Universidad Nacional del Sur

Tesis de Doctor en Matemática

Avances en Teoría de Modelos: Lógicas de Primer Orden y Teoría Paraconsistente de Conjuntos

Juan Sebastián Slagter

Director: Dr. Aldo Figallo Orellano

Bahía Blanca **Argentina**

2023

Prefacio

Esta tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Matemática durante el período comprendido entre abril de 2017 y diciembre de 2022, bajo la dirección del Dr. Aldo Figallo Orellano, profesor adjunto del Departamento de Matemática de la UNS e investigador de la *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo* (FAPESP) con número de procesos 2016/21928-0 y 2021/04883-0.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el .../.../...,
mereciendo la calificación de ...(......).

Agradecimientos

En primer lugar expreso mi agradecimiento al Dr. Aldo Figallo Orellano, por el gusto con que me enseñó, por su energía y paciencia, por su incondicional dedicación al trabajo.

Agradezco al *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas* por haberme otorgado una beca interna doctoral, que permitió el desarrollo de estos estudios.

Agradezco también a la *Comisión de Investigaciones Científicas de la provincia de Buenos Aires*, por financiar mis primeros estudios de posgrado.

También quiero brindar mi reconocimiento al Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur y al Instituto de Matemática de Bahía Blanca (INMABB), sus docentes e investigadas/es, por brindarme el espacio para realizar estos estudios.

A mi familia, Bárbara y Hermann.

Introducción

Antonio Monteiro desarrolló varias técnicas para el estudio de sistemas algebraicos. Una de las más importantes, es la caracterización de las congruencias mediante sistemas deductivos para ciertas variedades semisimples de álgebras. Esta caracterización permitió desarrollar de un Teorema de Representación, que generaliza el correspondiente a las álgebras de Boole. En [61, pág. 18] se puede encontrar la noción de *Systèmes deductifs liés à "´a"*, donde a es un elemento de un álgebra dada. En el caso que el retículo sea un álgebra Boole, esta noción de sistema deductivo caracteriza las congruencias máximales. En general, para cada álgebra de una variedad dada, queremos tener una implicación, primitiva o derivada, en términos de las operaciones del lenguaje, y vamos a requerir que los sistemas deductivos caractericen las congruencias. Monteiro y muchos otros autores han utilizado estas técnicas en algunos sistemas algebraicos; tales como, álgebras de Nelson semisimples, álgebras de Łukasiewicz-Moisil, álgebras tetravalentes modales, MV$_n$-álgebras, álgebras de Heyting simétricas n-valuadas, álgebras de Tarski (Algebras de Hilbert semisimples), álgebras implicativas de Łukasiewicz con n-valuadas, álgebras modales de Hilbert n-valuadas entre otras. Para estas estructuras, es posible presentar un Teorema de Representación de forma unificada, (ver Lema 3.2.12).

En los párrafos siguientes, resumiremos los antecedentes necesarios para ubicar lo desarrollado en este trabajo en relación con otros de la literatura. Para empezar, la lógica Łukasiewicz **Ł** (infinito-valorada) fué introducida por razones filosóficas por Jan Łukasiewicz, se encuentra entre las lógicas no clásicas más importantes y ampliamente estudiadas. Posteriormente, Chang introdujo MV-álgebras para probar la correctitud y la completitud con respecto al cálculo **Ł**. Estas álgebras son equivalentes a las álgebras de Wajsberg.

Recordemos que, dada un álgebra de Wajsberg $\mathcal{A} = \langle A, \Rightarrow, \sim, 1\rangle$, podemos definir otras operaciones en ella. En particular, podemos definir $0 = \sim 1$, $x \oplus y = \sim x \Rightarrow y$, $x \odot y = \sim(\sim x \oplus \sim y)$, $x \vee y = \sim(\sim x \oplus y) \oplus y = (x \Rightarrow y) \Rightarrow y$, $x \wedge y = \sim(\sim x \vee \sim y)$, donde $\wedge$ y $\vee$ son operaciones reticulares. Si consideramos las operaciones $\oplus$ y $\odot$ como operaciones primitivas, entonces tenemos que $(A, \oplus, \odot, \sim, 0)$ es un MV-álgebra, en la formulación de Chang. Por otro lado, cualquier MV-álgebra en la formulación de Chang produce un álgebra de Wajsberg mediante las definiciones apropiadas de $\sim$ y $\Rightarrow$, donde $x \Rightarrow y = \sim x \oplus y$ (para detalles ver [24]). Además, es bien sabido que la categoría de MV-álgebras es equivalente a la categoría de l-grupos con unidad fuerte, [64].

Es importante destacar que la variedad de MV-álgebras generadas por una MV-cadena de longitud $n < \omega$ a menudo se denota como MV_n-álgebras. Esta noción fue introducida por Grigolia en [56].

Ahora, denotamos por C_n la MV_n-álgebra cuyo universo es

$$\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

dotado de las operaciones $x \Rightarrow y := \text{mín}\{1, 1 - x + y\}$, $\sim x := 1 - x$. Se conoce que si $(A, \oplus, \sim, 1)$ es un MV_n-álgebra, entonces $\text{Ł}_n(A) = \langle A, \wedge, \vee, \sim, \sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Łukasiewicz-Moisil n-valuada (ver [10]), donde los operadores $\sigma_i : A \to A$ son ciertos homomorfismos reticulares, para $0 \leq i \leq n-1$, definidos en términos de las operaciones MV y llamados operadores de Moisil. Estos operadores se definen en C_n de la siguiente manera:

$$\sigma_i\left(\frac{j}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } i + j < n \\ 1 & \text{si } i + j \geq n \end{cases}.$$

Resulta interesante notar que el operador σ_0 fue estudiado, bajo el nombre de operador Δ, por Baaz, [6]; donde se trabajó la versión proposicional y cuantificada de la lógica Gödel expandida por Δ. Posteriormente, Hájek introdujo y estudió las extensiones por Δ de la Basic Fuzzy Logic (BL), la lógica Łukasiewicz, la lógica del producto y otras lógicas Fuzzy con el operador Δ, [50]. En este contexto, podemos mensionar a Esteva y Godo quienes introdujeron la MTL-lógica y su extensión MTL_Δ por el operador Δ, [29], ver también [30, 31]. Además, Hájek y Cintula llamaron a todos estos sistemas Δ-fuzzy y presentaron su versión cuantificada (sin predicado de identidad) con el respectivo Teorema de Correctitud y Completitud en [51]. Su prueba de completitud para estas lógicas de primer orden se obtiene adicionando el axioma de *dominios constantes* y usando una estrategia similar a la de Henkin, [51].

En esta tesis, se exponen estudios de los operadores de Moisil sobre la versión proposicional y cuantificada del fragmento $\{\rightarrow, \vee\}$ de la lógica Gödel n-valuada; la presentación axiomática se obtiene mediante el uso de la noción de álgebras de Hilbert. La prueba de completitud que exponendremos para la versión cuantificada de la lógica no se basa en agregar el axioma de *dominios constantes* como veremos más adelante, si no que se muestra una prueba diferente a las demás en la literatura, dado que se presenta una prueba de la correctitud con *modelo canónico* construidos sobre fórmulas en lugar de la clásica sobre sentencias. Como subproducto de este trabajo, podemos ver que los operadores de Moisil son operadores con un *comportamiento fuzzy* que abre la posibilidad de explorar operadores similares a los de Baaz, permitiendo expandir una lógica fuzzy de manera similar a lo realizado por Baaz y el operador Δ.

Continuando con la teoría de las MV-álgebras, es bien sabido que la implicación de Gödel se puede reescribir con las operaciones de Moisil y de De Morgan, dada una MV_n-álgebra:

$$x \rightarrow y = x \vee \sim \sigma_{n-1} y \vee \left(\bigvee_{1 \leq i \leq n-1} (\sigma_i y \wedge \sigma_i x \wedge \sim \sigma_i y) \right) \vee (\sigma_0 x \wedge \sigma_0 y).$$

Esta implicación fue descubierta por Cignoli en su tesis doctoral, como se puede ver en los trabajos [21, 22, 23].

Vale la pena mencionar que Cignoli estudió la lógica Łukasiewicz de primer orden n-valuada en [23]. En ese trabajo, la lógica de Łukasiewicz n-valuada se presentó como una extensión del cálculo intuicionista, véase el resumen de [22]. Cignoli basó su trabajo en el hecho de que MV$_n$-álgebras se pueden definir en términos de álgebras de Heyting simétricas con operaciones de Moisil agregando un conjunto especial de operaciones (ver [23, Definición 2.1]), a las que llamó álgebras de Łukasiewicz n-valoradas propias; es decir, estas álgebras son equivalentes a MV$_n$-álgebras en términos de las operaciones. Cignoli también basó su trabajo en el artículo [53] de Iturrioz, donde se demostró que la clase de álgebras de Heyting simétricas, con una familia de operadores, es un equivalente, en términos de las operaciones, a la clase de álgebras Łukasiewicz-Moisil. Posteriormente, M.

Canals-Frau y A. V. Figallo introdujeron otra clase semisimple de álgebras en [16] (ver también [17]). Ellos definieron la clase de álgebras modales de Hilbert $(n+1)$-valuadas en la asignatura $\{\rightarrow, \{\sigma_i\}_{0\leq i\leq n-1}, 1\}$ donde los σ_i son operadores de Moisil. Estas álgebras pueden verse como reductos de las álgebras estudiadas por Cignoli e Iturrioz antes mencionadas. Uno de los propósitos de esta tesis fue continuar el trabajo iniciado en [16].

La clase de álgebras propias de Łukasiewicz n-valuadas permitió a Cignoli presentar Teoremas de Correctitud y Completitud para la lógica Łukasiewicz de primer orden n-valuada ([23]), por medio de Técnica de Rasiowa para los modelos estándar. Esta técnica necesita probar la existencia de ciertas estructuras completas como la completación de Dedekind-MacNeille para álgebras Boole o álgebras de Heyting para interpretar las fórmulas cuantificadas. Con este método, Cignoli necesitaba encontrar la completitud de las álgebras Łukasiewic n-valuadas, vea [22, Corolario 2.4].

Por otro lado, Cintula y Noguera generalizaron el trabajo de Rasiowa al contexto de ciertas lógicas algebrizables proporcionando pruebas estilo Henkin para los teoremas de correctitud y completitud, [20]. En dicho artículo, los autores continúan el trabajo desarrollado en [51].

En la tesis de Magister de Slagter, se expusieron resultados de una lógica de primer orden 3-valuada, que tiene como contrapartida algebraica la clase de álgebra de Hilbert 3-valuada con supremo, enriquecido con operadores Δ y ∇ (operador de Moisil o Baaz) (vea [37]). Esta clase es, de hecho, una variedad semisimple de álgebras. Para probar los teoremas de correctitud para este sistema, utilizamos una estrategia al estilo de Henkin, usando el hecho de que toda teoría maximal consistente, en el sentido de Henkin (por cociente), es un sistema deductivo maximal de Monteiro del álgebra de Lindenbaum-Tarski de primer orden. Es importante señalar que la relación entre las teorías maximales consistentes de Henkin y los sistemas deductivos maximales de Monteiro, solo funciona en ciertas variedades semisimples de álgebras estudiadas en la escuela de Monteiro. Por ejemplo, esta relación no se verifica para álgebras de Nelson, álgebras de Heyting (n-valuadas), álgebras de Hilbert, retículos residuados, los sistemas algebraicos implicacionales llamados *modelos estándar* por Rasiowa en [70] y otras clases de álgebras donde la variedades no sea semisimples. A diferencia del trabajo de Rasiowa, nuestra técnica simplifica la prueba del teorema de completitud utilizando el hecho de que las álgebras simples son retículos completos. Además, la prueba del teorema de completitud de [37] no se puede obtener directamente de la presentación genérica de Cintula y Noguera ([20]), debido a la presentación del cálculo que tiene dos axiomas en los que se exige que los operadores conmuten con los cuantificadores.

Además, podemos aplicar la técnica a los trabajos de Cignoli, es más, es posible aplicarla a varias variedades semisimples de álgebras estudiadas en la escuela de Monteiro como mostraremos.

Uno de los objetivos principales de esta tesis es generalizar los resultados presentados en [37] a la correspondiente lógica n-valuada, pero ahora usando operadores σ_i con $0 \leq i \leq n-1$. Además, presentamos como funciona el teorema de completitud para ciertas lógicas a partir de variedades semisimples de álgebras. En el estudio de la versión de primer orden de las lógicas, agregaremos un predicado de identidad y presentaremos un cálculo Hilbert adecuado, que funciona con esta identidad para cada lógica.

Comparando esta presentación con las de Rasiowa ([70]), Hájek-Cintula ([51]), y Cintula-Noguera ([20]), podemos decir que sus presentaciones de lógicas de primer orden son sin identidad. Esta presentación del predicado identidad es lo suficientemente general como para ser aplicada a todas las lógicas de primer orden mencionadas en [70, 51, 20]. En particular, podríamos proporcionar versiones cuantificadas de la lógica Δ-fuzzy ([51]) con identidad, donde el predicado de identidad exhibiría un *comportamiento fuzzy*.

Mostraremos también el estudio de algunas lógicas paraconsistentes que no son algebrizables con el método de Blok-Pigozzi y ofreceremos una prueba de su no algebrizabilidad, ver Lema 4.1.3. Estas lógicas fueron estudiadas por Avron y sus colaboradores, quienes presentaron la semántica por medio de matrices no deterministas (Nmatrices) para el nivel proposicional y de primer orden. El propósito de esta tesis fue presentar la semántica de estas lógicas de primer orden adaptando nuestras herramientas algebraicas desarrollada en capítulos anteriores. Lo que nos va a permitir dar una presentación simplificada comparadas con las ya existentes, ver [14]. Además, se podrá ver que las Nmatrices finitas dadas por Avron, que se utilizan en las demostraciones de los teoremas de completitud, se comportan como álgebras subdirectamente irreducibles. Es importante notar que estas lógicas no están en el ámbito de las lógicas tratadas en los trabajos [70, 51, 20].

En el Capítulo II, presentamos la clase de álgebras de Hilbert modales n-valuadas con supremo, y mostramos que esta clase ecuacional es una variedad semisimple, utilizando una técnica desarrollada por Monteiro. Los operadores modales considerados en álgebras de Hilbert n-valuadas son operadores σ_i, con $\{0 \leq i \leq n-1\}$. Luego, determinamos las álgebras generadoras y posteriormente presentamos un cálculo proposicional, que resulta correcto y completo con respecto a la clase presentada. Luego presentamos un cálculo de primer orden sin identidades, que es correcto y completo con respecto a la clase de álgebras de Hilbert n-valuadas modales con supremo. Posteriormente, añadimos un símbolo de igualdad al cálculo de primer orden tratado anteriormente y demostramos un Teorema de adecuación para este nuevo cálculo. También presentamos la clase de álgebras de Monteiro, donde para cada álgebra es posible definir una implicación tal que la noción de sistema deductivo nos permita caracterizar las congruencias del álgebra. Después, demostramos que la clase es semisimple; y así, exhibimos ejemplos importantes de álgebras de Monteiro. Así, mostramos cómo trabajar la demostración del teorema de correctitud y completitud para la versión de primer orden de las lógicas asociadas con respecto a la clase de álgebras correspondiente. En el Capítulo III, presentaremos la clase de las σ-Gödel lógicas n-valentes. Esta clase de álgebras se obtiene tomando álgebras de Heyting n-valentes expandidas por el operador de posibilidad de Moisil. Más adelante, presentaremos las lógicas proposicionales y cuantificadas que tienen la clase introducida como contraparte algebraica. El teorema de correctitud y completitud se probará aplicando la técnica desarrollada en [38] y [37], ver también [15]. Estos resultados serán extendidios en el Capítulo III, donde se presentarán los operadores de Moisil para la lógica de Gödel n-valente; vale aclarar quen uestra axiomatización será diferente a la dada por Baaz en [6].

En el Capítulo IV, resumiremos brevemente los resultados y las definiciones necesarias para tratar algunas lógicas de inconsistencia formal y su semántica a través de Nmatrices. Para la versión de primer orden de estas lógicas, demostramos un resultado correcto y completo adaptando nuestro trabajo algebraico. Esta presentación simplifica la presentada en [14] por Coniglio, Figallo-Orellano y Golzio, ya que no necesitamos usar la completacion reticular de Dedekind-MacNeille para álgebras booleanas y el modelo canónico es construido sobre el conjunto de fórmulas, entre otras.

En el Capítulo V, construimos modelos valuados de estructuras de Fidel siguiendo la metodología desarrollada para modelos valuados de Heyting; Recuérdese que las estructuras de Fidel no son álgebras en el sentido del álgebra universal. Tomando modelos que verifican la ley de Leibniz, podemos probar que todos los axiomas de la teoría de conjuntos de ZF son válidos sobre estos modelos. La prueba se basa fuertemente en la existencia de modelos paraconsistentes de la ley de Leibniz. En este escenario, se discute la dificultad de tener modelos algebraicos paraconsistentes para fórmulas con negación usando el mapeo interpretación estándar, mostrando que la existencia de modelos de la ley de Leibniz es esencial para obtener modelos para ZF. Es importante remarcar que en la literatura solo existen modelos valuados algebraicos sobre álgebras de Boole, Heyting y reticulos implicativos. Por lo que nuestros resultados, proporcionan nuevos modelos para ZF que en particular son paraconsistentes. Los estudios sobre teoria paraconsistente de conjuntos que está en la literatura, son formulaciones sintácticas; es decir, sin modelos.

Resumen

Antonio Monteiro realizó una caracterización de las congruencias maximales para ciertas variedades semisimples, permitiendo presentar un teorema de representación de las mismas; que bajo condiciones específicas, este teorema se le puede presentar una prueba unificada. En esta tesis, mostramos que esta noción de congruencia maximal está íntimamente ligada a la noción de teorías maximales de Henkin para ciertas familias de lógicas de la literatura de lógicas algebraicas. Para ver esta relación, estudiamos la clase de álgebras de Hilbert n-valoradas con supremo enriquecidas con operadores de Moisil. Para esta clase de álgebras, presentamos un cálculo proposicional y de primer orden correctos y completos. Además, mostramos cómo funciona esta relación para lógicas de variedades semisimples estudiadas en la escuela de Monteiro. Ampliando el alcance de las aplicaciones, presentamos resultados de correctitud y completitud para lógicas paraconsistentes de primer orden a través de una semántica matricial no determinista. A pesar de que estas lógicas no son algebraizables con el método general de Blok-Pigozzi, presentan un comportamiento algebraico que nos permite dar una presentación simplificada.

Por otro lado, construimos modelos valorados sobre estructuras de Fidel siguiendo la metodología desarrollada para modelos valorados de Heyting; recordemos que las estructuras de Fidel no son álgebras en el sentido del álgebra universal. Tomando modelos que verifican la ley de Leibniz, podemos probar que todos los axiomas de la teoría de conjuntos de ZF son válidos sobre estos modelos. La prueba se basa fuertemente en la existencia de modelos paraconsistentes de la ley de Leibniz. En este escenario, se discute la dificultad de tener modelos de ley algebraicos paraconsistentes para fórmulas con negación usando el mapeo interpretación estándar, mostrando que la existencia de modelos de la ley de Leibniz es esencial para obtener modelos para ZF.

Abstract

Antonio Monteiro gave a characterization of maximal congruences in certain semisimple varieties in order to present a representation theorem for them. Under specific conditions, this theorem can be presented with the same proof for every semisimple variety considered by him. In this thesis, we show that this notion of maximal congruence is closely linked to Henkin's notion of maximal theories for certain families of logics from the literature of algebraic logic. To see this relation, we study the class of n-valued Hilbert algebras with supremum enriched with Moisil operators. For this class of algebras, we present a sound and complete propositional and first-order calculus. Moreover, we show how this relation works for logics from semisimple varieties studied in the Monteiro's school. Extending the scope of applications, we present soundness and completeness results for some first-order paraconsistent logics through non-deterministic matrix semantics. Despite the fact that these logics are not algebraizable with the Blok-Pigozzi's method, they display an algebraic behaviour that allows us to give a simplified presentation.

On the other hand, we build Fidel-structures valued models following the methodology developed for Heyting-valued models; recall that Fidel structures are not algebras in the universal algebra sense. Taking models that verify Leibniz law, we are able to prove that all set-theoretic axioms of ZF are valid over these models. The proof is strongly based on the existence of paraconsistent models of Leibniz law. In this setting, the difficulty of having algebraic paraconsistent models of law for formulas with negation using the standard interpretation map is discussed, showing that the existence of models of Leibniz law is essential to getting models for ZF.

Contenidos

1. Capítulo I: La variedad de las $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebras

En este Capítulo introduciremos las clase de las $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebras, presentaremos un estudio de sus propiedades estructurales y sus congruencias. Probaremos que se trata de una variedad semisimple, para esta tarea nos apoyaremos en las técnicas desarrolladas por A. Monteiro para un teorema de representación. En el Capítulo 2 serán generalizadas esta representación a una familia grande de clases de álgebras estudiadas en la escuela de Bahia Blanca que llamaremos álgebras de Monteiro. Finalmente, se determinaran las álgebras simples que generan la variedad.

1.1. Introducción

En esta introducción resumiremos los antecedentes fundamentales que se utilizarán en el resto de la tesis. Recordemos que en 1950, Henkin introdujo que las álgebras de Hilbert son considerados como la contrapartida algebraica del fragmento implicativo del cálculo proposicional intuicionista. Se dice que un álgebra $\langle A, \to, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert si satisface las siguientes identidades:

(H1) $1 \to x = x$,

(H2) $x \to x = 1$,

(H3) $(x \to (y \to z)) = (x \to y) \to (x \to z)$,

(H4) $x \to ((y \to x) \to x) = (y \to x) \to ((x \to y) \to y)$.

Estas ecuaciones, que determinan las álgebras de Hilbert, fueron aportadas por Diego en [28], dónde también probó que las álgebras de Hilbert son finitamente generadas. En el siguiente Lema se presentarán propiedades ya conocidas sobre estas estructuras:

Lema 1.1.1. ([28]) *Para toda álgebra de Hilbert* $\mathbf{A}$ *y todo* $x, y, z \in A$*, valen las siguientes propiedades:*

(H5) Si $x = 1$ y $x \to y = 1$, entonces $y = 1$;

(H6) La relación $\leq$, definida como $x \leq y$ si, y solo si, $x \to y = 1$, es un orden sobre A con 1 como último elemento;

(H7) $x \leq y \to x$;

(H8) $x \to 1 = 1$;

(H9) Si $x \leq y$, entonces $z \to x \leq z \to y$;

(H10) Si $x \leq y \to z$, entonces $y \leq x \to z$;

(H11) $x \to ((x \to y) \to y) = 1$;

(H12) Si $x \leq y$, entonces $y \to z \leq x \to z$;

(H13) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$;

(H14) $x \to (x \to y) = x \to y$;

(H15) $((x \to y) \to y) \to y = x \to y$.

Recordemos que para cualquier álgebra de Hilbert $\mathbf{A}$, se dice que un subconjunto D es un sistema deductivo de A (d.s., para abreviar) si $1 \in D$ y, si $x, x \to y \in D$, luego $y \in D$. Denotamos por $\mathcal{D}(A)$ el conjunto de sistemas deductivos de A. Es bien sabido que el conjunto de todas las congruencias de A es isomorfo reticularmente al conjunto $\mathcal{D}(A)$ ordenado por la relación de inclusión, véase, por ejemplo, [28]. Vale la pena señalar que los sistemas deductivos también se conocen como *filtros implicativos* o simplemente *filtros*, véase, por ejemplo, [19].

En [73], Thomas consideró el cálculo implicativo positivo n-valuado como un cálculo que tiene una matriz característica $\langle A, \{1\}\rangle$ donde $\{1\}$ es el conjunto de elementos designados y el álgebra $\mathbf{A} = \langle C_n, \to, 1\rangle$ se define de la siguiente manera:

$$C_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

y

$$x \to y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } y < x \end{cases}.$$

Este autor demostró que para definir este cálculo, tenemos que agregar el siguiente axioma al cálculo implicativo positivo:

(E3) $T_n(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) = \beta_{n-2} \to (\beta_{n-3} \to (\cdots \to (\beta_0 \to \alpha_0) \cdots))$, donde

$\beta_i = (\alpha_i \to \alpha_{i+1}) \to \alpha_0$ para todo $i, 0 \leq i \leq n-2$.

La contraparte algebraica del cálculo implicativo positivo n-valuado se estudió en [63] donde el axioma (E3) se traduce por la ecuación $T_n = 1$ a álgebras de Hilbert.

1.2. Lógicas tarskianas

Recordemos que una lógica definida sobre un lenguaje $\mathcal{S}$ es un sistema $\mathcal{L} = \langle For, \vdash\rangle$ donde For es el conjunto de fórmulas sobre $\mathcal{S}$ y la relación $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{P}(For) \times For$, donde $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A. Se dice que la lógica $\mathcal{L}$ es una lógica tarskiana si satisface las siguientes propiedades, para cada conjunto $\Gamma \cup \Omega \cup \{\alpha, \beta\}$ de fórmulas:

(1) Si $\alpha \in \Gamma$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$,

(2) Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ y $\Gamma \subseteq \Omega$, entonces $\Omega \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$

(3) Si $\Omega \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \beta$ por cada $\beta \in \Omega$, luego $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$.

Se dice que una lógica $\mathcal{L}$ es finitaria si satisface lo siguiente:

(4) si $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$, entonces existe un subconjunto finito Γ_0 de Γ tal que $\Gamma_0 \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$.

La siguiente condición agrega la *estructuralidad* a una lógica tarskiana:

(5) Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$, entonces $\sigma[\Gamma] \vdash_{\mathcal{L}} \sigma(\alpha)$ para cada $\mathcal{L}$-sustitución σ;

de esta manera obtenemos lo que se conoce como *sistema deductivo.*

Definición 1.2.1. *Sea $\mathcal{L}$ una lógica tarskiana y sea Γ un conjunto de fórmulas. Decimos que todo conjunto de fórmulas es una teoría. Se dice que Γ es una teoría consistente si existe una fórmula φ tal que $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \varphi$. Además, decimos que Γ es una teoría maximal consistente si $\Gamma, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ para cualquier fórmula $\psi \notin \Gamma$; y, en este caso, decimos que Γ es maximal con respecto a φ.*

Un conjunto de fórmulas Γ es cerrado en $\mathcal{L}$ si la siguiente propiedad se cumple para cada fórmula φ: $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ si y solo si $\varphi \in \Gamma$. Es fácil ver que cualquier teoría maximal consistente es cerrada.

Lema 1.2.2 (Lindenbaum-Łoś)**.** *Sea $\mathcal{L}$ una lógica tarskiana y finitaria y sea $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas tales que $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \varphi$. Entonces, existe un conjunto de fórmulas Ω tal que $\Gamma \subseteq \Omega$ con Ω una teoría maximal consistente con respecto a la fórmula φ en $\mathcal{L}$.*

Demostración. La prueba se puede encontrar en [74, Teorema 2.22]. $\square$

1.3. La clase de álgebras modales de Hilbert n-valuadas con supremo

Recordemos que M. Canals-Frau y A. V. Figallo estudiaron el fragmento implicativo n-valuado con los operadores de posibilidad de Moisil, [16, 17]. Definieron las álgebras modales de Hilbert n-valuadas como

$$\langle A, \to, \sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}, 1\rangle$$

donde el reducto $\langle A, \to, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert n-valuado y los operadores $\sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}$ verifican las siguientes condiciones:

(HM1) $(\sigma_0 x \to y) \to x = x$,

(HM2) $\sigma_i(x \to y) \to (\sigma_i x \to \sigma_j y) = 1$, para cualquier $0 \leq i \leq j \leq n-1$, (HM3) $(\sigma_i x \to \sigma_i y) \to ((\sigma_{i+1} x \to \sigma_{i+1} y) \to \cdots ((\sigma_{n-1} x \to \sigma_{n-1} y) \to \sigma_i (x \to y)) \cdots) = 1$,

(HM4) $\sigma_i (x \to \sigma_j y) = x \to \sigma_j y$, para cualquier $0 \leq i \leq j \leq n-1$,

(HM5) $\sigma_{n-1} x = (x \to \sigma_i x) \to \sigma_j x$, para cualquier $0 \leq i \leq j \leq n-1$.

La demostración del siguiente Lema se puede consultar en [16] (ver también [17]).

Lema 1.3.1. *Para cada* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_n^{\vee,\sigma}$*, las siguientes propiedades se cumplen para cada* $x, y \in A$*:*

(HM7) $\sigma_0 x \leq x$,

(HM8) $\sigma_i(\sigma_j x) = \sigma_j x$,

(HM9) $\sigma_j 1 = 1$,

(HM10) $\sigma_0 x \leq \sigma_1 x \leq \cdots \leq \sigma_{n-1} x$,

(HM11) $x \leq \sigma_{n-1} x$,

(HM12) $x \leq y$ *entonces* $\sigma_i x \leq \sigma_i y$,

(HM13) $\sigma_i (\sigma_j x \to y) = \sigma_j x \to \sigma_i y$,

(HM14) $x \to \sigma_j (x \to y) = \sigma_j (x \to y)$,

(HM15) $x \to \sigma_j y \leq \sigma_j (x \to y)$,

(HM16) $\sigma_j (x \to y) \leq \sigma_j x \to \sigma_j y$,

(HM17) $(\sigma_0 x \to \sigma_0 y) \to ((\sigma_1 x \to \sigma_1 y) \to ...((\sigma_{n-1} x \to \sigma_{n-1} y) \to (x \to y)) \cdots) = 1$,

(HM18) $\sigma_i x = \sigma_i y$ *para todo* i, $0 \leq i \leq n-1$, *luego* $x = y$,

(HM19) $(\sigma_j x \to y) \to \sigma_j x = \sigma_j x$,

(HM20) $\sigma_{n-1} x = (x \to \sigma_1 x) \to x$,

(HM21) $\sigma_1(\sigma_1 y \to x) = (\sigma_1(\sigma_1 x \to t) \to (\sigma_1 y \to t)) = 1$.

A su vez, un álgebra $\langle A, \to, \vee, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert con supremo si $\langle A, \to, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert, $\langle A, \vee, 1\rangle$ es un semirretículo superior con último elemento 1, y se cumplen las siguientes condiciones:

($H^{\vee}1$) $x \to (x \vee y) = 1$

($H^{\vee}2$) $(x \to y) \to ((x \vee y) \to y) = 1$, para todo $x, y \in A$ (ver, por ejemplo, [37]).

1.4. Una nueva clase de álgebras

Estamos en condiciones de definir una nueva clase de álgebras para ser estudiadas.

Definición 1.4.1. *Se dice que un álgebra $\langle A, \to, \vee, \sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}, 1\rangle$, es un álgebra de Hilbert n-valente modal con supremo ($H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra), si el reducto $\langle A, \to, \vee, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert con supremo, $\langle A, \to, \sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert n-valente modal y satisface lo siguiente:*

(HM6) $\sigma_i(x \vee y) = \sigma_i x \vee \sigma_i y$, para todo $0 \leq i \leq n-1$.

Por $\mathbb{H}_n^{\vee,\sigma}$, denotamos la variedad de las $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebras y, como es usual, denotaremos a $\langle A, \to, \vee, \sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}, 1\rangle$ como el $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra A.

Se dice que un subconjunto D de $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_n^{\vee,\sigma}$ es un sistema deductivo modal (s.d.m.) si $D \in \mathcal{D}(A)$, y $x \in D$ implica $\sigma_0 x \in D$. Denotamos por $\mathcal{D}_m(A)$ el conjunto de todos los s.d.m. de la $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$. Supongamos que M es un s.d. de A. Diremos que M es maximal si para todos los M_0 s.d., tales que $M \subseteq M_0$, tenemos que $M = M_0$ o $M_0 = A$. Podemos definir de forma análoga los s.d.m..

Notemos que no es difícil probar que, para cualquier s.d.m., si $x \in A \backslash M$ e $y \in A$, entonces $\sigma_0 x \to y \in M$ y $\sigma_k x \to y \in M$.

Para un álgebra $\mathbf{A}$ dada, la intersección arbitraria de sistemas deductivos modales es un sistema deductivo modal de A. Luego, como de costumbre, consideraremos la noción de sistema deductivo modal generado por un conjunto X, que denotaremos $[X]$. Tenemos así el siguiente lema:

Lema 1.4.2. *Sean* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_n^{\vee,\sigma}$ *y* $M \subseteq A$. *Entonces:*

$$[M] = \{y \in A : \textit{existen } z_1, \cdots, z_n \in M \textit{ tales que}$$

$$\sigma_0 z_1 \to (\sigma_0 z_2 \to (\cdots(\sigma_0 z_{n-1} \to (\sigma_0 z_n \to y)\cdots) = 1\}.$$

Demostración: Consideremos el conjunto

$$H = \{y \in A : \text{hay } z_1, \cdots, z_n \in A \text{ tales que}$$

$$\sigma_0 z_1 \to (\sigma_0 z_2 \to (\cdots(\sigma_0 z_{n-1} \to (\sigma_0 z_n \to y)\cdots) = 1\}.$$

De (H8) del Lema 1.1.1, tenemos $1 \in H$. Ahora, supongamos que $x, x \to y \in H$, entonces existen $h_1, \cdots, h_k, t_1, \cdots, t_l \in M$, tales que $\sigma_0 h_1 \to (\cdots(\sigma_0 h_k \to x)\cdots) = 1$ y $\sigma_0 t_1 \to (\cdots(\sigma_0 t_l \to (x \to y))\cdots) = 1$ Entonces de (H13), $x \to (\sigma_0 t_1 \to (\cdots(\sigma_0 t_l \to y))\cdots) = 1$. Luego, por (H8) $[\sigma_0 h_1 \to (\cdots(\sigma_0 h_k \to x)\cdots)] \to [(\sigma_0 h_1 \to (\cdots(h_k \to (\sigma_0 t_1 \to (\cdots(t_l \to y))\cdots)] = 1$ Por lo tanto, por hipótesis y (H1), tenemos $[(\sigma_0 h_1 \to (\cdots(h_k \to (\sigma_0 t_1 \to (\cdots(\sigma_0 t_l \to y))\cdots)] = 1$. Para ver que H es modal, consideremos $z \in H$, entonces existen $l_1, \cdots, l_n \in M$, tales que $\sigma_0 l_1 \to (\cdots(\sigma_0 l_k \to z)\cdots) = 1$. Entonces, aplicando (HM9) y (HM13) del Lema 1.3.1, tenemos que $\sigma_0(\sigma_0 l_1 \to (\cdots(\sigma_0 l_k \to z)\cdots)) = (\sigma_0 l_1 \to (\cdots(\sigma_0 l_k \to \sigma_0 z)\cdots) = 1$ y así, $\sigma_0 z \in H$. Finalmente, supongamos que existe un sistema deductivo modal D tal que $M \subseteq D$, y de esto se sigue inmediatamente que $H \subseteq D$, lo que completa la demostración. □

Lema 1.4.3. *Sean* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_n^{\vee,\sigma}$, *$B$ una subálgebra de* $\mathbf{A}$ *y* $D_B \in \mathcal{D}_m(B)$. *Entonces, existe* $D \in \mathcal{D}_m(A)$ *tal que* $D_B = D \cap B$; *es decir, la variedad de* $H_n^{\vee,\sigma}$*-álgebra tiene la propiedad de extensión de congruencia.*

Demostración: Resulta inmediato del Lema 3.2.3. □

Proposición 1.4.4. *Sean* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_n^{\vee,\sigma}$, $x, y, z \in A$ *y* $A \in \mathcal{D}_m(A)$. *Entonces:*

(i) *Si* $x \to y, y \to z \in D$, *entonces* $x \to z \in D$,

(ii) *Si* $x \to y, y \to z \in D$, *entonces* $x \to z \in D$,

(iii) *Si* $x \to y \in D$, *entonces* $(x \vee z) \to (y \vee z) \in D$,

(iv) *Si* $x \to z, y \to z \in D$, *entonces* $(x \vee y) \to z \in D$.

Demostración:

(i) Por hipótesis y (H7), tenemos $x \to (y \to z) \in D$. Entonces, de (H3), obtenemos que $(x \to y) \to (x \to z) = 1 \in D$. Por lo tanto, $x \to z \in D$.

(ii) De (H3), tenemos $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z) \in D$. Entonces, $x \to z \in D$.

(iii) Por Definición 1.4.1 e (i), tenemos que $x \to (y \vee z) \in D$. Por otro lado, sabemos por definición que $(x \to (y \vee z)) \to ((x \vee y \vee z) \to (y \vee z)) = 1$. Entonces, $(x \vee y \vee z) \to (y \vee z) \in D$. Ahora, por Definición 1.4.1, $(x \vee z) \to (x \vee y \vee z) = 1$ y así, por (i), $(x \vee z) \to (y \vee z) \in D$.

(iv) Por (iii), $(x \vee y) \to (y \vee z) \in D$. Además, de la Definición 1.4.1, $(y \to z) \to ((y \vee z) \to z) = 1$. Así, de (H13) tenemos que $(y \vee z) \to ((y \to z) \to z) = 1$. Entonces, $(x \vee y) \to ((y \to z) \to z) \in D$ y así, $(y \to z) \to ((x \vee y) \to z) \in D$. Por lo tanto, $(x \vee y) \to z \in D$. $\square$

De la última Proposición, (HM9) y (HM10), tenemos que para cualquier $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_n^{\vee,\sigma}$ y cualquier $D \in \mathcal{D}_m(A)$, $Con(A) = \{R(D) : D \in \mathcal{D}_m(A)\}$ donde $R(D) = \{(x, y) \in A^2 : x \to y, y \to x \in D\}$ y luego, existe un isomorfismo de retículos entre $Con(A)$ y $D_m(A)$.

1.5. Sistemas deductivos débiles y un Teorema de Representación

A continuación, utilizaremos la técnica de Monteiro para probar que la variedad $\mathbb{H}_n^{\vee,\sigma}$ es semisimple, [61]. Con este fin, consideramos un álgebra modal de Hilbert n-valente con supremo A y podemos definir una nueva operación binaria $\rightarrowtail$ llamada implicación débil tal que: $x \rightarrowtail y = \sigma_0 x \to y$ para $x, y \in A$.

Lema 1.5.1. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_{\mathbf{n}}^{\vee,\sigma}$, *para cualquier* $x, y, z \in A$ *se cumplen las siguientes propiedades:*

(wi1) $1 \rightarrowtail x = x$,

(wi2) $x \rightarrowtail x = 1$,

(wi3) $x \rightarrowtail \sigma_0 x = 1$,

(wi4) $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail z) = (x \rightarrowtail y) \rightarrowtail (x \rightarrowtail z)$,

(wi5) $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail x) = 1$,

(wi6) $((x \rightarrowtail y) \rightarrowtail x) \rightarrowtail x = 1$.

Demostración: Solo probaremos las siguientes propiedades:
(wi4) De (H3) y (HM13), $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail z) = \sigma_0 x \to (\sigma_0 y \to z) = (\sigma_0 x \to \sigma_0 y) \to (\sigma_0 x \to z) = \sigma_0(\sigma_0 x \to y) \to (\sigma_0 x \to z) = (x \rightarrowtail y) \rightarrowtail (x \rightarrowtail z)$.
(wi6) De (HM13), (HM19) y (wi2), tenemos $((x \rightarrowtail y) \rightarrowtail x) \rightarrowtail x = \sigma_0(\sigma_0 x(\sigma_0 x \to y) \to x) \to x = ((\sigma_0 x \to \sigma_0 y) \to \sigma_0 x) \to x = x \rightarrowtail x = 1$. □

Sea $\mathbf{A}$ un $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra y supongamos que $D \subseteq A$, decimos que D es un sistema deductivo débil (s.d.d.) si $1 \in D$, y si $x, x \rightarrowtail y \in D$, entonces $y \in D$. No es difícil ver que el conjunto de sistemas deductivos modales es igual al conjunto de sistemas deductivos débiles. Denotamos por $\mathcal{D}_w(A)$ el conjunto de sistemas deductivos débiles de un álgebra de Hilbert. Ahora, para todo sistema deductivo (débil) D de A, decimos que D es maximal si para todo sistema deductivo (débil) M tal que $D \subseteq M$, entonces $M = A$ o $M = D$. Además, consideremos el conjunto de todos las s.d.d. maximales, denotado por $\mathcal{E}_w(A)$.

A. Monteiro dio la siguiente definición para caracterizar los sistemas deductivos maximales en cierta clase de álgebras, [61]:

Definición 1.5.2. *Sean* $\mathbf{A}$ *un* $H_n^{\vee,\sigma}$*-álgebra,* $D \in \mathcal{D}_w(A)$ *y* $p \in A$*. Decimos que* D *es un sistema deductivo débil ligado a* p *si* $p \notin D$ *y para cualquier* $D' \in \mathcal{D}_w(A)$ *tal que* $D \subsetneq D'$ *tenemos que* $p \in D'$*.*

Ahora estamos en condiciones de probar los resultados principales de esta sección.

Lema 1.5.3. *Para una* $H_n^{\vee,\sigma}$*-álgebra* $\mathbf{A}$ *dada, todo sistema deductivo modal es un sistema deductivo débil y viceversa.*

Demostración. No es difícil ver que todo sistema deductivo modal es un sistema deductivo débil. Para la recíproca, sea D un sistema deductivo débil y supongamos que $x, x \rightarrowtail y \in D$. De (wi3) del Lema 3.2.6, tenemos $x \rightarrowtail \sigma_0 x \in D$ y por lo tanto, $\sigma_0 x \in D$. Por otro lado, de (wi5) tenemos que $(x \to y) \rightarrowtail (x \rightarrowtail (x \to y))$. Entonces, $x \rightarrowtail (x \to y) \in D$ y así $\sigma_0 x \to (x \to y) \in D$. Teniendo en cuenta (H3) de la definición de álgebras de Hilbert, tenemos que $(\sigma_0 x \to x) \to (\sigma_0 x \to y) \in D$. De este último y (HM7), tenemos que $\sigma_0 x \to y \in D$, lo que completa la demostración. $\square$

Lema 1.5.4. *Sea* **A** *un* $H_n^{\vee,\sigma}$*-álgebra y* M *un sistema deductivo maximal de* A*. Entonces, por cada* $x \in A \setminus M$*, tenemos que* $\sigma_0 x \to y \in M$ *para cada* $y \in A$*.*

Lema 1.5.5. *Sea* **A** *un* $H_n^{\vee,\sigma}$*-álgebra, entonces* $\{1\} = \bigcap_{M \in \mathcal{E}_w(A)} M$ *donde* $\mathcal{E}_w(A)$ *es el conjunto de s.d.d. maximales de* **A**.

Demostración. Primero veremos que por cada sistema deductivo débil D, existe un sistema deductivo débil L_p ligado a algún elemento $p \in A$ que lo contiene. Ahora, consideremos el conjunto $\mathcal{D}_w(D,p) = \{S \in \mathcal{D}_w : D \subseteq S, p \notin S\}$ donde $\mathcal{D}_w$ es el conjunto de todos los sistemas deductivos débiles de A. No es difícil ver que cada cadena de $\mathcal{D}_w(D,p)$ tiene una cota superior, entonces por el Lema de Zorn hay un elemento máximo L_p en ella. El conjunto L_p es el sistema deductivo débil deseado ligado a p tal que $D \subseteq L_p$.

Es claro que $D \subseteq \bigcap_{p \in A \setminus D} L_p$ y no es difícil ver que $D = \bigcap_{p \in A \setminus D} L_p$.

Es posible ver que todo sistema deductivo débil maximal es un sistema deductivo débil ligado a algún elemento de A y viceversa. Para ver esto, debemos tener en cuenta el lema 1.5.4 y (wi6). Por lo tanto, dado que $\{1\}$ es un sistema deductivo débil, la prueba está completa. $\square$

Consideremos el álgebra cociente A/M definida por $a \equiv_M b$ si, y solo si, $a \to b, b \to a \in M$, y la proyección canónica $q_M : A \to A/M$ definido por $q_M = |x|_M$, donde $|x|_M$ denota la clase de equivalencia de x generada por M. A partir de los resultados del álgebra universal, tenemos que si M es un sistema deductivo maximal de A, entonces A/M es un $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra simple. Decimos que una variedad es semisimple si toda álgebra subdirectamente irreducible es simple; o de manera equivalente, cada álgebra de la variedad es un producto subdirecto de álgebras simples. Ahora, mostraremos que la variedad de $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebras es de hecho semisimple.

Lema 1.5.6. *Sea* **A** *un* $H_n^{\vee,\sigma}$*-álgebra. El mapeo* $\Phi : A \longrightarrow \prod_{M \in \mathcal{E}_w(A)} A/M$*, definido por* $\Phi(x)(M) = q_M(x)$*, es un homomorfismo uno a uno.*

Demostración: Tomando $\prod_{M_\alpha \in \mathcal{E}_w(A)} A/M_\alpha$ donde $\mathcal{E}_w(A)$ es el conjunto de s.d.d. maximales. Definamos $\Phi : A \to \prod_{M_\alpha \in \mathcal{E}_w(A)} A/M_\alpha$ tal que por cada α tenemos que $\Phi(a) = f_a$ donde $f_a(\alpha) = q_\alpha(a) = |a|_\alpha \in A/M_\alpha$ con $a \in A$. No es difícil ver que Φ es un $H_n^{\vee,\sigma}$-homomorfismo en vista del hecho de que $\equiv_{M_\alpha}$ es una relación de congruencia. Ahora, por el hecho de que $\{1\} = \bigcap_{M \in \mathcal{E}_w(A)} M$, es posible ver que Φ es una función uno a uno. □

La técnica utilizada en esta sección para demostrar que la variedad es semisimple se puede utilizar en una gran familia de álgebras, ver Observación 2.5.6 de la Sección 2.5. Ahora, nuestra próxima tarea es determinar las álgebras generadoras de la variedad. En primer lugar buscaremos determinar, para una $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra dada, la partición asociada a una congruencia.

Lema 1.5.7. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_n^{\vee,\sigma}$ *que contiene más de un elemento y* $M \in \mathcal{E}_w(A)$. *Entonces, la familia* $\mathcal{F}_M = \{E_j^M\}_{0 \leq j \leq m}$, $m \leq n$ *es una partición de* A *donde*

$$E_j^M = \{a \in A : a, \sigma_k a \notin M, 1 \leq k \leq j, \sigma_{j+1} a \in M\}$$

con $1 \leq j \leq n-2$,

$$E_{n-1}^M = \{a \in A : a, \sigma_{n-1} a \notin M\}$$

y $E_0^M = M$.

Demostración: Supongamos que $E_i^M \neq \emptyset$ y $E_j^M \neq \emptyset$, $i \neq j$. Tenemos que demostrar que $E_i^M \cap E_j^M = \emptyset$. Supongamos que existe $x \in E_i^M \cap E_j^M$. Si $i = 0$ y $j > 0$, entonces $x \in M \cap E_j^M$. Si $0 < i \neq j < n-1$ y, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $i < j$, entonces $\sigma_j x \notin M$ y por lo tanto $\sigma_{i+1} x \notin M$ Si $0 < i \neq n-1$ y $j = n-1$, entonces $\sigma_{i+1} x \in M$ y $\sigma_i x \notin M$.

Si $x \in A \backslash M$ y para cualquier k, $\sigma_k \notin M$, entonces $x \in E_{n-1}^M$, if $x \in A \backslash M$ y existe k tal que $\sigma_k \in M$, luego $x \in E_i^M$ con $i \leq k$. Por lo tanto, $x \in \bigcup_{i=0}^{n} E_i^M$. A partir de esto último, es fácil probar que $\bigcup_{i=0}^{n} E_i^M = A$. □

A continuación, probaremos el resultado principal de esta sección, donde necesitamos construir un cierto homomorfismo para determinar las álgebras generadoras de la variedad. Para ello, consideremos el álgebra estándar siguiente.

Observación 1.5.8. *Llamamos $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra estándar al álgebra definida de la siguiente manera:*

$$\mathbf{C_n} = \left\langle \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}, \to, \vee, \{\sigma_i\}_{0 \leq i \leq n-1}, 1 \right\rangle$$

donde:

$$x \to y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & \text{caso contrario} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \sigma_i(\tfrac{j}{n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i + j < n \\ 1 & \text{si } i + j \geq n \end{cases}.$$

Está claro que en el álgebra estándar, el operador σ_0 coincide con el operador $\triangle$ de Baaz para álgebras Gödel n-valentes, ver [6]. Ahora, estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema.

Teorema 1.5.9. *Sean* $\mathbf{A}$ *un* $H_n^{\vee,\sigma}$*-álgebra no trivial,* $M \in \mathcal{E}_w(A)$ *y* $\mathcal{F}_M = \{E_j^M\}_{0 \leq j \leq m}$*,* $m \leq n-1$ *la partición asociada con* M*. Entonces, el mapeo* $h : A \longrightarrow \mathbf{C_n}$ *tal que* $h(x) = \dfrac{n-j}{n}$ *si* $x \in E_j^M$ *es un homomorfismo tal que* $h^{-1}(\{1\}) = M$*.*

Demostración: Supongamos $x \in M$, luego $h(x) = 1$ y $\sigma_k h(x) = 1$. Como $\sigma_0 \in M$ tenemos $\sigma_k x \in M$ para todo $1 \leq k \leq n-1$. Por lo tanto, $h(\sigma_k x) = 1$. Ahora, supongamos $x \notin M$, luego $x \in E_j^M$ por algún $1 \leq j < n-1$ o $x \in E_{n-1}^M$. El primer caso implica que $h(x) = \dfrac{n-j}{n}$ y luego, $\sigma_k h(x) = \sigma_k \left(\dfrac{n-j}{n}\right)$. Si $k \leq j$ o $j < k \leq n-1$, entonces $\sigma_k h(x) = 0$ o $\sigma_k h(x) = 1$, respectivamente. De esto último, inferimos que $k \leq j$ implica $\sigma_k x \notin M$, y luego $h(\sigma_k x) = 1$. Por otro lado, $k \leq j$ implica $\sigma_k x \notin M$ y $\sigma_{n-1}(\sigma_k x) \notin M$, entonces $\sigma_k x \in E_{n-1}^M$ y $h(\sigma_k x) = 0$. Si $j < k$, entonces $\sigma_k x \in M$ y entonces $h(\sigma_k x) = 1$. Si $x \in E_{n-1}^M$ no es difícil ver que $h(\sigma_k x) = \sigma_k h(x)$.

Para probar $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$, tenemos los siguientes casos a considerar:

(a) Si $x, y \in M$, entonces $x \vee y \in M$ y por lo tanto $h(x) \vee h(y) = 1 = h(x \vee y)$

(b) Si $x, y \in E_j^M$, $1 \leq j < n-1$, entonces $h(x) \vee h(y) = \dfrac{n-1-j}{n-1}$. Además, $x, y \notin M$, $\sigma_0 x, \sigma_0 y, \cdots, \sigma_j x, \sigma_j y \notin M$ y $\sigma_{j+1} x, \sigma_{j+1} y \in M$. De $(H^{\vee}\,2)$ y $(HM6)$ $\sigma_{j+1}(x \vee y) \in M$ y $\sigma_j(x \vee y) \notin M$, entonces $x \vee y \in E_j^M$ y $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$.

(c) Si $x \in E_j^M$, $y \in E_i^M$ donde $0 \leq i < j < n-1$, entonces $h(x) = \dfrac{n-j}{n} = h(y)$ y $h(x) \vee h(y) = \dfrac{n-i}{n}$. De $y \in E_i^M$, se sigue que $\sigma_{i+1} y \in M$ y luego $\sigma_{i+1} x \vee \sigma_{i+1} y \in M$, por lo tanto $\sigma_{i+1}(x \vee y) \in M$. Es fácil ver que $x \vee y \notin E_i^M$ y luego $h(x \vee y) = \dfrac{n-i}{n} = h(x) \vee h(y)$.

(d) Si $x, y \in E_{n-1}^M$ entonces $h(x) \vee h(y) = 0$ y veamos que $x \vee y, \sigma_{n-1}(x \vee y) \notin M$. Suponemos que $x, y \in E_{n-1}^M$ implica $x \to y \in M$ y entonces que $(x \vee y) \to y \in M$. Si $x \vee y \in M$, entonces $y \in M$ que es una contradicción. Entonces $x \vee y \notin M$. Si suponemos que $\sigma_{n-1}(x \vee y) \in M$, entonces $\sigma_{n-1} y \in M$, lo cual es una contradicción por un argumento similar. Entonces $x \vee y \in E_{n-1}^M$ y $h(x \vee y) = 0 = h(x) \vee h(y)$.

(e) Si $x \in E_{n-1}^M$ y $y \in E_j^M$, $0 \leq j < n-1$, entonces $h(x) = 0$, $h(y) = \dfrac{n-1-j}{n-1}$ y $h(x) \vee h(y) = \dfrac{n-1-j}{n-1}$. Según esto último, $\sigma_j(x \vee y) \notin M$, y por $(H^{\vee} 2)$, tenemos que $\sigma_{j+1}(x \vee y) \in M$. Por lo tanto $h(x \vee y) = \dfrac{n-j}{n} = h(x) \vee h(y)$.

(f) Si $x \in E_j^M$ y $y \in E_0^M$, $1 \leq j < n-1$, entonces $h(x) \vee h(y) = 1$ Es fácil ver que $x \vee y \in E_0^M = M$, y luego $h(x \vee y) = 1 = h(x) \vee h(y)$.

Finalmente, no es difícil ver que $h^{-1}(\{1\}) = M$. $\square$

De este último teorema y resultados bien conocidos del álgebra universal, tenemos que las $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebras simples son $\mathbb{C}_n$ y sus subálgebras; son las únicas álgebras subdirectamente irreducibles salvo isomorfismos.

2. Capítulo II: El cálculo proposicional y cuantificado asociados a las $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebras y a las álgebras de Monteiro

2.1. Cálculo proposicional

Sea Var un conjunto numerable de variables proposicionales. Los símbolos $\to$, $\vee$ y $\sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}$ se denominan operadores de implicación, supremo y posibilidad de Moisil, respectivamente. Denotamos por Fm el conjunto de fórmulas y se define como de manera usual. Además, denotamos por $\mathfrak{Fm} = \langle Fm, \to, \vee, \sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1} \rangle$ el álgebra absolutamente libre generada por el conjunto Var.

Definición 2.1.1. *Denotamos por $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$, el cálculo de Hilbert determinado por los siguientes axiomas y reglas de inferencia donde $\alpha, \beta, \gamma \in Fm$:*

Axiomas esquema

(A1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$,

(A2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$,

(A3) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$,

(A4) $\beta \to (\alpha \vee \beta)$,

(A5) $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$.

(A6) $((\sigma_0\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$,

(A7) $\sigma_i(\alpha \to \beta) \to (\sigma_i\alpha \to \sigma_j\beta)$, *para todo* i, j *tal que* $0 \leq i \leq j \leq n-1$,

(A8) $(\sigma_i\alpha \to \sigma_i\beta) \to ((\sigma_{i+1}\alpha \to \sigma_{i+1}\beta) \to \cdots ((\sigma_{n-1}\alpha \to \sigma_{n-1}\beta) \to \sigma_i(\alpha \to \beta)) \cdots)$ *para todo* i *tal que* $0 \leq i \leq n-1$,

(A9) $(\sigma_i(\alpha \to \sigma_j\beta)) \leftrightarrow (\alpha \to \sigma_j\beta)$ *para todo* i, j *tal que* $0 \leq i \leq j \leq n-1$,

(A10) $\sigma_{n-1}\alpha \leftrightarrow ((\alpha \to \sigma_i\alpha) \to \sigma_j\alpha)$, *para todo* i, j *tal que* $0 \leq i \leq j \leq n-1$,

(A11) $\sigma_i(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\sigma_i\alpha \vee \sigma_i\beta)$, *para todo* i *tal que* $0 \leq i \leq n-1$,

(A12) $\sigma_0\alpha \to \sigma_i\alpha$, *para todo* i *tal que* $1 \leq i \leq n-1$.

Por $\alpha \leftrightarrow \beta$, *denotamos* $\alpha \to \beta$ *y* $\beta \to \alpha$.

Reglas de inferencia

(MP) $\dfrac{\alpha, \ \alpha \to \beta}{\beta}$ (NEC) $\dfrac{\alpha}{\sigma_0\alpha}$.

Consideraremos la noción usual de derivación de una fórmula α de $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$. Decimos que α es derivable a partir Γ en $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$, denotado por $\Gamma \vdash \alpha$, si existe una derivación de α a parir de Γ en $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$. Si $\Gamma = \emptyset$, entonces lo denotamos por $\vdash \alpha$. En este caso, decimos que α es un teorema de $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$. Los siguientes resultados se pueden probar de forma estándar.

Proposición 2.1.2.

(P1) $\vdash \alpha \to \alpha$,

(P2) $\{\beta\} \vdash \alpha \to \beta$,

(P3) $\{\alpha \to (\beta \to \gamma)\} \vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$,

(P4) $\{\alpha \to \beta, \ \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma$,

(P5) $\{\alpha \to (\beta \to \gamma)\} \vdash \beta \to (\alpha \to \gamma)$, (P6) $\{\alpha \to \beta\} \vdash (\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta)$,

(P7) $\{\alpha \to \beta\} \vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$,

(P8) $\{(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\} \vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$,

(P9) $\vdash \sigma_0\alpha \to \alpha$,

(P10) $\dfrac{\vdash \sigma_0\alpha}{\vdash \sigma_i\alpha}$ *para todo* $1 \leq i \leq j \leq n-1$.

Demostración: Solo probaremos (P8) y (P9).

(P8)
(1) $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$, [Hip.]
(2) $\vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$, [(A1)]
(3) $\vdash ((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (\beta \to \gamma)$, [(2),(P7)]
(4) $\vdash (\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \gamma)) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$, [(3),(P6)]
(5) $\vdash \alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \gamma)$, [(1),(P5)]
(6) $\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$. [(4),(5),(MP)]

(P9)
(1) $\vdash (\sigma_0\alpha \to \alpha) \to (\sigma_1\alpha \to \alpha)$, [(P1)]
(2) $\vdash \sigma_0\alpha \to ((\sigma_1\alpha \to \alpha) \to \alpha)$, [(1),(P5)]
(3) $\vdash ((\sigma_0\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha$, [(A6)]
(4) $\vdash \sigma_0\alpha \to \alpha$. [(2),(3),(P4)]

□

Lema 2.1.3. $\equiv$ *es una congruencia en* $\mathfrak{Fm}$*, donde* $\equiv$ *se define como* $\alpha \equiv \beta$ *si, y solo si,* $\vdash \alpha \to \beta$ *y* $\vdash \beta \to \alpha$.

Demostración: Solo debemos probar que $\alpha \equiv \beta$, entonces $\sigma_i\alpha \equiv \sigma_i\beta$ para todo $0 \leq i \leq i-1$. Pero esto resulta inmediato de (NEC), (A7), (P10) y (MP). □

Del último Lema, es posible considerar el álgebra $\mathfrak{Fm}/\equiv$ que se conoce como álgebra de Lindenbaum-Tarski; además, no es difícil probar que esta álgebra es una $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra donde $\overline{\alpha \to \alpha}$ es el mayor elemento y denotamos por $\overline{\alpha}$ la clase de α por $\equiv$.

Ahora veremos la siguiente Proposición que será útil en la prueba de completitud:

Proposición 2.1.4.

(RP2) $\dfrac{\vdash \beta}{\vdash \alpha \to \beta}$,

(RP3) $\dfrac{\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)}{\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)}$,

(RP4) $\dfrac{\vdash \alpha \to \beta, \vdash \beta \to \gamma}{\vdash \alpha \to \gamma}$,

(RP5) $\dfrac{\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)}{\vdash \beta \to (\alpha \to \gamma)}$,

(RP6) $\dfrac{\vdash \alpha \to \beta}{\vdash (\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta)}$,

(RP7) $\dfrac{\vdash \alpha \to \beta}{\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)}$,

(NM2) $\dfrac{\vdash \sigma_k(\alpha \to \beta)}{\vdash \sigma_k\alpha \to \sigma_k\beta}$,

(NM8) $\dfrac{\vdash \sigma_j(\sigma_i\alpha)}{\vdash \sigma_i\alpha}$,

(NM9) $\vdash \sigma_i\alpha \to \sigma_j\sigma_i\alpha$,

(NM10) $\dfrac{\vdash \sigma_j(\sigma_i\alpha) \to \beta}{\vdash \sigma_i\alpha \to \beta}$,

Demostración: Solo probaremos (RP4), (RP5), (RP7), (NM8) y (NM10).

(RP4) (1) $\vdash \alpha \to \beta$, [Hip.]

(2) $\vdash \beta \to \gamma$, [Hip.]

(3) $\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$, [(2),(RP2)]

(4) $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$, [(3),(RP3)]

(5) $\vdash \alpha \to \gamma$.

(RP5) (1) $\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$, [Hip.]

(2) $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$, [(1),(RP3)]

(3) $\vdash \beta \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$, [(2),(RP2)]

(4) $\vdash (\beta \to (\alpha \to \beta)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$, [(3),(RP3)]

(5) $\vdash \beta \to (\alpha \to \gamma)$, [(4),(A1),(MP)]

(RP7) (1) $\vdash \alpha \to \beta$, [Hip]

(2) $\vdash (\beta \to \gamma) \to (\beta \to \gamma)$, [(P1)]

(3) $\vdash \beta \to ((\beta \to \gamma) \to \gamma)$, [(2),(RP5)]

(4) $\vdash \alpha \to ((\beta \to \gamma) \to \gamma)$, [(1),(3),(RP4)]

(5) $\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$. [(4),(RP5)]

(NM8) (1) $\vdash \sigma_j(\sigma_i\alpha)$, [Hip.]

(2) $\vdash (\sigma_j((\beta \to \beta) \to \sigma_i\alpha)) \to ((\beta \to \beta) \to \sigma_i\alpha)$, [(A9)]

(3) $\vdash \sigma_i\alpha \to ((\beta \to \beta) \to \sigma_i\alpha)$, [(A1)]

(4) $\vdash \sigma_j(\sigma_i\alpha \to ((\beta \to \beta) \to \sigma_i\alpha))$, [(3),(NEC)]

(5) $\vdash \sigma_j(\sigma_i\alpha \to ((\beta \to \beta) \to \sigma_i\alpha)) \to (\sigma_j(\sigma_i\alpha) \to \sigma_j((\beta \to \beta) \to \sigma_i\alpha))$, [(A7)]

(6) $\vdash \sigma_j(\sigma_i\alpha) \to \sigma_j((\beta \to \beta) \to \sigma_i\alpha))$, [(4),(5),(MP)]

(7) $\vdash \sigma_j((\beta \to \beta) \to \sigma_i\alpha)$ [(1),(6),(MP)]

(8) $\vdash (\beta \to \beta) \to \sigma_i\alpha$, [(2),(7),(MP)]

(9) $\vdash \sigma_i\alpha$. [(P1),(8),(MP)]

(NM9) (1) $\vdash ((\beta \to \beta) \to \sigma_i\alpha) \to \sigma_j((\beta \to \beta) \to \sigma_i\alpha)$, [(A9)]

(2) $\vdash \sigma_j((\beta \to \beta) \to \sigma_i\alpha) \to (\sigma_j(\beta \to \beta) \to \sigma_j(\sigma_i\alpha))$, [(A7)]

(3) $\vdash ((\beta \to \beta) \to \sigma_i\alpha) \to (\sigma_j(\beta \to \beta) \to \sigma_j(\sigma_i\alpha))$, [(1),(2),(P4)]

(4) $\vdash \sigma_j(\beta \to \beta) \to (((\beta \to \beta) \to \sigma_i\alpha) \to \sigma_j(\sigma_i\alpha))$, [(3),(P5)]

(5) $\vdash (\beta \to \beta)$, [(P1)]

(6) $\vdash \sigma_j(\beta \to \beta)$, [(5),(NEC)]

(7) $\vdash ((\beta \to \beta) \to \sigma_i\alpha) \to \sigma_j(\sigma_i\alpha)$, [(6),(4),(MP)]

(8) $\vdash (\beta \to \beta) \to (((\beta \to \beta) \to \sigma_i\alpha) \to \sigma_j(\sigma_i\alpha))$, [(7),(P2)]

(9) $\vdash ((\beta \to \beta) \to \sigma_i\alpha) \to ((\beta \to \beta) \to \sigma_j(\sigma_i\alpha))$, [(8),(P5)]

(10) $\vdash (\beta \to \beta) \to (\sigma_i\alpha \to \sigma_j(\sigma_i\alpha))$, [(9),(P8)]

(11) $\vdash \sigma_i\alpha \to \sigma_j(\sigma_i\alpha)$. [(5),(10),(MP)]

(NM10) (1) $\vdash \sigma_j(\sigma_i\alpha) \to \beta$, [Hip.]

(2) $\vdash \sigma_i\alpha \to \sigma_j(\sigma_i\alpha)$, [(NM9)]

(3) $\vdash \sigma_i\alpha \to \beta$. [(2),(1),(RP4)]

□

De la Sección 1.2, podemos afirmar que $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$ es una lógica tarskiana y finitaria. Ahora, estamos en condiciones de ver lo siguiente:

Proposición 2.1.5. *Sea $\Gamma \cup \{\alpha\}$ un conjunto de fórmulas donde Γ es una teoría maximal con respecto a α (ver Sección 1.2), entonces:*

(NM11) *Si $\sigma_i\alpha \in \Gamma$, entonces $\sigma_{i+1}\alpha, \cdots, \sigma_{n-1}\alpha \in \Gamma$, con $1 \leq i < n-1$,*

(NM12) *Si $\sigma_{n-1}\alpha \notin \Gamma$, entonces $\sigma_i\alpha \notin \Gamma$ con $1 \leq i \leq n-1$.*

Demostración:
(NM11) Se deduce a partir de (P1), (A7), (NEC), (MP) y la definición de teoría maximal con respecto a α.
(NM12) Resulta inmediato a partir de (NM11). □

2.2. Teoremas de Correctitud y Completitud

Consideraremos una *relación de consecuencia* $\models$ de la siguiente manera: para una función $v : \mathfrak{Fm} \to \mathbb{C}_n$, decimos que v es una valoración para $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$ si satisface $v(\alpha\#\beta) = v(\alpha)\#v(\beta)$ con $\# \in \{\to, \vee\}$, $v(\sigma_i\alpha) = \sigma_i v(\alpha)$, para todo $0 \leq i \leq n-1$. Además, decimos que α es una fórmula semánticamente válida si, para toda valoración v, $v(\alpha) = 1$, y lo denotamos por $\models \alpha$. Además, decimos $\Gamma \models \alpha$ si, para toda valoración v, si $v(\beta) = 1$ para todo $\beta \in \Gamma$, entonces $v(\alpha) = 1$

Dada una teoría Γ maximal con respecto a φ, denotamos $\Gamma/\equiv$ el conjunto $\{\overline{\alpha} : \alpha \in \Gamma\}$. Está claro que $\Gamma/\equiv$ es un subconjunto del álgebra de Hilbert n-valente modal $\mathfrak{Fm}/\equiv$.

Teorema 2.2.1. *Sea* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}$, *con* Γ *maximal no trivial con respecto a* φ *en* $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$. *Entonces:*

(i) *si* $\alpha \in \Gamma$ *y* $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$, *entonces* $\beta \in \Gamma$;

(ii) $\Gamma/\equiv$ *es un sistema deductivo modal ligado a* $\overline{\varphi}$ *de* $\mathfrak{Fm}/\equiv$.

Demostración: (i): En primer lugar supongamos que $\alpha \in \Gamma$ y $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$. Entonces tenemos que $\Gamma \vdash \alpha$, $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ y $\Gamma \vdash \beta \to \alpha$. Por lo tanto, por (MP), $\Gamma \vdash \beta$, y luego $\beta \in \Gamma$.

(ii): Es claro que $\overline{\alpha \to \alpha} = \overline{\top}$. Así, $\overline{\top} \in \Gamma/\equiv$. Supongamos que $\overline{\alpha}, \overline{\alpha \to \beta} \in \Gamma/\equiv$. Por lo anterior, podemos afirmar que $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. Luego, por (MP), $\Gamma \vdash \beta$ y por lo tanto $\beta \in \Gamma$ lo que implica que $\overline{\beta} \in \Gamma/\equiv$. Finalmente, supongamos que $\overline{\alpha} \in \Gamma/\equiv$, entonces $\Gamma \vdash \alpha$. Por (NEC) tenemos que $\Gamma \vdash \sigma_0\alpha$. Luego, $\Gamma/\equiv$ es un sistema deductivo modal.

Sea $\overline{D}$ un s.d.m. tal que $\Gamma/\equiv \subseteq \overline{D}$ y $\overline{\gamma} \in \overline{D}$ con $\overline{\gamma} \notin \Gamma/\equiv$. Es claro que $\gamma \notin \Gamma$ y por lo tanto $\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \varphi$. Consideremos $D = \{\alpha : \overline{\alpha} \in \overline{D}\}$. Luego, $\Gamma \subsetneq D$ y $D \vdash \varphi$. Veremos que $\overline{\varphi} \in \overline{D}$ por inducción sobre la longitud n de la derivación $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ de φ a partir de D. Si $n = 1$, entonces $\alpha_1 = \varphi$ y φ es una instancia de un axioma o de lo contrario $\alpha_1 \in D$. Si $\vdash \varphi$, entonces $\Gamma \vdash \varphi$ que es una contradicción. Entonces, tenemos que $\varphi \in D$. Por lo tanto, $\overline{\varphi} \in \overline{D}$.

Supongamos que $\overline{\alpha_k} \in \overline{D}$, con k menor que n. Entonces, tenemos los siguientes casos:

1. Si φ es la instancia de un axioma, entonces $\Gamma \vdash \varphi$ que es una contradicción.

2. Si $\varphi \in D$, entonces $\overline{\varphi} \in \overline{D}$.

3. Si existe $\{j, t_1, \cdots, t_m\} \subseteq \{1, \cdots, k-1\}$ tal que $\alpha_{t_1}, \cdots, \alpha_{t_m}$ es una derivación de $\alpha_j \to \varphi$. Entonces, por hipótesis de inducción, tenemos que $\overline{\alpha_j \to \varphi} \in \overline{D}$ y por lo tanto $\overline{\alpha_j} \to \overline{\varphi} \in \overline{D}$. De esto último y dado que $j < k$, tenemos que $\overline{\alpha_j} \in \overline{D}$ y por lo tanto, $\overline{\varphi} \in \overline{D}$.

4. Si existe $\{j, t_1, \cdots, t_m\} \subseteq \{1, \cdots, k-1\}$ tal que $\alpha_{t_1}, \cdots, \alpha_{t_m}$ es una derivación de α_j y supongamos $\alpha_k = \varphi = \sigma_0\alpha_j$. Luego, $\overline{\alpha_j} \in \overline{D}$. Ahora, dado que $\overline{D}$ es un s.d.m., tenemos que $\sigma_0\overline{\alpha_j} \in \overline{D}$. Por lo tanto, $\overline{\varphi} \in \overline{D}$ que completa la demostración. □

Es importante notar que de este último Teorema, tenemos que $\Gamma/\equiv$ es un sistema deductivo maximal en el sentido de Monteiro, tomando la Definición 3.2.8.

Ahora, el siguiente Lema se puede probar usando el Teorema 2.2.1 y el Lema 1.5.4.

Lema 2.2.2. *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}$, con Γ máximo no trivial con respecto a φ en $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$. Si $\alpha \notin \Gamma$ entonces, $\sigma_0\alpha \to \beta \in \Gamma$ para cualquier $\beta \in \mathfrak{Fm}$.*

El siguiente Teorema es una adaptación del Teorema 1.5.9 al contexto sintáctico donde usamos el álgebra $\mathbf{C_n}$ allí mencionada.

Teorema 2.2.3. *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}$, con Γ maximal no trivial con respecto a φ en $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$. Consideremos el mapeo $v : \mathfrak{Fm} \to \mathbf{C_n}$, definido por $v(\alpha) = \dfrac{n-j}{n}$ si $\alpha \in E_j^\Gamma$, donde $\mathbf{C_n} = \langle \mathbf{C_n}, \to, \vee, \sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}, 1\rangle$ y*

$$E_j^\Gamma = \{\alpha \notin \Gamma : \sigma_k\alpha \notin \Gamma, 0 \leq k \leq j, \sigma_{j+1}\alpha \in \Gamma\}$$

con $0 \leq j < n-1$, $E_0^\Gamma = \Gamma$ y

$$E_{n-1}^\Gamma = \{\alpha \notin \Gamma : \sigma_{n-1}\alpha \notin \Gamma\}.$$

Entonces, v es homomorfismo en $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$.

Demostración: Probaremos que v es un homomorfismo. En efecto,

- $v(\sigma_j\alpha) = \sigma_j v(\alpha)$.

Está claro que si $\alpha \in E_0^\Gamma$, entonces $v(\alpha) = 1$. Luego, $\sigma_i v(\alpha) = 1$ para cada i tal que $1 \leq i \leq n-1$. Por otro lado, de $\Gamma \vdash \alpha$ y la regla (P10), tenemos que $\Gamma \vdash \sigma_i\alpha$ para cada i, $0 \leq i \leq n-1$ y luego, $\sigma_i\alpha \in \Gamma$. Por lo tanto, $v(\sigma_i\alpha) = 1$.

Supongamos ahora que $\alpha \in E_j^\Gamma$ con $1 \leq j < n-1$. Entonces, podemos inferir que $\alpha, \sigma_0\alpha, \sigma_2\alpha, ..., \sigma_j\alpha \notin \Gamma$ y $\sigma_{j+1}\alpha \in \Gamma$. Por lo tanto, $v(\alpha) = \dfrac{n-j}{n}$ y entonces, $\sigma_i v(\alpha) = 0$ si $n-j+i \leq n$; es decir, $\sigma_i v(\alpha) = 0$ si $i \leq j$ y $\sigma_i v(\alpha) = 1$ en caso contrario. Ahora, supongamos que $i \leq j$, entonces $\sigma_i v(\alpha) = 0$. Como $\alpha \in E_j^\Gamma$, podemos afirmar que $\sigma_i\alpha \notin \Gamma$. De esto último y (NM8) obtenemos que $\sigma_k(\sigma_i\alpha) \notin \Gamma$ para cada k, $1 \leq k \leq n-1$ y $\sigma_i\alpha \in E_{n-1}\Gamma$. Luego $v(\sigma_i\alpha) = 0$. Ahora, consideremos el caso $j < i$. Está claro que $\sigma_i v(\alpha) = 1$. Además, dado que $\alpha \in E_j^\Gamma$ y $\sigma_i\alpha \in \Gamma$, entonces $\sigma_i\alpha \in E_0^\Gamma$. Por lo tanto, $v(\sigma_i\alpha) = 1$.

Supongamos que $\alpha \in E_{n-1}^\Gamma$, entonces $v(\alpha) = 0$. Por lo tanto $\sigma_i v(\alpha) = 0$. Además, dado que $\sigma_{n-1}\alpha \notin \Gamma$ y teniendo en cuenta (NM12), tenemos $\sigma_i\alpha \notin \Gamma$ para cada i, $1 \leq i \leq n-1$. De este último y (NM8), se obtiene que $\sigma_k(\sigma_i\alpha) \notin \Gamma$ para todo k, $1 \leq k \leq n-1$. En particular, $\sigma_{n-1}(\sigma_i\alpha) \notin \Gamma$, entonces $\sigma_i\alpha \in E_{n-1}^\Gamma$. Por lo tanto, $v(\sigma_i\alpha) = 0$.

• $v(\alpha \to \beta) = v(\alpha) \to v(\beta)$.

Si tenemos el caso de que $\alpha, \beta \in E^{\Gamma}_{n-1}$, entonces de (NM12) $\sigma_i\alpha, \sigma_i\beta \notin \Gamma$ con $0 \leq i \leq n-1$ y entonces $v(\alpha) = v(\beta) = 0$. Luego, $v(\alpha) \to v(\beta) = 1$. De acuerdo con el Lema 2.2.2, tenemos $\sigma_0(\sigma_i\alpha) \to \sigma_i\beta \in \Gamma$ y teniendo en cuenta (NM10), inferimos que $\sigma_i\alpha \to \sigma_i\beta \in \Gamma$ para todo i, $0 \leq i \leq n-1$. De este último y (NM13), tenemos $\alpha \to \beta \in \Gamma$.

Si $\alpha \in E^{\Gamma}_{n-1}$, entonces $v(\alpha) = 0$. Luego, para cada fórmula $\beta \in \mathfrak{Fm}$, $v(\alpha) \to v(\beta) = 1$. Teniendo en cuenta el Lema 2.2.2, se observa que $\sigma_0\alpha \to \beta \in \Gamma$, y luego $\Gamma \vdash \sigma_0\alpha \to \beta$. De esto último y (RP2), $\Gamma \vdash \alpha \to (\sigma_0\alpha \to \beta)$ y por (RP3), tenemos $\Gamma \vdash (\alpha \to \sigma_0\alpha) \to (\alpha \to \beta)$. Como $\alpha \in E^{\Gamma}_{n-1}$ y (NM12) obtenemos $\Gamma \vdash \sigma_0\alpha \notin \Gamma$. Por lo tanto, $\sigma_k(\sigma_0\alpha) \notin \Gamma$ por (NM8). Luego, $\sigma_0\alpha \in E^{\Gamma}_{n-1}$. De manera análoga al caso $\alpha, \beta \in E^{\Gamma}_{n-1}$, podemos probar que $\alpha \to \sigma_0\alpha \in \Gamma$, entonces $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Si $\beta \in E^{\Gamma}_0 = \Gamma$ entonces $v(\beta) = 1$. Así, para cada fórmula $\alpha \in \mathfrak{Fm}$, $v(\alpha) \to v(\beta) = 1$. Por otro lado, está claro que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Consideremos $\alpha \in E^{\Gamma}_j$ y $\beta \in E^{\Gamma}_k$ con $0 < k \leq j < n-1$, luego $v(\alpha) = \dfrac{n-j}{n} \leq (\beta) = \dfrac{n-k}{n}$; es decir, $v(\alpha) \to v(\beta) = 1$. Además tenemos que $\alpha, \sigma_0\alpha, ..., \sigma_k\alpha, ..., \sigma_j\alpha \notin \Gamma$ y según (NM11), $\sigma_{j+1}\alpha, ..., \sigma_{n-1}\alpha \in \Gamma$. Por otro lado, $\sigma_0\beta, ..., \sigma_k\beta \notin \Gamma$ y también tenemos $\sigma_{k+1}\beta, ..., \sigma_j\beta, ..., \sigma_{n-1}\beta \in \Gamma$. Del lema 2.2.2, $\sigma_0(\sigma_0\alpha) \to \sigma_0\beta, \sigma_0(\sigma_2\alpha) \to \sigma_2\beta, ..., \sigma_0(\sigma_j\alpha) \to \sigma_j\beta \in \Gamma$. Además, es claro que $\sigma_{j+1}\beta, ..., \sigma_{n-1}\beta \in \Gamma$, por lo tanto

$$\sigma_{j+1}\alpha \to \sigma_{j+1}\beta, ..., \sigma_{n-1}\alpha \to \sigma_{n-1}\beta \in \Gamma.$$

Luego, $\sigma_i\alpha \to \sigma_i\beta \in \Gamma$ para todo i, $0 \leq i \leq n-1$. De esto último y (NM13), podemos inferir que $\alpha \to \beta \in \Gamma$.

Supongamos ahora $\alpha \in E^{\Gamma}_j$ y $\beta \in E^{\Gamma}_k$ con $j < k$, luego $v(\alpha) = \dfrac{n-j}{n}$ y $v(\beta) = \dfrac{n-k}{n}$. Está claro que $v(\alpha) > v(\beta)$, entonces $v(\alpha) \to v(\beta) = v(\beta)$. Veamos que $\alpha \to \beta \in E^{\Gamma}_k$; es decir, basta con ver $\alpha \to \beta, \sigma_0(\alpha \to \beta), ..., \sigma_k(\alpha \to \beta) \notin \Gamma$ y $\sigma_{k+1}(\alpha \to \beta) \in \Gamma$. Por hipótesis tenemos que

$$\alpha, \sigma_0\alpha, ..., \sigma_j\alpha, \beta, \sigma_0\beta, ..., \sigma_j\beta, ..., \sigma_k\beta \notin \Gamma$$

y

$$\sigma_{j+1}\alpha, ..., \sigma_k\alpha, ..., \sigma_{n-1}\alpha, \sigma_{k+1}\beta, ..., \sigma_{n-1}\beta \in \Gamma.$$

Por lo tanto, es fácil ver que $\sigma_k(\alpha \to \beta) \notin \Gamma$, entonces $\sigma_t(\alpha \to \beta) \notin \Gamma$ para todo $t \leq k$. La demostración de $\sigma_{k+1}(\alpha \to \beta) \in \Gamma$ se deja al lector.

- $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) \vee v(\beta)$.

Supongamos que $\alpha \in E_0^\Gamma = \Gamma$, entonces $v(\alpha) = 1$. Además, por cada $\beta \in \mathfrak{Fm}$, podemos afirmar que $v(\alpha) \vee v(\beta) = 1$. No es difícil ver $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$.

Sean $\alpha \in E_j^\Gamma$ y $\beta \in E_k^\Gamma$ con $j \leq k$, luego $v(\alpha) = \dfrac{n-j}{n}$ y $v(\beta) = \dfrac{n-k}{n}$ y entonces $v(\alpha) \vee v(\beta) = v(\alpha)$. Además, es fácil comprobar que $\Gamma \vdash \sigma_{j+1}(\alpha \to (\alpha \vee \beta))$ y así, $\Gamma \vdash \sigma_{j+1}\alpha \to \sigma_{j+1}(\alpha \vee \beta)$. De esto último y de la hipótesis tenemos que $\sigma_{j+1}(\alpha \vee \beta) \in \Gamma$. Ahora, si asumimos que $\sigma_j(\alpha \vee \beta) \in \Gamma$, entonces $\sigma_j\alpha \vee \sigma_j\beta \in \Gamma$. De (A5), tenemos $\Gamma \vdash (\sigma_j\alpha \to \sigma_j\beta) \to ((\sigma_j\beta \to \sigma_j\beta) \to ((\sigma_j\alpha \vee \sigma_j\beta \to \sigma_j\beta))$. Por otro lado, como $\sigma_j\alpha \notin \Gamma$ y por el Lema 2.2.2, obtenemos $\sigma_0(\sigma_j\alpha) \to \sigma_j\beta \in \Gamma$. Luego, $\sigma_j\alpha \to \sigma_j\beta \in \Gamma$. Por lo tanto, $\sigma_j\beta \in \Gamma$, que es una contradicción. Podemos probar que $\sigma_s(\alpha \vee \beta) \notin \Gamma$ para todo $s \leq j$. Por lo tanto, $\alpha \vee \beta \in E_j^\Gamma$ y luego $v(\alpha \vee \beta) = \dfrac{n-j}{n}$. El resto de la prueba se deja al lector.
□

Teorema 2.2.4. *Sea* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}$*,* $\Gamma \vdash \varphi$ *si, y solo si,* $\Gamma \vDash \varphi$*.*

Demostración: Supongamos $\Gamma \vdash \varphi$, entonces existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, una derivación de φ a partir de Γ. Si la longitud de la derivación es $n = 1$, entonces φ es un axioma o $\varphi \in \Gamma$. En ambos casos tenemos que $\Gamma \vDash \varphi$.

Supongamos que $\Gamma \vDash \alpha_i$ con $1 \leq i < n$, lo que nos arroja dos casos a analizar:

1. Existen $\{j, k_1, \cdots, k_m\} \subseteq \{1, \cdots, i-1\}$ tal que $\alpha_{k_1}, \cdots, \alpha_{k_m}$ es una derivación de $\alpha_j \to \varphi$. Supongamos que φ es obtenida mediante (MP). Por hipótesis de inducción tenemos que $v(\alpha_j \to \varphi) = 1$ y luego $v(\alpha_j) \to v(\varphi) = 1$. Como $j < i$, entonces $v(\alpha_j) = 1$. Por lo tanto, $1 \to v(\varphi) = 1$, entonces $v(\varphi) = 1$. Luego, $\Gamma \vDash \varphi$.

2. Existen $\{j, k_1, \cdots, k_m\} \subseteq \{1, \cdots, i-1\}$ tal que $\alpha_{k_1}, \cdots, \alpha_{k_m}$ es una derivación de α_j y φ es $\sigma_i\alpha_j$. Entonces, φ es obtenido a partir de la aplicación de (NEC). Por hipótesis de inducción $v(\alpha_j) = 1$. Como $\sigma_i v(\alpha_j) = 1$, entonces $v(\sigma_i\alpha_j) = 1 = v(\varphi)$. Luego, $\Gamma \vDash \varphi$.

Para la recíproca, si $\Gamma \nvdash \varphi$, entonces por el Teorema 1.2.2, existe Ω maximal no trivial con respecto a φ tal que $\Gamma \subseteq \Omega$. Por el Teorema 2.2.3, existe una valoración $v : \mathfrak{Fm} \to \mathbf{C_n}$ tal que $v(\psi) = 1$ si, y solo si, $\psi \in \Omega$. Por hipótesis, sabemos que $\varphi \notin \Omega$. Entonces, $v(\varphi) \neq 1$, luego $\Omega \nvDash_{\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}} \varphi$. Dado que $\Gamma \subseteq \Omega$, entonces $\Gamma \nvDash_{\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}} \varphi$, lo cual es una contradicción. □

2.3. Teoría de modelos y lógica de primer orden de $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$

En esta sección, definiremos la lógica de primer orden de $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$. Supongamos que Θ es la asignatura proposicional de $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$, así como los símbolos $\forall$ (cuantificador universal) y $\exists$ (cuantificador existencial), junto con los signos de puntuación (comas y paréntesis). Además, sea Var un conjunto numerable de variables individuales. Como de costumbre, una asignatura de primer orden Σ es una terna $\langle \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$, donde $\mathcal{P}$ denota un conjunto no vacío de símbolos predicados, $\mathcal{F}$ es un conjunto de símbolos de funciones y $\mathcal{C}$ denota un conjunto de constantes individuales. Las nociones de variables ligadas y libres, términos cerrados, oraciones y sustituibilidad también se definen de manera estándar, ver por ejemplo [60]. Denotamos por $\mathfrak{Fm}_\Sigma$ el conjunto de las fórmulas y denotaremos por Ter al álgebra absolutamente libre de los términos. A continuación, consideraremos una $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$ completa como un retículo en la que todos los subconjuntos tienen tanto un supremo como un ínfimo.

Definición 2.3.1. *Una Σ-estructura $\mathfrak{A}$ es un par $\langle \mathbf{A}, \mathbf{S} \rangle$ donde $\mathbf{A}$ es un $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra completa, $\mathbf{S} = \langle S, \{P_{\mathbf{S}}\}_{P \in \mathcal{P}}, \{f_{\mathbf{S}}\}_{f \in \mathcal{F}}, \mathcal{C}, \cdot^{\mathfrak{A}} \rangle$, S es un dominio no vacío y $\cdot^{\mathfrak{A}}$ es el mapeo interpretación que asigna: a cada constante individual $c \in \mathcal{C}$, el elemento $c^{\mathfrak{A}}$ de S; a cada símbolo de predicado P de aridad n, la función $P^{\mathfrak{A}} : S^n \to A$; a cada símbolo de función f, la función $f^{\mathfrak{A}} : S^n \to S$.*

Por $\varphi(x/t)$, denotamos la fórmula que resulta de φ reemplazando simultáneamente todas las ocurrencias libres de la variable x por t.

Definición 2.3.2. *Sea Σ una asignatura de primer orden. La lógica $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$ sobre Σ está definida por el cálculo de Hilbert obtenido al extender $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$ expresado en el nuevo lenguaje agregando lo siguiente:*

Axiomas Esquemas

(A13) $\varphi(x/t) \to \exists x\varphi$, *si t es un término libre para x en φ,*

(A14) $\forall x\varphi \to \varphi(x/t)$, *si t es un término libre para x en φ,*

(A15) $\sigma_i \exists x\varphi \leftrightarrow \exists x \sigma_i \varphi$, *con $1 \leq i \leq n-1$,*

(A16) $\sigma_i \forall x\varphi \leftrightarrow \forall x \sigma_i \varphi$, *con $1 \leq i \leq n-1$.*

Reglas de Inferencia

(∃-In) $\dfrac{\alpha \to \beta}{\exists x\alpha \to \beta}$, *y x no es libre en β,*

(∀-In) $\dfrac{\alpha \to \beta}{\alpha \to \forall x\beta}$, *y x no es libre en α,*

Denotamos por $\vdash \alpha$ a la derivación de una fórmula α en $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$, y con $\Gamma \vdash \alpha$ la derivación de α a partir del conjunto de premisas Γ. Estas nociones se definen la manera usual. Denotamos $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ para indicar que se cumplen $\vdash \varphi \to \psi$ y $\vdash \psi \to \varphi$.

Una $\mathfrak{A}$-valuación es una asignación $v : Var \to S$. Por $v[x \to a]$ denotamos la siguiente $\mathfrak{A}$-valuación, $v[x \to a](x) = a$ y $v[x \to a](y) = v(y)$ para cualquier $y \in V$ tal que $y \neq x$.

Definición 2.3.3. *Sea $\mathfrak{S} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{S} \rangle$ una Σ-estructura y v una $\mathfrak{S}$-valuación. Definimos los valores de los términos y los valores de verdad de las fórmulas en $\mathfrak{S}$ para una valuación v como sigue:*

$$||c||_v^{\mathfrak{S}} = c^{\mathfrak{S}} \text{ si } c \in S,$$

$$||x||_v^{\mathfrak{S}} = v(x) \text{ si } x \in Var,$$

$$||f(t_1, \cdots, t_n)||_v^{\mathfrak{S}} = f^{\mathfrak{S}}(||t_1||_v^{\mathfrak{S}}, \cdots, ||t_n||_v^{\mathfrak{S}}), \text{ para todo } f \in \mathcal{F},$$

$$||P(t_1, \cdots, t_n)||_v^{\mathfrak{S}} = P^{\mathfrak{S}}(||t_1||_v^{\mathfrak{S}}, \cdots, ||t_n||_v^{\mathfrak{S}}), \text{ para todo } P \in \mathcal{P},$$

$$||\alpha \to \beta||_v^{\mathfrak{S}} = ||\alpha||_v^{\mathfrak{S}} \to ||\beta||_v^{\mathfrak{S}},$$

$$||\alpha \vee \beta||_v^{\mathfrak{S}} = ||\alpha||_v^{\mathfrak{S}} \vee ||\beta||_v^{\mathfrak{S}},$$

$$||\sigma_i \alpha||_v^{\mathfrak{S}} = \sigma_i ||\alpha||_v^{\mathfrak{S}},$$

$$||\forall x\alpha||_v^{\mathfrak{S}} = \bigwedge_{a \in S} ||\alpha||_{v[x \to a]}^{\mathfrak{S}},$$

$$||\exists x\alpha||_v^{\mathfrak{S}} = \bigvee_{a \in S} ||\alpha||_{v[x \to a]}^{\mathfrak{S}}.$$

Es fácil ver que se verifica la siguiente propiedad: $||\varphi(x/t)||_v^{\mathfrak{A}} = ||\varphi||_{v[x \to ||t||_v^{\mathfrak{A}}]}^{\mathfrak{A}}$.

Definición 2.3.4. *Diremos que $\mathfrak{A}$ y v* **satisfacen** *la fórmula φ, y denotaremos $\mathfrak{A} \vDash \varphi[v]$, si $||\varphi||_v^{\mathfrak{A}} = 1$. Además diremos que φ es* **verdadera** *$\mathfrak{S}$ si $||\varphi||_v^{\mathfrak{A}} = 1$ para cada $\mathfrak{A}$-valuación*

v y lo denotaremos $\mathfrak{A} \models \varphi$. Diremos que φ es una **consecuencia semántica** *de Γ en $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$, si, para toda estructura $\mathfrak{A}$: $\mathfrak{A} \models \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$, implica $\mathfrak{A} \models \varphi$. En este caso lo denotaremos $\Gamma \models \varphi$.*

El siguiente resultado técnico es esencial para probar el Teorema de Correctitud.

Lema 2.3.5. *Sea $\mathbf{A}$ una $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra completa y sea $\{a_i\}_{i\in I}$ el conjunto de elementos de A para cualquier conjunto no vacío I. Entonces, si existe $\bigvee\limits_{i\in I} a_i$ ($\bigwedge\limits_{i\in I} a_i$), también existe $\bigvee\limits_{i\in I} \sigma_j a_i$ ($\bigwedge\limits_{i\in I} \sigma_j a_i$), y también se verifica $\bigvee\limits_{i\in I} \sigma_j a_i = \sigma_j \bigvee\limits_{i\in I} a_i$ y $\bigwedge\limits_{i\in I} \sigma_j a_i = \sigma_j \bigwedge\limits_{i\in I} a_i$, para todo $0 \leq j \leq n-1$.*

Demostración. Teniendo en cuenta la Observación 1.5.8, el $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra estándar es el siguiente:

$$\mathbf{C_n} = \left\langle \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}, \to, \vee, \{\sigma_i\}_{0\leq i\leq n-1}, 1 \right\rangle$$

donde $x \to y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } y < x \end{cases}$ y $\sigma_i\left(\frac{j}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } i+j < n \\ 1 & \text{si } i+j \geq n \end{cases}$.

No es difícil ver que para todo $x, y \in \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\}$, tenemos que $\sigma_i(x\#y) = \sigma_i(x)\#\sigma_i(y)$ donde $\# \in \{\wedge, \vee\}$ y $0 \leq i \leq n-1$. Luego, como consecuencia del Teorema 1.5.9, existe un conjunto no vacío X y un homomorfismo uno a uno $h : \mathbf{A} \to \mathbf{C_n^X}$ donde $\mathbf{C_n^X}$ es definido de la manera usual. Consideremos un conjunto arbitrario $\{x_j\}_{j\in I} \subseteq A$. Entonces, por hipótesis tenemos que $\bigwedge\limits_{j\in I} x_i$ y $\bigvee\limits_{j\in I} x_i$ pertenece a A. Luego tenemos que:

$$\sigma_i\left(\bigwedge_{j\in I} x_j\right), \sigma_i\left(\bigvee_{j\in I} x_j\right), \bigwedge_{j\in I} \sigma_i(x_j), \bigvee_{j\in I} \sigma_i(x_j) \in A$$

para todo i tal que $0 \leq i \leq n-1$. Consideremos cualquier $\zeta \in X$ fijo, entonces $\bigwedge\limits_{j\in I} x_j(\zeta) \in \mathbf{C_n}$. Consideremos ahora la proyección canónica $\pi_\zeta : A \to \mathbf{C_n}$ definida como $\pi_\zeta(a) = a(\zeta)$ para todo $a \in A$ donde $\mathbf{A}$ se expresa en su representación. Así, es claro que $\pi_\zeta\left(\bigwedge\limits_{j\in I} x_j\right) = \pi_\zeta\left(\bigwedge\limits_{z=1}^{n} x_{j_z}\right)$ debido a la finitud de $\mathbf{C_n}$. Luego, $\left[\sigma_i\left(\bigwedge\limits_{j\in I} x_j\right)\right](\zeta) = \pi_\zeta\left(\sigma_i\left(\bigwedge\limits_{j\in I} x_j\right)\right) =$

$\sigma_i\pi_\zeta\left(\bigwedge\limits_{j\in I} x_j\right) = \left[\sigma_i\left(\bigwedge\limits_{z=1}^{n} x_{j_z}\right)\right](\zeta) = \left[\bigwedge\limits_{z=1}^{n}\sigma_i(x_{j_z})\right](\zeta)$ y por lo tanto $\left[\bigwedge\limits_{j\in I}\sigma_i(x_j)\right](\zeta) \leq \left[\sigma_i\left(\bigwedge\limits_{j\in I} x_j\right)\right](\zeta)$.

Por otro lado, es claro que $\bigwedge\limits_{j\in I} x_j \leq x_j$. Por lo anterior y (HM12) del Lema 1.3.1, tenemos que $\left[\sigma_i\left(\bigwedge\limits_{j\in I} x_j\right)\right](\zeta) \leq [\sigma_i(x_j)](\zeta)$. Luego, $\left[\sigma_i\left(\bigwedge\limits_{j\in I} x_j\right)\right](\zeta) \leq \left[\bigwedge\limits_{j\in I}\sigma_i(x_j)\right](\zeta)$. Por lo tanto, $\sigma_i\left(\bigwedge\limits_{j\in I} x_j\right) = \bigwedge\limits_{j\in I}\sigma_i(x_j)$.

Y por lo tanto, podemos probar que $\sigma_i(\bigvee\limits_{i\in I} x_j) = \bigvee\limits_{j\in I}\sigma_i(x_j)$ de manera análoga. $\square$

El último Lema es importante para probar el Teorema 2.3.6 que implica que toda $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra completa satisface los axiomas (A15) y (A16). Vale la pena mencionar que estos axiomas fueron considerados en contextos algebraicos de la definición de álgebras monádicas de Łukasiewicz-Moisil (ver Definición 1.1 de [10, Capítulo 8] y [1, 2, 49]), donde los operadores Moisil conmutan con los cuantificadores. Además, si consideramos las MV-álgebras móndicas introducidas por Rutledge en [71], entonces en la subvariedad generada por MV-cadenas finitas es posible ver que los operadores de Moisil conmutan con los cuantificadores, ver [34, Sección 7].

Teorema 2.3.6. *Sea* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}_\Sigma$*, si* $\Gamma \vdash \varphi$ *entonces* $\Gamma \vDash \varphi$

Demostración: Consideremos la estructura $\mathfrak{M} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{S}\rangle$ fija, y sea φ una fórmula tal que $\Gamma \vdash \varphi$. Entonces, existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ una derivación de φ a partir de Γ. Si $n = 1$ entonces φ es un axioma o $\varphi \in \Gamma$. Si $\varphi \in \Gamma$, entonces se puede ver que $\Gamma \vDash \varphi$. Si φ es un axioma. A su vez, es sencillo ver la veracidad de (A1) a (A12).

(A13) Supongamos que φ es $\alpha(x/t) \to \exists x\alpha$. Entonces, $||\varphi||_v^{\mathfrak{M}} = ||\alpha||^{\mathfrak{M}}_{v[x\to||t||_v^{\mathfrak{M}}]} \to ||\exists x\alpha||_v^{\mathfrak{M}}$. Es claro que $||\alpha||^{\mathfrak{M}}_{v[x\to||t||_v^{\mathfrak{M}}]} \leq \bigvee\limits_{a\in S}||\alpha||^{\mathfrak{M}}_{v[x\to a]}$, entonces $||\alpha||^{\mathfrak{M}}_{v[x\to||t||_v^{\mathfrak{M}}]} \leq ||\exists x\alpha||_v^{\mathfrak{M}}$. Por lo tanto $||\alpha(x/t) \to \exists x\alpha||_v^{\mathfrak{M}} = 1$.

(A14) es análogo a (A13).

(A15) resulta inmediato del Lema 2.3.5 y del hecho que $||\exists x\sigma_i\alpha||_v^{\mathfrak{M}} = \bigvee\limits_{a\in S}||\sigma_i\alpha||_v^{\mathfrak{M}} = \bigvee\limits_{a\in S}\sigma_i||\alpha||_v^{\mathfrak{M}} = \sigma_i\bigvee\limits_{a\in S}||\alpha||_v^{\mathfrak{M}} = ||\sigma_i\exists x\alpha||_v^{\mathfrak{M}}$.

(A16) es análogo a (A15).

Supongamos, por hipótesis de inducción que $||\alpha_j||_v^{\mathfrak{M}} = 1$ para todo $j < n$. Entonces puede suceder:

i. Existen $\{i, k_1, \cdots, k_m\} \subseteq \{1, \cdots, j-1\}$ tal que $\alpha_{k_1}, \cdots, \alpha_{k_m}$ es una derivación de $\alpha_i \to \varphi$. Supongamos que φ se obtiene a partir de aplicar (MP). Por hipótesis de inducción tenemos que $||\alpha_i||_v^{\mathfrak{M}} = ||\alpha_i \to \varphi||_v^{\mathfrak{M}} = 1$. Luego, por la definición 2.3.3 $||\alpha_i||_v^{\mathfrak{M}} = ||\alpha_i||_v^{\mathfrak{M}} \to ||\varphi||_v^{\mathfrak{M}} = 1$ y por lo tanto, $||\varphi||_v^{\mathfrak{M}} = 1$.

ii. Existen $\{s, k_1, \cdots, k_m\} \subseteq \{1, \cdots, j-1\}$ tal que $\alpha_{k_1}, \cdots, \alpha_{k_m}$ es una derivación de α_s. Supongamos que $\sigma_0\alpha_s$ es φ y se obtiene a partir de aplicar (NEC). Por hipótesis de inducción tenemos que $||\alpha_s||_v^{\mathfrak{M}} = 1$ y por la Definición 2.3.3 $||\sigma_0||_v^{\mathfrak{M}} = \sigma_0||\alpha||_v^{\mathfrak{M}} = \sigma_0 1 = 1$.

iii. Existen $\{j, k_1, \cdots, k_m\} \subseteq \{1, \cdots, j-1\}$ tal que $\alpha_{k_1}, \cdots, \alpha_{k_m}$ es una derivación de $\alpha \to \beta$. Supongamos que φ es $\exists x\alpha \to \beta$, donde x no ocurre libre en β y se obtiene al aplicar ($\exists$ - In). Por hipótesis de inducción tenemos que $||\alpha \to \beta||_v^{\mathfrak{M}} = 1$, luego, por la Definición 2.3.3 $||\exists x\alpha \to \beta||_v^{\mathfrak{M}} = ||\exists x\alpha||_v^{\mathfrak{M}} \to ||\beta||_v^{\mathfrak{M}} = \bigvee_{a\in S} ||\alpha||_{v[x\to a]}^{\mathfrak{M}} \to ||\beta||_v^{\mathfrak{M}}$. Como $||\alpha \to \beta||_v^{\mathfrak{M}} = ||\alpha||_v^{\mathfrak{M}} \to ||\beta||_v^{\mathfrak{M}} = 1$, entonces tenemos que $||\alpha||_v^{\mathfrak{M}} \leq ||\beta||_v^{\mathfrak{M}}$ para cada $\mathfrak{M}$-valuación v. Luego, $||\alpha||_{v[x\to a]}^{\mathfrak{M}} \leq ||\beta||_{v[x\to a]}^{\mathfrak{M}} = ||\beta||_v^{\mathfrak{M}}$ para todo $a \in S$, y por lo tanto, $\bigvee_{a\in S} ||\alpha||_{v[x\to a]}^{\mathfrak{M}} \to ||\beta||_v^{\mathfrak{M}} = ||\exists x\alpha \to \beta||_v^{\mathfrak{M}} = ||\varphi||_v^{\mathfrak{M}} = 1$.

iv. Existen $\{j, k_1, \cdots, k_m\} \subseteq \{1, \cdots, j-1\}$ tal que $\alpha_{k_1}, \cdots, \alpha_{k_m}$ es una derivación de $\alpha \to \beta$. Supongamos que φ es $\alpha \to \forall x\beta$, donde x no ocurre libre en α, y se obtiene al aplicar ($\forall$-In). Por hipótesis de inducción tenemos que $||\alpha \to \beta||_v^{\mathfrak{M}} = 1$ para cada $\mathfrak{M}$-valuación v. A su vez, a partir de la Definición 2.3.3, tenemos que $||\alpha \to \forall x\beta||_v^{\mathfrak{M}} = ||\alpha||_v^{\mathfrak{M}} \to ||\forall x\beta||_v^{\mathfrak{M}} = ||\alpha||_v^{\mathfrak{M}} \to \bigwedge_{a\in S} ||\beta||_{v[x\to a]}^{\mathfrak{M}}$. Como $||\alpha \to \beta||_v^{\mathfrak{M}} = ||\alpha||_v^{\mathfrak{M}} \to ||\beta||_v^{\mathfrak{M}} = 1$, entonces tenemos que $||\alpha||_v^{\mathfrak{M}} = ||\alpha||_{v[x\to a]}^{\mathfrak{M}} \leq ||\beta||_{v[x\to a]}^{\mathfrak{M}}$ para todo $a \in S$. Luego, $||\alpha||_v^{\mathfrak{M}} \leq \bigwedge_{a\in S} ||\beta||_{v[x\to a]}^{\mathfrak{M}}$. Por lo tanto, $||\varphi||_v^{\mathfrak{M}} = 1$, lo que completa la prueba. $\square$

En lo que sigue, probaremos una versión fuerte del Teorema de Completitud para $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$ usando el álgebra de Lindenbaum-Tarski, de manera similar al caso proposicional. Observemos que el álgebra de las fórmulas es un álgebra absolutamente libre, generada por las fórmulas atómicas y sus fórmulas cuantificadas.

Consideremos la relación $\equiv$ definida por $\alpha \equiv \beta$ si, y solo si, $\vdash \beta \to \alpha$ y $\vdash \alpha \to \beta$, entonces tenemos que el álgebra $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\equiv$ es un $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra y la prueba es exactamente la misma que en el caso proposicional. Por otro lado, está claro que $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$ es una lógica tarskiana y finitaria. Entonces, podemos considerar la noción de teorías (maximales) consistentes y cerradas con respecto a alguna fórmula, de la misma manera que el caso proposicional. Por lo tanto, tenemos que el Teorema de Lindenbaum-Łoś se cumple para $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$, ver Sección 1.2. Luego tenemos el siguiente Lema:

Lema 2.3.7. *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}_\Sigma$, con Γ maximal no trivial con respecto a φ in $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$. Sea $\Gamma/\equiv = \{\overline{\alpha} : \alpha \in \Gamma\}$ un subconjunto de $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\equiv$, entonces:*

(i) *Si $\alpha \in \Gamma$ y $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$, entonces $\beta \in \Gamma$. Mas aún, se verifica que $\Gamma/\equiv = \{\overline{\alpha} : \Gamma \vdash \alpha\}$, en este caso diremos que es cerrado.*

(ii) *$\Gamma/\equiv$ es un sistema deductivo modal de $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\equiv$. Además, si $\overline{\varphi} \notin \Gamma/\equiv$ y $\overline{D}$ es un sistema deductivo modal cerrado en el sentido de (i), que contiene propiamente a $\Gamma/\equiv$, entonces $\overline{\varphi} \in \overline{D}$.*

Demostración: Tomando la demostración del Teorema 2.2.1, solo debemos considerar las reglas ($\exists$-In) y ($\forall$-In). El hecho de que $\Gamma/\equiv$ sea cerrado se verifica de forma inmediata.

Para completar la prueba tenemos que considerar dos casos nuevos. Está claro que $\Gamma/\equiv$ es un subconjunto de $\overline{D}$. Consideremos ahora $\overline{\phi} \in \overline{D}$, entonces $\overline{\phi} \notin \Gamma/\equiv$ y recordemos que $D = \{\alpha : \overline{\alpha} \in \overline{D}\}$. Existen $\{j, t_1, ..., t_m\} \subseteq \{1, ..., k-1\}$ tal que $\alpha_{t_1}, ..., \alpha_{t_m}$ es una derivación de $\alpha_j = \theta \to \beta$. Supngamos que $\alpha_n = \exists x\theta \to \beta$ es obtenido a partir de α_j por la aplicación de ($\exists$-In). Por hipótesis de inducción tenemos que $\overline{\theta \to \beta} \in \overline{D}$. Luego obtenemos que $\overline{\exists x\theta \to \beta} \in \overline{D}$. Supongmaos ahora que $\{j, t_1, ..., t_m\} \subseteq \{1, ..., k-1\}$ tal que $\alpha_{t_1}, ..., \alpha_{t_m}$ es una derivación de $\alpha_j = \theta \to \beta$. Y supongamos que $\alpha_n = \theta \to \forall x\beta$ se obtiene a partir de α_j mediante la aplicación de ($\forall$-In). Por hipótesis de inducción, tenemos que $\overline{\theta \to \beta} \in \overline{D}$ y por lo tanto, $\overline{\theta \to \forall x\beta} \in \overline{D}$. $\square$

Notemos que, para una teoría maximal consistente Γ de $\mathfrak{Fm}_\Sigma$ dada, tenemos que $\Gamma/\equiv$ es un sistema deductivo modal maximal de $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\equiv$. Si denotamos $A := \mathfrak{Fm}_\Sigma/\equiv$ y $\theta := \Gamma/\equiv$, mediante resultados bien conocidos del álgebra universal, tenemos el álgebra cociente A/θ es un álgebra simple (ver Teorema 1.5.9). De esto último y adaptando el primer teorema de isomorfismo, tenemos que A/θ es isomorfa a $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\Gamma$, que está definida por la congruencia $\alpha \equiv_\Gamma \beta$ si, y solo si, $\alpha \to \beta, \beta \to \alpha \in \Gamma$.

Teorema 2.3.8. *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de sentencias, si $\Gamma \vDash \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$.*

Demostración: Supongamos $\Gamma \vDash \varphi$ y $\Gamma \nvdash \varphi$. Luego, por el Lema de Lindenbaum- Łoś, existe Δ una teoría maximal consistente con respecto a φ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$. Consideremos ahora el álgebra $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\Delta$ definida por la congruencia $\alpha \equiv_\Delta \beta$ si, y solo si, $\alpha \to \beta, \beta \to \alpha \in \Delta$. Sabemos que $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\Delta$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{C_n}$ que es completo como retículo, debido a las observaciones anteriores.

Así, tomando la proyección canónica $\pi_\Delta : \mathfrak{Fm} \to \mathfrak{Fm}_\Sigma/\Delta$ y considerando la estructura $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{Fm}_\Sigma/\Delta, Ter, \cdot^{Ter} \rangle$, donde Ter es el conjunto de los términos definido al comienzo de la sección, resulta claro que, para cada $t \in Ter$, tenemos una constante $\hat{t}$ de Σ. Ahora podemos considerar la función $\mu : Var \to Ter$ definida por $\mu(x) = x$. Y tenemos también la interpretación $|| \cdot ||^{\mathfrak{M}}_\mu : \mathfrak{Fm} \to \mathfrak{Fm}_\Sigma/\Delta$ definida de la siguiente forma: si $\hat{t}$ es una constante, entonces $||\hat{t}||^{\mathfrak{M}}_\mu := t$; si $f \in \mathcal{F}$, entonces $||f(t_1, \cdots, t_n)||^{\mathfrak{M}}_\mu = f(t_1, \cdots, t_n)$; si $P \in \mathcal{P}$, entonces $||P(t_1, \cdots, t_n)||^{\mathfrak{M}}_\mu = \pi_\Delta(P(t_1, \cdots, t_n))$. Nuestra interpretación está definida para fórmulas atómicas, se puede probar que $||\alpha||^{\mathfrak{M}}_\mu = \pi_\Delta(\alpha)$ para cada fórmula sin cuantificador α. Más aún, es fácil ver que para cada fórmula $\phi(x)$ y cada término t, tenemos $||\phi(x/\hat{t})||^{\mathfrak{M}}_\mu = ||\phi(x/t)||^{\mathfrak{M}}_\mu$. Por lo tanto, de la última propiedad y por (Ax12) y ($\forall$-In), tenemos $||\forall x \alpha||^{\mathfrak{M}}_\mu = \bigwedge_{a \in T_\Theta} ||\alpha||^{\mathfrak{M}}_{\mu[x \to a]}$, y usando (Ax11) y ($\exists$- In), obtenemos $||\exists x \alpha||^{\mathfrak{M}}_\mu = \bigvee_{a \in T_\Theta} ||\alpha||^{\mathfrak{M}}_{\mu[x \to a]}$. Entonces, $|| \cdot ||^{\mathfrak{M}}_\mu$ es un mapeo interpretación tal que $||\alpha||^{\mathfrak{M}}_\mu = 1$ si, y solo si, $\alpha \in \Delta$. Luego, para cada fórmula $\beta \in \Gamma \cup \{\alpha\}$, tenemos $||\beta||^{\mathfrak{M}}_\mu = ||\beta||^{\mathfrak{M}}_v$ por cada $\mathfrak{M}$-valuación v, y por lo tanto, $\mathfrak{M} \vDash \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$ pero $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$. $\square$

Sea φ una fórmula y supongamos que $\{x_1, \cdots, x_n\}$ es el conjunto de variables de φ, la *clausura universal* de φ está definida por $\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$. Así, si φ es una sentencia, entonces la clausura universal de φ es ella misma. Ahora, estamos en condiciones de demostrar el siguiente Teorema de Completitud para fórmulas:

Teorema 2.3.9. *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas, si $\Gamma \vDash \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$.*

Demostración: Supongamos que $\Gamma \vDash \varphi$ y consideremos el conjunto $\forall\Gamma$ la clausura universal de Γ. De esto último y la definición de $\vDash$, tenemos $\forall\Gamma \vDash \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$. Entonces, según el Teorema 2.3.8, $\forall\Gamma \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$. Ahora, de esto último, (Ax12) y ($\forall$-In), tenemos $\Gamma \vdash \varphi$, como queríamos demostrar. $\square$

Es claro que la demostración del Teorema 2.3.9 no se puede obtener directamente para la presentación genérica de Cintula-Noguera en [20] debido a los axiomas (A15) y (A16) de $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$.

2.4. La $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$ lógica con identidad

En esta sección, presentaremos la versión de primer orden de $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$ con identidad. Por lo tanto, es deseable que la versión cuantificada $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$ de $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$ se expanda con un símbolo de predicado binario que represente la relación de igualdad, satisfaciendo los axiomas usuales. Como tal, el predicado será visto, desde un punto de vista semántico, como un símbolo lógico afín a los conectivos y cuantificadores. Denotamos por $\mathfrak{Fm}_{\approx}$ al álgebra de fórmulas absolutamente libre, donde las fórmulas atómicas se definen como de costumbre para la lógica de primer orden con identidad.

Definición 2.4.1. *Sea Σ una asignatura de primer orden con identidad. La lógica $\mathcal{QH}_{n,\approx}^{\vee,\sigma}$ sobre Σ se define mediante el cálculo estilo Hilbert obtenido al extender $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$ expresado en el nuevo idioma agregando:*

Axiomas Esquema

(A17) $x \approx x$,

Reglas de Inferencia

$(R\!-\approx)$ $\dfrac{x \approx y}{\varphi \to \varphi(x \wr y)}$ *donde y es una variable libre para x en φ, y $\varphi(x \wr y)$ denota cualquier fórmula obtenida a partir de φ remplazando algunas, y no neceseriamente todas, ocurrencias libres de x por y.*

Para esta lógica de primer orden con igualdad, definimos la relación sintáctica $\vdash$ de la forma habitual. Luego, de los axiomas y la relación sintáctica obtenemos la siguiente Proposición.

Proposición 2.4.2. *Sean t_1 un término y x, y, z variables individuales, entonces:*

(i) $\vdash \forall x(x \approx x)$,

(ii) $\vdash t_1 \approx t_1$,

(iii) $\{x \approx y\} \vdash y \approx x$,

(iv) $\{x \approx y, y \approx z\} \vdash x \approx z$,

Demostración: Solo probaremos (ii) y (iii), el resto se deja al lector.

(ii): Supongamos que t_1 es libre por x. Entonces, de (i) tenemos $\vdash \forall x(x \approx x)$. Luego, teniendo en cuenta (A14), podemos inferir que $\vdash \forall x(x \approx x) \to (t_1 \approx t_1)$. Por lo tanto, $\vdash t_1 \approx t_1$.

(iii): Supongamos que $\varphi(x,x)$ es $x \approx x$. Entonces, $\varphi(y,x)$ es $y \approx x$. Ahora supongamos $\vdash x \approx y$ y luego por $(R\!-\approx)$ tenemos que $\vdash (x \approx x) \to (y \approx x)$. Así, teniendo en cuenta (A17) y (MP), obtenemos $\vdash y \approx x$. $\square$

Está claro que $\mathcal{QH}^{\vee;\sigma}_{n,\approx}$ es una lógica tarskiana y finitaria. Por lo tanto, se cumple el Lema de Lindenbaum-Łoś (ver Lema 1.2.2 y Sección 1.2). Por otro lado, es posible ver que la relación $\equiv$ es una congruencia en $\mathfrak{Fm}_\approx$, donde $\alpha \equiv \beta$ si, y solo si, $\vdash \alpha \to \beta$ y $\vdash \beta \to \alpha$. El siguiente Lema se puede demostrar de manera similar al Lema 2.3.7.

Lema 2.4.3. *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}_\approx$, con Γ maximal no trivial con respecto a φ en $\mathcal{QH}^{\vee;\sigma}_{n,\approx}$. Sea $\Gamma/\equiv$ igual a $\{\overline{\alpha} : \alpha \in \Gamma\}$ ($|\alpha| = \overline{\alpha}$) un subconjunto del $H^{\vee;\sigma}_{n,\approx}$-álgebra $\mathfrak{Fm}_\approx/\equiv$, entonces:*

(i) *Si $\alpha \in \Gamma$ y $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$, entonces $\beta \in \Gamma$. Mas aún, se verifica que $\Gamma/\equiv = \{\overline{\alpha} : \Gamma \vdash \alpha\}$, en este caso diremos que es cerrado.*

(ii) *$\Gamma/\equiv$ es un sistema deductivo modal de $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\equiv$. Además, si $\overline{\varphi} \notin \Gamma/\equiv$ y $\overline{D}$ es un sistema deductivo modal cerrado en el sentido de 1, que contiene propiamente a $\Gamma/\equiv$, entonces $\overline{\varphi} \in \overline{D}$.*

Definición 2.4.4. *Sea $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{S}\rangle$ una Σ-estructura y v una $\mathfrak{A}$-valuación, definimos los valores de los términos y los valores de verdad de las fórmulas en $\mathfrak{A}$ para v extendiendo la Definición 2.3.3, añadiendo la siguiente condición: $||t_1 \approx t_2||^{\mathfrak{A}}_v = 1$ si, y solo si, $||t_1||^{\mathfrak{A}}_v = ||t_2||^{\mathfrak{A}}_v$. Para un conjunto dado de fórmulas $\Gamma \cup \{\alpha\}$, la consecuencia semántica de α a partir de Γ, que denotamos por $\Gamma \vDash \alpha$, se define como en la Definición 2.3.4.*

Teorema 2.4.5. *Sea $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathfrak{Fm}_\approx$, $\Gamma \vdash \alpha$ si, y solo si, $\Gamma \vDash \alpha$.*

Demostración: De acuerdo a la demostración del Teorema 2.3.6, el Teorema 2.3.9 y usando la clausura universal de un conjunto de fórmulas, solo tenemos que demostrar que los axiomas (A17) y ($R\!-\approx$) son correctos. No es difícil ver que (A17) es correcto.

Consideremos la esturctura fija $\mathfrak{A}$ y supongamos que $||x \approx y||_v^{\mathfrak{M}} = 1$, para toda valuación v. Luego, $v(x) = v(y)$ y por lo tanto, $||\varphi \to \varphi(x \wr y)||_v^{\mathfrak{M}} = 1$ para toda valuación v, lo que completa la prueba. $\square$

La siguiente Proposición es una consecuencia inmediata de éste último Teorema y la Definición 2.4.4.

Proposición 2.4.6. *Para los términos $t_1, t_1', \cdots, t_n, t_n'$, tenemos que:*

(i) $\{t_1 \approx t_2\} \vdash t_2 \approx t_1$,

(ii) $\{t_1 \approx t_2, t_2 \approx t_3\} \vdash t_1 \approx t_3$,

(iii) $\{t_1 \approx t_1', t_2 \approx t_2', t_3 \approx t_3', \cdots, t_{n-1} \approx t_{n-1}'\} \vdash f(t_1, \cdots, t_n) \approx f(t_1', \cdots, t_n')$, *para todo símbolo de función f de aridad n,*

(iv) $\{t_1 \approx t_1', t_2 \approx t_2', t_3 \approx t_3', \cdots, t_n \approx t_n'\} \vdash \varphi(\overrightarrow{x}/\overrightarrow{t}) \to \varphi(\overrightarrow{x}/\overrightarrow{t'})$, *para toda fórmula sin cuantificadores φ con dependencia en, a lo sumo, las variables $x_1, \cdots, x_n$. En lugar de $\xi_1, \cdots, \xi_n$ (donde los ξ_i son términos o fórmulas y n es arbitrario o fijado por el contexto), escrimos $\overrightarrow{\xi}$.*

2.5. La clase de álgebras de Monteiro

En esta sección, presentaremos una clase de álgebras donde sus pruebas de primer orden asociadas nos permiten probar el Teorema de completitud a través del método dado en la Sección 2.3.

Primero, consideremos la clase de álgebras de Monteiro (o M-álgebras) donde cada álgebra $\mathbf{A} = \langle A, F \rangle$ tiene un conjunto finito de símbolos de operaciones finitarias denotados por F y supongamos que la clase esta caracterizada por el conjunto $\mathfrak{C}$ de ecuaciones; es decir, la clase de M-álgebras constituye una variedad. Además, supongamos que tenemos una operación binaria $\to$ primitiva o derivada del lenguaje F que verifica lo siguiente:

(I$_1$) $x \to (y \to x) = 1$;

(I$_2$) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$;

(I$_3$) $x \to y = 1$, $y \to x = 1$ implica $x = y$;

(I$_4$) $((x \to y) \to x) \to x = 1$.

Además, para cualquier M-álgebra $\mathbf{A}$ consideraremos la noción de sistema deductivo. Para una M-álgebra $\mathbf{A}$ y $D \subseteq A$, decimos que D es un M-sistema deductivo si es un sistema deductivo y para x_i, y_i en A con $1 \leq i \leq n$ se cumple la siguiente condición:

(m): $x_i \to y_i \in D$ implica $\circ(x_1, \cdots, x_n) \to \circ(y_1, \cdots, y_n) \in D$, para cualquier operación n-aria $\circ$ de F.

Supondremos que toda M-álgebra verifica la condición (m). Denotamos por $\mathcal{D}_M(A)$ el conjunto de M-sistemas deductivos.

Luego, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.5.1. *Sea* $\mathbf{A}$ *un* M*-álgebra. Las siguientes propiedades se cumplen para todo* $x, y, z \in A$*:*

I$_5$. $1 \to x = x$;

I$_6$. *Si* $x = 1$ *y* $x \to y = 1$, *entonces* $y = 1$;

I$_7$. $x \to x = 1$;

I$_8$. $x \to 1 = 1$;

I$_9$. *La relación* $\leq$, *definida como* $x \leq y$ *si, y solo si,* $x \to y = 1$, *es un orden en* A *y* 1 *es el último elemento;*

I$_{10}$. *Si* $x \leq y$, *entonces* $y \to z \leq x \to z$;

I$_{11}$. $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$;

I$_{12}$. $x \to (x \to y) = x \to y$.

Demostración. Es rutina. □

Para un M-álgebra $\mathbf{A}$, no es difícil ver que todo sistema deductivo D de A tiene asociada una congruencia $R(D) = \{(x, y) : x \to y, y \to x \in D\}$ y viceversa. Además, es posible probar que existe una isomorfismo de retículos entre $\mathcal{D}_M(A)$ y el conjunto de congruencias de A. Ahora, recordemos que para una M-álgebra $\mathbf{A}$, decimos que un M-sistema deductivo M es máximo si M es propio y para cualquier $D \in \mathcal{D}_M(A)$, $M \subseteq D$ implica $D = A$ o $M = D$.

Definición 2.5.2. *Sea* $\mathbf{A}$ *un* M*-álgebra,* $D \in \mathcal{D}_M(A)$ *y* $p \in A \backslash D$. *Diremos que* D *es ligado a* p *si* $p \notin D$ *y para todo* $D' \in \mathcal{D}_M(A)$ *tal que* $D \subsetneq D'$*, tenemos que* $p \in D'$.

Para una M-álgebra $\mathbf{A}$ dada, no es difícil ver que una intersección arbitraria de sistemas deductivos modales es un M-sistema deductivo de A. Entonces, como de costumbre, consideraremos una noción de M-sistema deductivo generado por el conjunto X, que denotaremos $[X]$. Luego:

Lema 2.5.3. *Sea* $\mathbf{A}$ *un* M*-álgebra, y* $M \subseteq A$. *Entonces:*

$$[M] = \{y \in A : \text{ existen } z_1, \cdots, z_n \in M \text{ tales que}$$
$$z_1 \to (z_2 \to (\cdots (z_{n-1} \to (z_n \to y) \cdots) = 1\}.$$

Demostración. Resulta inmediato de I_8, I_{11} y I_5. □

Lema 2.5.4. *Sea* $\mathbf{A}$ *un* M*-álgebra y* M *un* M*-sistema deductivo maximal* A. *Entonces, para cada* $x \in A \setminus M$*, tenemos que* $x \to y \in A$ *para todo* $y \in A$.

Para una M-álgebra $\mathbf{A}$ dada y gracias al Lema 2.5.4 y (I_4), podemos probar que cada M-sistema deductivo ligado a algún elemento de A es maximal y viceversa. Además, es posible ver que todo M-sistema deductivo D es la intersección de todos los sistemas deductivos que contienen D; y, siguiendo un razonamiento análogo a la demostración del Lema 1.5.5, tenemos que $\{1\} = \bigcap\limits_{M \in \mathcal{E}(A)} M$ donde $\mathcal{E}(A)$ es el conjunto de todos los M-sistemas deductivos maximales.

Consideremos ahora el álgebra del cociente A/T definida por $a \equiv_T b$ si, y solo si, $a \to b, b \to a \in T$, y sea $q_T : A \to A/T$ la proyección canónica definida por $q_T = |x|_T$, donde $|x|_T$ denota la clase de equivalencia de x generada por T.

Lema 2.5.5. *Sea* $\mathbf{A}$ *un* M*-álgebra. Luego, el mapeo* $\Phi : A \longrightarrow \prod_{T \in \mathcal{E}(A)} A/T$*, definido por* $\Phi(x)(T) = q_T(x)$*, es un homomorfismo uno a uno; es decir, la clase de las* M*-álgebras es semisimple.*

Demostración: La demostración se puede hacer de forma similar a la del Lema 1.5.6 □

Observación 2.5.6. En la literatura hay diversos ejemplos de M-álgebras, expondremos algunas M-álgebras con gran desarrollo. Para empezar, las MV$_n$-álgebras nos permiten definir una nueva implicación que se convierte en M-álgebras, ver [23]. Esta clase fue llamada por Cignoli como álgebras propias de Łukasiewicz n-valentes. Otro ejemplo interesante es la clase de álgebras tetravalentes modales (ver [48]), es posible definir una implicación donde se convirtieron en M-álgebras, ver [41, 42, 40] y [75, Proposición 3.3.2.]. Y además, Iturrioz estudió varias clases de álgebras que en realidad son M-álgebras, incluidas las estudiadas en su tesis doctoral, véase, por ejemplo, [54].

Otras clases de álgebras que se comportan como M-álgebra son las de Łukasiwicz-Moisil (ver [10]), las álgebras de Hilbert n-valentes modales, las álgebras de Tarski, las álgebras de residuación Łukasiwicz n-valentes (ver [44]), la clase estudiada en [43, 45, 46], las álgebras de Nelson semisimples (ver [25]), las álgebras de Heyting n-valentes simétricas ([61]), las álgebras booleanas monádicas, las álgebras Łukasiwicz-Moisil monádicas ([1]), las MV$_n$-álgebras monádicas y biádicas ([34]), entre otras. En los casos monádicos, el operador puede verse como un operador modal especial al estilo de las álgebras modales.

Volviendo a esta presentación, es claro que la clase de $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebras son M-álgebras. Para ver esto, definimos una implicación débil (ver Sección 1.5) en cada $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra y ahora, teniendo en cuenta el Lema 1.5.3, es posible ver que las congruencias se caracterizan por sistemas deductivos débiles. Usando el Lema 3.2.6, tenemos la prueba de nuestras afirmaciones.

2.6. Cálculo de primer orden finitario: la familia de lógicas $\mathcal{M}$

Análogamente a la Sección 2.3, consideramos la asignatura de primer orden $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ y el conjunto Var de variables. Además, decimos que una estructura Σ es un par $\langle \mathbf{A}, \mathbf{S} \rangle$ donde $\mathbf{A}$ es una M-álgebra y $\mathbf{S}$ se define como en la Definición 2.3.1. Además, denotamos por $\mathfrak{Fm}$ al álgebra absoluta libre de fórmulas de primer orden con igualdad. Es importante señalar que tenemos un conjunto de ecuaciones que caracterizan al álgebra. De acuerdo con eso, y con la relación definida en (I_9), podemos caracterizar al álgebra con otro conjunto de ecuaciones, todas ellas iguales a 1. Denotamos $\mathfrak{C}_{\mathfrak{Fm}}$ la interpretación de estas ecuaciones en el conjunto Fm.

Definición 2.6.1. *Sea Σ una asignatura de primer orden con igualdad. La lógica $\mathcal{M}$ sobre Σ se define mediante el Cálculo estilo Hilbert sobre el lenguaje $\mathcal{L}_\Sigma$ añadiendo lo siguiente:*

Axiomas Esquemas

(Ax1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$,

(Ax2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$,

(Ax3) α, *con* $\alpha \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{Fm}}$,

(Ax4) $\alpha(x/t) \to \exists x\alpha$, *si t es un término libre para x en α,*

(Ax5) $\forall x\alpha \to \alpha(x/t)$, *si t es un término libre para x en α,*

(Ax6) $\forall x(x \approx x)$,

Reglas de Inferencia

(R1) $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$

(R2) $\dfrac{\alpha_1 \to \beta_1, \beta_1 \to \alpha_1, \cdots, \alpha_k \to \beta_k, \beta_k \to \alpha_k}{\circ(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \to \circ(\beta_1, \cdots, \beta_k)}$,

(R3) $\dfrac{\alpha \to \beta}{\exists x\alpha \to \beta}$, y x no ocurre libre en β,

(R4) $\dfrac{\alpha \to \beta}{\alpha \to \forall x\beta}$, y x no ocurre libre en α,

(R5) $\dfrac{x \approx y}{\varphi \to \varphi(x \wr y)}$ donde y es una variable libre para x en φ, y $\varphi(x \wr y)$ denota cualquier fórmula obtenida a partir de φ remplazando algunas, y no neceseriamente todas, ocurrencias libres de x por y.

Denotamos por $\vdash \alpha$ a la derivación de la fórmula α en $\mathcal{M}$ y con $\Gamma \vdash \alpha$ la derivación de α a partir de un conjunto de premisas Γ. Estas nociones se definen como de costumbre. Denotamos $\alpha \equiv \beta$ como una abreviatura de $\vdash \alpha \to \beta$ y $\vdash \beta \to \alpha$.

Proposición 2.6.2. *Las siguientes son reglas en $\mathcal{M}$.*

(P1) $\vdash \alpha \to \alpha,$

(P2) $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta \to \alpha},$

(P3) $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \to \beta, \Gamma \vdash \beta \to \gamma}{\Gamma \vdash \alpha \to \gamma}.$

Consideremos ahora la Σ-estructura $\mathfrak{A}$ que resulta ser el par $\langle \mathbf{A}, \mathbf{S} \rangle$ donde $\mathbf{A}$ es una M-álgebra y

$$\mathbf{S} = \langle S, \{P_{\mathbf{S}}\}_{P \in \mathcal{P}}, \{f_{\mathbf{S}}\}_{f \in \mathcal{F}}, \mathcal{C} \rangle,$$

donde S es un dominio no vacío, $P_{\mathbf{S}}$ es una función $S^n \to \mathbf{A}$, para todo símbolo de predicado n-ario $P \in \mathcal{P}$, y $f_{\mathbf{S}}$ es una función $S^n \to S$, para todo símbolo de función n-ario $f \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{C}$ el conjunto de constantes individuales. Más aún, una $\mathfrak{A}$-valuación v es una función de Var en A: donde $v[x \to a]$ denota una $\mathfrak{A}$-valuación en la que $v[x \to a](x) = a$ y $v[x \to a](y) = v(y)$ para cada variable $y \neq x$.

Definición 2.6.3. *Sea $\mathfrak{S} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{S} \rangle$ una Σ-estructura y v una $\mathfrak{S}$-valuación. Definimos los valores de los términos y los valores de verdad de las fórmulas en $\mathfrak{A}$ para una valoración v como sigue:*

$$||c||_v^{\mathfrak{S}} = c^{\mathfrak{S}} \ si \ c \in S,$$

$$||x||_v^{\mathfrak{S}} = v(x) \ si \ x \in Var,$$

$$||f(t_1, \cdots, t_n)||_v^{\mathfrak{S}} = f_{\mathbf{S}}(||t_1||_v^{\mathfrak{S}}, \cdots, ||t_n||_v^{\mathfrak{S}}) \ para \ cada \ f \in \mathcal{F},$$

$$||P(t_1, \cdots, t_n)||_v^{\mathfrak{S}} = P_{\mathbf{S}}(||t_1||_v^{\mathfrak{S}}, \cdots, ||t_n||_v^{\mathfrak{S}} \ para \ cada \ P \in \mathcal{P},$$

$$|| \circ (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)||_v^{\mathfrak{S}} = \circ(||\alpha_1||_v^{\mathfrak{S}}, \cdots, ||\alpha_n||_v^{\mathfrak{S}}), \ donde \circ \ es \ un \ operador \ n\text{-}ario \ de \ F,$$

$$||(\forall x)\alpha||_v^{\mathfrak{S}} = \bigwedge_{a\in S} ||\alpha||_{v[x\to a]}^{\mathfrak{S}},$$

$$||(\exists x)\alpha||_v^{\mathfrak{S}} = \bigvee_{a\in S} ||\alpha||_{v[x\to a]}^{\mathfrak{S}},$$

$$||t_1 \approx t_2||_v^{\mathfrak{S}} = 1 \textit{ si, y solo si, } ||t_1||_v^{\mathfrak{S}} = ||t_2||_v^{\mathfrak{S}}.$$

Si el ínfimo o supremo no existe, tomamos el valor como indefinido. Para un conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\alpha\}$, la consecuencia semántica de α a partir Γ, que denotamos por $\Gamma \vDash \varphi$ se define como en la Definición 2.3.4.

Es claro que la relación $\equiv$ es una congruencia en $\mathcal{M}$. Además, el álgebra de Łindenbaum-Tarski $\mathfrak{Fm}/\equiv$ es un M-álgebra. Notemos que $\mathcal{M}$ es una lógica tarskiana y finitaria, vea la Sección 1.2.

Lema 2.6.4. *Sea* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}$ *una teoría maximal consistente, y sea* $\Gamma/\equiv$ *el subconjunto* $\{|\alpha| : \alpha \in \Gamma\}$ *del M-álgebra* $\mathfrak{Fm}/\equiv$*. Se verifica que* $\Gamma/\equiv = \{\overline{\alpha} : \Gamma \vdash \alpha\}$*; en este caso decimos que es cerrado. Luego,* $\Gamma/\equiv$ *es un M-sistema deductivo cerrado ligado a algún elemento de* $\mathfrak{Fm}/\equiv$*.*

Demostración: Se obtiene de forma inmediata del Lema 2.3.7 pero utilizando ahora (R1), (R2) y las reglas de la Proposición 2.6.2. $\square$

Teorema 2.6.5. *Sea* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}$. $\Gamma \vDash \varphi$ *si, y solo si* $\Gamma \vdash \varphi$.

Demostración: La demostración se sigue de los Teoremas 2.3.6, 2.4.5 y 2.3.9. Pero ahora, usando la estructura $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{Fm}/\Delta, Ter, \cdot^{Ter} \rangle$ donde Ter es un conjunto de términos y Δ es una teoría maximal con respecto a α tal que $\Gamma \subseteq \Delta$. $\square$

Es claro que el álgebra $\mathfrak{Fm}/\Delta$, de las clases de algebras consideradas en el Ejemplo 2.5.6, es un álgebra semisimple y completa.

3. Capítulo III: Operadores de posibilidad sobre álgebras de Gödel

En el área de la lógica fuzzy, se han estudiado intensamente las expansiones de estas lógicas mediante el operador Δ; el interés del operador Δ se debe a que presenta un comportamiento *fuzzy*, se estudiaron los sistemas asociados a nivel proposicional y de primer orden.

Por otro lado, los operadores de posibilidad que definen las álgebras Łukasiewicz-Moisil han sido estudiados sobre diferentes clases de álgebras; estos operadores se conocen como operadores de Moisil en la literatura. Uno de estos operadores coincide con Δ, mostrando que hay otros operadores con comportamiento difuso.

En este capítulo se presentará el estudio de los operadores de Moisil sobre una extensión de una lógica fuzzy; a saber, la lógica Gödel n-valente, lo que abre la posibilidad de explorar más operadores difusos.

3.1. Introducción

Moisil introdujo álgebras de Łukasiewicz n-valentes, también conocidas como álgebras de Łukasiewicz-Moisil n-valentes, véase, por ejemplo, [10]. Recordemos que las álgebras estándar de Łukasiewicz-Moisil n-valentes están definidas por C_n cuyo universo es

$$\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

dotado de las operaciones $x \wedge y := \text{mín}\{x, y\}$, $x \vee y := \text{máx}\{x, y\}$, $\sim x := 1 - x$ y los operadores σ_i se definen de la siguiente manera:

$$\sigma_i\left(\frac{j}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } i + j < n \\ 1 & \text{si } i + j \geq n \end{cases}.$$

Estos operadores σ_i son homomorfismos de retículos para $0 \leq i \leq n-1$. Curiosamente, Cignoli e Iturrioz estudiaron extensiones de álgebras de Heyting n-valentes expandidas por los operadores de Moisil σ_i. Estas estructuras se consideraron con la intención de presentar clases equivalentes para las MV_n-álgebras y Łukasiewicz-Moisil n-valentes, respectivamente, [23, 53].

Posteriormente, Canals-Frau y Figallo estudiaron diferentes fragmentos de la clase estudiada por Cignoli e Iturrios, [16, 17]. Recientemente, con Figallo-Orellano estudiamos un fragmento implicacional con disyunción y presentamos un cálculo proposicional correcto, completo y cuantificado con respecto a la clase de estas álgebras, [38]. Los Teoremas de Correctitud se dieron a través de una nueva técnica de lógica algebraica desarrollada en esta tesis; además, esta técnica también se aplicó a una familia de variedades semisimples estudiadas en la literatura de lógica algebraica, ver [38].

Por otro lado, el operador σ_0 fue estudiado y llamado operador Δ por Baaz, [6]; quien estudió la versión proposicional y cuantificada de la lógica Gödel expandida por Δ. Posteriormente, Hájek estudió la extensión de la Basic Fuzzy Logic (BL), la lógica Łukasiewicz, la lógica producto y otras lógicas fuzzy con operador Δ, [50]. En este escenario, Esteva y Godo introdujeron la lógica MTL y su extensión MTL_Δ por el operador Δ, [29], ver también [30, 31]. Además, Hájek y Cintula llamaron a todos estos sistemas Δ-fuzzy logics y presentaron su versión cuantificada con los respectivos teoremas de correctitud y completitud en [51]. Su prueba de completitud para estas lógicas de primer orden es obtenida sumando el axioma de *dominios constantes* y usando una estrategia similar de Henkin.

Recordemos que las álgebras de Heyting n-valentes también se conocen como álgebras de Gödel n-valentes y son la contraparte algebraica de la *lógica intuicionista* con una matriz basada en una cadena con n elementos. Para presentar esta lógica, consideremos que el lenguaje de la lógica Gödel (para abreviar, $\mathcal{G}$) se construye como de costumbre a partir de un conjunto contable de proposiciones V, la constante $\perp$, los conectores binarios $\wedge$ y $\to$. Disyunción y negación definidas como $\varphi \vee \psi := ((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$

y $\neg\varphi := \varphi \to \bot$, y la constante $\top$ como $\bot \to \bot$. Los axiomas de $\mathcal{G}$ son los siguientes:

(A1) $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

(A2) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$

(A3) $(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$

(A4) $(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) \to (\psi \wedge (\psi \to \varphi))$

(A5a) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \wedge \psi) \to \chi))$

(A5b) $((\varphi \wedge \psi) \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$

(A6) $((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$

(A7) $\top \to \varphi$

(A8) $\varphi \to (\varphi \wedge \varphi)$

La única regla de inferecia de $\mathcal{G}$ es *modus ponens*. Este axiomático proviene de agregar (A8) de la lógica BL de Hájek, [50]. Posteriormente, se demostró que los axiomas (A2) y (A3) eran de hecho redundantes. Es bien sabido que la contraparte algebraica de $\mathcal{G}$ es la clase de álgebras Gödel, que es una variedad generada por un álgebra Gödel con soporte en el intervalo unitario $[0, 1]$. Si reemplazamos el intervalo por el conjunto de tablas de verdad $GV_n = \{0, 1/(n-1), \cdots, (n-2)/(n-1), 1\}$, obtenemos el álgebra estándar de la lógica del Gödel n-valente (para abreviar, $\mathcal{G}_n$), que es la extensión axiomática de $\mathcal{G}$ con el axioma:

(G_n) $(\varphi_1 \to \varphi_2) \vee (\varphi_3 \to \varphi_4) \vee \cdots \vee (\varphi_{n-1} \to \varphi_n)$.

3.2. La clase de álgebras σ-Gödel n-valentes

En esta sección, recordaremos algunos preliminares sobre las álgebras de Gödel n-valentes que necesitaremos en lo que sigue. Más adelante, presentaremos la clase de álgebras modales de Gödel n-valentes con supremo para presentar un cálculo correcto y completo con respecto a la clase de álgebras.

Empezamos recordando que M. Canals-Frau y A. V. Figallo estudiaron el fragmento implicativo n-valente con los operadores de posibilidad de Moisil, [16, 17]. Figallo-Orellano y Slagter estudiaron el $\{\to, \vee\}$-fragmento de las álgebras de Hilbert n-valentes con operadores de posibilidad de Moisil en [38]. Presentaremos una nueva clase de álgebras donde esto se puede ver como un $\{\to, \vee, \wedge, \perp, \top\}$-fragmento n-valente de las álgebras de Hilbert distributivas ([35]) con operadores de posibilidad Moisil.

Definición 3.2.1. *Decimos que el álgebra $\langle A, \vee, \wedge, \to, \sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}, 0, 1\rangle$ es un σ-Gödel álgebra n-valente (o Hey_n^σ-álgebras) si el reducto $\langle A, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ es una álgebra de Gödel n-valente y los operadores $\sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}$ verifican las siguientes condiciones:*

(σ-He1) $(\sigma_0 x \to y) \to x = x$,

(σ-He2) $\sigma_i(x \to y) \to (\sigma_i x \to \sigma_j y) = 1$ *para cualquier* $0 \leq i \leq j \leq n-1$;

(σ-He3) $(\sigma_i x \to \sigma_i y) \to ((\sigma_{i+1} x \to \sigma_{i+1} y) \to \cdots ((\sigma_{n-1} x \to \sigma_{n-1} y) \to \sigma_i(x \to y)) \cdots) = 1$;

(σ-He4) $\sigma_i(x \to \sigma_j y) = x \to \sigma_j y$;

(σ-He5) $\sigma_{n-1} x = (x \to \sigma_i x) \to \sigma_j x$ *para cualquier* $0 \leq i \leq j \leq n-1$;

(σ-He6) $\sigma_i(x \vee y) = \sigma_i x \vee \sigma_i y$ *para todo* $0 \leq i \leq n-1$;

(σ-He7) $\sigma_i(x \wedge y) = \sigma_i x \wedge \sigma_i y$ *para todo* $0 \leq i \leq n-1$;

Por $\mathbb{H}ey_n^\sigma$, denotamos la variedad de Hey_n^σ-álgebras y, como de costumbre, en ciertas ocaciones abreviaremos denotando a una Hey_n^σ-álgebra $\langle A, \vee, \wedge, \to, \sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}, 0, 1\rangle$ como $\mathbf{A}$.

Lema 3.2.2. *Para cada $\mathbf{A} \in \mathbb{H}ey_n^\sigma$, las siguientes propiedades se cumplen cualquiera sean $x, y \in A$:*

(σ-He8) $\sigma_0 x \leq x$,

(σ-He9) $\sigma_i(\sigma_j x) = \sigma_j x$,

(σ-He10) $\sigma_j 1 = 1$,

(σ-He11) $\sigma_0 x \leq \sigma_1 x \leq \cdots \leq \sigma_{n-1} x$,

(σ-He12) $x \leq \sigma_{n-1}x$,

(σ-He13) $x \leq y$ *entonces* $\sigma_i x \leq \sigma_i y$,

(σ-He14) $\sigma_i(\sigma_j x \to y) = \sigma_j x \to \sigma_i y$,

(σ-He15) $x \to \sigma_j(x \to y) = \sigma_j(x \to y)$,

(σ-He16) $x \to \sigma_j y \leq \sigma_j(x \to y)$,

(σ-He17) $\sigma_j(x \to y) \leq \sigma_j x \to \sigma_j y$,

(σ-He18) $(\sigma_0 x \to \sigma_0 y) \to ((\sigma_1 x \to \sigma_1 y) \to ...((\sigma_{n-1}x \to \sigma_{n-1}y) \to (x \to y))\cdots) = 1$,

(σ-He19) $\sigma_i x = \sigma_i y$ *para todo* i, $0 \leq i \leq n-1$, *implica* $x = y$,

(σ-He20) $(\sigma_j x \to y) \to \sigma_j x = \sigma_j x$,

(σ-He21) $\sigma_{n-1}x = (x \to \sigma_1 x) \to x$,

(σ-He22) $\sigma_1(\sigma_1 y \to x) = (\sigma_1(\sigma_1 x \to t) \to (\sigma_1 y \to t)) = 1$

(σ-He23) $\sigma_j(\neg x) = \neg\sigma_j x$ *y* $\sigma_j 0 = 0$ *donde* $\neg x := x \to 0$.

Demostración: La demostración de (σ-He8) hasta (σ-He22) se puede consultar en [16] y [17]. La demostración de (σ-He23) se encuentra en [18, Proposición 2.3]. □

Recuerde que para cualquier álgebra de Hilbert $\mathbf{A}$, se dice que un subconjunto D es un sistema deductivo de A (s.d., para abreviar) si $1 \in D$ y, si $x, x \to y \in D$ entonces $y \in D$. Denotamos por $\mathcal{D}(A)$ el conjunto de sistemas deductivos de A.

Se dice que un subconjunto D de $\mathbf{A} \in \mathbb{H}ey_n^{\sigma}$ es un sistema deductivo modal (s.d.m.) si $D \in \mathcal{D}(A)$, y $x \in D$ implica $\sigma_0 x \in D$. Denotamos por $\mathcal{D}_m(A)$ el conjunto de todos los s.d.m. de la Hey_n^{σ}-álgebra $\mathbf{A}$. Supongamos M un s.d. de A. Diremos que M es maximal si para todos los M_0 s.d., tales que $M \subseteq M_0$, entonces $M = M_0$ o $M_0 = A$. Podemos definir, de mandera análoga, el mismo concepto para s.d.m.. Notemos que no es difícil probar que, para cualquier s.d.m. si $x \in A \backslash M$ e $y \in A$, entonces $\sigma_0 x \to y \in M$ y $\sigma_k x \to y \in M$, ver [38, Lemma 6.4].

Para un álgebra $\mathbf{A}$ dada, no es difícil ver que una intersección arbitraria de sistemas deductivos modales es también un sistema deductivo modal de A. Luego, como de costumbre, consideraremos la noción de sistema deductivo modal generado por un conjunto X, que denotaremos $[X]$.

Lema 3.2.3. *Sean $\mathbf{A} \in \mathbb{H}ey_n^\sigma$, y $M \subseteq A$. Luego:*

$$[M] = \{y \in A : \textit{existen } z_1, \cdots, z_n \in M \textit{ tales que}$$
$$\sigma_0 z_1\ a(\sigma_0 z_2 \to (\cdots (\sigma_0 z_{n-1} \to (\sigma_0 z_n \to y) \cdots) = 1\}.$$

Lema 3.2.4. *Sean $\mathbf{A} \in \mathbb{H}ey_n^\sigma$, B una subálgebra de $\mathbf{A}$ y $D_B \in \mathcal{D}_m(B)$. Entonces, existe $D \in \mathcal{D}_m(A)$ tal que $D_B = D \cap B$; es decir, la variedad de Hey_n^σ-álgebra tiene la propiedad de extensión de congruencia.*

Demostración: Se sigue inmediatamente del Lema 3.2.3. □

Teorema 3.2.5. *Para cualquier $\mathbf{A} \in \mathbb{H}ey_n^\sigma$ y cualquier $D \in \mathcal{D}_m(A)$, tenemos que $Con(A) = \{R(D) : D \in \mathcal{D}_m(A)\}$ donde $R(D) = \{(x, y) \in A^2 : x \to y, y \to x\ enD\}$. Entonces, existe un isomorfismo reticular entre $Con(A)$ y $D_m(A)$.*

Demostración: Es una consecuencia inmediata de (HM9), (HM10) y resultados bien conocidos de la Teoría de las Álgebras de Heyting. □

En lo que sigue, demostraremos que la variedad de las σ-Gödel álgebras n-valentes es de hecho una variedad semi-simple. Con este fin, comencemos considerando una Hey_n^σ-álgebra $\mathbf{A}$, entonces podemos definir una nueva operación binaria $\rightarrowtail$ denominada implicación débil tal que: $x \rightarrowtail y = \sigma_0 x \to y$ para $x, y \in A$.

Lema 3.2.6. [38] *Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{H}ey_n^\sigma$ y para cualquier $x, y, z \in A$, se cumplen las siguientes propiedades:*

(wi1) $1 \rightarrowtail x = x$,

(wi2) $x \rightarrowtail x = 1$,

(wi3) $x \rightarrowtail \sigma_0 x = 1$, (wi4) $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail z) = (x \rightarrowtail y) \rightarrowtail (x \rightarrowtail z)$,

(wi5) $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail x) = 1$,

(wi6) $((x \rightarrowtail y) \rightarrowtail x) \rightarrowtail x = 1$.

Definición 3.2.7. *Sea* $\mathbf{A}$ *un* Hey_n^σ*-álgebra y supongamos* $D \subseteq A$*, decimos que* D *es un sistema deductivo débil (s.d.d.) si* $1 \in D$*, y si* $x, x \rightarrowtail y \in D$*, luego* $y \in D$*.*

Denotamos por $\mathcal{D}_d(A)$ el conjunto de sistemas deductivos débiles de una Hey_n^σ-álgebra $\mathbf{A}$ dada. No es difícil ver que el conjunto de sistemas deductivos modales es igual al conjunto de sistemas deductivos débiles.

Ahora, para todo sistema deductivo (débil) D de A, decimos que D es maximal si para todo sistema deductivo (débil) M tal que $D \subseteq M$, entonces $M = A$ o $M = D$. Además, consideremos el conjunto de todas los s.d.d. maximales. denotado por $\mathcal{E}_d(A)$.

Definición 3.2.8. *Sean* $\mathbf{A}$ *un* Hey_n^σ*-álgebra,* $D \in \mathcal{D}_d(A)$ *y* $p \in A$*. Decimos que* D *es un sistema deductivo débil ligado a* p *si:* $p \notin D$ *y, para cualquier* $D' \in \mathcal{D}(A)$ *tal que* $D \subsetneq D'$*, entonces* $p \in D'$*.*

Lema 3.2.9. *Para toda* Hey_n^σ*-álgebra* $\mathbf{A}$ *dada, todo sistema deductivo modal es un sistema deductivo débil y viceversa.*

Lema 3.2.10. *Sea* $\mathbf{A}$ *un* Hey_n^σ*-álgebra y* M *un sistema deductivo maximal de* A*. Entonces, por cada* $x \in A \setminus M$*, tenemos que* $\sigma_0 x \to y \in A$*, para cada* $y \in A$*.*

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado principal de esta sección, el Lema 3.2.11.

Lema 3.2.11. *Para toda* Hey_n^σ*-álgebra* $\mathbf{A}$*,* $\{1\} = \bigcap_{M \in \mathcal{E}_d(A)} M$ *donde* $\mathcal{E}_d(A)$ *es el conjunto de s.d.d. maximales de* $\mathbf{A}$*.*

Demostración. Para ver que por cada sistema deductivo débil D, existe un sistema deductivo débil L_p ligado a algún elemento $p \in A$ que lo contiene, consideremos primero el conjunto $\mathcal{D}_d(D, p) = \{S \in \mathcal{D}_d : D \subseteq S, p \notin S\}$ donde $\mathcal{D}_d$ es el conjunto de todos los sistemas deductivos débiles de A. No es difícil ver que cada cadena de $\mathcal{D}_d(D,p)$ tiene una cota superior, entonces por el Lema de Zorn hay un elemento maximal L_p en ella. El conjunto L_p es el sistema deductivo débil deseado, ligado a p, tal que $D \subseteq L_p$.

Ahora, es claro que $D \subseteq \bigcap_{p\in A\setminus D} L_p$, y no es difícil ver que $D = \bigcap_{p\in A\setminus D} L_p$.

Todo sistema deductivo débil maximal es un sistema deductivo débil ligado a algún elemento de A y viceversa. Para ver esto, debemos tener en cuenta el lema 3.2.11 y (wi6). Por lo tanto, dado que $\{1\}$ es un sistema deductivo débil, la prueba está completa. $\square$

Luego consideraremos el álgebra del cociente A/M definida por $a \equiv_M b$ si, y solo si, $a \to b, b \to a \in M$, y la proyección canónica $q_M : A \to A/M$ definido por $q_M = |x|_M$, donde $|x|_M$ denota la clase de equivalencia de x generada por M. A partir de los resultados del álgebra universal, tenemos que si M es un sistema deductivo maximal de A, entonces A/M es un Hey_n^σ-álgebra simple. Decimos que una variedad es semisimple si toda álgebra subdirectamente irreducible es simple; o de manera equivalente, cada álgebra de la variedad es un producto subdirecto de álgebras simples. Ahora, mostraremos que la variedad de Hey_n^σ-álgebras es, de hecho, semisimple.

Lema 3.2.12. *Sea* $\mathbf{A}$ *un* Hey_n^σ*-álgebra, luego el mapeo* $\Phi : A \longrightarrow \prod_{M\in\mathcal{E}_d(A)} A/M$*, definido por* $\Phi(x)(M) = q_M(x)$*, es un homomorfismo uno a uno.*

Demostración: Tomando $\prod_{M_\alpha\in\mathcal{E}_d(A)} A/M_\alpha$ donde $\mathcal{E}_d(A)$ es el conjunto de s.d.d. maximales definido antes. Definimos $\Phi : A \to \prod_{M_\alpha\in\mathcal{E}_d(A)} A/M_\alpha$ tal que, por cada α tenemos que $\Phi(a) = f_a$, donde $f_a(\alpha) = q_\alpha(a) = |a|_\alpha \in A/M_\alpha$, con $a \in A$. No es difícil ver que Φ es un Hey_n^σ-homomorfismo, ya que $\equiv_{M_\alpha}$ es una relación de congruencia. Ahora, por el hecho de que $\{1\} = \bigcap_{M\in\mathcal{E}_d(A)} M$, es posible ver que Φ es una función uno a uno, lo que completa la prueba. $\square$

Nuestra próxima tarea es determinar las álgebras generadoras. Primero, para un Hey_n^σ-álgebra dada, queremos determinar la partición asociada a una determinada congruencia.

Lema 3.2.13. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}ey_n^\sigma$ *que contiene más de un elemento y* $M \in \mathcal{E}_d(A)$*. Entonces, la familia* $\mathcal{F}_M = \{E_j^M\}_{0\le j\le m}$*,* $m \le n$ *es una partición de* A *donde*

$$E_j^M = \{a \in A : a, \sigma_k a \notin M, 1 \le k \le j, \sigma_{j+1} a \in M\}$$

con $1 \leq j \leq n-2$,

$$E^M_{n-1} = \{a \in A : a, \sigma_{n-1}a \notin M\}$$

y $E^M_0 = M$.

A continuación, presentaremos un álgebra importante que llamamos Hey^σ_n-álgebra estándar y se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{C_n} = \left\langle \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}, \vee, \wedge, \rightarrow \{\sigma_i\}_{0 \leq i \leq n-1}, 0, 1 \right\rangle$$

donde $x \rightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & \text{en caso contrario} \end{cases}$ y $\sigma_i\left(\frac{j}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } i+j < n \\ 1 & \text{si } i+j \geq n \end{cases}$.

Está claro que el operador σ_0 coincide con el operador $\triangle$ de Baaz para álgebras Gödel n-valentes, véase [6]. Entonces, estamos en condiciones de probar el siguiente teorema.

Teorema 3.2.14. *Sea* $\mathbf{A}$ *un* Hey^σ_n*-álgebra no trivial,* $M \in \mathcal{E}_d(A)$ *y* $\mathcal{F}_M = \{E^M_j\}_{0 \leq j \leq m}$*,* $m \leq n-1$ *la partición asociada a* M*. Entonces, el mapeo* $h : A \longrightarrow \mathbf{C_n}$ *tal que* $h(x) = \dfrac{n-j}{n}$ *si* $x \in E^M_j$ *es un homomorfismo y* $h^{-1}(\{1\}) = M$*.*

Demostración: En [38], se demostró que $h(\sigma_k x) = \sigma_k h(x)$, $h(x \rightarrow y) = h(x) \rightarrow h(y)$ y $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$. Entonces, solo tenemos que probar que $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$. De hecho, de $(\sigma - He7)$ y el hecho de que $(x \wedge y) \rightarrow x = (x \wedge y) \rightarrow y = 1$, se sigue que $x, y \in E^\Gamma_j$ implica que $x \wedge y \in E^\Gamma_j$. Además, si $x \in E^\Gamma_j$ y $y \in E^\Gamma_i$, con $0 < i < j < 1$, entonces es fácil ver que $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$. Esto último se obtiene teniendo en cuenta que $\sigma_k x \notin M$, $\sigma_k y \notin M$ implica $\sigma_k x \wedge \sigma_k y \notin M$. El resto de la prueba se deja al lector. Finalmente, no es difícil ver que $h^{-1}(\{1\}) = M$. $\square$

Del último teorema y conocidos resultados del álgebra universal, tenemos que:

Corolario 3.2.15. *Las* Hey^σ_n*-álgebras simples son* $\mathbb{C}_n$ *y sus subálgebras. Son las únicas álgebras subdirectamente irreducibles, salvo isomorfismos.*

3.3. El Cálculo $\mathcal{H}ey_n^\sigma$

Sea Var un conjunto numerable de variables proposicionales. Los símbolos $\to$, $\vee$, $\wedge$ y $\sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}$ se denominan operadores de implicación, supremo, ínfimo y de posibilidad de Moisil, respectivamente. Denotamos por Fm el conjunto de fórmulas, que se define como de costumbre. Además, denotamos por $\mathfrak{Fm} = \langle Fm, \vee, \wedge, \to, \sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}, \bot, \top \rangle$ el álgebra absolutamente libre generada por el conjunto Var.

Definición 3.3.1. *Denotamos por $\mathcal{H}ey_n^\sigma$ al cálculo determinado por los axiomas lógicos de Gödel, y los siguientes axiomas y reglas de inferencia, donde $\alpha, \beta, \gamma \in FM$:*

Axiomas esquema

(σ-G1) $((\sigma_0\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$,

(σ-G2) $\sigma_i(\alpha \to \beta) \to (\sigma_i\alpha \to \sigma_j\beta)$, *para cada* i, j, *tal que* $0 \leq i \leq j \leq n-1$,

(σ-G3) $(\sigma_i\alpha \to \sigma_i\beta) \to ((\sigma_{i+1}\alpha \to \sigma_{i+1}\beta) \to \cdots ((\sigma_{n-1}\alpha \to \sigma_{n-1}\beta) \to \sigma_i(\alpha \to \beta)) \cdots)$ *para cada* i, *tal que* $0 \leq i \leq n-1$,

(σ-G4) $(\sigma_i(\alpha \to \sigma_j\beta)) \leftrightarrow (\alpha \to \sigma_j\beta)$ *para cada* i, j, *tal que* $0 \leq i \leq j \leq n-1$,

(σ-G5) $\sigma_{n-1}\alpha \leftrightarrow ((\alpha \to \sigma_i\alpha) \to \sigma_j\alpha)$, *para cada* i, j, *tal que* $0 \leq i \leq j \leq n-1$,

(σ-G6) $\sigma_i(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\sigma_i\alpha \vee \sigma_i\beta)$, *para cada* i, *tal que* $0\ leqi \leq n-1$,

(σ-G7) $\sigma_i(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\sigma_i\alpha \wedge \sigma_i\beta)$, *para cada* i, *tal que* $0\ leqi \leq n-1$,

(σ-G8) $\sigma_0\alpha \to \sigma_i\alpha$, *para cada* i, *tal que* $1 \leq i \leq n-1$.

Por $\alpha \leftrightarrow \beta$, denotamos que $\alpha \to \beta$ y $\beta \to \alpha$ son axiomas.

Reglas de inferencia

(MP) $\dfrac{\alpha,\ \alpha \to \beta}{\beta}$ (NEC) $\dfrac{\alpha}{\sigma_0\alpha}$.

Consideraremos la noción habitual de derivación de una fórmula α en $\mathcal{H}ey_n^\sigma$. Decimos que α es derivable a partir de Γ en $\mathcal{H}ey_n^\sigma$, denotado por $\Gamma \vdash \alpha$, si existe una derivación de α a partir de Γ en $\mathcal{H}ey_n^\sigma$. Si $\Gamma = \emptyset$, entonces lo denotamos por $\vdash \alpha$. En este caso, decimos que α es un teorema de $\mathcal{H}ey_n^\sigma$. Los siguientes resultados se pueden probar de la forma estándar.

Proposición 3.3.2.

(P1) $\vdash \alpha \to \alpha$,

(P2) $\{(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\} \vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$,

(P3) $\vdash \sigma_0\alpha \to \alpha$,

(RP1) $\dfrac{\vdash \sigma_0\alpha}{\vdash \sigma_i\alpha}$ *para cada* $1 \leq i \leq j \leq n-1$,

(RP2) $\dfrac{\vdash \beta}{\vdash \alpha \to \beta}$,

(RP3) $\dfrac{\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)}{\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)}$,

(RP4) $\dfrac{\vdash \alpha \to \beta, \vdash \beta \to \gamma}{\vdash \alpha \to \gamma}$,

(RP5) $\dfrac{\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)}{\vdash \beta \to (\alpha \to \gamma)}$,

(RP6) $\dfrac{\vdash \alpha \to \beta}{\vdash (\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta)}$,

(RP7) $\dfrac{\vdash \alpha \to \beta}{\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)}$,

(NM2) $\dfrac{\vdash \sigma_k(\alpha \to \beta)}{\vdash \sigma_k\alpha \to \sigma_k\beta}$,

(NM8) $\dfrac{\vdash \sigma_j(\sigma_i\alpha)}{\vdash \sigma_i\alpha}$,

(NM9) $\vdash \sigma_i\alpha \to \sigma_j\sigma_i\alpha$, (NM10) $\dfrac{\vdash \sigma_j(\sigma_i\alpha) \to \beta}{\vdash \sigma_i\alpha \to \beta}$,

Demostración: Rutina. $\square$

Lema 3.3.3. *$\equiv$ es una congruencia en $\mathfrak{Fm}$, donde $\equiv$ está definido por $\alpha \equiv \beta$ si, y solo si, $\vdash \alpha \to \beta$ y $\vdash \beta \to \alpha$.*

Demostración: Solo tenemos que ver que si $\alpha \equiv \beta$, entonces $\sigma_i\alpha \equiv \sigma_i\beta$ para cada $0 \leq i \leq i-1$. Pero esto es inmediatamente de (NEC), (σ-G2), (RP1) y (MP). $\square$

Por el último Lema, es posible considerar el álgebra $\mathfrak{Fm}/\equiv$, que se conoce como álgebra de Lindenbaum-Tarski; además, no es difícil ver que:

Proposición 3.3.4. *El álgebra $\mathfrak{Fm}/\equiv$ es un Hey_n^σ-álgebra donde $\overline{\alpha \to \alpha}$ es el mayor elemento, y denotamos por $\overline{\alpha}$ la clase de α por $\equiv$.*

Ahora, expondremos las nociones necesarias para probar el teorema de completitud. Para ello, comencemos recordando que una lógica definida sobre un lenguaje $\mathcal{S}$ es un sistema $\mathcal{L} = \langle For, \vdash \rangle$, donde For es el conjunto de fórmulas sobre $\mathcal{S}$ y la relación $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{P}(For) \times For$, donde $\mathcal{P}(A)$ es la conjunto de todos los subconjuntos de A. Se dice que la lógica $\mathcal{L}$ es una lógica tarskiana si satisface las siguientes propiedades, para cada conjunto $\Gamma \cup \Omega \cup \{\alpha, \beta\}$ de fórmulas:

(1) si $\alpha \in \Gamma$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$,

(2) si $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ y $\Gamma \subseteq \Omega$, entonces $\Omega \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$

(3) si $\Omega \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \beta$ por cada $\beta \in \Omega$, luego $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$.

Se dice que una lógica $\mathcal{L}$ es finita si satisface lo siguiente:

(4) si $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$, entonces existe un subconjunto finito Γ_0 de Γ tal que $\Gamma_0 \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$.

La siguiente condición agrega la *estructuralidad* a una lógica tarskiana:

(5) si $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$, entonces $\sigma[\Gamma] \vdash_{\mathcal{L}} \sigma(\alpha)$ para cada $\mathcal{L}$-sustitución σ;

de esta manera obtenemos lo que se conoce como *sistema deductivo*.

Definición 3.3.5. *Sea $\mathcal{L}$ una lógica tarskiana y sea Γ un conjunto de fórmulas. Decimos que todo conjunto de fórmulas es una teoría. Además, se dice que Γ es una teoría consistente si existe una fórmula φ tal que $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \varphi$. Además, decimos que Γ es una teoría maximal consistente si $\Gamma, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ para cualquier fórmula $\psi \notin \Gamma$; y, en este caso, decimos que Γ es maximal con respecto a φ.*

Un conjunto de fórmulas Γ es cerrado en $\mathcal{L}$ si la siguiente propiedad se cumple para cada fórmula φ: $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ si, y solo si, $\varphi \in \Gamma$. Es fácil ver que cualquier teoría maximal consistente es cerrada.

Lema 3.3.6 (Lindenbaum-Łoś)**.** *Sea $\mathcal{L}$ una lógica tarskiana y finitaria. Sea $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas tales que $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \varphi$. Entonces, existe un conjunto de fórmulas Ω, tal que $\Gamma \subseteq \Omega$, con Ω teoría maximal consistente con respecto a la fórmula φ en $\mathcal{L}$.*

Demostración. La prueba se puede encontrar [74, Teorema 2.22]. □

Volviendo a nuestra lógica, podemos afirmar que $\mathcal{H}ey_n^\sigma$ es una lógica tarskiana y finitaria. Ahora, estamos en condiciones de ver lo siguiente:

Proposición 3.3.7. [38] *Sea $\Gamma \cup \{\alpha\}$ un conjunto de fórmulas donde Γ es una teoría maximal con respecto a α, entonces :*

(NM11) *Si $\sigma_i\alpha \in \Gamma$, entonces $\sigma_{i+1}\alpha, \cdots, \sigma_{n-1}\alpha \in \Gamma$ con $1 \leq i < n-1$,*

(NM12) *Si $\sigma_{n-1}\alpha \notin \Gamma$, entonces $\sigma_i\alpha \notin \Gamma$ con $1 \leq i \leq n-1$.*

(NM13) *$\alpha \wedge \beta \in \Gamma$ si, y solo si, $\alpha \in \Gamma$ y $\beta \in \Gamma$.*

Demostración. La demostración de (NM11) y (NM12) está en [38, Proposition 4.5]. La prueba de (NM13) se sigue inmediatamente de que la fórmula $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$ es un teorema en la lógica Gödel tomándolo como una extensión de la lógica BL . □

Consideraremos una *relación de consecuencia* $\vDash$ de la siguiente manera: para una función dada $v : \mathfrak{Fm} \to \mathbf{A}$, decimos que v es una valoración de $\mathcal{H}ey_n^\sigma$ si satisface $v(\alpha\#\beta) = v(\alpha)\#v(\beta)$ con $\# \in \{\to, \vee\}$, $v(\sigma_i\alpha) = \sigma_i v(\alpha)$ por cada $0 \leq i \leq n-1$. Además, decimos que α es una fórmula semánticamente válida si, para toda valoración v y para toda Hey_n^σ-álgebra $\mathbf{A}$, $v(\alpha) = 1$ y lo denotamos por $\vDash \alpha$. Además, decimos $\Gamma \vDash \alpha$ si para cada valoración v y cada Hey_n^σ-álgebra $\mathbf{A}$, si $v(\beta) = 1$ para cada $\beta \in \Gamma$, luego $v(\alpha) = 1$.

Ahora, para una teoría maximal Γ con respecto a φ, denotamos por $\Gamma/\equiv$ al conjunto $\{\overline{\alpha} : \alpha \in \Gamma\}$. Está claro que $\Gamma/\equiv$ es un subconjunto del álgebra de Gödel modal n-valente $\mathfrak{Fm}/\equiv$. Entonces:

Teorema 3.3.8. [38] *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}$, con Γ maximal no trivial con respecto a φ en $\mathcal{H}ey_n^\sigma$. Entonces:*

(i) *si $\alpha \in \Gamma$ y $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$, entonces $\beta \in \Gamma$;*

(ii) *$\Gamma/\equiv$ es un sistema deductivo modal ligado a $\overline{\varphi}$, de $\mathfrak{Fm}/\equiv$.*

Es importante notar que, del último Teorema, tenemos que $\Gamma/\equiv$ es un sistema deductivo maximal en el sentido de Definición 3.2.8. Ahora, el siguiente Lema se puede probar usando el Teorema 3.3.8 y el Lema 3.2.11.

Lema 3.3.9. *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}$, con Γ maximal no trivial con respecto a φ en $\mathcal{H}ey_n^\sigma$. Si $\alpha \notin \Gamma$ entonces, $\sigma_0\alpha \to \beta \in \Gamma$ para cualquier $\beta \in \mathfrak{Fm}$.*

El siguiente Teorema es una adaptación del Teorema 3.2.14 al contexto sintáctico donde usamos el álgebra $\mathbf{C_n}$ mencionada.

Teorema 3.3.10. *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}$, con Γ maximal no trivial con respecto a φ en $\mathcal{H}ey_n^\sigma$. Considere el mapeo $v : \mathfrak{Fm} \to \mathbf{C_n}$, definido por $v(\alpha) = \dfrac{n-j}{n}$ si $\alpha \in E_j^\Gamma$ donde $\mathbf{C_n} = \langle \mathbf{C_n}, \to, \vee, \sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}, 1\rangle$ y*

$$E_j^\Gamma = \{\alpha \notin \Gamma : \sigma_k\alpha \notin \Gamma, 0 \leq k \leq j, \sigma_{j+1}\alpha \in \Gamma\}$$

con $0 \leq j < n-1$ y $E_0^\Gamma = \Gamma$ y

$$E_{n-1}^\Gamma = \{\alpha \notin \Gamma : \sigma_{n-1}\alpha \notin \Gamma\}.$$

Entonces, v es homomorfismo en $\mathcal{H}ey_n^\sigma$.

Demostración: Tenemos que demostrar que v es un homomorfismo. En el trabajo [38], se demostró que $v(\alpha \to \beta) = v(\alpha) \to v(\beta)$, $v(\sigma_j \alpha) = \sigma_j v(\alpha)$ y $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) \vee v(\beta)$. Entonces, solo mostramos que $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \wedge v(\beta)$. Supongamos que $v(\alpha \wedge \beta) = \dfrac{n-j}{n}$. Entonces, $\alpha \wedge \beta \in E_j^{\Gamma}$ y $\sigma_s(\alpha \wedge \beta) \notin \Gamma$ (con $0 \leq s \leq j$), $\sigma_{j+1}(\alpha \wedge \beta) \in \Gamma$. Entonces, tenemos que probar que $\sigma_s(\alpha), \sigma_s(\beta) \notin \Gamma$ (con $0 \leq s \leq j$) y $\sigma_{j+1}(\alpha), \sigma_{j+1}(\beta) \in \Gamma$. De hecho, si $\sigma_s(\alpha), \sigma_s(\beta) \in \Gamma$, entonces de $(\sigma - G7)$ obtenemos que $\sigma_s(\alpha \wedge \beta) \in \Gamma$ (con $0 \leq s \leq j$), lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\sigma_s(\alpha \wedge \beta) \notin \Gamma$ con $0 \leq s \leq j$. Teniendo en cuenta (NM13), es fácil ver que $\sigma_{j+1}(\alpha), \sigma_{j+1}(\beta) \in \Gamma$ implica $\sigma_{j+1}(\alpha) \wedge \sigma_{j+1}(\beta) \in \Gamma$ y luego $\sigma_{j+1}(\alpha \wedge \beta) \in \Gamma$ como se desea.

$\square$

Teorema 3.3.11. *Sea* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}$, $\Gamma \vdash \varphi$ *si, y solo si,* $\Gamma \vDash \varphi$.

Demostración: No es difícil ver que todos los axiomas de $\mathcal{H}ey_n^{\sigma}$ son válidos; además, las reglas de inferencia preservan la validez.

Por el contrario, si $\Gamma \nvdash \varphi$, entonces por el teorema 3.3.6, existe Ω un maximal no trivial con respecto a φ tal que $\Gamma \subseteq \Omega$. Por el Teorema 3.3.10, existe una valoración $v : \mathfrak{Fm} \to \mathbf{C_n}$ tal que $v(\psi) = 1$ si, y solo si, $\psi \in \Omega$. Por hipótesis, sabemos que $\varphi \notin \Omega$. Entonces, $v(\varphi) \neq 1$, luego $\Omega \nvDash \varphi$. Desde $\Gamma \subseteq \Omega$, entonces $\Gamma \nvDash \varphi$, lo cual es una contradicción. $\square$

3.4. La lógica de primer orden de $\mathcal{H}ey_n^{\sigma}$: la lógica $\mathcal{QH}ey_n^{\sigma}$

En esta sección, se presentará la lógica de primer orden de $\mathcal{H}ey_n^{\sigma}$. Para ello, comencemos asumiendo Θ la asignatura proposicional de $\mathcal{H}ey_n^{\sigma}$, así como dos símbolos cuantificados $\forall$ y $\exists$, junto con signos de puntuación, comas y paréntesis. Además, consideremos Var como un conjunto numerable de variables individuales. Denotamos por $\mathfrak{Fm}_{\Sigma}$ el conjunto de las fórmulas y denotamos por Ter el álgebra absolutamente libre de los términos. A continuación, consideraremos una Hey_n^{σ}-álgebra $\mathbf{A}$ completa como un retículo en el que todos los subconjuntos tienen tanto un supremo como un ínfimo.

Como de costumbre, una asignatura de primer orden Σ es una terna $\langle \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$, donde $\mathcal{P}$ denota un conjunto no vacío de símbolos predicados, $\mathcal{F}$ es un conjunto de símbolos de función y $\mathcal{C}$ denota un conjunto de constantes individuales. Las nociones de variables ligadas y libres, términos cerrados, oraciones y sustituibilidad también se definen de la manera estándar.

Una Σ-estructura $\mathfrak{A}$ es un par $\langle \mathbf{A}, \mathbf{S} \rangle$ donde $\mathbf{A}$ es un Hey_n^σ-álgebra completa, $\mathbf{S} = \langle S, \{P_\mathbf{S}\}_{P\in\mathcal{P}}, \{f_\mathbf{S}\}_{f\in\mathcal{F}}, \mathcal{C}, \cdot^{\mathfrak{A}} \rangle$, S es un dominio no vacío y $\cdot^{\mathfrak{A}}$ es un mapeo interpretación que asigna:

- a cada constante individual $c \in \mathcal{C}$, un elemento $c^{\mathfrak{A}}$ de S;
- a cada símbolo funcional f, una función $f^{\mathfrak{A}} : S^n \to S$;
- a cada símbolo de predicado P de aridad n, una función $P^{\mathfrak{A}} : S^n \to A$.

Por $\varphi(x/t)$, denotamos la fórmula que resulta de φ reemplazando simultáneamente todas las ocurrencias libres de la variable x por t.

Sea Σ una asignatura de primer orden. La lógica $\mathcal{QH}ey_n^\sigma$ sobre Σ se obtiene extendiendo $\mathcal{H}ey_n^\sigma$ al nuevo lenguaje y agregando los siguientes axiomas y reglas:

Axiomas esquema

(Q1) $\varphi(x/t) \to \exists x\varphi$, si t es un término libre para x en φ,

(Q2) $\forall x\varphi \to \varphi(x/t)$, si t es un término libre para x en φ,

(Q3) $\sigma_i\exists x\varphi \leftrightarrow \exists x\sigma_i\varphi$, con $1 \leq i \leq n-1$,

(Q4) $\sigma_i\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\sigma_i\varphi$, con $1 \leq i \leq n-1$.

Reglas de inferencia

(QR1) $\dfrac{\alpha \to \beta}{\exists x\alpha \to \beta}$, y x no ocurre libre en β,

(QR2) $\dfrac{\alpha \to \beta}{\alpha \to \forall x\beta}$, y x no ocurre libre en α,

Denotamos por $\vdash \alpha$ la derivación de una fórmula α en $\mathcal{QH}ey_n^\sigma$, y con $\Gamma \vdash \alpha$ la derivación de α del conjunto de premisas Γ. Estas nociones se definen como de costumbre. Denotamos $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ como una abreviatura de $\vdash \varphi \to \psi$ y $\vdash \psi \to \varphi$.

Una $\mathfrak{A}$-valoración es un mapeo $v : Var \to S$. Por $v[x \to a]$ denotamos la siguiente $\mathfrak{A}$-valoración: $v[x \to a](x) = a$ y $v[x \to a](y) = v(y)$ para cualquier $y \in V$ tal que $y \neq x$.

Es importante notar que el axioma (Q3) y (Q4) provienen de la definición de MV$_n$-álgebras monádicas, ver [34, Section 7]. Ésto también se encuentra presente en la versión monádica de estructuras algebraicas con operadores de posibilidad o simplemente operadores unarios donde estos operadores conmutan con los cuantificadores como podemos ver en los artículos [2, 41, 49].

Volviendo a nuestra lógica, sea $\mathfrak{S} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{S} \rangle$ una Σ-estructura y v una $\mathfrak{S}$-valoración. Definimos los valores de los términos y los valores de verdad de las fórmulas en $\mathfrak{S}$ para una valoración v como sigue:

$$||c||_v^{\mathfrak{S}} = c^{\mathfrak{S}} \text{ si } c \in S,$$

$$||x||_v^{\mathfrak{S}} = v(x) \text{ si } x \in Var,$$

$$||f(t_1, \cdots, t_n)||_v^{\mathfrak{S}} = f^{\mathfrak{S}}(||t_1||_v^{\mathfrak{S}}, \cdots, ||t_n||_v^{\mathfrak{S}}), \text{ para cualquier } f \in \mathcal{F},$$

$$||P(t_1, \cdots, t_n)||_v^{\mathfrak{S}} = P^{\mathfrak{S}}(||t_1||_v^{\mathfrak{S}}, \cdots, ||t_n||_v^{\mathfrak{S}}), \text{ para cualquier } P \in \mathcal{P},$$

$$||\alpha \to \beta||_v^{\mathfrak{S}} = ||\alpha||_v^{\mathfrak{S}} \to ||\beta||_v^{\mathfrak{S}},$$

$$||\alpha \wedge \beta||_v^{\mathfrak{S}} = ||\alpha||_v^{\mathfrak{S}} \wedge ||\beta||_v^{\mathfrak{S}},$$

$$||\alpha \vee \beta||_v^{\mathfrak{S}} = ||\alpha||_v^{\mathfrak{S}} \vee ||\beta||_v^{\mathfrak{S}},$$

$$||\neg\alpha||_v^{\mathfrak{S}} = \neg||\alpha||_v^{\mathfrak{S}},$$

$$||\sigma_i\alpha||_v^{\mathfrak{S}} = \sigma_i||\alpha||_v^{\mathfrak{S}},$$

$$||\forall x\alpha||_v^{\mathfrak{S}} = \bigwedge_{a \in S} ||\alpha||_{v[x \to a]}^{\mathfrak{S}},$$

$$||\exists x\alpha||_v^{\mathfrak{S}} = \bigvee_{a \in S} ||\alpha||_{v[x \to a]}^{\mathfrak{S}}.$$

Ahora, es fácil ver que la propiedad $||\varphi(x/t)||_v^{\mathfrak{A}} = ||\varphi||_{v[x \to ||t||_v^{\mathfrak{A}}]}^{\mathfrak{A}}$ se mantiene.

Decimos que $\mathfrak{A}$ y v **satisfacen** una fórmula φ, denotada por $\mathfrak{A} \vDash \varphi[v]$, si $||\varphi||_v^{\mathfrak{A}} = 1$. Además, decimos que φ es **verdadero** $\mathfrak{S}$ si $||\varphi||_v^{\mathfrak{A}} = 1$ para cada $\mathfrak{A}$-valoración v y lo denotamos por $\mathfrak{A} \vDash \varphi$. Tenemos que φ es una **consecuencia semántica** de Γ en $\mathcal{QH}_n^{\sigma}$, si, para cualquier estructura $\mathfrak{A}$: si $\mathfrak{A} \vDash \gamma$ por cada $\gamma \in \Gamma$, luego $\mathfrak{A} \vDash \varphi$. En este caso, lo denotamos por $\Gamma \vDash \varphi$.

El siguiente resultado técnico es esencial para probar el Teorema de Completitud.

Lema 3.4.1. [38] *Sea* $\mathbf{A}$ *un* Hey_n^σ*-álgebra completa y* $\{a_i\}_{i\in I}$ *el conjunto de elementos de* A*, con* I *un conjunto no vacío. Entonces, si existe* $\bigvee_{i\in I} a_i$ $\left(\bigwedge_{i\in I} a_i\right)$*, entonces existe* $\bigvee_{i\in I} \sigma_j a_i$ $\left(\bigwedge_{i\in I} \sigma_j a_i\right)$*, y también* $\bigvee_{i\in I} \sigma_j a_i = \sigma_j \bigvee_{i\in I} a_i$ *y* $\bigwedge_{i\in I} \sigma_j a_i = \sigma_j \bigwedge_{i\in I} a_i$ *se mantienen, por cada* $0 \leq j \leq n-1$.

Teorema 3.4.2. *Sea* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}_\Sigma$*, si* $\Gamma \vdash \varphi$ *entonces* $\Gamma \vDash \varphi$

Demostración: Consideremos la estructura fija $\mathfrak{M} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{S}\rangle$. Sea φ una fórmula tal que $\Gamma \vdash \varphi$. Entonces, existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ una derivación de φ de Γ. Si $n = 1$ entonces φ es un axioma o $\varphi \in \Gamma$. Si $\varphi \in \Gamma$, entonces es fácil ver que $\Gamma \vDash \varphi$. Si φ es un axioma tenemos la veracidad de (σ-G1) a (σ-G8). Ahora, supongamos que φ es $\alpha(x/t) \to \exists x\alpha$. Entonces, $||\varphi||_v^{\mathfrak{M}} = ||\alpha||^{\mathfrak{M}}_{v[x\to ||t||_v^{\mathfrak{M}}]} \to ||\exists x\alpha||_v^{\mathfrak{M}}$. Está claro que $||\alpha||^{\mathfrak{M}}_{v[x\to ||t||_v^{\mathfrak{M}}]} \leq \bigvee_{a\in S} ||\alpha||^{\mathfrak{M}}_{v[x\to a]}$, luego $||\alpha||^{\mathfrak{M}}_{v[x\to ||t||_v^{\mathfrak{M}}]} \leq ||\exists x\alpha||_v^{\mathfrak{M}}$. Por lo tanto $||\alpha(x/t) \to \exists x\alpha||_v^{\mathfrak{M}} = 1$. Entonces, tenemos que el axioma (Q1) es válido en $\mathfrak{M} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{S}\rangle$. De manera análoga, tenemos que el axioma (Q2) también es válido. Para probar la validez de (Q3) y (Q4), necesitamos usar el Lema 3.4.1. Además, no es difícil ver que las reglas de inferencia preservan la satisfacción. $\square$

En lo que sigue, probaremos una versión fuerte del Teorema de completitud para $\mathcal{QH}ey_n^\sigma$ usando el álgebra de Lindenbaum-Tarski de manera similar al caso proposicional. Primero, consideremos la noción de teorías consistentes y cerradas (maximales) con respecto a alguna fórmula de la misma manera que el caso proposicional. Por lo tanto, tenemos que el teorema de Lindenbaum-Łoś se cumple para $\mathcal{QH}ey_n^\sigma$, consulte la Sección 3.3. La relación $\equiv$ definida por $\alpha \equiv \beta$ si y si $\vdash \beta \to \alpha$ y $\vdash \alpha \to \beta$. Así, tenemos el álgebra $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\equiv$ es un Hey_n^σ-álgebra y la prueba es exactamente la misma que en el caso proposicional. Por otro lado, es claro que $\mathcal{QH}ey_n^\sigma$ es una lógica Tarskiana y finitaria, ver Sección 3.3. Entonces, tenemos lo siguiente:

Lema 3.4.3. [38] *Sea* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}_\Sigma$*, con* Γ *maximal no trivial con respecto a* φ *en* $\mathcal{QH}ey_n^\sigma$*. Sea* $\Gamma/\equiv = \{\overline{\alpha} : \alpha \in \Gamma\}$ *un subconjunto de* $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\equiv$*, entonces:*

(i) *Si* $\alpha \in \Gamma$ *y* $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$, *entonces* $\beta \in \Gamma$. *Además se comprueba que* $\Gamma/\equiv = \{\overline{\alpha} : \Gamma \vdash \alpha\}$ *en este caso decimos que es cerrado.*

(ii) $\Gamma/\equiv$ *es un sistema deductivo modal de* $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\equiv$. *Además, si* $\overline{\varphi} \notin \Gamma/\equiv$ *y para cualquier sistema deductivo modal* $\overline{D}$, *cerrado en el sentido de (i), y conteniendo propiamente a* $\Gamma/\equiv$, *luego* $\overline{\varphi} \in \overline{D}$.

El Lema anterior es fundamental en la demostración del Teorema de Completitud ya que nos permite demostrar el siguiente resultado técnico:

Proposición 3.4.4. *Sea* $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\Gamma$ *el* Hey_n^σ*-álgebra definida como:* $\alpha \equiv_\Gamma \beta$ *si, y solo si,* $\alpha \to \beta, \beta \to \alpha \in \Gamma$. *Entonces,* $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\Gamma$ *es una cadena finita que es* Hey_n^σ*-álgebra simple.*

Demostración: Para una teoría maximal consistente Γ de $\mathfrak{Fm}_\Sigma$, tenemos $\Gamma/\equiv$ es un sistema deductivo modal maximal de $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\equiv$, esto es gracias al Lema 3.4.3. Denotemos $A := \mathfrak{Fm}_\Sigma/\equiv$ y $\theta := \Gamma/\equiv$ por los resultados conocidos del álgebra universal, tenemos el álgebra de cociente A/θ es un álgebra simple, ver Teorema 3.2.14.

De esto último y adaptando el primer teorema de isomorfismo, tenemos que A/θ es isomorfa a $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\Gamma$ donde está definida por la congruencia $\alpha \equiv_\Gamma \beta$ si, y solo si, $\alpha \to \beta, \beta \to \alpha \in \Gamma$ como se desea. $\square$

Ahora, estamos en condiciones de probar el siguiente Teorema central:

Teorema 3.4.5. *Sea* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *un conjunto de sentencias, si* $\Gamma \vDash \varphi$ *entonces* $\Gamma \vdash \varphi$.

Demostración: Supongamos $\Gamma \vDash \varphi$ y $\Gamma \nvdash \varphi$. Entonces, por el Lema de Lindenbaum-Łoś, existe Δ teoría maximal consistente con respecto a φ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$. Ahora, consideremos el álgebra $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\Delta$ definida por la congruencia $\alpha \equiv_\Delta \beta$ si, y solo si, $\alpha \to \beta, \beta \to \alpha \in \Delta$. Sabemos que $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\Delta$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{C_n}$ (por la Proposición 3.4.4) y es completa como retículo, en vista de las observaciones anteriores.

Consideremos la función $\pi_\Delta : \mathfrak{Fm} \to \mathfrak{Fm}_\Sigma/\Delta$ (la proyección canónica) y la estructura $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{Fm}_\Sigma/\Delta, Ter, \cdot^{Ter}\rangle$ donde Ter es un conjunto de términos definidos al comienzo de la sección. Entonces, es claro que por cada $t \in Ter$ tenemos una constante $\hat{t}$ de Σ. Ahora, podemos considerar una función $\mu : Var \to Ter$ definida por $\mu(x) = x$ y la interpretación $||\cdot||_\mu^\mathfrak{M} : \mathfrak{Fm} \to \mathfrak{Fm}_\Sigma/\Delta$ definido por:

- si $\hat{t}$ es una constante, entonces $||\hat{t}||_{\mu}^{\mathfrak{M}} := t$;
- si $f \in \mathcal{F}$, entonces $||f(t_1, \cdots, t_n)||_{\mu}^{\mathfrak{M}} = f(t_1, \cdots, t_n)$;
- si $P \in \mathcal{P}$, entonces $||P(t_1, \cdots, t_n)||_{\mu}^{\mathfrak{M}} = \pi_{\Delta}(P(t_1, \cdots, t_n)$.

Nuestra interpretación está definida para fórmulas atómicas, pero es fácil ver que $||\alpha||_{\mu}^{\mathfrak{M}} = \pi_{\Delta}(\alpha)$ para cada fórmula sin cuantificador α. Además, es fácil ver que para cada fórmula $\phi(x)$ y cada término t, tenemos $||\phi(x/\hat{t})||_{\mu}^{\mathfrak{M}} = ||\phi(x/t)||_{\mu}^{\mathfrak{M}}$. Por lo tanto, de esta última propiedad y por (Q1) y (RQ1), tenemos $||\forall x\alpha||_{\mu}^{\mathfrak{M}} = \bigwedge\limits_{a\in T_{\Theta}} ||\alpha||_{\mu[x\to a]}^{\mathfrak{M}}$ y ahora usando (Q2) y (RQ2), obtenemos $||\exists x\alpha||_{\mu}^{\mathfrak{M}} = \bigvee\limits_{a\in T_{\Theta}} ||\alpha||_{\mu[x\to a]}^{\mathfrak{M}}$. Entonces, $||\cdot||_{\mu}^{\mathfrak{M}}$ es un mapeo interpretación tal que $||\alpha||_{\mu}^{\mathfrak{M}} = 1$ si, y solo si, $\alpha \in \Delta$. Por otro lado, no es difícil ver que para cada fórmula $\beta \in \Gamma \cup \{\alpha\}$, tenemos $||\beta||_{\mu}^{\mathfrak{M}} = ||\beta||_{v}^{\mathfrak{M}}$ por cada $\mathfrak{M}$-valoración v. Por lo tanto, $\mathfrak{M} \vDash \gamma$ por cada $\gamma \in \Gamma$ pero $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$. $\square$

Dada una fórmula φ y supongamos que $\{x_1, \cdots, x_n\}$ es el conjunto de variables de φ, la *clausura universal* de φ está definida por $\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$. Así, es claro que si φ es una sentencia, entonces la clausura universal de φ es ella misma. Ahora, estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema de completitud para fórmulas:

Teorema 3.4.6. *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de formulas, si $\Gamma \vDash \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$.*

Demostración: Supongamos $\Gamma \vDash \varphi$ y consideremos el conjunto $\forall\Gamma$ la clausura universal de Γ. De este último y la definición de $\vDash$, tenemos $\forall\Gamma \vDash \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$. Entonces, según el Teorema 3.4.5, $\forall\Gamma \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$. Ahora, de este último y (Q1) y (RQ1), tenemos $\Gamma \vdash \varphi$ concluyendo la prueba. $\square$

3.5. Observaciones finales

En este capítulo, hemos estudiado lógicas asociadas a la clase de lógica σ-Gödel n-valuadas. Estas lógicas han sido presentadas en las versiones proposicional y de primer orden. La axiomática para la lógica de Gödel se muestra al extenderse a la Basic Fuzzy Logic (BL) con un axioma especial. Además, el teorema de correctitud para las versiones cuantificadas no se basa en agregar el axioma de *dominios constantes*, en general, la demostración es diferente a la dada para la lógica Δ-fuzzy. Como trabajo futuro, resulta interesante estudiar la lógica BL expandida por los operadores σ_i presentados aquí. Recordemos que la lógica BL tiene como extensión axiomática la lógica Łukasiewicz, y en caso de n-valente, esta lógica tiene poder expresivo suficiente para definir el operador σ_i en términos del conectivo del lenguaje, véase, por ejemplo, [34, Sección 7]. En esta tesis, la axiomatización para los operadores σ_i es diferente a la dada por Baaz para el operador Δ. Por lo tanto, exploraremos si nuestra axiomatización para la lógica de Gödel es lo suficientemente buena para la lógica de valores finitos de BL.

4. Capítulo IV: Lógicas paraconsistentes no algebraizables

En esta sección mostraremos el comportamiento algebraico de lógicas no algebraizables del área de la paraconsistencia Brasilera. En particular adaptaremos las técnicas presentadas en los Capítulos 1 y 2 para lógicas de primer orden para el contexto de multialgebras que en este caso son las Nmatrices de Avron. Nuestra presentación simplifica a la dada en [14] por Coniglio, Figallo-Orellano y Golzio, puesto que nosotros no necesitamos de la completación Dedekind–MacNeille para álgebras de Boole y el *modelos canónico* es construido sobre fórmulas en lugar del clásico sobre sentencias. Finalmete, presentamos nuestra propuesta de primer orden que difiere de la dada en [14], puesto que según nuestra comprensión las propuesta en general del libro de Carnielli y Coniglio ([11]) desvirtuan la esencia de la no algebrizabilidad de la logicas tratadas.

4.1. Introducción

Los C-sistemas C_n y C_ω se encuentran entre las contribuciones más conocidas de da Costa, sus alumnos y colaboradores. En 1963, estos sistemas fueron introducidos en la tesis de *livre–docência* de da Costa; en particular, para C_ω da Costa procedió axiomáticamente conservando la parte positiva de la lógica intuicionista, cambiando los axiomas por negación, [26, 27]. La motivación para inventar estos sistemas es tener la siguiente propiedad: para cada fórmula α y su negación, $\neg\alpha$, no debe ser posible en general deducir una fórmula arbitraria β; es decir, son capaces de soportar teorías inconsistentes sin caer en la trivialidad, estos sistemas son típicamente llamados sistemas *paraconsistentes*.

Entre las lógicas paraconsistentes de la literatura, las Lógicas de Inconsistencia Formal (LFIs), ver por ejemplo [12], juegan un papel importante ya que internalizan, en el lenguaje objeto, la noción misma de consistencia por medio de un conectivo específico, ya sea primitivo o no. Esto generaliza la estrategia de da Costa para C_n, $(n < \omega)$, [26]. Dicho brevemente, las LFI tienen una negación no explosiva $\neg$, así como un conectivo de consistencia primitivo o derivado $\circ$ que permite recuperar la ley de explosión de forma controlada.

Sea Σ' una asignatura proposicional y $\mathcal{V}$ un conjunto numerable de variables proposicionales. El lenguaje proposicional generado por Σ' a partir de $\mathcal{V}$ será denotado por $\mathcal{L}_{\Sigma'}$. Por otro lado, sea $\mathbf{L} = \langle \Sigma', \vdash \rangle$ una lógica tarskiana finitaria (ver Sección 1.2) definida sobre una firma proposicional Σ', que contiene una negación $\neg$, y sea $\circ$ un conectivo unario primitivo o definido. Se dice que $\mathbf{L}$ es una *lógica de inconsistencia formal* con respecto a $\neg$ y $\circ$ si se cumple lo siguiente:

(i) $\varphi, \neg\varphi \nvdash \psi$ para algunos φ y ψ;

(ii) hay dos fórmulas α y β tales que

 (ii.a) $\circ\alpha, \alpha \nvdash \beta$;

 (ii.b) $\circ\alpha, \neg\alpha \nvdash \beta$;

(iii) $\circ\varphi, \varphi, \neg\varphi \vdash \psi$ para todo φ y ψ.

Definición 4.1.1. *Sea $\Sigma = \{\wedge, \vee, \to, \neg, \circ\}$ una asignatura proposicional para **mbC**. El cálculo **mbC** sobre el lenguaje proposicional $\mathcal{L}_\Sigma$ se define mediante el siguiente Cálculo Hilbert:*

Axiomas Esquemas:

(**A1**) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

(**A2**) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

(**A3**) $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$

(**A4**) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$

(**A5**) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$

(**A6**) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$

(**A7**) $\beta \to (\alpha \vee \beta)$

(**A8**) $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$

(**A9**) $\alpha \vee (\alpha \to \beta)$

(**A10**) $\alpha \vee \neg\alpha$

(**A11**) $\circ\alpha \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta))$

Reglas de inferencia:

$$(\mathbf{MP}) \quad \frac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}$$

Definición 4.1.2. (Vea [13, Section 8])

(i) *La lógica **mbCciw** se obtiene de **mbC** añadiendo el axioma esquema:* (ciw) $\circ\alpha \vee (\alpha \wedge \neg\alpha)$.

(ii) *La lógica **mbCci** se obtiene de **mbC** sumando el axioma esquema:* (ci) $\neg \circ \alpha \vee (\alpha \wedge \neg\alpha)$.

(iii) *La lógica **Ci** se obtiene de **mbCci** añadiendo el axioma esquema:* (cf) $\neg\neg\alpha \to \alpha$.

Es posible probar que **mbC**, **mbCciw**, **mbCci** y **Ci** son lógicas no algebraizables. Para ver esto, consideraremos la matriz dada por Lewin (y otros) [57]. Para empezar, considere la matriz $\mathcal{A} = \langle A, D\rangle$ donde A es el álgebra

$$\langle \{0, a, b, 1, u\}, \vee, \wedge, \to, \circ, \sim, 0, u\}$$

y el conjunto $D = \{1, u\}$ de elementos distinguidos. Ahora, el orden de los elementos de A se da de la siguiente manera: u es el último elemento, y el conjunto $B = \{0, a, b, 1\}$

puede considerarse como un álgebra booleana con a y b como sus átomos. La operación $\sim$ se define como una negación booleana para $\{0, a, b, 1\}$ y $\sim u = 1$. Ahora, la implicación queda definida por la forma $x \to y = \sim x \vee y$ para $\{0, a, b, 1\}$, y para el resto de elementos, $u \to x = x$ y $x \to u = u$. Ahora, tomando $\circ(x) = \sim (x \wedge \sim x)$, no es difícil ver que esta álgebra es simple. Por otro lado, es fácil comprobar que los axiomas de **mbC**, (ciw), (Ci) y (cf) son válidos con la matriz $\mathcal{A} = \langle A, D \rangle$. Ahora, considere los filtros $F_1 = \{a, 1, u\}$ y $F_2 = \{b, 1, u\}$. Es solo para comprobar que F_1 y F_2 tienen las mismas congruencias compatibles máximas $A \times A$, entonces el operador de Leibniz no es 1-1. Del último y Teorema 5.1 de [9], tenemos que estas lógicas no son algebraizables. Así, tenemos la demostración del siguiente Lema:

Lema 4.1.3. *Las lógicas **mbC**, **mbCciw**, **mbCci** y **Ci** no son algebraizables con el método de Blok-Pigozzi.*

4.2. Estructuras Swap

Las estructuras Swap se presentaron en [11] como generalización de Nmatrices de Avron, ver [4] y [5]. Estas estructuras son de hecho multiálgebras. Recordemos que una *multiálgebra* sobre una asignatura dada Σ es un par $\mathcal{A} = \langle A, \sigma_{\mathcal{A}} \rangle$ tal que A es un conjunto no vacío y $\sigma_{\mathcal{A}}$ es un mapeo asignando a cada $c \in \Sigma_n$, una función $c^{\mathcal{A}} : A^n \to (\mathcal{P}(A) - \{\emptyset\})$, donde $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A. En particular, $\emptyset \neq c^{\mathcal{A}} \subseteq A$ si $c \in \Sigma_0$. Por otro lado, una *matriz no determinista (o Nmatrix)* es un par $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ tal que $\mathcal{A} = \langle A, \sigma_{\mathcal{A}} \rangle$ es una multiálgebra sobre Σ con soporte A, y D es un subconjunto de A. Los elementos en D se llaman elementos *distinguidos*.

Por otro lado, presentaremos una convención para ser utilizada en el resto de la sección. Primero, sea $\mathcal{A}$ un álgebra booleana con dominio A. Si $x \in A \times A \times A$, entonces x_i denotará la i-esima proyección de x, es decir, $\pi_i(x)$, donde π_i es la proyección i-ésima canónica para $i = 1, 2, 3$.

Definición 4.2.1. *Sea $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ un álgebra booleana, y $B_{\mathcal{A}}^{\boldsymbol{mbC}} = \{x \in A \times A \times A \ : \ x_1 \vee x_2 = 1 \ \text{ y } \ x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 = 0\}$. Una estructura Swap para **mbC** sobre $\mathcal{A}$ es cualquier multiálgebra sobre Σ,*

$$\mathcal{B} = (B, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\to}, \tilde{\neg}, \tilde{\circ})$$

tal que $B = |\mathcal{B}| \subseteq B_{\mathcal{A}}$ y donde las multioperaciones satisfacen lo siguiente, para cada x e y en B:

(i) $\emptyset \neq x\tilde{\#}y \subseteq \{z \in B : \ z_1 = x_1 \# y_1\}$, *para todo* $\# \in \{\wedge, \vee, \to\}$;

(ii) $\emptyset \neq \tilde{\neg}x \subseteq \{z \in B : \ z_1 = x_2\}$;

(iii) $\emptyset \neq \tilde{\circ}x \subseteq \{z \in B : \ z_1 = x_3\}$.

Definición 4.2.2. *Dada un álgebra booleana $\mathcal{A}$ y una estructura Swap $\mathcal{B}$ para* **mbC** *sobre A con dominio B, sea $D_B = \{x \in B : \ x_1 = 1\}$ el conjunto de elementos* distinguidos*. La matriz no determinista asociada a $\mathcal{B}$ es $\mathcal{M}(\mathcal{B}) = (\mathcal{B}, D_B)$. La Nmatriz asociada a $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ se denotará por $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.*

La clase de todas las Nmatrices definidas por estructuras Swap para **mbC** *se denotará por $\mathbb{K}^{\boldsymbol{mbC}}$, es decir,*

$$\mathbb{K}^{\boldsymbol{mbC}} = \{\mathcal{M}(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \text{ es una estructura Swap para } \boldsymbol{mbC} \text{ sobre } \mathcal{A}, \text{ para algún } \mathcal{A}\}.$$

Definición 4.2.3. *Sea $\mathcal{B} \in \mathbb{K}^{\boldsymbol{mbC}}$ y $\mathcal{M}(\mathcal{B}) = (\mathcal{B}, D)$ como definimos anteriormente. Una* valoración *sobre $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ es una función $v : \mathcal{L}_\Sigma \to |\mathcal{B}|$ tal que, por cada $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\Sigma$:*

(i) $v(\varphi \# \psi) \in v(\varphi)\tilde{\#}v(\psi)$, *por cada* $\# \in \{\wedge, \vee, \to\}$;

(ii) $v(\neg\varphi) \in \tilde{\neg}v(\varphi)$;

(iii) $v(\circ\varphi) \in \tilde{\circ}v(\varphi)$.

Sea $\mathcal{M}(\mathcal{B}) = (\mathcal{B}, D)$ una matriz no determinista definida por una estructura Swap $\mathcal{B}$ por **mbC**, y sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{L}_\Sigma$. Decimos que φ es una *consecuencia* de Γ en $\mathcal{M}(\mathcal{B})$, denotada por $\Gamma \models_{\mathcal{M}(\mathcal{B})} \varphi$, si se cumple lo siguiente: para cada valoración v sobre $\mathcal{M}(\mathcal{B})$, si $v[\Gamma] \subseteq D$ entonces $v(\varphi) \in D$. En particular, φ es *valida* en $\mathcal{M}(\mathcal{B})$, y se denota $\models_{\mathcal{M}(\mathcal{B})} \varphi$, si $v(\varphi) \in D$ para cada valoración v sobre $\mathcal{M}(\mathcal{B})$. Finalmente, $\Gamma \models_{\mathbb{K}^{\mathbf{mbC}}} \varphi$ siempre que $\Gamma \models_{\mathcal{M}(\mathcal{B})} \varphi$ por cada $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \in \mathbb{K}^{\mathbf{mbC}}$.

Teorema 4.2.4. (Correctitud y Completitud con respecto a las estructuras Swap **mbC**) *Para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{L}_\Sigma$: $\Gamma \vdash_{\boldsymbol{mbC}} \varphi$ si, y solo si, $\Gamma \models_{\mathbb{K}^{mbC}} \varphi$.*

Demostración: Véase el Teorema 7.1 de [13]. □

Ahora, presentaremos la clase de estructuras Swap de **mbCciw**, **mbCci** y **Ci**. Las siguientes estructuras Swap se definen siguiendo la intención de validar los axiomas específicos de estas lógicas, para los detalles se pueden encontrar en la Sección 8 de [13].

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra booleana.

- El universo de estructuras swap para **mbCciw** sobre $\mathcal{A}$ es el conjunto:

$$B_{\mathcal{A}}^{\mathbf{ciw}} = \{z \in B_{\mathcal{A}}^{\mathbf{mbC}} \ : \ z_3 \vee (z_1 \wedge z_2) = 1\}.$$

- El universo de estructuras swap para **mbCciw** sobre $\mathcal{A}$ es el conjunto:

$$B_{\mathcal{A}}^{\mathbf{Cci}} = \{z \in B_{\mathcal{A}}^{\mathbf{ciw}} \ : \ z_3 \vee (z_1 \wedge z_2) = 1\}.$$

  donde $\tilde{\circ}(z) = \{(\neg(z_1 \wedge z_2), (z_1 \wedge z_2), 1)\}$

- El universo de estructuras swap para **Ci** sobre $\mathcal{A}$ es el conjunto:

$$B_{\mathcal{A}}^{\mathbf{Ci}} = B^{\mathbf{ciw}}$$

  donde $\tilde{\circ}(z) = \{u \in B^{\mathbf{ciw}} : u_1 = z_2 \ \text{y} \ u_2 \leq u_1\}$.

Sea X una de las lógicas **mbCciw**, **mbCci** y **Ci**. La clase de todas las Nmatrices definidas por estructuras Swap para X se denotará por $\mathbb{K}^X$, es decir, $\mathbb{K}^X = \{\mathcal{M}(\mathcal{B}) : \mathcal{B}$ es una estructura Swap de X sobre $\mathcal{A}$, por algunos $\mathcal{A}\}$. Además, las definiciones de $\vdash_X$ y $\models_{\mathbb{K}^X}$ se dan de la misma forma que **mbC**.

Teorema 4.2.5. (Correctitud y Completitud de X con respecto a estructuras Swap para X) *Para todo* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{L}_\Sigma$*:* $\Gamma \vdash_X \varphi$ *si, y solo si,* $\Gamma \models_{\mathbb{K}^X} \varphi$.

Demostración: Ver el Teorema 8.13 y la Proposición 8.15 de [13]. □

4.3. La lógica QmbC y algunas de sus extensiones no algebrizables

La lógica de primer orden **QmbC** se introdujo en [5] como una extensión de **mbC** a un lenguaje de primer orden, se recordará brevemente. Ahora, asumimos la asignatura proposicional $\Sigma = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \circ\}$ para **mbC**, así como los símbolos $\forall$ (cuantificador universal) y $\exists$ (cuantificador existencial), con los signos de puntuación (comas y paréntesis). Sea Var un conjunto numerable de variables individuales. Una asignatura de primer orden Θ para **QmbC** está compuesta por los siguientes elementos:

- un conjunto $\mathcal{C}$ de constantes individuales;
- para cada $n \geq 1$, un conjunto $\mathcal{F}_n$ de símbolos de función de aridad n,
- para cada $n \geq 1$, un conjunto $\mathcal{P}_n$ de símbolos predicados de aridad n,

  Se supondrá, como de costumbre, que Θ tiene al menos un símbolo de predicado binario $\approx$.

Por otro lado, sea Θ una asignatura de primer orden para **QmbC**. Los conjuntos de términos y fórmulas generados por Θ a partir de Var se denotarán por Ter y For, respectivamente. Sea φ una fórmula, la fórmula obtenida de φ al sustituir cada aparición libre de una variable x por un término t se denotará por $\varphi(x/t)$.

Definición 4.3.1. *Sea Θ una asignatura de primer orden con igualdad. La lógica **QmbC** se obtiene del Cálculo Hilbert **mbC** ampliado por los siguientes axiomas y reglas:*

Axiomas Esquema:

(**Ax12**) $\varphi(x/t) \rightarrow \exists x\varphi$, *si t es un término libre para x en φ*

(**Ax13**) $\forall x\varphi \rightarrow \varphi(x/t)$, *si t es un término libre para x en φ*

(**Ax14**) $x \approx x$,

Reglas de inferencia:

(**∃-In**) $\dfrac{\varphi \to \psi}{\exists x\varphi \to \psi}$, *donde x no ocurre libre en ψ*

(**∀-In**) $\dfrac{\varphi \to \psi}{\varphi \to \forall x\psi}$, *donde x no ocurre libre en φ,*

($\mathbf{R}- \approx$) $\dfrac{x \approx y}{\varphi \to \varphi(x \wr y)}$ *donde y es una variable libre para x en φ,*

también, $\varphi(x \wr y)$ denota cualquier fórmula obtenida a partir de φ reemplazando algunas, pero no necesariamente todas, las ocurrencias libres de x por y.

La *relación de consecuencia* de **QmbC** se denotará por $\vdash_{\mathbf{QmbC}}$. Si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto de fórmulas, entonces $\Gamma \vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi$ denotará que existe una *derivación* en **QmbC** de φ a partir de Γ.

4.4. Estructuras Swap de primer orden

Las estructuras Swap de primer orden para **QmbC** se consideraron por primera vez en [14] para presentar un Teorema de Correctitud y Completitud. En esta sección, presentaremos una prueba alternativa del Teorema de Correctitud para **QmbC** con respecto a la clase de estructuras Swap de primer orden que simplifica la anterior. Además, nuestra prueba no requiere la completitud Dedekind-MacNeille.

Sea $\mathcal{M}(\mathcal{B}) = (\mathcal{B}, D)$ una matriz no determinista definida por una estructura Swap $\mathcal{B}$ por **mbC**, y sea Θ una asignatura de primer orden. Una *estructura* de primer orden sobre $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ y Θ es una terna $\mathfrak{A} = \langle \mathcal{M}(\mathcal{B}), A, I_{\mathfrak{A}} \rangle$ tal que A es un conjunto no vacío (el dominio de la estructura) y $I_{\mathfrak{A}}$ es un mapeo de interpretación que asigna:

- a cada constante c de $\mathcal{C}$, un elemento $c^{\mathfrak{A}}$ de A;
- a cada símbolo de función f de aridad n, una función $I_{\mathfrak{A}}(f) = f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$;
- a cada símbolo de predicado P de aridad n, una función $I_{\mathfrak{A}}(P) = P^{\mathfrak{A}} : A^n \to |\mathcal{B}|$.

Una $\mathfrak{A}$-valoración v es una función de Var en A: por $v[x \to a]$ denotamos una $\mathfrak{A}$-valoración donde $v[x \to a](x) = a$ y $v[x \to a](y) = v(y)$ para cada variable $y \neq x$.

Además, observemos que el álgebra Ter es un álgebra absolutamente libre, por lo que para cada función $v : Var \to A$ tenemos un único homomorfismo tal que $\overline{v} : Ter \to A$.

Definición 4.4.1. *Sea $\mathcal{M}(\mathcal{B}) = (\mathcal{B}, D)$ una matriz no determinista definida por una estructura swap $\mathcal{B}$ para **mbC** sobre un álgebra booleana completa, y sea también $\mathfrak{A}$ una estructura sobre $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ y Θ, entonces definimos los valores de los términos y los valores de verdad de las fórmulas en $\mathfrak{A}$ para una valoración v como sigue:*

$$||x||^{\mathfrak{A}}_v = v(x),$$

$$||f(t_1, \cdots, t_n)||^{\mathfrak{A}}_v = f_{\mathbf{S}}(||t_1||^{\mathfrak{A}}_v, \cdots, ||t_n||^{\mathfrak{A}}_v), \textit{ para cualquier } f \in \mathcal{F},$$

$$||P(t_1, \cdots, t_n)||^{\mathfrak{A}}_v = P_{\mathbf{S}}(||t_1||^{\mathfrak{A}}_v, \cdots, ||t_n||^{\mathfrak{A}}_v), \textit{ para cualquier } P \in \mathcal{P},$$

$$||\#\varphi||^{\mathfrak{A}}_v \in \tilde{\#}||\varphi||^{\mathfrak{A}}_v, \textit{ por cada } \# \in \{\neg, \circ\},$$

$$||\varphi\#\psi||^{\mathfrak{A}}_v \in ||\varphi||^{\mathfrak{A}}_v\tilde{\#}||\psi||^{\mathfrak{A}}_v, \textit{ por cada } \# \in \{\wedge, \vee, \to\},$$

$$||\forall x\varphi||^{\mathfrak{A}}_v \in \{z \in |\mathcal{B}| : z_1 = \bigwedge_{a\in A}(||\varphi||^{\mathfrak{A}}_{v[x\to a]})_1\},$$

$$||\exists x\varphi||^{\mathfrak{A}}_v \in \{z \in |\mathcal{B}| : z_1 = \bigvee_{a\in A}(||\varphi||^{\mathfrak{A}}_{v[x\to a]})_1\} \textit{ (ver la notación de Definición 4.2.1)},$$

$$||t_1 \approx t_2||^{\mathfrak{A}}_v \in D \textit{ si, y solo si, } ||t_1||^{\mathfrak{A}}_v = ||t_2||^{\mathfrak{A}}_v,$$

$$||\varphi(x/t)||^{\mathfrak{A}}_v = ||\varphi||^{\mathfrak{A}}_{v[x\to||t||^{\mathfrak{A}}_v]}, \textit{ si } t \textit{ es un término libre para } x \textit{ en } \varphi.$$

Vale la pena mencionar que la última condición puede probarse para versiones de primer orden de lógicas algebraizables, pero para lógicas no algebrizables, como **mbC**, no se cumple en general.

Ahora decimos que $\mathfrak{A}$ y v **satisfacen** una fórmula φ, y lo denotamos por $\mathfrak{A} \vDash \varphi[v]$, si $||\varphi||^{\mathfrak{A}}_v \in D$. Además, decimos que φ es **verdadero** $\mathfrak{S}$ si $||\varphi||^{\mathfrak{A}}_v \in D$ para cada $\mathfrak{A}$-valoración v y lo denotamos por $\mathfrak{A} \vDash \varphi$. Decimos que φ es una **consecuencia semántica** de Γ en **QmbC** si, para cualquier estructura $\mathfrak{A}$: si $\mathfrak{A} \vDash \gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$, luego $\mathfrak{A} \vDash \varphi$. En este caso, lo denotamos por $\Gamma \vDash \varphi$.

Teorema 4.4.2. *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas en **QmbC**. Entonces, $\Gamma \vdash \varphi$ implica $\Gamma \vDash \varphi$.*

Demostración. Solo demostramos que el axioma **(Ax13)** es correcto. El resto de la prueba se deja al lector. Primero, tenemos

$$||\varphi(x/t) \to \exists x\varphi||_v^{\mathfrak{A}} \in ||\varphi(x/t)||_v^{\mathfrak{A}} \tilde{\to} ||\exists x\varphi||_v^{\mathfrak{A}} = ||\varphi||_{v[x\to||t||_v^{\mathfrak{A}}]}^{\mathfrak{A}} \tilde{\to} ||\exists x\varphi||_v^{\mathfrak{A}}.$$

Teniendo en cuenta $||t||_v^{\mathfrak{A}} \in A$, podemos inferir que

$$(||\varphi||_{v[x\to||t||_v^{\mathfrak{A}}]}^{\mathfrak{A}})_1 \leq \bigvee_{a\in A} (||\varphi||_{v[x\to a]}^{\mathfrak{A}})_1,$$

luego $||\varphi(x/t) \to \exists x\varphi||_v^{\mathfrak{A}} \in D$ para cada estructura $\mathfrak{A}$ y valoración v, que la demostración es completa. $\square$

Definición 4.4.3 ([14])**.** *Sea* $(\cdot)^{\triangleright} : (Ter \cup For) \to (Ter \cup For)$ *el mapeo tal que* $(\, s\,)^{\triangleright}$ *es la expresión obtenida de* s *sustituyendo cada aparición de una constante* $\bar{t}$ *por el propio término* t*, por* $t \in Ter$*.*

Ahora, mostraremos cómo trabajar la Definición 4.4.3 en un ejemplo:

$$\Big(\, P(f(\bar{c}, x)) \wedge Q\big(\,\overline{f(c,x)}, y\,\big)\,\Big)^{\triangleright} = P(f(c,x)) \wedge Q(f(c,x), y),$$

Este ejemplo fue tomado de [14], vea la Definición 8.9.

Está claro que **QmbC** es una lógica tarskiana y finitaria. Entonces, se cumple el Lema Lindenbaum-Łoś (ver Sección 1.2). Ahora, sea $\equiv$ la relación equivalente definida sobre For como sigue: $\alpha \equiv \beta$ si, y solo si, $\vdash \alpha \to \beta$ y $\vdash \beta \to \alpha$.

Lema 4.4.4. *Sea* $For/\equiv$ *un álgebra booleana. Si tomamos una teoría maximal consistente* Δ *y definimos la relación* $\phi \equiv_{\Delta} \psi$ *si, y solo si,* $\Delta \vdash \alpha \to \beta$ *y* $\Delta \vdash \beta \to \alpha$*, entonces* For/Δ *es el álgebra booleana de dos cadenas.*

Demostración. En la Proposición 8.6 de [14], se demostró que $For/\equiv$ es un álgebra booleana. Ahora tomando una teoría maximal consistente Δ, del Lema 2.6.4, tenemos que si tomamos $A = For/\equiv$ y $D = \Delta/\equiv$, entonces A/D es un álgebra booleana simple que es equivalente a For/Δ. $\square$

Ahora estamos en posición de probar el principal resultado de esta Sección.

Teorema 4.4.5 (Completitud de **QmbC** con respecto a estructuras Swap de primer orden)**.** *Sea* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *un conjunto de fórmulas. Si* $\Gamma \models_{\mathbf{QmbC}} \varphi$ *entonces* $\Gamma \vdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi$.

Demostración. Supongamos que $\Gamma \nvdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi$. Consideremos el conjunto $\forall\Gamma$ de todas las clausuras universales de Γ. Entonces, del Lema de Lindenbaum-Łoś, hay una teoría maximal consistente Δ tal que $\Delta \subseteq \forall\Gamma$ y $\Delta \nvdash_{\mathbf{QmbC}} \varphi$. De esto último y teniendo en cuenta el Lema 2.6.4, tenemos que $\Delta/\equiv$ es un sistema deductivo maximal de $For/\equiv$. Del Lema 4.4.4, existe un homomorfismo booleano $h : For/\equiv \to For/\Delta$ tal que $h^{-1}(\{1\}) = \Delta$ donde For/Δ es equivalente a B_2 (el álgebra booleana de dos elementos). Ahora, consideremos $\mathcal{M}(\mathcal{B}_2)$ la estructura swap definida sobre B_2 y consideremos la estructura $\mathfrak{A} = \langle \mathcal{M}(\mathcal{B}_2), Ter, \cdot^{Ter}\rangle$ donde Ter es el álgebra de términos. Además, consideremos $||\cdot||^{\mathfrak{A}}_{v_h} : For \to \mathcal{M}(\mathcal{B}_2)$ definido por la descripción $||\alpha||^{\mathfrak{A}}_{v_h} = (h{\circ}q(\alpha^{\triangleright}), h{\circ}q(\neg\alpha^{\triangleright}), h{\circ}q(\circ\alpha^{\triangleright}))$, donde $q : For \to For/\equiv$ es una proyección canónica. Es fácil verificar que $||\cdot||^{\mathfrak{A}}_{v_h}$ es una **QmbC**-valuación, ver Definición 4.4.1; además, es fácil ver que para cada fórmula $\alpha(x)$, cada término t y su nombre $\hat{t}$ como constante de $\mathcal{C}$, tenemos $||\alpha(x/\hat{t})||^{\mathfrak{M}}_{v_h} = ||\alpha(x/t)||^{\mathfrak{M}}_{v_h}$ teniendo en cuenta Definición 4.4.3.

Por lo tanto, $||\gamma||^{\mathfrak{A}}_{v_h} \in D$ para cada $\gamma \in \forall\Gamma$, pero $||\varphi||^{\mathfrak{A}}_{v_h} \notin D$ que es una contradicción. De esto último y el Teorema 3.4.6, hemos demostrado el Teorema. □

La Nmatriz $\mathcal{M}(\mathcal{B}_2)$ considerada en la prueba del Teorema anterior fue originalmente introducida por A. Avron en [3] para caracterizar semánticamente las **mbC**. Observemos que $B_{\mathcal{A}_2} = \{T, t, t_0, F, f_0\}$ donde $T = (1,0,1)$, $t = (1,1,0)$, $t_0 = (1,0,0)$, $F = (0,1,1)$ y $f_0 = (0,1,0)$. El conjunto D de elementos distinguidos de $\mathcal{M}(\mathcal{B}_2)$ es $\mathrm{D} = \{T, t, t_0\}$, mientras que $\mathrm{ND} = \{F, f_0\}$ es el conjunto de valores de verdad no distinguidos. Las multioperaciones se definen de la siguiente manera:

$\wedge^{\mathcal{M}(\mathcal{B}_2)}$	T	t	t_0	F	f_0
T	D	D	D	ND	ND
t	D	D	D	ND	ND
t_0	D	D	D	ND	ND
F	ND	ND	ND	ND	ND
f_0	ND	ND	ND	ND	ND

$\vee^{\mathcal{M}(\mathcal{B}_2)}$	T	t	t_0	F	f_0
T	D	D	D	D	D
t	D	D	D	D	D
t_0	D	D	D	D	D
F	D	D	D	ND	ND
f_0	D	D	D	ND	ND

$\to^{\mathcal{M}(\mathcal{B}_2)}$	T	t	t_0	F	f_0
T	D	D	D	ND	ND
t	D	D	D	ND	ND
t_0	D	D	D	ND	ND
F	D	D	D	D	D
f_0	D	D	D	D	D

	$\neg^{\mathcal{M}(\mathcal{B}_2)}$
T	ND
t	D
t_0	ND
F	D
f_0	D

	$\circ^{\mathcal{M}(\mathcal{B}_2)}$
T	D
t	ND
t_0	ND
F	D
f_0	ND

En [13, Teorema 7.6], se demostró un Teorema de Representación para la clase de estructura Swap para las **mbC**. Más precisamente, es posible ver que toda estructura Swap es una subestructura de un producto donde cada eje tiene $\mathcal{M}(\mathcal{B}_2)$. Por tanto, $\mathcal{M}(\mathcal{B}_2)$ se comporta como un álgebra subdirectamente irreducible. Veremos que esta conexión entre la prueba y la Nmatrix de Avron se traducen a las extensiones de las **mbC** consideradas en este trabajo.

4.5. El principio de α-conversión

En [5], Avron y Zamansky señalaron que el principio de intersustituibilidad de probables equivalentes (IPE) no se cumple en las LFI de primer orden. Este es un principio importante que vale para toda lógica algebraizable; y podemos caracterizarlo de la siguiente manera: $\forall x\psi(x) \leftrightarrow \forall y\psi(y)$ es demostrable siempre que $\psi(x) \leftrightarrow \psi(y)$ sea demostrable. Sin embargo, es imposible validar el principio IPE dentro del alcance de la lógica no algebraizable. Este problema no está relacionado con la paraconsistencia sino con el no determinismo. En [5], el problema se resolvió introduciendo una relación entre fórmulas llamada α-conversión para que se cumpla el principio IPE. Con el mismo fin, se axiomatizó la valoración de fórmulas, [14]. Además, Ferguson discutió el tema en la Sección 1.4 y propuso una solución, [47]. Ahora, presentaremos una nueva solución al problema. Primero, comencemos definiendo la relación α-conservativa de fórmulas de la siguiente manera:

Definición 4.5.1. ([5, Definition 5] y [47, Definition 1.23]) *Dada una relación de congruencia $\simeq$ entre fórmulas de primer orden, se dice que $\simeq$ es α-conservativa si se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) *Si $\psi(x/z) \simeq \phi(y/z)$, para todo $z \in Var$, entonces $Qx\psi(x) \simeq Qy\phi(y)$ con $Q \in \{\exists, \forall\}$.*

(ii) *Si* $\psi \simeq \phi$, *donde* x *no es una variable libre de* ψ, *entonces* $Qx\psi \simeq \phi$ *con* $Q \in \{\exists, \forall\}$.

Corolario 4.5.2. *Sea* $\equiv$ *la relación de equivalencia definida sobre* For *como sigue:* $\alpha \equiv \beta$ *si, y solo si,* $\vdash \alpha \to \beta$ *y* $\vdash \beta \to \alpha$. *Entonces,* $\equiv$ *es* α*-conservativa.*

Demostración: Sean $\psi(x)$ y $\phi(y)$ dos fórmulas y supongamos que $\psi(x/z) \simeq \phi(y/z)$, para todo $z \in Var$. De este último y del Teorema 4.4.5, tenemos para cada estructura fija $\mathfrak{A} = \langle \mathcal{M}(\mathcal{B}), A, I_{\mathfrak{A}} \rangle$ y cada valoración $v : Var \to A$, entonces

$$(||\psi(x)||^{\mathfrak{A}}_{v[x \to v(z)]})_1 = (||\phi(y)||^{\mathfrak{A}}_{v[y \to v(z)]})_1.$$

Así, los siguientes conjuntos son idénticos:

$$\{(||\psi(x)||^{\mathfrak{A}}_{v[x \to a]})_1 : a \in A\} \text{ y } \{(||\phi(y)||^{\mathfrak{A}}_{v[y \to a]})_1 : a \in A\}.$$

Por lo tanto, en vista de la Definición 4.4.1, $||Qx\psi(x)||^{\mathfrak{A}}_v = ||Qy\phi(y)||^{\mathfrak{A}}_v$ con $Q \in \forall, \exists$ como se desea. La prueba de la condición (ii) de la Definición 4.5.1 se sigue inmediatamente de las mismas definiciones. $\square$

Está claro que solo solucionamos una parte del problema que se señaló [5, 47]. Analizando las fórmulas de primer orden, podríamos tener que $\psi(x) \leftrightarrow \psi(y)$ es demostrable, pero las condiciones $(*)$: $\circ\psi(x) \leftrightarrow \circ\psi(y)$ y $\neg\psi(x) \leftrightarrow \neg\psi(y)$ no lo son. Pero si axiomatizamos la valoración o introducimos una relación para tener la condición $(*)$, el sistema tendría una semántica mediante M-álgebras de la Sección 2.5, lo que no sería una resultado deseable.

De manera análoga a la Definición 4.1.1, definimos las lógicas **QmbCciw**, **QmbCci** y **QCi**. Sea QX una de estas lógicas. Ahora, consideremos la definición de $\vdash_{QX}$ y $\models_{\mathbb{K}QX}$ de la misma manera que **QmbC**. La demostración del siguiente teorema es una fácil adaptación de la demostración del teorema 4.4.5.

Teorema 4.5.3 (Integridad de QX con respecto a estructuras Swap de primer orden)**.** *Sea* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *un conjunto de fórmulas. Si* $\Gamma \models_{QX} \varphi$ *entonces* $\Gamma \vdash_{QX} \varphi$.

En la prueba del Teorema 4.5.3, necesitamos usar estructuras Swap finitas, que Avron presentó inicialmente como Nmatrix semántica para **mbCciw**, **mbCci** y **Ci** (ver [3]), ver también pág. 24 de [13] de la Sección 8. Además, los teoremas de representación para la clase de estructuras Swap para **mbCciw**, **mbCci** y **Ci** se dieron usando estas Nmatrices finitas de Avron.

Observación 4.5.4. *Se estudió una versión de primer orden de* **mbC** *(QmbC) en [14]. Es posible ver que la QmbC no es equivalente a nuestra* ***QmbC****. Para el sistema QmbC, cuando una fórmula es una variante de otra se define de la siguiente manera (ver [14, Definición 5.3]): sean fórmulas ϕ y ψ. Si ϕ se puede obtener de ψ mediante la adición o eliminación de cuantificadores vacíos, o cambiando el nombre de las variables ligadas (manteniendo las mismas variables libres en los mismos lugares), decimos que ϕ y ψ son variantes entre sí. Posteriormente, se consideró el axioma* (AX14) $\alpha \to \beta$ *donde α es una variante de β (ver [14, Definición 5.4]). Además, para cada valoración v, se incluyó la condición: ($*$) si α es una variante de β, entonces $v(\alpha) = v(\beta)$.*

Por lo tanto, si agregamos el axioma (AX14) *a nuestro* ***QmbC*** *y agregamos la condición ($*$) para fórmulas variantes a nuestra Definición 4.4.1, entonces obtenemos un sistema equivalente. Pero entendemos que esta restricción no es necesaria y va en contra del hecho de la no algebraizabilidad de* ***mbC****.*

5. Capítulo V: Teoría de Conjuntos paraconsistentes basadas en las lógicas de da Costa

En este capítulo, construimos modelos valuados de estructuras de Fidel siguiendo la metodología desarrollada para modelos valuados de Heyting; recuérdese que las estructuras de Fidel no son álgebras en el sentido del álgebra universal. Tomando modelos que verifican la ley de Leibniz, podemos probar que todos los axiomas de la teoría de conjuntos de ZF son válidos sobre estos modelos. La prueba se basa fuertemente en la existencia de modelos paraconsistentes de la ley de Leibniz. En este escenario, se discute la dificultad de tener modelos algebraicos paraconsistentes para fórmulas con negación usando la interpretación estándar para la identidad $\approx$ y el predicado del pertenece $\in$, mostrando que la existencia de modelos de la ley de Leibniz es esencial para obtener modelos para ZF.

5.1. Introducción

La paraconsistencia es el estudio de sistemas lógicos que tienen una negación $\neg$ que no es explosiva, es decir, existen fórmulas α y β en el lenguaje de la lógica tal que β no es derivable de el conjunto contradictorio $\{\alpha, \neg\alpha\}$. Estos sistemas se denominan típicamente sistemas no triviales. Existen varios enfoques de la paraconsistencia en la literatura desde su introducción en 1948 del sistema de la lógica Discussive de Jaskowski, como la lógica Relevant, la lógica Adaptative, las lógica multivaluada y muchas otras. Priest introdujo la conocida lógica 3-valuada de Paradox (LP) con el objetivo de formalizar la perspectiva filosófica que subyace al Dialeteismo de Priest y Sylvan. Como es bien sabido, la tesis principal detrás del Dialeteísmo es que existen verdaderas contradicciones, es decir, que algunas oraciones pueden ser verdaderas y falsas al mismo tiempo, ver [69].

Del otro lado de la paraconsistencia, tenemos los C-sistemas, C_n y C_ω que se encuentran entre las contribuciones más conocidas de da Costa, sus alumnas, alumnos y colaboradores. A principios de la década de 1960, estos sistemas fueron introducidos en la tesis de da Costa; en particular, para C_ω da Costa procedió axiomáticamente conservando la parte positiva de la lógica intuicionista, y cambiando los axiomas por negación, [26]. La motivación de inventar estos sistemas fue tener sistemas no explosivos; como consecuencia causal, estos sistemas no eran congruentes para fórmulas con negación, por lo que los sistemas quedaron sin semántica durante varios años. Posteriormente, Fidel presentó la semántica para C_n y C_ω mediante la presentación de una novedosa estructura algebraico-relacional para dar un Teorema de Correctitud para estas lógicas con respecto a esas estructuras a principios de la década de 1970, [32]. Estos resultados fueron presentados por Fidel a da Costa encuanto este último era profesor visitante del *Departamento de Matemática* de la UNS invitado por R. Panzone. Hoy en día, estas estructuras se denominan estructuras de Fidel y es importante señalar que no son álgebras en el sentido del álgebra universal. Más tarde resultó que, de hecho, los sistemas de da Costa no son algebraizables en el método de Blok-Pigozzi, véase, por ejemplo, [67].

Recuerde que las estructuras de Fidel son pares $\langle \mathbf{A}, \{N_x\}_{x\in A}\rangle$ donde $\mathbf{A}$ es un *álgebra de Heyting generalizada* y N_x es un conjunto de todas las posibles negaciones de $x \in A$. Este tipo de semántica fue presentada como la lógica paraconsistente de Nelson por Odintsov, [65, Section 3]; en este caso, la lógica es algebraizable, pero no congruente para fórmulas con negación.

Centrándonos en el objetivo principal de esta Sección, recordemos que los modelos Booleanos de la teoría de conjuntos (ZF) de Zermelo-Fraenkel fueron introducidos por Scott, Solovay y Vopĕnka en 1965; el desarrollo de esta teoría se puede encontrar en el libro de Bell, [7]. Con estos modelos, es posible probar la validez de los axiomas de la teoría de conjuntos de ZF. Ahora, tomando el álgebra de Heyting en lugar del álgebra Booleana, podemos construir modelos Heyting valuados donde la prueba de la validez de los axiomas de ZF en estos modelos se obtiene adaptando el caso booleano, ver [8]. Se pueden presentar otras teorías de conjuntos, como las cuánticas y difusas, utilizando modelos de valores reticulares apropiados; pero estas teorias de conjuntos no usan los axiomas de ZF específicamente, si no unos modificados. Más recientemente, Löwe y Tarafder presentaron la clase de *álgebras de implicación razonable* para construir modelos con valores algebraicos que validen todos los axiomas del fragmento libre de negación de ZF, [58]; en este artículo, la importancia de la Ley de Leibniz se estableció en secciones anteriores. En la literatura, hay algunas generalizaciones de modelos con valores algebraicos (ver [59]) y varios enfoques de teorías de conjuntos paraconsistentes con modelos construidos sobre modelos de tipo algebraico, que no tienen relación con esta presentación y no usan propiamente los axiomas de ZF. Por otro lado, Priest y Ferguson presentaron modelos paraconsistentes para la aritmética, ver [68, 55]. En 2020, com Figallo-Orellano presentamos modelos para la teoría de conjuntos paraconsistentes de da Costa a través de modelos construidos sobre estructuras de Fidel en [36].

El propósito principal de esta sección es mostrar que la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel tiene modelos paraconsistentes construidos sobre estructuras de Fidel para C_ω. Para ello, se parte de la construcción de modelos valuados con estructuras de Fidel siguiendo la metodología desarrollada para los modelos Heyting valuados. Posteriormente, tomamos modelos que verifican la ley de Leibniz, y luego probamos que tales modelos existen. Al estudiar la ley de Leibniz en el entorno algebraico, observamos que la ley no se verifica sobre un modelo de $\mathbf{H}_3^*$, donde $\mathbf{H}_3^*$ es el modelo de tres valores Álgebra de Heyting con pseudocomplemento dual; además, es posible ver que al menos uno de los axiomas de ZF no es válido sobre este modelo usando el mapeo interpretación estándar, ver Sección 5.5. En cambio, tomando un modelo sobre la estructura de Fidel saturada sobre cadena de tres elementos, podemos ver que se verifica la ley de Leibniz; y lo que es más importante, este modelo es paraconsistente. Finalmente, presentamos una prueba de que los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel son válidos sobre los modelos especiales de estructura de valores de Fidel; en concreto, las que verifican la ley de Leibniz.

5.2. Semántica de Fidel para la lógica C_ω da Costa

En esta sección, resumiremos brevemente los principales antecedentes sobre las estructuras de Fidel para C_ω que se utilizarán en el resto del capítulo. Comencemos considerando la asignatura $\Sigma = \{\wedge, \vee, \to, \neg\}$, y el lenguaje $\mathfrak{Fm}$, el conjunto de fórmulas, sobre el conjunto numerable de variables proposicionales Var. La lógica C_ω se define mediante el siguiente conjunto de axiomas esquema y la regla *Modus Ponens* ([26]):

(A1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$,

(A2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$,

(A3) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$,

(A4) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$,

(A5) $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$,

(A6) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$,

(A7) $\beta \to (\alpha \vee \beta)$,

(A8) $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma))$,

(A9) $\alpha \vee \neg\alpha$,

(A10) $\neg\neg\alpha \to \alpha$.

La noción de derivación de una fórmula α en C_ω se define como de costumbre. Decimos que α es derivable a partir de Γ en C_ω, denotado por $\Gamma \vdash \alpha$, si existe una derivación de α de Γ en C_ω. Si $\Gamma = \emptyset$ denotamos $\vdash \alpha$; en este caso, decimos que α es un teorema de C_ω.

Ahora, recordemos que un álgebra $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ se dice que es un *álgebra de Heyting* si el reducto $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado y, para cualquier $a, b \in A$, el valor de $a \to b$ es un pseudocomplemento de a con respecto a b; es decir, el mayor elemento del conjunto $\{z \in A : a \wedge c \leq b\}$. Como un caso más general, decimos que $\mathbf{B} = \langle B, \vee, \wedge, \to, 1\rangle$ es un *álgebra de Heyting generalizada* si $\langle B, \vee, \wedge, 1\rangle$ es un retículo distributivo con el elemento mayor 1 y $\to$ se define como el caso de Heyting. Esta última clase de álgebras se llama *Relatively pseudo-complemented lattices* en [70, Capítulo IV] y *Implicative Lattices* en [65].

Definición 5.2.1. *Una C_ω-estructura es un sistema $\langle \mathbf{A}, \{N_x\}_{x\in A}\rangle$ donde $\mathbf{A}$ es un álgebra de Heyting generalizada y $\{N_x\}_{x\in A}$ es una familia de conjuntos de A tal que las siguientes condiciones se cumplen para cada $x \in A$*

(i) *para todo $x \in A$ existe $x' \in N_x$ tal que $x \vee x' = 1$,*

(ii) *para todo $x' \in N_x$ existe $x'' \in N_{x'}$ tal que $x'' \leq x$.*

En lo que sigue escribimos $\langle \mathbf{A}, N\rangle$ en lugar de $\langle \mathbf{A}, \{N_x\}_{x\in A}\rangle$. Como ejemplo de estructura C_ω, podemos tomar un álgebra de Heyting generalizada A y el conjunto $N_x^s = \{y \in A : x \vee y = 1\}$. Se dice que la estructura $\langle \mathbf{A}, \{N_x^s\}_{x\in A}\rangle$ es una C_ω-estructura saturada.

Para un conjunto dado de fórmulas Γ en C_ω, consideraremos la relación binaria entre fórmulas de la siguiente manera:

$$\alpha \equiv_\Gamma \beta \text{ si, y solo si } \Gamma \vdash (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha).$$

Teniendo en cuenta los axiomas positivos de C_ω, (A1) a (A8), tenemos que $\equiv_\Gamma$ es una congruencia con respecto a los conectivos $\vee$, $\wedge$ y $\to$. Con $|\alpha|_\Gamma$ denotamos la clase de α bajo $\equiv_\Gamma$ y $\mathcal{L}_\omega$ denota el conjunto de todas las clases. Podemos definir las operaciones $\vee$, $\wedge$ y $\to$ en $\mathcal{L}_\omega$ de la siguiente manera: $|\alpha\#\beta|_\Gamma = |\alpha|_\Gamma\#|\beta|_\Gamma$ con $\# \in \{\wedge, \vee, \to\}$. Por lo tanto, está claro que $\langle \mathcal{L}_\omega, \wedge, \vee, \to, 1\rangle$ es un álgebra de Heyting generalizada con el elemento mayor $1 = |\alpha \to \alpha|_\Gamma$. Para extender esta última álgebra a la estructura C_ω, definamos el conjunto $N_{|\alpha|}$ para cada fórmula α como sigue: $N_{|\alpha|_\Gamma} = \{|\neg\beta|_\Gamma : \beta \equiv_\Gamma \alpha\}$. No es difícil ver que $\langle \mathcal{L}_\omega, \{N_{|\alpha|_\Gamma}\}_{\alpha\in\mathfrak{Fm}}\rangle$ es un C_ω-estructura que llamaremos estructura de Lindenbaum.

La idea de tomar este tipo de estructura de Lindenbaum fue presentada por Fidel en [32] y [33]; y Odintsov lo adaptó a la Lógica Paraconsistente de Nelson, ver [65, Section 3]

Diremos que una C_ω-estructura $\langle \mathbf{A}, \{N_x\}_{x\in A}\rangle$ es una subestructura de una C_ω-estructura $\langle \mathbf{B}, \{N'_x\}_{x\in B}\rangle$ si (i) $\mathbf{A}$ es una subálgebra de $\mathbf{B}$ y (ii) $N_x \subseteq N'_x$ vale para $x \in A$. Es fácil ver que cada C_ω-estructura $\langle \mathbf{A}, \{N_x\}\rangle$ es una subestructura de la saturada $\langle \mathbf{A}, \{N_x^s\}\rangle$ definido anteriormente.

A su vez, diremos que una función $v : \mathfrak{Fm} \to \langle \mathbf{A}, \{N_x\}_{x\in A}\rangle$ es una C_ω-valuación si se cumplen las siguientes condiciones:

(v1) $v(\alpha) \in A$ donde α es una fórmula atómica,

(v2) $v(\alpha\#\beta) = v(\alpha)\#v(\beta)$ donde $\# \in \{\wedge, \vee, \to\}$,

(v3) $v(\neg\alpha) \in N_{v(\alpha)}$ y $v(\neg\neg\alpha) \leq v(\alpha)$.

Diremos que una fórmula α es semánticamente válida si para cada C_ω-estructura $\langle \mathbf{A}, N\rangle$ y cada valoración v sobre la estructura, la condición $v(\alpha) = 1$ se verifica; y en este caso denotamos $\vDash \alpha$. Además, escribimos $\Gamma \vDash \alpha$ si cada para C_ω-estructura $\langle \mathbf{A}, N\rangle$ y cada

$\to$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	1	1	1
$\mathbf{\frac{1}{2}}$	0	1	1
$\mathbf{1}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Cuadro 1: Tabla de $\to$ para el álgebra de Gödel 3-valente

valoración v sobre la estructura, la condición $v(\beta) = 1$ por cada $\beta \in \Gamma$ implica $v(\alpha) = 1$. Así, tenemos el siguiente Teorema que es la versión fuerte de la dada en [32, Teorema 5].

Teorema 5.2.2. [67, Teorema 6.3] *Sea* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *un conjunto de fórmulas de* C_ω*. Entonces,* $\Gamma \vdash \alpha$ *si solo si* $\Gamma \vDash \alpha$.

Para ver que C_ω es una lógica paraconsistente, consideraremos la estructura

$$\mathcal{M}_3 = \langle H_3, N_0 = \{1\}, N_{\frac{1}{2}} = \{1\}, N_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}\rangle$$

donde $H_3 = (\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ es un álgebra de Gödel 3-valente (o un álgebra de Heyting 3-valente) donde $\wedge$ y $\vee$ son mínimo y supremo en la cadena de tres elementos y $\to$ se da a través de la tabla 1. Consideremos una valuación v tal que $v(\alpha) = \frac{1}{2}$, $v(\neg\alpha) = 1$ y $v(\beta) = 0$ Entonces, del Teorema 5.2.2, tenemos $\nvdash (\neg\alpha \wedge \alpha) \to \beta$ y teniendo en cuenta el teorema de (meta-)deducción, tenemos $\{\neg\alpha, \alpha\} \nvdash \beta$.

En el artículo [67], las extensiones no algebraizables de las C_ω se muestran mediante la adición de los siguientes axiomas:

(G$_n$) $(\alpha_1 \to \alpha_2) \vee \cdots \vee (\alpha_{n-2} \to \alpha_{n-1})$,

(L) $(\beta \to \alpha) \vee (\alpha \to \beta)$.

Las lógicas $C_{\omega,n}$ y $C_{\omega,\infty}$ se obtienen de la axiomática para C_ω más (G$_n$) y (L), respectivamente. Usando estructuras de Fidel para $C_{\omega,n}$ y $C_{\omega,\infty}$, se determinó que son sistemas decidibles y se verifica el siguiente Teorema de Correctitud:

Teorema 5.2.3. [67, Teorema 6.4 y 6.5] *Sea* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *un conjunto de fórmulas de* $C_{\omega,n}$ *(*$C_{\omega,\infty}$*). Entonces,* $\Gamma \vdash_{C_{\omega,\infty}(C_{\omega,\infty})} \alpha$ *si, y solo si,* $\Gamma \vDash_{\langle \mathbf{A}, N\rangle} \alpha$ *para cada* C_ω*-estructura* $\langle \mathbf{A}, N\rangle$ *para* $C_{\omega,n}$ *(*$C_{\omega,\infty}$*).*

5.3. Modelos valuados de la estructura de Fidel

En esta sección, presentaremos los modelos de estructura de Fidel como una adaptación de los modelos de valor booleano, [7]. Con este fin, comenzamos considerando la estructura C_ω $\langle \mathbf{A}, N\rangle$ donde $\mathbf{A}$ es un retículo completo; y en este caso, decimos que $\langle \mathbf{A}, N\rangle$ es una estructura C_ω completa.

Fijamos un modelo de teoría de conjuntos $\mathbf{V}$ y una C_ω-estructura completa $\langle \mathbf{A}, N\rangle$ y construimos un universo de *nombres* por recursividad transfinita:

$$\mathbf{V}_\xi{}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle} = \{x : x \text{ una función y } \mathit{rango}(x) \subseteq A \text{ y } \mathit{dom}(x) \subseteq \mathbf{V}_\zeta^{\langle \mathbf{A}, N\rangle} \text{ para algún } \zeta < \xi\}$$

$$\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle} = \{x : x \in \mathbf{V}_\xi{}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle} \text{ para algunos } \xi\}$$

La clase $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$ se denomina modelo de valor de estructura C_ω sobre $\langle \mathbf{A}, N\rangle$. Observemos que solo necesitamos el conjunto A para definir $\mathbf{V}_\xi{}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$. Por $\mathcal{L}_\in$, denotamos el lenguaje de primer orden de la teoría de conjuntos que consta únicamente de los conectores proposicionales $\{\rightarrow, \wedge, \vee, \neg\}$ de C_ω y dos predicados binarios $\in$ y $\approx$. Expandimos este lenguaje agregando todos los elementos de $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$; el idioma expandido se denotará $\mathcal{L}_{\langle A, N\rangle}$.

Principios de inducción. Los conjuntos

$$\mathbf{V}_\zeta = \{x : x \subseteq \mathbf{V}_\xi, \text{ para algunos } \xi < \zeta\}$$

son definibles para todo ordinal ξ y luego, todo conjunto x pertenece a $\mathbf{V}_\alpha$ para algún α. Entonces, este hecho induce una función $\mathit{rango}(x) =$ mínimo ordinal ξ tal que $x \in \mathbf{V}_\xi$. Como $\mathit{rango}(x) < \mathit{rango}(y)$ está bien definido, inducimos un *principio de inducción sobre el rango*: sea Ψ una propiedad sobre conjuntos. Suponga que, para cada conjunto x, si $\Psi(y)$ se cumple para cada y tal que $\mathit{rango}(y) < \mathit{rango}(x)$, entonces $\Psi(x)$ se cumple. Así, $\Psi(x)$ se cumple para todo x. De este último, los Principios de Inducción (PI) se mantienen en $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$. Suponga lo siguiente para todo $x \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$: si $\Psi(y)$ se cumple para cada $y \in \mathit{dom}(x)$, entonces $\Psi(x)$ se mantiene. Por lo tanto, $\Psi(x)$ se cumple para todo $x \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$. Por simplicidad, notamos cada conjunto $u \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$ por su nombre u de $\mathcal{L}_{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$. Además, escribiremos $\varphi(u)$ en lugar de $\varphi(x/u)$. Ahora, vamos a definir una valoración por inducción sobre la complejidad de una fórmula cerrada en $\mathcal{L}_{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ de la siguiente manera:

Definición 5.3.1. *Para una estructura C_ω completa dada $\langle \mathbf{A}, N\rangle$, el mapeo $||\cdot||$: $\mathcal{L}_{\langle \mathbf{A},N\rangle} \to \langle \mathbf{A}, N\rangle$ se define de la siguiente manera:*

$$||u \in v||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} = \bigvee_{x\in dom(v)} (v(x) \wedge ||x \approx u||^{\langle \mathbf{A},N\rangle});$$

$$||u \approx v||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} = \bigwedge_{x\in dom(u)} (u(x)) \to ||x \in v||^{\langle \mathbf{A},N\rangle}) \wedge \bigwedge_{x\in dom(v)} (v(x) \to ||x \in u||^{\langle \mathbf{A},N\rangle});$$

$$||\varphi \# \psi||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} = ||\varphi||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} \tilde{\#} ||\psi||^{\langle \mathbf{A},N\rangle},\ para\ todo\ \# \in \{\wedge, \vee, \to\};$$

$$||\neg\alpha||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} \in N_{||\alpha||^{\langle \mathbf{A},N\rangle}} \quad y \quad ||\neg\neg\alpha||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} \leq ||\alpha||^{\langle \mathbf{A},N\rangle};$$

$$||\exists x\varphi||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} = \bigvee_{u\in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}} ||\varphi(u)||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} \quad y \quad ||\forall x\varphi||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} = \bigwedge_{u\in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}} ||\varphi(u)||^{\langle \mathbf{A},N\rangle}.$$

$||\varphi||^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ es llamado **valor de verdad** *de la setencia φ en el languaje $\mathcal{L}_{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ en la C_ω-estructura-valuada modelo sobre $\langle \mathbf{A}, N\rangle$.*

Definición 5.3.2. *Una sentencia φ en el languaje $\mathcal{L}_{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ se dice válida en $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$, y se denota $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle} \vDash \varphi$, si $||\varphi||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} = 1$.*

Es importante notar que para cada C_ω-estructura $\langle \mathbf{A}, N\rangle$ completa, el elemento $\bigwedge_{x\in A} x$ es el primer elemento de A y entonces, $\mathbf{A}$ es un álgebra de Heyting completa; denotamos este elemento por "0".

Ahora, presentamos un lema que será útil en lo siguiente:

Lema 5.3.3. *Dada una estructura C_ω completa dada, $\langle \mathbf{A}, N\rangle$. Entonces:*

(i) $||u \approx u||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} = 1$;

(ii) $u(x) \leq ||x \in u||^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ *para todo* $x \in dom(u)$;

(iii) $||u \approx v||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} = ||v \approx u||^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$, *para todo* $u, v \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$;

(iv) $||u \approx v||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} \wedge ||v \approx w||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} \leq ||u \approx w||^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$;

(iv) $||u \approx v||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} \wedge ||u \in w||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} \leq ||v \in w||^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$.

Demostración. Tiene la misma demostración que la del caso intuicionista usando la ley de Leibniz y el hecho de que para toda fórmula cerrada ϕ de $\mathcal{L}_{\langle \mathbf{A},N\rangle}$, tenemos $||\phi||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} \in \mathbf{A}$, ver por ejemplo [8]. $\square$

5.4. La ley de Leibniz y sus modelos

En la teoría de conjuntos clásica e intuicionista, tenemos que los nombres representan objetos y si tenemos objetos equivalentes, tendrían que poseer las mismas propiedades. Esto se conoce como *indiscernibilidad de los idénticos* y podría considerarse como Ley de Leibniz por el siguiente axioma:

$$u \approx v \wedge \varphi(u) \to \varphi(v)$$

A continuación, tomaremos $\langle \mathbf{A}, N\rangle$ una C_ω-estructura completa tal que $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ satisface la Ley de Leibniz; en este caso, los llamaremos *modelo de Leibniz*.

Teniendo en cuenta el problema de ver si tales modelos realmente existen, podemos tomar C_ω-estructuras completas $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B}, N\rangle$ donde $\mathbf{B}$ es un álgebra booleana completa y cada conjunto $N_x = \{\sim x\}$, para cada $x \in B$, siendo $\sim$ la negación booleana. Entonces, es claro que todo $\mathcal{B}$ valida todo axioma de C_ω; además, $\mathbf{V}^{\mathcal{B}}$ valida todos los axiomas de ZF pero $\mathbf{V}^{\mathcal{B}}$ es un modelo consistente. A continuación analizaremos este hecho.

5.5. Caso algebraico

Cabe mencionar que actualmente la Ley de Leibniz no tiene modelos algebraicos para fórmulas con negación. Para ver esto, comenzamos considerando el álgebra de Heyting con pseudocomplemento dual siguiendo $\mathbf{H}_3^* = \left\langle \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \wedge, \vee, \to, \neg, 1 \right\rangle$ donde definimos $\to$ y $\neg$ a través del Cuadro 2, ver [72]. Ahora, consideremos el modelo de $\mathbf{V}^{\mathbf{H}_3^*}$ con valores duales de Heyting sobre $\mathbf{H}_3^*$. Sea $w \in \mathbf{V}^{\mathbf{H}_3^*}$ y sea $\psi(x)$ la fórmula "$w \in x$" donde x es una variable libre. Tomando $v = \{\langle w, 1\rangle\}$, $u = \{\langle w, \frac{1}{2}\rangle\}$, tenemos que $||u \approx v||^{\mathbf{H}_3^*} = \frac{1}{2}$ y así $||u \approx v||^{\mathbf{H}_3^*} \leq ||\psi(u) \to \psi(v)||^{\mathbf{H}_3^*}$ se verifica. Pero, de $||\psi(v)||^{\mathbf{H}_3^*} = 1$ y $||\psi(u)||^{\mathbf{H}_3^*} = \frac{1}{2}$, tenemos que $||\neg\psi(u)||^{\mathbf{H}_3^*} = 1$ y $||\neg\psi(v)||^{\mathbf{H}_3^*} = 0$, y por lo tanto la ley no se verifica.

El problema de la inexistencia de modelos algebraicos de la ley conduce a la imposibilidad de probar la validez de al menos un axioma de ZF para fórmulas con negación;

$\to$	$\mathbf{0}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	1	1	1
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	0	1	1
$\mathbf{1}$	0	$\frac{1}{2}$	1

	$\neg$
$\mathbf{0}$	1
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	1
$\mathbf{1}$	0

Cuadro 2: Tabla de los conectivos $\to$ y $\neg$ en $\mathbf{H}_3^*$

de hecho, si tomamos la fórmula $\phi(x) := \neg\psi(x)$, entonces no es difícil ver que el axioma "Separación"no es válido.

Cabe mencionar que es posible ver que existe una lógica asociada a la matriz $\langle \mathbf{H}_3^*, \{1\}\rangle$ que es una extensión de C_ω, [66, Sección 3]; es decir, esta matriz valida todos los axiomas de C_ω.

5.6. C_ω-estructura basada en álgebras de Heyting de cadena con tres elementos

Para ver que existen modelos paraconsistentes de la ley de Leibniz, podemos considerar estructuras con los siguientes requisitos: $1 \in N_x$ para todo $x \in A$ y $N_1 = A$. Ahora, consideremos la C_ω-estrucura modelo $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ sobre $\langle \mathbf{A}, N\rangle$ tal que, para cada fórmula cerrada ψ, definimos $||\neg\psi||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} = 1$ y $||\neg\neg\psi||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} = ||\psi||^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ donde la fórmula ψ no es de la forma $\neg\phi$ para ninguna fórmula cerrada ϕ. Para ver que esta condición funciona bien para fórmulas con más negaciones, solo hay que tener en cuenta que $||\neg\neg\neg\psi||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} = ||\neg\psi||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} = 1$ y $||\neg\neg\neg\neg\psi||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} = ||\neg\neg\psi||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} = ||\psi||^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ vale. En general, podemos considerar la fórmula $\neg_e\psi$, donde $\neg\cdots\neg\psi$ tiene un número par de negaciones delante de ψ, y ψ no es de la forma $\neg\phi$; entonces $||\neg_e\psi||^{\langle A,N\rangle} = ||\psi||^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$. Pero si la fórmula $\neg_o\psi$, donde $\neg\cdots\neg\psi$ tiene un número impar de negaciones delante de ψ, y ψ no es de la forma $\neg\phi$, entonces $||\neg_o\psi||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} = 1$. En este caso, diremos que $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ es un modelo estándar de Leibniz sobre un $\langle \mathbf{A}, N\rangle$ completo saturado.

Consideremos nuevamente la siguiente estructura C_ω saturada (ver Sección 5.2):

$$\mathcal{M}_3 = \langle \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \wedge, \vee, \to, \neg, N_0, N_{\frac{1}{2}}, N_1\rangle$$

donde $N_0 = N_{\frac{1}{2}} = \{1\}$, y $N_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ y $\to$ se define en el Cuadro 2. Ahora consideremos el modelo estándar de Leibniz $\mathbf{V}^{\mathcal{M}_3}$ y $w \in \mathbf{V}^{\mathcal{M}_3}$, y sea $\psi(x)$ la fórmula "$w \in$

x" donde x es una variable libre. Además, consideremos el conjunto $v = \{\langle w, 1\rangle\}$, $u = \{\langle w, \frac{1}{2}\rangle\}$. Entonces, tenemos $||\neg\psi(v)||^{\mathcal{M}_3} = 1 = ||\neg\psi(u)||^{\mathcal{M}_3}$ y claramente, $||\neg\neg\psi(u)||^{\mathcal{M}_3} = ||\psi(u)||^{\mathcal{M}_3}$ y $||\neg\neg\psi(u)||^{\mathcal{M}_3} = ||\psi(u)||^{\mathcal{M}_3}$. Así, el modelo $\mathbf{V}^{\mathcal{M}_3}$ verifica la Ley de Leibniz.

Está claro que podríamos haber tomado $||\neg\psi(v)||^{\mathcal{M}_3} = \frac{1}{2}$ porque el par $(1, \frac{1}{2})$ es el que verifica la Ley de Leibniz. En general, tomando un modelo que verifique la ley, no sabemos cuál es el valor real de la valoración de cualquier fórmula con negación pero sabremos que es la correcta. Otro aspecto interesante de $\mathbf{V}^{\mathcal{M}_3}$ es que es un modelo paraconsistente como hemos visto en la Sección 5.2. Además, $\mathbf{V}^{\mathcal{M}_3}$ es un modelo de la lógica $C_{\omega,3}$, y más adelante se demostrará que es un modelo de ZF. Ahora, estamos en condiciones de ofrecer una demostración del siguiente Teorema.

Teorema 5.6.1. *Sea $\langle \mathbf{A}, N\rangle$ una C_ω-estructura completa saturada tal que $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$ es un modelo Leibniz estandar, entonces $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$ verifica la Ley de Leibniz.*

Demostración. Sea $\varphi(x)$ una fórmula de $\mathcal{L}_{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$ y $u, v \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$. Haremos la demostración por inducción sobre la estructura de la fórmula. Teniendo en cuenta el caso intuicionista, es posible ver que, para la fórmula libre de negación $\varphi(x)$, tenemos $||u \approx v||^{\langle \mathbf{A}, N\rangle} \leq ||\varphi(u) \rightarrow \varphi(v)||^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$. Ahora, supongamos que $\varphi(x)$ es $\neg\psi(x)$ tal que $\psi(x)$ no es de la forma $\neg\phi(x)$ donde $\phi(x)$ es cualquier fórmula, entonces $||\neg\psi(u)||^{\langle \mathbf{A}, N\rangle} = 1 = ||\neg\psi(v)||^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$. Por lo tanto, está claro que $||u \approx v|| \leq ||\varphi(u) \rightarrow \varphi(v)||^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$. Supongamos ahora que $\varphi(x)$ es $\neg\neg\psi(x)$ tal que $\psi(x)$ no es de la forma $\neg\phi$, entonces $||\neg\neg\psi(u)||^{\langle \mathbf{A}, N\rangle} = ||\psi(u)||^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$ y $||\neg\neg\psi(v)||^{\langle \mathbf{A}, N\rangle} = ||\psi(v)||^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$. Por hipótesis inductiva, tenemos que $\varphi(x)$ verifica la Ley de Leibniz. Ahora bien, si $\varphi(x)$ es una fórmula tal que tiene la forma $\neg\neg\cdots\neg\psi(x)$, podemos proceder como los dos últimos casos. $\square$

A continuación, presentamos una observación importante que nos mostrará cómo funcionan los modelos de esta sección.

Observación 5.6.2.
El Teorema 5.6.1 evidencia que hay una forma de proporcionar modelos paraconsistentes que verifican la Ley de Leibniz, pero podrían existir otras dependiendo de la elección de la estructura saturada completa C_ω. Además, es importante notar que las oraciones $\sim \exists x(x \in x)$ junto con $\sim \exists xy(x \not\approx y)$ se mantienen en los modelos de esta Sección 5.6. Esta es una consecuencia inesperada, pero hay que tener en cuenta que la negación es

paraconsistente. Creemos que esto no es un problema en la configuración paraconsistente. Recordemos que esta sección se presenta para ver que existen modelos paraconsistentes de la Ley de Leibniz, pero tomar una estructura de Fidel basada en un álgebra de Heyting adecuada puede tener mejores opciones. Resulta interesante explorar este tipo adecuado de modelos de la ley.

Adoptaremos la siguiente notación, para cada fórmula $\varphi(x)$ y cada $u \in \mathbf{V}^{\langle A,N\rangle}$: $\exists x \in u\varphi(x) = \exists x(x \in u \wedge \varphi(x))$ y $\forall x \in u\varphi(x) = \forall x(x \in u \to \varphi(x))$.

Ahora, presentamos el siguiente Lema que usaremos en el resto del capítulo.

Lema 5.6.3. *Sea $\langle \mathbf{A}, N\rangle$ una estructura C_ω completa tal que $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ es el modelo de Leibniz. Entonces, para cada fórmula $\varphi(x)$ y cada $u \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ tenemos:*

$$||\exists x \in u\varphi(x)||^{\langle A,N\rangle} = \bigvee_{x\in dom(u)} (u(x) \wedge ||\varphi(x)||^{\langle A,N\rangle})$$

y

$$||\forall x \in u\varphi(x)||^{\langle A,N\rangle} = \bigwedge_{x\in dom(u)} (u(x) \to ||\varphi(x)||^{\langle A,N\rangle}).$$

Demostración. Tiene la misma demostración que el caso intuicionista usando la Ley de Leibniz, el Lema 5.3.3, y recordando que para cada oración φ y en cada C_ω-estructura completa $\langle \mathbf{A}, N\rangle$, la interpretación $||\varphi||^{\langle A,N\rangle}$ pertenece al álgebra de Heyting $\mathbf{A}$, ver por ejemplo [8]. □

5.7. Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel

El sistema básico de teoría de conjuntos paraconsistentes es llamado ZFC_ω y consiste en una versión de primer orden de C_ω sobre la asignatura de primer orden Θ_ω que contiene un predicado de igualdad $\approx$ y un predicado binario $\in$.

Definición 5.7.1. *El sistema ZFC_ω es la teoría de primer orden obtenida de la lógica C_ω sobre Θ_ω añadiendo los siguientes axiomas esquemas de teoría de conjuntos:*

(Extensionality) $\forall x\forall y[\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to (z \approx y)]$,

(Pairing) $\forall x\forall y\exists w\forall z[z \in w \leftrightarrow (z \approx x \vee z \approx y)]$,

(Colletion) $\forall x[(\forall y \in x \exists z \phi(y,z)) \to \exists w \forall y \in x \exists z \in w \phi(y,z)]$,

(Powerset) $\forall x \exists w \forall z[z \in w \leftrightarrow \forall y \in z(y \in x)]$,

(Separation) $\forall x \exists w \forall z[z \in w \leftrightarrow (z \in x \wedge \phi(z))]$,

(Empty set) $\exists x \forall z[z \in x \leftrightarrow \neg(z \approx z)]$,

El conjunto que satisface este axioma es, por Extensionality, único y nos referimos a él con notación $\emptyset$.

(Union) $\forall x \exists w \forall z[z \in w \leftrightarrow \exists y \in x(z \in y)]$,

(Infinity) $\exists x[\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(y^+ \in x)]$,

De Union, Paring y Extensionality, podemos notar por y^+ *al conjunto* $y \cup \{y\}$.

(Induction) $\forall x[(\forall y \in x \phi(y)) \to \phi(x)] \to \forall x \phi(x)$.

Los últimos nueve axiomas se usan generalmente para definir la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, [7]. Ahora, mostraremos algunos resultados técnicos para ser utilizados en el resto del capítulo.

Definición 5.7.2. *Sea* $\langle \mathbf{A}, N \rangle$ *una* C_ω*-substructura completa y dado* $\{u_i : i \in I\} \subseteq \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N \rangle}$ *una familia de conjuntos, con* $\{a_i : i \in I\} \subseteq A$*, la suma* $\sum_{i \in I} a_i \cdot u_i$ *es una función* u *con* $dom(u) = \bigcup_{i \in I} dom(u_i)$ *y, para* $x \in dom(u)$, $u(x) = \bigvee_{i \in I} a_i \wedge ||x \in u_i||^{\langle \mathbf{A}, N \rangle}$.

El siguiente resultado se conoce como *Lema Mixing* y su prueba es exactamente la misma para el caso intuicionista porque es una afirmación sobre fórmulas positivas, véase, por ejemplo, [7, 8].

Lema 5.7.3. *Sea* $\langle \mathbf{A}, N \rangle$ *una* C_ω*-substructura completa y* u *la mixtura* $\Sigma_{i \in I} a_i \cdot u_i$ *donde* $\{u_i : i \in I\} \subseteq \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N \rangle}$ *y* $\{a_i : i \in I\} \subseteq A$*. Si* $a_i \wedge a_j \leq ||u_i \approx u_j||^{\langle \mathbf{A}, N \rangle}$ *para todo* $i, j \in I$*, entonces* $a_i \leq ||u_i \approx u||^{\langle \mathbf{A}, N \rangle}$.

Un conjunto B refina un conjunto A si para todo $b \in B$ existe algún $a \in A$ tal que $b \leq a$. Un álgebra de Heyting $\mathbf{H}$ es refinable si para cada subconjunto $A \subseteq H$ existe alguna anti-cadena B en H que refina A y verifica $\bigvee A = \bigvee B$.

Teorema 5.7.4. *Sea $\langle \mathbf{A}, N\rangle$ una C_ω-subestructura completa tal que A es refinable. Si $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle} \vDash \exists x\psi(x)$, entonces existe $u \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ tal que $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle} \vDash \psi(u)$.*

Demostración. Como tenemos que A es un conjunto entonces, la familia $X = \{||\psi(u)||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} : u \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}\}$ también lo es. Por el axioma de elección, existe un ordinal α y un conjunto $\{u_\zeta : \zeta < \alpha\} \subseteq \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ tal que $X = \{||\psi(u_\zeta)||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} : \zeta < \alpha\}$. Por lo tanto, $||\exists x\psi(x)||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} = \bigvee\limits_{\zeta<\alpha} ||\psi(u_\zeta)||^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$. Sea $\{a_i : i \in I\}$ un refinamiento del conjunto $\{||\psi(u_\zeta)||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} : \zeta < \alpha\}$ tal que $\bigvee\limits_{i\in I} a_i = \bigvee\limits_{\zeta<\alpha} ||\psi(u_\zeta)||^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$. Podemos tomar para cada a_i un $v_i \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ tal que $a_i \leq ||\psi(v_i)||^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$. Sea u la mixtura $\Sigma_{i\in I} a_i \cdot v_i$. Por el Lema Mixing y la Ley de Leibniz, tenemos que $1 = \bigvee\limits_{i\in I} a_i = \bigvee\limits_{i\in I} \left(a_i \wedge ||v_i = u||^{\langle \mathbf{A},N\rangle}\right) \leq \bigvee\limits_{i\in I} \left(||\psi(v_i)||^{\langle \mathbf{A},N\rangle} \wedge ||v_i = u||^{\langle \mathbf{A},N\rangle}\right) \leq ||\psi(u)||^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$, lo que completa la prueba. $\square$

Ahora, dada una C_ω-subestructura completa $\langle \mathbf{A}', N'\rangle$ de $\langle \mathbf{A}, N\rangle$, tenemos los modelos asociados $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}',N'\rangle}$ y $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$. Entonces, es fácil ver que $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}',N'\rangle} \subseteq \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$.

Por otro lado, decimos que una fórmula ψ es *restringida* si todos los cuantificadores son de la forma $\exists y \in x$ o $\forall y \in x$, entonces tenemos:

Lema 5.7.5. *Para cualquier C_ω-subestructura completa $\langle \mathbf{A}', N'\rangle$ de $\langle \mathbf{A}, N\rangle$ y cualquier fórmula restringida sin negación $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ con variables en $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}',N'\rangle}$, se cumple la siguiente igualdad:*

$$||\psi(x_1, \cdots, x_n)||^{\langle \mathbf{A}',N'\rangle} = ||\psi(x_1, \cdots, x_n)||^{\langle \mathbf{A},N\rangle}.$$

Demostración. Es inmediato del caso intuicionista, teniendo en cuenta que $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{A}$ son álgebras de Heyting completas, y $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ es una fórmula restringida libre de negaciones. $\square$

Consideremos ahora el álgebra booleana $\mathbf{2} = \langle \{0, 1\}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ y el mapeo natural $\hat{} : \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle} \to \mathbf{V}^{\langle \mathbf{2},N_\mathbf{2}\rangle}$ donde $N_\mathbf{2} = \{(0, 1), (1, 0)\}$ definido por $\hat{u} = \{\langle \hat{v}, 1\rangle : v \in u\}$. Esto está bien definido por recursividad en $v \in dom(u)$. Está claro que $\langle \mathbf{2}, N_\mathbf{2}\rangle$ es C_ω-subestructura de cualquier $\langle \mathbf{A}, N\rangle$, entonces vale el siguiente lema:

Lema 5.7.6.

(i) $||u \in \hat{v}|| = \bigvee_{x \in v} ||u \approx \hat{x}||$ *para todo* $v \in \mathbf{V}$ *y* $u \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$,

(ii) $u \in v \leftrightarrow \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle} \vDash \hat{u} \in \hat{v}$ *y* $u = v \leftrightarrow \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle} \vDash \hat{u} \approx \hat{v}$,

(iii) *para todo* $x \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{2}, N_\mathbf{2}\rangle}$ *existe un único* $v \in \mathbf{V}$ *tal que* $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{2}, N_\mathbf{2}\rangle} \vDash x \approx \hat{v}$,

(iv) *para cualquier fórmula libre de negaciones* $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ *y todo* $x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{V}$, *tenemos que* $\psi(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \mathbf{V}^{\langle \mathbf{2}, N_\mathbf{2}\rangle} \vDash \psi(\hat{x_1}, \cdots, \hat{x_n})$. *Más aún, para cualquier fórmula restringida libre de negaciones* ϕ, *tenemos que* $\phi(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle} \vDash \phi(\hat{x_1}, \cdots, \hat{x_n})$.

La prueba del último teorema es la misma para el caso intuicionista porque consideramos fórmulas restringidas libres de negación y esto será útil para probar la validez del axioma del Infinito.

5.8. Validación de axiomas de ZF

Ahora, probaremos la validez de todos los axiomas de la teoría de conjuntos de ZFC_ω. Primero, comencemos considerando un modelo fijo $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$ sobre una C_ω-estructura completa $\langle \mathbf{A}, N\rangle$ y supongamos que $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$ verifica la ley de Leibniz; es decir, es un modelo de Leibniz. En aras de la brevedad y de ahora en adelante, usaremos la notación $||.||$ en lugar de $||.||^{\langle A, N\rangle}$.

Extensionality

Dados $x, y \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A}, N\rangle}$, entonces

$$\begin{aligned}
||\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)|| &= ||\forall z((z \in x \to z \in y) \wedge (z \in y \to z \in x)|| \\
&= \bigwedge_{z \in \mathbf{V}^{\langle A, N\rangle}} (||z \in x|| \to ||z \in y||) \wedge \bigwedge_{z \in \mathbf{V}^{\langle A, N\rangle}} (||z \in y|| \to ||z \in x||) \\
&\leq \bigwedge_{z \in dom(x)} (||z \in x|| \to ||z \in y||) \wedge \bigwedge_{z \in dom(y)} (||z \in y|| \to ||z \in x||) \\
&\leq \bigwedge_{z \in dom(x)} (x(z) \to ||z \in y||) \wedge \bigwedge_{z \in dom(y)} (y(z) \to ||z \in x||) \\
&= ||x = y||.
\end{aligned}$$

Así, tenemos que $||\forall x \forall y \forall z((z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow (x = y))||$. Por otro lado, para todo $z \in \mathbf{V}^{\langle A,N \rangle}$ inferimos que $||x = y|| \wedge ||z \in x|| \leq ||z \in y||$ y por lo tanto $||x = y|| \leq ||z \in x|| \rightarrow ||z \in y||$. Luego, $||\forall x \forall y((x = y) \rightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y))||$.

Pairing

Let $u, v \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N \rangle}$ y consiramos la función $w = \{\langle u, 1 \rangle, \langle v, 1 \rangle\}$. Luego, tenemos que $||z \in w|| = (w(u) \wedge ||z = u||) \vee (w(v) \wedge ||z = v||) = ||z = u|| \vee ||z = v|| = ||z = u \vee z = v||$.

Powerset

Sea $u \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N \rangle}$ y supongamos que w es una función tal que $dom(w) = \{f : dom(u) \rightarrow A : f \text{ función}\}$ y $w(x) = ||\forall y \in x(y \in u)||$. Luego,

$$||v \in w|| = \bigvee_{x \in dom(w)} (||\forall y \in x(y \in u)|| \wedge ||x = v||) \leq ||\forall y \in v(y \in u)||.$$

Por otro lado, dado $v \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N \rangle}$ y considerando la función a tal que $dom(a) = dom(u)$ y $a(z) = ||z \in u|| \wedge ||z \in v||$. Luego, es claro que $a(z) \rightarrow ||z \in v|| = 1$ para todo $z \in dom(a)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
||\forall y \in v(y \in u)|| &= \bigwedge_{y \in dom(v)} (v(y) \rightarrow ||y \in u||) \\
&= \bigwedge_{y \in dom(v)} (v(y) \rightarrow (||y \in u|| \wedge v(y))) \\
&\leq \bigwedge_{y \in dom(v)} (v(y) \rightarrow a(y)) \\
&\leq \bigwedge_{y \in dom(v)} (v(y) \rightarrow ||y \in a||) \wedge \bigwedge_{z \in dom(a)} (a(z) \rightarrow ||z \in v||) \\
&= ||v = a||.
\end{aligned}$$

Como tenemos que $a(y) \leq ||y \in u||$ para todo $y \in dom(a)$, entonces $||\forall y \in a(y \in u)|| = 1$. Luego $a \in dom(w)$ y por lo tanto, $||\forall y \in v(y \in u)|| \leq ||\forall y \in a(y \in u)|| \wedge ||v = a|| = w(a) \wedge ||v = a|| \leq ||v \in w||$.

Union

Dado $u \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ y considerando la función w con $dom(w) = \bigcup_{v \in dom(u)} dom(v)$ y $w(x) = \bigvee_{v \in A_x} v(x)$ donde $A_x = \{v \in dom(u) : x \in dom(v)\}$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
||y \in w|| &= \bigvee_{x \in dom(w)} (||x \approx y|| \wedge \bigvee_{v \in A_x} v(x)) \\
&= \bigvee_{x \in dom(w)} \bigvee_{v \in A_x} (||x \approx y|| \wedge v(x)) \\
&= \bigvee_{v \in dom(u)} \bigvee_{x \in dom(v)} (||x \approx y|| \wedge v(x)) \\
&= ||\exists v \in u(y \in v)||.
\end{aligned}
$$

Separation

Dado $u \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ y supongamos $dom(w) = dom(u)$ y $w(x) = ||x \in u|| \wedge ||\phi(x)||$ entonces

$$
\begin{aligned}
||z \in w|| &= \bigvee_{x \in dom(w)} (||y \in w|| \wedge ||\phi(y)|| \wedge ||y \approx z||) \\
&\leq \bigvee_{x \in dom(w)} (||\phi(z)|| \wedge ||y \approx z||).
\end{aligned}
$$

Más aún,

$$
\begin{aligned}
||\phi(z)|| \wedge ||y \approx z|| &= \bigvee_{y \in dom(u)} (u(y) \wedge ||z \approx y|| \wedge ||\phi(z)||) \\
&\leq \bigvee_{y \in dom(u)} (||y \in u|| \wedge ||z \approx y|| \wedge ||\phi(y)||) \\
&= \bigvee_{y \in dom(u)} (w(y) \wedge ||z \approx y||) = ||z \in w||.
\end{aligned}
$$

Empty set

Notemos que $||u = u|| = 1$ para todo $u \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N \rangle}$ entonces, $||\neg(u \approx u)|| \in N_1$. Luego, consideramos $w \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N \rangle}$ tal que $u \in dom(w)$ y $ran(w) \subseteq \{||\neg(u \approx u)||\}$ entonces, es claro que $||u \in w|| = \bigvee_{x \in dom(w)} (w(x) \wedge ||u \approx x||) = ||\neg(u \approx u)||$.

Infinity

Sea $\psi(x)$ la fórmula "$\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(y^+ \in x)$". Entonces, el axioma en cuestión es la sentencia $\exists x \psi(x)$. Por lo tanto, es claro que la fórmula libre de negaciones $\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(y^+ \in x)$ es restringida y además $\psi(\omega)$ es verdadera. Luego, por el Lema 5.7.6 (iv), tenemos que $||\psi(\hat{\omega})|| = 1$, y por lo tanto $||\exists x \psi(x)|| = 1$.

Collection

Dado $u \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N \rangle}$ y $x \in dom(u)$, existe por el Axioma de Elección un ordinal α_x tal que $\bigvee_{y \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N \rangle}} ||\phi(x,y)|| = \bigvee_{y \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N \rangle}_{\alpha_x}} ||\phi(x,y)||$. Para $\alpha = \{\alpha_x : x \in dom(u)\}$ y v la función con dominio $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N \rangle}$ y rango $\{1\}$, tenemos que :

$$\begin{aligned}
||\forall x \in u \exists y \phi(x,y)|| &= \bigwedge_{x \in dom(u)} (u(x) \rightarrow \bigvee_{y \in \mathbf{V}^{\langle A,N \rangle}} ||\phi(x,y)||) \\
&= \bigwedge_{x \in dom(u)} (u(x) \rightarrow \bigvee_{y \in \mathbf{V}^{\langle A,N \rangle}_{\alpha}} ||\phi(x,y)||) \\
&= \bigwedge_{x \in dom(u)} (u(x) \rightarrow ||\exists y \in v \phi(x,y)||) \\
&= ||\forall x \in u \exists y \in v \phi(x,y)|| \\
&\leq ||\exists w \forall x \in u \exists y \in w \phi(x,y)||.
\end{aligned}$$

Induction

Supongamos $x \in \mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N \rangle}$, luego probaremos su validez por inducción sobre la relación bien fundada $y \in dom(x)$. Consideremos $a = ||\forall x \big[(\forall y \in x \psi(y)) \rightarrow \psi(x)\big]||$.

Por otro lado, supongamos que $a \leq ||\psi(y)||$ para todo $y \in dom(x)$. Entonces, es claro que $a \leq \bigwedge_{y \in dom(x)} ||\psi(y)|| \leq \bigwedge_{y \in dom(x)} \big(x(y) \wedge ||\psi(y)||\big) = ||\forall y \in x \psi(y)||$. Pero $a \leq ||(\forall y \in$

$x\psi(y))|| \to ||\psi(x)||$. Por lo tanto, $a \leq \big(||(\forall y \in x\psi(y))|| \to ||\psi(x)||\big) \wedge ||\forall y \in x\psi(y)|| \leq ||\psi(x)||$.

Por lo anterior, tenemos probado el siguiente teorema:

Teorema 5.8.1. *Sea $\langle \mathbf{A}, N\rangle$ una C_ω-estructura completa tal que $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ verifica la Ley de Leibniz (es decir, es un modelo de Leibniz). Entonces, todos los axiomas de teoría de conjuntos de ZFC_ω son válidos en $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$.*

Ahora, definimos las teorías de conjuntos paraconsistentes $ZFC_{\omega,n}$ con $(n < \omega)$ (y $ZFC_{\omega,\infty}$) de la versión de primer orden de $C_{\omega,n}$ (y $C_{\omega,\infty}$, consulte la Sección 5.2) sobre la asignatura de primer orden Θ_ω que contiene un predicado de igualdad $\approx$, y un predicado binario $\in$ agregando los axiomas esquema de teoría de conjuntos de la Definición 5.7.1. Entonces, también probamos:

Corolario 5.8.2. *Sea $\langle \mathbf{A}, N\rangle$ una $C_{\omega,n}$($C_{\omega,\infty}$)-estructura completa tal que $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$ verifica la Ley de Leibniz (es decir, es un modelo de Leibniz). Entonces, todos los axiomas de teoría de conjuntos de $ZFC_{\omega,n}$ ($ZFC_{\omega,\infty}$) son válidos en $\mathbf{V}^{\langle \mathbf{A},N\rangle}$.*

Por otro lado, tenemos que para nuestras teorías de conjuntos paraconsistentes el axioma esquema **Comprehension** no es válido en nuestros modelos. Para probar esto, basta ver que $||\exists x\forall y(y \in x)|| = 0$, esta fórmula es una instancia de **Comprehension**, ver [58, Teorema 6.3].

6. Capítulo V: Conclusiones finales

6.1. Resumen

Monteiro presentó su noción de congruencia maximal a principios de los años 60. Lo motivó extender su Teorema de Representación para álgebras booleanas al ámbito de ciertas variedades semisimples, la mayoría de ellas con operaciones reticulares. Posteriormente, otros autores ampliaron esta representación para estructuras sin ningún tipo de operación reticular. Estamos bastante seguros de que sus estudios no están motivados en los aspectos lógicos, de los sistemas algebraicos estudiados, como podemos ver en la Definición 3.16 y los comentarios finales de [62] del trabajo de A. Monteiro.

En esta tesis, hemos utilizado este método para presentar un Teorema de Representación para el álgebra de Hilbert n-valuada con supremo y operadores de Moisil, para abreviar $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebras. Además, hemos extendido esta representación para la clase de M-álgebras y hemos exhibido importantes clases de álgebras que de hecho son M-álgebras.

Usando las propiedades algebraicas de la clase de $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebras, hemos probado resultados de correctitud y completitud con respecto a la lógica porposicional y de primer orden de las $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebras; además, hemos extendido la presentación a la clase de M-álgebras.

Para extendernos más allá del alcance de las lógicas algebrizables, hemos adaptado nuestras pruebas algebraicas a una familia de lógicas paraconsistentes de primer orden, que su versión proposicional no son algebrizables, consulte el lema 4.4.4, simplificando la presentación inicial dada en [14].

Para las lógicas de primer orden tratadas en esta tesis, hemos presentado una identidad a través de un axioma y una nueva regla, esta identidad no es clásica. Esta presentación es diferente a otras de la literatura, y sería interesante explorar o desarrollar la Teoría de Modelos asociada a estos sistemas utilizando la presentación de la identidad. Nuestra presentación del predicado identidad es lo suficientemente general como para ser presentada a las lógicas de primer orden estudiadas en [70, 51, 20]. Particularmente estamos interesados en estudiar el caso en que la identidad presenta un *comportamiento fuzzy* sobre las versiones cuantificadas de las lógicas fuzzy y Δ-fuzzy, ver [51].

6.2. Propuesta como trabajo futuro

- Propongo el estudio de teoría de modelos para C_ω y las extensiones estudiadas en [67] usando las F-estructuras, que son semánticas de ellas. Exploraré las nociones de estructura, subestructuras, morfismos, equivalencia elemental. Buscaré las condiciones necesarias y suficientes para tener la equivalencia elemental, nos interesará desarrollar los contenidos técnicos de los teoremas: de compacidad, Löwenheim-Skolemi, Eliminación de cuantificadores, Beth's, Craig's Interpolation, el test de Tarski-Vaught. En los trabajos de Fitting y Martinez, estos temas se abordaron para otras lógicas, pero como el comportamiento de la negación es bastante diferente son de esperar algunas adaptaciones no sean inmediatas.

- Habiendo desarrollado la teoría de modelos para C_ω, intentaré establecer las condiciones para tratar el importante teorema de *la teoría de modelos* que se conoce en inglés como *Condensation Lemma.* Fue probado por Gödel como una herramienta para estudiar la Hipótesis del Continuum (HC) en el contexto de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF), versión clásica.

7. Referencias

[1] M. Abad, *Cyclic and monadic structure of* n*-valued Łukasiewicz algebras* (in Spanish), Ph. D. thesis, Universidad Nacional de Sur, 1987.

[2] F. Almiñana and G. Pelaitay, *Monadic* $k \times j$*-rough Heyting algebras*, Arch. Math. Logic (2021).

[3] A. Avron, *Non-deterministic matrices and modular semantics of rules*, Logica Universalis, 149–167 (2005)

[4] A. Avron, *Non-deterministic semantics for logics with a consistency operator*, International Journal of Approximate Reasoning, 45:271–287, 2007

[5] A. Avron and A. Zamansky, *Many-valued non-deterministic semantics for first-order Logics of Formal (In)consistency*, Algebraic and Proof-theoretic Aspects of Non-classical Logics, pp. 1–24. LNAI 4460, Springer, 2007.

[6] M. Baaz, *Infinite-valued Gödel logics with* 0-1*-projections and relativizations*, In GÖDEL 96, LNL **6**, Hájek P. (Ed.), Springer-Velag, 23–33, 1996.

[7] J. Bell. *Set Theory: Boolean valued models and independence proofs*, Oxford Science Pubblications, 2005.

[8] J. L. Bell. Intuitionistic set theory. *College Publications*. 2014.

[9] W. J. Blok and D. Pigozzi, *Algebraizable Logics*, Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 77, no. 396, 1989.

[10] V. Boicescu and A. Filipoiu and G. Georgescu and S. Rudeanu, *Łukasiewicz - Moisil Algebras*, Annals of Discrete Mathematics 49, North - Holland, 1991.

[11] W. Carnielli and M. Coniglio, *Paraconsistent Logic: Consistency, Contradiction and Negation*, vol. 40, Logic, Epistemology, and the Unity of Science, Basel, Switzerland: Springer International Publishing, 2016.

[12] W. A. Carnielli and J. Marcos. *A taxonomy of C-systems*, Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent, volume 228 of *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, pages 1–94. Marcel Dekker, New York, 2002.

[13] M. E. Coniglio, A. Figallo-Orellano, A. C. Golzio, *Non-deterministic algebraization of logics by swap structures*, Logic Journal of the IGPL, 28:5, 1021–1059 (2020)

[14] M. E. Coniglio, A. Figallo-Orellano and A. C. Golzio, *First-order swap structures semantics for some Logics of Formal Inconsistency*, Journal of Logic and Computation, 30:6, 1257–1290 2020

[15] Coniglio, M., Figallo-Orellano, A., Hernández-Tello, A. and M. Pérez-Gaspar, *G'3 as the logic of modal 3-valued Heyting algebras*, Journal of Applied Logic, 9(1):175-197, 2022.

[16] M. Canals Frau and A. V. Figallo, $(n+1)$*-valued Hilbert modal algebras*, Notas de la Sociedad Matemática de Chile, vol.X, 1(1991), 143–149.

[17] M. Canals Frau and A. V. Figallo, $(n+1)$*-valued modal implicative semilattices*, 1992 Proceedings The 22nd International Symposium on MultipleValued Logic, 190–196. IEEE Computer Society, 1992.

[18] M. C. Canals Frau, A. V. Figallo and G. Pelaitay, *Congruences on bounded Hilbert algebras with Moisil possibility operators*, South American Journal of Logic, 2021

[19] P. Cintula and C. Noguera, *A General Framework for Mathematical Fuzzy Logic*, Handbook of Mathematical Fuzzy Logic 1 (2011): 103–207.

[20] P. Cintula and C. Noguera, *A Henkin-Style Proof of Completeness for First-Order Algebraizable Logics*, Journal of Symbolic Logic 80, no. 1 (2015): 341–58.

[21] R. Cignoli, *Estudio algebraico de lógicas polivalentes. Algebras de Moisil de orden* n, Ph. D. thesis, Universidad Nacional del Sur, Bahia Blanca, 1969.

[22] R. Cignoli, *An algebraic approach to elementary theories based on* n*-valued Łukasiewicz logics*, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 30 (1984), no. 1, 87–96.

[23] R. Cignoli, *Proper n-valued Łukasiewicz algebras as S-algebras of Łukasiewicz n-valued propositional calculi*, Studia Logica 41 (1982), no. 1, 3–16.

[24] R. Cignoli, I. D'Ottaviano and D. Mundici, *Algebraic foundations of many-valued reasoning*, Trends in Logic Studia Logica Library, 7. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000. x+231 pp.

[25] R. Cignoli, *The class of Kleene algebras satisfying an interpolation property and Nelson algebras*, Algebra Universalis, 23, 262-292, 1986.

[26] N. da Costa, *On the theory of inconsistent formal systems*, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. 15, 497–510, 1974.

[27] N. da Costa, *On the theory of inconsistent formal systems (in Portuguese)*, Habilitation thesis, Curitiva. Editora UFPR, Brazil, 1963.

[28] A. Diego, *Sur les algèbres de Hilbert*, Colléction de Logique Math., Serie A, No. 21, Gauthiers-Villars, Paris, (1966).

[29] F. Esteva and L. Godo. *Monoidal t-norm based logic: towards a logic for left-continuous t-norms*, Fuzzy Sets and Systems, 124, 271–288, 2001.

[30] F. Esteva, L. Godo, and F. Montagna, *The $Ł\Pi$ and The $Ł\Pi\frac{1}{2}$ logics: Two complete fuzzy systems joining Lukasiewicz and product logics*, Archive for Mathematical Logic, vol. 40 no. 1, pp. 39-67, 2001.

[31] F. Esteva, L. Godo, P. Hajek and M. Navara, *Residuated fuzzy logics with an involutive negation*, Archive for Mathematical Logic 39, 103–124, 2000.

[32] M. Fidel. *The decidability of the calculi C_n*. Reports on Mathematical Logic, 8:31–40, 1977.

[33] M. Fidel. *An algebraic study of logic with constructive negation.* Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic, Recife 1979, 119-129, 1980.

[34] A. Figallo Orellano, *A preliminary study of MV-algebras with two quantifiers which commute*, Stud. Logica (2016) 104: 931–956.

[35] Aldo Figallo Orellano, *Notes on Hilbert Lattices*, Int. Math. Forum, Vol. 6, 2011, no. 68, 3371–3379.

[36] A. Figallo-Orellano and J. Slagter, *Models for da Costa's paraconsistent set theory.* Workshop Brasileiro de Lógica (WBL) I, Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2020 p. 33-40. https://sol.sbc.org.br/index.php/wbl/article/view/11456

[37] A. Figallo-Orellano and J. Slagter, *An algebraic study of the first order version of some implicational fragments of the three-valued Łukasiewicz logic*, Computación y Sistemas, Vol. 26, No. 2, 2022, pp. 801–813.

[38] A. Figallo-Orellano and J. Slagter, *Monteiro's algebraic notion of maximal consistent theory for Tarskian logics*, Fuzzy Sets and Systems, Volume 445, 2022, Pages 90-122.

[39] A. Figallo-Orellano and J. Slagter, *Possibility operators over n-valued Gödel logic.* Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras, 3(2), 1-15, 2022.

[40] A. Figallo-Orellano, M. Pérez-Gaspar and J. M. Ramírez-Contreras, *Paraconsistent and Paracomplete logics based on k-cyclic modal pseudocomplemented De Morgan algebras*, Stud. Logica, 2022.

[41] A. Figallo Orellano and I. Pascual, *On Monadic Operators on Modal Pseudocomplemented De Morgan Algebras and Tetravalent Modal Algebras*, Stud. Logica 107, 591–611, 2019.

[42] A. Figallo-Orellano, A. Ziliani, M. Figallo, *Symmetric operators on modal pseudocomplemented De Morgan algebras*, Logic Journal of the IGPL, 25: 4, 496–511, 2017.

[43] A. V. Figallo, *$I\Delta_3$-algebras*, Reports on Mathematical Logic, 24, 3–16, 1990.

[44] A.V. Figallo, A. Figallo, Jr., M. Figallo and A. Ziliani, *Łukasiewicz residuation algebras with infimum*, Demonstratio Math. 4, 40, 751–758, 2007.

[45] A. V. Figallo and M. Figallo. *An algebraic construction of Moisil operators in* $(n+1)$-*valued Łukasiewicz propositional calculus*, Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, 21, 131–145, 2013.

[46] A. V. Figallo, G. Pelaitay and J. Sarmiento, *C_n algebras with Moisil possibility operators*, Logic Journal of the IGPL, 28:6, 1141—1154, 2020.

[47] T. Ferguson, *On Non-Deterministic Quantification*, Log. Univers. 8, 165–191, 2014.

[48] J. Font and M. Rius, *An abstract algebraic logic approach to tetravalent modal logics*, J. Symbolic Logic, Vol. 65, (2000), pp. 481–518.

[49] C. Gallardo and A. Ziliani, *A Generalization of Monadic n-Valued Łukasiewicz Algebras*, Stud Logica (2021).

[50] P. Hájek, *Metamathematics of Fuzzy Logic*, volume 4 of Trends in Logic. Kluwer, Dordrecht, 1998.

[51] P. Hájek and P. Cintula. *On Theories and Models in Fuzzy Predicate Logics*, Journal of Symbolic Logic 71 , no. 3, 863–80, 2006.

[52] Leon Henkin, *The completeness of formal systems*, Ph.D. thesis, University of Princeton, 1947

[53] L. Iturrioz, *Łukasiewicz and Symmetrical Heyting algebras*, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math., 23, pp. 131–136, 1977.

[54] L. Iturrioz, *Symmetrical Heyting algebras with a finite order type of operators*, Stud Logica 55, 89–98, 1995.

[55] T.M. Ferguson. *Inconsistent Models (and Infinite Models) for Arithmetics with Constructible Falsity*. Logic and Logical Philosophy. 28, 3 (Aug. 2018), 389–407.

[56] R. Grigolia, *Algebraic analysis of Lukasiewicz–Tarski's n-valued logic systems*, in 836 R. Wójciki, G. Malinowski (eds.), Selected Papers on Lukasiewicz Sentencial Calculi, 837 Ossolineum, Wroclaw, pp. 81–92, 1977.

[57] R. Lewin, I. Mikenberg, and M. Schwarze, *C_1 is not algebraizable*, Notre Dame J. Formal Logic V. 32, N. 4, 609–611, 1991.

[58] B. Löwe and S. Tarafder, *Generalized algebra-valued models of set theory*, Review of Symbolic Logic, 8(1):192–205, 2015.

[59] B. Löwe, R. Paßmann and S. Tarafder. *Constructing illoyal algebra-valued models of set theory.* Algebra Univers. 82, 46 (2021).

[60] E. Mendelson. Introduction to Mathematical Logic, *Wadsworth*, Belmont, CA, third edition, 1987.

[61] A. Monteiro, *Sur les algèbres de Heyting simetriques*, Portugaliae Math., 39, 1-4, 1–237, 1980.

[62] A. Monteiro, *La semi-simplicité des algèbres de Boole topologiques et les systèmes déductifs*, Revista de la Unión Matemática Argentina, 25 (2), 417–448, 1971.

[63] L. Monteiro, *Algèbres de Hilbert $n-$valentes*, Portugaliae Math. 36, 159–174, 1977.

[64] D. Mundici, *Interpretation of AF C^*-algebras in Łukasiewicz sentential calculus*, Journal of Functional Analysis 65(1):15–63, 1986.

[65] S. Odintsov. *Algebraic Semantics for Paraconsistent Nelson's Logic.* Journal of Logic and Computation, Vol. 13 No. 4, 2003.

[66] M. Osorio and J. Carballido. *Brief study of G_3' logic.* Journal of Applied Non-Classical Logics, 18:4, 475–499, 2008.

[67] M. Osorio, A. Figallo-Orellano and M. Pérez-Gaspar. *A family of genuine and non-algebraizable C-systems.* Journal of Applied Non-Classical Logics, 31:1, 56–84, 2021.

[68] G. Priest, *Dualising intuitionistic negation*, Principia, 13, 165–184, 2009.

[69] G. Priest. *Dialetheism.* Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2018.

[70] H. Rasiowa, *An algebraic approach to non-clasical logics*, Studies in logic and the foundations of mathematics, vol. 78. North-Holland Publishing Company, Amsterdam and London, and American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1974.

[71] J. D. Rutledge. *A preliminary investigation of the infinitely many-valued predicate calculus*, Ph.D. Thesis, Cornell University. 1959.

[72] H. P. Sankappanavar. Heyting algebras with dual pseudocomplementation. *Pacific Journal of Mathematics.* 117(2): 405–415, 1985.

[73] I. Thomas, *Finite limitations on Dummett's LC*, Notre Dame Journal of Formal Logic, 3, 170–174, 1962.

[74] R. Wójcicki, *Lectures on propositional calculi*, Ossolineum, Warsaw, 1984.

[75] A. Ziliani, *Monadic* 4*-valued modal De Morgan algebras* (in Spanish), Ph.D. thesis, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 2001.