pues suponen al menos dos fbf.s en el sucedente, ni de las reglas para constantes lógicas. Por lo tanto sólo queda (>D), es decir el final de desarrollo siguiente:

$$\frac{\dfrac{>}{> A}\ (>\mathrm{D})}{> A\vee\neg A,}\ (>\vee).$$

Pero la secuencia superior es nuevamente no derivable por el teorema de consistencia. Esto prueba además el criterio de consistencia de Post, pues si A es una fbf. atómica, ella sólo es desarrollable desde '>', pero '>' no es desarrollable, por el teorema de consistencia.

(II) Tampoco 'A >', con G(A) = 0, es una secuencia inicial. Por lo tanto sólo puede surgir por debilitamiento, lo que ya hemos desechado en (I), o por contracción en el antecedente (C>), pues el desarrollo sólo podría ser el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \underline{A, \ldots, A\ >} & \\ \quad\vdots & \\ \underline{A, A\ >} & (\mathrm{C}>), \\ \underline{A\ >} & (\mathrm{C}>), \\ \underline{> \neg A} & (>\neg), \\ > A\vee\neg A & (>\vee). \end{array}$$

Pero de ese modo no se llega nunca a una secuencia inicial de la forma $A > A$. Por lo tanto $\neg A$ no es deducible, lo que es una forma débil del criterio de consistencia de Post (es decir, "la negación de una variable proposicional no es teorema"); obviamente lo mismo vale para $\neg\neg A$. En consecuencia no es deducible el *tertium non datur* en el cálculo secuencial intuicionista. □

7.4. El sistema de los números naturales.

La aritmética de Peano **P** es el sistema axiomático "elemental" clásico para los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, n, \ldots ..\}$, que son los que describiremos aquí. La expresión "teoría elemental" significa precisamente que no se emplean en su desarrollo métodos del análisis matemático, como el de paso al límite. Gentzen presenta una versión de **P** que es una axiomática de los "números fundamentales"[109], que es el conjunto isomorfo con $\mathbb{Z}^+ = \{1, \ldots, n, \ldots ..\}$. Éstos son los que se ejemplifican con los objetos que surgen de la regla de construcción lineal tan utilizada por Hilbert, que comienza con "palotes":

	$\Rightarrow \mid$	(escriba un palote),
n	$\Rightarrow n\mid$	(si escribió n palotes, puede agregar un palote).

Nosotros la construiremos, como Peano, para el conjunto $\mathbb{N}$. La construcción de $\mathbb{N}$ se realizará entonces a partir de una variante de la regla anterior que comienza con cero palotes:

	$\Rightarrow \ldots$	(escriba cero palotes),
n	$\Rightarrow n\mid$	(si escribió n palotes, puede agregar un palote).

Ésta regla admite un primer "objeto nulo" que corresponderá al número ordinal cero.

Si quisiéramos podríamos usar también la construcción conjuntista transitiva de los ordinales de primer orden (es decir, finitos), a partir del conjunto vacío $\varnothing = 0$. Dicho proceso de construcción es el siguiente:

---

109 El nombre alemán de "números fundamentales" es '*Grundzahlen*'.

$0 = \varnothing, 1 = \{\varnothing\},\ \ 2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, 3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, etc.,

que abreviamos así:

$0,\ 1 = \{0\},\ \ 2 = \{0, 1\},\ \ 3 = \{0, 1, 2\}, 4 = \{0, 1, 2, 3\}$, etc.

La regla recursiva de construcción dice que *a un nuevo conjunto pertenecen todos los elementos del conjunto anterior*, a los que se agrega como nuevo elemento dicho conjunto anterior. De esta regla de construcción se sigue inmediatamente que:

$0\in 1, 0\in 2, 0\in 3, \ldots, 0\in n, \ldots..; 1\in 2, 1\in 3, \ldots, 1\in n, \ldots..; 2\in 3, \ldots, 2\in n, \ldots$

De esta construcción tenemos que, si $m<n$, entonces $m\in n$, y además si $l\in m$ y $m\in n$, entonces $l\in n$. Por eso este conjunto se llama "*transitivo*", pues la relación de pertenencia es transitiva. Otra consecuencia es que, *si un conjunto pertenece a otro, entonces está incluido en el otro*:

$\vdash m\in n \rightarrow m\subset n.$

Obviamente la conversa no vale.

7.5. Algunas funciones recursivas primitivas.

Aquí utilizaremos algunos elementos de la teoría de las funciones recursivas primitivas y el *CSC* para presentar la teoría axiomática de Peano.

La idea de las funciones recursivas parece ser de Jacques Herbrandt (1908-1931), pero su nombre fue introducido por Kurt Gödel (1902-1978), quien las empleó como instrumentos de la metamatemática. Una "base" posible para esas funciones es la siguiente[110]:

1. $a' = a|$ (*función* sucesor),
2. $\mathrm{C}(a_1,\ldots, a_n) = c$ (*esquema de función constante*),
3. $\mathrm{E}(a_1,\ldots, a_n) = a_i\ (1 \leq i \leq n)$ (*esquema de función de elección finita*),
4. $\mathrm{F}(a_1,\ldots, a_n) = \mathrm{G}(\mathrm{H}_1(a_1,\ldots, a_n),\ldots, \mathrm{H}_m(a_1,\ldots, a_n))$ (*esquema de regla de composición*),
5. $\mathrm{F}(0, a_2,\ldots, a_n) = \mathrm{H}(a_2,\ldots, a_n)$, (*esquema de regla de recursión*
   $\mathrm{F}(b', a_2,\ldots, a_n) = \mathrm{G}(b, \mathrm{F}(b, a_2,\ldots, a_n), a_2,\ldots, a_n,)$ *primitiva*).

---

[110] Cf. p. ej. KLEENE [5]1967, IX, 217-45, esp. 219-31.

D.7.2. Una función es recursiva primitiva si es definible por una serie de aplicaciones de las funciones o esquemas de funciones de 1 a 5. La función sucesor 1 es la única función dada en el sistema y hace el papel de axioma. 2 y 3 son esquemas de (infinitas) funciones constantes y de elección. 2 toma un valor constante *c* para toda colección valores de las variables $a_1,\ldots, a_n$, y 3 "elige" el valor a_i–ésimo de cada colección de valores de las variables $a_1,\ldots, a_n$. 4 y 5 son los esquemas de reglas de composición y de cálculo recursivo primitivo.

Las funciones de elección pueden ser problemáticas en otros casos, pero no en estos, donde sólo se trata de "elegir" un elemento de una colección finita de ellos. Las "funciones iniciales" son 1 y cualesquiera de las infinitas instancias de los esquemas 2 y 3. El caso especial de 5 para $n = 1$ es:

5'. $F(0) = c$ (donde 'c' es una constante),
$F(b') = G(b, F(b))$.

Éste es el caso que hemos utilizado hasta ahora y el que en general utilizaremos.

Para nosotros las funciones recursivas primitivas más importantes de la aritmética elemental, que se construyen a partir de las funciones y esquemas de la base que hemos dado arriba, son las siguientes:

1. $a+b$ — $a+0 = a$; $a+b' = (a+b)'$ — función suma

2. $a.b$ — $a.0 = 0$; $a.b' = a.b + a$ — función producto

3. a^b — $a^0 = 1$; $a^{b'} = a^b a$ — función exponencial

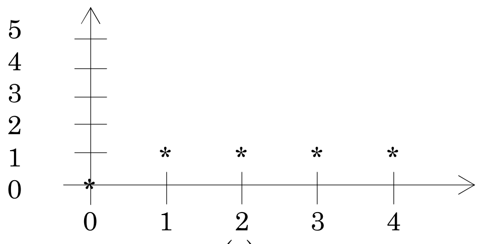
4. $a!$ — $0! = 1$; $a'! = a!a'$ — función factorial

5. $p(a)$ — $p(0) = 0$; $p(a') = a$ — función predecesor

La función predecesor se describe mediante los siguientes pares ordenados, donde el primer elemento del par representa el valor de la variable independiente y el segundo el de la dependiente: <0,0>, <1,0>, <2,1>, <3,2>, <4,3>, etc.

6. $a \dot{-} b$ $\quad a \dot{-} 0 = a$ $\quad$ función diferencia (definida en $\mathbb{N}$)
$\quad a \dot{-} b' = \mathrm{p}(a \dot{-} b)$
7. $\min(a,b) = a \dot{-} (a \dot{-} b) = \min(b,a) = b \dot{-} (b \dot{-} a)$ (función mínimo),
7'. $\min(a,b,c)$ $\quad \min(a,b,c) = c \dot{-} (c \dot{-} (b \dot{-} (b \dot{-} a)$ (y restantes permutaciones),
7''. $\min(a_1,\ldots,a_n) = \min(\ldots\min(\min(a_1,a_n),a_3)\ldots,a_n)$, etc.
8. $\max(a,b)$ $\quad \max(a,b) = a+b \dot{-} \min(a,b)$ (función máximo),
8'. $\max(a_1,\ldots,a_n)$ $\quad \max(\ldots\max(\max(a_1,a_2),a_3)\ldots,a_n)$.
9. $\mathrm{sg}(a)$ $\quad \mathrm{sg}(a) = \min(a,1) = a \dot{-} (a \dot{-} 1)$ $\quad \mathrm{sg}(0) = 0 = 1 \dot{-} (1 \dot{-} a)$
$\quad \mathrm{sg}(a') = 1$

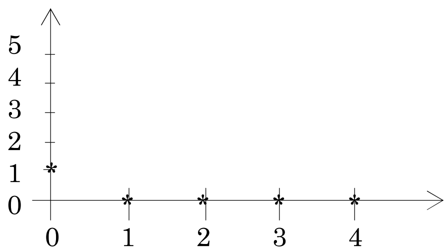
La función sg(a) se representa mediante los pares ordenados <0,0>, <1,1>, <2,1>,<3,1>,<4,1>, etc. Su gráfico es el siguiente:



sg(a)

10. $\mathrm{sg}'(a)$ $\quad \mathrm{sg}'(a) = 1 \dot{-} \min(a,1)$ $\quad \mathrm{sg}'(0) = 1$
$\quad \mathrm{sg}'(a') = 0$

La función sg'(a) se representa mediante los pares ordenados <0,1>, <1,0>, <2,0>, <3,0>, <4,0>, etc. Su representación es:



sg'(a)

11.$|a-b|$ $\quad |a-b| = (a \dot{-} b)+(b \dot{-} a)$ $\quad$ (función valor absoluto)

12.r(a,b) $\quad$ r$(0,b) = 0$ $\quad$ (función “resto” en ℕ)
r$(a',b) = (\mathrm{r}(a,b))' \cdot \mathrm{sg}|b - \mathrm{r}(a,b))'|$

13.$[a/b]$ $\quad [0/b] = 0$ $\quad$ (función división en ℕ)[111]
$[a'/b] = [a/b] + \mathrm{sg}'|b-(\mathrm{r}(a,b))'|$

7.6. La aritmética de Peano.

Las funciones anteriores son formas de construcción del fragmento inicial de las estructuras bien ordenadas, que representan a los números ordinales. Se considera a Peano uno de los padres del logicismo, porque él intentaba reducir los enunciados numéricos a expresiones puramente lógicas. Para ello procedía de la siguiente manera. Comenzaba utilizando el predicado monádico 'C^1a', que leemos 'a es cero' (o 'el objeto a tiene la “propiedad” cero'), luego el predicado binario 'P^2ab', que leemos 'a = p(b)' (ó 'a es predecesor de b'), y el ternario 'S^3cab', que leemos '$c = a+b$' (ó 'c es suma de a y b').

De este modo los números naturales se podían representar de la siguiente manera:

0	syss	C^1a
1	syss	$C^1a \wedge P^2ab$
2	syss	$C^1a \wedge P^2ab \wedge P^2bc$
	⋮	
n	syss	$C^1a \wedge P^2ab \wedge P^2bc \wedge \ldots \wedge P^2mn$.

En esta presentación los diez axiomas de Peano se presentan en forma normal prenexa (**fnp**):

Axiomas de igualdad.
A1. $\quad \bigwedge x(x = x)$ $\quad$ (reflexividad),
A2. $\quad \bigwedge x \bigwedge y(x = y \rightarrow y = x)$ $\quad$ (simetría),

---

[111] Cf. Kleene [1]1952, [5]1957, 222-223.

A3. $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$ (transitividad).

Axiomas del cero.

A4. $\bigvee x(\mathrm{C}^1 x)$ (existencia),

A5. $\bigwedge x \bigwedge y(\mathrm{C}^1 x \wedge \mathrm{C}^1 y \rightarrow x = y)$ (unicidad).

Axioma de infinitud.

A6. $\bigwedge x \bigvee y(\mathrm{P}^2 xy)$ (infinitud).

Axiomas de buen orden.

A7. $\bigwedge x \bigwedge y(\mathrm{P}^2 xy \rightarrow \neg \mathrm{C}^1 y)$ (cero no sucede a ningún número),

A8. $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z \bigwedge u(\mathrm{P}^2 xy \wedge \mathrm{P}^2 zu \wedge x{=}z \rightarrow y{=}u)$ (unicidad del sucesor),

A9. $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z \bigwedge u(\mathrm{P}^2 xy \wedge \mathrm{P}^2 zu \wedge y{=}u \rightarrow x{=}z)$ (unicidad del predecesor).

Axioma de inducción.

A10. $A(0) \wedge \bigwedge k(A(k) \rightarrow A(k')) \rightarrow \bigwedge x A(x)$ (axioma de inducción finita).

P = {A1, ..., A10} es el conjunto de axiomas de Peano. Aquí evitaremos el axioma A10 de inducción finita, porque la demostración de consistencia de la aritmética de Peano con ese axioma A10 (ver Gentzen 1936 y 1938[112]) tenía dificultades que la hacían discutible y se debió esperar tres lustros para resolverlas. Nuestro conjunto será el reducido A = {A1, ..., A9}.

7.7. La consistencia de la aritmética de Peano sin el axioma de inducción.

Demostraremos aquí la consistencia de la aritmética de Peano sin el axioma de inducción, demostración que carece de problemas. Una definición que nos será útil es la siguiente:

D.7.3. Una fbf. *C* es *aritméticamente deducible sin inducción finita*, si existe en ***CSC*** el desarrollo de una secuencia $\Gamma > C$, en la cual $\Gamma \subseteq$ A y donde A es el conjunto de los axiomas A1 ... A9.

A continuación proponemos el teorema a demostrar:

---

112 GENTZEN 1936.

T.7.4. *La aritmética de Peano sin inducción finita es totalmente consistente respecto de la negación, es decir, no existe una fbf. aritmética deducible que corresponda a una secuencia desarrollable de la forma* $\Gamma > A{\wedge}\neg A$.

Dem. La demostración se realiza utilizando el teorema fundamental para formas normales prenexas (o teorema de corte reforzado). Lo primero que demostramos es la corrección de la siguiente regla simétrica:

$$\frac{\Gamma > A{\wedge}\neg A}{\Gamma >}$$

El desarrollo de abajo hacia arriba es inmediata por (>D). El desarrollo de arriba hacia abajo parte de la hipótesis $\Gamma > A{\wedge}\neg A$, y puesto que ya desarrollamos $A{\wedge}\neg A$ >, de ambas resulta $\Gamma >$ por corte, como muestra el siguiente desarrollo:

$$\begin{array}{llrl}
 & & \underline{A > A} & \\
 & & \underline{\neg A, A>} & (\neg>) \\
(*) & & \underline{A{\wedge}\neg A, A>} & (\wedge>) \\
(*) & & \underline{A, A{\wedge}\neg A>} & (P>) \\
 & & \underline{A{\wedge}\neg A, A{\wedge}\neg A >} & (\wedge>) \\
\text{Hip.} & \underline{\Gamma > A{\wedge}\neg A ,,} & \underline{A{\wedge}\neg A>} & (C>) \\
 & \Gamma > & & (S)
\end{array}$$

Por lo tanto, si la aritmética de Peano sin inducción finita fuera inconsistente, existiría al menos un desarrollo ***CSC*** con la secuencia final $\Gamma >$, con $\Gamma \subseteq$ A.

Supongamos ahora por *raa* que el sistema sea inconsistente y que por lo tanto exista un desarrollo correcto con la secuencia final *Sf* $\Gamma >$, con $\Gamma \subseteq$ A, donde Γ consta de axiomas que son *fnp*.s. Aplicando el teorema fundamental para formas normales prenexas obtenemos un desarrollo de ***CSC*** con la misma *Sf* $\Gamma >$ que tiene las siguientes propiedades:

1. No tiene cortes.
2. Existe una secuencia media *Sm* 'Γ^* >' cuya deducción no contiene ningún cuantor y sólo difiere de 'Γ >' en que las fbf.s de 'Γ^*' son esquemas no cuantificados de los axiomas, a partir de la cual se desarrolla linealmente *Sf* sólo mediante una sucesión de

reglas (⋀>), (⋁>), (D>), (C>) y (P>) (como el sucedente es vacío y no hay *Rp* en esa parte del desarrollo, no pueden aparecer otras reglas).
3. Mediante el correspondiente cambio de nombre de variables libres o propias se conserva la corrección del desarrollo y éste tiene la propiedad de que la variable propia de cada regla (⋁>) – que es la única regla crítica de este desarrollo – aparece sólo en las líneas de secuencias superiores a la de la aparición de ⋁.

A partir del desarrollo anterior *reemplazamos cada variable libre en todas sus apariciones por números naturales determinados*, del modo que indicamos abajo. Con ello obtendremos desarrollos que ya no serán típicos de *CSC*. El reemplazo lo realizamos de la siguiente manera:

1. Todas las variables libres que no aparecen como variables propias de una (⋁>) (e.d. las que contienen subfórmulas de reglas (⋀>)), las reemplazamos en primer lugar por ‘0’, y luego subiremos en la sucesión natural.

2. Tomamos las reglas (⋁>) en su orden de aparición desde *Sf* hacia arriba y reemplazamos su variable propia por un número en los dos únicos axiomas (A4 y A6) que introducen esta regla, de la siguiente manera:

A4. $\dfrac{\mathrm{C}^1 0,\ \Gamma >}{\bigvee x \mathrm{C}^1 x,\ \Gamma >}$ A6. $\dfrac{\dfrac{(\mathrm{P}^2 mm'),\ \Gamma\ >}{\bigvee y (\mathrm{P}^2 my),\ \Gamma >}}{\bigwedge x \bigvee y (\mathrm{P}^2 xy),\ \Gamma\ >}$

En A4 reemplazamos inicialmente *a* por 0 y en A6 *b* por un número *m*’ sucesor de *m* (en su primer caso puede ser *m*=0). A su vez *m* es reemplazado en la fbf. inferior por la variable ligada *x* de (⋀>) en A6).

Consideremos ahora el siguiente desarrollo transformado Γ** > que hicimos de la secuencia media *Sm* Γ* > en este desarrollo. Por hipótesis su sucedente es vacío y todas las fbf.s de su antecedente tienen alguna de las siguientes formas.

i. o bien es $\mathrm{C}^1 0$, ó

ii. P^2mm', ó
iii. es una fbf. sin ningún cuantor '⋀' en la que las variables propias han sido reemplazados por números, que pueden comenzar por 0, y que son instancias de los restantes axiomas.

Pero entonces, por mero cálculo con sólo algunas de las funciones recursivas primitivas dadas arriba, todas las fbf.s de las transformadas Γ** > son enunciados aritméticos con constantes numéricas que son verdaderas por construcción. Además las *Sm* transformadas

Γ** >

serían demostraciones aritméticas que sólo han empleado recursos de la lógica de enunciados. Por lo tanto podemos afirmar que, *si la aritmética de Peano sin el axioma de inducción finita fuese contradictoria, entonces se podrían construir contradicciones a partir de enunciados numéricos todos verdaderos que son instancias de los axiomas* A1-A9 *usando sólo reglas Rp de* ***CSC***, como por ejemplo: (3 = 3), (4 = 5 → 5 = 4), (3 = 4 ∧ 4 = 2 → 3 = 2), C^10, (C^13 ∧ C^11 → 3 = 1), p(0,1), (p(2,3) → ¬C^13), etc. Pero como ya sabemos, por teorema anterior, que el cálculo secuencial clásico es consistente y por lo tanto, *a fortiori*, su fragmento de lógica de enunciados clásica también lo es, y además las fbf.s del antecedente son constructivamente verdaderas. Esto implica que no puede existir una secuencia de la forma Γ** >, pues por las funciones recursivas primitivas se determina que:
(1) las fbf.s numéricas son constructivamente verdaderas;
(2) sus compuestos con constantes lógicas enunciativas son también verdaderos;
(3) son casos especiales de los esquemas de axiomas sin cuantores de la *Sm* Γ* >.

Estas figuras de deducción enunciativas siempre pasan de fbf.s verdaderas a conclusiones verdaderas, por lo que no pueden producir secuencias de la forma Γ** > *A*∧¬*A* o, lo que es equivalente, Γ** >.

La relación entre los supuestos casos Γ** > y la *Sm* Γ* > es pues de inducción completa. Las funciones recursivas primitivas de arriba permiten rechazar todos los casos particulares $\Gamma^{**} >$ de los esquemas de axiomas que aparecen en $\Gamma^{*} >$, que por el teorema fundamental para formas prenexas se habrían deducido sólo por medio de reglas de la lógica de enunciados *Rp*. Pero la lógica de primer orden es consistente. Por lo tanto, así como no pueden existir secuencias $\Gamma^{**} >$, tampoco puede existir una secuencia de la forma $\Gamma^{*} >$. En consecuencia no puede existir una secuencia $\Gamma >$, que era nuestra hipótesis para la *raa*. Esto equivale a decir que la axiomática de Peano sin el axioma de inducción es consistente, demostración que se funda en una reducción a la lógica de enunciados mediante el teorema fundamental reforzado y una demostración por inducción finita dentro de ese fragmento de lógica, utilizando el teorema de no contradicción de la lógica de primer orden anteriormente demostrado. □

7.8. La consistencia de la aritmética de Peano con el axioma de inducción.

Decidimos no tratar la demostración de Gentzen del teorema de consistencia de la aritmética de Peano con axioma de inducción por ser más compleja, ya que utiliza una inducción hasta un número ordinal transfinito que no permite su reducción a una inducción finita. Además otras demostraciones suponen desarrollos teóricos que no tratados en este libro. De todos modos, para quienes se interesen en él, enviamos al lector a los trabajos originarios de Gentzen de 1936 y 1938, y a la nueva aproximación de Lorenzen del año 1951, que resuelve las dificultades restantes que presentó el tratamiento originario de Gentzen. Los trabajos del primero son: GENTZEN, Gerhard: "*Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*" (*La consistencia de la aritmética pura*), *Mathematische Annalen* 112 (1936), 493-565, y GENTZEN, Gerhard: "*Neue Fassung des Widerspruchsbeweises für die reine Zahlentheorie*" (*Nueva versión de la demostración de consistencia para la aritmética pura*), *Forschung* 4 (1938), 19-44. Los trabajos de Lorenzen son: LORENZEN, Paul: *Differential und Integral. Eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis*, Frankfurt/Mn.:

Akademische Verlagsgesellschaft, 1965, y LORENZEN, Paul: *Einführung in die operative Logik und Mathematik* (*Introducción a la lógica y la matemática operativa*), Berlin/Heidelberg/New York, Springer Verlag, 1969. El estudio minucioso de estos trabajos permite advertir que la matemática de Peano con inducción finita es un sistema consistente. Esto allana las pruebas de consistencia de muchos sistemas construidos como extensiones de dicha aritmética, en especial la de gran parte del análisis clásico.

7.9. Ampliación del sistema de Peano.

El teorema fundamental reforzado permite ampliar el sistema de Peano sin que se produzcan inconsistencias, pues:

1. Podemos admitir nuevos axiomas que tengan cuantores '⋀' sólo al comienzo con alcance sobre toda la fbf. del caso, que no contengan cuantores '⋁' y para los cuales todos los casos numéricos sean verificados mediante las ecuaciones recursivas primitivas (lo cual implica inducciones finitas).

2. Y podemos admitir también axiomas con el cuantor '⋁', en tanto los podamos tratar como a los axiomas A4 y A6 de arriba.

Gentzen ya da algunos desarrollos en su primer trabajo de 1934, párrafo (*Abschnitt*) V, donde trata las equivalencias de los nuevos cálculos de deducción natural con los cálculos secuenciales, con los desarrollados por Hilbert en su formalismo y con los cálculos de Glivenko. Para ello procede a transformar el cálculo intuicionista de Hilbert y el natural intuicionista en uno equivalente secuencial, y hace lo mismo con los correspondientes clásicos. Ese trabajo clásico de Gentzen de 1934 merece ser leído aún hoy, no sólo por ser el primer momento histórico de una deducción exitosa de la consistencia de la aritmética clásica en su versión de Peano, sino porque contiene algunas de las deducciones más complejas e interesantes de la historia de la fundamentación de la lógica y la matemática.

Tercera parte. Juegos dialógicos.

"*También se podría considerar al concepto de diálogo como una fundamentación pragmática de la lógica en sentido amplio, que supera la antigua oposición entre sintaxis y semántica: las reglas esquemáticas del desarrollo dialógico son indicaciones prácticas de acciones y pertenecen como tales tanto a la sintaxis como a la semántica de los enunciados.*"
Kuno Lorenz[113]

Capítulo 8. Juegos dialógicos.

8.1. Generalidades.

Como veremos desde este capítulo las nociones de "juego dialógico", "fundamento" y "defendibilidad" están íntimamente vinculadas con la de aquel medio para sostener enunciados en sus diversas formas que denominamos "razón".[114]

Un *síntoma* crucial para afirmar que se ha alcanzado un fundamento en un diálogo, es la presencia de una '*homología*' (o 'decir lo mismo'), un modo de darse el principio de identidad. Platón usa el término para el *acuerdo de los participantes de un diálogo en*

---

[113] Lorenz 1978, 102: *Man könnte den Dialogbegriff auch eine pragmatische Fundierung der Logik im weiteren Sinne nennen, die den alten Gegensatz von Syntax und Semantik überwindet: die schematischen Regeln der Dialogführung sind praktische Handlungsanweisungen und gehören als solche ebenso zur Syntax wie zur Semantik der Aussagen.*

[114] La razón es un **medio** cuyo fin es fundamentar enunciados respecto de sus predicados "transcendentales", *verdadero*, *bueno*, *bello* (*Ens et unum, verum, bonum convertuntur = ser (o ente) y uno, verdadero, bueno son equivalentes*), y otros predicados derivados, como *justum*, etc. y sus formas inferiores, como lo verosímil (*verisimile*), lo semejante a lo bueno, lo semejante a lo justo, etc.

una aserción. Que *las partes aseveren lo mismo* es un síntoma de lo que llamamos ‘razón’, al menos desde Sócrates en los diálogos platónicos. La *homología* es también, veinticuatro siglos más tarde, el momento esencial de la tarea de fundamentación en los juegos dialógicos formales de Lorenzen y Lorenz. Dejamos para el capítulo siguiente un estudio más preciso de estas nociones fundamentales y de la caracterización de la tarea del “dialéctico” como esencialmente diversa de la tarea del retórico. Aquí nos concentraremos en los juegos dialógicos formales, en su función demostrativa y epistémica, y en su relación con los cálculos de secuencias que estudiamos en los capítulos anteriores.

Ya dijimos que la idea del fundamento por homología se da en los esquemas de axioma de los cálculos secuenciales de Gentzen que venimos de estudiar, pues la homología se da necesariamente en las secuencias iniciales, que son formas del principio de identidad, donde el antecedente y el sucedente de la secuencia dicen lo mismo. Esta idea aparece al menos desde la tradición platónica, pero se renueva en forma extrema en la fundamentación analítica del saber de la tradición leibniziana, que reposa también sobre el principio de identidad. A continuación damos algunas definiciones relativas a estas nociones:

D.8.1. Una *homología* tiene lugar cuando ambos participantes de un diálogo, el proponente **P** y el oponente **O**, aseveran la misma tesis en el desarrollo del diálogo.

D.8.2. Una homología es *formal* cuando un dialogante acepta y asevera una fbf. aseverada por el otro dialogante en una rama de un diálogo, pero no por información externa, sino *sólo en virtud de las reglas de juego del diálogo*.

Es decir, una homología formal es un paso dialógico ***inmanente*** *al diálogo*, que ***no trasciende*** *al conjunto de las expresiones concedidas por las partes hasta ese paso del diálogo*.

D.8.3. Una homología es *material* cuando un dialogante acepta y asevera *provisionalmente como suya* una fbf. que el otro dialogante también asevera en una rama de un diálogo, pero eso *no ocurre en virtud de las reglas del juego dialógico*.

Por eso una jugada que produce una homología material es un paso dialógico ***trascendente***, es decir que ocurre por motivos que ***trascienden*** *al conjunto de las expresiones concedidas por las partes hasta ese paso del diálogo*.

D.8.4. Una *homología en sentido estricto* acontece cuando ambos dialogantes (el proponente **P** y el oponente **O**) aseveran en una rama de un diálogo la misma fbf. ***elemental*** *a*.

D.8.5. Una *homología en sentido amplio* acontece cuando ambos dialogantes (**P** y **O**) aseveran en una rama de un diálogo una misma fbf. ***cualquiera*** *A*.[115]

Como los cálculos secuenciales, los juegos dialógicos tienen dos tipos de reglas: las *reglas estructurales* y las *reglas para constantes lógicas*. Sin embargo hay dos diferencias fundamentales entre estos dos tipos de sistemas:

(1) La primera reside en *una característica de una regla estructural*. Recuérdese que la diferencia básica entre los cálculos secuenciales propuestos residía sólo en una *condición marco* que se exigía en el uso de *cualquier regla*, fuese estructural o de una constante lógica. *En los diálogos en cambio la diferencia surge sólo de una variante en una regla estructural*. Esta es una diferencia formal interesante entre cálculos secuenciales y los diálogos lógicos. También forma una base teórica sobre la que se constituirá más tarde el llamado "principio de Došen".

---

[115] El oponente **O** ciertamente puede repetir una fbf. elemental o compleja previamente aseverada por el proponente, pero no le conviene hacerlo, pues en ese caso pierde la rama, y con ello el diálogo entero. Por lo tanto el oponente tratará de no otorgar homologías al proponente, aunque puede suceder que la única jugada que le quede disponible para no perder en una rama del diálogo lo obligue a otorgarla y de esa manera la pierda de todos modos, o bien decida abandonar el diálogo, siendo así también derrotado.

(2) La segunda consiste en que *en los juegos dialógicos*, como en los cuadros analíticos y los cálculos de deducción natural, *hay una carencia absoluta de axiomas*, a diferencia de los cálculos secuenciales, donde diversas formas del principio de identidad son axiomas en las secuencias iniciales. Esta carencia de axiomas en los juegos dialógicos se compensa con las *homologías* como fundamento de la "clausura" de las ramas y del árbol de diálogo. La clausura es *formal* en los diálogos de fundamentación suficiente o demostrativos, y material en los diálogos de fundamentación insuficiente o no-demostrativa. En los diálogos del presente capítulo trataremos casi siempre la "clausura formal", propia de las teorías de la demostración.

En lo que sigue desarrollaremos las reglas de juego de los cuatro sistemas más simples de juegos dialógicos formales. Luego estudiaremos sus peculiaridades y variantes. Algunas reglas de juego obligan a que a la jugada de un dialogante le siga una sola jugada del otro dialogante: éstas son reglas que no ramifican la rama. En cambio, si a una jugada le pueden seguir dos o más ataques, dos o más defensas, o un ataque o una defensa del otro dialogante, entonces esa regla ramifica esa rama del árbol del diálogo.

8.2. Las reglas estructurales en los juegos dialógicos.

Regla de comienzo (8.1): Los participantes de un diálogo son dos: el *proponente* **P**, y el *oponente* **O**.[116] El proponente **P** comienza el juego con la *aserción* o *proposición*[117] de una tesis. Los participantes juegan a continuación sucesivamente hasta

[116] Son respectivamente el *respondens* (el que responde) y el "*quaerens*" (el que pregunta o cuestiona) de la tradición escolástica.

[117] Usamos el sustantivo 'aserción' y el verbo 'aseverar' como traducciones españolas de las expresiones alemanas '*Behauptung*' y '*behaupten*', que usan sus autores e implican tanto la afirmación como la negación. Otra traducción, tal vez preferible, sería 'proposición' en sentido activo y 'proponer'. Su único inconveniente es que se confunde el correlato activo, o acto de proponer, con su resultado, un enunciado y su contenido, lo que no es tan obvio en el caso del término 'aserción'.

que se agoten las posibilidades de un desarrollo. Nadie podrá hacer dos jugadas sucesivas en una misma rama de un árbol de diálogo.

Regla general del diálogo (8.2) (regla de desarrollo):

Regla general para el oponente (8.2.1): O puede *elegir*, en circunstancias que dependerán de la regla de desarrollo para la constante lógica del caso y de las circunstancias del diálogo, *entre un ataque o una defensa*. O *puede atacar* ***la última*** *aserción del proponente* P *o defender* ***su última*** *aserción de un ataque de aquél*. (Esta regla no admite variantes, por motivos que veremos más abajo.)

Regla general para el proponente (8.2.2): P puede *elegir*, en circunstancias que dependerán de la regla de desarrollo para la constante lógica de que se trate y de las circunstancias del diálogo, *entre un ataque o una defensa*. Aquí aparecen cuatro variantes, según el juego dialógico de que se trate:
(8.2.2.1) Variante estricta ***E***: *El proponente* P *puede atacar la* ***última*** *aserción del oponente* O, o *defender su* ***última*** *aserción de un ataque de aquél* (esta variante estricta coincide con la regla general para el oponente).
(8.2.2.2) Variante intuicionista (o constructiva) ***I***: El proponente P *puede atacar una aserción previa* ***cualquiera*** del oponente O, o *defender su* ***última*** *aserción del ataque del aquél*.
(8.2.2.3) Variante paraconsistente ***P***: *El proponente* P *puede atacar la* ***última*** *aserción del oponente* O, o *defender* ***cualquier*** *aserción propia anterior de un ataque* ***cualquiera*** *de aquél*.
(8.2.2.4) Variante clásica ***C***: *El proponente* P *puede atacar* ***cualquier*** *aserción previa del oponente* O, o *defender* ***cualquier*** *aserción previa propia de* ***cualquier*** *ataque anterior de* O.

Regla de homología (8.3): Se da "*homología*" en una rama de un diálogo cuando la misma fbf. aparece tanto en el lado del proponente como en el lado del oponente.

Regla de homología formal (8.3.1): Se da *homología formal* en una rama de un diálogo cuando la misma fbf. aparece tanto del lado del proponente como en el del oponente *por el mero uso de las reglas del juego*. La homología formal será *estricta* si la fbf. del caso es elemental, y será *lata* o *amplia* si la fbf. del caso es una fórmula cualquiera (no hay restricciones adicionales de esta regla para ninguno de los dialogantes).

Regla de homología material (8.3.2): Se da *homología material* en una rama de un diálogo cuando la misma fbf. aparece tanto en el lado del proponente como en el del oponente *por motivos extrínsecos a las reglas del juego*. La homología material será *estricta* si la fbf. del caso es elemental, y será *lata* o *amplia* si la fbf. del caso es una fbf. cualquiera.

Podríamos restringir las reglas de homología de otros modos, por ejemplo permitiendo "repetir" sólo la última aserción de la otra parte. En tal caso tendríamos nuevos juegos posibles. No desarrollaremos esa posibilidad en este trabajo, aunque sí discutiremos algunas consecuencias de la restricción y la no restricción de la regla de homología. También nos bastarán las homologías *estrictas* para la fundamentación suficiente en los juegos dialógicos intuicionistas y clásicos.

Regla de victoria (8.4):

(8.4.1) El proponente **P** ha ganado *formalmente* una rama del árbol del diálogo, cuando ha defendido en ella su tesis mediante una homología formal, o cuando el oponente **O** no puede defender una fbf. que ha sido atacada por el proponente **P** sin conceder a éste una homología formal. Si no hay victoria formal en esa rama, puede haber una victoria material, o puede no haber ninguna victoria (ni derrota).
(8.4.1.1) El proponente **P** ha ganado formalmente *en sentido estricto* una rama del árbol del diálogo, cuando la homología formal que produce la victoria es una *fbf. elemental*. Entonces la rama está *clausurada formalmente en sentido estricto*.
(8.4.1.2) El proponente **P** ha ganado formalmente *en sentido lato* una rama del árbol del diálogo, cuando la homología formal

que produce la victoria es una *fbf. cualquiera*. En tal caso la rama se llama *clausurada formalmente en sentido lato*.

(8.4.2) La victoria de un diálogo es *formal* cuando todas las ramas de su árbol clausuran formalmente. Si hay victoria en todas las ramas del árbol, pero al menos una de ellas es material, entonces la victoria del diálogo es *material*. Si no hay victoria ni formal ni material en al menos una rama del árbol, simplemente no hay victoria.
(8.4.2.1) Si en la victoria formal de un diálogo se han ganado todas las ramas *en sentido estricto*, entonces la victoria es *formal estricta*. Si en al menos una rama se ha ganado *en sentido lato* la victoria es *formal lata*.[118]
(8.4.2.2) Si en la victoria material de un diálogo se han ganado todas las ramas *en sentido estricto*, entonces la victoria es *material estricta*. Si en al menos una rama se ha ganado *en sentido lato*, la victoria es *material lata*.

Hay entonces cuatro formas posibles de victoria para un diálogo lógico: formal estricta y formal lata, material estricta y material lata. No todas son igualmente importantes, como veremos. En esta parte del trabajo estudiaremos las formas de victoria formal de las ramas y de los árboles dialógicos completos y consideraremos también las relaciones que se dan en los diferentes juegos dialógicos entre las clausuras formales latas y estrictas.

Las reglas dadas son "*reglas-marco*" básicas de los juegos de diálogos. La carga de la prueba *originaria* recae sobre el proponente **P**. Ese *onus probandi* originario es intransferible, pero todo dialogante, en la medida en que asevera algún enunciado en una rama, asume por ello una carga de la prueba derivada o secundaria. Por eso las cargas de la prueba derivadas se desplazan de uno a otro dialogante a lo largo de un

[118] En este capítulo se trata casi exclusivamente la victoria formal o suficiente. En el capítulo siguiente se considerarán también las homologías materiales o insuficientes, que pueden ser "buenas" o no serlo. Como ya sabemos las victorias materiales también pueden ser estrictas o latas.

diálogo, pero la carga de la prueba originaria del proponente es esencial en el sentido de que determina sobre qué trata el diálogo. Es trivial en un diálogo que, si una parte no asevera nada, no asume ninguna carga de la prueba. La regla escolástica dice: *onus probandi incumbit ei qui agit*[119], que es una regla *pragmática a priori*, pues hasta que alguien no afirme alguna tesis no se lo puede cuestionar. Sólo se puede cuestionar lo aseverado previamente, pero basta aseverar un enunciado para poder ser cuestionado.[120]

Vayan unos comentarios sobre las reglas anteriores. La regla (8.1), de comienzo, no requiere muchas explicaciones: quien propone la tesis que inicia el diálogo es por definición el "proponente" **P**. Una vez aseverada su tesis, ésta podrá ser cuestionada por quienquiera, que por ello denominamos "oponente" **O**. Dicho cuestionamiento puede provocar a su vez:
(1) que **P** defienda su tesis inicial,
(2) o bien que (en ciertos casos que consideraremos) **P** ataque alguna aseveración previa de **O**, si la hubiera, quien a su vez puede responder con un nuevo ataque, o con una defensa de su cuestionamiento anterior, etc.

Las reglas peculiares de desarrollo para las constantes lógicas, junto a la forma de regla de desarrollo del juego dialógico del caso, determinarán los pasos de desarrollo permitidos a los dialogantes en cada caso.

Como vimos en la regla (8.2), aparecen asimetrías entre la regla de desarrollo del oponente **O** y la del proponente **P**:
O *sólo puede decidir entre atacar la última aserción del proponente o defender su última aserción de un ataque de éste*.

Esta aparente restricción a la libertad de los ataques y defensas posibles de **O** no es arbitraria, sino que es una

---

[119] También *onus probandi incumbit ei qui dicit*, o *onus probandi incumbit actori*, etc.
[120] Lo que recuerda el antiguo consejo latino: *Si tacuisses, philosophus manuisses* (Si callases, continuarías siendo [considerado] filósofo).

condición de posibilidad para que un diálogo cooperativo y un juego dialógico en general pueda concluir. Para entender la necesidad de restringir la regla general de desarrollo para el oponente **(8.2.1)** procedamos por reducción (metalingüística) *ad impossibile*. Supongamos que el oponente **O** pudiese *atacar reiteradamente y de la misma manera* una aserción del proponente **P** en una misma rama del diálogo. En ese caso, una vez que **P** hubiese defendido exitosamente una aserción en esa rama, y por lo tanto la hubiese ganado, **O** *podría reiterar el mismo ataque en esa misma rama*. Sin una cota superior para las veces que **O** puede atacar una aserción de **P** *el diálogo se puede repetir trivialmente infinitas veces*. Lo mismo acontecería con las defensas, si en una misma rama **O** pudiese defender reiteradamente – sin una cota superior – y del mismo modo una aserción propia. En ese caso también se puede hacer infinito al diálogo. Pero *un diálogo potencialmente infinito es un diálogo que no se puede ganar*, y esto es lo mismo que decir que la tesis del caso no se puede fundamentar. Por lo tanto, *si al menos una rama de todo diálogo se puede hacer trivialmente infinita* – y en consecuencia si todo diálogo se puede hacer infinito, *entonces ninguna tesis se puede fundamentar*. Pero carece de sentido comenzar un diálogo, si las reglas permiten que una tesis no sea defendible o no sea atacable. Por ello una *condición trascendental de todo diálogo cooperativo* es que *pueda ser finita*. Eso no quiere decir que un diálogo deba ser *necesariamente* finito. Hay diálogos sobre tesis que se prolongan infinitamente, pero son los que corresponden a tesis que no se pueden demostrar en ese juego dialógico. Ya Platón había advertido la necesidad de la finitud para toda discusión que tuviese sentido abordar.[121] Por supuesto no impediremos que el oponente pueda realizar todos los ataques posibles – incluso infinitos ataques – a una aserción del proponente, o defender más de una vez – incluso infinitas veces – una aserción propia, pero *esto no lo podrá hacer en una misma rama del dialogo y de la misma manera, sino en ramas distintas y de maneras diversas. Esto nos garantizará simultáneamente dos cosas: que el oponente* **O** *pueda realizar todos los ataques*

[121] V. PLATÓN, *Protágoras* 334c-338e.

posibles y que el diálogo pueda ser finito. Ambas son condiciones trascendentales de todo proceso dialógico que tenga por fin la fundamentación ***suficiente*** *de una tesis.*

Vimos que la regla (8.2.2) de desarrollo para el proponente admite cuatro variantes inmediatas:

La regla (8.2.2.1) es la de los diálogos gobernados por la regla llamada "estricta" de desarrollo ***E*** para el proponente, que coincide con la regla de desarrollo del oponente, por lo que es simétrica inmanente y trascendente.

Otras dos variantes, la intuicionista o constructiva ***I*** y la paraconsistente ***P*** son asimétricas inmanentes y trascendentes. La clásica ***C*** es simétrica inmanente y asimétrica trascendente. En la regla de desarrollo intuicionista ***I*** (8.2.2.2) se liberalizan *sólo los ataques* permitidos al proponente. En la regla de desarrollo paraconsistente ***P*** (8.2.2.3) se liberalizan *sólo las defensas* de sus tesis previas para el proponente. Y en la versión (8.2.2.4) de la regla de desarrollo clásica ***C*** se liberalizan *tanto los ataques como las defensas* para el proponente: éste puede atacar cualquier aserción previa del oponente y puede defender cualquier aserción previa propia. Los cuatro esquemas de juegos dialógicos los representamos de la siguiente manera:

$$(\boldsymbol{E})\quad \begin{array}{c||c} \mathrm{O} & \mathrm{P} \\ \hline & A \end{array} \qquad (\boldsymbol{I})\quad \begin{array}{c||c} \mathrm{O} & \mathrm{P} \\ \hline \Sigma & A \end{array} \qquad (\boldsymbol{P})\quad \begin{array}{c||c} \mathrm{O} & \mathrm{P} \\ \hline & \Theta(A) \end{array} \qquad (\boldsymbol{C})\quad \begin{array}{c||c} \mathrm{O} & \mathrm{P} \\ \hline \Sigma & \Theta(A) \end{array}$$

La doble barra vertical '‖' separa las regiones del oponente **O** a la izquierda y del proponente **P** a la derecha. A la izquierda de '‖' desplegamos las jugadas del oponente **O** y a la derecha las jugadas del proponente **P**. '*A*' es la tesis del proponente, 'Σ' es la colección de aserciones ya concedidas por el oponente y 'Θ' la colección de las aserciones anteriores del proponente. Cuando aparece Σ en un diagrama, significa que **P** puede atacar cualquier aserción previa de **O** que esté en Σ, y cuando aparece Θ, que **P** puede defender cualquier tesis propia previa que esté en Θ. De este modo:

- El esquema (*E*) simboliza los diálogos *estrictos* con regla de desarrollo completamente simétrica, en los que tanto el proponente como el oponente no pueden atacar sino la última aserción del otro dialogante y no pueden defender sino su última aserción.

- El esquema (*I*) simboliza los diálogos *intuicionistas* o *constructivos*, en los que el proponente puede atacar cualquier aserción anterior del oponente contenida en 'Σ', pero sólo puede defender su última aserción,

- El esquema (*P*) simboliza un tipo de diálogos *paraconsistentes*, donde el proponente no puede atacar sino la última aserción del oponente, pero puede defender cualquiera de sus aserciones anteriores contenidas en 'Θ' y finalmente

- El esquema (*C*) simboliza los diálogos *clásicos*, en los que el proponente puede atacar en cualquier jugada cualquiera de las aserciones del oponente contenidas en 'Σ' y defender cualquiera de las aserciones propias contenidas en 'Θ'.

La no restricción de usos de la regla (3.1) de *homología formal* (y de la regla (3.2) de *homología material*) es una decisión de estructura de los juegos que aumenta la potencia de las defensas y los ataques en la fundamentación de un diálogo. Si se la restringiera sólo a la repetición de la última fbf. aseverada por el otro dialogante, entonces no se podrían fundar muchas tesis de diálogo. En los cálculos secuenciales sólo se encuentra una contrapartida formal *parcial* de esto, que consiste en el conjunto de secuencias iniciales que son el fundamento de un desarrollo: sin todas ellas sería imposible la construcción de su desarrollo secuencial. El carácter *parcial* de esta contrapartida formal se aclarará cuando consideremos el *modus ponens* en la sección 8.7. Aunque el oponente **O** sólo pueda atacar la última aserción del proponente y defender su última aserción, en una rama del diálogo, y el proponente **P** tenga diversas opciones según la especie de juego de que se trate, ambos dialogantes en sus ataques o defensas pueden repetir en la misma rama cualquiera de las fbf.s (elementales o cualesquiera) previamente concedida por la otra parte, según el actual carácter irrestricto de las reglas de homología. Estas son *jugadas formales*, que en el caso de **P** se apoyarán en las posiciones previas ya concedidas por el **O**. La diferencia entre la repetición de una fórmula por **P** y por **O** es que para **P** la repetición significa su victoria formal en esa rama, en tanto que para **O** una repetición (no deseada por él) significa su derrota formal y, por lo tanto, la victoria formal de **P**. En consecuencia, la estrategia de victoria formal de **P** consistirá en alcanzar la homología en cada rama del diálogo, en tanto que la de **O** consistirá en tratar de evitarla, de ser ello posible.

Con las definiciones D.8.1.-D.8.5. hemos distinguido entre homología formal y material, por una parte, y *estricta* y *lata* o *liberalizada*, por la otra. El lector se preguntará si hay alguna diferencia entre usar una u otra especie de homología. Al fin y al cabo los juegos de diálogos parecen ser, en su aspecto exterior, sólo versiones invertidas de sus correspondientes cálculos secuenciales, y en éstos hemos visto que la forma de los esquemas de axiomas es irrelevante para los cálculos *CSI* y *CSC*, aunque no lo sea para los cálculos *CSE* y *CSP* : en estos últimos no siempre es lo mismo partir de axiomas con secuencias elementales $a > a$ que partir de axiomas con fbf.s cualesquiera $A > A$. Como los casos que considera Gentzen son sólo los cálculos secuenciales *CSI* y *CSC* y los que consideran Lorenzen y Lorenz son sólo los correspondientes juegos dialógicos (*I*) y (*C*)[122], es indiferente para el primero postular axiomas de la segunda forma $A > A$ en lugar de los de la primera forma $a > a$, o para los segundos postular sólo homologías elementales $a \parallel a$ en lugar de homologías liberalizadas $A \parallel A$. Pero lo que ocurría en los cálculos secuenciales ocurre en los juegos dialógicos: lo que es indiferente en los juegos (*I*) y (*C*) no lo es en los (*E*) y (*P*). En éstos se *dan casos en que se pueden ganar ramas y diálogos completos sólo con homologías liberalizadas, pero no con homologías estrictas*. Ésta es una cuestión que consideraremos más adelante.

[122] Lorenzen y Lorenz mencionan y consideran brevemente el cálculo estricto como un caso límite de los juegos dialógicos, pero no hacen un análisis detallado del mismo.

La regla (8.4) de victoria, sea ésta *material* o sea *formal*, está íntimamente emparentada con la regla de *homología* de la dialéctica socrático-platónica y en su versión formal corresponde plenamente a los esquemas de axioma de los cálculos secuenciales. Esa es la razón por la cual no puede faltar el principio de identidad en ningún sistema lógico, pues él coincide con la mera posibilidad de fundamentación. Otra condición de posibilidad de fundamentación es su finitud posible, es decir que el grafo de su diálogo no tenga obligatoriamente ramas infinitas: si esto ocurriese, ello dependería de la estructura peculiar de la tesis que se discute.

Una victoria es *material* cuando la fundamentación que **P** da para su tesis es aceptada por **O**, pero esta fundamentación *trasciende* a lo previamente concedido por el oponente en el diálogo, es decir tiene un *fundamento externo* o *trascendente* al diálogo. En cambio una victoria es *formal* cuando la fundamentación no trasciende lo concedido en el diálogo, sino que reposa sobre lo concedido por **O**, por lo que es *inmanente*. Esto implica que una victoria formal (en una rama) del diálogo supone que expresiones aseveradas por **P** también sean aseveradas por **O** en su rama correspondiente.[123] La diversa estructura dialógica de una victoria formal y de una material se dará luego de que establezcamos las convenciones mínimas para la representación de un diálogo. La *victoria formal* resulta de una homología del mismo tipo y corresponde al fundamento suficiente de la *epistéemee*. Y la victoria material resulta de la respectiva homología y corresponde al fundamento insuficiente de la *pístis*. Entre estas dos formas de fundamentación nos movemos los humanos, desde el descubrimiento socrático-platónico de la forma esencial de la racionalidad con su estructura ternaria de tesis, crítica y fundamento; y **su punto de partida** es la indigencia del saber sobre la verdad y la justicia, **su fin** es no buscar la mera persuasión, sino la verdad y la justicia, y **sus medios** deben ser proporcionados a ese fin. Su marca formal es la homología, sea en su forma material imperfecta y perfeccionable de la razón insuficiente, sea en su forma perfecta y formal de la razón suficiente. Esta regla esencial es la misma en el siglo V antes de Cristo y en nuestro siglo XXI: tesis dudosas, críticas, fundamentos, y finalmente *reposo perdurable o*

[123] V. LORENZEN 1987, 91.

transitorio en la homología, tanto en las actividades hoy llamadas científicas, como en otras denominadas filosóficas.

8.3. Las reglas para las constantes lógicas.

Una fbf. compuesta tiene al menos un operador o constante lógica, que puede aparecer como aserción de **P** o de **O**. Aquí daremos los *desarrollos de ataque y defensa para las distintas constantes lógicas*, *que permiten que el proponente gane*, según que la fbf. en cuestión aparezca del lado del oponente **O** o del proponente **P**, y daremos una explicación breve para cada uno. **P** *gana una jugada si puede defender una aserción propia o puede derrotar una aserción de* **O**. En los casos en que ello sea necesario pondremos un subíndice ‘I’, ‘D’ o ‘*n*’ junto al nombre de cada regla para indicar que **P** puede *elegir* la parte izquierda o la derecha, o un *n* determinado de los objetos de la variable *x*, para atacar o defenderse. Para los distintos juegos dialógicos básicos los desarrollos que dan la victoria al proponente son los siguientes:

(1) Para el *juego de diálogos estrictos* ***E***:

$$(\wedge\|)_{\mathrm{I,D}} \qquad \begin{array}{c||l} A\wedge B & \ldots \\ A & \mathrm{I?} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c||l} A\wedge B & \ldots \\ B & \mathrm{D?} \end{array}$$

Si **O** asevera $A\wedge B$, **P** gana, si puede derrotarlo. Para eso debe saber de antemano qué parte de la conjunción – la izquierda I o la derecha D –no puede defender el oponente, y atacar esa parte. **P** no puede atacar sino la última aserción de **O**, que es $A\wedge B$, la que dejará de ser última vez que **O** haya aseverado A o B. Obsérvese que esta regla no ramifica el diálogo, pues **P** *sólo necesita ganar uno de los dos diálogos* para derrotar a **O**, pero si no sabe de antemano qué parte de la conjunción no puede defender **O**, entonces **P** puede perder, *aunque* **O** *no pueda defender ambas partes de la misma*.

$$(\|\wedge) \qquad \begin{array}{c||c} \ldots & A\wedge B \\ \mathrm{I?} \mid \mathrm{D?} & A \mid B \end{array}$$

Si **P** asevera $A \wedge B$, para ganar debe defender por separado ambas partes de la conjunción. Ésta es su condición de victoria, pero como **O** no puede atacar sino una vez la tesis, entonces el diálogo ramifica y el proponente debe ganar *ambas ramas*.

$$(\vee\|) \qquad \begin{array}{c\|l} A \vee B & \ldots \\ A \mid B & \mathrm{I?} \mid \mathrm{D?} \end{array}$$

Si el oponente **O** asevera $A \vee B$, el proponente **P** ganará, si sabe que el oponente no puede defender ni la parte I ni la D de la disyunción, por lo que el diálogo ramifica y **P** necesita ganar ambas ramas del mismo.

$$(\|\vee)_{\mathrm{I,D}} \qquad \begin{array}{c\|l} \ldots & A \vee B \\ ? & A \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c\|l} \ldots & A \vee B \\ ? & B \end{array}$$

Si el proponente **P** asevera $A \vee B$, ganará si sabe de antemano qué parte puede defender y la elige. Para ganar no necesita ganar ambos diálogos, sino al menos uno, por lo que el diálogo no ramifica.

$$(\bigwedge\|)_n \quad \begin{array}{c\|c} \bigwedge_x A(x) & \ldots \\ A(n) & n? \end{array}$$

Para ganar **P** debe derrotar al **O** y para ello debe conocer qué caso particular n de la variable x, **O** no puede defender. Para ganar le basta conocer ese caso no defendible, por lo que el diálogo no ramifica. El subíndice '$_n$' en el nombre de la regla indica que el proponente puede elegir el caso que falsifica $A(n)$. Si no lo puede hacer, pierde.

Un ejemplo tradicional de derrota de una tesis de forma $\bigwedge_x A(x)$ para generar números primos fue propuesto por Euler con la fórmula $x^2+x+41 = p$, pues p es un número primo para $0 \leq x \leq 39$, pero no para $x = 40$, pues $40^2+40+41 = 41^2$.[124] Otra tesis universal aún problemática es la de la forma fuerte de la conjetura de Goldbach (1690-1764): "*Cualquier número par diferente de* 2

---

124 Cf. KAC y ULAM 1968, 15. Es posible que aún no se sepa si hay infinitos números primos de la forma x^2+x+41.

es suma de al menos un par de números primos", que es un caso particular de un conjunto de problemas aparecido 1742. *Comprendemos* el problema, pero no lo hemos podido demostrar ni refutar completamente.[125] Una refutación consistiría en encontrar y proponer un *n* tal que fuera par y no fuese suma de ningún par de números primos.

$$(\|\wedge) \qquad \begin{array}{c\|l} \ldots & \wedge_x A(x) \\ n? & A(n) \quad \text{[para cada } n\text{]} \end{array}$$

Ésta no es una regla de desarrollo simple, sino un esquema de regla de diálogo ramificado con tantas ramas como casos o "constantes" admita la variable *x*. El proponente sólo gana si puede ganar cada rama (posiblemente infinitas) para todos los enunciados de la forma *A*(*n*).

$$(\wedge\|) \qquad \begin{array}{c\|l} \wedge_x A(x) & \ldots \\ A(n) & n? \quad \text{[para cada } n\text{]} \end{array}$$

Éste es también un esquema de regla de diálogo con ramificación potencialmente infinita. Cuando el **O** asevera $\vee_x$A(*x*), **P** gana si puede mostrar que **O** no puede defender *A*(*x*) para ninguna *n*, es decir cuando **O** pierde todas las (posiblemente infinitas) ramas para cada *n*.

$$(\|\vee)_n \qquad \begin{array}{c\|l} \ldots & \vee_x A(x) \\ ? & A(n) \end{array}$$

Ésta es una regla de diálogo simple, sin ramificaciones. **P** gana $\vee_x A(x)$ si, ante el ataque '?' de **O**, conoce un *n* que verifica *A*(*x*) y lo elige.

$$(\rightarrow\|) \qquad \begin{array}{l\|l} \begin{array}{l} A\rightarrow B \\ \ldots \mid B \\ \quad\ \mid \ldots \end{array} & \begin{array}{l} \ldots \\ A? \mid \ldots \\ \quad\ \mid (?) \end{array} \end{array}$$

[125] De esto resulta que bastante claro que el sentido de un enunciado no depende tanto de su verificación o de su falsación, sino de las reglas de defensa y ataque para el mismo.

La regla $(\rightarrow\|)$ se entiende si se recuerda que el oponente sólo puede atacar la última aserción del proponente y sólo puede defender su última aserción. Para que **P** derrote '$A\rightarrow B$', debería ganar ambas ramas (que pueden ser distintas o idénticas):
(1) proponer en la primera rama el antecedente A y que O no pueda defender B;
(2) o que en la segunda rama, ante el cuestionamiento '?' de **P**, **O** defienda $A\rightarrow B$ con B y no lo pueda defender.

En las defensas formales esto significa mostrar que A clausura formalmente y que B conduce a falsedad lógica. Si se lee de abajo hacia arriba es inmediata la simetría de $(\rightarrow\|)$ con la regla $(\rightarrow>)$ de los cálculos secuenciales (lo ejemplificamos con la especie más simple de cálculo secuencial, que es ***CSE***):

$$(\rightarrow>) \qquad \frac{> A \,,,\; B>}{A \rightarrow B >}\,.$$ [126]

La regla $(\|\rightarrow)$ es una *promesa de fundamentación hipotética* por parte del proponente: "si me concedéis A, me comprometo a mostraros que también es defendible B".

$$(\|\rightarrow) \qquad \begin{array}{r||l} & A \rightarrow B \\ A? & B \end{array}$$

Bajo esta interpretación de la implicación un ataque del **O** consistirá en conceder el antecedente 'A', y la defensa "habitual" del **P** consistirá en defender 'B'. Si **O** concede el antecedente y **P** es capaz de defender el consecuente, entonces **P** gana lal implicación. Esto caracteriza a nuestra regla $(\|\rightarrow)$, aunque, como sabemos, hay varias formas de entender la defensa de una implicación. De abajo hacia

[126] Se advierte que los juegos dialógicos son desarrollos de secuencias leídas de abajo hacia arriba. En un desarrollo secuencial se demuestra que $A\rightarrow B$ no es desarrollable o es falso (o que $\neg(A\rightarrow B)$ es desarrollable o es implicado por lo verdadero), si se puede demostrar A, y que B implica lo falso.

arriba la regla muestra su simetría con la regla de introducción de '$\to$' en el sucedente en los cálculos secuenciales expuestos.[127]

$$\frac{A > B}{> A \to B}.$$

Mas adelante veremos las estratagemas (Schopenhauer las llama *Kunstgriffe*[128]), que permiten las reglas para el implicador.

$(\neg\|)$

$$\begin{array}{c|c} \neg A & \dots \\ ? & A? \end{array}$$

$(\|\neg)$

$$\begin{array}{c|c} \dots & \neg A \\ A? & ? \end{array}$$

Las reglas de ataque y defensa para negaciones son simétricas en todos los juegos de diálogos (como lo son las de sus correspondientes cálculos secuenciales). **O** pierde $\neg A$ si **P** puede defender A, y **P** defiende $\neg A$ si **O** no puede defender A. En esta versión de las reglas de ataque y defensa de una fbf. negativa el supuesto general que le sirve de fundamento es que dos expresiones contradictorias no son simultáneamente defendibles, supuesto que es condición *necesaria* del llamado principio (fuerte, o paramétrico) de no-contradicción **pnc**, pero que aún *no es condición suficiente* (como veremos al usar estas reglas para intentar defender formalmente dicha versión fuerte paramétrica del **pnc** en los juegos dialógicos estrictos y paraconsistentes, a diferencia de lo que ocurre en los juegos intuicionistas y clásicos).

---

[127] Utilizamos también la regla $(>\to)$ para *CSE*.

[128] El sustantivo alemán '*der Kunstgriff*' significó posiblemente originariamente '*hábil toma en la lucha*'. Actualmente significa '*hábil y rápido movimiento de manos mediante el cual se puede realizar algo inesperado*' y también '(*pequeño*) *truco*'. Por ejemplo: '*Mit ein paar Kunstgriffen setzte sie die Anlage wieder in Betrieb*' = '*Con algunas hábiles estratagemas* (o *trucos*) *ella puso nuevamente en marcha la instalación*'.

(2) Para el *juego de diálogos constructivo o intuicionista* $\boldsymbol{I}$:

$$(\wedge\|)\quad \begin{array}{l||l} \Sigma(A\wedge B) & \\ A & \mathrm{I?} \end{array} \qquad \begin{array}{l||l} \Sigma(A\wedge B) & \\ B & \mathrm{D?} \end{array} \qquad\qquad (\|\wedge)\quad \begin{array}{r||l} \Sigma & A\wedge B \\ \mathrm{I?} \mid \mathrm{D?} & A \mid B \end{array}$$

$$(\vee\|)\quad \begin{array}{l||l} \Sigma(A\vee B) & \\ A \mid B & \mathrm{I?} \mid \mathrm{D?} \end{array} \qquad\qquad (\|\vee)_{\mathrm{I,D}}\quad \begin{array}{r||l} \Sigma & A\vee B \\ ? & A \end{array} \qquad \begin{array}{r||l} \Sigma & A\vee B \\ ? & B \end{array}$$

$$(\bigwedge\|)\quad \begin{array}{l||l} \Sigma(\bigwedge_x A(x)) & \\ A(n) & n? \end{array} \qquad\qquad (\|\bigwedge)\quad \begin{array}{r||l} \Sigma & \bigwedge_x A(x) \\ n? & A(n)\ \ [\text{para cada } n] \end{array}$$

$$(\bigvee\|)\quad \begin{array}{l||l} \Sigma(\bigvee_x A(x)) & \\ A(n) & n?\ [\text{para cada } n] \end{array} \qquad\qquad (\|\bigvee)_n\quad \begin{array}{r||l} \Sigma & \bigvee_x A(x) \\ ? & A(n) \end{array}$$

$$(\rightarrow\|)\quad \begin{array}{l||l} \Sigma(A\rightarrow B) & \\ \mid B & A? \mid \end{array} \qquad\qquad (\|\rightarrow)\quad \begin{array}{r||l} \Sigma & A\rightarrow B \\ A? & B \end{array}$$

$$(\neg\|)\quad \begin{array}{l||l} \Sigma(\neg A) & \\ & A? \end{array} \qquad\qquad (\|\neg)\quad \begin{array}{r||l} \Sigma & \neg A \\ A? & \end{array}$$

Puesto que el proponente de un juego constructivo puede atacar cualquier aserción previa del oponente, ello le permite repetir ataques y por lo tanto unificar en una sola rama todos sus ataques posibles a las aserciones del oponente en las reglas $(\wedge\|)_{\mathrm{I,D}}$, $(\bigwedge\|)_n$ y $(\|\bigvee)_n$, por lo que prescindimos de los subíndices en $(\wedge\|)$, $(\bigwedge\|)$ y $(\|\bigvee)$.

(3) Para el *juego de diálogos paraconsistente* $\boldsymbol{P}$:

$$(\wedge\|)_{\mathrm{I,D}}\quad \begin{array}{l||l} A\wedge B & \Theta \\ A & \mathrm{I?} \end{array} \qquad \begin{array}{l||l} A\wedge B & \Theta \\ B & \mathrm{D?} \end{array} \qquad\qquad (\|\wedge)\quad \begin{array}{r||l} & \Theta(A\wedge B) \\ \mathrm{I?} \mid \mathrm{D?} & A \mid B \end{array}$$

$$(\vee\|)\quad \begin{array}{l||l} A\vee B & \Theta \\ A \mid B & \mathrm{I?} \mid \mathrm{D?} \end{array} \qquad\qquad (\|\vee)\quad \begin{array}{r||l} & \Theta(A\vee B) \\ ? & A \end{array} \qquad \begin{array}{r||l} & \Theta(A\vee B) \\ ? & B \end{array}$$

$$(\bigwedge\|)_n\quad \begin{array}{l||l} \bigwedge_x A(x) & \Theta \\ A(n) & n? \end{array} \qquad\qquad (\|\bigwedge)\quad \begin{array}{r||l} & \Theta(\bigwedge_x A(x)) \\ n? & A(n)\quad [\text{para cada } n] \end{array}$$

$$(\bigvee\|)\quad \begin{array}{l||l} \bigvee_x A(x) & \Theta \\ A(n) & n?\ [\text{para cada } n] \end{array} \qquad\qquad (\|\bigvee)\quad \begin{array}{r||l} & \Theta(\bigvee_x A(x)) \\ ? & A(n) \end{array}$$

$$(\rightarrow\|)\quad \begin{array}{l||l} A\rightarrow B & \Theta \\ \mid B & A? \mid \end{array} \qquad\qquad (\|\rightarrow)\quad \begin{array}{r||l} & \Theta(A\rightarrow B) \\ A? & B \end{array}$$

$$(\neg\|)\quad \begin{array}{l||l} \neg A & \Theta \\ & A? \end{array} \qquad\qquad (\|\neg)\quad \begin{array}{r||l} & \Theta(\neg A) \\ A? & \end{array}$$

En estos juegos paraconsistentes el proponente puede unificar sus defensas en una sola rama para las reglas $(\|\vee)_{I,D}$ y $(\|\bigvee)_n$, por lo que podemos prescindir de subíndices en ellas.

(4) Para el *juego de diálogos clásico* C:

$$(\wedge\|)\quad \begin{array}{l||l} \Sigma(A\wedge B) & \Theta \\ A & I? \end{array} \quad \begin{array}{l||l} \Sigma(A\wedge B) & \Theta \\ B & D? \end{array} \qquad (\|\wedge)\quad \begin{array}{l||l} \Sigma & \Theta(A\wedge B) \\ I? \mid D? & A \mid B \end{array}$$

$$(\vee\|)\quad \begin{array}{l||l} \Sigma(A\vee B) & \Theta \\ A \mid B & I? \mid D? \end{array} \qquad (\|\vee)\quad \begin{array}{l||l} \Sigma & \Theta(A\vee B) \\ ? & A \end{array} \quad \begin{array}{l||l} \Sigma & \Theta(A\vee B) \\ ? & B \end{array}$$

$$(\bigwedge\|)\quad \begin{array}{l||l} \Sigma(\bigwedge_x A(x)) & \Theta \\ A(n) & n? \end{array} \qquad (\|\bigwedge)\quad \begin{array}{l||l} \Sigma & \Theta(\bigwedge_x A(x)) \\ n? & A(n) \quad [\text{para cada } n] \end{array}$$

$$(\bigvee\|)\quad \begin{array}{l||l} \Sigma(\bigvee_x A(x)) & \Theta \\ A(n) & n?\ [\text{para cada } n] \end{array} \qquad (\|\bigvee)\quad \begin{array}{l||l} \Sigma & \Theta(\bigvee_x A(x)) \\ ? & A(n) \end{array}$$

$$(\rightarrow\|)\quad \begin{array}{l||l} \Sigma(A\rightarrow B) & \Theta \\ \mid B & A? \mid \end{array} \qquad (\|\rightarrow)\quad \begin{array}{l||l} \Sigma & \Theta(A\rightarrow B) \\ A? & B \end{array}$$

$$(\neg\|)\quad \begin{array}{l||l} \Sigma(\neg A) & \Theta \\ & A? \end{array} \qquad (\|\neg)\quad \begin{array}{l||l} \Sigma & \Theta(\neg A) \\ A? & \end{array}$$

Los juegos clásicos admiten para el proponente las liberalizaciones de la defensa y el ataque de los dos juegos precedentes, el constructivo y el paraconsistente.

8.4. Sistematización del desarrollo y lectura de los diálogos.

Representaremos un diálogo mediante dos "árboles de jugadas", el árbol del proponente **P** a la derecha y el del oponente **O** a la izquierda. Las jugadas de los dialogantes corresponden a los nodos de cada árbol. Separamos los árboles de jugadas del proponente y del oponente con una barra vertical doble, como ya hicimos en las secciones anteriores. Las ramas de cada árbol de un diálogo las separamos con barras verticales simples.

Cada ataque inaugurará siempre una nueva fila. La defensa correspondiente aparecerá en la fila de su ataque, en caso de que la estrategia del otro dialogante sea defenderse de ese ataque. Si en cambio el dialogante responde a un ataque con un ataque, entonces marcaremos la defensa faltante en su correspondiente rama con puntos suspensivos. Como ya hemos visto al presentar las reglas para constantes lógicas, algunos diálogos ramifican. Ellos son (1) la defensa de una conjunción, (2) la defensa de una cuantificación universal (esta última regla se da mediante un esquema que admite infinitas ramificaciones), (3) el ataque a una disyunción, (4) el ataque a una cuantificación existencial (se da mediante un esquema de regla, como la 2) y (5) el ataque a una implicación, con ramificación entre la defensa de su antecedente y el ataque de su consecuente por parte del proponente. Todas estas estrategias manifiestan las jugadas de que dispone el proponente para ganar, es decir para derrotar al oponente.

En el caso del proponente – para el cual hay una forma estricta y tres distintas formas de liberalización de la regla de desarrollo –, que aparezca una ramificación o que se la pueda eliminar dependerá en varios casos del tipo de regla de desarrollo del juego de que se trate. En caso de que le corresponda jugar al oponente, puesto que éste no cuenta con ninguna liberalización de su regla de desarrollo, la ramificación es obligatoria. Pero tengamos en cuenta que para el oponente la ramificación equivale a maximizar su capacidad de cuestionamiento de las aserciones del proponente y su capacidad de defensa de sus propias aserciones: es decir, la ramificación obligatoria no disminuye, sino que aumenta las posibilidades de ganar del oponente.

La notación de una jugada en una rama agrega al número de jugada un supraíndice con el número de rama. La primera jugada corresponde a la aserción inicial del proponente, por lo que lleva el número ‘0’ y sobre ella cae la carga de la prueba originaria. Si la jugada es un ataque, se agrega el número de jugada atacada entre paréntesis (...), y si se trata de una defensa, se agrega el número de la jugada defendida entre corchetes [...]. En el caso de que la fbf. surja por homología formal (es decir, por repetición de una jugada previa del otro dialogante), agregamos además en **negrita** el número de la jugada que repite. Así $n^i(m^j)\mathbf{l}^k$ indica que se trata de la n-ésima jugada de un dialogante en su rama i que ataca la jugada m-ésima en su rama j del otro dialogante (que puede ser anterior a la bifurcación en esas ramas) mediante una homología o repetición formal de la jugada $\mathbf{l}^k$-ésima del otro dialogante. En todos los tipos de juego: para el oponente la jugada $n^i(m^j)$ es aquella en que m^j es el número de la última aserción del proponente y la jugada $n^i[m^j]$ es aquella en que m^j es el número de la última aserción del oponente. En un diálogo ***E*** las condiciones para el proponente son idénticas a las del oponente. En el juego ***P***, si el proponente juega la jugada $n^i[m^j]$, el número m^j es el de cualquier aserción anterior del proponente, y si juega la jugada $n^i(m^j)$, m^j es el número de la última aserción del oponente. El juego ***I*** es el dual del juego ***P***, es decir, si el proponente juega $n^i[m^j]$, el número m^j es el número de su última aserción, y si juega $n^i(m^j)$, el número m^j es el de cualquier aserción anterior del oponente. El juego ***C*** es simétrico: en él, si el proponente juega $n^i[m^j]$, el número m^j es el de cualquier aserción anterior del proponente, y si juega $n^i(m^j)$, m^j es el número de cualquier aserción anterior del oponente.

Para indicar que una rama *clausura formalmente* lo indicaremos con una barra horizontal doble ‘$=$’ del lado del proponente. Una *clausura material* la indicaremos con una barra horizontal simple ‘____’ del mismo lado. Tener una estrategia de victoria formal para una tesis es contar con un “algoritmo dialógico” que permita clausurar formalmente todas las ramas del árbol del proponente. Una tesis para la cual no hay una estrategia de victoria formal en ningún juego dialógico será en el mejor de los casos una ‘*contingencia esencial*’ y la notaremos con ‘(ce)’ en el ángulo superior izquierdo. Cuando haya una estrategia de victoria en algún juego dialógico pero no en otros se tratará de una ‘*contingencia accidental*’ que designamos con ‘(ca)’. Sus casos particulares se pueden ser para grupos de diálogos como ***E***, o ***E*** y I, o ***E*** y ***P***, o ***E***, ***P*** y ***I***. Preferimos escribir en el ángulo izquierdo la abreviatura del tipo (o tipos) de diálogo en el que (en los que) esa tesis sea demostrable, respectivamente. Para facilitar la percepción de una homología resaltaremos en amarillo las apariciones de la fórmula copiada y de su copia.

8.5. Diálogos con clausura necesariamente material (contingencias esenciales ce).

(ce)					
			$a \to a\wedge b$		0
1(0)	a?		$a\wedge b$		2[0]
$3^1(2)$	I?	$3^2(2)$D?	a $4^1[2]$**1**	b	$4^2[2]$
		$5^2(4^2)$?		(b)	$6^2[4^2]$

La defensa de **P** en $4^1[2]$**1** es formal, pero en $4^2[2]$ no puede ser sino material (salvo cuando b sea idéntica a a), por lo que **P** perderá, si no puede defender materialmente a b. La situación no cambia para el proponente **P**, aunque éste utilice la regla de desarrollo más liberal, que es la de los diálogos "clásicos" *C*. En consecuencia la fórmula '$a \to a\wedge b$' no puede ser ley lógica en ningún juego dialógico, por lo que es una "*contingencia esencial*".

(ce)					
			$a\vee b \to a$		0
1(0)	$a\vee b$?		a		2[0]
3(2)	?		...		
$5^1[1]$**2**	a	$5^2[1]$ b	I? $4^1(1)$	D?	$4^2(1)$
				?	$6^2(5^2)$

En 2[0] **P** defiende la tesis '0' con su consecuente. Frente al pedido de **O** en 3(2) de que defienda la fórmula elemental a, el proponente desiste de ello porque no la puede defender formalmente – por lo que marcamos esa defensa ausente con '…' – y pasa al ataque de la jugada '1(0)', con lo que, al cuestionar esta, hasta ahora, única aserción de **O** en 1, aparece la ramificación '$4^1(1)$ – $4^2(1)$'. Para no perder, **O** debe defender la rama cuestionada. Cuando defiende la rama izquierda $5^1[1]$**2**, ésta clausura con una homología formal, pues a aparece en ambos lados, el del oponente y el del proponente. Pero cuando defiende la rama derecha $5^2[1]$, como b no aparece previamente del lado del proponente, la rama no clausura formalmente. En consecuencia, si **O** no puede defender formalmente b, entonces

P sólo puede ganar materialmente el diálogo, lo que *nos recuerda la estructura del silogismo disyuntivo*. La situación no se modifica ni siquiera si se utilizara la regla de desarrollo más liberal para el proponente, que es, como en el caso anterior la de los diálogos "clásicos" *C*. Entonces '$a \vee b \rightarrow a$' es una "contingencia esencial", es decir, no es ley lógica de ningún juego dialógico.

(ce)

		$Fm \rightarrow \bigwedge xFx$	0
1(0)	Fm?	$\bigwedge xFx$	2[0]
3(2)	n?	Fn	4[2]

Puesto que en este esquema de diálogo 'Fn' es un enunciado elemental que no aparece del lado del oponente, no hay defensa formal, sino a lo sumo material. En 3(2) el oponente ataca eligiendo un caso cualquiera n, para que el proponente lo defienda. Cada una de las selecciones posibles del oponente constituye una rama del diálogo. Éstas pueden ser infinitas, en cuyo caso la clausura material del diálogo es imposible de lograr en un proceso finito de fundamentación. Si la colección de los casos disponibles fuese finita, pero "muy grande" para nuestras fuerzas, tendríamos una *clausura material posible* que tal vez jamás se complete. Sólo si la colección de los n no sólo fuese finita, sino además proporcionada a nuestras fuerzas, estaríamos en condiciones de alcanzar una clausura material y ganar el diálogo. Pero aunque podamos ganar, siempre podremos perder, pues para ello basta el caso de un solo n para el que no sea defendible Fn. Se trata entonces otra vez de una fórmula que no puede fundarse más allá de toda duda, es decir una "contingencia esencial". Esto es lo que ocurre en todas las fundamentaciones empíricas de tipo inductivo, que son siempre materiales y falibles, aun en los casos de dominios finitos y dominables.

8.6. El principio de identidad y la homología.

Hemos visto cómo en ciertos cálculos secuenciales, como *CSI* y *CSC*, era indiferente admitir la forma (1) $a > a$, donde a es una fbf. elemental cualquiera, o la forma (2) $A > A$, donde A una fbf. cualquiera, de los esquemas de axiomas o secuencias iniciales. Pero eso no era indiferente en los restantes sistemas.

En los juegos dialógicos ocurre algo semejante con el principio de identidad **pi**, pues de la forma (1) $a \to a$ se deduce la forma (2) $A \to A$ en ***I*** y *a fortiori* en ***C***, pero en ***E*** y ***P*** deberemos hacer algunas concesiones para admitir (2) en toda su generalidad. Comencemos con ***E***:

E				
		‖	$a \to a$	0
1(0)	a?	‖	$\underline{\underline{a}}$	2 [0]1

Este es el principio de identidad **pi** para enunciados elementales *a*, que es una ley lógica esencial, pues clausura formalmente en ***E***, y *a fortiori* también en ***I***, ***P*** y ***C***. Si alguien objetara que en la homología que realiza **P** en su jugada 2[0] se comete *petitio principii*, podríamos responder que el oponente **O** también la ha cometido previamente al atacar en 1(0) la tesis 0, lo que sólo es posible si admite que repite el antecedente de la implicación. Es decir, no se puede atacar la ley o principio de identidad sin usarlo ya de algún modo, lo que constituye una contradicción performativa. Éste es el caso más simple de ley lógica esencial que se puede fundar mediante un argumento con fundamento *pragmático trascendental*. La presentación anterior no propone aún un **pi** universal, porque *a* es un enunciado elemental y el principio universalmente considerado debería regir también para enunciados *A* de cualquier complejidad, es decir de la forma $A \to A$, con *A* un enunciado cualquiera. En los juegos ***I*** y ***C*** no tenemos inconvenientes en deducir $A \to A$ a partir de $a \to a$, pero en los otros dos, ***E*** y ***P***, tal deducción no es posible. En ***E*** no podemos demostrar la forma general $A \to A$ de **pi** a partir de su forma elemental $a \to a$. Y en ***P*** tenemos el problema de demostrar la forma general $(A \to B) \to (A \to B)$ del **pi** a partir de fórmulas elementales. Comencemos en ***E*** con las formas del **pi** en que sólo aparecen las constantes $\wedge$, $\vee$, $\bigwedge$ y $\bigvee$:

E					‖					
					‖	$b \wedge c \to b \wedge c$				0
1(0)	$b \wedge c$?				‖	$b \wedge c$				2[0]
$3^1(2)$	I?	|	$3^2(2)$		‖	D? b	$4^1[2]$	|	c	$4^2[2]$
$5^1(4^1)$	?	|	$5^2(4^2)$	?	‖	…		|	…	
$7^1[1]4^1$	b	|	$7^2[1]4^2$ c		‖	$\underline{\underline{\text{I?}}}$	$6^1(1)$	|	$\underline{\underline{\text{D?}}}$	$6^2(1)$

El diálogo clausura en ambas ramas, por lo tanto es demostrable en ***E***, pues los ataques de **P** I? $6^1(1)$ y D? $6^2(1)$ son contra la única aserción de **O**. A continuación de los ataques $5^1(4^1)$ y $5^2(4^2)$ de **O** el proponente **P** renuncia a las defensas y ataca los extremos de la conjunción de 1(0), para que las defensas de **O** $7^1[1]4^1$ y $7^2[1]4^2$ produzcan las homologías formales. En los restantes juegos dialógicos se desarrolla *a fortiori* de la misma manera que en ***E***, por lo que la tesis es teorema en todos los juegos dialógicos.

E					$b\vee c \to b\vee c$	0		
	1(0)	$b\vee c$?			…			
	$3^1[1]$	b	$3^2[1]$	c	I?	$2^1(1)$	D?	$2^2(1)$
		…		…	$b\vee c$	$4^1[0]$	$b\vee c$	$4^2[0]$
	$5(4^1)$	?	$5(4^2)$	?	$\underline{\underline{b}}$	$6[4^1]3^1$	$\underline{\underline{c}}$	$6[4^2]3^2$

El diálogo también clausura en ambas ramas, por lo tanto es un teorema en ***E*** y, *a fortiori*, en los restantes juegos dialógicos.

E			$\bigwedge xFx \to \bigwedge xFx$	0	
	1(0)	$\bigwedge xFx$?	$\bigwedge xFx$	2[0]	
	3(2)	m?	Fm	4[2]	(para todo m)
	5(4)	?	…		
	7[1]4	Fm	$\underline{\underline{m?}}$	6(1)	

El diálogo clausura en todas las ramas, por lo que es teorema en ***E*** y en los restantes juegos dialógicos. **P** no defiende 4[2], pues no sería una defensa formal, por lo que ataca con m? en 6(1), con lo que, si **O** defiende 1(0), **P** se asegura la homología formal.

Con el cuantor existencial procedemos del modo siguiente:

E			$\bigvee xFx \to \bigvee xFx$	0	
	1(0)	$\bigvee xFx$?	…		
	3[2]	Fn	n?	2(1)	(para todo n)
			$\bigvee xFx$	4[0]	
	5(4)	?	$\underline{\underline{Fn}}$	6[2]	

El diálogo clausura en todas sus ramas, luego es un teorema en ***E*** y, *a fortiori*, en los restantes juegos dialógicos.

El proponente **P** tiene una estrategia ganadora formal en ***E*** sólo para estas cuatro formas de la tesis **pi**. Por lo tanto podemos afirmar que en ***E*** – *a fortiori* en ***I***, ***P*** y ***C*** – se puede deducir la forma generalísima (2) del **pi** a partir de la forma (1) para fbf.s A cualesquiera compuestas de enunciados elementales a, b, c, ... y las constantes lógicas $\wedge$, $\vee$, $\bigwedge$ y $\bigvee$. El problema restante es el pasaje a las constantes lógicas restantes, $\neg$ y $\rightarrow$. Comencemos con una fbf. con forma de negación:

(ca)

			$\neg a \rightarrow \neg a$	0	
1(0)	$\neg a$?		$\neg a$	$2^1[0]$	...
$3^1(2)$	a?	...	...		a? $2^2(1)$
		$3^2(2^2)$?	?	$4^1(3^1)$	

O tiene una sola jugada posible en 1, pero **P** tiene dos en 2 – defender o atacar –, lo que abre dos ramas de diálogo con las jugadas $2^1[0]$ y $2^2(1)$. En cualquiera de ellas la victoria sólo podría ser material: si **O** no puede defender a en la primera rama, o si **P** puede defender a en la segunda. Es obvio que **P** ganaría formalmente en ***E***, si pudiera atacar cualquier jugada previa de **O**, pero ello no es posible en ***E***. En cambio, ya sólo con la posibilidad de defender cualquier jugada anterior en ***P***, el proponente tiene una estrategia ganadora, como lo muestra el siguiente diálogo:

P

		$\neg a \rightarrow \neg a$	0
1(0)	$\neg a$?	...	
	...	a?	2(1)
3(2)	?	...	
	...	$\neg a$	4[0]
5(4)**2**	a?	═	

Al poder defender **P** una aserción propia que no sea su última aserción, logra unificar las dos ramas en una. Por eso ataca primero 1(0) con 2(1) y luego defiende la tesis inicial con 4[0]. Esto obliga al oponente **O**, si éste aún quiere atacar, a conceder la homología con 5(4)**2**. *A fortiori* esta estrategia también vale en ***C***.

También ***I*** tiene una estrategia de victoria formal para $\neg a \rightarrow \neg a$:

I			
1(0)	$\neg a$?	$\neg a \to \neg a$	0
3(2)	*a*?	$\neg a$	2[0]
		…	
		a?	4(1)3

En *I* la clausura es por homología formal, y *a fortiori* en *C*. Por lo tanto podemos afirmar que en *I*, *P* y *C*, se puede deducir la forma generalísima (2) del **pi**, a partir de su forma elemental (1), para una fbf. *A* cualesquiera compuestas de enunciados elementales *a*, *b*, *c*, … y las constantes lógicas $\wedge$, $\vee$, $\bigwedge$, $\bigvee$ y $\neg$.

Consideremos ahora el caso de la implicación. La forma de **pi** para esta constante lógica sería $(a \to b) \to (a \to b)$. Su desarrollo en *E* sería el siguiente:

(ca)				$(a \to b) \to (a \to b)$				0
1(0) $a \to b$?				$a \to b$	2^1[0]	…		
$3^1(2^1)$ *a*?	$3^{2,1}$[1] *b*	…		*b*	$4^{1,1}[2^1]$	*a*?	2^2(1)	
$5^1(4^1)$? | …		$3^{2,2}(2^2)$?					?	$4^{1,2}(3^1)$

Tras 1(0), el único ataque inicial posible de **O**, se abren para **P** dos ramas, con las posibilidades de defensa 2^1[0], y de ataque 2^2(1). Frente a la primera a **O** le resta sólo el ataque $3^1(2^1)$, ante la cual a **P** se le abren nuevamente dos subramas, con la defensa $4^{1,1}[2^1]$ y con el ataque $4^{1,2}(3^1)$. Frente a la segunda a **O** se le abren dos subramas, con la defensa $3^{2,1}$[1] o el ataque $3^{2,2}(2^2)$. Como vemos, ninguna de las ramas clausura formalmente en *E*. Veamos ahora su desarrollo en *P*:

(ca)				$(a \to b) \to (a \to b)$				0
1(0)	$a \to b$?			…				
3^1[1]	*b*	…		*a*?				2(1)
…		3^2(2)	?	$a \to b$	4^1[0]	$a \to b$	4^2[0]	
$5^1(4^1)$2	*a*?	$5^2(4^2)$2	*a*?	*b*	$6^1[4^1]3^1$	*b*	$6^2[4^2]$	

En *P* el desarrollo del diálogo se simplifica porque **P** puede unificar ramas al tener la posibilidad de defender su tesis en una jugada posterior, por lo que comienza atacando sin ramificar con 2(1) la jugada 1(0). Ante ésta a **O** se le abren dos ramas: defender 1(0) en 3^1[1], o atacar la última jugada de **P**

2(1) en $3^2(2)$. En la primera rama **P** renuncia a atacar *b* y resuelve defender su tesis en $4^1[0]$, a lo que sigue el ataque con homología estricta de **O** en $5^1(4^1)$**2** y puede seguir la defensa $6^1[4^1]$**3^1**de **P**, también con homología estricta, aunque no es necesaria. En la segunda rama **P** renuncia a defender *a* y defiende su tesis inicial en $4^2[0]$, a partir de lo cual se repite el desarrollo de la primera rama hasta $5^2(4^2)$**2**. Pero como **O** tiene que atacar $4^2[0]$ para ganar, se ve obligado a hacerlo con homología estricta en $5^2(4^2)$**2**, sin embargo a **P** le falta defender su última defensa $4^2[0]$ y no puede hacerlo atacando $5^2(4^2)$, pues ya lo concedió en 2(1), de modo que debe aseverar *b*, pero no tiene una clausura formal para esta fbf. elemental en la segunda rama. Por lo tanto **P** *no posee de una estrategia de victoria*, pues en la segunda rama no dispone de la homología estricta necesaria para *b*, por lo que el diálogo no clausura formalmente. Veamos ahora el mismo diálogo en ***I***:

I			$(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b)$	0
	1(0)	$a \rightarrow b$?	$a \rightarrow b$	2[0]
	3(2)	*a*?	*b*	4[2]
	5(4)	?	...	
	7[1]**4**	*b*	*a*?	6(1)**3**

En ***I*** el diálogo clausura formalmente porque **P** tiene una estrategia de victoria, pues el ataque 6(1)**3** a la primera aserción de **O** 1(0) se realiza mediante una homología formal. **O** no puede defender su posición 1(0), por no ser la última (que es 3(2)), pero si lo pudiera hacer se vería obligado a defenderla con *b*, con lo que se produciría en 7[1]**4** otra homología formal que justificaría a 2[0] y consecuentemente a 0. Este desarrollo formal es correcto *a fortiori* en ***C***.

Concluimos entonces que en los juegos ***I*** y ***C*** basta con la forma (1) del **pi** para deducir su forma más general (2); en cambio en los juegos ***E*** y ***P*** no es universalmente deducible (2) a partir de (1). Sin embargo, dado el carácter pragmático trascendental de la anterior fundamentación de **pi** parecería admisible adoptar alguna forma de homología liberalizada que nos permita tornar demostrable también la forma irrestricta de **pi** también en ***E*** y en

P. Pero con ello obtenemos un par de juegos levemente más fuertes, que denominaremos ***E'***.y ***P'***.

Las formas de homología generalizada necesarias para obtener ***E'*** a partir de ***E*** son las siguientes:

Si el grado lógico G(*A*) ≥ 1 y *A* es *B*∧*C*, ó ⋀*xB*, ó ¬*B*, ó *B* → *C*, *entonces se gana formalmente una rama del diálogo repitiendo A*.

Para ***P'*** bastan las siguientes formas de homología generalizada.

Si el grado lógico G(*A*) ≥ 1 y *A* es *B*∧*C*, ó ⋀*xB*, ó *B* → *C*, *entonces se gana formalmente una rama del diálogo repitiendo A*.

La forma de la condición de homología lata para la negación se entenderá cuando la apliquemos por ejemplo a fbf.s como ¬¬*a* → ¬¬¬¬*a*. En el desarrollo siguiente y por razones semejantes a las esgrimidas en los cálculos secuenciales nos ocuparemos preponderantemente de los juegos dialógicos ***I*** y ***C***, en los que sólo es necesaria la homología estricta para fbf.s elementales, aunque en algunos casos nos ocuparemos también de los juegos ***E'*** y ***P'***, que requieren una homología liberalizada para defender formalmente al principio de identidad **pi** en su forma general.

8.7. Diálogos con clausura formal necesaria (leyes lógicas esenciales).

Podemos denominar provisionalmente "*leyes lógicas esenciales*" a las leyes lógicas que se pueden fundamentar en los juegos dialógicos estrictos ***E*** y ***E'*** (aunque algunas leyes de ***E'*** no sean demostrables en ***E***, no diferenciaremos aquí entre esos dos juegos de diálogos). Las leyes de los restantes juegos, ***I***, ***P***, ***P'*** y ***C***, que no son leyes de ***E*** o ***E'***, no lo serán en todos los juegos dialógicos y por lo tanto las denominaremos, también provisionalmente "*leyes lógicas accidentales*" de algunos juegos dialógicos, y serán también "contingencias accidentales" (ca) en otros juegos dialógicos.

$\vdash a \rightarrow (b \rightarrow a)$ (paradoja del *verum sequitur ex quolibet*)

E			$a \rightarrow (b \rightarrow a)$	0
	1(0)	a?	$b \rightarrow a$	2[0]
	3(2)	b?	a	4[2]1

La defensa es formal como lo muestra la jugada 4[2]1. Las dos defensas se ajustan a las reglas del diálogo estricto ***E***, de modo que esta paradoja de la implicación tradicionalmente conocida como '*verum sequitur ex quolibet*' es teorema en todos los restantes sistemas ***E'***, ***I***, ***P***, ***P'*** y ***C***, aunque sea una tesis discutible en una lógica relevante, tema que no interesa en las lógicas intuicionista y clásica. Para evitar la defensa formal se deberían modificar las formas admisibles de homología.

$\vdash a \rightarrow (\neg a \rightarrow b)$ (forma "débil" del *ex falso sequitur quodlibet*)

E			$a \rightarrow (\neg a \rightarrow b)$	0
	1(0)	a?	$\neg a \rightarrow b$	2[0]
	3(2)	$\neg a$?	a?	4(3)1

Ésta es una de las formas de la paradoja de la implicación conocida como '*ex falso sequitur quodlibet*', que se defiende formalmente y es teorema en ***E***, y en consecuencia también en los restantes juegos de diálogos. Como la otra forma de la misma paradoja no se defiende formalmente en todos ellos, a ésta la podemos considerar una 'forma "relativamente débil" del *ex falso sequitur quodlibet*'.[129] Es interesante señalar que, aunque el **pnc** fuerte no sea demostrable en ***P*** y ***P'***, esta forma débil del *ex falso* vale también en esos sistemas, porque en ellos se aceptan las reglas de ataque y defensa de la negación. Por lo tanto, si en ellos no quisiésemos admitir ni siquiera el *ex falso* débil (como acontece en los sistemas paraconsistentes de Newton da Costa), deberíamos modificar, o bien las reglas para la negación, o bien las condiciones de la homología.

[129] Como veremos en la sección siguiente esta forma no es equivalente, en todos los juegos de diálogos, con $\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$, a la que llamaremos su forma fuerte.

De lo anterior se sigue como una simple variante (por substitución $b/\neg b$) que ya en el sistema estricto, y *a fortiori* en los restantes, también es demostrable

$$\boldsymbol{E} \qquad \vdash a \to (\neg a \to \neg b).$$

Ésta es una forma aún más débil del *ex falso*, que corresponde al axioma de la *lógica mínima* de Johansson, que es un sistema ya débilmente paraconsistente.[130]

Las tres tesis anteriores son discutibles en sistemas lógicos muy exigentes, como en ciertas lógicas de la relevancia y en lógicas paraconsistentes. Sin embargo, al fundarse solamente en las reglas estructurales estrictas parecen inatacables, a menos que modifiquemos las definiciones de las reglas de ataque y defensa de las constantes lógicas. Esto parecería incompatible con el criterio de Došen para la diferenciación de los cálculos lógicos exclusivamente por reglas estructurales. Es cierto que ulteriores restricciones de las reglas estructurales pueden evitar tornar formalmente defendibles a esas tesis, pero la situación en que nos encontramos nos aconseja no aceptar sin crítica el criterio de Došen, como si fuera un dogma absoluto, sino hacer lugar también a los cambios de definición de las constantes lógicas como criterios para el cambio de sistema lógico.

$$\vdash a \to \neg\neg a.$$

E			$a \to \neg\neg a$	0
	1(0)	a?	$\neg\neg a$	2[0]
	3(2)	$\neg a$?	…	
			a?	4(3)1

Como vemos la ley de introducción de la doble negación o ley débil de doble negación, que abreviamos **+dn**, es teorema en ***E*** y por lo tanto también en los restantes juegos dialógicos, siempre

[130] La misma consideración de la nota anterior debe hacerse con la que llamaremos forma fuerte del axioma de Johansson, que dice: $\neg a \to (a \to \neg b)$.

que se admitan las reglas de ataque y defensa de la negación, que hasta aquí no hemos puesto en duda.

En este punto aparece la primera diferencia importante entre los juegos dialógicos y los cálculos secuenciales, pues en estos últimos la secuencia $> a \rightarrow \neg\neg a$ no era desarrollable en los cálculos secuenciales ***E*** y ***P***. Esto muestra que los juegos dialógicos son algo más que meras "puestas de cabeza" de sus correspondientes cálculos secuenciales, ya que tienen una novedad estructural que se puede considerar una interesante extensión del concepto de constructividad. La comparación con $\neg a \rightarrow \neg\neg\neg a$ será importante. Además siendo $\vdash a \rightarrow \neg\neg a$ un teorema en ***P*** y ***P'*** y no siéndolo en los cálculos paraconsistentes de da Costa, esto nos muestra que nuestros juegos dialógicos paraconsistentes ***P*** y ***P'*** difieren también en este aspecto de los de dicho autor y tampoco son plenamente duales respecto del cálculo intuicionista ***I***, como acontecía en los correspondientes cálculos secuenciales. Consideremos los desarrollos dialógicos en ***E*** de las siguientes fórmulas:

E $\vdash a \rightarrow \neg\neg\neg\neg a$.

E			
		$a \rightarrow \neg\neg\neg\neg a$	0
1(0)	$a?$	$\neg\neg\neg\neg a$	2[0]
3(2)	$\neg\neg\neg a?$	…	
	…	$\neg\neg a?$	4(3)
5(4)	$\neg a?$	…	
		$a?$	6(5)1

Las reglas de ataque y defensa de ***E***, permiten la defensa formal de la fórmula.

E $\vdash \neg\neg\neg\neg a \rightarrow a$.

E			
		$\neg\neg\neg\neg a \rightarrow a$	0
1(0)	$\neg\neg\neg\neg a?$	a	2[0]
3(2)	?	…	
	…	$\neg\neg\neg a?$	4(1)
5(4)	$\neg\neg a?$	…	
	…	$\neg a?$	6(5)
7(6)2	$a?$		

En ***E*** se gana formalmente también este diálogo, pues **O**, o bien *no ataca* la jugada 6 de **P**, o bien al atacarla con 7(6)**2** concede una homología estricta al repetir 2. Por lo tanto ambas fbf.s son teoremas en todos los juegos dialógicos expuestos. Como estos dos últimos teoremas son conversos, podemos afirmar en ***E*** – y *a fortiori* en los restantes juegos dialógicos – la equivalencia:

E $\quad \vdash\ a \leftrightarrow \neg\neg\neg\neg a.$

Una generalización sencilla de la tesis anterior, que también es defendible formalmente en ***E***, es la siguiente:

E $\quad \vdash\ a \leftrightarrow \neg^{2\mathrm{n}} a\ \ (0 \leq \mathrm{n}).$

La fbf. siguiente es una contingencia en ***E***, pero es teorema en ***E***:

E $\quad \vdash \neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A$

(ca)							
				$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A$	0		
1(0)	$\neg\neg A?$			$\neg\neg\neg\neg A$	$2^1[0]$	...	
$3^1(2)$	$\neg\neg\neg A?$			...		$\neg A?$	$2^2(1)$
	...	$3^2(2^2)$	$A?$	$\neg\neg A?$	$4^1(3)$	...	
5(4)	$\neg A?$			...		?	$4^2(3^2)$
				$A?$	6(5)		

La tesis no clausura formalmente en ***E*** en ninguna de las ramas, pero sí en ***E'***, como lo muestran las fbf.s resaltadas y la condición de homología lata: si G($\neg A$) > 1 y $A \leftrightarrow \neg B$. Esto daría una estrategia de victoria formal en ***E'*** según el siguiente resumen:

E			
		$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A$	0
1(0)	$\neg\neg A?$	$\neg\neg\neg\neg A$	2[0]
3(2)	$\neg\neg\neg A?$	...	
		$\underline{\underline{\neg\neg A?}}$	4(3)**1**

El proponente derrota formalmente con una homología formal amplia en 4(3)**1** al ataque 3(2) a su defensa 2[0]. En cambio la implicación conversa es una contingencia esencial, como lo muestra el siguiente desarrollo:

(ce)			$\neg\neg\neg\neg a \to \neg\neg a$	0			
1(0)	$\neg\neg\neg\neg a$?		$\neg\neg a$	$2^1[0]$	...		
$3^1(2^1)$	$\neg a$?	...			$\neg\neg\neg a$?	$2^2(1)$	...
		$3^2(2^2)$ $\neg\neg a$?	a?	$4^1(3^1)$	...		
$5^1(4^1)$	?	...			$\neg a$?	$4^2(3^2)$	
		$5^2(4^2)$ a?			...		
					?	$6^2(5^2)$	

La tesis no clausura formalmente en ***E*** ni en ***E***.

Como era de desear, la ley de *modus ponens* es una "ley lógica esencial", pues ya se la puede demostrar en ***E***, y por lo tanto en los restantes juegos dialógicos, como lo muestra el siguiente diálogo:

E			$a \to ((a \to b) \to b)$	0
	1(0)	a?	$(a \to b) \to b$	2[0]
	3(2)	$a \to b$?	b	4[2]
	5(4)	?	…	
	7[3]	b	a?	6(3)1

En este diálogo ambos participantes se ajustan a la regla estricta de desarrollo: atacan la última posición de la otra parte y defienden su última posición. Sin embargo aparecen dos homologías que permiten la victoria formal para el proponente. Adviértase que este resultado no se alcanza en un cálculo secuencial estricto, pues, como vimos en el capítulo correspondiente, su desarrollo requería la existencia de dos fbf.s en un antecedente, lo que estaba prohibido en los cálculos secuenciales ***E*** y ***P***. Nos podemos preguntar entonces *¿por qué se da esta diferencia entre los cálculos secuenciales estricto y paraconsistente por una parte y sus correspondientes juegos dialógicos*? Una respuesta obvia es que *los juegos dialógicos no son una simple inversión de los cálculos secuenciales, sino que agregan complejidad estructural*. Más precisamente, *los juegos dialógicos* ***distinguen*** *los pasos estructurales de ataques y defensas lícitas*, *de las jugadas de homología formal permitidas*: *estas son irrestrictas*, como lo admite en la sección § 8.2. la regla de *homología formal* (recuérdese especialmente la nota a esa regla). Esto equivale a poner a disposición del proponente, aunque en forma limitada, dos o más premisas para que éste pueda fundar su tesis. Esto, que no está permitido de ninguna forma en los correspondientes cálculos secuenciales, está permitido – aunque sólo respecto de las homologías – en los juegos dialógicos que hemos propuesto.

8.8. Diálogos con clausura formal accidental (según el juego dialógico utilizado).

Estudiemos algunas "*leyes lógicas no esenciales*". Comencemos con la forma fuerte del *ex falso quodlibet*: $\vdash \neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$,

(ca)				$\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$	0			
$1(0)$	$\neg a?$			$a \rightarrow b$	$2^1[0]$	…		
$3^1(2)$	$a?$			b	$4^1[3^1]$	$a?$	$2^2(1)$	
$5(4^1)$	$?$	$3^2(2^2)$	$?$					

De acuerdo con este diálogo la fbf. $\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$ no es una tesis en ***E*** y ***E***. Pero basta pasar a los juegos ***I***, ***P*** y ***P'***, y a fortiori a ***C***, para obtener la ley

I		$\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$	0
$1(0)$	$\neg a?$	$a \rightarrow b$	$2[0]$
$3(2)$	$a?$	b	$4[2]$
$5(4)$	$?$	…	
		$a?$	$6(1)3$

P		$\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$	0
$1(0)$	$\neg a?$	…	
		$a?$	$2(1)$
$3(2)$	$?$	…	
		$a \rightarrow b$	$4[0]$
$5(4)2$	$a?$		

La forma fuerte del *ex falso* de Johansson es una simple variante de la anterior, demostrable en todos los juegos dialógicos mencionados. Si en cambio quisiésemos demostrar sólo las formas fuerte y débil de esa versión del *ex falso* de Johansson, pero no así las formas con consecuente también afirmativo, entonces deberíamos modificar también las reglas de ataque y defensa para la negación.

Pasemos ahora a considerar los principios irrestrictos – también llamados "fuertes" – de no contradicción, que abreviamos '**pnc**', y de tercero excluido, *tertium non datur*, que abreviamos '**tnd**'. Por simplicidad los presentamos en su forma paramétrica del cálculo de enunciados sin cuantificación de variables de enunciados. Los diálogos posibles sobre el **pnc** fuerte paramétrico en ***E*** (y también para ***P***) son los siguientes:

(ca)			$\neg(a\wedge\neg a)$	0
	1(0)	$a\wedge\neg a$?	...	
	3[1]	a	I?	2(1)
			?	4(3)

(ca)			$\neg(a\wedge\neg a)$	0
	1(0)	$a\wedge\neg a$?	...	
	3[1]	$\neg a$	D?	2(1)
		...	a?	4(3)
	5(4)	?		

En estos juegos de diálogos ***E*** y ***P*** ninguno de los dos diálogos posibles clausura formalmente. En el diálogo izquierdo **P** gana, si **O** no puede defender materialmente *a*, y en el diálogo derecho **P** gana, si él puede defender materialmente *a*. Por ello el principio fuerte paramétrico de no contradicción no puede ser considerado una ley lógica esencial. Pero será ley en los más importantes sistemas de juegos dialógicos, como veremos inmediatamente.

Adoptemos ahora para el proponente la regla de desarrollo intuicionista e intentemos nuevamente el desarrollo. Ahora el proponente puede atacar cualquier aserción previa del oponente. Nuestro diálogo sobre la ley fuerte de no contradicción se verá de la siguiente manera:

I			$\neg(a\wedge\neg a)$	0
	1(0)	$a\wedge\neg a$?	...	
	3[1]	a	I?	2(1)
	5[1]	$\neg a$	D?	4(1)
			a?	6(5)3

En su jugada 1(0) **O** ataca la tesis $\neg(a\wedge\neg a)$ de **P** conforme a la regla de desarrollo para la negación, con '$a\wedge\neg a$'. **P**, según esa regla, no puede defender 0, de modo que no le resta sino atacar la contradicción elemental que asevera el oponente en 1(0). Y lo hace cuestionando *sucesivamente*, *en la misma rama del* *diálogo, dos veces la misma fbf.* 1(0), con I? en la jugada 2(1) y con D? en la jugada 4(1). A esos ataques responde el oponente sucesivamente con las jugadas 3[1] a y 5[1] $\neg a$. Finalmente el proponente ataca 5[1] repitiendo formalmente 3[1] con a? en 6(3)**3**. Eso establece la homología, por lo que este diálogo sin ramificación clausura formalmente. En nuestra crítica posterior veremos una dificultad oculta que puede albergar esta demostración de la forma paramétrica fuerte del **pnc**, pero aquí provisionalmente nos daremos por satisfechos con ella y sólo advertiremos que esta forma fuerte del **pnc** sólo se puede ganar en los juegos dialógicos que permitan al proponente atacar una aserción cualquiera del oponente y no solamente su última aserción: estos son precisamente los juegos con las reglas de desarrollo para los juegos intuicionista ***I*** y clásico ***C***. En los juegos ***E*** y ***P*** el **pnc** fuerte no es demostrable, precisamente porque no se puede atacar cualquier aserción previa del oponente, sino sólo la última.

Consideremos ahora el tercero excluido o *tertium non datur*, brevemente '**tnd**'. Sus desarrollos posibles en ***E*** son los siguientes:

E	(ca)		$a\vee\neg a$	0	(ca)		$a\vee\neg a$	0
	1(0)	?	a	2[0]	1(0)	?	$\neg a$	2[0]
	3(2)	?			3(2)	a?	…	
							?	4(3)

En el diálogo de la izquierda el proponente defiende 0 en la jugada 2 con a y gana materialmente, si puede defender esa fbf. En el diálogo de la derecha defiende 0 con $\neg a$ y gana materialmente, si su oponente no puede defender adecuadamente a. En ninguno de los dos diálogos hay homología formal. Por lo tanto no hay victoria formal para el principio **tnd** en los diálogos estrictos ***E***. Por ello es que el tercero excluido no es una ley formal en ese juego de diálogos. Para que la hubiera deberíamos modificar la regla de desarrollo para el proponente. Pero no se necesitará liberalizar los ataques, como en el caso de los diálogos intuicionistas ***I***, sino las defensas. De modo que tampoco es demostrable el **tnd** en ***I***. En cambio sí hay una defensa formal del tercero excluido en el juego de diálogos ***P***, como lo muestra el siguiente desarrollo:

P		$a \lor \neg a$	0
1(0)	?	$\neg a$	2[0]
3(2)	a?	a	4[0]3

El desarrollo comienza como el del segundo diálogo anterior, pero en este caso, ante el ataque 3(2) a? del oponente, el proponente renuncia a cuestionar esa jugada y, mediante una homología formal estricta, defiende otra vez la tesis 0 con su jugada a 4[0]3. Ésta es la defensa de una aserción previa que no es la última, lo que sólo está permitido en las reglas de desarrollo para los juegos dialógicos paraconsistente ***P*** y clásico ***C***. Con los diálogos anteriores demostramos entonces que en los juegos ***E*** e ***I*** el principio fuerte paramétrico de tercero excluido no es formalmente defendible, pero sí lo es en los juegos ***P*** y ***C***. Más abajo consideraremos el sentido de esta fundamentación en la práctica de la demostración.

El ejemplo siguiente es el de la doble negación fuerte o ley de eliminación de la doble negación **-dn** en los juegos de diálogos ***E*** y ***I***:

(ca)		$\neg\neg a \to a$		0
1(0)	$\neg\neg a$?	a $2^1[0]$	…	
$3^1(2^1)$?	…		$\neg a$?	$2^2(1)$
	$3^2(2^2)$ a?		…	
			?	$4^2(3^2)$

En los juegos ***E*** e ***I***, en los que **P** sólo puede defender su última aserción, no hay victoria formal: **P** sólo gana si puede defender *materialmente* su aserción a de la jugada $2^1[0]$, o bien si **O** no puede defender *materialmente* su aserción a de la jugada $3^2(2^2)$. En cambio, si permitimos defender cualquier aserción previa de **P**, como en los juegos ***P*** y ***C***, entonces podemos desarrollar el diálogo así:

P		$\neg\neg a \to a$	0
1(0)	$\neg\neg a$?	…	
	…	$\neg a$?	2(1)
3(2)	a?	a	4[0]3

Por lo tanto la demostración de **-dn** sólo se da en los juegos ***P*** y ***C***, que son también aquellos en los que el **tnd** irrestricto es teorema.

La eliminación de la doble negación es una ley "clásica" inadecuada para dominios de interpretación infinitos, como los de gran parte de las teorías matemáticas y lógicas. Sin embargo hay dominios finitos en los que tampoco es admisible la doble eliminación **-dn**. Consideremos el predicado 'inocente'. Su negación 'no-inocente' se suele considerar como sinónima de 'culpable' y su negación 'no-culpable' a su vez como sinónima de 'no no-inocente'. Ahora bien, en el lenguaje jurídico '*a* es no-culpable' se puede considerar equivalente a '*a* es no no-inocente' pero no a '*a* es inocente', porque la referencia de 'inocente' es una subclase propia de 'no-culpable'. Alguien es no-culpable o no no-inocente cuando no se ha podido demostrar *en juicio* su culpabilidad, pero ello no implica su inocencia, sino sólo la ausencia de prueba de culpabilidad. De modo que en este caso decir que alguien es no-culpable no equivale a decir que es inocente, con lo que la eliminación de la doble negación no vale: la inocencia implica la no-culpabilidad o no no-inocencia ($a \rightarrow \neg\neg a$), pero la conversa no vale. Este también puede ser un buen ejemplo para la relación entre las categorías kantianas de limitación y afirmación.

Consideremos ahora la equivalencia de la triple y la simple negación en cada juego dialógico. Comenzamos con el desarrollo en ***E*** para la fbf. $\neg\neg\neg a \rightarrow \neg a$:

(ca)

				$\neg\neg\neg a \rightarrow \neg a$		0	
1(0)	$\neg\neg\neg a$?			$\neg a$	$2^1[0]$	…	
$3^1(2^1)$	a?			…		$\neg\neg a$?	$2^2(1)$
		$3^2(2^2)$	$\neg a$?	?	$4^1(3^1)$	…	
						a?	$4^2(3^2)$

Con la regla de desarrollo de ***E***, **P** sólo puede ganar en la primera columna, si **O** no puede defender *materialmente a*, y sólo puede ganar en la segunda, si él puede defender *materialmente a*. Por lo tanto no hay clausura formal posible en

E. Pero tampoco la hay en ***E'*** con liberalización de la regla de homología, pues no hay lugar para ninguna homología en el diálogo. En cambio en ***P*** el diálogo clausura formalmente, como vemos a continuación:

P			
		$\neg\neg\neg a \rightarrow \neg a$	0
1(0)	$\neg\neg\neg a$?	...	
	...	$\neg\neg a$?	2(1)
3(2)	$\neg a$?	...	
	...	a?	4(3)
5(4)	?	...	
	...	$\neg a$	6[0]**3**
7(6)**4**	a?	═	

P ataca a 1(0) con 2(1), porque siempre podrá defender 0, como hará en 6[0]**3** con $\neg a$. Si **O** no quiere perder, debe a su vez atacar los ataques 2(1) y 4(3) y la defensa 6[0]**3** del proponente. Pero entonces concede a **P** una homología formal estricta en 7(6)**4** que permite a éste derrotar el ataque 1(0) de **O**.

$\vdash \neg\neg\neg a \rightarrow \neg a$ también se gana formalmente en ***I***:

I			
		$\neg\neg\neg a \rightarrow \neg a$	0
1(0)	$\neg\neg\neg a$?	$\neg a$	2[0]
3(2)	a?	...	
		$\neg\neg a$?	4(1)
5(4)	$\neg a$?	...	
		a? ═	6(5)**3**

Si hay victoria formal para $\neg\neg\neg a \rightarrow \neg a$ en ***I*** y ***P***, la hay en ***C***.

El desarrollo en ***E*** para la conversa de la fórmula anterior, $\neg a \rightarrow \neg\neg\neg a$, nos muestra que en él es una contingencia accidental:

(ca)							
				$\neg a \rightarrow \neg\neg\neg a$			0
1(0)	$\neg a$?			...		$\neg\neg\neg a$	$2^2[0]$
		$3^2(2^2)$	$\neg\neg a$?	a?	$2^1(1)$	...	
$3^1(2^1)$	?		...			$\neg a$?	$4^2(3^2)$
		$5^2(4^2)$	a?				
						?	$6^2(5^2)$

La tesis $\neg a \rightarrow \neg\neg\neg a$ no clausura formalmente en ***E***, pero sí lo hace en ***E***, aunque sólo con homología formal *sensu lato*, como lo vemos en el siguiente diálogo:

E			$\neg a \rightarrow \neg\neg\neg a$	0
	1(0)	$\neg a?$	$\neg\neg\neg a$	2[0]
	3(2)	$\neg\neg a?$	…	
			$\underline{\underline{\neg a?}}$	4(3)**1**

En cambio en ***P*** tenemos un desarrollo que clausura formalmente con homología formal estricta, como vemos a continuación:

P			$\neg a \rightarrow \neg\neg\neg a$	0
	1(0)	$\neg a?$	…	
		…	$a?$	2(1)
	3(2)	?	$\neg\neg\neg a$	4[0]
	5(4)	$\neg\neg a?$	…	
		…	$\neg a?$	6(5)
	7(6)**2**	$a?$	══	

La homología formal estricta 7(6)**2** es la única jugada que tiene **O** para no perder no atacando 6, pero le da la victoria a **P**. En el sistema ***I*** también clausura con homología formal estricta:

I			$\neg a \rightarrow \neg\neg\neg a$	0
	1(0)	$\neg a?$	$\neg\neg\neg a$	2[0]
	3(2)	$\neg\neg a?$	…	
		…	$\neg a?$	4(3)
	5(4)	$a?$	…	
			$\underline{\underline{a?}}$	6(1)**5**

Tanto la estrategia de victoria formal para $\neg a \rightarrow \neg\neg\neg a$ de ***I***, como la de ***P***, son estrategias de victoria formal en ***C***. De todo lo anterior resulta que la equivalencia

$$\vdash \neg a \leftrightarrow \neg\neg\neg a$$

es un teorema en los juegos dialógicos ***I***, ***P*** y, *a fortiori*, en ***C***.

8.9. La tercera paradoja de la implicación y la ley de Peirce.

A continuación desarrollaremos dos importantes ejemplos de contingencias accidentales:
1. La tercera paradoja de la implicación, que a diferencia de las dos primeras sólo es clásica, y
2. La llamada “ley de Peirce”, que tampoco vale en la lógica intuicionista.
Comenzamos con la tercera paradoja de la implicación:

$\vdash (a \to b) \vee (b \to a)$

En los juegos dialógicos ***P***, ***P’*** y ***C*** su desarrollo es el siguiente:

(ca)

		$(a \to b) \vee (b \to a)$	0
1(0)	?	$a \to b$	2[0]
3(2)	a?	b	4[2]
5(4)	?	$b \to a$	6[0]
7(6)	b?	$\underline{\underline{a}}$	8[6]3

Puesto que **P** no ataca nunca, pero defiende dos veces su tesis 0, es decir defiende aserciones que no son su última aserción, para ganar formalmente debe usar las reglas estructurales de los juegos ***P***, ***P’*** o ***C***, pero con ello contraviene la restricción estructural de la regla de desarrollo de los juegos dialógicos ***E***, ***E’*** y ***I***. Por lo tanto la tercera paradoja de la implicación será una contingencia en los juegos ***E***, ***E’*** y ***I*** y un teorema en los juegos ***P***, ***P’*** o ***C***.

Algo semejante ocurre con la siguiente “ley de Peirce”:

(ca)

		$((a \to b) \to a) \to a$	0
1(0)	$(a \to b) \to a)$?	…	
3[1]	a	$a \to b$?	2(1)
		$\underline{\underline{a}}$	4[0]

Este diálogo respeta las reglas de desarrollo de ***P***, ***P’*** y ***C***, por lo que será ley en esos cálculos, pero como no respeta las de ***E***, ***E’*** y ***I***, en ellos será una contingencia. Si recordamos la definición de Russell de la disyunción inclusiva ($A \vee B \leftrightharpoons (A \rightarrow B) \rightarrow B$) y la de Curry de la negación ($\neg A \leftrightharpoons A \rightarrow B$, donde B es una fbf. cualquiera), entonces advertimos que la “ley de Peirce” no es tan ingenua como parece, pues $(((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a) \leftrightarrow ((a \rightarrow b) \vee a) \leftrightarrow \neg a \vee a$. Así advertimos que la llamada “ley de Peirce” alberga en forma oculta (o astuta) el principio de tercero excluido.

8.10. Las restricciones a la defensa.

Ya hemos mostrado que el *tertium non datur* se demuestra en algunos juegos de diálogos, pero no en otros. Sin embargo hasta ahora no hemos discutido la relación entre esas demostraciones y las jugadas de defensa de una fbf. que permiten las reglas de desarrollo en los distintos juegos. Como sabemos en los juegos de diálogos ***P*** y ***C*** la posibilidad, por parte del proponente, de defender una tesis que no es la última aseverada, le permite ganar formalmente el **tnd**. Aquí trataremos de explicar el sentido de esa estratagema de “defensa a distancia”. En un juego “constructivo” como el ***I*** la demostración de una disyunción inclusiva $A \vee B$ supone que quien la afirma ya está en condiciones de *demostrar* (al menos) uno de los extremos de la disyunción. Recordemos entonces cómo se procedió con el **tnd** en los juegos ***P*** y ***C***:

P			$a \vee \neg a$	0
	1(0)	?	$\neg a$	2[0]
	3(2)	a?	$\underline{\underline{a}}$	4[0]**3**

Aquí la estratagema del proponente **P** consiste en hacer como si para demostrar $a \vee \neg a$ se hubiese comprometido a demostrar $\neg a$. De ese modo fuerza al oponente **O** a contraatacar con a?, lo que le permite a **P**, según la regla de desarrollo que admite una segunda defensa de la jugada 0, alcanzar una homología formal en la jugada 4[0]**3**. Pero ¿qué es lo que está mal en ella, según los intuicionistas o constructivistas? Pues que el proponente *no ha demostrado* ni $\neg a$, que es *a lo que se había obligado cuando inició la defensa intuicionista o constructiva de la disyunción* *inclusiva*, ni a. Lo único que ha hecho es hacer caer en una trampa a su oponente y a todo miembro de un potencial auditorio. ¿Por qué? Porque el oponente no había demostrado en 3(2) la fbf. a, sino que simplemente la había *concedido hipotéticamente* para dar a **P** la oportunidad de argumentar a favor de $\neg a$. Recordemos además que una negación intuicionista o constructiva por definición abrevia lo siguiente: $\neg A \coloneqq A \rightarrow f$, es decir, $\neg A$ equivale a A implica lo lógicamente falso. Con esto el diálogo anterior toma la siguiente forma:

P		‖	$a \vee (a \rightarrow f)$	0
1(0)	?	‖	$a \rightarrow f$	2[0]
3(2)	a?	‖	$\underline{\underline{a}}$	4[0]3

Por lo tanto la aserción hipotética de a por parte del **O** obligaría a **P** a derivar una falsedad lógica f, para demostrar $a \rightarrow f$ y *a fortiori* $a \vee (a \rightarrow f)$. Pero **P** escapa a esa obligación mediante la segunda defensa 4[0]3, que no demuestra nada, sino que sólo repite lo concedido por el oponente *en forma meramente hipotética*. Esa jugada sólo es posible por las reglas de desarrollo más liberales de ***P*** y ***C***, que son las que permiten al proponente defender una aserción que no sea su última aserción. Sin esta liberalidad el proponente se hubiese visto obligado a hacer aquello a lo que se había comprometido: demostrar al menos uno de los extremos de la disyunción. Eso es lo que hacemos a continuación:

I				‖	$a \vee (a \rightarrow f)$	0			
(0)	?			‖	$a \rightarrow f$	2^1[0]	|	a	2^2[0]
$3^1(2^1)$	a?	|	$3^1(2^2)$?	‖	f	4^1[2]	|		

,

En este diálogo constructivo ninguna de las ramas clausura formalmente, si el proponente no es capaz de derivar la falsedad lógica f en la primera rama, ni a en la segunda, que es lo que se había comprometido a hacer. De este modo queda claro que *la defensa de una tesis que no sea la última aserción del proponente es un procedimiento que*, en muchos casos, como en éste del **tdn**, ***permite escapar a la obligación de fundamentar***. Por eso dicha defensa reiterada de la misma tesis en la misma rama de un diálogo está prohibida en los juegos respetuosos de la obligación de fundamentar (aquí una disyunción inclusiva) en sentido estricto.

Lo que en los cálculos secuenciales corresponde a la "defensa a distancia" (de una tesis en una misma rama de un diálogo) es la presencia de más de una fbf. en el sucedente de la secuencia. Por eso en los cálculos secuenciales intuicionistas se prohíbe la aparición de más de una fbf. en el sucedente. Pero la razón de esta prohibición se ve claramente sólo gracias al análisis de los juegos dialógicos. En los cálculos secuenciales parecía sólo un límite sintáctico que permitía producir una lógica intuicionista, aunque no fuese muy claro por qué. Los juegos dialógicos en cambio nos aclaran la cuestión desde el punto de vista de la práctica de la demostración intuicionista, para la cual las alternativas (1) A y (2) $\neg A$ no agotan las posibilidades de una fbf.; pueden darse aún otras dos alternativas que no son equivalentes: (3) $\neg\neg A$, y (4) $*A$ ($*A$ representa una fbf. para la cual hasta ahora no se ha encontrado, o incluso no se puede encontrar, una demostración ni para ella, ni para su negación, ni para su doble negación o afirmación débil). Por supuesto, un intuicionista concederá que en ciertos casos vale el **tnd**, pero estos son casos particulares *verdaderos por su materia*, no universalmente verdaderos por su mera forma, como es el caso de un número entero positivo mayor o igual a 2, que sólo puede ser primo o no primo. Desde un punto de vista formal en un sistema constructivo no se demuestra el *tertium non datur*, pero sí una ley de *quintum non datur*:

$\vdash\ A\vee\neg A\vee\neg\neg A\vee *A.$

Recordemos además que la regla y la ley de eliminación de la doble negación por un lado, y el principio de tercero excluido por el otro, no son equivalentes en los juegos dialógicos estrictos y paraconsistentes, por utilizar el ataque a fbf.s que no son la última aseverada por **O**, pero sí lo son en los juegos constructivo y clásico. En estos últimos basta con admitir uno de ellos para demostrar el otro, como es fácil de mostrar:

(ca)

				‖			
Σ	$a\vee\neg a$			‖	$\neg\neg a \to a$		0
1(0)	$\neg\neg a?$			‖	a		2[0]
3(2)	?			‖	…		
$5^1[\Sigma]$	a	$5^2[\Sigma]$	$\neg a$	‖	?		4(Σ)
				‖	══	$\neg a?$	$6(1)5^2$
		7(6)	$a?$	‖		══	

En consecuencia la regla $A\vee\neg A \vdash \neg\neg A \to A$ es una regla constructiva. **P** ataca Σ en 4(Σ) y el diálogo ramifica. La primera defensa de **O** en $5^1[\Sigma]$ concede la primera homología formal. La segunda defensa $5^2[\Sigma]$ de **O** le habilita a **P** el ataque $6(1)5^2$ a la jugada 1(0) de **O**, a lo que éste responde en 7(6) con el ataque 7(6) que concede la segunda homología formal.

En los diálogos clásicos y paraconsistentes la regla se deduce trivialmente, como muestra el siguiente desarrollo, pues no se necesita usar la hipótesis $\Sigma(a\vee\neg a)$.

		‖		
Σ	$a\vee\neg a$	‖	$\neg\neg a \to a$	0
1(0)	$\neg\neg a?$	‖	…	
3(2)	$a?$	‖	$\neg a?$	2(1)
		‖	a	4(0)3
		‖	══	

La regla no se deriva en los diálogos estrictos. En cambio la regla conversa se deriva incluso en ***E***, y por tanto *a fortiori* en todos los juegos dialógicos, por lo que $(\neg\neg a \to a) \to (a\vee\neg a)$ es un teorema esencial, como se ve en el siguiente desarrollo:

			‖		
E	Σ	$\neg\neg a \to a$	‖	$a\vee\neg a$	0
	1(0)	?	‖	a	2[0]
	3(2)	?	‖	…	
	5[Σ]	a	‖	$\neg\neg a?$	4(Σ)

Así la regla $\neg\neg A \to A \vdash A\vee\neg A$ y su correspondiente teorema son demostrables incluso en los diálogos estrictos, y la regla simétrica $A\vee\neg A \dashv\vdash \neg\neg A \to A$ y el teorema de equivalencia

$$\vdash A \vee \neg A \leftrightarrow \neg\neg A \rightarrow A$$

son demostrables en ***P***, ***I*** y ***C***.

8.11. El principio de Márcov.

El gran matemático ruso Andréi Andréievich Márcov propuso[131] un principio para la lógica de predicados muy semejante a la implicación de izquierda a derecha de la última equivalencia de la sección anterior, por lo que parece ser una tesis defendible en la lógica constructiva. Sin embargo dicho principio no es demostrable en las variantes usuales de la aritmética intuicionista, por lo que su admisión significa una ampliación del concepto de constructividad. La forma general del principio de Márcov es la siguiente:

$$\vdash \bigwedge x(Ax \vee \neg Ax) \rightarrow (\neg\neg \bigvee x.Ax \rightarrow \bigvee x.Ax) \quad \text{(principio de Márcov)},$$

donde 'A' es una fbf. cualquiera en la que puede aparecer libre una o más veces la variable 'x'. Este principio dice que, si se admite la forma universal del *tertium non datur* para la lógica de predicados de primer orden, entonces la existencia débil $\neg\neg \bigvee x.ax$ (que equivale a $\neg \bigwedge x.\neg ax$) implica la existencia fuerte $\bigvee x.ax$.

A continuación pondremos a prueba la potencia deductiva del juego dialógico constructivo ***I*** intentando una defensa formal del principio. Lo intentaremos sobre la versión elemental de dicho principio, donde 'ax' será una fórmula lógica o aritmética elemental en la que aparece 'x' libre al menos una vez. El desarrollo lo realizamos en ***I*** recordando las siguientes reglas:

$$(\bigwedge \|)_n \; \frac{\Sigma(\bigwedge_x A(x))}{A(n)} \Big\|\, n?\,, \qquad (\|\bigvee)_n \; \frac{\Sigma}{?} \Big\| \; \frac{\bigvee_x A(x)}{A(n)}\,, \qquad (\vee\|) \; \frac{\Sigma(A \vee B)}{A \;\mid\; B} \Big\|\, \mathrm{I}? \;\mid \mathrm{D}?$$

[131] Probablemente antes de 1968. Cf. para ello MITTELSTRAß 1995, II, 770.

		$\bigwedge x(ax\vee\neg ax) \rightarrow (\neg\neg\bigvee x.ax \rightarrow \bigvee x.ax)$	0
1(0)	$\bigwedge x(ax\vee\neg ax)$?	$\neg\neg\bigvee x.ax \rightarrow \bigvee x.ax$	2[0]
3(2)	$\neg\neg\bigvee x.ax$?	$\bigvee x.ax$	4[2]
5(4)	?	an	6[4]
7(6)	?	…	
9[1]	$an\vee\neg an$	n?	8(1)
11^1[9]	an | 11^2[9] $\neg an$	I? 10^1(9) | D?	10^2(9)
	…	? | an?	$12^2(11^2)$
	$13^2(12^2)$?		

En la versión constructiva de juegos dialógicos el diálogo clausura formalmente en la primera rama, pero no en la segunda. Por eso, aunque vimos que el diálogo ***I*** era levemente más fuerte que los cálculos secuenciales intuicionistas (por las posibilidades de homología), *el juego de diálogos constructivos de Lorenzen y Lorenz es sólo algo más fuerte que los cálculos secuenciales habituales*, pues no demuestra el principio de Márcov y *no amplía nuevamente la extensión de lo constructivo*.

8.12. ¿Son "razonables" los cálculos estrictos y paraconsistentes?

Consideremos el siguiente diálogo intuicionista:

I			
		$(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c))$	0
1(0)	$a \rightarrow b$	$(b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$	2[0]
3(2)	$b \rightarrow c$	$a \rightarrow c$	4[2]
5(4)	a	c	6[4]
7(6)	?	…	
9[1]	b	a?	8(1)5
11[3]	c	b?	10(3)9

Sin embargo, la transitividad del condicional no es teorema en ***E*** ni en ***P*** – a pesar de la libertad de elección en la regla de homología formal – por las restricciones en la regla de ataque. En cambio es un teorema en ***I*** y *a fortiori* en ***C***, por la posibilidad de ataques a fbf.s que no son las últimas aseveradas por **O**.

Este diálogo muestra, por un lado, que el teorema y la regla de *modus ponens* tienen un carácter estructuralmente más fundamental que la regla y la ley de transitividad de la implicación. El *modus ponens*, ya lo vimos, se demuestra incluso en ***E***. Por su parte la transitividad de la implicación es una regla cuya deducción depende de que sean posibles al menos dos fbf.s en al antecedente de las secuencias en los cálculos secuenciales, lo que es equivale en los juegos dialógicos a que se pueda atacar cualquier jugada anterior del oponente. Esto muestra, una vez más, la artificiosidad de los cálculos secuenciales estrictos y paraconsistentes, y de sus juegos dialógicos correspondientes. Parece llegado el momento de cuestionar finalmente la "razonabilidad" o defendibilidad de cualquier regla que restrinja el número de premisas para fundar una conclusión. Como dicha restricción es producida por las reglas de desarrollo en los cálculos secuenciales y juegos dialógicos señalados, entonces debemos discutir la admisibilidad de esas reglas. Consideremos la situación "metadialógica" que enfrentamos.

¿A qué se compromete un proponente cuando enuncia una tesis? Su situación metadialógica podría expresarse con el siguiente metadiálogo:

(O) "*Señor proponente* P*, ¿a qué se compromete cuando enuncia la tesis A*?"
(P) "*Señor oponente* O*, me comprometo a fundar esa tesis A sobre la base de la siguiente colección de hipótesis* H" (y propone esa colección de hipótesis).

Si al fundar su tesis el proponente P no usase *todas* las hipótesis de su colección ***H***, el oponente O – en casos como los de las lógicas relevantes – podría acusarlo de incumplir su promesa teórica, pero ¿qué motivo podría tener para restringirle de antemano el número de hipótesis sobre las cuales se le permite fundar su tesis? Por ejemplo, si el oponente le respondiese:

(O) "*Señor proponente* P*, he decidido que la colección de hipótesis sobre las que le estará permitido fundar su tesis puede contar a lo sumo con una (o con dos, ..., o con n) hipótesis*".

Tal decisión de O sonaría arbitraria, pues no tiene en cuenta la naturaleza del problema de fundamentación del caso. El proponente podría contestar a esa restricción arguyendo de la siguiente manera:

(P) "*Señor proponente* P*, sobre la base de una (dos, ..., n) hipótesis de mi colección no puedo fundar mi tesis, de modo que no emprenderé la tarea de fundarla, a menos que usted consienta en que use todas las hipótesis de la colección* H *que propongo*".

Podemos advertir que con una restricción como la propuesta por el oponente, que *restringe* el número de hipótesis admitidas ***sin dar razones** metadialógicas*, se podría expulsar arbitrariamente del dominio de lo argüible a casi cualquier problema de fundamentación. En el caso de la fundamentación de un enunciado universal $\wedge x.A(x)$ puede ser necesario un número infinito de hipótesis de la forma $A(n)$ para fundar la tesis, aunque esto se realice de modo finito perfecto en el caso de una recursión finita o infinita, o se realice de modo finito imperfecto en el caso de una "inducción" empírica.

Lo interesante del problema es:
(1) Que el oponente carece de argumentos *inmanentes al diálogo* para restringir el número de premisas que se le pueden conceder al proponente. Si hubiera fundamentos, éstos deberían ser que trasciendan la estructura del diálogo, que podrían tener que ver, por ejemplo, con los límites temporales de la discusión o con condiciones materiales, como la capacidad de información y control del hardware disponible.
(2) Además el oponente sólo demostraría interés en escuchar la argumentación hipotética del proponente, si estuviera dispuesto a conceder la colección de hipótesis sobre las cuales aquél se compromete a emprender la fundamentación de su tesis.

De este modo podríamos considerar a la no limitación de la colección de las hipótesis como una ***condición pragmática de posibilidad*** (o *a priori*) de la tarea de fundamentación. Éste es un argumento importante para abandonar los juegos dialógicos estricto y paraconsistente y sus correspondientes cálculos secuenciales, que son los que, con sus reglas de desarrollo, pusieron un límite arbitrario al número de hipótesis mediante un límite a los ataques y las aserciones del oponente. En resumen, esos juegos ***E*** y ***P*** nos fueron de ayuda para poder caracterizar propiedades estructurales de los distintos cálculos, pero no nos serán útiles para la construcción de los sistemas lógicos, ni para sus fundamentos protológicos. Por ello en lo que sigue nos limitaremos a los juegos ***I*** y ***C***.

Otro tema pendiente, que no hemos discutido en detalle en este capítulo, es el de la razonabilidad de la forma irrestricta del principio de no contradicción, sus posibles restricciones y el problema conexo de las lógicas paraconsistentes. Ése es un tema que hemos discutido en trabajos previos a los que remitimos y que resumiremos en el capítulo siguiente, cuando consideremos el problema de la existencia de una protológica. Sin embargo ya sabemos que, si no se limitan los ataques reiterados del proponente en una misma rama de diálogo, el desarrollo de una lógica paraconsistente sólo es posible si se modifican las reglas de ataque y defensa de las negaciones.

En este capítulo nos hemos ocupado de las estructuras fundamentales de juegos de diálogos, por lo que agregamos los juegos ***E*** y ***P*** y sus variantes a los juegos que desarrollaron Paul Lorenzen y Kuno Lorenz. Hemos comparado con bastante detalle esos sistemas mediante fórmulas que son tesis en unos sistemas y no en otros. Esto nos llevó a discutir la relación entre las reglas de desarrollo para el ataque y la defensa, y con los principios lógicos y algunas otras fórmulas algunas veces controvertidas. Lorenzen y Lorenz comenzaron hace ya muchos años la presentación dialógica de la lógica. Para los detalles del tratamiento de esos autores recomendamos el estudio de las obras siguientes: LORENZ, Kuno: "Dialogspiele als semantische Grundlage von Logikkalkülen", reeditado en el trabajo conjunto de LORENZEN Y LORENZ de 1978, p. 96-162, LORENZEN, Paul: “Logik und Agon”, *Atti del XII Congresso Internazionale di Filosofia* (Venezia, 12-18 Settembre 1958), vol. 4, Firenze, Sansoni Editore, 1960, 187-194, reimpreso en el mismo trabajo de 1978, p. 1-8, LORENZEN, Paul: *Methodisches Denken*, Frankfurt/Mn.: Suhrkamp, 1974 (especialmente el capítulo "Protologik", p. 81-93), LORENZEN, Paul: *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie*, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich, 1987 y LORENZEN, PAUL–LORENZ, KUNO: *Dialogische Logik*, Darmstadt, Wissenschaftliches Buchgesellschaft, 1978. Otros desarrollos interesantes se encuentran en trabajos de Shahid RAHMAN y Juan REDMOND.

Capítulo 9.
Diálogos y razón.

"*Un benefactor de los hombres sería quien pudiera realizar una crítica del entendimiento humano, encerrarlo en su círculo.*"
Johann Wolfgang von Goethe[132]

9.1. Introducción.

En nuestro libro *Cuestiones de fundamento* tomamos como lema el comienzo del diálogo platónico *Filebo*, que trata sobre el placer (heedonée) y la templanza (sophrosýnee). Éste es especialmente pertinente en esta última parte. Y el lema específico de este capítulo es valorativo: Goethe considera como benefactor de la humanidad a quien pudiera "encerrar en su círculo al entendimiento humano". Si ese párrafo, que aparece en su obra póstuma, hubiese sido escrito luego de la aparición de la *Crítica de la razón pura*, significaría que Goethe no consideró a esa crítica como una manifestación adecuada del entendimiento y la razón.

No aspiramos a ser ese benefactor que pedía Goethe. Nuestro propósito es modesto: tratamos de recuperar y poner en un simbolismo lo más adecuado posible algunas pocas tesis de la historia de la filosofía que dan cuenta parcial de algunos desarrollos y problemas centrales de la lógica contemporánea, y de su relación con el tema de la razón y el entendimiento, problemas que aparecen con Platón y llegan a nuestros días. Una solución completa y suficientemente fundada de estos problemas está probablemente más allá de los alcances de nuestros entendimientos finitos, o bien es una tarea infinita con una hermenéutica de indefinidas reinterpretaciones y ampliaciones. Pero eso no significa que, al menos desde Platón,

---

[132]Tomado de su *Nachlaß* (*Legado* o *Escritos póstumos*): "*Ein Wohltäter der Menschen wäre, wer eine Kritik des Menschenverstandes leisten könnte. Den Menschenverstand in seinen Kreis einschließen.*" Se cita el texto en MESCHKOWSKI 1978, 203. La traducción es casi literal.

no contemos con desarrollos imperfectos, pero al menos parcialmente adecuados, acerca de lo que es la razón y la lógica.

Como ya hemos señalado en el capítulo anterior, alcanzar ciertos tipos necesarios de acuerdos, consensos u homologías constituyen el último fundamento de los diálogos lógicos formales. También el acuerdo u homología, aunque en un sentido más amplio, es el núcleo de lo que denominamos 'razón', tal como se desarrolla, por ejemplo, en la literatura platónica y más específicamente en diálogos como el *Gorgias*. Para comenzar podemos agregar aquí que la homología *en sentido amplio* es sólo el "síntoma" de que se ha alcanzado un fundamento para alguna tesis propuesta previamente por alguna de las partes del diálogo. Se presume que hay fundamento con la aparición de una homología, es decir la manifestación de que las partes del diálogo coinciden respecto de una tesis.

Vimos en el capítulo anterior que ese 'aseverar lo mismo' llegó a ser – veintitrés siglos más tarde – el núcleo de la tarea de fundamentación en los juegos dialógicos de Lorenzen y Lorenz. También la distinción esencial entre la actividad del orador y la del filósofo (y por extensión también la del científico), que nos viene desde el Sócrates platónico, se refleja en la distinción de Lorenzen entre el conversar *uno contra el otro* y *uno con el otro*, como lo expresa el siguiente pasaje: "*Según que los participantes de una conversación quieran hablar uno contra el otro o uno con el otro, es adecuada la lógica erística o la lógica dialéctica*."[133] En esta última parte de nuestro estudio nos ocuparemos no sólo de la homología formal, sino también de la homología material, y abordaremos varias formas de actividad retórica: el discurso oracular, los diálogos erísticos o polémicos y los diálogos

[133] V. LORENZEN-LORENZ 1978, p 8: "*Je nachdem, ob die Partner eines Gesprächs gegeneinander oder miteinander reden wollen, ist die eristische oder dialektische Logik die angemessene Logik.*" (Palabras finales de "Logik und Agon", LORENZEN 1958.)

cooperativos. Trataremos también con cierto detalle la distinción entre fundamento suficiente e insuficiente.

El primer enunciado en la introducción del libro de Robert Nozick *The nature of rationality* reza así: "*La palabra filosofía significa amor a la sabiduría, pero lo que los filósofos realmente aman es razonar.*"[134] Debemos admitir que este trabajo no coincide sin matices con esa aserción, porque seguimos considerando que el *fin* de la filosofía es la sabiduría intelectual y moral. Es decir, compartimos la creencia de que el eros del filósofo que no ha extraviado su vocación – y esto incluye al científico – lo mueve a buscar y encontrar, de ser ello posible, un fragmento de verdad, o al menos aproximarse a ella mediante enunciados "verosímiles"; y en el ámbito práctico alcanzar un conocimiento parcial del bien y de la justicia, o aproximarse al menos a una buena semejanza de ellas.

La razón es el *medio*, nada más y nada menos, que utiliza el filósofo (y también el científico) para aventurarse a esta empresa. Es cierto, los filósofos pueden amar razonar, pero lo aman como medio, no como fin. Si esto último fuese el caso, no serían filósofos *stricto sensu*, sino fundamentalmente agonistas o luchadores, más o menos vanidosos, que quieren imponerse en la polémica por prestigio o mera voluntad de poder, o bien serían retóricos o sofistas que buscan primordialmente persuadir a un público y ganarlo para nuestros propios fines, o los de sus empleadores. El Gorgias platónico testimonia precisamente esa diferencia: la persuasión, que es el fin esencial del discurso del retórico, será sólo un medio para el dialéctico. Pero aún más importante, al cambiar el fin también se modificará esencialmente el medio. Así varios medios retóricos se revelarán como incompatibles con los medios dialécticos. Y el conjunto de las reglas necesarias del diálogo en el que el fin de ambas partes es la búsqueda de la verdad y la justicia, constituirá el medio que llamamos razón.

[134] NOZICK 1993, XI, Introduction, xi: "*The word philosophy means the love of wisdom, but what philosophers really love is reasoning.*"

9.2. Formas históricas.

En la tradición occidental podemos tomar como comienzo de la teoría de la razón al desarrollo de la dialéctica en Sócrates y fundamentalmente en Platón. Este nacimiento de la dialéctica fue inicialmente una reacción contra las argumentaciones sofísticas de la retórica. Estos comienzos llegan a su primera plenitud con Aristóteles en sus trabajos bautizados *Tópicos*, *Refutaciones sofísticas* y *Retórica*. Es abundante la bibliografía. Ciertamente hay otros orígenes de la historia de la razón en otras tradiciones que son casi desconocidas para nosotros, como la de la filosofía de la India con sus conceptos de 'prakrti' (lo originario, el fundamento) y 'vyapti' (una clase de relaciones próximas a la noción de implicación): véase por ejemplo LORENZ, Kuno, en MITTELSTRAß 1995, III, 327-8, IV, 574-6, y en BOCHENSKI, *Formale Logik*.

La razón se nos presenta bajo dos formas: fuerte y débil. Las formas fuertes de la razón son las más conocidas, aunque sean las menos usadas. Sus formas débiles, aunque son las más usadas, no se estudian de modo detallado, aunque lo fueron en la antigüedad y la edad media, especialmente a través de teorías acerca de la inducción, la analogía, la argumentación teleológica, etc.

Esas tradiciones se continúan en los desarrollos contemporáneos de las formas débiles de la razón, especialmente en el tratamiento de las teorías de la inducción, la analogía, la abducción, la argumentación por semejanza, las inferencias probabilistas o estadísticas, la argumentación teleológica, los procedimientos de fundamentación en las lógicas no monótonas, los sistemas de argumentación rebatible, los argumentos contrafácticos, etc. Recuérdese para ello las obras de Popper y Carnap, y el artículo en MITTELSTRAß 1995, III, 387-8, llamado '*Prüfbarkeit*', es decir '*testability*' en inglés o '*contrastabilidad*' en español.

9.3. Tres géneros discursivos.

El orador busca persuadir, es decir influir en las *creencias*, la *voluntad* y las *emociones* de su audiencia de un modo que lo satisfaga o convenga a sus intereses. Aquí no nos ocuparemos tanto de la voluntad y las emociones, pero sí del primer propósito: influir sobre las creencias de la audiencia.

El primer género discursivo puro es el *discurso oracular*, que tiene una "estructura real" *ternaria* con dos componentes reales, un orador y su audiencia, y un aspecto simbólico, el discurso del orador. Todo ello lo esquematizamos así:

(1) $O(d) \Rightarrow A,$

donde 'O' simboliza al orador real, 'A' la audiencia en sentido estricto – es decir, el público que escucha, pero no habla –, '*d*' el discurso de ese orador y '⇒' la relación de persuasión, es decir: 'O intenta persuadir a A en *d*'. El discurso del orador determina lo que llamamos "orador funcional"[135]. Si sólo tenemos en cuenta a ese orador funcional – determinado por el discurso –, podemos reemplazar la estructura (7) por la siguiente "estructura funcional":

(2) $d \Rightarrow A.$

Discurso, audiencia y relación de persuasión constituyen el núcleo de un discurso oracular, con independencia del orador particular que lo enuncie e intente persuadir. Un discurso de cualquier índole – religioso o político – frente a una audiencia permanece el mismo aunque cambien los persuasores.

El discurso oracular se encuentra en religiones y movimientos políticos, también en muchas filosofías – o fragmentos de filosofías –, y es una componente esencial de lo que muchas veces denominamos "pseudociencia". Ese discurso

[135] Con esto decimos que dos oradores reales que dicen el mismo discurso determinan – o son – un único orador funcional.

se manifiesta como una revelación de verdades no sometidas a control crítico. No abundaremos sobre él.

Cuando hay dos oradores con tesis al menos aparentemente incompatibles que quieren persuadir a una misma audiencia, aparece un fin derivado: vencer a su oponente, que es a su vez un medio para el primero, persuadir a la audiencia. Surge así la segunda especie discursiva pura, la polémica. Un principio de la guerra dice: *mors tua vita mea*, según una máxima medieval. De otro modo, tu derrota es mi victoria, por lo que la deseo sin culpas. En una competencia, o en la tentativa de alcanzar una meta, el principio indica que habrá un solo vencedor. Éste es también el principio de la polémica, una guerra de palabras.

En la polémica un orador busca influir en las creencias de la audiencia y para hacerlo necesita derrotar el discurso de su oponente para evitar que éste la persuada. La estructura real de esta situación es pentádica, con tres partes reales (dos oradores, O_1 y O_2 y una audiencia A) y dos partes simbólicas, los discursos de los oradores d_1 y d_2, que se suponen al menos aparentemente incompatibles y determinan por ello dos oradores funcionales diferentes. Su esquema es el siguiente:

(3)
$$\begin{array}{ccc} O_1(d_1) & | & O_2(d_2) \\ \searrow & & \swarrow \\ & A & \end{array}$$

Las relaciones posibles entre los oradores son varias, pero no entraré aquí en esos detalles. Lo que nos interesará es que en la polémica los oradores no necesariamente buscan persuadirse mutuamente, sino que esencialmente buscan persuadir a la audiencia. Eso lo que señalamos con la barra '|' entre los oradores. El triunfo de las tesis de un orador exige la derrota de la tesis de su oponente, es decir, la polémica es un juego de suma cero desde el punto de vista de los oradores, pues los resultados posibles son tres: que el primero gane al segundo, o viceversa, o que ninguno logre derrotar al otro. Desde el punto de vista de la audiencia el juego puede ser incluso de suma negativa: los argumentos de los oradores pueden lograr que ninguna de las tesis persuada a nadie.

El problema que sigue es el de los medios que puede usar cada orador para alcanzar la victoria, o evitar la derrota. Algunos recursos para vencer son los sofismas, muchos de ellos conocidos desde la antigüedad. Ellos están en la cuna de la lógica, porque, si bien cada orador puede usarlos para derrotar el oponente, también quiere evitar ser derrotado por ellos. Es así que surgieron entre los sofistas estudios sobre la estructura de cada sofisma y la manera de evitarlos. Esto es crucial en el género retórico judicial (γένος δικανικόν, *genus iudiciale*), que juzga el pasado, y en el género deliberativo (γένος συμβουλευτικόν, *genus deliberativum*), que se refiere al futuro.[136] Éste es uno de los comienzos de la lógica, pues un polemista, antes que aprender a deducir correctamente, pretende evitar ser engañado y que su audiencia sea engañada.

Aunque el fin de la polémica sea persuadir en las propias tesis mediante la derrota de las tesis del oponente, al escudriñar cada orador los ataques del oponente para evitar ser derrotado, tiene como consecuencia el establecimiento de una serie de reglas a las que se obligan las partes, para que la polémica sea aceptable para ambas partes. Se sale de la sofística por un sistema de reglas de juego que anticipan la lógica al servicio del derecho y la política. No se necesita ser lógico para vencer, pero se necesita algo de lógica para evitar ser vencido.

Hay un tercer fin, además de persuadir y derrotar, que es fundamentar. Éste nos pone en un escenario diferente. Cuando nos proponemos fundamentar ya no buscamos convencer a una audiencia sobre la verdad o justicia de nuestras afirmaciones, sino que nos encontramos en una situación ambigua frente a nuestras propias tesis. Es la situación en que nos encontramos

[136] Aristóteles agrega un tercer género retórico, el γένος ἐπιδεικτικόν (*genus demonstrativum* o *laudativum* en latín), que se refiere al presente.

cuando creemos y dudamos simultáneamente de nuestras creencias y por eso las presentamos al escrutinio público. Entonces cada tesis es presentada por un orador, el proponente, no para persuadir, sino para pedir ayuda al oponente para someterla a prueba. Aparece así una peculiar división del trabajo intelectual: el que propone se especializará en aportar los argumentos en favor de una tesis, y el oponente colaborará proponiendo todas las objeciones posibles. En esta situación ya no importa que haya una audiencia que calle, pues los oradores ya no buscan convencer ni derrotar a nadie, sino colaborar en la puesta a prueba de la tesis. El juego puede ser entonces de suma positiva, pues ambos dialogantes pueden ganar: si el proponente desbarata todas las objeciones del oponente y logra además que todos sus fundamentos sean aceptados por éste, entonces ambos habrán fundado la tesis y por lo tanto aumentado su conocimiento. Y si el proponente no logra rebatir alguna objeción del oponente, o no logra que se acepte alguno de sus fundamentos, entonces la tesis se presentará como no fundada, con lo que ambos se habrán desembarazado de un error, como es la creencia en una tesis infundada. El cambio de fin de la situación retórica – el fundar – es el que produce la posible suma positiva del juego dialógico.

La estructura de este género discursivo, llamado 'diálogo cooperativo', es tetrádica y se esquematiza así:

(4) $O_1(d_1)\Uparrow O_2(d_2)$.

Aquí no hay audiencia en sentido estricto y la flecha '⇑' indica que la intención de los oradores no es ni la persuasión ni la derrota del otro, sino la colaboración en la búsqueda de un fundamento para sus tesis, la auto- y la hétero-corrección. Como los discursos determinan los "oradores funcionales", podemos esquematizar la estructura de la siguiente manera:

(5) $d_1\Uparrow d_2$.

En un *diálogo cooperativo* tenemos una situación comunicacional:

– cuyo *punto de partida* es la *incertidumbre compartida* por ambos oradores sobre la defendibilidad de sus creencias sobre (aspectos de) la realidad, sobre los fines a perseguir, o los medios a utilizar, y

– y en la cual el *fin común* de los oradores es la búsqueda cooperativa de fundamentos para las tesis teóricas o prácticas (alcanzar la verdad, o al menos la verosimilitud, o la justicia, o al menos una semejanza de ella).

Este fin común difiere del de la polémica y caracteriza a los que llamamos diálogos cooperativos. De él se desprenden algunas notas necesarias. Consideremos un par de ellas: una condición de posibilidad pragmática, la *brajylogía*, o brevedad del discurso, de Platón, y un *síntoma* necesario de la razón o fundamento, la *homología*.

La *brajylogía* es una característica temporal vaga, como se advierte en el Gorgias, pero tiene al menos un aspecto que podemos considerar una condición de posibilidad pragmática: que una vez que tomamos la decisión común, que constituye al *medio* que llamamos *razón*, por la que el *fin del diálogo* no es – como en la polémica – la derrota del adversario para la persuasión del público (y ocasionalmente también del adversario), sino que el objetivo es *resolver un problema teórico o práctico*, entonces se advierte que *para alcanzar dicho fin es preciso*, como condiciones-marco regulativas:

(1) que ambas partes puedan intervenir, pues en caso contrario no hay diálogo,
(2) y que el diálogo concluya en tiempo finito, por lo que la duración de las intervenciones debe permitir que el diálogo *pueda concluir*. No se puede asegurar que el diálogo concluirá, pero debe ser posible que concluya.

La *homología*, que ambas partes "digan lo mismo" al concluir el diálogo, es al menos un *síntoma* del cumplimiento del fin del diálogo cooperativo. Como dice Sócrates: "si yo no obtengo ***tu*** propio testimonio, y sólo él, a favor de mi propia afirmación, estimo no haber hecho nada para solucionar nuestro debate, no más que tú, por otra parte, si tú no obtienes el apoyo de ***mi*** testimonio, sólo entre otros, y si no desdeñas los otros testimonios".[137] Esto puede ocurrir de varias maneras, pero requiere que el fin del diálogo ya no sea la persuasión del público, o del oponente, sino que sea *resolver el problema* que le dio origen. En tal caso un *síntoma necesario*, no suficiente, de que se ha alcanzado ese fin, es *que ambas partes concuerden en la tesis final*.

La persuasión en la polémica solía proponer medios tales como la pluralidad de testigos de cualquier ralea, también perjuros, como acontecía y acontece en los procesos judiciales y en los discursos políticos. Cuando el fin cooperativo de los dialogantes es la verdad y la justicia, su cumplimiento se manifiesta por el síntoma necesario de la concordancia del oponente con el proponente. Hablamos sólo de un 'síntoma', porque los dialogantes pueden llegar a concordar, a decir lo mismo, también cuando se equivocan. La homología ya se manifiesta en el principio de identidad, principio universal para toda lógica y, como vimos, axioma genérico de los cálculos secuenciales.

El "ascenso dialéctico" pasa de la pluralidad de opiniones a la homología u opinión común, cuya estructura esquematizamos así:

(6) $$\underbrace{O_1(d_1)\Uparrow O_2(d_2)}_{\text{conflicto}} \rightarrow \underbrace{O_1\cup O_2(d)\Uparrow}_{\text{síntesis}}$$

En el momento "sintético" hay una opinión común '*d*', "síntesis" – o tesis que supera el conflicto – de las opiniones iniciales, y un solo orador funcional '$O_1\cup O_2$', la unión de los dialogantes. La flecha '⇑' en la síntesis indica que el nuevo

[137] PLATÓN, *Gorgias*, 472b-c, ver también 474a y 487d-e: "*Nuestro acuerdo, en consecuencia, probará realmente que hemos alcanzado la verdad*".

orador sintético ‘$O_1 \cup O_2$’ permanece abierto a la crítica del discurso común ‘*d*’ por otros oradores. Para la estructura funcional simplificamos el esquema de ascenso dialéctico del modo siguiente:

(7) $$d_1 \Uparrow d_2 \quad \rightarrow \quad d\Uparrow.$$

Estos ‘ascensos dialécticos’, caracterizan a la razón en todas sus formas, en la filosofía, las ciencias y en general en todas las actividades racionales.

En el diálogo cooperativo cambia la suma del juego, porque el fin del juego ha cambiado. Ningún dialogante sabe inicialmente cuán defendible es su tesis, de modo que, si un oponente muestra a un proponente que hay motivos para cambiar o corregir su tesis, entonces quien es corregido gana, porque es liberado del error. Al corregirnos mutuamente de nuestros errores nos “aliamos” por lo “más verdadero”, como se dice en el texto que citamos del Filebo. Necesitamos la crítica del oponente que, al corregirnos, nos libera del error y la injusticia. De este modo en el diálogo ambos dialogantes ganan: quien critica y destruye una tesis errónea y quien es criticado y liberado de ella. La suma del diálogo es positiva y eso no es casual, sino consecuencia del cambio de fin del mismo: *el fin mínimo de la dialéctica es liberarse paulatinamente del error y de la injusticia y alcanzar poco a poco un creciente grado de verosimilitud y justicia.*

La realización plena del fin, en términos clásicos su “entelequia”, es la obtención de la verdad y la justicia. Pero esa plenitud suele ser inalcanzable. Sólo se la logra en dominios de problemas reducidos, como en buena parte de las ciencias simbólicas (lógica y matemática), algunas regiones de la filosofía y fragmentos protocientíficos de algunas ciencias empíricas. En otros dominios de problemas sólo podemos liberarnos del error y la injusticia paulatina e imperfectamente en un camino sin término. En todos los casos, así como para Sócrates el castigo es condición necesaria para la salud del alma, así la crítica es necesaria para la liberación del error. Si lo peor que nos puede pasar en la vida práctica es no ser castigados por nuestras faltas, lo peor que nos puede ocurrir en la vida teórica es no ser corregidos de nuestros errores.[138]

Alcanzar el fin del diálogo – la verdad o la justicia – se facilita cuando toda la información es accesible para ambos dialogantes, pues cada parte tiene más posibilidades de ganar compartiendo toda su información con la otra parte. Los diálogos como juegos de suma variable tienen otra propiedad interesante: colaborar produce la ganancia máxima para cada una de las partes, de manera que no restan intereses contrapuestos o conflictos. Es decir, alcanzar el fin de un diálogo cooperativo, es alcanzar una "*armonía ilimitada*".

Todos los diálogos cooperativos constan de una tesis inicial y argumentos en pro y en contra. Su forma elemental tiene las siguientes características:

(1) Los oradores se diferencian entre el proponente **P**, cuyo oficio es proponer tesis y defenderlas mediante argumentos que las favorezcan, y el oponente **O**, cuyo oficio es atacarlas presentando objeciones.

(2) Los discursos constan, en el caso de **P**, de una tesis y sus argumentos favorables, en el caso de **O**, de sus objeciones.

En el capítulo anterior vimos la estructura general de esos diálogos, que era la siguiente:

(8) $\quad \mathbf{O} \;\Big|\; \mathbf{P}(t)$,

donde '**P**' es el orador proponente (o el que responde: *respondens*), '**O**' orador oponente (o el que pregunta: *quaerens*), '*t*' la tesis inicial del proponente. La carga de la prueba originaria cae sobre el proponente. El oponente tendrá cargas de la prueba derivadas, pero sólo si hace alguna aserción a lo

[138] Ver *Gorgias*, 476a-484b.

largo del diálogo. El fin común de los dialogantes **P** y **O** es averiguar, luego de todos los argumentos favorables y todas las objeciones que se puedan presentar, si es posible seguir sosteniendo la creencia propuesta o es preciso desecharla.

Lorenzen y Lorenz introdujeron en sus diálogos una noción más amplia que la de verdad y diferente de la noción de "satisfacción" de la teoría conjuntista de modelos de Tarski (y de su derivada "satisfacibilidad"). Se trataba de la noción de "*defendible*" (y su derivada "*defendibilidad*") en un diálogo regulado o 'juego dialógico'.[139]

Un enunciado en un juego dialógico es "*defendible*", cuando las reglas del juego del diálogo permiten defenderlo de las objeciones del oponente. La defendibilidad, como la satisfacibilidad, no implica la verdad, pero es su condición necesaria. Para que un enunciado sea "verdadero" en un juego dialógico determinado será preciso que sea defendible de todo ataque posible del oponente. De ese modo 'defendible' y 'defendibilidad' son predicados semánticos de origen pragmático más amplios que el de verdad, y se utilizan tanto en el caso de enunciados que aspiran a ser verdaderos por correspondencia, cuanto en el de aquéllos para los que se pretende sólo una verdad por coherencia.[140]

Un enunciado es fundable si y sólo es defendible. Estos conceptos no son sinónimos, pero son coextensos. La '*fundabilidad*' o '*defendibilidad*' puede ser de dos géneros: la *fundabilidad* o *defendibilidad suficiente* o *perfecta*, cuando toda objeción es respondida en el diálogo, o la *fundabilidad* o *defendibilidad insuficiente* o *imperfecta*, cuando eso no ocurre. La fundación o defensa suficiente o perfecta, es el *desideratum*

[139] Estos conceptos corresponden a una "semántica" de fundamento pragmático y reemplazan a los conceptos tarskianos de "satisfacible" y "satisfacibilidad", que resultan inadecuados fuera de una teoría de modelos conjuntista con su reducida estructura metafísica.
[140] La "defendibilidad" corresponde en los juegos dialógicos a la noción de "satisfacción" en los modelos conjuntistas de Tarski.

de toda fundación o defensa insuficiente. A continuación consideraremos los conceptos centrales de las estructuras de fundamentación dialógica. Hemos considerado en detalle estos temas en otras obras.[141] Aquí sólo daremos una versión resumida.

9.4. El fundamento y sus nociones afines.

Cuando el proponente **P** sostiene una tesis t y un oponente **O** la cuestiona, es decir, cuando duda o señala alguna debilidad de t, para que **P** convenza a **O** deberá presentar al menos una "base" $\mathbf{b}_t$ y al menos una regla r_j, aceptadas por ambos, que permitan fundar a t en esa base $\mathbf{b}_t$. Esto es proponer un "fundamento", que definimos así:

D9.1. Un *fundamento* **f** *en sentido lato* para una tesis t – en un lenguaje L común a los dialogantes – consiste de una base $\mathbf{b}_t$ para t y un conjunto de reglas (lo expresamos así: $\mathbf{f}(t) = \mathbf{b}_t, \mathrm{R}_t$), vacíos o no vacíos, tales que la base es, o bien un conjunto $\mathbf{H}_t$ de hipótesis h_i $(0 \leq i \leq m)$, o de "fenómenos" ("representaciones" = *Vorstellungen*) de algún tipo, o bien una combinación de ambas, y $\mathbf{R}_t$ un conjunto de reglas r_j $(0 \leq j \leq n)$ que permiten pasar, de algún modo, de la base $\mathbf{b}_t$ a la tesis t.

La base $\mathbf{b}_t$ de una tesis puede consistir sólo de hipótesis, o consistir exclusivamente de fenómenos, pero en general será una mezcla de ambas cosas. Esto último es lo que más abunda, pues no son mayoría las tesis que no dependen sino de lo percibido. Éstos son casos más difíciles de encontrar. La mayoría de las tesis tienen "carga teórica", es decir, dependen no sólo de los datos de la percepción, sino también de otras hipótesis previas, para las que habrá que dar a su vez un fundamento.

D9.2.1. Un fundamento para t es vacío, si y sólo si el conjunto de reglas $\mathbf{R}_t$ es vacío.

---

[141] Ver en Bibliografía los textos ROETTI 2001, ROETTI 2005, ROETTI 2007, ROETTI 2011, ROETTI, 2014.

A las tesis con fundamento vacío las simbolizamos '$*t$'. Ellas corresponden a las "*meras opiniones*" o "eikasíai" de Platón, enunciados cuyos objetos eran "sombras" (eikónes) o "reflejos" (eídoola).

D9.2.2. Un *fundamento* $\mathbf{f}(t)$ es *fundamento en sentido estricto* si y sólo si no es vacío, es decir, si $\mathbf{R}_t$ y su base $\mathbf{b}_t$, respecto de t, no son vacías ($\mathbf{H}_t$ puede ser vacío o no vacío).

Todo fundamento en sentido estricto tiene al menos una regla y una base no vacías, pero puede tener una o más hipótesis, o no tener ninguna y constar sólo de "experiencias" de "estados de cosas", dados o construidos por los seres humanos que dialogan.[142]

– Si la base $\mathbf{b}_t$ consiste de un conjunto de hipótesis $\mathbf{H}_t$, estamos en el caso de una fundamentación indirecta que reposa en al menos una hipótesis. Entonces, para pasar de ella a la tesis fundada se necesita al menos una regla sintáctica, por lo que tampoco $\mathbf{R}_t$ será vacía. Estas reglas con extremos homogéneos pertenecen a la sintaxis y son o bien criterios perfectos de deducción, o bien criterios imperfectos de "soporte", como la inducción, la abducción, la analogía, la probabilidad, las correlaciones, las inferencias estadísticas en general y bayesianas en particular, etc.

– Si $\mathbf{H}_t$ es en cambio vacío, nos encontramos con las "*verdades* (o *verosimilitudes*) *inmediatas*", es decir $\mathbf{f}(t) = \{\mathbf{b}_t, \mathrm{R}_t\}$, con $\mathbf{H}_t = \emptyset$ y $\mathbf{R}_t \neq \emptyset$. Esas verdades o verosimilitudes existen, su base $\mathbf{b}_t$ no es enunciativa, sino que consta de "fenómenos", "representaciones"

[142] La noción de "construcción" no es fácil de caracterizar, pues no se determina por una definición, sino por procesos acumulativos de generación de entidades simbólicas, pero también reales, como en la fabricación de reglas, relojes, procedimientos de medida de otras variables, como la masa, la carga eléctrica, los generadores de azar, etc. Para nuestra discusión actual nos podemos conformar con la escasa caracterización dada arriba.

o "experiencias", dadas o construidas, y hay al menos una regla semántica que conecta $\mathbf{b}_t$ con t. Esas reglas con extremos heterogéneos son criterios de verdad o de verosimilitud.

– Si $\mathbf{H}_t$ no es vacío, pero no es idéntico a $\mathbf{b}_t$, entonces $\mathbf{b}_t$ tiene también fenómenos. Entonces nos encontramos con los casos intermedios de "*verdades* (o *verosimilitudes*) con base fenoménica, dada o construida, pero con "carga teórica". Estos casos de fundamentos, que son parcialmente homogéneos y parcialmente heterogéneos, son los más abundantes en las situaciones de fundamentación científica.

Cuando las reglas tienen extremos heterogéneos, uno de ellos simbólico y el otro no simbólico, surge al menos un problema: el de la identidad, o al menos semejanza, entre la base no simbólica $\mathbf{b}_t$ y su expresión lingüística t. Tarski procuró evitar en lo posible esa heterogeneidad y para ello tradujo esta relación a un metalenguaje semántico en el que se reemplaza la base no simbólica $\mathbf{b}_t$ por la expresión t en un lenguaje de grado ínfimo y el discurso que habla de ella por una expresión 't' de su primer metalenguaje, y la relación entre ambas expresada en el correspondiente metalenguaje. De ese modo pudo enunciar su definición semántica de verdad T, que con ese traslado de un grado lingüístico se instala de lleno en el terreno simbólico. Esa traducción de Tarski es adecuada y útil para construir una semántica conjuntista adecuada, pero es algo artificiosa, porque la relación de verdad no se da originariamente entre dos niveles de lenguaje. La relación de verdad originaria es una relación entre el lenguaje y "la cosa". De modo que en la traducción de Tarski se escamotea un aspecto original de las relaciones de verdad y verosimilitud, que se da entre lo fenoménico no simbólico y su traducción simbólica, aunque la relación es más compleja.

La cuestión de las verdades inmediatas – a la que agregamos aquí la de las verosimilitudes inmediatas – está entonces íntimamente ligada al problema del nexo del discurso con la realidad. Éste ha sido un problema central en la historia de la teoría del conocimiento, que nunca fue completamente resuelto

– y que tal vez no sea resoluble completamente más allá de toda duda –, pero tener presentes sus detalles estructurales nos puede ayudar a avanzar en esa tarea.

La tarea de quien argumenta en favor de una tesis consistirá en lograr que todos los participantes del diálogo admitan el fundamento en sentido estricto, es decir sus reglas y su base. Si lo consigue, habrá alcanzado la aceptación al menos provisoria de la tesis por parte de todos los dialogantes. De las cualidades de sus componentes dependerá la naturaleza del fundamento de la tesis. Esto nos lleva a las definiciones siguientes:

D9.3. Una tesis t es (*simplemente*) ***fundada*** ($_{\mathrm{f}}t$), si su fundamento **f** *ha superado* ***al menos un*** *cuestionamiento al que se lo haya sometido*.

El dominio de tales tesis es el de lo (*simplemente*) *fundado*.

D9.4.1. Una tesis fundada $_{\mathrm{f}}t$ es ***suficientemente fundada*** ($_{\mathrm{sf}}t$), si su fundamento *ha superado* ***todos*** *los cuestionamientos* ***posibles***, tanto respecto de las reglas de $\mathbf{R}_t$ como de su base $\mathbf{b}_t$ (por ejemplo en el caso sintáctico los posibles enunciados de $\mathbf{H}_t$).

El dominio de los enunciados suficientemente fundados es el de lo que, al menos desde Platón, llamamos "epistéemee", el dominio de la razón suficiente. Ejemplos clásicos de tesis suficientemente fundadas son innumerables teoremas de la lógica y la matemática. Podríamos agregar algún fragmento de la protofísica y de la protociencia de otras disciplinas científicas, de lo cual daremos algunos ejemplos más adelante.

D9.4.2. Una tesis fundada $_{\mathrm{f}}t$ es ***insuficientemente*** (*o parcialmente, o precariamente*) ***fundada*** ($_{\mathrm{if}}t$), si su fundamento ***no*** *ha superado todos los cuestionamientos posibles*.

El dominio de los enunciados insuficientemente fundados es el de la "pístis" platónica, o dominio de la razón insuficiente.

D9.5.1. Una tesis insuficientemente fundada ${}_{if}t$ es ***bien fundada*** (${}_{bf}t$), si su fundamento f *ha superado todos los cuestionamientos que han surgido* ***hasta el presente***.

Creemos que esta definición rescata la noción tradicional de la "agathée pístis" u "opinión verdadera". Los teoremas de la mecánica clásica fueron tesis bien fundadas por largo tiempo en la física. Luego lo fueron los de la mecánica relativista. En la actualidad es bastante difícil saber si una tesis de la física tiene ese carácter.

D9.5.2. Denominaremos '***mínimamente fundada***' (${}_{mf}t$) a una tesis insuficientemente fundada ${}_{if}t$ que *ha superado hasta el momento sólo* ***una*** *objeción*.

La existencia de fundamento insuficiente para una tesis no asegura su aceptación por toda una comunidad teórica. Si una tesis es insuficientemente fundada, puede no obstante no ser aceptada por esa comunidad. ¿Por qué?

1. Puede ocurrir que haya otras tesis sobre el mismo tema que se consideren mejor fundadas respecto de la colección de objeciones presentadas, aunque pueda ocurrir que las respuestas exitosas no sean sobre las mismas objeciones de la colección.

2. También puede ocurrir que, aunque haya una sola tesis sobre esa cuestión, la comunidad teórica considere que la fundamentación ofrecida es deficiente.

Esto nos lleva a proponer las siguientes definiciones:

D9.6. Dos fundamentos f_1 y f_2 son *extensionalmente comparables* (f_1 ${}_{e}$comp f_2) si, o bien $f_1 \subseteq f_2$, o bien $f_2 \subseteq f_1$. En caso contrario los fundamentos son extensionalmente incomparables (f_1 ${}_{e}$incomp f_2).

Por lo tanto admitimos tres casos de fundamentos extensionalmente comparables: que el primero esté incluido en el segundo, o el segundo en el primero, o que sean idénticos. Por supuesto hay otras maneras de comparar extensionalmente los fundamentos, como contar su número, pero ésta puede no ser aceptada, lo que no pasa con las inclusiones de fundamentos.

Si dos fundamentos son extensionalmente incomparables, aún pueden ser intensionalmente comparables (que abreviamos '$_i$comp'). O puede ocurrir que sean intensionalmente incomparables (que abreviamos '$_i$incomp'). Un caso habitual de comparabilidad intensional se da cuando es posible asignar probabilidades a los fundamentos.[143] Por ejemplo, si un fundamento da la misma probabilidad a una tesis t que a su negación $\neg t$, es decir $p(\mathbf{f}_1(t)) = p(\mathbf{f}_2(\neg t)$, entonces no hay un criterio intensional para preferir t a $\neg t$. En cambio si $p(\mathbf{f}_1(t)) < p(\mathbf{f}_2(\neg t)$, entonces es razonable creer en la tesis $\neg t$, por tener un fundamento más probable. La comparación probabilista de fundamentos es un recurso intensional usual en las ciencias empíricas actuales y permite decidir *insuficientemente* entre tesis y teorías incompatibles. Éste es uno de los casos relativamente sencillos de comparabilidad intensional, el que hasta hoy es un problema material complejo que no se ha podido considerar en todos sus detalles.

Las siguientes nociones que introduciremos serán las de 'grado de fundamento extensional' $\mathbf{gf}_e(t_n)$ y 'grado de fundamento intensional' $\mathbf{gf}_i(t_n)$ de una tesis t_n:

D9.7.1. Si el $\mathbf{f}(t_n)$ $_e$comp $\mathbf{f}(t_m)$, y si t_n supera todas las objeciones que supera 't_m', entonces el *grado de fundamento extensional* de t_n es *mayor o igual* que el de t_m. Esto equivale a decir que el conjunto de las objeciones superadas por t_m es un subconjunto (propio o impropio) de las objeciones superadas por t_n: $\mathbf{gf}_e(t_n) \geq \mathbf{gf}_e(t_m) \leftrightarrow (\mathbf{f}(t_m)\ {}_e\mathrm{comp}\ \mathbf{f}(t_m))\wedge((\mathbf{f}(t_m) \subseteq \mathbf{f}(t_n))$.

[143] El caso de las probabilidades es una forma de comparar verosimilitudes. Puede haber muchas otras formas de comparar verosimilitudes, pero éste es un tema difícilmente agotable.

D9.7.2. Si existe un criterio de comparación intensional tal que $\mathbf{f}(t_n)$ $_i$comp $\mathbf{f}(t_m)$, entonces el *grado de fundamento intensional* de una tesis 't_n' es *mayor o igual* al de 't_m' ($\mathbf{gf}_i(t_n) \geq \mathbf{gf}_i(t_m)$), si así surge del criterio de comparación intensional del caso.

Como ya dijimos, un caso habitual de comparación intensional de fundamentos es la comparación de probabilidades. Más generalmente: una comunidad teórica puede *acordar* criterios de comparación intensional diferentes al de comparación de probabilidades. Este es un ámbito posiblemente inagotable de problemas de fundamento de naturaleza material.

Adviértase que la definición D9.7.1 *no supone que 't_n' haya superado al menos una objeción*, es decir, no supone que 't_m' sea una tesis ni siquiera mínimamente fundada. Sólo afirma que el fundamento de 't_m', si existe, no es menor que el de 't_n'. Dos tesis 't_n' y 't_m' totalmente infundadas, o "meras opiniones", satisfacen la definición D9.7.1, pues el $\mathbf{gf}_e(t_n) \geq \mathbf{gf}_e(t_m)$, aunque en este caso también lo satisface su conversa.

D9.8.1. Una tesis t_n está *mejor fundada extensionalmente* que otra tesis t_m, si supera todas las objeciones que se le han hecho a t_m, y t_m no supera todas las objeciones hechas a t_n; e.d. $\mathbf{mf}_e(t_n, t_m) \leftrightarrow (\mathbf{gf}_e(t_n) > \mathbf{gf}_e(t_m))$. Esto es una abreviatura de la siguiente expresión: $\mathbf{mf}_e(t_n, t_m) \leftrightarrow (\mathbf{f}(t_m) \subseteq \mathbf{f}(t_n)) \wedge \neg(\mathbf{f}(t_n) \subseteq \mathbf{f}(t_m))$.

Esta definición de 'mejor fundado extensionalmente' para fundamentos extensionalmente comparables supone un fundamento no vacío, aunque no recurre explícitamente ni siquiera a la noción de existencia débil de al menos un enunciado y una regla fundantes. Ésta es una versión dialógica de la lógica epistémica y doxástica que no recurre a algunas definiciones de saber y creencia como las postuladas por Hintikka y Lenzen.

D9.8.2. Una t_n está *mejor fundada intensionalmente* que otra tesis t_m, si sus fundamentos – sean extensionalmente comparables o no lo sean – son intensionalmente comparables ($\mathbf{f}(t_m)$ $_{i}$comp $\mathbf{f}(t_n)$) y hay un *acuerdo teórico* en la comunidad dialogante sobre sus grados de fundamento intensional que permite afirmar que el grado de fundamento intensional de t_n es mayor que el de t_m. En resumen, podemos expresar esto de la siguiente manera: $\mathbf{mf}_i(t_n, t_m) \leftrightarrow \mathbf{gf}_i(t_n) > \mathbf{gf}_i(t_m)$. (Los grados de fundamento intensional y su comparación son problemas materiales que se deben discutir en cada caso).

En lo que sigue trataremos de hacer abstracción de si el grado de fundamento es extensional o intensional, como también de si la mejor fundamentación es extensional o intensional. Por eso, cuando no necesitemos entrar en esos detalles, prescindiremos de los subíndices ‘e’ e ‘i’ en la escritura de ‘grado de fundamento’ o ‘**gf**’, ‘mejor fundado’ o ‘**mf**’, etc. Cuando todas las tesis de una colección tienen un grado de fundamento extensional o intensional, entonces es fácil definir sus grados de fundamento supremo e ínfimo:[144]

D9.9.1. Si el grado de fundamento ‘**gf**’ – extensional o intensional – de una tesis es mayor o igual que el grado de fundamento de cualquiera otra tesis de una colección, entonces decimos que su grado de fundamento es supremo (‘$\mathbf{f}_{sup}$’) en esa colección. Lo podemos simbolizar así:

$$\mathbf{f}_{sup}(t_m) \leftrightarrow \bigwedge t_n(\mathbf{gf}(t_m) \geq \mathbf{gf}(t_n)).$$

D9.9.2. Si existe una tesis tal que, para toda otra de la colección, el grado de fundamento de esta última es mayor o igual que el grado de fundamento de aquella, entonces el grado de fundamento de la primera es ínfimo en esa colección. Lo simbolizamos así:

[144] Puesto que se trata de conjuntos ordenados de fundamentos, deberíamos distinguir, como es obligatorio en una teoría del orden, entre fundamento maximal y supremo, y entre fundamento minimal e ínfimo, pero nuestro propósito actual no requiere de esas precisiones matemáticas.

$$\mathbf{f}_{\text{inf}}(t_m) \leftrightarrow \bigwedge t_n(\mathbf{gf}(t_n) \geq \mathbf{gf}(t_m)).$$

Las tesis suficientemente fundadas son ahistóricas, eternas. Sólo de ellas es lícito predicar la verdad (sea por correspondencia, por coherencia o por consenso). Por su parte las tesis insuficientemente fundadas son sólo históricas, rectificables. De ellas no se dice la verdad en ningún sentido, sino sólo la verosimilitud, cuyo grado supremo es el de "buen fundamento". Éste admite frecuentemente muchos grados inferiores hasta el de los enunciados simplemente fundados. Aquí se plantea otra pregunta: ¿Cuál es el grado mínimo de fundación de una tesis para que merezca ser considerada una *creencia racional*? No hay una sola respuesta a este problema, pues él ha mostrado ser una cuestión cuya solución es parcialmente convencional. La definición que daremos a continuación utiliza la definición del fundamento supremo D9.9.1. y corresponde a una noción que podemos denominar de "creencias racionales en sentido extensional":

D9.10.1. La tesis t_n será una '*creencia racional*', si y sólo si hay al menos una tesis fundada t_m sobre un mismo tema cuyos fundamentos sean *comparables* con los de t_m ($\mathbf{f}(t_m)\text{comp}\mathbf{f}(t_n)$) y si para cada uno de esos t_m el grado de fundamento de t_n no es vacío y es supremo en esa colección. En símbolos:

$$\mathbf{cr}\,t_n \leftrightarrow_{\text{d}} \bigvee t_m[\mathbf{f}(t_m)\text{comp}\mathbf{f}(t_n)] \wedge \bigwedge t_m[(\mathbf{gf}(t_n) \neq \emptyset) \wedge (\mathbf{gf}(t_n) \geq \mathbf{gf}(t_m))].$$

En esta expresión '**cr**' es el predicado monádico '…es creencia racional' (en alguno de los sentidos, extensional '$\mathbf{cr}_{\text{e}}$' o intensional '$\mathbf{cr}_{\text{i}}$').

De la definición anterior resulta que, en el caso de un conjunto de tesis t_i ($1 \leq i \leq n$) sobre un tema determinado, si t_n fuese una tesis mínimamente fundada y las t_i fuesen meras opiniones con fundamento vacío, entonces t_n sería una creencia racional (es decir: $_{\mathbf{mf}}t_n \wedge \bigwedge t_m(\mathbf{f}(t_m) = \emptyset) \rightarrow {}_{\mathbf{cr}}t_n$).

Por supuesto, las tesis pueden ser $_{\text{e}}$comp o $_{\text{e}}$incomp, y en este segundo caso pueden ser $_{\text{i}}$comp, con lo que pasamos al caso de las creencias racionales en sentido intensional. Por supuesto, para cada uno de las especies de comparaciones podemos definir sus correspondientes conceptos de creencia racional, en sentido extensional e intensional:

D9.10.2. $\mathbf{cr}_{\mathrm{e}} t_n \leftrightarrow_{\mathrm{d}} \bigvee t_m[\mathbf{f}(t_m)_{\mathrm{e}}\mathrm{comp}\mathbf{f}(t_n)] \wedge \bigwedge t_m[(\mathbf{gf}_{\mathrm{e}}(t_n) \neq \emptyset) \wedge (\mathbf{gf}_{\mathrm{e}}(t_n) \geq \mathbf{gf}_{\mathrm{e}}(t_m))]$.

D9.10.3. $\mathbf{cr}_{\mathrm{i}} t_n \leftrightarrow_{\mathrm{d}} \bigvee t_m[\mathbf{f}(t_m)_{\mathrm{i}}\mathrm{comp}\mathbf{f}(t_n)] \wedge \bigwedge t_m[(\mathbf{gf}_{\mathrm{i}}(t_n) \neq \emptyset) \wedge (\mathbf{gf}_{\mathrm{i}}(t_n) \geq \mathbf{gf}_{\mathrm{i}}(t_m))]$.

Las creencias racionales se rigen por la "regla del supremo" o del mayor fundamento en su clase de tesis.[145] Cuando los fundamentos son $_{\mathrm{e}}$incomp, carecemos de ese criterio formal más simple para establecer grados de fundamentación. Si son $_{\mathrm{i}}$comp su criterio intensional de comparación de fundamentos puede ser muy manejable, como en el caso de las probabilidades, en caso de haberlas. Otras veces los grados de fundamentación intensional pueden ser acordados por consenso en una comunidad científica. El problema complejo de la medida no extensional del fundamento, del que depende la creencia racional en sentido intensional del tipo D.9.10.3., no tiene soluciones generales, aunque ocurren frecuentemente en la ciencia empírica.

9.5. La episteme y la pistis.

La diferencia entre epistéemee y pístis es cualitativa, incluso en el caso de que una pístis sea creencia racional. Además los diferentes grados de fundamento insuficiente forman una estructura de orden. Una tesis *t* es creencia racional en alguno de los sentidos discutidos, si y sólo si es una tesis bien fundada en ese sentido. Puede no ser creencia racional, si es sólo insuficientemente fundada, como surge de las definiciones de '**cr**' D9.10.1 y D9.10.2 y D9.10.3. Considerando sólo la extensión

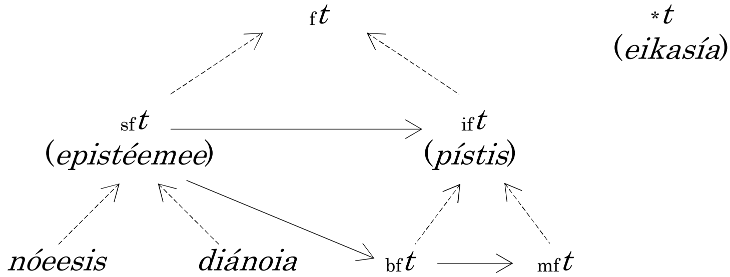
[145] Estas definiciones de "creencia racional" que se rigen por la regla del supremo son muy exigentes y no coinciden con nociones, también existentes pero más latas e informales, de creencia racional que se suelen usar en la ciencia y que son más vagas, sin límites precisos.

e ignorando el salto cualitativo entre fundamentación suficiente e insuficiente, resulta que si un enunciado es suficientemente fundado, es bien fundado, si es bien fundado, es mínimamente fundado, si es mínimamente fundado, lo es insuficientemente, y si es insuficientemente fundado, lo es simplemente fundado. Esquemáticamente:

(9) ${}_{\mathrm{sf}}t \rightarrow {}_{\mathrm{bf}}t \rightarrow$ (estructura de orden) $\rightarrow {}_{\mathrm{mf}}t \rightarrow {}_{\mathrm{if}}t \rightarrow {}_{\mathrm{f}}t$.

Las implicaciones conversas de las anteriores son obviamente inválidas. Por su parte, una clasificación platonizante de estilo género-especie nos da el siguiente esquema:

(10)



Las flechas de trazos indican relaciones entre especies y géneros, en tanto que las flechas enteras corresponden a relaciones entre conceptos definidos arriba.

Para Platón la *epistéemee* era el dominio de los enunciados para los que se podía dar un fundamento suficiente, el que se subdividía en dos géneros, según que el conocimiento fuera *nóeesis*, un conocimiento intuitivo cuyos objetos son las ideas inaccesibles a través de la sensibilidad (los *nooúmena*), que son conceptos invariables de la razón, o fuera *diánoia*, el saber matemático, a cuyos objetos (los *matheematiká*) se accedía a través de un soporte sensible, y en ese sentido eran "hipotéticos", al depender de construcciones simbólicas que les servían de fundamento. Aunque esa célebre distinción platónica sea muy sugerente no estamos obligados a adoptarla. Por otra parte el problema diacrónico de si un enunciado o teoría que es creencia racional puede llegar a ser un saber suficientemente fundado no tiene una respuesta general *a priori*.

9.6. Razón suficiente e insuficiente.

Para facilitar la distinción entre las dos formas fundamentales de la razón supongamos que consideramos sólo teorías deductivas **T** plenamente consistentes respecto de la negación, es decir tales que, si $\vdash_T A$, entonces $\nvdash_T \neg A$. Sea $\mathbf{B}_T$ una base deductiva para semejante teoría **T**: es decir, $\mathbf{B}_T = \{\mathbf{A}, \mathbf{R}\}$, donde **A** es una colección de (esquemas de) axiomas y **R** una colección de reglas de deducción. Definimos el concepto sintáctico de necesidad 'Δ' – relativa a dicha base $\mathbf{B}_T$ – de la siguiente manera:

(11) $\Delta_T A \leftrightharpoons \mathbf{B}_T \vdash A$,

y el concepto sintáctico de posibilidad '∇' – relativa a esa base $\mathbf{B}_T$ – así:

(12) $\nabla_T A \leftrightharpoons \neg\Delta_T\neg A \leftrightharpoons \mathbf{B}_T \nvdash \neg A$.[146]

Entendemos una teoría **T** como la clausura deductiva de $\mathbf{B}_T$:

(13) $\mathbf{T} = \mathbf{C}(\mathbf{B}_T) = \{A: \mathbf{B}_T \vdash A\}$,

a pesar de que el concepto de clausura frecuentemente no sea constructivo, como ocurre en las teorías esencialmente incompletas. En esos casos la teoría no será un "abanico", sino una "especie" en la terminología del intuicionismo de Brouwer y Heyting.

Conforme a la definición anterior se entiende a esa clausura como el conjunto de las fbf.s que se deducen de la base $\mathbf{B}_T$

[146] Cf. LORENZEN 1987, 111-113.

merced a las reglas de deducción contenidas en ella. En este momento podemos matizar el concepto de clausura deductiva, en primer lugar mediante la distinción entre *clausura necesaria* y *clausuras posibles* (o *conjuntos máximamente consistentes*) de una teoría deductiva **T**. La "teoría" o clausura necesaria con base $\mathbf{B_T}$ coincide con la noción usual de clausura deductiva anteriormente definida, que matizamos así:

(14) $\mathbf{T} = \mathbf{C}_\Delta(\mathbf{B_T}) = \{A: \mathbf{B_T} \vdash A\}$.

A las clausuras posibles (o *conjunto máximamente consistente* y sus subconjuntos) con base $\mathbf{B_T}$, respecto de una fbf. C y respecto de una colección consistente de fbf.s **H**, las definimos del modo siguiente:

(15) $\mathbf{C}_\nabla(\mathbf{B}_C) = \{A: \mathbf{B_T} \nvdash \neg A$, y de A, $C \nvdash \bot\}$.
(16) $\mathbf{C}_\nabla(\mathbf{B}_\Gamma) = \{A: \mathbf{B_T} \nvdash \neg A$, y de A, $\Gamma \nvdash \bot\}$.

Todos estos conjuntos máximamente consistentes con base $\mathbf{B_T}$ contienen como uno de sus subconjuntos a $\mathbf{T} = \mathbf{C}_\Delta(\mathbf{B_T}) = \{A: \mathbf{B_T} \vdash A\}$, además de las extensiones consistentes con C o Γ. Es inmediato que, salvo en el caso de teorías triviales, las clausuras posibles no serán únicas, sino múltiples. Posiblemente consistan de infinitos conjuntos máximamente consistentes. Y tampoco tienen que ser obligatoriamente "categóricas", como no lo son las sucesivas clausuras transfinitas de los números naturales (finitos).

Es obvio que, si la base $\mathbf{B_T}$ es un conjunto de enunciados y reglas que describen un sistema simbólico construido, entonces $\mathbf{T} = \mathbf{C}_\Delta(\mathbf{B_T}) = \{A: \mathbf{B_T} \vdash A\}$ es un conjunto de fbf.s necesariamente verdaderas (o suficientemente fundadas) al menos en el sentido de verdaderas por coherencia en **T**. Naturalmente, si $\mathbf{B_T}$ no se reduce a un conjunto de enunciados y reglas que describen un sistema simbólico construido, sino que además pretende describir algunos aspectos conjeturales del mundo empírico, entonces la teoría, aunque necesariamente verdadera por coherencia en **T**, será a lo sumo verosímil en el sentido de la verdad por correspondencia. Éste será en general el caso de las teorías filosóficas y científicas bien construidas, al menos en la medida en que contengan un fragmento de su base que no se pueda fundar más allá de toda duda.

En cambio una $\mathbf{C}_{\nabla}(\mathbf{B}_{\Gamma}) = \{A\colon \mathbf{B}_{\Gamma} \nvdash \neg A, \text{ y de } A, \Gamma \nvdash \bot\}$ (que es un *conjunto máximamente consistente*) es una extensión máxima no deductiva de una teoría deductiva **T**. Las "doctrinas" filosóficas y científicas posibles **D** suelen encontrarse en una situación intermedia entre las teorías deductivas $\mathbf{T} = \mathbf{C}_{\Delta}(\mathbf{B})$ y sus extensiones máximas $\mathbf{C}_{\nabla}(\mathbf{B}_{\Gamma})$. Si contamos con una teoría deductiva como la mecánica clásica, se pueden formar "doctrinas" intermedias extendiéndola mediante fragmentos compatibles con **T** pero que son deductivamente independientes de la teoría originaria, fragmentos que tal vez estén internamente articulados deductivamente y cuya clausura será un conjunto máximamente consistente de la teoría original. La situación en que nos podríamos encontrar la simbolizamos de la siguiente manera:

(17) $\mathbf{T} = \mathbf{C}_{\Delta}(\mathbf{B}) \subset \mathbf{D}_{\nabla}(\mathbf{B}_{\Gamma}) \subseteq \mathbf{C}_{\nabla}(\mathbf{B}_{\Gamma})$,

donde esa doctrina **D** es una extensión posible de una teoría que tiene como límite una clausura posible. Si la teoría **T** es empírica, también lo serán las doctrinas y clausuras posibles que son sus extensiones. Si la teoría **T** no sólo es verdadera en el sentido de la coherencia, sino que además lo es en el sentido de la correspondencia, entonces una extensión doctrinaria $\mathbf{D}_{\nabla}(\mathbf{B}_{\Gamma})$ puede ser de la misma naturaleza epistemológica, aunque generalmente será una extensión empírica y por lo tanto insuficientemente fundada.

Como es habitual que una teoría no admita una sola extensión, sino que puede tener incluso un número infinito de ellas, y como estas extensiones pueden estar en diversas relaciones entre sí, debemos considerar brevemente los casos fundamentales.

i. El primero es el caso de una clase de extensiones o doctrinas que están en relación de inclusión. Entonces tendríamos una estructura como la siguiente:

(18) $\mathbf{T} = \mathbf{C}_{\Delta}(\mathbf{B}) \subset \mathbf{D}_{1\nabla}(\mathbf{B}_{\Gamma}) \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{D}_{n\nabla}(\mathbf{B}_{\Gamma}) \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{C}_{\nabla}(\mathbf{B}_{\Gamma})$.

Esta estructura lineal puede tener infinitos pasos, o lo que es lo mismo, puede haber infinitas doctrinas intermedias entre la teoría ínfima $\mathbf{T} = \mathbf{C}_{\Delta}(\mathbf{B})$ y la clausura posible $\mathbf{C}_{\nabla}(\mathbf{B}_{\Gamma})$ relativa a la base $\mathbf{B}_{\Gamma}$.

ii. El segundo es el caso de una clase de extensiones o doctrinas que están en una relación de solapamiento, es decir, que son al menos parcialmente incompatibles, o sus estructuras no son categóricas, dos a dos. La estructura sería como sigue:

$$(19)\quad \mathbf{T} = \mathbf{C}_{\Delta}(\mathbf{B}) \left\{ \begin{array}{l} \subset \mathbf{D}_{11\nabla}(\mathbf{B}_{\Gamma}) \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{D}_{1m\nabla}(\mathbf{B}_{\Gamma}) \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{C}_{1\nabla}(\mathbf{B}_{\Gamma}) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \subset \mathbf{D}_{n1\nabla}(\mathbf{B}_{\Gamma}) \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{D}_{nm\nabla}(\mathbf{B}_{\Gamma}) \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{C}_{n\nabla}(\mathbf{B}_{\Gamma}) \\ \qquad\qquad \vdots \end{array} \right.$$

En general las extensiones o doctrinas son sólo parcialmente disjuntas, por lo que estas extensiones de los dos tipos producen estructuras matemáticamente posibles del tipo de los "*ideales*" para la unión de doctrinas y de "*filtros*" para su intersección, como es fácil de advertir de las fórmulas anteriores. La unión de doctrinas compatibles entre sí, hasta alcanzar todas sus extensiones máximamente consistentes, produciría el dominio máximo de desarrollo teórico compatible con un núcleo teórico, que es su intersección no vacía. Ésta es o bien un sistema lógico, o alguna extensión matemática del mismo.

9.7. El principio general del silogismo.

Entendemos la expresión 'silogismo' en un sentido muy amplio, propio de la lógica actual. Esta amplitud se refiere, tanto a la *forma* de las premisas admitidas, que no se limitan a las formas categóricas tradicionales de la tradición aristotélica (y en general filosófica, hasta la aparición de la lógica matemática o simbólica), como a la *fortaleza de la fundamentación*. En efecto, en nuestro estudio no nos limitamos a la fundamentación perfecta o suficiente, sino que incursionamos en la fundamentación imperfecta o insuficiente. Antes de pasar a discutir los detalles de esos dos grandes géneros de silogismo, será muy conveniente contar con una caracterización general de lo que entendemos por 'silogismo' en el sentido amplio mencionado, como hacemos a continuación:

PS (principio general del silogismo) Sea un conjunto de enunciados **E**. Entre ellos destacamos al subconjunto de enunciados $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{E}$ como las premisas y al enunciado $c \in \mathbf{E}$ como la conclusión. Consideraremos que el paso de **H** a c ($\mathbf{H} \Rightarrow c$) es un silogismo cuando, bajo el supuesto de que todas las premisas de **H** tienen algún fundamento (y en consecuencia también lo tiene **H**, lo que abreviamos **f**(**H**)), se sigue que la conclusión c también tiene un fundamento, lo que abreviamos **f**(c). Es decir, si la existencia de un fundamento de **H** implica la existencia de un fundamento para c, entonces el paso de **H** a c es un silogismo $\mathbf{H} \Rightarrow c$. Esto lo simbolizamos como sigue:

PS Si **f**(**H**) implica **f**(c), entonces $\mathbf{H} \Rightarrow c$.

El signo '$\Rightarrow$' se utiliza aquí para simbolizar un paso de premisas a conclusión muy general, que se especificará de los modos que trataremos a continuación.

9.8. Silogismos dialécticos y silogismos científicos.

En los cursos de lógica universitaria nos acostumbraron a pensar sólo en las "razones" o fundamentaciones perfectas o suficientes, aunque abundan mucho más las razones imperfectas que las perfectas, y no sólo en los discursos cotidianos, sino también en las ciencias.

En un silogismo la insuficiencia de la razón se puede deber a dos motivos diferentes:

1. A la imperfección de las reglas que fundan las tesis en sus hipótesis o en la experiencia.

Por esa imperfección las reglas no pueden garantizar que la conclusión conserve la verdad, la verosimilitud o, al menos, el grado de fundamentación de la hipótesis menos fundada.

2. La fundamentación insuficiente de al menos una de las hipótesis.[147]

Estas dos insuficiencias se pueden dar juntas o por separado.

En las primeras etapas de la lógica simbólica se insistió en el estudio de la fundamentación perfecta. No fue así en la historia de la lógica desde Aristóteles, como muestran obras suyas como los *Tópicos* y la *Retórica*. En la actualidad ha renacido el interés por el estudio de la fundamentación imperfecta.

Todo diálogo correcto con fundamentación perfecta o imperfecta – y su expresión, el silogismo científico o el silogismo dialéctico – es un proceso que obedece a alguna de las "reglas de fundamento ínfimo", que expondremos a continuación.

Comencemos con la regla fuerte de fundamento ínfimo para diálogos con reglas de fundamentación perfecta y su expresión, los silogismos que llamamos científicos (**sc**):

(**sc**) El silogismo científico es una fundamentación **H** $\vdash$ *c*, en la que **gf**(*c*) = **fi**(**H**).

Ella dice que las fundamentaciones indirectas con relación de fundamentación perfecta '$\vdash$' cumplen la *regla fuerte de fundamento ínfimo*, según la cual '$\vdash$' asegura que la conclusión

[147] Ambas imperfecciones se podrían admitir en la lógica tradicional, aunque el silogismo dialéctico en la obra de Aristóteles parece corresponder sólo a la primera imperfección.

conserve el grado ínfimo de fundamentación de las premisas, que es el de la premisa h_i peor fundada del conjunto **H**.

Por su parte, para los diálogos con reglas de fundamentación imperfecta ‘$\mid\!\sim$’ y su expresión, los silogismos dialécticos, hay una regla débil del fundamento ínfimo (**sd**):

(**sd**) El silogismo dialéctico es una fundamentación $\mathbf{H} \mid\!\sim c$, en la que $\mathbf{gf}(c) \leq \mathbf{fi}(\mathbf{H})$.

Los diálogos de fundamentación imperfecta y su expresión, los silogismos dialécticos, son fundamentaciones indirectas con una relación de fundamentación insuficiente ‘$\mid\!\sim$’, cuya regla del fundamento ínfimo dice que la conclusión tiene un grado de fundamento que es *menor o a lo sumo igual* que el grado de fundamento de su premisa h_i peor fundada.

Estas reglas de fundamento ínfimo para **sc** y **sd** caracterizan toda lógica, es decir toda tarea de fundamentación indirecta. Otra diferencia inmediata entre un **sc** y un **sd** se relaciona con la regla de monotonía, que los silogismos científicos satisfacen necesariamente y los silogismos dialécticos no:

(Monotonía) Si $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{I}$ y $\mathbf{H} \vdash c$, entonces $\mathbf{I} \vdash c$.

La monotonía es una propiedad estructural de los sistemas de razón suficiente que no se conserva en los sistemas de razón insuficiente como los estudiados por la inteligencia artificial y las lógicas de condicionales derrotables. La relación de fundamentación suficiente es necesariamente monótona. En cambio la relación de fundamentación insuficiente puede no serlo, aunque esto no se advirtió sino más tarde. Es claro que, si sabemos que $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{I}$ y $\mathbf{H} \mid\!\sim c$, ello no asegura que $\mathbf{I} \mid\!\sim c$. La inducción no matemática o empírica, la abducción, la analogía, las correlaciones, las inferencias probabilísticas y otras reglas de fundamentación, son ejemplos de reglas no monótonas.

Cuando precisamos los grados de fundamentación de las premisas de un diálogo y de su correspondiente expresión silogística, obtenemos, a partir de las formas generales **sc** y **sd**, reglas específicas como la siguiente:

(**sd**$_1$) $h_1, h_2, \ldots, {}_{\mathrm{if}}h_i, \ldots, h_n \mid\!\sim {}_{\mathrm{if}}c$, en la cual:

(1) su premisa peor fundada, h_i, es insuficientemente fundada, es decir, es a lo sumo una "opinión correcta" y

(2) la conclusión c se funda en las premisas mediante una regla de fundamentación débil o falible, simbolizada con '|~', por lo que su grado de fundamento será menor o igual al de su premisa peor fundada h_i.

Cuando aplicamos la regla (**sd**) de fundamento ínfimo a **sd**$_1$ obtenemos una conclusión c a lo sumo tan fundada como – y en general menos fundada que – h_i.

Una argumentación como las del esquema metalingüístico **sd**$_1$ *no es falaz*, pues *no promete más de lo que puede dar*. Ella admite explícitamente una doble debilidad de sus fundamentos: no pretende que sus premisas sean enunciados cuya verdad esté fundada más allá de toda duda, sino sólo que sean '*éndoxa*' – opiniones fundadas verosímiles –, y tampoco afirma que la conclusión conserve el grado de fundamentación de la premisa peor fundada. Una regla como **sd**$_1$ sólo asegura que las premisas fundan faliblemente la conclusión, pero no asegura ni siquiera un grado mínimo de fundamentación. La regla **sd**$_1$ parece ser una *metaregla general de razón insuficiente cuyo fundamento metalingüístico es suficiente*: promete tan poco **sd**$_1$ que tiene el aspecto de una metateoría suficientemente fundada de la razón insuficiente (es decir demostrable en un metadiálogo).

Otra regla de argumentación dialéctica es **sd**$_2$, en la que todas las premisas son enunciados suficientemente fundados (porque fueron fundados por construcción matemática o eidéticamente), pero cuya relación de fundamento ‘$\mid\!\sim$’ es falible:

(**sd**$_2$) $\quad {}_{sf}h_1, {}_{sf}h_2, \ldots, {}_{sf}h_n \quad \mid\!\sim {}_{if}c \quad .$

Al observar **sd**$_2$ advertimos que en ella el grado de fundamento de la conclusión c será necesariamente menor que el grado de fundamento de las premisas h_i.

Por su parte los silogismos científicos, con una relación ‘$\vdash$’ de fundamentación perfecta que obedece la regla (**sc**), regla fuerte de fundamento ínfimo, tienen dos formas básicas: (**sc**$_3$), en la que hay al menos una premisa insuficientemente fundada (${}_{if}h_i$), y (**sc**$_4$), en la que todas las premisas son suficientemente fundadas (${}_{sf}h_i$).

(**sc**$_3$) corresponde a lo que hoy llamamos deducción hipotética, que es un “silogismo científico” para nosotros, pero era la forma típica del silogismo dialéctico para Aristóteles, en cambio (**sc**$_4$) es la forma que corresponde a lo que para Aristóteles era el silogismo “científico” en sentido estricto. A estas formas corresponden los siguientes esquemas:

(**sc**$_3$) $\quad h_1, h_2, \ldots, {}_{if}h_i, \ldots, h_n \quad \vdash {}_{if}c \quad ,$

(**sc**$_4$) $\quad {}_{sf}h_1, {}_{sf}h_2, \quad \ldots, \quad {}_{sf}h_n \quad \vdash {}_{sf}c \quad .$

9.9. El sistema de la ciencia según su fundamento.

Entre los cuatro esquemas mencionados se dan las siguientes relaciones deductivas que permiten esquematizar ciertas regiones de la ciencia actual:

El sistema de la ciencia según su fundamento.

(**sc**$_4$) ${}_{\mathrm{sf}}h_1, {}_{\mathrm{sf}}h_2, \ldots, {}_{\mathrm{sf}}h_{\mathrm{n}} \vdash {}_{\mathrm{sf}}c$
(ciencia aristotélica demostrativa o epistéemee clásica)

(**sd**$_2$) ${}_{\mathrm{sf}}h_1, {}_{\mathrm{sf}}h_2, \ldots, {}_{\mathrm{sf}}h_n \mid\!\sim {}_{\mathrm{if}}c$
(ciencia dialéctica fuerte)

(**sc**$_3$) ${}_{\mathrm{sf}}h_1, {}_{\mathrm{sf}}h_2, \ldots, {}_{\mathrm{if}}h_{\mathrm{i}}, \ldots, {}_{\mathrm{sf}}h_{\mathrm{n}} \vdash {}_{\mathrm{if}}c$
(ciencia popperiana hipotética)

(**sd**$_1$) ${}_{\mathrm{sf}}h_1, {}_{\mathrm{sf}}h_2, \ldots, {}_{\mathrm{if}}h_i, \ldots, {}_{\mathrm{sf}}h_n \mid\!\sim {}_{\mathrm{if}}c$
(ciencia dialéctica débil)

No ciencia
Argumentación coloquial
Retórica
Sofística

La relación deductiva va, como de costumbre de arriba abajo. Las relaciones deductivas conversas son obviamente inválidas.

9.10. Algunas reglas falaces.

Además de las formas mencionadas, hay formas retóricas de pseudofundamentación frecuentes, que intentan convencer por cualesquiera medios. Ellas prometen más de lo que son capaces de fundar, o bien porque proponen una conclusión cuyo grado de fundamento es mayor que el de al menos una de las premisas, o el grado de fundamento de la conclusión es mayor que el que permiten las reglas de paso, o bien porque sus relaciones de fundamentación son reglas falaces que carecen de toda "*vis fundans*". Cuando alguna de esas cosas ocurre hablamos de reglas falaces.

Si la ausencia de cualquier fundamento para los enunciados la simbolizamos con '*' y los pseudointentos de "consecuencia" los simbolizamos con '~', entonces la forma general de los pseudosilogismos erísticos (pe) que carecen de toda fundamentación, ni apodíctica o demostrativa o suficiente, ni dialéctica o insuficiente, es la siguiente:

(pe) $\quad h_1, h_2, ..., q_1(h_i), ..., h_n \sim q_2(c)$,

donde q_1 y q_2 son grados de fundamentos tales que $q_1 < q_2$.

Algunas formas de pseudosilogismos erísticos son las siguientes:

(pe1) $\quad h_1, h_2, ..., h_i, ..., h_n \sim {}_{\mathrm{if}}c$,
(pe2) $\quad h_1, h_2, ..., h_i, ..., h_n \sim {}_{\mathrm{sf}}c$,
(pe3) $\quad h_1, h_2, ..., {}^*h_i, ..., h_n \mid\!\sim {}_{\mathrm{if}}c$,
(pe4) $\quad h_1, h_2, ..., {}^*h_i, ..., h_n \mid\!\sim {}_{\mathrm{sf}}c$,
(pe5) $\quad h_1, h_2, ..., {}^*h_i, ..., h_n \vdash {}_{\mathrm{if}}c$,
(pe6) $\quad h_1, h_2, ..., {}^*h_i, ..., h_n \vdash {}_{\mathrm{sf}}c$,

Estos géneros de ‘pseudosilogismos erísticos’ amplían la caracterización aristotélica y toman muchas formas específicas.

Por otra parte advertimos inmediatamente que estructuras silogísticas como

($\mathrm{sd}_{1'}$) $\quad h_1, h_2, ..., {}^*h_i, ..., h_n \mid\!\sim {}^*c$,
($\mathrm{sc}_{3'}$) $\quad h_1, h_2, ..., {}^*h_i, ..., h_n \vdash {}^*c$,

no son erísticas, porque no prometen más de lo que pueden garantizar. Es decir, existen silogismos dialécticos y científicos con conclusiones totalmente infundadas, en razón de que al menos alguna de sus premisas también lo es. Eso no nos debe asombrar, si recordamos que muchísimos ejercicios correctos de lógica consisten precisamente de deducciones correctas a partir de premisas frecuentemente disparatadas, y esos ejercicios se usan tradicionalmente para mostrar la solidez del vínculo deductivo.

CAPÍTULO 10.
LA RAZÓN EN LAS CIENCIAS Y LA FILOSOFÍA

> *Pero nosotros somos aborrecibles racionalistas; buscamos siempre lo duro en lo blando. La teoría de los "fuzzy sets" es ejemplar a este respecto. Es la metateoría dura de una teoría blanda.*
> Gaston-Gilles Granger[148]

10.1. Introducción.

Los esquemas de '*silogismo dialéctico*' (**sd**), (**sd**$_1$) y (**sd**$_2$) del capítulo anterior pertenecen a la teoría de la razón insuficiente, pero su caracterización está suficientemente fundado porque expresa la forma necesaria de esas estructuras de fundamentación. La forma (**sd**$_2$) concluye una consecuencia insuficientemente fundada '${}_{\mathrm{if}}c$' a partir de premisas demostrables mediante una relación de fundamentación débil '$\mid\!\sim$'. Entonces la conclusión c está fundada pero no demostrada. Sería falaz concluir que c sea demostrable, es decir '${}_{\mathrm{sf}}c$'. Por la debilidad de la conclusión afirmada (**sd**$_2$) es una estructura silogística dialéctica suficientemente fundada. Veremos que las argumentaciones favorables a la "conjetura de Goldbach" fuerte y de muchos otros problemas irresueltos de la matemática muestran, hasta el momento, esta estructura.

Para ningún dominio de problemas se puede negar de antemano la posibilidad de fundamentaciones científicas del tipo (**sc**$_3$) o incluso (**sc**$_4$), pero las argumentaciones cotidianas y de las ciencias prácticas (las ciencias de la libertad, como la ética, las ciencias jurídicas, políticas, económicas, etc.) difícilmente serán de esos tipos. En tales dominios son de esperar argumentaciones con fundamento insuficiente de los tipos (**sd**$_1$) y (**sd**$_2$), a lo sumo con "buen fundamento".

---

[148] *Mais nous sommes d'affreux rationalistes; nous cherchons toujour "le dur dan le mou". La théorie des "fuzzy sets" est exemplaire à cet égard. C'est la métathéorie dure d'une théorie molle.* En RAGGIO 2002, p. 215.

La mayoría de los enunciados de las ciencias empíricas y de la filosofía – en particular en los dominios de la metafísica, de la ontología y de la ética – sólo pueden aspirar a fundamentos imperfectos de las especies (**sd**$_1$) o (**sd**$_2$), no más que a eso. Esto no niega que algunas tesis de esas disciplinas puedan tener un saber perfectamente fundado, ni que algunas de sus deducciones sean de razón suficiente, pero una crítica ya más de dos veces centenaria no nos autoriza a esperar en esos dominios filosóficos una fortaleza gnoseológica superior a la que se ha alcanzado en las ciencias mejor construidas, consideradas no filosóficas, como los mejores fragmentos de la física.

10.2. Fundamentos suficiente e insuficiente en matemática.

El dominio de la matemática – y el de la lógica – se considera usualmente el dominio propio de la fundamentación suficiente. Si con ello se quiere afirmar que todos los enunciados matemáticos que se presentan como enunciados fundados lo son suficientemente, se puede refutar la aseveración, ya que no fue así, ni en la antigüedad (al menos desde las originarias dudas respecto del quinto postulado euclidiano), ni lo es hoy, como se advierte en destacados ejemplos. En las teorías matemáticas y lógicas hay sin duda muchísimos resultados suficientemente fundados, pero también hay de los otros, los resultados inciertamente fundados pero con buenos títulos como para merecer una fe bastante generalizada. Consideremos algunas teorías de objetos simbólicos, como la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF), la de von Neumann-Bernays-Gödel (NBG), etc.[149] Ellas son teorías suficientemente fuertes como para permitir definir los conjuntos requeridos para la construcción de las principales teorías matemáticas, y son suficientemente débiles como para evitar que se deduzcan en ellas antinomias conocidas. Pero sus versiones completas no garantizan que en ellas no puedan aparecer nuevas antinomias:

---

149 Hay otras axiomatizaciones menos utilizadas, como el sistema M de Morse y los sistemas NF (1937) y ML (1940) de Quine.

no se ha demostrado la consistencia absoluta de las versiones completas de ninguna de ellas y dichas pruebas pueden ser incluso imposibles. Hasta hoy tanto ZF como NBG son teorías *corroboradas* que han superado todas las objeciones, pero son al menos "ligeramente artificiales"[150] y *parcialmente incompatibles entre sí*, lo que permite sospechar que tienen algunos principios artificiosos. Muchos de sus teoremas sólo son verdaderos por coherencia dentro de la propia teoría[151] (en el caso no demostrado de que se trate de teorías totalmente consistentes), pero no lo son en sentido trascendente, pues son incompatibles con los de otras versiones de la teoría. No existe entonces *una* teoría de conjuntos, sino varias teorías parcialmente incompatibles entre sí.

A tales teorías complejas con objetos simbólicos se las puede admitir como creencias racionales al menos inmanentemente bien fundadas, y su desarrollo histórico les reserva, o bien la permanencia en ese estado, o bien un "salto cualitativo" y, en tal caso, el salto a la condición de epistéemee, o a la de falsedad plena.

También hay resultados todavía no resueltos, para los que no se tienen ni contraejemplos ni demostraciones, y de los que no sabemos si se podrán resolver alguna vez, como algunas formas de la conjetura de Goldbach. Otras se resolvieron, como la

---

[150] Véase Richard M. MARTIN 1958 (1962, 145), "*quizá ninguno sea todavía plenamente satisfactorio*". SUPPES 1960, 41, "[*it*] *emphasises the slightly artificial character of any form of axiomatic set theory*." BECKER 1966, 186, "*el soberbio edificio de la teoría de conjuntos de Cantor* [...] *parece manifestarse como una fantasmagoría, como un cierto espejismo que se desvanece al acercarse a él*". Para Lorenzen una teoría de conjuntos no constructiva y demasiado permisiva es un "*fragmento de literatura fantástica*", como decía en sus cursos de la universidad de Erlangen.

[151] Serían además verdades por correspondencia si para cada una de esas teorías fuese posible dar reglas de construcción para cada uno de sus objetos, como ocurre en los fragmentos constructivistas de teoría de conjuntos (Brouwer, Lorenzen), pero esa posibilidad no parece realizable para toda una teoría.

conjetura de Riemann[152] sobre las raíces de la función 'ζ', tema íntimamente vinculado con el problema de la distribución de los números primos.[153] Colecciones de problemas irresueltos de la matemática se pueden encontrar en numerosos libros.[154] Y hay *quaestiones disputatae*, como las varias creencias optimistas o pesimistas sobre el desarrollo del conocimiento matemático, que no constituyen ya una parte de la teoría ni de la metateoría formal, sino que son "metaopiniones" más o menos fundadas y que en algunos casos han sido presentadas en la forma de argumentos de autoridad tales como "lo afirma Hilbert", "lo sostiene Gödel", etc.

Muchos ejemplos simples de fundamentación insuficiente se conocen en la teoría numérica, algunos de ellos relativos al cálculo de series de números primos. Desde los tiempos de Pitágoras se sabía que no existía el mayor de dichos números o, como decimos hoy, que el conjunto de los primos es infinito (lo primero es más simple que lo segundo). Por lo tanto un problema con el que se encontraron los matemáticos antiguos fue el de encontrar un algoritmo que permitiera calcular todos los primos. Pero como tal algoritmo nunca se encontró, surgieron problemas más modestos: por ejemplo el de encontrar algoritmos capaces de generar sucesiones infinitas de números primos que fuesen subconjuntos de ese todo.

---

152 La *Riemannsche Vermutung*, en alemán.

153 Cf. HILBERT 1900, ver HILBERT 1965, 309-310, TIETZE 1965, 151 y 336, MITTELSTRAß 1995, III, 625. La conjetura de Riemann aparece como octavo problema en HILBERT 1900 ("*Mathematische Probleme*"), entre las cuestiones relativas a números primos. Hilbert la denomina '*Behauptung*' (aserción) y define la función 'ζ' de la siguiente manera:

$\zeta(z) = 1 + 1/2^z + 1/3^z + \ldots 1/n^z + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$, donde z es una variable compleja. Esta conjetura sobre distribución de números primos fue demostrada por el paquistaní Aslam Chaudhry.

154 Recordamos aquí el excelente libro clásico, aunque hoy ya algo anticuado, de TIETZE 1965.

Algunas de esas sucesiones parecían verdaderas, pero se mostraron falsas. Consideremos un ejemplo de Euler de una sucesión de números que inicialmente parecían todos primos, pero que finalmente resultó falso. Esto le sirvió para advertir a sus lectores que algunas hipótesis de inducción imperfecta en matemática son poco confiables. El ejemplo falaz es el siguiente[155]:

$f(n) = n^2 - n + 41$ (con $n \varepsilon \mathbb{Z}^+$),

en el que f es una función de variable entera positiva que aparentemente genera sólo números primos, pero tiene excepciones. $f(n)$ proporciona valores primos para $n = 1, ..., 40$,[156] pero ya no para 41, pues $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$, que obviamente no es primo.

Meschkowski cita otros dos interesantes ejemplos de pseudogeneradores de sucesiones de números primos, semejantes al ejemplo de Euler. El primero es el de la función:

$g(n) = n^2 - 79n + 1601$,

del tipo de la función de Euler, que produce números primos hasta $n = 79$ inclusive, pero no para $g(80) = 80^2 - 79 \cdot 80 + 1601 = 1681 = 41^2$.

El segundo es el "problema chino", un antiguo enunciado que dice:

'Todo número entero positivo n, si es divisor entero de $2^n - 2$, es primo.'

[155] El ejemplo lo tomamos de KAC & ULAM 1969, 15 y MESCHKOWSKI 1978, 64 y 195.

[156] Los valores de la función de Euler para esos valores de la variable son 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, etc.

Este enunciado universal se corrobora para un segmento inicial mayor que los anteriores, pero es falso, pues encontramos un primer contraejemplo para $n = 341$, que es un divisor entero de $2^{341} - 2$, pero no es primo, pues $341 = 11.31$.

Otro ejemplo famoso de la teoría numérica elemental que era verosímil, pero que en realidad resultó falso, es el siguiente:

'Todo número natural es representable a lo sumo una vez como suma de dos cubos de números naturales.'

El primer contraejemplo es 1729, que es el número más pequeño representable por dos sumas diferentes de cubos de números naturales, según descubrió el matemático indio Ramanujan[157]. (Otros problemas interesantes están conectados, por ejemplo, con el teorema de Vinogradov, con el problema de los primos gemelos, etc.)

A continuación expondremos brevemente algunos problemas clásicos de fundamentación en matemática.

10.3. La crisis de los infinitésimos en el siglo XIX, la aritmetización del análisis de Cauchy-Weierstrass y el problema de la consistencia en el análisis y la aritmética.

Los problemas de fundamentación comenzaron pronto para el análisis matemático de Gottfried Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1642-1727). Poco después de sus comienzos el obispo anglicano George Berkeley (1685-1753) culpaba a los analistas por usar métodos que ellos mismos no entendían bien y mediante los cuales deducían conclusiones verdaderas a partir de inconsistencias lógicas y conceptos ambiguos, como el de los indivisibles de Bonaventura Cavalieri (1598-1647) y de los infinitésimos. Casi un siglo después será Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831) quien reivindicará ese análisis, que se llamara ingenuo, precisamente por la presencia de

[157] Cf. MESCHKOWSKI 1978, 64-5.

infinitésimos causantes de contradicciones. El primer paso para resolver las dificultades propuestas por Berkeley fue la definición de derivada como límite de un cociente de incrementos, de Jean d'Alembert (1717-1783) en su artículo '*Différentiel*', en la *Encyclopédie*, vol. IV, que dice lo siguiente:

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

En esa definición ya no aparecen infinitésimos. Hacemos un salto en el tiempo, olvidando el método de Giuseppe Lagrange (1736-1813) de desarrollo de una función $f(x)$ en serie de potencias, que dio lugar a la definición de las *funciones analíticas* y al reconocimiento de sus excepciones, las *funciones no analíticas*, de las que Cauchy (1789-1857) dio pronto un ejemplo simple: $f(x) = e^{-1/x^2}$. Aunque el checo Bolzano (1781-1848) tuvo mucho que ver en esta cuestión, por brevedad vayamos a Cauchy y Riemann. Aquí nos interesa la noción de sucesión de Cauchy y su criterio de convergencia de una sucesión:

Una sucesión $\{u_n\}_1^\infty$ converge si y sólo si, dado un $\in > 0$, "existen" dos números naturales m y n "suficientemente grandes" tales que $| u_m - u_n| < \in$.

Ésta es una definición clásica pero aún ingenua, que no es constructiva. La correspondiente versión constructiva sería:

Una sucesión $\{u_n\}_1^\infty$ converge si y sólo si, dado un $\in > 0$, se pueden "construir" (lo que aquí significa *calcular en un número finito de pasos*) un par de números naturales m y n tales que $| u_m - u_n| < \in$.

A partir de la primera definición Cauchy pudo definir por primera vez en forma clara la noción de límite con medios puramente aritméticos:

"*Cuando los valores sucesivos de una sucesión se aproximan a un valor fijo, de modo tal que la diferencia con él se torna tan pequeña como se quiera, este valor fijo se llama el límite de todos los otros.* [...] *Así un número irracional es el límite de una sucesión convergente de fracciones que se aproximan más y más a él.*"[158]

Esto también le permite considerar a un infinitésimo (*un infiniment petit* o *une quantité infiniment petite*) ya no como una cantidad fija, sino como una variable cuyo límite es 0, o bien como una variable dependiente (o función) $\alpha(h)$ que aproxima a 0 cuando $h \to 0$.[159] De este modo Cauchy reconcilia los infinitésimos con el rigor matemático. A partir de las nociones de límite y sucesión convergente se abre el camino para las definiciones clásicas de derivada y "función primitiva" (o integral indefinida) – que es en realidad una clase de funciones que difieren en una constante –, y para la demostración de algunos de los teoremas fundamentales del cálculo, como:

(2) $\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) = f(x)$ (forma simple del teorema fundamental del análisis),

(3) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (teorema de la integral definida).

En su estudio de la integral Cauchy completó la teoría general de la integración de funciones continuas para intervalos cerrados con n puntos de discontinuidad:

Si el intervalo $[x_0, X]$ se divide en subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, con $i = 1, \ldots, n$, tal que f coincide en (x_{i-1}, x_i) con una función f_i continua en $[x_{i-1}, x_i]$, entonces Cauchy define la integral de f del modo siguiente:

(4) $\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)dx$.

[158] A. L. CAUCHY: *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*, p. 19.

[159] A. L. CAUCHY: *ibidem*, p. 19, 37 y 38.

Cauchy resuelve también mediante ese método el problema de la integración de integrales impropias:

Si el $\lim_{x \to X} f(x) = \pm\infty$, pero f es continuo en $[x_0, X - \in]$ para cada $\in > 0$, la integral definida de f sobre $[x_0, X]$ es

(5) $\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x_0}^{X-\varepsilon} f(x)dx$.

La perfecta aritmetización de los procedimientos del análisis llegó más tarde, con Georg Riemann (1826-1866). Su integral definida para un intervalo cerrado $[a, b]$ existe cuando la integral superior es igual a la inferior, y ese número se designa como integral de Riemann $I(a, b)$ de la función f sobre el intervalo $[a, b]$, que escribimos:

(6) $I(a,b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$.

A partir de allí se tornará posible tratar funciones con infinitas discontinuidades en un intervalo. En su escrito de 1853 para la *venia legendi* se encuentra un ejemplo de una función que es infinitamente discontinua entre dos fronteras.

Muchos contribuyeron a la aritmetización del análisis, como también muchos contribuyeron a extender la noción de integral, entre otras. Tal es el caso de Camille Jordan (1838-1922), Vito Volterra (1860-1940), Giuseppe Peano (1858-1932), Henri Lebesgue (1875-1941), etc. El resultado final fue el de eliminar los infinitésimos, definir los números irracionales mediante sucesiones de números racionales, las integrales a sucesiones superiores e inferiores convergentes, con demostraciones de existencia y unicidad, etc. De este modo los problemas de fundamentación se reducían finalmente a los de la aritmética elemental de los números naturales. Peano no sólo demostró que las integrales superior e inferior de Volterra se podían definir adecuadamente como el ínfimo y el supremo de las sumas de Riemann para todas las particiones del intervalo $[a, b]$, sino que produjo la primera axiomatización adecuada de la aritmética elemental. A partir de ese momento el problema principal de fundamentación de los sistemas numéricos y del análisis fue el de la demostración de la consistencia de la aritmética de Peano. Luego de muchos intentos, algunos fallidos, otros parciales, ese mérito le estuvo casi completamente reservado a Gerhard Gentzen (1909-1945). Los cálculos secuenciales de Gentzen, que ya estudiamos, junto con su teorema generalizado de eliminación de la regla de corte le permitieron demostrar en 1934-5 la consistencia de la aritmética de Peano sin el axioma de inducción finita, y en un trabajo de 1936 la consistencia de la misma con dicho axioma. Lamentablemente su último teorema utilizaba una inducción transfinita hasta el ordinal ε_0, que es un procedimiento no reducible a predicados aritméticos elementales, como mostró Stephen Cole Kleene (1909-1994) en *Introduction to Metamathematics* (1952). En 1951 Paul Lorenzen (1915-1994) logró una solución de compromiso con un procedimiento constructivo de inducción sobre fragmentos iniciales finitos cualesquiera de la sucesión natural. Por eso podemos decir hoy que disponemos de una demostración constructiva para cualquier fragmento finito de la aritmética de Peano, y en consecuencia de sus extensiones numéricas hasta los complejos, y de al menos la parte constructiva del análisis clásico. Esa parte de la matemática está entonces más allá de toda duda y responde a la noción griega aristotélica de ciencia (*epistéemee*) como saber absolutamente fundado.

La concepción de la verdad en dichos dominios se puede interpretar de dos maneras. Para los formalistas se puede considerar a la teoría aritmética elemental (no necesariamente la metateoría) como *verdadera por coherencia analítica no ampliativa* (*pace* Frege). Para los constructivistas al menos una parte importante de los enunciados matemáticos son *verdaderos por correspondencia* y son *sintéticos a priori* (*ampliativos* pero *monótonos*), pues hablan sobre entidades simbólicas para las cuales se dan reglas de construcción.

La aritmetización del análisis se inició por las dificultades teóricas y lógicas que ocasionaban los infinitésimos. La llamada "*epsilóntica*" de Cauchy eliminó dichas entidades del análisis. Sin embargo el conjunto ℝ de la recta real de Richard Dedekind (1831-1916) y sucesores, que no contiene infinitésimos pero sí "todos" los números reales, se dice continua de ese modo, pero sólo lo es *sui generis*, pues con puntos, que son entidades de dimensión 0, no se puede construir un segmento de línea, o una superficie, volumen, etc., que son entidades de dimensión positiva. Por eso no debe extrañar que a mediados del siglo XX reaparezcan los infinitésimos en el conjunto ℝ* de los números "hiperreales" de Abraham Robinson (1960 y 1966). Así aparece el llamado "*análisis no estándar*", una revolución matemática que parece vengar a viejos analistas como Leibniz y Euler, pues completa la recta real de Dedekind con infinitésimos de dimensión 1 y permite, luego de un trabajoso comienzo, un tratamiento más eficiente de muchos problemas del análisis.

10.4. Cantor, la teoría de conjuntos ingenua, la crítica intuicionista y el problema de las (diferentes) teorías de conjuntos.

La teoría de conjuntos que inició Georg Cantor (1845-1918), innovó respecto del infinito. Para casi toda la matemática anterior – y especialmente para Karl Friedrich Gauß (1777-1855) – el infinito era sólo una "*façon de parler*", pero no había infinitud "real" o "en acto" en la matemática. El infinito era, desde la antigüedad, sólo "en potencia", es decir, algo no terminado, inconcluso, que se manifestaba en los procesos de generación de objetos simbólicos cuyas reglas de construcción impedían la existencia de un último elemento, como ocurre en el primer ejemplo histórico, el de la serie numérica elemental. Cantor introdujo en matemática la infinitud actual, y lo hizo de varias maneras. En su aritmética desarrolló la infinitud cardinal y la ordinal con dos teorías diferentes: la de los números cardinales transfinitos, los "ℵ", y la de los números ordinales transfinitos, que comienzan con los "ω". Ambos se ordenan en sucesiones infinitas. La teoría de conjuntos cantoriana fue rechazada, entre otros, por matemáticos como Leopold Kronecker (1823-1891). Esos juegos teóricos se volvieron críticos cuando aparecieron antinomias, desde la primera antinomia de Cesare Burali Forti (1861-1931) sobre Ω, el imposible mayor número ordinal, pasando por la de Bertrand Russell (1872-1970) del conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, la del propio Cantor del conjunto de todos los conjuntos (que no dio a conocer en vida y sólo se publicó póstumamente en 1932), etc. Si bien los adversarios de la teoría cantoriana de conjuntos consideraron a esto un golpe de gracia para esa teoría, los infinitistas cantorianos persistieron. Más tarde consideraron "ingenua" a la teoría inicial y la reformaron de modo tal que conservara la mayor parte de la teoría originaria, pero evitara las antinomias. El primer sistema exitoso de esas fatigas fue la teoría axiomática de conjuntos de Ernesto Zermelo (1871-1953), que apareció en 1908 y fue el primer sistema axiomático de conjuntos. Éste fue perfeccionado después por Adolf Abraham Fraenkel (1891-1965), quien eliminó todas las dificultades encontradas en la teoría ingenua. Ese sistema se conoce desde entonces como el sistema 'ZF', por Zermelo-Fraenkel (o 'ZFS', cuando se agrega a Skolem) y contiene nueve axiomas: de extensión, de comprensión, de pares, de unión, del conjunto potencia, de infinitud, de elección, de reemplazo y de regularidad o fundamento. Los siete primeros ya se encontraban en la versión de Zermelo de 1908, pero fueron modificados por Fraenkel. Luego la propuesta de Skolem respecto de la noción de "definibilidad" dio lugar a otras demostraciones de independencia (por ejemplo la de independencia del axioma de elección de Cohen 1963) mediante una operación que llamó "*forcing*". Uno de los puntos centrales de la reforma de ZF se encuentra en el axioma de comprensión. Las dos formas habituales de ZF son (1) la que carece del axioma de elección y (2) la que posee dicho axioma. Los sistemas ZF son muy fuertes, pero sin embargo en ellos no ha aparecido ninguna de las antinomias previamente conocidas, ni han dado lugar a nuevas antinomias. Son entonces "confiables" o "bien fundados" en el sentido que dimos a esa expresión más arriba, pero no son suficientemente fundados, pues no se ha encontrado hasta hoy una prueba de consistencia absoluta.

Los sistemas ZF no son los únicos bien fundados. Hay otros intentos exitosos como el de von Neumann-Bernays-Gödel (que abreviamos 'NBG'), etc.[160], que cumplen con los mismos requisitos de fortaleza deductiva como para definir los conjuntos necesarios para construir las principales teorías matemáticas, pero son suficientemente débiles como para impedir la deducción de las antinomias conocidas.

No se ha podido garantizar hasta ahora que no aparecerán nuevas antinomias en cualquiera de esos sistemas, y tampoco se sabe cómo construir pruebas de consistencia para las versiones completas de ninguno de ellos. Como se trata de teorías muy complejas, no se puede excluir que dichas pruebas sean imposibles. Sin embargo hasta hoy tanto ZFS como NBG son teorías bien fundadas que han superado todas las objeciones que se le hicieran. No obstante todas ellas son al menos "ligeramente artificiales"[161] y *parcialmente incompatibles entre sí*, lo que nos permite sospechar que algunos de sus principios son artificiosos. Consideremos un par de ejemplos. Podemos demostrar en ZFS los siguientes teoremas:

(7) $\vdash \{x: x = x\} = \varnothing$ y (8) $\vdash \cap\varnothing = \varnothing$.

En cambio en NBG se demuestran

---

[13] Hay otras axiomatizaciones menos utilizadas, como el sistema M de Morse y los sistemas NF (1937) y ML (1940) de Quine.

[161] MARTIN 1958 (1962, 145), señala, respecto de los sistemas conocidos, que "*quizá ninguno sea todavía plenamente satisfactorio*". SUPPES 1960, 41, opina: "[*it*] *emphasises the slightly artificial character of any form of axiomatic set theory.*" BECKER 1966, 186, afirma que "*el soberbio edificio de la teoría de conjuntos de Cantor … parece manifestarse como una fantasmagoría, como un cierto espejismo que se desvanece al acercarse a él*". Para Lorenzen una teoría de conjuntos no constructiva y por ello demasiado permisiva sería un "*fragmento de literatura fantástica*", como manifestara en varias oportunidades en sus cursos de la universidad de Erlangen.

(9) $\vdash \{x: x = x\} = V$ y (10) $\vdash \cap\varnothing = V$,

donde 'V' es la clase impropia (no conjunto) universal, entidad inadmisible en ZFS.

Por ello estos teoremas son sólo *inmanentemente* verdaderos, es decir respecto de la propia teoría, por lo que se trataría inicialmente de verdades por coherencia[162] (en el caso no demostrado de que se trate de teorías consistentes), pero no lo serían en sentido trascendente, pues son incompatibles con los de la otra teoría. No existe entonces, hasta ahora, *la* teoría de conjuntos, sino varias teorías parcialmente incompatibles entre sí, aunque inmanentemente con "*coherencia bien fundada*". Por eso gozan de buena salud y admiten el predicado semántico-pragmático de *verosímiles por consenso*.

Podemos decir entonces que los futuros posibles de las teorías matemáticas complejas e insuficientemente pero bien fundadas, como las teorías de conjuntos, serían tres:

i. o continuar en un estado indefinido de *creencia racional* (*inmanentemente*) *bien fundada*,
ii. o resultar *suficientemente falsadas* por la deducción de una falsedad ya demostrada en la teoría,
iii. o convertirse en *suficientemente demostradas* mediante una prueba de consistencia absoluta.

Podemos sostener entonces que la condición mínima para aceptar una teoría matemática es que sea una creencia racional inmanentemente bien fundada. En esto acordarían todos los matemáticos. Su desarrollo histórico les reserva, o la permanencia en ese estado, o un salto cualitativo, sea a la

[162] Serían además verdades por correspondencia si para cada una de esas teorías se dieran reglas de construcción para cada uno de sus objetos, como ocurre, entre otros, en el fragmento constructivista de teoría de conjuntos, pero esa posibilidad no parece realizable para toda una teoría.

condición de ciencia *sensu stricto*, sea a la de falsedad plena, en cualquiera de sus especies. Todo esto nos muestra que *la racionalidad matemática no sólo admite la prueba definitiva e irrefutable* (es decir *la razón suficiente en alguna de sus formas*), *sino también la creencia racional o saber verosímil bien fundado, pero falsable* (es decir *un fundamento insuficiente exigente*), lo que es parcialmente comparable con lo que ocurre en las ciencias empíricas. Esta precisión es fundamental para una epistemología de la matemática.

10.5. Hilbert, los problemas y el formalismo.

Uno de los autores que más contribuyó a aclarar la cuestión de fundamentos en matemática fue David Hilbert (1862-1943). Además de sus numerosas contribuciones a la matemática y la física, lo recordamos por su colección de veintitrés problemas titulado "*Mathematische Probleme*" ("Problemas matemáticos"), publicado en *Nachrichten* (noticias) de la sociedad científica de Göttingen. Un resumen de diez problemas (1º, 2º, 6º, 7º, 8º, 13º, 16º, 19º, 21º y 22º) fue leído por Hilbert en la Sorbona, París, el 8 de agosto de 1900, durante el "Segundo Congreso Internacional de Matemáticos".[163] Los dos primeros problemas del artículo tratan temas de fundamentos: el problema del continuo y el de la no contradicción de la aritmética. Como sabemos los dos son problemas resueltos que, con extensiones adecuadas, proporcionan una fundamentación suficiente al menos para una parte substancial del análisis clásico.[164] Pero el mérito fundamental de Hilbert fue el de su programa de fundamentación de la matemática, conocido como programa formalista que:

---

[163] *Deuxième Congrès International des Mathématiciens.* Muchos detalles históricos de ese congreso se encuentran en REID 1970, IX, 65-73 y X, 74-83, y una descripción breve en ROETTI, Jorge Alfredo: "Palabras de presentación", *Cuadernos del Sur – Filosofía* 30 (2000), 55-62.

[164] Una exposición de varios de los problemas y su situación actual fue dada en la revista *Cuadernos del Sur – Filosofía* 30 (2000), Bahía Blanca, Eduns.

(1) Propone una presentación sintáctica y axiomatizada de las teorías matemáticas desprovistas de significado, pero que, interpretadas, admiten incluso entidades infinitas actuales (Hilbert quiere conservar en lo posible las entidades infinitas actuales del llamado "paraíso de Cantor").
(2) Considera a las teorías matemáticas no interpretadas como los objetos de estudio de una doctrina metateórica finitista que denominará 'metamatemática'.

El programa formalista fue decisivo, no sólo por sus hallazgos, sino también por los impensados límites que presentaron los procedimientos axiomáticos y su tratamiento metamatemático. Éstos se manifestaron inicialmente con los trabajos de Gödel 1931 y de Church 1936, que demuestran teoremas de limitación.

No obstante ello, y a pesar de las limitaciones del programa formalista, Hilbert continuó siendo siempre un optimista epistemológico con una fe indeclinable en el alcance de la razón, entendida ésta en su forma fuerte de fundamentación suficiente, al menos en el ámbito de la matemática. Su llamado "*axioma de París*" – tan incomprendido a partir de las demostraciones de indecidibilidad de Kurt Gödel (1906-1978) para sistemas tan simples como la aritmética de Peano primero (1931) y de Alonzo Church (1903-1995) para la lógica clásica de primer orden luego (1936) – es un ejemplo de ello. El "axioma" de Hilbert es una convicción con buena retórica que dice lo siguiente: "*Esta convicción en la resolubilidad de cada problema matemático es para nosotros un poderoso acicate durante el trabajo; oímos en nosotros el constante clamor: allí está el problema, busca la solución. La puedes encontrar mediante puro pensamiento; pues en la matemática no existe ningún ignorabimus*".[165] Y lo repitió en diversas formas a lo largo de

[165] HILBERT 1900: "*Diese Überzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus*!" En HILBERT 1965, III, 298.

toda su vida: "*no sabemos, pero sabremos*"[166], "*Debemos saber, sabremos*"[167], reiterándola incluso en la lápida de su tumba en el cementerio de Göttingen. Hoy es difícil imaginarse una personalidad tal, en esta época de desconfianza en la razón, de desorientación y de actitud escéptica generalizadas. Hilbert y tantos otros científicos de épocas pasadas, y contemporáneos, conservan en cambio esa confianza, hoy prudentemente limitada, en la razón y sus obras. Podemos decir que Hilbert pertenece a los miembros de las culturas jóvenes y vigorosas, uno de cuyos rasgos típicos – según Vico – es la confianza en sus fuerzas, la tenacidad en el trabajo y la voluntad de creación, lo que contrasta con estos tiempos y lugares, con su desorientación y escepticismo, y con su abulia, que manifiestan las formas de vida de la decadencia.

No expondremos aquí en detalle el programa hilbertiano. Sólo recordaremos que para Hilbert la concepción de la *verdad* de los enunciados de sus sistemas axiomáticos es fundamentalmente *coherentista con fundamento suficiente*. Su concepción de la *ciencia* en el nivel lingüístico es *analítica* (es decir, *no ampliativa*) *y monótona*. La existencia de una entidad matemática o lógica en un sistema axiomático queda asegurada por su compatibilidad en el seno de la teoría del caso. Por ello el problema fundamental a resolver para tornar admisible una teoría matemática, o lógica, o física, etc., es dar una prueba metateórica de consistencia absoluta.

Esto es posible para teorías suficientemente simples, como la lógica clásica o intuicionista de primer orden, la aritmética de Peano, las teorías que son extensiones de las mencionadas y muchas otras. Pero no disponemos de pruebas de consistencia para muchas teorías de mayor complejidad. Uno de los casos ya mencionado es el de las teorías axiomáticas de conjuntos en sus versiones completas. Y lo peor es que no sabemos si alguna vez se alcanzará una demostración, ni siquiera si es posible lograrlo.

---

166 *Nescimus, sed sciemus.*

167 *Wir müssen wissen, wir werden wissen.*

10.6. Intuicionismo y constructivismo.

El intuicionismo, como el criticismo kantiano, tiene muchos antecedentes, pero en su forma tradicional nació con Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966). Algunas de sus ideas ya se encontraban en autores anteriores, como Henri Poincaré, pero encontraron su forma canónica en la tesis doctoral de Brouwer: *Over de Grondslagen der Wiskunde*, Amsterdam/Leipzig, 1907, cuyo título completo traducido dice: *Sobre los principios de la matemática, dirigida entre otras cosas contra la axiomatización de la matemática, la teoría de conjuntos de G. Cantor y E. Zermelo, como también contra la lógica simbólica de G. Peano y B. Russell*. ¡Un programa de investigación combativo! Los principales resultados matemáticos de Brouwer fueron en el dominio de la geometría, la topología y el análisis, como la demostración del teorema del punto fijo (1908), la de la invariancia del número de dimensiones (1911), la del teorema de Jordan para *n* dimensiones (1912), etc., pero lo que aquí nos interesa son sus ataques:

(1) Contra el logicismo de Frege, Peano y sus seguidores.
(2) Contra los infinitos actuales de Cantor y sus partidarios.
(3) Contra la admisión del *tertium non datur* en dominios no finitos.
(4) Contra la predicación acrítica de la existencia. Ésta se admitirá en su forma “fuerte” sólo cuando se pueda dar una regla de construcción del objeto matemático que se dice que “existe”, y en su forma “débil” cuando no se pueda dar una regla tal.
(5) Contra el continuo analítico como idéntico a la clase de *todos* los números reales (Brouwer dirá que el continuo es “un medio que deviene libremente”).

El largo nombre de su tesis doctoral enunciaba el programa de la matemática intuicionista. A causa de las dificultades de fundamentación de la matemática clásica y de las novedosas antinomias de la teoría ingenua de conjuntos de Cantor, dicho programa se proponía:

1. Utilizar sólo entes matemáticos previamente "construidos".
2. Utilizar una lógica fundada en el pensamiento matemático (que será la lógica "intuicionista") y no una lógica fundada en reglas que no toman en cuenta críticamente la diferencia entre lo finito y lo infinito (como ocurrió en la llamada "lógica clásica").
3. Admitir sólo el infinito potencial, que es el único dado en la secuencia de la "intuición originaria" – llamada '*Urintuition*' en alemán – y rechazar así el "paraíso de Cantor.
4. Reconstruir la matemática clásica sólo con métodos de definición y demostración "constructivos".

Un paso importante de la matemática intuicionista fue la negación de la validez universal o irrestricta de la regla de *tertium non datur*. Lo que valdrá universalmente en el intuicionismo será un *quintum non datur* metamatemático para las proposiciones matemáticas, que expresamos así: $\vdash A \vee \neg A \vee \neg\neg A \vee {}^*A$, donde $^*A$ es una fbf. matemática no decidida y muchas veces indecidible. Un caso clásico de fórmula matemática no decidida (tal vez indecidible) es el de la forma fuerte de la conjetura de Christian Goldbach (1690-1764), que dice: "*Todo número par diferente de 2 es suma de al menos un par de números primos*". Estos enunciados no decididos son de importancia para el intuicionismo, pues rechazan la limitación de la lógica a "enunciados definidos respecto de la verdad" (e. d., verdaderos o falsos) y justifican su extensión a "enunciados indefinidos respecto de la verdad", pero definidos respecto de las reglas del diálogo. Tanto el intuicionismo, como su sucesor el constructivismo, no parten del prejuicio de "bivalencia" de las lógicas que hoy llamamos crisipianas (en las que todo enunciado es verdadero o falso), prejuicio también llamado "platónico", sino que admiten enunciados indefinidos respecto de la verdad o falsedad. El principio de *quintum non datur* metamatemático se puede expresar de la siguiente manera:

1. 'A está demostrada', que abreviamos '$\vdash A$', o
2. '$\neg A$ está demostrada', que significa '$A \vdash f$' (donde 'f' es 'cualquier expresión falsa en la teoría'), o
3. '$\neg\neg A$ está demostrada', que abrevia '$(A \vdash f) \vdash f$', o

4. ‘$*A$’, es decir, ‘ni A está demostrada, ni $\neg A$ está demostrada, ni $\neg\neg A$ está demostrada’.
En este último caso puede ocurrir que:
4.1. o bien existe al menos un algoritmo que podría decidir la cuestión, pero aún no se ha realizado el cálculo;
4.2. o no se conoce ningún algoritmo que permita decidir la cuestión;
4.3. o no puede existir ningún algoritmo que permita decidir la cuestión.

Las tres variantes de 4 nos permitirían hablar incluso de un *septimum non datur*.

10.7. La prueba constructiva.

El programa intuicionista exige:
1. Que las demostraciones matemáticas tengan un número finito de pasos o utilicen una forma de inducción finita enumerable, es decir un proceso infinito potencial dado en un esquema metalingüístico finito.
2. Que los entes que aparezcan en las demostraciones estén previamente definidos por construcción, o se construyan a partir de los entes previamente definidos en un número finito de pasos, o se den por definiciones esquemáticas recursivas finitas.
3. Que no se admitan definiciones impredicativas (principio del círculo vicioso).
4. Que no se admitan infinitos actuales.
5. Que las pruebas de existencia sean “constructivas”, las que podrán ser “fuertes” o “débiles”.
6. Que no se utilice el axioma de elección, ni ningún principio equivalente.
7. Que sólo se use el *tertium non datur* en aquellos casos en que uno de los extremos de la disyunción esté demostrado o exista un método efectivo para decidirlo.
8. Que las pruebas constructivas sean algorítmicas computables.

Aquí pondremos el acento en la quinta cuestión, la que obliga a que en las demostraciones matemáticas se distinga estrictamente entre:

Existencia fuerte, que se da cuando hay una regla de construcción de un objeto determinado *a* que es φ ($\vdash \varphi a$), de la cual, por la regla '$\varphi a \vdash \bigvee x.\varphi x$', se deduce '$\vdash \bigvee x.\varphi x$'.

Existencia débil, que se da cuando carecemos de la construcción de un *a* determinado que sea φ, pero sí sabemos que, si negamos que haya al menos un *a* que sea φ*a*, deducimos una expresión indemostrable en la teoría, es decir $\neg\bigvee x.\varphi a \vdash f$, lo que equivale a $\vdash \neg\neg\bigvee x.\varphi a$. En matemática gran parte de los teoremas de existencia son de este último tipo. El propio teorema del punto fijo de Brouwer es un teorema de existencia débil.

Según Brouwer la matemática es "la parte exacta del pensamiento". Según ese criterio todo enunciado demostrado, o suficientemente fundado, pertenecería a la matemática. Para él las demostraciones matemáticas se obtienen inicialmente por *construcción en la intuición temporal*, a partir de la sucesión fundamental de los números 1, 2, … Para el tiempo en que Brouwer presentara su tesis ya se sabía muy bien que la forma kantiana del espacio era ambigua y no permitía preferir ninguna geometría métrica concreta. De allí surgía que una pluralidad de geometrías inmanentemente consistentes con métricas diversas fueran todas compatibles con la filosofía kantiana. En cambio la intuición temporal se presentaba – y se presenta – como única y determinada. Las construcciones realizadas en ella serían por lo tanto necesarias. Serían además el *fundamento intuitivo de la matemática* como saber absolutamente fundado. La concepción intuicionista de la *verdad* será entonces de verdad *por correspondencia*, la matemática será un *saber no axiomático ni analítico*, sino *sintético ampliativo*, pero *a priori* y *monótono* (y en esto se advierte ya una influencia kantiana).

Sin embargo Brouwer no se preocupó demasiado por recurrir a una forma temporal transcendental a la manera kantiana, es decir como condición universal de posibilidad del mundo fenoménico. Su idea de tiempo parece más bien empírica. Esto crea problemas de fundamentación por la justa acusación de psicologismo al que se verá sometido su intuicionismo. El posterior constructivismo intentó superar ese problema.

El constructivismo tuvo también varios antecedentes, entre otros Hugo Dingler y Hermann Weyl. Su figura más importante fue sin embargo Paul Lorenzen (1915-1994). Se puede considerar al constructivismo como una síntesis entre el intuicionismo de Brouwer y el formalismo de Hilbert. Del intuicionismo adoptó las críticas de Brouwer de arriba, por lo que se diferencia de la matemática clásica, pero por otra parte no adoptó el psicologismo de las construcciones en el tiempo empírico, construcciones que de ese modo no eran públicas y por lo tanto no eran intersubjetivamente controlables. Por otra parte adoptó del formalismo de Hilbert su "giro lingüístico", es decir su concepción de muchas teorías como sistemas de objetos no interpretados que se estudian desde una metamatemática, pero, a diferencia de Hilbert, entre los objetos interpretados no aceptó una buena parte del "paraíso de Cantor" y su universo de conjuntos transfinitos de cardinales y ordinales. Los procesos recursivos transfinitos cuyo tipo de orden sea un número ordinal $\alpha < \varepsilon_0$, se podrán admitir, si se encuentra un proceso de reducción a la recursión finita. En cambio de los cardinales transfinitos sólo se conserva $\aleph_0$. Lorenzen dio una prueba interesante de que es posible construir funciones inyectivas de $\aleph_n$ sobre $\aleph_0$. La demostración es compleja, pero permite, por una parte tornar superflua una parte importante del paraíso de Cantor, y por otra resolver problemas como el primero de la lista de Hilbert, el de la hipótesis del continuo. El continuo real $\mathbb{R}$ se muestra así como posiblemente enumerable, con lo que cae el segundo método diagonal de Cantor, que es un procedimiento impredicativo. Para una explicación detallada del problema del continuo y su solución o disolución constructiva, véase ROETTI 2000.[168]

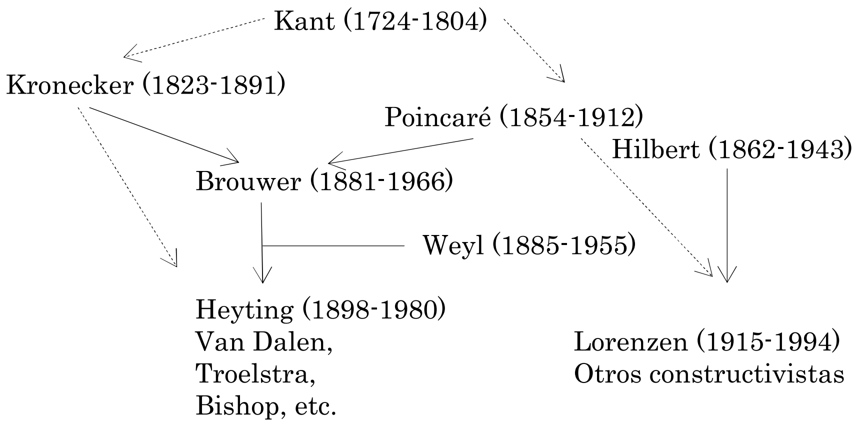
El paso siguiente del constructivismo de Lorenzen y Lorenz fue el tratamiento dialógico de la matemática y de la ciencia en general. Los "juegos de diálogos" que estudiamos en capítulos anteriores nacieron como una inversión de los cálculos secuenciales de Gentzen y son un importante procedimiento teórico y metateórico para resolver numerosos problemas de fundamentos. La parte de la matemática clásica reconstruida de modo constructivo permite fundamentar toda la matemática necesaria para las ciencias, desde los cálculos lógicos, pasando por la teoría numérica, la parte constructiva del análisis clásico, una reconstrucción de la geometría como método de medida de objetos materiales – con una métrica euclidiana –, de una cronometría para la fabricación de relojes, una estocástica con su teoría de la probabilidad y estadística, además de muchos otros desarrollos de topología, álgebra, etc. El programa constructivista de Lorenzen parece haber cumplido con éxito su propósito: la reconstrucción crítica de las ciencias y su lenguaje. Sin embargo no inició la tarea de completar una teoría para las formas de la razón no deductiva o no suficiente, es decir conjetural e insuficiente, como se da en otros dominios de las ciencias y en los diálogos cooperativos de lo verosímil, que no demuestran, pero pretenden ser racionales.

10.8. El desarrollo de la escuela intuicionista-constructivista.

A continuación daremos un esbozo del desarrollo de la escuela intuicionista-constructivista. En el cuadro siguiente las líneas enteras indican influencias fuertes y las líneas de trazos influencias más débiles o indirectas. Todo esto es sólo una aproximación, más que un esquema precisamente fundable.

---

[168] ROETTI 2000: ROETTI, Jorge Alfredo: "Hilbert y el primer problema: ¿solución o disolución?", *Cuadernos del Sur – Filosofía* 30 (2000), 79-102.



10.9. Consistencia, verdad y verosimilitud matemática.

Para concluir con este tema recordemos, por un lado, las *concepciones de verdad* en la matemática y algunos de los *problemas abiertos* de la matemática y la lógica. Cuando se considera la aceptabilidad de una teoría matemática se parte del hecho intersubjetivamente verificable de que se trata de un sistema de entidades simbólicas, independientemente del hecho de que haya una o más interpretaciones diferentes para ellas. Si prescindimos de las interpretaciones posibles y nos quedamos sólo con la sintaxis del sistema, el problema de aceptabilidad de una teoría $\mathbf{T}$, o de una entidad simbólica A en una teoría $\mathbf{T}$, consiste en realizar una prueba metateórica de que la teoría $\mathbf{T}$ es consistente, al menos en forma absoluta, es decir, si $\mathcal{F}$ es el conjunto de las fbf.s del lenguaje, en el caso de la teoría, que $\mathbf{T} \nvdash \mathcal{F}$, y en el caso de una entidad simbólica A agregada a la teoría, que A, $\mathbf{T} \nvdash \mathcal{F}$.

Si el sistema contiene negación podemos intentar una prueba fuerte de consistencia relativa a la negación, es decir, que no se da el caso de que $\mathbf{T} \vdash A$ y $\mathbf{T} \vdash \neg A$.

De todos modos, para aceptar una teoría basta con la prueba de consistencia absoluta, lo que significa que, si cambiamos la lógica por una que no colapse ante la presencia de una contradicción (es decir, sea una lógica paraconsistente o adaptativa), es posible una teoría consistente con al menos un par de teoremas contradictorios.

Las consistencias demostradas proporcionan una *verdad por coherencia*. Esa es la primera solución que podemos adoptar. Pero también podemos recordar que las concepciones intuicionista y constructivista son discursos que hablan sobre entidades simbólicas *construidas*, como las representadas mediante esquemas de trazos '| |…|', que son entidades que representan a los "números fundamentales" a partir de los cuales se construye la aritmética elemental. Éste es un ejemplo sobre el que insistía Hilbert. Por lo tanto la concepción de la verdad constructivista será principalmente de *verdad por correspondencia*, aunque puedan perfectamente aceptar verdades sólo por coherencia.

Finalmente, en los sistemas para los que no hay pruebas de consistencia, ni respecto de la negación, ni absoluta, un criterio admisible temporalmente será el de "*buen fundamento*", es decir, se exigirá al menos la *verosimilitud bien fundada*, que exige que la teoría no tenga *hasta ahora* antinomias y albergue todos los teoremas demostrados al menos en los subsistemas para los que existan pruebas de consistencia. Estos serán sistemas revisables y falsables, como ocurre en las ciencias empíricas. Casos de este tipo son, por ejemplo, los de las teorías de conjuntos mencionadas arriba.

Hay muchos problemas abiertos de dos tipos: los *teóricos* y los *metateóricos*. Ejemplos de problemas teóricos son la famosa conjetura fuerte de Goldbach, los problemas de distribución de los números primos en la teoría numérica y algoritmos para su cálculo, como la famosa conjetura de Riemann y su función 'ζ', y muchos otros. Algunos ejemplos de problemas metateóricos son conocidos: los problemas de decidibilidad, de completitud, de consistencia, de categoricidad, etc. Un sistema tan simple como la lógica clásica de enunciados resuelve positivamente los principales problemas metateóricos: es consistente, completo, decidible, categórico. Por su parte la lógica de primer orden es consistente y completa, pero sólo parcialmente decidible (teorema de Herbrand) y no es categórica (teorema de Löwenheim-Skolem). La aritmética de Peano y sus extensiones constructivas con consistentes, pero incompletas, indecidibles y no categóricas. Teorías más complejas carecen incluso de pruebas de consistencia, y por cierto carecen también de pruebas de completitud, decidibilidad, etc. ¿Cuál será el futuro de dichas teorías y de dichos problemas? Aquí se presentan diversas opiniones. Está por ejemplo la tesis pesimista de Emil du Bois Reymond de 1882 expresada con su famoso "*ignorabimus*" (ignoraremos).[169] También el prólogo retóricamente perfecto de la primera edición de la *Crítica de la razón pura* de Immanuel Kant expresa un limitado pesimismo epistémico. Allí nos dice Kant que: "*la razón humana tiene el peculiar destino en un género de sus conocimientos*: *que ella es atormentada por cuestiones que no puede evitar, pues le son propuestas por la naturaleza de misma razón, pero que no puede contestar, pues superan toda la capacidad de la razón humana*".[170]

Por otra parte hay optimistas epistemológicos. En la matemática el más notorio optimista es Hilbert, como ya hemos visto. Gödel, quien demostrara la indecidibilidad de la aritmética de Peano en 1931 y con ello probara un límites efectivo al alcance de la razón demostrativa o suficiente para sistemas axiomatizados, fue también a su modo un optimista epistemológico en el ámbito de la matemática, aunque no de un modo tan fuerte como el de Hilbert.

---

[11] Emil Heinrich DU BOIS-REYMOND (1818-1896) fue un famoso médico y fisiólogo alemán.

[12] KANT 1781/1787, A vii. "*Die menschliche Vernunft hat das besondere Schicksal in einer Gattung ihrer Erkenntnisse: daß sie durch Fragen belästigt wird, die sie nicht abweisen kann, denn sie sind ihr durch die Natur der Vernunft selbst aufgegeben, die sie aber auch nicht beantworten kann, denn sie übersteigen alles Vermögen der menschlichen Vernunft.*"

Es cierto que hay problemas teóricos o metateóricos irresolubles en el ámbito de las ciencias demostrativas, pero por otra parte es preciso advertir que el pesimismo epistemológico puede conducir a la inacción. Por eso el optimismo epistemológico de Hilbert no es una tesis sino un mandamiento metódico: ¡*Debéis creer que los problemas son resolubles*! Pues si no lo creéis, difícilmente investigaréis. ¿Habrían surgido las geometrías no euclidianas si Gauß, Bolyai, Lobachewski, Beltrami, etc., no hubiesen pensado que el problema era resoluble? Por lo tanto el optimismo es heurístico: ¡*Si queréis hacer filosofía o ciencia, debéis ser optimistas epistemológicos*!

10.10. Formas de la indecidibilidad matemática.

Recordemos ahora algunos conceptos relativos a la indecidibilidad de enunciados y teorías matemáticas:

D10.1. A es una fbf. *clásicamente indecidible* en una teoría **T** (abreviamos $*_{c}A_{\mathrm{T}}$) si y sólo si (abreviado 'syss', en símbolos '$\leftrightharpoons$') ni A, ni su negación $\neg A$ se pueden deducir como teoremas en **T**. En símbolos:

$$*_{c}A_{\mathrm{T}} \leftrightharpoons (\nvdash_{\mathrm{T}} A) \,\&\, (\nvdash_{\mathrm{T}} \neg A)$$

D10.2. A es una fbf. *intuicionistamente indecidible* en una teoría **T** (abreviando $*A_{\mathrm{iiT}}$) syss ni A, ni su negación $\neg A$, ni su doble negación $\neg\neg A$, se pueden deducir como teoremas en **T**. En símbolos:

$$*_{i}A_{\mathrm{T}} \leftrightharpoons (\nvdash_{\mathrm{T}} A) \,\&\, (\nvdash_{\mathrm{T}} \neg A) \,\&\, (\nvdash_{\mathrm{T}} \neg\neg A)$$

En una teoría indecidible de tipo clásico se satisface el siguiente *quartum non datur* metateórico:

Para toda fbf. A vale que ó $\vdash_{\mathrm{T}} A$ ó $\vdash_{\mathrm{T}} \neg A$ ó $*_{c}A_{\mathrm{T}}$.

Por su parte, como ya sabemos por la lógica intuicionista, en una teoría indecidible de ese tipo se satisface un *quintum non datur* metateórico, que expresamos así:

Para toda fbf. A vale que ó $\vdash_{\mathrm{T}} A$ ó $\vdash_{\mathrm{T}} \neg A$ ó $\vdash_{\mathrm{T}} \neg\neg A$ ó $*_{\mathrm{i}}A_{\mathrm{T}}$.

Una teoría **T**, sea intuicionista o clásica es, en la terminología de Brouwer un "abanico".[171] Por otra parte el sistema 'VT' de las "verdades" o fbf.s válidas (en los modelos admitidos) es un sistema de expresiones **S**, para las cuales **T** es una teoría. **S** es lo que en la terminología intuicionista se denomina una "especie"[172], que puede coincidir o no con el "abanico" de su formalismo. Se entiende que el abanico 'T' es un sistema sintáctico, en tanto que el sistema de las verdades 'VT' es una semántica para esa sintaxis. En el caso particular (y minoritario) de las teorías decidibles la especie de fórmulas válidas VT coincide con el abanico **T** (es decir, en ese caso **T** = VT = **S**). Sin embargo en el caso general de las teorías con fórmulas válidas indecidibles VT no coincidirá con **T**, sino que tendrá a **T** como un subconjunto propio de VT. Esto significa que en los sistemas con fórmulas indecidibles vale:

$$\{A\colon A\in \mathrm{T}\} \subset \{B\colon B\in \mathrm{VT}\}.$$

Es claro que la indecidibilidad de una teoría **T** será *accidental* cuando exista al menos una extensión $\mathrm{E_T}$ de **T** tal que $\mathrm{E_T} = \mathrm{VT}$, es decir $\{A\colon A\in \mathrm{E_T}\} = \{B\colon B\in \mathrm{VT}\}$. En los casos en que es posible la existencia de una tal extensión o, lo que es lo mismo, no hay prueba de su imposibilidad, es perfectamente admisible un *optimismo epistemológico* "*fuerte*", que en el caso de sistemas clásicos e intuicionistas podemos simbolizar como la *posibilidad del pasaje de una teoría inicial* $\mathrm{T^i}$ *a una teoría final* $\mathrm{T^f}$ *que es la más amplia extensión de* $\mathrm{T^i}$ ($\mathrm{T^f} = \mathrm{E_T}^{\mathrm{i}}$), *tal que*:

---

[171] Brouwer lo llamó '*waaier*' en holandés; en alemán se tradujo 'der *Fächer*' y en inglés 'the *fan*'.

[172] '*Soort*' la llama Brouwer en holandés, que se traduce 'die *Sorte*' en alemán y 'the *species*' en inglés.

$\mathbf{T}^{i} = \{A: \vdash_{T^{i}} A, \text{ ó } \vdash_{T^{i}} \neg A, \text{ ó } *_{c}A_{T}\} \Rightarrow \mathrm{V}\mathbf{T} = \{B: \vdash_{T^{f}} B \text{ ó } \vdash_{T^{f}} \neg B)\}.$

Ésta sería la posibilidad del pasaje de una teoría $\mathbf{T}^{i}$ con *quartum non datur* a una extensión de la misma $\mathbf{T}^{f}$ con *tertium non datur* metateórico clásico, que coincida con el sistema de fbf.s válidas VT. Y en el caso constructivo o intuicionista el optimismo epistemológico fuerte expresa la posibilidad del pasaje:

$\mathbf{T}^{i} = \{A: \vdash_{T^{i}} A, \text{ ó} \vdash_{T^{i}} \neg A, \text{ ó } \vdash_{T^{i}} \neg\neg A, \text{ ó } *_{i}A_{T^{i}}\} \Rightarrow \mathrm{V}\mathbf{T} = \{B \vdash_{T^{f}} B \text{ó} \vdash_{T^{f}} \neg B) \text{ ó} \vdash_{T^{f}} \neg\neg B\},$

de la teoría $\mathbf{T}^{i}$ con *quintum non datur* a la teoría $\mathbf{T}^{f}$ con *quartum non datur* metateórico constructivo o intuicionista. Ciertamente esto sólo es posible en casos excepcionales.

Por otra parte el caso realmente interesante es el de las teorías o formalismos *esencialmente indecidibles*, es decir, cuando toda extensión $\mathrm{E}_{T^{i}}$ del formalismo inicial $\mathbf{T}^{i}$ contiene a su vez fórmulas indecidibles, que es lo que ya ocurre con sistemas tan simples como la lógica de primer orden, que sólo es parcialmente decidible, y la aritmética de Peano, que es indecidible en el sentido de que no existe ninguna extensión axiomática final $\mathbf{T}^{f}$ que permita decidir algorítmicamente *todas* las fórmulas válidas del sistema.

¿Tiene sentido en esos casos, que son multitud en las ciencias simbólicas, adherir a algún optimismo epistemológico? Si consideramos ejemplos como los de Hilbert y de Gödel, debemos admitir tales optimismos, pues estos autores fueron optimistas en esos dominios teóricos. Sin embargo ellos fueron optimistas de una manera débil. El "fundamento" de un optimismo débil suele ser sólo un *ipse dixit!*, es decir un argumento por autoridad epistemológica. Recordemos el que nos parece más interesante, que es el "optimismo hilbertiano", que se puede describir como una fe en lo siguiente:

"Aunque no exista ni pueda existir un algoritmo que permita la generación finita de los formalismos para una teoría *mediante extensiones sucesivas* – que no tienen porqué estar necesariamente en relación de inclusión transitiva –, *se puede alcanzar a determinar – mediante un proceso finito de extensiones teóricas – para cualquier fbf. A de la teoría si es un teorema o no lo es* (*aunque no para todas con una sola extensión*)."

Éste es un optimismo débil, que dice algo diferente de lo afirmado por el optimismo fuerte de arriba, pues cree en un pasaje de alguna de las dos especies siguientes:

Para toda fbf. A, si A es clásicamente indecidible en T^i ($*_c A_{T^i}$), entonces existe al menos una extensión E_{Ti}, tal que o bien
$\vdash_{E_{T^i}} A$, o bien $\vdash_{E_{T^i}} \neg A$.
Para toda fbf. A, si A es intuicionistamente indecidible en T^i ($*_i A_{T^i}$), entonces existe al menos una extensión E_{Ti}, tal que o bien $\vdash_{E_{T^i}} A$, o bien $\vdash_{E_{T^i}} \neg A$, o bien $\vdash_{E_{T^f}} \neg\neg B$.

Se podría entender al optimismo epistemológico hilbertiano como una idea reguladora irrealizable en plenitud, como la kantiana, que motiva una investigación infinita. No obstante parece haber un resto injustificable de "fe racional": no podremos saber nunca si la sucesión infinita de extensiones E_{T^i} del formalismo inicial T^i efectivamente alcanza a cualquier fbf. de VT. Podría ser que lo haga, pero también podría ser que no. Formalmente el optimismo hilbertiano admitiría lo siguiente:

$$(1) \quad T^i = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_{T^i}, \qquad \text{y} \qquad (2) \quad VT = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{T^i},$$

es decir, la colección de las extensiones E_{T^i} de la teoría inicial T^i es un conjunto ordenado en el que las intersecciones no vacías forman un filtro infinito cuyo ínfimo es el abanico T^i, y en el que las uniones formarían un ideal cuyo supremo es la especie VT de las fbf.s válidas. Sin embargo igualmente creíble, con igual fundamento, sería el correspondiente pesimismo epistemológico, que admite la ecuación (1), pero reemplaza la segunda por la siguiente:

(3) $$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_T^i \subset VT.$$

No parece haber una manera finita de decidir esta discrepancia de creencias, ni de tornar más creíble o mejor fundada una u otra de ellas, y por lo tanto preferible.

Adviértase que un formalista clásico también puede ser un pesimista epistemológico y que, por su parte un intuicionista o constructivista también puede ser, o bien un optimista epistemológico en sentido débil, o bien un pesimista, aunque de diferente manera.[173]

10.11. Autofundación de la lógica.

Uno de los cofundadores del círculo de Viena, el economista y teórico social Otto Neurath (1882-1945), cuya tendencia metafísica fue holista y que defendió por aquellos tiempos una teoría coherentista de la verdad, publicó en 1932 un famoso artículo titulado "Enunciados protocolarios" (*Protokollsätze*), que comenzaba con una metáfora que se hizo famosa y que sirvió a muchos autores para ilustrar la tarea de reconstrucción de la ciencia y, en general, del saber. Ella decía así:

"*Somos como barqueros que deben reconstruir su nave en mar abierto, sin poder jamás desarmarla en un dique seco y volverla a reconstruir con los mejores componentes.*"[174]

Esto, que es aplicable a la ciencia y la filosofía, es también una buena metáfora para la situación en que forzosamente se encuentra todo intento último (no metamatemático) de fundamentación de la

[173] El *optimismo de Gödel* parece ser algo más débil que el de Hilbert. Una versión del mismo se encuentra el la obra de TENNANT 1997 citada en la bibliografía.
[174] NEURATH 1932, p.: "*Wie Schiffer sind wir, die ihr Schiff auf offener See umbauen müssen, ohne es jemals in einem Dock zerlegen und aus besten Bestandteilen neu errichten zu können.*"

lógica y de una teoría de la razón. Los intentos de fundamentaciones "desde arriba", desde los principios (metafísicos) evidentes o inmediatamente reconocidos como verdaderos, que comienzan explícitamente con Aristóteles, han fracasado parcialmente, y lo mismo ha ocurrido con las pretendidas fundamentaciones "desde abajo", desde sus consecuencias (empíricas). Esas fundamentaciones no son necesariamente "malas", pero son insuficientes. En ciertos casos pueden ser "robustas", o sumamente "persuasivas", incluso aparentemente inconmovibles, pero en otros casos pueden ser débiles.

Si los fundamentos desde arriba y desde abajo son insuficientes e imperfectos, restaba imaginar una tercera vía de escape para una fundamentación plenamente satisfactoria de la lógica: éstas son las fundamentaciones "desde adentro": ni desde una metafísica racionalista plenamente *a priori*, ni desde un dogma empirista totalmente *a posteriori*. Ejemplo de un intento tal fue el ensayo kantiano de reconstrucción de la razón y de los límites del conocimiento totalmente fundado, desde su metafísica de la experiencia y del conocimiento, ensayo que partía de su esfuerzo por describir la estructura necesaria de todo sujeto mundano posible – o sujeto trascendental –, de la cual se buscaba deducir un conjunto de reglas y leyes, también necesarias, que debían ser obedecidas por todos los objetos y procesos del mundo fenoménico conformados a medida de dicha estructura del sujeto trascendental. Muchas críticas se han acumulado contra distintos aspectos del criticismo kantiano y no es este el lugar para juzgar los límites de su justicia o injusticia. Para nosotros lo más importante que instaura la obra de Kant no son tanto los detalles de su intento, sino que con ella se abre una tercera vía, la del criticismo, cuya característica se expresa con el adjetivo 'trascendental'.

Desde entonces se sucedieron numerosas variantes de trascendentalismo. Lo común a todas ellas es que *pretenden trascender tanto la fundamentación racionalista desde arriba, cuanto la empirista desde abajo, mediante un camino interior que permita el acceso al menos parcial a una colección de* ***condiciones de posibilidad para todo conocimiento***

suficientemente fundado – y aquí queremos agregar también *que permita el acceso a una colección de* ***condiciones de posibilidad para todo conocimiento insuficientemente fundado pero sin embargo defendible y aseverable***.

La vía intermedia trascendental no tiene por qué ser sólo una. Puede haber varios caminos, que tampoco tienen porqué ser necesariamente equivalentes en sus resultados. Diversas formas de filosofía crítica, como los estudios fenomenológicos, las ontologías fundamentales, la investigación de fundamentos de lógica y matemática (*Grundlagenforschung*), etc., son ejemplos posibles y al menos parcialmente exitosos en esa dirección. Sin negar aquí tales "programas de investigación" posibles, nosotros pondremos nuestra atención fundamentalmente en el denominado programa pragmático trascendental.

La metáfora de Neurath nos coloca también en esa situación central inaugurada por el trascendentalismo kantiano, pero su estilo es pesimista respecto de la mera posibilidad de que existan "fundamentaciones últimas" que nos permitan alcanzar algo más que una fundamentación empirista y falible de los mismos instrumentos de discusión y fundamentación filosófica y científica. Hay que repreguntarse sin embargo si la situación de la barca es completamente pesimista en el sentido de que no admita nada más que fundamentaciones insuficientes e imperfectas, como la "opinión verdadera" (*orthée dóxa*) aristotélica, que no haya resquicio para al menos algunos fragmentos de "fundamentaciones últimas" de alguna especie, es decir para el fundamento suficiente.

Nuestro propósito es aquí doble: en primer lugar mostrar cómo la filosofía y sus derivaciones científicas han logrado parcialmente, desde la antigüedad y hasta nuestros días, fragmentos de fundamentación suficiente en regiones especiales del conocimiento, y en segundo lugar rescatar un método de fundamentación suficiente que está íntimamente emparentado con procedimientos de autofundación como el de Gerolamo Saccheri, por una parte, y con los de la denominada pragmática trascendental, por la otra. El resultado que obtenemos es pequeño respecto de la extensión de la fundamentación suficiente anhelada, y amplio respecto de la insuficiente. Y esta última – y eso es lo realmente interesante – contiene un núcleo pragmático-gnoseológico que está suficientemente fundado. La afirmación de esta vía de acceso a una "fundamentación última" no es excluyente. Con ella no negamos de ninguna manera la posibilidad de otras formas parciales de acceso a otras regiones de fundamentación definitiva, sea en el ámbito de las "protociencias", sea en el de la propia metafísica, o incluso de la ontología fundamental.

Un ejemplo interesante es el uso que hace Saccheri de su principio para demostrar que ningún silogismo de la primera figura con premisa menor negativa es válido.[175]

10.12. El principio de identidad o 'pi'.

Comencemos con el primer principio, el *principium identitatis*, abreviado '**pi**', en forma paramétrica lo simbolizamos $\vdash A \rightarrow A$. El principio ya es ley en los juegos de diálogos estrictos ***E*** y es "formalmente" válida para toda fbf. de todo lenguaje. Si utilizamos el cálculo ampliado de enunciados de Russell, la forma paramétrica fuerte del principio es $\vdash \bigwedge A(A \rightarrow A)$. La defensa dialógica de esa forma de **pi**, en la que A puede ser cualquier fbf. posible[176], ya fue discutida en el capítulo 8. Aquí la abreviamos del modo siguiente[177]:

P, 0 $A \rightarrow A$; **O**, 1(0) A? ; **P**, 2[0]1 A ; **O**, 3(2) ? ; **P**, 4(1) ?

[175] Cf. LOLLI 1985, 88 (III. Saccheri e le definizioni "*filiae plurium demostrationum*", 85-106).
[176] Como vimos, se puede comenzar con las fórmulas primas, pero la misma argumentación es válida para las fórmulas compuestas.
[177]LORENZEN 1987, 88. Se puede presentar como la forma "más débil" de **pi**, pero la forma $A \leftrightarrow A$ es sólo aparentemente "más fuerte". También podríamos utilizar la forma más antigua $A = A$.

En 1(0) el oponente **O** ataca la tesis 0 del proponente copiando antecedente de esa tesis. **P** defiende su tesis en 2[0]1 mediante la copia de ese antecedente ya admitido por el oponente **O** durante su ataque 1(0). En 3(2) **O** ataca esa copia de **P**, y éste contesta con un ataque al antecedente A afirmado por **O** en 1(0). Ahora el oponente debería defender A: "*Si puede hacerlo, entonces el proponente sólo necesita copiar esa defensa, si no puede hacerlo, entonces el proponente ha ganado inmediatamente.*"[178] Por lo tanto la defensa sería "formalmente cerrada" (*formal abgeschlossen*) según Lorenzen y la tesis **pi** $\vdash A \rightarrow A$ una verdad lógica estricta. Esta justificación dialógica del principio de identidad es sostenible, pero contiene un supuesto tácito, que no se ha discutido previamente y que por eso hace parecer insuficiente el cierre formal. El oponente **O** podría objetar en el metalenguaje que la supuesta copia del proponente **P** de A en 2[0]1 ya contiene una *petitio principii*: **P** supone el principio de identidad cuando mediante su argumentación afirma tácitamente que la aparición de A en 1(0) y 2[0]1 representan dos "acontecimientos de identidad típica" de un único signo. Pero el proponente da entonces su argumento decisivo: "Concedido, pero exactamente el mismo "error" ya cometió el oponente cuando atacó la implicación 0 mediante la admisión de su antecedente en 1(0), pues para eso ha debido suponer la identidad típica de A en el antecedente de 0 con la A de su ataque 1(0)" Lo decisivo es que *ambas petitiones principii son indistinguibles*. Eso significa que cada ataque al principio de identidad ya lo reconoce como *pragmáticamente válido*. Incluso en el caso de un cálculo paraconsistente en el que fuera defendible una implicación $A \rightarrow \neg A$ (negación de la "ley aristotélica" $\neg(A \rightarrow \neg A)$) para al menos una fbf. A, también sería defendible la implicación $A \rightarrow A$. Pero esto sólo significaría que allí se puede defender una contradicción particular $A \wedge \neg A$, resultado que es compatible con la legalidad de un cálculo paraconsistente. El principio de identidad es por

---

[178] LORENZEN 1987, 88: "*Kann er es, so braucht der Proponent diese Verteidigung nur nachzumachen, kann er es nicht, so hat der Proponent sofort gewonnen.*"

lo tanto una condición de posibilidad pragmática de toda argumentación, pues los pasos de ataque y defensa suponen:

(1) la repetición de lo idéntico típico y

(2) lo idéntico típico como algo conjuntamente reconocido por el proponente y el oponente (es decir, la condición necesaria – para el desarrollo de un diálogo – de la identidad intersubjetiva de lo aseverado).

Sólo los dialogantes que admiten el **pi** pueden participar de un diálogo de fundamentación: quien ataque sintáctica o semánticamente el principio de identidad, ya lo presupone con su ataque (es decir, pragmáticamente, con su obrar). Esto es una autofundación o un principio demostrado "por sí mismo", como lo ha llamado Łukasiewicz.[179] Por su forma es parecida a la *consequentia mirabilis* $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$.[180] Algunos autores, como K. O. Apel[181], la llamarían una fundamentación trascendental-pragmática, que podríamos formular así: "*Si al atacar una tesis* T, *debemos suponer y utilizar necesariamente esa misma tesis* T (*en el metanivel*), *entonces la tesis* T es necesaria *en sentido trascendental-pragmático*."

Si designamos respectivamente con:
'$?_x$T' = '*x* ataca la tesis T' o '*x* cuestiona la tesis T',
'$!_x$T' = '*x* utiliza T (cuando *x* ataca T)' y
'${}_{tp}$T' = 'T es trascendental-pragmáticamente (necesaria)',

---

179 ŁUKASIEWICZ [17], 23.

180 Esta ley fue atribuida a muchos autores, p. ej. PLATON (en *Theaitetos*, 171 a-b), posiblemente también a ARISTÓTELES (en *Protreptikos*, fragmento 2), EUKLIDES, CLAVIUS, CARDANO, SACCHERI y otros. Se ha discutido quién fue el primero que la usó como ley o regla lógica. La *consequentia mirabilis* está en cierta oposición con las presuntas "leyes aristotélicas" $\neg(\neg a \rightarrow a)$ y $\neg(a \rightarrow \neg a)$, las que, a pesar de su buena fama actual entre los lógicos conexos, no son leyes lógicas del lenguaje objeto, sino leyes metalógicas, pero sólo para aquellos cálculos lógicos que son plenamente consistentes respecto de la negación. Cf. *An. Pr.* B, 4, 57b3-16. Para la *consequentia mirabilis* enviamos a ŁUKASIEWICZ ^{2}1957, 49-51, 80 y BELLISSIMA-PAGLI 1996.

181 Vid. p. ej. APEL 1973, APEL 1982, APEL 1987, GETHMANN 1979, GETHMANN (ed.) 1980, GETHMANN (ed.) 1982.

entonces podemos simbolizar esta metatesis del modo siguiente:

$$(?_x T \rightarrow !_x T) \rightarrow {}_{tp}T.$$

Tan pronto se considere aquí al signo de pregunta '?' como una suerte de negador pragmático y el signo de exclamación '!' como una suerte de orden afirmativa, se advierte la semejanza entre esta fórmula y la consequentia mirabilis $(\neg T \rightarrow T) \rightarrow T$ (lo que sin embargo es engañador, pues el cuestionamiento '?' no sólo tiene el sentido de un negador, sino que contiene otros significados).

Ataques y defensas son componentes imprescindibles de un diálogo: por eso no se puede desarrollar ningún diálogo y ninguna crítica sin admitir el principio de identidad. La lógica como "órganon" o instrumento de fundamentación para una discusión racional no puede carecer por lo tanto del principio de identidad. Y eso no ocurre sólo en base a una representación empírica de las herramientas lógicas, sino en virtud de una condición necesaria pragmática *a priori* del diálogo, que posibilita por vez primera su existencia. El principio de identidad es por lo tanto una verdad sintética *a priori* "en sentido trascendental-pragmático", una verdad – y regla – absoluta, que debe regir en todos los procedimientos de fundamentación.

10.13. El principio de (no) contradicción o 'pnc'.

Vayamos al segundo principio clásico de la lógica, el principio de (no) contradicción o "*principium contradictionis*", que abreviamos '**pnc**'. Éste tiene formas teóricas y formas prácticas. Las segundas las discutimos en trabajos anteriores, como "Aristóteles y el principio práctico de no contradicción"[182] entre

[182] Vid. ROETTI 1999b, p. 157-190 mencionado en la bibliografía.

otros. Aquí resumiremos la discusión del principio teórico y de sus formas.[183]

Mucho se ha escrito sobre el principio de contradicción en la historia de la lógica y la filosofía. Para ello enviamos a los trabajos mencionados en la última nota. Aquí nos ocuparemos sólo del núcleo del problema. La forma habitual paramétrica del principio es $\vdash \neg(A\wedge\neg A)$, pero ella es ambigua. Sus formas cuantificadas son seis, con cuatro niveles de fortaleza y sus correspondientes relaciones de deducibilidad, que damos a continuación:

1. $\bigwedge A \neg(A\wedge\neg A) \leftrightarrow \neg\bigvee A(A\wedge\neg A) \rightarrow$ (**pnc** universal fuerte o **pnc**-uf)
2. $\bigvee A \neg(A\wedge\neg A) \rightarrow$ (**pnc** existencial fuerte o **pnc**-ef)
3. $\neg\neg\bigvee A \neg(A\wedge\neg A) \leftrightarrow \neg\bigwedge A \neg\neg(A\wedge\neg A) \rightarrow$ (**pnc** débil o **pnc**-d)
4. $\neg\bigwedge A(A\wedge\neg A)$ (**pnc** debilísimo o **pnc**-dd)

En ROETTI 1997a discutimos las formas 1, 2 y 4. Allí se pudo mostrar que la forma 1 no era demostrable, sino sólo fundable de modo insuficiente. En su fundamentación se cometía dos veces *petitio principii*. La situación, no obstante, era diferente de la del **pi**, porque *las correspondientes petitiones principii diferían la una de la otra*. Esto se advierte tan pronto como se compara las conjunciones $A\wedge\neg A$ y $(A\wedge\neg A)\wedge\neg(A\wedge\neg A)$: La primera "peculiaridad" es llamada "de primer nivel" y la segunda "de segundo nivel". En los cálculos paraconsistentes de da Costa, que son absolutamente consistentes, la aceptación de una peculiaridad de nivel superior obliga a aceptar otras de niveles inferiores:

$$\vdash (A\wedge\neg A)\wedge\neg(A\wedge\neg A) \rightarrow A\wedge\neg A,$$

pero no vale la inversa: $A\wedge\neg A$ podría ser un ataque justificado a $\neg(A\wedge\neg A)$, sin que A en cambio fuera un ataque genuino a $\neg A$, porque en este caso peculiar $A\wedge\neg A$ podría ser una contradicción

---

[183] Este tema lo he tratado en diversas oportunidades. Vid., p. ej., ROETTI 1994, ROETTI 1997a, ROETTI 1997b, ROETTI 1999a, ROETTI 1999b, ROETTI 2000a, ROETTI 2000b, ROETTI, 2001 y ROETTI 2004.

defendible, mientras que por el contrario fuera inaceptable la contradicción $(A\wedge\neg A)\wedge\neg(A\wedge\neg A)$. Hegel ejemplifica ello cuando afirma que algo se mueve "*porque él en este aquí es y no es simultáneamente*".[184] Esta es una peculiaridad de primer grado que se propone como contradicción verdadera. Pero no parece adecuado afirmar que Hegel también sostenga la siguiente peculiaridad de segundo grado: algo se mueve *porque él en este aquí es y no es simultáneamente*, *y en este aquí no* (*es y no es*) *simultáneamente*. Las formas 1 y 2 del **pnc** son por lo tanto tesis dialécticas, que casi siempre se pueden defender empíricamente. En cambio las otras son verdades epistémicas. A continuación mostraremos la naturaleza epistémica de 4:

Si el oponente no admite ninguna fundamentación empírica para un enunciado de la forma $\neg(B\wedge\neg B)$, entonces rechaza incluso la forma existencial 2 del **pnc**. Pero esto significa que:

(1) El oponente **O** rechaza una condición necesaria de todo diálogo cooperativo, a saber, aquella que exige que *todo diálogo debe dar ocasión para una defensa material o formal*. Con eso **O** se aniquila a sí mismo como participante de un diálogo: con tal actitud su participación en cualquier diálogo carece de sentido.

(2) Además tal actitud supone adoptar calladamente el "principio de contradicción ilimitada" $\bigwedge A(A\wedge\neg A)$, cuya contradictoria es la forma 4 debilísima del **pnc**-dd $\neg\bigwedge A(A\wedge\neg A)$, que en cambio se puede defender suficientemente de forma trascendental. Resumiendo, su fundamentación se hace del siguiente modo[185]: Quien afirme la contradictoria de 4, no puede atacar ninguna tesis, porque ella permite la defensa trivial de cualquier tesis. En tal caso no se podría discutir ninguna tesis: todo sería trivialmente defendible y nada sería cuestionable. Por ello se comprueba lo siguiente: Quien afirme "el principio de contradicción ilimitada" $\bigwedge A(A\wedge\neg A)$, no puede participar de

---

[184] HEGEL 1812-1816, 2. Buch, 1. Abschnitt, 2. Kap., C, Anmerkung 3: *indem es in diesem Hier zugleich ist und nicht ist*.

[185] Una fundamentación completa de la versión más débil del **pnc** se encuentra en ROETTI 1997a, 75-76.

ningún diálogo, porque para él no habría nada que discutir. Por el contrario, quien participe de un diálogo, debe admitir que algunos enunciados son al menos cuestionables. Pero esto sólo ocurre si no todo enunciado es trivialmente defendible, y esto equivale a admitir la forma debilísima del **pnc**-dd. Entonces un diálogo cooperativo sólo es posible, si ambos dialogantes reconocen y respetan al menos a 4. Ésta forma debilísima del **pnc**-dd $\neg\bigwedge A(A\wedge\neg A)$ es equivalente a la no contradicción sintáctica absoluta de un lenguaje y equivale a una condición pragmática necesaria (metalingüística) de cada intento de fundamentación cooperativa, y por ello es válida en todo sistema lógico con negación.

(3) La tercera fórmula de arriba, $\bigvee A\neg(A\wedge\neg A)$, se puede llamar principio *existencial* lógico-general de no contradicción. Hasta aquí considerado casi sólo la primera y la última de las formas, que denominamos **pnc**-uf y **pnc**-dd, por ser las más importantes para este trabajo y, además porque, gracias a Łukasiewicz, hace tiempo que advertimos que Aristóteles había cometido una importante *ignoratio elenchi* en su intento de fundación del **pnc**-uf: inicialmente intentó justificar esa forma fuerte, pero luego sin premeditación se apartó de ello, para intentar fundar la forma más débil **pnc**-dd.[186]

En trabajos precedentes presenté una crítica a la fundamentación dialógica habitual del **pnc** teórico y propuse una fundamentación pragmática-trascendental para sus formas más débiles[187]. El resultado obtenido rezaba así: en el ámbito teórico no hay ningún "fundamento suficiente" formal para el principio de contradicción *más fuerte* $\bigwedge A\neg(A\wedge\neg A)$ (o **pnc**-uf), en cambio sí hay un fundamento trascendental-pragmático para la forma más débil $\neg\bigwedge A(A\wedge\neg A)$ (o **pnc**-dd), fundamento que depende de la decisión de los dialogantes de compartir un

[186] V. ŁUKASIEWICZ 1910b, 93-100. Cf. ARISTÓTELES, *Met.* Γ 4, 1006 a 29-31, 1008 a 8-16.
[187]Ver bibliografía citada en la nota anterior.

diálogo cooperativo crítico.[188] La fundamentación se sintetiza así:

Quien asevera $\bigwedge A(A\wedge\neg A)$ *no puede atacar ninguna tesis*, pues permitiría la defensa trivial de cualquier tesis. *En ese caso ninguna tesis sería discutible,* todo sería trivialmente defendible y nada cuestionable. Por lo tanto, quien participe en un *diálogo cooperativo y crítico*, es decir *quien admita, entre otras condiciones necesarias, la crítica y la defensa de las tesis propuestas*, debería admitir que al menos algunos enunciados son cuestionables, pero en una lógica con negación esto sólo ocurre si ambos interlocutores admiten y respetan al menos el **pnc**-dd $\neg\bigwedge A(A\wedge\neg A)$,[189] es decir:

Hay diálogos críticos (*no erísticos*) $\Rightarrow$ *Hay algo cuestionable* $\Leftrightarrow$ *No todo es trivialmente defendible* $\Leftrightarrow$ $\neg\bigwedge A(A\wedge\neg A)$ $\Leftrightarrow$ *El lenguaje es sintácticamente no contradictorio en sentido absoluto*.

El **pnc**-dd $\neg\bigwedge A(A\wedge\neg A)$ es una condición pragmática-trascendental de todo cálculo lógico con negación, es válido para todo cálculo lógico posible con negación. (Entre las condiciones necesarias se encuentra también una consecuencia práctica transitoria: la convivencia pacífica entre los dialogantes, al menos mientras dura el diálogo.)

---

[188] Más precisamente, “no erístico” o “dialéctico”, una de cuyas especies es el diálogo crítico. Cf. Lorenzen 1960.
[189] Cf. Stanislaw Jaskowski (1948): “Calcolo delle proposizioni per sistemi deduttivi contraddittori”, en Marconi 1979, 286: “*I sistemi sovracompleti non hanno significato pratico: nel linguaggio di un sistema sovracompleto non può essere posto nessun problema, poichè in esso ogni proposizione è asserita* .” (“Los sistemas supercompletos no tiene importancia práctica: en el lenguaje de un sistema supercompleto no se puede proponer ningún problema, ya que en él toda proposición es aseverada.”)

10.14. El principio de tercero excluido o ‘tnd’.

El tercer principio clásico es la ley del “tercero excluido” o *tertium non datur*, que abreviamos ‘**tnd**’. La situación actual del **tnd** es fácil de describir, porque fue muy fructífera la conocida controversia entre los intuicionistas y formalistas. La forma fuerte $\bigwedge A(A \vee \neg A)$ del **tnd** se puede fundamentar suficientemente en las diferentes figuras de la lógica clásica. En los cálculos constructivos no se demuestra esa forma del principio. Allí el principio vale sólo para casos especiales. Por eso se puede afirmar que en la lógica constructiva sólo existe una demostración inmanente de $\bigvee A(A \vee \neg A)$, por lo que se puede decir que tal figura débil del **tnd** es inmanentemente necesaria en los cálculos constructivos. De todos modos, aunque en un cálculo constructivo se pueda demostrar $\bigvee A(A \vee \neg A)$, esto no significa que ello sea demostrable *en todos los cálculos posibles*. Se puede construir un cálculo particular en el que ningún predicador satisfaga la condición $\vdash A \leftrightarrow \neg\neg A$, que es esencial para el **tnd**. Para ello “sólo” se necesita elegir los predicadores adecuados y mediante reglas adecuadas evitar aquellas composiciones de fórmulas que lo satisfacen.

10.15. Síntesis sobre los principios.

Podemos resumir la cuestión de los principios como sigue:

(1) La forma fuerte del principio de identidad **pi** $\bigwedge A(A \rightarrow A)$ – y en consecuencia su forma débil $\bigvee A(A \rightarrow A)$ – es *suficientemente fundable de modo trascendental*. Ella es “epistéemee” y vale por lo tanto en todo cálculo lógico posible.

(2) La forma más fuerte del **pnc** $\bigwedge A \neg(A \wedge \neg A)$ no es suficientemente fundable *en sentido trascendental*, aunque es una ley fundamental en cálculos lógicos como el clásico y el intuicionista, no así en los paraconsistentes. Ella es sólo un enunciado insuficientemente fundable, pero no obstante dialécticamente fundable, es decir, es una “pístis”, en sentido platónico, muy confiable. En ciertos dominios (como los

prácticos) ocurre que ella es epistémicamente válida.[190] Pero no se puede decir que lo mismo acontezca en todos los dominios teóricos.

(3) Las formas $\neg\neg\bigvee A\neg(A\wedge\neg A)$ y $\neg\bigwedge A(A\wedge\neg A)$ del **pnc** son *principios suficientemente fundados en sentido trascendental*, que en consecuencia valen también inmanentemente en todo cálculo posible.

(4) Ninguna forma del **tnd**, ni la más fuerte $\bigwedge A(A\vee\neg A)$, ni la más débil $\bigvee A(A\vee\neg A)$, puede alcanzar la condición de un enunciado suficientemente fundado *en sentido trascendental*. En tal sentido ellas alcanzan sólo la condición de enunciados insuficientemente fundados. En sentido inmanente pueden alcanzar a veces una fundamentación suficiente todas las formas de **tnd**, como en la lógica clásica, o sólo la forma más débil, como ocurre en los cálculos constructivos. En sentido trascendental no hay ninguna forma del **tnd**, que sea suficientemente fundable. Todas sus formas son sólo dialécticamente fundables.

Es importante enfatizar las diferencias entre los principios. $\bigwedge A(A \rightarrow A)$, $\neg\neg\bigvee A\neg(A\wedge\neg A)$ y $\neg\bigwedge A(A\wedge\neg A)$ son principios trascendentalmente fundables y por ello partes esenciales de una protológica del fundamento suficiente. $\bigwedge A\neg(A\wedge\neg A)$, $\bigwedge A(A\vee\neg A)$, $\bigvee A(A\vee\neg A)$, y las restantes no consideradas, no son parte de una protológica tal, pero son elementos de una "lógica dialéctica" que se ocupa de las reglas de las conclusiones insuficientemente fundadas. Esto no impide que todos esos principios se puedan fundar inmanentemente dentro de un cálculo determinado.

[190] Esto ocurre por ejemplo en el dominio de la acción y del derecho, como lo muestran Aristóteles y Rescher. V. para ello ROETTI 1997a, 53-54, 1997b y 2000.

10.16. La lógica informal y la homología generalizada: el comienzo de una formalización parcial.

Aquí recordaremos las reglas de homología y de victoria de los juegos de diálogo del capítulo octavo y haremos algunas generalizaciones que permiten presentar ciertas formas de reglas que corresponden a lo que podemos llamar una lógica de la verosimilitud. Nuestro propósito es generalizar las reglas de homología y de victoria que dimos en el capítulo dedicado a diálogos formales.

Comenzamos así:

Regla general de homología: En sus defensas y ataques cada dialogante puede repetir, en la rama del diálogo que corresponda, cualquier expresión, elemental o compuesta (según se admita sólo la homología estricta o también la homología lata) que haya sido previamente aseverada por el otro dialogante, y sus fundamentos podrán ser *inmanentes* – es decir fundados sólo en las reglas de desarrollo del diálogo – o *trascendentes* – o sea con fundamento *material*, o externo a las reglas de desarrollo del diálogo. (No hay restricciones adicionales para ningún dialogante con esta regla.)

Esta regla general de homología amplía la regla del capítulo octavo dedicado a los diálogos lógicos, porque hace lugar a la *homología material*, que allí sólo era un posible procedimiento marginal. La homología material no sólo repite una expresión previamente aseverada por la otra parte del diálogo, sino que lo hace con un fundamento externo al de los pasos de defensa y ataque de las reglas de desarrollo del juego. Esto equivale a que estas reglas de homologías materiales se fundan en la *materia* del discurso, es decir en fundamentos exteriores a los de las reglas formales de desarrollo del juego que vimos en los diálogos intuicionistas y clásicos.

Regla general de victoria en una rama de un diálogo. El proponente **P** gana una rama del diálogo cuando aparece una homología es decir, cuando el oponente **O** asevera una expresión que también asevera el proponente **P**, o cuando **O** no defiende una expresión atacada por el proponente **P**. La victoria es formal, cuando la homología lo es, y es material cuando no lo es. Una homología formal o material lo es en sentido estricto, cuando la homología que hace ganar al proponente **P** repite una *fórmula elemental*, y lo es en sentido lato cuando la homología que permite ganar es una *fórmula cualquiera*.

Regla general de victoria en un diálogo. La victoria de un diálogo es *formal* cuando todas las ramas de su árbol clausuran formalmente. En caso contrario es una victoria *material* cuando al menos una rama de su árbol clausura materialmente. Si en la victoria formal de un diálogo se han ganado todas las ramas *sensu stricto*, entonces la victoria es *formal estricta*. Si en al menos una rama se ha ganado *sensu lato* la victoria es *formal lata*. Si las victorias son materiales, podrán ser también estrictas o latas, según que la fórmula concedida en la homología sea elemental o cualquiera.[191]

La *victoria formal* es la homología del fundamento suficiente de la *epistéemee* y la *victoria material* es la del fundamento insuficiente de la *pístis*. Nos movemos entre estas dos formas de fundamentación desde el descubrimiento de Sócrates y Platón de la racionalidad con su estructura ternaria de tesis, crítica y fundamento; su punto de partida está en la conciencia de la ignorancia; su fin difiere de la persuasión y busca la verdad y la justicia, para lo que recurre a medios adecuados a ese fin.

El síntoma formal de la victoria es la homología, sea en su modo material imperfecto y perfeccionable de la razón insuficiente, sea en su modo formal perfecto de la razón suficiente. El desarrollo esencial del diálogo racional es el mismo en el siglo V antes de Cristo y en nuestro siglo XXI: partir de tesis dudosas, criticarlas, proponer otros enunciados como fundamentos de aquellas, y concluir en el *reposo perdurable o transitorio de una homología*. Éste es el proceso de

[191] V. LORENZEN 1987, 91.

fundamentación común a todas las actividades llamadas científicas y filosóficas.

10.17. La razón suficiente e insuficiente en las ciencias fenoménicas.

En las ciencias "empíricas" el problema de la fundamentación es diferente al de las ciencias formales, porque sus fenómenos son al menos parcialmente independientes de las construcciones simbólicas y materiales característicos de las ciencias formales. En ellas la fundamentación suficiente, en caso de existir, es escasa y consiste en una breve "protofísica". Las ciencias empíricas consisten, en sus mejores ejemplos, de fragmentos teóricos que son sistemas al menos parcialmente deductivos, con algunos axiomas o principios hipotéticos, y consecuencias, teoremas y corolarios, *a fortiori* hipotéticos. El ideal tradicional de la ciencia como epistéemee prácticamente ha desaparecido de la epistemología de las ciencias empíricas. Ellas sólo pueden aspirar, para usar una expresión popperiana, a ser "buenas conjeturas", es decir creencias racionales bien fundadas, a las que les está vedado el fundamento suficiente.

Un ejemplo clásico de ciencia como creencia racional bien fundada fue el de la dinámica clásica y sus ampliaciones hasta la segunda mitad del siglo XIX, a lo sumo. Entonces ya no se la podía considerar epistéemee, como suponía Kant, por su carácter hipotético; pero se consideraba bien fundada al menos su teoría de la gravedad. Pero ese "buen fundamento" se desmoronó, cuando uno de sus principios – el teorema galileano de adición vectorial de velocidades ($\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$) – resultó incompatible con la muy bien contrastada invariancia empírica de la velocidad c de la luz en el vacío.

Quienes superaron esa dificultad fueron Henri Poincaré primero y Albert Einstein después, quienes desarrollaron una teoría de los movimientos relativos de los sistemas inerciales que, en el caso de Einstein, excluyó inicialmente la gravitación, pero trascendió la mecánica, pues incluyó la electrodinámica y alcanzó resultados poderosos como las nuevas leyes de adición para *c* constante y una relación de equivalencia entre masa inercial y energía. Esa fue la teoría de la relatividad especial de los trabajos de Einstein de 1905.[192] La teoría general de la relatividad, que le siguió y cuya versión definitiva fue publicada en 1916[193], generalizó esos resultados para una mecánica de sistemas no inerciales con su principio de equivalencia de la masa inercial y la masa gravitatoria, que reemplazó la mecánica galileano-newtoniana.

La teoría de la relatividad generalizada se puso a prueba con reiterados experimentos respecto de los siguientes fenómenos:
(1) El corrimiento secular del perihelio de Mercurio.
(2) El desplazamiento de las imágenes de las estrellas próximas al disco solar durante un eclipse total de sol.
(3) El desplazamiento hacia el rojo de las líneas espectrales en el campo gravitatorio del sol.
(4) La modificación de la duración de la trayectoria de un rayo de luz terrestre que pasa junto al sol y se refleja en un planeta interior (respecto al caso de un paso lejano).

La medida de estos fenómenos corroboraron la teoría general de la relatividad y transcurrió un buen tiempo durante el cual dicha teoría se consideró bien fundada. Hoy hay algunas dudas sobre ello y ningún epistemólogo la consideraría suficientemente fundada. En la actualidad esa calificación está casi totalmente desterrada del dominio de las ciencias físicas.

No obstante la teoría relativista fue criticada desde sus comienzos por importantes epistemólogos, como Hans Driesch en 1928 y Hugo Dingler en 1938. No obstante, ella se tornó “ciencia

---

192 EINSTEIN, Albert: “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”, *Annalen der Physik* 17 (1905), 891-921. Versión española en HAWKING, Stephen [3]2004, “Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento”, p. 1027-1052.

193 EINSTEIN, Albert: “Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie”, *Annalen der Physik* 49 (1916), 769-822. Versión española en HAWKING, Stephen [3]2004, “El fundamento de la teoría de la relatividad general”, p. 1062-1106.

normal". Hubo divergencias entre algunas de sus predicciones y los resultados experimentales[194], de modo que, aunque hoy prefiramos la teoría de la relatividad generalizada a cualquier versión corregida de la teoría clásica, debemos reconocer no sólo que no es una teoría suficientemente fundada, sino que se duda que sea siquiera bien fundada, a pesar de su éxito explicativo, predictivo, y su enorme utilidad técnica, que revolucionó el mundo de las armas y del poder, y cambió completamente, desde la vida cotidiana hasta las teorías cosmológicas.

Otro ejemplo central de la física es el de la mecánica cuántica, iniciada por Max Planck en 1900 con el propósito de dar cuenta del espectro de radiación del cuerpo negro. Para lograrlo Planck se vio forzado a abandonar la tradicional concepción física de los cambios energéticos continuos (según el principio tradicional "*natura non facit saltus*") y admitir para la microfísica una estructura discontinua de "cuantos de acción".

La mecánica clásica, la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad, son las tres teorías científicas más exitosas (es decir más útiles) de toda la historia de la humanidad. Pero tampoco la mecánica cuántica estuvo libre de objeciones desde sus inicios. Sus principios son poco claros y tiene interpretaciones divergentes e incompatibles. Eso nos permite decir que, si bien es un sistema de modelos teóricos de extrema utilidad y con una importantísima masa de experiencia que corrobora su formalismo, ninguno de sus modelos e interpretaciones se puede considerar bien fundado.

Algo semejante ocurre en la cosmología, la doctrina acerca del origen, desarrollo y fin del universo. Se trata de una doctrina originariamente metafísica, pero que hoy aparece como doctrina de la ciencia física con varios modelos parcialmente incompatibles. La idea kantiana de mundo como unidad de todos los fenómenos era una idea regulativa y, como tal, no podía ser fenómeno. No obstante, lo que pretende estudiar la

[194] Ver ROETTI 2005.

cosmología contemporánea es precisamente esa totalidad, lo que hubiese sido inaceptable para Kant. Por eso aquellos autores que son al menos metódicamente kantianos, como Lorenzen y otros constructivistas, niegan cientificidad a las teorías cosmológicas que tratan de "la totalidad", como es el caso de las teorías sobre el "estallido inicial" (*big bang* en inglés o *Urknall* en alemán). Esta doctrina comenzó con los rusos Alexander Friedman y Georgii Gamow, y el sacerdote belga Georges Lemaître. Resulta claro entonces que la cosmología de la física contemporánea sólo puede ser "ciencia" en un sentido débil, más débil que el de las teorías físicas habituales, precisamente por su pretensión de estudiar una totalidad inexorablemente no empírica. De este modo la situación actual de la física, ciencia kantiana por excelencia, y de sus extensiones como la cosmología, muestra defectos que para Kant eran los de la metafísica tradicional, por los que negaba a ésta el carácter de ciencia.

Ésta es a grandes rasgos la situación de la física contemporánea, la ciencia empírica por excelencia, por su capacidad de explicación, predicción y utilidad técnica. Brevemente, por *sus altos niveles de fundamentación insuficiente*. Las restantes ciencias naturales anhelarían sus niveles de fundamentación empírica. Sin embargo, aunque todos admiten el alto grado de cientificidad de la física, su grado de fundamento no es suficiente, como ocurre en la lógica, en gran parte de la matemática y en una breve protofísica, como exigía la tradición epistemológica desde Platón hasta al menos Kant.

Además desde hace siglos la mecánica clásica, la teoría atómica y la mecánica cuántica están llenas de términos que refieren a entidades ideales *no empíricas* (como el péndulo ideal galileano, la masa puntual newtoniana, el gas ideal de Maxwell-Boltzmann, los distintos conceptos de campo, como los campos escalares, vectoriales, tensoriales, etc., el cuerpo negro de Kirchhoff, las partículas subatómicas, etc.). Estas entidades son términos teóricos no empíricos cuyos correlatos objetivos, o bien son entidades ideales que pueden no existir, o bien, si se presume su existencia, ella sólo es accesible mediante complejas mediaciones teóricas. Y muchas veces no es posible siquiera una mediación completa, por lo que permanecen como entidades requeridas por el formalismo para preservar su consistencia. Naturalmente estas entidades ideales no son caprichosas ni arbitrarias: la física las requiere para su construcción racional. Pero en ese caso el saber físico es, en gran medida, una creencia racional, en el mejor de los casos elaborada con instrumentos matemáticos complejos y empíricamente muy bien corroborada, pero *con importantes aspectos no empíricos*. Las entidades hipotéticas que corresponden a los inevitables términos teóricos, cumplen un papel análogo al de las tradicionales "cosas en sí" (*Dinge an sich*) kantianas, sobre las que, según Kant, no debería versar la ciencia. Einstein comprendía muy bien esta situación cuando requería, con espíritu kantiano, un saber físico sin términos teóricos.

Hoy estamos lejos de la idea kantiana de la física como ciencia con fundamentos perfectos. La construcción sintética *a priori* en las formas de la intuición sensible era directa en el caso de la matemática. El caso de la física era más complejo por el carácter dinámico y regulativo de sus categorías y principios. Sin embargo Kant consideraba que el sistema de categorías aplicado a las formas puras de la sensibilidad nos daba principios sintéticos *a priori* constitutivos de la experiencia, los que aparecían en la analítica de los principios, de modo que la síntesis *a priori*, y con ella la fundamentación suficiente y ampliativa, era lícita en la física. Eso es hoy insostenible y sólo subsiste, residualmente, en una breve protofísica.

Así nos encontramos entre los cuernos de un dilema: o defendemos la concepción tradicional de la ciencia empírica como epistéemee y rechazamos que la física y otras ciencias lo sean, o concedemos cientificidad a la física (y a otras ciencias), pero admitimos que la ciencia empírica es algo diferente de lo que pensaban los filósofos, inclusive posteriores a Kant. Es decir, admitimos que es pístis, creencia fundada del mejor modo posible, e incluso pocas veces "bien fundada". El consenso actual acerca de lo que es ciencia ha escogido el segundo de esos cuernos: *admite el carácter científico al menos de las teorías* *empíricas mejor construidas y corroboradas, y en consecuencia acepta llamar ciencia, no sólo a los fragmentos de saber suficientemente fundado, sino también a muchas creencias que incluso no están bien fundadas*.

10.18. La fundamentación práctica.

Recordemos algunos intentos de filosofía moral que intentan mostrar la posibilidad de una fundación racional de los juicios morales y que, por lo tanto, se plantean preguntas como: '*¿Por qué yo debería ser moral?*'. Ésta pregunta equivale al menos a cuestionar por qué debo obrar de acuerdo con las reglas que en mi sociedad prohíben, obligan y permiten ciertas acciones a ciertas personas en ciertas circunstancias. Allí se esboza ya una *pretensión de filosofía práctica racionalmente fundada*, lo que nos aproxima a una fundamentación kantiana de la razón práctica. Un representante contemporáneo que ha contribuido a plantear este problema es el filósofo anglo-norteamericano Stephen Edelston Toulmin (1922-2009).[195] Su pensamiento se conecta con doctrinas de pensadores alemanes como Apel, Habermas, Kambartel, Lorenzen y Schwemmer. Toulmin, entre otros, advierte que lo que usualmente llamamos 'lógica' (lógica formal) tiene muy poco que ver con la práctica del discurso cotidiano y, especialmente, con la de la discusión de fines que pueda emprender. Por ello intenta aclarar la función de las expresiones relevantes para la argumentación, como son las constantes lógicas, mediante un "*esquema*" (en inglés *layout*) del proceso de argumentación, cuyo aspecto general es el siguiente:

por lo tanto (so)

D	Q	C
los fundamentos (*data*)	calificación modal (*qualifier*)	conclusión (*claim*)

pues (since)
W garantía, regla de paso (warrant)
con base en (on account of)
B apoyo, soporte de la regla de paso (backing)

[195] Cf. p. ej. TOULMIN 1964 Y JONSEN-TOULMIN 1988.

Esta estructura es clara. Partimos de los "data" D (plural neutro latino). Éstos son enunciados acerca de "lo dado", previos a la conclusión C propuesta, y consisten en tesis previamente aceptadas por los participantes del diálogo o remiten a una base empírica. Un calificador modal Q nos dice el modo en que se afirma la conclusión – necesaria, posible, verosímil, etc. Además se necesita una garantía W para el pasaje de los datos a la conclusión. Éstas son las "reglas de paso", que pueden ser perfectas o imperfectas. Éstas, a su vez, reclaman usualmente un "soporte" o apoyo B que garantice su validez, lo que puede constar de largos discursos acerca de la estructura del mundo y el modo en que se desarrollan sus procesos. Todas estas partes están presentes en los discursos que solemos encontrar en nuestros diálogos de fundamentación. Como ya sabemos esos diálogos pueden dar lugar, en algunos casos, a conclusiones fundadas más allá de toda duda, como ocurre en extensas regiones de la lógica, la matemática y en escasas regiones de la protofísica analítica y sintética, y en pocos casos más, pero en la mayoría de los casos dan lugar a conclusiones insuficientemente fundadas. Ya sabemos que estos últimos, los fundamentos insuficientes, son lo que más abunda en la ciencia y naturalmente en la filosofía, y especialmente en la filosofía práctica, que incluye a la ética y la política. A continuación discutiremos algunas argumentaciones filosóficas de diversas índoles.

10.19. El problema de la lógica conexa.

Prawitz[196] señala que "*en el caso de nuestra práctica deductiva el nivel teórico no sólo contiene leyes lógicas, sino también principios sobre ontología, verdad y sentido*. Así se hallan ciertas "leyes" de conexidad ya desde Aristóteles, como las siguientes:

[196] PRAWITZ [28], 3: "*In the case of our deductive practice, the theoretical level contains not only logical laws but also principles about ontology, truth and meaning.*"

(1) $\neg(\neg A \Rightarrow A)$ y (2) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(\neg A \Rightarrow B)$.

En comentaristas como Boecio se encuentran:

(3) $\neg(A \Rightarrow \neg A)$ y (4) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg B)$.

Éstas no son leyes de la lógica habitual de primer orden, ni intuicionista, ni clásica, como fácilmente se comprueba, aunque hoy soy admitidas en las llamadas lógicas conexas. Con el signo '$\Rightarrow$' simbolizamos la implicación 'conexa'. Efectivamente Aristóteles afirma al menos (1) en *An. Pr.* B, 4, 57 a 36 – b 18, donde dice que una conclusión que se sigue de premisas falsas no debe ser necesariamente verdadera. El fundamento para esta afirmación consiste en el rechazo como imposible de la forma de enunciado que en lógica conexa escribiríamos así:
(5) $\neg A \Rightarrow A$.

Hoy podríamos esquematizar el argumento aristotélico de la siguiente manera: Si tuviéramos dos implicaciones de las formas
(6) $B \Rightarrow A$ y
(7) $\neg B \Rightarrow A$,
éstas no podrían ser simultáneamente verdaderas, pues de (6) resultaría por transposición:
(8) $\neg A \Rightarrow \neg B$,
y de ésta, (7) y transitividad resultaría (5), que es lo que Aristóteles considera imposible.

Esto se puede interpretar en la habitual lógica intuicionista y *a fortiori* en la clásica, no como un teorema del cálculo, sino como un metateorema sintáctico para todo cálculo plenamente consistente respecto de la negación, a saber: "No es el caso de que, si $\neg A$ es demostrable, entonces A también lo sea.", que simbolizamos más precisamente así:

(9) $\neg(\vdash \neg A \Rightarrow \vdash A)$, que es equivalente a $\neg(A \vdash f \Rightarrow \vdash A)$
para fbf.s cualesquiera, que Aristóteles habría admitido en forma al menos implícita (no consideramos aquí las objeciones de los lógicos paraconsistentes).

CAPÍTULO 11.
ALGUNOS ARGUMENTOS Y MÉTODOS.

Los términos técnicos de las secciones siguientes se han discutido extensamente en trabajos anteriores, especialmente en *Cuestiones de fundamentos*, libro publicado por la Academia de Ciencias de Buenos Aires en papel y en su página electrónica, a la que enviamos.[197] Para los argumentos que proponemos es muy importante contar con la distinción entre existencia fuerte y existencia débil, que tomamos del intuicionismo, y la extendemos no sólo a la existencia fuerte por construcción teórica, como ocurre en la matemática, sino una existencia fuerte empírica. Y a esto será conveniente agregar dos existencias débiles, una teórica y una empírica. Los predicados de existencia los simbolizaremos del modo siguiente: $E_{ft}!$ significará 'existe en sentido fuerte teórico', $E_{dt}!$ 'existe en sentido débil teórico', $E_{fe}!$ 'existe en sentido fuerte empírico' y $E_{de}!$ 'existe en sentido débil empírico', respectivamente.

11.1. La apuesta de Pascal: ¿filosofía probabilística?

¿Podemos demostrar si Dios existe o no existe? No es una pregunta fácil de responder, pero si no pudiéramos hacerlo, podríamos al menos apostar sobre ello con alguna esperanza de ganar, para lo que necesitamos al menos rudimentos de una teoría de la probabilidad. De eso trata la famosa apuesta de Pascal que queremos recordar aquí. Blaise Pascal (1623-1662) fue uno de los que desarrollaron la teoría de la probabilidad[198], según consta en su correspondencia de 1654 con Pierre de Fermat (1601-1665) acerca del "*problema de las partidas*"[199].

---

[197] Ver ROETTI 1914 en la bibliografía.
[198] El concepto de probabilidad matemática fue propuesto inicialmente por el matemático italiano Girolamo CARDANO (1501-1576).
[199] El "*problème des parties*", que trata de las apuestas, consistía en la división de una suma apostada cuando se interrumpía el juego de

Respecto de la apuesta el texto fundamental se encuentra en el Fragmento 233 de sus *Pensées sur la religion et autres sujets* (Pensamientos sobre la religión y otros temas), titulado *Infini-rien* (infinito-nada), que consiste en el diálogo entre Pascal y un adversario, *el libertino*. Consideremos una parte esencial del texto:

(PASCAL): "Examinemos, pues, este punto, y digamos: "Dios es, o no es". Pero, ¿hacia qué lado nos inclinamos? La razón nada puede determinar: existe un caos infinito (entre Dios y nosotros) que nos separa. Se juega un juego (cuyos elementos, es decir, el jugador y aquello acerca de lo cual se juega se encuentran) en los extremos de esta distancia infinita. En este juego sale cruz o cara. ¿A favor de qué apuestas? La razón nada puede determinar (es decir, si Dios es o no es); según la razón, no se puede defender ninguna de las dos posiciones. Por lo tanto, no reproches la falsedad de quienes han hecho una elección (que como creyentes o no creyentes han decidido sobre la existencia de Dios); puesto que no puedes saber nada."

(EL LIBERTINO): "No, pero yo les reprocharé haber hecho, no esta elección, sino una elección ... ambos se han equivocado: lo justo consiste en no hacer apuesta alguna."

(PASCAL): "Puede ser. Pero se debe apostar; no se hace de una manera voluntaria (si quieres jugar o no quieres); estás embarcado, por lo tanto, ¿por cuál te decides?... Tienes dos cosas para perder: la verdad y el bien; y dos cosas para apostar: tu razón (a la cual deberías permanecer fiel, por cuanto se trata de un punto de vista forzado) y tu voluntad (la cual aspira a la bienaventuranza), tu conocimiento y bienaventuranza... Tu razón no se hiere más o menos (al tomar la decisión) al escoger la una o la otra (porque la elección no se puede evitar), puesto que forzosamente es preciso elegir. He aquí un punto (del conocimiento) vacío. Pero ¿qué ocurre con la bienaventuranza? Meditemos sobre la ganancia y la pérdida, y apostemos por la cruz que es Dios. Consideremos (el alcance de) estos dos casos:

---

acuerdo con la probabilidad de ganar que tenían los jugadores en el momento de su interrupción.

(Si has apostado por la posibilidad de que Dios es, o por el opuesto: que Dios no es). Si ganas, ganas todo. Si pierdes, no pierdes nada.[200] Por lo tanto, apuesta sin vacilar a que él es."

(EL LIBERTINO): "Todo esto es admirable. Efectivamente, hay que apostar; pero tal vez apuesto demasiado."

(PASCAL): "Veamos. Puesto que es semejante el azar de ganar y de perder, si no tuvieras que ganar dos vidas por una, podrías todavía apostar (de acuerdo con las reglas del cálculo de probabilidades aun en el peor de los casos con posibilidades de ganar), pero si fueran tres las vidas por ganar, sería preciso jugar, puesto que se está en la necesidad de jugar, y no sería razonable (de nuevo de acuerdo con las reglas del cálculo de probabilidades) no arriesgar tu vida para ganar tres, en un juego en el que existe semejante posibilidad de pérdida y de ganancia. Y siendo así, si existiera en tales circunstancias una infinidad de azares, de los cuales uno solo fuera para ti, obrarías todavía de una manera razonable si apostaras uno para ganar dos; y obrarías mal, estando en la necesidad de jugar, si te negaras a jugar una vida contra tres... Pero la vida que ha de ganarse aquí es una vida infinita e infinitamente feliz, y lo que tú apuestas es finito (por sí mismo). Esto suprime toda apuesta (es decir, el equilibrio entre la ganancia y la pérdida): por dondequiera se encuentra el infinito (objeto de posible ganancia), y donde no existe una infinidad de azares de pérdidas contra la de ganancias, nada hay para equilibrar; hay que darlo todo."

La probabilidad se puede entender en sentido ontológico o gnoseológico. Nosotros nos limitaremos aquí a una interpretación gnoseológica. Si bien la teoría nació de la consideración de problemas de juegos de azar, pronto se ocupó del problema gnoseológico de la asignación de medidas de credibilidad a enunciados no demostrados y cuestionables. Las

[200] Todo: es decir, el bien infinito divino que sobrepasa toda medida. Nada, es decir, lo que se puede perder, "todo lo que me pertenece", equivale a lo finito, pero que pierde importancia en comparación con lo infinito.

expresiones ‘creíble’ y ‘verosímil’ son en cierto sentido sinónimas cuando corresponden a la ‘*opinio*’ latina, que a su vez nos da uno de los sentidos de la *pístis* griega, y se opone a la ‘*scientia*’, que corresponde a la epistéemee griega. La teoría de la probabilidad se transforma entonces en una ***ciencia cierta de lo incierto*, *que mide la posibilidad***. Es decir, sigue una tradición esencial en el desarrollo de los métodos y criterios del conocimiento científico riguroso que nos recuerda el pasaje de Gaston-Gilles Granger que hemos citado: también la teoría de la probabilidad busca “lo duro en lo blando” cuando intenta ser un saber riguroso en materia incierta.

El interés por los enunciados inciertos para los que hay buenos, mediocres o malos fundamentos para aceptarlos como verosímiles y el grado de verosimilitud que podemos asignarles, va desde la metafísica, la religión y la filosofía práctica, hasta las ciencias más diversas, los saberes vulgares y los juegos de azar. Todos estos dominios son campos de aplicación posible de disciplinas como la teoría de la probabilidad.

Para preferir una jugada *i* en un juego de azar, es preciso ponderar, de ser ello posible, por una parte la probabilidad **p** para cada uno de los resultados posibles y por otra la relación de ganancia $\mathbf{r}_i$ que es el cociente entre el premio recibido en caso de ganar y la suma apostada. El producto $\mathbf{e}_i = \mathbf{p}_i\mathbf{r}_i$ es la esperanza matemática para la jugada *i*, la que en los juegos de suma 0 no puede sobrepasar la unidad. Veamos cómo cambia la situación en el juego de la vida según la apuesta de Pascal.

Para que la apuesta de Pascal importe a sus contertulios, parece menester que se cumplan ciertas condiciones:
1. Que haya al menos dos hipótesis metafísicas relativas a la existencia e inexistencia de Dios, que sean incompatibles entre sí.
2. Que para ambas haya pruebas de consistencia o, al menos, que no se conozca la inconsistencia de ninguna de ellas.
3. Que el alma personal (con conciencia, voluntad y sentimiento) permanezca de algún modo después de la muerte.

4. Que en ese mundo de ultratumba haya un sistema de premios y castigos por las acciones y omisiones de los fallecidos durante su vida en este mundo.

Parece claro que la primera condición se cumple trivialmente. De hecho contamos con esas hipótesis: están los innumerables teístas que afirman que Dios existe, como Santo Tomás de Aquino en la segunda cuestión de la primera parte de la *Summa Theologiae*[201], donde expone sus famosas cinco vías, y están los innumerables ateístas de toda la historia de la filosofía, como Bertrand Russell (aunque éste en algunas instancias duda entre ser ateo o agnóstico).

La fundamentación de la consistencia absoluta de una hipótesis metafísica, o al menos de su posibilidad, resulta de un diálogo teórico. El mejor de los resultados que podemos alcanzar es una *demostración* de su consistencia, es decir un *fundamento suficiente* de la posibilidad de lo afirmado por la tesis, no de su realidad, como ocurre desde la aritmética elemental hasta parte del análisis clásico). Otra variante es que las partes del diálogo acepten la consistencia como una correcta opinión bien fundada (éste sería un *fundamento insuficiente*, como acaece con teorías amplias de conjuntos, como ZF o NGB).

En cuanto a alguna forma de permanencia del alma personal después de la muerte es una condición esencial para que la apuesta de Pascal les importe a los dialogantes. Si con la muerte desaparece toda conciencia, todo querer y todo sentimiento, ya no hay un mundo relativo a esa conciencia, ni objetos, ni otras conciencias y voluntades frentes a esa conciencia, ni siquiera otra conciencia divina. Y en este último caso, aún si el alma persistiera, pero en ese mundo de ultratumba no hubiese un sistema de premios y castigos para las acciones y omisiones del fallecido, entonces tampoco importaría la apuesta, porque la calidad de vida en el ultramundo sería independiente de la conducta en el mundo.

---

[201] *Quaestio* 2, *De Deo, an Deus sit, in tres articulos divisa.*

Supongamos aceptadas todas las condiciones de Pascal y vayamos al aspecto matemático de su apuesta. Lo primero que necesitamos es una medida de probabilidad $\mathbf{p}_i$ de cada una de esas tesis en conflicto. Esta probabilidad, que en los juegos de azar se determina *por construcción*, sólo puede conjeturarse en las apuestas sobre fenómenos azarosos naturales, y también en los juegos metafísicos como el de Pascal. Esas conjeturas serán empíricas y por lo tanto falibles. Como primera aproximación podríamos conjeturar la equiprobabilidad de las tesis contradictorias. En el caso de una apuesta binaria, como la de Pascal, la hipótesis *a priori* con menor error sistemático inicial es la equiprobable $\mathbf{p}_i = ½$, que es la que inicialmente adopta Pascal.

A continuación deberíamos establecer una relación de ganancia $\mathbf{r}_i$ que se obtiene de apostar a cada una de ellas y el problema de la esperanza matemática. Según Pascal la relación de ganancia $\mathbf{r}_t$ del teísta que apuesta a que Dios existe y se comporta de acuerdo a sus mandatos es infinita. En cambio la relación de ganancia $\mathbf{r}_a$ del ateo de vivir una vida de placeres en la tierra, es finita. Por eso la esperanza matemática $\mathbf{e}_i$, que es el producto de la probabilidad $\mathbf{p}_i$ por la relación de ganancia $\mathbf{e}_i = \mathbf{p}_i\mathbf{r}_i$, en el caso del teísta sería infinita $\mathbf{e}_t = ½ \cdot \infty = \infty$, en cambio en el caso del ateo sería $\mathbf{e}_a = ½ \cdot \neg\infty = \neg\infty$, es decir, finita. Por eso sería razonable apostar a que Dios existe y comportarse de modo consistente con esa creencia.

11.2. ¿Reglas "formales" de fundamentación insuficiente?

11.2.1. La inducción aristotélica.

Según Aristóteles la inducción es una de las dos especies de discursos dialécticos (la otra es la 'argumentación' o 'silogismo dialéctico'). La 'inducción' aristotélica se presenta como si fuese un género de argumentaciones con dos especies:

1. La primera justifica enunciados *universales* a partir de un (solo) ejemplo particular.
2. La segunda justifica enunciados *generales* a partir de una pluralidad de casos particulares.

De este modo se introducen dos procedimientos muy diversos: un camino que va de lo individual a lo universal y uno que va de los particulares a lo general. Este camino de fundamentación no es necesariamente una deducción en el sentido fuerte ya indicado arriba, ni tampoco necesariamente un *silogismo* en sentido aristotélico estrecho, es decir con tres términos, pues en el paso inductivo no se encuentra siempre en la conclusión "algo diverso" de lo afirmado en las premisas, como ocurre en ellos, sino sólo la concesión de una extensión "general", o incluso estrictamente universal, a una propiedad o relación de propiedades ya admitida en los enunciados individuales que aparecen en los fundamentos. No obstante el hecho de que la terminología contemporánea no nos obligue a negar el carácter "deductivo" o "silogístico" *lato sensu* de la inducción, que en tal caso calificamos como 'epistémica', nosotros reservaremos habitualmente el término 'deducción' para la especie de fundamentación plena o suficiente, como conviniéramos más arriba, y al término 'fundamentación' como término genérico que se aplica a ambas especies y por lo tanto es la que usaremos en el caso de la especie de la argumentación insuficiente. De una argumentación insuficiente se trata generalmente en el caso de la inducción. Sin embargo – como veremos – la primera especie de las inducciones aristotélicas arriba mencionadas admitirá ser denominada 'epistémica' o 'deducción' en el sentido de fundamentación suficiente.

Desde sus comienzos el camino de la inducción no fue simple. Ya en Aristóteles se admiten *grados de fundamentación* de lo universal por lo individual. Por una parte un "*grado demostrativo*" de inducción, que constituye una argumentación apodíctica, y por otra parte "*grados sólo persuasivos*" de la misma, que es una argumentación dialéctica. Por lo tanto advertimos que *Aristóteles reúne en la epagooguée dos especies cualitativamente diversas de fundamentación, que pertenecen además a géneros de fundamentación diferentes*: la primera al género de la demostración suficiente (**sc4**) y la segunda al de la fundamentación insuficiente (**sd1**) o (**sd2**). El único motivo por el que se puede admitir un término común como 'inducción' para dos especies tan diferentes de argumentos, es que participan de la propiedad genérica de ser reglas de fundamentación que proponen enunciados individuales como fundamento de conclusiones que son enunciados generales o universales y que, en la mayoría de los ejemplos que conocemos, ambas formas de argumentos carecen de las dos premisas con los tres términos, pero nada más.

11.2.2. La "inducción epistémica".

La que podemos llamar 'inducción epistémica' o 'apodíctica' aristotélica es típica de las ciencias "constructivas" o "simbólicas" (como la matemática y la lógica), o de las protociencias de ciencias empíricas (como la protofísica, en la medida en que ésta es construible), y consiste en la presentación de ejemplos, forzosamente individuales, pero que son *generados mediante una regla, esquema o norma de construcción, que es ella misma universal*; esos ejemplos individuales ilustran por lo tanto la demostración de un enunciado universal. Este tipo de inducción aristotélica constructiva universal recuerda:

1. La construcción kantiana de esquemas en la imaginación temporal y espacial, que constituye una mediación entre la supuesta individualidad de la percepción y la universalidad del entendimiento.
2. La construcción en el tiempo del intuicionismo matemático.
3. En general, la construcción simbólica de objetos, enunciados o reglas, en sus epígonos constructivistas, que es un fundamento suficiente admisible para la verificación de muchos enunciados universales en matemática y en protociencias, en forma no axiomática.

El procedimiento aristotélico de este tipo de inducción procede así: en un sistema simbólico se construye, mediante una regla, un ejemplo que se describe mediante un enunciado individual. Este enunciado resulta así suficientemente verificado, pero es además para los dialogantes sólo un ejemplo de la infinitud de casos que la regla esquemática de fabricación permite construir. Esto permite la verificación del enunciado universal. Se comprende así el carácter de fundamentación suficiente o deductiva de esta peculiar inducción. Un ejemplo elemental es el de la demostración del valor de la suma de los ángulos de triángulos en un plano euclidiano, y de muchas otras demostraciones elementales de la geometría tradicional. Este caso de inducción constructiva suficientemente fundada pertenece a las demostraciones de razón suficiente (**sc4**), por lo no insistiremos aquí sobre ella.

Adviértase sin embargo que esta inducción apodíctica no tiene nada que ver con el uso de la "inducción completa" recursiva, finita o transfinita, de la matemática y otras ciencias simbólicas – que también son reglas de tipo (**sc4**) –, sino con un método de verificación de enunciados universales por construcción de *ejemplos esquemáticos* que no recurre a procesos de buena ordenación y herencia de propiedades, como ocurre en cambio en las distintas formas de inducción matemática, sino a la determinación de propiedades o relaciones para todos los individuos *posibles* de clases muchas veces "no construibles" (es decir, que no son estrictamente "conjuntos" y que en la terminología intuicionista tradicional se suelen denominar "especies"). Un enunciado universal sobre la clase de "todos" los números reales o complejos, que son especies para las cuales no se pueden dar reglas de construcción que los agoten, sería de este tipo de inducción apodíctica ejemplar y no recursiva. Lo que dice una demostración tal es que cualquier nuevo número real o complejo que fuese construido, verificaría dicho enunciado.

11.2.3. La "inducción dialéctica".

Por su parte la inducción estrictamente "dialéctica" o falible es típica de las restantes disciplinas en la medida en que no se disponga de otros métodos de verificación descriptiva, eidética o constructiva, de propiedades de – o relaciones entre – entidades. Aquí nos ocuparemos brevemente de esta inducción dialéctica o falible. El tema es antiguo, pero conexo con el tema contemporáneo de los "condicionales y los argumentos derrotables"[202] en las lógicas "no monótonas".[203] Ejemplos tradicionales de inducción dialéctica o insuficientemente fundada nos ofrece la discusión política y moral. Recordemos el famoso diálogo entre Sócrates y Kéfalos, en Platón, *Politeía*, I, 5, 331 c-d, que dice así:

"Un admirable sentimiento, Kéfalos", dije yo. "Pero, hablando de esta misma cuestión, de la justicia, ¿debemos afirmar esto sin calificación: que ella consiste en decir la verdad y en devolver lo que se ha recibido de alguien, o pueden ser estas acciones *a veces justas y a veces injustas*? Presumo por ejemplo que cualquiera admitirá que, si alguno recibió armas de un amigo cuando éste estaba en su sano juicio, pero que luego el prestador enloqueció y pidió su devolución, que no deberíamos devolverlas en tal caso, y que quien las devolviera en esas condiciones no obraría justamente – tampoco sería justo quien eligiera no decir sino la verdad a uno que se encontrara en ese estado." "Tienen razón", replicó.[204]

Por su parte Cicerón, en *De officiis* III, 24, 92, amplía el argumento: "¿Deben cumplirse siempre los pactos y las promesas que fueron hechas sin violencia y sin mal dolo, como suelen decir los pretores?"[205]

Él responde que con excepciones, con ese y otros ejemplos, en la misma obra III, 25, 95: "Luego no deben cumplirse a veces las promesas y no deben devolverse siempre los depósitos. Si alguien en su sano juicio te confía en depósito una espada y te la reclama luego de tornarse insano, pecado sería devolverla, no devolverla obligación. Y si, quién hubiese depositado en tu poder algún dinero, hiciera la guerra a la patria, ¿devolverías el depósito? No lo

---

[202] Llamados '*defeasible conditionals*' y '*defeasible argumentation*' en la terminología anglosajona, hoy de moda.
[203] Estas lógicas son conspicuas en los estudios de '*inteligencia artificial*' o 'IA' ('*artificial intelligence*' o 'AI').
[204] Las itálicas son nuestras.
[205] CICERO 1963, III, 24, 92: "*Pacta et promissa semperne servanda sint, quae nec vi nec dolo malo, ut praetores solent, facta sint*?"

creo, porque lo harías contra la república, que debe ser lo más querido. Así muchas cosas, que se ve que son de naturaleza honesta, por las circunstancias se tornan no honestas. Cumplir las promesas, guardar los contratos, devolver los depósitos, cambiada la utilidad, se vuelven no honestos."[206]

Cicerón da argumentos para pasar de la monotonía a la no monotonía de la conclusión, pero no entra en los detalles de eso fundamentos. Sin embargo parece claro, si usamos la terminología de Max Weber, que en el argumento de Cicerón el punto de partida son ciertos principios de una ética de la convicción, o *Gesinnungsethik*, y el punto de llegada soluciones más matizadas de una ética de la responsabilidad, o *Verantwortungsethik*. Cicerón termina valorando más la ética de la responsabilidad que la de la convicción, o a los argumentos morales y jurídicos matizados que a los "*prima facie*", lo que es un proceso común en la teoría moral y el derecho.

Demos ahora una notación artificial al ejemplo platónico (y ciceroniano) de arriba: "Si alguien en su sano juicio te confía en depósito una espada y te la reclama luego de tornarse insano, pecado sería devolverla, no devolverla obligación."

Simbolizamos la forma lógica de esta regla general con los siguientes predicados triádicos:
x presta a y la espada z: P^3xyz,
x solicita a y la devolución de z: S^3xyz,
en consecuencia y debe devolver a x la espada z: $\mathrm{O}D^3yxz$.
(donde 'O', como de costumbre, el operador deóntico monádico 'Es obligatorio que ...')

[206] CICERO 1963: III, 25, 95: "*Ergo et promissa non facienda nonnnunquam; neque semper deposita reddenda. Si gladium quis apud te sana mente deposuerit, repetat insaniens, reddere peccatum sit, officium non reddere. Quid? si is, qui apud te pecuniam deposuerit, bellum inferat patriae, reddasne depositum? Non credo, facies enim contra rem publicam, quae debet esse carissima. Sic multa, quae honesta natura videntur esse, temporibus fiunt non honesta. Facere promissa, stare conventis, reddere deposita, commutata utilitate, fiunt non honesta.*"

La regla así simbolizada sería un ejemplo de (**sd1**) o, en el mejor de los casos, de (**sd2**):

(1) $P^3xyz, S^3xyz \vdash \mathrm{O}D^3yxz.$

Esta es una regla que parece aceptable *prima facie*, pero que sin embargo es discutible, revisable. Nadie afirma que de las premisas se deduzca *necesariamente* la conclusión práctica. Por ejemplo, la forma lógica del caso particular propuesto por Platón y Cicerón sería el siguiente: x presta a y la espada z (P^3xyz), x solicita a y la devolución de z (S^3xyz), pero además entretanto x enloqueció (L^1x), por lo tanto y debe devolver a x el arma z ($\mathrm{O}D^3yxz$), que simbolizamos así:

(2) $P^3xyz, S^3xyz, L^1x \vdash \mathrm{O}D^3yxz.$

Por el contrario, Sócrates afirma que de la regla universal esquemática en (1) no se sigue la regla particular monótona (2). Más aún, Sócrates defiende el silogismo dialéctico siguiente:

(3) $P^3xyz, S^3xyz, L^1x \vdash \neg \mathrm{O}D^3yxz$ (*no es obligatorio* que *y devuelva* a x el arma z)

Por su parte Cicerón defiende incluso una regla deóntica no monótona más fuerte, como la que sigue:

(4) $P^3xyz, S^3xyz, L^1x \vdash \mathrm{O}\neg D^3yxz$ (*es obligatorio* que *y no devuelva* a x el arma z),

como vimos en el texto de *De officiis* III, 25, 95 citado arriba.

La no monotonía de este tipo de reglas es la que expresa la frase habitual “la excepción que confirma la regla”, excepción que vuelve obligatorio no devolver la espada cuando surge un conflicto con otros deberes relativos a la seguridad de terceros, lo que limita el deber *prima facie* (de una ética de la convicción) en favor del deber político (o arquitectónico) de asegurar una convivencia social con la menor conflictividad posible (en una ética de la responsabilidad).

Esto destruye la pretensión de monotonía de una regla como la (1). Si expresamos esa pseudoregla como la implicación $P^3xyz \wedge S^3xyz \rightarrow \mathrm{O}D^3yxz$ y se da el antecedente $P^3xyz \wedge S^3xyz$, no es seguro que se dé el consecuente $\mathrm{O}D^3yxz$. Esto conspira contra el *modus tollens* – que debe seguir siendo defendible –, aunque nadie cuestiona *prima facie* la legitimidad normativa de la regla que manda devolver los préstamos, pagar las deudas, cumplir los contratos (*pacta et promissa sunt servanda*) y decir la verdad por principio (casi siempre), aunque no necesariamente en todos los casos concebibles. Aquí está claro que uno de los problemas cruciales en los ámbitos prácticos es el de los criterios para determinar las excepciones, el conflicto de deberes *prima facie* y su síntesis con una ética de la responsabilidad que procure el cumplimiento compatible de los deberes individuales en el marco del deber supremo mundano inmanente de asegurar una convivencia pacífica duradera en una comunidad.

Que la argumentación dialéctica con reglas derrotables sea un núcleo importante de la argumentación jurídica y moral, hace que la lógica no monótona, con su dominio inevitable de casuística, al menos inicial, sea inevitable en estos dominios. Pero, como la proliferación casuística tiende a hacer inaplicable las reglas derrotables, la *prudencia* – en el sentido de "inteligencia de los medios" – del legislador procurará determinar una especificación de los casos que restituya la universalidad de las reglas, y por lo tanto la monotonía y el *modus tollens*, para las especies del dominio de casos genéricos. El proceso prudencial de especificación y, mediante ella, de reconstitución de reglas particulares a las que se aplique la monotonía y el *modus tollens*, puede ser una tarea infinita por la materia, que es empírica y cambiante, como lo son también los cambios técnicos y culturales, que no tienen término.

Otro ejemplo deóntico tradicional es el de la virtud de la veracidad, regla moral que manda decir lo que creemos que sea la verdad y que Aristóteles concibe como una de las virtudes más importantes de la vida social cotidiana (p. ej. en *Eth. Nic.* 13, 1127 a13-b32), pero que no requiere ser considerada una regla universal, sino condicionada a sus consecuencias (ética de la responsabilidad), como ocurre por ejemplo en Grotius y Pufendorf en el caso de la guerra.

Para Kant, aparentemente, la veracidad es una virtud absoluta "porque es una obligación incondicionada, que vale en todas la situaciones."[207] Kant rechaza incluso las mentiras por necesidad (*Notlügen*) o disculpables, pues dañan la dignidad humana y la obligación moral respecto de la verdad que manda decirla bajo cualquier circunstancia.[208] Sin embargo, a pesar de la argumentación varias veces casuística que emplea Kant, su posición no es tan simple como parece, lo que nos parece que coloca a dicha regla moral en la región de los condicionales derrotables de la lógica no monótona. Éste es también un caso de conflicto entre ética de la convicción y ética de la responsabilidad, fundada a su vez en el conflicto entre bienes a conservar: lo que la ética de la responsabilidad manda en tales casos es preferir los bienes más fundamentales, como la vida y la integridad personal de aquellos por los que tenemos que responder, a otros bienes muy altos, como el honor de aquellos o nuestra propia veracidad, aunque es posible que, respecto de su honor, los terceros por los que somos responsables pudiesen decidir de otro modo.

Los anteriores son ejemplos típicos de fundamentación no monótona. Algunos subrayan que este tipo de argumentación da pie a la casuística. Eso puede ocurrir y por ello hay que proceder con cuidado. Pero por otra parte estos ejemplos morales y jurídicos muestran claramente que la excepción a la regla (que, como sabemos, tiene la forma de una implicación) de ninguna manera justifica abandonar la regla falible, pues se

---

[207] KANT, *Über ein vermeintliches Recht aus Menschenliebe zu lügen*, A 311: "*…weil es unbedingte Pflicht ist, die in allen Verhältnissen gilt.*"
[208] KANT, *Metaphysik der Sitten*, A 83-88.

trata de conflictos entre deberes que deben ser superados mediante recurso a una ética de la responsabilidad. Por ello el carácter no monótono de la regla es esencial, y por lo tanto no es reemplazable por otra regla monótona, como podría ser el caso del remedio a una falsación en la física u otra ciencia empírica.[209] Los deberes fungen como medios para alcanzar fines morales. Pero entre los deberes individuales de la llamada ética de la convicción, que es rigurosa, abstracta y por lo tanto invariante respecto de las circunstancias, se dan frecuentemente conflictos (incompatibilidades parciales o circunstanciales). La ética de la responsabilidad, que es política y por lo tanto "arquitectónica", es concreta y flexible frente a las circunstancias cambiantes y tiene también su deber fundamental, que es el de superar los conflictos sociales, incluidos aquellos conflictos entre deberes parciales, para alcanzar las formas buenas de la convivencia en un grupo humano, incluso la "eudaimonía" en una sociedad, que es la forma de la "buena vida" posible en una comunidad. Tales síntesis arquitectónicas de la convivencia producen la limitación de algunos deberes individuales en determinadas circunstancias y, por lo tanto, el carácter no-monótono de la argumentación moral y política concreta. Por ello la ética de la responsabilidad asume una característica típica de la virtud de la prudencia como "inteligencia de los medios".

11.2.4. Un ejemplo "óntico" de inducción falible.

Un segundo ejemplo de inducción dialéctica falible, de naturaleza óntica, es el siguiente: tomamos una colección de enunciados individuales verdaderos sobre un conjunto finito de individuos $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$ de una colección mayor indefinida, del tipo 'c_1 es ave y c_1 vuela', 'c_2 es ave y c_2 vuela', ..., 'c_n es ave y c_n vuela'. A partir de ellos nos atrevemos a sostener el enunciado '(todas) las aves (generalmente) vuelan'. Las expresiones entre paréntesis indican lo que habitualmente se sobreentiende al

[209] Esto nos lo recuerda la frase retórica tan usual en derecho y en la vida cotidiana de que "la excepción confirma la regla". Esto puede ser así sólo por el carácter no monótono de este tipo de fundamentación insuficiente.

expresar esos enunciados. Ésta es una fundamentación que se puede considerar como *triplemente* (*o cuadruplemente*) *débil o falible*[210] que simbolizamos así:

(5) $A^1c_1 \wedge V^1c_1, A^1c_2 \wedge V^1c_2, \ldots, A^1c_n \wedge V^1c_n \mid\!\sim \Pi x(A^1x \rightsquigarrow V^1x)$,

donde, como ya lo dijéramos en la sección anterior, 'Π' es un "generalizador" que habla de "casi todos" los x (es hipotéticamente universal) y '$\rightsquigarrow$' es un implicador falible.

La forma conjuntiva, y por ello conmutativa, de las premisas individuales que adoptamos repite la simbolización usual en la lógica "moderna" para esos enunciados, pero se aparta mucho de una simbolización compatible con lo mentado en la lógica "tradicional", que para un enunciado asertórico individual podríamos expresar así: 'c_i, (por)que es ave, vuela': puesto que el volar se dice de 'c_i' por ser ave, es decir, se pretende *fundar* la acción de volar en su ser ave (el volar de dice del ave). Se asevera entonces una dependencia entre predicados (al menos como posibilidad dentro de una teoría de la predicación como la aristotélica), que en ciertos casos puede alcanzar el carácter de propiedad o relación eidéticamente necesaria, "*differentia specifica*" o "*proprium*", etc. De ese modo una simbolización dentro de una teoría de la predicación como la aristotélica de un enunciado individual asertórico podría tomar algunas de estas formas:

$(c_i \varepsilon A^1) \varepsilon V^1$ o bien $V^1(A^1c_i)$,

donde 'ε' es la cópula, y entre los predicados se podría conjeturar un incómodo cambio de orden: A^1 sería de primer orden y V^1 de segundo. Aquí por simplicidad los consideraremos a ambos como de primer orden. En caso de necesitarlo adoptaremos la primera abreviatura, por lo que el esquema de esta inducción debería tomar esta forma:

210 A saber, admite la falibilidad de las premisas, la de la relación de consecuencia débil ($\mid\!\sim$), la de la generalización (Π) y la de la implicación débil ($\rightsquigarrow$) (aunque ésta se pueda reducir a la de consecuencia débil).

(6) $(c_1\varepsilon A^1)\varepsilon V^1, (c_2\varepsilon A^1)\varepsilon V^1, ..., (c_n\varepsilon A^1)\varepsilon V^1 \vdash \Pi x((x\varepsilon A^1)\varepsilon V^1)$,

cuya conclusión en las versiones contemporáneas de la silogística hoy se suele abreviar así: '$A^1 a V^1$'.

Esto no ocurre sólo en la filosofía tradicional, sino también en la práctica científica o técnica de todos los tiempos: cuando se propone una inducción falible, se supone una dependencia entre los predicados, sea por una relación causal, o por una acción recíproca, o por una relación atributiva entre entes y propiedades, o entre entes y acciones, entre entes y pasiones, etc.

Sin embargo no podemos descartar abstractamente los casos en que no se suponga una dependencia tal. Eso es lo que queda simbolizado en la notación tan general de la lógica clásica con conjunción conmutativa dada arriba, que no supone ninguna teoría particular de la predicación, es decir ninguna relación de orden o fundamentación entre los predicadores de la conjunción. Esta *imparcialidad metafísica* es inobjetable como abstracción, pues si bien en muchos casos podemos reconocer dependencias necesarias entre propiedades o relaciones pertenecientes a categorías diferentes, como cuando al hablar de entidades percibidas visualmente decimos '*c* es cuerpo sólido si y sólo si tiene superficie' y '*s* es una superficie si y sólo si tiene color', sin embargo fundamos como "propios" el tener superficie en la corporeidad y el tener color en la superficialidad y no a la inversa, aunque experimentemos la superficie por el color y la corporeidad por la superficie.

En otros casos tales dependencias no están eidéticamente fundadas y son empíricas, como "la blancura de la paloma", que admitimos, pero no "la palomez de lo blanco". 'Blancura' es en ese caso un predicado accidental, un accidente no propio (o no eidéticamente fundable) en la categoría de cualidad para la especie 'paloma', en tanto que color es un propio de la superficie y ésta un propio de la corporeidad. De modo semejante cuando decimos 'el ave c_i vuela' tácitamente atribuimos el 'volar' al 'ave' y no el ‘ser ave’ al ‘volar’, es decir admitimos una dependencia, esencial o accidental, entre los predicadores. En nuestro ejemplo presente la dependencia es empírica y no eidéticamente fundada, aunque el volar pertenezca a la categoría de acción que se dice de ciertos tipos de entes como los vivientes, y no a la inversa. Pero no podemos negar de antemano la posibilidad de enunciados existenciales en los que no sea posible reconocer, inicialmente o aún luego de un estudio minucioso, dependencias legales entre predicados o relaciones y que por lo tanto para ellos la simbolización mediante conjunciones conmutativas sea la única inicialmente adecuada. En el caso del volar de las aves, a pesar de las dependencias categoriales generales entre viviente y acción, la relación entre ave y volar se nos manifiesta inicialmente como una contigüidad empírica que nos lleva a proponer más abajo un enunciado universal como (7) o una regla como (8).

La conclusión de una inducción falible puede albergar dos debilidades: el implicador puede ser “falible”, lo que hemos simbolizado con ‘⤳’, y el cuantor puede ser un mero “generalizador” cuasi (o hipotéticamente) universal, lo que hemos simbolizado con ‘Π’. El cuantor podría ser también plenamente universal, lo que simbolizamos como de costumbre con ‘⋀’. La conclusión de una inducción aseverará al menos la “generalidad” y en ocasiones la “universalidad” de la extensión de la variable ‘*x*’, pero, para simplificar la discusión, en lo que sigue casi nunca consideraremos la debilidad en el generalizador ‘Π’.[211] La segunda (o tercera) debilidad se

[211] También podemos introducir una distinción entre una cuantificación fuerte, plenamente “universal” y “existencial fuerte”, con los símbolos habituales ‘⋀’ y ‘⋁’, y una cuantificación débil, meramente “general” y “existencial débil”, con los símbolos ‘Π’ y ‘Σ’ respectivamente. Aquí no la trataremos en detalle, pues complicaría artificialmente nuestra discusión actual, pero ya hemos visto en la sección anterior que son distinciones importantes. Además, en el caso de la deducción constructiva en lógica y matemática, podríamos interpretar al cuantor ‘Σ’ como equivalente a ‘¬¬⋁’ es decir la afirmación indeterminada, por no ejemplificable o no “efectiva”, de la

encuentra en la relación de consecuencia falible (la que no pretende que de la defendibilidad o verdad de las premisas se siga inevitablemente la defendibilidad o verdad de la conclusión), que arriba simbolizamos con ‘$\mid\!\sim$’. La tercera (o cuarta) debilidad concierne a la fundamentación de las premisas, que habitualmente suele ser insuficiente. Estas debilidades no suelen presentarse todas inexorablemente juntas en una inducción.

Dos estrategias para justificar la inducción como regla falible consistirán en:

1. introducir una debilidad o falibilidad en la conclusión o
2. debilitar la relación de consecuencia.

Tales procedimientos pueden convertir una argumentación rechazable, en otra admisible, por tener una relación de consecuencia falible y/o una conclusión falible.

Vayamos ahora a casos habituales de inducción y al modo en que se suelen interpretar. La estabilidad habitual de las relaciones entre propiedades o de las relaciones entre entes, o la estabilidad en la sucesión temporal entre acontecimientos típicos, nos tientan a interpretar al enunciado conclusión anterior de un modo tan fuerte como:

(7) ‘Todas las aves vuelan’, en símbolos ‘$\bigwedge x(A^1x \rightarrow V^1x)$’,

o como regla paramétrica:

(8) ‘x es ave $\vdash$ x vuela’, en símbolos ‘$A^1x \vdash V^1x$’,

es decir, como enunciado categórico fuerte estrictamente universal con un implicador fuerte o como regla deductiva infalible. Esta regla está sin embargo fundada de modo

---

existencia, que es una distinción esencial en ese ámbito. Con esta interpretación sería constructivamente admisible $\bigvee xA \vdash \Sigma xA$, pero no la deducción conversa, pues $\Sigma xA \nvdash \bigvee xA$, como es notorio.

insuficiente, pues a partir de un conjunto de premisas insuficientes deriva una conclusión falsa. Su forma la generalizamos de la siguiente manera:

(9) $A^1c_1 \wedge V^1c_1, A^1c_2 \wedge V^1c_2, \ldots, A^1c_n \wedge V^1c_n \vdash \bigwedge x(A^1x \rightarrow V^1x)$,

aunque el proceso inductivo inicial fue insuficiente y falible. El ejemplo siguiente, en el que agregamos un enunciado individual con el nombre propio 'Eulogio', que abreviamos '*e*', muestra el error:

'Eulogio es ave y Eulogio vuela', en símbolos '$A^1e \wedge V^1e$'.

Sabemos que 'Eulogio es un ñandú' ($\tilde{N}^1e$) es un enunciado verdadero, pero los ñandúes (como los avestruces, los pingüinos, los desaparecidos dodos, etc.) son aves que no vuelan, e. d. '$A^1e \wedge \neg V^1e$'.[212] Este problema, que ha ocupado a tantos especialistas de la "lógica no monótona" bajo el rótulo de 'condicionales derrotables', es el que ha llevado a rechazar la condición de monotonía, si $\Gamma \vdash C$ y $\Gamma \subseteq \Delta$, entonces $\Delta \vdash C$, para una cierta relación muy general de deducción, puesto que, agregando a las iniciales premisas individuales del ejemplo la nueva premisa relativa a Eulogio '$A^1e \wedge \neg V^1e$', podemos afirmar, para la deducción anterior la siguiente relación deductiva infalible, incompatible con la monotonía:

(10) $A^1c_1 \wedge V^1c_1, A^1c_2 \wedge V^1c_2', \ldots, A^1c_n \wedge V^1c_n', A^1e \wedge \neg V^1e \vdash \neg\bigwedge x(A^1x \rightarrow V^1x)$

(cuando son verdaderas todas las premisas, la nueva conclusión contradictoria con la originaria es verdadera).

---

[212] En cambio el caso de las gallinas y otros "volátiles" pertenece en español al ámbito de la argumentación dialéctica de la vaguedad, que trataremos brevemente. En alemán esos animales se denominan "*Geflügel*" o "*Federvieh*", es decir, alados o emplumados, y en inglés "*fowl*" o "*poultry*", lo que no remite obligatoriamente al volar y no produce vaguedad. En cambio en las lenguas romances, como el francés (*volaille*, *volatiles*) y el italiano (*volatili*) reaparece el tema de la vaguedad, que es en estos casos contextualmente dependiente.

A partir de los ejemplos anteriores, los símbolos '⤳' de implicador falible, '|~' de relación de consecuencia falible, de implicación perfecta '→' y de consecuencia perfecta '⊢', y las reglas de fundamentación (**sd1**) a (**sc4**) estudiadas arriba, podemos proponer las variantes posibles de las fundamentaciones inductivas de diversa fortaleza. Escogeremos las que mejor reflejen los inferencias inductivas que se acostumbrar a utilizar y que podemos considerar fundamentaciones correctas, y las que rechazamos como sofísticas. Las reglas inductivas posibles son las siguientes:[213]

(**ri1**) '$A^1c_1 \wedge V^1c_1, A^1c_2 \wedge V^1c_2, ..., A^1c_n \wedge V^1c_n \;\; |\!\sim \;\; \bigwedge x\,(A^1x \rightsquigarrow V^1x)$'
(**ri2**) '$A^1c_1 \wedge V^1c_1, A^1c_2 \wedge V^1c_2, ..., A^1c_n \wedge V^1c_n \;\; |\!\sim \;\; \bigwedge x(A^1x \to V^1x)$'
(**ri3**) '$A^1c_1 \wedge V^1c_1, A^1c_2 \wedge V^1c_2, ..., A^1c_n \wedge V^1c_n \;\; \vdash \;\; \bigwedge x\,(A^1x \rightsquigarrow V^1x)$'
(**ri4**) '$A^1c_1 \wedge V^1c_1, A^1c_2 \wedge V^1c_2, ..., A^1c_n \wedge V^1c_n \;\; \vdash \;\; \bigwedge x(A^1x \to V^1x)$'

La primera, (**ri1**), es tan débil como inobjetable, pues sólo afirma que, si todas las premisas fuesen defendibles o "rectas opiniones", entonces es débil o faliblemente deducible de la conclusión, que es muy débil. En efecto, con esta regla no afirmamos que de la verdad – o aún de la mera defendibilidad de las premisas – se siga la inevitable verdad – o la inevitable defendibilidad – de esa conclusión. Sólo afirmamos que '(todas) las aves (generalmente) vuelan', pero también admitimos que no es segura la conexión entre ser ave y volar. (**ri1**) es entonces un buen ejemplo de una regla admisible como (**sd1**) o (**sd2**).

La cuarta, (**ri4**), nos da la concepción más fuerte de inducción, pues afirma que de premisas individuales se sigue necesariamente una conclusión apodíctica universal categórica fuerte, lo que es falaz. Hoy es una regla con pocos defensores, aunque los haya tenido a lo largo de la historia de la lógica y de la teoría de la ciencia en sus períodos menos críticos. Es una regla inválida que no admitiremos.

---

[213] Aquí por simplicidad hemos obviado la distinción entre cuantores fuertes y débiles.

Las dos reglas intermedias (**ri2**) y (**ri3**) se podrían proponer como reglas de ‘inducción’ si ésta se entiende como una inferencia que sólo afianza generalizaciones insuficientemente fundadas, especialmente en dominios empíricos. De entre ellas (**ri2**) parece la más adecuada, si recordamos que la literatura lógica en general no usa implicaciones débiles, pues se arregla bien con una regla de paso débil o imperfecta. Consideramos lo que dicen las reglas mencionadas. (**ri2**) dice algo muy simple:

“Si las premisas individuales son verdaderas o verosímiles, entonces *hay fundamento insuficiente* para afirmar que la conclusión universal con implicación fuerte es verdadera o verosímil, aunque eso no esté más allá de toda duda”.

(**ri2**) es una fundamentación derrotable de un enunciado universal con un implicador fuerte, lo que es defendible. Cuando agregamos un enunciado individual incompatible con los de la anterior colección de premisas y carecemos de motivos para rechazar la verdad o la verosimilitud de las premisas, nos vemos obligados a negar la conclusión universal categórica y por lo tanto también la monotonía de la relación de fundamentación inductiva. Ésta parece una buena versión algo más fuerte que (**ri1**) de la inducción derrotable suficientemente fundada. Por su parte (**ri3**) se puede leer así:

“Si las premisas individuales son verdaderas o verosímiles, entonces *hay fundamento suficiente* para afirmar que la conclusión universal con implicación débil es verdadera o verosímil, aunque esto la hace una implicación derrotable”.

(**ri3**) parece tan defendible como (**ri1**) y (**ri2**), pues contiene una conexión débil: la implicación débil en la conclusión. Pero la implicación débil o falible ‘$\rightsquigarrow$’ no es habitual, por lo que preferimos utilizar (**ri2**).

11.2.5. Críticas y defensas de la inducción falible.

La inducción falible ha tenido numerosos ataques y defensas, especialmente desde Hume y hasta nuestros días. Desde la antigüedad se la consideró especialmente un método de invención, aunque sea además un método de fundamentación. Como método de invención es menos controvertido, por lo que nos ocuparemos de ella especialmente como método de fundamentación.

Tanto en las ciencias empíricas como en la matemática, la inducción y otros métodos dialécticos, como la semejanza y la analogía, juegan un gran papel. Podemos recordar las numerosas manifestaciones de Euler (1707-1782) al respecto. Las palabras de Laplace (1749-1827) son claras: "*Aun en las ciencias matemáticas nuestros instrumentos principales para descubrir la verdad son la inducción y la analogía.*" y "*Las relaciones más sencillas son las más comunes, y éste es el fundamento en que descansa la inducción.*"[214]

Con esto Laplace no hace otra cosa que glosar el principio escolástico "*simplicitas sigillum veri*" (la sencillez es el sello de lo verdadero). Tanto ellos como Laplace podían entenderlo en forma metafísica, pero aquí preferimos considerarlo como un principio heurístico que aconseja: "comienza por una hipótesis sencilla, que posiblemente sea verdadera". Gauß es del mismo parecer: "*En la teoría de los números sucede con bastante frecuencia que las verdades más bellas brotan por inducción.*" (Y no está hablando de la inducción completa.)[215]

Una importante diferencia con las ciencias mundanas es que en la matemática estos procedimientos dialécticos son claramente un método de invención, pues el matemático no se contenta con la argumentación dialéctica de lo verosímil, sino que busca una fundamentación apodíctica, una "*Letztbegründung*", un "silogismo epistémico" como fundamento. Esto es habitualmente imposible en las ciencias mundanas.

---

[214] LAPLACE 1814, en LAPLACE 1878-1912, VII, V y CXXXIX. (Citado por POLYA 1966, 65 y 253.)
[215] Citado en POLYA 1966, 95.

En el siglo XX Ludwig Wittgenstein" (1889-1951), en su primera gran obra, el *Tractatus Logico-Philosophicus*, caracterizó la inducción de un modo tradicional: "*El proceso de inducción consiste en que nosotros adoptamos la ley* más simple *que se puede hacer concordar con nuestras experiencias*."[216]

Pero de conformidad con Hume, aclara inmediatamente: "*Pero este proceso no tiene ninguna fundamentación lógica, sino solamente una psicológica. Es claro que no existe ningún fundamento para creer que ocurrirá verdaderamente el caso más simple*."[217] E inmediatamente comenta: "*Que el sol saldrá mañana es una hipótesis; y esto significa: no* sabemos *si saldrá*."[218]

11.3. La crítica popperiana a la inducción.

Aunque el argumento de Wittgenstein no sea el ataque mayor a la regla de inducción, representa un preludio para el duro ataque de Popper a esa regla, no sólo como regla de invención sino y especialmente como regla de fundamentación. Aquí sostendremos que el ataque popperiano a la inducción, que es más encarnizado que el de Wittgenstein, es de esa especie, porque interpreta la inducción como un proceso de fundamentación con la forma de la regla **(ri4)**. Si la regla de inducción siempre fuera de esa especie, entonces Popper tendría plena razón, pues **(ri4)** es una regla falaz. Pero no la tendría si los argumentadores estuviesen dialogando conforme a una regla

---

[216] WITTGENSTEIN 1921: 6.363. „*Der Vorgang der Induktion besteht darin, daß wir das* einfachste *Gesetz annehmen, das mit unseren Erfahrungen in Einklang zu bringen ist*." (Las traducciones de la obra de Wittgenstein que proponemos son nuestras y no coinciden siempre con las de Enrique Tierno Galván.)

[217] WITTGENSTEIN 1921: 6.3631. "*Dieser Vorgang hat aber keine logische, sondern nur eine psychologische Begründung. Es ist klar, daß kein Grund vorhanden ist, zu glauben, es werde nun auch wirklich der einfachste Fall eintreten*."

[218] WITTGENSTEIN 1921: 6.36311. "*Daß die Sonne morgen aufgehen wird, ist eine Hypothese; und das heißt: wir* wissen *nicht, ob sie aufgehen wird*."

falible del tipo (ri1), (ri2) o incluso (ri3), que es lo que ocurre cuando nos encontramos en una argumentación dialéctica de las que sólo aspiran a fundar una *opinión* del modo más verosímil posible, o un silogismo dialéctico en sentido amplio (no estrictamente aristotélico) que se proponga fundar un *koinón éndoxon* y en el que la debilidad esté en la regla de paso. La mayoría de los ejemplos de generalizaciones inductivas en la historia de la ciencia y de la filosofía se pueden considerar de naturaleza débil, especialmente (ri2), como también las inferencias falibles que estudian las lógicas no monótonas.

Popper tiene razón en muchos aspectos de su discusión sobre la inducción. No hay principio de inducción "fuerte", si ella se entiende como una regla del tipo (ri4), pero no parece haber ningún reparo en admitir una regla de inducción "débil" del tipo de una regla (ri2), o aun más débil, como la (ri1), aunque esto no sea necesario. Una regla débil como (ri2) no respetará la condición de monotonía, pero los contraejemplos implicarán la negación de la conclusión universal, como ocurre en el argumento popperiano. Con (ri2) no se excluye tampoco la posibilidad de la segunda revisión metódica popperiana, que es la revisión de los enunciados individuales de la base empírica, aunque tal revisión no es tan obligatoria como en el caso de la falsación popperiana.

11.4. La inducción como regla de invención.

Otra discusión histórica que se suele proponer trata acerca del tipo de regla que es la inducción. La historia de la lógica enfatiza su carácter de *regla de invención*, es decir de regla por la que se aumenta el conocimiento, se alcanzan nuevas leyes o, al menos, nuevas hipótesis generales, que son la base teórica de una ciencia empírica. Frente a ello las reglas deductivas habituales de una lógica epistémica y monótona se presentan como reglas de fundamentación suficiente, que en las ciencias empíricas permiten corroborar o refutar una hipótesis general o incluso una teoría. Otro de los motivos, aunque no el más importante, del rechazo de Popper a los procedimientos inductivos fue precisamente su rechazo a toda lógica de la invención. Aunque es posible – no necesario – compartir el rechazo popperiano de toda lógica de la invención, ello no impide admitir el carácter de regla de invención de la inducción, la analogía y la semejanza, o de los "silogismos teleológicos", y en general la utilización de textos que se pueden ponderar desde el punto de vista de una silogística dialéctica. De la discusión contemporánea podemos escoger y discutir temas adicionales como la abducción y la predicción probabilística o estadística. Recordemos qué se entiende por lógica la de invención.

Se suele entender por tal a una lógica que, a partir de enunciados "protocolarios" o "básicos", que describen acontecimientos individuales o "estados de cosas"[219], permite deducir *algorítmicamente* enunciados universales que fungen como leyes de la teoría. Éste es el papel que se ha asignado desde antaño a los pasos inductivos, para los que propusimos como reglas posibles a las reglas de fundamentación **(ri1)**-**(ri4)**, las tres primeras admisibles y la última falaz. Pero ¿en qué medida es la inducción, en cualquiera de sus formas, un procedimiento de invención científica? La consideración cuidadosa de los procedimientos inductivos no excluye su carácter de procesos psíquicos de invención, pero permite considerarlos también como procedimientos de fundamentación. No negamos que los procedimientos inductivos tengan su aspecto inventivo, pero es preciso señalar que éste está desprovisto de todo carácter algorítmico o regular. Su aspecto inventivo es aproximadamente así: un fragmento de información sobre casos individuales (fragmento ya obtenido en base a teorías o hipótesis previas) nos proporciona la base a partir de la cual damos un salto no deductivo hacia un enunciado o una regla universal. Ese es el *momento de la invención*, que *no es algorítmicamente reglado*, sino a lo sumo conjeturado con cierta regularidad en una psicología hipotética

[219] La expresión singular alemana es '*Sachverhalt*', que la filosofía insular traduce como '*states of affairs*' e incluso como '*atomic facts*', por ejemplo en la traducción inglesa del *Tractatus* wittgensteiniano.

y contrastable de la invención. A continuación ese mismo fragmento de información, o uno ampliado con casos individuales adicionales, nos sirve como base para considerar defendible como conclusión insegura a un enunciado o regla universal. Las reglas de inducción serán pues de naturaleza conclusiva débil, y por ello pertenecerán a la lógica de la fundamentación imperfecta o dialéctica. El paso inventivo no es lógico en ninguno de sus sentidos, sino empírico, aunque se funde sobre el mismo fragmento de información individual que la regla de inducción.

11.5. Balance de la crítica popperiana a la inducción.

Las reglas de inducción, que son ejemplos de los esquemas **(ri1)**, **(ri2)** y **(ri3)**, son reglas de deducción correctas en la lógica de la fundamentación insuficiente o, como también la llamamos en un sentido ampliado, de la silogística dialéctica. Las formas específicas de los esquemas **(ri4)**, *(**sd2**)' y *(**sd3**)' de más arriba, etc., son en cambio reglas de deducción falaces. Popper tiene razón cuando dice de **(ri4)**, la regla que parece tener en mente cuando critica la inducción, que es una regla falaz, ya que lo es en la lógica de la fundamentación suficiente o epistémica. En cambio no tendría razón si criticara esquemas de reglas como **(ri1)**, **(ri2)** o **(ri3)** (aunque no lo hace, ya que no eran su materia de discusión), que son reglas perfectamente fundadas de la lógica de la fundamentación insuficiente o dialéctica. Popper también tiene razón cuando rechaza una lógica de la invención de carácter algorítmico, pero no corresponde concederle tal carácter a una especialización inductiva del esquema **(ri4)**. Lo único que concedemos en nuestro análisis es la existencia de una "lógica" de la invención en sentido débil, es decir no algorítmico sino sólo heurístico, como la que desarrollaron autores como Georg Polya y otros.

El paso de los enunciados que describen "estados de cosas" singulares empíricos a enunciados universales, nunca es algorítmicamente regular, sino que es un salto al vacío que supone un momento de invención, agregado por el sujeto y no contenido en las premisas. Es por lo tanto un procedimiento sintético y falible. Sin embargo los enunciados descriptivos individuales, que constituyen su base empírica, son una ocasión que posibilita y facilita el momento sintético de la invención de la regla o enunciado universal. En este sentido muy débil es que admitimos conceder al fragmento de información o base empírica de la inducción el carácter de motivo de la invención, pero nunca concederíamos ese carácter a una presunta regla de inducción en la que insistiera la teoría de la ciencia tradicional y que correctamente criticara Popper. Con estas pequeñas correcciones creemos que la presentación del problema de la inducción hace justicia a la crítica popperiana, la matiza, amplía su tratamiento y supera así algunas de sus limitaciones.

11.6. Otras críticas.

La crítica popperiana a la inducción no es nueva, y tampoco lo son ya las críticas de otros autores a esa crítica de Popper, como las de confirmacionistas como Neurath y Carnap, y en tiempos más recientes la de criticistas como Rescher. Este último autor ha criticado las doctrinas popperianas desde un punto de vista próximo a la de la concepción dialógica que desarrollamos en este trabajo. Entre otros textos así lo hizo inicialmente en su libro *Dialectics* (RESCHER 1977) del cual citaremos algunos pasajes.

Las dos teorías de la ciencia rivales más difundidas del siglo XX fueron el "*confirmacionismo*", estrechamente conectado al "*Círculo de Viena*" y ejemplificado generalmente por Rudolf Carnap, y el "*falsacionismo*", la concepción típicamente popperiana. Los confirmacionistas "*insisten en la primacía de la búsqueda de evidencia* confirmante *para las hipótesis científicas. Ellos ubican a los científicos en el papel de coleccionistas que acumulan evidencia favorable a sus hipótesis teóricas. Desde esta perspectiva la* búsqueda de evidencia confirmante *es la tarea primaria de la ciencia. Por otra parte encontramos a los* falsacionistas*, quienes siguiendo a Popper, acentúan la importancia de la vulnerabilidad para la* invalidación experimental *e insisten en la primacía en ciencia del diseño de ensayos críticos para las hipótesis científicas. El científico, en tal enfoque, no es un recolector de evidencia, sino un experto en demolición cognoscitiva.*"[220]

Por su parte Rescher critica, tanto el punto de vista confirmacionista, como el falsacionista. Respecto del primero advierte que nada en el confirmacionismo suministraría una razón de "*por qué el científico no debería limitarse simplemente a aquellas hipótesis muy seguras, casi triviales, de cuya confirmación puede estar razonablemente seguro desde el mismo comienzo. Los confirmacionistas no ofrecen un motivo racional para la preocupación del científico activo por aquellas conjeturas teóricas que, dada la información disponible, parecen* interesantes *porque van más allá de nuestra imagen actual acerca de cómo funcionan las cosas en el mundo.*"[221]

Y en lo que atañe al falsacionismo declara que esa posición "*no explica por qué la preocupación del científico activo por aquellas conjeturas teóricas que, dada la información disponible, parecerían "razonables" o "plausibles"* (*en que ellas están más o menos en consonancia con lo que por otra parte*

---

[220] RESCHER, 1977, 119: "… *insist in the primacy of the search for* confirming evidence *for scientific hypotheses. They cast the scientist in the role of a collector who accumulates the evidence in favor of his theoretical hypotheses. From this perspective* the search for confirming evidence *is the prime task of science. On the other hand, we find the* falsificationists *who, following Popper, stress the importance of vulnerability to* experimental invalidation *and insist on the primacy in science of devicing critical tests for scientific hypotheses. The scientist, in such an approach, is not an evidence collector but a cognitive demolition expert.*"

[221] RESCHER, 1977, 120: "… *why the scientist should not simply limit himself to those very safe, if nearly trivial, hypotheses of whose confirmation he can be reasonably sure from the very outset. Confirmationism offers no rationale for the preoccupation of the working scientist with those theoretical conjectures which, given the information in hand, seem* interesting *in that they move in significant ways beyond our existing picture of how things work in the world.*"

pertenece a nuestra opinión general acerca del modo en que las cosas ocurren en el mundo)."[222]

Según la crítica de Rescher ambos puntos de vista rivales fracasan en proporcionar un concepto adecuado de la estructura de la ciencia y sus resultados, pero sin embargo esta tarea sería realizable mediante un modelo dialógico: éste sería capaz de sintetizar las tesis sostenibles del confirmacionismo y del falsacionismo, por medio de la idea de la "*investigación científica como una empresa fundamentalmente social o colectiva* … […] *Y esto está completamente ausente en las teoría ortodoxas confirmacionista y falsacionista*".[223]

De este modo, según Rescher, "*el confirmacionismo* (*e.d. la acumulación de evidencia confirmativa para una tesis científica*) *y el falsacionismo* (*e.d. la ensayada refutación de las conjeturas científicas*) s*on vistas por lo tanto como aspectos correlativos de un todo común*." […] "*el modelo disputacional reúne así al confirmacionismo y al falsacionismo en una suerte de* "*síntesis superior*" *hegeliana*."[224]

Parece muy adecuada esta doctrina ya bastante antigua de Rescher. Ni la filosofía habitual, ni las ciencias empíricas son en general campos teóricos en los cuales sea posible deducir enunciados universales a partir de enunciados acerca de

---

222 RESCHER, 1977, 120: "... *offers no account for the preoccupation of the working scientist with those theoretical conjectures which, given the information at hand, would seem "reasonable" or "plausible"* (*in that they are more or less consonant with what otherwise belongs to our general view of the way in which things work in the world*)."

223 IPSE, *idem*, 121: "… *scientific inquiry as a fundamentally social or communal enterprise* …. […] *And it is altogether lacking with the orthodox confirmationist and falsificationist theories*."

224 IPSE, *idem*, 121-122: "*confirmationism* (*i.e. the accumulation of supportive evidence for a scientific thesis*) *and falsificationism* (*i.e. the attemped refutation of scientific conjectures*) *are thus both seen as correlative aspects of a common whole*." […] "*The disputational model thus brings confirmationism and falsificationism together in a sort of Hegelian "higher synthesis"*."

conocimientos particulares. Casi siempre existe un "*débil llenado de los huecos*" en el proceso de fundamentación. La ciencia y la filosofía contienen sólo una pequeña parte de conocimiento suficientemente fundado. Dicha parte podrá ser de naturaleza eidética, o constructiva, o definicional, o recursiva, etc., pero no obstante la mayor parte de estas empresas intelectuales sólo puede ser parcialmente o insuficientemente fundada. El proyecto de Rescher propone esa aproximación al pensamiento científico y filosófico, y la aproximación constructivista de Lorenzen y Lorenz, y los desarrollos que proponemos en esta obra, colaboran en esa dirección.

11.7. La analogía.

El término 'ἀναλογία', que es lo '*conforme a relación*' o '*a razón*', fue traducido al latín como '*proportio*' por Varrón y Cicerón e inicialmente formó parte del vocabulario de la matemática pitagórica y así continuó por mucho tiempo. Aristóteles llamó a este instrumento lógico '*paradigma*'[225]. Teofrasto fue el primero que lo denominó 'conclusión por analogía'.[226] La analogía se concibió entonces como un instrumento metódico para la aclaración de estados de cosas de diferentes dominios de objetos. Quien primero se ocupó filosóficamente de la analogía fue Platón, en *Timeo* 31 a, 32 a, 53 e, 56 c, 69 b, donde ésta aparece en su forma tripartita cuyo medio es un principio cósmico (o vínculo) estructural (en general un elemento intermedio) que une los elementos opuestos en complejas conexiones encadenadas que permiten configurar el mundo. En *República*, aparece la analogía de cuatro términos en las relaciones entre los dominios del ser y del conocer en la parábola de la línea[227]: allí se llama expresamente 'analogía' a la correspondencia entre ser y devenir por una parte y el conocer y el opinar por la otra.[228]

---

[225] ARISTÓTELES: *Anal. pr.* II, 24, 68 b38 – 69 a 19.
[226] TEOFRASTO: I, 381, 391.
[227] PLATÓN: *República* 509 d – 511 e.
[228] *Idem*, 534 a.

Sin embargo fue Archytas de Tarento (*circa 400 a. C.), amigo de Platón, primer pitagórico conocido y fundador de la mecánica, el primero de quien sabemos que distinguía las tres especies de analogías matemáticas *ternarias*, las aritméticas, las geométricas y las armónicas.

Las *analogías aritméticas* consistían en igualdades de diferencias, $a - b = b - c$: *el primer término* (a) *es tanto más grande que el segundo* (b), *como éste es más grande que el tercero* (c). La transformación de la igualdad de las diferencias en la fórmula $b = (a + c)/2$ es inmediata. Se trata pues del cálculo de la media aritmética. Obtenemos así una terna $<a, b, c>$ conforme a la diferencia.

Las *analogías geométricas* declaraban la igualdad de dos divisiones, como $a:b = b:c$, es decir, *la proporción del primero con el segundo es igual a la del segundo con el tercero*. Es decir, se establecen por la igualdad de los productos cruzados $a{\cdot}c = b{\cdot}b$, que es típica de las clases de fracciones de enteros que permiten definir números racionales (positivos para la matemática tradicional). De estas analogías resultan la ternas $<a, b, c>$ conforme a la división. Por ejemplo $8:4 = 4:2$, pues $8{\cdot}2 = 4{\cdot}4$, de donde resulta pues la terna análoga geométrica $<8, 4, 2>$.

Las *analogías armónicas* establecían una síntesis de las dos anteriores: *a excede a b en la misma proporción de a* ($a = (b + \rho a)$) *en que el tercero es excedido por el segundo en la misma proporción de c* ($b = (c + \rho c)$). Así 6 excede al 4 en un tercio de su magnitud (en 2), como 3 es excedido por 4 en un tercio de su magnitud (en 1). Obtenemos pues la terna <6, 4, 3> de acuerdo a dicha relación armónica.

Como vemos las primeras analogías matemáticas parecen limitadas a las ternarias, lo que tiene sentido, pues mediante ellas se buscaba determinar un “medio” (τὸ μέσον, ἡ μεσότης) entre dos números conforme a una relación matemática determinada. Pero una vez hecho eso podemos invertir el procedimiento, partir del más pequeño de los números y de la relación, para generar una sucesión con un número indefinido de términos. Con ello podemos considerar a estas analogías ternarias como un principio de formación de sucesiones *in indefinitum* de acuerdo a una relación matemática determinada (ver EUCLIDES: *Elementos*, libros V y VII).

De todos modos desde sus comienzos la analogía es una "igualdad de relaciones", como lo testimonia también la variante de Aristóteles: "*La analogía es una igualdad de razones y requiere al menos cuatro términos*."[229] Como vemos Aristóteles, a diferencia de Archytas, exige que los términos sean al menos cuatro, pues en el caso de que sean tres, el término medio aparece dos veces, como vimos en los ejemplos anteriores (entonces no se hacía aún una distinción explícita entre 'tipo' y 'aparición' de un término). También hay que destacar que, aunque Aristóteles no fue matemático, nunca dejó de considerar como idea regulativa para toda analogía a la analogía matemática, al menos como metáfora, pues la mayoría de sus ejemplos fueron extramatemáticos y no permitían el cálculo o "construcción" del término medio. La determinación del medio, o de los medios matemáticos, es "*objetiva*", pues se calcula. En cambio en la ética o en la metafísica la determinación del medio no es en general calculable. Así Aristóteles sólo dice que la virtud es el medio entre el exceso y el defecto viciosos de las acciones. Pero éste medio debe ser subjetivamente correcto "para nosotros" (πρὸς ἡμᾶς)[230], es decir para la colectividad de los agentes involucrados. La justicia, por ejemplo, es una relación al menos cuadripartita entre dos personas y sus fines o intereses (obras, acciones, cosas, etc.) – aunque se puede extender a un número indefinido de personas y sus fines – que procura producir una relación "igual" aceptable para todos los miembros del grupo, aunque la relación no sea numérica y por lo tanto no sea calculable.

[229] ARISTÓTELES: *Eth. Nic.* V, 6, 1131 a 31: ἡ γὰρ ἀναλογία ἰσότης ἐστὶ λόγων καὶ ἐν τέττρασιν ἐλαχίστοις.
[230] ARISTÓTELES: *Eth. Nic.* II, 5, 1106 a 26 – b 7.

Así, en la “justicia conmutativa”, que se ocupa del intercambio o compraventa de cosas, ¿cuál sería el “precio justo” p_j entre los precios p_v y p_c propuestos por el vendedor y el comprador? Según la Escolástica, que se inspira en Aristóteles, sería una suma que expresaría una relación “semejante” a la aritmética anteriormente considerada, entre el precio p_v pedido por el vendedor y el precio p_c ofrecido por el comprador, es decir una cantidad en el intervalo cerrado de valor absoluto $|p_v - p_c|$. No se puede exigir que p_j sea la simple media aritmética: recordemos la cita de Aristóteles de que “*es propio del instruido pretender en cada género tanta precisión cuanta admita la naturaleza de la cosa*” y que es “*tan absurdo aprobar a un matemático porque habla persuasivamente, como requerir demostraciones a un orador*” (ARISTÓTELES, *Éth. Nic.* I, 3, 1094 b 22-27).

En la justicia conmutativa tenemos *a priori* tres posibilidades: o $p_v < p_c$, o $p_v = p_c$, o bien $p_v > p_c$. La primera admite tantas soluciones “justas” como valores haya en el intervalo cerrado $[p_v, p_c]$. El segundo caso es trivial, pues en él $p_v = p_j = p_c$. El único caso problemático es el tercero, cuya estructura, de acuerdo con los defensores de la noción de precio justo, sería: $p_v \geq p_{jv} \geq p_{jc} \geq p_c$.

Puede haber muchos “precios justos” intermedios en el intervalo cerrado $[p_c, p_v]$. Sea p_v el precio inicial que pide el vendedor y p_{jv} un precio menor o igual que acepta después de negociar. Y sea p_c es el precio inicial ofrecido por el comprador y p_{jc} un precio mayor o igual que acepta después de negociar. Un precio justo p_j sería un precio cualquiera del intervalo cerrado $[p_{jv}, p_{jc}]$ *que sea aceptable para ambas partes*, es decir $p_{jv}, \geq p_j \geq p_{jc}$. No hay en el intervalo $[p_{jc}, p_{jv}]$ un único valor calculable como precio justo. “Precio justo” es otro modo de decir “precio intermedio libremente aceptado por todas las partes en la transacción”.

A continuación surge el problema de a quién corresponde determinar dicho precio. Desde que hay comercio esto se realiza en un mercado más o menos extenso y complejo, que proporciona al menos precios de referencia para cada caso particular. En casos especiales, en los que el comprador se encuentra en situación de no poder negociar libremente bienes necesarios para su subsistencia, o el vendedor no puede negociar libremente precios que cubran al menos sus costos, se suele recurrir a una tercera instancia, generalmente con monopolio de la fuerza, que determine un precio intermedio que satisfaga mínimamente al vendedor y sea pagable por el comprador. Ese sería un precio presuntamente "justo" más o menos arbitrario y podría no ser libremente aceptado. Por supuesto, podemos encontrarnos con casos en que, ni haya un precio que cubra los costos de producción, ni uno que sea pagable por el comprador que lo requiere para su subsistencia. No habrá en tales casos ningún "precio justo" en sentido aristotélico y en general escolástico. Esto también es una posibilidad. La doctrina denominada aristotélico-tomista del precio justo tiene así imperfecciones y casos no contemplados. Por otra parte su determinación autoritaria no debería ser frecuente y debería limitarse a bienes de subsistencia en situaciones de emergencia, como guerras y catástrofes, y por el menor tiempo posible, pues, como sabemos, distorsionan todo el sistema de precios. Por eso llamamos precio justo p_j al que resulta de un acuerdo libre de todas las partes, y dependerá al menos parcialmente de las valoraciones que éstas hacen sobre el bien en juego. Como se advierte una caracterización aristotélico-tomista de la justicia conmutativa sería, salvo en casos límite, compatible con la determinación de precios en una economía de mercado. Nos encontraríamos así en los prolegómenos de lo que, generalizado a un mercado con numerosos agentes económicos y bienes, se conocerá posteriormente como una teoría de la competencia (imperfecta), cuya idea reguladora es la de la competencia perfecta.

En la "justicia distributiva", que se ocupa de la distribución de bienes entre iguales y desiguales, Aristóteles discrimina entre los diversos "rangos" sociales. Aquí la distribución justa conserva una "semejanza" con la analogía geométrica, que podemos expresar así: "*a* es a *b* como *c* es a *d*". Tampoco aquí se puede calcular matemáticamente las cantidades. Lo único que puede decir Aristóteles y la Escolástica que se inspira en él, es algo tan vago como que *lo justo* [*distributivo*] *es la relación análoga misma*, *en la medida en que cada uno recibe* "*lo que le corresponde*". Pero, como siempre, el problema es ¿qué es lo que le corresponde a cada uno? Salvo en las analogías cuantitativas, eso no es calculable, sino sólo determinable por consenso.[231] Lo que sí debemos agregar, es que ya en Aristóteles estos medios justos de la conmutación y la distribución cuantitativas no se limitan a números enteros, sino que se conciben como "números en general" (ὅλως αριθμοῦ)[232], que para los griegos eran los racionales positivos de las medidas. El "medio" a encontrar en la distribución es entonces la proporción misma, pero ésta sólo es calculable en las analogías cuantitativas y ya no en las "cualitativas", por lo que en esos casos sus soluciones posibles dependerán de circunstancias culturales, técnicas y históricas, y en general de consensos.

Las analogías cualitativas le sirven a Aristóteles, por ejemplo en la biología, para determinar concordancias estructurales o funcionales que traspasan los límites genéricos. Así, cuando dice "*lo que es el ala al ave, es la aleta al pez*"[233], considera una relación analógica, que llamaremos 'funcional', y que parece "bien fundada", en contra de lo que opinara Kant respecto de las analogías cualitativas.

Por otra parte al concepto aristotélico de 'unidad' se lo podría considerar *metaanalógico*, si se considera lo siguiente:
(1) la *unidad numérica* se funda en la materia (como principio de individuación),
(2) la *unidad específica* consiste en caer bajo el mismo "concepto esencial" o λόγος,

[231] Por ejemplo, ¿cuántas veces más debe ganar con justicia un jugador de fútbol de primera división que un físico nuclear? (o a la inversa), o ¿cuántas veces más debe ganar con justicia un dirigente sindical que un buen médico? (o a la inversa). Por otra parte ¿sería "distributivamente justo" que todos ganasen lo mismo, como en la isla de Utopía de Tomás Moro?
[232] ARISTÓTELES: *Eth. Nic.* V, 6, 1131 a 30 s.
[233] ARISTÓTELES: *De part. animal.* I, 4, 644 a 18-23.

(3) la *unidad genérica* consiste en caer bajo la misma "forma de enunciado" (σχῆμα τῆς κατηγορίας), es decir admitir una misma clase de predicados, y
(4) la *unidad analógica* se da cuando algo "se comporta [respecto de algo], como otro [algo] respecto de otro" (ὅσα ἔχει ὡς ἄλλο πρὸς ἄλλο).

En el caso de la analogía se puede tratar de "una unidad transcategorial".[234] Y sólo la relación de analogía puede hacer comprensible lo común transcategorial.

Lo mismo acontece en el dominio de los principios de la física y la metafísica: los fundamentos y las causas (materia, forma, privación, etc.) en los diferentes dominios son diferentes, aunque en cierto modo son lo mismo, cuando "se habla en general y en sentido analógico" (ἂν καθόλου λέγῃ τις καὶ κατ'ἀναλογίαν).[235] La materia, y especialmente la "materia prima" se conoce sólo por analogía, por un proceso de eliminación sucesiva de las formas, hasta un "paso al límite" de la eliminación total de las mismas. La materia prima no es perceptible, pero es aún concebible como la "pura potencialidad física" que puede ser determinada por formas cualesquiera del mundo físico, y por ello es sólo una de las formas (analógicas) posibles de la "potencia". Por otra parte defiende Aristóteles, frente a Platón, su concepción analógica de "lo bueno", que ya no es "lo uno común [categorialmente uno] en el sentido de una idea" (οὐκ ἔστιν ἄρα τὸ ἀγαθὸν κοινόν τι κατὰ μίαν ἰδέαν), sino según analogía.[236] La noción de analogía permite fundar objetivamente el uso del mismo nombre para estructuras categorialmente diversas, lo que otorga sentido a su discurso metafísico general. Esto torna defendible una concepción no unívoca o transcategorial de la analogía, pero no nos obliga a ella. Es posible tener caracterizaciones de la argumentación analógica intracategorial, incluso en el caso de defender una metafísica unívoca del ser. Un ejemplo ya considerado de analogía categorial fue la del ave y el ala, y del pez y la aleta.

[234] ARISTÓTELES: *Met.* V, 6, 1016 b 29 – 1017 a 2.
[235] ARISTÓTELES: *Met.* XII, 4, 1070 a 31 – b 27.
[236] ARISTÓTELES: *Eth. Nic.* I, 4, 1096 b 25-29.

Pero dejemos por el momento las consideraciones más típicamente filosóficas del tema e intentemos aproximarnos a sus posibles formas estructurales. La forma que propone Kuno Lorenz para un "silogismo analógico" general puede introducirnos en la discusión de las formas posibles de analogía, pues, como veremos, caracteriza sólo una forma unívoca o categorial de entre las posibles formas que la misma admite. Consideremos pues su definición:

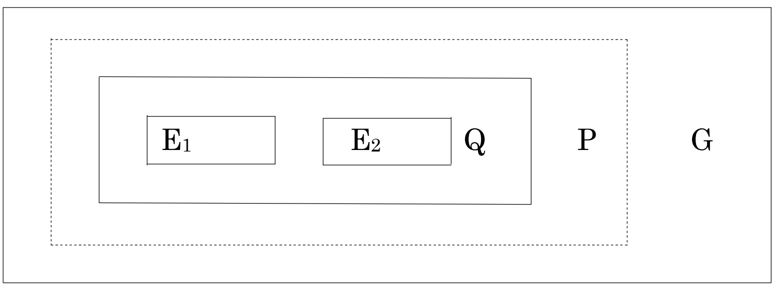
D1. Sean dos especies E_1 y E_2 de un género G y sea una cualidad Q para la cual valen que:

(1) 'Todos los E_1 son Q' y
(2) 'Todos los E_2 son Q, entonces si,
(3) 'Todos los E_1 son P', se puede concluir por analogía:
(4) 'Todos los E_2 son P', si suponemos que
(5) 'Todos los Q son P.

Lorenz insiste en que, olvidar la condición (5) invalida el silogismo analógico, lo que es correcto en el caso de una de las posibles formas de analogía "constitutiva" o "constructiva", es decir de razón suficiente – incluida la no cuantitativa –, pero no lo es *necesariamente* para los casos de analogía "cualitativa" fundadas insuficientemente. La forma lógica de la versión de Lorenz del silogismo analógico sería:

(1) $\bigwedge x(E_1 x \rightarrow Qx)$, (2) $\bigwedge x(E_2 x \rightarrow Qx)$, (3) $\bigwedge x(E_1 x \rightarrow Px) \vdash$ (4) $\bigwedge x(E_2 x \rightarrow Px)$, (bajo el supuesto de que (5) $\bigwedge x(Qx \rightarrow Px)$).

Esto lo podemos esquematizar así:



Este silogismo es, en el caso de que $\bigwedge x(Qx \rightarrow Px)$), un ejemplo de fundamentación suficiente adecuado a los dominios de la demostración, que además supera a la noción kantiana de analogía constitutiva sólo cuantitativa. Naturalmente si en (5) se diese la relación conversa de implicación universal entre Q y P, u otra cualquiera diversa de la propuesta por Lorenz, la fundamentación no sería suficiente, sino a lo sumo insuficiente, es decir sería una analogía inválida en el sentido científico estricto. Pero podría tratarse de una analogía dialéctica válida en el sentido débil de la fundamentación insuficiente (por ejemplo por inducción). Pues podría tratarse de una hipótesis corroborable. Adviértase además que esta analogía constitutiva de Lorenz consiste de dos simples polisilogismos de la forma Bárbara:

$$E_1 \subseteq Q \subseteq P \subseteq G \qquad \text{y} \qquad E_2 \subseteq Q \subseteq P \subseteq G,$$

que se restringe a una "unidad categorial" G para las relaciones. Incluso si la relación (5) se reemplazase por otra y la analogía se tornara epistémicamente inválida y fuese a lo sumo dialécticamente válida, conservaría de todos modos su unidad categorial.

De la discusión anterior se desprende la necesidad de discriminar precisamente entre varios tipos de argumentación analógica: por una parte, (1) si lo que queremos es establecer una demostración epistémica o (2) si sólo queremos alcanzar una defendibilidad dialéctica, y por la otra (3) si la relación analógica requiere la "unidad categorial" o (4) si admite una "unidad transcategorial", como en el caso de las filosofías de cuño aristotélico. Sin embargo y en cualquier caso, el énfasis de la inferencia analógica debe estar puesto en la "igualdad" o "proporcionalidad" al menos cualitativa de la relación. En el caso de las virtudes aristotélicas se advierte la búsqueda de su proporcionalidad entre los extremos, aunque nunca se trate de un cálculo matemático del medio virtuoso. Este tipo de argumentación no sólo es lícito en la ética y en general en la filosofía, sino que aparece y es admisible en las ciencias empíricas.

Por otra parte, siguiendo a Christian Thiel, distinguiremos entre analogía estructural y funcional:

D2. Existe una *analogía estructural* entre dos sistemas de objetos, si *algunas relaciones* entre los elementos de un sistema corresponden biunívocamente a *algunas relaciones* entre los elementos del otro sistema. En este caso se suele decir también que ambos sistemas *concuerdan parcialmente en su estructura*. (Adviértase que *no se exige una correspondencia biunívoca de todas las relaciones* (*o cualidades*), por lo que no se trata de un isomorfismo, como ocurre en el caso especial de la condición (5) propuesta por Lorenz. Tampoco se requiere una correspondencia biunívoca entre los elementos de los dos sistemas.)

Un ejemplo de *analogía estructural* es la que se suponía que existía entre "macrocosmos" y "microcosmos". Ésta fue una analogía metafísica surgida en la antigüedad que se desarrolló su plenitud durante el renacimiento italiano. En la metafísica de Leibniz la teoría del "reflejo" de cada mónada en las restantes es otro ejemplo importante de analogía estructural. Otro ejemplo de ella es la analogía física que Niels Bohr supuso entre estructura atómica y sistema solar, que permitió rápido crecimiento de la física atómica. En ninguno de estos casos es preciso suponer un isomorfismo. En el caso del átomo de Bohr hay varias relaciones de un sistema que no tienen equivalente en el otro, como la cuantización de los niveles de energía de los electrones y la ausencia de decaimiento del electrón en el átomo de Bohr por efecto del campo electromagnético, a pesar de que ésta es una característica microfísica incompatible con la teoría electromagnética macrofísica clásica. Como se ve no debe cumplirse nada semejante a la condición (5) de la definición de Lorenz para que se dé una analogía en física.

D3. Existe una *analogía funcional* entre dos sistemas de objetos, si ambos son adecuados para una tarea determinada y por lo tanto son mutuamente reemplazables para realizar esa tarea, aunque difieran por las especies de sus elementos e incluso no sean estructuralmente análogos. (En estos casos se suele decir que cada sistema es "modelo cibernético" del otro.)

Una antigua analogía funcional es aquella que se da entre el piloto y su buque por un lado y el "príncipe" – o político conductor – y su estado por el otro. Ésta es una imagen antropomórfica de la política etimológicamente coincidente con lo que Wiener denominó 'cibernética'. Muchos conceptos de la física, como 'fuerza', 'inercia', 'afinidad', etc., también provienen de analogías antropomórficas, que no son isomorfismos. El desarrollo de la física también utilizó inferencias analógicas funcionales para pasar de la teoría gravitatoria a la fuerza electroestática, teorías cuya estructura no es isomorfa. También es excepcionalmente importante la analogía entre las leyes de la electrodinámica y las de la hidrodinámica, que permiten resolver problemas en un dominio apelando al otro. De lo anterior surge la importancia heurística de la analogía en el pensamiento científico y filosófico. Pero en los ejemplos anteriores se advierten tres especies de analogía, desde el punto de vista de la forma del conocer.

(1) Muchas analogías matemáticas son plenamente fundadas, porque son constructivas o, siguiendo a Kant, constitutivas.

(2) En cambio las analogías físicas pueden ser bien fundadas, pero no suficientemente, pues ya las teorías físicas no lo son (las consideramos "pístis").

(3) Muchas analogías filosóficas parecen carecer de todo fundamento, como el primer ejemplo del *Timeo* platónico y de la analogía entre macrocosmos y microcosmos, o éste, en caso de existir, es extremamente débil, como en el caso del reflejo de cada mónada en las demás, que sostenía Leibniz. En este caso podemos hablar de "pensamiento sugerente", que puede es fructífero en ocasiones, pese a la debilidad de sus fundamentos. En cambio otras analogías filosóficas se presentan como pístis bien fundada, si no como epistéemee. Tal es el caso de la segunda analogía platónica citada, tomada de la República y que establece la correspondencia entre ser y devenir por un lado y entre conocer y opinar por el otro.

11.8. Conclusión.

Hemos tomado como ejemplos de estructuras de fundamentación insuficiente a la inducción no demostrativa y la analogía en sus diversas formas, pero éstas son sólo dos ejemplos de las que se utilizan en los diálogos de fundamentación imperfectas, incluidas las ciencias. En un libro reciente, *Cuestiones de fundamento* (2014), hemos desarrollado con cierto detalle no sólo las arriba mencionadas, como también otras. Éste no es un tema terminado en el ámbito de la lógica ampliada de fundamentación imperfecta. Por supuesto el tema escapa a las posibilidades de este trabajo, que ya es bastante extenso. Por eso dejamos su desarrollo a aquellos autores que ya tienen numerosas contribuciones pasadas y presentes, y a otros que puedan agregar más adelante nuevos desarrollos sobre éstas y otras estructuras específicas de fundamentación insuficiente. La máxima que siempre deberemos recordar, tanto en el caso de la fundamentación suficiente y sobre todo en el de la fundamentación insuficiente, es una de Baltasar Gracián que dice: *Con poco viento cae en el suelo torre sin cimiento*.[237]

[237] *Oráculo manual y arte de prudencia*, Huesca: Juan Nogués, 1647 (edición príncipe).

BIBLIOGRAFÍA

- Berka-Kreiser 1986: Berka, Karel y Kreiser, Lothar, *Logik Texte*, Berlin, Akademie Verlag, 4 1986.
- Bobenrieth 1996: Bobenrieth Miserda, Andrés, *Inconsistencias, ¿por qué no? Un estudio sobre la lógica paraconsistente*, Bogotá, Colcultura, 1996.
- Bochenski 1956: Bochenski, I. M., *Formale Logik*, Freiburg/ München, Karl Alber Verlag, 1956. Hay traducción española.
- Church 1956: Church, Alonzo, *Introduction to Mathematical Logic*, vol. I, Princeton (NJ), Princeton University Press, 1956.
- Došen 1993: Došen, Kosta, "A historical Introduction to Substructural Logics", en Schroeder-Heister y Došen 1993, pp. 1-30.
- Došen 1994: Došen, Kosta, "Logical Constants as Punctuation Marks", en Gabbay 1994, pp. 273-296.
- Feyerabend 1975: Feyerabend, Paul K., *Against Method*, London, 2 1975.
- Feyerabend 1994: Feyerabend, Paul K., *Ammazzando il tempo* (*Un'autobiografia*), Roma-Bari, Giuseppe Laterza e figli spa, 1994.
- Gabbay-Guenthner 1986: Gabbay D. & Guenthner, F., *Handbook of philosophical Logic III: Alternatives to Classical Logic*, Dordrecht/Boston/London, Kluwer Academic Publishers, 1986.
- Gentzen 1934-1935: Gentzen, Gerhard, "Untersuchungen über das logische Schließen I – II", *Mathematische Zeitschrift* 39, 1934-1935, pp. 176-210 y pp. 401-431. Reproducido en Berka-Kreiser 1986, pp. 206-262.
- Gentzen 1936: Gentzen, Gerhard, "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie", *Mathematische Annalen* 112, 1936, pp. 493-565.
- Gentzen 1938: Gentzen, Gerhard, "Neue Fassung des Widerspruchsbeweises für die reine Zahlentheorie", *Forschung* 4, 1938, pp. 19-44.
- Gethmann 1982: Gethmann, Carl Friedrich, *Logik und Pragmatik*, Frankfurt am Main, 1982.
- Hasenjaeger 1962: Hasenjaeger Gisbert, *Einführung in die Grundbegriffe und Probleme der modernen Logik*, Freiburg-München, 1962 (hay traducción española de Manuel Sacristán: *Introducción a los conceptos fundamentales y los problemas de la lógica moderna*).

- Herbrand 1930: Herbrand, Jacques, “Recherches sur la théorie de la démonstration”, *Traxaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Varsovia, Cl. III, 33, 1930, pp. 1-128.
- Heyting 1956: Heyting, Arendt, *Intuitionism: An Introduction*, Amsterdam, North-Holland, 1956.
- Hilbert 1900: Hilbert, David, “Mathematische Probleme”, en Hilbert 1965, pp. 290-329.
- Hilbert 1965: Hilbert, David: *Gesammelte Abhandlungen* iii, Bronx, New York, Chelsea Publ. Co., 1965.
- Hilbert-Bernays ²1968: Hilbert, David y Bernays, Paul, *Grundlagen der Mathematik*, I-II, Berlin/Heidelberg/New York, ²1968. Primera edición en Berlin, 1934-1939.
- Immermann, 1838-9: Immermann, Karl Lebrecht, *Münchhausen. Eine Geschichte in Arabesken*, en Mayne, Harry (ed.) *Immermanns Werke*, Leipzig und Wien, Bibliographisches Institut, 1906, vol. 1.
- Johansson 1936: Johansson, Ingebrigt, “Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus”, *Compositio Mathematica* 4, 1936, pp. 119-136.
- Jonsen-Toulmin 1988: Jonsen, Albert R. y Toulmin, Stephen: *The abuse of casuistry*, Berkeley/Los Angeles/Londres: University of California Press, 1988.
- Kac y Ulam 1968: Kac, Mark y Ulam, Stanislaw M.: *Mathematics and Logic. Retrospect and Prospects*, London, The Pall Mall Press, 1968 (Harmondsworth, Penguin Books, 1971). (Versión española: *Matemáticas y lógica*, Caracas, Monte Avila, 1969.)
- Kalinowski 1972: Kalinowski, Georges, *La logique des normes*, Paris, PUF, 1972.
- Kleene 1952: Kleene, Stephen Cole: *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1952.
- Kneale & Kneale 1962: Kneale, William & Kneale, Martha, *The Development of Logic*, Oxford, Clarendon Press, 1962.
- König 1936: König, Dénes, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., 1936.

- Lenk 1982: Lenk, Hans, "Zur Frage der apriorischen Begründbarkeit und Kennzeichnung dialogischer Partikeln", en Gethmann 1982, pp. 11-37.
- Lolli 1981: Lolli, Gabriele, "La perdita della certezza", *Scientia* 96, 1981, pp, 363-375.
- Lolli 1985: Lolli, Gabriele, *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche*, Bologna, Il Mulino, 1985.
- Lorenz 1968: Lorenz, Kuno, "Dialogspiele als semantische Grundlage von Logikkal-külen", nueva edición en Lorenzen-Lorenz 1978, pp. 96-162.
- Lorenzen 1958: Lorenzen, Paul, "Logik und Agon", *Atti del XII Congresso Internazionale di Filosofia* (Venezia, 12-18 Settembre 1958), vol. 4, Firenze, Sansoni Editore, 1960, pp. 187-194. Reimpreso en Lorenzen-Lorenz 1978, pp. 1-8.
- Lorenzen 1965: Lorenzen, Paul, *Differential und Integral. Eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis*, Frankfurt/Mn., Akademische Verlagsgesellschaft, 1965.
- Lorenzen 1969: Lorenzen, Paul, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Berlin/Heidelberg/New York, Springer Verlag, 1969.
- Lorenzen 1974: Lorenzen, Paul, *Methodisches Denken*, Frankfurt, Suhrkamp, 1974 (especialmente el capítulo "Protologik", pp. 81-93).
- Lorenzen 1987: Lorenzen, Paul, *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie*, Mannheim/Wien/Zürich, Bibliographisches Institut, 1987.
- Lorenzen-Lorenz 1978: Lorenzen, Paul und Lorenz, Kuno, *Dialogische Logik*, Darmstadt, Wissenschaftliches Buchgesellschaft, 1978.
- Łukasiewicz 1951: Łukasiewicz, Jan, *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic*, Oxford, University Press, 1951. 2ª edición ampliada, 1957. (Reimpreso por Garland Publishing in 1987.)
- Marx 1867: Marx, Karl: *Das Kapital. Kritik der politischen Ökonomie*, vol. I, libro 1 (*Der Produktionsprozeß des Kapitals*), Berlin: Dietz, ^{1}1962, ^{4}1969, 955 pp. Hay traducción castellana incompleta de esta obra: *El capital*, México, Fondo de Cultura Económica, 1973, 3 vols.
- McCall 1967: McCall, Storrs (ed.): *Polish Logic 1920-1939*, Oxford, Clarendon Press, 1967.

- Mittelstraß 1995: Mittelstraß, Jürgen (ed.), *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, 4 vols., Stuttgart/ Weimar, Verlag J. B. Metzler, 1995.
- Neurath 1932: Neurath, Otto Karl Wilhelm: "Protokollsätze", *Erkenntnis* 3, 1932, pp. 204-214.
- Öffenberger 1990: Öffenberger, Niels: *Zur Vorgeschichte der mehrwertigen Logik in der Antike*, Hildesheim/Zürich/New York, Georg Olms Verlag, 1990, pp. x+173.
- Peano 1889: Peano, Giuseppe, *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Torino, Bocca, 1889, pp. xvi+20.
- Peano 1891: Peano, Giuseppe, "Sul concetto di numero", *Rivista di matematica* I, 1891, pp. 87-102 y pp. 256-267.
- Prawitz 1980: Prawitz, Dag, "*Intuitionistic Logic: A Philosophical Challenge*", en von Wright 1980, pp. 1-10.
- Raggio 2002: Raggio, Andrés R., *Escritos completos* (1927-1991), Buenos Aires, Eudeba, 2002. Editores: Alberto Moreno y Mercedes Doffi.
- Read 1995: Read, Stephen: *Thinking about Logic. An Introduction to the Philosophy of Logic*, Oxford/New York, Oxford University Press, 1995.
- Roetti, 1982: Roetti, Jorge Alfredo, "La verdad matemática: tres talantes matemáticos", *Actas de las Sextas Jornadas Nacionales de Filosofía*, Córdoba, Universidad Nacional de Córdoba, 1982, pp. 879-890.
- Roetti 1994: Roetti, Jorge Alfredo, "Lukasiewicz y el principio de no-contradicción: un estudio crítico", *Cuadernos del Sur* (*sección Filosofía*) 26, 1994-1995, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, pp. 17-34.
- Roetti 1997a: Roetti, Jorge Alfredo, "Der Satz vom Widerspruch: dialogische und pragmatische Begründung" (versión definitiva 1996 en *Zur modernen Deutung der Aristotelischen Logik*, vol. 7, pp. 49-81 (*Südamerikanische Beiträge über die moderne Deutung der Aristotelischen Logik*), ed. Niels Öffenberger, Hildesheim, Verlag Georg Olms, 1997.
- Roetti 1997b: Roetti, Jorge Alfredo, "Lukasiewicz und der Satz vom Widerspruch: einige Kommentare und kritische Bemerkungen", en *Zur modernen Deutung der Aristotelischen Logik*, Bd. 7, 261-287 (*Südamerikanische Beiträge über die*

moderne Deutung der Aristotelischen Logik), ed. Niels Öffenberger, Hildesheim, Verlag Georg Olms, 1997.
- Roetti 1999a: Roetti, Jorge Alfredo, "Aristoteles ab aliquo naevo vindicatus: de logica qua transcendentali pragmática", *Discurso y Realidad*, vol. I, n. 1-2, 2ª época (abril-octubre 1999), pp. 67-92, Universidad Nacional de Tucumán, 1999.
- Roetti 1999b: Roetti, Jorge Alfredo, "Aristóteles y el principio de (no) contradicción: fundamentación teórica y práctica", *Acción, razón y verdad. Estudios sobre la filosofía práctica de Aristóteles*, volumen especial de *Anuario Filosófico* XXXII/1, 1999, pp. 157-190, Pamplona, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Navarra, editado por Alejandro Vigo.
- Roetti 2000a: Roetti, Jorge Alfredo, "Defensa de un racionalismo prudente", *Filosofía, Educación y Cultura* 5, 2000, pp. 9-28, Santiago de Chile, Universidad de Santiago de Chile, 2001.
- Roetti 2000b: Roetti, Jorge Alfredo, "Der praktische Satz vom Widerspruch. Eine Rechtfertigung der Aristotelischen Hauptintuitionen", *Zur modernen Deutung der Aristotelischen Logik*, vol. viii, *Beiträge zum Satz vom Widerspruch und zur Aristotelischen Prädikationstheorie*, ed. por Niels Öffenberger y Mirko Skarica, Hildesheim, Georg Olms Verlag, 2000, pp. 50-70.
- Roetti, 2001: Roetti, Jorge Alfredo, "Verteidigung eines besonnenen Rationalismus", *Existentia - Meléthai Sophias* 11, Fasc. 1-2, 2001, Budapest, pp. 191-204.
- Roetti 2004: Roetti, Jorge Alfredo, "Logik, Vernunft und klassische „Prinzipien": ein Abriss", en Dürr, Renate, Maring, Matthias, Gebauer, Gunter y Schütt, Hans-Peter (eds.), *Pragmatisches Philosophieren. Festschrift für Hans Lenk*, Philosophie – Forschung und Wissenschaft, Band 20, Münster, Lit Verlag, 2005, pp. 113-129.
- Roetti 2005: Roetti, Jorge Alfredo, "Some topics on insufficient reason", *Existentia – Melétai Sophías*, vol. 15, fasc. 3-4, 2005, pp. 295-314, Szeged/Budapest/Münster/Frankfurt am Main.
- Roetti 2006: Roetti, Jorge Alfredo, "La existencia matemática. Un diálogo", *EPIMELEIA – Revista de estudios sobre la tradición* 29-30, 2006, Año XV, Buenos Aires, pp. 69-98. Impreso en 2008.

- Roetti 2007: Roetti, Jorge Alfredo, "Interpretación y diálogo", *Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires*, t. 39, 2007, pp. 505-529. Impreso en 2008.
- Roetti 2009: Roetti, Jorge Alfredo, "Gentzen y la consistencia de la aritmética", *Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires*, t. 43, 2009, pp. 645-659. Impreso en 2010.
- Roetti 2011: Roetti, Jorge Alfredo, "Acerca del fundamento", *Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires*, t. 45, 2011, vol. 1, pág. 39-69 (Clase inaugural de incorporación como académico correspondiente de la Academia, 07.04.2011, precedida del discurso de recepción del académico titular Dr. Ricardo Maliandi, pp. 33-37).
- Roetti, 2012: Roetti, Jorge Alfredo, *Curso de lógica clásica* (*desde un punto de vista no clásico*), con la colaboración de Osorio, Néstor. 1ª ed., Mar del Plata, Centro de Estudios Filosóficos y Sociales, 18.07.2012, 328 pp.
- Roetti, 2014: Roetti, Jorge Alfredo, *Cuestiones de fundamento*, Buenos Aires, Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires, 2014, 302 pp.
- Schiller, s. d.: von Schiller, Johann Christoph Friedrich, *Sämtliche Werke*, Sanssouci-Ausgabe, en ocho volúmenes, Potsdam und Berlin, Müller & Kiepenheuer – Verlag, s. d.
- Schuster 2001: Schuster, Peter M., "Too Simple Solutions of Hard Problems", *Nordic Journal of Philosophical Logic* VI, 2, 2001, 138-46.
- Smullyan 1968: Smullyan, Raymond M.: *First-Order Logic*, Berlin, Springer-Verlag, 1968.
- Stegmüller-Varga von Kibed 1984: Stegmüller, Wolfgang y Varga von Kibed, Matthias, *Strukturtypen der Logik*, Berlin, Springer-Verlag, 1984.
- Suppes 1960: Suppes, Patrick, *Axiomatic Set Theory*, New York, Van Nostrand, [5]1960.
- Tennant 1994: Tennant, Neil, "Intuitionistic Mathematics Does Not Need Ex Falso Quodlibet", *Topoi* 1994, pp. 127-33.
- Tennant 1997: Tennant, Neil, *The Taming Of The True*, Oxford, Clarendon Press, 1997.
- Tietze 1965: Tietze, Heinrich, *Famous Problems of Mathematics*, New York, Graylock Press, 1965.

- Toulmin 1964: Toulmin, Stephen Edelston, *The Uses of Arguments*, Cambridge, Cambridge University Press, 1964 (primera edición en rústica).
- Troelstra y van Dalen 1989: Troelstra, Anne Sjerp y van Dalen, Dirk, *Constructivism. An introduction*, vol. 1. Amsterdam, North Holland, 1989.
- Van Dalen 1986: Van Dalen, Dirk: "Intuitionistic Logic", en Gabbay-Guenthner 1986, pp. 225-339.
- von Wright 1980: von Wright, Georg Henrik (ed.), *Logic and Philosophy - Logique et Philosophie*, The Hague/Boston/London, M. Nijhoff, 1980.