Universidad Nacional del Sur

Tesis de Doctora en Matemática

Diferentes desigualdades de tipo débil con pesos para Integrales singulares y Conmutadores

Marcela R. Caldarelli

Bahía Blanca Argentina

2019

Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática durante el período comprendido entre los años 2012 y 2018, bajo la dirección del Dr. Sheldy Ombrosi, Profesor Titular y Decano del Departamento de Matemática.

Marcela R. Caldarelli

Agradecimientos

En primer lugar quiero expresar mi especial agradecimiento a mi director de tesis, el Dr. Sheldy Ombrosi, por confiar en mí, por su disposición en todo momento, por guiarme, acompañarme, y por darme la oportunidad de culminar mi carrera como docente e investigadora con esta tesis. Durante todos estos años que trabajamos juntos no dejó de sorprenderme su enorme capacidad y sus conocimientos en el campo de la investigación. Además, no puedo dejar de destacar su sencillez y humildad como persona.

Al Dr. Israel Rivera-Ríos por sus contribuciones, valiosas ideas, conocimiento y explicaciones que hicieron posible parte del trabajo de esta tesis. Gracias Israel por tu generosidad.

A mi esposo Guillermo, por estar siempre a mi lado, por brindarme su amor y apoyo incondicional en todos los momentos de mi vida, y sobre todo para la culminación de esta tesis.

A mis hijos, Tomás y Valentina, que me llenan de orgullo y felicidad, y que son el motor de mi vida.

A mis padres, que supieron darme su ejemplo de trabajo y honradez.

A mis compañeras de oficina, primero Adriana y luego Mariana, que me brindaron su apoyo, amistad y cariño durante todos estos años.

A todos los amigos que coseché durante estos años trabajando en la Universidad.

Al Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur por brindarme su apoyo institucional.

X

Resumen

En los últimos 10 años importantes avances han sido obtenidos en el problema de dos pesos del tipo débil $(1,1)$ de operadores de Calderón-Zygmund. Todos esos resultados están asociados a lo que se conoce como conjetura de Muckenhoupt-Wheeden. Por otro lado, también recientemente muchos avances han sido obtenidos en variantes cuantitativas de desigualdades pesadas de ciertos operadores clásicos del análisis armónico. Una de las herramientas claves que ha aparecido para estos avances es lo que se conoce como dominación por operadores sparse de los operadores de Calderón-Zygmund y variantes.

En esta tesis avanzamos en estas dos líneas. Por un lado encontramos resultados negativos para una variante más débil de la conjetura de Muckenhoupt-Wheeden. Y por otro lado obtenemos varias estimaciones cuantitativas en desigualdades de tipo débil mixto para varios operadores, como las integrales singulares y los conmutadores de dichos operadores. La principal novedad de estas estimaciones es que por primera vez se usa la herramienta de dominación sparse en este contexto.

Abstract

In the last ten years very important advances related to the endpoint two-weight weak type inequality of Calderón-Zygmund operators and Commutators are been obtained. On the other hand relevant advances in quantitative variant of several weighted estimates are been showed. A key tool for such advances have been the sparse domination of these classical operators. In this work we advance in these two lines. In first place we show negative results in a variant of the Muckenhoupt-Wheeden Conjecture related to the two-weight weak type $(1, 1)$ estimate of the Hilbert transform.

On the other hand, we obtain quantitative estimates in the called weighted weak mixed-type estimates for Calderón-Zygmund operators, rough singular integrals and commutators. The main novelty of this part of the work lies in the fact that we rely upon sparse domination results for this kind of inequalities.

Contenido

Introducción

Uno de los principales operadores del Análisis Armónico es el operador maximal de Hardy-Littlewood que esta definido para toda función f localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ por la siguiente expresión:

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|dy, \tag{0.0.1}$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q, con lados paralelos a los ejes, que contienen al punto x.

En el año 1930, Hardy y Littlewood en [HarLit30] demostraron diferentes acotaciones para este operador en dimensión 1 que más tarde fueron extendidas a dimensión n por Wiener en [Wie39]. Entre las propiedades más importantes que tiene el operador maximal de Hardy-Littlewood podemos señalar las siguientes:

- M es un operador del tipo débil $(1,1)$, es decir, para cada $\lambda > 0$ existe c tal que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx. \tag{0.0.2}$$

- M es un operador del tipo fuerte (p,p) para $1 < p \leq \infty$, esto es, existe c tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx. \tag{0.0.3}$$

La desigualdad (0.0.2) establece que $\|Mf\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, donde $L^{1,\infty}$ es el espacio débil definido en la Sección 1.1 del Capítulo 1, es decir, dicha desigualdad nos dice que M es un operador acotado de $L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, mientras que la desigualdad (0.0.3) afirma que $\|M\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, esto es, M es un operador acotado de $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$.

La teoría de pesos surge de manera natural al plantearse el interrogante de si es posible extender la acotación de un operador definido sobre los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ a los espacios $L^p(\mu)$, donde μ es otra medida distinta a la medida de Lebesgue. Los pesos son funciones no negativas, localmente integrables y los espacios pesados son denotados como $L^p(w)$, para $1 \leq p \leq \infty$, donde la medida $d\mu$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, es decir, $d\mu(x) = w(x)dx$ para algún peso w.

B. Muckenhoupt en su excepcional trabajo del año 1972 (ver [Muc72]) obtuvo una caracterización de la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood en los espacios $L^p(w)$ mediante la condición A_p. Concretamente, el Teorema de Muckenhoupt estableció:

$$M : L^p(w) \to L^p(w) \ \textit{ si y sólo si } \ w \in A_p, \ \ 1 < p < \infty,$$

donde la condición $w \in A_p$ significa que

$$[w]_{A_p} := \sup_{Q \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} < \infty,$$

(a este número se lo conoce como la constante A_p del peso). La condición $w \in A_1$ significa que

$$[w]_{A_1} = \left\| \frac{Mw}{w} \right\|_{L^\infty} < \infty.$$

Esta condición A_1 caracteriza los buenos pesos para que el operador maximal de Hardy-Littlewood sea de tipo débil $(1,1)$ respecto al peso w, es decir

$$M : L^1(w) \to L^{1,\infty}(w) \ \textit{ si y sólo si } \ w \in A_1.$$

El trabajo de Muckenhoupt incentivó el interés por la teoría de pesos y la introducción de los pesos A_p cobró mayor importancia cuando se demostró que otros operadores clásicos del Análisis Armónico compartían desigualdades con pesos similares a las del operador maximal de Hardy-Littlewood. De hecho en el año 1973, Hunt, Muckenhoupt y Wheeden en [HuMW73] probaron que los pesos A_p son buenos pesos también para la Transformada de Hilbert. Posteriormente, en el año 1974, Coifman y Fefferman en [CF74] extendieron esos resultados para los operadores de Calderón-Zygmund, es decir, ellos establecieron que las clases A_p son las adecuadas para la estimación en $L^p(w)$ de dichos operadores. A partir de allí empezó un vasto desarrollo sistemático profundo de la teoría de pesos. Posiblemente los resultados más relevantes en la teoría de pesos hasta la década del 80 se pueden encontrar en el clásico libro de García-Cuerva y Rubio de Francia (ver [G-CRdF85]).

En la década del 90 comenzó a haber un interés por la dependencia exacta de la norma de los operadores en términos de la constante A_p del peso, es decir, por las denominadas estimaciones cuantitativas, y fue precisamente S. Buckley quien en su tesis doctoral [Bu90] estudió el crecimiento que presentaba la norma del operador maximal de Hardy-Littlewood en función de la constante A_p del peso w en el espacio $L^p(w)$. El resultado de Buckley proporcionó una constante óptima de acotación para el operador maximal. Concretamente él estableció que si $w \in A_p$ y $1 < p < \infty$ entonces

$$\|Mf\|_{L^p(w)} \leq c_{n,p}[w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \|f\|_{L^p(w)}.$$

El problema de determinar la precisa dependencia de la norma en $L^2(w)$ de un operador de Calderón-Zygmund sobre la constante A_2, conocido como la *Conjetura* A_2, también fue uno de los grandes interrogantes que se plantearon. Este problema surge en un trabajo de Astala, Iwaniecz y Saksman [AsIS01] ellos muestran que si dicha Conjetura es cierta para la Transformada de Beurling entonces se podía resolver un problema de regularidad en la ecuación de Beltrami. Petermichl y Volberg [PV02] probaron la Conjetura A_2 para la Transformada de Beurling. Luego en el año 2005 Petermichl lo probó para la Transformada de Hilbert. Luego hubo varios avances hasta que finalmente Hytönen resolvió la Conjetura en general para un operador de Calderón-Zygmund. Concretamente, en [Hyt12] Hytönen estableció que la dependencia de la norma de un operador de Calderón-Zygmund sobre la constante A_2 es lineal, es decir

$$\|T\|_{L^2(w)} \leq c_{n,T}[w]_{A_2}\|f\|_{L^2(w)}.$$

Los principales problemas que se abordan en esta tesis tiene que ver con el estudio de desigualdades de tipo débil pesadas para operadores de Calderón-Zygmnd y desigualdades de tipo débil mixtas cuantitativas para operadores de Calderón-Zygmund, operadores Integrales singulares *rough* y Conmutadores. A continuación describiremos cuáles fueron las principales motivaciones que nos llevaron al estudio de esos temas.

Uno de los problemas abiertos en la teoría de pesos de Integrales singulares es acerca de qué funciones de Young ϕ son óptimas para que se mantenga la siguiente desigualdad de tipo débil $(1,1)$ para todo peso w

$$w(\{x \in \mathbb{R} : |Hf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, M_\phi w(x)dx, \tag{0.0.4}$$

donde $f \in L^1(M_\phi w)$ y M_ϕ es el operador maximal asociado a la función de Young ϕ definido como

$$M_\phi f(x) = \sup_{Q \ni x} \|f\|_{\phi,Q},$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q que contienen a x y $\|f\|_{\phi,Q}$ es la norma de Luxemburg local de f definida como

$$\|f\|_{\phi,Q} := \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|Q|}\int_Q \phi\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right) dy \leq 1\right\}.$$

En el año 1971, C. Fefferman y E. M. Stein [FS71] mostraron que si el operador H es reemplazado por el operador maximal de Hardy-Littlewood entonces la desigualdad (0.0.4) se mantiene para $\phi(t) = t$, en este caso $M_\phi = M$.

Más tarde, en el año 1976, nuevamente Fefferman junto a A. Córdoba en [CorF76] probaron (0.0.4) para $\phi(t) = t^r, r > 1$, en este caso $M_\phi w = M_r w = M(|w|^r)^{1/r}$.

En el año 1977, Muckenhoupt y Wheeden en [MW77] conjeturaron que la desigualdad (0.0.4) se debería verificar para los operadores de Calderón-Zygmund y $\phi(t) = t$. La suposición de Muckenhoupt y Wheeden planteó un interesante interrogante que generó con el correr del tiempo tanto respuestas positivas como negativas acerca de qué tipo de operadores y pesos la verificaban.

C. Pérez [Pe94] en el año 1994 mejoró el resultado de Córdoba y Fefferman al mostrar que la desigualdad (0.0.4) se mantiene para la función de Young $\phi(t) = t\log^\epsilon(e+t), \epsilon > 0$.

En el año 2012, M. Reguera y C. Thiele probaron que la Conjetura de Muckenhoupt-Wheeden era falsa para la Transformada de Hilbert. Más precisamente, la prueba que ellos hicieron se basó en construir un ejemplo con el cual probaron que el par (w, Mw) no es un buen par de pesos para el tipo débil $(1,1)$ de Hf.

En el año 2016, C. Domingo-Salazar, M. T. Lacey y G. Rey [D-SLR16] obtuvieron un resultado que mejoró aún más el trabajo de C. Pérez, ellos establecieron que la desigualdad

(0.0.4) se mantiene para todo operador de Calderón-Zygmund siempre que ϕ satisfaga la condición:

$$\int_1^\infty \frac{\phi^{-1}(t)}{t^2\log(\mathrm{e}+\mathrm{t})}dt < \infty.$$

Observemos que el resultado que fue establecido en [D-SLR16] prueba que la desigualdad (0.0.4) se mantiene para toda función de Young ϕ que crece 'más rápido' por ejemplo que la función $\psi(t) = t\log\log^{1+\epsilon}(e^e + t)$, con $\epsilon > 0$.

Motivados por todos los resultados expuestos logramos responder en el Capítulo 3 uno de los interrogantes planteados en la teoría de pesos al establecer que la desigualdad (0.0.4) no se mantiene para funciones de Young ϕ que crecen más lentamente que la función $\psi(t) = t\log\log(e^e + t)$.

La prueba de nuestro resultado tiene dos ingredientes claves, el primero de ellos es que mostramos que la condición 'A_1 local' en el peso del ejemplo de Reguera-Thiele se puede mejorar (ver Lema 3.2.2), y el otro ingrediente es que probamos un resultado de extrapolación para el operador M_r, con $1 < r < 2$ (ver Teorema 3.3.2) que es un sustituto del resultado de extrapolación de Cruz-Uribe and C. Pérez en [C-UP00] que utilizaron Reguera y Thiele para la demostración de su resultado. Con todos estos ingredientes probamos el Teorema 3.1.1 que representa el principal resultado del Capítulo 3.

A continuación mencionaremos los principales trabajos que motivaron nuestro estudio sobre estimaciones cuantitativas en las desigualdades de tipo débil mixtas para operadores de Calderón-Zygmund, Integrales singulares *rough* (ver las definiciones en la Secciones 1.6.1.2 y 1.6.1.3 respectivamente del Capítulo 1), y Conmutadores de operadores de Calderón-Zygmund, y que nos dieron lugar a contribuciones originales que serán expuestas en los Capítulos 4 y 5 de esta tesis.

En el año 1977, Muckenhoupt y Wheeden en [MW77] introdujeron un nuevo tipo de desigualdad con peso denominada *desigualdad de tipo mixta,* que consiste en considerar dentro del conjunto de nivel una 'perturbación' del operador con un peso A_p.

Ellos establecieron que la desigualdad

$$|\{x \in \mathbb{R} : w(x)Tf(x) > t\}| \leq \frac{C_w}{t}\int_{\mathbb{R}} |f|w(x)dx,$$

se mantiene si T es el operador maximal de Hardy-Littlewood, ó bien la Transformada de Hilbert y $w \in A_1$.

En el año 1985, E. Sawyer en [S85] probó una versión más sofisticada del resultado de Muckenhoupt-Wheeden para la función maximal de Hardy-Littlewood, él obtuvó la siguiente estimación en la que intervienen dos pesos distintos:

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{M(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right) \leq \frac{C_{u,v}}{t}\int_{\mathbb{R}} |f|u(x)v(x)dx, \qquad (0.0.5)$$

donde $u, v \in A_1$ y $t > 0$.

En particular, Sawyer motivado con la posibilidad de obtener una nueva demostración del Teorema de Muckenhoupt, mostró que (0.0.5) combinado con el Teorema de factorización para pesos A_p de Jones (ver Lema 2.1.1) producen una nueva demostración de la acotación del operador maximal en $L^p(w)$ con $w \in A_p$. También conjeturó que (0.0.5) debería también verificarse para la transformada de Hilbert.

En el año 2005, Cruz-Uribe, Martell and Pérez en [C-UMP05] generalizaron (0.0.5) a más dimensiones y probaron que la Conjetura de Sawyer se verifica para operadores de Calderón-Zygmund. Ellos utilizaron para la prueba, entre otras hechos, un resultado de tipo extrapolación para pesos A_∞ (ver Teorema Cruz-Uribe, Martell y Pérez-Capítulo 4). Las condiciones en los pesos en ese resultado de extrapolación, $u \in A_1$ y $uv \in A_\infty$ equivalentes a $v \in A_\infty(\mu)$ (ver observación (2.1.1)), los condujo a conjeturar que la desigualdad (0.0.5) también debería verificarse con condiciones más débiles, $u \in A_1$ y $v \in A_\infty$.

En el año 2013, A. Lerner [L13] motivado con la idea de obtener una nueva prueba de la Conjetura A_2, que ya había sido resuelta por Hytönen, probó una estimación para una clase de operadores *ω-Calderón-Zygmund* (ver definición Sección (1.6.1.2)) en la que utilizó los denominados *operadores sparse* definidos como

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}} f(x) = \sum_{Q \in \mathcal{S}} f_Q \chi_Q(x),$$

donde $f_Q = \frac{1}{|Q|} \displaystyle\int_Q |f|$, $\mathcal{D}$ es un reticulado diádico y $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ es una familia sparse (ver las definiciones precisas en la Sección (2.3.1)).

A partir del resultado de Lerner, los *operadores sparse* que son operadores positivos de una estructura muy simple, cobraron mucha importancia ya que tienen la propiedad de controlar puntualmente a ciertos operadores clásicos del Análisis Armónico, como lo son, entre otros, los operadores de Calderón-Zygmund. Dichos operadores sparse también permiten controlar las Integrales singulares *rough* y los Conmutadores de operadores de Calderón Zygmund. En la Sección 2.3.2 citamos algunos de los tantos resultados de dominación sparse que se sucedieron al trabajo de Lerner.

Los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2 de la Sección 2.3.2 nos proporcionan los resultados claves de *dominación sparse* para los operadores que utilizaremos en la prueba de nuestros Teoremas.

No podemos dejar de mencionar que otro de los resultados más importantes en la teoría es que en el año 2017, K. Li, S. Ombrosi y C. Pérez en [LiOP17] probaron que la Conjetura planteada por Cruz-Uribe, Martell y Pérez es cierta, además de mostrar varias estimaciones cuantitativas.

Todos los resultados expuestos fueron los principales motivadores para los resultados originales que obtuvimos, en lo que se refiere a estimaciones cuantitativas mixtas, en los Capítulos 4 y 5. La principal diferencia en nuestras demostraciones, con respecto a las técnicas utilizadas hasta ahora, es que utilizamos como principal herramienta la dominación por *operadores sparse.*

En el Capítulo 4 probamos dos teoremas para operadores de Calderón Zygmund y para Integrales singulares rough. En el primero establecemos que las siguientes estimaciones se mantienen si $u \in A_1$ y $v \in A_p(\mu)$, para algún $1 < p < \infty$.

1. Si T es un operador de Calderón-Zygmund,

$$\left\| \frac{T(fv)(x)}{v(x)} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c_{n,p} [uv]_{A_\infty} [u]_{A_1} \log\left(e + [uv]_{A_\infty} [u]_{A_1} [v]_{A_p(u)}\right) \|f\|_{L^1(uv)}. \tag{0.0.6}$$

2. Si $\Omega \in L^{\infty}(\mathbb{S}^{n-1})$ entonces

$$\left\|\frac{T_\Omega(fv)(x)}{v(x)}\right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c_{n,\Omega,p}[uv]_{A_\infty}[u]_{A_1}[u]_{A_\infty}\log\left(e+[uv]_{A_\infty}[u]_{A_1}[u]_{A_\infty}[v]_{A_p(u)}\right)\|f\|_{L^1(uv)}.$$

Observemos que para $u = 1$, en el caso de los operadores de Calderón-Zygmund, la estimación (0.0.6) se reduce a

$$\left\|\frac{T(fv)(x)}{v(x)}\right\|_{L^{1,\infty}(v)} \leq c_{n,p}[v]_{A_\infty}\log\left(e+[v]_{A_p}\right)\|f\|_{L^1(v)} \qquad p \geq 1,$$

que mejora la estimación obtenida en [OPR16, Theorems 1.16 and 1.17]:

$$\left\|\frac{T(fv)(x)}{v(x)}\right\|_{L^{1,\infty}(v)} \leq c_{n,p}[v]_{A_p}\log\left(e+[v]_{A_p}\right)\|f\|_{L^1(v)} \qquad p \geq 1.$$

El segundo resultado que obtuvimos bajo la suposición $v \in A_1$ y $u \in A_1(v)$ es el siguiente:

1. Si T es un operador de Calderón-Zygmund

$$\left\|\frac{T(fv)(x)}{v(x)}\right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c_{n,T}[v]_{A_1}[v]_{A_\infty}[u]_{A_1(v)}\log\left(e+[uv]_{A_\infty}[v]_{A_1}\right)\|f\|_{L^1(uv)}.$$

2. Si $\Omega \in L^{\infty}(\mathbb{S}^{n-1})$ entonces

$$\left\|\frac{T_\Omega(fv)(x)}{v(x)}\right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c_{n,\Omega}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_1}[u]_{A_1(v)}[v]_{A_\infty}\log\left(e+[uv]_{A_\infty}[v]_{A_1}\right)\|f\|_{L^1(uv)}.$$

Observemos que con este resultado en el caso $v = 1$ recobramos la mejor constante conocida para $u \in A_1$.

Para la prueba de los Teoremas 4.1.1 y 4.1.2, siguiendo las ideas del trabajo de Domingo-Salazar, Lacey y Rey en[D-SLR16] y de Li,Pérez y otros en [LiPR-RR18], necesitamos algunos resultados previos, con ese fin en la Sección 4.2 enunciamos y probamos algunos Lemas. Por último en las Secciones 4.2.1 y 4.2.2 demostramos nuestros resultados.

En el Capítulo 5 presentamos los resultados que obtuvimos para los Conmutadores de operadores de Calderón-Zygmund (ver definición 1.6.1.4 del Capítulo 1). Inspirados en el trabajo de Lerner, Ombrosi y Rivera-Ríos en [LOR-R17], nuestros resultados se basan nuevamente, al igual que en el Capítulo 4, en la dominación por operadores *sparse*. Nuevamente probamos dos Teoremas, en el primero de ellos establecemos que la siguiente estimación se mantiene si $u \in A_1$ y $v \in A_p(\mu)$, para algún $1 < p < \infty$.

Si T es un operador de Calderón-Zygmund y si m es un entero positivo, $r > 1$ y $b \in Osc_{\exp L^r}$ entonces

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{T_b^m(fv)}{v}\right| > t\right\}\right) \leq c_{n,p}\Gamma_{u,v}^m \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{\frac{m}{r}}\left(\frac{|f|\|b\|_{Osc_{\exp L^r}}^m}{t}\right) uv \qquad (0.0.7)$$

donde

$$\Gamma_{u,v}^m=\sum_{h=0}^m [u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}^{1+\frac{h}{r}}[u]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}\log\left(e+[u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}^{1+\frac{h}{r}}[u]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}[v]_{A_p(u)}\right)^{1+\frac{h}{r}}$$

y $\Phi_\rho(t)=t\left(1+\log^+(t)\right)^\rho$.
Con este resultado no sólo obtenemos una nueva demostración del resultado de F. Berra, M. Carena y G. Pradolini en [BCP17, Teorema 2] sino que además mostramos una estimación cuantitativa.

El segundo Teorema que probamos es para el caso en que $v\in A_1$ y $u\in A_1(v)$.

Si T es un operador de Calderón-Zygmund y si m es un entero positivo, $r>1$ y $b\in Osc_{\exp L^r}$ entonces

$$uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n:\left|\frac{T_b^m(fv)}{v}\right|>t\right\}\right)\leq c_{n,p}\Gamma_{u,v}^m\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_{\frac{m}{r}}\left(\frac{|f|\|b\|_{Osc_{\exp L^r}}^m}{t}\right)uv \tag{0.0.8}$$

donde

$$\Gamma_{u,v}^m=\sum_{h=0}^m [v]_{A_1}[v]_{A_\infty}^{\frac{h}{r}}[uv]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}[u]_{A_1(v)}[v]_{A_\infty}\log\left(e+[v]_{A_1}[v]_{A_\infty}^{\frac{h}{r}}[uv]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}\right)^{1+\frac{h}{r}}$$

y $\Phi_\rho(t)=t\left(1+\log^+(t)\right)^\rho$.
Observemos que este último resultado nos permite obtener la siguiente estimación cuantitativa cuando $v=1$, como un caso particular de la que obtuvieron Ibañez-Firnkorn y Rivera Ríos en [I-FR-R17], cuando el símbolo tiene mejores propiedades de decaimiento local que las funciones BMO:

$$u\left(\{x\in\mathbb{R}^n:|T_b^m(f)|>t\}\right)\leq c_{n,p}[u]_{A_1}[u]_{A_\infty}^{\frac{m}{r}}\log\left(e+[u]_{A_\infty}\right)\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_{\frac{m}{r}}\left(\frac{|f|\|b\|_{Osc_{\exp L^r}}^m}{t}\right)u. \tag{0.0.9}$$

Para la prueba de nuestros resultados (ver Secciones 5.1.1 y 5.1.2) utilizamos los Lemas de la Sección 4.2 del Capítulo 4 y seguimos con la misma técnica que empleamos para los Teoremas de ese Capítulo.

Por último, en el Capítulo 6 dejamos planteados algunos problemas interesantes y que hasta el momento no han podido ser resueltos.

Estructura general de la tesis

La presente tesis esta estructurada en seis Capítulos, a continuación damos un breve resumen de los mismos.

En el Capítulo 1 presentamos las definiciones de los espacios de Lebesgue, de Lorentz, de Orlicz y los de oscilación media acotada (BMO) de funciones, junto con las propiedades básicas que ellos poseen y que utilizaremos en los Capítulos posteriores. También definiremos los principales operadores con los que trabajaremos a lo largo de la tesis como son: los operadores Integrales singulares, entre los que se encuentran los operadores de

Calderón-Zygmund, las Integrales singulares *rough* y los Conmutadores de dichos operadores. Además introduciremos operadores maximales, como el operador maximal de Hardy-Littlewood, su versión diádica y los operadores maximales de Orlicz, que serán fundamentales en el momento de controlar a ciertos operadores.

En el Capítulo 2 introducimos la teoría de pesos y de los operadores sparse. Definiremos las clases A_p y A_∞ junto con las principales propiedades que ellas poseen, entre las que podemos citar la desigualdad Reverse Hölder que nos resultará sumamente útil para la prueba de nuestros resultados. En lo que se refiere a las estimaciones cuantitativas, citaremos los principales resultados conocidos para diferentes operadores del Análisis Armónico. En este capítulo también incluímos a las familias sparse junto con resultados conocidos para operadores de Calderón-Zygmund, Integrales singulares *rough* y Conmutadores.

A partir del Capítulo 3 presentamos los resultados originales de esta tesis. De hecho, en el mencionado Capítulo mencionamos las principales ideas del ejemplo de M. Reguera y C. Thiele con el que probaron que la Conjetura de Muckenhoupt-Wheeden es falsa para la Transformada de Hilbert. En la Sección 3.2, mostramos que una de las claves para usar en nuestro contexto el resultado de Reguera-Thiele es que nosotros mejoramos la condición 'A_1 local' del peso. El segundo componente clave para la prueba de nuestro resultado está en la Sección 3.3 donde obtenemos un resultado de extrapolación para la función $M_r w, r > 1$, en lugar de Mw. Con todos estos componentes en la Sección 3.4 damos una prueba completa del Teorema 3.1.1 que representa el principal resultado de este Capítulo.

En el Capítulo 4 presentaremos los resultados que obtuvimos para las estimaciones cuantitativas de operadores de Calderón-Zygmund y para las Integrales singulares *rough*. Enunciaremos y probaremos algunos Lemas que serán necesarios para la prueba de nuestros resultados.

En el Capítulo 5 enunciamos y probamos los resultados que obtuvimos para desigualdades mixtas para Conmutadores de operadores de Calderón-Zygmund.

Por último en el Capítulo 6 planteamos algunos problemas que hasta el momento no han sido resueltos y que resultan muy interesantes para estudiar a futuro.

Contribuciones originales

Las contribuciones originales de esta tesis se encuentran en los Capítulos 3, 4 y 5. Los resultados que obtuvimos y que fueron expuestos en esos Capítulos los podemos encontrar en:

- Caldarelli, M., Lerner, A. K., and Ombrosi, S., *On a counterexample related to weighted weak type estimates for singular integrals*, Proc. Amer. Math. Soc.145, 7, 3005-3012, 2017.

- Caldarelli, M., Rivera-Ríos, I., *A sparse approach to mixed weak type inequalities*, aceptado en Mathematische Zeitschrift, Octubre 2019.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo recordaremos las definiciones, propiedades y resultados clásicos conocidos del análisis real y armónico de los principales espacios y operadores, que serán necesarios para comprender el desarrollo de los siguientes capítulos, con la intención de que resulte lo más autocontenido posible. De todos modos, el lector puede consultar en la bibliografía citada más detalles sobre el tema y la demostración de los resultados enunciados.

1.1. Espacios L^p y débiles $L^{p,\infty}$

En esta sección recordamos las definiciones de los espacios de funciones L^p y de los espacios débiles $L^{p,\infty}$, algunas de las propiedades que dichos espacios gozan y la notación que emplearemos a lo largo del desarrollo de la tesis.

Definición 1.1.1. *Sea (X, μ) un espacio de medida. Para $0 < p < \infty$ definimos*

$$L^p(X,\mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R}, f\ \mu - medible : \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\},$$

equipado con la norma

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = \infty$

$$L^\infty(X,\mu) = \{ f : X \to \mathbb{R}, f\ \mu - medible : \ \sup es_X |f| < \infty \},$$

donde su norma es

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} = \sup es_X |f| := \text{ínf}\{M > 0 : \mu\{x \in X : |f(x)| > M\} = 0\}.$$

Dos funciones f y g pertenecientes al espacio $L^p(X,\mu)$ serán consideradas iguales si son iguales casi en todas partes respecto a μ, es decir, si $\mu\left(\left\{x \in X : f(x) \neq g(x)\right\}\right) = 0$.

Denotaremos $L^p(X)$ cuando la medida sea clara en el contexto, por ejemplo, $L^p(\mathbb{R}^n)$ denotará al espacio $L^p(\mathbb{R}^n, |.|)$, donde $|.|$ indica la medida de Lebesgue n dimensional, y simplemente denotaremos $L^p(\mu)$ cuando el conjunto X quede sobreentendido. Con $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ denotaremos al espacio de todas las funciones localmente integrables sobre $\mathbb{R}^n$.

Algunas de las propiedades básicas que verifican los espacios L^p son:

- Espacios de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, y cuasi-Banach para $0 < p < 1$, ya que en este caso, la desigualdad de Minkowski es sustituída por
$$\|f+g\|_{L^p(X,\mu)} \leq 2^{(1-p)/p}\|f\|_{L^p(X,\mu)} + \|g\|_{L^p(X,\mu)}.$$
- Desigualdad de Hölder: Si $1 \leq p \leq \infty$ y f, g son funciones $\mu - medibles$ entonces
$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}},$$
donde $p' = \dfrac{p}{p-1}$ indica el exponente conjugado de p (recordemos que p y p' se dicen exponentes conjugados si $p, p' \geq 1$ y verifican $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).
- El espacio dual $(L^p)^*$ de L^p es isométrico a $L^{p'}$ para $1 \leq p \leq \infty$ (si $p = 1$ entonces $p' = \infty$ y viceversa).
- La norma L^p de una función puede ser obtenida por dualidad si $1 \leq p \leq \infty$ como
$$\|f\|_{L^p} = \sup_{\|g\|_{L^{p'}}=1} \left| \int_X fg \, d\mu \right|.$$

Definición 1.1.2. *Sean (X, μ) un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible. Llamamos la función de distribución de f asociada a μ a la función $\mu_f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida de la siguiente manera:*
$$\mu_f(\lambda) = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}\right). \tag{1.1.1}$$
El siguiente resultado nos da una importante descripción de la norma L^p en términos de la función de distribución μ_f: Si $f \in L^p(X, \mu)$, $1 \leq p < \infty$ entonces
$$\|f\|^p_{L^p} = p \int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu_f(\lambda) d\lambda.$$

Definición 1.1.3. *Sea (X, μ) un espacio de medida. Para $1 \leq p < \infty$ definimos el espacio débil*
$$L^{p,\infty}(X, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R}, f \ \mu - medibles : \|f\|_{L^{p,\infty}} < \infty\},$$
donde
$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} := \sup_{\lambda>0} \lambda\mu\left\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Los espacios $L^{p,\infty}(X)$ son espacios lineales casi-normados para $1 \leq p < \infty$, y además, son más grandes que los espacios $L^p(X)$ (más tarde justificaremos esta afirmación). Es más, si $\mu(X) < \infty$ y $1 < q < p$ entonces
$$L^p(X, \mu) \subseteq L^{p,\infty}(X, \mu) \subseteq L^q(x, \mu).$$

Al igual que antes, con $L^{p,\infty}(X)$ denotaremos al espacio $L^{p,\infty}(X, \mu)$ cuando la medida quede sobreentendida, y simplemente denotaremos $L^{p,\infty}(\mu)$ cuando el espacio quede sobreentendido.

1.2. Espacios de Lorentz

Daremos en esta sección la definición y algunas de las propiedades de los espacios de Lorentz (para más detalles ver [Gra04, Sec.1.4], [BS88], entre otros), que luego utilizaremos en el Capítulo 3.
Vamos a suponer que f es una función medible definida sobre un espacio de medida (X, μ). Definimos otra función f^* en $[0, \infty)$, decreciente y equidistribuida con f, es decir, $\mu_f(\lambda) = \mu_{f^*}(\lambda)$ $\forall \lambda \geq 0$, donde μ_f es la función definida en (1.1.1).

Definición 1.2.1. *Dada f una función, $f : X \to \mathbb{R}$. La reordenada decreciente de f es la función f^* definida en $[0, \infty)$ por:*

$$f^*(t) = \text{ínf}\{s > 0 : \mu_f(s) \leq t\}. \tag{1.2.1}$$

Las siguientes son algunas de las propiedades de la función f^*:

- f^* es continua por derecha en $[0, \infty)$.
- $(kf)^*=|k|f^*$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
- $(f + g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$, si $t_1, t_2 > 0$.
- $(fg)^*(t_1t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$, si $t_1, t_2 > 0$.
- $f^*(\mu_f(\lambda)) \leq \lambda$, siempre que $\mu_f(\lambda) < \infty$.
- $(|f|^p)^* = (f^*)^p$.
- $\int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty f^*(t)^p dt$, si $0 < p < \infty$.
- $\int_E |f|^p d\mu \leq \int_0^{\mu(E)} f^*(t)^p dt$.
- $\|f\|_{L^\infty} = f^*(0)$.
- $\sup_{t>0} t^s f^*(t) = \sup_{\lambda>0} \lambda(\mu_f(\lambda))^s$, para $0 < s < \infty$.

Usando la definición de reordenada, resulta fácil de ver que para todo $\delta > 0$ y $0 < \lambda \leq 1$:

$$(f\chi_Q)^*(\lambda|Q|) = \text{ínf}\left\{s > 0 : \left|\{x \in Q : |f(x)| > s\}\right| \leq \lambda|Q|\right\} \leq \left(\frac{1}{\lambda|Q|}\int_Q |f|^\delta dx\right)^{1/\delta}.$$

Definición 1.2.2. *Sea (X, μ) un espacio de medida. Para $0 < p, q \leq \infty$ definimos el espacio de Lorentz con índices p y q, denotado por $L^{p,q}$, al siguiente conjunto:*

$$L^{p,q}(X, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R}, f\ \mu - \textit{medible} : \|f\|_{L^{p,q}} < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & \text{si} \quad q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & \text{si} \quad q = \infty \end{cases}$$

De la definición previa observemos que:

- $L^{\infty,\infty} = L^{\infty}$.

- $L^{p,q} = L^{p,\infty}$, esto es, el espacio de Lorentz $L^{p,q}$ coincide con el espacio débil $L^{p,\infty}$ si $q = \infty$.

- $L^{p,p} = L^{p} \subseteq L^{p,\infty}$.

El siguiente resultado muestra que si fijamos p, los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ crecen cuando q crece.

Proposición 1.2.1. *Supongamos que $0 < p \leq \infty$ y $0 < q < r \leq \infty$. Entonces existe una constante $c_{p,q,r}$ tal que*

$$\|f\|_{L^{p,r}} \leq c_{p,q,r}\|f\|_{L^{p,q}}.$$

Si $r = \infty$ entonces

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^{p,q}}.$$

Será relevante dar algunas propiedades de los espacios duales de Lorentz. En primer lugar, damos algunas definiciones previas.

Definición 1.2.3. *Un subconjunto A de un espacio de medida (X, μ) es llamado un átomo si $\mu(A) > 0$ y todo subconjunto $B \subseteq A$ tiene medida igual a cero ó igual a $\mu(A)$. Un espacio de medida (X, μ) se dice no-atómico si no contiene átomos. Dicho de otra manera, X es no-atómico si y solo si para cualquier $A \subseteq X$ con $\mu(A) > 0$ existe un subconjunto propio B de A con $\mu(B) > 0$ y $\mu(A \setminus B) > 0$.*

Por ejemplo, el espacio $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue es no-atómico.

Definición 1.2.4. *Una medida de un espacio es llamada σ-finita si existe una sucesión de conjuntos medibles K_N con $\mu(K_N) < \infty$ tal que*

$$\cup_{N=1}^{\infty} K_N = X.$$

Por ejemplo $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue es un espacio medible σ-finito.
Las siguientes propiedades son válidas para los espacios duales $(L^{p,q})^*$ de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$.

- $(L^{p,q})^* = \{0\}$ si $0 < p < 1$, $0 < q \leq \infty$.

- $(L^{p,q})^* = L^{\infty}$, si $p = 1$, $0 < q \leq 1$.

- $(L^{p,q})^* = L^{p',q'}$, si $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$.

- $(L^{p,q})^* \neq \{0\}$, si $1 < p < \infty$, $q = \infty$.

1.3. Espacios de Orlicz

En esta sección presentaremos algunas definiciones y propiedades, junto con resultados básicos de la teoría de los espacios de Orlicz. Para más detalles, podemos consultar por ejemplo [KraRu61], [BaPa87], [RaRe91], entre otros.
En primer lugar, observemos que la norma L^p para $1 \leq p < \infty$ que definimos antes puede ser expresada como

$$\|f\|_{L^p(X)} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_X \left|\frac{|f|}{\lambda}\right|^p d\mu \leq 1\right\}.$$

Motivados por esta última igualdad, vamos a reemplazar la función t^p por una función B convexa y creciente.

Definición 1.3.1. *Una función B: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función de Young si es continua, convexa, estrictamente creciente y además satisface $B(0) = 0$ y $B(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$.*

Sea (X,μ) un espacio medible y sea B una función de Young. Definimos el ***espacio de Orlicz*** con respecto a B

$$L^B(\mu) = \left\{f : X \to \mathbb{R}, f\ \mu-medible : \int_X B\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu \leq 1\right\},$$

donde la norma es la *norma de Luxemburg* definida como:

$$\|f\|_{B(\mu)} := \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_X B\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu \leq 1\right\}. \tag{1.3.1}$$

Dada una función de Young B y un cubo Q, definimos la *norma de Luxemburg local* de una función f como

$$\|f\|_{B(\mu),Q} := \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{\mu(Q)}\int_Q B\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu \leq 1\right\}. \tag{1.3.2}$$

En lo que sigue denotaremos $\|f\|_{B,Q}$ cuando μ sea la medida de Lebesgue.
Observemos que cuando $B(t) = t^p$, $1 \leq p < \infty$, y μ es la medida de Lebesgue,

$$\|f\|_{B,Q} = \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p},$$

esto es, la norma de Luxemburg coincide con la norma L^p normalizada.
La norma que definimos en (1.3.2) es comparable a (ver [KraRu61]):

$$\|f\|'_{B(\mu),Q} := \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \lambda + \frac{\lambda}{\mu(Q)}\int_X B\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu\right\}. \tag{1.3.3}$$

Precisamente, Krasnosel'skiĭ and Rutickiĭ probaron en [KraRu61, pág 89]:

$$\|f\|_{B(\mu),Q} \leq \|f\|'_{B(\mu),Q} \leq 2\|f\|_{B(\mu),Q}.$$

Otra propiedad interesante que utilizaremos en los próximos capítulos es la siguiente:

$$\|f\|_{B(\mu),Q} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q B\left(|f|\right) d\mu \leq 1. \tag{1.3.4}$$

Decimos que una función de Young B es *duplicante* (o satisface la condición Δ_2) si existe una constante $C > 0$ tal que

$$B(2t) \leq CB(t), \quad \forall t > 0,$$

y es *submultiplicativa* si

$$B(st) \leq CB(s)B(t), \;\; \forall s, t > 0.$$

Por ejemplo, las funciones de Young $B(t) = t^r, r \geq 1$, y $B(t) = t^a(log(e+t))^b, a \geq 1, b \geq 0$, son submultiplicativas. Decimos que B es *dominante sobre* A y lo notamos $A(t) \preceq B(t)$ si existe una constante positiva c tal que para todo $t > t_0 > 0$,

$$A(t) \leq B(ct).$$

Dado p, con $1 \leq p < \infty$, diremos que una función de Young B es una *p-función Young*, si $\Phi(t) = B(t^{\frac{1}{p}})$ es una función de Young. Ahora, si B es una p-función de Young entonces $t^p \preceq B(t)$ y $\frac{B(t)}{t^p}$ es no-decreciente.

Definición 1.3.2. *Dada una función de Young B, la función de Young complementaria $\bar{B}$ se define como*

$$\bar{B}(t) = \sup_{s>0}\{st - B(s)\}, \;\; t > 0,$$

donde B y $\bar{B}$ satisfacen la desigualdad

$$t \leq B^{-1}(t)\bar{B}^{-1}(t) \leq 2t, \;\; t > 0.$$

Un caso particular de interés para nosotros será cuando $B(t) = t\log(e+t)^{\frac{1}{r}}$ y $\bar{B}(t) = \exp(t^r) - 1$, para $r > 1$.

Proposición 1.3.1. *Dada una función de Young A, para todo $r > 0$*

$$\|f^r\|_{A,Q} = \|f\|^r_{B,Q},$$

donde $B(t) = A(t^r)$. En particular, si A es una p-función de Young entonces

$$\|f^{1/p}\|_{A,Q} = \|f^{1/r}\|^{r/p}_{B,Q},$$

donde $B(t) = A(t^{r/p})$ es una r-función de Young.

La siguiente desigualdad es la denominada ***desigualdad de Hölder generalizada*** para espacios de Orlicz:

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |fg| d\mu \leq 2\|f\|_{B(\mu),Q}\|g\|_{\bar{B}(\mu),Q}. \tag{1.3.5}$$

1.4. Espacios BMO

El espacio de funciones de oscilación media acotada, comúnmente denotado por BMO, surge como las clases de funciones cuya desviación de su media está acotada.

Definición 1.4.1. *Decimos que una función localmente integrable b es de oscilación media acotada, es decir $b \in BMO$, si*

$$\|b\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(x) - b_Q| \, dx < \infty, \tag{1.4.1}$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos Q de $\mathbb{R}^n$ cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados y $b_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f$.

Definimos el espacio

$$BMO(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{BMO} < \infty \right\}. \tag{1.4.2}$$

Tal espacio es un espacio vectorial lineal, esto es, si $f, g \in BMO(\mathbb{R}^n)$ y si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ entonces $\alpha f + \beta g \in BMO(\mathbb{R}^n)$ y además:

$$\|\alpha f + \beta g\|_{BMO} \leq \alpha \|f\|_{BMO} + \beta \|g\|_{BMO}.$$

Sin embargo, $\|.\|_{BMO}$ definida en (1.4.1) no es una norma ya que cualquier función constante c satisface $\|c\|_{BMO} = 0$. Para evitar este problema se define al espacio BMO como el espacio cociente del espacio BMO definido en (1.4.2) por el espacio de las funciones constantes. En otras palabras, dos funciones que difieren en una constante coinciden como funciones en BMO. Con esta nueva definición los espacios BMO tienen las siguientes propiedades (ver [Gra04, Cap.7]):

- Si $\|f\|_{BMO} = 0$ entonces f pertenece a la clase del 0 (es decir, es constante en casi todo punto).
- L^∞ esta contenido en el espacio BMO y $\|f\|_{BMO} \leq 2\|f\|_{L^\infty}$.
- Supongamos que existe una constante $A > 0$ tal que para todo cubo $Q \in \mathbb{R}^n$ existe c_Q tal que
$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c_Q| \, dx \leq A.$$
Entonces $f \in BMO$ y $\|f\|_{BMO} \leq 2A$.
- Para toda f localmente integrable tenemos
$$\frac{1}{2} \|f\|_{BMO} \leq \sup_Q \frac{1}{|Q|} \inf_{c_Q} \int_Q |f(x) - c_Q| \, dx \leq \|f\|_{BMO}.$$
- Para funciones localmente integrables definimos
$$\|f\|_{BMO_{bolas}} = \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| \, dx,$$

donde el supremo es tomado sobre todas las bolas B en $\mathbb{R}^n$. Entonces existen constantes positivas c_n, C_n tales que

$$c_n\|f\|_{BMO} \leq \|f\|_{BMO_{bolas}} \leq C_n\|f\|_{BMO}.$$

El siguiente resultado fue establecido por John y Nirenberg en [JN61]:

Teorema 1.4.1. *Sea $b \in BMO$ y Q un cubo. Entonces*

$$|\{x \in Q : |b(x) - b_Q| > \lambda\}| \leq e|Q|e^{-\frac{\lambda}{2^n e\|b\|_{BMO}}}, \lambda > 0. \tag{1.4.3}$$

Recíprocamente, si b es una función que satisface la desigualdad anterior entonces $b \in BMO$.

1.5. Desigualdades de tipo fuerte y de tipo débil

Los principales problemas que se abordan en esta tesis tiene que ver, en parte, con el estudio de qué tipo de acotación verifican ciertos operadores, es decir, si son operadores acotados de $L^p(X,\mu)$ a $L^q(Y,\nu)$, o bien de $L^p(X,\mu)$ a $L^{q,\infty}(Y,\nu)$. De allí surgen las definiciones de desigualdades de tipo débil y fuerte que hacemos referencia en esta sección.

Definición 1.5.1. *Sean (X,μ) y (Y,ν) espacios medibles. Decimos que un operador $T : L^p(X,\mu) \to L^q(Y,\nu)$ es lineal si para toda $f, g \in L^p(X,\mu)$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ se verifica:*

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g),$$

y es sublineal si:

$$|T(\alpha f + \beta g)| \leq \alpha\,|T(f)| + \beta\,|T(g)|\,.$$

Definición 1.5.2. *Sean (X,μ) y (Y,ν) espacios medibles. Decimos que un operador lineal (sublineal) T es de tipo fuerte (p,q) si está acotado de $L^p(X,\mu)$ en $L^q(Y,\nu)$, es decir si para toda $f \in L^p(X,\mu)$*

$$\|T(f)\|_{L^q(Y,\nu)} \leq c\|f\|_{L^p(X,\mu)}, \tag{1.5.1}$$

donde $c > 0$ es una constante independiente de f.

A la menor constante c que verifica (1.5.1) la notaremos $\|T\|_{L^p(X,\mu)\to L^q(Y,\nu)}$. Observemos que

$$\|T\|_{L^p(X,\mu)\to L^q(Y,\nu)} = \sup_{\|f\|_{L^p(X,\mu)}\neq 0} \frac{\|T(f)\|_{L^q(Y,\nu)}}{\|f\|_{L^p(X,\mu)}}.$$

Cuando los espacios (X,μ) y (Y,ν) son iguales y $p = q$ simplemente denotaremos como $\|T(f)\|_{L^p(X,\mu)}$ a la norma $\|T\|_{L^p(X,\mu)\to L^q(Y,\nu)}$.

Definición 1.5.3. *Sean (X,μ) y (Y,ν) espacios medibles. Decimos que un operador lineal (sublineal) T es de tipo débil (p,q) si está acotado de $L^p(X,\mu)$ en $L^{q,\infty}(Y,\nu)$ y si para toda $f \in L^p(X,\mu)$*

$$\|T(f)\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)} \leq c\|f\|_{L^p(X,\mu)}, \tag{1.5.2}$$

donde $c > 0$ es una constante independiente de f.

Al igual que para las desigualdades de tipo fuerte, a la menor constante c que verifica (1.5.2) la notaremos $\|T\|_{L^p(X,\mu)\to L^{q,\infty}(Y,\nu)}$ y notemos que

$$\|T\|_{L^p(X,\mu)\to L^{q,\infty}(Y,\nu)} = \sup_{\|f\|_{L^p(X,\mu)}\neq 0} \frac{\|T(f)\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)}}{\|f\|_{L^p(X,\mu)}}.$$

Es importante observar que todo operador de tipo fuerte (p,q) es de tipo débil (p,q). Cuando $(X,\mu) = (Y,\nu)$ y T es el operador identidad Id, la desigualdad débil (p,p) es la clásica ***desigualdad de Chebyshev***:

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}\right) \leq \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\lambda}\right)^p.$$

Ahora resulta sencillo probar, utilizando ésta última desigualdad que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p} \ \forall f \in L^p,$$

en consecuencia

$$L^p_\mu \subseteq L^{p,\infty}_\mu.$$

Esto es, como habíamos afirmado anteriormente, los espacios débiles $L^{p,\infty}$ son más grandes que los espacios L^p, en realidad, la inclusión es en sentido estricto (ver[Gra04, pág 5]).

La teoría de interpolación de operadores es muy vasta y extensa. El siguiente resultado representa uno de los clásicos de dicha teoría ya que tiene una amplia variedad de aplicaciones (ver [Duo00, pág 29]) y establece que si un operador tiene una "combinación" de desigualdades débiles entonces podemos determinar estimaciones fuertes para ese operador en un cierto rango.

Teorema de interpolación (Marcienkiewicz). *Sean (X,μ) y (Y,ν) dos espacios medibles y sea $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$. Sea T un operador sublineal definido sobre el espacio $L^{p_0}(X) + L^{p_1}(Y)$ que toma valores en el de funciones medibles sobre Y. Si existen constantes C_1 y C_2 tales que*

$$\|T(f)\|_{L^{p_0,\infty}(Y)} \leq C_0\|f\|_{L^{p_0}(X)} \ \forall f \in L^{p_0}(X),$$

$$\|T(f)\|_{L^{p_1,\infty}(Y)} \leq C_1\|f\|_{L^{p_1}(X)} \ \forall f \in L^{p_1}(X).$$

Entonces $\forall\ p_0 < p < p_1$ y $\forall f \in L^p$ se verifica

$$\|T(f)\|_{L^p(Y)} \leq C\|f\|_{L^p(X)}.$$

1.6. Principales Operadores

El propósito de esta sección es presentar los principales operadores con los que trabajaremos en los próximos capítulos. Daremos algunas de sus propiedades y desigualdades clásicas que ellos verifican.

1.6.1. Operadores Integrales Singulares

Las integrales singulares cobran mucha importancia ya que están íntimamente ligadas a ecuaciones diferenciales parciales y a la teoría de operadores, entre otros campos.

1.6.1.1. Transformada de Hilbert

El estudio de la transformada de Hilbert proporcionó el gran modelo para el desarrollo de la teoría de integrales singulares. Al comienzo de su estudio, la teoría de la transformada de Hilbert dependió de técnicas del análisis complejo, pero con el desarrollo de la escuela de Calderón-Zygmund los métodos de variable real lentamente reemplazaron al análisis complejo, y esto condujo a la introducción de integrales singulares en otras áreas de la Matemática.
Existen varias formas de definir la transformada de Hilbert, nosotros vamos a definirla como un operador lineal de tipo convolución para una función f suficientemente buena, por ejemplo, infinitamente diferenciable y con soporte compacto (ver [Gra04, Cap.4], [Duo00, Cap.3], [Ste86]):

$$H(f)(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{1}{y} f(x-y)dy.$$

Observemos que $1/x$ no es localmente integrable, sin embargo, tiene cierta propiedad de cancelación, ya que $\displaystyle\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{x}dx = 0$, para todo $\epsilon > 0$.
El espacio de las funciones continuas de soporte compacto e infinitamente diferenciables, C_0^∞, es denso en $L^2(\mathbb{R})$. El espacio de Schwartz, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, es el espacio de las funciones infinitamente diferenciables y rápidamente decrecientes sobre $\mathbb{R}$, es decir, $x^p D^q f \to 0$ cuando $|x| \to 0$, $\forall p, q \in N$. Es claro que, $C_0^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, en consecuencia $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$. También, $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R})$, y como $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$, resulta que $L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(R)$.
El operador $\mathcal{F}_0 : L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, definido por $\mathcal{F}_0 f = Hf$, es un operador lineal acotado definido en el subconjunto denso $L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R})$ de $L^2(\mathbb{R})$, y además es una isometría, es decir, $\|\mathcal{F}_0 f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|Hf\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$, para toda función $f \in L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R})$.
Para $f \in L^2(\mathbb{R})$ definimos el operador $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ como $\mathcal{F}f := \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_0 f_n$, donde f_n es cualquier sucesión en $L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R})$ que converge a f en $L^2(\mathbb{R})$. $\mathcal{F}$ es una isometría, esto es, es un operador acotado de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$ que extiende a $\mathcal{F}_0$, al que llamaremos la transformada de Hilbert en $L^2(\mathbb{R})$. Fue M. Riesz en [Rie27] quien demostró que la transformada de Hilbert puede ser definida para funciones en $L^2(\mathbb{R})$, y que es un operador acotado en ese espacio.
La transformada de Hilbert satisface también las siguientes propiedades: Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ entonces

- $H(Hf) = -f$
- $\displaystyle\int Hf.g = -\int f.Hg$

Además, M. Riesz [Rie27] probó que la transformada de Hilbert es de tipo fuerte (p, p) para todo $p > 1$ y A. N. Kolmogorov [Kol25] estableció que también es de tipo débil $(1, 1)$.

1.6.1.2. Operadores de Calderón-Zygmund

Vamos a considerar Integrales singulares que generalizan a la Transformada Hilbert. Sea T un operador lineal $T : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ representado como

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy, \;\; \forall x \notin Sop(f),$$

donde $Sop(f)$, soporte de f, es el conjunto de puntos donde f es no nula y su adherencia conforma un conjunto cerrado y acotado. Decimos que T es un operador de *Calderón-Zygmund* si el núcleo K satisface las siguientes condiciones de crecimiento y de suavidad:

i) $|K(x,y)| \leq \frac{C_K}{|x-y|^n}$, $\forall x \neq y$

ii) Existe $0 < \delta \leq 1$ tal que

$$|K(x,y) - K(x',y)| + |K(y,x) - K(y,x')| \leq c\frac{|x-x'|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}},$$

siempre que $|x-x'| < |x-y|/2$.

Al igual que la Transformada Hilbert, que es un operador integral clásico de Calderón-Zygmund, los operadores de Calderón-Zygmund son del tipo débil $(1,1)$(ver [CZ52]):

$$T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{(1,\infty)}(\mathbb{R}^n),$$

y son de tipo fuerte (p,p):

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n), \;\; 1 < p < \infty.$$

A continuación vamos a definir una clase ligeramente más amplia de operadores integrales que denominaremos operadores integrales *ω-Calderón-Zygmund*, donde la condición i) de antes impuesta al núcleo K se mantiene, mientras que la de suavidad ii) es reemplazada por:

$$|K(x,y) - K(x',y)| + |K(y,x) - K(y,x')| \leq \omega\left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right)\frac{1}{|x-y|^n},$$

para $|x-y| > 2|x-x'| > 0$, donde $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función denominada *módulo de continuidad*, esto es, es creciente y subaditiva $(\omega(t+s) \leq \omega(t)+\omega(s))$ y $w(0) = 0$. Más aún, decimos que K es un núcleo Dini-continuo si ω satisface la condición de Dini:

$$\|\omega\|_{Dini} := \int_0^1 \omega(t)\frac{dt}{t} < \infty. \tag{1.6.1}$$

Para ver más detalles sobre operadores de Calderón-Zygmund ver [CM79], [Duo00, Cap.5], [Ste93].

El siguiente resultado nos muestra una estimación cuantitativa del operador *ω-Calderón-Zygmund*(ver [HRT17, Apéndice A]):

Teorema 1. *Sea T es un operador ω-Calderón-Zygmund cuyo módulo de continuidad satisface la condición* (1.6.1)*. Entonces*

$$\|T\|_{L^1 \to L^{1,\infty}} \leq c_n \left(\|T\|_{L^2} + \|\omega\|_{Dini}\right).$$

1.6.1.3. Integrales singulares homogéneas *rough*

En la teoría clásica se han estudiado también operadores relacionados a Integrales singulares de Calderón-Zygmund en los que no se verifican condiciones de suavidad en el núcleo, las denominadas Integrales singulares homogéneas *rough* son operadores con núcleos singulares homogéneos sobre los que se suponen condiciones de suavidad más débiles que las estándar (de ahí que se los llame *rough*). Concretamente, este tipo de operadores están definidos como:

$$T_\Omega f(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K(y)dy = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{\epsilon<|y|<R} f(x-y)K(y)dy, \tag{1.6.2}$$

donde el núcleo K viene definido por:

$$K(y) = \frac{\Omega(y/|y|^n)}{|y|^n},$$

con $\Omega \in L^q(S^{n-1})$, $q \geq 1$ y $\int_{S^{n-1}} \Omega \, d\sigma = 0$.
Observemos que el núcleo es homogéneo de grado $-n$.
A. P. Calderón y A. Zygmund en [CZ56] probaron que si $\Omega \in L\log L(S^{n-1})$, es decir, si $\displaystyle\int_{S^{n-1}} \Omega \log \Omega \, d\sigma < \infty$ entonces T_Ω está acotado en L^p para todo $1 < p < \infty$. El tipo débil $(1,1)$ de T_Ω fue establecido por Christ [C88] y Hofmann [H88] en el caso $n = 2$ y $\Omega \in L^q(S^1), q > 1$, y por Christ y Rubio de Francia [CRdF88] para $\Omega \in L\log L(S^1)$. Por último, Seeger en [S96] probó que T_Ω es de tipo débil $(1,1)$ en todas las dimensiones para $\Omega \in L\log L(S^{n-1})$.

1.6.1.4. Conmutador de un operador de Calderón-Zygmund

El Conmutador de un operador de Calderón-Zygmund es otro de los operadores que juega un rol muy importante en nuestra tesis, fue introducido por R. Coifman, R. Rochberg y G. Weiss en [CRW76].

Definición 1.6.1. *Sea T un operador lineal y $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que llamaremos el símbolo, definimos el conmutador de T y b para una función f dada, como*

$$[b,T](f) = (bT)f - T(bf).$$

El siguiente resultado es una caracterización del espacio BMO en términos del Conmutador de un operador de Calderón-Zygmund y fue probado por R. Coifman, R. Rochberg and G.Weiss en [CRW76].

Teorema 2. *Dada una integral singular T cuyo núcleo asociado es estándar entonces el Conmutador $[b,T]$ está acotado en L^p, $1 < p < \infty$ si y sólo si $b \in BMO$.*

La condición de que $b \in BMO$ sea suficiente para que el conmutador $[b,T]$ esté acotado fue probada en [CRW76]. De hecho allí también se probó que si el Conmutador de todas las Transformadas de Riesz es acotado entonces $b \in BMO$. Posteriormente S. Janson en

[Jan78] mejoró ese resultado.
En general, el Conmutador de un operador de Calderón-Zygmund no es del tipo débil $(1,1)$, salvo que se considere una clase más pequeña del símbolo. Por ejemplo, si b es una función acotada entonces el Conmutador sí satisface la desigualdad del tipo débil $(1,1)$.
C. Pérez en [Per95] probó el siguiente resultado para el Conmutador de un operador de Calderón-Zygmund cuando el símbolo está en BMO:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |[b,T](x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)\right) dy.$$

Será útil para poder estudiar el operador Conmutador de orden superior $T_b^m f$ de un operador T de Calderón-Zygmund y un entero positivo dado m, introducir el espacio de las oscilaciones:

$$Osc_{\exp L^s} = \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{Osc_{\exp L^s}} < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_{Osc_{\exp L^s}} = \sup_Q \|f - f_Q\|_{\phi_s, Q}, \quad s > 0,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, $f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f$ y ϕ_s es la función de Young definida por $\phi_s(t) = e^{t^s} - 1$, $t \geq 0$. Cuando $\phi_s(t) = e^{t^s} - 1$ a la norma $\|f - f_Q\|_{\phi_s,Q}$ la notaremos como $\|f - f_Q\|_{\exp L^s, Q}$. Observemos que si $s = 1$ y $b \in BMO$ entonces

$$\sup_Q \|b - b_Q\|_{\exp L, Q} \leq c_n \|b\|_{BMO}.$$

Es claro que, para todo $s > 1$

$$Osc_{\exp L^s} \subsetneq BMO.$$

Definición 1.6.2. *Dado un operador T de Calderón-Zygmund, $b \in Osc_{\exp L^s}$ y un entero positivo m, definimos el operador Conmutador de orden superior $T_b^m f$ de la forma*

$$T_b^m f(x) = b(x) T_b^{m-1} f(x) - T_b^{m-1}(bf)(x)$$

donde $T_b^1 f(x) = b(x)Tf(x) - T(bf)(x)$.

1.6.2. Operadores maximales

Los operadores maximales tienen una relación muy importante con los operadores integrales singulares, precisamente el *Principio de Calderón-Zygmund* establece: *"Todo operador integral singular está controlado en algún sentido, por un operador maximal apropiado".*

1.6.2.1. Operador Maximal de Hardy-Littlewood

Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Para $x \in \mathbb{R}^n$ definimos el operador maximal de Hardy-Littlewood como

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy, \tag{1.6.3}$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q que contienen al punto x. Los cubos a los que hacemos referencia son cubos con lados paralelos a los ejes coordenados. Es importante señalar que también podemos definir a la función maximal tomando el supremo sobre bolas, o sobre bolas centradas en el punto x. Todas las definiciones son equivalentes salvo constantes dimensionales.

El operador maximal de Hardy- Littlewood es un operador fundamental en el Análisis Armónico y goza de muchas propiedades, entre ellas, por ejemplo, podemos citar que controla puntualmente a f, esto es, $Mf \geq |f|$ en casi todo punto; también preserva la norma L^∞, es decir, $\|Mf\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$.
El siguiente resultado fué probado por G. H. Hardy y J. E. Littlewood en dimensión 1 [HarLit30] y por N. Wiener para más dimensiones [Wie39]:

Teorema 1.6.1. *Sea $1 < p < \infty$. Entonces $\|M\|_{L^p} \leq c_n p'$.*

Una de las propiedades más importantes que tiene el operador maximal, ya que nos permite probar otros resultados, es la siguiente que establece que es un operador de tipo débil $(1, 1)$:

Teorema 1.6.2. *Existe una constante dimensional C tal que para todo λ positivo vale la siguiente desigualdad*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx.$$

Como consecuencia de este último resultado y del *Teorema de interpolación de Marcienkiewicz* tenemos el siguiente resultado que asegura que el operador maximal es de tipo fuerte (p, p):

Corolario 1.6.1. *Sea $1 < p < \infty$ entonces existe una constante C tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx.$$

Observemos que la función maximal de Hardy-Littlewood posse las mismas propiedades que la Transformada Hilbert, sin embargo este último operador es más singular.

Será útil en nuestra tesis definir también una versión diádica del operador maximal. Con tal fin, daremos algunas definiciones previas.
El sistema standard de *cubos diádicos* en $\mathbb{R}^n$ es la colección $\mathcal{D}$ definida como:

$$\mathcal{D} := \left\{ 2^{-k} \left([0, 1)^n + m \right) : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n \right\},$$

que consiste de simples cubos semi-abiertos de diferentes escalas de longitud con lados paralelos a los ejes coordenados. Tales cubos satisfacen las siguientes propiedades:

1) Para cualquier $Q \in \mathcal{D}$, la longitud del lado $l(Q)$ es de la forma 2^k, $k \in \mathbb{Z}$.

2) $Q \cap R \in \{Q, R, \emptyset\}$, para cualquier $Q, R \in \mathcal{D}$.

3) Los cubos de longitud de lado fijo 2^k forman una partición de $\mathbb{R}^n$.

El operador maximal diádico para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ está definido como:

$$M^d f(x) := \sup_{\substack{Q \ni x \\ Q \in \mathcal{D}}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos $Q \in \mathcal{D}$ que contienen al punto x.
Es inmediato que $M^d f \leq Mf$, donde M es el operador maximal de Hardy-Littlewood definido en (1.6.3). En consecuencia, muchas propiedades de acotación que verifica el operador $M^d f$ se pueden deducir a partir de las correspondientes propiedades de M. Por ejemplo, $M^d f$ también es de tipo débil $(1,1)$ con norma a lo sumo 1 y es de tipo fuerte (p,p) con norma

$$\|M^d\|_{L^p \to L^p} \leq \frac{p}{p-1}.$$

En muchos problemas será conveniente considerar una versión más general del operador maximal de Hardy-Littlewood. Dada una medida μ y $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, la *función maximal de Hardy-Littlewood de f con respecto a μ* denotada por $M_\mu f$ se define de la siguiente manera:

$$M_\mu f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)| d\mu(y). \tag{1.6.4}$$

De manera análoga, podemos definir la *función maximal de Hardy-Littlewood de f centrada en cubos* como:

$$M^c_\mu f(x) = \sup_{\delta > 0} \frac{1}{\mu(Q(x,\delta))} \int_{Q(x,\delta)} |f(y)| d\mu(y), \tag{1.6.5}$$

donde $Q(x,\delta)$ denota al cubo centrado en x y radio δ.

El operador M^c_μ definido en (1.6.5) es de tipo débil $(1,1)$ y cuando la medida μ es *duplicante (doblante)*, esto es,

$$\forall Q \;\; \mu(2Q) \leq c_\mu \mu(Q), \tag{1.6.6}$$

(si μ es la medida de Lebesgue $c_\mu = 2^n$) resulta que el operador M_μ definido en (1.6.4) es también de tipo débil $(1,1)$. De hecho, si la medida μ es duplicante, los operadores M_μ y M^c_μ son puntualmente comparables, y usaremos cualquiera de ellos cuando sea conveniente. También podemos definir el operador M^d_μ que no es otro que el operador (1.6.4) definido sobre una familia de cubos diádicos, en este caso, M^d_μ es de tipo débil $(1,1)$ sin importar las propiedades de la medida μ sobre la que está definido.

1.6.2.2. Operador Maximal de Orlicz

Dada una función de Young ϕ definimos el operador maximal para espacios de Orlicz como

$$M_{\phi(\mu)} f(x) = \sup_{Q \ni x} \|f\|_{\phi(\mu),Q}, \tag{1.6.7}$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q que contienen a x y $\|f\|_{\phi(\mu),Q}$ es la norma de Luxemburg local de f definida en (1.3.1)
Observemos que si $\phi(t) = t$, M_ϕ es el operador maximal de Hardy-Littlewood. La función definida en (1.6.7) satisface la siguiente estimación de tipo distribucional: existen constantes dimensionales c_n, d_n tales que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_\phi f(x) > t\}| \leq c_n \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(d_n \frac{f}{t}\right) dx, \quad f \geq 0, t > 0. \tag{1.6.8}$$

Para más detalles ver [C-UMP11]. Una consecuencia de (1.6.8) es la siguiente estimación L^p del operador (1.6.7)(ver [HP15, pág 6]), que resulta una versión más precisa de la estimación hecha en [Pe95].

Lema 1.6.1. *Sea ϕ una función de Young. Entonces*

$$\|M_\phi\|_{L^p} \leq c_n \alpha_p(\phi),$$

donde

$$\alpha_p(\phi) = \left(\int_1^\infty \frac{\phi(t)}{t^p} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \tag{1.6.9}$$

y también

$$\|M_\phi\|_{L^p} \leq c_n \beta_p(\phi),$$

donde

$$\beta_p(\phi) = \left(\int_{\phi(1)}^\infty \frac{t}{\bar{\phi}(t)}\right)^{1/p} d\bar{\phi}(t) \quad < \infty.$$

Decimos que una función de Young ϕ pertenece a la clase B_p si satisface la condición (1.6.9).
Presentamos algunos ejemplos de operadores maximales relacionados a ciertas funciones de Young que luego utilizaremos:

- Si $\phi(t) = t^r$, $0 < r < 1$, la función de Young complementaria es $\bar{\phi}(t) = t^{r'}$ con $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ y el operador maximal es $M_\phi f = M_r f = M(|f|^r)^{1/r}$.
- Si $\phi(t) = t \log(e+t)^\epsilon$, $\epsilon > 1$, la función de Young complementaria es $\bar{\phi}(t) \simeq e^{t^{1/\epsilon}} - 1$ y el operador maximal es $M_\phi = M_{L \log L^\epsilon}$.
- Si $\phi(t) = t \log(e+t) \log(e+\log(e+t))^\epsilon$, $\epsilon > 0$, el operador maximal es $M_\phi = M_{L \log L (\log \log L)^\epsilon}$.

Notemos que $M \leq M_\phi \leq M_r$, para todo $1 < r < \infty$. En particular

$$M_{L \log L (\log \log L)^{1+\epsilon}} \leq c_\epsilon M_{L \log L^{1+\epsilon}}, \quad \epsilon > 0.$$

Capítulo 2

Teoría de pesos y operadores sparse

2.1. Pesos

La teoría de pesos surge de forma natural al plantearse la cuestión sobre si es posible extender la acotación de un operador a los espacios $L^p(\mu)$, donde μ es otra medida distinta a la medida de Lebesgue, sabiendo que es acotado sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$.
Decimos que w es un peso si es una función localmente integrable, no negativa en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto medible entonces su w-medida es

$$w(E) = \int_E w(x)dx.$$

Notaremos $L^p(w)$ a los espacios L^p donde la medida $d\mu$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, es decir, $d\mu(x) = w(x)dx$ para algún peso w.

2.1.1. Las clases A_p de Muckenhoupt

En la década del 70 Muckenhoupt caracterizó a los pesos para los cuales el operador maximal de Hardy-Littlewood es acotado sobre $L^p(w)$. Esta caracterización motivó la introducción de las clases A_p con el consecuente desarrollo de las desigualdades con pesos que permitieron, entre otras cosas, estudiar la acotación de varios operadores importantes en el Análisis Armónico. Entre las aplicaciones están, por ejemplo el estudio de problemas de valores frontera para la ecuación de Laplace sobre dominios de Lipschitz, la teoría de extrapolación (ver [DH74], [D79], [K80], [B81], entre otros).

Definición 2.1.1. *Un peso w está en la clase A_1 si existe una constante C_1 tal que*

$$Mw(x) \leq C_1 w(x) \quad \textit{en casi todo punto } x \in \mathbb{R}^n,$$

donde M denota, como siempre, al operador maximal de Hardy-Littlewood. A la menor constante C_1 posible se la denomina la constante A_1 del peso y la denotaremos $[w]_{A_1}$; esto es, si $w \in A_1$ entonces

$$[w]_{A_1} = \left\| \frac{Mw}{w} \right\|_{L^\infty} < \infty.$$

Observemos que si $w \in A_1$ entonces

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(t)dt \leq \operatorname*{ínf}_{y\in Q} Mw(y) \leq [w]_{A_1} \operatorname*{ínf}_{y\in Q} w(y), \quad \forall\, Q \subset \mathbb{R}^n. \tag{2.1.1}$$

Definición 2.1.2. *Sea $1 < p < \infty$. Decimos que un peso w está en la clase A_p si*

$$[w]_{A_p} := \sup_{Q\in\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} < \infty.$$

En la siguiente proposición daremos algunas propiedades básicas que tienen las clases A_p cuyas demostraciones las podemos ver en [Gra04, pág 679].

Proposición 2.1.1. *Sea $w \in A_p$, para algún $1 \leq p < \infty$. Entonces*

- $[\lambda w]_{A_p} = [w]_{A_p}$ $\forall \lambda > 0$.
- *la función $w^{-\frac{1}{p-1}}$ está en $A_{p'}$, cuando $1 < p < \infty$, con constante característica*

  $$[w^{-\frac{1}{p-1}}]_{A_{p'}} = [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}.$$

  En particular $w \in A_2$ si y sólo si $w^{-1} \in A_2$, ambos pesos tienen la misma constante A_2.
- $[w]_{A_p} \geq 1$ $\forall w \in A_p$. *Además $[w]_{A_p} = 1$ si y sólo si w es una constante.*
- *Las clases A_p son crecientes cuando p crece, es decir, si $1 \leq p < q < \infty$ entonces*

  $$[w]_{A_q} \leq [w]_{A_p}.$$

- *La medida $w(x)dx$ es duplicante, más precisamente, $\forall \lambda > 1$ y $\forall$ cubo Q vale*

  $$w(\lambda Q) \leq \lambda^{np}[w]_{A_p} w(Q),$$

  donde λQ denota al cubo con el mismo centro que Q y de lado de longitud λ veces la longitud de lado de Q.

Caracterización de las clases A_p
El siguiente resultado caracteriza a las clases A_p:

Lema 2.1.1. *Si $w \in A_p$ entonces existen $u, v \in A_1$ tales que*

$$w = uv^{1-p}.$$

Recíprocamente, si $u, v \in A_1$ entonces $uv^{1-p} \in A_p$. Además, en ambos casos se verifica

$$[w]_{A_p} \leq [u]_{A_1}[v]_{A_1}^{p-1}.$$

La segunda parte del lema fue probada tempranamente por Muckenhoupt en [Muc72] quien además conjeturo la primera parte, pero finalmente fue Jones en [Jo80] quien la probo. El resultado de Jones se conoce como el *Teorema de Factorización para las clases* A_p. Una prueba más sencilla de dicho resultado podemos verla en el trabajo de Coifman, Jones y Rubio de Francia en [CJRdF83].
El siguiente resultado conocido como *Teorema de Muckenhoupt* es uno de los principales resultados de la teoría de pesos (una demostración la podemos ver en [Duo00]):

Teorema (Muckenhoupt). *Sean* $1 \leq p < \infty$ *y* w *un peso. Entonces* $w \in A_p$ *si y sólo si existe* C *tal que*

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}\right) \leq \frac{C}{t^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx, \tag{2.1.2}$$

para toda $f \in L^p(w)$ *y para todo* $t > 0$*. Más aún, si* $p > 1$ *entonces* $w \in A_p$ *si y sólo si existe* C *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx, \tag{2.1.3}$$

para toda $f \in L^p(w)$*.*

Cuando el operador M satisface una desigualdad como (2.1.2) decimos que M es de *tipo débil pesado* (p,p), la notación usual que usaremos será

$$\|Mf\|_{L^{p,\infty}(w)} \leq C\|f\|_{L^p(w)}.$$

Cuando el operador M satisface una desigualdad como (2.1.3) decimos que M es de *tipo fuerte pesado* (p,p), lo denotaremos como

$$\|M\|_{L^p(w)} \leq C\|f\|_{L^p(w)}.$$

El siguiente Lema es otra propiedad que tienen las clases A_p, necesaria para probar otro resultado muy importante (ver [Gra04, pág 685]):

Lema 2.1.2. *Sea* $w \in A_p$ *para algún* $1 \leq p < \infty$ *y sea* $0 < \alpha < 1$*. Entonces existe* $\beta < 1$ *tal que para cualquier subconjunto medible* S *de un cubo* Q *que satisface* $|S| \leq \alpha|Q|$ *se tiene que* $w(S) \leq \beta w(Q)$*.*

La siguiente propiedad, debida a Coifman y Fefferman [CF74], es uno de los clásicos resultados de la teoría de pesos:

Teorema (Desigualdad Reverse Hölder). *Sea* $w \in A_p$ *para algún* $1 \leq p < \infty$*. Entonces existen constantes* C *y* $\gamma > 0$ *que dependen de la dimensión* n*, de* p*, y de* $[w]_{A_p}$ *tal que para todo cubo* Q *tenemos*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(t)^{1+\gamma}dt\right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q w(t)dt. \tag{2.1.4}$$

2.1.2. Clase A_∞ de Muckenhoupt

Como las clases A_p son crecientes con respecto a p resulta natural considerar su límite cuando $p \to \infty$, de este modo surge la definición de la la clase A_∞ como:

$$A_\infty := \bigcup_{p\geq 1} A_p.$$

Recordemos la siguiente consecuencia de la desigualdad de Jensen:

$$exp\left(\int_X \log|h(t)|d\mu(t)\right) \leq \left(\int_X |h(t)|^q d\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.1.5}$$

que se mantiene para toda función medible h en un espacio de probabilidad (X, μ) y para todo $0 < q < \infty$. Además, podemos probar que el límite de la expresión de la derecha de (2.1.5) cuando $q \to 0$ es igual a la expresión de la izquierda. Luego si tomamos $h = w^{-1}$ para algún $w \in A_p$ y $q = \frac{1}{p-1}$ en (2.1.5) obtenemos:

$$\frac{w(Q)}{|Q|} exp\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \log w(t)^{-1}dt\right) \leq \frac{w(Q)}{|Q|}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}dt\right)^{p-1}, \tag{2.1.6}$$

donde el límite de la expresión de la derecha cuando $p \to \infty$ es igual a la expresión de la izquierda. La clase A_∞ puede ser caracterizada por medio de una apropiada constante. De hecho, existen varias diferentes definiciones de esta constante, todas ellas son equivalentes en el sentido que definen la misma clase de pesos. La más clásica y conocida definición es la siguiente debida a Hruščev [Hr84] (ver también [G-CRdF85]):

Definición 2.1.3. *Decimos que un peso w está en la clase A_∞ si:*

$$[w]^{exp}_{A_\infty} := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(t)dt\right) exp\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \log w(t)^{-1}dt\right) < \infty, \tag{2.1.7}$$

donde $[w]^{exp}_{A_\infty}$ la denominamos la constante A_∞ exponencial de w, pués más adelante consideraremos una constante diferente de pesos en A_∞ que es la más utilizada en la actualidad.

Sigue de la definición previa y de (2.1.6) que para todo $1 \leq p < \infty$

$$[w]^{exp}_{A_\infty} \leq [w]_{A_p}.$$

A continuación presentamos algunas caracterizaciones de la clase A_∞(ver [Gra04, Cap.9]).

Teorema 2.1.1. *Sea w un peso. Entonces w está en la clase A_∞ si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

a) Existen $0 < \gamma, \delta < 1$ tales que para todo cubo Q en $\mathbb{R}^n$ se tiene:

$$\left|\left\{x \in Q : w(x) \leq \gamma\frac{w(Q)}{|Q|}\right\}\right| \leq \delta|Q|.$$

b) Existen $0 < \alpha, \beta < 1$ tales que para todo cubo Q en $\mathbb{R}^n$ y todo subconjunto medible A de Q se verifica:

$$|A| \leq \alpha|Q| \Longrightarrow w(A) \leq \beta w(Q).$$

c) La condición Reverse Hölder se mantiene para w, esto es, existen $0 < C_1, \epsilon < \infty$ tal que para todo cubo Q

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(t)^{1+\epsilon}dt\right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \leq \frac{C_1}{|Q|}\int_Q w(t)dt. \tag{2.1.8}$$

d) Existen constantes $0 < C_2, \epsilon_0 < \infty$ tal que para todo cubo Q y todo subconjunto medible A de Q se tiene

$$\frac{w(A)}{w(Q)} \leq C_2\left(\frac{|A|}{|Q|}\right)^{\epsilon_0}. \tag{2.1.9}$$

e) Existen constantes $0 < \alpha', \beta' < 1$ tales que para todo cubo Q y todo subconjunto medible A de Q se verifica

$$w(A) < \alpha' w(Q) \Longrightarrow |A| < \beta'|Q|.$$

f) Existe $c > 0$ tal que para todo cubo Q y para todo $r \geq 1$

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(t)dt \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(t)^{1/r}dt\right)^r.$$

g) Existen p tal que $w \in A_p$.

En nuestra tesis utilizaremos otra constante A_∞ más chica que la de la definición (2.1.7), que fue utilizada por Hytönen y Pérez en [HP13], y que originalmente fue introducida por Fujii en [Fuj78] y más tarde redescubierta por Wilson en [Wil87], definida de la siguiente manera:

$$[w]_{A_\infty} := \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q M(\chi_Q w)(x)dx,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos con lados paralelos a los ejes coordenados. Cuando el supremo es finito decimos que el peso w pertenece a la clase A_∞.
Hytönen y Pérez en [HP13] establecieron una estimación sharp de la *desigualdad Reverse Hölder*:

Lema 2.1.3. ***(Desigualdad Reverse Hölder sharp)*** *Si w está en la clase A_∞ y si Q es un cubo entonces:*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(t)^{1+\epsilon}dt\right) \leq 2\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(t)dt\right)^{1+\epsilon},$$

para cualquier $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2^{n+1}[w]_{A_\infty}-1}$.

Algunos corolarios de la desigualdad Reverse Hölder

El siguiente resultado establece una versión cuantitativa de (2.1.9) y fue establecido en [I-FR-R17].

Lema 2.1.4. *Existe c_n tal que para todo $w \in A_\infty$, para todo cubo Q y para todo subconjunto $E \subset Q$ se verifica*

$$\frac{w(E)}{w(Q)} \leq C_2 \left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\frac{1}{c_n[w]_{A_\infty}}}. \tag{2.1.10}$$

Demostración: Sea $s = 1 + \frac{1}{c_n[w]_{A_\infty}}$. Aplicando la *desigualdad de Hölder* resulta:

$$w(E) = \int_Q w\chi_E = |Q|.\frac{1}{|Q|}\int_Q w\chi_E \leq |Q| \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^s\right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \chi_E^{s'}\right)^{\frac{1}{s'}}$$

ahora si aplicamos la *desigualdad Reverse Hölder*, la última desigualdad nos queda

$$\leq 2|Q|\frac{w(Q)}{|Q|}\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\frac{1}{s'}} \leq 2w(Q)\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\frac{1}{s'}}.$$

Es decir,

$$w(E) \leq 2w(Q)\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\frac{1}{s'}}.$$

Luego, el lema queda probado ya que $s' \simeq c_n[w]_{A_\infty}$. □

El siguiente resultado fue establecido en [I-FR-R17].

Lema 2.1.5. *Sea $b \in BMO$ y $w \in A_\infty$. Entonces*

$$\|b - b_Q\|_{\exp L(w),Q} \leq c_n[w]_{A_\infty}\|b\|_{BMO}. \tag{2.1.11}$$

Además, si $j > 0$ entonces

$$\||b - b_Q|^j\|_{\exp L^{1/j}(w),Q} \leq c_{n,j}[w]_{A_\infty}^j\|b\|_{BMO}^j.$$

Demostración: Recordemos que

$$\|f\|_{\exp L(w),Q} = \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{w(Q)}\int_Q \exp\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) - 1dw < 1\right\}.$$

Observemos que probar la desigualdad (2.1.11) es equivalente a probar

$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q \exp\left(\frac{|b(x) - b_Q|}{c_n[w]_{A_\infty}\|b\|_{BMO}}\right) - 1dw < 1, \tag{2.1.12}$$

para algún c_n independiente de w, b y Q.
Usando el Lema 2.1.4 y el Teorema 1.4.1 obtenemos:

$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q \exp\left(\frac{|b(x) - b_Q|}{\lambda}\right) - 1dw = \frac{1}{w(Q)}\int_0^\infty e^t w\left(\left\{x \in Q : |b(x) - b_Q| > \lambda t\right\}\right) dt$$

$$\leq \frac{2}{w(Q)}\int_0^\infty e^t \left(\frac{\left|\left\{x \in Q : |b(x) - b_Q| > \lambda t\right\}\right|}{|Q|}\right)^{\frac{1}{c_n[w]_{A_\infty}}} w(Q)dt$$

$$\leq 2e\int_0^\infty e^t e^{-\frac{t\lambda}{c_n[w]_{A_\infty}\|b\|_{BMO}2^n e}} dt,$$

eligiendo $\lambda = \alpha c_n[w]_{A_\infty}\|b\|_{BMO}2^n e$ resulta

$$2e\int_0^\infty e^t e^{-\frac{t\lambda}{c_n[w]_{A_\infty}\|b\|_{BMO}2^n e}}dt = 2e\int_Q e^{t(1-\alpha)}dt,$$

luego para que la identidad anterior resulte menor que 1 sólo basta elegir cualquier valor de $\alpha < 1$. Finalizamos la demostración del lema observando que:

$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q \exp\left(\frac{|f(x)|^j}{\lambda}\right)^{\frac{1}{j}} - 1dw = \frac{1}{w(Q)}\int_Q \exp\left(\frac{|f(x)|}{\lambda^{\frac{1}{j}}}\right).$$

En consecuencia,

$$\||b-b_Q|^j\|_{\exp L^{1/j}(w),Q} = \|b-b_Q\|^j_{\exp L(w),Q}.$$

□

Luego, como $Osc_{\exp L^r} \subsetneq BMO$ no resulta difícil de probar el siguiente resultado:

Lema 2.1.6. *Sea $b \in Osc_{\exp L^r}$ y $w \in A_\infty$. Entonces*

$$\|b-b_Q\|_{\exp L^r(w),Q} \leq c_n[w]_{A_\infty}^{\frac{1}{r}}\|b\|_{Osc_{\exp L^r}}. \tag{2.1.13}$$

Además, si $j > 0$ entonces

$$\||b-b_Q|^j\|_{\exp L^{r/j}(w),Q} \leq c_{n,j}[w]_{A_\infty}^{\frac{j}{r}}\|b\|^j_{Osc_{\exp L^r}}.$$

Definición 2.1.4. ***Pesos*** RH_s ***y*** RH_∞
Decimos que un peso w esta en RH_s si verifica la desigualdad Reverse Hölder (2.1.8) *con exponente $s > 1$ y notamos como $[w]_{RH_s}$ a la mejor constante posible. Decimos que w esta en la clase RH_∞ si verifica:*

$$\frac{C}{|Q|}\int_Q w(x)dx \geq \sup es_Q w(x).$$

Observemos que $RH_\infty \subseteq RH_s \subseteq RH_q$, para todo $1 < q < s$. En [C-UN95] podemos encontrar más información sobre este tipo de pesos.
Vamos a dar una definición equivalente de las clases RH_∞, para ello en primer lugar, definimos la función minimal de f, $\mathcal{M}f$, para una función localmente integrable como:

$$\mathcal{M}f(x) = \inf_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f|dy, \tag{2.1.14}$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los cubos Q con lados paralelos a los ejes coordenados que contienen a x. Es inmediato de la definición que $\mathcal{M}f$ es una función localmente integrable, y por el *Teorema de Diferenciación de Lebesgue* resulta $\mathcal{M}f(x) \leq |f(x)|$ en casi todo punto.

Proposición 2.1.2. *Si un peso w esta en la clase RH_∞ entonces existe una constante C tal que:*

$$w(x) \leq C\mathcal{M}w(x),$$

en casi todo punto x.

2.1.3. Las clases $A_p(\mu)$

Más adelante será necesario considerar las clases A_p cambiando la medida de Lebesgue por una medida duplicante. Vamos a hacer un repaso de las principales definiciones y resultados conocidos para las clases $A_p(\mu)$.

Definición 2.1.5. *Para $1 < p < \infty$ decimos que un peso w está en la clase $A_p(\mu)$ si para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ se verifica:*

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)d\mu\right)\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}d\mu\right)^{p-1} \leq C.$$

A la mejor constante C posible la notamos como $[w]_{A_p(\mu)}$. Decimos que $w \in A_1(\mu)$ si $M_\mu w(x) \leq Cw(x)$, donde M_μ es el operador maximal de Hardy-Littlewood con respecto a μ definido en (1.6.4) *como:*

$$M_\mu f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f(y)|d\mu(y).$$

En este caso

$$[w]_{A_1(\mu)} = \left\|\frac{M_\mu w}{w}\right\|_{L^\infty}.$$

Definición 2.1.6. *Definimos la clase $A_\infty(\mu)$ como:*

$$A_\infty(\mu) := \bigcup_{p\geq 1} A_p(\mu).$$

Observemos que si μ es una medida duplicante, entonces M_μ es un operador acotado en $L^p(wd\mu)$, con $1 < p < \infty$, si y sólo si $w \in A_p(\mu)$.
Los siguientes lemas dan propiedades específicas de los pesos A_p y $A_p(\mu)$ que fueron establecidas por Cruz-Uribe, Martell y Pérez en [C-UMP11] y cuyas demostraciones las incluímos en esta tesis.

Lema 2.1.7. *Si $u \in A_1$ y $v \in A_\infty(u)$ entonces $uv \in A_\infty$. En particular, si $v \in A_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, entonces $uv \in A_p$.*

Demostración: Fijamos un cubo Q. Como $u \in A_1$ entonces en casi todo punto $x \in Q$ se tiene:

$$u_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q u(y)dy \leq [u]_{A_1}u(x).$$

Por lo tanto, si $p>1$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)v(x)dx\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (u(x)v(x))^{1-p'}dx\right)^{p-1}\\
&=\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)v(x)dx\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)^{1-p'}u(x)u(x)^{-p'}dx\right)^{p-1}\\
&\leq\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)v(x)dx\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)^{1-p'}u(x)dx.\,u_Q^{-p'}[u]_{A_1}^{p'}\right)^{p-1}\\
&=\frac{[u]_{A_1}^p}{|Q|}\int_Q u(x)v(x)dx\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)^{1-p'}u(x)dx.\left(\frac{|Q|}{u(Q)}\right)^{p'}\right)^{p-1}\\
&=\frac{[u]_{A_1}^p}{u(Q)}\int_Q v(x)u(x)dx\left(\frac{1}{u(Q)}\int_Q v(x)^{1-p'}u(x)dx\right)^{p-1}\\
&\leq[u]_{A_1}^p[v]_{A_p(u)}.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, $uv\in A_p$. Cuando $p=1$ la demostración es directa. □

Observación 2.1.1. *Si $u\in A_1$, entonces $v\in A_\infty(u)$ si y sólo si $uv\in A_\infty$ (ver [Gra08]).*

Lema 2.1.8. *Si $u\in A_1$ y $v\in A_p$, con $1\leq p<\infty$, entonces existe $0<\epsilon_0<1$ que depende solo de la constante $[u]_{A_1}$ tal que $uv^\epsilon\in A_p$ para todo $0<\epsilon<\epsilon_0$.*

Demostración: Como $u\in A_1$, $u\in RH_s$, para algún $s>1$ que depende de $[u]_{A_1}$.
Sea $\epsilon_0=1/s'$ y $0<\epsilon<\epsilon_0$. Esto implica que $u\in RH_s$ con $s=(1/\epsilon)'$.
En primer lugar vamos a considerar el caso en que $v\in A_1$. Entonces como $u,v\in A_1$, para cualquier cubo Q y en casi todo punto $x\in Q$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q u(y)v(y)^\epsilon dy &\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q u(y)^s dy\right)^{1/s}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v(y)dy\right)^{1/s'}\\
&\leq [u]_{RH_s}\frac{1}{|Q|}\int_Q u(y)dy\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v(y)dy\right)^{1/s'}\\
&\leq [u]_{RH_s}[u]_{A_1}[v]_{A_1}^\epsilon u(x)v(x)^\epsilon.
\end{aligned}
$$

En consecuencia $uv^\epsilon\in A_1$ con $[uv^\epsilon]_{A_1}\leq[u]_{RH_s}[u]_{A_1}[v]_{A_1}^\epsilon$.

Si $v\in A_p$, $1<p<\infty$, entonces para cualquier cubo Q,

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)v(x)^\epsilon dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (u(x)v(x)^\epsilon)^{1-p'}dx\right)^{p-1}\\
&\leq\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)^s dx\right)^{1/s}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)dx\right)^{1/s'}\\
&\times\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)^{s(1-p')}dx\right)^{\frac{p-1}{s}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)^{1-p'}dx\right)^{\frac{p-1}{s'}}\leq [u]_{RH_s}[u]_{A_1}[v]_{A_p}^\epsilon.
\end{aligned}
$$

En consecuencia $uv^\epsilon\in A_p$ con $[uv^\epsilon]_{A_p}\leq[u]_{RH_s}[u]_{A_1}[v]_{A_1}^\epsilon$ □

Lema 2.1.9. *Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1) Si $w \in A_1$ *entonces* $w^{1-p} \in RH_\infty$.

2) $w \in A_\infty$ *si y sólo si* $w = w_1 w_2$, *donde* $w_1 \in A_1$ *y* $w_2 \in RH_\infty$.

3) Si $u, v \in RH_\infty$ *entonces* $uv \in RH_\infty$.

Demostración:
Para la prueba de este lema seguimos el trabajo de D. Cruz-Uribe y C. Neugebauer en [C-UN95].

1) Si $w \in A_1$ entonces $w \in A_p, \forall\, p > 1$, pues las clases A_p son crecientes. Para probar que $w^{1-p} \in RH_\infty$, veamos en primer lugar que si $w \in A_p$ entonces existe una constante C tal que

$$1 \leq Mw\mathcal{M}(w^{1-p})^{p'-1} \leq C, \tag{2.1.15}$$

donde M es el operador maximal de Hardy-Littlewood y $\mathcal{M}$ es el operador minimal definido en (2.1.14). Fijamos x y sea Q cualquier cubo que lo contiene. Si $w \in A_1$ entonces $w \in A_{p'}$; por la dualidad de pesos $w \in A_p$, $w^{1-p} \in A_p$, en consecuencia, existe una constante C tal que

$$\left(w_Q^{1-p}\right)^{1-p'} \leq w_Q \leq C\left(w_Q^{1-p}\right)^{1-p'}.$$

Tomando supremo sobre todos los cubos que contienen a x y teniendo en cuenta que $\sup\left(w_Q^{1-p}\right)^{1-p'} = (\text{ínf}\, w_Q^{1-p})^{1-p'}$ resulta:

$$\mathcal{M}(w^{1-p})^{1-p'} \leq Mw \leq C\mathcal{M}(w^{1-p})^{1-p'},$$

lo que prueba la desigualdad 2.1.15. Ahora continuando con la prueba del lema, a partir de la desigualdad 2.1.15 y teniendo en cuenta que $w \in A_1$ resulta:

$$1 \leq Mw\mathcal{M}(w^{1-p})^{p'-1} \leq Cw(x)\mathcal{M}(w^{1-p})^{p'-1}.$$

Reordenando esta última desigualdad obtenemos:

$$w(x)^{1-p} \leq C\mathcal{M}(w^{1-p})(x),$$

entonces $w^{1-p} \in RH_\infty$.

2) Supongamos que $w \in A_\infty$ entonces $w \in A_p$, para algún $p > 1$. Por el *Teorema de Factorización para las clases* A_p existen $w_1, u \in A_1$ tales que $w = w_1 u^{1-p}$. Como $u \in A_1$ entonces por la parte *1)* del lema $w_2 = u^{1-p} \in RH_\infty$. Luego, $w = w_1 w_2$ con $w_1 \in A_1$ y $w_2 \in RH_\infty$.
Recíprocamente, supongamos que $w = w_1 w_2$, donde $w_1 \in A_1$ y $w_2 \in RH_\infty$ y probemos que $w \in A_\infty$, esto es, $w \in A_p$, para algún $p > 1$. Nuevamente aplicando el *Teorema de Factorización para las clases* A_p como $w_1 \in A_1$ basta ver que $w_2 = v^{1-p}$, con $v \in A_1$, o equivalentemente, $w_2^{\frac{1}{1-p}} \in A_1$. Observemos que vale la siguiente desigualdad (similar a (2.1.15))

$$1 \leq \mathcal{M}wM(w^{1-p'})^{p-1} \leq C.$$

Luego
$$M(w_2^{1-p'})(x) \leq C\mathcal{M}w_2(x)^{1-p'} \leq Cw_2(x)^{1-p'},$$
es decir $w_2^{1-p'} \in A_1$.

3) Supongamos que $u, v \in RH_\infty$ y probemos que $uv \in RH_\infty$, esto es, veamos que existe una constante C tal que $(uv)(x) \leq C\mathcal{M}(uv)(x)$ en casi todo punto x. Como $u, v \in RH_\infty$ entonces existen constantes C_1 y C_2 tales que $u(x) \leq C_1\mathcal{M}u(x)$ y $v(x) \leq C_2\mathcal{M}v(x)$. Luego, teniendo en cuenta la propiedad del producto de los ínfimos de funciones resulta:
$$(uv)(x) \leq C_1C_2\mathcal{M}(u)(x)\mathcal{M}(v)(x) \leq C\mathcal{M}(uv)(x).$$
Luego $uv \in RH_\infty$. □

Lema 2.1.10. *Si $u \in A_1$ y $uv \in A_\infty$ entonces $v \in A_\infty$.*

Demostración: Para la prueba de este lema utilizamos el lema 2.1.9. Como $uv \in A_\infty$, usando *2)* del lema 2.1.9, resulta que $uv = w_1w_2$, donde $w_1 \in A_1$ y $w_2 \in RH_\infty$. Como $u \in A_1$ entonces usando *1)* resulta $u^{-1} \in RH_\infty$ y por *3)* tenemos $w_2u^{-1} \in RH_\infty$. Luego, de esto último y como $w_1 \in A_1$ resulta, otra vez usando *2)*, que $v = w_1(w_2u^{-1}) \in A_\infty$. □

2.2. Estimaciones cuantitativas en términos de constantes A_p

En la última década, con una amplia variedad de trabajos dedicados al estudio de estimaciones de operadores en los espacios con pesos $L^p(w)$ y $L^{p,\infty}(w)$, ha surgido un gran interés por las llamadas estimaciones cuantitativas, es decir, estimaciones en las que se establece de forma cuantitativa la dependencia explícita óptima (sharp), de la cota de la norma del operador en términos de la constante A_1, ó de la constante A_p, ó bien, de constantes mixtas que involucran la constante A_∞.

En los comienzos de los años 90, Buckley [Bu90], en su tesis doctoral, estableció la siguiente estimación para el operador maximal de Hardy-Littlewood:

Teorema 2.2.1. *Si $w \in A_p$ y $1 < p < \infty$ entonces*
$$\|Mf\|_{L^p(w)} \leq c_{n,p}[w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}\|f\|_{L^p(w)}. \tag{2.2.1}$$

En el caso $p = 1$, C. Fefferman y E. M. Stein en [FS71] establecieron la siguiente desigualdad: Dado un peso w cualquiera, se tiene
$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_n\|f\|_{L^1(Mw)}.$$
De esto último, si $w \in A_1$ sigue que:
$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_n[w]_{A_1}\|f\|_{L^1(w)}.$$

Un problema que despertó mucho interés fue determinar la precisa dependencia de la norma en $L^2(w)$ de un operador de Calderón-Zygmund sobre la constante $[w]_{A_2}$, el siguiente resultado conocido como la ***Conjetura*** A_2 establece:
Si T es un operador de Calderón-Zygmund acotado en L^2 y $w \in A_2$ entonces

$$\|T\|_{L^2(w)} \leq c(n,T)[w]_{A_2}. \tag{2.2.2}$$

Esta última desigualdad fue probada para los siguientes operadores, sólo citamos algunas de la amplia lista de respuestas importantes a este resultado:

- La transformada de Beurling (S. Petermich y A. Volberg [PV02], 2002).
- La transformada de Hilbert (S. Petermich [Pe07], 2007).
- La transformada de Riesz (S. Petermich [Pe08], 2008).
- Paraproducto diádico (O. Beznosova [Be08], 2008).
- Haar shift (M. Lacey, S. Petermich y M. Reguera [LPR10], 2010).

Los siguientes resultados fueron establecidos en un lapso de tiempo muy corto durante el año 2010:

- Una demostración simplificada para Haar shifts (D. Cruz-Uribe, J. Martell y C. Pérez [C-UMP10, C-UMP12], 2010)
- La cota $L^2(w)$ para T general por $[w]_{A_2}\ln(1+[w]_{A_2})$ (C. Pérez, S. Treil y A. Volberg [PTV10], 2010).

Finalmente, la *Conjetura* A_2 fue completamente resuelta por T. Hytönen en [Hyt12] en el año 2012.
Todas las demostraciones de (2.2.2) se basaron en la representación de T en términos de operadores Haar shift $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}^{m,k}$, de este modo, mostraron (2.2.2) para $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}^{m,k}$ en lugar de T.

2.3. Dominación sparse

En esta sección presentaremos definiciones y resultados conocidos de dominación *sparse* que utilizaremos en los Capítulos 4 y 5 de esta tesis. La dominación por *operadores sparse* ha cobrado mucha importancia en los últimos años y ha sido ampliamente aplicada a la teoría de pesos. Los *operadores sparse* son operadores positivos de una estructura muy simple que tienen la propiedad de controlar puntualmente a ciertos operadores clásicos del Análisis Armónico, en particular, a los operadores de Calderón-Zygmund. Tienen la ventaja de que a partir de ellos fácilmente se obtienen estimaciones con peso cuantitativas en términos de constantes de Muckenhoupt y de cotas óptimas proporcionadas por la desigualdad Reverse Hölder.

2.3.1. Familias sparse

Dado un cubo $Q \in \mathbb{R}^n$ denotamos como $\mathcal{D}(Q)$ al conjunto de todos los cubos diádicos con respecto a Q, es decir, los cubos obtenidos por repetidas subdivisiones de Q y cada uno de sus descendientes en 2^n subcubos congruentes. Los cubos pertenecientes a $\mathcal{D}(Q)$ tienen varias propiedades entre las más importantes podemos citar (ver [LN14]):

(i) Para cada $k = 0, 1, 2, \cdots$, los cubos en la k-ésima generación $\mathcal{D}_k(Q)$ tienen la misma longitud de lado $2^{-k} l_Q$ y embaldosan Q en forma regular.

(ii) Cada $Q' \in \mathcal{D}_k(Q)$ contiene 2^n hijos en $\mathcal{D}_{k+1}(Q)$ y tiene un único padre en $\mathcal{D}_{k-1}(Q)$ que lo contiene.

(iii) Para todo par de cubos $Q', Q'' \in \mathcal{D}(Q)$ se verifica que $Q' \cap Q'' = \emptyset$, o $Q' \subset Q''$, o bien $Q'' \subset Q'$.

(iv) Si $Q' \in \mathcal{D}(Q)$ entonces $\mathcal{D}(Q') \subset \mathcal{D}(Q)$.

En la Figura 2.1 podemos ver 4 generaciones $\mathcal{D}_k(Q)$.

Un reticulado diádico $\mathcal{D}$ en $\mathbb{R}^n$ es cualquier colección de cubos con las siguientes propiedades:

(1) Si $Q \in \mathcal{D}$ entonces $\mathcal{D}(Q) \subset \mathcal{D}$ (cada hijo de Q también está en $\mathcal{D}$).

(2) Si $Q', Q'' \in \mathcal{D}$ entonces existe $Q \in \mathcal{D}$ tal que $Q', Q'' \in \mathcal{D}(Q)$ (es decir, Q', Q'' tienen un padre en común).

(3) Para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ existe un cubo $Q \in \mathcal{D}$ tal que $K \subset Q$.

En muchas situaciones resulta útil aproximar cubos arbitrarios por cubos diádicos. Para tal propósito, un reticulado diádico no es suficiente, sin embargo 3^n si lo son.

Teorema de los Tres Reticulados (Lerner-Nazarov). *Para todo reticulado diádico $\mathcal{D}$ existen 3^n reticulados $\mathcal{D}_j$ tal que:*

$$\{3Q \,:\, Q \in \mathcal{D}\} = \bigcup_{j=1}^{3^n} \mathcal{D}_j$$

y para todo cubo $Q \in \mathcal{D}$ y $j = 1, 2 \cdots, 3^n$, existe un único cubo $R \in \mathcal{D}_j$ de longitud de lado $l_R = 3l_Q$ que contiene a Q.

Observación 2.3.1. *Si fijamos un reticulado diádico $\mathcal{D}$ y consideramos un cubo arbitrario $Q \subset \mathbb{R}^n$ entonces existe un cubo $Q' \in \mathcal{D}$ tal que $l_Q/2 < l_{Q'} \leq l_Q$ y $Q \subset 3Q'$. Por el último teorema existe $j = 1, 2, \cdots, 3^n$ tal que $3Q' = P \in \mathcal{D}_j$. Por lo tanto, para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ existe $P \in \mathcal{D}_j$, $j = 1, 2, \cdots, 3^n$, tal que $Q \subset P$ y $l_P \leq 3l_Q$.*

Definición 2.3.1. *Decimos que una familia $\mathcal{S}$ contenida en un reticulado diádico $\mathcal{D}$ es una familia η-**sparse**, $0 < \eta < 1$, si para cada $Q \in \mathcal{S}$ existe un conjunto E_Q tal que:*

i) $\eta|Q| \leq |E_Q|$.

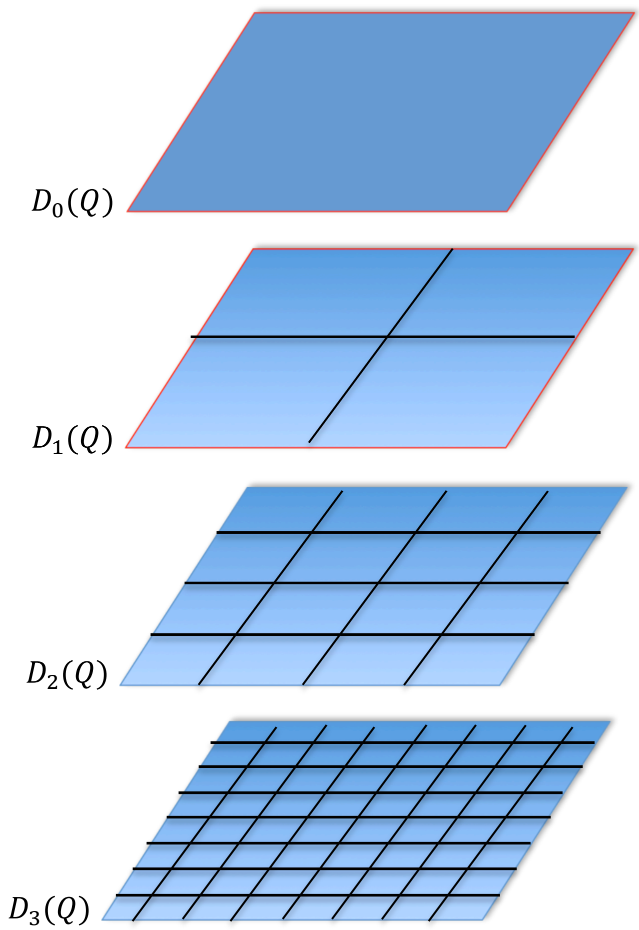

Figura 2.1: Cuatro generaciones en el reticulado diádico $\mathcal{D}(Q)$

ii) Los conjuntos $\{E_Q\}_{Q\in\mathcal{S}}$ son disjuntos de a pares.

Un ejemplo de una famila $\frac{1}{2}$-**sparse** es la familia de intervalos $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ con $I_k = [0, 2^{-k}]$. En este caso basta con tomar $E_k = I_k \setminus I_{k+1}$.

Definición 2.3.2. *Sea $\tau > 1$ y $\mathcal{D}$ un reticulado diádico. Una familia de cubos $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ se dice τ-**Carleson** si para todo cubo $Q \in \mathcal{D}$ tenemos*

$$\sum_{P\subset\mathcal{S}, P\subseteq Q} |P| \leq \tau|Q|.$$

Observación 2.3.2. *En la definición de familia τ-**Carleson** se toman todos los cubos contenidos en Q, incluyendo a Q. Por lo tanto siempre que tengamos una familia τ-Carleson si consideramos la suma de las medidas de todos los cubos de la familia incluídos estrictamente en un cubo dado Q, tendremos que*

$$\sum_{P\subset\mathcal{S}, P\subsetneq Q} |P| \leq (\tau - 1)|Q|.$$

La siguiente Proposición se encuentra en el trabajo de Lerner y Nazarov (ver [LN14, Lema 6.3]).

Proposición 2.3.1. *Toda familia de cubos η-sparse, $0 < \eta < 1$, es $\frac{1}{\eta}$-Carleson, y viceversa.*

Definición 2.3.3. ***Operadores sparse:*** *Sea $\mathcal{D}$ un reticulado diádico y $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ una familia sparse. El operador sparse es definido como:*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}} f(x) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} f_Q \chi_Q(x),$$

donde $f_Q = \frac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q f$.

2.3.2. Principales resultados de dominación sparse

La dominación de operadores de Calderón-Zygmund por *operadores sparse* fue establecida en primer lugar por A. Lerner en [L13] en términos de X-normas, donde X es un espacio de funciones Banach arbitrario, con el fin de dar una prueba alternativa del *Teorema A_2* resuelto por T. Hytönen en [Hyt12]. En ese trabajo, Lerner probó la estimación para una clase de operadores *ω-Calderón-Zygmund*, definidos en la Sección (1.6.1.2) de esta tesis, con módulo de continuidad ω que satisface la condición Dini logarítmica:

$$\int_0^1 \omega(t) \log\frac{1}{t}\frac{dt}{t} < \infty.$$

Más tarde, bajo la misma suposición sobre ω, la cota de la X-norma fue mejorada por una estimación puntual, independientemente y simultáneamente por J. Conde-Alonso y G. Rey en [C-AR16] y por A. Lerner y F. Nazarov en [LN14]. Luego, M. Lacey en [Lac17] encontró un nuevo método que le permitió relajar la condición log-*Dini* en la cota puntual por la clásica *condición Dini*:

$$\int_0^1 \omega(t)\frac{dt}{t} < \infty.$$

T. Hytönen, L. Roncal and O. Tapiola en [HRT17] obtuvieron una precisa dependencia lineal en la *constante de Dini* con aplicación a integrales singulares *rough*. También en [BM17, BFP16, C-ACD-PO17, L16] encontramos varios principios de *dominación sparse*, entre ellos citamos el de Lerner en [L16] quien obtuvo para el operador maximal truncado definido para un operador sublineal T por:

$$\mathcal{M}_T f(x) = \sup_{Q \ni x} \|T(f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus 3Q})\|_{L^\infty(Q)},$$

el siguiente principio:

Teorema (Lerner). *Si T es operador sublineal de tipo débil (q,q) y $\mathcal{M}_T$ es de tipo débil (r,r), donde $1 \leq q \leq r < \infty$. Entonces, para toda $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto, existe una familia sparse $\mathcal{S}$ tal que*

$$|Tf(x)| \leq C \sum_{Q \in \mathcal{S}} \langle f \rangle_{q,Q} \, \chi_Q(x),$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ en c.t.p., donde $\langle f \rangle_{q,Q}^q = \frac{1}{|Q|} \int_Q |f|^q$ y $C = C_{n,q,r}(\|T\|_{L^q \to L^{q,\infty}} + \|\mathcal{M}_T\|_{L^r \to L^{r,\infty}})$.

Posteriormente, Lerner en un trabajo conjunto con Ombrosi en [LO19] mejoran el principio al imponer condiciones más débiles en las hipótesis.
En lugar del tipo débil (q,q) de T suponen una propiedad más débil a la que llaman la propiedad $\mathbb{W}_{T,q}$:
Existe una función $\psi_{T,q}(\lambda)$, $0 < \lambda < 1$, no creciente, tal que para todo cubo Q y para toda $f \in L^q(Q)$

$$|\{x \in Q : |T(f\chi_Q)(x)| > \psi_{T,q}(\lambda) \, \langle f \rangle_{q,Q}\} \leq \lambda |Q|.$$

Si T es un operador del tipo débil (q,q) entonces la propiedad $\mathbb{W}_{T,q}$ se mantiene con $\psi_{T,q}(\lambda) = \|T\|_{L^q \to L^{q,\infty}} \lambda^{-1/q}$.
En segundo lugar, reemplazan el operador $\mathcal{M}_T$ por el operador más flexible $\mathcal{M}^{\#}_{T,\alpha}$, definido para $\alpha > 0$ como:

$$\mathcal{M}^{\#}_{T,\alpha} = \sup_{Q \ni x} ess_{x',x'' \in Q} \sup |T(f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \alpha Q})(x') - T(f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus \alpha Q})(x")|.$$

Ellos establecieron el siguiente resultado:

Teorema (Lerner-Ombrosi). *Sea T un operador sublineal que satisface la condición $\mathbb{W}_T$ y tal que $\mathcal{M}^{\#}_{T,\alpha}$ es de tipo débil (r,r) para algún $\alpha \geq 3$, donde $1 \leq q, r < \infty$. Sea $s = \text{máx}(q,r)$. Entonces, para toda $f \in L^s(\mathbb{R}^n)$ existe una familia $\mathcal{S}$ $\frac{1}{2.\alpha^n}$-sparse tal que*

$$|Tf(x)| \leq C \sum_{Q \in \mathcal{S}} \langle f \rangle_{s,Q} \, \chi_Q(x),$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ en c.t.p., $C = C_{n,q,r}(\psi_{T,q}(1/2.(2\alpha)^n) + \|\mathcal{M}^{\#}_T\|_{L^r \to L^{r,\infty}})$.

J. M. Conde- Alonso, Culiuc, A, Di Plinio, F. y Ou, Y. probaron la dominación sparse en el caso de la Integrales singulares rough [C-ACD-PO17], más tarde Lerner en [L19] dió otra prueba.

En el siguiente Teorema resumiremos los resultados de *dominación sparse* como serán utilizados en esta tesis.

Teorema 2.3.1. *Sea $f \in \mathcal{C}_c^\infty$.*

1) *Si T es un operador de Calderón-Zygmund entonces existen 3^n familias ε-sparse contenidas en 3^n reticulados diádicos $\mathcal{D}_j$ tal que*

$$|Tf(x)| \leq c_{n,T,\varepsilon} \sum_{j=1}^{3^n} A_{\mathcal{S}}\left(|f|\right)(x)$$

donde $A_{\mathcal{S}}f(x) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy\chi_Q(x)$.

2) *Si $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ y T es el operador integral singular rough definido en (1.6.2) entonces existe una familia sparse $\mathcal{S}$ tal que*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} T_\Omega f g\right| \leq c_{n,\Omega} r' \Lambda_{\mathcal{S}}^r(f,g) \quad r > 1 \tag{2.3.1}$$

donde $f \in L^r$ y $g \in L^1_{loc}$

$$\Lambda_{\mathcal{S}}^r(f,g) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f| \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |g|^r\right)^{\frac{1}{r}} |Q|.$$

Observación 2.3.3. *Observemos que el Teorema de los Tres reticulados nos permite mostrar que para todo reticulado diádico $\mathcal{D}$,*

$$\Lambda_{\mathcal{S}}^r(f,g) \leq c_n \sum_{j=1}^{3^n} \Lambda_{\mathcal{S}_j}^r(f,g)$$

donde cada $\mathcal{S}_j \subset \mathcal{D}_j$ y la elección de los reticulados diádicos $\mathcal{D}_j$ es independiente de f, g.

Dominación sparse para el operador Conmutador

Para el caso del Conmutador de un operador de Calderón-Zygmund también se estableció el siguiente resultado de dominación sparse (ver [I-FR-R17, LOR-R17]):

Teorema 2.3.2. *Si T es un operador de Calderón-Zygmund y $b \in BMO$ entonces existen 3^n familias ε-sparse contenidas en 3^n reticulados diádicos $\mathcal{D}_j$ tales que*

$$\|T_b^m f(x)| \leq c_{n,T,\varepsilon} \sum_{j=1}^{3^n}\sum_{h=0}^{m} A_{\mathcal{S}}^{m,h}(b,f)(x)$$

donde $h = 0, \ldots, m$ y

$$A_{\mathcal{S}}^{m,h}(b,f)(x) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} |b(x) - b_Q|^{m-h} \frac{1}{|Q|}\int_Q |b - b_Q|^h f\chi_Q(x).$$

Capítulo 3

Un contraejemplo relacionado a estimaciones de tipo débil pesadas para integrales singulares

En el presente capítulo mostraremos que la transformada Hilbert no verifica la siguiente desigualdad de tipo débil pesada $(1,1)$:

$$\sup_{\lambda>0} \lambda w \{x \in R : |Hf(x)| > \lambda\} \leq c \int |f(x)| M_\phi w(x) dx, \qquad (3.0.1)$$

donde $M_\phi w$ es la función maximal asociada a la función de Young $\phi(t)$ definida en (1.6.7), para cualquier $\phi(t)$ de crecimiento más lento que $t \log\log(\mathrm{e}^{\mathrm{e}} + t)$. Nuestra demostración está basada en la construcción de M.C. Reguera and C. Thiele en [RT12], pero para poder aplicarla en nuestro contexto fue necesario encontrar un resultado de extrapolación (Teorema (3.3.2)) que será uno de los principales resultados de este capítulo. Todos los resultados de esta parte de la tesis se pueden encontrar en [CLO17].

3.1. Introducción y principales resultados

En el año 1971, C. Fefferman y E. M. Stein [FS71] mostraron que el operador maximal de Hardy-Littlewood M definido en (1.6.3) satisface la siguiente desigualdad de tipo débil $(1,1)$ con pesos:

$$w \{x \in R : |Mf(x)| > \lambda\} \leq \frac{c}{\lambda} \int |f(x)| Mw(x) dx, \ \lambda > 0. \qquad (3.1.1)$$

Es decir, la anterior desigualdad dice que el par de pesos (w, Mw) es un buen par de pesos para el tipo débil $(1,1)$ de la función maximal de Hardy-Littlewood. Precisamente en aquellos años se produjo el auge de la teoría de pesos con el célebre trabajo de Muckenhoupt [Muc72]. En particular, muchos de los resultados que valían para el operador maximal de Hardy-Littlewood también se pudieron probar para los operadores de Calderón-Zygmund, en particular para la transformada de Hilbert.

B. Muckenhoupt y R. Wheeden [MW77] analizaron reemplazar en el lado izquierdo de (3.1.1) el operador maximal M por un operador de Calderón-Zygmund. Su conjetura, conocida como la conjetura de Muckenhoupt y Wheeden establece:

Conjetura de Muckenhoupt y Wheeden: *Sea w un peso y M el operador maximal de Hardy-Littlewood.* Si T es un operador integral singular de Calderón-Zygmund entonces

$$\sup_{\lambda>0} \lambda w(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, Mw(x) dx. \tag{3.1.2}$$

La conjetura de Muckenhoupt-Wheeden significó el planteo de una suposición que generó, con el correr de los años, un sinfín de trabajos dedicados al estudio de desigualdades con pesos A_p y variantes de los mismos para diversos operadores.

Previo a la conjetura de *M-W*, Córdoba y Fefferman [CorF76] probaron un resultado más débil

$$w\{x \in R : |Tf(x)| > \lambda\} \leq \frac{c}{\lambda} \int |f(x)| \, M_\phi w(x) dx, \ \lambda > 0, \tag{3.1.3}$$

donde $M_\phi w = M_r w = M(|w|^r)^{1/r}$.

En 1994, C. Pérez [Pe94] mejoró el resultado de Córdoba y Fefferman al probar que la siguiente desigualdad (ver en [HP15] una diferente demostración):

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C_\epsilon}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, M_\phi w(x) dx, \ \lambda > 0, \tag{3.1.4}$$

se mantiene si T es un operador de *C-Z* y $\phi(t) = t \log^\epsilon(1+t)$, con $\epsilon > 0$.

C. Domingo-Salazar, M. T. Lacey y G. Rey [D-SLR16] obtuvieron un resultado que mejoró aún más el trabajo de C. Pérez, ellos establecieron que (3.1.3) se mantiene siempre que ϕ satisfaga:

$$\int_1^\infty \frac{\phi^{-1}(t)}{t^2 \log(\mathrm{e}+\mathrm{t})} dt < \infty.$$

Por ejemplo, podemos considerar $\phi(t) = t \log\log^\alpha(\mathrm{e}^\mathrm{e} + t), \alpha > 1$, ó también

$$\phi(t) = t \log\log(\mathrm{e}^\mathrm{e} + t) \log\log\log^\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^\mathrm{e}} + t) \quad (\alpha > 1).$$

M.C. Reguera and C. Thiele [RT12] dieron una respuesta negativa a la conjetura de *M-W* mostrando que la estimación (3.1.3) no es cierta cuando T es la transformada de Hilbert y $\phi(t) = t$. Previamente Reguera [R11] había mostrado que la conjetura era falsa para versiones diádicas; A. Criado y F. Soria [CS16] también probaron que es falsa para versiones multidimensionales. El ingrediente clave para la demostración en [RT12] fue la construcción de un peso ω para el cual resulta el lado izquierdo de la desigualdad (3.1.3) sustancialmente más grande que el lado derecho.
Denotamos $\psi(t) = t \log\log(\mathrm{e}^\mathrm{e} + t)$. T. Hytönen y C. Pérez en [HP15] conjeturaron que (3.1.3) se mantiene con $\phi = \psi$. Informalmente, el trabajo de Domingo-Salazar, Lacey y Rey en [D-SLR16], mencionado antes, estableció que el resultado (3.1.3) es positivo para

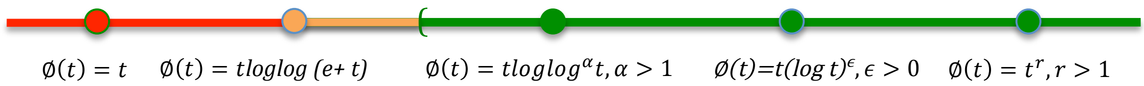

Figura 3.1: Comportamiento de las diferentes funciones de Young

toda ϕ que crece realmente más rápido que ψ. A continuación presentamos el principal resultado de este capítulo. El mismo en particular implica que (3.1.3) no puede valer para ninguna función ϕ que tienda a cero más lentamente que ψ.

Teorema 3.1.1. *Sea ϕ una función de Young function tal que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\phi(t)}{t\log\log(\mathrm{e}^{\mathrm{e}}+t)} = 0.$$

Entonces para toda $c > 0$ existe f, w y $\lambda > 0$ tal que

$$w\left\{x\in\mathbb{R} : |Hf(x)| > \lambda\right\} > \frac{c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f| M_{\phi} w\, dx. \tag{3.1.5}$$

Este teorema junto con el principal resultado en [D-SLR16] enfatiza que el caso $\phi = \psi$ y $T = H$ es crítico para (3.1.3). De todos modos, el problema acerca de que si (3.1.3) se mantiene para $T = H$ y $\phi = \psi$ aún es abierto.
En base a los resultados expuestos, podemos resumir la escala de las funciones de Young para las cuales se mantiene (3.1.3) en la Figura 3.1. El color rojo indica las funciones de Young ϕ que no verifican (3.1.3), el color naranja indica que aún no se conoce, mientras el color verde las que sí lo hacen.

Mencionamos a continuación las principales ideas del ejemplo de Reguera-Thiele. En [RT12] se muestra que dado $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existe un peso w_k con soporte en $[0, 1]$ que satisface $Hw_k \geq ckw_k$ y $Mw_k \leq cw_k$ en un subconjunto $E \subset [0, 1]$. En la Sección 3.2, mostramos que una de las claves para usar en nuestro contexto el resultado de Reguera-Thiele es que nosotros mejoramos la desigualdad $Mw_k \leq cw_k$ mostrando que en realidad para cada k existe $r_k > 1$ tal que $Mw_{r_k} \leq cw_k$. El segundo ingrediente en [RT12] fue el argumento de extrapolación de D. Cruz-Uribe and C. Pérez [C-UP00]. Este argumento dice que suponiendo (3.1.3) con Mw en el lado derecho, podemos deducir una desigualdad L^2 pesada para H. No tenemos en claro cómo extrapolar en forma similar, sin embargo, en la Sección 3.3 para resolver esa dificultad obtenemos un sustituto del resultado [C-UP00] para la función $M_r w, r > 1$, en lugar de Mw. Con todos estos ingredientes en la sección 3.4 damos una prueba completa de nuestro resultado.

3.2. La construcción de Reguera-Thiele

En esta sección describiremos las principales partes del ejemplo construído por M. C. Reguera y C. Thiele [RT12].

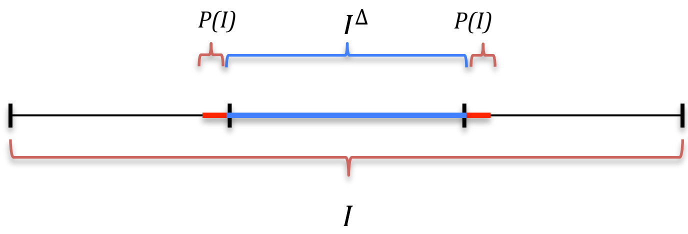

Figura 3.2: Representación de los intervalos triádicos del ejemplo de R-T

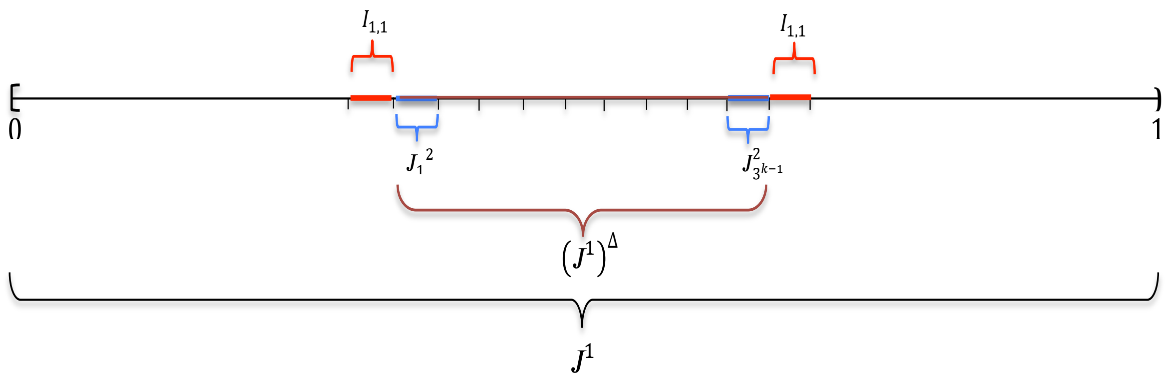

Figura 3.3: Representación de los intervalos J^1, $I_{1,1}$, $(J^1)^\Delta$, J_1^2 y $J^2_{3^{k-1}}$

Un intervalo I de la forma $[3^j n, 3^j(n+1)), j, n \in \mathbb{Z}$, es llamado un intervalo triádico. Fíjamos $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Dado un intervalo triádico $I \subset [0,1)$, denotamos $I^\Delta = \frac{1}{3}I$, es decir, I^Δ es el intervalo con el mismo centro que I y de longitud un tercio de la longitud de I. Además, denotamos como $P(I)$ al intervalo triádico adyacente a I^Δ y tal que $|P(I)| = \frac{1}{3^k}|I|$. Observemos que $P(I)$ puede ser ubicado tanto del lado izquierdo como del lado derecho de I^Δ, luego especificaremos su ubicación. En la Figura 3.2 podemos ver la representación de los intervalos que acabamos de describir.
Denotamos $J^1 = [0,1)$ y $I_{1,1} = P(J^1)$, luego $|I_{1,1}| = |P(J^1)| = \frac{1}{3^k}|J^1| = \frac{1}{3^k}$. El próximo paso que realizamos es subdividir $(J^1)^\Delta$ en 3^{k-1} intervalos triádicos de igual longitud, tales intervalos los denotaremos como J^2_m, $m = 1, 2, \ldots, 3^{k-1}$. En forma correspondiente, denotamos $I_{2,m} = P(J^2_m)$. Observemos que

$$|J^2_m| = \frac{1}{3^{k-1}}|(J^1)^\Delta| = \frac{1}{3^{k-1}}\frac{1}{3}|J^1| = \frac{1}{3^k} = |I_{1,1}|,$$

y $|I_{2,m}| = \frac{1}{3^k}|J^2_m| = \frac{1}{3^{2k}}$ para $m = 1, 2, .., 3^{k-1}$. Tengamos en cuenta que los intervalos $I_{1,1}$ y $I_{2,m}$ son disjuntos de a pares. En la Figura 3.3 están representados los intervalos J^1, $(J^1)^\Delta$, $I_{1,1}$, J^2_m para $m = 1, .., 3^{k-1}$.

Procediendo por inducción, en la etapa l-ésima subdividimos cada intervalo $(J^{l-1}_m)^\Delta$ en 3^{k-1} intervalos triádicos de igual longitud, y denotamos a todos los intervalos obtenidos como J^l_m, $m = 1, 2, \ldots, 3^{(k-1)(l-1)}$, es decir, en la etapa l-ésima tenemos $3^{(k-1)(l-1)}$

intervalos J^l. A continuación, denotamos $I_{l,m} = P(J^l_m)$. Luego

$$|J^l_m| = \frac{1}{3^{k-1}}|(J^{l-1}_m)^\Delta| = \frac{1}{3^{k-1}}\frac{1}{3}|J^{l-1}_m| = \frac{1}{3^{(l-1)k}} = |I_{l-1,m}|$$

y $|I_{l,m}| = \frac{1}{3^{lk}}$, y los intervalos $\{I_{l,m}\}$ son disjuntos de a pares.
Denotamos por $\mathcal{I}_l$ and $\mathcal{J}_l$ las familias de los intervalos $\{I_{l,m}\}$ and $\{J^l_m\}$ respectivamente, y llamamos $\Omega_l = \bigcup_{I\in\mathcal{I}_l} I$.
Definimos el peso w_k tal que $w_k([0,1]) = 1$, w_k es constante en Ω_l, y para todo $I \in \mathcal{I}_l$ y $J \in \mathcal{J}_{l+1}$,

$$w_k(I) = w_k(J), \tag{3.2.1}$$

(recordemos la notación $w_k(E) = \int_E w_k$).
En [RT12, Lema 2.1] se probó que se puede especificar la ubicación de los intervalos $\{I_{l,m}\}$ de tal manera que si $k > 3000$ y $x \in \bigcup_{l,m} I^\Delta_{l,m}$, entonces

$$|Hw_k(x)| \geq (k/3)w_k(x). \tag{3.2.2}$$

Además,

$$Mw_k(x) \leq 7w_k(x) \quad (x \in \bigcup_{l,m} I^\Delta_{l,m}), \tag{3.2.3}$$

independientemente de la ubicación precisa de $\{I_{l,m}\}$. Luego, mostraremos que la estimación (3.2.3) puede ser mejorada al reemplazar, en el lado izquierdo, el operador Mw_k por un operador más grande $M_r w_k$ con $r > 1$ que depende de k.

Será relevante para lo que sigue de este capítulo la siguiente representación que encontramos del peso w_k.

Lema 3.2.1.

$$w_k(x) = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^l \chi_{\Omega_l}(x). \tag{3.2.4}$$

Demostración: Supongamos que w_k es constante en Ω_l, es decir, $w_k(x) = \alpha_l \chi_{\Omega_l}(x)$. Sea $J \in \mathcal{J}_l$ y tomemos $I \in \mathcal{I}_l$ tal que $I \subset J$. Luego como $w_k(J)$ tiene soporte y está uniformemente distribuído en $I \cup J^\Delta$ (ver construcción del peso w de [RT12]) resulta:

$$w_k(J) = w_k(I) + w_k(J^\Delta). \tag{3.2.5}$$

El intervalo J^Δ es subdividido, en la próxima iteración, en 3^{k-1} subintervalos $J' \in \mathcal{J}_{l+1}$ entonces $w_k(J^\Delta) = \sum_{J'\in\mathcal{J}_{l+1}:J'\subset J^\Delta} w_k(J')$. Luego, reemplazando esto último en la ecuación (3.2.5) tenemos:

$$w_k(J) = w_k(I) + \sum_{J'\in\mathcal{J}_{l+1}:J'\subset J^\Delta} w_k(J'). \tag{3.2.6}$$

Sea $I' \in \mathcal{I}_{l-1}$ entonces por (3.2.1) como $J \in \mathcal{J}_l$ resulta:

$$w_k(J) = w_k(I') = \alpha_{l-1}|I'| = \alpha_{l-1}|J|.$$

En forma similar, $w_k(J') = \alpha_l|J'|$, y también $w_k(I) = \alpha_l|I| = \alpha_l\frac{|J|}{3^k}$. En consecuencia, (3.2.6) implica:

$$\alpha_{l-1}|J| = \alpha_l\frac{|J|}{3^k} + \alpha_l \sum_{J'\in\mathcal{J}_{l+1}:J'\subset J^\Delta} |J'| = \alpha_l\frac{|J|}{3^k} + \alpha_l\frac{|J|}{3},$$

es decir

$$\alpha_{l-1}|J| = \alpha_l\frac{|J|}{3^k} + \alpha_l\frac{|J|}{3} = \alpha_l\frac{1+3^{k-1}}{3^k}|J|.$$

Al despejar α_l de la última ecuación obtenemos $\alpha_l = \frac{3^k}{3^{k-1}+1}\alpha_{l-1}$. Repitiendo este proceso para $I'' \in \mathcal{I}_{l-2}$ obtenemos $\alpha_{l-1} = \frac{3^k}{3^{k-1}+1}\alpha_{l-2}$, luego $\alpha_l = \left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^2\alpha_{l-2}$; si continuamos repitiendo el proceso obtenemos

$$\alpha_l = \left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^l\gamma, \tag{3.2.7}$$

para algún $\gamma > 0$.

A partir de la condición $w_k([0,1]) = 1$ y utilizando (3.2.7) tenemos

$$\begin{aligned}
1 &= w_k([0,1]) = w_k\left(\bigcup_{l=1}^{\infty}\Omega_l\right) = \sum_{l=1}^{\infty} w_k(\Omega_l) = \sum_{l=1}^{\infty}\alpha_l|\Omega_l| = \gamma\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^l|\Omega_l| \\
&= \gamma\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^l|\bigcup_{I\in\mathcal{I}_l} I| = \\
&= \gamma\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^l\frac{3^{(k-1)(l-1)}}{3^{kl}} = \gamma\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^l\frac{3^{(k-1)l-(k-1)}}{3^{kl}} \\
&= \gamma\frac{1}{3^{k-1}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{3^{kl}}{(3^{k-1}+1)^l}\frac{3^{(k-1)l}}{3^{kl}} = \gamma\frac{1}{3^{k-1}}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{3^{k-1}}{3^{k-1}+1}\right)^l = \gamma,
\end{aligned}$$

La última igualdad resulta ya que $\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{3^{k-1}}{3^{k-1}+1}\right)^l = 3^{k-1}$.

Luego $w_k(x) = \left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^l\chi_{\Omega_l}(x)$, y en consecuencia el lema queda probado. □

Resultará útil para lo que sigue, remarcar las principales propiedades de los intervalos $I \in \mathcal{I}_l$:

- Para cada $l \in \mathbb{N}$ hay $3^{(k-1)(l-1)}$ intervalos $I \in \mathcal{I}_l$ tal que $|I| = 3^{-kl}$ y $w_k(I) = \left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^l$. Luego $w_k(y) = \left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^l\chi_{\Omega_l}(y)$.

- Fijo l y el intervalo $J \in \mathcal{J}^{l+1}$ entonces el intervalo $I \in \mathcal{I}_l$ tiene la siguiente propiedad

$$\frac{w_k(I)}{|I|} = \frac{w_k(J)}{|J|} = \left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^l.$$

  Observemos que, a medida que el número de iteraciones l aumenta, la medida de los intervalos $I \in \mathcal{I}_l$ disminuye, mientras que los promedios de w_k aumentan.

- Para cada $l \geq l_0 + 1$, el intervalo $J \in \mathcal{J}^{l_0+1}$ contiene exactamente $3^{(k-1)(l-l_0-1)}$ intervalos $I \in \mathcal{I}_l$ tal que $|I| = 3^{-kl}$ y $w_k(y) = \left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^l \chi_{\Omega_l}$.

El siguiente resultado muestra una estimación para $M_r w_k$, donde $M_r w_k = M(w_k^r)^{1/r}$.

Lema 3.2.2. *Sea $r = 1 + \frac{1}{3^{k+1}}$. Entonces para todo $I \in \mathcal{I}_l, l \in \mathbb{N}$, y para todo $x \in I^{\Delta}$,*

$$M_r w_k(x) \leq 21 w_k(x).$$

Demostración: Sea $I \in \mathcal{I}_l$ y sea $x \in I^{\Delta}$. Tomamos un intervalo arbitrario R que contenga a x. Si $R \subset I$ entonces

$$\left(\frac{1}{|R|}\int_R w_k^r(y)dy\right)^{1/r} = \left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^l = w_k(x),$$

y en consecuencia el lema queda probado.

Supongamos que $R \not\subset I$ entonces $|R| \geq |I|/3$. Denotamos por $\mathcal{F}$ la familia de todos los intervalos triádicos $I' \subset [0,1)$ tales que $|I'| = |I|$ y $I' \cap R \neq \emptyset$. Existen a los sumo dos intervalos $I' \in \mathcal{F}$ que no están contenidos en R, y por lo tanto

$$\sum_{I' \in \mathcal{F}} |I'| \leq |R| + \sum_{I' \in \mathcal{F}: I' \not\subset R} |I'| \leq |R| + 2|I| \leq 7|R|. \tag{3.2.8}$$

La última desigualdad resulta ya que $|R| \geq |I|/3$.

Afirmamos que si $r = 1 + \frac{1}{3^{k+1}}$ entonces para todo $I' \in \mathcal{F}$

$$\left(\frac{1}{|I'|}\int_{I'} w_k^r(y)dy\right)^{1/r} \leq 3 w_k(x). \tag{3.2.9}$$

Si probamos está última desigualdad entonces el teorema quedaría demostrado, ya que si la usamos junto a (3.2.8) nos permite obtener:

$$\frac{1}{|R|}\int_R w_k^r(y)dy \leq \sum_{I' \in \mathcal{F}} \frac{|I'|}{|R|}\frac{1}{|I'|}\int_{I'} w_k^r(y)dy \leq 7(3w_k(x))^r.$$

Para probar (3.2.9) vamos a suponer que I' tiene intersección no vacía con el soporte de w_k. Si $I' \neq J$ para algún $J \in \mathcal{J}_{l+1}$ entonces $I' \subset L$, donde $L \in \mathcal{I}_\nu, \nu \leq l$, y en consecuencia

$$\left(\frac{1}{|I'|}\int_{I'} w_k^r(y)dy\right)^{1/r} = \left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^\nu \leq \left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^l = w_k(x),$$

y en este caso queda probado (3.2.9). Resta considerar el caso cuando $I' = J$, para algún $J \in \mathcal{J}_{l+1}$. Vamos a usar el hecho de que para todo $j \geq l+1$, $J \in \mathcal{J}_{l+1}$ contiene $3^{(k-1)(j-l-1)}$

intervalos $I \in \mathcal{I}_j$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|I'|}\int_{I'} w_k^r(y)dy &= 3^{lk}\sum_{j=l+1}^{\infty}\sum_{I\in\mathcal{I}_j : I\subset I'}\int_I w_k^r(y)dy \\
&= \sum_{j=l+1}^{\infty}\sum_{I\in\mathcal{I}_j : I\subset I'} 3^{lk}|I|\frac{1}{|I|}\int_I w_k^r(y)dy = \\
&= \sum_{j=l+1}^{\infty} 3^{(k-1)(j-l-1)}3^{(l-j)k}\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^{jr}
\end{aligned}$$

Observemos que la última suma, si hacemos el cambio $t = j - l$, la podemos expresar:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=l+1}^{\infty} 3^{(k-1)(j-l-1)}3^{(l-j)k}\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^{jr} &= \sum_{t=1}^{\infty} 3^{(k-1)(t-1)}3^{-tk}\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^{(t+l)r} \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} 3^{(k-1)t}3^{-(k-1)}3^{-tk}\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^{(t+l)r} \\
&= \frac{1}{3^{k-1}}\sum_{t=1}^{\infty} 3^{kt}3^{-t}3^{-tk}\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^{(t+l)r} \\
&= \frac{1}{3^{k-1}}\sum_{t=1}^{\infty} 3^{-t}\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^{(t+l)r}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|I'|}\int_{I'} w_k^r(y)dy &= \frac{1}{3^{k-1}}\sum_{t=1}^{\infty} 3^{-t}\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^{(t+l)r} \\
&= \frac{1}{3^{k-1}}\left(\sum_{t=1}^{\infty} 3^{-t}\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^{tr}\right)\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^{lr} \\
&= \frac{1}{3^{k-1}}\left(\sum_{t=1}^{\infty} 3^{-t}\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^{tr}\right) w_k(x)^r \\
&\leq \frac{1}{3^{k-1}}\frac{3}{3-(3^k/(3^{k-1}+1))^r}\, w_k(x)^r,
\end{aligned}$$

la última desigualdad es consecuencia del hecho que

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{\infty} 3^{-t}\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^{tr} &= \sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^{r}\right)^{t} = \frac{1/3\left(3^k/(3^{k-1}+1)\right)^r}{1-1/3\left(3^k/(3^{k-1}+1)\right)^r} \\
&= \frac{\left(3^k/(3^{k-1}+1)\right)^r}{3-\left(3^k/(3^{k-1}+1)\right)^r} \leq \frac{3}{3-\left(3^k/(3^{k-1}+1)\right)^r},
\end{aligned}$$

siempre que $\frac{1}{3}\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^r < 1$, es decir, si $r < \frac{1}{\log_3\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)}$.

En particular, si $r = 1 + \frac{1}{3^{k+1}}$ esa desigualdad se satisface, entonces

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^{1+\frac{1}{3^{k+1}}} &= \left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)^{\frac{1}{3^{k+1}}}\left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)\left(\frac{3^{k-1}3+3-3}{3^{k-1}+1}\right)^{\frac{1}{3^{k+1}}} \\
&= \left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)\left(\frac{3\left(3^{k-1}+1\right)-3}{3^{k+1}+1}\right)^{\frac{1}{3^{k+1}}} = \left(\frac{3^k}{3^{k-1}+1}\right)\left(3-\frac{3}{3^{k-1}+1}\right)^{\frac{1}{3^{k+1}}} \\
&\leq \frac{3^k}{3^{k-1}+1}3^{\frac{1}{3^{k+1}}} \leq \frac{3^k}{3^{k-1}+1}\left(1+\frac{1}{3^k}\right) = \frac{3^k}{3^{k-1}+1}+\frac{1}{3^{k-1}+1} \\
&= \left(\frac{3\left(3^{k-1}+1\right)-3}{3^{k+1}+1}\right)+\frac{1}{3^{k-1}+1} = 3-\frac{2}{3^{k-1}+1}.
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\frac{1}{|I'|}\int_{I'} w_k^r(y)dy \leq \frac{3}{2}\frac{3^{k-1}+1}{3^{k-1}}\ w_k(x)^r = \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{3^{k-1}}\right)\ w_k(x)^r \leq 3w_k(x)^r,$$

lo cual completa la demostración. □

3.3. Un resultado de extrapolación con dos pesos

Un teorema de extrapolación es un resultado para deducir la acotación de un operador sobre la familia de espacios con pesos $L^p(w)$, a partir del hecho de que el operador está acotado en $L^{p_0}(w)$, para algún p_0 fijo (a menudo $p_0 = 2$) y alguna familia de pesos. El teorema de extrapolación clásico es debido a Rubio de Francia [RdF84] (ver también [G-CRdF85]), quién mostró que si T es un operador sublineal tal que para algún p_0, $1 \leq p_0 < \infty$, T está acotado en L^{p_0} para todo $w \in A_{p_0}$, entonces para todo p, $1 < p < \infty$, T está acotado en $L^p(w)$ para todo $w \in A_p$. Este teorema y sus variantes han sido la clave para resolver muchos problemas en el Análisis Armónico.

D. Cruz-Uribe y C. Pérez en [C-UP00] establecieron el siguiente teorema de extrapolación para pares de pesos de la forma $\left(w, \left(\frac{Mw}{w}\right)^{\frac{p}{p_0}}\right)$:

Teorema 3.3.1. *Sean T un operador integral singular y f una funcion integrable con soporte compacto. Supongamos que existen constantes positivas p_0 y C_0 tales que para cada t fijo y para todo peso w*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > t\}) \leq \frac{C_0}{t^{p_0}}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_0}\, Mw(x)dx \tag{3.3.1}$$

entonces para todo p, $p_0 < p < \infty$ existe una constante C_p que depende de C_0, p_0, p y n tal que para todo peso w

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > t\}) \leq \frac{C_p}{t^p}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \left(\frac{Mw}{w}\right)^{\frac{p}{p_0}} w(x)dx. \tag{3.3.2}$$

Vamos a enunciar y probar el siguiente resultado para la función $M_r w, r > 1$, en lugar de Mw, que presenta algunas modificaciones del resultado de Cruz-Uribe y Pérez. Este resultado es crucial ya que al aplicarlo al peso w_k de la sección previa, nos permitirá la prueba del principal resultado de este capítulo.

Teorema 3.3.2. *Supongamos que para todo peso w y para toda $f \in L^1(M_r w)$,*

$$\|Hf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq A_r \|f\|_{L^1(M_r(w))} \quad (1 < r < 2).$$

Sea $\alpha_r = \frac{r}{2-r}$. Entonces existe $c > 0$ tal que cualquier peso w con soporte en $[0,1]$ verifica

$$\int_0^1 \left(\frac{|Hw|}{(M_{\alpha_r} w)^{\alpha_r/r}} \right)^2 w^{\alpha_r} dx \leq c A_r^2 \int_0^1 w dx \quad (1 < r < 2).$$

Demostración: Denotamos $\beta_r = \frac{r(r-1)}{2-r}$.
Elegimos los números α_r y β_r de manera tal que satisfacen $\alpha_r - \beta_r = r$ y $\alpha_r - \frac{2\beta_r}{r} = 1$.
Sean $g \geq 0$ e I un intervalo de modo que el promedio de $(gw)^r$ sobre I es finito. Ya que g verifica:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|I|} \int_I (gw)^r &= \frac{w^{\alpha_r}(I)}{|I|} \left(\frac{1}{w^{\alpha_r}(I)} \int_I g^r w^r \right) = \left(\frac{1}{w^{\alpha_r}(I)} \int_I g^r w^{\alpha_r - \beta_r} \right) \frac{w^{\alpha_r}(I)}{|I|} \\
&= \left(\frac{1}{w^{\alpha_r}(I)} \int_I (g^r / w^{\beta_r}) w^{\alpha_r} \right) \frac{w^{\alpha_r}(I)}{|I|} \\
&\leq 2 M^c_{w^{\alpha_r}}(g^r / w^{\beta_r})(x) M_{\alpha_r}(w)(x)^{\alpha_r},
\end{aligned}$$

donde M^c_w denota a la función maximal de Hardy-Littlewood centrada con respecto a w definida en (1.6.5).
Luego, elevando a ambos miembros de la última desigualdad a $1/r$, teniendo en cuenta que $2^{1/r} < 2$ ya que $r > 1$, y luego tomando supremo obtenemos:

$$M_r(gw)(x) \leq 2 \Big(M^c_{w^{\alpha_r}}(g^r / w^{\beta_r})(x) M_{\alpha_r}(w)(x)^{\alpha_r} \Big)^{1/r}. \tag{3.3.3}$$

El próximo paso es utilizar primero la hipótesis sobre H y luego (3.3.3):

$$\begin{aligned}
\int_{\{|Hf|>1\}} gw &\leq A_r \|f\|_{L^1(M_r(gw))} \\
&\leq 2A_r \int_{\mathbb{R}} |f| M_{\alpha_r}(w)^{\frac{\alpha_r}{r}} M^c_{w^{\alpha_r}}(g^r / w^{\beta_r})^{\frac{1}{r}} dx \\
&= 2A_r \int_{\mathbb{R}} \Big(|f| M_{\alpha_r}(w)^{\frac{\alpha_r}{r}} \frac{1}{w^{\alpha_r/2}} \Big) \Big(M^c_{w^{\alpha_r}}(g^r / w^{\beta_r})^{\frac{1}{r}} w^{\alpha_r/2} \Big) dx,
\end{aligned}$$

aplicando la desigualdad de Hölder a la última expresión obtenemos

$$\leq 2A_r \|f\|_{L^2\left((M_{\alpha_r} w)^{\frac{2\alpha_r}{r}} / w^{\alpha_r}\right)} \|M^c_{w^{\alpha_r}}(g^r / w^{\beta_r})^{\frac{1}{r}}\|_{L^2(w^{\alpha_r})}.$$

El operador M^c_v esta acotado en $L^p(v)$, $p > 1$, luego

$$\begin{aligned}
\|M^c_{w^{\alpha_r}}(g^r / w^{\beta_r})^{\frac{1}{r}}\|^2_{L^2(w^{\alpha_r})} &\leq c \|g^r / w^{\beta_r})^{\frac{1}{r}}\|^2_{L^2(w^{\alpha_r})} \\
&= c \int_{\mathbb{R}} g^2(x) w^{\alpha_r - \frac{2\beta_r}{r}}(x) dx \\
&= c \|g\|^2_{L^2(w)}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\int_{\{|Hf|>1\}} gw \leq cA_r \|f\|_{L^2\left((M_{\alpha_r} w)^{\frac{2\alpha_r}{r}}/w^{\alpha_r}\right)} \|g\|_{L^2(w)}.$$

Esta última desigualdad es equivalente a:

$$\lambda \int_{\{|Hf|>\lambda\}} gw \leq cA_r \|f\|_{L^2\left((M_{\alpha_r} w)^{\frac{2\alpha_r}{r}}/w^{\alpha_r}\right)} \|g\|_{L^2(w)}. \tag{3.3.4}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\|Hf\|_{L^{2,\infty}(w)} = \sup_{\lambda>0} \lambda w\Big\{x \in \mathbb{R} : |Hf(x)| > \lambda\Big\}^{\frac{1}{2}} &= \sup_{\lambda>0} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\lambda \chi_{\{x:|Hf|>\lambda\}}(x)\right)^2 w(x)\, dx\right)^{1/2} \\ &= \sup_{\lambda>0} \sup_{\|g\|_{L^2(w)}=1} \lambda \int_{\{x:|Hf|>\lambda\}} gw.\end{aligned}$$

La última igualdad resulta del hecho que la norma $L^2(w)$ de una función f puede ser obtenida por dualidad como $\|f\|_{L^2(w)} = \sup_{\|g\|_{L^2(w)}=1} \int_X fgw$.
Luego, teniendo en cuenta la desigualdad (3.3.4), si tomamos el supremo sobre toda $g \geq 0$ with $\|g\|_{L^2(w)} = 1$ resulta

$$\|Hf\|_{L^{2,\infty}(w)} \leq cA_r \|f\|_{L^2\left((M_{\alpha_r} w)^{\frac{2\alpha_r}{r}}/w^{\alpha_r}\right)}.$$

Por dualidad, la última desigualdad es equivalente a

$$\|Hf\|_{L^2\left(w^{\alpha_r}/(M_{\alpha_r} w)^{\frac{2\alpha_r}{r}}\right)} \leq cA_r \|f/w\|_{L^{2,1}(w)},$$

donde $L^{2,1}(w)$ es el espacio de Lorentz con peso. Concluímos la demostración, tomando $f = w$ en la última desigualdad y usando que

$$\|\chi_{[0,1]}\|_{L^{2,1}(w)} = \int_0^{w([0,1])} t^{-1/2} dt = 2w([0,1])^{1/2}.$$

$\square$

3.4. Demostración del Teorema 3.1.1

Antes de mostrar la prueba del Teorema 3.1.1, necesitamos una relación entre los operadores M_ϕ y M_r, con dependencia de la constante sobre r, cuando $r \to 1$. El siguiente resultado fue obtenido por F. Di Plinio y A. Lerner en [DiPL14], y en aras de mantener lo más autocontenido posible nuestro trabajo, incluímos la demostración.

Lema 3.4.1. *Para toda $x \in \mathbb{R}$,*

$$M_\phi f(x) \leq \left(2 \sup_{t \geq \phi^{-1}(1/2)} \frac{\phi(t)}{t^r}\right)^{1/r} M_r f(x) \quad (r > 1). \tag{3.4.1}$$

Demostración: Para cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R}$,

$$\int_I \phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) = \int_{\{x\in I:|f|<\phi^{-1}(1/2)\lambda\}} \phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) + \int_{\{x\in I:|f|\geq\phi^{-1}(1/2)\lambda\}} \phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) = (I) + (II)$$

Estimamos cada uno de los sumandos:

$$(I) = \int_{\{x\in I:\phi(\frac{|f|}{\lambda})<1/2} \phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) < \frac{|I|}{2}$$

$$(II) = \int_{\{x\in I:|f|\geq\phi^{-1}(1/2)\lambda\}} \phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) = \int_{\{x\in I:|f|\geq\phi^{-1}(1/2)\lambda\}} \frac{\phi\left(|f|/\lambda\right)}{\left(|f|/\lambda\right)^r}\left(|f|/\lambda\right)^r \leq c_r \int_I (|f|/\lambda)^r dx,$$

donde $c_r = \sup_{t\geq\phi^{-1}(1/2)} \frac{\phi(t)}{t^r}$.
Por lo tanto, para $\lambda_0 = \left(\frac{2c_r}{|I|}\int_I |f|^r\right)^{1/r}$, obtenemos

$$\frac{1}{|I|}\int_I \phi(|f|/\lambda_0)dx \leq 1,$$

lo cual prueba (3.4.1). □

Luego, no es difícil deducir de (3.4.1) que existe una constante c que puede depender de ϕ tal que

$$M_\phi f(x) \leq c\left(\sup_{t\geq 1}\frac{\phi(t)^{1/r}}{t}\right) M_r f(x) \quad (r>1). \tag{3.4.2}$$

Demostración del Teorema 3.1.1: Supongamos por el absurdo que la desigualdad (3.1.5) no se verifica, es decir, existe una constante c tal que para todo peso w y para toda f:

$$\|Hf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c\|f\|_{L^1(M_\phi w)}.$$

Usando (3.4.2) tenemos $\|f\|_{L^1(M_\phi w)} \leq c_1\left(\sup_{t\geq1}\frac{\phi(t)^{1/r}}{t}\right)\|f\|_{L^1(M_r w)}$, para $r>1$.
Por lo tanto,

$$\|Hf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq C\left(\sup_{t\geq 1}\frac{\phi(t)^{1/r}}{t}\right)\|f\|_{L^1(M_r w)}, \quad r>1.$$

Luego, estamos bajo las condiciones del Teorema 3.3.2, en consecuencia, existe $c>0$ tal que para cualquier peso w con soporte en $[0,1]$ se tiene:

$$\int_0^1 \left(\frac{|Hw|}{(M_{\alpha_r} w)^{\alpha_r/r}}\right)^2 w^{\alpha_r} dx \leq c\left(\sup_{t\geq 1}\frac{\phi(t)^{1/r}}{t}\right)^2 \int_0^1 w dx \quad (1<r<2), \tag{3.4.3}$$

donde $\alpha_r = \frac{r}{2-r}$.
Tomamos $r = r_k = 1 + \frac{1}{2\cdot 3^{k+1}+1}$ y $w = w_k$, el peso que construímos en la Section 3.2.

Luego, $\alpha_{r_k} = \frac{r_k}{2-r_k} = 1 + \frac{1}{3^{k+1}}$. Ahora, si utilizamos primero la desigualdad (3.2.2) y luego el Lema 3.2.2, teniendo en cuenta que $\frac{2\alpha_r}{r} = \frac{2}{2-r}$ y $2 + \alpha_r - \frac{2\alpha_r}{r} = 1$, obtenemos una estimación inferior para (3.4.3):

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\frac{|Hw_k|}{(M_{\alpha_r} w_k)^{\alpha_r/r}} \right)^2 w_k^{\alpha_r} dx &\geq \frac{k^2}{9} \int_0^1 \frac{w_k^{2+\alpha_r}}{(M_{\alpha_r} w_k)^{2\alpha_r/r}} dx \\
&\geq \frac{k^2}{9 \cdot 21^{\frac{2}{2-r_k}}} \int_{\cup_{l\in\mathbb{N}} \cup_{I \in \mathcal{I}_l} I^{\Delta}} w_k^{2+\alpha_r - \frac{2\alpha_r}{r}} dx \\
&\geq \frac{k^2}{27^{1+\frac{2}{2-r_k}}} \int_0^1 w_k dx.
\end{aligned}$$

Combinando esta última estimación junto con (3.4.3) obtenemos:

$$k \leq c \sup_{t \geq 1} \frac{\phi(t)^{1/r_k}}{t}. \tag{3.4.4}$$

Sólo nos resta estimar el lado derecho de (3.4.4).
Sea $\phi(t) = t \log\log(\mathrm{e}^{\mathrm{e}} + t)\psi(t)$, donde $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. Si $t > \mathrm{e}^{r'}$, donde $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, entonces

$$\log\log t = \log(r' \log t^{1/r'}) = \log(r') + \log\log t^{1/r'} \leq \log(r') + t^{1/r'} \leq \log(r') + t^{r/r'} \leq c_1 \log r' t^{r/r'},$$

y en consecuencia

$$\frac{\phi(t)^{1/r}}{t} = \frac{\big(\log\log(\mathrm{e}^{\mathrm{e}} + t)\psi(t)\big)^{1/r}}{t^{1-1/r}} = \frac{\big(\log\log(\mathrm{e}^{\mathrm{e}} + t)\psi(t)\big)^{1/r}}{t^{1/r'}} \leq c'(\log r')^{1/r} (\sup_{t \geq \mathrm{e}^{r'}} \psi(t))^{1/r}.$$

Por otro lado, si $0 < \delta < 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\sup_{1 \leq t \leq e^{r'}} \frac{\phi(t)^{1/r}}{t} &\leq \sup_{1 \leq t \leq \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{(\log r')^\delta}}} \big(\log\log(\mathrm{e}^{\mathrm{e}} + t)\psi(t)\big)^{1/r} \\
&+ \sup_{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{(\log r')^\delta}} \leq t \leq e^{r'}} \big(\log\log(\mathrm{e}^{\mathrm{e}} + t)\psi(t)\big)^{1/r} \\
&\leq c_2 (\log r')^{\delta/r} + (\log r')^{1/r} \sup_{t \geq \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{(\log r')^\delta}}} \psi(t)^{1/r}.
\end{aligned}$$

Para $\beta_k = \sup_{t \geq \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{(\log r'_k)^\delta}}} \psi(t)^{1/r_k}$ y combinando ambos casos, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sup_{t \geq 1} \frac{\phi(t)^{1/r_k}}{t} &\leq \sup_{1 \leq t \leq e^{r'}} \frac{\phi(t)^{1/r}}{t} + \sup_{t > e^{r'}} \frac{\phi(t)^{1/r_k}}{t} \\
&\leq c_2 (\log r'_k)^{\delta/r_k} + \beta_k (\log r'_k)^{1/r_k} + c' \beta_k (\log r'_k)^{1/r_k} \\
&\leq c_2 k^\delta + c'' \beta_k k = k \left(c_2 k^{\delta-1} + c'' \beta_k \right).
\end{aligned}$$

Observemos que $\beta_k \to 0$ cuando $k \to \infty$, ya que $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$.
Luego, para k muy grande combinando la última desigualdad para $\sup_{t\geq 1} \frac{\phi(t)^{1/r_k}}{t}$ junto con la desigualdad (3.4.4) resulta

$$k \leq k\left(c_3 k^{\delta-1} + c'''\beta_k\right),$$

es decir

$$1 \leq c_3 k^{\delta-1} + c'''\beta_k,$$

y esto es una contradicción. Por lo tanto, el teorema queda probado. □

Observación 3.4.1. *La siguiente desigualdad está contenida implícitamente en el trabajo de T. Hytönen and C. Pérez [HP15]:*

$$\lambda w\{x \in \mathbb{R} : |Hf(x)| > \lambda\} \leq c\log(r')\|f\|_{L^1(M_r w)} \quad (r > 1).$$

La demostración del Teorema 3.1.1 muestra que $\log(r')$ *es óptimo, es decir, no puede ser reemplazado por* $\varphi(r')$ *para cualquier* φ *creciente tal que* $\lim_{t\to\infty} \dfrac{\varphi(t)}{\log t} = 0$.

Un problema relacionado es lo que se conoce como conjetura A_1, o conjetura débil de *M-W*. La misma esta relacionada con determinar la mejor dependencia en términos de la constante A_1 del tipo débil $(1,1)$ de un operador de Calderón-Zygmund respecto a un peso A_1. El mejor resultado positivo debido a A. Lerner, S. Ombrosi y C. Pérez [LOP09] dice que: Si T es un operador de Calderón-Zygmund entonces

$$\|T\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c[w]_{A_1}(1 + \log[w]_{A_1})\|f\|_{L^1(w)}.$$

En el trabajo reciente de Lerner, Nazarov y Ombrosi [LNO18] se prueba que la última estimación es sharp. Previamente Nazarov, Reznikov, Vasyunin y Volberg en [NRVV18] habían probado que no era posible la dependencia lineal. Debemos mencionar que no es difícil ver que el reciente resultado de Lerner, Nazarov y Ombrosi recupera nuestro Teorema 3.1.1.

Capítulo 4

Estimaciones cuantitativas en desigualdades de tipo débil mixta usando operadores sparse

En este capítulo obtenemos estimaciones de tipo débil mixta cuantitativas para los operadores de Calderón-Zygmund y para las integrales singulares rough.
Nuestro enfoque se inspira en técnicas basadas en la *dominación sparse* que fueron introducidas en [D-SLR16] y luego convenientemente extendidas en [LiPR-RR18]. Todos los resultados de este capítulo se pueden encontrar en [CR-R18].

4.1. Introducción y principales resultados

Muckenhoupt y Wheeden en [MW77] introdujeron un nuevo tipo de desigualdad con peso denominada *desigualdad de tipo mixta*, que consiste en considerar una perturbación del operador maximal de Hardy-Littlewood con un peso A_p, concretamente ellos establecieron que tanto el operador maximal de Hardy- Littlewood como la transformada de Hilbert verifican:

Teorema (Muckenhoupt y Wheeden). *Sea $w \in A_1$ entonces*

$$|\{x \in \mathbb{R} : w(x)Tf(x) > t\}| \leq \frac{C_w}{t} \int_{\mathbb{R}} |f| w(x) dx,$$

donde T puede ser el operador maximal de Hardy-Littlewood, o bien, la transformada de Hilbert.

Si bien este tipo de estimación no parece muy diferente a la estándar, la perturbación que causa tener el peso dentro del conjunto de nivel hace que resulte más complicado, en comparación con el caso análogo para estimaciones de tipo fuerte.
E. Sawyer [S85] probó una versión más sofisticada del resultado de Muckenhoupt-Wheeden para la función maximal de Hardy-Littlewood donde intervienen dos pesos distintos. Su resultado fue el siguiente:

Teorema (Sawyer). *Sea $u, v \in A_1$ entonces existe una constante $C_{u,v}$ tal que para todo $t > 0$*

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{M(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}\right) \leq \frac{C_{u,v}}{t}\int_{\mathbb{R}} |f|u(x)v(x)dx. \tag{4.1.1}$$

En particular, Sawyer mostró que (4.1.1) combinado con el Teorema de factorización para pesos A_p de Jones producen una nueva demostración del Teorema de Muckenhoupt, es decir, de la acotación del operador maximal en $L^p(w)$ con $w \in A_p$. Además, motivado por la posibilidad de extender su resultado a otros operadores, conjeturó que (4.1.1) debería verificarse también para la transformada de Hilbert.
Más tarde, Cruz-Uribe, Martell and Pérez en [C-UMP05] generalizaron (4.1.1) a más dimensiones y probaron que la conjetura de Sawyer se verifica para operadores de Calderón-Zygmund vía el siguiente argumento de extrapolación:

Teorema (Cruz-Uribe, Martell y Pérez). *Sean T y G operadores sublineales. Supongamos que para todo $w \in A_\infty$ y para algún $0 < p < \infty$,*

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq c_w \|Gf\|_{L^p(w)}.$$

Entonces para todo $u \in A_1$ y todo $v \in A_\infty$

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c_{u,v,n} \|Gf\|_{L^{1,\infty}(uv)}.$$

Las condiciones en los pesos en el resultado de extrapolación llevaron a conjeturar que (4.1.1), y en consecuencia la correspondiente estimación para los operadores de Calderón-Zygmund, también debería verificarse cuando $u \in A_1$ y $v \in A_\infty$. La respuesta afirmativa a esa conjetura fue dada por Li, Ombrosi y Pérez en [LiOP17] donde también mostraron varias estimaciones cuantitativas. También nos gustaría mencionar que en un trabajo reciente [B18] se establece una generalización del resultado [C-UMP05] para los operadores maximales de Orlicz.

Además de los resultados mencionados anteriormente, en [C-UMP05] se mostró que la desigualdad (4.1.1) se satisface si $u \in A_1$ y $v \in A_\infty(u)$; la ventaja de esa condición es que el producto uv es un peso de A_∞ (ver Lema 2.1.7 del Capítulo 2).
En los últimos años, han sugido nuevas contribuciones bajo las mismas suposiciones para el caso de integrales fraccionarias y operadores relacionados [BCP017], también para estimaciones cuantitativas relacionadas [OP16, OPR16] y para extensiones multilineales [LiOP19].

El principal objetivo de este capítulo es obtener estimaciones de tipo mixta cuantitativas para los operadores de Calderón-Zygmund y para las integrales singulares rough, asumiendo condiciones que implican que $uv \in A_\infty$. La diferencia en nuestras demostraciones, con respecto a las técnicas utilizadas hasta ahora, es que utilizamos como principal herramienta la dominación por operadores sparse e ideas de [LiPR-RR18] que se remontan a [D-SLR16].
El primer resultado que establecemos es el siguiente:

Teorema 4.1.1. *Sean $u \in A_1$ y $v \in A_p(u)$ para algún $1 < p < \infty$.*

1. *Si T es un operador de Calderón-Zygmund,*

$$\left\| \frac{T(fv)(x)}{v(x)} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c_{n,p}[uv]_{A_\infty}[u]_{A_1} \log\left(e + [uv]_{A_\infty}[u]_{A_1}[v]_{A_p(u)}\right) \|f\|_{L^1(uv)}. \tag{4.1.2}$$

2. *Si $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ entonces*

$$\left\| \frac{T_\Omega(fv)(x)}{v(x)} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c_{n,p}[uv]_{A_\infty}[u]_{A_1}[u]_{A_\infty} \log\left(e + [uv]_{A_\infty}[u]_{A_1}[u]_{A_\infty}[v]_{A_p(u)}\right) \|f\|_{L^1(uv)}.$$

Observemos que si $u = 1$, en el caso de los operadores de Calderón-Zygmund, la estimación (4.1.2) se reduce a

$$\left\| \frac{T(fv)(x)}{v(x)} \right\|_{L^{1,\infty}(v)} \leq c_{n,p}[v]_{A_\infty} \log\left(e + [v]_{A_p}\right) \|f\|_{L^1(v)} \qquad p \geq 1,$$

que mejora la estimación obtenida en [OPR16, Theorems 1.16 and 1.17]

$$\left\| \frac{T(fv)(x)}{v(x)} \right\|_{L^{1,\infty}(v)} \leq c_{n,p}[v]_{A_p} \log\left(e + [v]_{A_p}\right) \|f\|_{L^1(v)} \qquad p \geq 1.$$

Una observación en relación con las estimaciones obtenidas es que en el caso particular que $v = 1$, se puede obtener mejor dependencia en relación al peso u. Esto produce la pregunta natural si el factor $[uv]_{A_\infty}$ podría ser eliminado en las estimaciones en el Teorema 4.1.1.
A continuación enunciaremos una variante del Teorema 4.1.1 que permite, en ciertos casos particulares, recuperar la mejor estimación conocida. Concretamente, en el siguiente Teorema, si $v = 1$ se obtiene la mejor constante conocida.

Teorema 4.1.2. *Sea $v \in A_1$ y $u \in A_1(v)$.*

1. *Si T es un operador de Calderón-Zygmund*

$$\left\| \frac{T(fv)(x)}{v(x)} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c_{n,T}[v]_{A_1}[v]_{A_\infty}[u]_{A_1(v)} \log\left(e + [uv]_{A_\infty}[v]_{A_1}\right) \|f\|_{L^1(uv)}.$$

2. *Si $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ entonces*

$$\left\| \frac{T_\Omega(fv)(x)}{v(x)} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c_{n,\Omega}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_1}[u]_{A_1(v)}[v]_{A_\infty} \log\left(e + [uv]_{A_\infty}[v]_{A_1}\right) \|f\|_{L^1(uv)}.$$

No es díficil ver que las si $p > 1$ las hipótesis del Teorema 4.1.2 son más fuertes que las del Teorema 4.1.1 pero queremos mostrar que bajo estas hipótesis tenemos la mejor dependencia posible en las constantes.

4.2. Demostraciones de los Teoremas

Para la prueba de los Teoremas 4.1.1 y 4.1.2, siguiendo las ideas de [D-SLR16] y de [LiPR-RR18], necesitaremos algunos resultados previos, con ese fin enunciaremos y probaremos algunos Lemas.

Lema 4.2.1. *Sea $\gamma_1, \gamma_2 > 1$. Para todo par de enteros no negativos j, k sea*

$$\alpha_{k,j} = \text{mín}\{\gamma_1 2^{-k} j^{\rho_1}, \beta\gamma_2 2^{-j} 2^{-k} 2^{\delta k} k^{\rho_2}\},$$

donde $\rho_1, \rho_2, \delta \geq 0$ y $\beta > 0$. Entonces

$$\sum_{j,k\geq 0} \alpha_{k,j} \leq c_{\rho_1,\rho_2,\gamma,\delta}\gamma_1 \log_2 (e+\gamma_2)^{1+\rho_1} + \frac{1}{2\gamma}\beta,$$

donde $\gamma \geq 1$.

Demostración: Comenzamos la prueba escribiendo

$$\sum_{j,k\geq 0} \alpha_{k,j} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j\geq\lceil\log_2((e+\gamma_2)8\gamma)\rceil+(\lceil\delta+\rho_2\rceil+1)k} \alpha_{k,j} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j<\lceil\log_2((e+\gamma_2)8\gamma)\rceil+(\lceil\delta+\rho_2\rceil+1)k} \alpha_{k,j}.$$

Para el primer término, observemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j\geq\lceil\log_2((e+\gamma_2)8\gamma)\rceil+(\lceil\delta+\rho_2\rceil+1)k} \alpha_{k,j} \\
&\leq \beta\gamma_2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} 2^{\delta k} k^{\rho_2} \sum_{j\geq\lceil\log_2((e+\gamma_2)8\gamma)\rceil+(\lceil\delta+\rho_2\rceil+1)k} 2^{-j} \\
&= \beta\gamma_2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} 2^{\delta k} k^{\rho_2} 2^{-\lceil\log_2((e+\gamma_2)8\gamma)\rceil-(\lceil\delta+\rho_2\rceil+1)k} \\
&\leq \frac{\beta\gamma_2}{(e+\gamma_2)8\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-\rho_2 k} k^{\rho_2} \\
&\leq \frac{\beta\gamma_2}{(e+\gamma_2)8\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(1+\rho_2)k} 2^{\rho_2 \log k} \\
&\leq \frac{\beta\gamma_2}{(e+\gamma_2)8\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \\
&\leq \frac{2\gamma_2\beta}{(e+\gamma_2)8\gamma} \\
&\leq \frac{\gamma_2}{(e+\gamma_2)4\gamma}\beta \leq \frac{1}{2\gamma}\beta.
\end{aligned}$$

Para el segundo término, observemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j<\lceil \log_2((e+\gamma_2)8\gamma)\rceil+(\lceil\delta+\rho_2\rceil+1)k} \alpha_{k,j} \\
&\leq \gamma_1 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sum_{1\leq j<\lceil \log_2((e+\gamma_2)8\gamma)\rceil+(\lceil\delta+\rho_2\rceil+1)k} j^{\rho_1} \\
&\leq \gamma_1 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lceil \log_2\left((e+\gamma_2)8\gamma\right)\rceil + \left(\lceil\delta+\rho_2\rceil+1\right)k\right)^{1+\rho_1} 2^{-k} \\
&\leq c2\left(\delta+\rho_2\right)\gamma_1 \log_2\left((e+\gamma_2)8\gamma\right)^{1+\rho_1} \\
&\leq c_{\rho_1,\rho_2,\gamma,\delta}\gamma_1 \log\left(e+\gamma_2\right)^{1+\rho_1}.
\end{aligned}$$

Luego, con ambas estimaciones el lema queda probado. □

Para el próximo resultado recordemos que dada una función de Young A, la norma de Luxemburg de una función f es equivalente a (ver (1.3.3), Sección 1.3):

$$\|f\|_{A(u),Q} \simeq \inf_{\mu>0}\left\{\mu + \frac{\mu}{u(Q)}\int_Q A\left(\frac{|f(x)|}{\mu}\right)u(x)dx\right\}.$$

Lema 4.2.2. *Sea A una función de Young tal que $A(xy) \leq \kappa_A A(x)A(y)$, para algún $\kappa_A \geq 1$, y $\mathcal{S}$ una familia $\frac{\kappa_A 8A(2)}{1+\kappa_A 8A(2)}$-sparse. Sea $f \in \mathcal{C}_c^\infty$ y $w \in A_\infty$, y supongamos que para todo $Q \in \mathcal{S}$*

$$2^{-j-1} \leq \|f\|_{A(w),Q} \leq 2^{-j}.$$

Entonces para todo $Q \in \mathcal{S}$ existe $\tilde{E}_Q \subseteq Q$ tal que

$$\sum_{Q\in\mathcal{S}} \chi_{\tilde{E_Q}}(x) \leq c_n[w]_{A_\infty}$$

y

$$w(Q)\|f\|_{A(w),Q} \leq 4\kappa_A \frac{A(2^{j+1})}{2^{j+1}} \int_{\tilde{E_Q}} A\left(|f|\right)w.$$

Demostración: Dividimos la familia $\mathcal{S}$ en la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^0 &= \{\text{cubos maximales en } \mathcal{S}\} \\
\mathcal{S}^1 &= \{\text{cubos maximales en } \mathcal{S}\setminus\mathcal{S}^0\} \\
&\ldots \\
\mathcal{S}^i &= \{\text{cubos maximales en } \mathcal{S}\setminus\cup_{r=0}^{i-1}\mathcal{S}^r\}
\end{aligned}$$

Observemos que como $w \in A_\infty$, usando (2.1.10) (corolario de la desigualdad Reverse Hölder), tenemos que para cada cubo Q y para cada subconjunto medible $E \subset Q$,

$$w(E) \leq 2\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\frac{1}{c_n[w]_{A_\infty}}} w(Q). \tag{4.2.1}$$

En particular, si $Q \in \mathcal{S}^i$ y $J_1 = \bigcup_{P \in \mathcal{S}^{i+1},\, P \subsetneq Q} P$ entonces, si tenemos en cuenta la Observación 2.3.2 y la Proposición 2.3.1 del Capítulo 2, dado que la la familia de cubos $\mathcal{S}$ es $\frac{1}{\frac{\kappa_A 8A(2)}{1+\kappa_A 8A(2)}}$-Carleson tenemos que

$$|J_1| = \left| \bigcup_{P \in \mathcal{S}^{i+1},\, P \subsetneq Q} P \right| \leq \left(\frac{1+\kappa_A 8A(2)}{\kappa_A 8A(2)} - 1 \right) |Q| = \frac{1}{\kappa_A 8A(2)} |Q|.$$

Si denotamos $J_\nu = \bigcup_{P \in \mathcal{S}^{i+\nu},\, P \subsetneq Q} P$, entonces por inducción podemos ver que

$$|J_\nu| \leq \left(\frac{1}{\kappa_A 8A(2)} \right)^{\nu} |Q|.$$

Combinando este resultado con (4.2.1) obtenemos

$$w(J_\nu) \leq 2 \left(\frac{1}{\kappa_A 8A(2)} \right)^{\frac{\nu}{c_n [w]_{A_\infty}}} w(Q),$$

y en particular, si elegimos $\nu = \lceil c_n [w]_{A_\infty} \rceil$, donde $\lceil . \rceil$ denota la parte entera, entonces

$$w(J_\nu) \leq \frac{1}{\kappa_A 4A(2)} w(Q). \tag{4.2.2}$$

Sea $Q \in \mathcal{S}^i$. y sea $\tilde{E_Q} = Q \setminus \bigcup_{P \in \mathcal{S}^{i+\lceil c_n [w]_{A_\infty} \rceil}} P$. Luego usando la hipótesis sobre A tenemos:

$$\begin{aligned}
& w(Q) \|f\|_{A(w),Q} \\
& \leq w(Q) \left\{ 2^{-j-1} + \frac{2^{-j-1}}{w(Q)} \int_Q A\left(2^{j+1}|f|\right) w \right\} \\
& \leq w(Q) 2^{-j-1} + \frac{1}{2^{j+1}} \int_Q A\left(2^{j+1}|f|\right) w \\
& = w(Q) 2^{-j-1} + \frac{1}{2^{j+1}} \int_{\tilde{E_Q}} A\left(2^{j+1}|f|\right) w + \frac{1}{2^{j+1}} \sum_{P \in \mathcal{S}_{j,k}^{i+\lceil c_n [w]_{A_\infty} \rceil}} \int_P A\left(2^{j+1}|f|\right) w \\
& \leq w(Q) 2^{-j-1} + \kappa_A \frac{A(2^{j+1})}{2^{j+1}} \int_{\tilde{E_Q}} A\left(|f|\right) w + \frac{1}{2^{j+1}} \sum_{P \in \mathcal{S}_{j,k}^{i+\lceil c_n [w]_{A_\infty} \rceil}} \int_P A\left(2^{j+1}|f|\right) w.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\|f\|_{A(w),P} \leq 2^{-j} \Rightarrow \frac{1}{w(P)} \int_P A\left(2^j |f|\right) w \leq 1$$

y (4.2.2), podemos acotar el último término de la suma como sigue:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^{j+1}} \sum_{P\in\mathcal{S}_{j,k}^{i+\lceil c_n[w]_{A_\infty}\rceil}} \int_P A\left(2^{j+1}|f|\right) w \\
&\leq \frac{1}{2^{j+1}}\kappa_A A(2) \sum_{P\in\mathcal{S}_{j,k}^{i+\lceil c_n[w]_{A_\infty}\rceil}} w(P)\frac{1}{w(P)}\int_P A\left(2^{j}|f|\right) w \\
&\leq \frac{1}{2^{j+1}}\kappa_A A(2) \sum_{P\in\mathcal{S}_{j,k}^{i+\lceil c_n[w]_{A_\infty}\rceil}} w(P) \\
&\leq \frac{1}{2^{j+1}}\frac{\kappa_A A(2)}{\kappa_A 4A(2)} w(Q) \leq \frac{1}{2^{j+1}}\frac{1}{4}w(Q).
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
w(Q)\|f\|_{A(w),Q} &\leq \frac{1}{2^{j+1}}w(Q) + \kappa_A\frac{A(2^{j+1})}{2^{j+1}}\int_{\tilde{E_Q}} A\left(|f|\right) w + \frac{1}{2^{j+1}}\frac{1}{4}w(Q) \\
&\leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) w(Q)\|f\|_{A(w),Q} + \kappa_A\frac{A(2^{j+1})}{2^{j+1}}\int_{\tilde{E_Q}} A\left(|f|\right) w \\
&= \frac{3}{4}w(Q)\|f\|_{A(w),Q} + \kappa_A\frac{A(2^{j+1})}{2^{j+1}}\int_{\tilde{E_Q}} A\left(|f|\right) w,
\end{aligned}$$

a partir de la cual sigue la estimación que buscamos. □

El siguiente Lema lo utilizaremos en forma reiterada:

Lema 4.2.3. *Sean $w\in A_\infty$ y $\mathcal{S}$ una familia η-sparse de cubos. Entonces*

$$\sum_{Q\in\mathcal{S}} w(Q) \leq c_n[w]_{A_\infty} w\left(\bigcup_{Q\in\mathcal{S}} Q\right).$$

Demostración: Podemos suponer que $\mathcal{S}=\bigcup_{k=0}^{\infty}\mathcal{S}_k$ donde $\{\mathcal{S}_k\}$ es una sucesión creciente de familias sparse finitas. Ahora fijamos k y consideramos $\mathcal{S}_k^*$ la familia de cubos maximales de $\mathcal{S}_k$ con respecto a la inclusión. Entonces

$$\sum_{Q\in\mathcal{S}_k} w(Q) = \sum_{Q\in\mathcal{S}_k^*}\sum_{P\in\mathcal{S}_k,\, P\subset Q} w(P).$$

Observemos que si $E_P\subset P$ es un conjunto medible entonces usando la condición sparse tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{P\in\mathcal{S}_k,\, P\subset Q} w(P) &\leq \frac{1}{\eta}\sum_{P\in\mathcal{S}_k,\, P\subset Q}\frac{1}{|P|}w(P)|E_P| \\
&\leq \frac{1}{\eta}\sum_{P\in\mathcal{S}_k,\, P\subset Q}\inf_{z\in P} M(w\chi_Q)(z)|E_P| \leq \frac{1}{\eta}\sum_{P\in\mathcal{S}_k,\, P\subset Q}\int_{E_P} M(w\chi_Q) \\
&\leq \frac{1}{\eta}\int_Q M(w\chi_Q) = \frac{1}{\eta}\frac{1}{w(Q)}\int_Q M(w\chi_Q)w(Q) \leq \frac{1}{\eta}[w]_{A_\infty}w(Q).
\end{aligned}$$

En consecuencia, si tomamos la suma sobre los cubos $Q \in \mathcal{S}_k^*$

$$\sum_{Q\in\mathcal{S}^*}\sum_{P\in\mathcal{S}_k,\, P\subset Q} w(P) \leq \frac{1}{\eta}[w]_{A_\infty}\sum_{Q\in\mathcal{S}_k^*} w(Q) = \frac{1}{\eta}[w]_{A_\infty} w\left(\bigcup_{Q\in\mathcal{S}_k^*} Q\right)$$
$$= \frac{1}{\eta}[w]_{A_\infty} w\left(\bigcup_{Q\in\mathcal{S}_k} Q\right) \leq \frac{1}{\eta}[w]_{A_\infty} w\left(\bigcup_{Q\in\mathcal{S}} Q\right).$$

Por lo tanto

$$\sum_{Q\in\mathcal{S}_k} w(Q) \leq \frac{1}{\eta}[w]_{A_\infty} w\left(\bigcup_{Q\in\mathcal{S}} Q\right)$$

y el resultado queda demostrado si hacemos $k \to \infty$. □

El próximo Lema establece un resultado para las funciones maximales pesadas.

Lema 4.2.4. *Sea A una función de Young tal que $A(st) \leq \kappa A(s)A(t)$. Sea $\mathcal{D}_j$ $j = 1, \ldots, k$ una grilla diádica y sea w un peso. Entonces*

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\mathcal{F}}_{A(w)} f(x) > t\right\}\right) \leq \kappa c_n \int_{\mathbb{R}^d} A\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) w(x)dx,$$

donde $\mathcal{F} = \bigcup_{j=1}^{3^n} \mathcal{D}_j$ y $M^{\mathcal{F}}_{A(w)} f(x) = \sup_{x\in Q\in\mathcal{F}} \|f\|_{A(w),Q}$.

Demostración: Sea $t > 0$. Observemos que

$$M^{\mathcal{F}}_w f(x) \leq \sum_{j=1}^{3^n} M^{\mathcal{D}_j}_w f(x),$$

donde el operador maximal $M^{\mathcal{D}_j}_w f$ está definido como

$$M^{\mathcal{D}_j}_w (f)(x) = \sup_{Q\ni x} \frac{1}{w(Q)} \int_Q f(y)w(y)dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q pertenecientes a una grilla diádica $\mathcal{D}_j$. Teniendo en cuenta que

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\mathcal{D}}_w f(x) > \lambda\right\}\right) \leq \int_{\mathbb{R}^d} A\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) w(x)dx,$$

(ver [LN14, Section 15] para el caso $A(t) = t$, el caso más general es análogo), y usando la hipótesis sobre A obtenemos que

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\mathcal{F}}_w f(x) > t\right\}\right) \leq w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{3^n} M^{\mathcal{D}_j}_w f(x) > t\right\}\right)$$
$$\leq \sum_{j=1}^{3^n} w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\mathcal{D}_j}_w f(x) > \frac{t}{3^n}\right\}\right)$$
$$\leq \sum_{j=1}^{3^n} \int_{\mathbb{R}^d} A\left(\frac{3^n|f(x)|}{t}\right) w(x)dx$$
$$\leq c_n\kappa \int_{\mathbb{R}^d} A\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) w(x)dx.$$

Luego, el lema queda demostrado. □

El siguiente resultado nos permite cambiar el peso subyacente en la norma de Luxemburg local.

Lema 4.2.5. *Sea u un peso, $v \in A_p(u)$, y ϕ una función de Young. Entonces, para todo cubo Q*

$$\|f\|_{\phi(u),Q} \leq \|f\|_{[v]_{A_p(u)}\phi^p(uv),Q}.$$

Demostración: Sea $\lambda > 0$. Entonces

$$\frac{1}{u(Q)}\int_Q \phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)u(x)dx = \frac{1}{u(Q)}\int_Q \phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)u^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}}(x)v^{\frac{1}{p}}(x)v^{-\frac{1}{p}}(x)dx,$$

aplicando Hölder

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{u(Q)}\left(\int_Q \phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^p u(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_Q v^{-\frac{p'}{p}}(x)u(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&\leq \left(\frac{uv(Q)}{u(Q)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{uv(Q)}\int_Q \phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^p (uv)(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{u(Q)}\int_Q v^{-\frac{p'}{p}}(x)u(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&\leq [v]_{A_p(u)}^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{uv(Q)}\int_Q \phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^p (uv)(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left(\frac{1}{uv(Q)}\int_Q [v]_{A_p(u)}\phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^p (uv)(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Eligiendo $\lambda = \|f\|_{[v]_{A_p(u)}\phi^p(uv),Q}$ tenemos

$$\frac{1}{u(Q)}\int_Q \phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)u(x)dx \leq 1.$$

Luego, el lema queda probado. □

Antes de comenzar con la demostración de nuestros resultados, vamos a hacer una observación que nos da el esquema que vamos a seguir para cada una de las demostraciones. Sea T un operador sublineal y $\tilde{M}_{uv}f$ un operador maximal diádico tal que

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : |\tilde{M}_{uv}f(x)| > t\right\}\right) \leq \frac{1}{t}\int A\left(\frac{|f|}{t}\right)uv,$$

donde A es a una función de Young. Observemos que

$$\begin{aligned}
uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \frac{|T(fv)(x)|}{v} > 1\right\}\right) &\leq uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \frac{|T(fv)(x)|}{v} > 1, \tilde{M}_{uv}f(x) \leq \frac{1}{2}\right\}\right)\\
&\quad + uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : |\tilde{M}_{uv}f(x)| > \frac{1}{2}\right\}\right).
\end{aligned}$$

Como el segundo término de la suma en la desigualdad anterior está controlado, entonces para obtener una estimación del lado izquierdo de la desigualdad sólo restaría controlar el primer término de la suma. Llamamos

$$G = \left\{x \in \mathbb{R}^d \, : \, \frac{|T(fv)(x)|}{v} > 1, \tilde{M}_{uv}f(x) \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Luego, es suficiente probar que

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d \, : \, \frac{|T(fv)(x)|}{v} > 1, \tilde{M}_{uv}f(x) \leq \frac{1}{2}\right\}\right) \leq c_{n,T}\kappa_{u,v}\int A\left(|f|\right)uv + \frac{1}{2}uv(G), \tag{4.2.3}$$

pues entonces

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d \, : \, \frac{|T(fv)(x)|}{v} > 1, \tilde{M}_{uv}f(x) \leq \frac{1}{2}\right\}\right) \leq 2c_{n,T}\kappa_{u,v}\int A\left(|f|\right)uv,$$

y en consecuencia

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d \, : \, \frac{|T(fv)(x)|}{v} > 1\right\}\right) \leq 2c_{n,T}\kappa_{u,v}\int A\left(|f|\right)uv.$$

4.2.1. Demostración del Teorema 4.1.1

1. Operadores de Calderón-Zygmund

Probaremos la primer parte del Teorema 4.1.1 para el caso de operadores de Calderón-Zygmund. Teniendo en cuenta el resultado de dominación sparse (ver Teorema 2.3.1, Capítulo 2) que establece: Si T es un operador de Calderón-Zygmund entonces existen 3^n familias ε-sparse contenidas en 3^n reticulados diádicos $\mathcal{D}_j$ tal que

$$|Tf(x)| \leq c_{n,T,\varepsilon}\sum_{j=1}^{3^n} A_{\mathcal{S}}\left(|f|\right)(x)$$

donde

$$A_{\mathcal{S}}f(x) = \sum_{Q\in\mathcal{S}}\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy\chi_Q(x). \tag{4.2.4}$$

Luego, es suficiente probar el teorema para el operador sparse $A_{\mathcal{S}}$, donde $\mathcal{S}$ es una familia $\frac{8}{9}$-sparse contenida en un reticulado diádico $\mathcal{D}$.

Sea $G = \{\frac{A_{\mathcal{S}}(fv)(x)}{v(x)} > 1\} \setminus \{M_{uv}^{\mathcal{D}}(f) > \frac{1}{2}\}$, donde el operador maximal $M_{uv}^{\mathcal{D}}$ está definido como

$$M_{uv}^{\mathcal{D}}(f)(x) = \sup_{Q\ni x}\frac{1}{uv(Q)}\int_Q f(y)(uv)(y)dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q pertenecientes a un reticulado diádico $\mathcal{D}$, y también supongamos que $f \geq 0$ y $\|f\|_{L^1(uv)} = 1$. Entonces por la observación que hicimos antes, es suficiente probar que

$$uv(G) \leq c_{n,p}[uv]_{A_\infty}[u]_{A_1}\log\left(e + [uv]_{A_\infty}[u]_{A_1}[v]_{A_p(u)}\right) + \frac{1}{2}uv(G).$$

Si denotamos $g = \chi_G$ entonces

$$uv(G) = \int_G (uv)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)(uv)(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{A_{\mathcal{S}}(fv)(x)}{v(x)} g(x)(uv)(x)dx$$

usando la Definición 4.2.4 en la última expresión obtenemos

$$\begin{aligned}
&= \sum_{Q\in\mathcal{S}} \frac{1}{|Q|}\int_Q (fv)(y)dy \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Q(x)g(x)u(x)dx \\
&= \sum_{Q\in\mathcal{S}} \frac{u(Q)}{|Q|}\int_Q (fv)(y)dy \frac{1}{u(Q)}\int_Q g(x)u(x)dx \\
&= \sum_{Q\in\mathcal{S}} \frac{u(Q)}{|Q|}\frac{1}{uv(Q)}\int_Q (fv)(y)dy \frac{1}{u(Q)}\int_Q g(x)u(x)dx\ (uv)(Q),
\end{aligned}$$

como $u \in A_1$, usando la observación (2.1.1) del Capítulo 2, obtenemos que la última expresión está acotada por

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{Q\in\mathcal{S}} [u]_{A_1} \inf_{x\in Q} u(x) \frac{1}{uv(Q)}\int_Q (fv)(y)dy \frac{1}{u(Q)}\int_Q g(x)u(x)dx\ (uv)(Q) \\
&\leq [u]_{A_1} \sum_{Q\in\mathcal{S}} \frac{1}{uv(Q)}\int_Q f(y)(uv)(y)dy \frac{1}{u(Q)}\int_Q g(x)u(x)dx\ (uv)(Q).
\end{aligned}$$

Notamos $\langle f\rangle_{Q,1}^{uv} = \frac{1}{uv(Q)}\int_Q f(x)(uv)(x)dx$ y $\langle g\rangle_{Q,1}^{u} = \frac{1}{u(Q)}\int_Q g(x)u(x)dx$.
Luego es suficiente probar que

$$\begin{aligned}
&[u]_{A_1} \sum_{Q\in\mathcal{S}} \langle f\rangle_{Q,1}^{uv}\langle g\rangle_{Q,1}^{u} uv(Q) \\
&\leq c_{n,p}[uv]_{A_\infty}[u]_{A_1}\log\left(e + [uv]_{A_\infty}[u]_{A_1}[v]_{A_p(u)}\right) + \frac{1}{2}uv(G).
\end{aligned}$$

Dividimos la familia sparse como sigue: Sea $Q \in \mathcal{S}_{k,j}$, $k, j \geq 0$ tales que

$$\begin{aligned}
2^{-j-1} &< \langle f\rangle_{Q,1}^{uv} \leq 2^{-j}, \\
2^{-k-1} &< \langle g\rangle_{Q,1}^{u} \leq 2^{-k}.
\end{aligned}$$

Llamamos

$$s_{k,j} = \sum_{Q\in\mathcal{S}_{k,j}} \langle f\rangle_{Q,1}^{uv}\langle g\rangle_{Q,1}^{u}(uv)(Q).$$

Afirmamos que, dependiendo de como estimemos

$$s_{k,j} \leq \begin{cases} c_n 2^{-k}[uv]_{A_\infty}, \\ c_{n,p}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_p(u)}2^{-j}2^{k(p-1)}uv(G). \end{cases}$$

Para la estimación superior argumentamos como sigue: Usando el Lema 4.2.2 para $A(t) = t$ y $uv \in A_\infty$, podemos asegurar que existen conjuntos $\tilde{E}_Q \subset Q$ tales que

$$\sum_{Q\in\mathcal{S}_{k,j}} \chi_{\tilde{E_Q}}(x) \leq \lceil c_n[uv]_{A_\infty}\rceil$$

y

$$(uv)(Q)\|f\|_{A(w),Q} = (uv)(Q)\frac{1}{(uv)(Q)}\int_Q fuv = \int_Q fuv \leq 4\int_{\tilde{E_Q}} fuv.$$

Luego si usamos que $\langle g\rangle^u_{Q,1} \leq 2^{-k}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
s_{k,j} = \sum_{Q\in\mathcal{S}_{k,j}} \langle f\rangle^{uv}_{Q,1}\langle g\rangle^u_{Q,1}(uv)(Q) &\leq 2^{-k}\sum_{Q\in\mathcal{S}_{j,k}}\frac{1}{(uv)(Q)}\int_Q fuv(uv)(Q)\\
&\leq 4\cdot 2^{-k}\sum_{Q\in\mathcal{S}_{j,k}}\int_{\tilde{E_Q}} fuv\\
&= 4\cdot 2^{-k}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{Q\in\mathcal{S}_{j,k}}\chi_{\tilde{E_Q}} fuv\\
&\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-k}\int_{\mathbb{R}^n} fuv = c_n[uv]_{A_\infty}2^{-k},
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

donde en la última igualdad usamos que $\|f\|_{L^1(uv)} = 1$.

Para la estimación inferior usamos $\langle f\rangle^{uv}_{Q,1} \leq 2^{-j}$ y $\langle g\rangle^u_{Q,1} \leq 2^{-k}$ junto con el Lema 4.2.3, de este modo obtenemos

$$\begin{aligned}
s_{k,j} &\leq 2^{-j}2^{-k}\sum_{Q\in\mathcal{S}_{j,k}} uv(Q)\\
&\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}uv\left(\bigcup_{Q\in\mathcal{S}_{j,k}} Q\right)\\
&\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : M_u g > 2^{-k-1}\right\}\right).
\end{aligned}$$

Como $v \in A_p(u)$, usando el Lema 4.2.5 resulta que

$$\frac{1}{u(Q)}\int_Q gu \leq \left(\frac{[v]_{A_p(u)}}{uv(Q)}\int_Q guv\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teniendo en cuenta esta última desigualdad y la forma en que dividimos la familia sparse resulta que

$$2^{-k-1} < \frac{1}{u(Q)}\int_Q gu \leq \left(\frac{[v]_{A_p(u)}}{uv(Q)}\int_Q guv\right)^{\frac{1}{p}} < \left([v]_{A_p(u)}M_{uv}g\right)^{\frac{1}{p}},$$

entonces

$$2^{-k-1} < M_u g < \left([v]_{A_p(u)}M_{uv}g\right)^{\frac{1}{p}},$$

de donde obtenemos

$$2^{-kp-p}[v]^{-1}_{A_p(u)} < M_{uv}g.$$

Luego, utilizando el Lema 4.2.4

$$\begin{aligned} s_{k,j} &\leq c_n[uv]_{A_\infty} 2^{-j}2^{-k} uv\left(\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, M_u g > 2^{-k-1}\}\right) \\ &\leq c_n[uv]_{A_\infty} 2^{-j}2^{-k} uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, M_{uv} g > 2^{-kp-p}[v]_{A_p(u)}^{-1}\right\}\right) \\ &\leq c_n[uv]_{A_\infty}[v]_{A_p(u)} 2^{-j}2^{-k}2^{kp+p} \int_{\mathbb{R}^n} guv \\ &\leq c_{n,p}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_p(u)} 2^{-j}2^{k(p-1)} uv\,(G)\,. \end{aligned}$$

Luego, combinando ambas estimaciones para $s_{k,j}$ resulta

$$\begin{aligned} uv(G) &\leq [u]_{A_1} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} s_{k,j} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \text{mín}\left\{c_n 2^{-k}[u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}, c_{n,p}[u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_p(u)} 2^{-j}2^{-k}2^{kp} uv\,(G)\right\} \end{aligned}$$

Ahora, sólo nos resta estimar la doble suma, para ello usamos el Lema 4.2.1 con

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= c_n[u]_{A_1}[uv]_{A_\infty} \\ \gamma_2 &= c_{n,p}[u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_p(u)}, \end{aligned}$$

$\delta = p$, $\beta = uv(G)$, $\rho_1 = \rho_2 = 0$ y $\gamma = 1$. Luego, el teorema queda probado.

2. Integrales singulares rough

Para la demostración del Teorema para el caso de operadores integrales singulares rough T_Ω vamos a seguir con la misma técnica que utilizamos para el caso de operadores de Calderón-Zygmund. Fijamos un reticulado diádico $\mathcal{D}$, por el Teorema de los Tres reticulados, existen 3^n reticulados diádicos $\mathcal{D}_j$, $j = 1, \ldots, 3^n$ tal que

$$\{3Q \,:\, Q \in \mathcal{D}\} = \bigcup_{j=1}^{3^n} \mathcal{D}_j.$$

Sea $G = \left\{\frac{T_\Omega(fv)(x)}{v(x)} > 1\right\} \setminus \left\{M_{uv}^{\mathcal{F}}(f) > \frac{1}{2}\right\}$, donde $\mathcal{F} = \bigcup_{j=1}^{3^n}\mathcal{D}_j$ y y el operador maximal $M_{uv}^{\mathcal{F}}(f)$ está definido como

$$M_{uv}^{\mathcal{F}}(f)(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{uv(Q)} \int_Q |f(y)|(uv)(y)dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q en la familia $\mathcal{F}$. Vamos a suponer también que $\|f\|_{L^1(uv)} = \|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} = 1$. Luego es suficiente probar que

$$uv(G) \leq c_{n,p}[uv]_{A_\infty}[u]_{A_\infty}[u]_{A_1} \log\left(e + [uv]_{A_\infty}[u]_{A_\infty}[u]_{A_1}[v]_{A_p(u)}\right) + \frac{1}{2}uv(G).$$

Denotamos $g = \chi_G$ entonces

$$uv(G) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)(uv)(x)dx \leq \left|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{T_\Omega(fv)(x)}{v(x)} g(x)(uv)(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} T_\Omega(fv)(x)g(x)u(x)dx\right|.$$

Sea $s = 1 + \frac{1}{2\tau_n [u]_{A_\infty}}$, con $\tau_n > 0$. La siguiente desigualdad se verifica:

$$\frac{u^s(G \cap Q)}{u^s(Q)} \leq 2 \left(\frac{u(G \cap Q)}{u(Q)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2.6}$$

En efecto, aplicando la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
\frac{u^s(G \cap Q)}{u^s(Q)} &= \frac{\int_{G \cap Q} u^{1+\frac{1}{2\tau_n [u]_{A_\infty}}}}{u^s(Q)} = \frac{\int_{G \cap Q} u^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\tau_n [u]_{A_\infty}}}}{u^s(Q)} = \frac{\int_Q u^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\tau_n [u]_{A_\infty}}} u^{\frac{1}{2}} \chi_{G \cap Q}}{u^s(Q)} \\
&\leq \frac{\left(\int_Q u^{1+\frac{1}{\tau_n [u]_{A_\infty}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q \chi_{G \cap Q} u \right)^{\frac{1}{2}}}{u^s(Q)} = \frac{(u(Q))^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q u^{1+\frac{1}{\tau_n [u]_{A_\infty}}} \right)^{\frac{1}{2}}}{u^s(Q)} \left(\frac{u(G \cap Q)}{u(Q)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(u(Q))^{\frac{1}{2}} |Q|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u^{1+\frac{1}{\tau_n [u]_{A_\infty}}} \right)^{\frac{1}{2}}}{u^s(Q)} \left(\frac{u(G \cap Q)}{u(Q)} \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

ahora usando la desigualdad Reverse Hölder, la última desigualdad queda estimada por

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \frac{(u(Q))^{\frac{1}{2}} |Q|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{u(Q)}{|Q|} \right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\tau_n [u]_{A_\infty}}}}{u^s(Q)} \left(\frac{u(G \cap Q)}{u(Q)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2 \frac{(u(Q))^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\tau_n [u]_{A_\infty}}} |Q|^{-\frac{1}{2\tau_n [u]_{A_\infty}}}}{u^s(Q)} \left(\frac{u(G \cap Q)}{u(Q)} \right)^{\frac{1}{2}} = 2 \frac{(u(Q))^s |Q|^{1-s}}{u^s(Q)} \left(\frac{u(G \cap Q)}{u(Q)} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Sólo resta ver que $\frac{(u(Q))^s |Q|^{1-s}}{u^s(Q)} \leq 1$, la cual es una consecuencia inmediata de la siguiente estimación (que resulta de aplicar la desigualdad de Hölder):

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q u \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u^s \right)^{\frac{1}{s}}, s > 1, \tag{4.2.7}$$

a partir de la cual obtenemos $u^s(Q) \geq (u(Q))^s |Q|^{1-s}$, y de este modo queda probada la desigualdad (4.2.6).
Para la siguiente estimación usamos el resultado de dominación sparse para operadores integrales singulares rough (Teorema 2.3.1) y la Observación 2.3.3:

$$\begin{aligned}
uv(G) \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} T_\Omega(fv)(x) gu(x) dx \right| &\leq c_{n,\Omega} s' \Lambda^s_{\mathcal{S}}(f, gu) \\
&= c_{n,\Omega} s' \sum_{m=1}^{3^n} \sum_{Q \in \mathcal{S}_m} \frac{1}{|Q|} \int_Q |fv| \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |gu|^s \right)^{\frac{1}{s}} |Q| \\
&= c_{n,\Omega} s' \sum_{m=1}^{3^n} \sum_{Q \in \mathcal{S}_m} \int_Q |f| v \left(\frac{u^s(Q)}{|Q|} . \frac{1}{u^s(Q)} \int_Q g u^s \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= c_{n,\Omega} s' \sum_{m=1}^{3^n} \sum_{Q \in \mathcal{S}_m} \int_Q |f| v \left(\frac{u^s(Q)}{|Q|} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{1}{u^s(Q)} \int_Q g u^s \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= c_{n,\Omega} s' \sum_{m=1}^{3^n} \sum_{Q \in \mathcal{S}_m} \int_Q |f| v \left(\frac{u^s(Q)}{|Q|} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{u^s(G \cap Q)}{u^s(Q)} \right)^{\frac{1}{s}}
\end{aligned}$$

Como $u \in A_\infty$ y $s = 1 + \frac{1}{2\tau_n[u]_{A_\infty}}$ entonces u satisface la desigualdad reverse Hölder y $s' \simeq [u]_{A_\infty}$. Teniendo en cuenta estos hechos junto con la desigualdad (4.2.6) y $u \in A_1$ resulta que

$$\begin{aligned}
uv(G) &\leq c_{n,\Omega}[u]_{A_\infty} 2^{1/s} \sum_{m=1}^{3^n} \sum_{Q\in\mathcal{S}_m} \int_Q |f| v \frac{u(Q)}{|Q|} \left(\frac{u(G\cap Q)}{u(Q)}\right)^{\frac{1}{2s}} \\
&= c'_{n,\Omega}[u]_{A_\infty} \sum_{m=1}^{3^n} \sum_{Q\in\mathcal{S}_m} \frac{1}{uv(Q)} \int_Q |f| v \frac{u(Q)}{|Q|} \left(\frac{u(G\cap Q)}{u(Q)}\right)^{\frac{1}{2s}} uv(Q) \\
&\leq c'_{n,\Omega}[u]_{A_\infty} \sum_{m=1}^{3^n} \sum_{Q\in\mathcal{S}_m} [u]_{A_1} \inf_{x\in Q} u(x) \frac{1}{uv(Q)} \int_Q |f| v \left(\frac{u(G\cap Q)}{u(Q)}\right)^{\frac{1}{2s}} uv(Q) \\
&\leq c'_{n,\Omega}[u]_{A_\infty}[u]_{A_1} \sum_{m=1}^{3^n} \sum_{Q\in\mathcal{S}_m} \frac{1}{uv(Q)} \int_Q |f| uv \left(\frac{1}{u(Q)} \int_Q g^{2s} u\right)^{\frac{1}{2s}} uv(Q).
\end{aligned}$$

Si notamos $\langle f\rangle^{uv}_{Q,1} = \frac{1}{uv(Q)} \int_Q |f(x)|(uv)(x)dx$ y $\langle g\rangle^{u}_{Q,2s} = \left(\frac{1}{u(Q)} \int_Q g^{2s}(x)u(x)dx\right)^{\frac{1}{2s}}$, la última desigualdad nos queda expresada

$$uv(G) \leq c'_{n,\Omega}[u]_{A_\infty}[u]_{A_1} \sum_{m=1}^{3^n} \sum_{Q\in\mathcal{S}_m} \langle f\rangle^{uv}_{Q,1} \langle g\rangle^{u}_{Q,2s} uv(Q).$$

Es importante observar, antes de continuar con la demostración del Teorema, que necesitamos sacar los cubos de la familia sparse donde la función maximal es grande, usando solo una función maximal. Por el Lema 4.2.4, al elegir $M^{\mathcal{F}}_{uv}$ evitamos la dependencia sobre la constante duplicante de la medida $uvdx$ si hubiéramos utilizado M_{uv}.
Continuando con la demostración, es suficiente probar que para cada m,

$$\begin{aligned}
&c'_{n,\Omega}[u]_{A_\infty}[u]_{A_1} \sum_{Q\in\mathcal{S}_m} \langle f\rangle^{uv}_{Q,1} \langle g\rangle^{u}_{Q,2s} uv(Q) \\
&\leq c'_{n,\Omega,p}[uv]_{A_\infty}[u]_{A_\infty}[u]_{A_1} \log\left(e + [uv]_{A_\infty}[u]_{A_\infty}[u]_{A_1}[v]_{A_p(u)}\right) + \frac{1}{2\cdot 3^n} uv(G).
\end{aligned}$$

Fijamos m, por razones de simplicidad, denotamos $\mathcal{S}_m = \mathcal{S}$. Teniendo en cuenta la definición del conjunto G, al sacar el conjunto donde $M^{\mathcal{F}}_{uv}(f) > \frac{1}{2}$, podemos dividir la familia sparse $\mathcal{S}$ como sigue: Sea $Q \in \mathcal{S}_{k,j}$, $k, j \geq 0$ tales que

$$\begin{aligned}
2^{-j-1} &< \langle f\rangle^{uv}_{Q,1} \leq 2^{-j}, \\
2^{-k-1} &< \langle g\rangle^{u}_{Q,2s} \leq 2^{-k}.
\end{aligned}$$

Definimos

$$s_{k,j} = \sum_{Q\in\mathcal{S}_{k,j}} \langle f\rangle^{uv}_{Q,1} \langle g\rangle^{u}_{Q,2s} uv(Q).$$

Afirmamos que, dependiendo de como estimemos

$$s_{k,j} \leq \begin{cases} c_n 2^{-k}[uv]_{A_\infty}, \\ c_{n,p}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_p(u)} 2^{-j} 2^{(2ps-1)k} uv\,(G)\,. \end{cases}$$

Para la estimación superior argumentamos de la misma forma que como lo hicimos en (4.2.5). Para la estimación inferior, usamos el Lema 4.2.3,

$$\begin{aligned}
s_{k,j} &\leq 2^{-j}2^{-k}\sum_{Q\in\mathcal{S}_{j,k}} uv(Q)\\
&\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}uv\left(\bigcup_{Q\in\mathcal{S}_{j,k}} Q\right)\\
&\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,(M_u g)^{\frac{1}{2s}}>2^{-k-1}\right\}\right).
\end{aligned}$$

Por hipótesis $v\in A_p(u)$, usando el Lema 4.2.5 resulta que

$$\left(\frac{1}{u(Q)}\int_Q g^{2s}u\right)^{\frac{1}{2s}} \leq \left(\frac{[v]_{A_p(u)}}{uv(Q)}\int_Q g^{2s}uv\right)^{\frac{1}{2sp}}.$$

Teniendo en cuenta esta última desigualdad y la forma en que dividimos la familia sparse resulta que

$$2^{-k-1}<\left(\frac{1}{u(Q)}\int_Q g^{2s}u\right)^{\frac{1}{2s}} \leq \left(\frac{[v]_{A_p(u)}}{uv(Q)}\int_Q g^{2s}uv\right)^{\frac{1}{2sp}} < \left([v]_{A_p(u)}M_{uv}g^{2s}\right)^{\frac{1}{2sp}},$$

entonces

$$2^{-k-1}<\left(M_u g^{2s}\right)^{\frac{1}{2s}}<\left([v]_{A_p(u)}M_{uv}g^{2s}\right)^{\frac{1}{2sp}},$$

de donde obtenemos

$$2^{-2spk-2sp}[v]_{A_p(u)}^{-1}<M_{uv}g^{2s}=M_{uv}g.$$

Luego, utilizando el Lema 4.2.4

$$\begin{aligned}
&\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,(M_u g)^{\frac{1}{2s}}>2^{-k-1}\right\}\right)\\
&\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,\left([v]_{A_p(u)}M_{uv}g\right)^{\frac{1}{2sp}}>2^{-k-1}\right\}\right)\\
&\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,M_{uv}g>2^{-2spk-2sp}[v]_{A_p(u)}^{-1}\right\}\right)\\
&\leq c_{n,p}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_p(u)}2^{-j}2^{(2ps-1)k}uv\left(G\right).
\end{aligned}$$

Combinando ambas estimaciones resulta que

$$\begin{aligned}
&c'_{n,\Omega}[u]_{A_\infty}[u]_{A_1}\sum_{Q\in\mathcal{S}}\langle f\rangle_{Q,1}^{uv}\langle g\rangle_{Q,2s}^{u}uv(Q)=c'_{n,\Omega}[u]_{A_\infty}[u]_{A_1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}s_{k,j}\\
&\leq\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\min\left\{c''_{n,\Omega}\kappa_{u,v}2^{-k},c'''_{n,\Omega,p}\kappa_{u,v}[v]_{A_p(u)}2^{-j}2^{(2ps-1)k}uv\left(G\right)\right\}
\end{aligned}$$

donde $\kappa_{u,v}=[uv]_{A_\infty}[u]_{A_\infty}[u]_{A_1}$.
Finalizamos la demostración usando el Lema 4.2.1, con $\gamma_1=c''_{n,\Omega}\kappa_{u,v}$, $\gamma_2=c'''_{n,\Omega,p}\kappa_{u,v}[v]_{A_p(u)}$, $\beta=uv\left(G\right)$, $\delta=2ps$, $\gamma=3^n$ y $\rho_1=\rho_2=0$.

4.2.2. Demostración del Teorema 4.1.2

1. Operadores de Calderón-Zygmund

Para la demostración vamos a seguir con la misma técnica que utilizamos para la demostración del Teorema 4.1.1, luego es suficiente probar el resultado para un operador sparse $A_{\mathcal{S}}$.

Sea $G = \left\{\frac{A_{\mathcal{S}}(fv)(x)}{v(x)} > 1\right\} \setminus \{M_v^{\mathcal{D}}(f) > \frac{1}{2}\}$, donde el operador maximal $M_v^{\mathcal{D}}$ está definido como

$$M_v^{\mathcal{D}}(f)(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{v(Q)} \int_Q f(y)v(y)dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q pertenecientes a un reticulado diádico $\mathcal{D}$. También suponemos que $f \geq 0$ y $\|f\|_{L^1(uv)} = 1$. Luego es suficiente probar que

$$uv(G) \leq c_{n,p}[v]_{A_1}[v]_{A_\infty}[u]_{A_1(v)} \log\left(e + [uv]_{A_\infty}[v]_{A_1}[u]_{A_1(v)}\right) + \frac{1}{2}uv(G).$$

Si denotamos $g = \chi_G$ entonces

$$uv(G) = \int_G (uv)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)(uv)(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{A_{\mathcal{S}}(fv)(x)}{v(x)} g(x)(uv)(x)dx$$

usando la definición (4.2.4) en la última expresión obtenemos

$$\begin{aligned}
&= \sum_{Q \in \mathcal{S}} \frac{1}{|Q|} \int_Q (fv)(y)dy \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Q(x)g(x)u(x)dx \\
&= \sum_{Q \in \mathcal{S}} \frac{1}{v(Q)} \int_Q f(y)v(y)dy \frac{v(Q)}{|Q|} \int_Q g(x)u(x)dx
\end{aligned}$$

como $v \in A_1$, usando la observación (2.1.1) del Capítulo 2, obtenemos que la última expresión está acotada por

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{Q \in \mathcal{S}} \frac{1}{v(Q)} \int_Q f(y)v(y)dy.[v]_{A_1} \inf_{x \in Q} v(x). \int_Q g(x)u(x)dx \\
&\leq [v]_{A_1} \sum_{Q \in \mathcal{S}} \frac{1}{v(Q)} \int_Q f(y)v(y)dy \int g(x)uv(x)dx \\
&\leq [v]_{A_1} \sum_{Q \in \mathcal{S}} \frac{1}{v(Q)} \int_Q f(y)v(y)dy \frac{1}{uv(Q)} \int g(x)uv(x)dx \ (uv)(Q).
\end{aligned}$$

Notamos $\langle f \rangle_{Q,1}^v = \frac{1}{v(Q)} \int_Q f(x)v(x)dx$ y $\langle g \rangle_{Q,1}^{uv} = \frac{1}{uv(Q)} \int_Q g(x)uv(x)dx$.

Luego es suficiente probar que

$$\begin{aligned}
&[v]_{A_1} \sum_{Q \in \mathcal{S}} \langle f \rangle_{Q,1}^v \langle g \rangle_{Q,1}^{uv} uv(Q) \\
&\leq c_{n,p}[v]_{A_1}[v]_{A_\infty}[u]_{A_1(v)} \log\left(e + [uv]_{A_\infty}[v]_{A_1}[u]_{A_1(v)}\right) + \frac{1}{2}uv(G).
\end{aligned}$$

Dividimos la familia sparse como sigue: Sea $Q \in \mathcal{S}_{k,j}$, $k, j \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} 2^{-j-1} &< \langle f \rangle_{Q,1}^{v} \leq 2^{-j}, \\ 2^{-k-1} &< \langle g \rangle_{Q,1}^{uv} \leq 2^{-k}. \end{aligned}$$

Llamamos

$$s_{k,j} = \sum_{Q \in \mathcal{S}_{k,j}} \langle f \rangle_{Q,1}^{v} \langle g \rangle_{Q,1}^{uv} uv(Q).$$

Afirmamos que, dependiendo de como estimamos los promedios

$$s_{k,j} \leq \begin{cases} c_n 2^{-k} [u]_{A_1(v)} [v]_{A_\infty}, \\ c_n [uv]_{A_\infty} 2^{-j} uv(G). \end{cases}$$

Para la estimación superior argumentamos de la misma forma que como lo hicimos antes: Por el Lema 4.2.2 para $A(t) = t$ y $v \in A_\infty$, existen conjuntos $\tilde{E_Q} \subset Q$ tales que

$$\int_Q fv \leq 4 \int_{\tilde{E_Q}} fv$$

donde $\tilde{E}_Q \subset Q$ y

$$\sum_{Q \in \mathcal{S}_{k,j}} \chi_{\tilde{E_Q}}(x) \leq \lceil c_n [v]_{A_\infty} \rceil .$$

Luego, si usamos que $\langle g \rangle_{Q,1}^{uv} \leq 2^{-k}$ obtenemos

$$\begin{aligned} s_{k,j} = \sum_{Q \in \mathcal{S}_{k,j}} \langle f \rangle_{Q,1}^{v} \langle g \rangle_{Q,1}^{uv} uv(Q) &\leq 2^{-k} \sum_{Q \in \mathcal{S}_{j,k}} \frac{uv(Q)}{v(Q)} \int_Q fv \\ &\leq 4 \cdot 2^{-k} \sum_{Q \in \mathcal{S}_{j,k}} \frac{uv(Q)}{v(Q)} \int_{\tilde{E_Q}} fv \\ &\leq 4 \cdot 2^{-k} \sum_{Q \in \mathcal{S}_{j,k}} \int_{\tilde{E_Q}} fv M_v u. \end{aligned}$$

Como por hipótesis $u \in A_1(v)$ entonces $M_v u \leq [u]_{A_1} u(x)$, luego usando que $\|f\|_{L^1(uv)} = 1$ la última desigualdad queda estimada por:

$$\begin{aligned} &\leq 4 \cdot 2^{-k} [u]_{A_1(v)} \sum_{Q \in \mathcal{S}_{j,k}} \int_{\tilde{E_Q}} fuv \\ &= 4 \cdot 2^{-k} [u]_{A_1(v)} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{Q \in \mathcal{S}_{j,k}} \chi_{\tilde{E_Q}} fuv \\ &\leq c_n 2^{-k} [u]_{A_1(v)} [v]_{A_\infty} \int_{\mathbb{R}^n} fuv. \\ &= c_n 2^{-k} [u]_{A_1(v)} [v]_{A_\infty}. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Para la estimación inferior, usamos $\langle f\rangle_{Q,1}^{v} \leq 2^{-j}$ y $\langle g\rangle_{Q,1}^{uv} \leq 2^{-k}$. Además, como por hipótesis $v \in A_1$ y $u \in A_1(v)$ resulta por el Lema 2.1.7 que $uv \in A_\infty$, luego usando el Lema 4.2.3 tenemos

$$\begin{aligned} s_{k,j} &\leq 2^{-j}2^{-k}\sum_{Q\in\mathcal{S}_{j,k}} uv(Q) \\ &\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}uv\left(\bigcup_{Q\in\mathcal{S}_{j,k}} Q\right) \\ &\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : M_{uv}^{\mathcal{D}}(g) > 2^{-k-1}\right\}\right). \end{aligned}$$

Ahora usando el tipo débil $(1,1)$ de M_{uv} (Lemma 4.2.4)

$$\begin{aligned} &\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : M_{uv}^{\mathcal{D}}(g) > 2^{-k-1}\right\}\right) \\ &\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}2^{k+1}\int_{\mathbb{R}^n} guv \\ &\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-j}uv(G). \end{aligned}$$

Combinando ambas estimaciones para $s_{k,j}$ resulta

$$\begin{aligned} uv(G) &\leq [v]_{A_1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} s_{k,j} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \min\left\{c_n 2^{-k}[v]_{A_1}[v]_{A_\infty}[u]_{A_1(v)}, c_n[v]_{A_1}[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}uv\left(G\right)\right\}. \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 4.2.1 con

$$\gamma_1 = c_n[v]_{A_1}[v]_{A_\infty}[u]_{A_1(v)} \qquad \gamma_2 = c_n[v]_{A_1}[uv]_{A_\infty}$$

$\delta = 1$, $\beta = uv(G)$, $\gamma = 1$ y $\rho_1 = \rho_2 = 0$, finaliza la demostración.

2. Integrales singulares rough

Fijamos un reticulado diádico $\mathcal{D}$ y sean $\mathcal{D}_j$, $j = 1, \ldots, 3^n$, los conjuntos obtenidos usando el Teorema de los Tres reticulados. Llamamos

$$G = \left\{\frac{T_\Omega(fv)(x)}{v(x)} > 1\right\} \setminus \left\{M_{uv}^{\mathcal{F}}(f) > \frac{1}{2}\right\},$$

donde $\mathcal{F} = \bigcup_{j=1}^{3^n}\mathcal{D}_j$ y el operador maximal $M_{uv}^{\mathcal{F}}(f)$ está definido como antes. Nuevamente, por las razones que ya expusimos, elegimos al operador $M_{uv}^{\mathcal{F}}(f)$ en lugar de $M_{uv}f$. Además, supongamos que $f \geq 0$ y $\|f\|_{L^1(uv)} = \|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} = 1$. Luego es suficiente probar que

$$uv(G) \leq c_{n,\Omega,p}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_1}[u]_{A_1(v)}[v]_{A_\infty}\log\left(e + [uv]_{A_\infty}[v]_{A_1}\right) + \frac{1}{2}uv(G).$$

Observemos que

$$uv(G) \leq \left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{T_\Omega(fv)}{v}uvg\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} T_\Omega(fv)ug\right|$$

donde $g = \chi_G$. Luego para $s = 1 + \frac{1}{2\tau_n[uv]_{A_\infty}}$, con $\tau_n > 0$ y argumentando como en la demostración del Teorema 4.1.1 resulta que

$$\frac{(uv)^s(G\cap Q)}{(uv)^s(Q)} \leq c_n\left(\frac{uv(G\cap Q)}{uv(Q)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2.9}$$

Luego, usando la dominación sparse y $s' \simeq [uv]_{A_\infty}$, tenemos

$$\begin{aligned} uv(G) \leq \left|\int_{\mathbb{R}^n} T_\Omega(fv)(x)gu(x)dx\right| &\leq c_{n,\Omega}s'\Lambda^s_{\mathcal{S}}(f,gu) \\ &= c_{n,\Omega}[uv]_{A_\infty}\sum_{m=1}^{3^n}\sum_{Q\in\mathcal{S}_m}\frac{1}{|Q|}\int_Q|fv|\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|gu|^s\right)^{\frac{1}{s}}|Q| \\ &= c_{n,\Omega}[uv]_{A_\infty}\sum_{m=1}^{3^n}\sum_{Q\in\mathcal{S}_m}\frac{v(Q)}{|Q|}\frac{1}{v(Q)}\int_Q fv\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|gu|^s\right)^{\frac{1}{s}}|Q|. \end{aligned}$$

Como $v \in A_1$ resulta que la última expresión está estimada por

$$\begin{aligned} &\leq c_{n,\Omega}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_1}\sum_{m=1}^{3^n}\sum_{Q\in\mathcal{S}_m}\frac{1}{v(Q)}\int_Q fv\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q(guv)^s\right)^{\frac{1}{s}}|Q| \\ &\leq c_{n,\Omega}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_1}\sum_{m=1}^{3^n}\sum_{Q\in\mathcal{S}_m}\frac{1}{v(Q)}\int_Q fv\left(\frac{1}{(uv)^s(Q)}\int_Q g(uv)^s\right)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{(uv)^s(Q)}{|Q|}\right)^{\frac{1}{s}}|Q| \\ &\leq c_{n,\Omega}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_1}\sum_{m=1}^{3^n}\sum_{Q\in\mathcal{S}_m}\frac{1}{v(Q)}\int_Q fv\left(\frac{(uv)^s(G\cap Q)}{(uv)^s(Q)}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{(uv)^s(Q)}{|Q|}\right)^{\frac{1}{s}}|Q| \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (4.2.9) y aplicando la desigualdad Reverse Hölder ya que $uv \in A_\infty$ resulta

$$uv(G) \leq c_{n,\Omega}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_1}\sum_{m=1}^{3^n}\sum_{Q\in\mathcal{S}_m}\frac{1}{v(Q)}\int_Q fv\left(\frac{(uv)(G\cap Q)}{uv(Q)}\right)^{\frac{1}{2s}}(uv)(Q)$$

Si notamos $\langle f\rangle^v_{Q,1} = \frac{1}{v(Q)}\int_Q f(x)v(x)dx$ y $\langle g\rangle^{uv}_{Q,2s} = \frac{1}{uv(Q)}\int_Q g^{2s}(x)uv(x)dx$, la última desigualdad queda expresada

$$\leq c_{n,\Omega}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_1}\sum_{m=1}^{3^n}\sum_{Q\in\mathcal{S}_m}\langle f\rangle^v_{Q,1}\left(\langle g\rangle^{uv}_{Q,2s}\right)^{\frac{1}{2s}}uv(Q).$$

En consecuencia, es suficiente probar que para toda familia sparse $\mathcal{S}_m$,

$$\begin{aligned} &c_{n,\Omega}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_1}\sum_{Q\in\mathcal{S}_m}\langle f\rangle^v_{Q,1}\left(\langle g\rangle^{uv}_{Q,1}\right)^{\frac{1}{2}}uv(Q) \\ &\leq c_{n,\Omega}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_1}[u]_{A_1(v)}[v]_{A_\infty},\log\left(e+[uv]_{A_\infty}[v]_{A_1}\right) + \frac{1}{2\cdot 3^n}uv(G). \end{aligned}$$

Fijamos m y por simplicidad denotamos $\mathcal{S}_m = \mathcal{S}$. Dividimos la familia sparse $\mathcal{S}$ como sigue: Sea $Q \in \mathcal{S}_{k,j}$, $k, j \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} 2^{-j-1} &< \langle f \rangle_{Q,1}^{v} \leq 2^{-j}, \\ 2^{-k-1} &< \langle g \rangle_{Q,2s}^{uv} \leq 2^{-k}. \end{aligned}$$

Llamamos

$$s_{k,j} = \sum_{Q \in \mathcal{S}_{k,j}} \langle f \rangle_{Q,1}^{v} \left(\langle g \rangle_{Q,2s}^{uv} \right)^{\frac{1}{2s}} uv(Q).$$

Afirmamos que dependiendo de la forma en que estimemos

$$s_{k,j} \leq \begin{cases} c_n 2^{-k} [u]_{A_1(v)} [v]_{A_\infty} \\ c_n [uv]_{A_\infty} 2^{-k} 2^{2sk} uv\,(G)\,. \end{cases}$$

Para la estimación superior reiteramos lo que hicimos para obtener (4.2.8). Para la estimación inferior usando el Lema 4.2.3,

$$\begin{aligned} s_{k,j} &\leq 2^{-j} 2^{-k} \sum_{Q \in \mathcal{S}_{j,k}} uv(Q) \\ &= c[uv]_{A_\infty} 2^{-j} 2^{-k} uv \left(\bigcup_{Q \in \mathcal{S}_{j,k}} Q \right) \\ &\leq c_n [uv]_{A_\infty} 2^{-j} 2^{-k} uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \,:\, (M_{uv}^{\mathcal{D}} g)^{\frac{1}{2s}} > 2^{-k-1} \right\} \right). \end{aligned}$$

Como $v \in A_1(u)$, teniendo en cuenta los Lemas 4.2.5 y 4.2.4,

$$\begin{aligned} &\leq c_n [uv]_{A_\infty} 2^{-j} 2^{-k} uv \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n \,:\, M_{uv}^{\mathcal{D}} g > 2^{-2(k+1)} \right\} \right) \\ &\leq c_n [uv]_{A_\infty} 2^{-j} 2^{-k} 2^{2s(k+1)} uv\,(G) \\ &\leq c_n [uv]_{A_\infty} 2^{-j} 2^{-k} 2^{sk} uv\,(G)\,. \end{aligned}$$

Combinando ambas estimaciones

$$\begin{aligned} &c_{n,\Omega} [uv]_{A_\infty} [v]_{A_1} \sum_{Q \in \mathcal{S}} \langle f \rangle_{Q,1}^{v} \left(\langle g \rangle_{Q,1}^{uv} \right)^{\frac{1}{2}} uv(Q) = c_{n,\Omega} [uv]_{A_\infty} [v]_{A_1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} s_{k,j} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \text{mín} \left\{ c_{n,\Omega} [uv]_{A_\infty} [v]_{A_1} [u]_{A_1(v)} [v]_{A_\infty} 2^{-k}, c_{n,\Omega} [uv]_{A_\infty}^2 [v]_{A_1} 2^{-j} 2^{sk} 2^{-k} uv\,(G) \right\}. \end{aligned}$$

Finalizamos la demostración usando el Lema 4.2.1 con

$$\gamma_1 = c_{n,\Omega} [uv]_{A_\infty} [v]_{A_1} [u]_{A_1(v)} [v]_{A_\infty}, \qquad \gamma_2 = c_{n,\Omega} [uv]_{A_\infty}^2 [v]_{A_1},$$

$\beta = uv\,(G)$, $\delta = 2s$, $\gamma = 3^n$ y $\rho_1 = \rho_2 = 0$.

Capítulo 5

Estimaciones cuantitativas en desigualdades de tipo débil mixta para Conmutadores

En este capítulo presentamos estimaciones de tipo débil mixta cuantitativas para Conmutadores de operadores de Calderón-Zygmund. La aproximación a los problemas se basa en los resultados de dominación *sparse* obtenidos en [LOR-R17] y en [I-FR-R17], así como el enfoque en [LiPR-RR18]. Todos los resultados de este capítulo se pueden encontrar en [CR-R18].

5.1. Introducción y principales resultados

Berra, Carena y Pradolini obtuvieron en [BCP17] la siguiente estimación de tipo débil mixta para Conmutadores de operadores de Calderón-Zygmund, cuando el símbolo pertenece a la clase BMO:

Teorema 1(Berra, Carena y Pradolini). *Sean u, v pesos tales que $u \in A_1$ y $v \in A_\infty(u)$. Sea T un operador de Calderón-Zygmund y $b \in BMO$. Entonces para todo $t > 0$:*

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{[b,T](fv)}{v}\right| > t\right\}\right) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f|\|b\|_{BMO}}{t}\right) u(x)v(x)dx,$$

donde $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)$.

El resultado anterior fue el punto de partida para que luego probaran por inducción una desigualdad análoga para Conmutadores de orden superior de operadores de Calderón-Zygmund T, denotados por T_b^m, para un entero no negativo m y definido por inducción como sigue: $T_b^0 = T$ y $T_b^m = [b, T^{m-1}]$, donde $b \in Osc_{\exp L^r} \subset BMO$ y $m \geq 1$. El resultado que establecieron fue el siguiente :

Teorema 2(Berra, Carena y Pradolini). *Sean u, v pesos tales que $u \in A_1$ y $v \in A_\infty(u)$. Sea T un operador de Calderón-Zygmund y $b \in BMO$. Entonces para todo $t > 0$*

y para todo entero positivo m:

$$uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : \left|\frac{T_b^m(fv)(x))}{v(x)}\right|>t\right\}\right)\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_m\left(\frac{|f(x)|\|b\|_{BMO}^m}{t}\right)u(x)v(x)dx,$$

donde $\Phi_m(t)=t(1+\log^+ t)^m$.

La prueba de nuestros resultados está basada en controlar puntualmente a los operadores Conmutadores por operadores Sparse, siguiendo las ideas de Lerner, Ombrosi y Rivera-Ríos en [LOR-R17], la cual nos permite obtener un resultado que no sólo da una nueva demostración del Teorema 2 de Berra, Carena y Pradolini sino que además proporciona una estimación cuantitativa.
El primer resultado que establecemos es el siguiente:

Teorema 5.1.1. *Sean* $u\in A_1$ *y* $v\in A_p(u)$ *para algún* $1<p<\infty$.
Si T *es un operador de Calderón-Zygmund y si* m *es un entero positivo,* $r>1$ *y* $b\in Osc_{\exp L^r}$ *entonces*

$$uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : \left|\frac{T_b^m(fv)}{v}\right|>t\right\}\right)\leq c_{n,p}\Gamma_{u,v}^m\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_{\frac{m}{r}}\left(\frac{|f|\|b\|_{Osc_{\exp L^r}}^m}{t}\right)uv \tag{5.1.1}$$

donde

$$\Gamma_{u,v}^m=\sum_{h=0}^m[u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}^{1+\frac{h}{r}}[u]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}\log\left(e+[u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}^{1+\frac{h}{r}}[u]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}[v]_{A_p(u)}\right)^{1+\frac{h}{r}}$$

y $\Phi_\rho(t)=t\left(1+\log^+(t)\right)^\rho$.

En nuestro próximo resultado suponemos que $v\in A_1$ y y $u\in A_1(v)$. No es difícil comprobar que las condiciones anteriores sobre los pesos son equivalentes a suponer que $u\in A_1$ y $v\in A_1(u)$, en consecuencia no hay ganancia en términos de la medida de la clase de pesos considerados. Sin embargo, al igual que para el caso de los operadores de Calderón-Zygmund y de los operadores *rough*, recobramos la mejor estimación conocida para el caso particular en que $v=1$.

Teorema 5.1.2. *Si* $v\in A_1$ *y* $u\in A_1(v)$. *Si* T *es un operador de Calderón-Zygmund y si* m *es un entero positivoi,* $r>1$ *y* $b\in Osc_{\exp L^r}$ *entonces*

$$uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : \left|\frac{T_b^m(fv)}{v}\right|>t\right\}\right)\leq c_{n,p}\Gamma_{u,v}^m\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_{\frac{m}{r}}\left(\frac{|f|\|b\|_{Osc_{\exp L^r}}^m}{t}\right)uv \tag{5.1.2}$$

donde

$$\Gamma_{u,v}^m=\sum_{h=0}^m[v]_{A_1}[v]_{A_\infty}^{\frac{h}{r}}[uv]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}[u]_{A_1(v)}[v]_{A_\infty}\log\left(e+[v]_{A_1}[v]_{A_\infty}^{\frac{h}{r}}[uv]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}\right)^{1+\frac{h}{r}}$$

y $\Phi_\rho(t)=t\left(1+\log^+(t)\right)^\rho$.

Ahora observemos que el Teorema 5.1.2 nos permite obtener la siguiente estimación cuantitativa, cuando $v = 1$, como un caso particular de la que obtuvieron Ibañez-Firnkorn y Rivera Ríos en [I-FR-R17], cuando el símbolo tiene mejores propiedades de decaimiento local que las funciones BMO:

$$u\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |T_b^m(f)| > t\}\right) \leq c_{n,p}[u]_{A_1}[u]_{A_\infty}^{\frac{m}{r}} \log\left(e + [u]_{A_\infty}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{\frac{m}{r}}\left(\frac{|f|\|b\|_{Osc_{\exp L^r}}^m}{t}\right) u. \tag{5.1.3}$$

N. Accomazzo mostró en [A18] que si el Conmutador de una integral singular es de tipo débil $(1,1)$ entonces $b \in L^\infty$ y que la estimación $L\log L$, introducida por C. Pérez en [Per95], implica que $b \in BMO$. Teniendo en cuenta esos resultados nos preguntamos si la condición $b \in Osc_{\exp L^r}$ debiera ser una condición necesaria para que se cumpla (5.1.3) al menos en el caso en que $v = 1$.

5.2. Demostación de los Teoremas

Para la prueba de nuestros resultados utilizaremos la misma técnica que empleamos en el Capítulo 4 para la estimación de los operadores de Calderón-Zygmund y de los operadores integrales singulares *rough* por operadores sparse. También serán necesarias las propiedades de los pesos establecidas en el Capítulo 2 y los Lemas del Capítulo 4 de esta tesis.

5.2.1. Demostración del Teorema 5.1.1

Teniendo en cuenta el Teorema 2.3.2 del Capítulo 2, bastará con probar las estimaciones correspondientes para los operadores sparse $A_{\mathcal{S}}^{m,h}(b,f)$ definidos como:

$$A_{\mathcal{S}}^{m,h}(b,f)(x) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} |b(x) - b_Q|^{m-h} \frac{1}{|Q|}\int_Q |b - b_Q|^h f\chi_Q(x).$$

Sea

$$\begin{aligned} G &= \left\{\frac{A_{\mathcal{S}}^{m,h}(b,fv)(x)}{v(x)} > 1\right\} \setminus \left\{M^{\mathcal{D}}_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(uv)}(f) > \frac{1}{2}\right\} \\ &= \left\{\frac{\sum_{Q\in\mathcal{S}} |b(x) - b_Q|^{m-h}\frac{1}{|Q|}\int_Q |b - b_Q|^h (fv)\chi_Q(x)}{v(x)} > 1\right\} \setminus \left\{M^{\mathcal{D}}_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(uv)}(f) > \frac{1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Supongamos que $\|b\|_{Osc_{\exp L^r}} = 1$. Luego debemos probar que

$$uv(G) \leq c\varphi_{m,h}(u,v)\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{\frac{h}{r}}(|f(x)|)dx + \frac{1}{2}uv(G),$$

donde

$$\varphi_{m,h}(u,v) = [u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}^{1+\frac{h}{r}}[u]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}} \log\left(e + [u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}^{1+\frac{h}{r}}[u]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}[v]_{A_p(u)}\right)^{1+\frac{h}{r}}.$$

Denotamos $g = \chi_G$ y usando que $u \in A_1$ resulta

$$\begin{aligned}
uv(G) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_G uv &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sum_{Q\in\mathcal{S}} |b(x)-b_Q|^{m-h} \frac{1}{|Q|}\int_Q |b-b_Q|^h (fv)(x)\chi_Q(x)}{v(x)}(uv)(x) \\
&\leq \sum_{Q\in\mathcal{S}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |b-b_Q|^h fv \int_Q |b-b_Q|^{m-h} u \\
&\leq \sum_{Q\in\mathcal{S}} \frac{u(Q)}{|Q|}\int_Q |b-b_Q|^h fv \frac{1}{u(Q)}\int_Q |b-b_Q|^{m-h} u \\
&\leq [u]_{A_1} \sum_{Q\in\mathcal{S}} \frac{1}{uv(Q)}\int_Q |b-b_Q|^h fuv \frac{1}{u(Q)}\int_Q |b-b_Q|^{m-h} uuv(Q).
\end{aligned}$$

Vamos a estimar cada una de las integrales de la última expresión usando la *desigualdad de Hölder generalizada* para las funciones de Young $A(t) = t\log(e+t)^{\frac{1}{r}}$ y su complementaria $\bar{A}(t) = \exp(t^r) - 1$, para $r > 1$ (ver (1.3.5), Capítulo 1), luego como $u \in A_\infty$ y $uv \in A_\infty$ usaremos el Lema 2.1.6 del Capítulo 2, y por último $\|b\|_{Osc_{\exp L^r}} = 1$. Entonces la última desigualdad queda estimada por:

$$\begin{aligned}
&\leq c[u]_{A_1} \sum_{Q\in\mathcal{S}} \Big(\||b-b_Q|^h\|_{\exp L^{r/h}(uv),Q} \|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(uv),Q} \\
&\quad \times \||b-b_Q|^{m-h}\|_{\exp L^{r/(m-h)}(u),Q} \|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(u),Q} uv(Q)\Big) \\
&\leq c[u]_{A_1} \|b\|^m_{Osc_{\exp L^r}} [uv]_{A_\infty}^{\frac{h}{r}} [u]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}} \sum_{Q\in\mathcal{S}} \|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(uv),Q} \|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(u),Q} uv(Q) \\
&= c[u]_{A_1} [uv]_{A_\infty}^{\frac{h}{r}} [u]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}} \sum_{Q\in\mathcal{S}} \|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(uv),Q} \|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(u),Q} uv(Q).
\end{aligned}$$

Dividimos la familia *sparse* como sigue: Sea $Q \in \mathcal{S}_{k,j}$, $k, j \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned}
2^{-j-1} &< \|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(uv),Q} \leq 2^{-j}, \\
2^{-k-1} &< \|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(u),Q} \leq 2^{-k}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{Q\in\mathcal{S}} \|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(uv),Q} \|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(u),Q} uv(Q) = \sum_{k,j\geq 0} s_{k,j}$$

donde

$$s_{k,j} = \sum_{Q\in\mathcal{S}_{k,j}} \|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(uv),Q} \|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(u),Q} uv(Q).$$

Afirmamos que, dependiendo de la forma en que estimemos

$$s_{k,j} \leq \begin{cases} c_n [uv]_{A_\infty} 2^{-k} j^{\frac{h}{r}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{\frac{h}{r}}(|f|)\, uv, \\ c_{n,p,m} [uv]_{A_\infty} [v]_{A_p(u)} 2^{-j} k^{\frac{m-h}{r}p} uv\,(G)\,. \end{cases}$$

Para ver la estimación superior usamos que $\|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(u),Q} \leq 2^{-k}$ y el Lema 4.2.2 con $A(t) = \Phi_{\frac{h}{r}}(t) = t\log(e+t)^{\frac{h}{r}}$ y $w = uv$ entonces

$$uv(Q)\|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(uv),Q} \leq c\frac{\Phi_{\frac{h}{r}}(2^{j+1})}{2^{j+1}}\int_{\tilde{E_Q}} \Phi_{\frac{h}{r}}(|f|)\,uv.$$

y

$$\sum_{Q\in\mathcal{S}_{k,j}} \chi_{\tilde{E_Q}}(x) \leq \lceil c_n[uv]_{A_\infty}\rceil\,.$$

Luego

$$\begin{aligned} s_{k,j} &\leq c2^{-k}j^{\frac{h}{r}}\sum_{Q\in\mathcal{S}_{j,k}}\int_{\tilde{E_Q}}\Phi_{\frac{h}{r}}(|f|)\,uv \\ &= c2^{-k}j^{\frac{h}{r}}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_{\frac{h}{r}}(|f|)\sum_{Q\in\mathcal{S}_{j,k}}\chi_{\tilde{E_Q}}uv \\ &\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-k}j^{\frac{h}{r}}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_{\frac{h}{r}}(|f|)\,uv. \end{aligned}$$

Para la estimación inferior usaremos $\|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(uv),Q} \leq 2^{-j}$ y $\|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(u),Q} \leq 2^{-k}$, junto con el Lema 4.2.3

$$\begin{aligned} s_{k,j} &\leq 2^{-j}2^{-k}\sum_{Q\in\mathcal{S}_{j,k}} uv(Q) \\ &= c[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}uv\left(\bigcup_{Q\in\mathcal{S}_{j,k}} Q\right) \\ &\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,M_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(u)}g > 2^{-k-1}\right\}\right). \end{aligned}$$

Como $v \in A_p(u)$ entonces por el Lema 4.2.5

$$\|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(u),Q} \leq \|g\|_{[v]_{A_p(u)}L^p(\log L)^{p\frac{m-h}{r}}(uv),Q}$$

luego teniendo en cuenta la forma en que dividimos la familia sparse resulta:

$$2^{-k-1} < \|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(u),Q} \leq \|g\|_{[v]_{A_p(u)}L^p(\log L)^{p\frac{m-h}{r}}(uv),Q} \leq M_{[v]_{A_p(u)}L^p(\log L)^{p\frac{m-h}{r}}(uv)}g,$$

de donde obtenemos

$$2^{-k-1} < M_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(u)}g \leq M_{[v]_{A_p(u)}L^p(\log L)^{p\frac{m-h}{r}}(uv)}g.$$

La última estimación combinada con el Lema 4.2.4 nos permite argumentar como sigue:

$$\begin{aligned}
s_{k,j} &\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : M_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(u)}g>2^{-k-1}\right\}\right)\\
&\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : M_{[v]_{A_p(u)}L^p(\log L)^{p\frac{m-h}{r}}(uv)}g>2^{-k-1}\right\}\right)\\
&\leq c_{n,p}[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}\int_{\mathbb{R}^n}[v]_{A_p(u)}\Phi_{\frac{m-h}{r}}\left(2^{k+1}g\right)^p(uv)\\
&\leq c_{n,p}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_p(u)}2^{-j}2^{-k}\Phi_{\frac{m-h}{r}}\left(2^{k+1}\right)^p uv(G)\\
&\leq c_{n,p}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_p(u)}2^{-j}2^{-k}2^{kp+p}\log\left(e+2^{k+1}\right)^{\frac{m-h}{r}p}uv(G)\\
&\leq c_{n,p,m}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_p(u)}2^{-j}2^{k(p-1)}k^{\frac{m-h}{r}p}uv(G).
\end{aligned}$$

Luego si combinamos ambas estimaciones obtenemos

$$\begin{aligned}
uv(G) &\leq c[u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}^{\frac{h}{r}}[u]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}s_{k,j}\\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\text{mín}\left\{cc_{n,p,m}[u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}^{1+\frac{h}{r}}[u]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}[v]_{A_p(u)}2^{-j}2^{k(p-1)}k^{\frac{m-h}{r}p}uv(G),\right.\\
&\qquad\left. cc_n[u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}^{1+\frac{h}{r}}[u]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}2^{-k}j^{\frac{h}{r}}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_{\frac{h}{r}}(|f|)\,uv\right\}
\end{aligned}$$

Finalizamos la demostración aplicando el Lema 4.2.1, con $\gamma_1 = cc_n[u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}^{1+\frac{h}{r}}[u]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_{\frac{h}{r}}(|f|)\,uv$, $\gamma_2 = cc_{n,p,m}[u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}^{1+\frac{h}{r}}[u]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}[v]_{A_p(u)}$, $\delta = p$, $\beta = uv(G)$, $\gamma = 1$, $\rho_1 = \frac{h}{r}$ y $\rho_2 = \frac{m-h}{r}p$.

5.2.2. Demostración del Teorema 5.1.2

Al igual que en la demostración del Teorema 5.1.1 para la demostración de nuestro resultado será suficiente probarlo para el operador

$$A_{\mathcal{S}}^{m,h}(b,f)=\sum_{Q\in\mathcal{S}}|b-b_Q|^{m-h}\frac{1}{|Q|}\int_Q|b-b_Q|^h f\chi_Q.$$

Sea

$$G=\left\{\frac{\sum_{Q\in\mathcal{S}}|b(x)-b_Q|^{m-h}\chi_Q(x)\frac{1}{|Q|}\int_Q|b-b_Q|^h(fv)(x)}{v(x)}>1\right\}\setminus\left\{M^{\mathcal{D}}_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(v)}(f)>\frac{1}{2}\right\}$$

Supongamos que $\|b\|_{Osc_{\exp L^r}}=1$. Es suficiente probar que

$$uv(G)\leq c\varphi_{m,h}(u,v)\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_{\frac{h}{r}}(|f(x)|)dx+\frac{1}{2}uv(G),$$

donde

$$\varphi_{m,h}(u,v)=[v]_{A_1}[v]_{A_\infty}^{\frac{h}{r}}[uv]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}[u]_{A_1(v)}[v]_{A_\infty}\log\left(e+[v]_{A_1}[v]_{A_\infty}^{\frac{h}{r}}[uv]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}\right)^{1+\frac{h}{r}}$$

Denotamos $g = \chi_G$ y usando que $v \in A_1$ resulta

$$
\begin{aligned}
uv(G) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_G uv \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sum_{Q\in\mathcal{S}} |b(x)-b_Q|^{m-h}\frac{1}{|Q|}\int_Q |b-b_Q|^h (fv)(x)\chi_Q(x)}{v(x)}(uv)(x) \\
&\leq \sum_{Q\in\mathcal{S}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |b-b_Q|^h fv \int_Q |b-b_Q|^{m-h} u \\
&\leq \sum_{Q\in\mathcal{S}} \frac{1}{v(Q)}\int_Q |b-b_Q|^h fv \frac{v(Q)}{|Q|}\int_Q |b-b_Q|^{m-h} u \\
&\leq [v]_{A_1} \sum_{Q\in\mathcal{S}} \frac{1}{v(Q)}\int_Q |b-b_Q|^h fv \int_Q |b-b_Q|^{m-h} uv \\
&\leq [v]_{A_1} \sum_{Q\in\mathcal{S}} \frac{1}{v(Q)}\int_Q |b-b_Q|^h fv \frac{1}{uv(Q)}\int_Q |b-b_Q|^{m-h} uvuv(Q),
\end{aligned}
$$

utilizando la *desigualdad de Hölder generalizada* para las funciones $A(t) = exp(t^r) - 1$ y su complementaria $\bar{A}(t) = t\log(e+t)^{\frac{1}{r}}$, para $r > 1$, estimamos cada una de las integrales de la última expresión por

$$
\begin{aligned}
&\leq c[v]_{A_1} \sum_{Q\in\mathcal{S}} \Big(\||b-b_Q|^h\|_{\exp L^{r/h}(v),Q} \|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(v),Q} \\
&\quad \times \||b-b_Q|^{m-h}\|_{\exp L^{r/(m-h)}(uv),Q} \|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(uv),Q} uv(Q)\Big),
\end{aligned}
$$

como $v \in A_\infty$ y $uv \in A_\infty$ por el Lema 2.1.6 del Capítulo 2 resulta

$$
\begin{aligned}
&\leq c\|b\|^m_{Osc_{\exp L^r}} [v]_{A_1}[v]^{\frac{h}{r}}_{A_\infty}[uv]^{\frac{m-h}{r}}_{A_\infty} \sum_{Q\in\mathcal{S}} \|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(v),Q} \|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(uv),Q} uv(Q) \\
&= c[v]_{A_1}[v]^{\frac{h}{r}}_{A_\infty}[uv]^{\frac{m-h}{r}}_{A_\infty} \sum_{Q\in\mathcal{S}} \|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(v),Q} \|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(uv),Q} uv(Q).
\end{aligned}
$$

Dividimos la familia sparse como sigue: Sea $Q \in \mathcal{S}_{k,j}$, $k, j \geq 0$ si

$$
\begin{aligned}
2^{-j-1} &< \|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(v),Q} \leq 2^{-j} \\
2^{-k-1} &< \|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(uv),Q} \leq 2^{-k}.
\end{aligned}
$$

Llamamos

$$
s_{k,j} = \sum_{Q\in\mathcal{S}_{k,j}} \|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(v),Q} \|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(uv),Q} uv(Q).
$$

Entonces

$$
\sum_{Q\in\mathcal{S}} \|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(v),Q} \|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(uv),Q} uv(Q) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} s_{k,j}.
$$

Afirmamos que

$$
s_{k,j} \leq \begin{cases} c_n[u]_{A_1(v)}[v]_{A_\infty} 2^{-k} j^{\frac{h}{r}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{\frac{h}{r}}(|f|)\, uv \\ c_{n,p,m} c[uv]_{A_\infty} 2^{-j} 2^{k(p-1)} k^{\frac{m-h}{r}p} uv(G). \end{cases}
$$

Para ver la estimación superior usamos el Lema 4.2.2 con $A(t) = \Phi_{\frac{h}{r}}(t) = t\log(e+t)^{\frac{h}{r}}$ y $w = v$ entonces

$$v(Q)\|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(v),Q} \leq cj^{\frac{h}{r}} \int_{\tilde{E_Q}} \Phi_{\frac{h}{r}}(|f|)\, v.$$

con

$$\sum_{Q\in\mathcal{S}_{k,j}} \chi_{\tilde{E_Q}}(x) \leq \lceil c_n[v]_{A_\infty} \rceil .$$

Además, teniendo en cuenta que $\|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(uv),Q} \leq 2^{-k}$ y $u \in A_1(v)$ resulta

$$\begin{aligned}
s_{k,j} &= \sum_{Q\in\mathcal{S}_{k,j}} \|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(v),Q} \|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(uv),Q} uv(Q)\\
&= \sum_{Q\in\mathcal{S}_{k,j}} v(Q)\|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(v),Q} \|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(uv),Q} \frac{uv(Q)}{v(Q)}\\
&\leq c2^{-k}j^{\frac{h}{r}} \sum_{Q\in\mathcal{S}_{j,k}} \frac{uv(Q)}{v(Q)} \int_{\tilde{E_Q}} \Phi_{\frac{h}{r}}(|f|)\, v.\\
&\leq c[u]_{A_1(v)}2^{-k}j^{\frac{h}{r}} \sum_{Q\in\mathcal{S}_{j,k}} \int_{\tilde{E_Q}} \Phi_{\frac{h}{r}}(|f|)\, uv.\\
&\leq c[u]_{A_1(v)}2^{-k}j^{\frac{h}{r}} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{Q\in\mathcal{S}_{j,k}} \chi_{\tilde{E_Q}} \Phi_{\frac{h}{r}}(|f|)\, uv.\\
&\leq c_n[u]_{A_1(v)}[v]_{A_\infty}2^{-k}j^{\frac{h}{r}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{\frac{h}{r}}(|f|)\, uv.
\end{aligned}$$

Para la estimación inferior, usamos que $\|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(v),Q} \leq 2^{-j}$ y $\|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(uv),Q} \leq 2^{-k}$ entonces por el Lema 4.2.3 resulta

$$\begin{aligned}
s_{k,j} &= \sum_{Q\in\mathcal{S}_{k,j}} \|f\|_{L(\log L)^{\frac{h}{r}}(v),Q} \|g\|_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(uv),Q} uv(Q)\\
&\leq 2^{-j}2^{-k} \sum_{Q\in\mathcal{S}_{j,k}} uv(Q)\\
&= c[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}uv\left(\bigcup_{Q\in\mathcal{S}_{j,k}} Q\right)\\
&\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : M^{\mathcal{D}}_{L(\log L)^{\frac{m-h}{r}}(uv)} g > 2^{-k-1}\right\}\right),
\end{aligned}$$

por el Lema 4.2.4 la última desigualdad queda estimada por

$$\begin{aligned}
&\leq c_{n,p}[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}\Phi_{\frac{m-h}{r}}\left(2^{k+1}g\right) uv(G).\\
&\leq c_n[uv]_{A_\infty}2^{-j}2^{-k}2^{k+1}\log\left(e+2^{k+1}\right)^{\frac{m-h}{r}} uv(G).\\
&\leq c_{n,m}[uv]_{A_\infty}2^{-j}2k^{\frac{m-h}{r}} uv(G).
\end{aligned}$$

Luego, combinando ambas estimaciones resulta

$$
\begin{aligned}
uv(G) &\leq c[v]_{A_1}[v]_{A_\infty}^{\frac{h}{r}}[uv]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} s_{k,j} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \min\Big\{ cc_{n,m}[v]_{A_1}[v]_{A_\infty}^{\frac{h}{r}}[uv]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}+1} 2^{-j}2k^{\frac{m-h}{r}} uv(G), \\
&\qquad\qquad cc_n[v]_{A_1}[v]_{A_\infty}^{\frac{h}{r}}[uv]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}[u]_{A_1(v)}[v]_{A_\infty} 2^{-k} j^{\frac{h}{r}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{\frac{h}{r}}\left(|f|\right) uv \Big\}
\end{aligned}
$$

Finalizamos la demostración aplicando el Lema 4.2.1, con

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= cc_n[v]_{A_1}[v]_{A_\infty}^{\frac{h}{r}}[uv]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}+1}[u]_{A_1(v)}[v]_{A_\infty} 2^{-k} j^{\frac{h}{r}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{\frac{h}{r}}\left(|f|\right) uv, \\
\gamma_2 &= cc_{n,p,m}[v]_{A_1}[v]_{A_\infty}^{\frac{h}{r}}[uv]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}} 2^{-j}2^{k}k^{\frac{m-h}{r}},
\end{aligned}
$$

$\beta = uv\,(G)$, $\delta = 1$, $\gamma = 1$, $\rho_1 = \frac{h}{r}$ y $\rho_2 = \frac{m-h}{r}$.

Capítulo 6

Problemas abiertos y trabajos a futuro

Dedicamos este último capítulo de la tesis a plantear problemas que aún no han sido resueltos y que creemos muy interesantes a estudiar en el futuro. Los problemas que planteamos surgen naturalmente después de investigar resultados conocidos junto con los que nosotros obtuvimos y que fueron presentados en los Capítulos 3, 4 y 5 de esta tesis.

6.1. La Conjetura $L \log\log L$

Un problema que aún no ha sido resuelto es determinar si la función $\psi(t) = t\log\log(\mathrm{e}^{\mathrm{e}}+t)$ es buena para la desigualdad

$$w\left\{x \in \mathbb{R} : |Tf(x)| > \lambda\right\} \leq \frac{c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f(x)| M_{\psi}w(x)\, dx, \tag{6.1.1}$$

donde T es un operador de Calderón-Zygmund y $M_{\psi}w$ es la función maximal para los espacios de Orlicz definida en (1.6.7).
En el Capítulo 3 enunciamos y probamos el siguiente resultado para la Transformada de Hilbert.
Teorema 3.1.1 *Sea ϕ una función de Young function tal que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\phi(t)}{t\log\log(\mathrm{e}^{\mathrm{e}}+t)} = 0.$$

Entonces para toda $c > 0$ existe f, w y $\lambda > 0$ tal que

$$w\left\{x \in \mathbb{R} : |Hf(x)| > \lambda\right\} > \frac{c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f| M_{\phi}w\, dx.$$

Por nuestro teorema sabemos que si $\phi(t)$ es cualquier función que es esencialmente más pequeña que la función $\psi(t) = t\log\log(\mathrm{e}^{\mathrm{e}}+t)$ entonces la desigualdad (6.1.1) no se mantiene. Por otro lado, por el resultado de Domingo-Salazar, Lacey y Rey en [D-SLR16] sabemos que la desigualdad (6.1.1) se mantiene para toda ϕ de crecimiento más rápido que ψ.
Creemos que un problema muy interesante a estudiar es ver qué sucede con la desigualdad (6.1.1) en el caso crítico $\psi(t) = t\log\log(\mathrm{e}^{\mathrm{e}}+t)$.

6.2. Algunos problemas cuantitativos en relación a las desigualdades de tipo débil mixtas

En relación a las versiones cuantitativas de las desigualdades de tipo débil mixtas varios problemas sin resolver quedan aún en la teoría, inclusive para el operador maximal de Hardy-Littlewood. Concretamente aún no se sabe si es cierta la siguiente Conjetura planteada en el trabajo de Ombrosi, Pérez y Recchi en [OPR16]:

Conjetura 1. *Si $u \in A_1$ y $v \in A_1$ entonces existe una constante dimensional c tal que*

$$\left\| \frac{M_d(fv)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c[u]_{A_1}[v]_{A_1}\|f\|_{L^1(uv)} \tag{6.2.1}$$

Tampoco sabemos si se mantiene la siguiente variante de la desigualdad (6.2.1) para operadores de Calderón-Zygmund.

Conjetura 2. *Si T es un operador de Calderón-Zygmund entonces existe una constante dimensional c tal que para cualquier $u \in A_1$ y $v \in A_1$ se verifica*

$$\left\| \frac{T(fv)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq c[u]_{A_1}[v]_{A_1}\log[u]_{A_1}\|f\|_{L^1(uv)} \tag{6.2.2}$$

En el caso de la **Conjetura 1** en el trabajo [OPR16] se prueba que la dependencia en las constantes no puede ser mejor que $[u]_{A_1}[v]_{A_1}$, en consecuencia, no es posible obtener un resultado mejor que el que menciona la Conjetura. Por otro lado, Li, Ombrosi y Pérez en [LiOP17] probaron que la Conjetura es cierta en el caso en que $u = v$.
Con respecto a la **Conjetura 2**, el caso $u = 1$ fue probado y es sharp en los trabajos [LiOP17] y [LNO18].

6.3. Algunos problemas en el caso del Conmutador

En lo que respecta a las estimaciones cuantitativas de las desigualdades de tipo débil mixtas para Conmutadores de operadores de Calderón-Zygmund una cuestión interesante de ver es de qué forma el factor $[uv]_{A_\infty}$ en la estimación del Teorema 5.1 puede evitarse. Nuestra conjetura es la siguiente

Conjetura 3. *Sean $u \in A_1$ y $v \in A_p(u)$ para algún $1 < p < \infty$.*
Si T es un operador de Calderón-Zygmund y si m es un entero positivo, $r > 1$ y $b \in Osc_{\exp L^r}$ entonces

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{T_b^m(fv)}{v}\right| > t\right\}\right) \leq c_{n,p}\Gamma_{u,v}^m \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{\frac{m}{r}}\left(\frac{|f|\|b\|_{Osc_{\exp L^r}}^m}{t}\right) uv \tag{6.3.1}$$

donde

$$\Gamma_{u,v}^m = \sum_{h=0}^{m} [u]_{A_1}[u]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}} \log\left(e + [u]_{A_1}[u]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}[v]_{A_p(u)}\right)^{1+\frac{h}{r}}$$

y $\Phi_\rho(t) = t\left(1 + \log^+(t)\right)^\rho$.

Otro interrogante que nos planteamos es acerca de qué pasaría con el producto si $u \in A_1$, $v \in A_1$, es decir, qué se puede probar en el caso en que el producto uv no es bueno.

Bibliografía

[A18] Accomazzo, N., *A characterization of BMO in terms of endpoint bounds for commutators of singular integrals*, Israel J. Math., 228(2):787-800, 2018.

[AsIS01] Astala, K., Iwaniec, T. and Saksman, E., *Beltrami operators in the plane*, Duke Math. J., 107, 27-56, 2001.

[BaPa87] Bagby R. and Parsons, J., *Orlicz spaces and rearranged maximal functions*,Math.Nachr.,vol.132, 15-27, 1987.

[BM17] Benea, C, and Muscalu, C., *Sparse domination via the helicoidal method*, preprint. Available at https://arxiv.org/abs/1707.05484.

[BS88] Bennett, C. and Sharpley, R., *Interpolation of operators*, Academic Press, New York (1988).

[BFP16] Bernicot, F., Frey, D. and Petermichl, S., *Sharp weighted norm estimates beyond Calderón-Zygmund theory*, Anal. PDE 9, no. 5, 1079-113, 2016.

[B18] Berra, F., *Mixed weak estimates of Sawyer type for generalized maximal operators*, aceptado en PAMS, 2019.

[BCP17] Berra, F., Carena, M. and Pradolini, G., *Mixed weak estimates of Sawyer type for commutators of singular integrals and related operators*, aceptado en Michigan Journal Math, 2019.

[BCP017] Berra, F., Carena, M. and Pradolini, G., *Mixed weak estimates of Sawyer type for fractional integrals and some related operators*, ArXiv e-prints, December 2017.

[Be08] Beznosova, O. V., *Linear bound for the dyadic paraproduct on weighted Lebesgue space* $L^2(w)$, Journal of Functional Analysis 255, no. 4 (2008): 994-1007, 2008.

[B81] Bruna, J. *Boundary interpolation sets for holomorphic functions smooth to the boundary and BMO*,Trans. Amer. Math. Soc. 264, no. 2, 393-409, 1981.

[Bu90] Buckley, Stephen M., *Harmonic analysis on weighted spaces*, Tesis doctoral, The University of Chicago,1990.

[CLO17] Caldarelli, M., Lerner, A. K., and Ombrosi, S., *On a counterexample related to weighted weak type estimates for singular integrals*, Proc. Amer. Math. Soc.145, 7, 3005-3012, 2017.

[CR-R18] Caldarelli, M., Rivera-Ríos, I., *A sparse approach to mixed weak type inequalities*, aceptado en Mathematische Zeitschrift, Octubre 2019.

[CZ52] Calderon, A. P., and Zygmund, A., *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. 88, 85-139, 1952.

[CZ56] Calderon, A. P., and Zygmund, A., *On singular integrals.* Amer. J. Math. 78, 289-309, 1956.

[C88] Christ, M., *Weak type (1,1) bounds for rough operators*, Ann. of Math. 128, no.1, 19-42, 1988.

[CRdF88] Christ, M. and Rubio de Francia, J. L., *Weak type (1,1) bounds for rough operators II*, Invent Math. 93, no.1, 225-237, 1988.

[CF74] Coifman R.R. and Fefferman, C., *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Math, 51, 241-250, 1974. .

[CJRdF83] Coifman, R., Jones, P. W., and Rubio de Francia, J. L., *Constructive decomposition of BMO functions and factorization of Ap weights*, Proc. Amer. Math. Soc. 87, 4, 675-676, 1983.

[CM79] Coifman, R., and Meyer, Y., *Au délà des opérateurs pseudo-différentiels* , Astérisque 57, Société Mathématique de France, 1979.

[CRW76] Coifman, R., Rochberg, R. and Weiss, G., *Factorization theorems for Hardy spaces in several variables*, Ann.of Math., 103, 611-635, 1976.

[C-ACD-PO17] Conde-Alonso, J.M., Culiuc, A., Di Plinio, F. and Y. Ou, Y., *A sparse domination principle for rough singular integrals*, Anal. PDE 10, no. 5, 1255-1284, 2017.

[C-AR16] Conde-Alonso, J.M. and Rey, G., *A pointwise estimate for positive dyadic shifts and some applications*, Math. Ann., 365(3-4): 1111-1135, 2016.

[CorF76] Cordoba, A. and Fefferman, C., *A weighted norm inequality for singular integrals*, Studia Math., 57, 97-101, 1976.

[CS16] Criado, A., and Soria, F., *Muckenhoupt-Wheeden conjectures in higher dimensions*, Studia Math. 233, 25-45, 2016.

[C-UN95] Cruz-Uribe, D., SFO, and Neugebauer, C. J., *The structure of the reverse H?older classes*, Trans. Amer. Math. Soc. 347, 2941-2960, 1995.

[C-UMP05] Cruz-Uribe, D., Martell, J.M. and Pérez, C., *Weighted weak-type inequalities and a conjecture of Sawyer*, Int. Math. Res. Not., (30),1849-1871, 2005.

[C-UMP10] Cruz-Uribe, D., Martell, J.M. and Pérez, C., *Sharp weighted estimates for approximating dyadic operators*, Electronic Research Announcements in Mathematical Sciences 17, 2010.

[C-UMP11] Cruz-Uribe, D., Martell, J.M. and Pérez, C., *Weights, Extrapolation and the Theory of Rubio de Francia*, Series: Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 215, Birkauser, Basel, 2011.

[C-UMP12] Cruz-Uribe, D., Martell, J.M. and Pérez, C., *Sharp weighted estimates for classical operators*, Advances in Mathematics 229, no. 1, 408-441, 2012.

[C-UP00] Cruz-Uribe, D. and Pérez, C., *Two-weight extrapolation via the maximal operator*, J. Funct. Anal., **174**, 1-17, 2000.

[D79] Dahlberg, B.,*On the Poisson integral for Lipschitz and C1-domain*, Studia Math. 66, 1979.

[DiPL14] Di Plinio, F. and Lerner, A., *On weighted norm inequalities for the Carleson and Walsh-Carleson operator*, J. Lond. Math. Soc. (2), **90** (2014), no. 3, 654-674.

[D-SLR16] Domingo-Salazar, C., Lacey, M.T. and Rey, G., *Borderline weak type estimates for singular integrals and square functions*, Bull. Lond. Math. Soc. 48, 1,63-73, 2016.

[Duo93] Duoandikoetxea, J., *Weighted norm inequalities for homogeneous singular integrals*, Trans Amer Math Soc, Vol. 336 N 2, 869-880, 1993.

[Duo00] Duoandikoetxea, J., *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, Vol.29,American Mathematical Society, Providence, 2000.

[DH74] Dynkin, A., Hruščev, S.V., *Interpolation by boundary values of smooth analytic functions*, Soviet Nath. Dokl 15, 1083-1086, 1974.

[FS71] Fefferman, C., and E.M. Stein, *Some maximal inequalities*, Amer. J. Math., **93**, 107–115, 1971.

[Fuj78] Fujii, Nobuhiko, *Weighted bounded mean oscillation and singular integrals*, Math. Japon. 22, no. 5, 529-534, 1978.

[G-CRdF85] Garcia-Cuerva, J., and Rubio de Francia, J. L., *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland Mathematics Studies, vol.116 North-Holland Publishing Co., Amsterdam. Notas de Matemática, 1985.

[Gar81] Garnett, J. B., *Bounded analytic functions*, Pure and Applied Mathematics, vol. 96, Academic Press Inc., New York, 1981.

[Gra04] Grafakos, L., *Classical and Modern Fourier Analysis*, Pearson Education, vol.249, New Jersey, 2004.

[Gra08] Grafakos, L., *Modern Fourier Analysis*, Pearson Education, vol.250, New Jersey, segunda edición, 2008.

[HarLit30] Hardy, G. H. and Littlewood, J. E., *A maximal theorem with function theoretic applications*, Acta Math **54**, 81-116, 1930.

[H88] Hofmann, S., *Weak* $(1,1)$ *boundedness ofsingular integrals with nonsmooth kernel*, Proc. Amer. Math. Soc. 103, no.1, 260-264, 1988.

[HuMW73] Hunt, R., Muckenhoupt, B. y Wheeden, R., *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform*, Trans. Amer. Math. Soc., 176, 227-251, 1973.

[Hyt12] Hytönen, T. P., *The sharp weighted bound for general Calderón-Zygmund operators*, Ann. of Math.(2), vol.175(3), 1473-1506, 2012.

[HP13] Hytönen, T. P., and Pérez, C., *Sharp weighted bounds involving* A_∞, Analysis PDE 6 , 777- 818, 2013.

[HP15] Hytönen, T. P., and Pérez, C., *The* $L\log L^\epsilon$ *endpoint estimate for maximal singular integral operators*, J. Math. Anal. Appl. 428, 1, 605-626, 2015.

[HPR12] Hytönen, T. P., and Pérez, C. and Rela, E., *Sharp reverse Hölder property for* A_∞ *weights on spaces of homogeneous type*, J. Funct. Anal., 263: 3883-3899, 2012.

[HRT17] Hytönen, T. P., Roncal, L., and Tapiola, O.,*Quantitative weighted estimates for rough homogeneous singular integrals*, Israel J. Math. 218, 1, 133-164, 2017.

[Hr84] Hruščev, S.V., *A description of weights satisfying the* A_∞ *condition of Muckenhoupt*, Proc. Amer. Math. Soc., 90 (2), 253-257, 1984.

[I-FR-R17] Ibañez-Firnkorn, G. and Rivera-Ríos, I., *Sparse and weighted estimates for generalized Hörmander operators and commutators*, ArXiv e-prints, April 2017.

[Jan78] Janson, S., *Mean oscillation and commutators of singular integral operators*, Ark. Mat, 16, 263-270, 1978.

[JN61] John, F., and Nirenberg, L., *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math., 14, 415-426, 1961.

[Jo80] Jones, P., *Factorization of* A_p *weights*, Ann. of Math., 111 (2), 511-530, 1980.

[K80] Kenig, C., *Weighted Lp -spaces in Lipschitz domains* , Amer. J. Math. 102, 129-163, 1980.

[Kol25] Kolmogorov, A. N., *Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier*, Fund. Math., 7, 23-28,1925.

[KraRu61] Krasnosel'skiĭi, M. A., and Rutickiĭi, J. B., *Convex functions and Orlicz spaces.*, P. Noordhoff Ltd.,Groningen, 1961.

[Lac17] Lacey, M. T. *An elementary proof of the* A_2 *bound*, Israel J. Math., 217(1): 181-195, 2017.

[LPR10] Lacey, M. T., Petermichl, S. and Reguera, M.C., *Sharp A2 inequality for Haar shift operators*, Mathematische Annalen 348, no. 1: 127-41, 2010.

[L13] Lerner, A. K., *A simple proof of the A_2 conjecture*, Int. Math. Res. Not. IMRN, (14): 3159-3170, 2013.

[L16] Lerner, A. K., *On pointwise estimates involving sparse operators*, New York J. Math. 22, 341-349, 2016.

[L19] Lerner, A. K., *A weak type estimates for rough singular integrals*, Re. Mat. Iberoam. 35, 5, 1583-1602, 2019.

[LN14] Lerner, A. K. and Nazarov, F., *Intuitive dyadic calculus: the basics singular integrals*, to appear in Expo. Math, to appear. Available at http://arxiv.org/abs/1508.05639.

[LNO18] Lerner, A. K., Nazarov, F., and Ombrosi, S., *On the sharp upper bound related to the weak Muckenhoupt-Wheeden conjecture*, ArXiv e-prints (Oct. 2017).

[LO19] Lerner, A. K., Ombrosi, S., *Some remarks on the pointwise sparse domination*, J. Geom. Anal., accepted.

[LOP08] Lerner, A. K., Ombrosi, S. and Pérez, C., *Sharp A1 bounds for Calderón-Zygmund operators and the relationship with a problem of Muckenhoupt and Wheeden*, Int. Math. Res. Not. IMRN, (6):Art. ID rnm161, 11, 2008.

[LOP09] Lerner, A. K., Ombrosi, S. and Pérez, C., *A1 bounds for Calderón-Zygmund operators related to a problem of Muckenhoupt and Wheeden*, Math. Res. Lett., 16, no. 1, 149-156, 2009.

[LOR-R17] Lerner, A. K., Ombrosi, S. and Rivera-Ríos, I. P., *On pointwise and weighted estimates for conmutators of Calderón-Zygmund operators*, Advances in Mathematics, 319, 153-181, 2017.

[LiOP17] Li, K., Ombrosi, S. and Pérez, C., *Proof of an extension of E. Sawyer's conjecture about weighted mixed weak-type estimates*, ArXiv e-prints, March 2017.

[LiOP19] Li, K., Ombrosi, S. and Picardi, B., *Weighted mixed weak-type inequalities for multilinear operators*, Studia Math., 244(2): 203-215, 2019.

[LiPR-RR18] Li, K., Pérez, C., Rivera-Ríos, I. and Roncal, L., *Weighted norm inequalities for rough singular integral operators*, J. Geom. Anal., 2018.

[Muc72] Muckenhoupt, B., *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. 165, 207-226, 1972.

[MW77] Muckenhoupt B. and Wheeden, R., *Some weighted weak-type inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function an the Hilbert transform*, Indiana Univ. Math J.26, 801-816, 1977.

[NRVV18] Nazarov, F., Reznikov, A., Vasyunin, V. y Volberg, A., *On weak weighted estimates of the martingale trasform and a dyaic shift*, Anal. PDE, vol11, 2018.

[OP16] Ombrosi, S., Pérez, C., *Mixed weak type estimates: examples and counterexamples related to a problem of E. Sawyer*, Colloq. Math., 145(2): 259-272, 2016.

[OPR16] Ombrosi, S., Pérez, C. and Recchi, J., *Quantitative weighted mixed weak-type inequalities for classical operators*, Indiana Univ. Math. J., 65(2): 615-640, 2016.

[Pe94] Pérez, C., *Weighted norm inequalities for singular integral operators*, J. London Math. Soc. 49, 296?308, 1994.

[Pe95] Pérez, C., *On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted L^p-spaces with different weights*, Proc. of the London Math. Soc. (3) 71, 135-157, 1995.

[Per95] Pérez, C., *Endpoints estimates for commutators of singular integral operators*, J. Funct. Anal.128, 163-185, 1995.

[PTV10] Pérez, C., Treil, S. and Volberg, A., *On A_2 conjecture and corona decomposition of weights*, preprint, http://arxiv.org/abs/1006.2630, 2010.

[Pe07] Petermichl, Stefanie, *The sharp bound for the Hilbert transform on weighted Lebesgue spaces in terms of the classical A_p characteristic*, American Journal of Mathematics 129, 1355-1375, 2007.

[Pe08] Petermichl, S., *The sharp bound for the Hilbert transform on weighted Lebesgue spaces in terms of the classical Ap-characteristic*, American Journal of Mathematics 129, no. 5: 1355-75, 2008.

[PV02] Petermichl, S. and Volberg, A., *Heating of the Beurling operator: weakly quasiregular maps on the plane are quasiregular*, Duke Mathematical Journal 112, no. 2: 281-305, 2002.

[RaRe91] Rao, M. M., and Ren, Z. D., *Theory of Orlicz spaces.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.

[R11] Reguera, M.C., *On Muckenhoupt-Wheeden conjecture*, Adv. Math., **227**, no. 4, 1436-1450, 2011.

[RT12] Reguera, M. C., and Thiele, C., *The Hilbert transform does not map $L^1(Mw)$ to $L^{1,\infty}(w)$*, Math. Res. Lett. **19**, no. 1, 1-7, 2012.

[Rie27] Riesz, M., *Sur les fonctions conjuguées*, Mathematische Zeitschrift 27, 218-244, 1927.

[RdF84] Rubio de Francia, J. L., *Factorization theory and Ap weights*, Amer. J. Math. 106, 533-547, 1984.

[S85] Sawyer, E., *A weighted weak type inequality for the maximal function*, Proc. Amer. Math. Soc., 93 (4): 610-614, 1985.

[S96] Seeger, A., *Singular integral operators with rough convolution kernels*, J. Amer. Math. Soc. 9, no.1, 95-105, 1996.

[Ste70] Stein, E. M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

[Ste86] Stein, E. M., *Beijing Lectures in Harmonic Analysis*, Annals of Mathematics Studies, Princeton Univ. Press, Princeton, 1986.

[Ste93] Stein, E. M., *Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.

[SS05] Stein, E. M., Shakarchi, R., *Real analysis: measure theory, integration and Hilbert spaces*, Vol.3, Princeton univ press, 2005.

[Wie39] Wiener, N., *The ergodic theorem*, Duke Math J.5 Vol.1, 1-18, 1939.

[Wil87] Wilson, J. Michael, *Weighted inequalities for the dyadic square function with- out dyadic A_∞*, Duke Math. J. 55, no. 1, 19-50, 1987.