



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS DE DOCTORA EN MATEMÁTICA

PRODUCTO DE KRONECKER Y SUS APLICACIONES

MARÍA GABRIELA EBERLE

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2021

PREFACIO

Esta tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctora en Matemática de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Matemática de la Universidad Nacional de Sur durante el período comprendido entre los meses de mayo de 2016 y agosto de 2021 bajo la dirección de la Dra. María Julia Redondo, Profesora Titular del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

A Daniel y a nuestros hijos, a los hijos de la vida. A Fernanda, toda la vida juntas.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer muy especialmente a la Dra María Julia Redondo, por su empatía, su calidad humana y su don de gente. Por ayudarme a creer, por convencerme de que podía llegar hasta acá, por su incansable capacidad de trabajo y su gran generosidad.

He tenido la fortuna de acceder a la educación pública en todos sus niveles y he recorrido ese trayecto junto a tantísimas personas valiosas. Algunos ya no están, como el Dr Raúl Chiappa, con quien compartí mis primeros pasos en esto de “hacer” matemática y a quien debo grandes enseñanzas.

A mis profesores y sus saberes, al Profesor Edgardo Fernández Stacco, a Julio Sewald, a Griselda Itovich y a todas las personas inspiradoras que me acompañan. Mi más sincero agradecimiento a todos ellos.

A la universidad pública, gratuita y laica. Al Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

A la Matemática que siempre me ha permitido empezar de nuevo.

RESUMEN

En el espacio de matrices se pueden definir distintas operaciones, cada una de las cuales presenta aplicaciones diferentes. El producto usual de matrices representa la composición de transformaciones lineales, y el mismo está definido sólo entre matrices que respetan la siguiente propiedad: el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda. El producto de Kronecker se define para cualquier par de matrices, y representa el producto tensorial de las transformaciones lineales asociadas a cada una de las matrices. Este producto es asociativo, bilineal, no conmutativo, y se comporta bien con la inversa y con el cálculo de valores singulares.

En el trabajo [I. Ojeda, Kronecker square roots and the block vec matrix, *Amer. Math. Monthly* 122 (2015), no. 1, 60–64] se estudia la existencia de las raíces cuadradas del producto de Kronecker, esto es, dada una matriz A se estudia, bajo qué condiciones, existe una matriz B tal que $A = B \otimes B$. Estas condiciones se describen en función de la simetría y del rango de una matriz especial construida a partir de A .

El propósito de este trabajo es establecer condiciones necesarias y suficientes para la existencia de raíces n -ésimas de Kronecker de una matriz dada. Empleando propiedades del producto de Kronecker y de la vectorización de matrices, construimos una matriz especial cuyas características nos permiten decidir cuándo una matriz es potencia de Kronecker de otra matriz dada. En caso afirmativo, describimos un algoritmo que nos permite calcular dicha matriz. En caso negativo, encontramos cotas de mín $\|A - X^{\otimes n}\|_2$ en función de los valores singulares de A .

Así mismo se estudian dos problemas de Procrusto que involucran sumas y potencias de Kronecker. Los resultados teóricos desarrollados son aplicados a problemas vinculados a la identificación de grafos de Kronecker y a la resolución de ciertas ecuaciones matriciales.

ABSTRACT

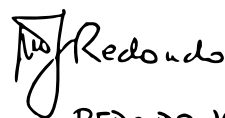
Different operations can be defined in the space of matrices, each of which has different applications. The usual product of matrices represents the composition of linear transformations, and it is defined only between matrices that respect the following property: the number of columns in the first matrix coincides with the number of rows in the second one. The Kronecker product is defined for any pair of matrices, and represents the tensor product of the linear transformations associated with each of these matrices. This product is associative, bilinear, non-commutative, and behaves well with the inverse and with the calculation of singular values.

The existence of square roots for the Kronecker product is studied in the paper [I. Ojeda, Kronecker square roots and the block vec matrix, *Amer. Math. Monthly* 122 (2015), no. 1, 60–64], that is, given a matrix A , there are certain conditions that ensures the existence of a matrix B such that $A = B \otimes B$. These conditions are described in terms of the symmetry and the rank of a special matrix associated to A .

The purpose of this work is to establish necessary and sufficient conditions for the existence of n -th roots of Kronecker of a given matrix. Using properties of the Kronecker product and of the vectorization of matrices, we construct a special matrix whose characteristics allow us to decide when a matrix is the Kronecker power of another given matrix. If so, we describe an algorithm that allows us to find such matrix. If not, we find bounds of $\min \|A - X^{\otimes n}\|_2$ in terms of the singular values of A .

Finally we study two Procrusto problems involving Kronecker sums and powers. The theoretical results developed are applied to problems related to the identification of Kronecker graphs and the resolution of certain matrix equations.

Certifico que fueron incluidos los cambios y correcciones sugeridas por los jurados.


REDONDO, MARÍA JULIA

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	XVII
I PRELIMINARES	1
1.1. Producto de Kronecker	1
1.2. Vectorización de matrices.	8
1.3. Grafos	11
1.4. Ecuaciones Matriciales	23
II RAÍZ ENÉSIMA DE KRONECKER.	31
2.1. El caso $n = 2$.	32
2.2. Definición de $\text{vec}_F^{[p \times q]}$.	34
2.3. Propiedades de $\text{vec}_F^{[p \times q]}$.	37
2.4. Existencia de raíces enésimas de Kronecker.	41
III PROBLEMAS DE PROCRUSTO.	51
3.1. Problema de Procrusto y sumas de Kronecker.	52
3.2. Problema de Procrusto y potencias de Kronecker.	58
IV APLICACIONES	63
4.1. Aplicación a la teoría de grafos de Kronecker	63
4.2. Aplicación a la teoría de productos cartesianos de grafos	70
4.3. Resolución de ecuaciones matriciales	71
BIBLIOGRAFÍA	81

NOTACIÓN

\mathbb{N}	conjunto de números naturales incluyendo al cero
\mathbb{R}	conjunto de números reales
\mathbb{C}	conjunto de números complejos
\mathbb{K}	cuerpo \mathbb{R} ó \mathbb{C}
\mathbb{K}^n	\mathbb{K} -espacio vectorial de vectores de n componentes en \mathbb{K} pensados como columnas
x_i	entrada i -ésima del vector $x \in \mathbb{K}^n$
$\mathbb{K}^{n \times m}$	\mathbb{K} -espacio vectorial de matrices de n filas y m columnas con entradas en \mathbb{K}
$(A)_{ij} = a_{ij}$	entrada en la columna i y la fila j de $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$
$\mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K}^{n \times m})$	\mathbb{K} - espacio vectorial de matrices en $\mathbb{K}^{pn \times qm}$ con estructura en $p \times q$ bloques en $\mathbb{K}^{n \times m}$
$A_{(i,j)}$	bloque (i, j) de la matriz $A \in \mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K}^{n \times m})$
$A(i, -)$	fila i de $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$
$\text{Tr}(A)$	traza de $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$
$\ A\ _F$	norma de Frobenius de $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$
$\ A\ _2$	norma 2 de $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$
$\{\lambda_i\}$	conjunto de todos los autovalores de $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$
$\{\sigma_i\}$	conjunto de todos los valores singulares de $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$
A^T	transpuesta de $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$
\bar{z}	conjugado de $z \in \mathbb{C}$
A^*	\bar{A}^T , $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$
$\text{Span } V$	subespacio generado por el conjunto de vectores V
$\text{rango}(A)$	rango de $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$
\otimes	producto de Kronecker
$\text{vec}_F(A)$	vector en \mathbb{K}^{nm} que resulta de apilar todas las filas de $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$
$\text{vec}(A)$	vector en \mathbb{K}^{nm} que resulta de apilar todas las columnas de $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$
\oplus	suma de Kronecker

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se enmarca en lo que conocemos como Teoría de Matrices. Su principal objetivo es un estudio exhaustivo del producto de Kronecker como así también sus propiedades y aplicaciones.

En el primer capítulo hemos elaborado una recopilación de definiciones, conceptos y resultados básicos e indispensables para el desarrollo posterior. Comenzando, necesariamente, por la definición del producto de Kronecker entre dos matrices, mostramos con detalles sus propiedades más notables. Hacemos principal hincapié en las potencias de Kronecker de una matriz, las cuales parecen entrelazarse naturalmente con la descomposición en valores singulares y las normas matriciales. Conceptos del álgebra lineal numérica sobre los que nos detendremos muy especialmente.

De estrecha relación con el producto de Kronecker, la vectorización de matrices es una forma de tratar a las matrices como si fuesen vectores, mediante el apilado de sus filas vec_F o de sus columnas vec . La combinación del producto de Kronecker con la vectorización es de gran utilidad a la hora de resolver cierto tipo de ecuaciones matriciales. En tal sentido, hacemos un resumen sobre ellas recordando detalles de sus técnicas de resolución.

En nuestro trabajo todo el esfuerzo estará puesto en el abordaje de las potencias de Kronecker, queremos reconocerlas y caracterizarlas y los nuevos resultados permitirán, en combinación con las técnicas conocidas, la resolución de ecuaciones en cuya estructura aparezcan las potencias de Kronecker. Y no será esa la única posible aplicación, ya que en el terreno de Teoría de grafos, el producto de Kronecker de dos matrices de adyacencia $A(G)$ y $A(H)$ corresponde a la matriz de adyacencia del grafo producto entre los grafos G y H , y en el caso particular de las potencias de Kronecker de una matriz de adyacencia, será la matriz de adyacencia del correspondiente grafo de Kronecker. Lo interesante de esta aplicación hace que sea necesaria la inclusión de toda una sección reuniendo todos los conceptos requeridos para llevar a cabo las aplicaciones vinculadas a la teoría de grafos.

El Capítulo 2 es quizás el nudo de este trabajo, nudo que al ser desatado despliega una serie de resultados muy sorprendentes. En el artículo [O] el autor establece condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales una matriz dada A es el cuadrado de Kronecker de otra matriz. Sus resultados son establecidos a partir de la definición de cierta matriz, reordenamiento de los elementos de A , llamada matriz de vectorización en bloques. Dicha matriz empleada por Ojeda ya había sido empleada en

1993 por Pitsianis y Van Loan [PL] al optimizar $\|A - B \otimes C\|_F$ para una matriz A dada. En este caso la solución se obtiene considerando la matriz $\mathcal{R}(A)$, que es precisamente la vectorización en bloques mencionada. Inspirados por estas grandes ideas, pero vectorizando por filas a diferencia de ambos autores, es que nos propusimos un estudio profundo de la potencias de Kronecker a partir de definir nuestra propia matriz de vectorización en bloques, con el objetivo final de caracterizar las raíces enésimas de Kronecker.

Para cualquier $m \geq 2$, dada $A \in \mathbb{K}^{p^m \times q^m}$, nos interesa determinar si existe alguna matriz $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$ tal que $A = C^{\otimes m}$ y en caso afirmativo, identificar la matriz base de dicha potencia. Para avanzar en ese sentido definimos la matriz de vectorización en bloques adecuada a nuestro problema, a la cual llamamos $\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)$. La construcción comienza practicando a la matriz inicial una partición en $p \times q$ bloques de tamaño $p^{m-1} \times q^{m-1}$. Este proceso se repite hasta conseguir dotar a la matriz A de una estructura en $(pq)^{m-1} \times (pq)^{m-1}$ bloques de tamaño $p \times q$. Así, nuestra matriz $\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)$ pertenece a $\mathbb{M}_{(pq)^{m-1} \times (pq)^{m-1}}(\mathbb{K}^{p \times q})$. Cada uno de dichos bloques es indexado con una sucesión de pares ordenados que indican los bloques y subbloques de los cuales precede.

Para definir $\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)$ debimos ordenar los bloques obtenidos, es decir las sucesiones de pares ordenados que los identifican. Para comenzar, tomamos dos pares y los ordenamos empleando el orden lexicográfico. Demostramos que $(i, j) < (i', j')$ si y solamente si $qi + j < qi' + j'$. Aplicando este resultado de manera reiterada, extendimos el orden lexicográfico a la sucesión de pares ordenados que indexan cada uno de los bloques

$$A_{((i_0, j_0), (i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n))}.$$

Considerando el orden de estos bloques indexado por los números naturales, establecimos la correspondencia entre cada sucesión $(i_0, j_0), (i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n)$ y un número natural α de la siguiente manera: (k_0, \dots, k_n) es la descomposición pq -ádica de α para $k_s = qi_s + j_s$ con $0 \leq k_s < pq$. Finalmente, la matriz $\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)$ tiene por filas a la vectorización por filas de cada uno de los bloques A_α ordenados en la forma indicada.

A continuación nos avocamos a estudiar propiedades generales de la matriz $\text{vec}_F^{[p \times q]}$, las cuales nos permitieron demostrar resultados sobre la factorización de matrices como productos, o potencias, de Kronecker. De inmediato advertimos que el rango de la matriz $\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)$ estaba directamente relacionado con la posibilidad de factorizar una matriz utilizando el producto de Kronecker. De hecho probamos que la condición necesaria y suficiente para que $A \in \mathbb{K}^{p^m \times q^m}$ no nula pueda ser representada como $A = M \otimes C$ con $M \in \mathbb{K}^{p^{m-1} \times q^{m-1}}$ y $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$ es que $\text{rango}(\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)) = 1$. El entusiasmo nos llevó a pretender generalizar este resultado, pensando ya en la posibilidad de escribir a la matriz A como producto de Kronecker de m matrices en $\mathbb{K}^{p \times q}$. Es decir, nos preguntamos bajo qué condiciones existen $C_1, C_2, \dots, C_m \in \mathbb{K}^{p \times q}$ tales que $A = C_1 \otimes \dots \otimes C_m$, encontrando que $\text{rango}(\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)) = 1$ es una condición necesaria.

Con el objetivo de centrar nuestra atención específicamente en las potencias de Kronecker, y recordando que el objetivo planteado al comienzo es reconocer, de entre todas las matrices en $\mathbb{K}^{p^m \times q^m}$ con $m \geq 2$, a aquellas que son potencia de Kronecker de alguna matriz en $\mathbb{K}^{p \times q}$, logramos establecer el enunciado de un teorema que, precisamente, nos dice cuales son esas características distintivas y fácilmente visibles de la matriz $\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(A)$ que, al ser observadas, permiten asegurar que A es una potencia de Kronecker. El resultado describe con claridad la estructura de la matriz de vectorización en bloques por filas de una potencia de Kronecker: en pocas palabras, debe ser una matriz de rango 1 cuyos bloques son simétricos y de rango menor o igual a 1, y que verifican cierta relación según la cual todos ellos son múltiplos de uno dado.

Dimos un paso más, demostrando un nuevo resultado que no solamente brinda una caracterización de las matrices $A \in \mathbb{C}^{p^m \times q^m}$ que son potencias de Kronecker de una matriz dada, sino que además nos dice cómo recuperar, a partir de $\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(A)$, la matriz $C \in \mathbb{C}^{p \times q}$ tal que $A = C^{\otimes m}$. Dicho teorema tiene además un corolario en el cual se establece un resultado del mismo tenor para el caso real.

Así, los resultados demostrados en ambos teoremas establecen las condiciones necesarias y suficientes que debe verificar la vectorización de una matriz para que ésta sea una potencia de Kronecker y, en caso de que lo sea, nos dice quién es esa matriz C base de la potencia. Dicho en otros términos, ambos teoremas representan las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de las raíces enésimas de Kronecker de una matriz.

En el Capítulo 3 decidimos intentar reflexionar sobre dos problemas de Procrusto, relacionando los planteos con los resultados obtenidos anteriormente. El primero de ellos involucra sumas de Kronecker. Se trata de hallar $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que minimice $\|M - (X^T \oplus X)\|_{\mathbb{F}}^2$. En este caso fue posible caracterizar las soluciones del problema, e indicamos una aplicación muy interesante ya que la matriz de adyacencia del producto cartesiano de dos grafos G y H es, precisamente, la suma de Kronecker de las matrices de adyacencia de G y H , es decir, si M es una matriz simétrica de 0 y 1, contar con una solución para

$$\text{mín} \|M - (A(G) \oplus A(G))\|_{\mathbb{F}}^2$$

constituye una herramienta para recuperar la matriz de adyacencia de G y por lo tanto el grafo G .

Dicen que lo importante es no dejar de hacerse preguntas. Nos planteamos también resolver el problema de Procrusto vinculado a potencias de Kronecker, esto es nos propusimos estudiar el problema de optimización

$$\text{mín} \|M - X^{\otimes(n+2)}\|_{\mathbb{F}}^2.$$

Ya que dada una matriz, su matriz de vectorización en bloques es un reordenamiento de sus elementos, ambas tienen la misma norma, por lo cual, el problema de partida es equivalente a

$$\text{mín} \|\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(M) - x^{\otimes(n+1)} \otimes x^T\|_{\mathbb{F}}^2.$$

El caso cuadrado es de simple resolución, basta con aplicar [GL, Teorema 2.5.3, pag. 72]; no así para el caso general. Si bien el interés inicial era obtener la matriz X que realiza esta distancia y no pudimos conseguirlo, no nos desanima el resultado, ya que encontramos una cota inferior y una cota superior para la distancia entre M y cualquier potencia de Kronecker.

Finalmente, el Capítulo 4 incluye aplicaciones de los resultados obtenidos. Comenzando por las aplicaciones a teoría de grafos, se sabe que G es un grafo de Kronecker si su matriz de adyacencia es una potencia de Kronecker de otra matriz de 0 y 1, es decir $G = H^{\otimes m}$ para algún grafo H si $A(G) = A(H)^{\otimes m}$. La existencia de la matriz $A(H)$, y su descripción, se consiguen con los resultados obtenidos en el Capítulo 2 donde hemos establecido condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo una matriz es una potencia de Kronecker de una matriz dada, y hemos dado una descripción de cómo obtener esa matriz base. A continuación, en la segunda sección, resolvimos ecuaciones matriciales con ciertas estructuras interesantes que incluyen, por supuesto, potencias de Kronecker. En todos los casos fueron resueltos distintos ejemplos que muestran la aplicabilidad de nuestros resultados. Se empleó el software GNU Octave 5.2.0 como soporte en los cálculos.

1 | PRELIMINARES

El producto Kronecker lleva el nombre del matemático alemán Leopold Kronecker (1823–1891). Algunos especialistas afirman que debería llamarse el producto Zehfuss porque fue el matemático alemán Johann Georg Zehfuss (1832–1901) quien publicó por primera vez resultados que lo incluían. Roger Horn y Charles Johnson escriben en [HJ2], pag. 254]

“Algunos historiadores de las matemáticas han cuestionado la asociación del producto \otimes con Leopold Kronecker sobre la base de que no hay evidencia conocida en la literatura sobre la prioridad de Kronecker en su descubrimiento o uso. De hecho, Sir Thomas Muir, en su artículo [M], llama al determinante de $A \otimes B$ el “determinante de Zehfuss” de A y B porque la identidad $\det A \otimes B = (\det A)^n (\det B)^m$ aparece primero en un artículo de 1858 de Johann Georg Zehfuss.”

Otros historiadores coinciden con la observación, como puede verse en [LS, ZD].

El producto de Kronecker será el protagonista a lo largo del presente trabajo. Dotado de muy buenas propiedades, ha llamado la atención de numerosos especialistas; entre ellos Ignacio Ojeda aporta una caracterización muy atractiva de las matrices que son un cuadrado de Kronecker (ver [O]), tanto que nos ha inspirado a lograr un objetivo similar, pero para una potencia cualquiera.

Los resultados aquí obtenidos resultan interesantes para resolver ciertas cuestiones vinculadas a los productos de grafos y a la resolución de ecuaciones matriciales. Por ello, en este primer capítulo vamos a presentar todos aquellos conceptos que son necesarios para el desarrollo de los nuevos resultados y sus aplicaciones.

Habiendo dejado al comienzo, mención explícita sobre las controversias existentes sobre su denominación, llamaremos producto de Kronecker a la operación notada por \otimes la cual definiremos en la próxima sección.

1.1. PRODUCTO DE KRONECKER

El conjunto de matrices tiene varias estructuras algebraicas asociadas, algunas de las cuales presentan restricciones en el tamaño de las matrices involucradas. Por ejemplo, la suma $A + B$ de dos matrices se define si A y B tienen el mismo orden; el producto AB se define si la cantidad de columnas de A coincide con la cantidad de filas de B ; la inversa A^{-1} se define si A es una matriz cuadrada inversible.

El producto de Kronecker es una operación binaria definida en todo el conjunto de matrices, sin ninguna restricción a sus tamaños.

Definición 1.1. Dadas $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{s \times t}$, el producto de Kronecker de A por B es la matriz $A \otimes B \in \mathbb{K}^{ms \times nt}$ dada por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{00}B & a_{01}B & \cdots & \cdots & \cdots & a_{0(n-1)}B \\ a_{10}B & a_{11}B & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1(n-1)}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(m-1)0}B & a_{(m-1)1}B & \cdots & \cdots & \cdots & a_{(m-1)(n-1)}B \end{bmatrix}.$$

En la definición anterior notamos que los elementos de la matriz A aparecen representados por a_{ij} donde $0 \leq i \leq m-1$, $0 \leq j \leq n-1$. Tal elección, que se mantiene a lo largo de todo el trabajo, se fundamenta en que la misma facilita la descripción de los elementos según sea su ubicación dentro de la matriz.

A partir del producto de Kronecker se define la **suma de Kronecker** de un par de matrices como indicamos a continuación.

Definición 1.2. Dadas $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$ y $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se define la suma de Kronecker de A y B como

$$A \oplus B = A \otimes I_n + I_m \otimes B.$$

Si bien el producto de Kronecker no es conmutativo, esto es, existen matrices A, B para las cuales $A \otimes B \neq B \otimes A$, el mismo presenta muy buenas propiedades. Entre ellas destacamos:

1. Es asociativo y bilineal, esto es,
 - 1- $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$;
 - 2- $(\alpha A) \otimes (\beta B) = \alpha\beta(A \otimes B)$;
 - 3- $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$.
 - 4- $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$.
2. No admite divisores de cero, es decir, $A \otimes B = 0$ sí y solo si $A = 0$ ó $B = 0$.
3. Se comporta bien con el producto de matrices, la traspuesta y la inversa:
 - 1- $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$;
 - 2- $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$;
 - 3- $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$;
 - 4- $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.
4. Es conmutativo en el caso particular de matrices vectoriales, es decir, si $x, y \in \mathbb{K}^{m \times 1}$, entonces

$$x \otimes y^T = y^T \otimes x = xy^T.$$

El producto de Kronecker tiene, como ya mencionamos, la gran ventaja de poder ser efectuado entre cualquier par de matrices, y además, tal como muestran los siguientes resultados, es posible obtener valiosa información del producto a partir de los factores.

Lema 1.1. Sean $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{m \times m}$, tales que $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es el conjunto de autovalores de A , con $x_i \in \mathbb{K}^n$ un autovector asociado a λ_i para cada i , y $\{\mu_j\}_{1 \leq j \leq m}$ es el conjunto de autovalores de B , con $y_j \in \mathbb{K}^m$ un autovector asociado a μ_j para cada j . Entonces

- i) El conjunto de autovalores de $A \otimes B$ es $\{\lambda_i \mu_j\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$. Además, $x_i \otimes y_j$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda_i \mu_j$.
- ii) Los autovalores de $I_m \otimes A + B \otimes I_n$ son de la forma $\lambda_i + \mu_j$, y $y_j \otimes x_i$ es un autovector asociado a $\lambda_i + \mu_j$.

Demostración:

- i) El teorema de triangulación de Schur (ver [\[HJ1\]](#), Teorema 2.3.1) asegura que existen matrices unitarias $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $V \in \mathbb{K}^{m \times m}$ tales que $U^*AU = \Delta_A$ y $V^*BV = \Delta_B$ son triangulares superiores, entonces

$$(U \otimes V)^*(A \otimes B)(U \otimes V) = U^*AU \otimes V^*BV = \Delta_A \otimes \Delta_B$$

es triangular superior y similar a $A \otimes B$. Los autovalores de A , B y $\Delta_A \otimes \Delta_B$ son, respectivamente, los elementos en la diagonal principal de Δ_A , Δ_B y $\Delta_A \otimes \Delta_B$. Y la diagonal principal de $\Delta_A \otimes \Delta_B$ está formada por los n^2 productos entre entradas en las diagonales principales de Δ_A y Δ_B . Además, como $Ax_i = \lambda_i x_i$ y $By_j = \mu_j y_j$, tenemos que

$$(A \otimes B)(x_i \otimes y_j) = Ax_i \otimes By_j = \lambda_i x_i \otimes \mu_j y_j = \lambda_i \mu_j (x_i \otimes y_j).$$

- ii) Se sabe que

$$(I_m \otimes A)(B \otimes I_n) = B \otimes A = (B \otimes I_n)(I_m \otimes A),$$

de modo que las matrices $I_m \otimes A$ y $B \otimes I_n$ conmutan. Sean U y V unitarias tal que $U^*AU = \Delta_A$ y $V^*BV = \Delta_B$ tienen estructura triangular superior. Entonces $W = V \otimes U \in \mathbb{K}^{mn \times mn}$ es unitaria, siendo

$$W^*(I_m \otimes A)W = I_m \otimes \Delta_A = \begin{pmatrix} \Delta_A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta_A \end{pmatrix},$$

y

$$W^*(B \otimes I_n)W = \Delta_B \otimes I_n = \begin{pmatrix} \mu_1 I_n & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_m I_n \end{pmatrix},$$

y por lo tanto,

$$W^*(I_m \otimes A + B \otimes I_n)W = I_m \otimes \Delta_A + \Delta_B \otimes I_n$$

es una matriz triangular superior en cuya diagonal están los autovalores de la suma de Kronecker. Precisamente, el estudio de la matriz en el segundo miembro muestra que en su diagonal se ubican las sumas $\lambda_i + \mu_j$, para cada par (i, j) . □

El determinante de $A \otimes B$, llamado el **determinante de Zehfuss** de A y B , aparece por primera vez en un trabajo de Zehfuss de 1858, en el cual se demuestra el siguiente resultado, que se deduce de manera muy simple a partir del lema anterior.

Proposición 1.1. *Si $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ y $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, entonces*

$$\det A \otimes B = (\det A)^n (\det B)^m.$$

Demostración: Sean $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq m}$ el conjunto de autovalores de A y $\{\mu_j\}_{1 \leq j \leq n}$ el conjunto de autovalores de B . Se sabe que el conjunto de los autovalores de $A \otimes B$ es $\{\lambda_i \mu_j\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \det A \otimes B &= (\lambda_1 \mu_1) \cdots (\lambda_1 \mu_n) (\lambda_2 \mu_1) \cdots (\lambda_2 \mu_n) \cdots (\lambda_m \mu_1) \cdots (\lambda_m \mu_n) \\ &= (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m)^n (\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n)^m = (\det A)^n (\det B)^m. \end{aligned}$$

□

Con el producto de Kronecker es posible definir potencias, las cuales son de especial interés a lo largo de este trabajo, ya que precisamente nos proponemos caracterizar aquellas matrices que son potencias de Kronecker.

Definición 1.3. *Dada $A \in \mathbb{K}^{m \times p}$, $n \in \mathbb{N}$, se define potencia n -ésima de A , y se nota $A^{\otimes n}$, a la matriz definida por*

1. $A^{\otimes 0} = \text{Id}$;
2. $A^{\otimes 1} = A$;
3. $A^{\otimes n} = A \otimes (A^{\otimes (n-1)})$, $n > 1$.

Cabe destacar que varias de las propiedades descriptas anteriormente se aplican al caso particular de las potencias. Por ejemplo, si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $A \in \mathbb{K}^{m \times p}$, tenemos que

$$(\alpha A)^{\otimes n} = \alpha^n (A^{\otimes n}).$$

En 1913 L. Autonne demostró que cada matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se puede escribir como

$$A = U \Sigma V^*,$$

donde $U, V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ son unitarias y Σ es una matriz diagonal cuyas entradas son no negativas. Si bien Autonne no dio nombre a las entradas diagonales de Σ , probó que

dicha matriz está determinada de manera única por A , no siendo este el caso de U y V . En 1939, Eckart y Young resolvieron el problema para una matriz compleja rectangular, no dan un nombre especial a los elementos en la diagonal de Σ , que resultan ser las raíces cuadradas no negativas de los autovalores de AA^* . Recién en 1954, Horn usa la denominación de **valores singulares**.

Teorema 1.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ y sea $q = \min\{m, n\}$. Existe una matriz diagonal $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $\Sigma_{11} = \sigma_1 \geq \Sigma_{22} = \sigma_2 \geq \dots \geq \Sigma_{qq} = \sigma_q \geq 0$, y existen dos matrices unitarias $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tales que*

$$A = U\Sigma V^*.$$

Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, entonces U y V pueden elegirse como matrices reales ortogonales.

La representación de una matriz en la forma indicada en el teorema anterior es conocida como **descomposición en valores singulares**, las columnas de U se denominan **vectores singulares a izquierda de A** y las columnas de V son los **vectores singulares a derecha de A** . Las matrices U y V no están determinadas de forma única por A ; Σ , en cambio, sí. Dicha representación revela detalles importantes de la estructura de una matriz, tal como vemos en el siguiente lema.

Lema 1.2. *$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ y sea $q = \min\{m, n\}$. Si $A = U\Sigma V^*$, con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_q = 0$, entonces*

- i) $\text{rango}(A) = r$,*
- ii) $\text{Nuc}(A) = \text{Span}\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$,*
- iii) $\text{Im}(A) = \text{Span}\{u_1, \dots, u_r\}$,*

donde u_j y v_j son las columnas de U y V respectivamente.

Demostración:

- i) Se sabe que $\text{rango}(A)$ coincide con el de AA^* , el cual depende del número de autovalores no nulos de AA^* , y este es igual a r .*
- ii) Ya que $A = U\Sigma V^*$, entonces $AV = U\Sigma$, es decir $Av_i = \sigma_i u_i$. Luego si $r < n$ entonces $\sigma_i = 0$ para todo $i > r + 1$ y $Av_{r+1} = Av_{r+2} = \dots = Av_n = 0$, luego*

$$\text{Nuc}(A) = \text{Span}\{v_{r+1}, \dots, v_n\}.$$

- iii) Como $AV = U\Sigma$ y $Av_i = 0$ para todo $i > r$, $\text{Im}(A) = \text{Span}\{Au_1, \dots, Au_r\}$. Como $Au_i = \sigma_i u_i$ y $\sigma_i \neq 0$ si $1 \leq i \leq r$, entonces $\text{Im}(A) = \text{Span}\{u_1, \dots, u_r\}$.*

□

Hablando de descomposición en valores singulares, el siguiente resultado la caracteriza para el caso particular del producto de Kronecker de dos matrices:

Lema 1.3. Sean $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$ con descomposición en valores singulares $A = U_1 \Sigma_1 V_1^*$ y $B = U_2 \Sigma_2 V_2^*$ tales que con $\text{rango}(A) = r_1$, $\text{rango}(B) = r_2$. Entonces

$$A \otimes B = (U_1 \otimes U_2)(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)(V_1 \otimes V_2)^*$$

y los valores singulares no nulos de la matriz producto $A \otimes B$ son los $r_1 r_2$ productos de valores singulares no nulos de A y B respectivamente, incluidas sus multiplicidades, Además $\text{rango}(A \otimes B) = r_1 r_2$ y $\sigma = 0$ es un valor singular de $A \otimes B$ de multiplicidad $\min\{mp, nq\} - r_1 r_2$. Los valores singulares de $A \otimes B$ son los mismos que los de $B \otimes A$, y sus rangos coinciden.

Demostración: Si σ_i es un valor singular de A entonces $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ donde λ_i es un autovalor de AA^* . Del mismo modo, si η_j es un valor singular de B entonces $\eta_j = \sqrt{\mu_j}$ donde μ_j es un autovalor de BB^* .

Luego, ya que

$$(A \otimes B)(A \otimes B)^* = (A \otimes B)(A^* \otimes B^*) = AA^* \otimes BB^*,$$

de acuerdo al resultado establecido en el Lema [1.1](#), los autovalores de $(A \otimes B)(A \otimes B)^*$ son todos los productos posibles entre autovalores de AA^* y autovalores de BB^* y por lo tanto, los valores singulares de $A \otimes B$ son las raíces cuadradas positivas de todos los productos posibles entre autovalores de AA^* y autovalores de BB^* , es decir entre valores singulares de A y de B . \square

Teorema 1.2. Sea $C \in \mathbb{C}^{p \times q}$ tal que $\text{rango}(C) = r$ y $C = U \Sigma V^*$ es su descomposición en valores singulares. Si $m \geq 2$ entonces $\text{rango}(C^{\otimes m}) = r^m$ y

$$C^{\otimes m} = U^{\otimes m} \Sigma^{\otimes m} (V^{\otimes m})^*,$$

con $\Sigma^{\otimes m}$ la matriz diagonal que contiene, en su diagonal, los r^m elementos no nulos dados por todos los productos posibles de la forma

$$\sigma_1^{i_1} \sigma_2^{i_2} \cdots \sigma_r^{i_r}$$

con $i_1 + i_2 + \cdots + i_r = m$, y los restantes $\min\{p^m, q^m\} - r^m$ son iguales a cero.

Demostración: Probaremos este resultado por inducción. El caso $m = 2$ es inmediato por el lema anterior. Sea ahora $m > 2$ y supongamos que vale para todo k con $2 \leq k < m$. Entonces

$$C^{\otimes m} = C^{\otimes(m-1)} \otimes C = C^{\otimes(m-1)} \otimes U \Sigma V^*,$$

y por hipótesis de inducción,

$$C^{\otimes(m-1)} = U^{\otimes(m-1)} \Sigma^{\otimes(m-1)} (V^{\otimes(m-1)})^*,$$

y por lo tanto

$$C^{\otimes m} = U^{\otimes(m-1)} \Sigma^{\otimes(m-1)} (V^{\otimes(m-1)})^* \otimes U \Sigma V^* = U^{\otimes m} \Sigma^{\otimes m} (V^{\otimes m})^*.$$

\square

Ya que $\mathbb{C}^{m \times n}$ es isomorfo a \mathbb{C}^{mn} , es posible definir **la norma matricial** de manera equivalente a como se define la norma vectorial: una función $\psi : \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma matricial si verifica las siguientes propiedades

- i) $\psi(A) \geq 0$ para toda $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, y $\psi(A) = 0$ si y sólo si $A = 0$;
- ii) $\psi(A + B) \leq \psi(A) + \psi(B)$ para toda $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$;
- iii) $\psi(\alpha A) = |\alpha|\psi(A)$ para toda $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Dos normas matriciales muy empleadas son la norma de Frobenius, definida por

$$\|A\|_{\mathbb{F}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{Tr}(A^*A)},$$

y la norma 2, inducida por la correspondiente norma vectorial

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$

Las dos normas mencionadas son equivalentes pues se demuestra que

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_{\mathbb{F}} \leq \sqrt{k}\|A\|_2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{k}}\|A\|_{\mathbb{F}} \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_{\mathbb{F}}$$

para $k = \text{rango}(A)$.

Estas normas se pueden relacionar con los valores singulares ya que si $A \in \mathbb{C}^{p \times q}$ es tal que $\text{rango}(A) = r$ y $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$ son todos sus valores singulares no nulos, se tiene que

- i) $\|A\|_{\mathbb{F}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2}$; y
- ii) $\|A\|_2 = \sigma_1$.

Proposición 1.2. Si $A = C^{\otimes m}$ entonces $\|A\|_{\mathbb{F}} = \|C\|_{\mathbb{F}}^m$.

Demostración: Sean $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$ todos los valores singulares no nulos de C . Entonces

$$\begin{aligned} \|A\|_{\mathbb{F}}^2 &= \|C^{\otimes m}\|_{\mathbb{F}}^2 = \sum_{l_1 + \dots + l_r = m, l_i \geq 0} \binom{m}{l_1 l_2 \dots l_r} (\sigma_{i_1}^{l_1} \sigma_{i_2}^{l_2} \dots \sigma_{i_r}^{l_r})^2 \\ &= \sum_{l_1 + \dots + l_r = m, l_i \geq 0} \binom{m}{l_1 l_2 \dots l_r} (\sigma_1^2)^{l_1} (\sigma_2^2)^{l_2} \dots (\sigma_r^2)^{l_r} \\ &= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2)^m \\ &= \|C\|_{\mathbb{F}}^{2m}. \end{aligned}$$

□

Finalizamos esta sección con la demostración de un resultado que caracteriza los elementos de la matriz producto, y será de gran utilidad a la hora de describir las potencias.

Lema 1.4. Si $A \in \mathbb{K}^{p \times q}$ y $B \in \mathbb{K}^{s \times t}$, entonces el elemento $(A \otimes B)_{\alpha\beta}$ con $0 \leq \alpha < ps$, $0 \leq \beta < qt$, es

$$(A \otimes B)_{\alpha\beta} = a_{ij}b_{kl}$$

donde $\alpha = si + k$ y $\beta = tj + l$, con $0 \leq k < s$ y $0 \leq l < t$. Esto es, i, k son el cociente y el resto de dividir α por s , y j, l son el cociente y el resto de dividir β por t .

Demostración: Queremos identificar el elemento $(A \otimes B)_{\alpha\beta}$. Se sabe que el producto de Kronecker $A \otimes B$ es una matriz en bloques donde cada bloque ij es de la forma $a_{ij}B$ para $0 \leq i < p$, $0 \leq j < q$. Por esta razón, para conocer el bloque que contiene a dicho elemento basta con dividir α por s y β por t de manera de obtener

$$\alpha = is + k, \quad 0 \leq k < s; \quad \beta = jt + l, \quad 0 \leq l < t.$$

Luego $(A \otimes B)_{\alpha\beta}$ pertenece al bloque $a_{ij}B$ del producto y para conseguir su ubicación dentro de dicho bloque basta con considerar los restos en los cocientes anteriores, de donde resulta

$$(A \otimes B)_{\alpha\beta} = a_{ij}b_{kl}$$

□

En el Capítulo 2 nos ocuparemos de los cuadrados de Kronecker y nos proponemos caracterizar de alguna manera la n -ésima potencia de Kronecker de una matriz dada. El resultado anterior será de gran utilidad para alcanzar los objetivos propuestos.

1.2. VECTORIZACIÓN DE MATRICES.

La idea de manipular matrices como si fueran vectores, los cuales son obtenidos ordenando las entradas de manera conveniente, no es nueva. Tõnu Kollo y Dietrich von Rosen [KR] afirman que fue Sylvester en 1884 quien por primera vez utiliza esta técnica. Así mismo, atribuyen a Koopmans, Rubin & Leipnik en 1950 la introducción del operador vec tal como hoy lo conocemos. Su uso se generalizó a finales de la década del 60' en textos de estadística.

En ciertas aplicaciones que suponen la manipulación de matrices, resulta muy conveniente tratarlas como si fueran vectores, es decir transformarlas en un vector apilando sus filas o sus columnas. El vector así obtenido se denomina la **vectorización de la matriz** dada.

La combinación del producto de Kronecker y la vectorización de matrices constituye una herramienta fundamental que permite, por ejemplo, convertir una ecuación matricial en un sistema lineal.

Uno de nuestros propósitos en este trabajo es la resolución de ecuaciones matriciales con determinadas estructuras que incluyen, precisamente, productos de Kronecker, y la vectorización será de gran utilidad.

Dada una matriz cualesquiera $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\text{vec}(A)$ y $\text{vec}_F(A)$ son los vectores columna en \mathbb{K}^{mn} que resultan de apilar las columnas y las filas de A , respectivamente.

Esto es:

$$\begin{aligned}\text{vec}(A) &= [a_{00}, \dots, a_{(m-1)0}, a_{01}, \dots, a_{(m-1)1}, \dots, a_{0(n-1)}, \dots, a_{(m-1)(n-1)}]^T, \\ \text{vec}_F(A) &= [a_{00}, \dots, a_{0(n-1)}, a_{10}, \dots, a_{1(n-1)}, \dots, a_{(m-1)0}, \dots, a_{(m-1)(n-1)}]^T.\end{aligned}$$

Es de gran interés para nosotros poder pasar con total soltura de la matriz a su vectorización y recíprocamente. En este sentido, la descripción de los elementos de la vectorización empleando el algoritmo de la división entera se deduce de manera inmediata del Lema [1.4](#).

Lema 1.5. *Si $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y α es tal que $0 \leq \alpha < mn$, tenemos que*

$$\begin{aligned}\text{vec}(A)_\alpha &= a_{rq} \text{ si } \alpha = qm + r, \\ \text{vec}_F(A)_\alpha &= a_{qr} \text{ si } \alpha = qn + r,\end{aligned}$$

donde q, r son el cociente y el resto de dividir α por m y n respectivamente.

Ejemplo 1.2.1. *Sea $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{4 \times 3}$. Las dos posibles vectorizaciones*

de A son

$$\begin{aligned}\text{vec}(A) &= [a_{00}, a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{01}, a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{02}, a_{12}, a_{22}, a_{32}]^T, \\ \text{vec}_F(A) &= [a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{30}, a_{31}, a_{32}]^T.\end{aligned}$$

Por ejemplo, el elemento $\text{vec}(A)_7$ es a_{31} pues $7 = 4 \cdot 1 + 3$ y $\text{vec}_F(A)_7 = a_{21}$, ya que $7 = 3 \cdot 2 + 1$.

Es abundante la literatura disponible sobre vectorización de matrices; [\[HJ2\]](#) y [\[OG\]](#) dan muestra de interesantes aplicaciones y propiedades. Por ejemplo:

1- La vectorización es una operación lineal, esto es,

$$\text{vec}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{vec}(A) + \beta \text{vec}(B)$$

para toda $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$;

2- La vectorización de una matriz y su traspuesta se relacionan por la siguiente fórmula: si $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, entonces

$$\text{vec}(A^T) = P(m, n) \text{vec}(A),$$

siendo $P(m, n) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E_{ij} \otimes E_{ij}^T = [E_{ij}^T]$, donde $E_{ij} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ es la matriz cuya entrada en la posición (i, j) vale 1 y las restantes son nulas;

3- La vectorización de matrices y el producto de Kronecker se relacionan de la siguiente manera: para todo $x \in \mathbb{K}^m$, $y \in \mathbb{K}^n$ es

$$\text{vec}(xy^T) = y \otimes x;$$

4- Dada $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ se verifica la siguiente relación entre las normas

$$\|A\|_F = \|\text{vec}(A)\|_2 = \|\text{vec}_F(A)\|_2;$$

5- Dadas A, B, C y D matrices de órdenes adecuados, se verifica

- i) $\text{Tr}(AB) = \text{vec}_F(A^T)^T \text{vec}(B)$,
- ii) $\text{Tr}(ABCD) = \text{vec}_F(A^T)^T (D^T \otimes B) \text{vec}(C)$,
- iii) $\text{Tr}(ABC) = \text{vec}(A^T)^T (I_m \otimes B) \text{vec}(C)$,
- iv) $\text{Tr}(AD^T BDC) = \text{vec}(D)^T (A^T C^T \otimes B) \text{vec}(D)$.

Como ya mencionamos, el producto de Kronecker combinado con la vectorización de matrices, permite resolver de manera muy sencilla ecuaciones matriciales al convertirlas en sistemas de ecuaciones lineales. Una propiedad que resulta fundamental para ese proceso es la que establece que, para matrices en dimensiones adecuadas, valen las siguientes igualdades:

$$\text{vec}(AB) = (I \otimes A) \text{vec}(B) = (B^T \otimes A) \text{vec}(I) = (B^T \otimes I) \text{vec}(A).$$

Sobre este tema volveremos en la Sección [1.4](#) del presente capítulo.

Por último, mostramos como el producto de Kronecker permite escribir a una matriz simétrica de rango 1 en función de una de sus filas no nulas.

Proposición 1.3. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ simétrica y de rango 1 tal que para algún k con $0 \leq k < n$ es $a_{kk} \neq 0$. Entonces*

$$A = \frac{1}{a_{kk}} A(k, -) \otimes A(k, -)^T.$$

Demostración: Como A es de rango 1 y $A(k, -)$ es una fila no nula, entonces $A(i, -) = \lambda_i A(k, -)$ para todo i . Además,

$$\lambda_i = \frac{a_{ik}}{a_{kk}},$$

y como A es simétrica tenemos que

$$(A)_{ij} = A(i, j) = \lambda_i A(k, j) = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{kj} = \frac{1}{a_{kk}} (A(k, -) \otimes A(k, -)^T)_{ij}.$$

□

Proposición 1.4. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ simétrica y de rango $r \leq 1$. Entonces*

$$A = x \otimes x^T = xx^T$$

para algún vector $x \in \mathbb{K}^n$.

Demostración: Si A es simétrica y $\text{rango}(A) = 1$ entonces $A = V\Sigma V^T$, siendo $\Sigma = \text{diag}(\sigma_0, 0, \dots, 0)$, con $\sigma_0 > 0$. Es decir

$$A = v_0\sigma_0v_0^T = (\sqrt{\sigma_0}v_0)(\sqrt{\sigma_0}v_0)^T.$$

Luego es suficiente tomar $x = \sqrt{\sigma_0}v_0$. □

1.3. GRAFOS

En la antigua Königsberg, hoy Kaliningrado, que fuera el lugar de coronación de los reyes de Prusia y la patria de Immanuel Kant, está ambientado el Problema del puente de Königsberg, que condujo al desarrollo de las ramas de las matemáticas conocidas como topología y teoría de grafos.

A principios del siglo XVIII, los ciudadanos de Königsberg pasaban sus días caminando sobre la intrincada disposición de puentes sobre las aguas del río Pregel, que rodeaba dos masas terrestres centrales conectadas por un puente.

Además, la primera masa de tierra (una isla) estaba conectada por dos puentes a la orilla inferior del Pregel y también por dos puentes a la orilla superior, mientras que la otra masa de tierra, que divide el Pregel en dos ramales, estaba conectado al banco inferior por un puente y al banco superior por un puente, para un total de siete puentes.

Según la leyenda, surgió la pregunta de si un ciudadano podía dar un paseo por el pueblo de tal manera que cada puente se cruzara exactamente una vez.

En el siglo XVIII, Euler estaba intrigado por la cuestión y en 1735 presentó una solución a este problema, concluyendo que tal caminata era imposible.

Para confirmar esto, supuso que tal caminata es posible. En un único encuentro con una masa terrestre específica, distinta de la inicial o terminal, se deben tener en cuenta dos puentes diferentes: uno para ingresar a la masa terrestre y otro para salir de ella.

Por lo tanto, cada una de esas masas terrestres debe servir como punto final de una cantidad de puentes equivalente al doble de la cantidad de veces que se encuentra durante la caminata.

Por lo tanto, cada masa de tierra, con la posible excepción de las iniciales y terminales si no son idénticas, debe servir como punto final de un número par de puentes.

Sin embargo, para las masas de tierra de Königsberg, la isla es un punto final de cinco puentes, y las restantes orillas son puntos finales de tres puentes. Por tanto, la caminata es imposible.

Pasarían casi 150 años antes de que los matemáticos imaginaran el problema del puente de Königsberg como un gráfico que consta de nodos (vértices) que representan las masas de tierra y arcos (aristas) que representan los puentes.

El grado de un vértice de dicho gráfico especifica el número de aristas que le inciden.

En la teoría de grafos moderna, un camino euleriano atraviesa cada arco una y sólo una vez.

Por tanto, la afirmación de Euler de que un grafo que posee tal trayectoria tiene como máximo dos vértices de grado impar, fue el primer teorema de la teoría de grafos.

Anteriormente definimos y señalamos importantes propiedades del producto de Kronecker con el objetivo de caracterizar las matrices que son potencia de Kronecker de una matriz dada. Ya que matrices y grafos están estrechamente relacionados, nos disponemos a indicar conceptos básicos en esa materia.

Un grafo es un par $G = (V(G), E(G))$ donde

- $V(G)$ es el conjunto de vértices del grafo,

- $E(G)$ es el conjunto de aristas del grafo, donde arista significa par no ordenado de vértices.

El **orden** $o(G)$ del grafo G es el cardinal del conjunto de vértices $V(G)$. Dos grafos G y H son iguales si y sólo si $V(G) = V(H)$ y $E(G) = E(H)$.

Si $u, v \in V(G)$ son tales que existe $\{u, v\} \in E(G)$ entonces se dice que u y v son **adyacentes**. El **grado** $d(v)$ de un vértice v es el número de vértices a los que v es adyacente. Los vértices de grado 0 se dicen aislados.

Para representar un grafo se emplean puntos que grafican a los vértices y están conectados por líneas, que representan las aristas. Es claro entonces que dos vértices son adyacentes cuando existe una arista que los conecta. Un grafo se dice **simple** cuando no tiene aristas paralelas que ligan el mismo par de vértices, ni bucles que conectan un vértice consigo mismo.

Dados dos grafos G y H , se llama **morfismo** $\phi : G \rightarrow H$ a toda función $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ que preserve adyacencias, esto es,

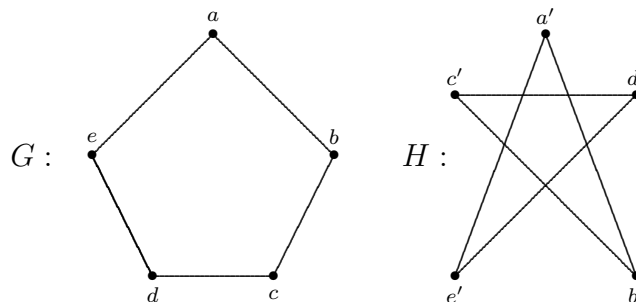
$$\{z, t\} \in E(G) \implies \{\phi(z), \phi(t)\} \in E(H).$$

En particular, dos grafos G y H se dicen **isomorfos**, y se nota $G \cong H$, si existe una biyección $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ que preserve adyacencias y no adyacencias, es decir

$$\{\varphi(z), \varphi(t)\} \in E(H) \iff \{z, t\} \in E(G).$$

La aplicación φ es el isomorfismo entre G y H .

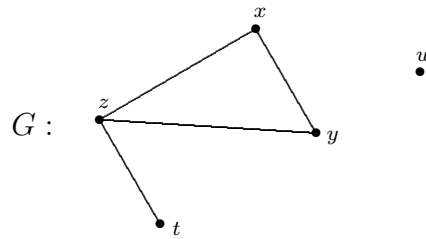
Por ejemplo, los siguientes grafos



son isomorfos, y el isomorfismo está dado por $\varphi(a) = \varphi(a')$, $\varphi(b) = \varphi(b')$, $\varphi(c) = \varphi(c')$, $\varphi(d) = \varphi(d')$ y $\varphi(e) = \varphi(e')$.

Un **camino** es una sucesión de vértices distintos $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ tal que $\{v_i, v_{i+1}\}$ es una arista en $E(G)$, para cada i con $1 \leq i < n$. Un grafo es **conexo** si todo par de vértices puede ser unido mediante un camino de G . Caso contrario el grafo se dice **no conexo**. Llamaremos **ciclo** a cualquier camino cerrado.

Por ejemplo, sea G tal que su conjunto de vértices es $V(G) = \{x, y, z, t, w\}$, y su conjunto de aristas $E(G) = \{\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{z, t\}\}$.



El grafo G es simple, $d(z) = 3$, $d(t) = 1$, $d(x) = d(y) = 2$ y w es un vértice aislado. Además, G no es conexo, $\{t, z, x, y\}$ es un camino y $\{x, y, z\}$ es un ciclo de longitud 3.

Existen diferentes formas de manipular los grafos. Una herramienta útil en este sentido es su relación con el álgebra de matrices cuadradas. Las matrices tienen la ventaja de brindar de manera sencilla información importante relacionada a la estructura del grafo. Las matrices de adyacencia, que definiremos a continuación, permiten, por ejemplo, saber si dos vértices están o no conectados por simple observación de la matriz. También es posible saber si el grafo contiene ciclos, con sólo calcular la potencia n -ésima, con el producto habitual, de dicha matriz.

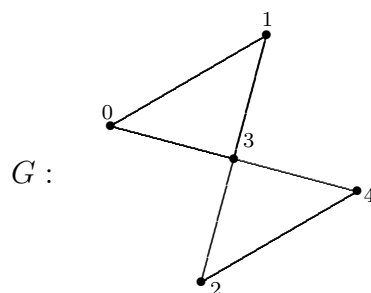
Un grafo se dice **etiquetado** si se le ha asignado un nombre a cada uno de sus vértices o aristas. Dicho etiquetado se define formalmente mediante una función desde el conjunto de vértices o aristas hacia un conjunto de etiquetas, el cual puede ser un conjunto numérico. De esa forma el etiquetado supone un ordenamiento de los vértices o aristas del grafo.

De ahora en más, para cada grafo de n vértices consideraremos el conjunto de etiquetas dado por $\{0, 1, \dots, n - 1\}$, en coincidencia con la forma de numerar filas y columnas de una matriz a lo largo de este trabajo.

Definición 1.4. Dado un grafo simple G de orden n , se llama matriz de adyacencia de G a la matrix $A(G) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida por

$$(A(G))_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in E(G), \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por ejemplo, la matriz de adyacencia $A(G)$ del grafo



es

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para estudiar la relación que existe entre los grafos y las matrices, comenzamos describiendo propiedades de la matrices de adyacencia.

Lema 1.6. *Sea G un grafo simple sin bucles tal que $o(G) = n$ y sea $A(G)$ su matriz de adyacencia. Se verifica que:*

- i) $A(G)$ es simétrica y todos los elementos sobre la diagonal principal son iguales a 0.*
- ii) Si G tiene un vértice aislado v_i , entonces tanto la fila como la columna i -ésima de $A(G)$ tienen todos sus elementos nulos.*
- iii) La suma de los elementos de la fila (o columna) i -ésima de $A(G)$ es el grado del vértice v_i .*

Demostración:

- i) Es claro que

$$(A(G))_{ij} = 1 \iff \{i, j\} \in E(G) \iff \{j, i\} \in E(G) \iff (A(G))_{ji} = 1.$$

Del mismo modo, si $(A(G))_{ij} = 0$ esto significa que los vértices v_i y v_j no están conectados y por lo tanto $(A(G))_{ji} = 0$

- ii) Si v_i es un vértice aislado, entonces no está conectado a ningún otro vértice y por lo tanto $(A(G))_{ij} = (A(G))_{ji} = 0$ para todo $1 \leq j \leq n$.
- iii) Para cada vértice v_i de G la i -ésima fila de la matriz de adyacencia tendrá tantas entradas iguales a 1 como vértices adyacentes tenga v_i . Luego

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji} = d(v).$$

□

Sea $\mathcal{M}_n \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ el conjunto de matrices simétricas binarias con diagonal nula, esto es, aquellas que satisfacen las propiedades del lema anterior. Debemos notar que, dado que no existe una única forma de etiquetar los vértices de un grafo, para cada uno de las posibles órdenes alternativos se obtiene una matriz de adyacencia diferente. Consideremos en \mathcal{M}_n la relación de equivalencia definida por

$$X \sim Y \iff PXP^{-1} = Y$$

donde P es una matriz de permutación, esto es, una matriz cuadrada tal que en cada fila y en cada columna hay una única entrada no nula y exactamente igual a 1.

Proposición 1.5. *Cada clase de equivalencia en \mathcal{M}_n se corresponde con una única clase de grafos isomorfos de orden n , esto es, la función que a cada grafo G le asocia una de sus matrices de adyacencia $A(G)$ induce una función biyectiva*

$$[G] \mapsto [A(G)]$$

donde $[G]$ representa el conjunto de todos los grafos isomorfos a G y $[A(G)]$ representa la clase de equivalencia de $A(G)$ en \mathcal{M}_n definida por conjugación de matrices de permutación.

Demostración: Si $\sigma : G \rightarrow H$ es un isomorfismo entre G y H , entonces $A(G) = P A(H) P^{-1}$, con

$$(P)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) = (i, \sigma(i)), \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Recíprocamente, dada $M \in \mathcal{M}_n$, es posible definir un grafo G de n vértices $V(G) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ y tal que $\{i, j\} \in E(G) \iff M_{ij} = M_{ji} = 1$. \square

La matriz de adyacencia anteriormente descrita puede aportar información muy valiosa con respecto a la estructura del grafo del cual proviene y resulta aún más interesante cuando se trata de la matriz de adyacencia de un producto de grafos. Dados dos grafos G y H , el conjunto de vértices del grafo producto es el producto cartesiano de $V(G)$ y $V(H)$, y dos vértices del producto (u_1, u_2) y (v_1, v_2) son adyacentes si y solo si los vértices u_1, u_2, v_1, v_2 están relacionados de alguna manera, según sea el tipo de producto. En este sentido, estamos interesados en dos de ellos: el **producto cartesiano** y el **producto de Kronecker**, cuyas matrices de adyacencia tienen estructuras muy particulares.

1.3.1. Producto cartesiano de grafos

En esta sección vamos a definir el producto cartesiano de grafos, mencionaremos algunas de sus propiedades, y veremos como se construye la matriz de adyacencia asociada.

Definición 1.5. *Sean $G = (V(G), E(G))$ y $H = (V(H), E(H))$ dos grafos. Se define el producto cartesiano de G y H , y se nota $G \circ H$, al grafo dado por*

- $V(G \circ H)$ es el producto cartesiano $V(G) \times V(H)$;
- $((u, v), (w, s)) \in E(G \circ H)$ sí y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones:
 - i) $u = w$ y $(v, s) \in E(H)$;
 - ii) $v = s$ y $(u, w) \in E(G)$.

Es posible probar que el producto cartesiano de grafos es conmutativo y asociativo en el siguiente sentido:

Proposición 1.6. *Sean G_1, G_2 y G_3 tres grafos simples, sin bucles. Entonces*

- i) $G_1 \circ G_2 \cong G_2 \circ G_1$
- ii) $(G_1 \circ G_2) \circ G_3 \cong G_1 \circ (G_2 \circ G_3)$

Demostración:

- i) Claramente la función $\varphi : G_1 \circ G_2 \rightarrow G_2 \circ G_1$ definida por $\varphi(i_1, i_2) = (i_2, i_1)$ es un isomorfismo.
- ii) Sea $\varphi : (G_1 \circ G_2) \circ G_3 \rightarrow G_1 \circ (G_2 \circ G_3)$ la función definida por

$$\varphi((i_1, i_2), i_3) = (i_1, (i_2, i_3)).$$

Si $\{((i_1, i_2), i_3), ((j_1, j_2), j_3)\} \in E((G_1 \circ G_2) \circ G_3)$ entonces $\{i_s, j_s\} \in E(G_s)$ exactamente para un $s \in \{1, 2, 3\}$ y $i_t = j_t$ para los otros índices, lo cual implica que $(i_1, (i_2, i_3))$ es adyacente a $(j_1, (j_2, j_3))$ y por lo tanto φ es un isomorfismo, pues es una función biyectiva que conserva adyacencias y no adyacencias.

□

Como indicamos anteriormente, la matriz de adyacencia de los grafos producto tienen estructuras muy interesantes. En el caso del producto cartesiano se demuestra que la matriz de adyacencia del producto $G \circ H$ es la suma de Kronecker de las matrices de adyacencia de los grafos G y H .

Proposición 1.7. Sean G y H dos grafos simples sin bucles con m y n vértices respectivamente. Entonces

$$A(G \circ H) = A(G) \oplus A(H) = A(G) \otimes I_n + I_m \otimes A(H).$$

Demostración: Como $V(G \circ H) = V(G) \times V(H)$, se tiene que $A(G \circ H)$ es una matriz cuadrada de orden $mn \times mn$. Sea $V(G) = \{0, \dots, m-1\}$ y $V(H) = \{0, \dots, n-1\}$. Supongamos que el conjunto de vértices de $G \circ H$ es un conjunto de pares ordenados, que están ordenados siguiendo el orden lexicográfico, es decir, si $(i, k), (j, l) \in V(G \circ H)$ entonces

$$(i, k) < (j, l) \iff \begin{cases} i < j, \\ \text{ó} \\ i = j \quad \text{y} \quad k < l. \end{cases}$$

Debemos probar que para todo α, β tal que $0 \leq \alpha, \beta < nm$ es

$$(A(G) \otimes I_n + I_m \otimes A(H))_{\alpha\beta} = (A(G \circ H))_{\alpha\beta},$$

donde

$$(A(G) \otimes I_n + I_m \otimes A(H))_{\alpha\beta} = (A(G) \otimes I_n)_{\alpha\beta} + (I_m \otimes A(H))_{\alpha\beta}.$$

Lo haremos por casos, teniendo en cuenta que $\alpha = ni + k$ y $\beta = nj + l$.

1. Veamos que no es posible que $(A(G) \otimes I_n)_{\alpha\beta} = (I_m \otimes A(H))_{\alpha\beta} = 1$ simultáneamente. Si $(A(G) \otimes I_n)_{\alpha\beta} = 1$, por el Lema [1.4](#) tenemos que

$$1 = (A(G) \otimes I_n)_{\alpha\beta} = (A(G))_{ij} \cdot (I_n)_{kl}.$$

Esto implica que $(A(G))_{ij} = 1$ y $k = l$. Del mismo modo,

$$1 = (I_m \otimes A(H))_{\alpha\beta} = (I_m)_{ij}(A(H))_{kl}$$

implica $(A(h))_{kl} = 1$ e $i = j$. De donde resulta un absurdo ya que $(A(G))_{ij} = 1$ con $i = j$ y $(A(h))_{kl} = 1$ con $k = l$ es imposible pues G y H son grafos sin bucles.

2. Si $(A(G) \otimes I_n)_{\alpha\beta} = 1$ ya sabemos, por el inciso anterior, que $(I_m \otimes A(H))_{\alpha\beta} = 0$. De la primera igualdad se deduce que $(A(G))_{ij} = 1$ y $k = l$, esto es,

$$\{i, j\} \in E(G) \text{ y } k = l,$$

y por lo tanto (i, k) es adyacente a (j, l) y ello implica que

$$(A(G \circ H))_{\alpha\beta} = 1$$

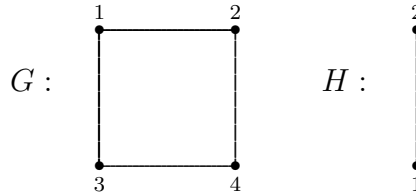
pues los vértices de $G \circ H$ se ordenan en orden lexicográfico.

3. Si $(A(G) \otimes I_n)_{\alpha\beta} = (I_m \otimes A(H))_{\alpha\beta} = 0$ tenemos que (i, k) no es adyacente a (j, l) pues si fuera $k = l$ tendríamos que $\{i, j\} \notin E(G)$, y si fuera $i = j$ tendríamos que $\{k, l\} \notin E(H)$. Es claro que en este caso $(A(G \circ H))_{\alpha\beta} = 0$.

□

El siguiente ejemplo ilustra el resultado demostrado.

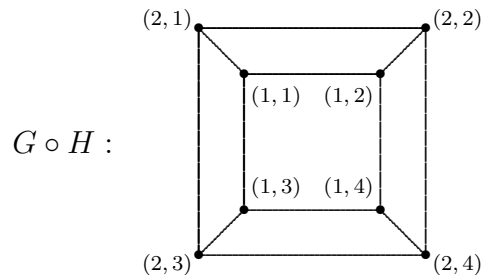
Ejemplo 1.3.1. Consideremos los grafos G y H



cuyas matrices de adyacencia son

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El producto cartesiano de G y H está dado por el grafo



y la matriz de adyacencia del producto cartesiano es:

$$A(G \circ H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado,

$$A(G) \oplus A(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y así tenemos que

$$A(G \circ H) = A(G) \oplus A(H) = A(G) \otimes I_n + I_m \otimes A(H).$$

Sobre este resultado, que vincula las sumas de Kronecker con el producto cartesiano de grafos, volveremos en el Capítulo [3](#), al resolver cierto problema de Procrusto en la Sección [3.1](#) y por supuesto en el desarrollo de las aplicaciones en el Capítulo [4](#).

1.3.2. Producto de Kronecker de grafos

Se sabe que toda matriz en \mathcal{M}_n , esto es, toda matriz cuadrada de orden n , binaria, simétrica con ceros sobre la diagonal, es la matriz de adyacencia de algún grafo simple sin bucles de orden n . Por otra parte si $A \in \mathcal{M}_n$ y $B \in \mathcal{M}_m$, entonces $A \otimes B \in \mathcal{M}_{nm}$ pues, si $\alpha = mi + k$ y $\beta = mj + l$, se tiene que

$$(A \otimes B)_{\alpha\beta} = a_{ij}b_{kl},$$

y por lo tanto, los elementos de la matriz obtenida son 0 ó 1. Además los elementos de la diagonal son 0 pues si $\alpha = \beta$ tenemos que $i = j$, $k = l$, con lo cual

$$(A \otimes B)_{\alpha\beta} = a_{ii}b_{kk} = 0.$$

Por último, la matriz es simétrica pues

$$(A \otimes B)_{\alpha\beta} = a_{ij}b_{kl} = a_{ji}b_{lk} = (A \otimes B)_{\beta\alpha}.$$

Por lo tanto, el producto de Kronecker de dos matrices de adyacencia es otra matriz de adyacencia. Estamos interesados en aquellos grafos tales que su matriz de adyacencia es un producto de Kronecker, es más, cuya matriz de adyacencia es una potencia de Kronecker.

Definición 1.6. *Dados dos grafos G y H , sean $A(G)$ y $A(H)$ sus matrices de adyacencia. Se llama producto de Kronecker de G y H , y se nota $G \otimes H$, al grafo cuya matriz de adyacencia es $A(G) \otimes A(H)$.*

El producto de Kronecker de G y H es el grafo Q tal que $V(Q)$ y $E(Q)$ están dados por :

Proposición 1.8. *Dados $G = (V(G), E(G))$ y $H = (V(H), E(H))$, el producto de Kronecker $G \otimes H$ es el grafo dado*

$$\begin{aligned} V(G \otimes H) &= V(G) \times V(H); \\ E(G \otimes H) &= \{(i, k), (j, l)\} : \{i, j\} \in E(G), \{k, l\} \in E(H)\}. \end{aligned}$$

Demostración: Veamos ahora que $A(G \otimes H) = A(G) \otimes A(H)$, esto es, dados α, β con $0 \leq \alpha, \beta < nm$, probemos que $A(G \otimes H)_{\alpha\beta} = (A(G) \otimes A(H))_{\alpha\beta}$. Si el conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ se ordena lexicográficamente, y $\alpha = in + k, \beta = jn + l$, tenemos que

$$(A(G \otimes H))_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in E(G) \text{ y } \{k, l\} \in E(H); \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por otro lado,

$$(A(G) \otimes A(H))_{\alpha\beta} = (A(G))_{ij} (A(H))_{kl}$$

y es claro entonces que $(A(G) \otimes A(H))_{\alpha\beta} = 1$ sí y sólo si $(A(G))_{ij} = (A(H))_{kl} = 1$, esto es, sí y sólo si $\{(i, k), (j, l)\} \in E(G \otimes H)$. \square

El producto de Kronecker de grafos es conmutativo y asociativo, en la misma forma a lo ya probado para el producto cartesiano.

Proposición 1.9. *Sean G_1, G_2 y G_3 tres grafos simples, sin bucles. Entonces*

- i) $G_1 \otimes G_2 \cong G_2 \otimes G_1$
- ii) $(G_1 \otimes G_2) \otimes G_3 \cong G_1 \otimes (G_2 \otimes G_3)$

Demostración:

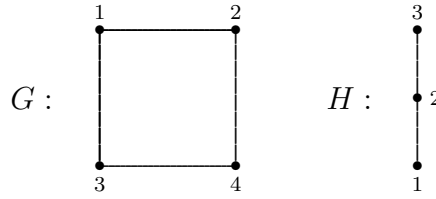
- i) Claramente la función $\varphi : G_1 \otimes G_2 \rightarrow G_2 \otimes G_1$ definida por $\varphi(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ es un isomorfismo.
- ii) Sea $\varphi : (G_1 \otimes G_2) \otimes G_3 \rightarrow G_1 \otimes (G_2 \otimes G_3)$ la función definida por

$$\varphi((x_1, x_2), x_3) = (x_1, (x_2, x_3)).$$

Si $\{((x_1, x_2), x_3), ((y_1, y_2), y_3)\} \in E((G_1 \otimes G_2) \otimes G_3)$ entonces $\{x_i, y_i\} \in E(G_i)$ para cada i , lo cual implica que $(x_1, (x_2, x_3))$ es adyacente a $(y_1, (y_2, y_3))$ y por lo tanto φ es un isomorfismo, pues es una función biyectiva que conserva adyacencias y no adyacencias.

\square

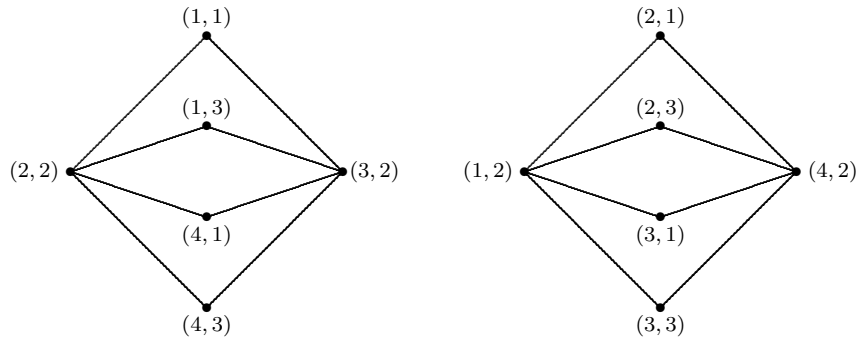
Ejemplo 1.3.2. Por ejemplo, sean los grafos



y sus matrices de adyacencia

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El producto de Kronecker $G \otimes H$ es el grafo



y su matriz de adyacencia es

$$A(G \otimes H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es claro entonces que

$$A(G \otimes H) = A(G) \otimes A(H).$$

Del ejemplo anterior se deduce que el grafo obtenido no es conexo ya que no existe camino que una, por ejemplo, los vértices $(2, 2)$ y $(1, 2)$. Paul Weichsel demuestra

en [W] que la condición necesaria y suficiente para que el producto de Kronecker de dos grafos conexos sea conexo es que al menos uno de ellos contenga un ciclo impar, entendiéndose por tal un camino cerrado que recorre un número impar de vértices. Incluso, como corolario de dicho resultado prueba que si G y H son conexos, sin ciclos o con ciclos pares, entonces el producto $G \otimes H$ tiene exactamente dos componentes conexas.

En este trabajo estamos especialmente interesados en caracterizar las potencias de Kronecker de una matriz y en la forma de recuperar la base de dicha potencia. De acuerdo a lo expuesto hasta aquí, el producto de Kronecker de dos matrices de adyacencia, es la matriz de adyacencia del producto de Kronecker de los grafos a ellas asociados, por lo que resulta inmediata la relación entre potencias de Kronecker de una matriz de adyacencia y potencias de Kronecker del correspondiente grafo. Esta relación motiva la siguiente definición.

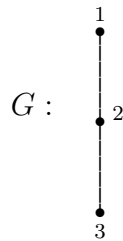
Definición 1.7. *Un grafo H se dice un grafo de Kronecker si y sólo si existe un grafo G tal que*

$$H = G^{\otimes n} = \underbrace{G \otimes G \otimes \cdots \otimes G}_{n \text{ veces}}.$$

Es claro que para todo grafo de Kronecker G , su matriz de adyacencia es

$$A(G^{\otimes k}) = A(G)^{\otimes k}.$$

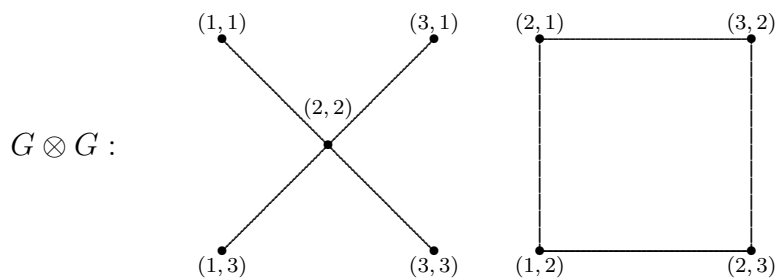
Ejemplo 1.3.3. *Consideremos el grafo G*



y su matriz de adyacencia $A(G)$

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El cuadrado de Kronecker de G es el grafo

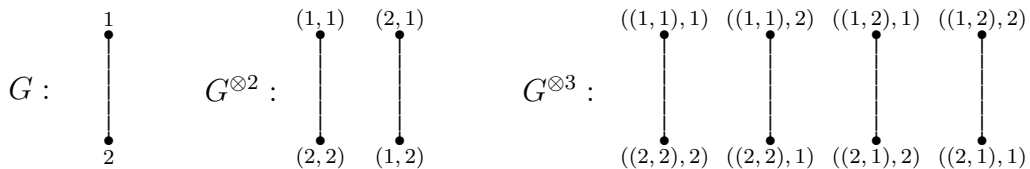


siendo

$$A(G^{\otimes 2}) = A(G) \otimes A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos otro ejemplo, en el cual calculamos el cuadrado y el cubo de Kronecker de un grafo dado.

Ejemplo 1.3.4. Las potencias $G^{\otimes 2}$ y $G^{\otimes 3}$ del grafo G son



y las correspondientes matrices de adyacencia son:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A(G^{\otimes 2}) = A(G)^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A(G^{\otimes 3}) = A(G)^{\otimes 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hasta aquí el punto de partida de nuestro análisis ha sido un grafo G , hemos calculado sus potencias de Kronecker, así como también las correspondientes matrices de adyacencia, verificando que $A(G^{\otimes k}) = A(G)^{\otimes k}$.

La propuesta ahora es recorrer, de alguna manera, el camino inverso: dado un grafo H de n^k vértices, poder decidir si se trata o no, de un grafo de Kronecker, y en caso de que lo sea, poder recuperar el grafo G tal que $H = \otimes^k G$. La cuestión será resuelta a partir de la matriz de adyacencia $A(H)$.

En el próximo capítulo nos proponemos establecer condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo, dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{n^k \times n^k}$, existe una matriz $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tal que $A = B^{\otimes k}$. De modo que, en el caso particular en el que A sea la matriz de adyacencia de algún grafo H , el conocimiento de la matriz B implica el conocimiento del grafo G tal que $H = G^{\otimes k}$. Esto último forma parte de las aplicaciones sobre las que trabajaremos en el Capítulo 4.

1.4. ECUACIONES MATRICIALES

Tal vez una de las aplicaciones más interesantes de la teoría de matrices es la que se relaciona con la resolución de ecuaciones matriciales. Tal como refieren los historiadores fue en la antigua China donde, por primera vez, se escuchó hablar de estos objetos matemáticos. Por entonces llamadas cuadrados mágicos, denominación legendaria, ya que cuenta la leyenda que durante el reinado del emperador Yu (2200 a.C.) una tortuga sagrada emergió de las aguas del Río Amarillo mostrando un misterioso jeroglífico en su caparazón, los cuales fueron dibujados y corresponden al diseño de un cuadrado mágico. Es hacia el 650 a.C. que la literatura china registra los primeros usos en matemática. Posteriormente, en un texto matemático chino compuesto por nueve capítulos, y que se sitúa aproximadamente entre el 300 a.C. y 200 a.C. es donde puede encontrarse el primer ejemplo conocido del uso de matrices para resolver un sistema de ecuaciones.

En el capítulo séptimo aparece el concepto de determinante, dos mil años antes de su publicación por el matemático japonés Seki Kōwa en 1683 y el matemático alemán Gottfried Leibniz en 1693, quienes más tarde desarrollaron con toda formalidad la teoría de determinantes. Gabriel Cramer publicó la conocida Regla de Cramer en 1751. Por aquel tiempo es introducido el Método de Gauss y ya a mediados del siglo XIX, con las obras de William Hamilton y Arthur Cayley, la teoría de matrices alcanza gran desarrollo. Entre los resultados fundamentales se destacan los debidos a Weierstrass, Jordan y Frobenius.

Se dice que el término “matriz” fue introducido por James Sylvester hacia 1848, pero también algunos especialistas mencionan que fue Cayley en 1841 quien empezó a hablar de matrices tal como hoy las conocemos. Precisamente Cayley es quien en 1858 introduce la notación matricial, como forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

A los especialistas ya nombrados se suman Hermann Grassmann, Frobenius, Olga Taussky-Todd y John von Neumann. En 1925, Werner Heisenberg vincula el cálculo matricial a una posible primera formulación de lo que luego será la mecánica cuántica. Hoy las matrices son ampliamente empleadas en distintas áreas.

Una de las aplicaciones más interesantes del uso combinado del producto de Kronecker y la vectorización está relacionado con la resolución de ecuaciones matriciales, es decir, ecuaciones en las que coeficientes e incógnitas son matrices. La técnica indicada consiste en reducir la ecuación, vía vectorización, a un sistema lineal el cual puede ser resuelto por técnicas conocidas. A continuación mencionaremos algunos de estos tipos de ecuaciones y mostraremos la forma de resolver dichas ecuaciones

utilizando la vectorización y algunas propiedades del producto de Kronecker.

Como ya hemos indicado, dada una matriz X , nos proponemos resolver el problema de hallar las matrices Z tales que $X = Z^{\otimes n}$. Veremos que si en cualesquiera de las próximas ecuaciones reemplazamos la incógnita X por una potencia de Kronecker, se obtiene un conjunto de nuevas ecuaciones que podremos resolver combinando las técnicas conocidas con los nuevos resultados, cuestión sobre la cual trabajaremos en el Capítulo 4.

1.4.1. Ecuaciones del tipo $AX = B$.

Dadas $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{m \times p}$, queremos hallar $X \in \mathbb{K}^{n \times p}$ tal que $AX = B$. Aplicando el operador vec

$$AX = B \iff \text{vec}(AX) = \text{vec}(B) \iff (I_p \otimes A) \text{vec}(X) = \text{vec}(B),$$

siendo I_p la matriz identidad de orden p . De manera que la ecuación matricial queda reducida a un sistema lineal. Existen gran cantidad de métodos para la resolución de sistemas lineales. Golub [GL] aporta un importante desarrollo al respecto incluyendo técnicas basadas en la factorización de la matriz del sistema, así como también para sistemas con ciertas estructuras especiales.

Ejemplo 1.4.1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 & 21 \\ 5 & 4 & 10 & -18 \\ 11 & -13 & -7 & -4 \\ 4 & 12 & 0 & 14 \\ -4 & 16 & 1 & 17 \end{pmatrix}$$

queremos hallar $X \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$ tal que $AX = B$. Aplicando vec a ambos miembros de la ecuación resulta

$$(I_p \otimes A) \text{vec}(X) = \text{vec}(B),$$

esto es, debemos hallar $x = \text{vec}(X) \in \mathbb{R}^{20}$ que satisfaga el sistema lineal. Resuelto el mismo

$$x = \text{vec}(X) = (1 \quad 4 \quad 0 \quad -3 \quad -1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 7 \quad 0 \quad 2 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad -5)$$

siendo la solución de la ecuación original la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

1.4.2. Ecuaciones del tipo $AXB = C$.

Dadas $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{p \times q}$ y $C \in \mathbb{K}^{m \times q}$, queremos hallar las matrices $X \in \mathbb{K}^{n \times p}$ que la satisfagan la ecuación

$$AXB = C.$$

Vectorizando encontramos que la ecuación dada es equivalente al sistema lineal de mq ecuaciones

$$(B^T \otimes A) \text{vec}(X) = \text{vec}(C),$$

y por lo tanto, es suficiente resolver el sistema para recuperar la solución de la ecuación de partida. Respecto a la existencia de soluciones puede probarse lo siguiente.

Lema 1.7. Sean A, B y $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$. La ecuación $AXB = C$ tiene una única solución $X \in \mathbb{K}^{n \times n}$ para cualquier elección de C si y sólo si A y B son ambas no singulares. Si una de ellas, A ó B , es singular, existe una solución para la ecuación si y sólo si el rango de $B^T \otimes A$ coincide con el rango de la matriz ampliada $(B^T \otimes A | \text{vec}(C))$.

Demostración: La ecuación $AXB = C$ tiene solución única si y sólo si tiene solución única el sistema lineal $(B^T \otimes A) \text{vec}(X) = \text{vec}(C)$, y esto es equivalente a $\det(B^T \otimes A) \neq 0$. Por la Proposición [1.1](#) se sabe que

$$\det B^T \otimes A = (\det B^T)^n (\det A)^n,$$

y el mismo es no nulo si y sólo si $\det B \neq 0$ y $\det A \neq 0$. Si A ó B es singular, entonces $\text{rango}(B^T \otimes A) < n^2$ y por lo tanto, por el teorema de Rouché Frobenius, el sistema lineal $(B^T \otimes A) \text{vec}(X) = \text{vec}(C)$ tendrá solución si el rango de $B^T \otimes A$ coincide con el rango de la matriz ampliada. \square

Ejemplo 1.4.2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & -12 \end{pmatrix}$$

notemos que $\det A = -2$ y $\det B = -6$, por lo que se puede asegurar que la ecuación tiene una única solución. Para hallar $X \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ tal que $AXB = C$ aplicamos vec a ambos miembros de la ecuación:

$$(B^T \otimes A) \text{vec}(X) = \text{vec}_F(C).$$

Este sistema lineal admite como única solución al vector

$$x = \text{vec}(X) = (1 \ 2 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 2 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1),$$

de manera que la solución del problema original es

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4.3. Ecuación de Lyapunov.

Una ecuación de Lyapunov tiene la forma

$$A^*X + XA = B,$$

siendo $A, B \in \mathbb{K}^{m \times m}$. Este tipo de ecuaciones aparecen en el análisis de sistemas de control, aunque en los últimos tiempos también se las vincula a gran número de aplicaciones en distintos campos. Son de gran interés los métodos de resolución así como las mejoras desde el punto de vista numérico para dichos desarrollos. Entre los algoritmos de resolución más reconocidos se destaca, como uno de los más eficientes, el algoritmo de Bartels-Stewart.

Quizá el más novedoso de los enfoques sea el de la vectorización, dado que la ecuación matricial

$$AX + XA^T = B$$

es equivalente al sistema de ecuaciones lineales

$$(I \otimes A + A \otimes I) \text{vec}(X) = \text{vec}(B).$$

De manera que la solución es obtenida mediante la resolución de dicho sistema lineal.

Con respecto a la existencia de soluciones, Horn & Johnson prueban en [HJ2] el siguiente resultado.

Teorema 1.3. *Dadas $A, B \in \mathbb{K}^{m \times m}$, la ecuación $A^*X + XA = B$ tiene una única solución $X \in \mathbb{K}^{m \times m}$ para cada matriz B si y sólo si para todo λ en el espectro de A , $-\bar{\lambda}$ no pertenece al espectro de A .*

Ejemplo 1.4.3. *Dadas*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 7 & 11 \\ 10 & 19 & 11 & 19 \\ 13 & 17 & 13 & 15 \\ 7 & 17 & 18 & 17 \end{pmatrix},$$

consideremos la ecuación de Lyapunov

$$A^T X + XA = B.$$

El espectro de A es $\{2 - \sqrt{26}, 2 + \sqrt{26}, 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$. De acuerdo al teorema indicado es posible asegurar entonces que la ecuación admite una única solución. Para encontrar dicha solución, vectorizamos y obtenemos la ecuación

$$(I \otimes A + A \otimes I) \text{vec}(X) = \text{vec}(B)$$

cuya solución es el vector

$$\text{vec}(X) = (1 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2).$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación matricial original es

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.4.4. Ecuación de Sylvester.

Son ecuaciones del tipo

$$AX + XB = C,$$

siendo $A, B \in \mathbb{K}^{m \times m}$. Lleva el nombre de James Joseph Sylvester (1814-1897) y se la encuentra en problemas relacionados a la teoría de control. El ya mencionado algoritmo de Bartels-Stewart es una de las herramientas más eficientes para resolver este tipo de ecuaciones. La idea de dicho algoritmo es llevar a las matrices A y B a su forma de Schur mediante la aplicación de un algoritmo QR. Un algoritmo tipo QR está basado precisamente en la factorización homónima, desarrollada en la década del 50 por John G.F. Francis y Vera N. Kublànovskaya, de manera independiente. Obtener la factorización QR de una matriz significa expresarla como producto de una matriz ortogonal Q por una matriz triangular superior R . Finalmente, se resuelve el sistema triangular resultante mediante sustitución hacia atrás.

Al igual que en el caso de las ecuaciones de Lyapunov, es posible vectorizar la ecuación matricial

$$AX + XB = C$$

para transformarla en el sistema lineal de ecuaciones

$$(I \otimes A + B^T \otimes I) \text{vec}(X) = \text{vec}(C).$$

En cuanto a la existencia y unicidad de las soluciones, Horn & Johnson prueban en [HJ2] el siguiente resultado.

Teorema 1.4. *Dadas $A, B \in \mathbb{K}^{m \times m}$, la ecuación $AX + XB = C$ tiene una única solución $X \in \mathbb{K}^{m \times m}$ para cada matriz B si y sólo si la intersección de los espectros de A y $-B$ es vacía.*

Ejemplo 1.4.4. *Consideremos las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 13 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \\ -14 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Como $\lambda(A) = \{-2, -2, 4\}$ y $\lambda(-B) = \{-1, 2, 2\}$, sabemos que la ecuación admite una única solución. Para resolver la ecuación $AX + XB = C$ vectorizamos:

$$(I \otimes A + B^T \otimes I) \text{vec}(X) = \text{vec}(C).$$

La solución de este sistema lineal es

$$\text{vec}(X) = (2 \quad -1 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 2 \quad 5)$$

y por lo tanto la solución de la ecuación matricial es

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.4.5. Ecuación de conmutatividad.

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$, resolver la ecuación de conmutatividad significa hallar todas las matrices $X \in \mathbb{K}^{m \times m}$ que conmutan con A , esto es, resolver la ecuación matricial

$$AX - XA = 0.$$

Vectorizando se obtiene el sistema lineal

$$(I \otimes A - A^T \otimes I) \text{vec}(X) = 0.$$

Se sabe que si el espectro de A es $\{\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ entonces todo autovalor de la suma $(I \otimes A + -A^T \otimes I)$ será de la forma $(\lambda_i + (-\lambda_j))$ para todo i y para todo j . En particular $\mu = 0$ es un autovalor de orden de multiplicidad al menos m de dicha suma. Luego

$$\text{rango}(I \otimes A - A^T \otimes I) < m^2,$$

por lo que el sistema lineal homogéneo obtenido a partir de la vectorización tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 1.4.5. *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

resolvamos la ecuación de conmutatividad para dicha elección de A . Vectorizando se obtiene

$$(I \otimes A - A^T \otimes I) \text{vec}(X) = 0,$$

siendo

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

la matriz del sistema. Además $\text{rango}(Z) = 6$. Resuelto el sistema se obtiene que el espacio de soluciones está dado por las matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} x_{23} + x_{33} & x_{23} & 0 \\ 2x_{23} & -x_{23} + x_{33} & x_{23} \\ x_{23} & 0 & x_{33} \end{pmatrix}.$$

1.4.6. Ecuación del tipo $A_1XB_1 + \dots + A_kXB_k = C$.

Dadas las matrices $A_i \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B_i \in \mathbb{K}^{p \times q}$, para $1 \leq i \leq k$, y $C \in \mathbb{K}^{m \times q}$, se buscan las matrices $X \in \mathbb{K}^{n \times p}$ tales que

$$A_1XB_1 + A_2XB_2 + \dots + A_kXB_k = C.$$

También en este caso se puede resolver aplicando el operador vec a ambos miembros, pues de esta manera se consigue un sistema lineal equivalente

$$(B_1^T \otimes A_1 + B_2^T \otimes A_2 + \dots + B_k^T \otimes A_k) \text{vec}(X) = \text{vec}(C).$$

Ejemplo 1.4.6. Sean las matrices dadas por

$$A_i = \begin{pmatrix} (-1)^i & 0 \\ i & i+1 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} i & (-1)^{i+1} \\ 0 & i-1 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq 5, \quad C = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 40 & 42 \end{pmatrix}.$$

Consideremos la ecuación

$$A_1XB_1 + A_2XB_2 + A_3XB_3 + A_4XB_4 + A_5XB_5 = C.$$

Vectorizando resulta el sistema triangular

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 55 & 70 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 40 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 40 \\ -12 \\ 42 \end{pmatrix},$$

cuya solución es $x = (2, -1, 1, 0)$, que corresponde a la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4.7. Ecuación del tipo $AX + BY = C$.

Dadas las matrices $A, B, C \in \mathbb{K}^{m \times m}$ se quieren determinar matrices X e Y que verifiquen la ecuación matricial

$$AX + BY = C.$$

En este caso también se ha de vectorizar a ambos miembros de la ecuación, obteniéndose la ecuación

$$(I_m \otimes A) \text{vec}(X) + (B^T \otimes I_m) \text{vec}(Y) = \text{vec}(C)$$

que puede ser expresada en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} I_m \otimes A & B^T \otimes I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{vec}(X) \\ \text{vec}(Y) \end{bmatrix} = \text{vec}(C).$$

Ejemplo 1.4.7. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos la ecuación $AX + BY = C$. Al vectorizar encontramos la representación matricial

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & 2 & 0 & -3 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ \text{---} \\ y_{11} \\ y_{21} \\ y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz del sistema es una matriz de rango 4 por lo que se trata de un sistema con infinitas soluciones:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} + \frac{1}{4}y_{11} - \frac{1}{8}y_{21} - \frac{1}{4}y_{12} - \frac{1}{8}y_{22} & \frac{11}{8} - \frac{1}{2}y_{11} + \frac{1}{4}y_{21} + \frac{3}{4}y_{12} - \frac{3}{8}y_{22} \\ -\frac{9}{16} + \frac{1}{8}y_{11} + \frac{3}{16}y_{21} - \frac{1}{8}y_{12} - \frac{3}{16}y_{22} & \frac{7}{16} - \frac{1}{4}y_{11} - \frac{3}{8}y_{21} + \frac{3}{8}y_{12} + \frac{9}{16}y_{22} \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}.$$

2 | RAÍZ ENÉSIMA DE KRONECKER.

Según afirman Rey Pastor y José Babini en su libro “Historia de la Matemática de la antigüedad a la actualidad” [RPB], los textos matemáticos más antiguos disponibles son la tablilla de barro Plimpton 322, proveniente de Babilonia, que fue escrita cerca del 1800 a.C. y constituye las primeras manifestaciones de las matemáticas babilónicas.

El Papiro de Moscú es, junto con el Papiro de Ahmes, el más importante documento matemático del antiguo Egipto. El papiro de Ahmes, más conocido como papiro Rhind, es un documento de carácter didáctico que contiene diversos problemas matemáticos. Está redactado en escritura hierática y mide unos seis metros de longitud por 35 cm de anchura.

Shulba Sutras son parte de los los textos más antiguos de la India, compuestos entre los milenios II y I a.C. Su importancia se debe a que constituyen la única referencia sobre los conocimientos matemáticos de la India durante el período previo a la formación de la religión hinduista.

Ya por entonces las raíces cuadradas eran objeto de investigación. El Papiro de Ahmes muestra cómo los egipcios extraían raíces cuadradas. En la antigua India, un método para encontrar muy buenas aproximaciones de las raíces cuadradas de 2 y 3 aparece en el Baudhayana Sulba Sutra. Aryabhata, en su tratado Aryabhatiya, dio un método para encontrar la raíz cuadrada de números con varios dígitos y que fuera utilizado en Europa durante siglos. Pietro Antonio Cataldi calculó en 1613 la raíz cuadrada aproximando por fracciones continuas.

Posteriormente, se fue ampliando la definición de raíz cuadrada. Así se la define para números reales negativos y no fue sino hasta 1777 cuando Leonhard Euler simbolizó la raíz cuadrada de -1 con la letra i .

Desde la antigüedad el estudio de las raíces enésimas de números reales ha sido un tema recurrente en las distintas culturas. Más cerca nuestro, surge la necesidad de calcular raíces pero no ya de números, sino de matrices. Felix Gantmacher en su libro sobre teoría de matrices [EG] hace un desarrollo muy completo sobre raíces enésimas de matrices con el producto habitual que lo convierte en uno de los textos clásicos de lectura obligada. Numerosos especialistas siguieron sus pasos, entre los más destacados se encuentra N. Higham, quien ha sumado interesantes trabajos en ese sentido [HG, HG1]. Contemporáneo, Ojeda da un paso más al caracterizar las raíces cuadradas de una matriz con el producto de Kronecker, y ha sido su trabajo el que me ha motivado a seguir avanzando para intentar caracterizar las raíces enésimas de Kronecker de una matriz.

2.1. EL CASO $n = 2$.

En el artículo [Ojeda, Ignacio. Kronecker square roots and the block vec matrix. Amer. Math. Monthly 122 (2015), no. 1, 60–64] el autor establece condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales una matriz dada es el cuadrado de Kronecker de otra matriz. Es claro que si A es un cuadrado de Kronecker de una matriz $B \in \mathbb{K}^{p \times q}$, entonces $A \in \mathbb{K}^{p^2 \times q^2}$.

En los resultados presentados, desempeña un papel fundamental cierta matriz obtenida mediante un particular reordenamiento de sus elementos. Dicha matriz, a la que Ojeda denomina **matriz de vectorización en bloques**, ya había sido empleada en 1993 por Pitsianis y Van Loan [PL] al optimizar $\|A - B \otimes C\|_F$ para una matriz A dada. En este caso la solución se obtiene considerando la matriz $\mathcal{R}(A)$, que es precisamente la vectorización en bloques mencionada.

Definición 2.1. Sea $A \in \mathbb{K}^{mp \times nq}$ una matriz con estructura en bloques, $m \times n$ bloques $A_{(i,j)} \in \mathbb{K}^{p \times q}$. Se llama *vectorización en bloques correspondiente a dicha partición de A* a la matriz en $\mathbb{K}^{mn \times pq}$ dada por

$$\text{vec}^{(p \times q)}(A) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}, \text{ donde } A_j = \begin{pmatrix} \text{vec}(A_{(1,j)})^T \\ \vdots \\ \text{vec}(A_{(m,j)})^T \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, si a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 \\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 & 600 \\ 1000 & 2000 & 3000 & 4000 & 5000 & 6000 \end{pmatrix}$$

la pensamos con una partición en bloques 4×2 , se tiene que

$$\text{vec}^{(4 \times 2)}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 2 & 20 & 200 & 2000 \\ 3 & 30 & 300 & 3000 & 4 & 40 & 400 & 4000 \\ 5 & 50 & 500 & 5000 & 6 & 60 & 600 & 6000 \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo, si se trata de una partición en bloques 2×2 , es

$$\text{vec}^{(2 \times 2)}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 2 & 20 \\ 100 & 1000 & 200 & 2000 \\ 3 & 30 & 4 & 40 \\ 300 & 3000 & 400 & 4000 \\ 5 & 50 & 6 & 60 \\ 500 & 5000 & 600 & 6000 \end{pmatrix}.$$

Debemos destacar que nosotros denominamos a este reordenamiento **vectorización en bloques por columnas**, para distinguirlo del que habremos de emplear, una **vectorización en bloques por filas**.

Si $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$, $B \otimes C$ es una matriz con estructura en bloques donde para cada i, j con $0 \leq i \leq m-1$, $0 \leq j \leq n-1$,

$$(B \otimes C)_{(i,j)} = b_{ij}C \in \mathbb{K}^{p \times q}.$$

Ojeda, precisamente, analiza la vectorización en bloques por columna del producto de Kronecker, y obtiene el siguiente resultado.

Lema 2.1. *Sean $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$. Entonces*

$$\text{vec}^{(p \times q)}(B \otimes C) = \text{vec}(B) \text{vec}(C)^T.$$

En particular

$$\text{vec}^{(p \times q)}(B \otimes C)^T = \text{vec}^{(m \times n)}(C \otimes B).$$

A partir del lema anterior, resulta evidente que $\text{vec}^{(p \times q)}(B \otimes C)$ es una matriz de rango 1. El siguiente teorema establece la condición necesaria y suficiente para que una matriz dada sea el producto de Kronecker de otras dos:

Teorema 2.1. *Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ una matriz no nula. Entonces existen matrices $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$ tales que $A = B \otimes C$ si y solamente si $\text{rango}(\text{vec}^{(p \times q)}(A)) = 1$.*

Así por ejemplo, sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y su correspondiente vectorización en bloques 2×2

$$\text{vec}^{(2 \times 2)}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Veamos que $\text{rango}(\text{vec}^{(2 \times 2)}(A)) = 2$ y por lo tanto, según el teorema anterior, no existen matrices $B \in \mathbb{K}^{1 \times 2}$ y $C \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$ tales que $A = B \otimes C$.

Notemos que, habiendo caracterizado la vectorización en bloques por columna de $B \otimes C$, y contando con una condición necesaria y suficiente que permite distinguir aquellas matrices que pueden ser factorizadas como producto de Kronecker de otras dos, resulta inminente resolver el problema análogo para el caso particular $B = C$, es decir los resultados vinculados a los cuadrados de Kronecker:

Corolario 2.1.1. *Sean $A \in \mathbb{K}^{m^2 \times n^2}$ y $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ matrices no nulas. Entonces*

$$i) \ A = B \otimes B \text{ si y solamente si } \text{vec}^{(m \times n)}(A) = \text{vec}(B) \text{vec}(B)^T.$$

$$ii) \ \text{Si } A = B \otimes B \text{ entonces } \text{vec}^{(m \times n)}(A) \text{ es simétrica y tiene rango 1.}$$

Además, se establecen condiciones necesarias y suficientes para que una matriz en $\mathbb{K}^{m^2 \times n^2}$ sea un cuadrado de Kronecker:

Teorema 2.2. *Sea $A \in \mathbb{C}^{m^2 \times n^2}$ y supongamos que $\text{vec}^{(m \times n)}(A)$ es simétrica y tiene rango 1. Entonces*

- i) Existe una matriz $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ tal que $A = B \otimes B$.
- ii) Si B y C son matrices en $\mathbb{C}^{m \times n}$ verificando $A = B \otimes B = C \otimes C$ entonces $C = \pm B$.
- iii) Si $A \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$, existe $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $A = B \otimes B$ si y sólo si $\text{Tr}(\text{vec}^{(m \times n)}(A)) > 0$.

Caracterizados los cuadrados de Kronecker, interesa saber qué propiedades conservan de la matriz base. Al respecto Ojeda demuestra el siguiente resultado que da fin a un muy interesante trabajo.

Corolario 2.2.1. *Sea $A \in \mathbb{K}^{m^2 \times n^2}$ no nula, $A = B \otimes B$ para alguna matriz B . Entonces:*

- i) A es simétrica si y sólo si B es simétrica ó antisimétrica.
- ii) A no es antisimétrica.
- iii) A es hermitiana si y sólo si B es hermitiana o antihermitiana.
- iv) A es hermitiana y definida positiva si y sólo si B es hermitiana y definida positiva.
- v) A es antihermitiana si y sólo si $e^{i\frac{\pi}{4}}B$ es hermitiana.
- vi) A es unitaria si y sólo si B es unitaria.
- vii) Si B es real, entonces A es real y ortogonal, si y sólo si B es ortogonal.
- viii) A es unitaria si y sólo si B ó iB es unitaria.

Tal como terminamos de ver, decidir si una matriz dada es o no un cuadrado de Kronecker está directamente relacionado a la estructura de la vectorización en bloques por columna de dicha matriz. Nos proponemos establecer resultados similares para una potencia mayor. Dada $A \in \mathbb{K}^{p^{n+2} \times q^{n+2}}$, se pretende determinar las condiciones bajo las cuales es posible asegurar que existe $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$ tal que $A = C^{\otimes(n+2)}$. Para ello vamos a definir nuestra **matriz de vectorización en bloques por filas** $\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)$ que, al igual que para el caso cuadrado, es un reordenamiento de la matriz A .

2.2. DEFINICIÓN DE $\text{vec}_F^{[p \times q]}$.

El propósito de esta sección es definir la **matriz de vectorización en bloques por filas** $\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)$, que será la herramienta fundamental para demostrar los resultados más importantes de este trabajo. La definición de esta matriz se basa en la construcción sucesiva de bloques, y de un ordenamiento adecuado de los mismos.

Sea $n \geq 0$ y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{p^{n+2} \times q^{n+2}}$ una matriz con estructura en $p \times q$ bloques

$$A = (A_{(i_0, j_0)}) \in \mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K}^{p^{n+1} \times q^{n+1}}) \text{ con } A_{(i_0, j_0)} \in \mathbb{K}^{p^{n+1} \times q^{n+1}}$$

para $0 \leq i_0 < p$, $0 \leq j_0 < q$.

Cada uno de los bloques $A_{(i_0, j_0)}$ tiene, a su vez, estructura en bloques

$$A_{(i_0, j_0)} = (A_{((i_0, j_0), (i_1, j_1))}) \in \mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{K}^{p^n \times q^n}) \text{ con } A_{((i_0, j_0), (i_1, j_1))} \in \mathbb{K}^{p^n \times q^n}$$

siendo $0 \leq i_1 < p$, $0 \leq j_1 < q$. Continuando de esta manera, la matriz inicial resulta con una estructura de $(p \times q)^{n+1}$ bloques en $\mathbb{K}^{p \times q}$ indexados por una sucesión de pares ordenados

$$((i_0, j_0), (i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n)),$$

y estos bloques son ordenados con el orden lexicográfico. Esto es, dados $(i, j), (\hat{i}, \hat{j}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definimos

$$(i, j) < (\hat{i}, \hat{j}) \iff \begin{cases} i < \hat{i}, \\ \text{ó} \\ i = \hat{i} \text{ y } j < \hat{j}. \end{cases}$$

El próximo lema nos permite caracterizar el orden lexicográfico de pares ordenados de números naturales utilizando el algoritmo de división entera.

Lema 2.2. *Dados $(i, j), (\hat{i}, \hat{j}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $0 \leq j, \hat{j} < q$, tenemos que*

$$(i, j) < (\hat{i}, \hat{j}) \iff qi + j < q\hat{i} + \hat{j}.$$

Demostración: Supongamos que $(i, j) < (\hat{i}, \hat{j})$ y probemos que $qi + j < q\hat{i} + \hat{j}$. Si $i < \hat{i}$, como $0 \leq j, \hat{j} < q$, tenemos

$$qi + j < qi + q = q(i + 1) \leq q\hat{i} \leq q\hat{i} + \hat{j}$$

entonces $qi + j < q\hat{i} + \hat{j}$. Si $i = \hat{i}$ y $j < \hat{j}$ entonces

$$qi + j = q\hat{i} + j < q\hat{i} + \hat{j}.$$

Recíprocamente, suponemos ahora que $qi + j < q\hat{i} + \hat{j}$ y queremos probar que $i < \hat{i}$ ó que $i = \hat{i}$ y $j < \hat{j}$. Si fuera $i > \hat{i}$, entonces $i \geq \hat{i} + 1$ y por lo tanto

$$qi + j \geq q(\hat{i} + 1) + j = q\hat{i} + j + q > q\hat{i} + \hat{j},$$

lo cual es absurdo. Si $i = \hat{i}$ entonces $j < \hat{j}$. En efecto, como

$$qi + j < q\hat{i} + \hat{j} = qi + \hat{j},$$

resulta $j < \hat{j}$. □

Ahora extendemos este orden lexicográfico a sucesiones de pares ordenados, esto es, dados $(i_0, j_0), (i_1, j_1), (\hat{i}_0, \hat{j}_0), (\hat{i}_1, \hat{j}_1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos

$$((i_0, j_0), (i_1, j_1)) < ((\hat{i}_0, \hat{j}_0), (\hat{i}_1, \hat{j}_1)) \iff \begin{cases} (i_0, j_0) < (\hat{i}_0, \hat{j}_0), \\ \text{ó} \\ (i_0, j_0) = (\hat{i}_0, \hat{j}_0) \text{ y } (i_1, j_1) < (\hat{i}_1, \hat{j}_1). \end{cases}$$

Si $0 \leq j_0, j_1, \hat{j}_0, \hat{j}_1 < q$, por el Lema 2.2 tenemos que

$$((i_0, j_0), (i_1, j_1)) < ((\hat{i}_0, \hat{j}_0), (\hat{i}_1, \hat{j}_1)) \iff \begin{cases} qi_0 + j_0 < q\hat{i}_0 + \hat{j}_0, \\ \text{ó} \\ qi_0 + j_0 = q\hat{i}_0 + \hat{j}_0 \text{ y } qi_1 + j_1 < q\hat{i}_1 + \hat{j}_1. \end{cases}$$

Aplicando nuevamente el Lema 2.2 a los pares

$$(qi_0 + j_0, qi_1 + j_1), (q\hat{i}_0 + \hat{j}_0, q\hat{i}_1 + \hat{j}_1)$$

y observando que $0 \leq qi_1 + j_1, q\hat{i}_1 + \hat{j}_1 < pq$, tenemos que

$$((i_0, j_0), (i_1, j_1)) < ((\hat{i}_0, \hat{j}_0), (\hat{i}_1, \hat{j}_1)) \iff pq(qi_0 + j_0) + qi_1 + j_1 < pq(q\hat{i}_0 + \hat{j}_0) + q\hat{i}_1 + \hat{j}_1.$$

De esta manera hemos definido un orden en el conjunto de índices de los bloques

$$\{((i_0, j_0), (i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n)), (i_s, j_s) \in [0, p-1] \times [0, q-1], 0 \leq s \leq n\}.$$

La equivalencia establecida en el Lema 2.2 nos permite indexar a los bloques mediante sucesiones

$$(k_0, \dots, k_n)$$

donde $k_s = qi_s + j_s$ con $0 \leq k_s < pq$, y considerar en este nuevo conjunto de sucesiones, el orden inducido, es decir:

$$(k_0, \dots, k_n) < (\hat{k}_0, \dots, \hat{k}_n)$$

si y sólo si

$$(pq)^n k_0 + (pq)^{n-1} k_1 + \dots + (pq) k_{n-1} + k_n < (pq)^n \hat{k}_0 + (pq)^{n-1} \hat{k}_1 + \dots + (pq) \hat{k}_{n-1} + \hat{k}_n.$$

Definición 2.2. Dada la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{p^{n+2} \times q^{n+2}}$, caracterizados los índices y el ordenamiento de sus bloques, se construye la matriz de vectorización en bloques por filas $\text{vec}_F^{[p \times q]}(A) \in \mathbb{K}^{(pq)^{n+1} \times pq}$,

$$\text{vec}_F^{[p \times q]}(A) = \begin{bmatrix} \text{vec}_F(A_0)^T \\ \vdots \\ \text{vec}_F(A_{(pq)^{n+1}-1})^T \end{bmatrix}$$

en la cual cada una de las filas es la vectorización por filas de cada uno de los $(pq)^{n+1}$ bloques obtenidos y

$$A_\alpha = A_{((i_0, j_0), (i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n))}$$

si $\alpha = (pq)^n k_0 + (pq)^{n-1} k_1 + \dots + (pq) k_{n-1} + k_n$ y $k_s = qi_s + j_s$.

La siguiente propiedad de la vectorización en bloques surge directamente de la definición de dicha matriz.

Proposición 2.1. Dadas $A, B \in \mathbb{K}^{p^m \times q^m}$ con $m \geq 2$, $\text{vec}_F^{[p \times q]}(A) = \text{vec}_F^{[p \times q]}(B)$ si y sólo si $A = B$.

Se sabe que la existencia de raíces cuadradas de Kronecker de una matriz $A \in \mathbb{K}^{p^2 \times q^2}$ está directamente relacionada con la estructura de la matriz $\text{vec}^{(p \times q)}(A)$. Nos proponemos encontrar un resultado similar al obtenido por Ojeda para caracterizar las raíces enésimas de Kronecker utilizando nuestra construcción $\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)$.

Terminamos esta sección con un ejemplo que muestra la diferencia entre la $\text{vec}^{(p \times q)}(A)$ utilizada por Ojeda y nuestra $\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)$.

Ejemplo 2.2.1. Sea $A \in \mathbb{R}^{2^3 \times 2^3}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 7 & 4 & 6 & 9 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 9 & 11 & 5 & 6 & 9 \\ 8 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 & 3 & 9 & 7 \\ 1 & 5 & 9 & 3 & 2 & 11 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & 7 & 6 & 9 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 9 & 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\text{vec}^{(2 \times 2)}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \\ 7 & 3 & 9 & 4 \\ 5 & 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 6 \\ 11 & 5 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & 9 & 7 & 0 \\ 1 & 9 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 9 & 4 \\ 9 & 4 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \quad y \quad \text{vec}_F^{[2 \times 2]}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 7 & 9 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 9 & 3 \\ 11 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 9 & 3 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 11 \\ 9 & 7 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 9 & 0 \\ 6 & 9 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

2.3. PROPIEDADES DE $\text{vec}_F^{[p \times q]}$.

En esta sección vamos a estudiar propiedades generales de la matriz $\text{vec}_F^{[p \times q]}$ que nos permitirán demostrar resultados sobre la factorización de matrices como productos, o potencias, de Kronecker.

Lema 2.3. Si $M \in \mathbb{K}^{p^{n+1} \times q^{n+1}}$ y $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$, entonces

$$(a) \text{vec}_F^{[p \times q]}(M \otimes C) = \text{vec}_F(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)) \otimes \text{vec}_F(C)^T;$$

$$(b) \text{vec}_F^{[p \times q]}(C \otimes M) = \text{vec}_F(C) \otimes \text{vec}_F^{[p \times q]}(M).$$

Demostración:

(a) Probaremos que para todo α, β tal que $0 \leq \alpha < (pq)^{n+1}$ y $0 \leq \beta < pq$ es

$$\left(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M \otimes C)\right)_{\alpha\beta} = \left(\text{vec}_F(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)) \otimes \text{vec}_F(C)^T\right)_{\alpha\beta}.$$

Calculemos el elemento $\left(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M \otimes C)\right)_{\alpha\beta}$. La fila α de $\text{vec}_F^{[p \times q]}(M \otimes C)$ es la vectorización por filas del bloque $(M \otimes C)_\alpha$. Dicho bloque es

$$(M \otimes C)_\alpha = m_{i_0 j_0} m_{i_1 j_1} \cdots m_{i_n j_n} C,$$

con $\alpha = (pq)^n k_0 + (pq)^{n-1} k_1 + \cdots + k_n$, y $k_s = qi_s + j_s$ para cada s . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{vec}_F((M \otimes C)_\alpha) &= \text{vec}_F(m_{i_0 j_0} m_{i_1 j_1} \cdots m_{i_n j_n} C) \\ &= m_{i_0 j_0} m_{i_1 j_1} \cdots m_{i_n j_n} \text{vec}_F(C), \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \left(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M \otimes C)\right)_{\alpha\beta} &= m_{i_0 j_0} m_{i_1 j_1} \cdots m_{i_n j_n} \text{vec}_F(C)_\beta \\ &= m_{i_0 j_0} m_{i_1 j_1} \cdots m_{i_n j_n} c_{kl}, \end{aligned}$$

con $\beta = kq + l$.

Ahora veamos quién es el elemento $\left(\text{vec}_F(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)) \otimes \text{vec}_F(C)^T\right)_{\alpha\beta}$. Teniendo en cuenta el Lema [1.4](#) se tiene que

$$\left(\text{vec}_F(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)) \otimes \text{vec}_F(C)^T\right)_{\alpha\beta} = \left(\text{vec}_F(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M))\right)_{ij} \left(\text{vec}_F(C)^T\right)_{rs},$$

con $\alpha = 1.i + r$ y $\beta = (pq)j + s$. Es claro que $j = r = 0$, con lo cual

$$\begin{aligned} \left(\text{vec}_F(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)) \otimes \text{vec}_F(C)^T\right)_{\alpha\beta} &= \text{vec}_F(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M))_\alpha \text{vec}_F(C)_\beta \\ &= \text{vec}_F(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M))_\alpha c_{kl}, \end{aligned}$$

con $\beta = kq + l$. A su vez, por el Lema [1.5](#) tenemos que

$$\text{vec}_F(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M))_\alpha = \left(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)\right)_{uv},$$

con $\alpha = (pq)u + v$. Como

$$\begin{aligned} \alpha &= (pq)^n k_0 + (pq)^{n-1} k_1 + \cdots + k_n \\ &= (pq) \left((pq)^{n-1} k_0 + (pq)^{n-2} k_1 + \cdots + k_{n-1} \right) + k_n, \end{aligned}$$

por la unicidad de la descomposición pq -ádica resulta que

$$\begin{aligned} u &= (pq)^{n-1} k_0 + (pq)^{n-2} k_1 + \cdots + k_{n-1}, \\ v &= k_n = qi_n + j_n, \end{aligned}$$

y como la fila u de $\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)$ es la vectorización por filas del bloque M_u ,

$$\text{vec}_F(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M))_\alpha = \left(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)\right)_{uv} = m_{i_0 j_0} m_{i_1 j_1} \cdots m_{i_n j_n}.$$

Finalmente

$$\left(\text{vec}_F(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)) \otimes \text{vec}_F(C)^T\right)_{\alpha\beta} = m_{i_0 j_0} m_{i_1 j_1} \cdots m_{i_n j_n} c_{kl}.$$

- (b) De manera similar, veamos que para todo α, β tal que $0 \leq \alpha < (pq)^{n+1}$ y $0 \leq \beta < pq$ es

$$\left(\text{vec}_F^{[p \times q]}(C \otimes M)\right)_{\alpha\beta} = \left(\text{vec}_F(C) \otimes \text{vec}_F^{[p \times q]}(M)\right)_{\alpha\beta}.$$

La fila α de $\text{vec}_F^{[p \times q]}(C \otimes M)$ es $\text{vec}_F((C \otimes M)_\alpha)$, y el bloque $(C \otimes M)_\alpha$ es

$$(C \otimes M)_\alpha = c_{ij}M_\alpha,$$

con $\alpha = i(pq) + j$. Luego

$$\text{vec}_F((C \otimes M)_\alpha)_\beta = \text{vec}_F(c_{ij}M_\alpha)_\beta = c_{ij} \text{vec}_F(M_\alpha)_\beta.$$

De manera similar la fila α de $(\text{vec}_F(C) \otimes \text{vec}_F^{[p \times q]}(M))$ es exactamente

$$c_{ij} \text{vec}_F(M_\alpha),$$

con $\alpha = i(pq) + j$, y finalmente

$$\left(\text{vec}_F(C) \otimes \text{vec}_F^{[p \times q]}(M)\right)_{\alpha\beta} = c_{ij} \text{vec}_F(M_\alpha)_\beta.$$

□

Del resultado anterior se deduce que nuestra $\text{vec}_F^{[p \times q]}$ también se puede usar para recuperar el Teorema 2.1 demostrado por Ojeda en [O].

Teorema 2.3. *Sea $n \geq 0$ y $A \in \mathbb{K}^{p^{n+2} \times q^{n+2}}$ una matriz no nula. Entonces existen matrices $M \in \mathbb{K}^{p^{n+1} \times q^{n+1}}$ y $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$ tales que $A = M \otimes C$ si y solamente si $\text{rango}(\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)) = 1$.*

Además, esta factorización es única a menos de constantes, esto es, $M \otimes C = M' \otimes C'$ si y solo si $M = \lambda M'$ y $C = \lambda^{-1} C'$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$ no nulo.

Demostración: Si $A = M \otimes C$, por el lema anterior sabemos que

$$\text{vec}_F^{[p \times q]}(M \otimes C) = \text{vec}_F(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)) \otimes \text{vec}_F(C)^T$$

y por el Lema 1.3 tenemos que $\text{rango}(\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)) = 1$.

Recíprocamente, si $\text{rango}(\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)) = 1$ entonces cada fila de $\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)$ es un múltiplo de $\text{vec}_F(A_\alpha)$ para algún α . Es decir,

$$\text{vec}_F^{[p \times q]}(A) = \begin{bmatrix} \lambda_0 \text{vec}_F(A_\alpha)^T \\ \vdots \\ \lambda_{(pq)^{m-1}-1} \text{vec}_F(A_\alpha)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_{(pq)^{m-1}-1} \end{bmatrix} \otimes \text{vec}_F(A_\alpha)^T.$$

Sea $C = A_\alpha$ y sea $M \in \mathbb{K}^{p^{n+1} \times q^{n+1}}$ tal que

$$\text{vec}_F(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)) = [\lambda_0 \cdots \lambda_{(pq)^{m-1}-1}]^T.$$

Entonces, el lema anterior nos dice que

$$\text{vec}_F^{[p \times q]}(A) = \text{vec}_F^{[p \times q]}(M \otimes C)$$

y, por lo tanto, $A = M \otimes C$.

La unicidad de la factorización se deduce del hecho que si $A = M \otimes C$ entonces $\{\text{vec}_F(C)^T\}$ es una base del espacio vectorial de dimensión 1 generado por las filas de la matriz $\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)$. \square

Una pregunta natural es si una matriz $A \in \mathbb{K}^{p^m \times q^m}$ se puede escribir como producto de Kronecker de m matrices en $\mathbb{K}^{p \times q}$. Es decir, nos preguntamos bajo qué condiciones existen $C_1, C_2, \dots, C_m \in \mathbb{K}^{p \times q}$ tales que $A = C_1 \otimes \dots \otimes C_m$. El Teorema 2.3 nos permite deducir el siguiente resultado.

Teorema 2.4. *Sea $A \in \mathbb{K}^{p^m \times q^m}$ no nula. Si existen matrices $C_1, \dots, C_m \in \mathbb{K}^{p \times q}$ tales que $A = C_1 \otimes C_2 \otimes \dots \otimes C_m$, entonces $\text{rango}(\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)) = 1$.*

Si bien $\text{rango}(\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)) = 1$ es una condición necesaria, el próximo ejemplo muestra que esta no es una condición suficiente.

Ejemplo 2.3.1. *Sea $A \in \mathbb{R}^{2^3 \times 2^3}$ la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 6 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 0 & -6 & 0 & -8 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -8 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su matriz de vectorización en bloques es

$$\text{vec}_F^{[2 \times 2]}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -6 \\ 8 & 0 & 0 & -8 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 6 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 0 & -8 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y $\text{rango}(\text{vec}_F^{[2 \times 2]}(A)) = 1$. La demostración del Teorema 2.3 nos dice que

$$A = B \otimes C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como $\text{rango}(\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[2 \times 2]}(B)) = 4$, sabemos que no es posible factorizar a B como producto de Kronecker de dos matrices en $\mathbb{K}^{2 \times 2}$ y, por lo tanto, tampoco A es producto de Kronecker de 3 de ellas.

Si bien como hemos indicado la recíproca del Teorema 2.4 no es cierta en general, es fácil deducir un algoritmo que nos permite resolver el problema de factorizar una matriz $A \in \mathbb{K}^{p^m \times q^m}$ como producto de Kronecker de m matrices en $\mathbb{K}^{p \times q}$.

Sea $A \in \mathbb{K}^{p^m \times q^m}$ con $\text{rango}(\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(A)) = 1$. Entonces

$$A = M_1 \otimes C_1.$$

Si $\text{rango}(\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(M_1)) = 1$ entonces

$$M_1 = M_2 \otimes C_2.$$

Repitiendo el razonamiento anterior para cada M_k con $1 \leq k < m$, resulta

$$M_k = M_{k+1} \otimes C_{k+1}$$

y por lo tanto

$$A = C_m \otimes \cdots \otimes C_1.$$

2.4. EXISTENCIA DE RAÍCES ENÉSIMAS DE KRONECKER.

En esta sección nos proponemos presentar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de raíces enésimas de Kronecker.

El producto

$$\text{vec}_{\mathbb{F}}(C)^{\otimes(n+1)} \otimes \text{vec}_{\mathbb{F}}(C)^T$$

es una matriz en $\mathbb{K}^{(pq)^{n+1} \times pq}$ con propiedades muy interesantes. La siguiente proposición nos indica como podemos caracterizar al elemento ubicado en el lugar (α, β) de este producto de Kronecker. Después veremos que este producto de Kronecker es, precisamente, la matriz de vectorización en bloques por filas de la potencia de Kronecker $C^{\otimes(n+2)}$.

Proposición 2.2. *Dada $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$ se tiene que*

$$\left(\text{vec}_{\mathbb{F}}(C)^{\otimes(n+1)} \otimes \text{vec}_{\mathbb{F}}(C)^T \right)_{\alpha\beta} = \text{vec}_{\mathbb{F}}(C)_{i_0} \cdots \text{vec}_{\mathbb{F}}(C)_{i_n} \text{vec}_{\mathbb{F}}(C)_{\beta}$$

con $\alpha = i_0(pq)^n + i_1(pq)^{n-1} + \cdots + i_{n-1}(pq) + i_n$ la representación pq -ádica de α .

Demostración: Probaremos el resultado por inducción.

1) Si $n = 0$, $\text{vec}_{\mathbb{F}}(C) \in \mathbb{K}^{pq \times 1}$ y usando el Lema 1.4 tenemos que

$$\left(\text{vec}_{\mathbb{F}}(C) \otimes \text{vec}_{\mathbb{F}}(C)^T \right)_{\alpha\beta} = (\text{vec}_{\mathbb{F}}(C))_{ij} \left(\text{vec}_{\mathbb{F}}(C)^T \right)_{kl}$$

donde $\alpha = 1 \cdot i + k$ y $\beta = (pq)j + l$ resultan de dividir α por 1 y β por pq . Es claro entonces que $k = 0$, y por lo tanto $i = \alpha$, y como $0 \leq \beta < pq$, tenemos que $j = 0$ y $l = \beta$. Luego,

$$\left(\text{vec}_F(C) \otimes \text{vec}_F(C)^T \right)_{\alpha\beta} = (\text{vec}_F(C))_{\alpha 0} \left(\text{vec}_F(C)^T \right)_{0\beta} = \text{vec}_F(C)_\alpha \text{vec}_F(C)_\beta,$$

y $\alpha = \alpha(pq)^0$.

2) Suponemos que vale para $n + 1 = k$, esto es,

$$\left(\text{vec}_F(C)^{\otimes k} \otimes \text{vec}_F(C)^T \right)_{\alpha\beta} = \text{vec}_F(C)_{i_1} \cdots \text{vec}_F(C)_{i_k} \text{vec}_F(C)_\beta.$$

con $\alpha = i_1(pq)^{k-1} + i_2(pq)^{k-2} + \cdots + i_{k-1}(pq) + i_k$, y queremos probar que vale para $n + 1 = k + 1$. Sabemos que

$$\begin{aligned} \left(\text{vec}_F(C)^{\otimes(k+1)} \otimes \text{vec}_F(C)^T \right)_{\alpha\beta} &= \left(\text{vec}_F(C) \otimes \left(\text{vec}_F(C)^{\otimes k} \otimes \text{vec}_F(C)^T \right) \right)_{\alpha\beta} \\ &= (\text{vec}_F(C))_{i_0 j} \left(\text{vec}_F(C)^{\otimes k} \otimes \text{vec}_F(C)^T \right)_{j_0 l}, \end{aligned}$$

donde, por el Lema [1.4](#), $\alpha = (pq)^k i_0 + j_0$ y $\beta = (pq)j + l$. Como $0 \leq \beta < pq$, tenemos que $l = \beta$ y $j = 0$. Por hipótesis de inducción se sabe que

$$\left(\text{vec}_F(C)^{\otimes k} \otimes \text{vec}_F(C)^T \right)_{j_0 \beta} = \text{vec}_F(C)_{i_1} \cdots \text{vec}_F(C)_{i_k} \text{vec}_F(C)_\beta$$

con

$$j_0 = i_1(pq)^{k-1} + i_2(pq)^{k-2} + \cdots + i_{k-1}(pq) + i_k,$$

y a su vez

$$\alpha = i_0(pq)^k + j_0,$$

de donde resulta

$$\left(\text{vec}_F(C)^{\otimes(k+1)} \otimes \text{vec}_F(C)^T \right)_{\alpha\beta} = \text{vec}_F(C)_{i_0} \cdots \text{vec}_F(C)_{i_k} \text{vec}_F(C)_\beta.$$

con

$$\alpha = i_0(pq)^k + i_1(pq)^{k-1} + i_2(pq)^{k-2} + \cdots + i_{k-1}(pq) + i_k,$$

que es lo que se quería demostrar.

□

Proposición 2.3. Si $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$ entonces

$$\text{vec}_F^{[p \times q]}(C^{\otimes(n+2)}) = \text{vec}_F(C)^{\otimes(n+1)} \otimes \text{vec}_F(C)^T.$$

Demostración: Si $n = 0$, el Lema 2.3(a) nos dice que

$$\text{vec}_F^{[p \times q]}(C^{\otimes 2}) = \text{vec}_F(\text{vec}_F^{[p \times q]}(C)) \otimes \text{vec}_F(C)^T$$

y el resultado esperado se obtiene pues $\text{vec}_F(\text{vec}_F^{[p \times q]}(C)) = \text{vec}_F(C)$.

Suponiendo que el resultado vale para $n = k$ lo vamos a demostrar para $n = k+1$. Utilizando el Lema 2.3(b) y la hipótesis inductiva tenemos que

$$\begin{aligned} \text{vec}_F^{[p \times q]}(C^{\otimes(k+3)}) &= \text{vec}_F(C) \otimes \text{vec}_F^{[p \times q]}(C^{\otimes(k+2)}) \\ &= \text{vec}_F(C) \otimes \text{vec}_F(C)^{\otimes(k+1)} \otimes \text{vec}_F(C)^T \\ &= \text{vec}_F(C)^{\otimes(k+2)} \otimes \text{vec}_F(C)^T. \end{aligned}$$

□

El resultado siguiente nos permite mostrar que si una matriz $A \in \mathbb{C}^{p^m \times q^m}$, con $m \geq 2$, admite raíz m -ésima de Kronecker, entonces admite exactamente m raíces distintas.

Corolario 2.4.1. Sean $C, D \in \mathbb{C}^{p \times q}$ no nulas tales que $C^{\otimes m} = D^{\otimes m}$ con $m \geq 2$. Entonces $D = \omega C$ con $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $\omega^m = 1$.

Demostración: Si $C^{\otimes m} = D^{\otimes m}$ entonces $\text{vec}_F^{[p \times q]}(C^{\otimes m}) = \text{vec}_F^{[p \times q]}(D^{\otimes m})$ siendo ambas de rango 1. Por la proposición anterior

$$\text{vec}_F(C)^{\otimes(m-1)} \otimes \text{vec}_F(C)^T = \text{vec}_F(D)^{\otimes(m-1)} \otimes \text{vec}_F(D)^T,$$

y por lo tanto $\text{vec}_F(D) = \omega \text{vec}_F(C)$ para algún $\omega \in \mathbb{C}$, con $\omega^m = 1$. □

Recordemos que el objetivo planteado al comienzo de este capítulo es reconocer, de entre todas las matrices en $\mathbb{K}^{p^m \times q^m}$, con $m \geq 2$, a aquellas que son potencia de Kronecker de alguna matriz en $\mathbb{K}^{p \times q}$. En ese sentido los resultados que hemos obtenido hasta ahora cobran gran relevancia, ya que permiten caracterizar la matriz de vectorización en bloques por filas de una potencia de Kronecker. El siguiente teorema, precisamente, nos dice cuales son esas características distintivas y fácilmente visibles de la matriz $\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)$ y que, al ser observadas, permiten asegurar que A es una potencia de Kronecker.

Teorema 2.5. Si $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$ es una matriz no nula y $m \geq 2$, entonces la matriz en bloques

$$\text{vec}_F^{[p \times q]}(C^{\otimes m}) = [B_{(\gamma,0)}] \in \mathbb{M}_{(pq)^{m-2} \times 1}(\mathbb{K}^{pq \times pq})$$

satisface las siguientes propiedades:

- i) $\text{rango}(\text{vec}_F^{[p \times q]}(C^{\otimes m})) = 1$;
- ii) cada bloque $B_{(\gamma,0)}$ es simétrico y de rango menor o igual a 1;
- iii) si $m \geq 3$, para cada k tal que $0 \leq k < pq$ es

$$(B_{(\beta,0)})_{kk} = c_{ij}^m,$$

con $k = iq + j$ y $\beta = k(pq)^{m-3} + \dots + k(pq) + k$;

iv) si $m \geq 3$, existe k y β como en el inciso anterior tal que $(B_{(\beta,0)})_{kk} \neq 0$ y $B_{(\gamma,0)} = \lambda_\gamma B_{(\beta,0)}$ con

$$\lambda_\gamma = \frac{(\text{vec}_F(C)^{\otimes(m-2)})_\gamma}{(\text{vec}_F(C)^{\otimes(m-2)})_\beta} = \frac{(B_{(\beta,0)}(k, -)^{\otimes(m-2)})_\gamma}{((B_{(\beta,0)})_{kk})^{m-2}}.$$

Demostración:

i) Se deduce inmediatamente de la Proposición [2.3](#) pues

$$\text{vec}_F^{[p \times q]}(C^{\otimes m}) = \text{vec}_F(C)^{\otimes(m-1)} \otimes \text{vec}_F(C)^T.$$

ii) Como $\text{vec}_F^{[p \times q]}(C^{\otimes m}) = \text{vec}_F(C)^{\otimes(m-1)} \otimes \text{vec}_F(C)^T$, se tiene que

$$\text{vec}_F^{[p \times q]}(C^{\otimes m}) = \text{vec}_F(C)^{\otimes(m-2)} \otimes (\text{vec}_F(C) \otimes \text{vec}_F(C)^T).$$

Luego cada bloque es

$$B_{(\gamma,0)} = (\text{vec}_F(C)^{\otimes(m-2)})_\gamma (\text{vec}_F(C) \otimes \text{vec}_F(C)^T),$$

y por lo tanto, es simétrico y nulo o de rango 1.

iii) La fila k del bloque $B_{(\beta,0)}$ es la vectorización por filas del bloque $(C^{\otimes m})_\alpha$ con $\alpha = \beta(pq) + k$. Luego, como $k = iq + j$,

$$(B_{(\beta,0)})_{kk} = \text{vec}_F((C^{\otimes m})_\alpha)_k = ((C^{\otimes m})_\alpha)_{ij}.$$

Por otro lado,

$$\alpha = \beta(pq) + k = k(pq)^{m-2} + \cdots + k(pq) + k$$

entonces

$$((C^{\otimes m})_\alpha)_{ij} = (c_{ij}^{m-1} C)_{ij} = c_{ij}^m.$$

iv) Como $C \neq 0$, existe i, j tal que $c_{ij} \neq 0$, y por el inciso anterior, $(B_{(\beta,0)})_{kk} \neq 0$ para $k = iq + j$ y $\beta = k(pq)^{m-3} + \cdots + k(pq) + k$. Ya que $\text{vec}_F^{[p \times q]}(C^{\otimes m}) = \text{vec}_F(C)^{\otimes(m-1)} \otimes \text{vec}_F(C)^T$, entonces cada bloque $B_{(\gamma,0)}$ es

$$B_{(\gamma,0)} = (\text{vec}_F(C)^{\otimes(m-2)})_\gamma (\text{vec}_F(C) \otimes \text{vec}_F(C)^T).$$

En particular,

$$B_{(\beta,0)} = (\text{vec}_F(C)^{\otimes(m-2)})_\beta (\text{vec}_F(C) \otimes \text{vec}_F(C)^T)$$

y, por lo tanto,

$$B_{(\gamma,0)} = \frac{(\text{vec}_F(C)^{\otimes(m-2)})_\gamma}{(\text{vec}_F(C)^{\otimes(m-2)})_\beta} B_{(\beta,0)}.$$

Por último, como $B_{(\beta,0)}(k, 0)$ es una fila no nula de $\text{vec}_F^{[p \times q]}(C^{\otimes m})$, que a su vez es de rango 1 e igual a $\text{vec}_F(C)^{\otimes(m-1)} \otimes \text{vec}_F(C)^T$, entonces el subespacio generado por las filas de $\text{vec}_F^{[p \times q]}(C^{\otimes m})$ admite como base a $\{B_{(\beta,0)}(k, 0)\}$ y a $\{\text{vec}_F(C)\}$. Entonces $\text{vec}_F(C) = \mu B_{(\beta,0)}(k, 0)$ para algún $\mu \neq 0$, y por lo tanto

$$\frac{(\text{vec}_F(C)^{\otimes(m-2)})_\gamma}{(\text{vec}_F(C)^{\otimes(m-2)})_\beta} = \frac{(B_{(\beta,0)}(k, -)^{\otimes(m-2)})_\gamma}{((B_{(\beta,0)})_{kk})^{m-2}}.$$

□

Como ya hemos demostrado, si C es una matriz no nula, entonces $\text{vec}_F^{[p \times q]}(C^{\otimes m})$, para $m \geq 2$, es una matriz de rango 1, con una estructura en bloques simétricos, también de rango 1. Nos preguntamos cómo se reflejan estas características en su descomposición en valores singulares y en la traza de las matrices involucradas.

Corolario 2.5.1. *Sea $A = C^{\otimes m} \in \mathbb{K}^{p^m \times q^m}$ con $C \in \mathbb{K}^{p \times q}$. La descomposición en valores singulares de $\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)$ es*

$$\text{vec}_F^{[p \times q]}(A) = v^{\otimes(m-1)} \|A\|_F v^T,$$

$$\text{siendo } v = \frac{\text{vec}_F(C)}{\|\text{vec}_F(C)\|_2}.$$

Demostración: Por la demostración del Teorema 2.5 se sabe que cada bloque $B_{(\gamma,0)}$ en la matriz $\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)$ es

$$B_{(\gamma,0)} = (\text{vec}_F(C)^{\otimes(m-2)})_\gamma (\text{vec}_F(C) \otimes \text{vec}_F(C)^T).$$

Entonces, si $v = \frac{\text{vec}_F(C)}{\|\text{vec}_F(C)\|_2}$, tenemos que

$$\begin{aligned} B_{(\gamma,0)} &= (\text{vec}_F(C)^{\otimes(m-2)})_\gamma \|\text{vec}_F(C)\|_2^2 (v \otimes v^T) \\ &= \left(\left(\frac{\text{vec}_F(C)}{\|\text{vec}_F(C)\|_2} \right)^{\otimes(m-2)} \right)_\gamma \|\text{vec}_F(C)\|_2^m (v \otimes v^T) \\ &= \|\text{vec}_F(C)\|_2^m (v^{\otimes(m-2)})_\gamma (v \otimes v^T). \end{aligned}$$

Luego,

$$\text{vec}_F^{[p \times q]}(A) = \|\text{vec}_F(C)\|_2^m v^{\otimes(m-2)} \otimes v \otimes v^T$$

y, por la Proposición 1.2, $\|A\|_F = \|C\|_F^m = \|\text{vec}_F(C)\|_2^m$. Por lo tanto,

$$\text{vec}_F^{[p \times q]}(A) = v^{\otimes(m-1)} \|A\|_F v^T.$$

□

Corolario 2.5.2. *Si $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$ es una matriz no nula, los bloques de la matriz*

$$\text{vec}_F^{[p \times q]}(C^{\otimes m}) = [B_{(\gamma,0)}] \in \mathbb{M}_{(pq)^{m-2} \times 1}(\mathbb{R}^{pq \times pq})$$

satisfacen las siguientes propiedades:

i) si $(B_{(\beta,0)})_{kk} \neq 0$ entonces

$$a) (B_{(\beta,0)})_{kk} > 0 \iff \text{Tr}(B_{(\beta,0)}) > 0;$$

$$b) \sum_{\gamma=0}^{(pq)^{m-2}-1} \text{Tr}(B_{(\gamma,0)}) = \frac{\|B_{(\beta,0)}(k, -)\|_2^2}{((B_{(\beta,0)})_{kk})^{m-1}} \left(\sum_{j=0}^{pq-1} B_{(\beta,0)}(k, j) \right)^{m-2};$$

$$ii) \sum_{\gamma=0}^{(pq)^{m-2}-1} \text{Tr}(B_{(\gamma,0)}) = \|C\|_F^2 \left(\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} c_{ij} \right)^{m-2}.$$

Demostración:

i) Ya que $B_{(\beta,0)}$ es simétrica y de rango 1, la Proposición 1.3 nos dice que

$$B_{(\beta,0)} = \frac{1}{(B_{(\beta,0)})_{kk}} B_{(\beta,0)}(k, -) \otimes B_{(\beta,0)}(k, -)^T,$$

luego su traza es

$$\text{Tr}(B_{(\beta,0)}) = \frac{\|B_{(\beta,0)}(k, -)\|_2^2}{(B_{(\beta,0)})_{kk}}.$$

Además, como

$$B_{(\gamma,0)} = \frac{(B_{(\beta,0)}(k, -)^{\otimes(m-2)})_\gamma}{((B_{(\beta,0)})_{kk})^{m-2}} B_{(\beta,0)},$$

entonces

$$\text{Tr}(B_{(\gamma,0)}) = \frac{(B_{(\beta,0)}(k, -)^{\otimes(m-2)})_\gamma}{((B_{(\beta,0)})_{kk})^{m-2}} \frac{\|B_{(\beta,0)}(k, -)\|_2^2}{(B_{(\beta,0)})_{kk}}.$$

Sumando las trazas de todos los bloques:

$$\sum_{\gamma=0}^{(pq)^{m-2}-1} \text{Tr}(B_{(\gamma,0)}) = \frac{\|B_{(\beta,0)}(k, -)\|_2^2}{((B_{(\beta,0)})_{kk})^{m-1}} \sum_{\gamma=0}^{(pq)^{m-2}-1} (B_{(\beta,0)}(k, -)^{\otimes(m-2)})_\gamma$$

Probemos por inducción que para todo $n \geq 0$ se verifica

$$\sum_{\gamma=0}^{(pq)^n-1} (B_{(\beta,0)}(k, -)^{\otimes n})_\gamma = \left(\sum_{j=0}^{pq-1} B_{(\beta,0)}(k, j) \right)^n.$$

Si $n = 0$ la igualdad se verifica. Supongamos que la igualdad se verifica para n y probémosla para $n + 1$. Si $\gamma = k_0(pq)^n + \dots + k_{n-1}(pq) + k_n$, se sabe que

$$(B_{(\beta,0)}(k, -)^{\otimes(n+1)})_\gamma = B_{(\beta,0)}(k, k_0)(B_{(\beta,0)}(k, -)^{\otimes n})_\delta$$

con $\delta = k_1(pq)^{n-1} + \dots + k_{n-1}(pq) + k_n$. Luego

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=0}^{(pq)^{n+1}-1} ((B_{(\beta,0)}(k, -)^{\otimes(n+1)})_\gamma) &= \sum_{k_0=0}^{pq-1} \sum_{\delta=0}^{(pq)^n-1} B_{(\beta,0)}(k, k_0) (B_{(\beta,0)}(k, -)^{\otimes n})_\delta \\ &= \sum_{j=0}^{pq-1} B_{(\beta,0)}(k, j) \sum_{\delta=0}^{(pq)^n-1} (B_{(\beta,0)}(k, -)^{\otimes n})_\delta \\ &= \left(\sum_{j=0}^{pq-1} B_{(\beta,0)}(k, j) \right)^{n+1} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\sum_{\gamma=0}^{(pq)^{m-2}-1} \text{Tr}(B_{(\gamma,0)}) = \frac{\|B_{(\beta,0)}(k, -)\|_2^2}{((B_{(\beta,0)})_{kk})^{m-1}} \left(\sum_{j=0}^{pq-1} B_{(\beta,0)}(k, j) \right)^{m-2}.$$

ii) Como

$$B_{(\gamma,0)} = (\text{vec}_F(C)^{\otimes(m-2)})_\gamma \text{vec}_F(C) \otimes \text{vec}_F(C)^T,$$

entonces

$$\begin{aligned} \text{Tr}(B_{(\gamma,0)}) &= (\text{vec}_F(C)^{\otimes(m-2)})_\gamma \sum_{j=0}^{pq-1} \left(\text{vec}_F(C) \otimes \text{vec}_F(C)^T \right)_{jj} \\ &= (\text{vec}_F(C)^{\otimes(m-2)})_\gamma \|C\|_F^2. \end{aligned}$$

Sumando las trazas de todos los bloques:

$$\sum_{\gamma=0}^{(pq)^{m-2}-1} \text{Tr}(B_{(\gamma,0)}) = \|C\|_F^2 \sum_{\gamma=0}^{(pq)^{m-2}-1} (\text{vec}_F(C)^{\otimes(m-2)})_\gamma.$$

Probemos por inducción que para todo $n \geq 0$ se verifica

$$\sum_{\gamma=0}^{(pq)^n-1} (\text{vec}_F(C)^{\otimes n})_\gamma = \left(\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} c_{ij} \right)^n.$$

Si $n = 0$ la igualdad se verifica. Supongamos que la igualdad se verifica para n y probémosla para $n + 1$. Si $\gamma = k_0(pq)^n + \dots + k_{n-1}(pq) + k_n$, se sabe que

$$(\text{vec}_F(C)^{\otimes(n+1)})_\gamma = \text{vec}_F(C)_{k_0} (\text{vec}_F(C)^{\otimes n})_\delta,$$

con $\delta = k_1(pq)^{n-1} + \dots + k_{n-1}(pq) + k_n$. Luego

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=0}^{(pq)^{n+1}-1} (\text{vec}_F(C)^{\otimes(n+1)})_\gamma &= \sum_{k_0=0}^{pq-1} \sum_{\delta=0}^{(pq)^n-1} \text{vec}_F(C)_{k_0} (\text{vec}_F(C)^{\otimes n})_\delta \\ &= \sum_{s=0}^{pq-1} \text{vec}_F(C)_s \sum_{\delta=0}^{(pq)^n-1} (\text{vec}_F(C)^{\otimes n})_\delta \\ &= \left(\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} c_{ij} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=0}^{(pq)^{m-2}-1} \text{Tr}(B_{(\gamma,0)}) &= \|C\|_F^2 \sum_{\gamma=0}^{(pq)^{m-2}-1} (\text{vec}_F(C)^{\otimes(m-2)})_\gamma \\ &= \left(\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} c_{ij} \right)^{m-2} \|C\|_F^2. \end{aligned}$$

□

El Teorema [2.5](#) describe con claridad la estructura de la matriz de vectorización en bloques por filas de una potencia de Kronecker. Ello representa una herramienta

de gran utilidad para reconocer a aquellas matrices que son una potencia de Kronecker. Nos proponemos ahora dar un paso más: dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{p^m \times q^m}$ con $m > 2$, el Teorema 2.5 y el Teorema 2.6 establecen las condiciones necesarias y suficientes que debe verificar su vectorización para que A sea una potencia de Kronecker y, en caso de que lo sea, nos dice quién es esa matriz C base de la potencia.

Teorema 2.6. *Sea $A \in \mathbb{C}^{p^{n+2} \times q^{n+2}}$ no nula con*

$$\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(A) = [B_{(\gamma,0)}] \in \mathbb{M}_{(pq)^n \times 1}(\mathbb{C}^{pq \times pq})$$

con estructura en bloques. Supongamos que

- (i) todos los bloques $B_{(\gamma,0)}$ son simétricos y nulos o de rango 1;
- (ii) si $n > 0$, existe k con $0 \leq k < pq$ tal que $(B_{(\beta,0)})_{kk}$ es no nulo, con $\beta = k(pq)^{n-1} + \dots + k(pq) + k$, y para todo γ con $0 \leq \gamma < (pq)^n$, $B_{(\gamma,0)} = \lambda_{\gamma} B_{(\beta,0)}$ para $\lambda_{\gamma} = \frac{(B_{(\beta,0)}(k, -)^{\otimes n})_{\gamma}}{((B_{(\beta,0)})_{kk})^n}$.

Entonces $A = C^{\otimes(n+2)}$ y la matriz $C \in \mathbb{C}^{p \times q}$ está definida por

$$\text{vec}_{\mathbb{F}}(C) = \begin{cases} x & \text{si } n = 0 \text{ y } B_{(0,0)} = xx^T; \\ \frac{1}{((B_{(\beta,0)})_{kk})^{\frac{n+1}{n+2}}} B_{(\beta,0)}(k, -) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Demostración: El resultado es cierto si $n = 0$ pues

$$\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(A) = B_{(0,0)} = xx^T$$

por ser una matriz simétrica de rango 1, ver Proposición 1.4. Veamos que también vale si $n > 0$. Vamos a demostrar que para todo i, j tal que $0 \leq i < (pq)^{n+1} - 1$, $0 \leq j < pq$, se verifica

$$(\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(A))_{ij} = (\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(C^{\otimes(n+2)}))_{ij}.$$

Por la Proposición 2.2, si $i = t_0(pq)^n + t_1(pq)^{n-1} + \dots + t_{n-1}(pq) + t_n$,

$$(\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(C^{\otimes(n+2)}))_{ij} = \text{vec}_{\mathbb{F}}(C)_{t_0} \text{vec}_{\mathbb{F}}(C)_{t_1} \dots \text{vec}_{\mathbb{F}}(C)_{t_n} \text{vec}_{\mathbb{F}}(C)_j,$$

y como por hipótesis C es tal que

$$\text{vec}_{\mathbb{F}}(C) = \frac{1}{((B_{(\beta,0)})_{kk})^{\frac{n+1}{n+2}}} B_{(\beta,0)}(k, -),$$

entonces

$$\begin{aligned} \text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(C^{\otimes(n+2)})_{ij} &= \left(\frac{1}{((B_{(\beta,0)})_{kk})^{\frac{n+1}{n+2}}} \right)^{n+2} B_{(\beta,0)}(k, t_0) \dots B_{(\beta,0)}(k, t_n) B_{(\beta,0)}(k, j) \\ &= \frac{1}{((B_{(\beta,0)})_{kk})^{n+1}} B_{(\beta,0)}(k, t_0) \dots B_{(\beta,0)}(k, t_n) B_{(\beta,0)}(k, j) \end{aligned}$$

Consideremos ahora $(\text{vec}_F^{[p \times q]}(A))_{ij}$. Este elemento se ubica en la fila s de algún bloque $B_{(\gamma,0)}$ con $0 \leq \gamma < (pq)^n$ y $0 \leq s < pq$, verificando $i = \gamma(pq) + s$. De manera que

$$(\text{vec}_F^{[p \times q]}(A))_{ij} = B_{(\gamma,0)}(s, j).$$

Ya que $i = \gamma(pq) + s$, por la unicidad de la descomposición pq -ádica se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma &= t_0(pq)^{n-1} + t_1(pq)^{n-2} + \cdots + t_{n-2}(pq) + t_{n-1}, \\ s &= t_n. \end{aligned}$$

Por hipótesis se sabe que todos los bloques $B_{(\gamma,0)}$ son simétricos, nulos ó de rango 1. Como $B_{(\beta,0)}$ es no nulo con $(B_{(\beta,0)})_{kk} \neq 0$, la Proposición [1.3](#) implica que

$$B_{(\beta,0)} = \frac{1}{(B_{(\beta,0)})_{kk}} B_{(\beta,0)}(k, -) \otimes B_{(\beta,0)}(k, -)^T.$$

Además

$$B_{(\gamma,0)} = \frac{(B_{(\beta,0)}(k, -)^{\otimes n})_\gamma}{((B_{(\beta,0)})_{kk})^n} B_{(\beta,0)},$$

y por lo tanto

$$B_{(\gamma,0)} = \frac{(B_{(\beta,0)}(k, -)^{\otimes n})_\gamma}{((B_{(\beta,0)})_{kk})^n} B_{(\beta,0)}(k, -) \otimes B_{(\beta,0)}(k, -)^T.$$

Luego

$$\begin{aligned} (\text{vec}_F^{[p \times q]}(A))_{ij} &= B_{(\gamma,0)}(s, j) = B_{(\gamma,0)}(t_n, j) \\ &= \frac{(B_{(\beta,0)}(k, -)^{\otimes n})_\gamma}{((B_{(\beta,0)})_{kk})^{n+1}} (B_{(\beta,0)}(k, -) \otimes B_{(\beta,0)}(k, -)^T)(t_n, j) \\ &= \frac{1}{((B_{(\beta,0)})_{kk})^{n+1}} B_{(\beta,0)}(k, t_0) \cdots B_{(\beta,0)}(k, t_{n-1}) B_{(\beta,0)}(k, t_n) B_{(\beta,0)}(k, j) \end{aligned}$$

lo cual termina la demostración. \square

Ejemplo 2.4.1. Sea $A \in \mathbb{R}^{2^4 \times 2^4}$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } (i, j) = (15, 0) \\ 0 & \text{si } (i, j) \neq (15, 0). \end{cases}$$

Su matriz de vectorización en bloques $\text{vec}_F^{[2 \times 2]}(A) \in \mathbb{R}^{4^3 \times 4}$, con estructura en bloques

$$\text{vec}_F^{[2 \times 2]}(A) = [B_{(\gamma,0)}] \in \mathbb{M}_{16 \times 1}(\mathbb{R}^{4 \times 4})$$

tiene todos los bloques simétricos, nulos ó de rango 1, siendo:

- $B_{(\gamma,0)} = 0$ para todo $\gamma \neq 10$;

- el único bloque no nulo es

$$B_{(10,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si existiera $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $A = C^{\otimes 4}$, entonces

$$\text{vec}_F(C) = \frac{1}{((B_{(10,0)})_{22})^{\frac{3}{4}}} B_{(10,0)}(3, -) = \frac{1}{\underbrace{\sqrt[4]{(-1)^3}}_{\notin \mathbb{R}}} (0 \ 0 \ -1 \ 0).$$

Luego A no es la potencia cuarta de Kronecker de una matriz en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, pero sí es la potencia cuarta de la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{\frac{i\pi}{4}} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Sobre el resultado demostrado en el Teorema [2.6](#), cabe destacar que además de brindar una caracterización de las matrices $A \in \mathbb{C}^{p^m \times q^m}$ que son potencias de Kronecker de una matriz dada, dice cómo recuperar, a partir de $\text{vec}_F^{[p \times q]}(A)$, la matriz $C \in \mathbb{C}^{p \times q}$ tal que $A = C^{\otimes m}$. El Corolario [2.5.2](#) nos permite establecer un resultado del mismo tenor para el caso real.

Corolario 2.6.1. Dada $A \in \mathbb{R}^{p^{n+2} \times q^{n+2}}$ no nula satisfaciendo todas las hipótesis del Teorema [2.6](#), entonces si n es impar o si n es par y $\text{Tr } B_{(\beta,0)} > 0$, existe $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$ tal que $A = C^{\otimes (n+2)}$

Los resultados obtenidos hasta aquí constituyen herramientas fundamentales para resolver los problemas de aplicación que presentaremos en el Capítulo [4](#). Por un lado, nos proponemos conseguir una técnica que nos permita determinar cuándo un grafo H dado es un grafo de Kronecker y, a su vez, hallar el grafo G tal que $H = G^{\otimes k}$. Por otro lado, nos interesa la resolución de cierto tipo de ecuaciones matriciales que involucran potencias de Kronecker.

3 | PROBLEMAS DE PROCRUSTO.

El nombre que evoca a “Procrustes”, “Procusto”, “Damas” o “Polipèmon” es un personaje de la mitología griega que forma parte de la historia de Teseo. Procusto era el apodo de un mítico propietario de una posada en Eleusis, famosa ciudad de la antigua Grecia, donde se celebraban misteriosos ritos de las diosas Demèter y Perséfone. Era hijo de Poseidón, el dios de los mares, y se le atribuía gran fuerza y estatura descomunal.

Su nombre de pila era Damastes, apodado Procusto “el estirador”, por su manera de ofrecer hospitalidad a todos los parroquianos que se hospedaban en su posada. Una vez allí el visitante, lo invitaba a descansar en una cama de hierro donde, mientras el viajero dormía, era amordazado y atado a los cuatro vértices del lecho. De esta manera, si la víctima era alta y la cama resultaba pequeña, cortaba las partes del cuerpo que quedaban fuera de ella: los pies y las manos o la cabeza. Caso contrario descoyuntaba al huésped hasta estirarlo para que su estatura coincidiera con la longitud de la cama. Otros estudiosos afirman que en realidad se las ingeniaba para que nadie coincidiera con el tamaño de la cama y que todo aquel que lo visitara fuera víctima de mutilación y tortura.

Procusto terminó su vida de la misma manera que sus víctimas. Teseo, a quien también se indicaba como hijo de Poseidón, fue quien terminó con el terror de Procusto. El camino de Atenas fue un sendero de gloria para Teseo, y en dicho trayecto Teseo se cruzó con Procusto, quien intentó colocar a Teseo en el artilugio. El héroe lo venció, sometiéndolo a la misma tortura que tantas veces él había propinado. Una vez más la Ley del Talió aparece como moraleja.

Mito o no, Procusto permanece en la tradición popular como una representación de todos aquellos que siempre acomodan la realidad a sus propios intereses o a su puntos de vista. De gran vigencia, el síndrome de Procusto hace referencia a la intolerancia a las diferencias.

En matemática se llama **Problemas de Procusto** a la clase de todos los problemas de la forma

$$\begin{cases} \text{mín} & \|AX - B\|_F^2 \\ \text{s.a} & \\ & X \in \mathcal{P}, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y \mathcal{P} es un subconjunto de $\mathbb{K}^{n \times n}$.

Si \mathcal{P} es el subespacio de matrices simétricas, dicho problema es conocido como el problema simétrico de Procrusto, y es el que ha dado nombre a toda esta clase de problemas, pues aparece muy frecuentemente en problemas de elasticidad, siendo precisamente su solución la matriz de deformación de una estructura elástica. Dicho problema fue resuelto por Higham en 1988 [HG1].

Este problema ha sido resuelto para otras posibles elecciones de \mathcal{P} . En [ER] se consideran matrices simétricas y definidas positivas. Van Loan y Pitsianis [PL] han

resuelto una variante empleando productos de Kronecker en lugar del producto habitual de matrices, empleando una matriz similar a la matriz $\text{vec}^{(p \times q)}$ definida por Ojeda [O].

Nos proponemos en esta sección resolver dos problemas de Procrusto. El primero de ellos involucra sumas de Kronecker y su resolución lo convierte en un interesante problema de optimización. En el segundo resolveremos el Problema de Procrusto para potencias de Kronecker.

3.1. PROBLEMA DE PROCRUSTO Y SUMAS DE KRONECKER.

En esta sección vamos a considerar el siguiente problema de Procrusto: dada una matriz $M \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$, queremos hallar $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que minimice la norma, esto es,

$$\min \|M - (X^T \oplus X)\|_{\mathbb{F}}^2. \quad (3.2)$$

Veamos que, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que M es una matriz simétrica. Recordemos que para todo par de matrices S, K tal que $S = S^T$ y $K = -K^T$, es

$$\|S + K\|_{\mathbb{F}}^2 = \|S\|_{\mathbb{F}}^2 + \|K\|_{\mathbb{F}}^2.$$

Además, M se puede escribir como suma de una matriz simétrica más una antisimétrica, esto es, $M = M^+ + M^-$ con

$$M^+ = \frac{M + M^T}{2} \text{ y } M^- = \frac{M - M^T}{2}.$$

Entonces los problemas de optimización

$$\min \|M - (X^T \oplus X)\|_{\mathbb{F}}^2 \quad \text{y} \quad \min \|M^+ - (X^T \oplus X)\|_{\mathbb{F}}^2$$

son equivalentes.

La solución de este problema fue desarrollada en [E].

Suponemos $M \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}^{n \times n})$ con una estructura en bloques $M_{(i,j)}$ para $0 \leq i, j < n$, e introducimos la siguiente definición:

Definición 3.1. Se llama matriz de conmutación a la matriz $K^{(pq)} \in \mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{R}^{q \times p})$ definida por

$$(K^{(pq)})_{(i,j)st} = \begin{cases} 1 & \text{si } (s, t) = (j, i), \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De la definición, es claro que sólo un elemento en cada fila y cada columna de $K^{(pq)}$ es igual a 1, siendo nulos los demás. Una matriz de conmutación $K^{(pq)}$ puede ser descripta diciendo que en cada bloque $K^{(pq)}_{(i,j)}$ el elemento ji es igual a 1 y los

demás son 0. Por ejemplo las matrices $K^{(32)}$ y $K^{(22)}$ son las siguientes

$$K^{(32)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, K^{(22)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lema 3.1. *Las matrices de conmutación verifican las siguientes propiedades:*

1. $K^{(pq)} = K^{(qp)T}$;
2. $K^{(pq)}K^{(qp)} = I_{pq}$;
3. $K^{(p1)} = K^{(1p)} = I_p$.

Además que si $A \in \mathbb{K}^{p \times q}$ y $B \in \mathbb{K}^{r \times s}$, entonces

$$A \otimes B = K^{(pr)}(B \otimes A)K^{(sq)}.$$

Queremos encontrar una expresión más amigable de la función a optimizar; para ello demostraremos el siguiente resultado.

Proposición 3.1. *Sea $M \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ una matriz simétrica. Entonces:*

$$\|M - (X^T \oplus X)\|_{\mathbb{F}}^2 = \|M\|_{\mathbb{F}}^2 - 2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (x_{ij} \operatorname{Tr}(Q_{(i,j)}) - nx_{ij}^2) + 2 \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_{ii} \right)^2.$$

para $Q = M + PMP$ con $P = K^{(nn)}$.

Demostración: Si $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$ sabemos que $\|A\|_{\mathbb{F}}^2 = \operatorname{Tr}(A^T A)$. Entonces

$$\begin{aligned} \|M - (X^T \oplus X)\|_{\mathbb{F}}^2 &= \|M - (X^T \otimes I + I \otimes X)\|_{\mathbb{F}}^2 \\ &= \left\| \frac{1}{2}M - X^T \otimes I + \frac{1}{2}M - I \otimes X \right\|_{\mathbb{F}}^2 \\ &= \left\| \frac{1}{2}M - X^T \otimes I \right\|_{\mathbb{F}}^2 + \left\| \frac{1}{2}M - I \otimes X \right\|_{\mathbb{F}}^2 \\ &\quad + 2 \operatorname{Tr} \left(\left(\frac{1}{2}M - X^T \otimes I \right)^T \left(\frac{1}{2}M - I \otimes X \right) \right). \end{aligned}$$

Si $P = K^{(nn)}$, tenemos que $P^T = P$ y que $P(X \otimes I)P = I \otimes X$. Entonces

$$\begin{aligned} \|M - (X^T \oplus X)\|_{\mathbb{F}}^2 &= \left\| \frac{1}{2}M - X^T \otimes I \right\|_{\mathbb{F}}^2 + \left\| \frac{1}{2}M - P(X \otimes I)P \right\|_{\mathbb{F}}^2 \\ &\quad + 2 \operatorname{Tr} \left(\left(\frac{1}{2}M - X^T \otimes I \right)^T \left(\frac{1}{2}M - P(X \otimes I)P \right) \right) \\ &= \left\| \frac{1}{2}M - X^T \otimes I \right\|_{\mathbb{F}}^2 + \left\| P \left(\frac{1}{2}PMP - X \otimes I \right) P \right\|_{\mathbb{F}}^2 \\ &\quad + 2 \operatorname{Tr} \left(\left(\frac{1}{2}M - X^T \otimes I \right)^T \left(\frac{1}{2}M - P(X \otimes I)P \right) \right) \\ &= \left\| \frac{1}{2}M - X^T \otimes I \right\|_{\mathbb{F}}^2 + \left\| \frac{1}{2}\hat{M} - X \otimes I \right\|_{\mathbb{F}}^2 \\ &\quad + 2 \operatorname{Tr} \left(\left(\frac{1}{2}M - X^T \otimes I \right)^T \left(\frac{1}{2}M - P(X \otimes I)P \right) \right), \end{aligned}$$

para $\hat{M} = PMP$. Desarrollemos cada uno de los términos en la última expresión. El primer término se puede expresar de la siguiente manera:

$$\left\| \frac{1}{2}M - X^T \otimes I \right\|_{\mathbb{F}}^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \frac{1}{2}M_{(i,j)} - (X^T \otimes I)_{(i,j)} \right\|_{\mathbb{F}}^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \frac{1}{2}M_{(i,j)} - x_{ji}I \right\|_{\mathbb{F}}^2,$$

y cada uno de los sumandos es:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}M_{(i,j)} - x_{ji}I \right\|_{\mathbb{F}}^2 &= \operatorname{Tr} \left(\left(\frac{1}{2}M_{(i,j)} - x_{ji}I \right)^T \left(\frac{1}{2}M_{(i,j)} - x_{ji}I \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{Tr} (M_{(i,j)}^T M_{(i,j)}) - \frac{1}{2}x_{ji} \operatorname{Tr} (M_{(i,j)}^T) - \frac{1}{2}x_{ji} \operatorname{Tr} (M_{(i,j)}) + x_{ji}^2 \operatorname{Tr}(I) \\ &= \frac{1}{4} \|M_{(i,j)}\|_{\mathbb{F}}^2 - x_{ji} \operatorname{Tr} (M_{(i,j)}) + nx_{ji}^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}M - X^T \otimes I \right\|_{\mathbb{F}}^2 &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4} \|M_{(i,j)}\|_{\mathbb{F}}^2 - x_{ji} \operatorname{Tr} (M_{(i,j)}) + nx_{ji}^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \|M_{(i,j)}\|_{\mathbb{F}}^2 - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{ji} \operatorname{Tr} (M_{(i,j)}) - nx_{ji}^2). \end{aligned}$$

De manera similar

$$\left\| \frac{1}{2}\hat{M} - X \otimes I \right\|_{\mathbb{F}}^2 = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \|\hat{M}_{(i,j)}\|_{\mathbb{F}}^2 - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{ij} \operatorname{Tr}(\hat{M}_{(i,j)}) - nx_{ij}^2).$$

Como

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \|M_{(i,j)}\|_{\mathbb{F}}^2 = \|M\|_{\mathbb{F}}^2$$

y

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \|\hat{M}_{(i,j)}\|_{\mathbb{F}}^2 = \|\hat{M}\|_{\mathbb{F}}^2 = \|PMP\|_{\mathbb{F}}^2 = \|M\|_{\mathbb{F}}^2,$$

tenemos que

$$\left\| \frac{1}{2}M - X^T \otimes I \right\|_{\mathbb{F}}^2 = \frac{1}{4} \|M\|_{\mathbb{F}}^2 - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{ji} \operatorname{Tr}(M_{(i,j)}) - nx_{ji}^2),$$

$$\left\| \frac{1}{2}\hat{M} - X \otimes I \right\|_{\mathbb{F}}^2 = \frac{1}{4} \|M\|_{\mathbb{F}}^2 - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{ij} \operatorname{Tr}(\hat{M}_{(i,j)}) - nx_{ij}^2).$$

El tercer término se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Tr}\left(\left(\frac{1}{2}M - (X^T \otimes I)\right)^T \left(\frac{1}{2}M - P(X \otimes I)P\right)\right) \\ &= \frac{1}{4} \|M\|_{\mathbb{F}}^2 - \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(M^T P(X \otimes I)P) - \frac{1}{2} \operatorname{Tr}((X^T \otimes I)^T M) \\ & \quad + \operatorname{Tr}((X \otimes I)P(X \otimes I)P). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}((X^T \otimes I)^T M) &= \operatorname{Tr}((X \otimes I)M) = \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{Tr}(((X \otimes I)M)_{(j,j)}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{Tr}\left(\sum_{i=0}^{n-1} (X \otimes I)_{(j,i)} M_{(i,j)}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{Tr}\left(\sum_{i=0}^{n-1} (x_{ji} I) M_{(i,j)}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} x_{ji} \operatorname{Tr}(M_{(i,j)}). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(M^T P(X \otimes I)P) &= \operatorname{Tr}(P(PM^T P(X \otimes I)P)) \\ &= \operatorname{Tr}(PM^T P(X \otimes I)) = \operatorname{Tr}(\hat{M}^T (X \otimes I)) \\ &= \operatorname{Tr}((X^T \otimes I)\hat{M}) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} x_{ij} \operatorname{Tr}(\hat{M}_{(i,j)}) \end{aligned}$$

y

$$\operatorname{Tr}((X \otimes I)P(X \otimes I)P) = \operatorname{Tr}((X \otimes I)(I \otimes X)) = \operatorname{Tr}(X \otimes X) = \operatorname{Tr}(X)^2.$$

Luego,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Tr}\left(\left(\frac{1}{2}M - (X^T \otimes I)\right)^T \left(\frac{1}{2}M - P(X \otimes I)P\right)\right) \\ &= \frac{1}{4} \|M\|_{\mathbb{F}}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} x_{ji} \operatorname{Tr}(M_{(i,j)}) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} x_{ij} \operatorname{Tr}(\hat{M}_{(i,j)}) + \operatorname{Tr}(X)^2. \end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned}
\|M - (X^T \oplus X)\|_F^2 &= \frac{1}{4} \|M\|_F^2 - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{ji} \operatorname{Tr}(M_{(i,j)}) - nx_{ji}^2) \\
&\quad + \frac{1}{4} \|M\|_F^2 - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{ij} \operatorname{Tr}(\hat{M}_{(i,j)}) - nx_{ij}^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \|M\|_F^2 - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (x_{ji} \operatorname{Tr}(M_{(i,j)}) - x_{ij} \operatorname{Tr}(\hat{M}_{(i,j)})) + 2 \operatorname{Tr}(X)^2 \\
&= \|M\|_F^2 - 2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (x_{ji} \operatorname{Tr}(M_{(i,j)}) + x_{ij} \operatorname{Tr}(\hat{M}_{(i,j)}) - nx_{ij}^2) \\
&\quad + 2 \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_{ii} \right)^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, como M es simétrica, si $Q = M + PMP$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (x_{ji} \operatorname{Tr}(M_{(i,j)}) + x_{ji} \operatorname{Tr}(\hat{M}_{(j,i)})) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} x_{ji} (\operatorname{Tr}(M_{(j,i)}) + \operatorname{Tr}(\hat{M}_{(j,i)})) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} x_{ji} \operatorname{Tr}(Q_{(j,i)}).
\end{aligned}$$

□

Así, el problema (3.2) queda expresado en términos de los x_{ij} como sigue:

$$\min \left(\|M\|_F^2 - 2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (x_{ij} \operatorname{Tr}(Q_{(i,j)}) - nx_{ij}^2) + 2 \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_{ii} \right)^2 \right). \quad (3.3)$$

El siguiente teorema caracteriza sus soluciones:

Teorema 3.1. *Para cada matriz simétrica $M \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$, la única solución del problema (3.3) está dada por la matriz $\hat{X} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ definida por:*

$$(\hat{X})_{ij} = \begin{cases} \frac{\operatorname{Tr}(Q_{(i,j)})}{2n}, & i \neq j \\ \frac{n \operatorname{Tr}(Q_{(i,i)}) - \operatorname{Tr}(M)}{2n^2}, & i = j, \end{cases}$$

para $Q = M + PMP$ con $P = K^{(nn)}$.

Demostración: Se trata de minimizar la función $\varphi : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}) = \|M\|_F^2 - 2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (x_{ij} \operatorname{Tr}(Q_{(i,j)}) - nx_{ij}^2) + 2 \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_{ii} \right)^2.$$

La condición necesaria para este problema es

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{ij}} = 4nx_{ij} - 2 \operatorname{Tr}(Q_{(i,j)}) = 0, & \text{si } i \neq j, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_{ii}} = 4nx_{ii} - 2 \operatorname{Tr}(Q_{(i,i)}) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} x_{kk} = 0, & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (3.4)$$

Luego, para $i \neq j$ es

$$x_{ij} = \frac{\operatorname{Tr}(Q_{(i,j)})}{2n}.$$

Para $i = j$, veamos que sumando para $i = 0, \dots, n-1$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{ii}} = \sum_{i=0}^{n-1} (4nx_{ii} - 2 \operatorname{Tr}(Q_{(i,i)}) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} x_{kk}) \\ &= 4n \sum_{i=0}^{n-1} x_{ii} - 2 \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Tr}(Q_{(i,i)}) + 4n \sum_{i=0}^{n-1} x_{ii}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$8n \sum_{i=0}^{n-1} x_{ii} = 2 \operatorname{Tr}(Q),$$

y entonces

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{ii} = \frac{2 \operatorname{Tr}(Q)}{8n} = \frac{\operatorname{Tr}(M) + \operatorname{Tr}(\hat{M})}{4n} = \frac{\operatorname{Tr}(M)}{2n}. \quad (3.5)$$

Reemplazando (3.5) en (3.4) resulta que, para cada $i = 0, \dots, n-1$,

$$4nx_{ii} - 2 \operatorname{Tr}(Q_{(i,i)}) + 4 \frac{\operatorname{Tr}(M)}{2n} = 0,$$

y por lo tanto,

$$x_{ii} = \frac{n \operatorname{Tr}(Q_{(i,i)}) - \operatorname{Tr}(M)}{2n^2}.$$

Las derivadas parciales segundas de la función φ son:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{ii}^2} = 4n + 4,$$

y si $i \neq j$,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{ij}^2} = 4n, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{ii} \partial x_{jj}} = 4,$$

y

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{ij} \partial x_{st}} = 0$$

si $(s, t) \neq (i, j)$. Debe tenerse en cuenta que los x_{ij} , que son las variables del problema, fueron ordenados en el orden de los elementos de $\text{vec}_F(X)$. La matriz Hessiana $H = (h_{ij})$ tiene la siguiente estructura, para $0 \leq i, j < n^2$, $i \neq j$,

$$h_{ii} = \begin{cases} 4n + 4 & \text{si } i = q(n + 1), 0 \leq q < n, \\ 4n & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

$$h_{ij} = \begin{cases} 4 & \text{si } i = q(n + 1), j = q'(n + 1), q \neq q', \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Veamos que H es definida positiva analizando el signo de los menores principales de dicha matriz. Sea $[M_k]$ el menor principal de orden $k + 1$ para $0 \leq k < n^2$, y sea q con $0 \leq t < n$. Si $q(1 + n) \leq k < (q + 1)(n + 1)$, entonces

$$[M_k] = 4^{k+1}(n + q + 1)n^k,$$

que es siempre positivo ya que n y $q + 1$ son valores naturales. Luego el Hessiano es definido positivo y \hat{X} es un minimizador de (3.3). \square

Como ya se indicara, la matriz de adyacencia del producto cartesiano de dos grafos G y H es la suma de Kronecker de las matrices de adyacencia de G y H , es decir,

$$A(G \circ H) = A(G) \oplus A(H).$$

Entonces, si M es una matriz simétrica de 0 y 1, resolver el problema de Procrusto

$$\text{mín} \|M - (A(G) \oplus A(H))\|_F^2$$

puede ser útil para recuperar la matriz de adyacencia y por lo tanto el grafo G .

3.2. PROBLEMA DE PROCRUSTO Y POTENCIAS DE KRONECKER.

Sea $n \geq 0$ y $M \in \mathbb{K}^{p^{n+2} \times q^{n+2}}$ una matriz con estructura en bloques

$$M = (M_{(i,j)}) \in \mathbb{M}_{p^{n+1} \times q^{n+1}}(\mathbb{K}^{p \times q})$$

para $0 \leq i < p^{n+1}$, $0 \leq j < q^{n+1}$. Queremos estudiar el problema

$$\text{mín} \|M - X^{\otimes(n+2)}\|_F^2.$$

Veamos en primer lugar que resolver este problema es equivalente a hallar $x = \text{vec}_F(X)$ que minimice

$$\|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M) - x^{\otimes(n+1)} \otimes x^T\|_F^2,$$

pues vale la siguiente proposición:

Proposición 3.2. *Sea $M \in \mathbb{K}^{p^{n+2} \times q^{n+2}}$, $\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)$ su matriz de vectorización en bloques, $X \in \mathbb{K}^{p \times q}$ y $x = \text{vec}_F(X)$. Entonces los problemas de optimización*

$$\text{mín} \|M - X^{\otimes(n+2)}\|_F^2$$

y

$$\text{mín} \|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M) - x^{\otimes(n+1)} \otimes x^T\|_F^2$$

son equivalentes.

Demostración: La demostración es inmediata, ya que

$$\begin{aligned} \|M - X^{\otimes(n+2)}\|_{\mathbb{F}}^2 &= \|\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(M - X^{\otimes(n+2)})\|_{\mathbb{F}}^2 \\ &= \|\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(M) - \text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(X^{\otimes(n+2)})\|_{\mathbb{F}}^2 \end{aligned}$$

y $\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(X^{\otimes(n+2)}) = x^{\otimes(n+1)} \otimes x^T$ por la Proposición [2.3](#). \square

Ya que M es cualquier matriz, nada puede afirmarse sobre la estructura de los bloques de su matriz de vectorización en bloques, ni sobre si están relacionados de alguna forma. Tampoco se tiene información sobre el rango, ya sea de $\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(M)$ o de sus bloques. En la siguiente proposición veremos que es posible plantear otro problema de optimización equivalente al anterior, considerando la matriz $\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(M)^+$ que cuya definición recordamos a continuación: toda matriz A se puede escribir como suma de una matriz simétrica más una antisimétrica, esto es, $A = A^+ + A^-$ con

$$A^+ = \frac{A + A^T}{2} \text{ y } A^- = \frac{A - A^T}{2}.$$

Proposición 3.3. Sean $M \in \mathbb{K}^{p^{n+2} \times q^{n+2}}$ y $\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(M) = [M_{(\gamma,0)}] \in \mathbb{M}_{(pq)^n \times 1}(\mathbb{K}^{pq \times pq})$. Sea

$$\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(M)^+ = [M_{(\gamma,0)}^+] \in \mathbb{M}_{(pq)^n \times 1}(\mathbb{K}^{pq \times pq})$$

siendo $M_{(\gamma,0)}^+$ la parte simétrica de $M_{(\gamma,0)}$ para cada $0 \leq \gamma < (pq)^{n+1}$. Entonces los siguientes problemas de optimización

$$\min \|\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(M) - x^{\otimes(n+1)} \otimes x^T\|_{\mathbb{F}}^2$$

y

$$\min \|\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(M)^+ - x^{\otimes(n+1)} \otimes x^T\|_2^2$$

son equivalentes.

Demostración: Sea $\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(M) = [M_{(\gamma,0)}]$ y consideremos la descomposición en parte simétrica y antisimétrica de cada uno de los bloques

$$M_{(\gamma,0)} = M_{(\gamma,0)}^+ + M_{(\gamma,0)}^-,$$

para $0 \leq \gamma < (pq)^n$. De manera que es posible expresar

$$\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(M) = \begin{bmatrix} M_{(0,0)} \\ M_{(1,0)} \\ \vdots \\ M_{((pq)^n - 1, 0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{(0,0)}^+ + M_{(0,0)}^- \\ M_{(1,0)}^+ + M_{(1,0)}^- \\ \vdots \\ M_{((pq)^n - 1, 0)}^+ + M_{((pq)^n - 1, 0)}^- \end{bmatrix},$$

esto es

$$\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(M) = \text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(M)^+ + \text{vec}_{\mathbb{F}}^{[p \times q]}(M)^-.$$

Recordando que para todo par de matrices S, K tal que $S = S^T$ y $K = -K^T$, es

$$\|S + K\|_{\mathbb{F}}^2 = \|S\|_{\mathbb{F}}^2 + \|K\|_{\mathbb{F}}^2,$$

se tiene que para cada bloque $M_{(\gamma,0)}$ vale esta propiedad, y como el cuadrado de la norma de Frobenius de la matriz es la suma de los cuadrados de la norma de Frobenius de los bloques:

$$\begin{aligned}\|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)\|_F^2 &= \|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+ + \text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^-\|_F^2 \\ &= \|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+\|_F^2 + \|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^-\|_F^2.\end{aligned}$$

De esta manera para $x \in K^{(pq) \times 1}$

$$\begin{aligned}\|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M) - x^{(n+1)} \otimes x^T\|_F^2 &= \|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+ + \text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^- - x^{(n+1)} \otimes x^T\|_F^2 \\ &= \|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+ - x^{(n+1)} \otimes x^T + \text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^-\|_F^2 \\ &= \|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+ - x^{(n+1)} \otimes x^T\|_F^2 + \|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^-\|_F^2\end{aligned}$$

dado que, por el Teorema 2.5, sabemos que $x^{(n+1)} \otimes x^T = \text{vec}_F^{[p \times q]}(X^{\otimes(n+2)})$ es una matriz de bloques simétricos. Esto significa que minimizar

$$\|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M) - x^{(n+1)} \otimes x^T\|_F^2$$

es equivalente a minimizar

$$\|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+ - x^{(n+1)} \otimes x^T\|_F^2.$$

Finalmente, por la equivalencia entre normas es equivalente a minimizar

$$\|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+ - x^{(n+1)} \otimes x^T\|_2^2.$$

□

A partir de lo demostrado en las proposiciones anteriores, resolver el problema de optimización propuesto al comienzo de esta sección es equivalente a resolver

$$\text{mín} \|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+ - x^{(n+1)} \otimes x^T\|_2^2.$$

Es conocido un resultado de Golub & Van Loan que enunciamos a continuación.

Teorema 3.2. [GL, Teorema 2.5.3, pag. 72] Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $A = U\Sigma V^T$ su descomposición en valores singulares, con $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ para $p = \text{mín}(n, m)$. Si $\text{rango}(A) = r > k$ y $A_k = \sum_{i=0}^{k-1} U(-, i)\sigma_i V(-, i)^T$, entonces

$$\text{mín}_{\text{rango}(B)=k} \|A - B\|_2 = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Este teorema refleja la idea de que los valores singulares indican qué tan cerca está una matriz dada de otra matriz de rango inferior al suyo. En particular, el teorema anterior nos dice que la matriz de rango 1 más cercana a $\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+$ es

$$M_0 = U(-, 0)\sigma_1 V(-, 0)^T$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+ - M_0\|_2 &= \|U^T(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+ - M_0)V\|_2 \\
&= \|U^T \left(\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+ \right) V - U^T(M_0)V\|_2 \\
&= \|\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) - \text{diag}(\sigma_1, 0, \dots, 0)\|_2 \\
&= \|\text{diag}(0, \sigma_2, \dots, \sigma_p)\|_2 = \sigma_2.
\end{aligned}$$

En el problema que debemos resolver, buscamos una matriz de rango 1 que sea la más cercana a $\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+$, pero con estructura muy especial: con bloques simétricos y de rango 1, satisfaciendo las condiciones del Teorema 2.5. Más precisamente, sea \mathcal{S}_n^{m-2} el conjunto de todas las matrices en bloques

$$B = [B_{\gamma,0}] \in \mathbb{M}_{(n)^{m-2} \times 1}(\mathbb{R}^{n \times n})$$

que verifican las siguientes condiciones:

- i) $\text{rango}(B) = 1$;
- ii) cada bloque no nulo $B_{(\gamma,0)}$ es simétrico y de rango 1;
- iii) si $m > 2$, existe k y $\beta = k n^{m-3} + \dots + k n + k$ tal que $(B_{(\beta,0)})_{kk} \neq 0$ y $B_{(\gamma,0)} = \lambda_\gamma B_{(\beta,0)}$ con

$$\lambda_\gamma = \frac{(B_{(\beta,0)}(k, -)^{\otimes(m-2)})_\gamma}{((B_{(\beta,0)})_{kk})^{m-2}}.$$

Resolver el problema

$$\min \|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+ - x^{\otimes(n+1)} \otimes x^T\|_2$$

significa buscar una matriz B en \mathcal{S}_{pq}^n más próxima a $\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+$. El siguiente teorema muestra una cota inferior y una cota superior para la distancia entre cualquier matriz en \mathcal{S}_{pq}^n y $\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+$.

Teorema 3.3. *Sea $M \in \mathbb{R}^{p^{n+2} \times q^{n+2}}$ no nula, y sea $\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+ = U\Sigma V^T$ la descomposición en valores singulares con $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$. Entonces*

$$\sigma_2 \leq \min_{B \in \mathcal{S}_{pq}^n} \|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+ - B\|_2 \leq \sigma_1.$$

Demostración: Es claro que

$$\min_{B \in \mathcal{S}_{pq}^n} \|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+ - B\|_2 \geq \min_{\text{rango}(B)=1} \|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+ - B\|_2 = \sigma_2.$$

Por otro lado, para toda $B \in \mathcal{S}_{pq}^n$ es cierto que

$$\|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+ - B\|_2 \leq \|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+\|_2 + \|B\|_2 = \sigma_1 + \sigma_1(B).$$

En particular, dado $\epsilon > 0$ consideremos $B_\epsilon = w^{\otimes(n+1)} \sigma_1(B_\epsilon) w^T \in \mathcal{S}_{pq}^n$ con $\|w\| = 1$ y $\sigma_1(B_\epsilon) = \epsilon$. Entonces $\|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+ - B_\epsilon\|_2 \leq \sigma_1 + \epsilon$. Por lo tanto,

$$\min_{B \in \mathcal{S}_{pq}^n} \|\text{vec}_F^{[p \times q]}(M)^+ - B\|_2 \leq \sigma_1.$$

□

Los problemas de Procrusto descritos anteriormente constituyen una herramienta muy interesante ya sea para su aplicación en problemas originados en la teoría de grafos como para la resolución de ciertos tipos de ecuaciones matriciales, como veremos en el próximo capítulo.

4 | APLICACIONES

En este capítulo nos proponemos presentar aplicaciones de los resultados obtenidos hasta aquí. En primera instancia, recordemos que en la Sección [1.3](#) repasamos conceptos básicos de teoría de grafos y mencionamos el objetivo final de diseñar una técnica que permita reconocer cuando un grafo dado G es potencia de Kronecker de otro grafo H y, a su vez, poder recuperar dicho grafo H . Esto constituye la primera de las aplicaciones a estudiar, con respecto a la segunda, diremos que estamos interesados en la resolución de cierto tipo de sistemas matriciales.

4.1. APLICACIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS DE KRONECKER

En la Sección [1.3](#) puede encontrarse una recopilación de ciertos conceptos fundamentales vinculados a la teoría de grafos. Destacamos el papel de las matrices de adyacencia para la representación de grafos. En particular, cuando la matriz de adyacencia de un grafo G es una potencia de Kronecker de otra matriz de 0 y 1, es porque G es un grafo de Kronecker, es decir $G = H^{\otimes m}$ para algún grafo H tal que $A(G) = A(H)^{\otimes m}$, siendo $A(H)$ la mencionada matriz de 0 y 1 y que ahora estamos en condiciones de recuperar.

En la Sección [2.4](#) hemos establecido condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo una matriz es una potencia de Kronecker de una matriz dada; es más, sabemos cómo obtener esa matriz base. Esto nos permite por lo tanto contar con una técnica para decidir, dado un grafo G , si se trata o no de un grafo de Kronecker, y en tal caso, hallar el grafo H tal que $G = H^{\otimes m}$. Esto puede resumirse en el algoritmo a continuación.

Recordemos previamente que \mathcal{S}_n^{m-2} es el conjunto de todas las matrices con bloques simétricos y de rango 1 que satisfacen las condiciones del Teorema [2.5](#). Más precisamente, \mathcal{S}_n^{m-2} es el conjunto de todas las matrices en bloques

$$B = [B_{(\gamma,0)}] \in \mathbb{M}_{(n)^{m-2} \times 1}(\mathbb{K}^{n \times n})$$

que verifican las siguientes condiciones:

- i) $\text{rango}(B) = 1$;
- ii) cada bloque $B_{(\gamma,0)}$ es simétrico y nulo o de rango 1;
- iii) si $m > 2$, existe k y $\beta = k n^{m-3} + \dots + k n + k$ tal que $(B_{(\beta,0)})_{kk} \neq 0$ y

$B_{(\gamma,0)} = \lambda_\gamma B_{(\beta,0)}$ con

$$\lambda_\gamma = \frac{(B_{(\beta,0)}(k, -)^{\otimes(m-2)})_\gamma}{((B_{(\beta,0)})_{kk})^{m-2}}.$$

Algoritmo 4.1. Dado $G = (V(G), E(G))$, un grafo de orden p^m con $m \geq 2$ tal que $E(G) \neq \emptyset$:

1. Calcular la matriz de adyacencia $A(G) \in \mathbb{R}^{p^m \times p^m}$;
2. Calcular la matriz $\text{vec}_F^{[p \times p]}(A(G)) \in \mathbb{M}_{(p^2)^{m-2} \times 1}(\mathbb{R}^{p^2 \times p^2})$;
 - a) Si $\text{vec}_F^{[p \times p]}(A(G)) \in \mathcal{S}_{p^2}^{m-2}$ entonces $A(G)$ es la matriz de adyacencia de un grafo de Kronecker y G es un grafo de Kronecker.
 - b) Si $\text{vec}_F^{[p \times p]}(A(G)) \notin \mathcal{S}_{p^2}^{m-2}$, entonces G no es un grafo de Kronecker.

El algoritmo está justificado por el Teorema [2.6](#) y la Definición [1.6](#).

Si G es un grafo de Kronecker, esto es, si $\text{vec}_F^{[p \times p]}(A(G)) \in \mathcal{S}_{p^2}^{m-2}$, como estamos trabajando con matrices de adyacencia, los elementos no nulos de estas matrices son iguales a 1. Esto significa que λ_γ , en la definición de $\mathcal{S}_{p^2}^{m-2}$, es 0 ó 1. Por ello, cada bloque $B_{(\gamma,0)}$ en $\text{vec}_F^{[p \times p]}(A(G))$ es nulo o coincide con $B_{(\beta,0)}$. Esto nos permite deducir el siguiente resultado.

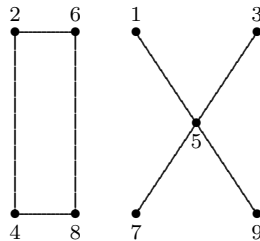
Teorema 4.1. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo de orden p^m con $m \geq 2$ y $E(G) \neq \emptyset$. Sea $A(G)$ la matriz de adyacencia y $\text{vec}_F^{[p \times p]}(A(G)) = [B_{(\gamma,0)}]$ su matriz de vectorización. Entonces

1. Si $m = 2$, $G = H^{\otimes 2}$ si y sólo si $\text{vec}_F^{[p \times p]}(A(G)) = B_{(0,0)}$ es simétrica y de rango 1; en este caso, $A(H) = C$ para $\text{vec}_F(C) \text{vec}_F(C)^T = B_{(0,0)}$;
2. Si $m \geq 3$, $G = H^{\otimes m}$ si y sólo si existe $\beta = kp^{2(m-3)} + \dots + kp^2 + k$ tal que $(B_{(\beta,0)})_{kk} \neq 0$ y

$$B_{(\gamma,0)} = \begin{cases} B_{(\beta,0)} & \text{si } (B_{(\beta,0)}(k, -)^{\otimes(m-2)})_\gamma = 1, \\ 0 & \text{en caso contrario;} \end{cases}$$

y en este caso $A(H) = C$ para $\text{vec}_F(C) = B_{(\beta,0)}(k, -)$.

Ejemplo 4.1.1. Consideremos el grafo G



y su matriz de adyacencia

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ya que $A(G) \in \mathbb{R}^{3^2 \times 3^2}$, calculamos la matriz

$$\text{vec}_F^{[3 \times 3]}(A(G)) = B_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

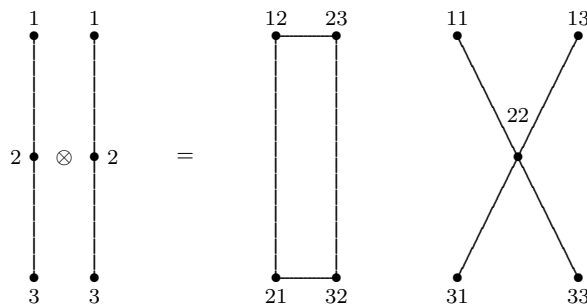
y vemos que $\text{vec}_F^{[3 \times 3]}(A(G)) \in \mathcal{S}_{3^2}^0$. Entonces como

$$\text{vec}_F^{[3 \times 3]}(A(G)) = (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0)^T (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0)$$

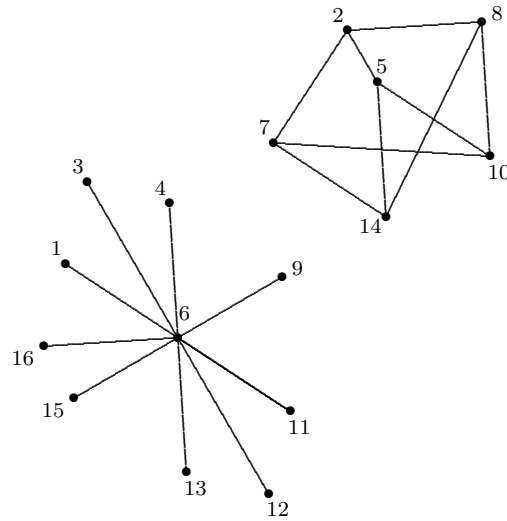
tenemos que

$$A(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $G = H^{\otimes 2}$



Ejemplo 4.1.2. Sea G el grafo dado por



cuya matriz de adyacencia está dada por

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

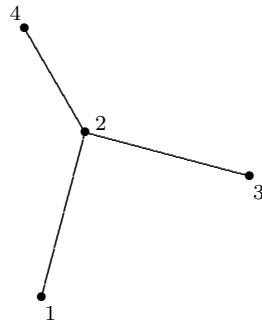
Como $A(G) \in \mathbb{R}^{4^2 \times 4^2} = \mathbb{R}^{2^4 \times 2^4}$, podría tratarse tanto de un cuadrado como de una potencia cuarta de Kronecker. Comencemos por estudiar la posibilidad de que sea un cuadrado. Calculada la matriz $\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[4 \times 4]}(A(G))$, resulta una matriz en $\mathcal{S}_{4^2}^0$, siendo $\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[4 \times 4]}(A(G)) = B_{(0,0)} = xx^T$ para

$$x^T = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0).$$

Entonces

$$A(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

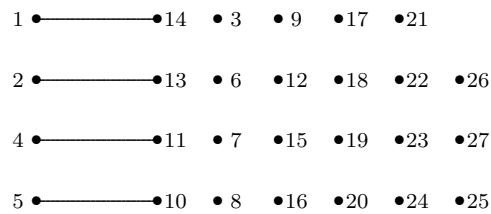
es la matriz de adyacencia del grafo H



que verifica la igualdad $G = H^{\otimes 2}$.

Debemos notar que $\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[2 \times 2]}(A(H))$ es una matriz no simétrica de rango 3. Luego no es un cuadrado de Kronecker y por lo tanto $A(G)$ no es una potencia cuarta.

Ejemplo 4.1.3. Sea G el grafo



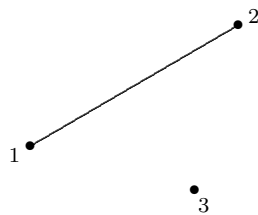
Su matriz de adyacencia $A(G) \in \mathbb{R}^{3^3 \times 3^3}$, y la matriz $\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[3 \times 3]}(A(G)) \in \mathcal{S}_{3^2}^1$. Luego

$$B_{(1,0)}(1, -) = (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

y

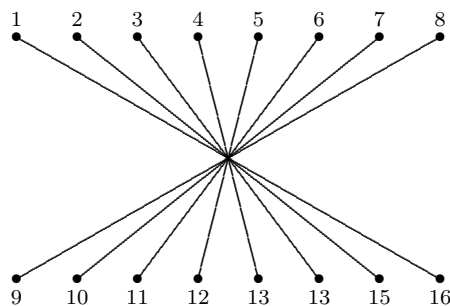
$$\text{vec}_{\mathbb{F}}^{-1}(B_{(1,0)}(1, -)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz de adyacencia del grafo H



tal que $G = H^{\otimes 3}$.

Ejemplo 4.1.4. El grafo G



es un grafo de Kronecker pues $G = H^{\otimes 4}$ para H el grafo



Su matriz de adyacencia $A(G) \in \mathbb{R}^{2^4 \times 2^4}$ tiene estructura en bloques $\mathbb{M}_{2^2 \times 2^2}(\mathbb{R}^{2^2 \times 2^2})$, y todos los bloques son nulos excepto los 4 ubicados sobre la diagonal NE – SO. De modo que la matriz $\text{vec}_F^{[2 \times 2]}(A(G))$ pertenece a \mathcal{S}_2^2 , es decir, se trata de una matriz en $\mathbb{M}_{2^4 \times 1}(\mathbb{R}^{2^2 \times 2^2})$ en la cual los únicos bloques no nulos son $B_{(5,0)}, B_{(6,0)}, B_{(9,0)}$ y $B_{(10,0)}$, todos ellos iguales a

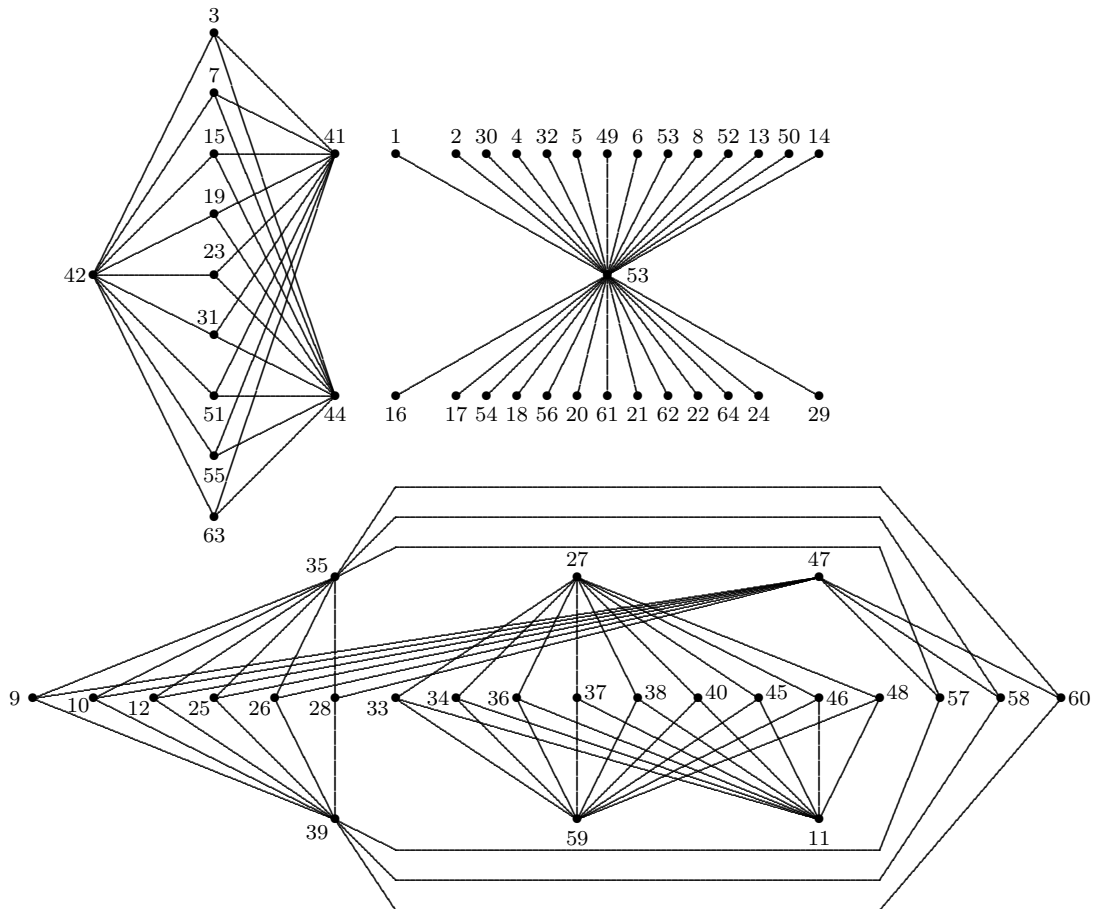
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\text{vec}_F^{-1}(B_{(5,0)}(1, -)) = \text{vec}_F^{-1}(0 \ 1 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que es la matriz de adyacencia del grafo H .

Ejemplo 4.1.5. Consideremos el grafo G de orden 4^3 dado por



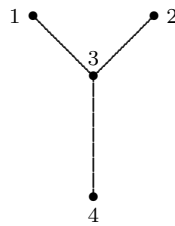
Su matriz de adyacencia $A(G) \in \mathbb{R}^{4^3 \times 4^3}$ tiene estructura en bloques $\mathbb{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R}^{4^2 \times 4^2})$. La matriz $\text{vec}_F^{[4 \times 4]}(A(G))$ pertenece a $\mathcal{S}_{4^2}^1$: se trata de una matriz en $\mathbb{M}_{2^4 \times 1}(\mathbb{R}^{4^2 \times 4^2})$ en la cual los únicos bloques no nulos son $B_{(2,0)}, B_{(6,0)}, B_{(8,0)}, B_{(9,0)}, B_{(11,0)}$ y $B_{(14,0)}$, todos ellos iguales a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\text{vec}_F^{-1}(B_{(2,0)}(2, -)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz de adyacencia del grafo H



y $G = H^{\otimes 3}$.

Es atinado en este punto notar que en el Ejemplo [4.1.2](#) hemos resuelto el problema de hallar H tal que $G = H^{\otimes 2}$, resultando como solución un grafo isomorfo al que hemos obtenido aquí. Debe observarse que las matrices de adyacencia de los mismos satisfacen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir, pertenecen a una misma clase de equivalencia en $\mathcal{M}_n \subset \mathbb{R}^{n \times n}$, conjunto de matrices simétricas binarias con diagonal nula, tal como ya indicamos en la Proposición 1.5.

4.2. APLICACIÓN A LA TEORÍA DE PRODUCTOS CARTESIANOS DE GRAFOS

A continuación vamos a presentar una aplicación de lo demostrado en el Teorema 3.1. Se sabe que la matriz de adyacencia del producto cartesiano de dos grafos G_1 y G_2 es la suma de Kronecker de las matrices de adyacencia de dichos grafos, es decir $A(G_1 \circ G_2) = A(G_1) \oplus A(G_2)$.

En el teorema indicado, dada $M \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ encontramos una matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que minimiza la distancia $\|M - (X^T \oplus X)\|_{\mathbb{F}}^2$. De este modo, si $M \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ es la matriz de adyacencia de un grafo H verificando $M = A(G) \oplus A(G)$, el mencionado resultado permite recuperar el grafo G tal que $H = G \circ G$.

Ejemplo 4.2.1. Sea $M \in \mathbb{R}^{4^2 \times 4^2}$ dada por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $Q = M + PMP$, con $P = K^{(44)}$ la correspondiente matriz de permutación en bloques. De acuerdo al teorema indicado, la solución del problema

$$\min \|M - (X^T \oplus X)\|_{\mathbb{F}}^2.$$

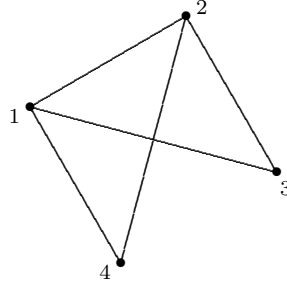
está dada por

$$(\hat{X})_{ij} = \begin{cases} \frac{\text{Tr}(Q_{(i,j)})}{2n}, & i \neq j \\ \frac{n \text{Tr}(Q_{(i,i)}) - \text{Tr}(M)}{2n^2}, & i = j, \end{cases}$$

De este modo, haciendo los cálculos correspondientes, resulta

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que es la matriz de adyacencia del grafo G



Luego G es tal que $M = A(G \circ G)$.

4.3. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES MATRICIALES

Inspirados por las ideas y resultados desarrollados hasta aquí, nos proponemos resolver ecuaciones del tipo

1. $A X^{\otimes m} = B$.
2. $A X^{\otimes m} + X^{\otimes m} A = B$.
3. $A_1 X^{\otimes m} B_1 + A_2 X^{\otimes m} B_2 + \dots + A_k X^{\otimes m} B_k = C$

para $A, B, A_i, B_i \in \mathbb{K}^{p^{n+2} \times p^{n+2}}$, $X \in \mathbb{K}^{p \times p}$.

Básicamente, la idea es aplicar de manera adecuada los resultados obtenidos en el Capítulo 2. En particular, en la Sección 2.4 han sido establecidas las condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo una matriz es una potencia de Kronecker de una matriz dada y sabemos, además, cómo obtener esa matriz base. Estos resultados, sumados a los ya conocidos sobre la resolución de sistemas lineales, serán suficientes para resolver las ecuaciones propuestas.

4.3.1. Ecuación matricial del tipo $A X^{\otimes m} = B$.

Dadas $A, B \in \mathbb{K}^{p^m \times p^m}$, queremos hallar $X \in \mathbb{K}^{p \times p}$ tal que

$$A X^{\otimes m} = B.$$

El caso más sencillo ocurre cuando A es no singular, en tal caso existe la matriz inversa A^{-1} y por lo tanto $X^{\otimes m} = A^{-1}B$.

Ejemplo 4.3.1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -14 & -2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 0 & -2 & -2 & 4 \\ -1 & 7 & 1 & -7 & 1 & -7 & -1 & 7 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

queremos resolver la ecuación

$$A X^{\otimes 3} = B.$$

La matriz A es no singular pues $\det(A) = -72$. Entonces

$$X^{\otimes 3} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\text{vec}_F^{[2 \times 2]}(A^{-1}B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{2^2}^1$$

basta tomar $\text{vec}_F(X) = B_{(2,0)}(2, -) = (0, 2, -1, 1)$ y

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

es la solución de la ecuación dada.

En el próximo ejemplo, $A^{-1}B$ no es potencia de Kronecker de alguna matriz, esto es, $\text{vec}_F^{[p \times p]}(A^{-1}B)$ tiene una estructura arbitraria, pero tan especial, que nos permite obtener certeza sobre la existencia de una solución de la ecuación $A X^{\otimes m} = B$ aplicando el Teorema [3.3](#).

Ejemplo 4.3.2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,001 & 0 & 0 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,002 & 0 & 0 & 0,0002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,001 & 0 & 0 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0001 & 0 & 0 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0012 & 0 & 0 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

consideremos la ecuación matricial $A X^{\otimes 3} = B$. La matriz A es no singular, pues $\det(A) = -8$, por lo que podemos considerar la matriz

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0,001 & 0 & 0 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo

$$\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[2 \times 2]}(A^{-1}B) = \begin{pmatrix} 0,001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que dicha matriz tiene rango 3 y posee estructura en bloques simétricos, por lo que coincide con $\text{vec}_{\mathbb{F}}^{[2 \times 2]}(A^{-1}B)^+$, formada por la parte simétrica de cada bloque. Calculando su descomposición en valores singulares, resulta $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,001$. Luego, por aplicación del mencionado teorema, podemos asegurar que existe alguna matriz $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ que está a distancia 0,001 de $A^{-1}B$, es decir

$$\text{mín} \|A^{-1}B - X^{\otimes 3}\|_{\mathbb{F}}^2 = 0,001.$$

4.3.2. Ecuación matricial del tipo $A X^{\otimes m} + X^{\otimes m} B = C$.

Dadas $A, B, C \in \mathbb{K}^{p^m \times p^m}$, queremos hallar $X \in \mathbb{K}^{p \times p}$ tal que

$$A X^{\otimes m} + X^{\otimes m} B = C.$$

Se sabe que la ecuación planteada es equivalente a la ecuación

$$(I \otimes A + B^T \otimes I) \text{vec}(X^{\otimes m}) = \text{vec}(C).$$

Esto significa que, en el caso que la matriz del sistema sea no singular,

$$X^{\otimes m} = \text{vec}^{-1} \left((I \otimes A + B^T \otimes I)^{-1} \text{vec}(C) \right),$$

y de allí podemos obtener X con los resultados obtenidos en los capítulos anteriores.

Ejemplo 4.3.3. Resolvamos $A X^{\otimes 2} + X^{\otimes 2} B = C$ para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 & 18 \\ 1 & 4 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 8 & 15 \\ 2 & 6 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

La ecuación $(I \otimes A + B^T \otimes I) \text{vec}(X^{\otimes 2}) = \text{vec}(C)$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{vec}(X^{\otimes 2}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \\ 8 \\ 4 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 18 \\ 8 \\ 15 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Luego ya que $(I \otimes A) + (B^T \otimes I)$ es invertible

$$\begin{aligned} \text{vec}(X^{\otimes 2}) &= [(I \otimes A) + (B^T \otimes I)]^{-1} \text{vec}(C) \\ &= (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 4 \ 2 \ 2 \ 1)^T \end{aligned}$$

y

$$X^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\text{vec}_F^{[2 \times 2]}(X^{\otimes 2}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 0 \ 1),$$

la solución de la ecuación matricial es

$$X = \text{vec}_F^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como hemos visto, resolver las ecuaciones propuestas implica la resolución de un sistema lineal. En el caso en que la matriz del sistema M no sea invertible se puede resolver empleando la **matriz pseudoinversa** o inversa generalizada M^\dagger . El tipo de matriz pseudoinversa más conocida es la llamada pseudoinversa de Moore-Penrose, que fue descrita independientemente por E. H. Moore en 1920, Arne Bjerhammar en 1951 y en 1955 por el galardonado premio Nobel de física en 2020, el británico Roger Penrose.

inversa generalizada

$$\text{vec}(X^{\otimes 2}) = [(I \otimes A) + (B^T \otimes I)]^\dagger \text{vec}(C) = \begin{pmatrix} 1,0000e^{+00} \\ 7,3830e^{-15} \\ 1,9540e^{-14} \\ -8,8818e^{-15} \\ 8,9421e^{-16} \\ -2,4425e^{-15} \\ -1,7084e^{-15} \\ 9,9930e^{-16} \\ 2,9415e^{-17} \\ -2,7756e^{-15} \\ -2,0836e^{-16} \\ 2,0276e^{-16} \\ 6,6507e^{-17} \\ 1,2212e^{-15} \\ -5,1470e^{-16} \\ 2,0524e^{-16} \end{pmatrix}$$

siendo $\delta = 3,7386e^{-15}$, lo cual podría considerarse una buena aproximación. Estableciendo una tolerancia según la cual tratemos como nulos a todos los valores menores que ella, podemos considerar

$$\text{vec}(X^{\otimes 2}) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

y

$$X^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\text{vec}_F^{[2 \times 2]}(X^{\otimes 2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0 \ 0),$$

la matriz

$$X = \text{vec}_F^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aproxima a la solución de la ecuación matricial planteada.

4.3.3. Ecuación matricial $A_1 X^{\otimes m} B_1 + \dots + A_k X^{\otimes m} B_k = C$.

Dadas $A_i, B_i, C \in \mathbb{K}^{p^m \times p^m}$, queremos hallar $X \in \mathbb{K}^{p \times p}$ que resuelva la ecuación

$$A_1 X^{\otimes m} B_1 + A_2 X^{\otimes m} B_2 + \dots + A_k X^{\otimes m} B_k = C.$$

También en este caso, aplicando vectorización por columnas a la ecuación de partida, la reducimos a un sistema cuya solución es $\text{vec}(X^{\otimes m})$. Esto es,

$$(B_1^T \otimes A_1 + B_2^T \otimes A_2 + \dots + B_k^T \otimes A_k) \text{vec}(X^{\otimes m}) = \text{vec}(C),$$

y por lo tanto, suponiendo que la matriz del sistema es inversible, resulta que

$$X^{\otimes m} = \text{vec}^{-1} \left((B_1^T \otimes A_1 + B_2^T \otimes A_2 + \cdots + B_k^T \otimes A_k)^{-1} \text{vec}(C) \right)$$

es la ecuación que permite recuperar a la matriz X .

Ejemplo 4.3.5. Consideremos la ecuación

$$A_1 X^{\otimes 3} B_1 + A_2 X^{\otimes 3} B_2 + A_3 X^{\otimes 3} B_3 = C$$

para las siguientes elecciones de matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$C = \begin{pmatrix} 74 & 42 & 85 & 51 & 85 & 85 & 71 & 35 \\ -208 & -129 & -223 & -112 & -223 & -237 & -193 & -125 \\ -6 & -8 & 6 & -6 & 2 & -11 & -6 & -7 \\ -41 & -35 & -55 & -89 & -73 & -62 & -35 & -13 \\ 38 & 21 & 73 & 30 & 45 & 48 & 45 & 17 \\ -62 & -40 & -128 & -83 & -90 & -86 & -76 & -24 \\ 17 & 3 & 29 & 27 & 29 & 21 & 17 & -4 \\ -35 & -40 & -71 & -83 & -79 & -68 & -29 & -9 \end{pmatrix}.$$

Si vectorizamos obtenemos la ecuación

$$(B_1^T \otimes A_1 + B_2^T \otimes A_2 + B_3^T \otimes A_3) \text{vec}(X^{\otimes 3}) = \text{vec}(C)$$

cuya matriz asociada $B_1^T \otimes A_1 + B_2^T \otimes A_2 + B_3^T \otimes A_3 \in \mathbb{R}^{2^6 \times 2^6}$ es no singular. Entonces nuestro problema se reduce a resolver la ecuación

$$X^{\otimes 3} = \text{vec}^{-1} \left((B_1^T \otimes A_1 + B_2^T \otimes A_2 + B_3^T \otimes A_3)^{-1} \text{vec}(C) \right).$$

La matriz $\text{vec}_F^{[2 \times 2]} \left((B_1^T \otimes A_1 + B_2^T \otimes A_2 + B_3^T \otimes A_3)^{-1} \text{vec}(C) \right)$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Luego, basta considerar $\text{vec}_F(X) = B_{(1,0)}(1, -) = (0, -1, 1, 2)$ y

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

es la solución de la ecuación matricial dada.

BIBLIOGRAFÍA

- [E] Eberle, M.G. El problema de Procrusto y sumas de Kronecker. 11vo Simposio Argentino de Investigación Operativa, 42 JAIIO - SIO 2013 - ISSN: 1850-2865. 140–149.
- [ER] Escalante, René; Raydan, Marcos. Dykstra's algorithm for a constrained least-squares matrix problem. *Numer. Linear Algebra Appl.* 3 (1996), no. 6, 459–471. MR1419256
- [FG] Gantmacher, F. R. The theory of matrices. Vol. 1. Translated from the Russian by K. A. Hirsch. Reprint of the 1959 translation. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 1998. x+374 pp. ISBN: 0-8218-1376-5 MR1657129
- [GL] Golub, Gene H.; Van Loan, Charles F. Matrix computations. Fourth edition. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2013. xiv+756 pp. ISBN: 978-1-4214-0794-4; 1-4214-0794-9; 978-1-4214-0859-0 MR3024913
- [HG] Higham, Nicholas J. Computing real square roots of a real matrix, *Linear Algebra Appl.* 88/89 (1987), 405–430. MR0882456
- [HG1] Higham, Nicholas J. The symmetric Procrustes problem. *BIT* 28 (1988), no. 1, 133–143. MR0928441
- [HJ1] Horn, Roger A.; Johnson, Charles R. Matrix analysis. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2013. xviii+643 pp. ISBN: 978-0-521-54823-6 MR2978290
- [HJ2] Horn, Roger A.; Johnson, Charles R. Topics in matrix analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 1991. viii+607 pp. ISBN: 0-521-30587-X MR1091716
- [KR] Kollo, Tõnu; von Rosen, Dietrich. Advanced multivariate statistics with matrices. Mathematics and Its Applications (New York), 579. Springer, Dordrecht, 2005. xvi+489 pp. ISBN: 978-1-4020-3418-3; 1-4020-3418-0 MR2162145
- [LS] Langville, Amy N.; Stewart, William J. The Kronecker product and stochastic automata networks. *J. Comput. Appl. Math.* 167 (2004), no. 2, 429–447. MR2064701

- [M] Muir, T. , The Theory of Determinants in the Historical Order of Development. Dover , New York, 1966.
- [O] Ojeda, Ignacio. Kronecker square roots and the block vec matrix. Amer. Math. Monthly 122 (2015), no. 1, 60–64. MR3324956
- [OG] Ojeda, Ignacio & Gago Vargas, Jesús, Métodos matemáticos para estadística. Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones. (2008).
- [RPB] Pastor, J.R. & Babini, J. Historia de la Matemática. Colección hombre y sociedad. Gedisa, Editorial, S.A. (Vol 1) (2000). ISBN: 9788474328073
- [PL] Pitsianis, N. & Van Loan, C. F. , Aproximation with Kronecker products. Linear Algebra for Large Scale and Real-Time Applications. Kluwer Academic Publishers. (1993), 293–314.
- [W] Weichsel, Paul M. The Kronecker product of graphs. Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 47–52. MR0133816
- [ZD] Zhang, Huamin; Ding, Feng. On the Kronecker products and their applications. J. Appl. Math. 2013, Art. ID 296185, 8 pp. MR3070498