# Universidad Nacional del Sur

## Tesis de Magíster en Matemática

## Una contribución al desarrollo de las $\mathrm{T_k m}$-álgebras

**Claudia Mónica Gomes**

**Bahía Blanca** **Argentina**

**2020**

## Prefacio

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado académico de Magíster en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no se ha presentado previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática, durante el período comprendido entre julio de 2011 y octubre de 2020 bajo la dirección del Dr. Aldo V. Figallo.

Claudia Mónica Gomes

Octubre de 2020
Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur

*A mis padres Claudia y Antonio,*
*quienes siempre velaron*
*por mi bienestar y educación.*

## Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer al Dr. Aldo V. Figallo director de esta tesis, que creyó en este proyecto y me alentó para que concluyera esta investigación.

A todas las personas que integran y han integrado el equipo de investigación del cual formo parte en el Instituto de Ciencias Básicas, que me brindaron su apoyo para el logro de mis objetivos.

A mis profesores, porque todos han aportado con un granito de arena a mi formación.

A los doctores Martín Figallo, Inés Pascual y Gustavo Pelaitay por sus valiosas sugerencias para mejorar esta presentación.

A todas aquellas personas que en forma directa o indirecta contribuyeron a que este trabajo de investigación pudiera llevarse a cabo.

A mis padres, que les hubiera gustado vivir este acontecimiento, por haberme proporcionado la mejor educación y por sus lecciones de vida.

A mis familiares, por su apoyo.

A mis amigos, por estar siempre a mi lado.

A todos aquellos que están cerca de mi y que le regalan a mi vida algo de ellos.

# Introducción

En la Lógica ocupa un lugar importante el estudio de la cuantificación, que en la lógica clásica se corresponde con las llamadas lógicas de primer orden y, como caso particular, la lógica monádica que corresponde al estudio de la teoría de la cuantificación en una variable. En particular, P. Halmos estudia sistemas algebraicos relacionados con el cálculo funcional clásico y, en 1955, introduce las álgebras de Boole monádicas ([23]) como una contrapartida algebraica del cálculo de predicados monádicos de la lógica clásica. Varios autores profundizan y generalizan las álgebras definidas por Halmos, en este sentido podemos mencionar que se han estudiado las variedades de las $MV$-álgebras monádicas, $BL$-álgebras monádicas, álgebras de Wajsberg monádicas, álgebras de Ockham monádicas, retículos distributivos monádicos, álgebras de Łukasiewicz-Moisil $n$-valuadas monádicas, $NM$-álgebras monádicas, entre otras ([4],[12],[13],[17],[37]). También destacamos que A. Monteiro y O. Varsavsky ([27]) introducen las álgebras de Heyting monádicas las que constituyen la primera generalización de las álgebras de Boole monádicas; definen estas álgebras como ternas $(L, \exists, \forall)$, donde $L$ es un álgebra de Heyting y $\exists$, $\forall$ son operaciones unarias que verifican ciertas identidades.

Por otra parte, Gr. C. Moisil, con el objetivo de estudiar los circuitos selectores, introduce las álgebras de Boole simétricas en [31] y las álgebras de Boole cíclicas en [32], estas últimas han sido estudiadas también por A. Monteiro ([28], [29]), mientras que A. V. Figallo estudió las álgebras de Boole $k$-periódicas ([15]), y M. Abad con L. Monteiro estudian las álgebras de Boole monádicas simétricas ([1]). También, A. Monteiro estudió detalladamente los pares $(A, T_k)$ donde $A$ es un álgebra de Boole finita y $T_k$ es un automorfismo de período $k$, por su parte L. Monteiro determinó que todo automorfismo de período $k$ sobre un álgebra de Boole $A$ determina un cuantificador sobre $A$ y recíprocamente, un cuantificador existencial sobre un álgebra de Boole $A$ determina una clase de automorfismos, todos de un cierto período $k$.

Por las consideraciones expuestas, abordamos el estudio de la variedad $\mathbf{B_{T_k m}}$ de las $\mathbf{T_k m}$-álgebras, las cuales son ternas $\langle A, \exists, T\rangle$ donde $A$ es un álgebra de Boole y $T$ es un automorfismo de período $k$ que conmuta con el cuantificador existencial $\exists$, es decir, son álgebras de Boole monádicas con un automorfismo monádico de período $k$. Estas álgebras constituyen una generalización de las álgebras de Boole monádicas simétricas ([1]), es decir, la clase $\mathbf{B_{T_2m}}$ coincide con la clase de las álgebras de Boole monádicas simétricas. Uno de los hechos que motivaron el estudio de esta clase de álgebras es que están fuertemente relacionadas con las $\mathbf{Df_2}$–álgebras ([5], [6], [7]).

# Resumen

En 1955, las álgebras de Boole monádicas fueron introducidas por P. Halmos ([23]), como un modelo algebraico para el cálculo de predicados monádicos de la lógica clásica. Estas álgebras han sido ampliamente estudiadas por varios autores ([1], [24]) y en la actualidad se siguen realizando investigaciones en esta dirección ([4], [12], [37]).

Por otra parte, Gr. C. Moisil introduce las álgebras de Boole cíclicas en [32], que han sido estudiadas también por A. Monteiro ([28], [29]), y A. V. Figallo ([15]).

En esta tesis, investigamos la clase de las $\mathbf{T_k m}$-álgebras, esto es, álgebras de Boole monádicas con un automorfismo monádico de período $k$, que generalizan a las álgebras de Boole monádicas simétricas ([1]) y están relacionadas de un modo especial, con la clase de las $\mathbf{Df_2}$-álgebras.

Al trabajo lo hemos organizado en cuatro capítulos.

El Capítulo 1 consta de cuatro secciones y casi todos los resultados indicados en ellas son conocidos. En la Sección 1, damos las definiciones básicas y hacemos un repaso de los resultados más importantes de álgebra universal. En las Secciones 2, 3 y 4, hacemos una breve exposición de definiciones y propiedades de las álgebras de Boole monádicas, $\mathbf{Df_2}$-álgebras, y $\mathbf{T_k}$-álgebras, respectivamente. Todos estos temas los hemos incluido tanto para facilitar la lectura como para fijar los conceptos y propiedades que utilizaremos en los capítulos posteriores.

En el Capítulo 2, comenzamos el estudio de las $\mathbf{T_k m}$-álgebras. En la Sección 1, damos las definiciones básicas, determinamos las estructuras de $\mathbf{T_k m}$-álgebras que se pueden definir sobre el álgebra de Boole con $n$ átomos para $n = 1, ..., 4$. Destacamos tres subálgebras en una $\mathbf{T_k m}$-álgebra $B$ y mostramos algunas de sus propiedades, las que nos permiten luego caracterizar los miembros subdirectamente irreducibles y simples de esta variedad. En la Sección 2, determinamos la relación entre cuantificadores existenciales y subálgebras especiales del álgebra de Boole subyacente de una $\mathbf{T_k m}$-álgebra, a partir de la cual obtenemos otra caracterización de estas álgebras. En la Sección 3, logramos una nueva

descripción de las $\mathbf{T_k m}$-álgebras finitas, por medio de ciertas particiones asociadas al conjunto de sus átomos. Luego, en la sección siguiente exploramos, en el caso finito, la relación entre la clase $\mathbf{B_{T_k m}}$ y la clase $\mathbf{Df_2}$ de las álgebras cilíndricas libres de elementos diagonales de dimensión dos. En las Secciones 5 y 6, estudiamos una clase especial de filtros, los $\mathbf{T_k m}$-filtros, los cuales nos permiten caracterizar las $\mathbf{T_k m}$-congruencias. Además, determinamos la relación entre esta clase de filtros y la de los $\mathbf{T_k}$-filtros, los $\forall$-filtros y los filtros que se pueden definir en una $\mathbf{T_k m}$-álgebra $B$. A partir de estas relaciones caracterizamos, en el capítulo siguiente, las álgebras subdirectamente irreducibles y simples. Finalmente, en la Sección 7 realizamos un breve estudio de los $\mathbf{T_k m}$-homomorfismos. La mayoría de los resultados obtenidos en este capítulo se publicaron en [16], mientras que otros se presentaron y discutieron previamente en la *Reunión Anual de Comunicaciones Científicas de la Unión Matemática Argentina* en 2007.

En el Capítulo 3, con el propósito de obtener una mayor información sobre la variedad de las $\mathbf{T_k m}$-álgebras, hacemos un estudio detallado de las congruencias e indicamos dos descripciones de las mismas, una por medio de los $\mathbf{T_k m}$-filtros y la otra por una operación binaria definida sobre el álgebra. Esto nos permitió caracterizar las álgebras subdirectamente irreducibles y simples, y determinar algunas propiedades especiales de las $\mathbf{T_k m}$-congruencias. Además, probamos que las $\mathbf{T_k m}$-álgebras constituyen una variedad localmente finita, semisimple y residualmente finita. En las dos últimas secciones, aplicando los resultados de las secciones previas, obtenemos el término discriminador ternario para esta variedad y mostramos con ello que es discriminadora. Como consecuencia deducimos algunas propiedades de las $\mathbf{T_k m}$-congruencias y, en particular, establecemos una descripción ecuacional de las congruencias principales. Cabe mencionar que algunos de los temas investigados en este capítulo se publicaron en [16].

El Capítulo 4 consta de cuatro secciones. En la primera, hemos incluído una breve exposición de la dualidad de P. Halmos para las álgebras de Boole monádicas. En la segunda sección, nos dedicamos a determinar una dualidad topológica para las $\mathbf{T_k m}$-álgebras la que nos permitió, caracterizar al retículo de las congruencias. Finalmente, a partir de la dualidad topológica para la variedad $\mathbf{B_{T_k m}}$, hemos establecido para una $\mathbf{T_k m}$-álgebra $B$, una biyección entre las familias de las $\mathbf{T_k m}$-subálgebras de $B$ y de ciertas relaciones de equivalencia definidas en el conjunto de filtros primos de $B$. La mayor parte de los resultados obtenidos en las tres primeras secciones de este capítulo se presentaron previamente en el XIII Congreso Dr. Antonio Monteiro, Universidad Nacional del Sur.

# Abstract


In 1955, P. Halmos introduced monadic Boolean algebras as an algebraic counterpart of the one-variable fragment of the classical predicate logic ([23]). These algebras have been widely studied by various authors ([1], [24]) and there are still investigations in this direction ([4], [12], [37]).

On the other hand, Gr. C. Moisil introduces cyclic Boolean algebras in [32], which have been studied by A. Monteiro ([28], [29]), and A. V. Figallo ([15]).

In this thesis, we investigate the class of the $\mathbf{T_k m}$-algebras, this is, monadic Boolean algebras endowed with a monadic automorphism of period $k$. These algebras constitute a generalization of monadic symmetric Boolean algebras ([1]) and, in a special way, they are related with the class of $\mathbf{Df_2}$-algebras.

We have organized this volume in four chapters.

Chapter 1 consists of four sections and almost all results reported in them are well-known. In Section 1, we give the basic definitions and we review the most important results of universal algebra. In Sections 2, 3 and 4, we do a brief exposition of definitions and properties of monadic Boolean algebras, $\mathbf{Df_2}$-algebras and $\mathbf{T_k}$-algebras, respectively. We have included them either to facilitate the reading as to fix the concepts and properties that we will use in later chapters.

In Chapter 2, we start the study of $\mathbf{T_k m}$-algebras. In Section 1, we give basic definitions, we determine the structures of $\mathbf{T_k m}$-algebras that can be defined on the Boole algebra with $n$ atoms for $n = 1, ..., 4$. We distinguish three subalgebras in a $\mathbf{T_k m}$-algebra $B$ and we show some of its properties, which allow us later to characterize the subdirectly irreducible and simple members of this variety. In the second section, we determine the relationship between existential quantifiers and special subalgebras of the underlying Boolean algebra of a $\mathbf{T_k m}$-algebra, from which we obtain another characterization of these algebras. In Section 3, we give a new description of finite $\mathbf{T_k m}$-algebras by means of certain partitions of the set of their atoms. Then, in the next section, we explore, in

the finite case, the relationship between the class $\mathbf{B_{T_k m}}$ and the class $\mathbf{Df_2}$ of diagonal-free two-dimensional cylindric algebras. In Sections 5 and 6, we study a special class of filters, the $\mathbf{T_k m}$-filters, which allow us to characterize the $\mathbf{T_k m}$-congruences. Also, we determine relationships between classes of $\mathbf{T_k m}$-filters, $\mathbf{T_k}$-filters, $\forall$-filters and filters that can be defined in a $\mathbf{T_k m}$-algebra $B$. From these relationships, we characterize, in the next chapter, sub-directly irreducible and simple algebras. Finally, in Section 7 we carry out a brief study of the $\mathbf{T_k m}$-homomorphisms. Most of the results obtained in this chapter were published in [16], while others were previously presented and discussed in Annual Meeting of the Unión Matemática Argentina in 2007.

In Chapter 3, in order to obtain further information on the variety of $\mathbf{T_k m}$-algebras, we make a detailed study of the congruences and indicate two descriptions of them, one by means of the $\mathbf{T_k m}$-filters and the other by a binary operation defined on the algebra. This allowed us to characterize subdirectly irreducible and simple algebras, and determine some special properties of the $\mathbf{T_k m}$-congruences. Furthermore, we prove that $\mathbf{T_k m}$-algebras constitute a semisimple, locally finite and residually finite variety. In Sections 6 and 7, by applying the results of the previous sections, we obtain the ternary discriminator term for this variety and we show with it that this variety is discriminator. As a consequence, we deduce some properties of the $\mathbf{T_k m}$-congruences and, in particular, we establish an equational description of the principal congruences. It is worth mentioning that several of the topics investigated in this chapter were published in [16].

Chapter 4 consists of four sections. In the first one, we have included a brief exposition of P. Halmos' duality for monadic Boolean algebras. In the second section, we devote to determine a topology duality for the $\mathbf{T_k m}$-álgebras which allowed us to characterize the lattice of congruences. Finally, bearing in mind the above duality for the variety $\mathbf{B_{T_k m}}$, we have established for a $\mathbf{T_k m}$-algebra $B$, a bijection between the families of the $\mathbf{T_k m}$-subalgebras of $B$ and of certain equivalence relations defined in the set of prime filters of B. Most of the results obtained in the first three sections of this chapter were previously presented at the XIII Congress Dr. Antonio Monteiro, Universidad Nacional del Sur.

# Índice general

# Capítulo 1

# Preliminares

Exponemos en la primera sección de este capítulo definiciones y propiedades básicas sobre álgebra universal y teoría de categoría, necesarios para una mejor comprensión del presente trabajo. Además, en las secciones 2, 3 y 4, hacemos una breve exposición de las nociones y propiedades esenciales de las álgebras de Boole monádicas, $\mathbf{Df_2}$-álgebras y de las $\mathbf{T_k}$-álgebras, respectivamente. También, establecemos algunas de las notaciones que utilizamos en esta tesis. Suponemos conocida la teoría de retículos, para obtener información de la misma se puede consultar [3, 8].

## 1.1. Nociones de álgebra universal y categorías

### 1.1.1. Álgebras, homomorfismos y subálgebras

En esta sección repasamos aquellas nociones fundamentales de álgebra universal que facilitarán la lectura del texto. Referencias sobre el tema pueden encontrarse, por ejemplo, en [10, 22].

Sea $A$ un conjunto no vacío y $n$ un número natural. Una operación $n$-aria sobre $A$ es cualquier función $f : A^n \longrightarrow A$, donde $n$ es la aridad de $f$. Si $n = 0$, una operación 0-aria es una constante de $A$. Una operación finitaria sobre $A$ es una operación $n$-aria para algún número natural $n$.

Un lenguaje o tipo de álgebras es un conjunto $\mathcal{F}$, cuyos elementos se llaman símbolos de función, tal que a cada miembro de $\mathcal{F}$ se le asigna un número natural $n$, llamado aridad de $f$ y $f$ se denomina símbolo de función $n$-ario.

Si $\mathcal{F}$ es un lenguaje de álgebras, entonces un álgebra $\mathcal{A}$ de tipo $\mathcal{F}$ es un par $\langle A, F\rangle$ donde $A$ es un conjunto no vacío y $F$ es una familia de operaciones finitarias sobre $A$ indexada por $\mathcal{F}$, tal que a cada símbolo de función $n$-ario $f \in \mathcal{F}$, le corresponde una operación $n$-aria $f^{\mathcal{A}}$ sobre $A$ que pertenece a $F$. El conjunto $A$ se llama universo o soporte del álgebra $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$. En lo que sigue, cuando no haya lugar a confusión, escribimos $f$ en lugar de $f^{\mathcal{A}}$ y si $F$ es finito, por ejemplo $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$, escribimos $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle$ en lugar de $\langle A, F\rangle$. En este caso, si $n_i$ es la aridad de $f_i$ para $1 \leqslant i \leqslant k$, también decimos que $A$ es de tipo $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Con el objetivo de simplificar la notación, en algunos casos representamos al álgebra $\langle A, F\rangle$ por su conjunto soporte $A$.

**Homomorfismos**

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Una función $h : A \longrightarrow B$ es un isomorfismo de $A$ en $B$ si $h$ es inyectiva, sobreyectiva, y si para cada símbolo de función $n$-ario $f \in \mathcal{F}$ y para toda $n$-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se verifica:

(H) $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$.

$\mathcal{A}$ es isomorfa a $\mathcal{B}$ y escribimos $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ si existe un isomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Si $h$ verifica sólo la condición (H) decimos que $h$ es un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$.

Si $h$ es inyectiva decimos que $h$ es una inmersión.

En el caso que $h$ es sobreyectiva, decimos que $h$ es un epimorfismo y que $\mathcal{B}$ es una imagen homomorfa de $\mathcal{A}$.

Hay diversos métodos para construir nuevas álgebras a partir de álgebras dadas. Los tres fundamentales son la formación de subálgebras, imágenes homomorfas y productos directos que indicamos a continuación.

**Subálgebras**

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$ y lo notamos $\mathcal{B} \lhd \mathcal{A}$ (o simplemente $B \lhd A$) si $B \subseteq A$ y toda operación fundamental de $\mathcal{B}$ es la restricción de la correspondiente operación de $\mathcal{A}$.

Dada un álgebra $\mathcal{A}$, para cada $X \subseteq A$ definimos la subálgebra generada por $X$ como

$$[X] = \bigcap\{B : X \subseteq B \text{ y } B \lhd A\}.$$

Es claro que $[X]$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$.

Si $X \subseteq A$, decimos que $X$ genera a $\mathcal{A}$ o que $\mathcal{A}$ está generada por $X$ si $[X] = A$. El álgebra $\mathcal{A}$ es finitamente generada si tiene un conjunto finito de generadores.

### 1.1.2. Productos directos y subdirectos

#### Productos directos

Sea $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ una familia de álgebras de tipo $\mathcal{F}$. Entonces el producto directo $\mathcal{A} = \prod\limits_{i\in I} A_i$ es un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ cuyo universo es $\prod\limits_{i\in I} A_i = \{a : I \longrightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i : a(i) \in A_i\}$ y si $f \in \mathcal{F}$ es un símbolo de operación $n$-ario, se define $f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)(i) = f^{\mathcal{A}_i}(a_1(i), a_2(i), \ldots, a_n(i))$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \prod\limits_{i\in I} A_i$, es decir $f^{\mathcal{A}}$ se define coordenada a coordenada.

La aplicación $\Pi_j : \prod\limits_{i\in I} A_i \longrightarrow A_j$, definida por $\Pi_j(a) = a(j)$ para cada $j \in I$, se denomina la proyección sobre la $j$-ésima coordenada y determina un epimorfismo de $\prod\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ en $\mathcal{A}_j$.

#### Variedad

Una clase $\mathbf{V}$ de álgebras del mismo tipo es una variedad, si es una clase cerrada por imágenes homomorfas, subálgebras y productos directos.

#### Productos subdirectos

Un álgebra $\mathcal{A}$ es producto subdirecto de una familia $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ de álgebras, si se verifican las condiciones siguientes:

(P$_\mathrm{S}$1) existe una inmersión $h : \mathcal{A} \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$,

(P$_\mathrm{S}$2) para cada $j \in I$, el homomorfismo $\Pi_j \circ h : A \longrightarrow A_j$ es sobreyectivo.

#### Álgebras subdirectamente irreducibles

Un álgebra $\mathcal{A}$ es subdirectamente irreducible si tiene más de un elemento y si $\mathcal{A}$ es producto subdirecto de la familia $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ de álgebras, con inmersión $h$, entonces existe $j \in I$ tal que $\Pi_j \circ h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_j$ es un isomorfismo.

### 1.1.3. Congruencias y álgebras cociente

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ y sea $\Theta \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia. Entonces $\Theta$ es una congruencia de $\mathcal{A}$ si satisface la siguiente propiedad de compatibilidad:

($\mathrm{P_C}$) para cada símbolo de función $n$-ario $f \in \mathcal{F}$ y elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in A$, si $a_i \, \Theta \, b_i$, para todo $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, entonces: $f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \, \Theta \, f^{\mathcal{A}}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Si $\mathcal{A}$ pertenece a una clase $\mathbf{K}$ de álgebras y $\Theta$ es una congruencia de $\mathcal{A}$, entonces decimos que $\Theta$ es una $\mathbf{K}-$congruencia de $\mathcal{A}$.

El conjunto de todas las congruencias de un álgebra $\mathcal{A}$ lo denotamos por $Con_{\mathbf{K}}(\mathcal{A})$ si $\mathcal{A}$ pertenece a una clase $\mathbf{K}$ de álgebras o a veces para simplificar lo notamos por $Con(A)$. Si $\Theta \in Con(\mathcal{A})$, entonces el álgebra cociente de $\mathcal{A}$ por $\Theta$, que representamos $\mathcal{A}/\Theta$, es el álgebra cuyo universo es $A/\Theta$ y cuyas operaciones están definidas por

$$f^{\mathcal{A}/\Theta}([a_1]_\Theta, [a_2]_\Theta, \ldots, [a_n]_\Theta) = [f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)]_\Theta,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, $f$ es un símbolo de función $n$-aria en $\mathcal{F}$ y $[x]_\Theta$ representa la clase de $x$ por la relación de equivalencia $\Theta$. Las álgebras cocientes de $\mathcal{A}$ son del mismo tipo que $\mathcal{A}$. De esta definición resulta que la aplicación canónica $q : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\Theta$ es un epimorfismo.

Un resultado importante es el siguiente:

*Si $\mathcal{A}$ es un álgebra, entonces $Con(\mathcal{A})$, ordenado por la relación de inclusión, es un retículo acotado y completo, cuyo primer elemento es la relación identidad de $A$, $\Delta = \{(x, x) : x \in A\}$ y cuyo último elemento es $\nabla = A \times A$.*

El retículo de las congruencias de un retículo es siempre distributivo aunque el retículo en general no lo sea.

El retículo de las congruencias caracteriza a las álgebras subdirectamente irreducibles de la siguiente manera:

*Un álgebra $\mathcal{A}$ es subdirectamente irreducible si, y sólo si, $Con(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta\}$ tiene primer elemento.*

Dos teoremas fundamentales debidos a G. Birkhoff son los que enunciamos a continuación:

**Teorema 1.1.1** *Toda álgebra con más de un elemento es isomorfa a un producto subdirecto de una familia de álgebras subdirectamente irreducibles.*

**Teorema 1.1.2** *Toda álgebra de una clase ecuacional tiene una descomposición subdirecta en factores subdirectamente irreducibles de la clase.*

Por otra parte, recordemos que una clase particular de álgebras subdirectamente irreducibles son las simples, donde *un álgebra $\mathcal{A}$ con más de un elemento es simple si, y sólo si, las únicas congruencias de $\mathcal{A}$ son las triviales, es decir $\Delta$ y $\nabla$.*

Además, *un álgebra $\mathcal{A}$ con más de un elemento se dice semisimple si la intersección de sus congruencias maximales es la identidad $\Delta$, o bien si el álgebra es producto subdirecto de una familia de álgebras simples.*

### 1.1.4. Congruencias especiales

**Congruencias finitamente generadas**

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, con $\Theta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ denotamos la congruencia generada por $\{(a_i, a_j) : 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$, es decir, la menor congruencia tal que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ están en la misma clase de equivalencia. Llamamos congruencia principal a toda congruencia de la forma $\Theta(a_1, a_2)$, y notamos con $Con_P(\mathcal{A})$ al conjunto de las congruencias principales de $\mathcal{A}$.

Algunos resultados útiles sobre las congruencias, que se obtienen como consecuencia de que $\Theta$ es un operador de clausura algebraico, son los siguientes:

*Sean $\mathcal{A}$ un álgebra, $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n \in A$ y $\Theta \in Con(\mathcal{A})$, entonces*

(C$_{\mathrm{FG}}$1) $\Theta(a_1, a_2) = \Theta(a_2, a_1)$,

(C$_{\mathrm{FG}}$2) $\Theta((a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)) = \Theta(a_1, b_1) \vee \Theta(a_2, b_2) \vee \ldots \vee \Theta(a_n, b_n)$, donde $\vee$ es, en este caso, la operación de supremo entre congruencias,

(C$_{\mathrm{FG}}$3) $\Theta(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \Theta(a_1, a_2) \vee \Theta(a_2, a_3) \vee \ldots \vee \Theta(a_{n-1}, a_n)$,

(C$_{\mathrm{FG}}$4) $\Theta = \bigcup\{\Theta(a, b) : (a, b) \in \Theta\} = \sup\{\Theta(a, b) : (a, b) \in \Theta\}$.

Como $Con(\mathcal{A})$ es un retículo algebraico, las *congruencias compactas* de $\mathcal{A}$ son las congruencias de $\mathcal{A}$ finitamente generadas. Notamos con $Con_C(\mathcal{A})$ al conjunto de las congruencias compactas de $\mathcal{A}$.

### Propiedad de extensión de congruencias

Un álgebra $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de extensión de congruencias (PEC) si para toda subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ y toda $\Theta \in Con(\mathcal{B})$ existe $\Phi \in Con(\mathcal{A})$ tal que $\Theta = \Phi \cap (B \times B)$.

Una clase **K** tiene la PEC si toda álgebra de **K** la tiene.

Un álgebra $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de extensión de congruencias principales (PECP) si para toda subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ cada congruencia principal de $B$ es la restricción de alguna congruencia del álgebra $A$ (no se pide que sea principal).

Una clase **K** tiene la PECP si toda álgebra de **K** la tiene.

### Álgebras a congruencias distributivas

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a *congruencias distributivas* si $Con(\mathcal{A})$ es distributivo.

Una clase **K** de álgebras es a congruencias distributivas si, y sólo si, toda álgebra de **K** es a congruencias distributivas.

### Álgebras a congruencias conmutativas

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a *congruencias conmutativas* si cada par de congruencias sobre $A$ permuta, esto es, si $\Theta_1 \circ \Theta_2 = \Theta_2 \circ \Theta_1$, para toda $\Theta_1$, $\Theta_2 \in Con(\mathcal{A})$.

Una clase **K** de álgebras es a congruencias conmutativas si, y sólo si, toda álgebra de **K** es a congruencias conmutativas.

Las congruencias conmutativas de un álgebra $\mathcal{A}$ pueden ser caracterizadas de la siguiente manera:

*Si $\Theta_1, \Theta_2 \in Con(\mathcal{A})$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

($\mathrm{C_C}$1) $\Theta_1 \circ \Theta_2 = \Theta_2 \circ \Theta_1$,

($\mathrm{C_C}$2) $\Theta_1 \vee \Theta_2 = \Theta_1 \circ \Theta_2$,

($\mathrm{C_C}$3) $\Theta_1 \circ \Theta_2 \subseteq \Theta_2 \circ \Theta_1$.

### Álgebras a congruencias regulares

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a *congruencias regulares* si para toda $\Theta_1$, $\Theta_2 \in Con(\mathcal{A})$, $[a]_{\Theta_1} = [a]_{\Theta_2}$ para algún $a \in A$ implica que $\Theta_1 = \Theta_2$. Esto es, si dos congruencias coinciden en una clase, son iguales.

Una clase **K** de álgebras es a congruencias regulares si, y sólo si, toda álgebra de **K** es a congruencias regulares.

### Variedades aritméticas

Una variedad $\mathbf{V}$ es *aritmética* si es a congruencias distributivas y conmutativas.

### Álgebras a congruencias uniformes o normales

Una congruencia $\Theta$ de un álgebra $\mathcal{A}$ es *uniforme o normal*, si todas la clases de equivalencia por $\Theta$ tienen el mismo cardinal, es decir, para todo $x$, $y \in A$ se verifica que $\big|[x]_\Theta\big| = \big|[y]_\Theta\big|$.

Un álgebra $\mathcal{A}$ es a *congruencias uniformes o normales* si toda congruencia de $\mathcal{A}$ es uniforme.

Una clase $\mathbf{K}$ de álgebras es a congruencias uniformes si, y sólo si, toda álgebra de $\mathbf{K}$ es a congruencias uniformes.

### Congruencias factores

Dada un álgebra $\mathcal{A}$, $\Theta \in Con(\mathcal{A})$ es una *congruencia factor* si existe $\Theta^* \in Con(\mathcal{A})$ tal que:

($\mathrm{C_F}1$) $\Theta \cap \Theta^* = \Delta$,

($\mathrm{C_F}2$) $\Theta \vee \Theta^* = \nabla$,

($\mathrm{C_F}3$) $\Theta \circ \Theta^* = \Theta^* \circ \Theta$.

El par $\Theta$, $\Theta^*$ se denomina par de congruencias factores.

Si $\Theta$ y $\Theta^*$ es un par de congruencias factores, entonces se verifica $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}/\Theta \times \mathcal{A}/\Theta^*$, donde el isomorfismo $\alpha : A \longrightarrow A/\Theta \times A/\Theta^*$ está dado por $\alpha(a) = \big([a]_\Theta, [a]_{\Theta^*}\big)$.

## 1.1.5. Categorías y funtores

En esta sección repasamos las nociones y los resultados de la teoría de categorías que se usan más adelante.

### Categorías

Una *categoría* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ está formada por una clase Obj$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ cuyos miembros se llaman *objetos* de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, dotada con la siguiente estructura:

(i) Para cada $A$, $B \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ existe un conjunto $(A,B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ cuyos elementos se llaman *morfismos* tal que:

$$(A,B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \neq (A',B')_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \text{ implica } (A,B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \cap (A',B')_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = \emptyset.$$

Si $f \in (A,B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, indicamos $f : A \longrightarrow B$.

(ii) Para cada $A$, $B$, $C \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ , $f \in (A,B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, $g \in (B,C)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, existe un único morfismo $g \circ f \in (A,C)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, llamado *composición* de $f$ con $g$, tal que se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) si $A,B,C,D \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $f \in (A,B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, $g \in (B,C)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ y $h \in (C,D)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(b) Para cada $A \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ existe un morfismo $1_A \in (A,A)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ llamado el *morfismo identidad* de $A$, el cual para cada $f \in (A,B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ y $g \in (C,A)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ satisface que $f \circ 1_A = f$ y $1_A \circ g = g$.

Sea $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ una categoría y $A$, $B \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Si $f \in (A,B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, llamamos *dominio* de $f$ a $A$ y *codominio* de $f$ a $B$ y escribimos $A = Domf$ y $B = Codomf$.

Es fácil verfificar la unicidad del morfismo identidad.

**Morfismos especiales**

Si $f \in (A,B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, decimos que el morfismo $f$ es un *monomorfismo* si para todo $C \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y para todo par de elementos $h$, $g \in (C,A)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ se verifica que $f \circ g = f \circ h$ implica que $g = h$.

Si $f \in (A,B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, decimos que el morfismo $f$ es un *epimorfismo* si para todo $C \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y para todo par de elementos $h$, $g \in (B,C)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ se verifica que $h \circ f = g \circ f$ implica que $h = g$.

Si $f \in (A,B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, decimos que el morfismo $f$ es un *isomorfismo* si existe un morfismo $f^{-1} \in (B,A)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ tal que $f \circ f^{-1} = 1_B$ y $f^{-1} \circ f = 1_A$. Es claro que, $f^{-1}$ es también un isomorfismo. Todo isomorfismo es un monomorfismo y un epimorfismo. La recíproca no es verdadera.

$A$, $B \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ son *isomorfos* si existe un isomorfismo $f : A \longrightarrow B$, y en este caso lo notamos por $A \simeq B$.

$A \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ es un *retracto* de $B \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$, si existen dos morfismos $f \in (A,B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ y $g \in (B,A)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ tal que $g \circ f = 1_A$. Notemos que $f$ es monomorfismo y $g$ es un epimorfismo.

### Categoría dual

Sea $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ una categoría, llamamos *categoría dual* de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y la denotamos $\boldsymbol{\mathcal{A}}^*$ a la categoría que verifica:

(i) $\mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}} = \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}^*$.

(ii) Para todo $A, B \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}^*$, $(A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}^*} = (B, A)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$.

(iii) Si $f \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}^*}$ y $g \in (B, C)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}^*}$, entonces la composición $g \circ f$ en $\boldsymbol{\mathcal{A}}^*$ está definida como la composición $f \circ g$ en $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

### Subcategorías

Una categoría $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ es una *subcategoría* de una categoría $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ si se verifican las siguientes condiciones:

(i) $\mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{B}} \subseteq \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$,

(ii) $(A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} \subseteq (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ para todo $A$, $B \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{B}}$,

(iii) los morfismos identidad en $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ son los mismos que en $\boldsymbol{\mathcal{A}}$,

(iv) la composición de morfismos en $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ es la misma que en $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

$\boldsymbol{\mathcal{B}}$ es una *subcategoría plena* de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, si satisface las condiciones (i), (ii), (iii), (iv) y $(A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ para todo $A$,$B \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{B}}$.

### Funtores

Sean $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ dos categorías. Un *funtor covariante* o simplemente un *funtor* $F : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ es una función que asigna a cada $A \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$, un objeto $F(A) \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{B}}$ y a cada morfismo $f \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, un morfismo $F(f) \in (F(A), F(B))_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ de manera tal que:

(i) $F(1_A) = 1_{F(A)}$,

(ii) para todo $A$, $B$, $C \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$, para todo $f \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ y para todo $g \in (B, C)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, se satisface $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Un *funtor contravariante* $F : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ es una función que asigna a cada $A \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$, un objeto $F(A) \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{B}}$ y a cada morfismo $f \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, un morfismo $F(f) \in (F(B), F(A))_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ de manera tal que:

(i) $F(1_A) = 1_{F(A)}$,

(ii) para todo $A$, $B$, $C \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$, para todo $f \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ y para todo $g \in (B, C)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, se satisface $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Para toda categoría $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ denotamos por $Id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ al *funtor identidad* $Id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$, definido por $Id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(A) = A$ y $Id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(f) = f$ para todo $A,\ B \in Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ y para $f \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$.

Si $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ son categorías y $F : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ y $G : \boldsymbol{\mathcal{B}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}}$ son ambos funtores covariantes o ambos contravariantes, su *composición* $G \circ F : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}}$ está definida por $(G \circ F)(A) = G(F(A))$ y $(G \circ F)(f) = G(F(f))$ para todo todo $A,\ B \in Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ y para todo $f \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$.

Es fácil ver que la composición de funtores covariantes (contravariantes) es covariante (covariante), la composición es asociativa, y además que $F \circ Id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = F$ para todo funtor $F : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ y $Id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \circ G = G$ para todo funtor $G : \boldsymbol{\mathcal{B}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Sean $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ dos categorías y $F : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ un funtor. Se dice que

(i) $F$ es *pleno* si la función $F : (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \longrightarrow (F(A), F(B))_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ es inyectiva, para cualquier $A,\ B \in Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$,

(ii) $F$ es *fiel* si la función $F : (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \longrightarrow (F(A), F(B))_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ es sobreyectiva, para cualquier $A,\ B \in Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$,

(iii) $F$ es *plenamente fiel* si la función $F : (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \longrightarrow (F(A), F(B))_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ es biyectiva, para cualquier $A,\ B \in Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$,

(iv) $F$ es un *isomorfismo* si $F$ es covariante y existe un funtor covariante $G : \boldsymbol{\mathcal{B}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$ tal que $G \circ F = Id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ y $F \circ G = Id_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$.

**Equivalencia natural**

Sean $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ dos categorías, $F : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ y $G : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ dos funtores. Una *transformación natural* del funtor $F$ en el funtor $G$ es una familia de morfismos de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, $\{\tau_A : F(A) \longrightarrow G(A)\}_{A \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, tal que para cada $A,\ B \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y cada $h \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ se verifica que $G(h) \circ \tau_A = \tau_B \circ F(h)$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(h)"'] & G(A) \arrow[d, "G(h)"] \\ F(B) \arrow[r, "\tau_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

Esto es, a cada $A,\ B \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y a cada $h \in (A, B)_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ le asociamos morfismos

$\tau_A \in (F(A), G(A))_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ y $\tau_B \in (F(B), G(B))_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ con la condición de que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "G"] \arrow[dd, "h"] & \\
F(A) \arrow[rr, "\tau_A"'] \arrow[dd, "F(h)"'] & & G(A) \arrow[dd, "G(h)"] \\
& B \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "G"] & \\
F(B) \arrow[rr, "\tau_B"'] & & G(B)
\end{tikzcd}$$

Una transformación natural $\tau = \{\tau_A\}_{A \in \mathrm{Obj}\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ tal que $\tau_A$ es un isomorfismo para todo $A$, se denomina una *equivalencia natural*. Además decimos que dos funtores son *naturalmente equivalentes* si existe una equivalencia natural entre ellos.

Dos categorías $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ son *naturalmente equivalentes*, si existen dos funtores $F : \boldsymbol{\mathcal{A}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ y $G : \boldsymbol{\mathcal{B}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$ tales que $F \circ G$ y $G \circ F$ son naturalmente equivalentes a los funtores identidades $Id_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ e $Id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, respectivamente

### 1.1.6. Diversos ejemplos de álgebras

A continuación damos las definiciones de aquellas clases de álgebras que utilizamos más adelante.

#### Retículos distributivos acotados

Teniendo en cuenta la caracterización dada por M. Scholander en [36] para los retículos distributivos, un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 0, 0)$ es un *retículo distributivo acotado* si se verifican las condiciones siguientes:

(R$_{\mathrm{D}}$1) $x \wedge (x \vee y) = x$,

(R$_{\mathrm{D}}$2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$,

(R$_{\mathrm{D}}$3) $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$.

En todo lo que sigue designamos con $\mathbf{L}$ la variedad de los retículos distributivos acotados (o $(0,1)$-retículos distributivos), y para cada $A \in \mathbf{L}$, denotamos con $X(A)$ a la familia de los filtros primos de $A$.

Se puede ver un estudio detallado de la teoría de retículos en [3] y [22].

**Álgebras de Boole**

Un *álgebra de Boole* es un álgebra $\langle B, \vee, \wedge, -, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ que satisface las condiciones siguientes:

(B1) $\langle B, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado,

(B2) $x \wedge -x = 0$,

(B3) $x \vee -x = 1$.

Mayor información sobre estas álgebras se encuentra, por ejemplo, en [25].

En adelante notamos con $\mathbf{B}$ a la variedad de estas álgebras, $\Pi(B)$ al conjunto de los átomos de un álgebra de Boole $B$, y con $B_n$ al álgebra de Boole con $n$ átomos.

## 1.2. Álgebras de Boole monádicas

En esta sección, expondremos algunas propiedades de interés sobre álgebras de Boole monádicas necesarias para el resto del trabajo.

En el marco teórico de las álgebras cilíndricas ([26]), las álgebras de Boole monádicas son álgebras cilíndricas libres de elementos diagonales de dimensión uno, $\mathbf{Df}_1$-álgebras, y se definen como:

Un *álgebra de Boole monádica* o $\mathbf{Df}_1$-*álgebra* es un álgebra $\langle B, \wedge, \vee, -, \exists, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ tal que el reducto $\langle B, \wedge, \vee, -, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Boole y el operador unario $\exists$ satisface las siguientes identidades:

($\mathrm{Df}_1 1$) $\exists 0 = 0$,

($\mathrm{Df}_1 2$) $x \wedge \exists x = x$,

($\mathrm{Df}_1 3$) $\exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y$.

El operador unario $\exists$ se denomina cuantificador existencial.
En adelante y cuando no haya lugar a confusión, indicamos a un álgebra de Boole monádica con $\langle B, \exists\rangle$ y con $\mathbf{Df_1}$ a la variedad de las álgebras de Boole monádicas.

Sea $\langle B, \exists\rangle$ un álgebra de Boole monádica, $k \in B$ es un *punto fijo* de $\exists$ si $\exists k = k$.

Con $\exists(B)$ denotamos al conjunto de los puntos fijos del cuantificador de un álgebra de Boole monádica $\langle B, \exists\rangle$.

Dos ejemplos bien conocidos de álgebras de Boole monádicas y de fundamental importancia, son:

**Ejemplo 1.2.1**

(i) *Si $B$ es un álgebra de Boole y $\exists^{o} : B \longrightarrow B$ es la función definida por* $\exists^{o}x = \begin{cases} 0 \ si \ x = 0 \\ 1 \ si \ x \neq 0 \end{cases}$, *entonces $(B, \exists^{o})$ es un álgebra de Boole monádica.*

$\exists^{o}$ *recibe el nombre de cuantificador caótico o simple.*

(ii) *Si $\exists^{1} : B \longrightarrow B$ es la función identidad definida sobre un álgebra de Boole $B$, entonces $\langle B, \exists^{1}\rangle$ es un álgebra de Boole monádica.*

$\exists^{1}$ *recibe el nombre de cuantificador trivial o discreto.*

Es fácil mostrar que

($\mathrm{Df}_1 4$) Si $\langle B, \exists\rangle$ es un álgebra de Boole monádica con mas de un elemento, entonces $\exists(B) = \{0, 1\}$ si, y sólo si, $\exists$ es el cuantificador simple.

A continuación se enuncian propiedades del cuantificador existencial.

($\mathrm{Df}_1 5$) En $B \in \mathbf{Df_1}$, se satisfacen:

1. $\exists 1 = 1$,
2. Si $x \leqslant y$, entonces $\exists x \leqslant \exists y$,
3. $\exists(x \vee y) = \exists x \vee \exists y$,
4. $\exists\exists x = \exists x$,
5. $\exists - \exists x = -\exists x$,
6. $-x \vee \exists x = 1$,
7. $x \wedge -\exists x = 0$.

Como el cuantificador $\exists$ satisface ($\mathrm{Df}_1 1$), ($\mathrm{Df}_1 2$), las propiedades 3. y 4. en ($\mathrm{Df}_1 5$), podemos afirmar que:

($\mathrm{Df}_1 6$) Si $\langle B, \exists\rangle \in \mathbf{Df_1}$, entonces $\exists$ es un operador de clausura ([10]).

En general, la recíproca de ($\mathrm{Df}_1 6$) no es válida.

### 1.2.1. Caracterización de un álgebra de Boole monádica por medio del conjunto de sus puntos fijos

Ciertas características del conjunto de los puntos fijos de un álgebra de Boole monádica permiten describirlas como se detalla a continuación.

Sean $B$ un álgebra de Boole y $S \subseteq B$ una subálgebra de $B$, $S$ es *relativamente completa* si para todo $a \in B$, $s(a) = \{s \in S : a \leqslant s\}$ tiene ínfimo en $S$.

($\mathrm{Df}_1 7$) Si $\langle B, \exists \rangle$ es un álgebra de Boole monádica, entonces el conjunto de los puntos fijos del cuantificador $\exists$ es una subálgebra relativamente completa de $B$.

Recíprocamente,

($\mathrm{Df}_1 8$) Si $B$ es un álgebra de Boole y $S \subseteq B$ es una subálgebra relativamente completa de $B$, entonces $S$ determina unívocamente un cuantificador existencial $\exists$ tal que $\exists(B) = S$.

Es conveniente observar que:

El cuantificador $\exists : B \longrightarrow B$ determinado por una subálgebra relativamente completa $S$ de un álgebra de Boole $B$ está definido por $\exists a = \text{ínf}\, s(a) = \text{ínf}\{s \in S : a \leqslant s\}$. Además, $\exists(B) = S$.

De ($\mathrm{Df}_1 7$) y ($\mathrm{Df}_1 8$) resulta que se satisfacen las propiedades siguientes:

(i) Si $\langle B, \exists \rangle \in \mathbf{Df_1}$, entonces $\exists a = \text{ínf}\{k \in \exists(B) : a \leqslant k\}$ para todo $a \in B$.

(ii) Existe una correspondencia biyectiva entre la familia $\mathcal{E}(B)$ de todos los cuantificadores definibles sobre un álgebra de Boole $B$ y la familia $\mathcal{S}_{rc}(B)$ de todas las subálgebras booleanas relativamente completas de $B$, a saber, $\exists \mapsto \exists(B)$.

(iii) De lo expuesto resulta que un álgebra de Boole monádica se puede definir como un par $\langle B, S \rangle$ formado por un álgebra de Boole $B$ y una subálgebra relativamente completa $S$ de $B$.

### 1.2.2. Caracterización de un álgebra de Boole monádica finita por medio del conjunto de átomos

Es bien sabido que en la variedad de las álgebras de Boole $\mathbf{B}$, se satisfacen las siguientes propiedades:

(B4) Si $S$ es una subálgebra de $B_n$, entonces la familia $\mathcal{P}_S = \{C_s\}_{s\in\Pi(S)}$ con $C_s = \{a \in \Pi(B_n) : a \leqslant s\}$ es una partición del conjunto de átomos de $B_n$.

(B5) Si $\mathcal{P}$ es una partición del conjunto de átomos de $B_n$, entonces $\Pi(S_{\mathcal{P}}) = \{s_C : C \in \mathcal{P}\}$ donde $s_C = \sup\{a : a \in C\}$, es el conjunto de átomos de una subálgebra $S_{\mathcal{P}}$ de $B_n$.

En el caso particular de las álgebras de Boole monádicas finitas podemos afirmar.

($\mathrm{Df_1}$9) Cada subálgebra $S$ de un álgebra de Boole monádica finita $B_n$ induce una partición $\mathcal{P}_S$ del conjunto de átomos $\Pi(B_n)$, y recíprocamente.

($\mathrm{Df_1}$10) Si $\langle B_n, \exists\rangle \in \mathbf{Df_1}$ y $\Pi(\exists(B_n)) = \{k_1, k_2, ..., k_t\}$, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

(i) Si $a \in \Pi(B_n)$, entonces $\exists a \in \Pi(\exists(B_n))$.

(ii) La familia $\mathcal{P} = \{C_\alpha : 1 \leqslant \alpha \leqslant t\}$ siendo $C_\alpha = \{a \in \Pi(B_n) : a \leqslant k_\alpha\}$, es una partición del conjunto de átomos $\Pi(B_n)$ inducida por el cuantificador $\exists$.

(iii) Si $R_\exists$ es la relación de equivalencia inducida en $\Pi(B_n)$ por la partición $\mathcal{P}$, entonces $a\, R_\exists\, b$, si, y sólo si, existe $\alpha \in \{1, 2, ..., t\}$ tal que $\exists a = \exists b = k_\alpha$, y $C_\alpha = \{x \in \Pi(B_n) : \exists x = k_\alpha\}$.

(iv) $k \in \Pi(\exists(B_n))$ si, y sólo si, $k = \sup\{x : x \in C_\alpha\}$.

De lo expuesto resulta,

($\mathrm{Df_1}$11) Existe una correspondencia biyectiva entre la familia $\mathcal{E}(B_n)$ de los cuantificadores existenciales definibles sobre un álgebra de Boole finita $B_n$, y la familia de las particiones de $\Pi(B_n)$.

($\mathrm{Df_1}$12) En un álgebra de Boole monádica finita $B_n$, la partición $\mathcal{P}$ inducida en el conjunto de átomos $\Pi(B_n)$ por el cuantificador $\exists$ se define por

$$C_k \in \mathcal{P} \text{ si, y sólo si, } C_k = \{a \in \Pi(B_n) : \exists a = k\} \text{ donde } k \in \Pi(\exists(B_n)).$$

Indicamos con $\mathcal{P}_\exists$ la partición $\mathcal{P}$ inducida en el conjunto de átomos $\Pi(B_n)$ por el cuantificador $\exists$.

### 1.2.3. Cuantificador universal

En cualquier álgebra de Boole monádica es posible definir un operador unario, llamado cuantificador universal.

Sea $\langle B, \exists\rangle \in \mathbf{Df_1}$, *el cuantificador universal* es el operador unario

$$\forall : B \longrightarrow B \text{ definido por } \forall x = -\exists - x.$$

Es claro que este operador satisface propiedades duales del cuantificador existencial.

($\mathrm{Df}_1$13) En toda álgebra de Boole monádica, se satisfacen

1. $\forall 1 = 1$,
2. $\forall x \leqslant x$,
3. $\forall(x \wedge y) = \forall x \wedge \forall y$,
4. $\forall\forall x = \forall x$,
5. $\forall - \forall x = -\forall x$,
6. $\forall(x \vee \forall y) = \forall x \vee \forall y$,
7. $\forall 0 = 0$,
8. Si $x \leqslant y$, entonces $\forall x \leqslant \forall y$,
9. $\forall - \exists x = -\exists x$,
10. $-x \wedge \forall x = 0$,
11. $x \vee -\forall x = 1$,
12. $\exists x = -\forall - x$,
13. $\exists\forall x = \forall x$,
14. $\forall\exists x = \exists x$,
15. $\exists x = x$ si, y sólo si, $\forall x = x$,
16. $\exists(x \wedge \forall y) = \exists x \wedge \forall y$,
17. $\forall(x \wedge \exists y) = \forall x \wedge \exists y$,
18. $\exists - \forall x = -\forall x$.

($\mathrm{Df}_1$14) Sea $\langle B, \exists\rangle \in \mathbf{Df_1}$ y sea $\{k_i\}_{i\in I} \subseteq \exists(B)$. Se satisfacen las siguientes propiedades:

(i) Si existen $a = \text{ínf}\{k_i : i \in I\}, b = \sup\{k_i : i \in I\}$, entonces $a, b \in \exists(B)$.

(ii) $\exists(B) = \{\exists x : x \in B\} = \{\forall x : x \in B\} = \forall(B)$.

($\mathrm{Df}_1$15) Sea $\langle B, \exists\rangle \in \mathbf{Df_1}$ y sea $S$ una subálgebra monádica de $B$, entonces $\exists(S) = \exists(B) \cap S \subseteq S$.

### 1.2.4. Filtros monádicos

En las álgebras de Boole monádicas se distingue una clase especial de conjuntos, los filtros monádicos, que se definen a continuación.

Sea $\langle B, \exists\rangle$ un álgebra de Boole monádica, un filtro $F \subseteq B$ es *un filtro monádico o $\forall$-filtro* si, y sólo si, $a \in F$ implica $\forall a \in F$.

No todo filtro de un álgebra de Boole monádica es un filtro monádico, por ejemplo, en el álgebra de Boole monádica $\langle B_3, \exists\rangle$ cuyo diagrama de Hasse es el de la Figura 1 y el cuantificador está definido por la Tabla 1, es claro que, $F = \{e, 1\}$ es un filtro que no es monádico.

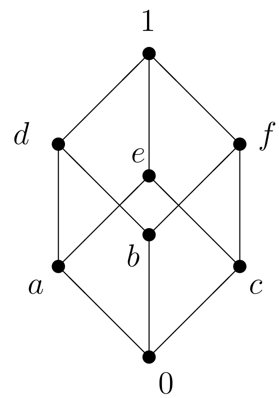



Figura 1

| $x$ | $\exists x$ | $\forall x$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $f$ | $f$ |
| $c$ | $f$ | $f$ |
| $d$ | 1 | 0 |
| $e$ | 1 | 0 |
| $f$ | $f$ | $f$ |
| 1 | 1 | 1 |

Tabla 1

Repasaremos algunas propiedades de los $\forall$-filtros que serán necesarias para el desarrollo posterior. Hemos incluído sólo algunas demostraciones y ciertas referencias en las que se pueden encontrar las propiedades mencionadas.

($\mathrm{F_m}1$) Sea $\langle B, \exists\rangle$ un álgebra de Boole monádica, entonces un filtro $F$ de $B$ es $\forall$-filtro si, y sólo si, $\forall(F) \subseteq F$.

($\mathrm{F_m}2$) Sea $\langle B, \exists\rangle$ un álgebra de Boole monádica y sea $F$ un $\forall$-filtro, entonces $\exists(F) = \forall(F)$.

**Dem.** Sea $y = \exists f$ para algún $f \in F$. Como $\exists(F) \subseteq F$ y $\forall\exists f = \exists f$, resulta que $y \in \forall(F)$ y, por lo tanto, $\exists(F) \subseteq \forall(F)$. En forma análoga, se prueba que $\forall(F) \subseteq \exists(F)$ □

Definimos ahora de la manera habitual la noción de $\forall$-filtro generado por un subconjunto no vacío.

Sea $\langle B, \exists\rangle$ un álgebra de Boole monádica y sea $X \subseteq B$, el $\forall$-filtro generado por $X$ es la intersección de todos los $\forall$-filtros que contienen a $X$.

Si $H$ es un subconjunto de $B$, denotaremos con $F_\forall(H)$ al $\forall$-filtro generado por $H$ y con $F(H)$ al filtro generado por $H$. Si $H = \{a\}$, escribiremos $F_\forall(a)$ en lugar de $F_\forall(\{a\})$ y se denomina el $\forall$-filtro principal generado por $a$.

Es claro que $F(H) \subseteq F_\forall(H)$ y que $F_\forall(\emptyset) = \{1\}$.

($\mathrm{F_m}3$) Si $B$ es un álgebra de Boole y $X \subseteq B$, entonces se satisfacen

(i) $F(X) = \{y \in B : \text{existen } x_1, x_2, ..., x_n \in X \text{ tales que } \inf\{x_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \leqslant y\}$.

(ii) Si $z \wedge t \in X$ para cada $z, t \in X$, entonces $F(X) = \{y \in B : \text{existe } x \in X \text{ tales que } x \leqslant y\}$.

($\mathrm{F_m}$4) Sea $\langle B, \exists\rangle$ un álgebra de Boole monádica, si $X \subseteq \exists(B)$ entonces $F(X)$ es un $\forall$-filtro.

($\mathrm{F_m}$5) Sean $\langle B, \exists\rangle$ un álgebra de Boole monádica y $a \in B$, el filtro principal $F(a)$ es $\forall$-filtro si, y sólo si, $a \in \exists(B)$.

**Dem.** Supongamos que $F(a)$ es un $\forall$-filtro. Como $\forall a \in F(a)$, resulta que $a \leqslant \forall a$, y por lo tanto $a \in \exists(B)$. Recíprocamente, sea $x \in F(a)$ entonces $\forall a \leqslant \forall x$. De donde, por la hipótesis, resulta que $\forall x \in F(a)$, concluimos así que $F(a)$ es un $\forall$-filtro. $\square$

($\mathrm{F_m}$6) Sea $\langle B, \exists\rangle$ un álgebra de Boole monádica, $F_\forall(X) = F(\forall(X))$ para todo $X \subseteq B$.

($\mathrm{F_m}$7) Sean $B \in \mathbf{Df_1}$ y $S$ una subálgebra monádica de $B$. Se satisfacen las siguientes propiedades:

(i) Si $H$ es un $\forall$-filtro de $S$, entonces existe un $\forall$-filtro $H_1$ de $B$, tal que $H = H_1 \cap S$.

(ii) Si $H$ es un $\forall$-filtro de $B$, entonces $H \cap S$ es un $\forall$-filtro de $S$.

**Dem.**

(i): Sea $H \subseteq S$ un $\forall$-filtro de $S$ y sea $x \in F_\forall(H) \cap S$. Como por ($\mathrm{F_m}$6) $F_\forall(H) = F(\forall(H))$, resulta que existen $x_1, x_2, ..., x_n \in \forall(H)$ tal que $\inf\{x_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \leqslant x$. Luego por ($\mathrm{F_m}$1) tenemos que $\inf\{x_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \in H$ y, por consiguiente, $x \in H$. Por lo tanto $F_\forall(H) \cap S \subseteq H$. Esta afirmación nos permite concluir que $H = F_\forall(H) \cap S$.

(ii): Es consecuencia directa del hecho que $H$ es $\forall$-filtro de $B$ y $S$ es subálgebra monádica de $B$. $\square$

**Relación entre los $\forall$-filtros de $B$ y los filtros de $\exists(B)$.**

Sea $B \in \mathbf{Df_1}$, designamos con $\mathcal{F}(B)$ a la familia de los filtros del álgebra de Boole $B$, $\mathcal{F}_m(B)$ la familia de los $\forall$-filtros de $B$, y con $\mathcal{F}(\exists(B))$ a la familia de los filtros de $\exists(B)$.

($\mathrm{F_m}$8) Si $B \in \mathbf{Df_1}$ y $H \in \mathcal{F}_m(B)$, entonces

(i) $\forall(H) = H \cap \exists(B)$ y $\forall(H) \in \mathcal{F}_m(\exists(B))$,

(ii) $H = F(\forall(H))$.

De ($\mathrm{F_m}2$) y ($\mathrm{F_m}8$) resulta,

($\mathrm{F_m}9$) Si $B \in \mathbf{Df_1}$ y $H \in \mathcal{F}_m(B)$, entonces $H \cap \exists(B) = \exists(H)$.

($\mathrm{F_m}10$) Si $B \in \mathbf{Df_1}$ y $H \in \mathcal{F}(\exists(B))$, entonces

(i) $F(H) \in \mathcal{F}_m(B)$,

(ii) $H = F(H) \cap \exists(B)$.

($\mathrm{F_m}11$) Sea $B \in \mathbf{Df_1}$ y $H \in \mathcal{F}(B)$. Entonces $H \in \mathcal{F}_m(B)$ si, y sólo si, $H = F(H \cap \exists(B))$.

**Dem.**

$(\Rightarrow)$ : Es inmediato de ($\mathrm{F_m}8$).

$(\Leftarrow)$ : De la hipótesis y ($\mathrm{F_m}8$) resulta que $H \cap \exists(B) \in \mathcal{F}(\exists(B))$. De lo cual, por ($\mathrm{F_m}10$), se sigue que $F(H \cap \exists(B)) \in \mathcal{F}_m(B)$. De esta afirmación y la hipótesis resulta que $H \in \mathcal{F}_m(B)$ $\square$

En virtud de los resultados establecidos anteriormente resulta que,

($\mathrm{F_m}12$) Para cualquier $B \in \mathbf{Df_1}$, la función $\varphi : \mathcal{F}_m(B) \longrightarrow \mathcal{F}(\exists(B))$ definida por $\varphi(F) = F \cap \exists(B)$ es un isomorfismo de orden, donde los conjuntos $\mathcal{F}_m(B)$ y $\mathcal{F}(\exists(B))$ se ordenan por la relación de inclusión.

**Filtros ultramonádicos**

Comenzamos definiendo la noción de ultrafiltro en las álgebras de Boole.

Sea $B$ un álgebra de Boole, $U \subseteq B$ es un *ultrafiltro de* $B$ si $U$ es un filtro ligado a 0, esto es, si $U$ es maximal en la familia de filtros que no contienen a 0.

($\mathrm{U_f}1$) Sean $B$ un álgebra de Boole y $U \subseteq B$. Las siguientes condiciones son equivalentes,

(i) $U$ es ultrafiltro,

(ii) $U$ es filtro maximal.

($\mathrm{U_f}2$) Sean $B \in \mathbf{B}, U \subseteq B$ un filtro propio de $B$. Entonces $U$ es ultrafiltro si, y sólo si, para todo $a \in B, a \in U$ o $-a \in U$.

($\mathrm{U_f}3$) En un álgebra de Boole $B \in \mathbf{B}$, los filtros primos, irreducibles, completamente irreducibles y ultrafiltros coinciden.

Algunas de las propiedades y definiciones que enunciamos a continuación se encuentran en [30].

Sea $\mathcal{F}_{mp}(B)$ el conjunto de todos los $\forall$-filtros propios de un álgebra de Boole monádica no trivial $B$. Teniendo en cuenta que el conjunto ordenado $(\mathcal{F}_{mp}(B), \subseteq)$ es inductivo superiormente, podemos definir:

($\mathrm{F_{um}}1$) Un filtro propio de $B \in \mathbf{Df_1}$ es *un filtro ultramonádico* de $B$ si es un elemento maximal de $\mathcal{F}_{mp}(B)$.

**Propiedades**

A continuación se enuncian algunas de las propiedades de los filtros ultramonádicos y se incluye la demostración de dos de estas propiedades.

($\mathrm{F_{um}}2$) Todo $\forall$-filtro propio está contenido en un filtro ultramonádico.

($\mathrm{F_{um}}3$) Si $M$ es un filtro ultramonádico de un álgebra de Boole monádica $B$, entonces $M = F(\exists(M))$.

($\mathrm{F_{um}}4$) Si $U$ es un ultrafiltro del álgebra de Boole monádica $B$, entonces $F(\exists(U))$ es el único filtro ultramonádico tal que $F(\exists(U)) \subseteq U$.

Teniendo en cuenta el isomorfismo $\varphi$ definido en ($\mathrm{F_m}12$) resulta que los filtros ultramonádicos de $B$ se corresponden con los ultrafiltros de $\exists(B)$, esto es,

($\mathrm{F_{um}}5$) Sea $B \in \mathbf{Df_1}, M \in \mathcal{F}_m(B)$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $M$ es filtro ultramonádico de $B$,

(ii) $\forall(M)$ es ultrafiltro de $\exists(B)$.

($\mathrm{F_{um}}6$) Sea $B \in \mathbf{Df_1}, M \in \mathcal{F}_m(B)$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $M$ es filtro ultramonádico de $B$,

(ii) Si $a \notin M$ existe $m \in M$ tal que $\forall a \wedge m = 0$,

(iii) Si $\forall a \vee b \in M$, entonces $a \in M$ o $b \in M$,

(iv) Si $a \notin M$, entonces $-\forall a \in M$.

($\mathrm{F_{um}}7$) Sea $B \in \mathbf{Df_1}$ y $F \in \mathcal{F}_m(B)$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $F$ es filtro ultramonádico de $B$,

(ii) Para todo $a \in B, \forall a \in F$ o $-\forall a \in F$.

**Dem.**

(i)$\Rightarrow$(ii): Sea $a \in B$, entonces $a \in F$ o $a \notin F$. Si $a \in F$, entonces, como $F \in \mathcal{F}_m(B)$, $\forall a \in F$. Si $a \notin F$, entonces por ($\mathrm{F_{um}}6$) resulta que $-\forall a \in F$.

(ii)$\Rightarrow$(i): Sea (1) $a \notin F$, entonces por (ii) resulta que $\forall a \in F$ o $-\forall a \in F$. Supongamos que $\forall a \in F$, como $\forall a \leqslant a$, tenemos que $a \in F$ lo que contradice (1), luego $-\forall a \in F$ y concluimos que $F$ es filtro ultramonádico de $B$. □

($\mathrm{F_{um}}8$) Sea $B \in \mathbf{Df_1}$ y sea $F \in \mathcal{F}_m(B)$ tal que para cada $a \notin F, -\exists a \in F$. Entonces $F$ es un filtro ultramonádico de $B$.

**Dem.** Sea $a \in B$ tal que $a \notin F$, entonces por la hipótesis $-\exists a \in F$. De esta afirmación, como $-\exists a \leqslant -a \leqslant -\forall a$, tenemos que $-\forall a \in F$. Luego, de ($\mathrm{F_{um}}7$) concluimos que $F$ es filtro ultramonádico de $B$.

□

### 1.2.5. $\mathbf{Df_1}$-congruencias

En las álgebras de Boole monádicas los $\forall$-filtros determinan las congruencias, en lo que sigue describimos el isomorfismo entre el retículo $\mathcal{F}_m(B)$ de los $\forall$-filtros de $B$, y el retículo $Con_{\mathbf{Df_1}}(B)$ de las congruencias de un álgebra de Boole monádica $B$.

Sea $B \in \mathbf{Df_1}$, para cada $F \in \mathcal{F}_m(B)$ consideremos

$$R(F) = \{(x, y) \in B \times B : \text{ existe } f \in F \text{ tal que } x \wedge f = y \wedge f\}.$$

En el caso particular del filtro principal generado por $a \in B$, $F(a)$, es claro que $R(F(a)) = \{(x, y) : x \wedge a = y \wedge a\}$.

Luego se satisfacen las siguientes propiedades:

($\mathrm{C_m}1$) Sea $B \in \mathbf{Df_1}$

(i) Si $F \in \mathcal{F}_m(B)$, entonces $R(F)$ es una $\mathbf{Df_1}$-congruencia sobre $B$ y $[1]_{R(F)} = F$.

(ii) Si $\Theta \in Con_{\mathbf{Df_1}}(B)$, entonces $[1]_\Theta \in \mathcal{F}_m(B)$ y $R([1]_\Theta) = \Theta$.

(iii) Los retículos $Con_{\mathbf{Df_1}}(B)$ y $\mathcal{F}_m(B)$ son isomorfos considerando las funciones $\Theta \mapsto [1]_\Theta$ y $F \mapsto R(F)$, que son inversas una de la otra.

($\mathrm{C_m}$2) Sean $A, B \in \mathbf{Df_1}$ y sea $h : A \longrightarrow B$ un homomorfismo monádico, el núcleo $N(h) = \{x \in A : h(x) = 1\}$, satisface las siguientes propiedades:

(i) $N(h) \in \mathcal{F}_m(A)$,

(ii) $(x, y) \in R(N(h))$ si, y sólo si, $h(x) = h(y)$,

(iii) $h(A)$ es subálgebra de $B$ y si $h$ es sobreyectiva, el álgebra cociente $A/N(h)$ es isomorfa a $B$.

Con respecto a las álgebras de Boole monádicas simples podemos afirmar que

($\mathrm{C_m}$3) Un álgebra de Boole monádica con más de un elemento es simple si, y sólo si, el cuantificador es simple.

## 1.3. $\mathbf{Df_2}$-álgebras

Las álgebras de Boole monádicas se generalizaron considerando álgebras de Boole con un número arbitrario de cuantificadores definidos sobre ellas, con la propiedad adicional de que cada par de estos cuantificadores, conmute. En [14] A. Diego y R. Panzone, al estudiar algunos problemas relacionados con la teoría de probabilidades, consideran álgebras de Boole con dos cuantificadores que conmutan. Ellos introducen las álgebras de Boole biádicas como ternas $\langle B, \nabla_1, \nabla_2\rangle$ donde $B$ es un álgebra de Boole y $\nabla_1, \nabla_2$ son dos cuantificadores que satisfacen la propiedad adicional: $\nabla_1\nabla_2 x = \nabla_2\nabla_1 x$, para todo $x \in B$. Estas álgebras se encuadran dentro de la teoría de las álgebras cilíndricas introducidas por A. Tarski, L. Chin y F. Thompson ([26]) con el objetivo de obtener una herramienta adecuada para el estudio algebraico del cálculo de predicados de primer orden, más precisamente, las álgebras de Boole biádicas son álgebras cilíndricas libres de elementos diagonales de dimensión dos o $\mathbf{Df_2}$-álgebras. Un estudio detallado de estas álgebras puede verse en [26]. Algunos problemas inherentes a las $\mathbf{Df_2}$-álgebras han sido abordados por N. Bezhanishvili ([5],[6],[7]) y, el caso particular, de las $\mathbf{Df_2}$-álgebras finitas ha sido estudiado por M. Figallo y C. M. Gomes ([18],[19],[20]). También podemos mencionar que en el marco de la teoría de las álgebras cilíndricas, las álgebras de Boole monádicas son álgebras cilíndricas libres de elementos diagonales de dimensión uno.

En esta sección, presentamos algunos conceptos básicos sobre estas álgebras. Comenzamos recordando en forma precisa la definición de una $\mathbf{Df}_2$-álgebra ([6], [18]).

Una $\mathbf{Df}_2$-*álgebra* es una terna $\langle B, \exists_1, \exists_2 \rangle$, donde $B$ es un álgebra de Boole y $\exists_1$, $\exists_2$ son cuantificadores definidos sobre $B$ que conmutan, esto es, $\exists_1$, $\exists_2$ son operadores unarios definidos sobre $B$ que verifican las condiciones siguientes:

(i) $\exists_i 0 = 0$,

(ii) $x \leqslant \exists_i x$,

(iii) $\exists_i(x \wedge \exists_i y) = \exists_i x \wedge \exists_i y$,

(iv) $\exists_i \exists_j x = \exists_j \exists_i x$,

para $1 \leqslant i, j \leqslant 2$, $i \neq j$.

Siguiendo la notación introducida por L. Henkin, D. Monk y A. Tarski se denota con $\mathbf{Df}_2$ a la variedad de estas álgebras.

En lo que sigue citamos algunos resultados sobre las $\mathbf{Df}_2$-álgebras que son fundamentales para este trabajo. Los mismos pueden ampliarse en [26], [6] y [18] y en las referencias que estos autores citan.

Sean $\langle B, \exists_1, \exists_2 \rangle \in \mathbf{Df_2}$, $S_1 = \exists_1(B)$, $S_2 = \exists_2(B)$ y $S_0 = S_1 \cap S_2$. Entonces,

Un ideal $I \subseteq B$ es un $\mathbf{Df_2}$-*ideal* si $a \in I$ implica que $\exists_1 a \in I$ y $\exists_2 a \in I$.

($\mathrm{Df}_2 1$) $S_0 = \exists_1 \exists_2(B) = \{a \in B : a = \exists_1 a = \exists_2 a\}$ es una subálgebra relativamente completa de $B$. Si denotamos con $\exists_0 = \exists_1 \exists_2$, entonces $\langle B, \exists_0 \rangle \in \mathbf{Df_1}$.

($\mathrm{Df}_2 2$) El retículo de las congruencias de $\langle B, \exists_1, \exists_2 \rangle$ es isomorfo al retículo de $\mathbf{Df_2}$-ideales de $\langle B, \exists_1, \exists_2 \rangle$, y al retículo de ideales de $S_0$.

($\mathrm{Df}_2 3$) Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $\langle B, \exists_1, \exists_2 \rangle$ es subdirectamente irreducible,

(ii) $\langle B, \exists_1, \exists_2 \rangle$ es simple,

(iii) $S_0 = \mathbf{2}$ siendo $\mathbf{2}$ el álgebra de Boole con dos elementos.

En referencia a las álgebras finitas podemos mencionar lo siguiente:

($\mathrm{Df}_2 4$) Cada cuantificador $\exists_i$ definido sobre $B_n$ induce una partición $\mathcal{P}_{\exists_i}$ en el conjunto $\Pi(B_n)$.

Si $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son dos particiones de $\Pi(B_n)$, para $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$, para cada $C \in \mathcal{P}_i$, el *$m_j$-saturado de $C$*, denotado $m_j(C)$, es el menor subconjunto de $\mathcal{P}_j$ (en el sentido de la inclusión) que verifica $C \subseteq \bigcup\limits_{D \in m_j(C)} D$.

Decimos que $\mathcal{P}_2$ *es un refinamiento de* $\mathcal{P}_1$ y escribimos $\mathcal{P}_2 \succ \mathcal{P}_1$ si para cada $C \in \mathcal{P}_1$ existe $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}_1$ tal que $\bigcup\limits_{G \in m_2(C)} G = \bigcup\limits_{F \in \mathcal{U}} F$.

Se puede demostrar que el conjunto $\mathcal{U}$ al que se hace referencia es único. En adelante, denotamos a este conjunto como $\mathcal{U}_C$.

Con $\mathcal{P}_1 \approx \mathcal{P}_2$ indicamos que cada partición es un refinamiento de la otra.

Luego, podemos afirmar que

(Df$_2$5) Sean $\exists_1$ y $\exists_2$ dos cuantificadores sobre $B_n$ y las particiones del conjunto $\Pi(B_n)$, $\mathcal{P}_{\exists_1}$ $\mathcal{P}_{\exists_2}$, inducidas por $\exists_1$ y $\exists_2$, respectivamente. Entonces $\langle B_n, \exists_1, \exists_2 \rangle \in \mathbf{Df_2}$ si, y sólo si, $\mathcal{P}_{\exists_1} \approx \mathcal{P}_{\exists_2}$.

## 1.4. $\mathbf{T_k}$-álgebras

Abordamos en esta sección el estudio de las $\mathbf{T_k}$-álgebras. En particular, las $\mathbf{T_2}$-álgebras o álgebras boolenas simétricas fueron introducidas por G. Moisil con el objetivo de estudiar los circuitos selectores ([31]), y las álgebras de Boole cíclicas fueron estudiadas por A. Monteiro ([28], [29]) y por A. V. Figallo ([15]).

Comenzamos dando algunas definiciones básicas.

Sean $B$ un álgebra de Boole, $T : B \longrightarrow B$ un homomorfismo booleano, $x \in B$ y $k$ un entero positivo, $T^k(x)$ se define inductivamente como

$$T^1(x) = T(x),$$
$$T^2(x) = T(T(x)),$$
$$\vdots$$
$$T^k(x) = T^{k-1}(T(x)), k \geqslant 2.$$

Si $k$ es el menor natural tal que $T^k(x) = x$ para todo $x \in B$, entonces $T$ es de período $k$.

Sea $k$ un entero positivo, una $\mathbf{T_k}$-*álgebra* es un álgebra $\langle B, \wedge, \vee, -, T, 0, 1 \rangle$ de tipo

$(2,2,1,1,0,0)$ tal que el reducto $\langle B, \wedge, \vee, -, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Boole y $T : B \longrightarrow B$ es un automorfismo booleano de $B$ de período $k$.

Con $\mathbf{B_{T_k}}$ designamos a la variedad de las $\mathbf{T_k}$-álgebras.

También llamamos álgebras de Boole $k$-cíclica o $k$-periódica a las $\mathbf{T_k}$-álgebras.

Sea $\langle B, T\rangle$ una $\mathbf{T_k}$-álgebra, si $k_1$ es el menor natural tal que $T^{k_1}(x) = x$, para algún $x \in B$ entonces $k_1$ divide a $k$.

Luego, se verifican las siguientes propiedades:

($\mathrm{T_k}$1) Sea $\langle B, T\rangle$ una $\mathbf{T_k}$-álgebra, entonces se satisface

(i) Si $a \in \Pi(B)$, entonces $T(a) \in \Pi(B)$.

(ii) Si $h = T_{|_{\Pi(B)}}$, entonces $h$ es una biyección.

Sea $\langle B, T\rangle$ una $\mathbf{T_k}$-álgebra, $b \in B$ es un elemento invariante de $B$ si $T(b) = b$.

Con $I(B)$ se denota al conjunto de los elementos invariantes de $B$ con respecto al automorfismo $T$, esto es, $I(B) = \{x \in B : T(x) = x\}$.

Es de rutina demostrar que:

($\mathrm{T_k}$2) Si $\langle B, T\rangle$ es una $\mathbf{T_k}$-álgebra, entonces $I(B)$ es una subálgebra booleana de B.

### 1.4.1. $\mathbf{T_k}$-subálgebras

Es fácil probar que:

($\mathrm{T_k}$3) Sea $\langle B, T\rangle$ una $\mathbf{T_k}$-álgebra, $S \subseteq B$ es una $\mathbf{T_k}$-subálgebra de $B$ si, y sólo si, se satisfacen:

(i) Si $x, y \in S$, entonces $x \wedge y \in S$.

(ii) Si $x \in S$, entonces $-x \in S$.

(iii) Si $x \in S$, entonces $T(x) \in S$.

Aplicando las técnicas habituales es sencillo demostrar la propiedad siguiente:

($\mathrm{T_k}$4) Sean $\langle B, T\rangle \in \mathbf{B_{T_k}}$ y $\{a_j\}_{j\in I} \subseteq B$. Si existe $\inf\limits_{j\in I} a_j$, entonces existe $\inf\limits_{j\in I} T(a_j)$ y $T\Big(\inf\limits_{j\in I} a_j\Big) = \inf\limits_{j\in I} T(a_j)$.

($\mathrm{T_k}5$) Si $\langle B, T\rangle$ es una $\mathbf{T_k}$-álgebra y $S \subseteq B$ es una subálgebra relativamente completa de $B$, entonces $T(S)$ es una subálgebra relativamente completa de $B$.

**Dem.** Sean $S \subseteq B$ una subálgebra relativamente completa de $B$ y $b \in T(S)$, entonces existe $a \in S, T(a) = b$. Como $T$ es un automorfismo resulta que $s(b) = \{y \in T(S) : b \leqslant y\} = T(s(a))$. Por otro lado, por ($\mathrm{T_k}4$), $\text{ínf}\, T(s(a)) = T(\text{ínf}\, s(a))$. Luego $\text{ínf}\, s(b) = T(\text{ínf}\, s(a))$. De esta afirmación, como $\text{ínf}\, s(a) \in S$, resulta que $\text{ínf}\, s(b) \in T(S)$. Concluimos así que $T(S)$ es subálgebra relativamente completa de $B$. □

### 1.4.2. $\mathbf{T_k}$-filtros

En esta sección estudiamos una clase de conjuntos que permite caracterizar a las congruencias de una $\mathbf{T_k}$-álgebra.

Sean $B \in \mathbf{B_{T_k}}$, un filtro $F$ de $B$ es un $\mathbf{T_k}$-*filtro* si $T(F) \subseteq F$.

Con $\mathcal{F}_{T_k}(B)$ se designa la familia de los $\mathbf{T_k}$-filtros de una $\mathbf{T_k}$-álgebra $B$ y con $FT_k(X)$ al $\mathbf{T_k}$-filtro generado por $X$.

($\mathrm{T_k}6$) Sean $B \in \mathbf{B_{T_k}}$ y $X \subseteq B$ tal que $T(X) \subseteq X$, entonces $F(X)$ es un $\mathbf{T_k}$-filtro.

**Dem.** Sea $X \subseteq B$ tal que $T(X) \subseteq X$ y sea $y \in F(X)$, entonces por ($\mathrm{F_m}3$), (1) existen $x_1, ..., x_n \in X$ tal que $\text{ínf}\{x_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \leqslant y$. Luego, de la hipótesis y (1) resulta que $T(x_i) \in X$ para $i = 1, ..., n$ y $\text{ínf}\{T(x_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\} \leqslant T(y)$, de lo cual obtenemos que $T(y) \in F(X)$. En consecuencia, $F(X)$ es un $\mathbf{T_k}$-filtro. □

($\mathrm{T_k}7$) Sea $B \in \mathbf{B_{T_k}}$ y $X \subseteq B$. Si $T(X) \subseteq X$, entonces $FT_k(X) = F(X)$.

**Dem.** De la hipótesis y ($\mathrm{T_k}6$), tenemos que $F(X)$ es un $\mathbf{T_k}$-filtro, y como $X \subseteq F(X)$ resulta que $FT_k(X) \subseteq F(X)$. La otra inclusión es consecuencia del hecho que $X \subseteq FT_k(X)$. □

($\mathrm{T_k}8$) Si $B$ es una $\mathbf{T_k}$-álgebra y $S \subseteq B$ es una $\mathbf{T_k}$-subálgebra de $B$, entonces

(i) Si $H$ es un $\mathbf{T_k}$-filtro de $S$, entonces existe un $\mathbf{T_k}$-filtro de $B$, $H_1$, tal que $H = H_1 \cap S$.

(ii) Si $H$ es un $\mathbf{T_k}$-filtro de $B$, entonces $H \cap S$ es un $\mathbf{T_k}$-filtro de $S$.

**Dem.**

(i): Sea $H \subseteq S$ un $\mathbf{T_k}$-filtro de $S$, entonces $H \subseteq FT_k(H) \cap S$. Además como $T(H) \subseteq H$, por $(\mathrm{T_k}7)$, $FT_k(H) = F(H)$. Sea $y \in F(H) \cap S$, entonces por $(\mathrm{F_m}3)$ existe $x \in H$ tal que $x \leqslant y$, por consiguiente $y \in H$, y así $FT_k(H) \cap S \subseteq H$ con lo cual queda demostrada la igualdad $H = FT_k(H) \cap S$.

(ii): Es una consecuencia inmediata del hecho que $H$ es un $\mathbf{T_k}$-filtro de $B$ y $S$ es una $\mathbf{T_k}$-subálgebra de $B$. □

$(\mathrm{T_k}9)$ Si $B \in \mathbf{B_{T_k}}$ y $X \in \mathcal{F}(I(B))$, entonces

(i) $F(X) \in \mathcal{F}_{T_k}(B)$,

(ii) $X = F(X) \cap I(B)$.

**Dem.**

(i): Como $X \in \mathcal{F}(I(B))$, entonces $T(X) \subseteq X$ y por $(\mathrm{T_k}6)$ resulta que $F(X) \in \mathcal{F}_{T_k}(B)$.

(ii): Es consecuencia inmediata de $(\mathrm{T_k}2)$ y $(\mathrm{T_k}8)$. □

$(\mathrm{T_k}10)$ Sean $B \in \mathbf{B_{T_k}}$ y $H \in \mathcal{F}_{T_k}(B)$. Se satisfacen las siguientes propiedades:

(i) $I(H) = H \cap I(B) \in \mathcal{F}(I(B))$,

(ii) $H = F(I(H))$.

**Dem.**

(i): Es rutina.

(ii): Como $I(H) \subseteq H$ y (1) $H \in \mathcal{F}_{T_k}(B)$, resulta que $F(I(H)) \subseteq H$. Sea $x \in H$, entonces, de (1), tenemos que $y = x \wedge T(x) \wedge ... \wedge T^{k-1}(x) \in H \cap I(B) = I(H)$. Además, $y \leqslant x$ por lo que $x \in F(I(H))$. Así, $H \subseteq F(I(H))$. □

De $(\mathrm{T_k}9)$ y $(\mathrm{T_k}10)$ es inmediato que:

$(\mathrm{T_k}11)$ Sea $B \in \mathbf{B_{T_k}}$ y sea $H \subseteq B$ un filtro. Entonces $H \in \mathcal{F}_{T_k}(B)$ si, y sólo si, $H = F(H \cap I(B))$.

De lo expuesto resulta,

($\mathrm{T_k}12$) Para cualquier $B \in \mathbf{B_{T_k}}$, la función $\varphi : \mathcal{F}_{T_k}(B) \longrightarrow \mathcal{F}(I(B))$ definida por $\varphi(F) = F \cap I(B)$ es un isomorfismo de orden, donde $\mathcal{F}_{T_k}(B)$ y $\mathcal{F}(I(B))$ están ordenados por la relación de inclusión.

**Dem.** Como consecuencia de que $I(B)$ es una subálgebra booleana de $B$ resulta que $\varphi$ es función. Es claro que de ($\mathrm{T_k}9$) se sigue que $\varphi$ es sobreyectiva. Por otro lado, sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{T_k}(B)$ tales que (1) $\varphi(F_1) \subseteq \varphi(F_2)$ y sea $x \in F_1$, entonces $y = x \wedge T(x) \wedge ... \wedge T^{k-1}(x) \in \varphi(F_1)$. De donde por (1) resulta que $y \in \varphi(F_2)$, lo que implica que $y \in F_2$ y, por consiguiente, $x \in F_2$. De este modo $F_1 \subseteq F_2$. Luego, $F_1 \subseteq F_2$ si, y sólo si, $\varphi(F_1) \subseteq \varphi_1(F_2)$. Concluimos así que $\varphi$ es isomorfismo de orden. $\square$

($\mathrm{T_k}13$) Si $\langle B, T \rangle$ es una $\mathbf{T_k}$-álgebra y $a \in B$, entonces $T(F(a)) = F(T(a))$.

**Dem.** Sea $y \in T(F(a))$, entonces existe $x \in F(a)$ tal que $T(x) = y$, de lo cual resulta que $T(a) \leqslant y$ y así $T(F(a)) \subseteq F(T(a))$. Recíprocamente, sea $y \in F(T(a))$ entonces $a = T^k(a) \leqslant T^{k-1}(y)$. De donde se sigue que $T^{k-1}(y) \in F(a)$, y así $y \in T(F(a))$. En consecuencia, $F(T(a)) \subseteq T(F(a))$. $\square$

($\mathrm{T_k}14$) Sean $B \in \mathbf{B_{T_k}}$ y $a \in B, F(a)$ es un $\mathbf{T_k}$-filtro si, y sólo si, $a \leqslant T(a)$.

**Dem.**

$(\Rightarrow)$ : Como $F(a)$ es un $\mathbf{T_k}$-filtro, entonces $T(a) \in F(a)$ y, por lo tanto, $a \leqslant T(a)$.

$(\Leftarrow)$ : Sea $x \in F(a)$ entonces, como $a \leqslant T(a)$, resulta que $a \leqslant T(x)$ y así $F(a)$ es un $\mathbf{T_k}$-filtro. $\square$

($\mathrm{T_k}15$) Sean $B \in \mathbf{B_{T_k}}$ y $a \in B, F(a)$ es un $\mathbf{T_k}$-filtro si, y sólo si, $a \in I(B)$.

**Dem.**

$(\Leftarrow)$ : Inmediato de ($\mathrm{T_k}14$).

$(\Rightarrow)$ : Como $F(a)$ es un $\mathbf{T_k}$-filtro, tenemos que $a \leqslant T(a)$ y $T^{k-1}(a) \in F(a)$. De donde resulta que $T(a) \leqslant a$. Por lo tanto, $a \in I(B)$. $\square$

### 1.4.3. Propiedades de los filtros primos

Es de rutina demostrar las propiedades siguientes:

(T$_k$16) Si $\langle B,T\rangle$ es una $\mathbf{T_k}$-álgebra y $P \subseteq B$ es un filtro primo de $B$, entonces $T(P)$ y $T^{-1}(P)$ son filtros primos de $B$.

(T$_k$17) Si $\langle B,T\rangle$ es una $\mathbf{T_k}$-álgebra y $P \subseteq B$ es un filtro primo de $B$, entonces $T^{k_1}(P)$ es un filtro primo de $B$ para todo $k_1 \leqslant k$ y $T^k(P) = P$.

(T$_k$18) Si $\langle B,T\rangle$ es una $\mathbf{T_k}$-álgebra y $P \subseteq B$ es un filtro primo de $B$, entonces $P' = P \cap I(B)$ es un filtro primo de $I(B)$.

### 1.4.4. T$_k$-congruencias

Así como los $\forall$-filtros determinan las congruencias en las álgebras de Boole monádicas, los $\mathbf{T_k}$-filtros las determinan en las $\mathbf{T_k}$-álgebras tal como se describe a continuación.

(C$_{T_k1}$) Sea $B \in \mathbf{B_{T_k}}$, se satisfacen las siguientes propiedades:

(i) Sea $F \in \mathcal{F}_{T_k}(B)$, entonces la relación $R(F)$ definida en la Sección 1.2.5 es una $\mathbf{T_k}$-congruencia sobre $B$ y $[1]_{R(F)} = F$.

(ii) Si $\Theta \in Con_{\mathbf{B_{T_k}}}(B)$, entonces $[1]_\Theta \in \mathcal{F}_{T_k}(B)$ y $R([1]_\Theta) = \Theta$.

**Dem.**

(i): Sea $F \subseteq B$ un $\mathbf{T_k}$-filtro, es claro que $R(F) \in Con_{\mathbf{B}}(B)$. Sea $(x,y) \in R(F)$, entonces existe $f \in F, x \wedge f = y \wedge f$. De lo cual resulta que $T(x) \wedge T(f) = T(y) \wedge T(f)$, y como $T(f) \in F$, obtenemos que $(T(x), T(y)) \in R(F)$. Luego, $R(F) \in Con_{\mathbf{B_{T_k}}}(A)$. Es rutina probar que $[1]_{R(F)} = F$.

(ii): De la hipótesis resulta que $\Theta \in Con_{\mathbf{B}}(B)$, de donde se sigue que $[1]_\Theta$ es un filtro. Sea $x \in [1]_\Theta$ entonces, como $\Theta \in Con_{\mathbf{B_{T_k}}}(B)$, tenemos que $(T(x), T(1)) = (T(x), 1) \in \Theta$ y por lo tanto, $T(x) \in [1]_\Theta$. De este modo, $[1]_\Theta$ es un $\mathbf{T_k}$-filtro. Es rutina probar que $\Theta = R([1]_\Theta)$. $\square$

Por lo expuesto, podemos establecer

(C$_{T_k2}$) Si $B$ es una $\mathbf{T_k}$-álgebra, entonces los retículos $Con_{\mathbf{B_{T_k}}}(B)$ y $\mathcal{F}_{T_k}(B)$ son isomorfos considerando las funciones $\Theta \mapsto [1]_\Theta$ y $F \mapsto R(F)$, que son inversas una de la otra.

### 1.4.5. Una relación muy especial

En una $\mathbf{T_k}$-álgebra $B$, el automorfismo $T$ permite definir una relación de equivalencia, $\equiv_T \subseteq B \times B$, como se describe a continuación.

*Sea $\langle B, T\rangle$ una $\mathbf{T_k}$-álgebra. Decimos que $x \equiv_T y$ si existe un entero positivo $k_1 \leqslant k$ tal que $T^{k_1}(x) = y$.*

($\mathrm{T_k}$19) Se satisfacen las siguientes propiedades:

(i) $\equiv_T$ es una relación de equivalencia sobre $B$ compatible con $T$.

(ii) En [15], A. V. Figallo muestra que la partición del conjunto de átomos de $B_n$ inducida por $T$ es, a saber, $\mathcal{P}(\Pi(B_n)) = \left\{C_{a_1}, C_{a_2}, ..., C_{a_p}\right\}$ siendo $C_{a_{i_t}} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_t}\}$, $T(a_{i_j}) = a_{i_{j+1}}$ para todo $j = 1, ..., t-1$, $T(a_{i_t}) = a_{i_1}$. Esto es, $x, y \in C_{a_{i_t}}$ si, y sólo si, existe $i < k$, $T^i(x) = y$.

Si $x \in B$, entonces la clase de equivalencia de $x$ es el conjunto $[x]_{\equiv_T} = \left\{x, T(x), T^2(x), ..., T^{k_1-1}(x)\right\}$, $T^{k_1}(x) = x,\ k_1 \leqslant k$.

Indicamos con $\mathcal{P}_T$ la partición $\mathcal{P}$ inducida en el conjunto de átomos $\Pi(B_n)$ por el automorfismo $T$.

($\mathrm{T_k}$20) Sea $\langle B_n, T\rangle$ una $\mathbf{T_k}$-álgebra finita y sean $a, b \in \Pi(B_n)$, entonces $a \equiv_T b$ si, y sólo si, $F(a) \cap I(B_n) = F(b) \cap I(B_n)$.

**Dem.**

$(\Rightarrow)$ : Sean $a, b \in \Pi(B_n)$ tales que $a \equiv_T b$ y sea $x \in F(a) \cap I(B_n)$, entonces $b = T^{k_1}(a)$ para algún $k_1 \leqslant k$, $a \leqslant x$ y $T(x) = x$. Así $T^{k_1}(a) \leqslant T^{k_1}(x) = x$ y, por lo tanto, $x \in F(b) \cap I(B_n)$. En consecuencia, $F(a) \cap I(B_n) \subseteq F(b) \cap I(B_n)$. En forma análoga se demuestra que $F(b) \cap I(B_n) \subseteq F(a) \cap I(B_n)$.

$(\Leftarrow)$ : Sean $a, b \in \Pi(B_n)$ tales que (1) $F(a) \cap I(B_n) = F(b) \cap I(B_n)$. En el caso que $T$ sea la función identidad, esto es, $T = id$, $F(a) = F(b)$ y, por consiguiente, $a \equiv_T b$. Supongamos ahora que $T \neq id$ y que $(a, b) \notin \equiv_T$. Por ($\mathrm{T_k}$19) tenemos que (2) $[a]_{\equiv_T} = \left\{a, T(a), T^2(a), ..., T^{k_1-1}(a)\right\}, k_1 \leqslant k, T^{k_1}(a) = a$. Sea $x = a \vee T(a) \vee T^2(a) \vee ... \vee T^{k_1-1}(a)$, con $a, T(a), T^2(a), ..., T^{k_1-1}(a) \in \Pi(B_n)$, entonces por (2) $T(x) = T(a) \vee T^2(a) \vee T^3(a) \vee ... \vee T^{k_1}(a) = x$ y así $x \in F(a) \cap I(B_n)$ y $x \notin F(b) \cap I(B_n)$, lo que contradice (1). $\square$

# Capítulo 2

# $\mathrm{T_k}$m-álgebras

En este capítulo, introducimos la clase $\mathbf{B_{T_km}}$ de las álgebras de Boole monádicas con un automorfismo monádico de periodo $k$. Describimos algunas de sus propiedades y extendemos a esta clase de álgebras algunos de los resultados presentados en las secciones 2 y 4 del Capítulo 1.

## 2.1. Definición y propiedades

**Definición 2.1.1** *Una* $\mathbf{T_km}$*-álgebra es una terna* $\langle B, \exists, T\rangle$ *formada por un álgebra de Boole, un cuantificador existencial,* $\exists$*, definido sobre* $B$ *y un automorfismo booleano de período* $k$*,* $T$*, que conmuta con el cuantificador.*

Es decir, $\langle B, \exists, T\rangle$ es una $\mathbf{T_km}$-álgebra si verifica:

($\mathrm{T_k}$m1) $\langle B, \exists\rangle$ es un álgebra de Boole monádica,

($\mathrm{T_k}$m2) $\langle B, T\rangle$ es una $\mathbf{T_k}$-álgebra,

($\mathrm{T_k}$m3) $T(\exists x) = \exists T(x)$ para todo $x \in B$.

De la definición resulta que la clase de las $\mathbf{T_km}$-álgebras es una variedad que denotamos $\mathbf{B_{T_km}}$.

**Observación 2.1.2** *Una consecuencia inmediata de* ($\mathrm{T_k}$m3) *es que la relación de equivalencia* $R_\exists$ *definida en el conjunto de átomos de* $B_n$ *por la prescripción dada en* ($\mathrm{Df_1}$10)*, es compatible con el automorfismo* $T$*.*

En los ejemplos que siguen, mostramos las estructuras de $\mathbf{T_k m}$-álgebras que se pueden definir, salvo isomorfismo, en las álgebras de Boole $B_1, B_2, B_3$ y $B_4$.

### 2.1.1. Estructuras de $\mathbf{T_k m}$-álgebras sobre el álgebra de Boole $B_i, i = 1, ..., 4$.

1. En $B_1 = \{0, 1\}$ se puede definir, salvo isomorfismo, sólo una estructura de $\mathbf{T_k m}$-álgebra, a saber,

   $\langle B_1, \exists^{o}, T_1\rangle$ siendo $T_1$ la función identidad, es una $\mathbf{T_1 m}$-álgebra.

2. El álgebra de Boole $B_2 = \{0, a, b, 1\}$ admite, salvo isomorfismo, las siguientes estructuras de $\mathbf{T_k m}$-álgebras:

   $\langle B_2, \exists^{o}, T_1\rangle$, $\langle B_2, \exists^{1}, T_1\rangle$ son $\mathbf{T_1 m}$-álgebras,

   $\langle B_2, \exists^{o}, T_2\rangle$, $\langle B_2, \exists^{1}, T_2\rangle$ son $\mathbf{T_2 m}$-álgebras,

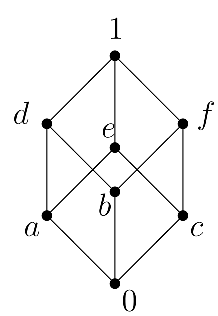
   donde $\exists^{o}$ y $\exists^{1}$ son los cuantificadores caótico y discreto, respectivamente, definidos en el Ejemplo 1.2.1 y los automorfismos están definidos por las tablas:

| $x$ | $T_1(x)$ |
|---|---|
| $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ |
| $b$ | $b$ |
| $1$ | $1$ |

,

| $x$ | $T_2(x)$ |
|---|---|
| $0$ | $0$ |
| $a$ | $b$ |
| $b$ | $a$ |
| $1$ | $1$ |

3. Sea $B_3 = \{0, a, b, c, d, e, f, 1\}$ el álgebra de Boole cuyo diagrama de Hasse es:




   Las estructuras de $\mathbf{T_k m}$-álgebras que admite $B_3$, salvo isomorfismo, son:

   $\langle B_3, \exists^{o}, T_1\rangle$, $\langle B_3, \exists^{1}, T_1\rangle$, $\langle B_3, \exists^{i}, T_1\rangle$ con $i = 2, 3, 4$, son $\mathbf{T_1 m}$-álgebras,

$\langle B_3, \exists^{\rm o}, T_2\rangle$, $\langle B_3, \exists^{1}, T_2\rangle$, $\langle B_3, \exists^{2}, T_2\rangle$ son $\mathbf{T_2m}$-álgebras,

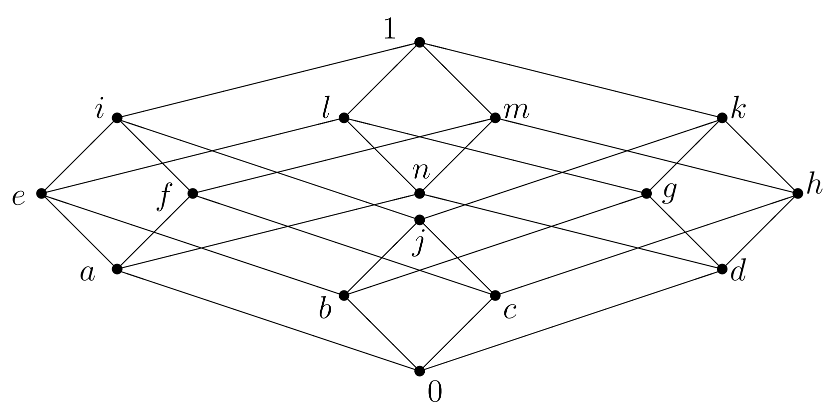
$\langle B_3, \exists^{\rm o}, T_3\rangle$, $\langle B_3, \exists^{1}, T_3\rangle$ son $\mathbf{T_3m}$-álgebras,

con cuantificadores y automorfismos detallados en las tablas siguientes:

| $x$ | $\exists^{\rm o}x$ | $\exists^1 x$ | $\exists^2 x$ | $\exists^3 x$ | $\exists^4 x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a$ | 1 | $a$ | $e$ | $a$ | $d$ |
| $b$ | 1 | $b$ | $b$ | $f$ | $d$ |
| $c$ | 1 | $c$ | $e$ | $f$ | $c$ |
| $d$ | 1 | $d$ | 1 | 1 | $d$ |
| $e$ | 1 | $e$ | $e$ | 1 | 1 |
| $f$ | 1 | $f$ | 1 | $f$ | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| $x$ | $T_1x$ | $T_2x$ | $T_3x$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a$ | $a$ | $c$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $a$ | $b$ |
| $d$ | $d$ | $f$ | $e$ |
| $e$ | $e$ | $e$ | $d$ |
| $f$ | $f$ | $d$ | $f$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

4. Sea $B_4 = \{0, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, 1\}$ el álgebra de Boole cuyo diagrama de Hasse es:




Los cuantificadores y automorfismos que se pueden definir en el álgebra Boole $B_4$ están consignados en las siguientes tablas:

| $x$ | $\exists^0$ | $\exists^1$ | $\exists^2$ | $\exists^3$ | $\exists^4$ | $\exists^5$ | $\exists^6$ | $\exists^7$ | $\exists^8$ | $\exists^9$ | $\exists^{10}$ | $\exists^{11}$ | $\exists^{12}$ | $\exists^{13}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a$ | 1 | $a$ | $a$ | $m$ | $l$ | $i$ | $e$ | $f$ | $a$ | $e$ | $n$ | $a$ | $a$ | $f$ |
| $b$ | 1 | $b$ | $k$ | $b$ | $l$ | $i$ | $e$ | $g$ | $b$ | $e$ | $b$ | $g$ | $j$ | $b$ |
| $c$ | 1 | $c$ | $k$ | $m$ | $c$ | $i$ | $h$ | $f$ | $h$ | $c$ | $c$ | $c$ | $j$ | $f$ |
| $d$ | 1 | $d$ | $k$ | $m$ | $l$ | $d$ | $h$ | $g$ | $h$ | $d$ | $n$ | $g$ | $d$ | $d$ |
| $e$ | 1 | $e$ | 1 | 1 | $l$ | $i$ | $e$ | 1 | $e$ | $e$ | $l$ | $l$ | $i$ | $i$ |
| $f$ | 1 | $f$ | 1 | $m$ | 1 | $i$ | 1 | $f$ | $m$ | $i$ | $m$ | $f$ | $i$ | $f$ |
| $g$ | 1 | $g$ | $k$ | 1 | $l$ | 1 | 1 | $g$ | $k$ | $l$ | $l$ | $g$ | $k$ | $g$ |
| $h$ | 1 | $h$ | $k$ | $m$ | 1 | 1 | $h$ | 1 | $h$ | $h$ | $m$ | $k$ | $k$ | $m$ |
| $i$ | 1 | $i$ | 1 | 1 | 1 | $i$ | 1 | 1 | 1 | $i$ | 1 | 1 | $i$ | $i$ |
| $j$ | 1 | $j$ | $k$ | 1 | 1 | $i$ | 1 | 1 | $k$ | $i$ | $j$ | $k$ | $j$ | $i$ |
| $k$ | 1 | $k$ | $k$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $k$ | 1 | 1 | $k$ | $k$ | 1 |
| $l$ | 1 | $l$ | 1 | 1 | $l$ | 1 | 1 | 1 | 1 | $l$ | $l$ | $l$ | 1 | 1 |
| $m$ | 1 | $m$ | 1 | $m$ | 1 | 1 | 1 | 1 | $m$ | 1 | $m$ | 1 | 1 | $m$ |
| $n$ | 1 | $n$ | 1 | $m$ | $l$ | 1 | 1 | 1 | $m$ | $l$ | $n$ | $l$ | $n$ | $m$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| $x$ | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_5$ | $T_6$ | $T_7$ | $T_8$ | $T_9$ | $T_{10}$ | $T_{11}$ | $T_{12}$ | $T_{13}$ | $T_{14}$ | $T_{15}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $b$ | $c$ | $d$ | $a$ | $a$ | $a$ | $b$ | $b$ | $a$ | $c$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $d$ | $c$ | $a$ | $b$ | $b$ | $c$ | $d$ | $b$ | $c$ | $d$ | $c$ | $b$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $a$ | $b$ | $c$ | $a$ | $c$ | $b$ | $c$ | $d$ | $a$ | $c$ | $d$ | $d$ | $d$ |
| $d$ | $d$ | $c$ | $b$ | $a$ | $d$ | $d$ | $a$ | $d$ | $b$ | $c$ | $d$ | $a$ | $b$ | $a$ | $a$ |
| $e$ | $e$ | $e$ | $h$ | $h$ | $e$ | $j$ | $g$ | $f$ | $n$ | $e$ | $j$ | $g$ | $f$ | $j$ | $j$ |
| $f$ | $f$ | $g$ | $f$ | $g$ | $j$ | $f$ | $h$ | $e$ | $f$ | $n$ | $e$ | $j$ | $n$ | $h$ | $g$ |
| $g$ | $g$ | $f$ | $g$ | $f$ | $n$ | $g$ | $e$ | $h$ | $g$ | $j$ | $h$ | $n$ | $j$ | $e$ | $f$ |
| $h$ | $h$ | $h$ | $e$ | $e$ | $h$ | $n$ | $f$ | $g$ | $j$ | $h$ | $n$ | $f$ | $g$ | $n$ | $n$ |
| $i$ | $i$ | $l$ | $m$ | $k$ | $i$ | $i$ | $k$ | $i$ | $m$ | $l$ | $i$ | $k$ | $m$ | $k$ | $k$ |
| $j$ | $j$ | $n$ | $n$ | $j$ | $f$ | $e$ | $j$ | $j$ | $h$ | $g$ | $f$ | $h$ | $h$ | $g$ | $h$ |
| $k$ | $k$ | $m$ | $l$ | $i$ | $m$ | $l$ | $i$ | $k$ | $k$ | $k$ | $m$ | $m$ | $k$ | $l$ | $m$ |
| $l$ | $l$ | $i$ | $k$ | $m$ | $l$ | $k$ | $l$ | $m$ | $l$ | $i$ | $k$ | $l$ | $i$ | $i$ | $i$ |
| $m$ | $m$ | $k$ | $i$ | $l$ | $k$ | $m$ | $m$ | $l$ | $i$ | $m$ | $l$ | $i$ | $l$ | $m$ | $l$ |
| $n$ | $n$ | $j$ | $j$ | $n$ | $g$ | $h$ | $n$ | $n$ | $e$ | $f$ | $g$ | $e$ | $e$ | $f$ | $e$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Las estructuras de $\mathbf{T_km}$-álgebras que admite $B_4$, salvo isomorfismo, son:

$\langle B_4, \exists^i, T_1\rangle$ con $i = 0, ..., 12$, son $\mathbf{T_1m}$-álgebras,

$\langle B_4, \exists^6, T_2\rangle, \langle B_4, \exists^7, T_2\rangle, \langle B_4, \exists^6, T_5\rangle, \langle B_4, \exists^4, T_5\rangle$ $(B_4, \exists^8, T_2\rangle, \langle B_4, \exists^8, T_5\rangle, \langle B_4, \exists^9, T_5\rangle$, son $\mathbf{T_2m}$-álgebras,

$\langle B_4, \exists^4, T_{12}\rangle$ es una $\mathbf{T_3m}$-álgebra,

$\langle B_4, \exists^7, T_{15}\rangle$ es una $\mathbf{T_4m}$-álgebra.

### 2.1.2. Subálgebras particulares en una $\mathbf{T_k}$m-álgebra

En esta sección indicamos algunas propiedades de los conjuntos $\exists(B), I(B)$ y $\exists(B) \cap I(B)$ en una $\mathbf{T_k m}$-álgebra $\langle B, \exists, T\rangle$.

**Lema 2.1.3** *Sea* $\langle B, \exists, T\rangle$ *una* $\mathbf{T_k m}$-*álgebra, se satisfacen las propiedades siguientes*

(i) *Si* $a \in \exists(B)$, *entonces* $T(a) \in \exists(B)$,

(ii) $\langle \exists(B), T\rangle$ *es una* $\mathbf{T_k}$-*subálgebra del álgebra de Boole k-cíclica* $\langle B, T\rangle$,

(iii) $T(\exists(B)) = \exists(B)$.

**Dem.**

(i): Es inmediato de ($\mathrm{T_k}$m3).

(ii): Es consecuencia directa del Lema 2.1.3 (i).

(iii): Para $k = 1$ se satisface trivialmente. Supongamos que $k \geqslant 2$ y sea $y \in T(\exists(B))$, entonces existe $x \in \exists(B)$ tal que $T(x) = y$. De donde, por el Lema 2.1.3 (i), resulta que $T(x) \in \exists(B)$ y así $y \in \exists(B)$. Luego, $T(\exists(B)) \subseteq \exists(B)$. Recíprocamente, sea $y \in \exists(B)$ entonces, por el Lema 2.1.3 (i), tenemos que $T^{k-1}(y) \in \exists(B)$. De este modo existe $z = T^{k-1}(y) \in \exists(B)$ tal que $T(z) = y$, lo cual implica que $y \in T(\exists(B))$. Esta afirmación nos permite concluir que $\exists(B) \subseteq T(\exists(B))$. □

**Lema 2.1.4** *Si* $\langle B, \exists, T\rangle$ *es una* $\mathbf{T_k m}$-*álgebra, entonces se satisfacen las propiedades siguientes:*

(i) $\langle I(B), \exists\rangle$ *es una subálgebra monádica de* $\langle B, \exists\rangle \in \mathbf{Df}_1$ .

(ii) $\exists(B) \cap I(B) = \exists(I(B)) = I(\exists(B)) = \{x \in B : \exists T(x) = x\}$ *es una subálgebra booleana de* $B$ *tal que* $T(x) = x = \exists x$ *para todo* $x \in I(\exists(B))$.

**Dem.**

(i): Por ($\mathrm{T_k m3}$) obtenemos que $\exists x \in I(B)$ para cada $x \in I(B)$, de lo que se sigue, por ($\mathrm{T_k 2}$), que $\langle I(B), \exists \rangle$ es una subálgebra monádica de $\langle B, \exists \rangle$.

(ii): $$\begin{aligned} \exists(I(B)) &= \{x \in I(B) : \exists x = x\} \\ &= \{x \in B : T(x) = x = \exists x\} \\ &= \exists(B) \cap I(B). \end{aligned}$$

Además, que $\exists(I(B))$ sea una subálgebra booleana de $B$ es consecuencia directa del Lema 2.1.4 (i) y de ($\mathrm{Df_1 7}$). Resta probar que $\exists(I(B)) = \{x \in B : \exists T(x) = x\}$. En efecto. El caso $k = 1$ se satisface trivialmente. Supongamos que $k \geqslant 2$ y sea $x \in B$ tal que $\exists T(x) = x$, entonces (1) $\exists x = x$ y $T(x) = T^2(\exists x)$. Por lo tanto, $T^{k-1}(x) = \exists x$ de donde, por (1), se sigue que $T^{k-1}(x) = x$, y así, $x = T(x)$. Concluimos que $\{x \in B : \exists T(x) = x\} \subseteq \exists(B) \cap I(B) = \exists(I(B))$. La otra inclusión es trivial. □

## 2.2. Caracterización de una $\mathrm{T_k}$m-álgebra por medio del conjunto de sus puntos fijos

Teniendo en cuenta la caracterización para las álgebras de Boole monádicas dada en la Sección 1.2.1, caracterizamos ahora a las $\mathbf{T_k m}$-álgebras por medio de una subálgebra particular de puntos fijos.

**Lema 2.2.1** *Si $B$ es una $\mathbf{T_k}$-álgebra y $S$ es una $\mathbf{T_k}$-subálgebra relativamente completa de $B$, entonces existe un único cuantificador existencial sobre $B$, $\exists$, tal que $\langle B, \exists, T \rangle$ es una $\mathbf{T_k m}$-álgebra y $\exists(B) = S$.*

**Dem.** Teniendo en cuenta la relación entre cuantificadores existenciales y subálgebras relativamente completas de un álgebra booleana $B$, establecida en ($\mathrm{Df_1 7}$) y ($\mathrm{Df_1 8}$), tenemos que si $S \subseteq B$ es una subálgebra relativamente completa de $B$, entonces el operador unario (1) $\exists : B \longrightarrow B$, definido por $\exists x = \text{ínf}\{s \in S : x \leqslant s\}$, es un cuantificador existencial sobre $B$ tal que $\exists(B) = S$. Solo resta probar que $T(\exists x) = \exists T(x)$. Si $x \in B$, entonces $\text{ínf}\{T(s) : s \in S, x \leqslant s\} = \text{ínf}\{s : s \in S, T(x) \leqslant s\}$. En efecto, sea $x \in B$ y $t \in S$ tal que $T(x) \leqslant t$, entonces $x \leqslant T^{k-1}(t)$. Como $T^{k-1}(t) \in S$ resulta que $\text{ínf}\{T(s) : s \in S, x \leqslant s\} \leqslant T\left(T^{k-1}(t)\right) = t$. Luego, $\text{ínf}\{T(s) : s \in S, x \leqslant s\} \leqslant \text{ínf}\{s : s \in S, T(x) \leqslant s\}$.

Recíprocamente, sea $t \in S$ tal que $x \leqslant t$, entonces $T(x) \leqslant T(t)$. Como $T(t) \in S$, tenemos que $\text{ínf}\{s : s \in S, T(x) \leqslant s\} \leqslant T(t)$. De este modo, $\text{ínf}\{s : s \in S, T(x) \leqslant s\} \leqslant \text{ínf}\{T(s) : s \in S, x \leqslant s\}$. De lo cual, por $(\mathbf{T_k}4)$ y (1), concluimos que $T(\exists x) = \exists T(x)$. Además, supongamos que existen dos cuantificadores $\exists_1$, $\exists_2$ sobre $B$, tales que $\exists_1 B = S = \exists_2 B$, entonces, por (1), resulta que $\exists_1 = \exists_2$. □

El siguiente lema es una recíproca parcial del Lema 2.2.1.

**Lema 2.2.2** *Sea $\langle B, \exists, T\rangle$ una $\mathbf{T_k m}$-álgebra, entonces el conjunto de los puntos fijos del cuantificador $\exists$, $\exists(B)$, es una $\mathbf{T_k}$-subálgebra relativamente completa de $B$.*

**Dem.** Resulta inmediato de $(\mathrm{Df_I}7)$ y de $(\mathrm{T_k m3})$. □

De lo expuesto podemos concluir que

**Teorema 2.2.3** *Existe una correspondencia biyectiva, entre la familia de todos los cuantificadores definibles sobre una $\mathbf{T_k}$-álgebra $B$ que conmutan con el automorfismo y la familia de las $\mathbf{T_k}$-subálgebras relativamente completas de $B$.*

## 2.3. Descripción de una $\mathrm{T_k}$m-álgebra finita

En esta sección, caracterizamos a las $\mathbf{T_k m}$-álgebras finitas por medio de particiones del conjunto de átomos asociadas al cuantificador y al automorfismo.

Comenzamos dando una caracterización de una $\mathbf{T_k m}$-álgebra finita a partir de la partición $\mathcal{P}_\exists$ asociada al cuantificador de un álgebra de Boole monádica $\langle B_n, \exists\rangle$.

**Lema 2.3.1** *Sea $\langle B_n, \exists\rangle$ un álgebra de Boole monádica y $T : B_n \longrightarrow B_n$ un automorfismo de período $k$. Entonces $T(\exists x) = \exists T(x)$ para todo $x \in B_n$ si, y sólo si, $T(C) \in \mathcal{P}_\exists$ para todo $C \in \mathcal{P}_\exists$.*

**Dem.** $(\Rightarrow)$ : Sea $C \in \mathcal{P}_\exists$, luego existe $a \in \Pi(B_n)$ tal que $C = [a]_\exists = \{y \in \Pi(B_n) : \exists y = \exists a\}$. Se satisface que $T(C) = [T(a)]_\exists$. En efecto. Sea $y = T(x)$ con $x \in C$, entonces $\exists x = \exists a$ y por la hipótesis, obtenemos que $\exists y = T(\exists x) = T(\exists a) = \exists T(a)$. Luego, $y \in [T(a)]_\exists$, en consecuencia $T(C) \subseteq [T(a)]_\exists$. Recíprocamente, sea $z \in [T(a)]_\exists$, entonces existe $y \in \Pi(B_n)$, $T(y) = z$ y $\exists z = \exists T(a)$. De donde, por la hipótesis, resulta que

$T(\exists y) = T(\exists a)$, lo cual implica que $\exists y = \exists a$. Por lo tanto, $y \in [a]_\exists = C$ y $z \in T(C)$. Así tenemos que $[T(a)]_\exists \subseteq T(C)$ y, concluimos así que, $T(C) = [T(a)]_\exists \in \mathcal{P}_\exists$.

$(\Leftarrow)$ : Supongamos que $T(C) \in \mathcal{P}_\exists$ para todo $C \in \mathcal{P}_\exists$ y sea (1) $x \in \Pi(B_n)$, entonces por ($\mathrm{Df_1}10$), $\exists x \in \Pi(\exists(B_n))$ y $\exists x = \sup C$ con $C = \{y \in \Pi(B_n) : \exists y = \exists x\} \in \mathcal{P}_\exists$. Luego, (2) $T(\exists x) = T(\sup C) = \sup T(C)$. Por otra parte, de (1) y de ($\mathrm{T_k}1$) tenemos que $T(x) \in \Pi(B_n)$, de donde se sigue, por ($\mathrm{Df_1}10$), que $\exists T(x) \in \Pi\,(\exists(B_n))$. Además, como $T(x) \in T(C)$ y $T(C) \in \mathcal{P}_\exists$, entonces, por ($\mathrm{Df_1}10$), (3) $\exists T(x) = \sup T(C)$. En consecuencia, de (2) y (3) concluimos que $\exists T(x) = T(\exists x)$ para cada $x \in \Pi(B_n)$. Consideremos ahora $x \in B_n \setminus \Pi(B_n)$, entonces $x = \sup\{a : a \leqslant x, a \in \Pi(B_n)\}$. De este modo resulta que $T(\exists x) = T\big(\sup\big\{\exists a : a \leqslant x, a \in \Pi(B_n)\big\}\big) = \sup\big\{T(\exists a) : a \leqslant x, a \in \Pi(B_n)\big\} = \sup\big\{\exists T(a) : a \leqslant x, a \in \Pi(B_n)\big\} = \exists T\big(\sup\big\{a : a \leqslant x, a \in \Pi(B_n)\big\}\big) = \exists T(x)$ □

Las siguientes propiedades son esenciales a la hora de caracterizar una $\mathbf{T_km}$-álgebra finita mediante las dos particiones del conjunto de átomos, $\mathcal{P}_\exists$ y $\mathcal{P}_T$, asociadas al cuantificador $\exists$ y al automorfismo $T$, respectivamente.

**Lema 2.3.2** *Sea $\langle B_n, \exists, T\rangle$ una $\mathbf{T_km}$-álgebra y sean $\mathcal{P}_\exists$ y $\mathcal{P}_T$ las particiones del conjunto de átomos $\Pi(B_n)$ asociadas al cuantificador $\exists$ y al automorfismo $T$, respectivamente. Se satisfacen las propiedades siguientes:*

(i) *Si $C = \{a_1, a_2, ..., a_t\} \in \mathcal{P}_\exists$, entonces $m_T(C) = \{[a_1]_T, [a_2]_T, ..., [a_t]_T\} = \big\{ [a_i]_T : a_i \in C\big\}$.*

(ii) *Si $C \in \mathcal{P}_T$, entonces $D \in m_\exists(C)$ si, y sólo si, existe $y \in C$ tal que $D = [y]_\exists$, esto es, $m_\exists(C) = \{[y]_\exists : y \in C\}$.*

**Dem.**

(i): Sea $C = \{a_1, a_2, ..., a_t\} \in \mathcal{P}_\exists, t \leqslant n$ y sea $\mathcal{H} = \{[a_i]_T : a_i \in C\} \subseteq \mathcal{P}_T$. Es claro que $C \subseteq \bigcup\limits_{a_i \in C} [a_i]_T$. Sean (1) $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}_T$ tal que (2) $C \subseteq \bigcup\limits_{F \in \mathcal{N}} F$ y $D \in \mathcal{H}$, entonces existen $a_i \in C$ y $F \in \mathcal{N}$ tales que $D = [a_i]_T$ y $a_i \in F$. De donde, por (1), inferimos que $D = F$. Así $D \in \mathcal{N}$ y en consecuencia $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{N}$. Luego, concluímos que $m_T(C) = \{[a_i]_T : a_i \in C\}$.

(ii): La demostración es análoga a (i). □

Los siguientes teoremas establecen condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra de Boole monádica finita $\langle B_n, \exists\rangle$, y un automorfismo booleano $T$ de período $k$ definido sobre $B_n$, formen una $\mathbf{T_km}$-álgebra.

**Teorema 2.3.3** *Sea $\langle B_n, \exists\rangle$ un álgebra de Boole monádica y sea $T : B_n \longrightarrow B_n$ un automorfismo booleano de período $k$. Si $\langle B_n, \exists, T\rangle$ es una $\mathbf{T_k m}$-álgebra, entonces $\mathcal{P}_\exists \approx \mathcal{P}_T$.*

**Dem.** Consideremos $C = \{a \in \Pi(B_n) : \exists a = k\} = \{a_1, a_2, ..., a_t\} \in \mathcal{P}_\exists$, $k \in \exists(B_n)$, (1) $b = \sup C$ y $\mathcal{U}_C = \Big\{D \in \mathcal{P}_\exists : \sup D \leqslant \sup \big\{x_i \vee T(x_i) \vee ... \vee T^{l_i-1}(x_i) : x_i \in \Pi(B_n),\ x_i \leqslant b, T^{l_i}(x_i) = x_i\big\}\Big\} \subseteq \mathcal{P}_\exists$, entonces $\bigcup\limits_{H\in\mathcal{U}_C} H = \bigcup\limits_{D\in m_T(C)} D$. En efecto. Sea $x \in \bigcup\limits_{H\in\mathcal{U}_C} H$, entonces existe $H \in \mathcal{U}_C$ tal que $x \in H$. Luego, $x \leqslant \sup H \leqslant \sup \big\{x_i \vee T(x_i) \vee ... \vee T^{l_i-1}(x_i) : x_i \in \Pi(B_n),\ x_i \leqslant b, T^{l_i}(x_i) = x_i\big\}$. Como $x_i, T(x_i), ..., T^{l_i-1}(x_i) \in \Pi(B_n)$ para todo $i$ tal que $x_i \leqslant b$, inferimos que existe $x_i \in \Pi(B_n)$ con $x_i \leqslant b$ tal que $x = T^j(x_i)$. De (1) y esta última afirmación, se sigue que $x_i = a_r$ para algún $a_r \in C, 1 \leqslant r \leqslant t$. De este modo, $x = T^j(a_r), 1 \leqslant r \leqslant t$. Entonces, del Lema 2.3.2 y esta última aseveración, obtenemos que existe $G = [a_r]_T \in m_T(C), 1 \leqslant r \leqslant t, x \in G \subseteq \bigcup\limits_{D\in m_T(C)} D$. Por consiguiente, $\bigcup\limits_{H\in\mathcal{U}_C} H \subseteq \bigcup\limits_{D\in m_T(C)} D$. Recíprocamente, sea $x \in \bigcup\limits_{D\in m_T(C)} D$. Entonces existe $a_i \in C, 1 \leqslant i \leqslant t$, tal que $D = [a_i]_T \in m_T(C), x \in D$. Así, tenemos que (2) $x = T^j(a_i), 1 \leqslant j \leqslant l_i - 1, T^{l_i}(a_i) = a_i$. Sea $H = [x]_\exists = \{y \in \Pi(B_n) : \exists y = \exists x\}$, entonces $H \in \mathcal{P}_\exists, x \in H$. Además $\sup H \leqslant \sup \big\{x_i \vee T(x_i) \vee ... \vee T^{l_i-1}(x_i) : x_i \in \Pi(B_n),\ x_i \leqslant b, T^{l_i}(x_i) = x_i\big\}$. En efecto, sea $y \in H$, entonces $\exists y = \exists x$. De esta última afirmación, de la hipótesis y (2) obtenemos que $T(\exists y) = T(\exists x) = \exists T(x) = \exists T^{j+1}(a_i) = T^{j+1}(\exists a_i)$, de donde se sigue que $T^{k-(j+1)}(T(\exists y)) = \exists a_i$ y, por lo tanto, $a_r = T^{k-j}(y) \in C$. En consecuencia, $y = T^j(a_r), a_r \in C$ e $y \leqslant \sup \big\{x_i \vee T(x_i) \vee ... \vee T^{l_i-1}(x_i) : x_i \in \Pi(B_n),\ x_i \leqslant b, T^{l_i}(x_i) = x_i\big\}$. Lo que nos permite afirmar que $\sup H \leqslant \sup \big\{x_i \vee T(x_i) \vee ... \vee T^{l_i-1}(x_i) : x_i \in \Pi(B_n),\ x_i \leqslant b, T^{l_i}(x_i) = x_i\big\}$. Así, concluimos que existe $H \in \mathcal{U}_C$ tal que $x \in H$ y, por consiguiente, $\bigcup\limits_{D\in m_T(C)} D \subseteq \bigcup\limits_{H\in\mathcal{U}_C} H$. Luego, $\mathcal{P}_\exists \prec \mathcal{P}_T$.

Además $\mathcal{P}_T \prec \mathcal{P}_\exists$. En efecto, sean (3) $C = \big\{a_i, T(a_i), ..., T^{l_i-1}(a_i)\big\} \in \mathcal{P}_T$ con $a_i \in \Pi(B_n), T^{l_i}(a_i) = a_i$ y (4) $c = \sup C$. Consideremos $\mathcal{U}_C = \{D \in \mathcal{P}_T : \sup D \leqslant \exists c\}$ y probemos que $\bigcup\limits_{H\in\mathcal{U}_C} H = \bigcup\limits_{D\in m_\exists(C)} D$. Sea $x \in \bigcup\limits_{D\in\mathcal{U}_C} D$, entonces existe $D \in \mathcal{P}_T$ tal que $x \in D$ y $\sup D \leqslant \exists c$. De donde, por (3) y (4), obtenemos que $x \leqslant \sup D \leqslant \exists a_i \vee T(\exists a_i) \vee ... \vee T^{l_i-1}(\exists a_i), T^{l_i}(a_i) = a_i$. Como $x \in \Pi(B_n)$, resulta que $x \leqslant \exists a_i$ o $x \leqslant T^j\,(\exists a_i)$ para algún $1 \leqslant j \leqslant l_i - 1$. De este último hecho, se sigue que $\exists x \leqslant \exists a_i$ o $\exists x \leqslant T^j\,(\exists a_i)$ para algún $1 \leqslant j \leqslant l_i - 1$. Como, por (3), $\exists a_i$, $T^j\,(\exists a_i) \in \Pi(\exists(B_n)), \exists x \in \exists(B_n)$, tenemos que $\exists x = \exists a_i$ o $\exists x = T^j\,(\exists a_i)$ para algún $1 \leqslant j \leqslant l_i - 1$. En consecuencia, $x \in [a_i]_\exists \in m_\exists(C)$ o $x \in [T^j\,(a_i)]_\exists \in m_\exists(C)$ para algún $1 \leqslant j \leqslant l_i - 1$. Luego, existe $G \in m_\exists(C)$ tal que $x \in G$, por lo tanto $x \in \bigcup\limits_{H\in m_\exists(C)} H$. De este modo, $\bigcup\limits_{D\in\mathcal{U}_C} D \subseteq \bigcup\limits_{H\in m_\exists(C)} H$. Recíprocamente, sea $x \in \bigcup\limits_{H\in m_\exists(C)} H$, entonces existe $H = [y]_\exists \in m_\exists(C)$ tal que $y \in C$ y $x \in H$. Esta última afirmación nos permite establecer que $H = [a_i]_\exists$ o $H = [T^j(a_i)]_\exists, 1 \leqslant j \leqslant l_i - 1$, lo cual implica que $\exists x = \exists a_i$ o $\exists x = T^j(\exists a_i), 1 \leqslant j \leqslant l_i - 1$. Entonces tenemos que (5) $x \leqslant \exists a_i \leqslant \exists c$ o $x \leqslant T^j(\exists a_i) \leqslant \exists c, , 1 \leqslant j \leqslant l_i - 1$. Consideremos ahora $D = \{x, T(x), ..., T^{t-1}(x)\}, T^t(x) = x$. Como $x \in \Pi(B_n)$, entonces $D \in \mathcal{P}_T, x \in D$. Además, teniendo en cuenta (5) y que $T(\exists c) = \exists c$, inferimos que $x \vee T(x) \vee ... \vee T^{t-1}(x) \leqslant \exists c$. De este modo, existe $D \in \mathcal{P}_T$ tal que $x \in D, \sup D \leqslant \exists c$, de lo cual se sigue que $x \in \bigcup\limits_{D\in \mathcal{U}_C} D$. Luego, podemos asegurar que $\bigcup\limits_{H\in m_\exists(C)} H \subseteq \bigcup\limits_{D\in \mathcal{U}_C} D$. En consecuencia, $\mathcal{P}_T \prec \mathcal{P}_\exists$. □

Recíprocamente,

**Teorema 2.3.4** *Sea $\langle B_n, \exists\rangle$ un álgebra de Boole monádica y sea $T : B_n \longrightarrow B_n$ un automorfismo booleano de período $k$. Si $\mathcal{P}_\exists \prec \mathcal{P}_T$, entonces $\langle B_n, \exists, T\rangle$ es una $\mathbf{T_k m}$-álgebra.*

**Dem.** Sólo necesitamos verificar que $T(\exists x) = \exists T(x)$ sobre los átomos. Sea $x \in \Pi(B_n)$. Entonces de ($\mathrm{Df_1 10}$) tenemos que $\exists x = \sup C$ con (1) $C \in \mathcal{P}_\exists$. De donde se sigue que (2) $T(\exists x) = \sup T(C) \in \Pi(\exists(B_n))$. Además, (3) $T(x) \in \Pi(B_n)$, y (4) $T(x) \in T(C)$. Por otra parte, de la hipótesis y (1) resulta que (5) existe un único conjunto $\mathcal{U}_C \subseteq \mathcal{P}_\exists$ tal que (6) $\bigcup\limits_{H\in m_T(C)} H = \bigcup\limits_{D\in \mathcal{U}_C} D$. Como $T(x) \in [x]_T \in m_T(C)$ entonces, de (6), inferimos que $T(x) \in \bigcup\limits_{H\in m_T(C)} H$ y, por lo tanto, existe $D \in \mathcal{U}_C$ tal que (7) $T(x) \in D \in \mathcal{P}_\exists$. De la última afirmación, (3) y ($\mathrm{Df_1 10}$), inferimos que (8) $\exists T(x) = \sup D$. Teniendo en cuenta (5) y (6), obtenemos que $T(C) \in \mathcal{P}_\exists$. Así, de esta última afirmación y (7), inferimos que (9) $T(C) = D$, lo cual nos permite concluir de (2), (8) y (9) que $T(\exists x) = \exists T(x)$ para todo $x \in \Pi(B_n)$. Es rutina probar que $T(\exists x) = \exists T(x)$ para todo $x \in B_n \setminus \Pi(B_n)$. Así resulta que $\langle B_n, \exists, T\rangle$ es una $\mathbf{T_k m}$-álgebra. □

El siguiente corolario es una herramienta fundamental al determinar la relación entre las clases $\mathbf{B_{T_k m}}$ y $\mathbf{Df_2}$.

**Corolario 2.3.5** *Sea $\langle B_n, \exists\rangle$ un álgebra de Boole monádica y sea $T : B_n \longrightarrow B_n$ un automorfismo booleano de período $k$, entonces $\langle B_n, \exists, T\rangle$ es una $\mathbf{T_k m}$-álgebra si, y sólo si, $\mathcal{P}_\exists \approx \mathcal{P}_T$.*

## 2.4. Relación entre las $\mathbf{T_k}$m-álgebras y $\mathbf{Df_2}$-álgebras

En esta sección, establecemos de modo preciso, en el caso finito, la relación que existe entre las álgebras cilíndricas libres de elementos diagonales de dimensión dos y las $\mathbf{T_k}$**m**-álgebras.

En toda álgebra de Boole finita, los cuantificadores son determinados por los automorfismos. En el caso particular de las $\mathbf{T_k}$**m**-álgebras podemos afirmar:

**Lema 2.4.1** *Sea $\langle B_n, T\rangle$ un álgebra de Boole k-cíclica, entonces $T$ induce en $B_n$ un cuantificador que conmuta con $T$.*

**Dem.** Sea $\Pi(B_n) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, de ($\mathrm{T}_k$19) tenemos que el automorfismo $T$ induce en el conjunto de átomos de $B_n$ una partición $\mathcal{P}_T = \left\{C_{a_1}, C_{a_2}, ..., C_{a_p}\right\}$, $p \leqslant n$, donde (1) $C_{a_i} = \left\{a_i, T(a_i),\ ..., T^{t_i-1}(a_i)\right\}$, $T^{t_i}(a_i) = a_i$, $1 \leqslant t_i \leqslant k$. De este hecho y ($\mathrm{Df}_1$9), podemos afirmar que $T$ induce una subálgebra $S$ en $B_n$, tal que $\Pi(S) = \{k_1, k_2, ..., k_p\}$ con $k_i = a_i \vee T(a_i) \vee ... \vee T^{t_i-1}(a_i)$, $T^{t_i}(a_i) = a_i$. Es claro que $T(k_t) = k_t$ para todo $1 \leqslant t \leqslant p$. Consideremos el operador unario sobre $B_n$, (2) $\exists : B_n \to B_n$ definido por $\exists x = \sup\left\{C_{a_i} : a_i \in \Pi(B_n),\ i \leqslant p,\ a_i \leqslant x\right\} = \sup\left\{a_i \vee T(a_i) \vee ... \vee T^{t_i-1}(a_i) : a_i \in \Pi(B_n),\ i \leqslant p,\ a_i \leqslant x, T^{t_i}(a_i) = a_i\right\}$. Es inmediato que $\exists 0 = 0$. Consideremos ahora $x \in B_n$. Entonces del hecho que $x = \sup\left\{a_i\ :\ a_i \leqslant x,\ \ a_i \in \Pi(B_n)\right\}$, (1) y (2) resulta que $x \leqslant \exists x$. Por otro lado, de la relación entre los conjuntos $\{a_i \in \Pi(B_n) : a_i \leqslant x\}$ y $\{a_i \in \Pi(B_n) : a_i \leqslant \exists x\}$, obtenemos que (3) $\exists x \leqslant \exists\exists x$. Ahora, sea $a_i \in \Pi(B_n)$ tal que $a_i \leqslant \exists x$. Entonces de (2) tenemos que $a_i \leqslant \sup\left\{a_j \vee T(a_j) \vee T^2(a_j) ... \vee T^{t_j-1}(a_j) : a_j \in \Pi(B_n),\ j \leqslant p,\ a_j \leqslant x, T^{t_j}(a_j) = a_j\right\}$. De este último hecho, obtenemos las siguientes relaciones:

- $T(a_i) \leqslant \sup\left\{T(a_j) \vee T^2(a_j) \vee ... \vee T^{t_j-1}(a_j) \vee a_j : a_j \in \Pi(B_n),\ j \leqslant p,\ a_j \leqslant x,\right.$
  $\left.T^{t_j}(a_j) = a_j\right\}$,

- $T^2(a_i) \leqslant \sup\left\{T^2(a_j) \vee T^3(a_j) \vee ... \vee a_j \vee T(a_j) : a_j \in \Pi(B_n),\ j \leqslant p,\ a_j \leqslant x,\right.$
  $\left.T^{t_j}(a_j) = a_j\right\}$,

  $\vdots$

- $T^{l_i-1}(a_i) \leqslant \sup\left\{a_j \vee T(a_j) \vee T^2(a_j) \vee ... \vee T^{t_j-1}(a_j) : a_i \in \Pi(B_n),\ j \leqslant p,\ a_j \leqslant x,\right.$
  $\left.T^{t_j}(a_j) = a_j\right\}, T^{l_i}(a_i) = a_i$.

De lo cual resulta que $a_i \vee T(a_i) \vee ... \vee T^{l_i-1}(a_i) \leqslant \sup\left\{a_j \vee T(a_j) \vee T^2(a_j) \vee ... \vee T^{t_j-1}(a_j) : a_j \in \Pi(B_n),\ j \leqslant p,\ a_j \leqslant x, T^{t_j}(a_j) = a_j\right\} = \exists x$ para todo $a_i \in \Pi(B_n)$ tal que $a_i \leqslant \exists x$.

Esto nos permite concluir que $\exists\exists x \leqslant \exists x$. De esta afirmación y (3) obtenemos que $\exists\exists x = \exists x$ para todo $x \in B_n$.

Consideremos ahora $x, y \in B_n$. De (2) y el hecho que $\{a_i \in \Pi(B_n) : a_i \leqslant x \wedge \exists y\} \subseteq \{a_i \in \Pi(B_n) : a_i \leqslant x\}$ y $\{a_i \in \Pi(B_n) : a_i \leqslant x \wedge \exists y\} \subseteq \big\{a_i \in \Pi(B_n) : a_i \leqslant \exists y\big\}$, obtenemos que $\exists(x \wedge \exists y) \leqslant \exists x$ y $\exists(x \wedge \exists y) \leqslant \exists y$. Luego, resulta que (4) $\exists(x \wedge \exists y) \leqslant \exists x \wedge \exists y$.

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
(5)\ \exists x \wedge \exists y \leqslant\ & \sup\big\{a_i \vee T(a_i) \vee ... \vee T^{t_i-1}(a_i) : a_i \in \Pi(B_n),\ i \leqslant p,\ a_i \leqslant x, T^{t_i}(a_i) = a_i\big\} \wedge \sup\big\{a_j \vee T(a_j) \vee ... \vee T^{l_j-1}(a_j) : a_j \in \Pi(B_n),\ j \leqslant p,\ a_j \leqslant \exists y, T^{l_j}(a_j) = a_j\big\}, \\
= \sup\Big\{ & \big( (a_i \wedge a_j) \vee (a_i \wedge T(a_j)) \vee ... \vee \big(a_i \wedge T^{l_j-1}(a_j)\big) \big) \qquad \mathbf{(I)} \\
& \vee \\
& \big((T(a_i) \wedge a_j) \vee (T(a_i) \wedge T(a_j)) \vee ... \vee \big(T(a_i) \wedge T^{l_j-1}(a_j)\big)\big) \qquad \mathbf{(II)} \\
& \vee \\
& \quad \vdots \\
& \vee \\
& \big( (T^{t_i-1}(a_i) \wedge a_j) \vee (T^{t_i-1}(a_i) \wedge T(a_j)) \vee ... \vee (T^{t_i-1}(a_i), \wedge T^{l_j-1}(a_j))\big) \qquad \mathbf{(N)} \\
& \vee \\
& \quad \vdots \\
& \vee \ldots : i \leqslant p, j \leqslant p,\ a_i \leqslant x, a_j \leqslant \exists y,\ a_i; a_j \in \Pi(B_n), T^{t_i}(a_i) = a_i, T^{l_j}(a_j) = a_j \Big\}
\end{aligned}
$$

Entonces, en (5) puede ocurrir:

Primer caso: $T(a_i) = a_i$ para todo $a_i \leqslant x$, $i = 1, ..., p$ y $T(a_j) = a_j$ para todo $a_j \leqslant \exists y$ $j = 1, ..., p$.

En este caso, se sigue que $\exists x \wedge \exists y \leqslant \exists\,(x \wedge \exists y)$.

Segundo caso: $a_i = a_j, t_i = l_j$

En este caso, en (5) obtenemos las expresiones siguientes:

(I) $= a_i$,

(II) $= T\,(a_i)$,

$\vdots$

(N) $= T^{t_i-1}\,(a_i)$ y $a_i \leqslant x \wedge \exists y$.

Tercer caso: (6) $a_i \neq a_j$, $a_i$, $a_j \in C_{t_i}$, $t_i = l_j$

En este caso, de (1) y (6), tenemos que existe $r < t_i$ tal que $T^r(a_j) = a_i$. De este modo en (5) obtenemos las expresiones siguientes:

(I) $= a_i$,

$(\mathrm{II}) = T\,(a_i)$,

$\vdots$

$(\mathrm{N}) = T^{t_i-1}\,(a_i)$.

Además, como $a_i = T^r(a_j) \leqslant \exists y$ resulta que $a_i \leqslant x \wedge \exists y$.

Cuarto caso: $a_i \neq a_j$, $a_i \in C_{t_i}$, $a_j \in C_{l_j}$, $C_{t_i} \cap C_{l_j} = \emptyset$.

En este caso, como $a_i, T(a_i), ..., T^{t_i-1}(a_i) \in C_{t_i} \subseteq \Pi(B_n)$, $a_j, T(a_j), ..., T^{l_j-1}(a_j) \in C_{l_j} \subseteq \Pi(B_n)$, entonces en (5) obtenemos que $(\mathrm{I}) = (\mathrm{II}) = ... = (\mathrm{N}) = 0$.

Así siguiendo, teniendo en cuenta los distintos casos que se pueden presentar, tenemos que $\exists x \wedge \exists y \leqslant \sup\{a_i \vee T(a_i) \vee ... \vee T^{t_i-1}(a_i) : a_i \in \Pi(B_n),\ i \leqslant p,\ a_i \leqslant x \wedge \exists y,\ T^{t_i}(a_i) = a_i\}$, de lo cual resulta que $\exists x \wedge \exists y \leqslant \exists\,(x \wedge \exists y)$. De esta afirmación y (4) obtenemos que $\exists x \wedge \exists y = \exists\,(x \wedge \exists y)$. De este modo, concluimos que $\exists$ es un cuantificador existencial.

Resta probar que $T(\exists x) = \exists T(x)$ para todo $x \in B_n$. Para ello, consideremos $x \in \Pi(B_n)$, entonces $T(x) \in \Pi(B_n)$, lo cual implica que $\exists x = x \vee T(x) \vee \ldots \vee T^{l-1}(x)$, $T^l(x) = x$, $l \leqslant k$ y $\exists T(x) = T(x) \vee T^2(x) \vee \ldots \vee T^l(x)$, $T^{l+1}(x) = T(x)$

$$= T(x) \vee T^2(x) \vee \ldots \vee T^{l-1}(x) \vee x$$

$$= T(\exists x).$$

Por lo tanto, obtenemos que $\exists T(x) = T(\exists x)$ para todo $x \in \Pi(B_n)$. Es rutina probar que $\exists T(x) = T(\exists x)$ para todo $x \in B_n \setminus \Pi(B_n)$. $\square$

**Observación 2.4.2** *En las condiciones del Lema 2.4.1 se satisface que* $T\,(\exists x) = \exists x$ *para todo* $x \in B_n$. *En efecto:*

$$\begin{aligned} T(\exists x) &= T\big(\sup\{a_i \vee T(a_i) \vee ... \vee T^{t_i-1}(a_i) : a_i \in \Pi(B_n),\ i \leqslant p,\ a_i \leqslant x,\ T^{t_i}(a_i) = a_i\}\big) \\ &= \sup\{T\,(a_i) \vee T^2(a_i) \vee ... \vee T^{t_i-1}(a_i) \vee T^{t_i}(a_i) : a_i \in \Pi(B_n),\ i \leqslant p,\ a_i \leqslant x, \\ &\qquad T^{t_i}(a_i) = a_i\} \\ &= \sup\{a_i \vee T(a_i) \vee ... \vee T^{t_i-1}(a_i) : a_i \in \Pi(B_n),\ i \leqslant p,\ a_i \leqslant x,\ T^{t_i}(a_i) = a_i\} \\ &= \exists x. \end{aligned}$$

**Teorema 2.4.3** *Sea* $\langle B_n, \exists_1, T\rangle$ *una* $\mathbf{T_k m}$*-álgebra, entonces* $T$ *induce en* $B_n$ *un cuantificador existencial* $\exists_2 : B_n \longrightarrow B_n$, *que conmuta con* $\exists_1$.

**Dem.** Por el Lema 2.4.1 el operador (1) $\exists_2 : B_n \longrightarrow B_n$, definido por $\exists_2 x = \sup\{a_i \vee T(a_i) \vee ... \vee T^{l_i-1}(a_i) : a_i \in \Pi(B_n),\ a_i \leqslant x,\ T^{l_i}(a_i) = a_i\}$, es un cuantificador existencial sobre $B_n$. Es claro que $\exists_2\exists_1 0 = \exists_1\exists_2 0$. Sólo necesitamos verificar que $\exists_2\exists_1 x = \exists_1\exists_2 x$ sobre los átomos de $B_n$. Sea $x \in \Pi(B_n)$. Entonces de (1) tenemos que $\exists_2 x = x \vee T(x) \vee ... \vee$

$T^{l-1}(x)$, $T^l(x) = x$. De este último hecho, obtenemos que (2) $\exists_1\exists_2 x = \exists_1 x \vee T(\exists_1 x) \vee ... \vee T^{l-1}(\exists_1 x),\ T^l(x) = x$. Además, como $\exists_2\exists_1 x = \sup\left\{a_i \vee T(a_i) \vee ... \vee T^{j_i - 1}(a_i) : a_i \in \Pi(B_n),\ a_i \leqslant \exists_1 x,\ T^{j_i}(a_i) = a_i\right\}$, resulta que (3) $\exists_2\exists_1 x \leqslant \exists_1\exists_2 x$. Por otro lado, del hecho que $\exists_1 x = \sup\left\{a_i : a_i \in \Pi(B_n),\ a_i \leqslant \exists_1 x\right\}$, obtenemos las relaciones siguientes:

$-\ T(\exists_1 x) = \sup\left\{T(a_i) : a_i \in \Pi(B_n),\ a_i \leqslant \exists_1 x\right\} \leqslant \exists_2\exists_1 x,$

$\vdots$

$-\ T^{l-1}(\exists_1 x) = \sup\left\{T^{l-1}(a_i) : a_i \in \Pi(B_n),\ a_i \leqslant \exists_1 x\right\} \leqslant \exists_2\exists_1 x.$

De estas afirmaciones y (2), como $\exists_1 x \leqslant \exists_2\exists_1 x$, podemos inferir que (4) $\exists_1\exists_2 x \leqslant \exists_2\exists_1 x$. De (3) y (4), concluimos que $\exists_1\exists_2 x = \exists_2\exists_1 x$ para todo $x \in \Pi(B_n)$. □

De los resultados precedentes resulta que toda $\mathbf{T_k m}$-álgebra finita es una $\mathbf{Df_2}$-álgebra, centramos ahora nuestra atención en la propiedad recíproca.

**Lema 2.4.4** *Sea $\langle B_n, \exists\rangle$ un álgebra de Boole monádica, entonces existe un automorfismo $T : B_n \longrightarrow B_n$ tal que $\langle B_n, \exists, T\rangle$ es una $\mathbf{T_k m}$-álgebra.*

**Dem.** De ($\mathrm{Df_1}$10) tenemos que el cuantificador $\exists : B_n \longrightarrow B_n$ induce en $\Pi(B_n) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ una partición $\mathcal{P}_\exists = \{C_i\}_{i=1}^{t}$, tal que $x, y \in C_i$ si, y sólo si, $\exists x = \exists y = k_i, k_i \in \Pi(\exists(B_n)) = \{k_1, k_2, ..., k_t\}, t \leqslant n$. Para cada $1 \leqslant j \leqslant t$, consideremos $C_j = \{a_{1_j}, a_{2_j}, ..., a_{l_j}\}$, las funciones $f : \Pi(B_n) \longrightarrow \Pi(B_n)$ y $T : B_n \longrightarrow B_n$ definidas como se detalla a continuación $f(a_{i_j}) = a_{(i+1)_j}, f(a_{l_j}) = a_{1_j}$ y (1) $T(x) = \sup\left\{f(a_i) : a_i \in \Pi(B_n),\ a_i \leqslant x\right\}$. En [15], A.V. Figallo mostró que $T$ es un automorfismo de período $k$ siendo $k$ el múltiplo común menor del conjunto $\{|C_i|\}_{i=1}^{t}$. Resta probar que $T(\exists x) = \exists T(x)$ para todo $x \in B_n$. Sea $x \in \Pi(B_n)$, entonces $x, f(x) \in C_j$ para algún $1 \leqslant j \leqslant t$. De esta última afirmación obtenemos que (2) $\exists x = \exists f(x) = k_j$, con $k_j \in \Pi(\exists(B_n))$. Por otro lado, como $\exists x = \sup C_j = \sup\left\{a_{t_j} : 1 \leqslant t \leqslant h, a_{t_j} \in \Pi(B_n)\right\}$ para algún $1 \leqslant h \leqslant n$, entonces $T(\exists x) = \sup\left\{f(a_j) : a_j \leqslant \exists x,\ a_j \in \Pi(B_n)\right\} = \sup\left\{a_t : 1 \leqslant t \leqslant h\right\} = \exists x$. De este último hecho y (2), inferimos que $\exists T(x) = \exists f(x) = \exists x = T(\exists x)$ para todo $x \in \Pi(B_n)$.

Consideremos ahora $x \in B_n \setminus \Pi(B_n)$, $x \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
T(\exists x) &= T(\exists \sup\left\{a_i : a_i \in \Pi(B_n), a_i \leqslant x\right\}) \\
&= T(\sup\left\{\exists a_i : a_i \in \Pi(B_n), a_i \leqslant x\right\}) \\
&= \sup\left\{T(\exists a_i) : a_i \in \Pi(B_n), a_i \leqslant x\right\} \\
&= \sup\left\{\exists T(a_i) : a_i \in \Pi(B_n), a_i \leqslant x\right\} \\
&= \exists T(\sup\left\{a_i : a_i \in \Pi(B_n), a_i \leqslant x\right\}) \\
&= \exists T(x).
\end{aligned}$$

De esta última afirmación se completa la demostración. $\square$

**Corolario 2.4.5** *Si $\langle B_n, \exists_1, \exists_2 \rangle$ es una* $\mathbf{Df_2}$*-álgebra, entonces existe un automorfismo $T_{\exists_2} : B_n \longrightarrow B_n$ tal que $\langle B_n, \exists_1, T_{\exists_2} \rangle$ es una* $\mathbf{T_k m}$*-álgebra.*

**Dem.** Sea (1) $\mathcal{P}_{\exists_2} = \{C_i\}_{i=1}^{t}$ la partición inducida por el cuantificador $\exists_2$ y sean (2) $f_{\exists_2} : \Pi(B_n) \longrightarrow \Pi(B_n)$ y $T_{\exists_2} : B_n \longrightarrow B_n$ las funciones definidas como en el Lema 2.4.4. Entonces $\mathcal{P}_{\exists_2} = \mathcal{P}_{T_{\exists_2}}$. En efecto, sea $C \in \mathcal{P}_{T_{\exists_2}}$, entonces $C = [a]_{T_{\exists_2}} = \left\{a, T_{\exists_2}(a), ..., T_{\exists_2}^{j-1}(a)\right\}$, $T_{\exists_2}^{j}(a) = a$, para algún $a \in \Pi(B_n)$. De esta última afirmación y (2), obtenemos que $C = \left\{a, f_{\exists_2}(a), ..., f_{\exists_2}^{j-1}(a)\right\}$, $f_{\exists_2}^{j}(a) = a$, lo cual implica, por (1), que $C \in \mathcal{P}_{\exists_2}$. Por lo tanto $\mathcal{P}_{T_{\exists_2}} \subseteq \mathcal{P}_{\exists_2}$. La otra inclusión es trivial. De este modo, del hecho que $\mathcal{P}_{T_{\exists_2}} = \mathcal{P}_{\exists_2}$ y la hipótesis tenemos que $\mathcal{P}_{\exists_1} \approx \mathcal{P}_{T_{\exists_2}}$. De esta última sentencia y el Corolario 2.3.5 concluimos que $\langle B_n, \exists_1, T_{\exists_2} \rangle$ es una $\mathbf{T_k m}$-álgebra. $\square$

**Observación 2.4.6** *Lo expuesto anteriormente permite describir a una* $\mathbf{Df_2}$*-álgebra finita como una terna $\langle B_n, \exists, T \rangle$ que satisface las siguientes condiciones:*

(i) *$\langle B_n, \exists \rangle$ es un álgebra de Boole monádica,*

(ii) *$T : B_n \longrightarrow B_n$ es un automorfismo de período $k$,*

(iii) *$T(\exists x) = \exists T(x)$ para todo $x \in B$.*

## 2.5. $\mathbf{T_k m}$-filtros

En esta sección, introducimos una clase singular de filtros, los $\mathbf{T_k m}$-filtros, la cual permite determinar las congruencias de una $\mathbf{T_k m}$-álgebra.

**Definición 2.5.1** *Sea $B \in \mathbf{B_{T_k m}}$, un filtro $F$ de $B$ es un* $\mathbf{T_k m}$*-filtro de $B$ si satisface:*

(i) *Si $x \in F$, entonces $\forall x \in F$.*

(ii) *Si $x \in F$, entonces $T(x) \in F$.*

Es decir, un filtro $F \subseteq B$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro si es un $\forall$-filtro y un $\mathbf{T_k}$-filtro.

Para $B \in \mathbf{B_{T_k m}}$, denotamos con $\mathcal{F}_{T_k m}(B)$ y $FT_kM(X)$ al conjunto de todos los $\mathbf{T_k m}$-filtros de $B$ y al $\mathbf{T_k m}$-filtro generado por $X$ en $B$, respectivamente.

### 2.5.1. Base de filtro

Ahora, consideramos un tipo particular de conjuntos que, al igual que en las álgebras de Boole monádicas, permiten caracterizar a los $\mathbf{T_k m}$-filtros.

**Definición 2.5.2** *Sea $B \in \mathbf{B}$ y sea $F$ un filtro. Una base de filtro de $F$ es un conjunto no vacío $H \subseteq F$, tal que $x \in F$ si, y sólo si, existe $b \in H$ y $b \leqslant x$*

**Lema 2.5.3** *Sean $B \in \mathbf{B_{T_k m}}$ y $F \subseteq B$ un filtro, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$F$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro,*

(ii) *existe una base de filtro de puntos fijos de $F$, $H$, tal que $T(b) \in H$ para todo $b \in H$.*

**Dem.**
(i) $\Rightarrow$ (ii) : Sea (1) $F$ un $\mathbf{T_k m}$-filtro y consideremos el conjunto no vacío $H = F \cap \exists(B) \subseteq F$. Sea $x \in F$, entonces como $\exists\forall x = \forall x$ y $\forall x \in F$, resulta que $\forall x \in F \cap \exists(B) = H$. Luego, existe $b = \forall x \in H$ tal que $b \leqslant x$. La recíproca resulta inmediata por ser $H \subseteq F$. Concluimos así que $H$ es una base de filtro de $F$. Además, por (1) y el Lema 2.1.3, tenemos que $T(x) \in H$ para todo $x \in H$. En consecuencia, $H \subseteq \exists(B)$ es una base de filtro de $F$ tal que $T(x) \in H$ para todo $x \in H$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Sea $x \in F$. Por (ii), tenemos que (2) existe $b \in H \subseteq F$ tal que $b \leqslant x$. De donde, por ser $F$ filtro, resulta que $\forall x \in F$. Por otro lado, de (ii) y (2), obtenemos que $T(b) \in H \subseteq F$ y $T(b) \leqslant T(x)$, en consecuencia $T(x) \in F$. Lo cual nos permite concluir que $F$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro. $\square$

**Corolario 2.5.4** *Sean $B \in \mathbf{B_{T_k m}}$ y $F \subseteq B$ un filtro, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$F$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro,*

(ii) *existe una base de filtro $H$ de $F$ tal que $H \subseteq I(B) \cap \exists(B)$.*

**Dem.**
(i) $\Rightarrow$ (ii) : Sea $F$ un $\mathbf{T_k m}$-filtro y consideremos el conjunto no vacío $H = F \cap \exists(B) \cap I(B) \subseteq F$. Sea $x \in F$, entonces existe $b = \forall x \wedge T(\forall x) \wedge ... T^{k-1}(\forall x)$ tal que $b \in H$ y $b \leqslant x$. La recíproca resulta inmediata por ser $H \subseteq F$. Concluimos así que $H$ es una base de filtro de $F$ tal que $H \subseteq I(B) \cap \exists(B)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Es inmediato del Lema 2.5.3. $\square$

### 2.5.2. Propiedades

En esta sección describimos propiedades de los $\mathbf{T_k m}$-filtros, que nos resultan útiles para caracterizar las $\mathbf{T_k m}$-congruencias.

**Lema 2.5.5** *Sea $B \in \mathbf{B_{T_k m}}$, si $H \subseteq B$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro, entonces $F(H) = FT_kM(H)$.*

**Dem.** Sea (1) $H \subseteq B$ un $\mathbf{T_k m}$-filtro, como $H \subseteq FT_kM(H)$ resulta que $F(H) \subseteq FT_kM(H)$. Recíprocamente, sea $y \in F(H)$, entonces existe $x \in H$ tal que $x \leqslant y$. De donde tenemos que $\forall x \in H$ y $\forall x \leqslant \forall y$, y por lo tanto $\forall y \in F(H)$. Luego, $F(H)$ es un $\forall$-filtro. Además, de (1) y de ($\mathrm{T_k}6$) resulta que $F(H)$ es un $\mathbf{T_k}$-filtro. Por consiguiente, $F(H)$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro, lo cual nos permite concluir que $FT_kM(H) \subseteq F(H)$. □

**Lema 2.5.6** *Si $B \in \mathbf{B_{T_k m}}$ y $S \subseteq B$ es una $\mathbf{T_k m}$-subálgebra de $B$, entonces se satisfacen:*

(i) *Si $F$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro de $B$, entonces $F \cap S$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro de $S$.*

(ii) *Si $F$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro de $S$, entonces existe un $\mathbf{T_k m}$-filtro $F_1$ de $B$ tal que $F = F_1 \cap S$.*

**Dem.**

(i): Resulta inmediato de las propiedades ($\mathrm{F_m}7$) y ($\mathrm{T_k}8$).

(ii): Sea $F \subseteq B$ un $\mathbf{T_k m}$-filtro de $S$, entonces $F \subseteq FT_kM(F) \cap S$. Por otra parte, por el Lema 2.5.5 tenemos que $FT_kM(F) = F(F)$ y como $F$ es un filtro de $S$, resulta que $FT_kM(F) \cap S = F$. □

**Lema 2.5.7** *Si $B \in \mathbf{B_{T_k m}}$ y $F \in \mathcal{F}_{T_k m}(B)$, entonces $F \cap \exists(B) = \exists F$.*

**Dem.** Sea $y \in F \cap \exists(B)$, entonces $y = \exists x = \exists\exists x = \exists y$ para algún $x \in B$, e $y \in F$, por lo que $y \in \exists F$. Concluimos así que $F \cap \exists B \subseteq \exists F$. Recíprocamente, sea $y \in \exists F$, entonces $y = \exists x$ con $x \in F$ y, como $x \leqslant \exists x$, resulta que $y \in F \cap \exists B$ . Por consiguiente, $\exists F \subseteq F \cap \exists B$. □

**Lema 2.5.8** *Sea $B \in \mathbf{B_{T_k m}}$ y $a \in B$. $F(a)$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro si, y sólo si, $a \in \exists(I(B))$.*

**Dem.** Es inmediato de las propiedades ($\mathrm{F_m}5$) y ($\mathrm{T_k}15$). □

**Lema 2.5.9** *Sea $B \in \mathbf{B_{T_k m}}$ y $X \subseteq B$, entonces se satisfacen*

(i) $FT_kM(X) = F(\forall X \cup T(\forall X) \cup ... \cup T^{k-1}(\forall X))$.

(ii) $FT_kM(a) = F(\{\forall a, T(\forall a), ..., T^{k-1}(\forall a)\}) = F(\forall a \wedge T(\forall a) \wedge ... \wedge T^{k-1}(\forall a))$.

**Dem.**

(i): Sea $x \in X$, entonces $\forall x \in \forall X \cup T(\forall X) \cup ... \cup T^{k-1}(\forall X) \subseteq F(\forall X \cup T(\forall X) \cup ... \cup T^{k-1}(\forall X))$ y como $\forall x \leqslant x$, resulta que $x \in F(\forall X \cup T(\forall X) \cup ... \cup T^{k-1}(\forall X))$. Así $X \subseteq F(\forall X \cup T(\forall X) \cup ... \cup T^{k-1}(\forall X))$. Además, $F(\forall X \cup T(\forall X) \cup ... \cup T^{k-1}(\forall X))$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro. En efecto, sea $x \in F(\forall X \cup T(\forall X) \cup ... \cup T^{k-1}(\forall X))$, entonces existe $\{y_{i_j}\}_{j=1}^{n} \subseteq \forall X \cup T(\forall X) \cup ... \cup T^{k-1}(\forall X)$ tal que (1) ínf$\{y_{i_j} : 1 \leqslant j \leqslant n\} \leqslant x$. Luego, puede suceder que:

(2) $y_{i_t} = \forall x_{i_t}$, $x_{i_t} \in X$, $i_t \in \{1, 2, ..., n\}$, $t \leqslant n$, o

$y_{i_t} = T(\forall x_{i_t})$, $x_{i_t} \in X$, $i_t \in \{1, 2, ..., n\}$, $t \leqslant n$, o

$\vdots$

$y_{i_t} = T^{k-1}(\forall x_{i_t})$, $x_{i_t} \in X$, $i_t \in \{1, 2, ..., n\}$, $t \leqslant n$.

De donde obtenemos que,

$\forall y_{i_t} = \forall\forall x_{i_t} = \forall x_{i_t}$, $x_{i_t} \in X$, $i_t \in \{1, 2, ..., n\}$, $t \leqslant n$, o

$\forall y_{i_t} = \forall T(\forall x_{i_t}) = T(\forall\forall x_{i_t}) = T(\forall x_{i_t})$, $x_{i_t} \in X$, $i_t \in \{1, 2, ..., n\}$, $t \leqslant n$, o

$\vdots$

$\forall y_{i_t} = \forall T^{k-1}(\forall x_{i_t}) = T^{k-1}(\forall\forall x_{i_t}) = T^{k-1}(\forall x_{i_t})$, $x_{i_t} \in X$, $i_t \in \{1, 2, ..., n\}$, $t \leqslant n$

y en consecuencia, tenemos que $\{\forall y_{i_j}\}_{j=1}^{n} \subseteq \forall X \cup T(\forall X) \cup ... \cup T^{k-1}(\forall X)$. Teniendo en cuenta esta inclusión y que de (1) ínf$\{\forall y_{i_j} : 1 \leqslant j \leqslant n\} \leqslant \forall x$, inferimos que $\forall x \in F(\forall X \cup T(\forall X) \cup ... \cup T^{k-1}(\forall X))$.

Por otra parte, de (2) pueden presentarse los siguientes casos

$T(y_{i_t}) = T(\forall x_{i_t})$, $x_{i_t} \in X$, $i_t \in \{1, 2, ..., n\}$, $t \leqslant n$ o

$T(y_{i_t}) = TT(\forall x_{i_t}) = T^2(\forall x_{i_t})$, $x_{i_t} \in X$, $i_t \in \{1, 2, ..., n\}$, $t \leqslant n$ o

$\vdots$

$T(y_{i_t}) = TT^{k-1}(\forall x_{i_t}) = T^k(\forall x_{i_t}) = \forall x_{i_t}$, $x_{i_t} \in X$, $i_t \in \{1, 2, ..., n\}$, $t \leqslant n$.

En consecuencia, $\{T(y_{i_j})\}_{j=1}^{n} \subseteq \forall X \cup T(\forall X) \cup ... \cup T^{k-1}(\forall X)$ y como por (1), ínf$\{T(y_{i_j}) : 1 \leqslant j \leqslant n\} \leqslant T(x)$ resulta que $T(x) \in F(\forall X \cup T(\forall X) \cup ... \cup T^{k-1}(\forall X))$. Concluimos así que $F(\forall X \cup T(\forall X) \cup ... \cup T^{k-1}(\forall X))$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro.

Consideremos ahora (3) $F_1$ un $\mathbf{T_k m}$-filtro tal que $X \subseteq F_1$ y sea $y \in F(\forall X \cup T(\forall X) \cup ... \cup T^{k-1}(\forall X))$, entonces existe $\{y_{i_j}\}_{j=1}^{n} \subseteq \forall X \cup T(\forall X) \cup ... \cup T^{k-1}(\forall X)$ tal que (4) $\bigwedge\limits_{j=1}^{n} y_{i_j} \leqslant y$. Luego, tenemos los siguientes casos:

$y_{i_t} = \forall x_{i_t},\ x_{i_t} \in X,\ i_t \in \{1, 2, ..., n\},\ t \leqslant n,$ o

$y_{i_t} = T\left(\forall x_{i_t}\right),\ x_{i_t} \in X,\ i_t \in \{1, 2, ..., n\},\ t \leqslant n,$ o

$\vdots$

$y_{i_t} = T^{k-1}\left(\forall x_{i_t}\right),\ x_{i_t} \in X,\ i_t \in \{1, 2, ..., n\},\ t \leqslant n.$

De donde, por (3), obtenemos que $\{y_{i_j}\}_{j=1}^{n} \subseteq F_1$ y, en consecuencia por (4), resulta que $y \in F_1$. Lo cual implica que $F(\forall X \cup T(\forall X) \cup ... \cup T^{k-1}(\forall X)) \subseteq F_1$. De este modo, podemos concluir que $FT_kM(X) = F(\forall X \cup T(\forall X) \cup ... \cup T^{k-1}(\forall X))$.

(ii): Consecuencia directa del Lema 2.5.9 (i), es el hecho que $FT_kM(a) = F(\{\forall a, T(\forall a), ..., T^{k-1}(\forall a)\})$. Resta probar que $F(\{\forall a, T(\forall a), ..., T^{k-1}(\forall a)\}) = F(\forall a \wedge T(\forall a) \wedge ... \wedge T^{k-1}(\forall a))$. Como $\forall a, T(\forall a), ..., T^{k-1}(\forall a) \in F(\{\forall a, T(\forall a), ..., T^{k-1}(\forall a)\})$, entonces $\forall a \wedge T(\forall a) \wedge ... \wedge T^{k-1}(\forall a) \in F(\{\forall a, T(\forall a), ..., T^{k-1}(\forall a)\})$. Consideremos ahora un filtro $F_1$ tal que $\forall a \wedge T(\forall a) \wedge ... \wedge T^{k-1}(\forall a) \in F_1$, entonces teniendo en cuenta las siguientes relaciones:

$\forall a \wedge T(\forall a) \wedge ... \wedge T^{k-1}(\forall a) \leqslant \forall a,$

$\forall a \wedge T(\forall a) \wedge ... \wedge T^{k-1}(\forall a) \leqslant T(\forall a),$

$\vdots$

$\forall a \wedge T(\forall a) \wedge ... \wedge T^{k-1}(\forall a) \leqslant T^{k-1}(\forall a),$

resulta que $\forall a, T(\forall a), ..., T^{k-1}(\forall a) \in F_1$. Por consiguiente, $F(\{\forall a, T(\forall a), ..., T^{k-1}(\forall a)\}) \subseteq F_1$. Por lo tanto, $F(\{\forall a, T(\forall a), ..., T^{k-1}(\forall a)\}) = F(\forall a \wedge T(\forall a) \wedge ... \wedge T^{k-1}(\forall a))$ y de este modo $FT_kM(a) = F(\{\forall a, T(\forall a), ..., T^{k-1}(\forall a)\}) = F(\forall a \wedge T(\forall a) \wedge ... \wedge T^{k-1}(\forall a))$. □

**Corolario 2.5.10** *Sea $B \in \mathbf{B_{T_k m}}$ y $a \in B$. $FT_kM(a) = F(a)$ si, y sólo si, $a \in \exists(B) \cap I(B)$.*

**Dem.** Es inmediato de los Lemas 2.5.8 y 2.5.9. □

**Corolario 2.5.11** *Sea $B \in \mathbf{B_{T_k m}}$ y $a \in B$. $FT_kM(a) = F(a)$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro maximal si, y sólo si, $a$ es un átomo de $\exists(I(B))$.*

**Dem.**
$(\Rightarrow)$ : Supongamos que (1) $FT_kM(a)$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro maximal de $B$, entonces por el Corolario 2.5.10 $a \in \exists I(B)$. Sea $c \in \exists(I(B))$ tal que $0 \leqslant c \leqslant a$, entonces por (1) $F(a) = F(c)$ o $F(c) = B$. Luego, $a = c$ o $c = 0$ y así $a \in \Pi(\exists(I(B)))$.

$(\Leftarrow)$ : Consideremos (2) $a \in \Pi(\exists(I(B)))$ y $F$ un $\mathbf{T_k m}$-filtro de $B$ tal que $FT_kM(a) \subseteq F \subseteq B$. Sea (3) $y \in F$, entonces $z = \forall y \wedge T(\forall y) \wedge T^2(\forall y) \wedge ... \wedge T^{k-1}(\forall y) \in F \cap \exists I(B)$ y $z \wedge a \in F$. Como $z \wedge a \leqslant a, z \wedge a \in \exists I(B)$, entonces por (2) $z \wedge a = a$ o $z \wedge a = 0$, de donde resulta que $a \leqslant z$ o $0 \in F$. De esta afirmación y de (3), obtenemos que $F = F(a) = FT_kM(a)$ o $F = B$. $\square$

Con $\mathcal{F}^P_{T_k m}(B)$ designamos a la familia de los $\mathbf{T_k m}$-filtros principales.

**Corolario 2.5.12** *Sea* $\langle B, \exists, T\rangle \in \mathbf{B_{T_k m}}$. *Entonces* $F \in \mathcal{F}^P_{T_k m}(B)$ *si, y sólo si,* $F = F(\forall a \wedge T\forall a \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall a)$ *con* $a \in B$.

**Corolario 2.5.13** *Sea* $\langle B, \exists, T\rangle \in \mathbf{B_{T_k m}}$ *y sea* $a \in B$. *Entonces* $FT_kM(a) = FT_kM(T(\forall a))$.

**Dem.** Por el Lema 2.5.9 tenemos que

$$\begin{aligned} FT_kM(T\forall a) &= F\big(\forall T\forall a \wedge T\forall T\forall a \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall T\forall a\big) \\ &= F\big(\forall\forall Ta \wedge T^2\forall\forall a \wedge \ldots \wedge T^k\forall\forall a\big) \\ &= F\big(\forall Ta \wedge T^2\forall a \wedge \ldots \wedge \forall a\big) \\ &= F\big(\forall a \wedge T\forall a \wedge T^2\forall a \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall a\big) \\ &= FT_kM(a). \end{aligned}$$ $\square$

## 2.6. Relación entre los $\mathrm{T_k m}$-filtros en $B$, $\mathrm{T_k}$-filtros en $\exists(B)$, $\forall$-filtros en $I(B)$ y los filtros en $I(\exists(B))$.

Para cada $\mathbf{T_k m}$-álgebra $\langle B, \exists, T\rangle$, consideremos la $\mathbf{T_k}$-álgebra $\exists(B)$, el álgebra de Boole monádica $I(B)$ y el álgebra booleana $I(\exists(B))$. Entonces definiendo las funciones,

$\varphi_1 : \mathcal{F}_{T_k m}(B) \longrightarrow \mathcal{F}_{T_k}(\exists(B))$ definida por $\varphi_1(F) = F \cap \exists(B)$,

$\varphi_2 : \mathcal{F}_{T_k m}(B) \longrightarrow \mathcal{F}_m(I(B))$ definida por $\varphi_2(F) = F \cap I(B)$,

$\varphi_3 : \mathcal{F}_{T_k}(\exists(B)) \longrightarrow \mathcal{F}(I(\exists(B)))$ definida por $\varphi_3(F) = F \cap I(\exists(B))$ y

$\varphi_4 : \mathcal{F}_m(I(B)) \longrightarrow \mathcal{F}(I(\exists(B)))$ definida por $\varphi_4(F) = F \cap I(\exists(B))$, inferimos lo siguiente:

**Teorema 2.6.1** *Sea* $\langle B, \exists, T\rangle$ *una* $\mathbf{T_k m}$*-álgebra. Entonces las funciones* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *y* $\varphi_4$ *son isomorfismos de orden, donde los conjuntos* $\mathcal{F}_{T_k m}(B)$, $\mathcal{F}_{T_k}(\exists(B))$, $\mathcal{F}_m(I(B))$, $\mathcal{F}(I(\exists(B)))$ *se ordenan por la relación de inclusión. Además, el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{T_k m}(B) \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \mathcal{F}_{T_k}(\exists(B)) \arrow[d, "\varphi_3"] \\
\mathcal{F}_m(I(B)) \arrow[r, "\varphi_4"'] & \mathcal{F}(I(\exists(B)))
\end{tikzcd}$$

**Dem.**

Teniendo en cuenta ($\mathrm{F_m}12$) y que $T(\exists x) = \exists T(x)$ para todo $x \in B$, obtenemos que $F \cap \exists(B) \in \mathcal{F}_{T_k}(\exists(B))$ para todo $F \in \mathcal{F}_{T_k m}(B)$. Por otro lado, sea $F' \in \mathcal{F}_{T_k}(\exists(B))$, por ($\mathrm{F_m}10$) tenemos que $F' = F(F') \cap \exists B$. Sea $y \in F(F')$, entonces existe $x \in F'$ tal que $x \leqslant y$. De donde $T(x) \leqslant T(y)$ y $T(x) \in F'$, lo cual implica que $T(y) \in F(F')$. En consecuencia, por ($\mathrm{F_m}10$), resulta que $F(F')$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro en $B$ y $\varphi_1(F(F')) = F'$ y, de este modo, $\varphi_1$ es sobreyectiva. De lo cual concluimos, por ($\mathrm{F_m}12$), que $\varphi_1$ es isomorfismo de orden.

De ($\mathrm{T_k}12$) y del Lema 2.1.4, tenemos que $F \cap I(B) \in \mathcal{F}_m(I(B))$ para cada $F \in \mathcal{F}_{T_k m}(B)$ y así $\varphi_2$ está bien definida. Además $\varphi_2$ es sobreyectiva. En efecto, sea $F'$ un $\forall$-filtro en $I(B), F' \subseteq I(B)$, entonces por ($\mathrm{T_k}9$), $F(F') \in \mathcal{F}_{T_k}(B)$. Sea $y \in F(F')$, entonces por ($\mathrm{F_m}3$), existe $x \in F', x \leqslant y$. Como $\forall x \in F'$ y $\forall x \leqslant \forall y$ se sigue que $\forall y \in F(F')$. De este modo, $F(F') \in \mathcal{F}_{T_k m}(B)$ y por ($\mathrm{T_k}9$), concluimos que $\varphi_2(F(F')) = F(F') \cap I(B) = F'$. De esta afirmación y de ($\mathrm{T_k}12$) inferimos que $\varphi_2$ es isomorfismo de orden.

De ($\mathrm{T_k}8$) y del Lema 2.1.4, tenemos que $F \cap I(\exists(B)) \in \mathcal{F}(I(\exists(B)))$ para cada $F \in \mathcal{F}_{T_k}(\exists(B))$. Por otra parte, por ($\mathrm{T_k}9$), $F(F') \in \mathcal{F}_{T_k}(\exists(B))$ para cada $F' \in \mathcal{F}(I(\exists(B)))$, lo cual implica que $\varphi_3$ es sobreyectiva. Consideremos ahora $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{T_k}(\exists(B))$ tales que (1) $\varphi_3(F_1) \subseteq \varphi_3(F_2)$ y sean $x \in F_1 \subseteq \exists(B)$ e $y = \forall x \wedge T(\forall x) \wedge ... \wedge T^{k-1}(\forall x)$. Entonces $y \in F_1 \cap I(\exists(B))$ de donde por (1) resulta que $y \in F_2 \cap I(\exists(B))$. Además, como $y \leqslant \forall x = x$, concluimos que $x \in F_2$ y en consecuencia $F_1 \subseteq F_2$. Luego, $F_1 \subseteq F_2$ si, y sólo si, $\varphi_3(F_1) \subseteq \varphi_3(F_2)$ y por consiguiente $\varphi_3$ es isomorfismo de orden.

De ($\mathrm{T_k}$12) y del Lema 2.1.4 tenemos que $F \cap I(\exists(B)) \in \mathcal{F}(I(\exists(B)))$ para cada $F \in \mathcal{F}_m(I(B))$ lo cual implica que $\varphi_4$ está bien definida. Además, del Lema 2.1.4 y ($\mathrm{F_m}$10) inferimos que $\varphi_4$ es sobreyectiva. Por otro lado, consideremos $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_m(IB)$ tales que (2) $\varphi_4(F_1) \subseteq \varphi_4(F_2)$ y sea $x \in F_1$, entonces $T(\forall x) = \forall x$. De donde $\forall x \in F_1 \cap I(\exists(B))$ y por (2) resulta que $\forall x \in F_2 \cap I(\exists(B))$. Esto implica que $x \in F_2$ y así $F_1 \subseteq F_2$. En consecuencia, $F_1 \subseteq F_2$ si, y sólo si, $\varphi_4(F_1) \subseteq \varphi_4(F_2)$. Lo cual nos permite concluir que $\varphi_4$ es isomorfismo de orden.

Es sencillo probar que $\varphi_3 \circ \varphi_1 = \varphi_4 \circ \varphi_2$ □

## 2.7. $\mathrm{T_k}$m-homomorfismos

En esta sección, describimos algunas de las propiedades de los $\mathbf{T_k m}$-homomorfismos los cuáles se definen de la manera habitual.

Es claro que si $h : A \longrightarrow B$ es un $\mathbf{T_k m}$-homomorfismo, entonces $h(\forall a) = \forall(h(a))$ para todo $a \in A$.

### Núcleo de un $\mathrm{T_k}$m-homomorfismo

**Definición 2.7.1** *Sean $h : A \longrightarrow B$ un $\mathbf{T_k m}$-homomorfismo, el núcleo de $h$ es el conjunto $N(h) = \{x \in A : h(x) = 1\}$.*

**Lema 2.7.2** *Si $h : A \longrightarrow B$ es un $\mathbf{T_k m}$-homomorfismo, entonces $N(h)$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro y $h(A)$ es una $\mathbf{T_k m}$-subálgebra de $B$.*

**Dem.** Como $h$ es un $\mathbf{T_k m}$-homomorfismo resulta $h(\forall x) = 1$ y $h(T(x)) = 1$ para todo $x \in N(h)$. De este modo, $\forall x \in N(h)$ y $T(x) \in N(h)$ para todo $x \in N(h)$. Concluimos que $N(h)$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro. Es de rutina probar que $h(A)$ es una $\mathbf{T_k m}$-subálgebra de $B$. □

**Lema 2.7.3** *Sea $h : B \longrightarrow B'$ un $\mathbf{T_k m}$-homomorfismo, se satisfacen:*

(i) $h_{|_{\exists(B)}} : \exists(B) \longrightarrow \exists'(B')$ *es un $\mathbf{T_k}$-homomorfismo y* $N(h_{|_{\exists(B)}}) = \exists(B) \cap N(h)$.

(ii) $h_{|_{I(B)}} : I(B) \longrightarrow I(B')$ *es un $\mathbf{Df_1}$-homomorfismo y* $N(h_{|_{I(B)}}) = I(B) \cap N(h)$.

**Dem.**

(i): Es claro que $h_{|_{\exists(B)}} : \exists(B) \longrightarrow \exists'(B')$ es un homomorfismo booleano. Sea $x \in \exists(B)$, entonces por la hipótesis y el Lema 2.1.3, resulta que $h_{|_{\exists(B)}}(T(x)) = h(T(x)) = T(h(x)) = T\left(h_{|_{\exists(B)}}(x)\right)$. Luego, $h_{|_{\exists(B)}}$ es un $\mathbf{T_k}$-homomorfismo.
Por otro lado, las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos:

(1) $x \in N(h_{|_{\exists(B)}})$,

(2) $x \in \exists(B)$ y $h_{|_{\exists(B)}}(x) = 1$,

(3) $h(x) = 1$ y $x \in \exists(B)$,

(4) $x \in \exists(B) \cap N(h)$,

de lo cual concluimos que, $N(h_{|_{\exists(B)}}) = \exists(B) \cap N(h)$

(ii): Es claro que $h_{|_{I(B)}} : I(B) \longrightarrow I(B')$ es un homomorfismo booleano. Sea $x \in I(B)$, entonces por la hipótesis y el Lema 2.1.4 resulta que $h_{|_{I(B)}}(\exists x) = h(\exists(x)) = \exists(h(x)) = \exists\left(h_{|_{I(B)}}(x)\right)$. Luego, $h_{|_{I(B)}}$ es un $\mathbf{Df_1}$-homomorfismo.
Por otro lado, las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos:

(5) $x \in N(h_{|_{I(B)}})$,

(6) $x \in I(B)$ y $h_{|_{I(B)}}(x) = 1$,

(7) $h(x) = 1$ y $x \in I(B)$,

(8) $x \in I(B) \cap N(h)$,

y así concluimos que $N(h_{|_{I(B)}}) = I(B) \cap N(h)$ $\square$

# Capítulo 3

# $\mathrm{T_k}$m-congruencias

En este capítulo, determinamos las congruencias de una $\mathbf{T_k m}$-álgebra y caracterizamos las álgebras subdirectamente irreducibles y, en particular, las simples. Este último resultado nos permite probar que $\mathbf{B_{T_k m}}$ es una variedad discriminadora y, como consecuencia, las congruencias principales se caracterizan.

## 3.1. Caracterización de las $\mathrm{T_k}$m-congruencias

En esta sección caracterizamos las $\mathbf{T_k m}$-congruencias por medio de la clase de los $\mathbf{T_k m}$-filtros.

Sea $B \in \mathbf{B_{T_k m}}$, para cada $F \in \mathcal{F}_{T_k m}(B)$, consideramos la relación $R(F)$ definida en la sección 1.2.5.

**Lema 3.1.1** *Sea $B \in \mathbf{B_{T_k m}}$, se satisfacen*

(i) *Si $F \in \mathcal{F}_{T_k m}(B)$, entonces $R(F)$ es una $\mathbf{T_k m}$-congruencia sobre $B$ y $[1]_{R(F)} = F$.*

(ii) *Si $\Theta \in Con_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B)$, entonces $[1]_\Theta \in \mathcal{F}_{T_k m}(B)$ y $R([1]_\Theta) = \Theta$.*

**Dem.**

(i): Por $(\mathrm{C_m}1)$ y $(\mathrm{C_{T_k}}1)$, resulta que $R(F) \in Con_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B)$. Por otra parte, sea $x \in [1]_{R(F)}$, entonces existe $f \in F$ tal que $x \wedge f = 1 \wedge f$. Luego $f \leqslant x$ y como $F$ es filtro resulta que $x \in F$. Por lo tanto $[1]_{R(F)} \subseteq F$. La otra inclusión es inmediata.

(ii): Resulta inmediato de $(\mathrm{C_m}1)$ y $(\mathrm{C_{T_k}}1)$. $\square$

Por lo tanto, podemos establecer:

**Teorema 3.1.2** *Sea $B \in \mathbf{B_{T_k m}}$ con más de un elemento. Entonces*

(i) $Con_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B) = \{R(F) : F \in \mathcal{F}_{T_k m}(B)\}$, *donde* $R(F) = \{(x,y) \in B \times B :$ *existe* $f \in F$ *tal que* $x \wedge f = y \wedge f\}$.

(ii) *Los retículos* $Con_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B)$ *y* $\mathcal{F}_{T_k m}(B)$ *son isomorfos, considerando las funciones* $\Theta \mapsto [1]_\Theta$ *y* $F \mapsto R(F)$, *que son mutuamente inversas.*

**Dem.**

(i): Resulta como consecuencia del Lema 3.1.1.

(ii): De las definiciones dadas resulta que si $\Theta_1 \subseteq \Theta_2$, entonces $[1]_{\Theta_1} \subseteq [1]_{\Theta_2}$ y que la hipótesis $F_1 \subseteq F_2$ implica que $R(F_1) \subseteq R(F_2)$. Además, por el inciso (i) y el Lema 3.1.1, tenemos que ambas correspondencias son biyectivas y como son isótonas, concluímos que éstas son isomorfismos de retículos. □

**Corolario 3.1.3** *Sea $\langle B, \exists, T \rangle$ una $\mathbf{T_k m}$-álgebra con mas de un elemento. Entonces los retículos $Con_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B), \mathcal{F}_{T_k m}(B)$ y $\mathcal{F}(I(\exists(B)))$ son isomorfos.*

**Dem.** Resulta inmediato de los Teoremas 3.1.2 y 2.6.1. □

Si $F$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro de $B$, entonces el conjunto cociente $B/R(F)$ se puede algebrizar en la forma canónica, el álgebra resultante es una $\mathbf{T_k m}$-álgebra y resultados de álgebra universal nos permiten afirmar que

**Lema 3.1.4** *Si $F$ es un $\mathbf{T_k m}$-filtro de $B$, entonces la función $q : B \longrightarrow B/R(F)$ definida por $q(x) = [x]_{R(F)}$ es un $\mathbf{T_k m}$-epimorfismo y $N(q) = F$.*

**Lema 3.1.5** *Sean $A, B \in \mathbf{B_{T_k m}}$, $h : A \longrightarrow B$ un $\mathbf{T_k m}$-homomorfismo y $N(h)$ el núcleo de $h$. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) $(x,y) \in R(N(h))$ *si, y sólo si,* $h(x) = h(y)$,

(ii) *Si $h$ es sobreyectiva, entonces $A/N(h) \simeq B$.*

Los resultados precedentes nos permiten afirmar que salvo isomorfismos, cada imagen homomorfa de una $\mathbf{T_k m}$-álgebra $B$ se puede obtener como un cociente $B/F$ siendo $F$ un $\mathbf{T_k m}$-filtro de $B$.

## 3.2. El retículo de las congruencias de una $\mathbf{T_k}$m-álgebra finita

En esta sección, probamos que en el caso particular de una $\mathbf{T_k m}$-álgebra finita, el retículo de las congruencias es un álgebra de Boole.

**Lema 3.2.1** *Sea $B_n$ una $\mathbf{T_k m}$-álgebra finita, entonces $\mathcal{F}_{T_k m}(B_n) = \{F(x) : x \in \exists(I(B_n))\}$.*

**Dem.** Resulta como consecuencia del Teorema 3.1.2 y del Lema 2.5.8. □

**Corolario 3.2.2** *Sea $B_n \in \mathbf{B_{T_k m}}$, entonces los retículos $\exists(I(B_n))$ y $\mathcal{F}_{T_k m}(B_n)$ son anti-isomorfos.*

**Dem.** Es de rutina probar que la función $\varphi : \exists(I(B_n)) \longrightarrow \mathcal{F}_{T_k m}(B_n)$ definida por $\varphi(x) = F(x)$ es un anti-isomorfismo de orden. □

Una consecuencia del Lema 2.1.4, el Teorema 3.1.2 y el Corolario 3.2.2, es el siguiente

**Corolario 3.2.3** *Sea $B_n \in \mathbf{B_{T_k m}}$, entonces*

(i) *$\mathcal{F}_{T_k m}(B_n)$ es un álgebra de Boole.*

(ii) *El retículo $Con_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B_n)$ es un álgebra de Boole.*

**Corolario 3.2.4** $\left|Con_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B_n)\right| = 2^{|\Pi(\exists(I(B_n)))|}$.

## 3.3. Otra caracterización de las congruencias

A continuación indicamos otra caracterización de las congruencias en las $\mathbf{T_k m}$-álgebras, a tal efecto definimos en $B \in \mathbf{B_{T_k m}}$ la operación binaria $+$.

Sea $\langle B, \exists, T\rangle$ una $\mathbf{T_k m}$-álgebra y sea $+$ la operación binaria definida sobre $B$ como sigue:

$$x + y = (-T(x) \vee T(y)) \wedge (-T(y) \vee T(x)) .$$

Entonces $+$ satisface las siguientes propiedades:

(S$_1$) $x + y = 1$ si, y sólo si, $x = y$,

(S$_2$) $x + y = y + x$,

(S$_3$) $(x+y) \wedge T(x) = (x+y) \wedge T(y)$,

(S$_4$) $x+1 = T(x)$, $x+0 = -T(x)$.

**Dem.**

(S$_1$) Si $x+y=1$, entonces $-T(x) \vee T(y) = -T(y) \vee T(x) = 1$, de donde $-\big(-T(y)\big) = T(y) = T(x)$ y así $y = x$. La recíproca es trivial.

(S$_3$) (1) $$\begin{aligned}(x+y) \wedge T(x) &= (-T(x) \vee T(y)) \wedge (-T(y) \vee T(x)) \wedge T(x)\\ &= (-T(x) \vee T(y)) \wedge T(x)\\ &= T(y) \wedge T(x).\end{aligned}$$

En forma análoga se prueba que (2) $(x+y) \wedge T(y) = T(x) \wedge T(y)$.

De (1) y (2) obtenemos que $(x+y) \wedge T(x) = (x+y) \wedge T(y)$

(S$_4$) $$\begin{aligned}x+1 &= (-T(x) \vee T(1)) \wedge (-T(1) \vee T(x))\\ &= 1 \wedge T(x)\\ &= T(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x+0 &= (-T(x) \vee T(0)) \wedge (-T(0) \vee T(x))\\ &= -T(x) \wedge 1\\ &= -T(x).\end{aligned}$$ □

**Observación 3.3.1** *Si $\Theta \in Con_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B)$ y $(x,y) \in \Theta$, entonces es sencillo verificar que $(x+z, y+z) \in \Theta$ para todo $z \in B$.*

**Lema 3.3.2** *Sea $F$ un $\mathbf{T_k m}$-filtro de una $\mathbf{T_k m}$-álgebra $B$. Entonces dados $x, y \in B$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *existe $f \in F$ tal que $x \wedge f = y \wedge f$,*

(ii) $x + y \in F$.

**Dem.**

(i) $\Rightarrow$ (ii) : De la hipótesis resulta que existe $f \in F$ tal que $T(x) \wedge T(f) = T(y) \wedge T(f)$, de lo cual obtenemos que $-T(x) \vee T(y) \vee -T(f) = 1$ y $-T(y) \vee T(x) \vee -T(f) = 1$. De donde tenemos que $\big((-T(x) \vee T(y)) \wedge (-T(y) \vee T(x))\big) \vee -T(f) = 1$. Así $(x+y) \vee -T(f) = 1$ y, por lo tanto, $T(f) \leq x+y$. Lo cual nos pemite concluir que $x+y \in F$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : De ($S_3$) resulta que $T^{k-1}(x+y) \wedge x = T^{k-1}(x+y) \wedge y$. Luego, de la hipótesis y por ser $F$ un $\mathbf{T_k m}$-filtro, resulta que existe $f = T^{k-1}(x+y) \in F$ tal que $f \wedge x = f \wedge y$. $\square$

Del Lema 3.3.2 y el Teorema 3.1.2 resulta que las congruencias en las $\mathbf{T_k m}$-álgebras también pueden ser descriptas del siguiente modo:

**Corolario 3.3.3** *Sea $B$ una $\mathbf{T_k m}$-álgebra con más de un elemento. Entonces $Con_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B) = \{R'(F) : F \in \mathcal{F}_{T_k m}(B)\}$ siendo $R'(F) = \{(x,y) \in B \times B : x+y \in F\}$.*

## 3.4. $\mathrm{T_k}$m-álgebras simples y subdirectamente irreducibles

En esta sección damos una descripción de las álgebras subdirectamente irreducibles y probamos que coinciden con las álgebras simples.

**Lema 3.4.1** *Si $\exists^{\mathrm{o}}$ es el cuantificador caótico, entonces cualquier $\mathbf{T_k m}$-álgebra $\langle B, \exists^{\mathrm{o}}, T\rangle$ es simple.*

**Dem.** Sea $F \neq \{1\}$ un $\mathbf{T_k m}$-filtro de $B$, entonces existe $x \in F, x \neq 1$. Luego, $\forall^{\mathrm{o}} x \in F$ y como $x \neq 1$, resulta que $0 \in F$ y así $F = B$. Concluímos que $\langle B, \exists^{\mathrm{o}}, T\rangle$ es simple. $\square$

Como corolario de los Teoremas 2.6.1 y 3.1.2 obtenemos la siguiente caracterización de las $\mathbf{T_k m}$-álgebras simples.

**Corolario 3.4.2** *En una $\mathbf{T_k m}$-álgebra $B$ no trivial, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$B$ es una $\mathbf{T_k m}$-álgebra simple,*

(ii) *$\exists(B)$ es una $\mathbf{T_k}$-álgebra simple,*

(iii) *$I(\exists(B))$ es un álgebra booleana simple,*

(iv) *$I(B)$ es un álgebra de Boole monádica simple.*

**Corolario 3.4.3** *Sea $B \in \mathbf{B_{T_k m}}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$B$ es una $\mathbf{T_k m}$-álgebra subdirectamente irreducible,*

(ii) *$I(\exists(B)) = \mathbf{2}$ siendo $\mathbf{2}$ el álgebra de Boole con dos elementos,*

(iii) *$B$ es una $\mathbf{T_k m}$-álgebra simple.*

**Dem.**

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Sea $B$ una $\mathbf{T_k m}$-álgebra subdirectamente irreducible. Entonces, por el Teorema 3.1.2, tenemos que (2) existe $F \in \mathcal{F}_{T_k m}(B)$ tal que $\{1\} \subset F \subset B$ y $F \subset F'$ para todo $F' \in \mathcal{F}_{T_k m}(B)$. Supongamos que existe $x \in I(\exists(B))$ tal que $x \neq 0, x \neq 1$, entonces por el Lema 2.1.4, existe $z \in I(\exists(B))$ tal que $-x = z$. Luego, $F(x), F(z) \in \mathcal{F}_{T_k m}(B)$ y por (2) tenemos que $F \subset F(x) \cap F(z) = \{1\}$, de donde resulta que $F = \{1\}$, lo que contradice (2). Por consiguiente, $I(\exists(B)) = \{0, 1\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Es inmediato del Corolario 3.4.2.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Es trivial. $\square$

**Corolario 3.4.4** *La variedad $\mathbf{B_{T_k m}}$ es semisimple, residualmente finita y localmente finita.*

## 3.5. Propiedades especiales de las congruencias

En las secciones anteriores hemos mostrado algunas propiedades de las congruencias. Nuestro próximo objetivo es estudiar, en general, el comportamiento de las $\mathbf{T_k m}$-congruencias para lo cual se hace necesario determinar algunos resultados sobre esta variedad.

**Teorema 3.5.1** *$\mathbf{B_{T_k m}}$ es a congruencias conmutativas.*

**Dem.** Sean $\Theta_1, \Theta_2 \in Con_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B)$ y $(x, y) \in \Theta_1 \circ \Theta_2$, entonces existen $z \in B, F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{T_k m}(B)$ tales que $(x, z) \in \Theta_1 = R(F_1)$ y $(z, y) \in \Theta_2 = R(F_2)$. De donde se sigue que existen $f_1 \in F_1, f_2 \in F_2$ tales que (1) $x \wedge f_1 = z \wedge f_1$ y $z \wedge f_2 = y \wedge f_2$. Consideremos $t = (x \wedge f_2) \vee (y \wedge f_1)$, luego de (1) resulta que $t \wedge f_2 = x \wedge f_2$ y $t \wedge f_1 = y \wedge f_1$. De esta afirmación, obtenemos que $(x, y) \in \Theta_2 \circ \Theta_1$. Luego, $\Theta_1 \circ \Theta_2 \subseteq \Theta_2 \circ \Theta_1$, y así concluimos que $\mathbf{B_{T_k m}}$ es a congruencias conmutativas. $\square$

**Lema 3.5.2** *$\mathbf{B_{T_k m}}$ es a congruencias distributivas.*

**Dem.** Resulta inmediato del Teorema 3.1.2. □

**Teorema 3.5.3**

(i) $\mathbf{B_{T_km}}$ *tiene la propiedad de extensión de congruencias.*

(ii) $\mathbf{B_{T_km}}$ *es a congruencias regulares.*

**Dem.**

(i): Sea $S$ una subálgebra de una $\mathbf{T_km}$-álgebra $B$ y $\varphi_1 \in Con_{\mathbf{B_{T_km}}}(S)$, entonces por el Lema 3.1.1 tenemos que existe $F_1 \in \mathcal{F}_{T_km}(S)$ tal que $\varphi_1 = R(F_1)$. De donde, por el Lema 2.5.6, se sigue que existe $F \in \mathcal{F}_{T_km}(B)$ tal que (1) $F_1 = F \cap S$. Además, $R(F_1) = R(F) \cap (S \times S)$. En efecto, sea $(x, y) \in R(F_1) \subseteq S \times S$, entonces existe $f_1 \in F_1$ tal que $x \wedge f_1 = y \wedge f_1, x, y \in S$. Luego, por (1), $f_1 \in F$ y así $(x, y) \in R(F) \cap (S \times S)$. Recíprocamente, sea $(x, y) \in R(F) \cap (S \times S)$, entonces $(x \vee -x, y \vee -x) \in R(F)$. De este modo, $y \vee -x \in [1]_{R(F)} = F$ y como $x, y \in S$, se tiene que $y \vee -x \in F \cap S = F_1 = [1]_{R(F_1)}$. En consecuencia, (2) $(1, y \vee -x) \in R(F_1)$. Siguiendo un razonamiento análogo obtenemos que (3) $(1, -y \vee x) \in R(F_1)$. De (2) y (3) deducimos que $(x, x \wedge (y \vee -x)), (y, y \wedge (-y \vee x)) \in R(F_1)$ y por consiguiente $(x, x \wedge y), (y, y \wedge x) \in R(F_1)$. De donde resulta que $(x, y) \in R(F_1) = \varphi_1$. Concluímos que $\varphi_1 = R(F) \cap (S \times S)$ con $R(F) \in Con_{\mathbf{B_{T_km}}}(B)$ y así $\mathbf{B_{T_km}}$ tiene la PEC.

(ii): Sean $\varphi, \alpha \in Con_{\mathbf{B_{T_km}}}(B)$ tales que existe $x \in B$, $[x]_\varphi = [x]_\alpha$. Entonces,

$$\begin{aligned}
[1]_\varphi &= [x]_\varphi \vee \left(-[x]_\varphi\right) \\
&= [x]_\alpha \vee (-[x]_\alpha) \\
&= [1]_\alpha.
\end{aligned}$$

Además, como por el Lema 3.1.1, se satisface que $\varphi = R([1]_\varphi)$ y $\alpha = R([1]_\alpha)$, resulta que $\varphi = \alpha$ □

Del Teorema 3.5.3 y los resultados obtenidos por A. Day, en [11], y por W. J. Blok y D. Pigozzi, en [9], podemos deducir que:

**Corolario 3.5.4**

(i) $\mathbf{B_{T_km}}$ *satisface la PECP,*

(ii) *para toda* $A, B \in \mathbf{B_{T_km}}$ *tales que* $B$ *es subálgebra de* $A$ *y para todo* $a, b \in B$, *se tiene que* $\Theta_B(a,b) = \Theta_A(a,b) \cap (B \times B)$, *donde* $\Theta_B(a,b)$ *denota la congruencia principal generada por el par* $(a,b)$ *en la subálgebra* $B$.

## 3.6. La variedad discriminadora $\mathbf{B_{T_km}}$

En esta sección, aplicamos los resultados obtenidos en las secciones previas para mostrar que $\mathbf{B_{T_km}}$ es una variedad discriminadora y además caracterizar a las congruencias principales.

Uno de los trabajos que motivaron el estudio de las variedades discriminadoras fue el trabajo de Werner, *Discriminator-Algebras, Algebraic Representation and Model Theoretic Properties* ([38]). Posteriormente, A. F. Pixley obtuvo propiedades interesantes relacionadas a este tipo de variedad ([33]).

**Definición 3.6.1** *Una función discriminadora ternaria sobre un conjunto* $A$, *es una función* $t : A^3 \to A$, *definida por:*

$$t(x,y,z) = \begin{cases} z & \textit{si } x = y \\ x & \textit{en otro caso} \end{cases} .$$

**Definición 3.6.2** *Una variedad* $\mathbf{V}$ *es discriminadora, si tiene un término* $p$ *que coincide con la función discriminadora en cada miembro subdirectamente irreducible de la variedad. Tal término se denomina el término discriminador ternario para* $\mathbf{V}$.

**Teorema 3.6.3** *La variedad* $\mathbf{B_{T_km}}$ *es una variedad discriminadora.*

**Dem.** Sea $p(x,y,z) = (h(x,y) \wedge z) \vee (-h(x,y) \wedge x)$ siendo $h(x,y) = \forall\,(x+y) \wedge T\,(\forall\,(x+y)) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\,(\forall\,(x+y))$. En virtud de ($\mathrm{S}_1$), tenemos que $h(x,x) = 1$ y así $p(x,x,z) = z = t(x,x,z)$. Si $x \neq y$, entonces de ($\mathrm{S}_1$) inferimos que $x + y \neq 1$ y por lo tanto $h(x,y) \neq 1$. Además, como $h(x,y) \in I\exists B$, por el Corolario 3.4.3 obtenemos que $h(x,y) = 0$. De este modo, resulta que $p(x,y,z) = x = t(x,y,z)$. Concluimos que, $\mathbf{B_{T_km}}$ es una variedad discriminadora. □

**Observación 3.6.4** *De la demostración del Teorema 3.6.3 tenemos que el término polinomial discriminador para* $\mathbf{B_{T_km}}$ *es* $p(x,y,z) = (h(x,y) \wedge z) \vee (-h(x,y) \wedge x)$, *donde* $h(x,y) = \forall\,(x+y) \wedge T\,(\forall\,(x+y)) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\,(\forall\,(x+y))$.

Una consecuencia directa del Teorema 3.6.3 y los resultados establecidos en [38], es

**Corolario 3.6.5** *Se satisfacen las propiedades siguientes:*

(i) *La variedad* $\mathbf{B_{T_km}}$ *es aritmética, esto es, es a congruencias distributivas y conmutativas.*

(ii) *Si* $B \in \mathbf{B_{T_km}}$, $|B| \geq 2$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

 (a) $B$ *es subdirectamente irreducible,*

 (b) $B$ *es simple,*

 (c) $B$ *es directamente indescomponible.*

(iii) *Para cada álgebra* $B \in \mathbf{B_{T_km}}$ *y* $a, b, c, d \in B$, *se verifica que* $(c, d) \in \Theta(a, b)$ *si, y sólo si,* $p(a, b, c) = p(a, b, d)$, *es decir,* $\mathbf{B_{T_km}}$ *tiene congruencias principales definibles ecuacionalmente.*

(iv) *Cada congruencia principal sobre* $B \in \mathbf{B_{T_km}}$, *es una congruencia factor.*

(v) *Las congruencias principales de* $B \in \mathbf{B_{T_km}}$, *forman un subretículo de* $Con_{\mathbf{B_{T_km}}}(B)$.

(vi) *Cada congruencia compacta de* $B \in \mathbf{B_{T_km}}$, *es una congruencia principal.*

(vii) *Cada congruencia de* $B \in \mathbf{B_{T_km}}$ *es regular, normal y filtral.*

(viii) *La variedad* $\mathbf{B_{T_km}}$ *tiene la PEC.*

Por otro lado, teniendo en cuenta los resultados establecidos en [21] y la Observación 3.6.4 podemos afirmar que

**Teorema 3.6.6** $\mathbf{B_{T_km}}$ *es una variedad discriminadora dual y el término discriminador ternario dual es* $d(x, y, z) = (-h(x, y) \wedge z) \vee (h(x, y) \wedge x)$.

## 3.7. Congruencias principales

Como toda congruencia es supremo de congruencias principales, es de gran utilidad tener una caracterización precisa de las mismas.

El Lema 3.7.1 nos permitirá dar una nueva descripción de las congruencias principales sobre las $\mathbf{T_km}$-álgebras la cual es mas simple que la obtenida en (iii) del Corolario 3.6.5.

**Lema 3.7.1** *Sea* $\langle B, \exists, T\rangle \in \mathbf{B_{T_k m}}$. *Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) $\Theta(a, b) = \Theta(a + b, 1)$.

(ii) $\Theta(a, 1) = \Theta(\forall a, 1)$.

(iii) $\Theta(a, b) = \Theta(\forall (a + b), 1)$.

(iv) $[1]_{\Theta(a,b)} = FT_k M(\forall (a + b))$.

**Dem.**

(i): Como $(a, b) \in \Theta(a, b)$ y $\Theta(a, b) \in Con_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B)$, entonces, por la Observación 3.3.1, tenemos que $(a + x, b + x) \in \Theta(a, b)$ para todo $x \in B$. Por consiguiente $(a + b, b + b) \in \Theta(a, b)$, lo cual implica que $\Theta(a + b, 1) \subseteq \Theta(a, b)$. Recíprocamente, como $(a + b, 1) \in \Theta(a + b, 1)$, entonces $\big((a + b) \wedge T(a), T(a)\big) \in \Theta(a+b, 1)$, $\big((a + b) \wedge T(b), T(b)\big) \in \Theta(a + b, 1)$ y por ($S_3$), obtenemos que $(T(a), T(b)) \in \Theta(a + b, 1)$, de donde se sigue que $(a, b) \in \Theta(a + b, 1)$, y así concluimos que $\Theta(a, b) \subseteq \Theta(a + b, 1)$.

(ii): Como $(a, 1) \in \Theta(a, 1)$, entonces $(\forall a, 1) \in \Theta(a, 1)$ de lo cual obtenemos que $\Theta(\forall a, 1) \subseteq \Theta(a, 1)$. Recíprocamente, del hecho que $(\forall a, 1) \in \Theta(\forall a, 1)$ y $(a, a) \in \Theta(\forall a, 1)$, resulta que $(a, 1) \in \Theta(\forall a, 1)$ y así $\Theta(a, 1) \subseteq \Theta(\forall a, 1)$.

(iii): Inmediato de (i) y (ii).

(iv): De (iii) tenemos que $\forall (a + b) \in [1]_{\Theta(a,b)}$. Entonces $FT_k M(\forall (a + b)) \subseteq [1]_{\Theta(a,b)}$. Recíprocamente, sean $x \in [1]_{\Theta(a,b)}$ e $y = \forall (a + b) \wedge T\forall (a + b) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall (a + b)$, entonces, por el Corolario 3.6.5, tenemos que $p(a, b, x) = p(a, b, 1)$. De esta última afirmación y la Observación 3.6.4, obtenemos que $(y \wedge x) \vee (-y \wedge a) = y \vee a$, lo cual implica que $y \wedge ((y \wedge x) \vee (-y \wedge a)) = y \wedge (y \vee a)$ y, por consiguiente, $y \wedge x = y$. De este modo, $y \leqslant x$ y como por el Lema 2.5.9, $y \in FT_k M(\forall (a + b))$, resulta que $x \in FT_k M(\forall (a + b))$. Concluímos así que $[1]_{\Theta(a,b)} \subseteq FT_k M(\forall (a + b))$. □

**Teorema 3.7.2** *Sea* $\langle B, \exists, T\rangle \in \mathbf{B_{T_k m}}$. *Entonces la congruencia principal generada por* $(a, b)$ *en* $B$ *es*

$$\Theta(a, b) = \{(x, y) \in B \times B : x \wedge h(a, b) = y \wedge h(a, b)\}.$$

**Dem.** De los Lemas 3.1.1, 3.7.1 y 2.5.9, tenemos que $\Theta(a, b) = R([1]_{\Theta(a,b)}) = R(FT_k M(\forall (a + b))) = R(F(\forall (a + b) \wedge T\forall (a + b) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall (a + b))) = R(F(h(a, b))) = \{(x, y) \in B \times B : x \wedge h(a, b) = y \wedge h(a, b)\}$. □

**Observación 3.7.3** *De la demostración del Teorema 3.7.2 resulta que para todo $a, b \in B$,*

$$\Theta(a,b) = R(F(\forall\,(a+b) \wedge T\forall\,(a+b) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall\,(a+b))) = R(F(h(a,b))).$$

**Teorema 3.7.4** *Toda congruencia principal de una $\mathbf{T_k m}$-álgebra $B$ es una congruencia factor.*

**Dem.** Sean $a, b \in B$, entonces por la Observación 3.7.3 resulta que $\Theta(a,b) = R(F)$ con $F = F(\forall\,(a+b) \wedge T\forall(a+b) \wedge ... \wedge T^{k-1}\forall(a+b))) = F(h(a,b))$. Sea $F^* = F\,(-h(a,b))$, luego por los Lemas 2.1.4 y 2.5.8, se sigue que $F^* \in \mathcal{F}_{T_k m}(B)$ y por el Lema 3.1.1 tenemos que $\Theta^* = R(F^*) \in Con_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B)$. Por otra parte, $F \cap F^* = \{1\}$ y $F(F \cup F^*) = B$, de donde inferimos que $\Theta(a,b)$ y $R(F^*)$ satisfacen las condiciones (CF1) y (CF2). Además, del Corolario 3.6.5 deducimos (CF3). Por lo tanto, $\Theta(a,b)$ es una congruencia factor. □

Con $Con^P_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B)$ se designa a la familia de las congruencias principales de una $\mathbf{T_k m}$-álgebra $B$.

**Lema 3.7.5** *Sea $\langle B, \exists, T\rangle \in \mathbf{B_{T_k m}}$. Entonces existe una correspondencia biunívoca entre los conjuntos $\mathcal{F}^P_{T_k m}(B)$ y $Con^P_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B)$.*

**Dem.** Consideremos las funciones $\varphi : \mathcal{F}^P_{T_k m}(B) \longrightarrow Con^P_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B)$ y $\psi : Con^P_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B) \longrightarrow \mathcal{F}^P_{T_k m}(B)$ definidas por $\varphi(FT_kM(a)) = \Theta(\forall a, 1)$ y $\psi(\Theta(a,b)) = FT_kM(\forall(a+b))$, respectivamente. De (S4), de los Lemas 3.7.1, 2.5.9, y del Corolario 2.5.13 inferimos que $\varphi \circ \psi = id_{Con^P_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B)}$ y $\psi \circ \varphi = id_{\mathcal{F}^P_{T_k m}(B)}$. Luego, las funciones $\psi$ y $\varphi$ son mutuamente inversas. Concluimos que $\varphi$ es una biyección. □

**Lema 3.7.6** *La función $\varphi$ definida en el Lema 3.7.5 es un monomorfismo de orden.*

**Dem.** Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}^P_{T_k m}(B)$ tales que $F_1 = FT_kM(a) \subseteq F_2 = FT_kM(b)$, entonces por el Lema 2.5.9 resulta que (1) $\forall b \wedge T\forall b \wedge T^2\forall b \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall b \leqslant \forall a \wedge T\forall a \wedge T^2\forall a \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall a$. Sea $(x,y) \in \Theta(a,1)$, entonces, por el Teorema 3.7.2, resulta que $x \wedge \forall\,(a+1) \wedge T\forall\,(a+1) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall\,(a+1) = y \wedge \forall\,(a+1) \wedge T\forall\,(a+1) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall\,(a+1)$, de donde por $(S_4)$ $x \wedge \forall a \wedge T\forall a \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall a = y \wedge \forall a \wedge T\forall a \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall a$, de lo cual por (1), resulta que $x \wedge \forall b \wedge T\forall b \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall b = x \wedge \forall b \wedge T\forall b \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall b \wedge \forall a \wedge T\forall a \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall a = y \wedge \forall b \wedge T\forall b \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall b$. Concluimos así que $\Theta\,(a,1) \subseteq \Theta\,(b,1)$ Recíprocamente, sean $a, b \in B$ tales que $\Theta\,(a,1) \subseteq \Theta\,(b,1)$, entonces $[1]_{\Theta(a,1)} \subseteq [1]_{\Theta(b,1)}$, de lo cual por el Lema 3.7.1 (iv) obtenemos la inclusión deseada $FT_kM(a) \subseteq FT_kM(b)$. □

**Corolario 3.7.7** *Los conjuntos ordenados $\mathcal{F}^P_{T_k m}(B)$ y $Con^P_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B)$, son isomorfos.*

**Dem.** Es consecuencia de los Lemas 3.7.5 y 3.7.6. □

**Lema 3.7.8** *$\mathcal{F}^P_{T_k m}(B)$ es un retículo booleano.*

**Dem.** Por el Lema 2.5.9 tenemos que $FT_kM(1) = F(\forall 1 \wedge T\forall 1 \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall 1) = F(1) = \{1\}$ y $FT_kM(0) = F(\forall 0 \wedge T\forall 0 \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall 0) = F(0) = B$. Consideremos ahora $F_1, F_2 \in \mathcal{F}^P_{T_k m}(B)$, entonces (1) $F_1 = FT_kM(a)$, $F_2 = FT_kM(b)$, con $a, b \in B$. De (1) y el Lema 2.5.9, resulta que

$$\begin{aligned} FT_kM(a) \vee FT_kM(b) &= F(\forall a \wedge T\forall a \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall a) \vee F(\forall b \wedge T\forall b \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall b) \\ &= F(\forall a \wedge T\forall a \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall a \wedge \forall b \wedge T\forall b \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall b) \\ &= F(\forall (a \wedge b) \wedge T\forall (a \wedge b) \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall (a \wedge b)) \\ &= FT_kM(a \wedge b), \end{aligned}$$

y así $F_1 \vee F_2 \in \mathcal{F}^P_{T_k m}(B)$. Por otra parte, $F_1 \wedge F_2 = FT_kM(a) \wedge FT_kM(b) = F(x) \wedge F(y) = F(x \vee y)$, con $x = \forall a \wedge T\forall a \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall a$, $y = \forall b \wedge T\forall b \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall b$ y como $x \vee y \in \exists IB$ obtenemos que $F_1 \wedge F_2 \in \mathcal{F}^P_{T_k m}(B)$. Además, $-F_1 = -FT_kM(a) = F(-x) = FT_kM(-x)$ con $x = \forall a \wedge T\forall a \wedge \ldots \wedge T^{k-1}\forall a$ y como $-x \in \exists IB$, entonces $-F_1 \in \mathcal{F}^P_{T_k m}(B)$. Por consiguiente, $\mathcal{F}^P_{T_k m}(B)$ es un retículo booleano. □

**Corolario 3.7.9** *$Con^P_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B)$ es un retículo booleano.*

Para el siguiente teorema recordemos que en una variedad $\mathbf{V}$ la co-congruencia principal generada por $(a, b)$ en $B \in \mathbf{V}$ está definida por $\gamma(a, b) = \{(x, y) \in B \times B : d(a, b, x) = d(a, b, y)\}$ siendo $d$ el término discriminador ternario dual ([21]).

**Teorema 3.7.10** *Si $B$ es una $\mathbf{T_k m}$-álgebra y $a, b \in B$, entonces la co-congruencia principal generada por $(a, b)$ en $B$ es*

$$\gamma(a, b) = \{(x, y) \in B \times B : -h(a, b) \wedge x = -h(a, b) \wedge y\}.$$

**Dem.** Sólo probamos que $\gamma(a, b) \subseteq \{(x, y) \in B \times B : -h(a, b) \wedge x = -h(a, b) \wedge y\}$. Sea $(x, y) \in \gamma(a, b)$, entonces $(-x, -y) \in \gamma(a, b)$. En virtud del Teorema 3.6.6, inferimos que $(-h(a, b) \wedge -x) \vee (h(a, b) \wedge a) = (-h(a, b) \wedge -y) \vee (h(a, b) \wedge a)$. De este modo, $(-h(a, b) \wedge -x) \vee h(a, b) = (-h(a, b) \wedge -y) \vee h(a, b)$ y por lo tanto, tenemos que $h(a, b) \vee -x = h(a, b) \vee -y$, de lo cual concluimos la demostración. □

# Capítulo 4

# Una dualidad topológica para las $\mathrm{T_k m}$-álgebras

En este capítulo presentamos una representación topológica de las $\mathbf{T_k m}$-álgebras, la cual es una extensión directa de la dada por Halmos para las álgebras de Boole monádicas. En la última sección usamos esta representación topológica para obtener una descripción dual de las $\mathbf{T_k m}$-subálgebras. Por este motivo, comenzamos recordando la representación topológica de Halmos para las álgebras de Boole monádicas.

## 4.1. Representación topológica de Halmos para las álgebras de Boole monádicas

P. Halmos construyó una categoría en términos de espacios de Stone naturalmente equivalente a la dual de la categoría de las álgebras de Boole monádicas y sus correspondientes homomorfismos.

En las dos primeras secciones, describimos esta representación topológica dada por P. Halmos en [24].

### 4.1.1. Espacios de Stone

**Definición 4.1.1** *Sea $X$ un conjunto no vacío y sea $R \subseteq X \times X$ una relación binaria definida sobre $X$, para $x \in X$ y $A \subseteq X$ se define:*

(i) $R(x) = \{y \in X : xRy\}$,

(ii) $R^{-1}(x) = \{y \in X : yRx\}$,

(iii) $R(A) = \bigcup_{x \in A} R(x)$,

(iv) $R^{-1}(A) = \bigcup_{x \in A} R^{-1}(x)$,

(v) *$R(x)$ es la $R$-saturación de $x$,*

(vi) *$R(A)$ es la $R$-saturación de $A$.*

**Observación 4.1.2** *Si $R$ es una relación de equivalencia sobre $X$, entonces $R(x) = R^{-1}(x)$ para cada $x \in X$ y $R(A) = R^{-1}(A)$ para cada $A \subseteq X$.*

**Definición 4.1.3**

(i) *Un espacio de Stone es un espacio topológico Hausdorff, compacto y 0-dimensional.*

(ii) *Los conjuntos abiertos y cerrados simultáneamente de un espacio de Stone $(X, \tau)$ se llaman clopens.*

Con $\mathcal{CP}(X)$ ($\mathcal{C}(X)$) se denota al conjunto de todos los clopens (cerrados) de un espacio de Stone $X$.

**Definición 4.1.4** *Sea $R$ una relación binaria definida en un espacio de Stone $X$,*

(i) *$R$ es una relación clopen si $R^{-1}(A) \in \mathcal{CP}(X)$ para todo $A \in \mathcal{CP}(X)$.*

(ii) *$R$ es de puntos cerrados si $R(x)$ es un conjunto cerrado para cada $x \in X$.*

**Definición 4.1.5**

(i) *Una familia de subconjuntos de $X$, $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$, es dirigida descendente si $A_i, A_j \in \mathcal{F}$ implica que existe $A_k \in \mathcal{F}$ tal que $A_k \subseteq A_i \cap A_j$.*

(ii) *Una relación binaria es de cuasi orden si es reflexiva y transitiva.*

Se satisfacen las siguientes propiedades:

(St1) Si $(X, \tau)$ es un espacio de Stone, entonces se satisfacen:

(i) Si $x \in X$, entonces $\{x\} = \cap \{A : A \in \mathcal{CP}(X) \text{ y } x \in A\}$,

(ii) $\{A : A \in \mathcal{CP}(X) \text{ y } x \in A\}$ es una familia dirigida descendente.

(St2) **Lema de Esakia:**

Sea $X$ un espacio compacto, $R$ una relación binaria definida sobre $X$ de cuasi orden y de puntos cerrados, y $\mathcal{F}$ una familia descendente de subconjuntos cerrados de $X$, entonces $R^{-1}\left(\bigcap\limits_{A\in\mathcal{F}} A\right) = \bigcap\limits_{A\in\mathcal{F}} R^{-1}(A)$.

### 4.1.2. Espacios de Halmos

P. Halmos introdujo las siguientes nociones

**Definición 4.1.6** *Un espacio de Halmos es un par $(X, E)$ donde:*

(i) *$X$ es un espacio de Stone,*

(ii) *$E$ es una relación de equivalencia clopen y de puntos cerrados sobre $X$.*

**Definición 4.1.7** *Dados dos espacios de Halmos $(X, E)$ y $(X', E')$, una función $f : X \to X'$ es un morfismo de Halmos si $f$ es continua y $f(E(x)) = E'(f(x))$ para cada $x \in X$.*

Si $\mathfrak{BM}$ es la categoría de las álgebras de Boole monádicas y sus correspondientes homomorfismos, $\mathfrak{Bm}$ la categoría de los espacios de Halmos y los morfismos de Halmos, la representación topológica de Halmos para las álgebras de Boole monádicas es

($\mathfrak{B}_m$1) Si $(X, E)$ es un espacio de Halmos, entonces $\mathbb{B}_{\mathbf{M}}(X) = \langle \mathcal{CP}(X), \exists_E\rangle \in \mathbf{Df_1}$ donde $\exists_E : \mathcal{CP}(X) \to \mathcal{CP}(X)$ está definido por $\exists_E(U) = \bigcup\limits_{x\in U} E(x) = E(U)$ para cada $U \in \mathcal{CP}(X)$.

($\mathfrak{B}_m$2) Sea $\langle B, \exists\rangle \in \mathbf{Df_1}$, entonces $\mathbb{B}_{\mathbf{m}}(B) = (X(B), E_\exists)$ es un espacio de Halmos donde:

− el espacio de Stone es $X(B) = \{P \subseteq B : P \text{ es filtro primo en } B\}$ con la topología $\tau$ generada por la base $\mathcal{B} = \{\sigma_B(a) : a \in B\}$, siendo $\sigma_B(a) = \{P \in X(B) : a \in P\}$,

− $E_\exists = \{(P, Q) \in X(B) \times X(B) : P \cap \exists(B) = Q \cap \exists(B)\}$.

($\mathfrak{B}_m$3) La función $\sigma_B : \langle B, \exists\rangle \to \langle \mathcal{CP}(X), \exists_{E_\exists}\rangle$ definida por $\sigma_B(x) = \{P \in X(B) : x \in P\}$ es un isomorfismo monádico.

($\mathfrak{B}_m$4) La función $\varepsilon_X : (X, E) \to (X(\mathcal{CP}(X)), E_{\exists_E})$ definida por $\varepsilon_X(x) = \{U \in \mathcal{CP}(X) : x \in U\}$ es un homeomorfismo y un morfismo de Halmos.

Los isomorfismos $\sigma_B$ y $\varepsilon_X$ establecen una equivalencia natural entre la categoría $\mathfrak{BM}$ y la categoría dual $\mathfrak{Bm}$, es decir, tenemos que:

**Teorema 4.1.8** *La categoría $\mathfrak{BM}$ es naturalmente equivalente a la dual de la categoría $\mathfrak{Bm}$.*

### 4.1.3. Algunas propiedades de interés

A continuación determinamos algunas propiedades de los espacios de Halmos que nos resultan útiles para la dualidad topológica de las $\mathbf{T_k m}$-álgebras.

**Lema 4.1.9** *Sea $(X, E)$ un espacio de Halmos. Si $x$, $y \in X$ son tales que $(x, y) \notin E$, entonces existen $U$, $V \in \mathcal{CP}(X)$ tales que $x \in U$, $y \notin E(U)$, $y \in V$ y $x \notin E(V)$.*

**Dem.** Sean $x, y \in X$ tales que $(x, y) \notin E$, entonces $y \notin E(x), x \notin E(y)$. Además, como $X$ es un espacio de Stone, $E(y)$ y $E(x)$ son conjuntos cerrados, resulta que existen (1) $H, W \in \tau, x \in H, E(y) \subseteq W, H \cap W = \emptyset$. Luego, como $X$ es un espacio de Stone, existe $U \in \mathcal{CP}(X)$ tal que $x \in U \subseteq H$; de esta afirmación y (1), obtenemos que $E(y) \subseteq W \subseteq X \setminus U$. De donde se sigue que $y \notin E(U)$. En forma análoga se demuestra que existe $V \in \mathcal{CP}(X)$ tal que $y \in V$ y $x \notin E(V)$. □

**Lema 4.1.10** *Sea $(X, E)$ un espacio de Halmos, entonces la imagen inversa por $E$ de cada punto de $X$ es cerrado en $X$, es decir, $E^{-1}(\{x\})$ es cerrado en $X$ para cada $x \in X$.*

**Dem.** Es una consecuencia inmediata de (St1) y del hecho que $E$ es una relación clopen definida sobre $X$. □

**Teorema 4.1.11** *Sean $(X, E)$ y $(X', E')$ espacios de Halmos y $f : X \to X'$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $f(E(x)) = E'(f(x))$ *para cada* $x \in X$,

(ii) $f^{-1}(E'(U)) = E(f^{-1}(U))$ *para cada* $U \subseteq X'$.

**Dem.**

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Es consecuencia de que las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos:

(1) $x \in f^{-1}(E'(U))$,

(2) $f(x) \in E'(U)$,

(3) existe $y \in U$ tal que $(f(x), y) \in E'$,

(4) $y \in E'(f(x))$,

(5) $y \in f(E(x))$,

(6) existe $z \in E(x), y = f(z)$,

(7) $(z, x) \in E, f(z) \in U$,

(8) $(z, x) \in E, z \in f^{-1}(U)$,

(9) $x \in E(f^{-1}(U))$,

(10) $f^{-1}(E'(U)) = E(f^{-1}(U))$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Es consecuencia de que las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos:

(1) $y \in f(E(x))$,

(2) existe $z \in E(x), y = f(z)$,

(3) existe $z \in f^{-1}(\{y\}), x \in E(z)$,

(4) $x \in E(f^{-1}(\{y\}))$,

(5) $x \in f^{-1}(E'(y))$,

(6) $f(x) \in E'(y)$,

(7) $(y, f(x)) \in E'$,

(8) $y \in E'(f(x))$,

(9) $f(E(x)) = E'(f(x))$. $\square$

**Observación 4.1.12** *Si $(X, E)$ y $(X', E')$ son espacios de Halmos y $f : X \longrightarrow X'$ es una función, entonces la familia $\mathcal{F} = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{CP}(X'), x \in A\}$ es una familia dirigida descendente.*

**Lema 4.1.13** *Sean $(X, E)$ y $(X', E')$ espacios de Halmos y $f : X \longrightarrow X'$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $f^{-1}(E'(U)) = E(f^{-1}(U))$ *para todo* $U \subseteq X'$,

(ii) $f^{-1}(E'(U)) = E(f^{-1}(U))$ *para todo* $U \in \mathcal{CP}(X')$.

**Dem.**

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Sea $U \subseteq X'$, entonces, por (St1), tenemos que $U = \bigcup_{x\in U}\{x\} = \bigcup_{x\in U}\bigcap\{A \in \mathcal{CP}(X) : x \in A\}$, de donde se sigue, por (St2), que $E'(U) = E'^{-1}(U) = \bigcup_{x\in U}\bigcap\left\{E'^{-1}(A) : A \in \mathcal{CP}(X), x \in A\right\}$. Luego, de la hipótesis (ii) y (St2), obtenemos que

$$\begin{aligned}
f^{-1}(E'(U)) &= \bigcup_{x\in U}\bigcap\left\{f^{-1}(E'^{-1}(A)) : A \in \mathcal{CP}(X), x \in A\right\}\\
&= \bigcup_{x\in U}\bigcap\left\{f^{-1}(E'(A)) : A \in \mathcal{CP}(X), x \in A\right\}\\
&= \bigcup_{x\in U}\bigcap\left\{E(f^{-1}(A)) : A \in \mathcal{CP}(X), x \in A\right\}\\
&= \bigcup_{x\in U}\bigcap\left\{E^{-1}(f^{-1}(A)) : A \in \mathcal{CP}(X), x \in A\right\}\\
&= E^{-1}\left(f^{-1}\left(\bigcup_{x\in U}\bigcap\left\{A : A \in \mathcal{CP}(X), x \in A\right\}\right)\right)\\
&= E^{-1}(f^{-1}(U))\\
&= E(f^{-1}(U)).
\end{aligned}$$

Concluimos que $f^{-1}(E'(U)) = E(f^{-1}(U))$ para todo $U \subseteq X'$. $\square$

## 4.2. Una dualidad topológica para las $\mathrm{T_k}$m-álgebras

Teniendo en cuenta la representación de Halmos para las álgebras de Boole monádicas, determinamos ahora una dualidad topológica para las $\mathbf{T_k m}$-álgebras.

**Definición 4.2.1** *Sea $k$ un entero positivo, $(X, E, f)$ es un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacio si $(X, E)$ es un espacio de Halmos y $f : X \longrightarrow X$ es una función que verifica las condiciones siguientes:*

($\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}1$) *$f$ es un homeomorfismo,*

($\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m2}$) *$f(E(x)) = E(f(x))$ para cada $x \in X$,*

($\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}3$) *$f^k(x) = x$ para todo $x \in X$.*

**Observación 4.2.2** *En un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacio, $k$ es el menor natural tal que $f^k(x) = x$ para todo $x \in X$. Además, si $k_1$ es el menor natural tal que $f^{k_1}(x) = x$, para algún $x \in X$ entonces $k_1$ divide a $k$.*

**Teorema 4.2.3** *Sean $(X, E)$ un espacio de Halmos y $f : X \longrightarrow X$ una biyección. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

($\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m2}$) $f(E(x)) = E(f(x))$ *para cada* $x \in X$,

($\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m4}$) $(x, y) \in E$ *si, y sólo si,* $(f(x), f(y)) \in E$ *para todo* $x$, $y \in X$,

($\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}5$) $f^{-1}(E(U)) = E(f^{-1}(U))$ *para todo* $U \in \mathcal{CP}(X)$.

**Dem.**

($\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m2}$) $\Rightarrow$ ($\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m4}$) :
($\Rightarrow$) : Sea $(x, y) \in E$, entonces $f(y) \in f(E(x))$, de donde por ($\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m2}$) resulta que $(f(x), f(y)) \in E$.
($\Leftarrow$) : Sea $(f(x), f(y)) \in E$, entonces por ($\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m2}$) tenemos que $f(y) \in f(E(x))$, por lo que existe $z \in E(x), f(z) = f(y)$. De esta afirmación obtenemos que $z = y$, y así $(x, y) \in E$.

($\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m4}$) $\Rightarrow$ ($\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m5}$) : Sean $U \in \mathcal{CP}(X)$ y $x \in f^{-1}(E(U))$, entonces existe $z \in U, (f(x), z) \in E$. Además, como $z = f(t)$ para algún $t \in X$ y por la hipótesis resulta que $t \in f^{-1}(U), (x, t) \in E$. En consecuencia, $f^{-1}(E(U)) \subseteq E(f^{-1}(U))$. Consideremos ahora $x \in E(f^{-1}(U))$, entonces existe $t \in f^{-1}(U), (t, x) \in E$, de lo cual por ($\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m4}$) obtenemos que existe $f(t) \in U, (f(t), f(x)) \in E$, y así $f(x) \in E(U)$, y por consiguiente $E(f^{-1}(U)) \subseteq f^{-1}(E(U))$.

($\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m5}$) $\Rightarrow$ ($\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m2}$) : Como $f$ es biyectiva, por ($\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m5}$) y el Lema 4.1.13 obtenemos que $E(x) = E(f^{-1}f(x)) = f^{-1}(E(f(x))$. De lo cual concluimos que $f(E(x)) = E(f(x))$ para cada $x \in X$. $\square$

**Definición 4.2.4** *Sean* $(X, E, f)$ *y* $(X', E', f')$ $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-*espacios. Un* $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-*morfismo es un morfismo de Halmos* $h : X \longrightarrow X'$ *que satisface la condición* $h \circ f = f' \circ h$.

Con $\mathfrak{B}_{\mathfrak{t}_{\mathfrak{k}}\mathfrak{m}}$ designamos la categoría de los $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacios y los $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-morfismos, y con $\mathfrak{B}_{\mathfrak{T}_{\mathrm{k}}\mathfrak{M}}$ a la categoría de las $\mathbf{T_k m}$-álgebras y sus correspondientes $\mathbf{T_k m}$-homomorfismos.

**Lema 4.2.5** *Sea* $(X, E, f)$ *un* $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-*espacio. Entonces* $I\!\!B_{\mathbf{T_k M}}(X) = \langle \mathcal{CP}(X), \exists_E, T_f \rangle$ *es una* $\mathbf{T_k m}$-*álgebra, donde para cada* $U \in \mathcal{CP}(X), T_f(U) = f^{-1}(U)$.

**Dem.** De ($\mathfrak{B}_m 1$) tenemos que $\langle \mathcal{CP}(X), \exists_E \rangle$ es un álgebra de Boole monádica. Es claro que por ser $f$ un homeomorfismo, $T_f$ es una función biyectiva. Además, de la definición de $T_f$ resulta inmediato que es un homomorfismo booleano. Por otra parte, sea $U \in \mathcal{CP}(X)$. Por ser $X$ un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacio y de ($\mathfrak{B}_m 1$), obtenemos que
$T_f(\exists_E U) = T_f(E(U))$

$$
\begin{aligned}
&= f^{-1}(E(U)) \\
&= E(f^{-1}(U)) \\
&= \exists_E(f^{-1}(U)) \\
&= \exists_E T_f(U).
\end{aligned}
$$

También, en virtud de que $x \in T_f^n(U)$ si, y sólo si, $f^n(x) \in U$, obtenemos que $T_f^k(U) = U$ para todo $U \in \mathcal{CP}(X)$. Concluimos así que $\langle \mathcal{CP}(X), \exists_E, T_f \rangle$ es una $\mathbf{T_k m}$-álgebra. $\square$

**Lema 4.2.6** *Sea $\langle B, \exists, T \rangle$ una $\mathbf{T_k m}$-álgebra y sea $(X(B), E_\exists)$ el espacio de Halmos asociado a $\langle B, \exists \rangle$. Entonces $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(B) = (X(B), E_\exists, f_T)$ es un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacio, donde $f_T(P) = T^{-1}(P)$ para cada $P \in X(B)$.*

**Dem.** Teniendo en cuenta que $T$ es un automorfismo de período $k$, tenemos que (1) $f_T$ es biyectiva. Sea $G$ un básico de $\tau$, entonces existe $a \in B$ tal que $G = \sigma_B(a)$. Luego, $f_T(G) = f_T(\sigma_B(a)) = \sigma_B(T^{-1}(a)) \in \tau$ y $f_T^{-1}(G) = f_T^{-1}(\sigma_B(a)) = \sigma_B(T(a)) \in \tau$. De lo que concluimos que $f_T$ es una función abierta y continua, y así, por (1), resulta que $f_T$ es un homeomorfismo. Veamos ahora que $f_T^{-1}(E_\exists(U)) = E_\exists(f_T^{-1}(U))$ para todo $U \in \mathcal{CP}(X)$. Sea $U \in \mathcal{CP}(X)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes dos a dos:

(2) $Q \in f_T^{-1}(E_\exists(U))$,
(3) existe $P \in U, f_T(Q) \in E_\exists(P)$,
(4) existe $P \in U, (f_T(Q), P) \in E_\exists$,
(5) existe $P \in U, f_T(Q) \cap \exists(B) = P \cap \exists(B)$,
(6) existe $P \in U, T^{-1}(Q) \cap \exists(B) = P \cap \exists(B)$,
(7) existe $P \in U, Q \cap T(\exists(B)) = T(P) \cap T(\exists(B))$,
(8) existe $P \in U, Q \cap \exists(B) = T(P) \cap \exists(B)$,
(9) existe $T(P) \in f_T^{-1}(U), (Q, T(P)) \in E_\exists$.

Luego, $Q \in f_T^{-1}(E_\exists(U))$ si, y sólo si, existe $T(P) \in f_T^{-1}(U), (Q, T(P)) \in E_\exists$. De lo cual se sigue que si $Q \in f_T^{-1}(E_\exists(U))$, entonces $Q \in E_\exists(f_T^{-1}(U))$, y de este modo resulta la siguiente inclusión $f_T^{-1}(E_\exists(U)) \subseteq E_\exists(f_T^{-1}(U))$. Recíprocamente, las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos:

(10) $Q \in E_\exists(f_T^{-1}(U))$,
(11) existe $P \in f_T^{-1}(U), (Q, P) \in E_\exists$,
(12) $f_T(P) \in U, Q \cap \exists(B) = P \cap \exists(B)$,
(13) $T^{-1}(P) \in U$ y $T^{-1}(Q) \cap T^{-1}(\exists(B)) = T^{-1}(P) \cap T^{-1}(\exists(B))$,
(14) $T^{-1}(P) \in U, T^{-1}(Q) \cap \exists(B) = T^{-1}(P) \cap \exists(B)$,
(15) $T^{-1}(P) \in U, f_T(Q) \cap \exists(B) = T^{-1}(P) \cap \exists(B)$.

Luego, $Q \in E_\exists(f_T^{-1}(U))$ si, y sólo si, existe $P \in X(B)$ tal que $T^{-1}(P) \in U$ y $f_T(Q) \cap \exists(B) = T^{-1}(P) \cap \exists(B)$. De lo cual se sigue que si $Q \in E_\exists(f_T^{-1}(U))$, entonces $f_T(Q) \in E_\exists(U)$ y, por consiguiente, $E_\exists(f_T^{-1}(U)) \subseteq f_T^{-1}(E_\exists(U))$. Concluimos que $E_\exists(f_T^{-1}(U)) = f_T^{-1}(E_\exists(U))$. Resta probar que $f_T^k(P) = P$ para todo $P \in X(B)$. Para ello consideremos $P \in X(B)$, entonces de la definición de $f_T$ resulta que $x \in f_T^k(P)$ si, y sólo si, $T^k(x) \in P$ si, y sólo si, $x \in P$. Luego, $f_T^k(P) = P$ para todo $P \in X(B)$. Concluimos así que $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(B) = (X(B), E_\exists, f_T)$ es un $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$-espacio. $\square$

**Lema 4.2.7** *Sean $(X_1, E_1, f_1)$ y $(X_2, E_2, f_2)$ $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$-espacios y $h$ un $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$-morfismo de $X_1$ en $X_2$. Entonces la aplicación $\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(h) : \mathcal{CP}(X_2) \longrightarrow \mathcal{CP}(X_1)$, definida por la prescripción $\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(h)(U) = h^{-1}(U)$ para cada $U \in \mathcal{CP}(X_2)$, es un $\mathbf{T_k m}$-homomorfismo. Además se verifica que $\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(h)$ es inyectivo (sobreyectivo) si $h$ es sobreyectiva (inyectiva).*

**Dem.**

(i) Como $h : X_1 \longrightarrow X_2$ es un $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$-morfismo, entonces $\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(h)$ es un homomorfismo booleano.

(ii) $\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(h)\,(\exists_{E_2}(U)) = \exists_{E_1}\,(\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(h)(U))$

Las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos:

(1) $y \in \mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(h)\,(\exists_{E_2}(U))$,

(2) $y \in h^{-1}\,(E_2(U))$,

(3) $y \in \bigcup_{x \in U} h^{-1}\,(E_2(x))$,

(4) existe $x \in U, y \in h^{-1}\,(E_2(x))$,

(5) existe $x \in U, h(y) \in E_2(x)$,

(6) existe $x \in U, (h(y), x) \in E_2$,

(7) existe $x \in U, x \in E_2(h(y)) = h(E_1(y))$,

(8) existe $z \in E_1(y), h(z) = x$,

(9) existe $z \in h^{-1}(U), y \in E_1(z)$,

(10) $y \in \bigcup_{t \in h^{-1}(U)} E_1(t)$,

(11) $y \in E_1(h^{-1}\,(U))$,

(12) $y \in \exists_{E_1}\,(\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(h)\,(U))$.

Por consiguiente, $\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(h)\,(\exists_{E_2}(U)) = \exists_{E_1}\,(\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(h)\,(U))$.

(iii) $\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(h)(T_{f_2}(U)) = T_{f_1}(\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(h)(U))$ para todo $U \in \mathcal{CP}(X_2)$

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(h)(T_{f_2}(U)) &= h^{-1}(T_{f_2}(U)) \\ &= h^{-1}\left(f_2^{-1}(U)\right) \\ &= \left(h^{-1} \circ f_2^{-1}\right)(U) \\ &= (f_2 \circ h)^{-1}(U) \\ &= (h \circ f_1)^{-1}(U) \\ &= \left(f_1^{-1} \circ h^{-1}\right)(U) \\ &= f_1^{-1}(\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(h)(U)) \\ &= T_{f_1}(\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(h)(U)).\end{aligned}$$

De (i), (ii) y (iii) concluimos que $\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(h)$ es un $\mathbf{T_k m}$-homomorfismo.

Es de rutina probar que si $h$ es sobreyectiva (inyectiva), entonces $\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(h)$ es inyectivo (sobreyectivo). $\square$

**Lema 4.2.8** *Sean $\langle B_1, \exists_1, T_1\rangle$ y $\langle B_2, \exists_2, T_2\rangle$ $\mathbf{T_k m}$-álgebras y $h$ un $\mathbf{T_k m}$-homomorfismo de $B_1$ en $B_2$. Entonces la aplicación $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h) : X(B_2) \longrightarrow X(B_1)$, definida por la prescripción $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h)(P) = h^{-1}(P)$ para todo $P \in X(B_2)$, es un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-morfismo. Además, se verifica que $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}$ es inyectivo (sobreyectivo) si $h$ es un $\mathbf{T_k m}$-homomorfismo sobreyectivo (inyectivo).*

**Dem.** Sea (1) $h : B_1 \longrightarrow B_2$ un $\mathbf{T_k m}$-homomorfismo.

En primer lugar probamos que

(i) $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h)$ es continua.

Sea $b_1 \in B_1$, del hecho que las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos:

(2) $P \in (\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h))^{-1}(\sigma_{B_1}(b_1))$,

(3) $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h)(P) \in \sigma_{B_1}(b_1)$,

(4) $b_1 \in h^{-1}(P)$,

(5) $h(b_1) \in P$,

(6) $P \in \sigma_{B_2}(h(b_1))$,

resulta que $(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h))^{-1}(\sigma_{B_1}(b_1)) = \sigma_{B_2}(h(b_1))$. Esta igualdad nos permite inferir que $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h)$ es continua.

Continuamos probando que

(ii) $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h)(E_{\exists_2}(P)) = E_{\exists_1}(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h)(P))$ para todo $P \in X(B_2)$.

En virtud del Teorema 4.1.11 y del Lema 4.1.13, probar (ii) es equivalente a $(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h))^{-1}(E_{\exists_1}(U)) = E_{\exists_2}(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h))^{-1}(U)$ para todo $U \in \mathcal{CP}(X(B_1))$.

Es rutina probar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\sigma_{B_1}"'] & B_2 \arrow[d, "\sigma_{B_2}"] \\ \mathcal{CP}(X(B_1)) \arrow[r, "\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h))"'] & \mathcal{CP}(X(B_2)) \end{tikzcd}$$

Esto es, (1) $\sigma_{B_2} \circ h = \mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h)) \circ \sigma_{B_1}$.

Sea $U \in \mathcal{CP}(X(B_1))$, entonces por $(\mathfrak{B}_m 3)$, existe $a_1 \in B_1$ tal que $U = \sigma_{B_1}(a_1)$. De esta afirmación y (1), tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h))^{-1}(E_{\exists_1}(U)) &= (\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h))^{-1}\exists_{E_{\exists_1}}(U)) \\
&= (\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h))^{-1}\exists_{E_{\exists_1}}(\sigma_{B_1}(a_1)) \\
&= (\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h))^{-1}(\sigma_{B_1}(\exists_1 a_1)) \\
&= (\sigma_{B_2} \circ h)(\exists_1 a_1) \\
&= \sigma_{B_2}(\exists_2 h(a_1)) \\
&= \exists_{E_{\exists_2}} \sigma_{B_2}(h(a_1)) \\
&= \exists_{E_{\exists_2}}\big((\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h))^{-1}(\sigma_{B_1}(a_1))\big) \\
&= E_{\exists_2}\big((\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h))^{-1}(U)\big).
\end{aligned}$$

Concluimos de esta manera que $(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h))^{-1}(E_{\exists_1}(U)) = E_{\exists_2}(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h))^{-1}(U)$ para todo $U \in \mathcal{CP}(X(B_1))$.

Probemos ahora que

(iii) $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h) \circ f_{T_2} = f_{T_1} \circ \mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h)$.

Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X(B_2) \arrow[r, "f_{T_2}"] \arrow[d, "\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h)"'] & X(B_2) \arrow[d, "\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h)"] \\ X(B_1) \arrow[r, "f_{T_1}"'] & X(B_1) \end{tikzcd}$$

Consideremos $P \in X(B_2)$, se satisfacen las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h) \circ f_{T_2})(P) &= \mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h)(f_{T_2}(P)) \\
&= \mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h)\left(T_2^{-1}(P)\right) \\
&= h^{-1}\left(T_2^{-1}(P)\right) \\
&= (T_2 \circ h)^{-1}(P) \\
&= (h \circ T_1)^{-1}(P) \\
&= T_1^{-1}(h^{-1}(P)) \\
&= f_{T_1}(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h)(P)) \\
&= (f_{T_1} \circ \mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h))(P).
\end{aligned}$$

De este modo, $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h) \circ f_{T_2} = f_{T_1} \circ \mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h)$.

De (i), (ii) y (iii) concluimos que $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}$ es un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-morfismo.

Es rutina probar que si $h$ es sobreyectiva (inyectiva), entonces $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h)$ es inyectivo (sobreyectivo). $\square$

**Lema 4.2.9** *Sea $\langle B, \exists, T\rangle \in \mathbf{B_{T_k m}}$. Entonces la función $\sigma_B : \langle B, \exists, T\rangle \longrightarrow \langle \mathcal{CP}(X(B)), \exists_{E_\exists}, T_{f_T}\rangle$, definida por $\sigma_B(x) = \{P \in X(B) : x \in P\}$, es un $\mathbf{T_k m}$-isomorfismo.*

**Dem.** Por $(\mathfrak{B}_m 3)$, la función $\sigma_B$ es un isomorfismo monádico. Sólo resta probar que $\sigma_B(T(x)) = T_{f_T}(\sigma_B(x))$ para todo $x \in B$. Del hecho que las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos:

(1) $P \in \sigma_B(T(x))$,

(2) $T(x) \in P$,
(3) $x \in T^{-1}(P)$,
(4) $x \in f_T(P)$,
(5) $f_T(P) \in \sigma_B(x)$,
(6) $P \in f_T^{-1}(\sigma_B(x))$,
(7) $P \in T_{f_T}(\sigma_B(x))$,

resulta que $\sigma_B(T(x)) = T_{f_T}(\sigma_B(x))$ para todo $x \in B$. De este modo concluimos que $\sigma_B$ es un $\mathbf{T_k m}$-isomorfismo. $\square$

**Lema 4.2.10** *Sean* $(X_1, E_1, f_1)$ *y* $(X_2, E_2, f_2)$ $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$*-espacios y* $h$ *una función de* $X_1$ *en* $X_2$*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$h$ es un $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$-isomorfismo,*

(ii) *$h$ es un homeomorfismo y un $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$-morfismo.*

**Dem.**
(i) $\Rightarrow$ (ii) : De la hipótesis resulta que $h$ es una biyección continua. Además, por ser $X_1$ un espacio compacto y $X_2$ un espacio Hausdorff, resulta que $h$ es un homeomorfismo.
(ii) $\Rightarrow$ (i) : Es trivial. $\square$

**Corolario 4.2.11** *Sea* $(X, E, f)$ *un* $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$*-espacio. Entonces la función* $\varepsilon_X : X \longrightarrow X(\mathcal{CP}(X))$*, definida por* $\varepsilon_X(x) = \{U \in \mathcal{CP}(X) : x \in U\}$*, es un* $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$*-isomorfismo.*

**Dem.** De $(\mathfrak{B}_m 4)$, $\varepsilon_X$ es un homeomorfismo y un morfismo de Halmos. Consideremos ahora $U \in \mathcal{CP}(X)$ y $x \in X$. Del hecho que las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos:

(1) $U \in f_{T_f}(\varepsilon_X(x))$,
(2) $T_f(U) \in \varepsilon_X(x)$,
(3) $x \in T_f(U)$,
(4) $x \in f^{-1}(U)$,
(5) $f(x) \in U$,
(6) $U \in \varepsilon_X(f(x))$,

resulta que $(\varepsilon_X \circ f)(x) = \left(f_{T_f} \circ \varepsilon_X\right)(x)$ para todo $x \in X$. De este modo, $\varepsilon_X$ es un $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$-morfismo y por el Lema 4.2.10 concluimos que $\varepsilon_X$ es un $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$-isomorfismo. $\square$

Lo expuesto anteriormente nos permiten demostrar de la manera habitual el Teorema 4.2.12.

**Teorema 4.2.12** *Los funtores* $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}} \circ \mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}$ *y* $\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}} \circ \mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}$ *son naturalmente equivalentes a los funtores identidad* $Id_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{t}_k \mathfrak{m}}}$ *e* $Id_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{T}_k \mathfrak{M}}}$ *respectivamente, donde* $\{\sigma_A : A \in Obj(\mathfrak{B}_{\mathfrak{T}_k \mathfrak{M}})\}$ *y* $\{\varepsilon_X : X \in Obj(\mathfrak{B}_{\mathfrak{t}_k \mathfrak{m}})\}$ *son las transformaciones naturales y por lo tanto, la categoría* $\mathfrak{B}_{\mathfrak{T}_k \mathfrak{M}}$ *es naturalmente equivalente a la categoría dual de* $\mathfrak{B}_{\mathfrak{t}_k \mathfrak{m}}$.

Como un corolario obtenemos que la categoría $Fin\mathfrak{B}_{\mathfrak{T}_k \mathfrak{M}}$ de $\mathbf{T_k m}$-álgebras finitas es dual a la categoría $Fin\mathfrak{B}_{\mathfrak{t}_k \mathfrak{m}}$ de $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$-espacios finitos con la topología discreta.

# 4.3. Congruencias en las $\mathbf{T_k m}$-álgebras

A continuación, teniendo en cuenta la dualidad topológica obtenida anteriormente, caracterizamos el retículo de todas las congruencias de una $\mathbf{T_k m}$-álgebra por medio de ciertos cerrados de su $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$-espacio asociado.

**Definición 4.3.1** *Sea* $(X, E, f)$ *un* $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$-*espacio.*

(i) *Un subconjunto* $Y$ *de* $X$ *es un* $E$*-saturado si* $E(Y) = Y$.

(ii) *Un subconjunto* $Y$ *de* $X$ *es un* $f$*-subconjunto si* $Y = f^{-1}(Y)$.

(iii) *Un subconjunto* $Y$ *de* $X$ *es un* $Ef$*-saturado de* $X$ *si* $Y = f^{-1}(Y)$ *y* $E(Y) = Y$.

(iv) *Un subconjunto* $Y$ *de* $X$ *es un* $Ef$*-cerrado de* $X$ *si es* $Ef$*-saturado y cerrado en* $X$.

Con $\mathcal{C}_{Ef}(X)$ se denota al conjunto de todos los $Ef$-cerrados de un $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$-espacio $X$.

El conjunto de los $Ef$-cerrados del $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$-espacio asociado a una $\mathbf{T_k m}$-álgebra es un retículo con las operaciones de intersección y unión de conjuntos, y juega un rol fundamental en la caracterización de las $\mathbf{T_k m}$-congruencias de estas álgebras, como lo mostramos a continuación.

**Teorema 4.3.2** *Sean* $B \in \mathbf{B_{T_k m}}$ *y* $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(B)$ *el* $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$-*espacio asociado a* $B$. *Entonces, el retículo* $\mathcal{C}_{Ef}(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(B))$ *de todos los* $Ef$*-cerrados de* $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(B)$ *es isomorfo al dual del retículo* $Con_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B)$ *de las* $\mathbf{T_k m}$-*congruencias de* $B$, *y el isomorfismo lo establece la función*

$$\Theta_{Ef} : \mathcal{C}_{Ef}(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(B)) \longrightarrow Con_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B)$$

*definida por la prescripción:*

$$\Theta_{Ef}(Y) = \{(x,y) \in B \times B : \sigma_B(x) \cap Y = \sigma_B(y) \cap Y\}$$

*para todo* $Y \in \mathcal{C}_{Ef}(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(B))$.

**Dem.** Sea (1) $Y \in \mathcal{C}_{E_f}(X(B))$. Teniendo en cuenta que toda $\mathbf{T_k m}$-álgebra es un álgebra de Boole, se sigue que $\Theta_{E_f}(Y) \in Con_{\mathbf{B}}(B)$. Sea (2) $(a,b) \in \Theta_{E_f}(Y)$. En primer lugar, consideremos (3) $P \in Y$ tal que $\exists a \in P$, entonces como (4) $Y = E(Y) = \bigcup\limits_{Q \in Y} E_\exists(Q)$, resulta que (5) existe $Q \in Y$ tal que $P \in E_\exists(Q)$. De esta afirmación y (3), se sigue que $\exists a \in Q$. Luego, por el Lema 4.2.9, tenemos que $Q \in \sigma_B(\exists a) = \exists_{E_\exists}\sigma_B(a) = E_\exists(\sigma_B(a))$. En consecuencia, (6) existe $T \in \sigma_B(a)$ tal que $Q \in E_\exists(T)$. De lo cual se sigue que $T \in E_\exists(Q)$ con $Q \in Y$ y, por (4), obtenemos que $T \in Y$. De este modo, $T \in \sigma_B(a) \cap Y$ y, por (2), resulta que $b \in T$. Por consiguiente, $\exists b \in T$ y, por (5) y (6), concluimos que $\exists b \in P$. Con un procedimiento análogo al anterior obtenemos que si $\exists b \in P$, entonces $\exists a \in P$. Por lo tanto, $\exists a \in P$ si, y sólo si, $\exists b \in P$ para todo $P \in Y$, resultando de esta manera que $(\exists a, \exists b) \in \Theta_{E_f}(Y)$.

Por otro lado, por el Lema 4.2.9, (1) y (2), tenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_B(T(a)) \cap Y &= T_{f_T}(\sigma_B(a)) \cap f_T^{-1}(Y) \\
&= f_T^{-1}(\sigma_B(a)) \cap f_T^{-1}(Y) \\
&= f_T^{-1}\,(\sigma_B(a) \cap Y) \\
&= f_T^{-1}\,(\sigma_B(b) \cap Y) \\
&= f_T^{-1}\,(\sigma_B(b)) \cap f_T^{-1}\,(Y) \\
&= \sigma_B(T(b)) \cap Y.
\end{aligned}$$

Luego, $(T(a), T(b)) \in \Theta_{E_f}(Y)$. Concluimos así que $\Theta_{E_f}(Y) \in Con_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B)$.

En virtud de que $\mathcal{C}_{E_f}(X(B)) \subseteq \mathcal{C}(X(B))$, $Con_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B) \subseteq Con_{\mathbf{B}}(B)$ y $\Theta : \mathcal{C}(X(B)) \longrightarrow Con_{\mathbf{B}}(B)$ es un anti-isomorfismo de orden, resulta que $\Theta_{E_f} : \mathcal{C}_{E_f}(X(B)) \longrightarrow Con_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B)$ es inyectiva.

Por otra parte, sean $\theta \in Con_{\mathbf{B_{T_k m}}}(B)$ e $Y = \{P \in X(B) : [1]_\theta \subseteq P\}$. Teniendo en cuenta que $\theta \in Con_{\mathbf{B}}(B)$ tenemos que $Y \in \mathcal{C}(X(B))$. Probemos que $Y$ es un $E$-saturado. En efecto, es claro que $Y \subseteq E_\exists(Y)$. Consideremos ahora $P \in E_\exists(Y)$ y $x \in [1]_\theta$, entonces existe $Q \in Y$ tal que (7) $(P,Q) \in E_\exists$ y $\forall x \in [1]_\theta$. De lo cual se sigue que $\forall x \in Q \cap \exists B$ y, por (7), obtenemos que $\forall x \in P$. Así $x \in P$. Luego, $[1]_\theta \subseteq P$, por lo que $P \in Y$. Lo cual nos permite concluir que $E_\exists(Y) \subseteq Y$. De este modo, vale la igualdad y por lo tanto $Y$ es un $E$-saturado. Sólo resta probar que $Y$ es un $f$-subconjunto de $X(B)$. En efecto, sea $P \in Y$, entonces $[1]_\theta \subseteq P$, y como $T([1]_\theta) = [T(1)]_\theta = [1]_\theta = T^{-1}([1]_\theta) \subseteq T^{-1}(P) = f_T(P)$, resulta que $f_T(P) \in Y$. De este modo, $P \in f_T^{-1}(Y)$, y así $Y \subseteq f_T^{-1}(Y)$. Recíprocamente, sea $P \in f_T^{-1}(Y)$, entonces $[1]_\theta \subseteq f_T(P) = T^{-1}(P)$ y, como $T([1]_\theta) = [1]_\theta$, resulta que

$[1]_\theta \subseteq P$. Obtenemos así que $P \in Y$. Luego, $f_T^{-1}(Y) \subseteq Y$. Concluimos que $Y$ es un $Ef$-cerrado de $X(B)$ y por ende $\Theta_{E_f}$ es sobreyectiva.
Por último, probemos que $\Theta_{E_f}(Y) = \theta$. Sea $x \in [1]_{\Theta_{E_f}(Y)}$, entonces $\sigma_B(x) \cap Y = \sigma_B(1) \cap Y = Y$, luego como $[1]_\theta \in Y$, resulta que $[1]_\theta \in \sigma_B(x)$. De este modo, $x \in [1]_\theta$, de lo cual se sigue que $[1]_{\Theta_{E_f}(Y)} \subseteq [1]_\theta$. Recíprocamente, sea $x \in [1]_\theta$, entonces $Y \subseteq \sigma_B(x)$, de donde tenemos que $\sigma_B(x) \cap Y = Y = \sigma_B(1) \cap Y$. Lo cual implica que $x \in [1]_{\Theta_{E_f}(Y)}$. De este modo, $[1]_\theta \subseteq [1]_{\Theta_{E_f}(Y)}$. Luego, $[1]_\theta = [1]_{\Theta_{E_f}(Y)}$ y, por el Teorema 3.5.3, resulta que $\theta = \Theta_{E_f}(Y)$.
Concluimos de esta manera que $\Theta_{Ef}$ es un isomorfismo entre el retículo de todos los $Ef$-cerrados de $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(B)$ y el dual del retículo de las $\mathbf{T_k m}$-congruencias de $B$. □

**Corolario 4.3.3** *Sean $B \in \mathbf{B}_{\mathbf{T_k m}}$ y $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(B)$ el $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacio asociado a $B$. Entonces, el retículo de los $\mathbf{T_k m}$-filtros de $B$, $\mathcal{F}_{T_k m}(B)$, es isomorfo al dual del retículo $\mathcal{C}_{Ef}(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(B))$ de todos los $Ef$-cerrados de $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(B)$.*

**Corolario 4.3.4** *Sea $(X, E, f)$ un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacio. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{CP}(X)$ es una $\mathbf{T_k m}$-álgebra subdirectamente irreducible,*

(ii) *$\mathcal{CP}(X)$ es una $\mathbf{T_k m}$-álgebra simple,*

(iii) *$\mathcal{C}_{Ef}(X) = \{\emptyset, X\}$,*

**Dem.** Es inmediato del Teorema 4.3.2 y del Corolario 4.2.11 □

A través de la dualidad que hemos determinado para las $\mathbf{T_k m}$-álgebras, caracterizamos las $\mathbf{T_k m}$-álgebras subdirectamente irreducibles.

Con $\mathcal{CP}_{Ef}(X)$ se designa a la familia de los $Ef$-clopens de un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacio $(X, E, f)$.

**Lema 4.3.5** *Sea $(X, E, f)$ un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacio. Si un subconjunto $Y$ de $X$ es un $Ef$-saturado de $X$, entonces su complemento $X \setminus Y$ también lo es.*

**Dem.** Sea (1) $Y \subseteq X$ un $Ef$-saturado de $X$ y sea $y \in E(X \setminus Y)$, entonces (2) existe $x \in X \setminus Y$ tal que $(x, y) \in E$. Supongamos que $y \in Y$, luego por (1) existe $z \in Y$ tal que $(y, z) \in E$. De este modo, existe $z \in Y$ tal que $(x, z) \in E$ de lo cual se sigue que $x \in E(Y) = Y$, lo que contradice (2). En consecuencia, inferimos que $E(X \setminus Y) \subseteq X \setminus Y$ y, por lo tanto, $X \setminus Y$ es un $E$-saturado de $X$. Es rutina probar que $X \setminus Y$ es un $f$-subconjunto de $X$. □

**Corolario 4.3.6** *Sea $(X, E, f)$ un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacio. Entonces el conjunto $\mathcal{CP}_{Ef}(X)$ de todos $Ef$-clopens de $X$, con las operaciones de unión e intersección, es un álgebra de Boole.*

**Lema 4.3.7** *Sea $\langle B, \exists, T\rangle \in \mathbf{B_{T_k m}}$. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *Si $x \in \exists(B)$, entonces $\sigma_B(x)$ es un $E$-clopen de $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(B)$.*

(ii) *Si $x \in I(B)$, entonces $\sigma_B(x)$ es un $f$-clopen de $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(B)$.*

(iii) *Si $x \in I(\exists(B))$, entonces $\sigma_B(x)$ es un $Ef$-clopen de $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(B)$.*

**Dem.**

(i): Sean (1) $x \in \exists(B)$ y $P \in E_\exists(\sigma_B(x))$, entonces existe $Q \in \sigma_B(x)$ tal que $(Q, P) \in E_\exists$, lo cual implica por (1) que $x \in P$ y así $P \in \sigma_B(x)$. Esto nos permite concluir que $E_\exists(\sigma_B(x)) \subseteq \sigma_B(x)$ y, por lo tanto, $\sigma_B(x)$ es un $E$-clopen de $B$.

(ii): Sea $x \in I(B)$, la igualdad $f_T^{-1}(\sigma_B(x)) = \sigma_B(x)$ resulta de que las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos:

(1) $P \in f_T^{-1}(\sigma_B(x))$,

(2) $f_T(P) = T^{-1}(P) \in \sigma_B(x)$,

(3) $x \in T^{-1}(P) \in \sigma_B(x)$,

(4) $T(x) \in P$,

(5) $x \in P$,

(6) $P \in \sigma_B(x)$.

(iii): Inmediato de (i) y (ii). □

Recíprocamente.

**Lema 4.3.8** *Sea $(X, E, f)$ un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacio. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *Si $Y$ es un $E$-clopen, entonces existe $x \in \exists(B)$ tal que $\sigma_B(x) = Y$.*

(ii) *Si $Y$ es un $f$-clopen, entonces existe $x \in I(B)$ tal que $\sigma_B(x) = Y$.*

(iii) *Si $Y$ es un $Ef$-clopen, entonces existe $x \in I(\exists(B))$ tal que $\sigma_B(x) = Y$.*

**Dem.**

(i): Sea $Y$ un $E$-clopen, entonces, por el Lema 4.2.9, existe $x \in B$ tal que (1) $\sigma_B(x) = Y$. Supongamos que $\exists x \neq x$, luego $\exists x \not\leq x$ o $x \not\leq \exists x$. Si $\exists x \not\leq x$, entonces existe $P \in X(B)$ tal que $\exists x \in P$ y $x \notin P$ de lo cual, por (1), se sigue que $P \in \sigma_B(\exists x)$ y $P \notin Y$. Además, por el Lema 4.2.9 y ($\mathfrak{B}_m 1$), resulta que $\sigma_B(\exists x) = \exists_{E_\exists}\sigma_B(x) = E_\exists \sigma_B(x) = E_\exists Y = Y$. De este modo existe $P \in X(B)$ tal que $P \in Y$ y $P \notin Y$ lo cual es una contradicción. En forma análoga, obtenemos la misma contradicción si $x \not\leq \exists x$ . Luego, $\exists x = x$ y lo afirmado en (1), nos permite concluir la demostración.

(ii): Sea (1) $Y$ un $f$-clopen, entonces por el Lema 4.2.9 existe $x \in B$ tal que (2) $\sigma_B(x) = Y$. Sea $z = x \wedge T(x) \wedge ... \wedge T^{k-1}(x) \in I(B)$. Por (1), (2) y el Lema 4.2.9, obtenemos que $\sigma_B(z) = Y$. Esta afirmación nos permite concluir que existe $z \in I(B)$ tal que $\sigma_B(z) = Y$.

(iii): Sea (1) $Y$ un $Ef$-clopen, entonces por el Lema 4.2.9 existe $x \in B$ tal que (2) $\sigma_B(x) = Y$. Sea $z = x \wedge T(x) \wedge ... \wedge T^{k-1}(x) \in I(\exists(B))$, de lo cual por el Lema 4.2.9, (1) y (2) resulta que $\sigma_B(z) = Y$, y así, la demostración está completa. $\square$

Como consecuencia directa de los resultados precedentes inferimos que

**Corolario 4.3.9** *Si $B \in \mathbf{B_{T_k m}}$, entonces $\mathcal{CP}_{Ef}(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(B))$ y $\exists(I(B))$ son álgebras de Boole isomorfas.*

**Dem.** Del Corolario 4.3.6 y los Lemas 4.3.7, 4.3.8 y 4.2.9, resulta que la función $h : \exists(I(B)) \longrightarrow \mathcal{CP}_{Ef}(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(B))$, definida por $h(x) = \sigma_B(x)$, es un isomorfismo de álgebras de Boole. $\square$

Finalmente, como conclusión de los resultados precedentes obtenemos el siguiente:

**Corolario 4.3.10** *Sea $\langle B, \exists, T\rangle$ una $\mathbf{T_k m}$-álgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$B$ es subdirectamente irreducible,*

(ii) *$B$ es simple,*

(iii) $\mathcal{CP}_{Ef}(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(B)) = \{\emptyset, X(B)\} = \mathbf{2}$.

## 4.4. $\mathbf{T_k m}$-subálgebras

En este sección, nuestro objetivo es obtener una descripción dual de las $\mathbf{T_k m}$-subálgebras a través de la dualidad topológica obtenida en la sección anterior. Para ello, comenzamos introduciendo las siguientes nociones:

**Definición 4.4.1** *Sea $(X, E)$ un espacio de Halmos, una relación de equivalencia $R$ sobre $X$ es una bisimulación sobre $X$ si satisface las siguientes condiciones:*

($\mathrm{B}_k$1) *$R$ es una relación separada, esto es, para cada $x, y \in X$ tales que $(x, y) \notin R$ existe un clopen $R$-saturado $U$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$ (o $x \notin U$ e $y \in U$).*

($\mathrm{B}_k$2) *$R(E(x)) \subseteq E(R(x))$ para todo $x \in X$.*

**Observación 4.4.2** *Es claro que una relación de equivalencia $R$ sobre $X$ es una bisimulación sobre $X$ si, y sólo si, $R$ es una relación separada y $RE(x) = ER(x)$ para todo $x \in X$*

**Definición 4.4.3** *Sea $(X, E)$ un espacio de Halmos y sea $R$ una bisimulación sobre $X$, con $\mathcal{X}/R$ se denota al espacio cociente de $X$ por $R$. Esto es, $\mathcal{X}/R = (X/R, \tau_{q_R}, E_R)$, donde $X/R = \{R(x) : x \in X\}$, $\tau_{q_R}$ es la topología de identificación en $X/R$ determinada por $q_R$, $\tau_{q_R} = \left\{U \subseteq X/R : (q_R)^{-1}(U) \in \tau\right\}$, y $E_R$ está definida por $R(x)E_R R(y)$ si, y sólo si, existen $z \in R(x)$ y $t \in R(y)$ tales que $(z, t) \in E$.*

Es rutina probar que,

**Lema 4.4.4** *Si $(X, E)$ es un espacio de Halmos y $R$ es una bisimulación sobre $X$, entonces $(X/R, E_R)$ es un espacio de Halmos.*

**Definición 4.4.5** *Sean $(X, E, f)$ un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacio y $R$ una relación de bisimulación sobre $X$. $R$ es una $\mathbf{k}$-relación de bisimulación si satisface la condición:*

($\mathrm{B}_k$3) *$f(R(x)) = R(f(x))$ para todo $x \in X$.*

**Lema 4.4.6** *Sea $(X, E, f)$ un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacio y sea $R$ una $\mathbf{k}$-relación de bisimulación sobre $X$, entonces $(X/R, E_R, f_R)$ es un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacio, donde $f_R : X/R \longrightarrow X/R$ está definida por $f_R([x]_R) = [f(x)]_R$.*

**Dem.** En virtud de que $R$ es una $\mathbf{k}$-relación de bisimulación, resulta que $f_R$ está bien definida y es inyectiva. Además, de la sobreyectividad de $f$ deducimos que $f_R$ es sobreyectiva. Consideremos ahora $U \in \tau_{q_R}$, del hecho que las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos:

(1) $x \in q_R^{-1}\left(f_R^{-1}(U)\right)$,
(2) $q_R(x) \in f_R^{-1}(U)$,
(3) $[x]_R \in f_R^{-1}(U)$,
(4) $f_R([x]_R) \in U$,
(5) $[f(x)]_R \in U$,
(6) $q_R(f(x)) \in U$,
(7) $f(x) \in q_R^{-1}(U)$,
(8) $x \in f^{-1}\left(q_R^{-1}(U)\right)$,

resulta que $q_R^{-1}\left(f_R^{-1}(U)\right) = f^{-1}\left(q_R^{-1}(U)\right)$ y, por lo tanto, $q_R^{-1}\left(f_R^{-1}(U)\right) \in \tau$. Concluimos así que $f_R^{-1}(U) \in \tau_{q_R}$, por lo que $f_R$ es continua.
Por otra parte, sea $U \in \tau_{q_R}$. Se satisface que $q_R^{-1}(f_R(U)) = f\left(q_R^{-1}(U)\right)$. En efecto, sea $x \in q_R^{-1}(f_R(U))$, entonces existe (9) $[y]_R \in U, f_R([y]_R) = [f(y)]_R = [x]_R$, luego $(f(y), x) \in R$. De este modo, $x \in R(f(y)) = f(R(y))$, de lo cual se sigue que existe $z \in R(y)$ tal que $f(z) = x$. De donde, por (9), obtenemos que existe $[z]_R \in U, f(z) = x$ y, por consiguiente, existe $z \in X, z \in q_R^{-1}(U), f(z) = x$ y así $x \in f(q_R^{-1}(U))$. Luego, $q_R^{-1}(f_R(U)) \subseteq f\left(q_R^{-1}(U)\right)$. Recíprocamente, sea $y \in f\left(q_R^{-1}(U)\right)$, entonces existe $x \in q_R^{-1}(U)$ tal que $f(x) = y$. De esta afirmación se obtiene $q_R(y) = [y]_R = [f(x)]_R = f_R([x]_R) \in f_R(U)$. De donde se sigue que $y \in q_R^{-1}(f_R(U))$. Así $f\left(q_R^{-1}(U)\right) \subseteq q_R^{-1}(f_R(U))$ y, por ende, $f\left(q_R^{-1}(U)\right) = q_R^{-1}(f_R(U))$. De esta igualdad, como $f\left(q_R^{-1}(U)\right) \in \tau$, resulta que $f_R$ es abierta. Concluimos que, $f_R$ es homeomorfismo.

($\mathfrak{T}_\mathbf{k}$**m4**) $([x]_R, [y]_R) \in E_R$ si, y sólo si, $(f_R([x]_R), f_R([y]_R)) \in E_R$ para todo $[x]_R, [y]_R \in X/R$.

$(\Rightarrow)$ : Sean $[x]_R, [y]_R \in X/R$ tales que $([x]_R, [y]_R) \in E_R$, entonces existen $z \in [x]_R, t \in [y]_R$ tal que $(z, t) \in E$ de donde, por ser $R$ una $\mathbf{k}$-relación de bisimulación, resulta que $(f(z), f(x)) \in R, (f(t), f(y)) \in R, (f(z), f(t)) \in E$, luego $f(z) \in [f(x)]_R, f(t) \in [f(y)]_R, (f(z), f(t)) \in E$ y así $([f(x)]_R, [f(y)]_R) \in E_R$.

$(\Leftarrow)$ : Supongamos que $([f(x)]_R, [f(y)]_R) \in E_R$, entonces existe $z \in [f(x)]_R, t \in [f(y)]_R$ tal que $(z, t) \in E$. Además, como $f(u) = z, f(v) = t$ con $u, v \in X$, se sigue que $(f(u), f(x)) \in R, (f(v), f(y)) \in R, (f(u), f(v)) \in E$, de donde por ser $R$ una $\mathbf{k}$-relación de bisimulación resulta que $(u,x) \in R, (v,y) \in R$ y $(u,v) \in E$. Luego, existen $u,v \in X, u \in [x]_R, v \in [y]_R, (u,v) \in E$ y así $([x]_R,[y]_R) \in E_R$.

**($\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}$m3)** $f_R^k([x]_R) = [x]_R$ para todo $[x]_R \in X/R$

Resulta inmediato del hecho que $f_R^k([x]_R) = [f^k(x)]_R$.
Concluimos así que $(X/R, E_R, f_R)$ es un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacio. □

**Lema 4.4.7** *Sea $(X,E,f)$ un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacio y sea $R$ una* **k***-relación de bisimulación sobre $X$, entonces la función $q_R : X \longrightarrow X/R$, definida por $q_R(x) = [x]_R$, es un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-morfismo sobreyectivo.*

**Dem.** Como $\tau_{q_R}$ es la topología de identificación determinada por $q_R$, $q_R$ es continua. Sean $x \in X$, $[y]_R \in q_R(E(x))$, entonces existe $z \in E(x), q_R(z) = [y]_R$. Se sigue que existe $z \in X$, $(z,y) \in R$ y $(z,x) \in E$, y como $(x,x) \in R$, resulta que $[y]_R E_R [x]_R$. De este modo, $[y]_R \in E_R(q_R(x))$. Luego, (1) $q_R(E(x)) \subseteq E_R(q_R(x))$. Recíprocamente, sea $[y]_R \in E_R(q_R(x)) = E_R([x]_R)$ entonces (2) existen $z \in [x]_R, t \in [y]_R, (z,t) \in E$, de lo cual resulta que $(x,t) \in E \circ R$ y como $R$ una **k**-relación de bisimulación obtenemos que $(x,t) \in R \circ E$. De esta afirmación tenemos que existe $p \in X, (x,p) \in E$ y $(p,t) \in R$. Entonces, por (2), se tiene que $(p,y) \in R$ resultando así que existe $p \in E(x), q_R(p) = [y]_R$. De donde se sigue que $[y]_R \in q_R(E(x))$. Luego, (3) $E_R(q_R(x)) \subseteq q_R(E(x))$. Por lo tanto, de (1) y (3) resulta la igualdad y así $q_R$ es un morfismo de Halmos. Consideremos ahora $x \in X$, de las igualdades siguientes:

$(q_R \circ f)(x) = q_R(f(x)) = [f(x)]_R$,

$(f_R \circ q_R)(x) = f_R([x]_R) = [f(x)]_R$,

obtenemos que $q_R \circ f = f \circ q_R$.
Concluimos que $q_R$ es un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-morfismo. □

**Lema 4.4.8** *Sea $\langle B, \exists, T\rangle \in \mathbf{B}_{\mathbf{T_k m}}$ y sea $\langle S, \exists_S, T_{|S}\rangle$ una* $\mathbf{T_k m}$*-subálgebra de $B$, se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *La función $h : (X(B), E_\exists) \longrightarrow (X(S), E_{\exists_S})$, definida por $h(P) = P \cap S$, es un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-morfismo sobreyectivo.*

(ii) *La relación de equivalencia $R_S$, definida en $X(B)$ por $(P,Q) \in R_S$ si, y sólo si, $P \cap S = Q \cap S$, es una* **k***-relación de bisimulación en $X(B)$.*

(iii) *La relación $E_S$ definida en $X(B)/R_S$ por $[P]_{R_S} E_S [Q]_{R_S}$ si, y sólo si, $P \cap \exists(S) = Q \cap \exists(S)$, es de equivalencia.*

**Dem.**

(i): Consideremos la función inclusión $i : S \longrightarrow B$, es rutina probar que $i$ es un monomorfismo en la categoría $\mathfrak{B}_{\mathfrak{T}_k\mathfrak{M}}$ de las $\mathbf{T_k m}$-álgebras. Luego, por el Lema 4.2.8, la función $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(i) : X(B) \longrightarrow X(S)$, definida por $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(i)(P) = i^{-1}(P)$, es un $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$-morfismo. Teniendo en cuenta que $h(P) = P \cap S = \mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(i)(P)$ para cada $P \in X(B)$, concluimos que $h$ es un $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$-morfismo sobreyectivo.

(ii): Es claro que $R_S$ es una relación de equivalencia. Sean $P, Q \in X(B)$ tales que $(P, Q) \notin R_S$, entonces (1) existe $x \in P \cap S$ y $x \notin Q \cap S$ (o existe $x \in Q \cap S$ y $x \notin P \cap S$), de donde se sigue que $P \in \sigma_B(x)$ y $Q \notin \sigma_B(x)$. Probemos que $\sigma_B(x)$ es $R_S$-saturado. En efecto. Sea $T \in R_S(\sigma_B(x))$, entonces existe $H \in \sigma_B(x)$ tal que $(T, H) \in R_S$. Lo cual implica, por (1), que $x \in T \cap S$. De este modo, $T \in \sigma_B(x)$. Luego, $R_S(\sigma_B(x)) \subseteq \sigma_B(x)$. La otra inclusión es inmediata del hecho que $R_S$ es reflexiva. Además, teniendo en cuenta que $\sigma_B(x) \in \mathcal{CP}(X(B))$, concluimos que existe $\sigma_B(x) \in \mathcal{CP}(X(B))$, $R_S$-saturado tal que $P \in \sigma_B(x)$ y $Q \notin \sigma_B(x)$ y así $R_S$ es una relación separada.

Resta probar que $R_S \circ E_\exists \subseteq E_\exists \circ R_S$. Sean $P \in X(B)$ y $Q \in (R_S \circ E_\exists)(P)$, entonces existe $H \in E_\exists(P), (H, Q) \in R_S$. De esta afirmación tenemos que $H \cap \exists(B) \cap S = P \cap \exists(B) \cap S$ y $Q \cap S \cap \exists(S) = H \cap S \cap \exists(S)$. De donde, por ser $S$ una $\mathbf{T_k m}$-subálgebra de $B$, se sigue que $Q \cap S \cap \exists(S) = H \cap S \cap \exists(S) = P \cap \exists(S) \cap S$. De este modo, $h(Q) \cap \exists(S) = h(P) \cap \exists(S)$, y así $[h(Q)]_{E_{\exists_S}} = [h(P)]_{E_{\exists_S}}$. Luego, $E_{\exists_S}(h(Q)) = E_{\exists_S}(h(P))$ y, de esta igualdad y (i), obtenemos que $h(E_\exists(Q)) = h(E_\exists(P))$. Además, como $h(P) \in h(E_\exists(P))$ resulta que $h(P) \in h(E_\exists(Q))$. Luego, existe $T \in E_\exists(Q)$ tal que $T \cap S = P \cap S$, de lo que se sigue que $T \in R_S(P)$ y $(T, Q) \in E_\exists$, por lo que $Q \in E_\exists(R_S(P))$. Concluimos que $R_S \circ E_\exists \subseteq E_\exists \circ R_S$ y de este modo $R_S$ es una bisimulación sobre $X(B)$.

Solo queda demostrar que para todo $P, Q \in X(B)$, $(P, Q) \in R_S$ si, y sólo si, $(f_T(P), f_T(Q)) \in R_S$

$(\Rightarrow)$ : Supongamos que $(P, Q) \in R_S$, entonces $T^{-1}(P) \cap T^{-1}(S) = T^{-1}(Q) \cap T^{-1}(S)$. Luego se tiene que $f_T(P) \cap T^{-1}(S) \cap S = f_T(Q) \cap T^{-1}(S) \cap S$ y como $S \subseteq T^{-1}(S)$, se sigue que $(f_T(P), f_T(Q)) \in R_S$.

$(\Leftarrow)$ : Consideremos $P, Q \in X(B)$ tales que $(f_T(P), f_T(Q)) \in R_S$, entonces $T^{-1}(P) \cap T^{-1}(S) \cap S = T^{-1}(Q) \cap T^{-1}(S) \cap S$. De donde se obtiene que $\left(T_{|S}\right)^{-1}(P \cap S) =$

$\left(T_{|S}\right)^{-1}(Q \cap S)$, luego teniendo en cuenta que $T_{|S} : S \to S$ es biyectiva, concluimos que $(P, Q) \in R_S$.

(iii): Es rutina probar que $E_S$ es una relación de equivalencia definida en $X(B)/R_S$. $\square$

**Lema 4.4.9** *Sea $\langle B, \exists, T\rangle \in \mathbf{B_{T_km}}$ y sea $\langle S, \exists_S, T_{|S}\rangle$ una $\mathbf{T_k m}$-subálgebra de $B$. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *Las relaciones $(E_\exists)_{R_S}$ y $E_S$ definidas en $X(B)/R_S$ son iguales y $\big(X(B)/R_S, (E_\exists)_{R_S}, (f_T)_{R_S}\big)$ es un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacio, donde $X(B)/R_S$ es el espacio cociente de $X(B)$ por $R_S$ y $(f_T)_{R_S} : X(B)/R_S \longrightarrow X(B)/R_S$ está definida por $(f_T)_{R_S}([P]_{R_S}) = [f_T(P)]_{R_S}$.*

(ii) *La función $g_S : S \longrightarrow \mathcal{CP}(X(B)/R_S)$, definida por $g_S(x) = \{[P]_{R_S} : x \in P \cap S\}$, es un isomorfismo de $\mathbf{T_k m}$-álgebras.*

**Dem.**

(i): En primer lugar veamos que $E_S = (E_\exists)_{R_S}$. En efecto, sean $P, Q \in X(B)$ tales que $[P]_{R_S}\left(E_\exists\right)_{R_S}[Q]_{R_S}$, entonces existen $T \in [P]_{R_S}, H \in [Q]_{R_S}$ tales que $(T, H) \in E_\exists$. De donde, por ser $S$ una subálgebra monádica de $B$, se sigue que $P \cap \exists(S) = P \cap S \cap \exists(S) = T \cap S \cap \exists(S) = T \cap S \cap \exists(B) = H \cap S \cap \exists(B) = H \cap S \cap \exists(S) = Q \cap S \cap \exists(S) = Q \cap \exists(S)$, y de este modo $[P]_{R_S} E_S [Q]_{R_S}$. Luego, $(E_\exists)_{R_S} \subseteq E_S$. Recíprocamente, sean $P, Q \in X(B)$ tales que $[P]_{R_S} E_S [Q]_{R_S}$ y sea (1) $T \in [P]_{R_S}$, entonces $T \cap S \cap \exists(S) = P \cap S \cap \exists(S) = Q \cap S \cap \exists(S)$. De esta igualdad resulta que $[h(T)]_{E_{\exists_S}} = [h\,(Q)]_{E_{\exists_S}}$, de esta afirmación obtenemos que $E_{\exists_S}(h(T)) = E_{\exists_S}(h(Q))$ y así $h(E_\exists(T)) = h(E_\exists(Q))$ y como $h(Q) \in h(E_\exists(Q))$ tenemos que $h(Q) \in h(E_\exists(T))$. De donde se sigue que existe $H \in E_\exists(T)$ tal que $h(H) = h(Q)$, luego $H \cap \exists(B) = T \cap \exists(B), H \cap S = Q \cap S$. De esta afirmación y (1) tenemos que existen $T \in [P]_{R_S}, H \in [Q]_{R_S}, H \cap \exists(B) = T \cap \exists(B)$ y así $[P]_{R_S}(E_\exists)_{R_S}[Q]_{R_S}$. Por lo tanto, $E_S \subseteq (E_\exists)_{R_S}$.

Por otra parte, de los Lemas 4.4.8 y 4.4.6 resulta que $(X(B)/R_S, (E_\exists)_{R_S}, (f_T)_{R_S})$ es un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacio.

(ii): Consideremos las funciones $g : X(B)/R_S \longrightarrow X(S)$, definida por $g([P]_{R_S}) = h(P)$, y $\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(g) : \mathcal{CP}(X(S)) \longrightarrow \mathcal{CP}(X(B)/R_S)$. Para cada $x \in S$, $\left(\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(g) \circ \sigma_S\right)(x) = g_S(x)$. En efecto, sea $P \in X(B)$, del hecho que las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos:

(1) $[P]_{R_S} \in g^{-1}(\sigma_S(x))$,

(2) $g([P]_{R_S}) \in \sigma_S(x)$,

(3) $h(P) \in \sigma_S(x)$,

(4) $h(P) \in X(S)$ y $x \in h(P)$,

(5) $P \cap S \in X(S)$ y $x \in h(P)$,

(6) $x \in P \cap S$,

(7) $[P]_{R_S} \in g_S(x)$,

resulta que $\big(I\!B_{\mathbf{T_k M}}(g) \circ \sigma_S\big)(x) = g_S(x)$ y, por lo tanto, $g_S$ está bien definida.

Probemos ahora que $g$ es un $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-morfismo. Consideremos ahora $a \in S$, las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos:

(8) $P \in q_{R_S}^{-1}(g^{-1}(\sigma_S(a)))$,

(9) $q_{R_S}(P) = [P]_{R_S} \in g^{-1}(\sigma_S(a))$,

(10) $g([P]_{R_S}) \in \sigma_S(a)$,

(11) $h(P) = P \cap S \in \sigma_S(a)$,

(12) $a \in P$ y $P \in X(B)$,

(13) $P \in \sigma(a)$,

luego $q_{R_S}^{-1}(g^{-1}(\sigma_S(a))) = \sigma(a), a \in S \subseteq B$, de donde se sigue que $q_{R_S}^{-1}(g^{-1}(\sigma_S(a))) \in \tau$ y así obtenemos que para cada $a \in S$, $g^{-1}(\sigma_S(a)) \in \tau_{q_R}$. Esta afirmación nos permite concluir que $g$ es continua.

Además, $g\big(\,(E_\exists)_{R_S}\,([P]_{R_S})\,\big) = E_{\exists_S}(\,g([P]_{R_S})\,)$. En efecto, sea $Q \in g\big((E_\exists)_{R_S}\,([P]_{R_S})\,\big)$, entonces existe $[H]_{R_S} \in (E_\exists)_{R_S}\big([P]_{R_S}\big)$ tal que $g([H]_{R_S}) = Q$. Luego, existen $T \in [H]_{R_S}, Z \in [P]_{R_S}$ tales que $(T,Z) \in E_\exists, H \cap S = Q$. Lo cual implica que $T \cap S = H \cap S, Z \cap S = P \cap S, T \cap \exists(B) = Z \cap \exists(B)$ y $Q = H \cap S$. De estas igualdades obtenemos que

$$
\begin{aligned}
Q \cap \exists(S) &= H \cap S \cap \exists(B) = T \cap S \cap \exists(B) \\
&= Z \cap S \cap \exists(B) = P \cap S \cap \exists(B) \\
&= P \cap S \cap \exists(S),
\end{aligned}
$$

de donde resulta que $Q \in E_{\exists_S}(P \cap S) = E_{\exists_S}(h(P)) = E_{\exists_S}\big(g([P]_{R_S})\big)$. Luego, $g\big((E_\exists)_{R_S}\,([P]_{R_S})\big) \subseteq E_{\exists_S}(g([P]_{R_S}))$. Recíprocamente, por los Lemas 4.4.8 y 4.4.9 (i), tenemos que (14) $E_{\exists_S}\,(g\,([P]_{R_S})) = E_{\exists_S}(h(P)) = h(E_\exists(P))$ y (15) $g\,((E_\exists)_{R_S}\,([P]_{R_S})) = g\,(E_S([P]_{R_S}))$. Consideremos ahora $T \in h(E_\exists(P))$, entonces existe $Q \in X(B)$ tal que $Q \cap \exists(B) = P \cap \exists(B), h(Q) = T$, de donde tenemos que $Q \cap S \cap \exists(B) = P \cap S \cap \exists(B), g([Q]_{R_S}) = T$. De este modo, $\big([P]_{R_S}, [Q]_{R_S}\big) \in E_S, g\big([Q]_{R_S}\big) = T$ y así $T \in g\big(E_S\big([P]_{R_S}\big)\big)$. Luego, $h(E_\exists(P)) \subseteq g\big(E_S\big([P]_{R_S}\big)\big)$. De esta afirmación, (14) y (15), concluimos que $E_{\exists_S}\left(g\left([P]_{R_S}\right)\right) \subseteq g\left((E_\exists)_{R_S}\left([P]_{R_S}\right)\right)$.

Resta probar que $g \circ (f_T)_{R_S} = f_{T_S} \circ g$.

Sea $[P]_{R_S} \in X(B)/R_S$, se satisfacen las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
(16)\ \left(g \circ (f_T)_{R_S}\right)\left([P]_{R_S}\right) &= g\left([f_T\left(P\right)]_{R_S}\right)\\
&= f_T(P) \cap S\\
&= T^{-1}(P) \cap S,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(17)\ \left(f_{T_S} \circ g\right)\left([P]_{R_S}\right) &= f_{T_S}\left(g\left([P]_{R_S}\right)\right)\\
&= f_{T_S}\left(P \cap S\right)\\
&= T_S^{-1}(P \cap S)\\
&= \left(T_{|S}\right)^{-1}\left(P \cap S\right)\\
&= T^{-1}(P \cap S) \cap S\\
&= T^{-1}(P) \cap T^{-1}(S) \cap S\\
&= T^{-1}(P) \cap S.
\end{aligned}
$$

De (16) y (17) resulta la igualdad.

De la definición de $g$ y $R_S$ tenemos que $g$ es inyectiva. Una consecuencia directa del Lema 4.4.8 es que $g$ es un $\mathfrak{T}_\mathbf{k}\mathbf{m}$-morfismo biyectivo.

Finalmente, como $g_S = \mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(g) \circ \sigma_S$, entonces del Lema 4.2.7 resulta que $g_S$ es un isomorfismo de $\mathbf{T_k m}$-álgebras. $\square$

**Corolario 4.4.10** *Sea $\langle B, \exists, T\rangle \in \mathbf{B_{T_k m}}$ y sea $\langle S, \exists_S, T_{|S}\rangle$ una $\mathbf{T_k m}$-subálgebra de $B$, entonces $S \backsimeq \mathcal{CP}\big(X(B)/R_S\big)$, siendo $R_S$ la $\mathbf{k}$-relación de bisimulación en $X(B)$ definida en el Lema* 4.4.8.

Recíprocamente.

**Lema 4.4.11** *Sea $B$ una $\mathbf{T_k m}$-álgebra y sea $R$ una $\mathbf{k}$-relación de bisimulación en $X(B)$, entonces la $\mathbf{T_k m}$-álgebra $\mathcal{CP}\big(X(B)/R\big)$ es isomorfa a una $\mathbf{T_k m}$-subálgebra $S$ de $B$. Mas aún, $R = R_S$.*

**Dem.** Sea $R$ una $\mathbf{k}$-relación de bisimulación en $X(B)$. En virtud de los Lemas 4.2.9 y 4.2.7 tenemos que $S = \sigma_B^{-1}\left(\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(q_R)\left(\mathcal{CP}(X(B)/R)\right)\right)$ es una $\mathbf{T_k m}$-subálgebra de $B$ y $h_R = \sigma_B^{-1} \circ \mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(q_R) : \mathcal{CP}(X(B)/R) \longrightarrow S$ es un $\mathbf{T_k m}$-isomorfismo. De este modo, $S \simeq \mathcal{CP}\big(X(B)/R\big)$.

Probemos ahora que $R = R_S$. En primer lugar observemos que de las definiciones de $S$ y $\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(q_R)$ resulta que (1) $x \in S$ si, y sólo si, existe $V \in \mathcal{CP}\big(X(B)/R\big)$ tal que $q_R^{-1}(V) = \sigma_B(x)$.

En virtud del Lema 4.2.8 y del Corolario 4.2.11 tenemos que $\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h_R) : X(S) \longrightarrow X\left(\mathcal{CP}(X(B)/R)\right)$, definida por $\left(\mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h_R)\right)(P \cap S) = h_R^{-1}(P \cap S)$, y $\varepsilon_{X(B)/R} : X(B)/R \longrightarrow X\left(\mathcal{CP}(X(B)/R)\right)$, definida por $\varepsilon_{X(B)/R}([P]_R) = \{U \in \mathcal{CP}(X(B)/R) : [P]_R \in U\}$, son $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-isomorfismos. De donde se sigue que $h_1 = \left(\varepsilon_{X(B)/R}\right)^{-1} \circ \mathbb{B}_{\mathbf{t_k m}}(h_R) : X(S) \longrightarrow X(B)/R$ es un isomorfismo y de este modo (2) $h_1 \circ g$ es un isomorfismo entre los $\mathfrak{T}_{\mathbf{k}}\mathbf{m}$-espacios $X(B)/R_S$ y $X(B)/R$, siendo $g : X(B)/R_S \longrightarrow X(S)$ la función definida por $g([P]_{R_S}) = P \cap S$.

Por otro lado, para cada $P, Q \in X(B)$ las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos :

(3) $[P]_{R_S} = [Q]_{R_S}$,

(4) $(h_1 \circ g)([P]_{R_S}) = (h_1 \circ g)([Q]_{R_S})$,

(5) $h_1(g([P]_{R_S})) = h_1(g([Q]_{R_S}))$,

(6) $h_1(P \cap S) = h_1(Q \cap S)$.

Luego, (7) $[P]_{R_S} = [Q]_{R_S}$ si, y sólo si, $h_1(P \cap S) = h_1(Q \cap S)$.

Probemos que $h_1(P \cap S) = [P]_R$. Por la definición de $h_1$ tenemos que, $h_1(P \cap S) = [P]_R$ si, y sólo si, $h_R^{-1}(P \cap S) = \varepsilon_{X(B)/R}([P]_R)$. Veamos entonces que $h_R^{-1}(P \cap S) = \varepsilon_{X(B)/R}([P]_R)$. . En efecto, sea $U \in \mathcal{CP}(X(B)/R)$. Las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos:

(8) $U \in h_R^{-1}(P \cap S)$,

(9) $h_R(U) \in P \cap S$,

(10) $\sigma_B^{-1}\left(\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(q_R)(U)\right) \in P \cap S$,

(11) $\mathbb{B}_{\mathbf{T_k M}}(q_R)(U) \in \sigma_B(P \cap S)$,

(12) $q_R^{-1}(U) \in \sigma_B(P \cap S)$,

(13) existe $x \in P \cap S, \sigma_B(x) = q_R^{-1}(U)$,

(14) existe $x \in S$ tal que $P \in \sigma_B(x), \sigma_B(x) = q_R^{-1}(U)$.

Luego, si $U \in h_R^{-1}(P \cap S)$, entonces $P \in q_R^{-1}(U)$.

Por otra parte, las siguientes condiciones son equivalentes dos a dos:

(15) $P \in q_R^{-1}(U)$,

(16) $q_R(P) \in q_R\left(q_R^{-1}(U)\right) = U$,
(17) $[P]_R \in U$,
(18) $U \in \varepsilon_{X(B)/R}([P]_R)$.

Por lo tanto, de lo expuesto resulta que $h_R^{-1}(P \cap S) \subseteq \varepsilon_{X(B)/R}([P]_R)$. Recíprocamente, sea $U \in \mathcal{CP}(X(B)/R), [P]_R \in U$, entonces $P \in q_R^{-1}(U) \in \mathcal{CP}(X(B))$. Lo cual implica que existe $x \in B, \sigma_B(x) = q_R^{-1}(U)$. De esta afirmación y (1), tenemos que $x \in S$. De este modo, obtenemos que $x \in P \cap S$ y $\sigma_B(x) = q_R^{-1}(U)$ y por lo tanto $U \in h_R^{-1}(P \cap S)$. Luego, $\varepsilon_{X(B)/R}([P]_R) \subseteq h_R^{-1}(P \cap S)$. Concluimos que $\varepsilon_{X(B)/R}([P]_R) = h_R^{-1}(P \cap S)$.
Así, resulta que $h_1(P \cap S) = [P]_R$. De donde, por (7), inferimos que $R = R_S$. $\square$

**Corolario 4.4.12** *Sea $B \in \mathbf{B_{T_km}}$. Existe una correspondencia biyectiva entre la familia $\mathcal{S}$ de las $\mathbf{T_km}$-subálgebras de $B$ y la familia $\mathcal{R}$ de las $\mathbf{k}$-relaciones de bisimulación en el espacio $X(B)$ .*

**Dem.** En virtud de los Lemas 4.4.11 y 4.4.8 tenemos que la función $\varphi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{R}$, definida por $\varphi(S) = R_S$, es sobreyectiva. Resta probar que es inyectiva. En efecto, sean $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ tales que (1) $\varphi(S_1) = \varphi(S_2)$, entonces (2) $\mathcal{CP}(X(B)/R_{S_1}) = \mathcal{CP}(X(B)/R_{S_2})$. Sea $x \in S_1$. Como, por el Lema 4.4.9, $g_{S_1}(x) \in \mathcal{CP}(X(B)/R_{S_1})$ entonces, por (2) y definición de $g_{S_2}$, existe $y \in S_2$ tal que $g_{S_2}(y) = g_{S_1}(x)$. Supongamos que $x \nleq y$, entonces existe $P \in X(B)$ tal que $x \in P$ y (3) $y \notin P$, de donde tenemos que $[P]_{R_{S_1}} \in g_{S_1}(x) = g_{S_2}(y)$, de lo cual por (1), se sigue que $y \in P$, lo que contradice (3). Por lo tanto, $x = y$ y así $x \in S_2$. De este modo, $S_1 \subseteq S_2$. Luego, $S_1 = S_2$. Concluimos así que $\varphi$ es una biyección. $\square$

# Conclusiones y estudios futuros

En este trabajo hemos iniciado el estudio de las $\mathbf{T_k m}$-álgebras aplicando técnicas algebraicas y topológicas, lo cual nos permitió describir propiedades de estas álgebras y de sus congruencias, caracterizar las álgebras subdirectamente irreducibles y simples, y determinar que es una variedad discriminadora, poniendo de esta forma en evidencia la eficacia de los procedimientos algebraicos y topológicos utilizados. Ahora, aspiramos a aplicar los métodos usados en este trabajo al estudio del retículo de las subálgebras de una $\mathbf{T_k m}$-álgebra y, en particular, caracterizar dicho retículo en el caso de una $\mathbf{T_k m}$-álgebra finita. También, utilizando la dualidad topológica obtenida en el Capítulo 4, estamos interesados en investigar las congruencias principales y los endomorfismos de $\mathbf{T_k m}$-álgebras.

Por otro lado, la Lógica Temporal es una extensión de la lógica clásica que permite formalizar enunciados que incluyen datos sobre el momento del tiempo en que han ocurrido. A. Prior en la décadas cincuenta y sesenta del siglo XX, vio en esta lógica una herramienta capaz de aclarar los temas concernientes al determinismo e indeterminismo que surgieron en la antigüedad y de formalizar proposiciones cuya verdad cambia con el tiempo. Posteriomente, numerosos autores definieron de manera adecuada operadores temporales en distintas álgebras obteniendo así contrapartidas algebraicas de nuevas lógicas temporales, por ejemplo, los modelos algebraicos de la lógica temporal clásica los constituyen las álgebras de Boole temporales. Desde esta perspectiva se plantea como trabajo futuro el inicio del tratamiento de la teoría de los operadores temporales en las $\mathbf{T_k m}$-álgebras.

# Bibliografía


[1] Abad, M; Monteiro, L.; *Monadic symmetric Boolean algebras*, Notas de Lógica Matemática 37. INMABB-CONICET-UNS. 1989.

[2] Abad, M; Monteiro, L.; *Free symmetric boolean algebras*, Revista de la Unión Matemática Argentina, Volumen 27, 207-215. 1976.

[3] Balbes, R. and Dwinger, P.; *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, Columbia. 1974.

[4] Bezhanishvili, G.; *Varieties of monadic Heyting algebras. Part III.* Studia Logica 64 (2000), no. 2, 215-256.

[5] Bezhanishvili, N.; *Varieties of two-dimensional cylindric algebras.* Cylindric-like Algebras and Algebraic Logic. 37-59, Bolyai Society Mathematical Studies, 22, Jnos Bolyai Math. Soc., Budapest, 2012.

[6] Bezhanishvili, N. *Varieties of two-dimensional cylindric algebras. Part I. Diagonal-free case.* Algebra Universalis 48 (2002), no. 1, 11-42

[7] Bezhanishvili, N.; *Varieties of two-dimensional cylindric algebras. Part II.* Algebra Universalis 51 (2004), no. 2-3, 177-206.

[8] Birkhoff, G.; *Lattice Theory*, 3rd. edition. Am. Math. Soc. Colloq. Pub., vol. 25, Providence. 1973.

[9] Blok, W. J. and Pigozzi, D.; *On the structure of Varietes with equationally definable principal congruences I.* Algebra Universalis, 15, p. 195-227. 1982.

[10] Burris S. and Sankappanavar, H.P.; *A course in Universal Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 78, Springer-Verlag, Berlin. 1981.

[11] Day, A.; *A Note on the Congruence Extension Property.* Algebra Universalis 1 p. 234-235. 1971.

[12] Di Nola, A.; Grigolia, R.; Lenzi, G. *Projectivity and unification in locally finite varieties of monadic MV-algebras.* Trans. A. Razmadze Math. Inst. 173 (2019), no. 2, 21-29.

[13] Di Nola, A.; Grigolia, R.; Lenzi, G.; *On the lattice of the subvarieties of monadic MV(C)-algebras.* J. Appl. Logics 5 (2018), no. 1, 437-454. ISBN: 978-1-84890-274-9.

[14] Diego, A; Panzone R.; *On measurable subalgebras associated to commuting conditional expectation operators,II* Revista de la Union Matematica Argentina Volumen 24, Número I, 1968.

[15] Figallo, Aldo V.; *Álgebras de Boole k-periódicas*, Cuadernos del Instituto de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Universidad Nacional de San Juan. 1985.

[16] Figallo, Aldo V.; Gomes, Claudia M.; *Monadic Boolean algebras with an automorphism and their relation to* $\mathbf{Df_2}$*-algebras* Soft Computing. Vol.24, Issue 1, 227-236. 2020. https://doi.org/10.1007/s00500-019-04317-4.

[17] Figallo, A. V.; Pascual, I. B.; *Topological dualities for strong monadic distributive lattices and applications.* J. Mult.-Valued Logic Soft Comput. 32 (2019), no. 5-6, 499-540.

[18] Figallo, M.; *Finite diagonal-free two-dimensional cylindric algebras.* Log. J. IGPL 12 (2004), no. 6, 509-523.

[19] Figallo, M.; *Some results on diagonal-free two-dimensional cylindric algebras.* Rep. Math. Logic No. 46 (2011), 3-15.

[20] Figallo, M. ; Gomes, C. M.; *Subálgebras de un álgebra cilíndrica libre de elementos diagonales de dimensión dos.* Jornadas de Ciencia, Técnica y Creación de la Universidad Nacional de San Juan. ISBN 978-950-605-623-0. 2010

[21] Fried, E., Pixley, A.; *The dual discriminator function in universal algebra*, Acta Sci. Math. 41 , 83–100. 1979

[22] Grätzer, G.; *Universal Algebra*, 2nd. edition, Springer–Verlag, New York. 1979.

[23] Halmos, P.; *Algebraic Logic I. Monadic Boolean algebras.* Composition Math.12, 217-249. 1955.

[24] Halmos P.; *Algebraic Logic.* Chelsea, New York. 1962.

[25] Halmos, P.; *Lectures on Boolean Algebra*, Van Nostrand, Princeton. 1963.

[26] Henkin L, Monk D, Tarski A.; *Cylindric Algebras, Parts I & II*, North-Holland. 1971 & 1985.

[27] Monteiro, A., Varsavsky, O.; *Algebras de Heyting monádicas.* Actas de las X Jornadas de la Unión Matemática Argentina, Bahía Blanca, pp. 52–62. 1957.

[28] Monteiro, A.; *Algebras de Boole involutivas,* Lectures given at the Universidad Nacional del Sur, Bahia Blanca. 1969.

[29] Monteiro, A.; *Algèbres de Boole Cycliques,* Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquées, XXIII, N°l, 71–76. 1978.

[30] Monteiro, A.; Monteiro L.; *Algebras de Boole monádicas,* INMABB-CONICET-UNS. 1999.

[31] Moisil, G.; *Algèbres Universelles et automates*, Comunication taite au Congrès unional Sovietique d'algèbre de Kishinev pág. 697-698 on trouve un extrait abregè de cet article. (1965) Dans (1972).

[32] Moisil, G.; *Essais sur les loguiques non chrycipiennes*, Edition de l'Académic de la République Socialiste de Roumanie. Bucharest. 1972.

[33] Pixley, A. F.; *The ternary discriminator function in universal algebra.* Math. Ann. 191, 167-180. 1971.

[34] Priestley, H. A.; *Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices*, Proc. London Math. Soc., (3), 24(1972), 507-530.

[35] Priestley, H. A.; *Ordered sets and duality for distributive lattices*, Ann. Discrete Math., 23(1984),39-60.

[36] Sholander, M.; *Postulates for distributive lattices*, Can. J. Math. 3, 28–30. 1951.

[37] Wang, J.; He, P.; She, Y.; *Monadic NM-algebras.* Log. J. IGPL 27 (2019), no. 6, 812-835.

[38] Werner, H.; *Discriminator-Algebras*, Algebraic Representation and Model Theoretic Properties. Akademie, Berlin, 1978.

[39] Werner, H.; *Eine Charakterisierung funktional vollständiger Algebren.* Arch. Math. (Basel) 21, 381-385. 1970.