



Universidad Nacional del Sur

TESIS DE DOCTOR EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

*Confianza y reputación de agentes en sistemas multi-agente  
para entornos dinámicos.*

Federico Joaquín

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2023



# Prefacio

Esta tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctor en Ciencias de la Computación de la Universidad Nacional del Sur, y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación durante el período comprendido entre el 13 de Junio de 2017 y el 25 de Abril de 2023, bajo la dirección del Dr. Alejandro J. García, Profesor Titular del Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación y del Dr. Luciano H. Tamargo, Profesor Adjunto del Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación.

Ing. Federico Joaquín

`federico.joaquin@cs.uns.edu.ar`

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Bahía Blanca, 25 de Abril de 2023



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR  
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el .... / .... / ....., mereciendo  
la calificación de .....(.....)



# Agradecimientos

Esta tesis es el resultado de muchos años de esfuerzo compartido. Desde lo académico, quiero agradecer principalmente a mis dos directores, los doctores Alejandro J. García y Luciano H. Tamargo, porque sin ellos esto no hubiese sido posible. Desde que comenzamos a transitar el recorrido para la concreción de esta tesis, siempre hemos trabajado codo a codo, con pasión, entusiasmo, pero por sobre todas las cosas con una sinergia que ha hecho de todo este trabajo en equipo, algo que hemos disfrutado los tres a tiempo completo. Les agradezco las charlas, los consejos, los desafíos propuestos, y el haberme transmitido todas sus herramientas y toda su gran experiencia, sin ningún recelo. Les agradezco particularmente la paciencia, el acompañamiento permanente, y su excelentísima calidad humana.

Desde el punto de vista institucional, merece mi agradecimiento toda la comunidad del Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación (*DCIC*). Desde que comencé mis estudios de grado en la Universidad Nacional del Sur (*UNS*), el *DCIC* ha sido siempre mi segunda casa. A todo el personal docente y no docente que, todos los días, hace que ir a trabajar sea algo placentero. A todos mis compañeros de la Sala de Becarios, que luego de muchas charlas, mates y asados, hemos formado una buena amistad. A la *UNS*, por haberme brindado la oportunidad no solo de mi formación profesional de grado y posgrado, sino también por permitirme retribuirle a la comunidad todos los días, como docente, algo de todo lo que he recibido en esta casa de estudios. Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (*CONICET*), mi agradecimiento por haberme brindado el sustento necesario para el desarrollo y finalización de mi doctorado.

Por último, quiero dedicarle este trabajo a mi familia. En particular, a mis dos padres, Gustavo y Silvia, a los que les agradezco porque con todos sus esfuerzos a lo largo de la vida, me han permitido la posibilidad de elegir con total libertad el camino profesional que inicié hace varios años en la *UNS*, y no solo esto, sino que han acompañado todo mi

trayecto desde entonces y hasta la culminación de esta tesis, toda vez que los he necesitado. Sin ellos, ningún esfuerzo personal hubiese alcanzado. Además, quiero agradecerle muy especialmente a Mani, mi compañera de vida. Hace muchos años que transitamos la vida juntos, y en estos últimos seis años es quien mejor ha comprendido la profundidad y el alcance del trabajo que conlleva esta carrera. Esto no solo por su incondicionalidad y su excelente calidad humana, sino porque ha transitado conmigo tanto los momentos de plena felicidad, como también los días más complejos y abrumadores. Por entenderme, por acompañarme, por quererme y hacerme mejor persona, gracias.

Federico Joaquín

Bahía Blanca, 27 de Junio de 2023.

# Resumen

Esta tesis doctoral se enfoca en la representación y la dinámica de los sistemas computacionales de reputación y confianza multi-contexto en Sistemas Multi-Agente. Para abordar tanto la representación como la dinámica, se propone el uso de órdenes parciales de credibilidad, que representan las creencias que un agente mantiene asociadas al nivel de confianza existente entre diferentes agentes. Cada orden podrá estar asociado a un determinado contexto o tópico. De esta forma, la información de confianza que mantengan los agentes puede ser usada en dominios de aplicación donde se requiere de sistemas computacionales de reputación y confianza multi-contexto. En particular, la confianza será representada de manera simbólica, esto es, mediante un conjunto de elementos de credibilidad que indican que un agente es más creíble que otro. Esto será especialmente útil para modelar situaciones donde la relación de credibilidad entre dos agentes aún no ha sido establecida, esto es, cuando dos o más agentes se mantienen incomparables. Se favorecerá el uso de la palabra credibilidad para referir a la confianza de los agentes, ya que esta palabra tiene un sentido intuitivo que ayuda a comprender los problemas relacionados.

Los valores de confianza entre agentes representan valoraciones que pueden modificarse con el tiempo. En consecuencia, los órdenes parciales de credibilidad que se plantean utilizar no necesariamente permanecerán estáticos. Particularmente, un orden de credibilidad entre agentes puede actualizarse con información de otro orden de credibilidad para así obtener información útil para la toma de decisiones. Es por ello que en esta tesis se propone un modelo de confianza simbólico y multi-contexto, donde los contextos pueden relacionarse mediante una taxonomía de contextos. Además, en esta investigación se presenta la formalización de dos operadores de cambio múltiple sobre órdenes parciales de credibilidad entre agentes. En la búsqueda de una herramienta que pueda utilizarse para la toma de decisiones usando el formalismo propuesto, se introduce el análisis y formalización de tres funciones de selección que permiten decidir qué información prevalece en

situaciones conflictivas ante la revisión de dos órdenes de credibilidad. Basado en el formalismo propuesto, en esta tesis se introduce el desarrollo de una aplicación con interfaz gráfica de usuario que implementa el operador de revisión múltiple priorizada, y permite visualizar su comportamiento.

# Abstract

This Thesis focuses on the representation and dynamics of multi-context reputation and trust computational systems in Multi-Agent Systems. To address both representation and dynamics, the use of partial credibility orders is proposed, which represent the beliefs that an agent maintains associated with the level of trust existing between different agents. Each order may be associated with a specific context or topic. In this way, the trust information maintained by agents can be used in application domains where multi-context trust and reputation systems are required. In particular, trust will be represented symbolically, that is, through a set of credibility elements that indicate that one agent is more credible than another. This will be especially useful to model situations where the credibility relationship between two agents has not yet been established, that is, when two or more agents remain incomparable. We will favor the use of the word credibility to refer to the trust of agents as this particular word carries an intuitive sense that helps to understand the related problems.

The trust values among agents represent valuations that can vary or change over time. Consequently, the partial credibility orders that are proposed to be used will not necessarily remain static. In particular, a credibility order among agents can be updated with information from another credibility order in order to obtain useful information for decision making. For this reason, in this Thesis a symbolic and multi-context trust model is proposed, where contexts can be related through a taxonomy of contexts. In addition, this research presents the formalization of two multiple change operators on partial credibility orders among agents. In order to achieve a tool that can be used for decision-making using the proposed formalism, the analysis and formalization of three selection functions that allow deciding which information prevails in conflicting situations before the revision of two credibility orders is introduced. Based on the proposed formalism, this Thesis intro-

duces the development of an application with a graphical user interface that implements the prioritized multiple revision operator, and allows visualizing its behavior.

**Certificamos que en la versión final digital de tesis presentada fueron incluidos los cambios y correcciones sugeridas por el jurado.**

**Dr. Alejandro J. García**

ajg@cs.uns.edu.ar

PROFESOR TITULAR

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

**Dr. Luciano H. Tamargo**

lt@cs.uns.edu.ar

PROFESOR ADJUNTO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Contexto en el que se desarrolla esta tesis . . . . .	4
1.2. Contribuciones . . . . .	6
1.3. Publicaciones . . . . .	10
1.4. Organización de la tesis . . . . .	11
<b>2. Conceptos Preliminares</b>	<b>15</b>
2.1. Sistemas de reputación y confianza . . . . .	15
2.1.1. Modelos numéricos y simbólicos . . . . .	18
2.1.2. Modelos de simple y multi-contexto . . . . .	20
2.2. Revisión de creencias en un <i>SMA</i> . . . . .	23
2.2.1. Revisión simple y múltiple . . . . .	29
2.2.2. Revisión priorizada y no priorizada . . . . .	30
2.2.3. Revisión de órdenes parciales de credibilidad . . . . .	32
2.3. Resumen . . . . .	40
<b>3. Cambio múltiple priorizado sobre órdenes de credibilidad</b>	<b>41</b>
3.1. Modelo de representación . . . . .	43
3.2. Cambio múltiple priorizado mediante revisión . . . . .	49
3.2.1. Postulados para la revisión múltiple priorizada . . . . .	50

3.2.2.	Construcción de un operador de revisión múltiple priorizada . . . . .	51
3.2.3.	Teorema de representación . . . . .	57
3.3.	Implementación de un operador de revisión múltiple priorizada . . . . .	57
3.4.	Correspondencia entre la implementación y el operador de revisión múltiple priorizada . . . . .	64
3.5.	Definición de funciones de incisión . . . . .	65
3.5.1.	Total Selection Function (TSF) . . . . .	66
3.5.2.	Lexicographic Selection Function (LSF) . . . . .	66
3.5.3.	Least Credible Selection Function (LCSF) . . . . .	67
3.6.	Resumen . . . . .	68
<b>4.</b>	<b>Herramientas computacionales desarrolladas</b>	<b>69</b>
4.1.	Aplicación con interfaz gráfica de usuario . . . . .	70
4.2.	Análisis del comportamiento de las funciones de incisión . . . . .	81
4.2.1.	Análisis cualitativo . . . . .	82
4.2.2.	Análisis empírico . . . . .	88
4.3.	Resumen . . . . .	91
<b>5.</b>	<b>Representación de la confianza en un modelo multi-contexto</b>	<b>93</b>
5.1.	Modelo de representación multi-contexto . . . . .	95
5.2.	Extensión de un orden de credibilidad mediante una taxonomía de contextos	101
5.2.1.	Cómputo por compilación . . . . .	104
5.2.2.	Cómputo optimizado para ambientes dinámicos . . . . .	107
5.3.	Aplicación del modelo multi-contexto en un escenario real . . . . .	109
5.3.1.	Ejemplo de aplicación . . . . .	110
5.3.2.	Integrando diferentes <i>rankings</i> para un tópico específico . . . . .	111
5.3.3.	Integrando diferentes <i>rankings</i> de varios tópicos . . . . .	112
5.3.4.	Conclusiones . . . . .	113
5.4.	Resumen . . . . .	114

ÍNDICE GENERAL	1
<b>6. Cambio múltiple no priorizado sobre órdenes de credibilidad</b>	<b>117</b>
6.1. Cambio múltiple no priorizado mediante mezcla . . . . .	118
6.1.1. Postulados para mezcla . . . . .	122
6.1.2. Construcción de un operador de mezcla . . . . .	123
6.1.3. Teorema de representación . . . . .	126
6.2. Implementación del operador de mezcla . . . . .	128
6.3. Correspondencia entre la implementación y el operador de mezcla . . . . .	133
6.4. Definición de funciones de incisión . . . . .	134
6.4.1. <i>TSF</i> y <i>LSF</i> en el contexto de una mezcla . . . . .	136
6.4.2. <i>LCSF</i> para mezcla . . . . .	137
6.5. Resumen . . . . .	143
<b>7. Trabajo Relacionado</b>	<b>145</b>
7.1. Modelos de reputación y confianza . . . . .	146
7.1.1. Modelos numéricos . . . . .	148
7.1.2. Modelos simbólicos . . . . .	153
7.2. Dinámica de la credibilidad . . . . .	160
7.2.1. Operadores de revisión propuestos en [TGFS14] . . . . .	162
7.2.2. Operador de revisión propuesto en [JTGG21] . . . . .	163
7.2.3. Comparación de operadores . . . . .	163
<b>8. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>175</b>
<b>A. Pruebas Formales</b>	<b>179</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Esta tesis se enfoca en el área de confianza y reputación de agentes en sistemas multi-agente, abordando el análisis, desarrollo y formalización de la dinámica de la confianza de los agentes, a partir de la interacción con sus pares en el marco de un sistema multi-agente. Esto involucra el desarrollo y formalización de técnicas de representación y actualización del grado de confianza de un agente y, también, la integración de estas técnicas con mecanismos de razonamiento automático y dinámica de creencias.

Para abordar tanto la representación como la dinámica de la confianza, en esta tesis se propone el uso de órdenes parciales de credibilidad. Los elementos de estos órdenes de credibilidad representarán las creencias que un agente mantiene asociadas al nivel de confianza existente entre diferentes agentes. Cada orden podrá estar asociado a un determinado contexto o tópico y, de esta forma, la información de confianza que mantengan los agentes podrá ser multicontexto. En particular, la confianza será representada de manera simbólica, esto es, mediante elementos de credibilidad que indican que un agente es más creíble que otro.

Los valores de confianza entre agentes representan valoraciones que pueden variar o modificarse con el tiempo. En consecuencia, los órdenes parciales de credibilidad que se plantean utilizar no necesariamente permanecerán estáticos. Con esto en mente, esta tesis abordará el tratamiento de la dinámica de los valores de confianza, mostrando cómo información de diferentes órdenes de credibilidad puede ser utilizada en conjunto. Para esto, se presentará una familia de operadores de cambio múltiple, esto es, operadores que permiten abordar la dinámica de un orden de credibilidad dado, integrando su información junto con la información proveniente de otro orden de credibilidad.

En esta tesis se definirán dos tipos de operadores de cambio múltiple sobre órdenes de credibilidad: uno priorizado y otro no priorizado. Estos proveerán las herramientas necesarias para que un agente pueda modificar la percepción de confianza que tiene de otros agentes, incorporando información que proviene de diferentes fuentes y/o contextos. Al incorporar información a un orden, pueden surgir contradicciones, y para resolverlas se especificarán diferentes criterios para la resolución de las mismas.

Los operadores serán especificados de dos maneras: por un lado, dando un conjunto de postulados de racionalidad y, por otro, dando una construcción explícita de los mismos. Los postulados de racionalidad determinarán las restricciones que los operadores deben satisfacer. La construcción explícita, en cambio, indicará cómo lograr el comportamiento esperado.

En la búsqueda de alcanzar una herramienta que pueda utilizarse para la toma de decisiones usando el formalismo propuesto, a lo largo de esta tesis se describirán diferentes funciones que permiten la implementación completa de los dos tipos de operadores de cambio. Estas funciones no solo serán descritas y formalmente contrastadas con los operadores de cambio sino que también podrán observarse y analizarse en funcionamiento a partir de una aplicación con interfaz gráfica de usuario desarrollada para tal fin. Además, también se incorporará los resultados obtenidos luego de diferentes experimentos realizados con foco en la evaluación del funcionamiento de estos operadores.

Junto con la definición del modelo de representación simbólico de la confianza, en esta tesis se presentará una extensión del formalismo que permitirá considerar la confianza en diferentes contextos. En particular, se presentará una alternativa para modelar relaciones de especialización y preferencia entre los contextos. A partir de estas relaciones, luego, se definirán dos funciones mediante las cuales la información de un orden de credibilidad de un determinado contexto puede extenderse con información que proviene de otros órdenes de credibilidad de contextos relacionados. Esta extensión considerará las diferentes relaciones existentes entre los contextos, y se llevará a cabo haciendo uso del operador de cambio múltiple priorizado.

En lo que resta de este capítulo se presentará brevemente el contexto en el cual se desarrolla esta tesis, y se describirán las principales contribuciones y resultados obtenidos. También se indicará la organización del resto de la tesis, detallando brevemente el contenido de los capítulos siguientes.

## 1.1. Contexto en el que se desarrolla esta tesis

La importancia de la reputación y la confianza ha sido ampliamente reconocida tanto por las sociedades humanas como por las sociedades en entornos virtuales [ARH00, SMS01, PSM13]. En Ciencias de la Computación, la evaluación de la reputación y confianza es un elemento clave para la implementación de métodos que permitan minimizar la incertidumbre en las interacciones entre personas/agentes de software [RHRJ04, Pra07] que forman parte de un Sistema Multi-Agente (*SMA*). Ejemplo respecto de esto es la proliferación de plataformas y servicios en línea [eBa, Ama, OnS, Goo, Tri, Boo] que ofrecen mecanismos para computar un valor de confianza para los usuarios o proveedores de servicios en relación con su comportamiento o aptitudes. En esos diversos dominios de aplicación, se requieren de modelos computacionales de reputación y confianza. Tal es así, que estos modelos computacionales han sido reconocidos como un factor clave en el diseño e implementación de los *SMA* abiertos [PSMDP12].

Un *SMA* abierto se puede caracterizar como un sistema donde los agentes que lo conforman tienen diferentes objetivos y metas, y particularmente porque estos pueden libremente ingresar y salir del sistema [GTGS18]. Dada la incertidumbre del comportamiento de los agentes dentro de un *SMA* abierto, es necesario disponer de mecanismos que favorezcan el proceso de reconocimiento de agentes confiables [PSM13]. Como la estimación de la reputación y confianza suele depender del contexto, existe un interés creciente por aquellos modelos que consideran específicamente la naturaleza multi-contexto de estos valores. Por ejemplo, el grado de confianza que se le asigna a un médico que prescribe un medicamento puede ser totalmente diferente al grado de confianza que se le puede asignar al mismo médico en la recomendación de qué computadora comprar. Este sencillo ejemplo de la vida real es trasladable a lo que sucede en diferentes dominios de aplicación de los *SMA*. En este sentido, el cálculo de la reputación y confianza de los agentes que prestan servicios, o la credibilidad de la información disponible que un usuario desea consultar, depende claramente del tópico o contexto en la que se los evalúa.

Como se explica en [JTG21], la mayoría de los modelos de reputación y confianza utilizan calificaciones que se expresan en términos absolutos, es decir, como valores de una escala numérica predefinida o como etiquetas lingüísticas que indican un orden total. Expresar calificaciones absolutas puede ser difícil [SS11] y también susceptible al sesgo del usuario: en estos modelos, por lo general, los usuarios tienden a dar retroalimentaciones siempre positivas en lugar de negativas [DKP13, RZ02], no se puede establecer un criterio

idéntico entre los usuarios para asignar calificaciones, y sucede también que el mismo valor absoluto puede representar cosas diferentes entre diferentes usuarios [HCF14]. A partir de lo anterior, es claro que los modelos numéricos presentan ciertas características negativas a la hora de representar la reputación y confianza entre agentes. Para mitigar esos problemas, una alternativa a las calificaciones absolutas son las comparaciones por pares: en lugar de solicitar a los usuarios que califiquen sus percepciones con valores absolutos, se ha mostrado más efectivo que estas percepciones puedan ser expresadas como preferencias entre pares de alternativas [TGFS14, HCF14, TGGS16, CH18, JTGG21]. De acuerdo con [BC12], expresar tales comparaciones por pares constituye, además de lo anterior, una mejor experiencia para el usuario.

Un aspecto relevante de los modelos de reputación y confianza concierne al tratamiento de la dinámica de estos valores. Esto es así dado que los agentes de un *SMA* pueden decidir actualizar la credibilidad que le asignan a otros agentes en cualquier momento. La dinámica puede abordarse de diferentes formas, por ejemplo: cómo actualizar los valores que un agente mantiene sobre otros ante la llegada de nueva información, cómo resolver información potencialmente inconsistente, cómo priorizar información que proviene de fuentes más fiables que otras, *etc.* Por lo general, los modelos de reputación y confianza permiten estas actualizaciones asumiendo que la nueva información recibida consta de un único valor. Por lo tanto, cuando se requiere el tratamiento de nueva información que consta de varios valores de reputación o confianza, esta debe ser procesada como una secuencia de valores únicos. Sin embargo, el orden en que se procesan esos elementos puede afectar significativamente el resultado final.

Durante el desarrollo de esta tesis, el trabajo direccionará varias cuestiones enunciadas previamente. Por un lado, se desarrollará un modelo en el que la confianza está representada de manera *contextualizada*, esto es, donde un agente puede percibir diferentes grados de confianza respecto de otros agentes dependiendo del contexto en el que los esté evaluando. Además, la confianza se representará de manera *simbólica*, tratando de contrarrestar los principales problemas que emergen de los modelos numéricos. Por otro lado, se trabajará sobre la dinámica de la confianza haciendo uso de operadores que permiten la actualización de estos valores por un conjunto de valores nuevos procesados todos a la vez y no de manera secuencial.

En resumen, este trabajo conjugará aspectos de varias áreas de Ciencias de la Computación: sistemas multi-agente (*multi-agent system*), revisión de creencias en sistemas

multi-agente (*multi-agent belief revision*) y sistemas computacionales de reputación y confianza (*trust and reputation*). Algunas de las principales contribuciones durante el desarrollo de esta tesis junto con algunos ejemplos que muestran su aplicación se detallan a continuación.

## 1.2. Contribuciones

Las principales contribuciones de esta tesis pueden describirse como sigue:

### **Definición de un Modelo de confianza simbólico y multi-contexto.**

En esta tesis se propone un modelo que permite representar la confianza de forma simbólica y multi-contexto. La representación simbólica estará dada a través de comparaciones por pares de agentes que conducen a órdenes parciales de credibilidad entre agentes. Esta información, además, podrá estar asociada a diferentes tópicos donde cada agente es evaluado, permitiendo así, contextualizar la información. Los contextos, además, podrán relacionarse mediante una taxonomía de contextos. Con estas relaciones, luego, información de contextos relacionados podrá ser utilizada de forma integrada.

La importancia de los modelos simbólicos no solo radica en que permiten mitigar algunas problemáticas de los modelos numéricos, sino también porque presentan una característica que los torna muy atractivos: las calificaciones dadas conllevan a una relación de orden parcial entre agentes, a diferencia de los modelos numéricos que, por naturaleza, dan lugar a relaciones de orden total. Para comprender esto último, considere el siguiente ejemplo.

Asuma que un agente llamado *Robin* tiene que decidir si comprar un teléfono inteligente  $P$ . Este agente ha recibido consejos de otros agentes: los agentes  $A_1$  y  $A_2$  le sugieren comprar el teléfono  $P$ , mientras que los agentes  $A_3$  y  $A_4$  le sugieren no comprar el teléfono  $P$ . *Robin* confía en estos agentes de manera diferente. En función de la información con la que cuenta, *Robin* considera que  $A_1$  es más confiable que  $A_2$  y que  $A_3$  es más confiable que  $A_4$  (lo que se notará de ahora en más como  $A_1 > A_2$  y  $A_3 > A_4$ ). Observe que *Robin* modela la información de forma simbólica y, en consecuencia, permite que los agentes  $A_1$  y  $A_2$  no se encuentren comparados con los agentes  $A_3$  y  $A_4$ . Este es un ejemplo que muestra, de manera muy simple, que los modelos simbólicos son útiles en escenarios donde es necesario mantener órdenes parciales para representar la confianza entre agentes. Esto

es especialmente útil para modelar situaciones donde no se cuenta con información que permita fijar una relación de orden entre algunos de los agentes participantes. En este mismo ejemplo, es válido pensar que *Robin* no ha podido determinar si  $A_2$  es más o menos confiable que  $A_3$  o  $A_4$ , por diferentes razones. Si la representación fuese numérica, en cambio, no se tendría forma de modelar este escenario. Por ejemplo, para lograr relaciones equivalentes a las indicadas anteriormente, *Robin* podría valorar la confianza de  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  y  $A_4$  con los valores numéricos 2, 1, 4 y 3 respectivamente. Sin embargo, estas valoraciones obligan a concluir que  $A_3 > A_2$  y  $A_4 > A_1$ , por ejemplo, cuando en realidad esto no refleja lo que realmente el agente *Robin* conoce.

Por otro lado, los modelos multi-contexto son especialmente útiles porque permiten que un agente perciba diferentes grados de confianza respecto de otros agentes dependiendo del contexto en el que los esté evaluando. Refinando el ejemplo presentado previamente, considere que la información que *Robin* mantiene,  $A_1 > A_2$  y  $A_3 > A_4$ , está asociada al contexto *Teléfonos Inteligentes*. En función de que la información ahora está contextualizada, es posible también imaginar que *Robin* mantenga información que le indica que  $A_2 > A_1$  en otro contexto, por ejemplo, *Artículos de Camping*. Note que al ser dos contextos diferentes, la información puede ser coincidente, relacionar diferentes agentes, o hasta incluso totalmente opuesta. Si se piensan los agentes  $A_1$  y  $A_2$  como vendedores de una gran cadena de electrodomésticos y accesorios para el hogar, bien podría suceder que  $A_1$  es el vendedor que se especializa en la venta de *Teléfonos Inteligentes* mientras que  $A_2$  es el que se especializa en la venta de *Artículos de Camping*. Esto le permite a *Robin* tomar, en función de cada escenario a considerar, mejores decisiones.

Relacionar los contextos mediante una taxonomía toma importancia en los escenarios en los que se observa falta de información. Note que, aunque incorporar información que especifica el contexto en el que un agente es valorado podría resultar trivial (por ejemplo, incorporando al dato que modela el grado de confianza una etiqueta que indica en qué contexto este valor es considerado), lo que no resulta trivial es la forma de relacionar la información disponible en diferentes contextos. Los modelos numéricos han ensayado diversas alternativas que tienden a integrar valores de confianza de diferentes contextos a través de, por ejemplo, el promedio o la ponderación pesada de dichos valores. Sin embargo, resulta complejo argumentar por qué estos cálculos podrían o no tener sentido a la hora de dicha integración. En esta tesis se propone un modelo que incorpora una taxonomía de contextos, permitiendo relacionar los mismos mediante relaciones de especialización o

preferencia que pueden claramente explicarse. Estas relaciones servirán, luego, para que la información de contextos relacionados pueda ser utilizada de forma integrada, resolviendo situaciones donde la falta de información imposibilita comparar agentes.

Por ejemplo, considere nuevamente el escenario propuesto para el agente *Robin*. Si este agente observa la información del contexto *Teléfonos Inteligentes* para resolver si comprar o no el teléfono *P*, no es posible arribar a una conclusión dado que, la confianza de los agentes  $A_1$  y  $A_3$  no puede ser comparada. Sin embargo, asuma que *Robin* cuenta con más información de otros contextos. Además de que  $A_2 > A_1$  vale para el contexto *Artículos de Camping*, asuma que *Robin* sabe que en el contexto *Dispositivos Electrónicos*,  $A_2 > A_3$ . En este nuevo escenario, si *Robin* establece que entre alguno de estos contextos existe alguna relación, por ejemplo, que el contexto *Dispositivos Electrónicos* es un tópico más general que el contexto *Teléfonos Inteligentes*, la información del contexto más general podría utilizarse en el contexto más específico para lograr que agentes incomparables se vuelvan comparables. De esta forma, al integrar la información del contexto *Dispositivos Electrónicos* ( $A_2 > A_3$ ) con la del contexto *Teléfonos Inteligentes* ( $A_1 > A_2$  y  $A_3 > A_4$ ), note que *Robin* lograría un *ranking* entre agentes que establece que el agente  $A_1$  es el más confiable de los cuatro y, en consecuencia, podría optar por la opción de comprar el teléfono *P*, tal como el agente  $A_1$  le recomendaba.

### **Formalización de dos operadores de cambio múltiple sobre órdenes parciales de credibilidad entre agentes.**

En esta tesis se introducirá la formalización de dos operadores de cambio múltiple los cuales permitirán abordar la dinámica de la confianza entre agentes. La dinámica de la confianza refiere a cómo actualizar los valores de confianza que un agente mantiene sobre otros ante la llegada de nueva información. Teniendo en cuenta el modelo que se utilizará para representar la confianza, los operadores trabajarán sobre órdenes parciales entre agentes. Luego, el proceso de cambio consistirá en tomar la información de dos órdenes parciales dados, e integrar esta información en un nuevo orden parcial. La integración consiste en unir la información de ambos órdenes parciales, resolviendo las potenciales inconsistencias que surjan en dicho proceso.

Para ejemplificar el comportamiento de los operadores, considere nuevamente el ejemplo introducido previamente. En el mismo, el agente *Robin* mantenía información en tres contextos diferentes: en el contexto *Teléfonos Inteligentes*, las relaciones  $\{A_1 > A_2, A_3 > A_4\}$ ; en el contexto *Artículos de Camping*, las relaciones  $\{A_2 > A_1\}$ ; mientras que en

el contexto *Dispositivos Electrónicos*, las relaciones  $\{A_2 > A_3\}$ . Note que, cada uno de estos conjuntos de relaciones, en sus respectivos contextos, definen tres órdenes parciales entre agentes. Considere de ahora en más dichos órdenes notados como  $\mathcal{O}_{Tel}$ ,  $\mathcal{O}_{Camp}$ ,  $\mathcal{O}_{Elec}$  respectivamente. Luego, en escenarios donde la información de un orden debe integrarse con otra ante, por ejemplo, falta de información para comparar dos agentes como le sucedía al agente *Robin* para decidir si comprar o no un teléfono  $P$ , un proceso de cambio múltiple puede ejecutarse. Así, la información de los órdenes  $\mathcal{O}_{Tel}$  y  $\mathcal{O}_{Elec}$  debería integrarse. Note que al integrar los valores de confianza de ambos órdenes, se obtiene un nuevo orden parcial  $\mathcal{O}_{R_1} = \{A_1 > A_2, A_2 > A_3, A_3 > A_4\}$ . En particular,  $\mathcal{O}_{R_1}$  es coincidente con la unión de ambos órdenes dado que, la información entre ambos no presentó ningún conflicto. Sin embargo, si se considerara integrar los órdenes parciales  $\mathcal{O}_{Tel}$  y  $\mathcal{O}_{Camp}$ , el resultado no podría ser simplemente la unión  $\{A_1 > A_2, A_2 > A_1, A_3 > A_4\}$  dado que, este orden modelaría tanto que  $A_1 > A_2$  y  $A_2 > A_1$ , lo que en el modelo propuesto se distinguirá como una contradicción, situación no permitida para un orden parcial entre agentes. Los operadores de cambio múltiple, entonces, deben determinar qué información prevalece ante estas situaciones: en este ejemplo, si en el orden resultante prevalece la relación  $A_1 > A_2$ , la relación  $A_2 > A_1$ , o ninguna de las dos.

Los operadores de cambio múltiple que se propondrán en este trabajo se diferenciarán en si se le da prioridad o no al orden de credibilidad de entrada. Considerando que la integración se realiza entre  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ , diremos que el proceso de cambio es priorizado si los elementos de  $\mathcal{O}_2$  se encuentran protegidos, esto es, en el caso de un conflicto, la información que prevalecerá en el orden resultante corresponde a la de  $\mathcal{O}_2$ . Este cambio múltiple también se denomina revisión priorizada de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$ . Por el contrario, cuando ninguno de los órdenes de credibilidad intervinientes tienen prioridad, esto es, el proceso de cambio es no priorizado, tanto los elementos de  $\mathcal{O}_1$  como los de  $\mathcal{O}_2$  son igualmente tratados ante un conflicto. Este cambio múltiple también se denomina mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ .

Si se retoma nuevamente el ejemplo analizado, se podrían distinguir dos escenarios bien diferenciados. Ante la revisión de  $\mathcal{O}_{Tel}$  por  $\mathcal{O}_{Camp}$ , dado que  $\mathcal{O}_{Camp}$  tiene prioridad en el proceso de cambio múltiple, entonces el orden resultante sería  $\mathcal{O}_{R_2} = \{A_2 > A_1, A_3 > A_4\}$ . Note que, con tan solo modificar el orden en el que la revisión es aplicada, esto es, si se considerara revisar la información de  $\mathcal{O}_{Camp}$  por  $\mathcal{O}_{Tel}$ , entonces el orden resultante sería  $\mathcal{O}_{R_3} = \{A_1 > A_2, A_3 > A_4\}$ . A partir de lo anterior, es evidente que priorizar o no un

orden tiene un efecto claramente condicionante en el resultado. Observando otra vez el escenario en el que el agente *Robin* debía tomar una decisión respecto del contexto *Teléfonos Inteligentes* y, dado que este contexto era más específico que el contexto *Dispositivos Electrónicos*, para esta situación sería esperable que la integración de la información se realice mediante la revisión de  $\mathcal{O}_{Elec}$  por  $\mathcal{O}_{Tel}$  dándole justamente prioridad a la información del contexto más específico donde se debe tomar la decisión. Note, sin embargo, que más allá de esto, como  $\mathcal{O}_{Tel}$  y  $\mathcal{O}_{Elec}$  no presentan contradicción alguna, en este caso la revisión de  $\mathcal{O}_{Tel}$  por  $\mathcal{O}_{Elec}$  es coincidente con la revisión de  $\mathcal{O}_{Elec}$  por  $\mathcal{O}_{Tel}$ . Si por el contrario a lo descrito anteriormente, se estuviese integrando información entre órdenes parciales en el que no existe una aparente relación de preferencia o prioridad (como el caso del contexto más específico por sobre el más general), entonces el operador de cambio múltiple no priorizado podría ser el adecuado, efectuando entonces una mezcla sin darle prioridad a ninguno de los órdenes parciales entre agentes intervinientes.

### **Desarrollo de una aplicación con interfaz gráfica de usuario para visualizar el comportamiento del operador de cambio múltiple priorizado.**

A partir de la definición formal tanto del modelo de confianza como del operador de cambio múltiple priorizado, en esta tesis se propone una implementación tanto del modelo como de dicho operador. Para esto, se definirán librerías que permiten crear, modificar y manipular diferentes órdenes de credibilidad, así como también librerías que implementan el comportamiento del operador de revisión múltiple priorizado.

Junto con las librerías, se presentará el desarrollo de una interfaz gráfica de usuario que permite, a través del uso de estas librerías, que un usuario haga uso de estas funcionalidades con relativa simplicidad, permitiendo a la vez observar de forma intuitiva cómo el proceso de cambio múltiple priorizado es llevado a cabo. El proceso de cambio quedará explicado en esta interfaz gráfica de usuario mediante la incorporación de información correspondiente a cada una de las etapas que permiten su implementación, plasmando esta información de forma gráfica.

## **1.3. Publicaciones**

Parte de los resultados obtenidos durante el desarrollo de esta tesis fueron publicados en revistas de la especialidad. A continuación, se detallan dichos trabajos:

- En el trabajo “*Formalization and implementation of credibility dynamics through prioritized multiple revision*” [JTG22] publicado en la revista *International Journal of Approximate Reasoning* (2022) se formalizó un operador de revisión múltiple priorizado, que será descrito en el Capítulo 3. Parte del trabajo aborda también la implementación de este operador mediante una aplicación con interfaz gráfica de usuario. Tanto los algoritmos como la aplicación serán analizados y descritos a lo largo del Capítulo 4.
- En el trabajo “*A taxonomy approach for multi-context trust: formalization and implementation*” [JTG19] publicado en la revista *Expert Systems With Applications* (2019) se desarrollaron algoritmos para implementar la extensión de un orden parcial de credibilidad por otro relacionado mediante una jerarquía de contextos. En particular, también fueron presentadas diferentes funciones que permiten resolver las situaciones conflictivas que surgen cuando la información entre los órdenes es contradictoria. La correspondencia entre el operador de revisión múltiple priorizada presentado en el trabajo anterior y los algoritmos para extender un orden de credibilidad por otro será dado en el Capítulo 3. La descripción de las funciones que permiten resolver situaciones donde la información entre dos órdenes de credibilidad entra en conflicto será incorporada en el Capítulo 3. Además, un análisis cualitativo y cuantitativo sobre el funcionamiento de dichas funciones será presentado durante el Capítulo 4. Por último, la formalización del modelo multi-contexto que representa la información de confianza de forma contextualizada y que permite relacionar los contextos mediante una taxonomía se desarrollará en el Capítulo 5.

## 1.4. Organización de la tesis

El resto de la tesis se organiza de la siguiente manera:

- En el Capítulo 2 se analizarán brevemente los principales conceptos de las diferentes áreas de investigación que involucran esta tesis: sistemas computacionales de reputación y confianza y revisión de creencias en sistemas multi-agente.
- En el Capítulo 3 se introducirá el modelo de representación de confianza propuesto, junto con los postulados y la construcción de un operador de cambio múltiple

priorizado. Además, se describirán algunas funciones que permiten la implementación de este operador, mostrando formalmente su correspondencia. Finalmente, se presentarán y analizarán tres diferentes funciones de incisión que permiten resolver las situaciones donde la información de los órdenes de credibilidad que intervienen en la revisión entran en conflicto.

- En el Capítulo 4 se presentarán las implementaciones computacionales que se han llevado a cabo a lo largo de esta tesis. Por un lado, se mostrará la aplicación con interfaz gráfica que permite la utilización y visualización del operador de revisión múltiple priorizada. Por otro lado, se describirán los resultados obtenidos a partir de una experimentación tendiente a analizar el comportamiento de las tres funciones de incisión enunciadas en el capítulo anterior. Los resultados serán presentados a través de un análisis cualitativo y cuantitativo.
- En el Capítulo 5 se describirá el modelo que permite contextualizar los valores de confianza, además de relacionar los contextos mediante una taxonomía. A partir de lo anterior, se desarrollarán dos funciones que permiten extender un orden de credibilidad en un dado contexto, con la información de otros órdenes de credibilidad relacionados según la taxonomía de contextos. Como cierre del capítulo, se mostrará un ejemplo de aplicación completo que muestra cómo el operador de revisión y la taxonomía de contextos permiten integrar diferentes valores a partir de la información que proviene de diferentes sitios web especializados.
- En el Capítulo 6 se introducirán los postulados y la construcción de un operador de cambio múltiple no priorizado. Además, se describirán algunas funciones que permiten la implementación de este operador, mostrando formalmente su correspondencia. Finalmente, se estudiarán las posibles alternativas a considerar para definir nuevas funciones de incisión que permitan resolver las situaciones donde la información de los órdenes de credibilidad que intervienen en la mezcla entran en conflicto.
- En el Capítulo 7 se efectuará una revisión de diferentes modelos computacionales de reputación y confianza propuestos en la literatura. Durante esta revisión, se incorporará un estudio comparativo destacando similitudes y diferencias entre estos modelos y el modelo desarrollado a lo largo de esta tesis. En particular, se analizarán también diferentes propuestas de la literatura respecto de revisión de creencias y re-

visión de órdenes de credibilidad, analizando y destacando las principales diferencias entre estas propuestas y las presentadas a lo largo de esta tesis.

- En el Capítulo 8 se presentarán algunas de las conclusiones que se desprenden del desarrollo de esta tesis, y se describirán algunas ideas pendientes que formarán parte del trabajo futuro.
- En el Apéndice A se incluirán todas las demostraciones formales respecto de cada una de las propiedades introducidas a lo largo de esta tesis.



# Capítulo 2

## Conceptos Preliminares

Esta tesis involucra diferentes áreas de investigación de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial: Sistemas Multi-Agente (*multi-agent system*), Revisión de Creencias en Sistemas Multi-Agente (*multi-agent belief revision*) y sistemas computacionales de reputación y confianza (*trust and reputation*). En este capítulo se introducirán de forma resumida algunos de los conceptos y características básicas de dichas áreas, contrastándolos con los lineamientos seguidos durante el desarrollo de esta tesis.

En primer lugar, se desarrollará un análisis de algunas características de interés de los sistemas computacionales de reputación y confianza. En particular, se focalizará el análisis en los modelos de representación de la confianza numéricos y simbólicos, así como aquellos que contemplan representaciones de simple o multi-contexto. Luego, se mostrarán algunos conceptos preliminares del área de revisión de creencias en Sistemas Multi-Agente (*SMA*), enfatizando dicho análisis en los operadores de revisión tanto simples como múltiples, así como en los priorizados y no priorizados. Se analizarán también algunas propuestas que integran ambos conceptos: sistemas de reputación y confianza y revisión de creencias. Finalmente, se describirán las principales características de dos operadores de cambio propuestos en la literatura, que se utilizarán como base para la formalización de los operadores de cambio que se propondrán durante el desarrollo de esta tesis.

### 2.1. Sistemas de reputación y confianza

En las últimas décadas, los modelos de reputación y confianza se han convertido en un método invaluable para mejorar la interacción entre agentes, sobre todo para el éxito

en la adopción del comercio electrónico. No obstante, no son el único campo de aplicación de estos modelos. Existen otros trabajos, por ejemplo, donde se utiliza la confianza para mejorar la performance de mecanismos de revisión de creencias. Otra importante área de aplicación en tecnología de agentes es el trabajo de equipo y cooperación. Como resultado de esto, se ha publicado una cantidad considerable de investigaciones que intentan resolver problemas abiertos y mejorar los modelos existentes.

La idea que comparten la mayoría de las publicaciones es que ambos conceptos, reputación y confianza, están en estrecha relación [ARH00, Del03, LLYYJ09]. De hecho, es posible observar que algunos autores utilizan estos dos términos de forma equivalente. Sin embargo, aparecen diferentes visiones cuando se analiza cómo se supone que deben verse las relaciones entre ambos conceptos. Por un lado, existe un grupo de autores que perciben la reputación como un aporte importante o un factor que contribuye al cálculo de la confianza [ARH00, Del03, RKK07, PSM13, KB16]. Por otro lado, otros autores entienden la reputación como la cantidad de confianza que un determinado agente es capaz de generar en un determinado dominio [ZMM99].

Una definición frecuentemente utilizada señala que la reputación puede entenderse como la percepción que un agente tiene de otro agente [KB16, MMH02] y que se utiliza, luego, para elegir un socio de cooperación [PSM13]. Esto requiere recolectar información sobre las acciones pasadas de un agente para predecir su posible comportamiento futuro [RKK07]. Buena parte de los modelos que trabajan sobre la reputación contemplan representaciones numéricas que, a partir de las experiencias recolectadas, agregan toda esta información en un valor único. Aunque existen diversas alternativas, las representaciones más comunes para las experiencias evalúan cuán satisfactorias estas fueron. Por ejemplo, existen modelos que contabilizan cantidad de calificaciones positivas y negativas, modelos que ponderan experiencias según una escala de estrellas, o ponderan experiencias mediante un valor en un rango predefinido 0-1, 1-5 o 1-10.

De manera similar, un concepto común es visualizar la confianza como la relación entre un *Truster* y un *Trustee*. Como se muestra en la Figura 2.1, el *Truster* representa la entidad que requiere de algún servicio y, por lo tanto, deposita su confianza en el *Trustee*, una segunda entidad que se supone debe proporcionar el servicio requerido [LSSAW10]. Desde esta perspectiva, la confianza puede ser vista como un proceso de razonamiento práctico que conduce a la decisión de interactuar con alguien. Existen diferentes alternativas para los modelos que abordan la confianza, particularmente pensando en cuán complejo puede

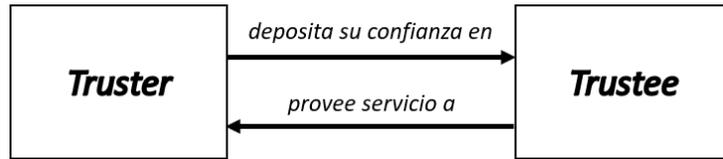


Figura 2.1: Representación de la confianza como relación.

ser el proceso de razonamiento en el que se resuelve si un agente debe o no confiar en otro. Algunos modelos brindan, por ejemplo, evaluaciones, índices, puntajes, de forma tal de ayudar al *Trustee* en la decisión final. Otros, en cambio, se centran en definir y establecer cómo se debe tomar la decisión real: por ejemplo, estudian cómo representar y combinar diferentes valoraciones que pueden considerar, por ejemplo, experiencias directas e indirectas, valores de reputación y prejuicio, metas de los agentes, entre otras.

A lo largo de esta tesis no se profundizará en la tarea de diferenciar los modelos catalogados como de confianza y de reputación. Sin embargo, prevalecerá el uso del término confianza. Esto es así, porque el trabajo adhiere a la visión generalizada de la reputación como la percepción que un agente tiene de otros basado en, por ejemplo, experiencias previas; y al hecho de observar la confianza como el razonamiento que conduce a la decisión de interactuar con alguien. Siguiendo estas ideas, se definirá un modelo que representa y trabaja la dinámica de la confianza a partir de información que representa la reputación de diferentes agentes. Particularmente, haciendo uso de estos valores de reputación, se establecerán relaciones de credibilidad. Durante la tesis se favorecerá el uso de la palabra credibilidad para referir a la confianza de los agentes, ya que esta palabra en particular tiene un sentido intuitivo que ayuda a comprender los problemas relacionados: si un agente *A* es más creíble que otro agente *B*, es natural que un *Trustee* tenga mayor confianza para creer en la información provista por *A*, o para delegar una tarea al agente *A* en lugar del agente *B*. De esta forma, serán estas relaciones de credibilidad las que, en definitiva, modelen la confianza entre los diferentes agentes.

En lo que resta de esta sección se analizarán dos características respecto de la confianza, las cuales han definido los principales lineamientos para representar el concepto de confianza durante el desarrollo de esta tesis.

### 2.1.1. Modelos numéricos y simbólicos

Un tema central en los modelos computacionales que trabajan la confianza entre agentes es la forma en que se representa la confianza de los agentes. En la literatura pueden observarse dos grandes enfoques. Por un lado se encuentran los modelos que representan y trabajan la confianza de forma numérica, y por otro lado, y con un desarrollo más reciente, se encuentran los modelos que representan y trabajan la confianza de forma simbólica.

Los modelos numéricos son los más ampliamente conocidos. Esto se debe a la masiva proliferación de sistemas para realizar transacciones en línea que han popularizado el uso de sistemas de reputación. Tales sistemas capturan las opiniones de los usuarios mapeando sus preferencias en calificaciones numéricas, en ciertos intervalos fijos, de una manera más o menos simple. Aunque esta forma de calificar también se combina con alguna información textual tal como comentarios adicionales, varios estudios han demostrado que dicha información textual solo juega un papel secundario [CHF15]. Con la información recolectada, los sistemas estiman una calificación promedio para cada entidad, que se calcula a partir de las calificaciones individuales proporcionadas por los usuarios. Finalmente, con estas calificaciones promedio los sistemas ofrecen un *ranking* de reputación que está disponible públicamente para todos los usuarios a fin de asistirlos en la toma de decisiones. Aunque son sistemas simples de representar y de computar, presentan al menos dos problemas de difícil solución: el sesgo en las calificaciones, y el establecimiento de un orden total entre los agentes que comparan.

Una serie de trabajos [CLA<sup>+</sup>03, SS11, DKP13] han analizado los problemas potenciales que surgen a partir del uso de calificaciones numéricas. Por ejemplo, en [CLA<sup>+</sup>03] los autores estudian cómo la valoración promedio que se muestra cuando un usuario está valorando un determinado usuario o servicio influye en su propia valoración y, por tanto, en su valoración final. De hecho, en [DKP13] se muestra que, típicamente, la distribución de calificaciones promedio se caracteriza por un sesgo positivo. Esto es, cuando los usuarios seleccionan una entidad para interactuar en función de su calificación promedio, están predispuestos a que esa entidad le resulte de preferencia y, por lo tanto, es probable que el usuario la califique positivamente. Otro problema asociado con las calificaciones numéricas es la dificultad y el costo para los usuarios de asignar sus opiniones a números simples. Note, por ejemplo, como dos usuarios pueden haber calificado una misma película en una escala de 1 a 5 con un 4, pero el mismo valor puede significar dos cosas completamente diferentes: el usuario  $u_i$  puede ser un usuario optimista o entusiasta y puede calificar las

películas en general muy alto usando solo el extremo más alto de la escala, mientras que  $u_j$  puede ser un usuario pesimista o conservador que normalmente usa el extremo inferior de la escala y, de esta forma, la calificación de 4 representa una calificación inusualmente alta [HCF14]. Algunos estudios como [SS11] han tratado de identificar la mejor escala de calificación y han concluido que cuanto mayor es la granularidad de la escala, mejor se captan las opiniones. Sin embargo, a medida que aumenta la granularidad, también aumenta el costo y la dificultad para el usuario.

Otro gran condicionante de los modelos numéricos es que establecen, por naturaleza, un orden total entre los agentes que comparan. En algunos casos esto podría observarse como algo valioso dado que permite que todos los agentes sean comparables unos con otros. Sin embargo, esta aparente ventaja no permite representar de forma fiel situaciones más realistas donde dos o más agentes deben permanecer incomparables, dado que su relación aún no ha sido establecida, o donde la información respecto de sus interacciones aún no existe.

Como una alternativa a los modelos numéricos, existe una importante cantidad de trabajos que representan la confianza entre agentes de manera simbólica. La importancia de estos modelos es que justamente, por el formato de representación, permiten mitigar algunos de los problemas que emergen de los modelos numéricos. La metodología consiste en representar las diferentes percepciones de los agentes mediante comparaciones por pares. Tales elementos permiten establecer una relación de preferencia entre dos agentes. Por ejemplo, el par  $A_i > A_j$  representa que la confianza o credibilidad que se tiene sobre el agente  $A_i$  es mayor a la que se tiene por el agente  $A_j$ . Recolectar, mantener y actualizar un conjunto de estos elementos permite, luego, establecer diferentes *rankings* a partir de los cuales los agentes pueden ser clasificados.

Por ejemplo, una línea de investigación reciente que hace foco en el concepto de comparación por pares muestra cómo implementar un sistema de reputación denominado *PairWise Reputation Mechanism (PWRM)* [HCF14, CHF15, CH18]. En contrapartida a los mecanismos que permiten combinar valores numéricos, los autores definen un modelo de representación en el que la confianza queda establecida a partir de un proceso iterativo basado en torneos eliminatorios (*knock-out tournaments*). Cada torneo permite evaluar en partidos las opiniones que los agentes del sistema tienen sobre dos agentes en particular: por ejemplo, dado un partido entre los agentes  $A$  y  $B$ , el sistema consulta: dada su experiencia, ¿qué agente usted prefiere,  $A$  o  $B$ ? Los resultados de cada partido de estos

torneos se recopilan y, luego, son agregados mediante un algoritmo de tipo *random walk*. Una vez concluidos los diferentes torneos, un *ranking* total entre los diferentes agentes puede ser derivado.

También existen otras líneas de investigación fuera de los sistemas de reputación donde la confianza se representa simbólicamente [KTGF09, TGFS12a, TGFS14, TGGS16, GTGS18, JTGG21]. Por ejemplo, tres de estos trabajos se enfocan en trabajar la dinámica de la confianza, utilizando herramientas relacionadas al área de revisión de creencias [TGFS14, JTGG21] y de argumentación [GTGS18]. En cualquiera de los trabajos citados, la confianza es modelada mediante órdenes de credibilidad. Algunos, por ejemplo [KTGF09, TGFS12a], proponen utilizar órdenes totales, mientras que otros [TGFS14, TGGS16, GTGS18, JTGG21] adoptan órdenes parciales de credibilidad.

Trabajos recientes [JTGG21] han mostrado que los modelos de confianza que representan la información de manera simbólica mediante elementos de credibilidad (comparación por pares) funcionan tan bien como los modelos numéricos tradicionales. Los resultados allí documentados muestran un modelo de comparación por pares que puede soportar información engañosa, ruidosa y sesgada, adaptarse con éxito a los cambios y, en general, lograr buenos resultados.

En esta tesis se propondrá un modelo de representación simbólico para los valores de confianza. Tal como fue mencionado en la introducción de esta sección, estos valores de confianza indicarán cuán creíble es un agente en comparación con otro. De esta forma, un elemento de credibilidad especificará que un agente es estrictamente más creíble que otro, y un conjunto de elementos de credibilidad, definirá un orden de credibilidad. Estos órdenes de credibilidad serán los que un agente usará para representar la información asociada a los agentes que compara en diferentes contextos en el marco de un *SMA*. Este modelo de representación simbólico permite mitigar algunos de los problemas que emergen en los modelos de representación numéricos, mencionados en esta sección, y además brindará una representación alternativa que presenta ventajas con respecto a los modelos numéricos, como por ejemplo, para la integración de información de diferentes órdenes.

### 2.1.2. Modelos de simple y multi-contexto

Durante el surgimiento de los primeros sistemas computacionales de reputación y confianza, uno de los primeros interrogantes que se buscó contestar era si los diferentes

modelos debían o no considerar los valores de confianza y reputación de manera contextualizada. La contextualización de la información refiere a la dependencia que existe entre un valor de confianza o reputación respecto del contexto donde dicho valor esta siendo considerado [DSBNHDLN18].

En el Capítulo 1, se mencionó como ejemplo motivador el hecho de que la confianza que se le tiene a un médico cuando recomienda un medicamento podría no ser exactamente la misma que la que se le tiene a la hora de recomendar qué computadora comprar. De igual forma se podría indicar que la percepción sobre la reputación de un buen deportista podría no tener relación de manera directa en la búsqueda o consideración de un científico competente para una determinada tarea. Esto mismo es trasladable a cualquier modelo computacional, donde agentes especializados en la venta de elementos electrónicos no necesariamente deben ser considerados expertos o recomendados en la venta de otro tipo de elementos.

A partir de lo anterior, resulta claro que la respuesta a este interrogante es justamente que sí, la confianza y la reputación son propiedades que muestran una clara dependencia del contexto donde son evaluadas. Independientemente de esto, también resulta importante mencionar que modelar la confianza de manera contextualizada naturalmente conlleva un costo.

En [SMS05], un trabajo publicado en el año 2005 y ampliamente referenciado por la literatura relacionada, los autores mencionan que la capacidad de manejar varios contextos en un modelo de reputación y confianza tiene un costo en términos de complejidad, y agrega algunos efectos secundarios que no siempre son necesarios o deseables. Sostienen esto argumentando que siempre es posible transformar un modelo de contexto único en uno multi-contexto, por ejemplo, teniendo diferentes instancias del modelo de contexto único, una para cada contexto considerado. Sin embargo, también enfatizan que uno de los principales problemas para tener diferentes instancias de contexto único es que, en los entornos de confianza y reputación, la información disponible para calcular diferentes valores de reputación y confianza suele ser escasa. En este mismo sentido, sostienen que lo que realmente le da a un modelo la categoría de modelo multi-contexto es la capacidad de hacer un uso inteligente de cada información para calcular diferentes valores de confianza o reputación asociados a diferentes actividades.

Si se observan los modelos computacionales de reputación y confianza desarrollados en los momentos en el que la revisión propuesta en [SMS05] fue llevada a cabo, se puede

claramente concluir que existían muy pocos modelos que se preocuparan por la naturaleza multi-contexto. Aún más, estos autores sostienen que existían en aquel momento aún menos trabajos que propongán algún tipo de solución. Esta tendencia se ha revertido en el tiempo. Los autores de [DSBNHDLN18] han mostrado que, luego de evaluar unos 40 trabajos relacionados al área de reputación y confianza, es posible observar el creciente interés por los modelos que específicamente consideran la naturaleza multi-contexto: en este artículo, la mitad de los trabajos revisados evidencian que se da tratamiento a la multi-contextualidad de los valores para la confianza.

Esto último, y un persistente incremento de la información disponible en sitios web especializados, pareciera indicar que existe una posibilidad concreta de continuar en la búsqueda y desarrollo de alternativas que efectivamente permitan el tratamiento a la representación multi-contexto. Así como en los inicios de la proliferación de sitios de comercio electrónico la información era escasa, hoy es más habitual observar plataformas que específicamente buscan calificaciones tipificadas desde diferentes tópicos.

Por ejemplo, en [Boo], una plataforma web que permite la búsqueda y reserva de hoteles, ya no solo se brinda la posibilidad de observar la calificación general asociada a un determinado hotel sino que también se permite acceder a información contextualizada. Por ejemplo, un usuario que busca un hotel puede consultar el valor de reputación general asociado a diferentes hoteles, pero también puede observar la reputación específica que han recolectado estos en términos de los tópicos o contextos *Personal, Instalaciones y servicios, Limpieza, Confort, Relación precio-calidad o Ubicación*.

En relación a esto último, sigue siendo valioso cuestionarse cómo hacer uso de la información contextualizada en conjunto. Por ejemplo: ¿cómo los valores de confianza asociados a diferentes tópicos o contextos pueden ser conjugados sacando provecho de esto? ¿Puede alguna relación entre los contextos definir algún criterio que permita integrar la información?

En esta tesis se propondrá un modelo de representación simbólico y multi-contexto para la confianza. El modelo propuesto asociará a cada valor de confianza entre dos agentes, un contexto o tópico donde ese valor es tenido en cuenta. De esta forma, para cada contexto o tópico, existirá un orden de credibilidad asociado, esto es, un conjunto de valores de confianza que relacionan a diferentes agentes comparados. Esto permitirá, tal como fue descrito anteriormente, que los agentes puedan tener más información, y así tomar mejores decisiones. Particularmente, el modelo propuesto también considerará

relacionar los contextos siguiendo diferentes relaciones. Esto permitirá direccionar algunos de los interrogantes presentados en el final del párrafo anterior, donde se cuestionó la importancia de utilizar la información contextualizada de forma conjunta. Para poder llevar a cabo esto último, se propondrá el uso de herramientas del área de revisión de creencias. Los conceptos preliminares de este área serán presentados a continuación.

## 2.2. Revisión de creencias en un *SMA*

El principal objetivo de la teoría de cambio (*belief revision*) es tratar de modelar la dinámica del conocimiento, esto es, cómo quedan constituidas las creencias de un agente después de recibir información externa. En este sentido, revisión de creencias es el área que estudia el proceso que permite cambiar las creencias de un agente en función al arribo de nueva información. La formalización lógica de la revisión de creencias se investiga en varias áreas tales como Filosofía, Bases de Datos e Inteligencia Artificial. En todos los casos, la finalidad consiste en el diseño de agentes racionales.

Las primeras aproximaciones al área de revisión de creencias desarrollan su teoría usando un lenguaje proposicional  $\mathcal{L}$ . En este lenguaje existe un conjunto completo de conectores *booleanos*:  $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ . Las fórmulas en  $\mathcal{L}$  se denotan con caracteres griegos en minúsculas:  $\alpha, \beta, \delta, \dots, \omega$ . Los conjuntos de sentencias en  $\mathcal{L}$  se denotan con caracteres latinos en mayúsculas:  $A, B, C, \dots, Z$ . En particular, se asume que el símbolo  $\top$  representa una tautología o verdad, mientras que el símbolo  $\perp$  representa una contradicción o *falsum*. También existe un operador de consecuencia lógica  $Cn$  que toma conjuntos de sentencias en  $\mathcal{L}$  y produce nuevos conjuntos de sentencias, cerrados bajo consecuencia lógica. Este operador  $Cn$  satisface *inclusión* ( $A \subseteq Cn(A)$ ), *idempotencia* ( $Cn(A) = Cn(Cn(A))$ ), *monotonía* (si  $A \subseteq B$  entonces  $Cn(A) \subseteq Cn(B)$ ) y *compacidad* (si  $\alpha \in Cn(B)$ , entonces  $\alpha \in Cn(B')$  para algún subconjunto finito  $B' \subseteq B$ ).

En estas primeras aproximaciones se pueden observar dos formas bien definidas con la que los autores modelan las creencias de un agente. Una alternativa está dada por el uso de un conjunto de creencias cerradas bajo consecuencia lógica, mientras que la restante está dada por el uso de bases de creencias. Las bases de creencias se representan mediante un conjunto de sentencias de  $\mathcal{L}$  no necesariamente clausurado. Esta característica hace que las operaciones de cambio sobre bases de creencias sean computacionalmente tratables. Por el contrario, los conjuntos de creencias se representan mediante conjuntos

de sentencias de  $\mathcal{L}$  clausuradas bajo consecuencia lógica. Si bien no se puede tratar con conjuntos de creencias clausurados de una manera computacionalmente posible (puesto que en general, los conjuntos de creencias son infinitos) las operaciones de cambio aplicadas sobre conjuntos de creencias permiten reconocer más directamente las propiedades de las mismas sin perder de vista las intuiciones que las motivaron.

Los orígenes de la teoría de cambio de creencias se remonta hacia los 1970s, cuando Isaac Levi discutió los problemas que conciernen a este campo de investigación [Lev77]. También, William Harper propuso una manera racional de relacionar algunos operadores de cambio de creencias [Har75]. Sin embargo, el principal avance en la teoría de cambio de creencias fue durante los 1980s cuando Carlos Alchourrón y David Makinson estudiaron los cambios en el código legal [AM81] y Peter Gärdenfors estaba preocupado con los postulados racionales para operadores de cambio [Gä82]. Este avance quedó marcado después de que los tres autores escribieran un artículo internacionalmente conocido como modelo *AGM* [AGM85], así llamado por los apellidos de sus tres creadores: Alchourrón, Makinson y Gärdenfors. Dicho modelo fue el marco de trabajo formal más general hasta ese momento para estudios de cambio de creencias y representa un punto de quiebre en la evolución de la teoría de cambio de creencias.

El modelo *AGM* presenta tres tipo de operadores que formalizan tres posibles cambios sobre un conjunto de creencias: expansión, contracción y revisión. La expansión corresponde con la más simple de las operaciones y consiste en el agregado de nueva información al conjunto de creencias de un agente. La contracción, por el contrario, consiste en una operación en la cual se eliminan creencias del conjunto de creencias de un agente sin el agregado de ninguna creencia nueva. Las revisiones, por último, son operaciones de cambio que permiten agregar información al conjunto de creencias respetando las siguientes premisas: preservar consistencia en el conjunto revisado, y preservar tantas creencias del conjunto original como sea posible.

Estos operadores son presentados de dos maneras diferentes: dando una construcción explícita (algoritmo) para el operador, o describiendo un conjunto de postulados de racionalidad a ser satisfechos. La construcción explícita indica el paso a paso a seguir de forma tal de obtener el resultado esperado para la operación de cambio. Los postulados de racionalidad, por su parte, determinan restricciones que los operadores deben satisfacer. Ellos tratan a los operadores como cajas negras, describiendo sus comportamientos con respecto a la entrada en casos básicos, pero no los mecanismos internos usados.

Para ejemplificar el comportamiento de las tres operaciones de cambio, asuma por ejemplo que  $K = \{\beta, \beta \rightarrow \omega\}$  representa las creencias de un agente. Luego, el operador de expansión, notado como '+', permite incorporar creencias a  $K$ , sin realizar chequeo de consistencia. De esta forma, la expansión queda definida a través de la operación de unión de conjuntos, de forma tal que  $K + \alpha = K \cup \{\alpha\} = \{\beta, \beta \rightarrow \omega, \alpha\}$ , así como  $K + \neg\beta = K \cup \{\neg\beta\} = \{\beta, \beta \rightarrow \omega, \neg\beta\}$ .

La operación de contracción, notada como '-', permite eliminar creencias de un conjunto de creencias sin el agregado de nuevas. Asuma, por ejemplo, la contracción  $K - \omega$ . Tenga en cuenta que la contracción no consiste simplemente con la eliminación de una creencia, sino que el resultado de la contracción debe ser un conjunto de creencias del que no es posible inferir  $\omega$ . Considerando esto, existen tres posibles resultados para la contracción de  $K - \omega$ :  $K_1 = \{\beta\}$ ,  $K_2 = \{\beta \rightarrow \omega\}$  y  $K_3 = \emptyset$ . Más adelante se especificarán dos construcciones que permiten entender cómo se obtienen estos tres resultados posibles.

La operación de revisión, por último, consiste en el agregado de una nueva creencia al conjunto de creencias, pero manteniendo libre de contradicciones en el conjunto de creencias resultante. Por lo general, esta se encuentra definida a partir de los operadores de expansión y contracción descriptos anteriormente. De esta forma, la operación de revisión, notada como '\*', queda especificada mediante la *Identidad de Levi* de la siguiente forma:  $K * \delta = (K - \neg\delta) + \delta$ . Teniendo en cuenta que no se puede inferir la sentencia  $\neg\delta$  de  $K$ , luego,  $K - \neg\delta = K$  y, en consecuencia,  $K * \delta = \{\beta, \beta \rightarrow \omega, \delta\}$ .

En los párrafos anteriores se mostró el comportamiento de los tres operadores típicos de la teoría de cambio a través de ejemplos. A continuación, se describirá los operadores de cambio con un conjunto de postulados de racionalidad. El modelo *AGM* propone los siguientes postulados de racionalidad para las operaciones de expansión y contracción. Estos postulados fueron introducidos inicialmente por Peter Gärdenfors en [GM88].

### Postulados de racionalidad para *expansiones* propuestos en [AGM85]

- ( $E^+1$ ) *Clausura (Clousure)*: Para cualquier conjunto de creencias  $K$  y cualquier sentencia  $\alpha$ ,  $K + \alpha$  es un conjunto de creencias.
- ( $E^+2$ ) *Éxito (Success)*:  $\alpha \in K + \alpha$ .
- ( $E^+3$ ) *Inclusión*:  $K \subseteq K + \alpha$ .
- ( $E^+4$ ) *Vacuidad (Vacuity)*: Si  $\alpha \in K$  entonces  $K + \alpha = K$ .

- ( $E^+5$ ) *Monotonía*: Si  $H \subseteq K$  entonces  $H + \alpha \subseteq K + \alpha$ .
- ( $E^+6$ ):  $K + \alpha \subseteq Cn(K \cup \{\alpha\})$

### Postulados de racionalidad para *contracciones* propuestos en [AGM85]

- ( $PMC-1$ ) *Clausura (Clousure)*: Para cualquier conjunto de creencias  $K$  y cualquier sentencia  $\alpha$ ,  $K - \alpha$  es un conjunto de creencias.
- ( $PMC-2$ ) *Inclusión*:  $K - \alpha \subseteq K$ .
- ( $PMC-3$ ) *Vacuidad (Vacuity)*: Si  $\alpha \notin K$  entonces  $K - \alpha = K$ .
- ( $PMC-4$ ) *Éxito (Success)*: Si  $\not\vdash \alpha$  entonces  $\alpha \notin K - \alpha$ .
- ( $PMC-5$ ) *Recuperación (Recovery)*:  $K \subseteq (K - \alpha) + \alpha$ .
- ( $PMC-6$ ) *Extensionalidad/Preservación*: Si  $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$  entonces  $K - \alpha = K + \alpha$ .

El modelo *AGM* ha sido el trabajo más influyente en la teoría de cambio de creencias. Sin embargo, hay modelos equivalentes tales como: *safe contractions* [AM85], *epistemic entrenchment* [GM88], *sphere systems* [Gro88], y *kernel contractions* [Han94]. La principal diferencia entre *AGM* y estos modelos radica en la forma en la que se construye el operador de contracción. Mientras que las contracciones de un conjunto de creencias  $K$  por una sentencia  $\alpha$  propuestas en *AGM* son llamadas *partial meet contractions* dado que están basadas en una selección entre los subconjuntos (maximales) de  $K$  que no implican  $\alpha$ , otros enfoques para las contracciones están basados en una selección entre los subconjuntos (minimales) de  $K$  que contribuyen a implicar  $\alpha$ . Este es el caso de las *safe contraction* [AM85] y de una variante más general del mismo enfoque que es conocido como *kernel contraction* [Han94].

Considere nuevamente el ejemplo presentado previamente, con  $K = \{\beta, \beta \rightarrow \omega\}$ . Recuerde que para la contracción  $K - \omega$ , se indicó que existían tres posibles resultados:  $K_1 = \{\beta\}$ ,  $K_2 = \{\beta \rightarrow \omega\}$  y  $K_3 = \emptyset$ . Esto es así dado que el modelo *AGM* define la construcción del operador de contracción siguiendo los siguientes pasos: (a) obtener los subconjuntos maximales de  $K$  que no derivan  $\omega$ ; (b) elegir los “mejores subconjuntos” con una función de selección  $\gamma$ ; (c) intersectar dichos conjuntos obteniendo así el resultado.

Siguiendo estos pasos, se obtiene que los subconjuntos maximales de  $K$  que no derivan  $\omega$  se corresponden con  $K' = \{\beta\}$ ,  $K'' = \{\beta \rightarrow \omega\}$ . Luego, una función de selección  $\gamma$  debe seleccionar los “mejores subconjuntos”. El criterio de selección no queda especificado en la construcción del operador, solo se indica cómo la selección debe darse. De esta forma, existe una familia de tres funciones de selección que podrían utilizarse para seleccionar los “mejores subconjuntos” en este ejemplo:  $\gamma_1(\{K', K''\}) = \{K'\}$ ,  $\gamma_2(\{K', K''\}) = \{K''\}$  y  $\gamma_3(\{K', K''\}) = \{K', K''\}$ . En relación a la función de selección  $\gamma$  que se utilice, los resultados de la contracción se corresponden con los conjuntos  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  que se presentaron al comenzar este ejemplo. Note que  $K_1 = \bigcap(\gamma_1(\{K', K''\}))$ ,  $K_2 = \bigcap(\gamma_2(\{K', K''\}))$  y  $K_3 = \bigcap(\gamma_3(\{K', K''\}))$ .

Por el contrario a esta construcción basada en subconjuntos maximales, también existe otra construcción para el operador de contracción basada en subconjuntos minimales. Esta construcción se denomina *kernel contraction*, y fue presentada en [Han94]. La misma fue definida de forma tal de operar sobre bases de creencias en lugar de conjunto de creencias. Para comprender su comportamiento, asuma nuevamente la contracción  $K - \omega$  con una base de creencias  $K = \{\beta, \beta \rightarrow \omega\}$ . Luego, la *kernel contraction* queda definida siguiendo los siguiente pasos: (a) obtener los subconjuntos minimales de  $K$  que derivan  $\omega$ ; (b) elegir de cada uno de estos subconjuntos al menos una sentencia a ser eliminada mediante una función de incisión  $\mu$ ; (c) eliminar las sentencias seleccionadas de la base de sentencias obteniendo así el resultado.

Nuevamente, siguiendo los pasos previamente indicados, se obtiene que el único subconjunto minimal de  $K$  que deriva  $\omega$  se corresponde con  $K' = \{\beta, \beta \rightarrow \omega\}$ . Luego, una función de incisión  $\mu$  debe seleccionar al menos un elemento de cada uno de los subconjuntos minimales. De nuevo, existe una familia de tres funciones de incisión que podrían utilizarse para seleccionar los elementos a eliminar en este ejemplo:  $\mu_1(\{K'\}) = \{\beta\}$ ,  $\mu_2(\{K'\}) = \{\beta \rightarrow \omega\}$ , y  $\mu_3(\{K'\}) = \{\beta, \beta \rightarrow \omega\}$ . En relación a la función de incisión  $\mu$  que se utilice, los resultados de la contracción, nuevamente, se corresponden con los conjuntos  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  que se presentaron anteriormente. Note que  $K_1 = K \setminus \mu_1(\{K'\})$ ,  $K_2 = K \setminus \mu_2(\{K'\})$ , y  $K_3 = K \setminus \mu_3(\{K'\})$ .

No solo la construcción del operador de contracción es diferente entre las propuestas de [Han94] y el modelo *AGM*. También son diferentes los postulados de racionalidad propuestos. En este caso, [Han94] propone los siguientes postulados de racionalidad para las operaciones de contracción.

### Postulados de racionalidad para *contracciones* propuestos en [Han94]

- $(KC - 1)$  *Éxito (Success)*: Si  $\alpha \notin Cn(\emptyset)$ , entonces  $\alpha \notin Cn(K - \alpha)$ .
- $(KC - 2)$  *Inclusión*:  $K - \alpha \subseteq K$ .
- $(KC - 3)$  *Uniformidad (Uniformity)*: Si para todo  $K' \subseteq K$ ,  $\alpha \in Cn(K')$  si y solo si  $\beta \in Cn(K')$  entonces  $K - \alpha = K - \beta$ .
- $(KC - 4)$  *Retención de núcleo (Core-retainment)*: Si  $\beta \in K$  y  $\beta \notin K - \alpha$  entonces existe un conjunto  $K'$  tal que  $K' \subseteq K$ ,  $\alpha \notin Cn(K')$  pero  $\alpha \in Cn(K' \cup \{\beta\})$ .

A partir de las descripciones dadas, observe que, por un lado, el operador de expansión presenta la construcción más simple, dado que se basa en la operación lógica de unión de conjuntos. Por otro lado, los operadores de revisión quedan contruidos, a partir de la *Identidad de Levi*, haciendo uso de los operadores de expansión y contracción. De esta forma, la construcción del operador de contracción es la que toma relevancia ya que, a partir de la misma, se desprende la operatoria del operador de revisión. Se dice que un operador de revisión es de tipo *partial meet*, si se encuentra definido siguiendo la construcción del operador *partial meet contraction* propuesto en el modelo *AGM*. De forma similar, un operador de revisión será de tipo *kernel*, si se encuentra definido siguiendo la construcción del operador *kernel contraction* propuesto en [Han94].

A lo largo de esta tesis no se profundizará en la tarea de abordar un modelo completo de cambio de creencias, sino que se utilizarán las intuiciones detrás del operador de revisión propuesto inicialmente en [AGM85] para definir dos nuevos operadores de cambio que, a diferencia del propuesto por el modelo *AGM*, no operarán sobre conjuntos de sentencias sino sobre conjuntos de elementos que modelan el grado de confianza entre agentes en un *SMA*.

En particular, se darán construcciones basadas en la noción detrás del operador *kernel contraction* propuesto en [Han94]. En todos los casos, se deberán realizar adaptaciones de los conceptos considerados, no solo por el hecho de trabajar sobre otro modelo epistémico (conjuntos de elementos que modelan la confianza entre agentes, en lugar de conjuntos de sentencias), sino también porque las operaciones de cambio ya no se realizarán considerando un único elemento de entrada (sentencia) sino que se realizarán por un conjunto de elementos de entrada (conjunto de elementos que modelan la confianza entre agentes).

Teniendo en cuenta la breve introducción realizada, en lo que continua de la sección se analizarán algunas características relevantes respecto de los tipos de operadores de revisión que serán definidos durante el desarrollo de esta tesis.

### 2.2.1. Revisión simple y múltiple

El operador de revisión propuesto en [AGM85] presenta una restricción respecto a la entrada epistémica ya que solo admite la revisión por una sentencia. Esto es, un conjunto de sentencias  $K$  puede ser revisado por una única sentencia  $\alpha$  a la vez. Este tipo de revisión se denomina revisión simple.

Por el contrario a la revisión simple, existen también operadores de revisión múltiple. En este tipo de revisiones, la entrada epistémica está compuesta de un conjunto de sentencias. El término revisión múltiple se utiliza para referirse a operaciones de revisión que permiten la revisión simultánea por más de una sentencia. Esto debe distinguirse de la revisión repetida o iterada, es decir, la aplicación de dos o más revisiones simples en una secuencia.

Como se explicará más detalladamente en la próxima subsección, las revisiones (ya sean simples o múltiples) también podrán quedar definidas en función de si la entrada epistémica es priorizada o no. En particular, el modelo *AGM* propone un operador de revisión priorizado. Esto significa que la sentencia de entrada siempre prevalece en el resultado de la revisión, es decir,  $\alpha$  pertenece a  $K * \alpha$ , asumiendo  $'*'$  el operador de revisión priorizada. Por esta razón, es importante remarcar que las revisiones múltiples no pueden ser realizadas como una revisión simple de forma iterada dado que, este proceso podría conducir a diferentes resultados dependiendo del orden en el que se consideran las sentencias de la entrada epistémica.

Para ilustrar la situación presentada anteriormente, considere el siguiente ejemplo. Asuma  $K = \{\neg\beta\}$ , el conjunto de sentencias de entrada  $A = \{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\}$  y un operador de revisión priorizada  $'*'$ . Si  $K$  es revisado primero por  $\alpha$  ( $K_1 = K * \alpha$ ), luego, dado que el operador es priorizado,  $\alpha$  será parte del conjunto resultante  $K_1$ . Sin embargo, en la segunda iteración, cuando  $K_1$  es revisado por  $\alpha \rightarrow \beta$  ( $K_2 = K_1 * (\alpha \rightarrow \beta)$ ), es claro que  $\alpha \rightarrow \beta \in K_2$  mientras que puede suceder que  $\alpha$  sea excluida de la base  $K_2$ . Esto sucede dado que, más allá de que los operadores de revisión proponen agregar información a la base de creencias revisada, una de sus

premisas fundamentales es preservar la consistencia en el conjunto revisado. Note que, el conjunto de creencias  $\{\neg\beta, \alpha, \alpha \rightarrow \beta\}$  no es consistente. De esta manera, la revisión deberá resolver esta inconsistencia de forma tal que  $\alpha$ ,  $\neg\beta$ , o ambas, no formen parte de  $K_2$ . Claramente, si  $K$  es revisado primero por  $\alpha \rightarrow \beta$  y luego por  $\alpha$ , entonces  $\alpha$  permanecerá a la base resultante mientras que  $\alpha \rightarrow \beta$  puede ser excluida. Por lo tanto, en la revisión priorizada, si una base de creencias es revisada iterativamente por el conjunto  $A = \{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\}$ , hay tres resultados posibles: ambos elementos permanecen, solo  $\alpha$  permanece o solo  $\alpha \rightarrow \beta$  permanece. Por el contrario, en una revisión múltiple priorizada, si  $K$  es revisado por  $A$ , es posible asegurar que tanto  $\alpha$  como  $\alpha \rightarrow \beta$  permanecerán en la base de creencias resultante.

En [FKIRS12], se definen operadores de revisión múltiple sobre bases de sentencias. Basados en esta propuesta, en el contexto de esta tesis, los operadores de cambio que se propondrán son operadores de revisión múltiple sobre órdenes de credibilidad.

### 2.2.2. Revisión priorizada y no priorizada

La revisión como operación de cambio permite incorporar creencias a un conjunto de creencias, generando un nuevo conjunto de creencias consistente. Esta característica hace que la operación de revisión sea la más interesante dentro de la teoría de cambio de creencias, así como en las ciencias de la computación. Una característica importante a tener en cuenta respecto de la información de entrada con la que se revisa un conjunto de creencias es justamente cómo esta información es considerada en el proceso de cambio.

Como se mencionó en la introducción de esta sección, en [AGM85], los operadores de cambio son descritos dando una construcción explícita (algoritmo), así como describiendo un conjunto de postulados de racionalidad a ser satisfechos por cada uno de ellos. Recuerde que los postulados de racionalidad determinan restricciones que los operadores deben satisfacer, tratando a dichos operadores como cajas negras.

Uno de los postulados característicos del operador de revisión propuesto en el modelo *AGM*, es el denominado postulado de *éxito*. Este postulado establece que, para toda revisión  $K_1$  de un conjunto de creencias  $K$  por una sentencia  $\alpha$  (es decir,  $K_1 = K * \alpha$ , siendo  $'*$ ' el operador de revisión) entonces  $\alpha \in K_1$ . Luego, siguiendo este postulado, la entrada epistémica con la que un conjunto de creencias es revisado siempre formará parte del conjunto de creencias resultante. En consecuencia, cualquier evidencia que establezca

lo contrario a la nueva información con el que un conjunto es revisado, deberá ser dejada de lado en el conjunto resultante, ya que este debe preservar la consistencia. A este tipo de revisión se la denomina revisión priorizada, puesto que la entrada epistémica  $\alpha$  tiene absoluta prioridad sobre la información contenida en el conjunto de creencias revisado  $K$ .

Por el contrario a los operadores de revisión priorizada, también existen operadores de revisión no priorizada. Estos emergen a partir de los cuestionamientos recibidos por los operadores de revisión que cumplen el postulado de éxito, al considerar a este un postulado arbitrario o anti-intuitivo. De cierta forma, la propiedad de éxito hace que un agente sea totalmente obsecuente a toda nueva información. Sin embargo, en ciertos escenarios es valioso que un agente, al recibir información no consistente con la propia, pueda reacomodar sus propias creencias para obtener un conjunto consistente. Este reacomodamiento no necesariamente implica que la nueva información siempre sea aceptada. Por el contrario, podría suceder que la entrada sea parcial o totalmente rechazada, prevaleciendo la información original del conjunto de creencias revisado.

Recuerde el escenario ejemplificado anteriormente, donde  $K = \{\neg\beta\}$ , debía ser revisado por un conjunto de sentencias de entrada  $A = \{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\}$ . En el caso de que el operador de revisión múltiple sea priorizado, el resultado de la revisión se corresponderá con  $K_1 = K * A = \{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\}$  de forma tal que  $A \subseteq K_1$ . Note que, al ser  $K \cup A$  un conjunto de sentencias inconsistente, la revisión tuvo que eliminar de  $K \cup A$  la sentencia  $\neg\beta$  otorgándole prioridad a los elementos de  $A$ . Si por el contrario, la revisión múltiple de  $K * A$  fuese no priorizada, los siguientes resultados podrían obtenerse:  $K_2 = \{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\}$ ,  $K_3 = \{\neg\beta, \alpha \rightarrow \beta\}$ ,  $K_4 = \{\neg\beta, \alpha\}$ ,  $K_5 = \{\alpha \rightarrow \beta\}$ ,  $K_6 = \{\alpha\}$ ,  $K_7 = \{\neg\beta\}$  y  $K_8 = \emptyset$ . Cada uno de estos resultados muestra las diferentes decisiones que se podían tomar para evitar que el resultado  $K * A$  sea inconsistente. Note que, en cualquiera de los casos, es posible haber eliminado elementos de  $K$ , de  $A$ , o de ambos, sin darle prioridad o relevancia a ninguno de los elementos independientemente de donde provenga.

A lo largo de esta tesis, se definirán dos tipos de operadores de revisión múltiple, cada uno adoptando una política diferente para el tratamiento de la entrada epistémica. De esta forma, se formalizarán dos operadores de revisión múltiple: uno priorizado y otro no priorizado. Nuevamente, la definición de estos operadores estarán basados en los resultados publicados en [FKIRS12] donde también se presentaron operadores de revisión múltiple priorizada y no priorizada pero operando sobre bases de creencias.

### 2.2.3. Revisión de órdenes parciales de credibilidad

Hasta aquí se ha realizado un análisis preliminar de la teoría de cambio de creencias, orientado a observar las características más relevantes del área. En todos los casos, los conceptos analizados fueron presentados en términos de creencias que se representan a través de un lenguaje proposicional  $\mathcal{L}$  de la lógica clásica. Sin embargo, el trabajo abordado en esta tesis se enfoca en la dinámica de la confianza de los agentes dentro de un *SMA*. Los valores de confianza entre estos agentes serán representados mediante órdenes parciales de credibilidad (conjuntos de pares de agentes comparados, por ejemplo,  $A_i > A_j$ , en el cual cada par permite relacionar dos agentes considerando la credibilidad de cada uno) en lugar de sentencias de un lenguaje proposicional  $\mathcal{L}$ .

En un *SMA*, un agente, a menudo, puede recibir información de un número potencialmente grande de agentes informantes. Si se considera que estos agentes informantes son agentes independientes con sus propios intereses, luego, es claro que estos no necesariamente son completamente confiables. En esta configuración, es natural que algún agente le crea a un informante más que a otro. El uso de la noción de credibilidad permite a los agentes organizar a sus pares en un orden parcial que refleja la credibilidad relativa de sus informantes. En este mismo sentido, también es natural que la credibilidad asignada cambie dinámicamente, dando lugar a cambios en el orden parcial asociado. De aquí, la importancia de formalizar operadores que permitan abordar la dinámica de la confianza de los agentes que participan de un *SMA*.

Existen trabajos de la literatura relacionada que han abordado la dinámica de la confianza entre agentes, siendo esta representada de forma simbólica a través de órdenes parciales de credibilidad. En [TFGS11], siguiendo el estilo de *AGM*, se definió un modelo de cambio completo para órdenes parciales de credibilidad. Los autores de este trabajo definieron y caracterizaron tres tipos de operadores de cambio: el operador de expansión que, dado un orden de credibilidad, permite incorporar una nueva relación a dicho orden; el operador de contracción que, dado un orden de credibilidad, permite eliminar toda derivación posible de la relación con la que se está contrayendo el orden; y un operador de revisión priorizada que, dado un orden de credibilidad, permite modificar este incorporando una nueva relación a dicho orden, eliminando los elementos necesarios del orden original para preservar la consistencia. Estos tres operadores se definieron a través de construcciones y caracterizaciones axiomáticas mediante postulados de racionalidad.

Para ejemplificar la operatoria de las tres operaciones de cambio, asuma un conjunto  $G$  denominado conjunto generador, que almacena los valores de confianza asociados a diferentes agentes de un conjunto universal de identificadores de agentes  $\mathbb{A}$ . Luego,  $G$  almacena relaciones de la forma  $(A_i, A_j)$  que representan que el agente  $A_i$  es estrictamente menos creíble que  $A_j$ . Asuma por ejemplo,  $G = \{(A_1, A_2), (A_4, A_5), (A_5, A_3), (A_4, A_3)\}$ . Luego, el operador de expansión, notado como  $'\oplus'$ , permite incorporar una relación a  $G$ , sin realizar chequeo de sensatez. En el contexto de este modelo de representación, se dirá que un conjunto generador  $G$  es sensato si para toda relación  $(A_i, A_j) \in G$  entonces la relación  $(A_j, A_i) \notin G^*$ , siendo  $G^*$  la clausura transitiva de  $G$ . De esta forma, la expansión queda definida a través de la operación de unión de conjuntos, de forma tal que  $G \oplus (A_2, A_3) = G \cup \{(A_2, A_3)\} = \{(A_1, A_2), (A_4, A_5), (A_5, A_3), (A_4, A_3), (A_2, A_3)\}$ , así como  $G \oplus (A_2, A_1) = G \cup \{(A_2, A_1)\} = \{(A_1, A_2), (A_4, A_5), (A_5, A_3), (A_4, A_3), (A_2, A_1)\}$ .

La operación de contracción, notada como  $'\ominus'$ , permite eliminar relaciones de  $G^*$  sin el agregado de nuevas. Asuma, por ejemplo, la contracción  $G \ominus (A_4, A_3)$ . Tenga en cuenta que la contracción no consiste simplemente con la eliminación de una relación, sino que el resultado de la contracción debe ser un nuevo conjunto generador del que no es posible inferir  $(A_4, A_3)$ . Considerando esto, existen tres posibles resultados para la contracción  $G \ominus (A_4, A_3)$ :  $G_1 = \{(A_1, A_2), (A_5, A_3)\}$ ,  $G_2 = \{(A_1, A_2), (A_4, A_5)\}$  y  $G_3 = \{(A_1, A_2)\}$ . Esto es así porque los autores definen la construcción del operador de contracción siguiendo los siguientes pasos: (a) obtener los caminos no redundantes de  $G$  que permiten inferir  $(A_4, A_3)$ ; (b) elegir de cada uno de estos caminos al menos una relación a ser eliminada mediante una función de incisión  $\mu$ ; (c) eliminar las relaciones seleccionadas del conjunto generador  $G$  obteniendo así el resultado.

Siguiendo los pasos indicados, los caminos no redundantes, esto es, subconjuntos minimales  $G'$  de  $G$  tal que  $(A_4, A_3) \in (G')^*$  se corresponden con:  $G' = \{(A_4, A_3)\}$  y  $G'' = \{(A_4, A_5), (A_5, A_3)\}$ . Luego, una función de incisión  $\mu$  debe seleccionar al menos una relación de cada uno de los caminos no redundantes. En consecuencia, existe una familia de tres funciones de incisión que podrían utilizarse para seleccionar las relaciones a eliminar en este ejemplo:  $\mu_1(\{G', G''\}) = \{(A_4, A_3), (A_4, A_5)\}$ ,  $\mu_2(\{G', G''\}) = \{(A_4, A_3), (A_5, A_3)\}$  y  $\mu_3(\{G', G''\}) = \{(A_4, A_3), (A_4, A_5), (A_4, A_5)\}$ . En relación a la función de incisión  $\mu$  que se utilice, los resultados de la contracción se corresponden con los conjuntos generadores  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$  presentados anteriormente. Note que  $G_1 = G \setminus \mu_1(\{G', G''\})$ ,  $G_2 = G \setminus \mu_2(\{G', G''\})$  y  $G_3 = G \setminus \mu_3(\{G', G''\})$ .

La operación de revisión, por último, consiste en el agregado de una relación al conjunto generador  $G$ , pero manteniendo la sensatez en el conjunto generador resultante. Esta se encuentra definida a partir de los operadores de expansión y contracción descriptos anteriormente. De esta forma, la operación de revisión, notada como ' $\otimes$ ', queda especificada mediante la *Identidad de Levi* de la siguiente forma:  $G \otimes (A_3, A_6) = (G \ominus (A_6, A_3)) \oplus (A_3, A_6)$ . Teniendo en cuenta que no se puede inferir  $(A_6, A_3)$  de  $G^*$ , luego,  $G \ominus (A_6, A_3) = G$  y, en consecuencia,  $G \otimes (A_3, A_6) = \{(A_1, A_2), (A_4, A_5), (A_5, A_3), (A_4, A_3), (A_6, A_3)\}$ .

Más allá de los tres operadores presentados, algunas cuestiones no fueron abordadas en [TFGS11]: (a) el modelo propuesto no formaliza cómo los agentes reciben y almacenan las relaciones de credibilidad para considerar al agente informante de cada una de las relaciones; (b) en la construcción del operador de revisión, se establece de forma general cómo mantener la consistencia en el orden revisado, pero no se especifica cómo seleccionar qué información se elimina en la revisión; y (c) se especifica únicamente un operador de revisión priorizado, esto es, un operador donde la nueva información siempre tiene prioridad, una situación que puede ser poco realista en algunos escenarios.

En [TGFS14], luego, los autores extienden el modelo completo de cambio considerando estas cuestiones. En este último trabajo el enfoque presentado formaliza cómo los agentes reciben y almacenan información en una base de credibilidad, y también cómo se representa la confiabilidad de la información a partir de la incorporación del concepto de agente informante. Además, se especifica qué información prevalece en el proceso de revisión priorizada, es decir, se propone un criterio basado en la confiabilidad para seleccionar qué información se debe eliminar en la revisión ante la aparición de inconsistencias. Basado en la confiabilidad de la información entrante, también se propone en este trabajo un operador de revisión no priorizado.

En el modelo de representación de este último trabajo, la confianza que un agente  $A$  considera de otros agentes, junto con sus respectivos agentes informantes, es modelada mediante una base de credibilidad  $\mathcal{C}^A$ . Una base de credibilidad se compone de un conjunto de objetos de credibilidad, de la forma  $[T, S]$ : el elemento  $S$  representa un agente informante, mientras que  $T = (B, D)$  representa una relación de credibilidad que indica que el agente  $B$  es estrictamente menos creíble que el agente  $D$ . El modelo impone algunas restricciones en cuanto a que el agente  $S$  del objeto de credibilidad, debe ser diferente a los agentes  $B$  y  $D$  de  $T = (B, D)$ . De esta forma, un agente informante no puede informar relaciones de credibilidad en las que se vea involucrado.

El objeto de credibilidad  $[(B, D), E]$ , por ejemplo, representa que el agente informante  $E$  indica que  $B$  es estrictamente menos creíble que  $D$ . Luego, los objetos de credibilidad son los elementos que pueden intercambiar los agentes del SMA, y representan la información con la que contará un agente en su base de credibilidad para modelar la confianza. Por ejemplo,  $\mathcal{C}^A = \{[(B, C), D], [(C, D), E], [(F, G), B], [(F, G), E]\}$  representa la base de credibilidad del agente  $A$ . Observe que una misma relación de credibilidad, tal como  $(F, G)$ , puede ser indicada por más de un agente informante, en este caso, por los agentes  $B$  y  $E$ . Esta característica permite que el nivel de confiabilidad de la información varíe, en función de los diferentes agentes informantes que forman parte de los elementos utilizados para inferirla. Otro ejemplo de esta característica podría pensarse en el caso de la relación  $(B, D)$  que se puede inferir a partir de  $\mathcal{C}^A$  a través de los elementos  $\{[(B, C), D], [(C, D), E]\}$ . Note que, esta inferencia está justificada en el nivel de credibilidad de los agentes informantes  $D$  y  $E$ .

En el modelo de representación propuesto por los autores, se asume que las bases de credibilidad son sensatas. Una base de credibilidad es sensata si la clausura transitiva de la misma es sensata. Para esto, se presenta el concepto de orden de credibilidad  $\mathcal{O}$ . Un orden de credibilidad  $\mathcal{O}$  a partir de la base de credibilidad de un agente  $A$  queda definido de la siguiente forma:  $\mathcal{O} = \{(B, D) : \text{existe un objeto de credibilidad } [(B, D), S] \text{ en } \mathcal{C}^A\}$ . Esto es, el orden de credibilidad que es posible inferir a partir de una base  $\mathcal{C}$  corresponde con la proyección de los elementos de credibilidad que forman parte de  $\mathcal{C}$ . Luego, la clausura transitiva, aplicada a partir de una función  $Cl$  por sobre una base de credibilidad  $\mathcal{C}$  queda definida de forma tal que,  $Cl(\mathcal{C}) = \mathcal{O}^*$ , donde  $\mathcal{O}^*$  representa la clausura transitiva del orden de credibilidad  $\mathcal{O}$ . De esta forma,  $\mathcal{C}$  es sensata si su correspondiente clausura transitiva, esto es,  $\mathcal{O}^*$ , es sensato. En el contexto de este modelo de representación,  $\mathcal{O}^*$  es sensato si y solo si  $\mathcal{O}$  define una relación de orden parcial *irreflexiva*, *antisimétrica* y *transitiva*. Retomando la base de credibilidad  $\mathcal{C}^A$  presentada anteriormente, es posible indicar que esta es sensata ya que,  $\mathcal{O} = \{(B, C), (C, D), (F, G)\}$  define una relación de orden parcial que cumple con las propiedades enunciadas anteriormente, de forma tal que  $\mathcal{O}^* = Cl(\mathcal{C}^A) = \{(B, C), (C, D), (F, G), (B, D)\}$  es sensato.

Con base en este modelo de representación, luego, los autores definen y caracterizan cuatro tipos de operadores de cambio sobre una base de credibilidad: el operador de expansión que, dada una base de credibilidad, permite incorporar un nuevo objeto de credibilidad a dicha base siempre que de la misma no sea posible inferir la relación de cre-

dibilidad opuesta; el operador de contracción que, dada una base de credibilidad, permite eliminar los objetos de credibilidad necesarios para que la relación de credibilidad con la que se está contrayendo la base de credibilidad no sea inferible en  $Cl(\mathcal{C})$ ; un operador de revisión priorizada que, dada una base de credibilidad, permite modificar esta incorporando un nuevo objeto de credibilidad a dicha base, eliminando los objetos de credibilidad necesarios de la base original para preservar la consistencia; y un operador de revisión no priorizado que, dada una base de credibilidad, permite modificar esta incorporando un nuevo objeto de credibilidad a dicha base, eliminando los objetos de credibilidad necesarios de la base original para preservar la consistencia, o por el contrario, no modificar la base de credibilidad original, considerando para esto un criterio de confiabilidad respecto de los agentes informantes de la relación de credibilidad con la que se realiza la revisión así como la relación opuesta, si es que esta, puede inferirse de la base de credibilidad original. Estos cuatro operadores se definieron a través de construcciones y caracterizaciones axiomáticas mediante postulados de racionalidad.

Para ejemplificar la operatoria de las cuatro operaciones de cambio, asuma una base de credibilidad  $\mathcal{C} = \{[(B, C), D], [(C, D), E], [(D, E), B]\}$ . Luego, el operador de expansión, notado como  $'\oplus'$ , permite incorporar un objeto de credibilidad a  $\mathcal{C}$ , siempre y cuando se mantenga consistencia. De esta forma, la expansión queda definida por casos, de la siguiente forma:

$$\mathcal{C} \oplus [(A, B), D] = \begin{cases} \mathcal{C} \cup \{[(A, B), D]\} & \text{si } (B, A) \notin Cl(\mathcal{C}) \\ \mathcal{C} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Luego,  $\mathcal{C} \oplus [(D, B), G] = \mathcal{C}$  ya que  $(B, D) \in Cl(\mathcal{C})$ , mientras que  $\mathcal{C} \oplus [(B, D), F] = \mathcal{C} \cup \{[(B, D), F]\} = \{[(B, C), D], [(C, D), E], [(D, E), B], [(B, D), F]\}$ . Para las ejemplificaciones que siguen, asuma  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \oplus [(B, D), F]$ .

La operación de contracción, notada como  $'\ominus'$ , permite eliminar relaciones de  $Cl(\mathcal{C})$  mediante la eliminación de objetos de credibilidad de  $\mathcal{C}$  y sin el agregado de nuevos. Asuma, por ejemplo, la contracción  $\mathcal{C}_1 \ominus (B, D)$ . Tenga en cuenta que la contracción no consiste simplemente con la eliminación de un objeto de credibilidad, sino que el resultado de la contracción debe ser una base de credibilidad de la que no es posible inferir  $(B, D)$ . El resultado al aplicar la contracción  $\mathcal{C}_1 \ominus (B, D)$  es  $\mathcal{C}_2 = \{[(C, D), E], [(D, E), B]\}$ . Esto es así porque los autores definen la construcción del operador de contracción siguiendo los siguientes pasos: (a) obtener todos los caminos simples en  $\mathcal{C}_1$  que permiten inferir  $(B, D)$ ;

(b) elegir de cada uno de estos caminos al menos un objeto de credibilidad a ser eliminado mediante una función de incisión  $\mu$ ; (c) eliminar los objetos de credibilidad seleccionados de la base de credibilidad  $\mathcal{C}_1$  obteniendo así el resultado.

Siguiendo los pasos indicados, los caminos simples, esto es, los subconjuntos minimales  $P$  de  $\mathcal{C}_1$  tal que  $(B, D) \in Cl(P)$  se corresponden con  $P_1 = \{[(B, C), D], [(C, D), E]\}$  y  $P_2 = \{[(B, D), F]\}$ . Luego, una función de incisión  $\mu$  debe seleccionar al menos un objeto de credibilidad de cada uno de los caminos simples. A diferencia de lo propuesto en [TFGS11], en esta construcción se especifica el criterio de selección a utilizar. Para esto se define una función  $min_{\mathcal{C}}$  que, dado un camino simple  $P$ , opera de la siguiente forma:  $min_{\mathcal{C}}(P) = \{[T, X] : [T, X] \in P \text{ y para todo } [T', Y] \in P, (Y, X) \notin Cl(\mathcal{C})\}$ . Esto es, la función  $min_{\mathcal{C}}(P)$  selecciona de cada camino simple los objetos de credibilidad que contemplan un informante para el cual no existen agentes informantes en  $\mathcal{C}$  indicados como menos creíbles. En consecuencia,  $\mu(\{P_1, P_2\}) = \{[(B, C), D], [(B, D), F]\}$ . Note que la función  $\mu$  selecciona  $[(B, C), D]$  y no  $[(C, D), E]$  de  $P_1$  porque  $(D, E) \in Cl(\mathcal{C}_1)$ , así como selecciona  $[(B, D), F]$  de  $P_2$  dado que no existe otro elemento en  $P_2$ . Con esta forma de seleccionar, finalmente, la contracción  $\mathcal{C}_1 \ominus (B, D)$  se corresponde con  $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \setminus \mu(\{P_1, P_2\}) = \{[(C, D), E], [(D, E), B]\}$ .

La operación de revisión priorizada, por su parte, consiste en el agregado de un objeto de credibilidad a la base de credibilidad  $\mathcal{C}$ , pero manteniendo la sensatez en la base de credibilidad resultante. Esta se encuentra definida a partir de los operadores de expansión y contracción descriptos anteriormente. De esta forma, la operación de revisión, notada como ' $\otimes$ ', queda especificada mediante la *Identidad de Levi* de la siguiente forma:  $\mathcal{C}_1 \otimes [(D, B), A] = (\mathcal{C}_1 \ominus (B, D)) \oplus [(D, B), A]$ . Teniendo en cuenta la operación de contracción descrita anteriormente, luego,  $\mathcal{C}_1 \ominus (B, D) = \{[(C, D), E], [(D, E), B]\}$  y, en consecuencia,  $\mathcal{C}_1 \otimes [(D, B), A] = \{[(C, D), E], [(D, E), B], [(D, B), A]\}$ .

El operador de revisión no priorizada, por último, fue definido de forma tal que el objeto de credibilidad con el que se revisa la base original puede ser completamente aceptado o rechazado. El criterio para aceptarlo o rechazarlo depende justamente de la confiabilidad de los agentes informantes. De esta forma, la operación de revisión no priorizada, notada como ' $\odot$ ', queda especificada a partir de los operadores de expansión

y revisión priorizada de la siguiente forma:

$$\mathcal{C} \odot [(A, B), D] = \begin{cases} \mathcal{C} \oplus \{[(A, B), D]\} & \text{si } (B, A) \notin Cl(\mathcal{C}) \\ \mathcal{C} \otimes \{[(A, B), D]\} & \text{si } (B, A) \in Cl(\mathcal{C}) \text{ y} \\ & \forall X \in Rl((B, A), \mathcal{C}), (X, D) \in Cl(\mathcal{C}) \\ \mathcal{C} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Note que, la revisión no priorizada de  $\mathcal{C}$  por  $[(A, B), D]$  se corresponde con la expansión de  $\mathcal{C}$  por  $[(A, B), D]$  en caso de que la relación de credibilidad  $(B, A)$ , opuesta a la que forma parte del objeto de credibilidad con el que se revisa  $\mathcal{C}$ , no forme parte de  $Cl(\mathcal{C})$ . Esto es, mientras no haya evidencia de lo contrario, el objeto de credibilidad con el que se revisa pueda incorporarse a  $\mathcal{C}$  directamente. En caso contrario, la revisión aceptará completamente o rechazará completamente  $[(A, B), D]$ , dependiendo del nivel de confiabilidad de los agentes informantes de  $(B, A) \in Cl(\mathcal{C})$  y el agente informante de  $[(A, B), D]$ , esto es, el agente  $D$ . Si cada uno de los agentes informantes de  $(B, A)$  computados mediante la función  $Rl$  son menos creíbles que el agente informante  $D$ , entonces  $[(A, B), D]$  será aceptado. Caso contrario, este elemento será rechazado y la base de credibilidad quedará inalterada. Los agentes informantes de  $(B, A) \in Cl(\mathcal{C})$  calculados a partir de  $Rl$  son estimados a partir de una política cauta: de cada uno de los caminos simples que prueban  $(B, A)$  en  $\mathcal{C}$ , se seleccionan aquellos objetos de credibilidad cuyos agentes informantes son los menos creíbles en dicho camino, considerando la información de  $Cl(\mathcal{C})$ . Luego, por sobre este conjunto de objetos de credibilidad previamente seleccionados, se seleccionan nuevamente aquellos objetos cuyos agentes informantes, en este caso, no tengan agentes más confiables dentro del subconjunto, considerando la información de  $Cl(\mathcal{C})$ . En este sentido, se seleccionan los objetos cuyos informantes son los más confiables de este subconjunto. De aquí, la política cauta. Finalmente, los agentes informantes asociados a los objetos de credibilidad que se obtengan a partir de este último paso, son los retornados por la función  $Rl$ .

Considere nuevamente la base  $\mathcal{C}_1 = \{[(B, C), D], [(C, D), E], [(D, E), B], [(B, D), F]\}$ , y suponga la revisión no priorizada  $\mathcal{C}_1 \odot [(D, B), K]$ . Luego, como  $(B, D) \in Cl(\mathcal{C}_1)$ , se debe analizar si los agentes informantes computados por  $Rl((B, D), \mathcal{C}_1)$  son menos creíbles que  $K$ . Los caminos simples para  $(B, D) \in Cl(\mathcal{C}_1)$  se corresponden con:  $P_1 = \{[(B, C), D], [(C, D), E]\}$  y  $P_2 = \{[(B, D), F]\}$ . Luego, el conjunto de objetos de

credibilidad cuyos informantes son los menos creíbles a partir de  $P_1$  y  $P_2$  se corresponde con  $Min = \{[(B, C), D], [(B, D), F]\}$ . Observe que se selecciona el objeto  $[(B, C), D]$  de  $P_1$  porque  $(D, E) \in Cl(\mathcal{C}_1)$ . La selección de  $[(B, D), F]$  de  $P_2$  se da porque el agente  $F$  no es comparable con otros agentes ya que  $P_2$  tiene un solo elemento. Por otro lado, los objetos de credibilidad cuyos informantes son los más creíbles a partir de  $Min$  se corresponden con  $Max = \{[(B, C), D], [(B, D), F]\}$ . En este caso, prevalecen estos dos objetos de credibilidad en la selección ya que los agentes  $D$  y  $F$  no son comparables entre sí en  $Cl(\mathcal{C}_1)$ . Finalmente, los agentes informantes de  $Max$  se corresponden con  $\{D, F\}$ . Como  $K$  no es más creíble que cada uno de estos agentes en  $Cl(\mathcal{C}_1)$ , entonces, la revisión no priorizada de  $\mathcal{C}_1$  por  $[(D, B), K]$  es igual a  $\mathcal{C}_1$  porque se rechaza la información entrante.

Tomando en cuenta estos trabajos previos, en esta tesis se extenderán los resultados obtenidos en esta línea de investigación que modela, representa y opera la dinámica de la confianza de agentes informantes mediante órdenes parciales de credibilidad. Por un lado, se formalizará un modelo que permite representar las creencias de un agente respecto de otros agentes dentro de un *SMA*, pero contextualizando la información. Los trabajos previos, a diferencia de lo que en esta tesis se propondrá, no direccionan la contextualidad de la información de la confianza sino que basan sus modelos en caracterizaciones de simple contexto. Además de esto, en este documento se abordará la dinámica de la confianza a través de operadores de cambio múltiple. Esta es otra de las características que distingue a esta tesis de los trabajos previos que, en todas sus versiones, trabajan con revisiones simples, tomando como entrada un único valor de confianza para efectuar las revisiones. Además de lo anterior, y en un sentido similar a lo que se incorpora en [TGFS14], en esta tesis se analizarán y propondrán diferentes formas de seleccionar los elementos que deberán ser eliminados en el proceso de revisión para preservar la consistencia. En todos los casos, se abandonará la noción de informante, ya que los órdenes de credibilidad que serán tratados durante el desarrollo de esta tesis trabajarán con elementos de credibilidad que indican el grado de confianza de un agente en comparación con otro, pero sin el dato adicional de qué agente fue quien informó de este valor de confianza.

Basados en las ideas detrás del modelo completo de cambio sobre órdenes de credibilidad presentado en [TGFS14, TFGS11], en esta tesis se formalizarán dos operadores de revisión múltiple sobre órdenes de credibilidad, uno priorizado y otro no priorizado denominado mezcla. Dado que [TGFS14, TFGS11] presenta operadores de revisión simple, en esta tesis se considerarán también los resultados presentados en [FKIRS12], donde los

autores proponen operadores de revisión múltiple sobre bases de creencias.

## 2.3. Resumen

En este capítulo se introdujeron de forma resumida los conceptos preliminares relacionados a las áreas de investigación que serán abordadas a lo largo del desarrollo de esta tesis. En primer lugar, se comentaron las principales características de los sistemas computacionales de reputación y confianza, indicando la preferencia que se tendrá por el término confianza y, en particular, por el uso de la palabra credibilidad, ya que esta palabra tiene un sentido intuitivo que ayuda a comprender los problemas relacionados al campo de aplicación de lo desarrollado en esta tesis. Además de esto, se diferenciaron los modelos de confianza numéricos y simbólicos, así como los de simple y multi-contexto, describiendo algunas de las razones por las que en esta tesis se formalizará un modelo simbólico y multi-contexto para representar la confianza.

Además, se describieron de forma resumida algunas de las principales características de la teoría del cambio de creencias. En particular, se indicó que el trabajo desarrollado en esta tesis se enmarca en la definición de dos operadores de revisión múltiple y no de revisión simple como el propuesto en el modelo *AGM*. Cada uno de los operadores que se presentarán, posibilitarán tanto la revisión priorizada como la no priorizada. Además de lo anterior, se caracterizó el hecho de que los operadores de revisión que se presentarán no operan sobre conjuntos de creencias, sino que operan sobre órdenes parciales de credibilidad. Se especificó también, que las construcciones estarán basadas en las ideas detrás del operador *kernel contraction* presentado en [Han94].

Por último, se mencionaron dos trabajos previos que abordan también la dinámica de la confianza representada mediante órdenes parciales entre agentes, resaltando la contribución que propone esta tesis a partir de lo desarrollado en estas propuestas: el agregado de la multi-contextualidad de la información de la confianza; el tratamiento de múltiples elementos de credibilidad como entrada para los operadores de revisión; y la especificación de criterios que admiten seleccionar qué información debe ser eliminada ante el proceso de revisión.

# Capítulo 3

## Cambio múltiple priorizado sobre órdenes de credibilidad

Como se mencionó en el Capítulo 1, esta tesis aborda el análisis, desarrollo y formalización de la dinámica de la confianza de los agentes, a partir de la interacción con sus pares en el marco de un Sistema Multi-Agente (*SMA*). Para abordar tanto la representación como la dinámica de la confianza, se propone el uso de órdenes parciales de credibilidad. Los elementos de estos órdenes de credibilidad representarán las creencias que un agente mantiene asociadas al nivel de confianza existente entre diferentes agentes. En particular, la confianza será representada de manera simbólica, esto es, mediante elementos de credibilidad que indican que un agente es más creíble que otro.

Los valores de confianza entre agentes representan valoraciones que pueden variar o modificarse con el tiempo. En consecuencia, los órdenes parciales de credibilidad que se plantean utilizar no necesariamente permanecerán estáticos. Con esto en mente, en esta tesis se abordará el tratamiento de la dinámica de los valores de confianza, mostrando cómo información de diferentes órdenes de credibilidad puede ser utilizada en conjunto. Para esto, se presentarán operadores de cambio múltiple, esto es, operadores que permiten abordar la dinámica de un orden de credibilidad dado, integrando su información junto con la información proveniente de otro orden de credibilidad.

Tal como fue mencionado en el Capítulo 2, la dinámica del conocimiento es modelada por la teoría de cambio de creencias (*belief revision*), la cual busca mostrar cómo quedan constituidas las creencias de un agente después de recibir cierta información externa. El principal avance en la teoría de cambio de creencias fue durante los 1980s, ante la

publicación de un artículo internacionalmente conocido como modelo *AGM* [AGM85]. El modelo *AGM* presenta tres tipos de operadores que formalizan tres posibles cambios sobre un conjunto de creencias. En particular, la operación de revisión consiste en el agregado de una nueva creencia al conjunto de creencias, manteniendo consistencia en el conjunto de creencias resultante.

Existen diferentes alternativas para revisar un conjunto de creencias. El operador de revisión propuesto por el modelo *AGM* presenta una restricción respecto a la entrada epistémica y al tratamiento que le da a la misma. Por un lado, este operador solo admite la revisión por una sentencia. Esto es, un conjunto de sentencias  $K$  puede ser revisado por una única sentencia  $\alpha$  a la vez. Este tipo de revisión se denomina revisión simple. Por otro lado, la operación de revisión propuesta es priorizada. Esto es así por uno de los postulados característicos del operador, denominado postulado de *éxito*. Este postulado establece que, para toda revisión  $K_1$  de un conjunto de creencias  $K$  por una sentencia  $\alpha$  (es decir,  $K_1 = K * \alpha$ , siendo  $'*$ ' el operador de revisión) entonces  $\alpha \in K_1$ .

El modelo *AGM* está definido para operar sobre conjuntos de sentencias, que se encuentran expresadas en un lenguaje proposicional  $\mathcal{L}$ . Sin embargo, la propuesta de esta tesis sugiere representar la confianza entre agentes mediante elementos de credibilidad expresados de manera simbólica. Existen trabajos de la literatura relacionada que han abordado la dinámica de la confianza entre agentes, siendo esta representada de forma simbólica. En el Capítulo 2 se presentaron dos trabajos que formalizan un modelo de cambio completo para órdenes de credibilidad [TGFS14, TFGS11]. En [TGFS14], se presentan cuatro operadores de cambio, entre los cuales se formalizan dos de revisión, uno priorizado y otro no priorizado, mientras que en [TFGS11] se proponen 3 operadores de cambio entre los cuales se formaliza uno de revisión priorizada. Al igual que con los operadores del modelo *AGM*, estos operadores de revisión admiten únicamente revisiones simples.

Además de la revisión simple sobre sentencias, existen también operadores de revisión múltiple. En este tipo de revisiones, la entrada epistémica está compuesta de un conjunto de sentencias. El término revisión múltiple se utiliza para referirse a operaciones de revisión que permiten la revisión simultánea por más de una sentencia. Esto debe distinguirse de la revisión repetida o iterada, es decir, la aplicación de dos o más revisiones simples en una secuencia. Las revisiones múltiples no pueden ser realizadas como una revisión simple de forma iterada dado que, este proceso podría conducir a diferentes resultados dependiendo del orden en el que se consideran las sentencias de la entrada epistémica.

Considerando que el objetivo de esta tesis es abordar la dinámica de la confianza integrando la información de dos órdenes de credibilidad, se definirán dos operadores de revisión múltiple. Para esto, se tendrán en cuenta los resultados publicados en [FKIRS12], donde se presentan dos operadores de revisión múltiple sobre bases de creencias, uno priorizado y otro no priorizado. Además, los operadores se basarán en las ideas presentadas en [TGFS14, TFGS11] donde se propone la revisión simple sobre órdenes de credibilidad.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, en este capítulo se formalizará un operador de cambio múltiple priorizado para órdenes de credibilidad. En primer lugar, se presentará en la Sección 3.1, el formalismo de representación para órdenes de credibilidad. Luego, en la Sección 3.2, se formalizarán los postulados que caracterizan el comportamiento esperado del operador y se propondrá tanto la construcción del operador como el teorema de representación que asocia la construcción y los postulados. Además, en la Sección 3.3, se describirán un conjunto de funciones que permiten implementar el operador propuesto. En la Sección 3.4, se mostrará formalmente que estas funciones se corresponden con un operador de cambio múltiple priorizado. Finalmente, dado que la implementación del operador requiere de la definición de una función de incisión que indique con qué criterio deben resolverse las inconsistencias, en la Sección 3.5 se presentarán y analizarán tres funciones diferentes que permiten realizar esta tarea. Los resultados obtenidos a lo largo del presente capítulo, fueron publicados en su mayor parte en [JTG22] y también, en parte, en [JTG19].

### 3.1. Modelo de representación

Para representar la confianza o credibilidad asociada a un conjunto de agentes, en lo que sigue, se utilizará un orden parcial estricto. Para hacer esto, se considerará un conjunto finito  $\mathbb{A}$  de identificadores de agentes. En general, para las definiciones, propiedades y ejemplos abstractos, los elementos del conjunto  $\mathbb{A}$  se denotarán con un identificador formado por una letra mayúscula  $A$  y un subíndice (*e.g.*,  $A_1$ ). Cada identificador representará un único agente y, dado que la propuesta está concebida para operar dentro de un entorno colaborativo, no será necesario tomar medidas para evitar el robo de identidad.

Como se mencionó en el Capítulo 1, para representar la confianza entre agentes se utilizará un enfoque de comparación por pares. De esta forma, las credibilidades que un

agente asigna a otros agentes estarán representadas por un *Orden de Credibilidad* como se define a continuación.

**Definición 3.1** (Elemento de Credibilidad - Orden de Credibilidad). *Sean  $A_i, A_j \in \mathbb{A}$  dos agentes. Un elemento de credibilidad notado  $A_i > A_j$  representa que  $A_i$  es estrictamente más creíble que  $A_j$ . Un orden de credibilidad es un conjunto finito de elementos de credibilidad.*

Note que un agente puede mantener más de un orden de credibilidad. Por ejemplo, en uno de los escenarios presentados durante el Capítulo 1, se mencionó que un agente *Robin* podía modelar información respecto de la confianza de algunos agentes en un tópico *Teléfonos Inteligentes*, de manera separada a la información de otros tópicos como, *Dispositivos Electrónicos* o *Artículos de Camping*. La información en cada uno de estos tópicos, entonces, tendrá asociado un orden de credibilidad que la representa. Teniendo esto en cuenta, los órdenes de credibilidad se notarán, en general, con una letra mayúscula caligráfica  $\mathcal{O}$  con subíndices (e.g.,  $\mathcal{O}_1$ ).

Observe que los agentes dentro de un *SMA*, representan diferentes entidades, dependiendo del dominio de aplicación. Por ejemplo, cuando se modela la confianza entre diferentes hoteles o restaurantes, tanto los hoteles como los restaurantes son las entidades que, formalmente, en el modelo de representación propuesto, serán consideradas como un determinado agente dentro del *SMA*.

A pesar que en la formalización, en general, se usará para los identificadores de agentes una letra mayúscula  $A$  con un subíndice y a los órdenes de credibilidad con una letra mayúscula caligráfica  $\mathcal{O}$  con subíndices, en lo que resta del documento también se notarán a las diferentes entidades u órdenes de credibilidad de una forma más representativa en diferentes ejemplos de aplicación. De esta forma, en un escenario donde se ejemplifica la confianza entre hoteles, por ejemplo, estas entidades podrán ser notadas con una letra mayúscula  $H$  con un subíndice (e.g.,  $H_1$ ), mientras los órdenes de credibilidad que se encuentren asociados o relacionados a un determinado tópico, podrán ser notados mediante una letra mayúscula caligráfica  $\mathcal{O}$  con subíndices que distinguen el tópico en particular (por ejemplo,  $\mathcal{O}_{Lim}$  representa las credibilidades de diferentes hoteles respecto al tópico *Limpieza*).

**Ejemplo 3.1.** *Considere que un agente  $A_1$  tiene dos órdenes de credibilidad:*  
 $\mathcal{O}_1 = \{ A_2 > A_3, A_4 > A_2, A_6 > A_3, A_5 > A_6 \}$  y  
 $\mathcal{O}_2 = \{ A_2 > A_5, A_1 > A_2, A_4 > A_2, A_3 > A_2 \}$ .

A partir del Ejemplo 3.1, note que los mismos elementos de credibilidad pueden estar en más de un orden de credibilidad: por ejemplo, el elemento  $A_4 > A_2$  pertenece a ambos,  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ . Además, note que el agente que mantiene estos órdenes de credibilidad puede estar incluido en algunos de estos. En este ejemplo,  $A_1$  forma parte del elemento de credibilidad  $A_1 > A_2$  de  $\mathcal{O}_2$ .

En escenarios donde podría aplicarse este modelo de representación, esto queda aún más claro. Por ejemplo, si se considera uno de los ejemplos del Capítulo 1, no sería extraño observar que el agente *Robin* mantuviese información coincidente respecto de dos o más agentes en los tópicos *Teléfonos Inteligentes* y *Dispositivos Electrónicos*. Esto es así ya que, estos tópicos, guardan una estrecha relación. Por otro lado, también es claro que un agente podría formar parte de un orden de credibilidad que él mismo mantiene. Por ejemplo, en un escenario donde un médico modela información respecto de la credibilidad de diferentes colegas, este mismo médico podría compararse con otros, aún cuando esta comparación la realiza para organizar sus propias creencias.

Por otro lado, observe en el Ejemplo 3.1 que  $\{A_4 > A_2, A_2 > A_3\} \subset \mathcal{O}_1$ . Esto es, considerando la información en  $\mathcal{O}_1$ ,  $A_4$  es más creíble que  $A_2$  y  $A_2$  es más creíble que  $A_3$ . Luego, se puede inferir que  $A_4$  es más creíble que  $A_3$  en  $\mathcal{O}_1$ . Además, como  $\{A_5 > A_6, A_6 > A_3\} \subset \mathcal{O}_1$  entonces  $A_5 > A_3$  también vale para  $\mathcal{O}_1$ . Así, dado un orden de credibilidad, nuevos elementos de credibilidad pueden ser inferidos a partir de su clausura transitiva. Por ejemplo, a partir de la clausura transitiva de  $\mathcal{O}_2$ , los elementos de credibilidad  $\{A_1 > A_5, A_4 > A_5, A_3 > A_5\}$  pueden ser inferidos.

Esto puede verse con claridad retomando la situación planteada para el agente *Robin*. Por ejemplo, si en el contexto de la venta de *Teléfonos Inteligentes* el agente *Robin* observa que un vendedor  $A_1$  es más creíble que otro vendedor  $A_2$ , así como considera que este vendedor  $A_2$  es más creíble que otro vendedor  $A_3$  ( $A_1 > A_2$  y  $A_2 > A_3$ ), no es extraño pensar que, al considerar sus propias experiencias en conjunto, *Robin* concluya entonces que el vendedor  $A_1$  es más confiable que el vendedor  $A_3$  ( $A_1 > A_3$ ).

A partir de lo anterior,  $\mathcal{O}^*$  denotará la clausura transitiva de un orden de credibilidad  $\mathcal{O}$ . En el Ejemplo 3.1,  $\mathcal{O}_1^* = \{A_2 > A_3, A_4 > A_2, A_6 > A_3, A_5 > A_6, A_4 > A_3, A_5 > A_3\}$ , y  $\mathcal{O}_2^* = \{A_2 > A_5, A_1 > A_2, A_4 > A_2, A_3 > A_2, A_1 > A_5, A_4 > A_5, A_3 > A_5\}$ .

Observe que todo elemento en la clausura transitiva de un orden de credibilidad  $\mathcal{O}$  permite comparar dos agentes. Por el contrario, la ausencia de elementos que relacionen

a dos agentes en  $\mathcal{O}^*$  indica, entonces, que estos agentes son incomparables en  $\mathcal{O}$ . Esto da lugar a la siguiente observación.

**Observación 3.1.** *Dado un orden de credibilidad  $\mathcal{O}$ , un agente  $A_i$  es estrictamente más creíble que  $A_j$  si  $A_i > A_j \in \mathcal{O}^*$ . Análogamente, un agente  $A_i$  es estrictamente menos creíble que  $A_j$  si  $A_j > A_i \in \mathcal{O}^*$ . Si se da el caso que  $A_i$  no es estrictamente más creíble que  $A_j$  y que  $A_i$  no es estrictamente menos creíble que  $A_j$ , entonces los agentes  $A_i$  y  $A_j$  son incomparables en  $\mathcal{O}$ .*

**Ejemplo 3.2.** *Considere las clausuras transitivas de los órdenes de credibilidad del Ejemplo 3.1:  $\mathcal{O}_1^* = \{A_2 > A_3, A_4 > A_2, A_6 > A_3, A_5 > A_6, A_4 > A_3, A_5 > A_3\}$  y  $\mathcal{O}_2^* = \{A_2 > A_5, A_1 > A_2, A_4 > A_2, A_3 > A_2, A_1 > A_5, A_4 > A_5, A_3 > A_5\}$ . Luego,  $A_4$  y  $A_2$  son comparables en  $\mathcal{O}_1$  ya que  $A_4 > A_2 \in \mathcal{O}_1$ , esto es,  $A_4$  es estrictamente más creíble que  $A_2$ . De forma equivalente,  $A_5$  y  $A_1$  son comparables en  $\mathcal{O}_2$  ya que  $A_1 > A_5 \in \mathcal{O}_2$ , esto es,  $A_5$  es estrictamente menos creíble que  $A_1$ . Por el contrario,  $A_4$  y  $A_5$  no son comparables en  $\mathcal{O}_1$  ya que  $A_4 > A_5 \notin \mathcal{O}_1^*$  y  $A_5 > A_4 \notin \mathcal{O}_1^*$ . Tampoco son comparables  $A_6$  y  $A_2$  en  $\mathcal{O}_2$  ya que  $A_6 > A_2 \notin \mathcal{O}_2^*$  y  $A_2 > A_6 \notin \mathcal{O}_2^*$ . De hecho, el agente  $A_6$  no forma parte de ningún elemento de credibilidad en  $\mathcal{O}_2$ , por lo que no es comparable con ninguno de los agentes de dicho orden.*

Es importante mencionar que la información de un orden de credibilidad no debe contener contradicciones. Dos elementos son contradictorios entre sí cuando estos representan información opuesta. Por ejemplo, sería contradictorio pensar que el agente *Robin* cree, en el tópico *Artículos de Camping*, que  $A_5 > A_4$  (esto es, que el agente  $A_5$  es más creíble que el agente  $A_4$ ) al mismo tiempo que cree en lo contrario  $A_4 > A_5$  (esto es, que el agente  $A_4$  es más creíble que el agente  $A_5$ ). Luego, dado un orden de credibilidad  $\mathcal{O}$ , no pueden existir dos elementos contradictorios en  $\mathcal{O}^*$ . Esto último motiva la siguiente definición.

**Definición 3.2** (Orden de credibilidad sensato). *Un orden de credibilidad  $\mathcal{O}$  es considerado sensato si  $\mathcal{O}^*$  es un orden parcial estricto sobre  $\mathbb{A}$ , esto es,  $\mathcal{O}^*$  define una relación binaria sobre  $\mathbb{A}$  que es irreflexiva, transitiva y antisimétrica.*

**Observación 3.1.** *En el modelo de representación propuesto, se asume que los órdenes de credibilidad son sensatos.*

**Observación 3.2.** *Dados dos órdenes de credibilidad sensatos  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  podría ser un orden no sensato.*

En el Ejemplo 3.1, tanto  $\mathcal{O}_1$  como  $\mathcal{O}_2$  son dos órdenes de credibilidad sensatos, mientras que la unión  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  no es sensata porque  $\{A_2 > A_3, A_3 > A_2\} \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . A continuación, se introducirá una notación gráfica para órdenes de credibilidad que representa a estos como grafos dirigidos.

**Definición 3.3** (Grafo asociado a un orden de credibilidad). *Dado un orden de credibilidad  $\mathcal{O}$ , su grafo asociado es un grafo dirigido donde el conjunto de vértices  $V$  está formado por los identificadores de agentes que están presentes en algún elemento de  $\mathcal{O}$  (es decir, un vértice  $A_i \in V$  sí y sólo si  $A_i > A_j \in \mathcal{O}$  o  $A_j > A_i \in \mathcal{O}$ ), y para todo elemento de credibilidad  $A_i > A_j \in \mathcal{O}$  existe un arco desde el vértice  $A_j$  al vértice  $A_i$ .*

**Observación 3.3.** *Un orden de credibilidad es sensato si y solo si su grafo asociado es acíclico.*

**Observación 3.4** (Adaptación de [HJ08]). *Un ciclo en el grafo asociado a  $\mathcal{O}$  se corresponde con un subconjunto  $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{O}$  que define un camino simple cerrado, de forma tal que ningún elemento de credibilidad aparece dos o más veces en  $\mathcal{Y}$ .*

Teniendo en cuenta lo anterior, la Figura 3.1 muestra los grafos asociados a los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  del Ejemplo 3.1. En la Figura 3.1(a) el arco desde  $A_2$  a  $A_4$  representa el elemento de credibilidad  $A_4 > A_2$ . La Figura 3.1(c) representa la unión de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ . Como se infiere de la Observación 3.3, un ciclo en el grafo asociado a un orden de credibilidad implica que el orden de credibilidad no es sensato. Siguiendo la Observación 3.4, en la Figura 3.1(c), dos ciclos pueden ser observados: un ciclo entre  $A_2$  y  $A_3$  y otro ciclo entre los agentes  $A_5, A_2, A_3$  y  $A_6$ .

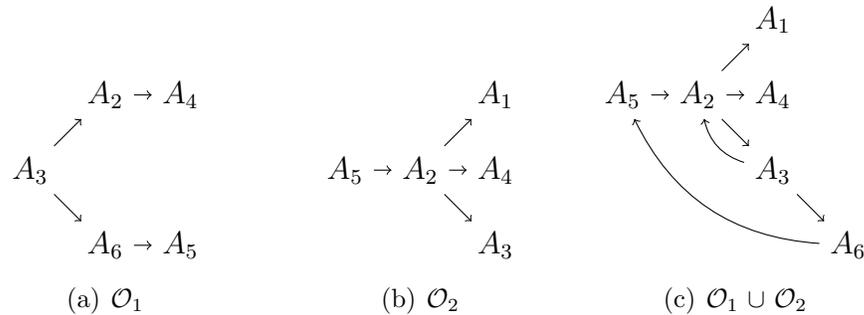


Figura 3.1: Grafos asociados a  $\mathcal{O}_1 = \{A_2 > A_3, A_4 > A_2, A_6 > A_3, A_5 > A_6\}$ ,  $\mathcal{O}_2 = \{A_2 > A_5, A_1 > A_2, A_4 > A_2, A_3 > A_2\}$  y  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  del Ejemplo 3.1.

Como se indicó en el Capítulo 1, existen muchas situaciones en las que es conveniente o necesario integrar la información de dos órdenes de credibilidad en un nuevo orden de

credibilidad sensato. Esto sucede, por ejemplo, en el escenario del agente *Robin* que allí fue introducido.

Recuerde que *Robin* conocía que  $A_1 > A_2$  y  $A_3 > A_4$  en el tópico *Teléfonos Inteligentes*, así como  $A_2 > A_3$  en el tópico *Dispositivos Electrónicos*. Esto daba lugar a dos órdenes de credibilidad:  $\mathcal{O}_{Tel} = \{A_1 > A_2, A_3 > A_4\}$  y  $\mathcal{O}_{Elec} = \{A_2 > A_3\}$ . A partir de esta información, *Robin* necesitaba tomar una decisión comparando a los agentes  $A_1$  y  $A_3$  en el tópico *Teléfonos Inteligentes*. Sin embargo, considerando solo la información de dicho tópico, esto es, considerando solamente  $\mathcal{O}_{Tel}$ , los agentes no son comparables.

Por el contrario, si la información de ambos tópicos se utiliza de forma integrada, por ejemplo, uniendo estos órdenes, esto podría resolverse. Note que, a partir de  $\mathcal{O}_{Int} = \mathcal{O}_{Tel} \cup \mathcal{O}_{Elec}$ , los agentes se vuelven comparables dado que  $A_1 > A_3 \in \mathcal{O}_{Int}^*$ . En este escenario, *Robin* podría tomar una decisión respecto de los agentes  $A_1$  y  $A_3$  en la que considera la información del tópico *Teléfonos Inteligentes* y, además, la información de un tópico relacionado a este como es el caso del tópico *Dispositivos Electrónicos*.

Sin embargo, más allá de la utilidad de integrar información mediante la unión de dos órdenes de credibilidad, note que no siempre es posible realizar la integración de esta manera. Tal como se puede observar en la Figura 3.1(c), la mera unión de dos órdenes sensatos puede dar como resultado un orden de credibilidad no sensato.

En lo que sigue, se formalizará una alternativa que, utilizando herramientas de revisión de creencias, permite integrar la información de dos órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  tal que, el orden de credibilidad resultante, permanezca sensato. Esta propuesta plantea resolver las situaciones conflictivas otorgándole prioridad a todos los elementos que forman parte de  $\mathcal{O}_2$ . De esta manera, si algunos elementos deben ser eliminados de la integración de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  para que el resultado sea sensato, estos serán elementos que provienen únicamente de  $\mathcal{O}_1$ .

Tenga en cuenta que, las situaciones conflictivas que pueden surgir ante la integración de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ , se corresponderán con los ciclos existentes en el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . En lo que resta del documento, cuando el texto se refiera a los *ciclos del grafo asociado a un orden de credibilidad*  $\mathcal{O}$ , por simplicidad, muchas veces se escribirá *ciclos del orden*  $\mathcal{O}$ , o *ciclos de*  $\mathcal{O}$ .

### 3.2. Cambio múltiple priorizado mediante revisión

Para ilustrar el comportamiento del operador de revisión múltiple priorizada que se definirá en esta sección, considere nuevamente los órdenes de credibilidad del Ejemplo 3.1:  $\mathcal{O}_1 = \{A_2 > A_3, A_4 > A_2, A_6 > A_3, A_5 > A_6\}$  y  $\mathcal{O}_2 = \{A_2 > A_5, A_1 > A_2, A_4 > A_2, A_3 > A_2\}$

Asuma que  $\mathcal{O}_1$  tiene que ser revisado por  $\mathcal{O}_2$ , esto es, se intenta integrar la información de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  otorgándole prioridad a los elementos de  $\mathcal{O}_2$ . Como el resultado de la revisión debe ser un orden de credibilidad sensato, y teniendo en cuenta que puede surgir más de un ciclo en el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , entonces el proceso de revisión tiene que elegir qué elementos de  $\mathcal{O}_1$  no formarán parte del orden resultante.

Por lo tanto, la revisión múltiple priorizada de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$  podría resultar en diferentes órdenes de credibilidad. La figura 3.2 muestra los diferentes resultados posibles al revisar  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$ . En la figura, debajo de cada grafo asociado a cada uno de los tres resultados posibles, se muestra el conjunto  $E$  de elementos pertenecientes a  $\mathcal{O}_1$  que fueron excluidos en la revisión.

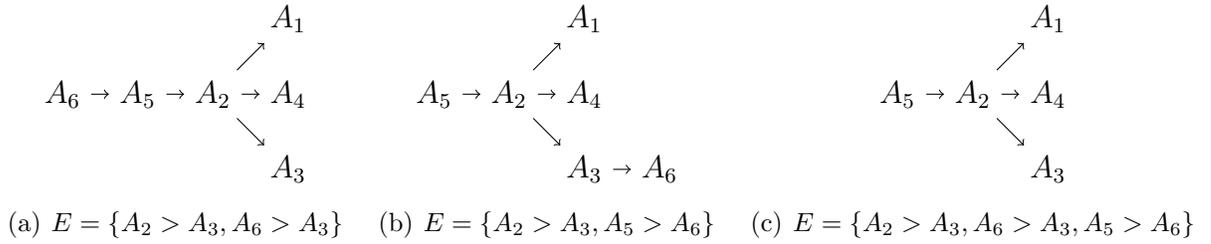


Figura 3.2: (a), (b) y (c) muestran los grafos asociados de tres posibles resultados obtenidos a partir de la revisión de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$  del Ejemplo 3.1. Cada grafo muestra la representación de  $\mathcal{O}_2 \cup (\mathcal{O}_1 \setminus E)$ , donde  $E$  es el conjunto de elementos de  $\mathcal{O}_1$  que son excluidos de la revisión, en cada una de las alternativas, para asegurar que el orden resultante sea sensato.

A continuación, se describirá un conjunto de postulados para un operador de revisión múltiple priorizada de un orden de credibilidad sensato  $\mathcal{O}_1$  por otro orden de credibilidad sensato  $\mathcal{O}_2$ . El resultado será un orden de credibilidad sensato. La revisión propuesta le asigna prioridad a los elementos de  $\mathcal{O}_2$ , esto es, luego de revisar todos los elementos de  $\mathcal{O}_2$  deben permanecer en el orden resultante.

### 3.2.1. Postulados para la revisión múltiple priorizada

En esta sección, se presentarán los postulados que indican cómo debe comportarse el operador de revisión múltiple priorizada de un orden de credibilidad por otro orden de credibilidad. Estos postulados fueron adaptados a partir de aquellos presentados en [FKIRS12] y que describen un operador de revisión múltiple sobre bases de creencias representadas en un lenguaje proposicional.

Sean  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_3$  tres órdenes de credibilidad sensatos y ‘\*’ un operador de revisión múltiple priorizada que toma dos órdenes de credibilidad sensatos como entradas. Considerando que  $\mathcal{O}_1$  es revisado por  $\mathcal{O}_2$  (*i.e.*,  $\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$ ), entonces se proponen los siguientes postulados para operaciones de revisión múltiple priorizadas sobre órdenes de credibilidad:

**P1 - Inclusión:**  $\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$

Este postulado establece que cualquier revisión entre dos órdenes de credibilidad sensatos arbitrarios se incluye en la unión de estos órdenes, es decir, además de los elementos de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  no se agregará ningún otro elemento de credibilidad al revisar  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$ .

**P2 - Éxito:**  $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$

Dado que el operador de revisión es priorizado, este postulado establece que la revisión otorga prioridad a los elementos de  $\mathcal{O}_2$ . De esta forma, todos los elementos de  $\mathcal{O}_2$  pertenecerán al orden de credibilidad resultante de la revisión.

**P3 - Sensatez:**  $\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$  es sensato.

Este postulado garantiza que se conserva la sensatez en el orden de credibilidad resultante de la revisión.

**P4 - Uniformidad:** Para todo subconjunto  $\mathcal{Y}$  de  $\mathcal{O}_1$ , si  $\mathcal{Y} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato si y solo si  $\mathcal{Y} \cup \mathcal{O}_3$  no es sensato, entonces  $\mathcal{O}_1 \setminus (\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2) = \mathcal{O}_1 \setminus (\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_3)$ .

Este postulado establece que si dos órdenes de credibilidad no son sensatos con los mismos subconjuntos de  $\mathcal{O}_1$  entonces los respectivos elementos de credibilidad eliminados de  $\mathcal{O}_1$  deben ser idénticos.

**P5 - Retención de núcleo:** Si  $e \in \mathcal{O}_1 \setminus (\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2)$  entonces existe un conjunto  $\mathcal{Y} \subseteq (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$ , tal que  $\mathcal{Y} \cup \mathcal{O}_2$  es sensato pero  $\mathcal{Y} \cup \{e\} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato.

Este postulado establece que nada se elimina de  $\mathcal{O}_1$  a menos que su eliminación contribuya a que el resultado sea un orden de credibilidad sensato.

Estos postulados caracterizan el comportamiento esperado del operador de revisión. Por un lado, *Inclusión*, *Éxito* y *Sensatez* establecen que la revisión debe resultar en un orden de credibilidad sensato, e indican además qué elementos de la entrada permanecerán en el resultado. Por otro lado, *Uniformidad* y *Retención del Núcleo* caracterizan los elementos que no formarán parte del resultado de la revisión.

Teniendo en cuenta el comportamiento esperado para todo operador de revisión múltiple priorizada de órdenes de credibilidad, en la siguiente subsección se desarrollará su correspondiente construcción.

### 3.2.2. Construcción de un operador de revisión múltiple priorizada

Inspirados en las ideas presentadas en [TGFS14] para la revisión de un orden de credibilidad por un solo elemento de credibilidad, y las ideas presentadas en [FKIRS12] para revisar una base de sentencias por otro conjunto de sentencias, en lo que sigue se definirá un operador de revisión múltiple priorizada de tipo *kernel* para órdenes de credibilidad. Recuerde que, durante el Capítulo 2, fueron presentadas tanto las nociones detrás del operador *kernel contraction* propuesto por [Han94], como las principales características del trabajo [TGFS14].

Teniendo esto en cuenta, en lo que sigue se presentará una construcción completa del operador propuesto y, luego, un teorema de representación que relaciona la construcción con los postulados propuestos en la Sección 3.2.1. El siguiente ejemplo se utilizará a lo largo de la sección para ilustrar la construcción del operador.

**Ejemplo 3.3.** *Considere los órdenes de credibilidad sensatos  $\mathcal{O}_1 = \{ A_4 > A_3, A_1 > A_4, A_2 > A_4, A_1 > A_2, A_5 > A_2, A_9 > A_6, A_{10} > A_9 \}$  y  $\mathcal{O}_2 = \{ A_3 > A_1, A_4 > A_3, A_2 > A_1, A_2 > A_9, A_6 > A_5 \}$ . Note que existe solo un elemento de credibilidad que pertenece a ambos órdenes:  $A_4 > A_3$ . Los grafos asociados a estos órdenes se pueden observar en las Figuras 3.3(a) y 3.3(b). Como los órdenes de credibilidad son sensatos, sus grafos asociados son acíclicos. Sin embargo, la unión de ambos órdenes no es sensata. La Figura 3.3(c) muestra el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Observe que existen cuatro ciclos en este grafo asociado. Por conveniencia, en la Figura 3.3(c) los elementos de credibilidad de  $\mathcal{O}_2$  se muestran con arcos sólidos mientras que los elementos de  $\mathcal{O}_1$  son graficados con arcos punteados. Recuerde que  $\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$*

debe ser sensato y también contener todos los elementos de  $\mathcal{O}_2$ . De esta forma, algunos elementos de credibilidad de  $\mathcal{O}_1$  (es decir, algunos de los arcos punteados en la unión) no deberán estar incluidos en  $\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$  para evitar cualquier ciclo.

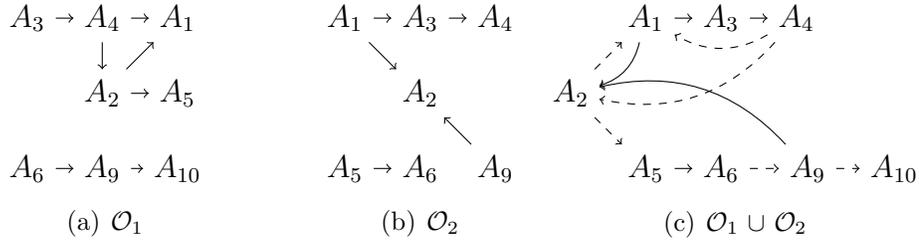


Figura 3.3: (a) y (b) muestran los grafos asociados a los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  del Ejemplo 3.3. (c) muestra el grafo asociado a la unión  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  donde los elementos que pertenecen a  $\mathcal{O}_2$  son graficados con arcos sólidos mientras los elementos de  $\mathcal{O}_1$  con arcos punteados.

El operador de revisión múltiple sobre órdenes de credibilidad que se introducirá a continuación, quedará demostrado luego, satisface los postulados propuestos en la Sección 3.2.1. Para ello, deben abordarse dos cuestiones. En primer lugar, el proceso de revisión debe determinar qué elementos de  $\mathcal{O}_1$  están en conflicto con  $\mathcal{O}_2$ . Los elementos en conflicto son aquellos elementos de  $\mathcal{O}_1$  que forman parte de algún ciclo en el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . En segundo lugar, el proceso de revisión debe seleccionar algunos de esos elementos en conflicto de  $\mathcal{O}_1$  de tal manera que los elementos de credibilidad restantes de  $\mathcal{O}_1$  puedan agregarse a  $\mathcal{O}_2$  obteniendo un orden de credibilidad sensato. Por lo tanto, el proceso de revisión eliminará todos los ciclos que surjan del grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ .

En lo que sigue, se mostrará cómo construir un operador de revisión múltiple priorizada combinando técnicas de [TGFS14] y [FKIRS12]. Para definir esta construcción, serán introducidos dos conceptos: los  $\mathcal{O}_2$ -kernels inconsistentes y la función de incisión consolidada.

**Definición 3.4** ( $\mathcal{O}_2$ -kernels inconsistentes de  $\mathcal{O}_1$ ). Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos. El conjunto  $\mathcal{O}_2$ -kernels inconsistentes de  $\mathcal{O}_1$ , notado como  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ , es un conjunto de conjuntos tal que, para todo conjunto  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  se cumple que:

1.  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_1$ .
2.  $\mathcal{X} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato.

3. Para cualquier conjunto  $\mathcal{X}'$  tal que  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_1$  entonces  $\mathcal{X}' \cup \mathcal{O}_2$  es sensato.

Esto es,  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  es el conjunto de subconjuntos minimales de  $\mathcal{O}_1$  que juntos con  $\mathcal{O}_2$  resultan en un orden de credibilidad no sensato.

**Ejemplo 3.4.** Considere los órdenes de credibilidad del Ejemplo 3.3:  $\mathcal{O}_1 = \{ A_4 > A_3, A_1 > A_4, A_2 > A_4, A_1 > A_2, A_5 > A_2, A_9 > A_6, A_{10} > A_9 \}$  y  $\mathcal{O}_2 = \{ A_3 > A_1, A_4 > A_3, A_2 > A_1, A_2 > A_9, A_6 > A_5 \}$ . Los  $\mathcal{O}_2$ -kernels inconsistentes de  $\mathcal{O}_1$  son  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2 = \{ \{A_1 > A_2\}, \{A_1 > A_4\}, \{A_5 > A_2, A_9 > A_6\} \}$ . Como se indicó en la definición, todo conjunto de  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  es un conjunto minimal que está en conflicto con  $\mathcal{O}_2$ . Observe que, todo conjunto en  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ , tiene elementos de algún ciclo en el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  que se puede observar en la Figura 3.4. Por ejemplo, el kernel  $\{A_1 > A_2\}$  contiene elementos del ciclo  $\{A_1 > A_2, A_2 > A_1\}$ , mientras que los kernels  $\{A_1 > A_4\}$  y  $\{A_5 > A_2, A_9 > A_6\}$  contienen elementos de los ciclos  $\{A_1 > A_4, A_4 > A_3, A_3 > A_1\}$  y  $\{A_5 > A_2, A_2 > A_9, A_9 > A_6, A_6 > A_5\}$ , respectivamente.

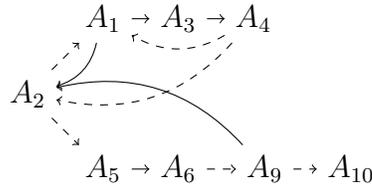


Figura 3.4: Muestra nuevamente el grafo asociado a la unión  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  considerando los órdenes del Ejemplo 3.3. Los elementos que pertenecen a  $\mathcal{O}_2$  son graficados con arcos sólidos mientras que los elementos de  $\mathcal{O}_1$  con arcos punteados.

Recuerde de la Observación 3.3 que el grafo asociado a un orden de credibilidad no sensato tendrá al menos un ciclo. La siguiente observación relaciona  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  con los ciclos en el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ .

**Observación 3.5.** Si  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  no es vacío, entonces  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato, y para cada elemento en  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  existe un ciclo en el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Dado que los elementos de  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  son minimales respecto a inclusión de conjuntos, entonces podrían existir más ciclos en el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  que elementos en  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ . En dicho caso, algún kernel estará asociado a más de un ciclo.

**Ejemplo 3.5.** Considere  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2 = \{ \{A_1 > A_2\}, \{A_1 > A_4\}, \{A_5 > A_2, A_9 > A_6\} \}$  del Ejemplo 3.4 y el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  de la Figura 3.4. Note que cada ciclo en este grafo tiene asociado un conjunto en  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ . Por ejemplo, los ciclos

$C_1 = \{A_2 > A_1, A_1 > A_2\}$  y  $C_2 = \{A_1 > A_2, A_3 > A_1, A_4 > A_3, A_2 > A_4\}$  de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  están asociados al kernel  $\{A_1 > A_2\}$ . Los ciclos  $C_3 = \{A_3 > A_1, A_4 > A_3, A_1 > A_4\}$  y  $C_4 = \{A_2 > A_9, A_5 > A_2, A_6 > A_5, A_9 > A_6\}$  de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , en cambio, se encuentran asociados a los kernels  $\{A_1 > A_4\}$  y  $\{A_5 > A_2, A_9 > A_6\}$  respectivamente. Como se mencionó en la Observación 3.5, un kernel puede estar asociado a más de un ciclo. Esto es así porque los kernels son minimales respecto a inclusión de conjuntos. Note que, en este ejemplo,  $\{A_1 > A_2\} \subset C_1$  y  $\{A_1 > A_2\} \subset C_2$ .

Observe que cada *kernel* en  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  es un subconjunto de  $\mathcal{O}_1$  (vea la condición 1 en la Definición 3.4). También note que un elemento de credibilidad que pertenece a ambos órdenes no podrá estar en ningún conjunto de  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  (vea la condición 3 en la Definición 3.4). Por ejemplo, considere nuevamente el conjunto  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  del Ejemplo 3.4. Aunque el *kernel*  $\mathcal{X} = \{A_1 > A_4\}$  está asociado al ciclo  $C_3 = \{A_3 > A_1, A_4 > A_3, A_1 > A_4\}$ ,  $A_4 > A_3 \notin \mathcal{X}$  porque  $A_4 > A_3 \in \mathcal{O}_2$ . La proposición siguiente enuncia que ningún elemento de credibilidad de  $\mathcal{O}_2$  puede ser parte de un *kernel* en  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ .

**Proposición 3.1.** *Sea  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos. Luego,  $\mathcal{O}_2 \cap \bigcup(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) = \emptyset$ .*

*Demostración.* Vea Apéndice A, página 179. □

Recuerde que los  $\mathcal{O}_2$ -*kernels* inconsistentes de  $\mathcal{O}_1$  representan los subconjuntos minimales de  $\mathcal{O}_1$  en conflicto con  $\mathcal{O}_2$  (condición 3 de la Definición 3.4). Por lo tanto, si de cada  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  se eliminan uno o más elementos, los elementos de credibilidad restantes se pueden incorporar a  $\mathcal{O}_2$  sin generar conflictos.

La siguiente definición caracteriza a cualquier función que permite seleccionar de cada elemento  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  al menos un elemento de credibilidad.

**Definición 3.5** (Función de incisión consolidada). *Sea  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos y  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  el conjunto de  $\mathcal{O}_2$ -*kernels* inconsistentes de  $\mathcal{O}_1$ . Una función de incisión consolidada para  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ , denotada  $\mu$ , es una función tal que:*

1.  $\mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) \subseteq \bigcup(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$
2. Para cada  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  se cumple que  $\mathcal{X} \cap \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) \neq \emptyset$

Esto es, dado el conjunto  $\mathcal{O}_2$ -kernels inconsistentes de  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$  es un conjunto de elementos  $E$ , donde para todo  $e \in E$  se cumple que  $e \in \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ , y para todo  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ , existe al menos un elemento de credibilidad  $e \in E$  tal que  $e \in \mathcal{X}$ .

Como se mencionó arriba, dado que cada *kernel* inconsistente en  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  es un conjunto minimal de  $\mathcal{O}_1$  en conflicto con  $\mathcal{O}_2$ , entonces si al menos un elemento de credibilidad de cada *kernel* inconsistente es seleccionado para ser eliminado de  $\mathcal{O}_1$ , los restantes elementos de  $\mathcal{O}_1$  pueden ser incorporados en  $\mathcal{O}_2$  sin generar conflictos. La función de incisión consolidada  $\mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$  realiza esta selección. Note que la Definición 3.5 no especifica cómo la función  $\mu$  selecciona los elementos de credibilidad, entonces, diferentes estrategias pueden ser propuestas.

**Ejemplo 3.6.** Considere nuevamente los  $\mathcal{O}_2$ -kernels inconsistentes de  $\mathcal{O}_1$  del Ejemplo 3.4:  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2 = \{\{A_1 > A_2\}, \{A_1 > A_4\}, \{A_5 > A_2, A_9 > A_6\}\}$ . A continuación, se incluyen tres posibles funciones de incisión consolidadas. La función  $\mu_1$  selecciona todos los elementos de credibilidad de  $\bigcup(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$ , mientras  $\mu_2$  y  $\mu_3$  seleccionan solo un elemento de credibilidad de cada  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ .

- $\mu_1(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) = \{A_1 > A_2, A_1 > A_4, A_5 > A_2, A_9 > A_6\}$
- $\mu_2(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) = \{A_1 > A_2, A_1 > A_4, A_5 > A_2\}$
- $\mu_3(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) = \{A_1 > A_2, A_1 > A_4, A_9 > A_6\}$

A partir de la Proposición 3.1 y de la Definición 3.5, se puede inferir que todos los elementos de credibilidad de  $\mathcal{O}_2$  están protegidos, ya que estos no pueden ser considerados para ser removidos por la función de incisión consolidada. A continuación, considerando las definiciones de los  $\mathcal{O}_2$ -kernels inconsistentes y de la función de incisión consolidada, se definirá el operador de revisión múltiple priorizado de tipo *kernel*.

**Definición 3.6.** Sea  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos y  $\mu$  una función de incisión consolidada. La revisión múltiple priorizada de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$  que es generada por  $\mu$  es el operador  $*_\mu$ , definido como sigue:

$$\mathcal{O}_1 *_\mu \mathcal{O}_2 = (\mathcal{O}_1 \setminus \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)) \cup \mathcal{O}_2$$

Un operador  $*$  es una revisión múltiple priorizada de tipo *kernel* para  $\mathcal{O}_1$  si y sólo si existe una función de incisión consolidada  $\mu$  para  $\mathcal{O}_1$  tal que para todo orden de credibilidad  $\mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1 *_{\mu} \mathcal{O}_2$ .

**Ejemplo 3.7.** *Considere nuevamente los órdenes de credibilidad del Ejemplo 3.3,  $\mathcal{O}_1 = \{ A_4 > A_3, A_1 > A_4, A_2 > A_4, A_1 > A_2, A_5 > A_2, A_9 > A_6, A_{10} > A_9 \}$  y  $\mathcal{O}_2 = \{ A_3 > A_1, A_4 > A_3, A_2 > A_1, A_2 > A_9, A_6 > A_5 \}$ . Recuerde los  $\mathcal{O}_2$ -kernels inconsistentes de  $\mathcal{O}_1$  obtenidos en el Ejemplo 3.4:  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2 = \{ \{ A_1 > A_2 \}, \{ A_1 > A_4 \}, \{ A_5 > A_2, A_9 > A_6 \} \}$ . Considere la función de incisión consolidada  $\mu_2$  definida en el Ejemplo 3.6. Luego, la revisión múltiple priorizada de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$  usando  $\mu_2$  es un orden de credibilidad sensato  $\mathcal{O}_3$  tal que:*

$$\mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_1 *_{\mu_2} \mathcal{O}_2 = (\mathcal{O}_1 \setminus \mu_2(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)) \cup \mathcal{O}_2$$

$$\mathcal{O}_3 = (\mathcal{O}_1 \setminus \{A_1 > A_2, A_1 > A_4, A_5 > A_2\}) \cup \mathcal{O}_2$$

$$\mathcal{O}_3 = (\{A_4 > A_3, A_2 > A_4, A_9 > A_6, A_{10} > A_9\}) \cup \mathcal{O}_2$$

Así,  $\mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_1 *_{\mu_2} \mathcal{O}_2 = \{A_3 > A_1, A_4 > A_3, A_2 > A_1, A_2 > A_9, A_6 > A_5, A_4 > A_3, A_2 > A_4, A_9 > A_6, A_{10} > A_9\}$ . Note que  $\mathcal{O}_3$  es sensato y contiene todos los elementos de  $\mathcal{O}_2$ . La Figura 3.5 muestra los grafos asociados a  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_1 *_{\mu_2} \mathcal{O}_2$ . Observe en la Figura 3.5(d), que los elementos de credibilidad del siguiente conjunto  $\{A_1 > A_2, A_1 > A_4, A_5 > A_2\} \subset \mathcal{O}_1$  fueron excluidos del orden resultante de la revisión. Esto es así a causa de que fueron seleccionados para ser eliminados por la función de incisión consolidada  $\mu_2$  con la que la revisión fue llevada a cabo.

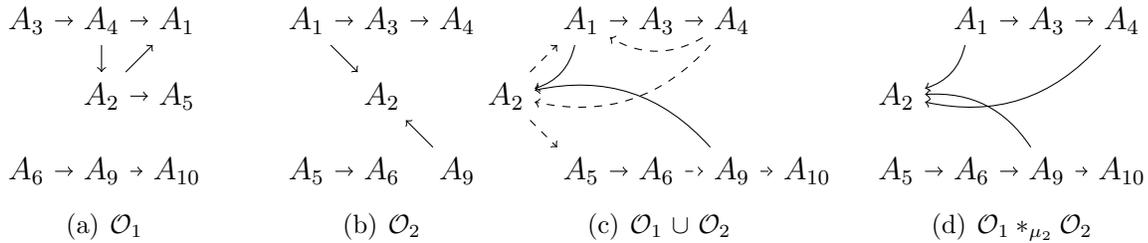


Figura 3.5: (a) y (b) muestran los grafos asociados a los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  del Ejemplo 3.3. (c) muestra el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  donde los elementos que pertenecen a  $\mathcal{O}_2$  son graficados con arcos sólidos mientras los elementos de  $\mathcal{O}_1$  con arcos punteados. (d) muestra el grafo asociado a la revisión  $\mathcal{O}_1 *_{\mu_2} \mathcal{O}_2$  del Ejemplo 3.7.

### 3.2.3. Teorema de representación

Esta sección presentará uno de los resultados principales de este capítulo. Después de introducir la revisión múltiple priorizada de tipo *kernel* sobre órdenes de credibilidad  $*_{\mu}$ , se completará su presentación con una caracterización adecuada de su comportamiento respecto de los postulados propuestos en la Sección 3.2.1.

A continuación se incluye el teorema de representación del operador que establece la correspondencia entre los postulados y su construcción.

**Teorema 3.1.** *Un operador  $*_{\mu}$  es una revisión múltiple priorizada de tipo kernel de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$  si y solo si satisface inclusión, éxito, sensatez, uniformidad y retención de núcleo.*

*Demostración.* Vea Apéndice A, página 180. □

El teorema de representación determina que cualquier operador que satisface los postulados puede generarse a partir de construcción propuesta. De esta forma, el Teorema 3.1 da una caracterización de la revisión múltiple de tipo *kernel* presentada en la Definición 3.6 a partir de las propiedades *Inclusión*, *Éxito*, *Sensatez*, *Uniformidad* y *Retención de Núcleo*, presentadas en la Sección 3.2.1.

Observe que, el operador de revisión múltiple priorizada de tipo *kernel* especificado en la Definición 3.6, usa la función de incisión consolidada presentada en la Definición 3.5. Una función de incisión consolidada debe seleccionar qué elementos de credibilidad no se incorporarán en el orden de credibilidad resultante del proceso de cambio múltiple. Sin embargo, la definición no especifica cómo esta función realiza esta selección para cada *kernel*. Por lo tanto, la Definición 3.5 define una familia de funciones posibles. Una descripción y análisis sobre tres funciones de incisión consolidadas definidas durante el desarrollo de esta tesis será desarrollada luego en la Sección 3.5.

## 3.3. Implementación de un operador de revisión múltiple priorizada

En la Sección 3.2 se formalizó un operador de revisión múltiple priorizada de tipo *kernel* que opera sobre órdenes de credibilidad. Para esto, primero se describieron los postulados

característicos que especifican el comportamiento del operador. Luego, se mostró cómo construir el mismo, para alcanzar el comportamiento esperado. Finalmente, se caracterizó mediante un teorema de presentación que todo operador que satisface los postulados propuestos, puede generarse a partir de la construcción propuesta.

En esta sección se definirán funciones que permiten implementar un operador de revisión múltiple priorizada. Las funciones que se presentarán, y que siguen el formato documentado en [JTG19], permiten extender un orden de credibilidad sensato  $\mathcal{O}_2$ , con información de otro orden de credibilidad sensato  $\mathcal{O}_1$ . El proceso de extensión se corresponde con el hecho de obtener un orden de credibilidad que incorpora todos los elementos de  $\mathcal{O}_2$ , además de aquellos elementos de  $\mathcal{O}_1$  que permiten que este orden resultante sea sensato. Siguiendo esta operatoria, observe que las funciones implementan justamente el comportamiento de un operador de revisión múltiple priorizada, esto es,  $\mathcal{O}_1 *_{\mu} \mathcal{O}_2$ . Más adelante, en la Sección 3.4, se mostrará formalmente esta correspondencia.

---

**Entrada:** dos órdenes de credibilidad sensatos.

**Salida:** orden de credibilidad sensato.

---

```

1: function EXTENDING-ORDER( $\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1$ )
2:    $\mathcal{O}_1 \leftarrow \mathcal{O}_1 \setminus \mathcal{O}_2$ 
3:    $\mathcal{O}_{(2*1)} \leftarrow \mathcal{O}_2 \cup (\mathcal{O}_1 \setminus \text{SELECT}(\text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)))$ 
4:   return  $\mathcal{O}_{(2*1)}$ 
5: end function

```

Figura 3.6: Función que extiende un orden de credibilidad  $\mathcal{O}_2$  con los elementos de  $\mathcal{O}_1$ .

La función de la Figura 3.6 describe cómo implementar la extensión de un orden de credibilidad sensato  $\mathcal{O}_2$  por otro orden de credibilidad sensato  $\mathcal{O}_1$ . Esta extensión se lleva a cabo agregando a  $\mathcal{O}_2$  solo aquellos elementos de  $\mathcal{O}_1$  que no están en conflicto con los elementos de  $\mathcal{O}_2$ . Las funciones CONFLICT-SET y SELECT especifican esta tarea. Dado que pueden existir elementos que pertenezcan tanto a  $\mathcal{O}_2$  como a  $\mathcal{O}_1$ , la función propuesta (a modo de optimización) primero elimina de  $\mathcal{O}_1$  todos los elementos que también pertenecen a  $\mathcal{O}_2$  (ver línea 2). Tenga en cuenta que  $\mathcal{O}_2$  debe formar parte del orden resultante, esto es, no se pueden eliminar elementos de  $\mathcal{O}_2$  en el proceso de extensión. Luego, para extender  $\mathcal{O}_2$  correctamente, el segundo paso propuesto en la función de la Figura 3.6 (ver línea 3) primero elimina de  $\mathcal{O}_1$  aquellos elementos que no se pueden agregar y, luego, agrega los

elementos restantes de  $\mathcal{O}_1$  a  $\mathcal{O}_2$ . La función CONFLICT-SET determina qué elementos de  $\mathcal{O}_1$  pueden producir una extensión no sensata y, luego, SELECT decide qué elementos se excluirán de  $\mathcal{O}_1$  para resolver estos conflictos.

**Observación 3.6.** *La función de la Figura 3.6 obtiene la extensión  $\mathcal{O}_{(2*1)}$  como la unión de  $\mathcal{O}_2$  con algunos elementos de  $\mathcal{O}_1$ , por lo tanto,  $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_{(2*1)}$ . Luego, los elementos de  $\mathcal{O}_2$  están protegidos y siempre permanecen en la extensión obtenida.*

La función CONFLICT-SET especificada en la Figura 3.6 retorna todos los subconjuntos minimales  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_1$  que están en conflicto con  $\mathcal{O}_2$ . Es decir, para cualquiera de estos subconjuntos  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{X} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato. Dado que esos subconjuntos  $\mathcal{X}$  son minimales, si uno o más elementos de cada subconjunto se eliminan de  $\mathcal{O}_1$ , los elementos de credibilidad restantes de  $\mathcal{O}_1$  podrían agregarse a  $\mathcal{O}_2$  sin producir un ciclo en el grafo asociado al orden de credibilidad resultante, permitiendo así que este sea sensato. La función de la Figura 3.6 utiliza la función SELECT para ese propósito: esta función selecciona de cada subconjunto retornado por CONFLICT-SET al menos un elemento para ser eliminado de  $\mathcal{O}_1$ . Luego, los elementos seleccionados se eliminan de  $\mathcal{O}_1$  y los elementos de credibilidad restantes de  $\mathcal{O}_1$  se agregan a  $\mathcal{O}_2$  para obtener el orden de credibilidad sensato  $\mathcal{O}_{(2*1)}$ .

---

**Entrada:** dos órdenes de credibilidad sensatos.

**Salida:** conjunto de conjuntos de elementos de  $\mathcal{O}_1$ .

---

```

1: function CONFLICT-SET( $\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1$ )
2:    $CSet \leftarrow \emptyset$ 
3:   for all  $A_i \in \text{CANDIDATES}(\mathcal{O}_1)$  do
4:      $CSet \leftarrow CSet \cup \text{CYCLES}(A_i, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ 
5:   end for
6:    $Out \leftarrow \text{FILTER}(CSet)$ 
7:   return  $Out$ 
8: end function

```

Figura 3.7: Identifica los subconjuntos minimales de  $\mathcal{O}_1$  en conflicto con  $\mathcal{O}_2$ .

Dado que  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  son sensatos, si  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato entonces hay algunos elementos de  $\mathcal{O}_1$  que pertenecen a un ciclo en el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Para retornar todos los subconjuntos minimales de  $\mathcal{O}_1$  que producen un ciclo, la función de la Figura 3.7 usa las funciones CANDIDATES, CYCLES y FILTER. La primera se define de la siguiente manera:

$CANDIDATES(\mathcal{O}_1) = \{A_i : A_i > A_j \in \mathcal{O}_1\}$  y retorna todos los agentes que se consideran más creíbles que otros en el orden de credibilidad  $\mathcal{O}_1$ . Dado que  $\mathcal{O}_2$  es sensato, cualquier ciclo existente en el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  debe contener necesariamente elementos de credibilidad de  $\mathcal{O}_1$ . Por lo tanto, considerar los agentes de  $\mathcal{O}_1$  es suficiente para detectar todos los ciclos posibles. Luego, la función  $CYCLES$  computa y retorna el conjunto con todos los ciclos que involucran elementos de  $CANDIDATES(\mathcal{O}_1)$ . De esta forma, con un llamando a  $CYCLES$  por cada miembro de  $CANDIDATES(\mathcal{O}_1)$  la función genera el conjunto  $CSet$  (conjunto en conflicto) con los subconjuntos de  $\mathcal{O}_1$  que están involucrados en todos los ciclos posibles del grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Finalmente, la función  $FILTER(CSet)$  computa y retorna todos los conjuntos minimales bajo inclusión de conjuntos de  $CSet$ .

**Ejemplo 3.8.** *Considere  $\mathcal{O}_1 = \{A_2 > A_8, A_2 > A_9, A_1 > A_2, A_3 > A_2, A_5 > A_4\}$  y  $\mathcal{O}_2 = \{A_2 > A_1, A_5 > A_3, A_4 > A_3, A_9 > A_4, A_8 > A_5\}$  dos órdenes de credibilidad sensatos. La Figura 3.8 muestra los grafos asociados a  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Asuma que, a partir de estos órdenes de credibilidad, la función  $CONFLICT-SET(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$  es invocada. En primer lugar, la función computa  $CANDIDATES(\mathcal{O}_1) = \{A_1, A_2, A_3, A_5\}$ . A partir de cada uno de los agentes de este conjunto, luego, de manera iterativa, estima todos los ciclos que involucran a cada uno de los agentes considerados en  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ :*

$$CYCLES(A_1, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = \{\{A_1 > A_2\}\}$$

$$CYCLES(A_2, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = \{\{A_1 > A_2\}, \{A_3 > A_2, A_2 > A_9\}, \{A_3 > A_2, A_2 > A_8\}, \{A_3 > A_2, A_5 > A_4, A_2 > A_8\}\}$$

$$CYCLES(A_3, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = \{\{A_2 > A_9, A_3 > A_2\}, \{A_5 > A_4, A_2 > A_8, A_3 > A_2\}, \{A_2 > A_8, A_3 > A_2\}\}$$

$$CYCLES(A_5, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = \{\{A_2 > A_8, A_3 > A_2, A_5 > A_4\}, \{A_2 > A_8, A_3 > A_2\}\}.$$

*Observe que  $CYCLES$ , retorna un conjunto de subconjuntos de  $\mathcal{O}_1$  que representan los ciclos, a partir de un determinado agente, detectados en  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Por ejemplo, el conjunto  $\{A_3 > A_2, A_2 > A_9\}$  forma parte de los ciclos obtenidos a partir del agente  $A_2$ . Este conjunto representa el ciclo  $\{A_3 > A_2, A_4 > A_3, A_9 > A_4, A_2 > A_9\}$ . Note que los elementos  $\{A_4 > A_3, A_9 > A_4\}$  que también forman parte del ciclo no fueron incorporados ya que ambos pertenecen a  $\mathcal{O}_2$ . Luego, todos los ciclos calculados se almacenan en  $CSet = \{\{A_1 > A_2\}, \{A_3 > A_2, A_2 > A_9\}, \{A_3 > A_2, A_2 > A_8\}, \{A_3 > A_2, A_5 > A_4, A_2 > A_8\}\}$ . Una vez esto,  $FILTER(CSet)$  es invocada y el resultado se corresponde con  $Out = \{\{A_1 > A_2\}, \{A_3 > A_2, A_2 > A_9\}, \{A_3 > A_2, A_2 > A_8\}\}$ . Note que  $Out$  solo contiene los elementos de  $CSet$  que son conjuntos minimales respecto de inclusión de conjuntos. Por ejemplo,  $\{A_3 > A_2, A_5 > A_4, A_2 > A_8\} \subset CSet$  no forma*

parte de *Out* porque  $\{A_3 > A_2, A_2 > A_8\} \subset \{A_3 > A_2, A_5 > A_4, A_2 > A_8\}$ . Finalmente,  $\text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$  retorna el conjunto *Out*.

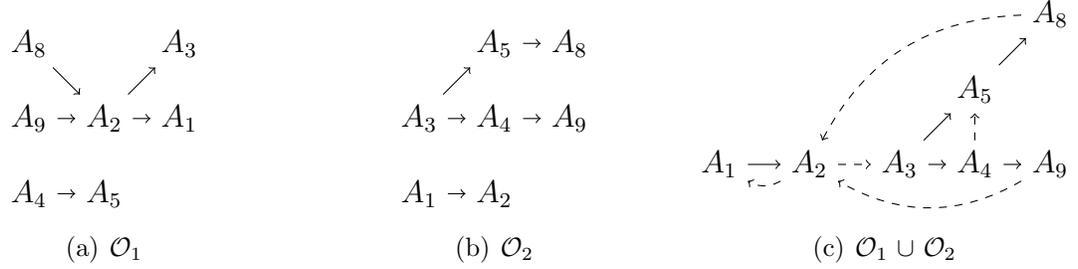


Figura 3.8: (a)-(c) muestran los grafos asociados a  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  del Ejemplo 3.8. En (c) los elementos que pertenecen a  $\mathcal{O}_2$  son graficados con arcos sólidos mientras los elementos de  $\mathcal{O}_1$  con arcos punteados.

**Observación 3.7.** Sea  $\mathbb{X} = \text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$  el conjunto de conjuntos retornado por la función de la Figura 3.7. Cada elemento  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$  es un subconjunto minimal de  $\mathcal{O}_1$  que produce un ciclo si se agrega a los elementos de  $\mathcal{O}_2$ . Es decir, para cualquier  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ ,  $\mathcal{X} \cup \mathcal{O}_2$  no es un orden de credibilidad sensato. Dado que cada  $\mathcal{X}$  es mínimo con respecto a inclusión de conjuntos, para cualquier  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$  entonces  $\mathcal{X}' \cup \mathcal{O}_2$  es un orden sensato.

Hay dos conclusiones inmediatas de la Observación 3.7. Por un lado, si el conjunto  $\mathbb{X}$  es vacío, entonces no hay ningún conflicto y  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  será sensato, es decir,  $\mathcal{O}_2$  puede extenderse con todo el conjunto  $\mathcal{O}_1$ . Por otro lado, si  $\mathbb{X}$  no es vacío, dado que cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$  es mínimo, entonces al menos un elemento de cada  $\mathcal{X}$  debe excluirse de  $\mathcal{O}_1$  para extender  $\mathcal{O}_2$ .

Considerando esto, una vez que la función  $\text{CONFLICT-SET}$  retorna los subconjuntos mínimos de  $\mathcal{O}_1$  en conflicto con  $\mathcal{O}_2$ , la función  $\text{EXTENDING-ORDER}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$  utilizará  $\text{SELECT}$  para elegir qué elementos de  $\mathcal{O}_1$  excluir de la extensión.

---

**Entrada:** conjunto de conjuntos de elementos de credibilidad.

**Salida:** conjunto de elementos de credibilidad.

---

```

1: function SELECT( $MCSet$ )
2:    $Out \leftarrow \emptyset$ 
3:   for all  $\mathcal{X} \in MCSet$  do
4:      $ESet \leftarrow \text{SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS}(\mathcal{X})$ 
5:      $Out \leftarrow Out \cup ESet$ 
6:   end for
7:   return  $Out$ 
8: end function

```

Figura 3.9: Selecciona los elementos de credibilidad del conjunto de elementos en conflicto.

La función de la Figura 3.9 especifica cómo implementar la función SELECT: para todos los  $\mathcal{X} \in \text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$ , la función SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS se usa para elegir qué elementos de credibilidad de  $\mathcal{O}_1$  serán excluidos. Existen diferentes estrategias para implementar SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS: seleccionar solo un elemento, seleccionar algunos elementos, o seleccionar todos los elementos del conjunto. En la Sección 3.5 se describirán y analizarán tres funciones definidas durante el desarrollo de esta tesis. Más allá de esto y, en cualquier caso, SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS debe ser una función bien definida, es decir, dados dos elementos  $\mathcal{X}_i$  y  $\mathcal{X}_j$  de  $\text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$ , si  $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_j$  entonces  $\text{SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS}(\mathcal{X}_i) = \text{SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS}(\mathcal{X}_j)$ . Además, debe darse el caso de que  $\text{SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$  y  $\mathcal{X} \cap \text{SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS}(\mathcal{X}) \neq \emptyset$ .

**Ejemplo 3.9.** *Considere nuevamente el Ejemplo 3.8 que muestra cómo el conjunto  $MCSet = \{\{A_1 > A_2\}, \{A_3 > A_2, A_2 > A_9\}, \{A_3 > A_2, A_2 > A_8\}\}$  se obtiene al computar  $\text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$ . Asuma que, a partir de este conjunto de conjuntos, la función  $\text{SELECT}(MCSet)$  es invocada. La función selecciona de cada elemento de  $MCSet$ , esto es, de cada conjunto de elementos de credibilidad, los elementos de credibilidad que se acumularán en  $Out$  y finalmente serán retornados. La selección queda condicionada a la función SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS. Asuma, a modo de ejemplo, que la función SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS queda definida de forma tal de seleccionar el menor elemento de cada conjunto de  $MCSet$ , siguiendo su orden lexicográfico. De esta forma:*

$\text{SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS}(\{A_1 > A_2\}) = A_1 > A_2$

$\text{SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS}(\{A_3 > A_2, A_2 > A_9\}) = A_2 > A_9$

$\text{SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS}(\{A_3 > A_2, A_2 > A_8\}) = A_2 > A_8$ .

A partir de esta selección, luego,  $\text{Out} = \{A_1 > A_2, A_2 > A_9, A_2 > A_8\}$ . Finalmente,  $\text{SELECT}(\text{MCSet})$  retorna  $\text{Out}$  como resultado.

Teniendo en cuenta que la función  $\text{SELECT}$  implementa el comportamiento de seleccionar al menos un elemento de cada  $\mathcal{X}_i$ , para cada uno de los  $\mathcal{X}_i \in \text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$ , luego, la siguiente observación que relaciona a las funciones  $\text{SELECT}$  y  $\text{CONFLICT-SET}$  puede inferirse.

**Observación 3.8.** Sea  $\mathbb{X} = \text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$  y  $\mathbb{S} = \text{SELECT}(\mathbb{X})$ , luego para todo  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ ,  $\mathcal{X} \cap \mathbb{S} \neq \emptyset$  y, para todo  $A_i > A_j \in \mathbb{S}$ ,  $A_i > A_j \in \mathcal{X}$ .

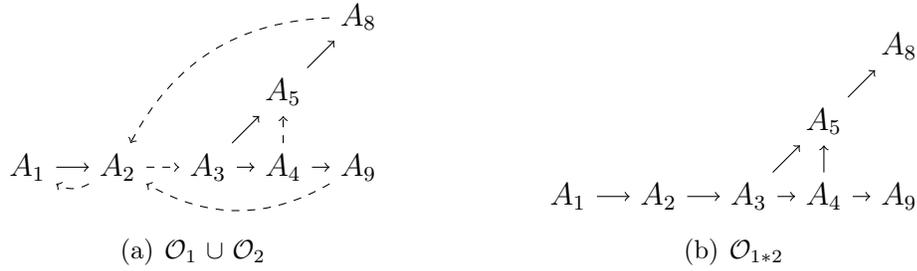


Figura 3.10: (a) muestra el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  del Ejemplo 3.8, donde los elementos que pertenecen a  $\mathcal{O}_2$  son graficados con arcos sólidos mientras los elementos de  $\mathcal{O}_1$  con arcos punteados. (b) muestra el grafo asociado a la revisión de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$  presentada en el Ejemplo 3.10.

**Ejemplo 3.10.** Considere nuevamente el Ejemplo 3.8 que muestra cómo el conjunto  $\text{MCSet} = \{\{A_1 > A_2\}, \{A_3 > A_2, A_2 > A_9\}, \{A_3 > A_2, A_2 > A_8\}\}$  se obtiene al computar  $\text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$ , y el Ejemplo 3.9 que muestra cómo el conjunto  $\text{Out} = \{A_1 > A_2, A_2 > A_9, A_2 > A_8\}$  se obtiene al computar la  $\text{SELECT}(\text{MCSet})$ . Teniendo en cuenta estos resultados intermedios, note entonces que el resultado de computar  $\text{EXTENDING-ORDER}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$  se corresponde con  $\mathcal{O}_{(2*1)} = \mathcal{O}_2 \cup (\mathcal{O}_1 \setminus \text{Out})$ , esto es,  $\mathcal{O}_{(2*1)} = \{A_2 > A_1, A_5 > A_3, A_4 > A_3, A_9 > A_4, A_8 > A_5, A_3 > A_2, A_5 > A_4\}$ . La Figura 3.10 muestra el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  del Ejemplo 3.8, así como el grafo asociado a  $\mathcal{O}_{(2*1)}$  del presente ejemplo. Observe que, para obtener este resultado, se asume el uso de una función  $\text{SELECT-CREDIBILITY-ELEMENT}$  que, dado un conjunto de elementos de credibilidad, selecciona un elemento que corresponde al menor de todos ellos siguiendo su

orden lexicográfico. Además, se omitió el paso de la línea 2 de la función  $\text{EXTENDING-ORDER}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$  dado que,  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  no comparten elementos, por lo que la omisión de este paso no condiciona el resultado del presente ejemplo.

### 3.4. Correspondencia entre la implementación y el operador de revisión múltiple priorizada

En esta sección se mostrará formalmente la correspondencia entre un operador de revisión múltiple priorizada de tipo *kernel* como el propuesto en la Sección 3.2.2, y las funciones que implementan la extensión de un orden de credibilidad sensato  $\mathcal{O}_2$  por otro orden sensato  $\mathcal{O}_1$  presentada en la Sección 3.3. Para esto, primero se mostrará que la función  $\text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  (Figura 3.7) retorna el conjunto de  $\mathcal{O}_2$ -*kernels* inconsistentes de  $\mathcal{O}_1$ , denotados como  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  y descriptos en la Definición 3.4.

**Proposición 3.2.** Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos y  $\text{CONFLICT-SET}$  la función definida en la Figura 3.7, luego  $\text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1) = \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ .

*Demostración.* Vea Apéndice A, página 183. □

A continuación, se mostrará la correspondencia entre la función  $\text{SELECT}$  especificada en la Figura 3.9 y la función de incisión  $\mu$  introducida en la Definición 3.5. Para esto, se debe mostrar que la función  $\text{SELECT}$  es una función de incisión consolidada sobre  $\text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  así como la función  $\mu$  sobre  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ . Dado que la Proposición 3.2 muestra que  $\text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ , para simplificar la siguiente proposición se notará  $\text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  como  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ .

**Proposición 3.3.** Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad y  $\text{SELECT}$  la función definida en la Figura 3.9, luego  $\text{SELECT}$  es una función de incisión consolidada para  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ .

*Demostración.* Vea Apéndice A, página 185. □

Finalmente, se mostrará que la función de la Figura 3.6 implementa un operador de revisión múltiple priorizada tipo *kernel* para órdenes de credibilidad, como el que fue propuesto en la Definición 3.6.

**Proposición 3.4.** Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos y EXTENDING-ORDER la función definida en la Figura 3.6, luego EXTENDING-ORDER( $\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1$ ) implementa la revisión múltiple priorizada de tipo kernel de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$ .

*Demostración.* Vea Apéndice A, página 185. □

### 3.5. Definición de funciones de incisión

Hasta aquí se ha formalizado un operador de revisión múltiple priorizada de tipo *kernel* que opera sobre órdenes de credibilidad. Además, se han especificado algunas funciones que permiten implementar el comportamiento del operador de revisión, probando formalmente que dichas funciones se corresponden con un operador de este tipo.

También se ha mencionado que existen diferentes alternativas para decidir qué elementos de credibilidad de  $\mathcal{O}_1$ , en conflicto con los elementos de  $\mathcal{O}_2$ , no formarán parte del orden de credibilidad resultante de la revisión de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$ . Dentro del proceso de revisión, esta responsabilidad quedó formalmente definida mediante la función de incisión consolidada de la Definición 3.5. La implementación de la función de incisión consolidada, luego, se mostró a través de las funciones SELECT y SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS de la Figura 3.9.

Como ya se especificó anteriormente, se espera que una función de incisión seleccione por cada uno de los *kernels*  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  al menos un elemento que no formará parte del orden resultante de la revisión. Esto, da lugar a una familia de posibles funciones, las cuales se diferencian en el criterio seguido para seleccionar elementos.

En esta sección, serán presentadas tres funciones de incisión que fueron desarrolladas durante el transcurso de esta tesis. Estas tres funciones especifican tres formas diferentes de seleccionar qué elementos en conflicto no formarán parte del orden resultante de la revisión. Estas son: *Total Selection Function (TSF)*, *Lexicographic Selection Function (LSF)* y *Least Credible Selection Function (LCSF)*. Note que, por simplificación, se mantendrán los nombres de estas tres funciones en inglés, de igual forma que como fueron documentadas en [JTG19] y [JTG22]. A continuación, se incluirá un ejemplo que se utilizará en el desarrollo de cada una de las descripciones.

**Ejemplo 3.11.** Sea  $\mathcal{O}_1 = \{A_2 > A_6, A_6 > A_5, A_5 > A_4, A_1 > A_4, A_3 > A_7\}$  y  $\mathcal{O}_2 = \{A_4 > A_3, A_3 > A_2, A_7 > A_1\}$  dos órdenes de credibilidad. Luego, los  $\mathcal{O}_2$ -kernels inconsistentes de  $\mathcal{O}_1$  corresponden a  $\mathbb{X} = \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2 = \{\{A_3 > A_7, A_1 > A_4\}, \{A_2 > A_6, A_6 > A_5, A_5 > A_4\}\}$ . La Figura 3.11 muestra tres resultados diferentes al revisar  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$  donde, en cada caso, se aplica como función de incisión las funciones *TSF*, *LSF* y *LCFSF* que se describirán a continuación.

### 3.5.1. Total Selection Function (TSF)

Considere el conjunto  $\mathbb{X}$  del Ejemplo 3.11. Luego, *TFS* elige todos los elementos de credibilidad que forman parte de cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ . Recuerde que una función de selección debe seleccionar al menos un elemento de cada  $\mathcal{X}$ . Por lo tanto, *TSF* se comporta de acuerdo al enfoque más drástico dado que ningún elemento de cada  $\mathcal{X}$  se incluirá en el orden de credibilidad resultante de la revisión.

Considerando el ejemplo, *TSF* selecciona los elementos de credibilidad  $\{A_3 > A_7, A_1 > A_4, A_2 > A_6, A_6 > A_5, A_5 > A_4\}$ . Claramente, *TSF* podría tener un impacto negativo, dado que, conduce a la pérdida innecesaria de información valiosa. Sin embargo, el enfoque de *TSF* no requiere de una política para decidir qué elemento debe eliminarse y, generalmente, podría usarse cuando se necesita un enfoque extremadamente cauteloso.

### 3.5.2. Lexicographic Selection Function (LSF)

En contraste con *TSF*, *LSF* selecciona solo un elemento de credibilidad de cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ , siguiendo como política de selección el orden lexicográfico de los elementos. Bajo esta estrategia, en muchos casos *LSF* permitirá incorporar más relaciones de credibilidad que *TSF* en el orden resultante de la revisión. Aunque se podría perder menos información, ya que el elemento excluido en la revisión se selecciona lexicográficamente, de forma similar a *TSF*, *LSF* no tiene una verdadera razón que justifique su elección, más que cumplimentar el requerimiento de seleccionar al menos un elemento. Todos los elementos de credibilidad de cada  $\mathcal{X}$  tienen, en cierta forma, la misma posibilidad de ser seleccionados dependiendo de su identificación. Considerando el Ejemplo 3.11, la función *LSF* selecciona los elementos  $\{A_1 > A_4, A_2 > A_6\}$ .

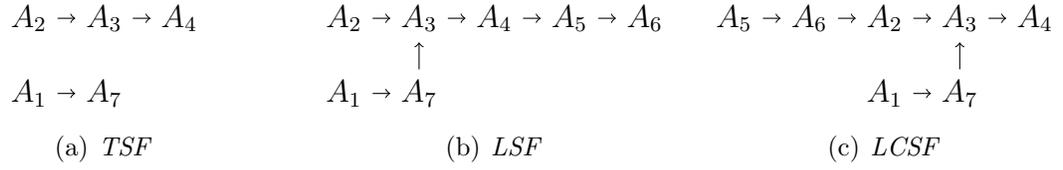


Figura 3.11: (a)-(c) muestran los grafos asociados a los órdenes de credibilidad resultantes de la revisión de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$  del Ejemplo 3.11, aplicando, en casa caso, las funciones de incisión *Total Selection Function*, *Lexicographic Selection Function* y *Least Credible Selection Function* respectivamente.

Observe que tanto *TSF* como *LSF* no utilizan la información que modela cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ , esto es, el orden de credibilidad entre los agentes que lo componen. Esta información podría ser valiosa a la hora de determinar qué elementos seleccionar para eliminar. La siguiente función, fue definida en esta dirección.

### 3.5.3. Least Credible Selection Function (LCSF)

Similar a *LSF*, *LCFS* selecciona solo un elemento de credibilidad de cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ , sin embargo, la selección no queda, en principio, asociada al orden lexicográfico de los identificadores de agentes. El comportamiento de *LCSF* consiste en excluir del orden resultante de la revisión la información menos creíble de cada  $\mathcal{X}$ . En este sentido, *LCSF* selecciona de cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$  un elemento de credibilidad  $A_i > A_j$  tal que no exista otro agente menos creíble que  $A_j$  en  $\mathcal{X}$ . Dado que cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$  es un orden parcial, puede darse el caso de que haya más de un agente que cumpla con esta condición y pueda ser seleccionado. En tal caso, hay dos posibles soluciones: seleccionar todos los elementos que cumplen con esta condición, o bien seleccionar solo uno. *LCSF* implementará esta última opción, para eliminar la menor cantidad de información posible. Considere  $\mathcal{X}_i = \{A_2 > A_6, A_6 > A_5, A_5 > A_4\}$ ,  $\mathcal{X}_i \in \mathbb{X}$  del Ejemplo 3.11; luego, *LCSF* selecciona el elemento de credibilidad  $A_5 > A_4$  porque el agente  $A_4$  es el agente menos creíble de este conjunto. En el caso de  $\mathcal{X}_j = \{A_3 > A_7, A_1 > A_4\}$ ,  $\mathcal{X}_j \in \mathbb{X}$ , *LCSF* selecciona uno de los dos elementos siguiendo la política de selección por orden lexicográfico ( $A_1 > A_4$ ) porque para ambos elementos de credibilidad no hay agentes menos creíbles que  $A_7$  y  $A_4$  en  $\mathcal{X}$ .

Las tres funciones descriptas anteriormente implementan el proceso de selección de elementos de  $\mathcal{O}_1$  para ser excluidos ante la revisión de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$ . A continuación, en el Capítulo 4, además de abordar la implementación computacional tanto del operador de

revisión múltiple priorizada sobre órdenes de credibilidad como de la interfaz gráfica de usuario que permite observar el funcionamiento de dicho operador, se retomarán puntualmente estas tres funciones de incisión para describir los resultados de una experimentación donde, tanto un análisis cualitativo como cuantitativo es llevado a cabo.

### 3.6. Resumen

En este capítulo, se especificó el modelo de representación simbólico de la confianza, mediante el uso de órdenes parciales de credibilidad. Como parte del modelo de representación, se definió cuándo dos agentes son comparables, y qué condiciones se deben respetar para que un orden de credibilidad sea sensato. Junto con esto, se introdujo la noción de grafo asociado a un orden de credibilidad que permite representar de forma gráfica los órdenes parciales de credibilidad. A partir de esta representación, se presentó la relación que existe entre un orden de credibilidad sensato y su grafo asociado acíclico.

Luego, se introdujo un nuevo operador de revisión múltiple priorizada que opera sobre órdenes de credibilidad. Para ello, primero se presentaron los postulados de racionalidad que especifican el comportamiento esperado para el operador de revisión, observándolo a este como una caja negra y sin especificar cómo este comportamiento debe ser logrado. A continuación, se introdujo una construcción completa del operador especificando cómo este puede lograr el comportamiento esperado. Esta construcción se basó en los resultados reportados tanto en [FKIRS12] como en [TGFS14]. Para cerrar la presentación formal del operador, luego, se presentó un teorema de representación que asocia los postulados de racionalidad propuestos con la construcción desarrollada.

Considerando toda la formalización previa, luego, se describieron las funciones desarrolladas para implementar el operador propuesto. Después, se mostró formalmente que dichas funciones se corresponden con un operador de revisión múltiple sobre órdenes de credibilidad. Finalmente, considerando que para la implementación del operador es necesario especificar una función de incisión que efectivamente indique qué elementos deben ser eliminados en el proceso de revisión cuando surgen inconsistencias, se especificaron tres diferentes funciones de incisión que realizan esta tarea. De esta forma, en este capítulo se presentó gran parte del aporte de esta tesis mostrando la formalización de una alternativa para abordar la dinámica de la confianza entre agentes, en un *SMA*.

# Capítulo 4

## Herramientas computacionales desarrolladas

Durante el Capítulo 3, se especificó un modelo que representa la confianza entre agentes de forma simbólica, mediante el uso de órdenes parciales de credibilidad. A partir de este modelo, se definió un operador que aborda la dinámica de la confianza entre agentes mediante la revisión múltiple priorizada de órdenes de credibilidad. Este operador se formalizó mediante un conjunto de postulados característicos, y a partir de una construcción que indica cómo el comportamiento esperado puede ser alcanzado. Luego de esto, se describieron una serie de funciones que permiten la implementación computacional de dicho operador. Además, se presentaron las ideas detrás de tres funciones de incisión que especifican diferentes criterios para seleccionar los elementos que deben ser descartados ante la aparición de conflictos, durante el proceso de revisión.

Teniendo en cuenta lo anterior, en este capítulo se presentarán los resultados obtenidos a partir de la implementación computacional de un conjunto de herramientas que permiten representar, modificar y revisar diferentes órdenes de credibilidad<sup>1</sup>. Por un lado, se describirá una aplicación con interfaz gráfica que permite operar diferentes órdenes de credibilidad de forma simple. Por otro lado, se presentarán los resultados obtenidos a partir del análisis y una experimentación que indagan sobre el funcionamiento de las funciones de incisión presentadas en la Sección 3.5.

En la Sección 4.1 se presentará la aplicación con interfaz gráfica de usuario alcanzada a partir del uso de algunas de las herramientas implementadas. Se mostrará cómo crear,

---

<sup>1</sup>La aplicación está disponible en: <https://github.com/fedejoaquin/multiple-change>.

modificar y revisar órdenes de credibilidad. En particular, la interfaz gráfica de usuario permitirá observar de forma intuitiva, cómo es que se lleva a cabo, paso a paso, el proceso de revisión entre dos órdenes de credibilidad. Para esto, se describirán los componentes de la interfaz que permiten observar los grafos asociados a los diferentes órdenes considerados; los elementos que forman parte de los *kernels* inconsistentes; así como los órdenes resultantes ante una revisión en la que se hace uso de las diferentes funciones de incisión disponibles.

Finalmente, en la Sección 4.2, se analizará el comportamiento de las tres funciones de incisión presentadas en la Sección 3.5. Primero, se desarrollará un análisis cualitativo que indaga cómo estas afectan la credibilidad de los agentes del orden priorizado durante la revisión. Luego, se presentarán los resultados de una experimentación que hizo uso también de otras herramientas computacionales implementadas durante esta tesis. La experimentación analiza el comportamiento de las funciones respecto de cómo su uso modifica la cantidad de relaciones de credibilidad en el orden resultante de la revisión.

Los resultados obtenidos en la experimentación, así como la aplicación con interfaz gráfica de usuario descrita a lo largo del presente capítulo, fueron publicados en [JTG19] y [JTG22], respectivamente.

## 4.1. Aplicación con interfaz gráfica de usuario

En esta sección, se describirá una aplicación que ha sido desarrollada para proporcionar una implementación completa del operador de revisión múltiple priorizada presentado en el Capítulo 3. Junto con esta aplicación, se ha desarrollado una interfaz gráfica de usuario (*GUI*) que, de forma intuitiva, permite crear y modificar órdenes de credibilidad así como aplicar el operador de revisión propuesto. La *GUI* fue diseñada para mostrar los grafos asociados a diferentes órdenes de credibilidad, los *kernels* identificados durante el proceso de revisión y el grafo asociado al orden de credibilidad resultante del proceso de revisión.

La implementación completa de la aplicación y la *GUI*, así como la de todos los algoritmos asociados para manipular los órdenes de credibilidad, se encuentra accesible en el siguiente repositorio: <https://github.com/fedejoaquin/multiple-change>.

Todo el desarrollo fue llevado a cabo mediante el lenguaje de programación *Java*. Esta decisión se corresponde principalmente con el uso de la biblioteca *JGraphT* descrita

en [MKNS20]. *JGraphT* es una biblioteca de programación que contiene estructuras de datos muy eficientes y genéricas para operar grafos, así como también una gran colección de algoritmos de última generación. La biblioteca está escrita en *Java* teniendo en cuenta la estabilidad, la interoperabilidad y el rendimiento. Además de los algoritmos clásicos para grafos, como los algoritmos de caminos más cortos y de árbol de expansión, la biblioteca contiene numerosos algoritmos avanzados: isomorfismo en grafos y subgrafos, problemas de *matching* y flujo, algoritmos de aproximación para problemas *NP-hard* como el problema del viajante, y varios algoritmos más complejos, como la detección de grafos de Berge. *JGraphT* se utiliza actualmente en productos comerciales a gran escala, así como en proyectos de investigación académicos y no comerciales.

La aplicación propuesta hace uso de la biblioteca *JGraphT* para representar los órdenes parciales de credibilidad entre agentes mediante sus grafos asociados, tal como fue establecido en la Definición 3.3. De esta forma, la detección de ciclos y el filtrado de aquellos que cumplen con la condición de minimalidad, pueden ser implementadas instanciando diferentes algoritmos ya definidos por la biblioteca. Note que tanto la detección de ciclos como el filtrado de aquellos que son minimales se corresponde con la tarea de detectar los *kernels* inconsistentes entre dos órdenes de credibilidad (especificado por la función *CONFLICT-SET* descrita en la Figura 3.6). Las instancias, en todos los casos, fueron llevadas a cabo de forma tal de operar de manera eficiente, buscando reducir la cantidad de operaciones realizadas para alcanzar los resultados necesarios.

*JGraphT* incluye también herramientas para exportar e importar los grafos hacia representaciones externas populares, como adaptadores para *GraphViz* [EGK<sup>+</sup>02] y para otras bibliotecas de grafos, así como también la visualización de grafos mediante *JGraphX*, entre otras. La aplicación que se propone en esta tesis hace uso de estas herramientas de la biblioteca para visualizar los órdenes de credibilidad mediante *JGraphX*.

A continuación, y con el objetivo de ejemplificar el funcionamiento de la *GUI* a partir de la cual se hace uso de las herramientas computacionales desarrolladas a lo largo de esta tesis, se introduce un ejemplo simple que será utilizado en lo que resta de la sección.

**Ejemplo 4.1.** *Considere los siguientes órdenes de credibilidad sensatos:  $\mathcal{O}_1 = \{A_2 > A_3, A_4 > A_2, A_6 > A_3, A_5 > A_6, A_7 > A_5, A_8 > A_3\}$ , y  $\mathcal{O}_2 = \{A_2 > A_5, A_1 > A_2, A_4 > A_2, A_3 > A_2\}$ . Luego, asuma que mediante la aplicación descrita en esta sección, se ejecuta la revisión múltiple priorizada de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$ , haciendo uso de las funciones de incisión presentadas en la Sección 3.5.*

La Figura 4.1 muestra una captura completa de la *GUI* desarrollada, en el momento en que se inicia la aplicación. Esta fue diseñada para crear, manipular y operar fácilmente los órdenes de credibilidad. En la misma se pueden reconocer rápidamente, además de la barra de menú, tres pestañas principales: la pestaña *Credibility orders*, que permite visualizar y operar diferentes órdenes de credibilidad; la pestaña *Union of  $\alpha$  and  $\beta$  credibility orders*, donde se podrá visualizar información asociada a la revisión múltiple priorizada de dos órdenes de credibilidad que previamente fueron seleccionados; y el conjunto de tres pestañas *Revision by*, que permitirán observar el orden de credibilidad resultante al operar la revisión múltiple priorizada haciendo uso de las diferentes funciones de incisión disponibles.

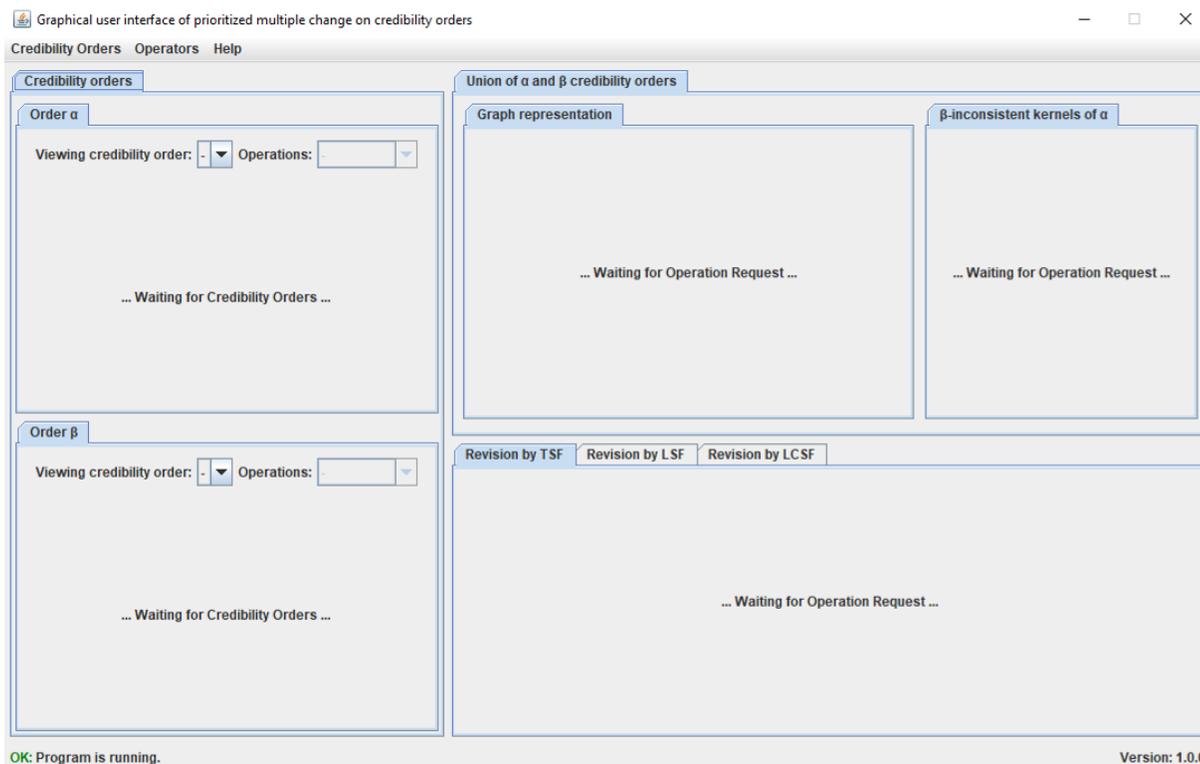


Figura 4.1: Captura de pantalla que muestra la *GUI* al iniciar la ejecución de la aplicación.

En el menú *Credibility Orders* de la esquina superior izquierda existen opciones disponibles para tres operaciones, más allá de la opción para cerrar y salir de la aplicación. Todas estas operaciones permiten crear nuevos órdenes de credibilidad. A continuación, las Figuras 4.2, 4.3 y 4.4, muestran las capturas de pantallas de cada una de las operaciones disponibles.

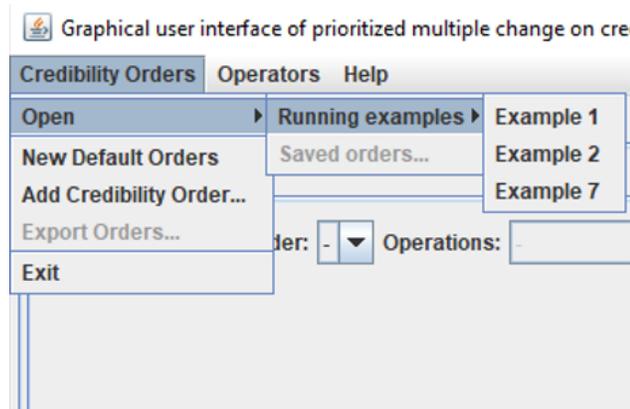


Figura 4.2: *Open*: permite abrir ejemplos existentes y pre-cargados de la aplicación que se corresponden con los ejemplos desarrollados e introducidos en [JTG22].

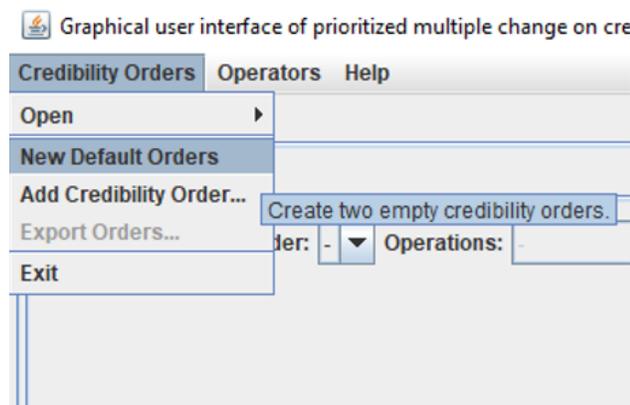


Figura 4.3: *New Default Orders*: permite crear dos nuevos órdenes de credibilidad inicialmente vacíos, que serán notados como  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ .

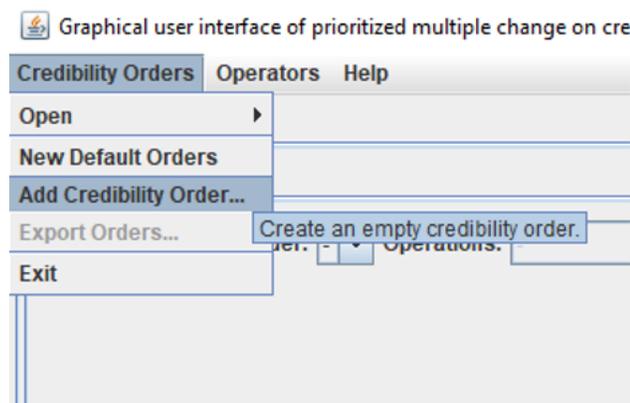


Figura 4.4: *Add credibility order*: permite crear un nuevo orden de credibilidad inicialmente vacío que se notará como  $\mathcal{O}_i$ , siendo  $i$  un número ingresado por el usuario.

Una vez que uno o más órdenes de credibilidad son creados, es posible visualizar los mismos, así como agregar o quitar elementos de credibilidad en cada uno de ellos. Esta funcionalidad se encuentra disponible a través de la pestaña *Credibility Orders*:

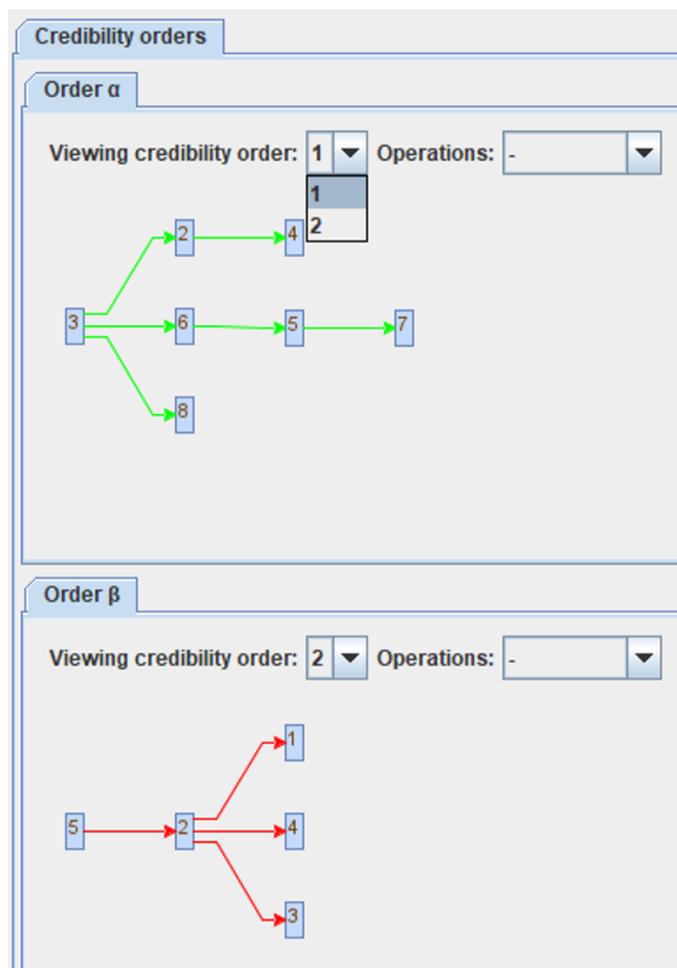


Figura 4.5: Pestaña que permite visualizar en simultáneo hasta dos grafos asociados a dos órdenes de credibilidad.

La Figura 4.5 muestra la pestaña *Credibility Orders* que permite visualizar los órdenes de credibilidad creados en la aplicación. Estos órdenes se pueden seleccionar desde las listas desplegables notadas *Viewing credibility order*. Por ejemplo, en la figura anterior, la lista desplegable permite seleccionar los identificadores 1 y 2, asociados a  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  del Ejemplo 4.1. Tenga en cuenta que, por simplicidad, los nodos de los grafos asociados a un orden de credibilidad se representan considerando únicamente el subíndice del agente asociado al elemento de credibilidad correspondiente. Es decir, el elemento  $A_2 > A_3$  se representará con un arco desde el nodo 3 hasta el nodo 2.

En la Figura 4.5, el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1$  fue seleccionado para que se muestre en la subpestaña *Order  $\alpha$* , mientras que el grafo asociado a  $\mathcal{O}_2$ , en la subpestaña *Order  $\beta$* . Como durante la ejecución de la aplicación es posible crear más de dos órdenes de credibilidad, las subpestañas *Order  $\alpha$*  y *Order  $\beta$*  permiten seleccionar de forma dinámica qué orden de credibilidad visualizar. Tenga en cuenta que, los órdenes de credibilidad seleccionados para graficar, serán los que la aplicación tenga en cuenta al momento de operar una revisión: siempre se realizará la revisión del orden graficado en la subpestaña *Order  $\alpha$*  por el orden graficado en la subpestaña *Order  $\beta$* .

Luego, en cualquiera de los órdenes seleccionados para graficar, es posible agregar o quitar elementos, tal como se muestra a continuación.

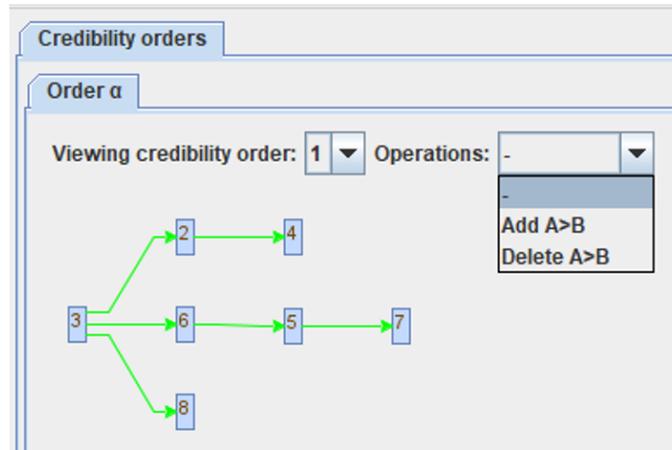


Figura 4.6: Lista desplegable de operaciones aplicables sobre  $\mathcal{O}_1$  de la subpestaña *Order  $\alpha$*  en la que dicho orden se está visualizando.

Las operaciones *Add  $A > B$*  y *Delete  $A > B$* , permiten agregar o quitar elementos de credibilidad del orden de credibilidad operado. En ambos casos, la aplicación solicitará al usuario que ingrese el elemento de credibilidad  $A_i > A_j$  que se desea agregar o quitar.

En el caso de la operación *Add  $A > B$* , solo será exitosa si el elemento agregado mantiene la consistencia del orden modificado. Esto es, el agregado del elemento de credibilidad debe dar lugar a un orden de credibilidad sensato. En caso contrario, la incorporación no se efectivizará y el orden de credibilidad no se verá modificado.

En el caso de *Delete  $A > B$* , la operación eliminará  $A_i > A_j$  del orden operado siempre que este elemento pertenezca al mismo, en caso contrario, no lo modificará. Más allá de esto, note que la operación no asegura que, una vez que la eliminación se efectivice, luego,

$A_i > A_j$  pertenezca o no a la clausura transitiva del orden modificado. Esto es, la operación elimina  $A_i > A_j$  del orden operado  $\mathcal{O}$  pero, si esta relación puede inferirse mediante otros elementos que forman parte de  $\mathcal{O}$ , entonces,  $A_i > A_j$  seguirá siendo inferible en  $\mathcal{O}^*$ .

Para ilustrar el funcionamiento del operador de revisión múltiple priorizada implementado en la aplicación, asuma que los órdenes de credibilidad del Ejemplo 4.1 fueron creados y cargados en la aplicación mediante los identificadores  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ . Asuma también que estos órdenes son graficados en las subpestañas *Order  $\alpha$*  y *Order  $\beta$* , respectivamente. Una vez esto, como se observa en la figura siguiente, se solicita la ejecución de la revisión.

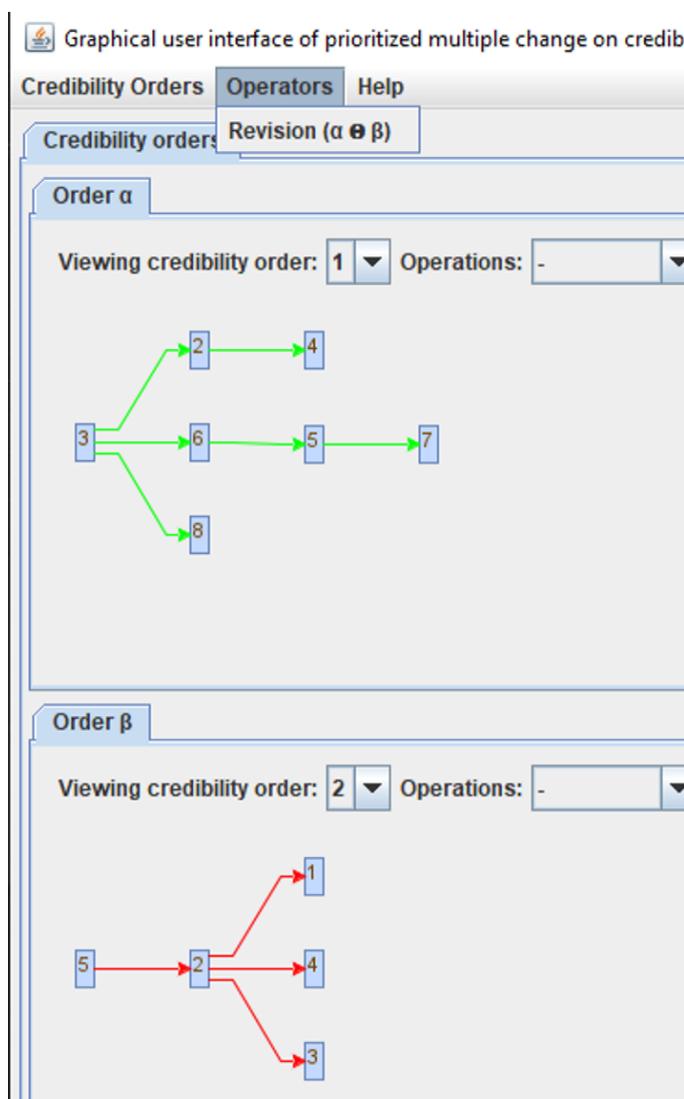


Figura 4.7: Muestra cómo operar la revisión de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$  en la aplicación, accediendo al menú *Operators* de la parte superior de la *GUI*.

La operación *Revision* ( $\alpha \otimes \beta$ ) del menú *Operators* permite la revisión múltiple priorizada del orden de credibilidad graficado en la subpestaña *Order  $\alpha$*  por el orden de credibilidad graficado en la subpestaña *Order  $\beta$* . Como se puede observar en la Figura 4.7, el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1$  (arcos verdes) se muestra en la pestaña *Order  $\alpha$* , mientras que el grafo asociado a  $\mathcal{O}_2$  (arcos rojos) se muestra en la pestaña *Order  $\beta$* . De esta forma, se aplica la revisión de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$ .

Las herramientas de visualización de la *GUI* fueron diseñadas para mostrar y explicar los resultados del proceso de revisión. La pestaña *Union of  $\alpha$  and  $\beta$  credibility orders* permite visualizar información asociada a la revisión múltiple priorizada de dos órdenes de credibilidad. Tanto el grafo coloreado, como los *kernels* que se listan en la pestaña derecha, brindan una explicación visual que puede ayudar a comprender el resultado obtenido a partir de la revisión.

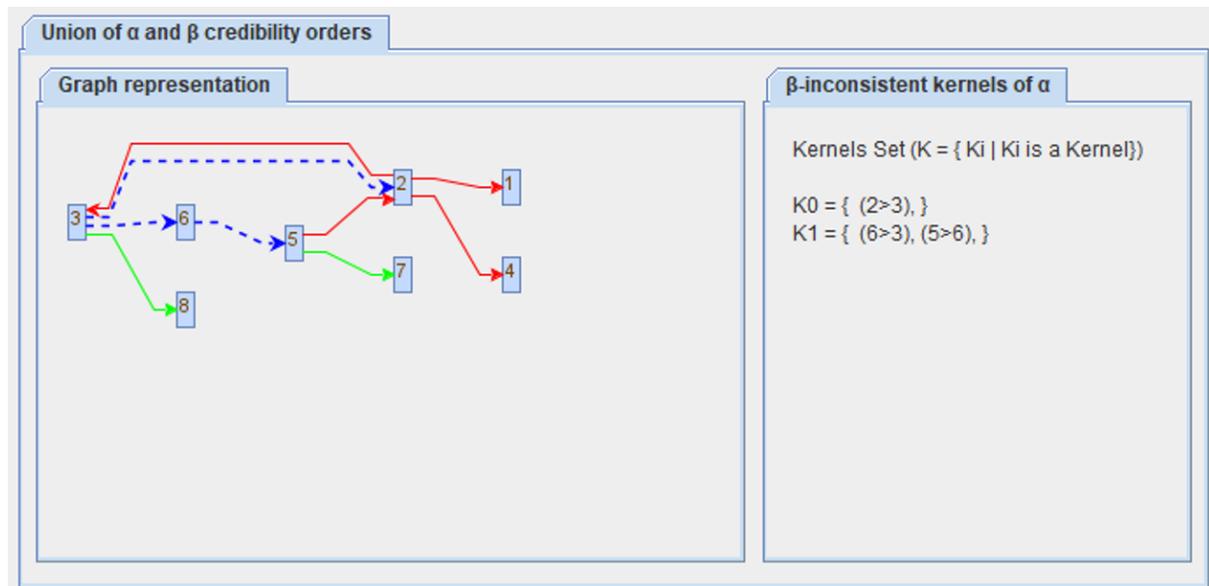


Figura 4.8: Muestra la pestaña *Union of  $\alpha$  and  $\beta$  credibility orders* luego de operar la revisión de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$  del Ejemplo 4.1.

En la subpestaña *Graph representation* se muestra el grafo asociado a la unión de los órdenes de credibilidad que intervienen en la revisión. La Figura 4.8 muestra el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Los arcos rojos representan elementos de  $\mathcal{O}_2$ , los arcos azules discontinuos representan elementos de  $\mathcal{O}_1$  que pertenecen a algún elemento de los  $\mathcal{O}_2$ -kernels inconsistentes de  $\mathcal{O}_1$ , y los arcos verdes representan los elementos restantes de  $\mathcal{O}_1$ . Observe que se mantienen los colores utilizados para graficar los grafos asociados a los órdenes

de credibilidad seleccionados en las subpestañas *Order  $\alpha$*  y *Order  $\beta$* , que se muestran en la Figura 4.7. Además, con color azul, se resaltan y pueden reconocerse fácilmente los elementos de  $\mathcal{O}_1$  que son candidatos a ser excluidos durante el proceso de revisión.

En la subpestaña  *$\beta$ -inconsistent kernels of  $\alpha$* , los *kernels* inconsistentes asociados a la revisión son mostrados. En la Figura 4.8, se listan los  $\mathcal{O}_2$ -*kernels* inconsistentes con  $\mathcal{O}_1$ . Tenga en cuenta que, dado los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  del Ejemplo 4.1, luego,  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2 = \{\{A_2 > A_3\}, \{A_6 > A_3, A_5 > A_6\}\}$ . Observe que, por simplicidad, los elementos que forman parte de los *kernels* inconsistentes son listados haciendo uso únicamente del subíndice del agente asociado al elemento de credibilidad. Es decir, todo elemento  $A_i > A_j$  que forme parte de un *kernel*, se lista con la forma  $i > j$ .

Como se especificó en la Sección 3.2.2, una vez que los *kernels* inconsistentes son calculados, el proceso de revisión debe seleccionar al menos un elemento de cada *kernel* para excluirlo del resultado. En la aplicación, se implementaron tres funciones de incisión que realizan esta tarea. Estas se corresponden con las funciones *Total Selection Function (TSF)*, *Lexicographic Selection Function (LSF)* y *Least Credible Selection Function (LCSF)* presentadas en la Sección 3.5. La *TSF* selecciona y devuelve todos los elementos de credibilidad de cada *kernel*; la *LSF* selecciona el primer elemento de cada *kernel* en orden lexicográfico; mientras que la *LCSF* selecciona solo un elemento de credibilidad  $A_i > A_j \in \mathcal{X}$  tal que  $A_j > A_k \notin \mathcal{X}$ . *LCSF* siempre devuelve un elemento; cuando dos o más elementos satisfacen ese criterio, *LCSF* selecciona el primero en orden lexicográfico.

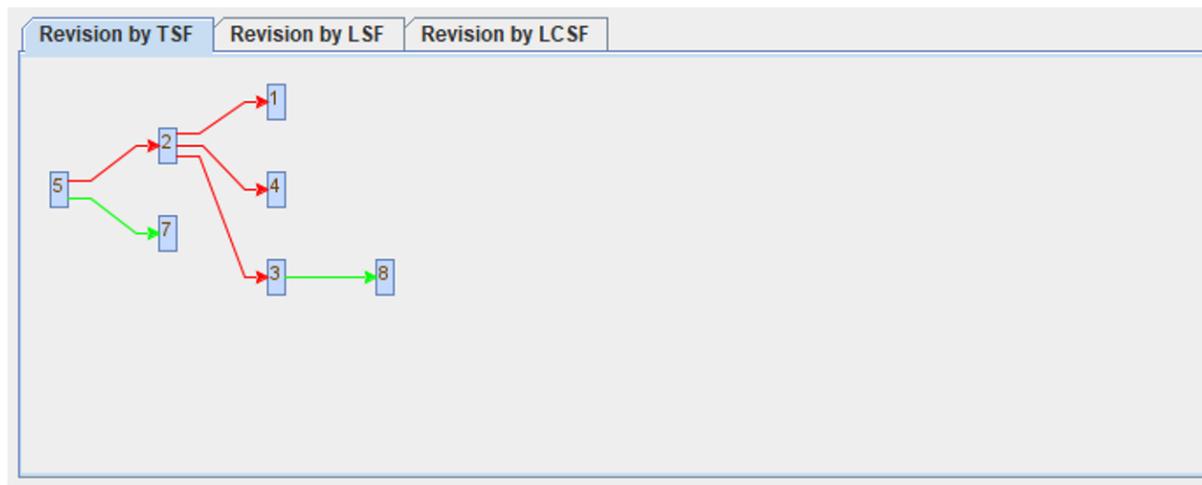


Figura 4.9: Muestra el resultado de la revisión de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$  del Ejemplo 4.1, cuando se hace uso de la función de incisión *TSF*.

En la parte inferior derecha de la *GUI*, se muestra el resultado de toda revisión ejecutada. El resultado se muestra en las pestañas *Revision by*, donde se grafican los grafos asociados a la revisión haciendo uso de alguna de las tres funciones de incisión disponibles. En la Figura 4.9 se observa el grafo asociado al resultado de la revisión de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$ , donde se utiliza la *TSF* como función de incisión. Esta función selecciona todos los elementos que forman parte de  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  para ser eliminados durante la revisión. De esta manera, la revisión se corresponde con  $\mathcal{O}_{TSF} = \mathcal{O}_2 \cup (\mathcal{O}_1 \setminus \{A_2 > A_3, A_6 > A_3, A_5 > A_6\})$ , esto es,  $\mathcal{O}_{TSF} = \{A_2 > A_5, A_1 > A_2, A_4 > A_2, A_3 > A_2, A_7 > A_5, A_8 > A_3\}$ .

En la Figura 4.10, se puede observar el grafo asociado al resultado obtenido en la misma revisión, cuando se hace uso de la *LSF*. Esta función, por cada uno de los *kernel*, selecciona únicamente un elemento que se corresponde con el menor de los mismos según su orden lexicográfico. Teniendo en cuenta  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2 = \{\{A_2 > A_3\}, \{A_6 > A_3, A_5 > A_6\}\}$ , la función *LSF* selecciona los elementos  $\{A_2 > A_3, A_5 > A_6\}$ , de forma tal que la revisión se corresponde con  $\mathcal{O}_{LSF} = \mathcal{O}_2 \cup (\mathcal{O}_1 \setminus \{A_2 > A_3, A_5 > A_6\})$ , esto es,  $\mathcal{O}_{LSF} = \{A_2 > A_5, A_1 > A_2, A_4 > A_2, A_3 > A_2, A_6 > A_3, A_7 > A_5, A_8 > A_3\}$ .

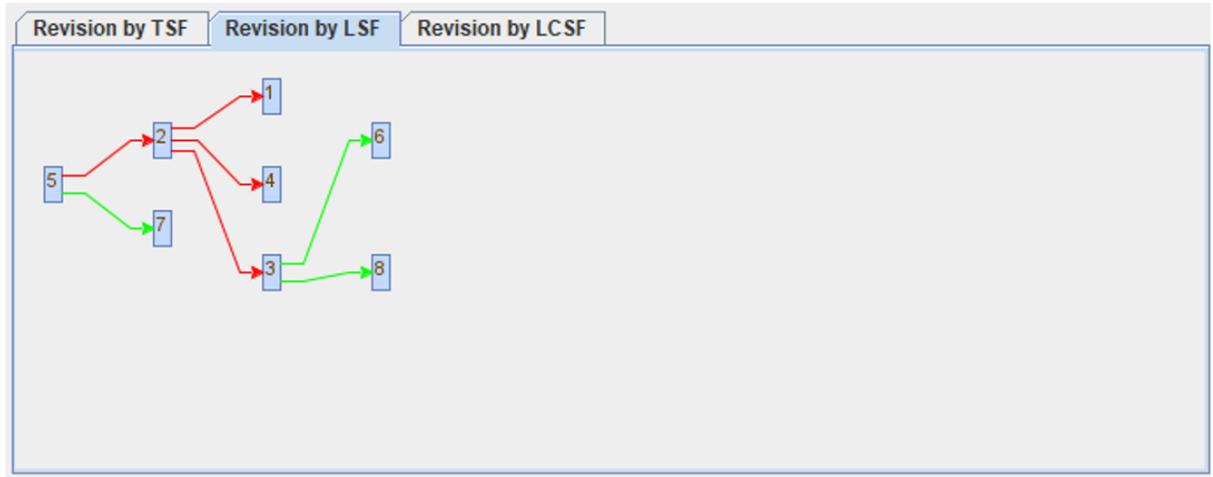


Figura 4.10: Muestra el resultado de la revisión de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$  del Ejemplo 4.1, cuando se hace uso de la función de incisión *LSF*.

Finalmente, la Figura 4.11, muestra el grafo asociado al resultado de la revisión cuando se aplica la función *LCSF* como función de incisión. Esta función, por cada *kernel*, selecciona solo un elemento de credibilidad  $A_i > A_j \in \mathcal{X}$  tal que  $A_j > A_k \notin \mathcal{X}$ . Cuando dos o más elementos satisfacen ese criterio, selecciona el primero en orden lexicográfico. Teniendo en cuenta  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2 = \{\{A_2 > A_3\}, \{A_6 > A_3, A_5 > A_6\}\}$ , la

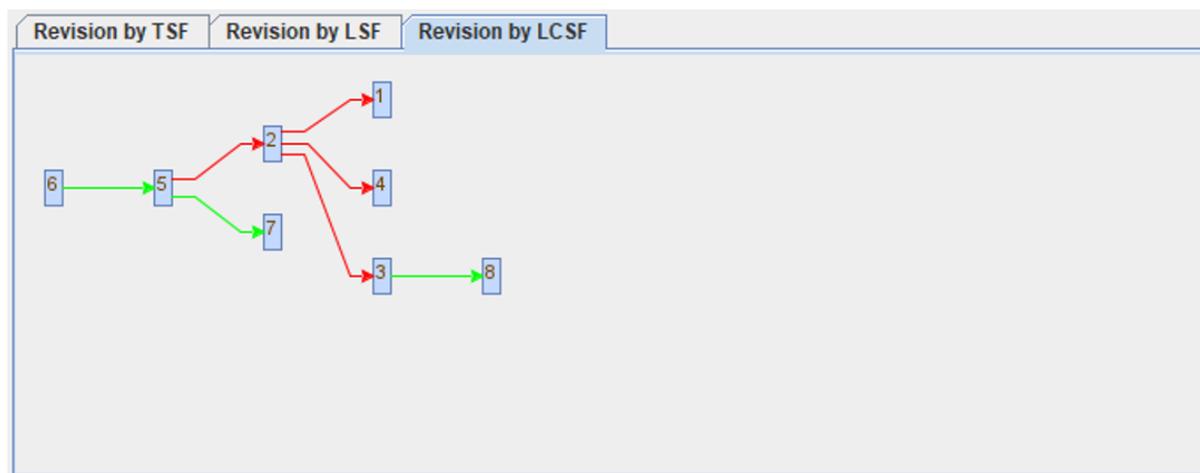


Figura 4.11: Muestra el resultado de la revisión de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$  del Ejemplo 4.1, cuando se hace uso de la función de incisión  $LCSF$ .

función  $LCSF$  selecciona los elementos  $\{A_2 > A_3, A_6 > A_3\}$ , de forma tal que la revisión se corresponde con  $\mathcal{O}_{LCSF} = \mathcal{O}_2 \cup (\mathcal{O}_1 \setminus \{A_2 > A_3, A_6 > A_3\})$ , esto es,  $\mathcal{O}_{LCSF} = \{A_2 > A_5, A_1 > A_2, A_4 > A_2, A_3 > A_2, A_5 > A_6, A_7 > A_5, A_8 > A_3\}$ .

Observe a partir de las Figuras 4.9, 4.10 y 4.11, que los tres resultados al operar la revisión con las tres funciones de incisión son diferentes. En la pestaña *Revision by TSF* es posible observar que quedan solo dos elementos de credibilidad de  $\mathcal{O}_1$  en el orden de credibilidad resultante:  $A_7 > A_5$  y  $A_8 > A_3$ . En la pestaña *Revision by LSF* quedan tres elementos de credibilidad de  $\mathcal{O}_1$  en el orden de credibilidad resultante:  $A_7 > A_5$ ,  $A_8 > A_3$  y  $A_6 > A_3$ . Finalmente, en la pestaña *Revision by LCSF* quedan tres elementos de credibilidad de  $\mathcal{O}_1$  en el orden de credibilidad resultante:  $A_7 > A_5$ ,  $A_8 > A_3$  y  $A_5 > A_6$ . Esta particularidad de la *GUI*, no solo ayuda a observar con claridad los resultados obtenidos cuando se hace uso de las diferentes funciones de incisión, sino que también facilita la comparación entre los resultados en cada uno de los casos.

Hasta aquí se presentó el desarrollo computacional de una aplicación con interfaz gráfica que permite operar diferentes órdenes de credibilidad, así como aplicar y observar el paso a paso de la revisión múltiple priorizada de un orden de credibilidad por otro. La Figura 4.12 muestra, a modo de resumen, la captura de pantalla de la *GUI* completa una vez ejecutada la revisión de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$  del Ejemplo 4.1. La interfaz permite, además de la visualización del paso a paso del proceso de revisión, observar los diferentes resultados que se obtienen ante una revisión, cuando se hace uso de tres funciones de incisión diferentes. Haciendo uso de las librerías implementadas para poder efectivizar todo este comporta-

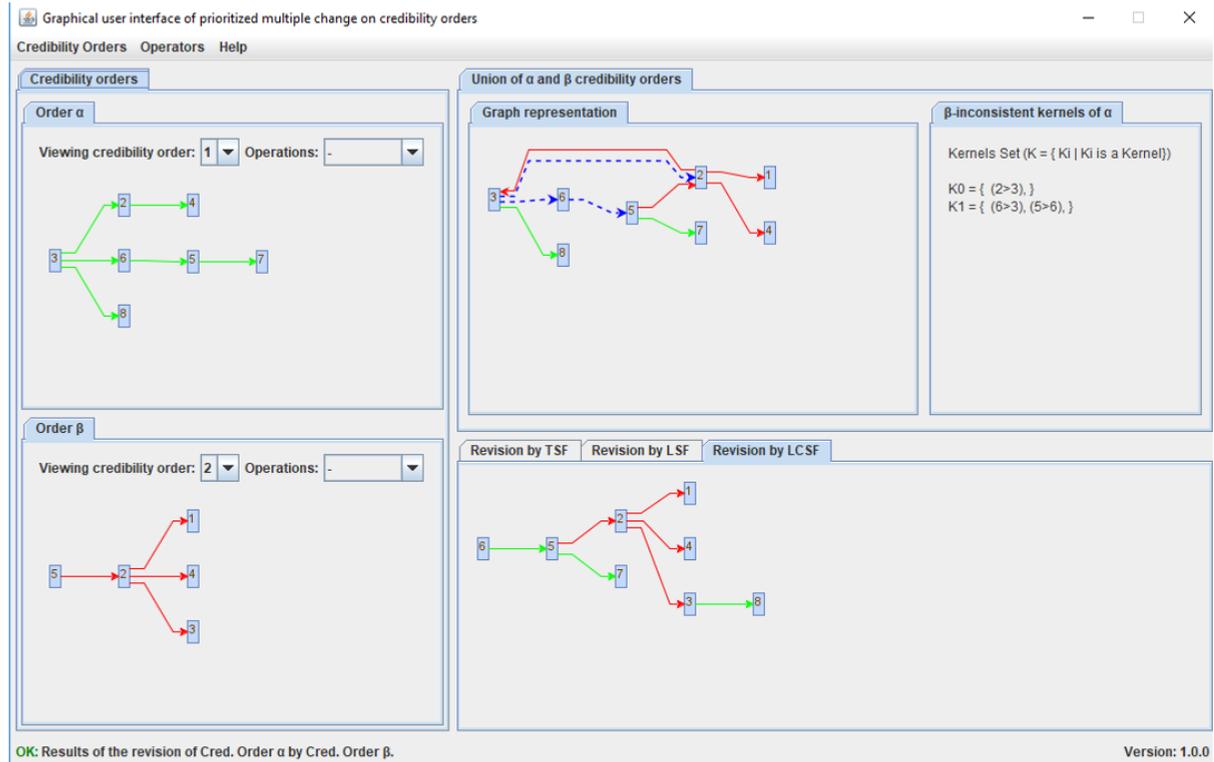


Figura 4.12: Captura de pantalla de la *GUI* una vez ejecutada la revisión de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$  del Ejemplo 4.1.

miento, en la próxima sección se analizará cómo influyen en los órdenes de credibilidad resultantes de una revisión, el uso de cualquiera de las tres funciones incisión. Este análisis se realizará de forma cualitativa y cuantitativa, teniendo en cuenta una experimentación especialmente desarrollada para tal fin.

## 4.2. Análisis del comportamiento de las funciones de incisión

En el Capítulo 3 se formalizó un operador de cambio múltiple priorizado, también denominado operador de revisión. Durante la construcción de este operador, se indicó que los conflictos existentes al intentar revisar dos órdenes de credibilidad deben ser resueltos, en principio, identificándolos mediante los *kernels* inconsistentes para que, posteriormente, una función de incisión consolidada determine qué elementos no formarán parte del orden de credibilidad resultante de la revisión.

Durante el desarrollo de esta tesis, más allá de la construcción formal del operador de revisión, como se mencionó anteriormente, también se desarrollaron diferentes funciones que permiten la implementación de este tipo de operador. En particular, se indicó que las funciones de selección (vea la función `SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS` de la Figura 3.9) son las que se encargan de implementar la estrategia específica de selección de elementos correspondiente a la función de incisión consolidada (vea la Definición 3.5). De esta forma, son las funciones de selección quienes, a partir de los criterios con los que realizan esta selección, definen qué elementos no formarán parte del orden de credibilidad resultante en una revisión.

Como se mostró en la Sección 3.5, distintas funciones de selección pueden llevar a diferentes resultados, ya que pueden seleccionar diferentes elementos para que no sean incluidos en el orden de credibilidad resultante. Teniendo esto en cuenta, en esta sección se analizarán detalladamente las tres funciones de selección propuestas a lo largo de esta tesis. Para esto, se abordará el comportamiento de estas funciones desde dos perspectivas.

Por un lado, en la Sección 4.2.1, se compararán estas funciones desde un punto de vista cualitativo, esto es, analizando su comportamiento en términos de cómo la selección afecta a la información del orden resultante de la revisión. Por otro lado, en la Sección 4.2.2, se mostrarán los resultados empíricos que surgen de una experimentación que indaga cómo las funciones de selección afectan a la cantidad de relaciones de credibilidad entre agentes que se obtienen a partir del proceso de revisión.

Recuerde que, dado un conjunto  $\mathbb{X}$  de *kernels* inconsistentes, la *Total Selection Function (TSF)* selecciona todos los elementos de credibilidad que forman parte de cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ ; la *Lexicographic Selection Function (LSF)* selecciona un solo elemento de credibilidad de cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ , siguiendo como criterio de selección el orden lexicográfico de los elementos; y la *Least Credible Selection Function (LCSF)*, selecciona de cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$  un elemento de credibilidad  $A_i > A_j$  tal que no exista otro agente menos creíble que  $A_j$  en  $\mathcal{X}$  seleccionando, en caso de que dos o más elementos satisfagan este último criterio, el primero en orden lexicográfico.

### 4.2.1. Análisis cualitativo

En esta sección se analizará cómo los diferentes criterios de selección pueden afectar la credibilidad de los agentes del orden priorizado durante la revisión. Este análisis, solo

tiene sentido ante situaciones conflictivas. Esto es así, porque estas situaciones derivan en la necesidad de seleccionar los elementos a excluir. Teniendo en cuenta esto, considere el siguiente ejemplo motivador.

Imagine que un agente llamado *Rick* tiene que elegir un modelo de auto para comprar en una subasta de autos usados *online*, donde se ofrecen diferentes tipos de autos. *Rick*, a partir de su presupuesto, planea participar de la compulsa por alguno de los siguientes tres modelos de autos:  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ . Aunque *Rick* ha buscado información en un sitio web especializado, no cuenta con información que establezca una relación de orden entre los tres modelos que considera comprar, para decidir cuál es el más conveniente.

En el sitio web *DeAutos.com*, sitio de preferencia de *Rick*, los diferentes análisis técnicos y experiencias de conductores permiten concluir que:  $\mathcal{O}_{DA} = \{A_1 > A_4, A_2 > A_1\}$ . A partir de  $\mathcal{O}_{DA}$ , note que  $A_2 > A_1$ . Sin embargo, en este sitio, no se observa información que compare estos dos modelos con el modelo de auto  $A_3$ .

En este escenario, *Rick* decide consultar otro sitio web especializado: *Garage.com*. *Rick* siente menor confianza por este sitio web, ya que este recibe publicidad de ciertas marcas de autos que finalmente son evaluados. Aún así, obtiene la siguiente información:  $\mathcal{O}_{GA} = \{A_3 > A_2, A_4 > A_3\}$ . A partir de  $\mathcal{O}_{GA}$ , note que  $A_3 > A_2$  pero, nuevamente, no es posible comparar los tres modelos de autos.

A partir de esto, *Rick* decide utilizar  $\mathcal{O}_{DA}$  y  $\mathcal{O}_{GA}$  en conjunto, para comparar a los tres modelos de autos. Sin embargo, la información de estos órdenes de credibilidad, en conjunto, presenta contradicciones. En este punto, *Rick* tiene que seleccionar qué información descartar. La Figura 4.13 muestra los grafos asociados a  $\mathcal{O}_{DA}$ ,  $\mathcal{O}_{GA}$  y  $\mathcal{O}_{DA} \cup \mathcal{O}_{GA}$ .

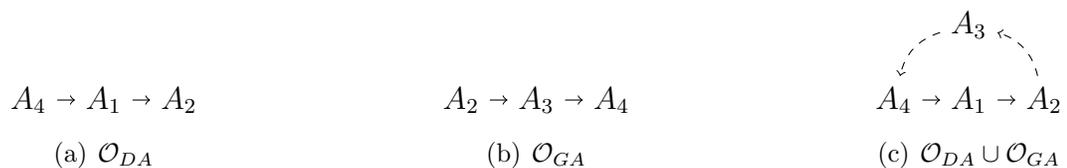


Figura 4.13: Muestra los grafos asociados a  $\mathcal{O}_{DA}$  y  $\mathcal{O}_{GA}$  del ejemplo motivador, así como de  $\mathcal{O}_{DA} \cup \mathcal{O}_{GA}$  donde los elementos de  $\mathcal{O}_{GA}$  son graficados con arcos punteados.

Dado que *DeAutos.com* es un sitio por el que *Rick* siente mayor confianza, este decide que, para mantener la consistencia, eliminará elementos que provienen de  $\mathcal{O}_{GA}$  cuando integre  $\mathcal{O}_{DA}$  con  $\mathcal{O}_{GA}$ . Observe que, si *Rick* decidiera eliminar la menor cantidad de

elementos posibles, podría eliminar  $A_4 > A_3$  o  $A_3 > A_2$ . Por el contrario, si la cantidad de información no fuese relevante, podría eliminar todos los elementos en conflicto.

Considere el escenario donde *Rick* elimina un solo elemento. En el caso de eliminar  $A_4 > A_3$ , note que el orden de credibilidad resultante se corresponde con  $\mathcal{O}_{R_1} = \{A_1 > A_4, A_2 > A_1, A_3 > A_2\}$  que se muestra en la Figura 4.14(b). En consecuencia, los tres autos podrían ser comparados. Sin embargo, con este criterio de selección, *Rick* optaría por integrar la información del orden de credibilidad por el que tiene preferencia, esto es,  $\mathcal{O}_{DA}$ , con  $A_3 > A_2$  de  $\mathcal{O}_{GA}$  que determina cuál es el auto que resulta más confiable en el orden resultante. Esto último, aún cuando  $A_3 > A_2$  es un elemento de  $\mathcal{O}_{GA}$  que contribuye a generar una contradicción con  $\mathcal{O}_{DA}$ , cuando inicialmente se lo intentaba integrar con el restante elemento  $A_4 > A_3$ . En consecuencia, ante esta situación conflictiva, se estaría seleccionando para eliminar información que permite solucionar la inconsistencia, pero a costa de debilitar la información del orden de credibilidad por el que se tiene preferencia. Observe que, mientras  $A_2$  era el auto más confiable en  $\mathcal{O}_{DA}$ , ahora el auto  $A_3$  lo es en  $\mathcal{O}_{R_1}$ .

Por el contrario, en el caso de eliminar  $A_3 > A_2$ , note que el orden de credibilidad resultante se corresponde con  $\mathcal{O}_{R_2} = \{A_1 > A_4, A_2 > A_1, A_4 > A_3\}$  que se muestra en la Figura 4.14(c). Nuevamente, los tres autos podrían ser comparados. Además, con este criterio de selección, *Rick* optaría por integrar la información del orden de credibilidad por el que tiene preferencia, esto es,  $\mathcal{O}_{DA}$ , con los elementos de  $\mathcal{O}_{GA}$  que resultan menos creíbles en el orden de credibilidad resultante. Note aquí que, con esta selección, el auto  $A_3$  permanece como el menos confiable de  $\mathcal{O}_{R_2}$ , mientras que  $A_2$ , el auto más confiable en  $\mathcal{O}_{DA}$  también permanece en esta condición en  $\mathcal{O}_{R_2}$ . Aquí, no existe debilitamiento de la información del orden de credibilidad por el que se tiene preferencia.

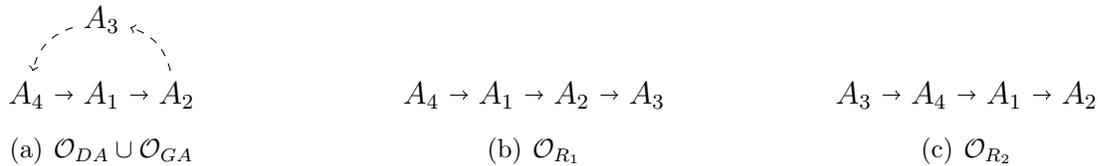


Figura 4.14: Muestra los grafos asociados a los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_{DA} \cup \mathcal{O}_{GA}$ ,  $\mathcal{O}_{R_1}$  y  $\mathcal{O}_{R_2}$  del escenario motivador.

Por último, existe también la posibilidad de que *Rick* seleccione eliminar toda la información en conflicto. Si este fuese el caso, los elementos de  $\mathcal{O}_{DA}$  no se verían debilitados.

Sin embargo, los tres autos que *Rick* quería comparar, no podrían compararse dado que, el orden resultante coincidiría con  $\mathcal{O}_{DA}$ .

Observando el ejemplo motivador presentado previamente, es claro que el criterio con el que se resuelvan las situaciones conflictivas ante la revisión de dos órdenes de credibilidad, es determinante respecto de cómo la información del orden de credibilidad priorizado puede verse afectada o no. En este ejemplo, quedó mostrado que la selección realizada determina el debilitamiento o no del grado de credibilidad del auto más confiable del orden de credibilidad al que se le dio prioridad. Esta situación, puede trasladarse de igual forma a una revisión múltiple priorizada donde, ante conflictos, sería deseable que los agentes del orden priorizado, siempre que sea posible, no se vean debilitados en su nivel de credibilidad.

Es claro que, para cada dominio de aplicación, posiblemente existan diferentes funciones de incisión que permitan mejorar las decisiones respecto a qué elementos deben ser excluidos. Sin embargo, no es posible definir una única función de incisión que pueda adaptarse de forma precisa a todos los escenarios posibles.

Durante el desarrollo de esta tesis se propusieron tres funciones de selección que presentan tres criterios que podrían utilizarse de forma generalizada. Cada uno de estas, presenta una política de selección clara y bien definida. Para analizar cómo es que estos criterios conducen a debilitar o no el grado de credibilidad de los agentes que provienen del orden priorizado ante una revisión, considere el siguiente ejemplo que guiará las explicaciones en cada uno de los casos.

**Ejemplo 4.2.** *Sea  $\mathcal{O}_1 = \{A_2 > A_6, A_6 > A_5, A_5 > A_4, A_1 > A_4, A_3 > A_7\}$  y  $\mathcal{O}_2 = \{A_4 > A_3, A_3 > A_2, A_7 > A_1\}$  dos órdenes de credibilidad sensatos. Luego, ante la revisión de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$ , se obtiene que los  $\mathcal{O}_2$ -kernels inconsistentes de  $\mathcal{O}_1$  son  $\mathbb{X} = \{\{A_2 > A_6, A_6 > A_5, A_5 > A_4\}, \{A_1 > A_4, A_3 > A_7\}\}$ . Los grafos asociados a los dos órdenes de credibilidad pueden verse en la Figura 4.15.*

La función *LCSF* fue definida persiguiendo el objetivo de que la información perteneciente al orden priorizado en la revisión, no se vea debilitada. Cuando se menciona que la información no se vea debilitada, se hace mención al hecho de que los agentes más creíbles tiendan a seguir siéndolos en el orden resultante de la revisión. Note que, por estar asumiendo esto en el contexto de las decisiones que se toman al momento de seleccionar los elementos que no formarán parte del orden resultante de la revisión, es claro que se

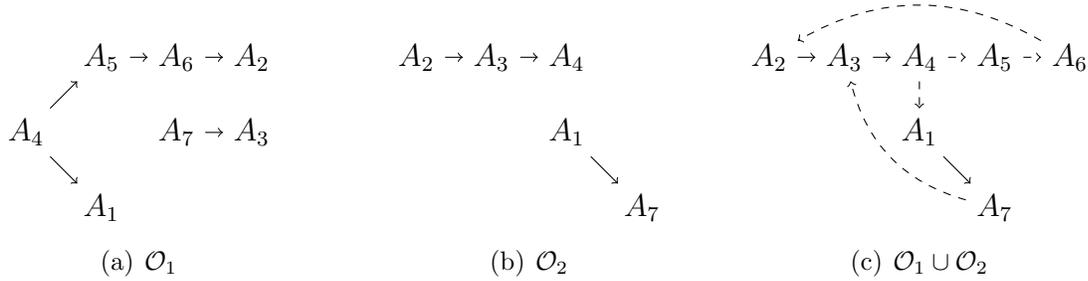


Figura 4.15: (a) y (b) muestran los grafos asociados a los órdenes de credibilidad del Ejemplo 4.2. (c) muestra el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  graficando los elementos de  $\mathcal{O}_1$  con líneas punteadas.

persigue este objetivo en escenarios donde existe información conflictiva entre los órdenes que intervienen en la revisión.

De no existir conflicto, el debilitamiento o no de los agentes del orden priorizado se asume como una consecuencia válida ante la integración de información. Por ejemplo, ante la revisión de  $\mathcal{O}_3 = \{A_1 > A_2\}$  por  $\mathcal{O}_4 = \{A_2 > A_3\}$ , es claro que el orden resultante se corresponde con  $\{A_1 > A_2, A_2 > A_3\}$ . Note que, durante la revisión de estos órdenes, no existen conflictos ( $\mathcal{O}_3 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_4 = \emptyset$ ) por lo que, el debilitamiento del grado de credibilidad del agente  $A_2$  (es el agente más creíble de  $\mathcal{O}_4$ , el orden priorizado de la revisión) se corresponde con un escenario admisible en el contexto de esta integración.

Teniendo en cuenta lo anterior, considere nuevamente el escenario planteado en el Ejemplo 4.2. A partir de la revisión  $\mathcal{O}_1 *_{\mu} \mathcal{O}_2$ , se sabe que  $\mathcal{O}_2$  se encuentra priorizado. Note que, en  $\mathcal{O}_2$ , los agentes  $A_4$  y  $A_7$  son los más creíbles del conjunto. Luego, el objetivo de no debilitar estos agentes ante la revisión entraría en juego en el caso de que existan conflictos entre la información de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  y, en particular, estos agentes formen parte de la información conflictiva. A partir de la Figura 4.15(c) es claro que existen ciclos en  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  por lo que, en consecuencia, los  $\mathcal{O}_2$ -*kernels* inconsistentes de  $\mathcal{O}_1$  serán un conjunto no vacío de *kernels*. De hecho, en los dos *kernels* existentes, hay elementos de credibilidad que relacionan a los agentes más creíbles de  $\mathcal{O}_2$ , esto es, las relaciones  $A_5 > A_4$  y  $A_3 > A_7$ .

Considerando este escenario, luego, es claro que la función de incisión consolidada que intervenga en el contexto de la revisión de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$  debe seleccionar qué elementos de  $\mathcal{O}_1$  no formarán parte del orden resultante. Esto es, debe seleccionar en cada  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ , los elementos a ser descartados. En las Figuras 4.16(b) y 4.16(c), se pueden observar cada uno de los elementos de  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ . Note particularmente que, en función de la selección

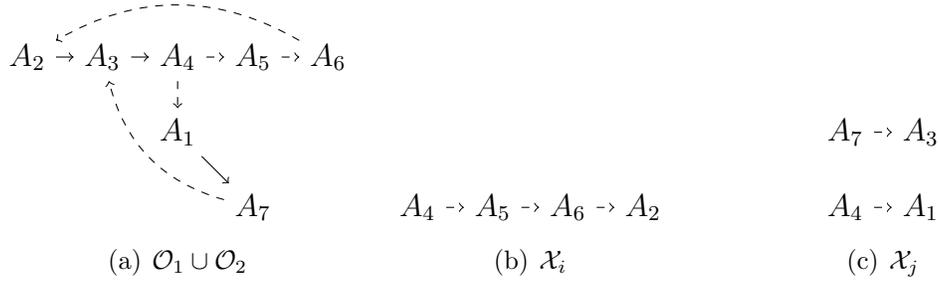


Figura 4.16: (a) muestra el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  Ejemplo 4.2, graficando los elementos de  $\mathcal{O}_1$  con líneas punteadas. (b) y (c) muestran  $\mathcal{X}_i \in \mathbb{X}$  y  $\mathcal{X}_j \in \mathbb{X}$ ,  $\mathbb{X} = \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ .

que se haga, se puede (o no) lograr la premisa inicial: evitar, en casos conflictivos, el debilitamiento de los agentes más creíbles del orden priorizado. La Figura 4.17 muestra todos los posibles resultados que se podrían obtener, seleccionando en cada caso un elemento de cada *kernel* inconsistente para ser eliminado. Observe que, únicamente las Figuras 4.17(e) y 4.17(f) muestran los órdenes de credibilidad donde los agentes de  $\mathcal{O}_2$  no se ven debilitados.

La función *LCSF* selecciona los elementos  $\{A_5 > A_4, A_1 > A_4\}$ . De esta forma, el orden resultante de la revisión de  $\mathcal{O}_2$  por  $\mathcal{O}_1$  aplicando *LCSF* como función de incisión es  $\mathcal{O}_3 = \{A_4 > A_3, A_3 > A_2, A_2 > A_6, A_3 > A_7, A_7 > A_1\}$ , que se corresponde con la Figura 4.17(e). Podrá notar que, a partir de lo anterior, todas las relaciones que provienen de  $\mathcal{O}_2$  no se debilitan, esto es, sus agentes son más creíbles que los agentes que provienen

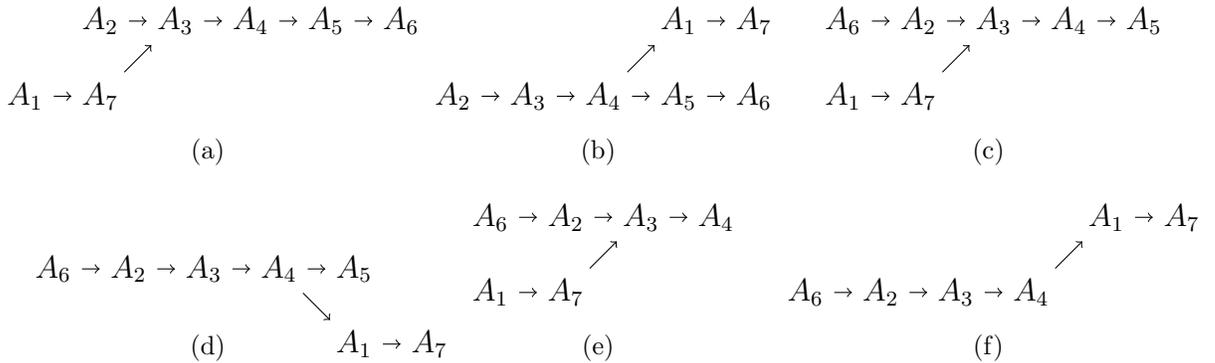


Figura 4.17: (a)-(f) muestran los grafos asociados a los órdenes de credibilidad resultantes de la revisión  $\mathcal{O}_1 *_{\mu} \mathcal{O}_2$  del Ejemplo 4.2, donde cada uno de estos resultados corresponde con el uso de una función de incisión que selecciona los elementos  $E_1 = \{A_2 > A_6, A_1 > A_4\}$ ,  $E_2 = \{A_2 > A_6, A_3 > A_7\}$ ,  $E_3 = \{A_6 > A_5, A_1 > A_4\}$ ,  $E_4 = \{A_6 > A_5, A_3 > A_7\}$ ,  $E_5 = \{A_5 > A_4, A_1 > A_4\}$  y  $E_6 = \{A_5 > A_4, A_3 > A_7\}$  respectivamente, para no ser incorporados en el orden resultante.

de  $\mathcal{O}_1$ . En este sentido, el agente  $A_4$  se volvió ahora el más creíble del conjunto, a partir de que el agente  $A_7$ , mediante relaciones incorporadas de  $\mathcal{O}_1$ , puede ser comparado con  $A_4$  de forma tal que  $A_4 > A_7$ .

Por el contrario, si en lugar de utilizar la *LCSF* se utilizara la *LSF*, esta última función seleccionaría para eliminar los elementos  $\{A_2 > A_6, A_1 > A_4\}$  y, el orden resultante utilizando esta función de selección se correspondería con  $\mathcal{O}_4 = \{A_6 > A_5, A_5 > A_4, A_4 > A_3, A_3 > A_2, A_3 > A_7, A_7 > A_1\}$ , representado en la Figura 4.17(a). En este último caso, los agentes de las relaciones de  $\mathcal{O}_2$  se debilitan porque se vuelven menos creíbles que los agentes  $A_6$  y  $A_5$  que provienen de  $\mathcal{O}_2$ . El problema con esta situación es que si la información de  $\mathcal{O}_1$  causa conflictos con la información de  $\mathcal{O}_2$  (que tiene prioridad) entonces sería deseable que los elementos de  $\mathcal{O}_2$  que finalmente se incorporan a  $\mathcal{O}_4$ , sean los que están relacionados con los agentes menos creíbles de  $\mathcal{O}_1$ .

Finalmente, tenga en cuenta que *TSF* evita el debilitamiento porque todos los elementos de credibilidad en conflicto son excluidos. Sin embargo, dado que *TSF* elimina todos los elementos conflictivos, se pierde mayor cantidad de información. En este sentido, *LCSF* se definió para proporcionar un resultado mejor y más equilibrado: conserva más información y, en la mayoría de los casos, evita el debilitamiento de la información del orden de credibilidad priorizado en la revisión.

Habiendo realizado el análisis previo, a continuación, se describirán los resultados obtenidos a través de un análisis empírico en el que se analiza el funcionamiento de las tres funciones de selección. En particular, quedará evidenciando cómo *LCSF* muestra también mejores resultados en este análisis que las dos restantes funciones de selección.

### 4.2.2. Análisis empírico

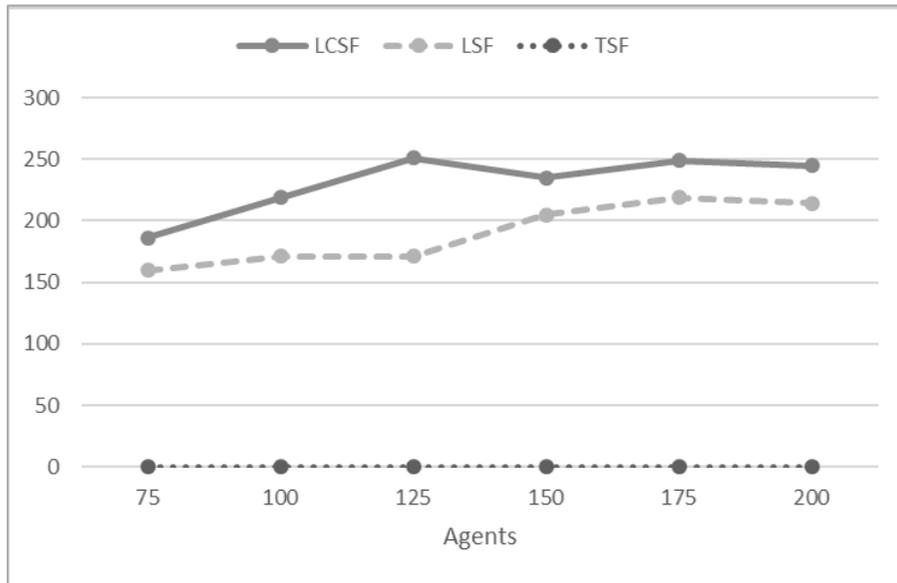
En esta sección, se analizarán empíricamente las tres funciones de selección a través de una simulación realizada haciendo uso de las librerías con las que se implementó parte de la aplicación presentada en la Sección 4.1. Los resultados de este análisis empírico fueron publicados en [JTG19]. La simulación consiste en la generación de dos órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  a partir de los que, luego, se computa la revisión de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$ . La revisión es llevada a cabo en tres cómputos separados, cada uno utilizando las funciones *TSF*, *LSF* y *LCSF* respectivamente. Con los órdenes de credibilidad obtenidos a partir de estas revisiones, la simulación realiza una comparación que contrasta los resultados

obtenidos. Tenga en cuenta que, cuantos más elementos de credibilidad tenga un orden de credibilidad, mayores serán las posibilidades de encontrar agentes relacionados en dicho orden para tomar una decisión. En el caso de un orden parcial de credibilidad resultante de una revisión, el número de relaciones de credibilidad depende significativamente de la función de selección utilizada para la revisión. Claramente, *TSF* conduce a órdenes revisados con el menor número de relaciones entre agentes porque se descartan todos los elementos de credibilidad en conflicto. Sin embargo, *LSF* y *LCSF* siempre seleccionan un elemento de credibilidad de cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$  dando como resultado un orden resultante con mayor cantidad de relaciones entre agentes.

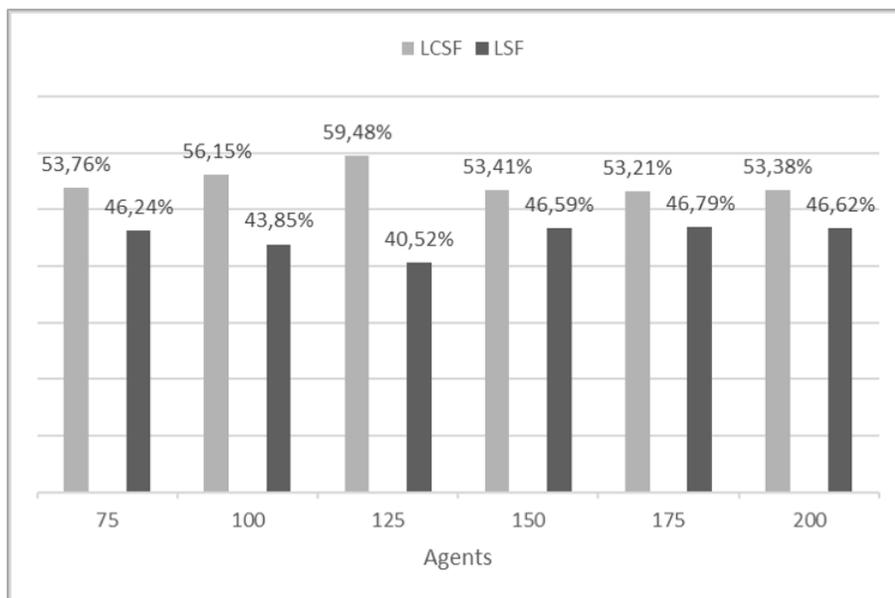
La simulación consiste en la ejecución de varios experimentos, cada uno denominado lote de prueba. Un lote de prueba estará definido por la cantidad de agentes  $t$ , considerando ( $t \in \{75, 100, 125, 150, 175, 200\}$ ). Así, el lote de prueba 1 considera un escenario con 75 agentes, el lote de prueba 2 considera 100 agentes, y así sucesivamente. Un lote de prueba es un conjunto de 500 pruebas individuales, cada una considerando dos órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  generados de forma aleatoria. Para cada prueba,  $\mathcal{O}_1$  es revisado por  $\mathcal{O}_2$ , haciendo uso de las diferentes funciones de selección: *TSF*, *LSF* y *LCSF*. En la simulación, para comparar el comportamiento de las tres funciones de selección de manera adecuada, se ha aplicado una única revisión entre órdenes.

Las simulaciones se realizaron en una computadora con un sistema operativo *Windows* 10. El *hardware* constaba de una CPU AMD A10-5800K a 3,80 GHz y 8 GB de RAM. La Figura 4.18(a) muestra para cada lote de prueba, la cantidad de veces que cada función de selección logra un orden resultante con más relaciones que las otras funciones. Por ejemplo, se puede observar (tal como se esperaba) que la función *TSF* nunca logra un orden revisado con más relaciones que las otras funciones. Para el lote de prueba que considera 75 agentes la *LSF* obtuvo 160 veces un resultado con el mayor número de relaciones, mientras que la *LCSF* la ha obtenido 186 veces (no se consideran empates).

La Figura 4.18(b) muestra en qué proporción del total de pruebas, cada función de selección obtuvo un orden revisado con el mayor número de relaciones. Por ejemplo, para el lote de prueba que considera 75 agentes, *LSF* y *LCSF* han obtenido en un 46,24 % y un 53,76 % (respectivamente) un orden resultante con el mayor número de relaciones (estos porcentajes se aplican respecto a las 346 simulaciones sin empates).



(a)



(b)

Figura 4.18: Análisis empírico sobre el orden resultante de la revisión utilizando diferentes funciones de selección.

En las Figuras 4.18(a) y 4.18(b), se puede observar que independientemente del número de agentes, el uso de la *LCSF* como función de selección conduce a mejores resultados al computar la revisión. En todos los lotes de prueba considerados, *LCSF* obtiene el mayor número de relaciones en el orden resultante. La Figura 4.19 muestra cuántas relaciones se obtienen después de la revisión de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$  para cada lote de prueba.

	75		100		125	
$\ \mathcal{O}_2\ $	121	-	170	-	214	-
<i>TSF</i>	461	281 %	711	318 %	1022	378 %
<i>LSF</i>	669	453 %	1064	526 %	1499	600 %
<i>LCSF</i>	678	460 %	1086	539 %	1542	621 %

(a)

	150		175		200	
$\ \mathcal{O}_2\ $	259	-	319	-	349	-
<i>TSF</i>	1310	406 %	1668	423 %	1976	466 %
<i>LSF</i>	2016	678 %	2570	706 %	3143	801 %
<i>LCSF</i>	2029	683 %	2647	730 %	3200	817 %

(b)

Figura 4.19: Cada tabla muestra en la segunda fila, para cada lote de prueba, el número promedio de relaciones consideradas para el orden priorizado  $\mathcal{O}_2$  (*i.e.*,  $\|\mathcal{O}_2\|$ ). En la tercera, cuarta y quinta fila, para cada función de selección, se muestra tanto el número promedio de relaciones que se obtuvieron luego de la revisión como el porcentaje de incremento con respecto a la cardinalidad de  $\mathcal{O}_2$ .

Tenga en cuenta que, en contraste con *LCSF*, *TSF* y *LSF* son estrategias muy simples de implementar. Sin embargo, se explicó anteriormente, *LCSF* implementa una estrategia que preserva la calidad de la información en aquellos ordenes de credibilidad priorizados en la revisión. Además, *LCSF* conserva mayor cantidad de relaciones en el orden resultante, permitiendo así que los agentes cuenten con mayor cantidad de información para luego tomar mejores decisiones.

### 4.3. Resumen

En este capítulo se presentaron los resultados obtenidos a partir de la implementación computacional de un conjunto de herramientas que permiten representar, operar y revisar diferentes órdenes de credibilidad. Por un lado, se presentó la aplicación con interfaz gráfica de usuario que, haciendo uso de estas herramientas, le permite a un usuario operar diferentes órdenes de credibilidad de forma simple e intuitiva. Durante la presentación de la aplicación, se mostró detalladamente cómo es que esta permite visualizar, haciendo uso de diferentes colores, los grafos asociados a los diferentes órdenes de credibilidad. Luego, se describió también cómo la aplicación permite observar de forma detallada el paso a paso del proceso de revisión múltiple priorizada entre dos órdenes de credibilidad. Para esto,

se mostró cómo la interfaz distingue gráficamente el conjunto de *kernels* inconsistentes, y cómo a partir de las diferentes funciones de incisión disponibles, los resultados de la revisión son visualizados.

Además, se presentaron los resultados obtenidos a partir de un análisis y de una experimentación, que indagaban de diferentes formas, el funcionamiento de las tres funciones de incisión presentadas en el Capítulo 3. En primer lugar, se presentó un estudio cualitativo que muestra cómo el criterio de selección de los elementos que deben eliminarse durante el proceso de revisión, puede dar lugar al debilitamiento de los agentes más creíbles del orden de credibilidad priorizado en la revisión, ante situaciones conflictivas. En particular, se mostró que la función *Least Credible Selection Function* evita el debilitamiento de los agentes más creíbles del orden priorizado.

Finalmente, se mostraron los resultados obtenidos a partir de una experimentación, cuyo objetivo fue analizar la cantidad de relaciones de credibilidad que se pueden obtener a partir de la revisión de dos órdenes de credibilidad, cuando se hace uso de las diferentes funciones de incisión para resolver los conflictos. Los resultados fueron analizados midiendo la cantidad de oportunidades en las que el uso de las diferentes funciones de incisión, implicaban obtener un orden de credibilidad con la mayor cantidad de relaciones. También se observó en cuántas relaciones crecía el orden de credibilidad resultante de la revisión, respecto de las relaciones que inicialmente contaba el orden priorizado. A partir de estos datos, quedó mostrado que la función *Least Credible Selection Function* logra mejores resultados que la *Total Selection Function* y la *Lexicographic Selection Function*.

## Capítulo 5

# Representación de la confianza en un modelo multi-contexto

Como se mencionó en el Capítulo 2, los modelos de reputación y confianza se han convertido en un método invaluable para mejorar la interacción entre agentes. La importancia de estos modelos puede observarse frente al éxito en la adopción del comercio electrónico. Un tema central en los modelos computacionales que trabajan la confianza entre agentes es la forma en la que se representa la misma. Por un lado se encuentran los modelos que representan y trabajan la confianza de forma numérica, y por otro lado, y con un desarrollo más reciente, se encuentran los modelos que representan y trabajan la confianza de forma simbólica. Un interrogante común a todos estos modelos refiere al hecho de considerar o no los valores de confianza de manera contextualizada. La contextualización de la información refiere a la dependencia que existe entre un valor de confianza respecto del contexto donde dicho valor está siendo considerado.

En el Capítulo 1, se mencionó como ejemplo motivador que la confianza que se tiene por sobre un médico cuando recomienda un medicamento, podría no ser exactamente la misma que la que se tiene por sobre esta misma persona a la hora de recomendar qué computadora comprar. De forma similar, la confianza percibida por sobre diferentes agentes vendedores de una gran cadena de electrodomésticos y accesorios para el hogar, dependerá del área o tópico donde estos se desenvuelvan. Claramente, existirán vendedores especializados en la venta de *Teléfonos Inteligentes*, mientras que otros, se especializarán en la venta de *Artículos de Camping*. Modelar la confianza de cada uno de estos vendedores de forma contextualizada permitirá, luego, tomar mejores decisiones.

A partir de lo anterior, es claro que la contextualización de los valores de confianza se torna una característica necesaria para los modelos de confianza. Sin embargo, resulta importante mencionar que modelar la confianza de manera contextualizada también presenta algunos desafíos. Aunque siempre es posible transformar un modelo de confianza de contexto único en uno multi-contexto, por ejemplo, teniendo diferentes instancias del modelo de contexto único, una para cada contexto considerado, lo que no resulta evidente en estos escenarios es cómo los valores de confianza asociados a diferentes tópicos o contextos pueden ser conjugados sacando provecho de esto.

En algunos trabajos del área se sostiene que lo que realmente le da a un modelo la categoría de modelo multi-contexto es la capacidad de hacer un uso inteligente de cada información para calcular diferentes valores de confianza. Resulta importante definir, entonces, cómo se pueden relacionar los diferentes tópicos o contextos en un modelo multi-contexto para, finalmente, establecer criterios y definir herramientas que permitan integrar la información que en cada uno de estos contextos se modela.

En este capítulo, se presentará un modelo para representar la confianza de forma simbólica y contextualizada. Para esto, en la Sección 5.1 se extenderá el modelo de representación simbólico previamente desarrollado en el Capítulo 3. Este modelo extendido asociará a cada elemento de credibilidad, esto es, la relación de confianza entre dos agentes, un contexto o tópico donde esta relación es tenida en cuenta. Además, permitirá definir diferentes tipos de relaciones entre estos contextos, mediante una taxonomía de contextos. Esta taxonomía, posibilitará modelar dos relaciones especialmente útiles en Ciencias de la Computación: las relaciones de especialización y de preferencia entre contextos.

Luego, en la Sección 5.2, se definirán dos funciones que permiten extender un orden de credibilidad en contexto, con la información de otros órdenes de credibilidad de otros contextos relacionados a partir de una taxonomía. Las extensiones serán formalizadas a partir del uso del operador de revisión múltiple priorizada presentado en el Capítulo 3. A través de estas funciones, se dará tratamiento a una de la problemáticas enunciadas anteriormente, esto es, cómo integrar la información de confianza que se encuentra modelada por sobre diferentes contextos.

Finalmente, en la Sección 5.3, se desarrollará un ejemplo de aplicación completo que muestra cómo el operador de revisión múltiple priorizada, la taxonomía de contextos y las funciones previamente mencionadas, permiten integrar diferentes valores de confianza a partir de la información que proviene de diferentes sitios web especializados. Con es-

te ejemplo de aplicación, quedará claro parte del aporte de esta tesis, mostrando cómo información de diferentes fuentes y con diferentes formatos de representación, pueden integrarse con simplicidad haciendo uso de las herramientas propuestas. Los resultados obtenidos a lo largo del presente capítulo, fueron publicados en [JTG19].

## 5.1. Modelo de representación multi-contexto

En esta sección se propondrá un modelo de representación para la confianza que considera la misma de manera contextualizada. Para esto, se extenderá el formalismo que fue introducido en la Sección 3.1 donde se especifica un modelo para representar la confianza de manera simbólica. En este sentido, varios conceptos y definiciones presentados allí serán tratados y utilizados nuevamente en este capítulo, realizando las adaptaciones que correspondan. Para iniciar la presentación de este modelo extendido, considere el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.1.** *Imagine que un agente llamado Tory tiene que elegir un lugar para comer Spaghetti en un Festival Gastronómico Internacional donde hay diferentes tipos de restaurantes. Hay tres restaurantes que tienen Spaghetti en su menú:  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ . Los asistentes al festival han clasificado los lugares con respecto a los tipos de comidas que proveen. Para el tópico Pasta, se sabe que  $R_1 > R_2$ , pero  $R_3$  no fue clasificado. Para el tópico Comida Italiana, se conoce que  $R_2 > R_3$  y  $R_2 > R_1$ . Tenga en cuenta que  $R_2$  y  $R_1$  han sido clasificados de manera diferente en cada uno de estos tópicos. Como Tory está buscando restaurantes para comer Spaghetti, es claro que la información del tópico Pasta es más específica que la del tópico restante. En consecuencia, debe prevalecer entonces la información que indica que  $R_1 > R_2$ . Luego, recordando que  $R_3$  no ha sido clasificado para el tópico Pasta, se puede usar la información  $R_2 > R_3$  que proviene de un tópico más general como Comida Italiana. Así, Tory puede usar  $R_1 > R_2$  del tópico Pasta y  $R_2 > R_3$  del tópico Comida Italiana, para inferir que  $R_1 > R_3$ . De esta forma, Tory puede concluir que  $R_1$  es el mejor restaurante para el tópico Pasta.*

Al igual que en el Capítulo 3, en lo que sigue, para representar la confianza o credibilidad asociada a un conjunto de agentes en un determinado contexto, se considerará un conjunto finito  $\mathbb{A}$  de agentes (o entidades) y un conjunto finito  $\mathbb{C}$  de contextos (o tópicos). En definiciones y ejemplo abstractos, en general, los agentes del conjunto  $\mathbb{A}$  se

denotarán con una letra mayúscula  $A$  con un subíndice (*e.g.*,  $A_1$ ), y los contextos de  $\mathbb{C}$  con una mayúscula  $C$  con un subíndice (*e.g.*,  $C_1$ ). Al igual que con el modelo de confianza simbólico, se supondrá que cada identificador representará un agente o contexto único respectivamente. De esta forma, y considerando que el enfoque que sigue esta tesis está concebido para un entorno colaborativo, no será necesario tomar medidas para evitar el robo de identidad.

Más allá de lo anterior, y por simplicidad, en diferentes ejemplos de aplicación se utilizarán nombres representativos para la notación de agentes y contextos. Durante la presentación del Ejemplo 5.1, el agente notado  $R_1$  se utiliza para representar un *restaurante* mientras que el contexto *Pasta* representa un tópico. Note que, este abuso en la notación, resulta útil en el escenario ejemplificado. Como esto no genera ningún conflicto (note que fácilmente podría notarse cada restaurant como  $A_i$ , así como cada tópico como un contexto  $C_j$ , pero complejizando la lectura), frecuentemente se observará que los agentes y contextos en los escenarios ejemplificativos, se notarán de forma conveniente considerando cada uno de los dominios de aplicación.

Teniendo en cuenta que la confianza se representará de forma simbólica, y siguiendo el espíritu de la Definición 3.1, en este modelo de representación se considerará que algunos agentes pueden ser más creíbles que otros siguiendo un enfoque cualitativo:  $A_1 > A_2$  representa que  $A_1$  es más creíble que  $A_2$  para algún contexto particular. Por lo tanto,  $A_1 > A_2$  podría valer para algún contexto  $C_1$  y lo contrario,  $A_2 > A_1$ , podría valer para un contexto diferente  $C_2$ . De forma equivalente a las ideas presentadas en [TGFS14], en este modelo las credibilidades que un agente asigna a los agentes para cada contexto se almacenarán en una *Base de Credibilidad* tal como se define a continuación.

**Definición 5.1** (Objeto de Credibilidad - Elemento de Credibilidad - Base de Credibilidad). Sean  $A_i, A_j \in \mathbb{A}$  dos agentes y  $C_x \in \mathbb{C}$  un contexto. Un objeto de credibilidad es un par  $[A_i > A_j, C_x]$  que representa que  $A_i$  es estrictamente más creíble que  $A_j$  en el contexto  $C_x$ . El primer elemento del par,  $A_i > A_j$ , representa el elemento de credibilidad. El segundo elemento del par, asocia al elemento de credibilidad el contexto donde dicha información es considerada. Una base de credibilidad, notada como  $\mathcal{B}$ , es un conjunto finito de objetos de credibilidad.

Una base de credibilidad  $\mathcal{B}$  almacenará un conjunto de objetos de credibilidad que son pares de elementos de credibilidad junto con su contexto asociado. En el Ejemplo 5.1, la base de credibilidad de *Tory* se corresponde con

$\mathcal{B}_{Tory} = \{[R_1 > R_2, C_{Pas}], [R_2 > R_3, C_{Ita}], [R_2 > R_1, C_{Ita}]\}$ , donde  $C_{Pas}$  y  $C_{Ita}$  representan los tópicos *Pasta* y *Comida Italiana* respectivamente. Tenga en cuenta que el mismo elemento de credibilidad podría valer para más de un contexto en  $\mathcal{B}$ , y que el agente propietario de  $\mathcal{B}$  también podría incluirse en los elementos de credibilidad. A continuación, se incluye un nuevo ejemplo.

**Ejemplo 5.2.** *Considere que un agente Bob ha obtenido la siguiente información, respecto de la confianza asociada a diferentes hoteles. En el tópico Limpieza, Bob conoce que  $H_4 > H_2$ ,  $H_2 > H_6$ ,  $H_3 > H_5$  y  $H_3 > H_1$ . Además, sabe que en el tópico Servicio,  $H_2 > H_5$  y  $H_5 > H_3$ . Finalmente, en el tópico Precio, considera que  $H_4 > H_3$ ,  $H_3 > H_2$  y  $H_4 > H_2$ . Luego, la base de credibilidad para el agente Bob es  $\mathcal{B}_{Bob} = \{ [H_4 > H_2, C_L], [H_2 > H_6, C_L], [H_3 > H_5, C_L], [H_3 > H_1, C_L], [H_2 > H_5, C_S], [H_5 > H_3, C_S], [H_4 > H_3, C_P], [H_3 > H_2, C_P], [H_4 > H_2, C_P] \}$ , teniendo en cuenta que  $C_L$ ,  $C_S$  y  $C_P$  representan los contextos Limpieza, Servicio y Precio, respectivamente. Bob le otorga diferente grado de preferencia a cada uno de los tópicos. En este sentido, tiene preferencia por la información brindada en cuanto a la Limpieza, seguido por la información asociada al tópico Servicio, otorgándole menor importancia a las valoraciones de los hoteles asociadas al tópico Precio. Siguiendo este orden de preferencia, luego, puede tomar decisiones cuando la información de diferentes tópicos referencie a los hoteles de manera contradictoria.*

El conjunto de todos los elementos de credibilidad con el mismo contexto  $C_x$  en una base  $\mathcal{B}$ , definido como  $\mathcal{O}_{C_x} = \{A_i > A_j : [A_i > A_j, C_x] \in \mathcal{B}\}$ , representa el *Orden de credibilidad* que tiene un agente para  $C_x$ . Por ejemplo, a partir de la base de credibilidad  $\mathcal{B}_{Tory}$  presentada anteriormente, el orden de credibilidad para el tópico *Comida Italiana* es  $\mathcal{O}_{C_{Ital}} = \{R_2 > R_3, R_2 > R_1\}$ . Tenga en cuenta que cualquier orden de credibilidad  $\mathcal{O}_{C_x}$  es un conjunto finito que corresponde a la proyección de  $\mathcal{B}$  con respecto a aquellos elementos de credibilidad que se representan explícitamente para el contexto  $C_x$ .

Considere nuevamente la base de credibilidad  $\mathcal{B}_{Bob}$  del Ejemplo 5.2. Note que los elementos de credibilidad  $H_2 > H_5$  y  $H_5 > H_3$  se almacenan explícitamente para el contexto *Servicio*. Luego,  $\mathcal{O}_{C_S} = \{H_2 > H_5, H_5 > H_3\}$ . Es claro que, de  $\mathcal{B}_{Bob}$ , la relación  $H_2 > H_3$  también se debe inferir para el contexto *Servicio*. Por lo tanto, en este modelo se definirá  $\mathcal{O}_{C_x}^*$  como la clausura transitiva de  $\mathcal{O}_{C_x}$ . Así, a partir del Ejemplo 5.2,  $\mathcal{O}_{C_S}^* = \{H_2 > H_5, H_5 > H_3, H_2 > H_3\}$ .

En el mismo sentido que la Observación 3.1, en este modelo se asume que para cada contexto  $C_x$ , el orden de credibilidad  $\mathcal{O}_{C_x}^*$  es sensato (vea también Definición 3.2). Luego, esta noción se puede generalizar para una base de credibilidad.

**Definición 5.2** (Base de credibilidad sensata). *Una base de credibilidad  $\mathcal{B}$  es sensata si para todo contexto  $C_x$  en  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{O}_{C_x}$  es sensato.*

En el Ejemplo 5.2, existen tres contextos en la base de credibilidad  $\mathcal{B}_{Bob}$  ( $C_L, C_S, C_P$ ). Luego, como los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_{C_L}$ ,  $\mathcal{O}_{C_S}$  y  $\mathcal{O}_{C_P}$  son sensatos, entonces la base de credibilidad  $\mathcal{B}_{Bob}$  es sensata.

**Observación 5.1.** *En el modelo propuesto, se asume que las bases de credibilidad serán sensatas.*

Tenga en cuenta que, dada una base de credibilidad sensata, los elementos de credibilidad para dos contextos diferentes podrían estar en contradicción. Considere  $\mathcal{O}_{C_L}$  y  $\mathcal{O}_{C_S}$  del Ejemplo 5.2. Note que  $\mathcal{O}_{C_L} \cup \mathcal{O}_{C_S}$  no es sensato porque  $H_3 > H_5$  y  $H_5 > H_3$  forman parte de su clausura transitiva. Observe también que la base de credibilidad  $\mathcal{B}_{Tory}$  presentada anteriormente es sensata porque  $\mathcal{O}_{C_{Pas}}$  y  $\mathcal{O}_{C_{Ital}}$  son sensatos. Sin embargo,  $\mathcal{O}_{C_{Pas}} \cup \mathcal{O}_{C_{Ital}}$  no es sensato porque  $R_1 > R_2$  y  $R_2 > R_1$  están en su clausura transitiva.

**Observación 5.2.** *Dada una base de credibilidad sensata que mantiene información para dos contextos  $C_x$  y  $C_y$ , luego,  $\mathcal{O}_{C_x}$  y  $\mathcal{O}_{C_y}$  son dos órdenes de credibilidad sensatos, pero  $\mathcal{O}_{C_x} \cup \mathcal{O}_{C_y}$  podría ser un orden no sensato.*

A partir de la incorporación de múltiples contextos en el modelo de representación simbólico de la confianza, es posible definir también diferentes formas de relacionar estos contextos. A continuación, se presentará una taxonomía de contextos que permite modelar dos tipos de relaciones entre contextos: una relación de especialización entre estos, como en el caso del agente *Tory* del Ejemplo 5.1; o una relación de preferencia entre contextos, como es el caso del agente *Bob* del Ejemplo 5.2.

**Definición 5.3** (Taxonomía de contextos). *Dado un conjunto de contextos  $\mathbb{C}$ , una taxonomía de contextos es un dígrafo acíclico  $(\mathbb{C}, \mathcal{T})$ , donde  $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  y, si el arco  $(C_x, C_y) \in \mathcal{T}$  entonces, no existe  $C_z$  tal que  $(C_x, C_z) \in \mathcal{T}$ .*

Considere, por ejemplo, un escenario en el que un agente  $A_1$  modela una relación de preferencia entre tres contextos diferentes. En este escenario, la información más relevante está en el contexto  $C_1$ , luego en el contexto  $C_2$  y finalmente en  $C_3$ . La taxonomía de contextos que modela esta relación de preferencia es  $(\{C_1, C_2, C_3\}, \mathcal{T}_1)$  donde  $\mathcal{T}_1 = \{(C_1, C_2), (C_2, C_3)\}$ . La representación gráfica de esta taxonomía puede observarse en la Figura 5.1.

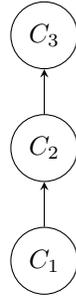


Figura 5.1: Taxonomía de contextos  $\mathcal{T}_1$  que representa una relación de preferencia entre tres contextos.

En el resto del documento, cuando no surja ninguna ambigüedad, se hará referencia a una taxonomía de contextos  $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$  simplemente como  $\mathcal{T}$ . Considere otro escenario donde el agente  $A_2$  tiene la misma relación de preferencia entre  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  indicada anteriormente, pero hay dos contextos más,  $C_4$  y  $C_5$ , y la información de  $C_4$  es más relevante que la información de  $C_5$ . La taxonomía de contextos que modela este nuevo escenario es  $\mathcal{T}_2 = \{(C_1, C_2), (C_2, C_3), (C_4, C_5)\}$ , tal como muestra la Figura 5.2.

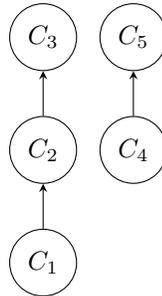


Figura 5.2: Taxonomía de contextos  $\mathcal{T}_2$  que incorpora nuevas relaciones de preferencia por sobre los elementos de la taxonomía  $\mathcal{T}_1$ .

Observe que en  $\mathcal{T}_2$  no todos los contextos están relacionados entre sí. La Figura 5.3 muestra, a modo de ejemplo, otra taxonomía de contextos posible.

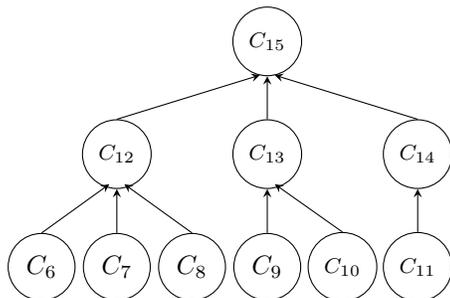


Figura 5.3: Taxonomía de contextos  $\mathcal{T}_3$  que ejemplifica las relaciones entre diez contextos diferentes.

Cuando dos entidades  $A_i$  y  $A_j$  no se pueden comparar en algún contexto determinado  $C_x$ , si se proporciona una taxonomía  $(\mathbb{C}, \mathcal{T})$ , la información de contextos relacionados a  $C_x$  podría utilizarse. A continuación, se incluye la definición recursiva habitual del concepto ancestro en un dígrafo.

**Definición 5.4.** *Dada una taxonomía  $(\mathbb{C}, \mathcal{T})$ , y los contextos  $C_x, C_y, C_z \in \mathbb{C}$ , un contexto  $C_z$  es un ancestro de  $C_x$  en  $\mathcal{T}$ , si  $(C_x, C_z) \in \mathcal{T}$ , o si existe un contexto  $C_y$  tal que  $(C_x, C_y) \in \mathcal{T}$  y  $C_z$  es un ancestro de  $C_y$ . Como es usual, si  $(C_x, C_z) \in \mathcal{T}$ , se dirá que  $C_z$  es un ancestro directo de  $C_x$ .*

Por ejemplo, en la Figura 5.2,  $C_3$  es un ancestro de  $C_1$ , y  $C_5$  es un ancestro directo de  $C_4$ . Además, en la Figura 5.3, el contexto  $C_{15}$  es ancestro de todos los demás contextos.

Una taxonomía  $\mathcal{T}$  define una relación entre contextos que puede verse como el concepto de herencia utilizado en informática y lenguajes de programación. Desde este punto de vista,  $(C_x, C_y) \in \mathcal{T}$  significa que el contexto  $C_x$  es más específico que  $C_y$ , y que la información de contexto  $C_x$  hereda y especializa la información de contexto  $C_y$ . Dado que cada contexto almacena elementos de credibilidad, el contexto  $C_x$  puede heredar los elementos de credibilidad de  $C_y$  y, al mismo tiempo, puede redefinir algunos de ellos.

En la siguiente sección, se formalizarán dos funciones que permiten obtener una extensión sensata de un orden de credibilidad  $\mathcal{O}_{C_x}$ , incorporando elementos de credibilidad que provienen de los ancestros de  $C_x$  según una taxonomía de contextos. Esta extensión se llevará a cabo mediante el operador de revisión múltiple priorizada descrito en el Capítulo 3.

## 5.2. Extensión de un orden de credibilidad mediante una taxonomía de contextos

En esta sección, se formalizarán dos funciones que permiten extender un orden de credibilidad en contexto con información de otros órdenes de credibilidad en contexto relacionados mediante una taxonomía. Para esto, se retomará la función `EXTENDING-ORDER` presentada en la Sección 3.3. La Figura 5.4 muestra nuevamente cómo esta función está construida. Recuerde del Capítulo 3 que, la misma, implementa el comportamiento del operador de revisión múltiple priorizada entre dos órdenes de credibilidad. De esta forma,  $\text{EXTENDING-ORDER}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$ , se corresponde con la revisión múltiple priorizada de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$ .

---

**Entrada:** órdenes de credibilidad sensatos.

**Salida:** orden de credibilidad sensato.

---

```

1: function EXTENDING-ORDER( $\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1$ )
2:    $\mathcal{O}_1 \leftarrow \mathcal{O}_1 \setminus \mathcal{O}_2$ 
3:    $\mathcal{O}_{(2*1)} \leftarrow \mathcal{O}_2 \cup (\mathcal{O}_1 \setminus \text{SELECT}(\text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)))$ 
4:   return  $\mathcal{O}_{(2*1)}$ 
5: end function

```

Figura 5.4: Función presentada en el Capítulo 3 que extiende un orden de credibilidad  $\mathcal{O}_2$  con los elementos de  $\mathcal{O}_1$ .

**Ejemplo 5.3.** *Considere un agente que tiene información que compara hoteles en dos contextos diferentes relacionados por la taxonomía  $\mathcal{T}_4 = \{(C_3, C_4)\}$ . Suponga que  $\mathcal{O}_{C_3} = \{H_6 > H_2, H_2 > H_4, H_3 > H_4, H_4 > H_5\}$  y  $\mathcal{O}_{C_4} = \{H_5 > H_7, H_7 > H_4, H_4 > H_6, H_6 > H_2, H_2 > H_3\}$ . La Figura 5.5 muestra la taxonomía de contextos tanto como los grafos asociados a los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_{C_3}$  y  $\mathcal{O}_{C_4}$ .*

Teniendo en cuenta el escenario planteado en el Ejemplo 5.3, note que  $H_6$  y  $H_3$  no se pueden comparar en el contexto  $C_3$ . Sin embargo, si el orden de credibilidad  $\mathcal{O}_{C_3}$  es extendido con la información de su ancestro  $C_4$ , se pueden comparar  $H_6$  y  $H_3$ . Por ejemplo, si  $H_2 > H_3 \in \mathcal{O}_{C_4}$  se considera en un nuevo orden de credibilidad junto con todos los elementos de credibilidad de  $\mathcal{O}_{C_3}$ , entonces  $H_6 > H_3$  puede ser inferida. Más allá de lo

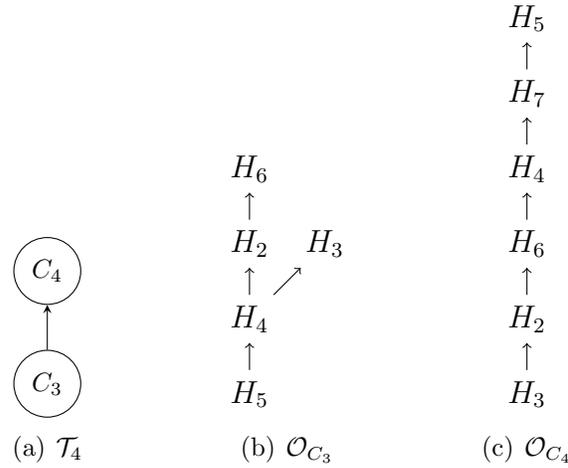


Figura 5.5: (a)-(c) muestran la taxonomía de contextos y los órdenes de credibilidad del Ejemplo 5.3.

anterior, note que  $\mathcal{O}_{C_3} \cup \mathcal{O}_{C_4}$  no es sensato (vea la Figura 5.6) y, por lo tanto, no se pueden agregar todos los elementos de  $\mathcal{O}_{C_3}$  junto con los de  $\mathcal{O}_{C_4}$ .

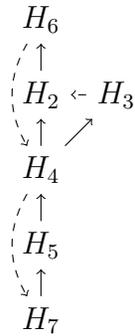


Figura 5.6: Muestra la unión de  $\mathcal{O}_{C_3}$  y  $\mathcal{O}_{C_4}$  del Ejemplo 5.3, graficando con líneas punteadas los elementos de  $\mathcal{O}_{C_4}$ .

Por ejemplo, si  $\mathcal{O}_{C_3}$  se extiende agregando  $H_4 > H_6$  entonces surge una contradicción con los elementos  $H_6 > H_2$  y  $H_2 > H_4$  que están en  $\mathcal{O}_{C_3}$ . En este escenario, podría hacerse uso de la función  $\text{EXTENDING-ORDER}(\mathcal{O}_{C_3}, \mathcal{O}_{C_4})$  que computa la extensión del orden de credibilidad  $\mathcal{O}_{C_3}$  con los elementos de credibilidad de  $\mathcal{O}_{C_4}$  de forma tal que el orden resultante sea sensato. Nuevamente, este cómputo no es ni más ni menos que la revisión múltiple priorizada de  $\mathcal{O}_{C_4}$  por  $\mathcal{O}_{C_3}$ . Un resultado posible respecto de esta extensión puede observarse en la Figura 5.7. Note que, en este resultando, se eliminaron los elementos  $H_4 > H_6$  y  $H_7 > H_4$  de  $\mathcal{O}_{C_3} \cup \mathcal{O}_{C_4}$  para resolver los conflictos.

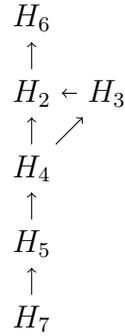


Figura 5.7: Muestra un posible resultado de la extensión de  $\mathcal{O}_{C_3}$  por  $\mathcal{O}_{C_4}$  ( $\mathcal{O}_{C_3 * C_4}$ ) del Ejemplo 5.3.

A partir de lo anterior, observe que considerando una taxonomía tal como  $\mathcal{T}_4$  que relaciona los contextos  $C_3$  y  $C_4$ , y la función EXTENDING-ORDER, es posible resolver situaciones donde no existe información para comparar dos o más agentes en un determinado contexto. La relación entre los contextos mediante la taxonomía indica con qué información se puede extender un determinado orden de credibilidad, mientras que la función EXTENDING-ORDER es la que asegura que la extensión se corresponderá con un orden de credibilidad sensato.

Aunque la función de la Figura 5.4 se puede utilizar para extender un orden de credibilidad con la información de su ancestro directo, esta metodología también se puede usar iterativamente para extender un orden de credibilidad  $\mathcal{O}_{C_x}$  con todos los ancestros de  $C_x$  con respecto a una taxonomía  $\mathcal{T}$ . Por ejemplo, considere de nuevo la Figura 5.1. Teniendo en cuenta esa taxonomía, luego,  $\mathcal{O}_{C_1}$  se puede extender con  $\mathcal{O}_{C_2}$  y, a su vez, la extensión obtenida también se puede extender con  $\mathcal{O}_{C_3}$ . De manera similar,  $C_6$  puede extenderse con sus ancestros  $C_{12}$  y  $C_{15}$  según la Figura 5.3.

A continuación, se presentarán dos alternativas para realizar este proceso de extensión de órdenes de credibilidad de forma iterada. Estas presentaciones se realizarán siguiendo el formato documentado en [JTG19]. Para guiar las explicaciones, considere el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.4.** Considere que el agente del Ejemplo 5.3 incorpora información de un nuevo contexto  $C_5$ , que es más general que  $C_4$ , entonces  $\mathcal{T}_5 = \{(C_3, C_4), (C_4, C_5)\}$ . La información sobre hoteles indica que  $\mathcal{O}_{C_3} = \{H_6 > H_2, H_2 > H_4, H_3 > H_4, H_4 > H_5\}$ ,  $\mathcal{O}_{C_4} = \{H_5 > H_7, H_7 > H_4, H_4 > H_6, H_6 > H_2, H_2 > H_3\}$  y  $\mathcal{O}_{C_5} = \{H_5 > H_4, H_4 > H_9, H_9 > H_6, H_6 > H_2, H_8 > H_2\}$ . Tenga en cuenta que

si bien  $H_2$  y  $H_6$  se pueden comparar en todos los contextos porque  $H_6 > H_2$  pertenece al orden de credibilidad de cada contexto,  $H_5$  y  $H_7$ , así como  $H_2$  y  $H_8$ , son comparables solo en los contextos  $C_4$  y  $C_5$  respectivamente ( $H_5 > H_7 \in \mathcal{O}_{C_4}$ ,  $H_8 > H_2 \in \mathcal{O}_{C_5}$ ), y  $H_4$  y  $H_5$  son comparables en los contextos  $C_3$  y  $C_5$  pero con información contradictoria ( $H_4 > H_5 \in \mathcal{O}_{C_3}$  y  $H_5 > H_4 \in \mathcal{O}_{C_5}$ ). La Figura 5.8 muestra la taxonomía de contextos tanto como los grafos asociados a los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_{C_3}$ ,  $\mathcal{O}_{C_4}$  y  $\mathcal{O}_{C_5}$ .

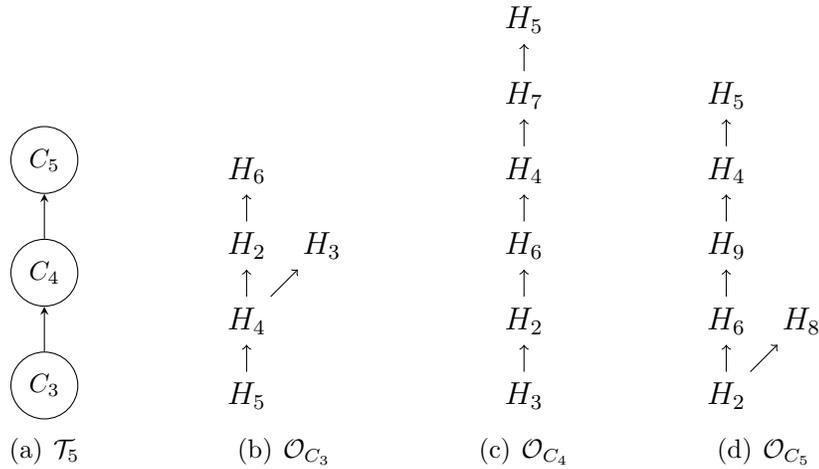


Figura 5.8: (a)-(d) muestran la taxonomía  $\mathcal{T}_5$  y los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_{C_3}$ ,  $\mathcal{O}_{C_4}$  y  $\mathcal{O}_{C_5}$  del Ejemplo 5.4.

### 5.2.1. Cómputo por compilación

En esta sección, se propondrá una función que, dada una taxonomía  $\mathcal{T}$ , una base de credibilidad  $\mathcal{B}$  y un contexto  $C_x$ , computa la extensión de  $\mathcal{O}_{C_x}$  con respecto a todos los ancestros de  $C_x$  en  $\mathcal{T}$  (notado como  $\mathcal{O}_{\uparrow C_x}$ ). Para hacer esto, la función utiliza EXTENDING-ORDER iterativamente. Esta función, puede observarse a continuación en la Figura 5.9.

---

**Entrada:** taxonomía de contextos, base de credibilidad, identificador de contexto.

**Salida:** orden de credibilidad sensato.

---

```

1: function EXTENDING-ORDER-BY-ALL-ANCESTORS( $\mathcal{T}, \mathcal{B}, C_x$ )
2:    $\mathcal{O}_{\uparrow C_x} \leftarrow \mathcal{O}_{C_x}$ 
3:   while there exists a direct ancestor of  $C_x$  en  $\mathcal{T}$  do
4:      $C_y \leftarrow$  direct ancestor of  $C_x$  in  $\mathcal{T}$ 
5:      $\mathcal{O}_{\uparrow C_x} \leftarrow$  EXTENDING-ORDER( $\mathcal{O}_{\uparrow C_x}, \mathcal{O}_{C_y}$ )
6:      $C_x \leftarrow C_y$ 
7:   end while
8:   return  $\mathcal{O}_{\uparrow C_x}$ 
9: end function

```

Figura 5.9: Función que extiende un orden de credibilidad en contexto con los elementos de los órdenes de credibilidad de todos los contextos ancestros.

Considere el Ejemplo 5.4. Suponga que se requiere el orden de credibilidad extendido por todos los ancestros de  $\mathcal{O}_{C_3}$ . Para esto, haciendo uso de la función de la Figura 5.9, se realizarán dos extensiones iteradas de acuerdo con  $\mathcal{T}_5$ : primero,  $\mathcal{O}_{C_3}$  se extenderá con respecto a  $\mathcal{O}_{C_4}$  y, luego, sobre el orden extendido obtenido, se calculará una nueva extensión con respecto a  $\mathcal{O}_{C_5}$ .

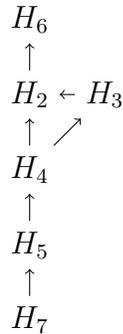


Figura 5.10: Muestra un posible resultado de la extensión de  $\mathcal{O}_{C_3}$  por  $\mathcal{O}_{C_4}$  ( $\mathcal{O}_{(C_3 * C_4)}$ ) del Ejemplo 5.4.

Tenga en cuenta que la extensión de  $\mathcal{O}_{C_3}$  con respecto a  $\mathcal{O}_{C_4}$  (indicada como  $\mathcal{O}_{(C_3 * C_4)}$ ) puede resultar en dos posibles resultados. Estas dos posibles extensiones dependen de la función SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS utilizada para resolver los conflictos. Un resultado posible corresponde a  $\mathcal{O}_{(C_3 * C_4)} = \{H_6 > H_2, H_2 > H_4, H_3 > H_4, H_4 > H_5, H_5 > H_7, H_2 > H_3\}$  tal

como se mostró anteriormente en la Figura 5.10. Por simplificación, se tomará este resultado como el obtenido en este proceso iterado.

Luego,  $\mathcal{O}_{\uparrow C_3}$  será el resultado de  $\text{EXTENDING-ORDER}(\mathcal{O}_{(C_3 * C_4)}, \mathcal{O}_{C_5})$ . Para hacer esto, la función de la Figura 5.9 realiza los siguientes pasos: primero,  $\mathcal{O}_{C_5} = \mathcal{O}_{C_5} \setminus \mathcal{O}_{(C_3 * C_4)}$ ; segundo, se calculan los conjuntos conflictivos  $MCSet = \text{CONFLICT-SETS}(\mathcal{O}_{(C_3 * C_4)}, \mathcal{O}_{C_5})$ ,  $MCSet = \{\{H_5 > H_4\}, \{H_4 > H_9, H_9 > H_6\}\}$ ; tercero, se seleccionan los elementos de credibilidad que no se incorporarán a  $\mathcal{O}_{(C_3 * C_4)}$ : por ejemplo,  $S = \text{SELECT}(MCSet)$ ,  $S = \{H_4 > H_5, H_4 > H_9\}$ ; finalmente, se retorna el orden extendido, es decir,  $\mathcal{O}_{\uparrow C_3} = \mathcal{O}_{(C_3 * C_4)} \cup (\mathcal{O}_{C_5} \setminus S) = \{H_9 > H_6, H_8 > H_2, H_6 > H_2, H_2 > H_4, H_3 > H_4, H_4 > H_5, H_5 > H_7, H_2 > H_3\}$ . La unión de  $\mathcal{O}_{C_5}$  y  $\mathcal{O}_{(C_3 * C_4)}$ , así como  $\mathcal{O}_{\uparrow C_3}$  pueden observarse en la Figura 5.11.

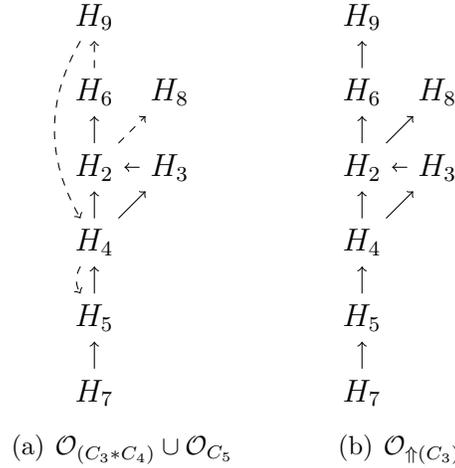


Figura 5.11: (a) muestra la unión de  $\mathcal{O}_{(C_3 * C_4)}$  y  $\mathcal{O}_{C_5}$  del Ejemplo 5.4, donde las líneas punteadas corresponden con relaciones de  $\mathcal{O}_{C_5}$ . (b) muestra la extensión por compilación de  $\mathcal{O}_{C_3}$  con respecto a  $\mathcal{T}_5$ .

A partir de la extensión iterada por todos los contextos ancestros de  $C_3$ , tenga en cuenta que  $\mathcal{O}_{\uparrow C_3}$  permite comparar los hoteles  $H_5$  y  $H_7$  que solo eran comparables en  $\mathcal{O}_{C_4}$ , y  $H_8$  con  $H_2$  que solo eran comparables en  $\mathcal{O}_{C_5}$ . Además, considerando  $\mathcal{T}_5$ ,  $\mathcal{O}_{\uparrow C_3}$  tiene la relación  $H_4 > H_5 \in \mathcal{O}_{C_4}$ , y descarta  $H_5 > H_4 \in \mathcal{O}_{C_5}$ , resolviendo el conflicto.

En dominios de aplicación donde los elementos de credibilidad no cambian muy a menudo, vale la pena calcular la extensión  $\mathcal{O}_{\uparrow C_x}$  de cada contexto de la taxonomía. Mientras que el orden de credibilidad de un contexto  $C_x$  no cambia, y tampoco ninguno de sus ancestros, el mismo orden extendido  $\mathcal{O}_{\uparrow C_x}$  se puede usar a la hora de tomar decisiones.

Claramente, ante cualquier cambio, el orden de credibilidad extendido debe ser recalculado. Por lo tanto, esta alternativa podría no ser eficiente para dominios de aplicación en los que los elementos de credibilidad cambian con frecuencia (por ejemplo, aplicaciones basadas en redes sociales o sitios que recopilan las opiniones de los usuarios). En la siguiente sección, se formalizará una alternativa optimizada que es más adecuada para dichos dominios de aplicación.

### 5.2.2. Cómputo optimizado para ambientes dinámicos

En esta sección se propondrá una función que optimiza la función EXTENDING-ORDER-BY-ALL-ANCESTOR presentada en la Figura 5.9. Esta nueva función, dado un contexto  $C_x$ , en lugar de calcular un orden extendido de  $C_x$  usando todos sus ancestros considerando una taxonomía (lo que se correspondería con  $\mathcal{O}_{\uparrow C_x}$ ), calcula una extensión de manera incremental hasta que un conjunto de agentes sean todos comparables entre sí. Esta función, puede observarse a continuación en la Figura 5.12.

---

**Entrada:** taxonomía de contextos, base de credibilidad, identificador de contexto, conjunto de agentes.

**Salida:** orden de credibilidad sensato.

---

```

1: function EXTENDEDING-ORDER-BY-DEMAND( $\mathcal{T}, \mathcal{B}, C_x, \mathcal{A}$ )
2:    $\mathcal{O}_{\uparrow C_x} \leftarrow \mathcal{O}_{C_x}$ 
3:   while there exists a direct ancestor of  $C_x$  in  $\mathcal{T}$  and not COMPARABLE-IN( $\mathcal{A}, \mathcal{O}_{\uparrow C_x}$ ) do
4:      $C_y \leftarrow$  direct ancestor of  $C_x$  in  $\mathcal{T}$ 
5:      $\mathcal{O}_{\uparrow C_x} \leftarrow$  EXTENDING-ORDER( $\mathcal{O}_{\uparrow C_x}, \mathcal{O}_{C_y}$ )
6:      $C_x \leftarrow C_y$ 
7:   end while
8:   return  $\mathcal{O}_{\uparrow C_x}$ 
9: end function

```

Figura 5.12: Función que extiende un orden de credibilidad en contexto con los elementos de los órdenes de credibilidad de los contextos ancestros que sean necesarios hasta lograr que un conjunto de agentes sea comparable o no existan más ancestros a considerar.

La función propuesta considera cuatro elementos de entrada: una taxonomía  $\mathcal{T}$ , una base de credibilidad  $\mathcal{B}$ , un contexto  $C_x$  y un conjunto de agentes  $\mathcal{A}$ . Primero se considera la información almacenada en la base de credibilidad para el contexto  $C_x$  y luego, solo si

es necesario, se considera la información de otros contextos que son ancestros de  $C_x$  en  $\mathcal{T}$ . En este escenario pueden darse dos situaciones generales. Por un lado, podría darse el caso de que la base de credibilidad del agente tenga suficiente información en el contexto  $C_x$  que relacione a todos los agentes en  $\mathcal{A}$  y, por tanto, retorne  $\mathcal{O}_{C_x}$ . Por otro lado, si no hay información que relacione a todos esos agentes en  $\mathcal{O}_{C_x}$ , entonces se utilizará la taxonomía  $\mathcal{T}$  para explorar, primero la información de los ancestros directos de  $C_x$ , y luego, solo si es necesario, la información de otros contextos ancestros.

Observe que la función de la Figura 5.12 retorna un orden de credibilidad (notado como  $\mathcal{O}_{\uparrow C_x}$ ) y calcula las extensiones de forma similar a la función de la Figura 5.9. Sin embargo, a diferencia de esta última, las iteraciones terminan una vez que los agentes en  $\mathcal{A}$  son todos comparables, o no hay más ancestros de  $C_x$  en  $\mathcal{T}$  para considerar. Por lo tanto, si todos los agentes en  $\mathcal{A}$  son comparables en el contexto dado  $C_x$ , no hay necesidad de calcular ninguna extensión. También tenga en cuenta que, en el peor de los casos, la función devuelve  $\mathcal{O}_{\uparrow C_x}$ .

Considere nuevamente el Ejemplo 5.4 y el orden extendido  $\mathcal{O}_{\uparrow C_3}$  obtenido en la Sección 5.2.1 a través de la función de la Figura 5.9. Como se mencionó anteriormente,  $\mathcal{O}_{\uparrow C_3}$  resulta de realizar dos extensiones,  $\mathcal{O}_{C_3}$  con respecto a  $\mathcal{O}_{C_4}$  obteniendo  $\mathcal{O}_{(C_3 * C_4)}$ , y  $\mathcal{O}_{(C_3 * C_4)}$  con respecto a  $\mathcal{O}_{C_5}$  resultando en  $\mathcal{O}_{\uparrow C_3}$ . Tenga en cuenta que, ante cualquier cambio,  $\mathcal{O}_{\uparrow C_3}$  debe volver a calcularse. Entonces, en escenarios donde hay cambios frecuentes, no se recomienda esta alternativa.

Suponga que se requiere la comparación entre  $H_5$  y  $H_7$  en el contexto  $C_3$ . Entonces, es posible utilizar la función de la Figura 5.12, con  $\mathcal{A} = \{H_5, H_7\}$ . Primero, la función verifica si todos los hoteles de  $\mathcal{A}$  son comparables en  $\mathcal{O}_{C_3}$ ; como los hoteles no son comparables, se realiza una extensión de  $\mathcal{O}_{C_3}$  con respecto a  $\mathcal{O}_{C_4}$  ( $\mathcal{O}_{(C_3 * C_4)}$ ). Luego, siguiendo el cálculo detallado en la Sección 5.9,  $\mathcal{O}_{(C_3 * C_4)} = \{H_6 > H_2, H_2 > H_4, H_3 > H_4, H_4 > H_5, H_5 > H_7, H_2 > H_3\}$ . Dado que  $H_5$  y  $H_7$  son comparables en  $\mathcal{O}_{(C_3 * C_4)}$ , este orden se devuelve como resultado del proceso de extensión, es decir,  $\mathcal{O}_{\uparrow C_3} = \mathcal{O}_{(C_3 * C_4)}$ . Por lo tanto, para comparar  $H_5$  y  $H_7$  este resultado requiere menos cálculo que  $\mathcal{O}_{\uparrow C_3}$ . Tenga en cuenta también que, si se requiere la comparación entre  $H_5$  y  $H_8$  ( $\mathcal{A} = \{H_5, H_8\}$ ), dado que estos hoteles no son comparables en  $\mathcal{O}_{(C_3 * C_4)}$ , la función de la Figura 5.12, así como la función de la Figura 5.9, debe realizar una segunda extensión de  $\mathcal{O}_{(C_3 * C_4)}$  con respecto a  $\mathcal{O}_{C_5}$ , de forma que  $\mathcal{O}_{\uparrow C_3} = \mathcal{O}_{\uparrow C_3}$ .

### 5.3. Aplicación del modelo multi-contexto en un escenario real

Anteriormente, se presentaron tanto un modelo que permite representar la confianza entre agentes de forma simbólica y contextualizada, como funciones que, haciendo uso del operador de revisión múltiple priorizada presentado en el Capítulo 3, permiten extender un orden de credibilidad de un determinado contexto con información que proviene de otros órdenes de credibilidad de contextos relacionados.

En esta sección, se presentará un ejemplo de aplicación completo donde se describirá cómo podría instanciarse el modelo multi-contexto, y también cómo se podrían utilizar las funciones para extender órdenes de credibilidad de una forma conveniente. En este ejemplo de aplicación, quedará mostrado a partir de un escenario real, cómo lo propuesto durante este capítulo podría ser utilizado por sistemas que recomiendan artículos o servicios tales como [eBa, Ama, OnS, Goo, Tri, Boo].

Una alternativa de uso refiere a la integración de la información que se encuentra asociada a diferentes tópicos, considerando algún criterio de preferencia entre los tópicos que intervienen. Para esto, en primer lugar, el sistema debe consultar a los usuarios sus preferencias respecto de diferentes tópicos para generar una taxonomía. Por ejemplo, en un sistema que se utiliza para reservar hoteles, un usuario podría indicar que el tópico *Limpieza* le resulta preferible por sobre el tópico *Servicio* que, a su vez, le resulta preferible por sobre el tópico *Precio*. Luego, haciendo uso de una taxonomía que modela estas preferencias entre los tópicos, el sistema podría integrar la información de confianza que tiene respecto de los diferentes hoteles en cada uno de estos tópicos y, haciendo uso de las funciones para extender órdenes de credibilidad, podría computar un *ranking* entre todos los hoteles que tenga calificados en los diferentes tópicos.

Otra alternativa en la que podría utilizarse lo propuesto en este capítulo corresponde con escenarios donde se busca integrar información que proviene de diferentes sitios web. Frecuentemente sucede que los sitios web cuentan con diferentes formatos de calificación para los artículos o servicios. De esta forma, cuando un usuario desea integrar dicha información, se encuentra ante una tarea que no le resulta trivial. El formalismo propuesto puede utilizarse de forma conveniente para resolver esta situación. Para esto, se podría considerar algún orden de preferencia entre los diferentes sitios web, que puede establecerse considerando diferentes criterios, por ejemplo, cantidad de usuarios. Luego, la integración

de la información que proviene de cada uno de los sitios web se podría realizar a partir de la revisión de diferentes órdenes de credibilidad que se podrían crear con la información de cada uno de ellos, asignándole prioridad a los órdenes que provengan de los sitios preferidos.

Teniendo en cuenta lo anterior, en lo que sigue se presentará un ejemplo de aplicación específico que permite observar cómo resolver los dos escenarios indicados.

### 5.3.1. Ejemplo de aplicación

Considere tres sitios web  $W_1$ ,  $W_2$  y  $W_3$  que brindan información sobre hoteles según las opiniones de los usuarios en diferentes tópicos. Los tres sitios web tienen diferentes formatos para sus evaluaciones: el formato usado por  $W_1$  es una escala de estrellas (una estrella significa un hotel *muy malo* y cinco estrellas significa un hotel *muy bueno*), mientras que  $W_2$  y  $W_3$  usan una escala numérica para evaluar cada hotel,  $W_2$  del 1 al 10, y  $W_3$  del 1 al 100. Las siguientes tablas muestran el *ranking* de hoteles propuesto por cada sitio web en los tópicos *Limpieza*, *Precio* y *Servicios*. Si bien lo propuesto se puede aplicar a un conjunto de una gran cantidad de hoteles, por simplicidad en la presentación de este ejemplo, se considerará solo la información recopilada de seis hoteles:  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $H_4$ ,  $H_5$  y  $H_6$ .

	$W_1$				$W_2$				$W_3$		
	<i>Lim</i>	<i>Ser</i>	<i>Pre</i>		<i>Lim</i>	<i>Ser</i>	<i>Pre</i>		<i>Lim</i>	<i>Ser</i>	<i>Pre</i>
$H_1$	★★★★	-	★★★★★	$H_1$	-	4	9	$H_1$	65	3	80
$H_2$	★★★★	★★	★★★★	$H_2$	6	-	7	$H_2$	10	8	80
$H_3$	★★	★★★	★	$H_3$	3	7	3	$H_3$	-	8	40
$H_4$	★	★★	★★	$H_4$	6	7	7	$H_4$	65	3	65
$H_5$	★★	★★★★	★	$H_5$	8	-	3	$H_5$	80	6	20
$H_6$	-	★★★★	★★★★	$H_6$	8	9	9	$H_6$	65	-	85

Debido a los diferentes formatos que tiene cada sitio, para algunos modelos de reputación y confianza podría resultar difícil fusionar toda la información para estimar los valores de confianza para cada hotel en un tópico en particular. A continuación, se mostrará cómo lo propuesto en esta tesis puede ser utilizado para realizar tal tarea. Es decir, cómo recopilar y fusionar información de fuentes que pueden tener distintos formatos, para obtener un *ranking* por cada uno de los tópicos y, además, un *ranking* final que integre la información previamente obtenida para cada uno de los tópicos. Esta descripción se

realizará en dos etapas: primero, considerando cada sitio web como un contexto y definiendo una taxonomía que modele la relación de preferencia entre sitios web, se generará una *ranking* de hoteles para cada tópico (*e.g.*, *ranking* para el tópico *Limpieza*), haciendo uso de toda la información disponible sobre este tópico de todos los sitios web (vea la Sección 5.3.2); luego, a partir de una base de credibilidad final que mantiene los *rankings* de cada uno de tópicos obtenidos anteriormente, considerando cada tópico como un contexto (*e.g.*, *Limpieza*) y definiendo una taxonomía de contextos que establezca una relación de preferencia entre tópicos, se mostrará cómo integrar toda la información de cada uno de estos tópicos en un único *ranking* final que clasifica a todos los hoteles considerados (vea la Sección 5.3.3).

### 5.3.2. Integrando diferentes *rankings* para un tópico específico

Para combinar la información de diferentes sitios web para uno de los tópicos (*e.g.*, *Limpieza*), primero se debe crear un orden de credibilidad para cada página web en ese tópico. Cada orden representará la información disponible en cada página web, pero usando el enfoque propuesto en esta tesis donde la confianza se representa de forma simbólica.

Considerando la información de las tablas anteriores respecto del tópico *Limpieza*, los siguientes órdenes de credibilidad pueden ser inferidos:  $\mathcal{O}_{W_1} = \{H_1 > H_3, H_1 > H_4, H_1 > H_5, H_2 > H_3, H_2 > H_4, H_2 > H_5, H_3 > H_4, H_5 > H_4\}$ ,  $\mathcal{O}_{W_2} = \{H_2 > H_3, H_4 > H_3, H_5 > H_2, H_5 > H_3, H_5 > H_4, H_6 > H_2, H_6 > H_3, H_6 > H_4\}$  y  $\mathcal{O}_{W_3} = \{H_1 > H_2, H_4 > H_2, H_5 > H_1, H_5 > H_2, H_5 > H_4, H_5 > H_6, H_6 > H_2\}$ . Tenga en cuenta que cada orden de credibilidad representa la misma información que se clasificó originalmente en cada sitio web. Por ejemplo,  $\mathcal{O}_{W_1}$  representa la información en el tópico *Limpieza* de  $W_1$ , en la que se utiliza una escala de estrellas.

Dado que las clasificaciones de los sitios web se crean a partir de los comentarios de los usuarios, podría existir información contradictoria entre los sitios. Los sitios  $W_1$  y  $W_2$ , por ejemplo, tienen información contradictoria:  $H_2 > H_5 \in \mathcal{O}_{W_1}$  y  $H_5 > H_2 \in \mathcal{O}_{W_2}$ . Para decidir qué información prevalece, se puede utilizar un orden de preferencia entre los sitios web. En el ejemplo desarrollado en esta sección, se utilizará como criterio de comparación la cantidad usuarios de cada sitio web. De esta forma, se preferirán los sitios web que

tengan mayor cantidad de usuarios, considerando que, a mayor cantidad de usuarios, mayor cantidad de calificaciones y comentarios para generar los valores de reputación.

Considere por ejemplo que  $W_1$  tiene más usuarios que  $W_2$ , y que  $W_2$  tiene más usuarios que  $W_3$ . Luego,  $W_1$  debería tener prioridad sobre  $W_2$  y  $W_2$  sobre  $W_3$ . Tenga en cuenta que cada orden de credibilidad  $\mathcal{O}_{W_i}$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) representa todas las clasificaciones de los hoteles que se han obtenido considerando la información del sitio web  $W_i$ . Luego, las preferencias entre los diferentes sitios web se representará con la taxonomía  $\mathcal{T}_{W_{\text{webs}}} = \{(W_1, W_2), (W_2, W_3)\}$ , y la base de credibilidad auxiliar  $\mathcal{B}_{Aux}$  será creada a partir de  $\mathcal{O}_{W_1}$ ,  $\mathcal{O}_{W_2}$  y  $\mathcal{O}_{W_3}$ :  $\mathcal{B}_{Aux} = \{[H_1 > H_3, W_1], [H_1 > H_4, W_1], [H_1 > H_5, W_1], [H_2 > H_3, W_1], [H_2 > H_4, W_1], [H_2 > H_5, W_1], [H_3 > H_4, W_1], [H_5 > H_4, W_1], [H_2 > H_3, W_2], [H_4 > H_3, W_2], [H_5 > H_2, W_2], [H_5 > H_3, W_2], [H_5 > H_4, W_2], [H_6 > H_2, W_2], [H_6 > H_3, W_2], [H_6 > H_4, W_2], [H_1 > H_2, W_3], [H_4 > H_2, W_3], [H_5 > H_1, W_3], [H_5 > H_2, W_3], [H_5 > H_4, W_3], [H_5 > H_6, W_3], [H_6 > H_2, W_3]\}$ .

Recuerde que en este ejemplo,  $W_1$  es el sitio web preferido. Luego, a partir de  $\mathcal{T}_{W_{\text{webs}}}$  y  $\mathcal{B}_{Aux}$ , es posible computar el orden de credibilidad extendido por compilación  $\mathcal{O}_{\uparrow W_1}$  (función de la Figura 5.9 haciendo uso, por ejemplo, de la función de selección *Least Credible Selection Function*), obteniendo así que  $\mathcal{O}_{\uparrow W_1} = \{H_1 > H_3, H_1 > H_4, H_1 > H_5, H_2 > H_3, H_2 > H_4, H_2 > H_5, H_3 > H_4, H_5 > H_4, H_5 > H_3, H_6 > H_2, H_6 > H_3, H_6 > H_4, H_1 > H_2\}$ .

El conjunto  $\mathcal{O}_{\uparrow W_1}$  representa el orden de credibilidad de los hoteles con respecto al tópico *Limpieza*. Observe que,  $\mathcal{O}_{\uparrow W_1}$  integra la información de los tres sitios web considerados. Por lo tanto, el orden de credibilidad respecto del tópico *Limpieza* que considera la información disponible en los tres sitios web de forma integrada se corresponde con  $\mathcal{O}_{Lim} = \mathcal{O}_{\uparrow W_1}$ . Esta misma operatoria se puede aplicar, luego, para cada uno de los tópicos considerados en este ejemplo. De esta forma, se podrían obtener los órdenes de credibilidad asociados a los tópicos *Servicios* y *Precio* como  $\mathcal{O}_{Ser}$  y  $\mathcal{O}_{Pre}$  respectivamente.

### 5.3.3. Integrando diferentes *rankings* de varios tópicos

Asuma que los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_{Lim}$ ,  $\mathcal{O}_{Ser}$  y  $\mathcal{O}_{Pre}$  se calculan como se explicó anteriormente en la Sección 5.3.2, considerando los tres tópicos del ejemplo de aplicación desarrollado. Con estos tres órdenes, se puede obtener una base de credibilidad  $\mathcal{B}_{Hoteles}$  considerando toda la información de  $\mathcal{O}_{Lim}$ ,  $\mathcal{O}_{Ser}$  y  $\mathcal{O}_{Pre}$ . Luego,  $\mathcal{B}_{Hoteles} = \{$

$[H_1 > H_3, Lim]$ ,  $[H_1 > H_4, Lim]$ ,  $[H_1 > H_5, Lim]$ ,  $[H_2 > H_3, Lim]$ ,  $[H_2 > H_4, Lim]$ ,  
 $[H_2 > H_5, Lim]$ ,  $[H_3 > H_4, Lim]$ ,  $[H_5 > H_4, Lim]$ ,  $[H_5 > H_3, Lim]$ ,  $[H_6 > H_2, Lim]$ ,  
 $[H_6 > H_3, Lim]$ ,  $[H_6 > H_4, Lim]$ ,  $[H_1 > H_2, Lim]$ ,  $[H_3 > H_2, Ser]$ ,  $[H_3 > H_4, Ser]$ ,  
 $[H_5 > H_2, Ser]$ ,  $[H_5 > H_3, Ser]$ ,  $[H_5 > H_4, Ser]$ ,  $[H_6 > H_2, Ser]$ ,  $[H_6 > H_3, Ser]$ ,  
 $[H_6 > H_4, Ser]$ ,  $[H_3 > H_1, Ser]$ ,  $[H_4 > H_1, Ser]$ ,  $[H_6 > H_1, Ser]$ ,  $[H_2 > H_1, Ser]$ ,  
 $[H_2 > H_4, Ser]$ ,  $[H_5 > H_1, Ser]$ ,  $[H_1 > H_2, Pri]$ ,  $[H_1 > H_3, Pre]$ ,  $[H_1 > H_4, Pre]$ ,  
 $[H_1 > H_5, Pre]$ ,  $[H_1 > H_6, Pre]$ ,  $[H_2 > H_3, Pre]$ ,  $[H_2 > H_4, Pre]$ ,  $[H_2 > H_5, Pre]$ ,  
 $[H_4 > H_3, Pre]$ ,  $[H_4 > H_5, Pre]$ ,  $[H_6 > H_3, Pre]$ ,  $[H_6 > H_4, Pre]$ ,  $[H_6 > H_5, Pre]$ ,  
 $[H_2 > H_5, Pre]$ ,  $[H_6 > H_2, Pre]$ ,  $[H_3 > H_5, Pre]$  }.

A partir de la base de credibilidad creada, también se puede especificar una nueva taxonomía que, en este caso, relaciona los tres tópicos que se consideraron para modelar el grado de confianza entre los diferentes hoteles. Por ejemplo,  $\mathcal{T}_{Hoteles} = \{(Lim, Ser), (Ser, Pre)\}$  representa la relación de preferencia que sigue el ejemplo propuesto. De esta forma, el tópico *Limpieza* es preferido por sobre el tópico *Servicios*, y el tópico *Servicios* es preferido sobre el tópico *Precio*.

Considerando estas relaciones, se puede utilizar nuevamente la función que computa la extensión de un orden de credibilidad en contexto, para obtener un nuevo *ranking* entre hoteles, ahora ya no solo considerando la información de los tres diferentes sitios web que tienen diferentes formatos para calificar los hoteles, sino considerando también el nivel de preferencia que tiene el usuario por sobre los tres diferentes tópicos relacionados. De esta forma,  $\mathcal{O}_{\uparrow Lim}$  puede computarse para obtener el *ranking* final a partir del cual, el usuario puede tomar mejores decisiones.

### 5.3.4. Conclusiones

A partir de la base de credibilidad  $\mathcal{B}_{Hoteles}$  y la taxonomía  $\mathcal{T}_{Hoteles}$  obtenida previamente, es posible computar entonces el orden de credibilidad extendido por compilación de  $\mathcal{O}_{\uparrow Lim}$  mediante la función de la Figura 5.9. Note que  $\mathcal{O}_{\uparrow Lim}$  es un orden de credibilidad que clasifica todos los hoteles considerados por los tres sitios web e integra toda la información disponible. Todas las contradicciones que surgen al integrar toda esta información se resuelven considerando primero las preferencias entre los sitios en la primera etapa (usando  $\mathcal{T}_{Sites}$ , como se mostró en la Sección 5.3.2), y luego las preferencias entre los diferentes tópicos (usando  $\mathcal{T}_{Hotels}$ , como se mostró en la Sección 5.3.3).

Observe que, cuando la información se obtiene de diferentes fuentes (como sucede en el ejemplo previo) para dar prioridad a las preferencias del usuario se debe utilizar la metodología propuesta en las Secciones 5.3.2 y 5.3.3 en ese orden específico. Es decir, primero calcular los órdenes de credibilidad para cada tópico como se explica en la Sección 5.3.2, y luego proceder en la construcción de la base de credibilidad y la extensión del orden de credibilidad a partir del contexto que sea adecuado como se explica en la Sección 5.3.3. Si se invierte el orden de estas dos etapas, el resultado no seguirá las preferencias del usuario, como se puede observar en el siguiente ejemplo.

Considere dos sitios web, de forma tal que  $W_4$  mantiene información que indica que  $[H_7 > H_8, Lim]$  y  $W_5$  mantiene información que indica que  $[H_8 > H_7, Ser]$ . Además, considere que el usuario prefiere el tópico *Limpieza* sobre el tópico *Servicios*. Ahora suponga que  $W_5$  es el sitio web preferido. Siguiendo los pasos propuestos anteriormente, el resultado será  $H_7 > H_8$  y el mejor hotel será  $H_7$ , que de hecho, es el hotel preferido en el tópico *Limpieza*. Sin embargo, si se invierten los pasos (es decir, primero extender  $\mathcal{O}_{Lim}$  con  $\mathcal{O}_{Ser}$  con la información de  $W_5$ , luego extender  $\mathcal{O}_{Lim}$  con  $\mathcal{O}_{Ser}$  con la información de  $W_4$ , y finalmente extender  $\mathcal{O}_{W_5}$  con  $\mathcal{O}_{W_4}$ ), dado que  $W_5$  es preferido entonces el resultado será  $H_8 > H_7$ , y el mejor hotel será  $H_8$  que no es el indicado por el tópico preferido *Limpieza*.

## 5.4. Resumen

En este capítulo se propuso un modelo de representación para la confianza en el cual se considera la multicontextualidad de la información. Este modelo está basado en aquel que fue sugerido en el Capítulo 3, donde la información que un agente tiene acerca de la confianza de otros agentes está representada de manera simbólica a través de relaciones entre pares. Para llevar a cabo esta idea, se propuso asociar el contexto a cada elemento de credibilidad.

Luego, considerando la noción de contexto asociado a cada elemento de credibilidad, se mostró cómo mediante una taxonomía de contextos, estos contextos pueden relacionarse representando relaciones de especialización/generalización o preferencia. Estas relaciones persiguen un objetivo concreto y que puede explicarse con simplicidad: que los órdenes de credibilidad puedan compartir información.

De esta forma, habiendo especificado la taxonomía de contextos, se presentaron dos funciones que permiten extender un orden de credibilidad en contexto, con información que proviene de otros contextos relacionados según esta taxonomía. En particular, se describieron dos funciones que, computan las extensiones frente a dos escenarios diferentes. Una de ellas es conveniente en escenarios donde los cambios en la información de los órdenes de credibilidad y/o en las relaciones de la taxonomía no suceden con frecuencia. La otra, se enfoca en una optimización de la anterior, para el uso en escenarios donde los valores de confianza o las relaciones en la taxonomía de contextos se modifican con frecuencia.

Finalmente, y considerando todo lo anterior, se presentó un ejemplo de aplicación completo. En este ejemplo no solo se mostró cómo podría instanciarse el modelo multi-contexto a partir de información de sitios web específicos, sino que también se demostró cómo el modelo permite utilizar información de reputación que se representa con diferentes formatos y escalas. A partir de este ejemplo, quedó claro que el modelo propuesto es fácilmente instanciable, y que las funciones propuestas son de utilidad para integrar toda la información disponible de una manera adecuada, según los criterios y preferencias frecuentes de los usuarios de estas aplicaciones.



# Capítulo 6

## Cambio múltiple no priorizado sobre órdenes de credibilidad

Como se indicó en el Capítulo 1, existen muchas situaciones en las que es conveniente o necesario integrar la información de dos órdenes de credibilidad en un nuevo orden de credibilidad sensato. Sin embargo, la mera unión de dos órdenes sensatos puede dar como resultado un orden de credibilidad no sensato. En esos escenarios, es necesario tomar medidas para resolver los conflictos existentes entre la información integrada, asegurando, de esta forma, que el orden resultante sea sensato.

En el Capítulo 3, se formalizó una alternativa que permite integrar la información de dos órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  de forma consistente. Esta alternativa, que se corresponde con un operador de revisión múltiple priorizada  $\mathcal{O}_1 *_{\mu} \mathcal{O}_2$ , plantea resolver las situaciones conflictivas, es decir, los ciclos que podrían surgir en el grafo asociado a la unión de los dos órdenes de credibilidad, otorgándole prioridad a todos los elementos que forman parte de  $\mathcal{O}_2$ . De esta manera, si algunos elementos deben ser eliminados de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  para que el resultado sea sensato, estos se corresponden con los elementos que provienen únicamente de  $\mathcal{O}_1$ .

Como se mostrará en este capítulo, también es posible definir una operación de cambio múltiple que, dado dos órdenes de credibilidad sensatos  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ , integre la información de ambos en un nuevo orden de credibilidad sensato  $\mathcal{O}_3$ , pero donde los potenciales conflictos de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  se resuelvan sin establecer prioridad por sobre ninguno de los elementos, ya sean de  $\mathcal{O}_1$  o de  $\mathcal{O}_2$ .

Considerando que el objetivo de esta tesis es abordar la dinámica de la confianza integrando la información de dos órdenes de credibilidad, en este capítulo se formalizará un nuevo operador de revisión múltiple que, en este caso, operará de manera no priorizada. Este operador permitirá integrar la información en escenarios donde no existe un criterio establecido de prioridad o preferencia por sobre la información de alguno de los órdenes de credibilidad intervinientes en el proceso de cambio. Para esto, el operador resolverá los potenciales conflictos eliminando lo necesario de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , sin prestar atención al origen de los elementos que se seleccionen para eliminar.

En primer lugar, en la Sección 6.1, se formalizarán los postulados que caracterizan el comportamiento esperado del operador, y se propondrá tanto la construcción del operador como el teorema de representación que asocia la construcción y los postulados. En la Sección 6.2 se describirán un conjunto de funciones que permiten implementar el operador propuesto. En la Sección 6.3 se mostrará formalmente que estas funciones se corresponden con un operador de cambio múltiple no priorizado. Finalmente, dado que la implementación del operador requiere de la definición de una función de incisión que indique con qué criterio deben resolverse las inconsistencias, en la Sección 6.4 se retomarán y analizarán las tres funciones de selección que fueron previamente introducidas en el Capítulo 3, mostrando cómo dos de estas pueden operar sin cambios en este proceso de cambio no priorizado, y presentando una adaptación de la restante para que pueda operar de forma consistente en este nuevo escenario.

## 6.1. Cambio múltiple no priorizado mediante mezcla

Anteriormente, se han presentado diferentes situaciones que muestran la utilidad de integrar la información de dos órdenes de credibilidad mediante un operador de revisión múltiple priorizada. Por ejemplo, en el Capítulo 5, se presentó un ejemplo de aplicación completo que muestra cómo el operador de revisión múltiple priorizada puede ser utilizado para trabajar con información que proviene de sistemas que recomiendan artículos o servicios tales como [eBa, Ama, OnS, Goo, Tri, Boo]. En ese ejemplo de aplicación, se describieron alternativas para crear *rankings* individuales entre hoteles considerando las calificaciones que diferentes sitios web mantienen para diferentes tópicos, así como, a partir de estos *rankings* de hoteles en diferentes tópicos, un usuario podría generar un *ranking* final que integra las calificaciones de los hoteles en cada uno de los tópicos considerados.

En todos los escenarios de ejemplificación utilizados, siempre se mostró cómo las relaciones de preferencia o de especialización entre la información disponible pueden motivar la prioridad que se le asigna a un orden de credibilidad por sobre otro. Por ejemplo, en la Sección 5.3.2 se consideró una relación de preferencia que consideraba la cantidad de usuarios de los sitios web, para integrar la información de tres sitios web y generar un *ranking* entre hoteles en función de los tópicos *Limpieza*, *Precio* y *Servicios*. De forma equivalente, en la Sección 5.3.3 se mostró cómo un usuario podría establecer una relación de preferencia sobre los tópicos *Limpieza*, *Precio* y *Servicios* y, de esta forma, integrar la información de cada uno de los órdenes de credibilidad asociados a estos tópicos otorgándole prioridad a aquellos que eran preferidos.

En otros ejemplos previos, también se mostró cómo fijar prioridad sobre la información de órdenes de credibilidad más específicos que por sobre aquellos que modelaban información más general. En el escenario presentado en la Sección 3.2, donde *Robin* debe decidir si comprar o no un teléfono, se prioriza la información que proviene del tópico *Teléfonos Inteligentes* por sobre la que proviene del tópico *Dispositivos Electrónicos* ya que, esta información que se prioriza, es más específica que la otra.

Aunque todos estos ejemplos muestran diferentes escenarios donde el uso del operador de revisión múltiple priorizada es adecuado, también existen escenarios donde es necesario integrar información para lo que no existe un criterio de preferencia definido entre la información y, en consecuencia, un operador de revisión múltiple no priorizada es necesario. Por ejemplo, en un sentido similar al ejemplo de aplicación completo descrito en el Capítulo 5, considere que un usuario de una aplicación que valora restaurantes obtiene tres órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_{Pas}$ ,  $\mathcal{O}_{Car}$  y  $\mathcal{O}_{Piz}$  asociados a los tópicos *Pastas*, *Carnes asadas* y *Pizzas*. Asuma en este caso que el usuario no tiene ninguna preferencia por ninguno de los tipos de comidas considerados, de hecho, sin conocer la carta no tiene aún decidido qué comerá. Luego, ante esta situación, el usuario desea obtener un *ranking* que integre toda la información disponible de manera imparcial, con el objetivo de obtener un orden de credibilidad resultante donde la mayor cantidad de restaurantes posibles se encuentren comparados. En este escenario, es claro que no sería adecuado otorgarle prioridad a ninguno de los órdenes dado que, por lo contrario, la integración sería sesgada. De hecho, lo adecuado sería que la integración se realice justamente mediante un operador no priorizado. Note que, este escenario podría replicarse en muchas otras situaciones, donde los usuario no pueden o no quieren establecer una relación de orden de prioridad entre

diferentes fuentes o tópicos desde donde se obtiene información.

En lo que sigue del capítulo, se formalizará un operador de revisión múltiple no priorizada. Este operador, como es usual en el área de revisión de creencias, se notará como operador de mezcla. Para guiar las explicaciones, considere el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6.1.** *Considere los órdenes de credibilidad sensatos  $\mathcal{O}_1 = \{A_2 > A_5, A_3 > A_5, A_1 > A_3\}$  y  $\mathcal{O}_2 = \{A_5 > A_2, A_1 > A_3, A_5 > A_1, A_6 > A_4\}$ . Los grafos asociados a estos órdenes se pueden observar en las Figuras 6.1(a) y 6.1(b). Asuma que desea realizar la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ , esto es, se tiene que integrar la información de estos órdenes, pero tratando la misma sin distinción o prioridad. Luego, si  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  fuese sensato, el resultado de la mezcla sería justamente la unión de ambos órdenes. Sin embargo, note que la unión de ambos órdenes, como se muestra en la Figura 6.1(c), no es sensata. Ante esta situación, se requiere que el proceso de cambio múltiple no priorizado resuelva qué elementos de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  no formarán parte del orden resultante de la mezcla. Los grafos asociados a todos los resultados posibles de la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  se pueden observar en la Figura 6.2. En cada uno de estos resultados, se observa que algún elemento de cada uno de los ciclos de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  han sido descartados. Note que, en todos los casos, los elementos eliminados pueden provenir de  $\mathcal{O}_1$ , de  $\mathcal{O}_2$ , o de ambos, indistintamente.*

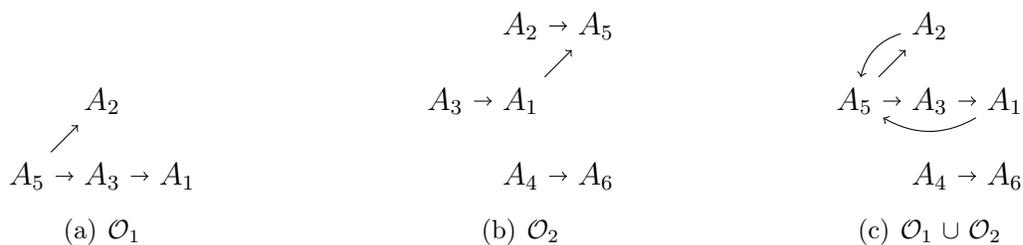


Figura 6.1: (a)-(c) muestran los grafos asociados a  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , del Ejemplo 6.1.

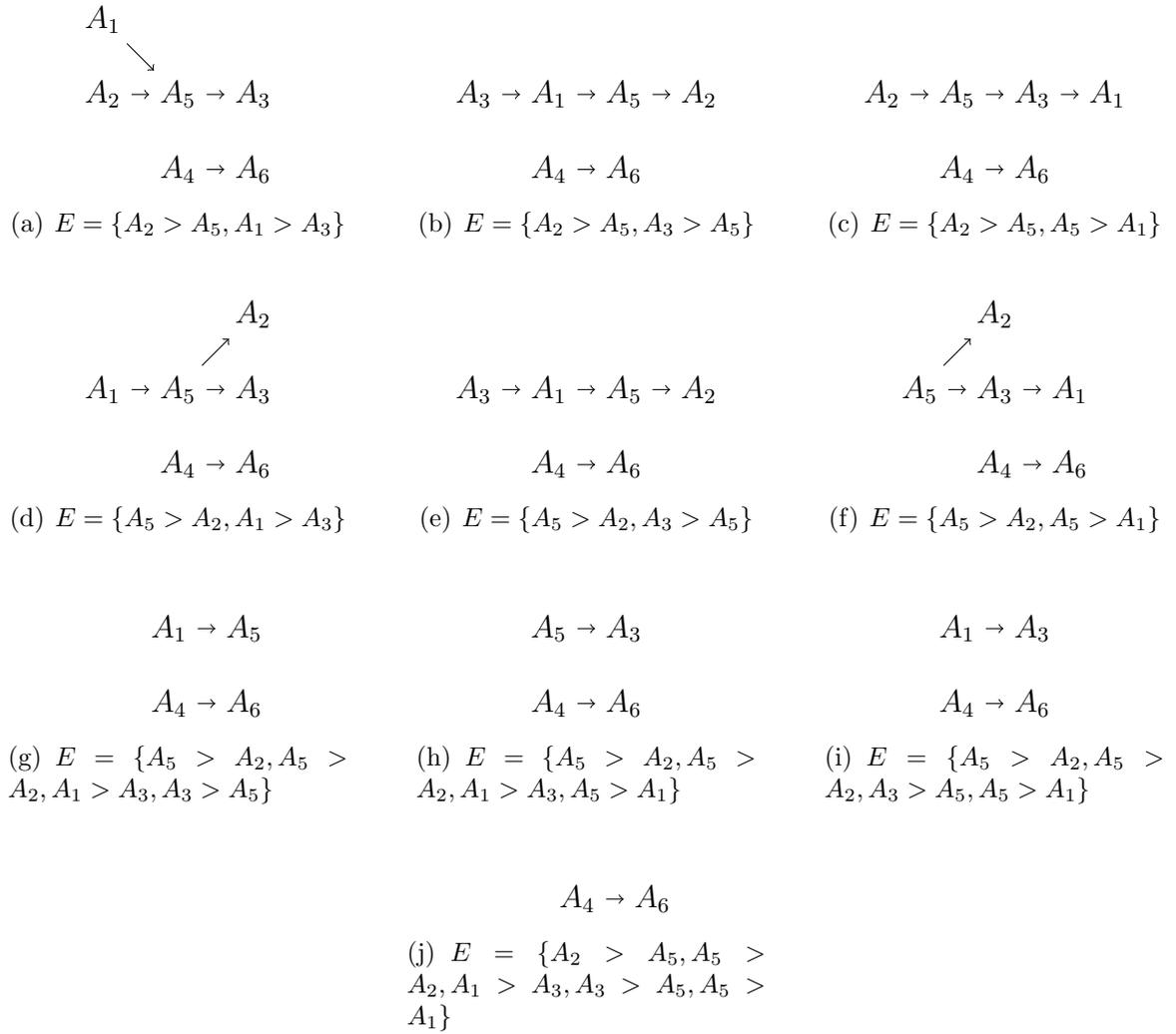


Figura 6.2: (a)-(j) muestran los grafos asociados a todos los resultados posibles a partir de la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  del Ejemplo 6.1, esto es, la representación de  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus E$ , donde  $E$  es el conjunto de elementos de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  que son excluidos de la mezcla para asegurar que el orden resultante sea sensato. (a)-(f) corresponden con los grafos que eliminan un elemento de cada ciclo en  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ ; (g)-(i) con los que eliminan dos elementos de cada ciclo en  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ ; mientras que (j) corresponde con el grafo que elimina todos los elementos que forman parte de un ciclo en  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ .

En lo que sigue, se describirá un conjunto de postulados para un operador de cambio múltiple no priorizado que permite la mezcla de dos órdenes de credibilidad sensatos  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ . El resultado será un orden de credibilidad sensato. La mezcla propuesta no le asigna prioridad a ningún elemento de los órdenes de credibilidad intervinientes por lo que, ante conflictos, se podrán eliminar elementos de  $\mathcal{O}_1$ , de  $\mathcal{O}_2$  o de ambos.

### 6.1.1. Postulados para mezcla

En esta sección, se presentarán los postulados que indican cómo debe comportarse el operador de mezcla aplicado a órdenes de credibilidad. Estos postulados son una adaptación de aquellos presentados en [FKIRS12] donde describen un operador de mezcla sobre bases de creencias representadas en un lenguaje proposicional.

Sean  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_3$  y  $\mathcal{O}_4$  cuatro órdenes de credibilidad sensatos y ‘ $\circ$ ’ un operador de mezcla que toma dos órdenes de credibilidad sensatos como entradas. Considerando que  $\mathcal{O}_1$  es mezclado con  $\mathcal{O}_2$  (*i.e.*,  $\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2$ ), entonces se proponen los siguientes postulados para operaciones de mezcla en órdenes de credibilidad:

**P1 - Inclusión:**  $\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$

Este postulado establece que cualquier mezcla entre dos órdenes de credibilidad sensatos arbitrarios se incluye en la unión de estos órdenes, es decir, además de los elementos de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  no se agregará ningún otro elemento de credibilidad al mezclar  $\mathcal{O}_1$  con  $\mathcal{O}_2$ .

**P2 - Sensatez:**  $\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2$  es sensato.

Este postulado garantiza que se conserva la sensatez en el orden de credibilidad resultante de la mezcla.

**P3 - Reversión:** Si  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4$  tienen el mismo conjunto de subconjuntos minimales inconsistentes, entonces  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2 = (\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4) \setminus \mathcal{O}_3 \circ \mathcal{O}_4$ .

Este postulado establece que si dos pares de órdenes de credibilidad contienen los mismos subconjuntos minimales inconsistentes, los elementos de credibilidad eliminados en las respectivas mezclas son los mismos.

**P4 - Retención de núcleo global:** Si  $e \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus (\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2)$  entonces existe un conjunto  $\mathcal{Y} \subseteq (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$ , tal que  $\mathcal{Y}$  es sensato pero  $\mathcal{Y} \cup \{e\}$  no es sensato.

Este postulado establece que nada se elimina de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  a menos que su eliminación contribuya a que el resultado sea un orden de credibilidad sensato.

Estos postulados caracterizan el comportamiento esperado del operador de mezcla. Por un lado, *Inclusión* y *Sensatez* establecen que la mezcla debe resultar en un orden de credibilidad sensato, e indica que nada fuera de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  estará en el resultado. Por otro lado, *Reversión* y *Retención de Núcleo Global* caracterizan los elementos que no formarán parte del resultado de la mezcla.

Teniendo en cuenta el comportamiento esperado para todo operador de mezcla de órdenes de credibilidad, en la siguiente sección se desarrollará su correspondiente construcción.

### 6.1.2. Construcción de un operador de mezcla

Inspirados en las ideas presentadas en [FKIRS12] para mezclar una base de sentencias y un conjunto de sentencias, en lo que sigue se definirá un operador de mezcla de tipo *kernel* para órdenes de credibilidad. Para esto, se presentará una construcción completa del operador y un teorema de representación que relaciona la construcción con los postulados propuestos en la Sección 6.1.1.

Tal como sucedió en la construcción del operador de revisión múltiple priorizada, nuevamente deberán abordarse dos cuestiones. En primer lugar, el proceso de mezcla deberá determinar qué elementos de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  están en conflicto. Los elementos en conflicto de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  son aquellos que se corresponden con algún ciclo en el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . En segundo lugar, el proceso de mezcla deberá también seleccionar algunos de esos elementos en conflicto de tal manera que los elementos de credibilidad restantes permitan obtener un orden de credibilidad sensato. De esta manera, el proceso de mezcla eliminará todos los ciclos que surjan en  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ .

A continuación, se mostrará cómo construir un operador de mezcla combinando técnicas de [TGFS14] y [FKIRS12]. Para definir esta construcción, serán introducidos dos conceptos: los  $\perp$ -kernels inconsistentes y una *función de incisión generalizada*.

**Definición 6.1** ( $\perp$ -kernels inconsistentes respecto de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ ). Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos. El conjunto  $\perp$ -kernels inconsistentes respecto de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , notado como  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$ , es el conjunto de conjuntos  $\mathcal{X}$  tal que:

1.  $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$
2.  $\mathcal{X}$  no es sensato.
3. Para cualquier  $\mathcal{X}'$  tal que  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$  entonces  $\mathcal{X}'$  es sensato.

Esto es,  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$  es el conjunto de subconjuntos minimales de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  que no son sensatos.

**Ejemplo 6.2.** Considere los órdenes de credibilidad del Ejemplo 6.1:  $\mathcal{O}_1 = \{A_2 > A_5, A_3 > A_5, A_1 > A_3\}$  y  $\mathcal{O}_2 = \{A_5 > A_2, A_1 > A_3, A_5 > A_1, A_6 > A_4\}$ . Los  $\perp$ -kernels inconsistentes respecto de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  son  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp = \{\{A_2 > A_5, A_5 > A_2\}, \{A_3 > A_5, A_5 > A_1, A_1 > A_3\}\}$ . Observe que todo conjunto en  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$  tiene todos los elementos de algún ciclo en el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , tal como se puede observar en la Figura 6.3.

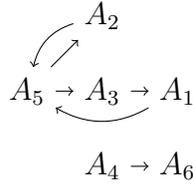


Figura 6.3: Muestra nuevamente el grafo asociado a la unión  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  considerando los órdenes de credibilidad del Ejemplo 6.1.

Recuerde de la Observación 3.3, que el grafo asociado a un orden de credibilidad no sensato tendrá al menos un ciclo. Aún más, en la Observación 3.5 descripta para el operador de revisión múltiple priorizada se indicó que podrían existir más ciclos en el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  que elementos en  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ . En contrapartida a esto, la siguiente proposición, que relaciona  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$  con los ciclos en el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , determina que los ciclos del grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  se corresponden uno a uno con los elementos de  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$ .

**Proposición 6.1.** Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos,  $\mathbb{X}$  el conjunto de  $\perp$ -kernels inconsistentes de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ , e  $\mathbb{Y}$  el conjunto de ciclos del grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Luego,  $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$ .

*Demostración.* Vea Apéndice A, página 186. □

Cada *kernel* en  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$  es un subconjunto minimal y no sensato de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  (vea las condiciones de la Definición 6.1). Por lo tanto, si de cada  $\mathcal{X} \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$  se seleccionan uno o más elementos para eliminar de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , los elementos de credibilidad restantes podrían agruparse como un nuevo orden de credibilidad sensato resultante de la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ . Este proceso se formaliza en la siguiente definición.

**Definición 6.2** (Función de incisión generalizada). *Sea  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos y  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$  el conjunto de  $\perp$ -kernels inconsistentes de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Una función de incisión generalizada para  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$ , denotada  $\sigma$ , es una función tal que:*

1.  $\sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp) \subseteq \bigcup((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp)$
2. Para cada  $\mathcal{X} \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$  entonces  $\mathcal{X} \cap \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp) \neq \emptyset$

*Esto es, dado el conjunto  $\perp$ -kernels inconsistentes de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ ,  $\sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp)$  es un conjunto de elementos  $E$ , donde para todo  $e \in E$  se cumple que  $e \in \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{X} \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$ , y para todo  $\mathcal{X} \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$ , existe al menos un elemento de credibilidad  $e \in E$  tal que  $e \in \mathcal{X}$ .*

Como se mencionó arriba, cada *kernel* inconsistente en  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$  es un conjunto minimal de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , entonces, si al menos un elemento de credibilidad de cada *kernel* inconsistente es seleccionado para ser eliminado de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , los restantes elementos pueden ser agrupados en un nuevo orden de credibilidad sensato. La función de incisión generalizada  $\sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp)$  realiza esta selección. Note que la Definición 6.2 no especifica cómo la función  $\sigma$  selecciona los elementos de credibilidad, entonces, diferentes estrategias pueden ser propuestas.

**Ejemplo 6.3.** *Considere nuevamente los  $\perp$ -kernels inconsistentes de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  del Ejemplo 6.2:  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp = \{\{A_2 > A_5, A_5 > A_2\}, \{A_3 > A_5, A_5 > A_1, A_1 > A_3\}\}$ . A continuación, se incluyen tres posibles funciones de incisión generalizadas. La función  $\sigma_1$  selecciona todos los elementos de credibilidad de  $\bigcup((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp)$ , mientras  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  seleccionan solo un elemento de credibilidad de cada  $\mathcal{X} \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$ .*

- $\sigma_1((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp) = \{A_2 > A_5, A_5 > A_2, A_3 > A_5, A_5 > A_1, A_1 > A_3\}$
- $\sigma_2((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp) = \{A_2 > A_5, A_1 > A_3\}$
- $\sigma_3((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp) = \{A_5 > A_2, A_5 > A_1\}$

A continuación, considerando las definiciones de los  $\perp$ -kernels inconsistentes y de la función de incisión generalizada, se definirá el operador de mezcla de tipo *kernel*.

**Definición 6.3.** Sea  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad y  $\sigma$  una función de incisión generalizada. La mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  que es generada por  $\sigma$  es el operador  $\circ_\sigma$ , definido como sigue:

$$\mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2 = (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp)$$

Un operador  $\circ$  es una mezcla de tipo *kernel* para  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  si y solo si existe una función de incisión generalizada  $\sigma$  tal que para todo orden de credibilidad  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2$ .

**Ejemplo 6.4.** Considere nuevamente los órdenes de credibilidad del Ejemplo 6.1,  $\mathcal{O}_1 = \{A_2 > A_5, A_3 > A_5, A_1 > A_3\}$  y  $\mathcal{O}_2 = \{A_5 > A_2, A_1 > A_3, A_5 > A_1, A_6 > A_4\}$ . Recuerde el conjunto  $\perp$ -kernels inconsistentes, notado como  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$ , obtenido en el Ejemplo 6.2:  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp = \{\{A_2 > A_5, A_5 > A_2\}, \{A_3 > A_5, A_5 > A_1, A_1 > A_3\}\}$ . Considere la función de incisión generalizada  $\sigma_2$  definida en el Ejemplo 6.3. Luego, la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  usando  $\sigma_2$  es un orden de credibilidad sensato  $\mathcal{O}_3$  tal que:

$$\mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_1 \circ_{\sigma_2} \mathcal{O}_2 = (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \sigma_2((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp)$$

$$\mathcal{O}_3 = (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \sigma_2(\{\{A_2 > A_5, A_5 > A_2\}, \{A_3 > A_5, A_5 > A_1, A_1 > A_3\}\})$$

$$\mathcal{O}_3 = (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \{A_2 > A_5, A_1 > A_3\}$$

Así,  $\mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_1 *_{\mu_2} \mathcal{O}_2 = \{A_3 > A_5, A_5 > A_2, A_1 > A_3, A_5 > A_1, A_6 > A_4\}$ . Note que  $\mathcal{O}_3$  es sensato y contiene elementos de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ . La Figura 6.4 muestra los grafos asociados a  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_1 \circ_{\sigma_2} \mathcal{O}_2$ . Observe en la Figura 6.4(d) que los elementos de credibilidad del siguiente conjunto  $\{A_2 > A_5, A_1 > A_3\} \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  fueron excluidos del orden resultante de la mezcla. Esto es así a causa de que fueron seleccionados para ser eliminados por la función de incisión generalizada  $\sigma_2$  con la que la mezcla fue llevada a cabo.

### 6.1.3. Teorema de representación

En esta sección se presentará uno de los resultados principales de este capítulo. Después de introducir la mezcla de tipo *kernel* sobre órdenes de credibilidad  $\circ_\sigma$ , se completará su presentación con una caracterización adecuada de su comportamiento respecto de los postulados propuestos en la Sección 6.1.1.

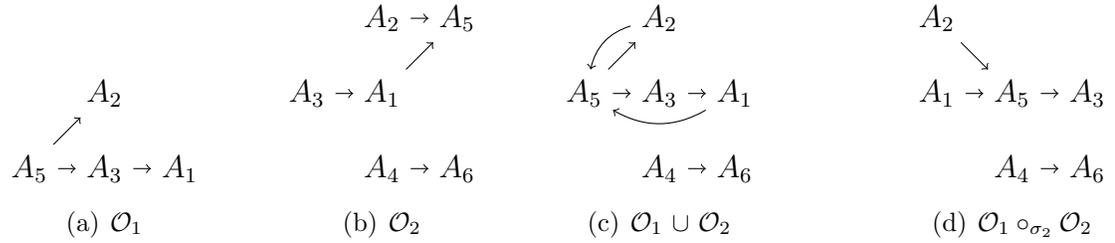


Figura 6.4: (a)-(c) muestran los grafos asociados a los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  del Ejemplo 6.1. (d) muestra el grafo asociado a la mezcla  $\mathcal{O}_1 \circ_{\sigma_2} \mathcal{O}_2$  del Ejemplo 6.4.

A continuación se incluye el teorema de representación del operador que establece la correspondencia entre los postulados y su construcción.

**Teorema 6.1.** *Un operador  $\circ_{\sigma}$  es una mezcla de tipo kernel de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  si y solo si este satisface inclusión, sensatez, reversión y retención de núcleo global.*

*Demostración.* Vea Apéndice A, página 187. □

El teorema de representación determina que cualquier operador que satisface los postulados característicos puede generarse a partir de la construcción propuesta. De esta forma, el Teorema 6.1 da una caracterización de la mezcla de tipo *kernel* presentada en la Definición 6.3 a partir de las propiedades *Inclusión*, *Sensatez*, *Reversión* y *Retención de Núcleo Global*, presentadas en la Sección 6.1.1.

Observe que, de forma equivalente a lo que sucedió durante la construcción del operador de revisión múltiple priorizada, durante la construcción del operador de mezcla de tipo *kernel* se hace uso de una función de incisión, en este caso, notada como función de incisión generalizada (vea la Definición 6.2). Esta función debe seleccionar qué elementos de credibilidad no formarán parte del orden de credibilidad resultante del proceso de mezcla. Sin embargo, la definición no especifica cómo esta función realiza esta selección para cada *kernel*. Por lo tanto, la Definición 6.2 define una familia de funciones posibles.

En el Capítulo 3, se propusieron tres funciones de selección que permiten implementar el comportamiento de una función de incisión *consolidada*, esto es, la función que opera sobre los *kernels* inconsistentes calculados a la hora de realizar la revisión múltiple priorizada de un orden de credibilidad  $\mathcal{O}_1$  por otro orden de credibilidad  $\mathcal{O}_2$ . Tanto la función *Total Selection Function (TSF)* como la *Lexicographic Selection Function (LSF)*

pueden ser utilizadas, también, como funciones de incisión *generalizadas* para seleccionar los elementos provenientes de los  $\perp$ -*kernels* que no formarán parte del orden de credibilidad resultante de la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ . La *Least Credible Selection Function (LCSF)*, en cambio, debe ser adaptada para operar con las mismas premisas con las que fue presentada anteriormente. Un análisis preliminar de la adaptación de esta función y del uso de las dos restantes, será desarrollado más adelante en la Sección 6.4.

## 6.2. Implementación del operador de mezcla

Durante la Sección 6.1.2, se formalizó un operador de mezcla de tipo *kernel* para órdenes de credibilidad. Para esto, primero se describieron los postulados característicos que especifican el comportamiento esperado del operador. Luego, se mostró cómo construir el mismo, para alcanzar el comportamiento esperado. Finalmente, se caracterizó mediante un teorema de representación que todo operador que satisface los postulados propuestos, puede generarse a partir de la construcción propuesta.

En esta sección, se definirán funciones que permiten implementar la mezcla de dos órdenes de credibilidad sensatos  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ . Note que en el proceso de mezcla se obtiene un orden de credibilidad que contiene elementos de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ , descartando lo necesario para que el orden resultante sea sensato. Siguiendo esta operatoria, las funciones que se presentarán implementan justamente el comportamiento de un operador de mezcla ( $\mathcal{O}_1 \circ_{\sigma} \mathcal{O}_2$ ) como el definido en la Sección 6.1.2. Más adelante, en la Sección 6.3, se mostrará formalmente esta correspondencia.

Las funciones presentadas a continuación, seguirán el mismo formato utilizado para presentar las funciones que implementan el operador de revisión múltiple priorizada de tipo *kernel* del Capítulo 3. Podrá observar que, en algunos casos, las funciones se parecerán a las anteriormente descritas. Esto es así ya que, la operatoria de cada una de estas comparten características tales como la detección de ciclos y la selección de elementos para eliminar. En cualquier caso, se describirán claramente las características en las que estas se diferencian.

La función de la Figura 6.5 describe cómo implementar la mezcla de dos órdenes de credibilidad sensatos  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ . Esta mezcla se lleva a cabo eliminando de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  algunos de los elementos que se encuentren en conflicto. Las funciones `CYCLES-SET` y `SELECT`

---

**Entrada:** órdenes de credibilidad sensatos.

**Salida:** orden de credibilidad sensato.

---

```

1: function MERGING-ORDER( $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ )
2:    $\mathcal{O}_{(1\circ 2)} \leftarrow (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \text{SELECT}(\text{CYCLES-SET}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2))$ 
3:   return  $\mathcal{O}_{(1\circ 2)}$ 
4: end function

```

Figura 6.5: Función que mezcla dos órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ .

especifican esta tarea. La función CYCLES-SET computa todos los ciclos de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  y, luego, SELECT decide qué elementos se excluirán de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  para resolver estos conflictos.

Siguiendo la Proposición 6.1, la función CYCLES-SET computa todos los ciclos de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  y, luego, SELECT decide qué elementos se excluirán de la mezcla. Dado que cada ciclo es un subconjunto minimal, si uno o más elementos de cada uno de estos se eliminan, los elementos de credibilidad restantes definirían un nuevo orden de credibilidad sensato. La función de la Figura 6.5 utiliza la función SELECT para ese propósito. Esta función selecciona de cada subconjunto retornado por CYCLES-SET al menos un elemento para ser eliminado de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Luego, los elementos seleccionados se eliminan de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  y los elementos de credibilidad restantes permiten obtener el orden de credibilidad sensato  $\mathcal{O}_{(1\circ 2)}$ .

---

**Entrada:** órdenes de credibilidad sensatos.

**Salida:** conjunto de conjuntos de elementos de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ .

---

```

1: function CYCLES-SET( $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ )
2:    $MCS\text{et} \leftarrow \emptyset$ 
3:   for all  $A_i \in \text{CANDIDATES}(\mathcal{O}_1)$  do
4:      $MCS\text{et} \leftarrow MCS\text{et} \cup \text{CYCLES}(A_i, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ 
5:   end for
6:   return  $MCS\text{et}$ 
7: end function

```

Figura 6.6: Identifica los subconjuntos minimales no sensatos de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ .

Observe que CYCLES-SET se parece a la función CONFLICT-SET presentada en la Figura 3.7 del Capítulo 3. Sin embargo, estas presentan una diferencia sustancial. CYCLES-

SET no requiere del filtrado de los ciclos que se acumulan en  $MCSet$  ya que estos son minimales (vea la Proposición 6.1). Esto no sucedía en CONFLICT-SET, ya que esta debía realizar un filtrado de los ciclos computados para quedarse únicamente con aquellos que eran minimales bajo inclusión de conjuntos (vea la Observación 3.5). Además de esto, las funciones CYCLES presentan un comportamiento sutilmente diferente, respecto de los elementos que finalmente retornan luego de computar los ciclos, lo que quedará claro a continuación.

Dado que  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  son sensatos, si  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato entonces al menos un elemento de  $\mathcal{O}_1$  pertenece a algún ciclo en el orden definido por  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Para retornar todos los subconjuntos minimales de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  que producen un ciclo, la función de la Figura 6.6 usa las funciones  $CANDIDATES(\mathcal{O}_1) = \{A_i : A_i > A_j \in \mathcal{O}_1\}$  y CYCLES. Como se explicó previamente, considerar los agentes de  $\mathcal{O}_1$  es suficiente para detectar todos los ciclos posibles en  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Luego, la función CYCLES computa todos los ciclos elementales (*i.e.*, un camino en el que ningún vértice, excepto el primero y el último, aparecen dos veces [HJ08]) que involucran elementos de  $CANDIDATES(\mathcal{O}_1)$ . De esta forma, con un llamando a CYCLES por cada miembro de  $CANDIDATES(\mathcal{O}_1)$  la función genera el conjunto  $MCSet$  (conjunto de ciclos) con los subconjuntos de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  que están involucrados en todos los ciclos posibles de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . A diferencia de lo que sucedía en la función CONFLICT-SET explicada en la Figura 3.7, aquí CYCLES retorna todos los elementos que forman parte de un ciclo de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Por el contrario, CYCLES en el contexto de CONFLICT-SET solo retornaba los elementos de  $\mathcal{O}_1$  que formaban parte de un ciclo de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ .

**Ejemplo 6.5.** *Considere  $\mathcal{O}_1 = \{ A_1 > A_5, A_2 > A_1, A_4 > A_3, A_7 > A_6 \}$  y  $\mathcal{O}_2 = \{ A_3 > A_2, A_3 > A_7, A_6 > A_4, A_5 > A_4 \}$  dos órdenes de credibilidad sensatos. La Figura 6.7 muestra los grafos asociados a  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Asuma que, a partir de estos órdenes de credibilidad, la función  $CYCLES-SET(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  es invocada. En primer lugar, la función computa  $CANDIDATES(\mathcal{O}_1) = \{A_1, A_2, A_4, A_7\}$ . A partir de cada uno de los agentes de este conjunto, luego, de manera iterativa, estima todos los ciclos que involucran a cada uno de los agentes considerados en  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ :*

$$CYCLES(A_1, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = \{\{A_1 > A_5, A_5 > A_4, A_4 > A_3, A_3 > A_2, A_2 > A_1\}\}$$

$$CYCLES(A_2, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = \{\{A_2 > A_1, A_1 > A_5, A_5 > A_4, A_4 > A_3, A_3 > A_2\}\}$$

$$CYCLES(A_4, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = \{\{A_4 > A_3, A_3 > A_2, A_2 > A_1, A_1 > A_5, A_5 > A_4\}, \\ \{A_4 > A_3, A_3 > A_7, A_7 > A_6, A_6 > A_4\}\}$$

$$CYCLES(A_7, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = \{\{A_7 > A_6, A_6 > A_4, A_4 > A_3, A_3 > A_7\}\}.$$

Observe que `CYCLES`, retorna un conjunto de subconjuntos que representan los ciclos, a partir de un determinado agente, detectados en  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Luego, todos los ciclos calculados se almacenan en  $MCSet = \{\{A_1 > A_5, A_5 > A_4, A_4 > A_3, A_3 > A_2, A_2 > A_1\}, \{A_4 > A_3, A_3 > A_7, A_7 > A_6, A_6 > A_4\}\}$ . Finalmente, `CYCLES-SET`( $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ ) retorna  $MCSet$ .

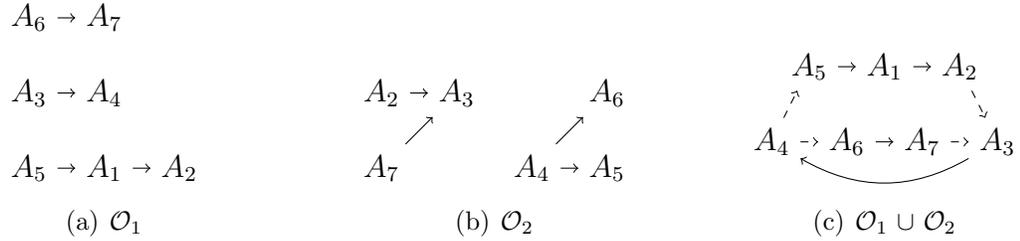


Figura 6.7: (a)-(c) muestran los grafos asociados a  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  del Ejemplo 6.5. En (c) los elementos que pertenecen a  $\mathcal{O}_2$  son graficados con arcos punteados mientras los elementos de  $\mathcal{O}_1$  con arcos sólidos.

Una vez que la función `CYCLES-SET` retorna los subconjuntos minimales de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , la función `MERGING-ORDER`( $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ ) utilizará `SELECT` para elegir qué elementos excluir de la mezcla. Esta función, es coincidente con la que se presentó en el Capítulo 3. La Figura 6.8 muestra nuevamente cómo esta función implementa su comportamiento.

---

**Entrada:** conjunto de conjuntos de elementos de credibilidad.

**Salida:** conjunto de elementos de credibilidad.

---

```

1: function SELECT( $MCSet$ )
2:    $Out \leftarrow \emptyset$ 
3:   for all  $\mathcal{Y} \in MCSet$  do
4:      $ESet \leftarrow$  SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS( $\mathcal{Y}$ )
5:      $Out \leftarrow Out \cup ESet$ 
6:   end for
7:   return  $Out$ 
8: end function

```

Figura 6.8: Selecciona los elementos de credibilidad del conjunto de ciclos.

Recuerde que, `SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS` es la función que se utiliza para elegir qué elementos de credibilidad de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  serán excluidos. Existen diferentes estrategias para implementar `SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS`, por ejemplo, las definidas por la *Total Selection Function (TSF)* o la *Lexicographic Selection Function (LSF)*.

**Ejemplo 6.6.** *Considere nuevamente el Ejemplo 6.5 que muestra cómo el conjunto  $MCSet = \{\{A_1 > A_5, A_5 > A_4, A_4 > A_3, A_3 > A_2, A_2 > A_1\}, \{A_4 > A_3, A_3 > A_7, A_7 > A_6, A_6 > A_4\}\}$  se obtiene al computar  $CYCLES-SET(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ . Asuma que, a partir de este conjunto de conjuntos, la función  $SELECT(MCSet)$  es invocada. La función selecciona de cada elemento de  $MCSet$ , esto es, de cada conjunto de elementos de credibilidad, los elementos de credibilidad que se acumularán en  $Out$  y finalmente serán retornados. La selección queda condicionada a la función  $SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS$ . Asuma, a modo de ejemplo, que la función  $SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS$  queda definida por la estrategia de selección de la *Lexicographic Selection Function*. De esta forma:*

$SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS(\{A_1 > A_5, A_5 > A_4, A_4 > A_3, A_3 > A_2, A_2 > A_1\}) = A_1 > A_5$

$SELECT-CREDIBILITY-ELEMENTS(\{A_4 > A_3, A_3 > A_7, A_7 > A_6, A_6 > A_4\}) = A_4 > A_3$

A partir de esta selección, luego,  $Out = \{A_1 > A_5, A_4 > A_3\}$ . Finalmente,  $SELECT(MCSet)$  retorna  $Out$  como resultado.

Teniendo en cuenta que la función  $SELECT$  implementa el comportamiento de seleccionar al menos un elemento de cada  $\mathcal{Y}_i$ , para cada uno de los  $\mathcal{Y}_i \in CYCLES-SET(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ , luego, la siguiente observación que relaciona a las funciones  $SELECT$  y  $CYCLES-SET$  puede inferirse.

**Observación 6.1.** *Sea  $\mathbb{Y} = CYCLES-SET(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  y  $\mathbb{S} = SELECT(\mathbb{Y})$ , luego para todo  $\mathcal{Y} \in \mathbb{Y}$ ,  $\mathcal{Y} \cap \mathbb{S} \neq \emptyset$  y, para todo  $A_i > A_j \in \mathbb{S}$ ,  $A_i > A_j \in \mathcal{Y}$ .*

**Ejemplo 6.7.** *Considere nuevamente el Ejemplo 6.5 que muestra cómo el conjunto  $MCSet = \{\{A_1 > A_5, A_5 > A_4, A_4 > A_3, A_3 > A_2, A_2 > A_1\}, \{A_4 > A_3, A_3 > A_7, A_7 > A_6, A_6 > A_4\}\}$  se obtiene al computar  $CYCLES-SET(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ , y el Ejemplo 6.6 que muestra cómo el conjunto  $Out = \{A_1 > A_5, A_4 > A_3\}$  se obtiene al computar la  $SELECT(MCSet)$ . Teniendo en cuenta estos resultados intermedios, note entonces que el resultado de computar  $MERGING-ORDER(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  se corresponde con  $\mathcal{O}_{(1 \circ 2)} = (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus Out$ , esto es,  $\mathcal{O}_{(1 \circ 2)} = \{A_2 > A_1, A_7 > A_6, A_3 > A_2, A_3 > A_7, A_6 > A_4, A_5 > A_4\}$ . La Figura 6.9 muestra el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  del Ejemplo 6.5, así como el grafo asociado a  $\mathcal{O}_{(1 \circ 2)}$  del presente ejemplo. Observe que, para obtener este resultado, se asume el uso de una función  $SELECT-CREDIBILITY-ELEMENT$  que, dado un conjunto de elementos de credibilidad, selecciona un elemento que corresponde al menor de todos ellos siguiendo su orden lexicográfico.*



Figura 6.9: (a) muestra el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  del Ejemplo 6.5, donde los elementos que pertenecen a  $\mathcal{O}_2$  son graficados con arcos punteados mientras los elementos de  $\mathcal{O}_1$  con arcos sólidos. (b) muestra el grafo asociado a la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  presentada en el Ejemplo 6.7.

### 6.3. Correspondencia entre la implementación y el operador de mezcla

En esta sección se mostrará formalmente la correspondencia entre un operador de mezcla de tipo *kernel* como el propuesto en la Sección 6.1.2, y las funciones que implementan la mezcla de dos órdenes de credibilidad sensatos  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  presentadas en la Sección 6.2. Para esto, primero se mostrará que la función  $\text{CYCLES-SET}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  (Figura 6.6) retorna el conjunto de  $\perp$ -*kernels* inconsistentes respecto de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , denotados como  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp$  y descriptos en la Definición 6.1.

**Proposición 6.2.** Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos y  $\text{CYCLES-SET}$  la función definida en la Figura 6.6, luego  $\text{CYCLES-SET}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp$ .

*Demostración.* Vea Apéndice A, página 190. □

A continuación, se mostrará la correspondencia entre la función  $\text{SELECT}$  especificada en la Figura 3.9 y la función de incisión  $\sigma$  introducida en la Definición 6.2. Para esto, se debe mostrar que la función  $\text{SELECT}$  es una función de incisión generalizada sobre  $\text{CYCLES-SET}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  así como la función  $\sigma$  sobre  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp$ . Dado que la Proposición 6.2 muestra que  $\text{CYCLES-SET}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp$ , para simplificar la siguiente proposición se notará  $\text{CYCLES-SET}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  como  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp$ .

**Proposición 6.3.** Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad y  $\text{SELECT}$  la función definida en la Figura 6.8, luego  $\text{SELECT}$  es una función de incisión generalizada para  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp$ .

*Demostración.* Vea Apéndice A, página 190.  $\square$

Finalmente, se mostrará que la función de la Figura 6.5 implementa un operador de mezcla de tipo *kernel* para órdenes de credibilidad, como el que fue propuesto en la Definición 6.3.

**Proposición 6.4.** *Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos y MERGING-ORDER la función especificada en la Figura 6.5, luego  $\text{MERGING-ORDER}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  implementa la mezcla de tipo *kernel* de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ .*

*Demostración.* Vea Apéndice A, página 191.  $\square$

## 6.4. Definición de funciones de incisión

Hasta aquí se ha formalizado un operador de mezcla de tipo *kernel* que opera sobre órdenes de credibilidad. Además, se han especificado algunas funciones que permiten implementar el comportamiento del operador de mezcla, probando formalmente que dichas funciones se corresponden con un operador de este tipo.

Tal como sucedió con el operador de revisión múltiple priorizada de tipo *kernel* presentado en el Capítulo 3, en este capítulo se mencionó que existen diferentes estrategias para determinar qué elementos de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  no formarán parte del orden de credibilidad resultante del proceso de cambio. En el caso del operador mezcla, esta responsabilidad quedó formalmente definida mediante la función de incisión generalizada de la Definición 6.2. En el caso del operador de revisión, mediante la función de incisión consolidada de la Definición 3.5.

En cualquier caso, las funciones de incisión toman por entrada un conjunto  $\mathbb{X}$  de conjuntos de elementos  $\mathcal{X}$ , esto es,  $\mathbb{X} = \{\mathcal{X} : \mathcal{X} \text{ un conjunto no vacío de elementos de credibilidad}\}$ , del que deben seleccionar al menos un elemento de cada  $\mathcal{X}$ . Luego, esta selección es la que permite que la integración mediante la revisión o la mezcla de los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  sean sensatas, resolviendo todo posible ciclo en el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ .

Independientemente de que  $\mathbb{X}$  se corresponda con los  $\mathcal{O}_2$ -*kernels* inconsistentes de  $\mathcal{O}_1$ , esto es,  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  en la revisión múltiple priorizada de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$ ; o con los  $\perp$ -*kernels*





de ser seleccionados dependiendo de su identificación. Considerando el Ejemplo 6.8, la función  $LSF$  selecciona los elementos  $\{A_4 > A_6, A_1 > A_8\}$ . La Figura 6.12 muestra el grafo asociado al orden de credibilidad resultante de la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  haciendo uso de  $LSF$  como función de incisión.

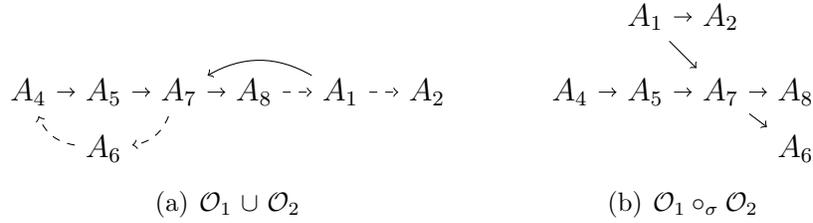


Figura 6.12: (a) muestra el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  del Ejemplo 6.8, donde los elementos que pertenecen a  $\mathcal{O}_2$  son graficados con arcos punteados. (b) muestra el grafo asociado al resultado de la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  haciendo uso de la  $LSF$  como función de incisión.

Observe que, como se indicó en el Capítulo 4, tanto  $TSF$  como  $LSF$  no utilizan la información que modela cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ , esto es, el orden de credibilidad entre los agentes que lo componen. Esta característica es la que permite que, tanto  $TSF$  como  $LSF$  puedan operar sobre todo  $\mathbb{X}$ , ya sea ante una revisión o una mezcla de órdenes de credibilidad, sin importar qué representan los elementos que conforman  $\mathbb{X}$ . Note que, en cualquiera de los casos, las funciones cumplen con sus objetivos. En el caso de  $TSF$ , seleccionar todos los elementos de cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ . En el caso de  $LSF$ , seleccionar solo un elemento de cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ , siguiendo en este caso la política de selección según el orden lexicográfico.

Por el contrario, la función  $LCSF$  fue definida para utilizar la información que modela cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ , esto es, el orden de credibilidad entre los agentes que lo componen. De esta forma, el éxito en el cumplimiento del objetivo de esta función depende claramente de cómo es que está conformado cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ . A continuación, se analizará cómo  $LCSF$  se comporta ante su uso como función de incisión en el proceso de mezcla de dos órdenes de credibilidad.

### 6.4.2. $LCSF$ para mezcla

Como se indicó anteriormente, tanto la  $TSF$  como la  $LSF$  no utilizan el orden de credibilidad entre los agentes que componen cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ , para fijar el criterio con el

cual deciden la selección de los elementos de  $\mathbb{X}$ . Sin embargo, esta información podría ser valiosa a la hora de determinar qué elementos seleccionar.

Por el contrario, para la revisión múltiple priorizada propuesta en el Capítulo 3, la función *LCSF* fue definida de forma tal que su estrategia queda condicionada al orden parcial de credibilidad que se puede inferir de cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ . En la Sección 4.2.1, se mostró que el objetivo de esta función consiste en que la información perteneciente al orden que es priorizado en la revisión, no se vea debilitada. Claramente, este objetivo en el contexto de una mezcla entre órdenes de credibilidad, no puede aplicarse de forma directa, porque no existe un orden de credibilidad priorizado.

Más allá de lo anterior, note también que la *LCSF* no podría operar de forma consistente sobre un conjunto  $\mathbb{X} = (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$ , en el contexto de una mezcla de órdenes de credibilidad. Esto es así, por su definición. Recuerde que *LCFS* fue definida para seleccionar solo un elemento de credibilidad de cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ . El criterio usado se corresponde con seleccionar de cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$  un elemento de credibilidad  $A_i > A_j$  tal que no exista otro agente menos creíble que  $A_j$  en  $\mathcal{X}$ . Para esto, note que *LCFS* asume cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$  como un orden parcial de credibilidad entre agentes, tal y como sucede en el proceso de revisión múltiple priorizada (esto es, cuando  $\mathbb{X} = \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ ).

Sin embargo, en la mezcla de órdenes de credibilidad, los subconjuntos  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ , siendo  $\mathbb{X} = (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$ , no definen un orden parcial de credibilidad entre agentes. Por el contrario, en este caso cada  $\mathcal{X}$ , como se indicó en la Proposición 6.1, corresponde con un ciclo de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . En consecuencia, se da el caso que para cualquier  $A_i > A_j \in \mathcal{X}$ , también  $A_j > A_i$  puede inferirse de la clausura transitiva de  $\mathcal{X}$ . Por lo tanto, no existe un elemento de credibilidad de la forma  $A_i > A_j \in \mathcal{X}$  tal que no exista otro agente menos creíble que  $A_j$  en  $\mathcal{X}$ .

Esto último se puede ver a partir del Ejemplo 6.8. Recuerde que, en este ejemplo,  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp = \{\{A_5 > A_4, A_7 > A_5, A_6 > A_7, A_4 > A_6\}, \{A_8 > A_7, A_1 > A_8, A_7 > A_1\}\}$ . Luego, considere el  $\perp$ -kernel  $\mathcal{X} = \{A_5 > A_4, A_7 > A_5, A_6 > A_7, A_4 > A_6\}$ . Como se puede observar, no existe  $A_i > A_j \in \mathcal{X}$  tal que no exista otro agente menos creíble que  $A_j$  en  $\mathcal{X}$ . Por ejemplo, el agente  $A_5$  no es uno de los menos creíbles de  $\mathcal{X}$  porque  $A_5 > A_4 \in \mathcal{X}$ . Lo mismo sucede con los agentes  $A_7$ ,  $A_6$  y  $A_4$  que tampoco son uno de los agentes menos creíbles en  $\mathcal{X}$  ya que  $A_7 > A_5$ ,  $A_6 > A_7$  y  $A_4 > A_6$  pertenecen a  $\mathcal{X}$ , respectivamente.

Por todo lo anterior, *LCSF* no se comporta como se espera cuando se la utiliza en una mezcla de dos órdenes de credibilidad, ya que no podría satisfacer la restricción de seleccionar de cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$  al menos un elemento de credibilidad. Sin embargo, la idea detrás de la estrategia que plantea *LCSF* para operar sobre la revisión múltiple priorizada, podría utilizarse de una forma generalizada con la mezcla de dos órdenes de credibilidad. Próximamente, se definirá dicha función. Previo a esto, considere los siguientes ejemplos que conducirán las ideas detrás de la función que se propondrá.

**Ejemplo 6.9.** Sean  $\mathcal{O}_1 = \{A_1 > A_2\}$  y  $\mathcal{O}_2 = \{A_2 > A_1\}$  dos órdenes de credibilidad sensatos. Note que,  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  es no sensato y define un único ciclo en su grafo asociado, tal como puede observarse en la Figura 6.13. De esta forma, ante la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ , alguno de los elementos, o ambos, deberán ser eliminados. Considerando las ideas detrás de *LCSF*, dos opciones podrían considerarse para este escenario. Dado que ningún orden de credibilidad tiene prioridad, se podría elegir la información menos creíble de  $\mathcal{O}_1$  y de  $\mathcal{O}_2$  que, en ambos casos, forman parte de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . En este ejemplo simple, observe que los elementos cuyos agentes son los menos creíbles de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  y que forman parte del único ciclo, son justamente  $A_1 > A_2$  y  $A_2 > A_1$ , respectivamente. Luego, una primera alternativa consiste en seleccionar ambos elementos para ser eliminados, de forma que el resultado de la mezcla en este caso sea  $\mathcal{O}_{1 \circ 2} = \{\}$ . Finalmente, la segunda alternativa consiste en la selección de solo uno de los elementos menos creíbles previamente obtenidos. En este caso, siguiendo la idea original de *LCSF*, se selecciona el menor de estos según el orden lexicográfico. Así, el elemento seleccionado sería  $A_1 > A_2$  y, en consecuencia, el resultado de la mezcla siguiendo esta política sería  $\mathcal{O}_{1 \circ 2} = \mathcal{O}_2$ .



Figura 6.13: (a) muestra el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  del Ejemplo 6.9, donde el elemento que pertenece a  $\mathcal{O}_2$  es graficado con arcos punteados. (b) muestra el grafo asociado al resultado de la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  siguiendo la estrategia planteada en el ejemplo.

A partir del escenario simplificado del Ejemplo 6.9, observe que ante la mezcla de dos órdenes de credibilidad, es posible aplicar las ideas detrás de la estrategia propuesta por *LCSF* en dos instancias. En primer lugar, sobre los elementos de  $\mathcal{O}_1$  que forman parte del ciclo de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . En segundo lugar, sobre los elementos de  $\mathcal{O}_2$  que forman parte del ciclo

de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . En este punto, se obtuvieron dos elementos candidatos a ser seleccionados y eliminados en la mezcla. Más allá de que la idea original de *LCSF* consistía en seleccionar un único elemento, esto para mantener la mayor cantidad de información posible, aquí se propondrá una generalización de esta función que, considerando la premisa de no debilitar la información de ambos órdenes de credibilidad intervinientes en la mezcla, ahora selecciona dos elementos para eliminar, uno de cada uno de los órdenes que intervienen en este proceso de cambio. Con esto en mente, considere el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6.10.** Sean los siguientes, dos órdenes de credibilidad sensatos:  $\mathcal{O}_1 = \{A_1 > A_2, A_2 > A_3, A_3 > A_4\}$  y  $\mathcal{O}_2 = \{A_4 > A_5, A_5 > A_6, A_6 > A_1\}$ . Asuma la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ , aplicando la estrategia que se planteó previamente para la selección de elementos a ser eliminados. Siguiendo esta estrategia, el elemento menos creíble de  $\mathcal{O}_1$  que forma parte del único ciclo de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , es  $A_3 > A_4$ . En este mismo sentido, el elemento menos creíble de  $\mathcal{O}_2$  que también forma parte del ciclo es  $A_6 > A_1$ . Considerando estos dos elementos como los seleccionados por la función de incisión, luego, el resultado de la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  es  $\mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2 = \{A_1 > A_2, A_2 > A_3, A_4 > A_5, A_4 > A_6\}$ . La Figura 6.14, muestra los grafos asociados a  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2$ .

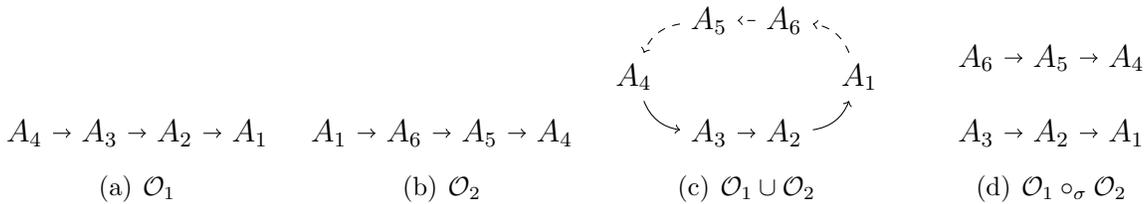


Figura 6.14: (a)-(c) muestran los grafos asociados a  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  del Ejemplo 6.10. (c) muestra los elementos que pertenecen a  $\mathcal{O}_2$  graficados con arcos punteados. (d) muestra el grafo asociado al resultado de la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  siguiendo la estrategia planteada por el ejemplo.

A partir del Ejemplo 6.10, es claro que la estrategia generalizada propuesta, permite que la información de los órdenes de credibilidad que intervienen en la mezcla, no se vea debilitada. Como todo  $\perp$ -kernel es un ciclo, de existir un elemento de credibilidad en dicho ciclo que es el menos creíble entre aquellos que forman parte de  $\mathcal{O}_1$  (como el caso de  $A_3 > A_4$ ), igual que entre aquellos que forman parte de  $\mathcal{O}_2$  (como en el caso de  $A_6 > A_1$ ), se está ante un escenario ideal, donde la estrategia propuesta, se comporta de una forma conveniente. Sin embargo, no siempre se podrá seleccionar un único elemento como el

menos creíble de un determinado ciclo, considerando únicamente los elementos de  $\mathcal{O}_1$  o de  $\mathcal{O}_2$ . Esto puede verse con claridad, en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6.11.** Sean  $\mathcal{O}_1 = \{A_1 > A_2, A_3 > A_4\}$  y  $\mathcal{O}_2 = \{A_2 > A_3, A_4 > A_1\}$  dos órdenes de credibilidad sensatos. Asuma la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ , aplicando la estrategia que se planteó previamente para la selección de elementos a ser eliminados. Siguiendo esta estrategia, no existe un único elemento que sea el menos creíble de  $\mathcal{O}_1$  considerando solamente aquellos elementos que forman parte del único ciclo de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Note que, en este ejemplo simplificado, los elementos del único ciclo del grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  que pertenecen a  $\mathcal{O}_1$  son, justamente,  $\mathcal{O}_1$ . Lo mismo sucede con los elementos de  $\mathcal{O}_2$  que forman parte del único ciclo, esto es, todo  $\mathcal{O}_2$ . Observe que, tanto  $\mathcal{O}_1$  como  $\mathcal{O}_2$ , a diferencia de lo que sucedía en el Ejemplo 6.10, tienen más de un elemento de credibilidad que se consideran como menos creíbles. De hecho, todos los elementos de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  son incomparables entre sí. Ante este escenario, considerando la estrategia inicial de LCSF, se podría seleccionar siguiendo el orden lexicográfico de los mismos. En este sentido, el elemento que forma parte del ciclo y que es el menos creíble de  $\mathcal{O}_1$ , corresponde con  $A_1 > A_2$ . En un sentido equivalente, el elemento menos creíble de  $\mathcal{O}_2$  que forma parte del ciclo es  $A_2 > A_3$ . Considerando estos dos elementos como los seleccionados por la función de incisión, luego, el resultado de la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  corresponde con  $\mathcal{O}_1 \circ_{\sigma} \mathcal{O}_2 = \{A_3 > A_4, A_4 > A_1\}$ . La Figura 6.15, muestra los grafos asociados a  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_1 \circ_{\sigma} \mathcal{O}_2$ .

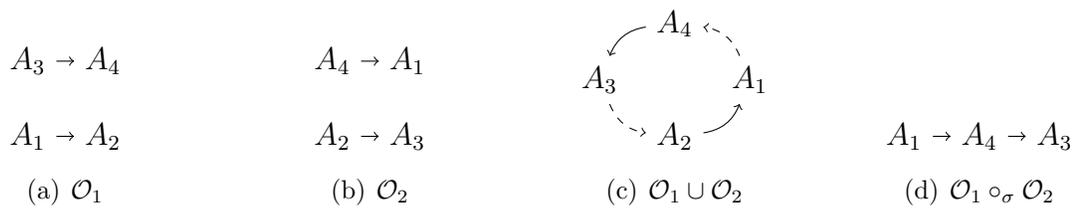


Figura 6.15: (a)-(c) muestran los grafos asociados a  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  del Ejemplo 6.11. (c) muestra los elementos que pertenecen a  $\mathcal{O}_2$  graficados con arcos punteados. (d) muestra el grafo asociado al resultado de la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  siguiendo la estrategia planteada por el ejemplo.

Tomando en cuenta los Ejemplos 6.9, 6.10 y 6.11, queda claro el espíritu de la función que generaliza el comportamiento de la LCSF, aplicable en el contexto de una mezcla de órdenes de credibilidad. Teniendo en cuenta estas ideas, a continuación se formalizará una nueva función de incisión que sigue la estrategia presentada y se denominará *Generalized Least Credible Selection Function*.

### Generalized Least Credible Selection Function (*GLCSF*)

Asuma la mezcla de dos órdenes de credibilidad sensatos  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ . Luego, considere el conjunto de  $\perp$ -*kernels* inconsistentes de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Por la Definición 6.1, se sabe que cada  $\perp$ -*kernel*  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$  es un subconjunto no sensato de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Esto es,  $\mathcal{X}$  se corresponde con uno de los ciclos del grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Dado que  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  son sensatos, entonces es claro que  $\mathcal{O}'_1$  y  $\mathcal{O}'_2$ , definidos como sigue,  $\mathcal{O}'_i = \mathcal{X} \cap \mathcal{O}_i$ , representan dos órdenes de credibilidad sensatos. Tanto  $\mathcal{O}'_1$  como  $\mathcal{O}'_2$  contienen los elementos de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ , respectivamente, que forman parte del ciclo definido por  $\mathcal{X}$ . Luego, la *GLCSF* queda definida de forma tal que, por cada  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ , selecciona dos elementos. Los elementos seleccionados se corresponden con el elemento menos creíble de  $\mathcal{O}'_1$  y  $\mathcal{O}'_2$ . Para esta selección, corresponde aplicar la estrategia definida por la *LCSF* tal como fue definida en el Capítulo 3, sobre  $\mathcal{O}'_1$  y  $\mathcal{O}'_2$ , respectivamente.

Para ilustrar el comportamiento de la *GLCSF*, considere nuevamente los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_1 = \{ A_5 > A_4, A_7 > A_5, A_7 > A_1, A_8 > A_7 \}$  y  $\mathcal{O}_2 = \{ A_6 > A_7, A_4 > A_6, A_1 > A_8, A_2 > A_1 \}$  del Ejemplo 6.8. La Figura 6.16 muestra los grafos asociados a  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ .

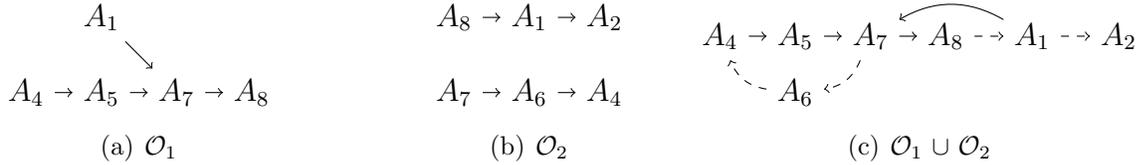


Figura 6.16: (a)-(c) muestra los grafos asociados a  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  del Ejemplo 6.8. (c) muestra los elementos que pertenecen a  $\mathcal{O}_2$  graficados con arcos punteados.

Observe en la Figura 6.16(c) que existen dos ciclos en  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Luego, los  $\perp$ -*kernels* inconsistentes de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  son  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp = \{ \{ A_5 > A_4, A_7 > A_5, A_6 > A_7, A_4 > A_6 \}, \{ A_8 > A_7, A_1 > A_8, A_7 > A_1 \} \}$ . Aplicando la *GLCSF* sobre cada  $\perp$ -*kernels*, se obtiene que:

- Para  $\mathcal{X}_i = \{ A_5 > A_4, A_7 > A_5, A_6 > A_7, A_4 > A_6 \}$ , luego,  $\mathcal{O}'_1 = \{ A_5 > A_4, A_7 > A_5 \}$  y  $\mathcal{O}'_2 = \{ A_6 > A_7, A_4 > A_6 \}$ . De  $\mathcal{O}'_1$ , *LCSF* selecciona  $A_5 > A_4$ , mientras que de  $\mathcal{O}'_2$ , selecciona  $A_6 > A_7$ .

- Para  $\mathcal{X}_j = \{A_8 > A_7, A_1 > A_8, A_7 > A_1\}$ , luego,  $\mathcal{O}'_1 = \{A_8 > A_7, A_7 > A_1\}$  y  $\mathcal{O}'_2 = \{A_1 > A_8\}$ . De  $\mathcal{O}'_1$ , *LCSF* selecciona  $A_7 > A_1$ , mientras que de  $\mathcal{O}'_2$ , selecciona  $A_1 > A_8$ .

Así, *GLCSF* selecciona de  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$  los elementos  $\{A_5 > A_4, A_6 > A_7, A_7 > A_1, A_1 > A_8\}$ . Luego, la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  haciendo uso de *GLCSF* como función de incisión generalizada es  $\mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2 = \{A_7 > A_5, A_8 > A_7, A_4 > A_6, A_2 > A_1\}$ . La Figura 6.17 muestra el grafo asociado a este resultado.

$$\begin{array}{l} A_5 \rightarrow A_7 \rightarrow A_8 \quad A_1 \rightarrow A_2 \\ A_6 \rightarrow A_4 \end{array}$$

Figura 6.17: Muestra el grafo asociado a la mezcla de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  ( $\mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2$ ) del Ejemplo 6.8, cuando se hace uso de *GLCSF* como función de incisión generalizada.

## 6.5. Resumen

En este capítulo se introdujo un nuevo operador de cambio múltiple sobre órdenes de credibilidad. A diferencia del operador de revisión, este nuevo operador no establece ningún tipo de prioridad sobre los órdenes intervinientes en el proceso de cambio. La definición del operador comenzó por la presentación de los postulados de racionalidad que especifican el comportamiento esperado para el operador de mezcla, observándolo a este como una caja negra y sin especificar cómo este comportamiento debe ser logrado. A partir de esto, después, se desarrolló una construcción completa del operador especificando cómo este puede lograr el comportamiento esperado. Esta construcción se basó en los resultados reportados tanto en [FKIRS12] como en [TGFS14]. Para cerrar la presentación formal del operador, luego, se presentó un teorema de representación que asocia los postulados de racionalidad propuestos con la construcción desarrollada.

Considerando toda la formalización previamente introducida, luego, se describieron las funciones desarrolladas para implementar el operador propuesto. Después, se mostró formalmente que dichas funciones se corresponden con un operador de mezcla sobre órdenes de credibilidad. Finalmente, considerando que para la implementación del operador es necesario especificar una función de incisión que efectivamente indique qué elementos deben ser eliminados en el proceso de mezcla cuando surgen inconsistencias, se mostró

que las funciones de selección  $TSF$  y  $LSF$ , presentadas en el Capítulo 3, pueden realizar esta tarea. Además, se mostró que la  $LCSF$ , presentada también en el mencionado capítulo, no puede ser utilizada para operar sobre los  $\perp$ -*kernels* inconsistentes de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . En consecuencia, se desarrolló una nueva función de incisión generalizada, denominada *Generalized Least Credible Selection Function* que permite generalizar el comportamiento de la  $LCSF$  pero, operando en el contexto de una mezcla de órdenes de credibilidad.

# Capítulo 7

## Trabajo Relacionado

A lo largo de este trabajo, se abordó tanto la representación como la dinámica de la confianza, representando los valores de confianza de manera simbólica mediante elementos de credibilidad que indican que un agente es más creíble que otro. El modelo propuesto agrupa estos elementos en órdenes parciales de credibilidad. Estos órdenes, luego, pueden estar asociados a diferentes tópicos o contextos. Dado que la confianza entre agentes representa valoraciones que pueden modificarse con el tiempo, se propusieron dos operadores de cambio múltiple que permiten abordar la dinámica de los órdenes de credibilidad. Estos operadores, a la vez, se utilizaron para definir funciones que, haciendo uso de las relaciones existentes entre los diferentes tópicos o contextos, permiten integrar la información de dos o más órdenes de credibilidad de diferentes contextos que se encuentran relacionados según una taxonomía de contextos.

Considerando lo anterior, es claro que la tesis se enfoca en dos grandes áreas: por un lado, el área *Reputación y Confianza* en *SMAs* y, por otro lado, el área de *Revisión de Creencias*, donde se estudian diferentes alternativas para modelar la dinámica del conocimiento. Sin embargo, no existen muchos trabajos que, como en esta tesis, desarrollen soluciones que integren herramientas de estas dos áreas. Por este motivo, en este capítulo se mostrará de forma resumida algunos desarrollos de cada una de estas dos áreas, comparándolos con lo que se propuso en esta tesis. De este modo, en la Sección 7.1 se presentarán algunos modelos de reputación y confianza, caracterizándolos en función de sus principales características. Mediante una tabla, se clasificarán los modelos respecto de si la representación para la confianza se da en términos de valores numéricos o de alguna representación simbólica; si consideran representaciones de simple o multi-contexto; si

presentan experimentaciones; así como si consideran implementaciones que se encuentren disponibles para su uso. Luego, en la Sección 7.2, se describirán algunas propuestas que, haciendo uso de herramientas del área de revisión de creencias, direccionan la dinámica de la credibilidad. Además, se analizarán las principales similitudes y diferencias, respecto de los dos operadores definidos a lo largo de este trabajo. Esta comparación, se realizará considerando un ejemplo de aplicación representativo, que permite observar cómo se comportan las diferentes propuestas bajo un mismo escenario. Este análisis final fue publicado en [JTG19], mientras que, parte de la revisión del estado del arte fue publicado en [JTG22].

## 7.1. Modelos de reputación y confianza

El modelado de confianza y reputación es una línea de investigación claramente establecida y abordada por diferentes autores, desde los años 90. En los últimos años, se han propuesto numerosas alternativas que enfocan su investigación sobre la confianza desde un punto de vista computacional. Muchos formalismos de confianza y reputación se proponen modelar y resolver problemáticas del área bajo diferentes enfoques. Sin embargo, con la excepción de algunos pocos, todos los modelos requieren de enfoques numéricos para representar la confianza. Esto puede verse, por ejemplo, en los siguientes *surveys*: [SMS05, YSL<sup>+</sup>13, PSM13, DSBNHDLN18].

Más allá de lo anterior, actualmente se han propuesto otros enfoques para representar la confianza, basados en representaciones simbólicas a través de comparaciones por pares. Es decir, en lugar de solicitar a los usuarios que califiquen sus percepciones con valores absolutos, mediante representaciones numéricas, se ha mostrado más efectivo que estas percepciones puedan ser expresadas como preferencias entre pares de alternativas. Como se mencionó en el Capítulo 1, expresar tales comparaciones por pares constituye, además, una alternativa válida para mitigar los problemas que emergen de los modelos numéricos, y una mejor experiencia para el usuario.

En esta sección, para cubrir tanto los enfoques numéricos como los que representan la confianza de forma simbólica, se organizará el trabajo relacionado en dos subsecciones. Previo esto, y a modo de resumen, la Figura 7.1 muestra una tabla comparativa con las principales características de los trabajos que se comentarán en estas subsecciones. La primera columna, indica qué tipo de representación de confianza adopta cada enfoque:

simbólico, numérico, o híbrido en caso de utilizar ambos formatos. La segunda columna, muestra qué trabajos proponen un enfoque multi-contexto. La tercera columna, indica si el enfoque representa o trabaja de alguna forma las relaciones entre los diferentes contextos. La cuarta columna, muestra qué trabajos realizaron algún tipo de experimentación. Finalmente, la quinta y última columna, muestra qué propuestas permiten acceder, en caso de existir, a sus respectivas implementaciones a través de algún repositorio. Observe que, la cuarta y quinta columna buscan caracterizar los modelos que, aún indicando que han realizado experimentaciones para analizar el funcionamiento de sus propuestas, permiten o no acceder al código fuente utilizado. En particular, note que la tabla también incorpora los trabajos de [TGFS14] y [JTGG21], que serán descriptos en la Sección 7.2 porque operan con herramientas del área de revisión de creencias, pero que también direccionan la dinámica de la confianza entre agentes.

	<i>Formato de Representación</i>	<i>Modelo Multi-contexto</i>	<i>Relaciona Contextos</i>	<i>Realiza Experimentos</i>	<i>Provee Implementación</i>
[ARH00]	Simbólico	Si	No	No	No
[SMS01]	Numérico	Si	Si	Si	No
[HJS06]	Numérico	Si	Si	Si	No
[SY06]	Numérico	Si	Si	Si	No
[HBO09]	Numérico	Si	Si	Si	No
[CF10]	Numérico	Si	Si	Si	No
[URO10]	Numérico	Si	Si	Si	No
[AFGL10]	Híbrido	Si	Si	No	No
[SZ10]	Numérico	Si	Si	Si	No
[FZSM12]	Numérico	No	-	Si	No
[ELV14]	Numérico	No	-	Si	No
[HCF14]	Simbólico	No	-	Si	No
[TGFS14]	Simbólico	No	-	No	No
[CHF15]	Simbólico	No	-	Si	No
[GFBRG17]	Híbrido	Si	Si	Si	No
[CH18]	Simbólico	No	-	Si	No
[HAAA21]	Numérico	Si	Si	Si	No
[JTGG21]	Simbólico	No	-	Si	No
Esta tesis	Simbólico	Si	Si	Si	Si

Figura 7.1: Tabla comparativa que resume las principales características de los modelos analizados en las Secciones 7.1.1 y 7.1.2, y algunos presentados en la Sección 7.2 que guardan estrecha relación con los modelos de reputación y confianza.

### 7.1.1. Modelos numéricos

En [CF10], se menciona la importancia del contexto a la hora de estimar diferentes valores de confianza. Los autores consideran que el contexto merece ser modelado explícitamente:  $X$  confía en  $Y$  en el contexto  $C$  para hacer una determinada tarea  $\alpha$ . De esta forma, argumentan que muchos autores no consideran la importancia del tercer elemento, y que esto genera varios problemas. Por ejemplo, no pueden desarrollar una teoría no homogénea de la confianza ( $X$  confía en  $Y$  para una tarea pero no para otra). Al igual que [TA12], en este trabajo se analiza la importancia de utilizar la información en una variedad de contextos. En [TA12] se argumenta que esta información puede ser utilizada para solucionar problemas de escasez y el *cold-start problem* (problema de arranque en frío, ante la falta de experiencias o información) para nuevos usuarios. En esta tesis, el modelo propuesto no solo permite contextualizar toda la información, sino que permite aprovechar las relaciones existentes entre los contextos. Utilizar la información de contextos relacionados para resolver problemas, coincide con el enfoque presentado en esta tesis, cuando se extiende un orden de credibilidad de un determinado contexto con la información de credibilidad de otros contextos relacionados.

En [SY06], se propone un enfoque basado en el contexto para la selección de servicios, usando ontologías. En este trabajo, los autores proponen un modelo para la toma de decisiones basado en experiencias. La ontología se utiliza para definir el modelo de representación de las experiencias. Similar a lo que aquí se propuso, la ontología utiliza una relación de especialización para clasificar las experiencias. Sin embargo, la ontología no se usa para inferir confianza: el modelo requiere medir la similitud entre experiencias y luego agregar experiencias similares a un valor de confianza estimado.

En [HBO09] se desarrolla una propuesta para trabajar con taxonomías de roles. Los agentes se caracterizan por uno o más roles, según su capacidad para realizar una tarea. Luego, se utiliza una taxonomía para relacionar los roles siguiendo una relación de especialización. Combinando la semántica de los modelos de confianza y el significado de roles, los autores presentan una forma de actualizar la taxonomía de roles mediante la creación de nuevos roles y, al mismo tiempo, a través de la taxonomía, una forma de seleccionar agentes confiables para delegar tareas. Similar a esto, el formalismo aquí propuesto permite mantener diferentes valores de confianza para un agente. Sin embargo, se propone utilizar diferentes órdenes de credibilidad para diferentes contextos o tópicos, en lugar de

diferentes roles. Además, para integrar los valores de confianza de diferentes órdenes de credibilidad, se formalizan dos operadores de cambio múltiple.

El enfoque presentado en [URO10], propone un modelo que mide la similitud entre experiencias pasadas y la situación en la que se requiere un agente confiable. Ese modelo se centra en tres componentes: el componente *Aggregator*, un motor de agregación que calcula los valores de confiabilidad en función de la evidencia de confianza existente; el componente *Contextual Fitness*, un módulo que mide qué tan bien se ajusta el comportamiento de un agente dado, a las especificidades de la situación actual; y el *Similarity Analyzer*, un motor de inferencia que compara las características de los agentes recién llegados al sistema con las características de los agentes para los que ya existe información de confianza. El componente *Contextual Fitness* y *Similarity Analyzer* permiten contextualizar experiencias para inferir valores de confianza. De una forma diferente, el modelo propuesto en esta tesis también permite contextualizar los valores de confianza, a través de distintos órdenes de credibilidad. Cada uno de esos órdenes, por ejemplo, puede modelar la confianza asociada a un determinado tema o tópico. Sin embargo, este enfoque se centra en formalizar e implementar la dinámica de la confianza a través de operadores de revisión múltiple priorizada y no priorizada, sobre órdenes de credibilidad.

En [FZSM12], se describe un modelo de confianza estereotípico generalizado para medir la fiabilidad de un agente. Los autores proponen un modelo para medir la confiabilidad de un agente del que se tiene poca o ninguna experiencia previa, basado en estereotipos de confianza. En su propuesta, cada regla de evaluación se denomina estereotipo de confianza y está representada por un conjunto de atributos, sus valores o rangos de valores correspondientes y un grado de confianza en el rango de  $[0, 1]$ . Para construir estereotipos de confianza, se presenta un método de aprendizaje basado en un árbol de decisión (*fuzzy semantic decision tree learning method*). Una diferencia con la propuesta de esta tesis, radica en cómo se evalúa la confianza: mientras los autores trabajan con valores de confianza estereotipados, el modelo aquí propuesto se basa en la confianza interpersonal, es decir, la confianza que un agente tiene frente a otros agentes. Además, en el trabajo de estos autores no se direcciona la multi-contextualidad de la información.

En [ELV14] se desarrolla un sistema basado en la confianza para generar recomendaciones personalizadas para los usuarios. En este sistema, la confianza se utiliza para estimar un *ranking* de usuarios entre los que se indicará quiénes son los más fiables (amigos) y los menos fiables (enemigos) de un determinado usuario. Para estimar el *ranking*, se tienen en

cuenta las relaciones que existen entre los usuarios en su interacción en las redes sociales (enlaces explícitos, enlaces implícitos, me gusta, no me gusta, *etc.*). Una diferencia con el modelo aquí presentado, corresponde con que la información no es sensible al contexto; una vez analizada la información de las redes sociales, todos los datos recopilados para un usuario se agregan en un valor numérico de confianza que caracteriza a este usuario en cualquier tópico. El modelo presentado aquí podría usarse como un complemento de su enfoque para implementar un sistema de recomendaciones sensible al contexto. Dadas las clasificaciones de los usuarios para diferentes temas, y dada una taxonomía de temas que indica las preferencias que un usuario tiene sobre ellos, se podría computar la extensión de un orden de credibilidad. El orden extendido no solo contemplaría los diferentes grados de confianza en cada tópico, sino que permitiría a un usuario que las recomendaciones se generen en base a sus preferencias. Esto podría mejorar la calidad de la respuesta.

Uno de los primeros modelos que considera que la confianza depende del contexto fue propuesto en [ARH00]. En este trabajo, la confianza se modela de forma simbólica utilizando etiquetas de confianza:  $\{vu$  (*very untrustworthy*),  $u$  (*untrustworthy*),  $t$  (*trustworthy*),  $vt$  (*very trustworthy*) $\}$ . El modelo mantiene información de experiencias directas y también información proveniente de otros agentes sobre sus propias experiencias directas a través de tuplas que almacenan la cantidad de experiencias en las que un agente fue *very trustworthy*, *untrustworthy*, *etc.* Finalmente, considerando estas tuplas, el valor de confianza para un agente se calcula seleccionando como valor de confianza la etiqueta que tiene el mayor número de experiencias contabilizadas. La propuesta de [ARH00], estima órdenes totales entre agentes, y más allá de contextualizar la información, no relaciona la misma, sacando ventaja de esto. A diferencia de esa aproximación, el modelo propuesto en esta tesis permite que ciertos agentes sean incomparables, como sucede en situaciones reales, y permite relacionar contextos y aprovechar estas relaciones.

Tanto [SMS01] como [HJS06], consideran y desarrollan soluciones para una amplia gama de problemas de los modelos de confianza, entre los que se consideran experiencias directas, información de terceros, valores de reputación, prejuicio y medidas de confiabilidad de los valores de confianza. Una diferencia importante con sus modelos es que la propuesta de esta tesis considera la confianza de forma simbólica a través de órdenes de credibilidad. Como ya se mencionó, esto permite modelar situaciones en las que existen agentes incomparables. Los modelos propuestos en [SMS01] y [HJS06] consideran un orden total entre agentes, por lo tanto, no permiten considerar este tipo de escenarios. Al

igual que lo que se presentó en este documento, las propuestas de los autores mantienen la información contextualizada de forma explícita, y los modelos relacionan los contextos para calcular los valores de confianza. La taxonomía de contextos presentada en esta tesis, cumple un rol equivalente a la dimensión ontológica presentada en [SMS01] y la confianza basada en roles presentada en [HJS06] en la que se determina cómo los diferentes elementos contribuyen al cálculo de la confianza.

En [AFGL10], se describe un modelo simbólico de confianza multi-contexto. En este trabajo, la confianza se representa a través de un conjunto de etiquetas de confianza (posiblemente diferentes) en cada contexto. Así, los autores proponen relacionar información de diferentes contextos utilizando una función de media ponderada (confianza por consenso). Dado que el conjunto de etiquetas de confianza puede ser diferente en cada uno de los contextos, el modelo transforma las etiquetas de confianza en un intervalo finito  $[0, 1]$ . Luego, se realiza una agregación de los valores de confianza de cada contexto, asignando un peso a los valores de confianza en cada contexto; este peso representa cuán dominante es un contexto sobre otros. Finalmente, con el nuevo valor de confianza calculado por consenso, se realiza una nueva transformación al conjunto de etiquetas de confianza del contexto dominante, de modo que el valor de confianza se asigna a una etiqueta de confianza. A diferencia del enfoque de esta tesis, el modelo propuesto por estos autores requiere que todos los agentes sean comparables en cada contexto. Esto presenta una diferencia respecto de los órdenes parciales de credibilidad utilizados en este trabajo. Además, el modelo propuesto en [AFGL10] considera asignar a cada contexto una medida de peso que representa cuán dominante es la información de un contexto sobre otros contextos. En contraste con esto, en el modelo propuesto aquí, la dominancia entre contextos ocurre implícitamente a través de la taxonomía de contextos. Esta alternativa pareciera resultar más natural cuando es necesario modelar escenarios donde se considera la relevancia de la información, y es importante determinar qué información es más específica y debe prevalecer. Esto, de cierta forma, se encuentra en sintonía con los problemas enunciados en el Capítulo 1, cuando se caracterizaron las dificultades asociadas al sesgo y al rango de calificaciones utilizadas, para valorar agentes de forma numérica. Note que, asignar un peso a cada uno de los contextos, representa los mismos desafíos que el hecho de asignar valoraciones numéricas sobre el grado de confianza entre agentes.

En [SZ10], se desarrolla un modelo de confianza jerárquico. Los autores proponen modelar la confianza de un agente a través de una jerarquía de contextos. En los contextos

más específicos de la jerarquía, se mantienen los valores de confianza observables en los dominios más específicos, mientras que en el contexto más general se calcula el valor de confianza del agente. Las relaciones entre contextos se modelan a través de aristas que tienen un cierto peso. Finalmente, el modelo propone propagar los diferentes valores de confianza desde los nodos más específicos a los nodos más generales y, a la inversa, como metodología para actualizar los valores de confianza en *dirección hacia arriba* o *dirección hacia abajo*, respectivamente. Una diferencia con la propuesta de esta tesis es que modelan en una jerarquía, la confianza de un solo agente, de forma numérica. Así, pueden existir múltiples jerarquías diferentes, una para cada agente. Por el contrario, el modelo aquí propuesto considera un orden de credibilidad para cada contexto, y el uso de información de otros contextos se da en términos de las preferencias fijadas por un determinado agente, a través de la jerarquía de contextos.

En [HAAA21], se presenta un enfoque para modelar fallas de confianza en cascada, en las redes sociales. Los autores presentan un modelo de confianza considerando las dependencias existentes entre los contextos. Al mapear los contextos a una *multiplex network's layers*, se introduce un nuevo método para calcular la similitud entre los contextos de confianza. El modelo propuesto utiliza la información de confianza de todos los contextos para calcular los nuevos valores de confianza después de una falla de confianza. Una falla de confianza consiste en una situación en la que un agente que confiaba en otro, pasa a desconfiar del mismo, o donde la confianza entre ambos deja de existir. Además, se presenta un modelo para fallas en cascada, así como un método de prevención de ataques. Los autores describen una serie de experimentos, que incluyen el análisis de sensibilidad, análisis de precisión y estudios comparativos, donde se evalúa la efectividad de su enfoque. Al igual que ellos, el modelo aquí propuesto se centra en la dinámica de la confianza pero, en este caso, a través de dos operadores de cambio múltiple.

Como se puede observar, los enfoques presentados anteriormente representan tanto la confianza, como los mecanismos para operar la dinámica de la misma, basándose en modelos numéricos. En este sentido, además de todas las diferencias específicas, la principal diferencia entre el modelo propuesto en esta tesis y todos los modelos discutidos anteriormente es justamente esa, el modelo de representación utilizado.

Como se indicó en el Capítulo 1, varios trabajos como [RZ02], [SS11] y [DKP13] han analizado los problemas potenciales que emanan de los modelos numéricos: por ejemplo, la dificultad de los usuarios para mapear sus opiniones en números simples, y también

la subjetividad subyacente de esa tarea. Como se describe [CH18], todos estos estudios reflejan la necesidad de nuevos tipos de soluciones, evitando los problemas que surgen de los métodos basados en calificaciones numéricas. En trabajos recientes como [JTGG21], se ha demostrado que los modelos de confianza simbólica que representan información utilizando elementos de credibilidad (comparaciones por pares) pueden funcionar tan bien como los modelos numéricos tradicionales.

### 7.1.2. Modelos simbólicos

Al examinar la literatura, es posible observar algunos trabajos que, al igual que en esta tesis, proponen modelar la confianza de manera simbólica. Véase, por ejemplo, [DGP94, Can98, KTGF09, HCJ10, TGFS12b, TFGS11, TGFS14, HCF14, CHF15, TGGS16, GTGS18, CH18, JTGG21].

Entre estos trabajos, existen tres líneas de investigación que particularmente hacen foco en el concepto de comparación por pares (*pairwise comparison*). En primer lugar está la línea de investigación propuesta por Hermoso, Centeno y Fasli llamada *PairWise Reputation Mechanism (PWRM)*. Estos autores, a través de tres trabajos [HCF14, CHF15, CH18], basan su modelo en la representación de la confianza mediante comparaciones por pares, teniendo en cuenta un proceso de clasificación que permite considerar *rankings* de diferentes agentes y agregarlos en un *ranking* general, mediante un proceso iterativo basado en torneos eliminatorios (*knock-out tournaments*). Cada torneo permite evaluar en partidos, y de manera simbólica, las opiniones que los agentes del sistema tienen sobre dos agentes en particular: por ejemplo, dado un partido entre los agentes  $A$  y  $B$ , el sistema consulta: dada su experiencia, ¿qué agente usted prefiere,  $A$  o  $B$ ? Los resultados de cada partido de estos torneos se recopilan y, siguiendo la propuesta de [NOS12], van siendo agregados mediante un algoritmo de tipo *random walk*. Una vez concluidos los diferentes torneos considerados y, con la información recopilada y agregada, un *ranking* total entre los diferentes agentes puede ser derivado.

Una segunda línea de investigación basada en comparaciones por pares se documenta en [GFBRG17]. En este trabajo los autores proponen un sistema de reputación basado en comparaciones por pares para mercados electrónicos de propósito general. El objetivo es manejar las comparaciones por pares de manera adecuada en función del contexto en el que se realizaron. Por ejemplo, al hacer una comparación por pares entre dos proveedores

en base a transacciones anteriores, el peso de la comparación depende de la similitud de las transacciones, el precio que se ofreció y el precio que se pagó. En particular, se considera que la fijación de precios mitiga a los proveedores de productos y/o servicios de ofertas bajas. Las comparaciones por pares se recopilan en una matriz diferencial de puntuación y luego se calculan las clasificaciones finales con un método de minimización.

Finalmente, la tercera línea de investigación relacionada con el trabajo propuesto en esta tesis, es documentada en [TGFS14, JTGG21]. En estos trabajos, se aborda la dinámica de la confianza mediante herramientas del área de revisión de creencias. Para esto, se define un modelo de representación simbólico de la confianza, y se proponen algunos operadores de cambio que permiten modificar una base de credibilidad.

En lo que resta del Capítulo, se analizarán con mayor detalle dos de las líneas de investigación mencionadas. La primera de ellas, se discutirá a continuación. La tercera, en cambio, será analizada luego en la Sección 7.2.

### ***PairWise Reputation Mechanism (PWRM)***

*PairWise Reputation Mechanism* (PWRM) es un mecanismo de reputación basado en los conceptos de procesos de elicitación por parejas (*pairwise comparison*) y torneos eliminatorios (*knock-out tournaments*), que aborda principalmente la problemática asociada a la eliminación del sesgo de las calificaciones propuestas entre agentes en una red social compleja (*CNS*) a la hora de modelar la confianza. El objetivo principal de este mecanismo es construir *rankings* de reputación a partir de opiniones cualitativas (modelo de confianza simbólico), eliminando así los problemas de subjetividad asociados con la agregación de opiniones cuantitativas (modelos de confianza numéricos).

El mecanismo es presentado en [HCF14]. El mismo corresponde con una propuesta iterativa, que queda descripta por el Algoritmo 1. Este algoritmo toma por entrada una *CNS* notada como  $\Omega_E(U, L, E)$ , en la que  $U$  representa un conjunto de agentes,  $E$  un conjunto de entidades, y  $L$  el conjunto de *links* que relacionan a los agentes con las entidades. Concretamente, esta red podría instanciarse, por ejemplo, con un escenario en el que se desea obtener un *ranking* entre hoteles, de la siguiente manera:  $U$  representaría el conjunto de usuarios visitantes de los hoteles;  $E$  representaría el conjunto de hoteles a ser *rankeados*;  $L$  representaría el conjunto de *links* entre usuarios visitantes y hoteles, quedando establecidos estos entre aquellos visitantes que calificaron a un determinado hotel en alguna circunstancia.

---

**Algoritmo 1** PWMR

---

**Entrada:**  $\Omega_E(U, L, E)$ : Red Social Compleja (CNS).**Salida:**  $\rho_i$ : Ranking estimado para  $E$ .

```

1: for  $t \in \delta$  times do
2:    $E' \leftarrow EntitiesSelectionPolicy.selectEntitiesToEvaluate(E)$ 
3:    $KT_{E'} \leftarrow scheduleTournament(E')$ 
4:   for  $m \in matches(KT_{E'})$  do
5:      $nb \leftarrow \emptyset$ 
6:      $nb \leftarrow ForwardingSelectionPolicy.getUsersToAsk(U, L)$ 
7:      $send(m, nb)$ 
8:      $votes \leftarrow receive()$ 
9:      $winner \leftarrow WinnerDeterminationPolicy.getWinner(votes)$ 
10:     $\rho_i \leftarrow AggregationMechanism.updateRanking(m, winner)$ 
11:     $setWinnerNextRound(winner, KT_{E'})$ 
12:   end for
13: end for
14: return  $\rho_i$ 

```

---

Asumiendo que cada usuario  $u_i \in U$  tiene un *ranking* sobre un subconjunto de hoteles  $E' \subset E$  (orden parcial entre las entidades  $E'$ ), luego el algoritmo conduce su operatoria para estimar y retornar un orden total entre los hoteles  $E$ , quedando este representado mediante  $\rho_i$ . La operatoria para estimar  $\rho_i$  consiste en desarrollar una cantidad  $\delta$  de veces un torneo de eliminación. Cada uno de estos torneos consisten en los siguientes pasos: en primer lugar, el algoritmo selecciona qué entidades del conjunto  $E$  participarán del torneo. Luego, se programa el torneo, es decir, se establecen las parejas de hoteles que competirán inicialmente en el torneo. Esto se corresponde con definir los nodos hojas de la jerarquía de tipo árbol que describe el *fixture* del torneo (ver Figura 7.2). Una vez programado el torneo, el mecanismo elige un conjunto de usuarios a los que les enviará la conformación de un partido entre dos hoteles para que responda, según las preferencias que modele en su orden parcial, qué hotel prefiere. Posteriormente, el mecanismo recoge las opiniones que expresan las preferencias de cada usuario consultado y determina qué hotel resulta ganador del partido. Una vez que se resuelve el partido y se determina una entidad ganadora, el mecanismo actualiza el *ranking* de reputación ( $\rho_i$ ), teniendo en cuenta las opiniones dadas (es decir, el resultado del partido). Después de esta actualización, el algoritmo compone la siguiente ronda de partidos con aquellas entidades que ganaron en la anterior. Este proceso se repite hasta que no quedan partidos en el torneo.

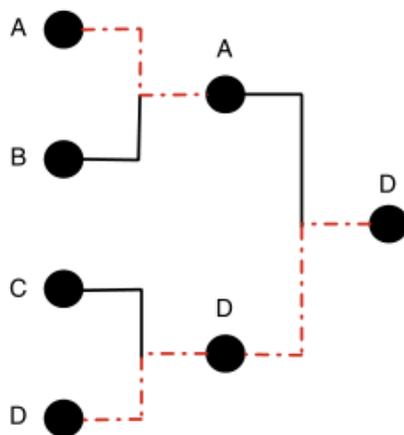


Figura 7.2: Fixture de ejemplo de un torneo compuesto por 4 jugadores: A, B, C y D.

El enfoque del mecanismo es puramente iterativo. Una vez que se ha completado un torneo, se crea un nuevo torneo con (posiblemente) un conjunto diferente de entidades. Este proceso se repite continuamente. La razón detrás de la repetitividad es que a través de las mismas, *PWRM* puede refinar y actualizar su estimación  $\rho_i$ .

Más allá de que existen varios puntos de análisis a la hora de seleccionar las políticas con las que se seleccionan los hoteles a participar en un torneo, con las que se determina el *fixture* de un torneo, o bien cómo se determina el hotel ganador correspondiente a un partido (todas estas cuestiones son analizadas por los autores), el punto más relevante a considerar en esta propuesta es la agregación de los resultados de los diferentes partidos en el orden de preferencia  $\rho_i$ . En este punto es cuando se debe determinar, cómo el *ranking* total entre hoteles es generado ( $\rho_i \leftarrow \text{AggregationMechanism.updateRanking}(m, \text{winner})$ ). Aún más interesante puede resultar cómo resolver situaciones donde se presentan resultados contradictorios, teniendo en cuenta que el orden total debe mantener la información de forma consistente. Por ejemplo, considerando dos torneos diferentes, un partido que enfrente a los hoteles  $H_1$  y  $H_2$  podría determinar en una ocasión que el hotel  $H_1$  es preferido sobre  $H_2$  y, en otro torneo, lo contrario. Esto se debe a que en cada partido se decide el hotel ganador a partir de las preferencias de los usuarios seleccionados para votar. Como estos usuarios seleccionados pueden ser diferentes, es claro que, dependiendo de sus preferencias, diferentes resultados pueden obtenerse.

Para resolver la agregación de los resultados, los autores se basan en una propuesta descrita en [NOS12]. En este trabajo, se presenta una alternativa que permite agregar

diferentes preferencias representadas mediante pares de elementos comparados. La idea detrás de esta propuesta se basa en un algoritmo de tipo *random walk* sobre un grafo donde los nodos representan objetos (hoteles), los arcos representan las conexiones entre estos (pares de comparaciones entre hoteles), y los pesos asociados a dichos arcos se interpretan como la probabilidad de que el *random walk* avance desde un determinado nodo a su nodo vecino (probabilidad de que un hotel sea preferido por sobre otro). La frecuencia con la que el *random walk* visita un nodo en particular a largo plazo, o de manera equivalente, la distribución estacionaria de Markov, representa la puntuación del nodo (hotel) correspondiente. De esta forma, mediante esta puntuación es que finalmente, los hoteles pueden ser *rankeados* en un orden total.

Los autores de [NOS12] proponen el cálculo de la distribución estacionaria de Markov mediante una matriz de transición. Esta matriz puede componerse siguiendo las siguientes intuiciones. Sea  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  el conjunto de entidades a clasificar, suponiendo que para cada entidad  $e_i \in E$  existe una puntuación ponderada  $w_{e_i} \in R^+$ . Dado un par de entidades  $e_i$  y  $e_j$  se puede mantener una función  $\Gamma_{e_i e_j}^m$  que retorna 1 si  $e_j$  es preferido por sobre  $e_i$  en el partido  $m$ , y 0 en caso contrario, con  $1 \leq m \leq k$ , siendo  $k$  la cantidad de veces que las entidades  $e_i$  y  $e_j$  han sido comparadas. Luego,  $\mathbb{P}(\Gamma_{e_i e_j}^m = 1) = \frac{w_{e_j}}{w_{e_i} + w_{e_j}}$ , esto es, la probabilidad de que  $e_j$  sea preferido sobre  $e_i$  durante un partido  $m$  es proporcional a  $\frac{w_{e_j}}{w_{e_i} + w_{e_j}}$ . Para aproximar las puntuaciones ponderadas  $w_e \in R^+$ , sea  $a_{e_i e_j} = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k \Gamma_{e_i e_j}^m$  la fracción de veces que la entidad  $e_j$  ha ganado partidos por sobre  $e_i$  en sus  $k$  comparaciones. A partir de esta medida, es posible ponderar los arcos del grafo por donde el *random walk* opera, de forma tal que un arco que conecta las entidades  $e_i$  con  $e_j$  puede estimarse como  $A_{e_i e_j} = \frac{a_{e_i e_j}}{a_{e_i e_j} + a_{e_j e_i}}$ . En particular,  $A_{e_i e_j} = 0$  si las entidades  $e_i$  y  $e_j$  no han sido comparadas. Según la *Strong Law of Large Numbers* se sabe que si  $k \rightarrow \infty$ , entonces  $A_{e_i e_j}$  converge a  $\frac{w_{e_j}}{w_{e_i} + w_{e_j}}$ . Teniendo todo esto en cuenta, los autores indican cómo la matriz de transición puede computarse. Sea  $P_{e_i e_j}$  la matriz de transición tal que  $P_{e_i e_j} = \mathbb{P}(X_{t+1} = e_j | X_t = e_i)$ , con

$$P_{e_i e_j} = \begin{cases} \frac{1}{d_{max}} \cdot A_{e_i e_j} & \text{if } e_i \neq e_j, \\ 1 - \frac{1}{d_{max} \sum_{k \neq i} A_{e_i e_k}} & \text{if } e_i = e_j \end{cases}$$

siendo  $d_{max}$  (máximo grado de un nodo) un factor que permite que la función de transición sea válida en términos de que no contenga números negativos y que la suma de todas sus filas sea 1. Finalmente, un vector de ponderaciones  $w$  sobre los arcos puede actualizarse de la siguiente forma:  $w_{e_{t+1}}^t = w_{e_t}^t \cdot P$ .

Haciendo uso de la matriz de transición descrita en [NOS12], *PWRM* define entonces la función de actualización de su orden total  $\rho_i$  tal como indica el Algoritmo 2.

---

**Algoritmo 2** Función de *scoring*

---

**Entrada:**  $G = (E, L, A), \Gamma_{e_i e_j}^m$

- 1: Compute the transition matrix  $P$  according to Eq. XX.
  - 2: Calculate the new scores vector  $w_{e_m}$ .
  - 3: *updateRanking*( $\rho_i$ ) with new scores.
- 

Como se mencionó al inicio de esta subsección, *PWRM* forma parte de una línea de investigación en la que se pueden hallar tres trabajos. En el primero de ellos [HCF14], los autores abordan principalmente la eliminación del sesgo de las calificaciones a través de la introducción del concepto de comparación por pares, describiendo y analizando cómo resulta conveniente organizar los torneos eliminatorios, en función del Algoritmo 1. En particular, en un trabajo posterior [CHF15] refinan su propuesta, optimizando la selección de usuarios que participan en las comparaciones por pares en función de la red social subyacente. Finalmente, en el tercer trabajo asociado a esta línea [CH18], los autores añaden un mecanismo para mitigar las comparaciones fraudulentas que funciona dando incentivos a los usuarios cuyas opiniones están en línea con la mayoría: en este sentido, los autores mantienen la suposición subyacente de que la mayoría siempre es honesta.

*PWRM* presenta algunas características que se asemejan a las del modelo propuesto por esta tesis. Es claro que existen dos coincidencias evidentes. Por un lado, el hecho de abordar la confianza desde un modelo de representación simbólico, mediante el uso de pares de agentes comparados. Esto, como se discutió en los Capítulos 1 y 2, permite mitigar algunos de los problemas comunes que emergen de los modelos numéricos. Por otro lado, el hecho de formalizar herramientas para operar la dinámica de la confianza.

Al analizar más precisamente el modelo de representación simbólico, algunas cuestiones pueden contrastarse. Más allá de la coincidencia en el uso de elementos de la forma  $A_i > A_j$  que sintetizan la creencia de que un agente es más creíble o más confiable que otro, el modelo presentado por esta línea de investigación desestima totalmente el dato asociado al contexto o tópico donde la información es tenida en cuenta. En las experimentaciones que los autores proponen en sus tres trabajos, se presenta como escenario de estudio las calificaciones asociadas a diferentes películas, obtenidas a partir de un *dataset* que contiene las calificaciones de diferentes usuarios sobre varias películas, todas estas recolectadas en

un sitio web especializado. En este punto, no se realiza ninguna distinción ni análisis de lo que podría ser el género de las películas, por ejemplo, a través de los cuales las calificaciones podrían contextualizarse para dar tratamiento a *rankings* de una forma más específica. De hecho, por la operatoria propuesta a partir de los torneos eliminatorios como herramienta para decidir qué agentes son los más confiables, el modelo no permitiría extenderse para considerar la contextualidad de la información, ni tampoco para permitir algún tipo de preferencia entre información que podría considerarse de una fuente más o menos fiable, o más o menos preferida. Por el contrario, el modelo propuesto en esta tesis puede, siguiendo los lineamientos del ejemplo de aplicación de la Sección 5.3 del Capítulo 5, estimar *rankings* según el género de las películas y, una vez esto, teniendo en cuenta si el usuario tiene preferencia por algún género o no, utilizar los diferentes operadores de cambio múltiple para integrar los órdenes de credibilidad de cada género dándole o no prioridad a estos, según sus preferencias.

Además de lo anterior, existe otra importante diferencia que tiene que ver con el resultado final de la integración de la información. *PWRM* está construido de forma tal que el *ranking* final que se obtiene cuando se opera, define un orden total entre agentes. Esto siempre es valioso en tanto los agentes que se comparan, puedan hacerlo a partir de la información disponible. Sin embargo, cuando es el modelo de representación el que fuerza el orden total, como en el caso de *PWRM*, por el uso de una herramienta numérica, esto podría ser poco conveniente. Nuevamente, el formalismo para operar los cambios múltiples sobre órdenes de credibilidad propuestos en esta tesis, admiten que el orden de credibilidad resultante sea un orden parcial. Aun más, esta condición frente al orden resultante (parcial o total) depende únicamente de la información disponible, y no de la herramienta que se utiliza para integrar la información. Si existe información que permite comparar a todos los agentes, el orden será total, en tanto que, cuando la información así no lo permita, el orden será parcial. En cualquier caso, esto dependerá de la información disponible, y no de la metodología o las herramientas utilizadas para integrar los datos.

Finalmente, también se pueden reconocer diferencias entre los formalismos, en cuanto al tratamiento de la dinámica de la confianza. En el caso de *PWRM*, aunque el mecanismo de integración de la información se centra en las probabilidades que se estiman haciendo uso de un algoritmo de tipo *random walk*, no pueden dejar de mencionarse varias políticas que deben ser correctamente configuradas para no condicionar el resultado. En este sentido, note que *PWRM* debe definir concretamente cuatro políticas que podrían influir en

el *ranking* final obtenido: la primera, respecto de la generación de los *fixtures* que indican qué agente se compara con cuál otro, en el torneo eliminatorio; la segunda, respecto de los agentes a los que se le consultan la preferencia para determinar qué agente resulta ganador de un determinado partido; la tercera, respecto de cómo se consideran los votos en cada partido, para determinar un ganador; la cuarta y última, respecto de qué distribución de probabilidad tiene el *random walk*, antes de iniciar con el primer torneo.

Aunque los autores caracterizan algunas posibles configuraciones para todos estos parámetros, no deja de ser cuestionable que el formalismo presente una amplia gama de potenciales puntos conflictivos para hallar una configuración que no termine sesgando el resultado. Por el contrario, en esta tesis el formalismo para integrar la información resulta más simplista, en tanto que las únicas intervenciones que podrían condicionar el resultado pueden resumirse en: la función de incisión que se utilice para seleccionar qué elementos no formarán parte de la revisión o mezcla; y la taxonomía de contextos, que configura el orden en el que los órdenes de credibilidad pueden ser revisados, a la hora de extender un orden de credibilidad. No obstante, en el caso de la taxonomía de contextos, esta puede ser definida directamente por el usuario y, de esta forma, contempla las preferencias que este quiere representar. Además, la función de incisión también podría adaptarse a la aplicación en particular donde las herramientas propuestas en este tesis podrían usarse. En resumen, estos condicionantes de la integración bien pueden ser adaptados o definidos por el usuario, permitiendo así una herramienta que garantiza resolver la integración de forme acorde al problema.

## 7.2. Dinámica de la credibilidad

Como se mencionó en el Capítulo 2, existen trabajos en la literatura que han abordado la dinámica de la confianza entre agentes, siendo esta representada de forma simbólica a través de órdenes parciales de credibilidad. En [TFGS11], se definió un modelo de cambio completo para órdenes parciales de credibilidad. Los autores de este trabajo definieron y caracterizaron tres tipos de operadores de cambio: el operador de expansión que, dado un orden de credibilidad, permite incorporar una nueva relación a dicho orden; el operador de contracción que, dado un orden de credibilidad, permite eliminar toda derivación posible de la relación con la que se está contrayendo el orden; y un operador de revisión priorizada que, dado un orden de credibilidad, permite modificar este incorporando una

nueva relación a dicho orden, eliminando los elementos necesarios del orden original para preservar la consistencia.

Este modelo de cambio completo fue extendido, luego, en [TGFS14]. En este último trabajo, se formaliza cómo los agentes reciben y almacenan información en una base de credibilidad, y también cómo se representa la fiabilidad de la información a partir de la incorporación del concepto de agente informante. Además, se especifica qué información prevalece en el proceso de revisión priorizada, es decir, se propone un criterio basado en la fiabilidad para seleccionar qué información se debe eliminar en la revisión ante la aparición de inconsistencias. En este trabajo también se propone un operador de revisión no priorizado.

Recientemente, en [JTGG21], se presenta un modelo de confianza de propósito general, donde la confianza se modela de forma simbólica utilizando comparaciones por pares. Los valores de confianza son asociados a un valor numérico que indica la fiabilidad de dicha información. Luego, a partir de este formato de representación, los autores proponen un operador de revisión que permite abordar la dinámica de la confianza, considerando los valores de fiabilidad de la información para decidir cómo resolver las situaciones conflictivas. Note que, en este trabajo, la fiabilidad es estimada de forma numérica mientras que, en [TGFS14], la fiabilidad está asociada a la credibilidad de los agentes informantes. Finalmente, el modelo propuesto por los autores es evaluado mediante un análisis empírico, observando su comportamiento frente a diferentes escenarios y en comparación con otros modelos de representación numéricos.

Observe que, en estos trabajos y al igual que en esta tesis, se proponen operadores de cambio basados en técnicas del área de revisión de creencias. Sin embargo, y a diferencia de la propuesta de esta tesis que se centra en la dinámica de la credibilidad a través de operadores de cambio múltiple, estos enfoques proponen operadores de revisión simple, que revisan una base de credibilidad por un solo elemento de credibilidad. Con esto en mente, en lo que sigue se incluirá un análisis comparativo respecto del comportamiento de los operadores propuestos en esta tesis y los operadores de [TGFS14] y [JTGG21]. Para esto, en las Secciones 7.2.1 y 7.2.2, respectivamente, se dará una descripción breve de cada uno de estos operadores. Luego, en la Sección 7.2.3, se presentará un ejemplo de aplicación simple y, con este, se mostrará el comportamiento de estos operadores. Finalmente, algunas conclusiones frente a los resultados obtenidos, serán comentadas.

### 7.2.1. Operadores de revisión propuestos en [TGFS14]

En [TGFS14], un *Objeto de credibilidad* es definido como un par  $[T, S]$  que representa que  $S$  es el agente informante de  $T$ , y  $T = [A < B]$  es una *Tupla de credibilidad*. Una *Base de credibilidad* es un conjunto finito de *Objetos de credibilidad*. Por ejemplo,  $C^A = \{[(A < B), D], [(G < F), E], [(D < E), F]\}$  representa que la *Base de credibilidad* del agente  $A$ , donde el agente  $D$  es el agente informante de  $A < B$ , el agente  $E$  de  $G < F$  y el agente  $F$  de  $D < E$ .

En este modelo, dos operadores para la revisión de una *Base de credibilidad* por un elemento de credibilidad fueron propuestos. El primero, es un operador de *revisión priorizada*, definido mediante la *Identidad de Levi* de la siguiente forma:

$$C \otimes_{\sigma_{\downarrow}} [(A < B), S] = (C \ominus_{\sigma_{\downarrow}} (B < A)) \oplus [(A < B), S]$$

donde  $\ominus_{\sigma_{\downarrow}}$  es el operador de contracción y  $\oplus$  es un operador de expansión. El operador  $\otimes_{\sigma_{\downarrow}}$  satisface los postulados *Éxito*, *Inclusión*, *Sensatez*, *Uniformidad* y *Retención de núcleo*, los cuales fueron definidos en [TGFS14].

El segundo operador, es un operador de *revisión no priorizada*, definido como sigue:

$$C \odot_{\sigma_{\downarrow}} [(A < B), S] = \begin{cases} C \oplus [(A < B), S] & \text{Si } (B < A) \notin Cl(C) \\ C \otimes_{\sigma_{\downarrow}} [(A < B), S] & \text{Si } (B < A) \in Cl(C) \text{ y} \\ & \forall X \in Rl((B < A), C), (X < S) \in Cl(C) \\ C & \text{caso contrario} \end{cases}$$

donde  $Cl(C)$  representa la clausura transitiva de la *Base de credibilidad*  $C$ , y donde  $Rl$  es una función que retorna la *fiabilidad* de una tupla en la base dada. El operador de *revisión no priorizada* satisface los siguientes postulados: *Éxito relativo*, *Éxito débil*, *Éxito condicionado*, *Inclusión*, *Sensatez*, *Uniformidad* y *Retención segura*, los cuales fueron definidos en [TGFS14].

Observe que  $\odot_{\sigma_{\downarrow}}$  es no priorizado y, por lo tanto, no satisface el postulado de *Éxito*. De esta forma, un elemento de entrada para la *revisión no priorizada* puede ser rechazado, como puede verse a partir de la definición del operador, en su tercer caso.

### 7.2.2. Operador de revisión propuesto en [JTGG21]

En [JTGG21], un *Objeto de credibilidad* es un par  $[A > B, n]$  que representa que el agente  $A$  es estrictamente más creíble que  $B$  con una *fiabilidad*  $n$  ( $n$  es un número natural). Luego, una *Base de credibilidad* es un conjunto finito de *Objetos de credibilidad*. Por ejemplo,  $C^A = \{[A > B, 1], [G > F, 2], [D > E, 3]\}$  representa que, para el agente  $A$ ,  $A > B$  tiene fiabilidad 1,  $G > F$  tiene fiabilidad 2 y  $D > E$  tiene fiabilidad 3.

El operador de *revisión no priorizada* propuesto en [JTGG21] queda definido de la siguiente forma:

$$C \odot_{\sigma_{\downarrow}} [(A > B), x] = \begin{cases} C \setminus \{[A > B, y]\} \cup [A > B, x] & \text{Si } [A > B, y] \in C \text{ y } y < x \\ C \cup [A > B, x] & \text{Si } [A > B, y] \notin C \text{ y } (B > A) \notin Cl(C) \\ C \setminus \sigma_{\downarrow}(C_{(B-A)}) \cup [A > B, x] & \text{Si } x > Rl(B > A, C) \\ C & \text{caso contrario} \end{cases}$$

donde  $Cl(C)$  representa la clausura transitiva de la *Base de credibilidad*  $C$ , y  $Rl$  es una función que retorna la *fiabilidad* de una tupla en la base dada. El operador de *revisión no priorizada* satisface los postulados *Éxito débil*, *Éxito condicionado*, *Inclusión*, *Sensatez*, *Uniformidad* y *Retención de núcleo*, los cuales fueron definidos en [JTGG21].

### 7.2.3. Comparación de operadores

En esta sección, se comparará el comportamiento de distintos operadores que permiten direccionar la dinámica de la confianza. Para esto, se tendrán en cuenta el operador de revisión múltiple priorizada presentada en el Capítulo 3, y el operador de mezcla presentado en el Capítulo 6, así como los tres operadores de revisión priorizada y no priorizada descriptos en las Secciones 7.2.1 y 7.2.2.

Para desarrollar la comparación, considere el siguiente ejemplo de aplicación. Asuma que *Isabella*, una turista Italiana que visita Argentina, tiene acceso a tres sitios web especializados donde los usuarios valoran restaurantes (vea la Figura 7.3). Los sitios  $W_1$  y  $W_3$  usan una escala numérica, mientras que  $W_2$  usa una escala de estrellas. *Isabella* quiere usar los *rankings* de esta figura para saber cuál es el mejor restaurante. Dado que  $W_1$  tiene más usuarios registrados que  $W_2$  y  $W_2$  más usuarios registrados que  $W_3$ , entonces prefiere  $W_1$  sobre  $W_2$  y  $W_2$  sobre  $W_3$ .

<i>Restaurante</i>	$W_1$ (312403 users)	$W_2$ (118444 users)	$W_3$ (12477 users)
$R_3$	85.6	**	6.7
$R_7$	85.6	-	6.3
$R_8$	-	***	-
$R_{10}$	49.5	***	8.9
$R_{11}$	60.1	****	7

Figura 7.3: Restaurantes calificados por tres sitios web especializados  $W_1$ ,  $W_2$  y  $W_3$ .

Usando la información de la Figura 7.3, se pueden obtener los siguiente órdenes de credibilidad:  $\mathcal{O}_{W_1} = \{R_3 > R_{10}, R_3 > R_{11}, R_7 > R_{10}, R_7 > R_{11}, R_{11} > R_{10}\}$ ,  $\mathcal{O}_{W_2} = \{R_8 > R_3, R_{10} > R_3, R_{11} > R_3, R_{11} > R_8, R_{11} > R_{10}\}$  y  $\mathcal{O}_{W_3} = \{R_3 > R_7, R_{10} > R_3, R_{10} > R_7, R_{10} > R_{11}, R_{11} > R_3, R_{11} > R_7\}$ . La Figura 7.4 muestra los grafos asociados a  $\mathcal{O}_{W_1}$ ,  $\mathcal{O}_{W_2}$ , y  $\mathcal{O}_{W_3}$ .

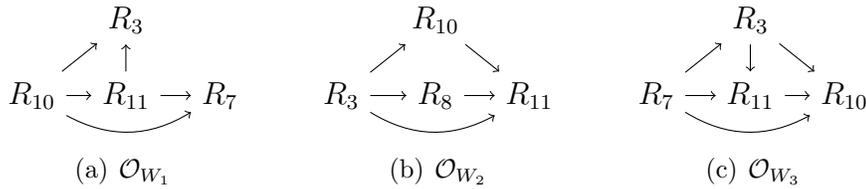


Figura 7.4: (a)-(c) muestran los grafos asociados a  $\mathcal{O}_{W_1}$ ,  $\mathcal{O}_{W_2}$ , y  $\mathcal{O}_{W_3}$  a partir de la información de la Figura 7.3.

Note que, basado en la información de  $\mathcal{O}_{W_1}$ , no es posible establecer una comparación entre todos los restaurantes considerados. Lo mismo sucede con  $\mathcal{O}_{W_2}$  y  $\mathcal{O}_{W_3}$ . Por lo tanto, es necesario integrar la información obtenida a partir de los tres sitios web, para que *Isabella* pueda decidir cuál es el mejor restaurante. En lo que sigue, se mostrará cómo esta integración puede ser llevada a cabo, utilizando los diferentes operadores de cambio mencionados anteriormente.

### Aplicando el operador de *revisión priorizada* presentado en la Sección 3.2.2

El operador de revisión múltiple priorizada presentado en la Sección 3.2.2, permite integrar la información de los tres órdenes de credibilidad del ejemplo de aplicación, respetando las preferencias que *Isabella* tiene respecto de la información de los sitios web. Para esto, se deben realizar dos revisiones. La primera, corresponde con revisar  $\mathcal{O}_{W_3}$  por  $\mathcal{O}_{W_2}$ . Luego, la segunda, corresponde con revisar el orden de credibilidad resultante de

la primera revisión, por  $\mathcal{O}_{W_1}$ . De esta forma, observe que las revisiones permiten que la información de  $\mathcal{O}_{W_1}$  se vea priorizada sobre la de  $\mathcal{O}_{W_2}$  y, a su vez, esta información se vea priorizada sobre la de  $\mathcal{O}_{W_3}$ . Tenga en cuenta que, en la revisión, se hará uso de la *Least Credible Selection Function (LCSF)* como función de incisión consolidada. La Figura 7.5 muestran los grafos asociados a  $\mathcal{O}_{W_2} \cup \mathcal{O}_{W_3}$ ,  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_{W_1}$  y  $\mathcal{O}_2$ .

- $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_{W_3} *_{\mu} \mathcal{O}_{W_2} = \{R_8 > R_3, R_{10} > R_3, R_{11} > R_3, R_{11} > R_8, R_{11} > R_{10}, R_3 > R_7, R_{10} > R_7, R_{11} > R_7\}$ .
- $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1 *_{\mu} \mathcal{O}_{W_1} = \{R_3 > R_{10}, R_3 > R_{11}, R_7 > R_{10}, R_7 > R_{11}, R_{11} > R_{10}, R_3 > R_7, R_{11} > R_8\}$ .

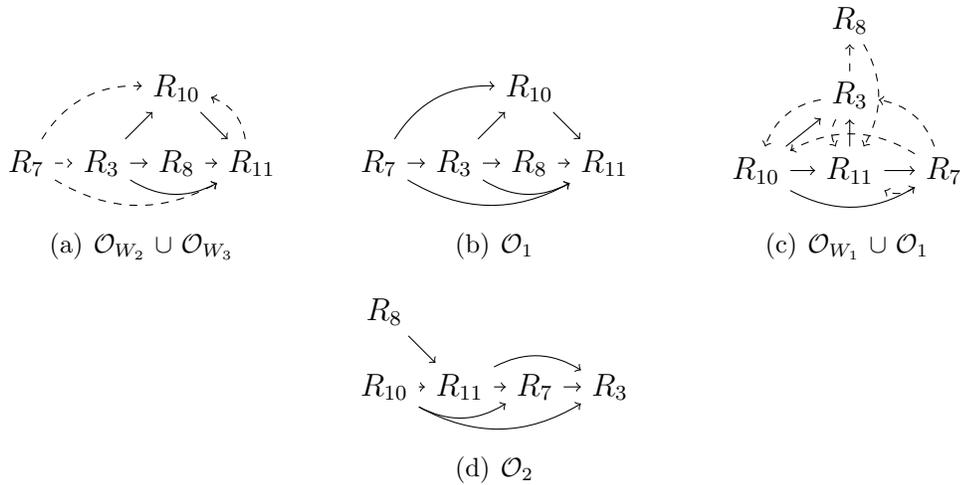


Figura 7.5: (a) muestra el grafo asociado a  $\mathcal{O}_{W_2} \cup \mathcal{O}_{W_3}$ , donde los elementos de  $\mathcal{O}_{W_3}$  son graficados con arcos punteados. (b) y (d) muestran los grafos asociados a  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ . (c) muestra el grafo asociado a  $\mathcal{O}_{W_1} \cup \mathcal{O}_1$ , donde los elementos de  $\mathcal{O}_1$  son graficados con arcos punteados.

### Aplicando el operador de *mezcla* presentado en la Sección 6.1.2

El operador de mezcla presentado en la Sección 6.1.2, permite integrar la información de los tres órdenes de credibilidad del ejemplo de aplicación, pero no permite representar la prioridad entre los sitios web dispuesta por *Isabella*. Por esta razón, se realizarán dos mezclas, sin darle importancia al orden de la mismas. En este caso, se realizará una primer mezcla de  $\mathcal{O}_{W_1}$  y  $\mathcal{O}_{W_2}$  y, el orden resultante obtenido, será mezclado, luego, con

$\mathcal{O}_{W_3}$ . Tenga en cuenta que, para operar la mezcla, se hará uso de la *Generalized Least Credible Selection Function (GLCSF)* como función de incisión generalizada. La Figura 7.6 muestran los grafos asociados a  $\mathcal{O}_{W_1} \cup \mathcal{O}_{W_2}$ ,  $\mathcal{O}_3$ ,  $\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_{W_3}$  y  $\mathcal{O}_4$ .

- $\mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_{W_1} \circ_{\sigma} \mathcal{O}_{W_2} = \{R_7 > R_{10}, R_7 > R_{11}, R_{11} > R_8\}$
- $\mathcal{O}_4 = \mathcal{O}_3 \circ_{\sigma} \mathcal{O}_{W_3} = \{R_{11} > R_8, R_{10} > R_3, R_{10} > R_{11}, R_{11} > R_3\}$

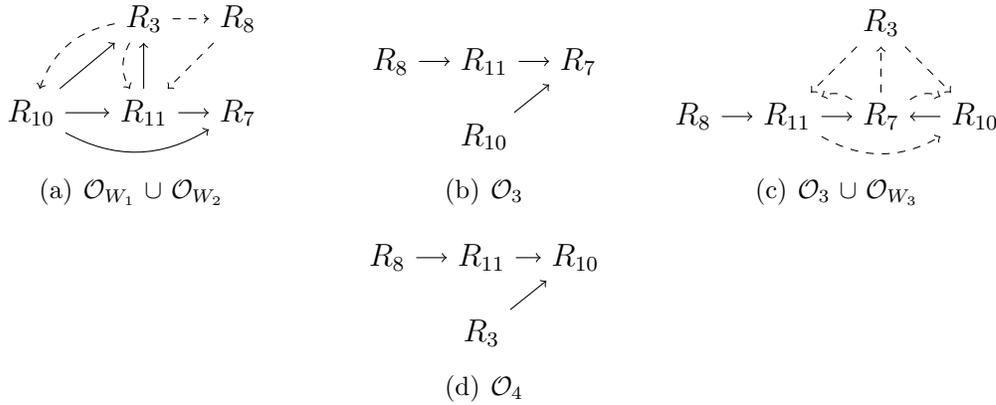


Figura 7.6: (a) muestra el grafo asociado a  $\mathcal{O}_{W_1} \cup \mathcal{O}_{W_2}$ , donde los elementos de  $\mathcal{O}_{W_2}$  son graficados con arcos punteados. (b) y (d) muestran los grafos asociados a  $\mathcal{O}_3$  y  $\mathcal{O}_4$ . (c) muestra el grafo asociado a  $\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_{W_3}$ , donde los elementos de  $\mathcal{O}_{W_3}$  son graficados con arcos punteados.

### Aplicando el operador de *revisión priorizada* presentado en la Sección 7.2.1

El operador de revisión priorizada descrito en la Sección 7.2.1, permite integrar la información de los tres órdenes de credibilidad del ejemplo de aplicación, respetando las preferencias que *Isabella* tiene respecto de la información de los sitios web. Para esto, se debe construir una *Base de credibilidad* que inicialmente contiene los siguiente elementos:  $C_0 = \{[(W_3 < W_2), I], [(W_2 < W_1), I]\}$ .

A partir de esta configuración, que representa el orden de preferencia de *Isabella* entre los tres sitios web, luego, con el operador de revisión priorizada se debe revisar iterativamente la *Base de credibilidad* considerando, uno por uno, cada elemento de credibilidad de  $\mathcal{O}_{W_1}$ ,  $\mathcal{O}_{W_2}$  y  $\mathcal{O}_{W_3}$ , siguiendo un orden determinado.

En cada paso, la *Base de credibilidad* es revisada por uno de los elementos de la siguiente secuencia:  $[(R_3 < R_{10}), W_3], [(R_3 < R_{11}), W_3], [(R_7 < R_3), W_3],$

$[(R_7 < R_{10}), W_3], [(R_7 < R_{11}), W_3], [(R_{11} < R_{10}), W_3], [(R_3 < R_8), W_2], [(R_3 < R_{10}), W_2], [(R_3 < R_{11}), W_2], [(R_8 < R_{11}), W_2], [(R_{10} < R_{11}), W_2], [(R_{10} < R_3), W_1], [(R_{10} < R_7), W_1], [(R_{10} < R_{11}), W_1], [(R_{11} < R_3), W_1], [(R_{11} < R_7), W_1].$

Observe que, la secuencia queda definida de forma tal que, primero se revisa la base con los elementos de  $\mathcal{O}_{W_3}$ , luego con los de  $\mathcal{O}_{W_2}$ , y finalmente con los de  $\mathcal{O}_{W_1}$ . En particular, los elementos de credibilidad de un mismo orden de credibilidad, fueron incorporados a la secuencia siguiendo su orden lexicográfico.

Paso	Elemento $E$	Base de Credibilidad obtenida ( $C_i = C_{i-1} \otimes_{\sigma_{\downarrow}} E$ )
0	-	$C_0 = \{[(W_3 < W_2), I], [(W_2 < W_1), I]\}$
1	$[(R_3 < R_{10}), W_3]$	$C_1 = C_0 \cup \{[(R_3 < R_{10}), W_3]\}$
2	$[(R_3 < R_{11}), W_3]$	$C_2 = C_1 \cup \{[(R_3 < R_{11}), W_3]\}$
3	$[(R_7 < R_3), W_3]$	$C_3 = C_2 \cup \{[(R_7 < R_3), W_3]\}$
4	$[(R_7 < R_{10}), W_3]$	$C_4 = C_3 \cup \{[(R_7 < R_{10}), W_3]\}$
5	$[(R_7 < R_{11}), W_3]$	$C_5 = C_4 \cup \{[(R_7 < R_{11}), W_3]\}$
6	$[(R_{11} < R_{10}), W_3]$	$C_6 = C_5 \cup \{[(R_{11} < R_{10}), W_3]\}$
7	$[(R_3 < R_8), W_2]$	$C_7 = C_6 \cup \{[(R_3 < R_8), W_2]\}$
8	$[(R_3 < R_{10}), W_2]$	$C_8 = C_7 \cup \{[(R_3 < R_{10}), W_2]\}$
9	$[(R_3 < R_{11}), W_2]$	$C_9 = C_8 \cup \{[(R_3 < R_{11}), W_2]\}$
10	$[(R_8 < R_{11}), W_2]$	$C_{10} = C_9 \cup \{[(R_8 < R_{11}), W_2]\}$
11	$[(R_{10} < R_{11}), W_2]$	$C_{11} = C_{10} \setminus \{[(R_{11} < R_{10}), W_3]\} \cup \{[(R_{10} < R_{11}), W_2]\}$
12	$[(R_{10} < R_3), W_1]$	$C_{12} = C_{11} \setminus \{[(R_3 < R_{10}), W_2], [(R_3 < R_{10}), W_3]\} \cup \{[(R_{10} < R_3), W_1]\}$
13	$[(R_{10} < R_7), W_1]$	$C_{13} = C_{12} \setminus \{[(R_7 < R_{10}), W_3]\} \cup \{[(R_{10} < R_7), W_1]\}$
14	$[(R_{10} < R_{11}), W_1]$	$C_{14} = C_{13} \cup \{[(R_{10} < R_{11}), W_1]\}$
15	$[(R_{11} < R_3), W_1]$	$C_{15} = C_{14} \setminus \{[(R_3 < R_{11}), W_2], [(R_3 < R_{11}), W_3], [(R_3 < R_8), W_2], [(R_8 < R_{11}), W_2]\} \cup \{[(R_{11} < R_3), W_1]\}$
16	$[(R_{11} < R_7), W_1]$	$C_{16} = C_{15} \setminus \{[(R_7 < R_{11}), W_3]\} \cup \{[(R_{11} < R_7), W_1]\}$

Figura 7.7: Construcción paso a paso de la *Base de credibilidad*  $C_{\otimes_{\sigma_{\downarrow}}}$ , usando el operador de revisión priorizada  $\otimes_{\sigma_{\downarrow}}$  descrito en la Sección 7.2.1.

La Figura 7.7, muestra la construcción paso a paso de la *Base de Credibilidad*. El último paso muestra la base con toda la información de los órdenes de credibilidad inferidos a partir de la Figura 7.3:  $C_{\otimes_{\sigma_{\downarrow}}} = \{[(W_3 < W_2), I], [(W_2 < W_1), I], [(R_7 < R_3), W_3], [(R_{10} < R_{11}), W_2], [(R_{10} < R_3), W_1], [(R_{10} < R_7), W_1], [(R_{10} < R_{11}), W_1], [(R_{11} < R_3), W_1], [(R_{11} < R_7), W_1]\}$ . Observe que, en la Figura 7.8, se incluye el grafo asociado al orden de credibilidad que se puede inferir a partir de la *Base de credibilidad*  $C_{\otimes_{\sigma_{\downarrow}}}$ , y los grafos asociados a los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_4$  que resultan al integrar la información del ejemplo de aplicación, pero haciendo uso de los operadores propuestos en esta tesis.

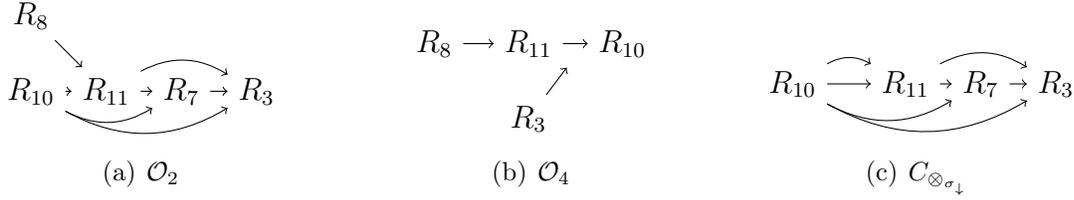


Figura 7.8: (a)-(b) muestran los grafos asociados a los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_4$  obtenidos al integrar la información del ejemplo de aplicación con los operadores de revisión y mezcla propuestos en esta tesis. (c) muestra el grafo asociado al orden de credibilidad inducido a partir de la *Base de credibilidad*  $C_{\otimes_{\sigma_{\downarrow}}}$ .

### Aplicando el operador de *revisión no priorizada* presentado en la Sección 7.2.1

El operador de revisión no priorizada descrito en la Sección 7.2.1, permite integrar la información de los tres órdenes de credibilidad del ejemplo de aplicación, respetando las preferencias que *Isabella* tiene respecto de la información de los sitios web. Para esto, al igual que con el operador priorizado mencionado en la Sección 7.2.1 se debe construir una *Base de credibilidad* que inicialmente contiene los siguiente elementos:  $C_0 = \{[(W_3 < W_2), I], [(W_2 < W_1), I]\}$ .

A partir de esta configuración, que representa el orden de preferencia de *Isabella* entre los tres sitios web, luego, con el operador de revisión no priorizada se debe revisar iterativamente la *Base de credibilidad* considerando, uno por uno, cada elemento de credibilidad de  $\mathcal{O}_{W_1}$ ,  $\mathcal{O}_{W_2}$  y  $\mathcal{O}_{W_3}$ , siguiendo un orden determinado.

En cada paso, la *Base de credibilidad* es revisada por uno de los elementos de la siguiente secuencia:  $[(R_3 < R_8), W_2], [(R_3 < R_{10}), W_2], [(R_3 < R_{10}), W_3], [(R_3 < R_{11}), W_2], [(R_3 < R_{11}), W_3], [(R_7 < R_3), W_3], [(R_7 < R_{10}), W_3], [(R_7 < R_{11}), W_3], [(R_8 < R_{11}), W_2], [(R_{10} < R_3), W_1], [(R_{10} < R_7), W_1], [(R_{10} < R_{11}), W_1], [(R_{10} < R_{11}), W_2], [(R_{11} < R_3), W_1], [(R_{11} < R_7), W_1], [(R_{11} < R_{10}), W_3]$ . Observe que, como el operador es no priorizado, los elementos en la secuencia fueron ordenados simplemente considerando su orden lexicográfico.

La Figura 7.9, muestra la construcción paso a paso de la *Base de Credibilidad*. El último paso muestra esta base con toda la información de los órdenes de credibilidad inferidos a partir de la Figura 7.3:  $C_{\otimes_{\sigma_{\downarrow}}} = \{[(W_3 < W_2), I], [(W_2 < W_1), I], [(R_7 < R_3), W_3], [(R_{10} < R_{11}), W_2], [(R_{10} < R_3), W_1], [(R_{10} < R_7), W_1], [(R_{10} < R_{11}), W_1], [(R_{11} < R_3), W_1], [(R_{11} < R_7), W_1]\}$ . Observe que, en la Figura 7.10, se incluye el grafo asociado al orden

Paso	Elemento $E$	Base de credibilidad obtenida ( $C_i = C_{i-1} \odot_{\sigma_{\downarrow}} E$ )
0	-	$C_0 = \{[(W_3 < W_2), I], [(W_2 < W_1), I]\}$
1	$[(R_3 < R_8), W_2]$	$C_1 = C_0 \cup \{[(R_3 < R_8), W_2]\}$
2	$[(R_3 < R_{10}), W_2]$	$C_2 = C_1 \cup \{[(R_3 < R_{10}), W_2]\}$
3	$[(R_3 < R_{10}), W_3]$	$C_3 = C_2 \cup \{[(R_3 < R_{10}), W_3]\}$
4	$[(R_3 < R_{11}), W_2]$	$C_4 = C_3 \cup \{[(R_3 < R_{11}), W_2]\}$
5	$[(R_3 < R_{11}), W_3]$	$C_5 = C_4 \cup \{[(R_3 < R_{11}), W_3]\}$
6	$[(R_7 < R_3), W_3]$	$C_6 = C_5 \cup \{[(R_7 < R_3), W_3]\}$
7	$[(R_7 < R_{10}), W_3]$	$C_7 = C_6 \cup \{[(R_7 < R_{10}), W_3]\}$
8	$[(R_7 < R_{11}), W_3]$	$C_8 = C_7 \cup \{[(R_7 < R_{11}), W_3]\}$
9	$[(R_8 < R_{11}), W_2]$	$C_9 = C_8 \cup \{[(R_8 < R_{11}), W_2]\}$
10	$[(R_{10} < R_3), W_1]$	$C_{10} = C_9 \setminus \{[(R_3 < R_{10}), W_2], [(R_3 < R_{10}), W_3]\} \cup \{[(R_{10} < R_3), W_1]\}$
11	$[(R_{10} < R_7), W_1]$	$C_{11} = C_{10} \setminus \{[(R_7 < R_{10}), W_3]\} \cup \{[(R_{10} < R_7), W_1]\}$
12	$[(R_{10} < R_{11}), W_1]$	$C_{12} = C_{11} \cup \{[(R_{10} < R_{11}), W_1]\}$
13	$[(R_{10} < R_{11}), W_2]$	$C_{13} = C_{12} \cup \{[(R_{10} < R_{11}), W_2]\}$
14	$[(R_{11} < R_3), W_1]$	$C_{14} = C_{13} \setminus \{[(R_3 < R_{11}), W_2], [(R_3 < R_{11}), W_3], [(R_8 < R_{11}), W_2], [(R_3 < R_8), W_2]\} \cup \{[(R_{11} < R_3), W_1]\}$
15	$[(R_{11} < R_7), W_1]$	$C_{15} = C_{14} \setminus \{[(R_7 < R_{11}), W_3]\} \cup \{[(R_{11} < R_7), W_1]\}$
16	$[(R_{11} < R_{10}), W_3]$	$C_{16} = C_{15}$

Figura 7.9: Construcción paso a paso de la *Base de credibilidad*  $C_{\odot_{\sigma_{\downarrow}}}$ , usando el operador de revisión no priorizada  $\odot_{\sigma_{\downarrow}}$  descrito en la Sección 7.2.1.

de credibilidad que se puede inferir a partir de la *Base de credibilidad*  $C_{\odot_{\sigma_{\downarrow}}}$ , y los grafos asociados a los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_4$  que resultan al integrar la información del ejemplo de aplicación, pero haciendo uso de los operadores propuestos en esta tesis.

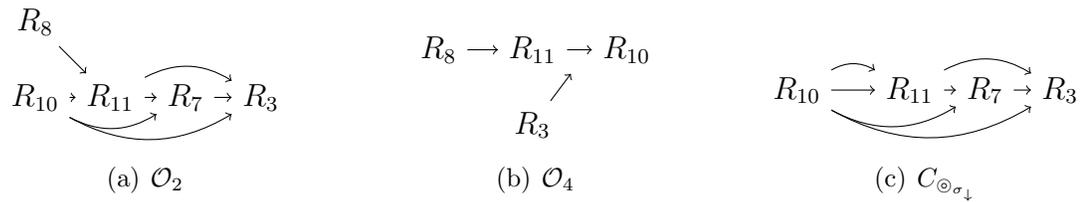


Figura 7.10: (a)-(b) muestran los grafos asociados a los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_4$  obtenidos al integrar la información del ejemplo de aplicación con los operadores de revisión y mezcla propuestos en esta tesis. (c) muestra el grafo asociado al orden de credibilidad inducido a partir de la *Base de credibilidad*  $C_{\odot_{\sigma_{\downarrow}}}$ .

### Aplicando el operador de *revisión no priorizada* presentado en la Sección 7.2.2

El operador de revisión no priorizada descrito la Sección 7.2.2, permite integrar la información de los tres órdenes de credibilidad del ejemplo de aplicación. Sin embargo, a

diferencia del enfoque seguido para construir la base de credibilidad con los operadores de [TGFS14], para utilizar el operador propuesto en [JTGG21] es necesario considerar números naturales para especificar la *fiabilidad* de cada elemento de credibilidad.

Inspirados en una propuesta de [JTGG21] para un ejemplo de aplicación similar, en lo que sigue se utilizará el número de ocurrencias de cada elemento de credibilidad entre los sitios web como el valor de *fiabilidad* de ese elemento. Por lo tanto,  $[R_{11} > R_{10}, 2]$  representa que dos sitios consideran que  $R_{11} > R_{10}$  mientras que  $[R_{10} > R_{11}, 1]$  representa que solo un sitio web considera lo contrario.

Considerando una *Base de credibilidad*  $C_0$  inicialmente vacía, luego, con el operador de revisión no priorizada se debe revisar iterativamente esta base considerando, uno por uno, cada elemento de credibilidad de  $\mathcal{O}_{W_1}$ ,  $\mathcal{O}_{W_2}$  y  $\mathcal{O}_{W_3}$ .

En cada paso, la *Base de credibilidad* es revisada por uno de los elementos de la siguiente secuencia:  $[R_{11} > R_{10}, 2]$ ,  $[R_{10} > R_3, 2]$ ,  $[R_{11} > R_3, 2]$ ,  $[R_3 > R_7, 1]$ ,  $[R_3 > R_{10}, 1]$ ,  $[R_3 > R_{11}, 1]$ ,  $[R_7 > R_{10}, 1]$ ,  $[R_7 > R_{11}, 1]$ ,  $[R_8 > R_3, 1]$ ,  $[R_{10} > R_7, 1]$ ,  $[R_{10} > R_{11}, 1]$ ,  $[R_{11} > R_7, 1]$ ,  $[R_{11} > R_8, 1]$ . Observe que, como el operador es no priorizado, los elementos en la secuencia fueron ordenados considerando su grado de fiabilidad.

Paso	Elemento $E$	Base de credibilidad obtenida ( $C_i = C_{i-1} \odot_{\sigma_{\downarrow}} E$ )
0	-	$C_0 = \{\}$
1	$[R_{11} > R_{10}, 2]$	$C_1 = C_0 \cup \{[R_{11} > R_{10}, 2]\}$
2	$[R_{10} > R_3, 2]$	$C_2 = C_1 \cup \{[R_{10} > R_3, 2]\}$
3	$[R_{11} > R_3, 2]$	$C_3 = C_2 \cup \{[R_{11} > R_3, 2]\}$
4	$[R_3 > R_7, 1]$	$C_4 = C_3 \cup \{[R_3 > R_7, 1]\}$
5	$[R_3 > R_{10}, 1]$	$C_5 = C_4$
6	$[R_3 > R_{11}, 1]$	$C_6 = C_5$
7	$[R_7 > R_{10}, 1]$	$C_7 = C_6$
8	$[R_7 > R_{11}, 1]$	$C_8 = C_7$
9	$[R_8 > R_3, 1]$	$C_9 = C_8 \cup \{[R_8 > R_3, 1]\}$
10	$[R_{10} > R_7, 1]$	$C_{10} = C_9 \cup \{[R_{10} > R_7, 1]\}$
11	$[R_{10} > R_{11}, 1]$	$C_{11} = C_{10}$
12	$[R_{11} > R_7, 1]$	$C_{12} = C_{11} \cup \{[R_{11} > R_7, 1]\}$
13	$[R_{11} > R_8, 1]$	$C_{13} = C_{12} \cup \{[R_{11} > R_8, 1]\}$

Figura 7.11: Construcción paso a paso de la *Base de credibilidad*  $C_{\odot_{\sigma_{\downarrow}}}$ , usando el operador de revisión no priorizada  $\odot_{\sigma_{\downarrow}}$  descrito en la Sección 7.2.2.

La Figura 7.11, muestra la construcción paso a paso de la *Base de Credibilidad*. El último paso muestra esta base con toda la información de los órdenes de credibilidad inferidos a partir de la Figura 7.3:  $C_{\odot_{\sigma_{\downarrow}}} = \{[R_{11} > R_{10}, 2], [R_{10} > R_3, 2], [R_{11} > R_3, 2], [R_3 >$

$R_7, 1], [R_8 > R_3, 1], [R_{10} > R_7, 1], [R_{11} > R_7, 1], [R_{11} > R_8, 1]\}$ . Observe que, en la Figura 7.12, se incluye el grafo asociado al orden de credibilidad que se puede inferir a partir de la *Base de credibilidad*  $C_{\odot\sigma\downarrow}$ , y los grafos asociados a los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_4$  que resultan al integrar también la información del ejemplo de aplicación, pero haciendo uso de los operadores propuestos en esta tesis.

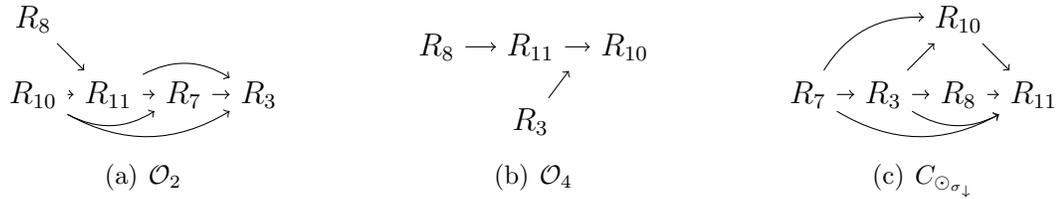


Figura 7.12: (a)-(b) muestran los grafos asociados a los órdenes de credibilidad  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_4$  obtenidos al integrar la información del ejemplo de aplicación con los operadores de revisión y mezcla propuestos en esta tesis. (c) muestra el grafo asociado al orden de credibilidad inducido a partir de la *Base de credibilidad*  $C_{\odot\sigma\downarrow}$ .

### Análisis comparativo final

A partir del modelo de representación propuesto en el Capítulo 3, y de los modelos descriptos sintéticamente tanto en el Capítulo 2 como en las Secciones 7.2.1 y 7.2.1, es claro que el modelo de representación simbólico para la confianza que se propone en esta tesis, difiere de las dos propuestas presentadas en [TGFS14] y [JTGG21].

Las diferencias pueden observarse respecto a la estructura de sus bases de credibilidad. Particularmente, se puede indicar que los dos modelos propuestos por estos autores, consideran un dato adicional denominado *fiabilidad*, que se incorpora a todo elemento de credibilidad  $A_i > A_j$ . Este dato juega un papel importante al momento de resolver las eventuales situaciones conflictivas cuando se integra información.

Como se pudo observar en las descripciones previas, tanto los operadores de [TGFS14], como el operador de [JTGG21], estiman la *fiabilidad* (función  $Rl$ ) de una tupla  $A_i > A_j$  para decidir si esta se incorpora o se rechaza al momento de modificar la base de credibilidad. Esta *fiabilidad* queda asociada al grado de credibilidad de los agentes informantes, en el caso de [TGFS14], mientras que en el caso de [JTGG21], se estima a partir de un cómputo con los valores numéricos asociados a las tuplas dentro de la base de credibilidad. Por el contrario, tanto el operador de revisión como el operador de mezcla propuestos en

esta tesis, solo hacen uso de la información que se puede inferir en cada uno de los *kernels* inconsistentes estimados. En este sentido, note que el modelo no incorpora información adicional a los elementos de credibilidad  $A_i > A_j$ , como sí hacen los modelos de [TGFS14] y [JTGG21].

Fuera de las diferencias desde el punto de vista del modelo de representación de la confianza, una clara similitud es que en todos los casos se proponen operadores que, basados en técnicas y herramientas de revisión de creencias se centran en la dinámica de la credibilidad. La principal diferencia en este sentido, es que los operadores propuestos en esta tesis son operadores de revisión múltiple (priorizada y no priorizada, este último también denominado mezcla), mientras que los autores anteriormente mencionados proponen operadores de revisión simple.

Tenga en cuenta que, si una base de credibilidad tiene que ser revisada por un conjunto de elementos de credibilidad mediante los operadores de revisión de [TGFS14] y [JTGG21], entonces un proceso de revisión iterado tiene que ejecutarse. Sin embargo, en la revisión iterada el orden en que se consideran los elementos puede afectar el resultado final. Por ejemplo, considere que un conjunto consistente  $\mathcal{O}_1$  tiene que ser revisado iterativamente por el conjunto  $\{e_1, e_2\}$  usando un operador priorizado. Considere que en la primera iteración,  $\mathcal{O}_1$  es revisado por  $e_1$ , luego, dado que el operador tiene prioridad,  $e_1$  será parte del conjunto resultante  $\mathcal{O}'_1$ . Sin embargo, en la segunda iteración, cuando  $\mathcal{O}'_1$  es revisado por  $e_2$ , puede ocurrir que  $e_1$  se excluya del orden resultante  $\mathcal{O}''_1$ . Claramente, si  $\mathcal{O}_1$  es revisado primero por  $e_2$  y luego por  $e_1$ ,  $e_1$  permanecerá mientras que  $e_2$  puede ser excluido. Por lo tanto, en la revisión priorizada, si un conjunto  $\mathcal{O}_1$  es revisado iterativamente por el conjunto  $\{e_1, e_2\}$ , hay tres posibles resultados: ambos elementos permanecen,  $e_1$  permanece o  $e_2$  permanece. Por el contrario, en nuestro enfoque, si  $\mathcal{O}_1$  es revisado por  $\{e_1, e_2\}$ , como lo establece el postulado **P2**, aseguramos que tanto  $e_1$  como  $e_2$  permanecerán en la base de credibilidad resultante.

Finalmente, con respecto a la cantidad de cómputo requerida para realizar las revisiones, es posible indicar que la propuesta de esta tesis toma menor cantidad de pasos para integrar dos órdenes de credibilidad. En [TGFS14] y [JTGG21], cada vez que se revisa la base de credibilidad con un nuevo elemento, se debe realizar un proceso de verificación de consistencia para garantizar la sensatez de la base de credibilidad. Para esa verificación de consistencia, se debe verificar la existencia de ciclos en el gráfico asociado. Por el

contrario, cuando se revisa o mezcla dos órdenes haciendo uso de los operadores de esta tesis, el proceso de detección de ciclos se realiza una sola vez.



# Capítulo 8

## Conclusiones y trabajo futuro

Como fue indicado al introducir esta tesis, los modelos de confianza computacional han sido reconocidos como un factor clave en el diseño e implementación de los *Sistemas Multi-Agente*. Esto se debe a que en ese tipo de sistemas, se requiere de mecanismos que permitan reconocer cuáles son los agentes más confiables. Los modelos de confianza son dispositivos computacionales que permiten, tanto a los agentes humanos como a los agentes de software, estimar la confiabilidad de los agentes con los que van a interactuar. Hoy en día, es común que un comprador verifique la reputación de un vendedor antes de realizar una compra en línea, o que una aplicación en un sistema abierto y distribuido, estime cuál es la confiabilidad de una contraparte potencial antes de comprometerse con una interacción.

En un *Sistema Multi-Agente*, es natural que un agente le asigne diferentes grados de confianza a los agentes con los que interactúa. Es más, esos valores de confianza dependen significativamente del contexto o tópico donde dicha valoración es realizada. Por esta razón, en este trabajo se estableció un modelo de representación donde la confianza se representa de forma simbólica y contextualizada, haciendo uso de órdenes parciales de credibilidad. Este formato de representación se basa en un enfoque cualitativo, donde la confianza se modela mediante elementos de credibilidad  $A_i > A_j$  que indican que un agente  $A_i$  es estrictamente más creíble que otro  $A_j$ . De esta forma, los órdenes parciales de credibilidad representan el conjunto de creencias que un agente tiene respecto de la confianza de otros agentes en un determinado contexto. Particularmente, se favoreció el uso de la palabra credibilidad para referir a la confianza de los agentes, ya que esta palabra tiene un sentido intuitivo que ayuda a comprender los problemas relacionados.

Los diferentes valores de confianza asignados entre agentes representan valoraciones que pueden modificarse con el tiempo. En consecuencia, los órdenes parciales de credibilidad no necesariamente permanecen estáticos. Con esto en mente, esta tesis abordó el tratamiento de la dinámica de los valores de confianza, haciendo uso de técnicas del área de revisión de creencias. Se propusieron dos operadores de revisión múltiple que permiten modificar las creencias que un agente mantiene asociadas a la credibilidad de los agentes con los que interactúa. Los operadores se diferenciaron respecto a la prioridad o no que le asignan a uno de los órdenes de credibilidad que intervienen en la revisión. Esta prioridad, es especialmente importante a la hora de resolver las potenciales inconsistencias que surgen al integrar la información de estos órdenes. Los operadores fueron descritos a partir de un conjunto de postulados característicos que especifican el comportamiento esperado por los mismos, así como también presentando sus respectivas construcciones, esto es, especificando los mecanismos internos que permiten obtener el comportamiento esperado. Para ambos operadores, se presentó un teorema de representación que determina que cualquier operador que satisface los postulados característicos puede generarse a partir de las construcciones propuestas, respectivamente.

Como el modelo de representación propuesto representa la confianza de forma contextualizada, en esta tesis se presentó la noción de taxonomía de contextos. Una taxonomía de contextos permite relacionar los diferentes contextos considerados. Particularmente, dos relaciones especialmente conocidas en Ciencias de la Computación pueden representarse: la relación de especialización, y la relación de preferencia. A partir de la taxonomía de contextos, fueron desarrolladas dos funciones que permiten extender el orden de credibilidad de un determinado contexto con la información de otro orden asociado a otro contexto relacionado. Las extensiones permiten integrar la información de un determinado orden de credibilidad con la información que proviene de otro orden de credibilidad relacionado. Esto es especialmente útil para resolver diferentes situaciones tales como, la falta de información, o la incomparabilidad entre dos agentes para los que no se ha establecido una relación de orden en cuanto a su credibilidad. El proceso de extensión fue especificado de forma tal que, el orden de credibilidad resultante, sea consistente. De esta forma, ante la aparición de inconsistencias, es la taxonomía de contextos la que fija la preferencia de la información. Si durante la integración algunos elementos entran en conflicto, entonces, la información del orden de credibilidad asociado al contexto preferido o más específico, prevalece en la extensión.

En esta propuesta, se asume que los órdenes de credibilidad son sensatos, esto es, no presentan contradicciones. Sin embargo, tanto al momento de formalizar los operadores de revisión múltiple, como al momento de especificar las funciones que permiten extender un orden de credibilidad, se tuvo en cuenta que las situaciones conflictivas al integrar la información podrían suceder. Por esta razón, se definieron cuatro funciones de selección que permiten determinar qué elementos no formarán parte del orden de credibilidad resultante tanto de las revisiones múltiple priorizada y no priorizada, como de las extensiones que se realicen por sobre un orden de credibilidad. Cada función de selección implementa una determinada estrategia. Con el objetivo de comparar el funcionamiento de tres de ellas, se realizó un análisis cualitativo y cuantitativo. El análisis cualitativo se enfocó en observar cómo las funciones de selección pueden debilitar la credibilidad de los agentes que provienen del orden de credibilidad priorizado. Por otro lado, el análisis cuantitativo se enfocó en estudiar cómo las diferentes funciones de selección afectaban a la cantidad total de relaciones de credibilidad que se obtienen luego de una revisión priorizada haciendo uso de cada una de las funciones propuestas. En ambos casos, se pudo determinar que la *Least Credible Selection Function* es la función que mejor resultados obtiene.

Un importante aporte de este trabajo es que gran parte de todo lo formalizado, cuenta además con su correspondiente implementación computacional. En esta tesis se desarrollaron un conjunto de herramientas que permiten modelar, representar y operar los diferentes órdenes de credibilidad. Además, fue desarrollada una aplicación con interfaz gráfica de usuario. Esta aplicación permite crear y modificar diferentes órdenes de credibilidad, visualizar los mismos, y operar la revisión múltiple priorizada. La interfaz fue desarrollada de forma tal que permita visualizar de una forma simple e intuitiva el paso a paso del proceso de revisión. Para esto, se mostró cómo esta interfaz logra explicar el proceso de revisión con diferentes componentes gráficos. Esta interfaz, además, considera el hecho de poder comparar los resultados que se obtienen ante una revisión cuando se hace uso de las diferentes funciones de selección implementadas durante el desarrollo de la tesis. Esto posibilita al usuario la comparación de los resultados de una forma simple.

Para finalizar, se detallarán algunas nuevas líneas de trabajo que surgen de la investigación desarrollada, y que son de interés para continuar trabajando en el futuro cercano. Por un lado, resulta de especial interés el análisis y la integración de los mecanismos de mantenimiento de valores de confianza simbólicos como los aquí propuestos, con otros modelos que representan la confianza y reputación de forma numérica. Además, se espera

poder estudiar y proponer métodos que ya no solo consideren los valores de confianza entre agentes, sino que también permitan incorporar la noción de desconfianza. Finalmente, dado que la dinámica de la confianza fue abordada considerando herramientas del área de revisión de creencias, también se espera poder analizar e integrar al modelo de representación propuesto, herramientas del área de argumentación a través de las cuales se puedan especificar diferentes criterios para resolver los conflictos que surgen al integrar la información de dos órdenes de credibilidad sensatos.

# Apéndice A

## Pruebas Formales

**Proposición 3.1:** *Sea  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos. Luego,  $\mathcal{O}_2 \cap \bigcup(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) = \emptyset$ .*

*Demostración.*

Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos. Se debe mostrar que  $\mathcal{O}_2 \cap \bigcup(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) = \emptyset$ . Por *reducción al absurdo*, suponga que  $\mathcal{O}_2 \cap \bigcup(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) \neq \emptyset$ . Luego, existe algún  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  tal que  $A_i > A_j \in \mathcal{X}$  y  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_2$ . Por Definición 3.4, se tiene que:

1.  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_1$
2.  $\mathcal{X} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato.
3. Para cualquier conjunto  $\mathcal{X}'$  tal que  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_1$  entonces  $\mathcal{X}' \cup \mathcal{O}_2$  es sensato.

Esto conduce a un absurdo. De hecho, la condición (3) no se satisface porque  $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \setminus \{A_i > A_j\}$  es tal que  $\mathcal{X}' \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato debido a (2) y el hecho de que  $\mathcal{X}' \cup \mathcal{O}_2$  es igual a  $\mathcal{X} \cup \mathcal{O}_2$ , ya que  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_2$ . El absurdo proviene de la suposición inicial que indica que  $\mathcal{O}_2 \cap \bigcup(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) \neq \emptyset$ . Por lo tanto,  $\mathcal{O}_2 \cap \bigcup(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) = \emptyset$ .  $\square$

**Teorema 3.1:** *Un operador  $*_\mu$  es una revisión múltiple priorizada de tipo kernel de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$  si y solo si satisface inclusión, éxito, sensatez, uniformidad y retención de núcleo.*

*Demostración.*

▷ **Desde la Construcción a los Postulados:**

Sea  $\mu$  una función de incisión consolidada arbitraria para un orden de credibilidad sensato  $\mathcal{O}_1$  y sea  $*_\mu$  la revisión múltiple priorizada de tipo *kernel* en  $\mathcal{O}_1$  generada por  $\mu$ . Luego, para todo orden de credibilidad sensato  $\mathcal{O}_2$ :

$$\mathcal{O}_1 *_\mu \mathcal{O}_2 = (\mathcal{O}_1 \setminus \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)) \cup \mathcal{O}_2$$

Se debe mostrar que  $*_\mu$  satisface todos los postulados enumerados.

**P1 - Inclusión:**  $\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$

Esto sigue directamente de la Definición 3.6, que indica que  $\mathcal{O}_1 *_\mu \mathcal{O}_2 = (\mathcal{O}_1 \setminus \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)) \cup \mathcal{O}_2$ .

**P2 - Éxito:**  $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$

Sea  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_2$ . De la Proposición 3.1, sigue que  $A_i > A_j \notin \mathcal{X}$ , para cada  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ . Luego, por la Definición 3.5, se tiene que  $A_i > A_j \notin \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$  y, además, de la Definición 3.6, sigue que  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_1 *_\mu \mathcal{O}_2$ . Como esto es válido para un elemento arbitrario  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_2$ , luego,  $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1 *_\mu \mathcal{O}_2$ .

**P3 - Sensatez:**  $\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$  es sensato.

Por *reducción al absurdo*, suponga que  $\mathcal{O}_1 *_\mu \mathcal{O}_2$  no es sensato. Luego, existe  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_1 *_\mu \mathcal{O}_2$  tal que  $\mathcal{X} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato y cualquier subconjunto  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$  es tal que  $\mathcal{X}' \cup \mathcal{O}_2$  es sensato. Como  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_1 *_\mu \mathcal{O}_2$ , a partir de la Definición 3.6 sigue que  $\mathcal{X} \cap \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) = \emptyset$ . Sin embargo, por la Definición 3.4, se puede asegurar que  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ , y así, por la Definición 3.5, se tiene que  $\mathcal{X} \cap \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) \neq \emptyset$ . Luego, se concluye  $\mathcal{X} \cap \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) = \emptyset$  y  $\mathcal{X} \cap \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) \neq \emptyset$ , un absurdo que proviene de la suposición inicial que indica que  $\mathcal{O}_1 *_\mu \mathcal{O}_2$  no es sensato. Por lo tanto,  $\mathcal{O}_1 *_\mu \mathcal{O}_2$  es sensato.

**P4 - Uniformidad:** Para todo subconjunto  $\mathcal{Y}$  de  $\mathcal{O}_1$ , si  $\mathcal{Y} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato si y solo si  $\mathcal{Y} \cup \mathcal{O}_3$  no es sensato, entonces  $\mathcal{O}_1 \setminus (\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2) = \mathcal{O}_1 \setminus (\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_3)$ .

Sean  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_3$  dos órdenes de credibilidad sensatos. Suponga que para todo subconjunto  $\mathcal{X}$

de  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{X} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato si y solo si  $\mathcal{X} \cup \mathcal{O}_3$  no es sensato. Luego, por la Definición 3.4,  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_3$  y dado que  $\mu$  es una función bien definida, sigue de la Definición 3.5 que  $\mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) = \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_3)$ . Además, por la Definición 3.6,  $\mathcal{O}_1 \setminus (\mathcal{O}_1 *_{\mu} \mathcal{O}_2) = \mathcal{O}_1 \setminus (\mathcal{O}_1 *_{\mu} \mathcal{O}_3)$ .

**P5 - Retención de núcleo:** Si  $e \in \mathcal{O}_1 \setminus (\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2)$  entonces existe un conjunto  $\mathcal{Y} \subseteq (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$ , tal que  $\mathcal{Y} \cup \mathcal{O}_2$  es sensato pero  $\mathcal{Y} \cup \{e\} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato.

Sea  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_1$  y  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 *_{\mu} \mathcal{O}_2$ . Por hipótesis, sigue de la Definición 3.6 que,  $A_i > A_j \in \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$ . Por la Definición 3.5, se tiene que  $\mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) \subseteq \bigcup (\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$  y, entonces, sigue que existe algún  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  tal que  $A_i > A_j \in \mathcal{X}$ . A partir de la Definición 3.4, sigue que  $\mathcal{X}$  es un subconjunto minimal de  $\mathcal{O}_1$  tal que,  $\mathcal{X} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato. Sea  $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \setminus \{A_i > A_j\}$ . Luego,  $\mathcal{Y}$  es tal que  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{Y} \cup \mathcal{O}_2$  es sensato pero  $\mathcal{Y} \cup \{A_i > A_j\} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato.

▷ *Desde los Postulados a la Construcción.*

Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos y  $*$  un operador sobre  $\mathcal{O}_1$  que satisface los postulados enumerados. Se debe mostrar que  $*$  es una revisión múltiple priorizada de tipo *kernel*. Sea  $\mu$  una función tal que, para cada  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ , sigue que:

$$(i) \quad \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) = \{e : e \in (\mathcal{O}_1 \setminus \mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2)\}$$

Se debe mostrar que:

▷ Parte A.

1.  $\mu$  es una función bien definida.

Sean  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_3$  tres órdenes de credibilidad sensatos, suponga que  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_3$ . Luego, se debe mostrar que  $\mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) = \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_3)$ . Como  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_3$ , luego para todo  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_3$ . Por lo tanto, por Definición 3.4, para todo subconjunto  $\mathcal{Y}$  de  $\mathcal{O}_1$ , vale que  $\mathcal{Y} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato si y solo si  $\mathcal{Y} \cup \mathcal{O}_3$  no es sensato. Luego, de **uniformidad**, sigue que  $\mathcal{O}_1 \setminus (\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2) = \mathcal{O}_1 \setminus (\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_3)$ . Luego, por (i):

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) &= \{e : e \in (\mathcal{O}_1 \setminus \mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2)\} \\ &= \{e : e \in (\mathcal{O}_1 \setminus \mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_3)\} \\ &= \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_3) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mu$  es una función bien definida.

2.  $\mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) \subseteq \bigcup(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$ .

Sea  $A_i > A_j \in \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$ . Luego, por (i), sigue que  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_1 \setminus \mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$ . Por **retención de núcleo**, existe algún  $\mathcal{Y}$  tal que  $\mathcal{Y} \subseteq (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$ ,  $\mathcal{Y} \cup \mathcal{O}_2$  es sensato pero  $\mathcal{Y} \cup \mathcal{O}_2 \cup \{A_i > A_j\}$  no es sensato. Ahora asuma  $\mathcal{X}$  un elemento arbitrario de  $\mathcal{Y} \cup \{A_i > A_j\} \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  (note que, como  $\mathcal{Y} \cup \{A_i > A_j\} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato y  $\mathcal{Y} \cup \mathcal{O}_2$  es sensato, entonces  $\mathcal{Y} \cup \{A_i > A_j\} \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ ). Luego,  $\mathcal{X}$  es tal que  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} \cup \{A_i > A_j\}$ ,  $\mathcal{X} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato y, para cualquier  $\mathcal{X}'$  tal que  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ , entonces  $\mathcal{X}' \cup \mathcal{O}_2$  es sensato. Por todo lo anterior, se puede concluir que  $A_i > A_j \in \mathcal{X}$  y que  $\mathcal{X} \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ . Por lo tanto, combinando la última igualdad con  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} \cup \{A_i > A_j\}$  y  $\mathcal{Y} \subseteq (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$  se puede obtener que  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_1$ . Además,  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  y, como  $A_i > A_j \in \mathcal{X}$ , se puede concluir que  $A_i > A_j \in \bigcup(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$ . Como esto es válido para un elemento arbitrario  $A_i > A_j \in \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$ , luego,  $\mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) \subseteq \bigcup(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$ .

3. Si  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  entonces  $\mathcal{X} \cap \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) \neq \emptyset$ .

Suponga que  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ , se debe mostrar que  $\mathcal{X} \cap \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) \neq \emptyset$ . Por **sensatez** se tiene que  $\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$  es sensato. Como  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ , entonces  $\mathcal{X} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato. Luego, por **éxito**,  $\mathcal{X} \not\subseteq \mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$ . En consecuencia, existe algún  $A_i > A_j \in \mathcal{X}$  tal que  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$ . Como  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_1$ , entonces  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_1$ . Por lo tanto, por (i),  $A_i > A_j \in \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$ . Como  $A_i > A_j \in \mathcal{X}$  y  $A_i > A_j \in \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$ , entonces,  $\mathcal{X} \cap \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) \neq \emptyset$ .

▷ Parte B.

$*_\mu$  es igual que  $*$ , esto es,  $\mathcal{O}_1 *_\mu \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$ , para todo orden de credibilidad sensato  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$ . Se debe mostrar que  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_1 *_\mu \mathcal{O}_2$ . De (i), sigue que  $A_i > A_j \notin \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$ . Por **inclusión**,  $\mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  y  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Por lo tanto, por Definición 3.6,  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_1 *_\mu \mathcal{O}_2$ .

( $\subseteq$ ) Sea  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$ . Se debe mostrar que  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 *_\mu \mathcal{O}_2$ . Por **éxito**,  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_2$ . Dado que, por Definición 3.6,  $\mathcal{O}_1 *_\mu \mathcal{O}_2$  es  $(\mathcal{O}_1 \setminus \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)) \cup \mathcal{O}_2$ , entonces solo resta mostrar que  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 \setminus \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$ . Para esto, considere los siguientes dos casos:

- $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1$ . Luego, sigue trivialmente que  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 \setminus \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$ .

- $A_i > A_j \in \mathcal{O}_1$ . Luego, como por hipótesis  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 * \mathcal{O}_2$ , de (i) sigue que  $A_i > A_j \in \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$  y, por lo tanto,  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 \setminus \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$ .

Luego,  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 *_{\mu} \mathcal{O}_2$ .

□

**Proposición 3.2.** *Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos y CONFLICT-SET la función definida en la Figura 3.7, luego  $\text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1) = \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ .*

*Demostración.*

( $\supseteq$ ) Sea  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ . Se debe mostrar que  $\mathcal{X} \in \text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$ . Por Definición 3.4,  $\mathcal{X} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato. Como  $\mathcal{X} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato, entonces existe un ciclo  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  tal que  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 = \mathcal{X}$ . Luego, sea  $A_i \in \text{CANDIDATES}(\mathcal{O}_1)$  un agente tal que  $A_i > A_j \in \mathcal{C}$ . Dado que  $A_i$  es considerado como uno de los agentes candidatos para identificar todos los ciclos en  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , se puede concluir que el ciclo  $\mathcal{C}$  es detectado por la función CYCLES. Además, por construcción de la función CYCLES, existe un  $\mathcal{C}' \in CSet$  tal que  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ . Note que  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  porque la función  $\text{CYCLES}(A_i, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  detecta el ciclo  $\mathcal{C}$  pero retorna solo los elementos de  $\mathcal{O}_1$  que son parte de  $\mathcal{C}$ , esto es,  $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1$ . Como  $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 = \mathcal{X}$  se puede concluir que,  $\mathcal{C}' = \mathcal{X}$  y  $\mathcal{X} \in CSet$ . Finalmente, por Definición 3.4, se tiene que para cualquier  $\mathcal{X}'$  tal que  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_1$  entonces  $\mathcal{X}' \cup \mathcal{O}_2$  es sensato. Por lo tanto, no existe un ciclo  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  tal que  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{O}_1 = \mathcal{X}'$  y  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ . Como no existe un ciclo  $\mathcal{C}_1$  entonces no existe  $\mathcal{C}'_1 \in CSet$  tal que  $\mathcal{C}'_1 = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{C}'_1 \subset \mathcal{C}'$ . Así,  $\mathcal{C}'$  es un subconjunto minimal bajo inclusión de conjuntos en  $CSet$ . Como  $\text{FILTER}(CSet)$  retorna los conjuntos minimales bajo inclusión de conjuntos de  $CSet$  y  $\mathcal{C}' = \mathcal{X}$ , entonces  $\mathcal{X} \in \text{Out}$ . Por lo tanto,  $\mathcal{X} \in \text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$ .

( $\subseteq$ ) Sea  $\mathcal{X} \in \text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$ . Se debe mostrar que  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ . Por construcción de la función CONFLICT-SET,  $\mathcal{X} \in \text{Out}$  y, además,  $\mathcal{X} \in \text{FILTER}(CSet)$ . Por construcción de la función FILTER,  $\text{Out}$  es el conjunto de conjuntos minimales bajo inclusión de conjuntos de  $CSet$ . A partir de esto último, sigue que  $\text{Out} \subseteq CSet$ . Así,  $\mathcal{X} \in \text{Out}$ ,  $\text{Out} \subseteq CSet$  y  $\mathcal{X} \in CSet$ . Luego, por Definición 3.4, para mostrar que  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  se deben mostrar las siguientes tres condiciones:

1.  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_1$ .

Por construcción de la función CYCLES,  $CSet$  es un conjunto de subconjuntos de  $\mathcal{O}_1$ , esto es, para todo  $\mathcal{C}' \in CSet$  se tiene que  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{O}_1$ . Por lo tanto, como  $\mathcal{X} \in CSet$ , entonces  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_1$ .

2.  $\mathcal{X} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato.

Por construcción de la función CYCLES,  $CSet$  es un conjunto de subconjuntos de  $\mathcal{O}_1$  que forman parte de todos los ciclos posibles de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Así, para todo  $\mathcal{C}' \in CSet$  se tiene que  $\mathcal{C}' \cup \mathcal{O}_2$  da lugar a un ciclo. Sea  $\mathcal{O} = \mathcal{X} \cup \mathcal{O}_2$ . Como un ciclo en  $\mathcal{O}$  representa que ambos,  $A_i > A_j$  y  $A_j > A_i$  pertenecen a  $\mathcal{O}^*$ , entonces  $\mathcal{O}$  no es sensato. Por lo tanto, como  $\mathcal{X} \in CSet$ , entonces  $\mathcal{X} \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato.

3. Para cualquier  $\mathcal{X}'$  tal que  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_1$  entonces  $\mathcal{X}' \cup \mathcal{O}_2$  es sensato.

Sea  $\mathcal{X} \in \text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$ . Por *reducción al absurdo*, suponga que existe un  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$  tal que  $\mathcal{X}' \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato. Debido a que  $\mathcal{X}' \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato, existe un ciclo  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  tal que  $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 = \mathcal{X}'$ . Luego, sea  $A_i \in \text{CANDIDATES}(\mathcal{O}_1)$  un agente tal que  $A_i > A_j \in \mathcal{C}$ . Debido a que  $A_i$  es considerado como uno de los agentes candidatos para identificar todos los ciclos en  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  se puede concluir que el ciclo  $\mathcal{C}$  es detectado por la función CYCLES. Además, por construcción de la función CYCLES, existe un  $\mathcal{C}' \in CSet$  tal que  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ . Note que  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  porque la función  $\text{CYCLES}(A_i, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  detecta los ciclos  $\mathcal{C}$  pero retorna solo los elementos de  $\mathcal{O}_1$  que son parte de  $\mathcal{C}$ , esto es,  $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1$ . Como  $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 = \mathcal{X}'$  se puede concluir que,  $\mathcal{C}' = \mathcal{X}'$  y  $\mathcal{X}' \in CSet$ . Luego,  $\text{FILTER}(CSet)$  retorna el conjunto minimal bajo inclusión de conjuntos de  $CSet$ . Sea  $Out$  el conjunto de conjuntos minimales bajo inclusión de conjuntos de  $CSet$ . Por construcción de la función FILTER sigue que:

- Suponga que  $\mathcal{X}' \in Out$ . Debido a que se supuso que  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ , entonces  $\mathcal{X} \notin Out$ .
- Suponga que  $\mathcal{X}' \notin Out$ . Debido a que  $\mathcal{X}' \in CSet$  entonces existe un  $\mathcal{X}'' \subset \mathcal{X}'$  tal que  $\mathcal{X}'' \in Out$ . Luego, como  $\mathcal{X}'' \subset \mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$  entonces  $\mathcal{X} \notin Out$ .

Luego, como  $\mathcal{X} \notin Out$  entonces  $\mathcal{X} \notin \text{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)$ . Pero esto es un absurdo, que proviene de la suposición inicial que indica que existe un  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$  tal que  $\mathcal{X}' \cup \mathcal{O}_2$  no es sensato. Por lo tanto, para cualquier  $\mathcal{X}'$  tal que  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_1$  entonces  $\mathcal{X}' \cup \mathcal{O}_2$  es sensato.

□

**Proposición 3.3.** Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad y **SELECT** la función definida en la Figura 3.9, luego **SELECT** es una función de incisión consolidada para  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ .

*Demostración.*

Sea  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  y  $Out$  un conjunto de elementos de credibilidad retornados por **SELECT**( $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ ). Luego, por Definición 3.5, se deben mostrar las siguientes dos condiciones:

1. **SELECT**( $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ )  $\subseteq \bigcup(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$ .

Sea  $A_i > A_j \in Out$ . Por la Observación 3.8, se tiene que  $A_i > A_j \in \mathcal{X}$ . Dado que  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ , entonces se puede concluir que  $A_i > A_j \in \bigcup(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$ . Como esto es válido para un elemento arbitrario  $A_i > A_j \in Out$ , entonces, **SELECT**( $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ )  $\subseteq \bigcup(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)$ .

2. Para cada  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  entonces  $\mathcal{X} \cap \mathbf{SELECT}(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) \neq \emptyset$ .

A partir de la Observación 3.8, se tiene que  $\mathcal{X} \cap Out \neq \emptyset$ . Luego,  $\mathcal{X} \cap \mathbf{SELECT}(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) \neq \emptyset$ . Por lo tanto, para cada  $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{X} \cap \mathbf{SELECT}(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2) \neq \emptyset$ .

□

**Proposición 3.4.** Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos y **EXTENDING-ORDER** la función definida en la Figura 3.6, luego **EXTENDING-ORDER**( $\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1$ ) implementa la revisión múltiple priorizada de tipo *kernel* de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$ .

*Demostración.*

Se debe mostrar que la función **EXTENDING-ORDER** implementa el comportamiento de un operador de revisión múltiple priorizada de tipo *kernel*, esto es, el resultado de **EXTENDING-ORDER**( $\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1$ ) se corresponde con  $\mathcal{O}_2 *_{\mu} \mathcal{O}_1$ . Esto sigue trivialmente de las Proposiciones 3.2 y 3.3. Como **CONFLICT-SET**( $\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1$ ) =  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$  y **SELECT** es una función de incisión consolidada para **CONFLICT-SET**( $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ ) así como la función  $\mu$  para  $\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2$ , entonces se puede concluir que  $\mathcal{O}_2 \cup (\mathcal{O}_1 \setminus \mathbf{SELECT}(\mathbf{CONFLICT-SET}(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)))$  es equivalente a  $(\mathcal{O}_1 \setminus \mu(\mathcal{O}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{O}_2)) \cup \mathcal{O}_2$ . Por lo tanto, **EXTENDING-ORDER**( $\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1$ ) implementa la revisión múltiple priorizada de tipo *kernel* de  $\mathcal{O}_1$  por  $\mathcal{O}_2$ . □

**Proposición 6.1.** Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos,  $\mathbb{X}$  el conjunto de  $\perp$ -kernels inconsistentes de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ , e  $\mathbb{Y}$  el conjunto de ciclos del grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Luego,  $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$ .

*Demostración.*

A partir de la Observación 3.4, tenga en cuenta que:

(i) un ciclo en el grafo asociado a  $\mathcal{O}$  es un subconjunto de  $\mathcal{O}$  que define un camino simple cerrado.

(ii) un camino simple cerrado en  $\mathcal{O}$  es una secuencia de dos o más elementos de credibilidad, en la que ningún elemento se repite, el agente más creíble del primer elemento del camino es coincidente con el agente menos creíble del último elemento del camino, y para todo par de elementos consecutivos  $A_i > A_j$  y  $A_k > A_l$  en el camino, sigue que  $A_j = A_k$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $\mathcal{X} \in \mathbb{Y}$  un ciclo del grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Se debe mostrar que  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$ , esto es,  $\mathcal{X}$  es un  $\perp$ -kernel inconsistente de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Luego, por Definición 6.1, para mostrar que  $\mathcal{X} \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$  se deben mostrar las siguientes tres condiciones:

1.  $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$ .

Esto sigue trivialmente de (i), considerando que, por hipótesis,  $\mathcal{X}$  es un ciclo del grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ .

2.  $\mathcal{X}$  no es sensato.

Considerando (i) y (ii), luego,  $\mathcal{X}$  es de la forma  $\{A_i > A_j, \dots, A_k > A_i\}$ . Suponga  $\mathcal{O} = \mathcal{X}$ . Luego,  $A_i > A_j \in \mathcal{O}^*$  y  $A_j > A_i \in \mathcal{O}^*$ . Por Definición 3.2, sigue que  $\mathcal{O}$  no es sensato. Como  $\mathcal{O} = \mathcal{X}$ , entonces,  $\mathcal{X}$  no es sensato.

3. Para cualquier  $\mathcal{X}'$  tal que  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X} \subseteq (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$  entonces  $\mathcal{X}'$  es sensato.

Asuma  $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \setminus \{A_i > A_j\}$ . Dado que, por (i),  $\mathcal{X}$  es un camino simple cerrado, luego, al eliminar cualquier elemento de este camino, este deja de ser cerrado. En consecuencia,  $\mathcal{X}'$  no representa un ciclo. Sea  $\mathcal{O} = \mathcal{X}'$ . Como el grafo asociado a  $\mathcal{O}$  es acíclico, luego,  $\mathcal{O}$  es sensato. Entonces,  $\mathcal{X}'$  es sensato.

( $\subseteq$ ) Sea  $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$  un  $\perp$ -kernel inconsistente de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Se debe mostrar que  $\mathcal{X} \in \mathbb{Y}$ , esto es,  $\mathcal{X}$  es un ciclo del grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Por Definición 6.1,  $\mathcal{X}$  es no sensato. Luego, asuma  $\mathcal{O} = \mathcal{X}$ . Como  $\mathcal{X}$  no es sensato, entonces  $\mathcal{O}$  no es sensato. Por lo

tanto, existen  $A_i > A_j$  y  $A_j > A_i$  que pertenecen a  $\mathcal{O}^*$ . Luego, es posible definir un camino simple cerrado con los elementos que forman parte de  $\mathcal{O}$ . De esta forma, por (i), existe un ciclo en el grafo asociado  $\mathcal{O}$ . Como  $\mathcal{O} = \mathcal{X}$ , entonces,  $\mathcal{X}$  define un ciclo en el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Por lo tanto,  $\mathcal{X} \in \mathbb{Y}$ .

□

**Teorema 6.1.** *Un operador  $\circ_\sigma$  es una mezcla de tipo kernel de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  si y solo si este satisface inclusión, sensatez, reversión y retención de núcleo global.*

*Demostración.*

▷ **Desde la Construcción a los Postulados:**

Sea  $\sigma$  una función de incisión generalizada arbitraria y sea  $\circ_\sigma$  la mezcla de tipo *kernel*. Luego, para todo orden de credibilidad sensato  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ :

$$\mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2 = (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp)$$

Se debe mostrar que  $\circ_\sigma$  satisface todos los postulados enumerados.

**P1 - Inclusión:**  $\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$

Esto sigue directamente de la Definición 6.3, que indica que  $\mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2 = (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp)$ .

**P2 - Sensatez:**  $\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2$  es sensato.

Por *reducción al absurdo*, suponga que  $\mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2$  no es sensato. Luego, existe  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2$  tal que  $\mathcal{X}$  no es sensato y cualquier subconjunto  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$  es tal que  $\mathcal{X}'$  es sensato. Como  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2$ , a partir de la Definición 6.3, sigue que  $\mathcal{X} \cap \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp) = \emptyset$ . Sin embargo, por la Definición 6.1, se puede asegurar que  $\mathcal{X} \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp$ , y así, por la Definición 6.2, se tiene que  $\mathcal{X} \cap \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp) \neq \emptyset$ . Luego, se concluye  $\mathcal{X} \cap \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp) = \emptyset$  y  $\mathcal{X} \cap \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp) \neq \emptyset$ , un absurdo que proviene de la suposición inicial que indica que  $\mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2$  no es sensato. Por lo tanto,  $\mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2$  es sensato.

**P3 - Reversión:** Si  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4$  tienen el mismo conjunto de subconjuntos minimales inconsistentes, entonces  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2 = (\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4) \setminus \mathcal{O}_3 \circ \mathcal{O}_4$ .

Sean  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3$  y  $\mathcal{O}_4$  cuatro órdenes de credibilidad sensatos. Suponga que  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  tiene los mismos subconjuntos minimales no sensatos que  $\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4$ . Luego, por la Definición 6.1,  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp = (\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4) \perp\!\!\!\perp \perp$  y, dado que  $\sigma$  es una función bien definida, sigue de la Definición 6.2 que  $\sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp) = \sigma((\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4) \perp\!\!\!\perp \perp)$ . Se debe mostrar que  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2 = (\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4) \setminus \mathcal{O}_3 \circ \mathcal{O}_4$ .

( $\supseteq$ ) Si  $A_i > A_j \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2$  entonces,  $A_i > A_j \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$ ,  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2$ , y por la Definición 6.3,  $A_i > A_j \in \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp)$ . Luego, por Definición 6.2,  $A_i > A_j \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$ . Por hipótesis,  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp = (\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4) \perp\!\!\!\perp \perp$ . En consecuencia,  $A_i > A_j \in (\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4) \perp\!\!\!\perp \perp$  y, por la Definición 6.1,  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4$ . Luego, como  $\sigma$  es una función bien definida, sigue de la Definición 6.2 que  $A_i > A_j \in \sigma((\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4) \perp\!\!\!\perp \perp)$ . Entonces,  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4$  y  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_3 \circ \mathcal{O}_4$ . Como esto es válido para un elemento arbitrario  $A_i > A_j \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2$ , luego,  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2 \subseteq (\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4) \setminus \mathcal{O}_3 \circ \mathcal{O}_4$ .

( $\subseteq$ ) Sigue trivialmente, por simetría con la prueba para ( $\supseteq$ ).

**P4 - Retención de núcleo global:** Si  $e \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus (\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2)$  entonces existe un conjunto  $\mathcal{Y} \subseteq (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$ , tal que  $\mathcal{Y}$  es sensato pero  $\mathcal{Y} \cup \{e\}$  no es sensato.

Sea  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \setminus (\mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2)$ . Por lo tanto,  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  y  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2$ . Como  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2$ , entonces  $A_i > A_j \in \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp)$ . Por la Definición 6.2, se tiene que  $\sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp) \subseteq \bigcup((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp)$  y, entonces, existe algún  $\mathcal{X} \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$  tal que  $A_i > A_j \in \mathcal{X}$ . A partir de la Definición 6.1, sigue que  $\mathcal{X}$  es un subconjunto minimal no sensato de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Sea  $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \setminus \{A_i > A_j\}$ . Luego,  $\mathcal{Y}$  es tal que  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{Y}$  es sensato pero  $\mathcal{Y} \cup \{A_i > A_j\}$  no es sensato.

▷ *Desde los Postulados a la Construcción.*

Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos y  $\circ$  un operador que satisface los postulados enumerados. Se debe mostrar que  $\circ$  es una mezcla de tipo *kernel*. Sea  $\sigma$  una función tal que, para cada  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ , sigue que:

$$(i) \quad \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp) = \{e : e \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2\}$$

Se debe mostrar que:

▷ Parte A.

1.  $\sigma$  es una función bien definida.

Sean  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_3$  y  $\mathcal{O}_4$  cuatro órdenes de credibilidad sensatos, suponga que  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp = (\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4) \perp\!\!\!\perp \perp$ . Luego, se debe mostrar que  $\sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp) = \sigma((\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4) \perp\!\!\!\perp \perp)$ . Por hipótesis,  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  y  $\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4$  tienen el mismo conjunto de subconjuntos minimales inconsistentes. Entonces, de **reversión** sigue que  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2 = (\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4) \setminus \mathcal{O}_3 \circ \mathcal{O}_4$ . Luego, por (i):

$$\begin{aligned} \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp) &= \{e : e \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2\} \\ &\quad \{e : e \in (\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4) \setminus \mathcal{O}_3 \circ \mathcal{O}_4\} \\ &\quad \sigma((\mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4) \perp\!\!\!\perp \perp) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\sigma$  es una función bien definida.

2.  $\sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp) \subseteq \bigcup((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp)$ .

Sea  $A_i > A_j \in \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp)$ . Luego, por (i),  $A_i > A_j \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2$ . Por **retención de núcleo global**, existe algún  $\mathcal{Y}$  tal que  $\mathcal{Y} \subseteq (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$ ,  $\mathcal{Y}$  es sensato pero  $\mathcal{Y} \cup \{A_i > A_j\}$  no es sensato. Como  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , entonces existe un  $\perp$ -kernel  $\mathcal{X} \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , esto es, un subconjunto minimal no sensato de  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ , tal que  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} \cup \{A_i > A_j\}$  y, además,  $A_i > A_j \in \mathcal{X}$ . Como  $\mathcal{X} \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$ , luego,  $A_i > A_j \in \bigcup((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp)$ . Por lo tanto, como esto es válido para un elemento arbitrario  $A_i > A_j \in \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp)$ , luego,  $\sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp) \subseteq \bigcup((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp)$ .

3. Para cada  $\mathcal{X} \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$  entonces  $\mathcal{X} \cap \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp) \neq \emptyset$ .

Suponga que  $\mathcal{X} \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$ , se debe mostrar que  $\mathcal{X} \cap \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp) \neq \emptyset$ . Por **sensatez** se tiene que  $\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2$  es sensato. Como  $\mathcal{X}$  no es sensato, entonces  $\mathcal{X} \not\subseteq \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2$ . Esto significa que existe algún  $A_i > A_j \in \mathcal{X}$  tal que  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2$ . Como  $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$ , entonces,  $A_i > A_j \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2$ . Luego,  $A_i > A_j \in \mathcal{X}$  y por (i),  $A_i > A_j \in \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp)$ . Por lo tanto,  $\mathcal{X} \cap \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp) \neq \emptyset$ .

▷ Parte B.

$\circ_\sigma$  es igual que  $\circ$ , esto es,  $\mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2$ , para todo orden de credibilidad sensato  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ .

- ( $\supseteq$ ) Sea  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2$ . Se debe mostrar que  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2$ . Por **inclusión**, se tiene que  $\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Luego, vale que  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$  y, además, por (i) sigue que  $A_i > A_j \notin \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp)$ . En consecuencia,  $A_i > A_j \in \mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2$ .

( $\subseteq$ ) Sea  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2$ . Se debe mostrar que  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2$ . Por **inclusión**, se tiene que  $\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Luego, considere los siguientes dos casos:

- $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Luego, sigue trivialmente que  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2$ .
- $A_i > A_j \in \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Como por hipótesis  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2$ , entonces,  $A_i > A_j \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2$ . De (i), sigue que  $A_i > A_j \in \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp)$ . Entonces,  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2$ .

Luego,  $A_i > A_j \notin \mathcal{O}_1 \circ_\sigma \mathcal{O}_2$ .

□

**Proposición 6.2.** Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos y CYCLES-SET la función definida en la Figura 6.6, luego  $\text{CYCLES-SET}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$ .

*Demostración.*

( $\supseteq$ ) Sea  $\mathcal{X} \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$ . Se debe mostrar que  $\mathcal{X} \in \text{CYCLES-SET}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ . Por Proposición 6.1, sigue que  $\mathcal{X}$  corresponde a un ciclo en el grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Luego, por construcción, CYCLES-SET computa y retorna todos los ciclos del grafo asociado a  $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ . Por lo tanto,  $\mathcal{X} \in \text{CYCLES-SET}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ .

( $\subseteq$ ) Sigue trivialmente, por simetría con la prueba para ( $\supseteq$ ).

□

**Proposición 6.3.** Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad y SELECT la función definida en la Figura 6.8, luego SELECT es una función de incisión generalizada para  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$ .

*Demostración.*

Sea  $\mathcal{X} \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp$  y  $Out$  un conjunto de elementos de credibilidad retornados por  $\text{SELECT}((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp\!\!\!\perp \perp)$ . Luego, por Definición 6.2, se deben mostrar las siguientes dos condiciones:

1.  $\text{SELECT}((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp) \subseteq \bigcup((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp)$ .

Sea  $A_i > A_j \in \text{Out}$ . Por la Observación 6.1, se tiene que  $A_i > A_j \in \mathcal{X}$ . Dado que  $\mathcal{X} \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp$ , entonces se puede concluir que  $A_i > A_j \in \bigcup((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp)$ . Como esto es válido para un elemento arbitrario  $A_i > A_j \in \text{Out}$ , entonces,  $\text{SELECT}((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp) \subseteq \bigcup((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp)$ .

2. Para cada  $\mathcal{X} \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp$  entonces  $\mathcal{X} \cap \text{SELECT}((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp) \neq \emptyset$ .

A partir de la Observación 6.1, se tiene que  $\mathcal{X} \cap \text{Out} \neq \emptyset$ . Por lo tanto, para cada  $\mathcal{X} \in (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp$ , vale  $\mathcal{X} \cap \text{SELECT}((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp) \neq \emptyset$ .

□

**Proposición 6.4.** Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  dos órdenes de credibilidad sensatos y MERGING-ORDER la función especificada en la Figura 6.5, luego  $\text{MERGING-ORDER}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  implementa la mezcla de tipo kernel de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ .

*Demostración.*

Se debe mostrar que la función MERGING-ORDER implementa el comportamiento del un operador de mezcla de tipo *kernel*, esto es, el resultado de  $\text{MERGING-ORDER}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  se corresponde con  $\mathcal{O}_2 \circ_\sigma \mathcal{O}_1$ . Esto sigue trivialmente de las Proposiciones 6.2 y 6.3. Como  $\text{CYCLES-SET}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp$  y  $\text{SELECT}$  es una función de incisión generalizada para  $\text{CYCLES-SET}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  así como la función  $\sigma$  para  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp$ , entonces se puede concluir que  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \text{SELECT}(\text{CYCLES-SET}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2))$  es equivalente a  $(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \setminus \sigma((\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \perp \perp \perp)$ . Por lo tanto,  $\text{MERGING-ORDER}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  implementa la mezcla tipo *kernel* de  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$ . □

# Bibliografía

- [AFGL10] AGUDO, I., FERNANDEZ-GAGO, C., AND LOPEZ, J. A scale based trust model for multi-context environments. *Computers & Mathematics with Applications* 60, 2 (2010), 209 – 216. Advances in Cryptography, Security and Applications for Future Computer Science.
- [AGM85] ALCHOURRÓN, C., GÄRDENFORS, P., AND MAKINSON, D. On the Logic of Theory Change: Partial Meet Contraction and Revision Functions. *The Journal of Symbolic Logic* 50 (1985), 510–530.
- [AM81] ALCHOURRÓN, C. E., AND MAKINSON, D. Hierarchies of regulations and their logic. 125–148.
- [AM85] ALCHOURRÓN, C. E., AND MAKINSON, D. On the logic of theory change: Safe contraction. *Studia Logica* 44, 4 (1985), 405–422.
- [Ama] AMAZON. <https://www.amazon.com>. World Wide Web.
- [ARH00] ABDUL-RAHMAN, A., AND HAILES, S. Supporting trust in virtual communities. In *33rd Annual Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS-33), 4-7 January, 2000, Maui, Hawaii, USA* (2000), IEEE Computer Society.
- [BC12] BALAKRISHNAN, S., AND CHOPRA, S. Two of a kind or the ratings game? adaptive pairwise preferences and latent factor models. *Frontiers of Computer Science* 6, 2 (2012), 197–208.
- [Boo] BOOKING. <https://www.booking.com>. World Wide Web.
- [Can98] CANTWELL, J. Resolving conflicting information. *Journal of Logic, Language and Information* 7, 2 (1998), 191–220.

- [CF10] CASTELFRANCHI, C., AND FALCONE, R. *Trust theory: A socio-cognitive and computational model*, vol. 18. John Wiley & Sons, 2010.
- [CH18] CENTENO, R., AND HERMOSO, R. Estimating global opinions by keeping users from fraud in online review systems. *Knowledge and Information Systems* 55 (2018), 467–491.
- [CHF15] CENTENO, R., HERMOSO, R., AND FASLI, M. From blurry numbers to clear preferences: A mechanism to extract reputation in social networks. *Expert Systems with Applications* 17, 4 (2015), 809–825.
- [CLA<sup>+</sup>03] COSLEY, D., LAM, S. K., ALBERT, I., KONSTAN, J. A., AND RIEDL, J. Is seeing believing?: how recommender system interfaces affect users’ opinions. In *Proceedings of the 2003 Conference on Human Factors in Computing Systems, CHI 2003, Ft. Lauderdale, Florida, USA, April 5-10, 2003* (2003), ACM, pp. 585–592.
- [Del03] DELLAROCAS, C. The digitization of word of mouth: Promise and challenges of online feedback mechanisms. *Manag. Sci.* 49, 10 (2003), 1407–1424.
- [DGP94] DRAGONI, A., GIORGINI, P., AND PULITI, P. Distributed belief revision versus distributed truth maintenance. In *Proceedings of the Sixth IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence (TAI 94)* (1994), IEEE Computer Society Press, pp. 499–505.
- [DKP13] DALVI, N. N., KUMAR, R., AND PANG, B. Para ‘normal’ activity: On the distribution of average ratings. In *Proceedings of the Seventh International Conference on Weblogs and Social Media, ICWSM 2013, Cambridge, Massachusetts, USA, July 8-11, 2013* (2013), The AAAI Press.
- [DPK82] DEO, N., PRABHU, G., AND KRISHNAMOORTHY, M. S. Algorithms for generating fundamental cycles in a graph. *ACM Trans. Math. Softw.* 8, 1 (mar 1982), 26–42.

- [DSBNHDLN18] DE SIQUEIRA BRAGA, D., NIEMANN, M., HELLINGRATH, B., AND DE LIMA NETO, F. B. Survey on computational trust and reputation models. *ACM Comput. Surv.* 51, 5 (2018).
- [eBa] EBAY. <https://www.ebay.com>. World Wide Web.
- [EGK<sup>+</sup>02] ELLSON, J., GANSNER, E., KOUTSOFIOS, L., NORTH, S. C., AND WOODHULL, G. Graphviz—open source graph drawing tools. In *Graph Drawing: 9th International Symposium, GD 2001 Vienna, Austria, September 23–26, 2001 Revised Papers 9* (2002), pp. 483–484.
- [EK72] EDMONDS, J., AND KARP, R. M. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *J. ACM* 19, 2 (apr 1972), 248–264.
- [ELV14] EIRINAKI, M., LOUTA, M., AND VARLAMIS, I. A trust-aware system for personalized user recommendations in social networks. *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics: Systems* 44, 4 (2014), 409–421.
- [FKIRS12] FALAPPA, M. A., KERN-ISBERNER, G., REIS, M. D. L., AND SIMARI, G. R. Prioritized and non-prioritized multiple change on belief bases. *Philosophical Logic* 41 (2012), 77–113.
- [FZSM12] FANG, H., ZHANG, J., SENSOY, M., AND MAGNENAT-THALMANN, N. A generalized stereotypical trust model. In *11th IEEE International Conference on Trust, Security and Privacy in Computing and Communications, TrustCom 2012, Liverpool, United Kingdom, June 25-27, 2012* (2012), pp. 698–705.
- [Gä82] GÄRDENFORS, P. Rule for rational changes of belief. 88–101.
- [GFBRG17] GHIASI, H., FATHIAN BROJENY, M., AND REZA GHOLAMIAN, M. A reputation system for e-marketplaces based on pairwise comparison. *Knowledge and Information Systems* 56, 3 (2017), 613–636.
- [GM88] GARDENFORS, P., AND MAKINSON, D. Revisions of knowledge systems using epistemic entrenchment. TARK '88, Morgan Kaufmann Publishers Inc., p. 83–95.

- [GN00] GANSNER, E. R., AND NORTH, S. C. An open graph visualization system and its applications to software engineering. *Softw. Pract. Exper.* 30, 11 (sep 2000), 1203–1233.
- [Goo] GOOGLE. <https://www.google.com>. World Wide Web.
- [Gro88] GROVE, A. Two modellings for theory change. *Journal of Philosophical Logic* 17, 2 (1988), 157–170.
- [GTGS18] GOTTIFREDI, S., TAMARGO, L. H., GARCÍA, A. J., AND SIMARI, G. R. Arguing about informant credibility in open multi-agent systems. *Artificial Intelligence* 47 (2018), 36–58.
- [HAAA21] HANAFOROOSH, M., ASHTIANI, M., AND ABDOLLAHI AZGOMI, M. An approach based on multiplex networks for modeling cascading trust failures in social networks. *Journal of Computational Science* 54 (2021), 101430.
- [Han94] HANSSON, S. O. Kernel contraction. *Journal of Symbolic Logic* 59, 3 (1994), 845–859.
- [Har75] HARPER, W. L. Rational belief change, popper functions and counterfactuals. *Synthese* 30, 1/2 (1975), 221–262.
- [HBO09] HERMOSO, R., BILLHARDT, H., AND OSSOWSKI, S. Dynamic evolution of role taxonomies through multidimensional clustering in multi-agent organizations. In *Principles of Practice in Multi-Agent Systems, 12th International Conference, PRIMA 2009, Nagoya, Japan, December 14-16, 2009. Proceedings* (2009), J. Yang, M. Yokoo, T. Ito, Z. Jin, and P. Scerri, Eds., vol. 5925 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 587–594.
- [HCF14] HERMOSO, R., CENTENO, R., AND FASLI, M. From blurry numbers to clear preferences: A mechanism to extract reputation in social networks. *Expert Systems with Applications* 41, 5 (2014), 2269–2285.
- [HCJ10] HARWOOD, W. T., CLARK, J. A., AND JACOB, J. L. Networks of trust and distrust: Towards logical reputation systems. In *Logics in Security* (2010).

- [HJ08] HAWICK, K. A., AND JAMES, H. A. Enumerating circuits and loops in graphs with self-arcs and multiple-arcs. In *Proc. 2008 Int. Conf. on Foundations of Computer Science (FCS'08)* (Las Vegas, USA, 14-17 July 2008), CSREA, pp. 14–20.
- [HJS06] HUYNH, T. D., JENNINGS, N. R., AND SHADBOLT, N. R. An integrated trust and reputation model for open multi-agent systems. *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems* 13, 2 (Sep 2006), 119–154.
- [HT73] HOPCROFT, J., AND TARJAN, R. Algorithm 447: Efficient algorithms for graph manipulation. *Commun. ACM* 16, 6 (jun 1973), 372–378.
- [Joh75] JOHNSON, D. B. Finding all the elementary circuits of a directed graph. *SIAM Journal on Computing* 4, 1 (1975), 77–84.
- [JTG19] JOAQUÍN, F., TAMARGO, L. H., AND GARCÍA, A. J. A taxonomy approach for multi-context trust: Formalization and implementation. *Expert Systems with Applications* 127 (2019), 295 – 307.
- [JTG22] JOAQUÍN, F., TAMARGO, L. H., AND GARCÍA, A. J. Formalization and implementation of credibility dynamics through prioritized multiple revision. *International Journal of Approximate Reasoning* 147 (2022), 1–22.
- [JTGG21] JELENC, D., TAMARGO, L. H., GOTTIFREDI, S., AND GARCÍA, A. J. Credibility dynamics: A belief-revision-based trust model with pairwise comparisons. *Artificial Intelligence* 293 (2021), 103450.
- [KB16] KRAVARI, K., AND BASSILIADES, N. Disarm: A social distributed agent reputation model based on defeasible logic. *Journal of Systems and Software* 117 (2016), 130–152.
- [KTGF09] KRÜMPELMANN, P., TAMARGO, L. H., GARCÍA, A. J., AND FALAPPA, M. A. Forwarding credible information in multi-agent systems. *Proceedings of the 3rd International Conference on Knowledge Science, Engineering and Management (KSEM 2009) 5914/2009* (November 2009), 41–53.

- [Lev77] LEVI, I. Subjunctives, dispositions and chances. *Synthese* 34, 4 (1977), 423–455.
- [LLYYJ09] LU, G., LU, J., YAO, S., AND YIP JIM, Y. A review on computational trust models for multi-agent systems. In *International Conference on Internet Computing* (2009).
- [LSSAW10] LAEEQUDDIN, M., SAHAY, B., SAHAY, V., AND ABDUL WAHEED, K. Measuring trust in supply chain partners' relationships. *Measuring Business Excellence* (2010), 53–69.
- [MKNS20] MICHAIL, D., KINABLE, J., NAVEH, B., AND SICHI, J. V. JgraphT—a java library for graph data structures and algorithms. *ACM Trans. Math. Softw.* 46, 2 (may 2020).
- [MMH02] MUI, L., MOHTASHEMI, M., AND HALBERSTADT, A. Notions of reputation in multi-agents systems: A review. In *Proceedings of the First International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems: Part 1* (New York, NY, USA, 2002), AAMAS '02, Association for Computing Machinery, p. 280–287.
- [NOS12] NEGAHBAN, S., OH, S., AND SHAH, D. Iterative ranking from pairwise comparisons. In *Advances in Neural Information Processing Systems* (2012), F. Pereira, C. Burges, L. Bottou, and K. Weinberger, Eds., vol. 25, Curran Associates, Inc.
- [OnS] ONSALE. <https://www.onsale.com>. World Wide Web.
- [Pat69] PATON, K. An algorithm for finding a fundamental set of cycles of a graph. *Commun. ACM* 12, 9 (sep 1969), 514–518.
- [Pra07] PRADE, H. A qualitative bipolar argumentative view of trust. In *Conference* (June 3-7 2007), D. M. Gabbay and H. J. Ohlbach, Eds., vol. 1085 of *LNCS*, Springer, pp. 1–2.
- [PSM13] PINYOL, I., AND SABATER-MIR, J. Computational trust and reputation models for open multi-agent systems: a review. *Artificial Intelligence Review* 40, 1 (Jun 2013), 1–25.

- [PSMDP12] PINYOL, I., SABATER-MIR, J., DELLUNDE, P., AND PAOLUCCI, M. Reputation-based decisions for logic-based cognitive agents. *Journal of Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (JAAMAS)* 24, 1 (Jan 2012), 175–216.
- [RHRJ04] RAMCHURN, S., HUYNH, T. D., AND R. JENNINGS, N. Trust in multi-agent systems. *Knowledge Engineering Review* 19, 1 (2004), 1–25.
- [RKK07] RUOHOMAA, S., KUTVONEN, L., AND KOUTROULI, E. Reputation management survey. In *The Second International Conference on Availability, Reliability and Security (ARES'07)* (2007), pp. 103–111.
- [RZ02] RESNICK, P., AND ZECKHAUSER, R. Trust among strangers in internet transactions: Empirical analysis of ebay’s reputation system. In *The Economics of the Internet and E-commerce*. Emerald Group Publishing Limited, 2002, pp. 127–157.
- [SMS01] SABATER-MIR, J., AND SIERRA, C. Regret: Reputation in gregarious societies. In *Proceedings of the Fifth International Conference on Autonomous Agents* (New York, NY, USA, 2001), AGENTS ’01, ACM, pp. 194–195.
- [SMS05] SABATER-MIR, J., AND SIERRA, C. Review of computational trust and reputation models. In *Conference* (June 3-7 2005), D. M. Gabbay and H. J. Ohlbach, Eds., vol. 1085 of *LNCS*, Springer, pp. 1–2.
- [SS11] SPARLING, E. I., AND SEN, S. Rating: How difficult is it? In *Proceedings of the Fifth ACM Conference on Recommender Systems* (New York, NY, USA, 2011), RecSys ’11, Association for Computing Machinery, p. 149–156.
- [SY06] SENSOY, M., AND YOLUM, P. A context-aware approach for service selection using ontologies. In *5th International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2006)*, Hakodate, Japan, May 8-12, 2006 (2006), pp. 931–938.

- [SZ10] SAMEK, J., AND ZBOŘIL, F. Hierarchical model of trust in contexts. In *Networked Digital Technologies* (2010), vol. 2010 of *Communications in Computer and Information Science (CCIS)*, Springer Verlag, pp. 356–365.
- [TA12] TAVAKOLIFARD, M., AND ALMEROTH, K. C. Social computing: an intersection of recommender systems, trust/reputation systems, and social networks. *IEEE Network* 26, 4 (2012), 53–58.
- [Tar73] TARJAN, R. Enumeration of the elementary circuits of a directed graph. *SIAM Journal on Computing* 2, 3 (1973), 211–216.
- [TFGS11] TAMARGO, L. H., FALAPPA, M. A., GARCÍA, A. J., AND SIMARI, G. R. A change model for credibility partial order. In *Scalable Uncertainty Management* (Berlin, Heidelberg, 2011), S. Benferhat and J. Grant, Eds., Springer Berlin Heidelberg, pp. 317–330.
- [TGFS12a] TAMARGO, L. H., GARCÍA, A. J., FALAPPA, M. A., AND SIMARI, G. R. Modeling knowledge dynamics in multi-agent systems based on informants. *The Knowledge Engineering Review* 27, 1 (2012), 87–114.
- [TGFS12b] TAMARGO, L. H., GARCÍA, A. J., FALAPPA, M. A., AND SIMARI, G. R. Modeling knowledge dynamics in multi-agent systems based on informants. *The Knowledge Engineering Review (KER)* 27, 1 (2012), 87–114.
- [TGFS14] TAMARGO, L. H., GARCÍA, A. J., FALAPPA, M. A., AND SIMARI, G. R. On the revision of informant credibility orders. *Artificial Intelligence* 212 (2014), 36–58.
- [TGGS16] TAMARGO, L. H., GOTTIFREDI, S., GARCÍA, A. J., AND SIMARI, G. R. Sharing beliefs among agents with different degrees of credibility. *Knowledge and Information Systems* 47 (2016), 36–58.
- [Tie70] TIERNAN, J. C. An efficient search algorithm to find the elementary circuits of a graph. *Commun. ACM* 13, 12 (dec 1970), 722–726.
- [Tri] TRIPADVISOR. <https://www.tripadvisor.com>. World Wide Web.

- [URO10] URBANO, J., ROCHA, A. P., AND OLIVEIRA, E. C. Trust estimation using contextual fitness. In *Agent and Multi-Agent Systems: Technologies and Applications, 4th KES International Symposium, KES-AMSTA 2010, Gdynia, Poland, June 23-25, 2010, Proceedings. Part I* (2010), pp. 42–51.
- [YSL<sup>+</sup>13] YU, H., SHEN, Z., LEUNG, C., MIAO, C., AND LESSER, V. R. A survey of multi-agent trust management systems. *IEEE Access* 1 (2013), 35–50.
- [ZMM99] ZACHARIA, G., MOUKAS, A., AND MAES, P. Collaborative reputation mechanisms in electronic marketplaces. In *Proceedings of the 32nd Annual Hawaii International Conference on Systems Sciences. 1999. HICSS-32. Abstracts and CD-ROM of Full Papers* (1999), vol. Track8, pp. 7 pp.–.