La matemática detrás del GPS

Propuesta didáctica para Matemática – Nivel Secundario

Departamento de Matemática – UNS

La matemática detrás del GPS : propuesta didáctica para
Matemática : nivel secundario / Andrea Liliana Bel... [et al.].
1a ed ilustrada. Bahía Blanca, 2019.

Libro digital, PDF
Archivo Digital: descarga

ISBN 978-987-86-3040-3

1. Matemática. 2. Sistema de Posicionamiento Global. I. Bel, Andrea Liliana.
CDD 510.712

PUBLICADO POR DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

WWW.UNS.EDU.AR

Primera edición, junio 2018

La matemática detrás del GPS

Propuesta didáctica para Matemática – Nivel Secundario

Departamento de Matemática – UNS

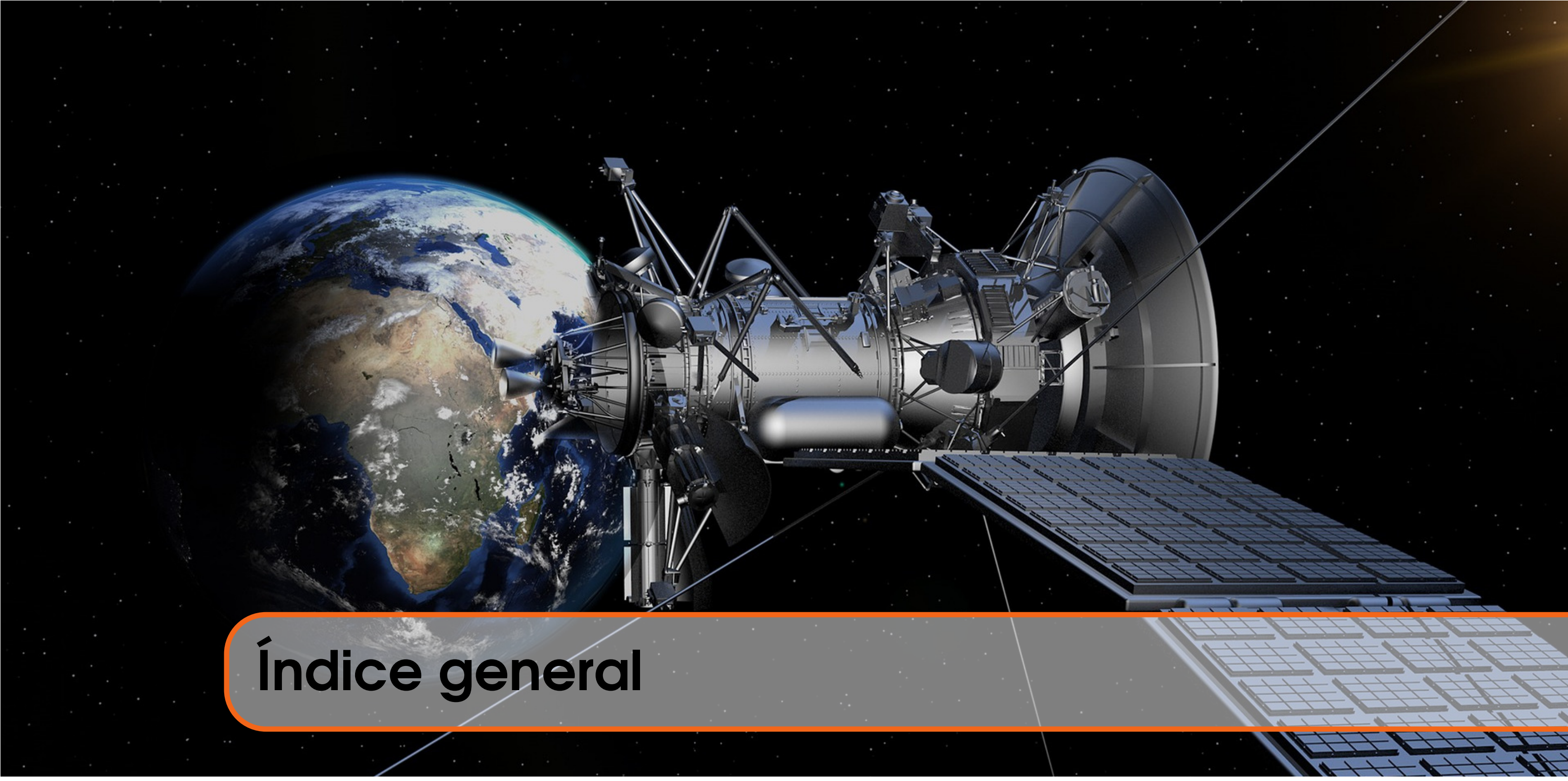
Participan de este proyecto:

Docentes del Departamento de Matemática

Andrea Bell
Guillermo Capobianco
Ulises Chialva
Romina Cobiaga
Jessica Del Punta
Walter Reartes

Docentes de Nivel Secundario

Vanesa Aja
Natalia Alonso
Silvia Andrea Balda
Patricia Elena Bertacco
Roxana Daniela Bonelli
María Rosa Clemenza
Jonathan Cuesta
Rocío D'alessandro
Ana María De Zoete
Betiana Despósito
Santiago Di Paolo
Daniela Di Tomasso
Mercedes Karina Dietrich
Florencia Doladé
Cecilia Elicalde
Mariana Elizari
Karina Elisa Ferrabone
Mariela Golato
Gisela Leguizamón
Flavia Lupardo
Ana Mascetti
Mariana Mugica
Claudia Noval
Marianela Pohn
Paula Ramirez
Daniela Spinelli
Fernando Tempone
Inés Tenaglia
Pablo Sebastián Travi
María Teresa Vizcaino



Índice general

Prefacio

El presente material es el resultado del trabajo conjunto entre un grupo de docentes del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur y un grupo de docentes de Nivel Secundario de la Región 21, Distrito de Tres Arroyos, Provincia de Buenos Aires. Motivados por la convicción de que es necesario repensar y actualizar los vínculos entre la Universidad y el Nivel Medio, nos propusimos elaborar este trabajo en el que empleamos un elemento cotidiano, en este caso el GPS, como soporte en la planificación de las actividades de la clase de Matemática.

El GPS es hoy día una tecnología al alcance de casi cualquier ciudadano, y su implementación abarca muchísimo más que la navegación terrestre, que es el motivo por el que la gran mayoría de la gente lo conoce. Al visitar su página web oficial (perteneciente al Gobierno de los Estados Unidos) encontramos ejemplos de su uso en agricultura, aviación, carreteras, navegación espacial y marítima, medio ambiente, recreación, seguridad pública, prevención de desastres naturales, topografía, cartografía y vías férreas. Vemos entonces que este objeto nos aporta una gran cantidad de opciones para establecer conexiones entre los distintos conceptos trabajados en el aula y la vida cotidiana, permitiéndonos así transformar en "reales" los contenidos abstractos que se plantean en la clase de Matemática. Es decir, el GPS se presenta como una herramienta potencialmente útil tanto para trabajar de manera interdisciplinar como para contextualizar ciertos contenidos.

El material que estamos presentando aquí consta de dos partes. En la primera se describe el funcionamiento del GPS, para lo cual se hace necesario introducir conceptos no sólo matemáticos sino también del campo de la Física. La segunda parte incluye distintas actividades pensadas para alumnos del último tramo del Nivel Secundario, las cuales surgen a partir de un taller inicial realizado en la ciudad de Tres Arroyos y continuado mediante encuentros y plataformas de intercambio virtuales. De esta manera ambos grupos de trabajo nos encontramos, compartimos y discutimos los conceptos e ideas en torno al GPS y su implementación en el aula.

Todas las actividades realizadas en torno a la elaboración del presente material fueron desarrolladas en el marco del Programa Nexos: Articulación Educativa Universidad - Escuela Secundaria, una convocatoria realizada por el Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología a través de la Secretaría de Políticas Universitarias.

Introducción

1. El Sistema de Posicionamiento Global

1.1 Sistemas de navegación satelital

Un sistema de navegación por satélite es un sistema que utiliza satélites para proporcionar un posicionamiento geoespacial autónomo. Permite a los receptores electrónicos determinar su ubicación (longitud, latitud y altitud/elevación) con alta precisión (unos pocos metros), utilizando señales transmitidas por radio, a lo largo de la línea de visión del receptor, desde satélites en órbita terrestre. El sistema se puede usar para proporcionar posición, facilitar la navegación marítima, aérea o terrestre, o para rastrear la posición de algún objeto equipado con un receptor (seguimiento por satélite). Las señales también permiten que el receptor electrónico calcule la hora local actual con alta precisión, lo que permite la sincronización temporal. Los sistemas de navegación operan independientemente de cualquier recepción telefónica o de Internet, aunque estas tecnologías pueden mejorar la utilidad de la información de posicionamiento generada.

Un sistema de navegación por satélite con cobertura global se denomina Sistema de Navegación Global por Satélite (GNSS, por sus siglas en inglés). En la actualidad los siguientes sistemas están en funcionamiento o en desarrollo:

- Sistema de Posicionamiento Global, GPS de los Estados Unidos.
- Sistema Satelital de Navegación Global, GLONASS de la Federación Rusa.
- Sistema de Navegación Satelital BeiDou de China.
- Sistema de Navegación Satelital Galileo de la Unión Europea.

La cobertura global para cada sistema generalmente se logra mediante una constelación [1] de entre 18 y 30 satélites en órbitas terrestres medianas distribuidas entre varios planos orbitales. Los sistemas reales varían, pero usan inclinaciones orbitales [2] de 50° o más y períodos orbitales de aproximadamente doce horas (a una altitud de aproximadamente 20.000 km).

En la figura 1.1 se ven los distintos grupos de satélites de posicionamiento junto con algunos de

[1] Una constelación es un conjunto de satélites coordinados para llevar a cabo una tarea común.

[2] La inclinación orbital es el ángulo que forma el plano que contiene la órbita del satélite con el plano ecuatorial.

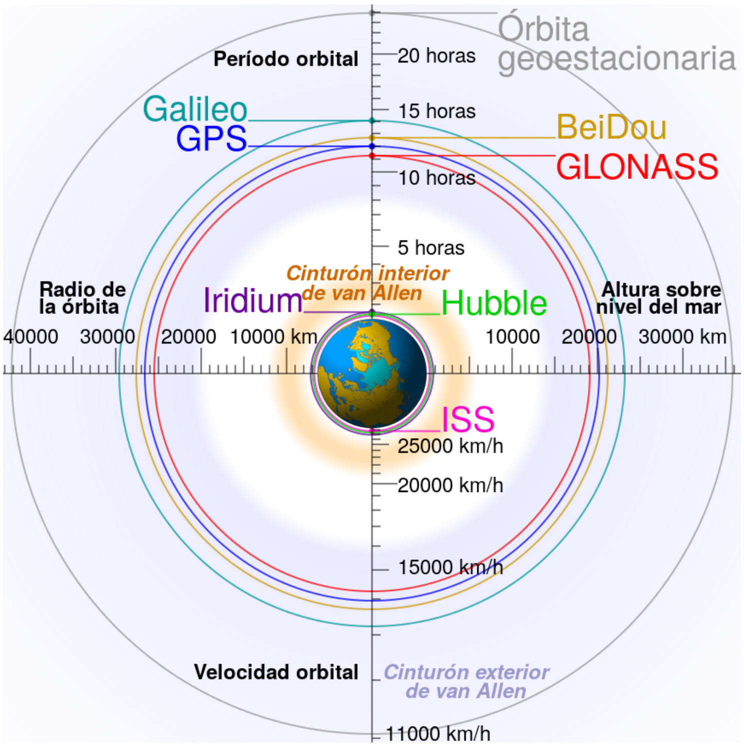


Figura 1.1: Órbita geoestacionaria, órbita de los grupos de satélites de navegación satelital, satélites de comunicación (Iridium), telescopio espacial Hubble y Estación Espacial Internacional (ISS, por sus siglas en inglés).

los de órbita baja (Iridium, Hubble, ISS) y la órbita geoestacionaria[3].

De los sistemas de navegación arriba mencionados, el que está más difundido y más desarrollado es el norteamericano, GPS. En lo que sigue se describe con detalle este sistema.

1.2 ¿Qué es el GPS?

El GPS es un sistema creado y mantenido por el gobierno de los Estados Unidos de América que provee servicios de posicionamiento, navegación y temporizado a los usuarios de todo el mundo. El sistema consta de tres partes o segmentos, a saber: el segmento espacial, el segmento de control (manejado por la fuerza aérea de Estados Unidos) y el segmento de los usuarios. A continuación se pasa a describir estos tres segmentos.

1.2.1 Segmento espacial

El segmento espacial consiste en un conjunto de satélites que trasmiten señales de radio a los usuarios. Los satélites GPS giran alrededor de la tierra en órbitas medias a una altitud de aproximadamente 20.200 km. Cada satélite da dos vueltas a la tierra por día. Estos satélites están distribuidos en seis planos orbitales equiespaciados alrededor de la tierra. Cada plano contiene cuatro posiciones ocupadas por satélites (esto son los de la línea de base, puede haber otros como se indica más adelante). Este arreglo de 24 posiciones asegura que los usuarios en cualquier punto de la tierra puedan ver al menos cuatro satélites en cualquier momento (figura 1.2).

[3] La órbita geoestacionaria es una órbita sobre el plano ecuatorial que tiene un período orbital de un día, es decir da una vuelta completa acompañando el movimiento de la tierra y por lo tanto un satélite en esta órbita está siempre sobre el mismo punto en la tierra.

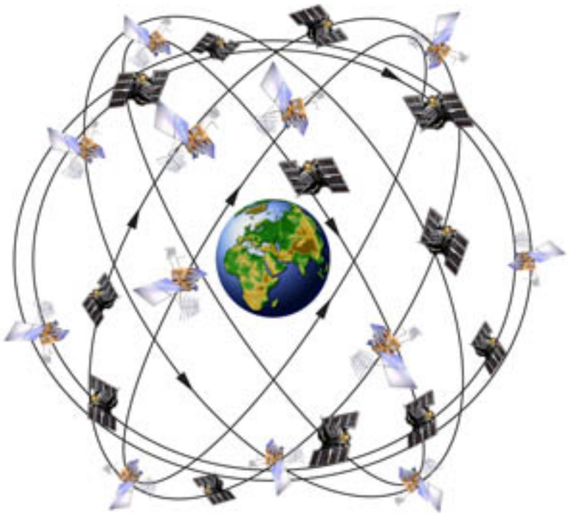


Figura 1.2: Ubicación de los seis planos orbitales donde se encuentran los satélites de la constelación GPS.

Para asegurar el servicio cuando alguno de los satélites está siendo reparado o queda fuera de servicio se han puesto en órbita más de 24 satélites, específicamente, se han desplegado 31 satélites en los últimos años. Los satélites extra sirven para mejorar el desempeño del sistema, pero no se consideran parte del núcleo de la constelación.

En junio de 2011 se completó con éxito una expansión de la constelación GPS conocida como la configuración "Expandible 24". Tres de las 24 posiciones se expandieron y se reposicionaron seis satélites, de modo que tres de los satélites adicionales pasaron a formar parte de la línea base de la constelación. Como resultado, el GPS ahora funciona efectivamente como una constelación de 27 posiciones con cobertura mejorada en la mayor parte del mundo.

> En el sitio `http://stuffin.space` pueden observarse todos los objetos artificiales que orbitan la tierra y en particular identificar a los satélites GPS.

1.2.2 Segmento de Control

El segmento de control consiste en una red global de estaciones en tierra que rastrean los satélites, monitorean sus transmisiones, realizan análisis y envían comandos y datos a la constelación.

El segmento operacional de control incluye una estación maestra de control, una estación de control alternativa, 11 antenas de control y comando y 16 sitios de monitoreo. La localización de todas estas instalaciones se muestra en la figura 1.3.

1.2.3 Segmento de los usuarios

Al igual que Internet, el GPS es un elemento esencial de la infraestructura de información global. La naturaleza libre, abierta y confiable del GPS ha llevado al desarrollo de cientos de aplicaciones que alcanzan todos los aspectos de la vida moderna. La tecnología GPS ahora está en todo, desde teléfonos celulares y relojes de pulsera hasta topadoras, contenedores de envío y cajeros automáticos.

El GPS aumenta la productividad en una amplia franja de la economía, que incluye la agricultura, la construcción, la minería, la topografía, la entrega de paquetes y la administración logística de

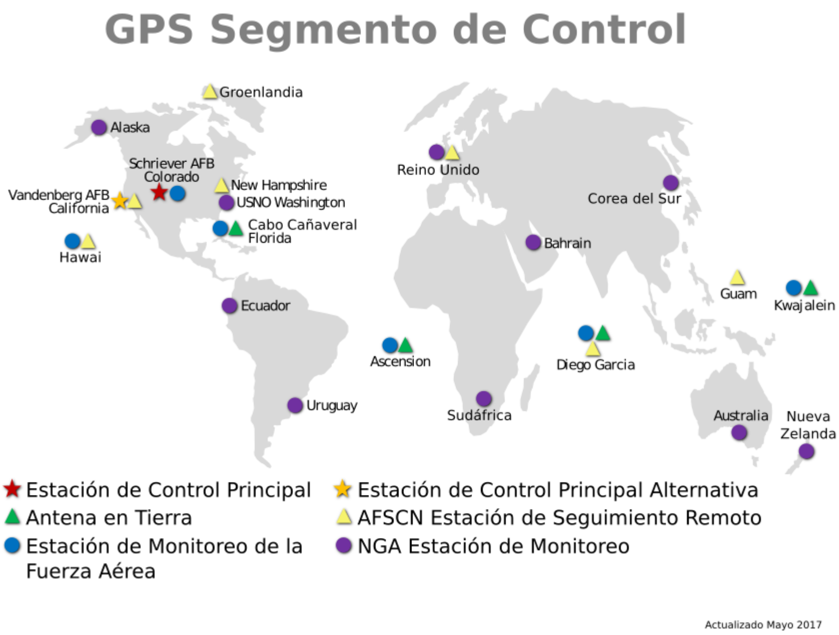


Figura 1.3: Red global de estaciones en tierra de rastreo, monitoreo, análisis y control de datos.

cadenas de suministros. Las principales redes de comunicaciones, sistemas bancarios, mercados financieros y redes eléctricas dependen en gran medida del GPS para una sincronización de tiempo precisa. Algunos servicios inalámbricos no pueden funcionar sin él.

El GPS salva vidas previniendo accidentes de transporte, ayudando en los esfuerzos de búsqueda y rescate, y acelerando la entrega de servicios de emergencia y ayuda en caso de desastres. El GPS es vital para el desarrollo de nuevos sistemas de transporte aéreo, especialmente para mejorar la seguridad del vuelo y aumentar la capacidad del espacio aéreo. El GPS también permite avances en objetivos científicos como el pronóstico del tiempo, el monitoreo de terremotos y la protección del medio ambiente.

Finalmente, el GPS sigue siendo crítico para las fuerzas armadas y sus aplicaciones están integradas en prácticamente todas las facetas de las operaciones militares. Casi todos los nuevos recursos militares, desde vehículos hasta municiones, vienen equipados con GPS.

1.3 ¿Cómo funciona el GPS?

De manera muy resumida se pueden mencionar los pasos involucrados en el funcionamiento del sistema GPS. Primeramente los satélites GPS envían una señal de radio que contiene la localización del mismo y el tiempo preciso en el momento del envío (t_1), además de otro datos sobre su estado. Esta información está basada en un reloj atómico a bordo. Las señales de radio viajan a través de espacio a la velocidad de la luz $c = 299.792.458$ m/s. Los receptores de la señal anotan el tiempo de arribo de la misma (t_2) y calculan la distancia del satélite al receptor mediante la fórmula $d = c(t_2 - t_1)$. Una vez que el receptor conoce las distancias a al menos cuatro satélites, procede a calcular sus localización en la tierra en tres dimensiones.

En la figura 1.4 se muestran los pasos principales involucrados en la identificación de las coordenadas de un punto en la superficie de la tierra mediante el GPS.

En los próximos capítulos se desarrollarán las nociones del funcionamiento del GPS. El concepto básico es el de *trilateración*: en el espacio de tres dimensiones si un observador conoce la distancia a tres puntos no alineados (cuyas posiciones son conocidas) entonces se puede determinar

Figura 1.4: Descripción del funcionamiento del GPS.

la posición del observador. En realidad pueden quedar determinados dos puntos de los cuales uno de ellos está sobre la tierra y el otro en el espacio, por lo que este último puede descartarse.

Por lo anterior, si un observador sobre la superficie de la tierra conoce la distancia a tres satélites, que no estén alineados y cuyas posiciones sean conocidas, entonces puede calcular su posición.

II

Descripción del funcionamiento

2. Localización en dos dimensiones

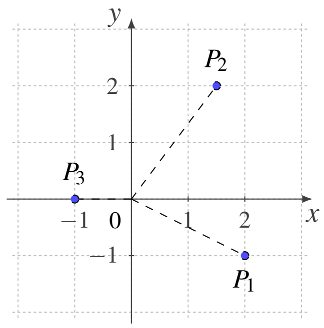
2.1 Puntos y distancias en el plano

Si bien la localización de un receptor mediante GPS se produce en el espacio tridimensional, presentamos a continuación un modelo simplificado (bidimensional) que nos permitirá de forma sencilla mostrar algunos de los conceptos matemáticos involucrados en el proceso de localización. Comencemos revisando un concepto elemental: ¿cómo ubicamos puntos en el plano?

Para indicar la ubicación de un punto P en un plano, consideramos un par de *ejes cartesianos* (eje X y eje Y) de forma que P queda determinado a partir de sus *coordenadas cartesianas*: $P = (x_0, y_0)$.

Por ejemplo, en la figura de la derecha se muestra la ubicación de los puntos

$$P_1 = (2, -1), \qquad P_2 = \left(\frac{3}{2}, 2\right), \qquad P_3 = (-1, 0).$$



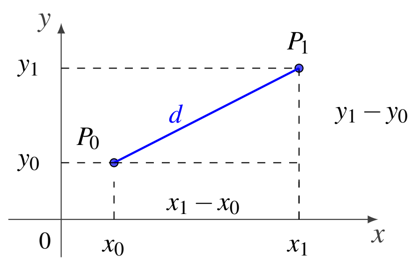
La distancia d entre dos puntos $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1(x_1, y_1)$ se calcula mediante la fórmula

$$d(P_0, P_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Esta fórmula es una consecuencia del teorema de Pitágoras, como se ilustra en la figura de la derecha.

Observemos que la distancia desde el origen $O = (0, 0)$ a cualquier punto $P_0 = (x_0, y_0)$ es

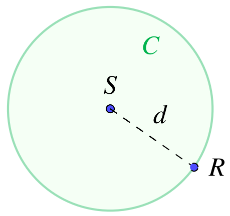
$$d(O, P_0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$



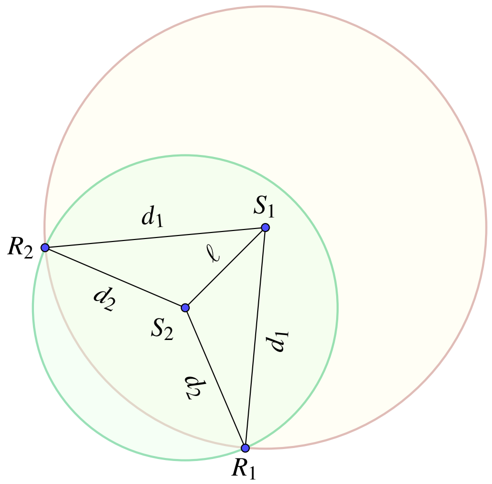
2.2 Localización del receptor en el plano

Como se explicó en el capítulo 1 los satélites miden la distancia desde su posición hasta el receptor R. A continuación describimos cómo con esta información, y conociendo además la ubicación del satélite, podemos determinar la localización de R.

Supongamos que conocemos el punto S donde se ubica el satélite y la distancia d del satélite al receptor. Entonces, visto sobre un plano, podemos asegurar que el receptor R está en algún punto sobre la circunferencia C de radio d centrada en S. Esta situación se ilustra en la figura de la derecha.



Vemos así que la información que nos aporta un único satélite no es suficiente para saber con precisión dónde está el receptor.

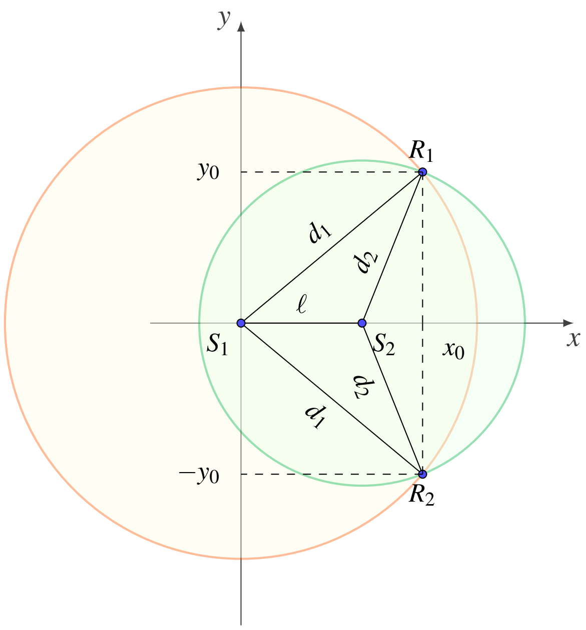


Supongamos ahora que tenemos dos satélites en los puntos S_1 y S_2, y conocemos las distancias d_1, d_2 desde cada uno de ellos al receptor. Entonces, siguiendo el razonamiento planteado anteriormente, sabemos que el receptor se encuentra en algún punto sobre la circunferencia centrada en S_1 y de radio d_1. Al mismo tiempo, debe estar sobre algún punto de la circunferencia centrada en S_2 y de radio d_2.

Es decir que teniendo las mediciones de dos satélites la ubicación del receptor queda casi determinada: es uno de los dos puntos R_1, R_2 en los que se intersectan ambas circunferencias, como se muestra en la figura de la izquierda.

Para encontrar las coordenadas de estos puntos en el plano, empezamos ubicando el origen de coordenadas en S_1 y el semieje positivo de las abscisas en la dirección de $\overrightarrow{S_1S_2}$ como se muestra en la siguiente figura. Llamamos ℓ a la distancia entre los satélites. Vemos que R_1 y R_2 tienen la misma abscisa y sus ordenadas son opuestas, es decir

$$R_1 = (x_0, y_0), \qquad R_2 = (x_0, -y_0).$$



Teniendo en cuenta el teorema de Pitágoras, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} d_1^2 = x_0^2 + y_0^2 \\ d_2^2 = (x_0 - \ell)^2 + y_0^2 \end{cases}$$

A la primera ecuación le restamos la segunda de la siguiente manera

$$\begin{array}{rl} & d_1^2 = x_0^2 + y_0^2 \\ - & d_2^2 = (x_0 - \ell)^2 + y_0^2 \\ \hline & d_1^2 - d_2^2 = x_0^2 - (x_0 - \ell)^2 \end{array}$$

y de aquí podemos encontrar una expresión para x_0,

$$\begin{aligned} d_1^2 - d_2^2 &= x_0^2 - (x_0^2 - 2x_0\ell + \ell^2) \\ d_1^2 - d_2^2 &= 2x_0\ell - \ell^2 \\ \frac{d_1^2 - d_2^2 + \ell^2}{2\ell} &= x_0. \end{aligned}$$

Podemos encontrar una expresión para y_0 reemplazando con esta última expresión en la primera ecuación del sistema,

$$d_1^2 = \left(\frac{d_1^2 - d_2^2 + \ell^2}{2\ell}\right)^2 + y_0^2$$

de donde resulta:

$$y_0^2 = d_1^2 - \left(\frac{d_1^2 - d_2^2 + \ell^2}{2\ell}\right)^2.$$

De aquí resultan los dos posibles valores de la ordenada,

$$y_0 = \sqrt{d_1^2 - \left(\frac{d_1^2 - d_2^2 + \ell^2}{2\ell}\right)^2}, \qquad -y_0 = -\sqrt{d_1^2 - \left(\frac{d_1^2 - d_2^2 + \ell^2}{2\ell}\right)^2}.$$

La primera de estas expresiones corresponde al punto R_1 y la otra a R_2.

Relación con el área de un triángulo

Escribiendo el radicando con denominador común ($4\ell^2$, que al distribuir la raíz da el denominador 2ℓ) y factorizando el numerador resulta la siguiente expresión:

$$y_0 = \frac{\sqrt{(d_1 + d_2 + \ell)(d_1 + d_2 - \ell)(d_2 - d_1 + \ell)(d_1 - d_2 + \ell)}}{2\ell}.$$

Consideremos el triángulo con vértices S_1, S_2 y R_1 de la figura anterior. Llamando s al semiperímetro de ese triángulo tenemos

$$s = (d_1 + d_2 + \ell)/2,$$

entonces la fórmula para y_0 puede escribirse de la siguiente manera:

$$y_0 = \frac{2\sqrt{s(s-\ell)(s-d_1)(s-d_2)}}{\ell}.$$

Esta expresión puede interpretarse fácilmente a partir de la fórmula de Herón que se enuncia a continuación:

Teorema 2.2.1 — Fórmula de Herón. El área A de un triángulo cuyos lados miden a, b y c es:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde el semiperímetro s es:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Como puede verse en la figura anterior, y_0 es la altura del triángulo de lados d_1, d_2 y ℓ con base ℓ. Entonces el área del triángulo es $A = y_0\ell/2$, de donde se puede obtener la fórmula para y_0 calculada anteriormente [1].

[1] Todos los cálculos de esta sección pueden parecer muy complicados, sin embargo son solo aplicaciones sucesivas de reglas algebraicas sencillas. En la actualidad estos resultados pueden obtenerse fácilmente mediante el usos de programas de computadora como por ejemplo Maxima, Mathematica o Maple.

3. Localización con GPS

3.1 Coordenadas en la tierra

En 1687 Isaac Newton publicó los *Principia Mathematica*, en los cuales incluyó una demostración de que un cuerpo líquido rotando en equilibrio toma la forma de un *elipsoide de revolución o esferoide*. Partiendo de la suposición de que nuestro planeta en otros tiempos estuvo en un estado líquido [1], Newton postuló que la Tierra debería tener una forma de esferoide aplastado en los polos debido al movimiento de rotación terrestre que genera una fuerza centrífuga normal al eje (fuerza que adquiere un valor máximo en el ecuador hasta anularse en los polos). En 1736 una expedición organizada por la Academia de Ciencias de Francia y dirigida por Pierre Louis Maupertuis, confirma la predicción de Newton.

Desde entonces, distintos elipsoides fueron utilizados para aproximar la forma de la tierra: Maupertius (1738), Plessis (1817), Everest (1830), Bessel (1841), Hayford (1910) fueron los más importantes hasta el primer estándar internacional de 1924. En 1984 se estandarizó un nuevo modelo de esfeoride, a partir del cual se desarrolló el sistema de localización WGS84 (que luego fue corregido en 2004). Se estima que el error numérico al utilizar este último modelo es menor a 2 cm, por lo que fue elegido para basar el Sistema de Posicionamiento Global (GPS).

3.1.1 El WGS (World Geodetic System)

El WGS está compuesto por tres elementos: un sistema de coordenadas globales, un esferoide estándar de referencia (también denominado *elipsoide de referencia* o *datum*) y una superficie gravitacional equipotencial (el *geoide*) que define el *nivel del mar nominal*.

Sistema de coordenadas globales.

El sistema de coordenadas utilizado posee ejes de coordenadas fijos sobre la Tierra, es decir, que giran con ella. De manera que, en principio, las coordenadas de un punto serán siempre las mismas. El origen y los ejes del sistema de coordenadas WGS84 se encuentra definido de la siguiente manera:

---

[1] Greenberg, John L. *Isaac Newton and the Problem of the Earth's Shape*, Archive for history of exact sciences, vol. **49**-4, pp 371–391, 1996, Springer

- El origen es el centro de masas de la tierra.
- El *eje z* es la dirección del polo terrestre convencional (Conventional Terrestrial Pole) para el movimiento polar.
- El *eje x* es la intersección del plano meridiano de referencia con el plano del ecuador.
- El *eje y* completa el sistema para que resulte destrógiro (orientado a derecha), ortogonal y se encuentra ubicado a 90° respecto del *eje x*.

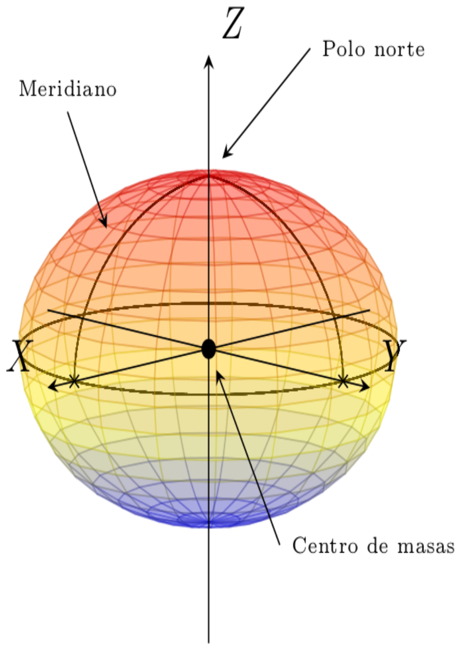


Figura 3.1: Sistema de referencia del WGS84. La circunferencia dibujada corresponde al plano ecuatorial, perpendicular a la dirección del polo norte. Y el meridiano atravesado por el eje X es el de Greenwich.

El geoide.

Se denomina geoide a la superficie ideal definida por un determinado potencial gravitatorio (constante a lo largo de toda la superficie). Para definir el *geoide estándar*, se adopta arbitrariamente el valor de potencial cuyo geoide asociado se aproxima más a la *superficie media* de los océanos (la superficie media del mar es determinada prescindiendo del oleaje, las mareas, las corrientes y la rotación terrestre, y coincide casi exactamente con una superficie equipotencial). La forma del geoide no coincide necesariamente con la topografía terrestre, modelada por fuerzas endógenas (tectónica de placas) y exógenas (agentes geomorfológicos). Geométricamente, el geoide es parecido a un esferoide (esfera achatada por los polos).

> En el siguiente link se puede ver una animación del geoide
> https://www.youtube.com/watch?v=bDTF6UtO0mg.

Determinación del esferoide

El *geoide* definido anteriormente se aproxima encerrándolo en un *elipsoide de revolución* o *esferoide*. El *esferoide estándar* o *de referencia* utilizado por el sistema WGS84 posee su centro en el origen del sistema de coordenadas globales antes mencionado, y su eje mayor sobre el ecuador, con un radio ecuatorial de 6.378.137 m aproximadamente, y un eje menor en dirección al polo norte de 6.356.752,3142 m. Observemos que esos dos ejes son casi idénticos. El achatamiento de este esferoide es de $1/298{,}257223563$. Es decir, que el esferoide es "casi" esférico. Véase la figura 3.2.

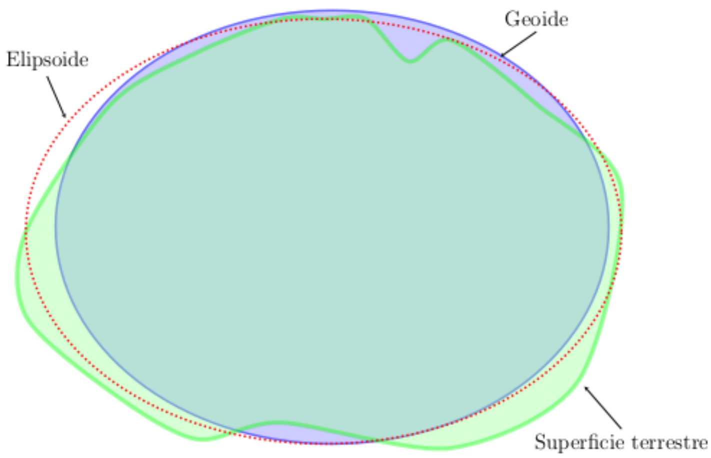


Figura 3.2: Comparación de la superficie de la tierra, el geoide y el elipsoide.

3.1.2 Localización de un punto en el sistema WGS84

Tanto el esferoide estándar como el geoide son superficies que se representan con fórmulas matemáticas relativamente complicadas, que no explicaremos en estas notas. Sobre el esferoide pueden colocarse coordenadas geográficas, latitud y longitud, tal como estamos acostumbrados sobre una esfera. Además en cada punto del esferoide se puede determinar la distancia de éste al geoide.

En el funcionamiento del GPS el primer paso es determinar la posición del observador en las coordenadas cartesianas del WGS84. Esta determinación se hace siguiendo las ideas básicas que se presentaron en el capítulo anterior (donde se desarrollaron las ideas en el caso plano). En lo que sigue mostraremos cómo puede hacerse ésto en el espacio.

Una vez determinadas las coordenadas cartesianas del punto en la cercanía de la superficie de la tierra se proyecta sobre el esferoide estándar. Esto quiere decir que toman la latitud y longitud sobre el esferoide en el punto bajo el observador. Para calcular estas coordenadas se aplican fórmulas matemáticas de transformación entre las coordenadas cartesianas y las geográficas.

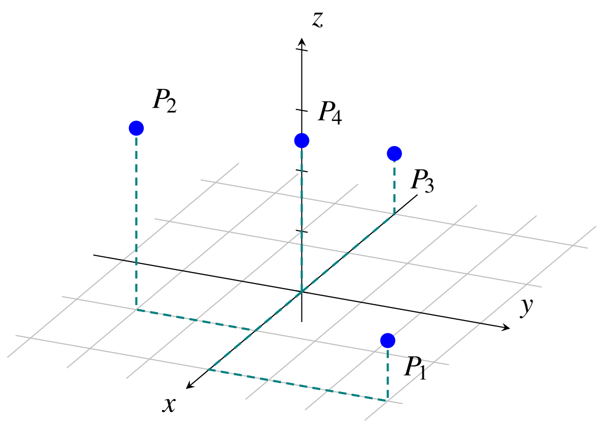
Finalmente se calcula la distancia entre el punto original y el *geoide*, que da como resultado la *altura respecto del nivel medio del mar*. Tendremos así que la ubicación de un punto queda determinada por tres coordenadas

$$P = (\underbrace{\text{latitud, longitud}}_{\text{sobre el esferoide estándar}}, \text{ altura sobre el nivel del mar}). \tag{3.1}$$

3.2 Puntos y distancias en el espacio

Podemos extender el procedimiento mostrado en el capítulo anterior al espacio tridimensional agregando un eje coordenado (eje z) de forma que la ubicación de un punto P en el espacio se caracterice por sus tres coordenadas cartesianas: $P = (x_0, y_0, z_0)$. Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra la ubicación de los puntos

$$P_1 = (2,3,1), \quad P_2 = (1,-2,3), \quad P_3 = (-2,0,1), \quad P_4 = \left(0,0,\frac{5}{2}\right).$$



La distancia d entre dos puntos en el espacio $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $P_1(x_1, y_1, z_1)$ se calcula como

$$d(P_0, P_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}.$$

La distancia desde el origen $O = (0,0,0)$ a cualquier punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ es

$$d(O, P_0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

3.3 Localización en el espacio. Trilateración

Para determinar el punto en el espacio en que se encuentra un receptor usando el GPS, consideramos la información que proporcionan tres satélites. La situación es la que mostramos en la figura 3.3. La información de un cuarto satélite es útil para compensar el error del reloj del receptor, como se verá más adelante. Además, si está disponible la lectura de más satélites, puede aprovecharse esta información para mejorar aún más el resultado utilizando técnicas estadísticas.

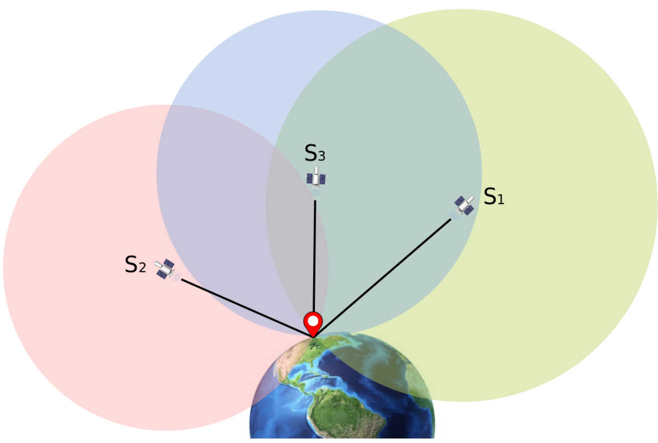


Figura 3.3: La ubicación del receptor en el espacio tridimensional se determina por la intersección de las esferas formadas por las distancias a tres satélites.

En secciones anteriores realizamos los cálculos para hallar el punto en el plano en el que se encuentra un receptor si conocemos la distancia a dos satélites dados. Como vimos, en ese caso dos satélites son suficientes para determinar las coordenadas del receptor.

Si consideramos el espacio tridimensional, y queremos hallar la posición en el espacio en el que se encuentra un receptor, necesitamos utilizar al menos tres satélites.

Comencemos considerando un solo satélite, que llamamos S_1. Sabemos que el receptor se encuentra a distancia d_1 de este satélite. Los puntos en el espacio que se encuentran a distancia d_1 del primer satélite forman una esfera E_1 con centro S_1 y radio d_1. Recordemos que en el plano se formaba un circunferencia. En la figura 3.4 mostramos la esfera E_1 en color verde.

Supongamos ahora que conocemos la distancia d_2 del receptor a un segundo satélite, que llamamos S_2. Podemos construir una segunda esfera E_2 con centro S_2 y radio d_2. En la figura 3.4 mostramos la esfera E_2 en color rosa.

Figura 3.4: Los puntos de la intersección de las esferas centradas en los satélites S_1 y S_2 forman una circunferencia.

Las esferas anteriores se intersectan en una circunferencia (ver figura 3.4). Los puntos del espacio que pertenecen a la circunferencia se encuentran a distancia d_1 del primer satélite y a distancia d_2 del segundo satélite.

A diferencia del caso en el plano, usando dos satélites, en el espacio encontramos infinitos puntos (todos los puntos que pertenecen a la circunferencia) con distancia d_1 a S_1 y distancia d_2 a S_2. Por lo tanto, necesitamos más información para hallar la posición del receptor en el espacio.

Consideramos un tercer satélite S_3 y sabemos que la distancia del receptor al satélite es d_3. Formamos una tercer esfera E_3, con centro S_3. Representamos la esfera E_3 en las figuras 3.4 y 3.5 en color azul. Como podemos ver en la figura 3.5, la esfera E_3 y la circunferencia se intersectan en dos puntos, R_1 y R_2. Ambos puntos están a la misma distancia de los tres satélites, pero solo uno de estos puntos se encuentra sobre la superficie de la tierra. Descartando el punto que no pertenece a la tierra, y como se muestra en la figura 3.5, determinamos que el punto R_2 es la posición del receptor que estábamos buscando.

A este método se lo denomina trilateración. Si bien el GPS se basa en la trilateración para determinar la posición de un receptor, como ya se dijo anteriormente utiliza la señal de por lo menos cuatro satélites para corregir errores y mejorar la precisión.

3.4 Cálculos en 3-D

A los fines de ilustrar el cálculo en tres dimensiones se encontrarán las coordenadas de un observador que conoce la distancia a tres puntos no alineados en el espacio. El cálculo en general

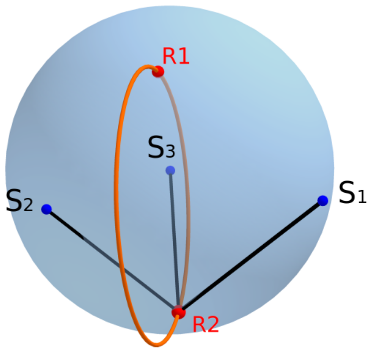
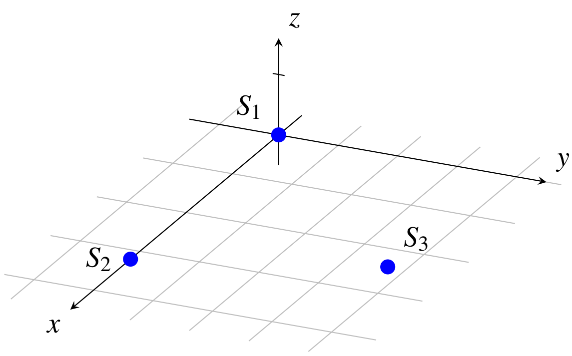


Figura 3.5: La esfera centrada en S_3 corta a la circunferencia en los puntos R_1 y R_2.

es muy complicado, para llevarlo a cabo se elegirá un sistema de coordenadas particular que lo simplifica notablemente.

El sistema de coordenadas que se usará tiene a los tres satélites en el plano $z = 0$. El primero S_1 está ubicado en el origen de coordenadas $(0,0,0)$, el segundo S_2 sobre el eje x, en $(\ell,0,0)$, y el tercero S_3 en un punto arbitrario del plano con coordenadas $(a, b, 0)$. En la siguiente figura se muestra la situación de los tres satélites.



Las distancias del punto (x_0, y_0, z_0) a los tres satélites vienen dadas por las ecuaciones:

$$d_1^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2,$$
$$d_2^2 = (x_0 - \ell)^2 + y_0^2 + z_0^2,$$
$$d_3^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + z_0^2,$$

Restando la segunda a la primera y resolviendo para x_0 se obtiene

$$x_0 = \frac{d_1^2 - d_2^2 + \ell^2}{2\ell}.$$

Al sustituir esto en la fórmula de la primera esfera obtenemos

$$y_0^2 + z_0^2 = d_1^2 - \frac{(d_1^2 - d_2^2 + \ell^2)^2}{4\ell^2},$$

que indica que los valores y_0 y z_0 se encuentran en un círculo, que es la solución a la intersección de las dos primeras esferas.

Restando la tercera ecuación de distancia a la primera obtenemos

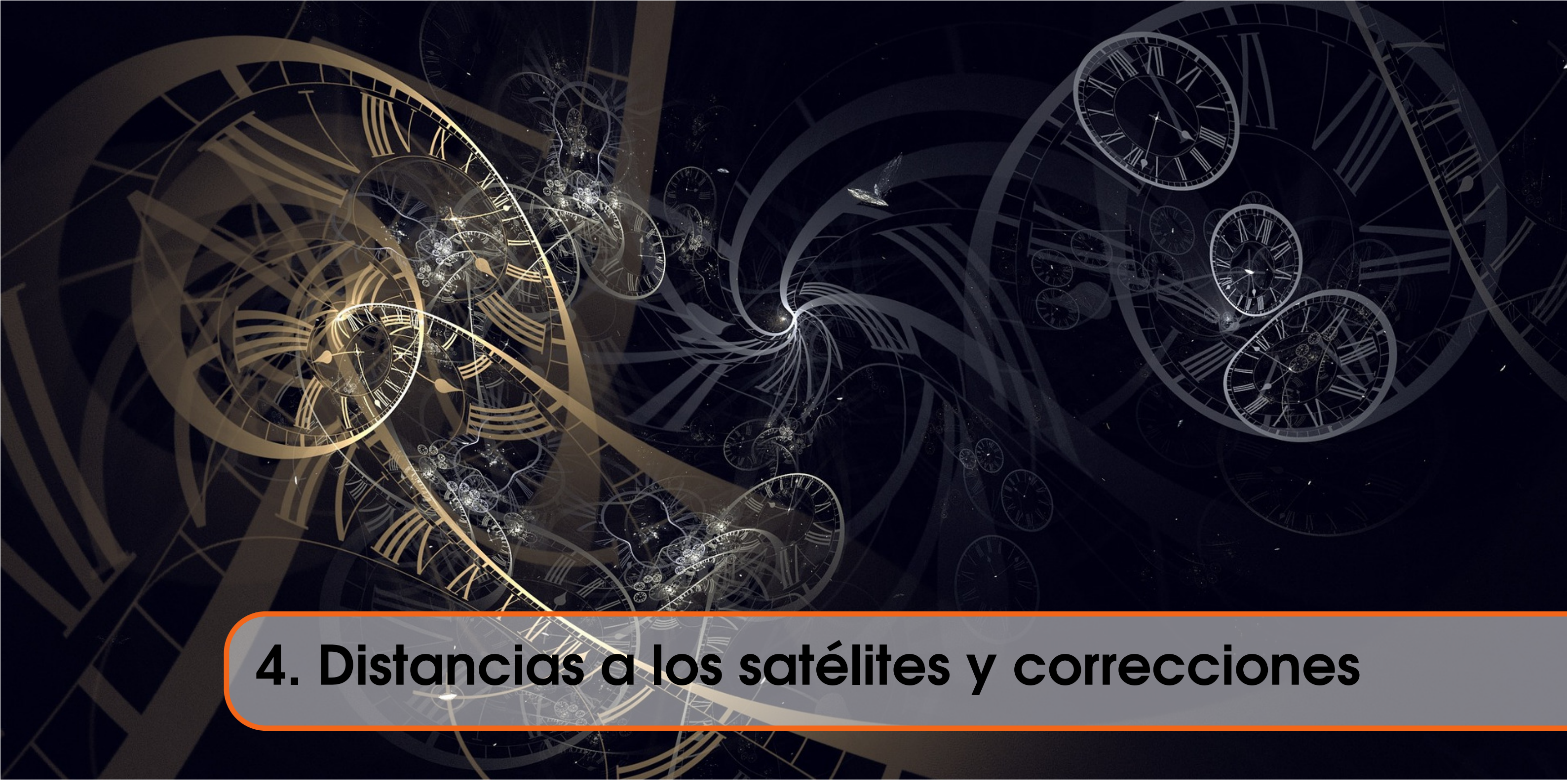
$$d_1^2 - d_3^2 = 2ax_0 - a^2 + 2by_0 - b^2,$$

y resolviendo para y_0 resulta

$$y_0 = \frac{d_1^2 - d_3^2 - 2ax_0 + a^2 + b^2}{2b} = \frac{d_1^2 - d_3^2 + a^2 + b^2}{2b} - \frac{a}{b}x_0.$$

Ahora con las coordenadas x_0 e y_0 del punto solución, se puede simplemente despejar z_0 de la fórmula de la primera esfera:

$$z_0 = \sqrt{d_1^2 - x_0^2 - y_0^2}.$$



4. Distancias a los satélites y correcciones

4.1 La velocidad de la luz y su relación con la distancia a los satélites

La velocidad de la luz en el vacío es constante, su valor es $c = 299.792.458$ m/s. Fue incluida oficialmente en el Sistema Internacional de medidas (SI) el 23 de octubre de 1983, quedando de esa manera la definición del metro como la distancia que recorre la luz en un intervalo de tiempo de $1/299.792.458$ s, aproximadamente 3,34 nanosegundos[1]. La velocidad de la luz es constante e independiente del sistema de referencia utilizado para medirla.

Por otra parte, conocer su valor exacto es fundamental a la hora de determinar la distancia a la que se encuentra un satélite de un observador con un GPS situado en la superficie terrestre. Conociendo cuánto tiempo transcurre desde que el satélite envía una señal hasta que la recibe el GPS en la tierra podemos calcular cuál es la distancia entre ambos. Sabemos que la distancia que recorre la señal es igual a la velocidad de la señal multiplicada por el tiempo transcurrido. Así, conociendo que la señal se propaga a la velocidad de la luz podemos deducir a qué distancia se halla el satélite multiplicando el valor c por el tiempo transcurrido $\Delta t = t_s - t$, es decir vale la fórmula:

$$d = c\Delta t = c(t_s - t),$$

donde d es la distancia del observador al satélite, t_s es el tiempo de emisión de la señal por el satélite (este tiempo está contenido en la señal y se obtiene del reloj atómico a bordo del satélite en el momento de la emisión) y t es el tiempo de recepción de la señal por el observador, medido con su reloj.

Si los relojes de los satélites están sincronizados entre sí y con los del observador, y se recoge información de al menos tres satélites (que se indican con los subíndices 1, 2 y 3), entonces puede conocerse la ubicación del GPS sobre la superficie terrestre, como se indica a continuación.

Llamando d_1, d_2 y d_3 a las distancias del observador a los satélites S_1, S_2 y S_3, resultan las

[1] Un nanosegundo es 10^{-9}s, es decir una milmillonésima de segundo.

siguientes tres ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
d_1^2 &= c^2(t_1 - t_{s_1})^2 = (x - x_{s_1})^2 + (y - y_{s_1})^2 + (z - z_{s_1})^2, \\
d_2^2 &= c^2(t_2 - t_{s_2})^2 = (x - x_{s_2})^2 + (y - y_{s_2})^2 + (z - z_{s_2})^2, \\
d_3^2 &= c^2(t_3 - t_{s_1})^2 = (x - x_{s_3})^2 + (y - y_{s_3})^2 + (z - z_{s_3})^2.
\end{aligned}
$$

Estas son equivalentes a las que se resolvieron en la sección 3.4, pero en otro sistema de coordenadas. No se intentará resolverlas, solo se debe observar que son tres ecuaciones con tres incógnitas, x, y y z, todas las demás variables son conocidas. Como se observó antes estas ecuaciones tienen en general dos soluciones.

4.2 Correcciones con más satélites

En el capítulo 1 se mencionó que para obtener las lecturas el sistema utiliza la información de al menos cuatro satélites. Sin embargo en los capítulos subsiguientes se mostró que con tres satélites es suficiente. Esta discrepancia se debe a que en la práctica se utilizan al menos cuatro satélites para mejorar la medición.

Los satélites cuentan con relojes atómicos de altísima precisión. Sin embargo no es posible contar con estos relojes en los receptores, por su tamaño y su costo. Por lo tanto, si bien puede despreciarse el error del satélite, no puede hacerse lo mismo con el del receptor y por lo tanto el tiempo que se lee $\tilde{t}$ puede escribirse como la suma de un valor correcto, t, más un error δt. Es decir $\tilde{t} = t + \delta t$ o $t = \tilde{t} - \delta t$. Esta última expresión es la que hay que usar en las ecuaciones anteriores. Si se toman datos de cuatro satélites entonces se obtienen las siguientes cuatro ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
c^2(\tilde{t}_1 - t_{s_1} - \delta t)^2 &= (x - x_{s_1})^2 + (y - y_{s_1})^2 + (z - z_{s_1})^2, \\
c^2(\tilde{t}_2 - t_{s_2} - \delta t)^2 &= (x - x_{s_2})^2 + (y - y_{s_2})^2 + (z - z_{s_2})^2, \\
c^2(\tilde{t}_3 - t_{s_3} - \delta t)^2 &= (x - x_{s_3})^2 + (y - y_{s_3})^2 + (z - z_{s_3})^2, \\
c^2(\tilde{t}_4 - t_{s_4} - \delta t)^2 &= (x - x_{s_4})^2 + (y - y_{s_4})^2 + (z - z_{s_4})^2.
\end{aligned}
$$

Aquí hay cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, x, y, z y δt. La solución de estas ecuaciones se realiza por métodos aproximados y permite cancelar el error del reloj del receptor. Además, como la mayor parte del tiempo el sistema puede leer más de cuatro satélites, se aprovecha esta información adicional mediante métodos estadísticos para mejorar aún más la lectura.

4.3 La Teoría de la Relatividad de Einstein y el GPS

A los fines de sincronizar correctamente los relojes que se encuentran en los satélites y los relojes en la tierra es necesario tener en cuenta correcciones debido a efectos relativistas.

Debido a la naturaleza del espacio-tiempo para un reloj que se mueve con el satélite el tiempo pasará más lentamente que para un reloj situado junto al observador en tierra. Por otra parte un reloj bajo la influencia de un campo gravitacional más fuerte también medirá el tiempo más lentamente (la fuerza de atracción gravitatoria decae a medida que aumenta la distancia a la tierra, por lo cual es más fuerte en la superficie terrestre que en la altura a la que se encuentra el satélite). Si no se tuviese en cuenta el efecto sobre el tiempo que tiene la velocidad del satélite y su gravedad respecto del observador en tierra, se produciría un corrimiento de 38 microsegundos[2] por día, que a su vez provocarían errores de varios kilómetros en la determinación de la posición.

La relatividad especial predice que la frecuencia de los relojes moviéndose a velocidades orbitales como la del satélite, $v = 4$ km/s, marcará el tiempo más lentamente que los relojes terrestres fijos con un retraso aproximado de 7 microsegundos por día.

[2] Un microsegundo es 10^{-6} s, es decir una millonésima de segundo.

Por otro lado, es la teoría de la relatividad general la que predice que un reloj más cercano a un objeto masivo será más lento que un reloj más alejado. Aplicado al GPS, los receptores están mucho más cerca de la Tierra que los satélites, haciendo los relojes del observador en tierra ser más rápidos, aproximadamente 45 microsegundos por día.

Al combinar estos dos efectos la discrepancia es de aproximadamente 38 microsegundos por día. Sin corrección, los errores en la distancia se incrementarían aproximadamente unos 10 km por día.

Además las órbitas de los satélite son elípticas y no perfectamente circulares, lo que causa que los efectos varíen con el tiempo. Es decir, la diferencia de velocidad de los relojes de un satélite GPS y un receptor aumenta o disminuye en función de la altitud del satélite, la cual es variable con el tiempo haciendo necesaria la corrección.

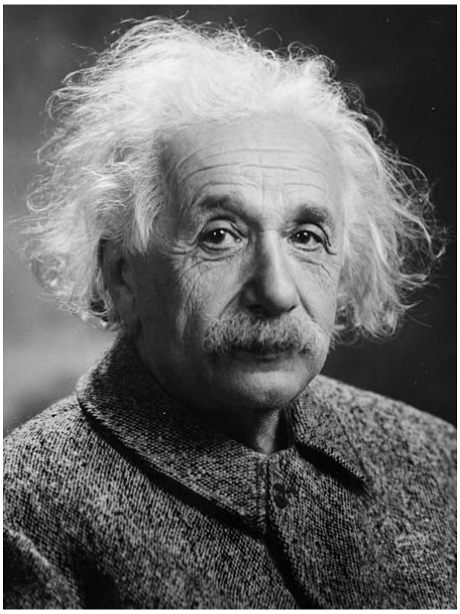
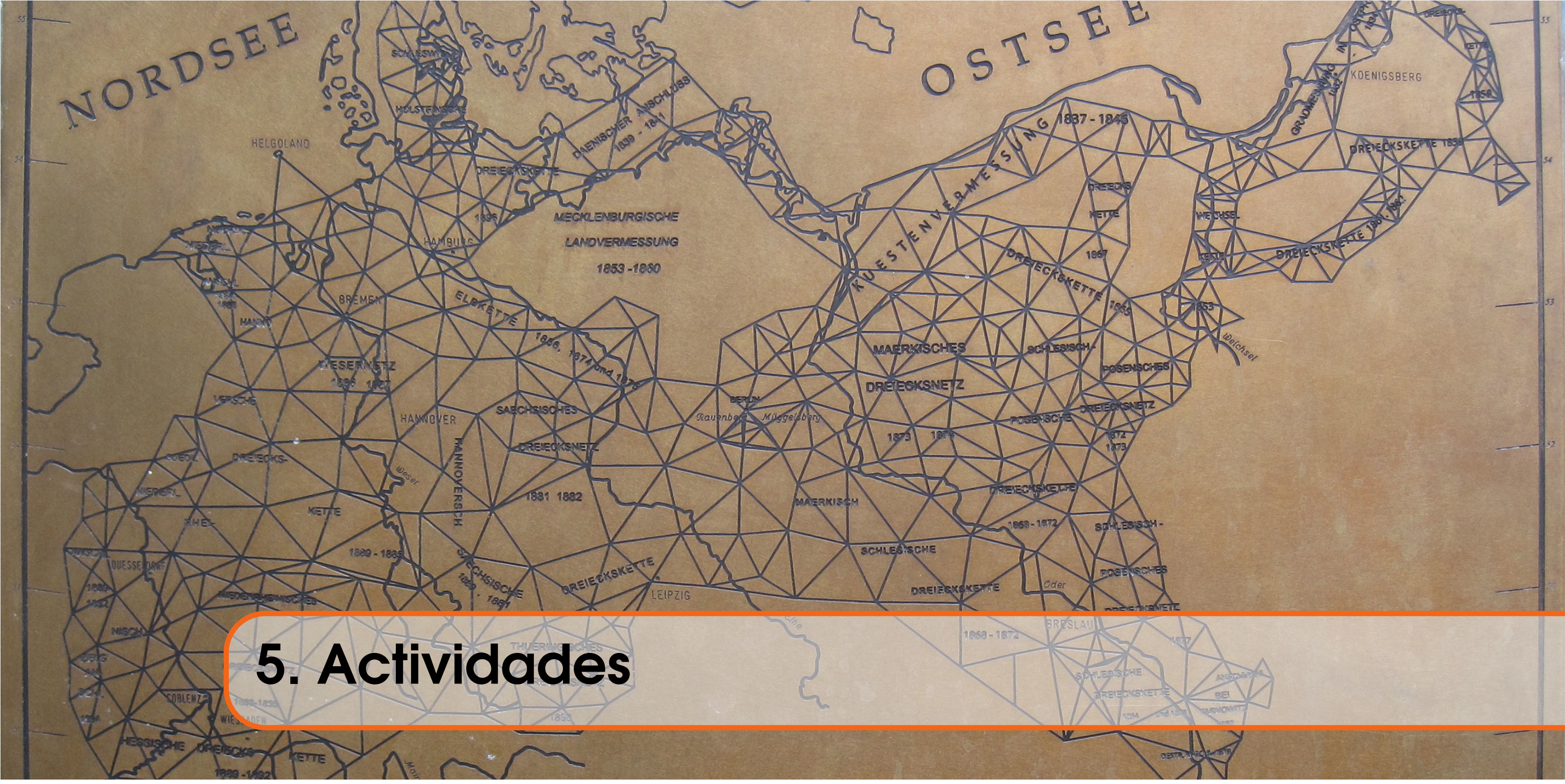


Figura 4.1: Albert Einstein.

III Propuestas para trabajar en el aula



5. Actividades

Consideraciones generales

Las actividades presentadas a continuación tienen como principal objetivo que los alumnos vinculen conceptos matemáticos elementales con objetos cotidianos, poniendo de manifiesto que la matemática es una herramienta fundamental en el modelado de la realidad que nos rodea. El elemento común a todas es, por supuesto, el uso del GPS. Las distintas propuestas pueden potenciarse implementando programas que permitan trabajar los conceptos involucrados (como geometría o funciones) u otros recursos web. En particular, en varias de las actividades aquí presentadas se propone el uso de Geogebra, una herramienta que puede utilizarse directamente en internet (`https://www.geogebra.org/`) que permite estudiar de manera gráfica muchos conceptos vinculados por ejemplo a funciones, geometría o trigonometría entre otros. Este programa, simple de usar para docentes y alumnos, incluye opciones de herramientas dinámicas (llamadas deslizadores) que permiten dar movimiento a los objetos representados.

Si bien cada una de las actividades fue pensada a partir de ciertos contenidos específicos, consideramos que las mismas pueden ser reformuladas y adaptadas a las distintas situaciones áulicas de cada docente, variando contenidos o niveles de dificultad.

5.1 Cálculo del área de la ciudad

Las dos propuestas presentadas a continuación tienen en común el cálculo de áreas de ciertas regiones geográficas. Veamos cómo podemos calcular, en forma aproximada, el área de una ciudad mediante el uso del GPS y el cálculo de áreas de triángulos.

1. El primer paso es encontrar un mapa bien delimitado de la ciudad. Esto es fácil por ejemplo utilizando Google Maps. Allí al ingresar en su buscador el nombre de la ciudad aparece el plano de la misma con sus límites y muchos otros detalles que pueden ser de interés.
2. Sobre este mapa debemos hacer una triangulación de la región que ocupa la ciudad. La misma consiste en la división de dicha región en triángulos que no se superpongan y que la cubran lo mejor posible. Para determinar los triángulos hay que elegir adecuadamente los vértices, siguiendo dos criterios básicos:

   a) Lograr un adecuado equilibrio entre dos factores opuestos: poner muchos puntos para delimitar más precisamente el área y poner el menor número de puntos para disminuir el trabajo necesario.
   b) Que los puntos sean fácilmente accesibles en el caso en que la medición de coordenadas se realice como trabajo de campo de pos alumnos.
3. Luego se propone un trabajo de campo, que consiste en acceder a los puntos seleccionados y determinar las coordenadas geográficas utilizando el GPS. Esto es, ir hasta el lugar con un GPS y verificar las coordenadas de la posición en que uno se encuentra. Otra opción es tomar estas coordenadas directamente con Google Maps que las provee simplemente parándonos sobre el punto de interés.
4. Una vez medidas las coordenadas de los vértices se procederá a calcular las distancias entre los puntos. El problema pertenece a una rama de la matemática llamada trigonometría esférica. No se ahondará aquí sobre este tema, solo indicaremos la fórmula que permite calcular la distancia entre dos puntos conocidas sus coordenadas geográficas [1]:

$$d = 2R_t \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{\Delta\phi}{2} + \cos\phi_1 \cos\phi_2 \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta\lambda}{2}}.$$

5. Finalmente se procede a calcular el área utilizando la fórmula de Herón, aplicada a cada triángulo, T_i. Es decir, si ℓ_{i1}, ℓ_{i2} y ℓ_{i3} son los tres lados de triángulo i-ésimo, con i desde 1 hasta N (el número total de triángulos) entonce su área, A_i es:

$$A_i = \sqrt{s_i(s_i - \ell_{i1})(s_i - \ell_{i2})(s_i - \ell_{i3})}$$

donde el semiperímetro s_i del triángulo T_i es la semisuma de sus lados:

$$s_i = \frac{\ell_{i1} + \ell_{i2} + \ell_{i3}}{2}.$$

Por lo tanto el área total es $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_N$.

5.1.1 Propuesta 1

Autores: Flavia Lupardo, Ana Mascetti, Cecilia Elicalde, Daniela Spinelli, Daniela Di Tomasso, Marianela Pohn, Fernando Tempone, Gisela Leguizamón, Mariela Golato, Rocío Dalessandro.
Contenidos a trabajar: ángulos, coordenadas geográficas (longitud, latitud), ubicación de puntos en el espacio tridimensional (particularmente sobre la Tierra), sistemas de medición y conversión de medidas, distancias en el plano y en el espacio, polígonos (en particular triángulos), áreas y perímetros, interpretaciones geométricas.

Situación inicial

> *El siguiente cuestionario apunta a poner de manifiesto los conocimientos previos de los alumnos respecto de los conceptos de latitud y longitud. Puede hacerse de a pares o en pequeños grupos para estimular la discusión entre ellos acerca de lo que recuerdan de años anteriores o lo que les indica el sentido común.*

1. Responder el siguiente cuestionario a partir de conocimiento previos:
   a) ¿Qué nos indican la latitud y la longitud?
   b) ¿En qué contextos son de utilidad estos conceptos? Buscar ejemplos concretos.

[1] En esta fórmula R_t es el radio de la tierra (por simplicidad se la supone esférica), $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ es la diferencia de las latitudes y $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ es la diferencia de las longitudes. Usualmente el GPS da las latidudes y longitudes en grados con decimales (no en grados minutos y segundos).

c) ¿Qué mide la latitud y qué la longitud? Explicar y realizar algún esquema o gráfico para ilustrarlo. Indicar los puntos de referencia de las mediciones (origen del sistema, ecuador, meridiano de Greenwich, polos).

d) ¿En qué unidades de medida se indica una latitud o una longitud? ¿Entre qué valores varía la latitud? ¿Y la longitud?

> *Para reforzar los conceptos puede realizarse, por ejemplo, una maqueta que represente el ecuador y el meridiano de Greenwich y permita visualizar los ángulos o los lugares geográficos que se van trabajando a lo largo de esta actividad. Esta propuesta puede trabajarse conjuntamente con docentes de Geografía y de Actividades Plásticas o Artística.*

2. Haciendo uso de alguna aplicación para el celular o mediante Google Maps, averiguar la latitud y longitud de la escuela.

> *Atención: Google Maps indica coordenadas geográficas mediante números decimales, lo cual nos permite abrir el debate sobre cómo expresar esos valores en el sistema sexagesimal.*

Actividades de desarrollo

3. Averiguar las coordenadas geográficas de la “Rotonda del Pescado” y la Maltería Quilmes.

> *Los lugares pueden ser elegidos por los alumnos o pautados por el docente. En este caso, los lugares mencionados están pensados para alumnos de una escuela en Tres Arroyos, agregándole así una impronta local a la actividad.*

4. Calcular distancias entre puntos geográficos. ¿Podrías calcular la distancia entre la escuela y estos dos lugares?

> *Se puede coordinar con docentes de Geografía y/o Física para trabajar conjuntamente los conceptos de distancia por ruta y por aire, transportes, o por ejemplo calcular el combustible según la distancia a recorrer de un avión, etc.*

5. Encontrar el área que queda encerrada entre la Rotonda del Pescado, la Maltería y la escuela.

> *Esperamos que los alumnos calculen los lados del triángulo formado y se den cuenta de que necesitan otra herramienta, y en ese momento facilitarles la fórmula de Herón.*

Actividad final

> *Esta actividad es transversal a Geografía, por lo que se puede trabajar conjuntamente.*

6. Un dato muy utilizado es la densidad de población. ¿Por qué puede ser de interés este valor? Investigar cuál es la población actual de Tres Arroyos (o el último dato obtenido), cuál es la superficie actual de la ciudad (te podés ayudar con un mapa para ver todo lo que ha crecido) y calcular la densidad de población actual de la ciudad (elegir unidades de medida).

5.1.2 Propuesta 2

Autoras: Vanesa Aja, Natalia Alonso, María Rosa Clemenza, Mariana Elizari, Mariana Mugica, Claudia Noval, Inés Tenaglia.

Contenidos a trabajar: coordenadas geográficas (longitud, latitud), sistemas de medición y conversión de medidas, regiones y distancias en el plano, polígonos (en particular triángulos), áreas y perímetros, interpretaciones geométricas.

Situación inicial

Se propone como primera actividad que los alumnos comiencen a utilizar el GPS como herramienta para conocer las coordenadas de un punto en el plano. Los lugares propios corresponden a la región de Tres Arroyos, matizando así la actividad con la geografía local.

1. Utilizando el GPS encontrar las coordenadas de los siguientes lugares:
   a) Parque Industrial
   b) Parque Cabañas
   c) La Rotonda del Pescado
   d) Intersección de ruta 3 y 228
2. Con la ayuda de la calculadora científica, completar una tabla como la siguiente para cada uno de los lugares localizados.

Lugar:	Latitud	Longitud
Sistema sexagesimal		
Sistema decimal		

Actividad de desarrollo

3. Buscar en Google Maps la región determinada por las rutas RN 3, RN 228, RP 85 y RP 75.
4. Mediante la técnica de triangulación calcular el área de la misma.

Se sugiere explorar y utilizar las herramientas de Google Maps (opción: crear mapa) que permite medir con una regla virtual las distancias que se consideren necesarias. El programa también permite calcular áreas, por lo que se puede contrastar los resultados encontrados por dos métodos diferentes.

Actividad final

5. Una empresa de telefonía quiere colocar una nueva antena para brindar mejor servicio a las de ciudades de Tres Arroyos, Tandil y Mar del Plata, para la calidad del servicio sea igual en las tres ciudades, la antena tiene que estar ubicada en un lugar que equidiste de las 3 ciudades. ¿En que lugar debe estar ubicada la antena?

Para realizar esta actividad se espera que los alumnos encuentren un mapa de la región y lo inserten en Geogebra, y luego con las herramientas que ofrece el programa encuentren el lugar donde ubicar la antena.

5.2 Funciones periódicas para modelar el movimiento satelital

Autores: María Teresa Vizcaino, Santiago Di Paolo, Jonathan Cuesta, Betiana Despósito, Florencia Doladé.

Contenidos a trabajar: Espacio bidimensional y tridimensional, esfera y circunferencia, distancia entre puntos en el plano, funciones de una variable real (dominio, valor de una función en un punto, máximo, mínimo y raíces), función periódica.

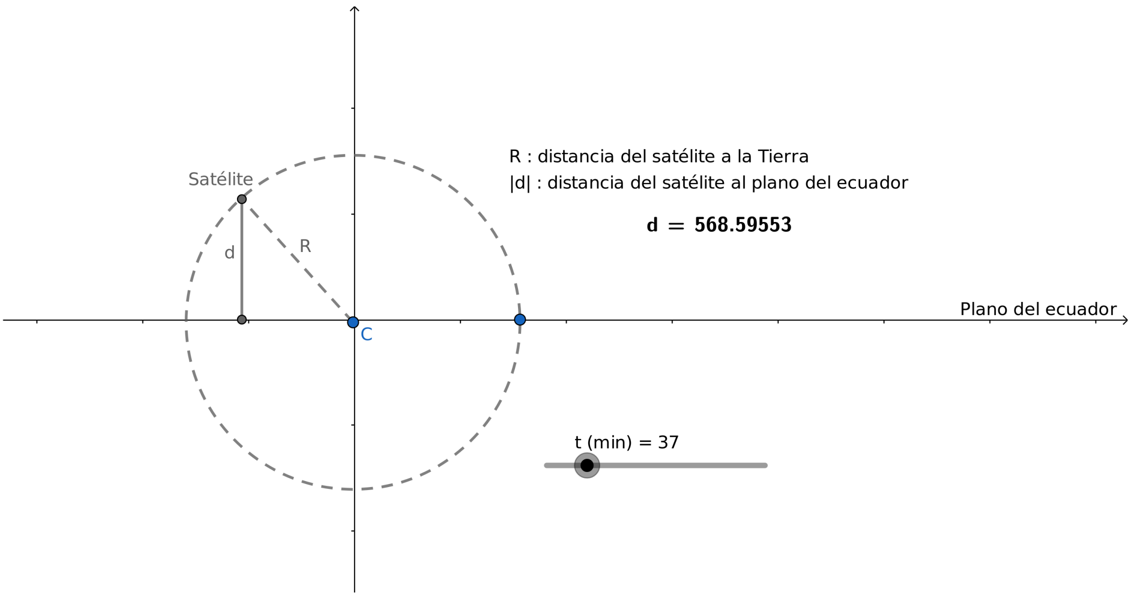
Situación inicial

Proponemos comenzar hablando sobre el GPS, cómo funciona y la cantidad de satélites que hay sobre las distintas órbitas que rodean al planeta. Se hablará o se propondrá a los alumnos buscar información sobre los distintos sistemas de navegación por satélite (GPS, GLONASS, Galileo), y el sistema satelital de comunicaciones Iridium.

A partir de la exploración de la página *stuffin.space*, se observará cómo orbitan los satélites y podrán ver una imagen con los diferentes satélites que rodean el planeta Tierra, sus órbitas y el plano en el que se encuentran, sus distancias a la Tierra, sus velocidades y el tiempo que tardan en dar una vuelta completa (período). Se prestará especial atención a los satélites de comunicaciones cuyas órbitas tienen una particularidad: son órbitas polares (es decir, pasan por los polos). El hecho de tener órbitas perpendiculares al plano del ecuador es la característica que nos permite asociar la coordenada x de la posición del satélite con la función coseno, y así plantear la actividad siguiente.

Actividad de desarrollo

La siguiente tabla indica la distancia a la que se encuentra un satélite de comunicaciones de Iridium del plano sobre el que se encuentra el ecuador a medida que pasa el tiempo. En la figura presentamos un esquema de lo que se observó en la página página *stuffin.space*.



tiempo (m)	0	10	20	25	30	40	50	60
distancia (km)	0	458,5	741,8	780	741,8	458,5	0	- 459,5

tiempo (m)	70	75	80	90	100	110	120	125
distancia (km)	- 741,8	- 780	- 741,8	- 458,5	0	- 458,5	- 741,8	-780

1. Representar la tabla de valores en un gráfico cartesiano en el que el eje horizontal corresponda al tiempo y el vertical a la “distancia“ del satélite al plano del ecuador.
2. ¿Cómo se interpretan los valores negativos de esta tabla?

Aquí sugerimos hacer una pausa en las actividades para discutir el gráfico obtenido, reflexionando sobre qué ocurre en los tiempos intermedios no indicados en la tabla, y qué ocurre con los tiempos siguientes a los 120 minutos.

3. ¿En qué momento alcanzará el satélite su distancia máxima al plano del ecuador? ¿En qué momento alcanzará su distancia mínima?
4. Para cada una de las respuestas anteriores, ¿hay un solo instante en el que se alcanzan estos valores o más de uno?

Las respuestas a estas preguntas inducen a la construcción deductiva de los siguientes conceptos: función de una variable real, dominio e imagen, valor de una función en un punto, máximos, mínimos y raíces. Luego de esta instancia se presentan y trabajan las nociones de frecuencia y función periódica. A partir de la gráfica obtenida se puede hacer un cuestionario sobre los elementos destacados de la función periódica obtenida en este trabajo.

> *Una opción para quienes tienen manejo del programa GeoGebra sería entregarle a los alumnos un archivo, hecho con este programa, en el que se represente el desplazamiento de un satélite de comunicaciones de Iridium. Puede realizarse con un botón deslizador que muestre la variación de las distancias (en función del tiempo) a la que se encuentra un satélite con respecto al plano sobre el que se encuentre el ecuador. En tal caso la construcción de la tabla anterior puede ser una actividad para los alumnos. Agregamos en un anexo al final de estas notas las instrucciones para construir tal deslizador, incluyendo allí los detalles matemáticos con los que se construyó la tabla anterior.*

Actividad final

Se propone a los alumnos que piensen o investiguen qué otros fenómenos están regidos por dinámicas oscilatorias, y al igual que se hizo con el movimiento satelital se puede proponer el modelado de tales fenómenos y estudiar sus funciones de posición respecto del tiempo.

> *Esta actividad involucra varios conceptos de Física, por lo que es adecuada para trabajarla en conjunto con docentes de esa disciplina.*

5.3 El Grooming y la geolocalizacón

Autora: Ana María De Zoete.

Comentario inicial

Las actividades aquí presentadas forman parte de un proyecto elaborado por la docente el cual incluye, además del trabajo con el GPS, una charla sobre Grooming a cargo de personal especializado de la Comisaría de la Mujer de Tres Arroyos. La propuesta completa (de la cual aquí solo se presentan las actividades matemáticas) busca promover experiencias que aporten al aprendizaje significativo de conceptos matemáticos al mismo tiempo que se reflexiona sobre los riesgos a los que pueden exponerse los alumnos al usar algunas redes sociales.

Contenidos a trabajar

- 4° año: Ecuaciones de segundo grado. Lugar geométrico. Módulo o valor absoluto. Ecuación de circunferencia. Puntos y distancias en el plano. Sistemas de ecuaciones no lineales. Coordenadas geográficas.
- 6° año: Coordenadas cartesianas en el espacio. Puntos y distancias en el espacio. Ecuación de una esfera - Intersecciones. Coordenadas geográficas.

Actividades propuestas para 4° año

Situación inicial: modelización de la situación en el plano

Supongamos que queremos localizar a una persona y conocemos las distancias entre la persona y 3 satélites que giran sobre una misma órbita alrededor de la Tierra.

1. Representar la situación reducida en un plano utilizando Geogebra.

2. Elegir un punto P=(x,y) sobre la Tierra en el que se ubica la persona, e indicar sus coordenadas.
3. Elegir la ubicación de los 3 satélites en una misma órbita (llamándolos S1, S2, y S3) y escribir sus coordenadas.

Situación de desarrollo: representación algebraica de distancias

4. Escribir la ecuación de la distancia de cada satélite S1, S2 y S3 hasta P.
5. Encontrar analíticamente las coordenadas del punto P.
6. Analizar la validez del resultado obtenido.

Situación final: generalización

7. Escribir la ecuación que representa la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano.
8. Escribir la ecuación de una circunferencia centrada en el origen de coordenadas.
9. Escribir la ecuación de una circunferencia con centro en un punto cualquiera del plano.
10. ¿Cómo puede obtenerse la intersección de dos circunferencias? ¿Qué tipos de soluciones pueden obtenerse?
11. Utilizar Google Maps para saber en qué lugar de la ciudad de Tres Arroyos se encuentran tres personas si sus dispositivos móviles muestran las siguientes coordenadas:
    a) (-38,376792 ; -60,276130)
    b) (-38,364607 ; -60,255577)
    c) (-38,368444 ; -60,285787)

Actividades propuestas para 6° año

Se propone trabajar la situación de manera análoga pero en el espacio.

5.4 Estudio ambiental del barrio

Autores: Silvia Andrea Balda, Roxana Daniela Bonelli, Mercedes Karina Dietrich, Pablo Sebastián Travi, Paula Ramirez, Karina Elisa Ferrabone, Patricia Elena Bertacco.

Nivel educativo: Secundaria superior- Proyecto Interdisciplinario con Geografía-Química-Ciudadanía-Física-Matemática-Salud y adolescencia.
Objetivos:

1. Relevar el grado de contaminación del barrio en el que se encuentra la escuela
2. Reconocer las variables que modifican la distribución de la contaminación
3. Modificar conductas para minimizar la contaminación

Contenidos:

1. Sistema de coordenadas y cálculo de áreas y longitudes
2. Estadística (¿qué temas específicos?)
3. Clasificación de los distintos tipos de contaminación
4. Caracterización climatológica
5. Factores sociales que condicionan la contaminación

Materiales: GPS, Cinta, Elementos para tomar nota, Programa para trabajar tablas de datos

Actividades de apertura

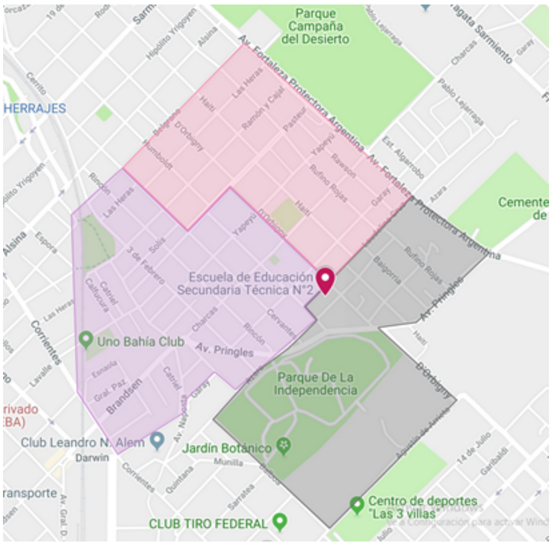
A partir de un diálogo dirigido por el docente se buscará plantear la problemática que representan los residuos al aire libre en el barrio. El disparador puede ser un artículo de algún periódico, algún conflicto que haya surgido en el sector de la escuela con respecto a este tema (por ejemplo, problemas con la recolección de residuos los días de lluvias si es que las calles del barrio se inundan), o un artículo de divulgación que hable de la contaminación en las ciudades por residuos domiciliarios. Indagando sobre los conocimientos previos del alumno respecto a esta problemática general y a la realidad del barrio en particular, se buscará concientizar sobre la situación en la que se encuentra el sector en el que se ubica la escuela.
Actividad para trabajar en grupos. Reflexionamos sobre las siguientes cuestiones:

1. ¿Con qué frecuencia hay recolección de residuos en el barrio?
2. ¿Los vecinos sacan los residuos los días de recolección o no tienen en cuenta está situación?
3. ¿Hay cestos de basura en las casas para evitar la posible ruptura de bolsas por los perros o roedores?
4. ¿Hay terrenos baldíos donde se acumula basura?
5. Ubicá en un plano barrial los sectores donde esto ocurre.

Esta actividad de apertura puede plantearse conjuntamente con otras disciplinas, como por ejemplo Geografía o Ciudadanía, en donde se puede plantear un trabajo de investigación en grupos a los que se les repartan distintas temáticas como puede ser el impacto de la contaminación del plástico en el ambiente, o de los residuos orgánicos en las calles o terrenos baldíos.

Actividades de desarrollo

1. Crear un mapa con Google Maps del barrio y ubicar, marcándolo con un color, la escuela, la Sociedad de Fomento, y otras instituciones que puedan resultar de interés. Con otro color identificar terrenos baldíos, kioscos, almacenes, paradas de colectivo u otros puntos que se consideren potenciales focos de acumulación de basura.
2. El docente propone una división del barrio en distintos sectores, los cuales los alumnos marcarán sobre el mapa creado.



3. Se forman tantos grupos de alumnos como sectores se hayan marcado en el mapa. Cada grupo se encargará, a partir de un recorrido por el sector asignado y prestando particular atención a los puntos que fueron identificados en el primer ítem, de relevar la información de los lugares en los que efectivamente se encuentra basura en espacios públicos. Estos lugares se marcarán sobre el mapa. Se sugiere usar colores distintos para indicar distintos tipos de residuos detectados. Por ejemplo, en una plaza o en la vereda de un kiosco puede observarse gran cantidad de residuos plásticos (no biodegradables) y papeles (biodegradables) mientras que en un terreno baldío o alguna esquina del barrio pueden encontrarse acumulaciones de basura orgánica si la gente del sector arroja sus residuos domiciliarios allí.
El relevamiento de información debe tener en cuenta dos situaciones: por un lado, las acumulaciones grandes de basura (suelen ser residuos domiciliarios) que pueden encontrarse en esquinas, cordones de vereda, terrenos baldíos, o contenedores, y por otro los espacios donde se encuentra una cantidad significativa de basura (papeles o plásticos en general) de forma dispersa (como suele verse en veredas de kioscos, paradas de colectivos y plazas).

Para el caso de grandes acumulaciones, se solicita que se mida con una cinta métrica las dimensiones (en el plano del suelo) que ocupa la acumulación de basura, volcando la información en una tabla como la que se muestra de ejemplo.

Ubicación	Dimensiones planas de basura	Composición (aproximada)
Esquina Junin y Soler	126cm x 112 cm = 14,112 cm^2	70 % orgánico - 25 % plástico - 5 % chatarra

Por otro lado, para los espacios en que se encuentre basura dispersa se tomará nota del espacio en que esta se distribuye, y las cantidades de cada tipo de residuo. Los datos se vuelcan en una tabla como la siguiente, que se muestra como ejemplo).

Ubicación	Dimensiones del espacio contaminado	Discriminación de residuos
San Juan al 200	3 m x 4,4 m =13,2 m^2	17 papel/cartón - 6 plásticos (3 botellas - dos tapas - 1 bolsa) - 2 orgánicos

4. Cada grupo deberá medir sobre el mapa el terreno total del sector que le fue asignado mediante el método de triangulación (explicado al inicio de este capítulo). Con esta información realizarán una tabla de frecuencias con los tipos de tamaño de plástico y calcular el mayor porcentaje de tamaño.

Activid de síntesis

Elaboración de un informe conjunto con los datos obtenidos: distribución y clasificación de los residuos del barrio, para presentar en distintos organismos para promover, por ejemplo, proyectos de reutilización del plástico. Se propone formular un proyecto para ser presentado ante las autoridades en el que se plantee la necesidad de la instalación de contenedores de residuos clasificados, proponiendo además un plan de control municipal respecto de los mismos, ya que muchas veces los contenedores no son revisados y limpiados en tiempo y forma, generando un problema más de contaminación. En este proyecto, se pueden sugerir a la comuna los lugares mas apropiados para la instalación de los mismos (examinados con el GPS, teniendo en cuenta parámetros como por ejemplo el acceso a los mismos, la distancia del sector urbanizado, la distancia de escuelas u otras instituciones barriales, etc.)

5.5 Un breve comentario sobre evaluación

La evaluación del trabajo realizado por los alumnos puede presentarse en distintas instancias teniendo en cuenta que no solo es significativo el resultado obtenido sino también el proceso seguido y la reflexión sobre lo trabajado. Por este motivo proponemos que además de las evaluaciones de contenido habituales en el aula, se consideren otras instancias. Una de ellas podría apuntar a la toma de conciencia de la forma personal de aprendizaje (lo que se conoce como metacognición), poniendo de manifiesto fortalezas y debilidades. Un cuestionario orientador para esta instancia podría ser:

1. ¿Cuáles eran mis conocimientos previos en relación con estos temas? ¿Qué me aportaron estos conocimientos a la comprensión de los contenidos y en el desarrollo de las actividades? Realizar una tabla de dos columnas en la que se enumeren los conocimientos previos (en la primer columna) y se indiqué el aporte de cada uno de ellos (en la segunda columna).
2. ¿Qué conceptos nuevos incorporé? ¿Qué conceptos no quedaron claros?
3. ¿Qué actividades me resultaron más sencillas? ¿Cuáles requirieron mayor esfuerzo?
4. ¿Podrías decir qué estrategias utilizaste para lograr la comprensión de los conceptos y para desarrollar correctamente las actividades?
5. ¿Qué me aportó este trabajo?
6. En caso de trabajo en equipo,
   a) ¿Qué ventajas o desventajas surgieron en esta forma de trabajo?
   b) ¿En qué me ayudaron mis compañeros? ¿qué aporte yo al equipo?

Otra instancia evaluativa que podría implementarse es la autoevaluación, en la que el alumno evalúa su propio trabajo. En este sentido, una propuesta puede ser la siguiente. Indicá mediante porcentajes en qué medida alcanzaste los siguientes objetivos:

Objetivos	Porcentaje de alcance
Comprensión los conceptos trabajados	
Comprensión de las consignas	
Resolución correcta y completa de actividades	
Cumplimiento de plazos y formas	
Compromiso con la propuesta de trabajo	

5.6 Anexo: un deslizador con GeoGebra

A continuación indicamos paso a paso cómo armar un deslizador que nos indique la posición de un satélite usando GeoGebra. Las sentencias que deberán ingresarse son las siguientes.

•	$C = (0,0)$
•	$A = (780,0)$
•	$c = \text{Circunferencia}(C,A)$
•	$t = 0$
•	Satélite = $\left(780\cos\left(\frac{\pi}{50}t\right), 780\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{50}t\right)\right)$
○	f : Perpendicular(Satélite,EjeX)
•	$B = \text{Interseca}(f, EjeX)$
•	d = Segmento(Satélite,B)
•	texto1 = FórmulaTexto(d,true,true)
•	R = Segmento(C,Satélite)

1. El centro C representa el centro de la Tierra.
2. 780 km es el radio (aproximado) de la circunferencia que describen los satélites del sistema Iridium.
3. La sentencia $t = 0$ crea un deslizador. La variable t por defecto tomará valores entre -5 y 5. Aquí deberemos abrir la opción de “configuración” que aparece al clickear sobre los tres puntos verticales que aparecen a la derecha de la casilla donde escribimos la sentencia. Allí, en la pestaña “Deslizador” se encuentran las opciones:
   - Min: 0 - Max: 200 - Incremento: 1
   - Velocidad: 0.75
   - Repite: creciente

Al cambiar a la pestaña "Básico" podemos agregar Rótulo: t(min)

4. El período de los satélites del sistema Iridium es de 100 minutos aproximadamente. Este valor nos determina el argumento de las funciones trigonométricas usadas para definir el punto en que se posiciona el satélite.
   Recordemos: para la función $f(x) = \cos(\omega x)$ o $g(x) = \operatorname{sen}(\omega x)$, el valor ω es la frecuencia, y el período es $P = 2\pi/\omega$.
   Así, en nuestro caso particular conocemos P y debemos encontrar ω. Tenemos
   $$100 = P = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{50}.$$
5. La recta f es un paso auxiliar para encontrar el punto B, por este motivo no se muestra en la gráfica final. Para que un objeto no se muestre basta clickear sobre el círculo que aparece a la izquierda de la casilla en que se lo define. Por este motivo, este círculo no se muestra pintado de negro.
6. Una vez definido el segmento d, marcamos la casilla en que lo definimos y la arrastramos sobre la gráfica. Eso hará aparecer el valor del segmento d en el gráfico y aparecerá automáticamente el renglón siguiente en las sentencias.
7. El texto que aparece en el gráfico se agrega con la opción de agregar texto, indicada con el símbolo ABC. Dependiendo de si estamos trabajando con una sesión de usuario o sin registrarnos, la ubicación de esta opción cambia. Al trabajar dentro de una cuenta de usuario, la encontramos dentro de la pestaña indicada con un segmento que tiene una letra "a" sobre él.
8. Otros detalles estéticos, como las lineas punteadas o texto destacado, se pueden conseguir seleccionando la opción de configuración de cada sentencia.

Por último, destacamos que la tabla de valores que se presentó en la actividad 5.2 corresponde a los valores de d y se pueden ir observando al variar el deslizador t, o bien calculando $d = 780\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{50}t\right)$ para los valores de t que se proponen en la tabla.

Índice alfabético