



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Tesis de Doctor en Matemática

**Una Transformada Rápida para el Grafo de
Johnson**

Mauro Natale

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2022

A mi familia y amigos

Prefacio

Esta tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires durante el período comprendido entre el 28 de mayo de 2013 y el 17 de agosto de 2022, bajo la dirección del Dr. Rodrigo Iglesias.

Mauro Natale



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el .../.../....., mereciendo la calificación de(.....)

Agradecimientos

A *mi compañera de vida Mariela* por apoyar todos mis proyectos y sueños, acompañarme en cada paso, compartir pasiones y darle alegría a cada día.

Al *Dr. Rodrigo Iglesias* por dirigir esta tesis, por su constante predisposición, dedicación y compromiso en mi formación académica. Por compartir desinteresadamente su conocimiento e ideas, por abrirme las puertas de su casa, por la confianza y por todo el tiempo compartido.

A *mi familia* por acompañarme en cada momento de mi vida, por sus consejos, amor y cariño.

A *mis amigos y compañeros de trabajo*, por cada momento que compartimos en el aula, por cada problema que pensamos en la oficina, por cada charla y mate compartido.

A la *Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires* y a la *Universidad Nacional del Sur* por darme la posibilidad de formarme como profesional.

Resumen

El conjunto $X^{(n,k)}$ formado por los k -conjuntos de \mathbb{I}_n tiene una estructura natural de grafo donde dos k -conjuntos están conectados si y sólo si el cardinal de la intersección es $k - 1$. Este es conocido como el grafo de Johnson. El grupo simétrico \mathbb{S}_n actúa en el espacio de funciones complejas en $X^{(n,k)}$ y este espacio tiene una descomposición libre de multiplicidad como suma de representaciones irreducibles de \mathbb{S}_n , por lo tanto este tiene una base de Gelfand-Tsetlin bien definida. Definimos la transformada de Fourier en el grafo de Johnson como la transformación que asigna a las coordenadas de una función en la base delta, las coordenadas de la misma en la base de Gelfand-Tsetlin.

La aplicación directa de la matriz cambio de base a un vector genérico requiere $\binom{n}{k}^2$ operaciones aritméticas. Nosotros demostramos que, en analogía con la Transformada de Fourier Discreta Clásica, esta matriz puede ser factorizada como producto de $n - 1$ matrices, cada una con a lo sumo dos elementos no nulos en cada columna. La factorización se basa en la construcción de $n - 1$ bases intermedias, las cuales están parametrizadas via el algoritmo de inserción de Robinson-Schensted. Esta factorización nos permite demostrar que el número de operaciones aritméticas requeridas para aplicar la matriz cambio de base a un vector genérico está acotado superiormente por $2(n - 1)\binom{n}{k}$.

Presentamos un algoritmo para construir todos estos factores utilizando a lo sumo $289(n - 1)\binom{n}{k}$ operaciones aritméticas. Los coeficientes de estas matrices son números racionales y la construcción no depende de métodos numéricos. Los obtenemos resolviendo pequeños sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes enteros derivados de los operadores de Jucys-Murphy. En particular, evitamos el uso de raíces cuadradas.

Como consecuencia de estos resultados, demostramos que el problema de computar todos los pesos de las componentes isotópicas de una función dada se puede resolver en $O(n\binom{n}{k})$ operaciones aritméticas, mejorando la cota previa $O(k^2\binom{n}{k})$ cuando

k domina asintóticamente a \sqrt{n} . La misma mejora se logra para el problema de computar la proyección isotópica en una única componente isotópica.

Abstract

The set X of k -subsets of an n -set has a natural graph structure where two k -subsets are neighbors if and only if the size of their intersection is $k - 1$. This is known as the Johnson graph. The symmetric group \mathbb{S}_n acts on the space of complex functions on X and this space has a multiplicity-free decomposition as sum of irreducible representations of \mathbb{S}_n , so it has a well-defined Gelfand-Tsetlin basis up to scalars. The Fourier transform on the Johnson graph is defined as the change of basis matrix from the delta function basis to the Gelfand-Tsetlin basis.

The direct application of this matrix to a generic vector requires $\binom{n}{k}^2$ arithmetic operations. We show that, in analogy with the classical Fast Fourier Transform on the discrete circle, this matrix can be factorized as a product of $n-1$ orthogonal matrices, each one with at most two nonzero elements in each column. The factorization is based on the construction of $n-1$ intermediate bases which are parametrized via the Robinson-Schensted insertion algorithm. This factorization shows that the number of arithmetic operations required to apply this matrix to a generic vector is bounded above by $2(n-1)\binom{n}{k}$.

We give an algorithm that constructs all these factors using at most $289(n-1)\binom{n}{k}$ arithmetic operations. The coefficients of these matrices are rational numbers and the construction does not depend on numerical methods. Instead, they are obtained by solving small linear systems with integer coefficients derived from the Jucys-Murphy operators. In particular we avoid the use of square roots.

As a consequence, we show that the problem of computing all the weights of the isotypic components of a given function can be solved in $O(n\binom{n}{k})$ operations, improving the previous bound $O(k^2\binom{n}{k})$ when k asymptotically dominates \sqrt{n} . The same improvement is achieved for the problem of computing the isotypic projection onto a single component.

Certifico que fueron incluidos los cambios y correcciones sugeridas por los jurados.

Firma del Director

Índice general

Prefacio	I
Agradecimientos	III
Resumen	IV
Abstarct	VI
Introducción	1
1. Preliminares	9
1.1. Representaciones de Grupos	9
1.1.1. G-módulos	11
1.1.2. Álgebra de grupo	12
1.1.3. Teorema de Maschke	14
1.1.4. Representación restringida y representación inducida	15
1.2. Representaciones del grupo simétrico	18
1.2.1. Grupo simétrico	18
1.2.2. Módulos de Specht	19
1.2.3. Regla de Ramificación	25
1.3. La correspondencia de Robinson-Schensted	29
1.3.1. Inserción y colocación	29
1.3.2. El algoritmo de Robinson-Schensted	31

1.4.	Descomposición Isotípica	34
1.5.	Transformada de Fourier	39
1.5.1.	Transformada de Fourier Clásica en \mathbb{Z}_N	39
1.5.2.	Transformada de Fourier Rápida para \mathbb{Z}_N	40
1.5.3.	Transformada de Fourier Generalizada	44
1.6.	El Grafo de Johnson	48
1.6.1.	Pares de Gelfand	50
1.6.2.	Par de Gelfand $(\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_{n-k} \times \mathbb{S}_k)$	54
2.	Una Transformada de Fourier Rápida para $J(n, k)$	59
2.1.	Bases de Gelfand-Tsetlin	59
2.1.1.	Bases de Gelfand-Tsetlin para representaciones del grupo \mathbb{S}_n	59
2.1.2.	Base de Gelfand-Tsetlin del espacio de funciones sobre el grafo de Johnson	63
2.2.	Transformada de Fourier para el grafo de Johnson	65
2.2.1.	Descomposiciones adaptadas de \mathcal{F}	66
2.2.2.	Matrices diagonal por bloques	69
2.2.3.	Bases Intermedias	70
2.2.4.	Ralitud de las matrices cambio de base	73
2.2.5.	Conexión con el algoritmo de Robinson-Schensted	74
2.2.6.	Ejemplo	76
2.3.	Elementos de Young-Jucys-Murphy	77
2.4.	Construcción eficiente de las matrices cambio de base	84
2.4.1.	Primer paso: construcción de $[J_{i+1}]_{B_i}$ a partir de $[B_i]_{B_{i-1}}$ y $[B_{i-1}]_{B_i}$	84
2.4.2.	Segundo paso: construcción de $[B_{i+1}]_{B_i}$ a partir de $[J_{i+1}]_{B_i}$	88
2.4.3.	Tercer paso: construcción de D_{i+1} y $[B_i]_{B_{i+1}}$ a partir de $[B_{i+1}]_{B_i}$ y D_i	89
2.4.4.	Compilando todos los pasos	91

2.5. Resultados Principales	91
2.6. Ejemplo	94
2.6.1. Cómputo de $[B_1]_{B_2}$ y $[B_2]_{B_1}$	94
2.6.2. Cómputo $[B_2]_{B_3}$ y $[B_3]_{B_2}$	97
2.6.3. Cómputo de $[B_3]_{B_4}$ y $[B_4]_{B_3}$	100
2.6.4. Cómputo de la Transformada de Fourier y la Transformada Inversa	102
2.7. Aplicación al cómputo de las proyecciones isotópicas	104
3. Trabajo a futuro	106

Introducción

El conjunto de todos los k -conjuntos (subconjuntos de cardinal k) de un conjunto de cardinal n es un objeto combinatorial básico que tiene una estructura natural de espacio métrico, donde dos k -conjuntos están a distancia d si el cardinal de su intersección es $k - d$. Esta estructura es capturada por el grafo de Johnson $J(n, k)$, cuyos vértices son los k -conjuntos y dos k -conjuntos están conectados si sólo si ellos están a distancia 1.

El grafo de Johnson está estrechamente relacionado con el esquema de Johnson, un esquema de asociación de gran importancia en la teoría de codificación clásica (ver [10] para un estudio sobre la teoría de esquemas de asociación y su aplicación a la teoría de codificación). El grafo de Johnson ha jugado un papel fundamental en el algoritmo de tiempo cuasi-polinomial desarrollado para el problema del isomorfismo de grafos presentado en [2] (ver [38] para conocer los antecedentes del problema del isomorfismo de grafos).

Las funciones sobre el grafo de Johnson surgen en el análisis de clasificación de datos. En muchos contextos, agentes eligen un k -conjunto de un conjunto de cardinal n , y los datos se recopilan como una función que asigna al k -conjunto x el número de agentes que eligen x . Esta situación es considerada, por ejemplo, en el análisis estadístico de ciertas loterías (ver [12], [13]).

El espacio vectorial de funciones sobre el grafo de Johnson es una representación del grupo simétrico. Aunque en esta tesis no haremos uso explícito de la estructura de grafo del conjunto de k -conjuntos, nos basamos en una propiedad que es consecuencia de que el grafo de Johnson es un grafo distancia transitivo. Esta propiedad

establece que el espacio vectorial de funciones sobre el grafo de Johnson tiene una descomposición libre de multiplicidad como suma directa de representaciones irreducibles (ver [37]). La información estadísticamente relevante acerca de la función está contenida en la proyección isotópica de la función en cada componente irreducible. Este enfoque para el análisis de la clasificación de datos fue llamado análisis espectral por Diaconis y desarrollado en [11] y [12]. El problema del cómputo eficiente de las proyecciones isotópicas ha sido estudiado por Diaconis y Rockmore en [13], y por Maslen, Orrison y Rockmore en [24].

La Transformada de Fourier Discreta Clásica (DFT) en el grupo cíclico $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ puede ser interpretada como la aplicación de una matriz de cambio de base desde la base B_0 de funciones delta a la base B_n de caracteres del grupo $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$. La aplicación directa de esta matriz a un vector genérico requiere $(2^n)^2$ operaciones aritméticas. La Transformada de Fourier Rápida es un algoritmo fundamental que computa la DFT en $O(n2^n)$ operaciones. Este algoritmo fue descubierto por Cooley y Tukey en [9] y la eficiencia del mismo se debe a la siguiente factorización de la matriz de cambio de base

$$[B_0]_{B_n} = [B_{n-1}]_{B_n} \cdots [B_1]_{B_2} [B_0]_{B_1},$$

donde B_1, \dots, B_{n-1} son bases ortonormales intermedias tales que cada matriz $[B_{i-1}]_{B_i}$ tiene a lo sumo dos entradas no nulas en cada columna. Nosotros denotamos como $[B]_{B'}$ a la matriz de cambio de base desde la base B a la base B'

En [21] demostramos que el mismo fenómeno ocurre para el caso no abeliano de la Transformada de Fourier en el grafo de Johnson. Esta transformada es definida como la aplicación de la matriz de cambio de base desde la base B_0 de funciones delta a la base B_n de funciones de Gelfand-Tsetlin. La base de Gelfand-Tsetlin, definida en la Sección 2.1, se comporta bien con respecto a la acción del grupo simétrico \mathbb{S}_n , en el sentido que cada componente irreducible es generada por un subconjunto de la base.

El modelo computacional que usamos es contar como una operación aritmética

a una multiplicación seguida de una suma en el conjunto de números complejos. Es importante remarcar que sólo contamos estas operaciones algebraicas y no contamos las operaciones involucradas en el almacenamiento de las matrices. Por ejemplo, no contamos las operaciones necesarias para reordenar las filas y las columnas de una matriz.

El cómputo directo de esta transformada de Fourier requiere $\binom{n}{k}^2$ operaciones aritméticas. Nosotros construimos bases ortogonales intermedias B_1, \dots, B_{n-1} tales que cada matriz de cambio de base $[B_{i-1}]_{B_i}$ es una matriz rala, con a lo sumo dos entradas no nulas en cada columna. Cada base intermedia B_i está parametrizada por pares formados por una tabla de Young estándar con a lo sumo dos filas y una palabra en el alfabeto $\{1, 2\}$ como muestra la Figura 1. Las bases intermedias posibilitan el cómputo de esta transformada de Fourier, así como también su inversa, en a lo sumo $2(n-1)\binom{n}{k}$ operaciones aritméticas. La construcción de las matrices $[B_{i-1}]_{B_i}$ se basa en las ideas desarrolladas por Vershik-Okounkov en [40] sobre la teoría de representaciones del grupo simétrico, los cuales utilizan los operadores de Jucys-Murphy como una herramienta fundamental.

En [27] Maslen, Rockmore y Wolff definieron las bases de Gelfand-Tsetlin en el contexto de álgebras semisimples y desarrollaron transformadas de Fourier rápidas para álgebras BMW, Brauer y Temperley-Lieb. El espacio de funciones en el grafo de Johnson no es un álgebra semisimple, pero éste puede ser visto como un $\mathbb{C}[S_n]$ -módulo. Este trabajo es quizás un indicio de que el método en [27] puede extenderse a interesantes módulos sobre álgebras semisimples.

El algoritmo desarrollado para el cómputo de la transformada de Fourier rápida en el grafo de Johnson puede ser aplicado al problema bien conocido del cómputo de las componentes isotópicas de una función. El algoritmo más eficiente para el cómputo de todas las componentes isotópicas, desarrollado por Maslen, Orrison y Rockmore en [24], se basa en el método iterativo de Lanczos y su complejidad computacional es $O(k^2 \binom{n}{k})$. Si el problema fuera el cómputo de la proyección isotópica en una única componente, no es claro cómo reducir la cota superior del algoritmo

Base B_0	Base B_1	Base B_2	Base B_3	Base B_4
2211	$\boxed{1}$ 211	$\boxed{1 \ 2}$ 11	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ 1	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$
2121	$\boxed{1}$ 121	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$ 21	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$ 1	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$
1221	$\boxed{1}$ 221	$\boxed{1 \ 2}$ 21	$\boxed{1 \ 2 \ 3}$ 1	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$
2112	$\boxed{1}$ 112	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$ 12	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$ 2	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$
1212	$\boxed{1}$ 212	$\boxed{1 \ 2}$ 12	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ 2	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$
1122	$\boxed{1}$ 122	$\boxed{1 \ 2}$ 22	$\boxed{1 \ 2 \ 3}$ 2	$\boxed{1 \ 2 \ 3 \ 4}$

Figura 1: Etiquetas de las bases intermedias en el caso $n = 4, k = 2$. La i -ésima columna parametriza la base B_i .

presentado en [24].

Demostramos que, una vez que las matrices intermedias $[B_{i-1}]_{B_i}$ han sido computadas para un par fijo (n, k) , la proyección sobre una única componente isotópica puede ser realizada en $O(n \binom{n}{k})$ operaciones, de manera que nuestra cota superior es una mejora cuando k domina asintóticamente a \sqrt{n} . Es importante remarcar que nuestro algoritmo no depende de métodos numéricos. La construcción de las matrices intermedias que permiten el cómputo eficiente de la transformada de Fourier se basa en la realización de operaciones aritméticas exactas dadas por los operadores de Jucys-Murphy.

Si f_π es la proyección de f sobre la componente isotópica correspondiente a la representación irreducible π , el peso de π en f se define como $\|f_\pi\|^2$. En esta

tesis demostramos que se logra la misma cota superior $O(n\binom{n}{k})$ para el problema del cómputo de todos los pesos de las componentes isotópicas que aparecen en la descomposición de una función. Este problema también podría resolverse calculando todas las componentes isotópicas y computando cada una de sus longitudes, pero este método requiere $O(k^2\binom{n}{k})$ si utilizamos el algoritmo en [24].

Esta tesis está organizada en tres capítulos. En el Capítulo 1 presentamos los conceptos y resultados que son la base para el desarrollo de la tesis.

En la Sección 1.1 presentamos las definiciones y resultados clásicos de la teoría de representaciones de grupos finitos. Más precisamente definimos los conceptos de representación lineal de un grupo sobre un cuerpo y de G -módulos, y mostramos la identificación natural que existe entre ellos; definimos el concepto de representación irreducible; enunciamos el Teorema de Maschke; definimos los conceptos de representación restringida y representación inducida.

En la Sección 1.2 presentamos la teoría de representaciones del grupo simétrico y describimos las representaciones irreducibles de este grupo en términos de los módulos de Specht. Más precisamente definimos los conceptos de partición, diagrama de Young, tabla de Young estándar, λ -tabloide, politabloide y módulo de Specht; presentamos el resultado que caracteriza a todas las representaciones irreducibles del grupo simétrico como el conjunto de módulos de Specht; presentamos los resultados que permiten determinar una base para los módulos de Specht, así como también determinar su dimensión; y finalmente presentamos la Regla de Ramificación, que permite caracterizar al módulo que se obtiene cuando se restringe un módulo de Specht de \mathbb{S}_n a \mathbb{S}_{n-1} o se induce de \mathbb{S}_n a \mathbb{S}_{n+1} .

En la Sección 1.3 presentamos un algoritmo que permite establecer una correspondencia biyectiva entre los elementos del grupo simétrico \mathbb{S}_n y el conjunto de pares de tablas de Young estándar con la misma forma y con n casillas. Este algoritmo es conocido como Algoritmo de Robinson-Schensted, y puede extenderse para establecer una correspondencia biyectiva entre el conjunto de palabras de longitud m en el alfabeto \mathbb{I}_n y el conjunto de pares de tablas de Young semiestándar con

la misma forma y con m casillas. Esta última correspondencia resulta clave para nuestro trabajo.

En la Sección 1.4 presentamos una descomposición del espacio $L(X)$ de funciones definidas en X , siendo X un conjunto para el cual existe una acción transitiva del grupo G , que se conoce como Descomposición Isotípica. Cada subespacio de esta descomposición se denomina componente isotípica. Un problema que ha sido el motor de muchas investigaciones se puede describir como: dada una función de $L(X)$ construir un algoritmo que permita computar las proyecciones sobre cada componente isotípica. En esta sección presentamos los principales algoritmos desarrollados para resolver este problema y mostramos su complejidad computacional.

En la Sección 1.5 definimos la Transformada de Fourier Discreta clásica y presentamos un algoritmo para el caso en el que N sea una potencia de 2, utilizando el método de bases intermedias que luego generalizaremos para el caso de la Transformada de Fourier para el Grafo de Johnson. Este algoritmo se basa en la realización de sucesivas proyecciones a los autoespacios de ciertos operadores, que nos permitirán definir bases intermedias del espacio de funciones y descomponer la Transformada de Fourier Discreta como producto de matrices cambio de base ralas. En esta sección también definimos la Transformada de Fourier Discreta generalizada para cualquier grupo y presentamos la complejidad computacional de las principales transformadas desarrolladas.

En la Sección 1.6 definimos el grafo de Johnson, presentamos sus principales características y mostramos que el espacio de funciones definidas sobre los vértices del grafo es una representación del grupo simétrico que tiene una descomposición libre de multiplicidad. También caracterizamos las representaciones irreducibles que aparecen en esta descomposición. Estos resultados son clave para la definición de la Transformada de Fourier para el grafo de Johnson.

En el Capítulo 2 presentamos los resultados principales de esta tesis, que fueron publicados en [21].

En la Sección 2.1 definimos la base de Gelfand-Tsetlin para representaciones

del grupo simétrico y mostramos que existe una correspondencia biyectiva entre los elementos de esta base y un subconjunto de tablas de Young estándar. También caracterizamos la base de Gelfand-Tsetlin para el espacio de funciones sobre el grafo de Johnson.

En la Sección 2.2 definimos la Transformada de Fourier para el grafo de Johnson como la transformación que cambia las coordenadas de una función sobre los vértices del grafo, de la base delta a la base de Gelfand-Tsetlin. También definimos otras bases intermedias de este espacio de funciones, que están adaptadas a ciertas descomposiciones del espacio en subespacios ortogonales y que nos permiten probar la existencia de una Transformada de Fourier Rápida para el grafo de Johnson, que puede ser computada en $2(n-1)\binom{n}{k}$ operaciones aritméticas. Y por último mostramos la conexión que existe entre las bases intermedias y el algoritmo de Robinson-Schensted.

En la Sección 2.3 presentamos los operadores de Young-Jucys-Murphy y probamos que los elementos de la base de Gelfand-Tsetlin son autovectores simultáneos de todos estos operadores. También mostramos que los autovalores asociados pueden ser calculados desde la tabla de Young estándar que parametriza al elemento de la base de Gelfand-Tsetlin.

En la Sección 2.4 realizamos la construcción eficiente de las matrices cambio de base intermedias, que intervienen en la Transformada Rápida de Fourier en el grafo de Johnson basándonos en las propiedades de los operadores Jucys-Murphy. Realizamos la construcción en tres pasos: en el primero construimos la matriz $[J_{i+1}]_{B_i}$ a partir de $[B_i]_{B_{i-1}}$ en a lo sumo $272\binom{n}{k}$ operaciones aritméticas; en el segundo paso utilizamos $[J_{i+1}]_{B_i}$ para construir $[B_{i+1}]_{B_i}$ en a lo sumo $4\binom{n}{k}$ operaciones aritméticas; y en el tercer paso construimos D_{i+1} y $[B_i]_{B_{i+1}}$ utilizando las matrices $[B_{i+1}]_{B_i}$ y D_i , en a lo sumo $13\binom{n}{k}$ operaciones aritméticas.

En la Sección 2.5 presentamos nuestros principales resultados. Probamos que el conjunto de factores de la Transformada de Fourier en el grafo de Johnson y el conjunto de factores de la transformada inversa pueden ser computados en a lo

sumo $289(n-1)\binom{n}{k}$ operaciones aritméticas. También damos una cota superior para la cantidad de operaciones necesarias para aplicar estas transformadas a un vector dado.

En la Sección 2.6 ilustramos el algoritmo presentado para el caso $n = 4$ y $k = 2$.

En la Sección 2.7 presentamos un algoritmo para computar las proyecciones isotípicas para el caso del espacio de funciones sobre los vértices del grafo de Johnson, que presenta mejoras respecto de los algoritmos que se conocen.

En el Capítulo 3 realizamos una breve descripción de posibles líneas de investigación que continúen el trabajo realizado en esta tesis.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Representaciones de Grupos

En esta sección presentaremos los conceptos y propiedades principales de la teoría de representaciones de grupos finitos sobre un cuerpo \mathbb{k} .

Definición 1.1.1. Sea G un grupo, \mathbb{k} un cuerpo y V un espacio vectorial de dimensión finita mayor o igual que 1 sobre \mathbb{k} . Una **representación lineal** de G sobre \mathbb{k} es un morfismo de grupos $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(V)$; V se denomina el **espacio de representación** de ρ y su dimensión se llama **grado de la representación**, que notaremos con $gr(\rho)$.

Fijada una base de V , cada endomorfismo de V se asocia, en forma unívoca, con una matriz. De este modo, una representación de un grupo G podrá definirse como un morfismo de grupo $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{k})$,

$$[\rho(\sigma)]_B = [\rho_{ij}(\sigma)]_{1 \leq i, j \leq n},$$

siendo $GL(n, \mathbb{k})$ el conjunto de matrices inversibles de orden n , con valores en el cuerpo \mathbb{k} . Es decir, asociada con ρ , respecto de la base B , tenemos n^2 funciones:

$$\rho_{ij} : G \rightarrow \mathbb{k} \text{ para } 1 \leq i, j \leq n,$$

denominadas **coeficientes matriciales**.

Dos representaciones ρ y μ de G sobre los espacios V y W respectivamente se dicen **representaciones equivalentes** si existe un isomorfismo $\varphi : V \rightarrow W$ tal que el siguiente diagrama conmute para todo $g \in G$:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \rho(g) \downarrow & & \downarrow \mu(g) \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array},$$

es decir,

$$\varphi \rho(g) = \mu(g) \varphi \quad \forall g \in G.$$

Definición 1.1.2. Sea ρ una representación de G sobre el espacio vectorial V . Un subespacio S de V se dirá $\rho(G)$ -**invariante** si $\rho(g)(S) \subseteq S, \forall g \in G$. Si V no admite subespacios propios $\rho(G)$ -invariantes, entonces ρ se denominará **representación irreducible** de G .

Dada una representación ρ de un grupo G y S es un subespacio $\rho(G)$ -invariante, la restricción de $\rho(g)$ al subespacio S da lugar al morfismo de grupos

$$\tilde{\rho} : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(S).$$

Las representaciones de G obtenidas al restringir una representación ρ a subespacios $\rho(G)$ -invariantes se denominan **subrepresentaciones de ρ** . Es claro que encontrar subrepresentaciones de una representación ρ , es lo mismo que encontrar subespacios $\rho(G)$ -invariantes.

Una acción de un grupo G en un conjunto X da lugar a representaciones del grupo G . En efecto, consideremos V el espacio vectorial $\mathbb{k}^X = \{\psi : X \rightarrow \mathbb{k}\}$ con las operaciones usuales, y definimos la representación $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V = \mathbb{k}^X)$ inducida por la acción \star del grupo G en el conjunto X como sigue

$$\rho(g)(\psi)(x) = \psi(g^{-1} \star x) \quad \text{siendo } g \in G, \psi \in V = \mathbb{k}^X, x \in X.$$

Un caso especial de representación inducida por una acción es la llamada representación regular. Asociada con un grupo G podemos considerar la acción de G sobre sí mismo dada por

$$\sigma \star \tau = \sigma\tau \quad (\sigma, \tau \in G).$$

Es decir, G actúa sobre sí mismo por traslación a izquierda.

Definición 1.1.3. La representación permutacional inducida por la traslación a izquierda del grupo G se denomina **representación regular de G** y será notada con ρ .

Observemos que el grado de la representación regular coincide con el orden del grupo G .

1.1.1. G -módulos

Existe una identificación natural entre las representaciones de un grupo G y los G -módulos. A continuación definimos esta estructura y presentamos la correspondencia. Luego de esta sección trabajaremos con módulos o representaciones en forma indistinta.

Definición 1.1.4. Sea G un grupo y V un \mathbb{k} -espacio vectorial. Supongamos que existe una aplicación

$$* : G \times V \rightarrow V$$

que cumple $\forall u, v \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{k}$ y $\forall g, h \in G$:

1. $(gh) * v = g * (h * v)$,
2. $1 * v = v$,
3. $g * (\lambda v) = \lambda (g * v)$,
4. $g * (u + v) = g * u + g * v$.

Entonces la estructura $(V, *)$ se denomina **G -módulo**. Los subespacios W de V , cerrados para $*$ se denominan **G -submódulos**.

Existe una estrecha relación entre los G -módulos y las representaciones de G . Sea $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(V)$ una representación de G sobre \mathbb{k} , consideremos la aplicación

$$* : G \times V \rightarrow V \quad / \quad g * v = \rho(g)(v).$$

Entonces $V = \mathbb{k}^n$ es un G -módulo. Ahora bien, si V es un G -módulo, definimos una representación de G como

$$\rho : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(V) \quad / \quad \rho(g)(v) = g * v.$$

Definición 1.1.5. Un G -módulo V no nulo se denomina **simple o irreducible** si no tiene submódulos propios, es decir, los únicos submódulos de V son $\{0\}$ y V .

La definición precedente es compatible con la definición de representación irreducible.

Definición 1.1.6. Sean V, W dos G -módulos. Una aplicación $\theta : V \rightarrow W$ se denomina **G -homomorfismo ó morfismo de representaciones**, si

1. θ es una transformación lineal.
2. $\theta(g * v) = g * \theta(v), \forall g \in G, \forall v \in V$.

En el caso en que θ sea un G -homomorfismo biyectivo, diremos que θ es un **G -isomorfismo**. Notaremos $\text{Hom}_G(V, W)$ al subespacio de $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$ de los G -homomorfismos.

1.1.2. Álgebra de grupo

El álgebra de grupo de un grupo finito G es un espacio vectorial cuya dimensión coincide con el orden del grupo, y el cual posee una estructura adicional de álgebra.

El álgebra de grupo es la fuente de información necesaria para determinar todas las representaciones de un grupo finito.

Sea $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ un grupo finito y \mathbb{k} un cuerpo. Denotamos con $\mathbb{k}[G]$ al espacio vectorial sobre \mathbb{k} , con base formal $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, es decir

$$\mathbb{k}[G] = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i : \lambda_i \in \mathbb{k} \text{ y } g_i \in G \right\}.$$

Definición 1.1.7. En $\mathbb{k}[G]$ definimos la operación

$$u \cdot v = \sum_{j,i=1}^n \lambda_i \mu_i (g_i g_j) \text{ para } u = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i \text{ y } v = \sum_{i=1}^n \mu_i g_i.$$

La estructura $(\mathbb{k}[G], +, \cdot)$ es un álgebra asociativa unitaria denominada **álgebra de grupo** de G sobre \mathbb{k} .

Utilizamos el álgebra de grupo para definir un destacado G -módulo, y su correspondiente representación asociada.

Definición 1.1.8. Consideremos el álgebra de grupo $\mathbb{k}[G]$ como espacio vectorial, y la aplicación

$$* : G \times \mathbb{k}[G] \rightarrow \mathbb{k}[G] \quad / \quad g * \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (g g_i).$$

Entonces $V = \mathbb{k}[G]$ es un G -módulo, denominado **módulo regular**.

Es sencillo de comprobar que la representación asociada al módulo regular $\mathbb{k}[G]$ es equivalente a la representación regular.

Existe una identificación natural entre los G -módulo y los $\mathbb{k}[G]$ -módulo. Por un lado, dado $(V, *)$ un G -módulo, podemos definir la aplicación

$$\circ : \mathbb{k}[G] \times V \rightarrow V \quad / \quad \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \circ v = \sum_{g \in G} \lambda_g (g * v).$$

De esta forma (V, \circ) es un $\mathbb{k}[G]$ -módulo.

Por otro lado, si (V, \circ) es un $\mathbb{k}[G]$ -módulo, podemos definir la aplicación

$$* : G \times V \rightarrow V / g * v = g \circ v.$$

De esta forma $(V, *)$ es un G -módulo.

En adelante enunciaremos y trabajaremos con propiedades para $\mathbb{k}[G]$ -módulos

1.1.3. Teorema de Maschke

En esta subsección presentaremos un resultado importante en la teoría de representaciones, denominado Teorema de Maschke. Como consecuencia de este resultado la teoría de representaciones se reduce al estudio de las representaciones irreducibles.

Teorema 1.1.9 (Teorema de Maschke). *Sea G un grupo finito, \mathbb{k} un cuerpo de característica cero y V un $\mathbb{k}[G]$ -módulo. Si U es un $\mathbb{k}[G]$ -submódulo de V , entonces existe un $\mathbb{k}[G]$ -submódulo W de V tal que $V = U \oplus W$.*

Definición 1.1.10. Un $\mathbb{k}[G]$ -módulo V no nulo se denomina **completamente reducible** si existen $\mathbb{k}[G]$ -submódulos simples de V , U_1, \dots, U_r , tales que

$$V = \bigoplus_{i=1}^r m_i U_i.$$

Esta descomposición se denomina **libre de multiplicidad** si cada $\mathbb{k}[G]$ -submódulo simple que aparece en la descomposición lo hace sólo una vez.

Como consecuencia del Teorema de Maschke se demuestra que todo $\mathbb{k}[G]$ -módulo no nulo es una suma directa de $\mathbb{k}[G]$ -submódulos simples. Lo formalizamos en el siguiente lema:

Lema 1.1.11. *Sea G un grupo finito y \mathbb{k} un cuerpo de característica cero. Entonces todo $\mathbb{k}[G]$ -módulo V no nulo es completamente reducible.*

Consideremos ahora el álgebra de grupo $\mathbb{k}[G]$ del grupo finito G sobre el cuerpo \mathbb{k} . Por el Lema 1.1.11 sabemos que existen $\mathbb{k}[G]$ -submódulos simples U_1, \dots, U_r tales que

$$\mathbb{k}[G] = \bigoplus_{i=1}^r m_i U_i.$$

Teorema 1.1.12. *Sea G un grupo finito y \mathbb{k} un cuerpo de característica cero. Entonces:*

1. *Todo $\mathbb{k}[G]$ -módulo simple es isomorfo a algún $\mathbb{k}[G]$ -submódulo U_i .*
2. *$m_i = \dim(U_i)$.*
3. *r es igual al número de clases de conjugación de G .*

El teorema precedente tiene dos importantes consecuencias: la primera consecuencia es que en todo grupo finito G la cantidad de $\mathbb{k}[G]$ -módulos simples no isomorfos dos a dos es conocida y está determinada por la cantidad de clases de conjugación del grupo; la segunda consecuencia es que para determinar todos los $\mathbb{k}[G]$ -módulos simples es suficiente descomponer al $\mathbb{k}[G]$ -módulo regular como suma directa de submódulos simples. Sin embargo, si el orden de G no es pequeño, esta no es una técnica eficiente.

1.1.4. Representación restringida y representación inducida

En esta subsección presentaremos dos formas de relacionar representaciones de un grupo y representaciones de un subgrupo.

Definición 1.1.13. Sea H un subgrupo de un grupo finito G , y V un $\mathbb{k}[G]$ -módulo. Debido a que $\mathbb{k}[H]$ es un subconjunto de $\mathbb{k}[G]$, V es también un $\mathbb{k}[H]$ -módulo denominado **restricción** de V a H . Lo notaremos $\text{Res}_H^G V$.

Hagamos algunas observaciones sobre el módulo restricción. Sea V un $\mathbb{k}[G]$ -módulo, y H un subgrupo de G , entonces

- $\dim(V) = \dim \operatorname{Res}_H^G V$.
- Si $\operatorname{Res}_H^G V$ es un $\mathbb{k}[H]$ -módulo irreducible, entonces V es $\mathbb{k}[G]$ -módulo irreducible.
- Si V es $\mathbb{k}[G]$ -módulo irreducible, podría suceder que la restricción $\operatorname{Res}_H^G V$ no sea un $\mathbb{k}[H]$ -módulo irreducible.

Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G . Supongamos ρ una representación de G con espacio de representación V , y W un subespacio vectorial de V invariante bajo la acción de H . Para todo $g \in G$, no es difícil de observar que el subespacio gW depende únicamente de la coclase a izquierda gH de g módulo H . Para cada coclase $\sigma \in G/H = \{gH : g \in G\}$ escribimos σW para denotar este subconjunto.

Definición 1.1.14. Sea ρ una representación de G con espacio de representación V , y W un subespacio vectorial de V invariante bajo la acción de H . Diremos que el $\mathbb{k}[G]$ -módulo V es **inducido** por el submódulo W si

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma W$$

y lo notaremos $V = \operatorname{Ind}_H^G W$.

Ejemplo 1.1.15. La representación regular (ϱ, W) de H induce la representación regular (ϱ, V) de G . La base de V está dada por $B_G = \{e_g : g \in G\}$, mientras que la base de W está dada por $B_H = \{e_h : h \in H\}$. Resulta evidente que W es un H -submódulo de V , por lo que sólo falta verificar la igualdad

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma W.$$

Por ser V y W espacios de representación de la representación regular de G y H

respectivamente, tenemos que

$$V = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{C} \cdot e_g \quad y \quad W = \bigoplus_{h \in H} \mathbb{C} \cdot e_h. \quad (1.1)$$

Tomemos un representante g_σ de la coclase $\sigma \in G/H$, entonces $g_\sigma \cdot e_h = e_{g_\sigma \cdot h}$ para todo $h \in H$. Por lo tanto, la acción de g_σ transforma la base B_H en $B_{g_\sigma H}$. Es claro que la base no depende del representante elegido (salvo el orden), y así obtenemos una base del espacio $\sigma \cdot W$. Luego de las igualdades (1.1) se deduce que $V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma W$, es decir, $V = \text{Ind}_H^G W$.

En el ejemplo precedente, una representación de H induce una representación ya conocida de G . Esto nos lleva a preguntarnos si, dada cualquier representación de H existe la representación inducida de G . La siguiente proposición responde esta pregunta.

Proposición 1.1.16. *Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G . Existe una y sólo una representación de G , salvo equivalencias, inducida por una representación prefija de H .*

1.2. Representaciones del grupo simétrico

La teoría de representaciones del grupo simétrico fue estudiada en un principio por Ferdinand Georg Frobenius, Issai Schur y Alfred Young. En trabajos más recientes, G. D. James describe las representaciones irreducibles de \mathbb{S}_n en términos de módulos de Specht (ver [22]), y H. K. Farahat - M. H. Peel en términos de ideales en el álgebra de grupo (ver [16]).

En esta sección describiremos las representaciones irreducibles del grupo simétrico sobre el cuerpo de los números complejos en términos de módulos de Specht. Las definiciones y resultados se generalizan sin mayores inconvenientes para un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. La demostración de los resultados pueden seguirse de [34].

1.2.1. Grupo simétrico

Consideremos $\mathbb{I}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ con $n \in \mathbb{N}$. Una función biyectiva de \mathbb{I}_n en sí mismo se denomina **permutación de n números**. El **grupo simétrico** de grado n , consiste en el conjunto de permutaciones de n números junto con la operación composición de funciones, y lo notaremos \mathbb{S}_n .

Esto puede generalizarse al caso de un conjunto arbitrario X . El grupo simétrico de X , que lo notaremos \mathbb{S}_X , consiste en el conjunto de funciones biyectiva de X en sí mismo junto con la operación composición de funciones. Si $Y, Z \subset X$ con $Y \cap Z = \emptyset$ entonces existe una identificación natural de \mathbb{S}_Y y de $\mathbb{S}_Y \times \mathbb{S}_Z$ con subgrupos de \mathbb{S}_X .

Fijado un elemento $\sigma \in \mathbb{S}_n$, tenemos una acción del grupo aditivo \mathbb{Z} en \mathbb{I}_n dada por

$$k \cdot x = \sigma^k(x).$$

Las órbitas de esta acción se denominan **ciclos** de la permutación σ y se escriben $(i_1 i_2 \cdots i_j)$, siendo

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_j) = i_1.$$

Luego \mathbb{I}_n se puede descomponer como la unión disjunta de las órbitas dadas por la acción de \mathbb{Z} , y por lo tanto como unión disjunta de ciclos. La acción de σ en \mathbb{I}_n se puede representar como el producto de ciclos disjuntos. Para simplificar la notación, los ciclos de longitud uno, o 1-ciclos, se omiten cuando se escribe la permutación como producto de ciclos. Las permutaciones formadas por un ciclo de longitud 2 y ciclos de longitud 1 se denominan **transposiciones**.

Definición 1.2.1. Decimos que $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ es una **partición** de n , y la notaremos $\lambda \vdash n$, si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\lambda_i \in \mathbb{N}$ para $i = 1, \dots, k$.
2. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$.
3. $\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$.

Definición 1.2.2. Dada $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ una partición de n y $\sigma \in \mathbb{S}_n$, diremos que la permutación σ es de tipo λ si σ se puede representar con ciclos disjuntos de longitudes $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$.

Proposición 1.2.3. *Las permutaciones $\sigma, \tau \in \mathbb{S}_n$ están en la misma clase de conjugación si y sólo si son del mismo tipo.*

A partir de esta proposición podemos establecer la cantidad de representaciones irreducibles no equivalentes de \mathbb{S}_n , que formalizamos en el siguiente corolario.

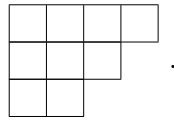
Corolario 1.2.4. *La cantidad de representaciones irreducibles no equivalentes de \mathbb{S}_n es igual a la cantidad de particiones de n .*

1.2.2. Módulos de Specht

En esta sección presentamos la construcción del módulo de Specht para cada partición λ de n . El conjunto de módulos de Specht resulta una lista completa de representantes de las clases de isomorfismos de representaciones irreducibles de \mathbb{S}_n .

Definición 1.2.5. Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ una partición de n . Un **diagrama de Young** o **diagrama de Ferrer** de forma λ es un arreglo de n casillas, formado por k filas justificadas a izquierda y en el cual la fila i tiene λ_i casillas. El diagrama de Young de forma λ lo notaremos $[\lambda]$.

Ejemplo 1.2.6. El diagrama de Young para la partición $\lambda = (4, 3, 2)$ de $n = 9$ es el siguiente



Cada casilla de un diagrama de Young será identificada por el par (i, j) donde i es el número de la fila y j es el número de la columna en la que se ubica.

Definición 1.2.7. Dada $\lambda \vdash n$, una **tabla de Young** de forma λ es una tabla que se obtiene al colocar en las casillas del diagrama de Young $[\lambda]$ los números $1, \dots, n$ sin repetición.

Ejemplo 1.2.8. Una tabla de Young para la partición $\lambda = (4, 3, 2)$ de $n = 9$ es

3	1	5	9	
2	6	4		
8	7			

Definición 1.2.9. Dada $\lambda \vdash n$, una **tabla de Young generalizada** de forma λ es una tabla que se obtiene de reemplazar las casillas del diagrama de Young $[\lambda]$ por n números enteros positivos no necesariamente consecutivos, en los que puede haber repetición.

Ejemplo 1.2.10. Una tabla de Young generalizada para la partición $\lambda = (4, 3, 2)$ de $n = 9$ es la siguiente

4	3	3	5	
6	6	4		
5	5			

El grupo simétrico actúa en el conjunto de tablas de Young de forma λ de manera natural permutando los valores de las casillas. Dada t una tabla de Young,

llamamos R_t y C_t a los subgrupos de \mathbb{S}_n que dejan invariantes a los conjuntos de números determinados por cada fila y cada columna de t respectivamente.

Ejemplo 1.2.11. Los subgrupos R_t y C_t para la tabla de Young del Ejemplo 1.2.8 son

$$R_t = \mathbb{S}_{\{1,3,5,9\}} \times \mathbb{S}_{\{2,4,6\}} \times \mathbb{S}_{\{7,8\}} \cong \mathbb{S}_4 \times \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_2$$

y

$$C_t = \mathbb{S}_{\{2,3,8\}} \times \mathbb{S}_{\{1,6,7\}} \times \mathbb{S}_{\{4,5\}} \times \mathbb{S}_{\{9\}} \cong \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_1.$$

Sobre el conjunto de tablas de Young de forma λ se define la siguiente relación de equivalencia:

$$t_1 \sim t_2 \quad \text{si y sólo si} \quad \sigma(t_1) = t_2 \quad \text{para algún } \sigma \in R_{t_1},$$

es decir dos tablas de Young de forma λ están relacionadas si las correspondientes filas de ambas tablas contienen los mismos números.

Definición 1.2.12. Sea t una tabla de Young de forma λ , definimos el λ -**tabloide** $\{t\}$ como la clase de equivalencia de t por la relación antes mencionada.

Ejemplo 1.2.13. Un λ -**tabloide** para la partición $\lambda = (4, 3, 2)$ de $n = 9$ es el siguiente

$$\begin{array}{cccc} \hline 1 & 3 & 5 & 8 \\ \hline 2 & 6 & 9 & \\ \hline 4 & 7 & & \\ \hline \end{array} .$$

Observemos que el grupo simétrico actúa naturalmente sobre el conjunto de λ -tabloides por $\sigma \cdot \{t\} = \{\sigma t\}$. Sea M^λ el espacio vectorial sobre \mathbb{C} de dimensión finita cuya base son los λ -tabloides. Si extendemos linealmente la acción de \mathbb{S}_n sobre este espacio, vemos que M^λ obtiene la estructura de $\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]$ -módulo.

Definición 1.2.14. Dada una partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \vdash n$, definimos el **sub-**

grupo de Young \mathbb{S}_λ de \mathbb{S}_n asociado a λ como

$$\mathbb{S}_\lambda = \mathbb{S}_{\{1, \dots, \lambda_1\}} \times \mathbb{S}_{\{\lambda_1+1, \dots, \lambda_1+\lambda_2\}} \times \dots \times \mathbb{S}_{\{\lambda_1+\dots+\lambda_{k-1}, \dots, \lambda_1+\dots+\lambda_k\}}.$$

Es claro que la acción del subgrupo de Young \mathbb{S}_λ asociado a la partición λ sobre el módulo M^λ deja fijo a uno de los λ -tabloides. Supongamos que este λ -tabloide es $\{t\}$ y sea W el $\mathbb{C}[\mathbb{S}_\lambda]$ -módulo generado por este tabloide. Notemos que W es el módulo trivial de \mathbb{S}_λ , y como la acción de \mathbb{S}_n sobre el conjunto de λ -tabloides es de permutación, tenemos que

$$M^\lambda = \bigoplus_{\sigma \in \mathbb{S}_n / \mathbb{S}_\lambda} \sigma W.$$

Es decir que M^λ es el módulo inducido $\text{Ind}_{\mathbb{S}_\lambda}^{\mathbb{S}_n} W$.

Para cada tabla de Young t de forma λ , consideramos el elemento k_t del álgebra de grupo $\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]$, obtenido mediante las sumas signadas de los elementos del estabilizador de columnas C_t de t . Esto es

$$k_t = \sum_{\sigma \in C_t} \text{sg}(\sigma)\sigma.$$

Definición 1.2.15. Sea t una tabla de Young, definimos el **politabloide** asociado a t , y lo notamos e_t , como el elemento del módulo M^λ que se define como $e_t = k_t\{t\}$.

Ejemplo 1.2.16. Si consideremos la tabla de Young

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array},$$

el politabloide asociado es

$$e_t = \frac{\overline{4 \ 1 \ 2}}{\overline{3 \ 5}} - \frac{\overline{3 \ 1 \ 2}}{\overline{4 \ 5}} - \frac{\overline{4 \ 5 \ 2}}{\overline{3 \ 1}} + \frac{\overline{3 \ 5 \ 2}}{\overline{4 \ 1}}.$$

Notemos que el politabloide e_t no sólo depende del tabloide $\{t\}$, sino que también

depende de la tabla de Young t .

Definición 1.2.17. Dada una partición λ de n , definimos el **módulo de Specht** S^λ asociado a λ , como el submódulo de M^λ generado por los politabloides e_t , donde t es una tabla de Young de forma λ .

$$S^\lambda = \langle e_t : t \text{ es una tabla de Young de forma } \lambda \rangle.$$

La acción del grupo simétrico en el conjunto de politabloides está dada por

$$\sigma \cdot e_t = sg(\sigma)e_{\sigma t}.$$

Así cada módulo de Specht S^λ es un módulo cíclico generado por cualquier politabloide asociado a una tabla de Young de forma λ .

El siguiente teorema caracteriza los módulos irreducibles del grupo simétrico \mathbb{S}_n , los cuales quedan parametrizados por las particiones de n , o equivalentemente por los diagramas de Young de n casillas.

Teorema 1.2.18. *El conjunto de módulos de Specht $\{S^\lambda : \lambda \vdash n\}$ forman una lista completa de \mathbb{S}_n -módulos irreducibles no isomorfos dos a dos.*

En adelante utilizaremos la notación λ para nombrar tanto a una partición de n como al \mathbb{S}_n -módulo irreducible correspondiente a dicha partición.

En general los politabloides que generan los módulos de Specht S^λ no son linealmente independientes. Pero existe un conjunto de tabloides que pueden utilizarse para definir una base de los mismos.

Definición 1.2.19. Una tabla de Young t se denomina **estándar** si las filas y las columnas son sucesiones estrictamente crecientes. Si t es una tabla de Young estándar también decimos que los correspondientes tabloides y politabloides son estándar.

Ejemplo 1.2.20. Una tabla de Young estándar para la partición $\lambda = (4, 3, 2)$ de

$n = 9$ es la siguiente

1	3	5	9
2	6	7	
4	8		

Definición 1.2.21. Una tabla de Young generalizada t se denomina **semiestándar** si las filas son sucesiones débilmente crecientes y las columnas son sucesiones estrictamente crecientes.

Ejemplo 1.2.22. Una tabla de Young semiestándar para la partición $\lambda = (4, 3, 2)$ de $n = 9$ es la siguiente

1	3	3	4
5	6	6	
7	9		

Teorema 1.2.23. El conjunto formado por los politabloides e_t , siendo t una tabla de Young estándar de forma λ , es una base del módulo de Specht S^λ .

A partir de este último resultado, se deduce inmediatamente que la dimensión del módulo de Specht S^λ coincide con la cantidad de tablas de Young estándar de forma λ . Esta cantidad se puede calcular utilizando diferentes fórmulas. A continuación presentaremos una desarrollada por Frame, Robinson y Thrall.

Definición 1.2.24. Sea (i, j) una casilla en el diagrama de Young de forma λ , se define $H_{i,j}$ el gancho de (i, j) como

$$H_{i,j} = \{(i, j') : j' \geq j\} \cup \{(i', j) : i' \geq i\}$$

y su correspondiente longitud gancho como $h_{i,j} = |H_{i,j}|$.

Ejemplo 1.2.25. Consideremos $\lambda = (4, 4, 3, 3, 3, 1) \vdash 18$. En el siguiente diagrama aparecen coloreadas las casillas correspondientes al gancho $H_{2,2}$

Entonces la longitud gancho $h_{2,2} = 6$.

Teorema 1.2.26. Si $\lambda \vdash n$, entonces la dimensión del módulo de Specht S^λ se puede calcular utilizando la siguiente fórmula:

$$\dim(S^\lambda) = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{i,j}}.$$

Ejemplo 1.2.27. Calculemos la dimensión de S^λ para $\lambda = (n-k, k)$, con $k \leq [n/2]$.

En cada casilla del diagrama de Young para λ colocamos su longitud gancho

$n - k + 1$	$n - k$	\dots	$n - 2k + 2$	$n - 2k$	$n - 2k - 1$	\dots	1
k	$k - 1$	\dots	1				

Luego utilizando el Teorema 1.2.26 tenemos que

$$\begin{aligned} \dim(S^\lambda) &= \frac{n!}{(n-2k)!k! \frac{(n-k+1)!}{(n-2k+1)!}} = \frac{n!(n-2k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1) - n!k}{k!(n-k+1)!} = \\ &= \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}. \end{aligned}$$

1.2.3. Regla de Ramificación

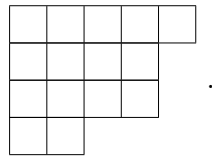
Una pregunta natural que podemos hacernos es qué ocurre cuando restringimos el módulo de Specht S^λ de \mathbb{S}_n a \mathbb{S}_{n-1} o cuando inducimos el módulo de Specht S^λ de \mathbb{S}_n a \mathbb{S}_{n+1} . La regla de ramificación es un teorema que responde a estas cuestiones. Las siguientes definiciones son necesarias para poder enunciar este resultado.

Definición 1.2.28. Sea $[\lambda]$ un diagrama de Young. Una casilla $(i, j) \in [\lambda]$ se denomina **esquina interior** de $[\lambda]$ si al quitarla, el diagrama que se obtiene corresponde a un diagrama de Young. Notaremos \mathcal{P}^{λ^-} al conjunto de las particiones correspondientes a un diagrama de Young que se obtiene por remover una esquina interior de $[\lambda]$.

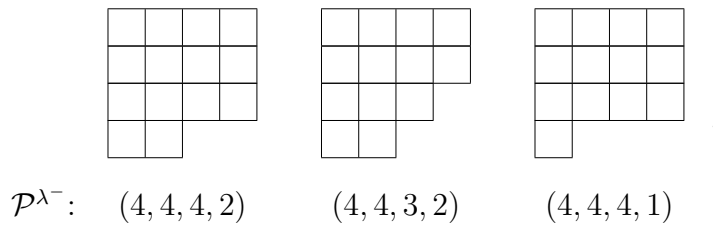
Observemos que las esquinas interiores de un diagrama de Young son exactamente las casillas que están ubicadas al final de una fila y de una columna.

Definición 1.2.29. Sea $[\lambda]$ un diagrama de Young. Una casilla $(i, j) \notin [\lambda]$ se denomina **esquina exterior** de $[\lambda]$ si al agregarla, el diagrama que se obtiene corresponde a un diagrama de Young. Notaremos \mathcal{P}^{λ^+} al conjunto de las particiones correspondientes a un diagrama de Young que se obtiene por agregar una esquina exterior de $[\lambda]$.

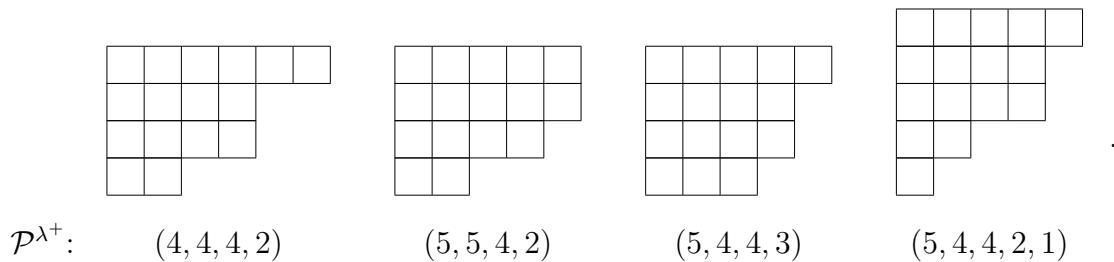
Ejemplo 1.2.30. Si $\lambda = (5, 4, 4, 2)$, el diagrama de Young de forma λ es



Los diagramas que se obtienen al remover las esquinas interiores y las respectivas particiones son



Y los diagramas que se obtienen al agregar las esquinas exteriores y las respectivas particiones son



El siguiente teorema es conocido como **Regla de Ramificación**.

Teorema 1.2.31. Sea $\lambda \vdash n$ y S^λ el módulo de Specht asociado a λ , entonces

$$\text{Res}_{\mathbb{S}_{n-1}}^{\mathbb{S}_n} S^\lambda \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{P}^{\lambda^-}} S^\alpha$$

y

$$\text{Ind}_{\mathbb{S}_n}^{\mathbb{S}_{n+1}} S^\lambda \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{P}^{\lambda^+}} S^\alpha.$$

Demostración. Ver Teorema 2.8.3 de [34]. ■

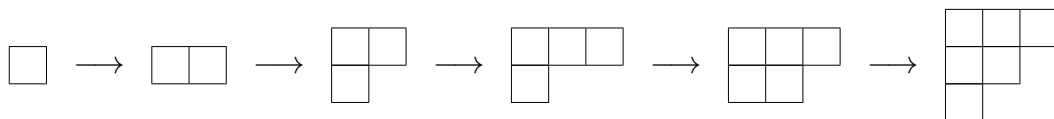
A partir de este resultado se puede definir el siguiente grafo infinito.

Definición 1.2.32. Definimos el **grafo de Young** de la siguiente manera: para cada $n \in \mathbb{N}$, los vértices del n -ésimo nivel son los distintos diagramas de Young $[\lambda_n]$ con λ_n una partición de n ; hay una conexión desde el vértice $[\lambda_n]$ al vértice $[\lambda_{n+1}]$ si $\lambda_{n+1} \in \mathcal{P}^{\lambda_n^+}$, es decir si el diagrama $[\lambda_{n+1}]$ se obtiene de agregarle una esquina exterior al diagrama $[\lambda_n]$.

La figura 1.1 corresponde a los primeros cuatro niveles del grafo de Young.

Observación 1.2.33. Observemos que cada camino creciente en el grafo de Young, que comienza en el diagrama que tiene una sola casilla y termina en el diagrama $[\lambda]$, puede ser representado por una única tabla de Young estándar de forma λ . El proceso para armar la tabla de Young estándar que le corresponde a un camino es el siguiente: la casilla del primer diagrama se completa con el número 1, y cada casilla que se agrega al pasar al siguiente nivel se completa con el número correspondiente al nivel.

Ejemplo 1.2.34. Para el siguiente camino



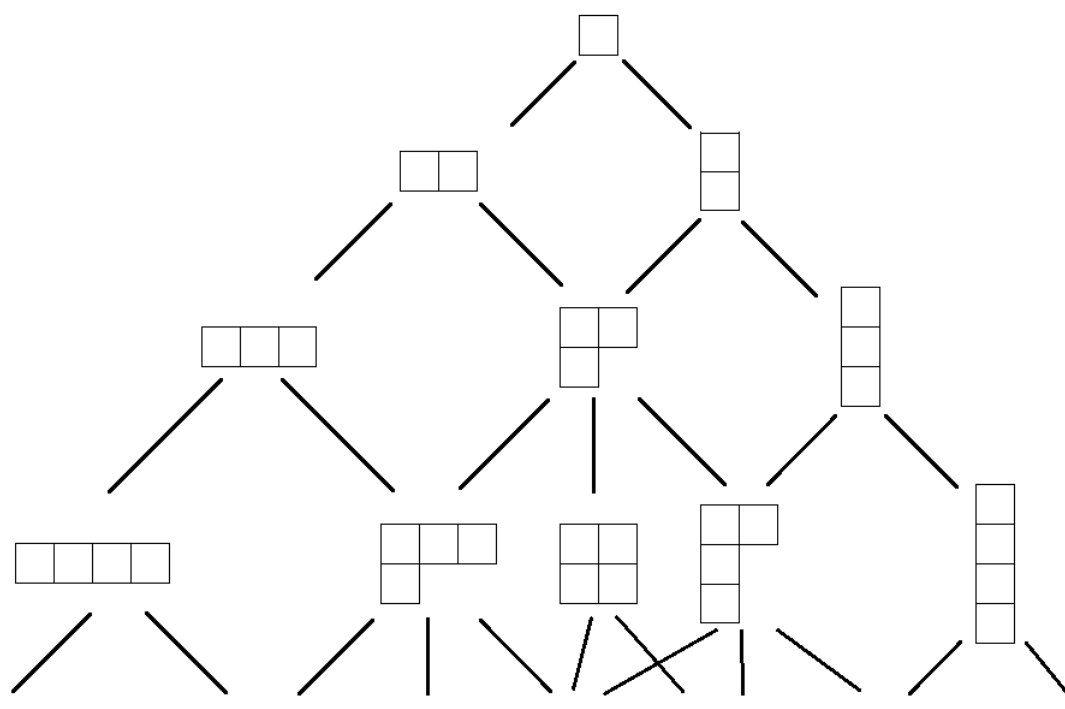


Figura 1.1: Grafo de Young

la tabla de Young estándar correspondiente es

1	2	4	
3	5		
6			

1.3. La correspondencia de Robinson-Schensted

La correspondencia de Robinson-Schensted es un resultado que establece una correspondencia biyectiva entre los elementos del grupo simétrico \mathbb{S}_n y el conjunto de pares de tablas de Young estándar con la misma forma y con n casillas. Fue descubierta originalmente por G. Robinson al estudiar las representaciones del grupo simétrico (ver [32]) y posteriormente redescubierta en forma independiente por C. Schensted al estudiar la cantidad de subsecuencias crecientes y decrecientes en las permutaciones (ver [36]), quien además generalizó el resultado a palabras arbitrarias.

1.3.1. Inserción y colocación

A continuación describiremos las operaciones de inserción y colocación, que son claves para establecer la correspondencia de Robinson-Schensted.

Definición 1.3.1. Sea P una tabla de Young semiestándar y x un número entero positivo, definimos la operación de **inserción** de x en P , y notaremos $r_x(P)$ a la tabla de Young resultante, siguiendo los siguientes pasos:

(P1) Sea $R :=$ la primera fila de P .

(P2) **Mientras** x sea menor que algún elemento de la fila R **hacer**:

(Pa) Sea y el elemento de R más chico que es mayor que x . Si y se repite más de una vez, considerar el que está a la izquierda. Reemplazar y por x (lo notaremos $R \leftarrow x$).

(Pb) Sean $x := y$ y $R :=$ la siguiente fila para abajo.

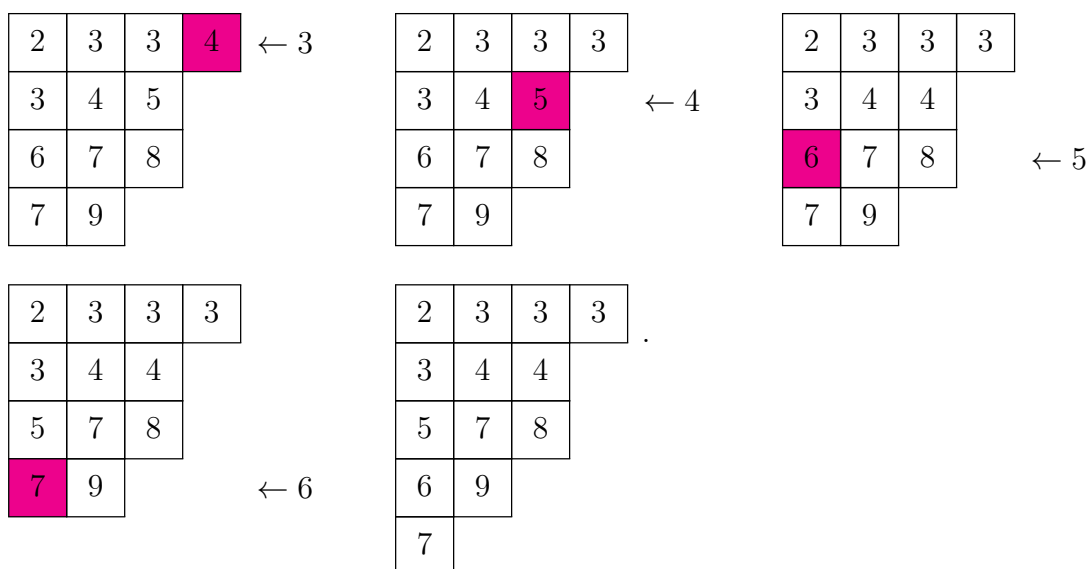
(P3) Ahora x es valor mayor para todos los elementos de R . Colocar x en el final de la fila R y **parar**.

Ejemplo 1.3.2. Para ilustrar la operación de inserción consideremos $x = 3$ y P la

siguiente tabla de Young semiestándar

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 4 & 5 & \\ \hline 6 & 7 & 8 & \\ \hline 7 & 9 & & \\ \hline \end{array} .$$

El siguiente es el camino de inserción de x en P . Coloreamos la casilla del elemento que es desplazado en cada instancia del algoritmo.



Teorema 1.3.3. Sea P una tabla de Young semiestándar y x un número entero positivo, entonces $r_x(P)$ es una tabla de Young semiestándar.

Demostración. Ver Teorema 2.4 de [4]. ■

Definición 1.3.4. Sean Q una tabla de Young estándar de forma μ , (i, j) una esquina exterior del diagrama de Young $[\mu]$ y k un número entero positivo mayor que todos los elementos de Q . Definimos la operación de **colocación** de k en la casilla (i, j) de Q siguiendo los siguientes pasos:

(P1) Agregar una casilla a Q en la posición (i, j) .

(P2) Colocar k en la casilla agregada.

Observación 1.3.5. Es claro que luego de la operación colocación obtenemos una tabla de Young estándar.

Ejemplo 1.3.6. Para ilustrar la operación de colocación consideremos la tabla de Young estándar

$$Q = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 7 & & \\ \hline \end{array}$$

y coloquemos $k = 8$ en la casilla $(2, 3)$. La tabla estándar resultante es

$$Q = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 4 & 6 & 8 \\ \hline 7 & & \\ \hline \end{array}.$$

1.3.2. El algoritmo de Robinson-Schensted

A continuación describiremos el algoritmo de Robinson-Schensted; el input es una permutación $\pi \in \mathbb{S}_n$ y el output un par (P, Q) de tablas de Young estándar. El algoritmo construye una secuencia de pares de tablas de Young generalizadas

$$(P_0, Q_0) = (\emptyset, \emptyset), (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), \dots, (P_n, Q_n) = (P, Q).$$

Consideremos la permutación π como una palabra de longitud n en el alfabeto \mathbb{I}_n

$$\pi = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

La secuencia de pares de tablas de Young generalizadas se construye de la siguiente manera:

(P1) Sea $(P_0, Q_0) := (\emptyset, \emptyset)$.

(P2) **Para** $k = 1, \dots, n$ **hacer:**

(Pa) $P_k = r_{x_k}(P_{k-1})$.

(Pb) $Q_k =$ colocar k en Q_{k-1} en la casilla (i, j) en la que termino la operación inserción.

(P3) $(P, Q) := (P_n, Q_n)$.

Observemos que por la construcción de P_k y Q_k , ambas tablas de Young tienen la misma forma. La tabla de Young P se denomina **tabla de inserción** de π y la tabla de Young Q se denomina **tabla de memoria** de π .

Ejemplo 1.3.7. Consideremos la permutación

$$\pi = 4\ 2\ 3\ 6\ 5\ 1\ 7.$$

La secuencia de pares de tablas de Young generalizadas que se construyen utilizando el algoritmo de Robinson-Schensted es

$$\begin{array}{l}
 P_k : \emptyset, \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 4 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 4 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 6 \\ \hline 4 & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 5 \\ \hline 4 & 6 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 6 & & \\ \hline 4 & & & \end{array} \\
 Q_k : \emptyset, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 2 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & & \\ \hline 6 & & & \end{array}
 \end{array}$$

Así queda establecida la correspondencia

$$\pi = 4\ 2\ 3\ 6\ 5\ 1\ 7 \xrightarrow{\text{Robinson-Schensted}} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 6 & & \\ \hline 4 & & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & & \\ \hline 6 & & & \end{array} \right).$$

El siguiente teorema formaliza la correspondencia de Robinson-Schensted.

Teorema 1.3.8. *Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto S_n y el conjunto de pares de tablas de Young estándar de la misma forma λ , con λ recorriendo el conjunto de particiones de n .*

Demostración. Ver Teorema 3.1.1 de [34]. ■

El algoritmo de Robinson-Schensted puede extenderse para el caso de palabras de longitud m en el alfabeto \mathbb{I}_n con repetición de letras. En este caso el output es un par de tablas (P, Q) que tienen la misma forma $\lambda \vdash m$, siendo P es una tabla de Young semiestándar y Q una tabla de Young estándar.

Ejemplo 1.3.9. Consideremos la palabra w en el alfabeto $\{1, 2\}$

$$w = 2\ 1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 2.$$

La secuencia de pares de tablas de Young que se construyen utilizando el algoritmo de Robinson-Schensted es

$$\begin{aligned}
 P_k : & \emptyset, \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & \\ \hline 2 & 2 & 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & \\ \hline 2 & 2 & 2 & & \\ \hline \end{array} \\
 Q_k : & \emptyset, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & \\ \hline 2 & 5 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & & \\ \hline 2 & 5 & 6 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 7 & & \\ \hline 2 & 5 & 6 & & & \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

Así queda establecida la correspondencia

$$w = 2\ 1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 2 \xrightarrow{\text{Robinson-Schensted}} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & 6 & \\ \hline \end{array} \right).$$

Teorema 1.3.10. Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de palabras de longitud m en el alfabeto \mathbb{I}_n con $n < m$, y el conjunto de pares de tablas (P, Q) de forma $\lambda \vdash m$ con a lo sumo n filas, en el que P es una tabla de Young semiestándar y Q una tabla de Young estándar.

Demostración. Ver Teorema 4.8.2 de [34]. ■

1.4. Descomposición Isotípica

Dado G un grupo finito, un conjunto finito X se denomina **espacio homogéneo** de G si existe una acción transitiva G en X . Consideremos $L(X)$ el espacio vectorial de funciones a valores complejos con dominio en el conjunto X . La acción de G en X induce una acción del grupo en $L(X)$, que queda definida por:

$$g \cdot f(x) = f(g^{-1}x).$$

Así $L(X)$ determina naturalmente una representación ρ de G , siendo este su espacio de representación. La representación ρ es precisamente la representación permutacional de G en el espacio cociente $G/stab(x)$ para cualquier $x \in X$, siendo $stab(x)$ el estabilizador o grupo de isotropía de x .

Consideremos ρ_1, \dots, ρ_n un conjunto completo de representaciones irreducibles no equivalentes de G y notemos χ_i al caracter de ρ_i . Debido a que $L(X)$ es un espacio de representación de G , este admite una descomposición como suma directa de G -módulos simples:

$$L(X) = \bigoplus_{i=1}^m U_i. \quad (1.2)$$

Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, la representación ρ restringida al subespacio U_i es una representación irreducible de G . Consideramos para $j \in \{1, \dots, n\}$ el subespacio V_j de $L(X)$ dado por la suma directa de los G -módulos simples U_i que definen representaciones equivalentes a ρ_j . Así la descomposición (1.2) puede ser reescrita como

$$L(X) = \bigoplus_{i=1}^n V_i.$$

Esta descomposición de $L(X)$ se conoce como **descomposición isotípica**, y cada subespacio V_i se denomina **componente isotípica**.

Un problema relativo con la descomposición isotípica, y que ha sido el motor de muchas investigaciones, se puede describir de la siguiente manera: dado un elemento

arbitrario f del espacio de funciones $L(X)$, determinar un algoritmo para computar de manera eficiente las funciones $f_i \in V_i$ para cada $i = 1, \dots, n$ tales que

$$f = f_1 + \dots + f_n.$$

La función f_i se denomina proyección isotípica de f en la componente V_i . Así el problema puede enunciarse como: dado f en el espacio de funciones $L(X)$, determinar un algoritmo que pueda computar de manera eficiente la proyección de f en las distintas componentes isotípicas. Las herramientas desarrolladas para tratar con este problema se las conoce como **análisis espectral**. Los primeros trabajos relacionados a este problema fueron desarrollados por P. Diaconis (ver [11], [12]), quien extiende las herramientas del análisis espectral clásico de serie de tiempos, al estudio de algunos problemas en estadística como por ejemplo clasificación de datos, clasificación parcial de datos y análisis de varianza. Como motivación del tema explicaremos brevemente el análisis espectral aplicado al problema del juego de lotería del estado de California, que fue presetado por P. Diaconis en [11] y [12].

Sea $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ una partición de n . El correspondiente subgrupo de Young \mathbb{S}_λ permuta las primeras λ_1 coordenadas entre sí, las siguientes λ_2 coordenadas entre sí, y así hasta las últimas λ_k coordenadas. Consideremos X^λ el espacio cociente $\mathbb{S}_n/\mathbb{S}_\lambda$, así la correspondiente representación permutacional de \mathbb{S}_n en $M^\lambda = L(X^\lambda)$ tiene dimensión $\frac{n!}{\prod_i \lambda_i!}$.

El juego de Lotto de California consiste en la elección aleatoria de un subconjunto de cardinal 6 de $\{1, 2, \dots, 49\}$, que llamaremos 6-conjunto. El conjunto de 6-conjuntos, que notaremos $X^{(49,6)}$, puede ser representado como el conjunto cociente $\mathbb{S}_{49}/(\mathbb{S}_6 \times \mathbb{S}_{43})$. De hecho el grupo \mathbb{S}_{49} actúa transitivamente en el conjunto de 6-conjuntos y el subgrupo de isotropía de $\{1, \dots, 6\}$ es $\mathbb{S}_6 \times \mathbb{S}_{43}$. Todas las semanas aproximadamente 10^6 personas participan de este juego apostando por uno de los 6-conjuntos entre los 13983816 posibles; el estado toma aproximadamente la mitad de las apuestas y reparte el resto entre las personas que hayan elegido el 6-conjunto

ganador, pero si no hay ganadores el premio se acumula. Tanto el estado como los jugadores están interesados por la función $f : X^{(49,6)} \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada 6-conjunto el número de personas que lo eligieron: los jugadores quieren apostar por un 6-conjunto poco popular, para tener que dividir el premio entre pocos; el estado debe realizar proyecciones fiscales, por lo que debe realizar la predicción sobre la cantidad de veces que el premio se acumulará y la función f es claramente un dato relevante.

Un posible análisis de la función f requiere observar la popularidad de los números individualmente, luego la popularidad de pares de números, de tripletas de números y así sucesivamente. El espacio de funciones $M^{(43,6)}$ se descompone naturalmente en distintos subespacios invariantes irreducibles, que notaremos $S^{(49-j,j)}$:

$$M^{(43,6)} = S^{49} \oplus S^{(48,1)} \oplus \dots \oplus S^{(43,6)}.$$

Cada subespacio $S^{(49-j,j)}$ mide la contribución pura de la popularidad de los j -conjuntos, y así por el análisis que describimos anteriormente es necesario computar la proyección de la función f en cada uno de estos subespacios. Es conocido que $M^{(n-k,k)}$ se descompone libre de multiplicidad como espacio de representación de \mathbb{S}_n , en $k+1$ componentes isotópicas. En la Subsección 1.6.2 presentamos el resultado que explica esta descomposición.

La proyección isotópica de $f \in L(X)$ en la componente V_i puede computarse utilizando la fórmula

$$f_i = \frac{\dim(\rho_i)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1}) \rho(g)$$

(ver Teorema 8 en [35]). La cantidad de operaciones necesarias para computar la proyección isotópica en las n componentes es $O(n|G||X|)$, donde el modelo computacional que se asume cuenta una operación por cada multiplicación en los números complejos seguida de una suma. Este enfoque clásico es computacionalmente ineficiente.

En [13] Diaconis y Rockmore muestran que con una cuidadosa reorganización del enfoque clásico y utilizando únicamente conocimientos de los caracteres del grupo, el número de operaciones se puede reducir a $O(n|X|^2)$. En este mismo artículo, Diaconis y Rockmore estudian el problema de calcular las proyecciones isotípicas para el caso del espacio $M^{(n-k,k)}$ y su enfoque está basado en la utilización de la transformada Radon. Demuestran que el cómputo de la proyección de $f \in M^{(n-k,k)}$ en cada una de las $k + 1$ componentes isotípicas requiere $O(k^2 \binom{n}{k}^2 \log k)$ operaciones. En [14] Driscoll, Healy y Rockmore presentan un algoritmo eficiente para computar la Transformada Polinomial Ortogonal Discreta, y como una aplicación directa del mismo, demuestran que si X es un grafo de distancia-transitivo, es posible computar la proyección de $f \in L(X)$ en las n componentes isotípicas utilizando a lo sumo $O(|X|^2 + |X|n \log^2 n)$ operaciones. Sin embargo el algoritmo desarrollado para obtener esta cota asume la utilización de aritmética exacta y este hecho provoca la emergencia de problemas de estabilidad cuando se lo implementa.

En [24], Maslen, Orrison y Rockmore presentan un algoritmo para computar la proyección sobre las componentes isotípicas, basado en un método para computar proyecciones sobre subespacios propios de una colección de transformaciones lineales simultáneamente diagonalizables. Esta colección de transformaciones se denomina conjunto separador, pues permiten descomponer una representación como suma de sus componentes isotípicas. Este enfoque puede ser visto como una generalización del algoritmo conocido como Transformada de Fourier Rápida de Gentleman-Sande. La eficiencia del algoritmo depende exclusivamente del método empleado para computar proyecciones sobre subespacios propios. El resultado principal de este artículo establece que la cantidad de operaciones requeridas para computar la proyección de $f \in L(X)$ en las n componentes isotípicas es

$$O\left(\sum_{i=1}^k (nT_i^{op} + n^2|X|)\right)$$

siendo $\{T_1, \dots, T_k\}$ un conjunto separador y T^{op} la cantidad de operaciones necesaria

para multiplicar la matriz T con un vector arbitrario.

Luego Maslen, Orrison y Rockmore aplican el algoritmo desarrollado para el caso en que X es un grafo de distancia-transitivo y determinan la cantidad de operaciones necesarias para calcular la proyección de $f \in L(X)$ en las n componentes isotípicas para el caso del grafo de Johnson $J(n, k)$ y el grafo de Grassman $G(n, k, q)$. Para el primero de los casos la cantidad de operaciones necesarias es $O(k^2 \binom{n}{k})$, mientras que para el segundo es $O(k[k] \binom{n}{k}_q)$, donde $\binom{n}{k}_q$ es un polinomio en q conocido como *polinomio Gaussiano* que se define como

$$\binom{n}{k}_q = \begin{cases} \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} & \text{si } n \geq k \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

donde para cada entero no negativo m se define

$$[m] = \begin{cases} 1 + q + q^2 + \cdots + q^{m-1} & \text{si } m > 0 \\ 0 & \text{si } m = 0 \end{cases},$$

$$[m]! = \begin{cases} [m][m-1] \cdots [1] & \text{si } m > 0 \\ 1 & \text{si } m = 0 \end{cases}.$$

1.5. Transformada de Fourier

1.5.1. Transformada de Fourier Clásica en \mathbb{Z}_N

A continuación describiremos la Transformada de Fourier Clásica en \mathbb{Z}_N , en términos de teoría de representaciones de grupo.

Consideremos el espacio de funciones $\mathcal{F} = \{x : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}\}$ donde \mathbb{Z}_N es el grupo cíclico de orden N , formado por las clases de equivalencias de la relación congruencia módulo N , y el producto interno usual

$$\langle x, y \rangle = \sum_{t=0}^{N-1} x(t) \overline{y(t)}.$$

Existen dos bases ortogonales naturales para el espacio \mathcal{F} , por un lado la base canónica o base delta $\{\delta_t\}_{t=0,1,\dots,N-1}$ donde

$$\delta_t(t') = \begin{cases} 1 & \text{si } t = t' \\ 0 & \text{si } t \neq t' \end{cases}$$

y por otro lado la base de caracteres del grupo \mathbb{Z}_N , $\{\phi_k\}_{k=0,1,\dots,N-1}$ donde

$$\phi_k(t) = \frac{\omega^{kt}}{\sqrt{N}} \quad \text{y} \quad \omega = e^{2\pi i/N}.$$

Una función x del espacio \mathcal{F} puede ser escrita como combinación lineal de estas dos bases distinguidas

$$x = \sum_{t=0}^{N-1} x(t) \delta_t \quad \text{y} \quad x = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}(k) \phi_k.$$

Entonces los coeficientes $x(t)$ y $\hat{x}(k)$ pueden calcularse como

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}(k) \omega^{kt} \quad \text{y} \quad \hat{x}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} x(t) \omega^{-kt}.$$

Definición 1.5.1. Sea $x \in \mathcal{F}$. La transformación

$$\mathcal{T} : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N \quad / \quad \mathcal{T}(x(0), \dots, x(N-1)) = (\hat{x}(0), \dots, \hat{x}(N-1))$$

se denomina **Transformada de Fourier Discreta** de la función x .

El cálculo de la Transformada de Fourier Discreta de una función x puede interpretarse como la multiplicación de la matriz cambio de base, de la base canónica a la base de caracteres del grupo \mathbb{Z}_N , y el vector de coeficientes $(x(0), \dots, x(N-1))$. La matriz cambio de base, que notaremos $[\mathcal{T}]$, es una matriz de Vandermonde que tiene la siguiente forma:

$$[\mathcal{T}] = \frac{1}{\sqrt{N}} [\omega^{(i-1)(j-1)}]_{1 \leq i, j \leq N}.$$

Por lo que el cálculo de la Transformada de Fourier Discreta de manera directa requiere $O(N^2)$ operaciones aritméticas, donde una operación aritmética es considerada como una multiplicación en complejos seguida de una suma en complejos. La complejidad del cálculo directo tiene importantes limitaciones cuando se trabaja con N grande. Esto motivó el desarrollo de algoritmos más eficientes para computar esta transformada.

1.5.2. Transformada de Fourier Rápida para \mathbb{Z}_N

Se denomina Transformada de Fourier Rápida (FFT) a los algoritmos que computan la Transformada de Fourier Discreta de manera eficiente, considerando eficiente aquellos que tienen una complejidad computacional de $O(N \cdot \log(N))$.

El primer algoritmo FFT fue desarrollado alrededor de 1805 por Carl Friedrich Gauss, quien lo utilizó para interpolar las trayectorias de dos asteroides, pero no analizó la complejidad computacional del mismo. El trabajo de Gauss no fue muy reconocido. En 1965 este mismo algoritmo fue redescubierto e implementado por James William Cooley y John Wilder Tukey, y publicado en el artículo [9]. Desde

aquel momento, la Transformada de Fourier Discreta y sus variaciones se volvieron una herramienta extremadamente importante para distintas áreas de la ciencia. Las implementaciones de alto rendimiento realizan muchas modificaciones al algoritmo desarrollado por Cooley y Tukey, pero todas ellas se basan en la misma idea.

A continuación presentaremos una versión de la Transformada de Fourier Rápida para el caso clásico, y para N igual a una potencia de 2, utilizando el método de bases intermedias que luego generalizaremos para el caso del Grafo de Johnson. Este algoritmo se basa en la realización de sucesivas proyecciones a los autoespacios de ciertos operadores, que nos permitirán definir bases intermedias del espacio \mathcal{F} y descomponer la Transformada de Fourier Discreta $[\mathcal{T}]$ como producto de matrices cambio de base que son ralas, es decir, matrices cambio de base con pocos elementos no nulos.

Consideramos $N = 2^n$ con $n \in \mathbb{N}$, y L el operador definido en el espacio de funciones \mathcal{F} como

$$L : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \quad / \quad (Lx)(t) = x(t - 1) \quad .$$

Observemos que $L^N = I$, por lo que los autovalores de este operador son las raíces N -ésimas de la unidad y los autovectores son los caracteres del grupo \mathbb{Z}_N , $\{\phi_k\}_{k=0,1,\dots,N-1}$. Así el problema del cómputo de la Transformada de Fourier Discreta es equivalente al problema de expresar una función como combinación lineal de las autofunciones de L .

Consideremos los operadores $L_k := L^{2^{n-k}}$ para $k = 0, \dots, n$. Como $(L_1)^2 = I$ el espacio \mathcal{F} se descompone como suma directa de dos autoespacios ortogonales \mathcal{F}_0 y \mathcal{F}_1 correspondientes a los autovalores 1 y -1 respectivamente

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1.$$

Luego la primera base intermedia se adapta a esta descomposición, es decir, es la

unión de una base ortonormal de \mathcal{F}_0 y una base ortonormal de \mathcal{F}_1 .

Por un lado el operador L_2 restringido al espacio \mathcal{F}_0 satisface que $(L_2)^2 = I$, por lo que este espacio se descompone como suma directa de dos autoespacios ortogonales \mathcal{F}_{00} y \mathcal{F}_{01} , correspondientes a los autovalores 1 y -1 respectivamente. Por otro lado la restricción de L_2 al espacio \mathcal{F}_1 satisface que $(L_2)^2 = -I$, por lo que \mathcal{F}_1 se descompone como suma directa de dos autoespacios ortogonales \mathcal{F}_{10} y \mathcal{F}_{11} correspondientes a los autovalores i y $-i$ respectivamente. Luego

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{00} \oplus \mathcal{F}_{01} \oplus \mathcal{F}_{10} \oplus \mathcal{F}_{11}$$

y así la segunda base intermedia se adaptada a esta descomposición.

Si realizamos este proceso iterativamente, luego de k pasos obtenemos la descomposición

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{j_1 j_2 \dots j_k \in \{0,1\}^k} \mathcal{F}_{j_1 j_2 \dots j_k}$$

donde

$$\mathcal{F}_{j_1 j_2 \dots j_k} = \mathcal{F}_{j_1 j_2 \dots j_{k-1} 0} \oplus \mathcal{F}_{j_1 j_2 \dots j_{k-1} 1}$$

y la k -ésima base intermedia se adapta a esta descomposición. Observemos que un elemento x de $\mathcal{F}_{j_1 j_2 \dots j_k}$ es un autovector simultaneo de los operadores L_r para $r = 1, \dots, k$ tal que

$$L_r x = \omega^{j_1 2^{n-1} + j_2 2^{n-2} + \dots + j_r 2^{n-r}} x.$$

Las bases intermedias pueden obtenerse en forma recursiva. Notaremos B_0 a la base canónica y a los elementos δ_t de esta base como

$$\delta_t = (| i_1 \dots i_n),$$

donde $t = i_1 2^{n-1} + i_2 2^{n-2} + \dots + i_{n-1} 2 + i_n$. Notaremos B_n a la base de caracteres

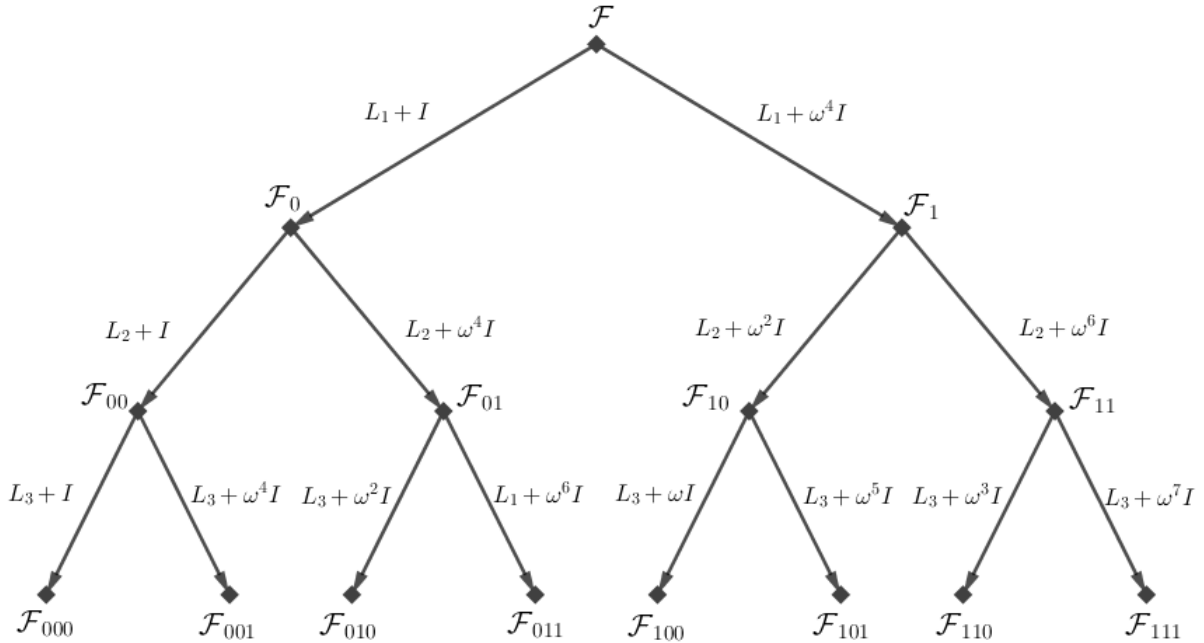


Figura 1.2: Descomposición del espacio \mathcal{F} de funciones para \mathbb{Z}_8

y a los elementos ϕ_k de esta base como

$$\phi_k = (j_1 \dots j_n \mid \),$$

donde $k = j_1 2^{n-1} + j_2 2^{n-2} + \dots + j_{n-1} 2 + j_n$.

Definición 1.5.2. Dados $j_1 \dots j_k \in \{0, 1\}^k$ y $i_{k+1} \dots i_n \in \{0, 1\}^{n-k}$, definimos el elemento $(j_1 \dots j_k \mid i_{k+1} \dots i_n)$ del espacio $\mathcal{F}_{j_1 \dots j_k}$ como

$$(j_1 \dots j_k \mid i_{k+1} \dots i_n) = \frac{1}{\sqrt{2}} ((j_1 \dots j_{k-1} \mid 0 \ i_{k+1} \dots i_n) + \omega^{j_1 2^{n-1} + \dots + j_k 2^{n-k}} (j_1 \dots j_{k-1} \mid 1 \ i_{k+1} \dots i_n)).$$

Definición 1.5.3. Para $j_1 \dots j_k \in \{0, 1\}^k$, definimos la base $B_{j_1 \dots j_k}$ del espacio $\mathcal{F}_{j_1 \dots j_k}$ como

$$B_{j_1 \dots j_k} = \{(j_1 \dots j_k \mid i_{k+1} \dots i_n) : i_{k+1} \dots i_n \in \{0, 1\}^{n-k}\}.$$

Definición 1.5.4. Sea $k = 1, \dots, n-1$ definimos la k -ésima base intermedia B_k de \mathcal{F} como

$$B_k = \bigsqcup B_{j_1 j_2 \dots j_k}.$$

La construcción de las bases intermedias del espacio \mathcal{F} permiten factorizar la Transformada de Fourier Discreta como producto de n matrices

$$[\mathcal{T}] = [B_{n-1}]_{B_n} \cdots [B_1]_{B_2} [B_0]_{B_1}.$$

donde $[B_i]_{B_{i+1}}$ es la matriz cambio de base de B_i a B_{i+1} . Observemos que una consecuencia de la forma recursiva que utilizamos para definir cada elemento de una base intermedia, es que estas matrices cambio de base tiene sólo dos entradas no nulas en cada columna. Así todas las matrices cambio de base son matrices ralas.

Como consecuencia inmediata de estas observaciones tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.5.5. *La cantidad de operaciones aritméticas para el cómputo de la Transformada de Fourier Discreta es $O(N \cdot \log(N))$.*

1.5.3. Transformada de Fourier Generalizada

El Teorema de Maschke permite generalizar la Transformada de Fourier Discreta para todo grupo finito. Sea G un grupo finito actuando en un conjunto también finito X ; el espacio de funciones $L(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}\}$ es el espacio de representación de la representación inducida por la acción. Así $L(X)$ admite una descomposición como suma directa de módulos simples

$$L(X) = \bigoplus_{i=1}^m U_i. \tag{1.3}$$

Al igual que en el caso clásico, fijamos dos bases para el espacio $L(X)$: por un lado la base delta o canónica B y por otro una base B' adaptada a la descomposición

(1.3). Así cada $f \in L(X)$ puede ser escrita como combinación lineal de elementos de estas dos bases distinguidas y

$$[B]_{B'} \cdot [f]_B = [f]_{B'}.$$

Definición 1.5.6. Se define la **Transformada de Fourier dada por la acción de G en X** , como la transformación

$$\mathcal{T} : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N \quad / \quad \mathcal{T}([f]_B) = [f]_{B'}.$$

La Transformada de Fourier dada por la acción natural izquierda (o derecha) de G sobre sí mismo, se denomina simplemente **Transformada de Fourier de G** .

Observemos que la transformada queda básicamente determinada por la matriz $[B]_{B'}$. Podemos distinguir dos problemas computacionales que están estrechamente relacionados: por un lado construir algoritmos, llamados Transformada Rápida de Fourier, para computar la transformada de Fourier dada por la acción de G en X con una complejidad $O(N \log^C N)$ siendo C una constante, y por otro construir un algoritmo para computar de manera eficiente las proyecciones de $f \in L(X)$ sobre cada componente isotópica. Para obtener algoritmos eficientes se aprovecha la estructura del grupo y las propiedades de sus representaciones irreducibles.

Los grupos no abelianos tienen representaciones irreducibles de grado mayor a 1, cuya forma matricial varía según la base elegida en los correspondientes $\mathbb{C}[G]$ -módulos. Por lo tanto hay esencialmente diferentes Transformadas de Fourier, las cuales pueden tener distintas complejidades en su construcción y evaluación. El modelo computacional que se define para evaluar la Transformada de Fourier y su inversa es la complejidad \mathbb{C} -lineal de la matriz $[\mathcal{T}] \in \mathbb{C}^{N \times N}$, es decir el mínimo número de operaciones aritméticas suficiente para computar el producto de la matriz con un vector genérico. Se entiende por operación aritmética a una multiplicación seguida de una suma en los números complejos. Como en los grupos no abelianos se

pueden definir distintas Transformadas de Fourier, se define la complejidad \mathbb{C} -lineal $L_{\mathbb{C}}(G)$ de un grupo finito G como el mínimo entre la complejidad \mathbb{C} -lineal de las distintas Transformadas de Fourier de G .

Es claro que la complejidad $L_{\mathbb{C}}(G)$ de un grupo está acotada inferiormente por $|G| - 1$ y superiormente por $|G|^2$

$$|G| - 1 \leq L_{\mathbb{C}}(G) \leq |G|^2.$$

En [9] y [41] se presentan Transformadas de Fourier Rápidas para el caso $G = \mathbb{Z}_n$, y la complejidad \mathbb{C} -lineal de estos algoritmos es $O(|G| \cdot \log |G|)$. En [3] Baum, Clausen y Tiezt demuestran que si G es un grupo abeliano finito, la complejidad \mathbb{k} -lineal de G es $O(|G| \log |G|)$.

En [7] Clausen demuestra que para un grupo finito G , la complejidad \mathbb{C} -lineal de una Transformada Rápida de Fourier generalizada está acotada superiormente por

$$\min_{\mathcal{C}} \{ (s(\mathcal{C}) - l(\mathcal{C})) \cdot |G| + 7\sqrt{q(\mathcal{C})} |G|^{3/2} \}$$

donde el mínimo es tomado bajo todas las posibles cadenas \mathcal{C} de subgrupos de G

$$1 = G_0 < \dots < G_n = G,$$

$l(\mathcal{C})$ es la longitud de la cadena, y donde q , s son el máximo y la suma, respectivamente, de los índices $[G_{i+1} : G_i]$ determinados por la cadena.

Para ciertas familias de grupos se ha calculado una cota superior para su complejidad \mathbb{C} -lineal. En [8] Baum y Clausen demuestran que si G es grupo soluble o super-soluble, $L_{\mathbb{C}}(G) < 8,5|G| \cdot \log |G|$; en [25] Maslen prueba que el grupo simétrico tiene una Transformada de Fourier Rápida que puede ser evaluada en $O(|\mathbb{S}_n| \cdot \log^2(|\mathbb{S}_n|))$; y en [26] Maslen y Rockmore prueban que la complejidad \mathbb{C} -lineal de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ está acotada superiormente por $2^{2q-1} \cdot q^{2n-2} \cdot |GL_n(\mathbb{F}_q)|$. Tal vez, el principal problema abierto en este campo es determinar si existe una constante universal C tal que para

todo grupo finito G la complejidad \mathbb{C} -lineal sea $O(|G| \log^C |G|)$ (ver [26]).

La Transformada de Fourier para grupos finitos puede extenderse a grupos compactos bajo ciertas restricciones (ver [33]), como por ejemplo a $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ y $Sp(n)$. Los coeficientes de Fourier se calculan como integrales sobre el grupo con respecto a la medida de Haar. En [26] Maslen y Rockmore realizan progresos en la cota para transformaciones de funciones en $U(n)$, $SU(n)$ y $Sp(n)$ de banda limitada. En [15] Driscoll y Healy consideran a la esfera S^2 como un espacio homogéneo de $SO(3)$ para construir una Transformada de Fourier que produce una descomposición armónica para funciones en S^2 de banda limitada.

1.6. El Grafo de Johnson

Consideremos $\mathbb{I}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ con $n \in \mathbb{N}$ y $k \leq n$. Definimos un k -conjunto como un subconjunto de \mathbb{I}_n de cardinal k . Notaremos $X^{(n,k)}$ al conjunto de todos los k -conjuntos y consideramos la distancia de Johnson entre $x, y \in X^{(n,k)}$ definida como

$$d(x, y) = k - |x \cap y|$$

y el conjunto E de pares de k -conjuntos que comparten $k - 1$ elementos,

$$E = \{(x, y) : d(x, y) = 1\}.$$

Definición 1.6.1. Definimos el **Grafo de Johnson** como el grafo no dirigido cuyo conjunto de vértices es $X^{(n,k)}$ y cuyo conjunto de aristas es E . Lo notaremos $J(n, k)$.

El grafo de Johnson $J(n, k)$ tiene las siguientes características:

1. Tiene $\binom{n}{k}$ vértices.
2. Tiene $\frac{k(n-k)}{2} \binom{n}{k}$ aristas.
3. Su diámetro es $\min\{k, n - k\}$.
4. Es un grafo $k(n - k)$ -regular.
5. Es isomorfo al grafo $J(n, n - k)$.

El grupo simétrico \mathbb{S}_n actúa naturalmente en $X^{(n,k)}$: si $x = \{i_1, \dots, i_k\}$ es un k -conjunto y $\sigma \in \mathbb{S}_n$ entonces

$$\sigma x = \sigma\{i_1, \dots, i_k\} = \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)\}.$$

Observemos que dos vértices x, y del grafo $J(n, k)$ son adyacentes si existe una transposición $(ij) \in \mathbb{S}_n$, con $i \in x$ y $j \notin x$, tal que $(ij)x = y$.

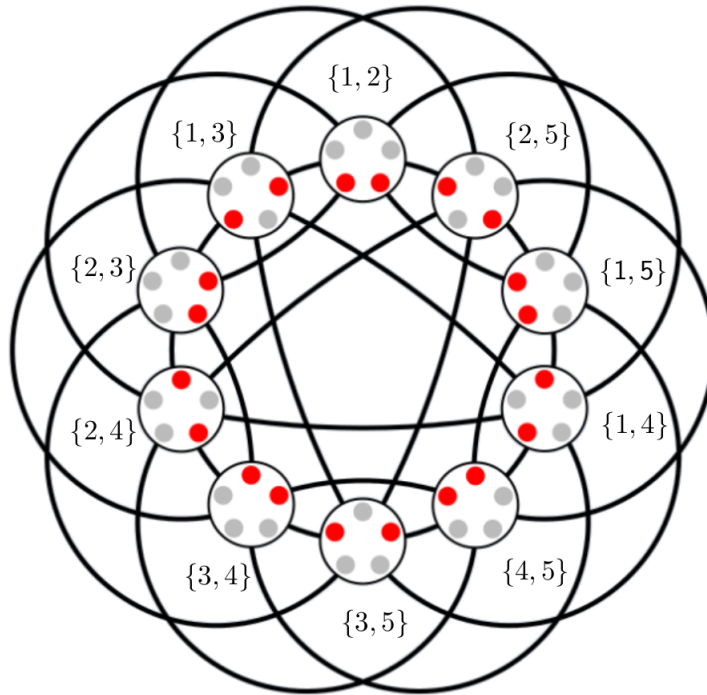


Figura 1.3: Piesk, T. (2014). The Johnson graph $J(5,2)$. Recuperado de [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Johnson_graph_J\(5,2\).svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Johnson_graph_J(5,2).svg)

Consideremos $\mathcal{F}^{n-k,k} = L(X^{(n,k)})$ el espacio de funciones a valores complejos en el conjunto de vértices del grafo de Johnson $J(n,k)$:

$$\mathcal{F}^{n-k,k} = \{f : X^{(n,k)} \longrightarrow \mathbb{C}\}.$$

Para cada k -conjunto $x \in X^{(n,k)}$, consideremos la función $\delta_x \in \mathcal{F}^{n-k,k}$ definida como:

$$\delta_x(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = z \\ 0 & \text{si } x \neq z \end{cases}.$$

El conjunto $B_0 = \{\delta_x : x \in X^{(n,k)}\}$ es una base del espacio de funciones $\mathcal{F}^{n-k,k}$, que denominaremos *base Delta*. Observemos que el espacio de funciones definido en $X^{(n,k)}$ es isomorfo al espacio de funciones definido en $X^{(n,n-k)}$. Consideramos en

$\mathcal{F}^{n-k,k}$ el producto interno tal que la base Delta B_0 es ortonormal.

La acción del grupo simétrico en el conjunto $X^{(n,k)}$ induce una acción de este sobre el espacio $\mathcal{F}^{n-k,k}$, que se define por $\sigma f = f \circ \sigma^{-1}$. Así el espacio de funciones $\mathcal{F}^{n-k,k}$ es una representación del grupo simétrico \mathbb{S}_n . Observemos que el producto interno considerado anteriormente es invariante por esta acción.

Es bien conocido que el espacio $\mathcal{F}^{n-k,k}$ tiene una descomposición libre de multiplicidad. A continuación presentaremos las nociones necesarias para demostrar este hecho.

1.6.1. Pares de Gelfand

Sea G un grupo finito. Notamos $L(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C}\}$ al espacio de las funciones a valores complejos sobre el grupo, y consideramos el producto escalar en $L(G)$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}.$$

El espacio $L(G)$ dotado con el producto $*$ convolución de funciones

$$[f_1 * f_2](g) = \sum_{h \in G} f_1(gh) f_2(h^{-1})$$

es un álgebra.

Sea K un subgrupo de G . Una función $f \in L(G)$ se dice que es K -invariante a derecha (respectivamente a izquierda) si cumple que $f(gk) = f(g)$ (respectivamente $f(kg) = f(g)$) para todo $g \in G$ y $k \in K$. Si $X = G/K$ es el correspondiente espacio homogéneo, el espacio $L(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}\}$ puede identificarse con el subespacio de funciones K -invariante a derecha sobre G . Una función $f \in L(G)$ se dice que es bi- K -invariante si cumple que $f(kgk') = f(g)$ para todo $g \in G$ y $k, k' \in K$. En analogía con la situación previa, el espacio de funciones bi- K -invariantes puede ser indentificado con el espacio $L(K \backslash G / K)$ de funciones a valores complejos en el conjunto de coclases dobles $K \backslash G / K = \{KgK : g \in G\}$.

Es sencillo de probar que para $f_1, f_2 \in L(G)$, $f_1 * f_2$ es K -invariante a derecha si f_1 es K -invariante a derecha; y $f_1 * f_2$ es K -invariante a izquierda si f_2 es K -invariante a izquierda. Por lo que los subespacios de funciones K -invariantes a derecha, K -invariantes a izquierda y bi- K -invariantes son subálgebras de $L(G)$.

Definición 1.6.2. Sea G un grupo finito y K un subgrupo de G . El par (G, K) se denomina un **Par de Gelfand** si el álgebra de funciones bi- K -invariantes $L(K \backslash G / K)$ es conmutativa.

Más generalmente, si G actúa transitivamente en un conjunto finito X y K es el estabilizador de un elemento de X , diremos que **la acción define un par de Gelfand** si (G, K) es un par de Gelfand.

Teorema 1.6.3. *Sea G un grupo finito, K un subgrupo de G y $X = G/K$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a) (G, K) es un par de Gelfand;
- b) $\text{Hom}_G(L(X), L(X))$ es conmutativa;
- c) La representación permutacional $L(X)$ es libre de multiplicidad.

Demostración. La equivalencia entre a) y b) se sigue inmediatamente del hecho de que $\text{Hom}_G(L(X), L(X)) \cong L(K \backslash G / K)$ (ver Proposición 4.2.1 de [6]).

Supongamos que $L(X)$ es libre de multiplicidad, es decir, existen V_0, \dots, V_N representaciones irreducibles no equivalentes tal que $L(X) = \bigoplus_{i=0}^N V_i$. Consideremos $T \in \text{Hom}_G(L(X), L(X))$, notaremos $T_i = T|_{V_i}$ la restricción de T al subespacio V_i . Si T_i no es trivial, como V_i es irreducible, tiene que ser inyectiva y por lo tanto $\{Tv : v \in V_i\}$ es un subespacio G -invariante isomorfo a V_i . Pero como la descomposición de $L(X)$ es libre de multiplicidad, V_i es igual a $\{Tv : v \in V_i\}$. Luego, por el Lema de Schur podemos asegurar que existe $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tal que $Tv = \lambda_i v$ para todo $v \in V_i$.

Toda $f \in L(X)$ tiene una descomposición única $f = v_0 + v_1 + \dots + v_N$ con $v_i \in V_i$. Y por el hecho anterior para $T, S \in \text{Hom}_G(L(X), L(X))$, existen valores complejos

$\lambda_0, \dots, \lambda_N$ y $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ tal que

$$Tf = \sum_{i=0}^N \lambda_i v_i \quad \text{y} \quad Sf = \sum_{i=0}^N \alpha_i v_i.$$

Luego para toda $f \in L(X)$ tenemos que

$$STf = Tf = \sum_{i=0}^N \alpha_i \lambda_i v_i = Tf = \sum_{i=0}^N \lambda_i \alpha_i v_i = TSf$$

por lo que $\text{Hom}_G(L(X), L(X))$ es conmutativo. Así hemos probado que c) implica b).

Supongamos ahora que $L(X)$ no es libre de multiplicidad. Por lo que en su descomposición existen dos subrepresentaciones irreducibles ortogonales isomorfas. Sean V y W dichas subrepresentaciones, $R : V \rightarrow W$ un isomorfismo y U el complemento ortogonal de $V \oplus W$. Definamos los operadores $S, T : L(X) \rightarrow L(X)$ como:

$$T(v + w + u) = Rv \quad \text{y} \quad S(v + w + u) = R^{-1}w.$$

Luego $T, S \in \text{Hom}_G(L(X), L(X))$, pero $ST \neq TS$ (ej: $ST|_W = 0$ y $TS|_W = I_w$). Esto es una contradicción que proviene de suponer que la descomposición de $L(X)$ no es libre de multiplicidad. Así hemos demostrado que b) implica c). ■

Corolario 1.6.4. *Sea (G, K) un par de Gelfand y $L(X) = \bigoplus_{i=0}^N V_i$ la descomposición en representaciones irreducibles. Se cumple que:*

- a) *Si $T \in \text{Hom}_G(L(X), L(X))$ entonces V_i es un autoespacio de T .*
- b) *Si $T \in \text{Hom}_G(L(X), L(X))$ y λ_i es el autovalor de $T|_{V_i}$ entonces $T \mapsto (\lambda_0, \dots, \lambda_N)$ es un isomorfismo entre $\text{Hom}_G(L(X), L(X))$ y \mathbb{C}^{N+1} .*

c) El número de órbitas de K en X es

$$N + 1 = \dim(\text{Hom}_G(L(X), L(X))) = \dim(L(K \backslash G / K)).$$

Demostración. El conjunto de K -órbitas está en correspondencia biyectiva con el conjunto de coclases dobles $K \backslash G / K$. Luego el resultado se deduce de forma inmediata del Teorema 1.6.3. ■

Teorema 1.6.5. Sea G un grupo finito, K un subgrupo y $X = G/K$ el correspondiente espacio homogéneo. Supongamos que tenemos una descomposición $L(X) = \bigoplus_{t=0}^h Z_t$ en subrepresentaciones de G no equivalentes dos a dos, y supongamos que el número de K -órbitas en X es $h + 1$. Entonces Z_t es irreducible para $t = 0, \dots, h$ y (G, K) es un par de Gelfand.

Demostración. En caso de ser necesario podemos refinar la descomposición de $L(X)$ con los Z_t en representaciones irreducibles como en el Lema de Wielandt $L(X) = \bigoplus_{i=1}^r m_i U_i$, donde m_i es la multiplicidad de U_i (ver Teorema 3.13.3 de [6]). Luego tenemos que

$$h + 1 \leq \sum_{i=0}^N m_i \leq \sum_{i=0}^N m_i^2 = \text{número de } K\text{-órbitas en } X.$$

Y entonces por hipótesis $h = N$, por lo que la descomposición considerada era en representaciones irreducibles y (G, K) es un par de Gelfand. ■

Definición 1.6.6. Sea (X, d) un espacio métrico y G un grupo actuando en X por isometría, es decir, $d(gx, gy) = d(x, y)$ para todo $x, y \in X$ y $g \in G$. Diremos que la acción de G en X es **distancia transitiva** si para todo $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times X$ tal que $d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2)$, existe $g \in G$ tal que $gx_1 = x_2$ y $gy_1 = y_2$.

Teorema 1.6.7. *Sea (X, d) un espacio métrico finito y G un grupo finito actuando en X tal que la acción es distancia transitiva. Si K es el estabilizador de un elemento $x_0 \in X$, entonces (G, K) es un par de Gelfand.*

Demostración. Como $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$, entonces existe $g \in G$ tal que $gx = y$ y $gy = x$, es decir (x, y) e (y, x) pertenecen a una misma órbita con respecto a la acción de G en $X \times X$. Lo notaremos $(x, y) \sim (y, x)$. Luego

$$(x_0, g^{-1}x_0) = g^{-1}(gx_0, x_0) \sim (gx_0, x_0) \sim (x_0, gx_0)$$

por lo que existe $k \in G$ tal que $kx_0 = x_0$ y $kg^{-1}x_0 = gx_0$. Luego $k \in K$ y $g^{-1}kg^{-1}x_0 = x_0$, y entonces $g^{-1}kg^{-1} \in K$, es decir $g^{-1} \in KgK$.

Luego si $f \in L(K \backslash G / K)$ se cumple que $f(g^{-1}) = f(g)$ y entonces para todo $f_1, f_2 \in L(K \backslash G / K)$ tenemos que

$$[f_1 * f_2](g) = \sum_{t \in G} f_1(t) f_2(g^{-1}t) = \sum_{t \in G} f_2(g^{-1}t) f_1(t^{-1}) = [f_2 * f_1](g^{-1}) = [f_2 * f_1](g).$$

Así (G, K) es un par de Gelfand. ■

1.6.2. Par de Gelfand $(\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_{n-k} \times \mathbb{S}_k)$

La acción del grupo simétrico \mathbb{S}_n en el conjunto de k -conjuntos $X^{(n,k)}$ es transitiva, por lo que $X^{(n,k)}$ es un \mathbb{S}_n -espacio homogéneo. El estabilizador de $x \in X^{(n,k)}$ es $\mathbb{S}_{n-k} \times \mathbb{S}_k$, donde \mathbb{S}_{n-k} es el grupo de todas las permutaciones de x y \mathbb{S}_k es el grupo de todas las permutaciones del complemento de x . Las distintas órbitas son

$$\{y \in X : d(x, y) = r\} \quad \text{para } r = 0, 1, \dots, \min\{k, n - k\}.$$

Teorema 1.6.8. $(\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_{n-k} \times \mathbb{S}_k)$ es un par de Gelfand.

Demostración. Sólo debemos probar que la acción de \mathbb{S}_n en $X^{(n,k)}$ es distancia

transitiva. Sean $x, y, x', y' \in X^{(n,k)}$ tal que $d(x, y) = d(x', y')$. Es suficiente probar que existe $\sigma \in \mathbb{S}_n$ tal que $\sigma x = x'$ y $\sigma y = y'$. Este elemento σ puede ser construido tomando una biyección entre los siguientes pares de conjuntos:

$$x - y \longleftrightarrow x' - y' , \quad y - x \longleftrightarrow y' - x' , \quad x \cap y \longleftrightarrow x' \cap y' , \quad (x \cup y)^c \longleftrightarrow (x' \cup y')^c .$$

Luego por el Teorema 1.6.7, $(\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_{n-k} \times \mathbb{S}_k)$ es un par de Gelfand. ■

El siguiente teorema se sigue de la teoría general de pares de Gelfand y caracteriza la descomposición del espacio de funciones a valores complejos en el conjunto de vértices del grafo de Johnson.

Teorema 1.6.9. *Sea $s = \min\{k, n - k\}$. El espacio $\mathcal{F}^{n-k,k}$ de funciones en el conjunto de vértices del grafo de Johnson $J(n, k)$ tiene una descomposición libre de multiplicidad en $s + 1$ representaciones irreducibles del grupo simétrico \mathbb{S}_n .*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Teorema 1.6.3 y el Corolario 1.6.4 para el par de Gelfand $(\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_{n-k} \times \mathbb{S}_k)$. ■

Consideremos el operador $D : \mathcal{F}^{n-k,k} \longrightarrow \mathcal{F}^{n-k+1,k-1}$ definido como

$$(Df)(x) = \sum_{y \in X^{(n,k)} : x \subset y} f(y)$$

y el operador adjunto $D^* : \mathcal{F}^{n-k+1,k-1} \longrightarrow \mathcal{F}^{n-k,k}$ definido como

$$(D^*f)(y) = \sum_{x \in X^{(n,k-1)} : x \subset y} f(x).$$

No es difícil de mostrar que para todo $f_1 \in \mathcal{F}^{n-k,k}$ y $f_2 \in \mathcal{F}^{n-k+1,k-1}$ se cumple que

$$\langle Df_1, f_2 \rangle_{\mathcal{F}^{n-k+1,k-1}} = \langle f_1, D^*f_2 \rangle_{\mathcal{F}^{n-k,k}}.$$

Definición 1.6.10. Para $0 < k \leq [n/2]$ definimos el subespacio $S^{n-k,k}$ de $\mathcal{F}^{n-k,k}$ como

$$S^{n-k,k} = Nu(D) = \{f \in \mathcal{F}^{n-k,k} : Df = 0\}$$

y $S^{n,0} = \mathcal{F}^{n,0}$.

Estos subespacios cumplen las siguientes propiedades.

Teorema 1.6.11. *Se cumple que:*

a) Para $0 < m \leq [n/2]$

$$\dim(S^{n-m,m}) = \binom{n}{m} - \binom{n}{m-1}.$$

b) Para $0 \leq k \leq n$

$$\mathcal{F}^{n-k,k} = \bigoplus_{i=0}^{\min\{n-k,k\}} (D^*)^{k-i} S^{n-i,i} \cong \bigoplus_{i=0}^{\min\{n-k,k\}} S^{n-i,i}.$$

Demostración. Primero observemos que la descomposición

$$\mathcal{F}^{n-1,1} = S^{n-1,1} \oplus D^* S^{n,0} \tag{1.4}$$

coincide con la descomposición en funciones constantes y funciones de media cero.

Por otro lado, una función $f_1 \in \mathcal{F}^{n-k,k}$ pertenece a $S^{n-k,k}$ si y sólo si

$$0 = \langle Df_1, f_2 \rangle_{\mathcal{F}^{n-k+1,k-1}} = \langle f_1, D^* f_2 \rangle_{\mathcal{F}^{n-k,k}}$$

para toda $f_2 \in \mathcal{F}^{n-k-1,k-1}$. Así tenemos que

$$\mathcal{F}^{n-k,k} = S^{n-k,k} \oplus D^* \mathcal{F}^{n-k+1,k-1}. \tag{1.5}$$

Luego b) se obtiene por inducción en k utilizando las descomposiciones (1.4) y (1.5).

Por la inyectividad de D^* y la descomposición (1.5), para $0 < m \leq [n/2]$ tenemos que

$$\begin{aligned} \dim(S^{n-m,m}) &= \dim(\mathcal{F}^{n-k,k} \cap Nu(D)) = \dim(\mathcal{F}^{n-m,m}) - \dim(D^* \mathcal{F}^{n-m+1,m-1}) \\ &= \dim(\mathcal{F}^{n-m,m}) - \dim(\mathcal{F}^{n-m+1,m-1}) = \binom{n}{m} - \binom{n}{m-1}. \end{aligned}$$

Así hemos demostrado a). ■

Observemos que para $k \leq [n/2]$, un $(n-k, k)$ -tabloide está unívocamente caracterizado por los k valores que aparecen en la segunda fila

$$x = \{i_1, \dots, i_k\} \quad \longleftrightarrow \quad \{t_x\} = \frac{\overline{j_1 \ \cdots \ j_k \ \cdots \ j_{n-k}}}{\underline{i_1 \ \cdots \ i_k}}.$$

Así $M^{(n-k,k)}$, el espacio vectorial sobre \mathbb{C} cuya base son los $(n-k, k)$ -tabloides, es isomorfo al espacio $\mathcal{F}^{n-k,k}$ de funciones en el conjunto de vértices del grafo de Johnson $J(n, k)$. Dicho isomorfismo es:

$$\gamma : M^{(n-k,k)} \longrightarrow \mathcal{F}^{n-k,k} \quad / \quad \gamma \left(\sum_{x \in X(n,k)} c_x \{t_x\} \right) = \sum_{x \in X(n,k)} c_x \delta_x.$$

El siguiente teorema caracteriza las representaciones irreducibles que aparecen en la descomposición de $\mathcal{F}^{n-k,k}$.

Teorema 1.6.12. *Sea $s = \min\{k, n-k\}$. La descomposición del espacio $\mathcal{F}^{n-k,k}$ está dada por*

$$\mathcal{F}^{n-k,k} = \bigoplus_{i=0}^s V_{\alpha_i}$$

donde α_i es un diagrama de Young de forma $(n-i, i)$.

Demostración. Para cada politabloide e_t perteneciente al módulo de Specht $S^{(n-k,k)}$

se cumple que $\gamma(e_i)$ pertenece al núcleo del operador D , es decir

$$\gamma(S^{(n-k,k)}) \subseteq \text{Nu}(D) = S^{n-k,k}.$$

Y como las dimensiones de $S^{(n-k,k)}$ y $S^{n-k,k}$ coinciden (ver Ejemplo 1.2.27 y Teorema 1.6.11), tenemos que $\gamma(S^{(n-k,k)}) = S^{n-k,k}$. Así cada subespacio $S^{n-i,i}$ define una representación irreducible de \mathbb{S}_n que está parametrizada por un diagrama de Young de forma $(n-i, i)$. Luego es inmediato a partir del Teorema 1.6.11 que

$$\mathcal{F}^{n-k,k} = \bigoplus_{i=0}^s V_{\alpha_i}$$

donde $s = \min\{k, n-k\}$ y α_i es un diagrama de Young de forma $(n-i, i)$. ■

Ejemplo 1.6.13. Las representaciones irreducibles que aparecen en la descomposición del espacio $\mathcal{F}^{4,2}$ (espacio de funciones en los vértices del grafo $J(6, 2)$) están parametrizadas por los siguientes diagramas de Young:

$$\lambda: \quad \begin{array}{c} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \\ (6, 0) \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \\ \boxed{} \\ (5, 1) \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \\ \boxed{} \boxed{} \\ (4, 2) \end{array} .$$

Capítulo 2

Una Transformada de Fourier

Rápida para $J(n, k)$

2.1. Bases de Gelfand-Tsetlin

Las bases de Gelfand-Tsetlin fueron definidas por I. M. Gelfand y M. L. Tsetlin en la década del cincuenta para los grupos de matrices unitarias $SU(n, \mathbb{F})$ en [19] y para los grupos de matrices ortogonales $SO(n, \mathbb{F})$ en [20]. Estas ideas fueron generalizadas por A. M. Vershik y S. V. Kerov para familias inductivas de álgebras [39].

2.1.1. Bases de Gelfand-Tsetlin para representaciones del grupo \mathbb{S}_n

Sean $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ y sea \mathbb{S}_k el subgrupo de \mathbb{S}_n formado por las permutaciones que fijan los últimos $n - k$ elementos de \mathbb{I}_n . Consideremos la cadena inductiva de subgrupos

$$\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{S}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{S}_n \subset \cdots .$$

Para $i = 1, 2, \dots$ notaremos $Irr(i)$ al conjunto de clases de equivalencia de representaciones irreducibles complejas de \mathbb{S}_i . Un resultado fundamental de la teoría de

representaciones del grupo simétrico, que hemos enunciado en el Teorema 1.2.31, establece que si V_λ es un \mathbb{S}_n -módulo irreducible correspondiente a la representación $\lambda \in Irr(n)$ y consideramos su restricción como un \mathbb{S}_{n-1} -módulo, entonces éste se descompone libre de multiplicidad como suma de \mathbb{S}_{n-1} -módulos irreducibles, los cuales están bien identificados. Es decir, que si V_μ es un \mathbb{S}_{n-1} -módulo irreducible correspondiente a la representación $\mu \in Irr(n-1)$, entonces la dimensión del espacio $\text{Hom}_{\mathbb{S}_{n-1}}(V_\mu, V_\lambda)$ es 0 ó 1. Este hecho nos permite definir el siguiente grafo infinito.

Definición 2.1.1. Definimos el **grafo de ramificación** o **diagrama de Bratteli** de la cadena

$$\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{S}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{S}_n \subset \cdots$$

al siguiente grafo dirigido: el conjunto de vértices es la unión disjunta

$$\bigsqcup_{i \geq 1} Irr(i).$$

y dadas dos representaciones $\lambda \in Irr(i)$ y $\mu \in Irr(i-1)$, hay una conexión de μ a λ si y sólo si la dimensión del espacio $\text{Hom}_{\mathbb{S}_{i-1}}(V_\mu, V_\lambda)$ es 1, es decir, si V_μ aparece en la descomposición de V_λ como un \mathbb{S}_{i-1} -módulo.

Notaremos

$$\mu \nearrow \lambda$$

si $\mu \in Irr(i-1)$, $\lambda \in Irr(i)$ y la dimensión del espacio $\text{Hom}_{\mathbb{S}_{i-1}}(V_\mu, V_\lambda)$ es 1, es decir, hay una conexión de μ a λ en el grafo de ramificación; y

$$\mu \subset \lambda$$

si $\mu \in Irr(k)$, $\lambda \in Irr(n)$ y la dimensión del espacio $\text{Hom}_{\mathbb{S}_k}(V_\mu, V_\lambda)$ no es cero, es decir existe un camino creciente que conecta μ y λ en el grafo de ramificación.

Para cada \mathbb{S}_n -módulo irreducible V_λ , tenemos una descomposición canónica como

suma de \mathbb{S}_{n-1} -módulos irreducibles

$$V_\lambda = \bigoplus_{\mu \nearrow \lambda} V_\mu.$$

Aplicando esta descomposición iterativamente, queda determinada en forma única una descomposición de V_λ en subespacios de dimensión uno. A saber

$$V_\lambda = \bigoplus_T V_T,$$

donde la suma directa está indexada por todas las posibles cadenas

$$T = \lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \cdots \nearrow \lambda_n,$$

con $\lambda_i \in \text{Irr}(i)$ y $\lambda_n = \lambda$. Observemos que estas cadenas están representadas por los distintos caminos crecientes en el grafo de ramificación, desde \emptyset hasta λ . Si elegimos un vector no nulo v_T de cada espacio unidimensional V_T obtenemos una base $\{v_T\}$ del \mathbb{S}_n -módulo irreducible V_λ .

Definición 2.1.2. Denominamos **base de Gelfand-Tsetlin** de V_λ a la base

$$B_\lambda = \{v_T : T = \lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \cdots \nearrow \lambda_n\}$$

del \mathbb{S}_n -módulo V_λ correspondiente a la representación $\lambda \in \text{Irr}(n)$.

El siguiente resultado es bien conocido y será de gran importancia en este trabajo. Dados $\lambda_i \in \text{Irr}(i)$ y $\lambda_{i-1} \in \text{Irr}(i-1)$ notaremos λ_i/λ_{i-1} a la casilla en la que difieren los diagramas de Young $[\lambda_i]$ y $[\lambda_{i-1}]$.

Teorema 2.1.3. Sean V_λ un \mathbb{S}_n -módulo irreducible correspondiente a la representación $\lambda \in \text{Irr}(n)$, B_λ una base de Gelfand-Tsetlin de V_λ y E_λ el conjunto de tablas

de Young estándar de forma λ . Entonces la correspondencia

$$\sigma : B_\lambda \rightarrow E_\lambda \quad / \quad \sigma(v_T) = t,$$

donde $T = \lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \cdots \nearrow \lambda_n$ y t es una tabla de Young de forma λ que en la casilla λ_i/λ_{i-1} contiene el valor i , es una biyección.

Demostración. La biyección que existe entre el conjunto de diagramas de Young de n casillas y el conjunto $Irr(n)$ de representaciones irreducibles del grupo \mathbb{S}_n , induce un isomorfismo de grafos entre el grafo de ramificación (ver Definición 2.1.1) y el grafo de Young (ver Definición 1.2.32). Como además cada camino creciente en el grafo de Young, que comienza en el diagrama que tiene una sola casilla y termina en el diagrama $[\lambda]$, puede ser representado por una única tabla de Young estándar de forma λ (ver Observación 1.2.33), entonces $\sigma : B_\lambda \rightarrow E_\lambda \quad / \quad \sigma(v_T) = t$ es una correspondencia biyectiva. ■

Observemos que si V es una representación libre de multiplicidad de \mathbb{S}_n , uniendo las bases de Gelfand-Tsetlin de los \mathbb{S}_n -módulos irreducibles que aparecen en la descomposición de V , queda unívocamente determinada, salvo escalares, una base para V que formalizamos en la siguiente definición.

Definición 2.1.4. Sea V una representación de \mathbb{S}_n libre de multiplicidad tal que

$$V = \bigoplus_{\lambda \in S \subseteq Irr(n)} V_\lambda.$$

y B_λ una base de Gelfand-Tsetlin de V_λ . Entonces

$$B = \bigsqcup_{\lambda \in S \subseteq Irr(n)} B_\lambda$$

es una base de V que denominaremos **base de Gelfand-Tsetlin de V** .

Corolario 2.1.5. *Sea V una representación de \mathbb{S}_n libre de multiplicidad y B una base de Gelfand-Tsetlin de V como en la Definición 2.1.4. Entonces existe una correspondencia biyectiva entre B y el conjunto de tablas de Young estándar de tipo $\lambda \in S$.*

Demostración. Es inmediata por el Teorema 2.1.3 y la Definición 2.1.4. ■

2.1.2. Base de Gelfand-Tsetlin del espacio de funciones sobre el grafo de Johnson

El Teorema 1.6.12 nos permite asegurar que el espacio de funciones \mathcal{F} para el grafo de Johnson $J(n, k)$, tiene bien definida, salvo escalares, una base de Gelfand-Tsetlin, que notaremos B_n . A continuación daremos una descripción más detallada de esta base.

Corolario 2.1.6. *La base de Gelfand-Tsetlin B_n del espacio \mathcal{F} está en correspondencia biyectiva con el conjunto de tablas de Young estándar de forma $(n - a, a)$ para $a = 0, 1, \dots, s = \min\{k, n - k\}$.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Corolario 2.1.5 y del Teorema 1.6.12. ■

Consideremos el espacio \mathcal{F} como un \mathbb{S}_i -módulo para $i = 1, \dots, n$, y sea $\mathcal{F}_{i,\lambda}$ la componente isotípica correspondiente a la representación irreducible λ de \mathbb{S}_i . Así, para cada i tenemos la descomposición

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{\lambda \in \text{Irr}(\mathbb{S}_i)} \mathcal{F}_{i,\lambda}$$

donde $\mathcal{F}_{i,\lambda} \perp \mathcal{F}_{i,\lambda'}$ si $\lambda \neq \lambda'$.

2.1 Bases de Gelfand-Tsetlin

Para cada tabla de Young estándar $T = \lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \cdots \nearrow \lambda_n$ consideremos el espacio

$$\mathcal{F}_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} = \mathcal{F}_{1, \lambda_1} \cap \mathcal{F}_{2, \lambda_2} \cap \cdots \cap \mathcal{F}_{n, \lambda_n}.$$

Entonces por Corolario 2.1.6 podemos asegurar que el espacio \mathcal{F} tiene una descomposición ortogonal en subespacios de dimensión uno

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{\lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \cdots \nearrow \lambda_n} \mathcal{F}_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$$

donde λ_n corre a través de todas las representaciones de \mathbb{S}_n correspondiente a los diagramas de Young de forma $(n - a, a)$ para $a = 0, \dots, s = \min\{k, n - k\}$ (ver Figura 2.1).

Así la Base de Gelfand-Tsetlin B_n del espacio \mathcal{F} queda determinada eligiendo un vector no nulo v_T de cada espacio $\mathcal{F}_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$.

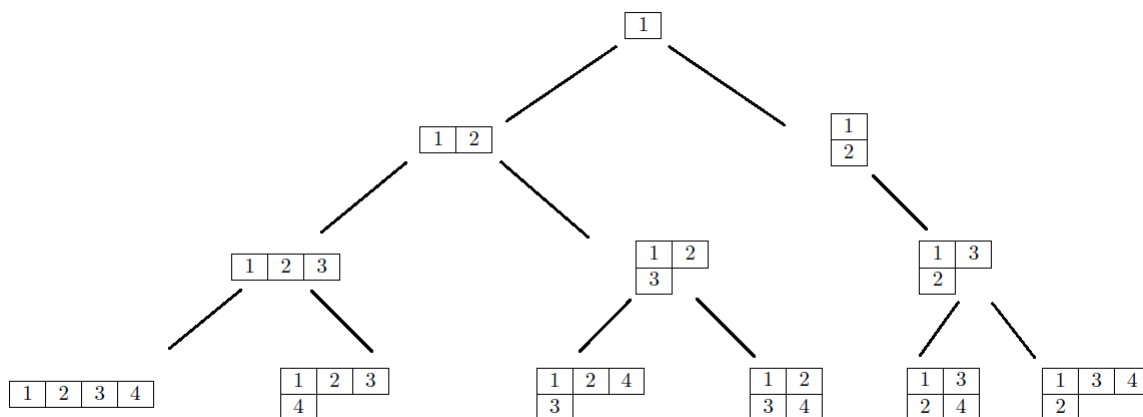


Figura 2.1: Las hojas de este árbol parametrizan la base Gelfand-Tsetlin del espacio de funciones \mathcal{F} para $J(4, 2)$.

2.2. Transformada de Fourier para el grafo de Johnson

En adelante consideramos $N = \binom{n}{k}$. El espacio \mathcal{F} de funciones a valores complejos en el conjunto de vértices del grafo de Johnson $J(n, k)$ tiene, al igual que el espacio de funciones a valores complejos en el grupo cíclico, dos bases ortogonales distinguidas: la *base Delta* B_0 y la *base de Gelfand-Tsetlin* B_n . Este hecho nos permitirá extender la definición de la Transformada de Fourier Discreta clásica para este nuevo espacio de funciones.

Una función f del espacio \mathcal{F} puede escribirse como combinación lineal de estas dos bases distinguidas

$$f = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \delta_x \quad y \quad f = \sum_{T=0}^{N-1} \hat{f}(T) v_T.$$

Definición 2.2.1. Sea $f \in \mathcal{F}$ como en el párrafo anterior. La transformación

$$\mathcal{T} : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N \quad / \quad \mathcal{T}(f(0), \dots, f(N-1)) = (\hat{f}(0), \dots, \hat{f}(N-1))$$

se denomina **Transformada de Fourier en el Grafo de Johnson** de la función f .

De manera análoga al caso clásico, el cómputo de la Transformada de Fourier en el Grafo de Johnson de una función f puede ser presentado como la multiplicación de la matriz cambio de base, de la base Delta a la base de Gelfand-Tsetlin, y el vector de coeficientes $(f(0), \dots, f(N-1))$. La matriz cambio de base, que notaremos $[\mathcal{T}]$, es de $N \times N$, por lo que el cálculo de la Transformada de Fourier de manera directa requiere a lo sumo N^2 operaciones aritméticas. El objetivo de esta sección es presentar un algoritmo eficiente, denominado Transformada de Fourier Rápida, para calcular la Transformada de Fourier en el Grafo de Johnson. El algoritmo se basa fundamentalmente en la construcción de ciertas bases ortogonales intermedias

$B_1 \dots B_{n-1}$ del espacio \mathcal{F} , de manera que la matriz $[\mathcal{T}]$ se expresa como producto de matrices ralas

$$[\mathcal{T}] = [B_{n-1}]_{B_n} \cdots [B_1]_{B_2} [B_0]_{B_1}.$$

donde $[B_i]_{B_{i+1}}$ es la matriz cambio de base de B_i a B_{i+1} .

2.2.1. Descomposiciones adaptadas de \mathcal{F}

Sea X el conjunto de los k -conjuntos. Cada elemento de X puede indentificarse con una palabra en el alfabeto $\{1, 2\}$ de la siguiente forma: el elemento $i \in \mathbb{I}_n$ pertenece al k -conjunto si y sólo si hay un 1 en el lugar i de la palabra y el elemento $i \in \mathbb{I}_n$ no pertenece al k -conjunto si y sólo si hay un 2 en el lugar i de la palabra.

Ejemplo 2.2.2. El k -conjunto $\{2, 3, 6, 8\} \subseteq \mathbb{I}_9$ se identifica con la palabra 211221212.

Notaremos $P^{(n,k)}$ al conjunto de palabras de longitud n en el alfabeto $\{1, 2\}$ cuya cantidad de unos es k . El grupo simétrico \mathbb{S}_n actúa de manera natural en $P^{(n,k)}$: si $i_1 \cdots i_n$ es una palabra de longitud n en el alfabeto $\{1, 2\}$ cuya cantidad de unos es k y $\sigma \in \mathbb{S}_n$ entonces

$$\sigma i_1 \cdots i_n = i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(n)}.$$

Para $1 \leq i \leq n$ el subgrupo \mathbb{S}_i actúa en las primeras i letras de cada palabra y deja fija las restantes $n - i$.

A partir de la identificación precedente queda establecida una correspondencia biyectiva entre el conjunto de k -conjuntos y el conjunto de palabras de longitud n en el alfabeto $\{1, 2\}$ cuya cantidad de unos es k . En adelante haremos uso implícito de esta identificación.

Para $i = 1, \dots, n$ y $c \in \{1, 2\}$, definimos $\mathcal{F}^{i,c}$ como el subespacio de \mathcal{F} generado por las funciones $\delta(x)$ tal que la palabra x tiene la letra c en el lugar i . Para cada i tenemos la descomposición

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{i,1} \oplus \mathcal{F}^{i,2}$$

con $\mathcal{F}^{i,1} \perp \mathcal{F}^{i,2}$.

Definición 2.2.3. Para $q = 1, \dots, n$ sea $c_q c_{q+1} \dots c_n$ una palabra en el alfabeto $\{1, 2\}$ y para $q = n + 1$, $c_q c_{q+1} \dots c_n$ denota la palabra sin letras. Para $q = 1, \dots, n$ definimos $\mathcal{F}^{c_q c_{q+1} \dots c_n}$ como el subespacio de \mathcal{F}

$$\mathcal{F}^{c_q c_{q+1} \dots c_n} = \mathcal{F}^{q, c_q} \cap \mathcal{F}^{q+1, c_{q+1}} \cap \dots \cap \mathcal{F}^{n, c_n}.$$

En el caso $q = n + 1$ nosotros consideramos $\mathcal{F}^{c_q c_{q+1} \dots c_n} = \mathcal{F}$.

Observemos que $\mathcal{F}^{c_q \dots c_n}$ no es el subespacio nulo si y sólo si la cantidad de letras 1 en la palabra $c_q \dots c_n$ es mayor o igual que $k - q + 1$ y menor o igual que k .

Definición 2.2.4. Para $q = 1, \dots, n$ definimos $X^{c_q \dots c_n}$ como el subconjunto de las palabras $w_1 \dots w_n$ en X , tal que $w_q \dots w_n$ es $c_q \dots c_n$. Para $q = n + 1$ establecemos $X^{c_q \dots c_n} = X$.

Observemos que cada subconjunto $X^{c_q \dots c_n}$ es estabilizado por la acción del subgrupo \mathbb{S}_{q-1} . Así tenemos la siguiente descomposición de $\mathcal{F}^{c_q \dots c_n}$:

$$\mathcal{F}^{c_q \dots c_n} = \bigoplus_{w_1 \dots w_n \in X^{c_q \dots c_n}} \mathbb{C} \delta(w_1 \dots w_n).$$

Definición 2.2.5. Para $q = 1, \dots, n$ definimos X_q como el conjunto de palabras $c_q \dots c_n$ donde la cantidad de letras 1 es mayor o igual que $k - q + 1$ y menor o igual que k . Para $q = n + 1$ establecemos X_q como el conjunto cuyo único elemento es la palabra sin letras.

Luego tenemos la siguiente descomposición de \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{c_q \dots c_n \in X_q} \mathcal{F}^{c_q \dots c_n} \tag{2.1}$$

y cada subespacio $\mathcal{F}^{c_q \dots c_n}$ es invariante por la acción de \mathbb{S}_{q-1} .

Definición 2.2.6. Para $1 \leq p < q \leq n + 1$ definimos el subespacio $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^{c_q \dots c_n}$ como

sigue:

$$\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^{c_q \dots c_n} = \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \cap \mathcal{F}^{c_q \dots c_n}.$$

Teorema 2.2.7. *Fijado $1 \leq q \leq n + 1$, el espacio \mathcal{F} se descompone en subespacios de dimensión uno como sigue:*

$$\mathcal{F} = \bigoplus \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{q-1}}^{c_q \dots c_n} \quad (2.2)$$

donde la suma corre a través de las tablas de Young estándar $\lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \dots \nearrow \lambda_{q-1}$ y palabras $c_q \dots c_n$ tales que el número de letras 1 es $k - r$, donde $0 \leq r \leq k$, y λ_{q-1} es un diagrama de Young de forma $(q - 1 - a, a)$ con $a = 0, \dots, \min\{r, q - 1 - r\}$.

Demostración. Supongamos que la letra 1 aparece $k - r$ veces en la palabra $c_q \dots c_n$, donde $0 \leq r \leq k$. Entonces el subconjunto $X^{c_q \dots c_n}$ está formado por todas las palabras $w_1 \dots w_n$ tal que $w_1 \dots w_{q-1}$ tiene r apariciones de la letra 1. Esto significa que $X^{c_q \dots c_n}$ tiene estructura de grafo de Johnson $J(q - 1, r)$ y, cuando actúa sobre éste el subgrupo \mathbb{S}_{q-1} , el espacio de funciones a valores complejos en $X^{c_q \dots c_n}$, se descompone libre de multiplicidad como un \mathbb{S}_{q-1} -módulo de acuerdo a lo establecido por el Teorema 1.6.12. Como consecuencia, cada subespacio $\mathcal{F}^{c_q \dots c_n}$ tiene una descomposición de Gelfand-Tsetlin en subespacios ortogonales de dimensión uno

$$\mathcal{F}^{c_q \dots c_n} = \bigoplus_{\lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \dots \nearrow \lambda_{q-1}} \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{q-1}}^{c_q \dots c_n} \quad (2.3)$$

donde λ_{q-1} corre bajo todos los diagramas de Young de forma $(q - 1 - a, a)$ con $0 \leq a \leq \min\{r, q - 1 - r\}$. Luego el teorema sigue desde (2.1). ■

Teorema 2.2.8. *Fijado $1 \leq p < q \leq n + 1$, el espacio \mathcal{F} tiene una descomposición ortogonal*

$$\mathcal{F} = \bigoplus \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^{c_q \dots c_n}$$

donde la suma corre a través de las tablas de Young estándar $\lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \dots \nearrow \lambda_p$

y palabras $c_q \dots c_n$ tales que el número de letras 1 es $k - r$, donde $0 \leq r \leq k$, y λ_p es un diagrama de Young de forma $(p - a, a)$ con $a = 0, \dots, \min\{r, q - 1 - r, p/2\}$.

Demostración. Fijado $c_q \dots c_n$, agrupamos los subespacios de dimensión uno $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{q-1}}^{c_q \dots c_n}$ que aparecen en la descomposición (2.3), según los diagramas de Young iniciales para particiones de p que definen la tabla de Young estándar $\lambda_1 \dots \lambda_{q-1}$, y así obtenemos la descomposición

$$\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^{c_q \dots c_n} = \bigoplus_{\lambda_{p+1} \nearrow \lambda_{p+2} \nearrow \dots \nearrow \lambda_{q-1}} \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{q-1}}^{c_q \dots c_n}$$

donde la suma directa corre a través de todos los diagramas de Young $\lambda_{p+1} \lambda_{p+2} \dots \lambda_{q-1}$ tal que $\lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \dots \nearrow \lambda_{q-1}$ es una tabla de Young estándar, siendo λ_{q-1} un diagrama de Young de forma $(q - 1 - a', a')$ con $0 \leq a' \leq \min\{r, q - 1 - r\}$.

Luego obtenemos la descomposición

$$\mathcal{F}^{c_q \dots c_n} = \bigoplus_{\lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \dots \nearrow \lambda_p} \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^{c_q \dots c_n} \quad (2.4)$$

donde $\lambda_1 \dots \lambda_p$ corre a través de todas las secuencias de diagramas de Young para los cuales hay una secuencia $\lambda_{p+1} \dots \lambda_{q-1}$ tal que $\lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \dots \nearrow \lambda_{q-1}$ es una tabla de Young estándar de forma $(q - 1 - a', a')$ con $0 \leq a' \leq \min\{r, q - 1 - r\}$. La secuencia $\lambda_1 \dots \lambda_p$ se caracteriza como aquella secuencia $\lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \dots \nearrow \lambda_p$ que es una tabla de Young estándar de forma $(p - a, a)$ con $0 \leq a \leq \min\{r, q - 1 - r, p/2\}$. Luego de (2.1) y (2.4) obtenemos el teorema. ■

2.2.2. Matrices diagonal por bloques

Cuando T es un operador lineal en un espacio vectorial V de dimensión finita y B es una base de V , denotamos $[T]_B$ a la matriz cuyas columnas son las coordenadas en la base B de los vectores que resultan de la transformación de los elementos de dicha base por T .

Definición 2.2.9. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Para $i = 1, \dots, n$ sean V_i subespacios de V tales que

$$V = \bigoplus_{i=1}^n V_i.$$

Diremos que una base B de V está adaptada a la descomposición, si todo elemento de B pertenece a V_i para algún i . Diremos que un endomorfismo T de V está adaptado a la descomposición si cada subespacio V_i es T -invariante.

En orden de establecer la validez de las matrices cambio de base, utilizaremos el siguiente resultado simple de álgebra lineal.

Lema 2.2.10. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con una descomposición en suma directa $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$. Sean B y B' dos bases de V , ambas adaptadas a esta descomposición y sea T un endomorfismo de V adaptado a la descomposición. Entonces*

- a) *Hay un orden para los elementos de las bases B y B' tal que la matriz cambio de base $[B]_{B'}$ es diagonal por bloques, con un bloque de tamaño $\dim(V_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$.*
- b) *Hay un orden en la base B tal que la matriz $[T]_B$ es diagonal por bloques, con un bloque de tamaño $\dim(V_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$.*

2.2.3. Bases Intermedias

Sea $0 \leq i \leq n$. Como observamos en la demostración del Teorema 2.2.7, el conjunto $X^{c_{i+1} \dots c_n}$ tiene la estructura de grafo de Johnson $J(i, r)$ donde $k - r$ es el número de letras 1 en la palabra $c_{i+1} \dots c_n$. Y cuando actúa sobre este conjunto el subgrupo \mathbb{S}_i , el espacio $\mathcal{F}^{c_{i+1} \dots c_n}$ se descompone como un \mathbb{S}_i -módulo libre de multiplicidad según la fórmula del Teorema 1.6.12. Como consecuencia, cada subespacio $\mathcal{F}^{c_{i+1} \dots c_n}$ tiene una descomposición de Gelfand-Tsetlin en subespacios ortogonales de

dimensión uno

$$\mathcal{F}^{c_{i+1}\dots c_n} = \bigoplus_{\lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \dots \nearrow \lambda_i} \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_i}^{c_{i+1}\dots c_n} \quad (2.5)$$

donde λ_i corre a través de todos los diagramas de Young de forma $(i - a, a)$, siendo $0 \leq a \leq \min\{r, i - r\}$. Sea $B^{c_{i+1}\dots c_n}$ la única, salvo escalares, base de $\mathcal{F}^{c_{i+1}\dots c_n}$ adaptada a la descomposición (2.5). Luego el espacio \mathcal{F} se descompone en subespacios de dimensión uno como sigue

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{c_{i+1}\dots c_n \in X_{i+1}} \bigoplus_{\lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \dots \nearrow \lambda_i} \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_i}^{c_{i+1}\dots c_n}. \quad (2.6)$$

Definición 2.2.11. Definimos la *i*-th base intermedia de \mathcal{F} como la única, salvo escalares, base B_i de \mathcal{F} adaptada a la descomposición (2.6).

Así

$$B_i = \bigsqcup_{c_{i+1}\dots c_n \in X_{i+1}} B^{c_{i+1}\dots c_n}.$$

Del Teorema 1.6.12, tenemos que la base $B^{c_{i+1}\dots c_n}$ está parametrizada por el conjunto de tablas estándar de forma $(i - a, a)$ con $0 \leq a \leq \min\{r, i - r\}$. Por otro lado, la palabra $c_{i+1} \dots c_n$ corre a través del conjunto X_i . Así la *i*-ésima base intermedia B_i queda parametrizada por las duplas conformadas por una tabla de Young estándar de forma $(i - a, a)$ con $0 \leq a \leq \min\{r, i - r\}$ y una palabra en el alfabeto $\{1, 2\}$ de longitud $n - i$ y cuya cantidad de letras 1 es a lo sumo k . La Figura 2.2 ilustra la estructura de las bases intermedias.

Ejemplo 2.2.12. A continuación describiremos la parametrización de la segunda base intermedia del espacio de funciones \mathcal{F} en el conjunto de vértices del grafo de Johnson $J(4, 2)$. X_2 es el conjunto de palabras en el alfabeto $\{1, 2\}$ de longitud dos con a lo sumo dos letras 1, por lo que $X_2 = \{11, 21, 12, 22\}$.

Si $w = 11$ entonces $X^w = \{2211\}$ y las tablas de Young estándar que aparecen son de forma $(2, 0)$.

Si $w = 21$ entonces $X^w = \{2121, 1221\}$ y las tablas de Young estándar que

Base B_0	Base B_1	Base B_2	Base B_3	Base B_4
2211	$\boxed{1}$ 211	$\boxed{1 \ 2}$ 11	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ 1	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$
2121	$\boxed{1}$ 121	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$ 21	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$ 1	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$
1221	$\boxed{1}$ 221	$\boxed{1 \ 2}$ 21	$\boxed{1 \ 2 \ 3}$ 1	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$
2112	$\boxed{1}$ 112	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$ 12	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$ 2	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$
1212	$\boxed{1}$ 212	$\boxed{1 \ 2}$ 12	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ 2	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$
1122	$\boxed{1}$ 122	$\boxed{1 \ 2}$ 22	$\boxed{1 \ 2 \ 3}$ 2	$\boxed{1 \ 2 \ 3 \ 4}$

Figura 2.2: Parametrización de las bases intermedias para $n = 4$ y $k = 2$. Los recuadros en cada columna representan la descomposición $B_i = \sqcup B^{c_{i+1} \dots c_n}$.

aparecen son de forma $(1, 1)$ y $(2, 0)$.

Si $w = 12$ entonces $X^w = \{2112, 1212\}$ y las tablas de Young estándar que aparecen son de forma $(1, 1)$ y $(2, 0)$.

Si $w = 22$ entonces $X^w = \{1122\}$ y las tablas de Young estándar que aparecen son de forma $(2, 0)$.

Lema 2.2.13. Para $1 \leq p \leq i < q \leq n + 1$, la base intermedia B_i está adaptada a la descomposición dada en el Teorema 2.2.8

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{\lambda_1 \dots \lambda_p} \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^{c_q \dots c_n}.$$

Demostración. A partir de la definición de los subespacios $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^{c_q \dots c_n}$ es claro que si

$1 \leq p \leq p' < q' \leq q \leq n + 1$ entonces

$$\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{p'}}^{c_{q'} \dots c_n} \subseteq \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^{c_q \dots c_n}.$$

Debido a que cada elemento de la base B_i está en uno de los subespacios de la forma $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_i}^{c_{i+1} \dots c_n}$, el lema se deduce del caso $p' = i$ y $q' = i + 1$. ■

2.2.4. Ralidad de las matrices cambio de base

En esta subsección probaremos que, para todo i , cada columna de la matriz cambio de base $[B_i]_{B_{i-1}}$ tiene a lo sumo dos entradas no nulas. Más aún, probaremos que si las bases intermedias están adecuadamente ordenadas, las matrices $[B_i]_{B_{i-1}}$ son diagonal por bloques, con bloques de tamaño a lo sumo dos.

Teorema 2.2.14. *Existe un orden para la base B_i y un orden para la base B_{i-1} tal que la matriz cambio de base $[B_i]_{B_{i-1}}$ es diagonal por bloque, con todos los bloques de tamaño a lo sumo dos.*

Demostración. Por el Lema 2.2.13, ambas bases B_i y B_{i-1} están adaptadas a la descomposición

$$\mathcal{F} = \bigoplus \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{c_{i+1} \dots c_n},$$

es decir, están adaptadas a la descomposición dada en el Teorema 2.2.8 con $p = i - 1$ y $q = i + 1$. Observemos que el subespacio $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{c_{i+1} \dots c_n}$ tiene dimensión a lo sumo dos, ya que este está generado por los subespacios $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{1c_{i+1} \dots c_n}$ y $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{2c_{i+1} \dots c_n}$ y, según el Teorema 2.2.7, estos subespacios tienen dimensión a lo sumo uno. Entonces el teorema se sigue del Lema 2.2.10. ■

2.2.5. Conexión con el algoritmo de Robinson-Schensted

En las figuras 2.2 y 2.3 el orden vertical de las etiquetas en cada base intermedia fue elegido para simplificar el esquema y está relacionado con el algoritmo de inserción de Robinson-Schensted, que fue presentado en la Sección 1.3. A continuación explicamos con más detalle la relación que hay entre el orden de las etiquetas en las bases intermedias y el algoritmo de Robinson-Schensted.

En las etiquetas de la base B_0 el orden vertical, desde arriba hacia abajo, está dado por el orden lexicográfico de derecha a izquierda en $P^{(n,k)}$: si $w, w' \in P^{(n,k)}$ tal que $w = c_1 c_2 \cdots c_n$ y $w' = c'_1 c'_2 \cdots c'_n$, entonces $w < w'$ si existe i tal que $1 \leq i \leq n$ y

$$c_n = c'_n, c_{n-1} = c'_{n-1}, \dots, c_{i+1} = c'_{i+1} \quad \text{y} \quad c_i < c'_i.$$

Cada línea horizontal en las figuras, leída de izquierda a derecha, es una secuencia de tripletas

$$(P_0, Q_0, w_0), (P_1, Q_1, w_1), \dots, (P_n, Q_n, w_n)$$

donde $w_0 \in P^{(n,k)}$, (P_i, Q_i) es el par de tablas de Young que se obtienen en el paso i -ésimo al aplicar el algoritmo de Robinson-Schensted a la palabra w_0 y w_i es la palabra que queda al insertar las primeras i letras de w_0 .

Como $w_0 \in P^{(n,k)}$, las tablas de Young semiestándar P_i para $1 \leq i \leq n$, tienen a lo sumo dos filas y sus casillas contienen letras del alfabeto $\{1, 2\}$, en la que los 1's aparecen sólo en las primeras casillas de la primera fila. Como consecuencia de este hecho cada tripleta (P_i, Q_i, w_i) queda únicamente determinada por el par (Q_i, w_i) , y así P_i puede ser omitida.

Ejemplo 2.2.15. Consideremos la etiqueta

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}, 12 \right)$$

de un elemento de la quinta base intermedia, para $n = 7$ y $k = 3$. Luego la tabla de

Young semiestándar que fue omitida tiene la forma

y está rellena con dos 1's en las primeras casillas de la primera fila y tres 2's en las restantes casillas. Así la tripleta asociada es

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}, 1 \ 2 \right).$$

Definición 2.2.16. Para $1 \leq i \leq n$, sea $b \in B_{i-1}$ y $b' \in B_i$. Diremos que b y b' están **S-relacionados** si ambos pertenecen al subespacio $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{c_{i+1} \dots c_n}$ para alguna tabla de Young estándar $\lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \dots \nearrow \lambda_{i-1}$ y alguna palabra c_{i+1}, \dots, c_n en el alfabeto $\{1, 2\}$ con a lo sumo k letras 1.

Definición 2.2.17. Sean $b \in B_{i-1}$ y $b' \in B_i$, diremos que b y b' están **RS-relacionados** si las etiquetas de b y b' forman parte de la misma secuencia, al aplicar el algoritmo de Robinson-Schensted a una palabra de $P^{(n,k)}$.

El siguiente teorema es un resultado de esta tesis. Básicamente establece una conexión entre un hecho puramente combinatorio y una construcción algebraica. Si bien este resultado no se utiliza para demostrar los resultados principales, inicialmente inspiró los mismos y desde el punto de vista intuitivo resulta de mucha utilidad.

Teorema 2.2.18. Sean $b \in B_{i-1}$ y $b' \in B_i$, tal que b y b' están RS-relacionados. Entonces b y b' están S-relacionados.

Demostración. Es inmediata a partir de la Definición 2.2.16 y la Definición 2.2.17.

■

2.2.6. Ejemplo

Consideremos el caso $n = 4$, $k = 2$. Para cada vector b de la base B_i , existe una única palabra $c_{i+1} \dots c_n \in X_{i+1}$ y una única tabla estándar $\lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \dots \nearrow \lambda_i$ tal que $b \in \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_i}^{c_{i+1} \dots c_n}$. Entonces b es combinación lineal de los elementos de B_{i-1} que pertenecen a los espacios $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{1c_{i+1} \dots c_n}$ y $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{2c_{i+1} \dots c_n}$. Luego las matrices $[B_i]_{B_{i-1}}$ tienen la siguiente forma:

$$[B_1]_{B_2} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix},$$

$$[B_2]_{B_3} = \begin{bmatrix} * & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

y

$$[B_3]_{B_4} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

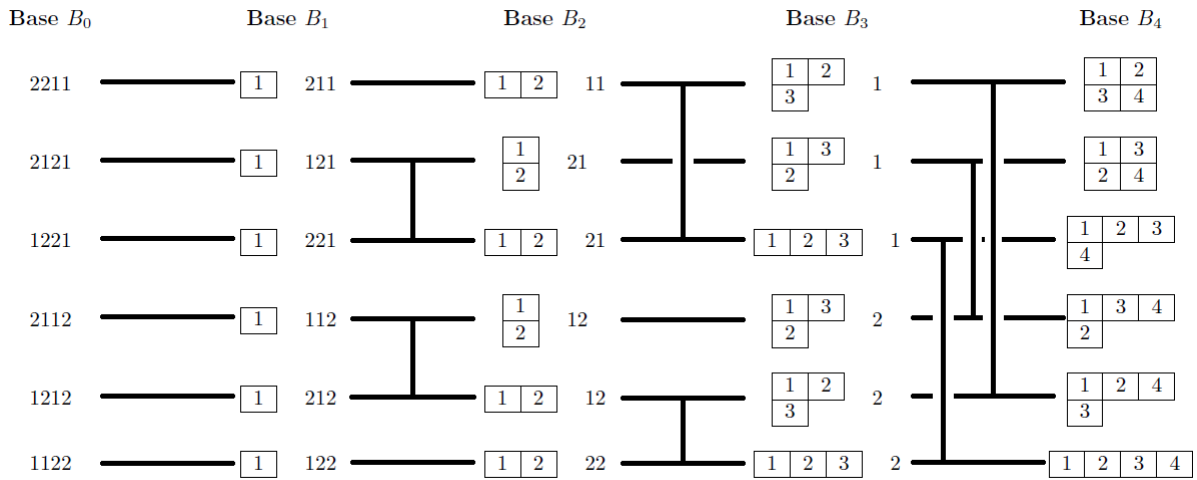


Figura 2.3: Una ilustración de la ralidad de las matrices cambio de base $[B_{i-1}]_{B_i}$ para $n = 4$ y $k = 2$. Cada $b \in B_{i-1}$ está conectado con un elemento $b' \in B_i$ si y sólo si ellos están S-relacionados. Dos etiquetas son adyacentes en forma horizontal si y sólo si ellos están RS-relacionados, es decir, cada fila corresponde al proceso dado por el algoritmo de inserción de Robinson-Schnsted.

2.3. Elementos de Young-Jucys-Murphy

Los elementos de Young-Jucys-Murphy fueron inicialmente introducidos por A. Young y redescubiertos en forma independiente por A. A. Jucys en [23] y por G. E. Murphy en [28].

Definición 2.3.1. Definimos los **elementos de Young-Jucys-Murphy**, como los elementos $J_i \in \mathbb{C}[\mathbb{S}_n]$ donde

$$J_1 = 0, \quad J_i = (1 \ i) + (2 \ i) + \dots + (i-1 \ i) \quad \text{con} \quad i = 2, \dots, n.$$

Para $i = 1, \dots, n$ consideremos el elemento $Z_i \in \mathbb{C}[\mathbb{S}_i]$ definido como la suma de las trasposiciones en \mathbb{S}_i , esto es,

$$Z_i = \sum_{j < k}^i (jk).$$

Observemos que

$$J_i = Z_i - Z_{i-1}. \quad (2.7)$$

Si bien cada Z_i pertenece al centro de $\mathbb{C}[\mathbb{S}_i]$, los elementos J_i no pertenecen a éste.

Notaremos s_i a la transposición $(i(i+1))$. Los YJM-elementos satisfacen la interesante y bien conocida relación de recurrencia

$$s_i J_i + 1 = J_{i+1} s_i, \quad (2.8)$$

la cual puede ser reescrita como

$$s_i J_i s_i + s_i = J_{i+1}. \quad (2.9)$$

Sea V una representación de \mathbb{S}_n , consideremos la estructura de $\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]$ -módulo en V e identificamos un elemento $A \in \mathbb{C}[\mathbb{S}_n]$ con el operador lineal

$$A : V \rightarrow V \quad / \quad A(v) = Av.$$

El siguiente resultado es conocido en la literatura (ver por ejemplo Sección 3 de [30]), pero aquí presentamos una demostración que no es tomada de ninguna referencia.

Teorema 2.3.2. *Sea V una representación libre de multiplicidad de \mathbb{S}_n . Entonces todo elemento de la base de Gelfand-Tsetlin de V es un autovector de J_i para todo $i \in \mathbb{I}_n$.*

Demostración. Sea b un elemento de la base de Gelfand-Tsetlin de V . Para $i = 1$ el resultado es trivial, por lo que consideremos $i \in \{2, \dots, n\}$. Luego el vector b pertenece a alguna componente isotópica H_i de la descomposición de V como una representación de \mathbb{S}_i .

Utilizaremos la siguiente caracterización de las componentes isotópicas. Sea $End(V)^{\mathbb{S}_i}$ el anillo de operadores de entrelazamiento, es decir, el conjunto de operadores li-

neales $Z \in \text{End}(V)$ tal que $ZJ = JZ$ para todo $J \in \mathbb{C}[\mathbb{S}_i]$. Observemos que V tiene una estructura natural de $\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]$ -módulo. Entonces un subespacio de V es una componente isotópica de la acción de \mathbb{S}_i si y sólo si es un elemento minimal en el retículo de subespacios que son simultáneamente un $\mathbb{C}[\mathbb{S}_i]$ -submódulo y un $\text{End}(V)^{\mathbb{S}_i}$ -submódulo de V .

Debido a que H_i es una componente isotópica, entonces este es un $\mathbb{C}[\mathbb{S}_i]$ -submódulo de V , y como $Z_i \in \mathbb{C}[\mathbb{S}_i]$ entonces H_i es invariante bajo la acción de Z_i . Sea H'_i un autoespacio de la restricción $Z_i : H_i \rightarrow H_i$ con autovalor α_i . Como $Z_i \in \text{End}(V)^{\mathbb{S}_i}$, para cualquier $J \in \mathbb{C}[\mathbb{S}_i]$ y cualquier $h \in H'_i$ tenemos que

$$Z_i(J(h)) = J(Z_i(h)) = \alpha_i J(h).$$

Esto muestra que H'_i es un $\mathbb{C}[\mathbb{S}_i]$ -submódulo de V .

Por otro lado, como $Z_i \in \mathbb{C}[\mathbb{S}_i]$, este conmuta con todos los elementos de $\text{End}(V)^{\mathbb{S}_i}$. Entonces para cualquier $J \in \text{End}(V)^{\mathbb{S}_i}$ y cualquier $h \in H'_i$ tenemos que

$$Z_i(J(h)) = J(Z_i(h)) = \alpha_i J(h).$$

Esto muestra que H'_i es un $\text{End}(V)^{\mathbb{S}_i}$ -submódulo de V . Así H'_i es simultáneamente un $\mathbb{C}[\mathbb{S}_i]$ -submódulo y un $\text{End}(V)^{\mathbb{S}_i}$ -submódulo de V , y $H'_i \subseteq H_i$. Por ser H_i una componente isotópica, H_i es minimal entre los subespacios con esta propiedad, entonces $H'_i = H_i$. Esto prueba que H_i es un autoespacio de Z_i . Debido a que $b \in H_i$, entonces b es un autovector de Z_i para todo $i \in \{2, \dots, n\}$. Luego utilizando la fórmula 2.7, es sencillo ver que b es también un autovector de J_i con autovalor $\alpha_i - \alpha_{i-1}$ para todo $i \in \{2, \dots, n\}$. ■

Corolario 2.3.3. *Para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq i$, el subespacio $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_i}^{c_{i+1} \dots c_n}$ de dimensión uno es invariante por la acción del elemento J_j .*

Demostración. De (2.3) tenemos que $\mathcal{F}^{c_{i+1} \dots c_n}$ es una representación libre de mul-

2.3 Elementos de Young-Jucys-Murphy

tiplicidad de \mathbb{S}_i tal que la descomposición de Gelfand-Tsetlin está dada por los subespacios $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_i}^{c_{i+1} \dots c_n}$. Luego por la Proposición 2.3.2 tenemos que estos subespacios están formados por autovectores de J_j para $j = 1, \dots, i$. ■

Definición 2.3.4. Sea V una representación de \mathbb{S}_n libre de multiplicidad tal que

$$V = \bigoplus_{\lambda \in S \subseteq \text{Irr}(n)} V_\lambda,$$

y b un vector de la base de Gelfand-Tsetlin de V . Notaremos

$$\alpha(b) = (\alpha_1(b), \dots, \alpha_n(b))$$

al vector perteneciente a \mathbb{C}^n tal que $\alpha_i(b)$ es el autovalor del i -ésimo elemento J_i asociado al autovector b ,

$$J_i b = \alpha_i(b) b$$

y lo llamaremos **el peso** de b . Notaremos

$$\text{Spec}(n) = \{\alpha(b) : b \text{ pertenece a la base de Gelfand-Tsetlin de } V\}$$

al **espectro** de los elementos Young-Jucys-Murphy.

Por la definición de la base de Gelfand-Tsetlin, es claro que existe una correspondencia biyectiva entre $\text{Spec}(n)$ y el conjunto de diagramas de Young estándar de tipo $\lambda \in S$. En [40] (Proposición 5.3 junto con el Teorema 5.8) se describe completamente esta correspondencia, dando una fórmula explícita para los autovalores $\alpha_i(b)$, que desarrollaremos a continuación.

Definición 2.3.5. Sea $\tau = (i, j)$ la casilla del diagrama de Young que se ubica en la fila i y la columna j . Se define el **contenido** de la casilla τ como

$$c(\tau) = j - i.$$

En la Figura 2.4 se pueden observar los contenidos de las distintas casillas de un diagrama de Young. Cada línea punteada oblicua pasa sobre las casillas del diagrama que tienen el mismo contenido.

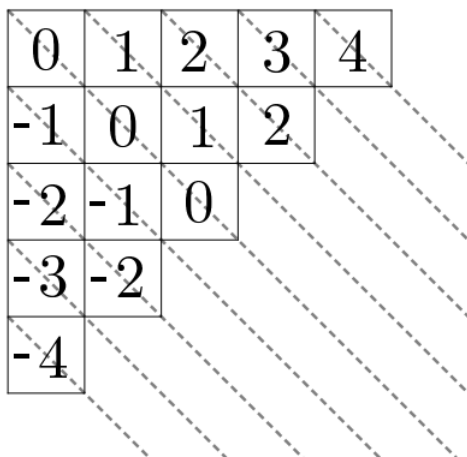


Figura 2.4: Ilustración de los contenidos de las distintas casillas de un diagrama de Young.

Sea T una tabla de Young estándar de forma $\lambda \vdash n$, para todo $i \in \mathbb{I}_n$ notaremos $c_T(i)$ al contenido de la i -ésima casilla de T , es decir al contenido de la casilla del diagrama Young λ que tiene escrito el número i .

Ejemplo 2.3.6. Consideremos la siguiente tabla de Young estándar

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 & 8 \\ \hline 2 & 5 & 7 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} .$$

Los contenidos de T son

$$\begin{aligned} c_T(1) = 0 \quad , \quad c_T(2) = -1 \quad , \quad c_T(3) = 1 \quad , \quad c_T(4) = -2 \\ c_T(5) = 0 \quad , \quad c_T(6) = 2 \quad , \quad c_T(7) = 1 \quad , \quad c_T(8) = 3. \end{aligned}$$

Sea $T = \lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \cdots \nearrow \lambda_n$ la tabla de Young estándar correspondiente al elemento b de la base de Gelfand-Tsetlin, es decir b pertenece al subespacio de

dimensión uno

$$\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = V_{1, \lambda_1} \cap \dots \cap V_{n, \lambda_n}$$

donde V_{i, λ_i} es la componente isotópica de la acción de \mathbb{S}_i en V correspondiente a la representación λ_i . Identificamos cada λ_i con su correspondiente diagrama de Young, siendo $\lambda_0 = \emptyset$. El diagrama de Young λ_i se obtiene de λ_{i-1} agregando simplemente una casilla

$$\square = \lambda_i / \lambda_{i-1}.$$

Teorema 2.3.7. *Sea V una representación de \mathbb{S}_n libre de multiplicidad y b un vector de la base de Gelfand-Tsetlin de V , entonces*

$$\alpha_i(b) = c_T(i) = c(\lambda_i / \lambda_{i-1}). \quad (2.10)$$

Demostración. Ver [40]. ■

Luego es claro que existe una correspondencia biyectiva entre la base de Gelfand-Tsetlin de V , el conjunto $Spec(n)$ y el conjunto de vectores en \mathbb{C}^n de la forma

$$(c(\lambda_1 / \lambda_0), \dots, c(\lambda_n / \lambda_{n-1})),$$

donde $\lambda_1 \nearrow \dots \nearrow \lambda_n$ es una tabla de Young estándar con λ_n en la descomposición de V .

Observación 2.3.8. Sea V una representación libre de multiplicidad de \mathbb{S}_n y $b \in \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ un vector de la base de Gelfand-Tsetlin de V . Una consecuencia inmediata del teorema precedente es que para todo $i \in \mathbb{I}_n$ se cumple que

$$J_i(b) = c(\lambda_i / \lambda_{i-1})b,$$

es decir, el autovalor del i -ésimo elemento Young-Jucys-Murphy asociado al vector b , es el contenido de la i -ésima casilla de la tabla de Young estándar $\lambda_1 \nearrow \dots \nearrow \lambda_n$.

Ejemplo 2.3.9. Sea V una representación libre de multiplicidad de \mathbb{S}_8 y b un vector de la base de Gelfand-Tsetlin de V tal que su tabla de Young estándar asociada es

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ \hline 2 & 5 & 8 & & \\ \hline \end{array},$$

entonces el vector contenido correspondiente es $(0,-1,1,2,0,3,4,2)$, y se cumple que

$$\begin{aligned} J_1(b) &= 0 \cdot b & , & & J_2(b) &= -1 \cdot b & , & & J_3(b) &= 1 \cdot b & , & & J_4(b) &= 2 \cdot b \\ J_5(b) &= 0 \cdot b & , & & J_6(b) &= 3 \cdot b & , & & J_7(b) &= 4 \cdot b & , & & J_8(b) &= 1 \cdot b. \end{aligned}$$

2.4. Construcción eficiente de las matrices cambio de base

Hemos demostrado en secciones anteriores que la Transformada de Fourier en el grafo de Johnson puede ser computada a partir de la sucesiva aplicación de las matrices $[B_{i-1}]_{B_i}$ para $i = 1, \dots, n$ y que existe un orden para las bases B_i y B_{i-1} tal que éstas matrices son diagonal por bloques, con todos los bloques de tamaño a lo sumo dos. En esta sección probaremos que la matriz $[B_{i+1}]_{B_i}$ puede ser computada a partir de $[B_i]_{B_{i-1}}$, utilizando $O(\binom{n}{k})$ operaciones. Este hecho nos permitirá computar la Transformada de Fourier en $O(n\binom{n}{k})$ operaciones.

Sea D_j la matriz que en el lugar kl tiene el producto escalar $\langle b_k, b_l \rangle$ de elementos de la base B_j . Notemos que D_j es una matriz diagonal. Computamos las matrices $[B_{i+1}]_{B_i}$, $[B_i]_{B_{i+1}}$ y D_{i+1} asumiendo que conocemos $[B_i]_{B_{i-1}}$, $[B_{i-1}]_{B_i}$ y D_i . Haremos esto en tres pasos. En el primer paso computamos la matriz $[J_{i+1}]_{B_i}$ asumiendo que conocemos las matrices $[B_i]_{B_{i-1}}$ y $[B_{i-1}]_{B_i}$. En el segundo paso computamos $[B_{i+1}]_{B_i}$ asumiendo que conocemos $[J_{i+1}]_{B_i}$. Y finalmente en el tercer paso computamos $[B_i]_{B_{i+1}}$ y D_{i+1} asumiendo que conocemos $[B_{i+1}]_{B_i}$ y D_i .

2.4.1. Primer paso: construcción de $[J_{i+1}]_{B_i}$ a partir de $[B_i]_{B_{i-1}}$ y $[B_{i-1}]_{B_i}$

Este primer paso se basa fundamentalmente en la fórmula de recurrencia (2.8) que cumplen los elementos Young-Jucys-Murphy, y que podemos reescribir de la siguiente forma

$$J_{i+1} = (s_i J_i + 1) s_i$$

2.4 Construcción eficiente de las matrices cambio de base

donde s_i es la transposición $(i(i+1))$ para $i = 1, \dots, n-1$. A partir de esta fórmula obtenemos las siguientes identidades

$$[J_{i+1}]_{B_i} = ([s_i]_{B_i} [J_i]_{B_i} + I) [s_i]_{B_i} \quad (2.11)$$

$$[s_i]_{B_i} = [B_{i-1}]_{B_i} [s_i]_{B_{i-1}} [B_i]_{B_{i-1}}. \quad (2.12)$$

Las ecuaciones (2.11) y (2.12) muestran que podemos computar $[J_{i+1}]_{B_i}$ a partir de $[B_i]_{B_{i-1}}$ y $[B_{i-1}]_{B_i}$, siempre que conozcamos las matrices $[s_i]_{B_{i-1}}$ y $[J_i]_{B_i}$. Por un lado, tenemos que $[s_i]_{B_{i-1}}$ es una matriz de permutación que podemos describir de manera simple en términos de las etiquetas de la base B_{i-1} . Por otro lado, tenemos que $[J_i]_{B_i}$ es una matriz diagonal cuyos elementos no nulos son los autovalores de J_i y que quedan determinados por la fórmula (2.10).

Una vez que hemos computado $[s_i]_{B_{i-1}}$, $[J_i]_{B_i}$, $[B_i]_{B_{i-1}}$ y $[B_{i-1}]_{B_i}$ podemos computar $[J_{i+1}]_{B_i}$ a partir de (2.11) and (2.12) utilizando $O(\binom{n}{k})$ operaciones. El punto clave es que todos los operadores y bases involucrados en estas ecuaciones están adaptados a la descomposición

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}} \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{c_{i+2} \dots c_n} \quad (2.13)$$

es decir están adaptados a la descomposición presentada en el Teorema 2.2.8 con $p = i - 1$ y $q = i + 2$ (ver Figura 2.5). Debido a que cada subespacio en esta descomposición tiene dimensión a lo sumo 4, utilizando el Lema 2.2.10 tenemos que si las bases B_i y B_{i-1} están adecuadamente ordenadas, todas las matrices que aparecen en (2.11) y (2.12) son diagonal por bloques, con bloques de tamaño a lo sumo 4. A continuación probaremos estos resultados.

Lema 2.4.1. *Para $i = 1, \dots, n-1$ sea*

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}} \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{c_{i+2} \dots c_n}$$

2.4 Construcción eficiente de las matrices cambio de base

Base B_2		Base B_3		Base B_4	
$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$	211	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$	11	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$	1
$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$	121	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$	21	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$	1
$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$	221	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$	21	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$	1
$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$	221	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$	21	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$	1
$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$	112	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$	12	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$	2
$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$	212	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$	12	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$	2
$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$	212	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$	12	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$	2
$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$	122	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$	22	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$	2
$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$	122	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$	22	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$	2
$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$	222	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$	22	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$	2

Figura 2.5: Una ilustración para el caso $n = 5$, $k = 2$, $i = 3$. Las tres bases B_{i-1} , B_i y B_{i+1} están adaptadas a la descomposición $\bigoplus \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{c_{i+2} \dots c_n}$. Cada elemento de estas bases está coloreado según al subespacio de la descomposición al que pertenece.

la descomposición presentada en el Teorema 2.2.8 con $p = i - 1$ y $q = i + 2$. Entonces:

- La dimensión de cada subespacio $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{c_{i+2} \dots c_n}$ es a lo sumo 4.
- Los operadores s_i y J_i están adaptados a esta descomposición.
- Las bases B_{i-1} , B_i y B_{i+1} están adaptadas a esta descomposición.

Demostración. Para a) observemos que el subespacio $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{c_{i+2} \dots c_n}$ es suma directa de los siguientes cuatro subespacios

$$\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{11c_{i+2} \dots c_n}, \quad \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{12c_{i+2} \dots c_n}, \quad \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{21c_{i+2} \dots c_n}, \quad \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{22c_{i+2} \dots c_n} \quad (2.14)$$

y por Teorema 2.2.7 cada uno de estos subespacios tiene dimensión a lo sumo uno.

Para *b*) observemos que el operador s_i actúa intercambiando los subespacios dados en (2.14), por lo que el espacio $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{c_{i+2} \dots c_n}$ es invariante por s_i . Por otro lado, observemos que $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{c_{i+2} \dots c_n}$ se descompone como suma directa de subespacios de la forma $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1} \lambda}^c$ donde λ es un diagrama de Young y c es una letra en el alfabeto $\{1, 2\}$. Por el Corolario 2.3.3 tenemos que cada uno de estos últimos subespacios son invariantes por el operador J_i , por lo que el espacio $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{c_{i+2} \dots c_n}$ también es invariante por J_i .

La parte *c*) es inmediata utilizando el Lema 2.2.13 con $p = i - 1$ y $q = i + 2$. ■

Proposición 2.4.2. *Asumimos que las matrices $[B_i]_{B_{i-1}}$ y $[B_{i-1}]_{B_i}$ han sido computadas para i tal que $1 \leq i \leq n - 1$. Entonces la matriz $[J_{i+1}]_{B_i}$ puede ser computada en $272 \binom{n}{k}$ operaciones aritméticas.*

Demostración. Para computar la matriz $[J_{i+1}]_{B_i}$, en primer lugar debemos restringir las bases y los operadores que aparecen en (2.11) y (2.12) a cada uno de los subespacios $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}^{c_{i+2} \dots c_n}$ que aparecen en la descomposición (2.13), uno por vez. Luego por el Lema 2.4.1 las matrices que representan a estos operadores restringidos son matrices cuadradas de tamaño a lo sumo 4.

Por un lado, la matriz $[s_i]_{B_{i-1}}$ es una matriz de permutación que resulta de la permutación de los subespacios en (2.14). Por otro lado, por el Corolario 2.3.3, la matriz $[J_i]_{B_i}$ es una matriz diagonal cuya entradas no nulas son los autovalores de los operadores Young-Jucys-Murphy y pueden ser computadas usando la fórmula (2.10).

En las fórmulas (2.11) y (2.12) hay cuatro multiplicaciones matriciales y una suma matricial. La cantidad de operaciones necesarias para computar cada multiplicación es a lo sumo $4 \cdot 4^2 = 64$ y para computar la suma es a lo sumo $4^2 = 16$, por lo que la cantidad de operaciones aritméticas necesarias para computar $[J_{i+1}]_{B_i}$ es a lo sumo 272. Debido a que el número de subespacios en la descomposición (2.13) es

a lo sumo $\binom{n}{k}$, entonces el número total de operaciones aritméticas requeridas para el cómputo no excede a $272\binom{n}{k}$. ■

2.4.2. Segundo paso: construcción de $[B_{i+1}]_{B_i}$ a partir de $[J_{i+1}]_{B_i}$

Proposición 2.4.3. *Asumimos que la matriz $[J_{i+1}]_{B_i}$ ha sido computada para i tal que $1 \leq i \leq n - 1$. Entonces la matriz $[B_{i+1}]_{B_i}$ puede ser computada en $4\binom{n}{k}$ operaciones aritméticas.*

Demostración. Los elementos de la base B_{i+1} son vectores no nulos que pertenecen a los subespacios de la forma $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_{i+1}}^{c_{i+2} \dots c_n}$. Por el Corolario 2.3.3, dichos vectores son autovectores del operador J_{i+1} . Con el objetivo de determinar las coordenadas de estos autovectores en la base B_i , nosotros deberíamos encontrar vectores columna $[v]_{B_i}$ tales que

$$([J_{i+1}]_{B_i} - \alpha I) [v]_{B_i} = 0 \quad (2.15)$$

para algún autovalor α de J_{i+1} . Nuevamente estos cálculos pueden simplificarse si nos restringimos a subespacios adecuados. En efecto, el operador J_{i+1} , y las bases B_{i+1} y B_i están adaptadas a la descomposición

$$\mathcal{F} = \bigoplus \mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_i}^{c_{i+2} \dots c_n} \quad (2.16)$$

y los subespacios que aparecen tienen dimensión a lo sumo dos. Luego nos restringimos a cada subespacio y obtenemos los correspondientes bloques de $[B_{i+1}]_{B_i}$, un por vez. Cuando el operador y las bases son restringidas a $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_i}^{c_{i+2} \dots c_n}$, la ecuación (2.15) se convierte en un sistema de ecuaciones lineales homogéneo en a lo sumo dos variables.

Si $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_i}^{c_{i+2} \dots c_n}$ tiene dimensión uno, entonces el correspondiente bloque de $[B_{i+1}]_{B_i}$ es de tamaño uno y su entrada tiene el valor 1. Si $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_i}^{c_{i+2} \dots c_n}$ es un subespacio de dimensión dos, entonces existen dos autovalores de J_{i+1} diferentes, los cuales corres-

ponden a las dos formas en las que una letra puede insertarse según la operación de inserción (Definición 1.3.1) involucrada en el algoritmo de Robinson-Schensted. Si el diagrama de Young λ_i tiene la forma $(i - a, a)$, entonces según la fórmula (2.10), los dos autovalores del operador J_{i+1} restringido a $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_i}^{c_{i+2} \dots c_n}$ son $i - a$ y $a - 1$ (ver Figura 2.6).

Resolviendo cada uno de los sistemas homogéneos de dos ecuaciones lineales

$$([J_{i+1}]_{B_i} - (i - a)I) [v]_{B_i} = 0 \quad (2.17)$$

$$([J_{i+1}]_{B_i} - (a - 1)I) [v]_{B_i} = 0 \quad (2.18)$$

obtenemos las coordenadas en la base B_i de los dos autovectores de J_{i+1} restringido a $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_i}^{c_{i+2} \dots c_n}$. Debido a que cada sistema lineal puede ser reducido a una ecuación de la forma

$$n_1 v_1 + n_2 v_2 = 0$$

resolver cada sistema de ecuaciones no requiere operaciones extras. Luego si colocamos estos autovectores como vectores columna en una matriz de tamaño dos, obtenemos la matriz correspondiente a la restricción de $[B_{i+1}]_{B_i}$ a $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_i}^{c_{i+2} \dots c_n}$.

Para construir los sistemas lineales (2.17) y (2.18) es suficiente sumar a la matriz de tamaño dos $[J_{i+1}]_{B_i}$ las matrices diagonales $(i - a)I$ y $(a - 1)I$ respectivamente, por lo que cuatro operaciones aritméticas son suficientes. Debido a que hay a lo sumo $\binom{n}{k}$ subespacios en la descomposición (2.16), entonces el número de operaciones aritméticas realizadas en el segundo paso es $4\binom{n}{k}$. ■

2.4.3. Tercer paso: construcción de D_{i+1} y $[B_i]_{B_{i+1}}$ a partir de

$[B_{i+1}]_{B_i}$ y D_i

Proposición 2.4.4. *Asumimos que las matrices $[B_{i+1}]_{B_i}$ y D_i han sido computadas para algún i tal que $1 \leq i \leq n - 1$. Entonces las matrices $[B_i]_{B_{i+1}}$ y D_{i+1} pueden ser*

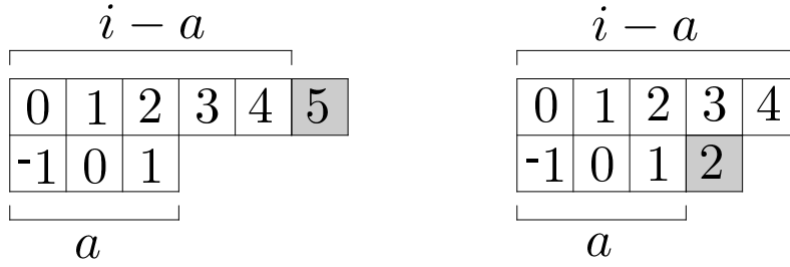


Figura 2.6: El número en cada casilla indica su contenido. El contenido de la casilla insertada es el autovalor del operador J_{i+1} , que puede ser $i - a$ (izquierda) o $a - 1$ (derecha).

computadas utilizando a lo sumo $13 \binom{n}{k}$ operaciones aritméticas.

Demostración. Notaremos b_k^i al k -ésimo elemento de la base B_i y a_{jk} al elemento que se encuentra en la fila j y en la columna k de la matriz $[B_{i+1}]_{B_i}$. Así tenemos que

$$b_k^{i+1} = \sum_j a_{jk} b_j^i.$$

Entonces el elemento que se encuentra en la fila r y en la columna s de la matriz D_{i+1} es

$$\langle b_r^{i+1}, b_s^{i+1} \rangle = \sum_j \sum_{j'} a_{jr} \bar{a}_{j's} \langle b_j^i, b_{j'}^i \rangle.$$

Debido a que las bases B_i y B_{i+1} son ortogonales, esta entrada es cero si $r \neq s$ y

$$\|b_r^{i+1}\|^2 = \sum_j \|a_{jr}\|^2 \|b_j^i\|^2$$

si $r = s$. Todos los valores involucrados son números racionales, entonces esto es equivalente a

$$(b_r^{i+1})^2 = \sum_j (a_{jr})^2 (b_j^i)^2.$$

Y como hay a lo sumo dos términos en cada suma, el número de operaciones aritméticas necesarias para obtener D_{i+1} a partir de $[B_{i+1}]_{B_i}$ y D_i es a lo sumo $5 \binom{n}{k}$.

Debido a que la base B_i es ortogonal para todo i , entonces $[B_i]_{B_{i+1}}$ puede ser

fácilmente computada a partir de la matriz transpuesta de $[B_{i+1}]_{B_i}$ como sigue

$$[B_i]_{B_{i+1}} = D_{i+1}^{-1} ([B_{i+1}]_{B_i})^t D_i. \quad (2.19)$$

Esta ecuación matricial puede ser restringida a cada subespacio $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_i}^{c_{i+2} \dots c_n}$ nuevamente, por lo que tendríamos ecuaciones con matrices de tamaño dos. El número de operaciones aritméticas para computar $[B_i]_{B_{i+1}}$ restringida a $\mathcal{F}_{\lambda_1 \dots \lambda_i}^{c_{i+2} \dots c_n}$ utilizando (2.19) es a lo sumo 8. Debido a que hay a lo sumo $\binom{n}{k}$ subespacios en la descomposición (2.16), entonces el número de operaciones aritméticas necesarias para computar $[B_i]_{B_{i+1}}$ no excede a $8 \binom{n}{k}$. Así el número total de operaciones aritméticas realizadas en el tercer paso no excede a $13 \binom{n}{k}$. ■

2.4.4. Compilando todos los pasos

Si compilamos los tres pasos obtenemos un algoritmo para construir las matrices $[B_{i+1}]_{B_i}$, $[B_i]_{B_{i+1}}$ y D_{i+1} asumiendo que conocemos $[B_i]_{B_{i-1}}$, $[B_{i-1}]_{B_i}$ y D_i .

Proposición 2.4.5. *Asumimos que las matrices $[B_i]_{B_{i-1}}$, $[B_{i-1}]_{B_i}$ y D_i han sido computadas para algún i tal que $1 \leq i \leq n - 1$. Entonces las matrices $[B_{i+1}]_{B_i}$, $[B_i]_{B_{i+1}}$ y D_{i+1} pueden ser computadas utilizando a lo sumo $289 \binom{n}{k}$ operaciones aritméticas.*

Demostración. Es inmediata a partir de las Proposiciones 2.4.2, 2.4.3 y 2.4.4. ■

2.5. Resultados Principales

En esta sección presentamos los resultados principales de esta tesis.

Teorema 2.5.1. *El conjunto de factores $\{[B_i]_{B_{i-1}}, i \in \{2, \dots, n\}\}$ necesarios para computar la Transformada de Fourier en el grafo de Johnson $J(n, k)$ y el conjunto*

de factores $\{[B_{i-1}]_{B_i}, i \in \{2, \dots, n\}\}$ necesarios para computar la Transformada de Fourier inversa pueden ser computados en a lo sumo $289(n-1)\binom{n}{k}$ operaciones aritméticas. Estos conjuntos de matrices pueden ser almacenados como un conjunto de números racionales S , tal que $|S| \leq 16(n-1)\binom{n}{k}$.

Demostración. Para $i = 1$ tenemos que $[B_1]_{B_0} = [B_0]_{B_1} = D_1 = Id$. Este es el paso inicial en la recursión dada por la Proposición 2.4.5. Aplicado el paso de recursión $n - 1$ veces obtenemos ambos conjuntos de matrices y el número de operaciones realizadas no excede $289(n-1)\binom{n}{k}$.

Cada entrada de las matrices del conjunto $\{[B_i]_{B_{i-1}}, i \in \{2, \dots, n\}\}$ pueden ser codificadas por una secuencia (i, r, s, c) de números racionales siendo c el valor de que se encuentra en la fila r y en la columna s de la matriz $[B_i]_{B_{i-1}}$. Debido a que cada matriz tiene a lo sumo dos entradas no nulas por cada columna (Teorema 2.2.14), hay a lo sumo $2\binom{n}{k}$ secuencias para guardar por cada matriz. Y como hay $n - 1$ matrices en el conjunto, y tenemos que hacer lo mismo con el conjunto $\{[B_{i-1}]_{B_i}, i \in \{2, \dots, n\}\}$, son suficientes $16(n-1)\binom{n}{k}$ números para almacenar ambos conjuntos de matrices. ■

Teorema 2.5.2. Sean B_0 la base Delta y B_n la base de Gelfand-Tsetlin del espacio de funciones \mathcal{F} . Asumimos que las matrices $[B_{i-1}]_{B_i}$ y $[B_i]_{B_{i-1}}$ han sido computadas para $i = 2, 3, \dots, n$. Entonces dado un vector columna $[f]_{B_0}$ con $f \in \mathcal{F}$, el vector columna $[f]_{B_n}$ dado por

$$[f]_{B_n} = [B_0]_{B_n} [f]_{B_0}$$

puede ser computado utilizando a lo sumo $2(n-1)\binom{n}{k}$ operaciones aritméticas. De forma similar, dado un vector columna $[f]_{B_n}$ con $f \in \mathcal{F}$, el vector columna $[f]_{B_0}$ dado por

$$[f]_{B_0} = [B_n]_{B_0} [f]_{B_n}$$

puede ser computado utilizando a lo sumo $2(n-1)\binom{n}{k}$ operations.

Demostración. Por el Teorema 2.2.14 tenemos que cada fila de la matriz $[B_{i-1}]_{B_i}$ tiene a lo sumo dos elementos no nulos. Entonces la aplicación de esta matriz a un vector columna genérico puede ser computado utilizando a lo sumo $2\binom{n}{k}$ operaciones aritméticas. Observemos que $[B_0]_{B_1}$ es la matriz identidad, por lo que la Transformada de Fourier puede ser factorizada como

$$[B_0]_{B_n} = [B_{n-1}]_{B_n} \cdots [B_1]_{B_2}.$$

Entonces la sucesiva aplicación de las $n - 1$ matrices puede ser computada en a lo sumo $2(n - 1)\binom{n}{k}$ operaciones aritméticas. El mismo argumento puede ser utilizado para la Transformada de Fourier inversa, considerando la factorización

$$[B_n]_{B_0} = [B_1]_{B_0} \cdots [B_n]_{B_{n-1}}.$$

■

2.6. Ejemplo

En esta sección ilustraremos el algoritmo presentado en la Sección 2.4 para la construcción de las matrices cambio de base, aplicado al caso $n = 4$, $k = 2$. Y utilizaremos estas matrices para el cómputo de la Transformada de Fourier para $J(4, 2)$ y la Transformada Inversa.

2.6.1. Cómputo de $[B_1]_{B_2}$ y $[B_2]_{B_1}$

Primer paso

Debido a que $[B_1]_{B_0} = I$ entonces $[s_1]_{B_1} = [s_1]_{B_0}$. De $[J_1]_{B_1} = 0$, utilizando la fórmula de recurrencia (2.11) obtenemos que

$$[J_2]_{B_1} = ([s_1]_{B_1}[J_1]_{B_1} + I)[s_1]_{B_1} = [s_1]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Segundo Paso

Consideramos la descomposición

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\square}^{11} \oplus \mathcal{F}_{\square}^{21} \oplus \mathcal{F}_{\square}^{12} \oplus \mathcal{F}_{\square}^{22}.$$

Los subespacios $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\square}^{11}$ y $\mathcal{F}_{\square}^{22}$ tienen dimensión 1 y cada uno es generado por un autovector de J_2 que pertenece a las bases B_1 y B_2 . Los subespacios $\mathcal{F}_{\square}^{21}$ y $\mathcal{F}_{\square}^{12}$ tienen dimensión 2, y cada uno de ellos son generados por dos autovectores de J_2 asociados a los autovalores -1 y 1 respectivamente. Para determinar las coordenadas

2.6 Ejemplo

de estos autovectores en la base B_1 , restringimos los operadores a estos subespacios y resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$([J_2]_{B_1} + I) [b_2^2]_{B_1} = 0 \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [b_2^2]_{B_1} = 0 \implies [b_2^2]_{B_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$([J_2]_{B_1} - I) [b_3^2]_{B_1} = 0 \implies \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} [b_3^2]_{B_1} = 0 \implies [b_3^2]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$([J_2]_{B_1} + I) [b_4^2]_{B_1} = 0 \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [b_4^2]_{B_1} = 0 \implies [b_4^2]_{B_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$([J_2]_{B_1} - I) [b_5^2]_{B_1} = 0 \implies \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} [b_5^2]_{B_1} = 0 \implies [b_5^2]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$[B_2]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tercer Paso

En orden de construir D_2 computamos:

$$\begin{aligned} \|b_1^2\|^2 &= \|b_1^1\|^2 = 1, \\ \|b_2^2\|^2 &= \|b_2^1\|^2 + (-1)^2 \|b_3^1\|^2 = 2, \\ \|b_3^2\|^2 &= \|b_2^1\|^2 + \|b_3^1\|^2 = 2, \\ \|b_4^2\|^2 &= (-1)^2 \|b_4^1\|^2 + \|b_5^1\|^2 = 2, \\ \|b_5^2\|^2 &= \|b_4^1\|^2 + \|b_5^1\|^2 = 2, \\ \|b_6^2\|^2 &= \|b_6^1\|^2 = 1. \end{aligned}$$

Entonces

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz $[B_1]_{B_2}$ está dada por

$$[B_1]_{B_2} = D_2^{-1}([B_2]_{B_1})^t D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.6.2. Cómputo $[B_2]_{B_3}$ y $[B_3]_{B_2}$ **Primer Paso**

Utilizando las matrices cambio de base $[B_1]_{B_2}$ y $[B_2]_{B_1}$, calculamos $[s_2]_{B_2}$:

$$[s_2]_{B_2} = [B_1]_{B_2}[s_2]_{B_1}[B_2]_{B_1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

y debido a que la matriz $[J_2]_{B_2}$ es conocida

$$[J_2]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

2.6 Ejemplo

podemos calcular la matriz $[J_3]_{B_2}$ utilizando la fórmula de recurrencia (2.11):

$$[J_3]_{B_2} = ([s_2]_{B_2}[J_2]_{B_2} + I)[s_2]_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Segundo Paso

Consideremos la descomposición

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\begin{smallmatrix} 1 \\ 12 \end{smallmatrix}}^1 \oplus \mathcal{F}_{\begin{smallmatrix} 2 \\ 12 \end{smallmatrix}}^2 \oplus \mathcal{F}_{\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}}^1 \oplus \mathcal{F}_{\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}}^2.$$

Los subespacios $\mathcal{F}_{\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}}^1$ y $\mathcal{F}_{\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}}^2$ tienen dimensión 1 y cada uno es generado por un autovector de J_3 que pertenece a las bases B_2 y B_3 . Los subespacios $\mathcal{F}_{\begin{smallmatrix} 1 \\ 12 \end{smallmatrix}}^1$ y $\mathcal{F}_{\begin{smallmatrix} 2 \\ 12 \end{smallmatrix}}^2$ tienen dimensión 2, y cada uno es generado por dos autovectores de J_3 asociados a los autovalores -1 y 2 respectivamente. Para determinar las coordenadas de estos autovectores en la base B_2 , restringimos los operadores a estos subespacios y resolvemos los sistemas de ecuaciones lineales. Entonces

$$[B_3]_{B_2} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tercer Paso

Ahora computamos D_3 a partir de $[B_3]_{B_2}$ y D_2 .

$$D_3 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

La matriz $[B_2]_{B_3}$ está dada por

$$[B_2]_{B_3} = D_3^{-1}([B_3]_{B_2})^t D_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

2.6.3. Cómputo de $[B_3]_{B_4}$ y $[B_4]_{B_3}$

Primer Paso

Utilizando las matrices cambio de base $[B_2]_{B_3}$ y $[B_3]_{B_2}$, calculamos $[s_3]_{B_3}$:

$$[s_3]_{B_3} = [B_2]_{B_3} [s_3]_{B_2} [B_3]_{B_2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

y debido a que la matriz $[J_3]_{B_3}$ es conocida

$$[J_3]_{B_3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

2.6 Ejemplo

podemos calcular la matriz $[J_4]_{B_3}$ utilizando la fórmula de recurrencia (2.11):

$$[J_4]_{B_3} = ([s_3]_{B_3}[J_3]_{B_3} + I)[s_3]_{B_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Segundo Paso

Consideramos la descomposición

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\boxed{123}} \oplus \mathcal{F}_{\boxed{12}_3} \oplus \mathcal{F}_{\boxed{13}_2}.$$

Todos estos subespacios tienen dimensión 2. $\mathcal{F}_{\boxed{123}}$ está generado por dos autovectores de J_4 asociados a los autovalores -1 y 3 ; $\mathcal{F}_{\boxed{12}_3}$ y $\mathcal{F}_{\boxed{13}_2}$ están generados por dos autovectores de J_4 asociados a los autovalores 0 y 2 . Para determinar las coordenadas de estos autovectores en la base B_3 , restringimos los operadores a estos subespacios y resolvemos los sistemas de ecuaciones lineales correspondientes. Entonces

$$[B_4]_{B_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tercer Paso

Obtenemos D_4 a partir de $[B_3]_{B_2}$ y D_2 .

$$D_4 = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

La matriz $[B_3]_{B_4}$ está dada por

$$[B_3]_{B_4} = D_4^{-1}([B_4]_{B_3})^t D_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2.6.4. Cómputo de la Transformada de Fourier y la Transformada Inversa

Finalmente computamos la Transformada de Fourier para $J(4, 2)$

$$[B_1]_{B_4} = [B_3]_{B_4}[B_2]_{B_3}[B_1]_{B_2}$$

y su inversa

$$[B_4]_{B_1} = [B_2]_{B_1}[B_3]_{B_2}[B_4]_{B_3}.$$

2.6 Ejemplo

Así obtenemos que

$$[B_1]_{B_4} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

y

$$[B_4]_{B_1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.7. Aplicación al cómputo de las proyecciones isotópicas

La cota superior que hemos obtenido para la complejidad algebraica de la Transformada de Fourier para el grafo de Johnson, puede ser utilizada para obtener una cota superior de la complejidad algebraica al problema del cómputo de la proyección isotópica de una función en el grafo de Johnson.

Sea $s = \min\{k, n - k\}$ y para $a = 0, \dots, s$, sea \mathcal{F}_a la componente isotópica de \mathcal{F} correspondiente al diagrama de Young de forma $(n - a, a)$ bajo la acción del grupo \mathbb{S}_n . Debido a que estas componentes son ortogonales y generan el espacio \mathcal{F} , dada una función $f \in \mathcal{F}$ hay unívocamente determinadas funciones $f_a \in \mathcal{F}_a$ tal que

$$f = \sum_{a=0}^s f_a.$$

Para $H \subseteq \{0, \dots, s\}$ sea f_H definida por

$$f_H = \sum_{a \in H} f_a.$$

Teorema 2.7.1. *Asumimos que las matrices $[B_{i-1}]_{B_i}$ para $i = 2, 3, \dots, n$ han sido computadas. Para $f \in \mathcal{F}$ y $H \subseteq \{0, \dots, s\}$ con $s = \min\{k, n - k\}$ consideramos f_H como se definió anteriormente. Entonces dado un vector columna $[f]_{B_0}$, el vector columna $[f_H]_{B_0}$ puede ser computado utilizando a lo sumo $4(n - 1) \binom{n}{k}$ operaciones aritméticas.*

Demostración. Primero aplicamos la Transformada de Fourier a la función f , es decir multiplicamos la matriz $[B_0]_{B_n}$ y el vector columna $[f]_{B_0}$, y obtenemos el vector columna $[f]_{B_n}$. En este paso realizamos a lo sumo $2(n - 1) \binom{n}{k}$ operaciones aritméticas. Luego como la base B_n está parametrizada por todas las tablas de Young de forma $(n - a, a)$ para $a = 0, \dots, s$, sustituimos por el valor 0 las entradas del vector $[f]_{B_n}$ que corresponden a tablas de Young de forma $(n - a, a)$ con $a \notin H$. El

2.7 Aplicación al cómputo de las proyecciones isotópicas

vector columna resultante es $[f_H]_{B_n}$. Finalmente si multiplicamos la matriz $[B_n]_{B_0}$ y el vector columna $[f_H]_{B_n}$ obtenemos $[f_H]_{B_0}$ utilizando a lo sumo $2(n-1)\binom{n}{k}$ operaciones aritméticas más. En total hemos realizado a lo sumo $4(n-1)\binom{n}{k}$ operaciones aritméticas. ■

Teorema 2.7.2. *Asumimos que las matrices $[B_{i-1}]_{B_i}$ para $i = 2, 3, \dots, n$ han sido computadas. Dado un vector columna $[f]_{B_0}$ con $f \in \mathcal{F}$, todos los pesos $\|f_a\|^2$, para $a = 0, \dots, s$ con $s = \min\{k, n-k\}$, pueden ser computados en a lo sumo $(2n-1)\binom{n}{k}$ operaciones.*

Demostración. Observemos que $\|f_a\|^2 = \|[f_a]_{B_n}\|^2$. Para obtener el vector columna $[f_a]_{B_n}$ podemos multiplicar la matriz $[B_0]_{B_n}$ y el vector columna $[f]_{B_0}$ para obtener $[f]_{B_n}$ utilizando $2(n-1)\binom{n}{k}$ operaciones. Luego seleccionamos las entradas del vector $[f]_{B_n}$ que correspondan a las tablas de Young de forma $(n-a, a)$, y computamos la suma de los cuadrados de estas entradas. Realizando este procedimiento para todos los valores de a , calculamos los pesos $\|f_a\|^2$, para $a = 0, \dots, s$ en a lo sumo $\binom{n}{k}$ operaciones aritméticas. ■

Capítulo 3

Trabajo a futuro

Las funciones booleanas a valores reales $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$, mapean cada vector binario de n componentes, o string, en un único valor real. Estas funciones aparecen en muchas áreas de la matemática y la ciencia de la computación como por ejemplo en la teoría de aprendizaje computacional supervisado. El objetivo principal en este área de investigación es desarrollar algoritmos que puedan aprender una función a partir de un conjunto de ejemplos $(x, f(x))$. Es decir dado un conjunto de valores del dominio de la función f y sus respectivas imágenes, computar una función g tal que se cumpla que $f(y) = g(y)$ para nuevos valores del dominio y con una probabilidad alta.

Para el caso clásico de funciones booleanas un resultado conocido (ver [29]) establece que si la función f tiene ciertas propiedades de estabilidad, entonces la expansión de Fourier de f está mayormente concentrada en un conjunto pequeño de coeficientes de Fourier de grado bajo, y este hecho es utilizado para obtener un algoritmo aleatorio de tiempo polinomial para aprender la función f .

Nosotros esperamos que estos resultados para el espacio $\{0, 1\}^n$ puedan ser trasladados a resultados similares para el análisis de Fourier en el grafo de Johnson, y utilizarlos para aprender funciones del tipo $f : X^{(n,k)} \rightarrow \mathbb{R}$. En este caso los coeficientes de Fourier parametrizados por diagramas de Young de forma $(n - a, a)$ para a pequeño, son los que cumplen el rol de los coeficientes de Fourier de grado bajo

en la expansión de Fourier de funciones booleanas. Y entonces la Transformada de Fourier rápida en el grafo de Johnson será una herramienta necesaria para computar de manera eficiente los coeficientes de Fourier significativos de f .

Los k -conjuntos pueden ser utilizados para representar datos de tamaño k de un conjunto de datos de cardinal n . Por ejemplo una imagen de n pixels en blanco y negro con k pixels negros puede ser representada como un k -conjunto de \mathbb{I}_n . Así dada una base de datos de imágenes con estas características podemos considerar una función del tipo $f : X^{(n,k)} \rightarrow \{0, 1\}$ siendo $f(x)$ igual a 1 si la imagen x pertenece a la base de datos y 0 en caso contrario. Aprender una función de este tipo nos serviría para resolver el problema de clasificación binaria.

Bibliografía

- [1] Arora, S.; Barak, B. *Computational Complexity: a modern approach*. Cambridge: Cambridge University Press. 2009.
[doi: 10.1017/CBO9780511804090](https://doi.org/10.1017/CBO9780511804090).
- [2] Babai, L. *Graph Isomorphism in Quasipolynomial Time*. [arXiv:1512.03547v2](https://arxiv.org/abs/1512.03547v2) (2016), pp. 1–89.
- [3] Baum U.; Clausen M.; Tietz, B. *Improved upper complexity bounds for the discrete Fourier transform*. *AAECC* **2** (1991), pp. 35–43.
[doi: 10.1007/BF01810853](https://doi.org/10.1007/BF01810853).
- [4] Bayley, R.T. *Young Tableaux and the Robinson-Schensted-Knuth Correspondence*. Department of Mathematics and Computer Science University of Leicester. 2002.
- [5] Burgisser, P.; Clausen, M.; Shokrollahi, M. A. *Algebraic complexity theory*. Vol. 315. Springer-Verlag. New York. 1997.
- [6] Ceccherini-Silberstein, T.; Scarabotti, F.; Tolli, F. *Harmonic analysis on finite groups: Representation theory, Gelfand pairs and Markov chains*. Vol. 108. Cambridge: Cambridge University Press. 2008.
- [7] Clausen, M. *Fast generalized Fourier transforms*. *Theoretical Computer Science* **67** (1989), no. 1, pp. 55–63.
[doi: 10.1016/0304-3975\(89\)90021-2](https://doi.org/10.1016/0304-3975(89)90021-2).

-
- [8] Clausen M.; Baum U. *Fast Fourier Transforms*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Germany. 1993.
- [9] Cooley, J.W.; Tukey, J.W. *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*. *Mathematics of Computation* **19** (1965), pp. 297–301.
[doi: 10.2307/2003354](https://doi.org/10.2307/2003354).
- [10] Delsarte, P.; Vladimir I.L. *Association schemes and coding theory*. *IEEE Transactions on Information Theory* **44** (1998), no. 6, pp. 2477–2504.
[doi: 10.1109/18.720545](https://doi.org/10.1109/18.720545).
- [11] Diaconis, P.W. *A Generalization of Spectral Analysis with Application to Ranked Data*. *The Annals of Statistics* **17** (1989), no. 3, pp. 949–979.
[doi: 10.1214/aos/1176347251](https://doi.org/10.1214/aos/1176347251).
- [12] Diaconis, P.W. *Group representations in probability and statistics*. Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes—Monograph Series, 11. Institute of Mathematical Statistics, Hayward. 1988.
- [13] Diaconis, P.W.; Rockmore, D. *Efficient computation of isotypic projections for the symmetric group*. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* **11** (1993), pp. 87–104.
- [14] Driscoll, J.R.; Healy, D.M.; Rockmore, D.N. *Fast discrete polynomial transforms with applications to data analysis for distance transitive graphs*. *SIAM Journal on Computing* **26** (1997), no. 4, pp. 1066–1099.
[doi: 10.1137/S0097539792240121](https://doi.org/10.1137/S0097539792240121).
- [15] Driscoll, J.R.; Healy, D.M. *Computing Fourier transforms and convolutions on the 2-sphere*. *Advances in Applied Mathematics* **15** (1994), no. 2, pp. 202–250.
[doi: 10.1006/aama.1994.1008](https://doi.org/10.1006/aama.1994.1008).

-
- [16] Farahat H.K.; Peel M.H. *On the Representation Theory of the Symmetric Groups*. Journal of Algebra **67** (1980), no. 2, pp. 280–304.
doi: [10.1016/0021-8693\(80\)90161-1](https://doi.org/10.1016/0021-8693(80)90161-1).
- [17] Fulton, W. *Young tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry*. Vol. 35. Cambridge: Cambridge University Press. 1996.
doi: [10.1017/CBO9780511626241](https://doi.org/10.1017/CBO9780511626241).
- [18] Fulton, W.; Harris, J. *Representation theory. A First Course*. GTM, Vol. 129. Ed. Springer, New York. 2004.
doi: [10.1007/978-1-4612-0979-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0979-9).
- [19] Gelfand, I.M.; Tsetlin, M L. *Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices*. Dokl. Akad. Nauk SSSR **71** (1950), no. 8, pp. 825–828.
- [20] Gelfand, I.M.; Tsetlin, M.L. *Finite-dimensional representations of the group of orthogonal matrices*. Dokl. Akad. Nauk SSSR **71** (1950), no. 6, pp. 1017–1020.
- [21] Iglesias, R.; Natale, M. *A Fast Fourier Transform for the Johnson graph*. Journal of Fourier Analysis and Applications **28** (2022), no. 62.
doi: [10.1007/s00041-022-09952-4](https://doi.org/10.1007/s00041-022-09952-4).
- [22] James, G.D. *The Irreducible Representations of the Symmetric Group*. Bulletin of the London Mathematical Society **8** (1976), no. 3, pp. 229–232.
doi: [10.1112/blms/8.3.229](https://doi.org/10.1112/blms/8.3.229).
- [23] Jucys, A.-A. A. *Symmetric polynomials and the center of the symmetric group ring*. Reports on Mathematical Physics **5** (1974), no. 1, pp. 107–112.
doi: [10.1016/0034-4877\(74\)90019-6](https://doi.org/10.1016/0034-4877(74)90019-6).
- [24] Maslen, D.K.; Orrison, M.E.; Rockmore, D.N. *Computing isotypic projections with the Lanczos iteration*. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications **25** (2003), no. 3, pp. 784–803.
doi: [10.1137/S0895479801399778](https://doi.org/10.1137/S0895479801399778).

- [25] Maslen, D.K. *The efficient computation of Fourier transforms on the symmetric group*. *Mathematics of Computation* **67** (1998), no. 223, pp. 1121–1147.
[doi: 10.1090/S0025-5718-98-00964-8](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-98-00964-8).
- [26] Maslen, D.K.; Rockmore, D.N. *Generalized FFTs - A survey of some recent results*. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Computer Science* **28** (1997), pp. 183–237.
- [27] Maslen, D.K.; Rockmore, D.N.; Wolff, S. *The Efficient Computation of Fourier Transforms on Semisimple Algebras*. *Journal of Fourier Analysis and Applications* **24** (2018), pp. 1377–1400.
[doi: 10.1007/s00041-017-9555-5](https://doi.org/10.1007/s00041-017-9555-5).
- [28] Murphy, G.E. *A new construction of Young's seminormal representation of the symmetric group*. *Journal of Algebra* **69** (1981), no. 2, pp. 287–291.
[doi: 10.1016/0021-8693\(81\)90205-2](https://doi.org/10.1016/0021-8693(81)90205-2).
- [29] O'Donnell, R. *Analysis of Boolean Functions*. Cambridge University Press. 2014.
- [30] Okounkov, A. *Young basis, Wick formula and higher Capelli identities*. *International Mathematics Research Notices* **1996** (1996), no. 17, pp. 817–839.
[doi: 10.1155/S1073792896000505](https://doi.org/10.1155/S1073792896000505).
- [31] Papadimitriou, C.H. *Computational complexity*. John Wiley and Sons Ltd. 2003.
- [32] Robinson, G. de B. *On representations of the symmetric group*. *American Journal of Mathematics* **60** (1938), no. 3, pp. 745–760.
- [33] Rockmore, D.N. *Recent progress and applications in group FFTs*. In: Byrnes, J. (eds) *Computational Noncommutative Algebra and Applications*. NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry **136** (2004), pp. 227–254.
[doi: 10.1007/1-4020-2307-3_9](https://doi.org/10.1007/1-4020-2307-3_9).

-
- [34] Sagan, B.E. *The Symmetric Group. Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions. 2nd Edition.* Springer-Verlag, New York. 2001.
- [35] Serre, J.P. *Linear representation of finite groups.* Springer-Verlag, New York. 1986.
- [36] Schensted, C. *Longest increasing and decreasing subsequences.* Canadian Journal of Mathematics **13** (1961), pp. 179–191.
[doi: 10.4153/CJM-1961-015-3](https://doi.org/10.4153/CJM-1961-015-3).
- [37] Stanton, D. *Orthogonal polynomials and Chevalley groups.* Special Functions: group theoretical aspects and applications. Mathematics and Its Applications. Vol 18. Springer. Dordrecht. 1984.
[doi: 10.1007/978-94-010-9787-1_2](https://doi.org/10.1007/978-94-010-9787-1_2).
- [38] Arvind, V.; Torán, J. *Isomorphism testing: Perspectives and open problems.* Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science **86** (2005), pp. 66–84.
- [39] Vershik, A.M.; Kerov, S.V. *Locally semisimple algebras: Combinatorial theory and the K_0 -functor.* Journal of Soviet Mathematics **38** (1987), pp. 1701–1733.
[doi: 10.1007/BF01088200](https://doi.org/10.1007/BF01088200).
- [40] Vershik, A.M.; Okounkov, A.Y. *A new approach to representation theory of the symmetric groups.* Selecta Mathematica, New Series **2** (1996), 581.
[doi: 10.1007/BF02433451](https://doi.org/10.1007/BF02433451).
- [41] Winograd S. *On computing the discrete Fourier transform.* Mathematics of Computation **32** (1978), no. 141, pp. 175–199.