Revista Latinoamericana de Filosofía, vol. VIII, N° 2 (julio 1982)

POLISILOGISTICA COMO SISTEMA DE PRODUCTOS DE RELACIONES

Jorge Alfredo Roetti

La primera interpretación de la silogística elemental asertórica como cálculo de relaciones se atribuye a A. DE MORGAN. Más recientemente elaboraron B. von Freytag-Löhringhoff, H. Gericke (1952) y P. Lorenzen (1957, 1958) versiones de la silogística elemental como sistema o cálculo de productos de relaciones [1]. Aquí hacemos una generalización del modelo de productos de relaciones de Lorenzen para una silogística ampliada, o polisilogística, que admite polisilogismos categóricos con un número indefinidamente grande de premisas. Se hace especial referencia al problema de decisión para polisilogismos de complejidad arbitraria. La lógica subyacente que se supone será, en aras de la simplicidad, clásica [2].

1. *Base lógica de la polisilogística*

Aclarando el carácter de la lógica subyacente, que admite la igualdad, destacamos algunos instrumentos notacionales típicos de esta versión de la silogística ampliada:

(a) Predicadores monádicos: $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *(in indefinitum)*.
(b) Variables de predicadores monádicos: $P_1, \ldots, P_n$ *(in infinitum)*.
Las entidades lógicas introducidas en (a) y (b) se denominan habitualmente 'términos'.
(c) Relacionadores (predicados binarios): a, â, e, i, o, ô.
(d) Variables de relacionadores: $r_1, \ldots, r_n, \ldots$ *(in infinitum)*[3].
Los relacionadores a, e, i y o corresponden a las proposiciones categóricas clásicas universales afirmativa y negativa, particulares afirmativa y negativa respectivamente. â y ô son relacionadores no clásicos que se definen más

1. Cf. B. von Freytag-Loeringhoff (1949) y P. Lorenzen (1957)(1958).
2. En Lorenzen (1958) se utiliza una lógica efectiva, como también en Roetti (1976), lo que torna más laboriosas muchas demostraciones.
3. Las variables progresan *in infinitum* porque existe un procedimiento constructivo para introducir una nueva variable recurriendo al conjunto de índices N. Se podría «construir» trivialmente un conjunto de predicadores monádicos $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ que progrese *in infinitum* como modelo abstracto, pero tales predicadores no referirían a cualidades de entidades empíricas. Si esto último se pretende —como es el caso en la versión habitual de la silogística— se requerirán predicadores empíricos cuyo sentido quede fijado empragmáticamente Lorenzen-Schwemmer (1973), pp. 22ss.). En tal caso, dado un conjunto de predicadores elementales, podemos *presumir* —fundados en la experiencia— que puede aparecer un nuevo predicador pero *carecemos de reglas para construirlo*. Por ello, recordando a I. Kant *(K.d.r.V.*, A510-5, B 538-43) distinguimos entre un *progressus (regressus) in infinitum (ins Unendliche)* —que es constructivo— y uno *in indefinitum (ins Unbestimmbare)* no constructivo.

abajo. Las variables $r_1, \ldots, r_n, \ldots$ designan a alguno de los relacionadores constantes. En caso de tratarse de formas silogísticas elementales usaremos r, s, t, etc., por simplicidad notacional.

Reglas de formación

(a) Toda expresión A, que consta de tres elementos, siendo los extremos términos y el elemento central un relacionador o una variable de relacionador, es una fbf.
(b) Las expresiones que resultan de substituir expresiones admitidas por la regla (a) en lugar de variables proposicionales en fbf de la lógica subyacente, son fbf. Si se substituyen *todas* las apariciones de variables proposicionales y no resta ninguna función predicativa, ni libre ni ligada, en la expresión, entonces tenemos una *expresión silogística pura.* A ellas reduciremos nuestra consideración en lo que sigue.
(c) Las anteriores son las únicas reglas de formación admisibles.

Definiciones

D1. $P_i i P_j = P_k a P_i \ \& \ P_k a P_j$ (para un P_k[4]);
D2. $P_i e P_j = \sim(P_i i P_j)$;
D3. $P_i o P_j = P_k a P_i \ \& \ P_k e P_j$;
D4. $P_i \hat{a} P_j = P_j a P_i$;
D5. $P_i \hat{o} P_j = P_j o P_i$.

Un sistema de ecuaciones e inecuaciones surge de estas definiciones:
(1) $e = \hat{e}$; $i = \hat{i}$; $a \neq \hat{a}$; $o \neq \hat{o}$; $a = \bar{\bar{a}}$; $o = \bar{\bar{o}}$; $e = \sim i$.
Por tanto ê, î son redundantes, pues e, i son relacionadores *autoconversos* La introducción de las relaciones conversas â, ô permite reescribir toda forma silogística elemental en una forma silogística equivalente de primera figura $P_i r P_j \ \& \ P_j s P_k \rightarrow P_i t P_k$ que denominaremos *silogismo normado.* Ellos permitirán estudiar sus correspondientes productos de relaciones rs. Nótese que se escribe siempre en primer lugar a la premisa menor.

Axiomas

A1. $P_1 a P_j \ \& \ P_j a P_k \rightarrow P_i a P_k$ (Barbara 1);
A2. $P_i a P_i$ (identidad universal);
A3. Existe una clase de predicadores $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *(in indefinitum)* tales que $A_i e A_j$ es verdadera si y sólo si $i \neq j$ (axioma de rechazo).

Para la silogística elemental se deduce un caso particular de este axioma *semántico* de rechazo, poniendo $A_3 = A_1 v A_2$ y admitiendo cuatro predicadores:

A3.1. Existen al menos cuatro predicadores monádicos A_1, A_2, A_3, A_4 que hacen verdaderos los siguientes enunciados: $A_1 e A_2$, $A_1 a A_3$, $A_2 a A_3$, $A_3 e A_4$[5]

4. Un P_k se encuentra siempre. Si tenemos $P_i i P_j$ el término P_k se construye trivialmente como $P_k = P_i \& P_j$. Cf. Patzig (1959), p. 171. Se evita así la cuantificación de términos de primer orden. Cf. Lorenzen (1958), I, 2.
5. Aristóteles rechaza la mayoría de las formas silogísticas inválidas mediante contraejemplos con predicadores concretos. La admisión de éstos en la lógica contemporánea no

El axioma A2 permite la introducción trivial de un término medio cuando se da la conclusión *(inventio medii),* facilitando así la demostración de las implicaciones conversas en las formas silogísticas *fuertes,* lo que hace admisible las equivalencias que se corresponderán biunívocamente con los *productos de relaciones con igualdad.* La demostración trivial de la ley de identidad particular $P_i i P_i$ será otra consecuencia del uso de A2.

2. *Deducción elemental*

De D1, con $i = j = k$ tenemos $P_i i P_i = P_i a P_i \ \& \ P_i a P_i$, que se satisface trivialmente por A2, donde la tercera y quinta aparición de P_i representan un término medio trivial P_k. Por tanto podemos escribir:

T1. $P_i i P_i$ (identidad particular).
D1 y D3 permiten introducir las siguientes equivalencias:
T2. $P_j a P_i \ \& \ P_j a P_k \longleftrightarrow P_i i P_k$,
T3. $P_j a P_i \ \& \ P_j e P_k \longleftrightarrow P_i o P_k$,

cuyas implicaciones directas corresponden a Darapti 3 y Felapton 3. De T3, por conversión de $P_j e P_k$ se obtiene otra equivalencia cuya implicación directa corresponde a Fesapo 4. Las equivalencias *normadas* correspondientes a T2 y T3 son las siguientes:

T2'. $P_i \hat{a} P_j \ \& \ P_j a P_k \longleftrightarrow P_i i P_k$ y T3'. $P_i \hat{a} P_j \ \& \ P_j e P_k \longleftrightarrow P_i o P_k$.

El condicional converso de Barbara se demuestra mediante A2:
(1) $P_i a P_j \rightarrow P_i a P_i \ \& \ P_i a P_j$, donde la tercera y la cuarta aparición de P_i constituyen el término medio trivial. Ello permite introducir la equivalencia:
T4. $P_i a P_j \ \& \ P_j a P_k \longleftrightarrow P_i a P_k$.

3. *Productos de relaciones con igualdad*

El paso siguiente es establecer una correspondencia biunívoca entre cada equivalencia normada que obtenemos de forma
(1) $P_i r P_j \ \& \ P_j s P_k \longleftrightarrow P_i t P_k$
y el *producto de relaciones con igualdad*
(2) $rs = t$.
Dichos productos son abreviaturas de las equivalencias, obtenidas por abstracción de los términos [6]. La asociatividad de los productos se demuestra de la siguiente manera: sea el producto con igualdad
(3) $(rs)\,t = u$, al que corresponde la equivalencia
(4) $P_i rs P_j \ \& \ P_j t P_k \longleftrightarrow P_i u P_k$, pero rs es una abstracción de
(5) $P_i r P_1 \ \& \ P_1 s P_j$, por tanto obtenemos una equivalencia
(6) $P_i r P_1 \ \& \ P_1 s P_j \ \& \ P_j t P_k \longleftrightarrow P_i u P_k$, de donde por asociatividad de la conjunción y la abstracción:
(7) $st = \lambda P_1, P_j P_k (P_1 s P_j \ \& \ P_j t P_k)$, obtenemos

satisface a Lukasiewicz, por lo que adopta el rechazo deductivo a partir de *axiomas de rechazo* (ipse (1957), p. 96, *59 y *59a). Lorenzen (1958) rechaza también axiomáticamente, pero con un axioma semántico equivalente a A3.1, adecuado a la silogística elemental.

6. Para el tema de la abstracción cf. Lorenzen-Schwemmer (1973), pp. 194-202 y esp. 220-3 (2da. ed. 1976).

(8) P_irP_l & $P_lstP_k \longleftrightarrow P_iuP_k$, expresión a la que corresponde
(9) r (st) = u.
De (3) y (9) y por la simetría de la deducción podemos afirmar:
T5. (rs) t = r (st) .

Hasta aquí hemos obtenido de T4, T2' y T3' respectivamente los siguientes productos con igualdad:
(i) aa = a ; (ii) âa = i ; (iii) âe = o . Multiplicando ambos miembros de (ii) a la derecha por a obtenemos:
(10) âaa = ia , y simplificando a la izquierda por (i):
(11) âa = ia , y simplificando nuevamente a la izquierda por (ii):
(iv) ia = i .
A (iv) corresponde una equivalencia normada cuya implicación directa es Darii 1 y, por simetría de i, Datisi 3. Con métodos semejantes se deducen los siguientes productos con igualdad:
(v) eâ = e ; (vi) ae = e ;
a los que corresponden, entre otras formas no clásicas, las formas silogísticas tradicionales Camestres 2, Camenes 4, Celarent 1 y Cesare 2. Seguir adelante requiere demostrar una *ley de conversión de productos:*
T6. rs = t $\longleftrightarrow$ $\hat{s}\hat{r} = \hat{t}$ (o, lo que es equivalente: $(\widehat{rs}) = \hat{s}\hat{r}$).
Dem.: Si rs = t, entonces P_irP_j & $P_jsP_k \longleftrightarrow P_itP_k$. Reemplazamos los relacionadores por sus conversos equivalentes (D4-D5) y conmutamos el primer miembro. Entonces obtenemos P_ksP_j & $P_jrP_i \longleftrightarrow P_ktP_i$, de donde $\hat{s}\hat{r} = \hat{t}$.
La simetría de la demostración permite el camino inverso: queda demostrado en consecuencia T6.

Si aplicamos T6 a (i)-(vi) y recordando e = ê, i = î, obtenemos:
(vii) ââ = â por (i) y T6;
(viii) ea = ô por (iii) y T6;
(ix) âi = i por (iv) y T6.
De (ii), (v) y (vi) no se obtienen nuevos productos, por ser (ii) un producto autoconverso, y (v) y (vi) productos mutuamente conversos. A los nuevos productos (vii) y (viii) corresponden silogismos válidos, pero ninguno clásico. En cambio a (ix) corresponden Disamis 3 y Dimaris o Dimatis 4, además de otras formas silogísticas válidas no clásicas.

A partir de estos nueve productos con igualdad se deducen los seis siguientes:
(x) âo = o , que se obtiene de (iii) multiplicando ambos miembros a la izquierda por â, simplificando en el miembro izquierdo por (vii) y volviendo a simplificar en el miembro izquierdo por (iii).
(xi) oâ = o , de (iii) multiplicando ambos miembros a la derecha por â. Por (v) y (iii) obtenemos (xi).
(xii) ei = ô , de (ii) multiplicando ambos miembros a la izquierda por e y aplicando posteriormente (v) y (viii).

Aplicando T6 a estos tres productos obtenemos:
(xiii) ôa = ô , de (x) por T6;
(xiv) aô = ô , de (xi) por T6;
(xv) ie = o , de (xii) por T6.

Estos seis productos permiten introducir seis nuevas equivalencias normadas, a partir de tres de las cuales se deducen formas silogísticas clásicas.

Así de (x) se deduce Bocardo 3, de (xi) Baroco 2, y de (xv) se deducen Ferio 1, Festino 2, Ferison 3 y Fresison 4. Los restantes productos no permiten deducir ningún silogismo clásico válido, aunque sí por cierto numerosas formas silogísticas válidas no clásicas.

Los resultados anteriores pueden presentarse en forma de una matriz simétrico-conversa, originariamente de Gericke (en forma ampliada)[7]:

	â	a	i	e	o	ô
a		a		e		ô
â	â	i	i	o	o	
i		i		o		
e	e	ô	ô			
ô		ô				
o	o					

Los restantes veintiún productos posibles son vacíos, como veremos.

4. *Productos de relaciones sin igualdad*

Hemos señalado que los productos de relaciones con igualdad se corresponden biunívocamente con equivalencias lógicas entre la conjunción de las premisas y la conclusión. Ello caracteriza a los silogismos «fuertes», que admiten la *inventio medii* (que en este cálculo se aseguraba mediante A2 por la introducción de un término medio trivial). A los productos de relaciones *sin igualdad* se hará corresponder «silogismos débiles»: implicaciones simples válidas, para las que no es posible la *inventio medii*.

Utilizando las leyes de subalternación (que se deducen gracias a A2), deducimos de los únicos productos con igualdad de la matriz que tienen resultados universales ((i), (v), (vi) y (vii)) los siguientes seis productos de relaciones sin igualdad:

(xvi)	aa → i	(i, subalt.);	(xix)	ae → o	(vi, subalt.);
(xvii)	eâ → o	(v, subalt.);	(xx)	ae → ô	(vi, subalt.);
(xviii)	eâ → ô	(v, subalt.);	(xxi)	ââ → i	(vii, subalt.).

De la implicación normada correspondiente a (xvi) se obtiene la forma silogística clásica Barbari 1, de la correspondiente a (xvii) Camestros 2 y Camenos o Calemos 4, de la correspondiente a (xix) Celaront 1 y Cesaro 2. Finalmente de la correspondiente a (xxi) se obtiene el último silogismo clásico: Bramantip o Bamalip 4. Este es un caso especial: (xxi) se reduce a (vii), el cual se reduce a (i) por T6. Este procedimiento no estaba a disposición de los lógicos medievales, por lo que no consideraban a Bramantip como silogismo subalterno en sentido estricto. Además la mayoría de los lógicos escolásticos latinos no admitían una cuarta figura independiente y muchos ni siquiera conocían a Bramantip. Excepciones a esta regla fueron San Alberto Magno y el filósofo judío Albalag, quien incluso reduce Bramantip a Barbara en forma equivalente a la indicada aquí [8].

7. Cf. Lorenzen (1957), p. 116.
8. Cf. Bochenski (1956), 32.20. El procedimiento de Albalag consiste en trasponer las premisas de Bramantip y extraer la conclusión normal de Barbara; de esta conclusión por

Recapitulando: se han obtenido 21 productos de relaciones con resultado, a los que corresponden 84 formas silogísticas válidas para las 6 relaciones categóricas. De esos 21 productos 14 tienen como resultado relaciones clásicas. De ellos se obtienen las 24 formas silogísticas clásicas.

5. *Decisión en la silogística elemental*

La silogística es una teoría coherente, como se demuestra con cierta facilidad [9]. La independencia de sus axiomas es también fácil de demostrar usando un modelo de cálculo proposicional con matrices trivalentes [10]. La completitud es un mero corolario de la coherencia y la decidibilidad. El problema de decisión en la silogística elemental consistirá para nosotros en demostrar que todo producto de relaciones $rs \to t$ que no sea ninguno de los 21 productos ya demostrados, es rechazable axiomáticamente.

Como los productos sin igualdad se deducen de los con igualdad, nuestro problema se reduce a rechazar las 21 casillas desocupadas de la matriz. Los productos que tienen sus resultados sobre la diagonal principal son *autoconversos.* A los productos cuyos resultados se encuentran por sobre dicha diagonal les corresponden productos y resultados conversos en posiciones simétricas respecto de ella, y viceversa. En lo que sigue $\underset{\bullet}{r}$ es la relación subalternada de r, si r es universal, y la misma r, si ésta es particular; $\dot{r}$ es la relación subalternante de r, si r es particular, y la misma r, si ésta es universal. Algunos corolarios de T6, que se cumplen para los 21 productos admitidos, son los siguientes:

T7. $rs \to t \longleftrightarrow \hat{s}\hat{r} \to \hat{t}$.

Si a la negación del resultado de un producto la notamos $\not\to$, entonces:

T8. $rs \not\to t \longleftrightarrow \hat{s}\hat{r} \not\to \hat{t}$.

Este teorema permite afirmar que para rechazar todos los productos de relaciones correspondientes a las casillas vacías de la matriz, basta con rechazar los productos de las casillas vacías de la diagonal principal y las de arriba (o de abajo) de dicha diagonal. Ello reduce los casos a 13, número que aún puede disminuirse. Para ello supongamos que

(1) $A_1 \vdash B_i$, pero $B_i \nvdash A_i$ y que

(2) $B_1, \ldots, B_i, \ldots, B_n \vdash C$, entonces

(3) $B_1, \ldots, A_i, \ldots, B_n \vdash C$ *(argumentum a fortiori).*

Admitiendo (1) y contraponiendo (2) y (3) obtenemos que, si

(4) $B_1, \ldots, A_i, \ldots, B_n \nvdash C$, entonces

(5) $B_1, \ldots, B_i, \ldots, B_n \nvdash C$, que denominamos *argumentum a debiliori.*

Aplicando estos argumentos a los productos de relaciones obtenemos:

T9. Si $r\underset{\bullet}{s} \to t$, entonces $r\dot{s} \to t$, y si $\underset{\bullet}{r}s \to t$, entonces $\dot{r}s \to t$.

T10. Si $r\dot{s} \not\to t$, entonces $r\underset{\bullet}{s} \not\to t$, y si $\dot{r}s \not\to t$, entonces $\underset{\bullet}{r}s \not\to t$.

conversión por limitación se obtiene la conclusión buscada. Hansenjaeger (1962) da una reducción de Bramantip idéntica a la de Albalag.

9. Cf. Lukasiewicz (1957), p. 89.

10. Idem, ibidem.

Aplicando estos teoremas a los 13 productos restantes resulta que basta con demostrar que los productos aâ, ao, âô, y ee carecen de resultados.

Recordando la transitividad de la relación de deducibilidad:

(6) Si $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ y $B \vdash C$, entonces $A_1, \ldots, A_n \vdash C$,

y por contraposición obtenemos:

(7) Si $A_1, \ldots, A_n \nvdash C$ y $B \vdash C$, entonces $A_1, \ldots, A_n \nvdash B$.

En nuestros productos de relaciones estas expresiones corresponden a:

T11. Si $rs \to \dot{t}$, entonces $rs \to \underset{\bullet}{t}$;

T12. Si $rs \not\to \underset{\bullet}{t}$, entonces $rs \not\to \dot{t}$.

Por T12 vemos que para demostrar que un producto de relaciones rs carece de resultado basta con probar que las relaciones i, o y ô no son resultados, e.d., que ciertas expresiones de las formas

(8) $rs \to i$; (9) $rs \to o$; (10) $rs \to \hat{o}$ deben ser rechazadas. Por tanto el problema de decisión se reduce a rechazar axiomáticamente las doce expresiones siguientes: $a\hat{a} \to i$, $a\hat{a} \to o$, $a\hat{a} \to \hat{o}$; $ao \to i$, $ao \to o$, $ao \to \hat{o}$; $\hat{a}\hat{o} \to i$, $\hat{a}\hat{o} \to o$, $\hat{a}\hat{o} \to \hat{o}$; $ee \to i$, $ee \to o$, $ee \to \hat{o}$. El rechazo semántico de dichas formas equivale a verificar ciertas expresiones. Es fácil demostrar que las siguientes tesis son condiciones necesarias y suficientes del rechazo de (8), (9) y (10):

T13. $rs \to i$ es *rechazable* si y sólo si $P_i r P_j$ & $P_j s P_k$ & $P_i e P_k$ es *verificable.*

T14. $rs \to o$ es *rechazable* si y sólo si $P_i r P_j$ & $P_j s P_k$ & $P_j a P_k$ es *verificable.*

T15. $rs \to \hat{o}$ es *rechazable* si y sólo si $P_i r P_j$ & $P_j s P_k$ & $P_j \hat{a} P_k$ es *verificable.*

Usando adecuadamente los predicadores A_1, A_2, A_3, A_4 del axioma A3.1 podemos verificar los 12 enunciados que surgen de reemplazar rs por los 4 pares aâ, ao, âô, ee, tarea trivial que obviamos. Por lo tanto los 21 casilleros vacíos de la matriz carecen de resultado.

Nos resta determinar si de los 15 productos con igualdad, de los que dedujéramos 6 productos sin igualdad, no se deduce válidamente ningún otro producto. Para ello, además de D2 y las reglas de oposición en el cuadrado de oposiciones, hay que demostrar que a las subalternaciones y conversiones inválidas les corresponden reglas de inferencia inválidas entre relaciones. Para ello debemos refutar las siguientes reglas:

(11) $e \to i$; $a \to o$; $a \to \hat{o}$ (subalternaciones inválidas);

(12) $a \to \hat{a}$; $o \to \hat{o}$ (conversiones inválidas).

Para su rechazo basta que se verifiquen las siguientes conjunciones:

(13) $P_i e P_j$ & $P_i e P_j$ (que equivale a $P_i e P_j$);

(14) $P_i a P_j$ & $P_i a P_j$ (que equivale a $P_i a P_j$);

(15) $P_i a P_j$ & $P_i \hat{a} P_j$;

(16) $P_i a P_j$ & $P_i \hat{o} P_j$;

(17) $P_i o P_j$ & $P_i \hat{a} P_j$.

Ellas se verifican mediante A3.1, con el reemplazo adecuado de las variables, por los predicadores A_1, A_2, A_3 y A_4. Con ello concluye la prueba de decisión para la silogística elemental.

6. *Decisión en la polisilogística*

De Lukasiewicz adoptamos el «teorema de normalización de expresiones de la silogística» (TA), que dice: «Toda expresión significativa de la silogística aristotélica puede ser reducida de modo deductivamente equivalente, con respecto a tesis de la teoría de la deducción, a un conjunto de expresiones elementales de la forma

(1) $a_1 \rightarrow (a_2 \rightarrow \ldots(a_{n-1} \rightarrow a_n)\ldots)$,

donde las a_i son expresiones simples de la silogística...»[11].

Por otra parte nuestro axioma general de rechazo A3 permite demostrar que toda expresión de la forma

(2) $a_1 \rightarrow (a_2 \rightarrow \ldots (a_{n-1} \rightarrow a_n)\ldots)$, donde $a_i = A_j e A_k$ (para $1 \leq i \leq n\text{-}1$ y $j \neq k$) y $a_n = A_r i A_s$ (con $r \neq s$), *es un enunciado falso*. Su demostración es inmediata. Con ayuda de estos instrumentos demostramos el siguiente teorema:

TD. *Todas las expresiones finitas de la polisilogística son decidibles.*

Dem.: Partimos de las formas normalizadas $a_1 \rightarrow (a_2 \rightarrow \ldots(a_{n-1} \rightarrow a_n) \ldots)$ y consideramos los siguientes casos y subcasos:

Caso 1: en la forma (1) es $n = 1$, e.d., tenemos una forma proposicional categórica simple. Entonces tendremos que demostrar que si a_1 es de la forma $A_i a A_i$, $A_i \hat{a} A_i$ o $A_i i A_i$, entonces es una tesis, lo que es trivial por A2, D4 y subalternación. También tendremos que demostrar el rechazo de las restantes 9 formas proposicionales simples que no son tesis, a saber: $P_i e P_i$, $P_i o P_i$, $P_i \hat{o} P_i$; $P_i a P_j$, $P_i \hat{a} P_j$, $P_i e P_j$, $P_i i P_j$, $P_i o P_j$, $P_i \hat{o} P_j$. Ello se hace mediante A2, que permite satisfacer las contradicciones de las tres primeras fórmulas, y A3.1, que permite verificar las contradictorias de las 6 restantes.

Caso 2: si $n = 2$, entonces las expresiones (1) son de la forma $a_1 \rightarrow a_2$, a las que corresponden reglas de inferencia entre relaciones de la forma

(3) $r \rightarrow s$, e.d., inferencias inmediatas, tema ya resuelto en la silogística elemental.

Caso 3: si $n = 3$, tendremos expresiones de la forma

(4) $a_1 \rightarrow (a_2 \rightarrow a_3)$, que corresponden a los silogismos simples, problema tratado en el párrafo anterior.

Caso 4: supongamos que $n \geq 4$. A la forma (1) le corresponderá un *producto generalizado de relaciones*

(5) $r_1 r_2 \ldots r_{n-1} \rightarrow r_n$,

donde el orden de las relaciones es tal, que si en el producto aparecen dos factores $\ldots r_i r_j \ldots$, los términos de sus correspondientes enunciados están ordenados de modo que el extremo derecho de $P_l r_i P_m$ es el mismo que el extremo izquierdo de $P_m r_j P_n$. Ello se debe a que un producto generalizado se corresponde biunívocamente con su correspondiente *polisilogismo normado*, que es aquel en el que la primera premisa contiene como sujeto al sujeto de la conclusión y la última como predicado al predicado de la conclusión, y el predicado de cada premisa es el sujeto de la siguiente. Para pasar

11. Idem, p. 111. Demostración completa pp. 111-20.

de una forma (1) a su polisilogismo normado correspondiente basta demostrar la *ley generalizada de intercambio de antecedentes:*

(6) $a_1 \rightarrow (\ldots(a_i \rightarrow (a_j \rightarrow \ldots(a_{n-1} \rightarrow a_n)\ldots))\ldots) \longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow a_1 \rightarrow (\ldots(a_j \rightarrow (a_i \rightarrow \ldots(a_{n-1} \rightarrow a_n)\ldots))\ldots)$,

y emplear las seis relaciones de la silogística para facilitar las conversiones necesarias. (6) se demuestra inductivamente usando importación, simetría de &, exportación, intercambio de equivalencias $B \longleftrightarrow C$ en $p \rightarrow B$ y sustitución. El resultado es que a cada forma polisilogística le corresponde uno y sólo un polisilogismo normado, y hay una relación biyectiva entre polisilogismos normados y productos generalizados de relaciones.

Dado un producto de relaciones generalizado obtenemos por permutación n! (factorial de n) productos generalizados de relaciones, a cada uno de los cuales corresponde biunívocamente un polisilogismo normado. El problema de determinar el número de formas para un número n de premisas es simplemente combinatorio. La resolución se realiza por *reducción* del producto: se toman las dos primeras relaciones y se determina si su producto tiene resultado: $r_1 r_2 \rightarrow r_k$. Si tiene resultado se continúa con $r_k r_3$. Si no tiene resultado el producto generalizado carece de resultado y su polisilogismo normado es inválido. Se continúa el proceso de reducción —que consiste siempre en el reemplazo del siguiente producto simple por su resultado, si lo tiene, o la interrupción del proceso, si no lo tiene— hasta su agotamiento. Agotado éste nos encontramos con los siguientes subcasos:

Subcaso 1: que la expresión reducida sea de la forma

(7) $r_1 \rightarrow r_2$, subcaso ya tratado y resuelto en el caso 2.

Subcaso 2: que la expresión reducida y ya irreductible sea de la forma

(8) $r_1 r_2 \rightarrow r_3$, que corresponde al caso 3 y por tanto a la silogística elemental. Puesto que por hipótesis el producto es irreductible, e.d. no tiene resultado, entonces el producto generalizado originario es rechazable. Empero, si admitiéramos que $r_1 r_2$ tuviera resultado, digamos r_3', entonces cabe una alternativa: o bien $r_3' = r_3$, en cuyo caso (8) es válido, o bien $r_3' \neq r_3$, en cuyo caso tenemos una nueva alternativa: o bien $r_3' \rightarrow r_3$, en cuyo caso (8) es nuevamente válido, o bien $r_3' \not\rightarrow r_3$, siendo entonces (8) inválido.

Subcaso 3: que la expresión reducida sea de la forma

(9) $r_1 r_2 r_3 \rightarrow r_4$.

Como por hipótesis no existe en (9) resultado para el primer producto de relaciones, por ser irreductible, entonces carece de resultado y su silogismo normado y formas polisilogísticas equivalentes son inválidas.

Subcaso 4: que la expresión reducida sea de la forma

(10) $r_1 \ldots r_{n-1} \rightarrow r_n$ (con $n\text{-}1 > 3$).

Para este caso vale *a fortiori* la argumentación del subcaso anterior. Por lo tanto (10) carece de resultado y su correspondiente polisilogismo normado y formas polisilogísticas equivalentes son inválidas.

Subcaso 5: Supongamos que en (5) tenemos un producto ya irreductible. Puede ocurrir que para un r_i valga $r_i \rightarrow r_k$. Pero de nada serviría reemplazar r_i por r_k en (5) si recordamos T10. Por tanto sólo resta considerar la complejidad inicial de (5), que será de alguna de las formas (7), (8), (9) o (10), casos ya considerados.

De todo esto resulta que para cada número n dado de premisas se puede decidir para cada uno de los 6^n productos generalizados de relaciones si tienen resultado o no lo tienen, y si éste, en caso de existir, coincide o no, e implica o no, a la relación propuesta originariamente como resultado. Esto equivale a decidir la validez o invalidez de cualquier polisilogismo normado y de sus formas polisilogísticas equivalentes. El procedimiento descrito permite constatar en cada caso (cada número de premisas) el cumplimiento de las fórmulas de Meredith [12] cuando nos restringimos a polisilogismos clásicos, e. d., aquellos en que aparecen sólo las cuatro relaciones clásicas a, e, i y o.

Habiendo agotado los casos queda demostrado el teorema de decisión TD para la polisilogística, el que es deductivamente equivalente al de Lukasiewicz, pues todos sus axiomas y reglas tienen sus equivalentes en la polisilogística entendida como sistema de producto de relaciones y viceversa: las dos presentaciones de la silogística generalizada son equivalentes.

La coherencia se demuestra por generalización a partir de la silogística elemental, pues los productos generalizados, por la ordenación estricta de los términos medios, se descomponen inmediatamente en productos simples encadenados, a los que corresponden polisilogismos normados descomponibles en silogismos simples normados (e inferencias inmediatas). La completitud es consecuencia inmediata de la coherencia y la decidibilidad. La completitud es «fuerte»: el cálculo es completo no sólo respecto de la clase de las tesis, sino también respecto de la clase de las no-tesis.

7. *El problema de Lukasiewicz*

En su obra citada nos dice Lukasiewicz lo siguiente: *«There remains only one problem, or rather one mysterious point waiting for an explanation: in order to reject all the false expressions of the system it is necessary and sufficient to reject axiomatically only one false expression, viz. the syllogistic form of the second figure with universal affirmative premisses and a particular affirmative conclusion. There exists no other expression suitable for this purpose.»* [13]

A este problema del porqué la invalidez de la forma silogística aai-2 (P_iaP_j & $P_kaP_j \rightarrow P_iiP_k$) es condición necesaria y suficiente para demostrar la invalidez de todas las formas inválidas de la silogística, lo hemos denominado «problema de Lukasiewicz».

Según el procedimiento de rechazo axiomático semántico [14], rechazar la validez de la forma aai-2 supone verificar una fórmula de forma

(1) P_iaP_j & P_kaP_j & P_ieP_k . En A3 se logra ello mediante las sustituciones

(2) $A_ia(A_ivA_j)$ & $A_ja(A_ivA_j)$ & A_ieA_j (para $i \neq j$).

En el axioma particular A3.1. basta con las sustituciones

(3) A_1aA_3 & A_2aA_3 & A_1eA_2 .

A3.1 permite rechazar también el segundo axioma de rechazo de Lukasiewicz, a saber *59a: P_ieP_j & $P_keP_j \rightarrow P_iiP_k$, correspondiente a la forma eei-2, pero ya no basta para el caso general de rechazo en la polisilogística, por lo que hemos reemplazado por A3.

12. Idem, p. 42.
13. Idem, p. 76. Cf. también p. 96, axioma de rechazo *59.
14. V. arriba, nota 5.

Cabe entonces preguntarse aquí por el modelo de «mundo», o fragmento de mundo, por el que supone A3. Es fácil advertir que expresa al menos una de las condiciones esenciales de lo que Hasenjaeger [15] denomina una «ontología discreta», e.d., una ontología de un mundo que consta al menos de cosas concretas que tienen ciertas características y carecen de otras, cosas (y propiedades) entre las que se dan ciertas relaciones, o no se dan, etc. Todo discurso que pretenda describir con cierta exactitud un aspecto tal de dicho mundo deberá disponer, entre otros recursos sintácticos y semánticos, de una cierta clase de predicadores monádicos constantes A_i, clase presumiblemente incompleta y en general para la que carecemos de reglas de construcción para una sucesión de sus elementos, por lo que la denominamos «indefinida»[3].

Entre las extensiones correspondientes a las propiedades monádicas conocemos ciertas relaciones como inclusión, exclusión, solapamiento, igualdad. Sea ahora nuestra hipótesis que entre todos los predicadores de la clase existiera un *orden total* tal que, para un par cualquiera de predicadores A_i y A_j, si $i \leq j$, entonces la extensión de A_i esté incluída en la extensión de A_j. Ello equivale a decir que, si $i \leq j$, entonces

(4) A_iaA_j.

Supongamos ahora que existe al menos un caso en que la conversa de (4)

(5) $A_jaA_i = A_i\hat{a}A_j$ sea falsa. Entonces existirá al menos un caso en que la contradictoria de (5)

(6) $A_joA_i = A_i\hat{o}A_j$ (para $i \leq j$) será verdadera.

Entonces, por D3, existirá al menos un A_k tal que A_kaA_j & A_keA_i. Ahora bien, por hipótesis puede ser $k = j$, pero necesariamente será $k \neq i$, pues si $k = i$, entonces por hipótesis A_kaA_i, contra lo supuesto. Entonces, o bien $k < i$, o bien $i < k$. Para cada uno de estos casos será verdadero por hipótesis, o bien A_kaA_i, o bien A_iaA_k. En ambos casos será falso A_keA_i, que era lo que se deducía de nuestra suposición (5). Por lo tanto, si se cumpliera nuestra hipótesis de un orden total entre los predicadores respecto de su extensión, entonces sería imposible —por reducción al absurdo— que exista en la clase de predicadores un solo par de ellos que hagan verdadero a un enunciado universal negativo. Como la verdad de un enunciado tal es, según surge de D3, condición necesaria y suficiente para la verdad de un enunciado particular negativo, entonces toda proposición de la forma A_ioA_j será también falsa. Por lo tanto, para todo i para todo j, será verdadero A_iaA_j, independientemente de que i sea menor, igual o mayor que j.

En un sistema tal de predicadores la conversión simple de a (sin limitación) es válida, y las formas silogísticas aaa-2 y aai-2, a saber:

(7) A_iaA_k & $A_jaA_k \rightarrow A_iaA_j$,

(8) A_iaA_k & $A_jaA_k \rightarrow A_iiA_j$,

serán por tanto también válidas. Por tanto un sistema de predicadores con dicho «orden total» se torna «circular»[16], y todo discurso se refiere a un único

15. Cf. Hasenjaeger (1962), Cap. I.
16. Aristóteles, *Analitica priora* II, caps. 5-7. Cf. también Prior (1955), p. 124 (2da. ed., 1962).

«algo» por medio de una pluralidad de predicadores con extensión idéntica. Como dicha extensión única cubre el universo del discurso de nuestro sistema, la negación de predicadores se torna carente de sentido. Si no obstante quisiéramos conservar el *signo* de negación, la consecuencia sería la identidad de lo referido por A_i y por $\sim A_i$, al menos extensionalmente *coincidentia oppositorum*. Habríamos ingresado en una metafísica donde afirmación y negación son aspecto de lo mismo, donde ser y nada coinciden. En tal discurso serían válidas las formas aaa-2 y aai-2. Si empero al menos un aspecto de nuestro mundo no se reduce a una única propiedad, deberán existir al menos dos propiedades, con sus predicadores A_1 y A_2, que hagan verdadero al enunciado A_1eA_2. La invalidez de aai-2 equivale a la existencia de al menos un enunciado universal negativo verdadero. Si A_1 y A_2 agotaran la extensión del universo del discurso, escribiríamos convencionalmente $A_1 = \sim A_2$ y $A_2 = \sim A_1$, con lo que la invalidez de aai-2 corresponde al carácter no redundante de la negación y, más precisamente, a su función formadora de la expresión que refiere a la clase complementaria de la clase referida por una expresión dada.

El axioma A3.1 es más general: implica al menos la existencia de *tres* predicadores con extensiones disjuntas: A_1, A_2, A_4 (y A_3 y A_4)[17]. Esta es la condición mínima de invalidez semántica de eei-2. Por tanto A3.1 es condición *suficiente* de la invalidez de aai-2, pero no condición *necesaria,* como lo es en cambio de la invalidez de eei-2. Por tanto el rechazo de aai-2 será condición *necesaria* para el rechazo deductivo de todas las formas inválidas de la silogística elemental, pero *no suficiente.* A3.1 y a fortiori A3 serán condiciones *suficientes* del rechazo de aai-2, *necesarias y suficientes* del rechazo de todas las formas inválidas de la silogística elemental y de la polisilogística respectivamente.

El método de productos de relaciones permite mostrar también en forma inmediata que todo polisilogismo que contenga dos o más relaciones negativas, o dos o más relaciones particulares, será inválido (por el carácter «hereditario» de la negación (y de la particularidad) en las cadenas de productos de relaciones). Por tanto, condición *necesaria* de la validez de un polisilogismo de n premisas es que al menos n-2 de sus premisas sean universales afirmativas a o â. Otra consecuencia fácil de deducir es que a ningún producto generalizado con resultado —a ningún polisilogismo normado válido— le pueden corresponder más de cuatro formas polisilogísticas válidas. Las leyes de Meredith se cumplen perfectamente pero, al observar la distribución de los polisilogismos válidos se presentan las siguientes conjeturas: (1) Si el número de términos es n, entonces la última figura tiene 2n modos válidos y (2) las restantes figuras no vacías tienen 6 modos válidos cada una. Estos problemas no resueltos, junto con el problema de si existe una pauta regular calculable para la distribución de las figuras vacías, son problemas que dejo a la audiencia.

Universidad Nacional de La Plata
Centro de Investigaciones Filosófico-Naturales,
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas (Argentina)

17. Aristóteles, *Analitica priora* I. 4, 26a2s.

REFERENCIAS

Aristóteles, *Analitica priora*

Bochenski, I.M. (1956), *Formale Logik*, Freiburg/München, Karl Alber.

Freytag-Loeringroff, B. von (1949), «Über das System der Modi des Syllogismus», *Zeitschrift für philosophische Forschung*, 4.

Hasenjaeger, G. (1962), *Einführung in die Grundbegriffe und Probleme der modernen Logik*, Freiburg/München, Karl Alber.

Lorenzen, P. (1957), «Über Syllogismen als Relationenmultiplikationen», *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, 3, pp. 112-6.

Lorenzen, P. (1958), *Formale Logik*, Berlin, Walter de Gruyter.

Lorenzen, P. & Schwemmer, O. (1973), *Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie*, Mannheim, Bibliographisches Institut (2a. ed. 1976).

Lukasievicz, J. (1957), *Aristotle's Syllogistic*, Oxford, Clarendon Press (2a. ed.).

Patzig, G. (1959), *Die aristotelische Syllogistik*, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.

Prior, A. N. (1955), *Formal Logic*, Oxford, Clarendon Press (Se cita por la 2a. ed. de 1962).

Roetti, J. A. (1976), «Silogística ampliada y decisión», *Stromata*, año xxxii, nros. 1-2, Buenos Aires, pp. 97-141.

ABSTRACT

A model for the elemental syllogistic as a system of products of relations was published by P. Lorenzen in two papers of 1957 and 1958. A wider model with such products (with and without equality) for a generalized syllogistic is elaborated in the present article. The model admits syllogisms with an indefinitely great number of premisses. The adopted procedure allows a very easy proof for the decidability of generalized syllogistic, if compared with Lukasiewicz' method. A «semantical-rejection axiom» for invalid forms is adopted with this aim. Such an axiom is a generalization of that of Lorenzen's. The more complex procedure of J. Slupecki and J. Lukasievicz is so avoided.

The semantical-rejection-axiom and its particular cases allow us to clarify the following «problem of Lukasiewicz»: «There remains only...one mysterious point waiting for an explanation: in order to reject all the false expressions of the system it is necessary and sufficient to reject axiomatically only one false expression [namely, the form AAI-2]... There exists no other expression suitable for this purpose.» (*Aristotle's Syllogistic*..., iii, p. 76, 2nd. ed.) Some necessary conditions for the validity of general syllogisms are finally added.