UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Tesis de doctor en matemática

DIMENSIONES HOMOLÓGICAS EN TEORÍA DE REPRESENTACIONES DE ÁLGEBRAS

Leonardo German Alarcon

Bahía Blanca Argentina

2020

Prefacio.

Esta tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Matemática de la Universidad Nacional de Sur durante el período comprendido entre los meses de Septiembre de 2012 y Junio de 2020, bajo la dirección del Dr. Marcelo Américo Lanzilotta Mernies, Profesor Titular del Instituto de Matemática y Estadística de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, Uruguay, y la dirección adjunta de la Dra. María Andrea Gatica, Profesora Titular del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

Agradecimientos.

A mis directores, Andrea Gatica y Marcelo Lanzilotta, por darme la oportunidad de trabajar junto ellos, confiando en mí desde el comienzo. Por ser quienes con paciencia, compromiso, dedicación, y sobre todo mucha calidad humana, me guiaron y motivaron para realizar este trabajo. Por acompañarme en mis primeros pasos como investigador.

A Pamela, mi esposa, quien desde un principio me apoyó, acompañó y ayudó en todo lo que le fue posible. A mis padres, Wilfredo y Amalia, que me transmitieron el deseo de aprender y superarme día a día. A mis hermanos, Iván y Fernando, quienes siempre estuvieron pendientes, y apoyando cada paso que doy. A mis suegros, cuñadas y sobrinos, por acompañarme siempre.

A los profesores que he tenido a lo largo de mi formación como matemático, y en especial a dos de ellos, María Inés Platzeck y Darío Picco. Tanto Inés como Darío, estuvieron siempre muy dispuestos a compartir sus conocimientos con pasión y dedicación.

A mis compañeros de oficina, a mis compañeros de cursos y a los miembros del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

Resumen.

En esta tesis trabajamos los módulos periódicos, los módulos virtualmente periódicos y los módulos ortogonales a su resolución. Estudiamos las dimensiones homológicas de dichos módulos, en particular, el valor en la funciones ϕ y ψ de Igusa-Todorov en los módulos ortogonales a su resolución. También, calculamos las dimensiones homológicas (fin.dim, ϕ-dim, ψ-dim) de las álgebras n-ortogonales a su resolución.

En primer lugar, haciendo uso de la descripción de las sizigias en las álgebras de radical cuadrado cero y en las álgebras truncadas, describimos los módulos periódicos y virtulamente periódicos en función del carcaj. Además, en el caso de las álgebras de radical cuadrado cero, caracterizamos los módulos simples virtualmente periódicos en función de su dimensión proyectiva o inyectiva. Por otro lado, mostramos que en las álgebras n-Gorenstein los módulos p-periódicos indescomponibles no proyectivos coinciden con los módulos fuertemente Gorenstein proyectivos. Estos resultados nos serán de utilidad en el resto del trabajo para construir ejemplos.

En segundo lugar, definimos los módulos ortogonales a su resolución los cuales son una generalización de los módulos estables y por lo tanto, de los módulos Gorenstein proyectivos. Demostramos que los valores de las funciones ϕ y ψ de Igusa-Todorov en los módulos ortogonales a su resolución coinciden. A partir de un módulo ortogonal a su resolución construimos una subcategoría $\underline{\chi}_X$ de $\underline{\text{mod}}\,\Lambda$ y probamos que el funtor sizigia es un funtor fiel y pleno de $\underline{\chi}_X$ en sí misma. Utilizando dicho funtor, mostramos que la primera función Igusa-Todorov, ϕ, se anula en los módulos ortogonales a su resolución.

Finalmente, utilizando los módulos ortogonales a su resolución, definimos las álgebras n-ortogonales a su resolución y demostramos que su dimensión finitista, su ϕ-dimensión y su ψ-dimensión son finitas.

Abstract.

In this thesis we work with the periodic modules, virtually periodic modules and orthogonal to their resolution modules. We study homological dimensions of such modules, and particularly, the value of Igusa-Todorov's functions ϕ and ψ at orthogonal to their resolution modules. We also compute the homological dimensions (fin.dim, ϕ-dim, ψ-dim) of the Orthogonal to their resolution algebras.

First, making use of syzygy's description for radical square zero algebras and for truncated path algebras, we describe periodic and virtually periodic modules according to the quiver. Moreover, in the case of radical square zero algebras, we characterize simple virtually periodic modules in function of their projective or injective dimension. On the other side, we show that, for n-Gorenstein algebras, non-projective indecomposable p-periodic modules coincide with the strongly projective Gorenstein modules. These results will become useful to us in the rest of the work for building examples.

Second, we define orthogonal to their resolution modules, which are a generalization of stable modules and therefore, of projective Gorenstein modules. We demonstrate that the values of Igusa-Todorov's functions ϕ and ψ in orthogonal to their resolution modules coincide. From an orthogonal to its resolution modules we build the subcategory $\underline{\chi}_X$ of $\underline{\text{mod}}\ \Lambda$ and we prove that the syzygy functor is a faithful and full functor of $\underline{\chi}_X$ over itself. Using the mentioned functor, we show that ϕ, the first Igusa-Todorov's function, is nullified in orthogonal to their resolution modules.

Finally, using orthogonal to their resolution modules, we define the n-orthogonal to their resolution algebras and we prove that its finitistic dimension, ϕ-dimension and ψ-dimension are finite.

Índice general

Introducción.

En el marco de la teoría de representaciones de álgebras de Artin y del álgebra homológica, se presenta una conjetura que fue planteada hace más de 60 años llamada *Conjetura de la Dimensión Finitista.*

Para enunciar dicha conjetura comencemos recordando las definiciones de las dimensiones finitistas.

Si Λ es una R-álgebra, donde R es un anillo conmutativo artiniano con unidad, se definen las dimensiones finitistas como:

1. $\mathrm{fin.dim}(\Lambda) = \sup\{\mathrm{dp}(\mathrm{M}) : \mathrm{dp}(\mathrm{M}) < \infty \, \mathrm{con} \, \mathrm{M} \in \mathrm{mod}\,\Lambda\}$,

2. $\mathrm{Fin.dim}(\Lambda) = \sup\{\mathrm{dp}(\mathrm{M}) : \mathrm{dp}(\mathrm{M}) < \infty \, \mathrm{con} \, \mathrm{M} \in \mathrm{Mod}\,\Lambda\}$.

En 1960, en su trabajo [B] H. Bass menciona que Rosenberg y Zelinsky se preguntaron si $\mathrm{fin.dim}(\Lambda) < \infty$ y si $\mathrm{fin.dim}(\Lambda) = \mathrm{Fin.dim.}(\Lambda)$. Fue así que Bass planteó las siguientes preguntas:

Conjetura de la dimensión finitista I:

Para toda álgebra de Artin Λ, ¿$\mathrm{fin.dim}(\Lambda) < \infty$?

Conjetura de la dimensión finitista II:

Para toda álgebra de Artin Λ, ¿$\mathrm{fin.dim}(\Lambda) = \mathrm{Fin.dim.}(\Lambda)$?

En 1992 B. Huisgen-Zimmermann presentó en [H-Z1] contraejemplos, mostrando que la conjetura II no es válida para las álgebras monomiales, y por lo tanto mostrando que la conjetura II es falsa.

Distinto es el panorama con respecto a la conjetura I, pues si bien solo ha sido resuelta parcialmente, se conoce una gran familia de álgebras para las cuales es verdadera. Entre las familias de álgebras para las cuales se sabe que la conjetura I es cierta destacamos las siguientes tres: las álgebras Λ tales que $\mathrm{rad}^{2\mathrm{l}+1}(\Lambda) = 0$, y que $\frac{\Lambda}{\mathrm{rad}^{\mathrm{l}}(\Lambda)}$ sea de tipo de representación finita (1994, Y. Wang), las álgebras Λ tales que rep.dim$(\Lambda) \leq 3$ (2002-2005, K. Igusa- G. Todorov) y las álgebras Λ que tienen a lo sumo tres estratos radicales de dimensión proyectiva infinita (2009, F. Huard- M. Lanzilotta- O. Mendoza). Las herramientas en común que utilizaron los autores para demostrar la conjetura I en los casos mencionados fueron las funciones de Igusa-Todorov, ϕ y ψ. Cabe aclarar que a pesar de que dichas funciones fueron utilizadas por Y. Wang en 1994, las mismas fueron presentadas por primera vez por K. Igusa y G. Todorov en el 2005, en el trabajo titulado "On the finitistic dimension conjecture for artin algebras" ([IT]).

Las funciones definidas por K. Igusa y G. Todorov asignan a cada módulo un entero no negativo, y en cierto sentido generalizan a la dimensión proyectiva, puesto que, coinciden con la dimensión proyectiva cuando el módulo tiene dimensión proyectiva finita. Así, dichas funciones dan lugar a nuevas dimensiones homológicas, a saber, la ϕ-dim y la ψ-dim de un álgebra de Artin Λ. En relación con la fin.dim, estas medidas cumplen las siguientes desigualdades:

$$\text{fin.dim}(\Lambda) \leq \phi\text{-dim}(\Lambda) \leq \psi\text{-dim}(\Lambda) \leq \text{gl.dim}(\Lambda).$$

Las funciones ϕ y ψ de Igusa-Todorov no solo son importantes por su relación con la conjetura de la dimensión finitista I, sino que en sí mismas son un tema importante de investigación ya que guardan relación con diversos campos de la teoría de las representaciones de álgebras de Artin y del álgebra homológica. Por ejemplo:

- En 2013, F. Huard y M. Lanzilotta demostraron en [HL] que un anillo artiniano a derecha R es auto-inyectivo si y solo si $\psi(M) = 0$ para todo R-módulo a derecha finitamente generado M si y solo si $\phi(M) = 0$ para todo R-módulo a derecha finitamente generado M.

- En 2014, S. Fernandes, M. Lanzilotta y O. Mendoza ([FLM]) caracterizaron la ϕ-dimensión del álgebra en función de los funtores Ext y Tor y demostraron que la finitud de la ϕ-dim es invariante por equivalencia derivada.

El principal interés en esta tesis es calcular el valor de las funciones ϕ y ψ de Igusa-Todorov en cierta familia de módulos sobre álgebras de Artin. Además, en la primera parte de la misma, se darán caracterizaciones de los módulos periódicos y virtualmente periódicos sobre cierto tipo de álgebras las cuales nos ayudarán a construir ejemplos y contraejemplos que usaremos a lo largo de este trabajo.

El capítulo I está completamente dedicado a los conceptos previos necesarios para la comprensión de esta tesis. Las primeras tres secciones del capítulo están destinadas a presentar ciertos resultados sobre álgebras de Artin, álgebra homológica y álgebras de caminos. Muchos de estos resultados son hechos muy conocidos y por lo tanto se omite su demostración. La cuarta sección está totalmente dedicada a resumir los resultados principales de las funciones ϕ y ψ de Igusa-Todorov. A pesar de ser resultados conocidos ofrecemos aquí su demostración, ya que la definición que presentaremos de la primera función de Igusa-Todorov, ϕ, no es exactamente la dada por los autores en [IT].

El capítulo II está destinado a los módulos p-periódicos y virtualmente p-periódicos y sus duales, los módulos i-periódicos y virtualmente i-periódicos en álgebras de Artin. Las definiciones de estos módulos fueron extraídas del artículo [IZ2] de K. Igusa y D. Zacharia no publicado. Conceptos muy similares a dichas definiciones habían sido presentadas por K. Igusa y D. Zacharia en su trabajo previo [IZ1]. En la primera sección de este capítulo, en el contexto de la álgebras de Artin, repasamos las definiciones de los módulos periódicos y estudiamos propiedades de dichos módulos. En la segunda y tercera sección, en el marco de las álgebras de carcaj de radical cuadrado cero y de las álgebras truncadas, respectivamente, caracterizamos los módulos p-periódicos y virtualmente p-periódicos en función del carcaj. Además, en el caso de las álgebras de radical cuadrado cero mostramos que los módulos simples con dimensión proyectiva infinita son exactamente los módulos i-periódicos. En la útima sección del capítulo, trabajamos los módulos periódicos en las álgebras Gorenstein. Aquí probamos que un módulo indescomponible no proyectivo, es p-periódico si y sólo si es fuertemente Gorenstein proyectivo.

El principal interés en el capítulo III es calcular el valor de la primera función de Igusa-Todorov, ϕ, en los módulos ortogonales a su resolución. En la primera parte de este capítulo definimos dichos módulos y estudiamos ciertas propiedades. En la segunda parte del capítulo, a partir de los módulos ortogonales a su resolución, definimos una subcategoría de la categoría estable de módulos y demostramos que la sizigia define un funtor fiel y pleno sobre ella. Finalmente, usando este funtor, probamos que $\phi(M) = 0$ para todo módulo ortogonal a su resolución.

En el capítulo IV, definimos las álgebras n-ortogonales a su resolución y probamos que su fin.dim, ϕ-dim y ψ-dim son finitas. Entre los ejemplos de álgebras n-ortogonales a su resolución se encuentran las álgebras n-Gorenstein. Finalizamos el capítulo, hallando una familia de álgebras n-ortogonales a su resolución en el contexto de las álgebras de matrices triangulares.

Capítulo 1

Conceptos preliminares.

Este capítulo contiene las definiciones y resultados teóricos que serán necesarios para la comprensión de este trabajo, que pueden verse en [ARS, A, ASS, IT, Wa, HLM]. También fijaremos notaciones a utilizar en este trabajo.

1.1. Álgebras de Artin.

A lo largo de esta tesis R denotará un anillo conmutativo artiniano con unidad y Λ una R-álgebra de Artin. Recordemos que una R-álgebra de Artin es un anillo Λ junto con un morfismo de anillos $\phi : R \to \Lambda$, tal que la imagen de ϕ está contenida en el centro de Λ, y Λ es finitamente generada como R-módulo. Así, resulta que Λ es un anillo artiniano a izquierda y a derecha. Ejemplos de álgebras de Artin son las álgebras de dimensión finita sobre un cuerpo.

Dada un álgebra de Artin Λ, consideraremos la categoría de los Λ-módulos finitamente generados a izquierda, la cual notaremos con $\operatorname{mod}\Lambda$. Se sabe que esta categoría es una categoría abeliana. En [ARS, I Proposición 3.1] se prueba que en $\operatorname{mod}\Lambda$ existe una cantidad finita de módulos simples no isomorfos dos a dos, los cuales notaremos con $S_1, \cdots, S_n$.

Recordemos que un epimorfismo $f : A \to B$ en $\operatorname{mod}\Lambda$ se llama **esencial** si $g : X \to A$ es un epimorfismo siempre que fg lo es. Luego, se define la **cubierta proyectiva** $P_0(M)$ de un Λ-módulo M como un epimorfismo esencial $f : P_0(M) \to M$ donde $P_0(M)$ es un Λ-módulo proyectivo. Se prueba que todo módulo en $\operatorname{mod}\Lambda$ admite una cubierta proyectiva

[ARS, I Teorema 4.2]. Más aún, todo módulo en $\operatorname{mod}\Lambda$ tiene una **resolución proyectiva minimal**, esto es, dado un Λ-módulo M se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$\cdots \xrightarrow{f_{n+1}} P_n \xrightarrow{f_n} \cdots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

donde $f_0 : P_0 \to M$ es la cubierta proyectiva de M y los $\overline{f}_i : P_i \to \operatorname{Ker}(f_{i-1})$ son las cubiertas proyectivas de los módulos $\operatorname{Ker}(f_{i-1})$ para todo $i \geq 1$, y donde $f_i = \iota_{i-1}\overline{f}_i$ para todo $i \geq 1$, siendo $\iota_{i-1} : \operatorname{Ker}(f_{i-1}) \to P_{i-1}$ las inclusiones canónicas. Si la resolución proyectiva minimal de M tiene longitud n se dirá que la **dimensión proyectiva** de M es n, y se notará $\operatorname{dp}(M) = n$. Caso contrario diremos que la dimensión proyectiva de M es infinita, es decir, $\operatorname{dp}(M) = \infty$. Llamaremos **sizigia** enésima de M y notaremos con $\Omega^n(M)$ al módulo $\operatorname{Ker}(f_{n-1})$ para todo $n \geq 1$. La siguiente observación es un hecho conocido:

Observación 1.1.1. Sea P, M y N Λ-módulos, con P proyectivo. Entonces valen las siguientes propiedades:

1. $\Omega^1(M \oplus N) = \Omega^1(M) \oplus \Omega^1(N)$.
2. $\Omega^1(P) = 0$.

Dualmente se definen la envoltura inyectiva, la co-resolución inyectiva y la dimensión inyectiva. Un monomorfismo de Λ-módulos $f : A \to B$ se llama **esencial** si $g : B \to Y$ es monomorfismo siempre que gf lo es. La **envoltura inyectiva** $I_0(M)$ del Λ-módulo M es un monomorfismo esencial $i : M \to I_0(M)$ tal que $I_0(M)$ es un Λ-módulo inyectivo. Se prueba que todo módulo en $\operatorname{mod}\Lambda$ tiene una envoltura inyectiva [ARS, II Proposición 4.6]. Luego todo módulo en $\operatorname{mod}\Lambda$ tiene **co-resolución inyectiva minimal**, es decir, para un módulo M se tiene la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i_0} I_0 \xrightarrow{i_1} I_1 \xrightarrow{i_2} \cdots \xrightarrow{i_n} I_n \xrightarrow{i_{n+1}} \cdots$$

donde $i_0 : M \to I_0$ es la envoltura inyectiva de M y los morfismos $\overline{i}_j : \operatorname{Coker}(i_{j-1}) \to I_j$ son las envolturas inyectivas de los módulos $\operatorname{Coker}(i_{j-1})$ para todo $j \geq 1$, y donde $i_j = \overline{i}_j\pi_{j-1}$, siendo $\pi_{j-1} : I_{j-1} \to \operatorname{Coker}(i_{j-1})$ la proyección canónica, para todo $j \geq 1$. Luego si la co-resolución inyectiva minimal tiene longitud finita n, diremos que la **dimensión inyectiva** de M es n, lo cual notaremos por $\operatorname{di}(M) = n$, en caso contrario diremos que la dimensión inyectiva de M es infinita, o sea, $\mathrm{di}(M) = \infty$. Llamaremos **co-sizigia** enésima de M y notaremos con $\Omega^{-n}(M)$ al módulo $\mathrm{Coker}(i_{n-1})$ para todo $n \geq 1$. Dualizando la Observación 1.1.1, tenemos las siguientes propiedades:

1. $\Omega^{-1}(M \oplus N) = \Omega^{-1}(M) \oplus \Omega^{-1}(N)$, para M, N en $\mathrm{mod}\,\Lambda$.

2. $\Omega^{-1}(I) = 0$, para todo Λ-módulo inyectivo I.

Recordemos que una **relación** $\mathcal{R}$ sobre una R-categoría $\mathcal{C}$ es un R-submódulo $\mathcal{R}(A, B)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, para todo par de objetos A y B en $\mathcal{C}$, donde la ley de composición $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ satisface que $\mathrm{Im}(\mathcal{R}(A, B) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)) \subset \mathcal{R}(A, C)$ e $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \otimes \mathcal{R}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)) \subset \mathcal{R}(A, C)$. Luego se define la **categoría cociente** $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ de $\mathcal{C}$ módulo la relación $\mathcal{R}$, por la categoría donde $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}/\mathcal{R}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{R}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)/\mathcal{R}(A, B)$.

Notaremos con $\mathcal{P}(A, B)$ a la relación definida sobre $\mathrm{mod}\,\Lambda$ de los morfismos $f : A \to B$ que se factorizan a través de un módulo proyectivo y, con $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$, a la categoría cociente $\mathrm{mod}\,\Lambda/\mathcal{P}$. Por otro lado, notaremos con $\mathcal{I}(A, B)$ a la relación definida sobre $\mathrm{mod}\,\Lambda$ de los morfismos $f : A \to B$ que se factorizan a través de un módulo inyectivo y, por $\overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ a su respectiva categoría cociente $\mathrm{mod}\,\Lambda/\mathcal{I}$.

Consideraremos además el **funtor sizigia** $\underline{\Omega} : \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda \to \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ que a cada módulo A le asigna el módulo $\Omega(A)$ y a cada morfismo $f : A \to B$ le asigna un morfismo $t : \Omega(A) \to \Omega(B)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo en $\mathrm{mod}\,\Lambda$:

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Omega(A) & \xrightarrow{t} & \Omega(B) \\
\downarrow & & \downarrow \\
P_0(A) & \xrightarrow{g} & P_0(B) \\
\downarrow & & \downarrow \\
A & \xrightarrow{f} & B \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array} .$$

Dualmente consideraremos el **funtor co-sizigia** $\overline{\Omega^{-1}} : \overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda \to \overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ que a cada módulo A le asigna el módulo $\Omega^{-1}(A)$ y a cada morfismo $f : A \to B$ le asigna un morfismo

$v : \Omega^{-1}(A) \to \Omega^{-1}(B)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo en mod Λ:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
I_0(A) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & I_0(B) \arrow[d] \\
\Omega^{-1}(A) \arrow[r, "v"] \arrow[d] & \Omega^{-1}(B) \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}.$$

Observación 1.1.2. De la Observación 1.1.1 y su dual, se tiene que los funtores $\underline{\Omega} : \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda \to \underline{\mathrm{mod}}$ y $\overline{\Omega^{-1}} : \overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda \to \overline{\mathrm{mod}}\Lambda$ son funtores aditivos.

Recordemos que toda R-álgebra de Artin Λ induce sobre el anillo opuesto de Λ una R-álgebra de Artin, que notaremos Λ^{op}. El siguiente teorema muestra la relación entre las categorías mod Λ y mod Λ^{op}.

Teorema 1.1.3. [ARS, Theorem, 3.3] Si Λ es una R-álgebra de Artin entonces el funtor contravariante $D : \mathrm{mod}\,\Lambda \to \mathrm{mod}\,\Lambda^{op}$, definido por $D(X) = \mathrm{Hom}_R(X, I_0(R/\mathrm{rad}R))$, es una dualidad.

1.2. Resultados del álgebra homológica.

Presentaremos en esta sección los resultados del álgebra homológica que nos serán de utilidad a lo largo de esta tesis. Comenzaremos con la siguiente proposición.

Proposición 1.2.1. [ARS, II Proposición 1.5] Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos R-categorías y sea $D : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ una dualidad. Entonces:

1. Un morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$ es un monomorfismo (epimorfismo) si y solo si $D(f) : D(B) \to D(A)$ es un epimorfismo (monomorfismo) en $\mathcal{D}$.

2. Un objeto X en $\mathcal{C}$ es proyectivo (inyectivo) si y solo si $D(X)$ es inyectivo (proyectivo) en $\mathcal{D}$.

A continuación enunciaremos tres lemas cuya demostraciones se presentan en [A].

Lema 1.2.2. [A, II Lemme 3.5](Lema de los 5) Consideremos en mod Λ, el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "u_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "u_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\ N_1 \arrow[r, "v_1"] & N_2 \arrow[r, "v_2"] & N_3 \arrow[r, "v_3"] & N_4 \arrow[r, "v_4"] & N_5 \end{tikzcd}$$

entonces:

1. Si f_5 es un monomorfismo y f_2, f_4 son epimorfismos, entonces f_3 es un epimorfismo.

2. Si f_1 es un epimorfismo y f_2, f_4 son monomorfismos, entonces f_3 es un monomorfismo.

3. Si f_5 es un monomorfismo, f_1 un epimorfismo y f_2, f_4 isomorfismos, entonces f_3 es un isomorfismo.

Lema 1.2.3. [A, II Lemme 3.6](Lema de la serpiente) Consideremos en mod Λ, el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & N \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "u'"] & M' \arrow[r, "v'"] & N' & \end{tikzcd} .$$

Entonces, existe un morfismo $\delta : \operatorname{Ker} h \to \operatorname{Coker} f$ tal que la sucesión:

$$\operatorname{Ker} f \xrightarrow{u_1} \operatorname{Ker} g \xrightarrow{v_1} \operatorname{Ker} h \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} f \xrightarrow{u_2} \operatorname{Coker} g \xrightarrow{v_2} \operatorname{Coker} h$$

es exacta, donde u_1, v_1, u_2 y v_2 son las inducidas por u, v, u' y v', respectivamente. Además:

1. u_1 será monomorfismo si u lo es.

2. v_2 será epimorfismo si v' lo es.

Lema 1.2.4. [A, IX Lemme 3.3](Lema de Décalage) Dados dos Λ-módulos M y N, tenemos los siguientes isomorfismos funtoriales:

1. $\mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(M,N) \cong \mathrm{Ext}^n_\Lambda(\Omega(M),N) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Omega^n(M),N)$ para todo $n \geq 0$.

2. $\mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(M,N) \cong \mathrm{Ext}^n_\Lambda(M,\Omega^{-1}(N)) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,\Omega^{-n}(N))$ para todo $n \geq 0$.

Finalizamos esta sección con una proposición, que a pesar de ser un hecho conocido, incluimos aquí su demostración para facilitar la lectura de este trabajo:

Proposición 1.2.5. Sean M un Λ-módulo no proyectivo y X un sumando directo no nulo de $\Omega^n(M)$ con $n \leq \mathrm{dp}(M)$. Entonces $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(M,X) \neq 0$.

Demostración:

Mostremos la afirmación para $n=1$, es decir, mostremos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,X) \neq 0$ donde X es sumando directo de $\Omega(M)$. Consideremos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & \Omega(M) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "u"] & P_0(M) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "v"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\epsilon : & 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\iota'"] & PO \arrow[r, "\pi'"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde PO es el push-out de ι y u, con $u : \Omega(M) \to X$ la proyección canónica e $\iota : \Omega(M) \to P_0(M)$ la inclusión canónica. Mostraremos que la sucesión exacta ϵ es no nula y por lo tanto que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,X) \neq 0$.

Supongamos por el absurdo que la sucesión ϵ es cero, es decir, ϵ se parte. Luego $PO \cong X \oplus M$ y existe un morfismo $\pi_X : PO \to X$ tal que $\pi_X \iota' = Id_X$. Considerando las composiciones $\pi_X\, v : P_0(M) \to X$ y $\iota\, \iota_X : X \to P_0(M)$, donde $\iota_X : X \to \Omega(M)$ es la inclusión canónica pues por hipótesis X es sumando directo de $\Omega(M)$, se tiene que:

$$(\pi_X\, v)(\iota\, \iota_X) = \pi_X\,(v\,\iota)\,\iota_X = \pi_X\,(\iota' u)\,\iota_X = (\pi_X\,\iota')\,(u\,\iota_X) = Id_X\, Id_X = Id_X. \qquad (*)$$

Luego X es sumando directo de $P_0(M)$, y por tanto $P_0(M) = Q \oplus X$. Como por $(*)$ $X \subseteq \mathrm{Im}(\iota|_X\, \iota_X)$ e $\mathrm{Im}(\iota|_X\, \iota_X) \subseteq \mathrm{Im}(\iota|_X)$, se tiene que $X \subseteq \iota|_X(X)$, y como ι es monomorfismo tenemos que $\iota(X) = X$. Lo que contradice el hecho de que $P_0(M)$ es la cubierta proyectiva de M. Por lo tanto, la sucesión ϵ no es cero y así $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,X) \neq 0$.

Mostremos el caso general, sea X sumando directo no nulo de $\Omega^n(M)$ con $n \leq \mathrm{dp}(M)$. Como X es sumando directo de $\Omega(\Omega^{n-1}(M))$, por el caso $n=1$, se tiene que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Omega^{n-1}(M),X) \neq 0$, luego por el Lema de Décalage $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(M,X) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Omega^{n-1}(M),X) \neq 0$. □

1.3. Álgebras de caminos.

Un **carcaj** Q es una cuádrupla (Q_0, Q_1, s, t) donde Q_0 y Q_1 son conjuntos, cuyos elementos se llamarán **vértices** y **flechas** respectivamente, junto con dos aplicaciones $s : Q_1 \to Q_0$ y $t : Q_1 \to Q_0$ tal que $s(\alpha) = i$ y $t(\alpha) = j$ para cada flecha $\alpha : i \to j$. Un carcaj Q se dirá finito si Q_0 y Q_1 lo son.

Un **camino** γ de longitud n en el carcaj Q será una sucesión de n flechas $\gamma = \alpha_n \cdots \alpha_1$ donde $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ para $1 \leq i < n$, $l(\gamma) = n$. A todo vértice $i \in Q_0$ se le asociará un camino de longitud cero llamado camino trivial y notado e_i. Además, dado un camino γ, se notará con $s(\gamma)$ y $t(\gamma)$ al vértice de origen del camino γ y al vértice de término del camino γ, respectivamente. Así, si γ es un camino trivial, es decir, $\gamma = e_i$ entonces $s(e_i) = t(e_i) = i$, sino, $\gamma = \alpha_n \cdots \alpha_1$ entonces $s(\gamma) = s(\alpha_1)$ y $t(\gamma) = t(\alpha_n)$. A un camino no trivial γ de longitud n, tal que $s(\gamma) = t(\gamma)$ lo llamaremos **ciclo orientado o n-ciclo**, a los 1-ciclo los llamaremos lazos.

Sea k un cuerpo, se define el **álgebra de caminos** kQ como la k-álgebra que tiene como base del k-espacio vectorial a los caminos de Q, donde el producto de los básicos está dado por las siguientes reglas:

$$e_i \cdot p = \begin{cases} p & \text{si } t(p) = i \\ 0 & \text{si } t(p) \neq i \end{cases}$$

y

$$p \cdot q = \begin{cases} pq & \text{si } t(q) = s(p) \\ p & \text{si } q = e_{s(p)} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde p y q son caminos en kQ, y donde pq es la concatenación de q y p.

Un resultado importante de las álgebras de caminos es el siguiente.

Proposición 1.3.1. [ASS, II Corollary 1.11] Sea Q un carcaj finito, conexo y sin ciclos orientados. El álgebra de caminos kQ es una k-álgebra de dimensión finita, asociativa, conexa y básica.

Se notará con F al ideal bilátero de kQ generado por las flechas. Se dirá que un ideal bilátero I es **admisible** si:

$$F^m \subseteq I \subseteq F^2, \text{ para algún } m \geq 2$$

.

Una **relación** sobre Q con coeficientes en k será una combinación k-lineal de caminos $\sigma = a_1\gamma_1 + \cdots + a_n\gamma_n$ donde los caminos $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ tienen el mismo origen y el mismo término. Si ρ es un conjunto finito de relaciones $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\}$ al par (Q, ρ) se lo llamará **carcaj con relaciones**, al cual se le asociará el álgebra $k(Q, \rho) = kQ/\langle\rho\rangle$.

Cuando el carcaj admite ciclos se tiene la siguiente proposición:

Proposición 1.3.2. [ASS, II Corollary 2.12] Sea Q un carcaj finito y conexo, y sea I un ideal admisible. Entonces la k-álgebra kQ/I es básica, conexa y tiene dimensión finita.

El siguiente teorema muestra que las álgebras de caminos cumplen un rol muy importante cuando k es algebraicamente cerrado.

Teorema 1.3.3. [ASS, II Theorem 3.7] Sea Λ un álgebra de dimensión finita, básica y conexa sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado. Entonces existe un ideal admisible I tal que $\Lambda \cong kQ/I$, donde Q es un carcaj conexo y finito.

Dado un carcaj Q una **representación** $V = (V_i, f_\alpha)_{i\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ de Q sobre un cuerpo k, es una familia de k-espacios vectoriales $\{V_i\}_{i\in Q_0}$ junto con k-transformaciones lineales $\{f_\alpha : V_{s(\alpha)} \to V_{t(\alpha)}\}$ para cada flecha $\alpha \in Q_1$. Dadas dos representaciones $V = (V_i, f_\alpha)_{i\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ y $V' = (V'_i, f'_\alpha)_{i\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ del carcaj Q, un morfismo de representaciones es un conjunto de transformaciones k-lineales $\{\phi_i : V_i \to V'_i\}_{i\in Q_0}$ tales que, para cada fecha $\alpha \in Q_1$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "\phi_i"] & V_j \arrow[d, "\phi_j"] \\ V'_i \arrow[r, "f'_\alpha"] & V'_j \end{tikzcd} \quad .$$

Por último, una representación de un carcaj con relaciones (Q, ρ), es una representación $V = (V_i, f_\alpha)_{i\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ de Q tal que $f_\sigma = 0$ para toda relación $\sigma \in \rho$, donde $f_\sigma = a_1 f_{\gamma_1} + \cdots + a_n f_{\gamma_n}$ si $\sigma = a_1\gamma_1 + \cdots + a_n\gamma_n$, siendo f_{γ_i} la composición natural de las transformaciones lineales asociadas a cada camino γ_i. Se notará con $\mathrm{rep}_k(Q, \rho)$ a la categoría de las representaciones de dimensión finita del carcaj con relaciones (Q, I).

El siguiente teorema se utilizará implicitamente a lo largo de todo este trabajo, especialmente en la construcción de ejemplos.

Teorema 1.3.4. [ASS, III Theorem 1.6] Las categorías $\mathrm{rep}_k(Q, I)$ y $\mathrm{mod}\, kQ/I$ son equivalentes.

Bajo esta equivalencia, si $\Lambda = kQ/I$, entonces los Λ-módulos simples, Λ-módulos proyectivos indescomponibles y Λ-módulos inyectivos indescomponibles, presentan una sencilla descripción, ver [ASS, III.2].

1.4. Funciones de Igusa-Todorov.

En esta sección se recordarán las definiciones y algunas propiedades de las funciones definidas por K. Igusa y G. Todorov en [IT]. Incluiremos en esta sección todas las demostraciones relacionadas con dichas funciones debido al objetivo de esta tesis.

Sea K_0 el cociente del grupo abeliano libre generado por los símbolos de la forma $[M]$, donde $M \in \mathrm{mod}\, \Lambda$, por el subgrupo generado por:

1. $[A] - [B] - [C]$ si $A \cong C \oplus B$, con A, B, C en $\mathrm{mod}\, \Lambda$.

2. $[P]$ si P es un Λ-módulo proyectivo.

Observar que K_0 es el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfía de los Λ-módulos indescomponibles no proyectivos. Luego, por la Observación 1.1.1, la sizigia Ω define un morfismo de grupos $\mathbf{\Omega} : K_0 \to K_0$ dado por $\mathbf{\Omega}([M]) = [\Omega(M)]$ para todo $[M]$ en K_0.

Dado un Λ-módulo M finitamente generado, se notará con $\langle \mathrm{add}\, M \rangle$ al subgrupo de K_0 generado por los sumandos directos indescomponibles de M. Notar que $\langle \mathrm{add}\, M \rangle$ es libre por ser subgrupo de un grupo libre.

Para todo grupo libre X, $\mathrm{rg}\, X$ notará el rango de X. Como el rango de la imagen de un grupo libre X por un homomorfismo de grupos es menor o igual que el rango de X, se tiene que $\mathrm{rg}\, \langle \mathrm{add}\, M \rangle \geq \mathrm{rg}\, \mathbf{\Omega}(\langle \mathrm{add}\, M \rangle) \geq \cdots \geq \mathrm{rg}\, \mathbf{\Omega}^n(\langle \mathrm{add}\, M \rangle) \geq \cdots$. Luego, ya que $\mathrm{rg}\, \langle \mathrm{add}\, M \rangle$ es finito, por el principio de buena ordenación, existe un entero no negativo $\phi(M)$ tal que $\mathrm{rg}\, \mathbf{\Omega}^{\phi(M)}(\langle \mathrm{add}\, M \rangle) = \mathrm{rg}\, \mathbf{\Omega}^{\phi(M)+s}(\langle \mathrm{add}\, M \rangle)$ para todo natural s. Así se tiene definida una función $\phi : \operatorname{mod}\Lambda \to \mathbb{N}\cup\{0\}$, la cual se llama **función ϕ de Igusa-Todorov** o **primera función de Igusa-Todorov**.

Notar que $\operatorname{rg}\mathbf{\Omega}^{\phi(M)}(\langle \operatorname{add} M\rangle) = \operatorname{rg}\mathbf{\Omega}^{\phi(M)+s}(\langle \operatorname{add} M\rangle)$ para todo natural s, si y solo si, $\mathbf{\Omega} : \mathbf{\Omega}^{\phi(M)+s}(\langle \operatorname{add} M\rangle) \to \mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega}^{\phi(M)+s}(\langle \operatorname{add} M\rangle))$ es un isomorfismo para todo natural s, si y solo si, $\mathbf{\Omega} : \mathbf{\Omega}^{\phi(M)+s}(\langle \operatorname{add} M\rangle) \to \mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega}^{\phi(M)+s}(\langle \operatorname{add} M\rangle))$ es un monomorfismo para todo natural s. Observar que la sucesión de enteros no negativos $\{\operatorname{rg}\mathbf{\Omega}^{n}(\langle \operatorname{add} M\rangle)\}_{n\geq 0}$ se vuelve constante a partir de $n = \phi(M)$.

La siguiente proposición resume las propiedades básicas de la función ϕ:

Proposición 1.4.1. [IT, Lemma 2] Dados los módulos M y N en $\operatorname{mod}\Lambda$, valen las siguientes propiedades:

1. Si $\operatorname{dp}(M) < \infty$ entonces $\phi(M) = \operatorname{dp}(M)$.
2. Si M es indescomponible con $\operatorname{dp}(M) = \infty$ entonces $\phi(M) = 0$.
3. $\phi(M) \leq \phi(M \oplus N)$.
4. $\phi(sM) = \phi(M)$ para todo $s \in \mathbb{N}$, donde sM indica la suma directa de M s veces.

Demostración:

1. Sea M un módulo en $\operatorname{mod}\Lambda$ tal que $\operatorname{dp}(M) = n < \infty$. Como $\operatorname{dp}(M) = n$, existe una resolución proyectiva minimal de M de la forma:

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

donde $\Omega^{n-1}(M) = \ker f_{n-2}$ es no proyectivo. Como $\Omega^{n-1}(M)$ es un módulo no proyectivo se tiene que $[\Omega^{n-1}M] \neq 0$ en K_0, luego $\operatorname{rg}\mathbf{\Omega}^{n-1}(\langle \operatorname{add} M\rangle) \neq 0$, pues $[\Omega^{n-1}M] = \mathbf{\Omega}^{n-1}([M]) \in \mathbf{\Omega}^{n-1}(\langle \operatorname{add} M\rangle)$. Por otro lado, como $\operatorname{dp}(M) = n$, se tiene que $\Omega^{n}(M)$ es proyectivo y que $\Omega^{n+l}(M) = 0$ para todo $l \geq 0$, luego $[\Omega^{n+l}(M)] = 0$ en K_0 y $\operatorname{rg}\mathbf{\Omega}^{n+l}(\langle \operatorname{add} M\rangle) = 0$ para todo $l \geq 0$. Así, $\phi(M) = n = \operatorname{dp}(M)$.

2. Sea M un Λ-módulo indescomponible con $\operatorname{dp}(M) = \infty$. Ya que M es un módulo no proyectivo indescomponible se tiene que $\operatorname{rg}\langle \operatorname{add} M\rangle = 1$. Asimismo, como $\operatorname{dp}(M) = \infty$, $\Omega^{n}(M)$ es no proyectivo para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $\operatorname{rg}\mathbf{\Omega}^{n}(\langle \operatorname{add} M\rangle) \neq 0$ y por lo tanto $\operatorname{rg}\mathbf{\Omega}^{n}(\langle \operatorname{add} M\rangle) = 1$. Así, $\phi(M) = 0$.

3. Sean M y N módulos en mod Λ. Por lo notado luego de la definición de la función ϕ, se tiene que $\mathbf{\Omega} : \mathbf{\Omega}^{\phi(M\oplus N)+s}(\langle \text{add}\,(M \oplus N)\rangle) \to \mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega}^{\phi(M\oplus N)+s}(\langle \text{add}\,(M \oplus N)\rangle))$ es un monomorfismo para todo $s \geq 0$. Luego, como los grupos $\mathbf{\Omega}^n\langle \text{add}\, M\rangle$ son subgrupos de $\mathbf{\Omega}^n\langle \text{add}\,(M \oplus N)\rangle$ para todo $n \geq 0$, se tiene que $\mathbf{\Omega} : \mathbf{\Omega}^{\phi(M\oplus N)+s}(\langle \text{add}\,(M)\rangle) \to \mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega}^{\phi(M\oplus N)+s}(\langle \text{add}\,(M)\rangle))$ es un monomorfismo para todo $s \geq 0$. Por lo tanto, $\phi(M) \leq \phi(M \oplus N)$.

4. Como los sumandos directos indescomponibles de M y sM son los mismos, se tiene que $\langle \text{add}\, M\rangle = \langle \text{add}\, sM\rangle$. Luego $\text{rg}\,\mathbf{\Omega}^n(\langle \text{add}\, M\rangle)$ $=\text{rg}\,\mathbf{\Omega}^n(\langle \text{add}\, sM\rangle)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y así, $\phi(M) = \phi(sM)$ para todo $s \in \mathbb{N}$.

$\square$

A continuación definiremos la **segunda función de Igusa-Todorov**, también llamada **función ψ de Igusa-Todorov**. Para tal fin, usaremos la notación $N|L$ para indicar que N es sumando directo de L.

Para todo $M \in \text{mod}\,\Lambda$ se define $\psi : \text{mod}\,\Lambda \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ como:

$$\psi(M) = \phi(M) + \text{máx}\{\text{dp}(N) :\ N|\Omega^{\phi(M)}(M) \,\text{con}\, \text{dp}(N) < \infty\},$$

La función ψ tiene las siguientes propiedades:

Proposición 1.4.2. [IT, Lemma 3] Sean M, $N \in \text{mod}\,\Lambda$. Entonces:

1. Si $\text{dp}(M) < \infty$ entonces $\psi(M) = \text{dp}(M)$.

2. $\psi(M) \leq \psi(M \oplus N)$.

3. $\psi(sM) = \psi(M)$ para todo $s \in \mathbb{N}$.

4. Si $N|\Omega^n M$ tal que $n \leq \phi(M)$ y $\text{dp}(N) < \infty$ entonces $\text{dp}N + n \leq \psi(M)$.

Demostración:

1. Si M es un Λ-módulo con $\text{dp}(M) = n < \infty$ entonces, por la Proposición 1.4.1.1. $\phi(M) = n$. Además, todos los sumandos de $\Omega^n(M)$ son proyectivos, pues $\text{dp}(M) = n$,

y por tanto de dimensión proyectiva igual a 0. Por lo tanto $\text{máx}\{\text{dp}(N) : N|\Omega^{\phi(M)}(M) \,\text{con}\, \text{dp}(N) < \infty\} = 0$. Así:

$$\psi(M) = \phi(M) + 0 = \text{dp}(M).$$

2. Dados M y N Λ-módulos sabemos que $\phi(M) \leq \phi(M \oplus N)$, por la Proposición 1.4.1.3.. Luego existe un entero $s \geq 0$ tal que $\phi(M) + s = \phi(M \oplus N)$.

   Si $\text{máx}\{\text{dp}(X) : X|\Omega^{\phi(M)}(M) \,\text{con}\, \text{dp}(X) < \infty\} = 0$ entonces $\psi(M) = \phi(M)$ y la desigualdad vale por Proposición 1.4.1.3. y la definición de ψ.

   Si $\text{máx}\{\text{dp}(X) : X|\Omega^{\phi(M)}(M) \,\text{con}\, \text{dp}(X) < \infty\} \neq 0$ entonces existe un módulo X' tal que $X'|\Omega^{\phi(M)}(M)$ y $\text{dp}(X') = \text{máx}\{\text{dp}(X) : X|\Omega^{\phi(M)}(M) \,\text{con}\, \text{dp}(X) < \infty\}$. Luego se obtiene que

$$\text{dp}(X') = \text{máx}\{\text{dp}(X) : X|\Omega^{\phi(M)}(M) \,\text{con}\, \text{dp}(X) < \infty\} \leq s + \text{dp}(\Omega^s(X')).$$

   Por otro lado, se tiene que

$$\text{dp}(\Omega^s(X')) \leq \text{máx}\{\text{dp}(Y) : Y|\Omega^{\phi(M\oplus N)}(M) \,\text{con}\, \text{dp}(Y) < \infty\}$$

   ya que $\Omega^s(X')|\Omega^{\phi(M)+s}(M) = \Omega^{\phi(M\oplus N)}(M)$.

   Más aún, como:

$$\text{máx}\{\text{dp}(Y) : Y|\Omega^{\phi(M\oplus N)}(M) \,\text{con}\, \text{dp}(Y) < \infty\} \leq$$

$$\text{máx}\{\text{dp}(Y) : Y|\Omega^{\phi(M\oplus N)}(M \oplus N) \,\text{con}\, \text{dp}(Y) < \infty\}$$

   se tiene que $\text{dp}(\Omega^s(X')) \leq \text{máx}\{\text{dp}(Y) : Y|\Omega^{\phi(M\oplus N)}(M \oplus N) \,\text{con}\, \text{dp}(Y) < \infty\}$.

   Por lo tanto, vale que:

$$\text{máx}\{\text{dp}(X) : X|\Omega^{\phi(M)}(M) \,\text{con}\, \text{dp}(X) < \infty\} \leq$$

$$s + \text{máx}\{\text{dp}(Y) : Y|\Omega^{\phi(M\oplus N)}(M \oplus N) \,\text{con}\, \text{dp}(Y) < \infty\}.$$

   Finalmente obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\phi(M) + \text{máx}\{\text{dp}(X) : X|\Omega^{\phi(M)}(M) \,\text{con}\, \text{dp}(X) < \infty\} \leq$$

$$\phi(M) + s + \max\{\mathrm{dp}(Y) : Y|\Omega^{\phi(M\oplus N)}(M \oplus N) \,\mathrm{con}\, \mathrm{dp}(Y) < \infty\}.$$

Esto es, $\psi(M) \leq \psi(M \oplus N)$.

3. Sean $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ y $s \in \mathbb{N}$. Por Proposición 1.4.1.4., vale que $\phi(M) = \phi(sM)$. Así, $\max\{\mathrm{dp}(X) : X|\Omega^{\phi(M)}(M),\, \mathrm{dp}(X) < \infty\} = \max\{\mathrm{dp}(X') : X'|\Omega^{\phi(sM)}(sM),\, \mathrm{dp}(X') < \infty\}$. Por lo tanto, $\psi(M) = \psi(sM)$.

4. Sean M y N Λ-módulos tales que $N|\Omega^n(M)$ donde $n \leq \phi(M)$ y $\mathrm{dp}(N) < \infty$.

   Si $\mathrm{dp}(N) < \phi(M) - n$ entonces $\mathrm{dp}(N) + n < \phi(M) \leq \psi(M)$.

   Caso contrario, $\Omega^{\phi(M)-n}(N)|\Omega^{\phi(M)}(M)$, con $\mathrm{dp}(\Omega^{\phi(M)-n}(N)) < \infty$.

   Luego
   $$\mathrm{dp}(\Omega^{\phi(M)-n}(N)) \leq \max\{\mathrm{dp}(X) : X|\Omega^{\phi(M)}(M),\, \mathrm{dp}(X) < \infty\}$$

   y entonces

   $$\phi(M)-n+\mathrm{dp}(\Omega^{\phi(M)-n}(N)) \leq \phi(M)-n+\max\{\mathrm{dp}(X) : X|\Omega^{\phi(M)}(M),\, \mathrm{dp}(X) < \infty\}.$$

   Además, como $\mathrm{dp}(N) \leq \mathrm{dp}(\Omega^{\phi(M)-n}(N)) + \phi(M) - n$, se tiene que

   $$\mathrm{dp}(N) \leq \phi(M) - n + \max\{\mathrm{dp}(X) : X|\Omega^{\phi(M)}(M),\, \mathrm{dp}(X) < \infty\},$$

   o sea,

   $$\mathrm{dp}(N) + n \leq \phi(M) + \max\{\mathrm{dp}(X) : X|\Omega^{\phi(M)}(M),\, \mathrm{dp}(X) < \infty\}.$$

   Por lo tanto $\mathrm{dp}(N) + n \leq \psi(M)$.

□

A continuación se presenta el Lema de Fitting, el cual fue utilizado para demostrar uno de los teoremas centrales de la función ψ en el trabajo de K. Igusa y G. Todorov.

Lema 1.4.3. (Lema de Fitting) Sea M un módulo sobre un anillo noetheriano R, $f : M \to M$ un endomorfismo y sea X un submódulo finitamente generado de M. Entonces:

1. Existe un entero $n_f(X)$ tal que $f : f^m(X) \to f^{m+1}(X)$ es un isomorfismo para todo $m \geq n_f(X)$.

2. Si Y es un submódulo de X entonces $n_f(Y) \leq n_f(X)$.

3. Si R un álgebra de Artin, X un módulo finitamente generado sobre R y $f : X \to X$ un endomorfismo, existe una descomposición en suma directa $X = Z \oplus Y$ tal que $Y = \mathrm{Im} f^m$ y $Z = \mathrm{Ker} f^m$ para todo $m \geq n_f(X)$.

   Además, el endomorfismo $f : \mathrm{Ker}\, f^m \oplus \mathrm{Im}\, f^m \to \mathrm{Ker}\, f^m \oplus \mathrm{Im}\, f^m$ puede verse como la matriz:

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{22} \end{pmatrix}$$

   donde $f_{11} : \mathrm{Ker}\, f^m \to \mathrm{Ker}\, f^m$ es un morfismo nilpotente y $f_{22} : \mathrm{Im}\, f^m \to \mathrm{Im}\, f^m$ es un isomorfismo.

Demostración:

1. Para cada natural i se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow K_i \xrightarrow{j_i} X \xrightarrow{f^i} f^i(X) \longrightarrow 0$$

   donde $K_i = \mathrm{Ker}(f^i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Luego, se obtiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_i \arrow[r, "j_i"] \arrow[d, "u_i"] & X \arrow[r, "f^i"] \arrow[d, "id"] & f^i(X) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_{i+1} \arrow[r, "j_{i+1}"] & X \arrow[r, "f^{i+1}"] & f^{i+1}(X) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

   Como $id\, j_i = j_{i+1}\, u_i$ es un monomorfismo, se tiene que u_i es un monomorfismo para cada $i \in \mathbb{N}$. Luego, se tiene la siguiente cadena de módulos $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_i \subseteq \cdots X$. Como X es un módulo noetheriano, existe un natural n tal que

$$K_n = K_{n+1} = \cdots = K_{n+h} = \cdots$$

para todo $h \in \mathbb{N}$. Finalmente, como los morfismos $u_m : K_m \to K_{m+1}$ son isomorfismos para todo $m \geq n$, pues son restricciones de la identidad y $K_m = K_{m+1}$ para todo $m \geq n$, se tiene por el Lema de los 5, que los morfismos $f : f^m(X) \to f^{m+1}(X)$ son isomorfismos para todo $m \geq n$.

2. Sea Y un submódulo de X. Como para todo $m \geq n_f(X)$, $f : f^m(X) \to f^{m+1}(X)$ es un isomorfismo, se obtiene que $f : f^m(Y) \to f^{m+1}(Y)$ es un isomorfismo para todo $m \geq n_f(X)$. Luego $n_f(Y) \leq n_f(X)$.

3. Del diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f^i \arrow[r, "j_i"] \arrow[d, "u_i"] & X \arrow[r, "f^i"] \arrow[d, "id"] & \operatorname{Im} f^i(X) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f^{i+1} \arrow[r, "j_{i+1}"] & X \arrow[r, "f^{i+1}"] & \operatorname{Im} f^{i+1}(X) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Tenemos las cadenas de módulos:

$$X \supseteq \operatorname{Im} f^1 \supseteq \operatorname{Im} f^2 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{Im} f^i \supseteq \cdots$$

y

$$\operatorname{Ker} f^1 \subseteq \operatorname{Ker} f^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker} f^i \subseteq \cdots \subseteq X.$$

Como R es un álgebra de Artin y X es un R-módulo finitamente generado se tiene que X es un módulo artiniano y noetheriano, luego existen n_1 y n_2 tales que $\operatorname{Ker} f^{n_1} = \operatorname{Ker} f^{n_1+h}$ para todo $h \geq 0$ e $\operatorname{Im} f^{n_2} = \operatorname{Im} f^{n_2+t}$ para todo $t \geq 0$. Luego para $n = \max\{n_1, n_2\}$ se tiene que $\operatorname{Ker} f^m = \operatorname{Ker} f^n$ e $\operatorname{Im} f^m = \operatorname{Im} f^n$ para todo $m \geq n$.

Mostremos que $X = \operatorname{Ker} f^m \oplus \operatorname{Im} f^m$ para todo $m \geq n$.

Veamos que $\operatorname{Ker} f^m \cap \operatorname{Im} f^m = 0$ para todo $m \geq n$. Sea $x \in \operatorname{Ker} f^m \cap \operatorname{Im} f^m$ para $m \geq n$, esto es, por un lado $f^m(x) = 0$ y por otro existe y tal que $f^m(y) = x$. Luego $f^{2m}(y) = f^m(f^m(y)) = f^m(x) = 0$, entonces $y \in \operatorname{Ker} f^{2m} = \operatorname{Ker} f^m$, de donde $x = f^m(y) = 0$.

Se probará ahora que $X = \operatorname{Ker} f^m + \operatorname{Im} f^m$ para todo $m \geq n$. Sea $x \in X$, como $f^m(x) \in \operatorname{Im} f^m$ con $m \geq n$, se tiene que $f^m(x) = f^{2m}(x')$, con lo cual,

$f^m(x - f^m(x')) = 0$. Luego $x - f^m(x') \in \operatorname{Ker} f^m$, por lo que $x = (x - f^m(x')) + f^m(x')$ y entonces $x \in \operatorname{Ker} f^m + \operatorname{Im} f^m$. Por lo tanto $X = \operatorname{Ker} f^m + \operatorname{Im} f^m$.

Se ha mostrado que $X = \operatorname{Ker} f^m \oplus \operatorname{Im} f^m$.

El endomorfismo $f : \operatorname{Ker} f^m \oplus \operatorname{Im} f^m \to \operatorname{Ker} f^m \oplus \operatorname{Im} f^m$ puede verse como la matriz:

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

donde $f_{11} : \operatorname{Ker} f^m \to \operatorname{Ker} f^m$, $f_{12} : \operatorname{Im} f^m \to \operatorname{Ker} f^m$, $f_{21} : \operatorname{Ker} f^m \to \operatorname{Im} f^m$ y $f_{22} : \operatorname{Im} f^m \to \operatorname{Im} f^m$, siendo cada f_{ij} la restricción de f.

Como $f(\operatorname{Ker} f^m) \subseteq \operatorname{Ker} f^{m+1} = \operatorname{Ker} f^m$, $f(\operatorname{Im} f^m) = \operatorname{Im} f^{m+1} = \operatorname{Im} f^m$ y $\operatorname{Ker} f^m \cap \operatorname{Im} f^m = 0$, se tiene que:

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{22} \end{pmatrix}.$$

Como f_{11} y f_{22} son las restricciones de f a $\operatorname{Ker} f^m$ e $\operatorname{Im} f^m$, respectivamente, se tiene que f_{11} es nilpotente, pues si $x \in \operatorname{Ker} f^m$ entonces $f_{11}^m(x) = f^m(x) = 0$, y f_{22} es un isomorfismo por lo mostrado en ítem 1.

□

Los siguientes dos resultados muestran la relación entre la dimensión proyectiva de un módulo finitamente generado y la segunda función de Igusa-Todorov en una sucesión exacta corta.

Teorema 1.4.4. [IT, Theorem 4] Si $\epsilon :\ 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta en $\operatorname{mod} \Lambda$ con $\operatorname{dp}(C) < \infty$ entonces $\operatorname{dp}(C) \leq \psi(B \oplus A) + 1$.

Demostración: Como $\operatorname{dp}(C) < \infty$ entonces $\mathbf{\Omega}^{\operatorname{dp}(C)}([A]) = \mathbf{\Omega}^{\operatorname{dp}(C)}([B])$. Luego, para $n = \min\{l \in \mathbb{N} \cup 0 : \mathbf{\Omega}^l([\mathrm{A}]) = \mathbf{\Omega}^l([\mathrm{B}])\}$ se tiene que $n \leq \operatorname{dp}(C)$.

Por otro lado, existen Λ-módulos X e Y, no simultaneamente nulos, tales que $X|\Omega^{n-1}(A)$, $Y|\Omega^{n-1}(B)$, los sumandos directos indescomponibles de X e Y no son isomorfos dos a dos y $\mathbf{\Omega}^{n-1}\langle \operatorname{add}(A \oplus B)\rangle = \langle \operatorname{add}(X \oplus Y)\rangle$. Además, como $\mathbf{\Omega}^n([A]) = \mathbf{\Omega}^n([B])$ se tiene que

$\mathbf{\Omega}^n\langle \text{add}\,(A\oplus B)\rangle = \mathbf{\Omega}(\langle \text{add}\,(X)\rangle)$. Luego, $\text{rg}\mathbf{\Omega}^n\langle \text{add}\,(A\oplus B)\rangle < \text{rg}\mathbf{\Omega}^{n-1}\langle \text{add}\,(A\oplus B)\rangle$ y por lo tanto, $n \leq \phi(A\oplus B)$.

Como $[\Omega^n(A)] = [\Omega^n(B)]$ existe un Λ-módulo X tal que $\Omega^n(A) = X\oplus P$ y $\Omega^n(B) = X\oplus Q'$, donde P y Q' son Λ-módulos proyectivos. Luego, al considerar las sizigias enésimas de la sucesión exacta ϵ, se obtiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow X\oplus P \xrightarrow{F} X\oplus Q \xrightarrow{H} \Omega^n(C) \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

donde $Q'|Q$, Q Λ-módulo proyectivo, $F = \begin{pmatrix} f & g_1 \\ g_2 & g_3 \end{pmatrix}$ y $H = (h, h')$. Como $f \in \text{End}_\Lambda(X)$ por el Lema de Fitting, se obtiene que $X = Y\oplus Z$, con $Y = \text{Im}\, f^m$ y $Z = \text{Ker}\, f^m$ para algún $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, y que

$$f = \begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$$

donde f' es un isomorfismo y g es nilpotente.

Se afirma que valen las siguientes desigualdades:

1. $\text{dp}(Z) < \infty$.

2. $\text{dp}(\Omega^n(C)) \leq \text{dp}(Z) + 1$.

Dado un Λ-módulo M, consideremos la sucesión exacta que resulta de aplicar el funtor $\text{Hom}_\Lambda(-, M)$ a la sucesión exacta corta (1):

$$\cdots \longrightarrow \text{Ext}^k_\Lambda(X,M) \xrightarrow{f_k^*} \text{Ext}^k_\Lambda(X,M) \xrightarrow{\sigma_k} \text{Ext}^{k+1}_\Lambda(\Omega^n(C),M) \xrightarrow{h_{k+1}^*} \text{Ext}^{k+1}_\Lambda(X,M) \xrightarrow{f_{k+1}^*} \text{Ext}^{k+1}_\Lambda(X,M) \longrightarrow \cdots$$

donde $f_k^* = \begin{pmatrix} f_k'^* & 0 \\ 0 & g_k^* \end{pmatrix}$, $f_k'^* = \text{Ext}^k_\Lambda(f', M)$ y $g_k^* = \text{Ext}^k_\Lambda(g, M)$.

Para mostrar 1, supongamos por el absurdo que $\text{dp}(Z) = \infty$, luego para k arbitrariamente grande existe un Λ-módulo M tal que $\text{Ext}^k_\Lambda(Z, M) \neq 0$. Como g es nilpotente entonces $g_k^* = \text{Ext}^k_\Lambda(g, M)$ también es nilpotente. Así, g_k^* no es sobreyectivo y por lo tanto f_k^* tampoco lo es. Luego $\text{Ext}^{k+1}_\Lambda(\Omega^n(C), M) \neq 0$ y $\text{Ext}^t_\Lambda(\Omega^n(C), -) \neq 0$ para t arbitrariamente grande, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, $\text{dp}(Z) < \infty$.

La desigualdad 2. es inmediata si $\mathrm{Ext}_\Lambda^{k+1}(\Omega^n(C), M) = 0$ para todo $k \geq 0$. Supongamos que $\mathrm{Ext}_\Lambda^{k+1}(\Omega^n(C), M) \neq 0$ para algún $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y M en mod Λ. Luego, $\sigma_k \neq 0$ o $h_{k+1}^* \neq 0$.

Si $\sigma_k \neq 0$ entonces f_k^* no es sobreyectivo, lo que implica que g_k^* tampoco lo es. Luego se tiene que $\mathrm{Ext}_\Lambda^k(Z, M) \neq 0$.

Si $h_{k+1}^* \neq 0$, entonces f_{k+1}^* no es un monomorfismo y por lo tanto g_{k+1}^* tampoco es monomorfismo. Luego $\mathrm{Ext}_\Lambda^{k+1}(Z, M) \neq 0$.

Por lo tanto $\mathrm{dp}(\Omega^n(C)) \leq \mathrm{dp}(Z) + 1$, pues si $\mathrm{Ext}_\Lambda^{k+1}(\Omega^n(C), M) \neq 0$ entonces $\mathrm{Ext}_\Lambda^k(Z, M) \neq 0$ o $\mathrm{Ext}_\Lambda^{k+1}(Z, M) \neq 0$.

Como Z es sumando directo de $\Omega^n(A)$ y $\Omega^n(A)$ es sumando directo $\Omega^n(A \oplus B)$ se tiene que Z es sumando directo de $\Omega^n(A \oplus B)$. Luego por ser $\mathrm{dp}(Z) < \infty$, se tiene que $\mathrm{dp}(Z) + n \leq \psi(A \oplus B)$, por Proposición 1.4.2.4.

Por lo tanto, usando la desigualdad 2., se tiene que

$$\mathrm{dp}(\Omega^n(C)) + n \leq \mathrm{dp}(Z) + n + 1 \leq \psi(A \oplus B) + 1.$$

Así, $\mathrm{dp}(C) \leq \psi(A \oplus B) + 1$. $\square$

Las desigualdades que daremos en el siguiente corolario fueron demostradas por Y. Wang.

Corolario 1.4.5. [Wa, Lemma 2] Sea $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en mod Λ.

1. Si $\mathrm{dp}(A) < \infty$ entonces $\mathrm{dp}(A) \leq \psi(\Omega(B) \oplus \Omega(C)) + 1$.

2. Si $\mathrm{dp}(B) < \infty$ entonces $\mathrm{dp}(B) \leq \psi(\Omega(A) \oplus \Omega^2(C)) + 2$.

Demostración: Mostraremos solo 1. pues 2. es similar. Supongamos que tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

donde $\mathrm{dp}(A) < \infty$. De la sucesión exacta anterior se obtiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & P_0(B) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & P_0(B) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Aplicando el Lema de la serpiente al diagrama anterior obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \Omega(B) \longrightarrow \Omega(C) \oplus Q \longrightarrow A \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

donde Q es un Λ-módulo proyectivo. La afirmación sigue de aplicar el Teorema 1.4.4 a la sucesión exacta (1) y del hecho de que $\psi(\Omega(B) \oplus \Omega(C) \oplus Q) = \psi(\Omega(B) \oplus \Omega(C))$ pues Q es proyectivo. □

Dada una sucesión exacta de Λ-módulos $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, el Teorema 1.4.4 nos plantea dos preguntas:

1. ¿Se cumple la desigualdad correspondiente si suponemos que el módulo del medio de la sucesión es el que tiene dimensión proyectiva finita? Es decir, si $\mathrm{dp}(B) < \infty$ ¿vale que $\mathrm{dp}(B) \leq \psi(A \oplus C) + 1$?.

2. ¿Se cumple la desigualdad del teorema para la función ϕ? Es decir, si $\mathrm{dp}(C) < \infty$ ¿vale que $\mathrm{dp}(C) \leq \phi(A \oplus B) + 1$?

Los siguientes ejemplos muestran que las respuestas a las preguntas anteriores son negativas.

Ejemplos 1.4.6. 1. Para dar respuesta a la primer pregunta consideremos el carcaj Q:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop left] \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3
\end{tikzcd}$$

Tomemos el álgebra $\Lambda = kQ/F^2$. Los Λ-módulos proyectivos indescomponibles se pueden representar por:

$$P_1 : \begin{smallmatrix} 1 \\ 1\,2 \end{smallmatrix} \qquad P_2 : \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \qquad P_3 : 3$$

Consideremos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0$$

Como la resolución proyectiva minimal de $\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ es:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[r] & {\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}} \arrow[r] & 0 \\
& & S_3 \arrow[ur] & & S_2 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

se tiene que $\mathrm{dp}(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}) = 2 < \infty$.

Además, $\psi(S_1) = 0$ pues S_1 es un Λ-módulo indescomponible de dimensión proyectiva infinita. Aplicando la Proposición 1.4.2.3. se tiene que $\psi(S_1 \oplus S_1) = \psi(2S_1) = \psi(S_1) = 0$.

Por lo tanto, la desigualdad $\mathrm{dp}(B) \leq \psi(A \oplus C) + 1$ no se verifica, ya que $\mathrm{dp}(B) = \mathrm{dp}(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}) = 2$, $\psi(A \oplus C) + 1 = \psi(S_1 \oplus S_1) + 1 = 0 + 1 = 1$ y $2 \nleq 1$.

2. Para ver que la respuesta a la segunda pregunta es negativa, consideremos el álgebra $\Lambda = kQ/I$, dada por el siguiente carcaj Q:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & 2 \arrow[d, "\alpha_3"] \\
3 \arrow[r, "\alpha_4"'] \arrow[ur, "\alpha_5"] & 4 \arrow[loop below, "\alpha_6"]
\end{tikzcd}$$

y el ideal $I = \langle \alpha_3\alpha_1,\ \alpha_3\alpha_5,\ \alpha_5\alpha_2,\ \alpha_6\alpha_4,\ \alpha_6^2 \rangle$. Podemos representar los Λ-módulos proyectivos indescomponibles de la siguiente manera:

$$P_1 : \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 3 & & 2 \\ 4 & & \end{smallmatrix} \qquad P_2 : \begin{smallmatrix}2\\4\\4\end{smallmatrix} \qquad P_3 : \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 4 & & 2\end{smallmatrix} \qquad P_4 : \begin{smallmatrix}4\\4\end{smallmatrix}$$

Consideremos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow S_3 \longrightarrow \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix} \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0$$

La resolución proyectiva minimal de S_1 es:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_4 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \oplus P_4 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_3 \oplus P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[r] & S_1 \arrow[r] & 0 \\
& & {\begin{smallmatrix}4\\4\end{smallmatrix} \oplus 0} \arrow[ur] & & {S_2 \oplus \begin{smallmatrix}4\\4\end{smallmatrix}} \arrow[ur] & & {\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix} \oplus S_2} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

de donde se obtiene que $\mathrm{dp}(S_1) = 3$.

Por otro lado las resoluciones proyectivas minimales de S_3 y $\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}$ son, respectivamente:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_4 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_4 \oplus P_4 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_4 \oplus P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_3 \arrow[r] & S_3 \arrow[r] & 0 \\
& & S_4 \oplus 0 \arrow[ur] & & S_4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\4\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & S_4 \oplus S_2 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_4 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_4 \oplus P_4 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_4 \oplus P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[r] & \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix} \arrow[r] & 0\,. \\
& & S_4 \oplus 0 \arrow[ur] & & S_4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\4\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & S_4 \oplus S_2 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Así obtenemos que, $\phi(S_3 \oplus \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}) = 1$ y por lo tanto

$$3 = \mathrm{dp}(S_1) \nleq \phi(S_3 \oplus \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}) + 1 = 1 + 1 = 2.$$

La siguiente proposición será de gran utilidad en esta tesis, pues relaciona las funciones de Igusa-Todorov de un Λ-módulo finitamente generado con su sizigia.

Proposición 1.4.7. [HLM, 3] Para todo módulo M en $\mathrm{mod}\,\Lambda$, valen las siguientes desigualdades:

1. $\phi(M) \leq \phi(\Omega(M)) + 1$.

2. $\psi(M) \leq \psi(\Omega(M)) + 1$.

Demostración:

1. Dado un Λ-módulo M, mostremos que el grupo $\mathbf{\Omega}(\langle \mathrm{add}\, M\rangle)$ es un subgrupo de $\langle \mathrm{add}\,\Omega(M)\rangle$. Sean $M_1, ..., M_r$ los sumandos directos indescomponibles no proyectivos de M, a menos de isomorfismos.

   Sea $x \in \langle \mathrm{add}\, M\rangle$, esto es, $x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i [M_i]$ con $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. Luego aplicando $\mathbf{\Omega}$ a x se obtiene:

$$\mathbf{\Omega}(x) = \mathbf{\Omega}(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i [M_i]) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{\Omega}([M_i]) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i [\Omega(M_i)]$$

donde cada $[\Omega(M_i)]$ pertenece a $\langle \operatorname{add}\Omega(M)\rangle$. Así, $x \in \langle \operatorname{add}\Omega(M)\rangle$. Por lo tanto $\mathbf{\Omega}(\langle \operatorname{add} M\rangle) \subseteq \langle \operatorname{add}\Omega(M)\rangle$.

Supongamos que $\phi(\Omega(M)) = n$, es decir, el primer momento en que la sucesión $\{\operatorname{rg}\mathbf{\Omega}^i(\langle \operatorname{add}\Omega(M)\rangle)\}_{i\geq 1}$ se estabiliza es para $i = n$. Como $\mathbf{\Omega}^{i+1}(\langle \operatorname{add} M\rangle)$ es un subgrupo de $\mathbf{\Omega}^i(\langle \operatorname{add}\Omega(M)\rangle)$, para todo $i \geq 1$, se tiene que la sucesión $\{\operatorname{rg}\mathbf{\Omega}^{i+1}(\langle \operatorname{add} M\rangle)\}_{i\geq 1}$ es estable para $i \geq n$. Luego, $\phi(M) \leq n+1 = \phi(\Omega(M)) + 1$.

2. Sea X un sumando directo del Λ-módulo $\Omega^{\phi(M)}(M)$ tal que $\operatorname{dp}(X) = \operatorname{máx}\{\operatorname{dp}(Y) : Y|\Omega^{\phi(M)}(M), \operatorname{dp}(Y) < \infty\}$. Luego, $\psi(M) = \phi(M) + \operatorname{dp}(X)$.

   Como $X|\Omega^{\phi(M)}(M) = \Omega^{\phi(M)-1}(\Omega(M))$ y $\phi(M) - 1 \leq \phi(\Omega(M))$ por el ítem 1., se tiene que $\operatorname{dp}(X) + \phi(M) - 1 \leq \psi(\Omega(M))$ por la Proposición 1.4.2.4.. Entonces, $\operatorname{dp}(X) + \phi(M) \leq \psi(\Omega(M)) + 1$ y por lo tanto $\psi(M) \leq \psi(\Omega(M)) + 1$.

$\square$

Las funciones de Igusa-Todorov ϕ y ψ nos proporcionan nuevas dimensiones sobre la categoría de módulos del álgebra Λ, la $\phi\text{-}\dim(\Lambda) = \sup\{\phi(M) : M \in \operatorname{mod}\Lambda\}$ y la $\psi\text{-}\dim(\Lambda) = \sup\{\psi(M) : M \in \operatorname{mod}\Lambda\}$, las cuales se llaman **ϕ-dimensión** de Λ y **ψ-dimensión** de Λ, respectivamente.

Recordando que la dimensión finitista de Λ, notada con fin $\dim(\Lambda)$, y la dimensión global de Λ, notada con gl $\dim(\Lambda)$, se definen de la siguiente manera $\operatorname{fin.dim}(\Lambda) = \sup\{\operatorname{dp}(M) : M \in \operatorname{mod}\Lambda \operatorname{con} \operatorname{dp}(M) < \infty\}$ y $\operatorname{gl.dim}(\Lambda) = \sup\{\operatorname{dp}(M) : M \in \operatorname{mod}\Lambda\}$, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.4.8. Sea Λ un álgebra de Artin. Entonces se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\operatorname{fin.dim}(\Lambda) \leq \phi\text{-}\dim(\Lambda) \leq \psi\text{-}\dim(\Lambda) \leq \operatorname{gl.dim}(\Lambda)$$

y

$$\psi\text{-}\dim(\Lambda) \leq 2\phi\text{-}\dim(\Lambda).$$

Demostración: Por la Proposición 1.4.1.1 sabemos que si $\operatorname{dp}(M) < \infty$ entonces $\operatorname{dp}(M) = \phi(M)$. Luego $\operatorname{fin.dim}(\Lambda) \leq \phi\text{-}\dim(\Lambda)$. Además, por la definición de la función ψ, se tiene que $\phi(M) \leq \psi(M)$ para todo módulo M en $\operatorname{mod}\Lambda$. Así ϕ-dim$(\Lambda) \leq \psi$-dim(Λ). Además, se verifica que ψ-dim$(\Lambda) \leq$ gl.dim(Λ), pues si dp$(M) < \infty$ entonces $\psi(M)$ =dp(M).

Por último, como para cada Λ-módulo M vale que

$$\psi(M) = \phi(M) + \text{máx}\{\text{dp}(N) :\ N|\Omega^{\phi(M)}(M) \,\text{con}\, \text{dp}(N) < \infty\} \leq \phi(M) + \text{fin.dim}(\Lambda)$$

se tiene que

$$\psi\text{-dim}(\Lambda) \leq \phi\text{-dim}(\Lambda) + \text{fin.dim}(\Lambda) \leq \phi\text{-dim}(\Lambda) + \phi\text{-dim}(\Lambda).$$

$\square$

Capítulo 2

Módulos periódicos.

En el trabajo "Syzygy pairs in a monomial algebra", K. Igusa y D. Zacharia utilizaron la periodicidad de la sizigia para demostrar que la Conjetura de la dimensión finitista I: "*Para toda álgebra de Artin* Λ, *fin.dim*$(\Lambda) < \infty$" es cierta para las álgebras monomiales y encontraron el ínfimo de las cotas superiores para dicha familia de álgebras.

En la primera sección de este capítulo rescatamos el trabajo [IZ2] de K. Igusa y D. Zacharia, no publicado, donde se definen los módulos p-periódicos, virtualmente p-periódicos, i-periódicos y virtualmente i-periódicos en un álgebra de Artin arbitraria. Además, se dan algunas propiedades homológicas interesantes relacionadas al funtor Ext.

En la segunda y tercera sección se describirán los módulos periódicos en las álgebras de radical cuadrado cero y en álgebras truncadas. La elección de las álgebras truncadas se debe a que el comportamiento de sus sizigias es conocido [BH-ZT].

En la cuarta y última sección caracterizaremos los módulo p-periódicos en las álgebras n-Gorenstein. Dichas álgebras han sido muy estudiadas, y en particular la familia de módulos $\Omega^n(\operatorname{mod}\Lambda)$ es bien conocida (ver por ejemplo [C]).

2.1. Módulos periódicos.

Recordemos que Λ es una álgebra de Artin, $\operatorname{mod}\Lambda$ la categoría de los Λ-módulos finitamente generados a izquierda y que para $k \in \mathbb{N}$, $\Omega^k(M)$ y $\Omega^{-k}(M)$ son la k-ésima sizigia y k-ésima cosizigia del Λ-módulo finitamente generado M, respectivamente.

A continuación daremos las definiciones de módulos p-periódicos, virtualmente p-periódicos, i-periódicos y virtualmente i-periódicos, definidos a partir de las sizigias y cosizigias, respectivamente.

Definición 2.1.1. [IZ2] Un Λ-módulo M se llama **p-periódico** si M es sumando directo de $\Omega^m(M)$ para algún $m \geq 1$. Al entero d más pequeño en estas condiciones lo llamaremos p-período de M, y se dirá que M es d-p-periódico.
Un Λ-módulo M se llama **virtualmente p-periódico** si M es sumando directo de $\Omega^m(M')$ para algún Λ-módulo p-periódico M' y para algún $m \geq 0$.

Definición 2.1.2. [IZ2] Un Λ-módulo M se llama **i-periódico** si M es sumando directo de $\Omega^{-m}(M)$ para algún $m \geq 1$. Al entero d más pequeño en estas condiciones lo llamaremos i-período de M, y se dirá que M es d-i-periódico.
Un Λ-módulo M se llama **virtualmente i-periódico** si M es sumando directo de $\Omega^{-m}(M')$ para algún Λ-módulo i-periódico M' y para algún $m \geq 0$.

Sea M un Λ-módulo virtualmente p-periódico (virtualmente i-periódico) con $m = 0$, es decir $M|\Omega^0(M')$ con M' p-periódico (i-periódico). Si M' es indescomponible entonces $M = M'$ y por lo tanto es p-periódico (i-periódico). Si M' no es indescomponible entonces M no es necesariamente p-periódico como lo muestra la Observación 2.1.8.

A continuación presentamos un ejemplo que muestra módulos p-periódicos, virtualmente p-periódicos, i-periódicos y virtualmente i-periódicos.

Ejemplo 2.1.3. Consideremos el siguiente carcaj Q

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[dr] & & 3 \arrow[ll] \arrow[r] & 5 \\
& & 4 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Tomemos el álgebra $\Lambda = kQ/F^2$. Así el módulo S_2 es 3-p-periódico y 3-i-periódico, pues la resolución proyectiva minimal de S_2 es

$$\begin{tikzcd}
\cdots & P_2 \oplus P_5 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_4 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[r] & S_2 \arrow[r] & 0, \\
& & S_2 \oplus S_5 \arrow[ur] & & S_3 \arrow[ur] & & S_4 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

donde $S_2|S_2 \oplus S_5 = \Omega^3(S_2)$ y su co-resolución inyectiva es

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & S_1 \oplus S_3 \arrow[dr] & & 0 \oplus S_4 \arrow[dr] & & S_2 \arrow[dr] & & , \\
0 \arrow[r] & S_2 \arrow[r] & I_2 \arrow[ur] \arrow[rr] & & I_1 \oplus I_3 \arrow[ur] \arrow[rr] & & I_4 \arrow[ur] \arrow[rr] & & I_2 & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde $S_2 = \Omega^{-3}(S_2)$.

Además, calculando la resolución proyectiva minimal de los módulos simples S_3 y S_4, y la co-resolución inyectiva minimal de estos módulos simples, es fácil ver que son módulos 3-p-periódicos y 3-i-periódicos.

Por otra parte, de la resolución proyectiva de S_2 se tiene que S_5 es virtualmente p-periódico pues $S_5|S_2 \oplus S_5 = \Omega^3(S_2)$. De la co-resolución de S_2 se observa que S_1 es virtualmente i-periódico pues $S_1|S_2 \oplus S_3 = \Omega^{-1}(S_2)$.

En la siguiente sección veremos que S_1 no es virtualmente p-periódico y que S_5 no es virtualmente i-periódico.

En general los módulos p-periódicos y los módulos i-periódicos no coinciden. Para mostrarlo consideremos el carcaj Q

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

y tomemos el álgebra $\Lambda = kQ/I$ donde $I = \langle \beta^2 \rangle$. Veamos que el módulo S_2 es p-periódico pero no es i-períodico y el módulo $\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$ es i-periódico pero no p-periódico.

En efecto, podemos representar a los módulos proyectivos e inyectivos indescomponibles de la siguiente manera:

$$P_1 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \qquad P_2 = \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \qquad I_1 = S_1 \qquad I_2 = \begin{matrix} & 1 \\ 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix}$$

Luego la resolución proyectiva minimal de S_2 es

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[r] & S_2 \arrow[r] & 0 \\
 & & S_2 \arrow[ur] & & S_2 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

y su co-resolución inyectiva minimal es

$$\begin{tikzcd}
 & & & S_1 \oplus \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \arrow[dr] & & 0 \oplus \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & S_2 \arrow[r] & I_2 \arrow[ur] \arrow[rr] & & I_1 \oplus I_2 \arrow[ur] \arrow[rr] & & I_2 \arrow[ur] \arrow[rr] & & I_2 \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Luego S_2 es p-periódico y no es i-periódico pues $S_2 \nmid \Omega^{-m}(S_2)$ $\forall m \geq 1$.

Por otro lado, la co-resolución inyectiva minimal de $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ es

$$\begin{tikzcd}
 & & & \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \arrow[r] & I_2 \arrow[ur] \arrow[rr] & & I_2 \arrow[ur] \arrow[rr] & & I_2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

y su resolución proyectiva minimal es

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[r] & \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \arrow[r] & 0\,. \\
 & & S_2 \arrow[ur] & & S_2 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Así $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ es i-periódico y no es p-periódico ya que $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \nmid \Omega^m(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix})$ para todo $m \geq 1$.

Las siguientes observaciones y proposiciones resumen las propiedades básicas de los módulos p-periódicos (i-periódicos) y de los módulos virtualmente p-periódicos (i-periódicos).

Observaciones 2.1.4.

1. Si Λ es una R-álgebra de Artin de dimensión global finita entonces el álgebra no admite módulos p-periódicos e i-periódicos.

2. Todo módulo p-periódico (i-periódico) es virtualmente p-periódico (virtualmente i-periódico). Además, por definición, todo módulo virtualmente p-periódico (i-periódico) es submódulo de un módulo proyectivo (cociente de un módulo inyectivo). Luego tenemos las siguientes inclusiones entre familias de módulos:

$$\{\text{Módulos p-periódicos}\} \subseteq \{\text{Módulos virtualmente p-periódicos}\} \subseteq \Omega(\text{mod } \Lambda);$$

$$\{\text{Módulos i-periódicos}\} \subseteq \{\text{Módulos virtualmente i-periódicos}\} \subseteq \Omega^{-1}(\text{mod } \Lambda),$$

donde $\Omega(\text{mod } \Lambda)$ y $\Omega^{-1}(\text{mod } \Lambda)$ son la clase de los submódulos de módulos proyectivos y cocientes de módulos inyectivos, respectivamente.

3. Si X es un Λ-módulo p-periódico entonces $D(X) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(X, I_0(R/\mathrm{rad}R))$ es un Λ^{op}-módulo i-periódico, donde D es la dualidad presentada en el Teorema 1.1.3. De manera análoga, si X es un Λ-módulo i-periódico entonces el Λ^{op}-módulo $D(X) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(X, I_0(R/\mathrm{rad}R))$ es, también, p-periódico.

4. Si X es un módulo p-periódico (i-periódico) entonces $\Omega^j(X)$ $(\Omega^{-j}(X))$ es, también, p-periódico (i-periódico), para todo $j \geq 0$.

5. Si X es un módulo virtualmente p-periódico (virtualmente i-periódico) entonces $\Omega^j(X)$ $(\Omega^{-j}(X))$ es, también, un módulo virtualmente p-periódico (i-periódico), para todo $j \geq 0$.

Proposición 2.1.5. Sea Λ un álgebra de Artin. Entonces:

1. Todo Λ-módulo virtualmente p-periódico (i-periódico) tiene dimensión inyectiva (proyectiva) infinita.

2. Todo Λ-módulo p-periódico (i-periódico) tiene dimensión proyectiva e inyectiva infinitas.

Demostración:

1. Sea Y un Λ-módulo virtualmente p-periódico, por definición, existe X un Λ-módulo d-p-periódico tal que Y es sumando directo de $\Omega^n(X)$, para algún $n \geq 0$. Así, Y es sumando directo de $\Omega^{dt+n}(X)$ para todo $t \geq 0$. Luego, por la Proposición 1.2.5, $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{td+n}(X, Y) \neq 0$ para todo $t \geq 0$ y por lo tanto $\mathrm{di}(Y) = \infty$. Análogamente se prueba la afirmación para módulos i-periódicos.

2. Sea X un Λ-módulo p-periódico, sigue inmediatamente de la definición de módulo p-periódico que $\mathrm{dp}(X) = \infty$. Por otro lado, por la Observación 2.1.4.2. se tiene que X es virtualmente p-periódico y por lo tanto, por lo demostrado en 1., se tiene que $\mathrm{di}(X) = \infty$.

$\square$

Observación 2.1.6. En general los módulos virtualmente p-periódicos (i-periódicos) no tienen dimensión proyectiva (inyectiva) infinita. En efecto, en el Ejemplo 2.1.3 el módulo S_5 es virtualmente p-periódico con $\mathrm{dp}(S_5) = 0$.

Proposición 2.1.7. Sea Λ un álgebra de Artin. Entonces:

1. Si X_1 y X_2 son Λ-módulos p-periódicos entonces $X_1 \oplus X_2$ es p-periódico.

2. Si Y_1 e Y_2 son Λ-módulos virtualmente p-periódicos entonces $Y_1 \oplus Y_2$ es virtualmente p-periódico.

3. Todo sumando directo de un Λ-módulo virtualmente p-periódico (i-periódico) es virtualmente p-periódico.

4. Sea Y un Λ-módulo virtualmente p-periódico (i-periódico). Si Y es indescomponible entonces existe un Λ-módulo p-periódico indescomponible, X, tal que Y es sumando directo de $\Omega^t(X)$ para algún $t \geq 1$.

Demostración:

1. Sean X_1 y X_2 Λ-módulos p-periódicos de períodos n y n', respectivamente. Luego, $X_1|\Omega^{tn}(X_1)$ para todo $t \geq 1$ y $X_2|\Omega^{t'n'}(X_2)$ para todo $t' \geq 1$. En particular, tomando $m = \mathrm{m.c.m}(n, n')$ tenemos que $X_i|\Omega^m(X_i)$ para $i = 1, 2$. Luego, $(X_1 \oplus X_2)|\Omega^m(X_1 \oplus X_2)$ y así $X_1 \oplus X_2$ es p-periódico.

2. Sean X_1 y X_2 módulos p-periódicos tales que $Y_1|\Omega^a(X_1)$ e $Y_2|\Omega^b(X_2)$, con $a, b \geq 0$. Podemos suponer que $a \leq b$, así $Y_2|\Omega^a(\Omega^{b-a}(X_2))$ e $(Y_1 \oplus Y_2)|\Omega^a((X_1 \oplus \Omega^{b-a}(X_2)))$. Por la Observación 2.1.4.4. sabemos que $\Omega^{b-a}(X_2)$ es p-periódico. Luego, por lo demostrado en 1. se tiene que $X_1 \oplus \Omega^{b-a}(X_2)$ es p-periódico y por lo tanto, $Y_1 \oplus Y_2$ es virtualmente p-periódico.

3. Sea Y un Λ-módulo virtualmente p-periódico, por definición, existe un módulo p-periódico X tal que Y es sumando directo de $\Omega^m(X)$ para algún $m \geq 0$. Luego, todo sumando directo de Y es sumando directo de $\Omega^m(X)$ y por lo tanto es virtualmente p-periódico.

4. Sea Y es un Λ-módulo virtualmente p-periódico indescomponible y sea X un Λ-módulo d-p-periódico tal que $Y|\Omega^n(X)$. Pongamos $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_r \oplus Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_s$ donde los X_i son módulos p-periódicos indescomponibles y los Z_j módulos indescomponibles no p-periódicos. Si $Y|\Omega^n(X_i)$ para algún i, no hay nada que demostrar. Sino, $Y|\Omega^n(Z_{j_1})$ para algún j_1. Como Z_{j_1} no es p-periódico, pero X si lo es, entonces $Z_{j_1}|\Omega^d(X_i)$ para algún i o $Z_{j_1}|\Omega^d(Z_{j_2})$ para algún $j_2 \neq j_1$. Si $Z_{j_1}|\Omega^d(X_i)$ entonces $Y|\Omega^{d+n}(X_i)$ y la demostración termina. Sino, $Z_{j_1}|\Omega^d(Z_{j_2})$ y repetimos el razonamiento. Así, en a lo sumo $s+1$ pasos, obtenemos que $Y|\Omega^t(X_i)$ para algún i donde X_i es p-periódico, pues sino se tendría que $Z_j|\Omega^{(s+1)d}(Z_j)$ para algún $j \in \{1, ..., s\}$ lo cual es una contradicción.

□

Observación 2.1.8. Todo sumando directo de un Λ-módulo p-periódico es, por definición, virtualmente p-periódico. Sin embargo, no es necesariamente p-periódico. En efecto, consideremos el siguiente carcaj Q

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above] \arrow[r] & 2 \end{tikzcd}$$

Tomemos el álgebra $\Lambda = kQ/F^2$. El módulo $S_1 \oplus S_2$ es p-periódico pero S_2 no es p-periódico. En efecto, la resolución proyectiva de $S_1 \oplus S_2$ es

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P_1 \oplus P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \oplus P_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] & S_1 \oplus S_2 \arrow[r] & 0\,. \\ & & S_1 \oplus S_2 \oplus 0 \arrow[ur] & & S_1 \oplus S_2 \oplus 0 \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

Luego, $S_1 \oplus S_2$ es p-periódico. Por otro lado, como S_2 es proyectivo se tiene que S_2 no puede ser p-periódico pues, por la Proposición 2.1.5.2., los módulos p-periódicos tienen dimensión proyectiva infinita.

Los siguientes resultados fueron demostrados en unas notas no publicadas de K. Igusa y D. Zacharia.

Lema 2.1.9. [IZ2] Sea X un módulo virtualmente p-periódico y M un módulo con $\mathrm{di}(M) < \infty$. Entonces $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(X, M) = 0$ para todo $m \geq 1$.

Demostración: Supongamos por el absurdo que existe $m \geq 1$ tal que $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(X, M) \neq 0$. Como X es virtualmente p-periódico, existen $d_1 \geq 0$ y $d_2 > 0$ tales que $X | \Omega^{d_1}(N)$ y $N | \Omega^{d_2}(N)$. Entonces $X | \Omega^{d_2.k+d_1}(N)$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego $\mathrm{Ext}^{m+d_2.k+d_1}_\Lambda(N, M) = \mathrm{Ext}^m_\Lambda(\Omega^{d_2.k+d_1}(N), M) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Así, $\mathrm{di}(M) = \infty$ lo cual contradice la hipótesis.

$\square$

Corolario 2.1.10. [IZ2] Sea X un módulo p-periódico y M un módulo con $\mathrm{di}(M) < \infty$. Entonces $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(X, M) = 0$ para todo $m \geq 1$.

El siguiente ejemplo muestra que en el Corolario 2.1.10 (y por ende en el Lema 2.1.9) es necesaria la hipótesis $\mathrm{di}(M) < \infty$.

Ejemplo 2.1.11. Si X es un Λ-módulo p-periódico y M es tal que $\mathrm{di}(M) = \infty$ entonces no necesariamente tenemos que $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(X, M) = 0$ para todo $m \geq 1$. En efecto, consideremos el carcaj Q

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left] \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \end{tikzcd}$$

y tomemos el álgebra $\Lambda = kQ/F^2$ donde F es el ideal generado por las flechas. Considerando la resolución inyectiva minimal del Λ-módulo S_2

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_2 \arrow[r] & \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix} \arrow[r] & \cdots \\
& & & S_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& & & & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

se tiene, por el dual de la Proposición 1.2.5, que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(S_1, S_2) \neq 0$ para todo $i \geq 1$. Observemos que el Λ-módulo simple S_1 es un módulo p-periódico y que el módulo simple S_2 es tal que $\mathrm{di}(S_2) = \infty$.

De manera dual al Lema 2.1.9 y el Corolario 2.1.10 se obtienen los resultados:

Lema 2.1.12. [IZ2] Sea X un módulo virtualmente i-periódico y M un módulo con $\mathrm{dp}(M) < \infty$. Entonces $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(M, X) = 0$ para todo $m \geq 1$.

Corolario 2.1.13. [IZ2] Sea X un módulo i-periódico y M un módulo con $\mathrm{dp}(M) < \infty$. Entonces $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(M, X) = 0$ para todo $m \geq 1$.

K. Igusa y D. Zacharia también estudiaron los módulos periódicos en las álgebras sizigias finitas.

Definición 2.1.14. Un álgebra de Artin se dice **sizigia finita** o n-**sizigia finita** si existe un entero no negativo n tal que la clase de los Λ-módulos indescomponibles no isomorfos que son sumandos directos de módulos en $\Omega^n(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ es finita.

Ejemplos de álgebras sizigias finitas son las álgebras de tipo de representación finita y las álgebras monomiales [H-Z1].

En la siguiente proposición, que también se encuentra en las notas no publicadas de K. Igusa y D. Zacharia, consideramos el caso de álgebras sizigias enésima finitas no triviales, es decir, álgebras de dimensión global infinita.

Proposición 2.1.15. [IZ2, Lemma 3] Sea Λ un álgebra n-sizigia finita con $\mathrm{dgl}(\Lambda) = \infty$. Entonces existe m, $m \geq n$, tal que todo módulo indescomponible en $\Omega^m(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ es virtualmente p-periódico.

Demostración: Sea t el número de clases de isomorfía de módulos indescomponibles de $\Omega^n(\mathrm{mod}\,\Lambda)$. Sea M un Λ-módulo finitamente generado con $\mathrm{dp}(M) = \infty$ y sea K un sumando directo no nulo indescomponible de $\Omega^{n+t+1}(M)$. Como $K|\Omega^1(\Omega^{n+t}(M))$, se tiene que $K|\Omega^1(K_t)$ para algún Λ-módulo indescomponible K_t tal que $K_t|\Omega^{n+t}(M)$. Similarmente, como $K_t|\Omega^1(\Omega^{n+t-1}(M))$, se tiene que $K_t|\Omega^1(K_{t-1})$ para algún Λ-módulo indescomponible K_{t-1} tal que $K_{t-1}|\Omega^{n+t-1}(M)$. Luego, recursivamente, tenemos que existe una sucesión de Λ-módulos indescomponibles $K_1, ..., K_t$ tales que $K_1|\Omega^{n+1}(M)$, $K_2|\Omega^1(K_1)$, $K_3|\Omega^1(K_2)$,..., $K_t|\Omega^1(K_{t-1})$ y $K|\Omega^1(K_t)$. Así, en el conjunto $\{K_1, ..., K_t, K_{t+1} = K\}$ existen i, j con $i < j$ tales que $K_i \cong K_j$. Por lo tanto, K_i es p-periódico y K es virtualmente p-periódico. $\square$

Como consecuencia de la proposición anterior y de otros resultados de la sección se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 2.1.16. Sea Λ un álgebra sizigia enésima finita. Son equivalentes:

1. La dimensión global de Λ es infinita.

2. Existe un Λ-módulo p-periódico.

3. Existe un Λ-módulo virtualmente p-periódico.

Demostración: Mostremos 1. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 1..

1. $\Rightarrow$ 3. Si Λ tine dimensión global infinita, como es sizigia finita, se tiene por la Proposición anterior que existe al menos un módulo virtualmente p-periódico.

3. $\Rightarrow$ 2. Si existe un Λ-módulo virtualmente p-periódico M entonces por definición existe un Λ-módulo p-periódico M'.

2. $\Rightarrow$ 1. Si existe un Λ-módulo p-periódico M, entonces por la Proposición 2.1.5.2. M tiene dimensión proyectiva infinita. Por lo tanto, la dimensión global de Λ es infinita.

□

2.2. Módulos periódicos en álgebras de radical cuadrado cero.

Trabajaremos en esta sección con álgebras de carcaj de radical cuadrado cero, esto es, $\Lambda = kQ/F^2$ donde F es el ideal generado por las flechas. Es fácil ver que para esta familia de álgebras la sizigia de todo Λ-módulo no proyectivo es semisimple. Más aún, vale la siguiente observación.

Observaciones 2.2.1.

1. Para todo módulo simple S_i, se tiene que $\Omega(S_i) = \bigoplus_{\alpha_j : i \to j} S_j$, donde α_j recorre todas las flechas que comienzan en el vértice i.

2. Sea $\Lambda = kQ/F^2$ y sea X un Λ-módulo indescomponible p-periódico, o sea $X | \Omega^m(X)$ para algún $m \geq 1$. Entonces por la Observación 2.2.1.1. tenemos que X es un Λ-módulo simple.

El siguiente lema nos será de utilidad para describir, en función del carcaj, los módulos periódicos y virtualmente periódicos en el caso de que $\Lambda = kQ/F^2$.

Lema 2.2.2. Sea $\Lambda = kQ/F^2$. El Λ-módulo simple S_j es sumando directo de $\Omega^m(S_i)$, con $m \geq 1$ y $1 \leq i \leq |Q_0|$, si y solo si existe un camino de longitud m del vértice i al vértice j.

Demostración: Supongamos que S_j es sumando directo de $\Omega^m(S_i)$ y probemos que existe un camino de longitud m del vértice i al j.
Por inducción sobre m:
Si $m = 1$ entonces $S_j|\Omega(S_i)$. Luego, por la Observación 2.2.1, se tiene que $\Omega(S_i) = \bigoplus_{\alpha:i\to l} S_l$, y por lo tanto existe un camino de longitud 1 de i a j.
Supongamos que vale para $m = k$, esto es, si S_r es sumando de $\Omega^k(S_i)$ entonces existe un camino de longitud k del vértice i al vértice r. Probémoslo para $m = k + 1$.
Supongamos que $S_j|\Omega^{k+1}(S_i) = \Omega^k(\Omega(S_i))$. Por la Observación 2.2.1, se tiene que $S_j|\Omega^k(\bigoplus_{\alpha_l:i\to l} S_l) = \bigoplus_{\alpha_l:i\to l}(\Omega^k(S_l))$ y entonces $S_j|\Omega^k(S_l)$ para algún vértice l y una flecha $\alpha_l : i \to l$. Luego, por hipótesis inductiva, existe un camino γ de longitud k del vértice l al j. Por lo tanto $\gamma.\alpha_l$ es un camino de longitud $k + 1$ de i a j.
Recíprocamente, supongamos que tenemos un camino γ de longitud m del vértice i al vértice j. Probemos, por inducción sobre m, que $S_j|\Omega^m(S_i)$.
Si $m = 1$, tenemos una flecha α del vértice i al vértice j. Como $\Omega(S_i) = \bigoplus_{\alpha:i\to l} S_l$, entonces $j = l$ para algún l y así $S_j|\Omega(S_i)$.
Supongamos que vale para $m = k$, esto es, $S_r|\Omega^k(S_i)$ para todo camino $\gamma : i \to \cdots \to r$ de longitud k. Probemos que vale para $m = k + 1$.
Sea γ' un camino de longitud $k + 1$ del vértice i al vértice j, luego $\gamma' = \alpha\gamma$ donde $\gamma : i \to \cdots \to r$ es un camino de longitud k y $\alpha : r \to j$ es una flecha. Por hipótesis inductiva $S_r|\Omega^k(S_i)$. Luego $\Omega(S_r)|\Omega^{k+1}(S_i)$. Además como existe una flecha $\alpha : r \to j$ se tiene que $S_j|\Omega(S_r)$ y por lo tanto que $S_j|\Omega^{k+1}(S_i)$. □

Las siguientes dos proposiciones brindan una caracterización de los módulos p-periódicos y virtualmente p-periódicos en un álgebra de radical cuadrado cero.

Proposición 2.2.3. Sea $\Lambda = kQ/F^2$ y sea X un Λ-módulo indescomponible. Entonces X es un Λ-módulo d-p-periódico si y solo si $X = S_i$ donde en i hay un t-ciclo de kQ siendo $t \geq d$.

Demostración: Supongamos que X es un Λ-módulo p-periódico de período d. Por la Observación 2.2.1.2. tenemos que $X = S_i$. Luego, por el Lema 2.2.2 existe un camino de longitud d del vértice i en sí mismo, esto es, existe un d-ciclo en el vértice i.
Recíprocamente, supongamos que en el vértice i hay un t-ciclo. Quiero probar que S_i es un Λ-módulo d-p-periódico con $d \leq t$.
Como en el vértice i hay un t-ciclo, existe un camino de longitud t del vértice i en sí mismo. Luego, por el Lema 2.2.2 se tiene que $S_i|\Omega^t(S_i)$ y por lo tanto, S_i es un módulo p-periódico de período $d \leq t$. □

De la proposición anterior surge el interrogante de qué sucede con el período de un Λ-módulo p-periódico S_i cuando en el vértice i hay más de un ciclo. La siguiente observación responde a tal interrogante.

Observación 2.2.4. A los ciclos en el vértice i los indexamos con J, donde J es un conjunto de índices. Notemos a dichos ciclos con c_j para $j \in J$. Supongamos que $l(c_j) = t_j$ entonces, por el Lema 2.2.2, $S_i|\Omega^{t_j}(S_i)$ para todo $j \in J$. Luego S_i tiene p-período igual a $d = \min\limits_{j\in J}\{t_j \mid t_j = l(c_j)\}$.

Proposición 2.2.5. Sea $\Lambda = kQ/F^2$ y sea X un Λ-módulo indescomponible. Entonces X es virtualmente p-periódico si y solamente si $X = S_j$ para algún vértice j y existe un camino γ de un vértice i al vértice j, siendo S_i un Λ-módulo p-periódico.

Demostración: Supongamos que X es virtualmente p-periódico e indescomponible. Entonces existe un Λ-módulo p-periódico indecomponible M tal que $X|\Omega^k(M)$. Como Λ es un álgebra de radical cuadrado cero se tiene que $X = S_j$ para algún $j \in Q_0$. Por otra parte por ser M un módulo p-periódico indescomponible resulta que $M = S_i$ para algún $i \in Q_0$. Así $S_j|\Omega^k(S_i)$. Luego, por el Lema 2.2.2, existe un camino γ de longitud k del vértice i al vértice j.
La recíproca sigue inmediatamente del Lema 2.2.2. □

Considerando la situación dual se tienen las siguientes dos proposiciones:

Proposición 2.2.6. Sea $\Lambda = kQ/F^2$ y sea X un Λ-módulo indescomponible. El Λ-módulo X es d-i-periódico si y solo si $X = S_i$ donde en i hay un t-ciclo de kQ siendo $t \geq d$.

Proposición 2.2.7. Sea $\Lambda = kQ/F^2$ y sea X un Λ-módulo indescomponible. Entonces X es virtualmente i-periódico si y solamente si $X = S_j$ para algún vértice j y existe un camino γ del vértice j a algún vértice i siendo S_i un Λ-módulo i-periódico.

Observación 2.2.8. De las proposiciones 2.2.3 y 2.2.6 se tiene que los módulos p-periódicos y los i-periódicos coinciden para álgebras de radical cuadrado cero.

Observación 2.2.9. Los módulos virtualmente p-periódicos no necesariamente coinciden con los virtualmente i-periódicos. En efecto, consideremos el siguiente carcaj Q:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] \arrow[loop above] & 3 \end{tikzcd}$$

y el álgebra $\Lambda = kQ/F^2$. Entonces se tiene que el simple S_1 es virtualmente i-periódico pero no virtualmente p-periódico, y el simple S_3 es virtualmente p-periódico pero no virtualmente i-periódico.

Ya vimos, en la Proposición 2.1.5.2., que todo módulo i-periódico tiene dimensión proyectiva infinita. Además, todo módulo simple de dimensión proyectiva infinita sobre un álgebra de radical cuadrado cero es virtualmente i-periódico, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.2.10. Sea $\Lambda = kQ/F^2$ y sea S un Λ-módulo simple. Entonces, $\mathrm{dp}(S) = \infty$ si y solo si S es virtualmente i-periódico.

Demostración: Sea $S = S_j$ para algún $j \in Q_0$. Supongamos por el contrarrecíproco que S_j no es virtualmente i-periódico, esto es, todo camino de kQ con origen en el vértice j termina en un vértice i donde no hay un n-ciclo. Luego, como Q es finito, todos los caminos comenzados en j tienen longitud finita. Sea m el máximo de las longitudes de los caminos comenzados en j. Como no existen caminos de longitud $m+1$ comenzados en j, por el Lema 2.2.2 se tiene que ningún Λ-módulo simple es sumando de $\Omega^k(S_j)$ para todo $k \geq m+1$. Entonces, por ser $\Omega^k(S_j)$ un módulo semisimple, se tiene que $\Omega^k(S_j) = 0$ para todo $k \geq m+1$. Por lo tanto, $\mathrm{dp}(S_j) \leq m$ y esto contradice la hipótesis de la proposición.

La recíproca de esta proposición fue dada en la Proposición 2.1.5.1. en el marco de las álgebras de Artin. Sin embargo, ofrecemos aquí una demostración distinta en el contexto de las álgebras de radical cuadrado cero.

Supongamos que S_j es virtualmente i-periódico, esto es, existe un camino de longitud r del vértice j a un vértice i, donde en el vértice i hay un s-ciclo, con $s \geq 1$. Luego, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe un camino de longitud $r + ns$ de j a i. Entonces, por el Lema 2.2.2, se tiene que $S_i | \Omega^{r+ns}(S_j)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, de donde $\Omega^{r+ns}(S_j) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y por lo tanto $\mathrm{dp}(S_j) = \infty$. $\square$

Corolario 2.2.11. Sea $\Lambda = kQ/F^2$ y sea S un Λ-módulo simple con $\mathrm{dp}(S) = \infty$ y M un Λ-módulo con $\mathrm{dp}(M) < \infty$. Entonces $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(M, S) = 0$ para todo $m \geq 1$.

Demostración: Sean S un Λ-módulo simple con dimensión proyectiva infinita y M un Λ-módulo con dimensión proyectiva finita. Como $\mathrm{dp}(S) = \infty$ se tiene por la Proposición anterior que S es virtualmente i-periódico. Luego, usando el Lema 2.1.12, se tiene que $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(M, S) = 0$ para todo $m \geq 1$. $\square$

Notemos que la Proposición 2.2.10 no es cierta si en su hipótesis consideramos un módulo indescomponible en lugar de un módulo simple, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.12. Sea Q el carcaj

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & \\
& 3 \arrow[loop right] \\
2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

y consideremos el álgebra $\Lambda = kQ/F^2$. El módulo $M = \begin{smallmatrix} 1\;2 \\ 3 \end{smallmatrix}$ es indescomponible de dimensión proyectiva infinita. En efecto, la resolución proyectiva minimal de M es:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] & \begin{smallmatrix} 1\;2 \\ 3 \end{smallmatrix} \arrow[r] & 0 \\
& & S_3 \arrow[ur] & & S_3 \arrow[ur] & & S_3 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

donde P_1, P_2 y P_3 son los Λ-módulos proyectivos indescomponibles, los cuales podemos representar como:

$$P_1 : \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \qquad\qquad P_2 : \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \qquad\qquad P_3 : \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix}$$

Por otro lado, el módulo M no es virtualmente i-periódico pues es de longitud radical 2 y en las álgebras de radical cuadrado cero las cosizigias tienen longitud radical 1.

Presentamos a continuación los duales de los últimos dos resultados obtenidos:

Proposición 2.2.13. Sea $\Lambda = kQ/F^2$ y sea S un Λ-módulo simple. Entonces, $\mathrm{di}(S) = \infty$ si y solo si S es virtualmente p-periódico.

Corolario 2.2.14. Sea $\Lambda = kQ/F^2$ y sea S un Λ-módulo simple con $\mathrm{di}(S) = \infty$ y M un Λ-módulo con $\mathrm{di}(M) < \infty$. Entonces $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(S, M) = 0$ para todo $m \geq 1$.

El siguiente resultado relaciona la dimensión global de un álgebra de radical cuadrado cero con los módulos periódicos. Si bien este corolario resulta inmediatamente del Corolario 2.1.16, daremos a continuación una demostración usando las técnicas de esta sección.

Corolario 2.2.15. Sea $\Lambda = kQ/F^2$. Entonces son equivalentes:

a) La dimensión global de Λ es infinita.

b) Existe un Λ-módulo p-periódico.

c) Existe un Λ-módulo virtualmente p-periódico.

d) Existe un Λ-módulo i-periódico.

e) Existe un Λ-módulo virtualmente i-periódico.

Demostración: Nos basta con probar la equivalencia entre *a*) y *b*).
Supongamos que dimensión global de Λ es infinita, luego existe un Λ-módulo simple S tal que $\mathrm{dp}(S) = \infty$. Luego por la Proposición 2.2.10, S es virtualmente i-periódico. Si S es el simple asociado al vértice j, por la Proposición 2.2.7 existe un camino del vértice j a un vértice i donde S_i es i-periódico. Así, por la Observación 2.2.8, se tiene que S_i es un Λ-módulo p-periódico.

Recíprocamente, si existe un Λ-módulo p-periódico M entonces M es un Λ-módulo semisimple de dimensión proyectiva infinita. Por lo tanto, la dimensión global de Λ es infinita.

□

2.3. Módulos periódicos en álgebras truncadas.

Las álgebras de carcaj truncadas son una generalización natural de las álgebras de radical cuadrado cero, en el sentido de que las álgebras truncadas son el cociente de un álgebra de caminos módulo el ideal generado por los caminos de una longitud fija. Estudiaremos ahora los módulos p-periódicos en álgebras de carcaj truncadas, es decir, $\Lambda = kQ/F^t$ con $t \geq 2$, siendo F es el ideal generado por las flechas de kQ. Comenzaremos describiendo la sizigia enésima de un Λ-módulo M. Para ello necesitamos la definición de esqueleto de un módulo.

Si bien la definición de esqueleto de un módulo fue dada en [BH-ZT] en un contexto más general, presentamos aquí la definición de esqueleto de un módulo para las álgebras truncadas.

Definiciones 2.1. [DH-ZL, Definition 1] Sea M un Λ-módulo en $\operatorname{mod}\Lambda$ y $P_0(M) = \bigoplus_{r\in J} \Lambda z_r$ su cubierta proyectiva donde $z_r \in \{e_1, ..., e_n\}$, para un conjunto de índices J.

- Un **camino de longitud l en** $P_0(M)$ es cualquier elemento $\rho z_r \in P_0(M)$ donde ρ es un camino de longitud l en Λ que comienza en z_r.

- Un **esqueleto** de M es un conjunto σ de caminos γ en $P_0(M)$ tal que, para todo $l < t$, la imagen vía la proyección canónica de $F^l M$ en $F^l M/F^{l+1}M$ de las clases residuales de los caminos γ de longitud l en σ, forman una k-base de $F^l M/F^{l+1}M$. Además se pide que si $\gamma = \gamma''\gamma' z_r \in \sigma$ entonces $\gamma' z_r \in \sigma$.

- Un camino ρ en $P_0(M) \setminus \sigma$ se llama σ-**crítico** si es de la forma $\rho = \alpha\gamma z_r$, donde α es una flecha y γz_r un camino en σ.

  Notaremos con Σ al conjunto de los caminos σ-críticos, esto es, $\Sigma = \{\rho \in P_0(M) \setminus \sigma : \rho \text{ es } \sigma - \text{crítico}\}$

E. Babson, B. Huisgen-Zimmermann y R. Thomas demostraron el siguiente teorema para álgebras truncadas, que describe la sizigia de un Λ-módulo en función de ideales a izquierda generados por un camino.

Teorema 2.3.1. [BH-ZT, Lemma 5.11] Sean $\Lambda = kQ/F^t$ y M un Λ-módulo con esqueleto σ. Entonces, $\Omega^1(M)$ es isomorfo a una suma directa de ideales a izquierda cíclicos generados por caminos σ-críticos no nulos de longitud positiva de Λ, es decir:

$$\Omega^1(M) = \bigoplus_{\rho \in \Sigma} \Lambda\rho.$$

Ejemplo 2.3.2. Consideremos el siguiente carcaj:

$$Q: \begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & 2 \arrow[d, "\beta"'] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, "\rho"] & 7 \\
3 \arrow[r, "\gamma"] & 4 \arrow[ur, "\delta_1"] \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[dr, "\delta_3"] & 8 \arrow[u, "\zeta_1"'] \arrow[r, "\zeta_2"] & 9 \arrow[r, "\eta"] & 10 \\
& & 11 \arrow[r, "\nu"] & 12 &
\end{tikzcd}$$

y tomemos el álgebra truncada $\Lambda = kQ/F^4$. Consideremos además el Λ-módulo

$$M = \begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & k \arrow[d, "Id"'] & k \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r, "0"] & 0 . \\
k \arrow[r, "Id"] & k \arrow[ur, "Id"] \arrow[r, "Id"] \arrow[dr, "0"] & k \arrow[u, "0"'] \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r, "0"] & 0 \\
& & 0 \arrow[r, "0"] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Podemos representar al módulo M usando la serie radical, de la siguiente manera:

$$M = \begin{array}{ccc} 3 & & 2 \\ & 4 & \\ 8 & & 5 \end{array}$$

Una cubierta proyectiva de M está dada por $P_0(M) = P_2 \oplus P_3$, donde los proyectivos P_2 y P_3 pueden representarse como:

$$P_2: \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & & 4 & & \\ 5 & & 8 & & 11 \\ 6 & 5 & 9 & & 12 \end{array} \qquad P_3: \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & & 4 & & \\ 5 & & 8 & & 11 \\ 6 & 5 & 9 & & 12 \end{array}$$

Los conjuntos $\sigma_1 = \{e_2, e_3, \beta, \delta_1\beta, \delta_2\beta\}$ y $\sigma_2 = \{e_2, e_3, \gamma, \delta_1\gamma, \delta_2\gamma\}$ son ejemplos de esqueletos de M.

Luego el conjunto de los caminos σ_1-críticos es $\{\gamma, \delta_3\beta, \epsilon\delta_1\beta, \zeta_1\delta_2\beta, \zeta_2\delta_2\beta\}$ y el conjunto de los caminos σ_2-críticos es $\{\beta, \delta_3\gamma, \epsilon\delta_1\gamma, \zeta_1\delta_2\gamma, \zeta_2\delta_2\gamma\}$.

Aplicando el Teorema 2.3.1 tenemos que:

$$\Omega^1(M) = \Lambda\gamma \oplus \Lambda\delta_3\beta \oplus \Lambda\epsilon\delta_1\beta \oplus \Lambda\zeta_1\delta_2\beta \oplus \Lambda\zeta_2\delta_2\beta$$

esto es,

$$\Omega^1(M) = \begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ & \diagup & \vdots & \diagdown & \\ 5 & & 8 & & 11 \\ \vdots & \diagup & \vdots & & \vdots \\ 6 & 5 & 9 & & 12 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 11 \\ 12 \end{array} \oplus 6 \oplus 5 \oplus 9$$

De igual manera, $\Omega^1(M)$ se puede calcular usando el esqueleto σ_2

$$\Omega^1(M) = \Lambda\beta \oplus \Lambda\delta_3\gamma \oplus \Lambda\epsilon\delta_1\gamma \oplus \Lambda\zeta_1\delta_2\gamma \oplus \Lambda\zeta_2\delta_2\gamma.$$

El Teorema 2.3.1 nos permite obtener propiedades de los Λ-módulos p-periódicos indescomponibles.

Corolario 2.3.3. Sea M un Λ-módulo indescomponible. Si M es p-periódico entonces $M = \Lambda\rho$ para algún camino ρ.

Nos centraremos en estudiar cuándo los módulos de la forma $\Lambda\rho$ son p-periódicos en las álgebras truncadas $\Lambda = kQ/F^t$ con $t \geq 2$. Para realizar dicho estudio será conveniente notar a los módulos $\Lambda\rho$ siguiendo la notación usada en [BMR]. Dado un camino ρ en Q tal que $l(\rho) = l$ y $t(\rho) = i$, denotaremos con $M_i^l(\Lambda)$ al ideal a izquierda $\Lambda\rho$. Son inmediatas las siguientes observaciones:

1. $M_i^l(\Lambda) = 0$ si $l \geq t$.

2. $\mathrm{Top}(M_i^l(\Lambda)) = S_i$ si $l < t$.

3. El módulo $M_i^l(\Lambda)$ es simple si y solo si $l = t - 1$.

4. El módulo $M_i^l(\Lambda)$ es proyectivo si y solo si todos los caminos que comienzan en el vértice i tienen longitud menor o igual que $t - l - 1$.

Usando el Teorema 2.3.1 en [BMR] se describen las dos primeras sizigias de un módulo cíclico no proyectivo $M_i^l(\Lambda)$ en las álgebras truncadas. Un esqueleto σ del módulo $M_i^l(\Lambda)$ está formado por todos los caminos γ tales que $s(\gamma) = i$ y $l(\gamma) \leq t - l - 1$. Luego, $\Sigma = \{\rho \,|\, s(\rho) = i \,\text{y}\, l(\rho) = t - l\}$. Así:

$$\Omega^1(M_i^l(\Lambda)) = \bigoplus_{\rho\in\Sigma} \Lambda\rho = \bigoplus_{\rho:\begin{cases} s(\rho) = i \\ l(\rho) = t-l \end{cases}} M_{t(\rho)}^{t-l}(\Lambda).$$

y

$$\Omega^2(M_i^l(\Lambda)) = \bigoplus_{\rho':\begin{cases} s(\rho') = i \\ l(\rho') = t \end{cases}} M_{t(\rho')}^{l}(\Lambda).$$

La siguiente observación generaliza las descripciones dadas anteriormente.

Observación 2.3.4. Sea $\Lambda = kQ/F^t$ y $M_i^l(\Lambda)$ el Λ-módulo cíclico generado por un camino de longitud l terminado en el vértice i. Entonces:

$$\Omega^{2n}(M_i^l(\Lambda)) = \bigoplus_{\rho':\begin{cases} s(\rho') = i \\ l(\rho') = nt \end{cases}} M_{t(\rho')}^{l}(\Lambda)$$

y

$$\Omega^{2n+1}(M_i^l(\Lambda)) = \bigoplus_{\rho':\begin{cases} s(\rho') = i \\ l(\rho') = (n+1)t - l \end{cases}} M_{t(\rho')}^{t-l}(\Lambda).$$

Ya estamos en condiciones de demostrar cuando un módulo cíclico generado por un camino de longitud l comenzado en el vértice i, $M_i^l(\Lambda)$, es p-periódico.

Proposición 2.3.5. Sea $\Lambda = kQ/F^t$. El Λ-módulo $M_i^l(\Lambda)$ con $l \leq t - 1$ es p-periódico si y solo si existe un ciclo Q que pasa por el vértice i.

Demostración: Supongamos que el módulo $M_i^l(\Lambda)$ es p-periódico, esto es, $M_i^l(\Lambda)$ es sumando directo de $\Omega^m(M_i^l(\Lambda))$, para algún $m \geq 1$. Por la observación anterior, se tiene que existe un camino que comienza y termina en i. Por lo tanto, existe un ciclo que pasa por el vértice i.

Recíprocamente, supongamos que existe un ciclo de longitud n que pasa por el vértice i, esto es, existe un camino ρ en Q de longitud n que comienza y termina en i. Así, el camino ρ^t es tal que $l(\rho^t) = nt$ y $\mathrm{s}(\rho^t) = \mathrm{t}(\rho^t) = i$. Luego, por la observación anterior, se tiene que $M_i^l(\Lambda)$ es sumando directo de $\Omega^{2n}(M_i^l(\Lambda))$. Por lo tanto, $M_i^l(\Lambda)$ es un módulo p-periódico. $\square$

Corolario 2.3.6. Sea $\Lambda = kQ/F^t$ y sea M un Λ-módulo indescomponible. Entonces M es p-periódico si y solo si $M = M_i^l(\Lambda)$ y existe un ciclo que pasa por el vértice i.

Por último en esta sección caracterizaremos a los módulos indescomponibles virtualmente p-periódicos. De la definición de módulo virtualmente p-periódico y del corolario anterior sigue inmediatamente que si X es virtualmente p-periódico entonces $X = M_j^l(\Lambda)$ para algún vértice j con $1 \leq l \leq t-1$.

Proposición 2.3.7. Sea $\Lambda = kQ/F^t$. Sea X un Λ-módulo indescomponible, X es virtualmente p-periódico si y solo si $X = M_j^l(\Lambda)$, para algún $1 \leq l \leq t-1$, y existe un camino de un vértice i al vértice j, donde $M_i^s(\Lambda)$ es p-periódico para algún $1 \leq s \leq t-1$.

Demostración: Supongamos que X es virtualmente p-periódico, luego existe $M_i^s(\Lambda)$ p-periódico tal que $X|\Omega^m(M_i^s(\Lambda))$ con $1 \leq s \leq t-1$. Por lo observado anteriormente, $X = M_j^l(\Lambda)$ para algún $l \leq t-1$. Luego, por la Observación 2.3.4, se tiene que existe un camino ρ' de i a j.

Recíprocamente, supongamos que existe un camino $\rho' : i \rightsquigarrow j$ de longitud r y que existe un módulo p-periódico $M_i^s(\Lambda)$. Como $M_i^s(\Lambda)$ es p-periódico entonces $\mathrm{dp}(M_i^s(\Lambda)) = \infty$ y por lo tanto, $\Omega^n(M_i^s(\Lambda)) \neq 0$ para todo $n \geq 0$.

Si $l(\rho') = nt$ o $l(\rho') = (n+1)t-s$ para algún $n \geq 0$, entonces el módulo $M_j^s(\Lambda)$ es sumando directo de $\Omega^{2n}(M_i^s(\Lambda))$ o el módulo $M_j^{t-s}(\Lambda)$ es sumando directo de $\Omega^{2n+1}(M_j^s(\Lambda))$. Luego, tomando $X = M_j^s(\Lambda)$ o $X = M_j^{t-s}(\Lambda)$ se tiene que X es virtualmente p-periódico.

Si $l(\rho') \neq nt$ y $l(\rho') \neq (n+1)t-s = nt+t-s$ para todo $n \geq 0$, entonces $l(\rho') = nt+q$ con $0 < q < t-s$ o $t-s < q < t$. Como $M_i^s(\Lambda)$ es p-periódico, entonces por la Proposición

2.3.5, existe un ciclo que pasa por el vértice i, digamos $\gamma = \alpha_{i_0}\alpha_{i_1}...\alpha_{i_{s'}}$ con $i_0 = i$, $\alpha_{i_k} : i_k \to i_{k+1}$ para $k \in \{0, ..., s'-1\}$ y $\alpha_{i_{s'}} : i_{s'} \to i_0$. Luego, eligiendo un camino γ' formado por flechas en $\{\alpha_{i_0}, \alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_{s'}}\}$ tal que $l(\gamma') = t - s - q$ y $\gamma' = i_h \rightsquigarrow i_0$, con $h \in \{0, 1, ..., s'\}$, se tiene un camino $\rho'' = \gamma'\rho' : i_h \rightsquigarrow j$ tal que $l(\rho'') = l(\gamma') + l(\rho') = t - s - q + nt + q = nt + t - s = (n+1)t - s$. Por lo tanto, el módulo $M_j^s(\Lambda)$ es sumando directo de $\Omega^{2n+1}(M_{i_h}^{t-s}(\Lambda))$, donde $M_{i_h}^{t-s}(\Lambda)$ es p-periódico por la Proposición 2.3.5. Tomando $X = M_j^s(\Lambda)$ se obtiene lo deseado.

□

El siguiente resultado sigue del Corolario 2.1.16 y del hecho de que las álgebras truncadas son álgebras monomiales.

Corolario 2.3.8. Sea $\Lambda = kQ/F^t$. Entonces son equivalentes:

a) La dimensión global de Λ es infinita.

b) Existe un Λ-módulo p-periódico.

c) Existe un Λ-módulo virtualmente p-periódico.

2.4. Módulos periódicos en álgebras Gorenstein.

Comencemos recordando la definición de álgebra Gorenstein, así como también, la definición de módulos Gorenstein proyectivos sobre un álgebra de Artin.

Definición 2.4.1. [H] Un álgebra de Artin Λ se dice **Gorenstein** si $\mathrm{di}({}_\Lambda\Lambda) < \infty$ y $\mathrm{di}(\Lambda_\Lambda) < \infty$. Mas aún, Λ se dice n-**Gorenstein** si n es el menor entero talque $\mathrm{di}({}_\Lambda\Lambda) \leq n$ y $\mathrm{di}(\Lambda_\Lambda) \leq n$.

La definición de módulo Gorenstein proyectivo que aquí presentamos es la dada por X. W. Chen.

Definición 2.4.2. [C, Definition 2.1.1] **Una resolución proyectiva completa** es una sucesión exacta:

$$(\mathcal{P}, p) = \qquad \cdots \xrightarrow{p_{-2}} P_{-1} \xrightarrow{p_{-1}} P_0 \xrightarrow{p_0} P_1 \xrightarrow{p_1} \cdots$$

de Λ-módulos proyectivos, tal que al aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,\Lambda)$ se obtiene la sucesión exacta:

$$\cdots \xrightarrow{p_1^*} P_1^* \xrightarrow{p_0^*} P_0^* \xrightarrow{p_{-1}^*} P_{-1}^* \xrightarrow{p_{-2}^*} \cdots.$$

Un Λ-módulo finitamente generado G se dice **Gorenstein proyectivo** si existe una resolución proyectiva completa $(\mathcal{P},p)$ tal que $G \cong \mathrm{Ker}(p_0)$. En particular, para todo $i \in \mathbb{Z}$ el Λ-módulo $\mathrm{Ker}(p_i)$ es Gorenstein proyectivo. Indicaremos con Λ-Gproj a la subcategoría plena de $\mathrm{mod}\,\Lambda$ formada por los Λ-módulos Gorenstein proyectivos.

Observación 2.4.3. Si G es un Λ-módulo Gorenstein proyectivo entonces $G \cong (G^*)^*$, donde $G^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(G,\Lambda)$. En efecto, sea

$$(\mathcal{P},p) = \qquad \cdots \xrightarrow{p_{-2}} P_{-1} \xrightarrow{p_{-1}} P_0 \xrightarrow{p_0} P_1 \xrightarrow{p_1} \cdots$$

una resolución proyectiva completa de $G = \mathrm{Ker}(p_0)$. Por [ARS, Proposition 4.3] sabemos que el funtor $(-)^* : \mathrm{Hom}_\Lambda(-,\Lambda) : \mathcal{P}(\mathrm{mod}\,\Lambda) \to \mathcal{P}(\mathrm{mod}\,\Lambda^{op})$ es una dualidad, así el complejo $(\mathcal{P},p)$ es isomorfo al complejo

$$((\mathcal{P}^*)^*,(p^*)^*) = \qquad \cdots \xrightarrow{(p_{-2}^*)^*} (P_{-1}^*)^* \xrightarrow{(p_{-1}^*)^*} (P_0^*)^* \xrightarrow{(p_0^*)^*} (P_1^*)^* \xrightarrow{(p_1^*)^*} \cdots$$

Además, como G es Gorenstein proyectivo se tiene que $(G^*)^* = \mathrm{Ker}((p_0^*)^*)$. Del isomorfismo entre $((P),p)$ y $((\mathcal{P}^*)^*,(p^*)^*)$ podemos extraer el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "g"] & P_0 \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "f_0"] & P_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "f_1"] & P_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "f_2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & (G^*)^* \arrow[r, "(\iota^*)^*"] & (P_0^*)^* \arrow[r, "(p_0^*)^*"] & (P_1^*)^* \arrow[r, "(p_1^*)^*"] & (P_2^*)^* \arrow[r, "(p_2^*)^*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde los morfismos f_i son isomorfismos para todo i, y por lo tanto g también es un isomorfismo, donde $g : G \to (G^*)^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(G,\Lambda),\Lambda)$ está definido por $g(x)(f) = f(x)$ para todo $x \in G$ y todo $f \in G^*$.

Notaremos con ${}^\perp\Lambda$ a la subfamilia de módulos estables de $\mathrm{mod}\,\Lambda$, esto es, a la familia definida por

$$\{X \in \mathrm{mod}\,\Lambda : \mathrm{Ext}^i_\Lambda(X,\Lambda) = 0,\ \forall i \geq 1\}.$$

Observación 2.4.4. 1. Todo Λ-módulo Gorenstein proyectivo pertenece a ${}^\perp\Lambda$, es decir, $\Lambda - \mathrm{Gproj} \subseteq {}^\perp\Lambda$. En efecto, sea M un Λ-módulo Gorenstein proyectivo. Por definición, existe una resolución proyectiva completa:

$$(\mathcal{P},p) = \qquad \cdots \xrightarrow{p_{-2}} P_{-1} \xrightarrow{p_{-1}} P_0 \xrightarrow{p_0} P_1 \xrightarrow{p_1} \cdots$$

con $M \cong \mathrm{Ker}(p_0)$, que da lugar a la siguiente sucesión **exacta**:

$$\cdots \xrightarrow{p_1^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_1,\Lambda) \xrightarrow{p_0^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0,\Lambda) \xrightarrow{p_{-1}^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_{-1},\Lambda) \xrightarrow{p_{-2}^*} \cdots .$$

Luego $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,\Lambda) = \mathrm{Ker}(p^*_{-(i+1)})/\mathrm{Im}(p^*_{-i}) = 0$ para todo $i \geq 1$.

2. Sea X un Λ-módulo y sea

$$\cdots \xrightarrow{p_2} P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} X \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de X. Entonces, $X \in^\perp \Lambda$ si y solo si la sucesión

$$(*)\ 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(X,\Lambda) \xrightarrow{p_0^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0,\Lambda) \xrightarrow{p_1^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_1,\Lambda) \xrightarrow{p_2^*} \cdots$$

es exacta. En efecto, la sucesión $(*)$ es exacta si y solo si $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(X,\Lambda) = 0$ para todo $i \geq 1$, así la sucesión $(*)$ es exacta si y solo si $X \in^\perp \Lambda$.

Observación 2.4.5. En general dada un álgebra de Artin Λ, ${}^\perp\Lambda \nsubseteq \Lambda - \mathrm{Gproj}$, es decir, no todo módulo estable es Gorenstein proyectivo, como lo muestra René Marczinzik en [M].

Lema 2.4.6. Si $X \in {}^\perp\Lambda$ entonces $\mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(X,\Omega^n(M))) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,M)$, para todo $n \geq 1$ y todo Λ-módulo M.

Demostración: Sea M un Λ-módulo, fijando la resolución proyectiva minimal de M

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0\ ,$$

podemos considerar la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \Omega(M) \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0\ .$$

Al aplicar $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,-)$ a esta sucesión obtenemos la sucesión exacta larga

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(X,\Omega(M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(X,P_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(X,M) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,\Omega(M)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,P_0) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_\Lambda(X,\Omega(M)) \to \mathrm{Ext}^2_\Lambda(X,P_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_\Lambda(X,M) \longrightarrow \cdots$$

Luego, como $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(X,\Lambda) = 0$ para todo $n \geq 1$, tenemos, en particular, que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,M) \cong \mathrm{Ext}^2_\Lambda(X,\Omega(M))$.

De igual manera, al considerar las sucesiones exactas largas, que se obtienen al aplicar $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,-)$ a las siguientes sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow \Omega^2(M) \longrightarrow P_1 \longrightarrow \Omega(M) \longrightarrow 0\ ,$$

$$0 \longrightarrow \Omega^3(M) \longrightarrow P_2 \longrightarrow \Omega^2(M) \longrightarrow 0$$

$$\vdots$$

$$0 \longrightarrow \Omega^n(M) \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \Omega^{n-1}(M) \longrightarrow 0$$

obtenemos que

$$\mathrm{Ext}^2_\Lambda(X,\Omega(M)) \cong \mathrm{Ext}^3_\Lambda(X,\Omega^2(M)),$$

$$\mathrm{Ext}^3_\Lambda(X,\Omega^2(M)) \cong \mathrm{Ext}^4_\Lambda(X,\Omega^3(M)),$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{Ext}^n_\Lambda(X,\Omega^{n-1}(M)) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(X,\Omega^n(M)).$$

Por lo tanto, tenemos que $\mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(X,\Omega^n(M)) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(X,M)$, para todo $n \geq 1$.

□

Corolario 2.4.7. Sea $X \in {}^\perp\Lambda$ y sea M un Λ-módulo tal que $\mathrm{dp}(M) < \infty$. Entonces, $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(X,M) = 0$ para todo $i \geq 1$.

El siguiente teorema brinda una caracterización de las álgebras n-Gorenstein. Para facilitar la lectura de este trabajo incluimos aquí su demostración, la cual utiliza el Lema 2.4.6.

Teorema 2.4.8. [C, Theorem 2.3.3] Sea Λ un álgebra de Artin y sea $n \geq 0$. Entonces, Λ es n-Gorenstein si y solo si Λ-Gproj= $\Omega^n(\mathrm{mod}\,\Lambda)$.

Demostración: Supongamos que Λ es n-Gorenstein. Para demostrar que vale la igualdad Λ-Gproj= $\Omega^n(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ mostraremos que valen las siguientes inclusiones

$$\Lambda\mathrm{-Gproj} \subseteq \Omega^n(\mathrm{mod}\ \Lambda) \subseteq {}^\perp\Lambda \subseteq \Lambda\mathrm{-Gproj}.$$

Por definición, todo módulo Gorenstein proyectivo G es sizigia i-ésima de algún Λ-módulo para todo $i \geq 1$, en particular para $i = n$. Así, Λ-Gproj$\subseteq \Omega^n(\mathrm{mod}\ \Lambda)$.

Mostremos ahora que $\Omega^n(\mathrm{mod}\ \Lambda) \subseteq {}^{\perp}\Lambda$. Sea X un módulo en $\Omega^n(\mathrm{mod}\ \Lambda)$, esto es, existe un Λ-módulo M tal que $\Omega^n(M) = X$. Como Λ es n-Gorenstein se tiene que $\mathrm{di}({}_{\Lambda}\Lambda) \leq n$, de donde $\mathrm{Ext}^i_{\Lambda}(-, \Omega^{-n}(\Lambda)) = 0$ para todo $i \geq 1$. Luego, usando el Lema del Décalage se tiene que:

$$\mathrm{Ext}^i_{\Lambda}(X, \Lambda) = \mathrm{Ext}^i_{\Lambda}(\Omega^n(M), \Lambda) = \mathrm{Ext}^{i+n}_{\Lambda}(M, \Lambda) = \mathrm{Ext}^i_{\Lambda}(M, \Omega^{-n}(\Lambda)) = 0,\ \forall i \geq 1.$$

Por lo tanto, $X \in {}^{\perp}\Lambda$.

Por último, mostremos que ${}^{\perp}\Lambda \subseteq \Lambda$-Gproj. Sea M un Λ-módulo en ${}^{\perp}\Lambda$ y sea $\epsilon : \cdots \xrightarrow{d_{-2}} P_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$ una resolución proyectiva de M. Aplicando el funtor $(-)^* = \mathrm{Hom}_{\Lambda}(-, \Lambda)$ a ϵ y usando la hipótesis, obtenemos la sucesión exacta $\epsilon^* : 0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{d_0^*} (P_0)^* \xrightarrow{d_{-1}^*} (P_{-1})^* \xrightarrow{d_{-2}^*} \cdots$. Como cada módulo $(P_{-j})^*$ en ϵ^* es un Λ^{op}-módulo proyectivo, se tiene que $M^* = \Omega^j(\mathrm{Ker}(d^*_{-(j+1)}))$ para todo $j \geq 1$. Tomando $j = n$, se tiene que

$$\mathrm{Ext}^i_{\Lambda^{op}}(M^*, \Lambda) = \mathrm{Ext}^i_{\Lambda^{op}}(\Omega^n(\mathrm{Ker}(d^*_{-(n+1)})), \Lambda) = \mathrm{Ext}^{i+n}_{\Lambda^{op}}(\mathrm{Ker}(d^*_{-(n+1)}), \Lambda) = 0$$

para todo $i \geq 1$, pues $\mathrm{di}(\Lambda_{\Lambda}) \leq n$, por lo tanto M^* está en ${}^{\perp}(\Lambda_{\Lambda})$. De igual manera, puede verse que todos los módulos $\mathrm{Ker}(d^*_{-j})$ están en ${}^{\perp}(\Lambda_{\Lambda})$. Luego, aplicando $(-)^*$ a la sucesión ϵ^* se obtiene una resolución proyectiva de $(M^*)^*$, y como $P_{-j} \cong ((P_{-j})^*)^*$ para todo $j \geq 1$, se tiene que $M \cong (M^*)^*$.

Por otro lado, consideremos una resolución proyectiva del Λ^{op}-módulo M^*, esto es, $\delta : \cdots \xrightarrow{p_{-2}} Q_{-1} \xrightarrow{p_{-1}} Q_0 \xrightarrow{p_0} M^* \longrightarrow 0$. Puesto que $M^* \in {}^{\perp}(\Lambda_{\Lambda})$, al aplicar el funtor $(-)^* = \mathrm{Hom}_{\Lambda^{op}}(-, \Lambda)$ a la resolución δ, se obtiene la sucesión exacta $\delta^* : 0 \longrightarrow (M^*)^* \xrightarrow{p_0^*} (Q_0)^* \xrightarrow{p_{-1}^*} (Q_{-1})^* \xrightarrow{p_{-2}^*} \cdots$, donde los Λ-módulos $(Q_{-i})^*$ son proyectivos. Por lo tanto, debido a que $M \cong (M^*)^*$, $M \in {}^{\perp}\Lambda$ y $M^* \in {}^{\perp}(\Lambda_{\Lambda})$ la sucesión exacta:

$$\cdots \xrightarrow{d_{-2}} P_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} P_0 \xrightarrow{p_0^* \circ d_0} Q_0^* \xrightarrow{p_{-1}^*} Q_1^* \xrightarrow{p_{-2}^*} \cdots$$

es una resolución proyectiva completa tal que $M \cong \mathrm{Ker}(p_1^*)$, por lo que M es un Λ-módulo Gorenstein proyectivo.

Hemos probado las incusiones $\Lambda-\mathrm{Gproj} \subseteq \Omega^n(\mathrm{mod}\ \Lambda) \subseteq {}^\perp\Lambda \subseteq \Lambda-\mathrm{Gproj}$ y por lo tanto $\Lambda-\mathrm{Gproj} = \Omega^n(\mathrm{mod}\ \Lambda) =^\perp \Lambda$.

Recíprocamente, supongamos que $\Lambda-\mathrm{Gproj} = \Omega^n(\mathrm{mod}\ \Lambda)$. Luego, para cada módulo $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ se tiene que $\Omega^n(M) \in \Lambda$-Gproj. Así, por la Observación 2.4.4, tenemos que $\mathrm{Ext}^{i+n}_\Lambda(M, \Lambda) = \mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Omega^n(M), \Lambda) = 0$, para cada $i \geq 1$. Por lo tanto, $\mathrm{di}({}_\Lambda\Lambda) \leq n$.
Por otro lado, de la resolución proyectiva de $D(\Lambda_\Lambda)$ podemos considerar la sucesión exacta $0 \longrightarrow \Omega^n(D(\Lambda_\Lambda)) \longrightarrow P_{1-n} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{-1} \longrightarrow P_0 \longrightarrow D(\Lambda_\Lambda) \longrightarrow 0$, con P_j proyectivos. Para todo módulo Gorenstein proyectivo G, por la Observación 2.4.4, $G \in {}^\perp\Lambda$. Luego, por el Lema 2.4.6 y por ser $D(\Lambda_\Lambda)$ inyectivo, se tiene que $\mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(G, \Omega^n(D(\Lambda_\Lambda))) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(G, D(\Lambda_\Lambda)) = 0$.
Por ser $\Omega^n(D(\Lambda_\Lambda))$ un módulo Gorenstein proyectivo, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Omega^n(D(\Lambda_\Lambda)) \xrightarrow{\epsilon} Q_0 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_n \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

con cada Q_i proyectivo y G Gorenstein proyectivo. Tomando G' el conúcleo de ϵ tenemos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(G', \Omega^n(D(\Lambda_\Lambda))) = \mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(G, \Omega^n(D(\Lambda_\Lambda))) = 0$. Luego ϵ se parte, de donde $\Omega^n(D(\Lambda_\Lambda))$ es proyectivo y $\mathrm{dp}D(\Lambda_\Lambda) \leq n$. Por lo tanto, $\mathrm{di}(\Lambda_\Lambda) \leq n$ y Λ es n-Gorenstein.

□

Observación 2.4.9. Sigue inmediatamente de la demostración del teorema anterior, que si Λ es n-Gorenstein entonces Λ-Gproj$= {}^\perp\Lambda$ [C, Theorem 2.3.3].

El siguiente ejemplo muestra que la recíproca de la Observación 2.4.9 no es cierta.

Ejemplo 2.4.10. Sea

$$Q = \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, bend left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

y sea $\Lambda = kQ/I$ donde $I = \langle\alpha\beta\alpha\rangle$. Como Λ es un álgebra Nakayama se tiene que ${}^\perp\Lambda = \Lambda$-Gproj, por [M2, Lemma 2.9].
Por otro lado, los Λ-módulos proyectivos e inyectivos indescomponibles pueden representarse como

$$P_1 : \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \qquad P_2 = I_1 : \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \qquad I_2 : \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}.$$

Como la co-resolución inyectiva de P_1 es

$$\begin{tikzcd}
& & & S_2 \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & I_1 \arrow[ur] \arrow[rr] & & I_2 \arrow[ur] \arrow[rr] & & I_1 \arrow[ur] \arrow[rr] & & I_1 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

se tiene que $\mathrm{di}(P_1) = \infty$. Luego, Λ no es un álgebra n-Gorenstein, pues $\mathrm{di}({}_\Lambda\Lambda) = \infty$. Observemos que este ejemplo se puede generalizar: Si Λ es un álgebra Nakayama tal que $\mathrm{di}(\Lambda) = \infty$ entonces Λ no es un álgebra Gorenstein y sin embargo ${}^\perp\Lambda = \Lambda\text{-Gproj}$.

Del Teorema 2.4.8 y del Lema 2.1.9 tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.4.11. En un álgebra de Artin n-Gorenstein todo módulo virtualmente p-periódico es Gorenstein proyectivo.

Demostración: Sea Λ un álgebra n-Gorenstein y sea X un Λ-módulo virtualmente p-periódico. Por el Lema 2.1.9 sabemos que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(X, M) = 0$ para todo $i \geq 1$ y para todo Λ-módulo finitamente generado M tal que $\mathrm{di}(M) < \infty$. Como Λ es n-Gorenstein se tiene que $\mathrm{di}({}_\Lambda\Lambda) < \infty$. Luego $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(X, \Lambda) = 0$ para todo $i \geq 1$. Por lo tanto, $X \in {}^\perp\Lambda$ y en consecuencia, X es Gorenstein proyectivo por la Obsevación 2.4.9. $\square$

Corolario 2.4.12. En un álgebra de Artin n-Gorenstein todo módulo p-periódico es Gorenstein proyectivo.

Ya hemos observado que la familia de los módulos p-periódicos está incluida en la familia de los módulos virtualmente p-periódicos y entonces, por la Proposición 2.4.11 y el Corolario 2.4.12 estas familias entán incluidas en la familia de los módulos Gorenstein proyectivos, cuando el álgebra es Gorenstein. Sin embargo, no es cierto que todo módulo Gorenstein proyectivo, sobre un álgebra Gorenstein, sea p-periódico. En el siguiente ejemplo exhibimos un módulo Gorenstein proyectivo que no es p-periódico, en un álgebra 0-Gorenstein.

Ejemplo 2.4.13. Consideremos el carcaj Q

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop left, "x"] \arrow[loop right, "z"] \arrow[loop below, "y"]
\end{tikzcd}$$

y tomemos $\Lambda = kQ/I$ donde $I = \langle x^2, y^2, z^2, yx + rxy, zy + ryz, xz + rzx\rangle$ donde r es un elemento no nulo del cuerpo algebraicamente cerrado k que no es raíz enésima de la unidad. Como Λ es un álgebra auto-inyectiva, tenemos que Λ es 0-Gorenstein y por lo tanto todo Λ-módulo es Gorenstein proyectivo.
Consideremos el Λ-módulo indescomponible $M_c = \Lambda/\Lambda(x + cy)$ con $c \in k$. Se prueba que $\Omega^n(M_c) = M_{c.r^n} \ncong M_c$ (ver apéndice A). Por lo tanto, M_c no es p-periódico y es Gorenstein proyectivo.

Observación 2.4.14. Hemos visto en el capítulo 2 que los módulos proyectivos sobre álgebras de Artin pueden ser virtualmente p-periódicos. Sin embargo, si Λ es un álgebra n-Gorenstein entonces los Λ-módulos proyectivos no son virtualmente p-periódico. Este hecho surge de que en las álgebras n-Gorenstein todo módulo que tiene dimensión proyectiva finita tiene dimensión inyectiva finita, mientras que los módulos virtualmente p-periódicos tienen dimensión inyectiva infinita.

En general, no es cierto que los módulos virtualmente p-periódicos sean Gorenstein proyectivos en álgebras de Artin arbitrarias, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.15. Consideremos el siguiente carcaj Q

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

y tomemos el álgebra $\Lambda = kQ/F^2$.
Por la Proposición 2.2.3, sabemos que el Λ-módulo S_2 es p-periódico y por tanto, virtualmente p-periódico.
Veamos que $S_2 \notin {}^{\perp}\Lambda$. En efecto, los Λ-módulos proyectivos e inyectivos indescomponibles de Λ son:

$$P_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \qquad P_2 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \qquad I_1 = S_1 \qquad I_2 = \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{smallmatrix}$$

Luego una co-resolución inyectiva de P_1 es

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 & & 0 & \\
 & & & S_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_1 \oplus S_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & I_2 \arrow[ur] \arrow[rr] & & I_2 \arrow[ur] \arrow[rr] & & I_1 \oplus I_2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, por el dual de la Proposición 1.2.5, tomando $M = P_1$ y $X = S_2$, se tiene que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(S_2, P_1) \neq 0$ para todo $i \geq 1$. Luego $S_2 \notin {}^\perp P_1$ y $S_2 \notin {}^\perp\Lambda$ y por lo tanto, S_2 no es Gorenstein proyectivo.

Para lo que resta de esta sección es conveniente introducir aquí el siguiente comentario.
Comentario: En la Definición 2.1.1 definimos los módulos p-periódicos (virtualmente p-periódicos) a partir de los núcleos de los morfismos que conforman la resolución proyectiva minimal de un módulo. Por otro lado, en la definición de los módulos Gorenstein proyectivos se utiliza los núcleos de una resolución proyectiva cualquiera de un módulo (no es necesariamente minimal). Por lo tanto, solo en lo que resta de esta sección utilizaremos la notación $\Omega^n_m(M)$ para indicar el enésimo núcleo de la resolución proyectiva minimal de M y $\Omega^n(M)$ para indicar el enésimo núcleo de una resolución proyectiva, no necesariamente minimal, de M.

Observación 2.4.16. Para todo Λ-módulo M se tiene que $\Omega^n(M) = \Omega^n_m(M) \oplus P$, donde P es un Λ-módulo proyectivo. Luego $\Omega^n_m(M) \cong \Omega^n(M)$ en $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$.

Los siguientes dos resultados nos serán de utilidad para caracterizar los módulos p-periódicos en las álgebras Gorenstein.

Lema 2.4.17. [C, Lemma 2.1.13] Sea M un Λ-módulo Gorenstein proyectivo indescomponible no proyectivo. Consideremos su cubierta proyectiva $\pi : P_0(M) \to M$. Entonces $\mathrm{Ker}(\pi)$ es un módulo indescomponible no proyectivo.

Demostración: Sea M un Λ-módulo Gorenstein proyectivo indescomponible no proyectivo y sea $\pi : P_0 \to M$ su cubierta proyectiva. Supongamos que $\mathrm{Ker}(\pi) = N \oplus Q$ donde N no tiene sumandos directos proyectivos y Q es proyectivo. Como $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda) = 0$ para todo $i \geq 1$, se tiene que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, Q) = 0$. Luego, la composición de los morfismos inclusión $Q \hookrightarrow \mathrm{Ker}(\pi) \hookrightarrow P_0$ se parte, y como $\pi : P_0 \to M$ es la cubierta proyectiva de M, se tiene que $Q = 0$. Por lo tanto $\mathrm{Ker}(\pi)$ no contiene sumando directos proyectivos.
Supongamos que $\mathrm{Ker}(\pi) = N \oplus N'$, con N y N' módulos no proyectivos y sin sumandos proyectivos. Al aplicar el funtor $(-)^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(-, \Lambda)$ a la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow N \oplus N' \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

se obtiene la sucesión

$$0 \longrightarrow M^* \longrightarrow P_0^* \longrightarrow N^* \oplus N'^* \longrightarrow 0\ .$$

Como P_0^* es un Λ^{op}-módulo proyectivo se tiene que $\Omega(N^*) \oplus \Omega(N'^*) = \Omega(N^* \oplus N'^*) \cong M^*$. Por último, tenemos que $M \cong (M^*)^* \cong (\Omega(N^*))^* \oplus (\Omega(N'^*))^*$, donde $(\Omega(N^*))^*$ y $(\Omega(N'^*))^*$ son módulos no nulos y no proyectivos. Esto contradice la hipótesis de que M es indescomponible. Luego, $\mathrm{Ker}(\pi)$ es un Λ-módulo indescomponible.

$\square$

Para la siguiente proposición necesitamos introducir dos definiciones dadas en [C] siguiendo a D. Bennis y N. Mahdou.

Definición 2.4.18. [C] Sea Λ un álgebra de Artin y sea $n \geq 1$. Una resolución proyectiva completa $(\mathcal{P}, d)$ se dice n**-fuertemente proyectiva completa** si es de la forma:

$$(\mathcal{P}, d) = \cdots \longrightarrow P_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} P_0 \xrightarrow{d_0} P_1 \xrightarrow{d_1} \cdots \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

donde $d_0 = d_n$, $P_n = P_0$, $d_{n+i} = d_i$, $P_{n+i} = P_i$, $d_{-i} = d_{n-i}$ y $P_{-i} = P_{n-i}$ para todo $i \geq 0$. Un Λ-módulo se dice n**-fuertemente Gorenstein proyectivo** si existe una resolución n-fuertemente proyectiva completa $(\mathcal{P}, d)$ tal que $M \cong \mathrm{Ker}(d_0)$.

Observación 2.4.19. Todo Λ-módulo n-fuertemente Gorenstein proyectivo es Gorenstein proyectivo.

Proposición 2.4.20. [C, Proposition 2.2.17] Un Λ-módulo M es n-fuertemente Gorenstein proyectivo si y solo si $\Omega^n(M) \cong M$ en $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ y $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda) = 0$ para $1 \leq i \leq n$.

Demostración: Como M es n-fuertemente Gorenstein proyectivo tenemos que $M \cong \Omega^n(M)$. Además, como M es Gorenstein proyectivo se tiene que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda) = 0$ para todo $i \geq 1$.

Recíprocamente supongamos que $\Omega^n(M) \cong M$ en $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ y $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda) = 0$ para $1 \leq i \leq n$. Más aún, usando el Lema del Décalage, se obtiene que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda) = 0$ para todo i tal que $1 \leq i$.

Tomemos una sucesión exacta $0 \longrightarrow K \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ donde cada P_j es proyectivo y $K = \ker(P_{n-1} \to P_{n-2})$. Por hipótesis, $K \cong M$ en $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$. Luego, existen módulos proyectivos P y Q tales que $K \oplus P = M \oplus Q$ en $\mathrm{mod}\,\Lambda$.
Así, podemos construir la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \oplus P \longrightarrow P_{n-1} \oplus P \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde $\ker(P_{n-1} \oplus P \to P_{n-2}) = K \oplus P = M \oplus Q$.
Denotemos por M' a la imagen del morfismo $P_{n-1} \oplus P \to P_{n-2}$. Por el Lema del Décalage tenemos que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M', Q) = \mathrm{Ext}^n(M, Q) = 0$. Consideremos la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow M \oplus Q \longrightarrow P_{n-1} \oplus P \longrightarrow M' \longrightarrow 0$ (I). Por ser $\mathrm{Ext}^1(M', Q) = 0$, tenemos que $P_{n-1} \oplus P = P' \oplus Q$, con P' un Λ-módulo proyectivo. Así de (I), se tiene la sucesión exacta $0 \longrightarrow M \oplus Q \longrightarrow Q \oplus P' \longrightarrow M' \longrightarrow 0$. Luego, resulta que $0 \longrightarrow M \longrightarrow P' \longrightarrow M' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta, que da lugar a la siguiente sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\iota} P' \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0\,.$$

Finalmente, de esta última sucesión exacta se obtiene el siguiente complejo exacto:

$$\cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\iota p_0} P' \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\iota p_0} P' \longrightarrow \cdots\,.$$

Además, como el complejo

$$\cdots \longrightarrow P'^* \xrightarrow{(\iota p_0)^*} P_0^* \longrightarrow P_1^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow P'^* \xrightarrow{(\iota p_0)^*} P_0^* \longrightarrow \cdots$$

es exacto, ya que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda) = 0$ para todo $i \geq 1$, se obtiene la resolución n-fuertemente proyectiva completa buscada. Por lo tanto, M es n-fuertemente Gorenstein proyectivo. □

Finalmente podemos dar las condiciones necesarias y suficientes para que un módulo indescomponible no proyectivo sea p-periódico en un álgebra n-Gorenstein.

Proposición 2.4.21. Sea Λ un álgebra Gorenstein y sea M un Λ-módulo indescomponible no proyectivo. Entonces M es p-periódico si y solo si M es n-fuertemente Gorenstein proyectivo.

Demostración: Sea M un Λ-módulo indescomponible no proyectivo.

Supongamos que M es p-periódico, esto es, $M|\Omega^n_m(M)$ para algún entero $n \geq 1$. Por el Corolario 2.4.12 y el Lema 2.4.17 se tiene, para todo $t \geq 1$, que $\Omega^t_m(M)$ es Gorenstein proyectivo indescomponible no proyectivo. Por tanto, $M = \Omega^n_m(M)$ y $M \cong \Omega^n(M)$ en $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$. Como $\mathrm{di}(\Lambda) < \infty$, sabemos que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda) = 0$ para todo $i \geq 1$. Así, por la Proposición 2.4.20, se tiene que M es n-fuertemente Gorenstein proyectivo.

Recíprocamente, si M es n-fuertemente Gorenstein proyectivo entonces, por la Proposición 2.4.20, $M \cong \Omega^n(M)$ en $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$. Luego, $M \oplus Q_1 = \Omega^n(M) \oplus Q_2$, con Q_1, Q_2 Λ-módulos proyectivos.

Luego por la Observación 2.4.16 se tiene que $M \oplus Q_1 = \Omega^n_m(M) \oplus Q_2 \oplus P$ para algún módulo proyectivo P. Por lo tanto, $M|\Omega^n_m(M)$ pues M es un Λ-módulo indescomponible no proyectivo. Así, M es p-periódico. $\square$

Observación 2.4.22. En un álgebra de Artin Λ, todo Λ-módulo n-fuertemente Gorenstein proyectivo es p-periódico, pero en general la recíproca no es cierta como lo muestra el Ejemplo 2.4.15.

Capítulo 3

Módulos ortogonales a su resolución.

En el capítulo anterior se definió la familia de módulos ${}^{\perp}\Lambda$, llamados módulos estables, así como también una subfamilia Λ-Gproj de ${}^{\perp}\Lambda$ formada por los Λ-módulos Goresntein proyectivos. Lanzilotta y Mata [LM] probaron que la primera y segunda funciones de Igusa-Todorov ϕ y ψ se anulan en la familia de los módulos estables.

En este capítulo, generalizamos la noción de módulo estable extendiendo la familia de módulos donde las funciones de Igusa-Todorov valen cero.

3.1. Módulos ortogonales a su resolución.

Consideremos Λ una R-álgebra de Artin, y sea $\operatorname{mod} \Lambda$ la categoría de los Λ-módulos a izquierda finitamente generados. Consideremos también $\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$, la categoría cociente $\operatorname{mod}\Lambda/\mathcal{P}$ donde $\mathcal{P}$ es el ideal de los morfismos que se factorizan por un proyectivo. Nuestro objetivo en esta sección será definir el concepto de módulo ortogonal a su resolución con el propósito de construir una subcategoría plena de $\underline{\operatorname{mod}}\,\Lambda$ y evaluar las funciones de Igusa-Todorov en dicha subcategoría.

Definición 3.1.1. Sea X un Λ-módulo finitamente generado y sea $\mathbf{P}_X = \{P_1, ..., P_r\}$ el conjunto de todos los Λ-módulos proyectivos indescomponibles que son sumandos de los proyectivos que intervienen en la resolución proyectiva minimal de X. Diremos que X es **ortogonal a su resolución minimal**, o simplemente **ortogonal a su resolución**, si $\operatorname{Ext}^m_\Lambda(X, P_j) = 0$ para todo $m \geq 1$ y para todo $P_j \in \mathbf{P}_X$.

De la definición anterior sigue inmediatamente que para un álgebra de Artin Λ, valen las siguientes inclusiones entre familias de módulos:

$$\Lambda - \mathrm{Gproj} \subseteq {}^{\perp}\Lambda \subseteq \{\text{ortogonales a su resolución}\}.$$

En efecto, mostraremos las definiciones comprometidas con el fin de observar como se debilitan las condiciones que intervienen en las mismas. Recordemos que un módulo M es Gorenstein proyectivo si existe una sucesión exacta:

$$\cdots \xrightarrow{p_{-2}} P_{-1} \xrightarrow{p_{-1}} P_0 \xrightarrow{p_0} P_1 \xrightarrow{p_1} \cdots$$

con $M \cong \mathrm{Ker}(p_0)$, cada P_i Λ-módulo proyectivo para todo $i \in \mathbb{Z}$ y tal que la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{p_1^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_1, \Lambda) \xrightarrow{p_0^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0, \Lambda) \xrightarrow{p_{-1}^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_{-1}, \Lambda) \xrightarrow{p_{-2}^*} \cdots$$

es exacta.

Por otro lado, M es un módulo estable, por la Observación 2.4.4.2., si y solo si dada una resolución proyectiva de M, esto es

$$\cdots \xrightarrow{p_{-2}} P_{-1} \xrightarrow{p_{-1}} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

al aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, \Lambda)$, se obtiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \Lambda) \xrightarrow{p_0^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0, \Lambda) \xrightarrow{p_{-1}^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_{-1}, \Lambda) \xrightarrow{p_{-2}^*} \cdots .$$

Por último, observemos que M es ortogonal a su resolución si y solo si dada una resolución proyectiva de M

$$\cdots \xrightarrow{p_{-2}} P_{-1} \xrightarrow{p_{-1}} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

al aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, P_j)$ con P_j en $\mathbf{P}_M$ se obtiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M, P_j) \xrightarrow{p_0^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0, P_j) \xrightarrow{p_{-1}^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_{-1}, P_j) \xrightarrow{p_{-2}^*} \cdots .$$

Por lo tanto valen las inclusiones deseadas.

Notemos que en general las inclusiones son estrictas. En efecto, René Marczinzik en [M] ofrece un ejemplo donde se muestra que la primera inclusión es estricta. Veamos un ejemplo para mostrar que la segunda inclusión es estricta. Consideremos el carcaj Q:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

y tomemos el álgebra $\Lambda = kQ/F^2$. Los Λ-módulos proyectivos e inyectivos indescomponibles son

$$P_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \qquad P_2 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \qquad I_1 = S_1 \qquad I_2 = \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{smallmatrix}$$

Veamos que el módulo S_2 es ortogonal a su resolución y no pertenece a ${}^{\perp}\Lambda$. En efecto, dado que S_2 es p-periódico y $\mathbf{P}_{S_2} = \{P_2\}$, con $\mathrm{di}(P_2) = 1 < \infty$, se tiene por el Corolario 2.1.10, que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(S_2, P_2) = 0$ para todo $i \geq 1$, por lo que es ortogonal a su resolución. Por otro lado, utilizando el dual de la Proposición 1.2.5 y la co-resolución inyectiva de P_1:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 & & 0 & \\
 & & & S_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_1 \oplus S_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & I_2 \arrow[ur] \arrow[rr] & & I_2 \arrow[ur] \arrow[rr] & & I_1 \oplus I_2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

se tiene que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(S_2, P_1) \neq 0$ para todo $i \geq 1$. Luego S_2 no está en ${}^{\perp}\Lambda$.

Daremos más ejemplos de módulos ortogonales a su resolución.

Ejemplos 3.1.2. 1. Sea Λ un álgebra de Artin. Entonces:

a) Si X es proyectivo entonces X es ortogonal a su resolución.

b) Si X es un módulo tal que todos los proyectivos $P_j \in \mathbf{P}_X$ son inyectivos entonces X es ortogonal a su resolución. En particular, si Λ es auto-inyectiva, todo Λ-módulo es ortogonal a su resolución.

c) Podemos generalizar el ejemplo anterior: sean $\mathcal{P}$ la clase de todos los Λ-módulos proyectivos de dimensión inyectiva finita, $n = \max_{P_i \in \mathcal{P}}\{\mathrm{di}(P_i)\}$ y X un Λ-módulo de dimensión proyectiva infinita tal que la clase $\mathbf{P}_X$ está contenida en la clase $\mathcal{P}$, entonces $\Omega^m(X)$ es ortogonal a su resolución para todo $m \geq n$. En efecto: como $m \geq n$, $\mathbf{P}_{\Omega^m(X)} \subset \mathbf{P}_X \subset \mathcal{P}$. Luego, si $Q \in \mathbf{P}_{\Omega^m(X)}$ entonces

$$\mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Omega^m(X), Q) = \mathrm{Ext}^{i+m}_\Lambda(X, Q) = 0 \ \forall i \geq 1, \text{ pues } \mathrm{di}(Q) \leq n \leq m.$$

Por lo tanto, para todo $m \geq n$ se tiene que $\Omega^m(X)$ es ortogonal a su resolución.

2. Consideremos el carcaj Q:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

y tomemos el álgebra $\Lambda = kQ/F^2$, donde F es el ideal generado por las flechas.

Veamos que el módulo simple S_4 es ortogonal a su resolución. En efecto, la resolución proyectiva minimal de S_4 es:

$$\cdots \longrightarrow P_4 \longrightarrow P_4 \longrightarrow P_4 \longrightarrow S_4 \longrightarrow 0$$

Por lo tanto $\mathbf{P}_{S_4} = \{P_4\}$. Por ser S_4 un módulo p-periódico (Proposición 2.2.3) y por ser $\mathrm{di}(P_4) = 3 < \infty$, se tiene que $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(S_4, P_4) = 0$ para todo $m \geq 1$ por el Corolario 2.1.10. Por lo tanto, S_4 es ortogonal a su resolución.

3. Todo Λ-módulo virtualmente p-periódico X tal que $\mathrm{di}(P_j) < \infty$ para todo $P_j \in \mathbf{P}_X$ es ortogonal a su resolución. En efecto, como X es p-periódico, por el Corolario 2.1.10, se tiene que $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(X, M) = 0$ para todo M con $\mathrm{di}(M) < \infty$ y para todo $m \geq 1$. Luego, $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(X, P_j) = 0$ para todo $P_j \in \mathbf{P}_X$ y todo $m \geq 1$. Por lo tanto, X es ortogonal a su resolución.

A continuación daremos algunas observaciones que se desprenden de la definición de módulo ortogonal a su resolución.

Observaciones 3.1.3. 1. Si X es un Λ-módulo no proyectivo ortogonal a su resolución entonces X tiene dimensión proyectiva infinita. En efecto, sean $\{P_1, ..., P_r\}$ los proyectivos que intervienen en la resolución proyectiva minimal de X. Si $\mathrm{dp}(X) = n < \infty$ entonces existe $i \in \{1, ..., r\}$ tal que $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(X, P_i) \neq 0$, por Proposición 1.2.5.

2. Todo sumando directo de un módulo ortogonal a su resolución es ortogonal a su resolución. En efecto, sea $X = \bigoplus_j X_j$ ortogonal a su resolución, donde cada X_j es indescomponible. Como la resolución proyectiva minimal de X se obtiene de la suma directa de las resoluciones proyectivas minimales de los módulos X_j en la categoría de complejos, se tiene que $\mathbf{P}_{X_j} \subseteq \mathbf{P}_X$. Luego, $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(X, P) = 0$ para todo $P \in \mathbf{P}_{X_j}$, ya que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(X, P) = 0$ para todo $P \in \mathbf{P}_X$. Finalmente, por la aditividad en la primer variable del bifuntor del Ext, se tiene que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(X_j, P) = 0$ para todo $P \in \mathbf{P}_{X_j}$, de donde X_j es ortogonal a su resolución.

3. Si X es no proyectivo ortogonal a su resolución entonces $\Omega^n(X)$ es ortogonal a su resolución para todo $n \geq 0$. Sigue inmediatamente del hecho que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Omega^n(X), P) = \mathrm{Ext}^{i+n}_\Lambda(X, P) = 0$ y que $\mathbf{P}_{\Omega^n(X)} \subseteq \mathbf{P}_X$.

4. Si A y B son módulos ortogonales a su resolución tales que $\mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B$ entonces $A \oplus B$ es ortogonal a su resolución. Sin embargo, en general la suma directa de módulos ortogonales a su resolución no es necesariamente ortogonal a su resolución. En efecto, en Ejemplo 3.1.2.2. consideremos los módulos P_3 y S_4 que son ortogonales a su resolución, sin embargo el módulo $P_3 \oplus S_4$ no lo es. Veamos que efectivamente $P_3 \oplus S_4$ no es ortogonal a su resolución. Como la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow P_3 \longrightarrow I_4 \longrightarrow S_4 \longrightarrow 0$$

no se parte se tiene que $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(P_3 \oplus S_4, P_3) \neq 0$ donde $P_3 \in \mathbf{P}_{P_3 \oplus S_4} = \{P_3, P_4\}$. Por lo tanto $P_3 \oplus S_4$ no es ortogonal a su resolución.

3.2. Valor de las funciones de Igusa-Todorov en los módulos ortogonales a su resolución.

Para calcular los valores de las funciones ϕ y ψ de Igusa-Todorov en los módulos ortogonales a su resolución, nos basta con conocer el valor de la primera función en dichos módulos, como lo afirma la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1. Si M es un Λ-módulo ortogonal a su resolución, entonces $\psi(M) = \phi(M)$.

Demostración: Sea M un Λ-módulo ortogonal a su resolución y supongamos que $\phi(M) = n$. Como $\Omega^n(M)$ también es ortogonal a su resolución, por la Observación 3.1.3.2, todo sumando directo de $\Omega^n(M)$ es ortogonal a su resolución. Luego todo sumando directo de $\Omega^n(M)$ es proyectivo o tiene dimensión proyectiva infinita. Por lo tanto,

$\text{máx}\{\text{dp}(N) : N|\Omega^n(M) \text{ con } \text{dp}(M) < \infty\} = 0$ y $\psi(M) = \phi(M)$. $\square$

Sea X un Λ-módulo ortogonal a su resolución y $\mathbf{P}_X = \{P_1, P_2, ..., P_r\}$ el conjunto de todos los Λ-módulos proyectivos indescomponibles que son sumandos de los proyectivos que intervienen en la resolución proyectiva minimal de X. Consideraremos la subcategoría plena de mod Λ determinada por $\text{add}((\bigoplus_{i\geq 0}\Omega^i(X)) \oplus (\bigoplus_{j=1}^r P_j))$ la cual notaremos con χ_X. Además notaremos con $\underline{\chi}_X$, o simplemente $\underline{\chi}$ si no hay lugar a confusión, a la categoría estable por proyectivos en $\text{add}(\mathbf{P}_X)$, esto es:

- Los objetos de $\underline{\chi}_X$ son los objetos de χ_X.
- $\text{Hom}_{\underline{\chi}_X}(M,N) = \frac{\text{Hom}_{\chi_X}(M,N)}{P(M,N)}$, donde $P(M,N)$ es el conjunto de los morfismos de M a N que se factorizan por un proyectivo en $\text{add}(\mathbf{P}_X)$.
- La composición es la inducida por χ_X.

Recordemos que si $\underline{f} : M \to N$ es un morfismo en $\underline{\text{mod}}\,\Lambda$ y f es un representante en $\text{mod}\,\Lambda$ de $\underline{f}$, entonces por definición $\underline{f} = \underline{0}$ en $\underline{\text{mod}}\,\Lambda$ si f se factoriza a través de un proyectivo P en mod Λ.

Asimismo, recordemos que $\underline{f} = \underline{0}$ en $\underline{\chi}_X$ si f se factoriza a través de un proyectivo en χ_X, es decir, un proyectivo en $\text{add}(\mathbf{P}_X)$.

Lema 3.2.2. Sea $\underline{f} : M \to N$ un morfismo en $\underline{\chi}_X$. Entonces $\underline{f} = \underline{0}$ en $\underline{\chi}_X$ si y solo si $\underline{f} = \underline{0}$ en $\underline{\text{mod}}\,\Lambda$. En particular, $\underline{\chi}_X$ es una subcategoría plena de $\underline{\text{mod}}\,\Lambda$.

Demostración: Si $\underline{f} = \underline{0}$ en $\underline{\chi}_X$ entonces es trivial que $\underline{f} = \underline{0}$ en $\underline{\text{mod}}\,\Lambda$.

Recíprocamente, si $\underline{f} = \underline{0}$ en $\underline{\text{mod}}\,\Lambda$ entonces existe un proyectivo P en mod Λ y existen $h : M \to P$ y $j : P \to N$ tal que $f = jh$. Veamos que f se factoriza por un proyectivo en

$\underline{\chi}_X$. En efecto, consideremos en mod Λ el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(M) \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[dd, "\Omega(f)"] & P_0(M) \arrow[rr, "\pi_M"] \arrow[dd, "p"] & & M \arrow[r] \arrow[dl, "h"] \arrow[dd, "f"] & 0 \\
& & & P \arrow[dl, dashed, "u"] \arrow[dr, "j"] & & \\
0 \arrow[r] & \Omega(N) \arrow[r, "\iota_N"] & P_0(N) \arrow[rr, "\pi_N"] & & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como π_N es un epimorfismo y P es proyectivo, existe $u : P \to P_0(N)$ tal que $j = \pi_N u$. Entonces $f = jh = \pi_N uh$. Luego, tomando $uh : M \to P_0(N)$ se tiene que f se factoriza por $P_0(N)$, donde $P_0(N)$ está en χ_X y uh también está en χ_X, pues χ_X es plena. $\square$

Observación 3.2.3. De la demostración del lema anterior sigue que si $\underline{f} : M \to N$ es un morfismo en $\underline{\chi}_X$ entonces $\underline{f} = \underline{0}$ en $\underline{\chi}_X$ si y solo si $f : M \to N$ se factoriza por $P_0(N)$.

Lema 3.2.4. Sea X un Λ-módulo ortogonal a su resolución. Si M está en $\underline{\chi}_X$ entonces $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(M, P) = 0 \ \forall\, m \geq 1$, $\forall P \in \mathbf{P}_X$.

Demostración: Sea $M \in \underline{\chi}_X$, esto es, $M = (\bigoplus_{i=0}^n X_i) \oplus P'$ donde cada X_i es suma finita de sumandos de $\Omega^i(X)$ y P' es suma finita de proyectivos en $\mathbf{P}_X$. Por la aditividad en la primera variable del bifuntor Ext^m_Λ, se tiene que

$$\mathrm{Ext}^m_\Lambda(M, P) = \mathrm{Ext}^m_\Lambda(\bigoplus_{i=0}^n X_i, P) \oplus \mathrm{Ext}^m_\Lambda(P', P).$$

Ya que P' es proyectivo tenemos que $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(P', P) = 0$ para todo $m \geq 1$. Luego

$$\mathrm{Ext}^m_\Lambda(M, P) = \bigoplus_{i=0}^n \mathrm{Ext}^m_\Lambda(X_i, P)\, \forall m \geq 1.$$

Por hipótesis sabemos que $\mathrm{Ext}^{\mathrm{m+i}}_\Lambda(\mathrm{X}, \mathrm{P}) = 0$ para todo $m + i \geq 1$ y para todo $P \in \mathbf{P}_X$. Luego para $m \geq 1$ se tiene que:

$$\mathrm{Ext}^m_\Lambda(X_i, P) | \bigoplus_{finita} \mathrm{Ext}^m_\Lambda(\Omega^i(X), P) = \bigoplus_{finita} \mathrm{Ext}^{m+i}_\Lambda(X, P) = 0.$$

Así $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(M,P) = 0$ para todo $m \geq 1$ y para todo P en $\mathbf{P}_X$. $\square$

Recordemos que, dada un álgebra de artin arbitraria Λ, tenemos definido el funtor $\underline{\Omega} : \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda \to \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ tal que $\underline{\Omega}(M) = \Omega(M)$ para todo M en $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ y tal que $\underline{\Omega}(\underline{f}) = \underline{\Omega(f)}$ para todo $\underline{f} : M \to N$ en $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$. Consideraremos ahora la restricción de $\underline{\Omega}$ a la subcategoría plena $\underline{\chi}_X$ de $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$, esto es, $\underline{\Omega}|_{\underline{\chi}} : \underline{\chi} \to \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$.

El siguiente teorema es el resultado central de este capítulo, pues a partir de él nos será posible calcular el valor de las funciones de Igusa-Todorov en los módulos ortogonales a su resolución. Dicho teorema generaliza, para el caso de la primer sizigia, la Proposición 2.43 enunciada por M. Auslander y M. Brigder en [AB].

Teorema 3.2.5. El funtor $\underline{\Omega}|_{\underline{\chi}}$ es un funtor fiel y pleno de $\underline{\chi}_X$ en $\underline{\chi}_X$.

Demostración: Indicaremos simplemente Ω en lugar de $\underline{\Omega}|_{\underline{\chi}}$. Primero veamos que Ω está bien definida en los objetos, es decir, $\Omega(M)$ pertenece a $\underline{\chi}_X$ para todo M en $\underline{\chi}_X$.

Sea M un objeto en $\underline{\chi}_X$, o sea, $M = (\bigoplus_{i=0}^n X_i) \oplus P$ donde cada X_i es suma finita de sumandos de $\Omega^i(X)$ y P es suma finita de proyectivos en $\mathbf{P}_X = \{P_1, ..., P_r\}$. Como $\Omega(M) = \Omega(\bigoplus_{i=0}^n X_l) \oplus \Omega(P) = \bigoplus_{i=0}^n \Omega(X_i) \oplus 0$, donde cada $\Omega(X_i)$ es suma finita de sumandos de $\Omega^{i+1}(X)$, entonces $\Omega(M)$ pertenece a $\underline{\chi}_X$. Por lo tanto, $\Omega(\mathrm{Obj}(\underline{\chi})) \subseteq \mathrm{Obj}(\underline{\chi})$.

Veamos ahora que Ω está bien definida en los morfismos, esto es, si $\underline{f} : M \to N$ es un morfismo en $\underline{\chi}_X$ tal que $\underline{f} = \underline{0}$ entonces $\Omega(\underline{f}) = \underline{0}$ en $\underline{\chi}_X$, donde $\Omega(\underline{f}) = \underline{\Omega(f)}$.

Sea $\underline{f} : M \to N$ un morfismo en $\underline{\chi}_X$ tal que $\underline{f} = \underline{0}$ en $\underline{\chi}_X$. Por la Observación 3.2.3, f se factoriza a través del proyectivo $P_0(N)$, esto es, existe $t : M \to P_0(N)$ tal que $\pi_N t = f$.

Tenemos así el siguiente diagrama, donde los cuadrados y el triángulo inferior conmutan:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(M) \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[d, "\Omega(f)"] & P_0(M) \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[d, "p"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "t"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega(N) \arrow[r, "\iota_N"] & P_0(N) \arrow[r, "\pi_N"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $f\pi_M = \pi_N p$ se tiene:

$$0 = \pi_N p - f\pi_M = \pi_N p - \pi_N t\pi_M = \pi_N(p - t\pi_M).$$

Entonces, por la propiedad universal del núcleo, existe $\alpha : P_0(M) \to \Omega(N)$ tal que $\iota_N\alpha = p - t\pi_M$.

Obtenemos de esta manera el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(M) \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[d, "\Omega(f)"] & P_0(M) \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[d, "p"] \arrow[dl, dashed, "\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "t"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega(N) \arrow[r, "\iota_N"] & P_0(N) \arrow[r, "\pi_N"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces $\iota_N\alpha\iota_M = (p - t\pi_M)\iota_M = p\iota_M - t\pi_M\iota_M = p\iota_M + 0 = p\iota_M$. Por otro lado, como $p\iota_M = \iota_N\Omega(f)$ se tiene que $\iota_N\alpha\iota_M = \iota_N\Omega(f)$. Luego $\alpha\iota_M = \Omega(f)$, por ser ι_N un monomorfismo.

Tenemos así el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Omega(M) \arrow[dr, "\iota_M"] \arrow[dd, "\Omega(f)"'] & \\
& P_0(M) \arrow[dl, "\alpha"] \\
\Omega(N) &
\end{tikzcd} \qquad \text{con } P_0(M) \text{ en } \underline{\chi}$$

por lo que $\Omega(f)$ se factoriza por $P_0(M)$ y por lo tanto se tiene que $\underline{\Omega(f)} = \underline{0}$ en $\underline{\chi}_X$.

Finalmente veamos que el funtor $\Omega : \underline{\chi} \to \underline{\chi}$ es fiel y pleno.

Sean M, N módulos en $\underline{\chi}_X$ y consideremos $\Omega : \underline{\chi}(M,N) \to \underline{\chi}(\Omega(M),\Omega(N))$. Veamos que existe $H : \underline{\chi}(\Omega(M),\Omega(N)) \to \underline{\chi}(M,N)$ tal que

$$H\Omega|_{\underline{\chi}(M,N)} = Id_{\underline{\chi}(M,N)} \text{ y } \Omega|_{\underline{\chi}(M,N)}H = Id_{\underline{\chi}(\Omega(M),\Omega(N))}.$$

En efecto, para definir H consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(M,\Omega(N)) \arrow[r, "\pi_M^*"] \arrow[d, "\iota_{N*}"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0(M),\Omega(N)) \arrow[r, "\iota_M^*"] \arrow[d, "\iota_{N*}"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega(M),\Omega(N)) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{N*}"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,\Omega(N)) \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(M,P_0(N)) \arrow[r, "\pi_M^*"] \arrow[d, "\pi_{N*}"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0(M),P_0(N)) \arrow[r, "\iota_M^*"] \arrow[d, "\pi_{N*}"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega(M),P_0(N)) \arrow[r, "\text{Lema 3.2.4}"] \arrow[d, "\pi_{N*}"] & 0=\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,P_0(M)) \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N) \arrow[r, "\pi_M^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0(M),N) \arrow[r, "\iota_M^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega(M),N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,N) \\
 & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,\Omega(N)) & 0 & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Omega(M),\Omega(N)) &
\end{tikzcd} \qquad (I)$$

obtenido a partir de las sucesiones exactas en el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(M) \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[d, "\Omega(f)"] & P_0(M) \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[d, "p"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega(N) \arrow[r, "\iota_N"] & P_0(N) \arrow[r, "\pi_N"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definamos $H : \underline{\chi}(\Omega(M), \Omega(N)) \to \underline{\chi}(M, N)$ de la siguiente manera:

Dado $\underline{g} : \Omega(M) \to \Omega(N)$ en $\underline{\chi}_X$, sea $g : \Omega(M) \to \Omega(N)$ un representante de $\underline{g}$. Del diagrama (I) sigue que $\iota_{N_*}(g) = \iota_N g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega(M), P_0(N))$ y como ι_M^* es un epimorfismo sabemos que existe $p : P_0(M) \to P_0(N)$ tal que:

$$\iota_M^*(p) = \iota_{N_*}(g).$$

Como $\pi_{N_*}\iota_{N_*} = 0$ se tiene que $0 = \pi_{N_*}\iota_{N_*}(g) = \pi_{N_*}\iota_M^*(p)$. Luego por la conmutatividad del segundo cuadrado inferior del diagrama (I) sabemos que $\iota_M^*\pi_{N_*}(p) = 0$. Entonces $\pi_{N_*}(p) \in Ker(\iota_M^*) = Im(\pi_M^*)$ y por lo tanto existe $h \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ tal que $\pi_M^*(h) = \pi_{N_*}(p)$.

Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(M) \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[d, "g"] & P_0(M) \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[d, dashed, "p"] & M \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega(N) \arrow[r, "\iota_N"] & P_0(N) \arrow[r, "\pi_N"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definimos:

$$H : \underline{\chi}(\Omega(M), \Omega(N)) \to \underline{\chi}(M, N) \text{ tal que } H(\underline{g}) = \underline{h}$$

$$\text{donde } \pi_M^*(h) = \pi_{N_*}(p) \text{ con } p \text{ tal que } \iota_M^*(p) = \iota_{N_*}(g).$$

Veamos que H está bien definida, es decir, H no depende de la elección de p y que si $\underline{g} = \underline{0}$ en $\underline{\chi}_X$ entonces $\underline{h} = \underline{0}$ en $\underline{\chi}_X$.

En efecto: sean $p, p' \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0(M), P_0(N))$ tales que $\iota_M^*(p) = \iota_{N_*}(g)$, $\pi_{N_*}(p) = \pi_M^*(h)$, $\iota_M^*(p') = \iota_{N_*}(g)$ y $\pi_{N_*}(p') = \pi_M^*(h')$ con $h, h' \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$. Como $\iota_M^*(p) = \iota_M^*(p')$ se tiene que $\iota_M^*(p - p') = 0$ y por lo tanto $p - p' \in Ker(\iota_M^*) = Im(\pi_M^*)$. Luego existe $\alpha : M \to P_0(N)$ tal que $\pi_M^*(\alpha) = p - p'$. Por la conmutatividad del cuadrado de la izquierda inferior del diagrama (I) se tiene que $\pi_M^* \pi_{N_*}(\alpha) = \pi_{N_*}\pi_M^*(\alpha) = \pi_{N_*}(p - p') = \pi_{N_*}(p) - \pi_{N_*}(p') = \pi_M^*(h) - \pi_M^*(h') = \pi_M^*(h - h')$. Luego, por ser π_M^* monomorfismo, se tiene que $\pi_{N_*}(\alpha) = h - h'$.

Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, "h-h'"'] & \\
& P_0(N) \arrow[dl, "\pi_N"] \\
N &
\end{tikzcd}$$

donde $h - h'$ se factoriza a través de $P_0(N)$, con $P_0(N)$ en $\underline{\chi}_X$. Luego, por la Observación 3.2.3, $\underline{h - h'} = \underline{0}$ en $\underline{\chi}_X$, es decir, $\underline{h} = \underline{h'}$ en $\underline{\chi}_X$. Así $H : \underline{\chi}(\Omega(M), \Omega(N)) \to \underline{\chi}(M, N)$ no depende de la elección de p.

Supongamos que $H(\underline{g}) = \underline{h}$ donde $\pi_M^*(h) = \pi_{N_*}(p)$ con p tal que $\iota_M^*(p) = \iota_{N_*}(g)$. Veamos que si $\underline{g} = \underline{0}$ en $\underline{\chi}_X$ entonces $\underline{h} = \underline{0}$ en $\underline{\chi}_X$.

Como $\underline{g} = \underline{0}$ en $\underline{\chi}_X$ se tiene, por la Observación 3.2.3, que g se factoriza a través de

$P_0(\Omega(N))$. Luego tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(M) \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[dl, "t"'] \arrow[dd, "g"] & P_0(M) \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[dd, "p"] & M \arrow[r] \arrow[dd, "h"] & 0 \\
P_0(\Omega(N)) \arrow[dr, "\epsilon"] & & & & \\
0 \arrow[r] & \Omega(N) \arrow[r, "\iota_N"] & P_0(N) \arrow[r, "\pi_N"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $g = \epsilon t$.

Considerando el push-out de los morfismos ι_M y t, (PO, ι_M, t), se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r] & \Omega(M) \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[d, "t"] & P_0(M) \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[d, "r"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\delta : & 0 \arrow[r] & P_0(\Omega(N)) \arrow[r, "s"] & PO \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (II)$$

Como $P_0(\Omega(N))$ y M son objetos en $\underline{\chi}_X$ se tiene que $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(M, P_0(\Omega(N)) = 0$ para todo $m \geq 1$, por el Lema 3.2.4, y en particular $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, P_0(\Omega(N)) = 0$, y por lo tanto la sucesión exacta corta δ se parte. Luego existe $z' : PO \to P_0(\Omega(N))$ tal que $z's = id_{P_0(\Omega(N))}$.

Tomando $z = z'r : P_0(M) \to P_0(\Omega(N))$ tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(M) \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[dl, "t"'] \arrow[dd, "g"] & P_0(M) \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[dd, "p"] \arrow[dll, "z"] & M \arrow[r] \arrow[dd, "h"] & 0 \\
P_0(\Omega(N)) \arrow[dr, "\epsilon"] & & & & \\
0 \arrow[r] & \Omega(N) \arrow[r, "\iota_N"] & P_0(N) \arrow[r, "\pi_N"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (III)$$

Probemos ahora, que $g = \epsilon z \iota_M$. En efecto, por el diagrama conmutativo (II) tenemos que $st = r\iota_M$. Luego $z'st = z'r\iota_M$. De $z's = id_{P_0(\Omega(N))}$ y $z'r\iota_M = z\iota_M$ obtenemos que $t = z\iota_M$. Entonces, por el diagrama (III) tenemos que $g = \epsilon t = \epsilon z \iota_M$, es decir, $g = \iota_M^*(\epsilon z)$. Se tiene así, el siguiente diagrama con los cuadrados y el triángulo superior conmutativos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Omega(M) \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[d, "g"] & P_0(M) \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[d, "p"] \arrow[dl, "\epsilon z"] & M \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Omega(N) \arrow[r, "\iota_N"] & P_0(N) \arrow[r, "\pi_N"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

De $p\iota_M = \iota_N g = \iota_N \epsilon z \iota_M$ se obtiene que $(p - \iota_N \epsilon z)\iota_M = 0$, es decir, $\iota_M^*(p - \iota_N \epsilon z) = 0$. Luego, $p - \iota_N \epsilon z \in Ker(\iota_M^*) = Im(\pi_M^*)$. Entonces, por la exactitud de la fila del medio del diagrama (I), existe un morfismo $\beta : M \to P_0(N)$ tal que $p - \iota_N \epsilon z = \pi_M^*(\beta) = \beta\pi_M$.

Por la conmutatividad del cuadrado de la izquierda inferior del diagrama (I) se tiene que:

$$\pi_M^* \pi_{N_*}(\beta) = \pi_{N_*}\pi_M^*(\beta) = \pi_{N_*}(p - \iota_N \epsilon z) = \pi_{N_*}(p) - \pi_{N_*}(\iota_N \epsilon z) = \pi_{N_*}(p).$$

Por la definición de H sabemos que $\pi_{N_*}(p) = \pi_M^*(h)$. Así obtenemos que:

$$\pi_M^* \pi_{N_*}(\beta) = \pi_{N_*}(p) = \pi_M^*(h)$$

Y entonces, como π_M^* es un monomorfismo, se tiene que $\pi_{N_*}(\beta) = h$, es decir, $\pi_N \beta = h$. Por lo tanto, h se factoriza por $P_0(N)$ y $\underline{h} = \underline{0}$ en $\underline{\chi}_X$.

Solo resta mostrar que las composiciones de $H : \underline{\chi}(\Omega(M), \Omega(N)) \to \underline{\chi}(M, N)$ y $\Omega : \underline{\chi}(M, N) \to \underline{\chi}(\Omega(M), \Omega(N))$ dan las identidades correspondientes.

Mostremos primero que $H\Omega = id_{\underline{\chi}(M,N)}$, esto es, $H\Omega(\underline{f}) = \underline{f}$ para todo $\underline{f}$ en $\underline{\chi}(M, N)$. Para ello tendremos en cuenta el diagrama (I). Si $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ es un representante de $\underline{f}$, sabemos que $\pi_M^*(f) = f\pi_M \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_0(M), N)$. Luego, como π_{N_*} es un epimorfismo, existe $p' : P_0(M) \to P_0(N)$ tal que $\pi_{N_*}(p') = \pi_M^*(f)$. Además, p' es tal que $\pi_{N_*}(p'\iota_M) = \pi_{N_*}\iota_M^*(p') = \iota_M^* \pi_{N_*}(p') = \iota_M^*(\pi_M^*(f)) = 0$. Así, $p'\iota_M \in Ker(\pi_{N_*}) = Im(\iota_{N_*})$, de donde existe $g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega(M), \Omega(N))$ tal que $\iota_{N_*}(g) = \iota_M^*(p')$. Luego, por la definición de H, tenemos que $H(\underline{g}) = \underline{f}$.

Por otro lado, considerando el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(M) \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[d, shift right, "\Omega(f)"'] \arrow[d, shift left, "g"] & P_0(M) \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[d, shift right, "p"'] \arrow[d, shift left, "p'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega(N) \arrow[r, "\iota_N"] & P_0(N) \arrow[r, "\pi_N"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

se obtiene, por la construcción de g y por la definición de $\Omega(f)$, que $g - \Omega(f)$ se factoriza por un proyectivo P en mod Λ. Más aún, por la Observación 3.2.3, $g - \Omega(f)$ se factoriza por $P_0(\Omega(N))$ y por lo tanto $\underline{g - \Omega(f)} = \underline{0}$ en $\underline{\chi}_X$. Luego se tiene que $\underline{g} = \underline{\Omega(f)}$ en $\underline{\chi}_X$ y $H\Omega(\underline{f}) = H(\underline{\Omega(f)}) = H(\underline{g}) = \underline{f}$.

Para mostrar que $\Omega H = id_{\underline{\chi}(\Omega(M),\Omega(N))}$, consideremos $\underline{g}$ en $\underline{\chi}(\Omega(M),\Omega(N))$ y sea $\underline{h} = H(\underline{g})$, con $\underline{h}$ en $\underline{\chi}(M,N)$. Por la definición de H existe $p : P_0(M) \to P_0(N)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(M) \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[d, "g"] & P_0(M) \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[d, "p"] & M \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega(N) \arrow[r, "\iota_N"] & P_0(N) \arrow[r, "\pi_N"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Omega(M),\Omega(N))$ y $h \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$ son representantes de $\underline{g}$ y $\underline{h}$, respectivamente. Como la definición de $\underline{\Omega} : \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda \to \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ no depende del levantamiento que se considere, tomemos para calcular $\underline{\Omega(h)}$ el morfismo $p : P_0(M) \to P_0(N)$ dado anteriormente. Luego, como el diagrama anterior conmuta, se tiene que $\underline{\Omega(h)} = \underline{g}$ en $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$. Así, $\underline{\Omega(h)} = \underline{g}$ en $\underline{\chi}_X$. Por lo tanto, $\Omega(H(\underline{g})) = \Omega(\underline{h}) = \underline{g}$. $\square$

De la demostración del Teorema anterior se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 3.2.6. En las condiciones del teorema $H : \underline{\chi}(\Omega(M),\Omega(N)) \to \underline{\chi}(M,N)$ y $\Omega : \underline{\chi}(M,N) \to \underline{\chi}(\Omega(M),\Omega(N))$ son funciones inversas una de la otra.

Finalizaremos esta sección calculando el valor de las funciones de Igusa-Todorov en la familia de los módulos ortogonales a su resolución. Para ello, recordemos la definición de K_0 vista en la Sección 1.4.: K_0 es el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfía de los Λ-módulos indescomponibles no proyectivos.

Teorema 3.2.7. Sea X un Λ-módulo ortogonal a su resolución. Si M pertenece a $\underline{\chi}_X$ entonces $\phi(M) = 0$.

Demostración: Sea $[\underline{\chi}_X]$ el subgrupo de K_0 generado por las clases de isomorfía de los módulos indescomponibles en $\underline{\chi}_X$. Probemos que $\mathbf{\Omega}|_{[\underline{\chi}_X]}$ es inyectiva. Sean $[X_1]$, $[X_2]$ en $[\underline{\chi}_X]$ tales que $\mathbf{\Omega}([X_1]) = \mathbf{\Omega}([X_2])$. Por la definición de $\mathbf{\Omega}$, se tiene que $[\Omega(X_1)] = [\Omega(X_2)]$. Luego, por la Proposición 3.1 de [FLM], se tiene que $\Omega(X_1) \cong \Omega(X_2)$ en $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$, y por lo tanto, son isomorfos también en $\underline{\chi}_X$. Luego, existen morfismos $\underline{f} : \Omega(X_1) \to \Omega(X_2)$ y $\underline{g} : \Omega(X_2) \to \Omega(X_1)$ tales que $\underline{gf} = \underline{id}_{\Omega(X_1)}$ y $\underline{fg} = \underline{id}_{\Omega(X_2)}$.

Como $\Omega(\underline{id}_{X_1}) = \underline{id}_{\Omega(X_1)} = \underline{gf}$, por ser Ω y H uno inverso del otro, por Corolario 3.2.6, resulta que $\underline{gf} = \Omega(H(\underline{gf}))$, es decir, $\Omega(\underline{id}_{X_1}) = \underline{gf} = \Omega(H(\underline{g})H(\underline{f}))$. Por ser Ω un funtor fiel, se tiene que $\underline{id}_{X_1} = H(\underline{g})H(\underline{f})$. Análogamente, $\underline{id}_{X_2} = H(\underline{f})H(\underline{g})$. Así, $X_1 \cong X_2$ en $\underline{\chi}_X$ y por lo tanto, $X_1 \cong X_2$ en $\underline{\mathrm{mod}}\Lambda$. Luego, por [FLM], se tiene que $[X_1] = [X_2]$ en K_0 y por lo tanto, $[X_1] = [X_2]$ en $[\underline{\chi}_X]$.

Así, $\mathbf{\Omega}|_{[\underline{\chi}_X]}$ es inyectiva y se concluye que $\phi(M) = 0$ para todo M en $\underline{\chi}_X$. $\square$

Corolario 3.2.8. Sea X un Λ-módulo ortogonal a su resolución. Si M está en $\underline{\chi}_X$ entonces $\psi(M) = 0$.

Demostración: Sigue inmediatamente del Teorema anterior y de la Proposición 3.2.1. $\square$

Como corolario del Teorema 3.2.7 y del Corolario 3.2.8 tenemos el siguiente resultado, el cual fue demostrado por M. Lanzilotta y G. Mata.

Corolario 3.2.9. [LM] Si $M \in {}^{\perp}\Lambda$ entonces $\phi(M) = \psi(M) = 0$. En particular, si $M \in \Lambda$-Gproj entonces $\phi(M) = \psi(M) = 0$.

Corolario 3.2.10. Sea X un Λ-módulo virtualmente p-periódico tal que todos los proyectivos que aparecen en su resolución proyectiva minimal tienen dimensión inyectiva finita. Entonces $\phi(X) = \psi(X) = 0$.

Demostración: Como X es virtualmente p-periódico y $\mathrm{di}(P) < \infty$ para todo $P \in \mathbf{P}_X$, tenemos que X es ortogonal a su resolución, por el Ejemplo 3.1.2.3.. Luego, considerando la categoría $\underline{\chi}_X$, se tiene por el Teorema 3.2.7 que $\phi(M) = 0$ para todo módulo en $\underline{\chi}_X$, en particular, tenemos que $\phi(X) = 0$. Además, por el Corolario 3.2.8, se tiene que $\psi(X) = 0$. $\square$

Capítulo 4

Álgebras n-ortogonales a su resolución.

En la Sección 4 del Capítulo 1 se observó que para un álgebra de Artin se verifican las siguientes desigualdades:

$$\mathrm{fin.dim}(\Lambda) \leq \phi\text{-}\mathrm{dim}(\Lambda) \leq \psi\text{-}\mathrm{dim}(\Lambda) \leq \mathrm{gl.dim}(\Lambda).$$

En este capítulo definiremos las álgebras n-ortogonales a su resolución y calcularemos su dimensión finitista, su ϕ-dimensión y su ψ-dimensión. Además, daremos ejemplos de álgebras n-ortogonales a su resolución.

4.1. Álgebras n-ortogonales a su resolución.

Definición 4.1.1. Un álgebra de Artin Λ se llama **n-ortogonal a su resolución** si todo módulo X en $\Omega^n(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ es ortogonal a su resolución, es decir, para todo $X \in \Omega^n(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ se tiene que $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(X, P) = 0$ para todo $m \geq 1$ y para todo $P \in \mathbf{P}_X$.

Notemos que, como $\Omega^0(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ coincide con $\mathrm{mod}\,\Lambda$, un álgebra es 0-ortogonal a su resolución si y solo si todo Λ-módulo es ortogonal a su resolución.

Ejemplos 4.1.2. 1. Si Λ es un álgebra autoinyectiva entonces es 0-ortogonal a su resolución.

2. Si Λ es un álgebra n-Gorenstein entonces Λ es n-ortogonal a su resolución, pues $\Omega^n(\operatorname{mod}\Lambda) = \Lambda-\mathrm{Gproj}$.

3. Si Λ es la extensión por un punto de un álgebra n-Gorenstein entonces Λ es $(n+1)$-ortogonal a su resolución. En efecto, si Λ es la extensión por un punto del álgebra Γ entonces $\Omega(\operatorname{mod}\Lambda) \subseteq \operatorname{mod}\Gamma$. Luego, para todo $i \geq 1$, se tiene que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Omega^{n+1}(M), P) = \mathrm{Ext}^i_\Gamma(\Omega^{n+1}(M), P) = 0$ para todo $P \in \mathcal{P}_{\Omega^{n+1}(M)} \subseteq \mathrm{add}(\Gamma)$. Por lo tanto, $\Omega^{n+1}(M)$ es ortogonal a su resolución para todo Λ-módulo M.

El Ejemplo 4.1.2.3. muestra que el concepto de álgebra ortogonal a su resolución generaliza el de álgebra Gorenstein, la pregunta que surge es: ¿toda álgebra ortogonal a su resolución es Gorenstein? El siguiente ejemplo muestra que la respuesta a esta pregunta es negativa.

Ejemplo 4.1.3. Consideremos el álgebra presentada en el Ejemplo 2.4.10, esto es, el álgebra $\Lambda = kQ/I$ dada por el siguiente carcaj:

$$Q = \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, bend left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

y el ideal $I = \langle \alpha\beta\alpha \rangle$. Vimos que Λ no es un álgebra Gorenstein, puesto que $\mathrm{di}(P_1) = \infty$. Para mostrar que Λ es un álgebra ortogonal a su resolución notemos a todos los Λ-módulos indescomponibles de la siguiente manera:

$$S_1 : 1 \qquad S_2 : 2 \qquad P_1 : \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \qquad P_2 = I_1 : \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \qquad I_2 : \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \qquad M : \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \qquad N : \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}.$$

Como $\Omega^1(S_1) = N$, $\Omega^1(S_2) = P_1$, $\Omega^2(M) = N$, $\Omega^2(I_2) = N$, $\Omega^1(N) = N$, se tiene que $\Omega^2(\operatorname{mod}\Lambda) = \{\mathrm{add}\, N\}$.

Además, por el Ejemplo 3.1.2.3., el módulo N es ortogonal a su resolución ya que es p-periódico y $\mathbf{P}_N = \{P_2\}$ con $\mathrm{di}(P_2) = 0$. Por lo tanto, Λ es 2-ortogonal a su resolución.

Observación 4.1.4. Sea Λ un álgebra n-ortogonal a su resolución. Si $M \in \operatorname{mod}\Lambda$ entonces $\Omega^n(M)$ es ortogonal a su resolución.

La siguiente proposición demuestra como, de la definición anterior, se desprende que la dimensión finitista de un álgebra n-ortogonal a su resolución es finita.

Proposición 4.1.5. Si Λ es un álgebra n-ortogonal a su resolución entonces la dimensión finitista de Λ es finita. Más aún, $\text{fin.dim}(\Lambda) \leq n$.

Demostración: Sea M un Λ-módulo de dimensión proyectiva finita. Luego, $\text{dp}(\Omega^n(M)) < \infty$ y por lo tanto $\Omega^n(M)$ es proyectivo, por Observación 3.1.3.1. Así, $\text{dp}(M) \leq n$ y $\text{fin.dim}(\Lambda) \leq n < \infty$. □

Recientemente, en [BM] y [HK], se mostraron ejemplos de álgebras con dimensión finitista finita y ϕ-dimensión infinita. Sin embargo, si Λ es n-ortogonal a su resolución entonces ambas dimensiones son finitas, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 4.1.6. Si Λ es un álgebra n-ortogonal a su resolución entonces

$$\phi\text{-dim}(\Lambda) \leq n < \infty.$$

Demostración: Si $M \in \text{mod}\,\Lambda$ entonces $\Omega^n(M)$ es ortogonal a su resolución, por Observación 4.1.4. Por el Teorema 3.2.7 se tiene que $\phi(\Omega^n(M)) = 0$. Entonces, por la Proposición 1.4.7, se obtiene que:

$$\phi(M) \leq \phi(\Omega^n(M)) + n = 0 + n = n.$$

Por lo tanto, $\phi\text{-dim}(\Lambda) \leq n < \infty$. □

Del Teorema anterior y de la Proposición 3.2.1 sigue el siguiente resultado.

Corolario 4.1.7. Si Λ es un álgebra n-ortogonal a su resolución entonces

$$\psi\text{-dim}(\Lambda) = \phi\text{-dim}(\Lambda) \leq n < \infty.$$

De los tres resultados anteriores surge la siguiente pregunta: para un álgebra n-ortogonal a su resolución Λ ¿se cumple la igualdad $\text{fin.dim}(\Lambda) = \phi\text{-dim}(\Lambda) = \psi\text{-dim}(\Lambda)$? El siguiente ejemplo muestra que la respuesta a esta pregunta es negativa.

Ejemplo 4.1.8. Sea Λ el álgebra de radical cuadrado cero dada por el siguiente carcaj Q:

$$1 \longrightarrow 2 \circlearrowleft .$$

Veamos que Λ es 1-ortogonal a su resolución. En efecto, los Λ-módulos indescomponibles son: S_1, S_2, P_1, P_2 y I_2. Como $\Omega(S_1) = S_2$, $\Omega(S_2) = S_2$ y $\Omega(I_2) = S_2$ se tiene que $\Omega(\operatorname{mod}\Lambda) = \{\operatorname{add} S_2\}$, con S_2 ortogonal a su resolución. Luego, por Teorema 4.1.6 se tiene que $\phi\text{-dim}(\Lambda) \leq 1$.

Por otro lado, de $\phi(I_2 \oplus S_2) = 1$ sabemos que $\phi\text{-dim}(\Lambda) \geq 1$. Por lo tanto, $\phi\text{-dim}(\Lambda) = 1$.

Como todos los Λ-módulos indescomponibles no proyectivos tienen dimensión proyectiva infinita, tenemos que $\text{fin.dim}(\Lambda) = 0$. Así, $\text{fin.dim}(\Lambda) = 0 < 1 = \phi\text{-dim}(\Lambda)$.

Para finalizar este capítulo será conveniente recordar algunos conceptos y resultados de las álgebras de matrices triangulares, necesarios para nuestra última proposición.

Dadas dos R-álgebras de Artin T y U, y un U-T-bimódulo M, donde R actúa centralmente, podemos considerar el álgebra de Artin $\Lambda = \begin{pmatrix} T & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$. Todo módulo en $\operatorname{mod}\Lambda$ puede identificarse con una terna (A, B, f) donde A es un T-módulo, B es un U-módulo y $f : M \otimes_T A \to B$ es un morfismo en $\operatorname{mod} U$. Dados dos Λ-módulos (A, B, f) y (A', B', f'), un morfismo α entre ellos es una dupla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ de morfismos $\alpha_1 : A \to A'$ en mod T y $\alpha_2 : B \to B'$ en mod U tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \otimes_T A \arrow[r, "Id_M \otimes \alpha_1"] \arrow[d, "f'"] & M \otimes_T A' \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "\alpha_2"] & B' \end{tikzcd}$$

conmuta. Los Λ-módulos proyectivos indescomponibles son $(P, M \otimes_T P, Id)$ donde P es un T-módulo proyectivo indescomponible y $(0, Q, 0)$ donde Q es un U-módulo proyectivo indescomponible, como se muestra en [ARS, III Proposición 2.5].

La siguiente proposición nos será de utilidad para demostar nuestra último resultado. En [BLM] se puede ver la demostración de la misma.

Proposición 4.1.9. [BLM, Lemma 4.2] Sea $\Lambda = \begin{bmatrix} T & 0 \\ M & U \end{bmatrix}$ una R-álgebra de Artin de matrices triangulares tal que M es T-proyectivo y U-proyectivo. Entonces, la sizigia enésima del Λ-módulo (A, B, f) es:

$$\Omega^n(A, B, f) = (\Omega^n(A), M \otimes_T P^A_{n-1}, M \otimes_T i^A_n) \oplus (0, \Omega^n(B), 0).$$

Observación 4.1.10. Si un U-módulo X es ortogonal a su resolución entonces el Λ-módulo $(0, X, 0)$ es ortogonal a su resolución. En efecto, es sabido que la categoría mod U es equivalente a una subcategoría plena de mod Λ (vía el funtor inclusión). Luego, todo U-módulo X está en correspondencia con el Λ-módulo $(0, X, 0)$. Aún más, la resolución proyectiva de X en mod U se corresponde con la resolución proyectiva de $(0, X, 0)$, esto es, si

$$\cdots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} X \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva minimal de X en mod U, entonces

$$\cdots \xrightarrow{(0,d_3)} (0, P_2, 0) \xrightarrow{(0,d_2)} (0, P_1, 0) \xrightarrow{(0,d_1)} (0, P_0, 0) \xrightarrow{(0,d_0)} (0, X, 0) \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva minimal de $(0, X, 0)$ en mod Λ. Luego, aplicando a la resolución de X el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_U(-, Y)$ y a la resolución de $(0, X, 0)$ el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, (0, Y, 0))$ se obtiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda((0,X,0),(0,Y,0)) \arrow[r, "(0,d_0)^*"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathrm{Hom}_\Lambda((0,P_0,0),(0,Y,0)) \arrow[r, "(0,d_1)^*"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathrm{Hom}_\Lambda((0,P_1,0),(0,Y,0)) \arrow[r, "(0,d_2)^*"] \arrow[d, leftrightarrow] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_U(X,Y) \arrow[r, "d_0^*"] & \mathrm{Hom}_U(P_0,Y) \arrow[r, "d_1^*"] & \mathrm{Hom}_U(P_1,Y) \arrow[r, "d_2^*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Como:

$$\mathrm{Ker}((0, d_i)^*)/\mathrm{Im}((0, d_{i-1})^*) = \mathrm{Ker}(d_i^*)/\mathrm{Im}(d_{i-1}^*),\ i \geq 1$$

se tiene que:

$$\mathrm{Ext}^i_\Lambda((0, X, 0), (0, Y, 0)) = \mathrm{Ext}^i_\Lambda(X, Y).$$

Tomando X un U-módulo ortogonal a su resolución y $P_j \in \mathbf{P}_X$ se tiene que $\mathrm{Ext}^i_\Lambda((0,X,0),(0,P_j,0)) = \mathrm{Ext}^i_\Lambda(X,P_j) = 0$ para todo $(0,P_j,0) \in \mathbf{P}_{(0,X,0)}$ y por lo tanto, $(0,X,0)$ es un Λ-módulo ortogonal a su resolución.

Finalmente estamos en condiciones de presentar la última proposición de este capítulo.

Proposición 4.1.11. Sea $\Lambda = \begin{bmatrix} T & 0 \\ M & U \end{bmatrix}$ una R-álgebra de Artin de matrices triangulares tal que M es T-proyectivo y U-proyectivo. Si $\mathrm{gl.dim}(T) = n < \infty$ y U es m-ortogonal a su resolución entonces Λ es l-ortogonal a su resolución, donde $l = \text{máx}\{n+1, m\}$.

Demostración: Sea (A,B,f) un Λ-módulo. De la Proposición 4.1.9 sabemos que:

$$\Omega^l(A,B,f) = (\Omega^l(A), M \otimes_T P^A_{l-1}, M \otimes_T i^A_l) \oplus (0, \Omega^l(B), 0), \text{ donde } l = \text{máx}\{n+1, m\}.$$

Como $l \geq \mathrm{gl.dim}(T) + 1$, resulta que $\Omega^l(A) = 0$ y $P^A_{l-1} = 0$. Así, el Λ-módulo $(\Omega^l(A), M \otimes_T P^A_{l-1}, M \otimes_T i^A_l)$ es nulo. Además, como U es m-ortogonal a su resolución, se tiene que $\Omega^m(X)$ es ortogonal a su resolución para todo U-módulo X. Luego $\Omega^t(X)$ es ortogonal a su resolución para todo $t \geq m$. En particular, tenemos que $\Omega^l(B)$ es ortogonal a su resolución y por lo tanto, $(0, \Omega^l(B), 0)$ es ortogonal a su resolución. Finalmente, tenemos que

$$\Omega^l(A,B,f) = (0,0,0) \oplus (0, \Omega^l(B), 0)$$

es ortogonal a su resolución y Λ es un álgebra l-ortogonal a su resolución.

$\square$

Apéndice A

Ejemplo de Liu-Schulz.

Presentaremos en este apéndice el álgebra descripta por Ringel en [R], la cual es un álgebra autoinyectiva donde la clase de los módulos Gorenstein proyectivos no isomorfos es infinita. Asimismo, este ejemplo nos muestra que existen módulos Gorenstein proyectivos que no son p-periódicos. Además en [M] se muestra que a partir de esta álgebra es posible construir otra álgebra donde no todo módulo estable es Gorenstein proyectivo.

Consideremos el carcaj Q:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "x"] \arrow[loop right, "z"] \arrow[loop below, "y"] \end{tikzcd}$$

y el álgebra de carcaj $\Lambda = kQ/I$, donde $I = \langle x^2, y^2, z^2, yx + rxy, zy + ryz, xz + rzx \rangle$ y r es un elemento no nulo del cuerpo algebraicamente cerrado k. Hacemos notar que solo en el apéndice mod Λ indicará la categoría de los Λ-módulos a derecha finitamente generados.

Entonces, valen las siguientes observaciones:

1. Λ es una k-álgebra de dimensión 8, donde una k-base de Λ es $\{1, x, y, z, yx, zy, xz, xyz\}$.

2. Sea $Z(\Lambda)$ el centro de Λ. Entonces yx, zy, $xz \in Z(\Lambda)$. En efecto:

$$y(yx) = 0 = (yx)y(= -r^{-1}yyx)$$

$$x(yx) = 0 = (yx)x$$

$$z(yx) = (zy)x = ((-r)yz)x = (-r)y(zx) = (-r)y(-r^{-1}xz) = (yx)z.$$

Luego $yx \in Z(\Lambda)$. Análogamente, se prueba que zy, $xz \in Z(\Lambda)$.

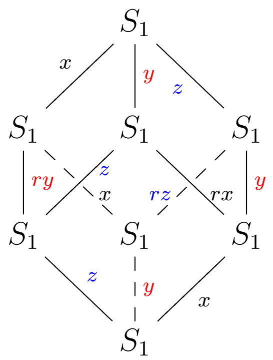
3. Los caminos de longitud 3 verifican las siguientes igualdades:

$$xzy = yxz = zyx = -rxyz$$

$$yzx = zxy = xyz.$$

Por lo tanto, los únicos caminos de longitud 3 son xyz y $-rxyz$, los cuales son colineales.

4. Usando la serie radical, el Λ-módulo Λ se representa de la siguiente manera:



Consideremos los Λ-módulos de la forma $M_c = \Lambda/(x + cy)\Lambda$, donde c es un elemento no nulo de k. Siguiendo [R] tenemos la siguiente proposición:

Proposición A.0.1. [R]

1. M_c es 4-dimensional,

2. M_c es isomorfo a M_d si y solo si $c = d$,

3. $\Omega^1(M_c) = (x + cy)\Lambda \cong M_{cr}$.

Demostración:

1. Veamos que el conjunto $\{x+cy, xy, xz+cyz, xzy\}$ es una base de $(x+cy)\Lambda$ sobre k. En efecto, mostremos primero que $(x+cy)\Lambda = \langle x+cy, xy, xz+cyz, xzy\rangle$.

   Sea $\lambda \in (x+cy)\Lambda$, entonces

$$\begin{aligned}
\lambda &= (x+cy)(a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5yx + a_6zy + a_7xz + a_8xyz) \\
&= a_1x + a_3xy + a_4xz + a_6xzy + a_1cy + a_2cyx + a_4cyz + a_7cyxz \\
&= a_1(x+cy) + (a_3 - a_2cr)xy + a_4(xz+cyz) + (a_6 + a_7c)xzy
\end{aligned}$$

   Por lo que $\lambda \in \langle x+cy, xy, xz+cyz, xzy\rangle$ y así $(x+cy)\Lambda \subseteq \langle x+cy, xy, xz+cyz, xzy\rangle$.

   Por otro lado, como

$$\begin{aligned}
x+cy &= (x+cy)\cdot 1, \\
xy &= (x+cy)\cdot y, \\
xz+cyz &= (x+cy)\cdot z, \\
xzy &= (x+cy)\cdot (zy)
\end{aligned}$$

   se tiene que $\{x+cy, xy, xz+cyz, xzy\} \subseteq (x+cy)\Lambda$.

   Por lo tanto, $(x+cy)\Lambda = \langle x+cy, xy, xz+cyz, xzy\rangle$.

   Mostremos ahora que el conjunto $\{x+cy, xy, xz+cyz, xzy\}$ es linealmente independiente. Si $0 = a_1(x+cy) + a_2xy + a_3(xz+cyz) + a_4xzy$ entonces $0 = a_1x + a_1cy - \frac{a_2}{r}yx + a_3xz - \frac{a_3c}{r}zy + a_4xyz$. Luego, se obtiene que $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ ya que $\{x,\ y,\ yx,\ xz,\ zy,\ xyz\}$ es un conjunto linealmente independiente.

   Por tanto, hemos mostrado que $\{x+cy, xy, xz+cyz, xzy\}$ es una k-base de $(x+cy)\Lambda$. Así, la dimensión de $M_c = \Lambda/(x+cy)\Lambda$ es 4.

2. Supongamos que $M_c \cong M_d$. Como M_c y M_d son anulados por los ideales $(x+cy)\Lambda$ y $(x+dy)\Lambda$, respectivamente, se tiene que $(x+cy)\Lambda = (x+dy)\Lambda$. Luego, $x+cy = (x+dy)\lambda$ con $\lambda \in \Lambda$, esto es,

$$\begin{aligned}
x+cy &= (x+dy)(a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5yx + a_6zy + a_7xz + a_8xyz) \\
&= a_1x + a_1dy + a_4xz + a_4yz + (a_3 - dra_2)xy + (a_6 + da_7)xyz.
\end{aligned}$$

   Luego, $a_1 = 1$ y $c = d$.

   Si $c = d$ entonces $M_c \cong M_d$.

3. Está claro que $\Omega^1(M_c) = (x+cy)\Lambda$. Para ver que $(x+cy)\Lambda \cong M_{cr}$, consideremos el epimorfismo canónico $\pi : \Lambda \to \Lambda/(x+cry)\Lambda$ y el morfismo $f : \Lambda \to (x+cy)\Lambda$ definido por $f(\lambda) = (x+cy)\lambda$. Veamos que existe un morfismo $\overline{f} : \Lambda/(x+cry)\Lambda \to (x+cy)\Lambda$. Para ello mostremos que $(x+cry)\Lambda \subset \mathrm{Ker}(f)$.

   Como

   $$(x+cy)(x+cry) = x^2 + crxy + cyx + c^2ry^2 = crxy + cyx = crxy + c(-rxy) = 0$$

   entonces $f((x+cry)\Lambda) = 0$ y $(x+cry)\Lambda \subset \mathrm{Ker}(f)$. Luego, existe $\overline{f}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

   $$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & (x+cy)\Lambda \\ \Lambda/(x+cry)\Lambda \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

   Para demostrar que $\overline{f}$ es un isomorfismo solo resta ver que $\mathrm{Ker}(f) \subset (x+cry)\Lambda$.

   Si $\lambda = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5yx + a_6zy + a_7xz + a_8xyz \in \mathrm{Ker}(f)$ entonces

   $$(x+cy)(a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5yx + a_6zy + a_7xz + a_8xyz) = 0 \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow a_1x + a_1cy + a_4xz + a_4cyz + (a_3 - cra_2)xy + (a_6 + ca_7)xzy = 0.$$

   Luego

   $$a_1 = 0,\ a_4 = 0,\ a_3 = cra_2 \text{ y } a_6 = -ca_7.$$

   Por lo que $\lambda = a_2x + cra_2y + a_5yx - a_7czy + a_7xz + a_8xyz$.

   Tomando $\lambda' = a_2 + (-r)a_5y + a_7z + a_8yz$ se tiene que $\lambda = (x+cry)\lambda'$. Así, $\lambda \in (x+cry)\Lambda$ y $\mathrm{Ker}(f) \subset (x+cry)\Lambda$. Por lo tanto, $\overline{f}$ es un isomorfismo y $M_{cr} = \Lambda/(x+cry)\Lambda \cong (x+cy)\Lambda$.

$\square$

Sea Λ el álgebra de carcaj descripta anteriormente. Si r no es una raíz de la unidad entonces los módulos M_c no son p-periódicos y la clase de los Λ-módulos Gorenstein proyectivos no isomorfos es infinita. En efecto, por la Proposición A.0.1.3, sabemos que $\Omega^{m_1}(M_c) \cong M_{r^{m_1}c}$ y $\Omega^{m_2}(M_c) \cong M_{r^{m_2}c}$. Asimismo, por la Proposición A.0.1.2, sabemos que $M_{r^{m_1}c}$ y $M_{r^{m_2}c}$ no son isomorfos pues $r^{m_1}c \neq r^{m_2}c$, ya que r no es un raíz enésima de la unidad. Luego, los módulos M_c tienen todas sus sizigias no isomorfas. Por lo tanto M_c es un ejemplo de módulo Gorenstein proyectivo que no es p-periódico.

Bibliografía

[A] Assem, I. (1997). Algèbres et modules, Les Presses de l'Universitè d'Ottawa, Ontario.

[AB] Auslander, M., & Bridger, M. (1969). Stable module theory (No. 94). American Mathematical Soc..

[ARS] Auslander, M., Reiten, I., & Smalø, S. O. (1997). Representation theory of Artin algebras (Vol. 36). Cambridge University Press.

[ASS] Assem, I., Skowronski, A., & Simson, D. (2006). Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory (Vol. 65). Cambridge University Press.

[BH-ZT] Babson, E., Huisgen-Zimmermann, B., & Thomas, R. (2009). Generic representation theory of quivers with relations. Journal of Algebra, 322(6), 1877-1918.

[B] Bass, H. (1960). Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. Transactions of the American Mathematical Society, 95(3), 466-488.

[BLM] Bravo, D., Lanzilotta, M., & Mendoza, O. (2019). Pullback diagrams, syzygy finite classes and Igusa–Todorov algebras. Journal of Pure and Applied Algebra, 223(10), 4494-4508.

[BM] Bennis, D., & Mahdou, N. (2009). A generalization of strongly Gorenstein projective modules. Journal of Algebra and its Applications, 8(02), 219-227.

[BM] Barrios, M., & Mata, G. (2019). On algebras of Ω^n-finite and Ω^∞-infinite representation type. arXiv preprint arXiv:1911.02325.

[BMR] Barrios, M., Mata, G., & Rama, G. Igusa-Todorov ϕ Function for Truncated Path Algebras. Algebras and Representation Theory, 1-13.

[C] Chen, X. W. (2017). Gorenstein homological algebra of Artin algebras. arXiv preprint arXiv:1712.04587.

[DH-ZL] Dugas, A., Huisgen-Zimmermann, B., & Learned, J. (2008). Truncated path algebras are homologically transparent. Models, Modules and Abelian Groups (Volume in Honor of ALS Corner), de Gruyter, Berlin, 445-461.

[FLM] Fernandes, S. M., Lanzilotta, M., & Hernández, O. M. (2015). The ϕ-dimension: A new homological measure. Algebras and Representation Theory, 18(2), 463-476.

[H] Happel, D. (1991). On gorenstein algebras. In Representation theory of finite groups and finite-dimensional algebras (pp. 389-404). Birkhäuser, Basel.

[HK] Hanson, E. J., & Igusa, K. (2019). A Counterexample to the ϕ-Dimension Conjecture. arXiv preprint arXiv:1911.00614.

[HL] Huard, F., & Lanzilotta, M. (2013). Self-injective right artinian rings and Igusa Todorov functions. Algebras and Representation Theory, 16(3), 765-770.

[HLM] Huard, F., Mendoza, O., & Lanzilotta, M. (2008). An approach to the finitistic dimension conjecture. Journal of Algebra, 319, 3918–3934.

[H-Z1] Huisgen, B. Z. (1992). Homological domino effects and the first finitistic dimension conjecture. Inventiones mathematicae, 108(1), 369-383.

[IT] Igusa, K., & Todorov, G. (2005). On the finitistic global dimension conjecture for Artin algebras. Representations of algebras and related topics, 45, 201-204.

[IZ1] Igusa, K., & Zacharia, D. (1990). Syzygy pairs in a monomial algebra. Proceedings of the American Mathematical Society, 108(3), 601-604.

[IZ2] Igusa, K., & Zacharia, D. Addendum to Syzygy Pairs in a Monomial Algebra.

[LM] Lanzilotta, M., & Mata, G. (2018). Igusa–Todorov functions for Artin algebras. Journal of Pure and Applied Algebra, 222(1), 202-212.

[M] Marczinzik, R. (2017). On stable modules that are not Gorenstein projective. arXiv preprint arXiv:1709.01132.

[M2] Marczinzik, R. (2018). Upper bounds for the dominant dimension of Nakayama and related algebras. Journal of Algebra, 496, 216-241.

[R] Ringel, C. M. (1996). The Liu-Schulz Example. In Representation theory of algebras (Vol. 18, pp. 587-600). Amer. Math. Soc. Providence, RI.

[Wa] Wang, Y. (1994). A note on the finitistic dimension conjecture. Communications in Algebra, 22(7), 2525-2528.