Resumen

El conjunto $X^{(n,k)}$ formado por los k-conjuntos de I_n tiene una estructura natural de grafo donde dos k-conjuntos están conectados si y sólo si el cardinal de la intersección es $k-1$. Este es conocido como el grafo de Johnson. El grupo simétrico S_n actúa en el espacio de funciones complejas en $X^{(n,k)}$ y este espacio tiene una descomposición libre de multiplicidad como suma de representaciones irreducibles de S_n, por lo tanto este tiene una base de Gelfand-Tsetlin bien definida. Definimos la transformada de Fourier en el grafo de Johnson como la transformación que asigna a las coordenadas de una función en la base delta, las coordenadas de la misma en la base de Gelfand-Tsetlin.

La aplicación directa de la matriz cambio de base a un vector genérico requiere $\binom{n}{k}^2$ operaciones aritméticas. Nosotros demostramos que, en analogía con la Transformada de Fourier Discreta Clásica, esta matriz puede ser factorizada como producto de $n-1$ matrices, cada una con a lo sumo dos elementos no nulos en cada columna. La factorización se basa en la construcción de $n-1$ bases intermedias, las cuales están parametrizadas via el algoritmo de inserción de Robinson-Schensted. Esta factorización nos permite demostrar que el número de operaciones aritméticas requeridas para aplicar la matriz cambio de base a un vector genérico está acotado superiormente por $2(n-1)\binom{n}{k}$. Presentamos un algoritmo para construir todos estos factores utilizando a lo sumo $289(n-1)\binom{n}{k}$ operaciones aritméticas. Los coeficientes de estas matrices son números racionales y la construcción no depende de métodos numéricos. Los obtenemos resolviendo pequeños sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes enteros derivados de los operadores de Jucys-Murphy. En particular, evitamos el uso de raíces cuadradas.

Como consecuencia de estos resultados, demostramos que el problema de computar todos los pesos de las componentes isotípicas de una función dada se puede resolver en $O(n\binom{n}{k})$ operaciones aritméticas, mejorando la cota previa $O(k^2\binom{n}{k})$ cuando k domina asintóticamente a $\sqrt{n}$. La misma mejora se logra para el problema de computar la proyección isotípica en una única componente isotípica.

Abstract

The set X of k-subsets of an n-set has a natural graph structure where two k-subsets are neighbors if and only if the size of their intersection is $k-1$. This is known as the Johnson graph. The symmetric group S_n acts on the space of complex functions on X and this space has a multiplicity-free decomposition as sum of irreducible representations of S_n, so it has a well-defined Gelfand-Tsetlin basis up to scalars. The Fourier transform on the Johnson graph is defined as the change of basis matrix from the delta function basis to the GelfandTsetlin basis.

The direct application of this matrix to a generic vector requires $\binom{n}{k}^2$ arithmetic operations. We show that, in analogy with the classical Fast Fourier Transform on the discrete circle, this matrix can be factorized as a product of $n-1$ orthogonal matrices, each one with at most two nonzero elements in each column. The factorization is based on the construction of $n-1$ intermediate bases which are parametrized via the Robinson-Schensted insertion algorithm. This factorization shows that the number of arithmetic operations required to apply this matrix to a generic vector is bounded above by $2(n-1)\binom{n}{k}$.

We give an algorithm that constructs all these factors using at most $289(n-1)\binom{n}{k}$ arithmetic operations. The coefficients of these matrices are rational numbers and the construction does not depend on numerical methods. Instead, they are obtained by solving small linear systems with integer coefficients derived from the JucysMurphy operators. In particular we avoid the use of square roots.

As a consequence, we show that the problem of computing all the weights of the isotypic components of a given function can be solved in $O(n\binom{n}{k})$ operations, improving the previous bound $O(k^2\binom{n}{k})$ when k asymptotically dominates $\sqrt{n}$. The same improvement is achieved for the problem of computing the isotypic projection onto a single component.