



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS DOCTORAL EN MATEMÁTICA

Derivaciones y dualidad en álgebras de Banach

María José Aleandro

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2019

Prefacio

Esta tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional del Sur. La misma no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta u otra Universidad. Presentamos resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas, en la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, sobre los que trabajamos desde agosto de 2010 a la fecha. La dirección de este trabajo la realizó el Dr. Carlos Cesar Peña, Profesor Titular de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Se contó además con la Codirección Local del Dr. Pablo Panzone, Prof. Titular del Instituto/Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional del Sur.

Agradecimientos

Al CONICET.

A Carlos, por formarme, acompañarme y contenerme.

A Luis Piovan, por guiarme y acompañarme,

y a Pablo Panzone que le reemplazó en la tarea.

A la Universidad Nacional del Sur, por su trato cordial y afectuoso.

A los profesores que tomé como referentes.

A mis amigos y amigas.

A Maricruz, Paula e Ismael

A Martín, Silvina y Gimena.

A mi familia.

Resumen

Sin excepción, en este trabajo \mathcal{U} denota un álgebra de Banach compleja. Los aportes originales de este trabajo se dan en tres capítulos:

- En el Capítulo 2 asumimos que el álgebra de Banach \mathcal{U} es Arens regular y consideramos derivaciones acotadas $D : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^*$. Como \mathcal{U}^{**} admite una estructura natural de álgebra de Banach estudiamos problemas concernientes a cuándo el operador adjunto $D^* : \mathcal{U}^{**} \rightarrow \mathcal{U}^*$ es derivación. En particular, analizaremos el caso de la clase $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ de derivaciones tales que $\langle a, D(a) \rangle = 0$ para todo $a \in \mathcal{U}$, las que caracterizamos. Veremos que para que el álgebra \mathcal{U} sea débilmente amenable es necesario y suficiente que $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ sea no trivial. Analizamos esta problemática en el caso específico de álgebras de Beurling construídas sobre el grupo aditivo de los enteros. Esta investigación está publicada en el New York Journal of Mathematics [1].
- En el Capítulo 3 nos damos a la tarea de caracterizar los elementos $a^{**} \in \mathcal{U}^{**}$ para los que $a^{**}\mathcal{U}^*$ es débil*-cerrado. Esta investigación tiene relación con la existencia de aproximaciones acotadas de la identidad en ideales cerrados del álgebra, por lo que se trata de un tema que requiere atención. El material presentado está en etapa de prensa de las Actas del XIV Congreso Dr. A. Monteiro [2].
- En el Capítulo 4 retomamos el tema derivaciones, ahora sobre el álgebra de convolución asociada a permutaciones de un conjunto numerable en si mismo. Es profusa la literatura sobre el particular, y naturalmente se da la necesidad de estudiar álgebras de convolución finito-dimensionales. Veremos cómo las álgebras de convolución sobre grupos finitos de permutaciones pueden ser inmersas en álgebras de matrices. Por otra parte, si bien toda derivación centralizante sobre un álgebra de Banach mapea sobre el radical se verá que esta condición no es necesaria, incluso en el contexto finito dimensional. Esta investigación está en prensa en Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis [3].

Abstract

Without exception, \mathcal{U} will denote a complex Banach algebra. Our original contributions in this work are given in three chapters:

- In Chapter 2 we assume that the Banach algebra \mathcal{U} is Arens regular and we consider bounded derivations $D : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^*$. As \mathcal{U}^{**} has a natural structure of a Banach algebra we seek on conditions under which the adjoint operator $D^* : \mathcal{U}^{**} \rightarrow \mathcal{U}^*$ is a derivation. We shall characterize the class $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ of bounded derivations so that $\langle a, D(a) \rangle = 0$ for all $a \in \mathcal{U}$. We shall prove that the Banach algebra \mathcal{U} is weakly amenable if and only if $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ is non trivial. We shall consider this matters in the specific case of Beurling algebras constructed on the additive group of integers. This research was published in the New York Journal of Mathematics [1].

- In Chapter 3 we shall characterize the elements $a^{**} \in \mathcal{U}^{**}$ so that $a^{**}\mathcal{U}^*$ is weak*-closed. This investigation is connected with the existence of bounded approximate identities within closed ideals of \mathcal{U} and is a matter that deserves attention. This investigation is in press of Actas del XIV Congreso Dr. A. Monteiro [2].

- In Chapter 4 we return to the issue of derivations, now on the convolution algebra on the discrete permutation group on a countable set. There is a huge literature in this matter and it is necessary to study finite dimensional convolution algebras. Although any central derivation maps on the radical we shall see that this condition is not necessary, event in the finite dimensional context. This investigation is in press of Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis [3].