Departamento de Economía – Universidad Nacional del Sur

Trabajo de Grado de la Licenciatura en Economía

“Relevamiento de campo de la Paradoja de Allais”

Alumno:
Pablo Ezequiel Sanchez

Profesor Asesor:
Fernando Tohmé

Noviembre 2015

Índice

Introducción

En la teoría del consumidor con certidumbre se estudia el problema de decisión de un individuo cuando enfrenta una elección de consumo de una canasta de bienes. La solución a dicho problema se puede obtener por medio de dos enfoques : el de las preferencias y el de la elección. Sin embargo, muchas de las elecciones de los individuos se dan bajo condiciones de incertidumbre, es decir, los individuos se ven obligados a elegir entre un número de alternativas con resultados inciertos. Dos motivos pueden estar detrás de esta situación, el primero de ellos es que el azar gobierna el proceso que origina los resultados, y el segundo aparece cuando la falta de información impide determinar con exactitud cuáles serán las consecuencias de la elección. Este trabajo se ocupará de modelos donde se deja caer el supuesto clásico de certidumbre, es decir modelos donde los individuos no podrán perfectamente predecir las consecuencias de sus acciones.

Los resultados de las diferentes elecciones dependen de distribuciones probabilísticas y si bien existen modelos en donde los agentes desconocen por completo las distribuciones de probabilidad, es importante destacar que en los que veremos en este trabajo los individuos suponen saber qué acciones son las más susceptibles de producir ciertos resultados.

Es habitual usar como ejemplo de esto, una situación de política en donde el funcionario debe elegir entre ir a la guerra, negociar y no hacer nada. Con cada una de estas alternativas se pueden obtener importantes concesiones, sólo algunas ventajas menores o que quede todo como antes. Sin especificar las probabilidades podemos analizar cada una de estas alternativas. Si se envían tropas parece lógico pensar que es más probable obtener importantes concesiones respecto de las otras alternativas, pero también se afrontaran las mayores pérdidas (bajas humanas y otras pérdidas derivadas del conflicto bélico). El agente debe tomar una decisión donde desconoce el resultado fehaciente de su elección, por lo que una decisión racional requerirá más: conocer las distribuciones de probabilidades. El despliegue de las tropas sería racional si es mucho más probable que conduzca a una victoria y mayores concesiones y si los costos relativos al conflicto son bajos. La teoría clásica de la elección en condiciones de incertidumbre está motivada en el análisis de situaciones como las de este ejemplo.

Este enfoque se basa en dos elementos claves. El primero es el concepto de creencias, que se modelan en forma de distribuciones de probabilidades o "loterías" sobre los resultados asociados a cada una de las posibles alternativas. Y el segundo es la especificación de los beneficios asociados con cada resultado. Estos pagos se encuentran representados a través de funciones de utilidad von Neumann – Morgenstern derivadas de los axiomas de las preferencias del consumidor.

En este trabajo nos centraremos en el teorema de la utilidad esperada, sus propiedades y las paradojas de elección bajo incertidumbre a los que da lugar. Sostendremos la hipótesis de que las preferencias de los individuos violan el axioma de independencia de los modelos basados en la utilidad esperada. Esto se refleja en la paradoja de Allais y para algunos autores invalida el sustento teórico de los modelos clásicos.

Para analizar esto se desarrollará un juego en el que los participantes revelarán sus preferencias. Mediante ellas podremos determinar el cumplimiento o no del axioma entre los participantes.

Cuerpo del Trabajo

Aspectos Teóricos

Definiciones: Incertidumbre y riesgo

Para comenzar este trabajo se deben brindar algunas definiciones de los conceptos de riesgo e incertidumbre. Las primeras definiciones que encontramos en la materia fueron escritas por Frank Knight en su trabajo “Riesgo, incertidumbre y beneficio”, de donde se puede citar la frase “The essential fact is that 'risk' means in some cases a quantity susceptible of measurement, while at other times it is something distinctly not of this character; and there are far-reaching and crucial differences in the bearings of the phenomena depending on which of the two is really present and operating.... It will appear that a measurable uncertainty, or 'risk' proper, as we shall use the term, is so far different from an unmeasurable one that it is not in effect an uncertainty at all.”. Esto es, Knight distingue los conceptos de riesgo e incertidumbre, en el punto de que el primero es aquella situación donde el individuo o agente enfrenta sucesos donde conoce las probabilidades de ocurrencia y el segundo se produce cuando las probabilidades no son medibles y por lo tanto no son computables para el agente.

Si sigue adelante en el tiempo se encontrara a Nicholas Georgescu – Roegen, quien define el concepto de incertidumbre como “una situación donde el mecanismo que genera los sucesos es desconocido por el agente”.

Por ultimo, siendo una de las definiciones mas actuales, se encuentra el planteo de Kenneth Arrow, quien entiende por incertidumbre a toda situación donde el agente enfrenta una elección presente cuyos resultados futuros están estocásticamente determinados. Es decir el individuo carece de información concluyente sobre cúal será el resultado efectivo de su elección.

En el contexto que proporciona esta última definición, es importante mencionar que se pueden enfrentar diversos grados de incertidumbre, determinados por la cantidad de información que el individuo cuenta a la hora de realizar su elección.

Y siguiendo con esta línea, se debe definir el concepto de riesgo económico. Se entiende por este, a la posibilidad de que un individuo sufra una pérdida como consecuencia de tomar decisiones bajo un contexto de incertidumbre. Para ejemplificar la situación, cuando un inversionista tiene que decidir invertir entre dos proyectos, y desconoce los retornos efectivos futuros, pone en "riesgo" su inversión y podría perder una parte o el todo de la misma.

Respecto de esta situación, se pueden diferenciar dos alternativas claras, la primera en donde el agente conoce las distribución de probabilidades que enfrenta, es decir el riego es medible y la última donde las desconoce, por lo que se enfrenta a una situación donde el riesgo no es medible. En este trabajo se utilizarán modelos donde el riego es medible.

<u>Decisiones bajo incertidumbre con riego medible y un número finito de resultados posibles</u>

Utilizando la definición planteada por Arrow y basándose, como se dijo, en una situación donde el riego es medible, comenzaremos con un modelo en donde el agente se enfrenta a una decisión en el presente entre un número finito de acciones con un resultado efectivo incierto pero con un número finito de posibilidades de las que conoce la distribución de probabilidad.

Denotaremos las acciones viables como el conjunto $A = \{a_1, ..., a_I\}$ y los posibles resultados como $X = \{x_1, ..., x_J\}$. Suponemos una vinculación probabilística entre las acciones y los resultados. Para formalizar este supuesto, asumiremos que el resultado depende, no sólo de la acción adoptada sino también del "estado del mundo", s. Entendemos como estado del mundo a todo evento independiente de la voluntad del individuo (sea climático, de otro orígen natural o inclusive el comportamiento de otros individuos). La variable s es una variable aleatoria. Y el conjunto de estados del mundo se define por,

$S = \{s_1 , s_2 , ... , s_k\}$

Dado que cada estado del mundo puede ocurrir, el conjunto S es estocástico. Suponemos, también, que existen creencias sobre la probabilidad de cada uno de ellos ocurra representados por la función π: $\pi(s_k) \equiv \pi_k$.

Los estados del mundo deben cumplir con los axiomas que se detallan a continuación,

1. S es un conjunto bien definido, exhaustivo y mutuamente excluyente.
2. La distribución de probabilidad atribuida al conjunto S está determinada solo por el azar.
3. El individuo diferencia cada uno de los estados del mundo y finalmente conoce cuál ocurre.

Con el cumplimiento de estos axiomas los estados del mundo cumplen las propiedades básicas de la teoría de la probabilidad, es decir que las probabilidades de los mismos deben estar entre cero y uno, y que en su conjunto deben sumar uno. Formalmente,

$0 \leq \pi_k \leq 1$ para cada k

$\pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_k = \sum_{k=1}^{K} \pi_k = 1$

Mediante la función $\chi(a, s): A \times S \rightarrow X$, podemos vincular X, es decir las diferentes alternativas o acciones entre las que el agente puede elegir en el momento 0, S los diferentes estados del mundo y X el conjunto de resultados posibles realizados en el periodo futuro q. Dado que la función depende sólo de a y s, es necesario que el número total de combinaciones entre estados y acciones, sea igual o superior al número de resultados: $I \cdot K \geq J$.

Pondremos como ejemple la siguiente tabla,

A\S	s1	s2	s3
a1	X1	X1	X2
a2	X1	X2	X3

Con este ejemplo se busca demostrar como, a la hora de tomar una decisión, un agente no le es tan relevante el estado del mundo en sí como como la probabilidad de obtener cada uno de los resultados posibles luego de ejecutado el juego. Esto se debe a que el agente no conoce el estado del mundo al momento de realizar la acción a_i, la probabilidad de recibir el resultado x_j se identifica con la probabilidad que el estado del mundo sea s, tal que χ (a_i, s) = x_j. Llamaremos p_{ij} a la probabilidad de obtener el resultado x_j luego de realizar la acción a_i.

Supongamos que las probabilidades para nuestro ejemplo son:

$p_{11} = \pi_1 + \pi_2$

$p_{12} = \pi_3$

$p_{13} = 0$

$p_{21} = \pi_1$

$p_{22} = \pi_2$

$p_{23} = \pi_3$

Para estas probabilidades la formula general es,

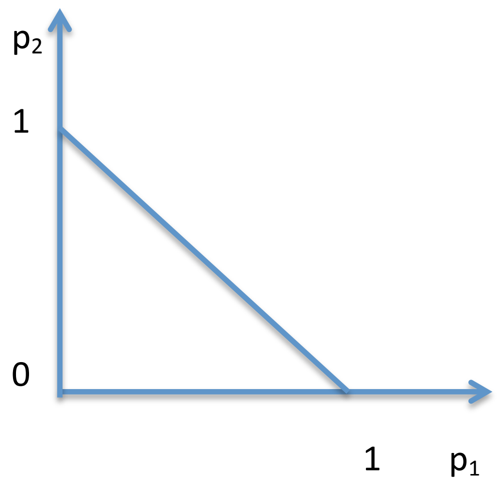
$p_{ij} = \sum_{\{k:\chi(a_i, s_k)=x_j\}} \pi_k$.

Dado que p_{ij} hereda las propiedades de π_k,
$0 \leq p_{ij} \leq 1$ para cada i,j
$p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{ij} = \sum_{j=1}^{J} p_{ij} = 1$ para cada i.

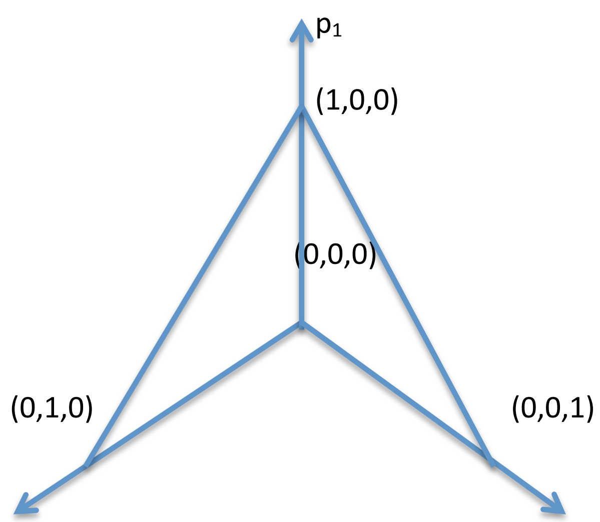
Con lo visto hasta el momento, a continuación simplificaremos la función χ (a, s): A × S → X, suprimiendo la dependencia de los resultados de los estados del mundo S, para centrarse únicamente en la probabilidad de ocurrencia de estos, p_{ij}.

Para continuar con el análisis incluiremos el concepto de loterías. En este sentido el conjunto de alternativas A se identificara con un conjunto de loterías, por lo que ahora, la acción que elige el individuo consiste en una lotería que determinara el resultado efectivo de su acción. Para cada acción a_i definimos el vector $p_i = (p_{i1},\ldots.,p_{ij})$ como la lotería asociada a sus posibles resultados. Es indistinto referirse a la elección de la acción o alternativa a_i y la lotería p_i ya que éstas se identifican. Se denomina P al conjunto de loterías, cada una de ellas es un vector de longitud J y cada uno de sus elementos se encuentra entre 0 y 1 y en conjunto dichas coordenadas suman 1.

P Se identifica con Δ^J, el simplex de dimensión J. Si se trabaja en dos dimensiones el simplex es el segmento de coordenadas (0, 1) a (1, 0). En la figura que aparece a continuación, observamos un simplex en dos dimensiones,



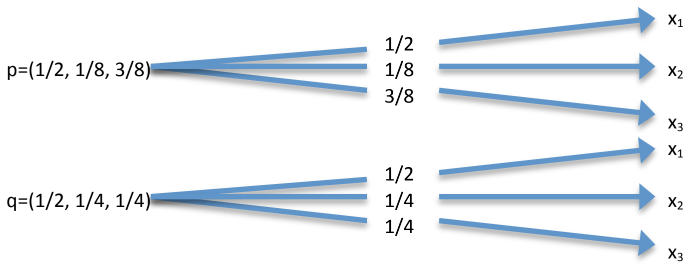
Si se trabaja en tres dimensiones, el simplex estará dado por la sección plana triangular a través de (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1), como se observamos en la figura que aparece a continuación.



p_2 p_3

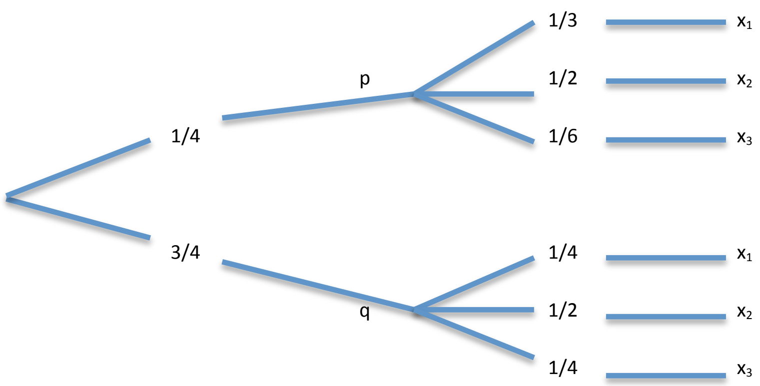
Otra manera de analizar el problema es mediante la modelización con árboles de decisión. Partiendo del nodo inicial cada rama representa un posible resultado con su respectiva probabilidad asociada. Como se puede apreciar más adelante, en el caso de loterías simples la decisión es bastante sencilla e intuitiva. Sin embargo también es frecuente encontrarse con situaciones, algo mas complejas, donde el agente debe elegir entre acciones que no dependen de un solo proceso aleatorio, es decir donde debe elegir entre loterías de loterías. Dicho proceso complejo se denomina lotería compuesta.

En el siguiente ejemplo se utilizará un árbol de decisión para una situación en donde se debe comparar entre dos loterías simples.

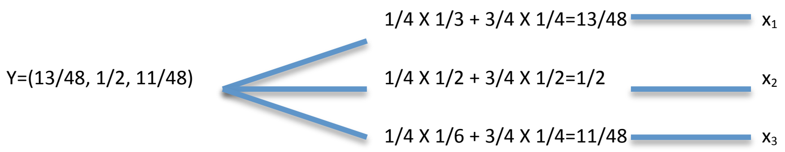


Como se puede ver la lotería p tiene una probabilidad mayor de que se dé x_3 y una menor de x_2 respecto de la lotería q, mientras ambas loterías dan la misma probabilidad en x_1. Consideremos ahora que el agente deba elegir entre las dos acciones, cada una de ellas dan lugar a su respectiva lotería. Dado que ambas acciones están asociadas con loterías que poseen las mismas probabilidades respecto de x_1 carece de sentido suponer que el agente basara su decisión en sus preferencias relativas a dicha variable. Dado que la diferencia entre ambas loterías son las probabilidades de ocurrencia de x_2 y x_3, un agente racional elegiría p si x_3 es preferido a x_2. Denotaremos x P y si x es preferido a y, y x I y si x e y son indiferentes. Estos argumentos permiten concluir que el agente elegirá p si x_3 P x_2, que elegirá q si x_2 P x_3, y será indiferente si x_2 I x_3.

Si bien el ejemplo anterior es útil para observar de manera intuitiva cómo se comporta un agente al enfrentar una situación donde las acciones dependen de una sola lotería, llegó la hora de ver una situación cuya modelización requiere la utilización de loterías compuestas. Podemos definir una lotería compuesta sobre P como el vector $\{\alpha_1, ..., \alpha_i\}$ donde α_i representa la probabilidad de jugar la lotería p_i. Dicha lotería puede representarse como una lotería simple con la probabilidad de x_j dada por $\sum_{i=1}^{I} \alpha_i p_{ij}$. A continuación, se utilizará un ejemplo en donde un agente debe comparar entre las loterías del ejemplo anterior con una lotería compuesta r en la que la probabilidad de jugar p es 1/4 y la de jugar q es 3/4.



Reduciendo la lotería de compuesta a simple se obtine,



Es posible apreciar que las probabilidades respecto de x_2 son idénticas para todas las loterías, como se ha visto anteriormente, el agente no tendrá en cuenta las preferencias respecto de dicha variable para realizar las comparaciones y el problema se centrara en la puja entre x_1 y x_3. Dado que en r la probabilidad de x_1 es mayor que la de x_3, un agente que prefiera x_1 respecto a x_3 elegirá a r sobre q y al mismo tiempo preferirá a p sobre r ya que x_1 es más probable en p.

Ahora estamos en condiciones de formalizar los razonamientos intuitivos de los ejemplos anteriores. Y es posible resumirlos en cuatro axiomas de preferencias débiles notables de R sobre P.

- Integridad y transitividad: La relación de preferencia R sobre P es completa, reflexiva y transitiva.

Este axioma es muy importante e implica que las loterías pueden compararse y que las preferencias respecto de estas no provocan ciclos.

- Reducción de loterías compuestas: Para cualquier $\alpha \in [0, 1]$ y $p \in P$, p I [$\alpha p + (1 - \alpha) p$].

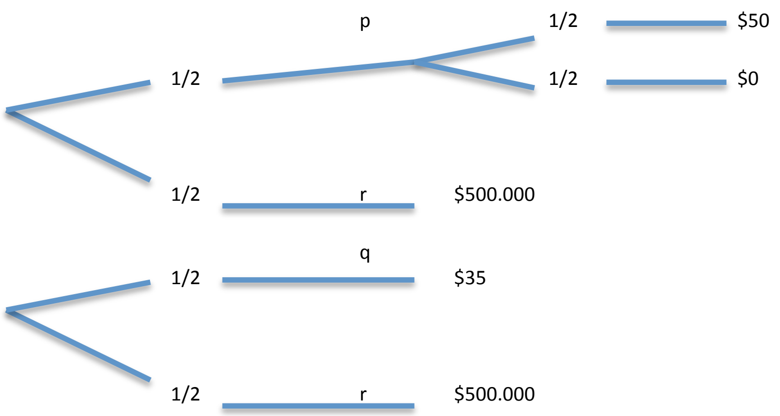
Este axioma formaliza lo planteado en el ejemplo de loterías compuestas y garantiza que los agentes sólo se preocupan de las probabilidades de los resultados, y no por el proceso probabilístico por el que se alcanzan los mismos.

- Continuidad: Sean p, q y r tres loterías en P. El conjunto de pesos $\alpha \in [0,1]$ tal que [$\alpha p + (1-\alpha) r$] R q es un intervalo cerrado. El conjunto de pesos $\beta \in [0,1]$ tal que q R [$\beta p + (1-\beta) r$] es también un intervalo cerrado.

Si bien este axioma es el más abstracto, implica que un pequeño cambio en las probabilidades de los resultados no debe dar lugar a grandes cambios en las preferencias sobre loterías. Es decir que si p P q todas las loterías suficientemente cercanas a p serán preferibles a q, y que una muy pequeña modificación que aumente la probabilidad de un muy mal resultado en la lotería p no modificará el órden de preferencias. Finalmente.

- Independencia: Sean p, q y r tres loterías en P. Para cualquier escalar $\alpha \in (0, 1)$, p R q si y sólo si [$\alpha p + (1 - \alpha) r$] R [$\alpha q + (1 - \alpha) r$].

Este último axioma, es quizás el más controversial. Si se supone que tenemos un órden de preferencias entre dos loterías y se mezclan cada una de estas con una tercera, el axioma de independencia sostiene que el órden de preferencia será el mismo que el de las loterías originales. Para ejemplificar esto consideremos la lotería p, que paga \$50 con probabilidad de 1/2 y \$0 en el caso contrario y la lotería q que paga con seguridad \$35. Si se combinan cada una de éstas con la lotería r, que otorga una probabilidad 1/2 de $ 500.000 y 1/2 de oportunidad de jugar a la lotería original, por el axioma de independencia se puede decir que se deben mantener el órden de preferencias de las loterías originales. El siguiente árbol de decisión ilustra el ejemplo.



Utilizando el axioma de independencia, la comparación de las loterías se basa sólo en la comparación de las ramas con resultados distintos. Por lo que al eliminar la rama de la lotería r, las loterías compuestas se reducen a las originales y al comparar las loterías estamos en condiciones de afirmar que el órden de preferencias sigue siendo idéntico al original.

A continuación se enumeraran algunas implicaciones de estos axiomas que permitirán enunciar y esquematizar la demostración del teorema de von Neumann- Morgenstern. Los próximos lemas extenderán los axiomas a la indiferencia y preferencia estricta.

Lema 1. Si p R q R r entonces existe algún $\lambda \in [0, 1]$ tal que $[\lambda p+(1-\lambda)r]$ I q.

Lema 2. Para cualquier $\alpha \in (0, 1)$, y loterías r, p, q $\in$ P, p I q si y sólo si $[\alpha p + (1 - \alpha) r]$ I $[\alpha q + (1 - \alpha) r]$.

Lema 3. Para cualquier $\alpha \in (0,1)$, loterías r, p, q $\in$ P, p P q si y sólo si $[\alpha p + (1-\alpha) r]$ P $[\alpha q + (1-\alpha) r]$

Lema 4. Si p R q y $\alpha \in (0, 1)$, entonces, p R $[\alpha p + (1 - \alpha) q]$ R q.

Lema 5. Supongamos que las alternativas están indexadas por lo que x_1 R x_j para todo j y x_j R x_J para todo j. Entonces para todo $\alpha, \beta \in [0,1]$, $[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_J]$ R $[\beta x_1 + (1 - \beta) x_J]$ si y sólo si $\alpha \geq \beta$.

Es importante mencionar que los axiomas y sus implicancias permiten demostrar que las preferencias sobre las loterías pueden representarse por medio de funciones de utilidad esperada. En este trabajo pondremos en cuestión el ultimo axioma. Pero antes veremos en detalle este resultado.

Teorema de von Neumann-Morgenstern

La teoría de la utilidad esperada, de forma similar a la teoría del consumidor con certidumbre, relaciona un conjunto de loterías con las preferencias de un agente. Si éste es un individuo racional y cumple con el axioma de continuidad, la preferencias pueden representarse por una función de utilidad. Si dicha relación de preferencia cumple con los supuestos adicionales, especialmente con el axioma de independencia, la función de utilidad adopta la forma de función de utilidad esperada, también conocida como función de utilidad von Neumann- Morgenstern, la que sienta las bases pata la modelización del riesgo en economía.

Esta afirmación se enuncia en el teorema de von Neumann-Morgenstern: Si se cumplen los cuatro axiomas descriptos anteriormente, existe una función $u(x_j)$ que asigna un valor u_j para cada resultado tal que la utilidad esperada de la lotería p_i inducida por la acción i viene dada por

$$UE(p_i) = p_{i1}u_1 + p_{i2}u_2 + \ldots + p_{iJ}u_J = \sum_{j=1}^{J} p_{ij}\, u_j$$

y p_i R p_j si y solo si $UE(p_i) \geq UE(p_j)$.

Suelen denominarse funciones de utilidad de Bernoulli a las funciones $u(x_j)$, para distinguirlas de las funciones de utilidad esperada UE (p). Esta distinción se basa en que las funciones de Bernoulli se definen sobre los resultados mientras que las funciones de utilidad esperada se definen sobre loterías. La utilidad esperada de una lotería no es más que el valor esperado de la lotería dado los valores de los resultados especificados por las funciones de utilidad de Bernoulli. Es decir es simplemente el promedio de las utilidades de los resultados ponderados por las probabilidades de cada que cada uno acontezca. Si retomamos el ejemplo anterior y asignamos utilidades a los resultados x_1, x_2, x_3, es decir $u(x_1)$, $u(x_2)$ y $u(x_3)$, encontraremos que la utilidad esperada de lotería p=(1/3,1/2,1/6) es UE (p) = 1/3 $u(x_1)$ + 1/2 $u(x_2)$ + 1/6 $u(x_3)$ mientras que la de q=(1/4,1/2,1/4) es UE (q) = 1/4 $u(x_1)$ + 1/2 $u(x_2)$ + 1/4 $u(x_3)$. Y siguiendo con dicho ejemplo, analizando lo que sucede con la lotería r, definida a partir de p y q. Tenemos que UE(r) = UE (1/4p+3/4q) = ¼ UE(p) + ¾ UE(q) = 13/48$u(x_1)$ + 1/2$u(x_2)$ + 11/48$u(x_3)$, que es exactamente lo mismo que se obtiene de calcular la utilidad esperada de la lotería reducida.

Si bien no demostramos la versión completa del teorema de von Neumann-Morgenstern, haremos una pequeña demostración utilizando tres variables. Es importante mencionar que para extender dicha demostración a un número arbitrario de alternativas se debe realizar un proceso similar mediante inducción matemática. Para esta prueba utilizaremos las consecuencias derivadas de los axiomas, que no se han demostrado en este trabajo pero se tomaran como ciertas.

Sea $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ donde $x_1 R x_2 R x_3$ y al menos una de estas preferencias en estricta. Vamos a representar una lotería sobre X como un vector (p_1, p_2, p_3). Por el Lema 2 se puede decir que existe un α tal que $x_1\, I\, (\alpha, 0, 1-\alpha)$. Y del mismo modo se conoce que $x_1\, I\, (1, 0, 0)$ y $x_3\, I\, (0, 0, 1)$. Por lo tanto, dejaremos que $u_1 = 1$, $u_2 = \alpha$, y $u_3 = 0$. Ahora consideremos cualquier lotería $p = (p_1, p_2, p_3)$. De esta lotería, podemos formar la lotería compuesta $(p_1 + u_2p_2, 0, p_3 + p_2 (1 - u_2))$ lo que arroja $(u_2, 0, 1-u_2)$ al igual que la lotería reducida que alcanza x_2. Se sigue que el agente debe ser indiferente entre esta lotería compuesto y p.

Para terminar, con la aplicación del Lema 5, se sabe que p R q si y sólo si $p_1u_1 + p_2u_2 + p_3u_3 \geq q_1u_1 + q_2u_2 + q_3u_3$. Por dicho motivo, se puede representar las preferencias sobre la lotería p por $p_1u_1 + p_2u_2 + p_3u_3$. Cabe señalar que el teorema no afirma que cualquier $\alpha \in [0,1]$ funcionará. En realidad asegura que existe al menos un α tal que las utilidades de los resultados son $u_1 = 1$, $u_2 = \alpha$ y $u_3 = 0$.

Utilidad cardinal

Existen al menos dos maneras de entender el concepto de utilidad. Es posible tomar la noción de autores Pareto y Hicks, según los cuales el valor de la utilidad no es significativo en si mismo, sí no que lo que importa es el orden entre los valores de utilidad, de forma de determinar qué resultado proporciona mayor satisfacción. Una visión alternativa surge cuando los resultados de la función $u(x_j)$ además de proporcionar un ordenamiento de las preferencias del individuo aporta información por medio de la magnitud de las mismas. es aquí en donde se habla de funciones de utilidad cardinal.

Para tomar un ejemplo de escala cardinal, tomamos la unidad de longitud métrica. Ésta tiene la capacidad de indicar que la diferencia entre un trozo de madera de 25 centímetros y otro de 50 centímetros es 1/3 de la diferencia de uno de 100 centímetros y otro de 25 centímetros. De la misma forma las funciones de utilidad cardinal permiten interpretar la magnitud de las diferencias entre las preferencias. Entonces, por ejemplo, se puede decir que la diferencia entre las preferencias respecto de x_1 y x_2 es el doble que la diferencia entre las preferencias sobre x_2 y x_3.

Resulta natural extender este concepto a las funciones de utilidad esperada. Supongamos que un agente debe elegir entre dos loterías con tres resultados posibles x_1, x_2, x_3 donde $x_1 \text{ P } x_2 \text{ P } x_3$. La lotería 1 posee una probabilidad de 0,5 para x_1 y 0,5 para x_3 mientras la lotería 2 otorga certeza para x_2. Suponga que la función de utilidad de Bernoulli viene dada por $u(x_1) = 1$, $u(x_2) = \alpha \in (0,5)$, y $u(x_3) = 0$. Esto permite predecir que el agente elegirá la lotería 1. Si esta función fuese únicamente ordinal, podríamos aplicar una transformación que mantenga el orden de la función de utilidad, y la función resultante representara exactamente las mismas preferencias. Sin embargo, si consideraremos la transformación de las utilidades de Bernoulli: $v(x_1) = 1$, $v(x_2) = 1 - \alpha$, y $v(x_3) = 0$, se conserva el orden de las preferencias sobre los resultados pero el agente, ahora preferirá la lotería 2, ya que no se respeta la magnitud de las diferencias.

Al igual que el sistema métrico no es la única escala que produce idéntica información sobre longitud, las representaciones de la utilidad esperada tampoco son únicas. Para ver esto, utilizaremos dos funciones de Bernoulli $u(x_j)$ y $v(x_j) = a + b\ u(x_j)$ donde $b>0$. Si tomamos una lotería p, las funciones de utilidad esperados vienen dadas por $\sum_{j=1}^{J} \mathrm{p_j}\ \mathrm{u}(x_j)$ y $a + b \sum_{j=1}^{J} \mathrm{p_j}\ \mathrm{u}(x_j)$ respectivamente. Tomando las loterías p y q, si p I q, es decir $\sum_{j=1}^{J} \mathrm{p_j} \mathrm{u}(x_j) = \sum_{j=1}^{J} \mathrm{q_j}\ \mathrm{u}(x_j)$ entonces $a + b \sum_{j=1}^{J} \mathrm{p_j}\ \mathrm{u}(x_j) = a + b \sum_{j=1}^{J} \mathrm{q_j}\ \mathrm{u}(x_j)$, por lo que ambas funciones de utilidad cardinal producen exactamente el mismo comportamiento. La otra implicancia de esto es que la diferencia $v(x_j) – v(x_k)$ es idéntica a $u(x_j) – u(x_k)$ salvo un factor de multiplicación b, y las diferencias relativas $(v\ (xj) - v\ (x_k)) / (v(x_l) – v\ (x_m)) = (u\ (xj) - u\ (x_k)) / (u(x_l) – u\ (x_m))$ quedando únicamente determinada.

Preferencias sobre el riesgo

Como se dijo a la hora de presentar el teorema de von Neumann-Morgenstern, este sentó las bases en la teoría económica para modelizar el riesgo. Se entiende por riesgo a la posible pérdida de utilidad que un individuo enfrenta de sufrir una perdida como consecuencia de tomar decisiones bajo incertidumbre. En este contexto es posible encontrar diferentes tipos de individuos, algunos dispuestos a aceptar un gran riesgo de obtener un mal resultado a cambio de moderadamente altas probabilidades de obtener uno bueno, mientras que otros buscarán minimizar la probabilidad de malos resultados y renunciar a oportunidades de grandes beneficios.

Si retomamos el axioma de continuidad, este plantea que dado tres resultados, x P y P z, un agente elegirá una lotería con resultados posibles x y z frente a otra con certeza de obtener y, si la probabilidad de z es lo suficientemente pequeña.

Se deben dar algunas definiciones para comenzar a analizar cómo se comportará un individuo frente a la incertidumbre y ver qué riesgo está dispuesto a correr.

Para esto definimos w como el valor del juego o apuesta, x_1 e x_2 como los diferentes resultados expresados en términos monetarios, p la probabilidad de x_1 y $(1 - p)$ la probabilidad de x_2.

Se denomina juego justo a aquel juego donde el valor de la apuesta es igual al premio esperado, es decir si $w = px_1 + (1\text{-}p)\ x_2$. Una apuesta es favorable si el valor de la apuesta es inferior al pago esperado, es decir si $w < px_1 + (1\text{-}p)\ x_2$, y es injusta en caso contrario.

Por ejemplo, una apuesta justa es si se juega en el casino a la ruleta 10 pesos y una posibilidad de ganar 370 pesos y nada para las otras 36. Una apuesta sería favorable si, en la misma situación, el premio fuese mayor que 370 pesos e injusto si fuese inferior. Es importante comentar, que por lo general, lo que comúnmente se denominan "loterías" (hablando de juegos de azar) son juegos injustos.

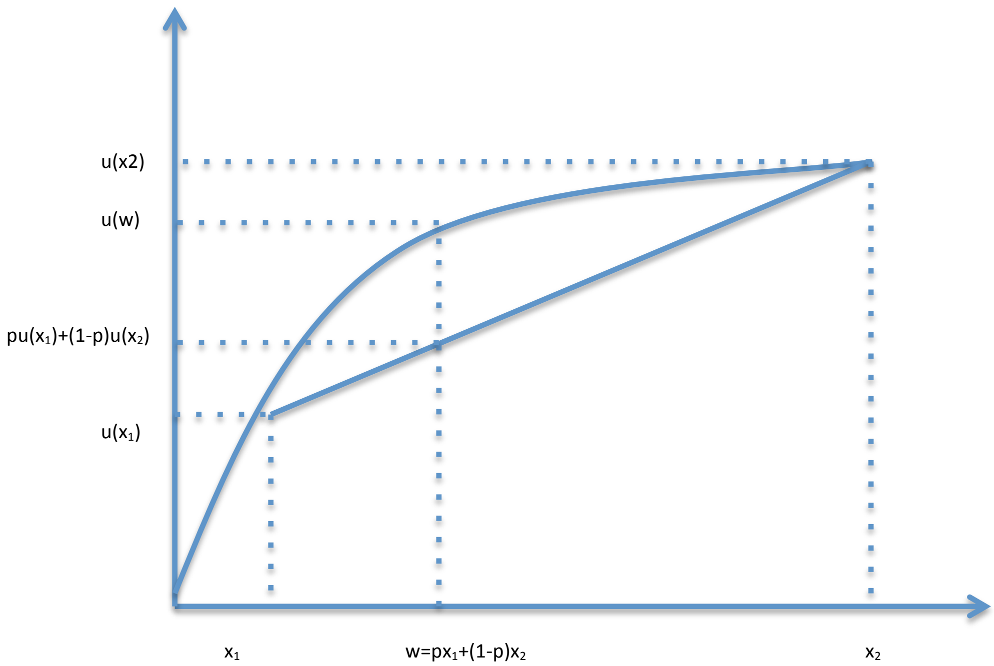
Un agente es averso al riesgo si prefiere que le den el valor esperado de un juego justo que jugarlo, es decir si $u\ (px_1 + (1 - p)\ x_2) > pu\ (x_1) + (1 - p)\ u\ (x_2)$. En otras palabras un agente es averso al riesgo cuando no esta dispuesto a aceptar cualquier juego justo.

En sentido opuesto, un agente es amante al riesgo si prefiere jugar una lotería justa a que le den su valor esperado, es decir si $u\ (px_1 + (1 - p)\ x_2) < pu\ (x_1) + (1 - p)\ u\ (x_2)$. En otras palabras un agente es amante al riesgo cuando esta dispuesto aceptar cualquier juego justo.

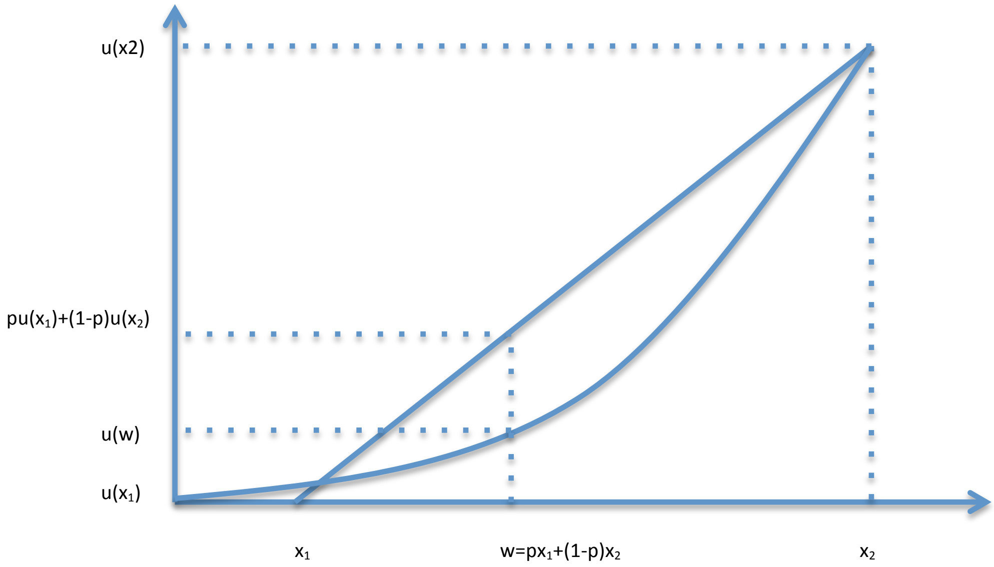
Por ultimo, un agente es neutral al riesgo si es indiferente a cualquier apuesta justa; $(px_1 + (1 - p)\ x_2) = pu(x_1) + (1 - p)\ u(x_2)$, o como lo he explicado anteriormente es indiferente entre jugar una lotería justa y que le den su valor esperado.

Como se ha mostrado anteriormente, la forma mas común de caracterizar la preferencia o tolerancia al riesgo es mediante el análisis de si el agente está dispuesto a aceptar o no un juego justo. Para seguir adelante, vamos a suponer que las apuestas y sus recompensas o resultados están expresadas en dinero ya que resulta que la preferencia por el riesgo está estrechamente relacionado con la forma de su función de utilidad del dinero.

Considerando la figura que aparecerá a continuación, observaremos la comparación con la utilidad del juego justo $w = px_1 + (1 - p) x_2$. La línea que conecta las coordenadas ($u(x_1)$, x_1) y ($u(x_2)$, x_2) debe viajar a través del punto ($pu(x_1) + (1-p) u(x_2)$, $px_1 + (1-p) x_2$). Sabemos que el valor de $pu(x_1) + (1 - p) u(x_2)$ se encuentra en la intersección de la línea entre $u(x_1)$ y $u(x_2)$ y la línea vertical que comienza en w. Por lo tanto, podemos ver que $u(w) > pu(x_1) + (1-p) u(x_2)$, por lo que se trata de un agente averso al riesgo que rechaza una apuesta justa. La propiedad responsable de esto es la concavidad. Esta garantiza que la función de utilidad se encuentre siempre por encima de cualquier línea que conecta dos utilidades. Dicha propiedad se puede extender a todas las loterías, no solo a aquellas de soporte de tamaño 2. Por lo tanto suponer concavidad de la función de utilidad es suficiente para saber que el agente es averso al riesgo.

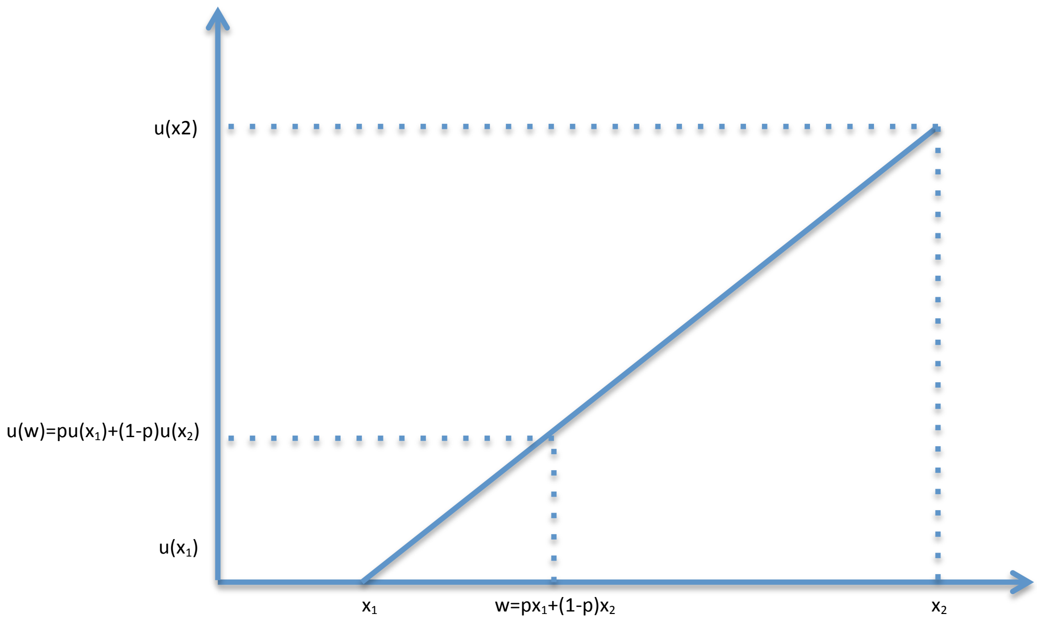


Para el caso de un agente amante al riego.



Como se puede ver, la función de utilidad siempre está por debajo de las líneas que conectan dos utilidades. Con una función de utilidad convexa como esta, el agente siempre aceptará el juego justo, ya que pu (x_1) + (1 - p) u (x_2) > u $(px_1$ + (1-p) $x_2)$. Por lo tanto, ahora, basta suponer que la función de utilidad es convexa para saber que el individuo tendrá un comportamiento averso al riego.

Por último, en el cado de un agente que se comporta de forma neutral al riesgo;



Como se puede apreciar con la ilustración anterior, las funciones de utilidad lineales dan lugar a un comportamiento neutral al riesgo, ya que implica que la utilidad de la apuesta es idéntica a la utilidad esperada de la lotería.

Si bien lo he mencionado para el caso de agentes aversos al riesgo, al igual que lo visto para dos resultados, es fácil extender esto a loterías que asignan probabilidad positiva a un número arbitrario y finito de resultados posibles. A continuación generalizaremos ésta.

Un agente (o su relación de preferencia) es averso al riesgo si para cualquier lotería p
u $(\sum_j p_j \ x_j) > \sum_j p_j$ u (x_j).

Un agente (o su relación de preferencia) es amante al riesgo, si para cualquier lotería p
u $(\sum_j p_j \ x_j) < \sum_j p_j$ u (x_j).

Para terminar es importante relacionar la noción de aversión al riesgo con el comportamiento, para lograr esto se deben definir algunos conceptos adicionales. Dada una lotería p el valor esperado es E (p) = $\sum_j p_j \ x_j$ y la varianza de la lotería es V (p) = $\sum_j p_j (\mathrm{E}\ (\mathrm{p}) \ - x_j)^2$. Para la lotería p y una utilidad esperada u = (u_1, ... , U_j), el equivalente cierto C (p) es un valor que los agentes asignan a una lotería tal que u (C (p)) = UE (p). Y ahora si podemos predecir el comportamiento de un individuo adverso al riego, este estará dispuesto a sacrificar parte del valor esperado en pos de una reducción en la varianza, por lo que el equivalente cierto será menor que el valor esperado. Entonces si se consideran dos loterías p y q, con el mismo valor esperado y la lotería q con una varianza mayor, el agente preferirá la lotería p.

La enunciación del próximo teorema implica definir, en primer lugar, el concepto de desplazamiento que mantiene la media constante (mean-preserving spread). La lotería q es un desplazamiento que mantienen la media constante de p si q es una lotería compuesta que contempla en primer lugar la realización de la lotería p y luego se le adiciona un termino aleatorio ε con una distribución z tal que E (z) = 0 y V (z)> 0.

Teorema: Dada un relación de preferencia R sobre loterías y la función de utilidad de Bernoulli u(x) que representa R, las siguientes afirmaciones son equivalentes,

1. La relación de preferencia R exhibe la aversión al riesgo

2. La función de utilidad u(x) es estrictamente cóncava

3. Para cualquier lotería p, C(p) ≤ E(p) (y si V(p) > 0, la desigualdad es estricta).

4. Para cualquier par de loterías q y p en la que q es un desplazamiento que mantienen la media constante p tenemos UE(q) < UE(p)

Como ya se vio hasta aquí, hablar de concavidad de la función de preferencias o aversión al riego, es hablar de lo mismo, por lo que es fácil concluir que los enunciados 1 y 2 son equivalentes. Con diferentes procesos matemáticos, suponiendo la veracidad de un enunciado permite probar la veracidad del resto. La importante conclusión a la que se arriba gracias a estos enunciados es que si la lotería q es un desplazamiento que mantiene la media de p constante, la lotería q es dominada estocásticamente en segundo orden por p.

<u>Dominio estocástico</u>

Si se consideran dos loterías la p y q, se puede decir que la lotería p domina estocásticamente en segundo orden a la lotería q si y sólo si para cualquier función cóncava creciente de u (x),

$\sum_j p_j \; \mathrm{u}(x_j) \geq \sum_j q_j \; \mathrm{u}(x_j)$.

Si existe dominio estocástico en segundo orden de p respecto de q, un individuo averso al riesgo con preferencias que se ajustan con el dominio estocástico de segundo orden preferirá p respecto q.

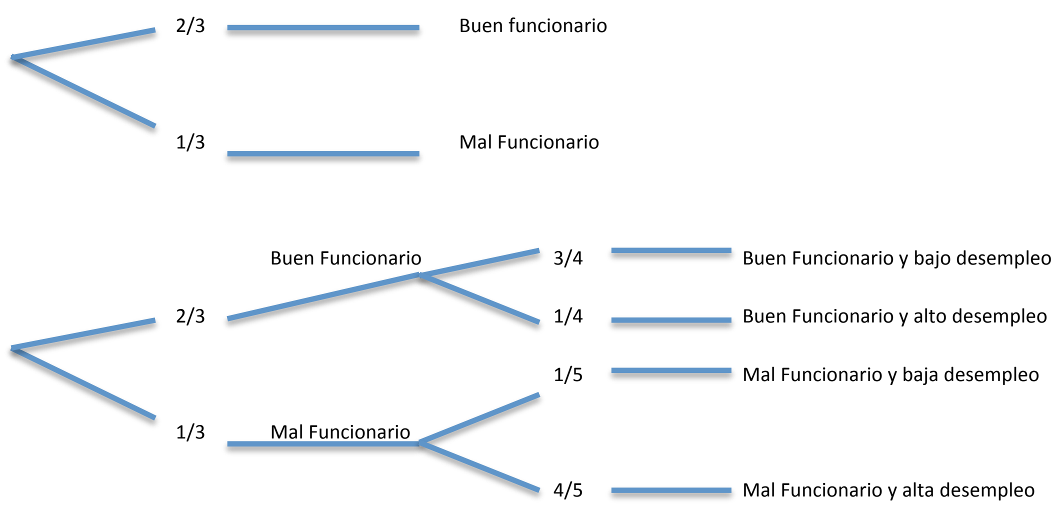
A diferencia de lo visto en el párrafo anterior en algunos casos el riesgo no es relevante a la hora de elegir entre loterías. Si nuevamente se consideran dos loterías las p y la q, pero ahora la lotería p domina estocásticamente en primer orden la la lotería q. Es decir que si para cualquier función no decreciente u(x);

$\sum_j p_j \; \mathrm{u}(x_j) \geq \sum_j q_j \; \mathrm{u}(x_j)$

En este caso la actitud del agente frente al riesgo es irrelevante, por lo que la elección entre las loterías no dependerá del dominio estocástico de primer orden.

Aprendizaje

La introducción del concepto de aprendizaje es lo ultimo que se vera dentro del marco de los modelos basados en la utilidad esperada. Se entiende por aprendizaje a la introducción de nueva información sobre la probabilidad de alguno de los resultados. El siguiente ejemplo busca plasmar dicha situación.



Según se puede apreciar en el primer árbol de decisión, un político es buen funcionario con una probabilidad de 2/3 y malo con 1/3. Ahora bien con este modelo se busca saber como actuaría el agente al incorporar información sensible al comportamiento del funcionario en su cargo, tales como puede ser la tasa de desempleo producida por sus políticas económicas o cualquier otra información relativa al desempeño en su función.

Lo primero que se debe realizar es suponer que el agente conoce la implicancia de la nueva información que incorporara, y en este caso el individuo sabe que es más probable que un buen funcionario pueda producir una baja tasa de desempleo que uno malo. Si nos remitimos al segundo árbol de decisión, el agente conoce de que un buen funcionario tiene una probabilidad de obtener bajos niveles de desempleo de 3/4 y que la probabilidad de obtener estos resultados para un mal funcionario es de solo 1/5.

Intuitivamente se puede decir que una vez conocida esta información el individuo deberá modificar las chances que tiene el político de ser o no bueno. Siguiendo con el ejemplo, cuando entra en conocimiento de que la tasa de desempleo es baja deberá incrementar la probabilidad de ser un buen político por arriba de los ¾ originales. Y por el contrario, si la información fuese que los niveles de desempleo son elevados, el agente deberá disminuir la probabilidad de que el político sea bueno.

En primer lugar se considerara el caso donde la información que el agente incorpora el individuo es que la los niveles de desempleo en la economía son bajos. En el árbol de decisión del ejemplo se trata del primer y tercer nodo. Una vez conocida la información, la probabilidad de alcanzar el primer nodo viene dada por (2/3)(3/4)=1/2 y la de alcázar el tercero por (1/3)(1/5)=1/15. Esto indica que, una vez conocida la noticia, es 7,5 veces más probable que el político sea bueno que malo. Se denomina p(l) a la probabilidad de encontrarnos con un buen funcionario dada que la tasa de desempleo es baja. Es sabido que el conjunto de probabilidades debe sumar 1, por lo que p(l) + 2 p(l)/15 = 1, despejando obtenemos que p(l) = 15/17. Este razonamiento permite confirmar la predicción inicial de que al conocer la noticia de que las tasas de desempleo son bajas el agente debería aumentar la probabilidad de que el político sea bueno, mientras que altos niveles de desempleo irán en detrimento de dicha posibilidad.

El ejemplo permitió ver intuitivamente como se comporta un individuo a la hora de incluir la noción de aprendizaje. Para generalizar este concepto y arribar a un modelo se debe profundizar en los fundamentos de estas intuiciones.

Sean A y B dos eventos. Supongamos que el agente desea calcular la probabilidad de que ocurra el evento A luego de que entra en conocimiento de que ocurrió el evento

B. En estadística esto se conoce como la probabilidad condicional de ocurra un evento A dado uno B. Y la solución formal para la solución de dicho problema se conoce como regla de Bayes.

Regla de Bayes: Sea A_1 ... A_N eventos disjuntos (es decir, no pueden ocurrir los dos simultáneamente) tal que $\sum \Pr(A_n) = 1$ y $\Pr(A_n) > 0$ para todo n. Y sea B algún otro evento. Entonces

$$\Pr(A_j \mid B) = \frac{\Pr(B \mid A_j)\Pr(A_j)}{\sum_{n=1}^{N} Pr(B \mid A_n) Pr(A_n)}$$

Con esta regla es fácil estimar cómo los Individuos racionales actualizan el calculo de las probabilidades luego de recibir la nueva información. Y para demostrar esto retomaremos el ejemplo original. Sea A_1 el evento donde el funcionario es bueno y A_2 el evento donde es malo. Cabe aclarar que un funcionario político no puede ser bueno y malo al mismo tiempo, por lo que el ejemplo satisface el requerimiento de que los eventos sean disjuntos. El evento B es un bajo nivel de desempleo. A continuación se desarrollara la formula de Bayes general para aplicarla en particular para cada uno de estos dos eventos,

$$\Pr(A_1 \mid B) = \frac{Pr(B \mid A_1)\, Pr(A_1)}{Pr(B \mid A_1)\, Pr(A_1) + Pr(B \mid A_2)\, Pr(A_2)}$$

Y

$$\Pr(A_2 \mid B) = \frac{Pr(B \mid A_2)\, Pr(A_2)}{Pr(B \mid A_1)\, Pr(A_1) + Pr(B \mid A_2)\, Pr(A_2)}$$

Remitiéndose al ejemplo ya presentado se obtiene:

$\Pr(A_1) = 2/3$

$\Pr(A_2) = 1/3$

$\Pr(B \mid A_1) = 3/4$

$\Pr(B \mid A_2) = 1/5$

Ahora al insertar la información en las respectivas formulas se obtiene que:

$$Pr\ (A_1\ |\ B) = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}} = 15/17$$

y que,

$$Pr\ (A_2\ |\ B) = \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}} = 2/17$$

Arribando a la misma conclusión a la que se había llegado al principio de forma intuitiva.

<u>Critícas al modelo de aprendizaje basado en la regla de Bayes</u>

Hasta ahora se ha visto un modelo que parece lógico y sencillo de aplicar, pero se debe decir que es muy a menudo criticado por ser pobre, por considerar un agente que supera la comprensión típica de un individuo respecto de la probabilidad condicional y por arrojar predicciones que, en ocasiones, están en contra de la intuición.

Para mostrar esto, se utilizara una situación que se daba en el programa de la televisión americana “Let's Make a Deal (1984–86)” creado por Monty Hall. Allí los concursantes enfrentaban la elección de una de entre tres puertas. Detrás de una de ellas se encontraba un auto de lujo, mientras que en las otras se escondían premios de poco valor monetario (las cabras, por ejemplo fueron las vedettes del show). Una vez seleccionada una de las puertas, pero antes de que se abra, el conductor abría una de las dos puertas restantes revelando un premio de poco valor. Luego el conductor ofrecía al participante cambiar su elección a la puerta restante. La mayoría de las personas intuitivamente consideraban que no se gana nada con el cambio, ganar el auto con el mismo es igual de probable que conseguirlo con en el intento original y la probabilidad de ganarlo seria 1/2 para ambos casos. Esto es incompatible con la ley de Bayes. Dicho problema es muy conocido entre matemáticos y estadísticos por lo que fue tomado como ejemplo en publicaciones de diarios y revistas.

Para facilitar el análisis se supondrá que el concursante elige la puerta 3, aunque cualquiera sea la puerta elegida el resultado es el mismo. En primer lugar se verá que sucede si el concursante no cambia de puerta. En este caso, como es de suponer, la probabilidad de que el vehículo se encuentre detrás de la puerta 3 sigue siendo la misma y por lo tanto la probabilidad es sólo un 1/3. Ahora consideramos la alternativa de que el participante gane cambiando de puerta. Sean A_1, A_2, A_3 los eventos en los que el auto este detrás de las puertas 1, 2 y 3 respectivamente. Y B_1, B_2 el caso donde el conductor abre la puerta 1 o 2.

Dado que Pr (A_1) + Pr (A_2) + Pr (A_3) = 1 y como todas las puertas tienen las mismas probabilidades de tener el auto detrás Pr (A_1) = Pr (A_2) = Pr (A_3) = 1/3, solo se debe calcular Pr (B_i | A_j) para todos los eventos. Como el conductor nunca abrirá una puerta que tenga el auto detrás, Pr (B_1 | A_1) = Pr (B_2 | A_2) = 0. También se debe asumir que en el caso de A_3, es decir que el auto este detrás de la puerta seleccionada, el conductor abrirá una puerta al azar. Por lo tanto, Pr (B_1 | A_2) = Pr (B_2 | A_1) = 1 y Pr (B_1 | A_3) = Pr (B_2 | A_3) = 1/2.

Para seguir adelante, se supone que el conductor abre una puerta, en este caso se supone que el conductor abre la puerta numero 2, por lo que la probabilidad de que el concursante gane con el cambio estará dada por,

$$\Pr(A_1 \mid B_2) = \frac{\Pr(B_2 \mid A_1)\Pr(A_1)}{\Pr(B_2 \mid A_1)\Pr(A_1) + \Pr(B_2 \mid A_2)\Pr(A_2) + \Pr(B_2 \mid A_3)\Pr(A_3)}$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 2/3$$

El resultado, es que la probabilidad de que el participante gane cambiando a la puerta numero 2 es de 2/3. Entonces podemos afirmar que un concursante que cambia gana 2 de cada 3 veces mientras que uno que mantiene su elección tiene solo 1/3 de chances de ganar.

Como se pude ver en este ejemplo, la regla de Bayes contradice lo que la intuición de la mayoría de las personas indica. Esto se debe a que la mayoría de los individuos no tiene en cuenta que el conductor nunca abrirá una puerta que tenga el premio mayor detrás. Esta es la información que un participante que cambia de puerta utiliza en su decisión y uno que no cambia no.

Críticas a la teoría de la utilidad esperada

En los próximos párrafos, y como uno de los últimos temas a abordar desde los fundamentos teóricos de la tesis, se analizaran las críticas a la teoría de la utilidad esperada para luego dar lugar al desarrollo practico del trabajo con la implementación de un ensayo que permita concluir si la muestra cumple con las predicciones de Allais .

Paradoja de Ellsberg

La primera de las críticas que se abordarán se centra básicamente en la idea que la teoría de la utilidad esperada se basa en la distinción entre riesgo e incertidumbre.

La primer definición acerca de estos conceptos fue dada por el economista Franck Knight (1921), quien argumento que hay una diferencia entre modelizar riesgo e incertidumbre. En su formulación, incertidumbre implica que los agentes carecen de información estadística suficiente para realizar cálculos de las probabilidades de los distintos resultados. Formalmente esto significa que, en una situación de incertidumbre, las personas no conocen el conjunto verdadero de loterías P.

En 1954, para soslayar esta dicotomía el estadístico Leonard Savage indicó que la teoría de la utilidad esperada podría ser extendida utilizando el supuesto de que las personas tienen creencias subjetivas acerca de P, que se pueden utilizar para formular distribuciones de probabilidad subjetivas sobre los resultados. Sin embargo, la evidencia experimental ha puesto en duda la validez en el mundo real de este enfoque.

En 1962, Daniel Ellsberg completó su tesis doctoral, dentro del campo de la teoría de decisión. Esta se basó en una serie de experimentos que demostraron que, en general, las decisiones en condiciones de incertidumbre no son compatibles con probabilidades subjetivas bien definidas.

Para esto realizo un experimento con una urna en donde habían 90 bolas, 30 rojas, y el resto de color amarillas o negras, con una distribución desconocida.

Algunos individuos fueron sometidos a un juego donde tenían dos alternativas:

Alternativa A: si saca una bola roja gana un premio monetaria y por el contrario en caso de obtener una amarilla o negra pierde.

Alternativa B: si saca una bola amarilla gana y si obtiene una de otro color pierde.

Realizada dicha experiencia se observó que la mayoría de los participantes optaron por la primer alternativa.

Luego se cambió el juego una manera que:

Alternativa C: si se saca una bola roja o negra se gana el premio, y con una amarilla se pierde.

Alternativa D: si saca una bola amarilla o negra gana, mientras que con una roja pierde.

En este caso, la mayoría de las personas escogieron la D. Pero esto entra en contradicción con la decisión anterior de escoger la apuesta A, ya que la bola negra es ganadora en ambas alternativas, y no aporta diferencia alguna con el primer juego.

Esto se puede explicar debido a que la mayoría de personas, cuando deben escoger entre dos opciones, se deciden por aquella donde la probabilidad es conocida. Y en ocasiones, como se demostró con el trabajo de Ellsberg, esto puede traer contradicciones con el axioma de independencia en la teoría de la decisión.

Paradoja de Allais

Como ya se mencionó oportunamente, la hipótesis de este trabajo se basa en que las preferencias de los individuos violan el axioma de independencia. Al igual que Ellsberg otro de los pioneros en estudiar este problema fue Maurice Allais. Su trabajo señala una serie de anomalías de la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre inconsistentes con la teoría de la utilidad esperada.

Como primer paso se le pide a los participantes que elijan entre dos loterías, la A y la B,

Lotería a: Paga con 0,33 de probabilidad $ 2500, con 0,66 de obtener $2.400, y el restante 0,01 de sacar $ 0.

Lotería b: Paga $ 2,400.

Entre estas opciones los participantes eligen la lotería b en la mayoría de los casos. Esto fue corroborado por Kahneman y Tversky (1979) quienes encuentran que el 82% de los participantes eligieron la lotería b cuando se les dio en forma hipotética estas alternativas.

Un segundo paso es darle a los participantes la posibilidad de elegir entre las loterías c y d donde,

Lotería c: paga con probabilidad 0,33 $ 2500, y con 0,67, $ 0.

Lotería d: paga probabilidad 0,34 $ 2,400 y con 0,66, $0.

De esta elección se obtuvo que la mayoría de los participantes eligieron C. En el trabajo de Kahneman y Tversky encontraron que el 83% de los casos eligieron efectivamente esta lotería.

Como se verá a continuación es fácil demostrar que la elección de la lotería b en primer termino y de la c en la segunda viola el axioma de independencia y por lo tanto la teoría de la utilidad esperada.

Para comenzar, las elecciones de b y c implican que, para la primera elección,

$u\ (2400) > 0{,}33u\ (2500) + 0{,}66u\ (2400) + 0{,}01u\ (0)$

mientras que para la segunda,

0,33u (2500) + 0,67u (0)> 0,34u (2400) + 0,66u (0)

Reorganizando las desigualdades obtenemos que,

0,34u (2400) > 0,33u (2500) + 0,01u (0)

para la primera desigualdad, y

0,34u (2400) < 0,33u (2500) + 0,01u (0)

para la segunda, lo que arroja una contradicción.

Intuitivamente, en un caso la gente cae bajo un "efecto certeza" y en el otro apuesta a "perdido por perdido". De esta clara contradicción se desprende una violación del axioma de independencia, invalidando la teoría de la utilidad esperada.

Teoría de la prospectiva

Kahneman y Tversky realizaron un importante análisis estadístico de las paradojas que implican violaciones al axioma de independencia. Producto de esto, propusieron en 1979 un modelo alternativo de la toma de decisiones para dar cuenta de la paradoja de Allais y otras anomalías experimentales. Mientras que muchos autores anteriores han atribuido la paradoja de Allais a la preferencia por la certeza, estos autores notaron que el axioma de independencia también a menudo se viola cuando todas las loterías poseen resultados alejados de lo seguro.

A tal efecto consideraron los siguientes pares de loterías,

Lotería A: 0,45 probabilidad de ganar $ 6,000 y 0,55 de obtener $ 0.

Lotería B: 0,90 probabilidad de $ 3,000 y 0,10 de obtener $ 0.

Lotería C: 0.001 probabilidad de $ 6.000 y 0.999 de obtener $ 0.

Lotería D: 0.002 probabilidad de $ 3.000 y 0.998 de obtener $ 0.

En su relevamiento estadístico encontraron que la elección modal es B por sobre A y C respecto a D, elecciones que en conjunto violan el axioma de independencia. En otras palabras, podemos decir que cuando las probabilidades de obtener el mayor resultado en ambas loterías es razonablemente alta, los individuos se inclinan por la lotería que es relativamente más segura. Y cuando las probabilidades de obtener el premio mayor son minúsculas, los individuos parecen inclinarse a ir por la que tiene el premio más grande.

Sin embargo los autores notan que la preferencia por la certeza no se mantiene cuando los resultados del juego son pérdidas en lugar de ganancias.

Para ver esto consideran los siguientes pares de loterías,

Lotería A: 0,80 probabilidad de perder $ 4.000 y 0,20 de obtener $ 0.

Lotería B: - $ 3000 de forma segura.

Lotería C: 0,20 probabilidad de perder $ 4.000 y 0,80 de obtener $0.

Lotería D: 0,25 probabilidad de perder $ 3.000 y 0,75 de obtener $0.

Si el único motivo que se encuentra por detrás de la paradoja de Allais fuese la preferencia por la certeza, las opciones modales volverían a ser B y C. Sin embargo, estos autores encontraron que las alternativas modales fueron A y D. Y su explicación para esto fue que mientras que los individuos habitualmente son adversos al riesgo en juegos con resultados positivos, aceptan riesgos cuando hay posibilidades de percibir pérdidas.

Como ultimo experiencia Kahneman y Tversky quisieron probar si la forma en que son presentadas las loterías afecta a las decisiones que toman los individuos.

Supusieron entonces que al participante se le otorgan $ 1000 y luego se le ofrece:

Lotería A: 0,5 probabilidad de $ 1,000 adicionales y 0,5 de obtener $ 0.

Lotería B: $ 500 seguros.

A continuación consideraron a un individuo al que se le habían dado $ 2000 y se le ofreció la elección entre:

Lotería C: 0,5 probabilidad de perder $ 1000 y 0,5 probabilidad de $ 0.

Lotería D: pierde $ 500 seguro.

Y a esta ultima experiencia encontraron que B y C fueron las opciones modales a pesar de que la teoría de la utilidad esperada sostiene que A y C son loterías idénticas al igual que B y D.

Dadas todas estas anomalías y violaciones a los axiomas de las preferencias de los modelos basados en la teoría de la utilidad esperada, Kahneman y Tversky propusieron la teoría prospectiva como alternativa. De acuerdo a este modelo, la elección implica dos fases, la edición y la evaluación. En la primera, los individuos "organizan y reformulan las opciones con el fin de simplificar la evaluación y la elección subsiguiente".

La edición: esta primera etapa se compone por seis operaciones,

Codificación: esta primera operación se justifica por una de las experiencias realizadas por los autores, donde encontraron que los individuos evalúan de forma diferente las ganancias y las pérdidas. Dado esto, la primera operación se basa en clasificar las loterías según si sus resultado son perdidas o ganancias.

Combinación: en esta segunda etapa los individuos combinan las probabilidades asociadas a resultados idénticos.

Segregación: Los individuos identifican y segregan los componentes libres de riesgo dentro de la lotería. Para comprender esto, se puede utilizar como ejemplo una lotería que produce $ 1000 con una probabilidad de 0,75 y $ 500 con una probabilidad de 0,25. Al realizar esta etapa los individuos interpretan que obtienen una ganancia asegurada de $ 500 y que participan en una lotería a través de la cual obtienen la posibilidad de ganar $500 adicionales.

Cancelación: Al comparar las loterías, los individuos ignoran los elementos comunes entre ellas. Como ejemplo de esto podemos citar la última de las experiencias realizadas en donde el bono de \$ 2000 se anula y no afecta la elección entre las loterías C y D.

Simplificación: En esta etapa las personas buscan simplificar el análisis, redondeando para igualar probabilidades o eliminando resultados extremadamente improbables.

Detección de dominación: En esta última etapa, los individuo dejan fuera de su consideración a las loterías que estén dominadas estocásticamente en primer orden por otra lotería.

La evaluación: esta etapa del modelo es es muy similar a la teoría de la utilidad esperada, ya que ambos modelos postulan que los individuos evalúan las loterías utilizando un promedio ponderado de los posibles resultados con sus respectivas probabilidades. Sin embargo, en el modelo de Kahneman y Tversky las ponderaciones no utilizan los resultados y sus probabilidades, sino que se utilizan funciones de estas probabilidades. Esta alteración se fundamenta en las anomalías detectadas. De ellas se desprende entre otras cosas la necesidad de valorar las probabilidades de resultados positivos y negativos de una manera diferente. Y en este sentido propusieron que estas funciones deben otorgar un trato asimétrico a estas probabilidades.

Sean x e y dos resultados monetarios distintos donde p es la probabilidad de x y q es la probabilidad de y. Y sea $1 - p - q$ la probabilidad de que no suceda nada o la recompensa sea 0. Definen las perspectivas como estrictamente positivas si $x,y > 0$ y $p + q = 1$, estrictamente negativas si $x,y < 0$ y $p + q = 1$, y regulares para todos los otros casos. En el caso de que la perspectiva sea regular, los individuos maximizan

$$V(x,p\,;\,y,q) = \pi(p)\,v(x) + \pi(q)\,v(y)$$

donde $v(x)$ y $v(y)$ son los valores de cada resultado y $\pi(p)$ y $\pi(q)$ son los pesos asignados a cada resultado respectivamente basados en las probabilidades de los mismos. Se debe asumir que $v(0) = 0$, $\pi(0) = 0$, y $\pi(1) = 1$. Es importante decir que si la función v es una función de Bernoulli y $\pi(p) = p$ para todo p, esta función es idéntica a una función de utilidad esperada.

Para las prospectivas estrictamente positivas o negativas como $x > y > 0$ y $x < y < 0$ donde en ambos casos $p + q = 1$, los individuos maximizan

$$V(x,p\,;\,y,q) = v(y) + \pi(p)\,[v(x) - v(y)]$$

La idea de utilizar la forma de esta función es capturar el concepto de segregación de la etapa de edición en donde los individuos separan los componentes libres de riesgo en v(y) y le adicionan un componente con riesgo, v(x) - v(y).

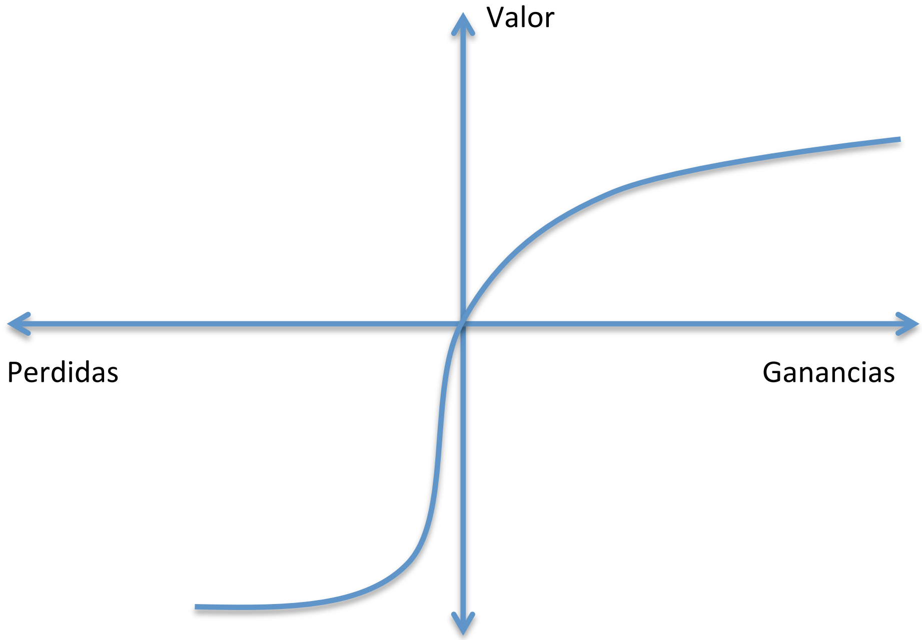
Un supuesto clave de esta teoría es que la función v(·) es asimétrica respecto de resultados positivos y negativos. Y en este sentido los autores hicieron tres supuestos:

La función de valor se define en términos de desviaciones con respecto a un punto de referencia (y no produce ganancias o pérdidas).

La función de valor es cóncava para las ganancias y convexa para las pérdidas.

La función de valor es más pronunciada para las pérdidas que para las ganancias.

En el próximo grafico se puede observar un ejemplo de estas funciones:



Así mismo, los autores hicieron algunos supuestos que los pesos de decisión $\pi(p)$ deben cumplir.

π es una función creciente de p.

$\pi(0) = 0$.

$\pi(1) = 0$.

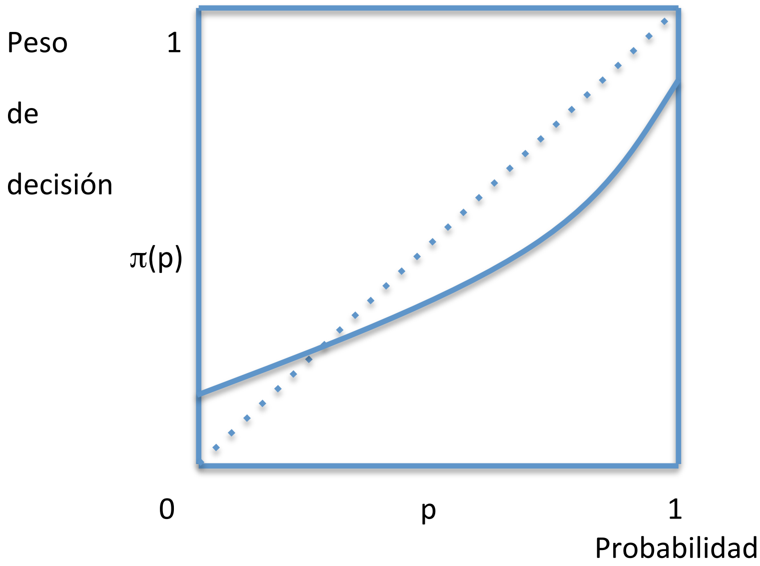
Para valores pequeños de p, $\pi(p) > p$.

Para valores pequeños de p, π es subaditiva es decir $\pi(rp) > r\pi(p)$ para $0 < r < 1$.

Para todo p, π satisface la propiedad de subcertidumbre es decir $\pi(p) + \pi(1 - p) < 1$.

Para todo $0 < p,q,r < 1$, π es subproporcional, es decir $\pi(pq)/\pi(p) \leq \pi(pqr)/\pi(pr)$.

Respecto de los primeros tres supuestos, parecen bastante sencillos. El cuarto captura la idea de que los individuos asignan más peso a las probabilidades pequeñas. El supuesto de Subaditividad, que ayuda a resolver las anomalías planteadas en la paradoja de Allais, implica en conjunto con el segundo supuesto que p es convexa para pequeños valores de p. La subcertidumbre también ayuda a resolver la paradoja de Allais. Recordemos que las opciones modales requieren que $v(2400) > \pi(0.33)\,v(2500) + \pi(0.66)\,v(2400)$ y $\pi(0.33)\,v(2500) > \pi(0.34)\,v(2400)$. De estas desigualdades se deriva que $1 > \pi(0,66) + \pi(0.34)$. Para terminar, la subproporcionalidad permite resolver también muchas de las violaciones del axioma de independencia, ya que implica que para que una relación fija de probabilidades, la relación de los pesos de decisión estará más cercana a la unidad cuando las probabilidades sean elevadas.



Preferencias respecto del tiempo

En muchas ocasiones los individuos deben evaluar entre alternativas cuyos resultado se producirán en distintos periodos de tiempo. Parece lógico suponer que le darán un mayor valor a una utilidad percibida en el momento que se toma la decisión a una utilidad que se percibirá en el futuro. Una de las formas de capturar este concepto es la utilización de un factor de descuento que ajuste lo que se percibirá en el futuro. Sea δ el peso relativo que los agentes otorgan a las utilidades de un período en el futuro respecto de la utilidad corriente con $0 < \delta < 1$. De esta forma las utilidades en el periodo de tiempo t se descuentan por δ^t, es decir, si se toma como ejemplo un resultado que se obtendrá en dos períodos de tiempo posteriores se debe ponderar por δ^2.

Valor actual

En primer lugar se analizara un modelo en el que no hay un punto final determinado, es decir un juego infinito donde el número de períodos tiende a ∞. Es evidente que en un juego infinito, no seria correcto sumar los beneficios de cada período con el fin de determinar la utilidad de una secuencia de elecciones. Y es aquí, donde el factor de descuento mencionado en la introducción de esta sección entra a la cancha.

El caso mas sencillo de analizar es donde un agente obtiene un pago $u_t=u$ por un número infinito de períodos. Existen dos métodos de calcular el valor actual v^{∞} de esta flujo de utilidades.

Método I

La función v^{∞} se puede denotar como u + δ u + δ^2u + ... = u $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t$. Dado que, como se dijo en el comienzo de esta sección, 0 <δ<1, $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t$ es una serie de potencias convergente. Cuando t→∞, $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t$ converge a 1/(1-δ) de modo que v^{∞} = u/(1-δ). El fácil derivar también las siguientes resultados,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t = \frac{1-\delta^{T+1}}{1-\delta}$$

$$\sum_{t=T}^{\infty} \delta^t = \frac{\delta^T}{1-\delta}$$

$$\sum_{t=T}^{S} \delta^t = \frac{\delta^T-\delta^{S+1}}{1-\delta}$$

Este último resultado se puede utilizar para calcular corrientes finitas de utilidad. Por lo que el valor actual de recibir u por T períodos de tiempo es u $\sum_{t=0}^{T} \delta^t$ = u $\frac{1-\delta^{T+1}}{1-\delta}$.

Método II

El otro método que se puede utilizar para calcular v^{∞} es mediante la recursividad. Este enfoque también forma la base del principio de optimalidad de Bellman (1957). Si bien parecen pocas las ventajas de utilizar este método a la hora de analizar un flujo constante de utilidades, es de sustancial importancia en entornos más complejos.

Dado que v^{∞} es un flujo infinito de utilidades, se puede escribir como la utilidad del primer período u, más el valor descontado del flujo infinito de utilidades que comienzan en el período siguiente. Por lo tanto,

$$v^{\infty} = u + \delta v^{\infty}$$

de manera que v∞ = u/(1-δ). Mediante este método también es factible calcular corrientes finitas. A este fin se debe asumir que el agente recibe un pago u por T períodos de tiempo y se desea calcular v^T. De la ecuación anterior se desprende que $v^T = v^\infty - \delta^{T+1} v^\infty$ por lo que $v^t = u/(1-\delta) - \delta^{T+1}u/(1-\delta) = u\,(1-\delta^{T+1})/(1-\delta)$.

Supongamos que existen n estados del mundo (s1, ..., sn). En cada uno de los estados el agente recibe u_j. Y se supone que el estado evoluciona según un proceso de Markov de manera tal que la probabilidad del estado en el periodo t depende únicamente del estado en el periodo anterior es decir t-1. En otras palabras, asumimos que para cada i, j, t, $Pr(S_t = s_i \mid S_{t-1} = s_j) = \pi_{ij}$.

Entonces para calcular el valor v_j suponiendo que un agente recibirá una corriente de utilidades comenzando en un periodo j se puede utilizar el principio de Bellman con el que se obtiene que,

$v_j = u_j + \delta \sum_{i=1}^{n} \pi_{ij} v_i$.

De aquí se obtiene un sistema lineal de n ecuaciones y n incógnitas (v_iS). La solución se encuentra mediante la sustitución de uno de las ecuaciones con el requisito de que $\sum_{i=1}^{n} \pi_{ij}$=1 para todo j.

Para ejemplificar esto, hayamos el cálculo de la rentabilidad que percibiría a largo plazo un partido político que obtiene un pago u_1 en los periodos donde se encuentra en ejercicio de un mandato y recibe una pago u_2 en los períodos en los que no se posee cargo. Para poder realizar el calculo según lo visto hasta aquí, se debe suponer que hay un efecto de partido en el poder, donde si se mantiene en el cargo el partido tiene una probabilidad de ser reelegido de $p > 1/2$ y si está fuera del poder tiene una probabilidad (1-p) de permanecer fuera del mismo en el próximo período. Para establecer las ecuaciones recursivas pertinentes se debe tener en cuenta que hay n = 2 incógnitas, $\pi_{11} = \pi_{22} = p$, $\pi_{12} = \pi_{21} = 1-p$, y $u_1 > u_2$. Donde,

$v_1 = u_1 + \delta\,(pv_1 + (1-p)\,v_2)$

$v_2 = u_2 + \delta\,((1-p)\,v_1 + pv_2)$

Resolviendo las dos ecuaciones se obtiene que, v1 = $\frac{(1-\delta\ p)\ u_1 + \delta\ (1-p)u_2}{1-2\delta p + \delta^2\ (2p-1)}$

v2 = $\frac{\delta\ (1-p)u_1 + (1-\delta\ p)u_2}{1-2\delta p + \delta^2\ (2p-1)}$

Hasta aquí hemos visto ejemplos de situaciones donde la corriente de utilidad es exógena, ya sea constante o basada en una distribución fija de probabilidades. Es posible relajar este supuesto suponiendo que un agente elige x_t de un conjunto contingente de estados $X(s_t)$ para maximizar el valor descontado del flujo $u(x_t,s_t)$ donde $s_t \in (s_1, ..., s_n)$ es el estado del mundo en el tiempo t.

La distribución de probabilidad de las transiciones de s_t también pueden depender de x_t por lo que $\pi\ (s_{t+1} \mid x_t,s_t)$ es la probabilidad de observar un estado s_{t+1} tras el estado s_t y elegir x_t.

Entonces es posible caracterizar los pagos para la ejecución del plan x (s) en el estado s como

v (x(s),s) = u(x(s),s) + $\delta \sum_{s'} \mathrm{v}\ (\mathrm{x}(\mathrm{s}), \mathrm{s})\ \pi\ (\mathrm{s'}|\mathrm{x}(\mathrm{s}), \mathrm{s})$.

Si se supone que se puede resolver v(x(s),s) para todos los planes, podemos calcular el óptimo como

v *(s) = $\sup_x$ v (x(s),s).

Por el principio de optimalidad de Bellman,

v *(s) = $\underset{x\ \in\ \mathrm{X(s)}}{sup} [\mathrm{u}\ (\mathrm{x}, \mathrm{s})\ +\ \delta\ \sum_{s'} v^*(\mathrm{s'})\ \pi\ (\mathrm{s'}\ |\mathrm{x}, \mathrm{s})]$.

<u>Descuento hiperbólico</u>

La mayor parte de la bibliografía sobre juegos con un flujo de fondos utiliza el descuento constante para llevar dichas utilidades a un valor presente. En los últimos tiempos, es posible encontrar un creciente numero de autores que abordan la teoría del comportamiento en las decisiones utilizando alternativas más consistentes con la evidencia experimental.

Siguiendo dicha senda una de las opciones que se puede encontrar es el descuento hiperbólico, que supone que en el momento 0 los agentes descuentan la utilidad en el tiempo t por

$h(t) = (1 + \alpha t)^{-\gamma/\alpha}$

para $\gamma > 0$ y $\alpha > 0$. Salvo si α se encuentra cercano a cero, el descuento hiperbólico otorga mayor relevancia al futuro que los tradicionales modelos de descuento constante. Esto también implica un problema de consistencia del tiempo de los agentes, es decir el plan óptimo para el periodo de tiempo t despende de qué tan distante el periodo de tiempo t está en el futuro.

Para ver esto se puede suponer que un agente tiene que decidir cómo asignar $1 de consumo a lo largo de tres períodos. Los periodos se denominan 0,1, y 2. Usando descuento constante el plan óptimo se resuelve por ($u(\bullet)=\sqrt{\bullet}$):

$$\sqrt{x_0} + \delta\sqrt{x_1} + \delta^2\sqrt{x_2}$$

de forma tal que $\sum x_t = 1$

La solución debe satisfacer $x_1 = \delta^2 x_0$ y $x_2 = \delta^4 x_0$. Sustituyendo en las restricciones presupuestarias, obtenemos que

$$x_0 = \frac{1}{1 + \delta^2 + \delta^4}$$

$$x_1 = \frac{\delta^2}{1 + \delta^2 + \delta^4}$$

$$x_2 = \frac{\delta^4}{1 + \delta^2 + \delta^4}$$

Una vez obtenidos dichos resultados, se puede ver lo que el agente haría si realizaría obtenemos recalculando luego de haber consumido X_0 en el periodo 0.

Sustituyendo $x_2 = \delta^2 x_1$ en la restricción $x_1 + x_2 = (\delta^2+\delta^4)/(1+\delta^2+\delta^4)$ se obtiene que, x1 = $\frac{1}{1+\delta^2} \cdot 1 + \frac{\delta^2+\delta^4}{1+\delta^2+\delta^4} = \frac{\delta^2}{1+\delta^2+\delta^4}$

x2 = $\frac{\delta^4}{1+\delta^2+\delta^4}$.

Para concluir se puede decir que el plan de consumo óptimo sigue siendo el mismo, consumiendo en el período 2 exactamente tanto como había pronosticado al comienzo.

Ahora se analizará el descuento hiperbólico como método de determinar el valor actual. Para facilitar el desarrollo se considera que α = γ = 1. De este modo,

$\sqrt{x_0}$ + 1/2$\sqrt{x_1}$ + 1/3$\sqrt{x_2}$

de modo que $\sum x_t$ = 1

Las condiciones de primer órden para el óptimo son x_1= 1/4 x_0 y x_2 = 1/9 x_0.

Entonces, la solución es

x_0 = 36/49

x_1 = 9/49

x_2 = 4/49

De nuevo veremos lo que sucede si el agente vuelve a optimizar luego de consumir x_0. Entonces la condición de primer orden es x_2 = 1/4 x_1. Sustituyendo en la restricción x_1 + x_2 = 13/49, y se llega a que

$x_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{13}{49} = \frac{52}{245} > \frac{9}{49}$

$x_2 = \frac{13}{245} < \frac{4}{49}$

Es posible afirmar entonces que, luego de haber consumido $X_{0,}$ el agente querrá cambiar su plan óptimo y hará consumo mayor de período 1. La explicación es que cambia el peso que el agente otorga al periodo 2 en el periodo 0 respecto del período 1.

Si bien los modelos basados en el descuento hiperbólico han sido útiles para explicar algunos hallazgos experimentales, las aplicaciones en la ciencia política aun son muy escasas.

Ensayo

A lo largo del trabajo se ha presentado el marco teórico dedicado al estudio de las decisiones en contexto de incertidumbre, pero en este punto desarrollaremos específicamente lo concerniente a demostrar o refutar la hipótesis original. Esto es, la hipótesis de trabajo de que las preferencias de los individuos violan el axioma de independencia de los modelos basados en la utilidad esperada. Como ya se ha dicho este fenómeno se produce por la paradoja de Allais. Para demostrar esto se realizara un ensayo, en el que en un juego los participantes revelaran sus preferencias, y así se podrá determinar el cumplimiento o no de dicho axioma.

El ensayo se basa en una adaptación del enfoque de Kahneman y Tversky en 1979. El mismo posee 7 turnos, los 6 primeros poseen relevancia estadística y el ultimo tiene como único objetivo desmonetizar el juego. Cabe aclarar que a los participantes participan individualmente, conociendo uno por uno los turnos, sin tener contacto con individuos que ya hayan llevado a cabo su elección y con la creencia de que el premio o la pérdida corresponde al importe en juego hasta el turno 6. Un ensayo en un grupo de 25 individuos, de diferentes edades (todos mayores de edad), sexos, diferentes profesiones, entre los que podíamos encontrar un economista, ingenieros, estudiantes, empleados, amas de casa, etc.

Se pide que en el primer turno los participantes elegin entre las siguientes alternativas,

Bolsa A: 45 papeles rojos con los que gana $100 y 55 papeles negros con los que no gana nada.

Bolsa B: 90 papeles rojos con los que gana $50 y 10 papeles negros con los que no gana nada.

En el segundo turno las opciones son,

Bolsa C: 1 papel rojo con el que gana $100 y 99 papeles negros con los que no gana nada.

Bolsa D: 2 papeles rojos con los que gana $50 y 98 papeles negros con los que no gana nada.

En el tercero,

Bolsa A: 16 papeles negros (80%) con los que pierde $60 y 4 papeles rojos (20%) con los que no pierde nada.

Bolsa B: Pierde $45

En el cuarto los participantes enfrentan las siguientes alternativas,

Bolsa C: 4 papeles negros (20%) con los que pierde $60 y 16 papeles rojos (80%) con los que no pierde nada.

Bolsa D: 5 papeles negros (25%) con los que pierde $45 y 15 papeles rojos (75%) con los que no pierde nada.

En el quinto el participante recibe $10 para seguir jugando y ahora debe elegir entre:

Bolsa A: 10 papeles rojos con el que gana $10 adicionales y 10 papeles negros con los que no gana nada.

Bolsa B: Gana $5 adicionales.

El sexto es similar al anterior, pero ahora el participante recibe $20 para seguir jugando y ahora debe elegir entre,

Bolsa C: 10 papeles negros con los que pierde $10 y 10 papeles rojos con los que no pierde nada.

Bolsa D: Pierde $5

Para terminar el juego, y con el mero hecho de desmonetizar el juego el participante debe elegir entre,

Bolsa A: 10 papeles Rojos con los que gana o paga el %10 del acumulado y 10 papeles negros con los que no gana ni pierde nada.

Bolsa B: Gana o paga el %5 del acumulado.

Es relevante destacar la importancia de mantener en secreto este ultimo turno, ya que un participante brinda mayor importancia a un juego donde los resultados en términos monetarios tienen para este algún significado. En otras palabras, un agente no dará la misma relevancia a una decisión donde sólo puede ganar o perder $1 que a una donde los resultados son mayores y tienen implicancia en la vida económica.

Para continuar adelante con esto, en primer lugar analizaremos como deberán ser los resultados del ensayo si los participantes cumplen con los axiomas de las preferencias de los modelos basados el la utilidad esperada. En segundo lugar cómo serían los resultados si se cumple lo predicho por la paradoja de Allais. Y por último se representarán los resultados del ensayo realizado.

Lo primero que se analizará es cómo debería ser el comportamiento de los entrevistados si cumplieran con el axioma de independencia.

Para esto se irán analizando los turnos por pares, en primer lugar se agrupan los turnos 1 y 2. Entonces,

Bolsa A: 45 papeles rojos con los que gana $100 y 55 papeles negros con los que no gana nada.

Bolsa B: 90 papeles rojos con los que gana $50 y 10 papeles negros con los que no gana nada.

Bolsa C: 1 papel rojo con el que gana $100 y 99 papeles negros con los que no gana nada.

Bolsa D: 2 papeles rojos con los que gana $50 y 98 papeles negros con los que no gana nada.

Si nos encontramos con individuos que se ajustan con los axiomas de los modelos basados en la utilidad esperada la elección modal debería ser la B y la D si se trata de individuaos preferencias por la certeza y A y C si se habla de individuos más arriesgados.

Con el siguiente par de turnos, se buscara observar como se comporta un individuo que ahora debe enfrentarse a la posibilidad de obtener perdidas. Los próximos pares de turnos a analizar son,

Bolsa A: 16 papeles negros (80%) con los que pierde $60 y 4 papeles rojos (20%) con los que no pierde nada.

Bolsa B: Pierde $45

Bolsa C: 4 papeles negros (20%) con los que pierde $60 y 16 papeles rojos (80%) con los que no pierde nada.

Bolsa D: 5 papeles negros (25%) con los que pierde $45 y 15 papeles rojos (75%) con los que no pierde nada.

En este caso debo, no sólo se debe realizar una comparación entre los dos turnos en cuestión, sino que también se debe hacer una comparación condicional con lo obtenido en los dos primeros turnos. Respecto de la primera comparación, se puede decir que si los individuos tienen preferencias hacia la certeza deben elegir las bolsas B y D y de lo contrario las A y C. Pero para no violar el axioma de independencia también deben coincidir con la elección en los dos primero turnos.

Como última experiencia se busca mostrar que la forma en que son presentadas las opciones afecta a las decisiones que toman los individuos. Como se puede apreciar, en ambos turnos el planteo es mismo, pero expresado de una forma diferente.

En el quinto el participante recibe $10 y debe elegir entre:

Bolsa A: 10 papeles rojos con el que gana $10 adicionales y 10 papeles negros con los que no gana nada.

Bolsa B: Gana $5 adicionales.

Y en el sexto recibe $20 y debe elegir entre,

Bolsa C: 10 papeles negros con los que pierde $10 y 10 papeles rojos con los que no pierde nada.

Bolsa D: Pierde $5.

Y ahora de nuevo, para cumplir con el axioma de independencia, los participantes deben elegir las opciones A y C o B y D respectivamente y a su vez mantener la línea con lo elegido en los primeros cuatro turnos.

Es importante mencionar que con esta cantidad de preguntas no sólo busca dilucidar si las preferencias de los individuos cumplen con el axioma de independencia, sino también se quiere ver cuáles son los motivos que se encuentran por detrás de esto.

Si luego de realizar el ensayo, para los primeros dos turnos se observa que la elección modal es B respecto de A y C respecto de D, los participantes tendrán preferencias que violan el axioma de independencia. Si los resultados del ensayo están de acuerdo con las predicciones de Allais, gracias a cómo se han formulado las preguntas podemos decir que cuando las probabilidades de obtener el mayor resultado en ambas loterías es razonablemente alta, los individuos se inclinan por la lotería que es relativamente más segura. Y cuando las probabilidades de obtener el premio mayor son pequeñas, los individuos parecen inclinarse a ir por la que tiene el premio más grande. Si la elección modal fuese a la inversa, la violación del axioma se mantendría, pero no se correspondería con comportamientos que se hayan relevado anteriormente.

El siguiente par de turnos busca observar si el comportamiento se mantiene cuando los participantes enfrentan la posibilidad de percibir una perdida. Aquí parece mas importante la comparación entre el par de loterías con el par del primer turno que entre ellas mismas. Respecto de la comparación entra las loterías del turno 3 y 4, para que se cumpla con lo predicho por Allais las opciones modales volverían a ser la B y la C, si el único motivo que se encuentra por detrás de esto es el efecto certeza y si los individuos aceptan riesgos cuando existen posibilidades de percibir pérdidas las alternativas modales serán la A y la D. Pero como se ha dicho aquí, lo importante es observar, si aunque la elección dentro del turno cumple con el axioma de independecia, el individuo actúa de forma diversa si se hablan de perdidas que de ganancias. De esta forma, si las preferencias del individuo cumplen con los axiomas dentro del turno, a la hora de analizar el juego conjunto no lo hará.

El ultimo par de turnos sigue el mismo camino, y busca comparar el comportamiento del individuo cuando enfrenta alternativas idénticas pero en un caso con la posibilidad de obtener una perdida y en el otro una ganancia. Para darse la paradoja se debe encontrar que las opciones modales elegidas son las bosas a y d o b y c. Y aquí de nuevo se debe observar el comportamiento respecto de lo elegido en los turnos anteriores.

Como ultima etapa del desarrollo de campo de este trabajo, se verterán los resultados del ensayo realizado. El siguiente cuadro plasma lo elegido por cada uno de los participantes.

Participante	1	2	3	4	5	6
Gastón	B	C	A	D	B	C
Melisa	A	C	A	D	A	C
Vanina	A	C	A	D	B	D
Mirta	A	D	A	D	A	A
Nestor	A	C	A	C	A	C
Derrick	B	D	A	D	A	C
Jeremías	B	D	A	D	B	D

Mariano	A	C	A	C	A	C
Nicholas	A	C	A	C	A	C
Emiliano	B	C	A	D	A	C
Juan C.	A	C	A	C	B	D
Matáis	B	D	B	D	A	C
Aniela	B	D	B	D	B	C
Francisco	A	D	A	D	A	C
Alejandro	A	D	A	D	B	D
Cesar	A	C	A	D	A	C
Rogelio	A	C	A	D	A	C
Juan H.	B	C	B	C	B	C
Juan Pablo	A	C	A	D	A	C
Nicolas	A	C	A	C	A	C
Manuel	B	C	A	D	A	C
Juan F.	B	C	A	D	A	C
Horacio	A	D	B	C	B	C
María H.	A	D	B	D	A	C
Juan A.	A	C	A	D	A	D

Para recordar los turnos 1 y 2, se escriben nuevamente los enunciados, Bolsa A: 45 papeles rojos con los que gana $100 y 55 papeles negros con los que no gana nada.

Bolsa B: 90 papeles rojos con los que gana $50 y 10 papeles negros con los que no gana nada.

Bolsa C: 1 papel rojo con el que gana $100 y 99 papeles negros con los que no gana nada.

Bolsa D: 2 papeles rojos con los que gana $50 y 98 papeles negros con los que no gana nada.

Tomando los datos del ensayo realizado se estimo cual fue la incidencia de cada elección,

Bolsa A: $\frac{16}{25}\ x\ 100$ = 64,00%

Bolsa B: $\frac{9}{25}\ x\ 100$ = 36,00%

Bolsa C: $\frac{16}{25}\ x\ 100$ = 64,00%

Bolsa D: $\frac{9}{25}\ x\ 100$ = 36,00%

Como se puede observar, las elecciones modales fueron la A y C. El otro elemento importante que se puede apreciar es que los porcentajes en que se eligieron las opciones modales fueron idénticos. Estos resultados dejan expuesta una discrepancia con lo relevado por Kahneman y Tversky en 1979, por lo que se puede decir que para el primer par de turnos las preferencias estuvieron en concordancia con los axiomas de las preferencias de los modelos basados en la utilidad esperada y no se cumple con lo predicho por Allais.

Los enunciados del turno 3 y 4 son,

Bolsa A: 16 papeles negros (80%) con los que pierde $60 y 4 papeles rojos (20%) con los que no pierde nada.

Bolsa B: Pierde $45

Bolsa C: 4 papeles negros (20%) con los que pierde $60 y 16 papeles rojos (80%) con los que no pierde nada.

Bolsa D: 5 papeles negros (25%) con los que pierde $45 y 15 papeles rojos (75%) con los que no pierde nada.

Bolsa A: $\frac{20}{25}\ x\ 100$ = 80,00%

Bolsa B: $\frac{5}{25}\ x\ 100$ = 20,00%

Bolsa C: $\frac{7}{25}\ x\ 100$ = 28,00%

Bolsa D: $\frac{18}{25}\ x\ 100$ = 72,00%

A diferencia de lo que se encontró en el primer par de turnos, en el segundo se observa que la opciones modales fueron la A y la D. Por lo que a la hora de analizar lo que sucede con los individuos a la hora de enfrentar la posibilidad de una perdida y no una ganancia se encuentra que el comportamiento fue según lo predicho por Allais y no se incumple con el axioma de independencia de los modelos basados en la utilidad esperada. Si bien es cierto que existe una violación, la diferencia que hay en los enunciados C y D del turno 4 es muy pequeña, por lo que, en mi opinión, no llegan a manifestarse realmente las preferencias por la certeza y el riesgo. En las conclusiones finales, donde se realizara un análisis completo del conjunto de los resultados del ensayo se analizara si esto tiene relevancia suficiente para sostener lo predicho por Allais.

Como ya he mencionado, en este ultimo par de turnos, buscare claramente comparar como se comportan los individuos a la hora de enfrentar una misma situación donde como única diferencia encontramos la forma en que se realizo el enunciado. Cabe aclarar que en el primero de los turnos se enfrenta la posibilidad de percibir una suma adicional y en el segundo la de sufrir una perdida. A continuación enunciare nuevamente la quinta y sexta etapa de la experiencia,

En el quinto el participante recibe $10 y debe elegir entre:

Bolsa A: 10 papeles rojos con el que gana $10 adicionales y 10 papeles negros con los que no gana nada.

Bolsa B: Gana $5 adicionales.

Y en el sexto recibe $20 y debe elegir entre,

Bolsa C: 10 papeles negros con los que pierde $10 y 10 papeles rojos con los que no pierde nada.

Bolsa D: Pierde $5.

De las respuestas de los participantes se obtiene que,

Bolsa A: $\frac{17}{25}\ x\ 100$ = 68,00%

Bolsa B: $\frac{8}{25}\ x\ 100$ = 32,00%

Bolsa C: $\frac{20}{25}\ x\ 100$ = 80,00%

Bolsa D: $\frac{5}{25}\ x\ 100$ = 20,00%

Aquí nuevamente las opciones modales fueron la A y la C. Esto implica el complimiento del axioma de independencia de los modelos en cuestión. Si bien los porcentajes no son idénticos como para el primer par de turnos la diferencia entre el porcentaje de individuos que eligió la bolsa A y la bolsa C no es sustancial.

En la próxima y ultima etapa analizare estos resultados en conjunto, se buscaran una explicaciones de porque se producen estos fenómenos y se abordara una conclusión respecto de la hipótesis de trabajo.

Conclusiones

Como se puede observar cuando presente los resultados de la experiencia los participantes se mostraron preferentes a las situaciones donde los premios sonmayores o las perdidas menores y cuyas posiciones eran mas arriesgadas excepto en uno de los turnos. Si bien esto produce una violación de el axioma de independencia se debe analizar por qué se produce dicho evento y cuáles son sus implicancias.

Si vemos los enunciados en su conjunto para cumplir íntegramente con el axioma de independencia los entrevistados deberían haber elegido siempre la opción A y C o la B y D respectivamente dependiendo de sus preferencias respecto de la certeza. En la muestra realizada, los participantes eligieron en casi todos los casos la alternativa mas arriesgadas, es decir la A o C según corresponda, con excepción del turno 4 donde la opción modal fue la D. Es interesante mencionar nuevamente los enunciados de dicho turno para poder ver por que se produce el fenómeno.

Bolsa C: 4 papeles negros (20%) con los que pierde $60 y 16 papeles rojos (80%) con los que no pierde nada.

Bolsa D: 5 papeles negros (25%) con los que pierde $45 y 15 papeles rojos (75%) con los que no pierde nada.

Como se puede ver, la diferencias entre estos dos enunciados son muy pequeñas y es posible decir que la diferencia entre el premio mayor y el menor y sus respectivas probabilidades de ocurrencia son las menores de todos los turnos, por lo que parece intuitivo y sencillo decir que las mismas no fueron lo suficientemente grandes para demostrar sus verdaderas preferencias.

Para que sea posible dar una explicación diferente del motivo que se encuentre detrás de dicha elección la elección modal en el segundo turno debería haber sido análoga a la del turno cuatro. En ese caso si se podría decir que dada una diferencia pequeña en las probabilidades los individuos optan por la alternativa más segura, pero esto no ocurrió, por lo que la similitud de los enunciados parece ser el único motivador de esta conducta y esto no es suficiente para invalidar por completo el uso de utilidad esperada dado que en el resto de los turnos los individuos eligieron siempre en línea con dichos axiomas.

Por lo expuesto hasta aquí es posible afirmar que no se cumple la hipótesis de trabajo, ya que los resultados de las entrevistas realizadas no se ajusta a lo predicho por Allais. Existe una violación del axioma independencia pero se debe destacar que no coincide con la relevado por Kahneman y Tversky quienes encontraron un numero mayor de anomalías. El comportamiento en general parece ajustarse bastante mas a lo supuesto por la teoría de la utilidad espera que a lo predicho por Allais.

Bibliografía

- Nolan Mccarty, Adam Meirowitz; "Political Game Theory, An Introduction", 2007.
- Eloy Ávalos, "Incertidumbre: Loterías y Riesgo", Mayo 2011. Universidad Nacional Mayor de San Marcos e IESR.
- Fernando Aguiar, "Teoría de la decisión e incertidumbre", Revista de Metodología de Ciencias Sociales, N°8, 2004.
- Begoña Vitoriano, "Teoría de la decisión: Decisión con Incertidumbre, Decisión Multicriterio y Teoría de Juegos", Julio 2007. Universidad Complutense Madrid.
- Arturo Clavijo A., "El estudio de la elección en condiciones de incertidumbre", Suma Psicologica, Volumen 4, Nro 1, Marzo 1997.
- Jonathan Levin, "Choice under Uncertany", Octubre 2006.
- Peter Klibanoff, "Uncertainty, Decision, and Normal Games", Journal of Economic Literature, Julio 1996.