Universidad Nacional del Sur

Tesis de Doctora en Matemática

DESIGUALDADES MIXTAS CON PESOS PARA OPERADORES MULTILINEALES

María Belén Picardi

Bahía Blanca - Argentina

2019

Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Sur para optar al grado Académico de Doctor en Matemática, y no ha sido presentada previamente para la obtención de ningún otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento e Instituto de Matemática de Bahía Blanca, bajo la dirección de Sheldy J. Ombrosi, Profesor Titular del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur e Investigador Independiente INMABB-CONICET.

A Boni y Abby

Agradecimientos

A mi director de tesis Sheldy Ombrosi, por acompañarme siempre, demostrando no solo ser un excelente profesional sino también una gran persona. Quiero agradecerle, además, por la confianza que deposita en mí y por guiarme incondicionalmente.

A mi mamá Cecilia, mi papá Sergio y mi hermano Ariel, por acompañarme en todo momento de mi vida, escuchándome y conteniéndome. Por luchar a la par mía por mis sueños, por confiar y creer en mí, por desearme lo mejor, por cada consejo y por cada una de sus palabras de aliento.

A mis abuelos, por el cariño y por estar siempre presentes motivándome cada día a crecer. Por ser un ejemplo de dedicación, trabajo y honradez.

A mis amigos, por apoyarme en todas mis decisiones y nunca dejarme bajar los brazos. Por motivarme a evolucionar, y por compartir conmigo los momentos más divertidos de mis días.

A Israel Rivera-Ríos y Kangwei Li, por compartir conmigo sus conocimientos, por su generosidad, y por responder a mis inquietudes cada vez que recurro a ellos.

A los miembros del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur y del Instituto de Matemática de Bahía Blanca, por haberme brindado su apoyo.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, cuya ayuda económica facilitó la realización de esta tesis.

Resumen

En los últimos años ha tomado auge nuevamente el estudio de desigualdades de tipo mixtas pesadas, debido a que, desde el año 2005 hasta la actualidad, se han resuelto algunas de las conjeturas propuestas en los años 80 en relación a ese tipo de estimaciones. La mayoría de estos resultados han sido obtenidos en el contexto lineal.

En esta tesis, comenzamos el estudio de este tipo de desigualdades en el contexto multilineal. Concretamente, obtenemos desigualdades pesadas mixtas para operadores de Calderón-Zygmund multilineales y para la integral fraccionaria multilineal. Además, probamos extensiones vectoriales de estos resultados.

Abstract

In the last years, the study of weighted mixed type inequalities has taken on relevance again, since, from 2005 up to the present day, some of the conjectures related to this type of estimates raised in the 80's have been solved. Most of these results have been obtained in the linear context.

In this thesis, we begin the study of this type of inequalities in the multilinear setting. To be more specific, we obtain weighted mixed type inequalities for multilinear Calderón-Zygmund operators and for the multilinear fractional integral. Furthermore, we prove vector-valued extensions of these results.

Índice general

Introducción

En análisis armónico hay un gran número de desigualdades de la forma

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq C\|Sf\|_{L^p(w)}$$

y

$$\|Tf\|_{L^{p,\infty}(w)} \leq C\|Sf\|_{L^{p,\infty}(w)}$$

donde generalmente T es un operador integral singular, S es un operador "más fácil"de tratar (comúnmente un operador maximal y por lo tanto positivo), y w está en alguna clase de pesos.

Una de las funciones maximales más destacadas en el análisis armónico es la función maximal de Hardy-Litlewood, definida para una función f localmente integrable como

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy,$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos Q, con lados paralelos a los ejes, que contienen al punto x. La función maximal de Hardy-Littlewood verifica las siguientes desigualdades que son de suma importancia.

- **M es de tipo débil $(1,1)$:** Para cada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda > 0$, existe una constante dimensional C tal que vale la desigualdad

  $$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx,$$

  es decir, $M : L^1(\mathbb{R}^n) \to\ L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

- **M es de tipo fuerte (p,p):** Sea $1 < p < \infty$. Entonces existe una constante C tal que vale la desigualdad

  $$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx,$$

  es decir, $M : L^p(\mathbb{R}^n) \to\ L^p(\mathbb{R}^n)$.

Diremos que w es un peso si es una función no negativa localmente integrable. Más adelante relajaremos esta condición y no siempre cada vez que consideremos un peso pensaremos que w es localmente integrable: con la no negatividad será suficiente. Con el propósito de caracterizar los pesos w tal que la desigualdad de tipo fuerte (p,p)

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p w(x)\ dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\ dx$$

vale para $1 < p < \infty$ y toda $f \in L^p(w)$, B. Muckenhoupt introdujo en [66] la clase de pesos A_p, conocida hoy en día como la clase de Muckenhoupt.

Un peso w pertenece a la clase A_p de Muckenhoupt, $1 < p < \infty$, si

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{p-1} < \infty$$

donde p' es el exponente conjugado de p definido mediante la relación $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$. Este número se llama la constante A_p de w, y lo denotamos por $[w]_{A_p}$.

Un peso w pertenece a la clase A_1 si existe una constante C tal que $Mw(x) \leq Cw(x)$ para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. Si w es un peso A_1, entonces el número

$$[w]_{A_1} = \left\|\frac{Mw}{w}\right\|_\infty$$

se llama la costante A_1 de w.

El Teorema de Muckenhoupt dice que $M : L^p(w) \to L^p(w)$ sí y solo sí $w \in A_p$.

La clase A_∞ resulta ser la unión de las clases A_p, y está caracterizada por la siguiente cantidad

$$[w]_{A_\infty} = \sup_Q \frac{1}{w(Q)}\int_Q M(w\chi_Q).$$

La disigualdad probada por C. Fefferman y E. Stein [32] nos dice que para todo $t > 0$, existe una constante dimensional C tal que

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}) \leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|Mw(x)dx.$$

Posteriormente, B. Muckenhoupt y R. Wheeden [67] probaron que si $w \in A_1$, entonces, existe una constante C tal que para todo $t > 0$,

$$|\{x \in \mathbb{R} :\ M(fw^{-1})(x)\ w(x)\ > t\}|\ \leq\ \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx.$$

En 1985, E. Sawyer [75] probó que si $u, v \in A_1$, entonces, existe una constante C tal que para todo $t > 0$,

$$uv\Big(\Big\{x \in \mathbb{R} : \frac{M(fv)(x)}{v(x)} > t\Big\}\Big) \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|u(x)v(x)\, dx. \qquad (0.0.1)$$

Esta estimación es una extensión no trivial de la clásica desigualdad de tipo débil $(1,1)$ para el operador maximal, dada la presencia de un peso v dentro del conjunto de distribución.

En el mismo trabajo, E. Sawyer conjeturó que la desigualdad (0.0.1) era válida si el operador maximal era reemplazado por la transformada de Hilbert. En 2005, D. Cruz-Uribe, J. M. Martell y C. Pérez [24] extendieron (0.0.1) a $\mathbb{R}^n$. Más aún, lo probaron para operadores de Calderón-Zygmund, resolviendo de esta manera la conjetura de E. Sawyer. Además, conjeturaron que su resultado debía ser válido para $v \in A_\infty$.

Recientemente K. Li, S. Ombrosi y C. Pérez [59] resolvieron esta conjetura. Probaron que si $u \in A_1$ y $v \in A_\infty$, entonces, existe una constante C que depende de la constante A_1 de u y la constante A_∞ de v tal que

$$uv\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^n \ : \frac{|T(fv)(x)|}{v(x)} > t\Big\}\Big) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|u(x)v(x)dx,$$

donde T puede ser la función maximal de Hardy-Littlewood, un operador de Calderón-Zygmund, o una integral rough.

Nuestro propósito es presentar estimaciones mixtas con pesos que generalizan al contexto multilineal el teorema probado por K. Li, S. Ombrosi y C. Pérez. Más precisamente, vamos a presentar desigualdades mixtas con pesos para los operadores de Calderón-Zygmund multilineales y para la integral fraccionaria multilineal.

Con este objetivo, necesitaremos introducir conceptos de la teoría multilineal que a continuación presentamos.

En 2009, A. Lerner, S. Ombrosi, C. Pérez, R. H. Torres y R. Trujillo-González introdujeron en su trabajo [57] la función (sub)multilineal maximal $\mathcal{M}$ definida como

$$\mathcal{M}(\vec{f})(x) = \sup_{Q \ni x} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_i(y_i)| dy_i, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos Q que contienen a x. Este nuevo operador es el apropiado para estimar los operadores de Calderón-Zygmund multilineales.

Consecuentemente, desarrollaron la correspondiente teoría de pesos para esta nueva función maximal.

Sea m un entero positivo y sean $1 \leq p_1, ..., p_m < \infty$. Notamos p el número dado por $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$, y $\vec{P}$ el vector $\vec{P} = (p_1, ..., p_m)$. Dado $\vec{w} = (w_1, ..., w_m)$, sea

$$\nu_{\vec{w}}(x) = \prod_{j=1}^{m} w_j^{\frac{p}{p_j}}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Decimos que $\vec{w}$ satisface la condición $A_{\vec{P}}$ si

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\vec{w}} \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{1-p'_j} \right)^{\frac{1}{p'_j}} < \infty.$$

Cuando $p_j = 1$, $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{1-p'_j} \right)^{\frac{1}{p'_j}}$ se entiende como $(\text{ínf}_Q w_j)^{-1}$. Por lo tanto diremos que $\vec{w} \in A_{(1,...,1)}$ si

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\vec{w}} \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^{m} (\text{ínf}_Q w_j)^{-1} < \infty.$$

El comienzo de la teoría de operadores de Calderón-Zygmund multilineal se remonta a la década del setenta, con los trabajos de R. R. Coifman e Y. Meyer [16], [17] y [18]. Sea T un operador multilineal inicialmente definido en el m-producto de espacios de Schwarz y tomando valores en el espacio de distribuciones temperadas,

$$T : S(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times S(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n).$$

Siguiendo la notación de L. Grafakos y R. Torres [40], decimos que T es un operador de Calderón-Zygmund m-lineal si, para algún $1 \leq q_j < \infty$, se extiende a un operador multilineal acotado de $L^{q_1} \times ... \times L^{q_m}$ a L^q, donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + ... + \frac{1}{q_m}$, y si existe una función K, definida fuera de la diagonal $x = y_1 = ... = y_m$ en $(\mathbb{R}^n)^{m+1}$, que satisface

- T tiene la siguiente representación

$$T(f_1, ..., f_m)(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} K(x, y_1, ..., y_m)\ f_1(y_1)...f_m(y_m)\ dy_1...dy_m,$$

  para todo $x \notin \cap_{j=1}^{m} sop(f_j)$

- Condición de tamaño: El núcleo K satisface

$$|K(y_0, y_1, ..., y_m)| \leq \frac{A}{\left(\sum_{k,l=0}^{m} |y_k - y_l| \right)^{mn}}$$

- Condición de regularidad

$$|K(y_0, ..., y_j, ..., y_m) - K(y_0, ..., y_j', ..., y_m)| \leq \frac{A|y_j - y_j'|^{\varepsilon}}{\left(\sum_{k,l=0}^{m} |y_k - y_l|\right)^{mn+\varepsilon}},$$

para algún $\varepsilon > 0$ y todo $0 \leq j \leq m$, siempre que $|y_j - y_j'| \leq \frac{1}{2} max_{0 \leq k \leq m} |y_j - y_k|$.

El siguiente operador que vamos a presentar es la integral fraccionaria y su versión multilineal.

Para $0 < \alpha < n$ y f localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, se define la integral fraccionaria como

$$I_\alpha(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dy.$$

Una manera natural de extender las integrales fraccionarias al contexto multilineal es la siguiente: Para α un número tal que $0 < \alpha < mn$ y $\vec{f} = (f_1, ..., f_m)$ una colección de funciones en $\mathbb{R}^n$, definimos la integral fraccionaria multilineal como

$$\mathcal{I}_\alpha \vec{f}(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{f_1(y_1)...f_m(y_m)\ d\vec{y}}{(|x - y_1| + ... + |x - y_m|)^{mn-\alpha}}.$$

Los primeros resultados para este tipo de operadores fueron obtenidos por C. Kenig y E. Stein [48].

La función maximal fraccionaria M_α (para $0 \leq \alpha < n$), asociada a la integral fraccionaria I_α está dada por

$$M_\alpha f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |f(y)| dy,$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos Q que contienen a x.

En 2009, K. Moen [64] introdujo el operador maximal (sub)multilineal $\mathcal{M}_\alpha$ asociado a la integral fraccionaria multilineal $\mathcal{I}_\alpha$, que será relevante para nuestros resultados. Definió, de esta manera, para $0 \leq \alpha < mn$ y $\vec{f} = (f_1, ..., f_m)$, el operador maximal (sub)multilineal $\mathcal{M}_\alpha$ como

$$\mathcal{M}_\alpha \vec{f}(x) = \sup_{Q \ni x} \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{nm}}} \int_Q |f_i(y_i)| dy_i \right).$$

Desigualdades mixtas con pesos de tipo débil para los operadores de Calderón-Zygmund multilineales

En este trabajo vamos a presentar estimaciones mixtas con pesos que generalizan el teorema de K. Li, S. Ombrosi y C. Prérez al contexto multilineal. Trabajaremos primero con $\prod_{i=1}^{m} Mf_i$, obteniendo de esta manera una desigualdad mixta con pesos de tipo débil para este producto. Concretamente, si $w_1, ..., w_m \in A_1$ y $v \in A_\infty$, y denotamos $\nu = w_1^{\frac{1}{m}}...w_m^{\frac{1}{m}}$, entonces, vale que

$$\left\| \frac{\prod_{i=1}^{m} Mf_i}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}.$$

(Ver el Teorema 3.1.3 en la Sección 3.1).

Fácilmente se ve que la conclusión de este teorema también vale para el operador maximal más pequeño $\mathcal{M}$. Tenemos, entonces, que bajo las mismas hipótesis, vale la desigualdad

$$\left\| \frac{\mathcal{M}(\vec{f})}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}.$$

(Ver el Teorema 3.1.4 en la Sección 3.1).

En segundo lugar, debilitaremos las hipótesis en los pesos w_i y obtendremos un resultado independiente para el operador $\mathcal{M}$. Específicamente, si $\vec{w} = (w_1, ..., w_m) \in A_{(1...,1)}$, $\nu = w_1^{\frac{1}{m}}...w_m^{\frac{1}{m}}$ y v es un peso que satisface $\nu v^{\frac{1}{m}} \in A_\infty$, entonces, vale que

$$\left\| \frac{\mathcal{M}(\vec{f})}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}.$$

(Ver el Teorema 3.1.5 en la Sección 3.1).

Para la demostración de este teorema será clave tener en mente el concepto de familias sparse. Recordemos que para $0 < \eta < 1$, una colección S de cubos diádicos $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ se denomina una familia η-sparse si para todo j existe $E_{Q_j} \subseteq Q_j$ de manera tal que $|E_{Q_j}| \geq \eta |Q_j|$ y además $\{E_{Q_j}\}_{j=1}^{\infty}$ cumple que $E_{Q_j} \cap E_{Q_k} = \emptyset$ si $j \neq k$. Por lo tanto, para $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto, decimos que A_s es un operador sparse si

$$A_s f(x) = \sum_{Q \in S} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)\, dy \right) \chi_Q(x),$$

donde S es una familia η-sparse.

Posteriormente, presentaremos un teorema de extrapolación, que nos permitirá finalmente extender el resultado a operadores de Calderón-Zygmund multilineales. El teorema de extrapolación dice que si $\vec{w} = (w_1, ..., w_m) \in A_{(1,...,1)}$, $v^{1/m} \in A_\infty$ y $\nu = w_1^{\frac{1}{m}} ... w_m^{\frac{1}{m}}$, entonces se verifica la desigualdad

$$\left\| \frac{T(\vec{f})}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \left\| \frac{\mathcal{M}(\vec{f})}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})}$$

donde C es una constante y T es un operador de Calderón-Zygmund multilineal. (Ver el Teorema 3.2.4 en la Sección 3.2).

Teniedo en cuenta los resultados antes mencionados, podremos presentar una desigualdad mixta con pesos de tipo débil para los operadores de Calderón-Zygmund multilineales. Más precisamente, si T es un operador de Calderón-Zygmund multilineal, $\vec{w} = (w_1, ..., w_m)$ y $\nu = w_1^{\frac{1}{m}} ... w_m^{\frac{1}{m}}$, supongamos que $\vec{w} \in A_{(1,...,1)}$ y $\nu v^{\frac{1}{m}} \in A_\infty$ o $w_1, ..., w_m \in A_1$ y $v \in A_\infty$. Entonces existe una constante C tal que vale

$$\left\| \frac{T(\vec{f})}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}.$$

(Ver el Teorema 3.2.5 en la Sección 3.2).

Como consecuencia directa de este teorema, presentaremos un corolario: Si T es un operador de Calderón-Zygmund multilineal, $\vec{w} \in A_{(1,...,1)}$ y $v \in RH_\infty$, entonces, existe una constante C tal que vale la desigualdad

$$\left\| \frac{T(\vec{f})}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}.$$

(Ver el Corolario 3.2.7 en la Sección 3.2).

Desigualdades mixtas con pesos de tipo débil para la integral fraccionaria multilineal $\mathcal{I}_\alpha$

Como mencionamos anteriormente, también trabajaremos con la integral fraccionaria multilineal. Vamos a presentar una desigualdad pesada mixta para este tipo de operadores y la apropiada clase de pesos asociada a los mismos.

F. Berra, M. Carena y G. Pradolini [6] probaron la siguiente desigualdad mixta de tipo débil:

Sea $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ y q tal que satisface $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Si u, v son pesos tales que $u, v^{\frac{q}{p}} \in A_1$ o $uv^{\frac{-q}{p'}} \in A_1$ y $v \in A_\infty(uv^{\frac{-q}{p'}})$, entonces existe una constante positiva C tal que para todo $t > 0$ vale la desigualdad

$$uv^{\frac{q}{p}}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{I_\alpha(fv)(x)}{v(x)} > t\Big\}\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{C}{t}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p u(x)^{\frac{p}{q}} v(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

donde I_α es la integral fraccionaria o la función maximal fraccionaria M_α.

En primer lugar, extenderemos el teorema de F. Berra, M. Carena y G. Pradolini para operadores maximales fraccionarios multilineales. Concretamente, si $0 \leq \alpha < mn$, $q = \frac{n}{mn-\alpha}$, $\vec{u}^{mq} = (u_1^{mq}, ..., u_m^{mq})$ y $\nu = \prod_{i=1}^m u_i^q$, supongamos que $\vec{u}^{mq} \in A_{(1,...,1)}$ y $\nu v^q \in A_\infty$, o $u_1^{mq}, ..., u_m^{mq} \in A_1$ y $v^{mq} \in A_\infty$, entonces existe una constante C tal que se verifica la desigualdad

$$\left\|\frac{\mathcal{M}_\alpha(\vec{f})}{v}\right\|_{L^{q,\infty}(\nu v^q)} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^1(u_i)}.$$

(Ver el Teorema 4.2.1 en la Sección 4.2).

Luego, presentamos un teorema de extrapolación, que nos permite pasar de la integral fraccionaria multilineal a la maximal fraccionaria multilineal: Si $0 < \alpha < mn$ y $q = \frac{n}{mn-\alpha}$, sean $\vec{u}^{mq} = (u_1^{mq}, ..., u_m^{mq}) \in A_{(1,...,1)}$, $v^q \in A_\infty$ y denotamos $\nu = \prod_{i=1}^m u_i^q$, entonces existe una constante C tal que vale la desigualdad

$$\left\|\frac{\mathcal{I}_\alpha(\vec{f})}{v}\right\|_{L^{q,\infty}(\nu v^q)} \leq C \left\|\frac{\mathcal{M}_\alpha(\vec{f})}{v}\right\|_{L^{q,\infty}(\nu v^q)}.$$

(Ver el Teorema 4.3.1 en la Sección 4.3).

Finalmente, gracias a los dos teoremas mencionados arriba, vamos a presentar una extensión del teorema de F. Berra, M. Carena y G. Pradolini para la integral fraccionaria multilineal. Más precisamente, si $0 < \alpha < mn$, $q = \frac{n}{mn-\alpha}$, $\vec{u}^{mq} = (u_1^{mq}, ..., u_m^{mq})$ y $\nu = \prod_{i=1}^m u_i^q$, supongamos que $\vec{u}^{mq} \in A_{(1,...,1)}$ y $\nu v^q \in A_\infty$, o $u_1^{mq}, ..., u_m^{mq} \in A_1$ y $v^{mq} \in A_\infty$, entonces existe una constante C tal que vale la desigualdad

$$\left\|\frac{\mathcal{I}_\alpha(\vec{f})}{v}\right\|_{L^{q,\infty}(\nu v^q)} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^1(u_i)}.$$

(Ver el Teorema 4.3.3 en la Sección 4.3).

Aplicaciones

A modo de aplicación, presentaremos las siguientes desigualdades mixtas vectoriales para operadores de Calderón-Zygmund multilineales y la integral fraccionaria multilineal respectivamente.

- Sea $S(\vec{f}\,)=\frac{T(\vec{f}\,)}{v}$, donde T es un operador de Calderón-Zygmund multilineal. Sea $\vec{w}=(w_1,...,w_m)\in A_{(1,...,1)}$ y $\nu v^{\frac{1}{m}}\in A_\infty$, o $w_1,...,w_m\in A_1$ y $v\in A_\infty$. Sea $\nu=w_1^{\frac{1}{m}}...w_m^{\frac{1}{m}}$ y sea $1<r\leq 2$. Para cada $1\leq i\leq m$, consideramos $\{f_{k_i}^i\}_{k_i}\subset L^1(w_i)$. Entonces, existe una constante $C>0$ tal que

$$\left\|\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m}|S(f_{k_1}^1,\ldots,f_{k_m}^m)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})}\leq C\prod_{i=1}^m\left\|\left(\sum_{k_i}|f_{k_i}^i|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^1(w_i)}.$$

  (Ver el Corolario 5.1.1 en la Sección 5.1).

- Sea $S(\vec{f}\,)=\frac{\mathcal{I}_\alpha(\vec{f}\,)}{v}$, donde $\mathcal{I}_\alpha$ es un operador multilineal fraccionario. Sea $q=\frac{n}{mn-\alpha}$, $\vec{u}^{mq}=(u_1^{mq},...,u_m^{mq})$ y $\nu=\prod_{i=1}^m u_i^q$. Supongamos que $\vec{u}^{mq}\in A_{(1,...,1)}$ y $\nu v^q\in A_\infty$, o $u_1^{mq},...,u_m^{mq}\in A_1$ y $v^{mq}\in A_\infty$. Para cada $1\leq i\leq m$, consideramos $\{f_{k_i}^i\}_{k_i}\subset L^1(u_i)$. Entonces, existe una constante $C>0$ tal que

$$\left\|\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m}|S(f_{k_1}^1,\ldots,f_{k_m}^m)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^{q,\infty}(\nu v^q)}\leq C\prod_{i=1}^m\left\|\left(\sum_{k_i}|f_{k_i}^i|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{L^1(u_i)}.$$

  (Ver el Corolario 5.2.1 en la Sección 5.2).

Problemas abiertos

Creemos interesante dejar planteados dos problemas que hasta el momento no han podido ser resultos.

El primero trata el problema de unificar dos condiciones para probar una desigualdad mixta con pesos de tipo débil para $\mathcal{M}(\vec{f}\,)$. Concretamente, planteamos si será posible que dado $\vec{w} = (w_1, ..., w_m) \in A_{(1,...,1)}$, $v^{1/m} \in A_\infty$ y $\nu = w_1^{\frac{1}{m}} ... w_m^{\frac{1}{m}}$, entonces, valga la siguiente desigualdad

$$\left\| \frac{\mathcal{M}(\vec{f})}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}.$$

(Ver la Conjetura 1 en la Sección 6.1).

En segundo lugar, planteamos una problemática similar para la integral rough bilineal. Para $1 < q \leq \infty$ y $\Omega \in L^q(\mathbb{S}^{2n-1})$ con $\int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \Omega d\sigma = 0$, donde $\mathbb{S}^{2n-1}$ es la esfera unitaria en $\mathbb{R}^{2n}$, R. Coifman e Y. Meyer [17] introdujeron la integral singular bilineal rough asociada a Ω, definida como

$$T_\Omega(f_1, f_2)(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x - y_1) f_2(x - y_2) \frac{\Omega((y_1, y_2)/|(y_1, y_2)|)}{|(y_1, y_2)|^{2n}} dy_1 dy_2,$$

donde v.p. significa el valor principal de la integral. Planteamos el interrogante si será posible que si $(w_1, w_2) \in A_{(1,1)}$, $v^{1/2} \in A_\infty$ y $\nu = w_1^{\frac{1}{2}} w_2^{\frac{1}{2}}$, entonces, valga la siguiente desigualdad

$$\left\| \frac{T_\Omega(f_1, f_2)}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{2},\infty}(\nu v^{\frac{1}{2}})} \leq C \ \|f_1\|_{L^1(w_1)} \|f_2\|_{L^1(w_2)}.$$

(Ver la Conjetura 2 en la Sección 6.2).

Estructura general de la tesis

Los contenidos que hemos resumido en los párrafos anteriores se organizan de la siguiente manera.

En el Capítulo 1 introduciremos definiciones y resultados clásicos en el contexto lineal. Empezaremos definiendo los espacios de Lebesgue, que serán el contexto para los resultados de esta tesis. Introduciremos la clase de pesos A_p y definiremos ciertos operadores en el contexto lineal, que van a ser fundamentales para los resultados obtenidos en este trabajo, como son la función maximal de Hardy-Littlewood y su versión diádica, los operadores de Calderón-Zygmund, los operadores sparse y la integral fraccionaria. Daremos sus definiciones y propiedades básicas, y además aportaremos una prueba a partir de la dominación sparse para una desigualdad de tipo Coifman-Fefferman para operadores de Calderón-Zygmund.

El Capítulo 2 estará destinado a presentar una generalización al contexto multilineal de los operadores introducidos en el Capítulo 1. Definiremos la clase de pesos $A_{\vec{P}}$ y recordaremos definiciones y propiedades básicas de la función maximal (sub)multilineal, los operadores de Calderón-Zygmund multilineales y la integral fraccionaria mutilineal. Estos operadores tendrán un rol protagónico a lo largo de la disertación.

El propósito del Capítulo 3 es presentar estimaciones mixtas con pesos que generalizan el teorema de K. Li, S. Ombrosi y C. Pérez al contexto multilineal. Trabajaremos tanto con $\prod_{i=1}^{m} Mf_i$ como con $\mathcal{M}(\vec{f}\,)$ bajo diferentes hipótesis sobre los pesos que intervienen en las desigualdades. Luego, mediante un teorema de extrapolación, podremos probar desigualdades mixtas con pesos para operadores de Calderón-Zygmund multilineales.

En el Capítulo 4 trabajaremos con la integral fraccionaria multilineal. Vamos a presentar una desigualdad pesada mixta para este tipo de operadores y la apropiada clase de pesos asociada a los mismos. Para ello, trabajaremos primero con $\mathcal{M}_\alpha(\vec{f}\,)$ y luego nuevamente mediante argumentos de extrapolación extenderemos el resultado a la integral fraccionaria multilineal.

En el Capítulo 5 presentamos, a modo de aplicación, desigualdades mixtas vectoriales para operadores de Calderón-Zygmund multilineales y la integral fraccionaria multilineal.

Por último, en el Capítulo 6, planteamos dos problemas que hasta el momento no han podido ser resueltos. El primero trata el problema de unificar dos condiciones para probar una desigualdad mixta con pesos de tipo débil para $\mathcal{M}(\vec{f}\,)$. El segundo presenta una problemática similar para las integrales rough bilineales.

Contribuciones originales

Las contribuciones originales de esta tesis pueden hallarse esencialmente en los Capítulos 3, 4 y 5. Los trabajos a los que dieron lugar estos resultados son los siguientes:

- K. Li, S. Ombrosi y B. Picardi, *Weighted mixed weak-type inequalities for multilinear operators*, Studia Math. 244 (2) (2019), 203-215.
- B. Picardi, *Weighted mixed weak-type inequalities for multilinear fractional operators*, arXiv:1810.06680 (2018). Enviado para su publicación.

Capítulo 1

Preliminares: Resultados clásicos

En este capítulo introduciremos definiciones y resultados clásicos en el contexto lineal que serán necesarios para el entendimiento de la tesis.

Los espacios de Lebesgue L^p poseen diversas aplicaciones en matemáticas y en otras disciplinas. Tienen la particularidad de medir el "tamaño"de las funciones, lo que hace que sus propiedades sean muy útiles en análisis matemático, ecuaciones en derivadas parciales, probabilidad, etc.

Definición 1.0.1. *Dado un espacio de medida (X,μ), para $0 < p < \infty$ se define $L^p(X,\mu)$ como el espacio de las funciones $f : X \to \mathbb{C}$ μ-medibles y tales que $|f|^p$ es integrable. Si $f \in L^p(X,\mu)$ se define la norma de f en $L^p(X,\mu)$ como*

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \Big(\int_X |f|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$ definimos

$$L^\infty(X,\mu) = \{f \text{ medibles} : \|f\|_{L^\infty(X,\mu)} < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)|$$

y el supremo esencial se define como

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| := \text{ínf}\{a > 0 : \mu\{x \in X : |f(x)| \geq a\} = 0\}.$$

Notemos que, claramente, hay una dependencia del espacio $L^p(X,\mu)$ con respecto al conjunto X. En efecto: sea $p = \infty$, μ la medida de Lebesgue,

$X = [a,b]$ un intervalo acotado en la recta real y $n \in \mathbb{N}$. Sea $g(x) = x^n$. Luego g es una función esencialmente acotada. Sin embargo, si $X = \mathbb{R}$ esto ya no es cierto, pues $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mu)} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n| = +\infty$.

Para $1 \leq p \leq \infty$ los espacios $L^p(X,\mu)$ equipados con sus correspondientes normas son espacios de Banach.

El espacio en que trabajamos es, generalmente, $\mathbb{R}^n$. Si E es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, notaremos $\mu(E)$ para hacer referencia a la μ-medida del conjunto E. Cuando μ es la medida de Lebesgue notaremos $|E|$. χ_E será su función característica: $\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$.

En el caso en que $X = \mathbb{R}^n$ y μ sea la medida de Lebesgue, notaremos $L^p(X,\mu) = L^p(\mathbb{R}^n)$. Dado un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^n$ definimos

$$L^p(E) = \{f \text{ medibles : } \|f\|_{L^p(E)} < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_{L^p(E)} = \Big(\int_E |f|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty$$

y

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} |f(x)|.$$

En reiteradas oportunidades se mencionarán los exponentes conjugados p y p'. Es por eso que a continuación daremos su definicón.

Definición 1.0.2 (Exponentes conjugados p y p')**.** *Sean p y p' dos reales pertenecientes al intervalo $(1,\infty)$. Diremos que p y p' son exponentes conjugados si verifican $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, es decir, $p' = \frac{p}{p-1}$. Si $p = 1$ notaremos su exponente conjugado $p' = +\infty$ y, de forma similar, si $p = +\infty$ escribiremos $p' = 1$.*

En los espacios $L^p(X,\mu)$ vale que si $1 \leq p \leq \infty$ entonces

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_{L^p(X,\mu)} \|g\|_{L^{p'}(X,\mu)},$$

donde p y p' son exponentes conjugados. Esta desigualdad es conocida como la **desigualdad de Hölder**. Notemos que esto nos dice que si controlamos las cantidades $\|f\|_{L^p(X,\mu)}$ y $\|g\|_{L^{p'}(X,\mu)}$, podemos controlar la cantidad $\|fg\|_{L^1(X,\mu)}$.

Observación 1. *Cuando $p = q = \frac{1}{2}$, esta desigualdad se conoce con el nombre de* ***desigualdad de Cauchy-Schwarz****.*

Es importante destacar que la desigualdad de Hölder puede ser generalizada en espacios de Lebesgue para actuar sobre m funciones: sean $p_1, ..., p_m, p$ tales que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$, entonces

$$\|f_1 ... f_m\|_{L^p(X,\mu)} \leq \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^{p_i}(X,\mu)}.$$

La desigualdad de Hölder puede ser utilizada para demostrar la desigualdad de Minkowski, la cual es una generalización de la desigualdad triangular en el espacio $L^p(X, \mu)$.

Proposición 1.0.3 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Sea* $1 \leq p \leq \infty$ *y sean* $f, g \in L^p(X, \mu)$*. Entonces vale que*

$$\|f + g\|_{L^p(X,\mu)} \leq \|f\|_{L^p(X,\mu)} + \|g\|_{L^p(X,\mu)}.$$

En algunas ocasiones, utilizaremos la siguiente expresión de la norma de una función $f \in L^p(X, \mu)$ por dualidad:

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \sup_{\|g\|_{L^{p'}(X,\mu)}=1} \left| \int_X fg \; d\mu \right|.$$

A veces no es necesario pedir que una función sea integrable sobre todo el espacio X y, muchas veces, es suficiente trabajar con funciones que son integrables sobre todo subconjunto de X que tiene ciertas propiedades. Por ejemplo, si $X = (0, +\infty)$, podemos estudiar las funciones integrables sobre todo intervalo acotado de X sin que estas funciones sean necesariamente integrables sobre todo el conjunto X.

Definición 1.0.4 (Espacios L^p_{loc} y L^∞_{loc})**.** *Sea* $1 \leq p < \infty$*. Definimos el espacio de clases de funciones* μ*-medibles de potencia* p *localmente integrables, notado* $L^p_{loc}(X, \mu)$ *como*

$$L^p_{loc}(X, \mu) = \left\{ f : \left(\int_K |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \;\; \textit{para todo } K \subset X \textit{ compacto} \right\}.$$

El espacio $L^\infty_{loc}(X, \mu)$ *de clases de funciones localmente esencialmente acotadas estará definido como*

$$L^\infty_{loc}(X, \mu) = \left\{ f : \sup_{x \in K} \text{es} \, |f(x)| < \infty, \quad \textit{para todo } K \subset X \textit{ compacto} \right\}.$$

Observación 2. *Si $f \in L^1_{loc}(X,\mu)$ diremos simplemente que f es localmente integrable.*

Un ejemplo clásico de una función localmente integrable está dado por $f(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x \in (0,+\infty)$. Esta función verifica que $\int_K \frac{1}{x}dx < \infty$ para todo compacto $K \subset (0,+\infty)$ pero sin embargo $f \notin L^1(0,+\infty)$.

Trabajaremos también en los espacios débiles de Lebesgue, definidos de la siguiente manera.

Definición 1.0.5. *Para $0 < p < \infty$ el espacio débil $L^{p,\infty}(X,\mu)$ se define como el conjunto de todas las funciones μ-medibles $f : X \to \mathbb{C}$ tales que*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} = \sup_{\lambda>0} \lambda\ \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Los espacios débiles de Lebesgue $L^{p,\infty}(X,\mu)$ son espacios cuasi-Banach y satisfacen que $L^p(X,\mu) \subset L^{p,\infty}(X,\mu)$. Cuando μ es una medida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, esto es, cuando $d\mu = wdx$, escribimos $L^p(w)$ o $L^{p,\infty}(w)$ para denotar el correspondiente espacio de Lebesgue pesado. La función medible no negativa w se llama peso (ver Sección 1.3 para más información).

$L^{p,\infty}$ es un caso particular de una definición más general: los espacios de Lorentz.

Los espacios de Lorentz $L^{p,q}$

Se llama función de distribución de f (asociada a μ) a la función $\alpha_f : (0,\infty) \to [0,\infty]$ dada por

$$\alpha_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}).$$

Si f es una función medible podemos definir una función en $[0,\infty)$, decreciente, que tiene la misma función de distribución que f de la siguiente manera:

$$f^*(t) = \text{ínf}\,\{\lambda : \alpha_f(\lambda) \leq t\}.$$

Sea (X,μ) un espacio de medida. $L^{p,q}(X)$ es el espacio de las funciones medibles f que satisfacen

$$\|f\|_{p,q} = \Big(\frac{q}{p}\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^q \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

cuando $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, y

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty$$

cuando $1 \leq p \leq \infty$. En general $\|.\|_{p,q}$ no es una norma ya que la desigualdad triangular puede no ser cierta. Sin embargo, cuando $p = q$ se tiene que $\|f\|_{p,q} = \|f^*\|_p = \|f\|_p$ y se recupera el espacio L^p.

Para más información sobre el reordenamiento decreciente y los espacios $L^{p,q}$, ver el capítulo 5 de [78].

Será útil introducir las siguientes definiciones.

Definición 1.0.6 (Función simple). *Diremos que una función μ-medible y finita $f : X \to \mathbb{R}$ es una función simple si su imagen es un subconjunto finito de $\mathbb{R}$. Sea $Im(f) = \{\alpha_1, ..., \alpha_N\}$. En tal caso, podremos representar*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i},$$

donde $E_i = f^{-1}(\alpha_i)$ forman una partición de X y son conjuntos μ-medibles.

Una función simple f es integrable si el conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ es de μ- medida finita.

Definición 1.0.7 (Soporte de una función). *El soporte de una función f definida en X está dado por*

$$sop(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Las funciones simples integrables y las funciones continuas con soporte compacto son densas en los espacios de Lebesgue.

1.1. Función maximal de Hardy-Littlewood

Las funciones maximales surgen naturalmente en el análisis armónico y han sido estudiadas a lo largo de los años para resolver una gran variedad de problemas en distintas áreas de la matemática. Entre ellas, una de las más destacadas es la función maximal de Hardy-Litlewood.

Definición 1.1.1. *Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. La función maximal de Hardy-Littlewood de f se define como*

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \, dy,$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos Q que contienen al punto x. El operador maximal de Hardy-Littlewood M es el operador que envía la función f a la función Mf.

Ocasionalmente, utilizaremos la notación $\langle f\rangle_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f$. Por Q siempre hacemos referencia a aquellos cubos cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, y $|Q|$ representa la medida de Lebesgue de Q. Notemos que si $l(Q)$ representa la longitud del lado del cubo Q se tiene que $|Q| = l(Q)^n$. Este operador fue introducido en 1930 por G. H. Hardy y J. E. Littlewood [42] en el caso unidimensional y más tarde esta definición fue extendida a $\mathbb{R}^n$ por N. Wiener [81]. Hay variantes de esta definición reemplazando cubos por bolas, o bien considerando cubos o bolas centradas en x. Estas variantes son equivalentes salvo constantes dimensionales, al menos mientras la medida subyacente sea la medida de Lebesgue.

La función maximal de Hardy-Littlewood es semicontinua inferiormente, y en consecuencia medible. El operador M definido sobre las funciones localmente integrables con valores en las funciones medibles es sublineal, lo que significa que

$$M(af+bg)(x) \leq |a|M(f)(x) + |b|M(g)(x),$$

para cada par f, g de funciones, a, b de números y cada $x \in \mathbb{R}^n$.

La función maximal de Hardy-Littlewood surge dentro del análisis tanto para probar teoremas de existencia de límites en casi todo punto como para "controlar" otros operadores, como por ejemplo operadores integrales singulares, variantes fraccionarias e integrales fraccionarias. El teorema de diferenciación de Lebesgue nos dice que

$$f(x) = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\, dy.$$

Para el entendimiento de la tesis es necesario conocer las definiciones de operador de tipo fuerte y de tipo débil que daremos a continuación.

Definición 1.1.2 (Operador de tipo fuerte (p,q))**.** *Dados dos espacios de medida (X,μ) e (Y,ν), diremos que un operador $T : L^p(X,\mu) \to L^q(Y,\nu)$ es de tipo fuerte (p,q), o lo que es lo mismo, que es acotado de $L^p(X,\mu)$ en $L^q(Y,\nu)$ si existe una constante C que depende únicamente de p, q y la dimensión del espacio tal que*

$$\|Tf\|_{L^q(Y,\nu)} \leq C\|f\|_{L^p(X,\mu)}.$$

Definición 1.1.3 (Operador de tipo débil (p,q))**.** *Dados dos espacios de medida (X,μ) e (Y,ν), diremos que un operador T es de tipo débil (p,q), $(q<\infty)$, o lo que es lo mismo, que $T : L^p(X,\mu) \to L^{q,\infty}(Y,\nu)$, si para todo $\lambda > 0$ existe una constante C que depende únicamente de p, q y la dimensión del espacio tal que*

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\})^{\frac{1}{q}} \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^p(X,\mu)}.$$

Diremos que T es de tipo débil (p, ∞) si es un operador acotado de $L^p(X, \mu)$ en $L^\infty(Y, \nu)$, esto es, si existe una constante C que depende solo de p y de la dimensión tal que

$$\|Tf(x)\|_{L^\infty(Y,\nu)} \leq C\|f\|_{L^p(X,\mu)}.$$

Observemos que si T es un operador de tipo fuerte (p, q) entonces también es de tipo débil (p, q).

Demostración. Sea $E_\lambda = \{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}$.

$$\nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} \nu \leq \int_{E_\lambda} \left(\frac{|Tf(y)|}{\lambda}\right)^q \nu \leq \frac{1}{\lambda^q}\|Tf\|^q_{L^q(Y,\nu)} \leq \frac{C}{\lambda^q}\|f\|^q_{L^p(X,\mu)}.$$

Por lo tanto

$$\nu(E_\lambda)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^p(X,\mu)}.$$

□

La siguiente desigualdad de tipo débil es una de las desigualdades clásicas de suma importancia que verifica el operador maximal de Hardy-Littlewood.

Teorema 1.1.4 (Hardy-Littlewood-Wiener). *Para cada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda > 0$, existe una constante dimensional C tal que*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx.$$

El teorema dice que $M : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, es decir, que M es de tipo débil $(1, 1)$. Además, tenemos que el operador M transforma el espacio L^∞ en sí mismo, más precisamente $\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Es decir, M es de tipo fuerte (∞, ∞). Por lo tanto tenemos que M es también de tipo débil (∞, ∞).

Teorema 1.1.5 (Teorema de interpolación de Marcinkiewicz). *Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ y T un operador sublineal definido en $L^{p_0}(\mathbb{R}^n) + L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ con valores en el espacio de las funciones medibles, donde T es simultáneamente de tipo débil (p_0, p_0) y de tipo débil (p_1, p_1). Entonces T es de tipo fuerte (p, p) para $p_0 < p < p_1$.*

Observación 3. *El teorema de interpolación de Marcinkiewicz se puede generalizar a los espacios de Lorentz.*

Como consecuencia del teorema de interpolación de Marcinkiewicz y del hecho que M es de tipo débil (1,1) y de tipo débil (∞, ∞) se tiene la siguiente desigualdad de tipo fuerte (p, p).

Corolario 1.1.6. *Sea $1 < p < \infty$. Entonces existe una constante C tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx,$$

es decir, $M : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$.

Por ser M un operador de tipo débil $(1,1)$ se tiene que también verifica la siguiente desigualdad.

Lema 1.1.7 (Lema de Kolmogorov)**.** *Si S es un operador de tipo débil $(1,1)$, $0 < \delta < 1$ y E un conjunto de medida finita, entonces existe $C = C(\delta)$ tal que*

$$\int_E |Sf(x)|^\delta dx \leq C \, |E|^{1-\delta} \|f\|_1^\delta.$$

1.2. Cubos diádicos y el operador maximal diádico

Entendemos por un cubo de longitud de lado l en $\mathbb{R}^n$, un cubo semiabierto $Q = [x_1, x_1 + l) \times \cdots \times [x_n, x_n + l)$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; l > 0$, con lados paralelos a los ejes coordenados. Diremos que $[0,1)^n$ es el cubo unidad abierto por la derecha de $\mathbb{R}^n$. Consideremos las colecciones de intervalos

$$\mathcal{D}_k = \{2^{-k}[0,1)^n + m : m \in \mathbb{Z}^n\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Los cubos diádicos estándar de $\mathbb{R}^n$ se definen como la unión de todas esas colecciones en $k \in \mathbb{Z}$. Es decir,

$$\mathcal{D} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_k$$

.

Algunas de las propiedades que tienen los cubos diádicos son las siguientes:

- Para cada k fijo, dado $x \in \mathbb{R}^n$, existe un único cubo $Q \in \mathcal{D}_k$ tal que $x \in Q$.
- Dos cubos diádicos cualesquiera o bien son disjuntos, o bien uno de ellos está totalmente contenido en el otro.
- Un cubo diádico de la colección $\mathcal{D}_k$ está contenido en un único cubo diádico de cada colección $\mathcal{D}_j$, $(j < k)$, y contiene 2^n cubos diádicos de la colección $\mathcal{D}_{k+1}$.

- Para cada k, $\mathcal{D}_k$ es una partición de $\mathbb{R}^n$.

Estamos ahora en condiciones de definir el operador maximal diádico.

Definición 1.2.1. *Sea f una función localmente integrable y consideramos la colección $\mathcal{D}$ de todos los cubos diádicos estándar en $\mathbb{R}^n$. Definimos el operador maximal diádico y lo notamos por M_d al operador dado por*

$$M_d f(x) = \sup_{Q \in \mathcal{D}, Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \, dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos diádicos de $\mathbb{R}^n$ que contienen a x.

Observemos que $M_d f(x) \leq Mf(x)$. En la sección 1.1 vimos que M es un operador de tipo débil $(1,1)$ y que es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$. Por lo tanto deducimos que M_d también tiene este tipo de acotaciones. Sin embargo será de nuestro interés poder acotar el operador maximal de Hardy-Littlewood por el operador maximal diádico. La desigualdad puntual $Mf(x) \leq CM_d f(x)$ no se verifica en general. No obstante, podemos acotar puntualmente el operador maximal de Hardy-Littlewood por varios operadores diádicos. Una suma de 3^n familias diádicas nos dan la estimación inversa que queremos. Podemos encontrar 3^n familias diádicas $\mathcal{D}_j$ de manera tal que

$$Mf(x) \leq C \sum_{j=1}^{3^n} M_{d_j} f(x). \tag{1.2.2}$$

Ver el Teorema 3.1 y comentarios posteriores en [54].

El siguiente teorema nos da una descomposición del espacio $\mathbb{R}^n$ que es muy útil. Es la llamada descomposición de Calderón-Zygmund.

Teorema 1.2.3 (Descomposición de Calderón-Zygmund [10])**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ no negativa y sea $\lambda > 0$. Entonces existe una sucesión de cubos diádicos disjuntos $\{Q_j\}_j$ tales que*

1. *$f(x) \leq \lambda$ para casi todo $x \notin \bigcup_j Q_j$.*
2. *$|\bigcup_j Q_j| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.*
3. *$\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f \leq 2^n \lambda$.*

Demostración. Consideremos el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}$. Si $x \in \mathbb{R}^n$ es tal que $M_d f(x) > \lambda$ entonces existe un cubo diádico maximal Q_j tal que $x \in Q_j$ y $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f > \lambda$. Notemos además que $\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}$ puede escribirse como unión disjunta de cubos diádicos maximales. En efecto, si Q es el cubo diádico maximal que contiene a x, y si y es cualquier otro punto en Q, entonces y debe tener también a Q como cubo maximal. En caso contrario, si existiera un cubo maximal Q' tal que $y \in Q$ con $Q \subset Q'$, x también estaría en Q' y eso contradice el hecho de que Q es el cubo maximal que contiene a x. Por lo tanto tenemos que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup_j Q_j.$$

Esta sucesión Q_j verifica las propiedades del enunciado. En efecto:

1. Si $x \notin \bigcup_j Q_j$ entonces esto quiere decir que $x \notin \{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}$. Por lo tanto, para todo cubo diádico Q_j tal que $x \in Q_j$ se tiene que $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f \leq \lambda$. Como todos los promedios son menores o iguales que λ el límite también lo es, y por el teorema de diferenciación de Lebesgue se tiene que $f(x) \leq \lambda$ en casi todo punto.

2. Como los Q_j son disjuntos, tenemos que

$$\begin{aligned} \Big|\bigcup_j Q_j\Big| = \sum_j |Q_j| &< \frac{1}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j} f \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}} f \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} f = \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

   Observemos que esto demuestra que el operador maximal diádico es de tipo débil $(1,1)$.

3. Ya vimos que $\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f$. Veamos ahora que $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f \leq 2^n\lambda$. Para cada cubo Q_j consideremos su padre diádico, es decir, el cubo diádico $\widetilde{Q}_j$ cuyo lado es el doble que el de Q_j, es decir, $|\widetilde{Q}_j| = 2^n|Q_j|$, y tal que $Q_j \subset \widetilde{Q}_j$. Como Q_j es maximal, se tiene que para $\widetilde{Q}_j$ el promedio de la función es mayor que λ. Luego,

$$\frac{1}{2^n|Q_j|}\int_{Q_j} f \leq \frac{1}{|\widetilde{Q}_j|}\int_{\widetilde{Q}_j} f \leq \lambda.$$

□

En el resto de la tesis, cada vez que aparezca el operador maximal de Hardy-Littlewood M estaremos pensando en una versión diádica del mismo, ya que por lo que mencionamos anteriormente cualquier estimación en norma será consecuencia de (1.2.2) y de obtener una estimación independientemente de la familia diádica que estemos considerando.

1.3. Pesos

Un peso es una función no negativa que toma valores en $(0, \infty)$ en casi todo punto. Luego un peso puede valer 0 o infinito solo en un conjunto de medida cero. En algunas ocasiones debemos pedir que el peso sea localmente integrable pero no siempre será necesario. Dado un peso w y un conjunto medible E,

$$w(E) = \int_E w(x)\ dx$$

denota la w-medida del conjunto E.

Vimos en el corolario 1.1.6 de la Sección 1.1 que si $1 < p < \infty$, entonces existe una constante C tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p\ dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\ dx.$$

Nos interesa ver qué pasa cuando la medida dx es reemplazada en esta desigualdad por un peso $w(x)$. Concretamente, la pregunta que motiva la definición de las clases de pesos A_p es si hay una caracterización para todos los pesos $w(x)$ tal que la desigualdad de tipo fuerte (p, p)

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p w(x)\ dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\ dx$$

sea válida para toda $f \in L^p(w)$. B. Muckenhoupt mostró en [66] que esta desigualdad es válida sí y solo sí w está en la clase A_p, conocida hoy en día como la clase de Muckenhoupt.

1.3.1. Clase A_p de Muckenhoupt

Un peso w pertenece a la clase A_p de Muckenhoupt, $1 < p < \infty$, si

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)\ dy \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{1-p'}\ dy \right)^{p-1} < \infty$$

donde p' es el exponente conjugado de p definido mediante $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Este número se llama la constante A_p de w, y lo denotamos por $[w]_{A_p}$.

Un peso w pertenece a la clase A_1 si existe una constante C tal que $Mw(x) \leq Cw(x)$ para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. Si w es un peso A_1, entonces el número

$$[w]_{A_1} = \sup_{Q \text{ cubos en } \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)\, dy \right) \|w^{-1}\|_{L^\infty(Q)}$$

se llama la costante A_1 de w. Notemos que si $w \in A_1$ entonces satisface

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)\, dy \leq [w]_{A_1} \operatorname*{ess\,inf}_{y \in Q} w(y)$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$.

No es difícil ver que la constante A_1 también puede ser escrita como

$$[w]_{A_1} = \left\| \frac{Mw}{w} \right\|_\infty .$$

Estamos ahora en condiciones de enunciar el teorema de Muckenhoupt.

Teorema 1.3.1 (Teorema de Muckenhoupt [66]). *Sea $1 < p < \infty$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $M : L^p(w) \to L^p(w)$

(b) $M : L^p(w) \to L^{p,\infty}(w)$

(c) $w \in A_p$.

Observación 4. *Si $p = 1$ las condiciones* (*b*) *y* (*c*) *siguen siendo equivalentes.*

Vamos a mencionar algunas propiedades de las clases A_p que serán utilizadas más adelante para demostrar algunos de los teoremas que presentaremos.

Proposición 1.3.2.

1. *Si $p < q$ entonces $A_p \subset A_q$.*

2. *$w \in A_p$ sí y solo sí $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$.*

3. *Si $w_1, w_2 \in A_1$, entonces $w_1 w_2^{1-p} \in A_p$ para $1 < p < \infty$.*

Demostración.

1. Si $p=1$,
$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-q'}\Big)^{q-1} \leq \sup_{x\in Q} w^{-1}(x) = \big(\inf_{x\in Q} w(x)\big)^{-1} \leq C\Big(\frac{w(Q)}{|Q|}\Big)^{-1}.$$
Sea $p>1$. Sea $w\in A_p$. Por lo tanto $[w]_{A_p}<\infty$ y solo basta ver que $[w]_{A_q}\leq [w]_{A_p}$. Aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes conjugados $\frac{1-p'}{1-q'}$ y $\frac{1-p'}{q'-p'}$ se tiene que
$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-q'}\Big)^{q-1}\\ &\leq \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\Big)\frac{1}{|Q|^{q-1}}\Big(\int_Q w^{1-p'}\Big)^{\frac{(q-1)(1-q')}{1-p'}}|Q|^{\frac{(q'-p')(q-1)}{1-p'}}\\ &= \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\Big)\Big(\int_Q w^{1-p'}\Big)^{p-1}|Q|^{1-p}.\end{aligned}$$
Tomando supremos se tiene que $[w]_{A_q}\leq [w]_{A_p}$.

2. La condición $A_{p'}$ para $w^{-\frac{1}{p-1}}$ es
$$\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{\frac{1}{p-1}\frac{1}{p'-1}}\Big)^{p'-1}\leq C.$$
Como $(p-1)(p'-1)=1$, a la izquierda tenemos la potencia $p'-1$ de la condición A_p para w.

3. Esto puede verse fácilmente, probando que $[w_1 w_2^{1-p}]_{A_p}\leq [w_1]_{A_1}[w_2]_{A_1}^{p-1}$.

□

El resultado 3 de la Proposición 1.3.2 que permite construir pesos A_p a partir de pesos A_1 tiene la gran importancia de caracterizar completamente los pesos A_p. El teorema de factorización A_p dice que la inversa de la afirmación 3 es cierta. Esto nos da una sorprendente representación de los pesos A_p introducida por P. Jones en [47].

Teorema 1.3.3 (Teorema de factorización A_p [47]). *Sea $w\in A_p$, para algún $1<p<\infty$. Entonces existen pesos $w_1, w_2\in A_1$ tal que $w=w_1w_2^{1-p}$.*

Daremos a continuación el enunciado de otro resultado clave en la teoría de pesos. Para más detalles, pueden consultarse los libros [35] y [30].

Teorema 1.3.4 (Desigualdad de Hölder inversa). *Si $w \in A_p$ para algún $p \geq 1$, entonces existe $\varepsilon > 0$ (que depende de w) tal que para todo cubo Q*

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\varepsilon}(x)\ dx \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq C \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)\ dx \right).$$

Como consecuencia de la desigualdad de Hölder inversa tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.3.5. *Si $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $w^{1+\varepsilon} \in A_p$.*

Demostración. Probar que $w^{1+\varepsilon} \in A_p$ es equivalente a probar que

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\varepsilon} \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}(1+\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}(p-1)} \leq C.$$

Pero esto es inmediato con el mismo ε que aparece en la desigualdad de Hölder inversa para w, teniendo en cuenta que $w \in A_p$ y por lo tanto $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$. □

El siguiente teorema da una caracterización de los pesos A_1 que nos permite construir pesos en esta clase, y en A_p con la afirmación 3 de 1.3.2.

Teorema 1.3.6. *Si $f \in L^1_{loc}$, $0 \leq \delta < 1$, entonces $w(x) = (Mf(x))^\delta \in A_1$ con constante A_1 que depende de δ. Recíprocamente, si $w \in A_1$, entonces existen $f \in L^1_{loc}$, $0 \leq \delta < 1$ y $k \in L^\infty$ con $k^{-1} \in L^\infty$ tales que $w(x) = k(x)(Mf(x))^\delta$.*

Demostración. Veamos que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q (Mf)^\delta \leq C(\delta)(Mf(x))^\delta \quad c.t.x \in Q$$

con C independiente de Q y f. Fijemos Q, y sea Q' el cubo del mismo centro y doble de lado. Partimos $f = f_1 + f_2$ con $f_1 = f\chi_{Q'}$. Entonces tenemos que $Mf(x) \leq Mf_1(x) + Mf_2(x)$ y por lo tanto $Mf(x)^\delta \leq Mf_1(x)^\delta + Mf_2(x)^\delta$, $0 \leq \delta < 1$. Como M es de tipo débil (1,1), por la desigualdad de Kolmogorov (Lema 1.1.7), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q (Mf_1)^\delta &\leq \frac{1}{|Q|}\ C(\delta)\ |Q|^{1-\delta}\ \|f_1\|_1^\delta \\ &\leq C(\delta) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f \right)^\delta \leq 2^n\ C(\delta)\ Mf(x)^\delta. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $y \in Q$ y R es un cubo que contiene a y tal que $\frac{1}{|R|}\int_R |f_2| \neq 0$, tiene que valer que $l(R) > \frac{1}{2}l(Q)$, de modo que para alguna constante c_n que depende solo de n, se tiene que $x \in c_n R$ (cubo de lado c_n veces el lado de R). Luego

$$\frac{1}{|R|}\int_R |f_2| \leq \frac{1}{|R|}\int_{c_nR} |f| \leq C\ Mf(x)$$

y por lo tanto $Mf_2(y) \leq C\ Mf(x)$ para todo $y \in Q$. Entonces

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (Mf_2(y))^\delta\ dy \leq C\ Mf(x)^\delta.$$

Sea ahora $w \in A_1$. Entonces satisface la desigualdad de Hölder inversa, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\varepsilon}(x)\ dx\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\ dx\right).$$

Junto con la condición A_1 se tiene que

$$\left(Mw^{1+\varepsilon}(x)\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq C\ w(x) \quad c.t.x \in \mathbb{R}^n.$$

Además,

$$w^{1+\varepsilon}(x) \leq Mw^{1+\varepsilon}(x) \quad c.t.x \in \mathbb{R}^n.$$

Poniendo $w^{1+\varepsilon} = f$ y $\frac{1}{1+\varepsilon} = \delta$, tenemos

$$w(x) \leq (Mf(x))^\delta \leq C\ w(x),$$

y definiendo $k(x) = \frac{w(x)}{(Mf(x))^\delta}$ se tiene el resultado. □

Desigualdades con dos pesos

Es interesante notar que en algunos problemas es necesario considerar dos pesos distintos. Podemos generalizar el problema a un par de pesos (u, w) y preguntarnos si para $1 < p < \infty$ hay una caracterización para todos los pares de pesos (u, w) tales que el operador maximal M es de tipo fuerte (p, p) con respecto al par de medidas $u(x)dx$ y $w(x)dx$, es decir, para los cuales existe una constante C tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p u(x)\ dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\ dx.$$

También podemos preguntarnos si para $1 \leq p < \infty$ es posible determinar los pares de pesos (u, w) tales que el operador maximal M es de tipo débil (p, p) con respecto al par de medidas $u(x)dx$ y $w(x)dx$, es decir, para los cuales existe una constante C tal que

$$u(\{x : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\, dx.$$

Definición 1.3.7. *Decimos que el par de pesos (u, w) está en A_p para $1 < p < \infty$, si*

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q u \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \leq C \tag{1.3.8}$$

y decimos que está en A_1 si

$$Mu(x) \leq Cw(x) \quad c.t.p.$$

B. Muckenhoupt obtuvo una caracterización para las desigualdades de tipo débil para M, dando una respuesta positiva a nuestro segundo planteo.

Teorema 1.3.9. *$M : L^p(w) \to L^{p,\infty}(u)$, es decir,*

$$u(\{x : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\, dx$$

sí y solo sí $(u, w) \in A_p$.

Observemos que la condición A_p no da respuesta al primer planteo que hicimos, pues existen pesos (u, w) tales que $(u, w) \in A_p$ y el operador M no es acotado de $L^p(w)$ a $L^p(u)$. La condición A_p es necesaria para la desigualdad de tipo fuerte para un par de pesos (u, w), pero no es suficiente. Para tener una caracterización de esos pesos hasta el momento solo se conocen condiciones de tipo "test"debidas a E. Sawyer [74].

Teorema 1.3.10. *Para $1 < p < \infty$ son equivalentes las siguientes propiedades:*

(a)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p u(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx$$

(b)

$$\int_Q M(\chi_Q w^{1-p'})(x)^p u(x)dx \leq C \int_Q w(x)^{1-p'} dx < \infty.$$

Existen condiciones suficientes tipo bump. Para más información y resultados ver [72].

1.3.2. Clase A_∞

B. Muckenhoupt definió en [65] la clase A_∞ de pesos en $\mathbb{R}^n$ como aquellas funciones no negativas localmente integrables w satisfaciendo la siguiente condición: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si Q es un cubo, $E \subset Q$ y $|E| < \delta|Q|$, entonces $w(E) < \varepsilon w(Q)$. Luego probó que w está en $\in A_\infty$ sí y solo sí $w \in A_p$ para algún $p > 1$. R. Coifman y C. Fefferman definieron en [15] la clase A_∞ de la siguiente manera: $w \in A_\infty$ si existen constantes $C, \delta > 0$ tal que para cualquier cubo Q y cualquier $E \subset Q$ medible vale que

$$\frac{w(E)}{w(Q)} \leq C\Big(\frac{|E|}{|Q|}\Big)^{\delta}. \tag{1.3.11}$$

También probaron que esta condición es equivalente a decir que $w \in A_p$ para algún $p > 1$. La condición (1.3.11) apareció previamente en [14], sin probar allí la equivalencia. (Ver además [41]).

Otras caracterizaciones de A_∞ fueron dadas por N. Fujii en [33]. Más tarde, S. Hruščev en [44] e independientemente J. García-Cuerva y J. L. Rubio de Francia en el libro [34] introdujeron otra caracterización, obtenida como el límite cuando p tiende a ∞ de la condicón A_p, es decir,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right) \leq Cexp\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q log\ w\right).$$

En el libro de L. Grafakos [35] se presenta de la siguiente manera: Como consecuencia de la desigualdad de Jensen tenemos la estimación

$$exp\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q log|h|\right) \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |h|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

para $0 < q < \infty$. Si $w \in A_p$, aplicando esto a w^{-1} con $q = \frac{1}{p-1}$ tenemos

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\ exp\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q log(w^{-1})\right) \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\ \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{p-1}$$

y es posible probar que el lado derecho de esta estimación tiende al término del lado izquierdo cuando $p \to \infty$.

Teniendo esto en cuenta, diremos que un peso w pertenece a la clase A_∞ si

$$\sup_Q \left\{\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right) exp\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q log\ (w^{-1})\right)\right\} < \infty.$$

Este número se llama la constante A_∞ de w, y lo denotamos por $[w]_{A_\infty}$.

En las estimaciones cuantitativas, donde las constantes son relevantes, suele usarse la constante A_∞ de Fujii-Wilson dada por

$$[w]_{A_\infty} = \sup_Q \frac{1}{w(Q)} \int_Q M(w\chi_Q).$$

Viendo diferentes presentaciones de la teoría de pesos A_p, vemos que dependiendo del contexto conviene usar una u otra definición de la clase A_∞.

El siguiente teorema presenta algunas de las caracterizaciones de la clase de pesos A_∞. Ver [31] para más información.

Teorema 1.3.12. *Las siguientes afirmaciones son equivaentes:*

1. $w \in A_\infty$
2. *Vale una desigualdad inversa de Hölder para w, es decir, existen $0 < c, \varepsilon < \infty$ tal que para todo cubo Q tenemos*

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{1+\varepsilon}\, dx \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq \frac{c}{|Q|} \int_Q w(x)\, dx.$$

3. *Existen $0 < c, \delta < \infty$ tal que para todo cubo Q y todo subconjunto medible A de Q se tiene*

$$\frac{w(A)}{w(Q)} \leq c \left(\frac{|A|}{|Q|} \right)^{\delta}.$$

4. *Existe $1 \leq p < \infty$ tal que $w \in A_p$.*
5. *Existe $c > 0$ tal que para cada cubo Q y para cada $r \geq 1$*

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w \leq c \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\frac{1}{r}} \right)^{r}.$$

Más adelante será útil el resultado que presentamos a continuación junto con su demostración.

Lema 1.3.13. *Sea $0 < \eta < 1$. Sea Q un cubo y E un subconjunto medible de Q tal que $|E| \geq \eta |Q|$. Si $w \in A_\infty$ entonces existe $C > 0$ tal que se verifica*

$$w(Q) \leq C w(E).$$

Demostración. Usamos el hecho de que como $w \in A_\infty$ entonces $w \in A_q$ para algún q, y la desigualdad de Hölder.

$$\begin{aligned} w(Q) \leq \frac{1}{\eta}\frac{w(Q)}{|Q|}|E| &= \frac{1}{\eta}\frac{w(Q)}{|Q|}\int_E w^{\frac{1}{q}}w^{-\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{1}{\eta}\frac{w(Q)}{|Q|}\Big(\int_E w\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_E w^{-\frac{q'}{q}}\Big)^{\frac{1}{q'}} \\ &= \frac{1}{\eta}\frac{w(Q)^{\frac{1}{q'}}w(Q)^{\frac{1}{q}}}{|Q|}w(E)^{\frac{1}{q}}\big(w^{-\frac{q'}{q}}(E)\big)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq \frac{1}{\eta}\left(\frac{w^{-\frac{q'}{q}}(Q)}{|Q|}\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\frac{w(Q)}{|Q|}\right)^{\frac{1}{q}}w(Q)^{\frac{1}{q'}}w(E)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$w(Q)^q \leq \frac{1}{\eta^q}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-q'}\right)^{q-1} w(Q)^{\frac{q}{q'}}w(E).$$

Como $w \in A_q$ se tiene que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-q'}\right)^{q-1} \leq c$$

y por lo tanto

$$w(Q) \leq Cw(E).$$

□

1.3.3. Clases $A_p(\mu)$ y $A_\infty(\mu)$

Vamos a generalizar la definición de la función maximal de Hardy-Littlewood y de la clase de pesos A_p que hemos dado antes, ahora para una medida μ que no tiene que ser necesariamente la medida de Lebesgue. Para $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$, se tiene que la medida $w(x)dx$ es duplicante, es decir, para $\lambda > 1$ y para todo cubo Q vale que

$$w(\lambda Q) \leq \lambda^{np}[w]_{A_p}w(Q),$$

donde λQ denota el cubo con el mismo centro que Q y de lado λ por la medida del lado del cubo Q.

Dada una medida duplicante μ, definimos el operador maximal M_μ como

$$M_\mu f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)| d\mu(y).$$

Diremos que un peso está en la clase $A_p(\mu)$, $1 < p < \infty$, si para todo cubo Q vale que

$$\left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w(x) d\mu(x) \right) \left(\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q w(x)^{1-p'} d\mu(x) \right)^{p-1} \leq C.$$

Diremos que $w \in A_1(\mu)$ si

$$M_\mu w(x) \leq C w(x).$$

$[w]_{A_p(\mu)}$ denotará la mejor constante C posible, y notaremos con $A_\infty(\mu)$ a la unión de todas las clases $A_p(\mu)$. Es decir,

$$A_\infty(\mu) = \bigcup_{p \geq 1} A_p(\mu).$$

Observación 5. *Como μ es una medida duplicante, entonces M_μ es un operador acotado en $L^p(wd\mu)$, para $1 < p < \infty$, sí y solo sí $w \in A_p(\mu)$.*

Cuando μ es la medida de Lebesgue, se omite el subíndice μ y se escribe simplemente M y A_p.

1.3.4. RH_∞

Recordemos que si $w \in A_p$, entonces verifica la desigualdad de Hölder inversa

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q w(x) dx,$$

para algún $s > 1$.

Definición 1.3.14. *Decimos que un peso w está en RH_s si verifica*

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{C}{|Q|} \int_Q w(x) dx,$$

y notaremos $[w]_{RH_s}$ a la mejor constante C posible.

Definición 1.3.15. *Denotamos por RH_∞ la clase de pesos w tal que para todo cubo Q, existe una constante C, que es independiente de Q, tal que*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q}\; w(x) \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q w(x)dx.$$

Observemos que si $s>1$, entonces $RH_\infty \subset RH_s$.

Presentaremos dos lemas: el primero fue probado por D. Cruz-Uribe, J. M. Martell y C. Pérez en [25], y del segundo daremos una breve demostración.

Lema 1.3.16. *Si $u\in A_1$ y $v\in A_\infty(u)$, entonces $uv\in A_\infty$. En particular, si $v\in A_p(u)$, para $1\leq p<\infty$, entonces $uv\in A_p$.*

Observación 6. *Si $u\in A_1$, entonces $v\in A_\infty(u)$ sí y solo sí $uv\in A_\infty$. Ver [36].*

Lema 1.3.17.

(a) $w\in A_\infty$ si y solo si $w=w_1w_2$, donde $w_1\in A_1$ y $w_2\in RH_\infty$.

(b) Si $w\in A_1$, entonces $w^{-1}\in RH_\infty$.

(c) Si $u,v\in RH_\infty$, entonces $uv\in RH_\infty$.

(d) Si $w\in A_\infty$ y $u\in RH_\infty$, entonces $wu\in A_\infty$.

(e) Si $w\in RH_\infty$, entonces $w^s\in RH_\infty$ para cualquier $s>0$.

Demostración. Estas propiedades de las clases A_p de Muckenhoupt son bien conocidas. Las primeras tres pueden encontrarse por ejemplo en [26] o en [34]. Sin embargo, hasta donde sabemos, (d) y (e) aparecen escritas específicamente por primera vez en el trabajo de K. Li, S. Ombrosi y B. Picardi [60], donde se presenta un simple argumento para ambas demostraciones.

Prueba de (d):
Como $w\in A_\infty$, por (a), $w=w_1w_2$, donde $w_1\in A_1$ y $w_2\in RH_\infty$. Por (c), $w_2u\in RH_\infty$. Entonces, $wu=(w_1w_2)u=w_1(w_2u)$. Luego, por (a), $wu\in A_\infty$.

Prueba de (e):
Si $s\geq 1$, sale por la desigualdad de Hölder, entonces solo tenemos que considerar el caso $s<1$. Como $w\in RH_\infty\subset A_\infty$, entonces

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w \leq C_{s,w}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^s\Big)^{\frac{1}{s}}.$$

Por definición, nuestra afirmación se sigue inmediatamente. □

Como consecuencia de este lema, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 1.3.18. *Si $u \in A_1$ y $v \in RH_\infty$, entonces $uv^{\frac{1}{m}} \in A_\infty$.*

Demostración. Como $v \in RH_\infty$, por el Lema 1.3.17 (e), se tiene que $v^{\frac{1}{m}} \in RH_\infty$, pues $\frac{1}{m} > 0$. Entonces, se tiene que $uv^{\frac{1}{m}}$ es el producto de un peso $u \in A_1$ por un peso $v^{\frac{1}{m}} \in RH_\infty$. Luego, por el Lema 1.3.17 (a), se tiene que $w \in A_\infty$. □

1.4. Operadores de Calderón-Zygmund

A partir de los resultados de Muckenhoupt, muchos autores han dedicado su labor al estudio de desigualdades con pesos A_p y variantes de los mismos para diversos operadores. Una de las clases de operadores que ha recibido mayor atención es la de los operadores singulares. Con el propósito de motivar la definición de operadores integrales singulares, empezaremos dando algunos ejemplos.

El operador integral singular más clásico y estudiado es la transformada de Hilbert en la recta real, definido como

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| > \varepsilon\}} \frac{f(y)}{x-y} dy,$$

donde $v.p.$ significa el valor principal de la integral. Observemos que en este caso el integrando es no integrable, razón por la cual se utiliza el término “integral singular”. R. Hunt, B. Muckenhoupt y R. Wheeden [45] demostraron que la transformada de Hilbert satisface las siguientes propiedades:

Teorema 1.4.1 (Hunt, Muckenhoupt y Wheeden [45])**.**

1. *Si $w \in A_p$, con $1 < p < \infty$, entonces,*

$$\|Hf\|_{L^p(w)} \leq C \|f\|_{L^p(w)}. \tag{1.4.2}$$

Más aún, el recíproco también es cierto, es decir, si se verifica (1.4.2), entonces $w \in A_p$.

2. *Si $w \in A_1$, entonces,*

$$\|Hf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq C \|f\|_{L^1(w)}. \tag{1.4.3}$$

El análogo n-dimensional para la transformada de Hilbert es la transformada de Riesz. Definimos la j-ésima transformada de Riesz R_j para $j = 1, ..., n$ como

$$R_j f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y) dy \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Los operadores R_j también satisfacen (1.4.2) y (1.4.3).

Tanto la transformada de Hilbert como las transformadas de Riesz, son casos particulares de una clase más general: la de los operadores de Calderón-Zygmund. En general, podemos considerar operadores de la forma

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy,$$

donde el núcleo $K(x,y)$ cumple con ciertas condiciones.

Los operadores de Calderón-Zygmund están definidos por medio de un núcleo $K(x,y)$ que es una función localmente integrable definida fuera de la diagonal $x = y$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Diremos que T es un operador de Calderón-Zygmund si T es un operador lineal acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$, y tiene representación

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) \ f(y) \ dy,$$

para todo $x \notin sop(f)$, donde el núcleo K satisface:

- Condición de tamaño:

$$|K(x,y)| \leq \frac{C_k}{|x-y|^n}, \quad x \neq y$$

- Condición de regularidad

$$|K(x,y) - K(z,y)| + |K(y,x) - K(y,z)| \leq w\Big(\frac{|x-z|}{|x-y|}\Big) \frac{1}{|x-y|^n},$$

  $|x-y| > 2|x-z|$,
  para algún módulo de continuidad w, por lo que entendemos una función creciente y subaditiva $w : [0, \infty) \to [0, \infty)$ con $w(0) = 0$. Decimos que el núcleo satisface la condicón de Dini si

$$\|w\|_{Dini} := \int_0^1 \frac{w(t)}{t} \ dt < \infty.$$

Los operadores de Calderón-Zygmund son usualmente definidos mediante el módulo de continuidad de Hölder $w(t) \sim t^\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1]$, por lo que la condición de regularidad puede ser encontrada como

$$|K(x,y) - K(z,y)| + |K(y,x) - K(y,z)| \leq \frac{A|x-z|^\varepsilon}{|x-y|^{n+\varepsilon}},$$

para algún $\varepsilon > 0$ y siempre que $|x-y| > 2|x-z|$.

Observemos que tanto la transformada de Hilbert como las transformadas de Riesz encajan dentro de esta definición. Basta elegir $K(x,y) = \frac{1}{x-y}$ en el caso de la transformada de Hilbert, y $K(x,y) = \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}}$ en el caso de las transformadas de Riesz.

Los operadores de Calderón-Zygmund son de tipo débil $(1,1)$, es decir, $T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, y son de tipo fuerte (p,p) para $1 < p < \infty$, es decir, $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Observemos que el primer hecho implica que los operadores de Calderón-Zygmund también satisfacen la desigualdad de Kolmogorov (Lema 1.1.7).

Será útil tener presente la definición de un operador maximal truncado de Calderón-Zygmund $T_\#$, que está dada por

$$T_\# f(x) := \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|y-x|>\varepsilon} K(x,y)\ f(y)\ dy \right|.$$

La teoría clásica de operadores de Calderón-Zygmund dice que $T_\#$ también mapea $T_\# : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

R. Coifman y C. Fefferman [15] probaron que si T es un operador de Calderón-Zygmund, para cada $w \in A_\infty$ y $0 < p < \infty$, se tiene que existe una constante C que depende de p y w tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x) dx. \tag{1.4.4}$$

Destacamos que esta estimación no vale en general para cualquier integral singular: hay ejemplos de operadores de convolución con núcleos satisfaciendo la condición de suavidad de Hörmander para los cuales (1.4.4) no se verifica, como puede verse en [63].

En los últimos años ha sido muy relevante para la teoría de pesos y de los operadores de Calderón-Zygmund el descubrimiento de un control por operadores sparse. Veremos detalles sobre este hecho en la Sección 1.5.

1.5. Operadores Sparse

En los últimos años, un gran número de autores ha dedicado parte de su labor a abordar la cuestión de establecer distintos tipos de desigualdades para diversos operadores. Esto condujo, entre otras cosas, a un aumento del nivel de comprensión de la teoría y al desarrollo de una depurada forma de estudiar los distintos operadores reemplazándolos por objetos diádicos más manejables, en el contexto de lo que ha venido a denominarse teoría de dominación sparse.

De algún modo, los resultados de dominación sparse pueden considerarse como una actualización del principio de Calderón-Zygmund, el cual afirmaba que "para cada operador singular debería existir un operador maximal adecuado que lo controlase en algún sentido". Un ejemplo de esto es la desigualdad (1.4.4) presentada en la Sección 1.4, conocida como la desigualdad de Coifman y Fefferman [15], donde un operador de Calderón-Zygmund es controlado por el operador maximal de Hardy-Littlewood. La actualización de este principio podría enunciarse del siguiente modo: "para cada operador singular existe un operador sparse adecuado que controla a dicho operador en algún sentido".

1.5.1. Familias Sparse

Definición 1.5.1. *Sea $0 < \eta < 1$. Una colección S de cubos diádicos $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ se denomina una familia η-sparse si para cada j existe un conjunto medible $E_{Q_j} \subseteq Q_j$ tal que $|E_{Q_j}| \geq \eta |Q_j|$ y además $\{E_{Q_j}\}_{j=1}^{\infty}$ cumple que $E_{Q_j} \cap E_{Q_k} = \emptyset$ si $j \neq k$.*

La primer pregunta que puede surgirnos es: ¿existen familias sparse? La respuesta es sí.

Ejemplo 1. *Cualquier familia de cubos disjuntos $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una familia sparse, tomando los E_{Q_j} como los mismos cubos Q_j.*

Ejemplo 2. *Podemos pensar el concepto de familia sparse como generalización de cubos disjuntos. Ver Figura 1.1. Estos cubos no son disjuntos, están todos solapados. Pero si tomamos $E_{Q_j} = Q_j - Q_{j+1}$, tenemos que $|E_{Q_j}| = \frac{3}{4}|Q_j|$, y así probamos que $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una familia sparse, con $\eta = \frac{3}{4}$ y luego con cualquier η más chico.*

Ejemplo 3. *Otro ejemplo de familia sparse es la familia de intervalos $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$ con $I_k = [0, 2^{-k}]$. En este caso basta tomar $E_k - E_{k+1}$.*

Ejemplo 4. *En la Figura 1.2 podemos ver una familia $\frac{1}{2}$-sparse.*

Esta definicón explícita de familia sparse es bastante reciente. Sin embargo, el concepto de familia sparse estuvo implícito de alguna manera en la literatura desde los años 50. Podemos establecer la primera aparición de

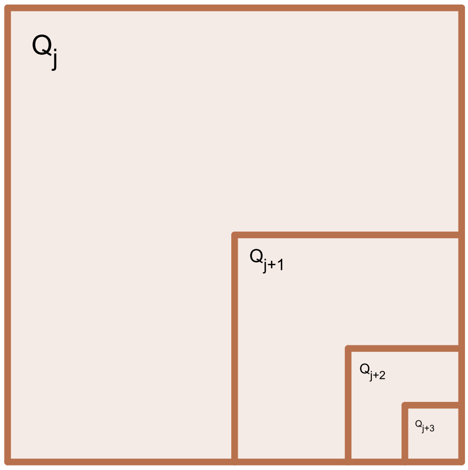

Figura 1.1: Familia $\frac{3}{4}$-sparse

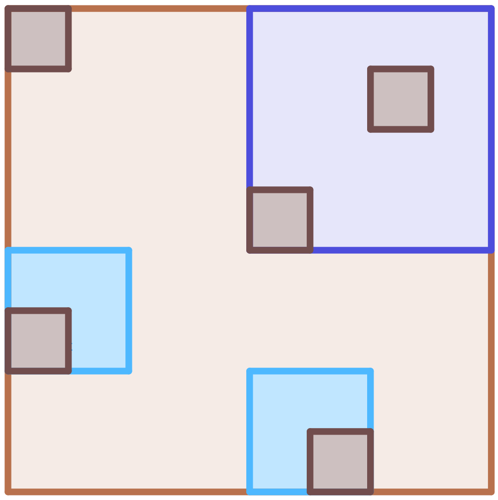

Figura 1.2: Familia $\frac{1}{2}$-sparse

esta idea en el trabajo de A. P. Calderón y A. Zygmund [10]. Recordemos la descomposición que ellos dieron para una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.5.2 (Calderón y Zygmund [10]). *Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda > 0$, existe una descomposición $f = g + b$, donde*
$\|g\|_{L^\infty} \leq 2^n\lambda$, $\|g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$, $\|g\|_{L^2}^2 \leq 2^n\lambda\|f\|_{L^1}$ y $b = \sum_j b_j$, donde
$sop(b_j) \subset Q_j$, $\int b_j = 0$, $\sum_j |Q_j| \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1}$, $\sum_j \|b_j\|_{L^1} \leq 2\|f\|_{L^1}$ para algunos cubos diádicos Q_j.

Como podemos ver, esta descomposición esencialmente consiste en partir la función f en una "parte buena"g, que es acotada, y en una "parte mala"b que es construida mediante "átomos"soportados en cubos disjuntos.

Observemos que la colección de cubos $\{Q_j^k\}$ obtenida tomando $\lambda = a^k$ donde $a \geq 2^{n+1}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ en el Teorema 1.5.2 satisface que para

$$E_{Q_j^k} = Q_j^k - \cup_j Q_j^{k+1}$$

los conjuntos $E_{Q_j^k}$ son disjuntos dos a dos y satisfacen que $\frac{1}{2}|Q_j^k| \leq |E_{Q_j^k}|$. Luego $\{Q_j\}$ es una familia sparse. Este hecho fue explotado por primera vez en [8].

En los últimos años, el grado de comprensión de cómo utilizar la condición sparse ha permitido obtener resultados sumamente interesantes dentro de la teoría y, en particular, en el ámbito de las desigualdades cuantitativas con pesos.

Definición 1.5.3. *Una colección S de cubos diádicos se denomina una familia Λ-Carleson, $\Lambda > 1$, si para cada cubo $Q \in D$,*

$$\sum_{P \in S, P \subset Q} |P| \leq \Lambda |Q|.$$

No es difícil ver que toda familia η-sparse es $\frac{1}{\eta}$-Carleson. La afirmación inversa es más complicada de probar y fue establecida en [54], donde se demuestra que cada familia Λ-Carleson es $\frac{1}{\Lambda}$-sparse.

Esta equivalencia será útil más adelante.

1.5.2. Operadores sparse

Definición 1.5.4. *Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto. Decimos que A_s es un operador sparse si*

$$A_s f(x) = \sum_{Q \in S} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)\ dy \right) \chi_Q(x),$$

donde S es una familia η-sparse.

La importancia de A_s radica en que está íntimamente conectado con los operadores de Calderón-Zygmund. Esta conexión fue primeramente encontrada por A. Lerner en [52].

Vamos a estimar ahora los operadores sparse: Sea $S = \{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ una familia η-sparse. Veremos que

$$\|A_s f\|_{L^p(w)} \leq C_\eta [w]_{A_p}^{max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \|f\|_{L^p(w)}.$$

Demostración. Dado un peso $w \in A_p$, notaremos $\sigma = w^{-\frac{1}{p-1}}$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Basta estimar

$$\sup_{\|g\|_{L^{p'}(\sigma)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} A_s(f)\ g.$$

Vamos a suponer $f, g \geq 0$. Teniendo en cuenta que los E_{Q_j} son disjuntos y usando la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} A_s(f)\ g &= \sum_{j=1}^{\infty} f_{Q_j} \int_{Q_j} g \\
&\leq \frac{1}{\eta} \sum_{j=1}^{\infty} f_{Q_j} \frac{|E_{Q_j}|}{|Q_j|} \int_{Q_j} g \\
&\leq \frac{1}{\eta} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_{Q_j}} Mf(x)\ Mg(x)\ dx \\
&\leq \frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)\ Mg(x)\ dx \\
&= \frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)\ w^{\frac{1}{p}}\ Mg(x)\ w^{-\frac{1}{p}}\ dx \\
&=\leq \frac{1}{\eta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p\ w(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} Mg(x)^{p'}\ \sigma(x) \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \frac{C}{\eta} [w]_{A_p}^{max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \|f\|_{L^p(w)} \|g\|_{L^{p'}(\sigma)}.
\end{aligned}$$

Tomando supremos obtenemos que

$$\|A_s f\|_{L^p(w)} \leq C_\eta [w]_{A_p}^{max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \|f\|_{L^p(w)}.$$

$\square$

Teorema 1.5.5 (Lerner [53]). *Sea T un operador lineal o sublineal positivo, y consideremos el operador maximal de Lerner asociado*

$$M_T f(x) := \sup_{Q \ni x} \sup_{y \in Q} |T(\chi_{(3Q)^c} f)(y)|.$$

Supongamos que T y M_T son acotados de L^1 en $L^{1,\infty}$. Luego para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto y $\varepsilon \in (0,1)$ existe una familia $(1-\varepsilon)$-sparse $\mathcal{S}$ de cubos diádicos tal que

$$|Tf| \leq \frac{c_d c_T}{\varepsilon} \sum_{S \in \mathcal{S}} \chi_S \frac{1}{|3S|} \int_{3S} |f|,$$

donde c_d depende solo de la dimensión y $c_T := \|T\|_{1 \to 1,\infty} + \|M_T\|_{1 \to 1,\infty}$.

En particular, este teorema se puede aplicar a los operadores de Calderón-Zygmund. El estudio de la teoría de dominación sparse de operadores de Calderón-Zygmund comenzó con el libro de A. Lerner y F. Nazarov [54], e, independientemente, con el trabajo de J. M. Conde-Alonso y G. Rey [21].

Para ver cómo aplicar el Teorema 1.5.5 a los operadores de Calderón-Zygmund, es necesario hacer algunas observaciones. Como ya mencionamos en las Secciones 1.1 y 1.4, el operador maximal de Hardy-Littlewood M, cada operador de Calderón-Zygmund T y el operador maximal truncado de Calderón-Zygmund $T_\#$ son acotados de L^1 en $L^{1,\infty}$. A partir del próximo resultado, tendremos que M_T también es acotado de L^1 en $L^{1,\infty}$.

Lema 1.5.6.

$$M_T f(x) \leq T_\# f(x) + c_d(C_k + \|w\|_{Dini}) M f(x).$$

Demostración. Sean $Q \ni x$ y $z \in Q$ fijos por el momento. Consideremos $B = B(x, 2\sqrt{n}\, l(Q))$. Como $3Q \subset B$, tenemos que $B^c \subset (3Q)^c$. Tenemos que estimar

$$T(\chi_{(3Q)^c} f)(z) = T(\chi_{(3Q)^c} f)(z) - T(\chi_{B^c} f)(x) + T(\chi_{B^c} f)(x)$$

donde el último término está acotado por $T_\# f(x)$ por definición.

$$T(\chi_{(3Q)^c} f)(z) - T(\chi_{B^c} f)(x) = \int_{(3Q)^c} K(z,y)\ f(y)\ dy - \int_{|y-x|>2\sqrt{n}\ l(Q)} K(x,y)\ f(y)\ dy$$

$$= \int_{|y-x|>2\sqrt{n}\ l(Q)} (K(z,y) - K(x,y))\ f(y)\ dy + \int_{(3Q)^c \cap B} K(z,y)\ f(y)\ dy = I + II.$$

En I tenemos $z, x \in Q$, entonces $|z - x| \leq \sqrt{n}\ l(Q) < \frac{1}{2}|x - y|$, luego por la condición de regularidad de K

$$
\begin{aligned}
|I| &\leq \int_{|y-x|>2\sqrt{n}\ l(Q)} w\Big(\frac{\sqrt{n}\ l(Q)}{|x-y|}\Big)\ \frac{1}{|x-y|^n}\ |f(y)|\ dy \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^k\sqrt{n}\ l(Q)<|x-y|\leq 2^{k+1}\sqrt{n}\ l(Q)} w(2^{-k})\ \frac{1}{(2^k\sqrt{n}\ l(Q))^n}\ |f(y)|\ dy \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} w(2^{-k})\ c_d\ \frac{1}{|B(x, 2^{k+1}\sqrt{n}\ l(Q))|} \int_{B(x,2^{k+1}\sqrt{n}\ l(Q))} |f(y)|\ dy \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} w(2^{-k})\ c_d\ Mf(x) \\
&\leq \|w\|_{Dini}\ c_d\ Mf(x).
\end{aligned}
$$

En II tenemos que $z \in Q$, $y \in (3Q)^c$ entonces $|y - z| \geq l(Q)$, y luego por la condición de tamaño de K,

$$
\begin{aligned}
|II| &\leq \int_{(3Q)^c \cap B} \frac{C_k}{|y-z|^n}\ |f(y)|\ dy \\
&\leq \int_B \frac{C_k}{l(Q)^n}\ |f(y)|\ dy \\
&\leq C_k\ c_d\ \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\ dy \\
&\leq C_k\ c_d\ Mf(x).
\end{aligned}
$$

Combinando estas estimaciones y tomando supremo sobre $z \in Q$ y $Q \ni x$, tenemos el lema. □

Observación 7. *Un resultado más general que el Teorema 1.5.5 fue recientemente obtenido por A. Lerner y S. Ombrosi en [55].*

Por lo tanto tenemos el siguiente teorema, que como mencionamos antes, es una aplicación del teorema de A. Lerner.

Teorema 1.5.7. *Cada operador de Calderón-Zygmund T satisface las hipótesis, y luego las conclusiones del Teorema 1.5.5.*

1.5.3. Desigualdad de tipo Coifman-Fefferman para operadores de Calderón-Zygmund a partir de la dominación sparse

Será útil en los teoremas de extrapolación que usaremos más adelante una desigualdad de tipo Coifman-Fefferman que originalmente fue probada en [15] y como ya mencionamos en la Sección 1.4 dice lo siguiente: Si T es un operador de Calderón-Zygmund, para cada $w \in A_\infty$ y $0 < p < \infty$, se tiene que existe una constante C que depende de p y w tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x)dx.$$

En lo que sigue, por completitud, daremos una prueba muy sencilla a partir de la dominación sparse antes mencionada. Probaremos que para un operador sparse A_s, si $w \in A_\infty$ y $0 < p \leq 1$ vale que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |A_s f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x)dx. \tag{1.5.8}$$

Demostración. Vimos en el Lema (1.3.13) que si $w \in A_\infty$ y S es una familia η-sparse, entonces existe una constante C, tal que dado cualquier cubo Q de la familia S y cualquier subconjunto medible $E \subset Q$, vale que

$$w(Q) \leq Cw(E).$$

Además, como A_s es un operador sparse, se tiene que

$$A_s f(x) = \sum_{Q_j \in S} \left(\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(y)dy \right) \chi_{Q_j}(x),$$

donde S es una familia η-sparse (podría considerarse $\eta = \frac{1}{2}$), es decir, para todo j existe $E_{Q_j} \subseteq Q_j$ tal que $|E_{Q_j}| \geq \frac{1}{2}|Q_j|$, donde los $|E_{Q_j}|$ son disjuntos. Luego, teniendo en cuenta esta relación sparse y la condición A_∞,

$$w(Q_j) \leq C2^\delta w(E_j) = Cw(E_j).$$

Por lo tanto, para $0 < p \leq 1$ y considerando que los E_{Q_j} son disjuntos,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |A_s f(x)|^p w(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_j \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(y)dy \right)^p \chi_{Q_j}(x)^p w(x)dx \\
&= \left(\sum_j \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(y)dy \right)^p w(Q_j) \\
&\leq \sum_j \left(\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(y)dy \right)^p w(Q_j) \\
&\leq C \sum_j \left(\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(y)dy \right)^p w(E_{Q_j}) \\
&\leq C \sum_j \int_{E_{Q_j}} (Mf)^p(x) w(x)dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} (Mf)^p(x) w(x)dx.
\end{aligned}$$

□

Observación 8. *Por extrapolación, se sigue que (1.5.8) vale para cualquier* $0 < p < \infty$*. Ver [23].*

Por lo tanto, se tiene que vale el siguiente resultado.

Teorema 1.5.9. *Para un operador sparse* A_s*, si* $w \in A_\infty$ *y* $0 < p < \infty$ *vale que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |A_s f(x)|^p w(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x)dx.$$

Si combinamos los Teoremas 1.5.5, 1.5.7 y 1.5.9, obtenemos una desigualdad de tipo Coifman-Fefferman para operadores de Calderón-Zygmund a partir de la dominación sparse.

1.6. Integral fraccionaria

Definición 1.6.1. *Sea* $0 < \alpha < n$ *y* f *localmente integrable en* $\mathbb{R}^n$*. Se define el potencial de Riesz o integral fraccionaria como*

$$I_\alpha(f) = C_{\alpha,n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

donde

$$C_{\alpha,n} = 2^{-\alpha} \pi^{-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}.$$

Este operador es de gran importancia por sus aplicaciones, ya que nos permite dar una representación integral a las potencias negativas del Laplaciano Δ definido como $\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$.

Para ver esto, recordemos primero la definición de la función Gama dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad Re(\alpha) > 0.$$

Haciendo el cambio $x = at$, tenemos

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty a^{\alpha-1} t^{\alpha-1} e^{-at} a \; dt = a^\alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-at} \; dt$$

y por lo tanto

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-at} \; dt.$$

Con esta relación podemos definir las potencias negativas de un operador A no negativo que genera un semigrupo

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-tA} \; dt.$$

Si tomamos $A = -\Delta$ tenemos una representación integral para las potencias negativas del Laplaciano

$$(-\Delta)^{-\alpha}(f) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t\Delta}(f) \; dt.$$

Recordemos que una función f está en la clase de Schwarz $\mathcal{S}$ si es indefinidamente derivable y ella y sus derivadas decrecen rápidamente en infinito. Las funciones C^∞ de soporte compacto están en $\mathcal{S}$ y también otras como $e^{-|x|^2}$ que no tienen soporte compacto. En particular, $\mathcal{S} \subset L^1$ y como para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se define su transformada de Fourier como $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$, esto define la transformada de Fourier de una función de $\mathcal{S}$.

Luego tomando f en la clase de Schwarz, tenemos

$$\widehat{e^{t\Delta}}(f) = e^{-t|w|^2} \hat{f}(w)$$

y entonces

$$e^{t\Delta}(f) = f * (e^{-t|w|^2})^\vee = f * K_t,$$

donde K_t es el núcleo del calor $K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Ver [77]. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^{-\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \; e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \; f(y)\; dy \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1} \; e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \; dt \right) dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \; I(x,y) \; dy.
\end{aligned}$$

Sustituyendo $u = \frac{|x-y|^2}{4t}$ en $I(x,y)$ se tiene

$$\begin{aligned}
I(x,y) &= \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{|x-y|^2}{4u} \right)^{\alpha-1-\frac{n}{2}} \; \frac{|x-y|^2}{4u^2} \; du \\
&= \frac{|x-y|^{2\alpha-n}}{2^{2\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty u^{-\alpha+1+\frac{n}{2}} \; e^{-u} \; du \\
&= \frac{|x-y|^{2\alpha-n}}{2^{2\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}} \; \Gamma\Big(\frac{n-2\alpha}{2} \Big).
\end{aligned}$$

Luego

$$(-\Delta)^{-\alpha} f(x) = \frac{2^{-2\alpha}\pi^{\frac{-n}{2}}\Gamma\big(\frac{n-2\alpha}{2}\big)}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \; |x-y|^{2\alpha-n} \; dy.$$

Por lo tanto

$$(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f(x) = I_\alpha(f)(x)$$

para f en la clase de Schwarz. Como la clase de Schwarz es densa en $L^p(\mathbb{R}^n)$, se puede extender a $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

El estudio de integrales fraccionarias y su función maximal asociada es relevante en el análisis armónico. De ahora en adelante dejaremos de lado las constantes y consideraremos el operador integral fraccionario o potencial de Riez como

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \, dy, \;\; 0 < \alpha < n,$$

y la función maximal fraccionaria como

$$M_\alpha f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |f(y)| dy, \;\; 0 \leq \alpha < n,$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos Q que contienen a x. Notemos que en el caso $\alpha = 0$ recuperamos el operador maximal de Hardy-Littlewood.

El operador M_α fue introducido por B. Muckenhoupt y R. Wheeden en [68]. En las estimaciones con pesos para los operadores integrales I_α, M_α desempeña un papel similar al que desempeña el operador maximal de Hardy-Littlewood en las estimaciones con pesos para integrales singulares.

Los operadores maximales fraccionarios están relacionados con el operador maximal de Hardy-Littlewood. En efecto, como consecuencia de la desigualdad de Hölder se puede obtener la siguiente desigualdad puntual

$$M_\alpha f(x) \leq \|f\|_{L^p}^{\frac{\alpha}{n}} (Mf(x))^{\frac{p}{q}},$$

para $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$.

M_α verifica el siguiente resultado:

Teorema 1.6.2. *Sea* $1 < p \leq \frac{n}{\alpha}$ *y sea* q *tal que* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. *Entonces* $M_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$.

Para ver propiedades básicas de estos operadores se pueden consultar los libros de E. M. Stein [77] y L. Grafakos [35].

Capítulo 2

Preliminares: Contexto multilineal

En este capítulo presentaremos una generalización al conexto multilineal de los operadores introducidos en el Capítulo 1. Definiremos la clase de pesos $A_{\vec{P}}$ y recordaremos definiciones y propiedades básicas de la función maximal (sub)multilineal, los operadores de Calderón-Zygmund multilineales y la integral fraccionaria mutilineal.

2.1. Función maximal (sub)multilineal

En 2009 A. Lerner, S. Ombrosi, C. Pérez, R. H. Torres y R. Trujillo-González introdujeron en su trabajo (ver [57]) la función maximal (sub)multilineal $\mathcal{M}$.

Definición 2.1.1. *Dada $\vec{f} = (f_1, ..., f_m)$ se define el operador maximal $\mathcal{M}$ como*

$$\mathcal{M}(\vec{f})(x) = \sup_{Q \ni x} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_i(y_i)| dy_i, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos Q que contienen a x.

Este operador maximal es mas pequeño que el operador producto

$$\prod_{j=1}^{m} M(f_j),$$

que hasta ese momento era el operador auxiliar utilizado para estimar operadores integrales singulares multilineales. Consecuentemente, desarrollaron la correspondiente teoría de pesos para esta nueva función maximal.

Teorema 2.1.2 (LOPTT [57]). *Sea $1 \leq p_j < \infty$, $j = 1, ..., m$ y $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$. Sean ν y w_j pesos. Entonces la desigualdad*

$$\|\mathcal{M}(\vec{f})\|_{L^{p,\infty}(\nu)} \leq c \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}(w_j)}$$

vale para cualquier $\vec{f}$ si y solo si

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{1-p_j'} \right)^{\frac{1}{p_j'}} < \infty,$$

donde $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{1-p_j'} \right)^{\frac{1}{p_j'}}$ se entiende como $(\text{ínf}_Q\, w_j)^{-1}$ en el caso en que $p_j = 1$.

Este resultado para $\mathcal{M}$ es una extensión natural al contexto multilineal de la caracterización del tipo débil de Muckenhoupt para M, ya que recuperamos (1.3.8) cuando $m = 1$. Se define un análogo de las clases A_p de Muckenhoupt para pesos múltiples.

2.2. Clase $A_{\vec{P}}$

Definición 2.2.1. *Sea m un entero positivo. Sean $1 \leq p_1, ..., p_m < \infty$. Notamos p el número dado por $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$, y $\vec{P}$ el vector $\vec{P} = (p_1, ..., p_m)$.*

Definición 2.2.2. *Sea $1 \leq p_1, ..., p_m < \infty$. Dado $\vec{w} = (w_1, ..., w_m)$, sea*

$$\nu_{\vec{w}}(x) = \prod_{j=1}^{m} w_j^{\frac{p}{p_j}}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Decimos que $\vec{w}$ satisface la condición $A_{\vec{P}}$ si

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\vec{w}} \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{1-p_j'} \right)^{\frac{1}{p_j'}} < \infty.$$

Cuando $p_j = 1$, $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{1-p_j'} \right)^{\frac{1}{p_j'}}$ se entiende como $(\text{ínf}_Q\, w_j)^{-1}$. Por lo tanto diremos que $\vec{w} \in A_{(1,...,1)}$ si

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\vec{w}} \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^{m} (\text{ínf}_Q\, w_j)^{-1} < \infty.$$

Observemos que si cada w_j está en A_{p_j} entonces por la desigualdad de Hölder,

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\vec{w}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{1-p_j'} \right)^{\frac{1}{p_j'}}$$
$$\leq \sup_Q \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j \right)^{\frac{1}{p_j}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{1-p_j'} \right)^{\frac{1}{p_j'}} < \infty,$$

entonces tenemos que

$$\prod_{j=1}^m A_{p_j} \subset A_{\vec{P}},$$

y esta inclusión es estricta. De hecho, $\vec{w} \in A_{\vec{P}}$ no implica en general que $w_j \in L^1_{\text{loc}}$.

Usando la desigualdad de Hölder se tiene también que

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\vec{w}} \right)^{\frac{1}{mp}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\vec{w}}^{-\frac{1}{mp-1}} \right)^{\frac{mp-1}{mp}}$$
$$\leq \sup_Q \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j \right)^{\frac{1}{mp_j}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{-\frac{1}{p_j-1}} \right)^{\frac{p_j-1}{mp_j}} < \infty,$$

donde usamos que $m - \frac{1}{p} = \sum \frac{(p_j-1)}{p_j}$.

La condicón multilineal $A_{\vec{P}}$ tiene la siguiente caracterización en términos de las clases A_p lineales:

Teorema 2.2.3 (LOPTT [57])**.** *Sea $\vec{w} = (w_1, ..., w_m)$ y $1 \leq p_1, ..., p_m < \infty$. Entonces $\vec{w} \in A_{\vec{P}}$ sí y solo sí*

$$\begin{cases} w_i^{1-p_i'} \in A_{mp_i'}, \quad i = 1, ..., m \\ \nu_{\vec{w}} \in A_{mp} \end{cases} \tag{2.2.4}$$

donde la condición $w_i^{1-p_i'} \in A_{mp_i'}$ en el caso $p_i = 1$ se entiende como $w_i^{\frac{1}{m}} \in A_1$.

Observemos que en el caso lineal ($m = 1$) ambas condiciones incluídas en (2.2.4) representan la misma condición A_p. Sin embargo, cuando $m \geq 2$, ninguna de las dos condiciones en (2.2.4) implica la otra.

Un resultado más general puede encontrarse en [58], ver el Lema 3.2 allí.

Observación 9. *En el caso particular que cada* $p_i = 1$ *se tiene que* $p = \frac{1}{m}$*. Por el Teorema 2.2.3, dado* $\vec{w} = (w_1, ..., w_m)$*, tenemos que valen las siguientes afirmaciones:*

- *Si* $\vec{w} = (w_1, ..., w_m) \in A_{(1,...,1)}$ *entonces* $\nu_{\vec{w}} = w_1^{\frac{1}{m}} ... w_m^{\frac{1}{m}} \in A_1$.
- *Si* $\vec{w} \in A_{(1,...,1)}$ *entonces* $w_i^{\frac{1}{m}} \in A_1$ *para todo* $i = 1, ..., m$.

Notemos que $\vec{w} \in A_{(1,...,1)}$ no implica que $w_i \in A_1$ para cada $i = 1, ..., m$. Podemos ver esto con un simple contraejemplo: Sea $m = 2$ y consideremos los pesos $w_1 = 1$ y $w_2 = \frac{1}{|x|}$. Entonces $\vec{w} \in A_{(1,1)}$, $w_1^{\frac{1}{2}}, w_2^{\frac{1}{2}} \in A_1$, $w_1 \in A_1$, pero $w_2 \notin A_1$.

Observación 10. *Si* $w_i \in A_1$ *para todo* i*, entonces* $\vec{w} \in A_{(1,...,1)}$.

Pedir que cada uno de los $w_i \in A_1$ es más fuerte que pedir que $\vec{w} \in A_{(1,...,1)}$.

El Teorema 2.2.3 juega un rol importante en la siguiente caracterización de desigualdades de tipo fuerte para $\mathcal{M}$ con un peso.

Teorema 2.2.5 (LOPTT [57])**.** *Sea* $1 < p_j < \infty$, $j = 1, ..., m$ *y* $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$*. Entonces la desigualdad*

$$\|\mathcal{M}(\vec{f}\,)\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})} \leq C \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}(w_j)}$$

vale para toda $\vec{f}$ *sí y solo sí* $\vec{w}$ *satisface la condición* $A_{\vec{P}}$.

En este teorema es esencial asumir que $p_j > 1$ para todo j. También destacamos que el teorema no vale si $\mathcal{M}(\vec{f}\,)$ es reemplazada por $\prod_{j=1}^{m} Mf_j$.

2.3. Desigualdad mixta de tipo débil para $\mathcal{M}(\vec{f}\,)$

Se sigue de la clásica desigualdad de Fefferman-Stein (para $1 < p < \infty$)

$$\|Mf\|_{L^p(w)} \leq C\|f\|_{L^p(Mw)}$$

que si $p_j > 1$ para todo j y $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$, entonces

$$\Big\| \prod_{j=1}^{m} Mf_j \Big\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})} \leq C \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}(Mw_j)}. \tag{2.3.1}$$

Sin embargo, si al menos uno de los $p_j = 1$, ni siquiera vale una desigualdad de tipo débil análoga a (2.3.1) para pesos arbitrarios w_j. Por otro lado, si asumimos que todos los $p_j = 1$ y todos los pesos $w_j \in A_1$ tenemos lo siguiente.

Teorema 2.3.2 (LOPTT [57]). *Sean w_j pesos en A_1 para todo $j = 1, ..., m$. Sea $\nu = (\prod_{j=1}^{m} w_j)^{\frac{1}{m}}$. Entonces*

$$\Big\| \prod_{j=1}^{m} Mf_j \Big\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu)} \le C \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^1(w_j)}.$$

La siguiente proposición muestra que un análogo de tipo débil para (2.3.1) puede conseguirse poniendo $\mathcal{M}(\vec{f}\,)$ en lugar de $\prod_{j=1}^{m} Mf_j$.

Proposición 2.3.3. *Sea $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$. Si $1 \le p_j < \infty$ entonces*

$$\|\mathcal{M}(\vec{f}\,)\|_{L^{p,\infty}(\nu_{\vec{w}})} \le C \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}(Mw_j)}.$$

2.4. Operadores de Calderón-Zygmund multilineales

La teoría de operadores de Calderón-Zygmund multilineales se remonta a los trabajos de R. Coifman e Y. Meyer, [16], [17] y [18], en la década del setenta. Su trabajo estaba orientado al estudio de ciertos operadores integrales singulares, como el conmutador de Calderón. Esta teoría aparece naturalmente en el análisis armónico. Los resultados obtenidos por M. Lacey y C. Thiele [50], [51] para la transformada de Hilbert bilineal motivaron el estudio de este tipo de acotaciones para operadores de Calderón-Zygmund multilineales en general. El trabajo de L. Grafakos y R. Torres [40] estableció las bases de la teoría de operadores de Calderón-Zygmund sin pesos. Los resultados con pesos que conectan los operadores de Calderón-Zygmund y la clase $A_{\vec{P}}$ de pesos fueron abordados por A. Lerner *et al.* en [57].

Sea T un operador multilineal inicialmente definido en el m-producto de espacios de Schwarz y tomando valores en el espacio de distribuciones temperadas,

$$T : S(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times S(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n).$$

Siguiendo [40], decimos que T es un operador de Calderón-Zygmund m-lineal si, para algún $1 \le q_j < \infty$, se extiende a un operador multilineal acotado de $L^{q_1} \times ... \times L^{q_m}$ a L^q, donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + ... + \frac{1}{q_m}$, y si existe una función K, definida fuera de la diagonal $x = y_1 = ... = y_m$ en $(\mathbb{R}^n)^{m+1}$, que satisface

- T tiene la siguiente representación

$$T(f_1, ..., f_m)(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} K(x, y_1, ..., y_m)\ f_1(y_1)...f_m(y_m)\ dy_1...dy_m,$$

para todo $x \notin \cap_{j=1}^{m} sop(f_j)$

- Condición de tamaño: El núcleo K satisface

$$|K(y_0, y_1, ..., y_m)| \leq \frac{A}{\left(\sum_{k,l=0}^{m} |y_k - y_l|\right)^{mn}}$$

- Condición de regularidad

$$|K(y_0, ..., y_j, ..., y_m) - K(y_0, ..., y_j', ..., y_m)| \leq \frac{A|y_j - y_j'|^{\varepsilon}}{\left(\sum_{k,l=0}^{m} |y_k - y_l|\right)^{mn+\varepsilon}},$$

para algún $\varepsilon > 0$ y todo $0 \leq j \leq m$,
siempre que $|y_j - y_j'| \leq \frac{1}{2} max_{0 \leq k \leq m} |y_j - y_k|$.

El siguiente teorema probado en [40] resume algunas propiedades básicas de los operadores de Calderón-Zygmund multilineales en espacios de Lebesgue.

Teorema 2.4.1 (Grafakos y Torres [40]). *Sea T un operador de Calderón-Zygmund multilineal. Sean p, $1 \leq p_j < \infty$ tales que $\frac{1}{m} \leq p < \infty$ y $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$. Luego vale que*

1. *$T : L^{p_1} \times ... \times L^{p_m} \to L^p$ cuando todos los $p_j > 1$.*
2. *$T : L^{p_1} \times ... \times L^{p_m} \to L^{p,\infty}$ cuando al menos un $p_j = 1$.*
3. *En particular, $T : L^1 \times ... \times L^1 \to L^{\frac{1}{m},\infty}$.*

Vamos a enunciar dos resultados importantes en [57] que conectan la función maximal (sub)multilineal $\mathcal{M}$, los operadores de Calderón-Zygmund multilineales y la clase de pesos $A_{\vec{P}}$. El primero puede verse como una generalización de la desigualdad de Coifman-Fefferman al caso multilineal. El segundo muestra que las clases $A_{\vec{P}}$ son las apropiadas para las acotaciones de operadores de Calderón-Zygmund multilineales.

Teorema 2.4.2. *Sea T un operador de Calderón-Zygmund multilineal, w un peso en A_∞ y $p > 0$. Existe C tal que las desigualdades*

$$\|T(\vec{f}\,)\|_{L^p(w)} \leq C \|\mathcal{M}(\vec{f}\,)\|_{L^p(w)} \tag{2.4.3}$$

y

$$\|T(\vec{f}\,)\|_{L^{p,\infty}(w)} \leq C \|\mathcal{M}(\vec{f}\,)\|_{L^{p,\infty}(w)} \tag{2.4.4}$$

valen para toda $\vec{f}$ acotada de soporte compacto.

Teorema 2.4.5. *Sea T un operador de Calderón-Zygmund multilineal, $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$, y $\vec{w} \in A_{\vec{P}}$.*

(I) Si $1 < p_j < \infty$, $j = 1, ..., m$, entonces

$$\|T(\vec{f}\,)\|_{L^p(\nu_{\vec{w}})} \leq C \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}(w_j)}. \tag{2.4.6}$$

(II) Si $1 \leq p_j < \infty$, $j = 1, ..., m$ y al menos un $p_j = 1$, entonces

$$\|T(\vec{f}\,)\|_{L^{p,\infty}(\nu_{\vec{w}})} \leq C \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}(w_j)}. \tag{2.4.7}$$

Las clases $A_{\vec{P}}$ pueden caracterizarsee mediante la acotación de ciertos operadores integrales singulares multilineales.

Definición 2.4.8. *Para $i = 1, ..., m$ la i-ésima transformada de Riesz multilineal se define como*

$$R_i(\vec{f})(x) = v.p. \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{\sum_{j=1}^{m} (x_i - (y_j)_i)}{(\sum_{j=1}^{m} |x - y_j|^2)^{\frac{nm+1}{2}}} f_1(y_1)...f_m(y_m)\, dy_1...dy_m,$$

donde $(y_j)_i$ denota la i-ésima cordenada de y_j.

Teorema 2.4.9. *si (2.4.6) o (2.4.7) valen para cada $R_i(\vec{f})$, entonces $\vec{w} \in A_{\vec{P}}$.*

2.5. Integral fraccionaria multilineal

En el contexto multilineal, una manera natural de extender las integrales fraccionarias es la siguiente:

Definición 2.5.1. *Sea α un número tal que $0 < \alpha < mn$ y sea $\vec{f} = (f_1, ..., f_m)$ una colección de funciones en $\mathbb{R}^n$. Definimos la integral fraccionaria multilineal como*

$$\mathcal{I}_\alpha \vec{f}(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{f_1(y_1)...f_m(y_m)\, d\vec{y}}{(|x - y_1| + ... + |x - y_m|)^{mn-\alpha}}.$$

Los primeros resultados para este tipo de operadores fueron obtenidos por C. Kenig y E. Stein [48]. Ellos probaron desigualdades sin pesos para estos operadores.

El principal resultado con pesos para $\mathcal{I}_\alpha$ fue introducido por K. Moen en 2009 y lo enunciamos a continuación.

Teorema 2.5.2 (Moen [64]). *Supongamos que $0 < \alpha < nm$, $1 < p_1, ..., p_m < \infty$ y q es un número que satisface $\frac{1}{m} < p \leq q < \infty$. Supongamos que una de las siguientes condiciones vale.*

(a) $q > 1$ y $(\nu, \vec{w})$ son pesos que satisfacen

$$\sup_Q l(Q)^\alpha |Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu^{qr} dx \Big)^{\frac{1}{qr}} \prod_{j=1}^m \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{-p_j' r} dx \Big)^{\frac{1}{p_j' r}} < \infty$$

para algún $r > 1$.

(b) $q \leq 1$ y $(\nu, \vec{w})$ son pesos que satisfacen

$$\sup_Q l(Q)^\alpha |Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu^{q} dx \Big)^{\frac{1}{q}} \prod_{j=1}^m \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{-p_j' r} dx \Big)^{\frac{1}{p_j' r}} < \infty$$

para algún $r > 1$.

Entonces la desigualdad

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{I}_\alpha \vec{f}\ \nu)^q \ dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \prod_{j=1}^m \Big(\int_{\mathcal{R}^n} (|f_j| w_j)^{p_j} \ dx \Big)^{\frac{1}{p_j}}$$

vale para toda $\vec{f} \in L^{p_1}(w_1^{p_1}) \times ... \times L^{p_m}(w_m^{p_m})$.

Corolario 2.5.3. *Supongamos que $0 < \alpha < nm$, $1 < p_1, ..., p_m < \infty$ y q es un número que satisface $\frac{1}{m} < p \leq q < \infty$. Además supongamos que $\nu, w_1, ..., w_m$ son pesos con $\nu^q, w_1^{-p_1'}, ..., w_m^{-p_m'} \in A_\infty$, que satisfacen*

$$\sup_Q l(Q)^\alpha |Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu^{q} dx \Big)^{\frac{1}{q}} \prod_{j=1}^m \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{-p_j'} dx \Big)^{\frac{1}{p_j'}} < \infty.$$

Entonces,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{I}_\alpha \vec{f}\ \nu)^q \ dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \prod_{j=1}^m \Big(\int_{\mathcal{R}^n} (|f_j| w_j)^{p_j} \ dx \Big)^{\frac{1}{p_j}}$$

vale para toda $\vec{f} \in L^{p_1}(w_1^{p_1}) \times ... \times L^{p_m}(w_m^{p_m})$.

K. Moen [64] introdujo el operador maximal (sub)multilineal $\mathcal{M}_\alpha$ asociado a la integral fraccionaria multilineal $\mathcal{I}_\alpha$.

Definición 2.5.4. *Para* $0 \le \alpha < mn$ *y* $\vec{f} = (f_1, ..., f_m)$*, definimos el operador maximal (sub)multilineal* $\mathcal{M}_\alpha$ *como*

$$\mathcal{M}_\alpha \vec{f}(x) = \sup_{Q \ni x} \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{nm}}} \int_Q |f_i(y_i)| dy_i \right).$$

Observemos que el caso $\alpha = 0$ corresponde a la función maximal (sub)multilineal $\mathcal{M}$ estudiada en [57].

El Teorema 2.1.2 enunciado en la Sección 2.1, que fue probado en [57], dice que para $1 \le p_1, ..., p_m < \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$, y ν y w_j pesos, entonces la desigualdad

$$\|\mathcal{M}(\vec{f})\|_{L^{p,\infty}(\nu)} \le c \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}(w_j)}$$

vale para cualquier $\vec{f}$ si y solo si

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{1-p'_j} \right)^{\frac{1}{p'_j}} < \infty,$$

donde $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{1-p'_j} \right)^{\frac{1}{p'_j}}$ se entiende como $(\inf_Q w_j)^{-1}$ en el caso en que $p_j = 1$.

K. Moen [64] presenta la correspondiente caracterización para $\mathcal{M}_\alpha$.

Teorema 2.5.5 (Moen [64])**.** *Supongamos que* $0 \le \alpha < nm$*,* $1 \le p_1, ..., p_m < \infty$ *y* q *es un número que satisface* $\frac{1}{m} < p \le q < \infty$*. Entonces la desigualdad*

$$\|\mathcal{M}_\alpha(\vec{f})\|_{L^{q,\infty}(\nu)} \le c \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}(w_j)}$$

vale sí y solo sí los pesos $(\nu, \vec{w})$ *satisfacen*

$$\sup_Q l(Q)^\alpha |Q|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu dx \Big)^{\frac{1}{q}} \prod_{j=1}^{m} \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{1-p'_j} dx \Big)^{\frac{1}{p'_j}} < \infty,$$

donde $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{1-p'_j} dx \right)^{\frac{1}{p'_j}}$ *se entiende como* $(\inf_Q w_j)^{-1}$ *cuando* $p_j = 1$*.*

El principal resultado con pesos para $\mathcal{M}_\alpha$ es el siguiente.

Teorema 2.5.6 (Moen [64]). *Supongamos que* $0 \leq \alpha < nm$, $1 \leq p_1, ..., p_m < \infty$ *y* q *es un número que satisface* $\frac{1}{m} < p \leq q < \infty$. *Si* $(\nu, \vec{w})$ *son pesos que satisfacen*

$$\sup_Q l(Q)^\alpha |Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu^q dx \Big)^{\frac{1}{q}} \prod_{j=1}^m \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{-rp_j'} dx \Big)^{\frac{1}{rp_j'}} < \infty,$$

para algún $r > 1$, *entonces*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_\alpha \vec{f}\ \nu)^q \ dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \prod_{j=1}^m \Big(\int_{\mathcal{R}^n} (|f_j| w_j)^{p_j} \ dx \Big)^{\frac{1}{p_j}}$$

vale para toda $\vec{f} \in L^{p_1}(w_1^{p_1}) \times ... \times L^{p_m}(w_m^{p_m})$.

Capítulo 3

Desigualdades mixtas con pesos para operadores de Calderón-Zygmund multilineales

En análisis armónico hay un gran número de desigualdades de la forma

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq C\|Sf\|_{L^p(w)}$$

y

$$\|Tf\|_{L^{p,\infty}(w)} \leq C\|Sf\|_{L^{p,\infty}(w)}$$

donde generalmente T es un operador integral singular, S es un operador "más fácil"de tratar (comúnmente un operador maximal y por lo tanto positivo), y w está en alguna clase de pesos.

C. Fefferman y E. M. Stein [32] probaron en 1971 dos desigualdades muy importantes que verifica la función maximal de Hardy-Littlewood M, que enunciaremos a continuación.

Teorema 3.0.1 (Fefferman y Stein [32])**.**

a) Para todo $\lambda > 0$, existe una constante dimensional C tal que

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| Mw(x) dx.$$

b) Sea $1 < p < \infty$. Entonces, existe una constante dimensional C tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq p'C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p Mw(w) dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde p' es el exponente conjugado de p.

B. Muckenhoupt y R. Wheeden [67] probaron en 1977 la siguiente desigualdad para el operador maximal de Hardy-Littlewood M y para la transformada de Hilbert H en la recta real.

Teorema 3.0.2 (Muckenhoupt y Wheeden [67]). *Si $w \in A_1$ entonces existe una constante C tal que para todo $t > 0$,*

$$|\{x \in \mathbb{R} : \ M(fw^{-1})(x)\ w(x) \ > t\}| \ \leq \ \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx,$$

$$|\{x \in \mathbb{R} : \ H(fw^{-1})(x)\ w(x) \ > t\}| \ \leq \ \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx.$$

Posteriormente, en 1985, E. Sawyer [75] probó la siguiente desigualdad.

Teorema 3.0.3 (Teorema de Sawyer [75]). *Sean $u, v \in A_1$. Existe una constante C tal que para todo $t > 0$,*

$$uv\Big(\Big\{x \in \mathbb{R} : \ \frac{M(fv)(x)}{v(x)} \ > t\Big\}\Big) \ \leq \ \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| u(x) v(x)\, dx. \qquad (3.0.4)$$

Esta estimación es una extensión no trivial de la clásica desigualdad de tipo débil $(1,1)$ para el operador maximal, dada la presencia de un peso v dentro del conjunto de distribución. Notemos que si $v = 1$ este resultado es una estimación conocida debido a C. Fefferman y E. M. Stein [32] (Teorema 3.0.1). Notemos que (3.0.4) también vale si $u \in A_1$ cuando $v \in A_1$ (ver [56]).

En el mismo trabajo, E. Sawyer conjeturó que (3.0.4) era válido si el operador maximal era reemplazado por la transformada de Hilbert. En 2005, D. Cruz-Uribe, J. M. Martell y C. Pérez [24] extendieron (3.0.4) a $\mathbb{R}^n$. Más aún, lo probaron para operadores de Calderón-Zygmund, resolviendo de esta manera la conjetura de E. Sawyer. El enunciado de su teorema es el siguiente.

Teorema 3.0.5 (Cruz-Uribe, Martell y Pérez [24]). *Sean $u, v \in A_1$, o $u \in A_1$ y $v \in A_\infty(u)$. Entonces, existe una constante C tal que para todo $t > 0$,*

$$uv\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^n : \ \frac{|T(fv)(x)|}{v(x)} \ > t\Big\}\Big) \ \leq \ \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| u(x) v(x)\, dx, \qquad (3.0.6)$$

donde T es la función maximal de Hardy- Littlewood o un operador de Calderón-Zygmund con cierta regularidad.

Estimaciones cuantitativas de este tipo de resultados mixtos con pesos fueron obtenidas en [71] y también resultados equivalentes para conmutadores en [5].

En [24], D. Cruz-Uribe, J.M. Martell y C. Pérez conjeturaron que (3.0.4) y (3.0.6) debían ser válidas para $v \in A_\infty$. Este resultado constituye el caso más singular, dado que la condición A_∞ es la suposición más débil posible dentro de las clases A_p. Si bien algunos avances fueron hechos más adelante en [70], y algunas estimaciones cuantitativas más precisas fueron halladas en [71], el problema seguía sin ser resuelto.

Recientemente, K. Li, S. Ombrosi y C. Pérez [59] resolvieron esta conjetura. Probaron el siguiente teorema.

Teorema 3.0.7 (Li, Ombrosi y Pérez [59])**.** *Sea $u \in A_1$ y $v \in A_\infty$. Entonces existe una constante C que depende de la constante A_1 de u y la constante A_∞ de v tal que*

$$\left\| \frac{T(fv)}{v} \right\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq C\|f\|_{L^1(uv)},$$

donde T puede ser la función maximal de Hardy-Littlewood, un operador de Calderón-Zygmund, o una integral rough.

El propósito de este capítulo es presentar estimaciones mixtas con pesos que generalizan el Teorema 3.0.7 al contexto multilineal. Trabajaremos tanto con $\prod_{i=1}^m Mf_i$ como con $\mathcal{M}(\vec{f}\,)$ bajo diferentes suposiciones. Luego, mediante un teorema de extrapolación podremos probar desigualdades mixtas con pesos para operadores de Calderón-Zygmund.

3.1. Desigualdades de tipo débil mixtas con pesos para $\mathcal{M}(\vec{f}\,)$

Antes de empezar con el contenido de esta sección, haremos algunas aclaraciones. En distintas oportunidades tendremos que probar desigualdades de tipo débil (p,q), $0 < p, q < \infty$, es decir, desigualdades de la forma

$$\|T(f)\|_{L^{p,\infty}(\mu)} \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^q(\mu)},$$

donde T será un operador conocido. Este razonamiento que vamos a explicar es válido tanto en la versión lineal como en la versión multilineal. Para probar que

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^q(\mu)},$$

solo bastará con probar que

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \lambda < |Tf(x))| \leq 2\lambda\})^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^q(\mu)}. \tag{3.1.1}$$

En efecto, supongamos que vale (3.1.1) y usemos la estrategia de partir el conjunto en anillos:

$$\begin{aligned}
\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} &= \sum_{j=0}^{\infty} \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : 2^j\lambda < |Tf(x)| \leq 2^{j+1}\lambda\})^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j\lambda}\|f\|_{L^q(\mu)} \\
&= \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^q(\mu)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\
&= \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^q(\mu)},
\end{aligned}$$

dado que la suma converge.

Más aún, por homogeneidad, bastará con probar que

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : 1 < |Tf(x))| \leq 2\})^{\frac{1}{p}} \leq C\|f\|_{L^q(\mu)}. \tag{3.1.2}$$

En efecto, sea $g = \frac{f}{\lambda}$ y supongamos que vale (3.1.2). Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \lambda < |Tf(x)| \leq 2\lambda\})^{\frac{1}{p}} &= \mu\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^n : 1 < \frac{|Tf(x)|}{\lambda} \leq 2\Big\}\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \mu\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^n : 1 < |T\Big(\frac{f}{\lambda}\Big)(x)| \leq 2\Big\}\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \mu\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^n : 1 < |Tg(x)| \leq 2\Big\}\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C\|g\|_{L^q(\mu)} \\
&= \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^q(\mu)}.
\end{aligned}$$

En primer lugar, obtendremos una estimación para el producto $\prod_{i=1}^m Mf_i$, que será también válida para el operador más pequeño $\mathcal{M}$. Luego, obtendremos un resultado independiente para $\mathcal{M}$, que debilita las hipótesis en los pesos w_i. Con estas estimaciones en mente, por extrapolación, podremos extender el resultado a operadores de Calderón-Zygmund multilineales.

Teorema 3.1.3 (Li, Ombrosi y Picardi [60]). *Sea $w_1, ..., w_m \in A_1$ y $v \in A_\infty$. Denotamos $\nu = w_1^{\frac{1}{m}} ... w_m^{\frac{1}{m}}$. Entonces,*

$$\left\| \frac{\prod_{i=1}^m Mf_i}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^1(w_i)}.$$

Demostración. La idea principal de esta prueba es reducir el problema al caso lineal y luego aplicar el Teorema 3.0.7. Definimos

$$E = \{x : v(x) < \prod_{i=1}^m Mf_i(x) \leq 2v(x)\}$$

Sea $\tilde{v_i} = \prod_{j=1, j\neq i}^m (Mf_j)^{-1}$ y sea $v_i = v\tilde{v_i}$. Observemos que $v \in A_\infty$ y $\tilde{v_i} \in RH_\infty$. Por el Lema 1.3.17 (d), se tiene que $v_i \in A_\infty$. Para probar el teorema, es suficiente mostrar que

$$v^{\frac{1}{m}} \nu(E) \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^1(w_i)}.$$

Por la desigualdad de Hölder y el Teorema 3.0.7, tenemos

$$\begin{aligned}
v^{\frac{1}{m}} \nu(E) &\leq \int_E \prod_{i=1}^m \big(Mf_i \ w_i\big)^{\frac{1}{m}} \\
&\leq \prod_{i=1}^m \Big(\int_E Mf_i \ w_i \Big)^{\frac{1}{m}} \\
&\leq 2 \ \prod_{i=1}^m \Big(\int_E v_i \ w_i \Big)^{\frac{1}{m}} \\
&\leq 2 \ \prod_{i=1}^m \Big(\int_{\{x: v_i < Mf_i\}} v_i \ w_i \Big)^{\frac{1}{m}} \\
&= 2 \ \prod_{i=1}^m w_i v_i \{x : Mf_i > v_i\} \\
&\leq C \ \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^1(w_i)}.
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado el Teorema 3.0.7, ya que $w_i \in A_1$ y $v_i \in A_\infty$. $\square$

El caso particular en que el peso $v = 1$ en el Teorema 3.1.3 es el Teorema 2.3.2, probado en [57]. Agregar una función no constante v en la función de distribución hace la prueba más complicada. Sin embargo pudimos obtener el resultado gracias a las ideas en [57] y al Teorema 3.0.7. Fácilmente se ve que la conclusión de este teorema también vale para el operador maximal $\mathcal{M}$. Concretamente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1.4 (Li, Ombrosi y Picardi [60]). *Sea $w_1, ..., w_m \in A_1$ y $v \in A_\infty$. Denotamos $\nu = w_1^{\frac{1}{m}} ... w_m^{\frac{1}{m}}$. Entonces,*

$$\left\| \frac{\mathcal{M}(\vec{f})}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}.$$

Veremos más adelante que como consecuencia del teorema 3.1.3, podemos obtener el mismo resultado para operadores de Calderón-Zygmund multilineales. Sin embargo, sabemos que $\prod_{i=1}^m Mf_i$ es demasiado grande para estimar operadores de Calderón-Zygmund multilineales. De hecho, ya lo mencionamos en el capítulo anterior y fue probado en [57] que la condición $w_1, ..., w_m \in A_1$ es más fuerte que $\vec{w} = (w_1, ..., w_m) \in A_{(1,...,1)}$. Como la última condición caracteriza el tipo débil de un operador de Calderón-Zygmund T de $L^1(w_1) \times \cdots \times L^1(w_m)$ en $L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu)$, es natural preguntarse si es posible relajar la hipótesis $w_1, ..., w_m \in A_1$ en el Teorema 3.1.3 si ponemos T o $\mathcal{M}$ en lugar de $\prod_{i=1}^m Mf_i$. El siguiente teorema da parcialmente una respuesta positiva.

Teorema 3.1.5 (Li, Ombrosi y Picardi [60]). *Sea $\vec{w} = (w_1, ..., w_m) \in A_{(1...,1)}$, $\nu = w_1^{\frac{1}{m}} ... w_m^{\frac{1}{m}}$ y v un peso que satisface $\nu v^{\frac{1}{m}} \in A_\infty$. Luego, existe una constante C tal que*

$$\left\| \frac{\mathcal{M}(\vec{f})}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}. \tag{3.1.6}$$

Demostración. Seguimos la estrategia de [59]. Como mencionamos anteriormente,

$$\mathcal{M}f \leq c_n \sum_{i=1}^{3^n} \mathcal{M}_{D^{(i)}} f,$$

donde $D^{(i)}$ es un sistema diádico para todo $1 \leq i \leq 3^n$. Luego solo tenemos que considerar las funciones maximales multilineales diádicas. Recordemos también que si $\vec{w} = (w_1, ..., w_m) \in A_{(1,...,1)}$, entonces $\nu = w_1^{\frac{1}{m}} ... w_m^{\frac{1}{m}} \in A_1$.

Por otro lado, como $\nu \in A_1$, la hipótesis $\nu v^{\frac{1}{m}} \in A_\infty$ implica que $v^{\frac{1}{m}} \in A_\infty$. Notaremos $\mathcal{M}_d := \mathcal{M}_D$ donde D es uno de los sistemas diádicos $D^{(i)}$, $1 \leq i \leq 3^n$.

Entonces debemos probar que

$$\nu v^{\frac{1}{m}}\Big(\Big\{x : 1 < \frac{\mathcal{M}_d(f_1, \cdots, f_m)(x)}{v(x)} \leq 2\Big\}\Big) \leq C\Big(\prod_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} |f_i| w_i\Big)^{\frac{1}{m}}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $f_i \geq 0$, $i = 1, \cdots, m$. Sea

$$E_k := \Big\{x : 1 < \frac{\mathcal{M}_d(f_1, \cdots, f_m)(x)}{v(x)} \leq 2,\ a^{mk} < v(x) \leq a^{m(k+1)}\Big\},$$

donde $a > 2^n$. Definimos

$$\Omega_k = \{x : \mathcal{M}_d(f_1, \cdots, f_m)(x) > a^{mk}\}$$

y sea $\{I_j^k\}_j$ la colección de cubos diádicos maximales en Ω_k. Luego por maximalidad, $a^{mk} < \prod_{i=1}^{m} \langle f_i \rangle_{I_j^k} \leq 2^{mn} a^{mk}$. Separamos la colección $\{I_j^k\}_j$ en

$$\mathcal{Q}_{l,k} = \{I_j^k : a^{k+l} \leq \langle v^{\frac{1}{m}} \rangle_{I_j^k} < a^{k+l+1}\}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu v^{\frac{1}{m}}(E_k) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu v^{\frac{1}{m}}(E_k \cap \Omega_k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j} \nu v^{\frac{1}{m}}(E_k \cap I_j^k) \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{I_j^k \in \mathcal{Q}_{l,k}} a^{k+1} \nu(E_k \cap I_j^k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{I_j^k \in \Gamma_{l,k}} a^{k+1} \nu(E_k \cap I_j^k),\end{aligned}$$

donde

$$\Gamma_{l,k} = \{I_j^k \in \mathcal{Q}_{l,k} : |I_j^k \cap \{x : a^k < v^{\frac{1}{m}} \leq a^{k+1}\}| > 0\}.$$

Por el teorema de convergencia monótona, es suficiente dar una estimación uniforme de

$$\sum_{k\geq N} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{I_j^k \in \Gamma_{l,k}} a^{k+1} \nu(E_k \cap I_j^k),$$

donde $N < 0$.

El siguiente lema será clave en el desarrollo de nuestra demostración.

Lema 3.1.7. $\Gamma = \bigcup_{l\in\mathbb{Z}} \bigcup_{k\geq N} \Gamma_{l,k}$ *es una familia sparse.*

Demostración. Primero, notemos que si $I_j^k \subsetneq I_s^t$, entonces $k > t$. Teniendo en cuenta este hecho y usando la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\sum_{I_j^k \subsetneq I_s^t} |I_j^k| &= \sum_{z=t+1}^{\infty} \sum_{I_j^z \subsetneq I_s^t} |I_j^z| \leq \sum_{z=t+1}^{\infty} \frac{1}{a^z} \sum_{I_j^z \subsetneq I_s^t} \prod_{i=1}^{m} \Big(\int_{I_j^z} f_i \Big)^{\frac{1}{m}} \\
&\leq \sum_{z=t+1}^{\infty} \frac{1}{a^z} \prod_{i=1}^{m} \Big(\sum_{I_j^z \subsetneq I_s^t} \int_{I_j^z} f_i \Big)^{\frac{1}{m}} \leq \sum_{z=t+1}^{\infty} \frac{1}{a^z} \prod_{i=1}^{m} \Big(\int_{I_s^t} f_i \Big)^{\frac{1}{m}} \\
&\leq 2^n \sum_{z=t+1}^{\infty} \frac{a^t}{a^z} |I_s^t|.
\end{aligned}
$$

□

El siguiente lema será una herramienta necesaria para poder demostrar el Lema 3.1.9.

Lema 3.1.8. *Sea $w \in A_\infty$, y sea $r_w = 1 + \frac{1}{\tau_n [w]_{A_\infty}}$. Entonces, para cualquier cubo Q,*

$$
\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{r_w} \right)^{\frac{1}{r_w}} \leq \frac{2}{|Q|} \int_Q w.
$$

Como consecuencia, tenemos que para cualquier cubo Q y cualquier subconjunto medible $E \subset Q$, vale que

$$
\frac{w(E)}{w(Q)} \leq 2 \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{\varepsilon_w},
$$

donde $\varepsilon_w = \frac{1}{1+\tau_n [w]_{A_\infty}}$.

La demostración de esta desigualdad de Hölder inversa puede encontrarse en [46], y, la consecuencia, es una aplicación de la desigualdad de Hölder.

Lema 3.1.9. *Para $l \geq 0$ y para $I_j^k \in \Gamma_{l,k}$, existen constantes c_1 y c_2 que dependen de ν, v tales que*

$$
\nu(E_k \cap I_j^k) \leq c_1 a^{-c_2 l} \nu(I_j^k).
$$

Demostración. Como $v \in A_\infty$, sabemos que existe algún q tal que $v \in A_q$. Entonces

$$
\left(\frac{|E_k \cap I_j^k|}{|I_j^k|} \right)^{q-1} a^{-k-1} \leq \left(\frac{1}{|I_j^k|} \int_{I_j^k} v^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{q-1} \leq \frac{[v]_{A_q}}{\langle v \rangle_{I_j^k}} \leq a^{-k-l} [v]_{A_q}.
$$

Se sigue que

$$\frac{|E_k \cap I_j^k|}{|I_j^k|} \leq a^{\frac{1-l}{q-1}}[v]_{A_q}^{\frac{1}{q-1}}.$$

Como $\nu \in A_1$, podemos usar el Lema 3.1.8 para obtener

$$\frac{\nu(E_k \cap I_j^k)}{\nu(I_j^k)} \leq c_1 a^{-c_2 l}.$$

□

También tenemos el siguiente lema.

Lema 3.1.10. *Si $w_1 w_2 \in A_\infty$, entonces para cualquier cubo Q, tenemos*

$$\langle w_1 w_2 \rangle_Q \leq C \langle w_1 \rangle_Q \langle w_2 \rangle_Q.$$

Demostración. Sea $E_1 = \{x \in Q : w_1(x) > 4\langle w_1 \rangle_Q\}$ y $E_2 = \{x \in Q : w_2(x) > 4\langle w_2 \rangle_Q\}$. Por Chebyshev, es fácil ver que $E := Q \setminus (E_1 \cup E_2)$ satisface $|E| \geq \frac{1}{2}|Q|$. En efecto,

$$|E_i| = \int_{\{x\,:\,w_i > 4\langle w_i \rangle_Q\}} dx \leq \int_Q \frac{w_i}{4} \frac{|Q|}{w_i(Q)} = \frac{|Q|}{4},$$

por lo que

$$|E_1 \cup E_2| \leq \frac{|Q|}{2}.$$

Entonces tenemos que

$$|E| = |Q \setminus (E_1 \cup E_2)| = |Q| - |E_1 \cup E_2| \geq |Q| - \frac{1}{2}|Q| = \frac{1}{2}|Q|.$$

Como $w_1 w_2 \in A_\infty$, por el Lema 1.3.13, tenemos que $w_1 w_2(Q) \leq C w_1 w_2(E)$. Además,

$$w_1 w_2(E) = \int_E w_1 w_2 \leq \int_E 4\langle w_1 \rangle_Q 4\langle w_2 \rangle_Q = 16\langle w_1 \rangle_Q \langle w_2 \rangle_Q |E|.$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} w_1 w_2(Q) &\leq c w_1 w_2(E) \leq 16c\langle w_1 \rangle_Q \langle w_2 \rangle_Q |E| \\ &\leq 16c\langle w_1 \rangle_Q \langle w_2 \rangle_Q |Q|. \end{aligned}$$

□

Con este lema, podemos obtener también decaimiento exponencial para $l < 0$.

Lema 3.1.11. *Para $l<0$ y para $I_j^k \in \Gamma_{l,k}$, existe una constante c_1 que depende de ν, v tal que*

$$\nu(E_k \cap I_j^k) \leq c_1 a^l \nu(I_j^k).$$

Demostración. Por Lema 3.1.10, tenemos

$$\nu v^{\frac{1}{m}}(I_j^k) \leq C_{\nu,v}\langle \nu\rangle_{I_j^k}\langle v^{\frac{1}{m}}\rangle_{I_j^k}|I_j^k| \leq C_{\nu,v}a^{k+l}\nu(I_j^k).$$

Por otro lado,

$$\nu v^{\frac{1}{m}}(I_j^k) \geq a^k \nu(E_k \cap I_j^k).$$

Entonces

$$\nu(E_k \cap I_j^k) \leq C_{\nu,v} a^l \nu(I_j^k).$$

□

Fijemos ahora l, formemos los cubos principales para $\bigcup_{k\geq N}\Gamma_{l,k}$: sean $\mathcal{P}_0^l$ los cubos maximales en $\bigcup_{k\geq N}\Gamma_{l,k}$, entonces para $m \geq 0$, si $I_s^t \in \mathcal{P}_m^l$, decimos $I_j^k \in \mathcal{P}_{m+1}^l$ si I_j^k es maximal (en el sentido de inclusión) en $\mathcal{D}(I_s^t)$ tal que

$$\langle \nu\rangle_{I_j^k} > 2\langle \nu\rangle_{I_s^t}$$

Denotamos $\mathcal{P}^l = \bigcup_{m\geq 0}\mathcal{P}_m^l$ y $\pi(Q)$ es el menor cubo principal que contiene a Q. Tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_k \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{I_j^k\in\Gamma_{l,k}} a^{k+1}\nu(E_k\cap I_j^k) &\leq \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_1 e^{-c_2|l|}a^{1-l}\sum_k \sum_{I_j^k\in\Gamma_{l,k}} \langle v^{\frac{1}{m}}\rangle_{I_j^k}\nu(I_j^k)\\
&\leq \sum_{l\in\mathbb{Z}} 2c_1 e^{-c_2|l|}a^{1-l}\sum_{I_s^t\in\mathcal{P}^l}\langle\nu\rangle_{I_s^t}\sum_{k,j:\pi(I_j^k)=I_s^t} v^{\frac{1}{m}}(I_j^k)\\
&\lesssim_n \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_1 e^{-c_2|l|}a^{-l}[v^{\frac{1}{m}}]_{A_\infty}\sum_{I_s^t\in\mathcal{P}^l}\langle\nu\rangle_{I_s^t} v^{\frac{1}{m}}(I_s^t)\\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_1 e^{-c_2|l|}a^{-l}[v^{\frac{1}{m}}]_{A_\infty}\int_{\mathbb{R}^n} v^{\frac{1}{m}}\sum_{I_s^t\in\mathcal{P}^l}\langle\nu\rangle_{I_s^t}\chi_{I_s^t}\\
&\lesssim \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_1 e^{-c_2|l|}a^{-l}[v^{\frac{1}{m}}]_{A_\infty}\sum_{Q\in\mathcal{P}_*^l}\nu v^{\frac{1}{m}}(Q),
\end{aligned}$$

donde en la tercer desigualdad usamos el Lema 3.1.7, y en el último paso usamos el hecho de que

$$\sum_{I_s^t\in P^l}\langle\nu\rangle_{I_s^t}\chi_{I_s^t} \leq 2[\nu]_{A_1}\nu(x),$$

en casi todo punto $x \in \bigcup_{s,t:I_s^t \in P^l} I_s^t$, y $\mathcal{P}_*^l$ es la colección de cubos maximales (en el sentido de inclusión) en $\mathcal{P}^l$. Para un $Q \in \mathcal{P}_*^l$ fijo, por Lema 3.1.10

$$\begin{aligned}\nu v^{\frac{1}{m}}(Q) &\leq C_{\nu,v} \langle \nu \rangle_Q \langle v^{\frac{1}{m}} \rangle_Q |Q| \lesssim_n a^l C_{\nu,v} u(Q) \prod_{i=1}^{m} \langle f_i \rangle_Q^{\frac{1}{m}} \\ &\leq a^l C_{\nu,v} [\vec{w}]_{A_{(1,\ldots,1)}} \prod_{i=1}^{m} \Big(\int_Q f_i w_i \Big)^{\frac{1}{m}}.\end{aligned}$$

Como los cubos Q son disjuntos, y por la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\sum_{Q \in \mathcal{P}_*^l} \nu v^{\frac{1}{m}}(Q) \lesssim a^l C_{\nu,v} [\vec{w}]_{A_{(1,\ldots,1)}} \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}^{\frac{1}{m}},$$

y concluimos la prueba. □

Luego (6.1.1) vale tanto si $\vec{w} = (w_1, ..., w_m) \in A_{(1,\ldots,1)}$ y $\nu v^{\frac{1}{m}} \in A_\infty$ como (como consecuencia de Teorema 3.1.3) si los pesos $w_i \in A_1$ para $i = 1, ..., m$ y $v \in A_\infty$. Estas condiciones son independientes. En la última sección proponemos como conjetura un posible resultado que creemos que mejoraría el nuestro pero aún no ha sido resuelto.

En general, bajo las hipótesis del Teorema 3.1.5 la estimación (6.1.1) no es válida si $\mathcal{M}(\vec{f})$ es reemplazado por $\prod_{i=1}^m Mf_i$ incluso en el caso en que $v(x) = 1$. Este hecho fue probado en [57].

3.2. Extensión a operadores de Calderón-Zygmund multilineales

Vamos a proporcionar un teorema de extrapolación que permite reducir el problema de operadores de Calderón-Zygmund multilineales a la función maximal multilineal. Fue escencialmente obtenido en [70], combinando el Teorema 1.5 y algunas observaciones en la Sección 2.2 allí. No obstante, daremos una demostración completa de este resultado.

Enunciaremos primero algunos resultados que serán necesarios para la prueba del teorema de extrapolación.

En la demostración del teorema vamos a utilizar el algoritmo de Rubio de Francia.

Teorema 3.2.1 (Algoritmo de Rubio de Francia)**.** *Sea $p > 1$ y sea $w \in A_p$. Sea T un operador positivo sublineal acotado en $L^p(w)$ con norma $\|T\|_{L^p(w)}$. Para una función no negativa $h \in L^p(w)$ definimos*

$$\mathcal{R}h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k h(x)}{2^k \|T\|_{L^p(w)}^k},$$

donde T_0 es el operador identidad y $T^k h = T(T^{k-1})h$. Entonces valen las siguientes afirmaciones

1. *$h(x) \leq \mathcal{R}h(x)$ en casi todo punto;*
2. *$\|\mathcal{R}h\|_{L^p(w)} \leq 2\|h\|_{L^p(w)}$;*
3. *$T(\mathcal{R}h(x)) \leq 2\|T\|_{L^p(w)} \mathcal{R}h(x)$ para casi todo x.*

Demostración.

1. Es inmediata, ya que

$$\mathcal{R}h(x) = h(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^k h(x)}{2^k \|T\|_{L^p(w)}^k} \geq h(x) \quad \text{c.t.p.}$$

2. Como $\|T^k h\|_{L^p(w)} \leq \|T\|_{L^p(w)}^k \|h\|_{L^p(w)}$, tenemos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}h\|_{L^p(w)} = \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{N} \frac{T^k h(x)}{2^k \|T\|_{L^p(w)}^k} \right\|_{L^p(w)} &\leq \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \left\| \frac{T^k h(x)}{2^k \|T\|_{L^p(w)}^k} \right\|_{L^p(w)} \\ &\leq \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{\|h\|_{L^p(w)}}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|h\|_{L^p(w)}}{2^k} = 2\|h\|_{L^p(w)}.\end{aligned}$$

3. Teniendo en cuenta que la primer desigualdad que vamos a aplicar vale en casi todo punto, se tiene que

$$\begin{aligned}T(\mathcal{R}h)(x) = T\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k h(x)}{2^k \|T\|_{L^p(w)}^k} \right) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} T\left(\frac{T^k h(x)}{2^k \|T\|_{L^p(w)}^k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{k+1} h(x)}{2^k \|T\|_{L^p(w)}^k} = 2\|T\|_{L^p(w)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^k h(x)}{2^k \|T\|_{L^p(w)}^k} \\ &\leq 2\|T\|_{L^p(w)} \mathcal{R}h(x),\end{aligned}$$

en casi todo punto.

$\square$

Observemos que si en el teorema anterior reemplazamos T por el operador maximal de Hardy-Littlewood M, el teorema nos da una forma de construir pesos en A_1.

Será de gran utilidad tener presentes los siguientes dos resultados, cuyas demostraciones se encuentran en [24].

Lema 3.2.2. *Si $u \in A_1$, $v \in A_p$, $1 \le p < \infty$, entonces existe $0 < \varepsilon_0 < 1$ que depende solo de $[u]_{A_1}$ tal que $uv^\varepsilon \in A_p$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.*

Proposición 3.2.3. *Dado p_0, $1 < p_0 < \infty$, sea T un operador sublineal tal que $\|Tf\|_{L^{p_0,\infty}} \le C_0\|f\|_{L^{p_0,1}}$ y $\|Tf\|_{L^\infty} \le C_1\|f\|_{L^\infty}$. Entonces para todo $p_0 < p < \infty$,*

$$\|Tf\|_{L^{p,1}} \le 2^{\frac{1}{p}}\Big(C_0\big(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}\big)^{-1} + C_1\Big)\|f\|_{Lp,1}.$$

Enunciamos ahora el teorema de extrapolación.

Teorema 3.2.4. *Sea $\vec{w} = (w_1, ..., w_m) \in A_{(1,...,1)}$, $v^{1/m} \in A_\infty$ y $\nu = w_1^{\frac{1}{m}} ... w_m^{\frac{1}{m}}$. Entonces*

$$\left\|\frac{T(\vec{f})}{v}\right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \le C\left\|\frac{\mathcal{M}(\vec{f})}{v}\right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})}$$

donde C es una constante y T es un operador de Calderón-Zygmund multilineal.

Demostración. Primero, recordemos que si $\vec{w} = (w_1, ..., w_m) \in A_{(1,...,1)}$ entonces $\nu = w_1^{\frac{1}{m}} ... w_m^{\frac{1}{m}} \in A_1$ (Observación 9 en la Sección 2.2).

Vamos a seguir las ideas del Teorema 1.5 en [70], las cuales están basadas en ideas previas en [24]. Definimos el operador S como

$$Sf(x) = \frac{M(f\nu)(x)}{\nu(x)}$$

si $\nu(x) \neq 0$ y $Sf(x) = 0$ si $\nu(x) = 0$. (Como $\nu \in A_1$, $\nu > 0$ c.t.p.).

Como $\nu \in A_1$, S es acotado en $L^\infty(\nu v^{\frac{1}{m}})$ con constante $C = [\nu]_{A_1}$, esto es,

$$\|Sf\|_{L^\infty(\nu v^{\frac{1}{m}})} \le [\nu]_{A_1}\|f\|_{L^\infty(\nu v^{\frac{1}{m}})}.$$

En efecto,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f\nu| \leq \|f\|_{L^\infty(\nu v^{\frac{1}{m}})}\frac{1}{|Q|}\int_Q \nu \leq \|f\|_{L^\infty(\nu v^{\frac{1}{m}})} M\nu,$$

y como $\nu \in A_1$, entonces

$$M(f\nu) \leq \|f\|_{L^\infty(\nu v^{\frac{1}{m}})} M\nu \leq [\nu]_{A_1}\|f\|_{L^\infty(\nu v^{\frac{1}{m}})}\nu,$$

por lo que tenemos

$$\left\|\frac{M(f\nu)}{\nu}\right\|_{L^\infty(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq [\nu]_{A_1}\|f\|_{L^\infty(\nu v^{\frac{1}{m}})}.$$

Mostraremos ahora que S es acotado en $L^{p_0}(\nu v^{\frac{1}{m}})$ para algún $1 < p_0 < \infty$. Observemos que

$$\int_{\mathbb{R}_n} Sf(x)^{p_0}\ \nu(x)\ v^{\frac{1}{m}}(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}_n} M(f\nu)(x)^{p_0}\ \nu(x)^{1-p_0}\ v^{\frac{1}{m}}(x)\ dx.$$

Como $v^{\frac{1}{m}} \in A_\infty$, $v^{\frac{1}{m}} \in A_t$ para algún $t > 1$ grande. Luego por el teorema de factorización A_p (Teorema 1.3.3) existen $v_1, v_2 \in A_1$ tales que $v^{\frac{1}{m}} = v_1 v_2^{1-t}$; por lo tanto,

$$\nu^{1-p_0} v^{\frac{1}{m}} = v_1(\nu v_2^{\frac{t-1}{p_0-1}})^{1-p_0}.$$

Por el Lema 3.2.2, existe $0 < \varepsilon_0 < 1$, que depende solo de $[\nu]_{A_1}$, tal que $\nu v_2^{\varepsilon} \in A_1$ para todo $v_2 \in A_1$ y $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Luego, si

$$p_0 = \frac{2(t-1)}{\varepsilon_0} + 1$$

entonces $\nu^{1-p_0} v^{\frac{1}{m}} \in A_{p_0}$. En efecto, $\nu^{1-p_0} v^{\frac{1}{m}} = v_1(\nu v_2^{\frac{t-1}{p_0-1}})^{1-p_0}$ y entonces solo restaría ver que $\nu v_2^{\frac{t-1}{p_0-1}} \in A_1$. Pero $\nu v_2^{\frac{t-1}{p_0-1}} = \nu v_2^{\frac{\varepsilon}{2}} \in A_1$ por el Lema 3.2.2.

Por el teorema de Muckenhoupt (Teorema 1.3.1), M es acotado en $L^{p_0}(\nu^{1-p_0} v^{\frac{1}{m}})$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}\|Sf\|^{p_0}_{L^{p_0}(\nu v^{\frac{1}{m}})} &= \int |Sf|^{p_0} uv \leq \int M(fu)^{p_0} u^{1-p_0} v \\ &\leq C_0 \int (fu)^{p_0} u^{1-p_0} v = C_0 \int f^{p_0} uv = C_0 \|f\|^{p_0}_{L^{p_0}(\nu v^{\frac{1}{m}})}.\end{aligned}$$

Luego S es acotado en $L^{p_0}(\nu v^{\frac{1}{m}})$ con alguna constante C_0.

Luego por interpolación de Marcinkiewicz en la escala de espacios de Lorentz, S es acotado en $L^{q,1}(\nu v^{\frac{1}{m}})$ para todo $p_0 < q < \infty$. En particular, por la Proposición 3.2.3,

$$\|Sf\|_{L^{q,1}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq 2^{\frac{1}{q}} \left(C_0 \Big(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q} \Big) + C_1 \right) \|f\|_{L^{q,1}(\nu v^{\frac{1}{m}})}.$$

Luego, para todo $q \geq 2p_0$ tenemos que $\|Sf\|_{L^{q,1}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq K_0 \|f\|_{L^{q,1}(\nu v^{\frac{1}{m}})}$ con $K_0 = 4p_0\big(C_0 + C_1\big)$. Enfatizamos que la constante K_0 es válida para todo $q \geq 2p_0$.

Nuevamente por el Lema 3.2.2, para todo peso $W_1 \in A_1$ con $[W_1]_{A_1} \leq 2K_0$, existe $0 < \tilde{\varepsilon_0} < 1$ (que depende solo de K_0) tal que $W_1 W_2^{\varepsilon} \in A_1$ para todo $W_2 \in A_1$ y $0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon_0}$.

Fijemos $0 < \varepsilon < min\{\tilde{\varepsilon_0}, \frac{1}{2p_0}\}$ y sea $r = (\frac{1}{\varepsilon})'$. Entonces $r' > 2p_0$ y por lo tanto S es acotado en $L^{r',1}(\nu v^{\frac{1}{m}})$ con constante acotada por K_0. Ahora aplicamos el algoritmo de Rubio de Francia para definir el operador $\mathcal{R}$ en $h \in L^{r',1}(\nu v^{\frac{1}{m}})$, $h \geq 0$, por

$$\mathcal{R}h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k h(x)}{2^k K_0^k}.$$

Se sigue inmediatamente de esta definición que:

- $h(x) \leq \mathcal{R}h(x)$;
- $\|\mathcal{R}h\|_{L^{r',1}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq 2\|h\|_{L^{r',1}(\nu v^{\frac{1}{m}})}$;
- $S(\mathcal{R}h)(x) \leq 2K_0 \mathcal{R}h(x)$.

En particular, se sigue del último item y de la definición de S que $\mathcal{R}h\ \nu \in A_1$ con $[\mathcal{R}h\ \nu]_{A_1} \leq 2K_0$. Sea $W_1 = \mathcal{R}h\ \nu$ y $W_2 = v_1 \in A_1$. Entonces $W_1 W_2^{\varepsilon} \in A_1$. Luego, $\mathcal{R}h\ \nu\ v^{\frac{1}{mr'}} \in A_1 \subset A_\infty$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{T(\vec{f})}{v}\right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})}^{\frac{1}{mr}} &= \sup_{\lambda>0}\ \lambda^{\frac{1}{mr}}\Big(\nu v^{\frac{1}{m}}\ \{x\in\mathbb{R}^n : \left|\frac{T(\vec{f})(x)}{v(x)}\right| > \lambda\}\Big)^{\frac{1}{r}} \\
&= \sup_{\lambda>0}\ \lambda^{\frac{1}{mr}}\Big(\nu v^{\frac{1}{m}}\ \{x\in\mathbb{R}^n : \left|\frac{T(\vec{f})(x)}{v(x)}\right|^{\frac{1}{mr}} > \lambda^{\frac{1}{mr}}\}\Big)^{\frac{1}{r}} \\
&= \sup_{t>0}\ t\ \Big(\nu v^{\frac{1}{m}}\ \{x\in\mathbb{R}^n : \left|\frac{T(\vec{f})(x)}{v(x)}\right|^{\frac{1}{mr}} > t\}\Big)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left\|\left(\frac{T(\vec{f})}{v}\right)^{\frac{1}{mr}}\right\|_{L^{r,\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \\
&= \sup_{\|h\|_{L^{r',1}(\nu v^{\frac{1}{m}})}=1}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{T(\vec{f})(x)}{v(x)}\right|^{\frac{1}{mr}}\ h(x)\ \nu(x)\ v^{\frac{1}{m}}(x)\ dx\right| \\
&= \sup_{\|h\|_{L^{r',1}(\nu v^{\frac{1}{m}})}=1}\left|\int_{\mathbb{R}^n}|T(\vec{f})(x)|^{\frac{1}{mr}}\ h(x)\ \nu(x)\ v^{\frac{1}{mr'}}(x)\ dx\right|.
\end{aligned}$$

Antes de terminar, recordemos la siguiente desigualdad del Teorema 2.4.2 (desigualdad de tipo Coifman-Fefferman): si $w\in A_\infty$ y $s>0$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n}|T(\vec{f})(x)|^s\ w(x)dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{M}(\vec{f})(x)^s\ w(x)dx.$$

De la definición de $\mathcal{R}h(x)$, la última desigualdad y la desigualdad de Hölder se tiene:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |T(\vec{f})(x)|^{\frac{1}{mr}}\ h(x)\ \nu(x)\ v^{\frac{1}{mr'}}(x)\ dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |T(\vec{f})(x)|^{\frac{1}{mr}}\ \mathcal{R}h(x)\ \nu(x)\ v^{\frac{1}{mr'}}(x)\ dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}(\vec{f})(x)^{\frac{1}{mr}}\ \mathcal{R}h(x)\ \nu(x)\ v^{\frac{1}{mr'}}(x)\ dx \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\mathcal{M}(\vec{f})(x)}{v(x)}\right)^{\frac{1}{mr}}\ \mathcal{R}h(x)\ \nu(x)\ v^{\frac{1}{m}}(x)\ dx \\
&\leq C \left\| \left(\frac{\mathcal{M}(\vec{f})}{v}\right)^{\frac{1}{mr}} \right\|_{L^{r,\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \left\| \mathcal{R}h \right\|_{L^{r',1}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \\
&\leq 2\ C \left\| \frac{\mathcal{M}(\vec{f})}{v} \right\|^{\frac{1}{mr}}_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \left\| h \right\|_{L^{r',1}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \\
&= 2\ C \left\| \frac{\mathcal{M}(\vec{f})}{v} \right\|^{\frac{1}{mr}}_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})}.
\end{aligned}
$$

Luego, tenemos que

$$
\left\| \frac{T(\vec{f})}{v} \right\|^{\frac{1}{mr}}_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \left\| \frac{\mathcal{M}(\vec{f})}{v} \right\|^{\frac{1}{mr}}_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})}.
$$

□

Como consecuencia de los teoremas 3.1.4, 3.1.5 y 3.2.4 obtenemos el principal resultado de este capítulo:

Teorema 3.2.5 (Li, Ombrosi y Picardi [60]). *Sea T un operador de Calderón-Zygmund multilineal, $\vec{w} = (w_1, ..., w_m)$ y $\nu = w_1^{\frac{1}{m}} ... w_m^{\frac{1}{m}}$. Supongamos que $\vec{w} \in A_{(1,...,1)}$ y $\nu v^{\frac{1}{m}} \in A_\infty$ o $w_1, ..., w_m \in A_1$ y $v \in A_\infty$. Entonces existe una constante C tal que*

$$
\left\| \frac{T(\vec{f})}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C\ \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}. \tag{3.2.6}
$$

Para terminar esta sección, recordemos el Lema 1.3.18: si $u \in A_1$ y $v \in RH_\infty$, entonces $uv^{\frac{1}{m}} \in A_\infty$. Teniendo este lema presente, podemos dar un corolario directo del Teorema 3.2.5.

Corolario 3.2.7 (Li, Ombrosi y Picardi [60]). *Sea T un operador de Calderón-Zygmund multilineal. Sea $\vec{w} \in A_{(1,\dots,1)}$ y sea $v \in RH_\infty$. Entonces existe una constante C tal que*

$$\left\| \frac{T(\vec{f}\,)}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}.$$

Capítulo 4

Desigualdades mixtas con pesos para la integral fraccionaria multilineal

En este capítulo trabajaremos con la integral fraccionaria multilineal. Nuevamente la idea es encontrar una desigualdad pesada mixta para este tipo de operadores y la apropiada clase de pesos asociada a los mismos. La idea central es reducir el problema a lo que ya hemos estudiado para el caso no fraccionario. Este tipo de desigualdades mixtas para integrales fraccionarias en el caso lineal tiene antecedentes en el trabajo [6], con lo cual nuestro resultado dará una generalización de los mismos al caso multilineal. También será útil usar la idea de extrapolación que usamos en el contexto no fraccionario, porque del operador maximal fraccionario podremos pasar a la integral fraccionaria.

4.1. Integral fraccionaria multilineal

Recordemos que el operador integral fraccionario o potencial de Riesz se define como

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy, \quad 0 < \alpha < n,$$

y la función maximal fraccionaria como

$$M_\alpha f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |f(y)| dy, \quad 0 \leq \alpha < n,$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos Q que contienen a x.

$I_\alpha f(x)$ puede ser acotado por $M_\alpha f(x)$, debido a la desigualdad de tipo Coifman probada en [68]. Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.1.1 (Muckenhoupt y Wheeden [68]). *Sea $0 < \alpha < n$ y $0 < q < \infty$. Para cada $w \in A_\infty$ tenemos*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^q w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} M_\alpha f(x)^q w(x)dx.$$

F. Berra, M. Carena y G. Pradolini [6] probaron la siguiente desigualdad mixta de tipo débil:

Teorema 4.1.2 (Berra, Carena y Pradolini [6]). *Sea $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ y q tal que satisface $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Si u, v son pesos tales que $u, v^{\frac{q}{p}} \in A_1$ o $uv^{\frac{-q}{p'}} \in A_1$ y $v \in A_\infty(uv^{\frac{-q}{p'}})$, entonces existe una constante positiva C tal que para todo $t > 0$*

$$uv^{\frac{q}{p}}\Big\{x \in \mathbb{R}^n : \ \frac{I_\alpha(fv)(x)}{v(x)} > t\Big\}^{\frac{1}{q}} \leq \frac{C}{t}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p u(x)^{\frac{p}{q}} v(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

donde I_α es la integral fraccionaria o la función maximal fraccionaria.

Para probar esto, necesitaron la siguiente estimación puntual para M_α en términos del operador maximal de Hardy-Littlewood M.

Lema 4.1.3 (Berra, Carena y Pradolini [6]). *Sea $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ y $s = 1 + \frac{q}{p'}$. Entonces*

$$M_\alpha(fw^{-1})(x) \leq M(f^{\frac{p}{s}} w^{-\frac{q}{s}})^{\frac{s}{q}}(x)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^p dy\Big)^{\frac{\alpha}{n}},$$

para toda función no negativa w y $f \in L^p$.

Para comodidad del lector, mencionamos dos definiciones introducidas en el Capítulo 2, que extienden las integrales fraccionarias en el contexto multilineal.

Definición 2.5.1 *Sea α un número tal que $0 < \alpha < mn$ y sea $\vec{f} = (f_1, ..., f_m)$ una colección de funciones en $\mathbb{R}^n$. Definimos la integral fraccionaria multilineal como*

$$\mathcal{I}_\alpha \vec{f}(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{f_1(y_1)...f_m(y_m)\ d\vec{y}}{(|x-y_1| + ... + |x-y_m|)^{mn-\alpha}}.$$

Definición 2.5.4 *Para* $0 \leq \alpha < mn$ *y* $\vec{f} = (f_1, ..., f_m)$*, definimos el operador maximal (sub)multilineal* $\mathcal{M}_\alpha$ *como*

$$\mathcal{M}_\alpha \vec{f}(x) = \sup_{Q \ni x} \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{nm}}} \int_Q |f_i(y_i)| dy_i \right).$$

Al igual que en el caso lineal, tenemos que $\mathcal{M}_\alpha$ es un operador más pequeño que $\mathcal{I}_\alpha$, más específicamente, $\mathcal{M}_\alpha(\vec{f}\,) \leq C\mathcal{I}_\alpha(\vec{f}\,)$ para $f_i \geq 0$. Sin embargo también tenemos la desigualdad inversa en norma. K. Moen [64] presenta el siguiente teorema que relaciona $\mathcal{I}_\alpha$ y $\mathcal{M}_\alpha$.

Teorema 4.1.4 (Moen [64])**.** *Sea* $0 < \alpha < mn$*. Entonces para cada* $w \in A_\infty$ *y todo* $0 < q < \infty$ *tenemos*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{I}_\alpha \vec{f}\,(x)|^q w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_\alpha \vec{f}\,(x)^q w(x) dx$$

para toda $\vec{f}$ *con* f_i *acotada de soporte compacto.*

4.2. Desigualdad mixta con pesos para $\mathcal{M}_\alpha$

En esta sección presentamos un resultado que extiende el Teorema 4.1.2 para operadores maximales fraccionarios multilineales.

Teorema 4.2.1 (Picardi [73])**.** *Sea* $0 \leq \alpha < mn$*. Sean* $q = \frac{n}{mn-\alpha}$*,* $\vec{u}^{mq} = (u_1^{mq}, ..., u_m^{mq})$ *y* $\nu = \prod_{i=1}^m u_i^q$*. Supongamos que* $\vec{u}^{mq} \in A_{(1,...,1)}$ *y* $\nu v^q \in A_\infty$*, o* $u_1^{mq}, ..., u_m^{mq} \in A_1$ *y* $v^{mq} \in A_\infty$*, entonces existe una constante* C *tal que*

$$\left\| \frac{\mathcal{M}_\alpha(\vec{f}\,)}{v} \right\|_{L^{q,\infty}(\nu v^q)} \leq C \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(u_i)}.$$

Notemos que si $\alpha = 0$, entonces $q = \frac{1}{m}$ y obtenemos el Teorema 3.2.5 para el operador maximal (sub)multilinear $\mathcal{M}$.

Observación 11. *Si en el Teorema 4.2.1 tomamos* $m = 1$ *tenemos que* $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n}$ *y las hipótesis en los pesos se reducen a* $u^q \in A_1$ *y* $v \in A_\infty$*. Luego recuperamos el Teorema 4.1.2 en el caso* $p = 1$ *para una clase de pesos* v *más general. El peso* u^q *en el Teorema 4.2.1 juega el rol del peso* u *en el Teorema 4.1.2.*

Para poder probar el Teorema 4.2.1 necesitamos la siguiente estimación puntual para $\mathcal{M}_\alpha$ en términos del operador multilineal maximal $\mathcal{M}$. Esta es una versión multilineal del Lema 4.2.2, y para probarla, seguimos un enfoque similar al que es usado en [6].

Lema 4.2.2 (Picardi [73])**.** *Sea $q = \frac{n}{mn-\alpha}$. Entonces*

$$\mathcal{M}_\alpha(f_1, ..., f_m)(x) \leq \mathcal{M}\big(f_1 u_1^{1-mq}, ..., f_m u_m^{1-mq}\big)^{\frac{1}{mq}}(x) \prod_{i=1}^{m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_i u_i\Big)^{\frac{\alpha}{mn}}.$$

Demostración. Fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ y sea Q un cubo que contiene a x. Aplicando la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{1-\frac{\alpha}{mn}}$ y $\frac{mn}{\alpha}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{m}\Big(\frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{mn}}}\int_Q f_i\Big) &= \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{mn}}}\int_Q f_i^{1-\frac{\alpha}{mn}} f_i^{\frac{\alpha}{m}} u_i^{\frac{1}{mq}-1} u_i^{\frac{mq-1}{mq}}\right) \\
&\leq \prod_{i=1}^{m}\left[\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f_i u_i^{1-mq}\right)^{\frac{1}{mq}}\left(\int_Q f_i u_i\right)^{\frac{\alpha}{mn}}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{m}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q f_i u_i^{1-mq}\Big)^{\frac{1}{mq}} \prod_{i=1}^{m}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_i u_i\Big)^{\frac{\alpha}{mn}} \\
&\leq \mathcal{M}\big(f_1 u_1^{1-mq}, ..., f_m u_m^{1-mq}\big)^{\frac{1}{mq}} \prod_{i=1}^{m}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_i u_i\Big)^{\frac{\alpha}{mn}}.
\end{aligned}$$

□

Ahora tenemos todas las herramientas necesarias para probar el Teorema 4.2.1.

Demostración. (Teorema 4.2.1)

Aplicando el Lema 4.2.2 y el Teorema 3.2.5, tenemos

$$\begin{aligned}
&\nu v^q\Big\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{\mathcal{M}_\alpha(\vec{f})(x)}{v(x)} > \lambda\Big\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leq u_1^q ... u_m^q v^q \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{\mathcal{M}(f_1 u_1^{1-mq}, ..., f_m u_m^{1-mq})^{\frac{1}{mq}}(x)}{v(x)} > \frac{\lambda}{\prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_i u_i\right)^{\frac{\alpha}{mn}}}\Big\}^{\frac{1}{q}} \\
&= u_1^q ... u_m^q v^q (E_\lambda) \\
&= (u_1^{mq})^{\frac{1}{m}} ... (u_m^{mq})^{\frac{1}{m}} (v^{mq})^{\frac{1}{m}} (E_\lambda)^{m\frac{1}{mq}} \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \prod_{i=1}^m \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_i u_i\Big)^{\frac{\alpha}{mn}} \prod_{i=1}^m \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_i u_i^{1-mq} u_i^{mq}\Big)^{\frac{1}{mq}} \\
&= \frac{C}{\lambda} \prod_{i=1}^m \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_i u_i\Big) \\
&= \frac{C}{\lambda} \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^1(u_i)},
\end{aligned}$$

donde

$$E_\lambda = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{\mathcal{M}(f_1 u_1^{1-mq}, ..., f_m u_m^{1-mq})(x)}{v^{mq}(x)} > \Big(\frac{\lambda}{\prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_i u_i\right)^{\frac{\alpha}{mn}}}\Big)^{mq}\Big\}.$$

□

4.3. Extensión a la integral fraccionaria multilineal

En esta sección proporcionaremos un teorema de extrapolación que permite reducir el problema de la integral fraccionaria multilineal a la función maximal fraccionaria multilineal. Enunciaremos algunos resultados que serán necesarios para finalmente poder probar el teorema de extrapolación.

Teorema 4.3.1 (Picardi [73]). *Sean $0 < \alpha < mn$ y $q = \frac{n}{mn-\alpha}$. Sean $\vec{u}^{mq} = (u_1^{mq}, ..., u_m^{mq}) \in A_{(1,...,1)}$, $v^q \in A_\infty$ y denotamos $\nu = \prod_{i=1}^m u_i^q$. Entonces existe una constante C tal que*

$$\left\|\frac{\mathcal{I}_\alpha(\vec{f})}{v}\right\|_{L^{q,\infty}(\nu v^q)} \leq C \left\|\frac{\mathcal{M}_\alpha(\vec{f})}{v}\right\|_{L^{q,\infty}(\nu v^q)}.$$

Para probar el Teorema 4.3.1 necesitamos dos resultados conocidos. El primero es debido a K. Moen, que, para comodidad del lector, volvemos a mencionar:

Teorema 4.1.4 (Moen [64]) *Sea* $0 < \alpha < mn$*. Entonces para cada* $w \in A_\infty$ *y todo* $0 < q < \infty$ *tenemos*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{I}_\alpha \vec{f}\,(x)|^q w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_\alpha \vec{f}\,(x)^q w(x)dx$$

para toda $\vec{f}$ *con* f_i *acotada de soporte compacto.*

El segundo resultado que utilizaremos se debe a D. Cruz-Uribe, J. M. Martell y C. Pérez [24].

Teorema 4.3.2 (Cruz-Uribe, Martell y Pérez [24], Theorem 1.7)**.** *Dada una familia* $\mathcal{F}$ *de pares de funciones que satisfacen que existe un número* p_0*,* $0 < p_0 < \infty$ *tal que para todo* $w \in A_\infty$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{p_0}\ w(x)\ dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{p_0}\ w(x)\ dx,$$

para todo $(f, g) \in \mathcal{F}$ *tal que el lado izquierdo es finito, y con* C *que depende solo de* $[w]_{A_\infty}$*. Entonces, para todos los pesos* u*,* v *tales que* $u \in A_1$ *y* $v \in A_\infty$ *tenemos que*

$$\|fv^{-1}\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq C\|gv^{-1}\|_{L^{1,\infty}(uv)} \quad (f, g) \in \mathcal{F}.$$

Este resultado fue extendido en [70] a una clase de pesos v más grande: aquellos pesos tales que para algún $\delta > 0$, se tiene que $v^\delta \in A_\infty$.

Teniendo estos dos resultados a nuestra disposición, procedemos de la siguiente manera. Primero observemos que si $\vec{u}^{mq} = (u_1^{mq}, ..., u_m^{mq}) \in A_{(1,...,1)}$ entonces $\nu = u_1^q ... u_m^q \in A_1$.

Luego, por el Teorema 4.1.4 y el Teorema 4.3.2,

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\mathcal{I}_\alpha(\vec{f}\,)}{v}\right\|^q_{L^{q,\infty}(\nu v^q)} &= \sup_{\lambda>0}\ \lambda^q\Big(\nu v^q\ \{x\in\mathbb{R}^n : \left|\frac{\mathcal{I}_\alpha(\vec{f}\,)(x)}{v(x)}\right| > \lambda\}\Big)\\
&= \sup_{\lambda>0}\ \lambda^q\Big(\nu v^q\ \{x\in\mathbb{R}^n : \left|\frac{\mathcal{I}_\alpha(\vec{f}\,)(x)}{v(x)}\right|^q > \lambda^q\}\Big)\\
&= \sup_{t>0}\ t\ \Big(\nu v^q\ \{x\in\mathbb{R}^n : \left|\frac{\mathcal{I}_\alpha(\vec{f}\,)(x)}{v(x)}\right|^q > t\}\Big)\\
&= \left\|\left(\frac{\mathcal{I}_\alpha(\vec{f}\,)}{v}\right)^q\right\|_{L^{1,\infty}(\nu v^q)}\\
&\le C\left\|\left(\frac{\mathcal{M}_\alpha(\vec{f}\,)}{v}\right)^q\right\|_{L^{1,\infty}(\nu v^q)}\\
&= \sup_{\lambda>0}\ \lambda\Big(\nu v^q\ \{x\in\mathbb{R}^n : \left(\frac{\mathcal{M}_\alpha(\vec{f}\,)(x)}{v(x)}\right)^q > \lambda\}\Big)\\
&= \sup_{t>0}\ t^q\Big(\nu v^q\ \{x\in\mathbb{R}^n : \left(\frac{\mathcal{M}_\alpha(\vec{f}\,)(x)}{v(x)}\right)^q > t^q\}\Big)\\
&= \sup_{t>0}\ t^q\ \Big(\nu v^q\ \{x\in\mathbb{R}^n : \frac{\mathcal{M}_\alpha(\vec{f}\,)(x)}{v(x)} > t\}\Big)\\
&= \left\|\frac{\mathcal{M}_\alpha(\vec{f}\,)}{v}\right\|^q_{L^{q,\infty}(\nu v^q)},
\end{aligned}
$$

con lo que queda probado nuestro teorema de extrapolación.

Como consecuencia de los Teoremas 4.2.1 y 4.3.1, obtenemos el principal resultado de este capítulo:

Teorema 4.3.3 (Picardi [73])**.** *Sea $0<\alpha<mn$. Sean $q=\frac{n}{mn-\alpha}$, $\vec{u}^{mq}=(u_1^{mq},...,u_m^{mq})$ y $\nu=\prod_{i=1}^m u_i^q$. Supongamos que $\vec{u}^{mq}\in A_{(1,...,1)}$ y $\nu v^q\in A_\infty$, o $u_1^{mq},...,u_m^{mq}\in A_1$ y $v^{mq}\in A_\infty$, entonces existe una constante C tal que*

$$
\left\|\frac{\mathcal{I}_\alpha(\vec{f}\,)}{v}\right\|_{L^{q,\infty}(\nu v^q)} \le C\ \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^1(u_i)}.
$$

Capítulo 5

Extensiones vectoriales

El estudio de desigualdades vectoriales para operadores lineales comenzó en la década de 1930, con los trabajos de Bochner, Marcinkiewickz, Paley y Zygmund, entre otros. En este marco, surgen las desigualdades de Marcinkiewicz-Zygmund para operadores lineales, con respecto a las extensiones l^r-valuadas de operadores lineales entre espacios L^p reales. En otras paralabras, dados $1 \leq p, q, r \leq \infty$, decimos que (p, q, r) satisface una desigualdad de Marcinkiewicz-Zygmund si existe una constante C tal que para cada operador acotado $T : L^q(\mu) \to L^p(\nu)$ (donde μ y ν son medidas arbitrarias y $L^q(\mu)$ y $L^p(\nu)$ son espacios reales), cada $n \in \mathbb{N}$ y funciones $f_1, ..., f_n \in L^q(\mu)$,

$$\left(\int \Big(\sum_{k=1}^{n} |T(f_k)(w)|^r \Big)^{\frac{p}{r}} d\nu(w) \right)^{\frac{1}{p}} \leq C\|T\| \left(\int \Big(\sum_{k=1}^{n} |f_k(w)|^r \Big)^{\frac{q}{r}} d\mu(w) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

El ínfimo de estas constantes $C \geq 1$ que satisfacen la desigualdad anterior se denota $k_{q,p}(r)$, siendo $k_{q,p}(r) = \infty$ si no existe tal constante.

Estamos interesados en el estudio de las desigualdades de Marcinkiewicz-Zygmund en el contexto de operadores multilineales. Dada $\{f_k\}_k \in L^p(\nu)$, denotamos

$$\left\| \Big(\sum_{k} |f_k|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\nu)} := \left(\int \Big(\sum_{k} |f_k(w)|^r \Big)^{\frac{p}{r}} d\nu(w) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En [11] D. Carando, M. Mazzitelli y S. Ombrosi obtuvieron una generalización de las desigualdades de Marcinkiewicz-Zygmund en el contexto de operadores multilineales. En el caso particular de paraproductos, las desigualdades de Marcinkiewicz-Zygmund fueron obtenidas por C. Benea y C.

Muscalu en [2] y [3]. Los resultados en [11] extienden los previos obtenidos en [39] y [7].

Sea $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq q_1, ..., q_m, p, r \leq \infty$ y consideremos $\vec{q} = (q_1, ..., q_m)$. Decimos que $(p; \vec{q}; r)$ satisface la desigualdad de Marcinkiewicz-Zygmund si existe una constante C tal que para todo operador multilineal $T : L^{q_1}(\mu_1) \times \cdots \times L^{q_m}(\mu_m) \to L^p(\nu)$ y funciones $\{f^1_{k_1}\}_{k_1=1}^{n_1} \subset L^{q_1}(\mu_1), ..., \{f^m_{k_m}\}_{k_m=1}^{n_m} \subset L^{q_m}(\mu_m)$ vale la siguiente desigualdad (con la modificación usual cuando $r = \infty$)

$$\left\| \left(\sum_{k_1,\ldots,k_m} |T(f^1_{k_1}, \ldots, f^m_{k_m})|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\nu)} \leq C\|T\| \prod_{i=1}^m \left\| \left(\sum_{k_i=1}^{n_i} |f^i_{k_i}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{q_i}(\mu_i)}.$$

Como en el caso lineal, denotamos $k_{\vec{q},p}(r)$ al ínfimo de las $C \geq 1$ que satisfacen esta desigualdad y decimos que $k_{\vec{q},p}(r) = \infty$ cuando no existe tal C.

El siguiente teorema es uno de los resultados en [11].

Teorema 5.0.1 (Carando, Mazzitelli y Ombrosi [11])**.** *Sea $0 < p, q_1, \ldots, q_m < r < 2$ o $r = 2$ y $0 < p, q_1, \ldots, q_m < \infty$ y, para cada $1 \leq i \leq m$, consideramos $\{f^i_{k_i}\}_{k_i} \subset L^{q_i}(\mu_i)$. Sea S un operador multilineal tal que $S\colon L^{q_1}(\mu_1) \times \cdots \times L^{q_m}(\mu_m) \to L^{p,\infty}(\nu)$. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\left\| \left(\sum_{k_1,\ldots,k_m} |S(f^1_{k_1}, \ldots, f^m_{k_m})|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{p,\infty}(\nu)} \leq C\|S\|_{weak} \prod_{i=1}^m \left\| \left(\sum_{k_i} |f^i_{k_i}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{q_i}(\mu_i)}.$$

La idea central de este capítulo es combinar este tipo de resultado con nuestros teoremas 3.2.5 y 4.3.3, y obtener a partir de ellos extensiones vectoriales de tipo Sawyer para los operadores de Calderón-Zygmund multilineales y para las integrales fraccionarias multilineales.

5.1. Extensión vectorial del Teorema 3.2.5

Recordemos el Teorema 3.2.5 presentado en la Sección 3.2:

Teorema 3.2.5. *Sea T un operador de Calderón-Zygmund multilineal, $\vec{w} = (w_1, ..., w_m)$ y $\nu = w_1^{\frac{1}{m}} ... w_m^{\frac{1}{m}}$. Supongamos que $\vec{w} \in A_{(1,\ldots,1)}$ y $\nu v^{\frac{1}{m}} \in A_\infty$ o $w_1, ..., w_m \in A_1$ y $v \in A_\infty$. Entonces, existe una constante C tal que*

$$\left\| \frac{T(\vec{f})}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^1(w_i)}.$$

Como consecuencia de este teorema y del Teorema 5.0.1 obtenemos la siguiente desigualdad mixta vectorial para un operador de Calderón-Zygmund multilineal T.

Corolario 5.1.1. *Sea $S(\vec{f}\,) = \frac{T(\vec{f}\,)}{v}$, donde T es un operador de Calderón-Zygmund multilineal. Sea $\vec{w} = (w_1, ..., w_m) \in A_{(1,...,1)}$ y $\nu v^{\frac{1}{m}} \in A_\infty$, o $w_1, ..., w_m \in A_1$ y $v \in A_\infty$. Sea $\nu = w_1^{\frac{1}{m}} ... w_m^{\frac{1}{m}}$ y sea $1 < r \leq 2$. Para cada $1 \leq i \leq m$, consideramos $\{f_{k_i}^i\}_{k_i} \subset L^1(w_i)$. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\left\| \left(\sum_{k_1,...,k_m} |S(f_{k_1}^1, \ldots, f_{k_m}^m)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^m \left\| \left(\sum_{k_i} |f_{k_i}^i|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^1(w_i)}.$$

Demostración. Observemos que bajo las hipótesis del Corolario 5.1.1, S satisface $S\colon L^1(w_1) \times \cdots \times L^1(w_m) \to L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})$. Luego, estamos bajo las hipótesis del Teorema 5.0.1. $\square$

5.2. Extensión vectorial del Teorema 4.3.3

Recordemos el Teorema 4.3.3 presentado en la Sección 4.3:

Teorema 4.3.3. *Sea $0 < \alpha < mn$. Sean $q = \frac{n}{mn-\alpha}$, $\vec{u}^{mq} = (u_1^{mq}, ..., u_m^{mq})$ y $\nu = \prod_{i=1}^m u_i^q$. Supongamos que $\vec{u}^{mq} \in A_{(1,...,1)}$ y $\nu v^q \in A_\infty$, o $u_1^{mq}, ..., u_m^{mq} \in A_1$ y $v^{mq} \in A_\infty$. Entonces, existe una constante C tal que*

$$\left\| \frac{\mathcal{I}_\alpha(\vec{f}\,)}{v} \right\|_{L^{q,\infty}(\nu v^q)} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^1(u_i)}.$$

Como consecuencia de este teorema y del Teorema 5.0.1 obtenemos la siguiente desigualdad mixta vectorial para un operador multilineal fraccionario $\mathcal{I}_\alpha$.

Corolario 5.2.1. *Sea $S(\vec{f}\,) = \frac{\mathcal{I}_\alpha(\vec{f}\,)}{v}$, donde $\mathcal{I}_\alpha$ es un operador multilineal fraccionario. Sea $q = \frac{n}{mn-\alpha}$, $\vec{u}^{mq} = (u_1^{mq}, ..., u_m^{mq})$ y $\nu = \prod_{i=1}^m u_i^q$. Supongamos que $\vec{u}^{mq} \in A_{(1,...,1)}$ y $\nu v^q \in A_\infty$, o $u_1^{mq}, ..., u_m^{mq} \in A_1$ y $v^{mq} \in A_\infty$. Para cada $1 \leq i \leq m$, consideramos $\{f_{k_i}^i\}_{k_i} \subset L^1(u_i)$. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\left\| \left(\sum_{k_1,\dots,k_m} |S(f^1_{k_1},\dots,f^m_{k_m})|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{q,\infty}(\nu v^q)} \leq C \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(\sum_{k_i} |f^i_{k_i}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^1(u_i)}.$$

Demostración. Observemos que bajo las hipótesis del Corolario 5.2.1, S satisface $S\colon L^1(u_1)\times\cdots\times L^1(u_m) \to L^{q,\infty}(\nu v^q)$. Luego estamos bajo las hipótesis del Teorema 5.0.1. □

Capítulo 6

Problemas abiertos

En este último capítulo creemos importante dejar expuestos problemas que consideramos interesantes y por el momento no han sido resueltos. El capítulo está dividido en dos secciones: la primera trata el problema de unificar dos condiciones para probar una desigualdad mixta con pesos de tipo débil para el operador maximal multilineal $\mathcal{M}$, mientras que la segunda está destinada a explicar una problemática similar para las integrales singulares rough bilineales. Los operadores rough bilineales son más singulares que los operadores de Calderón-Zygmund bilineales y, seguramente, sean necesarias otras técnicas para estudiar las desigualdades de tipo mixtas para estos operadores.

6.1. Una conjetura sobre los operadores de Calderón-Zygmund multilineales

En la Sección 3.1 obtuvimos una estimación para el producto $\prod_{i=1}^{m} Mf_i$. Concretamente, obtuvimos el Teorema 3.1.3 que recordamos a continuación.

Teorema 3.1.3 *Sea $w_1, ..., w_m \in A_1$ y $v \in A_\infty$. Denotamos $\nu = w_1^{\frac{1}{m}} ... w_m^{\frac{1}{m}}$. Entonces,*

$$\left\| \frac{\prod_{i=1}^{m} Mf_i}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}.$$

Además, como mencionamos anteriormente, la conclusión de este teorema también vale para el operador maximal $\mathcal{M}$. Recordamos el Teorema 3.1.4.

Teorema 3.1.4 *Sea $w_1, ..., w_m \in A_1$ y $v \in A_\infty$. Denotamos $\nu = w_1^{\frac{1}{m}}...w_m^{\frac{1}{m}}$. Entonces,*

$$\left\| \frac{\mathcal{M}(\vec{f})}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}.$$

Además vimos en la Sección 3.1 que es posible relajar la hipótesis $w_1, ..., w_m \in A_1$ en el teorema anterior a la condición más débil $\vec{w} \in A_{(1,...,1)}$, pero imponiendo una condición diferente en el peso v. En lugar de solicitar que $v \in A_\infty$, pedimos que $\nu v^{\frac{1}{m}} \in A_\infty$. Estas condiciones no son comparables en general. De esta forma, probamos que:

Teorema 3.1.5 *Sea $\vec{w} = (w_1, ..., w_m) \in A_{(1,...,1)}$, $\nu = w_1^{\frac{1}{m}}...w_m^{\frac{1}{m}}$ y v un peso que satisface $\nu v^{\frac{1}{m}} \in A_\infty$. Luego existe una constante C tal que*

$$\left\| \frac{\mathcal{M}(\vec{f})}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}. \tag{6.1.1}$$

Luego, (6.1.1) vale tanto si $\vec{w} = (w_1, ..., w_m) \in A_{(1,...,1)}$ y $\nu v^{\frac{1}{m}} \in A_\infty$ como si los pesos $w_i \in A_1$ para $i = 1, ..., m$ y $v \in A_\infty$. Estas condiciones son independientes. Sin embargo, creemos que hay una condición unificada que contiene a las dos tal que (6.1.1) vale. Esto es:

Conjetura 1. *Sea $\vec{w} = (w_1, ..., w_m) \in A_{(1,...,1)}$, $v^{1/m} \in A_\infty$ y $\nu = w_1^{\frac{1}{m}}...w_m^{\frac{1}{m}}$. Entonces, existe una constante C tal que*

$$\left\| \frac{\mathcal{M}(\vec{f})}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{m},\infty}(\nu v^{\frac{1}{m}})} \leq C \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(w_i)}.$$

6.2. Una conjetura sobre las integrales singulares rough bilineales

El estudio de integrales singulares rough de tipo convolución ha sido de interés para la investigación desde mediados del siglo veinte. Esta clase de integrales es escencialmente la misma que estudiaron Calderón y Zygmund, pero sin ninguna regularidad en el núcleo.

Definición 6.2.1. *Sea $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ tal que $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega = 0$. Definimos la integral singular rough T_Ω como*

$$T_\Omega(f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)}{|x-y|^n} f(y)dy.$$

El hecho de que no se asuma ninguna condición de regularidad en Ω hace que T_Ω sea un objeto más difícil de tratar en comparación con los operadores de Calderón-Zygmund. A. P. Calderón y A. Zygmund [9] estudiaron primeramente la integral singular rough

$$T_\Omega(f)(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} f(x-y)dy,$$

donde $\Omega \in L \log L(\mathbb{S}^{n-1})$ con valor medio cero y mostraron que L_Ω es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$. La misma conclusión, bajo una condición menos restrictiva $\Omega \in H^1(\mathbb{S}^{n-1})$, fue obtenida por R. R. Coifman y G. Weiss [19] y W. C. Connett [22]. El tipo débil $(1,1)$ de T_Ω fue establecido por M. Christ y J. L. Rubio de Francia [13], e independientemente, por S. Hofmann [43]. Ambos trabajos inspirados en el trabajo de M. Christ [12]. En un trabajo no publicado, M Christ y J. L. Rubio de Francia extendieron este resultado para cualquier dimensión $n \leq 7$. El tipo débil $(1,1)$ para T_Ω fue probado por A. Seeger [76] en todas las dimensiones y luego extendido por T. Tao [79] a situaciones en las cuales no hay estructura de transformada de Fourier. Varias preguntas relacionadas con el tipo débil $(1,1)$ siguen abiertas, como por ejemplo si la condición $\Omega \in L \log L(\mathbb{S}^{n-1})$ puede ser relajada a $\Omega \in H^1(\mathbb{S}^{n-1})$, o simplemente $\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ cuando Ω es una función impar.

K. Li, C. Pérez, I. Rivera-Ríos y L. Roncal [61] presentan una versión cuantitativa de la desigualdad de Coifman-Fefferman para $1 \leq p < \infty$.

Teorema 6.2.2 (Li, Pérez, Rivera-Ríos y Roncal [61]). *Sea T_Ω con $\Omega \in L^\infty$ satisfaciendo $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}(\Omega) = 0$. Sea $p \in [1,\infty)$ y $w \in A_\infty$. Entonces,*

$$\|T_\Omega f\|_{L^p(w)} \leq C_{p,T}[w]_{A_\infty}^2 \|Mf\|_{L^p(w)}$$

para cualquier función suave tal que el lado izquierdo sea finito.

Usando argumentos de extrapolación, obtienen el siguiente corolario:

Corolario 6.2.3 (Li, Pérez, Rivera-Ríos y Roncal [61]). *Sea T_Ω con $\Omega \in L^\infty$ satisfaciendo $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega = 0$. Sean $p, q \in (0,\infty)$ y $w \in A_\infty$. Entonces, existe una constante c que depende de la constante A_∞ tal que*

$$\|T_\Omega f\|_{L^p(w)} \leq c\|Mf\|_{L^p(w)}$$

y

$$\|T_\Omega f\|_{L^{p,\infty}(w)} \leq c\|Mf\|_{L^{p,\infty}(w)},$$

para cualquier función suave tal que el lado izquierdo es finito.

En el contexto bilineal, la teoría de integrales singulares rough es aún más intrincada. Sea $1 < q \leq \infty$ y sea $\Omega \in L^q(\mathbb{S}^{2n-1})$ con $\int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \Omega d\sigma = 0$, donde $\mathbb{S}^{2n-1}$ es la esfera unitaria en $\mathbb{R}^{2n}$. R. Coifman e Y. Meyer [17] introdujeron la integral singular bilineal rough asociada a Ω definida como

$$T_\Omega(f_1, f_2)(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x-y_1) f_2(x-y_2) \frac{\Omega((y_1,y_2)/|(y_1,y_2)|)}{|(y_1,y_2)|^{2n}} dy_1 dy_2.$$

Para más información sobre operadores bilineales pueden consultarse [18], [36] y [69]. Si Ω es suave, es decir, si es una función de variación acotada en el círculo, R. Coifman e Y. Meyer [[17], Teorema I] mostraron que T_Ω es acotada de $L^{p_1}(\mathbb{R}) \times L^{p_2}(\mathbb{R})$ en $L^p(\mathbb{R})$ cuando $1 < p_1, p_2, p < \infty$ y $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. En dimensiones más altas, L. Grafakos y R. Torres [40] mostraron que si Ω es una función Lipschitz en $\mathbb{S}^{2n-1}$, entonces T_Ω es acotado de $L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \times L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $1 < p_1, p_2 < \infty$, $\frac{1}{2} < p < \infty$, y $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Pero si Ω es rough, la situación es más complicada.

Si Ω es una función integrable en $\mathbb{S}^1$ y es impar, el operador T_Ω está íntimamente relacionado con la transformada de Hilbert bilineal

$$\mathcal{H}_{(\theta_1,\theta_2)}(f_1, f_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - t\theta_1) f_2(x - t\theta_2) \frac{dt}{t}$$

(en la dirección (θ_1, θ_2)) mediante la relación

$$T_\Omega(f_1, f_2)(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \Omega(\theta_1, \theta_2)\ \mathcal{H}_{(\theta_1,\theta_2)}(f_1, f_2)(x)\ d(\theta_1, \theta_2).$$

La acotación de $\mathcal{H}_{(\theta_1,\theta_2)}$ fue probada por M. Lacey y C. Thiele [50], [51], mientras que la acotación uniforme en θ_1, θ_2 de $\mathcal{H}_{(\theta_1,\theta_2)}$ fue establecida por C. Thiele [80], L. Grafakos y X. Li [38], y X. Li [62]. G. Diestel, L. Grafakos, P. Honzík, Z. Si, y E. Terwilleger [29] mostraron que si $n = 2$ y la parte par de Ω yace en $H^1(\mathbb{S}^1)$, entonces T_Ω es acotado de $L^{p_1}(\mathbb{R}) \times L^{p_2}(\mathbb{R})$ en $L^p(\mathbb{R})$ cuando $1 < p_1, p_2, p < \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ y el triple $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p})$ yace en el hexágono abierto determinado por las condiciones

$$\left|\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right| < \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p'}\right| < \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p'}\right| < \frac{1}{2}.$$

Esta es la región donde se conoce la acotación uniforme de la transformada de Hilbert bilineal.

L. Grafakos, D. He y P. Honzík [37] dan una prueba de la acotación de T_Ω en L^p para todo $p > \frac{1}{2}$ en todas las dimensiones. Más precisamente, presentan el siguiente teorema.

Teorema 6.2.4 (Grafakos, He y Honzík [37]). *Para todo $n \geq 1$, si $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{2n-1})$, entonces se tiene que*

$$\|T_\Omega\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)\times L^{p_2}(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

para $1 < p_1, p_2 < \infty$ y $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$.

A. Barron [1] desarrolla una teoría de pesos para los operadores bilineales rough T_Ω, usando una generalización multilineal de la teoría de dominación sparse en [20] junto con los resultados de L. Grafakos, D. He y P. Honzík [37]. Necesitaremos el concepto de *formas sparse positivas.*

Definición 6.2.5. *Sea S una colección de cubos sparse en $\mathbb{R}^n$ y sea $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_{m+1})$ una $(m+1)$-upla de exponentes. Definimos la forma*

$$PSF_S^{\vec{p}}(f_1, ..., f_{m+1}) := \sum_{Q\in S} |Q| \prod_{i=1}^{m+1} (f_i)_{p_i,Q},$$

donde

$$(f)_{q,Q} = |Q|^{-\frac{1}{q}}\|f\chi_Q\|_q.$$

Estos operadores fueron inicialmente estudiados en [4], [27] y [28], motivados por estimaciones puntuales previas en la teoría de dominación sparse (ver [49], [52], [53] y [54] para algunos ejemplos).

A. Barron presenta el siguiente resultado:

Teorema 6.2.6 (Barron [1]). *Sea T_Ω el operador integral singular bilineal rough, con $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{2n-1})$ y $\int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \Omega = 0$. Entonces, para cualquier $1 < p < \infty$ existe una constante $C_p > 0$ tal que*

$$|\langle T_\Omega(f_1, f_2), f_3\rangle| \leq C_p\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{2n-1})} \sup_S PSF_S^{(p,p,p)}(f_1, f_2, f_3),$$

donde el supremo es tomado sobre todas las colecciones sparse S con constante η, para algún η fijo que no depende de las funciones.

Como aplicación de este teorema, se derivan estimaciones con pesos para T_Ω.

Corolario 6.2.7 (Barron [1]). *Fijemos $1 < p_1, p_2 < \infty$ y $\frac{1}{2} < p < \infty$ tal que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$. Luego, para todo peso $(w_1^{p_1}, w_2^{p_2}) \in (A_{p_1}, A_{p_2})$ existe una constante C que depende de $[w_1^{p_1}]_{A_{p_1}}$, $[w_2^{p_2}]_{A_{p_2}}$, n, p_1 y p_2 tal que*

$$\|T_\Omega(f_1, f_2)\|_{L^p(w_1^p w_2^p)} \leq C\|f_1\|_{L^{p_1}(w_1^{p_1})}\|f_2\|_{L^{p_2}(w_2^{p_2})}$$

para toda $f_i \in L^{p_i}(w_i^{p_i})$.

El siguiente corolario es un caso particular del Corolario 6.2.7, en el caso de un solo peso.

Corolario 6.2.8 (Barron [1])**.** *Sea* $1 < q < \infty$ *y* $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{2n-1})$ *con* $\int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \Omega = 0$. *Entonces, si* $w \in A_q$*, existe una constante* $C = C(w, q, \Omega)$ *tal que*

$$\|T_\Omega(f,g)\|_{L^{\frac{q}{2}}(w)} \leq C\|f\|_{L^q(w)}\|g\|_{L^q(w)}$$

para toda $f, g \in L^q(w)$.

Creemos que la estimación sparse de A. Barron en el Teorema 6.2.6 podría ser mejorada. Si pudiera ponerse en los promedios la trupla $(1,1,p)$ en lugar de (p,p,p), es decir, si pudiéramos considerar $PSF_S^{(1,1,p)}(f_1,f_2,f_3)$ en lugar de $PSF_S^{(p,p,p)}(f_1,f_2,f_3)$, podríamos quizás seguir una técnica similar a la seguida por K. Li, C. Pérez, I. Rivera-Ríos y L. Roncal [61] para probar el Teorema 6.2.2 y así poder probar una desigualdad de tipo Coifman-Fefferman para la rough bilineal.

Estamos ahora en condiciones de plantear nuestra conjetura:

Conjetura 2. *Sea* $(w_1, w_2) \in A_{(1,1)}$, $v^{1/2} \in A_\infty$ *y* $\nu = w_1^{\frac{1}{2}} w_2^{\frac{1}{2}}$. *Entonces, existe una constante* C *tal que*

$$\left\| \frac{T_\Omega(f_1,f_2)}{v} \right\|_{L^{\frac{1}{2},\infty}(\nu v^{\frac{1}{2}})} \leq C\ \|f_1\|_{L^1(w_1)}\|f_2\|_{L^1(w_2)}.$$

La posibilidad de que esta conjetura sea cierta radica en que en el caso lineal, es válida. Esto fue probado por K. Li, C. Pérez y S. Ombrosi en [59].

Bibliografía

[1] A. Barron, *Weighted estimates for rough bilinear singular integrals via sparse domination*, New York Journal of Math. 23, 779-811, 2017.

[2] C. Benea y C. Muscalu, *Multiple vector valued inequalities via the helicoidal method*, Anal. PDE, 9, 1931-1988, 2016.

[3] C. Benea y C. Muscalu, *Quasi-Banach valued inequalities via the helicoidal method*, Preprint, arXiv: 1609.01090.

[4] F. Bernicot, D. Frey y S. Petermichl, *Sharp weighted norm estimates beyond Calderón-Zygmund theory*, Anal. PDE 9, no. 5, 1079-1113, 2016.

[5] F. Berra, M. Carena y G. Pradolini, *Mixed weak estimates of Sawyer type for commutators of generalized singular integrals and related operators*, Aceptado para su publicación en Michigan Math. J.

[6] F. Berra, M. Carena y G. Pradolini, *Mixed weak estimates of Sawyer type for fractional integrals and some related operators*, arXiv:1712.08186, 2017.

[7] F. Bombal, D. Pérez-García e I. Villanueva, *Multilinear extensions of Grothendieck's theorem,* Quart. J. Math., 55, 4, 441-450, 2004.

[8] A. P. Calderón, *Inequalities for the maximal function relative to a metric*, Studia Math. 57, 3, 297-306, 1976.

[9] A. P. Calderón y A. Zygmund, *On singular integrals*, Amer. J. Math. 78, 289-309, 1956.

[10] A. P. Calderón y A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. 88, no.1, 85-139, 1952.

[11] D. Carando, M. Mazzitelli y S. Ombrosi, *Multilinear Marcinkiewicz-Zygmund inequalities*, J Fourier Anal. Appl. V. 25, nº1, 51-85, 2019.

[12] M. Christ, *Weak type* $(1,1)$ *bounds for rough operators I*, Ann. of Math. 128, 19-42, 1988.

[13] M. Christ y J. L. Rubio de Francia, *Weak type* $(1,1)$ *bounds for rough operators II*, Invent. Math. 93, 225-237, 1988.

[14] R. Coifman, *Distribution function inequalities for singular integrals*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 69, 2838-2839, 1972.

[15] R. Coifman y C. Fefferman, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Mathematica 51, 3, 241-250, 1974.

[16] R. Coifman e Y. Meyer, *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*, vol.57 of Astérisque. Societé Mathématique de France, Paris, 1978. With an English summary.

[17] R. R. Coifman e Y. Meyer, *On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. 212, 315-331, 1975.

[18] R. Coifman e Y. Meyer, *Wavelets, Calderón-Zygmund Operators and Multilinear Operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 48, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[19] R. R. Coifman y G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 83, 569-645, 1977.

[20] J. M. Conde-Alonso, A. Culiuc, F. Di Plinio e Y. Ou, *A sparse domination principle for rough singular integrals*, Anal. PDE. 10, no. 5, 1255-1284, 2017.

[21] J. M. Conde-Alonso y G. Rey, *A pointwise estimate for positive dyadic shifts and some applications*, Math. Ann. 365, no. 3-4, 1111-1135, 2016.

[22] W. C. Connett, *Singular integrals near* L^1, Harmonic analysis in Euclidean spaces. Proc. Sympos. Pure Math. (Williams Coll.,Williamstown, Mass., 1978), Part 1, 163- 165, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[23] D. Cruz-Uribe, J. M. Martell y C. Pérez, *Extrapolation from* A_∞ *weights and applications*, J. Funct. Anal. 213 2, 412-439, 2004.

[24] D. Cruz-Uribe, J. M. Martell y C. Pérez, *Weighted weak-type inequalities and a conjecture of Sawyer*, Int. Math. Res. Not., 30, 1849-1871, 2005.

[25] D. Cruz-Uribe, J. M. Martell y C. Pérez, *Weights, Extrapolation and the Theory of Rubio de Francia*, Birkhäuser Basel, 2011.

[26] D. Cruz-Uribe y C. J. Neugebauer, *The structure of the reverse Hölder classes*, Trans. Amer. Math. Soc. 347, 2941-2960, 1995.

[27] A. Culiuc, F. Di Plino e Y. Ou, *Domination of Multilinear Singular Integrals by Positive Sparse Forms*, arXiv:1603.05317, 2016.

[28] A. Culiuc, F. Di Plino e Y. Ou, *Uniform sparse domination of singular integrals via dyadic shifts*, Aceptado para su publicación en Math. Res, Lett.

[29] G. Diestel, L. Grafakos, P. Honzik, Z. Si, y E. Terwilleger, *Method of rotations for bilinear singular integrals,* Communications in Mathematical Analysis, Conference 3, 99-107, 2011.

[30] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 29, 2001.

[31] J. Duoandikoetxea, F. J. Martin-Reyes y S. Ombrosi, *On the A_∞ conditions for general bases*, Math. Z. 282, 3-4, 955-972, 2016.

[32] C. Fefferman y E. M. Stein, *Some maximal inequalities*, Amer. J. Math., 93 (1971), 107-115.

[33] N. Fujii, *Weighted bounded mean oscillation and singular integrals*, Math. Japon. 22, no. 5, 529-534, 1977/78.

[34] J. García-Cuerva y J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Math. Stud. 116, North-Holland, 1985.

[35] L. Grafakos, *Classical and Modern Fourier Analysis*, Prentice Hall, 2004.

[36] L. Grafakos, *Modern Fourier analysis*, Third edition, Graduate Texts in Mathematics, 250, Springer, New York, 2014.

[37] L. Grafakos, D. He y P. Honzík, *Rough bilinear singular integrals*, Advances in Mathematics 326, 54-78, 2018.

[38] L. Grafakos y X. Li, *Uniform bounds for the bilinear Hilbert transforms I*, Ann. of Math. (Ser. 2) 159, 889-933, 2004.

[39] L. Grafakos y J. M. Martell, *Extrapolation of weighted norm inequalities for multivariable operators and applications*, J. Geom. Anal., 14, 1, 19-46, 2004.

[40] L. Grafakos y R. Torres, *Multilinear Calderón-Zygmund theory*, Adv. Math. 165, 1, 124-164, 2002.

[41] R. Gundy y R. Wheeden, *Weighted integral inequalities for the nontangential maximal function, Lusin area integral, and Walsh-Paley series*, Studia Math. 49, 107-124, 1973/74.

[42] G. H. Hardy y J. E. Littlewood, *A maximal theorem with function-theoretic applications*, Acta Math. 54, no. 1, 81-116, 1930.

[43] S. Hofmann, *Weak type* $(1,1)$ *boundedness of singular integrals with nonsmooth kernels*, Proc. Amer. Math. Soc. 103, 260-264, 1988.

[44] S. V. Hruščev, *A description of weights satisfying the* A_∞ *condition of Muckenhoupt*, Proc. Amer. Math. Soc. 90, no. 2, 253-257, 1984.

[45] R. Hunt, B. Muckenhoupt y R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform*, Transactions of the American Mathematical Society 176, 227-251, 1973.

[46] T. P. Hytönen y C. Pérez, *Sharp weighted bounds involving* A_∞, Amer. J. Math., 93, 107-115, 1971.

[47] P. Jones, *Factorization of* A_p *weights*, Ann. of Math., Second Series, Vol. 111, No. 3, 511-530, 1980.

[48] C. E. Kenig y E. M. Stein *Multilinear estimates and fractional integration*, Math. Res. Lett. 6, 1-15, 1999.

[49] M. T. Lacey, *An elementary proof of the* A_2 *bound*, preprint arXiv:1501.05818, aceptado para su publicación en Israel J. Math.

[50] M. Lacey y C. Thiele, L^p *estimates on the bilinear Hilbert transform for* $2 < p < \infty$, Ann. of Math. (2) 146, 3, 693-724, 1997.

[51] M. Lacey y C. Thiele, *On Calderón's conjecture*, Ann. of Math. 2 149,, 475-496, 1999.

[52] A. Lerner, *A simple proof of the* A_2 *conjecture*, Int. Math. Res. Not. IMRN, no. 14, 3159-3170, 2013.

[53] A. Lerner, *On pointwise estimates involving sparse operators*, New York J. Math., 22, 341-349, 2016.

[54] A. Lerner y F. Nazarov, *Intuitive dyadic calculus: the basics*, Aceptado para su publicación en Expo. Math.

[55] A. Lerner y S. Ombrosi, *Some remarks on the pointwise sparse domination*, Aceptado para su publicación en Journal of Geometric Analysis, arXiv:1901.00195, 2019.

[56] A. Lerner, S. Ombrosi y C. Pérez, *Weak type estimates for singular integrals related to a dual problem of Muckenhoupt and Wheeden*, J. Fourier Anal. Appl., V. 15, no. 3, 394-403, 2009.

[57] A. Lerner, S. Ombrosi, C. Pérez, R. H. Torres y R. Trujillo-González, *New maximal functions and multiple weights for the multilinear Calderón-Zygmund theory*, Adv. Math., 220, no. 4, 1222-1264, 2009.

[58] K. Li, J. M. Martell, y S. Ombrosi, *Extrapolation for multilinear Muckenhoupt classes and applications to the bilinear Hilbert transform*, arXiv:1802.03338, 2018.

[59] K. Li, S. Ombrosi y C. Pérez, *Proof of an extension of E. Sawyer's conjecture about weighted mixed weak-type estimates*, Math. Ann. (2018), https://doi.org/10.1007/s00208-018-1762-0.

[60] K. Li, S. Ombrosi y B. Picardi, *Weighted mixed weak-type inequalities for multilinear operators*, Studia Math. 244, 2, 203-215, 2019.

[61] K. Li, C. Pérez, I. Rivera-Ríos y L. Roncal, *Weighted norm inequalities for rough singular integral operators*, Aceptado para su publicación en The Journal of Geometric Analysis.

[62] X. Li, *Uniform bounds for the bilinear Hilbert transforms II*, Rev. Mat. Iberoamericana 22, 1069-1126, 2006.

[63] J. M. Martell, C. Pérez y R. Trujillo-González, *Lack of natural weighted estimates for some classical Singular Integral Operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 357, no.1, 385-396, 2005.

[64] K. Moen, *Weighted inequalities for multilinear fractional integral operators*, Collect. Math. 60, 2, 213-238, 2009.

[65] B. Muckenhoupt, *The equivalence of two conditions for weight functions*, Studia Math. 49, 101-106, 1973/74.

[66] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. 165, 207-226, 1972.

[67] B. Muckenhoupt y R. Wheeden, *Some weighted weak-type inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function and the Hilbert transform*, Indiana Math. J 26, 801-816, 1977.

[68] B. Muckenhoupt y R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. 192, 261-274, 1974.

[69] C. Muscalu y W. Schlag, *Classical and multilinear harmonic analysis, Vol. II*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 138, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[70] S. Ombrosi y C. Pérez, *Mixed weak type estimates: Examples and counterexamples related to a problem of E. Sawyer,* Colloquium Mathematicum, 145, 259-272, 2016.

[71] S. Ombrosi, C. Pérez y J. Recchi, *Quantitative weighted mixed weak-type inequalities for classical operators*, Indiana University Mathematics Journal, 65 2, 615-640, 2016.

[72] C. Pérez, *On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted L^p-spaces with different weights*, Proc. London Math. Soc., 71(3), 135-157, 1995.

[73] B. Picardi, *Weighted mixed weak-type inequalities for multilinear fractional operators*, arXiv:1810.06680, 2018.

[74] E. Sawyer, *A characterization of a two-weight norm inequality for maximal operators*, Studia Math. 75, no. 1, 1-11, 1982.

[75] E. Sawyer, *A weighted weak type inequality for the maximal function*, Proc. Amer. Math. Soc. 93, 610-614, 1985.

[76] A. Seeger, *Singular integral operators with rough convolution kernels*, J. Amer. Math. Soc., 9, 95-105, 1996.

[77] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Mathematical Series 30, Princeton University Press, Princeton, NJ. 1970.

[78] E. M. Stein y G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis in Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1986.

[79] T. Tao, *The weak type* $(1,1)$ *of LlogL homogeneous convolution operators*, Indiana Univ. Math. J. 48, 1547-1584, 1999.

[80] C. Thiele, *A uniform estimate*, Ann. of Math. (Ser. 2) 156, 519-563, 2002.

[81] N. Wiener, *The ergodic theorem*, Duke Math. J. 5 , no.1, 1-18, 1939.