Cuadernos del Sur - Filosofía 30, 2000 **79-102**

Hilbert y el primer problema: ¿solución o disolución?

Jorge Alfredo Roetti
CONICET, UNS
jaroetti@ba.net

Resumen

El autor expone el primer problema de Hilbert, relativo a la hipótesis del continuo de Cantor, y luego sus variantes. Se relata su desarrollo y las soluciones encontradas, especialmente la de Cohen. Luego se exponen las críticas intuicionistas y constructivistas a los teoremas demostrados mediante el método diagonal de Cantor y a su concepción absolutista de las nociones de enumerable y no enumerable. El resultado es una concepción relativista de este par de conceptos. Finalmente se presenta una variante para la cuestión de la enumerabilidad del continuo.

Abstract

The author displays the first Hilbert's problem, namely that related with Cantor's continuum hypothesis, and then his variants. Its development and the found solutions are narrated, in particular the Cohen's one. After that are expounded the intuitionist and constructivist criticisms to the through Cantor's diagonal method demonstrated theorems and his absolutist criterion for the notions of countability and uncountability. The outcome is a relativistic understanding concerning this couple of concepts. Finally the author puts forward a variant for the questions of continuum's countability.

1. El problema.

El primero de los veintitrés problemas del artículo "*Mathematische Probleme*" de David Hilbert reza así:

"*Cada sistema de infinitos números reales, e. d. cada conjunto de números (o de puntos), es equivalente, o bien a todos los números naturales 1, 2, 3, ..., o bien al conjunto de todos los números reales y por consiguiente al continuo, e. d. a los puntos de un segmento; conforme a esto en lo que concierne a la equivalencia hay solamente dos conjuntos numéricos, el conjunto enumerable y el continuo.*

A partir de esta tesis se seguiría inmediatamente que el continuo constituye la siguiente potencia [cardinalidad] *por encima de la potencia de los conjuntos enumerables, la demostración de esta tesis tendería un nuevo puente entre el conjunto enumerable y el continuo.*"[1]

Como se ve, se trata de la hipótesis del continuo (*Kontinuumhypothese*) propuesta por primera vez por Georg Cantor en 1878.[2] El sentido de la hipótesis es claro: Dentro de la teoría cantoriana de los cardinales transfinitos el primero de ellos es $\aleph_0$, que corresponde por definición a la potencia $k(N)$ del conjunto N de los naturales, y por construcción a la de los conjuntos $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{A}$ de los enteros, racionales y algebraicos, entre infinitos otros.[3] Cantor creyó demostrar la existencia

[1] *Jedes System von unendlich vielen reellen Zahlen, d. h. jede unendliche Zahlen- (oder Punkt)menge, ist entweder der ganzen natürlichen Zahlen* 1, 2, 3, ... *oder der Menge sämtlicher reellen Zahlen und mithin dem Kontinuum, d. h. etwa den Punkten einer Strecke, äquivalent; im Sinne der Äquivalenz gibt es hiernach nur zwei Zahlenmengen, die abzählbare Menge und das Kontinuum.*
Aus diesem Satz würde zugleich folgen, daß das Kontinuum die nächste Mächtigkeit über die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen hinaus bildet; der Beweis dieses Satzes würde mithin eine neue Brücke schlagen zwischen der abzählbaren Menge und dem Kontinuum. (HILBERT 1900, 298-299.)

[2] CANTOR 1878, esp. p. 257s. (132s).

[3] Algunas de cuyas sucesiones se generan por procedimientos similares a los de Galilei. En esta cuestión se considera a Nicolás de Cusa predecesor de Galilei. Luego fueron conocidas paradojas del infinito por Descartes y Bolzano. La definición positiva de infinitud mediante una biyección entre un conjunto y un subconjunto propio fue dada por Dedekind.

de otras potencias transfinitas mayores y afirmó la *existencia de una sucesión monótona creciente de cardinales transfinitos*:

(1) $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots < \aleph_n < \ldots\ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \aleph_{\omega+2} < \ldots\ldots < \aleph_{2\omega} < \ldots\ldots < \aleph_{\omega^2}, \ldots\ldots$

in infinitum, de modo que a cada ordinal α le correspondiera un cardinal $\aleph_\alpha$. Según la *creencia cantoriana, esta sucesión no sería meramente relativa al sistema lingüístico en que se expresara la teoría, sino que sería absoluta, independiente del lenguaje del caso.*

Uno de los procedimientos fundamentales para "generar" cardinales mayores que $\aleph_0$, de acuerdo a los clásicos teoremas impredicativos de Cantor, era la postulación de sucesivos conjuntos potencia o conjuntos de partes para el conjunto N, P(N), cuya existencia era aceptada a pesar de tratarse de un procedimiento no constructivo de introducción de entidades. De ese modo se "generaba" – es decir, se escribía (no se construía) - por iteración de la "(pseudo)función" P aplicada a N la siguiente sucesión monótoma creciente de cardinales:

(2) $\aleph_0 = k(N) < k(\mathrm{P}(N)) < k(\mathrm{P}(\mathrm{P}(N))) < k(\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathrm{P}(N)))) < \ldots\ldots$

Cantor no pudo determinar una correspondencia entre las sucesiones (1) y (2). Lo que él sí creía haber podido determinar en forma absoluta (e. d. no relativa al sistema simbólico empleado) era que la potencia del continuo $k(c)$, o la del número de elementos del *hipotético conjunto infinito actual* de los números reales $\boldsymbol{R}$, o la de los puntos de cualquier extensión continua, coincidiría con la potencia del conjunto de partes P(N) del conjunto N de los naturales, es decir

Un ejemplo de *procedimiento de reordenación* es el primer procedimiento diagonal de Cantor, mejor llamado procedimiento diagonal de Cauchy, que permite la reordenación de una matriz infinita con n entradas, en una sucesión simple, procedimiento que permite demostrar la enumerabilidad de $\boldsymbol{Q}$ y otros conjuntos, y la completitud de los reales. Para los reales y el continuo la dificultad esencial consiste en la inexistencia de algoritmos para generar todos los infinitos subconjuntos infinitos de cualesquiera de los conjuntos infinitos enumerables que hemos mencionado.

(3) $k(c) = k(\boldsymbol{R}) = k(\mathrm{P}(N)) = 2^{\aleph_0}$.

Las dos potencias fundamentales en la aritmética eran las de los números naturales y sus equivalentes, y la del continuo y sus equivalentes. Tradicionalmente se había considerado que había un solo infinito, al que mayoritariamente se lo consideraba sólo potencial, *in fieri*, no actual o completo. Cantor postuló en cambio sus embriagantes sucesiones de infinitudes ordinales y cardinales desiguales dos a dos, lo que es condición para la admisibilidad de las sucesiones (1) y (2), pero además las consideró desigualdades absolutas, no relativas a los medios expresivos del sistema simbólico utilizado. Respecto de las dos potencias importantes para la aritmética existían pues, para Cantor, y luego para Hilbert, dos soluciones posibles:

(4) $(k(N) = \aleph_0 < \aleph_1 < \ldots < k(c) = k(\boldsymbol{R}) = k(\mathrm{P}(N)) = 2^{\aleph_0}, \ldots\ldots)$

(5) $(k(N) = \aleph_0 < \aleph_1 = k(c) = k(\boldsymbol{R}) = k(\mathrm{P}(N)) = 2^{\aleph_0}, \ldots\ldots)$

¿Cuál es la posición de la potencia del continuo en esa sucesión de los alefs? Aquí establece Cantor su hipótesis respecto de estas dos potencias y *postula*, sin poderlo demostrar, que *no existe ningún cardinal transfinito M cuya potencia sea mayor que la potencia de N* ($\aleph_0$) *y menor que la potencia del continuo* $k(\mathrm{P}(N))$, es decir:

(6) $\neg\vee M(k(N) < k(M) < k(\mathrm{P}(N)))$,

o bien, conforme a (2) y (3)

(7) $\neg\vee M(\aleph_0 < k(M) < k(c) = k(\boldsymbol{R}) = 2^{\aleph_0})$,

que son dos formas tradicionales de la hipótesis del continuo.

Más tarde la hipótesis generalizada del continuo postulará que, para todo conjunto transfinito T, entre su cardinalidad $k(T)$ y la de su hipotético conjunto potencia $k(\mathrm{P}(T))$, no existe ningún cardinal transfinito intermedio, es decir:

(8) $\wedge T \neg\vee U$ (T es transfinito $\rightarrow k(T) < k(U) < k(\mathrm{P}(T))$).

En una teoría de conjuntos como ZF, en la que vale el principio de buena ordenación, que es equivalente el axioma de elección, se puede hacer corresponder a todo conjunto transfinito un cardinal equivalente $\aleph_\alpha$ (con subíndice ordinal α). Por ello en una teoría tal se pueden expresar las formas (6), (7) y (8) de la hipótesis del continuo de las siguientes maneras:

(9) $k(c) = k(\boldsymbol{R}) = k(\mathrm{P}(N)) = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$,

(10) $k(\mathrm{P}(\aleph_\alpha)) = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Sin el axioma de buena ordenación o el de elección obtenemos en lugar de (10) sólo la llamada *hipótesis Alef general*

(11) $\wedge\alpha(\aleph^{\alpha 2} \sim \aleph_{\alpha+1})$

en la cual $\aleph^{\alpha 2}$ es el conjunto idempotente con $\mathrm{P}(\aleph\alpha)$ de las funciones de $\aleph_\alpha$ al par $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 2$ y $\sim$ es la relación de idempotencia, pues en tal caso ya no es seguro que el conjunto potencia de $\aleph_\alpha$ (ni de $\aleph_0$) sea bien ordenado y que por lo tanto le corresponda un "alef" como número cardinal.[4] En ZF sólo son equivalentes (8) y (11) si se admite el axioma de regularidad de von Neumann (1925, 1929) o de fundamento de Zermelo (1930), aunque la distinción entre conjuntos fundados (*ensembles ordinaires*) y no fundados (*extraordinaires*) se remonta al matemático ruso Mirimanoff (1917). Las versiones más usuales de este axioma son:

(12) $\vee x A(x) \rightarrow \vee y(A(y) \wedge \wedge z(z \in y \rightarrow \neg A(z)))$ y

(13) $\wedge z(z \neq \emptyset \rightarrow \vee x(x \in z \wedge x \cap z = \emptyset))$

(si A se predica de algún x, entonces existe un y que es el menor respecto de la relación $\in$).[5]

[4] Cf. SCHROEDER-HEISTER, Peter 1995.

[5] El axioma de Mirimanoff dice que no existe una cadena descendente $\ldots \in a_2 \in a_1 \in a_0$ para

2. *Solución.*

Gödel demostró en 1938 que la hipótesis del continuo es compatible con la axiomática de conjuntos vNBG de von Neumann-Bernays-Gödel (y en consecuencia también con ZF). Pero un concepto esencial para la construcción de una teoría de conjuntos que evitara antinomias era el de los conjuntos "definidos" y éste no estaba bien definido. Unos de los primeros límites a la formación de conjuntos fue propuesta por Henri Poincaré cuando, para evitar el "*cercle vicieux*" en las definiciones conjuntistas introduce la noción de "impredicatividad" y propone como norma de formación conceptual *rechazar expresiones sobre cualquier totalidad que contenga elementos que sólo sean definibles mediante dicha totalidad.*[6] Por su parte Zermelo usa el concepto de "definido" (*definit, Definitheit*) por primera vez en uno de sus trabajos de 1908, pero su definición es deficiente, pues considera "definida" una cuestión o un enunciado, si "las relaciones fundamentales del dominio deciden *sin arbitrariedad* sobre su validez o invalidez en virtud de los axiomas y de las leyes lógicas universalmente válidas",[7] pero no queda claro qué significa "sin arbitrariedad", y además en varias demostraciones usa conceptos que considera "definidos", pero que no son predicativos. En la historia de la teoría de conjuntos hubo numerosos intentos de precisar adecuadamente la noción de "definido", por ejemplo los de Fraenkel (1922, 1923), de Skolem (1922/1923, 1929) y los del mismo Zermelo (1929). La que se impuso fue la definición de Skolem, según la cual:

"*es definido todo enunciado compuesto a partir de enunciados elementales* $x \in y$ *con ayuda de juntores y cuantores*".

la relación de pertenencia que sea infinita. Obviamente este axioma de teoría de conjuntos está íntimamente vinculado con los principios filosóficos de fundamento (o razón) y el rechazo del *regressus in infinitum* de la tradición filosófica, al menos desde Aristóteles.

[6] Poincaré 1906.

[7] Zermelo 1908b, 263: *definit ist "eine Frage oder Aussage* E *über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür entscheiden*".

El mismo Skolem demostró en 1930 que el sistema ZF no transgrede dicha definición. En 1963, con el uso de esa definición de Skolem, Cohen propuso un sistema modificado del ZF, denominado ZFS (o sistema de Zermelo-Fraenkel-Skolem), y en un modelo enumerable del mismo, con ayuda del procedimiento metamatemático de 'forcing' o 'forzamiento' desarrollado por él, pudo mostrar que existe una extensión del mismo con axioma de elección, denominado ZFC, en la que valen tanto los axiomas de ZFC como la negación de la hipótesis generalizada del continuo. De ello se sigue la independencia de dicha hipótesis respecto del sistema ZFC. Ello implica que, bajo la hipótesis de que ZF sea consistente en sentido pleno o fuerte (*vollkonsistent, nicht parakonsistent*), la hipótesis del continuo, sea en su versión simple o en su versión generalizada, no puede ni ser demostrada ni ser refutada en ZF, y esto independientemente de que se suponga el axioma de elección o no (en este caso para la hipótesis Alef general (11)).

Estos resultados, especialmente los de Cohen, constituyen lo que hoy podemos denominar la *solución a la hipótesis del continuo* en una teoría de conjuntos de estilo cantoriano. Se trata de una solución semejante a la del quinto postulado de la geometría euclidiana. En ambos casos la respuesta no afirma ni niega la hipótesis, sino que muestra que es independiente: así como son posibles una geometría con el quinto postulado –la geometría euclidiana – y otras con cada uno de sus opuestos –las otras geometrías de Riemann–, así es posible una teoría de conjuntos con hipótesis del continuo como axioma adicional y otras sin él, o con axiomas incompatibles.

3. *Dificultades.*

Por supuesto existen *quaestiones disputatae* en todos estos temas. La primera pregunta que nos podemos hacer es: ¿"Existen" los conjuntos de los reales y de los puntos de una línea? E inmediatamente: ¿Cómo entendemos el término "existencia" en matemática?

i. En sentido formalista se podría decir que, si para una teoría axiomática *T* se puede construir una *prueba de consistencia fuerte* (*Vollkonsistenz*) del sistema con medios estrictamente finitistas, entonces se puede conceder "existencia matemática" a la teoría T, a sus teoremas y a sus objetos. La condición formalista la podemos simbolizar así:

(14) $A \in \mathbf{C}(T) \Rightarrow \neg A \notin \mathbf{C}(T)$,

e. d. si A pertenece a la clausura deductiva de T, entonces $\neg$A no pertenece a dicha clausura (aquí no discutimos ni dicha función clausura, ni su codominio). Dicha prueba de consistencia fuerte es *conditio sine qua non* para la admisibilidad de los sistemas axiomáticos y de sus objetos. Pero para teorías de conjuntos suficientemente completas, como ZF y similares, no existe dicha prueba. Por lo tanto *no cumplen con la condición de admisibilidad hilbertiana.*

ii. En el caso de la lógica y la matemática paraconsistente, de da Costa por ejemplo, se exige algo más débil para admitir un sistema axiomático y la existencia de sus objetos, a saber, que exista una *prueba de consistencia absoluta o débil*, o *prueba de no trivialidad*, que es una *condición pragmática trascendental* para todo sistema posible y que simbolizamos así:

(15) $\mathbf{C}(T) \neq F(T)$,

donde $F(T)$ es el conjunto de las fórmulas bien formadas de T. Newton da Costa da interesantes precisiones acerca de la situación de la teoría de conjuntos y su no trivialidad. En varios trabajos presenta metateoremas que, partiendo del sistema NF de Quine, produce el sistema NF_1, que difiere de aquél en que su lógica subyacente es la lógica de predicados paraconsistente con identidad $C_1^{=}$ de da Costa. Un resultado importante es su teorema 42:

La no-trivialidad de NF_1 *implica la consistencia de* NF.

Da Costa afirma que NF_1 ***aparentemente*** *"no es trivial, pero no se puede demostrar su no-trivialidad más o menos en el mismo sentido en que no se puede demostrar la consistencia de los sistemas deductivos tradicionales suficientemente fuertes"*[8], lo que constituye una generalización de los teoremas de Gödel a ciertos sistemas paraconsistentes. De modo que nos encontramos en una situación semejante a la de las teorías tradicionales de conjuntos respecto de la consistencia plena y *tampoco se demuestra la condición de da Costa de aceptabilidad de las teorías para* NF_1.

iii. Los constructivistas exigen condiciones más duras para admitir la existencia: no sólo la consistencia plena de los formalistas, sino además la constructividad de las definiciones (entidades) matemáticas y de las demostraciones.

iv. También son posibles conceptos paraconsistente-constructivos, relevantes, etc., de existencia, que aquí no consideraremos.

Resulta inmediato que, para una misma teoría, la existencia constructiva garantiza la existencia clásica, y ésta la paraconsistente, siendo en general inválidas las conversas. Adviértase que, si fuese posible la demostración de consistencia plena, o aun la de no-trivialidad para las teorías de conjuntos tradicionales, éstos cálculos serían admisibles incluso para los matemáticos constructivistas. Pero no se da al antecedente.

Retornemos pues a la cuestión de la existencia de los reales y del continuo desde un punto de vista constructivo. Respecto de cualquier *número* de un conjunto enumerable, como $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}$, etc., se puede afirmar su *existencia actual*, pues existe un algoritmo para construirlo en un número finito de pasos, y por lo tanto también se puede afirmar la *existencia potencial* (*in fieri*) de esos *conjuntos*, pero *no su existencia actual*. Respecto de los números reales *no se puede afirmar ni siquiera la existencia de uno cualquiera de ellos mientras no se disponga del algoritmo para producirlo.* Y en el caso del continuo geométrico no se puede afirmar la existencia de todos sus puntos, sino sólo la de los puntos efectivamente construídos.

[8] DA COSTA 1980, 249.

El núcleo de las disensiones conecta la cuestión de la existencia con la cuestión de *qué es una demostración*. Una de las tesis básicas de toda esta cuestión es la tesis cantoriana de que

(16) $k(N) < k(\boldsymbol{R})$.

Su "demostración" se realiza por reducción al absurdo con el segundo procedimiento diagonal, que es método de *construcción* de nuevas entidades *aceptable bajo las condiciones de infinitud potencial y predicatibidad*.[9] La formación del conjunto de los reales a partir del de los naturales reposa sobre la *hipótesis* de la existencia del conjunto potencia o conjunto de partes de N. Pero ello equivale a dar las reglas de construcción de toda las funciones $N \Rightarrow \{0, 1\}$, lo que nos proporcionaría cada uno de los reales, pero ello es una tarea imposible. Paul Lorenzen nos dice así: [Cantor argumenta] "Supuesto pues que el conjunto de todas las funciones fuese enumerable y $f_1, f_2, f_3, \ldots$.. fuese una enumeración de ese conjunto, la función $f_n(n)+1$ proporcionaría entonces una función, que sería diferente de todas las funciones posibles en general. Puesto que esto es una contradicción, entonces es falso el supuesto: el conjunto de todas las funciones posibles en general no es enumerable. De este modo Cantor llega a la conclusión de que la infinitud de los números fundamentales (*Grundzahlen*) es sólo la menor infinitud, junto a la cual existen todavía infinitudes superiores (incluso infinitas).

Este convicción reposa ... sobre el supuesto de la existencia del conjunto de todas las funciones. Se supone que existe ese conjunto. Recién después se puede suponer que sea enumerable y deducir de este segundo supuesto una contradicción. En la "demostración" cantoriana sólo es problemático el primer supuesto. [...] En este lugar hay pues dos posibilidades: o bien uno se limita a conjuntos construíbles de funciones (entonces no existe el conjunto de todas las funciones posibles, luego no se satisface el primer supuesto de la "demostración" de cantoriana y

[9] *Zweites Cantorsches Diagonalverfahren*. El uso que Cantor hace del método es pseudoconstructivo por impredicatividad y el supuesto de infinitud actual, lo que desbarata la prueba. En otros casos, como en el análisis de antinomias y en demostraciones de incompletitud e indecidibilidad su uso es constructivo. Cf. THIEL 1995.

todas las consecuencias de ella son por ello *fantasías que no obligan*), o se renuncia a una satisfacción constructiva de los supuestos cantorianos. En la segunda posibilidad los supuestos constituyen los axiomas de una teoría axiomática en la cual "función" o "conjunto" es entonces un concepto fundamental indefinido."[10]

Si observamos la estructura de la argumentación cantoriana, advertimos que es la de un *modus ponens* cuya implicación tiene la forma de la variante constructiva de la ley de Cardano-Saccheri que contiene un enunciado básico E que supone que "*el conjunto* [del caso] *es enumerable y está completo*", es decir:

(17) $(E \rightarrow \neg E) \rightarrow \neg E, (E \rightarrow \neg E) \vdash \neg E.$

Pero E puede considerarse imposible, pues no se ha dado para el conjunto referido un algoritmo constructivo que permita su enumeración, ni es completable. En tal caso la implicación antecedente $E \rightarrow \neg E$ sería constructivamente verdadera, por ser imposible su antecedente E. Por lo tanto, al ser constructivamente válida esta forma de la ley de Cardano-Saccheri, la única debilidad del teorema de Cantor está en el antecedente E de la implicación antecedente, que habla de un conjunto impredicativo y completo (infinito actual). El constructivismo se decide entonces por normas de buena formación más exigentes para la aceptación de expresiones. Si aceptáramos la restricción de que las fbf de la teoría no pueden admitir expresiones sobre totalidades infinitas hipotéticamente completas, ni impredicativas, entonces toda la argumentación cantoriana se desbarata, pues el enunciado E no se podría usar en (17) por la mala formación que surge de su impredicatividad y de la postulación de su infinitud actual.

Además, como admiten muchos autores, toda teoría axiomática de conjuntos es por lo menos "ligeramente artificial"[11], o algo peor. Por

[10] LORENZEN 1965, 35-36. En el caso de estas totalidades indefinidas podemos hablar de *clases no enumerables respecto de los medios expresivos utilizados*. (Las itálicas del texto son mías.)

[11] SUPPES 1960, 41: "*[it] emphasizes the slightly artificial character of any form of axiomatic set theory.*"

ejemplo, en ZF son teoremas $\vdash \{x{:}x=x\} = \emptyset$ y $\vdash \cap\, \emptyset = \emptyset$, en tanto que en vNBG lo son $\vdash \{x{:}x=x\} = V$ y $\vdash \cap\, \emptyset = V$, donde V es la clase universal.

A la luz de las dificultades relativas a la existencia de cardinales transfinitos absolutamente irreducibles a la enumerabilidad, desde un principio a muchos matemáticos y filósofos les ha parecido más razonable:

1. o bien desarrollar una fundaméntación de la matemática completamente diferente de la conjuntista,
2. o bien desarrollar una teoría de conjuntos que no admita sino una cardinalidad transfinita enumerable en sentido absoluto.

Un ejemplo del primero de esos caminos fue el llamado "camino heroico" de Lesniewski, continuado por Richard Martin[12] y otros autores, que aquí no consideraremos. Ejemplos del segundo de los caminos, más exigente que el de las axiomáticas conjuntistas habituales de tipo cantoriano, fue la de evitar el "paraíso de Cantor", para estos autores comparable a la "jungla de Meinong" (*Meinongs Dschungel*) o a los "barrios bajos ontológicos" (*ontological slum*) de los que habla Quine para otros temas. El problema estaba sobre todo en el *universo cardinal transfinito* de Cantor, el cual debería poderse reducir al menos a un procedimiento notacional innocuo que dependa del sistema lingüístico en que nos expresamos. Este segundo camino comienza con Kronecker, continua con los pre- y semiintuicionistas, sigue con Brouwer, Heyting, y llega a los intuicionistas y constructivistas contemporáneos. En su faz técnica podemos comenzar recordando algunos teoremas de Löwenheim de 1915. Lo primero que demostró este autor fue que en la lógica cuantificacional monádica, si una fbf *A* tiene *n* predicadores distintos y es válida en un dominio $D(2^n)$ no vacío con al menos 2^n elementos, entonces es válida en todo dominio no vacío D:

[12] MARTIN 1988, cap. xii: "On Mereology and the Heroic Course".

(18) si $\models_{D(2^n)} A$ entonces $\models_{D} A$ (para todo $D \neq \emptyset$).

Luego el resultado fue generalizado para predicadores n-ádicos, obteniéndose el teorema:

(19) si $\models_{D_e} A$ entonces $\models_{D} A$ (para todo $D \neq \emptyset$),

Donde D_e es un dominio enumerable. Es decir: "*Si una fbf es válida en un dominio infinito enumerable, entonces es válida en todo dominio no vacío.*" Skolem alcanza su famoso resultado por contraposición, generalización para un conjunto enumerable de fbf (o una conjunción enumerable de ellas), formas normales prenexas de Skolem (donde cada cuantor universal precede a todo cuantor existencial) y el axioma de elección. Sea 'F_ω' un conjunto enumerable de fbf, '$\{D, \alpha\}$' un modelo de 'F_ω' en un dominio de objetos 'D' con una interpretación 'α', que hace corresponder una relación n-ádica definida en 'D' a cada letra predicativa n-ádica de 'F_ω', y las letras 'v' o 'f' a 'F_ω' y '$\{D_e, \alpha'\}$' es un modelo con dominio enumerable, entonces una de las variantes del teorema de Skolem dice:

(20) "Si F_ω es satisfacible en un modelo $\{D, \alpha\}$, entonces F_ω es satisfacible en un submodelo enumerable $\{D_e, \alpha'\}$ de $\{D, \alpha\}$."[13]

Obviamente su demostración no fue constructiva. Desde entonces se comenzó a hablar de la "paradoja de Löwenheim-Skolem", pero hay que advertir que *dicho teorema es paradójico sólo bajo el supuesto de que la distinción entre conjuntos infinitos enumerables y no-enumerables sea una distinción absoluta.* Puesto que versiones de ZF se pueden axiomatizar en el cálculo de predicados de primer orden, entonces (20) viene a decir que, *si* ZF *(u otra axiomatización) tiene un modelo, entonces tiene un modelo enumerable.* Oscar Becker concluye que "*Esto no*

[13] SKOLEM 1920.

significa otra cosa sino que no existe un no enumerable absoluto."[14] El segundo procedimiento diagonal no permite construir el conjunto de los infinitos decimales presuntamente no-enumerable. Lo único que nos dice la demostración cantoriana es que *dicho método diagonal no sirve para construir una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los naturales y la colección indefinida de los reales.* El intento de Cantor con el segundo método diagonal sólo prueba que *la tarea de acomodar a todos los reales en la "primera clase de los números ordinales" es irrealizable, pero no prueba de ninguna manera su no-enumerabilidad ni excluye la posibilidad de otros métodos para producir dicha correspondencia biunívoca.* Esto significa *relativizar los conceptos de enumerable y no-enumerable a los métodos por los que se intenta producir la biyección o a los lenguajes en que se la intenta establecer.* Una de las consecuencias es que "el soberbio edificio de la teoría de conjuntos de Cantor ... parece manifestarse como una fantasmagoría, como un cierto espejismo que se desvanece al acercarse a él."[15] Dicho de otro modo, con el segundo procedimiento diagonal lo que efectivamente descubrió Cantor fue el carácter de *clase indefinida* de los reales.

4. *Disolución.*

Lorenzen da un nuevo paso en la crítica de la distinción absoluta entre enumerable y no-enumerable mediante una construcción "en capas" de entidades con métodos estrictamente predicativos. A partir de la lógica constructiva edifica un "lenguaje elemental" para la matemática operativa entendida como "un operar esquemático con figuras". Los átomos de ese lenguaje son:

1. átomos de objeto $a_1, \ldots, a_n$,
2. variables de objeto $x_1, \ldots, x_m$,
3. símbolos de relación,
4. partículas lógicas y
5. operadores de abstracción para conjuntos, relaciones, descripciones y funciones respectivamente.

[14] Becker 1966, 185.

[15] Becker 1966, 186. Recordar lo dicho por Lorenzen en nota 10.

A partir de allí se procede paso a paso, definiendo qué son términos, enunciados elementales (*Primaussagen*), enunciados, formas de enunciados, etc. Luego se reitera el proceso de construcción del lenguaje elemental para definir "conjuntos de conjuntos", "funciones sobre conjuntos", etc. La "capa lingüística 0" consta de átomos y variables de objeto; la "capa 1" consta de figuras compuestas por átomos de las especies 1 a 5. En la segunda capa se introducen nuevos átomos y variables, cuyos dominios (finitos) se encuentran en la primera capa. Luego se presenta un procedimiento efectivo para traducir cada traducir cada expresión o conjunto del lenguaje de la capa n al lenguaje de la capa $n+1$. Esto permite prescindir de subíndices y considerar a las capas inferiores como fragmentos de las superiores. Si '$X \in C_0$' significa que 'X es una figura de la capa lingüística 0' y '$X \in C_n$' que lo es de la capa lingüística enésima, entonces se define:

(21) $X \in C_\omega \Leftrightarrow \bigvee_n (X \in C_n)$, donde $n \in \omega$,

es decir, X es una figura de la capa C_ω si y sólo si existe un n natural tal que X es una figura de la capa C_n. Al construir $C_{\omega+1}$ advertimos que ésta es la capa lingüística que habla sobre figuras de cualesquiera capas lingüísticas finitas. El proceso se continúa *ad libitum* hasta algún ordinal determinado de la segunda clase numérica ordinal. Para la fundamentación constructiva de gran parte del análisis clásico sólo se requiere superar la capa lingüística C_ω, pues la capa $C_{\omega+1}$ es la primera que permite construir conjuntos infinitos a partir de sistemas finitos de átomos, lo que no acontece en ninguna capa C_n con $n < \omega$.[16] Cada conjunto finito de objetos básicos es representanble en C_1. En C_2 es representable el conjunto de todos los conjuntos finitos de objetos básicos. Para alcanzar el conjunto infinito más simple, como

(22) $\{a, \{a\}, \{\{a\}\}, \ldots\}$,

se requiere llegar a la capa $C_{\omega+1}$. En capas superiores no sólo son representables nuevos conjuntos de conjuntos, sino nuevos objetos

[16] Cf. Lorenzen 1969, 189.

básicos de capas superiores, como muestra el ejemplo de conjunto infinito citado en (22). Uno de los resultados fundamentales de estas "construcciones lingüísticas" (*Sprachkonstruktionen*) es que todas sus capas son enumerables en el sentido de que existe una biyección sobre el conjunto de los enteros positivos. La biyección entre C_t y una capa enumerable ya es representable en C_{t+1}. Este teorema se demuestra por un procedimiento de goedelización.[17] Un corolario importante de este teorema es que *no existen conjuntos absolutamente no-enumerables en la matemática constructiva*[18] : los conjuntos no-enumerables hasta la capa C_t ya son enumerables en C_{t+1}. Luego *cada conjunto [bien construído] es enumerable en sentido absoluto, esto es en una capa lingüística apropiada.*[19]

De este modo muchos teoremas pierden su carácter paradojal: el teorema de Löwenheim-Skolem se vuelve natural, la tesis cantoriana de que la clase indefinida de los reales ***R*** tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$ y que ésta sea no-enumerable es correcta en la capa lingüística $C_{\omega+1}$ (en la que se desarrolla el proceso diagonal), pero $2^{\aleph_0}$ se torna enumerable en una capa superior, etc. La demostración de la relatividad lingüística de los conceptos de enumerable y no-enumerable es constructiva, como también lo es la de la enumerabilidad en una capa superior de todo conjunto representado como no enumerable en una capa lingüística determinada. Pero lo que Lorenzen *no nos da* es la construcción de una biyección concreta entre ***R*** y ***N***, precisamente porque ***R*** no puede ser un conjunto definido. Por lo tanto *sus demostraciones respecto de una biyección tal son de existencia débil*, es decir *precedida por una doble negación*. Lo que queda firme es la no conclusividad *absoluta* (aunque sí *relativa*) de los teoremas cantorianos críticos, la relatividad de las nociones de enumerabilidad y no-enumerabilidad, y la existencia débil de la enumerabilidad de todo conjunto en una capa lingüística adecuada.

[17] LORENZEN 1969, 191-192.

[18] LORENZEN 1969, 193: "..., *daß es in der operativen Mathematik keine "Überabzählbarkeit" gibt.*"

[19] LORENZEN 1969, 193: "..., *daß jede Menge abzählbar ist im absoluten Sinne, d. h. in einer geeigneten Sprachschicht.*"

Hay otro argumento muy bien conducido por Karl H. Wolff[20], quien también mediante un procedimiento de aritmetización en el sistema binario y goedelización demuestra que no es demostrable la existencia de los números reales de la segunda clase, es decir aquellos que no se pueden representar en un lenguaje determinado mediante una sucesión finita de signos de un alfabeto finito, que tampoco el segundo procedimiento diagonal proporciona ninguna demostración, y que la existencia de conjuntos transenumerables tampoco se puede demostrar mediante la formación de los conjuntos potencia. Por lo tanto los objetos de la segunda clase real sólo se pueden introducir axiomáticamente, pero puesto que la fabricación de algoritmos para representarlos no es posible, salvo excepciones, entonces se requiere un *axioma de elección*, que es un *acto de magia matemática* ("*ocurre un milagro*").

Sin embargo, bajo circunstancias que especificaremos, podremos considerar que el límite para $n \to \aleph_0$ de la siguiente función recursiva es un ejemplo entre otros posibles de una biyección entre conjuntos como ***N*** y ***R***:

(23) $$2^0 = 1,$$
$$2^n + k = 1 + \sum_{m<n} 2^m + k \text{ (con } 1 \leq n;\ 0 \leq k < 2^n;\ k, m, n \in N).$$

En un sistema de estilo cantoriano, como ZF, el límite para $n \to \aleph_0$ del miembro izquierdo es $2^{\aleph_0}$. Para el miembro derecho, recordando que $\aleph_0 = \omega$ y las definiciones de exponenciación para ordinales límite y de números-γ, es posible deducir:

(24) $$2^{\aleph_0} = \bigcup_{n\in\omega} 2^n = 1 + \bigcup_{n\in\omega} 2^n \leq 1 + \sum_{n\in\omega} 2^n \leq 2^{\aleph_0}.$$ [21]

Recordando otro famoso teorema de ZF para ordinales límites tenemos:

[20] WOLFF 1961, 399-404.

[21] MONK 1969, 107ss.

(25) $\cup M = M$, si M es un ordinal límite.[22]

La cuestión decisiva es aquí la de cuál es el ordinal límite, pues con $1 + \sum_{m<n} 2^m$ podemos proceder de dos maneras diferentes, de las cuales resultarán para el límite dos expresiones cardinales lingüísticamente diferentes:

1. O bien procedemos de la manera usual en los sistemas cantorianos, conforme a la cual dicha sucesión converge hacia 2^{ω} o $2^{\aleph_0}$, con lo cual, considerando $\cup M = M$ para ordinales límite obtenemos el resultado tradicional:

(26) $\lim_{n \to \omega} 1 + \sum_{m<n} 2^m = 2^{\aleph_0}$,

con total beneplácito del clan cantoriano.

2. O bien en este caso nos aferramos al principio de permanencia de las leyes formales de Hankel – con lo que nos vemos obligados a *modificar la estructura fundamental de la teoría de conjuntos cantoriana* - y a apelar a un teorema elemental (e intuitivamente razonable) que vale, entre otros dominios, para límites de sucesiones en espacios métricos (o como caso particular para sucesiones monótonas de números reales), que es compatible con (25) y que afirma que "*si una sucesión infinita s_n (convergente o divergente) tiene un límite s, entonces toda subsucesión infinita $t_n \subset s_n$ tiene el mismo límite.*"[23] De acuerdo con ello, puesto que

(27) $t_n = 1 + \sum_{m<n} 2^m$

es una sucesión cuyo rango toma los valores 1, 2, 4, 8, ..., es decir, es una

[22] Cf. P. ej. Suppes 1960, 196, Th. 3. Obviamente para ordinales no límites vale $UM' = M$. Véase también *ipse*, *idem*, 134, Th. 14.

[23] Cf. P. ej., 55-56, proposiciones 3.13.5 y 3.13.10, y Rey Pastor 1952, tomo I, 270-271.

subsucesión de aquella cuyo rango es el conjunto de los naturales *N*, argumentando de la siguiente manera para ordinales límites, aplicando (25) y el citado teorema para subsucesiones obtenemos:

i. t_n es una subsucesión de ω,
ii. $\cup M = M$ (25),
iii. $\lim_{n \to \omega} t_n = \cup_{n \in \omega} 1 + \sum_{n<\omega} 2^n = \omega\ (= \aleph_0)$, de donde tenemos:

(28) $\lim_{n \to \omega} 1 + \sum_{m<n} 2^m = \aleph_0$

De (26) y (28) surge la aparente paradoja

(29) $\aleph_0 = 2^{\aleph_0}$,

lo que implica modificaciones substanciales en las teorías de conjuntos de estilo cantoriano con el propósito de conservar la vigencia transfinita del principio de permanencia de las leyes formales de Hankel, modificaciones que eliminan las dificultades de los teoremas impredicativos de Cantor respecto a las potencias cardinales transfinitas absolutas. (29) *sería una paradoja e incluso una antinomia si aceptáramos una teoría de conjuntos cantoriana en la que los conceptos de enumerable y de no-enumerable fuesen absolutos.* En cambio en una teoría en la que las cardinalidades transfinitas son relativas a la capa lingüística en que se expresan desaparece la antinomia y desaparece incluso su carácter paradojal.[24]

Adoptar el primero o el segundo de los procedimientos mencionados arriba tiene algo de *decisión teórica*. La segunda decisión, que recurre al principio de conservación de Hankel y conserva la validez

[24] Cf. Suppes 1960, 51 y 222. Entendemos por antinomia una oposición incompatible de enunciados o fbf de un lenguaje y por paradoja un enunciado verdadero pero sorprendente, por opuesto a la "intuición" ingenua, que parece ser falso. Cf. da Costa 1980, 194, y Kondakow 1983, 33 y 369.

de los teoremas para sucesiones en la segunda clase ordinal, sólo puede ser objetable bajo el *indemostrable supuesto cantoriano del carácter absoluto de las cardinalidades transfinitas.* Pero no lo es una vez que está demostrado que las cardinalidades transfinitas son relativas a la capa lingüística en la que discurre la argumentación, esto es, la construcción lingüística de la entidad. Alguien podría aún insistir en que $\lim_{n\to\omega} 2^n = 2^{\aleph_0}$ y que por lo tanto la sumatoria no puede tener un "límite inferior". Pero esto es falso, pues se apoya en el supuesto infundado del carácter absoluto de los cardinales transfinitos y sus diferencias. Las demostraciones del carácter relativo a una capa lingüística de los predicados 'enumerable' y 'no-enumerable' y de que todo conjunto no enumerable es reducible a uno enumerable en la capa lingüística adecuada permiten justificar la extensión del principio de conservación de Hankel a los teoremas de la teoría de sucesiones a fragmentos de la segunda clase ordinal. La reconstrucción lorenziana de un fragmento de la teoría de conjuntos, que es necesaria para la construcción de la matemática constructiva, incluída en ella gran parte del análisis clásico, es una modificación adecuada que no requiere cardinales transfinitos absolutamente inconmensurables y que permite conservar principios y teoremas "intuitivamente razonables", como los arriba mencionados, para fragmentos de la segunda clase ordinal.

Los resultados de la reconstrucción de Lorenzen y otros han tenido consecuencias importantes. Una de ellas tiene que ver con el problema de Tarski acerca de los cardinales inaccesibles. En la reconstrucción lorenziana el único cardinal absolutamente inaccesible que se conserva es $\aleph_0$ o ω. Los restantes serían solamente una proliferación lingüística inocua no absoluta, sino relativa a la capa lingüística, de entidades de una teoría de conjuntos demasiado vasta y no constructiva que sería, en opinión de Lorenzen, un "fragmento de literatura fantástica".[25]

[25] Otro curioso resultado de LORENZEN 1969, 193 es el siguiente: "Esta enumerabilidad y transenumerabilidad relativas difiere de los conceptos absolutos de la teoría de contoriana de conjuntos ante todo en que un subconjunto de un conjunto enumerable en C_t no siempre es también enumerable en C_t. En tanto el conjunto de todos los objetos fundamentales ya es p. ej. enumerable en C_1, hay ... conjuntos de objetos fundamentales que no son representables en C_1, y que por lo tanto no son enumerables en C_1." (*"Diese relative Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit unterscheidet sich von den absoluten Begriffen der Cantorschen Mengenlehre vor allem dadurch, daß eine Untermenge einer in S_t abzählbaren Menge nicht allemal auch in S_t abzählbar ist. Während die Menge aller Grundobjekte z. B. schon in S_1 abzählbar ist, gibt es ja ... Mengen von Grundobjekten, die in S_1 nicht darstellbar sind, also erst recht nicht in S_1 abzählbar sind."*)

Todo esto produce una *disolución del problema del continuo*, que dice que *el primer cardinal transfinito sólo es relativamente menor que los siguientes*, pero se puede afirmar que *no existen cardinales absolutamente "más grandes" que él.* Siempre podemos permanecer en el ámbito de lo enumerable.

Las teorías de conjuntos de estilo cantoriano con sus cardinales transfinitos absolutos son teorías platónicas y barrocas. La objección fundamental a las teorías de estilo cantoriano es entonces ¿para qué?, si podemos prescindir de ellas, ya que no son necesarias para la construcción de ningún fragmento de matemática que se requiera en la organización simbólica de alguna ciencia empírica. Hay varias respuestas posibles, pero *para las ciencias de medios y de fines bastan las teorías predicativas.* De todos modos es aquí importante señalar que el conflicto esencial no está tanto en (1) la admisión única del infinito potencial o también la del infinito actual (ya que también diversas formas de constructivismo, en la medida en que admiten ciertas formas de inducción transfinita, admiten más o menos furtivamente infinitos actuales en el dominio ordinal), ni (2) en la admisión del predicado 'no enumerable' para números cardinales, ya que la enumerabilidad o no enumerabilidad de un conjunto es relativa al medio expresivo que se utilice, sino (3) que reside en la pretensión de las teorías de conjuntos clásicas de que existen cardinales infinitos absolutamente diferentes, lo que no es aceptable para una fundamentación constructivista.

Sin embargo parece conveniente postular aquí un *principio de tolerancia* como el siguiente: concédase a quienes plazca que sostengan y desarrollen sus teorías de cardinales transfinitos no-enumerables crecientes y de cardinales inaccesibles, en tanto eviten – al menos *de facto* - la trivialización o la aparición de contradicciones (*ad libitum*) en sus teorías. Pero, puesto que contamos con demostraciones de la *relatividad lingüística de la distinción entre enumerable y no-enumerable* y de la reducibilidad de los conjuntos no-enumerables a los enumerables, permítase, a filósofos y a matemáticos constructivos, permanecer en el reino de lo enumerable, de acuerdo con la prudente regla de economía y prudencia ontológica y epistemológica del "*venerabilis inceptor*": "*pluralitas non est ponenda sine necessitate*" o "*frustra fit per plura, quod potest fieri per pauciora*".[26]

Allatum est Sino Albo, die XXV *Julii, A. D.* MM.

[26] La versión "*entia non sunt multiplicanda* (también *non multiplicentur*) *praeter* (también *sine*) *necessitatem*" u otras semejantes no aparecen en la obra de Guillermo de Occam. Vease artículo *Ockham's razor* en Jürgen Mittelstraß (ed.): *Enzyplopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, II, 1063-1064.

Bibliografía

BECKER 1966: BECKER, Oskar: *Magnitudes y límites del pensamiento matemático*, Madrid, Rialp, 1966.

CANTOR 1878: CANTOR, Georg: "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84 (1878), 242-258. Reimpreso en Zermelo (Hg.): *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Berlin/ Heidelberg/ New-York, 1980, 119-133.

COHEN 1963: COHEN, Paul: "The independence of the continuum hypothesis", *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 50 (1963), 1143-1148.

DA COSTA 1980: DA COSTA, Newton C. A.: *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*, São Paulo, Hucitec, 1980.

DIEUDONNÉ 1966: DIEUDONNÉ, Jean: *Fundamentos de análisis moderno*, Barcelona, Reverté, 1966.

FRAENKEL & BAR-HILLEL 1958: FRAENKEL, Abraham A. & BAR-HILLEL, Yehoshua: *Foundations of Set Theory*, Amsterdam, North-Holland, 1958.

VAN HEIJENOORT 1967: VAN HEIJENOORT, Jean (ed.): *From Frege to Gödel*, Cambridge, Harvard University Press, 1967.

HILBERT 1900: HILBERT, David: "Mathematische Probleme", en *Gesammelte Abhandlungen* iii, 290-329, Bronx, New York, Chelsea Publ. Co., 1965.

LORENZEN 1957: LORENZEN, Paul: "Wie ist Philosophie der Mathematik möglich?", *Philosophia Naturalis* 4 (1957), 192-208.

LORENZEN 1965: LORENZEN, Paul: *Differential und Integral*, Frankfurt/Mn., Akademische Verlagsgesellschaft, 1965.

LORENZEN 1969: LORENZEN, Paul: *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Berlin, Springer Verlag, 1969, segunda edición modificada (primera edición de 1955).

MARTIN 1988: MARTIN, Richard: *Metaphysical Foundations. Mereology and Metalogic*, München, Philosophia Verlag, 1988.

MITTELSTRASS 1995: MITTELSTRASS, Jürgen (ed.): *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, Stuttgart/Weimar, Verlag J. B. Metzler, 1995.

MONK 1969: MONK, J. D.: *Introduction to Set Theory*, New York, McGraw-Hill, 1969.

POINCARÉ 1906: POINCARÉ, Henri: "Les mathématiques et la logique (III)", *Rev. mét. mor.* 14 (1906), 294-317.

REID 1970: REID, Constance: Hilbert, Berlin/Heidelberg/New York, Springer Verlag, 1970.
REY PASTOR 1952: REY PASTOR, Julio, Pi Calleja, Pedro y Trejo, César: *Análisis matemático* I, Buenos Aires, Kapelusz, 1952

ROETTI 1994: ROETTI, Jorge Alfredo: "Commentarii de bello infinitorum. Adversus unam non sanctam Cantorianam consuetudinem", en *Proceedings of the IX Latin American Symposium on Mathematical Logic*, Part 2, 105-119, Bahía Blanca, Inmabb – Conicet – Universidad Nacional del Sur, 1994.

SCHROEDER-HEISTER 1995: SCHROEDER-HEISTER, Peter, en Jürgen MITTELSTRASS (ed.) 1995, II, 460-461.

SKOLEM 1920: SKOLEM, Thoralf: "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüjllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen", *Videnskapsselskapets skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse* 4 (1920). Traducción inglesa en VAN HEIJENOORT 1967, 254-263.
460-461.

SUPPES 1960: SUPPES, Patrick: *Axiomatik Set Theory*, New York, Van Nostrand, 1960.

THIEL 1995: THIEL, Christian: "Cantorsches Diagonalverfahren", en MITTELSTRASS 1995, 374-375.

TIETZE 1965: TIETZE, Heinrich: *Famous Problems of Mathematics*, New York, Graylock Press, 1965., 263.

WOLFF 1971: WOLFF, Karl H.: "Zur Problematik der absoluten Überabzählbarkeit", *Philosophia Naturalis* 13 (1971), 399-404.

ZERMELO 1904: ZERMELO, Ernst: "Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann", *Math. Ann.* 59 (1904), 514-516.

ZERMELO 1908a: ZERMELO, Ernst: "Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung", *Math. Ann.* 65 (1908), 107-128.

ZERMELO 1908b: ZERMELO, Ernst: "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I", *Math. Ann.* 65 (1908), 261-281.

ZERMELO 1929: ZERMELO, Ernst: "Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik", *Fund. Math.* 14 (1929), 339-344.