



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Tesis de Doctor en Ingeniería

**Dinámica de Sistemas Ingenieriles
con Retardos Temporales**

Franco Sebastián Gentile

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2013



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Tesis de Doctor en Ingeniería

**Dinámica de Sistemas Ingenieriles
con Retardos Temporales**

Franco Sebastián Gentile

BAHÍA BLANCA

ARGENTINA

2013

Dedicado a la memoria de Vicente Donato Gentile.

*Hay que tener perseverancia y sobre todo confianza en sí mismo.
Hay que creer que se está dotado para alguna cosa y que a esta cosa
hay que obtenerla cueste lo que cueste.*

Marie Curie

Prefacio

Esta tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Ingeniería, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Instituto de Investigaciones en Ingeniería Eléctrica “Alfredo Desages” (IIIE, UNS - CONICET), durante el período comprendido entre Abril de 2008 y Octubre de 2012, bajo la dirección del Dr. Jorge L. Moiola y el Ing. Eduardo E. Paolini, ambos profesores del Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras (DIEC).

Franco Sebastián Gentile
Bahía Blanca, Abril de 2013

Agradecimientos

Quiero agradecer profundamente a todas las personas que me apoyaron y acompañaron durante los años de desarrollo de esta tesis. En primer lugar a mi familia, sobre todo a mis padres, por el enorme esfuerzo que hicieron para que yo pueda llegar hasta acá. A mi novia, por estar siempre a mi lado en los largos días de estudio. A mis amigos, especialmente a Gustavo, Ale y Marce, por todos los buenos momentos que pasamos en esta etapa. A mis amigos y compañeros de la universidad, Gustavo, Andrés, Guille, Belén, Diego, Adrián y Ruso, por toda la ayuda que me brindaron, por el tiempo compartido en el laboratorio, por la buena onda de todos los días. También, quiero expresar mi agradecimiento y mi más profunda admiración a mis directores Jorge y Eduardo, que además de ser profesionales excelentes, son personas extraordinarias. Además, quiero agradecer a los jurados de esta tesis, la Dra. Hilda Larrondo, el Dr. Sergio Preidikman y el Dr. Walter Reartes, por el tiempo que dedicaron a la revisión y por sus valiosos aportes.

Franco Sebastián Gentile
Bahía Blanca, Abril de 2013

Resumen

Una gran parte de los sistemas en ingeniería, y en general, de los fenómenos encontrados en la naturaleza, están afectados por retardos temporales. Es decir, que la evolución de estos sistemas está gobernada no sólo por su estado actual sino por su “historia pasada”, es decir, estados previos de los mismos.

Cuando este comportamiento se intenta reflejar utilizando un modelo matemático adecuado, debe hallarse una aplicación (una función) que permita describir la evolución de dicho sistema en función del estado presente y pasado del sistema. Las denominadas Ecuaciones Diferenciales Funcionales Retardadas (EDFRs) resultan apropiadas para desarrollar este tipo de modelos. Estas ecuaciones son más complicadas que las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), que a menudo se utilizan para modelar sistemas en ingeniería y otras áreas. En general, aún para las EDFRs más simples, las nociones de espacio de estados, de condiciones iniciales, etc., no son simples de definir. Normalmente, el estado del sistema pertenece a un espacio infinito-dimensional. También, las ecuaciones características que resultan poseen infinitas soluciones, a diferencia de las ecuaciones características que se obtienen para las EDOs. De este modo, el análisis de EDFRs no es una tarea simple, y requiere el manejo de herramientas que en general son difíciles de comprender por los profesionales de las ingenierías. Es por ello que el desarrollo de técnicas para el estudio de estas ecuaciones, que involucren conceptos de común conocimiento a los ingenieros, cobra vital importancia.

En esta tesis, se propone estudiar EDFRs utilizando una técnica analítica basada en el teorema gráfico de bifurcación de Hopf, que se conoce como Método en Frecuencia (MF). Esta herramienta, en principio se desarrolló para detectar la aparición de soluciones periódicas en sistemas descritos por EDOs y posteriormente se adaptó para estudiar algunos tipos de EDFRs. Partiendo de estos últimos avances, se provee una mejora de la técnica que contempla casos más generales de EDFRs, permitiendo el estudio de muchos sistemas de interés. En primer lugar, se analizan distintas variantes del oscilador de van der Pol sujeto a retardos. Además, como aplicación principal de los resultados, se desarrolla el estudio de sistemas de control de congestión de datos en internet. Complementando los resultados analíticos con los obtenidos

mediante un programa específico, se detectan escenarios dinámicos complejos que no se han reportado antes para estos sistemas.

Por otra parte, se aborda el estudio de sistemas descritos por ecuaciones a diferencias con retardos, utilizando una variante (ya desarrollada) del MF. Se muestra cómo en sistemas relativamente simples, la ocurrencia de dinámicas complejas puede ser provocada (o evitada) manipulando las propiedades del retardo. Se proveen condiciones explícitas para la ocurrencia de la denominada resonancia fuerte 1 : 2, que causa la interacción entre bifurcaciones de doble período y de Neimark-Sacker.

Por último, se provee también una extensión del MF para el estudio de ecuaciones diferenciales con retardos distribuidos (EDRDs). Si bien estas ecuaciones tienen un amplio campo de aplicación en sistemas biológicos, también se han utilizado en redes neuronales y osciladores acoplados. La variante del MF que se provee para el análisis de EDRDs constituye una generalización de los resultados obtenidos para ecuaciones con retardos constantes. Además, el enfoque frecuencial posee ciertas ventajas computacionales cuando se lo compara con otras técnicas más clásicas.

Abstract

A considerable number of systems in engineering, and in general, of natural phenomena, are affected by time-delays. The evolution of this kind of systems is ruled not only by their present states but also by their “past history”, *i.e.*, previous states of these systems.

When we attempt to describe this behavior with a proper mathematical model, we must find a map (a function) which allows us to describe the system evolution from its present and past states. The so-called Retarded Functional Differential Equations (RFDEs) are appropriate for developing such kind of models. These equations are much more complex than Ordinary Differential Equations (ODEs), which are used commonly to model systems in engineering and other areas. In general, even for the simplest EDRFs, the concepts of state-space, initial conditions, etc., are not easy to define. Commonly, the state of the system belongs to an infinite-dimensional space. Also, the derived characteristic equations have infinite solutions, in contrast to the corresponding characteristic equations obtained for ODEs. Thus, the analysis of EDRFs is not a simple task, and requires the command of tools which are in general hard to be understood by professionals in engineering. For this reason, the development of techniques for studying such equations, involving common engineering concepts, is highly important.

In this Thesis, the utilization of an analytic technique called Frequency-Domain Approach (FDA), based on the graphical Hopf bifurcation theorem, is proposed. This tool was firstly developed for detecting periodic solutions in ODEs systems, and later was extended for the study of some kind of RFDEs. Starting from these last advances, we provide an improvement of the technique which includes more general cases of RFDEs, allowing the analysis of many systems of interest. In the beginning, different schemes of the time-delayed van der Pol equation are analyzed. Moreover, as the main application, the study of internet congestion control systems is performed. Complementing the analytic results with those obtained from a specific program, some complex dynamical scenarios, which are not yet reported for this kind of systems, are detected.

On the other hand, the study of systems described by difference equations is covered, through a variant (already developed) of the FDA. It is shown how in relatively simple systems, the appearance of complex dynamics can be provoked (or avoided) handling the delay properties. Explicit conditions for the existence of strong 1 : 2 resonances, which causes the interaction between period-doubling and Neimark-Sacker bifurcations, are provided.

Finally, an extension of the FDA for differential equations with distributed delays (DEDDs) is provided. Despite the fact that these equations are mainly applied in biological systems, they have been also used in neural networks and coupled oscillators. The variant of the FDA provided for DEDDs represents a generalization of results obtained for constant delays equations. Moreover, the FDA has some computational advantages when compared to more classical techniques.

Índice general

Prefacio	I
Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	VII
1. Introducción	1
2. Conceptos preliminares sobre sistemas con retardos	9
2.1. Introducción	9
2.2. Ecuaciones retardadas	9
2.2.1. Existencia y unicidad de las soluciones	13
2.2.2. Nociones de estabilidad	14
2.3. Ecuaciones lineales con retardo	17
2.3.1. La ecuación característica	17
2.3.2. La solución fundamental	17
2.3.3. Estimaciones exponenciales de las soluciones	19
2.3.4. Criterio de estabilidad linealizada	23
2.3.5. Revisitando la ecuación característica	24
2.4. Ecuaciones retardadas desde el punto de vista de los sistemas dinámicos	28
2.4.1. Sistemas semidinámicos definidos por ecuaciones retardadas .	30
2.5. Bifurcaciones	32
2.5.1. Bifurcación de Hopf	34
3. Introducción al Método del Teorema de Hopf Gráfico	41
3.1. Introducción	41
3.2. El Teorema de Hopf gráfico para el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias	42
3.3. Formulación alternativa para el estudio de DDEs	47

3.4. Ejemplos	50
4. Nueva variante del MF para el estudio de DDEs	61
4.1. Introducción	61
4.2. Estructuras relevantes de sistemas con retardos	62
4.2.1. Caso I: Control de Pyragas o TDFC	62
4.2.2. Caso II: Caso general	64
4.3. Ejemplos	68
4.4. Conclusiones del capítulo	84
5. Aplicaciones: Control de Congestión de Datos en Internet	87
5.1. Introducción	87
5.2. Descripción del modelo	89
5.3. Análisis de los diferentes esquemas de AQM	91
5.3.1. Control proporcional (P)	91
5.3.2. Algoritmo “ <i>Random Early Detection</i> ” (RED)	96
5.3.3. Control proporcional-integral (PI)	104
5.4. Conclusiones del Capítulo	111
5.5. Apéndice del Capítulo	112
6. Sistemas discretos con retardos	115
6.1. Introducción	115
6.2. Conceptos preliminares: El MF para sistemas discretos	117
6.3. Esquema de control “Echo type”	118
6.3.1. Análisis con el MF	122
6.3.2. Estabilidad del punto fijo	123
6.3.3. Bifurcaciones de doble período	126
6.3.4. Bifurcaciones de Neimark-Sacker	129
6.3.5. Interacción entre las bifurcaciones PD y NS	131
6.4. Ejemplos	132
6.4.1. Mapa Logístico	132
6.4.2. Modelo discreto de población	137
6.5. Mapa de Hénon generalizado	143

6.5.1.	Análisis en el dominio frecuencia	145
6.5.2.	Estabilidad de los puntos fijos y bifurcaciones	146
6.6.	Conclusiones del capítulo	151
7.	Sistemas con retardos distribuidos	155
7.1.	Introducción	155
7.2.	Retardo discreto y retardo distribuido: un ejemplo simple	157
7.2.1.	Planteo con el Método en Frecuencia	161
7.3.	Estudio de una ecuación más general	162
7.3.1.	Enfoque en el dominio tiempo	162
7.3.2.	Enfoque en el dominio frecuencia	164
7.4.	Ejemplo: Modelo logístico	169
7.4.1.	Distribución uniforme “inmediata”	170
7.4.2.	Distribución uniforme “posterior”	171
7.4.3.	Distribución triangular	174
7.4.4.	Distribución gamma	175
7.5.	Modelos equivalentes y datos iniciales	180
7.6.	Ejemplo: Neuronas acopladas	191
7.6.1.	Caso simétrico ($b_1 = b_2$)	192
7.6.2.	Caso general ($b_1 \neq b_2$)	196
7.7.	Conclusiones del Capítulo	197
8.	Conclusiones y trabajos futuros	199
	Bibliografía	201

Capítulo 1

Introducción

Muchos de los fenómenos encontrados en la naturaleza están afectados por retardos temporales, es decir que su evolución en el tiempo está gobernada no sólo por su estado actual sino también por su “historia pasada”, que corresponde a los estados previos de dichos fenómenos. Para lograr una idea más clara, consideremos en primer lugar procesos que nos afectan cotidianamente. Un ejemplo simple es el de un conductor transitando por una ruta. Ante un imprevisto, el mismo reacciona maniobrando de acuerdo a una decisión, y esta decisión le insume un cierto tiempo. Probablemente, cuanto menor sea este tiempo de reacción, mejor será la capacidad de este conductor de evitar un accidente. En forma similar, los retardos afectan a una enorme cantidad de sistemas, muchas veces sin ser notados. Pensemos en nosotros mismos: nuestro cuerpo es un sistema dinámico de una complejidad abrumadora, y entre la vasta cantidad de procesos que tienen lugar en él, muchos de ellos están afectados por retardos. Por ejemplo, el sistema que regula la cantidad de células sanguíneas está afectado por el tiempo que demoran en madurar las nuevas células que se producen (Mackey & Glass, 1977). Cuando intentamos mantenernos erguidos de pie, utilizamos un sofisticado sistema de control, que sensa la desviación respecto de la posición vertical, procesa esta información y utiliza los músculos y la estructura ósea para generar las fuerzas necesarias en nuestras articulaciones para evitar que caigamos. Por medio de estas acciones, logramos mantener la posición de equilibrio vertical, o en forma equivalente, logramos que esta posición sea *estable*. Sin embargo, dicha acción de control no es instantánea: se tardan alrededor de 40 ms en sensar la desviación, esta información demora entre 27 y 37 ms en la corteza cerebral y además se necesitan entre 3 y 13 ms para procesar una decisión (véase Masani et al., 2008, complementando con Sipahi et al., 2011). Sería lógico pensar que un incremento en los retardos mencionados puede deteriorar el comportamiento de este sistema de control. Por ejemplo, si demoráramos 10 s en sensar y/o actuar sobre nuestra posición

vertical, probablemente nunca podríamos mantenernos de pie.

El efecto de los retardos se ve reflejado, en general, en la mayoría de los sistemas de control. En el contexto de aplicaciones en ingeniería, el control refiere a intentar que un sistema físico (un circuito eléctrico, una reacción química, un brazo robótico, etc.) se comporte de forma deseada. Esto se realiza mediante acciones análogas a las mencionadas en el último ejemplo. Es decir, se necesita medir (sensar) una o más variables de interés, tomar una decisión de control y actuar en forma conveniente sobre un sistema, para lograr cierto objetivo. Todas estas etapas (en mayor o menor medida) demoran un cierto tiempo en llevarse a cabo. Dependiendo de la aplicación específica, de la magnitud de estos retardos, de la velocidad con que evoluciona el sistema que se intenta controlar, etc., muchas veces los efectos de los retardos pueden no ser determinantes y suelen despreciarse cuando se diseña el sistema que realizará el control. Sin embargo, éste no es el caso general, y a menudo los retardos tienen consecuencias severas sobre el comportamiento de estos sistemas de control. Los efectos de los retardos pueden ser dominantes en la dinámica, causando fenómenos complejos indeseables en los sistemas de ingeniería, por ejemplo, en máquinas de corte (Balachandran, 2001), control de tráfico en autopistas (Safonov et al., 2002), sistemas de potencia (Milano & Angel, 2012), etc. Una pregunta lógica es: ¿Los retardos siempre *deterioran* a un sistema dado? Curiosamente, la respuesta es *no*. También existen aplicaciones en las cuales se pueden obtener beneficios de los retardos. Uno de los aportes más importantes en este aspecto se debe al trabajo de Pyragas (1992), que impulsó toda una corriente de investigación en lo que se conoce como TDFC (“*Time-delayed feedback control*”). La técnica consiste en introducir retardos en forma intencional en el esquema de control, y ha dado lugar a una gran cantidad de aplicaciones (Bleich & Socolar, 1996; de Souza Vieira & Lichtenberg, 1996; Just et al., 1997; Atay, 1998; Chen et al., 1999; Kim et al., 2001; Pyragas, 2001; Wang et al., 2001; Hu & Wang, 2002; Pyragas et al., 2004; Just et al., 2007; Schöll & Schuster, 2008; Larger & Dudley, 2010).

Entonces, es necesario conocer en profundidad cómo actúan los retardos sobre el comportamiento dinámico de un sistema, para intentar mitigar sus efectos cuando los mismos son *perjudiciales*, y para sacar provecho cuando resultan *beneficiosos*. Para ello, en primer lugar es necesario desarrollar modelos matemáticos adecuados para

analizar los sistemas en cuestión.

En un sistema con retardo la transición hacia estados futuros está determinada por el estado del sistema en tiempos pasados y posiblemente por el estado actual del mismo. Si este comportamiento se intenta reflejar en un modelo matemático, debe hallarse una aplicación (una función) que describa la evolución del sistema (la derivada temporal de sus estados) en función del estado presente (el estado en un instante “ t ”) y pasado del mismo (el estado en instantes previos a “ t ”).

Las Ecuaciones Diferenciales Funcionales Retardadas (EDFR) (Hale & Verduyn Lunel, 1993) brindan una herramienta adecuada para abordar este problema. El análisis de las soluciones de estas ecuaciones no es una tarea simple, y requiere conocimientos de herramientas que en general son difíciles de comprender y de aplicar por los profesionales de las ingenierías, que muchas veces se ven limitados a la hora de lidiar con este tipo de problemas. Si el sistema dado no posee retardos (en forma equivalente, si los retardos son nulos), la EDFR se reduce a una ecuación diferencial ordinaria (EDO), y en este caso las técnicas de análisis se simplifican enormemente. Por ejemplo, para una EDO de orden n , la condición inicial que permite hallar una solución pertenece a un espacio de dimensión n . Además, la estabilidad de una solución de equilibrio está determinada por los n autovalores de la matriz de linealización correspondiente (Strogatz, 1994). En cambio, como se ampliará en la Capítulo 2, para una EDFR, la “condición inicial” se halla en un espacio infinito-dimensional. Análogamente, la estabilidad de una solución está determinada por un espectro de infinitos autovalores. Inclusive debe definirse cuidadosamente cuál es el “estado” del sistema en un instante dado, y cuál es el espacio en el que se encuentra dicho estado (Hale & Verduyn Lunel, 1993; Smith, 2010). Por otra parte, los textos que tratan las EDFR con aplicaciones a ingeniería son relativamente escasos (véase Stépán, 1989; Hu & Wang, 2002) comparados con la contraparte que se tiene para las EDOs.

El estudio de bifurcaciones consiste en conocer los distintos comportamientos que puede tener un dado sistema, y detectar los cambios que sufre este comportamiento cuando se varían los parámetros de dicho sistema. En este sentido, las herramientas de análisis más difundidas se desarrollaron originalmente para EDOs y posteriormente fueron extendidas para EDFRs. Entre éstas se pueden mencionar la reducción a la forma normal (Faria & Magalhães, 1995), la teoría de promediación (Lehman &

Weibel, 1999), los métodos de múltiples escalas (Das & Chatterjee, 2002), de perturbación incremental (Chung et al., 2006) y de homotopía (Shakeri & Dehghan, 2008; Bel & Reartes, 2012). En lo que sigue, haremos referencia a estas técnicas como formulaciones *en el dominio tiempo*.

En esta tesis, se propone utilizar una técnica basada en el teorema de bifurcación de Hopf gráfico (Mees & Chua, 1979; Mees, 1981; Moiola & Chen, 1996). La ventaja más inmediata de este enfoque, es que se utilizan herramientas que en general son conocidas por los ingenieros, como son la transformada de Laplace, el método de balance de armónicos y el criterio de estabilidad de Nyquist. Esta formulación consiste en plantear la ecuación diferencial en forma de un sistema lineal con una realimentación no lineal¹, representar la parte lineal con una función de transferencia utilizando la Transformada de Laplace, y hallar funciones características complejas que permiten estudiar la dinámica del sistema. Haciendo referencia a esta formulación, diremos que la misma corresponde al *dominio frecuencia*. El origen de la técnica puede situarse en el desarrollo de Allwright (1977) para sistemas de una entrada y una salida (SISO), que más tarde fue ampliado en el contexto del control multivariable con el nombre del teorema de bifurcación de Hopf gráfico (Mees & Chua, 1979; Mees, 1981) para el estudio de oscilaciones en sistemas descritos por EDOs. Por otra parte, para sistemas con retardos o EDFRs, el análisis de estabilidad basado en el principio del argumento fue utilizado por primera vez por Tsytkin (1946) para sistemas de una entrada y una salida. Como se ha mencionado, los retardos temporales afectan a un sinnúmero de sistemas en ingeniería y se conoce que los mismos favorecen la aparición de oscilaciones y otros fenómenos complejos (Stépán, 1989; Hu & Wang, 2002). Por ello, la técnica de Mees & Chua (1979) se extendió de manera natural para resolver estos problemas (Moiola et al., 1996; Moiola & Chen, 1996). Éste fue el punto de partida para el desarrollo de esta tesis.

La técnica se perfeccionó para el análisis específico de EDFRs, como se verá en el Capítulo 4. Utilizando esta mejora de la metodología, se han analizado diferentes esquemas del oscilador de van der Pol sujetos a retardos, para los cuales se han determinado los diagramas de bifurcaciones (diagramas que muestran el comportamiento

¹Otras técnicas que parten de representaciones similares son el método de la función descriptora y los criterios del círculo y de Popov (véase el Cap. 5 de Vidyasagar, 1993 y el Cap. 10 de Khalil, 1996).

que exhibe el sistema para cada combinación de parámetros) y se han obtenido aproximaciones de la amplitud y frecuencia de las oscilaciones que exhiben estos modelos (estos resultados se hallan también en Gentile et al., 2012b).

Como aplicación de los resultados del Capítulo 4, se presenta el estudio de algoritmos de control de congestión de datos en internet. Esta temática representa un problema de actualidad, como puede apreciarse de acuerdo a las numerosas contribuciones que se han generado en los últimos años (Misra et al., 2000; Hollot et al., 2002; Ranjan et al., 2004; Srikant, 2004; Raina & Heckmann, 2007; Rezaie et al., 2010; Liu et al., 2012) para mencionar sólo unos pocos trabajos. El control de congestión de datos se realiza utilizando dos mecanismos que cooperan para este fin. Uno de ellos es efectuado en general por el transmisor, teniendo en cuenta información proveniente del receptor, sin considerar los nodos intermedios involucrados en el flujo de los datos. El otro mecanismo actúa en forma preventiva auxiliando al primero, detectando la congestión en dichos nodos intermedios. Gracias al trabajo de Misra y colaboradores (2000), se cuenta con un modelo denominado “fluid-flow”, que está dado por un sistema de EDFRs, y que permite estudiar su comportamiento por medio de la formulación dada en el Capítulo 4. Complementando los resultados analíticos con los obtenidos con el programa DDE-BIFTOOL (Engelborghs et al., 2001), se han obtenido resultados novedosos acerca de dicha dinámica, como se detalla en el Capítulo 5 (estos resultados también se encuentran en Gentile et al., 2012a).

Otro tipo de sistemas que resultan de interés son los sistemas discretos (SD), los cuales están descritos por las denominadas ecuaciones a diferencias. En este tipo de modelos el tiempo no se considera una variable continua sino que toma valores enteros. Además, muchas veces, dado un sistema continuo, sólo se conocen los valores de las variables en instantes discretos de tiempo, por lo que puede considerarse un modelo discreto o una *discretización* del modelo continuo (por ejemplo, en sistemas muestreados). En algunos casos resulta más simple analizar un sistema discretizado que la correspondiente ecuación diferencial que gobierna la dinámica del sistema continuo. Esto es más evidente para sistemas con retardos, pues los SD resultan de dimensión finita aunque posean retardos, a diferencia de lo que ocurre con las EDFRs, donde aún una ecuación con derivadas de primer orden y con un retardo simple en general resulta de dimensión infinita (véase el Cap. 3 de Bellman & Cooke, 1963). Aunque existen

diferentes formas de discretizar un sistema continuo (véase, por ejemplo Mohamad & Gopalsamy, 2003), en general el retardo puede aproximarse con el agregado de variables adicionales que hacen las veces de una cadena de retardos (véase Vaccaro, 1995). Por otra parte, la dinámica de los SD resulta de interés pues está relacionada con el estudio de estabilidad de órbitas periódicas en sistemas de EDOs y EDFRs (Seydel, 2010). Es por ello que en el Capítulo 6 de esta tesis se considera el estudio de SD con retardos. A partir de un modelo general de un SD escalar, se estudian los efectos de un tipo de control (Buchner & Zebrowski, 2000) y se muestra que el comportamiento del sistema controlado depende fuertemente del retardo que se emplea en la realimentación. Además, se determina que para combinaciones dadas de los parámetros, aparecen dinámicas complejas, como por ejemplo las denominadas resonancias fuertes (Kuznetsov, 2004), que provocan la interacción entre otras bifurcaciones. Estos resultados se aplican a ejemplos representativos como la ecuación logística estudiada en (Buchner & Zebrowski, 2000) y el mapa de Hénon generalizado (Richter, 2002). Algunos de estos resultados también pueden verse en (Gentile et al., 2011).

Finalmente, se aborda el estudio de sistemas con retardos distribuidos. Este tipo de modelos tiene en cuenta el caso en que el retardo no se halla concentrado en un instante fijo, sino que su efecto está distribuido en cierto intervalo de tiempo. Es decir, la evolución del sistema depende de los valores de las variables en todo un continuo de tiempos anteriores al actual (véase Crauste, 2010; Smith, 2010). Estas ecuaciones resultan de gran utilidad en sistemas biológicos, por ejemplo, para modelar la diseminación de epidemias (van der Driessche & Watmough, 2000), la transmisión de virus (Culshaw et al., 2003), el crecimiento de la población de especies (Ruan, 2006), etc. También se encuentran aplicaciones a modelos neuronales (Liao et al., 2001) y osciladores acoplados (Atay, 2003). En estos modelos, la forma en que la historia previa influye sobre la evolución actual está determinada por cierta función de distribución. Usualmente, este tipo de ecuaciones se estudia formulando un modelo equivalente que puede estar dada por una EDO o una EDFR con retardos constantes (véase Ruan, 2006; Smith, 2010). Sin embargo, la factibilidad de obtener estos modelos equivalentes está fuertemente ligada a la forma particular de la función de distribución. Es por ello que resulta de interés contar con una metodología que pueda aplicarse a sistemas con retardos distribuidos en forma independiente de la función de distribución. En

el Capítulo 7, se desarrolla una variante del MF para el estudio de estos sistemas, lo cual proporciona un nuevo campo de aplicación para esta técnica. La variante que se propone es una extensión natural de los resultados del Capítulo 4. Utilizando estos resultados, se estudian ejemplos relativamente simples que permiten comparar la influencia de diferentes funciones de distribución sobre la aparición de oscilaciones.

Capítulo 2

Conceptos preliminares sobre sistemas con retardos

2.1. Introducción

En este capítulo se presentará una síntesis de definiciones y resultados acerca de sistemas con retardos que resultan relevantes para la presentación de esta tesis. Estos conceptos son fundamentales para comprender la dificultad de las ecuaciones diferenciales funcionales retardadas (EDFRs), y las grandes diferencias que éstas tienen, por ejemplo, con las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), que a menudo se utilizan para modelar sistemas en ingeniería y otras disciplinas. Sin duda, uno de los trabajos pioneros en el estudio de EDFRs fue el de Bellman & Cooke (1963), que sentó las bases para muchos desarrollos posteriores. Otro trabajo de enorme importancia en esta temática es el de Hale & Verduyn Lunel (1993). La aplicación de esta teoría a sistemas de control puede encontrarse en (Hu & Wang, 2002). Por último, en el libro de Smith (2010) puede verse una excelente exposición de los principales resultados acerca de EDFRs, con aplicaciones en distintas áreas. Los teoremas que se presentan a continuación se encuentran en estos textos, y por lo tanto aquí se enunciarán sin demostraciones.

2.2. Ecuaciones retardadas

Para introducir algunos conceptos básicos acerca de ecuaciones retardadas, considérese en primer lugar la ecuación simple

$$\dot{x}(t) = bx(t - \tau), \tag{2.1}$$

donde $b, \tau \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ y $\dot{x}(t) := \frac{d}{dt}x(t)$. La primera cuestión que surge es: ¿Cuál es la mínima información inicial que se debe especificar para que la Ec. (2.1) defina una función $x(t)$ para $t \geq 0$? Es decir, ¿cuál es el “valor inicial” que permite obtener una solución de (2.1)? Observando esta ecuación, parece lógico pensar que, al menos, debe especificarse una función en el intervalo $[-\tau, 0]$. Además, es de esperar que las soluciones de la Ec. (2.1) se puedan representar como curvas o trayectorias en algún espacio de estados X . Otra pregunta lógica es: ¿Cuál sería este espacio de estados?

La respuesta no es para nada trivial. El estado del sistema en un instante $t \geq 0$ debe tener toda la información que permita determinar la evolución del mismo para instantes posteriores. A diferencia de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, el estado del sistema (2.1) no puede ser $x(t) \in \mathbb{R}$, ya que el valor de x en un sólo instante t no es suficiente para hallar $x(u)$ para $u > t$. Por ello, se necesita conocer al menos todos los valores de $x(u)$, $\forall u \in [t - \tau, t]$. En forma equivalente, se deben conocer todos los valores de $x(t + u)$, con $u \in [-\tau, 0]$; esto motiva las siguientes definiciones. Para mayor generalidad, supongamos que en (2.1) $x \in \mathbb{R}^n$, y sea $\mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ el espacio de Banach de todas las funciones continuas que aplican el intervalo $[-\tau, 0]$ en \mathbb{R}^n , con la norma de un elemento $\phi \in \mathcal{C}$ dada por

$$\|\phi\|_{\mathcal{C}} := \max_{-\tau \leq u \leq 0} |\phi(u)|.$$

Entonces, se denominará estado de la Ec. (2.1) al elemento de \mathcal{C} definido como

$$\boxed{\mathbf{x}_t(u) := \mathbf{x}(t + u), \quad -\tau \leq u \leq 0,} \quad (2.2)$$

que se ilustra en la Fig. 2.1 para el caso unidimensional ($n = 1$). Si \mathcal{D} es un subconjunto de \mathcal{C} , $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función dada y $\dot{\mathbf{x}}(t) := \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)$, se dirá que la relación

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t), \\ \mathbf{x}(t) = \phi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{cases}} \quad (2.3)$$

es una *ecuación diferencial funcional retardada* (EDFR) con dato inicial $\phi(t)$. Una función $\mathbf{x}(t)$ se dice una solución de (2.3) en $[\sigma - \tau, \sigma + A]$ si existen $\sigma \in \mathbb{R}$ y $A > 0$ tales que $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{C}([\sigma - \tau, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$, $\mathbf{x}_t \in \mathcal{D}$ y $\mathbf{x}(t)$ satisface (2.3) $\forall t \in [\sigma, \sigma + A]$. Entonces, la trayectoria correspondiente a esta solución puede verse como la curva

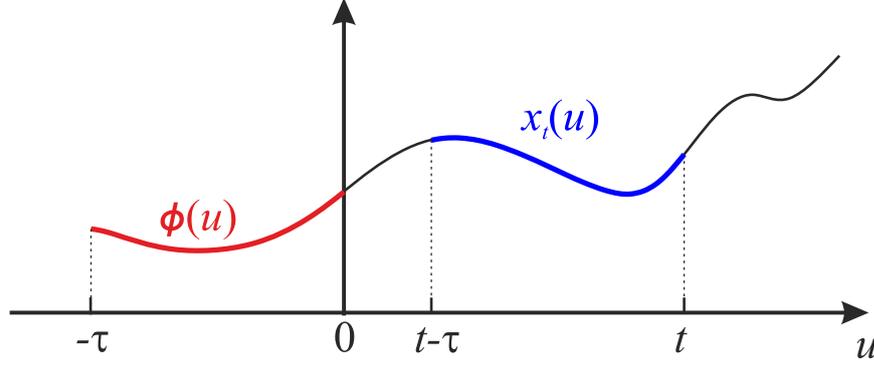


Figura 2.1: Ilustración del estado de un sistema retardado. Para cada valor de t , dicho estado es $x_t(u)$, $t - \tau \leq u \leq t$, que “contiene” todos los valores de la variable dependiente entre $t - \tau$ y t . Para poder hallar la solución, debe especificarse la función $\phi(u)$, $-\tau \leq u \leq 0$.

dada por el mapeo $t \rightarrow \mathbf{x}_t$ contenida en el espacio de estados \mathcal{C} . Nótese que este espacio de estados es de dimensión infinita.

Nota: En (2.3) se considera el caso en el que \mathbf{f} no depende explícitamente de t , y en este caso el sistema se denomina *autónomo*. En un caso más general, se puede tener $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_t)$, y el sistema es *no autónomo*. En lo que sigue, se considerarán sistemas autónomos, a menos que se indique lo contrario.

La Ec. (2.3) es un tipo muy general de ecuación diferencial e incluye a las ecuaciones diferenciales ordinarias ($\tau = 0$)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (2.4)$$

ecuaciones con retardos constantes

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau_1), \dots, \mathbf{x}(t - \tau_m)), \quad (2.5)$$

y ecuaciones integrodiferenciales, como por ejemplo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f} \left(\mathbf{x}(t), \int_{-\tau}^0 k(u) \mathbf{x}(t+u) du \right). \quad (2.6)$$

En esta última ecuación, $k(u)$ se denomina función de distribución o *kernel*, y determina la influencia de los valores de $\mathbf{x}(u)$, para $t - \tau \leq u \leq t$, sobre la evolución del

sistema. La Ec. (2.6) se conoce como ecuación a *retardo distribuido*.

Ejemplo 2.1 Considérese la ecuación logística clásica

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left[1 - \frac{1}{c}x(t) \right], \quad (2.7)$$

que es un caso particular de (2.4). En efecto, si se define el funcional

$$f_1(\phi) := r\phi(0) \left[1 - \frac{1}{c}\phi(0) \right],$$

entonces

$$\begin{aligned} f_1(x_t) &= rx_t(0) \left[1 - \frac{1}{c}x_t(0) \right] \\ &= rx(t) \left[1 - \frac{1}{c}x(t) \right], \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la representación (2.2). Una versión más evolucionada de la Ec. (2.7) es la ecuación logística con retardo

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left[1 - \frac{1}{c}x(t - \tau) \right],$$

donde en este caso se define $f_2(\phi) := r\phi(0) [1 - \phi(-\tau)/c]$. Entonces,

$$\begin{aligned} f_2(x_t) &= rx_t(0) \left[1 - \frac{1}{c}x_t(-\tau) \right] \\ &= rx(t) \left[1 - \frac{1}{c}x(t - \tau) \right]. \end{aligned}$$

Por último, se considera la ecuación logística con retardo distribuido

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left[1 - \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t k(t-u)x(u)du \right],$$

donde $k(\cdot)$ es una función de distribución como en (2.6). Esta función determina la influencia de la historia previa del sistema sobre la evolución del mismo en el instante actual. Mediante el cambio de variables $v = u - t$, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left[1 - \frac{1}{c} \int_{-\infty}^0 k(-v)x(v+t)dv \right].$$

Por lo tanto si se define $f_3(\phi) := r\phi(0) \left[1 - 1/c \int_{-\infty}^0 k(-v)\phi(v)dv \right]$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} f_3(x_t) &= rx_t(0) \left[1 - \frac{1}{c} \int_{-\infty}^0 k(-v)x_t(v)dv \right] \\ &= rx(t) \left[1 - \frac{1}{c} \int_{-\infty}^0 k(-v)x(v+t)dv \right]. \end{aligned}$$

Nota: En los Capítulos posteriores, el estudio se focalizará principalmente en sistemas de la forma (2.5), es decir, sistemas con retardos discretos o constantes. Por lo tanto, para mayor claridad de la presentación, en general se utilizará la notación (2.5) en lugar de la forma funcional dada por (2.3). Además, en la literatura especializada, a las ecuaciones de la forma (2.5) se las llama comúnmente DDEs (“*Delay-Differential Equations*”) y por lo tanto, para mantener homogeneidad con la bibliografía, aquí se adoptará esta denominación.

2.2.1. Existencia y unicidad de las soluciones

Consideremos ahora los resultados concernientes a la existencia y unicidad de las soluciones de la Ec. (2.3), que a conveniencia del lector, se enuncian en forma simplificada como sigue. Para mayores detalles, pueden verse (Hale & Verduyn Lunel, 1993; Hu & Wang, 2002; Smith, 2010).

Teorema 2.1 (Existencia) *Supongamos que \mathcal{D} es un subconjunto abierto de \mathcal{C} y $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $\phi \in \mathcal{D}$, entonces existe una solución de la EDFR (2.3) que pasa por ϕ . \diamond*

Teorema 2.2 (Unicidad) *Supongamos que \mathcal{D} es un conjunto abierto en \mathcal{C} , $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y además Lipschitz en cada subconjunto compacto de \mathcal{D} . Si $\phi \in \mathcal{D}$, entonces existe una **única** solución de (2.3) que pasa por ϕ . \diamond*

La unicidad de las soluciones debe interpretarse en forma cuidadosa. Por ejemplo, si en (2.1) x es escalar, $b = -1$ y $\tau = \pi/2$, se obtiene la ecuación

$$\dot{x}(t) = -x(t - \pi/2),$$

Es claro que dos soluciones diferentes son $x_1(t) = A \sin t$ y $x_2(t) = A \cos t$, $A \in \mathbb{R}$. En primer lugar puede verse que para una DDE lineal, escalar y que tiene sólo derivadas de primer orden, las soluciones pueden ser oscilatorias. Además, si se grafican $x_1(t)$ y $x_2(t)$ vs. t , puede verse que las mismas se intersectan una infinita cantidad de veces, esto es $\forall t_k = \pi(k + 1/4)$, $k \in \mathbb{Z}$. Estos hechos demuestran una diferencia notoria con respecto a los sistemas descritos por EDOs. ¿Acaso la intersección entre soluciones viola el principio de unicidad? La respuesta es *no*. Dicha intersección surge de proyectar soluciones que pertenecen a un espacio de dimensión infinita sobre un espacio finito-dimensional. Entonces, claramente las soluciones de una DDE lineal de primer orden muestran mayor complejidad que las soluciones de una EDO lineal de primer orden. Es por ello que en principio se estudiarán DDEs lineales, y posteriormente se abordará el análisis de DDEs no lineales. Pero en primer lugar es necesario definir algunos conceptos fundamentales; más precisamente, veremos qué se entiende por estabilidad de las soluciones.

2.2.2. Nociones de estabilidad

Consideremos nuevamente la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t), \quad (2.8)$$

y supongamos que $\mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$, donde $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}$ es una función constante. Luego, $\mathbf{x}(t) = \widehat{\mathbf{x}}$ es una solución de (2.8), y haremos referencia a este tipo de soluciones como **soluciones de equilibrio**, o simplemente como **puntos de equilibrio**. Diremos que $\widehat{\mathbf{x}}$ es **estable** si para un dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, \phi) > 0$ tal que si $\phi \in \mathcal{C}$ y $\|\phi - \widehat{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{C}} < \delta$ entonces $\|\mathbf{x}(t, \phi) - \widehat{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{C}} < \epsilon$, donde la notación $\mathbf{x}(t, \phi)$ enfatiza la dependencia de la solución de la función inicial ϕ . Además, la solución $\widehat{\mathbf{x}}$ se dice **asintóticamente estable** si es estable y además existe una constante $M > 0$ tal que si $\phi \in \mathcal{C}$ y $\|\phi - \widehat{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{C}} < M$ entonces $\mathbf{x}(t, \phi) \rightarrow \widehat{\mathbf{x}}$ cuando $t \rightarrow \infty$. Finalmente, $\widehat{\mathbf{x}}$ se dice **inestable** si no es estable. Estas definiciones también pueden aplicarse a soluciones no constantes. De hecho, sea

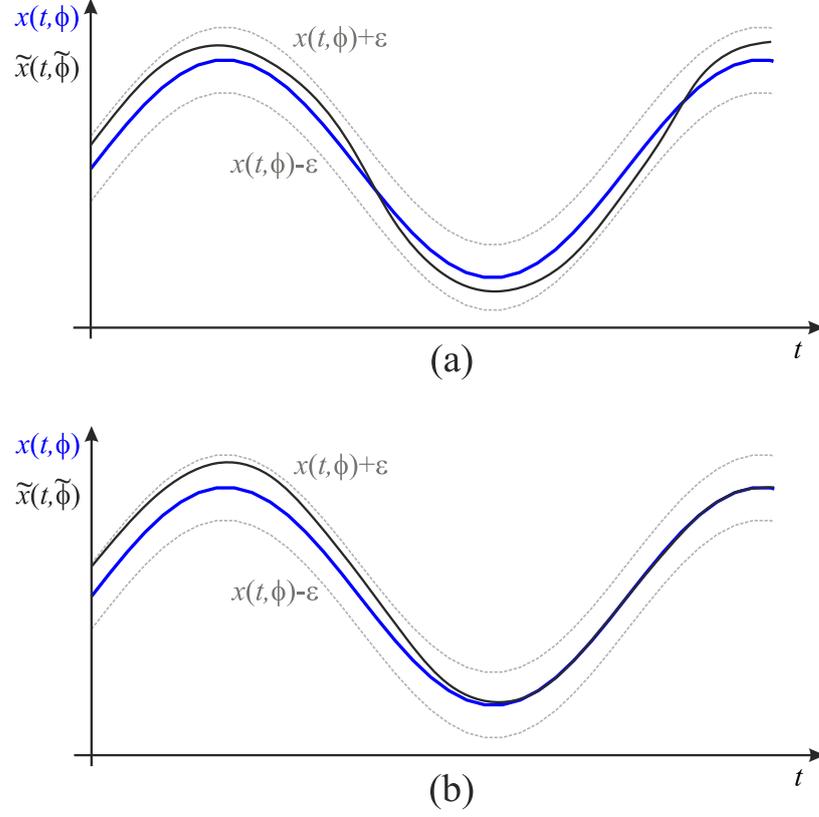


Figura 2.2: Ilustración de los conceptos de estabilidad (a) y estabilidad asintótica (b), en el caso general de una órbita no constante, para x escalar.

$\mathbf{x}(t, \phi)$ una solución de (2.8), y considérese además una solución perturbada $\tilde{\mathbf{x}}(t, \tilde{\phi})$. Sea $\mathbf{z}(t) := \tilde{\mathbf{x}}(t, \tilde{\phi}) - \mathbf{x}(t, \phi)$, entonces

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t, \tilde{\phi})) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \phi)),$$

luego el sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}_t + \mathbf{x}_t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_t), \\ \mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\eta}(t) := \tilde{\boldsymbol{\phi}}(t) - \boldsymbol{\phi}(t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

tiene una solución $\hat{\mathbf{z}} = 0$ para $\boldsymbol{\eta}(t) = 0$, $-\tau \leq t \leq 0$. Entonces, las propiedades de estabilidad de la solución *no constante* $\mathbf{x}(t, \phi)$ de (2.8) son las de la solución $\hat{\mathbf{z}} = 0$ de (2.9). En la Fig. 2.2 se ilustran los conceptos de estabilidad (a) y de estabilidad asintótica (b) para una solución no constante $x(t, \phi) \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R})$.

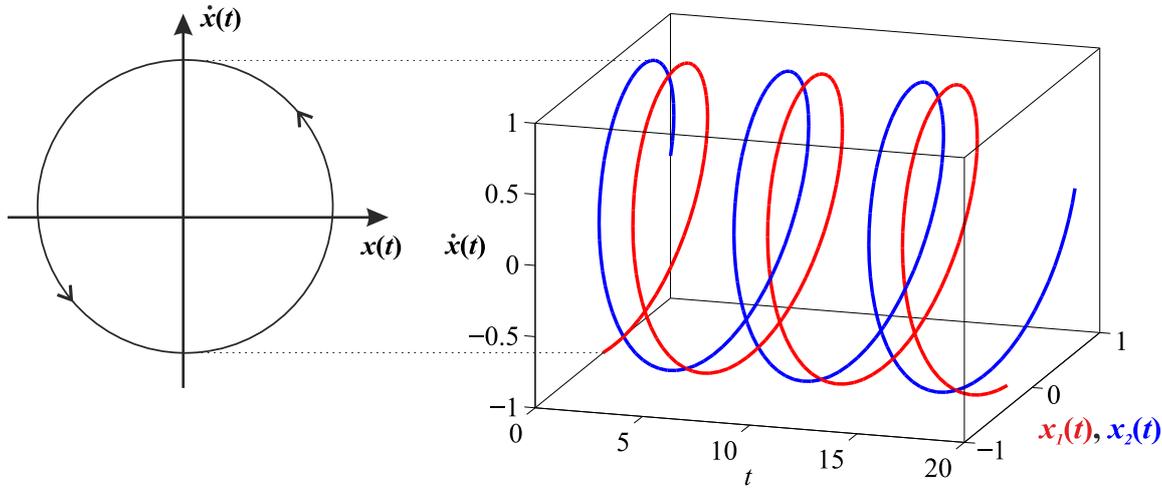


Figura 2.3: Representación de dos soluciones periódicas del sistema $\dot{x}(t) = -x(t - \pi/2)$.

Nótese que si $\tilde{\mathbf{x}}_t$ es una solución periódica de (2.8), entonces $\tilde{\mathbf{y}}_t := \tilde{\mathbf{x}}_{t+\psi}$ también lo es. Si $\psi \neq 0$ es pequeño, entonces $\|\tilde{\mathbf{x}}_0 - \tilde{\mathbf{y}}_0\|$ puede ser pequeño, y sin embargo $\|\tilde{\mathbf{x}}_t - \tilde{\mathbf{y}}_t\|$ no tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Para ilustrar este hecho, se considera nuevamente el sistema $\dot{x}(t) = -x(t - \pi/2)$, del cual se conocía que dos soluciones están dadas por $x_1(t) = \sin(t)$ y $x_2(t) = \cos(t)$. Si estas soluciones se representan como se muestra en el diagrama de la izquierda de la Fig. 2.3, podría pensarse en forma errónea que la distancia entre ambas es cero, pues *ambas soluciones tienen idéntica amplitud y frecuencia*. Sin embargo, $\|x_1(t) - x_2(t)\| \not\rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Entonces, también se considerarán algunas definiciones dadas por Smith (2010). En principio es necesario considerar la siguiente noción de distancia: sea \mathcal{F} el subconjunto de \mathcal{C} dado por $\mathcal{F} := \{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{R}\}$ y $d(\mathbf{x}_0, \mathcal{F}) := \inf \{\|\mathbf{x}_0 - \phi\| : \phi \in \mathcal{F}\}$. Entonces, diremos que una solución periódica $\tilde{\mathbf{x}}_t$ es **orbitalmente estable** (OE) si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $d(\tilde{\mathbf{x}}_0, \mathcal{F}) < \delta$, entonces $d(\tilde{\mathbf{x}}_t, \mathcal{F}) < \epsilon, \forall t \geq 0$. Además, $\tilde{\mathbf{x}}_t$ es **asintóticamente orbitalmente estable** (AOE) si es orbitalmente estable y además existe $\delta_1 > 0$ tal que si $d(\tilde{\mathbf{x}}_0, \mathcal{F}) < \delta_1$ entonces existe ψ tal que $\|\tilde{\mathbf{x}}_t - \tilde{\mathbf{x}}_{t+\psi}\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por último, si la órbita no es OE diremos que la misma es **orbitalmente inestable**.

2.3. Ecuaciones lineales con retardo

Considérese la ecuación

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - \tau), \quad (2.10)$$

donde a, b y $\tau > 0$ son constantes y x es una función escalar. Este sistema es uno de los más simples que pueden encontrarse entre los sistemas con retardos, y sin embargo los resultados que a éste conciernen resultarán de utilidad para comprender el comportamiento de sistemas más complejos.

2.3.1. La ecuación característica

Supongamos que en (2.10) se buscan soluciones de la forma $x(t) = Ae^{st}$, donde $A, s \in \mathbb{C}$. Reemplazando esta expresión en la Ec. (2.10) se obtiene

$$(s - a - be^{-s\tau}) Ae^{st} = 0,$$

de donde, si $A \neq 0$ (soluciones no triviales), debe verificarse

$$h(s; \tau) := s - a - be^{-s\tau} = 0. \quad (2.11)$$

Ésta es una ecuación trascendente, y posee infinitas soluciones. Una propiedad importante de dichas soluciones está dada por el siguiente teorema:

Teorema 2.3 *Si existe una sucesión $\{s_j\}$ de soluciones de (2.11) tal que $|s_j| \rightarrow \infty$ cuando $j \rightarrow \infty$, entonces $\Re\{s_j\} \rightarrow -\infty$ cuando $j \rightarrow \infty$. Luego, existe un número real α tal que todas las soluciones de (2.11) satisfacen $\Re\{s\} < \alpha$ y además, en cualquier banda vertical del plano complejo hay a lo sumo un número finito de dichas soluciones.*

◇

2.3.2. La solución fundamental

Sea $\tilde{x}(t)$ la solución de (2.10) para la función inicial

$$\phi(u) = \begin{cases} 0, & -\tau \leq u < 0, \\ 1, & u = 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

y considérese el siguiente resultado

Teorema 2.4 *La solución $\tilde{x}(t)$ de la Ec. (2.10) con la función inicial (2.12) es la solución fundamental, es decir,*

$$\mathcal{L}\{\tilde{x}(t)\} = \frac{1}{h(s; \tau)},$$

donde $\mathcal{L}\{\cdot\}$ representa la transformada de Laplace. Además, para $\beta > |a| + |b|$, se tiene

$$\tilde{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-iT}^{\beta+iT} \frac{e^{st}}{h(s)} ds, \quad t > 0. \quad \diamond \quad (2.13)$$

La última ecuación no es más que la fórmula para hallar la transformada inversa de Laplace, por medio de una integral de contorno en el plano complejo, donde se integra a lo largo de una recta vertical. Para obtener $\tilde{x}(t)$ de esta forma, dicha recta debe hallarse a la derecha de todas las raíces de $h(s; \tau)$. Nótese que si todas estas raíces se encuentran en el semiplano izquierdo, basta tomar $\beta = 0$ en (2.13). En caso contrario, la condición $\beta > |a| + |b|$ se deduce suponiendo que existe una solución $s = \zeta + i\omega$ de (2.11) con $\zeta > 0$, de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \zeta - a &= be^{-\tau\zeta} \cos(\tau\omega) \\ \omega &= be^{-\tau\zeta} \sin(\tau\omega), \end{aligned}$$

entonces

$$|\zeta| \leq |a| + |b| |\cos(\tau\omega)| e^{-\tau\zeta} \leq |a| + |b| e^{-\tau\zeta} \leq |a| + |b|.$$

Es decir, si $\beta > |a| + |b|$ entonces $\beta > \zeta$ y vale la Ec. (2.13).

Ahora consideremos brevemente el sistema no homogéneo dado por

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - \tau) + f(t), \quad (2.14)$$

donde $f(t)$ es una función continua en \mathbb{R} . Cuando sea necesario, se denotará a la solución correspondiente a la función inicial ϕ como $x(t, \phi, f)$, resaltando la dependencia de la misma de la función f . En particular, $x(t, \phi, 0)$ corresponde a la solución del sistema homogéneo ($f \equiv 0$). El resultado siguiente establece que las soluciones de (2.14) se pueden representar en términos de la solución fundamental.

Teorema 2.5 *La solución $x(t, \phi, f)$ de la Ec. (2.14) se puede representar como*

$$x(t, \phi, f) = x(t, \phi, 0) + \int_0^t \tilde{x}(t-u)f(u)du, \quad t \geq 0. \quad (2.15)$$

Más aún, para $t \geq 0$ se tiene

$$x(t, \phi, 0) = \tilde{x}(t)\phi(0) + b \int_{-\tau}^0 \tilde{x}(t-u-\tau)\phi(u)du. \quad \diamond \quad (2.16)$$

La Ec. (2.16) expresa la solución de la ecuación homogénea ($f \equiv 0$) en términos de la solución fundamental $\tilde{x}(t)$. La Ec. (2.15) se conoce en la literatura como **fórmula de variación de constantes**.

2.3.3. Estimaciones exponenciales de las soluciones

Una de las consecuencias más importantes de la fórmula de variación de constantes es que en conjunto con el Teorema 2.3 permiten demostrar el siguiente resultado:

Teorema 2.6 *Supóngase que para cada τ fijo, $\alpha_0 = \max \{\Re(s) : h(s; \tau) = 0\}$ y que $x(t, \phi)$ denota la solución del sistema homogéneo (2.10) que coincide con ϕ en $[-\tau, 0]$. Entonces, para cualquier $\alpha > \alpha_0$, existe una constante $M = M(\alpha)$ tal que*

$$\|x(t, \phi)\|_c \leq Me^{\alpha t} \|\phi\|_c, \quad t \geq 0.$$

En particular, si $\alpha_0 < 0$, entonces es posible elegir $\alpha_0 < \alpha < 0$, de modo que todas las soluciones tiendan a cero exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$. \diamond

Como consecuencia de este Teorema, se obtiene el siguiente Corolario acerca de la estabilidad de las soluciones:

Corolario 2.7 *La solución $x(t, \phi)$ de (2.10) es asintóticamente estable si y sólo si todas las raíces de $h(s; \tau)$ tienen parte real negativa. \diamond*

Por último, se considera el siguiente resultado que permite detectar cambios en la estabilidad de las soluciones.

Teorema 2.8 Para el sistema (2.10), cuando τ varía, el número y la multiplicidad de las raíces de $h(s; \tau)$ en el semiplano derecho sólo pueden cambiar si una raíz cruza el eje imaginario. \diamond

Además, la solución de (2.10) se dice *estable independientemente del retardo* (EIR), si la misma es asintóticamente estable para cualquier valor del retardo τ . Entonces, una solución de (2.10) será EIR si:

- $h(s; 0)$ tiene todas sus raíces en el semiplano izquierdo.
- $h(i\omega; \tau) = 0$ no tiene solución para $\omega \in \mathbb{R}$.

Nota: En lo que sigue, se hará referencia a la ecuación $h(i\omega; \tau) = 0$ como condición **marginal** (o **crítica**) de estabilidad.

Ejemplo 2.2 Considérese nuevamente el sistema

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - \tau), \quad (2.17)$$

el cual se estudia en detalle en el Capítulo 4 de (Smith, 2010). Claramente, la función $\hat{x} = 0$ es una solución de equilibrio. Se intentará determinar la estabilidad de esta solución. Como se había mencionado, la ecuación característica correspondiente está dada por

$$h(s; \tau) := s - a - be^{-s\tau} = 0.$$

Cuando $\tau = 0$, se tiene $h(s; 0) = s - a - b$ y para que el punto de equilibrio sea estable, debe verificarse que $a + b < 0$. Si $\tau > 0$, la condición marginal de estabilidad $h(i\omega; \tau) = 0$ conduce a

$$i\omega = a + be^{-i\omega\tau} \quad \Rightarrow \quad |b| = |a - i\omega|, \quad (2.18)$$

luego $\omega^2 = b^2 - a^2$; por lo tanto si $b^2 - a^2 < 0$, no existe solución de (2.18) para $\omega \in \mathbb{R}$. Además, si $b^2 - a^2 = 0$ y suponiendo $a + b < 0$ se tiene $h(0; \tau) = -(a + b) = -2a \neq 0$. En resumen, si $a + b < 0$ y $b^2 - a^2 \leq 0$, el sistema (2.17) es EIR.

Además, el Teorema 2.8 provee una forma de detectar cambios de estabilidad del

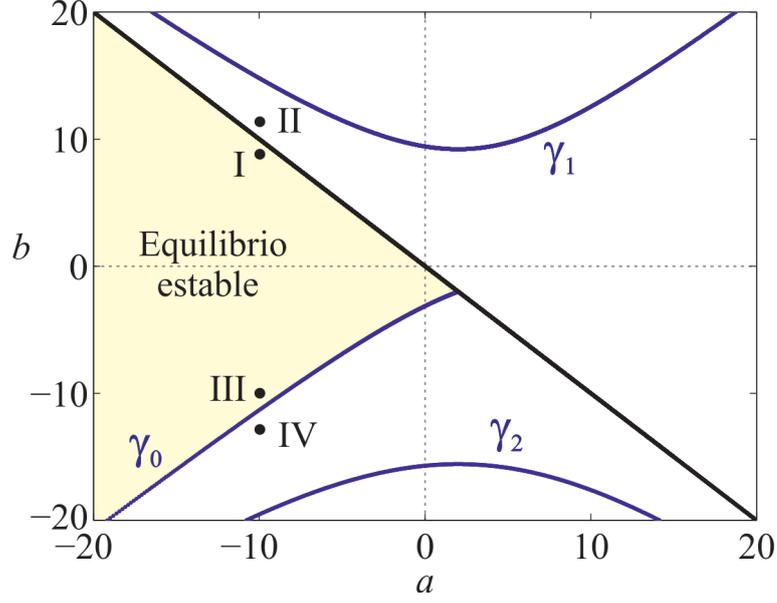


Figura 2.4: Curvas de estabilidad marginal para el sistema (2.17) considerando $\tau = 0.5$. Negro: condición $a + b = 0$. Azul: Curvas obtenidas a partir de (2.21). La región sombreada corresponde al punto de equilibrio estable. Se indican los puntos utilizados para simulaciones numéricas.

punto de equilibrio. A partir de la condición crítica de estabilidad (2.18) y separando en partes real e imaginaria, se obtiene

$$\begin{cases} a + b \cos \omega \tau = 0, \\ \omega + b \sin \omega \tau = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

En primer lugar, puede verse que si $a + b = 0$, entonces $\omega = 0$ es solución de (2.19). Para $\omega \neq 0$, es posible despejar a y b como

$$a = \omega \frac{\cos \omega \tau}{\sin \omega \tau}, \quad b = -\frac{\omega}{\sin \omega \tau}, \quad (2.20)$$

lo cual permite obtener una curva de estabilidad marginal en el plano (a, b) , parametrizada en la frecuencia ω (para cada valor fijo de τ). A partir de la Ec. (2.20) puede verse que los valores críticos de a y b no están definidos para $\omega \tau = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, dicha curva marginal se divide en las porciones γ_n definidas como

$$\gamma_n := \left\{ (a, b) : a = \omega \frac{\cos \omega \tau}{\sin \omega \tau}, \quad b = -\frac{\omega}{\sin \omega \tau}, \quad n\pi < \omega < (n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{N} \cup 0 \right\}. \quad (2.21)$$

La Fig. 2.4 muestra un diagrama en el plano (a, b) correspondiente a $\tau = 0.5$, donde puede observarse la región de estabilidad del equilibrio. Por ejemplo, el punto I corresponde a $(a, b) = (-10, 9)$. Cuando se cruza la curva negra (por ejemplo, variando b), una raíz de $h(s; \tau)$ cruza el eje imaginario (hacia el semiplano derecho) por el punto $s = 0$. En cambio, cuando la estabilidad se pierde cruzando la curva γ_0 (por ejemplo, al pasar del punto III al IV), un par de autovalores complejos conjugados cruza hacia el semiplano derecho. En la Fig. 2.5 se muestran las simulaciones numéricas correspondientes a los puntos (I), (II), (III) y (IV), realizadas con la rutina dde23 de Matlab.

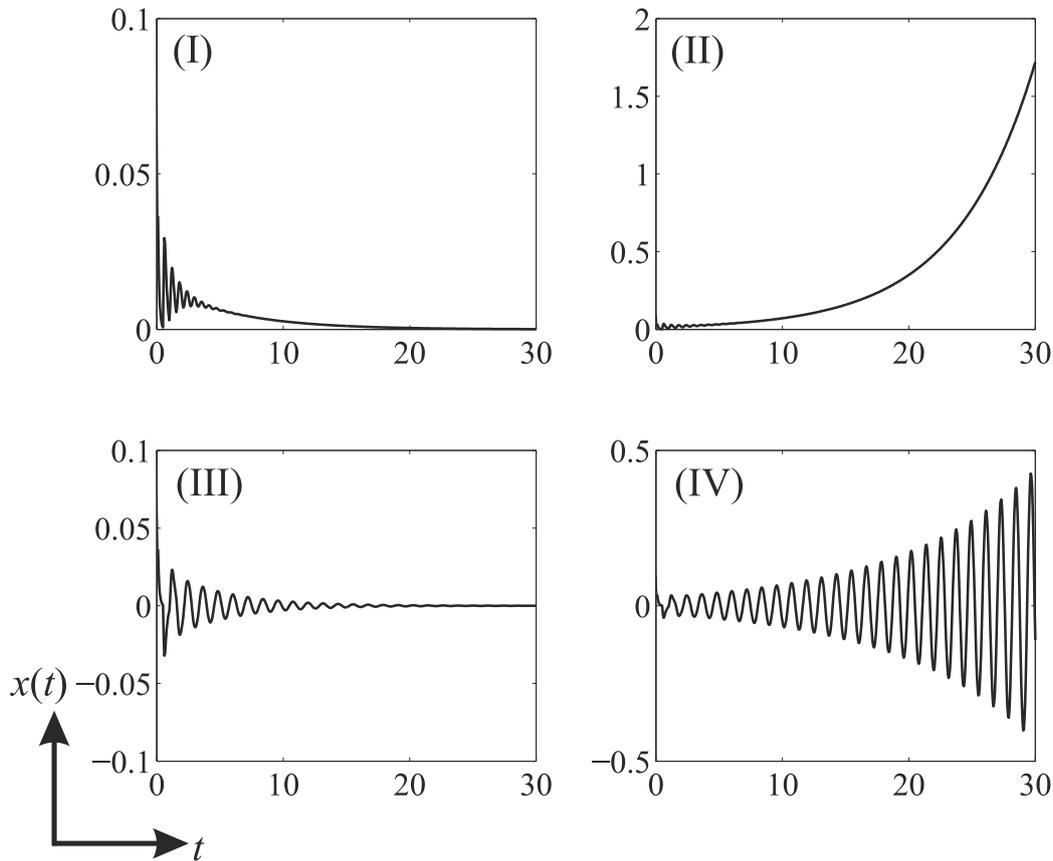


Figura 2.5: Simulaciones numéricas del sistema (2.17), para distintos valores de a y b correspondientes a los puntos indicados en la Fig. 2.4 con $\tau = 0.5$. Para todos los casos la función inicial es $\phi(t) = 0.1$, $-\tau \leq t \leq 0$. (I): $(a, b) = (-10, 9)$; el equilibrio es estable. (II): $(a, b) = (-10, 11)$, la solución crece exponencialmente. (III): $(a, b) = (-10, -10)$; el equilibrio es estable. (IV): $(a, b) = (-10, -12)$; se observan oscilaciones de amplitud creciente.

2.3.4. Criterio de estabilidad linealizada

Considérese nuevamente la ecuación diferencial funcional no lineal

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t), \quad (2.22)$$

donde \mathbf{x}_t y $\mathbf{f}(\cdot)$ se definen como en (2.3). Supongamos que $\widehat{\mathbf{x}}$ es una solución de equilibrio de (2.22) y consideremos una solución perturbada dada por $\mathbf{x}(t) = \widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{z}(t)$. Entonces, se verifica

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{z}_t), \quad (2.23)$$

y claramente $\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{0}$ es solución de esta ecuación. El comportamiento de la solución $\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{0}$ de (2.23) permitirá comprender el comportamiento de la solución $\widehat{\mathbf{x}}$ de (2.22). Supongamos que la función $\mathbf{f}(\cdot)$ se puede escribir como

$$\mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}} + \phi) = \mathbf{L}(\phi) + \mathbf{G}(\phi), \quad \phi \in \mathcal{C},$$

donde $\mathbf{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un operador lineal acotado y $\mathbf{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un operador no lineal tal que

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{G}(\phi)\|_{\mathcal{C}}}{\|\phi\|_{\mathcal{C}}} = 0.$$

Entonces, el sistema lineal

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{L}(\mathbf{z}_t), \quad (2.24)$$

se denomina *ecuación linealizada* alrededor del equilibrio $\widehat{\mathbf{x}}$. Considerando $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{C}^n)$, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.9 *Sea $h(s)$ la ecuación característica correspondiente al sistema linealizado (2.24), y supongamos que*

$$\alpha := \max \{ \Re \{s\} : h(s) = 0 \} < 0.$$

Entonces, la solución de equilibrio $\widehat{\mathbf{x}}$ del sistema no lineal (2.22) es localmente asintóticamente estable. De hecho, existen constantes reales positivas δ y M tales que

$$\|\phi - \widehat{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{C}} < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t, \phi) - \widehat{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{C}} \leq M \|\phi - \widehat{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{C}} e^{\alpha t/2}, \quad t \geq 0.$$

Si $\Re\{s\} > 0$ para alguna raíz característica, entonces $\hat{\mathbf{x}}$ es inestable. \diamond

Por ejemplo, considérese la ecuación escalar no lineal

$$\dot{x}(t) = g[x(t), x(t - \tau)], \quad (2.25)$$

donde $g : \mathcal{C}([- \tau, 0], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable en sus dos variables. Si $g(\hat{x}, \hat{x}) = 0$, para algún $\hat{x} \in \mathbb{R}$, entonces $x(t) \equiv \hat{x} \in \mathcal{C}$ es una solución de equilibrio de (2.25). Escribiendo $f(\phi) = g[\phi(0), \phi(-\tau)]$, se tiene

$$f(\hat{x} + \phi) = a\phi(0) + b\phi(-\tau) + G[\phi(0), \phi(-\tau)],$$

donde

$$a := \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x, y) = (\hat{x}, \hat{x})}, \quad b := \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(x, y) = (\hat{x}, \hat{x})}.$$

Entonces, la ecuación linealizada o *linealización* de (2.25) alrededor de \hat{x} es

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - \tau). \quad (2.26)$$

Es decir, que el análisis presentado en el Ejemplo 2.2 permite conocer la estabilidad del equilibrio \hat{x} del sistema no lineal (2.25). Como el lector habrá notado, para aplicar el Teorema 2.9 es necesario conocer la ecuación característica correspondiente a un sistema lineal general de la forma (2.24), y hasta ahora sólo se ha presentado la ecuación característica del sistema (2.26). ¿Cómo se obtiene la ecuación característica en general? ¿Qué propiedades tiene? Estas son algunas preguntas que se intentarán responder en lo que sigue.

2.3.5. Revisitando la ecuación característica

Consideremos nuevamente un sistema como el (2.24), es decir

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{L}(\mathbf{x}_t), \quad (2.27)$$

donde $\mathbf{x}_t \in \mathcal{C}([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$ y \mathbf{L} es un operador lineal, es decir que verifica $\mathbf{L}(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = \alpha\mathbf{L}(\phi_1) + \beta\mathbf{L}(\phi_2)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{C}$ y además es acotado, es decir que existe una constante positiva M tal que $\|\mathbf{L}(\phi)\|_{\mathcal{C}} \leq M\|\phi\|_{\mathcal{C}}$, $\forall \phi \in \mathcal{C}$. Se comienza buscando soluciones de la Ec. (2.27) de la forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}e^{st}, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \quad (2.28)$$

donde $s \in \mathbb{C}$ y $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$. Entonces, se tiene

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}se^{st} = \mathbf{L}(\mathbf{x}_t) = \mathbf{L}(\mathbf{x}(t+u)) = \mathbf{L}(\mathbf{a}e^{s(t+u)}) = e^{st}\mathbf{L}(\mathbf{a}e^{su}), \quad -\tau \leq u \leq 0,$$

es decir,

$$s\mathbf{a} = \mathbf{L}(\mathbf{a}e^{su}). \quad (2.29)$$

Entonces, si $B_{\mathbb{C}^n} = \{\mathbf{e}_j\}$ denota la base canónica de \mathbb{C}^n , se tiene $\mathbf{a} = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{e}_j$, luego

$$\mathbf{L}(\mathbf{a}e^{su}) = \mathbf{L}\left(e^{su} \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{L}(e^{su} \mathbf{e}_j).$$

A continuación, se define \mathfrak{L}_s como la matriz cuya k -ésima columna es la imagen del vector $e^{su} \mathbf{e}_k$ bajo la transformación lineal \mathbf{L} . Más precisamente,

$$\mathfrak{L}_s := (\mathbf{L}(e^{su} \mathbf{e}_1) \mid \mathbf{L}(e^{su} \mathbf{e}_2) \mid \dots \mid \mathbf{L}(e^{su} \mathbf{e}_n)). \quad (2.30)$$

Luego, $\mathbf{L}(\mathbf{a}e^{su}) = \mathfrak{L}_s \mathbf{a}$, y la Ec. (2.29) resulta $(sI_n - \mathfrak{L}_s)\mathbf{a} = \mathbf{0}$, siendo I_n la matriz identidad de orden $n \times n$. Por lo tanto $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ debe pertenecer al espacio nulo de la matriz $sI_n - \mathfrak{L}_s$, es decir que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}e^{st}$ será una solución no trivial de (2.27) si y sólo si s es solución de la ecuación característica

$$\boxed{h(s; \tau) := \det(sI_n - \mathfrak{L}_s) = 0.} \quad (2.31)$$

Ejemplo 2.3 Considérese la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)), \quad (2.32)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, y $\tau > 0$. Supongamos, además que $\mathbf{f}(\cdot)$ es diferenciable en sus dos argumentos y que $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Entonces, $\widehat{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{0}$ representa una solución de equilibrio del sistema (2.32). Si se definen las matrices de orden $n \times n$

$$A := \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})=(\mathbf{0}, \mathbf{0})}, \quad B := \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})=(\mathbf{0}, \mathbf{0})},$$

la ecuación linealizada del sistema 2.32 alrededor del equilibrio está dada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}(t - \tau). \quad (2.33)$$

La ecuación anterior se puede escribir en la forma (2.27) haciendo

$$\mathbf{L}(\phi) = A\phi(0) + B\phi(-\tau),$$

entonces para una solución de la forma (2.28), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}e^{st} = \mathbf{L}(\mathbf{x}_t) &= A\mathbf{x}_t(0) + B\mathbf{x}_t(-\tau) \\ &= A\mathbf{a}e^{s\tau} + B\mathbf{a}e^{s(t-\tau)} \\ &= (A + Be^{-s\tau})\mathbf{a}e^{st} = \mathfrak{L}_s\mathbf{a}e^{st}, \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{L}_s = A + Be^{-s\tau}$. Luego, a partir de (2.31), puede inferirse que la ecuación característica correspondiente al sistema (2.33) es

$$h(s; \tau) = \det(sI_n - A - Be^{-s\tau}) = 0. \quad (2.34)$$

Por ejemplo, considérese $n = 3$, $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, y el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3^2(t - \tau), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t)x_2(t - \tau) + 2x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) - x_3(t - \tau). \end{cases} \quad (2.35)$$

Entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

luego, de acuerdo con (2.34), la ecuación característica para el sistema linealizado es

$$h(s; \tau) = \det \begin{pmatrix} s - 1 & 1 & 0 \\ 0 & s & -2 \\ 0 & -1 & s + e^{-s\tau} \end{pmatrix} = (s - 1)(s^2 + se^{-s\tau} - 2) = 0. \quad (2.36)$$

Entonces, $s = 1$ es raíz de $h(s; \tau)$. De acuerdo al Teorema **2.9**, el equilibrio $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (0, 0, 0)$ del sistema (2.35) es *inestable*. Nótese que las restantes raíces de $h(s; \tau)$ no son simples de hallar, pues corresponden a las soluciones de la ecuación $q(s; \tau) := s^2 + se^{-s\tau} - 2 = 0$, que es trascendente. La función $q(s; \tau)$ se conoce como *cuasipolinomio* en la variable s . En general, para una DDE, las soluciones de la ecuación característica corresponden a raíces de un cuasipolinomio. Esto muestra la principal dificultad para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio en este tipo

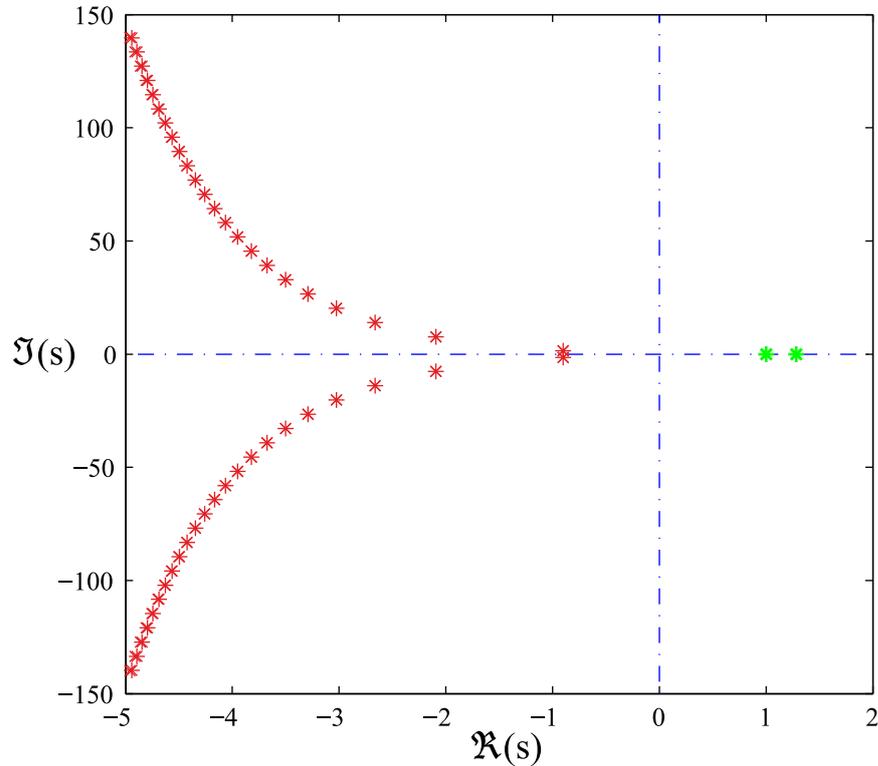


Figura 2.6: Soluciones de la ecuación característica (2.36).

de sistemas. La Fig. 2.6 muestra las soluciones de (2.36), calculadas con el programa DDE-BIFTOOL (Engelborghs et al., 2001). Nótese que además de la solución $s = 1$, existe otra en el semiplano derecho.

A continuación, se presenta un resultado de gran importancia por las consecuencias que tiene acerca de la distribución de las raíces de $h(s; \tau)$. La demostración correspondiente puede verse en (Smith, 2010).

Teorema 2.10 *La función $h(s; \tau)$ dada por (2.31) es entera. \diamond*

Entonces, de la teoría de funciones de variable compleja, se conocen las siguientes propiedades de $h(s; \tau)$:

- Cada raíz de $h(s; \tau)$ tiene orden finito.
- El conjunto de raíces de $h(s; \tau)$ es a lo sumo, numerable.

- El conjunto de raíces de $h(s; \tau)$ no tiene puntos de acumulación, con la posible excepción del punto en el infinito.

Además, los Teoremas 2.3, 2.4, 2.6 y 2.8 siguen valiendo para la ecuación característica general (2.31).

2.4. Ecuaciones retardadas desde el punto de vista de los sistemas dinámicos

En esta sección, se presentarán algunos conceptos desde el punto de vista de los sistemas dinámicos. Muchas de estas definiciones, en esencia, son similares a las usuales para sistemas de EDOs. Sin embargo, como para el caso de EDFRs los estados son elementos de $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, surge la complicación natural de tener que tratar con un espacio de estados de dimensión infinita. En algunas definiciones se utilizan conceptos relacionados con espacios y operadores que pueden consultarse en (Kreyszig, 1978).

En principio, considérese un espacio de estados genérico X , que consiste en el conjunto de estados del sistema. Además, se requiere una aplicación u operador \mathcal{E} que determina cómo evolucionan dichos estados. ¿Cuáles son los argumentos de este operador? ¿Qué propiedades tiene el mismo? Si en un tiempo t_0 el sistema se halla en un estado x , entonces \mathcal{E} debe determinar en qué estado x' se encontrará el sistema en un tiempo posterior t_1 . Entonces, \mathcal{E} depende del tiempo inicial t_0 , del estado x y del tiempo actual t_1 . Luego, se podría escribir $x' = \mathcal{E}(t_1, t_0, x)$. En forma similar, si en un instante posterior t_2 el sistema se encuentra en el estado x'' , entonces $x'' = \mathcal{E}(t_2, t_1, x')$; pero también se puede escribir $x'' = \mathcal{E}(t_2, t_0, x)$. Entonces, para ser consistente con su significado, el operador de evolución debe satisfacer dos propiedades:

$$\boxed{\begin{cases} \mathcal{E}(t_0, t_0, x) = x, & \forall t_0 \in \mathbb{R}, x \in X \\ \mathcal{E}(t_2, t_0, x) = \mathcal{E}(t_2, t_1, \mathcal{E}(t_1, t_0, x)), & \forall t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}, x \in X. \end{cases}} \quad (2.37)$$

Para el caso de EDOs es natural considerar que el tiempo puede tomar cualquier valor real. Esto sucede dado que las soluciones pueden continuarse hacia tiempos anteriores y también hacia tiempos posteriores al instante inicial t_0 . Desafortunadamente, este

no es el caso de los sistemas con retardos. En general, para una EDFR, las soluciones no pueden continuarse hacia tiempos anteriores a t_0 (para mayores detalles véase Hale & Verduyn Lunel, 1993; Smith, 2010). Entonces, se define el conjunto

$$S = \{(t_1, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : t_1 \geq t_0\},$$

y se dirá que $\mathcal{E} : S \times X \rightarrow X$ define un *sistema semidinámico* si verifica las Ecs. (2.37), con $(t_2, t_1), (t_1, t_0) \in S$. La denominación *semidinámico* refleja el hecho de que en general, el operador \mathcal{E} sólo puede determinar la evolución hacia valores crecientes del tiempo, pues no es inversible.

La solución de un sistema semidinámico es una función continua $y : I \rightarrow X$, $I \subset \mathbb{R}$ que “recorre” los estados que toma el sistema. Esto quiere decir que si $t, t_0 \in I$, $t \geq t_0$, entonces $y(t) = \mathcal{E}(t, t_0, y(t_0))$. Luego, $y : [t_0, \infty) \rightarrow X$ definida como $y(t) = \mathcal{E}(t, t_0, x)$ es una solución del sistema semidinámico.

Por otra parte, el sistema semidinámico se denomina *autónomo* si \mathcal{E} satisface

$$\mathcal{E}(t, t_0, x) = \mathcal{E}(t + a, t_0 + a, x), \quad \forall (t, t_0) \in S, a \in \mathbb{R}, x \in X.$$

Tomando $a = -t_0$, resulta $\mathcal{E}(t, t_0, x) = \mathcal{E}(t - t_0, 0, x)$, es decir que el tiempo inicial t_0 no es relevante, sólo lo es el tiempo total transcurrido $t - t_0$. En este caso, es posible definir el operador $\Phi : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ como

$$\Phi(t, x) := \mathcal{E}(t, 0, x), \quad (2.38)$$

de donde $\mathcal{E}(t, t_0, x) = \Phi(t - t_0, x)$. Entonces, las condiciones (2.37) implican que

$$\begin{cases} \Phi(0, x) & = x, \\ \Phi(t, \Phi(t_0, x)) & = \Phi(t + t_0, x), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, x \in X. \end{cases} \quad (2.39)$$

Si el operador Φ definido por (2.38) es continuo y además satisface (2.39), entonces el mismo se denomina un *semiflujo*. Entonces se define la órbita *hacia adelante* como el conjunto

$$O_+(x) := \{\Phi(t, x) : t \geq 0\}.$$

Un elemento e del espacio X se denomina *equilibrio* si $\Phi(t, e) = e$, $\forall t \geq 0$. En forma equivalente, en términos de la órbita, $O_+(e) = \{e\}$. Además, la función $y : \mathbb{R} \rightarrow X$ definida como $y(t) \equiv e$ es una solución del sistema semidinámico. En forma similar que

para sistemas de EDOs, resulta de interés estudiar qué sucede con las soluciones en estado estacionario, es decir, cuando el sistema evoluciona un tiempo suficientemente grande. Con este propósito, se define el *conjunto límite omega* como

$$\Omega(x) := \{z \in X : \exists \{t_n\}, t_n \rightarrow \infty, \Phi(t_n, x) \rightarrow z\}.$$

Un subconjunto $A \in X$ es *positivamente invariante* si para $a \in A$ entonces $O_+(a) \subset A$. Además, A se dice *invariante* si para todo $a \in A$ y $t \geq 0$ existe $a' \in A$ tal que $\Phi(a') = a$. Entonces, se tiene el siguiente resultado (Smith, 2010):

Teorema 2.11 *El conjunto límite omega $\Omega(x)$ es cerrado y positivamente invariante. Si la clausura de $O_+(x)$ es compacta en X , entonces $\Omega(x) \neq \emptyset$ y es compacto, conexo, invariante y además*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x) \rightarrow \Omega(x). \quad \diamond$$

Es decir, cuando $t \rightarrow \infty$, la solución para el dato inicial x tiende al conjunto límite $\Omega(x)$. En forma equivalente, diremos que la órbita tiende al conjunto $\Omega(x)$.

2.4.1. Sistemas semidinámicos definidos por ecuaciones retardadas

Considérese el problema con valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_t), \\ \mathbf{x}_{t_0} = \phi, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \phi \in \mathcal{C}. \end{cases} \quad (2.40)$$

Supóngase que existe una única solución definida para todo $t \geq t_0$ para cada “valor inicial” $(t_0, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}$. Denotemos $\mathbf{x}(t, t_0, \phi)$ a esta solución. El estado del sistema en el instante t es $\mathbf{x}_t(t_0, \phi) \in \mathcal{C}$, definido en forma usual como $\mathbf{x}_t(t_0, \phi)(u) := \mathbf{x}(t + u, t_0, \phi)$, $-r \leq u \leq 0$. Entonces, se verifica:

Proposición 2.12 *Para la solución $\mathbf{x}_t(t_0, \phi)$ de (2.40), el operador*

$$\mathcal{E}(t, t_0, \phi) := \mathbf{x}_t(t_0, \phi),$$

define un sistema semidinámico en \mathcal{C} . \diamond

Esto quiere decir que las soluciones de la EDFR (2.40) corresponden a soluciones del sistema dinámico \mathcal{E} . Además, se deduce que para la ecuación

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t), \\ \mathbf{x}_{t_0} = \phi, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \phi \in \mathcal{C}, \end{cases} \quad (2.41)$$

el sistema semidinámico que se genera es autónomo, es decir,

$$\mathcal{E}(t, t_0, \phi) = \mathbf{x}_t(t_0, \phi) = \mathbf{x}_{t-t_0}(0, \phi).$$

En este caso, la solución verifica $\mathbf{x}(t, t_0, \phi) = \mathbf{x}(t - t_0, 0, \phi)$, y basta considerar el problema con valor inicial (2.41) con $t_0 = 0$. Además, es posible simplificar la notación escribiendo directamente $\mathbf{x}(t, \phi) = \mathbf{x}(t, 0, \phi)$ y $\mathbf{x}_t(\phi) = \mathbf{x}_t(0, \phi)$. También, para el caso autónomo se puede escribir

$$\Phi(t, \phi) = \mathbf{x}_t(\phi), \quad t \geq 0, \phi \in \mathcal{C},$$

y la órbita “hacia adelante” para el dato inicial ϕ está dada por

$$O_+(\phi) = \{\mathbf{x}_t(\phi) : t \geq 0\} \subset \mathcal{C}.$$

Proposición 2.13 *Una función $\mathbf{e} \in \mathcal{C}$ es un equilibrio de (2.41) si y sólo si \mathbf{e} es una función constante tal que $\mathbf{f}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$. En este caso $\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}(0)$, $t \in \mathbb{R}$, es una solución de (2.41). \diamond*

Esta proposición provee una forma simple de calcular los equilibrios de una EDFR. Esto puede hacerse ignorando los retardos. Es decir, a cada función constante $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}$ se le hace corresponder un vector (constante) en \mathbb{R}^n tal que $\hat{\mathbf{x}}(u) = \mathbf{x}$, $-\tau \leq u \leq 0$. Entonces, dada $\mathbf{f} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ en el miembro derecho de (2.41), se define $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces, la EDO dada por $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ tiene los mismos equilibrios que la EDFR (2.41).

Proposición 2.14 *Supóngase que para la solución $\mathbf{x}(t, \phi)$ de (2.41) se verifica que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, \phi) = \mathbf{c}$, para alguna constante $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Si $\hat{\mathbf{c}}$ denota al elemento de \mathcal{C} cuyo valor es idénticamente igual a \mathbf{c} , entonces $\hat{\mathbf{c}}$ es un equilibrio, $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{c}}) = \mathbf{0}$, y además $\Omega(\phi) = \{\hat{\mathbf{c}}\}$. \diamond*

Esto quiere decir que toda solución que tienda a un valor constante cuando $t \rightarrow \infty$, tiene como conjunto límite un equilibrio de (2.41).

2.5. Bifurcaciones

En el Ejemplo 2.2 se estudió la ecuación

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - \tau), \quad (2.42)$$

donde x es una función escalar y $a, b, \tau \in \mathbb{R}$. En dicho ejemplo, se mostró que dependiendo de los valores de las constantes a , b y τ , las soluciones pueden tener distintos comportamientos (véanse las Figs. 2.4 y 2.5). Estas constantes se denominan **parámetros** de la ecuación (2.42). Comúnmente, en los modelos de sistemas físicos, existen parámetros que pueden afectar el comportamiento de estos sistemas. En forma más precisa, el cambio en el comportamiento cualitativo (en la naturaleza y/o estabilidad de las soluciones) de un sistema cuando se varía un parámetro del mismo se denomina **bifurcación**. El parámetro cuya variación provoca este cambio cualitativo se conoce como **parámetro de bifurcación**. Dicho cambio se produce cuando el parámetro de bifurcación pasa por cierto valor, que se denomina valor **crítico**. Para introducir estos conceptos, se considera a continuación un ejemplo simple.

Ejemplo 2.4 Considérese la ecuación

$$\dot{x}(t) = f(x_t) = \mu - x(t)x(t - 1), \quad (2.43)$$

donde x es una función escalar y $\mu \in \mathbb{R}$. En este caso, se considerará que μ es el parámetro de bifurcación. Como se mostró en la sección anterior, para hallar los equilibrios $\hat{x} \in \mathcal{C}$, éstos se plantean como constantes reales. Es decir, los equilibrios de (2.43) están dados por

$$0 = \mu - (\hat{x})^2, \quad (2.44)$$

de donde, si $\mu < 0$ no existen soluciones de equilibrio. Si $\mu > 0$, existen dos puntos de equilibrio, $\hat{x}_1 = +\sqrt{\mu}$ y $\hat{x}_2 = -\sqrt{\mu}$. Entonces, el valor crítico del parámetro μ es

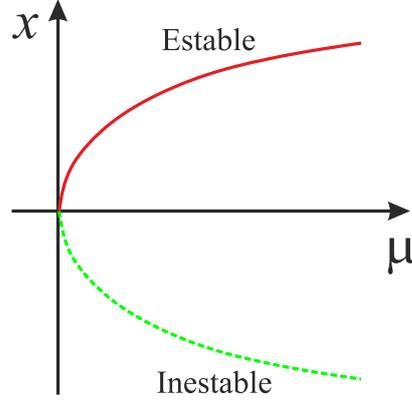


Figura 2.7: Diagrama de bifurcación del sistema 2.43.

$\mu_0 = 0$, y la bifurcación consiste en la aparición de dos puntos de equilibrio cuando μ pasa de $\mu < 0$ a $\mu > 0$. Esta bifurcación se denomina **silla-nodo** o **fold**, y es una de las bifurcaciones más comunes encontradas tanto en EDOs como en DDEs. Además, para el sistema (2.43), se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x(t)} = -x(t-1), \quad \frac{\partial f}{\partial x(t-1)} = -x(t),$$

entonces, para el equilibrio $\hat{x}_1 = +\sqrt{\mu}$ la ecuación linealizada correspondiente es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left. \frac{\partial f}{\partial x(t)} \right|_{\hat{x}_1} x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial x(t-1)} \right|_{\hat{x}_1} x(t-1) \\ &= -\sqrt{\mu}(x(t) + x(t-1)). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Nótese que (2.45) es un caso particular de la ecuación $\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-\tau)$ estudiada en el Ejemplo 2.2, con $a = b = -\sqrt{\mu}$ y $\tau = 1$. Entonces, utilizando (2.11), se obtiene la ecuación característica

$$s + \sqrt{\mu}(1 + e^{-s}) = 0.$$

Además, del Ejemplo 2.2, se tenía que si $a + b < 0$ y $b^2 - a^2 \leq 0$, entonces el punto de equilibrio $\hat{x}_1 = +\sqrt{\mu}$ es estable independientemente del retardo. Nótese que esto es cierto para $a = b = -\sqrt{\mu}$. Por otra parte, para $\hat{x}_2 = -\sqrt{\mu}$, se tiene $a = b = +\sqrt{\mu}$. Nuevamente, a partir de los resultados del Ejemplo 2.2, se deduce que el punto de equilibrio $\hat{x}_2 = -\sqrt{\mu}$ es siempre inestable (véase también la Fig. 2.4). La Fig. 2.7 muestra las soluciones de (2.44) en función del parámetro μ . Esta representación se denomina **diagrama de bifurcación** (en este caso, variando un parámetro). En este

diagrama, x debe interpretarse como la constante cuyo valor es igual al valor de la función $\hat{x} \in \mathcal{C}$ que es una solución de equilibrio de (2.43).

Por otra parte, considérese la ecuación

$$\dot{x}(t) = f(x_t) = \mu - x^2(t-1).$$

Nótese que los puntos de equilibrio de esta ecuación son los mismos que los de la (2.43).

Sin embargo, en este caso se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x(t)} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x(t-1)} = -2x(t-1),$$

y para $\hat{x}_2 = -\sqrt{\mu}$ se tienen $a = 0$ y $b = 2\sqrt{\mu}$. Como $a+b > 0$, a partir del Ejemplo 2.2 se sabe que \hat{x}_2 es inestable. Para $\hat{x}_1 = +\sqrt{\mu}$, resultan $a = 0$ y $b = -2\sqrt{\mu}$. Nuevamente, de acuerdo con los resultados del Ejemplo 2.2, la ecuación característica resulta

$$h(s) = s + 2\sqrt{\mu}e^{-s} = 0.$$

La condición de estabilidad marginal se da cuando esta ecuación posee soluciones sobre el eje imaginario. Haciendo $s = i\omega$, resulta $i\omega = -2\sqrt{\mu}e^{-i\omega}$, y para este caso las Ecs. (2.19) resultan

$$\begin{cases} 0 &= -2\sqrt{\mu} \cos \omega, \\ \omega &= 2\sqrt{\mu} \sin \omega. \end{cases}$$

De la primera ecuación, se obtiene $\omega = \pi/2$, y reemplazando en la segunda se llega a $\mu_1 = (\pi/4)^2 \simeq 0.61685$. Es decir, que para este valor de μ , el punto de equilibrio \hat{x}_1 cambia la naturaleza de su estabilidad. Luego, μ_1 también es un valor crítico del parámetro. Es más, de acuerdo a la Fig. 2.4, con $a = 0$ y $b < 0$, el equilibrio pierde la estabilidad cuando se cruza la curva γ_0 . Entonces, \hat{x}_1 es estable para $\mu < \mu_1$ e inestable para $\mu > \mu_1$. ¿Qué sucede para $\mu > \mu_1$?, ¿Qué tipo de bifurcación tiene lugar? Esto se intentará contestar a continuación.

2.5.1. Bifurcación de Hopf

En esta sección, se presentará uno de los mecanismos más comunes que puede provocar oscilaciones en sistemas de ingeniería y en sistemas dinámicos en general: la

bifurcación de Hopf. La característica distintiva de esta bifurcación es que un punto de equilibrio cambia la naturaleza de su estabilidad dando lugar a una solución periódica (no constante) cuando se varía un parámetro. Además, el cambio de estabilidad del equilibrio se produce cuando, al variar dicho parámetro, un par de soluciones complejas conjugadas de la ecuación característica cruza el eje imaginario.

Considérese la ecuación retardada

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t; \mu), \quad (2.46)$$

donde $\mathbf{x}_t \in \mathcal{C}$, μ es un parámetro real y $\mathbf{f} : \mathcal{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función no lineal suave (al menos \mathcal{C}^2)¹ en sus argumentos. Además, como antes, el espacio \mathcal{C} está provisto de la norma $\|\phi\|_{\mathcal{C}} = \max_{u \in [-\tau, 0]} |\phi(u)|$. Supongamos que el sistema (2.46) tiene al menos una solución de equilibrio, que por simplicidad se considerará $\hat{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{0}$. Es decir, $\mathbf{f}(\mathbf{0}; \mu) = \mathbf{0}$, $\forall \mu$. Se define un operador lineal $\mathbf{L} : \mathcal{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$\boxed{\mathbf{L}(\mu)\phi := \mathbf{D}_{\phi}\mathbf{f}(\mathbf{0}; \mu)\phi}, \quad (2.47)$$

donde $\mathbf{D}_{\phi}\mathbf{f}(\mathbf{0}; \mu) := \partial\mathbf{f}(\phi; \mu)/\partial\phi|_{\phi=\mathbf{0}}$. Luego, se define

$$\mathbf{G}(\phi; \mu) := \mathbf{f}(\phi; \mu) - \mathbf{L}(\mu)\phi,$$

y de esta forma se tiene que

$$\lim_{\phi \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{G}(\phi; \mu)\|_{\mathcal{C}}}{\|\phi\|_{\mathcal{C}}} = 0,$$

es decir que $\mathbf{G}(\phi; \mu)$ contiene los términos de “alto orden”. Además, para el operador $\mathbf{L}(\mu)$, se define la matriz $\mathfrak{L}_s(\mu)$ como en (2.30) y se considera la ecuación característica $h(s; \mu) = 0$ dada por (2.31), es decir, $h(s; \mu) = \det[sI_n - \mathfrak{L}_s(\mu)] = 0$, donde se enfatiza la dependencia respecto del parámetro de bifurcación μ . Supongamos que existe un valor μ_0 de dicho parámetro tal que para $\mu < \mu_0$, todas las raíces de $h(s; \mu)$ tienen parte real negativa. Supongamos también que cuando μ se incrementa y pasa por el valor μ_0 , existe un par de raíces complejas conjugadas de $h(s; \mu)$ que cruza el eje imaginario hacia el semiplano derecho. Es decir que la solución de equilibrio $\hat{\mathbf{x}}$ se

¹Diremos que f es \mathcal{C}^n si tiene derivadas continuas de orden n .

vuelve marginalmente estable cuando el parámetro alcanza el valor μ_0 , e inestable cuando $\mu > \mu_0$. El siguiente teorema establece que esta transición puede dar lugar a soluciones oscilatorias en el sistema (2.46).

Teorema 2.15 (Teorema de bifurcación de Hopf) *Supongamos que $\mathbf{f}(\phi; \mu)$ tiene derivadas continuas al menos de segundo orden en sus dos variables y que $\mathbf{f}(\mathbf{0}; \mu) = \mathbf{0}$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$. Supongamos además que:*

(H1) *Para μ en un entorno de μ_0 , $h(s; \mu)$ tiene un par de raíces $s(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$, donde $s(\mu)$ es continuamente diferenciable, y $s(\mu_0) = \pm i\omega_0$, $\omega_0 := \omega(\mu_0)$. Además, $h(s; \mu_0)$ no tiene otras raíces que sean múltiplos de $i\omega_0$.*

(H2) *El par de autovalores complejos cruza el eje imaginario para $\mu = \mu_0$, es decir*

$$D_\mu \alpha(\mu)|_{\mu=\mu_0} > 0.$$

Entonces,

- (i)** *Existe una constante $\epsilon_0 > 0$ y funciones reales continuamente diferenciables $\mu(\epsilon)$ y $T(\epsilon) > 0$ tales que $\mu(0) = \mu_0$ y $T(0) = 2\pi/\omega_0$, y $\tilde{\mathbf{x}}_t(\epsilon)$ periódica de período $T(\epsilon)$, tal que $\tilde{\mathbf{x}}_t(\epsilon)$ es solución de (2.46) y $\tilde{\mathbf{x}}_t(\epsilon) = \epsilon \tilde{\mathbf{y}}_t(\epsilon)$, siendo $\tilde{\mathbf{y}}_t(\epsilon)$ la solución periódica de período $2\pi/\omega_0$ del sistema $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{L}(\mu_0)\mathbf{y}_t$.*
- (ii)** *Existen constantes positivas A, δ_μ y δ_T tales que si (2.46) tiene una solución periódica $\tilde{\mathbf{x}}'_t$ de período T' para $|\mu - \mu_0| < \delta_\mu$ con $\|\tilde{\mathbf{x}}'_t\|_C < A$ y $|T' - 2\pi/\omega_0| < \delta_T$, entonces $\mu = \mu(\epsilon)$ y $\tilde{\mathbf{x}}'_t = \tilde{\mathbf{x}}_{t+\psi}(\epsilon)$, para algún $|\epsilon| < \epsilon_0$ y algún ψ .*
- (iii)** *Si \mathbf{f} es \mathcal{C}^5 , entonces*

$$\begin{aligned} \mu(\epsilon) &= \mu_0 + \mu_1 \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4), \\ T(\epsilon) &= 2\pi \left[\frac{1}{\omega_0} + \frac{\epsilon^2}{\omega_1} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \right]. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Además, si todas las raíces de $h(s; \mu_0)$ tienen parte real negativa excepto el par $\pm i\omega_0$, entonces $\tilde{\mathbf{x}}_t(\epsilon)$ es estable si $\mu_1 > 0$ e inestable si $\mu_1 < 0$. \diamond

La afirmación *(ii)* nos dice que si existe otra solución periódica con período cercano a $T(0)$ para μ en un entorno de μ_0 , entonces esta solución debe ser de la forma de $\tilde{\mathbf{x}}_t(\epsilon)$, excepto quizá por una traslación en fase. Considerando la conclusión *(iii)*, diremos que el caso $\mu_1 > 0$ corresponde a una **bifurcación de Hopf supercrítica** y que $\mu_1 < 0$ corresponde a una **bifurcación de Hopf subcrítica**.

Luego, para el caso supercrítico de la bifurcación de Hopf ($\mu_1 > 0$ en (2.48)), y suponiendo que el punto de equilibrio $\hat{\mathbf{x}}$ de (2.46) es estable para $\mu < \mu_0$, éste se inestabiliza dando lugar a una solución periódica asintóticamente orbitalmente estable (AOE) para $\mu > \mu_0$. Además, a partir del Teorema de Hopf se deduce que la amplitud de esta solución periódica crece en forma proporcional a $\sqrt{\mu - \mu_0}$. Para el caso subcrítico ($\mu_1 < 0$), existe una solución periódica inestable cuando $\mu - \mu_0 = \mu_1 \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) < 0$, es decir, cuando $\hat{\mathbf{x}}$ es estable. Tal vez este caso es el más preocupante desde el punto de vista ingenieril, por dos motivos: (1) cuando $\mu < \mu_0$ y $\mu_0 - \mu$ es pequeño, la cuenca de atracción de $\hat{\mathbf{x}}$ puede ser pequeña dado que existe una órbita inestable de amplitud $\mathcal{O}(\sqrt{-(\mu - \mu_0)})$ que rodea al equilibrio; (2) cuando $\hat{\mathbf{x}}$ pierde la estabilidad para $\mu > \mu_0$, no existe ninguna solución estable en un entorno de $\hat{\mathbf{x}}$, por lo tanto las trayectorias tenderán hacia alguna solución estable (si existe) posiblemente de gran amplitud. En los gráficos superiores de la Fig. 2.8 se muestran, en forma esquemática, los escenarios correspondientes a las bifurcaciones de Hopf supercrítica (izquierda) y subcrítica (derecha). Los trazos en rojo corresponden a soluciones estables y los trazos en verde a soluciones inestables. Nótese que un análisis basado en linealización sólo puede detectar el cambio de estabilidad del equilibrio, pero no permite distinguir el tipo de bifurcación. Por otro lado, en los gráficos inferiores se muestran proyecciones de las órbitas correspondientes sobre un espacio bidimensional. Cuando todas las hipótesis del Teorema 2.11 se verifican y además $\mu_1 \neq 0$ en (2.48), la bifurcación de Hopf se dice no degenerada y se denotará como H_{00} (como se tipifica en Moiola & Chen, 1996). Si $D_\mu \alpha(\mu)|_{\mu=\mu_0} = 0$ significa que el par de autovalores complejos conjugados no cruza efectivamente el eje imaginario, y en este caso ocurre la denominada bifurcación degenerada H_{01} .

Por otra parte, si $\mu_1 = 0$ en (2.48), para conocer si la solución periódica existe cuando $\mu < \mu_0$ ó cuando $\mu > \mu_0$ debe considerarse una expansión de mayor orden en

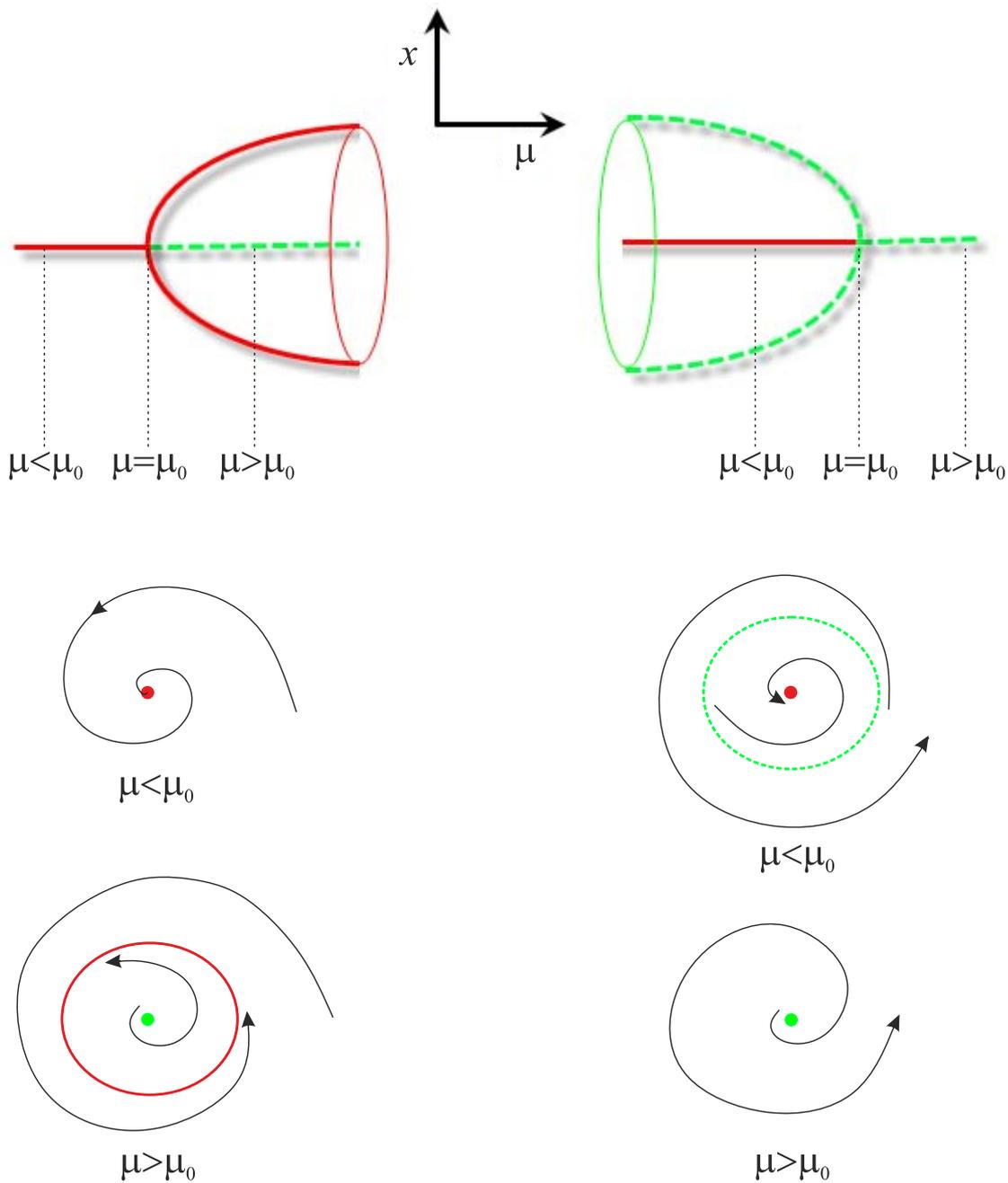


Figura 2.8: Bifurcación de Hopf supercrítica (izquierda) y subcrítica (derecha) suponiendo que el equilibrio cambia de estabilidad para $\mu = \mu_0$.

el parámetro ϵ . Es decir, debe plantearse $\mu(\epsilon) = \mu_0 + \mu_2\epsilon^4 + \mathcal{O}(\epsilon^6)$, y en este caso la dirección del nacimiento del ciclo límite estará dada por el signo de μ_2 . Si $\mu_2 \neq 0$, la bifurcación de Hopf se denomina H_{10} . En forma similar, si $\mu_2 = 0$ y el coeficiente de ϵ^6 es no nulo, la misma se denominará H_{20} , y así sucesivamente. O, por ejemplo, si $D_\mu\alpha(\mu)|_{\mu=\mu_0} = 0$ y además $\mu_1 = 0$, la bifurcación degenerada se denotará H_{11} .

Ejemplo 2.5 En el Ejemplo 2.4, para la ecuación

$$\dot{x}(t) = f(x_t) = \mu - x^2(t-1), \quad (2.49)$$

restaba determinar qué sucede cuando el punto de equilibrio $\hat{x}_1 = +\sqrt{\mu}$ pierde la estabilidad para $\mu = (\pi/4)^2$. Recordemos que la ecuación característica asociada a $\hat{x}_1 = +\sqrt{\mu}$ es $h(s) = s + 2\sqrt{\mu}e^{-s} = 0$. Haciendo $s = \alpha + i\omega$, y separando partes real e imaginaria se obtiene

$$\begin{cases} \alpha + 2\sqrt{\mu}e^{-\alpha} \cos \omega = 0, \\ \omega - 2\sqrt{\mu}e^{-\alpha} \sin \omega = 0, \end{cases} \quad (2.50)$$

Tomando $\alpha = 0$ se obtienen $\omega_0 = \pi/2$ y $\mu_0 = (\pi/4)^2$. Nótese que $-\omega_0 = -\pi/2$ también es solución de las Ecs. (2.50) con $\alpha = 0$. Es decir, cuando μ pasa de $\mu < \mu_0$ a $\mu > \mu_0$, existe un par de raíces de $h(s)$ que cruza el eje imaginario por los puntos $\pm i\pi/2$ cuando $\mu = \mu_0$. Además, de la segunda ecuación en (2.50), se obtiene $e^\alpha = 2\sqrt{\mu} \sin \omega / \omega$, de donde, para $\sin \omega > 0$ se puede escribir $\alpha = \ln(2\sqrt{\mu} \sin \omega / \omega)$. Entonces,

$$D_\mu\alpha = \frac{\omega}{2\mu \sin \omega},$$

y dado que para $\mu = \mu_0$ se tiene $s = s_0 = \pm i\omega_0 = \pm i\pi/2$, resulta $D_\mu\alpha|_{\mu=\mu_0} = 4/\pi > 0$. Entonces, se verifican las hipótesis **(H1)** y **(H2)** del Teorema 2.15, y el sistema (2.49) exhibe una bifurcación de Hopf para $\mu = (\pi/4)^2$. La Fig. 2.9 muestra el diagrama de bifurcación en función de μ . Se muestran las soluciones de equilibrio que se generan a partir de la bifurcación silla-nodo, donde la línea llena roja representa soluciones de equilibrio estables y la línea punteada verde indica soluciones de equilibrio inestables. Además se muestra la amplitud (máximo y mínimo) de las soluciones periódicas que emergen a partir de $\hat{x}_1 = +\sqrt{\mu}$ para $\mu > (\pi/4)^2 \simeq 0.61685$, por medio de la bifurcación

de Hopf (H). Esta continuación de la amplitud de las órbitas se obtiene mediante el programa DDE-BIFTOOL (Engelborghs et al., 2001). A la familia de soluciones periódicas que se obtienen variando μ también se la denomina **rama**. También se muestran los resultados de simulaciones numéricas: para $\mu = 0.5$ el equilibrio \hat{x}_1 es estable y para $\mu = 0.8$, el mismo es inestable y existe una solución periódica estable que lo rodea. Los valores de μ utilizados en las simulaciones numéricas se indican con líneas punteadas en el diagrama de bifurcación.

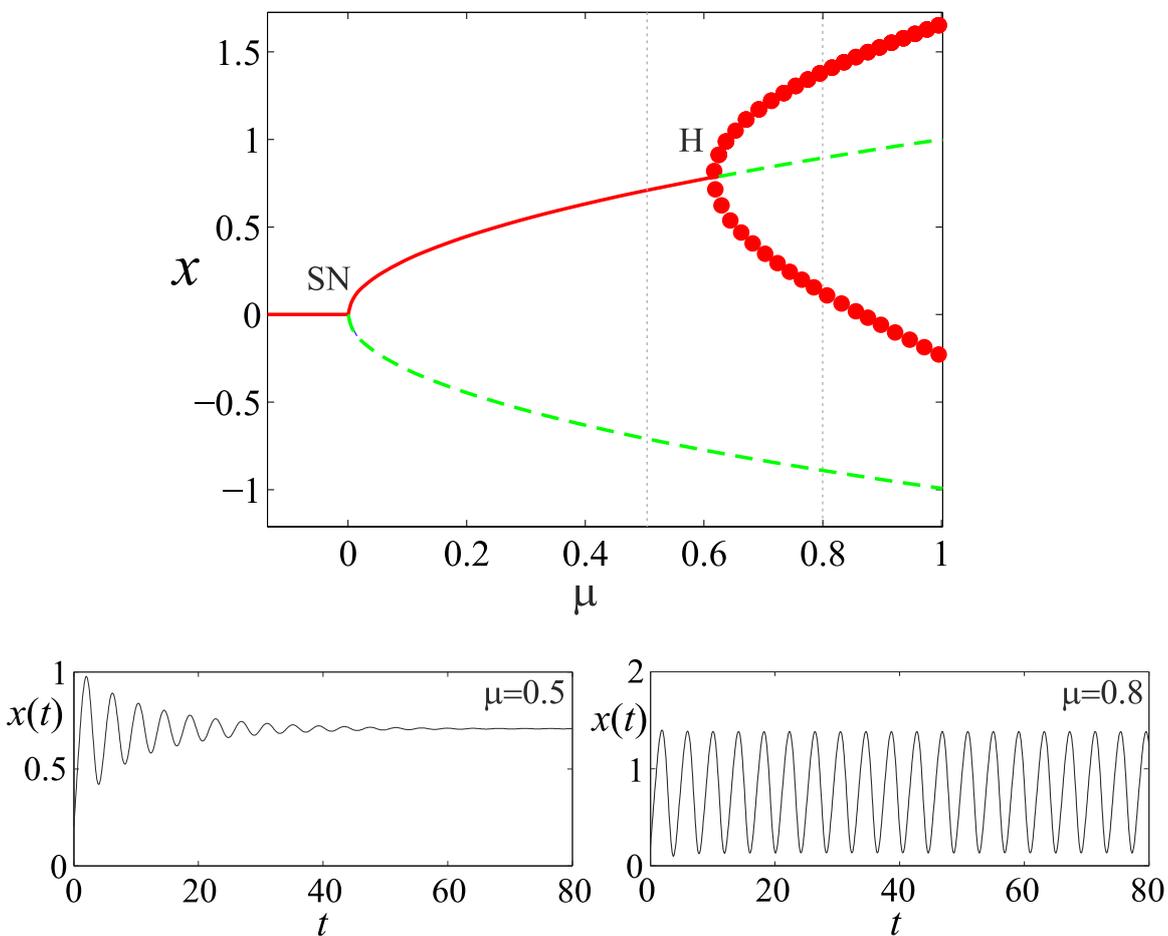


Figura 2.9: (Arriba) Diagrama de bifurcación del sistema (2.49), donde se muestran las soluciones de equilibrio que se generan a partir del punto de silla-nodo (SN) y la rama de soluciones periódicas que nace de la bifurcación de Hopf (H). Para cada valor de μ , los puntos en rojo indican el máximo y el mínimo de $x(t)$ sobre la solución periódica. (Abajo) Simulaciones numéricas para $\mu = 0.5$ y para $\mu = 0.8$.

Capítulo 3

Introducción al Método del Teorema de Hopf Gráfico

3.1. Introducción

En este capítulo, se describirá la técnica analítica que ha resultado fundamental para el desarrollo de esta Tesis: el método para la detección de oscilaciones basado en el teorema de Hopf gráfico (Mees & Chua, 1979), al cual denominaremos *Método en Frecuencia*, o directamente, MF.

Esta técnica está basada en herramientas de común conocimiento para los ingenieros, como son la transformada de Laplace, el método de balance de armónicos y el criterio de estabilidad de Nyquist, entre otras.

En principio, el MF se desarrolló para el estudio de EDOs (Mees & Chua, 1979; Mees, 1981) y más tarde se elaboraron variantes para el análisis de DEEs (Moiola et al., 1996; Moiola & Chen, 1996).

A continuación, se pretende dar una idea del “estado del arte” de la herramienta, comenzando por el planteo original dedicado al estudio de EDOs. Posteriormente, se explicará cómo la técnica se modificó para permitir el análisis de algunos tipos de DDEs.

Las ideas que se exponen en este capítulo constituyen el punto de partida para los aportes principales de esta Tesis, que se expondrán a partir del Capítulo 4.

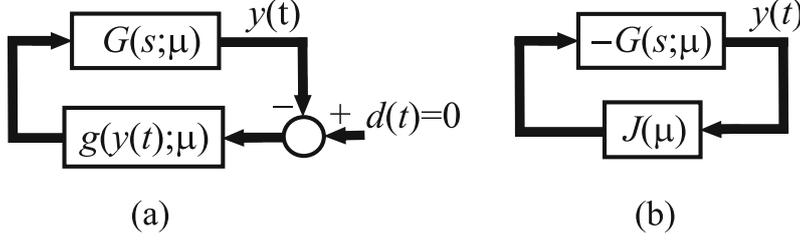


Figura 3.1: (a): Representation en bloques del sistema (3.1). (b): Lazo linealizado.

3.2. El Teorema de Hopf gráfico para el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias

Considérese una EDO autónoma de la forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(\mu)\mathbf{x}(t) + B(\mu)\mathbf{g}(\mathbf{y}(t); \mu), \\ \mathbf{y}(t) = -C(\mu)\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $A(\mu) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\mu) \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C(\mu) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mu \in \mathbb{R}$ es un parámetro y $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ es una función no lineal suave (al menos \mathcal{C}^4). Aplicando la transformada de Laplace al sistema anterior (considerando condiciones iniciales nulas), se obtiene

$$\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\} = (sI_n - A(\mu))^{-1}B(\mu)\mathcal{L}\{\mathbf{g}(\mathbf{y}(t); \mu)\},$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n y s es la variable compleja de la transformada de Laplace. Además

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\mathbf{y}(t)\} &= -C(\mu)\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\} \\ &= -C(\mu)(sI_n - A(\mu))^{-1}B(\mu)\mathcal{L}\{\mathbf{g}(\mathbf{y}(t); \mu)\} \\ &= -G(s; \mu)\mathcal{L}\{\mathbf{g}(\mathbf{y}(t); \mu)\}, \end{aligned}$$

donde $G(s; \mu) := C(\mu)(sI_n - A(\mu))^{-1}B(\mu)$ es la función transferencia que representa la parte lineal del sistema (3.1). De esta forma, dicho sistema puede representarse en forma de lazo realimentado como se muestra en la Fig. 3.1(a), donde la entrada $\mathbf{d}(t)$ se asume nula por tratarse de un sistema autónomo. Los puntos de equilibrio $\hat{\mathbf{y}}$ del sistema realimentado satisfacen la ecuación $G(0; \mu)\mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}}; \mu) = -\hat{\mathbf{y}}$. Suponiendo

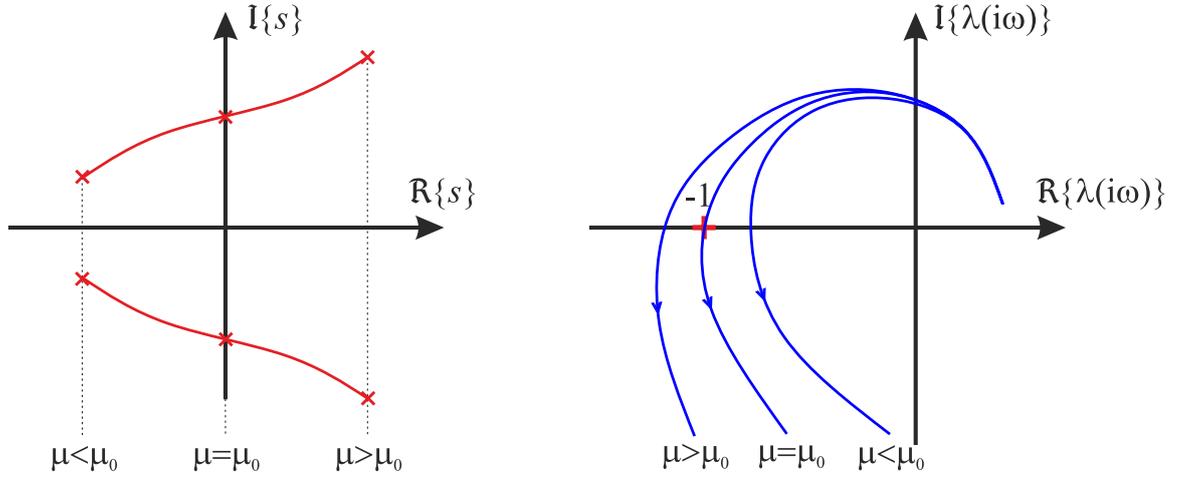


Figura 3.2: Ilustración del Lema 3.1. Si un par de raíces de la ecuación característica del dominio tiempo cruza el eje imaginario hacia el semiplano derecho para $\mu = \mu_0$ (izquierda), la correspondiente función característica del MF pasa a encerrar el punto $-1 + i0$ cuando μ varía desde $\mu < \mu_0$ hasta $\mu > \mu_0$ (derecha). Además, dado que el contorno de dicha función característica está parametrizado en la frecuencia ω , la curva azul correspondiente a $\mu = \mu_0$ pasa por el punto $-1 + i0$ para $\omega = \omega_0$.

que existe al menos un punto de equilibrio, y calculando la matriz Jacobiana definida como

$$J(\mu) = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{y}; \mu)}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}},$$

se obtiene el lazo linealizado de la Fig. 3.1(b). Con el objetivo de detectar bifurcaciones en el sistema (3.1), se considera el siguiente resultado:

Lema 3.1 (Mees & Chua, 1979) *Si una raíz de la ecuación característica del sistema no lineal (3.1), en el dominio tiempo, toma el valor imaginario puro $i\omega_0$ para un valor dado $\mu = \mu_0$ del parámetro de bifurcación, entonces un autovalor de la matriz constante $G(i\omega_0; \mu_0)J(\mu_0)$ toma el valor $-1 + i0$ para $\mu = \mu_0$. \diamond*

La Fig. 3.2 ilustra este resultado en forma cualitativa para el caso en que un par de soluciones de la ecuación característica cruza el eje imaginario hacia el semiplano derecho cuando μ pasa de $\mu < \mu_0$ a $\mu > \mu_0$. Los autovalores de la matriz $G(s; \mu)J(\mu)$, que se denominan funciones características (o autovalores del dominio frecuencia) son

las raíces del polinomio

$$h(\lambda, s; \mu) := \det(\lambda I_m - GJ) = \lambda^m + a_{m-1}(s; \mu)\lambda^{m-1} + \dots + a_0(s; \mu), \quad (3.2)$$

donde $a_j(s; \mu)$, $j = 0, \dots, m-1$, son cocientes de polinomios en la variable compleja s (MacFarlane & Postlethwaite, 1977). En lo que sigue, se hará referencia a la Ec. (3.2) como *ecuación característica en el dominio frecuencia*. Nótese que si $p < m$, el orden del polinomio (3.2) puede reducirse dado que $(m-p)$ autovalores son nulos. Además, usualmente se tiene $m < n$, por lo tanto la formulación en el dominio frecuencia generalmente provee una ecuación característica de menor orden que la análoga en el dominio tiempo.

Supongamos que el punto de equilibrio del sistema (3.1) es estable para $\mu < \mu_0$ e inestable para $\mu > \mu_0$, y que para $\mu = \mu_0$ existe una raíz simple $\widehat{\lambda}(s; \mu)$ de (3.2) que toma el valor $-1 + i0$ cuando $s = i\omega_0$. Entonces, como se definió en el Capítulo 2, $\mu = \mu_0$ es el valor crítico del parámetro (el valor para el cual se produce una bifurcación). Si $\omega_0 = 0$, la bifurcación se denomina *estática* (como por ejemplo, la bifurcación silla-nodo del Ejemplo 2.4). Si $\omega_0 \neq 0$ la bifurcación se denomina *dinámica* o de *Hopf*. En lo que sigue, se hará hincapié en la bifurcación de Hopf, que constituye uno de los mecanismos más frecuentes que da lugar al comportamiento oscilatorio de un sistema. Para cada valor fijo de μ , el lugar geométrico de $\widehat{\lambda}(i\omega; \mu)$ constituye un diagrama de Nyquist en el plano complejo, parametrizado en la frecuencia ω . En particular, cuando $\mu = \mu_0$, dicho contorno pasa por el punto $-1 + i0$ para $\omega = \omega_0$ (véase la Fig. 3.2). Con el propósito de clasificar el tipo de bifurcación de Hopf, se considera el número complejo auxiliar

$$\xi(\omega; \mu) = -\frac{\mathbf{u}^T G(i\omega; \mu) \mathbf{p}(\omega; \mu)}{\mathbf{u}^T \mathbf{v}}, \quad (3.3)$$

donde $\mathbf{p}(\cdot)$ se definirá en breve, y \mathbf{v} y \mathbf{u} son los autovectores derecho e izquierdo de la matriz $G(s; \mu)J(\mu)$ asociados a $\widehat{\lambda}(s; \mu)$, es decir, que verifican

$$GJ\mathbf{v} = \widehat{\lambda}\mathbf{v}, \quad \mathbf{u}^T GJ = \mathbf{u}^T \widehat{\lambda}.$$

Supongamos que μ se varía levemente a partir de μ_0 , y consideremos el siguiente Teorema enunciado en (Mees & Chua, 1979; Muiola & Chen, 1996), que por conveniencia para el lector se presenta en forma compacta como sigue:

Teorema 3.2 (Teorema de Hopf Gráfico) *Supóngase que cuando ω varía, $\xi(\omega; \mu) \neq 0$ y que la semirrecta con origen en $-1 + i0$ y con la dirección y sentido de $\xi(\omega; \mu)$ ¹, interseca el contorno de $\widehat{\lambda}(i\omega; \mu)$ en el punto*

$$\widetilde{P} = \widehat{\lambda}(i\widetilde{\omega}; \widetilde{\mu}) = -1 + \xi(\widetilde{\omega}; \widetilde{\mu})\theta^2, \quad (3.4)$$

donde $\theta = \theta(\widetilde{\mu}) \geq 0$. Supóngase, además, que dicha intersección es transversal, i.e., $\widehat{\lambda}(i\widetilde{\omega}; \widetilde{\mu})$ y $\xi(\widetilde{\omega}; \widetilde{\mu})$ son no paralelos. Entonces:

1. El sistema no lineal (3.1) tiene una solución periódica aislada en un entorno de radio $\mathcal{O}(1)$ centrado en \widehat{y} .
2. Si el número de veces que $\widehat{\lambda}(i\omega; \mu)$ encierra al punto $\widetilde{P} + \delta\xi(\widetilde{\omega}; \widetilde{\mu})$ en sentido antihorario, para δ suficientemente pequeño, es igual al número de polos de $\widehat{\lambda}(s; \mu)$ con parte real positiva, entonces el ciclo límite es estable. \diamond

Es preciso mencionar que θ y $\widetilde{\omega}$ representan la amplitud y frecuencia, respectivamente, de la solución periódica. Si se verifican las hipótesis del Teorema 3.2, dicha solución puede describirse en forma aproximada por medio de la serie truncada de Fourier

$$\mathbf{y}(t) \simeq \widehat{\mathbf{y}} + \Re \left\{ \sum_{k=0}^2 \mathcal{Y}^k e^{ik\widetilde{\omega}t} \right\}, \quad (3.5)$$

donde los coeficientes \mathcal{Y}^k se definen más abajo y $\Re(\cdot)$ es la parte real de una cantidad compleja. En la Ec. (3.3), el vector $\mathbf{p}(\cdot)$ representa la componente de frecuencia fundamental de $\mathbf{g}(\mathbf{y}(t); \mu)$ para $\mathbf{y}(t)$ dada por (3.5), y se calcula como

$$\mathbf{p}(\omega; \mu) = (\mathbf{D}^2 \mathbf{g})\mathbf{v} \otimes \mathbf{V}_{02} + \frac{1}{2}(\mathbf{D}^2 \mathbf{g})\bar{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{V}_{22} + \frac{1}{8}(\mathbf{D}^3 \mathbf{g})\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes \bar{\mathbf{v}}, \quad (3.6)$$

donde $\overline{(\cdot)}$ denota el complejo conjugado, \otimes representa el producto tensorial y

$$(\mathbf{D}^2 \mathbf{g}) := \left. \frac{\partial^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}; \mu)}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{x}=\widehat{\mathbf{x}}}, \quad (\mathbf{D}^3 \mathbf{g}) := \left. \frac{\partial^3 \mathbf{g}(\mathbf{x}; \mu)}{\partial \mathbf{x}^3} \right|_{\mathbf{x}=\widehat{\mathbf{x}}}.$$

¹ Considerando a $\xi(\omega; \mu)$ un vector en el plano complejo.

Los vectores \mathbf{V}_{02} y \mathbf{V}_{22} son las componentes normalizadas de frecuencia cero y dos, respectivamente, de $\mathbf{y}(t)$ en (3.5) y están dados por

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{02} &= -\frac{1}{4}H(0; \mu)(\mathbf{D}^2\mathbf{g})\mathbf{v} \otimes \bar{\mathbf{v}}, \\ \mathbf{V}_{22} &= -\frac{1}{4}H(i2\omega; \mu)(\mathbf{D}^2\mathbf{g})\mathbf{v} \otimes \mathbf{v},\end{aligned}\tag{3.7}$$

siendo $H(s; \mu) := (I_m + G(s; \mu)J(\mu))^{-1}G(s; \mu)$ la matriz que representa la ganancia de lazo cerrado en la Fig. 3.1. Además, los vectores $\mathbf{p}(\omega; \mu)$, \mathbf{V}_{02} y \mathbf{V}_{22} se pueden expresar en forma alternativa como

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(\omega; \mu) &= Q\mathbf{V}_{02} + \frac{1}{2}\bar{Q}\mathbf{V}_{22} + \frac{1}{8}L\bar{\mathbf{v}}, \\ \mathbf{V}_{02} &= -\frac{1}{4}H(0; \mu)Q\bar{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{V}_{22} = -\frac{1}{4}H(i2\omega; \mu)Q\mathbf{v},\end{aligned}$$

donde Q y L son matrices de orden $p \times m$ cuyos elementos se calculan como

$$q_{jk} = \sum_{r=1}^m g_{rk}^j v_r, \quad l_{jk} = \sum_{r=1}^m \sum_{q=1}^m g_{rqk}^j v_r v_q,\tag{3.8}$$

donde $g_{rk}^j := \partial^2 g^i(\hat{\mathbf{y}})/\partial y_r \partial y_k$ y $g_{rqk}^j := \partial^3 g^i(\hat{\mathbf{y}})/\partial y_r \partial y_q \partial y_k$ (evaluadas en el equilibrio). Los valores de $\theta(\tilde{\mu})$ y $\tilde{\omega}(\tilde{\mu})$ que son solución de (3.4) determinan los coeficientes \mathcal{Y}^k en (3.5) mediante las ecuaciones

$$\mathcal{Y}^0 = \theta^2(\tilde{\mu})\mathbf{V}_{02}, \quad \mathcal{Y}^1 = \theta(\tilde{\mu})\mathbf{v}, \quad \mathcal{Y}^2 = \theta^2(\tilde{\mu})\mathbf{V}_{22},\tag{3.9}$$

y finalmente se obtiene la aproximación de la órbita periódica (3.5). Sólo resta determinar cómo hallar el par $(\tilde{\omega}, \theta)$ que es solución de (3.4). Para esto se utiliza un método iterativo ², partiendo de ω_0 , la frecuencia para la cual $\hat{\lambda}(i\omega; \mu_0)$ pasa por el punto $-1 + i0$. Si μ está suficientemente cerca de μ_0 , la frecuencia real $\tilde{\omega}$ de la oscilación se mantiene cerca de ω_0 (Mees & Chua, 1979). Entonces, se itera como se indica a continuación

$$\begin{aligned}\text{Paso 1 :} & \quad \hat{\lambda}(i\omega_1; \mu) = -1 + \xi(\omega_0; \mu)\theta_1^2, \\ \text{Paso 2 :} & \quad \hat{\lambda}(i\omega_2; \mu) = -1 + \xi(\omega_1; \mu)\theta_2^2, \\ & \quad \vdots \\ \text{Paso N :} & \quad \hat{\lambda}(i\omega_N; \mu) = -1 + \xi(\omega_{N-1}; \mu)\theta_N^2.\end{aligned}\tag{3.10}$$

²En algunos casos, es posible resolver (3.4) en forma analítica, como se verá en algunos ejemplos en capítulos posteriores.

Es decir, el algoritmo se inicia con la frecuencia ω_0 , se calcula $\xi(\omega_0; \mu)$ mediante (3.3) y se resuelve (3.4) para ω_1 y θ_1 . Con ω_1 , se recalcula $\xi(\omega_1; \mu)$ y en el Paso 2 se hallan ω_2 y θ_2 . El procedimiento se continúa hasta el Paso N, tomando N suficientemente grande de modo tal que $|\omega_N - \omega_{N-1}| < \epsilon$, donde ϵ es un valor pequeño establecido previamente. Finalmente, se asignan los valores $\tilde{\omega} := \omega_N$ y $\theta := \theta_N$.

Por otra parte, la estabilidad de la órbita periódica que emerge de la bifurcación también puede determinarse algebraicamente calculando el denominado *coeficiente de curvatura*, dado por

$$\sigma_0 = \Re \left\{ \frac{\xi(\omega_0; \mu) \mathbf{u}^T \mathbf{v}}{\mathbf{u}^T G'(i\omega_0; \mu) J(\mu) \mathbf{v}} \right\}, \quad (3.11)$$

donde $G'(i\omega; \mu) := \partial G(s; \mu) / \partial s|_{s=i\omega}$. Luego, si σ_0 es *negativo* (*positivo*), la bifurcación de Hopf es *supercrítica* (*subcrítica*); si el equilibrio sufre un cambio de estabilidad para $\mu = \mu_0$, existe una solución periódica *estable* (*inestable*) cuando el equilibrio es *inestable* (*estable*).³

3.3. Formulación alternativa del MF para el estudio de DDEs

Como se mencionó en la Introducción del capítulo, el MF se desarrolló originalmente para analizar sistemas descritos por EDOs. Posteriormente, el mismo se extendió para abordar el estudio de algunos tipos de DDEs (Moiola et al., 1996; Moiola & Chen, 1996). Por medio de esta variante de la técnica, se han realizado avances, por ejemplo, en las áreas de sistemas de control (Pagano et al., 1999) y redes neuronales (Liao et al., 2004; Yu & Cao, 2007; Yu et al., 2008). En esta sección, se describirá en forma breve esta alternativa del MF para el análisis de DDEs.

Considérese una DDE dada en la forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A_0(\mu)\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t - \tau) + B(\mu)\mathbf{g}(\mathbf{y}(t - \tau); \mu), \\ \mathbf{y}(t) = -C(\mu)\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (3.12)$$

³Nótese que el coeficiente de curvatura σ_0 es equivalente al coeficiente μ_1 en el Teorema 2.15.

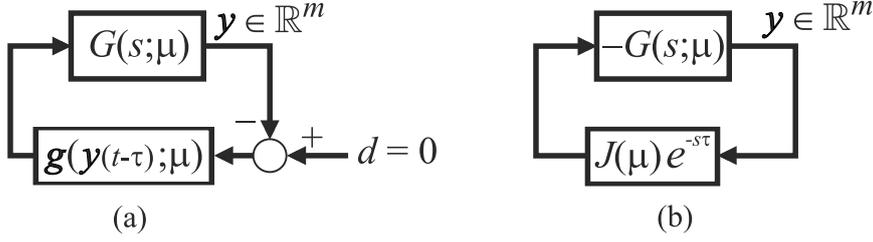


Figura 3.3: (a): Representación en bloques del sistema (3.12). (b): Lazo linealizado, considerando la dinámica del retardo en la realimentación.

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $A_0(\mu)$, $A_1(\mu)$ son matrices de orden $n \times n$, $B(\mu) \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C(\mu) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ es una función no lineal al menos \mathcal{C}^4 , $\mu \in \mathbb{R}$ es el parámetro de bifurcación y $\tau > 0$ es un retardo constante. Aplicando la transformada de Laplace al sistema anterior y suponiendo funciones iniciales nulas, se obtiene

$$\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\} = (sI_n - A_0(\mu) - A_1(\mu)e^{-s\tau})^{-1} B(\mu) \mathcal{L}\{\mathbf{g}(\mathbf{y}(t - \tau); \mu)\},$$

y además

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\mathbf{y}(t)\} &= -C(\mu) \mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\} \\ &= -C(\mu) (sI_n - A_0(\mu) - A_1(\mu)e^{-s\tau})^{-1} B(\mu) \mathcal{L}\{\mathbf{g}(\mathbf{y}(t - \tau); \mu)\} \\ &= -G(s; \mu) \mathcal{L}\{\mathbf{g}(\mathbf{y}(t - \tau); \mu)\}, \end{aligned}$$

donde en este caso, la función transferencia que representa la parte lineal se define como $G(s; \mu) := C(\mu) (sI_n - A_0(\mu) - A_1(\mu)e^{-s\tau})^{-1} B(\mu)$ (véase la Fig. 3.3(a)). Los puntos de equilibrio se calculan en forma análoga al caso de las EDOs, es decir

$$G(0; \mu) \mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}}; \mu) = -\hat{\mathbf{y}}, \quad (3.13)$$

con la única diferencia de que ahora, para poder realizar este cómputo, la matriz $A_0(\mu) + A_1(\mu)$ debe ser inversible. La matriz Jacobiana es $J(\mu) = \partial \mathbf{g}(\mathbf{y}; \mu) / \partial \mathbf{y}|_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}$, aunque la ganancia de la realimentación linealizada se toma como $J(\mu) e^{-s\tau}$ para considerar la dinámica del retardo (Fig. 3.3(b)). Suponiendo la existencia de al menos una solución $\hat{\mathbf{y}}$ de (3.13), la estabilidad de este equilibrio debe analizarse por medio de la ecuación característica

$$\begin{aligned} h(\lambda, s; \mu) &:= \det(\lambda I_m - G(s; \mu) J(\mu)) \\ &= \lambda^m + a_{m-1}(s, e^{-s\tau}; \mu) \lambda^{m-1} + \dots + a_0(s, e^{-s\tau}; \mu) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Nótese que para esta ecuación, los coeficientes $a_i(s, e^{-s\tau}; \mu)$ serán, en general, cocientes de cuasipolinomios en la variable s . La condición de estabilidad marginal ocurre cuando una raíz simple $\widehat{\lambda}(s; \mu)$ de la Ec. (3.14) toma el valor $-1 + i0$ para $s = i\omega_0$, lo cual se da cuando el parámetro de bifurcación pasa por el valor crítico $\mu = \mu_0$. Esto es equivalente a la condición $h(-1, i\omega_0; \mu_0) = 0$, y separando esta ecuación en partes real e imaginaria se obtiene

$$F_1(\omega_0; \mu_0, \tau) := (-1)^m + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \Re \{a_k(i\omega_0, e^{-i\omega_0\tau}; \mu)\} = 0,$$

$$F_2(\omega_0; \mu_0, \tau) := \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \Im \{a_k(i\omega_0, e^{-i\omega_0\tau}; \mu)\} = 0.$$

El Teorema que se enuncia a continuación es, en esencia, análogo al dado para sistemas EDOs, con la salvedad de que ahora las funciones $F_1(\cdot)$ y $F_2(\cdot)$ dependen del retardo τ .

Teorema 3.3 (Moiola & Chen, 1996) *Supóngase que: (a) $\widehat{\mathbf{y}}$ es, localmente, el único equilibrio de (3.12); (b) cuando varía ω , $\xi(\omega; \mu) \neq 0$ y la semirrecta con origen en $-1 + i0$ y con la dirección y sentido de $\xi(\omega; \mu)$, interseca el contorno de $\widehat{\lambda}(i\omega; \mu)$ en el punto*

$$\widetilde{P} = \widehat{\lambda}(i\widetilde{\omega}; \widetilde{\mu}) = -1 + \xi(\widetilde{\omega}; \widetilde{\mu})\theta^2, \quad (3.15)$$

donde $\theta = \theta(\widetilde{\mu}) \geq 0$. Supóngase, además, que

1. La tasa de cambio del autovalor $\widehat{\lambda}(i\omega; \mu)$ con respecto a su parametrización en el punto crítico es no nula, es decir

$$\det \begin{pmatrix} \partial F_1/\partial \mu & \partial F_2/\partial \mu \\ \partial F_1/\partial \omega & \partial F_2/\partial \omega \end{pmatrix} \Big|_{(\omega_0; \mu_0)} \neq 0.$$

2. La intersección es transversal, es decir

$$\det \begin{pmatrix} \Re \{\xi(i\omega_0)\} & \Im \{\xi(i\omega_0)\} \\ \Re \{\widehat{\lambda}'(i\omega_0; \mu_0)\} & \Im \{\widehat{\lambda}'(i\omega_0; \mu_0)\} \end{pmatrix} \neq 0,$$

donde $\widehat{\lambda}'(i\omega_0; \mu_0) := \partial \widehat{\lambda}'(s; \mu) / \partial s|_{(s; \mu) = (i\omega_0; \mu_0)}$.

3. Existe un entorno de \tilde{P} en el cual no hay otras intersecciones entre algún autovector $\lambda_i(i\omega; \mu)$ y la semirrecta que une $-1 + i0$ con \tilde{P} .

Entonces, el sistema no lineal (3.12) tiene una solución periódica $\mathbf{y}(t)$ de frecuencia $\omega = \tilde{\omega} + \mathcal{O}(\theta^4)$ que es única en un entorno de radio $\mathcal{O}(1)$ centrado en $\hat{\mathbf{y}}$. Si el número total de veces que el contorno de $\hat{\lambda}(i\omega; \tilde{\mu})$ encierra al punto $\tilde{P} + \delta\xi(\tilde{\omega}; \tilde{\mu})$ en sentido antihorario, para δ suficientemente pequeño, es igual al número de polos de $\hat{\lambda}(s; \mu)$ con parte real positiva, entonces el ciclo límite es estable. \diamond

En este Teorema, el número complejo $\xi(\omega; \mu)$ está dado por

$$\xi(\omega; \mu) = -\frac{\mathbf{u}^T G(i\omega; \mu) \mathbf{p}(\omega; \mu) e^{-i\omega\tau}}{\mathbf{u}^T \mathbf{v}}. \quad (3.16)$$

Por otra parte, el coeficiente de curvatura se halla como

$$\sigma_0 = \Re \left\{ \frac{\xi(\omega_0; \mu) \mathbf{u}^T \mathbf{v}}{\mathbf{u}^T \frac{\partial}{\partial s} [G(s; \mu) J(\mu) e^{-s\tau}] |_{s=i\omega} \mathbf{v}} \right\}, \quad (3.17)$$

(nótese la analogía con las expresiones dadas para sistemas de EDOs). Las fórmulas anteriores fueron desarrolladas en (Moiola & Chen, 1996) realizando un balance armónico para el lazo de realimentación de la Fig. 3.3.

3.4. Ejemplos

En esta sección, se presentará el análisis de dos ejemplos para ilustrar la aplicación del MF a sistemas con retardos constantes. En primer lugar, se estudiará un modelo logístico presentado en (Vasegh & Sedigh, 2009). En este trabajo, los autores utilizaron la técnica de la función descriptora para detectar la aparición de ciclos límites, cuya estabilidad se determinó con el criterio de Loeb. El segundo ejemplo representa la forma normal ⁴ de la bifurcación de Hopf subcrítica, bajo la acción de un control con retardos que se implementa para manipular las características del ciclo límite

⁴La forma normal de una bifurcación consiste en la ecuación diferencial más simple que puede exhibir dicha bifurcación. Para mayores detalles, véase Kuznetsov (2004).

emergente (véase Just et al., 2007). Este ejemplo presenta una mayor complejidad que el primero, y resulta de interés pues permitió refutar un Teorema acerca de la estabilización de ciclos límites mediante el control con retardos (Nakajima, 1997).

Ejemplo 3.1

Considérese el modelo logístico

$$\dot{x}(t) = -x(t) + bx(t - \tau)(1 - x(t - \tau)), \quad (3.18)$$

donde x es escalar, $b \in \mathbb{R}$ y $\tau > 0$ es el retardo ⁵. Para aplicar el MF, en principio esta ecuación debe escribirse en la forma (3.12). Una realización posible está dada por $A_0 = -1$, $A_1 = b$, $C = 1$ ($y = -x$) y $g(y; b) = -by^2$. Otra realización alternativa se obtiene considerando $A_0 = -1$, $A_1 = 0$, $C = 1$ y $g(y; b) = -by(1 + y)$. Teniendo en cuenta esta última, resulta $C(s - A)^{-1}B = 1/(s + 1)$, y además, el retardo puede incluirse en la parte lineal eligiendo

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s + 1}.$$

A partir de (3.13) se obtienen los puntos de equilibrio como

$$G(0)g(\hat{y}; b) = -\hat{y} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hat{y}_1 = 0, \\ \hat{y}_2 = (1 - b)/b. \end{cases} \quad (3.19)$$

Dado que el modelo (3.18) generalmente representa un sistema de población, el equilibrio $\hat{y}_1 = 0$ no resulta de interés. Además, como $x(t) \geq 0$, entonces $y(t) = -Cx(t) \leq 0$, y por lo tanto el punto de equilibrio no trivial \hat{y}_2 resulta negativo. Entonces, la Ec. (3.19) indica que este último existirá sólo si $b > 1$. Para este punto de equilibrio, la matriz Jacobiana es escalar y resulta

$$J(b) = -b(1 + 2y)|_{y=\hat{y}_2} = b - 2.$$

A partir del Lema 3.1, la condición de bifurcación está dada por $\hat{\lambda}(i\omega; b) = G(i\omega_0)J(b_0) = -1$, es decir

$$(b_0 - 2) \frac{e^{-i\omega_0\tau}}{1 + i\omega_0} = -1, \quad (3.20)$$

⁵Este ejemplo se ha estudiado en: Gentile, F., Paolini E. y Moiola J. “Aplicación de métodos frecuenciales para la detección de oscilaciones en sistemas con retardos temporales”, presentado en la Reunión para el Procesamiento de la Información y Control (RPIC), 16 al 18 de septiembre de 2009, Rosario.

que separando en partes real e imaginaria resulta

$$\begin{cases} (b_0 - 2) \cos(\omega\tau) = -1, \\ (b_0 - 2) \sin(\omega\tau) = \omega_0. \end{cases}$$

Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones, se obtienen los valores críticos de ω y τ como

$$\omega_0 = \sqrt{(b_0 - 2)^2 - 1}, \quad (3.21)$$

$$\tau_k = \frac{1}{\sqrt{(b_0 - 2)^2 - 1}} \left[\arccos \left(\frac{1}{2 - b_0} \right) + 2\pi k \right], \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.22)$$

Es claro que para que existan soluciones $\omega \in \mathbb{R}$, el parámetro b debe verificar $|b - 2| > 1$, luego $b < 1$ ó $b > 3$. Si $|b - 2| < 1$, de la Ec. (3.20) resulta evidente que el diagrama de Nyquist del autovalor $\hat{\lambda}(i\omega; b)$ no encierra el punto $-1 + 0i$ dado que

$$\left| \hat{\lambda}(i\omega; b) \right| < \left| \frac{e^{-i\omega\tau}}{1 + i\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} \leq 1, \quad \forall \omega.$$

Por lo tanto, cuando $1 < b < 3$, el punto de equilibrio no trivial es *estable* independientemente del valor del retardo, es decir, es EIR (Sección 2.3.3). Si consideramos $b > 3$, entonces la Ec. (3.21) tiene solución para $\omega > 0$, con lo cual, para $b > 3$, se dan bifurcaciones de Hopf dependiendo del valor de τ . La Fig. 3.4 muestra la región de estabilidad del equilibrio \hat{y}_2 , y las curvas que representan los valores críticos del retardo τ que provocan bifurcaciones de Hopf, en función del parámetro b . Este diagrama se denomina diagrama de bifurcación en dos parámetros. Nótese que el mismo es diferente a los diagramas de bifurcación que se han visto hasta este punto. En la Fig. 3.4, cada punto sobre las curvas en negro representa un par (b_0, τ) que es solución de (3.20).

Como el bloque que representa la parte lineal tiene sólo una entrada y una salida,⁶ $G(s)J(b)$ es escalar y los autovectores son $u = v = 1$. Las matrices Q y L (Ec. (3.8)) también son escalares, y valen $Q = -2b$ y $L = 0$. Además, la función transferencia de lazo cerrado es

$$H(s) = (G(s)J + 1)^{-1}G(s) = \frac{1}{\varphi(s)}, \quad \varphi(s) := s + 1 + (b - 2)e^{-s\tau}.$$

⁶Se hará referencia a este tipo de sistemas como SISO (“Single input - Single Output”).

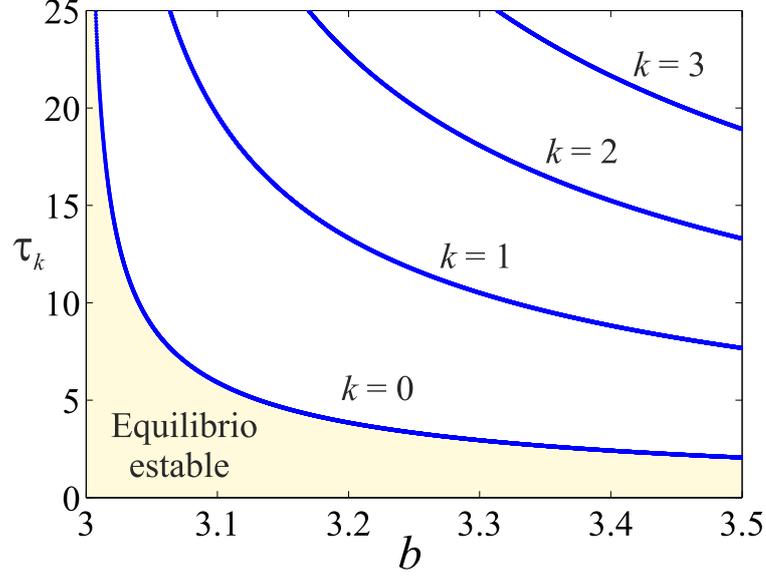


Figura 3.4: Curvas de bifurcación de Hopf en el plano (b, τ) obtenidas a partir de la Ec. (3.22), para distintos valores de k . Para la región sombreada, el equilibrio \hat{y}_2 es estable.

A partir de (3.7) se calculan V_{02} y V_{22} , resultando

$$V_{02} = \frac{b}{2(1-b)}, \quad V_{22} = \frac{b}{2\varphi(i2\omega)},$$

y por medio de (3.6) se halla

$$p(\omega; b) = -b^2 \left(\frac{1}{b-1} + \frac{1}{2\varphi(i2\omega)} \right).$$

Además, de la Ec. (3.16) resulta $\xi(\omega; b) = -G(i\omega)p(\omega; b)e^{-i\omega\tau}$. Finalmente, utilizando (3.11), y teniendo en cuenta que $u = v = 1$, se obtiene la expresión del coeficiente de curvatura

$$\sigma_0 = -\Re \left\{ \frac{G(i\omega_0)p(\omega_0; b)}{(G(i\omega_0)J)'} \right\} = \frac{b^2}{2(b-1)} \Re \left\{ \frac{b-1+2\varphi(i2\omega_0)}{(1+\tau+i\omega_0\tau)\varphi(i2\omega_0)} \right\}.$$

Si, por ejemplo, consideramos $b = 3.05$, con las Ecs. (3.21) y (3.22) se obtienen $\omega_0 \simeq 0.320156$ y $\tau_0 \simeq 8.8449$. Con estos valores resulta $\sigma_0 \simeq -0.6454$, por lo tanto la bifurcación es del tipo supercrítica, y el ciclo límite emergente es *estable*. La misma conclusión se obtiene mediante el Teorema 3.3 y observando la Fig. 3.5, donde se muestran el diagrama de Nyquist de $\hat{\lambda}(i\omega; b)$ y el vector $\xi(\omega; b)$ para $b = 3.1$ (ligeramente mayor al valor crítico) y $\tau = 8.8449$. Dado que existe una intersección

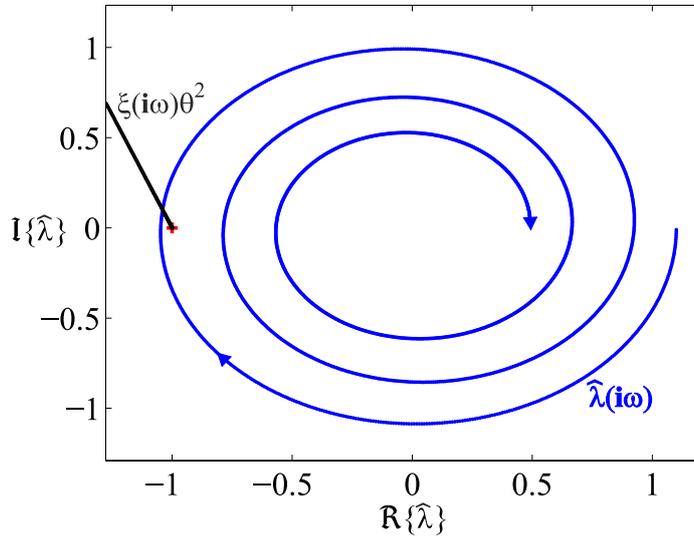


Figura 3.5: Diagrama de Nyquist y vector $\xi(\omega)$ para $\tau = 8.8449$ y $b = 3.1$. Dado que ambos se intersectan, el Teorema de Gráfico de Hopf asegura la existencia de un ciclo límite, que además es estable.

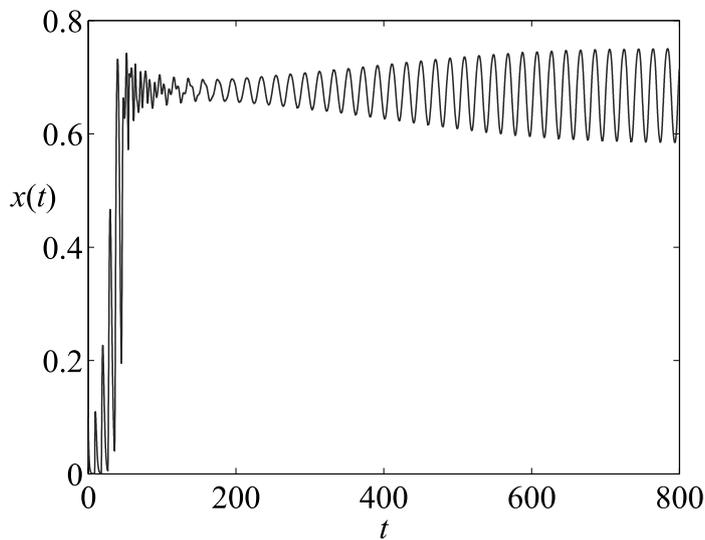


Figura 3.6: Simulación del sistema (3.18) para $\tau = 8.8449$ y $b = 3.1$. Se observa claramente una oscilación alrededor del equilibrio en $\hat{x} = 0.6774$.

entre dicho vector y el contorno de $\widehat{\lambda}(i\omega; b)$, el sistema (3.18) tiene un ciclo límite para esta combinación de parámetros. Además, como el único polo de $\widehat{\lambda}(s; b)$ se halla en $s_0 = -1$, para el caso que se muestra en la figura el equilibrio es inestable (pues $\widehat{\lambda}(i\omega; b)$ encierra al punto $-1 + i0$) y la solución periódica es estable. En la Fig. 3.6 se muestra una simulación correspondiente a $b = 3.1$ y $\tau = 8.8449$. Luego de un transitorio, el sistema exhibe oscilaciones sostenidas alrededor del punto de equilibrio $\widehat{x} \simeq 0.6774$.

Ejemplo 3.2

El sistema que se estudia a continuación corresponde a la forma normal de la bifurcación de Hopf subcrítica. Dependiendo del valor de un parámetro de bifurcación, este sistema puede, cualitativamente, exhibir dos comportamientos: (i) tener un punto de equilibrio estable rodeado por un ciclo límite inestable, o (ii) tener un punto de equilibrio inestable (como en los diagramas de la Fig. 2.8). A este sistema se le aplica un esquema de control retrasado, con el objetivo de cambiar la estabilidad del ciclo límite que aparece en la situación (i). En particular, cuando el retardo que se introduce en la realimentación es un múltiplo entero del período de la órbita que se intenta controlar, diremos que constituye un control de Pyragas (véase Pyragas, 1992). Utilizando la variante del MF descrita en la Sección 3.3, se estudiará la dinámica del sistema controlado. Los resultados que se obtienen en este ejemplo concuerdan con los presentados por Just et al. (2007). En el trabajo citado, los autores realizaron una importante contribución dando un contraejemplo al teorema propuesto por Nakajima (1997), que establecía que una órbita inestable con un número impar de exponentes de Floquet fuera del círculo unitario, no podía estabilizarse por el control de Pyragas. Sin embargo, a través del ejemplo que se describe a continuación, Just et al. (2007) mostraron que esto no es válido.

El sistema considerado es:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + [x_1^2 + x_2^2] \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) - x_1(t - \tau) \\ x_2(t) - x_2(t - \tau) \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

donde $\alpha, \gamma > 0$, $K > 0$ y β son parámetros, y $\tau > 0$ es el retardo constante⁷. Además, K y β representan la ganancia y la fase, respectivamente, del controlador. Nótese que para el sistema sin controlar ($K = 0$), α es igual a la parte real de los autovalores de la linealización en el equilibrio $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0, 0)$. Para escribir la Ec. (3.23) en forma de sistema realimentado como en (3.12), se consideran las matrices

$$A_0 = \begin{pmatrix} \alpha - K \cos \beta & 0 \\ 0 & \alpha - K \cos \beta \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} K \cos \beta & 0 \\ 0 & K \cos \beta \end{pmatrix}, B = C = I_2, \quad (3.24)$$

y la realimentación no lineal dada por

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t - \tau)) = \begin{pmatrix} y_2 - K \sin \beta y_2 + K \sin \beta y_{2\tau} - (y_1 - \gamma y_2)(y_1^2 + y_2^2) \\ -y_1 + K \sin \beta y_1 - K \sin \beta y_{1\tau} - (\gamma y_1 + y_2)(y_1^2 + y_2^2) \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

donde se ha utilizado la notación compacta $y_{i\tau} := y_i(t - \tau)$. La función de transferencia para la parte lineal es:

$$G(s; \mu) = C(sI - A_0 - A_1 e^{-s\tau})^{-1} B = \frac{1}{s - \alpha + K \cos \beta (1 - e^{-s\tau})} \times I_2, \quad (3.26)$$

donde por simplicidad se ha introducido el vector de parámetros $\mu := (\alpha, \gamma, K, \beta)$. Claramente, el origen es un punto de equilibrio del sistema (3.23). En ausencia de control ($K = 0$), este punto resulta *estable* cuando $\alpha < 0$, e *inestable* cuando $\alpha > 0$. Además para $\alpha < 0$ existe un ciclo límite *inestable* que rodea al origen, cuya amplitud aproximada es $\sqrt{-\alpha}$. Mediante la técnica de control propuesta por Just et al. (2007) se busca alterar el comportamiento del sistema y lograr que para ciertos valores de los parámetros existan órbitas periódicas *estables*. Es decir, el objetivo es cambiar el tipo de bifurcación de Hopf y que la misma pase de ser subcrítica a ser supercrítica.

La función (3.25) se linealiza alrededor del punto de equilibrio $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$, con lo cual se obtiene la matriz Jacobiana en el dominio frecuencia

$$J(s; \mu) = \begin{pmatrix} 0 & 1 - K \sin \beta (1 - e^{-s\tau}) \\ -1 + K \sin \beta (1 - e^{-s\tau}) & 0 \end{pmatrix}.$$

⁷Este sistema ha sido estudiado en: Gentile, F., Moiola, J. y Paolini E. “Control de bifurcaciones utilizando la estrategia de Pyragas en el dominio frecuencia”, presentado en el II Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (MACI), 14 al 16 de diciembre de 2009, Rosario.

Nótese que los factores de la forma $e^{-s\tau}$ se incluyen para considerar la dinámica de los términos con retardo. Definiendo $G_{11} := [s - \alpha + K \cos \beta (1 - e^{-s\tau})]^{-1}$ y $J_{12} := 1 - K \sin \beta (1 - e^{-s\tau})$, se puede escribir

$$G(s; \mu)J(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & G_{11}J_{12} \\ -G_{11}J_{12} & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos autovalores son $\lambda_{1,2}(s; \alpha) = \pm iG_{11}J_{12}$. Considerando λ_2 , la condición de bifurcación resulta⁸

$$\lambda_2(i\omega_0; \alpha) = -i \frac{1 - K \sin \beta (1 - e^{-i\omega_0\tau})}{i\omega_0 - \alpha + K \cos \beta (1 - e^{-i\omega_0\tau})} = -1,$$

de donde se obtiene

$$i\omega_0 = \alpha + i - k(1 - e^{-i\omega_0\tau})e^{-i\beta}. \quad (3.27)$$

Nótese que si $K = 0$ (ó $\tau = 0$) existe una única solución $\omega_0 = 1$ para $\alpha = 0$, que corresponde a la condición de bifurcación del sistema sin controlar. Separando partes real e imaginaria en (3.27) y resolviendo para α y τ se llega a

$$\begin{cases} \alpha &= K[\cos \beta - \cos(\beta - \psi)], \\ \tau &= \psi[1 - K(\sin \beta - \sin(\beta - \psi))]^{-1}, \end{cases} \quad (3.28)$$

donde $\psi := \omega_0\tau$. Los autovectores derecho e izquierdo de la matriz $G(i\omega_0; \mu)J(\mu)$ asociados al autovalor $\lambda_2(i\omega_0; \alpha)$, resultan $\mathbf{v} = (1 - i)^T$, y $\mathbf{u} = (1 \quad i)^T$. Utilizando (3.8), se hallan las matrices Q y L como

$$Q = \mathbf{0}, \quad L = \begin{pmatrix} -4 - 48i & -4\gamma + 4i \\ -4\gamma + 4i & 4 + 48i \end{pmatrix},$$

con lo cual, de (3.6) resulta $\mathbf{p}(\omega_0; \mu) = (-1 - i\gamma \quad -\gamma + i)^T$ (nótese que \mathbf{V}_{02} y \mathbf{V}_{22} son nulos pues $Q = \mathbf{0}$). Teniendo en cuenta que en la bifurcación se verifica $-G_{11}J_{12}i = -1$, el coeficiente de curvatura se puede expresar como

$$\sigma_0 = \frac{1 + K\tau \cos \theta + \gamma K\tau \sin \theta}{1 + 2K\tau \cos \theta + (K\tau)^2}, \quad (3.29)$$

donde $\theta := \beta - \psi$. A partir de las Ecs. (3.28) se obtienen las curvas de bifurcación de Hopf en el espacio de parámetros (α, τ) , como se muestra en el diagrama de la

⁸Como λ_1 y λ_2 son complejos conjugados, la condición de bifurcación puede obtenerse mediante cualquiera de los dos.

izquierda de la Fig. 3.7. La estabilidad de los ciclos emergentes se determina a partir de la Ec. (3.29). Para la región que queda a la izquierda de la curva de Hopf, el punto de equilibrio es estable y para la región a la derecha de la curva, el mismo es inestable. Cuando la bifurcación es subcrítica, a la izquierda de la curva se genera un ciclo límite inestable y cuando la misma es supercrítica, a la derecha de la curva se genera un ciclo estable. Los puntos sobre la curva en los que se produce un cambio de estabilidad corresponden a bifurcaciones *degeneradas* H_{10} y no es posible decidir hacia dónde emergen los ciclos con la información brindada por el coeficiente σ_0 , que es nulo en estos puntos. La condición $\sigma_0 = 0$ equivale a la falla de la hipótesis (2) en el Teorema 3.3, es decir, que la intersección entre $\xi(\omega; \mu)$ y el contorno de $\lambda(i\omega; \mu)$ no es transversal. En la Fig. 3.7 también se muestran simulaciones del sistema para $\gamma = -10$, $\beta = \pi/4$, $\tau = 2\pi$ y $K = 0.05$. Para $\alpha = -0.01$ (azul) el equilibrio es asintóticamente estable y para $\alpha = 0.02$, (rojo) el equilibrio es inestable y el sistema exhibe una oscilación estable. En la Fig. 3.8 se representan los puntos de bifurcación de Hopf en el espacio de parámetros (α, τ, K) . Las porciones de la superficie en verde corresponden a bifurcaciones de Hopf subcríticas y las partes en rojo a bifurcaciones supercríticas. Es claro que las regiones que corresponden a estas últimas son mayores a medida que K aumenta. La frontera entre las regiones verdes y rojas está conformada por puntos de *falla* del coeficiente de curvatura ($\sigma_0 = 0$). Por último, en la Fig. 3.9 se observan las curvas que representan esta falla en el espacio (τ, K) .

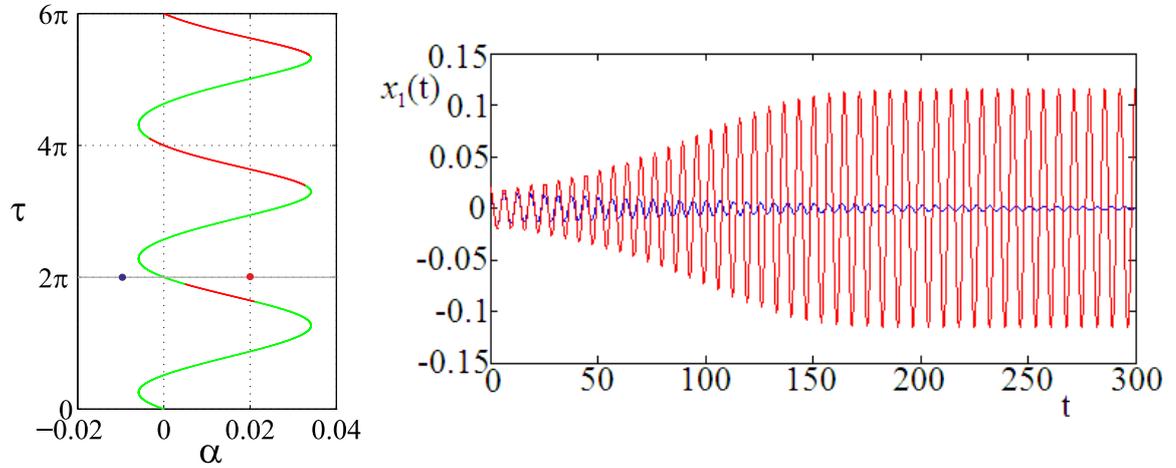


Figura 3.7: Izquierda: Diagrama de bifurcación en dos parámetros para $K = 0.05$: Bifurcación de Hopf supercrítica (rojo) y subcrítica (verde). Derecha: Simulaciones del sistema con $\gamma = -10$, $\beta = \pi/4$, $\tau = 2\pi$, $K = 0.05$, para $\alpha = -0.01$ (azul) y $\alpha = 0.02$ (rojo).

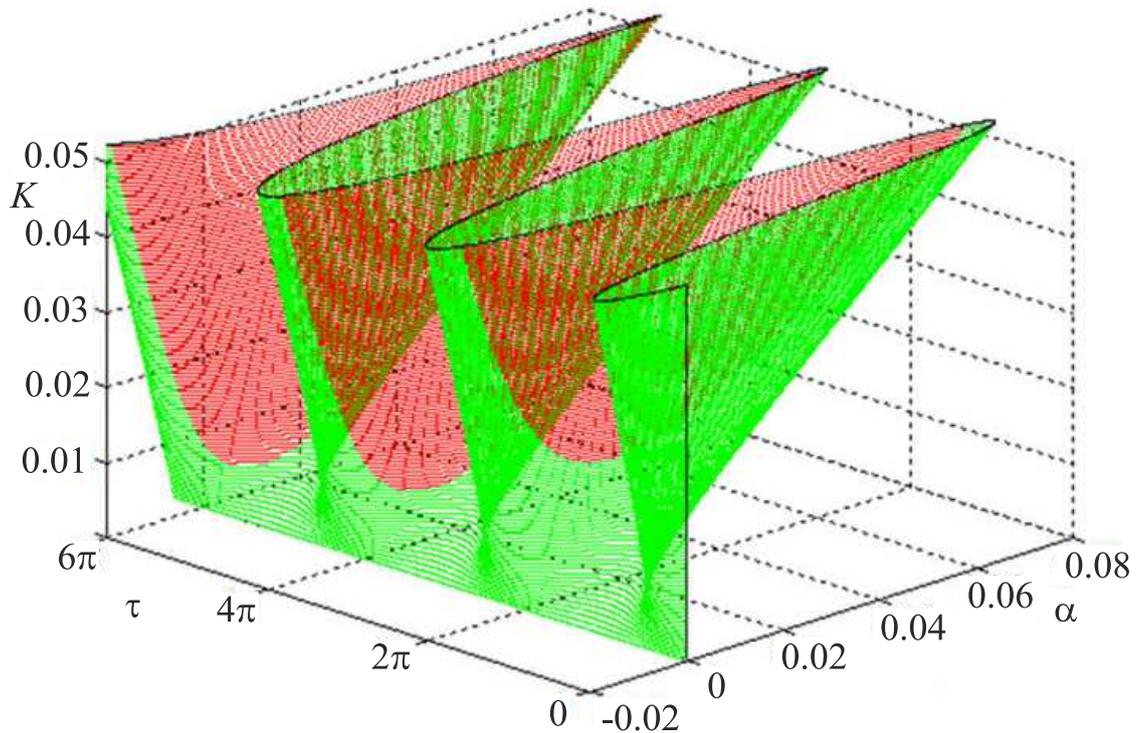


Figura 3.8: Superficie que representa la bifurcación de Hopf en el espacio de parámetros (α, τ, K) .

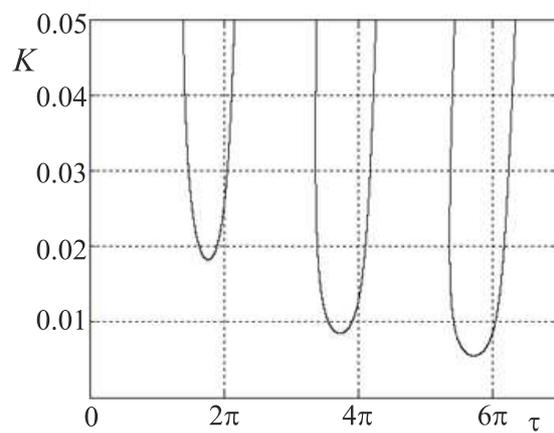


Figura 3.9: Puntos de falla del coeficiente de curvatura (bifurcaciones degeneradas H_{10}) en el espacio de parámetros (τ, K) .

Capítulo 4

Una nueva variante del Método en Frecuencia para el estudio de DDEs

4.1. Introducción

En este capítulo, se presentará otra variante del MF para el estudio de DDEs. Si bien este enfoque es en esencia similar al descrito en la Sección 3.3, esta nueva versión presenta ciertas ventajas computacionales sobre la anterior, que se irán puntualizando en el transcurso del capítulo. Además, esta nueva versión resulta más general con respecto a la cantidad tipos de sistemas que permite estudiar. Esta alternativa surge naturalmente a partir de la formulación que se describió en la Sección 3.2, mediante un manejo simple de los diagramas en bloques y propiedades de matrices. Estos resultados también pueden verse en (Gentile et al., 2012b). Por otra parte, se presentarán los conceptos de controlabilidad y observabilidad para sistemas con retardos, que deben tenerse en cuenta para una correcta aplicación del MF.

Luego de la novedosa estrategia propuesta por Pyragas (Pyragas, 1992), se han dedicado grandes esfuerzos al área de control por realimentación de estados retrasados, conocido como TDFC (“*time-delayed feedback control*”). Esta técnica se ha utilizado para diferentes objetivos, como la manipulación de la amplitud y frecuencia de órbitas periódicas (Atay, 1998), control de caos (Pyragas, 2001) y estabilización de ciclos límites inestables (Pyragas et al., 2004; Just et al., 2007), para mencionar sólo unos pocos ejemplos.

En particular, el conocido oscilador de van der Pol con realimentación retrasada ha sido estudiado por varios autores. En un interesante trabajo de Atay (1998), se comparan los efectos del TDFC con los de un compensador clásico proporcional y derivativo, y se calculan la amplitud y frecuencia de las órbitas periódicas con el método de promediación. Otros investigadores realizaron contribuciones por medio del método de formas normales (Wei & Jiang, 2005; Jiang & Wei, 2008; Wang & Jiang, 2010). Por

último, de Oliveira (2002) utilizó una versión simplificada del método de Lyapunov-Schmidt para estudiar la existencia de oscilaciones en otro modelo del sistema de van der Pol con retardo.

Estos mismos ejemplos se estudiarán con la variante del MF que se presenta a continuación. Se obtendrán aproximaciones de la amplitud y frecuencia de las órbitas periódicas de los distintos osciladores, corroborando los resultados obtenidos por los autores citados y presentando otros nuevos.

4.2. Estructuras relevantes de sistemas con retardos

En esta Sección se hará hincapié en dos estructuras básicas de sistemas con retardos, las cuales resultan de sumo interés dada su amplia variedad de aplicaciones. El primer esquema surge con la aplicación de TDFC a sistemas de EDOs, con lo cual el sistema a lazo cerrado está descrito por una DDE. El segundo esquema es más general y abarca un espectro mayor de aplicaciones. Para este último caso, se desarrolla la nueva alternativa del MF que constituye el aporte fundamental de este capítulo.

4.2.1. Caso I: Control de Pyragas o TDFC

Considérese el sistema dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t); \mu) + \mathbf{z}(t), \quad (4.1)$$

donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función no lineal, μ es un parámetro y $\mathbf{z}(t)$ representa una entrada de control accesible. En particular, se considera un control de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= -C\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{z}(t) &= K[\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t - \tau)], \end{aligned}$$

donde $\tau > 0$ es un retardo constante, $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es la matriz de ganancias del controlador y $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ selecciona los componentes del vector de estados utilizados para calcular la acción de control y que por lo tanto, en un sistema físico, se suponen

accesibles para ser medidos. Entonces, el sistema a lazo cerrado resulta

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t); \mu) + K[\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t - \tau)], \\ \mathbf{y}(t) = -C\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (4.2)$$

Es decir, la señal de control es proporcional a la diferencia entre el estado actual y el estado pasado del sistema. Este método fue originalmente propuesto y explorado en forma experimental por Pyragas (1992). Comúnmente, se utiliza para estabilizar ciclos límites inestables y/o para alterar la amplitud y frecuencia de las oscilaciones. Una discusión interesante sobre esta técnica puede verse en (Just et al., 2003). Nótese que la variable retrasada actúa en forma *lineal* y aparece como consecuencia de la estrategia de control elegida, aunque esta técnica también puede aplicarse a sistemas que ya poseen retardos. La Ec. (4.2) puede reescribirse como

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t - \tau) + B\mathbf{g}(\mathbf{y}(t); \mu), \\ \mathbf{y}(t) = -C\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (4.3)$$

para matrices apropiadas $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Entonces, eligiendo

$$G(s; \mu) = C(sI_n - A_0 - A_1e^{-s\tau})^{-1}B, \quad (4.4)$$

se puede aplicar la metodología en frecuencia en la forma descrita en la Sección **3.3**. Además, existe un considerable grado de libertad al momento de adoptar la realización y una elección inteligente puede simplificar los cálculos en forma notable. Sin embargo, dicha elección debe ser cuidadosa pues la realización debe resultar *controlable* y *observable* (Mees, 1981; Agamennoni et al., 2008). Si esto no se verifica, algunos cambios en la dinámica pueden no detectarse debido a cancelaciones de ceros y polos en las funciones características. Para sistemas descritos por DDEs la situación se vuelve más crítica debido a que los criterios de controlabilidad y observabilidad son más elaborados. Con respecto a éstos, existen distintas definiciones en la literatura, pero aquí se adoptarán las dadas en (Bath & Koivo, 1976); éstas parecen ser las más simples y útiles para los propósitos de esta Tesis y se presentan como sigue:

Teorema 4.1 *El sistema (4.3) es controlable si*

$$\text{rango}(A_0 + A_1e^{-s\tau} - sI_n \mid B) = n, \quad s \in \Lambda,$$

y observable si

$$\text{rango} \begin{pmatrix} A_0 + A_1 e^{-s\tau} - sI_n \\ C \end{pmatrix} = n, \quad s \in \Lambda,$$

donde el conjunto Λ es el espectro de $A := A_0 + A_1 e^{-s\tau}$. \diamond

Cabe mencionar que la estructura (4.3) está considerada entre los casos estudiados en (Moiola & Chen, 1996; Moiola et al., 1996), donde se plantea que la función de realimentación no lineal \mathbf{g} depende de $\mathbf{y}(t)$, pero no simultáneamente de $\mathbf{y}(t - \tau)$. El problema es muy diferente cuando ambas salidas ($\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{y}(t - \tau)$) están involucradas en la función no lineal. Para este caso resulta más conveniente considerar el planteo que se presenta a continuación.

4.2.2. Caso II: Caso general

La siguiente descripción es más general que la presentada para el Caso I y particularmente resulta de utilidad cuando la no linealidad depende simultáneamente del estado presente y pasado del sistema. Considérese una DDE de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau); \mu), \quad (4.5)$$

donde $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, y $\mathbf{x}(t)$ y μ se definen como en el Caso I. La función $\mathbf{f}(\cdot) = [f_1(\cdot) \dots f_n(\cdot)]^T$ puede incluir términos lineales y no lineales, pero eventualmente puede ocurrir que algunas componentes f_i involucren sólo términos lineales. En este caso es posible considerar una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y definir $\tilde{\mathbf{f}}(\cdot) := \mathbf{f}(\cdot) - A\mathbf{x}(t)$, de forma tal que el producto $A\mathbf{x}(t)$ contenga sólo términos lineales en la variable $\mathbf{x}(t)$ (A puede ser nula) y $\tilde{\mathbf{f}}(\cdot)$ contiene términos lineales y no lineales tanto en $\mathbf{x}(t)$ como en $\mathbf{x}(t - \tau)$. Entonces, (4.5) se puede reescribir como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau); \mu).$$

Más aún, en muchas ocasiones los términos estrictamente no lineales sólo involucran un subconjunto de las componentes del vector de estados $\mathbf{x}(t)$. De aquí que $\tilde{\mathbf{f}}(\cdot)$ pueda expresarse como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau); \mu) &= B\mathbf{g}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t - \tau); \mu), \\ \mathbf{y}(t) &= -C\mathbf{x}(t), \end{aligned}$$

donde B y C son matrices tales que $\mathbf{g} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($m \leq n$) no tiene elementos nulos; la matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ selecciona las componentes de $\mathbf{g}(\cdot)$ que forman parte de $\tilde{\mathbf{f}}(\cdot)$ y $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$ selecciona las componentes del vector $\mathbf{x}(t)$ que aparecen en los términos estrictamente no lineales. Como el lector puede inferir, el peor caso se tiene cuando todas las componentes f_i son estrictamente no lineales e involucran todas las variables de estado, lo cual conduce a $C = B = I_n$ y $\mathbf{g}(\cdot) = \tilde{\mathbf{f}}(\cdot)$. Sin embargo, generalmente esto no ocurre, y m y p son menores a n , dando lugar a una reducción en la dimensión del problema. Finalmente, el sistema (4.5) se puede expresar como

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{g}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t - \tau); \mu), \\ \mathbf{y}(t) = -C\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (4.6)$$

Este sistema se representa como muestra el diagrama en bloques de la Fig. 4.1. En este esquema, la realimentación no lineal depende tanto de $\mathbf{y}(t)$ como de $\mathbf{y}(t - \tau)$ y por lo tanto no puede analizarse directamente con la alternativa de la Sección 3.3. Entonces, una variante del MF para el estudio del sistema (4.6) está dada por el siguiente resultado.

Teorema 4.2 *El sistema (4.6) puede analizarse mediante el MF descrito en la Sección 3.2 definiendo la función de transferencia de la parte lineal como $G^*(s; \mu) := F(e^{-s\tau})G(s; \mu)$, donde*

$$F(e^{-s\tau}) = \begin{pmatrix} I_m \\ I_m e^{-s\tau} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times m}, \quad G(s; \mu) = C(sI_n - A)^{-1}B. \quad (4.7)$$

Además, la linealización alrededor del equilibrio debe obtenerse calculando la matriz formada por bloques

$$J(\mu) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial \mathbf{g}(\cdot)}{\partial \mathbf{y}(t)} & \frac{\partial \mathbf{g}(\cdot)}{\partial \mathbf{y}(t - \tau)} \end{array} \right) \Big|_{(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t - \tau)) = (\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}})}.$$

Los pasos siguientes son análogos a los descritos en la Sección 3.2. \diamond

Demostración. El sistema (4.6) se puede representar con el diagrama en bloques que se muestra en la Fig. 4.1, donde $G(s; \mu) = C(sI_n - A)^{-1}B$. Como $\mathbf{d}(t) = \mathbf{0}$, tanto el signo “−” del sumador como la ganancia del bloque $e^{-s\tau}$ se pueden absorber en

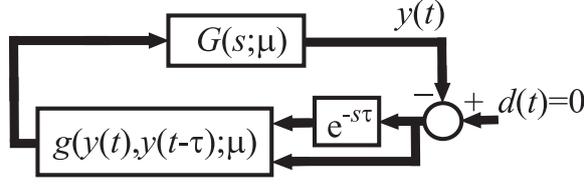


Figura 4.1: Representación en bloques del sistema (4.6).

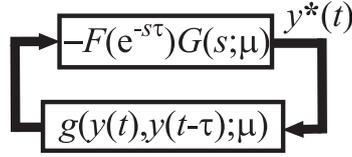


Figura 4.2: Representación en bloques equivalente al sistema (4.6), absorbiendo la dinámica del retardo en la parte lineal.

la parte lineal. Para ello, la función de transferencia que represente a la parte lineal debe definirse de modo que su salida sea

$$\mathbf{y}^*(t) = \mathcal{L}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}(s) \\ \mathbf{Y}(s)e^{-s\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t - \tau) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}.$$

La función de transferencia buscada es $F(e^{-s\tau})G(s; \mu)$, con $F(e^{-s\tau})$ dada por (4.7). Entonces, se obtiene la representación de la Fig. 4.2 y la linealización correspondiente resulta de calcular la matriz Jacobiana formada por bloques

$$J(\mu) = \left(\frac{\partial \mathbf{g}(\cdot)}{\partial \mathbf{y}(t)} \quad \left| \quad \frac{\partial \mathbf{g}(\cdot)}{\partial \mathbf{y}(t - \tau)} \right. \right) \Big|_{(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t - \tau)) = (\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}})}.$$

Suponiendo que el sistema (4.6) admite una solución de la forma

$$\mathbf{y}(t) \simeq \hat{\mathbf{y}} + \Re \left\{ \sum_{k=0}^2 \mathcal{Y}^k e^{ik\omega t} \right\}, \quad (4.8)$$

la salida retrasada $\mathbf{y}(t - \tau)$ está dada por

$$\mathbf{y}(t - \tau) \simeq \hat{\mathbf{y}} + \Re \left\{ \sum_{k=0}^2 \mathcal{Y}^k e^{-ik\omega\tau} e^{ik\omega t} \right\}. \quad (4.9)$$

Dado que $\mathbf{y}(\cdot)$ tiene frecuencia ω , lo mismo ocurre con $\mathbf{g}(\cdot)$ y es posible calcular sus coeficientes de Fourier \mathcal{G}^k , $k = 0, 1, 2$, en términos de \mathcal{Y}^0 , \mathcal{Y}^1 e \mathcal{Y}^2 . Igualando

cada armónico en la salida y la entrada de la parte lineal, se obtienen las siguientes relaciones

$$\mathcal{Y}^k = -G^*(i\omega k; \mu)\mathcal{G}^k, \quad k = 0, 1, 2.$$

La ecuación anterior representa un *balance armónico* de segundo orden. Definiendo $\mathbf{e}(t) := \mathbf{y}(t) - \widehat{\mathbf{y}}$ y desarrollando la función no lineal en una serie de Taylor, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t - \tau); \mu) &\simeq \mathbf{g}(\widehat{\mathbf{y}}, \widehat{\mathbf{y}}; \mu) + (D_1^1 \mathbf{g})\mathbf{e}(t) + (D_2^1 \mathbf{g})\mathbf{e}(t - \tau) \\ &+ \frac{1}{2}(D_{11}^2 \mathbf{g})\mathbf{e}(t) \otimes \mathbf{e}(t) + (D_{12}^2 \mathbf{g})\mathbf{e}(t) \otimes \mathbf{e}(t - \tau) \\ &+ \frac{1}{2}(D_{22}^2 \mathbf{g})\mathbf{e}(t - \tau) \otimes \mathbf{e}(t - \tau) + \frac{1}{3!}(D_{111}^3 \mathbf{g})\mathbf{e}(t) \otimes \mathbf{e}(t) \otimes \mathbf{e}(t) \\ &+ (D_{112}^3 \mathbf{g})\mathbf{e}(t) \otimes \mathbf{e}(t) \otimes \mathbf{e}(t - \tau) \\ &+ (D_{122}^3 \mathbf{g})\mathbf{e}(t) \otimes \mathbf{e}(t - \tau) \otimes \mathbf{e}(t - \tau) \\ &+ \frac{1}{3!}(D_{222}^3 \mathbf{g})\mathbf{e}(t - \tau) \otimes \mathbf{e}(t - \tau) \otimes \mathbf{e}(t - \tau) + \mathcal{O}(|\mathbf{e}|^4), \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde se utiliza la siguiente notación compacta para las derivadas

$$(D_{ij\dots k}^\ell \mathbf{g}) := \underbrace{\frac{\partial^\ell \mathbf{g}(y_1, y_2; \mu)}{\partial y_i \partial y_j \dots \partial y_k}}_{\ell \text{ derivadas}}, \quad \text{donde } i, j, \dots, k = 1 \text{ ó } 2.$$

Entonces, sustituyendo (4.8) y (4.9) en (4.10), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^0 &= -G^*(0; \mu)\mathcal{G}^0 \\ &= -G^*(0; \mu)\{(D_1^1 \mathbf{g})\mathcal{Y}^0 + (D_2^1 \mathbf{g})\mathcal{Y}^0 + \frac{1}{4}(D_{11}^2 \mathbf{g})\mathcal{Y}^1 \otimes \bar{\mathcal{Y}}^1 + \frac{1}{4}(D_{12}^2 \mathbf{g})\mathcal{Y}^1 \otimes \bar{\mathcal{Y}}^1 e^{i\omega\tau} \\ &\quad + \frac{1}{4}(D_{12}^2 \mathbf{g})\bar{\mathcal{Y}}^1 \otimes \mathcal{Y}^1 e^{-i\omega\tau} + \frac{1}{4}(D_{22}^2 \mathbf{g})\mathcal{Y}^1 \otimes \bar{\mathcal{Y}}^1\} + \mathcal{O}(|\mathcal{Y}^1|^4), \\ \mathcal{Y}^1 &= -G^*(i\omega; \mu)\mathcal{G}^1 \\ &= -G^*(i\omega; \mu)\{(D_1^1 \mathbf{g})\mathcal{Y}^1 + (D_2^1 \mathbf{g})\mathcal{Y}^1 e^{-i\omega\tau} + \frac{1}{2}(D_{11}^2 \mathbf{g})(2\mathcal{Y}^0 \otimes \mathcal{Y}^1 + \bar{\mathcal{Y}}^1 \otimes \mathcal{Y}^2) \\ &\quad + (D_{12}^2 \mathbf{g})(\mathcal{Y}^0 \otimes \mathcal{Y}^1 e^{-i\omega\tau} + \mathcal{Y}^1 \otimes \mathcal{Y}^0 + \frac{1}{2}\bar{\mathcal{Y}}^1 \otimes \mathcal{Y}^2 e^{-i2\omega\tau} + \frac{1}{2}\mathcal{Y}^2 \otimes \bar{\mathcal{Y}}^1 e^{i\omega\tau}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(D_{22}^2 \mathbf{g})(2\mathcal{Y}^0 \otimes \mathcal{Y}^1 e^{-i\omega\tau} + \bar{\mathcal{Y}}^1 \otimes \mathcal{Y}^2 e^{-i\omega\tau}) + \frac{1}{8}(D_{111}^3 \mathbf{g})\mathcal{Y}^1 \otimes \mathcal{Y}^1 \otimes \bar{\mathcal{Y}}^1 \\ &\quad + (D_{112}^3 \mathbf{g})(\frac{1}{2}\mathcal{Y}^1 \otimes \bar{\mathcal{Y}}^1 \otimes \mathcal{Y}^1 e^{-i\omega\tau} + \frac{1}{4}\mathcal{Y}^1 \otimes \bar{\mathcal{Y}}^1 \otimes \bar{\mathcal{Y}}^1 e^{-i\omega\tau}) \\ &\quad + (D_{122}^3 \mathbf{g})(\frac{1}{2}\mathcal{Y}^1 \otimes \mathcal{Y}^1 \otimes \bar{\mathcal{Y}}^1 + \frac{1}{4}\bar{\mathcal{Y}}^1 \otimes \mathcal{Y}^1 \otimes \mathcal{Y}^1 e^{-i2\omega\tau}) \\ &\quad + \frac{1}{8}(D_{222}^3 \mathbf{g})\mathcal{Y}^1 \otimes \mathcal{Y}^1 \otimes \bar{\mathcal{Y}}^1 e^{-i\omega\tau}\} + \mathcal{O}(|\mathcal{Y}^1|^4), \\ \mathcal{Y}^2 &= -G^*(i2\omega; \mu)\mathcal{G}^2 \\ &= -G^*(i2\omega; \mu)\{(D_1^1 \mathbf{g})\mathcal{Y}^2 + (D_2^1 \mathbf{g})\mathcal{Y}^2 e^{-i2\omega\tau} + \frac{1}{4}(D_{11}^2 \mathbf{g})\mathcal{Y}^1 \otimes \mathcal{Y}^1 \\ &\quad + \frac{1}{2}(D_{12}^2 \mathbf{g})\mathcal{Y}^1 \otimes \mathcal{Y}^1 e^{-i\omega\tau} + \frac{1}{4}(D_{22}^2 \mathbf{g})\mathcal{Y}^1 \otimes \mathcal{Y}^1 e^{-i2\omega\tau}\} + \mathcal{O}(|\mathcal{Y}^1|^4). \end{aligned}$$

Es conveniente resolver \mathcal{Y}^0 e \mathcal{Y}^2 en términos de \mathcal{Y}^1 (véase Mees & Chua, 1979). Entonces, despreciando los términos que contienen potencias mayores o iguales a $|\mathcal{Y}^1|^4$, las expresiones anteriores pueden escribirse como

$$\begin{cases} \mathcal{Y}^{0*} = -\frac{1}{4} [I + G^*(0; \mu)J]^{-1} G^*(0; \mu)(\mathbf{D}^2 \mathbf{g}) \mathcal{Y}^{1*} \otimes \bar{\mathcal{Y}}^{1*}, \\ \mathcal{Y}^{2*} = -\frac{1}{4} [I + G^*(i2\omega; \mu)J]^{-1} G^*(i2\omega; \mu)(\mathbf{D}^2 \mathbf{g}) \mathcal{Y}^{1*} \otimes \mathcal{Y}^{1*}, \end{cases} \quad (4.11)$$

$$(I + G^*(i\omega; \mu)J) \mathcal{Y}^{1*} = -G^*(i\omega; \mu) \mathbf{p}(i\omega; \mu), \quad (4.12)$$

$$\mathbf{p}(i\omega; \mu) = (\mathbf{D}^2 \mathbf{g}) \mathcal{Y}^{1*} \otimes \mathcal{Y}^{0*} + \frac{1}{2} (\mathbf{D}^2 \mathbf{g}) \bar{\mathcal{Y}}^{1*} \otimes \mathcal{Y}^{2*} + \frac{1}{8} (\mathbf{D}^3 \mathbf{g}) \mathcal{Y}^{1*} \otimes \mathcal{Y}^{1*} \otimes \bar{\mathcal{Y}}^{1*},$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^{k*} &:= \begin{pmatrix} \mathcal{Y}^k \\ \mathcal{Y}^k e^{-i\omega k \tau} \end{pmatrix}, \\ J &:= (D_1^1 \mathbf{g} \mid D_2^1 \mathbf{g}), \\ \mathbf{D}^2 \mathbf{g} &:= (D_{11}^2 \mathbf{g} \mid D_{12}^2 \mathbf{g} \mid D_{21}^2 \mathbf{g} \mid D_{22}^2 \mathbf{g}), \\ \mathbf{D}^3 \mathbf{g} &:= (D_{111}^3 \mathbf{g} \mid D_{112}^3 \mathbf{g} \mid D_{121}^3 \mathbf{g} \mid D_{122}^3 \mathbf{g} \mid D_{211}^3 \mathbf{g} \mid D_{212}^3 \mathbf{g} \mid D_{221}^3 \mathbf{g} \mid D_{222}^3 \mathbf{g}). \end{aligned}$$

Es decir, J , $\mathbf{D}^2 \mathbf{g}$ y $\mathbf{D}^3 \mathbf{g}$ son matrices formadas por bloques, dados por las derivadas primeras, segundas y terceras, respectivamente, de la función no lineal $\mathbf{g}(\cdot)$. Nótese que las expresiones en (4.11) son análogas a las dadas en (3.7). La ecuación para \mathcal{Y}^{1*} no puede resolverse en forma explícita pues la matriz $(I + G^*(i\omega; \mu)J)$ no es inversible en la bifurcación. En cambio, la componente de frecuencia fundamental puede aproximarse por el autovector derecho \mathbf{v} de la matriz $G^*(i\omega; \mu)J$ (véase Mees & Chua, 1979). De esta forma, se han obtenido fórmulas análogas a las descritas en la Sección 3.2, y esto completa la demostración. ■

4.3. Ejemplos

En esta sección, se estudiarán tres modelos que corresponden a distintas variantes del oscilador de van der Pol con retardos. En primer lugar, se analizarán las bifurcaciones de Hopf en un modelo propuesto por Atay (1998) utilizando el esquema de la Sección 4.2.1. Luego, para el mismo modelo, se investigará la aparición de bifurcaciones estáticas. Finalmente, la alternativa descrita en la Sección 4.2.2 se utilizará

para analizar la bifurcación de Hopf en los Ejemplos 4.3.3 y 4.3.4. En base a estos ejemplos, se discutirán las principales diferencias entre las formulaciones presentadas en las Secciones 4.2.1 y 4.2.2.

Ejemplo 4.3.1 Consideremos el oscilador de van der Pol sujeto a una acción de control

$$\ddot{x}(t) + \mu(x^2(t) - 1)\dot{x}(t) + x(t) = z(t), \quad (4.13)$$

donde $x \in \mathbb{R}$ y $\mu > 0$. Atay (1998) propuso que dicha señal de control tenga la forma $z(t) = \mu k x(t - \tau)$, $k \in \mathbb{R}$. Nótese que si en (4.13) $\mu = 0$, la no linealidad se anula provocando una bifurcación degenerada para este valor del parámetro. Entonces, como se propone en Strogatz (1994), se realiza un escalado en la variable de estado dado por $u(t) = \mu^{1/2}x(t)$. Luego (4.13) resulta

$$\ddot{u}(t) + u^2(t)\dot{u}(t) - \mu\dot{u}(t) + u(t) = \mu k u(t - \tau). \quad (4.14)$$

Esta única ecuación es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = \mu u_1(t) - u_2(t) - \frac{1}{3}u_1^3(t) + \mu k u_2(t - \tau), \\ \dot{u}_2(t) = u_1(t), \end{cases} \quad (4.15)$$

como puede verificarse derivando la primer ecuación en (4.15) con respecto a t , resultando en $\ddot{u}_1(t) = \mu\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) - u_1^2(t)\dot{u}_1(t) + \mu k\dot{u}_2(t - \tau)$. Por lo tanto, definiendo $\dot{u}_2(t) = u_1(t)$ y asignando $u_1(t) = u(t)$, se obtiene (4.14). Nótese que este sistema puede estudiarse con la metodología descrita en la Sección 4.2.1 eligiendo la realización

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mu k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^T = B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

$$g(y(t); \mu) = -(\mu + 1)y(t) + y^3(t)/3.$$

Luego, de acuerdo con (4.4), la función de transferencia para la parte lineal es

$$G(s; \mu) = C(sI - A_0 - A_1 e^{-s\tau})^{-1}B = \frac{s}{s^2 + s + 1 - \mu k e^{-s\tau}}.$$

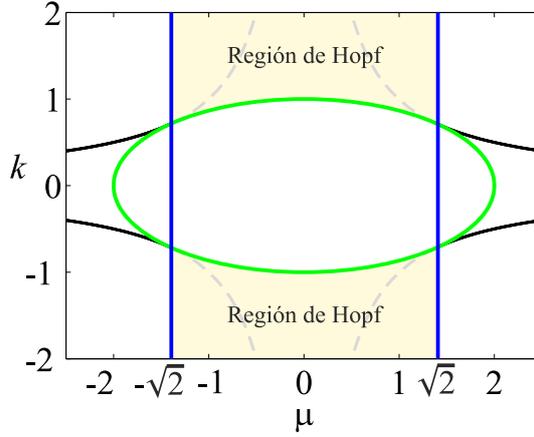


Figura 4.3: Región de posibles bifurcaciones de Hopf dada por (4.20).

Además, la linealización de $g(\cdot)$ alrededor de $\hat{y} = 0$ está dada por $J(\mu) = -(\mu + 1)$, y por lo tanto la única función característica es

$$\hat{\lambda}(s; \mu) = \frac{-s(\mu + 1)}{s^2 + s + 1 - \mu k e^{-s\tau}}. \quad (4.17)$$

A partir de la aplicación de la condición de bifurcación de Hopf ($\hat{\lambda}(i\omega_0; \mu_0) = -1$) y luego de unos cálculos simples, se obtiene

$$\begin{cases} 1 - \omega_0^2 &= \mu_0 k \cos(\omega_0 \tau), \\ \mu_0 \omega_0 &= \mu_0 k \sin(\omega_0 \tau). \end{cases} \quad (4.18)$$

Elevando al cuadrado y sumando las Ecs. (4.18), se llega a

$$\omega_0^4 + (\mu_0^2 - 2)\omega_0^2 + 1 - \mu_0^2 k^2 = 0,$$

que se puede resolver para la frecuencia crítica ω_0 como

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2 - \mu_0^2}{2} \pm \frac{1}{2}|2 - \mu_0^2|\sqrt{\eta}}, \quad (4.19)$$

siendo $\eta := 1 - 4(1 - \mu_0^2 k^2)/(2 - \mu_0^2)^2$. Para que exista solución, debe verificarse que $2 - \mu^2 \geq 0$ y además $0 \leq \eta \leq 1$. A partir de estas inecuaciones, las condiciones necesarias para la existencia de una bifurcación de Hopf pueden resumirse como

$$\begin{cases} |\mu| &\leq \sqrt{2}, \\ k^2 + (\mu/2)^2 &\geq 1. \end{cases} \quad (4.20)$$

La región en el espacio de parámetros determinada por estas condiciones se muestra en la Fig. 4.3. El área sombreada indica la zona de posibles bifurcaciones de Hopf.

Los autovectores derecho e izquierdo de $G(i\omega; \mu)J(\mu)$ asociados a $\widehat{\lambda}(i\omega; \mu)$ son triviales, $v = u = 1$. Más aún, $\mathbf{D}^2g = 0$ y $\mathbf{D}^3g = 2$, con lo cual $V_{02} = V_{22} = 0$ y $p(i\omega; \mu) = 1/4$. Escribiendo $G(s; \mu) = s/\Delta(s; \mu)$, donde $\Delta(s; \mu) := s^2 + s + 1 - \mu k e^{-s\tau}$, se obtiene $G'(s; \mu) := \partial G(s; \mu)/\partial s = N(s; \mu)/\Delta(s; \mu)^2$, donde $N(s; \mu) = -s^2 + 1 - \mu k(1 + s\tau)e^{-s\tau}$. Luego de algunos cálculos simples a partir de la Ec. (3.11), se obtiene el coeficiente de curvatura

$$\sigma_0 = \frac{\omega_0}{4(\mu + 1)} \Re \left\{ \frac{i\Delta(i\omega_0; \mu)}{N(i\omega_0; \mu)} \right\},$$

que, utilizando la condición $\widehat{\lambda}(i\omega_0; \mu_0) = -1$ resulta

$$\sigma_0 = -\frac{\omega_0^2}{4|N(i\omega_0)|^2} [\omega_0^2 + 1 - \mu_0 k \cos(\omega_0\tau) - \mu_0 k \omega_0 \tau \sin(\omega_0\tau)].$$

Considerando (4.18), finalmente se llega a

$$\sigma_0 = -\frac{\omega_0^4(2 - \mu_0\tau)}{4|N(i\omega_0)|^2}. \quad (4.21)$$

Por lo tanto, la bifurcación de Hopf es *supercrítica* si $\mu\tau < 2$ y *subcrítica* si $\mu\tau > 2$. También, es posible determinar la amplitud de las órbitas periódicas emergentes a partir del Teorema 3.3. Considerando (4.17) y teniendo en cuenta que $p(i\omega; \mu) = 1/4$, se plantea la ecuación de intersección $\lambda(i\tilde{\omega}; \tilde{\mu}) = -1 + \xi(\tilde{\omega}; \tilde{\mu})\theta^2$ (Ec. (3.15)). Separando partes real e imaginaria, la misma resulta en

$$\begin{cases} 1 - \tilde{\omega}^2 &= \tilde{\mu}k \cos(\tilde{\omega}\tau), \\ \tilde{\mu}\tilde{\omega} &= \tilde{\mu}k \sin(\tilde{\omega}\tau) + \frac{1}{4}\tilde{\omega}\theta^2, \end{cases} \quad (4.22)$$

y de la segunda ecuación se obtiene θ como

$$\theta = 2\sqrt{\tilde{\mu}[1 - k \sin(\tilde{\omega}\tau)/\tilde{\omega}]}. \quad (4.23)$$

Para valores pequeños de μ , la frecuencia $\tilde{\omega}$ es cercana a la unidad y la amplitud normalizada está dada por $\theta \simeq 2\sqrt{\mu(1 - k \sin \tau)}$. Entonces, además de la condición $\mu > 0$, para la existencia de órbitas periódicas se debe verificar que $k \sin \tau < 1$. Más aún, de (4.22) se puede obtener fácilmente $\mu = f_1(\tilde{\omega}) := (1 - \tilde{\omega}^2)/[k \cos(\tilde{\omega}\tau)]$, y desarrollando esta función con un polinomio de Taylor de primer orden se tiene

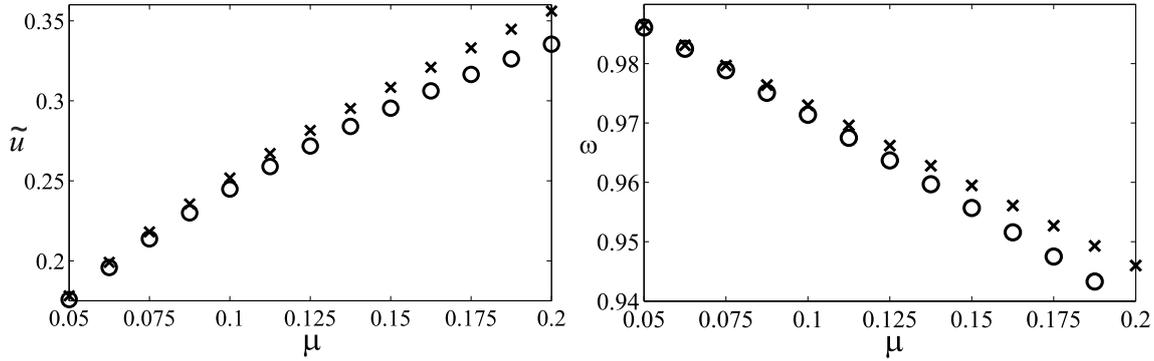


Figura 4.4: Amplitud (izquierda) y frecuencia (derecha) de los ciclos límites del sistema (4.14) en función de μ , con $\tau = k = 1$. (\times) valores calculados con el MF ($\tilde{u} = 2\sqrt{\mu(1 - k \sin \tau)}$ y $\omega = 1 - \mu k \cos \tau/2$); (\circ) simulaciones numéricas.

$$\mu = f_1(\tilde{\omega}) \simeq \frac{-2}{k \cos \tau} (\tilde{\omega} - 1) + \mathcal{O}((\tilde{\omega} - 1)^2).$$

De esta forma, se obtiene un valor de la frecuencia con corrección lineal en el parámetro, dado por

$$\tilde{\omega} \simeq 1 - \mu k \cos \tau/2. \quad (4.24)$$

Dado que $V_{02} = V_{22} = 0$, la aproximación de la órbita periódica resulta $u(t) = y(t) = \Re\{\mathcal{Y}^1 e^{i\tilde{\omega}t}\}$. Más aún, como $v = 1$, se tiene $\mathcal{Y}^1 = \theta = 2[\mu(1 - k \sin \tau)]^{1/2}$. La dependencia de la amplitud y la frecuencia en el parámetro μ se puede apreciar en la Fig. 4.4. Este gráfico provee una comparación entre los valores teóricos obtenidos con las Ecs. (4.23) y (4.24) y los resultados de simulaciones numéricas. Nótese que para el sistema (4.13) la amplitud teórica resulta $\tilde{x} = \mu^{-1/2}\tilde{u} = 2(1 - k \sin \tau)^{1/2}$, como mostró Atay (1998).

Ejemplo 4.3.2 Además de las bifurcaciones de Hopf, se conoce que el sistema considerado en el Ejemplo 4.3.1 puede exhibir varias bifurcaciones, como se muestra en (Jiang & Wei, 2008; Wang & Jiang, 2010). Entre ellas pueden mencionarse la denominada de Bogdanov-Takens, el triple cero y el cero-Hopf. La herramienta clásica utilizada por estos autores es la reducción a la forma normal, que parece ser la alternativa más difundida en la literatura específica. Aquí se mostrará que a partir de una realización adecuada, el MF permite la detección de todas las singularidades antes

mencionadas.

En la Ec. (4.17) puede verse que si $\mu k = 1$, el valor de $\widehat{\lambda}(0; \mu)$ queda indeterminado. Además, Jiang & Wei (2008) mostraron que para $\mu k = 1$ ocurre una bifurcación estática. Por lo tanto, la cuestión que surge es si esta bifurcación puede analizarse con la realización dada por (4.16). Consideremos $\mu k = 1$, entonces

$$A_0 + A_1 e^{-s\tau} - sI = \begin{pmatrix} -1-s & -1+e^{-s\tau} \\ 1 & -s \end{pmatrix},$$

luego, $\text{rango}\{A_0 + A_1 e^{-s\tau} \mid B\} = 2$ y $\text{rango}\{[(A_0 + A_1 e^{-s\tau})^T \mid C^T]^T\} = 1$ (cuando $s = 0$), haciendo que falle la condición de observabilidad establecida por el Teorema 4.1. En algunas ocasiones, para satisfacer las condiciones de controlabilidad y observabilidad, es necesario adoptar una realización que no es la más simple o que no es la óptima bajo el criterio que las matrices $G(s; \mu)$ y $J(\mu)$ tengan dimensiones mínimas. Por ejemplo, como puede verificarse fácilmente, la siguiente realización del sistema (4.15) deriva en un sistema controlable y observable

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mu k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g(\mathbf{y}(t); \mu) = -(\mu + 1)y_1(t) + \frac{1}{3}y_1^3(t) + y_2(t).$$

Para esta elección de matrices, la función de transferencia de la parte lineal resulta $G(s; \mu) = (s \ 1)^T / \Delta(s; \mu)$, donde $\Delta(s; \mu) := s^2 + s - \mu k e^{-s\tau}$. La matriz Jacobiana es $J(\mu) = (-(\mu + 1) \ 1) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ (que tiene rango uno). Luego, uno de los autovalores de $G(s; \mu)J(\mu)$ es nulo y el no trivial está dado por

$$\widehat{\lambda}(s; \mu) = \frac{1 - s(\mu + 1)}{s^2 + s - \mu k e^{-s\tau}}. \quad (4.25)$$

Nótese que en esta expresión, se tiene $\widehat{\lambda}(0; \mu) = -1/(\mu k)$. Luego, la condición $\mu k = 1$ provoca una bifurcación estática ($\widehat{\lambda}(0; 1/k) = -1$). Sin embargo, esta expresión del autovalor comparte una desventaja con la hallada en (4.17). Si se desea aplicar el criterio de estabilidad establecido por el Teorema 3.3 se deben hallar los polos de estas funciones características, lo cual equivale a resolver ecuaciones trascendentes. Entonces, mientras que se ha obtenido una reducción dimensional arribando a un único autovalor en frecuencia, el análisis de estabilidad parece tener la misma complejidad que en la formulación del dominio tiempo. Es más, se puede ver que este

problema surgirá siempre que se utilice la metodología de la Sección 4.2.1 debido al término $\det(sI - A_0 - A_1 e^{-s\tau})^{-1}$ que aparece en la definición de $G(s; \mu)$ (Ec. (4.4)). Para evitar este inconveniente, se puede utilizar la alternativa de la Sección 4.2.2. Por ejemplo, si se consideran

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

$$g(\mathbf{y}^*(t); \mu) = -(\mu + 1)y_1(t) + y_1(t)^3/3 - \mu k y_2(t - \tau),$$

se tienen

$$G^*(s; \mu) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \begin{pmatrix} s & 1 & s e^{-s\tau} & e^{-s\tau} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{1 \times 4},$$

$$J(\mu) = \begin{pmatrix} -(\mu + 1) & 0 & 0 & -\mu k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 4}.$$

Es simple verificar que la matriz $G^*(s; \mu)J(\mu)$ tiene un único autovalor no nulo dado por

$$\widehat{\lambda}(s; \mu) = -\frac{(\mu + 1)s + \mu k e^{-s\tau}}{s^2 + s + 1}. \quad (4.27)$$

En este caso, los polos de $\widehat{\lambda}(s; \mu)$ se encuentran en el semiplano izquierdo ($s_{1,2} = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$). Entonces, tanto la estabilidad del equilibrio como del ciclo límite emergente pueden deducirse a partir del diagrama de Nyquist de $\widehat{\lambda}(i\omega; \mu)$ y del Teorema 3.3 sin tener que estudiar la distribución de raíces de un cuasipolinomio. Por lo tanto, la última realización es claramente más ventajosa que las primeras y además, resulta más simple que la formulación en el dominio tiempo. Por otra parte, las condiciones de controlabilidad y observabilidad para la parte lineal se determinan de la misma forma que para sistemas EDOs, pues $G(s; \mu) = C(sI_n - A)^{-1}B$. Nótese que con la expresión del autovalor (4.27) la condición de bifurcación (4.18) se mantiene inalterada, pero las bifurcaciones estáticas (ST) pueden analizarse correctamente. Teniendo en cuenta (4.27), la ecuación característica se vuelve

$$h(s, \lambda; \mu) = \lambda - \widehat{\lambda}(s; \mu) = \lambda + \frac{(\mu + 1)s + \mu k e^{-s\tau}}{s^2 + s + 1} = 0,$$

y las condiciones de bifurcación pueden determinarse en términos de la función $h(s, \lambda; \mu)$. Particularmente, una bifurcación estática ocurre cuando $h(0, -1; \mu) = 0$ (Moiola & Chen, 1996), de donde se obtiene $\mu k = 1$. La Fig. 4.5(a) muestra el

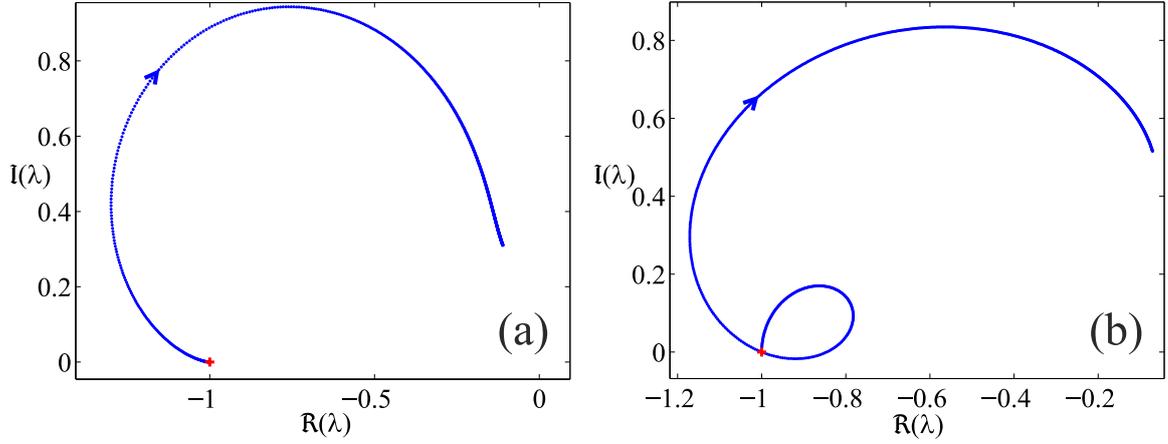


Figura 4.5: Diagramas de Nyquist de $\widehat{\lambda}(i\omega; \mu)$. (a): $(\mu, k, \tau) = (0.5, 2, 0.5)$ (condición para la ocurrencia de una bifurcación estática); (b): $(\mu, k, \tau) = (1, 1, \pi/2)$ (condición de GG). Nótese que para este último caso, el contorno pasa dos veces por el punto $-1 + i0$, para $\omega_{0,a} = 0$ y para $\omega_{0,b} = \sqrt{2 - \mu^2} = 1$.

diagrama de Nyquist de $\widehat{\lambda}(i\omega; \mu)$ para $\mu = 0.5$, $k = 2$ y $\tau = 0.5$. Fijando $k = 1/\mu$, La expresión de la frecuencia crítica (4.19) se reduce a

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2 - \mu_0^2}{2} \pm \frac{1}{2}|2 - \mu_0^2|},$$

y por lo tanto si $|\mu| < \sqrt{2}$, una solución es $\omega_{0,a} = 0$ y la otra está dada por $\omega_{0,b} = \sqrt{2 - \mu_0^2}$. Esto significa que para una dada combinación de los parámetros, la ecuación de bifurcación $h(s, -1; \mu) = 0$ tiene soluciones $s = 0$ y $s = \pm i\omega_{0,b}$. Esta condición corresponde a una bifurcación denominada cero-Hopf o de Gavrilov-Guckenheimer (GG). Más aún, reemplazando la condición $\mu k = 1$ en (4.18) se obtiene el valor crítico del retardo τ que provoca esta singularidad como

$$\tau_{GG} = \frac{1}{\omega_{0,b}} \arccos(1 - \omega_{0,b}^2) = \frac{1}{\sqrt{2 - \mu^2}} \arccos(\mu^2 - 1). \quad (4.28)$$

Para ilustrar esta condición, en la Fig. 4.5(b) se muestra el contorno de $\widehat{\lambda}(i\omega; \mu)$ para $\mu = k = 1$ y $\tau = \pi/2$ (obtenido a partir de (4.28)).

Por otra parte, tomando sucesivas derivadas de la función $h(s, -1; \mu)$ es posible buscar múltiples raíces en $s = 0$. Para más detalles acerca de las condiciones que determinan la multiplicidad de raíces, véase (Moiola & Chen, 1996). Por ejemplo, consideremos

la derivada $\partial h(\cdot)/\partial s$, que resulta en

$$\frac{\partial h(\cdot)}{\partial s} = \frac{\Gamma'(s; \mu)\Phi(s) - \Gamma(s; \mu)\Phi'(s)}{\Phi(s)^2},$$

donde $\Gamma(s; \mu) := s(\mu + 1) + e^{-s\tau}$ y $\Phi(s) := s^2 + s + 1$. Para $s = 0$ se obtiene $\partial h(\cdot)/\partial s|_{s=0} = \mu - \tau$, entonces, $h(s, -1; \mu)$ tiene una raíz doble en $s = 0$ sólo si $\mu = \tau$, es decir, para la combinación de parámetros $(\mu, k, \tau) = (\tau, 1/\tau, \tau)$. Esta singularidad se denomina bifurcación de Bogdanov-Takens (BT). Fijando también la restricción $\mu = \tau$ y tomando la segunda derivada de $h(\cdot)$, se obtiene

$$\frac{\partial^2 h(\cdot)}{\partial s^2} = \frac{\Gamma''(s; \tau)\Phi(s) - \Gamma(s; \tau)\Phi''(s)}{\Phi(s)^4}.$$

Para $s = 0$ resulta $\partial^2 h(\cdot)/\partial s^2|_{s=0} = -(2 - \tau^2)$, luego la condición para tener una raíz triple en $s = 0$ es $\tau = \sqrt{2}$, o en forma más precisa, el vector de parámetros correspondiente es $(\mu, k, \tau) = (\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Teniendo en cuenta los resultados de los Ejemplos 4.3.1 y 4.3.2, podemos obtener el diagrama de bifurcaciones en el espacio de parámetros (μ, k) . A partir de (4.18), expresando los valores críticos μ_0 y k_0 en términos de ω_0 , se llega a

$$(\mu_0, k_0) = \left(\frac{1 - \omega_0^2}{\omega_0} \tan \omega_0 \tau, \frac{\omega_0}{\sin \omega_0 \tau} \right).$$

Estas ecuaciones representan la curva de bifurcación de Hopf parametrizada en la frecuencia crítica ω_0 , donde el tipo de bifurcación se deduce a partir del signo de coeficiente de curvatura (4.21). La Fig. 4.8 muestra las curvas de bifurcación estática y de Hopf. Estas últimas se han obtenido para algunos valores diferentes de τ . La curva en verde indica la condición de borde dada por $k^2 + (\mu/2)^2 = 1$. Todas las curvas de Hopf corresponden al tipo supercrítico. El equilibrio es siempre inestable para un punto (μ, k) debajo de la curva verde o a la derecha de la curva de bifurcación estática (indicada como ST). A la izquierda de la curva ST, para un valor de τ dado (fijo), el equilibrio es estable si μ y k son tales que el punto (μ, k) se encuentra por encima de la curva de Hopf. Dicho de otra forma, si fijamos un par (μ', k') que verifique (4.20), el origen será estable si τ es suficientemente grande para que la curva de Hopf se encuentre por debajo del punto (μ', k') . Es decir, como puede verse en la Fig. 4.8, la

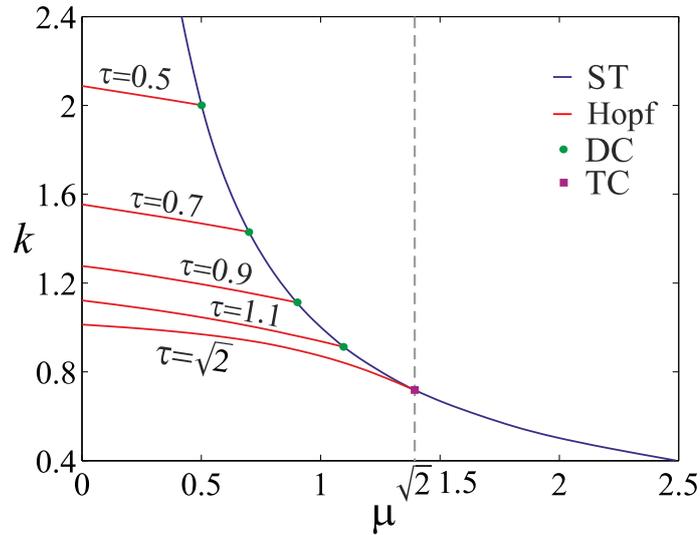


Figura 4.6: Curvas de bifurcación en el espacio de parámetros (μ, k) . Se muestran bifurcaciones estáticas (ST, negro), de Hopf (rojo) y las condiciones de borde dadas por (4.20). Los puntos donde se unen las curvas de bifurcación estática (ST) y de Hopf corresponden a bifurcaciones de Bogdanov-Takens o doble cero (DC). Para la combinación de parámetros dada por $(\mu, k, \tau) = (\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ocurre la bifurcación denominada triple cero (TC).

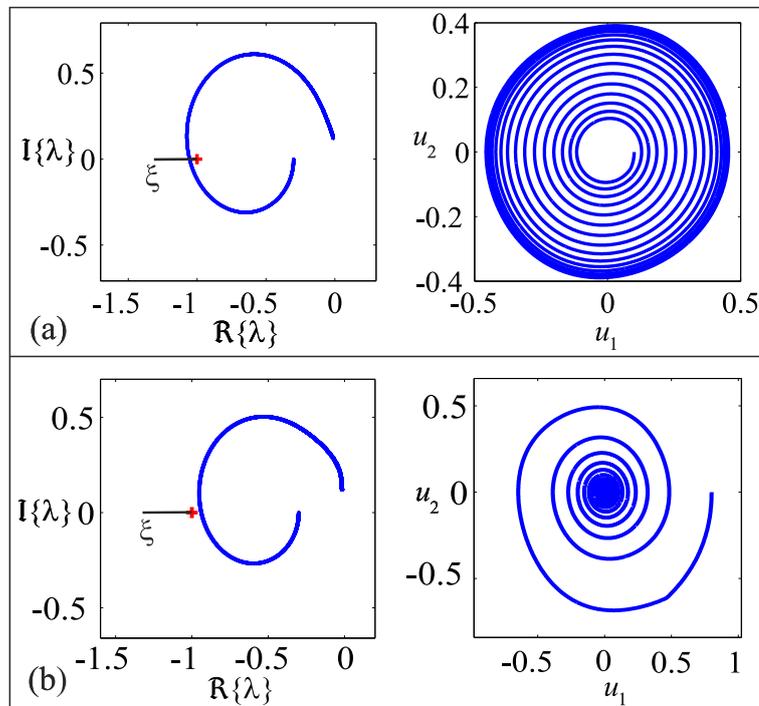


Figura 4.7: (a) Diagrama de Nyquist (izquierda) y simulación numérica (derecha) para $k = 1.5$, $\mu = 0.2$ y $\tau = 0.5$. El lugar geométrico encierra al punto $-1 + i0$, el equilibrio es inestable y existe una oscilación estable que lo rodea. (b) Diagrama de Nyquist (izquierda) y simulación numérica (derecha) para $k = 1.5$, $\mu = 0.2$ y $\tau = 1$. El lugar geométrico no encierra al punto $-1 + i0$, por lo que el equilibrio es estable.

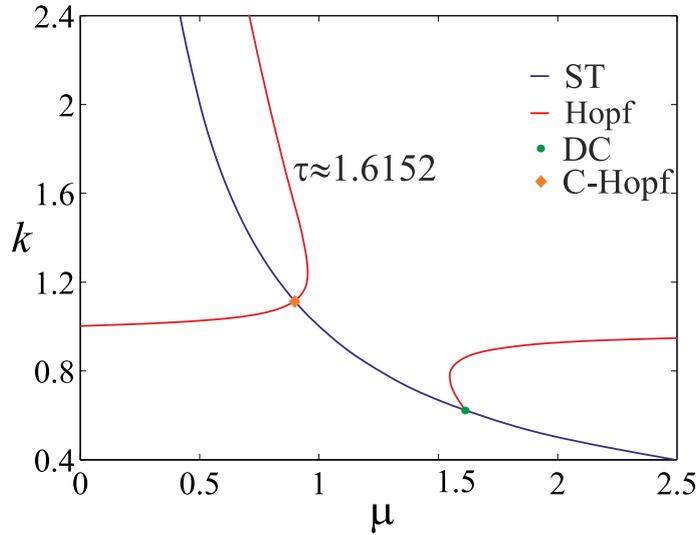


Figura 4.8: Curvas de bifurcación en el espacio de parámetros (μ, k) . Se muestran bifurcaciones estáticas (ST, negro), de Hopf (rojo), los puntos Bogdanov-Takens o doble cero (DC) y un punto de Gavrilov-Guckenheimer o triple cero (TC).

región de estabilidad del equilibrio es mayor a medida que τ aumenta. Por lo tanto, puede concluirse que el retardo tiene un efecto *estabilizante* sobre el equilibrio.

Para ilustrar estos hechos se proveen algunos resultados numéricos. A partir de la Ec. (3.3) se puede verificar que para la realización (4.26) se tiene $\xi = -1/(\mu + 1)$, con lo cual este vector apunta siempre en la dirección del semieje real negativo. La Fig. 4.7 muestra los diagramas de Nyquist de $\widehat{\lambda}(i\omega; \mu)$ dado por (4.27) y las simulaciones numéricas para $k = 1.5$, $\mu = 0.2$ y dos valores diferentes de τ . En la Fig. 4.7(a) ($\tau = 0.5$) el diagrama de Nyquist encierra una vez al punto crítico $-1 + i0$, entonces el equilibrio es inestable y existe un ciclo límite estable que lo rodea. En la Fig. 4.7(b) ($\tau = 1$) el lugar geométrico de $\widehat{\lambda}(i\omega; \mu)$ no encierra al punto crítico, por lo cual el equilibrio es estable y no existen soluciones periódicas. Entonces, la realimentación retrasada estabiliza el origen al forzar la ocurrencia de la bifurcación de Hopf. La Fig. 4.8 muestra una curva de Hopf para el caso en el cual el retardo τ verifica la condición (4.28). Dicha curva consta de dos ramas, una que finaliza en la curva de bifurcación estática, y otra que intersecta la curva ST en el punto denominado TC, que denota la bifurcación triple-cero o de Gavrilov-Guckenheimer.

Ejemplo 4.3.3 Otro sistema propuesto en (Atay, 1998) está dado por la ecuación modificada

$$\ddot{x}(t) + \mu (x^2(t) - 1) x(t - \tau) + x(t) = 0. \quad (4.29)$$

Aplicando el mismo escalado de la variable que se utilizó en el Ejemplo 4.3.1 ($u = \mu^{1/2}x$), se tiene

$$\ddot{u}(t) + (u^2(t) - \mu) u(t - \tau) + u(t) = 0. \quad (4.30)$$

Definiendo las variables de estado como $u_2(t) = u(t)$ y $u_1(t) = \dot{u}(t)$, la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = -(u_2^2(t) - \mu) u_2(t - \tau) - u_2(t), \\ \dot{u}_2(t) = u_1(t). \end{cases}$$

Para aplicar la variante descrita en la Sección 4.2.2 se considera la realización

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g(\mathbf{y}^*(t); \mu) = (y(t)^2 - \mu)y(t - \tau) + y(t),$$

por lo cual la función de transferencia de la parte lineal es $G(s) = C(sI_2 - A)^{-1}B = 1/s^2$. Se puede comprobar fácilmente que para las matrices elegidas el sistema resulta controlable y observable. Además, para esta realización se obtienen $G^* = F(e^{-s\tau})G(s) = (1 \ e^{-s\tau})^T/s^2$ y $J(\mu) = (1 \ -\mu)$, luego

$$G^*(s)J(\mu) = \frac{1}{s^2} \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ e^{-s\tau} & -\mu e^{-s\tau} \end{pmatrix}.$$

Dado que el rango de esta matriz es uno, un autovalor es nulo y el otro es igual a la traza de la matriz, por lo tanto $\hat{\lambda}(s; \mu) = (1 - \mu e^{-s\tau})/s^2$. La condición de bifurcación de Hopf ($\hat{\lambda}(i\omega_0; \mu_0) = -1$), luego de separar las partes real e imaginaria, se puede escribir como

$$\begin{cases} \mu_0 \cos(\omega_0\tau) = 1 - \omega_0^2, \\ \mu_0 \sin(\omega_0\tau) = 0. \end{cases}$$

Claramente, una solución está dada por $\omega_0 = 1$ y $\mu_0 = 0$, la misma que para el sistema sin retardo (véase Padín et al., 2005, para el oscilador de van der Pol sin retardo).

Los autovectores derecho e izquierdo asociados a $\widehat{\lambda}(i\omega; \mu)$ son $\mathbf{v} = (1, e^{-i\omega\tau})^T$ y $\mathbf{u} = (1, -\mu)^T$, y además $\mathbf{D}^2g = \mathbf{0}$. Entonces $\mathbf{p}(i\omega; \mu)$ se obtiene como¹

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(i\omega; \mu) &= \frac{1}{8}(\mathbf{D}^3g)\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes \bar{\mathbf{v}} \\ &= \frac{1}{8}[0 \ 2 \ 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0] [1 \ e^{i\omega\tau} \ e^{-i\omega\tau} \ 1 \ e^{-i\omega\tau} \ 1 \ e^{-i2\omega\tau} \ e^{-i\omega\tau}]^T \\ &= e^{-i\omega\tau}/2 + e^{i\omega\tau}/4. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Para calcular el coeficiente de curvatura es conveniente notar que

$$\mathbf{u}^T F(e^{-i\omega_0\tau})G(i\omega_0; \mu_0)\mathbf{p}(i\omega_0; \mu) = -\mathbf{p}(i\omega_0; \mu), \quad (4.32)$$

(pues en la bifurcación $\widehat{\lambda}(i\omega_0; \mu_0) = -(1 - \mu_0 e^{-i\omega_0\tau})/\omega_0^2 = -1$). Por otra parte, se tiene

$$\mathbf{u}^T [F(e^{-i\omega\tau})G(i\omega)]' J(\mu)\mathbf{v} = \frac{i}{\omega} [2 - \mu e^{-i\omega\tau} (2 + i\omega\tau)]. \quad (4.33)$$

Utilizando (4.32) y (4.33), luego de algunos cálculos se llega a

$$\sigma_0 = \frac{\omega}{4} \left(\frac{-2\mu \sin(2\omega\tau) + \mu\omega\tau \cos(2\omega\tau) - 2 \sin(\omega\tau) + \mu\omega\tau}{4 + 4\mu^2 + \mu^2\omega^2\tau^2 - 8\mu \cos(\omega\tau) - 4\mu\omega\tau \sin(\omega\tau)} \right).$$

Por ejemplo, para la solución $(\omega_0, \mu_0) = (1, 0)$ el coeficiente de curvatura resulta

$$\sigma_0 = \frac{\sin(\tau)}{8}.$$

Entonces, la bifurcación de Hopf es supercrítica si $\sin \tau < 0$ y subcrítica si $\sin \tau > 0$.

En forma análoga al Ejemplo 4.3.1, es posible determinar la amplitud de las oscilaciones emergentes planteando la ecuación de intersección $\widehat{\lambda}(i\tilde{\omega}; \tilde{\mu}) = -1 + \xi(\tilde{\omega}; \tilde{\mu})\theta^2$ (Ec. (3.4)). Teniendo en cuenta que $\widehat{\lambda}(i\omega; \mu) = -(1 - \mu e^{-i\omega\tau})/\omega^2$ y la Ec. (4.31), se llega a

$$\begin{cases} 1 - \tilde{\mu} \cos(\tilde{\omega}\tau) = \tilde{\omega}^2 - \frac{3}{4} \cos(\tilde{\omega}\tau)\theta^2, \\ \tilde{\mu} \sin(\tilde{\omega}\tau) = \frac{1}{4} \sin(\tilde{\omega}\tau)\theta^2. \end{cases} \quad (4.34)$$

De la segunda ecuación se obtiene $\theta = 2(\tilde{\mu})^{1/2}$, *i.e.* la amplitud de las oscilaciones es $\tilde{u} = 2(\tilde{\mu})^{1/2}$, que en el sistema original (4.29) corresponde a una oscilación de amplitud $\tilde{x} = 2$. El gráfico de la izquierda en la Fig. 4.9 muestra la dependencia de la amplitud con respecto a μ , proveyendo una comparación entre los resultados basados en el MF y los obtenidos por simulaciones numéricas. Además, a partir de la primera ecuación

¹Se entiende que $(y_1(t), y_2(t)) = (y(t), y(t - \tau))$ para calcular las derivadas.

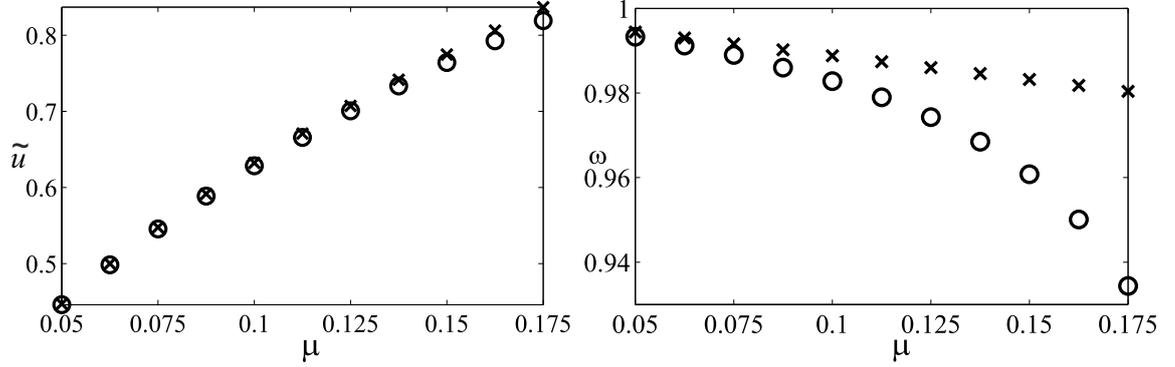


Figura 4.9: Amplitud (izquierda) y frecuencia (derecha) de los ciclos límites en función de μ para el sistema (4.30), con $\tau = 4.6$. (\times) valores teóricos ($\tilde{u} = 2\sqrt{\mu}$, $\omega = 1 + \mu \cos \tau/2$); (\circ) simulaciones numéricas.

en (4.34), se obtiene $\tilde{\mu} = f_2 := (\tilde{\omega}^2 - 1)/[2 \cos(\tilde{\omega}\tau)]$. Expandiendo $\tilde{\mu}$ como una serie de potencias de ω , se llega a

$$\tilde{\mu} \simeq \frac{1}{\cos \tau}(\tilde{\omega} - 1) + \mathcal{O}((\tilde{\omega} - 1)^2),$$

entonces, considerando sólo el término de primer orden, la frecuencia corregida resulta $\tilde{\omega} \simeq 1 + \mu \cos \tau$. Esta aproximación se compara con resultados obtenidos por simulación, como se puede apreciar en el gráfico de la derecha en la Fig. 4.9.

Ejemplo 4.3.4 Un tercer modelo de oscilador de van der Pol con retardo fue propuesto por de Oliveira (2002) y está descrito por la siguiente DDE

$$\ddot{x}(t) - \mu \dot{x}(t) + x^2(t - \tau) \dot{x}(t - \tau) + x(t) = 0, \quad (4.35)$$

donde x es una función escalar y $\tau > 0$. Como en los casos anteriores, la no linealidad se anula para $\mu = 0$ causando una bifurcación degenerada para este valor del parámetro. Para evitar esta degeneración, se escala nuevamente la variable como $u(t) = \mu^{1/2}x(t)$ y se obtiene

$$\ddot{u}(t) - \mu \dot{u}(t) + u^2(t - \tau) \dot{u}(t - \tau) + u(t) = 0, \quad (4.36)$$

que es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = \mu u_1(t) - u_2(t) - \frac{1}{3}u_1^3(t - \tau), \\ \dot{u}_2(t) = u_1(t). \end{cases} \quad (4.37)$$

Nótese que el término no lineal involucra sólo la variable retrasada; sin embargo no es conveniente definir la realimentación no lineal como $g(y(t - \tau)) = \frac{1}{3}y^3(t - \tau)$ pues la matriz Jacobiana sería nula en el origen. Entonces, se considera la siguiente realización que resulta más apropiada

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^T = B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g(\mathbf{y}^*(t); \mu) = -(\mu + 1)y(t) + y^3(t - \tau)/3, \quad (4.38)$$

de donde se obtiene $G(s) = s/(s^2 + s + 1)$, y entonces, para la parte lineal se tiene

$$G^*(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-s\tau} \end{pmatrix}.$$

La matriz Jacobiana está dada por $J(\mu) = \begin{pmatrix} -(\mu + 1) & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, y el autovalor no trivial de $G^*(s)J(\mu)$ resulta

$$\widehat{\lambda}(s; \mu) = \frac{-(\mu + 1)s}{s^2 + s + 1}. \quad (4.39)$$

La condición de bifurcación $\widehat{\lambda}(i\omega; \mu) = -1$ conduce a la solución $(\omega_0, \mu_0) = (1, 0)$, que es la misma que para el oscilador sin retardo. Dicho de otra forma, el retardo no afecta al valor crítico del parámetro de bifurcación. Esto ocurre porque la variable retrasada aparece sólo en el término cúbico y no tiene influencia en la estabilidad del equilibrio. Sin embargo, el retardo puede modificar la estabilidad de la órbita periódica emergente si está presente en la expresión del coeficiente σ_0 . Por otra parte, los autovectores derecho e izquierdo de $G^*(i\omega)J(\mu)$ son $\mathbf{v} = (1, e^{-i\omega\tau})^T$ y $\mathbf{u} = (1, 0)^T$. Todas las derivadas parciales segundas de $g(\cdot)$ son cero en el equilibrio, y la única derivada tercera no nula es $(D_{222}^3 g) = \partial^3 g(\cdot)/\partial y(t - \tau)^3 = 2$. Entonces $\mathbf{D}^2 g = \mathbf{0}$ y $\mathbf{D}^3 g = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2)$. Para obtener la expresión del coeficiente de curvatura, se calculan

$$\mathbf{u}^T G^*(i\omega; \mu) \mathbf{p}(i\omega) = \frac{1}{4} \frac{i\omega e^{-i\omega\tau}}{1 - \omega^2 + i\omega},$$

$$\mathbf{u}^T [G^*(i\omega; \mu)]' J(\mu) \mathbf{v} = -\frac{(\mu + 1)(1 + \omega^2)}{(1 - \omega^2 + i\omega)^2},$$

con lo cual resulta

$$\sigma_0 = -\frac{\omega_0^2 \cos \omega_0 \tau - \omega_0(1 - \omega_0^2) \sin \omega_0 \tau}{4(1 + \omega_0^2)(\mu + 1)}.$$

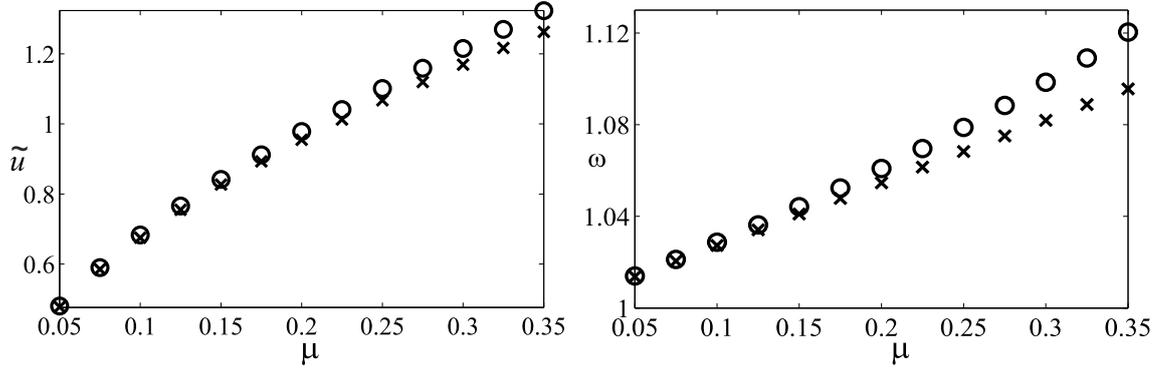


Figura 4.10: Amplitud (izquierda) y frecuencia (derecha) de la solución periódica en función de μ para el sistema (4.36), con $\tau = 0.5$. (\times) valores teóricos ($\tilde{u} = 2\sqrt{\mu \sec \tau}$, $\omega = 1 + \mu \tan \tau/2$); (\circ) simulaciones numéricas.

Para los valores críticos $\omega_0 = 1$ y $\mu_0 = 0$, la expresión anterior se reduce a

$$\sigma_0 = -\frac{\cos \tau}{8}.$$

Por lo tanto, la bifurcación de Hopf es supercrítica (subcrítica) y el ciclo límite emergente es estable (inestable) si $\cos \tau > 0$ ($\cos \tau < 0$) (véase de Oliveira, 2002). Nuevamente, la amplitud de la órbita periódica se puede obtener resolviendo (3.4), siendo $\xi(\tilde{\omega}; \mu) = -G(i\tilde{\omega}; \mu)e^{-i\tilde{\omega}\tau}/4$. Luego, el contorno del autovalor y el vector $\xi(\tilde{\omega}; \mu)$ se intersectan sólo si existe solución del sistema

$$\begin{cases} 0 = 1 - \tilde{\omega}^2 + \frac{1}{4}\tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega}\tau)\theta^2, \\ \tilde{\mu} = \frac{1}{4} \cos(\tilde{\omega}\tau)\theta^2. \end{cases} \quad (4.40)$$

De la segunda ecuación se obtiene $\theta = 2[\tilde{\mu} \sec(\tilde{\omega}\tau)]^{1/2}$. Para $\tilde{\omega}$ cercana a ω_0 (cerca de la bifurcación) la amplitud aproximada de la órbita periódica es $\tilde{u} \simeq \theta = 2\sqrt{\mu \sec \tau}$. Para el cálculo de la frecuencia se aplica un procedimiento análogo a los ejemplos previos; de la primer ecuación en (4.40) se obtiene $\tilde{\mu} = f_3(\tilde{\omega}) := (\tilde{\omega}^2 - 1)/[\tilde{\omega} \tan(\tilde{\omega}\tau)]$, que se puede expandir en potencias de ω en un entorno de $\omega_0 = 1$ como

$$\tilde{\mu} \simeq \frac{1}{\cos \tau}(\tilde{\omega} - 1) + \mathcal{O}((\tilde{\omega} - 1)^2).$$

Por lo tanto, la frecuencia corregida está dada por $\tilde{\omega} \simeq 1 + \tilde{\mu} \tan \tau/2$. La Fig. 4.3 muestra la dependencia de la amplitud y frecuencia respecto del parámetro μ , donde se ha fijado $\tau = 0.5$. Los círculos representan los valores obtenidos por simulaciones

numéricas y las cruces los valores obtenidos con el MF. Nótese que para el sistema (4.35) la amplitud predicha es $\tilde{x} = \mu^{-1/2}\tilde{u} \simeq 2\sqrt{\sec\tau}$, como mostró de Oliveira (2002) utilizando otra metodología.

4.4. Conclusiones del capítulo

La contribución más importante de este capítulo es la nueva alternativa del MF propuesta en la Sección 4.2.2 para el estudio de DDEs. Ésta posee ciertas ventajas con respecto a la formulación presentada en la Sección 3.3, como por ejemplo:

- Los polos de $\hat{\lambda}(s; \mu)$ están dados por las raíces de un polinomio y no por las de un cuasipolinomio. En el segundo caso, es dificultoso determinar la estabilidad del ciclo límite emergente mediante el Teorema 3.3.
- Resulta más natural obtener una realización adecuada cuando los términos no lineales dependen simultáneamente de $\mathbf{y}(t)$ y de $\mathbf{y}(t - \tau)$.
- Los criterios de controlabilidad y observabilidad se reducen a los usuales que se utilizan en EDOs, que resultan mucho más simples que los dados por el Teorema 4.1.
- Todas las fórmulas involucradas en la aplicación del MF son idénticas a las desarrolladas para EDOs, a diferencia de lo que ocurre con el enfoque de la Sección 3.3 donde algunas expresiones se modifican. Esto es importante porque, por ejemplo, las fórmulas dadas en (Moiola & Chen, 1996) para balances armónicos de alto orden pueden utilizarse sin modificaciones.

Un profesional que posea dominio del MF para EDOs puede estudiar una DDE de manera casi inmediata, lo cual no ocurre en general cuando se trabaja con las formulaciones en el dominio del tiempo. Por ejemplo, tomando el caso de las formas normales, su aplicación a EDRFs (véase Faria & Magalhães, 1995) es mucho más compleja que para el caso de EDOs (véase Wiggins, 1990).

Además, los ejemplos muestran que es posible obtener una buena aproximación de las

soluciones periódicas. Como se ha mencionado, las fórmulas son enteramente análogas a las desarrolladas para sistemas EDOs y por lo tanto es posible mejorar estos resultados implementando balances armónicos de mayor orden como las utilizadas en (Moiola & Chen, 1996; Robbio et al., 2007).

Capítulo 5

Aplicaciones: Control de Congestión de Datos en Internet

5.1. Introducción

Actualmente, el control de congestión de datos en internet es un problema desafiante. La congestión ocurre cuando unnexo o *link* se sobrecarga causando un desborde en los canales de transmisión. Entonces, algunas piezas (*paquetes*) de información se pierden, y más aún, el sistema completo puede volverse inestable. Este inconveniente ha impulsado la investigación intensiva de algoritmos de control de congestión de datos. Una comunicación típica se realiza a través de un protocolo de control de transmisión (TCP: “*Transmission Control Protocol*”). Según este protocolo, el transmisor ajusta el tamaño de la *ventana* de datos a enviar en función del estado de la red; éste se infiere por medio de señales de reconocimiento (llamadas ACKs: “*Acknowledgements*”) que el receptor le envía cada vez que recibe correctamente un paquete. De esta forma, el transmisor puede conocer si el envío de datos fue exitoso y ajustar la ventana de acuerdo al siguiente esquema: incrementa en uno el tamaño de la ventana cada vez que una trama se transmite correctamente o divide el mismo a la mitad cada vez que un envío falla; esta estrategia se conoce como AIMD (“*Additive Increase - Multiplicative Decrease*”). El TCP es una estrategia que se maneja entre transmisor y receptor sin involucrar los nodos intermedios, y por ello se dice que es un protocolo *end-to-end*. El tiempo que transcurre entre el envío de un paquete y el arribo del correspondiente ACK a la fuente se denomina “*Round Trip Time*” (RTT) y constituye un parámetro muy importante del sistema. Una excelente explicación del mecanismo TCP puede verse en (Srikant, 2004). Este protocolo actúa en forma conjunta con otro mecanismo denominado AQM (“*Active Queue Management*”), el cual se obtiene implementando cierta capacidad computacional en los *routers*, que desde el punto de vista de control puede verse como un lazo interno que actúa en cada nodo intermedio.

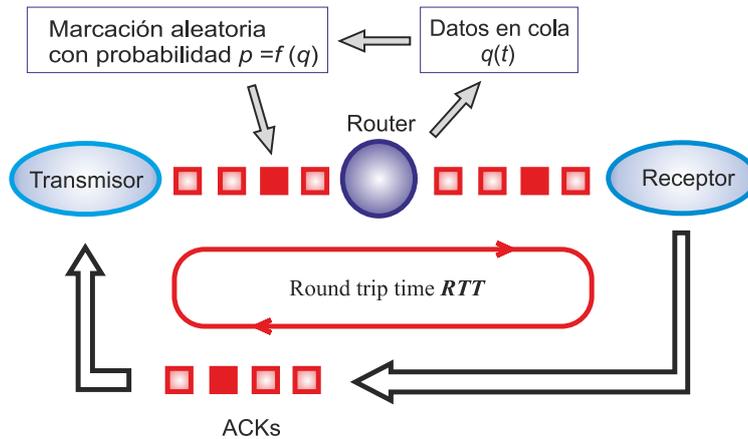


Figura 5.1: Diagrama demostrativo del sistema TCP/AQM.

En esta estrategia se actúa en forma preventiva *marcando* paquetes en forma aleatoria para ser descartados cuando la cola de datos es suficientemente grande. Los paquetes marcados no generan los correspondientes ACKs; de modo que la ventana de datos se reducirá cuando existan muchos datos en cola para ser transmitidos. En forma más precisa, en el *router* se genera una señal de control (la *probabilidad* de que un paquete sea marcado) en función de cierta medida de la variable de interés (el tamaño de la cola de datos), donde dicha función es *creciente*, y se acerca a la unidad cuando la cantidad de datos está cerca de desbordar la capacidad del *buffer* (véase la Fig. 5.1).

Entre los esquemas AQM más difundidos se hallan el DROP-TAIL (véase Srikant, 2004) y el RED (“*Random Early Detection*”). El primero es el más simple pero no es el de mejor desempeño; sin embargo, debido a su simplicidad y a que surgió en primer lugar es tal vez el más utilizado. Un desarrollo muy importante acerca de la dinámica no lineal del sistema TCP con DROP-TAIL puede verse en (Raina & Heckmann, 2007). Por otra parte, el algoritmo RED es más elaborado, y recientemente se han propuesto diversas variantes en la literatura para mejorar el planteo original. Sin embargo, si bien existen algunos resultados acerca de las bifurcaciones que presenta el sistema completo TCP/RED, en la mayoría de los casos se realizan simplificaciones sustanciales del modelo y no se tiene en cuenta la característica de filtrado pasabajos que se realiza en el esquema RED (Ding et al., 2009; Zheng & Wang, 2010).

Esencialmente, el algoritmo de control debe ser estable, es decir, el flujo de datos a

través de los *links* debe tender a un valor estacionario que en lo posible debería aprovechar la máxima capacidad de los mismos. Sin embargo, naturalmente los parámetros de la red son muy variables y es extremadamente difícil desarrollar un algoritmo que tenga un buen desempeño ante condiciones de operación tan cambiantes. Es por ello que el diseño de estas estrategias amerita un estudio desde el punto de vista de las bifurcaciones. La variación de parámetros puede provocar cambios en el comportamiento que deben interpretarse desde la perspectiva no lineal. Un fenómeno muy frecuente es la aparición de oscilaciones suaves mediante la bifurcación de Hopf. La existencia de esta bifurcación en sistemas de control de internet ha sido documentada por varios autores (Li et al., 2004; Ranjan et al., 2004; Michiels & Niculescu, 2005; Raina & Heckmann, 2007; Xiao & Cao, 2007; Ding et al., 2009; Rezaie et al., 2010; Zheng & Wang, 2010; Liu et al., 2012).

El análisis que se presenta en este capítulo se basa en el modelo continuo desarrollado en (Misra et al., 2000) (véase también Hollot et al., 2002) que describe el esquema TCP mediante una EDFR, que aquí se combina con la dinámica de distintos esquemas AQM. Utilizando la variante del MF desarrollada en el Capítulo 4, se intentarán determinar las condiciones para la ocurrencia de bifurcaciones de Hopf y las características de las soluciones periódicas emergentes. Además, para ampliar los resultados, se emplea el programa DDE-BIFTOOL (Engelborghs et al., 2001) que permite la detección de bifurcaciones globales. En particular, se verá que el sistema en cuestión puede exhibir dinámicas complejas como sillan-nodos de ciclos límites y múltiples oscilaciones, que en el caso de estos modelos es un resultado original en la literatura específica.

5.2. Descripción del modelo

Como se ha mencionado, se considerará el modelo dinámico desarrollado por Misra et al. (2000) (véase también Hollot et al., 2002), dado por la siguiente DDE no lineal

$$\begin{cases} \dot{W}(t) = \frac{1}{R(t)} - \frac{1}{2} \frac{W(t)W(t-R(t))}{R(t-R(t))} P(t-R(t)), \\ \dot{Q}(t) = \frac{N(t)W(t)}{R(t)} - C_\ell(t), \end{cases} \quad (5.1)$$

donde $W(t)$ es el tamaño promedio de la ventana de datos a transmitir (paquetes), $Q(t)$ es el tamaño promedio de la cola de datos (paquetes), $N(t)$ es un factor de carga (número de conexiones de TCP), $C_\ell(t)$ es la capacidad del *link* (paquetes/s), $R(t)$ es el RTT (s) y $P(t)$ es la probabilidad de que un paquete sea marcado. El RTT involucra el retardo de propagación T_p y el tiempo de espera en la cola del *buffer*, es decir,

$$R(t) = Q(t)/C_\ell + T_p. \quad (5.2)$$

El sistema (5.1) posee un retardo dependiente del estado $Q(t)$, y por lo tanto su estudio analítico es una tarea compleja. En primer lugar, se supondrá que la capacidad del *link* y el número de conexiones de TCP se mantienen constantes durante la transmisión que se considera, es decir, $C_\ell(t) = C_\ell$ y $N(t) = N$. Suponiendo que el sistema puede operar con una tasa de transmisión constante (en estado estacionario), existen valores de equilibrio \widehat{W} , \widehat{Q} y \widehat{R} de las variables tales que $(\dot{W}(t), \dot{Q}(t)) = (0, 0)$, y por lo tanto:

$$\begin{cases} 2 &= \widehat{W}^2 \widehat{P}, \\ N\widehat{W} &= C_\ell \widehat{R}, \quad \widehat{R} = \widehat{Q}/C_\ell + T_p. \end{cases} \quad (5.3)$$

Además, en el análisis que sigue se considerará el caso en que el RTT está dominado por el retardo de propagación, es decir, $Q(t)/C_\ell \ll T_p$ ¹. Para este caso se obtiene el sistema simplificado

$$\begin{cases} \dot{W}(t) = \frac{1}{T_p} - \frac{1}{2T_p} W(t)W(t - T_p)P(t - T_p), \\ \dot{Q}(t) = \frac{N}{T_p} W(t) - C_\ell. \end{cases} \quad (5.4)$$

Por otra parte, es conveniente realizar un escalado temporal, como se propone en (Michiels & Niculescu, 2005), introduciendo el tiempo no-dimensional $t' = t/T_p$. De esta forma se tiene

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{T_p} \frac{dW}{dt'},$$

¹El estudio del sistema (5.1) *sin hacer* esta suposición puede verse en Gentile, F., Moiola J. y Paolini E. “*Dinámica no Lineal en un Modelo de Control de Congestión de Tráfico en Internet*”, presentado en la XIV Reunión para el Procesamiento de la Información y Control (RPIC), septiembre de 2011, Oro Verde, pp.282-287. En este trabajo se ha utilizado un compensador proporcional como esquema AQM, como se propone en (Hollot et al., 2002).

y, en forma similar, $dQ/dt = (dQ/dt')/T_p$. Entonces, el sistema (5.4) resulta

$$\begin{cases} \dot{W}(t) = 1 - \frac{1}{2}W(t)W(t-1)P(t-1), \\ \dot{Q}(t) = NW(t) - C_l T_p, \end{cases}$$

donde, por simplicidad, se ha conservado el símbolo t en lugar de t' . Luego, es posible definir nuevas variables de estado como $w(t) = W(t)$ y $q(t) = Q(t)/N$, resultando en

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = 1 - \frac{1}{2}w(t)w(t-1)P(t-1), \\ \dot{q}(t) = w(t) - c, \end{cases} \quad (5.5)$$

donde $c := C_l T_p / N$ es el único parámetro adimensional que relaciona los parámetros físicos.

Como se puntualizó en la introducción, en conjunto con el protocolo TCP se utiliza un mecanismo denominado AQM (“*Active Queue Management*”). Con respecto a este último han surgido muchas variantes en la literatura. Aquí se tomarán tres esquemas como casos de estudio: los controladores proporcional (P) y proporcional-integral (PI) propuestos en (Hollot et al., 2002), y el ampliamente utilizado RED (“*Random Early Detection*”).

5.3. Análisis de los diferentes esquemas de AQM

5.3.1. Control proporcional (P)

En este esquema, la probabilidad de marcado es directamente proporcional al tamaño de la cola de datos, es decir: $P(t) = KQ(t)$, donde $K > 0$ es la ganancia del controlador. El sistema resultante ha sido estudiado por varios autores, por ejemplo (Ding et al., 2009; Michiels & Niculescu, 2005; Zheng & Wang, 2010). En estos trabajos los autores han realizado un análisis de bifurcaciones con distintas herramientas: el método de múltiples escalas (Ding et al., 2009), una combinación de herramientas analíticas y numéricas (Michiels & Niculescu, 2005), y reducciones a la variedad centro y formas normales (Zheng & Wang, 2010).

El sistema (5.5) con control proporcional resulta

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = 1 - \frac{k}{2}w(t)w(t-1)q(t-1), \\ \dot{q}(t) = w(t) - c, \end{cases} \quad (5.6)$$

donde $k := KN$. Para aplicar el MF como se propone en el Teorema 4.2, en primer lugar se introducen constantes auxiliares a_1 y a_2 (cuyos valores se elegirán en forma conveniente) y el sistema (5.6) se reescribe como

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = 1 - \frac{k}{2}w(t)w(t-1)q(t-1) + a_1w(t) - a_1w(t) + a_2q(t) - a_2q(t), \\ \dot{q}(t) = w(t) - c. \end{cases}$$

Las matrices A , B y C se eligen como

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = C = I_2, \quad F(e^{-s}) := \begin{pmatrix} I_2 \\ I_2 e^{-s} \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^*(t) &= (y_1(t), y_2(t), y_1(t-1), y_2(t-1))^T \\ &= -(w(t), q(t), w(t-1), q(t-1))^T. \end{aligned}$$

Entonces, la función no lineal de realimentación resulta

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}^*(t); \mu) = \begin{pmatrix} 1 + ky_1(t)y_1(t-1)y_2(t-1)/2 - a_1y_1(t) - a_2y_2(t) \\ -c \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

donde $\mu := (c, k)$ representa el vector de parámetros. Para esta realización, se tiene

$$G(s; \mu) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{pmatrix} s & -a_2 \\ 1 & s + a_1 \end{pmatrix}, \quad G^*(s; \mu) := F(e^{-s}) G(s; \mu) = \begin{pmatrix} G(s; \mu) \\ G(s; \mu)e^{-s} \end{pmatrix},$$

donde $\Delta(s) := s^2 + a_1s + a_2$. Resolviendo el sistema $G^*(0; \mu)\mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}}^*; \mu) = -\hat{\mathbf{y}}^*$ se obtiene el punto de equilibrio $\hat{\mathbf{y}}^* = (-c, -2/(kc^2), -c, -2/(kc^2))^T$. Luego se linealiza la función $\mathbf{g}(\cdot)$ alrededor de este punto de equilibrio, de donde se obtiene la matriz Jacobiana

$$J(\mu) = \begin{pmatrix} \frac{k}{2}\hat{y}_1\hat{y}_2 - a_1 & -a_2 & \frac{k}{2}\hat{y}_1\hat{y}_2 & \frac{k}{2}(\hat{y}_1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por simplicidad se eligen $a_1 = k\hat{y}_1\hat{y}_2 = 2/c$ y $a_2 = k(\hat{y}_1)^2/2 = kc^2/2$, luego

$$J(\mu) = \begin{pmatrix} -1/c & -kc^2/2 & 1/c & kc^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir de esta expresión se deduce que $G^*(s; \mu)J(\mu)$ tiene rango 1 y un único autovalor no nulo dado por

$$\widehat{\lambda}(s; \mu) = \frac{(2s + kc^3)(e^{-s} - 1)}{\chi(s)}, \quad (5.9)$$

donde $\chi(s) =: 2cs^2 + 4s + kc^3$. Nótese que la elección de a_1 y a_2 no sólo permite obtener una expresión simple de $\widehat{\lambda}(s; \mu)$, sino que también evita que este autovalor tenga polos sobre el eje imaginario, lo cual, si bien no es estrictamente necesario, resulta más cómodo para analizar el diagrama de Nyquist resultante ². La condición de bifurcación se obtiene tomando $s = i\omega$ y resolviendo la ecuación $\widehat{\lambda}(i\omega_0; \mu_0) = -1$ para ciertos valores críticos de μ_0 y ω_0 . A partir de (5.9), se tiene

$$\begin{cases} kc^3 \cos(\omega_0) + 2\omega_0 \sin(\omega_0) & = 2c\omega_0^2, \\ -kc^3 \sin(\omega_0) + 2\omega_0 \cos(\omega_0) & = -2\omega_0, \end{cases}$$

y los valores críticos de los parámetros se pueden escribir en función de ω_0 como

$$(c_0, k_0) = \left(\frac{\cos \omega_0 + 1}{\omega_0 \sin \omega_0}, \frac{2\omega_0^4 \sin^4 \omega_0}{(1 + \cos \omega_0)^2} \right). \quad (5.10)$$

Entonces, tomando la frecuencia ω_0 como parámetro libre se obtiene la curva de Hopf en el espacio de parámetros (c, k) , como puede apreciarse en la Fig. 5.2(a). A partir de esta curva, puede deducirse cómo se ve afectada la estabilidad del sistema cuando se varían los parámetros físicos del mismo. Recordando que $c = C_\ell T_p / N$ y $k = KN$, es claro que un incremento tanto en la capacidad del *link* C_ℓ como en el retardo de propagación T_p deteriora el margen de estabilidad del equilibrio. Dicho de otro modo, el rango de valores de la ganancia K del controlador que estabiliza el sistema es menor a medida que C_ℓ o T_p aumentan.

Por otra parte, los autovectores derecho e izquierdo de $G^*(s; \mu)J(\mu)$ asociados a $\widehat{\lambda}(s; \mu)$ son

$$\mathbf{v} = (s, 1, se^{-s}, e^{-s})^T, \quad \mathbf{u} = (-1, -kc^3/2, 1, kc^3/2)^T,$$

respectivamente, y las matrices Q y L resultan

$$Q = -\frac{e^{-s}}{2c^2} \begin{pmatrix} 2 + kc^3/s & 0 & 2 + kc^3 & kc(e^s + 1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = k\frac{e^{-s}}{s} \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

²El lector puede comparar la expresión del autovalor (5.9) con la que se obtiene, por ejemplo, tomando $a_1 = a_2 = 0$.

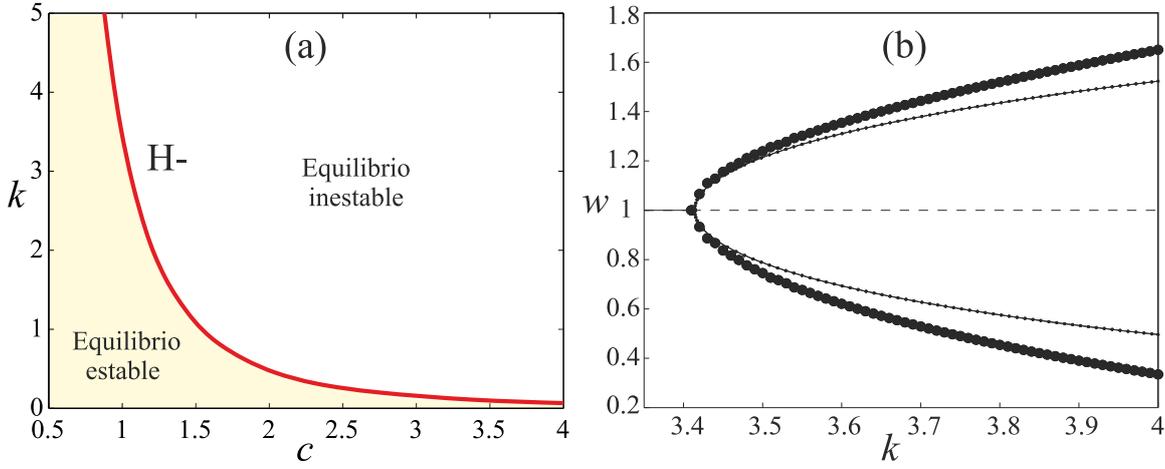


Figura 5.2: (a) Curva de bifurcación de Hopf para el sistema con control proporcional. La notación H- indica que para los puntos sobre la curva, el índice de estabilidad σ_0 es negativo. (b) Diagrama de bifurcación en un parámetro con $c = 1$. Para $k \simeq 3.41$, el punto de equilibrio se bifurca dando lugar a una solución periódica estable. En la figura se muestra la rama de amplitud (máximos y mínimos de $w(t)$ sobre los ciclos) obtenidos con DDE-BIFTOOL (—) y aproximados con el MF (●).

Además, se tiene

$$H^*(s; \mu) = \begin{pmatrix} H(s; \mu) \\ H(s; \mu)e^{-s} \end{pmatrix}, \quad H(s; \mu) = \frac{1}{\varphi(s)} \begin{pmatrix} 2cs & -kc^3 \\ 2c & 2[1 + e^s(1 + sc)] \end{pmatrix},$$

donde $\varphi(s) := 2ce^s s^2 + 2(1 + e^s)s + kc^3$. De la Ec. (3.7), se hallan

$$\mathbf{V}_{02} = \nu_0(\omega)(0, 1, 0, 1)^T, \quad \mathbf{V}_{22} = \nu_2(\omega)(i2\omega, 1, i2\omega e^{-i2\omega}, e^{-i2\omega})^T,$$

donde

$$\nu_0(\omega) := -e^{-i\omega}[kc^4 - kc^3 e^{i\omega}(1 - i\omega + e^{i\omega}) + i2\omega(c + e^{i2\omega})]/[4kc^4],$$

$$\nu_2(\omega) := e^{-i2\omega}[kc^3(1 + i\omega) + (1 + c)(kc^3 + i2\omega)e^{i\omega}]/[2c\varphi(i2\omega)].$$

Entonces, resulta $\mathbf{p}(i\omega; \mu) = (p_1(\omega; \mu), 0)^T$, donde

$$p_1(\omega; \mu) := e^{-i2\omega} \{kc^2(2c^2\nu_2 e^{i3\omega} - 1) - i8\omega\nu_2(1 + ce^{i3\omega}) - 2kc^3[2\nu_0 e^{i2\omega} + \nu_2 + e^{i\omega}(2\nu_0 + \nu_2(1 + i2\omega))]\} / 8c^2.$$

Finalmente, se obtiene $\xi(i\omega; \mu) = -2cp_1(\omega; \mu)/\chi(i\omega)$.

Además, el coeficiente de curvatura resulta

$$\sigma_0 = \Re \{2cp_1(\omega_0; \mu) / [1 + (1 + kc^3/2 + i\omega_0(1 + 2c)) e^{-i\omega_0}]\}.$$

Teniendo en cuenta el signo de este coeficiente se determina que la bifurcación de Hopf resulta supercrítica sobre toda la curva mostrada en la Fig. 5.2(a). Aplicando el proceso iterativo descrito en el Capítulo 3 es posible obtener la amplitud aproximada de las órbitas emergentes, como se ilustra en la Fig. 5.2(b) para $c = 1$. Además, a fines de comparación, se muestra la misma rama de soluciones periódicas obtenida con el programa DDE-BIFTOOL.

Michiels & Niculescu (2005), mostraron que fijando el parámetro adimensional c e incrementando el parámetro k más allá del punto de Hopf, el sistema (5.6) exhibe una cascada de doble período que conduce a un comportamiento caótico.

Con respecto a estos resultados, se menciona que otros autores (véase, por ejemplo Ding et al., 2009; Zheng & Wang, 2010) han estudiado el sistema

$$\begin{cases} \dot{W}(t) = \frac{1}{T_p} - \frac{K}{2T_p} W^2(t) Q(t - T_p), \\ \dot{Q}(t) = \frac{N}{T_p} W(t) - C_\ell, \end{cases} \quad (5.11)$$

que se obtiene a partir de (5.4) considerando que el producto $W(t)W(t - T_p)$ puede aproximarse por $W^2(t)$ cuando $W(t) \gg 1$ y tomando un esquema AQM proporcional. Realizando nuevamente un escalado temporal y de variables, el sistema anterior se puede reescribir como

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = 1 - \frac{k}{2} w^2(t) q(t - 1), \\ \dot{q}(t) = w(t) - c, \end{cases} \quad (5.12)$$

donde c y k se definen de la misma forma que en (5.6). Sin embargo, es posible mostrar que el sistema (5.12) no exhibe comportamiento caótico. Esta conclusión se deriva del Teorema de Poincaré-Bendixon para sistemas con retardos desarrollado por Mallet-Paret & Sell (1996). Este Teorema también puede verse en Smith, 2010, y los detalles se encuentran en el Apéndice de este Capítulo. Por lo tanto, si bien el modelo (5.12) ha permitido un análisis más sencillo de la bifurcación de Hopf, el mismo no revela la naturaleza caótica del sistema.

5.3.2. Algoritmo “*Random Early Detection*” (RED)

Como se ha mostrado en (Hollot et al., 2002), para la dinámica del controlador RED puede considerarse la siguiente relación

$$\frac{\Delta P(s)}{\Delta Q(s)} = \frac{KL}{s + K}, \quad (5.13)$$

donde $\Delta P(s)$, $\Delta Q(s)$ son las transformadas de Laplace de $\delta P(t)$ y $\delta Q(t)$, respectivamente. Estas cantidades se definen como $\delta P(t) := P(t) - \widehat{P}$ y $\delta Q(t) := Q(t) - \widehat{Q}$, y representan pequeñas desviaciones alrededor de los valores de equilibrio. Las constantes K y L son parámetros propios del controlador RED: L es la pendiente del perfil de marcado de paquetes y K determina el ancho de banda del controlador. A partir de (5.13), aplicando la Transformada inversa de Laplace, se obtiene $\delta \dot{P}(t) + K\delta P(t) = KL\delta Q(t)$, y la dinámica de $P(t)$ resulta

$$\dot{P}(t) = K[P(t) - \widehat{P}] + KL[Q(t) - \widehat{Q}].$$

Definiendo una nueva escala de tiempo como $t' = t/T_p$, y haciendo $Q(t) = Nq(t)$, resulta

$$\dot{P}(t) = -KT_p[P(t) - \widehat{P}] + KLT_pN[q(t) - \widehat{q}],$$

donde nuevamente, por simplicidad en la notación, se ha conservado el símbolo t en lugar de t' . Entonces, se obtiene el modelo del sistema TCP/RED dado por

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = 1 - \frac{1}{2}w(t)w(t-1)p(t-1), \\ \dot{q}(t) = w(t) - c, \\ \dot{p}(t) = -k[p(t) - \widehat{p}] + \eta[q(t) - \widehat{q}], \end{cases} \quad (5.14)$$

donde se ha definido $p(t) := P(t)$ y los nuevos parámetros adimensionales son $k := KT_p$ y $\eta := KLT_pN$. Para la realización se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & -a_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -k \end{pmatrix}, \quad B = I_3, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(e^{-s}) := \begin{pmatrix} I_2 \\ I_2 e^{-s} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}^*(t); \mu) = \begin{pmatrix} 1 + y_1(t)y_1(t-1)y_2(t-1)/2 - a_1y_1(t) - a_2y_2(t) \\ -c \\ k\widehat{p} - \eta\widehat{q} \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

La función de transferencia para la parte lineal está dada por

$$G^*(s; \mu) = \begin{pmatrix} G(s; \mu) \\ G(s; \mu)e^{-s} \end{pmatrix}, \quad G(s; \mu) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{pmatrix} s(s+k) & -a_2 & -a_2s \\ 1 & s+a_1 & s(s+a_1) \end{pmatrix},$$

donde $\Delta(s) := s^3 + (a_1 + k)s^2 + a_1ks + \eta a_2$. Es simple ver que definiendo $a_1 = \eta \hat{y}_1 \hat{y}_2 = 2/c$ y $a_2 = (\hat{y}_1)^2/2 = c^2/2$, la matriz Jacobiana puede expresarse como

$$J(\mu) = \begin{pmatrix} -1/c & -c^2/2 & 1/c & c^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Considerando la matriz $G^*(s; \mu)J(\mu)$, vemos que la misma tiene rango uno y su único autovalor relevante es

$$\hat{\lambda}(s; \mu) = \frac{[2s(s+k) + \eta c^3](e^{-s} - 1)}{\chi(s)},$$

donde $\chi(s) := 2cs^3 + 2(2 + ck)s^2 + 4ks + \eta c^3 = 2c\Delta(s)$. A partir del diagrama de Nyquist de $\hat{\lambda}(s; \mu)$, se obtienen las curvas de Hopf que se muestran en la Fig. 5.3. En ésta se observan la curvas de Hopf en el plano (c, k) para distintos valores constantes de η , donde H- (en rojo) corresponde a bifurcaciones *supercríticas* y H+ (en verde) a bifurcaciones *subcríticas*, de acuerdo con el signo de σ_0 (cuya expresión se da a continuación). En cada caso, la región de estabilidad del equilibrio se encuentra a la izquierda de cada curva. Dicha región se vuelve más estrecha a medida que el parámetro η se incrementa. Además, para mantener la estabilidad del sistema, un incremento del valor de c (debido a un incremento del la capacidad del canal C_ℓ o una reducción en el número de conexiones N) debe estar acompañado de un incremento en el ancho de banda del controlador (K). La Fig. 5.3(b) muestra las curvas de Hopf en el espacio (c, η) para valores constantes de k . Nuevamente, el sistema es estable en la región que se encuentra a la izquierda de cada curva. Para valores pequeños de k (por ejemplo, $k = 0.1$) las bifurcaciones de Hopf son siempre subcríticas, lo cual determina la existencia de un ciclo límite inestable en la región de estabilidad del equilibrio. Para $k = 0.5$ puede verse un punto de falla del coeficiente de curvatura ($\sigma_0 = 0$), y para $k = 0.75$ y $k = 1$, todos los puntos sobre la curva corresponden a bifurcaciones supercríticas. Entonces, un incremento en el valor de k no sólo mejora la estabilidad del sistema, sino que puede inhibir la coexistencia de soluciones periódicas

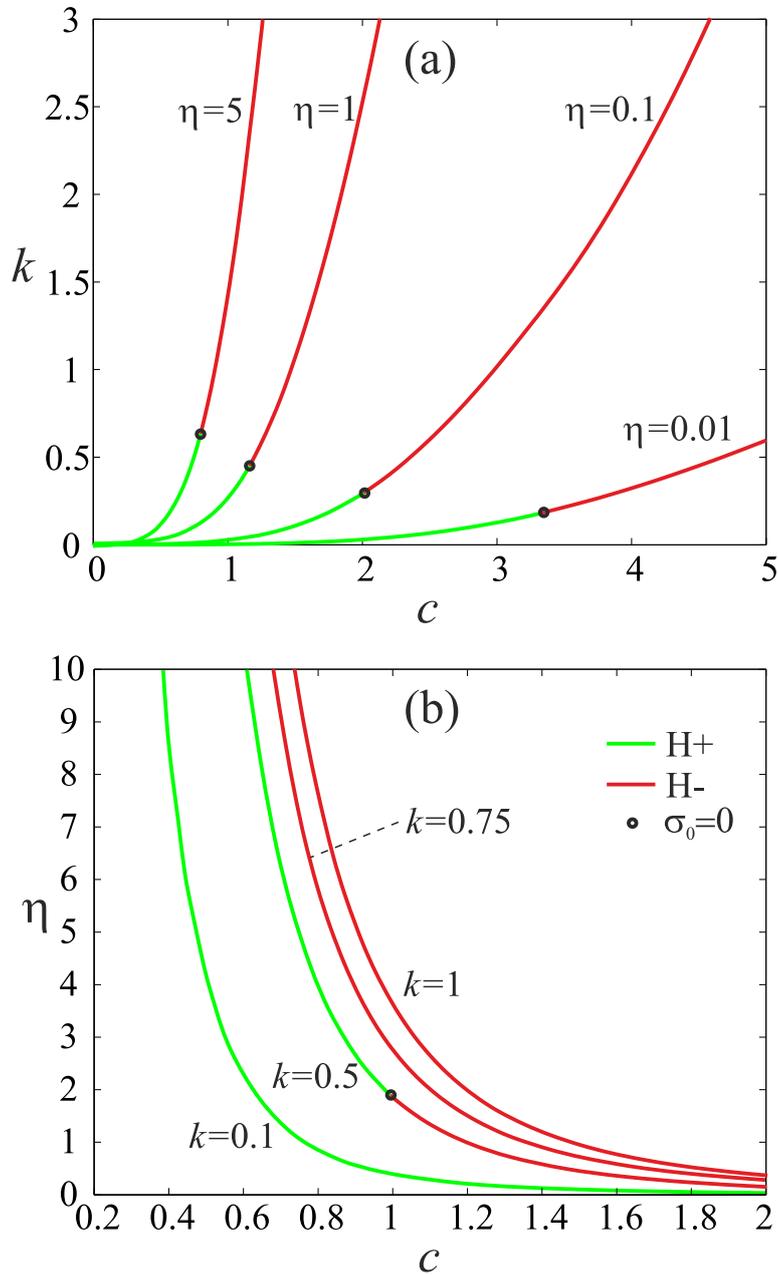


Figura 5.3: (a) Diagramas de bifurcación del sistema (5.14) en el plano (c, k) para distintos valores de η . En cada caso, el equilibrio es estable a la izquierda de la correspondiente curva de Hopf. (b) Diagramas de bifurcación en el espacio (c, η) para valores fijos de k . La región de estabilidad del equilibrio yace, también, a la izquierda de cada curva.

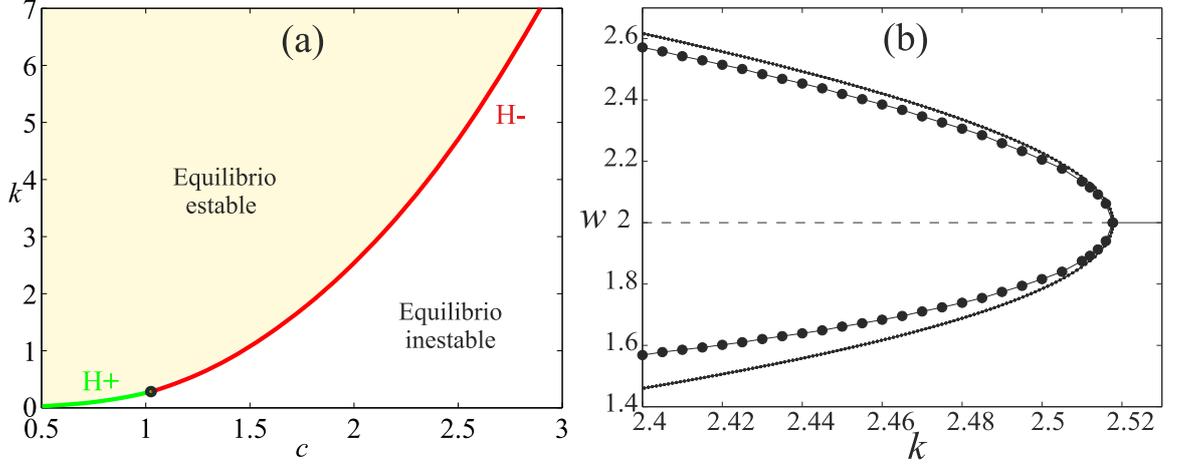


Figura 5.4: (a): Curva de bifurcación de Hopf para el sistema con control RED correspondiente a $\eta = 1$. (b): Diagrama de bifurcación en un parámetro con $c = 2$. En el diagrama se muestra una rama de soluciones periódicas calculada con DDE-BIFTOOL (\cdot) y la aproximada con el MF ($\bullet-$).

inestables con el equilibrio estable.

Por otra parte, los autovectores \mathbf{v} y \mathbf{u} de la matriz $G^*(s; \mu)J(\mu)$ son

$$\mathbf{v} = (s(s+k), 1, s(s+k)e^{-s}, e^{-s})^T, \quad \mathbf{u} = (-1, -c^3/2, 1, c^3/2)^T,$$

y las matrices Q y L resultan

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11}(s) & 0 & q_{13}(s) & q_{14}(s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = s(s+k)e^{-s} \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 & 1 & s(s+k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $q_{11}(s) := -[2s(s+k) + \eta c^3]e^{-s}/2c^2$, $q_{13}(s) := -[2s(s+k) + \eta c^3 e^{-s}]/2c^2$ y $q_{14}(s) := -cs(s+k)(1 + e^{-s})/2$. La función de lazo cerrado es

$$H^*(s; \mu) = \begin{pmatrix} H(s; \mu) \\ H(s; \mu)e^{-s} \end{pmatrix}, \quad H(s; \mu) = \frac{1}{\varphi(s)} \begin{pmatrix} 2cs(s+k) & -\eta c^3 & -c^3 s \\ 2c\eta & 2\eta\vartheta(s) & 2s\vartheta(s) \end{pmatrix},$$

siendo $\vartheta(s) := 1 + e^s(1 + cs)$ y $\varphi(s) := 2s(s+k)\vartheta(s) + \eta c^3$. Los vectores \mathbf{V}_{02} y \mathbf{V}_{22} se hallan como

$$\mathbf{V}_{02} = \nu_0(\omega)(0, -1, 0, -1)^T, \quad \mathbf{V}_{22} = \nu_2(\omega)(v_1^{22}, \eta/2, v_1^{22}e^{-i2\omega}, \eta e^{-i2\omega}/2)^T,$$

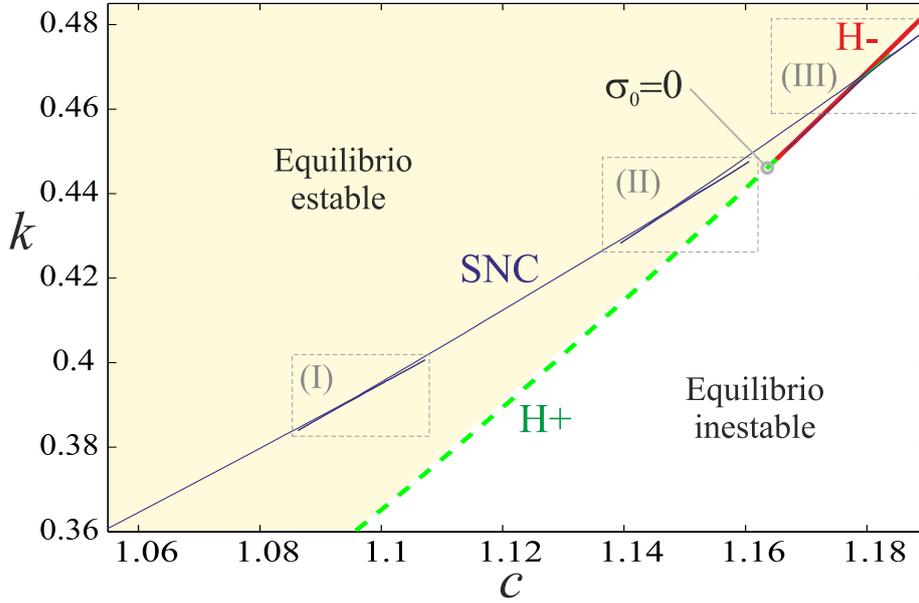


Figura 5.5: Detalle del diagrama de bifurcación, donde además de la curva de Hopf subcrítica (línea a trazos verde) y la curva de Hopf supercrítica (línea sólida roja) se muestra la curva de sillanodos de ciclos límites (SNC) (línea fina violeta).

donde $v_1^{22} := i\omega(k + i2\omega)$ y

$$\nu_0(\omega) := \omega \{ [\eta c^3 - 2(k^2 + \omega^2)]\omega \cos \omega + \eta c^3(\omega + k \sin \omega) \} / (2c^4),$$

$$\nu_2(\omega) := i\omega(k + i\omega)e^{-i2\omega} \{ \eta c^3 + e^{i\omega}[\eta c^3 + i2\omega(k + i\omega)] \} / [c\varphi(i2\omega)].$$

Entonces, se obtiene $\mathbf{p}(i\omega; \mu) = (p_1(\omega; \mu), 0, 0)^T$, donde $p_1(\omega; \mu)$ está dado por

$$\begin{aligned} p_1 = & \frac{\omega e^{-i2\omega}}{8c^2} \{ \eta c^2 \omega (\omega - ik)(\omega + ik + 2\omega e^{i2\omega}) - 4\omega \nu_2 (1 + e^{i3\omega})(k^2 + ik\omega + 2\omega^2) \\ & + ic^3 [\nu_2 [(k - i\omega)(1 + e^{i\omega}) - 2\eta e^{i\omega}(k + i2\omega)(1 + e^{i2\omega})] \\ & + 4\nu_0 e^{i\omega}(k + i\omega)(1 - e^{i\omega})] \}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Luego, se obtiene $\xi(i\omega; \mu) = -2cp_1(\omega; \mu)/\chi(i\omega)$ y el coeficiente de curvatura que resulta

$$\sigma_0 = -2c \Re \{ p_1(\omega_0; \mu) / [q(\omega_0)e^{-i\omega_0} + \chi'(i\omega_0)] \}, \quad (5.18)$$

siendo $q(\omega) := 2\omega^2 - \eta c^3 + 2k(1 - e^{i\omega}) - i2\omega(k - 2 + 2e^{-i\omega})$.

El sistema con control RED exhibe un comportamiento dinámico interesante. Si los parámetros (c, k) están cerca de la curva H+ en la Fig. 5.4(a), la cuenca de atracción de $\hat{\mathbf{y}}^*$ puede ser reducida debido a que existe un ciclo límite inestable alrededor del

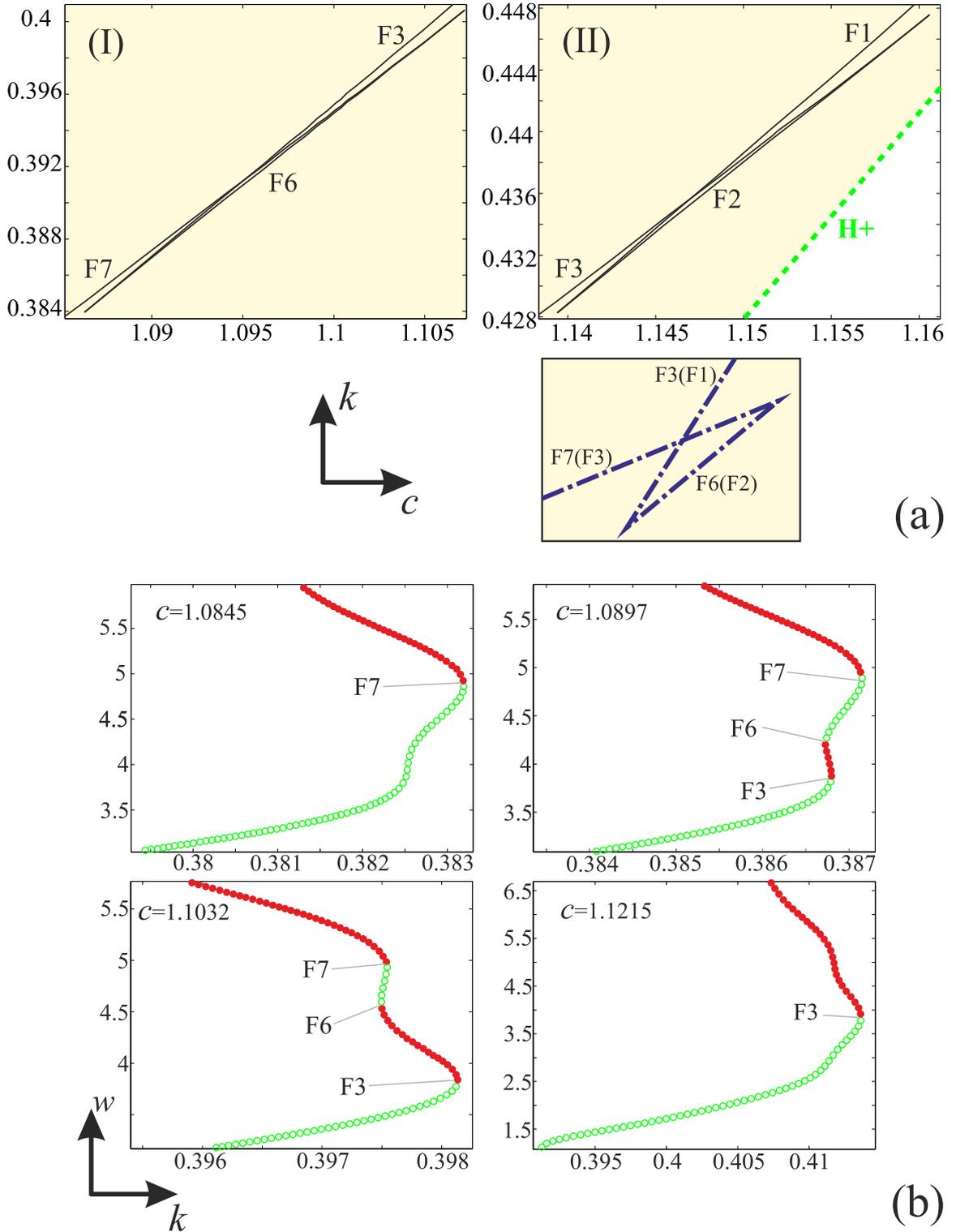


Figura 5.6: (a) Ampliaciones correspondientes a los recuadros (I) y (II) marcados en la Fig. 5.5 mostrando diferentes partes de la curva SNC. Además, se muestra un diagrama cualitativo de la forma de la singularidad, que es similar para los recuadros (I) y (II). (b) Ramas de soluciones periódicas para valores constantes de c , que corresponden a cortes verticales en el cuadro (I).

punto de equilibrio. Por otra parte, si los parámetros están cerca de la curva H— las trayectorias del sistema pueden verse atraídas por una solución periódica estable, como la que se representa en la Fig. 5.4(b) para $c = 2$. Esta curva también muestra la amplitud de las soluciones periódicas calculada numéricamente con el programa DDE-BIFTOOL y la solución aproximada con el MF.

La presencia de un punto de degeneración (indicado con $\sigma_0 = 0$) revela la existencia de sillanodos de ciclos límites (SNC) en un entorno de este punto (véase Kuznetsov, 2004). Esta bifurcación consiste en la aniquilación de un par de soluciones periódicas anidadas y puede detectarse cuando un multiplicador de Floquet cruza el círculo unitario a través del punto $1 + i0$ al variarse alguno de los parámetros (véase Seydel, 2010). Esta bifurcación se estudia con la ayuda del programa DDE-BIFTOOL. Por ejemplo, considerando $\eta = 1$, para la curva de Hopf de la Fig. 5.4(a) se hacen cortes para c constante y se continúan las soluciones periódicas emergentes variando k (como se hizo en la Fig. 5.4(b)). En estas continuaciones, sobre las ramas de soluciones periódicas se monitorean los exponentes de Floquet (cálculo provisto por el programa) y se detectan los puntos donde uno de estos exponentes cruza el círculo unitario a través del punto $1 + i0$. Si esto se realiza para cada valor de c y los puntos SNC se indican en el plano (c, k) , se obtiene la curva que se muestra en violeta en la Fig. 5.5. En los cuadros rectangulares indicados con línea punteada (I, II y III) en esta figura, aparecen tres escenarios interesantes. En la Fig. 5.6(a) se provee una vista detallada de los cuadros I y II junto con un diagrama cualitativo para indicar las regiones con comportamiento dinámico distintivo en el espacio de parámetros. Nótese que pueden existir hasta cuatro soluciones periódicas anidadas rodeando al equilibrio estable; como ejemplo, en la Fig. 5.6(b) se muestra la amplitud (máximo de $w(t)$ sobre cada solución periódica) en función de k para distintos valores fijos de c . En el cuadro II se tiene un comportamiento similar al I, pero para otro rango de valores de los parámetros (c, k) .

Sin embargo, el comportamiento del sistema para valores de los parámetros dentro del cuadro III es diferente a los anteriores. En la Fig. 5.7(a) se provee una vista detallada de este cuadro junto con un diagrama cualitativo de las curvas de bifurcación de sillanodos. En cada región, el número indicado corresponde a la cantidad de ciclos límites anidados que tiene el sistema. En la Fig. 5.7(b) se muestra la amplitud (máximo de

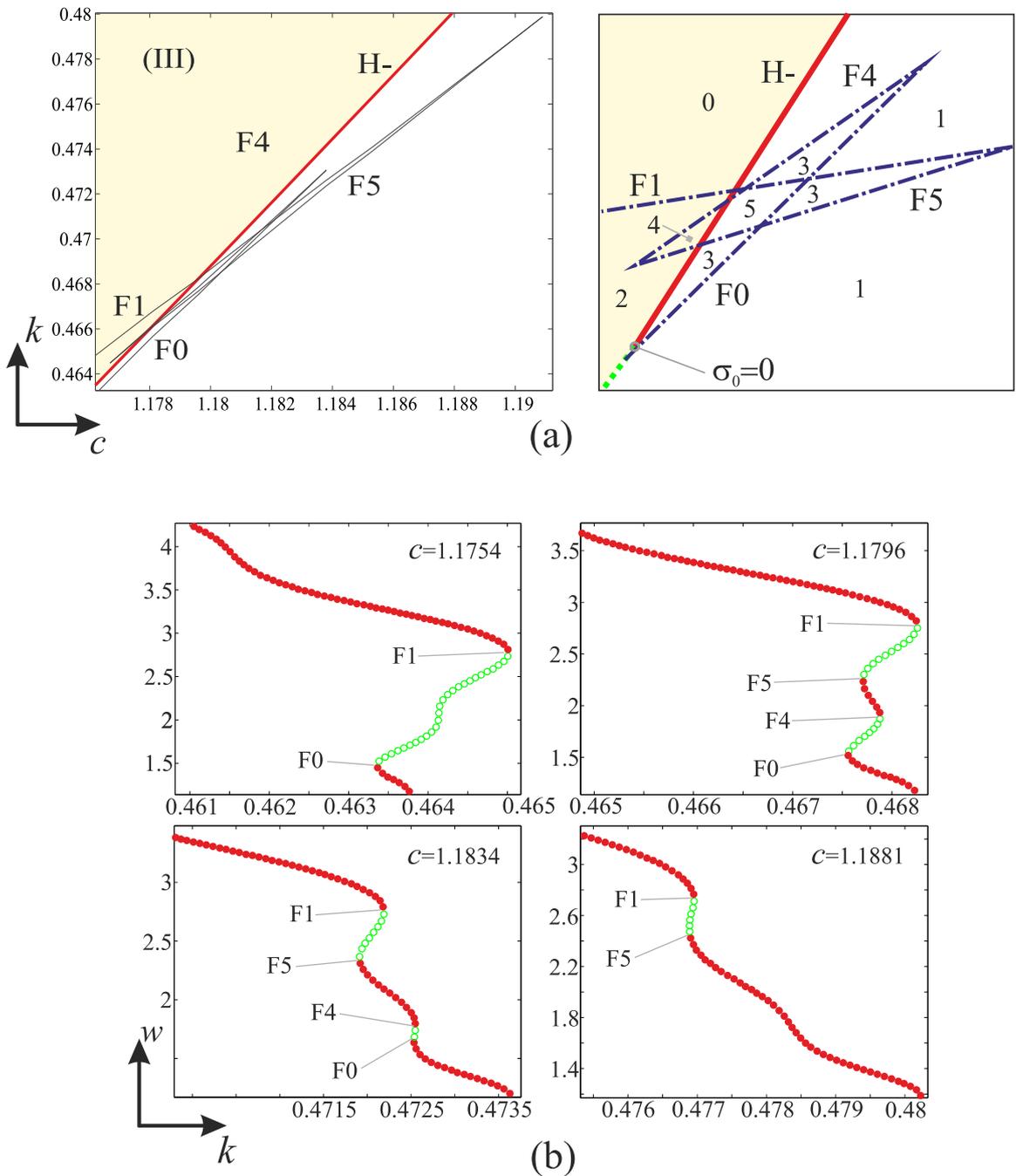


Figura 5.7: (a) (Izquierda) Área ampliada correspondiente al recuadro (III) de la Fig. 5.5. (Derecha) Diagrama cualitativo mostrando la forma de la singularidad. En cada región, el número indica la cantidad de ciclos límites co-existentes. (b) Amplitud (máximo) de $w(t)$ vs. k para distintos valores de c . Nótese que, para combinaciones adecuadas de c y k , pueden existir hasta cinco ciclos límites anidados.

$w(t)$) de las soluciones periódicas en función del parámetro k , para cuatro valores fijos del parámetro c . Por ejemplo, para $c = 1.1754$, al variarse k se intersectan las curvas F0 y F1 de la Fig. 5.7(a). Para este caso, la órbita periódica que nace del punto de Hopf colisiona con una órbita inestable en el punto indicado como F0. A su vez, la rama de soluciones inestables colisiona con otra órbita estable de mayor amplitud en el punto F1. Para $c = 1.1796$, sobre la rama de soluciones periódicas aparecen cuatro puntos de SNC (F0-F4-F5-F1), y existe un rango de valores de k para el cual el sistema exhibe cinco ciclos límites anidados. Si se continúa incrementando c los puntos F0 y F4 se acercan (por ejemplo, para $c = 1.1834$) hasta que finalmente ambos coinciden y luego dejan de existir (como se muestra para $c = 1.1881$). Al aumentar c aún más, sucede lo mismo con los puntos F5 y F1, hasta que finalmente toda la rama de soluciones periódicas resulta estable.

5.3.3. Control proporcional-integral (PI)

En este caso se considera la siguiente función de transferencia para el controlador

$$\frac{\Delta P(s)}{\Delta Q(s)} = \frac{K}{s} \left(\frac{s}{z} + 1 \right), \quad (5.19)$$

donde $\Delta P(s)$ y $\Delta Q(s)$ nuevamente son las transformadas de Laplace de $\delta P(t)$ y $\delta Q(t)$, respectivamente, como en el ejemplo anterior. El parámetro K es la ganancia y $z > 0$ establece el ancho de banda del compensador. A partir de (5.19) se obtiene $\delta \dot{P}(t) = (K/z)\delta \dot{Q}(t) + K\delta Q(t)$, de modo que cambiando nuevamente la escala temporal y tomando $Q(t) = Nq(t)$, la dinámica de $P(t)$ está dada por

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= (KN/z)\delta \dot{q}(t) + KNT_p\delta q(t) \\ &= (KN/z)[w(t) - c] + KNT_p\delta q(t). \end{aligned}$$

Entonces, definiendo $p(t) = P(t)$, $\beta := KN/z$ y $\rho := KNT_p$, el modelo del TCP/PI se puede escribir como

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = 1 - \frac{1}{2}w(t)w(t-1)p(t-1), \\ \dot{q}(t) = w(t) - c, \\ \dot{p}(t) = \beta[w(t) - c] + \rho[q(t) - \hat{q}]. \end{cases} \quad (5.20)$$

De nuevo, se tienen tres parámetros adimensionales representados por el vector $\mu = (c, \beta, \rho)$. Para aplicar el MF, una vez más se consideran las constantes auxiliares a_1 y a_2 , y se elige la realización

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & -a_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \beta & \rho & 0 \end{pmatrix}, \quad B = I_3, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(e^{-s}) := \begin{pmatrix} I_2 \\ I_2 e^{-s} \end{pmatrix},$$

$$g(\mathbf{y}^*(t); \mu) = \begin{pmatrix} 1 + y_1(t)y_1(t-1)y_2(t-1)/2 - a_1 y_1(t) - a_2 y_2(t) \\ -c \\ -(\beta c + \rho \hat{q}) \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Para la parte lineal se tiene

$$G^*(s; \mu) = \begin{pmatrix} G(s; \mu) \\ G(s; \mu)e^{-s} \end{pmatrix}, \quad G(s; \mu) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{pmatrix} s^2 & -a_2 \rho & -a_2 s \\ \beta s + \rho & \rho(s + a_1) & s(s + a_1) \end{pmatrix},$$

donde $\Delta(s) := s^3 + a_1 s^2 + \beta a_2 s + \rho a_2$. Además, tomando $a_1 = \hat{y}_1 \hat{y}_2 = 2/c$ y $a_2 = (\hat{y}_1)^2/2 = c^2/2$, la matriz Jacobiana resulta idéntica a la que se obtuvo para el modelo RED (Ec. (5.16)). De nuevo, $G^*(s; \mu)J(\mu)$ tiene rango 1, y el único autovalor relevante es

$$\hat{\lambda}(s; \mu) = \frac{[2s^2 + c^3(\beta s + \rho)](e^{-s} - 1)}{\chi(s)},$$

donde $\chi(s) := 2cs^3 + 4s^2 + c^3(\beta s + \rho)$. Considerando el diagrama de Nyquist de $\hat{\lambda}(s; \mu)$, es posible detectar los puntos de bifurcaciones de Hopf en el espacio de parámetros y continuarlos para obtener las curvas mostradas en la Fig. 5.8. La Fig. 5.8(a) muestra las curvas en el espacio (c, ρ) para distintos valores de β . En todos los casos ocurre la degeneración asociada a la anulación del primer coeficiente de curvatura ($\sigma_0 = 0$). Además, se observa que a medida que c aumenta, el rango de valores admisibles de ρ para que el equilibrio sea estable se reduce. Más aún, para cada valor de β existe un valor $c = c_{m\acute{a}x}$, de modo que para todo c mayor a $c_{m\acute{a}x}$ el equilibrio es inestable independientemente de ρ . La Fig. 5.8(b) muestra las curvas de Hopf en el plano (c, β) para valores fijos de ρ . En este caso, para cada valor de ρ existe un intervalo $(\beta_{min}, \beta_{m\acute{a}x})$ de valores admisibles de β para que el sistema sea estable. Este intervalo se vuelve más pequeño a medida que c aumenta. Esta figura también revela la existencia del valor $c = c_{m\acute{a}x}$, más allá del cual el sistema es siempre inestable. Para

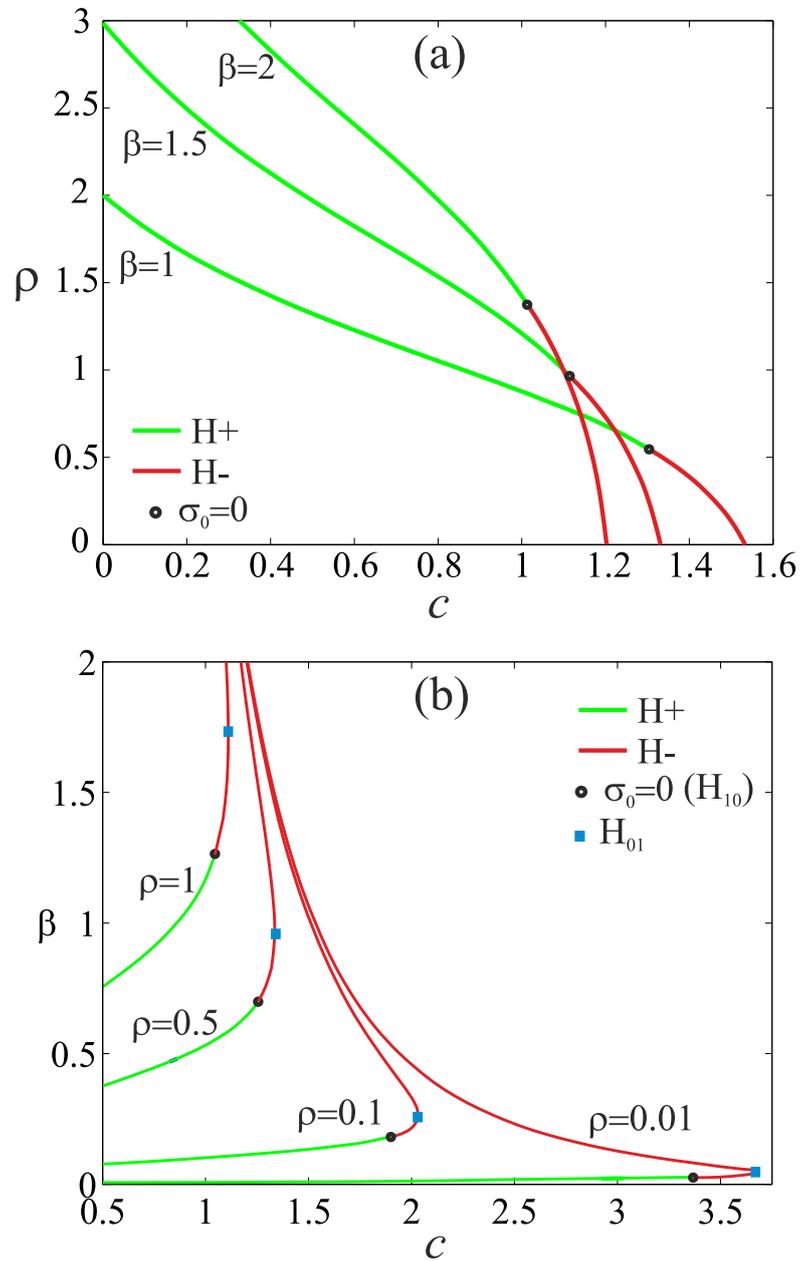


Figura 5.8: (a) Diagramas de bifurcación en el plano (c, ρ) para distintos valores de β . En cada caso, la región de estabilidad del equilibrio se encuentra a la izquierda de la curva de Hopf. (b) Diagramas de bifurcación en el espacio (c, β) para valores fijos de ρ . La región que queda a la izquierda de cada curva corresponde al equilibrio estable.

este valor de c , sobre la curva de Hopf aparece una bifurcación degenerada denominada H_{01} , donde la tasa de cambio del autovalor con respecto al parámetro es nula en la bifurcación (este caso corresponde a la falla de la hipótesis 1 del Teorema 3.3).

Para ilustrar la detección de bifurcaciones degeneradas de Hopf, en la Fig. 5.9 se muestra un detalle de la curva en el plano (c, β) para $\rho = 0.1$. Sobre la izquierda se presentan diagramas de Nyquist correspondientes a distintos puntos sobre esta curva. Cuando la curva de Hopf se recorre desde la parte subcrítica ($H+$) hacia la supercrítica ($H-$), el vector ξ pasa de apuntar hacia el interior del contorno de Nyquist de $\widehat{\lambda}(i\omega; \mu)$ a apuntar hacia el exterior del mismo. En esta transición existe un punto para el cual el contorno de $\widehat{\lambda}(i\omega; \mu)$ y el vector ξ son paralelos. Este punto corresponde a una bifurcación degenerada H_{10} (falla de la hipótesis 2 del Teorema 3.3). Por otra parte, los diagramas de Nyquist de la derecha en la Fig. 5.9 ilustran la ocurrencia de la degeneración H_{01} . En este caso, se fija $c = c_{m\acute{a}x} = 2.0345$ y se varía el parámetro β . Por ejemplo, para $\beta = 0.2$ la curva encicla al punto crítico $-1 + i0$. Cuando β se incrementa, dicha curva se acerca al punto $-1 + i0$ hasta que pasa a través de éste para $\beta_{01} = 0.26$ (punto H_{01}). Si β se incrementa aún más, la curva del autovalor se mueve otra vez hacia la izquierda, encerrando de nuevo al punto crítico, como se observa en el diagrama correspondiente a $\beta = 0.3$ ³.

Por otra parte, los autovectores \mathbf{v} y \mathbf{u} de $G^*(s; \mu)J(\mu)$ asociados al autovalor $\widehat{\lambda}(s; \mu)$ son

$$\mathbf{v} = (s^2/(\beta s + \rho), 1, s^2 e^{-s}/(\beta s + \rho), e^{-s})^T, \quad \mathbf{u} = (-1, -c^3/2, 1, c^3/2)^T,$$

y las matrices Q y L resultan

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & q_{13} & q_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \frac{s^2 e^{-s}}{(\beta s + \rho)} \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 & 1 & s^2/(\beta s + \rho) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$q_{11} = -\frac{e^{-s}}{2c^2} \left(\frac{2s^2}{\beta s + \rho} + c^3 \right), \quad q_{13} = -\frac{ce^{-s}}{2} - \frac{s^2}{c^2(\beta s + \rho)}, \quad q_{14} = -\frac{s^2 c(1+e^{-s})}{2(\beta s + \rho)}.$$

³En el dominio del tiempo, esta degeneración ocurre cuando un par de autovalores complejos conjugados con parte real negativa (positiva) en primer lugar se aproximan y alcanzan el eje imaginario, y luego ingresan nuevamente al semiplano izquierdo (derecho), cuando un parámetro se varía monótonamente.

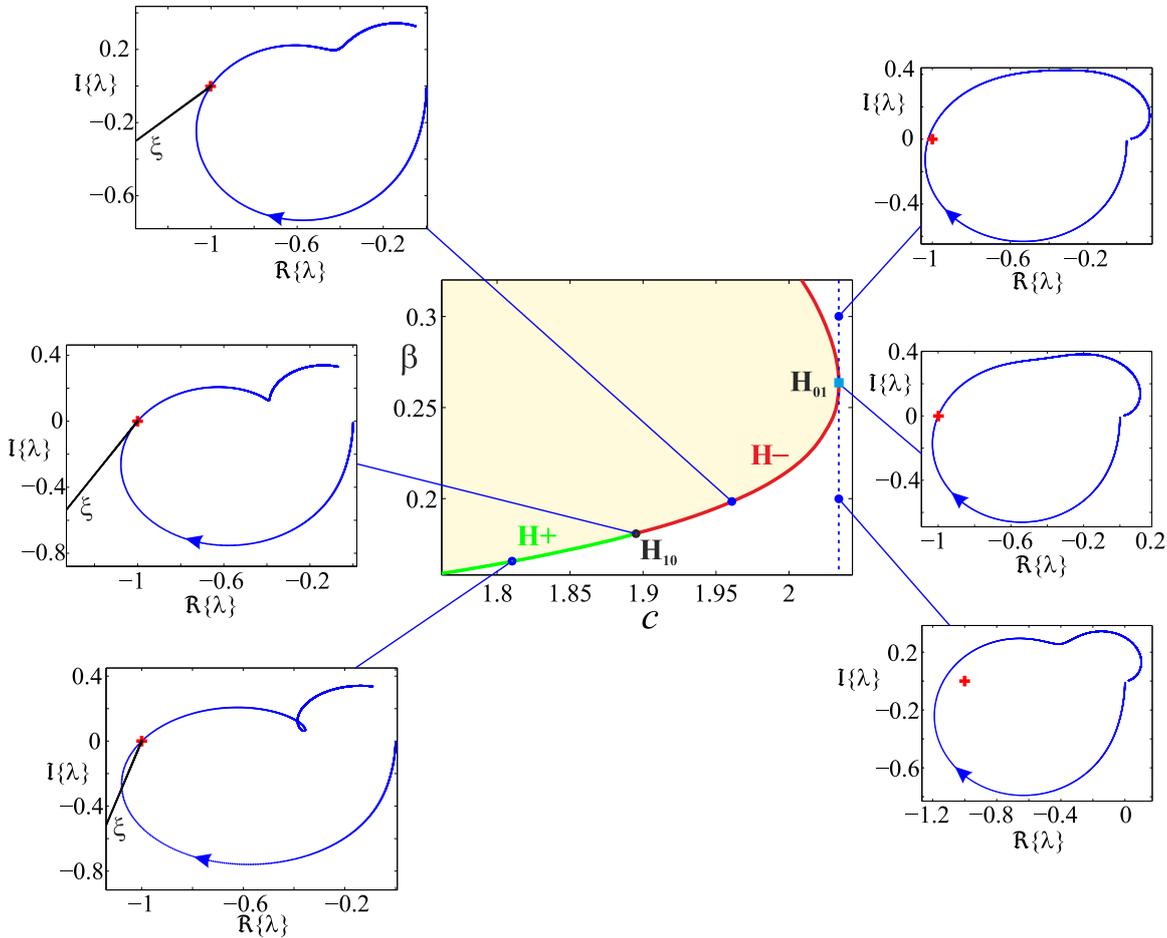


Figura 5.9: Detalle de la curva de Hopf para $\rho = 0.1$, donde se muestran distintos diagramas de Nyquist del autovalor para algunos puntos de la curva. Cuando la bifurcación de Hopf es subcrítica, el vector ξ apunta hacia el interior de la curva, pues co-existe una solución periódica inestable con el equilibrio es estable. Cuando la bifurcación es supercrítica, dicho vector apunta hacia el exterior de la curva, y la solución periódica existe cuando el equilibrio es inestable. En el punto H_{10} , el vector ξ es paralelo a la curva de Nyquist y el signo de σ_0 queda indeterminado; esta transición se aprecia en los diagramas de la izquierda. En la bifurcación H_{01} que se ilustra en los diagramas de la derecha, la curva de $\hat{\lambda}(i\omega; \mu)$ se acerca al punto crítico -1 , alcanza este punto, y se aleja nuevamente cuando β se varía de manera continua.

La matriz de lazo cerrado $H(s; \mu)$ está dada por

$$H^*(s; \mu) = \begin{pmatrix} H(s; \mu) \\ H(s; \mu)e^{-s} \end{pmatrix}, \quad H(s; \mu) = \frac{1}{\varphi(s)} \begin{pmatrix} 2cs^2 & -\rho c^3 & -c^3 s \\ 2c(\beta s + \rho) & 2\rho\vartheta(s) & 2s\vartheta(s) \end{pmatrix},$$

donde $\vartheta(s) := 1 + e^s(1 + cs)$ y $\varphi(s) := 2s^2\vartheta(s) + c^3(\beta s + \rho)$. Los vectores \mathbf{V}_{02} y \mathbf{V}_{22} resultan

$$\mathbf{V}_{02} = \nu_0(\omega)(0, 1, 0, 1)^T, \quad \mathbf{V}_{22} = \nu_2(\omega)(v_1^{22}, v_2^{22}, v_1^{22}e^{-i2\omega}, v_2^{22}e^{-i2\omega})^T,$$

donde $v_1^{22} := 2\omega^2$, $v_2^{22} := -(\rho + i2\omega\beta)/2$ y

$$\begin{aligned} \nu_0(\omega) &:= -\omega^2 [(\rho c^3 - 2\omega^2) \cos \omega + c^3(\rho + \beta\omega \sin \omega)] / [2c^4(\rho^2 + \omega^2\beta^2)], \\ \nu_2(\omega) &:= \omega^2 e^{-i2\omega} [e^{i\omega}(\rho c^3 - 2\omega^2 + ic^3\beta\omega) + c^3(\rho + i\omega\beta)] / [c\varphi(i2\omega)(\rho + i\omega\beta)^2]. \end{aligned}$$

Luego, se calcula $\mathbf{p}(i\omega; \mu) = (p_1(\omega; \mu), 0, 0)^T$, donde

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{i\omega^2 e^{-i2\omega}}{8c^2(\rho^2 + \omega^2\beta^2)(\rho + i\omega\beta)} \left\{ c^2\omega^2 (\omega\beta + \rho(1 + 2e^{i2\omega})) - i8\omega^2\nu_2(1 + e^{i3\omega})(\rho + i\omega\beta)^2 \right. \\ &\quad + ic^3(\rho + i\omega\beta) [-4\nu_0(\rho - i\omega)e^{i\omega}(1 + e^{i\omega}) + \nu_2 [\rho^2(1 + 5e^{i\omega} + 4e^{i3\omega}) \\ &\quad \left. + \omega^2\beta^2(e^{i\omega} + 4e^{i3\omega} - 2) + i3\omega\beta\rho(1 + e^{i\omega})]] \right\}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Entonces, se halla $\xi(i\omega; \mu) = -2c(\rho + i\omega\beta)p_1(\omega; \mu)/\chi(i\omega)$, y finalmente se calcula

$$\sigma_0 = -2c \Re \left\{ (\rho + i\omega_0\beta)p_1(\omega_0; \mu) / [q(\omega_0)e^{-i\omega_0} + \chi'(i\omega_0)] \right\}, \quad (5.23)$$

siendo $q(\omega) := 2\omega^2 - i\omega(4e^{i\omega} - 4 + \beta c^3) - c^3[\rho + \beta(e^{i\omega} - 1)]$.

Como caso particular, la Fig. 5.10 muestra la curva de bifurcación de Hopf en el espacio (c, ρ) para $\beta = 1$. Dado que $c = C_\ell T_p / N$, si se incrementa T_p , se incrementa c (y también ρ) y eventualmente el sistema puede volverse inestable. En forma similar a lo que sucede con el sistema TCP/RED, un incremento en la capacidad del *link* C_ℓ reduce el margen de estabilidad. Para este caso, el punto de degeneración H_{10} ($\sigma_0 = 0$) se encuentra para $(c, \rho) \simeq (1.269, 0.594)$. Desde este punto, emerge una curva de sillanodos de ciclos límites, identificada como F1 en la Fig. 5.10(b). Además, en esta figura pueden observarse varias curvas de este tipo. La forma de la singularidad completa (la organización de estas curvas) se muestra en el diagrama cualitativo de la

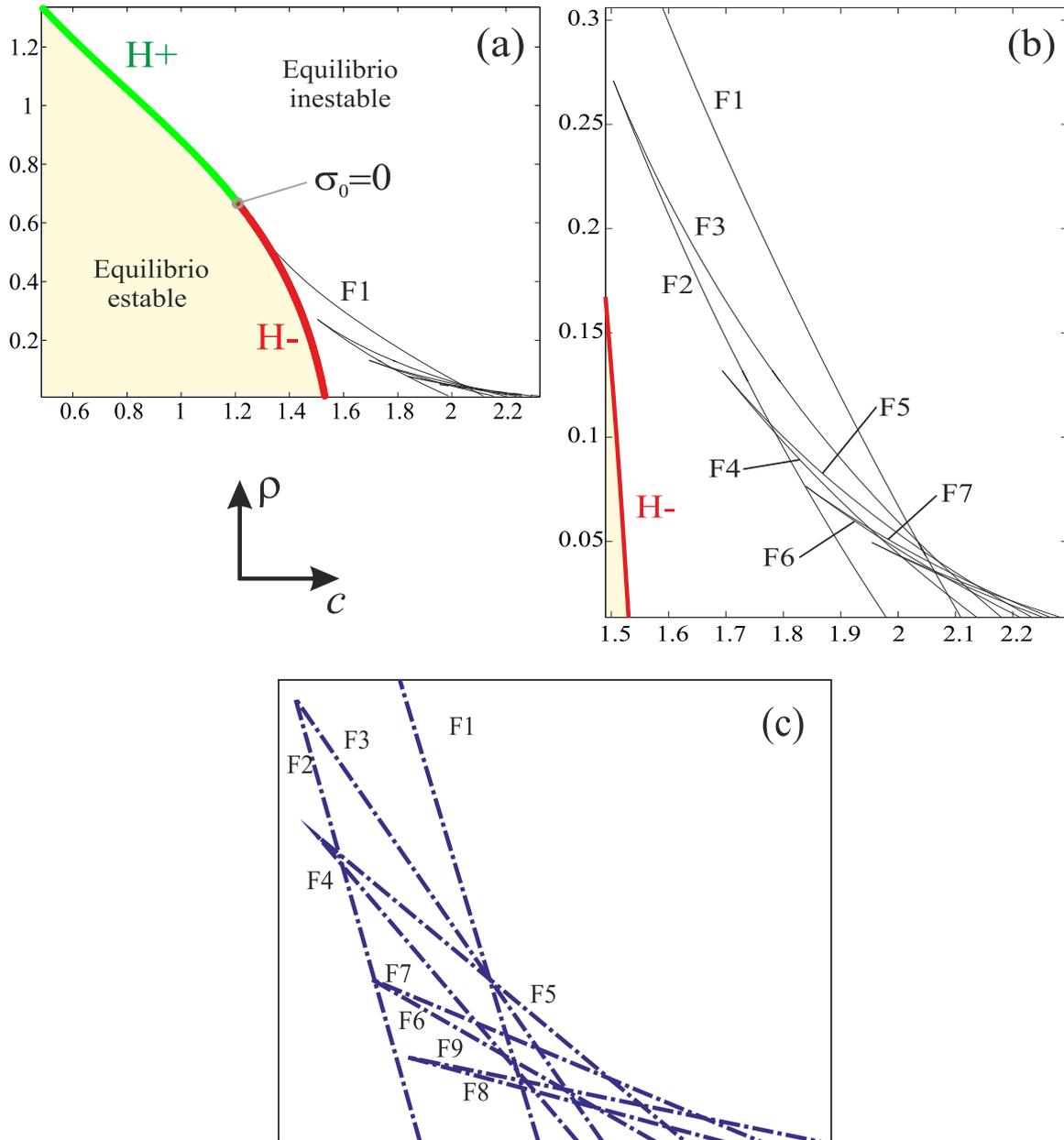


Figura 5.10: (a): Detalle de la curva de Hopf en el espacio (c, ρ) para $\beta = 1$. (b): Ampliación que muestra las distintas curvas de sillan-nodos de ciclos límites. La curva $F1$ nace del punto de anulación del coeficiente de curvatura ($\sigma_0 = 0$), siguiendo la curva desde la esquina superior izquierda. (c): Forma cualitativa de la singularidad. Nótese que un corte horizontal puede intersectar hasta nueve sillan-nodos de ciclos.

Fig. 5.10(c). Nótese que en un corte horizontal, se pueden obtener hasta nueve sillanodos de ciclos límites. Es probable que este comportamiento policíclico sea evitado en la práctica mediante un ajuste correcto de los parámetros del compensador. Pero si la variación de algún parámetro lleva al sistema a la inestabilidad, pueden observarse múltiples oscilaciones, posiblemente de gran amplitud. Nuevamente, la forma en que se organizan las curvas de sillanodos de ciclos límites resulta novedosa para este tipo de sistemas.

5.4. Conclusiones del Capítulo

Como aplicación de la técnica descrita en el Capítulo 4, se ha presentado el estudio de algoritmos de control de congestión de datos en internet. Se ha considerado el modelo “*fluid-flow*” desarrollado por Misra et al. (2000), el cual, al estar dado por una DEE, puede analizarse con el MF. Si bien en la literatura específica existen resultados concernientes al comportamiento no lineal del algoritmo TCP, aquí se han incorporado las dinámicas de los esquemas AQM y se han analizado los sistemas conjuntos resultantes. Nótese que para cada estrategia AQM analizada, el escenario dinámico que se obtiene es muy diferente. Aunque la elección de dicha estrategia no modifica la no linealidad del sistema, sí determina la ecuación funcional $\dot{p}(t) = f(w_t, q_t, p_t)$. Además, se han estudiado las bifurcaciones de Hopf que ocurren en los distintos esquemas, y se han detectado las degeneraciones H_{01} y H_{10} , correspondientes a la falla de la transversalidad y del primer coeficiente de curvatura, respectivamente (véase Moiola & Chen, 1996).

Las curvas que representan bifurcaciones globales se han obtenido con la ayuda del programa DDE-BIFTOOL. La existencia de sillanodos de ciclos límites resulta novedosa para este tipo de sistemas y alerta de la posible existencia de múltiples soluciones periódicas. Si bien un régimen oscilatorio no significa que el sistema deje de operar o colapse, sí perjudica al desempeño de la transmisión y provoca una utilización ineficiente de la capacidad de los *links*.

Por otra parte, es conocido que los sistemas de control de congestión de datos presentan bifurcaciones de tipo colisión de borde (Ranjan et al., 2004). Esto se debe a

que las variables de estado son no negativas y además están acotadas superiormente. Por ejemplo, la probabilidad de marcado de paquetes no puede ser superior a la unidad y $Q(t)$ no puede superar la capacidad de almacenamiento del *buffer* de datos. Además, generalmente, en el TCP se fija un tamaño máximo de la trama de datos a transmitir. Entonces, si existen soluciones periódicas de amplitud suficientemente grande, alguna de las variables puede alcanzar una de estas cotas, dando lugar a las mencionadas bifurcaciones de colisión de borde (véase también Nusse et al., 1994; Tse & Di Bernardo, 2002). Aunque el estudio de estas bifurcaciones no se trata en esta tesis, se menciona su existencia en estos sistemas y su estudio se plantea como una posible mejora de los resultados que aquí se presentan.

5.5. Apéndice del Capítulo

Considérese el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), x_{i+1}(t - r_i)), & 1 \leq i \leq N - 1, \\ \dot{x}_N(t) = f_N(x_N(t), x_1(t - r_N)), \end{cases} \quad (5.24)$$

donde $r_i \geq 0$, $f_i \in \mathcal{C}^1$ y

$$\frac{\partial f_i(x, y)}{\partial y} \neq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 1 \leq i \leq N - 1.$$

Nótese que la evolución de x_1 está influenciada por x_2 , la cual está afectada por x_3 , y así sucesivamente, hasta que finalmente x_{N+1} está influenciada por x_1 . Los sistemas de este tipo especial se han estudiado en (Mallet-Paret & Sell, 1996) y los mismos se denominan MCFS (por “*monotone cyclic feedback systems*”). Supongamos que \widehat{X} es el conjunto de todos los puntos de equilibrio de (5.24). Entonces, se tiene el resultado desarrollado en (Mallet-Paret & Sell, 1996), que aquí se presenta en forma conveniente como sigue:

Teorema 5.1 *Si $\mathbf{x}(t)$ es una solución acotada del sistema MCFS (5.24) definida en $[t_0, +\infty)$, entonces*

(a) $\Omega(\mathbf{x})$ es una órbita periódica no constante, o

(b) El conjunto límite $\Omega(\mathbf{s})$ de cada solución $\mathbf{s}(t)$, con $\mathbf{s}(t + \theta) \in \Omega(\mathbf{x})$, $-\max\{r_i\} \leq \theta \leq 0$, está contenido en \widehat{X} . \diamond

El punto (b) tiene en cuenta el caso en que $\Omega(\mathbf{x})$ es un punto de equilibrio simple. Es interesante notar que este Teorema descarta soluciones caóticas en el sistema (5.24) (véase Smith, 2010). El sistema (5.12) es un MCFS, con $N = 2$ y

$$f_1(x, y) = 1 - \frac{k}{2}x^2y, \quad f_2(x, y) = x - c,$$

donde $r_1 = 1$, $r_2 = 0$ y además

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = -\frac{k}{2}x^2, \quad \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = 1.$$

Nótese que $\partial f_1(x, y)/\partial y$ no se anula si se suponen valores positivos de x , lo cual tiene sentido pues $w(t)$ (el tamaño promedio de la ventana de datos a transmitir) se supone positiva. Entonces, del Teorema 5.1, se deduce que el sistema simplificado (5.12) no puede exhibir comportamiento caótico. Este hecho muestra cómo una simplificación en el modelo puede inhibir dinámicas complejas.

Capítulo 6

Sistemas discretos con retardos

6.1. Introducción

Como se ha mencionado en los capítulos anteriores, en los últimos años muchos investigadores se han abocado al estudio de esquemas de control conocidos como TDFC ("*Time delay feedback control*"). Éstos se basan en la inclusión intencional de retardos temporales en la realimentación de estados. Esta técnica ha resultado de gran utilidad para lograr diferentes objetivos de control tanto en sistemas continuos (Pyragas, 1992; Bleich & Socolar, 1996; Pyragas, 2001; Wang et al., 2001; Just et al., 2003; Pyragas et al., 2004; Hövel, 2010; Flunkert, 2011) como discretos (de Souza Vieira & Lichtenberg, 1996; Konishi et al., 1996; Buchner & Zebrowski, 2000; Martínez-Zérega & Pisarchik, 2005; Wen et al., 2006).

Como se ha visto a lo largo de esta tesis, en sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) el uso de retardos temporales hace que el espacio de estados se vuelva de dimensión infinita. En cambio, se verá que en sistemas discretos (SD), si bien la dimensión se incrementa, la misma continúa siendo finita. Esto permite que el mapa controlado pueda expresarse como un sistema de ecuaciones a diferencias de primer orden, agregando tantas variables de estado como número de muestras comprenda el retardo.

Si bien los controladores por retardos se emplean para lograr objetivos específicos, como aumentar/disminuir la zona de estabilidad de un punto de equilibrio, retrasar/adelantar la aparición de fenómenos complejos como oscilaciones o caos, etc., los mismos pueden provocar a su vez la aparición de comportamientos indeseables. El incremento en la dimensión del sistema se traduce en una mayor cantidad de autovalores y por ello, aumentan las posibilidades de que éstos crucen los límites de la estabilidad originando bifurcaciones. Por ejemplo, se ha observado la aparición de bifurcaciones de Neimark-Sacker (NS) al controlar mapas que a lazo abierto exhibían

sólo bifurcaciones de período doble (PD).

Las bifurcaciones PD pueden presentarse en mapas de cualquier dimensión y consisten en la aparición de órbitas de período dos en torno de un punto de equilibrio cuando cambia la estabilidad del mismo. El comportamiento dinámico asociado a una bifurcación de NS es más complejo pues comprende la aparición de órbitas (de períodos mayores a dos o cuasiperiódicas) en sistemas que tienen dos o más dimensiones (Kuznetsov, 2004). La interacción entre bifurcaciones PD y de NS al implementar leyes de control por retardos lineales y no lineales se puntualizó en (de Souza Vieira & Lichtenberg, 1996) para el caso del mapa logístico. Algunos resultados numéricos se presentaron en (Buchner & Zebrowski, 2000) al implementar sobre el mismo mapa un esquema de control con retardo específico, denominado “*echo type*”. Estas interacciones también han sido observadas al acoplar osciladores similares pues la dimensión del sistema dinámico aumenta naturalmente (Reick & Mosekilde, 1995).

En este capítulo se empleará el controlador por retardo presentado en (Buchner & Zebrowski, 2000) para aumentar la región de estabilidad de un mapa escalar genérico que presenta una bifurcación PD. Se demostrará que resulta posible manipular (retrasar o adelantar) dicha bifurcación dependiendo de la cantidad de muestras retrasadas que se consideren. Se darán las condiciones para la ocurrencia de bifurcaciones PD y de NS y se obtendrán coeficientes que permiten determinar la estabilidad de las órbitas emergentes. Además, se formalizará analíticamente la existencia de una resonancia 1:2 en el sistema controlado, condición que explica la interacción que se produce entre las bifurcaciones antes mencionadas. Distintas contribuciones insinuaron la aparición de esta singularidad en mapas controlados por retardos (de Souza Vieira & Lichtenberg, 1996; Chen et al., 1999; Buchner & Zebrowski, 2000; Fitchner et al., 2004). En (Wen et al., 2006) se propuso un tipo de control específico para la generación de resonancias fuertes 1:2. Sin embargo, sólo se obtuvieron resultados analíticos para el caso de mapas de dimensión cuatro.

La herramienta analítica a utilizar es la extensión del método en frecuencia para mapas desarrollada en (D’Amico et al., 2002; D’Amico, 2004; D’Amico et al., 2004). Se mostrará más adelante que para el problema en estudio, el MF permite encontrar resultados analíticos que no se han podido obtener mediante otras técnicas.

Por otra parte, se abordará el estudio del denominado mapa de Hénon generalizado (Richter, 2002). Como se verá, el MF permite analizar este sistema en forma relativamente simple y obtener los diagramas de bifurcaciones para cualquier dimensión del mapa. Se mostrará que éste puede exhibir bifurcaciones PD y NS, y que estos comportamientos dependen de la *paridad* de la dimensión del mapa.

6.2. Conceptos preliminares: El MF para sistemas discretos

En esta Sección, se presenta brevemente la extensión del MF desarrollada en (D'Amico et al., 2002; D'Amico, 2004; D'Amico et al., 2004) para el estudio de bifurcaciones PD y NS en mapas. Como el lector podrá apreciar, esta formulación es análoga a la correspondiente para sistemas continuos aunque involucra ciertas particularidades y la utilización de la transformada Z para analizar la linealización del sistema discreto. Considérese el sistema en variables de estado

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} &= A\mathbf{x}_n + B\mathbf{f}(\mathbf{y}_n; \mu), \\ \mathbf{y}_n &= C\mathbf{x}_n, \end{cases} \quad (6.1)$$

donde $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^t$, $A \in \mathbb{R}^{t \times t}$ (que puede ser nula), $B \in \mathbb{R}^{t \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times t}$, $\mu \in \mathbb{R}^s$ es un vector de parámetros y $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^p$ es una función no lineal suave (al menos \mathcal{C}^3). El sistema (6.1) se puede transformar en la forma realimentada de la Fig. 6.1 tomando $G(z; \mu) = C(zI - A)^{-1}B$ y $\mathbf{g}(\mathbf{y}_n; \mu) = -\mathbf{f}(\mathbf{y}_n; \mu)$. La entrada \mathbf{v}_n se asume nula, \mathbf{y}_n es la salida y z es la variable compleja de la transformada Z . Los puntos fijos $\hat{\mathbf{y}}$ de este sistema se calculan como $\hat{\mathbf{y}} = -G(1; \mu)\mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}}; \mu)$ y el comportamiento dinámico en torno a los mismos se caracteriza mediante los autovalores de la matriz

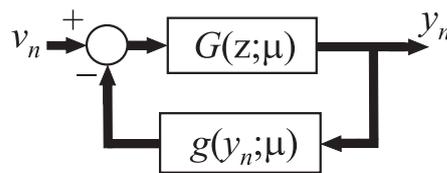


Figura 6.1: Representación en bloques del sistema (6.1).

de lazo abierto $G(z; \mu)J(\mu)$, con $J(\mu) = D_{\mathbf{y}}\mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}}; \mu)$ ¹, que dependen de la variable z y del parámetro μ . El contorno de Nyquist de los autovalores o funciones características, se obtiene haciendo $z = e^{i\omega}$, $0 \leq \omega < 2\pi$. Si el diagrama de uno de dichos autovalores, digamos $\hat{\lambda}(e^{i\omega}; \mu)$, cruza el punto crítico $-1 + 0i$ para $\mu = \mu_o$ y $\omega = \omega_0$, puede darse una de las siguientes condiciones:

- que $\omega_0 = \pi$; entonces se empleará la Tabla 6.1 para determinar la posible existencia de una bifurcación PD ó,
- que $e^{ik\omega_0} \neq 1$ para $k = 1, 2, 3, 4$; entonces se seguirá el procedimiento de la Tabla 6.2 para estudiar la posible aparición de una bifurcación de NS.

De existir una bifurcación, la estabilidad de la solución que emerge de la misma se determina mediante el cálculo de un índice σ (Paso 8 en las Tablas 6.1 y 6.2). Si $\sigma > 0$ ($\sigma < 0$), las oscilaciones existen cuando el punto fijo es inestable (estable) y las mismas son estables (inestables); en consecuencia, la bifurcación es supercrítica (subcrítica). En caso que $\sigma = 0$, la bifurcación es degenerada y el comportamiento que presenta el sistema es más complejo (Kuznetsov, 2004).

6.3. Esquema de control “Echo type”

Considérese el mapa escalar $x_{n+1} = f(x_n; \mu) + u_n$, donde $x_n \in \mathbb{R}$ es el estado, $\mu \in \mathbb{R}$ es el parámetro, $f(\cdot)$ es una función no lineal suave (al menos C^3 en el primer argumento) y $u_n \in \mathbb{R}$ es una señal de control de entrada. Supóngase que, en ausencia de control ($u_n = 0$), este mapa verifica las siguientes propiedades²:

- tiene un punto fijo \hat{x} , que es estable para $\mu \leq \mu_o$ e inestable para $\mu > \mu_o$, y
- para $\mu = \mu_o$, \hat{x} exhibe una bifurcación PD, *i.e.*, $D_x f(\hat{x}; \mu_o) = -1$.

Es conocido que el coeficiente de estabilidad de la órbita de período dos que emerge se puede calcular como

$$\sigma_{\mathcal{O}}^{PD} = \frac{1}{4}(D_x^2 f(\hat{x}; \mu_o))^2 + \frac{1}{6}D_x^3 f(\hat{x}; \mu_o). \quad (6.2)$$

¹Por simplicidad, $D_{\mathbf{y}}\mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}}; \mu)_{ij} = \{\partial g_i(\mathbf{y}; \mu)/\partial y_j\}_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}$ con $\mathbf{g}(\cdot) = [g_1(\cdot) \dots g_p(\cdot)]^T$ e $\mathbf{y} = [y_1 \dots y_m]^T$; para las derivadas de alto orden se utilizarán expresiones similares. En particular, cuando $p = m = 1$ estas derivadas resultan escalares.

²Las cantidades con subíndice “ \mathcal{O} ” representan valores a lazo abierto o sin control. El subíndice “ o ” se utilizará para los valores correspondientes al sistema a lazo cerrado o con control.

Tabla 6.1: Procedimiento para analizar bifurcaciones PD.

Paso 0	$G(\cdot), \mathbf{g}(\cdot), \hat{\mathbf{y}}, J(\cdot)$ y $\hat{\lambda}(\cdot)$ tales que $\hat{\lambda}(-1; \mu_o) = -1 + 0i$ son dados.
Paso 1	Calcular los vectores \mathbf{u}_{PD} y \mathbf{v}_{PD} dados por $\mathbf{u}_{PD}^T G(-1; \mu) J(\mu) = \mathbf{u}_{PD}^T \hat{\lambda}(-1; \mu),$ $G(-1; \mu) J(\mu) \mathbf{v}_{PD} = \hat{\lambda}(-1; \mu) \mathbf{v}_{PD}.$
Paso 2	Evaluar la matriz $H(z; \mu) = [I + G(z; \mu) J(\mu)]^{-1} G(z; \mu).$
Paso 3	Calcular las matrices Q_{PD} y L_{PD} cuyos elementos son $q_{ij} = \sum_{p=1}^m D_{y_p y_j}^2 g_i(\hat{\mathbf{y}}; \mu) v^p,$ $l_{ij} = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m D_{y_p y_q y_j}^3 g_i(\hat{\mathbf{y}}; \mu) v^p v^q,$ donde $i = 1, \dots, \ell, j = 1, \dots, m,$ y $v^p, v^q,$ $g_i(\cdot)$ son las componentes de \mathbf{v}_{PD} y $\mathbf{g}(\cdot),$ respectivamente.
Paso 4	Hallar los vectores $\mathbf{v}_0^{PD} = -H(1; \mu) Q_{PD} \mathbf{v}_{PD} / 2,$ $\mathbf{p}_{PD}(\mu) = Q_{PD} \mathbf{v}_0^{PD} + L_{PD} \mathbf{v}_{PD} / 6.$
Paso 5	Obtener $\xi_{PD}(\mu) = -\mathbf{u}_{PD}^T G(-1; \mu) \mathbf{p}_{PD}(\mu) / (\mathbf{u}_{PD}^T \mathbf{v}_{PD}).$
Paso 6	Hallar θ tal que $\hat{\lambda}(-1; \tilde{\mu}) = -1 + \xi_{PD}(\tilde{\mu}) \theta^2$ para $\tilde{\mu} \neq \mu_o.$ Si existe solución, ir al Paso 7; sino, terminar el procedimiento.
Paso 7	Evaluar $\mathbf{Y}_0 = \theta^2 \mathbf{v}_0^{PD}, \mathbf{Y}_1 = \theta \mathbf{v}_{PD}$ y aproximar la órbita de período dos como $\mathbf{y}_n = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}_1 e^{i\pi n}.$
Paso 8	Calcular $\sigma_{PD} = -\mathbf{u}_{PD}^T G(-1; \mu_o) \mathbf{p}_{PD}(\mu_o) / [\mathbf{u}_{PD}^T D_z G(-1; \mu_o) J(\mu_o) \mathbf{v}_{PD}]$

Tabla 6.2: Procedimiento para analizar bifurcaciones de NS.

Paso 0	$G(\cdot), \mathbf{g}(\cdot), \hat{\mathbf{y}}, J(\cdot)$ y $\hat{\lambda}(\cdot)$ tales que $\hat{\lambda}(e^{i\omega_o}; \mu_o) = -1 + 0i$ son dados.
Paso 1	Calcular los vectores \mathbf{u}_{NS} y \mathbf{v}_{NS} dados por $\mathbf{u}_{NS}^T G(e^{i\omega}; \mu) J(\mu) = \mathbf{u}_{NS}^T \hat{\lambda}(e^{i\omega}; \mu),$ $G(e^{i\omega}; \mu) J(\mu) \mathbf{v}_{NS} = \hat{\lambda}(e^{i\omega}; \mu) \mathbf{v}_{NS}.$
Paso 2	Evaluar la matriz $H(z; \mu) = [I + G(z; \mu) J(\mu)]^{-1} G(z; \mu).$
Paso 3	Calcular las matrices Q_{NS} y L_{NS} cuyos elementos son $q_{ij} = \sum_{p=1}^m D_{y_p y_j}^2 g_i(\hat{\mathbf{y}}; \mu) v^p,$ $l_{ij} = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m D_{y_p y_q y_j}^3 g_i(\hat{\mathbf{y}}; \mu) v^p v^q,$ donde $i = 1, \dots, \ell$, $j = 1, \dots, m$, y v^p, v^q , $g_i(\cdot)$ son las componentes de \mathbf{v}_{NS} y de $\mathbf{g}(\cdot)$, respectivamente.
Paso 4	Hallar los vectores $\mathbf{v}_0^{NS} = -H(1; \mu) Q_{NS} \bar{\mathbf{v}}_{NS} / 4,$ $\mathbf{v}_2^{NS} = -H(e^{i2\omega}; \mu) Q_{NS} \mathbf{v}_{NS} / 4,$ $\mathbf{p}_{NS}(\omega; \mu) = Q_{NS} \mathbf{v}_0^{NS} + \bar{Q}_{NS} \mathbf{v}_2^{NS} / 2 + L_{NS} \bar{\mathbf{v}}_{NS} / 8.$ El símbolo “ $\bar{\cdot}$ ” es el operador complejo conjugado.
Paso 5	Obtener $\xi_{NS}(\omega; \mu) = -\mathbf{u}_{NS}^T G(e^{i\omega}; \mu) \mathbf{p}_{NS}(\omega; \mu) / (\mathbf{u}_{NS}^T \mathbf{v}_{NS}).$
Paso 6	Hallar $\tilde{\omega}$ y θ tales que $\hat{\lambda}(e^{i\tilde{\omega}}; \tilde{\mu}) = -1 + \xi_{NS}(\tilde{\omega}; \tilde{\mu}) \theta^2$ para $\tilde{\mu} \neq \mu_o$. Si existe solución, ir al Paso 7; sino, terminar el procedimiento.
Paso 7	Evaluar $\mathbf{Y}_0 = \theta^2 \mathbf{v}_0^{NS}$, $\mathbf{Y}_1 = \theta \mathbf{v}_{NS}$, $\mathbf{Y}_2 = \theta^2 \mathbf{v}_2^{NS}$, y aproximar la órbita como $\mathbf{y}_n = \hat{\mathbf{y}} + \Re\{\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}_1 e^{i\tilde{\omega}n} + \mathbf{Y}_2 e^{i2\tilde{\omega}n}\}.$
Paso 8	Calcular $\sigma_{NS} = \Re\{\phi \mathbf{p}_{NS}(\omega; \mu)\}$, con $\phi = \mathbf{u}_{NS}^T G(e^{i\omega}; \mu) / [e^{i\omega} \mathbf{u}_{NS}^T D_z G(e^{i\omega}; \mu) J(\mu) \mathbf{v}_{NS}]$ para $\mu = \mu_o$ y $\omega = \omega_o$.

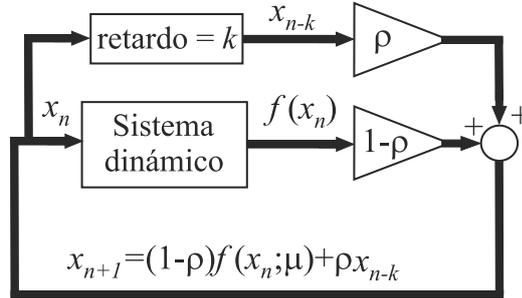


Figura 6.2: Implementación de la ley de control propuesta.

Entonces, si $\sigma_{\mathcal{O}}^{PD}$ es positivo (negativo), la bifurcación es *supercrítica* (*subcrítica*) (Kuznetsov, 2004).

A continuación, se aplica el control retrasado *echo-type* presentado en (Buchner & Zebrowski, 2000) para extender el rango de estabilidad de \hat{x} . Éste está dado por

$$u_n = \rho [x_{n-k} - f(x_n; \mu)], \quad (6.3)$$

donde $\rho \in (0, 1)$ es la ganancia del controlador y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es el retraso en el índice temporal³. Entonces, el sistema controlado puede escribirse como

$$x_{n+1} = (1 - \rho)f(x_n; \mu) + \rho x_{n-k}. \quad (6.4)$$

Como se muestra en la Fig. 6.2, la ley de control propuesta se puede implementar sin tener conocimiento previo de la función $f(\cdot)$ que gobierna el comportamiento dinámico del mapa original (en Liz & Franco, 2010, se presenta una ley de control que tiene propiedades similares). Más aún, es simple verificar que se preserve el punto fijo del sistema sin control. De acuerdo con (6.4), la expresión para calcular \hat{x} está dada por $\hat{x} = (1 - \rho)f(\hat{x}; \mu) + \rho\hat{x}$, que resulta en $\hat{x} = f(\hat{x}; \mu)$. Para facilitar el análisis dinámico alrededor de \hat{x} , el mapa (6.4) se reescribe como un sistema de $k + 1$ ecuaciones de primer orden eligiendo las variables

$$\begin{aligned} x_{1,n} &:= x_n, \\ x_{2,n} &:= x_{n-k}, \\ x_{3,n} &:= x_{n-k+1}, \\ &\vdots \\ x_{k+1,n} &:= x_{n-1}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

³Nótese que el control es no lineal, pues involucra la función $f(\cdot)$.

donde $x_{j,n}$ denota el valor de la variable j -ésima en el instante n . Entonces, el mapa (6.4) es equivalente a

$$\begin{cases} x_{1,n+1} &= (1 - \rho)f(x_{1,n}; \mu) + \rho x_{2,n} \\ x_{2,n+1} &= x_{3,n} \\ \vdots & \\ x_{k+1,n+1} &= x_{1,n}. \end{cases} \quad (6.6)$$

La matriz Jacobiana (del dominio tiempo) de (6.6) calculado en \hat{x} es

$$\begin{pmatrix} (1 - \rho)D_x f(\hat{x}; \mu) & \rho & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1) \times (k+1)},$$

de forma que la ecuación característica está dada por

$$[z - (1 - \rho)D_x f(\hat{x}; \mu)]z^k - \rho = 0. \quad (6.7)$$

Como puede inferirse, las expresiones explícitas de los autovalores sólo pueden obtenerse para valores pequeños de k (0, 1 ó 2). Para retardos mayores, las raíces de (6.7) deben calcularse en forma numérica (Buchner & Zebrowski, 2000), dificultando la generalización de los resultados. Como se mostrará en lo que sigue, el MF permite un tratamiento analítico más extensivo del problema, proveyendo condiciones explícitas para la existencia de bifurcaciones y para determinar el tipo de las mismas (Gentile et al., 2011).

6.3.1. Análisis con el MF

El sistema (6.6) se puede representar como se muestra en la Fig. 6.1 eligiendo las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1) \times (k+1)}, \quad C^T = B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1) \times 1}.$$

Entonces, la función de transferencia y el bloque no lineal del sistema entrada-salida equivalente son

$$G(z) = C[zI - A]^{-1}B = \frac{z^k}{z^{k+1} - \rho}, \quad g(y_n; \mu) = -(1 - \rho)f(y_n; \mu)$$

con $y_n = x_{1,n}$. La linealización de $g(\cdot)$ en un entorno del punto fijo $\hat{y} = \hat{x}$ está dada por

$$J(\mu) = -(1 - \rho)D_y f(\hat{y}; \mu),$$

de modo que

$$\lambda(z; \mu) = G(z)J(\mu) = -\frac{z^k(1 - \rho)D_y f(\hat{y}; \mu)}{z^{(k+1)} - \rho}, \quad (6.8)$$

y reemplazando $z = e^{i\omega}$ en (6.8), resulta

$$\lambda(e^{i\omega}; \mu) = -\frac{e^{i\omega k}(1 - \rho)D_y f(\hat{y}; \mu)}{e^{i\omega(k+1)} - \rho}. \quad (6.9)$$

Como se esperaba, el análisis de los $k + 1$ autovalores en la representación del dominio tiempo se transforma en el estudio de una única función $\lambda(\cdot)$ en el dominio frecuencia. Los desarrollos que siguen se focalizan en la obtención de resultados analíticos relacionados con la dinámica no lineal emergente de \hat{x} en el mapa controlado, tomando ventaja de la aplicación del MF.

6.3.2. Estabilidad del punto fijo

Como se mencionó previamente, la estabilidad del punto fijo puede analizarse por medio de la función $\lambda(\cdot)$ dada por (6.9). Los polos de $\lambda(z; \mu) = G(z)J(\mu)$ están dados por

$$z_r = \sqrt[k+1]{\rho} e^{i2\pi r/(k+1)}, \quad r = 0, 1, \dots, k,$$

y como $0 < \rho < 1$, todas estos números complejos se hallan en el interior del círculo unitario. Luego, de acuerdo con el criterio de estabilidad de Nyquist, el punto fijo será estable si $\lambda(e^{i\omega}; \mu)$ no encierra al punto crítico $-1 + i0$.

Definiendo la función normalizada

$$\tilde{\lambda}(e^{i\omega}) := \frac{(1 - \rho)e^{i\omega k}}{e^{i\omega(k+1)} - \rho}, \quad (6.10)$$

el análisis de estabilidad es equivalente a determinar la cantidad de veces que el contorno de $\tilde{\lambda}(e^{i\omega})$ encierre al punto $1/D_y f(\hat{y}; \mu)$. O, en forma más conveniente, fijando

los valores de ρ y k y variando μ , el diagrama de Nyquist de $\tilde{\lambda}(e^{i\omega})$ se mantiene fijo mientras que el nuevo punto crítico se mueve a lo largo del eje real, simplificando el estudio.

Por otra parte, se puede mostrar fácilmente que el módulo de $\tilde{\lambda}(e^{i\omega})$ dado por

$$|\tilde{\lambda}(e^{i\omega})| = \frac{1 - \rho}{\sqrt{1 - 2\rho \cos[\omega(k+1)] + \rho^2}},$$

satisface $(1-\rho)/(1+\rho) \leq |\tilde{\lambda}(e^{i\omega})| \leq 1, \forall \omega$. Entonces, la curva de Nyquist normalizada se encuentra contenida en un sector anular de radios interior y exterior $(1-\rho)/(1+\rho)$ y 1, respectivamente. El valor mínimo de $|\tilde{\lambda}(e^{i\omega})|$ se obtiene cuando $\cos[\omega(k+1)] = -1$, es decir, para las frecuencias $\underline{\omega}_n := \frac{2n+1}{k+1}\pi, n = 0, 1, \dots, k$. En forma análoga, el máximo se da cuando $\cos[\omega(k+1)] = 1$, para las frecuencias $\bar{\omega}_n := \frac{2n}{k+1}, n = 0, 1, \dots, k$. Por lo tanto, existen $k+1$ máximos y mínimos. Las Figs. 6.3 y 6.4 muestran diagramas típicos de $\tilde{\lambda}(\cdot)$ para valores pares e impares de k .

Para valores impares de k , siempre existe un máximo sobre el semieje real negativo con $\omega = \pi$, es decir, $\tilde{\lambda}(e^{i\pi}) = -1$. Esto significa que la condición crítica se da cuando $1/D_y f(\hat{y}; \mu_0) = -1$. Entonces, el punto fijo será estable si $D_y f(\hat{y}; \mu) > -1$ (el contorno no encierra al punto crítico) e inestable si $D_y f(\hat{y}; \mu) < -1$ (pues el contorno encierra una vez al punto crítico). Para valores pares de k , el número de intersecciones de $\tilde{\lambda}(e^{i\omega})$ con el semieje real negativo depende de los valores de ρ y k (véase la Fig. 6.3). Los ceros de la parte imaginaria de $\tilde{\lambda}(e^{i\omega})$ son los ceros de la función $h(\omega) := -(\sin \omega + \rho \sin \omega k)$. Como $D_\omega h(\omega) = -(\cos \omega + k\rho \cos \omega k)$, se puede deducir que $h(\omega)$ tiene una raíz doble en $\omega = \pi$ si $k\rho = 1$. Si $k\rho < 1$, basados en las propiedades del contorno de $\tilde{\lambda}(e^{i\omega})$ (que corresponde a un tipo de cicloide), se prueba que el mismo no tiene otras intersecciones con el semieje real negativo aparte de la que ocurre para $\omega = \pi$ (véase la Fig. 6.5(a)). Esta última se da para uno de los puntos de módulo mínimo localizado en $\tilde{\lambda}(e^{i\pi}) = -(1-\rho)/(1+\rho)$. Entonces, se deduce que \hat{y} será estable si $D_y f(\hat{y}; \mu) > -(1+\rho)/(1-\rho)$ e inestable si $D_y f(\hat{y}; \mu) < -(1+\rho)/(1-\rho)$. Si $k\rho > 1$, resulta $D_\omega h(\pi) < 0$ y además $h(\pi) = 0$, entonces existe un intervalo $I = (\pi - \epsilon, \pi)$ para algún $\epsilon > 0$ tal que $h(\omega) > 0$ para $\omega \in I$. Puesto que h es continua y además $h(\pi/2) < 0$ existe al menos una raíz en $(\pi/2, \pi)$. Entonces, se puede asegurar que $\tilde{\lambda}(e^{i\omega})$ interseca el semieje real al menos dos veces: para $\omega_0 < \pi$ (con $\tilde{\lambda}(e^{i\omega_0}) < -(1-\rho)/(1+\rho)$) y para $\omega = \pi$ (en $\tilde{\lambda}(e^{i\pi}) = -(1-\rho)/(1+\rho)$). Para este

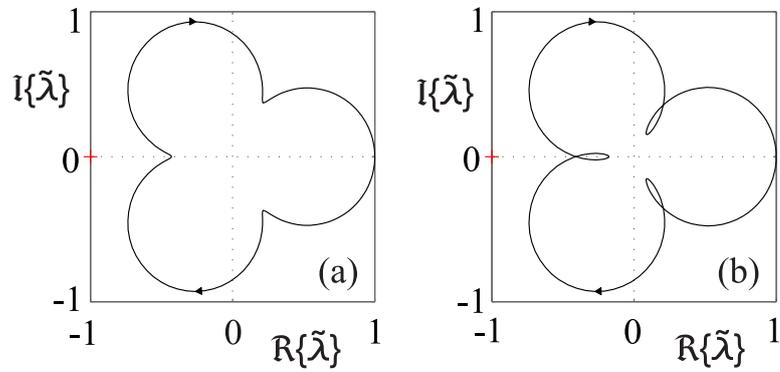


Figura 6.3: Diagrama de Nyquist para $k = 2$. (a) $\rho = 0.4$; (b) $\rho = 0.7$. Las flechas indican la orientación de los contornos.

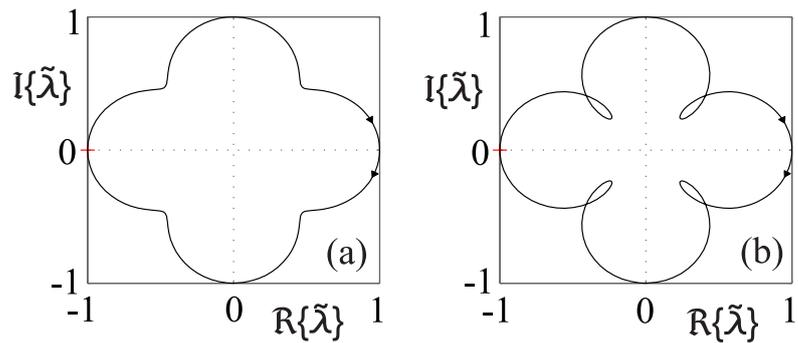


Figura 6.4: Diagrama de Nyquist para $k = 3$. (a) $\rho = 0.2$, (b) $\rho = 0.5$. Las flechas indican la orientación de los contornos.

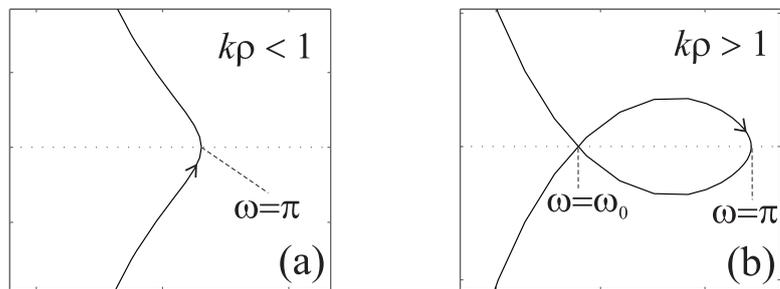


Figura 6.5: Detalle del diagrama de Nyquist en su intersección con el semieje real negativo, para k par. (a) $k\rho < 1$; (b) $k\rho > 1$

Tabla 6.3: Condiciones para la estabilidad del punto fijo \hat{y} .

	Punto fijo estable
k impar	$-1 < D_y f(\hat{y}; \mu) < 1$
k par	$-(1 + \rho)/(1 - \rho) < D_y f(\hat{y}; \mu) < 1$ si $k\rho < 1$ $1/\tilde{\lambda}(e^{i\omega_o}) < D_y f(\hat{y}; \mu) < 1$ si $k\rho > 1$ $-1 \leq \tilde{\lambda}(e^{i\omega_o}) \leq -(1 - \rho)/(1 + \rho)$

escenario (Fig. 6.5.(b)), el punto fijo es estable si $D_y f(\hat{y}; \mu) > 1/\tilde{\lambda}(e^{i\omega_o})$ e inestable si $D_y f(\hat{y}; \mu) < 1/\tilde{\lambda}(e^{i\omega_o})$.

Finalmente, se puede ver que $\tilde{\lambda}(e^{i0}) = 1$ para todo k , adicionando una nueva condición para la estabilidad del punto fijo ($1/D_y f(\hat{y}; \mu_o) = 1$). De hecho, \hat{y} será estable (inestable) si $D_y f(\hat{y}; \mu) < 1$ ($D_y f(\hat{y}; \mu) > 1$). Todas las condiciones para la estabilidad de \hat{y} se presentan en forma resumida en la Tabla 6.3.

6.3.3. Bifurcaciones de doble período

Como se puntualizó en la Sección 6.3, el mapa original con $u_n = 0$ exhibe una bifurcación PD para $\mu = \mu_o$. Como se mostrará en lo que sigue, el efecto del control implementado sobre las características de esta bifurcación depende del número de muestras que comprende el retardo (k).

Proposición 6.1 *El mapa (6.4) exhibe la misma bifurcación PD que el mapa sin controlar si en la ley de control se considera un número impar de muestras retrasadas (k). Sin embargo, el nacimiento y las características (amplitud y estabilidad) de las órbitas de período dos pueden cambiarse si k es par. \diamond*

Demostración. La condición necesaria para la ocurrencia de la bifurcación PD en el sistema controlado es

$$\tilde{\lambda}(e^{i\pi}) = 1/D_y f(\hat{y}; \mu_o). \quad (6.11)$$

Para poder asegurar que existe una oscilación de período dos, también es necesario determinar si la ecuación $\lambda(-1; \tilde{\mu}) = -1 + \xi^{PD}(\tilde{\mu})\theta^2$ tiene solución para $\tilde{\mu} \neq \mu_o$

Tabla 6.4: Resultados obtenidos siguiendo los Pasos 1 al 7 en la Tabla 6.1 para el caso en estudio.

Paso 1	$H(z; \mu)$	$=$	$z^k / \psi(z; \mu)$
Paso 2	Q	$=$	$-(1 - \rho) D_y^2 f(\hat{y}; \mu)$
	L	$=$	$-(1 - \rho) D_y^3 f(\hat{y}; \mu)$
Paso 3	v_0^{PD}	$=$	$D_y^2 f(\hat{y}; \mu) / \varphi(\mu)$
	p^{PD}	$=$	$-(1 - \rho) \left\{ [D_y^2 f(\hat{y}; \mu)]^2 / \varphi(\mu) + D_y^3 f(\hat{y}; \mu) / 6 \right\}$
Paso 4	$\xi^{PD}(\mu)$	$=$	$\frac{(-1)^k (1 - \rho)}{(-1)^{k+1} - \rho} \left\{ [D_y^2 f(\hat{y}; \mu)]^2 / \varphi(\mu) + D_y^3 f(\hat{y}; \mu) / 6 \right\}$
Paso 7	v_0^{NS}	$=$	$D_y^2 f(\hat{y}; \mu_o) / [2\varphi(\mu)]$
	v_2^{NS}	$=$	$e^{i2\omega} (1 - \rho) D_y^2 f(\hat{y}; \mu_o) / [2\psi(z; \mu)]$
	p^{NS}	$=$	$Q v_0^{NS} + \frac{1}{2} Q v_2^{NS} + \frac{1}{8} L$
Donde	$\psi(z; \mu)$	$:=$	$z^{k+1} - z^k (1 - \rho) D_y f(\hat{y}; \mu) - \rho$
	$\varphi(\mu)$	$:=$	$2 [1 - D_y f(\hat{y}; \mu)]$

(Paso 6 de la Tabla 6.1). Considerando (6.9) y $\xi^{PD}(\mu)$ del Paso 5 de la Tabla 6.1, resulta

$$\frac{(-1)^{k+1} (1 - \rho) D_y f(\hat{y}; \tilde{\mu})}{(-1)^{k+1} - \rho} = -1 + \frac{(-1)^k (1 - \rho)}{(-1)^{k+1} - \rho} \gamma(\tilde{\mu}) \theta^2, \quad (6.12)$$

donde

$$\gamma(\mu) := \frac{1}{2} \frac{(D_y^2 f(\hat{y}; \mu))^2}{(1 - D_y f(\hat{y}; \mu))} + \frac{1}{6} D_y^3 f(\hat{y}; \mu).$$

La estabilidad de las órbitas emergentes puede determinarse calculando el índice de estabilidad σ^{PD} del Paso 8 de la Tabla 6.1. Basados en las expresiones obtenidas en la Tabla 6.4 y realizando algunos cálculos, se obtiene

$$\sigma^{PD} = -\frac{((-1)^{k+1} - \rho) \gamma(\mu_o)}{((-1)^{k+1} + k\rho) D_y f(\hat{y}; \mu_o)}. \quad (6.13)$$

En lo que sigue, se mostrará que la paridad del retardo k conduce a diferentes resultados.

(i) *Valores impares de k .* Basados en (6.10), la condición (6.11) se reduce a $D_y f(\hat{y}; \mu_o) = -1$, que de hecho corresponde a la condición crítica para la existencia

de bifurcaciones PD en el mapa original. Luego, $\mu_o = \mu_{\mathcal{O}}$. Además, (6.12) lleva a $D_y f(\widehat{y}; \widetilde{\mu}) + 1 = -\gamma(\widetilde{\mu})\theta^2$, y por lo tanto,

$$\theta = \sqrt{-[1 + D_y f(\widehat{y}; \widetilde{\mu})] / \gamma(\widetilde{\mu})}. \quad (6.14)$$

Pero esta amplitud es la misma que para el mapa sin controlar⁴. De hecho, el sistema $x_{n+1} = f(x_n; \mu)$ se puede representar como $G(z) = 1/z$ y $g(\cdot) := -f(\cdot)$. Entonces, $\lambda(e^{i\omega}; \mu) = -D_y f(\widehat{y}; \mu_o)e^{-i\omega}$. Siguiendo los pasos indicados en la Tabla 6.1, se puede verificar que $\xi_{\mathcal{O}}^{PD}(\mu) = -\gamma(\mu)$, luego la ecuación $\lambda(-1; \widetilde{\mu}) = -1 + \xi_{\mathcal{O}}^{PD}(\widetilde{\mu})\theta^2$ conduce a (6.14). Finalmente, dado que $D_y f(\widehat{y}; \mu_o) = -1$, el coeficiente de estabilidad (6.13) se puede expresar como

$$\sigma_{imp}^{PD} = \frac{(1 - \rho)}{(1 + k\rho)} \sigma_{\mathcal{O}}^{PD}.$$

Puesto que $0 < \rho < 1$ el signo del índice σ_{imp}^{PD} es el mismo que para $\sigma_{\mathcal{O}}^{PD}$ (véase (6.2)), lo cual significa que la estabilidad de la órbita se preserva. Entonces, para valores impares de k , el controlador no modifica la bifurcación PD existente.

(ii) *Valores pares de k .* A partir de (6.10) y (6.11), el punto de bifurcación PD está dado por

$$D_y f(\widehat{y}; \mu_o) = -\frac{1 + \rho}{1 - \rho}. \quad (6.15)$$

De modo que ahora el nacimiento de la bifurcación depende de los valores de μ y ρ . De la Ec. (6.12) se puede obtener fácilmente $D_y f(\widehat{y}; \widetilde{\mu}) + (1 + \rho)/(1 - \rho) = -\gamma(\widetilde{\mu})\theta^2$, entonces la amplitud de las posibles oscilaciones es

$$\theta = \sqrt{\frac{D_y f(\widehat{y}; \widetilde{\mu}) + (1 + \rho)/(1 - \rho)}{-\gamma(\widetilde{\mu})}}, \quad (6.16)$$

y de la Ec. (6.13) el coeficiente de estabilidad se reduce a

$$\sigma_{par}^{PD} = \frac{(1 - \rho)}{(1 - k\rho)} \gamma(\mu_o). \quad (6.17)$$

Suponiendo que la bifurcación es no degenerada ($\sigma_{par}^{PD} \neq 0 \Leftrightarrow \gamma(\mu_o) \neq 0$) y considerando que $\gamma(\mu)$ es continua para $D_y f(\widehat{y}; \mu) \neq 1$, se puede asegurar que existe un entorno $B := \{\mu \in \mathbb{R} : 0 < |\mu - \mu_o| < \epsilon\}$ tal que $\text{signo}\{\gamma(\mu)\} = \text{signo}\{\gamma(\mu_o)\}$.

⁴Nótese que $\widetilde{\mu}$ es un valor genérico de μ diferente del valor crítico.

Ahora, supóngase que $k\rho < 1$. Si $\gamma(\mu_o) > 0$, para $\tilde{\mu} \in B$ y $\tilde{\mu} > \mu_o$ (lo cual implica $D_y f(\hat{y}; \tilde{\mu}) < -(1 + \rho)/(1 - \rho)$), la amplitud θ en (6.16) está bien definida, y el índice (6.17) indica una bifurcación supercrítica. Si $\gamma(\mu_o) < 0$, existe solución para $D_y f(\hat{y}; \tilde{\mu}) > -(1 + \rho)/(1 - \rho)$ ($\tilde{\mu} < \mu_o$) y (6.17) determina una bifurcación subcrítica. Si $k\rho > 1$, como se mostró en la Sección anterior, el punto fijo se inestabiliza para $\mu = \mu_o$ tal que $D_y f(\hat{y}; \mu_o) = 1/\tilde{\lambda}(e^{i\omega_o}) > -(1 + \rho)/(1 - \rho)$ con $\omega_o < \pi$. Dado que la bifurcación PD ocurre cuando \hat{y} ya es inestable, la órbita de período dos que emerge es también inestable. El análisis de la dirección de la bifurcación es análoga al caso $k\rho < 1$. ■

Nota: Es preciso mencionar que la elección trivial para incrementar la región de estabilidad del punto fijo sería $k = 0$ (correspondiente a un controlador no lineal sin retardo). En este caso, el punto fijo \hat{y} puede hacerse globalmente estable bajo ciertas condiciones en $f(\cdot)$ (véase Liz & Franco, 2010). Sin embargo, por limitaciones físicas, en la práctica podría ocurrir que la implementación del lazo de realimentación demore al menos una muestra. En estas aplicaciones, sería conveniente diseñar el controlador con retardos pares.

6.3.4. Bifurcaciones de Neimark-Sacker

En diferentes contribuciones se ha mostrado que la utilización de TDFC puede causar la aparición de nuevas dinámicas en el sistema, especialmente bifurcaciones de NS (de Souza Vieira & Lichtenberg, 1996; Buchner & Zebrowski, 2000; Wen et al., 2006). El siguiente desarrollo formaliza la aparición de esta bifurcación por medio de la técnica de la Sección 6.3.

Proposición 6.2 *Supongamos que k es par, $k\rho > 1$ y que existe un valor del parámetro μ_o tal que $D_x f(\hat{x}; \mu_o) = 1/\tilde{\lambda}(e^{i\omega_o})$ (con $-1 < \tilde{\lambda}(e^{i\omega_o}) < -(1 - \rho)/(1 + \rho)$). Más aún, supongamos que valen las siguientes condiciones*

$$(i) D_\mu [D_x f(\hat{x}; \mu)]|_{\mu=\mu_o} \neq 0;$$

(ii) $\sigma^{NS} \neq 0$, donde

$$\begin{aligned} \sigma^{NS} = & -\frac{(1-\rho)}{8} \Re \left\{ \frac{e^{i\omega_o k}}{e^{i\omega_o(k+1)} + k\rho} [D_x^3 f(\hat{x}; \mu_o) + (D_x^2 f(\hat{x}; \mu_o))^2 \right. \\ & \left. \times \left(\frac{2}{1 - D_x f(\hat{x}; \mu_o)} + \frac{(1-\rho)e^{i2\omega_o k}}{e^{i2\omega_o(k+1)} - (1-\rho)D_x f(\hat{x}; \mu_o)e^{i2\omega_o k} - \rho} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Entonces, el mapa (6.4) exhibe una bifurcación de Neimark-Sacker en un entorno de \hat{x} . \diamond

Demostración. En la Sección 6.3.2 se probó que la curva de $\tilde{\lambda}(e^{i\omega})$ interseca el semieje real negativo para la frecuencia $\omega_o < \pi$ si k es par y $k\rho > 1$. Entonces, la condición crítica para la aparición de bifurcaciones NS está dada por $D_x f(\hat{x}; \mu_o) = 1/\tilde{\lambda}(e^{i\omega_o})$. Puesto que $\tilde{\lambda}(\cdot)$ no depende de μ , la transversalidad de esta intersección se analiza considerando el comportamiento de $P(\mu) := 1/D_y f(\hat{y}; \mu)$. Como $y = x$, la derivada de $P(\mu)$ para $\mu = \mu_o$ se puede expresar como

$$D_\mu P(\mu)|_{\mu=\mu_o} = -\frac{D_\mu [D_x f(\hat{x}; \mu)]}{(D_x f(\hat{x}; \mu_o))^2} \Big|_{\mu=\mu_o} \neq 0. \quad (6.19)$$

Entonces, si $D_\mu [D_x f(\hat{x}; \mu)]|_{\mu=\mu_o} \neq 0$, se verifica la condición de transversalidad.

La estabilidad de la bifurcación está determinada por el índice σ^{NS} de la Tabla 6.2. Teniendo en cuenta los resultados de la Tabla 6.4, la expresión de este coeficiente resulta en (6.18). Como puede verse, las características de la órbita emergente dependerán de la combinación de todos los parámetros (μ , ρ y k). La suposición (ii) asegura que la bifurcación NS no es degenerada. \blacksquare

En la proposición anterior, la condición $D_y f(\hat{y}; \mu_o) = 1/\tilde{\lambda}(e^{i\omega_o})$ es equivalente a

$$e^{i\omega_o} - (1-\rho)D_y f(\hat{y}; \mu_o) - \rho e^{-i\omega_o k} = 0. \quad (6.20)$$

Por medio de manipulaciones algebraicas simples se obtiene la frecuencia crítica

$$\omega_o = \frac{1}{k+1} \arccos \left[\frac{1 + \rho^2 - (1-\rho)^2 D_y f(\hat{y}; \mu_o)^2}{2\rho} \right],$$

y resolviendo (6.20) para ρ y $D_y f(\hat{y}; \mu_o)$ como funciones de ω_o , se llega a

$$\rho = -\frac{\sin(\omega_o)}{\sin(\omega_o k)}, \quad D_y f(\hat{y}; \mu_o) = \frac{\sin(\omega_o(k+1))}{\sin(\omega_o k) + \sin(\omega_o)}.$$

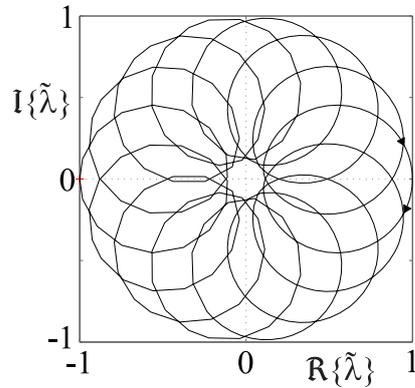


Figura 6.6: Diagrama de Nyquist para $k = 13$ y $\rho = 0.8$.

Dado que la relación de la derecha establece una dependencia entre μ y la frecuencia crítica ω_o , estas dos expresiones pueden utilizarse para obtener la curva de bifurcaciones NS en el espacio de parámetros (ρ, μ) .

Nota: También existen valores impares de k para los cuales (6.20) tiene solución. Estos casos no son relevantes desde el punto de vista de control pues el punto fijo ya es inestable cuando tiene lugar la bifurcación NS. La Fig. 6.6 ilustra este fenómeno para $k = 13$ y $\rho = 0.8$. Aunque existen múltiples cruces del semieje real negativo, el que se encuentra a la izquierda de todos es el que ocurre para $\omega = \pi$ y por lo tanto \hat{y} pierde la estabilidad por una bifurcación PD.

6.3.5. Interacción entre las bifurcaciones PD y NS

A partir de los resultados previos, se infiere que el sistema controlado puede exhibir bifurcaciones PD y NS para un mismo valor del retardo. Las dinámicas complejas observadas en las simulaciones de distintos ejemplos y las evidencias numéricas que se hallan en (de Souza Vieira & Lichtenberg, 1996; Chen et al., 1999; Buchner & Zebrowski, 2000; Fitchner et al., 2004) sugieren que dichas bifurcaciones pueden interactuar entre sí, dando lugar a una resonancia fuerte 1:2⁵. El MF provee condiciones

⁵Una resonancia fuerte ocurre cuando la frecuencia crítica ω_o de una bifurcación NS satisface $e^{is\omega_o} = 1$ para $s = 1, 2, 3$ ó 4 . En este caso, el escenario dinámico depende de la variación de más de un parámetro.

explícitas para la ocurrencia de esta singularidad. Una explicación completa de este fenómeno puede verse en (Kuznetsov, 2004).

Proposición 6.3 *El mapa (6.4) exhibe una resonancia fuerte 1:2 sólo si k es par y $k\rho = 1$. \diamond*

Demostración. De acuerdo con (D'Amico et al., 2004), las condiciones para detectar la ocurrencia de una resonancia fuerte 1:2 (o en forma equivalente, la existencia de una raíz doble en $z = e^{i\pi}$) en el dominio frecuencia son $\tilde{\lambda}(e^{i\pi}) = 1/D_y f(\hat{y}; \mu_o)$ y $D_z \tilde{\lambda}(e^{i\pi}) = 0$. A partir de (6.10), la primera condición está dada por

$$D_z \tilde{\lambda}(z)|_{z=e^{i\pi}} = (1 - \rho)(-1)^{k+1} \frac{k\rho + (-1)^{k+1}}{((-1)^{k+1} - \rho)^2} = 0.$$

Dado que $\rho \in (0, 1)$, existirá una resonancia 1:2 sólo si $k\rho + (-1)^{k+1} = 0$. Claramente, no existe solución para valores impares de k . Sin embargo, para retardos pares, es posible elegir un par (k, ρ) tal que $k\rho = 1$. ■

Nota: El mapa controlado puede tener una resonancia 1:2 independientemente de su no linealidad considerando un valor par de k mayor que cero y haciendo $\rho = 1/k$. Para el caso ideal ($k = 0$), la bifurcación PD del mapa original se puede modificar (Proposición 6.1) sin crear una resonancia 1:2. Sin embargo, como se puntualizó previamente, el controlador resultante podría no ser realizable en la práctica debido a limitaciones físicas.

6.4. Ejemplos

6.4.1. Mapa Logístico

En esta sección, se estudia el comportamiento dinámico del mapa logístico $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$ con control retrasado. Los resultados analíticos que aquí se obtienen

Tabla 6.5: Condiciones para la existencia de bifurcaciones PD, NS y la resonancia $R_{1:2}$ en el mapa logístico controlado.

	punto crítico	índice de estabilidad
PD	$\mu = 3$ si k es impar	$\sigma_{imp}^{PD} = 9(1 - \rho)/(1 + k\rho)$ si k es impar
	$\mu = \frac{3-\rho}{1-\rho}$ si k es par	$\sigma_{par}^{PD} = (3 - \rho)^2/(1 - k\rho)$ si k es par
$R_{1:2}$	$k\rho = 1$ si k es par	
NS	$\rho = -\sin(\omega_o)/\sin(\omega_o k)$	$\sigma^{NS} = -(1 - \rho)\mu^2/2 \times \Re\{\gamma(\omega_o)/\alpha(\omega_o)\},$
	$\mu = 2 - \frac{\sin(\omega_o(k+1))}{\sin(\omega_o k) + \sin(\omega_o)}$	$\gamma(\omega_o) = 2e^{i\omega_o k}/(\mu - 1) + (1 - \rho)e^{i3\omega_o k}/\beta(\omega_o)$
		$\alpha(\omega_o) = e^{i\omega_o(k+1)} + k\rho,$
		$\beta(\omega_o) = e^{i2\omega_o(k+1)} - \rho$ $- (1 - \rho)(2 - \mu)e^{i2\omega_o k}.$

formalizan y generalizan el estudio numérico presentado en (Buchner & Zebrowski, 2000) para algunos valores específicos de k .

Es conocido que el mapa logístico tiene un punto fijo no trivial $\hat{x} = 1 - \mu^{-1}$ con $\mu > 1$, el cual es estable para $\mu < 3$ e inestable para $\mu \geq 3$. Más aún, para $\mu = 3$ dicho punto fijo sufre una bifurcación PD supercrítica ($\sigma_O^{PD} = 9$). El objetivo de este ejemplo es analizar la efectividad del control *echo-type* (6.4) para intentar desplazar las oscilaciones de doble período hacia valores mayores de μ y por lo tanto extender el rango de estabilidad de \hat{x} . Entonces, el sistema controlado resulta

$$x_{n+1} = (1 - \rho)\mu x_n(1 - x_n) + \rho x_{n-k}.$$

Aplicando las Proposiciones 6.1, 6.2 y 6.3 y considerando que $D_x f(\hat{x}; \mu) = 2 - \mu$, $D_x^2 f(\hat{x}; \mu) = -2\mu$ y $D_x^3 f(\hat{x}; \mu) = 0$, las expresiones de las curvas críticas y los índices de estabilidad resultantes se resumen en la Tabla 6.5. Como se esperaba, el rango de estabilidad de \hat{x} se preserva si el control se implementa con un número impar de muestras retrasadas. Sin embargo, el punto de bifurcación PD puede moverse a valores mayores de μ si k es par. El índice σ_{par}^{PD} es positivo si $k\rho < 1$ y negativo si $k\rho > 1$, por lo cual la estabilidad de la oscilación de período dos puede cambiar de acuerdo a la combinación de ρ y k . La condición $k\rho = 1$ con k par corresponde a la resonancia 1:2, donde interaccionan entre sí las bifurcaciones PD y NS. La Fig. 6.7 muestra las curvas de PD y NS en el espacio de parámetros (ρ, μ) para $k = 2$. Como

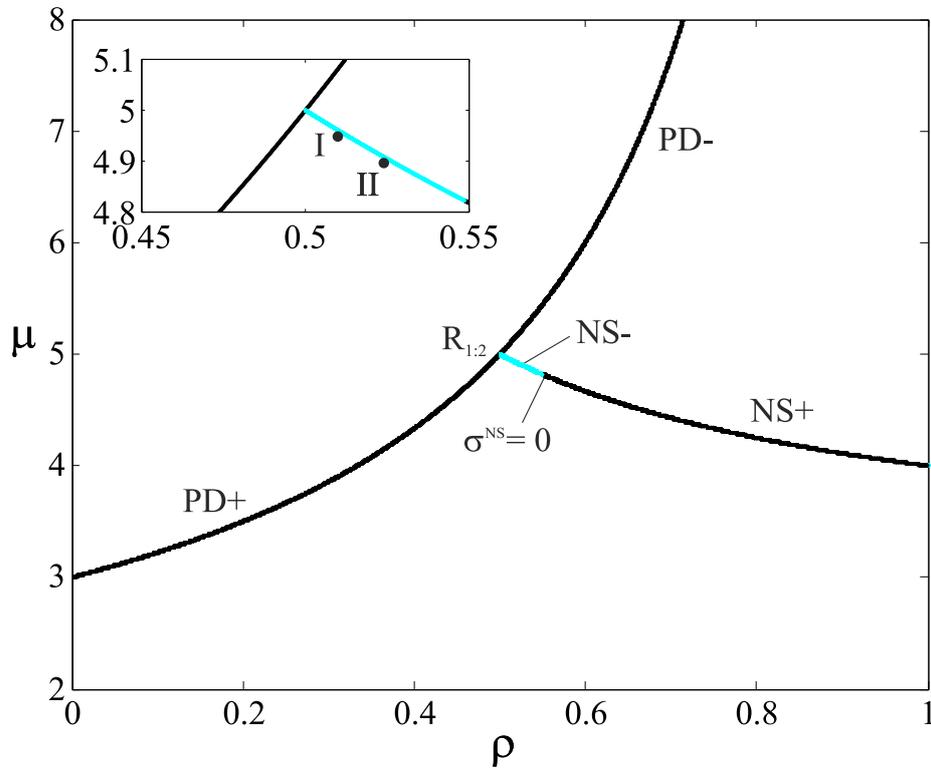


Figura 6.7: Diagrama de bifurcaciones en dos parámetros para $k = 2$. PD: bifurcaciones de doble período supercríticas (+) y subcríticas (-). NS: bifurcaciones de Neimark-Sacker supercríticas (+, trazo oscuro) y subcríticas (-, trazo claro). El detalle muestra los puntos utilizados para las simulaciones numéricas que se muestran en la Fig. 6.8.

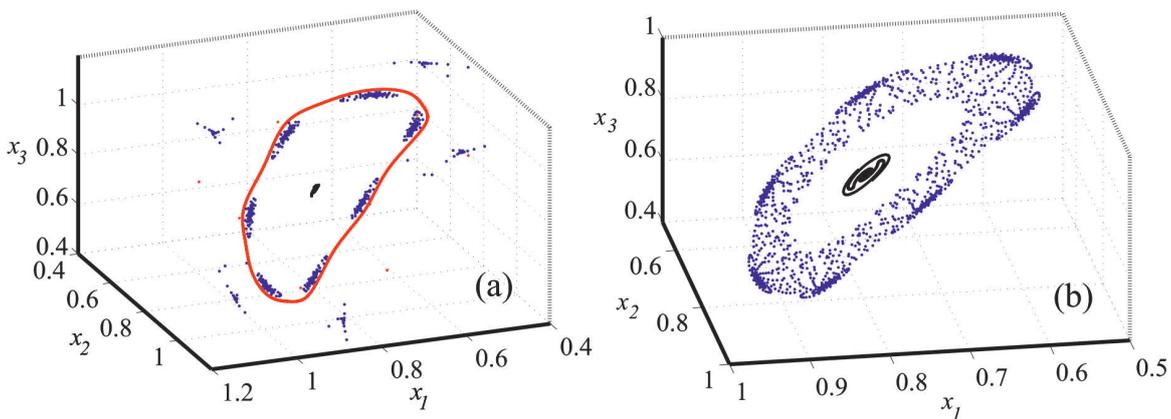


Figura 6.8: Múltiples atractores rodeando el punto fijo estable. (a) $\rho = 0.51$ y $\mu = 4.95$ (Punto I, Fig. 6.7); (b) $\rho = 0.525$ y $\mu = 4.9$ (Punto II, Fig. 6.7).

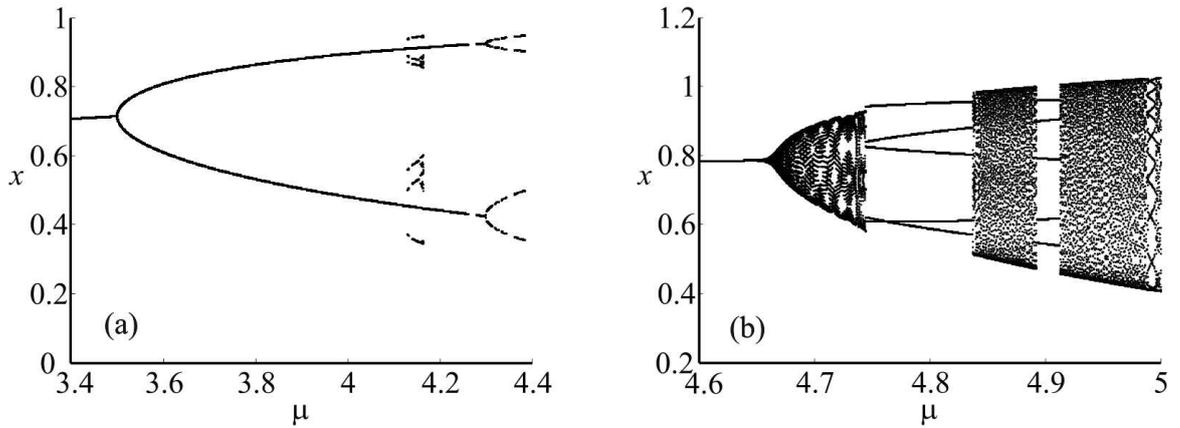


Figura 6.9: Diagramas de bifurcación para $k = 2$. (a) $\rho = 0.2$; (b) $\rho = 0.6$.

puede observarse, el rango de μ para el cual el punto fijo es estable se incrementa comparado con el del mapa original; por ejemplo, el punto fijo pierde su estabilidad para $\mu = 3$ si $\rho = 0$ (sin control) mientras que este fenómeno ocurre para $\mu = 3.5$ si $\rho = 0.2$. El rango de estabilidad puede incrementarse aún más si ρ es mayor. Sin embargo, el escenario dinámico en un entorno de \hat{x} se volverá más complejo a medida que ρ se acerque al punto de resonancia 1:2 (indicado como $R_{1:2}$).

En este ejemplo, la bifurcación NS presenta una singularidad de Chenciner cerca de la resonancia $R_{1:2}$. Este punto está caracterizado por la condición $\sigma^{NS} = 0$ y significa que existe la posibilidad de encontrar múltiples órbitas alrededor del punto fijo (Kuznetsov, 2004; D'Amico et al., 2004). Esta singularidad está ubicada en $(\rho_{Ch}, \mu_{Ch}) \simeq (0.549, 4.823)$ para $k = 2$. La coexistencia del punto fijo estable con diferentes órbitas invariantes (estables e inestables) para $\mu < \mu_o$ y $\rho > 1/2$ se muestra en la Fig. 6.8. En ambos casos, la aparición de órbitas inestables rodeando \hat{x} alerta acerca de un hecho interesante. Aunque la región de estabilidad se incrementa, la cuenca de atracción de \hat{x} se *reduce*. Por completitud, en la Fig. 6.9 se muestran los diagramas de bifurcación para $k = 2$ y diferentes valores de ρ . Para $\rho = 0.2$, el punto fijo pierde su estabilidad cuando emerge una órbita estable de período dos alrededor del mismo (Fig. 6.9(a)). Sin embargo, una bifurcación NS provoca la inestabilidad del punto fijo para $\rho = 0.6$ (Fig. 6.9(b)). El primer valor de ρ parece estar suficientemente alejado de la región donde se encuentran tanto la resonancia como el punto de Chenciner

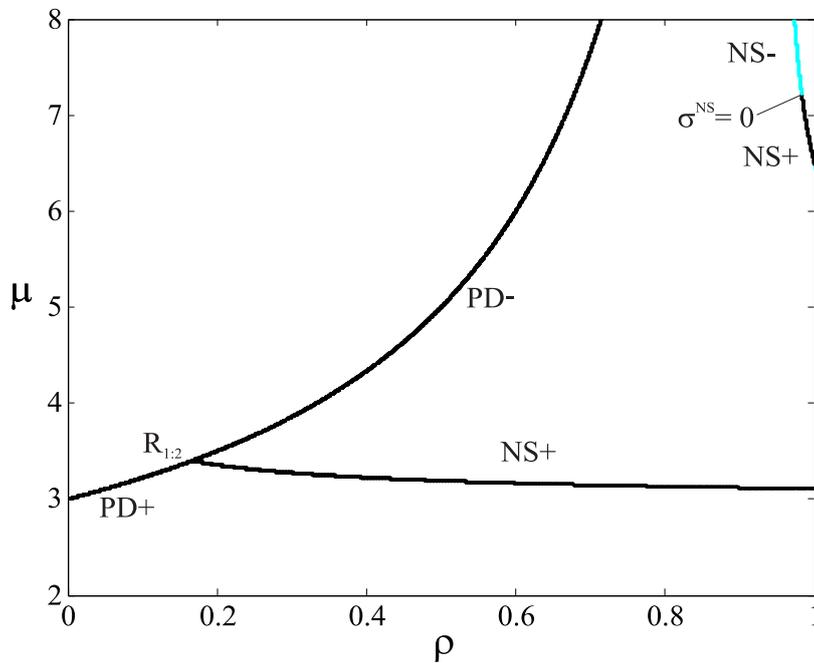


Figura 6.10: Diagrama de bifurcación en dos parámetros para $k = 6$. PD: doble período supercrítico (+) y subcrítico (-). NS: Neimark-Sacker supercrítico (+, trazo oscuro) y subcrítico (-, trazo claro). El signo de σ^{NS} para la porción de la curva de NS en la esquina superior derecha indica sólo la dirección de la bifurcación, pues el punto fijo es inestable.

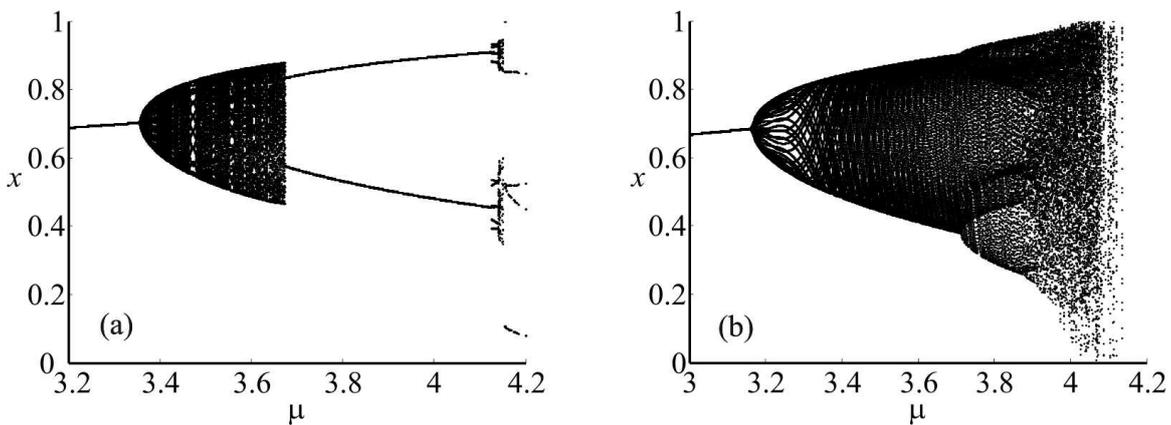


Figura 6.11: Diagramas de bifurcación para $k = 6$. (a) $\rho = 0.2$; (b) $\rho = 0.6$.

puesto que el punto fijo es el único atractor para $\mu < \mu_0$. En vista de las condiciones críticas expresadas en la Tabla 6.5, el mayor rango de estabilidad de \hat{x} se obtiene considerando el número mínimo de retardos pares en la ley de control ($k = 2$). Cuando k aumenta, el punto de resonancia 1:2 se mueve sobre la curva de PD hacia valores menores de ρ ($\rho = 1/k$), y el rango de valores de μ para el cual el punto fijo es estable se ve reducido. Como ejemplo, la Fig. 6.10 muestra el diagrama de bifurcación en el espacio (ρ, μ) para $k = 6$. En este caso, el máximo rango de estabilidad se reduce a $\mu = 3.4$ donde aparece la resonancia 1:2, en contraste con el valor correspondiente para $k = 2$ ($\mu = 5$). Sin embargo, se puede deducir que $\sigma^{NS} > 0$ sobre la curva de NS para $\mu < 3.4$, lo cual indica que las órbitas invariantes sólo aparecen si \hat{x} es inestable (bifurcación NS supercrítica). Por lo tanto, la cuenca de atracción del punto fijo no se ve afectada por el controlador. Los diagramas de bifurcación de la Fig. 6.11 muestran que el escenario dinámico completo puede cambiar comparado con el que se genera para $k = 2$. En el caso particular de $\rho = 0.2$, el punto fijo pierde su estabilidad para $\mu_o \simeq 3.357$ debido a una bifurcación NS (véase la Fig. 6.11(a)). La órbita invariante que emerge se vuelve inestable para $\mu \geq 3.674$ y se observa una órbita estable de período dos. El mismo fenómeno se describió en (Buchner & Zebrowski, 2000) para $k = 12$ y $\rho = 0.1$ pero la condición para la existencia de la bifurcación NS se halló en forma numérica.

Finalmente, la Fig. 6.12 resume las curvas críticas en el plano (ρ, μ) para diferentes valores impares de k . Como se mostró anteriormente, no existe la resonancia 1:2 conectando las curvas PD y NS. Más aún, el escenario dinámico cambia sólo cuando \hat{x} se vuelve inestable, como se muestra en la Fig. 6.13.

6.4.2. Modelo discreto de población

El siguiente mapa corresponde al modelo discreto de población estudiado por Peng (2005):

$$x_{n+1} = f(x_n; b) = \frac{x_n}{1 - bx_n + x_n^2},$$

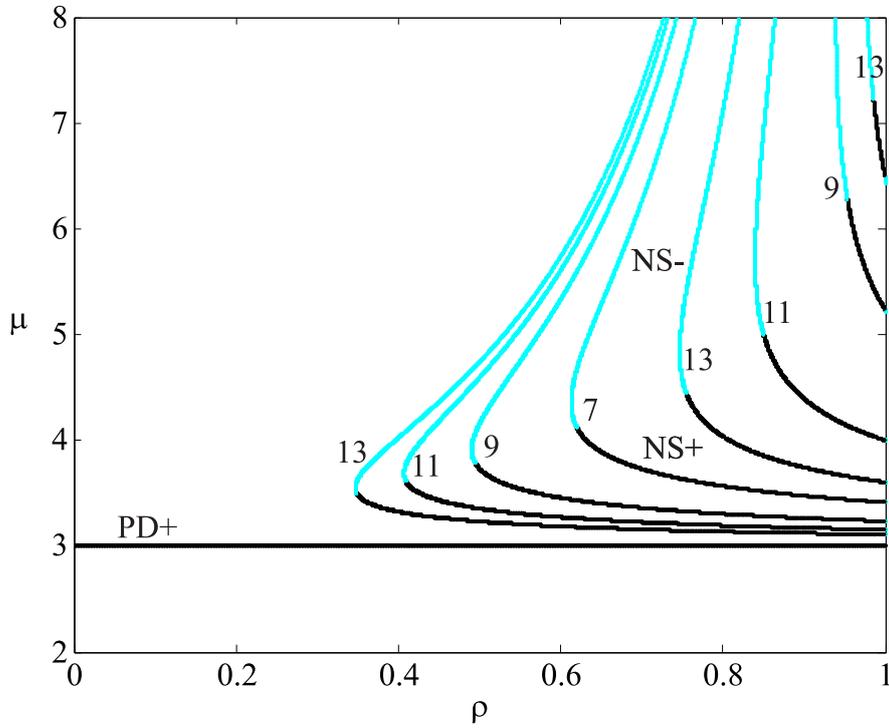


Figura 6.12: Diagramas de bifurcación en dos parámetros para distintos valores impares de k (indicados en las curvas). La distinción entre bifurcaciones NS subcríticas y supercríticas debe entenderse sólo en el sentido de la dirección de nacimiento de los ciclos, pues el equilibrio ya es inestable (debido a la bifurcación PD).

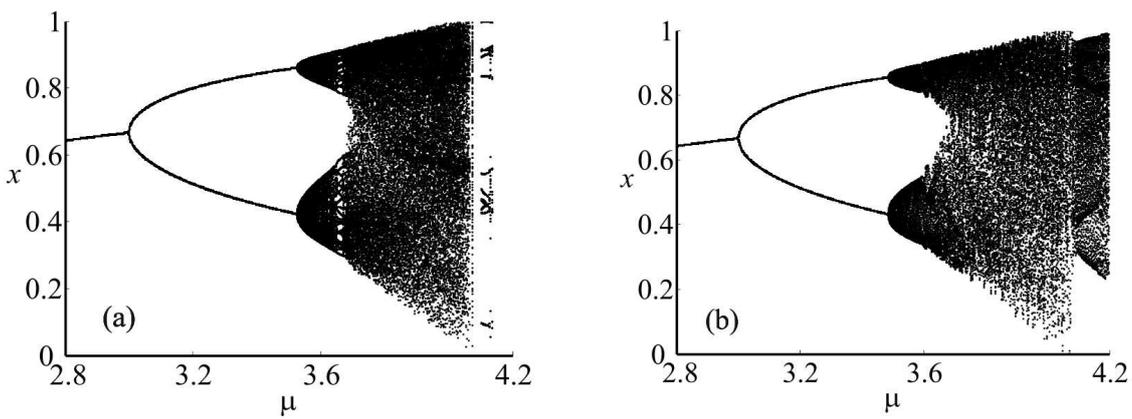


Figura 6.13: Diagramas de bifurcación para $k = 9$. (a) $\rho = 0.2$; (b) $\rho = 0.6$.

donde x_n representa la densidad de población en el año n y $b > 0$ es una constante. Este modelo tiene en cuenta cómo influye la competencia entre individuos cuando se alcanzan altas densidades de población ⁶. El sistema tiene un punto fijo en el origen y otro punto fijo no trivial $\hat{x} = b$. Este último sufre una bifurcación PD para $b = \sqrt{2}$ y la órbita de período dos que existe para $b > \sqrt{2}$ es estable ($\sigma_{\mathcal{O}}^{PD} = 1$). Aplicando a este mapa la realimentación por retardo indicada en la Ec. (6.3), se obtiene

$$x_{n+1} = (1 - \rho) \frac{x_n}{1 - bx_n + x_n^2} + \rho x_{n-k}.$$

Por otra parte, las derivadas de la función $f(x_n; b)$ están dadas por

$$\begin{aligned} D_x f(\hat{x}; b) &= 1 - b^2, \\ D_x^2 f(\hat{x}; b) &= 2b(b^2 - 2), \\ D_x^3 f(\hat{x}; b) &= 6(-b^4 + 3b^2 - 1). \end{aligned}$$

Como se ha determinado previamente, para k impar la bifurcación PD se mantiene en $b = \sqrt{2}$ y la misma genera una órbita de período dos estable. Si k es par, a partir de (6.15) se deduce que el nacimiento de dicha bifurcación se desplaza hacia valores mayores del parámetro; esto es, $b = \sqrt{2}/\sqrt{1-\rho}$. Además, el índice de estabilidad resulta

$$\sigma_{par}^{PD} = \frac{7\rho^2 - 4\rho + 1}{(1 - k\rho)(1 - \rho)}.$$

Como $0 < \rho < 1$ el numerador es positivo, por lo tanto la bifurcación es *supercrítica* si $k\rho < 1$ y *subcrítica* si $k\rho > 1$. A partir de (6.21) y fijando $k = 2$ se obtiene la curva de NS en el espacio de parámetros (ρ, b) que se muestra en la Fig. 6.14. La estabilidad de las órbitas que nacen de esta bifurcación se determina por medio de la Ec. (6.18). Las Figs. 6.15 a 6.19 ilustran el comportamiento que presenta el sistema para distintas combinaciones de ρ y b cercanas a las curvas de PD y NS de la Fig. 6.14. En la Fig. 6.15 se observa la órbita de período dos estable generada a partir de la bifurcación PD supercrítica (el punto fijo es inestable). En las Figs. 6.16 y 6.17 se ilustra la interacción del punto fijo con una órbita inestable que nace de la bifurcación

⁶Este ejemplo se ha estudiado en: Gentile, F., Bel A., D'Amico M. B. y Moiola J. "Efecto de un controlador lineal por retardos sobre la dinámica de un mapa escalar", presentado en el XXII Congreso Argentino de Control Automático (AADECA), 31 de agosto al 1 de septiembre de 2010, Buenos Aires.

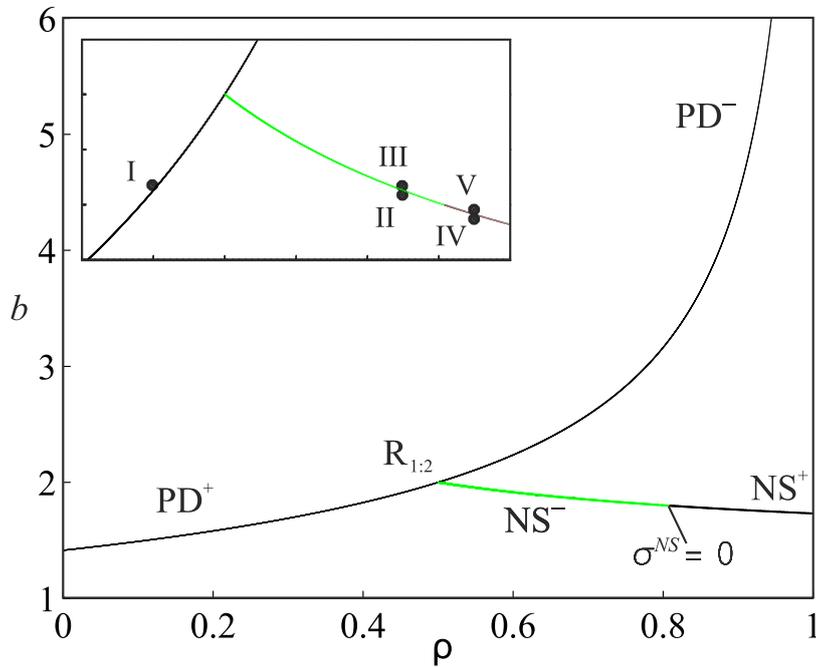


Figura 6.14: Diagrama de bifurcaciones en dos parámetros para el modelo poblacional. PD: doble período supercrítico (+) y subcrítico (-). NS: Neimark-Sacker supercrítica (+, rojo) y subcrítica (-, verde). La ampliación muestra los puntos de simulaciones (Ver Figs. 4-8).

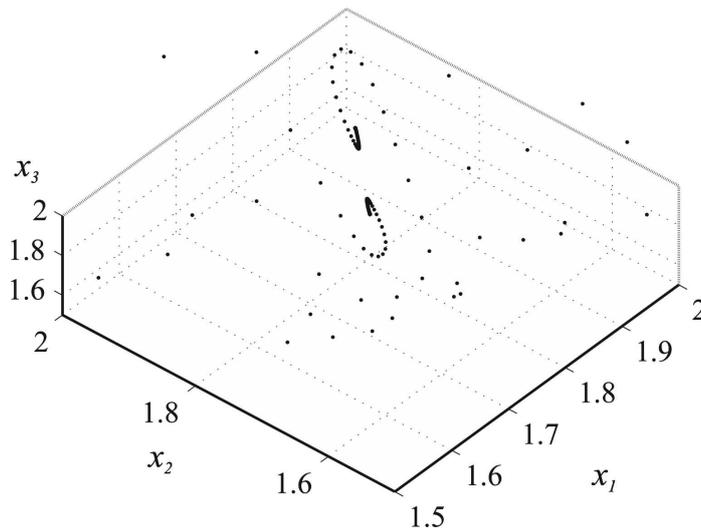


Figura 6.15: Órbita de período 2 estable para $\rho = 0.4$ y $b = 1.828$ (Punto I).

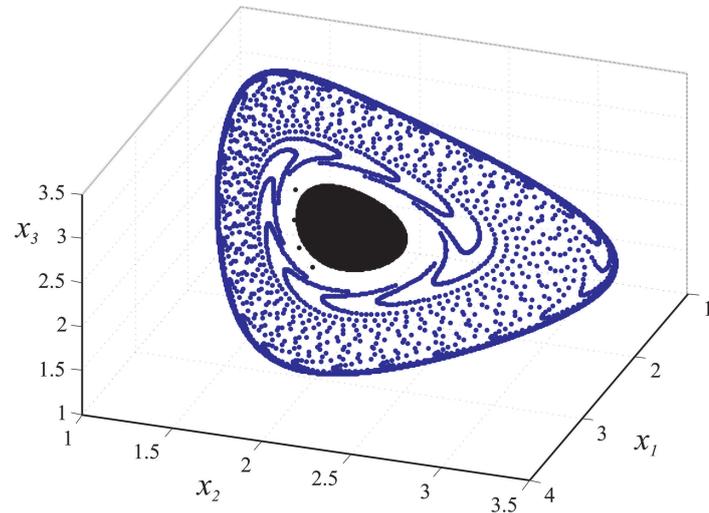


Figura 6.16: Interacción local de una órbita inestable con el punto fijo estable. (Azul) Órbita estable exterior, para $\rho = 0.75$ y $b = 1.823$ (Punto II).

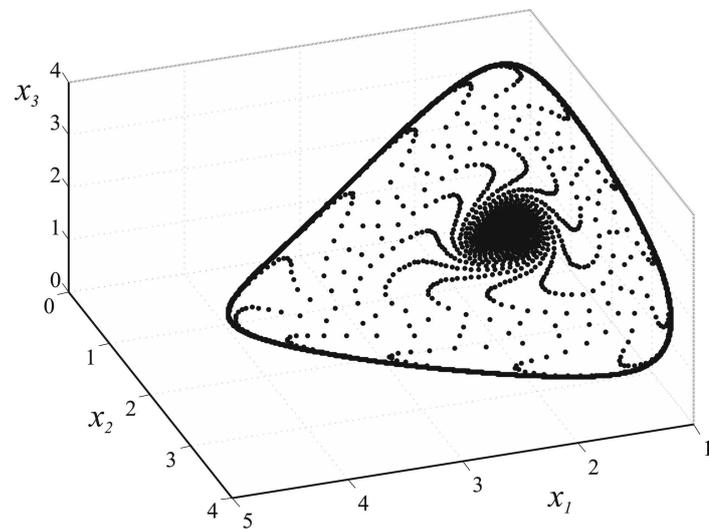


Figura 6.17: La órbita inestable de la Fig. 6.16 se ha cerrado sobre el punto fijo, el cual es ahora inestable ($\rho = 0.75, b = 1.84$). Se observa una órbita estable exterior (Punto III).

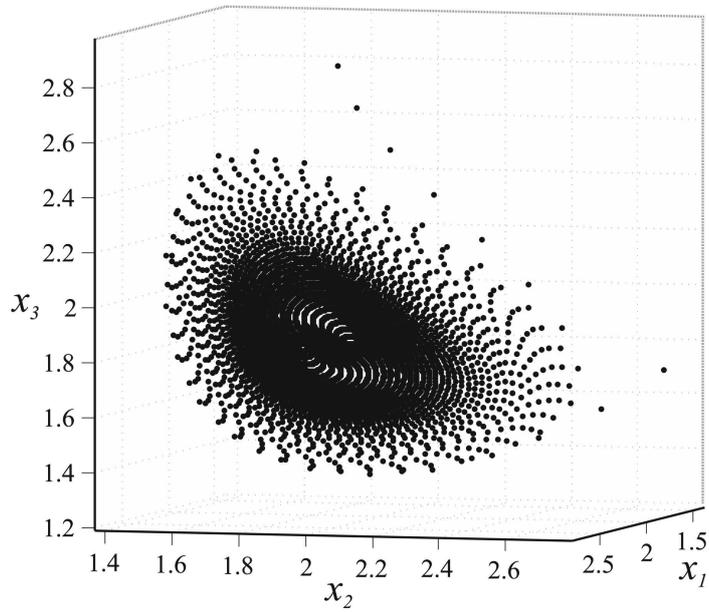


Figura 6.18: (Punto IV) $\rho = 0.85, b = 1.78$. En este caso el punto fijo es estable, y se observa que la solución converge hacia este punto.

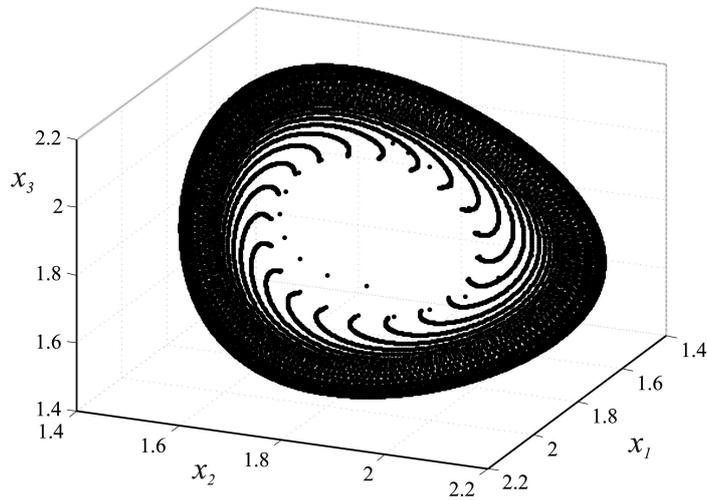


Figura 6.19: (Punto V) $\rho = 0.85, b = 1.785$. El punto fijo ha perdido su estabilidad, y existe una órbita periódica estable alrededor del mismo.

de NS subcrítica. En primera instancia el punto fijo estable se halla rodeado por dicha órbita (Fig. 6.16); luego, ésta colapsa con el punto fijo, y como resultado este último se vuelve inestable (Fig. 6.17). La presencia de esta órbita inestable advierte un hecho importante: si bien la región en el espacio de parámetros donde el punto fijo es estable se ha incrementado, el dominio de atracción del mismo se ve reducido, pues aparecen otras soluciones que no existían en el sistema original, como ocurría con el mapa logístico. Tanto en la Fig. 6.16 como en la 6.17 se aprecia la existencia de una órbita estable de gran amplitud, que no interacciona con la bifurcación NS. Finalmente, las Figs. 6.18 y 6.19 muestran cómo el punto fijo pierde la estabilidad y nace una órbita estable que lo rodea, mediante el mecanismo de bifurcación de NS supercrítica.

6.5. Mapa de Hénon generalizado

El mapa de Hénon (Hénon, 1976) fue uno de los primeros ejemplos de mapas caóticos simples, y por ello es uno de los más estudiados en la literatura. El mismo está definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} u_{1,n+1} = 1 - \tilde{a}u_{1,n}^2 + u_{2,n} \\ u_{2,n+1} = \tilde{b}u_{1,n}, \end{cases}$$

donde $\tilde{a}, \tilde{b} > 0$ y $u_i \in \mathbb{R}$. Como se muestra en (Richter, 2002), mediante un cambio de variables se obtiene el mapa de Hénon modificado (al que haremos referencia como mapa 2D)

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = a - x_{1,n}^2 - bx_{2,n} \\ x_{2,n+1} = x_{1,n}. \end{cases}$$

Este sistema puede escribirse en forma alternativa como una ecuación a diferencias de segundo orden como

$$x_{n+1} = a - x_n^2 - bx_{n-1}, \quad (6.21)$$

y el cálculo de la solución en forma recursiva se ilustra en la Fig. 6.20(a). Añadiendo un retardo de $k-1$ muestras como se observa en la Fig. 6.20(b), se obtiene el denominado

mapa de Hénon *generalizado*

$$x_{n+1} = a - x_{n-k+1}^2 - bx_{n-k}. \tag{6.22}$$

Definiendo las variables de estado

$$\begin{aligned} x_{1,n} &:= x_n, \\ x_{2,n} &:= x_{n-1}, \\ &\vdots \\ x_{k+1,n} &:= x_{n-k}, \end{aligned} \tag{6.23}$$

la ecuación (6.22) se puede reescribir como el siguiente sistema de $k + 1$ ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = a - x_{k,n}^2 - bx_{k+1,n} \\ x_{i,n+1} = x_{i-1,n}, \end{cases} \tag{6.24}$$

donde $i = 2, 3, \dots, k + 1$. Los puntos fijos de este mapa resultan

$$\hat{\mathbf{x}}^{(1,2)} = \hat{x}^{(1,2)} \underbrace{(1 \ 1 \ \dots \ 1)^T}_{k+1 \text{ componentes}}$$

donde $\hat{x}^{(1,2)} \in \mathbb{R}$ están dados por

$$\hat{x}^{(1,2)} = \frac{1}{2} \left(-(1+b) \pm \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right). \tag{6.25}$$

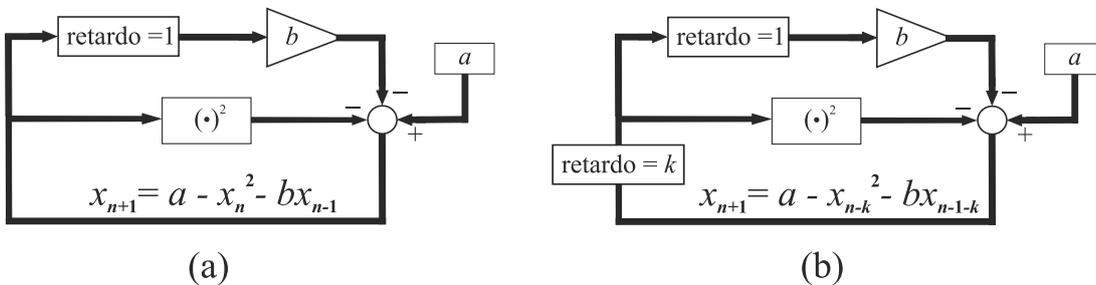


Figura 6.20: (a) Esquema representativo del mapa de Hénon 2D dado por (6.21). (b) Mediante el agregado de un retardo de $k - 1$ muestras, se obtiene el mapa de Hénon generalizado.

La estabilidad de los puntos fijos está determinada por los autovalores de la matriz Jacobiana

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -2\hat{x} & -b \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1) \times (k+1)},$$

y el polinomio característico correspondiente es

$$h(z) = \det(zI - A) = z^{k+1} + 2\hat{x}z + b.$$

La estabilidad de los puntos fijos dados por (6.25) ha sido estudiada por Richter (2002) mediante el test de Jury (Phillips & Nagle, 1990). En el trabajo citado, se han obtenido en forma cerrada los valores críticos de los parámetros a y b que determinan la estabilidad marginal de dichos puntos fijos para $1 \leq k \leq 3$. Además, para valores de k mayores a 3, se han presentado resultados numéricos ⁷.

6.5.1. Análisis en el dominio frecuencia

Si en lugar de elegir las variables de estado como en (6.26), se toman

$$\begin{aligned} x_{1,n} &:= x_n, \\ x_{2,n} &:= x_{n-k}, \\ x_{3,n} &:= x_{n-k+1}, \\ &\vdots \\ x_{k+1,n} &:= x_{n-1}, \end{aligned} \tag{6.26}$$

entonces la ecuación a diferencias (6.22) se puede escribir como

$$\begin{cases} x_{1,n+1} &= a - x_{3,n}^2 - bx_{2,n} \\ x_{2,n+1} &= x_{3,n} \\ \vdots & \\ x_{k+1,n+1} &= x_{1,n}. \end{cases} \tag{6.27}$$

⁷En el trabajo citado el orden del sistema se define como k en lugar de $k + 1$.

Nótese la similitud de este mapa con los estudiados en los ejemplos anteriores. Para aplicar el método en frecuencia al sistema (6.27) se eligen las matrices $A \in \mathbb{R}^{(k+1) \times (k+1)}$, $B \in \mathbb{R}^{(k+1) \times 1}$ y $C \in \mathbb{R}^{1 \times (k+1)}$ dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad 0 \quad 1 \quad \dots \quad 0).$$

Entonces, la función de transferencia y la realimentación no lineal resultan

$$G(z; \mu) = C(zI - A)^{-1}B = \frac{z}{z^{k+1} + b}, \quad (6.28)$$

$$g(y_n; \mu) = -(a - y_n^2), \quad (6.29)$$

donde $y_n = x_{3,n}$ y μ representa el vector de parámetros del mapa. La linealización de $g(\cdot)$ alrededor de cada punto fijo está dada por

$$J(\mu) = \left. \frac{\partial g(y_n; \mu)}{\partial y_n} \right|_{y_n = \hat{y}} = 2\hat{y}.$$

Por lo tanto, se tiene una única función característica en el dominio de la frecuencia que es

$$\lambda(z; \mu) = G(z; \mu)J(\mu) = \frac{z}{z^{k+1} + b} 2\hat{y}. \quad (6.30)$$

6.5.2. Estabilidad de los puntos fijos y bifurcaciones

Con la intención de utilizar el criterio de estabilidad de Nyquist, es necesario conocer la ubicación de los polos de $\lambda(z; \mu)$, los cuales coinciden con los polos de $G(z; \mu)$ y están dados por

$$z_r = \sqrt[k+1]{b} e^{i\pi(1+2r)/(k+1)}, \quad r = 0, 1, \dots, k.$$

Luego, si b es menor que la unidad, dichos polos se hallan en el interior del círculo unitario. Entonces, por simplicidad, en adelante se considerará $b < 1$.

Haciendo $z = e^{i\omega}$ en (6.28) se obtiene

$$G(e^{i\omega}; \mu) = \frac{e^{i\omega}}{e^{i\omega(k+1)} + b}, \quad (6.31)$$

y es posible estudiar la estabilidad de los puntos fijos contando el número de veces que la curva de $G(e^{i\omega}; \mu)$ encierra al punto crítico $-1/J(\mu)$. Nótese que $|G(e^{i\omega}; \mu)| = 1/|e^{i\omega(k+1)} + b|$, de donde se deduce que

$$\frac{1}{1+b} \leq |G(e^{i\omega}; \mu)| \leq \frac{1}{1-b} \quad (b < 1),$$

y por lo tanto la curva de $G(e^{i\omega}; \mu)$ se halla contenida en una región anular de radio interno $1/(1+b)$ y radio externo $1/(1-b)$. Además, $|G(e^{i\omega}; \mu)|$ puede escribirse como

$$|G(e^{i\omega}; \mu)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2b \cos[\omega(k+1)] + b^2}},$$

que alcanza el valor máximo, $1/(1-b)$, cuando $\cos[\omega(k+1)] = -1$, y por lo tanto existen $k+1$ máximos para las frecuencias

$$\bar{\omega}_m = \frac{1+2m}{(k+1)}\pi, \quad m = 0, 1, \dots, k.$$

En forma análoga, el valor mínimo, $1/(1+b)$, ocurre cuando $\cos[\omega(k+1)] = 1$, que se obtiene para los $k+1$ valores de ω dados por

$$\underline{\omega}_m = \frac{2m}{(k+1)}\pi, \quad m = 0, 1, \dots, k.$$

En la Fig. 6.21 se muestra el módulo de $G(e^{i\omega}; \mu)$ para $k = 1, 2$ y 3 . Por otra parte, en la Fig. 6.22 pueden observarse algunos diagramas de Nyquist, para $b = 0.1$ y distintos valores de k . Nótese que para cada valor de k el número de intersecciones del contorno con el semieje real negativo es exactamente k . La Fig. 6.23 muestra algunos diagramas de Nyquist para $b = 0.6$. Teniendo en cuenta el punto fijo $\hat{y}^{(1)} > 0$, para $k = 1$ la única bifurcación posible es la de doble período (nótese que para este punto fijo se tiene $-1/J(\mu) = -1/(2\hat{y}^{(1)}) < 0$). Además, $G(e^{i\omega}; \mu)$ se puede escribir como

$$G(e^{i\omega}; \mu) = \frac{be^{i\omega} + e^{-i\omega k}}{b^2 + 2b \cos[\omega(k+1)] + 1},$$

de donde

$$\Im \{G(e^{i\omega}; \mu)\} = 0 \Leftrightarrow b \sin \omega - \sin(\omega k) = 0.$$

Entonces, para $k = 1$ la ecuación anterior resulta $(b-1) \sin \omega = 0$ de donde $b = 1$ ó $\omega = \ell\pi$, $\ell \in \mathbb{Z}$. Como $b < 1$, y considerando $0 \leq \omega \leq 2\pi$, las intersecciones con el eje real se obtienen para $\omega = 0$ y $\omega = \pi$. Para $\omega = 0$, resulta $G(e^{i0}; \mu) = 1/(1+b)$ y para

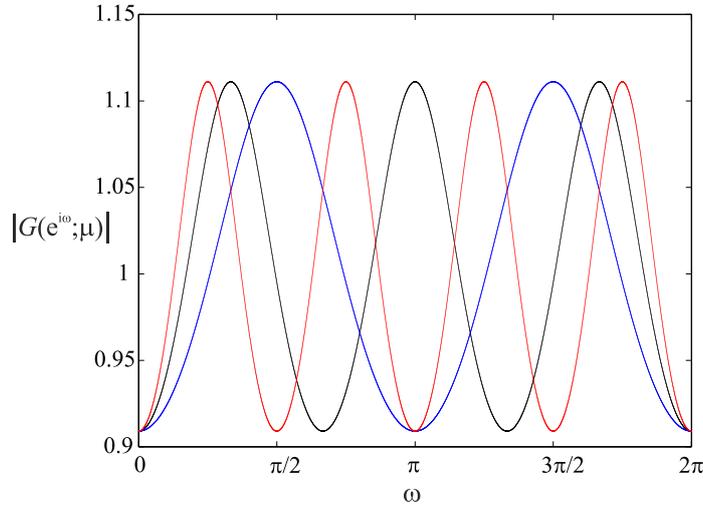


Figura 6.21: Módulo de $G(e^{i\omega}; \mu)$ para $b = 0.1$ y $k = 1$ (azul), $k = 2$ (negro) y $k = 3$ (rojo).

$\omega = \pi$ se tiene $G(e^{i\pi}; \mu) = -1/(1+b)$, y por lo tanto, como puede verse en la Fig. 6.21, estos valores de ω corresponden a mínimos de $|G(e^{i\omega}; \mu)|$. Consecuentemente, para $k = 1$ las condiciones de estabilidad son

$$-\frac{1}{J(\mu)} < -\frac{1}{1+b}, \quad -\frac{1}{J(\mu)} > \frac{1}{1+b},$$

de las cuales puede deducirse que el punto fijo será estable si

$$-\frac{1+b}{2} < \hat{y}^{(1)} < \frac{1+b}{2}.$$

Sin embargo, como $\hat{y}^{(1)} > 0$, este punto sólo puede exhibir una bifurcación PD cuando

$$-1/J(\mu) = -1/(1+b), \quad (6.32)$$

que corresponde a $\hat{y}^{(1)} = (1+b)/2$. Entonces, a partir de (6.25) se obtiene el valor crítico del parámetro a como

$$a_{PD} = \frac{3}{4}(1+b)^2. \quad (6.33)$$

Nótese que para valores impares de k , se verifica que $G(e^{i\pi}; \mu) = -1/(b+1)$, y por lo tanto la condición de PD dada por (6.32) y (6.33) vale para todo k impar. Para $k > 1$, si el punto fijo pierde la estabilidad, lo hace debido a una bifurcación de Neimark-Sacker. A partir de la condición de bifurcación

$$G(e^{i\omega}; \mu) = \frac{e^{i\omega}}{e^{i\omega(k+1)} + b} = -\frac{1}{J(\mu)},$$

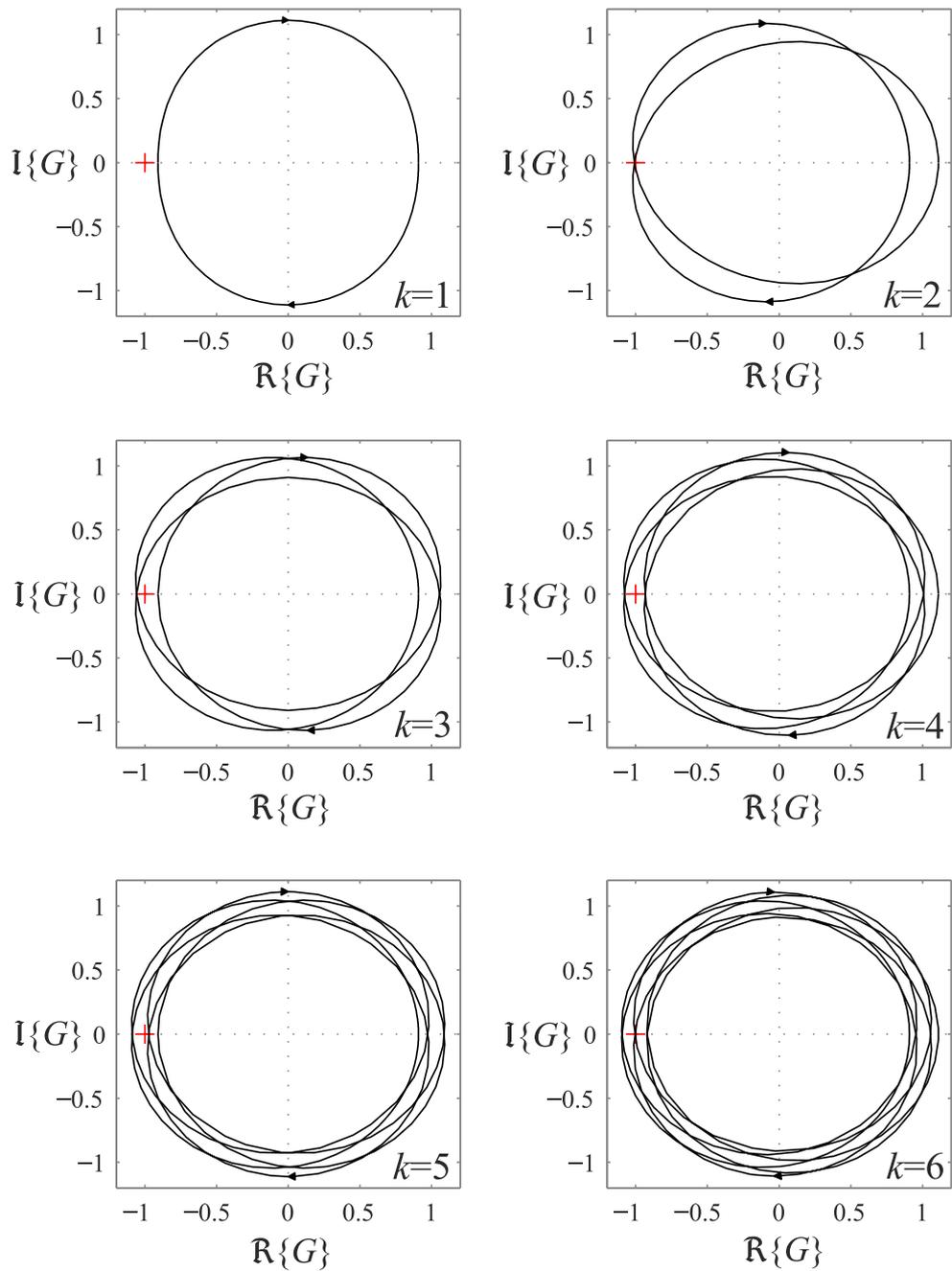


Figura 6.22: Diagramas de Nyquist de $G(e^{i\omega}; \mu)$ para $b = 0.1$ y $k = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 .

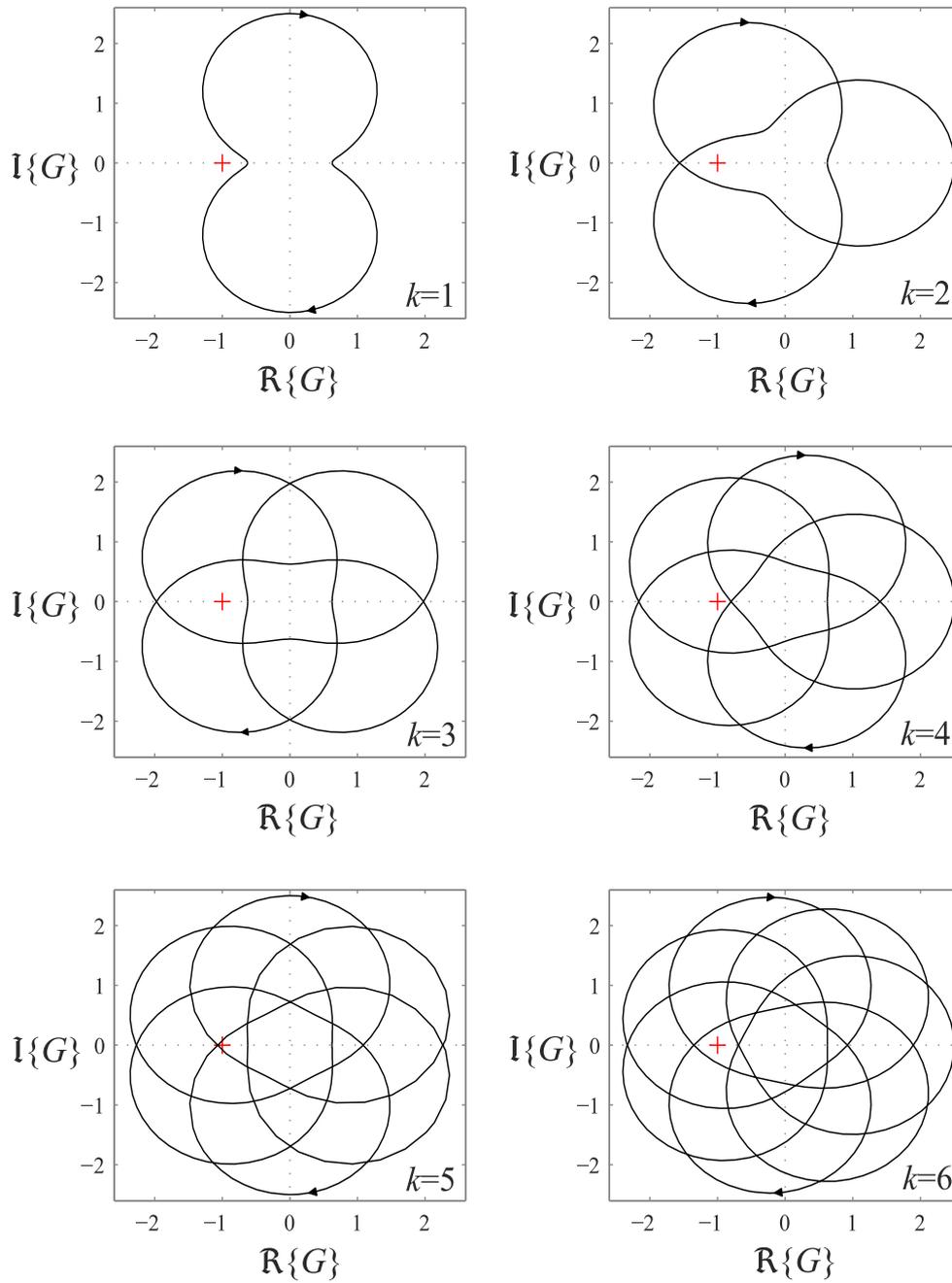


Figura 6.23: Diagramas de Nyquist de $G(e^{i\omega}; \mu)$ para $b = 0.6$ y $k = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 .

se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} J(\mu) \cos \omega + b + \cos [\omega(k+1)] = 0 \\ J(\mu) \sin \omega + \sin [\omega(k+1)] = 0, \end{cases} \quad (6.34)$$

de donde

$$J(\mu) = -\sin [\omega(k+1)] / \sin \omega, \quad (6.35)$$

y puede hallarse el valor crítico de b como

$$b_{NS} = \frac{\sin(\omega k)}{\sin \omega}. \quad (6.36)$$

Además, como $J(\mu) = -(b+1) + \sqrt{(b+1)^2 + 4a}$, el parámetro a se puede expresar como

$$a = J(\mu) \{2(b+1) + J(\mu)\} / 4, \quad (6.37)$$

y reemplazando las expresiones de $J(\mu)$ y b dadas por (6.35) y (6.36) en (6.37) se obtiene

$$a_{NS} = \frac{\sin [\omega(k+1)]}{4 \sin^2 \omega} \{ \sin [\omega(k+1)] - 2 \sin(\omega k) - 2 \sin \omega \}. \quad (6.38)$$

Entonces, a partir de (6.36) y (6.38) se obtiene la curva de NS en el plano (b, a) parametrizada en la frecuencia ω . La Fig. 6.24 muestra los diagramas de bifurcación para distintos valores pares e impares de k , donde la región que corresponde al punto fijo $\hat{x}^{(1)}$ estable se halla sombreada. En cada caso, dicha región de estabilidad puede determinarse en base a una deducción sencilla. Nótese que para $\hat{x}^{(1)}$, $J(\mu)$ es una función creciente del parámetro a . Por lo tanto, a medida que a crece el punto crítico $-1/J(\mu)$ se desplaza hacia la derecha sobre el semieje real negativo. Es decir, para a suficientemente grande, este punto se verá encerrado por el diagrama de Nyquist de $G(e^{i\omega}; \mu)$, y por lo tanto el punto fijo será inestable.

6.6. Conclusiones del capítulo

En primer lugar, se ha presentado un estudio detallado del comportamiento dinámico que exhibe un mapa escalar sometido a la acción de un control por retardos conocido como “*echo type*”. Se han dado condiciones analíticas para la ocurrencia de bifurcaciones de doble período y de Neimark-Sacker a través de la versión del MF

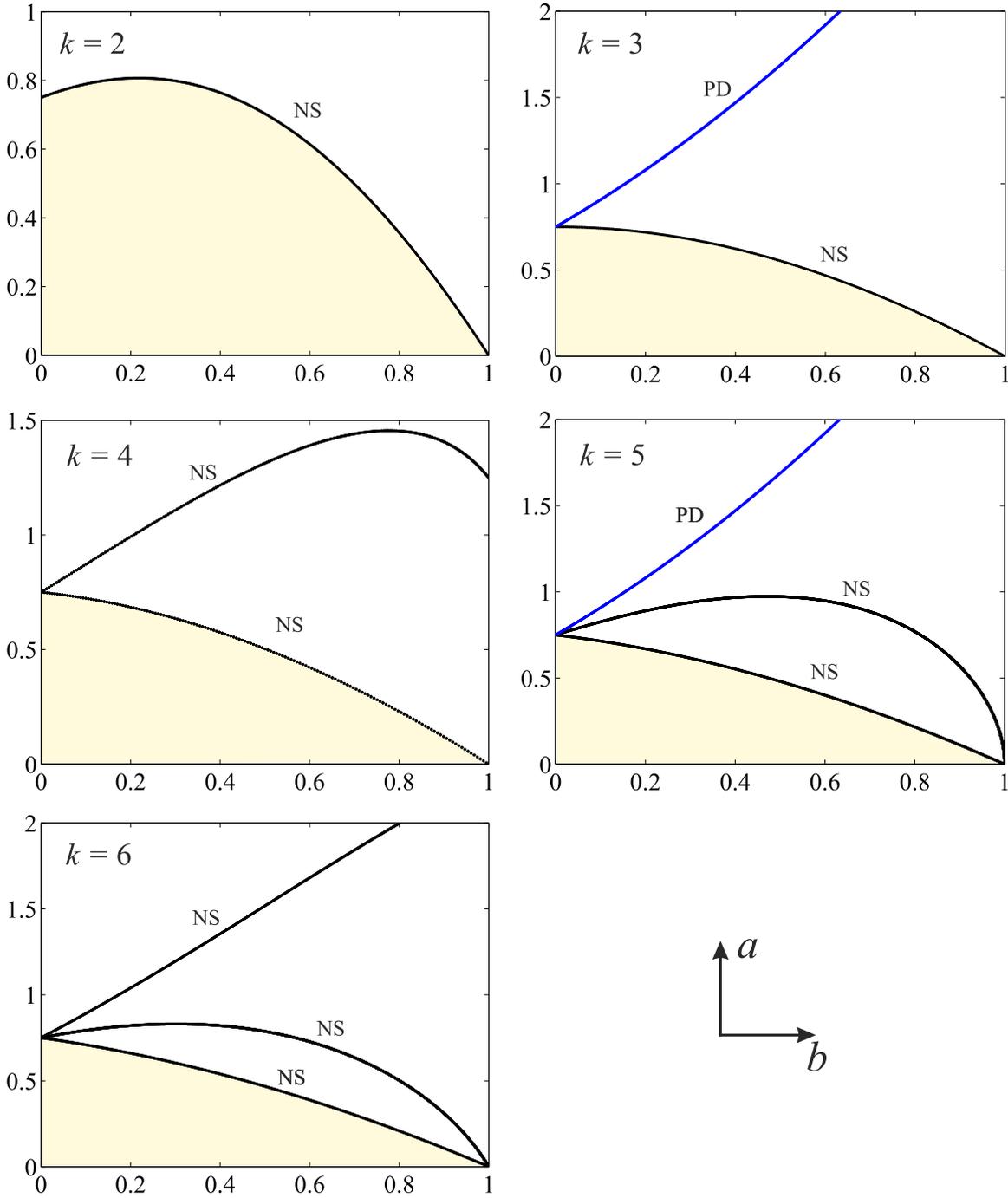


Figura 6.24: Diagramas de bifurcación para distintos valores de k . En cada caso, la región sombreada corresponde al punto fijo estable.

para sistemas discretos. También se ha formalizado la existencia de una resonancia fuerte 1:2. Los resultados obtenidos permiten asegurar que la dinámica que se genera alrededor del punto fijo del mapa depende principalmente en la *paridad* del retardo. Por lo tanto, el rango de estabilidad del equilibrio sólo puede extenderse si se utiliza un número *par* de muestras retrasadas en la ley de control. En contraste, la cuenca de atracción del punto fijo puede verse afectada por la presencia de órbitas adicionales que surgen de la bifurcación de NS y la resonancia 1:2. Para retardos impares, las bifurcaciones PD no pueden trasladarse a valores mayores del parámetro, por lo tanto estos valores no son adecuados para mejorar la estabilidad del punto fijo.

En segundo lugar, se ha presentado el estudio del denominado mapa de Hénon generalizado. Para este ejemplo, el MF también resulta ventajoso a la hora de obtener las condiciones para la ocurrencia de bifurcaciones PD y NS. Las curvas correspondientes a estas bifurcaciones se hallaron en forma analítica para valores genéricos de k , es decir que se pueden aplicar para el mapa de Hénon generalizado de cualquier dimensión. Se ha mostrado que, para valores adecuados de los parámetros, el punto fijo pierde su estabilidad debido a una bifurcación PD sólo si $k = 1$ (es decir, si la dimensión del mapa es 2). Para valores mayores de k , el mismo se inestabiliza debido a una bifurcación de NS. Aunque la bifurcación PD existe para todos los valores impares de k , cuando ésta se manifiesta, el punto fijo ya es inestable. En esta tesis, se dan fórmulas explícitas para el cómputo de las curvas de bifurcaciones de NS, que son válidas para cualquier dimensión del mapa. Es decir, para cualquier valor de k , mediante las fórmulas (6.33), (6.36) y (6.38) se puede obtener en forma inmediata el diagrama de bifurcaciones locales en el espacio (b, a) .

Capítulo 7

Sistemas con retardos distribuidos

7.1. Introducción

En algunos modelos es más acertado pensar que la historia previa del sistema no afecta solamente a través del valor en cierto tiempo anterior sino en todo un intervalo. Esta idea se presentará por medio de un ejemplo simple. Considérese el modelo de crecimiento logístico

$$\dot{N}(t) = N(t) [b - aN(t - \tau)],$$

con $a, b, r > 0$. Este modelo tiene en cuenta que el efecto de las altas densidades de población no afecta instantáneamente al nacimiento de individuos, sino que lo hace en un tiempo posterior. Nótese que este modelo está dado por una DDE, es decir, que posee un retardo constante. Sin embargo, en algunas aplicaciones es más realista considerar que el efecto de la historia está distribuido en un intervalo en el pasado. Esto sugiere que debe plantearse un modelo de la forma

$$\dot{N}(t) = N(t) \left[b - a \int_{-\infty}^t N(u)k(t-u)du \right], \quad (7.1)$$

donde la función $k(t)$ determina los “pesos” de los valores previos de la variable $N(t)$ y se denomina función de distribución o *kernel*. Por ejemplo, Rasmussen et al. (2003) estudiaron la ecuación (7.1) utilizando funciones de distribución denominadas *uniformes*, que son constantes en cierto intervalo y nulas fuera del mismo. Por otra parte, como se puntualiza en Smith (2010), otro modelo interesante del desarrollo de dos especies (donde una de ellas es la presa y la otra es el predador) está dado por las denominadas ecuaciones de Volterra

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = N_1(t) [b_1 - a_{12}N_2(t - \tau)], \\ \dot{N}_2(t) = N_2(t) \left[-b_2 + a_{21} \int_{-\infty}^t N_1(u)k(t-u)du \right], \end{cases}$$

donde se considera que la fracción $k(t - u)$ de alimento ingerido por el predador en el instante $t - u$ se convierte en masa corporal del mismo en el instante t .

Por otra parte, en (Culshaw et al., 2003) se estudia el modelo de transmisión celular del HIV dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{C}(t) = rC(t) \left(1 - \frac{C(t) + I(t)}{C_M} \right) - k_I C(t) I(t), \\ \dot{I}(t) = -\mu_I I(t) + k'_I \int_{-\infty}^t C(u) I(u) k(t - u) du, \end{cases}$$

donde $C(t)$ e $I(t)$ son la concentraciones de células sanas e infectadas, respectivamente, r es la tasa de reproducción de las células sanas, C_M es la capacidad efectiva del sistema, k_I es la tasa de propagación de célula a célula, μ_I es la tasa de mortandad de las células infectadas y k'_I/k_I es la fracción de células que sobreviven al período de incubación.

Atay (2003) estudió el sistema de N osciladores acoplados

$$\dot{z}_j(t) = [1 + i\omega_j - |z_j(t)|^2]z_j(t) + \frac{2K}{N} \sum_{k=1(k \neq j)}^N \left[\int_0^\infty k(u) z_k(t - u) du - z_j(t) \right], \quad (7.2)$$

donde $z_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, N$, $\omega_j > 0$, K es la ganancia de acoplamiento y $k(\cdot)$ es una función de distribución. El autor mostró que a mayor varianza de la función de distribución, menor es el rango de valores de K que mantiene las oscilaciones. Es decir, cuando la varianza se incrementa, mejora la estabilidad de los equilibrios $\hat{z}_j = 0$ de cada oscilador.

Por otra parte, Crauste (2010) presenta una discusión interesante acerca de la estabilidad y existencia de bifurcaciones de Hopf en el sistema escalar lineal

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - b \int_{-\infty}^t x(u) k(t - u) du. \quad (7.3)$$

En general, para estudiar este tipo de ecuaciones, la técnica usual consiste en definir variables auxiliares y derivar las ecuaciones para eliminar los términos integrales. De esta forma, se obtiene un modelo equivalente que puede estar dado por una EDO o una DDE. Este enfoque tiene la desventaja de que el número de ecuaciones suele incrementarse en forma significativa. Pero el principal obstáculo es que la factibilidad de

eliminar los términos integrales depende fuertemente de la distribución particular que se utilice. Por lo tanto, no hay una regla general para la obtención de dichos modelos equivalentes. Esto motiva la búsqueda de una metodología que pueda aplicarse en forma independiente de la distribución que se plantee, es decir, que permita trabajar con la ecuación original aunque la misma sea una ecuación integrodiferencial.

En este Capítulo se propone una variante del método en frecuencia (MF) con el objetivo de poder estudiar ecuaciones diferenciales con retardos distribuidos (EDRDs), sin tener que recurrir a la formulación de un modelo equivalente. La variante del MF que se propone representa una generalización de la que se ha presentado en el Capítulo 4 para sistemas con retardos constantes; de hecho, se verá que el retardo constante puede obtenerse como un caso límite del retardo distribuido. Como se mostrará a continuación, la metodología propuesta permite estudiar EDRDs en forma análoga a los sistemas con retardos constantes que se han presentado a lo largo de esta tesis. Es decir, se posibilita el análisis de un tipo de sistemas (aparentemente) más complicados, sin que esto signifique un incremento en la complejidad de la metodología en frecuencia.

7.2. Retardo discreto y retardo distribuido: un ejemplo simple

Para proveer una idea más precisa de sistemas con retardos distribuidos, se introducirá un ejemplo muy simple que permitirá mostrar la analogía con los sistemas a retardos constantes. Considérese la ecuación escalar

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t - \tau), \quad (7.4)$$

donde $x, \mu \in \mathbb{R}$. Como es habitual, la función inicial debe especificarse en el intervalo $[-\tau, 0]$. Si se plantean soluciones exponenciales de la forma $x(t) = e^{st}$, se obtiene

$$se^{st} = -\mu e^{st} e^{-s\tau},$$

con lo cual, la ecuación característica del sistema (7.4) está dada por

$$s + \mu e^{-s\tau} = 0. \quad (7.5)$$

El ejemplo análogo al (7.4) con retardo distribuido es

$$\dot{x}(t) = -\mu \int_{-\infty}^t x(u)k(t-u)du. \quad (7.6)$$

Nótese que en este caso, como dato inicial es necesario proveer los valores de $x(t)$ para todo $t \in (-\infty, 0]$. Si la función $k(u)$ tiene soporte compacto, es decir, es no nula en un intervalo $[T_0, T_1]$, basta considerar los límites de la integral como $t - T_1$ y $t - T_0$. Por otra parte, es usual que la función de distribución o *kernel* se normalice de forma tal que

$$\int_0^{\infty} k(u)du = 1,$$

dado que, generalmente, la función $k(u)$ se piensa como una función de distribución de probabilidad. Además se define el *retardo medio* (o directamente la *media*) de este *kernel* como

$$\tau_M := \int_0^{\infty} uk(u)du,$$

y la *varianza* como

$$\sigma^2 := \int_0^{\infty} (u - \tau_M)^2 k(u)du.$$

Una de las funciones más utilizadas en distintas aplicaciones (véase Liao et al., 2001; Culshaw et al., 2003; Ruan, 2006) es la distribución *gamma*, que está dada por

$$k_a^p(u) = \frac{a^p u^{p-1} e^{-au}}{(p-1)!}, \quad u \geq 0, \quad (7.7)$$

donde $a > 0$ y $p \in \mathbb{N}$. Los casos particulares $p = 1$ y $p = 2$ se conocen en la literatura específica como *kernel débil* y *kernel fuerte*, respectivamente. Por ejemplo, en la Fig. 7.1 se muestran gráficas de la función *gamma* para $a = 1$ y distintos valores de p . A partir de la integral

$$\int_{-\infty}^t x(u)k_a^p(t-u)du = \int_0^{\infty} x(t-u)k_a^p(u)du,$$

se deduce que el *kernel débil* ($p = 1$) proporciona más peso a los valores “más recientes” de la variable $x(t)$, mientras que para $p > 1$ el *kernel* pondera en mayor medida al

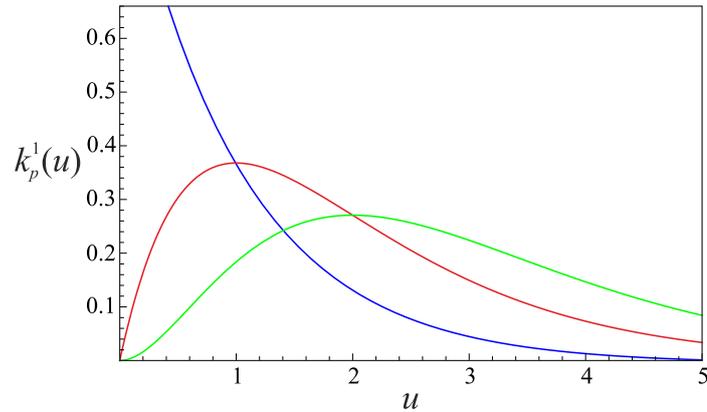


Figura 7.1: Gráfico de la función *gamma* para $a = 1$ y $p = 1$ (azul), $p = 2$ (rojo) y $p = 3$ (verde).

valor de la variable $x(t)$ en el instante $t - \tau = t - p/a$. De hecho, el valor $\tau = p/a$ corresponde a la media de la distribución *gamma*. Además, puede mostrarse que la varianza es $\sigma^2 = p/a^2$. Si se hace $a = p/\tau$, de modo de mantener el retardo medio igual a τ , y se toma $p \rightarrow \infty$ se obtiene $\sigma^2 = \tau^2/p \rightarrow 0$. Esto quiere decir que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} k_{p/\tau}^p(u) = \delta(t - \tau),$$

donde $\delta(\cdot)$ denota el impulso de Dirac; entonces

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t x(u) k_{p/\tau}^p(t - u) du = x(t - \tau).$$

Por lo tanto, el sistema (7.4) se puede obtener como un caso límite de la Ec. (7.6). Luego, considerando un *kernel gamma* en (7.6) y aplicando la Transformada de Laplace, se obtiene

$$sX(s) - x(0) = -\mu \mathcal{L} \left\{ \int_{-\infty}^0 x(u) k_a^p(t - u) du + \int_0^t x(u) k_a^p(t - u) du \right\}, \quad (7.8)$$

donde el segundo término en el miembro derecho es el producto convolución $(x * k_a^p)(t)$, con lo cual (7.8) se puede escribir como

$$sX(s) - x(0) = -\mu \mathcal{L} \left\{ \int_{-\infty}^0 x(u) k_a^p(t - u) du \right\} - \mu X(s) K_a^p(s),$$

donde $K_a^p(s) = \mathcal{L}\{k_a^p(t)\}$. Luego

$$X(s) [s + \mu K_a^p(s)] = x(0) - \mu \mathcal{L} \left\{ \int_{-\infty}^0 x(u) k_a^p(t-u) du \right\}. \quad (7.9)$$

El miembro de la derecha representa la historia del sistema, es decir, que para hallar una solución se necesita conocer la función inicial $x(t) = \phi(t)$, $-\infty < t \leq 0$. Si esta función es nula, entonces las soluciones no triviales de (7.9) están determinadas por las raíces de la ecuación característica

$$\boxed{s + \mu K_a^p(s) = 0.} \quad (7.10)$$

Además, a partir de (7.7) se obtiene

$$\begin{aligned} K_a^p(s) &= \frac{a^p}{(p-1)!} \mathcal{L}\{t^{p-1} e^{-at}\} = \frac{a^p}{(p-1)!} \mathcal{L}\{t^{p-1}\} \Big|_{s+a} = \frac{a^p}{(p-1)!} \frac{(p-1)!}{s^p} \Big|_{s+a} \\ &= \frac{a^p}{(s+a)^p}, \end{aligned}$$

y por lo tanto (7.10) queda expresada como

$$s + \mu \frac{a^p}{(s+a)^p} = 0. \quad (7.11)$$

Resulta interesante ver qué sucede con esta ecuación característica si se toma $a = p/\tau$ y $p \rightarrow \infty$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} K_{p/\tau}^p(s) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[s + \mu \left(\frac{p}{s\tau + p} \right)^p \right],$$

entonces se define $y = [p/(s\tau + p)]^p$, luego $\ln y = p \ln [p/(s\tau + p)]$. Por medio de la regla de L'Hôpital se determina que $\lim_{p \rightarrow \infty} \ln y = -s\tau$, con lo cual $\lim_{p \rightarrow \infty} y = e^{-s\tau}$, es decir

$$\lim_{p \rightarrow \infty} K_{p/\tau}^p(s) = e^{-s\tau}.$$

Por lo tanto, cuando $p \rightarrow \infty$ y $a = p/\tau$, la ecuación característica dada en la Ec. (7.11) tiende a la mostrada en la Ec. (7.5). En otras palabras, *la ecuación característica del sistema con distribución gamma tiende a la ecuación característica del sistema con retardo discreto cuando $p \rightarrow \infty$, manteniendo el retardo medio igual a τ .*

Nótese que esta conclusión puede obtenerse mediante otra distribución que no sea particularmente la *gamma*, mientras se mantenga constante el retardo medio τ y se haga tender la varianza a cero.

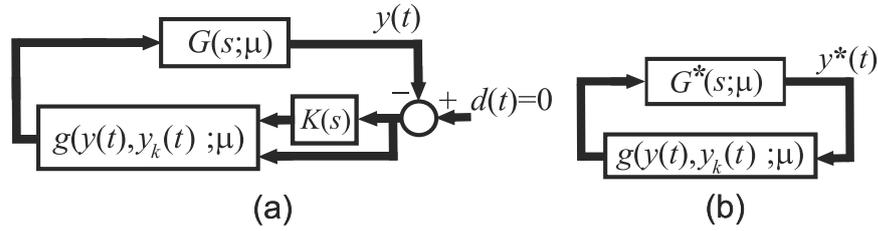


Figura 7.2: (a) Representación en bloques del sistema (7.6). (b) Diagrama equivalente utilizando la matriz extendida $G^*(s; \mu)$ dada por (7.13).

7.2.1. Planteo con el Método en Frecuencia

En esta sección se explicará cómo los sistemas con retardo distribuido se pueden estudiar utilizando el método en frecuencia. Nuevamente, se parte de un ejemplo muy simple para mostrar la analogía con el caso del retardo discreto. Para el sistema (7.4), si se elige la realización

$$A = -1, \quad B = C = 1, \quad g(y^*) = -y(t) + \mu y(t - \tau),$$

se tiene $G(s) = 1/(s + 1)$ y por lo tanto $G^*(s) = (1 \ e^{-s\tau})^T/(s + 1)$. Por otra parte, resulta $J(\mu) = (-1 \ \mu)$. Se puede ver fácilmente que el único autovalor no nulo de $G^*(s)J(\mu)$ es

$$\hat{\lambda}(s; \mu) = \frac{-1 + \mu e^{-s\tau}}{s + 1},$$

y la condición de bifurcación $\hat{\lambda}(s; \mu) = -1$ conduce a la ecuación característica (7.5).

Para el sistema (7.6), se elige la misma realización:

$$A = -1, \quad B = C = 1, \quad g(y^*) = -y(t) + \mu y_k(t), \quad (7.12)$$

donde, en este caso, $y_k(t) := \int_{-\infty}^t y(u)k(t-u)du$ (véase la Fig. 7.2(a)). Como se mencionó anteriormente, esta variable se puede escribir como $y_k(t) = (y * k)(t)$, es decir, como la convolución entre la salida sin retardo y el *kernel* $k(t)$. Entonces, suponiendo la existencia de la transformada de Laplace $K(s) := \mathcal{L}\{k(t)\}$, se tendrá $Y_k(s) = K(s)Y(s)$. Luego, si se define la matriz

$$G^*(s) = \frac{1}{s + 1} \begin{pmatrix} 1 \\ K(s) \end{pmatrix}, \quad (7.13)$$

la dinámica del *kernel* se incorpora en el bloque lineal y el sistema se puede representar como se muestra en la Fig. 7.2(b). Nótese la similitud de este planteo con el presentado en el Capítulo 4. La matriz Jacobiana se calcula como

$$J(\mu) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial g}{\partial y(t)} & \frac{\partial g}{\partial y_k(t)} \end{array} \right),$$

que para la función no lineal dada en (7.12) resulta $J(\mu) = (-1 \ \mu) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$. En este caso, el único autovalor distinto de cero de la matriz $G^*(s)J(\mu)$ es

$$\widehat{\lambda}(s; \mu) = \frac{1}{s+1} [-1 + \mu K(s)].$$

Si, por ejemplo, el *kernel* es una función gamma $k_a^p(t)$, la condición de bifurcación $\widehat{\lambda}(s; \mu) = -1$ conduce a la ecuación característica (7.11).

7.3. Estudio de una ecuación más general

La idea de extender la función de transferencia incorporando el *kernel* $K(s)$ es la misma que se utilizó en el Capítulo 4 para el caso de un retardo constante, que corresponde a $k(u) = \delta(u - \tau)$ y $K(s) = e^{-s\tau}$. En lo que sigue, se intentará mostrar la utilidad de la formulación para el estudio de sistemas a retardos distribuidos más complejos que el (7.6). Sin embargo, en primer lugar el análisis se centrará en sistemas escalares. Por ejemplo, considérese la ecuación

$$\dot{x}(t) = f[x(t), x_k(t); \mu], \quad (7.14)$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $x_k(t) := \int_{-\infty}^t x(u)k(t-u)du$ y $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no lineal suave. Además, se supone sin pérdida de generalidad que $f(0, 0; \mu) = 0$ y se definen

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x(t)} \right|_{(0,0;\mu)} = \delta_1, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x_k(t)} \right|_{(0,0;\mu)} = \delta_2. \quad (7.15)$$

7.3.1. Enfoque en el dominio tiempo

Para estudiar el sistema (7.14) en el dominio tiempo, se consideran dos alternativas. La primera es tomar directamente la linealización en el origen, es decir

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left. \frac{\partial f}{\partial x(t)} \right|_{(0,0;\mu)} x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_k(t)} \right|_{(0,0;\mu)} x_k(t) \\ &= \delta_1 x(t) + \delta_2 x_k(t), \end{aligned} \quad (7.16)$$

donde en este caso, $x(t)$ representa un valor pequeño de la variable. La ecuación anterior ha sido estudiada en detalle por Bernard et al. (2001), y posteriormente por Crauste (2010).

Otra variante interesante para el análisis de (7.14) surge cuando se utiliza una función *gamma* como distribución. En este caso, como describe Smith (2010), se recurre a una propiedad de esta distribución. La familia de funciones $k_a^j(u)$, $j = 1, 2, \dots, p$, satisface las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{d}{du} k_a^1(u) = -ak_a^1, \\ \frac{d}{du} k_a^j(u) = a [k_a^{j-1}(u) - k_a^j(u)], \quad k_a^j(0) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, p. \end{cases}$$

Ahora, para $x(t) \in \mathcal{C}$, se definen las funciones:

$$x_j(t) := \int_{-\infty}^t x(u) k_a^j(t-u) du, \quad j > 1,$$

y de este modo, usando la regla de Leibniz para derivar bajo el signo de integración, resulta

$$\begin{aligned} \dot{x}_j(t) &= \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^t x(u) k_a^j(t-u) du \right] \\ &= x(t) k_a^j(0) + \int_{-\infty}^t x(u) \frac{d}{dt} k_a^j(t-u) du \\ &= \int_{-\infty}^t x(u) a [k_a^{j-1}(t-u) - k_a^j(t-u)] du \\ &= a \left[\int_{-\infty}^t x(u) k_a^{j-1}(t-u) du - \int_{-\infty}^t x(u) k_a^j(t-u) du \right] \\ &= a [x_{j-1}(t) - x_j(t)]. \end{aligned}$$

Entonces, por ejemplo, la Ec. (7.14) se puede reescribir como

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = f[x_0(t), x_p(t); \mu], \\ \dot{x}_1(t) = a(x_0(t) - x_1(t)), \\ \vdots \\ \dot{x}_p(t) = a(x_{p-1}(t) - x_p(t)), \end{cases} \quad (7.17)$$

donde $x_0(t) := x(t)$. De aquí se llega a la importante conclusión de que el sistema con retardo distribuido (7.14) con *kernel gamma* se puede reducir a un sistema ODE de dimensión $p + 1$. Para analizar este sistema en el dominio tiempo, dado que el equilibrio es $\hat{X} = 0$, donde $X(t) = (x_0(t), \dots, x_p(t))^T$, se considera la linealización $\delta \dot{X}(t) = A \delta X(t)$; la matriz $A \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)}$ está dada por

$$A = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & \cdots & \delta_2 \\ a & -a & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & a & -a & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & -a \end{pmatrix},$$

y la ecuación característica asociada resulta

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s - \delta_1 & 0 & 0 & \cdots & -\delta_2 \\ -a & s + a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a & s + a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a & s + a \end{vmatrix} = \boxed{(s - \delta_1)(s + a)^p - \delta_2 a^p = 0.} \quad (7.18)$$

Como conclusión, para un sistema no lineal de la forma (7.14) con un *kernel* tipo *gamma*, se puede hallar un sistema EDO equivalente dado por (7.17). Sería interesante estudiar qué sucede si se utiliza otro tipo de función de distribución que no sea una función *gamma*. Por otra parte, para obtener una solución de la Ec. (7.17), la condición inicial debe ser $X(0)$. Sin embargo, en el problema original (7.14) el dato inicial es $x(t) = \phi(t)$, $-\infty < t < 0$. Aparentemente, esto sugiere una inconsistencia entre el modelo (7.14) y el equivalente (7.17). Estas cuestiones se analizarán con mayor detalle en la Sección 7.4.

7.3.2. Enfoque en el dominio frecuencia

Para analizar el sistema (7.14) utilizando el MF, se elige la siguiente realización

$$A = -1, B = 1, C = -1, g(\mathbf{y}^*(t); \mu) = y(t) + f[y(t), y_k(t); \mu], \quad (7.19)$$

con lo cual la función de transferencia para la parte lineal es

$$G^*(s) = \frac{-1}{s+1} \begin{pmatrix} 1 \\ K(s) \end{pmatrix}. \quad (7.20)$$

Nótese que hasta aquí, el único requerimiento sobre el *kernel* es la existencia de su transformada de Laplace $K(s) = \mathcal{L}\{k(t)\}$. A partir de (7.15) y (7.19), la matriz Jacobiana está dada por

$$J(\mu) = (1 + \delta_1 \quad \delta_2), \quad (7.21)$$

y por lo tanto

$$G^*(s)J(\mu) = \frac{-1}{s+1} \begin{pmatrix} 1 + \delta_1 & \delta_2 \\ (1 + \delta_1)K(s) & \delta_2 K(s) \end{pmatrix}. \quad (7.22)$$

Luego, la función característica relevante resulta

$$\widehat{\lambda}(s; \mu) = \frac{-1}{s+1} [1 + \delta_1 + \delta_2 K(s)]. \quad (7.23)$$

Por ejemplo, para el caso del *kernel gamma*, reemplazando $K_a^p(s) = a^p/(s+a)^p$ en (7.23), es simple verificar que la condición de bifurcación $\widehat{\lambda}(s; \mu) = -1$ conduce a la Ec. (7.18). Pero el enfoque en frecuencia permite tratar con distribuciones que no sean necesariamente del tipo *gamma*. Las únicas condiciones que debe verificar el *kernel* es que sea una función seccionalmente continua y de orden exponencial (para asegurar la existencia de su transformada de Laplace). Por lo tanto, en lo que sigue, se considera un kernel genérico $k(t)$ y se supone que verifica dichas condiciones.

Los autovectores derecho e izquierdo de $G^*(s)J(\mu)$ resultan

$$\mathbf{v} = (1, K(s))^T \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = \left(1, \frac{\delta_2}{\delta_1 + 1}\right)^T.$$

Las matrices Q y L están dadas por

$$Q = (D_{11}^2 g + K(s)D_{21}^2 g \mid D_{12}^2 g + K(s)D_{22}^2 g),$$

$$L = \begin{pmatrix} D_{111}^3 g + K(s)(D_{121}^3 g + D_{211}^3 g) + K(s)^2 D_{221}^3 g \\ D_{112}^3 g + K(s)(D_{122}^3 g + D_{212}^3 g) + K(s)^2 D_{222}^3 g \end{pmatrix}^T,$$

y la matriz de lazo cerrado es

$$H(s) = \frac{1}{\varphi(s)} \begin{pmatrix} 1 \\ K(s) \end{pmatrix},$$

donde $\varphi(s) := \delta_1 - s + \delta_2 K(s)$. Luego se hallan los vectores \mathbf{V}_{02} y \mathbf{V}_{22} como

$$\mathbf{V}_{02} = \alpha(\omega)(1, 1)^T \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_{22} = \beta(\omega)(1, K(i2\omega))^T, \quad (7.24)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &:= -[D_{11}^2 g + 2D_{12}^2 g \Re\{K(i\omega)\} + D_{22}^2 g |K(i\omega)|^2] / [4\phi(0)], \\ \beta(\omega) &:= -[D_{11}^2 g + 2D_{12}^2 g K(i\omega) + D_{22}^2 g K(i\omega)^2] / [4\phi(i2\omega)]. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Entonces, $p(i\omega)$ resulta

$$\begin{aligned} p(i\omega) &= \frac{1}{8} D_{111}^3 g + \alpha [D_{11}^2 g + D_{12}^2 g + (D_{12}^2 g + D_{22}^2 g) K(i\omega)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \beta [D_{11}^2 g + D_{12}^2 g \overline{K(i\omega)} + K(i2\omega) (D_{12}^2 g + D_{22}^2 g \overline{K(i\omega)})] \\ &\quad + \frac{1}{4} D_{112}^3 g \left[K(i\omega) + \frac{1}{2} \overline{K(i\omega)} \right] + \frac{1}{8} D_{221}^3 g K^2(i\omega) \\ &\quad + \frac{1}{8} |K(i\omega)|^2 [D_{122}^3 g + D_{222}^3 g K(i\omega)]. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Luego, se obtiene $\xi(\omega; \mu) = p(i\omega)/(1 + i\omega)$, y se calcula la expresión del coeficiente de curvatura como

$$\sigma_0 = -\Re \left\{ \frac{p(i\omega)}{-1 + \delta_2 K'(i\omega)} \right\}.$$

Además, como se enuncia a continuación, a partir de (7.23) puede deducirse en forma simple una condición necesaria para que el equilibrio sea estable.

Proposición 7.1 *Sea $I = \int_0^\infty k(t)dt$, y supóngase que existe $K(s) = \int_0^\infty k(t)e^{-st}dt$. Una condición necesaria para que el equilibrio de (7.14) sea estable es $\delta_1 + \delta_2 I < 0$. En caso de que el kernel se halle normalizado, esta condición se reduce a $\delta_1 + \delta_2 < 0$. \diamond*

Demostración: Se tiene que

$$\lim_{s \rightarrow 0} K(s) = \int_0^\infty k(t)dt = I,$$

y por lo tanto

$$\widehat{\lambda}(0; \mu) = -(1 + \delta_1 + \delta_2 I).$$

Es decir, el inicio de la curva de Nyquist se halla sobre el eje real, en el punto $-(1 + \delta_1 + \delta_2 I)$. Por otra parte, teniendo en cuenta que

$$|K(i\omega)| \leq \int_0^{\infty} |k(t)| |e^{-i\omega t}| dt = \int_0^{\infty} k(t) dt = I,$$

de (7.23) resulta

$$|\widehat{\lambda}(i\omega; \mu)| \leq \frac{|1 + \delta_1| + |\delta_2| I}{\sqrt{1 + \omega^2}},$$

y por lo tanto $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \widehat{\lambda}(i\omega; \mu) = 0$. Es decir que la curva de Nyquist correspondiente a este autovalor “termina” en el origen del plano complejo. Por lo tanto, si $\delta_1 + \delta_2 I > 0$ entonces $\widehat{\lambda}(0; \mu) < -1$ y el punto crítico -1 estará encerrado al menos una vez por el diagrama de Nyquist. Como el único polo de $\widehat{\lambda}(s; \mu)$ se halla en $s = -1$, se concluye que el equilibrio será inestable. De aquí resulta la condición necesaria para la estabilidad dada por $\delta_1 + \delta_2 I < 0$. En particular, si el *kernel* se normaliza de modo que $I = 1$, se obtiene la condición más simple $\delta_1 + \delta_2 < 0$. ■

Retornando a la Ec. (7.23), la condición de bifurcación $\widehat{\lambda}(i\omega_0; \mu) = -1$ se puede escribir en términos de la función $K(i\omega)$ como

$$K(i\omega_0) = \frac{-\delta_1 + i\omega_0}{\delta_2}. \quad (7.27)$$

Esta expresión es de utilidad para mostrar el siguiente resultado:

Proposición 7.2 Si $\int_0^{\infty} k(t) dt = 1$, entonces el equilibrio $\widehat{x} = 0$ de (7.14) es estable, independientemente del *kernel*, si $\delta_1 < -|\delta_2|$. Además, dicho equilibrio sólo puede inestabilizarse por medio de una bifurcación de Hopf si $\delta_2 < -|\delta_1|$. ◇

Demostración: Estas conclusiones se obtienen en forma simple a partir de (7.27), escribiendo

$$\frac{\sqrt{\delta_1^2 + \omega_0^2}}{|\delta_2|} = |K(i\omega_0)| \leq 1,$$

de modo que si $|\delta_1| > |\delta_2|$ no existe solución $\omega_0 \in \mathbb{R}$ de (7.27). Por otra parte, de la Proposición 7.1, \hat{x} es inestable siempre que $\delta_1 + \delta_2 > 0$. Luego, se concluye que dicho equilibrio es estable siempre que $\delta_1 < -|\delta_2|$. Por otra parte, si $\delta_2 < -|\delta_1|$, puede existir al menos una solución $\omega_0 \neq 0$ de (7.27) y puede ocurrir una bifurcación de Hopf (el caso en que $\delta_2 > |\delta_1|$ no resulta de interés pues el equilibrio es siempre inestable). ■

Como se mencionó en la Introducción de este capítulo, Atay (2003) estudió un sistema de osciladores acoplados (véase la Ec. (7.2)), y por medio de resultados numéricos mostró que a medida que se incrementa la varianza de la distribución decrece la amplitud de las oscilaciones. Es más, si dicha varianza es suficientemente grande, el sistema deja de oscilar y los puntos de equilibrio de los osciladores se vuelven estables. El autor no sólo demostró que la varianza de la distribución es un parámetro clave para las oscilaciones: además, conjeturó que la distribución dada por un impulso de Dirac (de varianza cero) es el más desestabilizante. Es decir, el retardo constante es el que más favorece a la existencia de oscilaciones. También, por su parte, Crauste (2010) arriba a conclusiones similares para un sistema escalar lineal como el representado por la Ec. (7.16). Sin embargo, aún no se cuenta con una demostración formal de este hecho. Para el sistema (7.14) en estudio, se podría enunciar:

Conjetura 7.3 *Para el sistema (7.14), el kernel dado por un impulso de Dirac $k_{imp}(t) := \delta(t - \tau)$ es el más desestabilizante, esto es, la región de estabilidad en el espacio (δ_1, δ_2) será menor que con cualquier otro kernel $k(t)$ que sea una función al menos continua a tramos y que verifique $\int_0^{\infty} k(t)dt = 1$. ◇*

7.4. Ejemplo: Modelo logístico

Un caso particular de la Ec. (7.14) es la ecuación logística estudiada por Ruan (2006), que está dada por

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left[1 - \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t x(u)k(t-u)du \right]. \quad (7.28)$$

Para esta ecuación se considerarán distintas funciones de distribución, y se aplicarán los resultados obtenidos para la Ec. (7.14). En lo que sigue, se supone que el *kernel* está normalizado.

Si se toman las mismas matrices A, B y C que en (7.19), se tiene

$$G^*(s) = \frac{-1}{s+1} \begin{pmatrix} 1 \\ K(s) \end{pmatrix}, \quad g(\mathbf{y}^*(t)) = (r+1)y(t) - ry(t)y_k(t)/c,$$

A partir de la ecuación $G^*(0)g(\widehat{\mathbf{y}}^*) = -\widehat{\mathbf{y}}^*$, se deduce la existencia de dos puntos de equilibrio, $\widehat{\mathbf{y}}_1^* = (0, 0)^T$ e $\widehat{\mathbf{y}}_2^* = (c, c)^T$. Para $\widehat{\mathbf{y}}_1^*$ se tiene $\delta_1 = r$, $\delta_2 = 0$, luego a partir de (7.21) resulta

$$J_1(r) = \begin{pmatrix} r & 0 \end{pmatrix},$$

entonces $\widehat{\lambda}_1(s; r) = -(1+r)/(s+1)$. De acuerdo con la Proposición 7.1, el punto de equilibrio $\widehat{\mathbf{y}}_1^*$ es siempre inestable independientemente del *kernel* que se utilice. Para el equilibrio no trivial resultan $\delta_1 = 0$ y $\delta_2 = -r$, luego

$$J_2(r) = \begin{pmatrix} 1 & -r \end{pmatrix}.$$

Entonces, para este punto de equilibrio se obtiene la función característica

$$\widehat{\lambda}(s; \mu) = \frac{rK(s) - 1}{s+1}, \quad (7.29)$$

de donde la condición de Hopf (7.27) resulta

$$K(i\omega_0) = -\frac{i\omega_0}{r}. \quad (7.30)$$

Entonces, el parámetro c determina el punto de equilibrio no trivial pero no tiene influencia en su estabilidad. Por simplicidad, en el análisis que sigue se considerará $c = 1$ (la única consecuencia es que se fija $\widehat{\mathbf{y}}_2^* = (1, 1)^T$). Para el equilibrio no trivial,

los autovectores derecho e izquierdo de $G^*(s)J(\mu)$ resultan $\mathbf{v} = (1 \ K(s))^T$ y $\mathbf{u} = (1 \ -r)^T$. Además, se obtienen las matrices $Q = -r(K(s) \ 1)$ y $L = 0$. También, a partir de (7.24) y (7.25) se calculan los vectores

$$\mathbf{V}_{02} = \alpha(\omega)(1, K(0))^T \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_{22} = \beta(\omega)(1, K(i2\omega))^T,$$

donde

$$\alpha = -\frac{\Re\{K(i\omega)\}}{2} \quad \text{y} \quad \beta(\omega) = -\frac{2rK(i\omega)}{rK(i2\omega) + i2\omega}. \quad (7.31)$$

Utilizando (7.26), el vector $p(i\omega)$ resulta

$$p(i\omega) = r \left\{ \frac{1}{2} \Re\{K(i\omega)\} [1 + K(i\omega)] + \frac{rK(i\omega)[\overline{K(i\omega)} + K(i2\omega)]}{rK(i2\omega) + i2\omega} \right\}. \quad (7.32)$$

Finalmente, se obtiene $\xi(i\omega) = p(i\omega)/(1 + i\omega)$.

7.4.1. Distribución uniforme “inmediata”

En primer lugar, se considera una de las funciones de distribución utilizadas por Rasmussen et al. (2003). Ésta se denomina *uniforme “inmediata”* y está dada por ¹

$$k(u) = \begin{cases} \frac{1}{T} & 0 \leq u \leq T, \\ 0, & u < 0 \text{ ó } u > T. \end{cases} \quad (7.33)$$

Para este caso, la Ec. (7.28) resulta

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left[1 - \frac{1}{T} \int_0^T x(t-u) du \right]. \quad (7.34)$$

Nótese que el término integral determina que para cada valor de t , la dinámica se ve afectada por los valores de $x(u)$ con $t - T < u < t$. Es decir, se deben conocer los valores de $x(u)$ para instantes *inmediatamente* previos a t hasta $t - T$. A partir de (7.33) se obtiene

$$K(s) = \frac{1}{sT} (1 - e^{-sT}),$$

¹En realidad en (Rasmussen et al., 2003) no se tiene en cuenta la normalización del kernel. Aquí, el mismo se elige normalizado.

entonces la condición de bifurcación de Hopf (7.30) resulta

$$\frac{1}{i\omega_0 T} (1 - e^{-i\omega_0 T}) = -\frac{i\omega_0}{r},$$

y separando partes real e imaginaria, se obtienen las ecuaciones

$$\begin{cases} \cos \omega_0 T = 1 - \frac{\omega_0^2 T}{r}, \\ \sin \omega_0 T = 0. \end{cases}$$

De la segunda, resulta $\omega_0 T = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Reemplazando en la primera, se tiene

$$(-1)^k = 1 - \frac{(k\pi)^2}{rT},$$

luego, para k par resulta $\omega_0 = 0$, y para k impar se llega a

$$r_0 = \frac{k^2 \pi^2}{2T_0}. \quad (7.35)$$

El equilibrio cambia de estabilidad cuando (7.35) se verifica para $k = 1$. Por ejemplo, con $T = 1$ (y $k = 1$) se obtiene $r_0 = \pi^2/2 \simeq 4.9348$. En la Fig 7.3 se muestran los diagramas de Nyquist y las simulaciones correspondientes, con $T = 1$ y para $r = 4.8$ (I: equilibrio estable) y $r = 5$ (II: equilibrio inestable).

7.4.2. Distribución uniforme “posterior”

Otro *kernel* similar utilizado por Rasmussen et al. (2003) está dado por

$$k(u) = \begin{cases} 0, & u < T_0 \\ \frac{1}{T_1 - T_0}, & T_0 \leq u \leq T_1, \\ 0, & u > T_1, \end{cases} \quad (7.36)$$

donde $0 < T_0 < T_1$. Es decir, se considera el sistema

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left[1 - \frac{1}{(T_1 - T_0)} \int_{T_0}^{T_1} x(t-u) du \right]. \quad (7.37)$$

A partir de (7.36), se obtiene

$$K(s) = \frac{1}{s(T_1 - T_0)} (e^{-sT_0} - e^{-sT_1}),$$

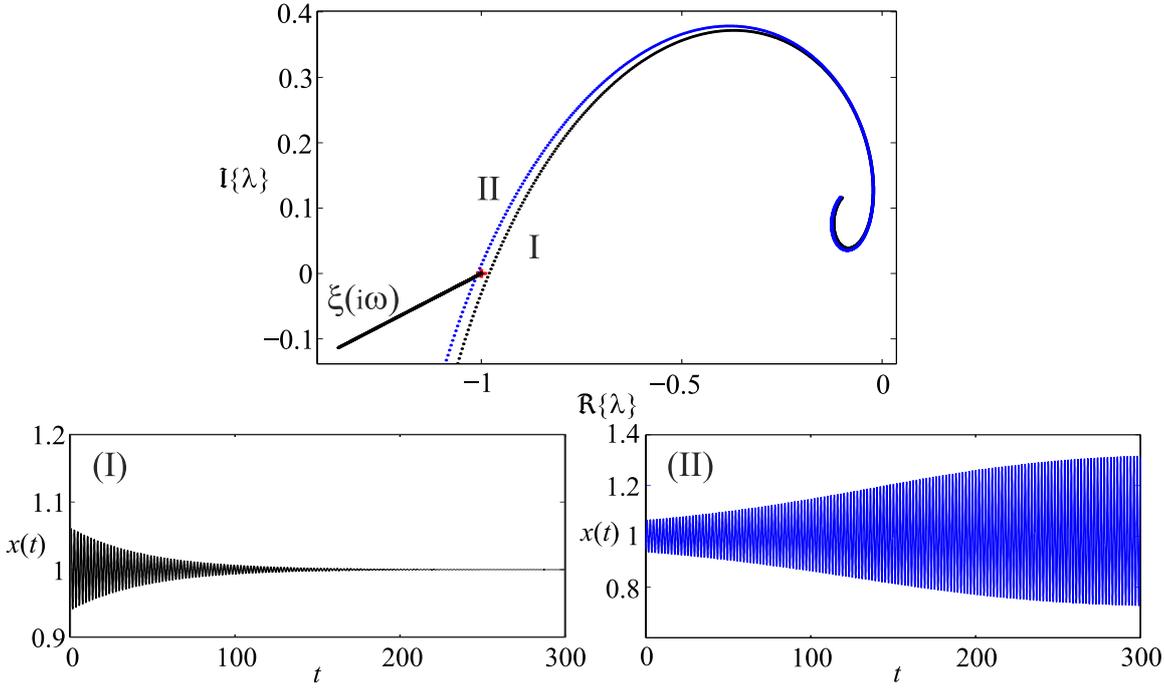


Figura 7.3: Diagramas de Nyquist y simulaciones numéricas del sistema (7.34) con $T = 1$, para $r = 4.8$ (negro) y $r = 5$ (azul).

de modo que la ecuación de bifurcación (7.30) se puede expresar como

$$e^{-i\omega_0 T_0} - e^{-i\omega_0 T_1} = \frac{\omega_0^2 (T_1 - T_0)}{r},$$

y separando partes real e imaginaria como en el ejemplo anterior, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \cos \omega_0 T_0 - \cos \omega_0 T_1 = \frac{\omega_0^2 (T_1 - T_0)}{r}, \\ \sin \omega_0 T_1 - \sin \omega_0 T_0 = 0. \end{cases} \quad (7.38)$$

A partir de la segunda ecuación resulta

$$\omega_0 T_1 - \omega_0 T_0 = 2k\pi, \quad \text{ó} \quad \omega_0 T_1 + \omega_0 T_0 = (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si $\omega_0 T_1 - \omega_0 T_0 = 2k\pi$, reemplazando en la primer ecuación en (7.38) resulta la solución trivial $\omega_0 = 0$. En el caso en que $\omega_0 T_1 + \omega_0 T_0 = (2k + 1)\pi$, reemplazando nuevamente en la primera ecuación en (7.38), se llega a

$$2 \cos \left[\frac{(2k + 1)\pi T_0}{(T_0 + T_1)} \right] = \frac{(2k + 1)^2 \pi^2 (T_1 - T_0)}{(T_1 + T_0)^2 r}. \quad (7.39)$$

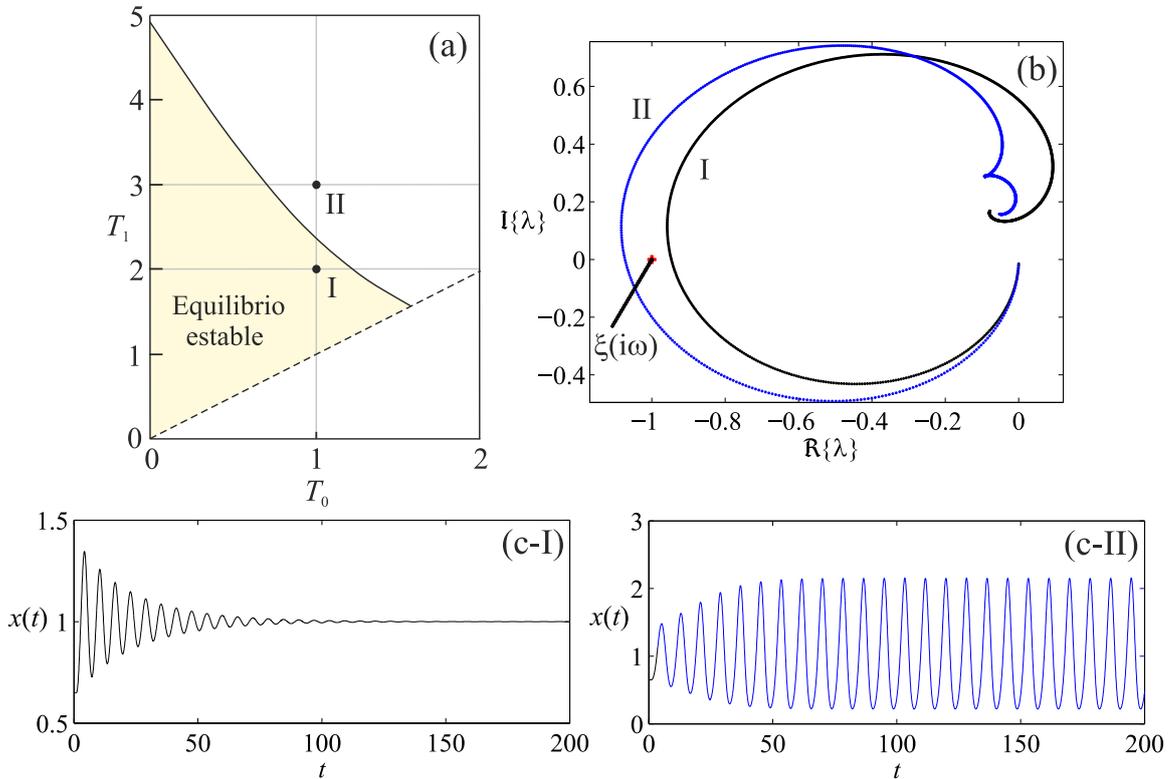


Figura 7.4: (a) Diagrama de estabilidad del sistema (7.60) para $r = 1$. La línea punteada indica la recta $T_1 = T_0$, y la línea llena corresponde a las soluciones de (7.39). (b) Diagramas de Nyquist para $T_0 = 1$, con $T_1 = 2$ (negro) y $T_1 = 3$ (azul). (c) Simulaciones numéricas para $T_0 = 1$, con $T_1 = 2$ (I: equilibrio estable) y $T_1 = 3$ (II: equilibrio inestable).

Esta ecuación define en forma implícita la curva de Hopf en el espacio de parámetros (T_0, T_1) (para r constante) y coincide con la expresión dada en (Rasmussen et al., 2003), con la única diferencia que en el trabajo citado los autores consideran $r = 1$ en el análisis. Nótese que en particular, si en (7.39) se hacen $T_0 = 0$ y $T_1 = T$, se obtiene la condición de Hopf que se halló en (7.35) para el ejemplo anterior. La Fig. 7.4(a) muestra la región de estabilidad del equilibrio no trivial con $r = 1$. Nótese que la Ec. (7.39) se verifica para el caso límite $T_1 \rightarrow T_0$, que corresponde a la recta que se muestra en línea punteada. Además, en la Fig. 7.4 se muestran diagramas de Nyquist (b) y simulaciones numéricas (c) con $T_0 = 1$ y para dos valores de T_1 : $T_1 = 2$ y $T_1 = 3$. Con $T_1 = 2$, el equilibrio resulta estable (I), y para $T_1 = 3$, el mismo es inestable (II) y se observa una solución periódica estable.

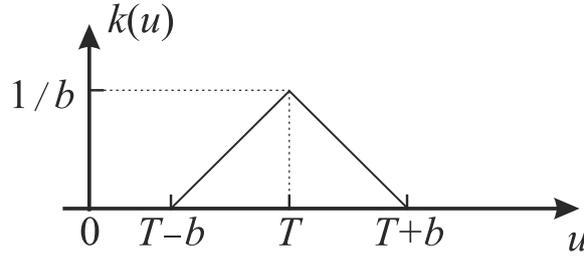


Figura 7.5: Distribución triangular dada por (7.40).

7.4.3. Distribución triangular

Otra distribución que resulta de interés es una función triangular, dada por

$$k(u) = \begin{cases} 0, & u < T - b, \\ \frac{1}{b^2}[u - (T - b)], & T - b \leq u \leq T, \\ -\frac{1}{b^2}[u - (T + b)], & T < u \leq T + b, \\ 0, & u > T + b, \end{cases} \quad (7.40)$$

donde $0 < b < T$. La pendiente $1/b^2$ se fija para que $\int_0^{\infty} k(u)du = 1$. La función $k(u)$ se ilustra en la Fig. 7.5. En términos de la función escalón unitario

$$h(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ 1, & u \geq 0, \end{cases} \quad (7.41)$$

la función triangular (7.40) se puede escribir en forma equivalente como

$$k(u) = \frac{1}{b^2} \{ (u - T_0)h(u - T_0) - 2(u - T)h(u - T) + (u - T_1)h(u - T_1) \},$$

donde $T_0 := T - b$ y $T_1 := T + b$. De esta forma, es simple obtener $K(s)$ como

$$\begin{aligned} K(s) &= \frac{1}{b^2 s^2} \{ e^{-sT_0} - 2e^{-sT} + e^{-sT_1} \} \\ &= \frac{e^{-sT}}{b^2 s^2} \{ e^{sb} + e^{-sb} - 2 \} \\ &= \frac{2e^{-sT}}{b^2 s^2} \{ \cosh(sb) - 1 \}. \end{aligned}$$

La condición de Hopf (7.30) resulta

$$\frac{2e^{-i\omega_0 T}}{b^2\omega_0^2} \{\cosh(i\omega_0 b) - 1\} = \frac{i\omega_0}{r},$$

de donde, dado que $\cosh(i\omega_0 b) = \cos(\omega_0 b)$, se tiene $\cos(\omega_0 b) - 1 = ie^{i\omega_0 T} b^2 \omega_0^3 / (2r)$, es decir

$$\begin{cases} \cos(\omega_0 b) - 1 = -\frac{b^2 \omega_0^3}{2r} \sin(\omega_0 T), \\ 0 = \frac{b^2 \omega_0^3}{2r} \cos(\omega_0 T). \end{cases}$$

De la segunda ecuación se obtiene $\omega_0 T = \pi(1/2 + k)$, $k \in \mathbb{Z}$, y reemplazando en la primera, resulta $1 - \cos(\omega_0 b) = b^2 \omega_0^3 (-1)^k / (2r)$. Para $k = 0$ se tiene

$$1 - \cos\left(\frac{\pi b}{2T}\right) = \frac{\pi^2 b^2}{16 r T^3}. \quad (7.42)$$

Para valores fijos de r esta ecuación define en forma implícita la curva de bifurcación de Hopf en el espacio (T, b) . Por ejemplo, en la Fig. 7.6(a) se muestra esta curva para $r = 1$. La Fig. 7.6(b) muestra los diagramas de Nyquist correspondientes a dos puntos del plano (T, b) : uno en la región de estabilidad y el otro fuera de la misma. Por último, en la Fig. 7.6(c) se muestran simulaciones correspondientes a los puntos I y II indicados en el diagrama de bifurcación.

7.4.4. Distribución gamma

Ruan (2006) consideró el sistema (7.28) con distribución *gamma*, y en particular los casos correspondientes al *kernel* débil ($p = 1$) y el *kernel* fuerte ($p = 2$). Para el primer caso ($p = 1$), a partir de (7.29) resulta

$$\widehat{\lambda}(s; \mu) = \frac{a(r-1) - s}{(s+1)(s+a)}, \quad (7.43)$$

de donde la ecuación $\widehat{\lambda}(s; \mu) = -1$ lleva a $s^2 + as + ar = 0$, y tomando $s = i\omega$ se obtienen las ecuaciones

$$\begin{cases} ar - \omega^2 = 0, \\ a\omega = 0, \end{cases}$$

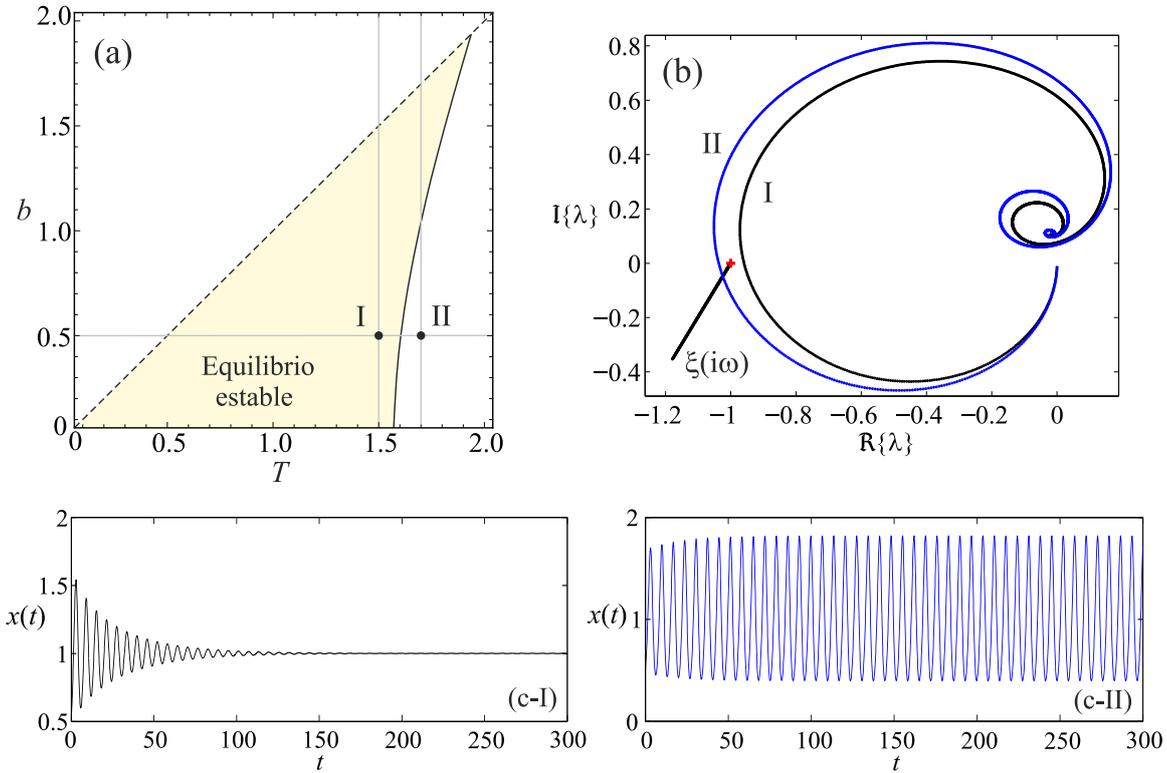


Figura 7.6: (a) Diagrama de estabilidad del sistema logístico con distribución triangular, para $r = 1$. La línea punteada indica la recta $b = T$, y la línea llena corresponde a las soluciones de (7.42). (b) Diagramas de Nyquist para $b = 0.5$, con $T = 1.5$ (negro) y $T = 1.7$ (azul). (c) Simulaciones numéricas para $T = 1.5$ (I, equilibrio estable) y $T = 1.7$ (II, equilibrio inestable).

y se concluye que no existe solución de Hopf. En forma similar, para el kernel fuerte ($p = 2$) se obtiene

$$\widehat{\lambda}(s; \mu) = \frac{ra^2 - (s+a)^2}{(s+1)(s+a)^2}, \quad (7.44)$$

y en este caso la condición de bifurcación conduce a $s^3 + 2as^2 + a^2s + ra^2 = 0$. Tomando nuevamente $s = i\omega$, resulta

$$\begin{cases} \omega(a^2 - \omega^2) = 0, \\ a(ar - 2\omega^2) = 0, \end{cases}$$

De la primera ecuación, resulta $\omega = a$, y reemplazando en la segunda se obtiene el valor crítico del parámetro $r_0 = 2a$. En la Fig. 7.7 se observan dos diagramas de Nyquist en simultáneo con $a = 1$: uno para $r = 1.5$ (I) y otro para $r = 2.5$ (II). Como muestran las simulaciones correspondientes, para $r = 1.5$ el equilibrio es estable, y

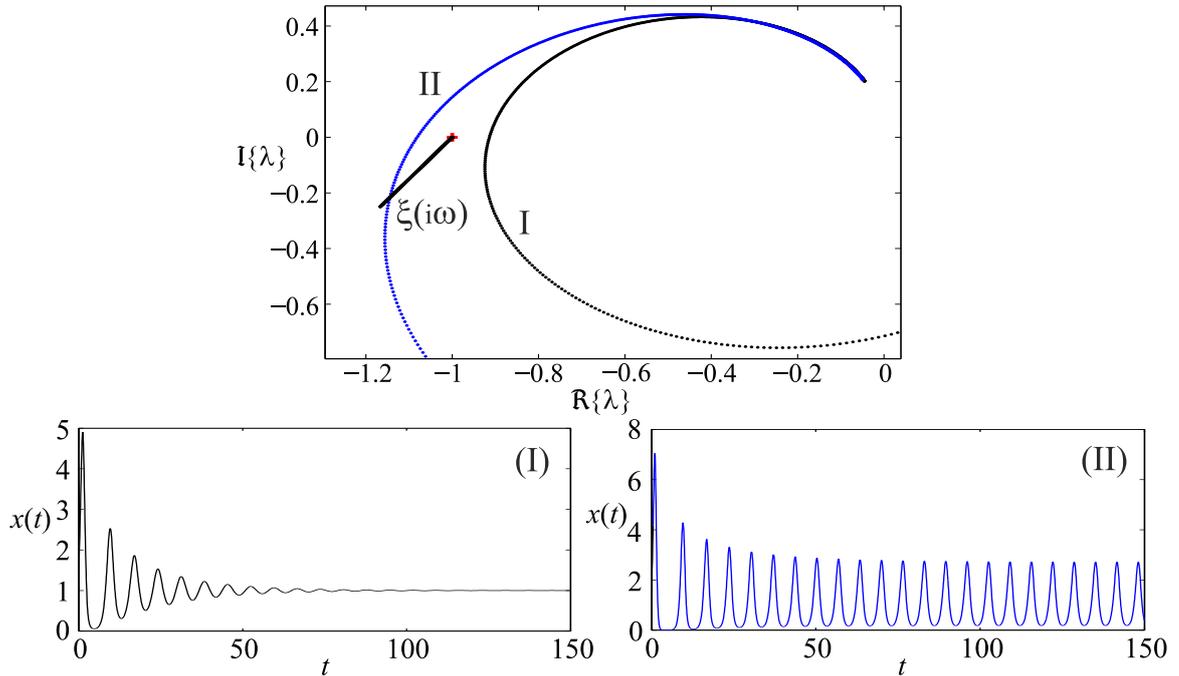


Figura 7.7: Diagramas de Nyquist del sistema logístico con distribución *gamma* con $p = 2$, $a = 1$ y $r = 1.5$ (I, negro), $r = 2.5$ (II, azul). También se muestran las simulaciones numéricas correspondientes.

para $r = 2.5$ el mismo es inestable. Estos resultados coinciden con los presentados por Ruan (2006).

Los resultados de estos ejemplos muestran que la formulación en el dominio frecuencia permite, en cada caso, detectar en forma simple las condiciones de bifurcación. Sin embargo, es interesante estudiar qué sucede para una distribución genérica. Retomando la Ec. (7.29), la expresión del autovalor es

$$\widehat{\lambda}(i\omega; \mu) = \frac{rK(i\omega) - 1}{i\omega + 1}. \quad (7.45)$$

La condición crítica $\widehat{\lambda}(i\omega; \mu) = -1$ se cumplirá sólo si existen valores $\omega = \omega_0$ y $r = r_0$ tales que

$$K(i\omega_0) = -i\frac{\omega_0}{r_0}. \quad (7.46)$$

Escribiendo $K(i\omega) := K_R(\omega) + iK_I(\omega)$, la condición anterior resulta $K_R(\omega_0) = 0$ y $K_I(\omega_0) = -\omega_0/r_0$. Además, la Ec. (7.46) se puede expresar en forma alternativa como $|K(i\omega_0)| = \omega_0/r_0$ y $\text{Arg}\{K(i\omega_0)\} = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Este resultado se resume

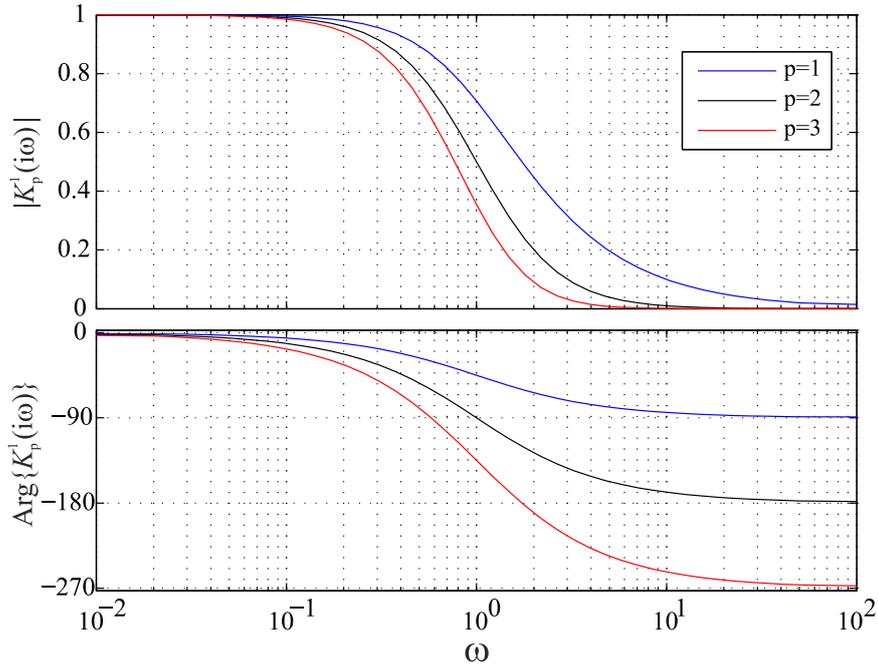


Figura 7.8: Diagramas de Bode de $K_a^p(s)$ para $a = 1$ y $p = 1$ (azul), $p = 2$ (negro) y $p = 3$ (rojo).

como sigue:

Proposición 7.4 *El sistema (7.28) exhibirá una bifurcación de Hopf sólo si existe $\omega_0 \in (0, \infty)$ tal que $\Theta := \text{Arg}\{K(i\omega_0)\} = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. En este caso, el valor crítico del parámetro r será*

$$r_0 = \omega_0 / |K(i\omega_0)| \quad \diamond \quad (7.47)$$

Es decir, dada una función $K(s)$, trazando el diagrama de Bode, debe determinarse si la función $\text{Arg}\{K(i\omega)\}$ toma el valor $-\pi/2$ para alguna frecuencia. Si esto ocurre, el valor de $|K(i\omega_0)|$ permite calcular el valor crítico r_0 . Para ilustrar esta proposición, se considera nuevamente el caso particular de la distribución *gamma*, para la cual

$$K_a^p(s) = \frac{1}{(1 + s/a)^p}. \quad (7.48)$$

La Fig. 7.8 muestra los diagramas de Bode correspondientes a $a = 1$ y distintos va-

lores de p . Nótese que para $p = 1$, como ya se había puntualizado, no puede existir bifurcación de Hopf pues la curva de fase nunca alcanza el valor -90° . También, en base a estos diagramas es posible asegurar que para todo valor de p mayor que 1 el sistema logístico exhibirá la bifurcación de Hopf. Por ejemplo, para $p = 3$ y $a = 1$ (en rojo en la Fig. 7.8) la curva de fase cruza por -90° para $\omega_0 \simeq 0.577$. Entonces, a partir de (7.47) y notando que $|K_a^p(i\omega)| = 1/|1+i\omega/a|^p$, resulta $r_0 \simeq 0.8879$.

Por otra parte, a partir de (7.48) se pueden expresar el módulo y el argumento de $K_a^p(i\omega)$ como

$$\rho := |K_a^p(i\omega)| = \frac{1}{[1 + (\omega/a)^2]^{p/2}}, \quad \Theta := \text{Arg} \{K_a^p(i\omega)\} = -p \arctan \left(\frac{\omega}{a} \right), \quad (7.49)$$

de donde $\omega/a = -\tan(\Theta/p)$, y reemplazando en la expresión del módulo resulta

$$\rho(\Theta) = \frac{1}{[1 + \tan^2(\Theta/p)]^{p/2}}. \quad (7.50)$$

Es decir, se obtiene la expresión polar de $K(i\omega)$, la cual, dados a y p permite hallar el valor crítico r_0 en forma explícita:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{\omega_0}{|K_a^p(i\omega_0)|} = \frac{-a \tan(\Theta/p)}{\rho(\Theta)} \Big|_{\Theta=-\pi/2} \\ &= a \tan \left(\frac{\pi}{2p} \right) \left[1 + \tan^2 \left(\frac{\pi}{2p} \right) \right]^{p/2} = a \sin \left(\frac{\pi}{2p} \right) \sec^{p+1} \left(\frac{\pi}{2p} \right). \end{aligned} \quad (7.51)$$

La consecuencia más simple de este resultado es que el valor crítico del parámetro r que inestabiliza el equilibrio es proporcional al valor de a . Por ejemplo, para $p = 2$ se obtiene $r_{02} = 2a$; para $p = 3$ resulta $r_{03} = (8/9)a = 0.8889a$ (compárese este valor con el valor aproximado que se obtuvo para $a = 1$ utilizando la Proposición 7.3). La Fig. 7.9 muestra la forma de la función $h(p) = \sin[\pi/(2p)] \sec^{p+1}[\pi/(2p)]$. Es claro que el rango de valores admisibles de r para tener un equilibrio estable se reduce a medida que p aumenta. Estos resultados se presentan en forma resumida como sigue:

Proposición 7.5 *Para cada par (a, p) con $a > 0$ y $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, el sistema (7.28) con distribución gamma $k_a^p(t)$ exhibirá una bifurcación de Hopf para el valor crítico del parámetro*

$$r_0 = a \sin[\pi/(2p)] \sec^{p+1}[\pi/(2p)]. \quad (7.52)$$

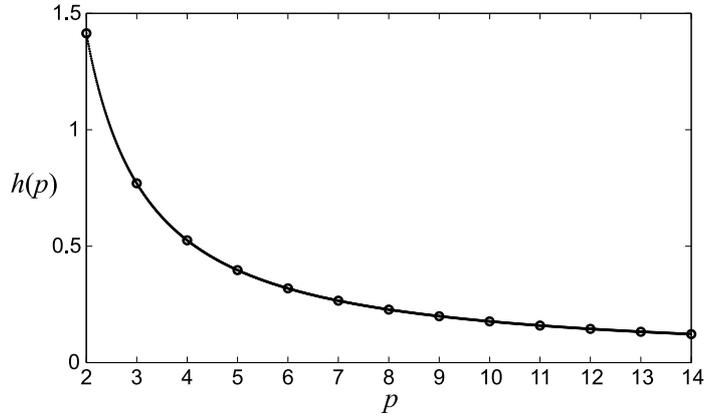


Figura 7.9: Ilustración de la función $h(p) = \sin\left(\frac{\pi}{2p}\right) \sec^{p+1}\left(\frac{\pi}{2p}\right)$.

El equilibrio no trivial será estable si $r < r_0$ e inestable si $r > r_0$. Además, la frecuencia crítica de Hopf es $\omega_0 = a \tan[\pi/(2p)]$. \diamond

7.5. Modelos equivalentes y datos iniciales

Como se ha mostrado en los ejemplos anteriores, el efecto de utilizar distintos *kernels* en un modelo dado se puede analizar con el MF modificando la función $K(s)$. Por otra parte, cuando se utilizan técnicas en el “dominio tiempo”, en general, no se trabaja con el modelo original sino que es usual formular un modelo “equivalente”. Esto se logra definiendo variables auxiliares y/o derivando las ecuaciones con respecto a t y encontrando relaciones entre las variables que permitan escribir las ecuaciones sin los términos de la forma

$$\int_{-\infty}^t x(u)k(t-u)du.$$

En esta sección se analizará con cierto detalle la formulación de estos modelos equivalentes para el estudio de EDRDs. Recuérdese que en la Sección 7.3.1, para el sistema (7.14), se mostró que al utilizar una distribución *gamma* $k_a^p(t)$ se puede formular un sistema EDO equivalente de dimensión $p + 1$ (véase la Ec. 7.17). Por ejemplo, esta estrategia es la que utilizó Ruan (2006) para estudiar la ecuación logística con

distribución *gamma*

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left[1 - \int_{-\infty}^t x(u)k_a^p(t-u)du \right]. \quad (7.53)$$

Si se considera $p = 1$ ($k_a^1(u) = ae^{-au}$), se puede definir la variable auxiliar

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u)k_a^p(t-u)du = a \int_{-\infty}^t x(u)e^{-a(t-u)}du. \quad (7.54)$$

Entonces, resulta

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= a \left\{ x(t)k(0) - a \int_{-\infty}^t x(u)e^{-a(t-u)}du \right\} \\ &= a(x(t) - y(t)), \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\lim_{u \rightarrow -\infty} k_a^1(u) = 0$. Por lo tanto, la Ec. (7.53) se puede reescribir como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= rx(t)(1 - y(t)), \\ \dot{y}(t) &= a(x(t) - y(t)). \end{cases} \quad (7.55)$$

Es decir, que para la EDRD (7.53) se puede hallar un sistema equivalente dado por dos EDOs de primer orden. Nótese que para continuar la solución del sistema (7.55), sólo es necesario conocer $(x(0), y(0)) := (x_0, y_0)$. Como se puntualizó en la Sección 7.3.1, esto no parece tener concordancia con el hecho de que en (7.53) se necesita conocer el dato inicial $x(t) = \phi(t)$, $\forall t \in (-\infty, 0]$. A primera vista, esta “historia previa” parece no influir en (7.55). Sin embargo, a partir de la Ec. (7.54), se tiene

$$y(0) = a \int_{-\infty}^0 x(u)e^{au}du = a \int_{-\infty}^0 \phi(u)e^{au}du, \quad (7.56)$$

es decir, que para obtener un dato inicial $(x(0), y(0)) := (x_0, y_0)$ que sea consistente con el sistema (7.53), para el cómputo de $y(0)$ se requiere conocer la función $\phi(t)$, $-\infty < t < 0$. En general, cuando se buscan soluciones “a largo término” o de estado estacionario, es común tomar $\phi(t) = x_0$ (constante) como dato inicial. En este caso, a partir de (7.56) es simple obtener $y(0) = x_0$. Dos preguntas lógicas son: ¿Qué sucede cuando se utilizan otras distribuciones? ¿Se puede obtener, en general, un modelo

equivalente en términos de una EDO? En lo que sigue, se intentará dar respuestas a estos interrogantes.

Rasmussen et al. (2003) estudiaron el sistema logístico con distribución uniforme “inmediata” dado por la Ec. (7.34) y que por comodidad se repite a continuación

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left[1 - \frac{1}{T} \int_0^T x(t-u) du \right]. \quad (7.57)$$

En este caso, se define

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t-u) du = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(v) dv, \quad (7.58)$$

y derivando con respecto a t , se obtiene $\dot{y}(t) = x(t) - x(t-T)$. Entonces, la Ec. (7.57) se puede reformular como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= rx(t)(1-y(t)), \\ \dot{y}(t) &= x(t) - x(t-T). \end{cases} \quad (7.59)$$

Nótese que sólo es necesario especificar el valor de $y(t)$ en $t=0$, es decir que el dato inicial debe ser:

$$x(t) = \phi(t), \quad -T \leq t \leq 0; \quad y(0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R}.$$

Nuevamente, a partir de la definición de $y(t)$ dada por (7.58), el valor y_0 se debe calcular como

$$y_0 = y(0) = \frac{1}{T} \int_{-T}^0 x(v) dv = \frac{1}{T} \int_{-T}^0 \phi(v) dv.$$

Por ejemplo, si $\phi(t)$ es una función constante, entonces $\phi(t) = x_0$, $-T \leq t \leq 0$, y resulta $y_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^0 x_0 dv = x_0$. Nótese que a diferencia de lo que ocurre con el sistema (7.14), en este caso el modelo equivalente está dado por una DDE. Para la distribución uniforme “posterior” se obtiene una formulación similar. El modelo considerado es

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left[1 - \frac{1}{(T_1 - T_0)} \int_{T_0}^{T_1} x(t-u) du \right], \quad (7.60)$$

y en este caso se define

$$y(t) = \frac{1}{(T_1 - T_0)} \int_{T_0}^{T_1} x(t - u) du = \frac{1}{(T_1 - T_0)} \int_{t-T_1}^{t-T_0} x(v) dv.$$

Entonces, resulta

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{(T_1 - T_0)} [x(t - T_0) - x(t - T_1)],$$

y el modelo equivalente también está dado por una DDE:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t)(1 - y(t)), \\ \dot{y}(t) = \frac{1}{(T_1 - T_0)} [x(t - T_0) - x(t - T_1)]. \end{cases} \quad (7.61)$$

Nuevamente, para obtener una solución, hace falta conocer $x(t) = \phi(t)$, $-T_1 \leq t \leq 0$ e $y_0 = (T_1 - T_0)^{-1} \int_{-T_1}^{-T_0} \phi(v) dv$. Si $\phi(t) = x_0$, $-T_1 \leq t \leq 0$, entonces $y(0) = (T_1 - T_0)^{-1} \int_{-T_1}^{-T_0} x_0 dv = x_0$. Rasmussen et al. (2003) utilizaron las formulaciones (7.59) y (7.61) para estudiar la ecuación logística.

Hasta el momento se ha mostrado que dado un sistema con retardo distribuido, en algunos casos es posible hallar un modelo equivalente, ya sea en términos de una EDO o de una DDE. Sin embargo, no es simple saber si siempre existe un modelo equivalente, y en caso de que exista, si es simple de obtener a partir de la ecuación original. Es decir, no se conoce si para cualquier distribución es posible manipular la ecuación de modo de “eliminar” el término integral. Tampoco resulta claro cuál es el número de variables adicionales que se deben definir para lograr esto, ni de qué factores depende este número. Como se mostró en la Sección 7.3.1, para el caso de la distribución *gamma*, la estructura particular de la función $k_a^p(u)$ determina el agregado de p variables auxiliares. En el caso de la distribución uniforme, es suficiente con definir una variable adicional. También resulta de interés ver qué sucede para la ecuación logística con distribución triangular

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left(1 - \int_{-\infty}^t x(u) k(t - u) du \right), \quad k(u) = \begin{cases} 0, & u < T_0, \\ \frac{1}{b^2}(u - T_0), & T_0 \leq u \leq T, \\ -\frac{1}{b^2}(u - T_1), & T < u \leq T_1, \\ 0, & u > T_1, \end{cases} \quad (7.62)$$

donde $T_0 = T - b$ y $T_1 = T + b$. En este caso, eligiendo

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t x(u)k(t-u)du \\ &= \frac{1}{b^2} \left\{ \int_{t-T}^{t-T_0} x(u)(t-u-T_0)du - \int_{t-T_1}^{t-T} x(u)(t-u-T_1)du \right\}, \end{aligned} \quad (7.63)$$

al derivar se obtiene

$$\begin{aligned} b^2 \dot{y}(t) &= x(t-T_0)0 - x(t-T)b + \int_{t-T}^{t-T_0} x(u)du \\ &\quad - x(t-T)(-b) + x(t-T_1)0 - \int_{t-T_1}^{t-T} x(u)du \\ &= \int_{t-T}^{t-T_0} x(u)du - \int_{t-T_1}^{t-T} x(u)du. \end{aligned}$$

Luego, se define

$$z(t) = \int_{t-T}^{t-T_0} x(u)du,$$

que verifica

$$z(t-b) = \int_{t-b-T}^{t-b-T_0} x(u)du = \int_{t-T_1}^{t-T} x(u)du.$$

Entonces, resulta $b^2 \dot{y}(t) = z(t) - z(t-b)$, y además $\dot{z}(t) = x(t-T_0) - x(t-T)$. Por lo tanto, para el modelo logístico con distribución triangular se obtiene la representación equivalente

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t)(1-y(t)), \\ \dot{y}(t) = \frac{1}{b^2}(z(t) - z(t-b)), \\ \dot{z}(t) = x(t-T+b) - x(t-T), \end{cases} \quad (7.64)$$

dato por una DDE. Nótese que en este caso, para un dato inicial constante $\phi(t) = x_0$, $-T_1 \leq t \leq 0$, resulta

$$z(0) = \int_{-T}^{-T_0} x_0 du = x_0(T - T_0) = x_0 b.$$

Además, a partir de (7.63), resulta simple obtener que $y(0) = x_0$. Nótese que si bien el mayor retardo en (7.64) es T , en la Ec. (7.62) resulta claro que $x(t)$ debe especificarse $\forall t \in [-T_1, 0]$. Además, para la variable $y(t)$ sólo es necesario conocer el valor puntual $y(0)$. Sin embargo, a diferencia de lo que se observó para las distribuciones anteriores, la variable auxiliar $z(t)$ debe especificarse $\forall t \in [-b, 0]$. Para un dato inicial constante, resulta $z(t) = z(0) = x_0 b$, $-b \leq t \leq 0$.

Desde un punto de vista más general, debe indagarse qué sucede para una ecuación de la forma

$$\dot{x}(t) = f \left(x(t), \int_{-\infty}^t x(u)k(t-u)du \right), \quad (7.65)$$

donde $f : C((-\infty, 0], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ se supone suave y $k(u)$ es un *kernel* genérico definido para $u \in [T_0, T_1]$ que se supone continuo en este intervalo (en particular, T_0 podría ser cero y T_1 podría ser arbitrariamente grande). Entonces, la integral en (7.65) se puede calcular entre $t - T_1$ y $t - T_0$ y se puede definir una variable auxiliar como

$$x_1(t) = \int_{t-T_1}^{t-T_0} x(u)k(t-u)du. \quad (7.66)$$

Si la función $k(u)$ tiene soporte no compacto, como en el caso de la función *gamma*, entonces se considera

$$x_1(t) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{t-T_1}^t x(u)k(t-u)du. \quad (7.67)$$

Para la función $x_1(t)$ dada por (7.66), derivando respecto de t se obtiene

$$\dot{x}_1(t) = x(t)k(T_0^{(+)}) - x(t - T_1)k(T_1^{(-)}) + \int_{t-T_1}^{t-T_0} x(u)k'(t-u)du, \quad (7.68)$$

donde $k(T_0^{(+)})$ representa el límite lateral a derecha $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} k(T_0 + \epsilon)$, y en forma análoga, $k(T_1^{(-)})$ representa el límite lateral a izquierda $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} k(T_1 - \epsilon)$ (véase la Fig. 7.10). Nótese que las definiciones puntuales $k(T_0)$ y $k(T_1)$ no resultan relevantes en la integral. De la Ec. (7.68) puede verse que si $k(T_0^{(+)}) \neq 0$ ó $k(T_1^{(-)}) \neq 0$, la dinámica de $x_1(t)$ estará gobernada por una DDE (nótese que esto ocurre siempre que $k(u)$ tenga una

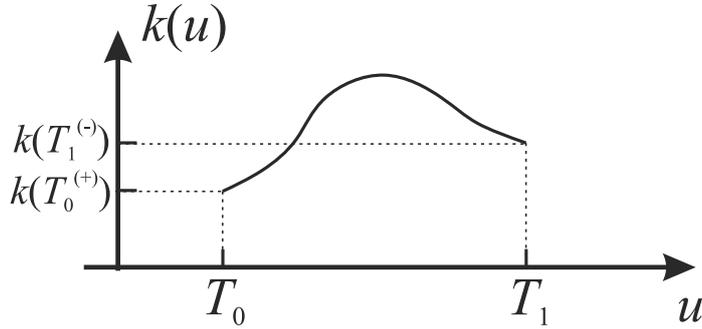


Figura 7.10: Kernel genérico definido en $[T_0, T_1]$.

discontinuidad tipo salto en $u = T_0$ ó $u = T_1$). Por el contrario, si $k(T_0^{(+)}) = 0$ y $k(T_1^{(-)}) = 0$ (es decir, $k(u)$ es continua en $u = T_0$ y $u = T_1$), entonces se tendrá

$$\dot{x}_1(t) = \int_{t-T_1}^{t-T_0} x(u)k'(t-u)du,$$

y si ahora se define

$$x_2(t) = \int_{t-T_1}^{t-T_0} x(u)k'(t-u)du,$$

entonces

$$\dot{x}_2(t) = x(t-T_0)k'(T_0^{(+)}) - x(t-T_1)k'(T_1^{(-)}) + \int_{t-T_1}^{t-T_0} x(u)k''(t-u)du,$$

donde $k'(T_0^{(+)})$ y $k'(T_1^{(-)})$ representan los límites laterales para la función $k'(u)$, definidos en forma análoga que para $k(u)$. En este caso, si $k'(T_0^{(+)}) = 0$ y $k'(T_1^{(-)}) = 0$ entonces, en la ecuación para $\dot{x}_2(t)$ no aparecen términos con retardos. Pero si $k'(T_0^{(+)}) \neq 0$ ó $k'(T_1^{(-)}) \neq 0$, entonces la dinámica de $x_2(t)$ estará gobernada por una DDE. Entonces, para que las ecuaciones resultantes estén dadas por EDOs se requiere que las derivadas tiendan a cero cuando $u \rightarrow T_0$ y cuando $u \rightarrow T_1$. Supongamos que $k(u)$ posee derivadas al menos de orden $n+1$ en (T_0, T_1) , y que éstas son continuas a tramos y verifican

$$\begin{aligned} k(T_0^{(+)}) = k'(T_0^{(+)}) = \dots = k^{(n-1)}(T_0^{(+)}) &= 0, & k^{(n)}(T_0^{(+)}) &\neq 0, \\ k(T_1^{(-)}) = k'(T_1^{(-)}) = \dots = k^{(n-1)}(T_1^{(-)}) &= 0, & k^{(n)}(T_1^{(-)}) &\neq 0. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Entonces se pueden asignar variables auxiliares de la forma

$$x_j(t) = \int_{t-T_1}^{t-T_0} x(u)k^{(j-1)}(t-u)du, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (7.70)$$

y todas éstas verifican

$$\begin{aligned} \dot{x}_j(t) &= x(t-T_0)k^{(j-1)}(T_0^{(+)}) - x(t-T_1)k^{(j-1)}(T_1^{(-)}) + \int_{t-T_1}^{t-T_0} x(u)k^{(j)}(t-u)du \\ &= \int_{t-T_1}^{t-T_0} x(u)k^{(j)}(t-u)du, \quad 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

En cambio, para la variable auxiliar x_{n+1} dada por

$$x_{n+1}(t) = \int_{t-T_1}^{t-T_0} x(u)k^{(n)}(t-u)du, \quad (7.71)$$

la derivada temporal resulta

$$\dot{x}_{n+1}(t) = x(t-T_0)k^{(n)}(T_0^{(+)}) - x(t-T_1)k^{(n)}(T_1^{(-)}) + \int_{t-T_1}^{t-T_0} x(u)k^{(n+1)}(t-u)du.$$

Es decir, se obtiene una DDE. En principio, es difícil conocer cuántas variables auxiliares es necesario definir para “eliminar” los términos integrales. Por ejemplo, como se mostró en la Sección 7.3.1, para la función *gamma* $k_a^p(u) = a^p u^{p-1} e^{-au} / (p-1)!$ es necesario agregar p variables adicionales. Pero esto sucede en particular para esta función. Otro tipo de funciones de distribución que resulta de interés analizar son los polinomios (como la distribución uniforme y triangular, aunque esta última es un polinomio definido por tramos). En principio, se considera un polinomio definido en $[T_0, T_1]$, y luego se analizará el caso de polinomios definidos por tramos en subintervalos de $[T_0, T_1]$. Supóngase que

$$k(u) = a_m u^m + a_{m-1} u^{m-1} + \dots + a_0, \quad u \in [T_0, T_1]. \quad (7.72)$$

Nótese que las condiciones (7.69) suponen cierta simetría de la distribución con respecto a la media. Resulta más general suponer

$$\begin{aligned} k(T_0^{(+)}) = k'(T_0^{(+)}) = \dots = k^{(p-1)}(T_0^{(+)}) &= 0, & k^{(p)}(T_0^{(+)}) &\neq 0, \\ k(T_1^{(-)}) = k'(T_1^{(-)}) = \dots = k^{(q-1)}(T_1^{(-)}) &= 0, & k^{(q)}(T_1^{(-)}) &\neq 0, \end{aligned} \quad (7.73)$$

que para el *kernel* polinómico implica que $k(u) = (u - T_0)^p(u - T_1)^q z(u)$, con $z(T_0) \neq 0$ y $z(T_1) \neq 0$. Además, sin pérdida de generalidad se supone que $p > q$, y en principio, para el análisis que sigue puede considerarse que $z(u)$ es de grado cero (una constante). Entonces, si se asignan variables como en (7.70), y se consideran las derivadas

$$\dot{x}_j(t) = x(t - T_0)k^{(j-1)}(T_0^{(+)}) - x(t - T_1)k^{(j-1)}(T_1^{(-)}) + \int_{t-T_1}^{t-T_0} x(u)k^{(j)}(t-u)du,$$

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x(t), x_1(t)) \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{q+1}(t) = -x(t - T_1)k^{(q)}(T_1^{(-)}) + x_{q+2}(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{p+1}(t) = x(t - T_0)k^{(p)}(T_0^{(+)}) - x(t - T_1)k^{(p)}(T_1^{(-)}) + x_{p+2}(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_m(t) = x(t - T_0)k^{(m-1)}(T_0^{(+)}) - x(t - T_1)k^{(m-1)}(T_1^{(-)}) + x_{m+1}(t) \\ \dot{x}_{m+1}(t) = m!a_m(x(t - T_0) - x(t - T_1)), \end{array} \right. \quad (7.74)$$

donde la ecuación para $\dot{x}_{m+1}(t)$ surge de considerar (7.72). Si en la factorización de $k(u)$ el polinomio $z(u)$ es de grado ℓ , entonces en el sistema anterior aparecen $m + \ell + 1$ variables adicionales en lugar de $m + 1$, pero la formulación es enteramente análoga. La finalidad de este desarrollo es mostrar que sin importar cuán suave sea $k(u)$ en los extremos del intervalo de definición, el sistema equivalente estará dado por una DDE. Si la distribución está definida a tramos por polinomios, el efecto es similar: supóngase que

$$k(u) = \begin{cases} r(u), & T_0 \leq u \leq b, \\ s(u), & b < u \leq T_1, \end{cases}$$

donde $r(u)$ y $s(u)$ son polinomios y supóngase también que $r(b) = s(b)$, de modo que $k(u)$ es continua en (T_0, T_1) . Nótese que al calcular las derivadas de $k(u)$, éstas resultan continuas a tramos a partir de cierto orden. Por ejemplo, si $r(u)$ es de grado ℓ y $s(u)$ es de grado m , y además $\ell < m$, entonces

$$k^{(\ell)}(u) = \begin{cases} a\ell, & T_0 \leq u \leq b, \\ s^{(\ell)}(u), & b \leq u \leq T_1, \end{cases}$$

donde a es una constante. Entonces al asignar variables auxiliares como en (7.71), se obtendrá

$$\begin{aligned} x_{\ell+1}(t) &= \int_{t-T_1}^{t-T_0} x(u)k^{(\ell)}(t-u)du \\ &= \int_{t-T_1}^{t-b} x(u)s^{(\ell)}(t-u)du + al \int_{t-b}^{t-T_0} x(u)du, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\ell+1}(t) &= s^{(\ell)}(b^{(+)})x(t-b) - s^{(\ell)}(T_1^{(-)})x(t-T_1) + \int_{t-T_1}^{t-b} x(u)s^{(\ell+1)}(t-u)du \\ &\quad + al[x(t-T_0) - x(t-b)]. \end{aligned}$$

Es decir, a menos que $s^{(\ell)}(b^{(+)}) = -al$, además de los retardos causados por las discontinuidades en T_0 y T_1 aparecen retardos causados por las discontinuidades de las derivadas de $k(u)$ en $u = b$ (nótese que esto es lo que ocurre para el *kernel* triangular en (7.64)).

Estos resultados sugieren que cuando se utilice un *kernel* definido en un intervalo cerrado $[T_0, T_1]$ se arribará a un modelo equivalente definido por una DDE. Además, si este *kernel* es un polinomio, el grado del mismo determinará el número necesario de variables a agregar. Desde el punto de vista práctico esto resulta un tanto desalentador: si se desea estudiar el efecto de distintos *kernels* en un sistema dado, en cada caso debe reformularse el modelo equivalente. El mismo tendrá un número de variables en principio no conocido y además puede tener múltiples retardos.

Sin embargo, desde la perspectiva del Método en Frecuencia, el problema parece ser más simple: si se modifica la distribución sólo cambia la expresión de la transformada $K(s)$, pero la estructura del problema, la cantidad de variables, la realización a utilizar, etc., no se modifican. También, el efecto de las discontinuidades del kernel puede interpretarse en forma simple desde la perspectiva de la transformada de Laplace. Por ejemplo, para una función como la que se muestra en la Fig. 7.10, se podría expresar $k(u)$ como

$$k(u) = g(u)[h(t-T_0) - h(t-T_1)],$$

donde $g(u)$ es una función continua en \mathbb{R} y $h(u)$ es la función escalón unitario dada por (7.41). Entonces, $K(s)$ está dada por

$$K(s) = \mathcal{L}\{g(t + T_0)\} e^{-sT_0} - \mathcal{L}\{g(t + T_1)\} e^{-sT_1},$$

y para un sistema escalar, el autovalor en frecuencia que se obtiene es de la forma (7.23), es decir,

$$\widehat{\lambda}(s; \mu) = \frac{-1}{s + 1} [1 + \delta_1 + \delta_2 K(s)]. \quad (7.75)$$

Entonces, la ecuación característica resulta

$$s - \delta_1 - \delta_2 K(s) = s - \delta_1 - \delta_2 [G_{T_0}(s)e^{-sT_0} - G_{T_1}(s)e^{-sT_1}] = 0, \quad (7.76)$$

donde $G_{T_0}(s) := \mathcal{L}\{g(t + T_0)\}$ y $G_{T_1}(s) := \mathcal{L}\{g(t + T_1)\}$ usualmente están dadas por cocientes entre polinomios de la variable s . Entonces, la Ec. (7.76) resulta un cuasipolinomio que se puede interpretar como la ecuación característica de una DDE. Por otra parte, supóngase que en (7.65) la función $k(u)$ no tiene soporte compacto y que es continua en \mathbb{R} . Entonces $x_1(t)$ se define como en (7.67). En este caso resulta

$$\dot{x}_1(t) = x(t)k(0) + \int_{-\infty}^t x(u)k'(t-u)du,$$

dado que, como $\int_{-\infty}^t k(u)du$ es convergente, entonces $\lim_{T_1 \rightarrow \infty} k(T_1) = 0$. En principio, si

$$\int_{-\infty}^t x(u)k^{(n)}(t-u)du,$$

resulta convergente para todo n (como sucede para la distribución *gamma*), entonces

$$\dot{x}_j(t) = x(t)k^{(j-1)}(0) + \int_{-\infty}^t x(u)k^{(j)}(t-u)du, \quad 1 \leq j \leq n + 1,$$

y en principio en estas ecuaciones no aparecen términos con retardos constantes. Nuevamente, el MF provee una interpretación más simple: si $k(u)$ es continua para $u \in \mathbb{R}$, su transformada de Laplace $K(s)$ en general no contiene términos de la forma e^{-sT} . En consecuencia, a partir del autovalor (7.75), se obtiene una ecuación característica que resulta un polinomio y no un cuasipolinomio de la variable s .

7.6. Ejemplo: Neuronas acopladas

Como ejemplo final de este capítulo se propone el estudio del modelo de dos neuronas acopladas que ha sido presentado en (Liao et al., 2001). El mismo está dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + a_1 f \left(x_2(t) - b_2 \int_{-\infty}^t k(t-u)x_2(u)du \right), \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + a_2 f \left(x_1(t) - b_1 \int_{-\infty}^t k(t-u)x_1(u)du \right), \end{cases} \quad (7.77)$$

donde $a_i, b_i \geq 0$. Las variables $x_i(t)$ representan el potencial medio de la neurona y b_i es una medida de la influencia de la historia previa². Se supone que $f(\cdot)$ es suave y además verifica

$$f(0) = 0, \quad uf(u) > 0, \quad \forall u > 0.$$

En el trabajo de Liao et al. (2001), los autores estudiaron la existencia de bifurcaciones de Hopf mediante la técnica de formas normales (Faria & Magalhães, 1995) para el caso en que $k(u)$ es una función *gamma* débil, es decir, $k(u) = ae^{-au}$.

Para el análisis del sistema (7.77) utilizando el MF se elige la siguiente realización

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{y}^*(t)) = \begin{pmatrix} a_1 f(b_2 y_{2k} - y_2) \\ a_2 f(b_1 y_{1k} - y_1) \end{pmatrix},$$

donde se ha utilizado la notación compacta $y_{ik}(t) := \int_{-\infty}^t y_i(u)k(t-u)du$. La función de transferencia para la parte lineal es

$$G^*(s) = \begin{pmatrix} G(s) \\ G(s)K(s) \end{pmatrix}, \quad G(s) = \frac{1}{s+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que como $f(0) = 0$, entonces $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0, 0)$ es un equilibrio de (7.77), es decir $\hat{\mathbf{y}}^* = 0$. Para este punto de equilibrio, la matriz Jacobiana está dada por

$$\begin{aligned} J(\mu) &= \begin{pmatrix} 0 & -a_1 f'[(b_2-1)\hat{y}_2] & 0 & a_1 b_2 f'[(b_2-1)\hat{y}_2] \\ -a_2 f'[(b_1-1)\hat{y}_1] & 0 & a_2 b_1 f'[(b_1-1)\hat{y}_1] & 0 \end{pmatrix} \\ &= f' \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & a_1 b_2 \\ -a_2 & 0 & a_2 b_1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

²Un sistema similar ha sido estudiado por Liao et al. (2004), donde la función no lineal se modela como una tangente hiperbólica.

donde μ representa el vector de parámetros y $f' := f'(0)$. Luego, la matriz de lazo $G^*(s)J(\mu)$ está dada por

$$G^*(s)J(\mu) = \frac{f'}{s+1} \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & a_1 b_2 \\ -a_2 & 0 & a_2 b_1 & 0 \\ 0 & -a_1 K & 0 & a_1 b_2 K \\ -a_2 K & 0 & a_2 b_1 K & 0 \end{pmatrix},$$

donde, por simplicidad se denota $K := K(s)$. La ecuación característica $h(\lambda, s; \mu) = |\lambda I_4 - G^*(s)J(\mu)| = 0$ resulta

$$\begin{aligned} h(\lambda, s; \mu) &= \begin{vmatrix} \lambda & \frac{a_1 f'}{s+1} & 0 & \frac{-a_1 b_2 f'}{s+1} \\ \frac{a_2 f'}{s+1} & \lambda & \frac{-a_2 b_1 f'}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{a_1 f' K}{s+1} & \lambda & \frac{-a_1 b_2 f' K}{s+1} \\ \frac{a_2 f' K}{s+1} & 0 & \frac{-a_2 b_1 f' K}{s+1} & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \frac{\lambda^2}{(s+1)^2} \{ \lambda^2 (s+1)^2 - a_1 a_2 (f')^2 [b_1 K(s) - 1] [b_2 K(s) - 1] \} = 0. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Entonces, la condición de bifurcación $h(-1, s; \mu) = 0$ se puede expresar como

$$(s+1)^2 - a_1 a_2 (f')^2 [b_1 K(s) - 1] [b_2 K(s) - 1] = 0. \quad (7.79)$$

Es simple ver que las Ecs. (7.78) y (7.79) resultan más simples de resolver si $b_1 = b_2$, y por ello, en primer lugar, se analizará este caso. Luego se abordará la situación más general en la que $b_1 \neq b_2$.

7.6.1. Caso simétrico ($b_1 = b_2$)

En primer lugar, se comenzará estudiando el caso que se denominará *simétrico*, en el cual el peso de la historia previa es igual para las dos neuronas ($b_1 = b_2 = b$). En este caso, a partir de (7.78), se obtiene la expresión del autovalor en frecuencia como

$$\widehat{\lambda}(s; \mu) = \delta \frac{[bK(s) - 1]}{s+1},$$

donde $\delta := \sqrt{a_1 a_2} f'$. La condición de bifurcación de Hopf $\widehat{\lambda}(i\omega_0; \mu) = -1$ resulta en $\delta [bK(i\omega_0) - 1] = -1 - i\omega_0$, de donde se obtiene

$$K(i\omega_0) = \frac{\delta - 1 - i\omega_0}{b\delta}. \quad (7.80)$$

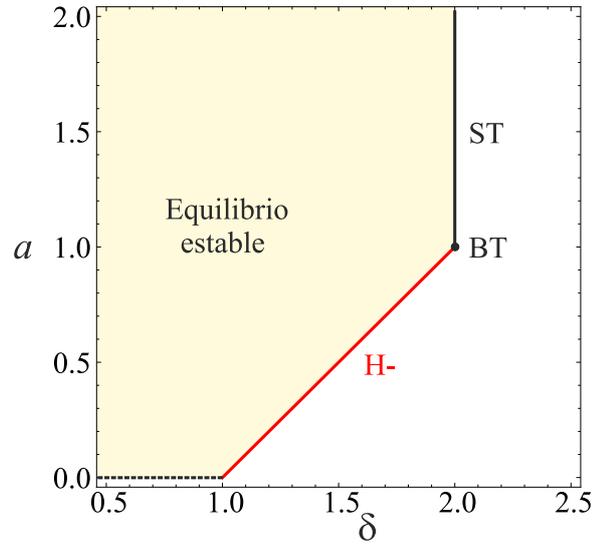


Figura 7.11: Diagrama de bifurcación para el sistema (7.77) con *kernel gamma* débil ($p = 1$).

Tomando como ejemplo el *kernel gamma*, se tiene $K_a^p(s) = a^p/(s+a)^p$ y la condición de bifurcación (7.80) resulta

$$a^p b \delta = (\delta - 1 - i\omega_0)(a + i\omega_0)^p. \quad (7.81)$$

Por otra parte, si en (7.80) se hace $\omega_0 = 0$, resulta $K(0) = (\delta - 1)/(b\delta)$, entonces, siempre ocurre una bifurcación estática para $\delta = \delta_{ST} := 1/(1 - b)$.

Kernel gamma con $p=1$

Para el caso débil ($p = 1$) utilizado por Liao et al. (2001), la Ec. (7.81) resulta

$$ab\delta = a(\delta - 1) + \omega_0^2 + i\omega_0(\delta - 1 - a),$$

y mediante cálculos simples se obtiene

$$a = \delta - 1, \quad \omega_0 = \sqrt{(\delta - 1)[\delta(b - 1) + 1]}.$$

Para que exista solución, deben verificarse $\delta > 1$ y $\delta(b - 1) + 1 > 0$. Para el caso límite en que $\delta = \delta_{ST} = 1/(1 - b)$, la frecuencia crítica tiende a cero, y la curva de Hopf colisiona con la estática (ST) en un punto denominado BT (Bogdanov-Takens). En la Fig.7.11 se muestra el diagrama de bifurcación, donde se ha tomado $b = 1/2$.

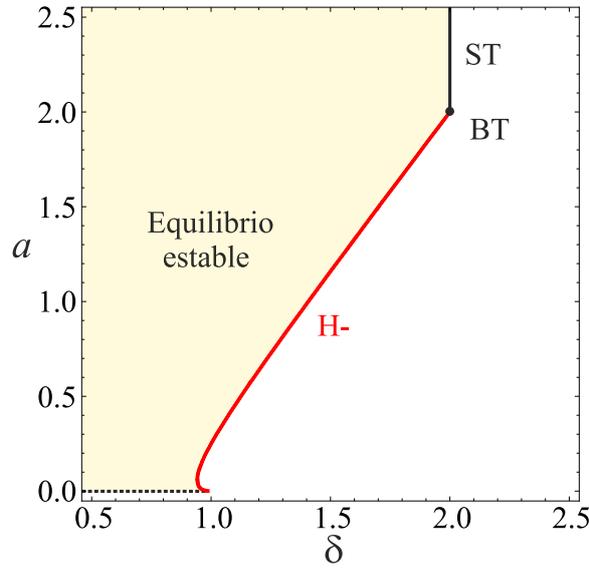


Figura 7.12: Diagrama de bifurcación para el sistema (7.77) con *kernel gamma* fuerte ($p = 2$).

Kernel gamma con $p=2$

Para el caso del *kernel* fuerte ($p = 2$), la Ec. (7.81) resulta

$$a^2 b \delta = (\delta - 1)(a^2 - \omega_0^2) + 2a\omega_0^2 + i\omega_0[2a(\delta - 1) + \omega_0^2 - a^2],$$

y separando partes real e imaginaria se obtiene

$$\begin{cases} a^2 b \delta &= (\delta - 1)(a^2 - \omega_0^2) + 2a\omega_0^2 \\ 0 &= \omega_0[2a(\delta - 1) + \omega_0^2 - a^2]. \end{cases}$$

De la primera ecuación resulta $\omega_0^2 = a^2 - 2a(\delta - 1)$, y reemplazando en la segunda, luego de unos cálculos simples se llega a

$$ab\delta = 2(\delta - 1 - a)^2. \quad (7.82)$$

La ecuación anterior define en forma implícita (para valores fijos de b) la curva de Hopf en el plano (δ, a) . Como antes, debe considerarse que la curva de Hopf colisiona con la curva estática (ST) para $\delta_{ST} = 1/(1 - b)$. La Fig.7.12 muestra el diagrama de bifurcación, donde nuevamente se ha considerado $b = 1/2$.

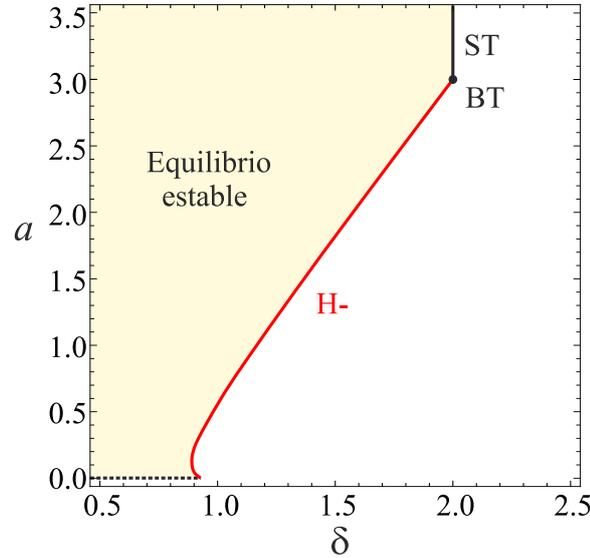


Figura 7.13: Diagrama de bifurcación para el sistema (7.77) con *kernel gamma* con $p = 3$.

Kernel gamma con $p=3$

Tomando $p = 3$ en (7.81), se obtiene

$$b\delta a^3 = (\delta - 1 - i\omega_0) [a(a^2 - 3\omega_0^2) + i\omega_0(3a^2 - \omega_0^2)].$$

Expandiendo factores y separando partes real e imaginaria se llega a

$$\begin{cases} b\delta^3 &= (\delta - 1)a(a^2 - 3\omega_0^2) + \omega_0^2(3a^2 - \omega_0^2) \\ 0 &= \omega_0[(\delta - 1)(3a^2 - \omega_0^2) - a(a^2 - 3\omega_0^2)]. \end{cases} \quad (7.83)$$

De la segunda ecuación es posible despejar ω_0^2 como

$$\omega_0^2 = \frac{a^2[3(\delta - 1) - a]}{\delta - 1 - 3a}. \quad (7.84)$$

Luego de unos cálculos sencillos, la primera ecuación en (7.83) se puede escribir como

$$\omega_0^4 + 3a(\delta - a - 1)\omega_0^2 + a^3[\delta(b - 1) - 1] = 0.$$

Reemplazando ω_0^2 dado por (7.84), la ecuación anterior es equivalente a $F(\delta, a) = 0$, donde $F(\delta, a)$ es una forma polinómica en los parámetros δ y a (considerando valores fijos de b). Es decir, $F(\delta, a)$ se puede expresar como

$$F(\delta, a) = \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^M c_{jk} \delta^j a^k. \quad (7.85)$$

La ecuación $F(\delta, a) = 0$ define en forma implícita la curva de Hopf en el espacio de parámetros (δ, a) , como se muestra en la Fig. 7.13.

7.6.2. Caso general ($b_1 \neq b_2$)

Retomando la ecuación característica (7.78), se obtiene

$$\lambda^2 = \frac{\delta^2 [b_1 K(s) - 1] [b_2 K(s) - 1]}{(s + 1)^2}, \quad (7.86)$$

donde, como antes, $\delta^2 := a_1 a_2 (f')^2$. Para un número complejo w , considérese la rama de la raíz cuadrada tal que $\sqrt{w} = \sqrt{|w|} e^{i\theta/2}$, donde $\theta := \text{Arg}\{w\}$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Entonces, $\hat{\lambda}(s; \mu)$ se puede expresar como

$$\hat{\lambda}(s; \mu) = \frac{\delta \sqrt{b_1 K(s) - 1} \sqrt{b_2 K(s) - 1}}{s + 1}. \quad (7.87)$$

Por la presencia de las raíces complejas, la forma funcional de este autovalor en frecuencia es diferente a la que se ha trabajado hasta el momento. Nótese que (7.87) permitiría no sólo estudiar asimetrías en los parámetros b_1 y b_2 sino también diferencias en los *kernels* de las dos neuronas. Si en (7.87) se hace $s = 0$, se obtiene la solución

$$\delta_{ST} = \frac{1}{\sqrt{(b_1 - 1)(b_2 - 1)}}.$$

Utilizando (7.86), la condición de bifurcación se expresa como

$$(1 + i\omega_0)^2 - \delta^2 [b_1 K(i\omega_0) - 1] [b_2 K(i\omega_0) - 1] = 0,$$

que para el *kernel gamma* $K_a^p(s) = a^p / (s + a)^p$, resulta

$$(1 + i\omega_0)^2 (a + i\omega_0)^{2p} - \delta^2 [b_1 a^p - (a + i\omega_0)^p] [b_2 a^p - (a + i\omega_0)^p] = 0. \quad (7.88)$$

Por ejemplo, para el caso débil, reemplazando $p = 1$ en (7.88), se obtiene

$$(1 + i\omega_0)^2 (a + i\omega_0)^2 - \delta^2 [ab_1^* - i\omega_0] [ab_2^* - i\omega_0] = 0,$$

donde $b_1^* := b_1 - 1$ y $b_2^* := b_2 - 1$. Expandiendo factores y separando partes real e imaginaria se llega a

$$\begin{cases} (a^2 - \omega_0^2)(1 - \omega_0^2) - 4a\omega_0^2 - \delta^2(a^2 b_1^* b_2^* - \omega_0^2) = 0 \\ 2[a^2 - \omega_0^2 + a(1 - \omega_0^2)] + a\delta^2(b_1^* + b_2^*) = 0. \end{cases} \quad (7.89)$$

De la segunda ecuación, se obtiene

$$\omega_0^2 = a \left[1 + \frac{\delta^2(b_1^* + b_2^*)}{2(a+1)} \right].$$

Reemplazando en la primera, se halla que la condición de Hopf equivale a $F(\delta, a, b_1^*, b_2^*) = 0$, donde F es una forma polinómica de sus variables. Por ejemplo, para valores fijos de b_1^* y b_2^* , esta condición se reduce a $F(\delta, a) = 0$, donde $F(\delta, a)$ es de la forma (7.85). La Fig. 7.14 muestra los diagramas de bifurcación que se obtienen manteniendo $b_2 = 1/2$ y tomando distintos valores de b_1 .

7.7. Conclusiones del Capítulo

En este capítulo se ha mostrado que el Método en Frecuencia permite el estudio de EDRDs, utilizando una formulación análoga a la descrita en el Capítulo 4 para el caso de retardos constantes. De hecho, la formulación para EDRDs es más general que la desarrollada para DDEs, pues se ha mostrado que un sistema con retardo constante puede obtenerse como caso particular de un sistema con retardo distribuido. La formulación con el MF resulta natural al pensar el término integral del retardo distribuido como un producto de convolución, que en el dominio de Laplace se representa como un producto de funciones transformadas. Entonces, la variable “retardada” puede verse como la variable original que pasa por un “filtro”, cuya función de transferencia es $K(s)$. Esta interpretación permite una representación en forma de bloques realimentados para la cual el MF es directamente aplicable.

Con respecto a las EDRDs, la ventaja del enfoque frecuencial es que evita la formulación de un modelo equivalente, que resulta necesario cuando se trabaja con las técnicas denominadas “del dominio tiempo” (véase Culshaw et al. (2003); Ruan (2006); Smith (2010)). De hecho, en (Liao et al., 2004), se utiliza el MF para estudiar un sistema neuronal como el (7.77), pero utilizando un modelo equivalente de orden seis. En este capítulo, se ha mostrado que la aplicación del MF resulta mucho más simple si el problema se formula como se propone en la Sección 7.3.2.

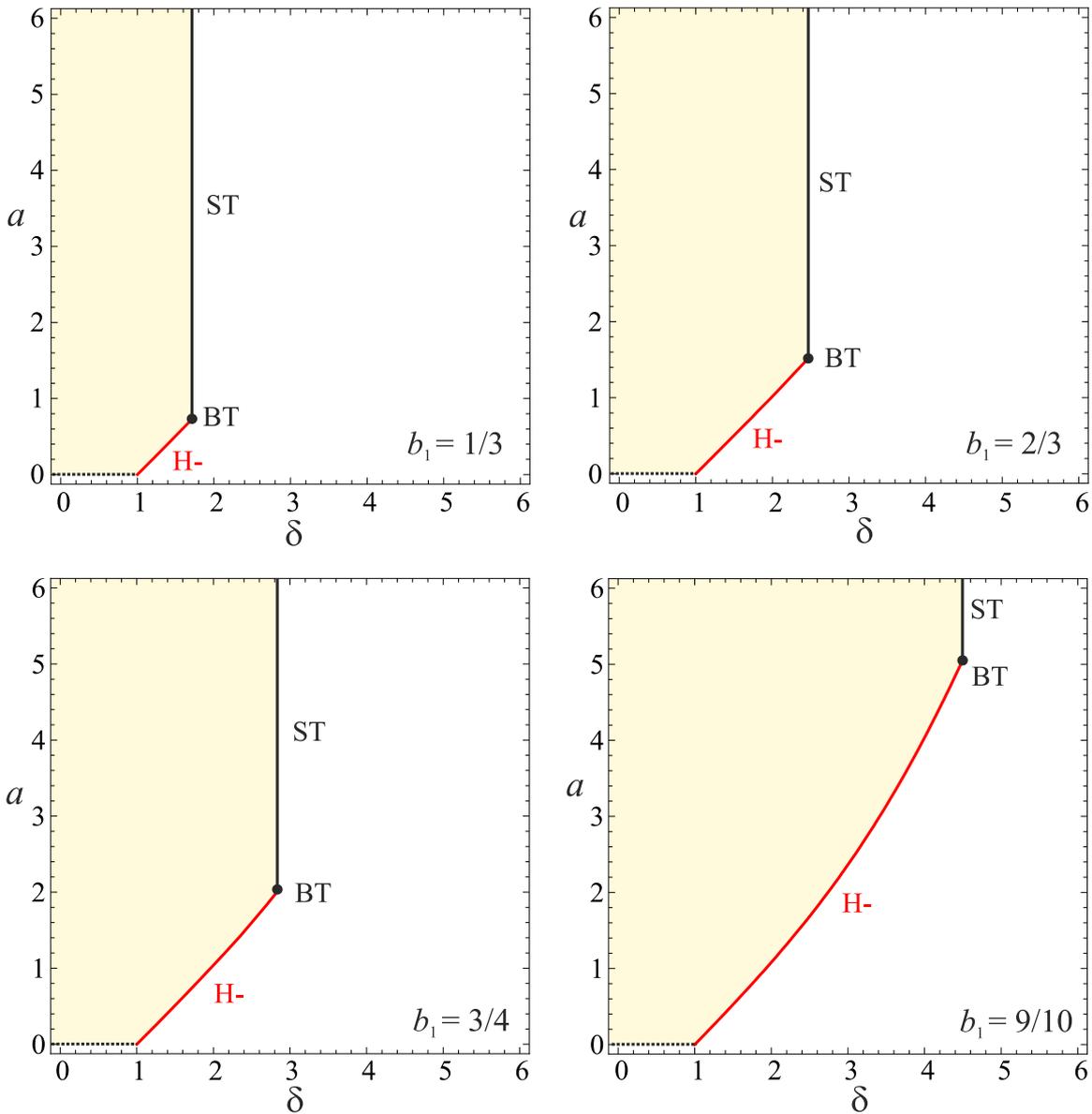


Figura 7.14: Diagramas de bifurcación para el sistema (7.77) con *kernel gamma* débil, con $b_2 = 1/2$ y diferentes valores de b_1 . La región sombreada indica que el equilibrio es estable.

Capítulo 8

Conclusiones y trabajos futuros

A continuación, se presentan las principales conclusiones de esta tesis:

- Se ha desarrollado una extensión del método dado por el teorema gráfico de bifurcación de Hopf, permitiendo el análisis de bifurcaciones locales de una amplia variedad de ecuaciones diferenciales funcionales retardadas. Se ha mostrado cómo esta extensión puede utilizarse para obtener aproximaciones de la amplitud y frecuencia de las oscilaciones que aparecen en EDFRs, tomando como ejemplos distintos modelos del oscilador de van der Pol con retardos. Además, para balances armónicos de alto orden pueden utilizarse las mismas fórmulas que para sistemas EDOs, como las que se encuentran en (Moiola & Chen, 1996; Robbio et al., 2007).
- El estudio de sistemas con retardos también se ha abordado desde el punto de vista de sistemas discretos, lo cual resulta de interés cuando se trabaja con sistemas muestreados. Sin embargo, la motivación principal del estudio de éstos sistemas es que las bifurcaciones de mapas permiten comprender las bifurcaciones de ciclos límites de sistemas continuos. Para un modelo relativamente simple se han encontrado comportamientos dinámicos complejos, cuya ocurrencia depende de la paridad del retardo utilizado en el lazo de realimentación.
- Como aplicación principal se realizó el análisis de sistemas de control de congestión de internet, que es una temática de gran actividad actualmente. El estudio de este tipo de sistemas desde el punto de vista de bifurcaciones es fundamental para poder comprender los fenómenos oscilatorios complejos que otros autores observan en las simulaciones de redes. La obtención del escenario dinámico completo permite conocer efecto de la variación de parámetros clave de la red sobre su comportamiento. De esta forma, se pueden obtener ideas más claras de cómo

mejorar los algoritmos de control de congestión de datos, ya sea ajustando los parámetros en forma conveniente o diseñando otras topologías de controladores.

- Se mostró cómo la metodología en frecuencia puede aplicarse a sistemas con retardos distribuidos, los cuales tienen diversas aplicaciones, como por ejemplo redes neuronales (Ruan & Filfil, 2004), osciladores acoplados (Atay, 2003) y principalmente en modelos de población (Ruan, 2006) y de transmisión de enfermedades (van der Driessche & Watmough, 2000). Es interesante notar que la variante del MF propuesta en el Capítulo 7 es más general que la presentada en el Capítulo 4 para DDEs. El enfoque frecuencial parece más natural que otras herramientas más clásicas dada la estructura propia del problema, que puede interpretarse en forma muy simple mediante el uso de la transformada de Laplace. Además, la variante propuesta posee ciertas ventajas computacionales ya que no es necesario formular un modelo equivalente que, dependiendo de la función de distribución que se utilice, puede ser difícil de obtener.

Como trabajos futuros a los desarrollos de esta tesis, se propone continuar la investigación en las siguientes líneas:

- Extender el análisis presentado en el Capítulo 6 a otros esquemas de control por retardos, como por ejemplo los presentados en (de Souza Vieira & Lichtenberg, 1996). En este trabajo, los autores analizan algunos esquemas utilizando un retardo de una muestra. El MF permite analizar dichos esquemas para cualquier valor del retardo, lo cual podría ser útil para determinar si otras estrategias de control pueden provocar dinámicas complejas como las que se hallaron para el sistema presentado en el Capítulo 5.
- Ampliar el análisis realizado en el Capítulo 5 considerando otros esquemas de controladores que están surgiendo actualmente. Además, los desarrollos del Capítulo 6 pueden utilizarse para estudiar modelos discretos de los algoritmos de control de datos, como por ejemplo el analizado en (Ranjan et al., 2004). Esto permitirá combinar la potencialidad de las herramientas que se tiene tanto para el análisis de sistemas continuos como discretos.

Bibliografía

- Agamennoni, G., Calandrini, G., & Moiola, J. L. (2008). Some realizations in the study of oscillations with a frequency method. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 14, 99–109.
- Allwright, D. J. (1977). Harmonic balance and the Hopf bifurcation theorem. *Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc.*, 82, 453–467.
- Atay, F. M. (1998). Van der Pol's oscillator under delayed feedback. *Journal of Sound and Vibration*, 218, 333–339.
- Atay, F. M. (2003). Distributed delays facilitate amplitude death of coupled oscillators. *Physical Review Letters*, 91(9), 094101(1–4).
- Balachandran, B. (2001). Nonlinear dynamics of milling processes. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 359, 793–819.
- Bath, K. P. M. & Koivo, H. N. (1976). Modal characterizations of controllability and observability in time delay systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 21, 292–293.
- Bel, A. & Reartes, W. (2012). The homotopy analysis method in bifurcation analysis of delay differential equations. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 22(8), 1230024(1–12).
- Bellman, R. & Cooke, K. L. (1963). *Differential-Difference Equations*. New York: Academic Press.
- Bernard, S., Bélair, J., & Mackey, M. C. (2001). Sufficient conditions for stability of linear differential equations with distributed delay. *Disc. Cont. Dyn. Syst. Series B*, 1(2), 233–256.
- Bleich, M. E. & Socolar, J. E. S. (1996). Stability of periodic orbits controlled by time-delay feedback. *Physics Letters A*, 210, 87–94.

- Buchner, T. & Zebrowski, J. J. (2000). Logistic map with a delayed feedback: Stability of a discrete time-delay control of chaos. *Physical Review E*, 63, 016210(1–7).
- Chen, G., Lu, J., Nicholas, B., & Ranganathan, S. M. (1999). Bifurcation dynamics in discrete-time delayed-feedback control systems. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 9(1), 287–293.
- Chung, K. W., Chan, C. L., & Xu, J. (2006). A perturbation-incremental method for delay differential equations. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 16(9), 2529–2544.
- Crauste, F. (2010). *Stability and Hopf Bifurcation for a First-Order Delay Differential Equation with Distributed Delay*, ed. by F. M. Atay, *Complex Time-Delay Systems*. Springer.
- Culshaw, R. V., Ruan, S., & Webb, G. (2003). A mathematical model of cell-to-cell spread of HIV-1 that includes a time delay. *J. Math. Biol.*, 46, 425–444.
- D’Amico, M. B. (2004). *Análisis y Control de Bifurcaciones en Sistemas no Lineales Discretos*. Tesis doctoral, Dpto. de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras, Universidad Nacional del Sur.
- D’Amico, M. B., Moiola, J. L., & Paolini, E. E. (2002). Hopf bifurcation for maps: a frequency domain approach. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 49(3), 281–288.
- D’Amico, M. B., Moiola, J. L., & Paolini, E. E. (2004). Study of degenerate bifurcations in maps: A feedback system approach. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14(5), 1625–1641.
- Das, S. L. & Chatterjee, A. (2002). Multiple scales without center manifold reductions for delay differential equations near Hopf bifurcations. *Nonlinear Dynamics*, 30, 323–335.
- de Oliveira, J. C. F. (2002). Oscillations in a van der Pol equation with delayed argument. *J. Math. Anal. Appl.*, 275, 789–803.
- de Souza Vieira, M. & Lichtenberg, A. J. (1996). Controlling chaos using nonlinear feedback with delay. *Physical Review E*, 54(2), 1200–1207.

- Ding, D., Zhu, J., & Luo, X. (2009). Hopf bifurcation analysis in a fluid flow model of internet congestion control algorithm. *Nonlinear Anal.: Real World Appl.*, 10, 824–839.
- Engelborghs, K., Luzyanina, T., & Samaey, G. (2001). *DDE-BIFTOOL V. 2.00: a Matlab package for bifurcation analysis of delay differential equations*. TW report 330, Department of Computer Science, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.
- Faria, T. & Magalhães, L. T. (1995). Normal forms for retarded functional differential equations and applications to Bogdanov-Takens singularity. *Journal of Differential Equations*, 122(2), 201–224.
- Fitchner, A., Just, W., & Radons, G. (2004). Analytical investigation of modulated time-delayed feedback control. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37, 3385–3391.
- Flunkert, V. (2011). *Delay-Coupled Complex Systems*. Springer Theses. Springer.
- Gentile, F. S., Bel, A. L., D’Amico, M. B., & Moiola, J. L. (2011). Effect of delayed feedback on the dynamics of a scalar map via a frequency-domain approach. *Chaos*, 21, 023117(1–9).
- Gentile, F. S., Moiola, J. L., & Paolini, E. E. (2012a). Nonlinear dynamics of internet congestion control: A frequency-domain approach. Artículo enviado a la revista Comm. Nonlinear Science and Num. Simulation.
- Gentile, F. S., Moiola, J. L., & Paolini, E. E. (2012b). On the study of bifurcations in delay-differential equations: A frequency-domain approach. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(6), 1250137(1–15).
- Hale, J. K. & Verduyn Lunel, S. M. (1993). *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer, first edition.
- Hénon, M. (1976). A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. in Mathematical Physics*, 50, 69–77.

- Hollot, C. V., Misra, V., Towsley, D., & Gong, W. (2002). Analysis and design of controllers for AQM routers supporting TCP flows. *IEEE Trans. Automatic Cont.*, 47, 945–959.
- Hu, H. Y. & Wang, Z. H. (2002). *Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback*. Springer.
- Hövel, P. (2010). *Control of Complex Nonlinear Systems with Delay*. Springer Theses. Springer.
- Jiang, W. & Wei, J. J. (2008). Bifurcation analysis in van der Pol's oscillator with delayed feedback. *J. Comp. Appl. Maths.*, 213, 604–615.
- Just, W., Benner, H., & Reibold, E. (2003). Theoretical and experimental aspects of chaos control by time-delayed feedback. *Chaos*, 13, 259–266.
- Just, W., Bernard, T., Ostheimer, M., Reibold, E., & Benner, H. (1997). Mechanism of time-delayed feedback control. *Physical Review Letters*, 78(2), 203–206.
- Just, W., Fiedler, B., Georgi, M., Flunkert, V., Hövel, P., & Schöll, E. (2007). Beyond the odd number limitation: a bifurcation analysis of time-delayed feedback control. *Physical Review Letters*, 76, 026210(1–11).
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*. New Jersey: Prentice Hall, 2nd. edition.
- Kim, M., Bertram, M., Pollmann, M., von Oertzen, A., Mikhailov, A. S., Rotermund, H. H., & Ertl, G. (2001). Controlling chemical turbulence by global delayed feedback: Pattern formation in catalytic CO oxidation on Pt(110). *Science*, 292(5520), 1357–1360.
- Konishi, K., Ishii, M., & Kokame, H. (1996). Stabilizing unstable periodic points of one-dimensional nonlinear systems using delayed-feedback signals. *Physical Review E*, 54(4), 3455–3460.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons.

- Kuznetsov, Y. A. (2004). *Elements of Applied Bifurcation Theory*. New York: Springer-Verlag, 3rd. edition.
- Larger, L. & Dudley, J. M. (2010). Optoelectronic chaos. *Nature*, 465, 41–42.
- Lehman, B. & Weibel, S. P. (1999). Fundamental theorems of averaging for functional differential equations. *Journal of Differential Equations*, 152(1), 160–190.
- Li, C., Chen, G., Liao, X., & Yu, J. (2004). Hopf bifurcation in an internet congestion control model. *Chaos Solitons and Fractals*, 19(4), 853–862.
- Liao, X., Li, S., & Chen, G. (2004). Bifurcation analysis on a two-neuron system with distributed delays in the frequency domain. *Neural Networks*, 17, 545–561.
- Liao, X., Wong, K. W., & Wu, Z. (2001). Bifurcation analysis on a two-neuron system with distributed delays. *Physica D*, 149, 123–141.
- Liu, F., Wang, H. O., & Guan, Z. H. (2012). Hopf bifurcation control in the XCP for the internet congestion control system. *Nonlinear Anal.: Real World Appl.*, 13, 1466–1479.
- Liz, E. & Franco, D. (2010). Global stabilization of fixed points using predictive control. *Chaos*, 20(2), 024002(1–9).
- MacFarlane, A. G. J. & Postlethwaite, I. (1977). The generalized Nyquist stability criterion and multivariable root loci. *Int. J. Control*, 25, 81–127.
- Mackey, M. C. & Glass, L. (1977). Oscillation and chaos in physiological control systems. *Science*, 197, 287–289.
- Mallet-Paret, J. & Sell, G. R. (1996). The Poincaré-Bendixson theorem for monotone cyclic feedback systems with delay. *Journal of Differential Equations*, 125, 441–489.
- Martínez-Zérega, B. E. & Pisarchik, A. N. (2005). Efficiency of the control of co-existing attractors by harmonic modulation applied in different ways. *Physics Letters A*, 340, 212–219.

- Masani, K., Vette, A. H., Kawashima, N., & Popovic, M. R. (2008). Neuromusculoskeletal torque-generation process has a large destabilizing effect on the control mechanism of quiet standing. *Journal of Neurophysiology*, 100, 1465–1475.
- Mees, A. I. (1981). *Dynamics of Feedback Systems*. Chichester, UK: John Wiley & Sons.
- Mees, A. I. & Chua, L. O. (1979). The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 26(4), 235–254.
- Michiels, W. & Niculescu, S. I. (2005). Stability analysis of a fluid flow model for tcp like behavior. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15, 2277–2282.
- Milano, F. & Angel, M. (2012). Impact of time delays on power system stability. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 59(4), 889–900.
- Misra, V., Gong, W., & Towsley, D. (2000). Fluid-based analysis of a network of AQM routers supporting TCP flows with an application to RED. In *Proc. ACM/SIGCOMM* (pp. 151–160). USA.
- Mohamad, S. & Gopalsamy, K. (2003). Exponential stability of continuous-time and discrete-time cellular neural networks with delays. *Applied Mathematics and Computation*, 135(1), 17–38.
- Moiola, J. L. & Chen, G. (1996). *Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency Domain Approach*. Singapur: World Scientific Publishing Co.
- Moiola, J. L., Chiacchiarini, H. G., & Desages, A. C. (1996). Bifurcations and Hopf degeneracies in nonlinear feedback systems with time delay. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 6(4), 661–672.
- Nakajima, H. (1997). On analytical properties of delayed feedback control of chaos. *Physics Letters A*, 232, 207–210.
- Nusse, H. N., Ott, E., & Yorke, J. A. (1994). Border-collision bifurcations: An explanation for observed bifurcation phenomena. *Physical Review E*, 49(2), 1073–1077.

- Padín, M. S., Robbio, F. I., Moiola, J. L., & Chen, G. (2005). On limit cycle approximations in the van der Pol oscillator. *Chaos, Solitons and Fractals*, 23, 207–220.
- Pagano, D. J., Ponce, E., & Arancil, J. (1999). Bifurcation analysis of time-delay control systems with saturation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 9(6), 1089–1109.
- Peng, M. (2005). Multiple bifurcations and periodic “bubbling” in a delay population model. *Chaos, Solitons and Fractals*, 25, 1123–1130.
- Phillips, C. L. & Nagle, H. T. (1990). *Digital Control Systems: Analysis and Design*. New Jersey: Prentice Hall Inc., 2nd. edition.
- Pyragas, K. (1992). Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*, 170, 421–428.
- Pyragas, K. (2001). Control of chaos via unstable delayed feedback controller. *Physical Review Letters*, 86, 2265–2268.
- Pyragas, K., Pyragas, V., & Benner, H. (2004). Delayed feedback control of dynamical systems at a subcritical Hopf bifurcation. *Physical Review Letters*, 70, 056222(1–4).
- Raina, G. & Heckmann, O. (2007). TCP: Local stability and Hopf bifurcation. *Perf. Evaluation*, 64, 266–275.
- Ranjan, P., Abed, E. H., & La, R. J. (2004). Nonlinear instabilities in TCP-RED. *IEEE Trans. on Networking*, 12(6), 1079–1092.
- Rasmussen, H., Wake, G. C., & Donaldson, J. (2003). Analysis of a class of distributed delay logistic differential equation. *Mathematical and Computer Modelling*, 38, 123–132.
- Reick, C. & Mosekilde, E. (1995). Emergence of quasiperiodicity in symmetrically coupled, identical period-doubling systems. *Physical Review E*, 52, 1418–1435.

- Rezaie, B., Motlagh, M. R. J., Khorsandi, S., & Analoui, M. (2010). Hopf bifurcation analysis on an internet congestion control system of arbitrary dimension with communication delay. *Non. Anal. Real World Appl.*, 11, 3842–3857.
- Richter, H. (2002). The generalized Hénon maps: examples for higher-dimensional chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(6), 1371–1384.
- Robbio, F. I., Paolini, E. E., Moiola, J. L., & Chen, G. (2007). Harmonic distortion analysis based on Hopf bifurcation theorem and fast Fourier transform. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17(5), 1623–1635.
- Ruan, S. (2006). *Delay Differential Equations in Single Species Dynamics*, volume 205 of *NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry*. Springer: Berlín.
- Ruan, S. & Filfil, R. (2004). Dynamics of two-neuron system with discrete and distributed delays. *Physica D*, 191, 323–342.
- Safonov, L. A., Tomer, E., Strygin, V. V., Ashkenazy, Y., & Havlin, S. (2002). Multifractal chaotic attractors in a system of delay-differential equations modeling road traffic. *Chaos*, 12(4), 1006–1014.
- Schöll, E. & Schuster, H. G. (2008). *Handbook of Chaos Control*. Weinheim: Wiley-VCH.
- Seydel, R. (2010). *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Springer, 3rd. edition.
- Shakeri, F. & Dehghan, M. (2008). Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method. *Math. and Computer Modelling*, 48(3-4), 486–498.
- Sipahi, R., Niculescu, S. I., Abdallah, C. T., Michiels, W., & Gu, K. (2011). Stability and stabilization of systems with time-delay. *IEEE Control Systems Magazine*, 31(1), 38–65.
- Smith, H. (2010). *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*. Springer.

- Srikant, R. (2004). *The Mathematics of Internet Congestion Control*. Birkhäuser.
- Stépán, G. (1989). *Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions*. Boston: Pitman.
- Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Addison-Wesley, Reading.
- Tse, C. K. & Di Bernardo, M. (2002). Complex behavior in switching power converters. *Proceedings of the IEEE*, 90(5), 768–781.
- Tsytkin, Y. Z. (1946). Stability of systems with delayed feedback. *Automat. Telemekh.*, 7, 107–129. (also in *Frequency-Response Methods in Control Systems*, MacFarlane, A. G. J. (Ed.), IEEE Press, 1979, pp. 45–56).
- Vaccaro, R. J. (1995). *Digital Control: A State Space Approach*. McGraw-Hill.
- van der Driessche, P. & Watmough, J. (2000). A simple SIS epidemic model with a backward bifurcation. *Journal of Mathematical Biology*, 40, 525–540.
- Vasegh, N. & Sedigh, A. K. (2009). Chaos control via TDFC in time-delayed systems: The harmonic balance approach. *Physic Letters A*, 373, 354–358.
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear Systems Analysis*. New Jersey: Prentice Hall, 2nd. edition.
- Wang, H. & Jiang, W. (2010). Hopf-pitchfork bifurcation in van der Pol's oscillator with nonlinear delayed feedback. *J. Math. Analysis and Applications*, 368, 9–18.
- Wang, X. F., Chen, G., & Man, K. F. (2001). Making a continuous-time minimum-phase system chaotic by using time-delay feedback. *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundam. Theory Appl.*, 48, 641.
- Wei, J. J. & Jiang, W. (2005). Stability and bifurcation analysis in van der Pol's oscillator with delayed feedback. *Journal of Sound and Vibration*, 283, 801–819.
- Wen, G., Wang, Q. G., & Chiu, M. S. (2006). Delay feedback control for interaction of Hopf and period doubling bifurcations in discrete-time systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 16(1), 101–112.

- Wiggins, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2nd. edition.
- Xiao, M. & Cao, J. (2007). Delayed feedback-based bifurcation control in an internet congestion model. *J. Math. Anal. Appl.*, 332, 1010–1027.
- Yu, W. & Cao, J. (2007). Stability and Hopf bifurcation on a two-neuron system with time delay in the frequency-domain. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4, 1355–1366.
- Yu, W., Cao, J., & Chen, G. (2008). Stability and Hopf bifurcation of a general delayed recurrent neural network. *IEEE Trans. Neural Netw.*, 19(4), 1355–1366.
- Zheng, Y. G. & Wang, Z. H. (2010). Stability and Hopf bifurcation of a class of TCP/AQM networks. *Nonlinear Anal.: Real World Appl.*, 11, 1552–1559.