UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Tesis de Magister en Matemática

Sobre la lógica que preserva grados de verdad asociada a las álgebras de Stone involutivas

Liliana Mónica Cantú

Bahía Blanca Argentina

2019

Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Magister en Matemática de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras.
La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Area VI (Lógica y Fundamentos), dependiente del Departamento de Matemática durante el período comprendido entre noviembre de 2015 y diciembre de 2017, bajo la dirección del Dr. Martín Figallo, Profesor Asociado del Departamento de Matemática en el Área VI; y la co–dirección del Dr. Aldo Figallo Orellano, Profesor Adjunto del Departamento de Matemática en el Área I.

18 de marzo de 2019 Liliana Mónica Cantú
Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur

Agradecimientos

A mi amigo Martín Figallo, que me inspiró para realizar investigación y me ayudó a hacer realidad uno de mis objetivos profesionales que no pude cumplir en mi juventud.

Resumen

En este trabajo estudiamos a la lógica que preserva grados de verdad asociada a la clase de las álgebras de Stone involutivas (denotada por $\mathbf{S}$). Estas álgebras fueron introducidas por Cignoli y Sagastume ([12, 13]) en conexión con la teoría de las álgebras de Łukasiewicz–Moisil n–valuadas.
Existen diferentes maneras de relacionar una lógica con una clase dada de álgebras (cf.[35]). El estudio de las lógicas que preservan grados de verdad se remonta a Wójcicki en su libro de 1988 [49], en el contexto de la lógica de Łukasiewicz, y luego extendido en [5, 21, 22, 23] entre otros. Esto sigue un patrón muy general que puede ser considerado para cualquier clase de estructura de valores de verdad con un orden definido sobre ellos. El objetivo es explotar la multiplicidad de valores, considerando una relación de consecuencia que preserve cotas inferiores en lugar de solo preservar el último elemento del orden (el valor 1).

En el Capítulo 1, repasamos todas las nociones y resultados conocidos de álgebra universal y dualidades topológicas (de Priestley) que son necesarias para el desarrollo posterior. También, repasamos nociones básicas de la teoría de las lógicas paraconsistentes, exhibimos un ejemplo importante y demostramos resultados conocidos.

En el Capítulo 2, introducimos la noción de álgebra de Stone involutiva. Probamos que ésta es una clase ecuacional de álgebras, es decir, $\mathbf{S}$ es una variedad. Exhibimos la relación de éstas con otras clases de álgebras como los retículos pseudocomplementados y las álgebras de Łukasiewicz trivalentes. Mostramos ejemplos importantes como también exhibimos un método para obtener álgebras de Stone involutivas de conjuntos. Además, repasamos la dualidad topológica estilo Priestley para las $\mathbf{S}$–álgebras, dada por Cignoli y Sagastume en [13], y sus aplicaciones.

Finalmente, en el Capítulo 3, introducimos la lógica que preserva grados de verdad asociada a las álgebras de Stone involutivas denominada ***Six***. Mostramos que ésta es una lógica multivaluada (con seis valores de verdad) y que queda determinada por un número finito de matrices finitas (cuatro matrices). Probamos, además, que ***Six*** es una lógica paraconsistente en la que es posible definir un operador de consistencia y, por lo tanto, ***Six*** resulta ser una Lógica de la Inconsistencia Formal (**LFI**)(ver [7]). Para finalizar este capítulo, estudiamos la teoría de prueba de ***Six*** proveyendo un cálculo estilo Gentzen (cálculo de secuentes) y probando los correspondientes teoremas de correctitud, completitud y principio de inversión. Todos los resultados de este capítulo son originales y fueron aceptados para su publicación en

L. Cantú y M. Figallo, *On the logic that preserves degrees of truth associated to involutive Stone algebras*. Por aparecer en Logic Journal of the IGPL. `https://doi.org/10.1093/jigpal/jzy071`

Abstract

In this thesis, we study the logic that preserves degrees of truth associated to the class of involutive Stone algebras (denoted by **S**). These algebras were introduced by Cignoli and Sagastume (see [12, 13]) in connection with the theory of n–valued Łukasiewicz–Moisil algebras.
There are different ways of relating a logic to a given class of algebras (cf.[35]). The study of logics that preserves degrees of truth goes back to Wójcicki in his book of 1988 [49], in the context of the Łukasiewicz logic, and then extended in [5, 21, 22, 23] among others. This approach follows a very general pattern that can be considered for any class of truth structure endowed with an ordering relation; and which intend to exploit manyvaluedness focusing on the notion of inference that results from preserving lower bounds of truth values, and hence not only preserving the greatest element of the order (the value 1).

In Chapter 1, we recall all the notions of universal algebra, theory of topological dualities (Priestley) which are necessary for what follows. Also, we recall basic notions of the theory of paraconsistent logics, we exhibit examples and show well–known results of the theory .

In Chapter 2, we introduce the notion of involutive Stone algebra. We prove that it is an equational class, that is, **S** is a variety. We exhibit the relation of these algebras with other well–known algebraic structures such as pseudocomplemented lattices and three–valued Łukasiewicz algebras. We show important examples of involutive Stone algebras and describe a method for constructing involutive Stone algebras of sets. Besides, we recall the Priestley–style topological duality for the **S**–algebras, given by Cignoli and Sagastume in [13], and its applications.

Finally, in Chapter 3, we introduce the logic that preserves degrees of truth associated to involutive Stone algebras named ***Six***. We prove that this is a multy–valued logic (with six truth

values) and that it can be determined by a finite number of finite matrices (four matrices). We show that ***Six*** is a paraconsistent logic in which it is possible to define a consistency operator and, therefore, ***Six*** turns out to be a Logic of Formal Inconsistency (**LFI**)(see [7]). To end this chapter, we study the theory of truth of ***Six*** by providing a Gentzen style calculus (sequent calculus) for it and by proving the corresponding soundness, completeness and inversion principle theorems. All these results are original and were accepted for publication in

L. Cantú and M. Figallo, *On the logic that preserves degrees of truth associated to involutive Stone algebras.* To appear in Logic Journal of the IGPL. `https://doi.org/10.1093/jigpal/jzy071`

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo contiene resultados y definiciones ya conocidos en la literatura, y que componen la base teórica del desarrollado de los Capítulo 2 y 3 de esta tesis. Comenzaremos haciendo un repaso de las definiciones básicas y de los resultados más importante del álgebra universal. También desarrollaremos una breve exposición sobre la teoría de la dualidad de Priestley para diversas clases de álgebra . Finalmente, presentaremos una introducción a la teoría de las lógicas paraconsistentes y, en particular, a la teoría de las Lógicas de la Inconsistencia Formal (**LFI**'s).

Daremos por conocida la teoría de conjuntos parcialmente ordenados y para ampliar detalles sobre este tema el lector interesado puede consultar [1].

Sean X,Y conjuntos. Dada una relación $R \subseteq X \times Y$, para cada $Z \subseteq X$, $R(Z)$ denotará la imagen de Z por R. Si $Z = \{x\}$, escribiremos $R(x)$ en lugar de $R(\{x\})$. Además, para cada $V \subseteq Y$,$R^{-1}(V)$ denotará la imagen inversa de V por R, i.e., $R^{-1}(V) = \{x \in X : R(x) \cap V \neq \emptyset\}$. Si $V = \{y\}$, escribiremos $R^{-1}(\{y\})$. Por otra parte, denotaremos con R^{op} a la relación opuesta de R, i.e., $R^{op} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}$. Si $T \subseteq X \times X$, entonces la relación $R \circ T$ está definida por $(x, y) \in R \circ T$ si, y sólo si , existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in T$ y $(z, y) \in R$.
Si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado e $Y \subseteq X$, entonces representaremos con $(Y]([Y))$ el conjunto de todos los x tales que $x \leq y$ $(y \leq x)$ para algún $y \in Y$, y diremos que Y es creciente (decreciente) si $Y = [Y)$ $(Y = (Y])$. Escribiremos $(y]$ $([y))$ en lugar de $(\{y\}]$ $([\{y\}))$. Además, denotaremos con $Max\,Y (Min\,Y)$ al conjunto de los elementos maximales (minimales) de Y.
Una relación $R \subseteq X \times X$ es creciente si para todo $(x, y) \in R \subseteq X \times X$ y todo $y, z \in X$ tal que $y \leq z$ se tiene que $(x, z) \in R$, i.e., R es creciente si $R(x)$ es creciente para todo $x \in X$.
Considerando la relación de orden opuesta, $Q \subseteq X \times X$ es decreciente si $(x, y) \in Q$ y $z \leq y$ implican $(x, z) \in Q$.

1.1. Elementos de Álgebra Universal

En esta sección expondremos algunas nociones básicas de álgebra universal. Con el objeto de facilitar la lectura del texto y fijar notaciones, repasaremos aquellas nociones del álgebra universal y de la teoría de categorías que vamos a utilizar con cierta frecuencia. Para más información sobre estos temas pueden consultarse [1, 6, 43].

1.1.1. Álgebras, subálgebras y homomorfismos

Sea A un conjunto no vacío y n un número natural. Una *operación n-aria* sobre A es cualquier función $f : A^n \to A$, donde n es la aridad de f. Si $n = 0$, una operación 0-aria es una constante de A. Una *operación finitaria sobre* A es cualquier operación n-aria, para algún número natural n. Un *lenguaje o tipo de álgebras* es un conjunto $\mathcal{F}$, cuyos elementos se llaman símbolos de función y tal que a cada miembro f de $\mathcal{F}$ se le asigna un número natural n, llamado la aridad de f. Además, se dice que f es un símbolo de función n-ario. Si $\mathcal{F}$ es un lenguaje de álgebra, entonces un *álgebra de tipo* $\mathcal{F}$ es un par $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$ donde A es un conjunto no vacío y F es una familia de operaciones finitarias sobre A indexada por $\mathcal{F}$ tal que, a cada símbolo de función n-ario $f \in \mathcal{F}$ le corresponde una operación n-aria f^A sobre A que pertenece a F. El conjunto A se llama *universo o soporte del álgebra* $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$.

En lo que sigue, cuando no haya lugar a confusión, escribiremos f en lugar a $f^{\mathcal{A}}$ y, si $\mathcal{F}$ es finito, por ejemplo $F = \{f_1, f_2, ..., f_k\}$, escribiremos $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle$. En este caso, si n_i es la aridad de f_i para $1 \leq i \leq k$, también diremos que A es de tipo $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Con el objetivo de simplificar la notación, en algunos casos representaremos al álgebra $\langle A, F\rangle$ por su conjunto soporte A. En adelante, muchas veces identificaremos a un álgebra $\mathcal{A}$ con su conjunto soporte A.
Una *clase ecuacional* de álgebras, o *variedad*, es una clase de álgebras similares definida por medio de ecuaciones.

Un ejemplo importante de clase ecuacional de álgebras es la clase de los *retículos*. Un *retículo* es un álgebra $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ de tipo $(2, 2)$ que verifica las siguientes identidades:

(R1) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$,

(R2) $x \vee y = y \vee x$,

(R3) $x \vee x = x$,

(R4) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,

(R5) $x \wedge y = y \wedge x$,

(R6) $x \wedge x = x$,

(R7) $x \vee (x \wedge y) = x$,

(R8) $x \wedge (x \vee y) = x$.

Si, además, A verifica la propiedad distributiva

(R9) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

decimos que A es un *retículo distributivo*. Por otro lado, un *retículo distributivo acotado* es un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 0, 0)$ tal que verifica:

(i) el reducto $\langle A, \vee, \wedge\rangle$ es un retículo distributivo,

(ii) para todo $x \in A$, valen:

(R10) $x \wedge 0 = 0$,

(R11) $x \vee 1 = 1$.

Todo retículo $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ tiene un orden asociado $\leq$ sobre el conjunto soporte A definido por: $x \leq y$ si, y solo si, $x \wedge y = x$, si y solo si, $x \vee y = x$. Además, $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo, si y solo si, el poset $(A, \leq)$ verifica que todo par de elementos tiene supremo e ínfimo.

Recordemos que un retículo $\mathbf{L}$ se dice *completo*, si para cualquier subconjunto $X \subseteq L$ existe el supremo $\operatorname{Sup} X = \bigvee X$ de X. Observemos que $\operatorname{Inf} X = \operatorname{Sup}\{u \in L : u$ es una cota inferior de $X\}$ y por lo tanto, la existencia de $\operatorname{Sup} X$ para cualquier subconjunto X asegura la existencia de $\operatorname{Inf} X$ para cualquier subconjunto X, y recíprocamente. Por lo tanto, un retículo es completo si existen todos los supremos, o todos los ínfimos. Un retículo completo está **acotado** pues $1 = \operatorname{Sup} \emptyset$ y $0 = \operatorname{Inf} \emptyset$.

Subálgebras

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Entonces, $\mathcal{B}$ es una *subálgebra* de $\mathcal{A}$ y lo notaremos $\mathcal{B} \triangleleft \mathcal{A}$, (o simplemente $B \triangleleft A$) si $B \subseteq A$ y cada operación de $\mathcal{B}$ es la restricción de la correspondiente operación de $\mathcal{A}$. Dada un álgebra $\mathcal{A}$, para cada $X \subseteq A$ definimos.

$$[X] = \bigcap \{B : X \subseteq B \text{ y } B \text{ es una subálgebra}\}$$

Entonces $[X]$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$, llamada la subálgebra generada por X. Si $X \subseteq A$, diremos que X genera $\mathcal{A}$ o que $\mathcal{A}$ está generada por X si $[X] = A$. El álgebra $\mathcal{A}$ es finitamente generada si tiene un conjunto finito de generadores.

Homomorfismos

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Una función $h : A \to B$ se dice un *isomorfismo de A en B* si h es inyectiva, sobre y si para cada símbolo de función n-ario $f \in F$ y para toda n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tenemos

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)).$$

Diremos que $\mathcal{A}$ es isomorfa a $\mathcal{B}$ y escribiremos $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, si existe un isomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Si h verifica sólo la condición anterior, diremos que h es un *homomorfismo de A en B*. Si h es inyectiva diremos que h es una *inmersión* o un *monomorfismo*. En el caso que h sea sobreyectiva diremos que h es un *epimorfismo* y que $\mathcal{B}$ es una imagen homomórfica de $\mathcal{A}$.

1.1.2. Congruencia , álgebra cocientes, ejemplos

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ y sea $\theta \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia. Entonces diremos que θ es una congruencia sobre $\mathcal{A}$ si satisface la siguiente propiedad de compatibilidad:

(PC) para cada símbolo de función n-ario $f \in \mathcal{F}$ y elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in A$, si $a_i \theta b_i$, para todo $1 \leq i \leq n$, entonces

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \theta f^{\mathcal{A}}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

Por lo tanto, para cada símbolo de función n-aria en $\mathcal{F}$ tenemos definido el conjunto A/θ una operación n-aria $f^{\mathcal{A}}/\theta$ que a cada n-upla de clases de equivalencia $(|a_1|_\theta, |a_2|_\theta, \ldots, |a_n|_\theta) \in A/\theta$ le asigna el elemento $|f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)|_\theta$.

El conjunto de todas las congruencias sobre un álgebra $\mathcal{A}$ lo denotaremos por $Con(\mathcal{A})$. Si $\theta \in Con(\mathcal{A})$ entonces el álgebra cociente de $\mathcal{A}$ por θ que representaremos $\mathcal{A}/\theta$, es el álgebra cuyo universo es $\mathcal{A}/\theta$ y cuyas operaciones están definidas por

$$f^{\mathcal{A}/\theta}(|a_1|_\theta, |a_2|_\theta, \ldots, |a_n|_\theta) = |f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)|_\theta$$

donde $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ y f es un símbolo de función n-aria en $\mathcal{F}$. Las álgebras cocientes de $\mathcal{A}$ son del mismo tipo que $\mathcal{A}$. De esta definición resulta que la *aplicación canónica* $q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\theta$ es un epimorfismo. Un resultado importante es el siguiente:

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra entonces $Con(A)$ ordenado por la relación de inclusión es un retículo acotado y completo, cuyo primer elemento es id_A que es la relación de identidad sobre A y cuyo último elemento es $A \times A$.

El retículo de las congruencias de un retículo es siempre distributivo aunque el retículo original no lo sea. El retículo de las congruencias caracteriza a las álgebras subdirectamente irreducibles. En efecto,

Teorema 1.1.1 *Un álgebra $\mathcal{A}$ es subdirectamente irreducible si, y solo si, $Con(\mathcal{A}) \setminus \{id_A\}$ tiene primer elemento.*

Es decir, $\mathcal{A}$ es subdirectamente irreducible si, y sólo si, existe $\theta_1 \in Con(\mathcal{A})$, $\theta_1 \neq id_A$ tal que $\theta_1 \subseteq \theta$ para toda $\theta \in Con(\mathcal{A}) \setminus \{idA\}$.

El siguiente teorema fundamental es debido a G. Birkhoff.

Teorema 1.1.2 *Toda álgebra con más de un elemento es isomorfa a un producto subdirecto de una familia de álgebras subdirectamente irreducibles.*

Por otra parte, recordemos que una clase particular de álgebras subdirectamente irreducibles son simples, donde un álgebra $\mathcal{A}$ con más de un elemento es simple si, y sólo si, las únicas congruencias de $\mathcal{A}$ son las triviales, es decir, id_A y $A \times A$. Además, un álgebra $\mathcal{A}$ con más de un elemento se dice semisimple si es producto subdirecto de una familia de álgebras simples.

Filtros

Sea $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ un retículo, $F \subseteq A$ es un *filtro* si verifica (F1) $F \neq \emptyset$, (F2) si $a \in F$ y $a \leq b$ entonces $b \in F$; y (F3) si $x, y \in F$ entonces $x \wedge y \in F$. Además, F es un *filtro primo* si es un filtro que verifica la propiedad adicional si $a \vee b \in F$ entonces $a \in F$ o $b \in F$.
Con $Fi(A)$ designaremos a la familia de todos los filtros de A, esto es,

$$Fi(A) = \{F \subseteq A : F \text{ verifica } (F1), (F2) \text{ y } (F3)\}$$

.

Álgebras de Boole

Un álgebra de Boole es un álgebra $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ de tipo (2,2,1,0,0) donde el reducto $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado y sastifacen las siguientes condiciones:

(B1) $x \wedge \sim x = 0$

(B2) $x \vee \sim x = 1$,

Las álgebras de Boole, introduidas por G. Boole en 1850, son modelos algebraicos del cálculo proposicional de la lógica clásica. Para mayor información sobre estas álgebras se puede consultar [33].

Retículos distributivos pseudocomplementados

Existen en la literatura numerosas generalizaciones de las álgebras de Boole en las cuales la negación es reemplazada por diversas operaciones unarias, que sastifacen algunas de las propiedades de la operación original. Una de ellas son los retículos pseudocomplementados cuyo estudio comenzó con un trabajo de V.Glivenko en 1929.

Un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, *, 0, 1\rangle$ de tipo (2,2,1,0,0) es un retículo distributivo pseudocomplementado (o p-álgebra) si $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un retículo acotado tal que para cada $a \in L$, el elemento a^* es el pseudocomplemento de a; esto es, a^* verifica

$$x \leq a^* \text{ si y solo si } \quad a \wedge x = 0.$$

Cabe destacar que numerosos autores tales como H. Lakser y G. Grätzer (ver [32]) denominaron a estas álgebras p-álgebras distributivas ya que el nombre de p-álgebras en general, es utilizado por autores tales como H. P. Sankappanavar, T. Hecht y T. Katriňak para las no necesariamente distributivas (ver [46, 34]).

En 1949, P. Ribenboim mostró que la clase de p-álgebras constituyen una variedad. Más precisamente, probó que estas álgebras son retículos distibutivos acotados con una operación unaria adicional * que verifica las siguientes propiedades:

(R1) $x \wedge (x \vee y)^* = x \wedge y^*$,

(R2) $x \wedge 0^* = x$,

(R3) $0^{**} = 0$.

Es bien conocido que en toda p-álgebra L se verifican las siguientes propiedades: para todo $a, b \in L$

(P1) $a \wedge a^* = a^{**} \wedge a^* = 0$,

(P2) $a \wedge b = 0$, si y sólo si, $a \leq b^*$,

(P3) $a \leq a^{**}$,

(P4) $a^{***} = a^*$,

(P5) $a \wedge b = 0$, si sólo si, $a^{**} \wedge b = 0$,

(P6) $a \leq b$ implica $b^* \leq a^*$,

(P7) $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$,

(P8) $(a \wedge b)^{**} = (a^{**} \wedge b^{**})$,

(P9) $(a^{**} \vee b^{**})^{**} = (a \vee b)^{**}$,

(P10) $(a \vee a^*)^* = 0$.

Álgebras de De Morgan

Un *álgebra de De Morgan* es un álgebra $\langle L, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ donde el reducto $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado y se verifican las siguientes condiciones:

(M1) $\neg\neg x = x$,

(M2) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$.

De la definición resulta que en toda álgebra de De Morgan se verifican las siguientes propiedades:

(M3) $x \leq y$ si, y sólo si, $\neg y \leq \neg x$,

(M4) $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$,

(M5) $\neg 1 = 0$.

(M6) Si L es un álgebra de De Morgan con más de un elemento, se puede definir sobre el conjunto $X(L)$ de todos los filtros primos de L, la transformación φ llamada *transformación de Birula y Rasiowa* que a cada $P \in X(L)$ le asigna

$$\varphi(P) = L \setminus \neg P \in X(L)$$

donde

$$\neg P = \{\neg x : x \in P\}.$$

Las propiedades importantes de φ son:

(φ1) $\varphi\varphi(P) = P$, para cada $P \in X(L)$,

(φ2) si $P, Q \in X(L)$ son tales que $P \subseteq Q$, entonces $\varphi(Q) \subseteq \varphi(P)$.

La noción de álgebra de De Morgan fue estudiada por A. Bialynicki-Birula y H. Rasiowa en [3] como un instrumento algebraico para el estudio de lógicas constructivas con negación fuerte.

Álgebras de Lukasiewicz trivalentes

La teoría de las álgebras de Lukasiewicz trivalentes fue introducida y desarrollada por G. Moisil en [37]. Posteriormente, A. Monteiro en [38, 39] indicó una axiomática equivalente a la dada por Moisil y la que presentaremos a continuación es debida a L. Monteiro [40].

Un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, \neg, \nabla, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ se dice un *álgebra de Lukasiewicz trivalente* si el reducto $\langle A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ es un álgebra de De Morgan y se verifican las siguientes identidades:

(L1) $\neg x \vee \nabla x = 1$,

(L2) $\neg x \wedge \nabla x = \neg x \wedge x$,

(L3) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$.

1.2. Dualidades topológicas

En esta sección repasaremos la dualidad de Priestley para los retículos distributivos acotados y álgebras de De Morgan. En lo que sigue indicaremos con $\mathcal{L}$ a la categoría de los retículos distributivos acotados y sus correspondientes homomorfismos.

1.2.1. Dualidad de Priestley para los retículos distributivos acotados

Recordemos que un *espacio topológico totalmente disconexo en el orden* es una terna $(X, \tau, \leq)$ donde

(T1) $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado,

(T2) (X, τ) es un espacio topológico y

(T3) para todo $x, y \in X$ tales que $x \leq y$, existe $U \subseteq X$ abierto, cerrado y creciente tal que $x \in U$ e $y \notin U$.

Un *espacio de Priestley* (o $\mathbf{P}$–espacio) es un espacio topológico compacto y totalmente disconexo en el orden. Una $\mathbf{P}$–función de un $\mathbf{P}$–espacio en otro, es una función continua y creciente.
Denotaremos con $\mathbf{P}$ a la categoría de los $\mathbf{P}$–espacios y las $\mathbf{P}$–funciones. Como es usual, a los objetos de $\mathbf{P}$ lo representaremos por su conjunto subyacente X. H. Priestley en [43, 44] introdujo los funtores contravariantes $\Psi : \mathbf{P} \longrightarrow \mathcal{L}$ y $\Phi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{P}$ como sigue:

(T4) si X es un objeto de $\mathbf{P}$, $\Psi(X) = D(X)$ donde $D(X) = \langle D(X), \cap, \cup, \emptyset, X\rangle$ es el retículo de los subconjuntos abiertos, cerrados y crecientes de X,

(T5) para cada $f \in hom_{\mathbf{P}}(X_1, X_2)$, $\Psi(f)(U) = f^{-1}(U)$ para cada $U \in D(X_2)$.

y, por otro lado

(T6) si L es un objeto en $\mathcal{L}$, $\Phi(L) = X(L)$ donde $X(L) = (X(L), \tau, \subseteq)$ el conjunto de los filtros primos de L ordenados por la relación inclusión y con la topología que tiene como sub-básicos a los conjuntos de la forma $\sigma_L(a) = \{P \in X(L) : a \in P\}$ y $X(L) \setminus \sigma_L(a)$ para cada $a \in L$,

(T7) si $h \in hom_{\mathcal{L}}(L_1, L_2)$, entonces $\Phi(h)(P) = h^{-1}(P)$ para cada $P \in X(L_2)$.

Por otra parte, $\sigma_L : L \to D(X(L))$ es un isomorfismo de retículos distributivos acotados y la función $\epsilon_X : X \to X(D(X))$ definida por $\epsilon(x) = \{U \in D(X) : x \in U\}$ es un isomorfismo en $\mathbf{P}$, es decir, es un homeomorfismo y un isomorfismo de orden.
De esta manera, los funtores Ψ y Φ establecen una completa dualidad entre las categorías $\mathcal{L}$ y $\mathbf{P}$.

Esta dualidad tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, Priestley ([43, 44]) caracterizó a las congruencias de los retículos distributivos acotados por medio de ciertos subconjuntos del $\mathbf{P}$–espacio asociado de la siguiente manera.

Lema 1.2.1 *Sea L un retículo distributivo acotado e Y un subconjunto cerrado de $X(L)$. Entonces*

$$\Theta(Y) = \{(a, b) \in L \times L : \sigma_L(a) \cap Y = \sigma_L(b) \cap Y\}$$

es una congruencia en L y la correspondencia $Y \longrightarrow \Theta(Y)$ establece un anti-isomorfismo entre el retículo de todos los subconjuntos cerrados de $X(L)$ y el retículo de las congruencias de L.

1.2.2. Dualidad de Priestley para las álgebras de De Morgan

W. Cornish y P. Fowler ([10, 11]) extendieron la dualidad de Priestley a las álgebras de De Morgan de la manera que indicamos a continuación. Un espacio de De Morgan (o $\mathbf{m}$-espacio) es un par (X, g), donde X es un objeto de $\mathbf{P}$ y $g : X \to X$ es un homomorfismo involutivo y un anti-isomorfismo de orden. Por otra parte, una $\mathbf{m}$–función de un $\mathbf{m}$-espacio (X_1, g_1) en un $\mathbf{m}$–espacio (X_2, g_2) es una $\mathbf{P}$–función $f : X_1 \to X_2$ tal que verifica:

$$f \circ g_1 = g_2 \circ f.$$

Denotaremos con $\mathbf{m}$ a la categoría de los $\mathbf{m}$–espacios y las $\mathbf{m}$–funciones y con $\mathcal{M}$ a la categoría de las álgebras de De Morgan y sus correspondientes homomorfismos.
Si $L = \langle L, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ es un objeto de $\mathcal{M}$ y $g_L : X(L) \to X(L)$ está dada por, para cada $P \in X(L)$

$$g_L(P) = L \setminus \{\neg x : x \in P\}$$

entonces $(X(L), g_L)$ es un objeto de $\mathbf{m}$. Por otra parte, si (X, g) es un $\mathbf{m}$–espacio y se define la operación $\neg : D(X) \to D(X)$ por la prescripción, para cada $U \in D(X)$

$$\neg U = X \setminus g^{-1}(U)$$

entonces $\langle D(X), \cap, \cup, \neg, \emptyset, X\rangle$ es un objeto de $\mathcal{M}$. Luego, las categorías $\mathcal{M}$ y $\mathbf{m}$ son dualmente equivalentes y los isomorfismos σ_L y ϵ_X, presentados en la sección anterior, son las equivalencias naturales correspondientes.

Por otra parte, Cornish y Fowler en [10] introdujeron la noción de conjunto involutivo de un $\mathbf{m}$–espacio (X, g) como un subconjunto Y de X tal que $g(Y) = Y$, lo que es equivalente a decir que $y \in g(Y)$ si, y solo si, $y \in Y$. Entonces, mostraron que

Teorema 1.2.2 *Si L es un álgebra de De Morgan, entonces el retículo de todos los subconjuntos cerrados e involutivos de $X(L)$ es isomorfo al dual del retículo de todas las congruencias de L.*

Cabe mencionar que si (X, g) es un $\mathbf{m}$–espacio e $Y \in X$ es involutivo, entonces $\overline{Y}$ es involutivo (donde $\overline{Y}$ indica la clausura de Y) . En efecto, de la hipótesis resulta que $\overline{Y} = \overline{g(Y)}$ y como g es un homeomorfismo concluimos que $\overline{Y} = g(\overline{Y})$. Para finalizar, recordemos el siguiente resultado.

Lema 1.2.3

(i) Si $(X, g) \in \mathbf{m}$ e Y es un subconjunto cerrado e involutivo de X, entonces $\Theta(Y)$ es una congruencia de De Morgan sobre $\Psi(X, g)$. Más aún, si $\pi : \Psi(X, g) \to \Psi(X, g)/\Theta(Y)$ es la proyección canónica, entonces

$$Y = \epsilon^{-1}(\Phi(\pi)(\Phi(\Psi(X, g)/\Theta(Y))$$

donde la función $\epsilon : X \to \Phi(\Psi(X, g))$ está definida por $\epsilon(x) = \{U \in \Psi(X) : x \in U\}$.

(ii) Sea A un álgebra de De Morgan y Θ una congruencia sobre A. Si $\pi : A \to A/\Theta$ es la proyección canónica, entonces $Y = \Phi(\pi)(\Phi(A))$ es un subconjunto cerrado e involutivo de $\Phi(A)$.

1.3. Lógicas paraconsistentes

En la lógica tradicional, la presencia de contradicciones en la teoría y la trivialidad (el hecho que la teoría implique todas las posibles consecuencias) se asumen inseparables, siempre y cuando se cuente con una negación. Este es el efecto de una característica lógica común conocida como *explosividad*: de una contradicción 'α y $\neg\alpha$' todo es derivable.
En efecto, la lógica clásica (y muchas otras lógicas) equiparan los conceptos de 'consistencia' con el de la 'no existencia de contradicciones'. De esta manera, tales lógicas fallan en distinguir entre la existencia de contradicciones y otros tipos de inconsistencia.

Las lógicas paraconsistentes son lógicas en las cuales estos dos conceptos son independientes. Es decir, la *paraconsistencia* es el estudio de teorías que admiten contradicciones y que, sin embargo, no son triviales.

En lo que sigue $\Sigma = \{\Sigma_n\}_{n\in\omega}$ es una signatura proposicional, donde Σ_n es un conjunto de conectivos de aridad n. Sea $\Xi = \{p_i\}_{i\in\omega}$ un conjunto numerable de variables proposicionales. Entonces, el conjunto de fórmulas Fm construidas con las variables proposicionales de Ξ y los conectivos de Σ es el álgebra absolutamente libre generada por Ξ en el lenguaje Σ.
Como es usual, denotaremos a los elementos de Fm con las letras griegas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \dots,$ etc.; y denotaremos a los conjuntos de fórmulas con letras griegas mayúsculas Γ, Δ, etc.. Además, notaremos Γ, α en lugar de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ y Γ, Δ en lugar de $\Gamma \cup \Delta$.

1.3.1. Trivialidad, Explosividad y Consistencia

Nuestra presentación se enmarca en la teoría general de las relaciones de consecuencia. Sea X un conjunto, con $\mathcal{P}(X)$ denotamos al conjunto de las partes de X. Consideremos un conjunto de fórmulas Fm.
Decimos que $\models \subseteq \mathcal{P}(Fm) \times Fm$ define una relación de consecuencia sobre Fm si se verifican:

(C1) $\alpha \in \Gamma$ implica $\Gamma \models \alpha$, (Reflexividad)

(C2) $\Delta \models \alpha$, $\Delta \subseteq \Gamma$ implica $\Gamma \models \alpha$, (Monotonía)

(C3) $\Delta \models \alpha$ y $\Gamma, \alpha \models \beta$ implica $\Delta, \Gamma \models \beta$. (Corte)

En este trabajo, una lógica $\mathbb{L}$ es una estructura $\mathbb{L} = \langle Fm, \models \rangle$ formada por un conjunto de fórmulas Fm y una relación de consecuencia $\models$ definida sobre Fm. Una lógica $\mathbb{L}$ se dice tarskiana si satisface (C1),(C2) y (C3)
Diremos que una lógica $\mathbb{L}$ es *compacta* si verifica la condición:

(C4) $\Gamma \models \alpha$ implica $\Gamma^{\text{fin}} \models \alpha$, para algún conjunto finito $\Gamma^{\text{fin}} \subseteq \Gamma$. (Compacidad)

Una propiedad usual de las lógicas que estudiaremos es la *estructuralidad*.
Sea $\sigma : \Xi \to Fm$ una función, sabemos que existe un único homomorfismo (endomorfismo) $\bar{\sigma} : Fm \to Fm$ que extiende a σ. Una lógica es *estructural* si preserva endomorfismos. Es decir, si vale

(C5) $\Gamma \models \alpha$ implica $\epsilon(\Gamma) \models \epsilon(\alpha)$, para todo endomorfismo ϵ sobre Fm. (Estructuralidad)

En términos sintácticos, la estructuralidad se corresponde con la regla de sustitución uniforme o, alternativamente, con el uso de axiomas esquemas y reglas esquemas.
Cualquier conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq Fm$ se dirá una teoría.
Una teoría se dice *propia* si $\Gamma \neq Fm$ y se dice *cerrada* si contiene a todas sus consecuencias, es decir, si para toda fórmula α vale

$$\Gamma \models \alpha \ \text{ si, y solo si, } \ \alpha \in \Gamma$$

En adelante consideraremos lógicas $\mathbb{L} = \langle Fm, \models \rangle$ cuyo lenguaje base Σ contiene un conectivo unario de "negación" $\neg$ y tal que $\models$ satisface (C1)–(C3) y (C5).
Sea Γ una teoría de $\mathbb{L}$. Se dice que Γ es *contradictoria con respecto* a $\neg$, o simplemente *contradictoria*, si satisface:

$$\exists \alpha (\Gamma \models \alpha \ \text{ y } \ \Gamma \models \neg \alpha)$$

Además, Γ se dice *trivial* si

$$\forall \alpha (\Gamma \models \alpha)$$

Observemos que la teoría $\Gamma = Fm$ es trivial, por (C1). Podemos concluir que la existencia de contradicciones es una condición necesaria, pero en general no suficiente, para la trivialidad en una teoría dada, puesto que las teorías triviales derivan toda posible consecuencia.
Finalmente, Γ se dice *explosiva* si:

$$\forall \alpha \forall \beta (\Gamma, \alpha, \neg \alpha \models \beta)$$

Es decir, una teoría se dice explosiva si se trivializa cuando es extendida con un par de fórmulas contradictorias. Por otro lado, si una teoría es trivial entonces es explosiva, por (C2). Además, si una teoría es contradictoria y explosiva entonces es trivial, por (C3).

Las nociones anteriores pueden ser extendidas de teorías a lógicas de una manera natural. Se dice que una lógica $\mathbb{L}$ es contradictoria si todas sus teorías son contradictorias. Es decir, $\mathbb{L}$ es contradictoria si

$$\forall \Gamma \exists \alpha (\Gamma \models \alpha \ \text{ y } \ \Gamma \models \neg \alpha)$$

Análogamente, $\mathbb{L}$ se dice trivial si todas sus teorías son triviales; y se dice explosiva si todas sus teorías son explosivas. De las definiciones anteriores y (C2) se tiene:

Proposición 1.3.1.1 *Una lógica $\mathbb{L}$ es contradictoria (trivial/explosiva) si, y solo si, su teoría vacía es contradictoria (trivial/explosiva).*

Algunos principios lógicos conocidos (aplicados a una lógica genérica $\mathbb{L}$) pueden ser formalizados como sigue:

Principio de la No Contradicción ($\mathbb{L}$ es no contradictoria)

$$\exists\Gamma\forall\alpha(\Gamma \not\models \alpha \ \text{ o } \ \Gamma \not\models \neg\alpha)$$

Principio de la No Trivialidad ($\mathbb{L}$ es no trivial)

$$\exists\Gamma\exists\alpha(\Gamma \not\models \alpha)$$

Principio de la Explosión ($\mathbb{L}$ es explosiva)

$$\forall\Gamma\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \alpha, \neg\alpha \models \beta)$$

Estos tres principios están interrelacionados, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 1.3.1

(i) *Una lógica trivial es contradictoria y explosiva.*

(ii) *Una lógica $\mathbb{L}$ explosiva falla en el Principio de la No Trivialidad si, y solo si $\mathbb{L}$ falla en el Principio de la No Contradicción.*

1.3.2. Lógicas de la Inconsistencia Formal (LFI's)

Durante el siglo XX, diferentes autores como Stanislaw Jaśkowski (1948), David Nelson (1959) y Newton da Costa (1963) propusieron, independientemente, el estudio de lógicas que tuvieran teorías contradictorias no triviales, dando lugar a las *lógicas paraconsistentes*.

Para da Costa, una lógica es *paraconsistente* con respecto a la negación $\neg$ si tiene una teoría contradictoria pero no trivial. Es decir, si

$$\exists\Gamma\exists\alpha\exists\beta(\Gamma \models \alpha \text{ y } \Gamma \models \neg\alpha \text{ y } \Gamma \not\models \beta)$$

Observemos que esta noción de lógica paraconsistente nada tiene que ver con el Principio de la No Contradicción, pero está intimamente ligado con el rechazo al Principio de la Explosión.
Por otro lado, Jaśkowski definió a una lógica paraconsistente como aquella lógica en la que falla el Principio de la Explosión, es decir:

$$\exists\Gamma\exists\alpha\exists\beta(\Gamma, \alpha, \neg\alpha \not\models \beta)$$

No es difícil ver que estas dos definiciones de lógica paraconsistente son equivalentes.
Es importante observar que si en una lógica todas las contradicciones son equivalentes, esta no puede ser una lógica paraconsistente. En efecto, diremos que dos conjuntos de fórmulas Γ y Δ son equivalentes, si

$$\forall\alpha \in \Delta(\Gamma \models \alpha) \text{ y } \forall\alpha \in \Gamma(\Delta \models \alpha)$$

En particular, dos fórmulas α y β son equivalentes si $\{\alpha\}$ y $\{\beta\}$ son conjuntos equivalentes de fórmulas. Observemos que la equivalencia entre fórmulas es una relación de equivalencia sobre Fm (por (C1) y (C3)). Sin embargo, la equivalencia entre conjuntos no es una relación de equivalencia sobre $\mathcal{P}(Fm)$ a menos que $\mathbb{L}$ satisfaga la siguiente condición:

(C6) $\forall\beta \in \Delta(\Gamma \models \beta)$ y $\Delta \models \alpha$ implica $\Gamma \models \alpha$ (Corte sobre conjuntos)

Teorema 1.3.2.1 *Sea $\mathbb{L}$ una lógica tarskiana. Entonces, si todas las contradicciones son equivalentes en $\mathbb{L}$ entonces $\mathbb{L}$ no es paraconsistente.*

Una lógica $\mathbb{L}$ se dice *consistente* si es explosiva y no trivial, en otro caso, se dice que $\mathbb{L}$ es *inconsistente*. Luego, podemos afirmar que una lógica es paraconsistente si es inconsistente y no trivial.

Sea p una variable proposicional y sea $\bigcirc(p)$ un conjunto de fórmulas que dependen solamente de p que satisface lo siguiente: existen fórmulas α y β tales que

$$\text{(a) } \bigcirc(\alpha), \alpha \not\models \beta,$$
$$\text{(b) } \bigcirc(\alpha), \neg\alpha \not\models \beta,$$

Se dice que una teoría Γ es *gentilmente explosiva* (con respecto a $\bigcirc(p)$) si:

$$\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \bigcirc(\alpha), \alpha, \neg\alpha \models \beta)$$

Entonces, podemos introducir la noción de Lógica de la Inconsistencia Formal.

Definición 1.3.2.2 *([8]) Una Lógica de la Inconsistencia Formal es una lógica (o* **LFI***) paraconsistente gentilmente explosiva.*

En otras palabras, una lógica $\mathbb{L}$ es una **LFI** (con respecto a una negación $\neg$) si:

(i) $\exists\Gamma\exists\alpha\exists\beta(\Gamma, \alpha, \neg\alpha \not\models \beta)$, y

(ii) existe un conjunto de fórmulas $\bigcirc(p)$, que depende exactamente de una variable proposicional p, y que verifica (a) y (b) tal que $\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \bigcirc(\alpha), \alpha, \neg\alpha \models \beta)$

A continuación exhibiremos la lógica C_1 de da Costa. Esta es la primer lógica de la jerarquía de lógicas C_n, $1 \leq n < \omega$ (ver [14, 15]). Esta lógica es un claro ejemplo de **LFI** basada en la lógica proposicional clásica **CPL**. La presentación será por medio de un cálculo de Hilbert y se debe a Carnielli, Coniglio y Marcos en [7].
Sea Σ la signatura que contiene a los conectivos binarios $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$, y el operador unario $\neg$. Sea Fm el álgebra de las fórmulas generada por un conjunto numerable $\Xi = \{p_i\}_{i\in\omega}$ de variables proposicionales sobre Σ. Para cada fórmula α, sea $\circ\alpha$ la abreviatura de la fórmula $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$. La lógica $C_1 = \langle Fm, \vdash_1\rangle$ puede ser axiomatizada por los siguientes axiomas esquema.

Axiomas Esquema:

(Ax1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$,

(Ax2) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$,

(Ax3) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$,

(Ax4) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$,

(Ax5) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$,

(Ax6) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$,

(Ax7) $\beta \to (\alpha \vee \beta)$,

(Ax8) $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$,

(Ax9) $\alpha \vee (\alpha \to \beta)$,

(Ax10) $\alpha \vee \neg\alpha$,

(Ax11) $\neg\neg\alpha \to \alpha$,

(bc1) $\circ\alpha \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta))$,

(ca1) $(\circ\alpha \wedge \circ\beta) \to \circ(\alpha \wedge \beta)$,

(ca2) $(\circ\alpha \wedge \circ\beta) \to \circ(\alpha \vee \beta)$,

(ca1) $(\circ\alpha \wedge \circ\beta) \to \circ(\alpha \to \beta)$,

Regla de inferencia:

(MP) $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\alpha}$

La definición de demostración formal en C_1 es la usual. Si $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$, escribiremos $\Gamma \vdash_1 \alpha$ para indicar que existe una demostración formal en C_1 a partir de las premisas Γ. Si $\Gamma = \emptyset$, diremos que α es un teorema.

En [16] y [17], N. da Costa y E. Alves propusieron una original semántica de valuaciones para C_1 sobre $\{0,1\}$. Una característica distintiva de estas valuaciones es que la negación paraconsistente ($\neg$) se comporta en forma no determinística con respecto a esta semántica, como veremos a continuación. Esta clase de semánticas (denominadas a menudo *bivaluaciones*) fueron generalizadas para diferentes **LFI**'s.

Definición 1.3.2.3 *(Valuaciones para C_1) Una función $v : Fm \to \{0,1\}$ es una valuación para C_1, o una C_1-valuación, si verifica:*

(vAnd) $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ *si y solo si* $v(\alpha) = 1$ *y* $v(\beta) = 1$.
(vOr) $v(\alpha \vee \beta) = 1$ *si y solo si* $v(\alpha) = 1$ *o* $v(\beta) = 1$.
(vImp) $v(\alpha \to \beta) = 1$ *si y solo si* $v(\alpha) = 0$ *o* $v(\beta) = 1$.
(vNeg) *Si* $v(\neg\alpha) = 0$ *entonces* $v(\alpha) = 1$.
(vCf) *Si* $v(\neg\neg\alpha) = 1$ *entonces* $v(\alpha) = 1$.
(vWB$_1$) $v(\alpha) = v(\neg\alpha)$ *si y solo si* $v(\circ\alpha) = 0$ *si y solo si* $v(\neg \circ \alpha) = 1$.
(vWB$_2$) *Si* $v(\alpha) \neq v(\neg\alpha)$ *y* $v(\beta) \neq v(\neg\beta)$ *entonces* $v(\alpha\sharp\beta) \neq v(\neg(\alpha\sharp\beta))$, *para* $\sharp \in \{\wedge, \vee, \to\}$.

Designamos con V^{C_1} al conjunto de todas las C_1-valuaciones.

Sea $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$. Se define de una manera natural una relación de consecuencia semántica $\models$ con respecto al conjunto de las C_1-valuaciones como sigue:

$$\Gamma \models \alpha \text{ si y solo si, } \text{ para toda } v \in V^{C_1}, \text{ si } v(\Gamma) \subseteq \{1\} \text{ entonces } v(\alpha) = 1$$

Entonces,

Teorema 1.3.2.4 *(de Correctitud) Sea $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$.*

$$\Gamma \vdash \alpha \quad \textit{implica} \quad \Gamma \models \alpha$$

Dem. Sea v una C_1–valuación. Basta probar que:

(1) Si α es una instancia de un axioma de C_1 entonces $v(\alpha) = 1$.

(2) Si α y β son tales que $v(\alpha) = v(\alpha \to \beta) = 1$, entonces $v(\beta) = 1$.

Para probar (1) debemos chequear cada axioma de C_1. Observemos que las cláusulas de la definición de valuación para los conectivos $\wedge$, $\vee$ y $\to$ son las usuales que caracterizan las tablas de verdad de estos conectivos en la lógica clásica. Por lo tanto los axiomas de (**Ax1**) a (**Ax9**) son correctos con respecto a esta semántica de valuaciones. Con respecto al axioma (**Ax10**), si $v(\neg\alpha) = 1$, entonces $v(\alpha \vee \neg\alpha) = 1$. Si, $v(\neg\alpha) = 0$ y por **(vNeg)** $v(\alpha) = 1$, luego $v(\alpha \vee \neg\alpha) = 1$. Para probar que el axioma (**Ax11**) es válido supondremos por el absurdo que para toda valuación v, $v(\neg\neg\alpha \to \alpha) = 0$. Entonces, por **(vImp)**, $v(\neg\neg\alpha) = 1$ y $v(\alpha) = 0$. Por **(vCf)** tenemos que $v(\alpha) = 1$ y $v(\alpha) = 0$, lo que es una contradicción.
Para los restantes axiomas solo probaremos la validez de **(bc1)**. Sea β una instancia del axioma **(bc1)**, es decir β es $\circ\alpha \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \gamma))$. Si $v(\circ\alpha) = 0$ entonces por **(vImp)** $v(\beta) = 1$. Sino, $v(\circ\alpha) = 1$ entonces por **(vWB$_1$)** entonces por esto tenemos que $v(\alpha) \neq v(\neg\alpha)$. Si $v(\alpha) = 0$ entonces por **(vImp)** tenemos que $v(\beta) = 1$. Si $v(\alpha) = 1$ entonces $v(\neg\alpha) = 0$ por **(vImp)** $v(\beta) = 1$.
Finalmente, por **(vImp)**, (2) vale. ■

Para la demostración de la completitud necesitaremos algunas definiciones y resultados.

Definición 1.3.2.5 *Sea $\mathbb{L} = \langle Fm, \models \rangle$ una lógica tarskiana y sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \subseteq Fm$. El conjunto Γ es maximal no trivial con respecto a α si $\Gamma \not\models \alpha$ pero $\Gamma, \beta \models \alpha$ para toda $\beta \notin \Gamma$.*

Definición 1.3.2.6 *Sea $\mathbb{L}$ una lógica tarskiana. Un conjunto de fórmulas Γ es cerrado en $\mathbb{L}$ (o es una teoría cerrada de $\mathbb{L}$), si para toda fórmula β*

$$\Gamma \models \beta \quad \textit{si y solo si} \quad \beta \in \Gamma$$

Entonces, podemos probar el siguiente lema.

Lema 1.3.2.7 *Si* $\mathbb{L}$ *es una lógica tarskiana, cualquier conjunto de fórmulas maximal no trivial con respecto a la fórmula* β *es cerrado.*

Dem. Sea Γ un conjunto de fórmulas maximal no trivial con respecto a β, donde β es una fórmula de $\mathbb{L}$. Como $\mathbb{L}$ es tarskiana si $\alpha \in \Gamma$ entonces $\Gamma \models \alpha$. Recíprocamente, supongamos que $\Gamma \models \alpha$ y que $\alpha \notin \Gamma$. Entonces, como Γ es maximal no trivial con respecto a β tenemos que $\Gamma, \alpha \models \beta$. Pero, como $\mathbb{L}$ es tarskiana (por (C6) y tomando $\Delta = \Gamma \cup \{\alpha\}$) tenemos que $\Gamma \models \beta$, lo que contradice la hipótesis de que Γ es maximal no trivial con respecto a β. ■

A continuación mostraremos un resultado clásico de la lógica.

Teorema 1.3.2.8 *(de Lindenbaum-Łos) Sea* $\mathbb{L}$ *una lógica tarskiana y finitaria.*
Sea $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$ *tal que* $\Gamma \not\models \alpha$. *Entonces, existe un conjunto de fórmulas* Δ *tal que* Δ *es maximal no trivial con respecto a* α *y* $\Gamma \subseteq \Delta \subseteq Fm$.

Dem. En esta demostración haremos uso del Axioma de Elección en una de sus versiones equivalentes como es el Principio del Buen Ordenamiento. Supongamos que Fm es un conjunto bien ordenado, es decir, Fm es la sucesión transfinita $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda<\theta}$ donde θ es un ordinal. Por inducción transfinita, podemos definir una sucesión creciente de teorias $\{\Gamma_\lambda\}_{\lambda<\theta}$ del siguiente modo: $\Gamma_0 = \Gamma$ y para todo $\lambda < \theta$

$$\Gamma_\lambda = \begin{cases} \Gamma_\mu & \text{si } \lambda = \mu + 1 \;\text{ y }\; \Gamma_\mu, \alpha_\mu \models \alpha \\ \Gamma_\mu \cup \{\alpha_\mu\} & \text{si } \lambda = \mu + 1 \;\text{ y }\; \Gamma_\mu, \alpha_\mu \not\models \alpha \\ \bigcup_{\mu<\lambda} \Gamma_\mu & \text{si } \lambda \text{ es un ordinal límite} \end{cases}$$

Sea $\Delta = \bigcup_{\lambda<\theta} \Gamma_\lambda$. Entonces, Δ cumple con las condiciones requeridas. En efecto, claramente $\Gamma \subseteq \Delta$. Veamos que $\Gamma_\lambda \not\models \alpha$ para todo $\lambda < \theta$. Si $\lambda = 0$ entonces por hipótesis $\Gamma_\lambda \not\models \alpha$. Supongamos que (H.I.) $\Gamma_\mu \not\models \alpha$ para todo $\mu < \lambda$ y supongamos que $\lambda = \mu + 1 < \theta$. Por la definición de Γ_λ tenemos que $\Gamma_\lambda \not\models \alpha$. Si λ es un ordinal límite y $\Gamma_\lambda \models \alpha$, como $\mathbb{L}$ es finitaria, existe un subconjunto finito Γ^{fin} de Γ_λ tal que $\Gamma^{fin} \models \alpha$. Pero $\Gamma_\mu \subseteq \Gamma_\tau$ si $\mu < \tau$ y por lo tanto, $\Gamma^{fin} \subseteq \Gamma_\mu$ para algún $\mu < \lambda$. Luego, $\Gamma_\mu \models \alpha$ para algún $\mu < \lambda$ lo que contradice (H.I.).
Por un argumento similar, probamos que $\Delta \not\models \alpha$. Finalmente, supongamos que $\beta \notin \Delta$. Entonces, $\beta = \alpha_\mu$ para algún $\mu < \theta$ y por lo tanto $\alpha_\mu \notin \Gamma_{\mu+1}$, por definición de Δ. Por construcción de $\Gamma_{\mu+1}$ tenemos que $\Gamma_\mu, \alpha_\mu \models \alpha$ y entonces, por monotonía de $\mathbb{L}$, tenemos que $\Delta, \beta \models \alpha$. Luego, Δ es maximal no trivial con respecto a α. ■

Observación 1.3.2.9 *Recordemos que toda lógica definida por medio de un cálculo de Hilbert cuyas reglas de inferencia son finitarias, es una lógica tarskiana y finitaria. Luego, la lógica definida por el cálculo* C_1 *es tarskiana y finitaria.*

Teorema 1.3.2.10 *Sea $\Gamma \cup \{\beta\} \subseteq Fm$ tal que Γ es maximal no trivial con respecto a β en C_1. Entonces, la función $v : Fm \to \{0,1\}$ definida por*

$$v(\alpha) = 1 \iff \alpha \in \Gamma$$

Para todo $\alpha \in Fm$ es una valuación para C_1.

Dem. Vamos a verificar que la función v sastiface las condiciones de la Definición 1.3.2.3.

(vAnd) Supongamos que $v(\phi \wedge \psi) = 1$. Entonces $\phi \wedge \psi \in \Gamma$. Como Γ es maximal no trivial, por el Lema 1.3.2.7, Γ es cerrado y por lo tanto contiene a todos los axiomas, en particular $(\phi\wedge\psi) \to \phi \in \Gamma$. Luego, por modus ponens, $\phi \in \Gamma$ y por lo tanto $v(\phi) = 1$. Análogamente, tenemos que $v(\psi) = 1$. Recíprocamente, supongamos que $v(\phi) = 1$ y $v(\psi) = 1$. Entonces, ϕ y ψ pertenecen a Γ. Como Γ contiene a los axiomas, $\phi \to (\psi \to (\phi \wedge \psi)) \in \Gamma$ y, por modus ponens, $\phi \wedge \psi \in \Gamma$. Luego, $v(\phi \wedge \psi) = 1$.

(vOr) Se prueba análogamente.

(vImp) Supongamos que $v(\phi \to \psi) = 1$. Entonces $\phi \to \psi \in \Gamma$. Si $\phi \in \Gamma$, por modus ponens, $\psi \in \Gamma$. Luego, tenemos que vale la siguiente afirmación: $v(\phi) = 1$ implica que $v(\psi) = 1$. Es decir, $v(\phi) = 0$ o $v(\psi) = 1$. Recíprocamente, supongamos que $v(\phi) = 0$ o $v(\psi) = 1$. Luego, $\phi \notin \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$. Si $\psi \in \Gamma$, como el axioma $\psi \to (\phi \to \psi) \in \Gamma$ y por modus ponens se tiene que $\phi \to \psi \in \Gamma$, y entonces $v(\phi \to \psi) = 1$. Si $\phi \notin \Gamma$, por la maximalidad de Γ con respecto a β, tenemos que $\Gamma, \phi \models \beta$. Supongamos por el absurdo que $\phi \to \psi \notin \Gamma$, nuevamente por la maximalidad de Γ se tiene que $\Gamma, \phi \to \psi \models \beta$. No es difícil verificar que $\Gamma, \phi \vee (\phi \to \psi) \models \beta$. Esto es una contradicción por el axiona (**Ax9**).

(vNeg) Supongamos que $v(\neg\phi) = 0$, y supongamos además por el absurdo $v(\phi) = 0$. Entonces, $\neg\phi \notin \Gamma$ y $\phi \notin \Gamma$. Como Γ es maximal, $\Gamma, \neg\phi \models \beta$ y $\Gamma, \phi \models \beta$. Luego, haciendo una prueba por casos se puede verificar que $\Gamma \models \beta$, lo que es una contradicción.

(vCf) Supongamos que $v(\neg\neg\phi) = 1$. Entonces, $\neg\neg\phi \in \Gamma$. Como Γ es cerrado, $\neg\neg\phi \to \phi \in \Gamma$, por el axioma (**Ax11**). Por modus ponens, $\phi \in \Gamma$, es decir, $v(\phi) = 1$.

(vWB$_1$) Supongamos que $v(\phi) = v(\neg\phi)$. Si $v(\phi) = 1 = v(\neg\phi)$ entonces $\phi, \neg\phi \in \Gamma$. Si $\circ\phi$ perteneciera a Γ, como Γ contiene a los axiomas, $\circ\phi \to (\phi \to (\neg\phi \to \psi)) \in \Gamma$ para toda fórmula ψ; y por modus ponens tendríamos que $\psi \in \Gamma$ para toda fórmula ψ. En particular β pertenecería a Γ, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\circ\phi \notin \Gamma$, es decir, $v(\circ\phi) = 0$. Si $v(\phi) = 0 = v(\neg\phi)$ entonces $\phi \notin \Gamma$ y $\neg\phi \notin \Gamma$. Como Γ es maximal no trivial con respecto a β tenemos que $\Gamma, \phi \models \beta$ y $\Gamma, \neg\phi \models \beta$; como vimos en el caso (**vNeg**) esto es una contradicción.

Análogamente se prueba que $v(\neg \circ \phi) = 1$.

($\mathbf{vWB_2}$) Se prueba con razonamientos análogos a los anteriores.

■

Teorema 1.3.2.11 *(de Completitud) Sea* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$.

$$\Gamma \models \alpha \quad \textit{implica} \quad \Gamma \vdash \alpha$$

Dem. Supongamos que $\Gamma \nvdash \alpha$ y sea Δ un conjunto maximal no trivial con respecto a α que extiende a Γ. Sabemos que tal conjunto existe por el teorema de Lindembaum-Łos. Por el Teorema 1.3.2.10, existe una valuación v tal que $v(\Gamma) \subseteq \{1\}$ y $v(\alpha) = 0$, pues $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\alpha \notin \Delta$. Luego, $\Gamma \not\models \alpha$ lo que es una contradicción. ■

Para finalizar, enunciamos el siguiente resultado que se demuestra en forma directa.

Teorema 1.3.2.12 C_1 *es una* **LFI** *con* $\bigcirc(p) = \{\circ p\} = \{\neg(p \wedge \neg p)\}$

Capítulo 2

Álgebras de Stone involutivas

En este capítulo haremos una revisión de la teoría de las álgebras de Stone involutivas, incluyendo todos aquellos resultados conocidos acerca de las mismas. Muchos de estos son fundamentales para el desarrollo posterior de este trabajo, como veremos en el Capítulo 3. En primer lugar, nos referiremos a los motivos que llevaron a considerar el estudio de estas álgebras. Veremos que la clase de las álgebras de Stone involutivas puede ser definida mediante ecuaciones, es decir, ésta constituye una variedad. Estudiaremos sus propiedades básicas y su relación con otras clases de álgebras conocidas. Presentaremos una dualidad topológica estilo Priestley para ellas y la utilizaremos para, entre otras cosas, determinar los miembros subdirectamente irreducibles y simples de esta clase de álgebras. La mayoría de estos resultados fueron obtenidos por R. Cignoli y M. Sagastume en [12, 13].

2.1. Introducción

En [12], R. Cignoli y M. Sagastume de Gallego se propusieron caracterizar a las álgebras de Łukasiewicz–Moisil 5–valuadas como álgebras de De Morgan, cuyos elementos complementados verificaran ciertas condiciones, para luego obtener las correspondientes caracterizaciones de las álgebras de Łukasiewicz–Moisil 4–valuadas y 3–valuadas como casos particulares. Estos autores buscaban dar un primer paso en la obtención de una posible caracterización algebraica de las lógicas de Łukasiewicz n–valuadas en términos de retículos, lo que les permitiría compararlas con otros cálculos proposicionales y evaluar posibles aplicaciones a la teoría de circuitos y de programación. Es en este contexto, que fueron introducidas las álgebras de Stone involutivas.

Recordemos que si $\mathbb{L} = \langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo, un elemento $a \in L$ se dice *elemento complementado* si existe $b \in L$ tal que $a \vee b = 1$ y $a \wedge b = 0$, además b se dice *el complemento* de a, b es único y lo denotaremos con a'.

Denotaremos con $B(L)$ al centro de L, esto es, $B(L)$ es el conjunto de todos los elementos complementados de L.

Sea $\mathbb{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ un álgebra de De Morgan. Entonces,

Proposición 2.1.1 *$B(A)$ es una subálgebra de De Morgan de A.*

Dem. Es claro que $B(A) \neq \emptyset$ pues $0, 1 \in B(A)$. Además, dados a y $b \in B(A)$ no es difícil verificar que $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ y $(a \wedge b)' = a' \vee b'$. Por lo tanto $a \vee b$ y $a \wedge b \in B(A)$. Por otro lado, si $a \in B(A)$, existe $b \in A$ tal que $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$. Sea $c = \neg b$, entonces $\neg a \wedge c = \neg a \wedge \neg b = \neg(a \vee b) = \neg 1 = 0$ y $\neg a \vee c = \neg a \vee \neg b = \neg(a \wedge b) = \neg 0 = 1$. Esto es, $\neg a \in B(A)$. ■

Denotemos con $K(A)$ al conjunto de todos los elementos $a \in A$ tales que la negación de De Morgan de a, $\neg a$, coincide con el complemento de a, es decir

$$K(A) = \{k \in A : \neg k = k'\}.$$

Entonces,

Proposición 2.1.2 *$K(A)$ es una subálgebra de De Morgan de $B(A)$.*

Dem. Como $\neg 1 = 0 = 1'$ tenemos que $0 \in K(A)$ y por lo tanto $K(A) \neq \emptyset$. Sean $x, y \in K(A)$, entonces $\neg x = x'$ y $\neg y = y'$. Luego, $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y = x' \wedge y' = (x \vee y)'$ y análogamente se tiene que $\neg(x \wedge y) = (x \wedge y)'$. Por otro lado, si $x \in K(A)$, $\neg(\neg x) = \neg(x') = (x')' = (\neg x)'$, esto es, $\neg x \in K(A)$. ■

Para cada $a \in A$, sea K_a el conjunto de todos los elementos de $K(A)$ mayores o iguales a a, esto es,

$$K_a = \{k \in K(A) : a \leq k\}.$$

Si K_a tiene primer elemento, lo denotaremos con ∇a. Entonces,

Definición 2.1.3 *(Cignoli et al. [12]) Se llama clase de las álgebras de Stone involutivas, notada* **S***, a la clase de las álgebras de De Morgan A tales que:*

(i) para todo $a \in A$ existe ∇a,

(ii) la correspondencia $a \mapsto \nabla a$ es un homomorfismo de retículos.

Proposición 2.1.4 *Si A es un álgebra de Stone involutiva entonces:*

(i) $\nabla A = K(A)$,

(ii) $x \in \nabla A$ *si y solo si* $x = \nabla x$,

(iii) $\nabla(x \vee y) = \nabla x \vee \nabla y$.

Dem. (i) Sea $x \in \nabla A$. Entonces, $x = \nabla a$ para algún $a \in A$. Como ∇a es el primer elemento de K_a, tenemos que $x = \nabla a \in K_a \subseteq K(A)$. Por otro lado, si $x \in K(A)$ entonces x es el primer elemento de $K_x = \{k \in K(A) : x \leq k\}$ ya que $x \in K_x$ y si $k \in K_x$ entonces $x \leq k$. Luego, $\nabla x = x$ y $x \in \nabla A$.
(ii) La implicación ($\Rightarrow$) es consecuencia de (i). La recíproca ($\Leftarrow$) es inmediata
(iii) Inmediato pues por hipótesis ∇ es un homomorfismo de retículos. ■

El siguiente teorema nos muestra que la clase **S** puede ser definida mediante ecuaciones, es decir, **S** constituye una variedad.

Teorema 2.1.5 *(Cignoli et al. [13])* **S** *es una clase ecuacional. Más aún, un álgebra de De Morgan $A \in$* **S** *si y solo si existe un operador $\nabla : A \to A$ que satisface las siguientes identidades:*

(SI1) $\nabla 0 = 0$,

(SI2) $a \wedge \nabla a = a$,

(SI3) $\nabla(a \wedge b) = \nabla a \wedge \nabla b$,

(SI4) $\neg \nabla a \wedge \nabla a = 0$.

Dem. ($\Rightarrow$) Sea $A \in$ **S** y sea, para todo $a \in A$, ∇a el primer elemento del conjunto $K_a = \{k \in K(A) : a \leq k\}$. Esto es, $\nabla a \in K_a$ y, si $k \in K_a$ entonces $\nabla a \leq k$. Supongamos además que la aplicación $a \mapsto \nabla a$ es un homomorfismo de retículos y veamos que valen (SI1)–(SI4).
Como $0 \in K(A)$, tenemos que $0 \in K_0$ y entonces $\nabla 0 \leq 0$. Pero, como 0 es primer elemento, $0 \leq \nabla 0$. Luego, $\nabla 0 = 0$. Como $\nabla a \in K_a$ se tiene que $a \leq \nabla a$ y entonces $a \wedge \nabla a = a$. (SI3) vale pues ∇ es homomorfismo de retículo. Finalmente, como $\nabla a \in K(A)$, sabemos que $\neg \nabla a = (\nabla a)'$ y entonces $\neg \nabla a \wedge \nabla a = (\nabla a)' \wedge \nabla a = 0$

($\Leftarrow$) Sea $\nabla : A \to A$ un operador que satisface (SI1)–(SI4). Veamos primero que vale la siguiente afirmación: si $k \in K(A)$, entonces $k = \nabla k$. En efecto, sea $k \in K(A)$, entonces $k \leq \nabla k$, por (SI2). Por otro lado, por (SI1) y (SI3) tenemos que $0 = \nabla 0 = \nabla(\neg k \wedge k) = \nabla \neg k \wedge \nabla k$, entonces $(\nabla \neg k \wedge \nabla k) \vee (\neg \nabla \neg k) = \neg \nabla \neg k$. Luego, distribuyendo se tiene que

$(\nabla\neg k \vee \neg\nabla\neg k) \wedge (\nabla k \vee \neg\nabla\neg k) = \neg\nabla\neg k$. De (SI4) se tiene $\nabla\neg k \vee \neg\nabla\neg k = 1$ y entonces $\nabla k \vee \neg\nabla\neg k = \neg\nabla\neg k$, es decir, (1) $\nabla k \leq \neg\nabla\neg k$. De $\neg k \leq \nabla\neg k$ tenemos que $\neg k \wedge \nabla\neg k = \neg k$. Luego, $\neg(\neg k \wedge \nabla\neg k) = \neg\neg k$, entonces $\neg\neg k \vee \neg\nabla\neg k = \neg\neg k$, es decir $\neg\nabla\neg k \leq \neg\neg k$. Luego, (2) $\neg\nabla\neg k \leq k$. De (1) y (2), $\nabla k \leq k$.

Veamos ahora que $\nabla A = K(A)$. Sea $x \in \nabla A$, entonces existe $k \in A$ tal que $x = \nabla k$. Por (SI4), tenemos que $\neg\nabla k \wedge \nabla k = 0$ y $\neg\nabla k \vee \nabla k = 1$. Por lo tanto, $x = \nabla k \in K(A)$.
Por otro lado, sea $k \in K(A)$. Por lo probado anteriormente, $k = \nabla k$, es decir, $k \in \nabla A$.

Probemos que:
(i) ∇a **es el primer elemento de** $K_a = \{k \in K(A) : a \leq k\}$. Por (SI2) y que $\nabla A = K(A)$ tenemos que $\nabla a \in K_a$. Sea $x \in K_a$, luego $x \in K(A)$. Por lo visto anteriormente, $x = \nabla x$. Es decir, $a \leq x$, esto es $a \wedge x = a$. Luego, $\nabla(a \wedge x) = \nabla a$, por (SI3) $\nabla a \wedge \nabla x = \nabla a$. Entonces, $\nabla a \leq \nabla x = x$, esto es, $\nabla a \leq x$. Luego, ∇a es el primer elemento de K_a.
(ii) ∇ **es un homomorfismo de retículos**. Solo tenemos que verificar que $\nabla(a \vee b) = \nabla a \vee \nabla b$, para todo $a, b \in A$. Como $a \leq \nabla a$ y $b \leq \nabla b$ (por (SI2)) se tiene que $a \vee b \leq \nabla a \vee \nabla b$, esto es $\nabla a \vee \nabla b \in K_{a\vee b}$. Sea $x \in K_{a\vee b} = \{x \in K(A) : a \vee b \leq x\}$. Entonces, $a \vee b \leq x$ y $\nabla(a \vee b)$ es el primer elemento de $K_{a\vee b}$. Luego, $a \leq x$ y $b \leq x$ y entonces, por (SI3), $\nabla a \leq \nabla x$ y $\nabla b \leq \nabla x$. Como $x \in K(A)$, por lo visto anteriormente, $x = \nabla x$ y entonces $\nabla a \leq x$ y $\nabla b \leq x$. Luego, $\nabla a \vee \nabla b \leq x$. Esto es, $\nabla a \vee \nabla b$ es primer elemento de $K_{a\vee b}$ y como el primer elemento es único, tenemos que $\nabla(a \vee b) = \nabla a \vee \nabla b$. ■

De ahora en más, en este trabajo, un álgebra de Stone involutiva es una estructura $\langle A, \wedge, \vee, \neg, \nabla, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ tal que

(i) $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ es un álgebra de De Morgan y

(ii) ∇ satisface (IS1)–(IS4).

Observación 2.1.6 *En toda álgebra de Stone involutiva el operador ∇ es monótono. En efecto, si $x \leq y$ entonces $x \wedge y = x$ y luego $\nabla(x \wedge y) = \nabla x$. Por (SI3), $\nabla x \wedge \nabla y = \nabla x$, esto es, $\nabla x \leq \nabla y$.*

A continuación mostraremos resultados acerca de las álgebras de Stone involutivas que nos serán de utilidad en el Capítulo 3.

Lema 2.1.7 *En toda álgebra de Stone involutiva valen:*

(SI5)	$\nabla 1 = 1,$	*(SI6)*	$\neg x \vee \nabla x = 1,$	*(SI7)*	$\nabla\nabla x = \nabla x,$
(SI8)	$\nabla\neg\nabla x = \neg\nabla x,$	*(SI9)*	$\nabla(x \vee \neg x) = 1,$		
(SI10)	$x \wedge \neg\nabla x = 0,$	*(SI11)*	$\nabla(x \vee \nabla y) = \nabla x \vee \nabla y.$		

Dem. (SI5): Inmediato.
(SI6): De (SI2) se tiene que $\neg x = \neg(x \wedge \nabla x) = \neg x \vee \neg\nabla x$, y entonces, $\neg x \vee \nabla x = \neg x \vee \neg\nabla x \vee \nabla x = \neg x \vee 1 = 1$.
(SI7): Es consecuencia de la Proposición 2.1.4 (ii).
(SI8): Es consecuencia de la Proposición 2.1.4 (i) y el hecho que $K(A)$ es una subálgebra de De Morgan de A (Proposiciones 2.1.2 y 2.1.1).
(SI9): De $x \leq \nabla x$ se tiene que $\neg\nabla x \leq \neg x$ y entonces $\nabla\neg\nabla x \leq \nabla\neg x$. Esto es, $\neg\nabla x \leq \nabla\neg x$, por (SI8). Luego, $1 = \neg\nabla x \vee \nabla x \leq \nabla\neg x \vee \nabla x = \nabla(\neg x \vee x) = \nabla(x \vee \neg x)$, pues ∇ es homomorfismo de retículos .
Finalmente, (SI10) y (SI11) son consecuencia de (SI6), (SI7) y del hecho que ∇ es un homomorfismo de retículos. ■

2.2. El pseudocomplemento $\star$ y el operador dual Δ

En esta sección veremos que toda álgebra de Stone involutiva admite una estructura de retículo pseudocomplementado. Esto es, en toda álgebra $A \in \mathbf{S}$ es posible definir la operación unaria sobre A, $\star : A \to A$, del siguiente modo:

$$a^\star =_{def.} \neg\nabla a,$$

entonces, $\star$ es un pseudo-complemento sobre A.

Lema 2.2.1 *La operación $\star$ verifica lo siguiente:*

(i) $\star$ es antítona, i.e., si $x \leq y$ entonces $y^\star \leq x^\star$. Además, $1^\star = 0$ y $0^\star = 1$.

(ii) $\star\star$ es una clausura, i.e., se verifican:

(a) $x \leq x^{\star\star}$,
(b) $x \leq y$ implica $x^{\star\star} \leq y^{\star\star}$,
(c) $(x^{\star\star})^{\star\star} = x^{\star\star}$.

Dem.
(i) Si $x \leq y$, por la Obsevación 2.1.6 tenemos que $\nabla x \leq \nabla y$. Luego, $\neg\nabla y \leq \neg\nabla x$ esto es $y^\star \leq x^\star$. Además, es inmediato que $0^\star = 1$ y $1^\star = 0$, por (SI5).
(ii) (a)

$$\begin{aligned} x \wedge x^{\star\star} &= x \wedge \neg\nabla(\neg\nabla x) & \\ &= \neg(\neg x \vee \nabla(\neg\nabla x)) & \text{(Leyes de De Morgan)} \\ &= \neg(\neg x \vee \neg\nabla x) & \text{(SI8)} \\ &= \neg\neg(x \wedge \nabla x) & \text{(Leyes de De Morgan)} \\ &= x \wedge \nabla x = x & \text{(SI2)} \end{aligned}$$

(b) Inmediato por el inciso (i).
(c)

$$\begin{aligned}
(x^{\star\star})^{\star\star} &= (\neg\nabla(\neg\nabla x))^{\star\star} \\
&= \neg\nabla(\neg\nabla(\neg\nabla(\neg\nabla x))) \\
&= \neg\nabla(\neg\nabla(\neg\neg\nabla x)), && \text{(SI8)} \\
&= \neg\nabla(\neg\nabla\nabla x), \\
&= \neg\nabla(\neg\nabla x), && \text{(SI7)} \\
&= x^{\star\star}
\end{aligned}$$

■

Además,

Lema 2.2.2 *En toda álgebra de Stone involutiva se verifica:*

(i) $x^{\star} = x^{\star\star\star}$,

(ii) $(x \vee y)^{\star} = x^{\star} \wedge y^{\star}$,

(iii) $(x \wedge y)^{\star\star} = x^{\star\star} \wedge y^{\star\star}$,

(iv) $x^{\star} \vee x^{\star\star} = 1$.

Dem. Análoga a la del lema anterior. ■

Cignoli y Sagastume observaron en [13] que si A es un álgebra de Stone involutiva, entonces $x^{\star\star} = \nabla x$. Como $x^{\star} \vee x^{\star\star} = 1$ se tiene que A es un retículo de Stone. El pseudocomplemento dual x^{+} de x también existe ($x^{+} = \nabla\neg x$) y por lo tanto A es un retículo de Stone dual. Es decir, la clase $\mathbf{S}$ es una subclase de la clase de los retículos de Stone dobles.

Observación 2.2.3 *(Cignoli et al. [13]) Es bien sabido, que si A es un retículo de Stone, se tiene: $a \in B(A)$ si y solo si $a = a^{\star\star}$. Luego, si A es un álgebra de De Morgan que también es un retículo de Stone y si definimos $\nabla x = x^{\star\star}$ se tiene que las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\langle A, \vee, \wedge, \neg, \nabla, 0, 1\rangle \in \mathbf{S}$,

(ii) $x^{\star} = \neg(x^{\star\star})$ *para todo* $x \in A$,

(iii) $B(A) = K(A)$.

Por otro lado, como es usual en la teoría de operadores modales, en toda álgebra $A \in \mathbf{S}$ es posible definir el operador dual de ∇, notado Δ, como una operación unaria sobre A, del siguiente modo:

$$\Delta a =_{def.} \neg\nabla\neg a$$

Este operador tiene las siguientes propiedades:

Lema 2.2.4 *En toda álgebra de Stone involutiva A, se verifican las siguientes identidades:*

(SI12) $\Delta a \leq a$,

(SI13) $\Delta\nabla a = \nabla a$, $\nabla\Delta a = \Delta a$,

(SI14) $\Delta\neg a = a^{\star}$,

(SI15) $\Delta(a \wedge \neg a) = 0$,

(SI16) $\Delta a \wedge a^{\star} = 0$,

(SI17) $\Delta(a \wedge b) = \Delta a \wedge \Delta b$, $\Delta(a \vee b) = \Delta a \vee \Delta b$.

Dem.

(SI12) De (SI2) sabemos que $a \leq \nabla a$. En particular, $\neg a \leq \nabla\neg a$, luego $\neg\neg a \geq \neg\nabla\neg a$ esto es $\Delta a = \neg\nabla\neg a \leq a$.

(SI13) Si $a \in K(A)$ sabemos que $\nabla a = a$ y $\neg a \in K(A)$. Por la Proposición 2.1.4 (ii), tenemos que $\nabla\neg a = \neg a$, y entonces $\neg\nabla\neg a = \neg\neg a$ es decir $\Delta a = a$. Como $K(A) = \nabla(A)$ (por la Proposición 2.1.4 (i)) si $a \in A$ entonces $\nabla a \in K(A)$ y por lo tanto $\Delta\nabla a = \nabla a$. Además, si $a \in K(A)$ entonces $\neg a \in K(A)$ (por la Proposición 2.1.2). Luego $\nabla\neg a = \neg a$ y entonces $\neg\nabla\neg a = \neg\neg a$ es decir $\Delta a = a$. Por otro lado, como $\nabla a = a$ se tiene que $\nabla\Delta a = \Delta a$.

(SI14) $\Delta\neg a = \neg\nabla\neg(\neg a) = \neg\nabla a = a^{\star}$.

(SI15) $\Delta(a \wedge \neg a) = \neg\nabla(\neg(a \wedge \neg a)) = \neg\nabla(\neg a \vee a) = \neg\nabla 1 = \neg 1 = 0$.

(SI16) $\Delta a \wedge a^{\star} = \neg\nabla\neg a \wedge \neg\nabla a = \neg(\nabla\neg a \vee \nabla a) = \neg(\neg a \vee a) = \neg 1 = 0$.

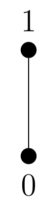
(SI17) Análoga a las anteriores.

$\blacksquare$

2.3. Ejemplos de álgebras de Stone involutivas

A continuación mostraremos diversos ejemplos de álgebras de Stone involutivas, algunas de las cuales jugarán un rol importante en la variedad **S**. Los primeros cuatro ejemplos son las conocidas cadenas de Łukasiewicz $Ł_k$, $2 \leq k \leq 5$, con estructura de álgebra de Stone involutiva. El ejemplo (6) es muy importante, como veremos más adelante.

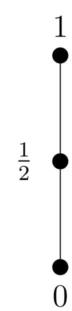
(1) $Ł_2 = \langle \{0, 1\}, \wedge, \vee, \neg, \nabla, 0, 1\rangle$ dada por



y

x	$\neg x$	∇x	$x^\star$	Δx
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

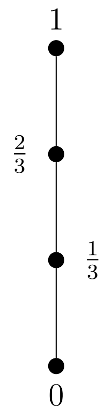
(2) $Ł_3 = \langle \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \wedge, \vee, \neg, \nabla, 0, 1\rangle$ dada por



y

x	$\neg x$	∇x	$x^\star$	Δx
0	1	0	1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0
1	0	1	0	1

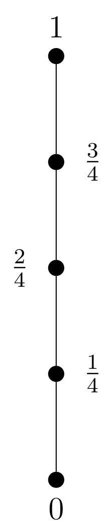
(3) $Ł_4 = \langle \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}, \wedge, \vee, \neg, \nabla, 0, 1 \rangle$ dada por



y

x	$\neg x$	∇x	$x^\star$	Δx
0	1	0	1	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	0
1	0	1	0	1

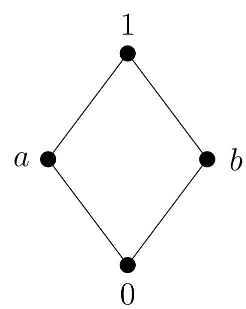
(4) $Ł_5 = \langle \{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\}, \wedge, \vee, \neg, \nabla, 0, 1 \rangle$ dada por



y

x	$\neg x$	∇x	$x^\star$	Δx
0	1	0	1	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	0	0
$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	1	0	0
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0
1	0	1	0	1

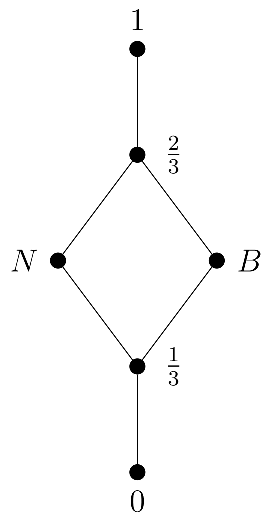
(5) $\mathbb{B}_2 = \langle \{0, a, b, 1\}, \wedge, \vee, \neg, \nabla, 0, 1\rangle$ dada por



y

x	$\neg x$	∇x	$x^\star$	Δx
0	1	0	1	0
a	b	a	b	a
b	a	b	a	b
1	0	1	0	1

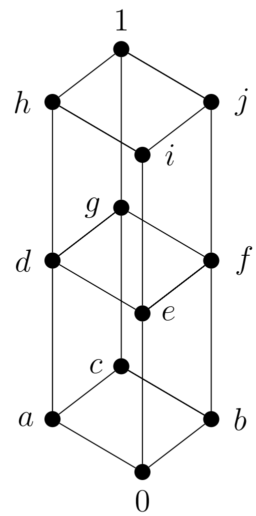
(6) $\mathfrak{S}_6 = \langle \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, N, B, 1\}, \wedge, \vee, \neg, \nabla, 0, 1 \rangle$ dada por



y

x	$\neg x$	∇x	$x^\star$	Δx
0	1	0	1	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0
N	N	1	0	0
B	B	1	0	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	0
1	0	1	0	1

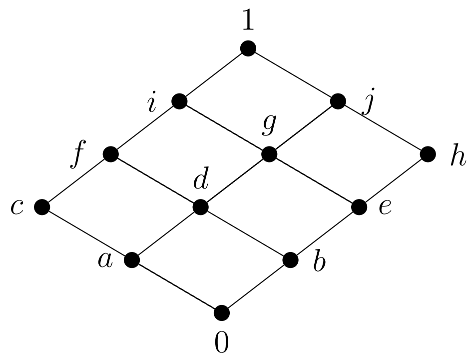
(7) $\mathbb{A} = \langle \{0, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, 1\}, \wedge, \vee, \neg, \nabla, 0, 1 \rangle$ dada por



y

x	$\neg x$	∇x	$x^\star$	Δx
0	1	0	1	0
a	h	c	i	0
b	j	c	i	0
c	i	c	i	c
d	d	1	0	0
e	g	i	c	0
f	f	1	0	0
g	e	1	0	0
h	a	1	0	i
i	c	i	c	i
j	b	1	0	i
1	0	1	0	1

(8) $\mathbb{A} = \langle \{0, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, 1\}, \wedge, \vee, \neg, \nabla, 0, 1\rangle$ dada por



y

x	$\neg x$	∇x	$x^\star$	Δx
0	1	0	1	0
a	j	c	h	0
b	i	h	c	0
c	h	c	h	c
d	g	1	0	0
e	f	h	c	0
f	e	1	0	c
g	d	1	0	0
h	c	h	c	h
i	b	1	0	c
j	a	1	0	h
1	0	1	0	1

A continuación exhibiremos dos ejemplos importantes debidos a Cignoli y Sagastume. Recordemos que fue Moisil, en 1941, quien primero intentó presentar una semántica algebraica para el *Cálculo Proposicional Łukasiewicz finito–valuado* (o $(n+1)-$ŁPC). En esta dirección, introdujo las hoy conocidas como *álgebras de Łukasiewicz-Moisil de orden $(n+1)$* (o álgebras de Łukasiewicz-Moisil $(n+1)$-valuadas) (ver [4]), siendo n un entero positivo, como sigue:

Definición 2.3.1 *Un álgebra de* Łukasiewicz-Moisil de orden $(n+1)$ *es un álgebra* $\langle A, \vee, \wedge, \sim, (\phi_i)_{i\in J}, 0, 1\rangle$ *de tipo* $(2, 2, 1, (1)_{i\in J}, 0)$ *donde* $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ *y tal que* $\langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ *es un álgebra de De Morgan y* $(\phi_i)_{i\in J}$*, son operadores unarios sobre* A *tales que: para todo* $i, j \in J$*,*

(C1) $\phi_i(x \vee y) = \phi_i x \vee \phi_i y$*,*

(C2) $\phi_i x \vee \sim \phi_i x = 1$,

(C3) $\phi_i \phi_j x = \phi_j x$,

(C4) $\phi_i \sim x = \sim \phi_{n+1-i} x$,

(C5) $i \leq j$ *implica* $\phi_i x \leq \phi_j x$,

(C6) $\phi_i x = \phi_i y$ *para todo* $i \in J$ *implican* $x = y$.

El *álgebra de Łukasiewicz-Moisil de orden (n+1) estandar* es $\mathcal{L}_{n+1} = \langle L_{n+1}, \vee, \wedge, \sim, (\sigma_i)_{i \in J}, 0, 1 \rangle$ donde:

$$L_{n+1} = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\},$$

$$x \vee y = \max(x, y),$$

$$x \wedge y = \min(x, y),$$

$$\sim x = 1 - x,$$

y

$$\sigma_i\left(\frac{j}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{if } j + i < n + 1 \\ 1 & \text{if } j + i \geq n + 1 \end{cases}, \text{ para todo } j \in \{0\} \cup J, i \in J. \tag{2.1}$$

Observación 2.3.2 *De la definición anterior es fácil verificar que en toda álgebra de Łukasiewicz-Moisil de orden $(n+1)$, se verifica: $x \leq y$ si y sólo si $\phi_i x \leq \phi_i y$ para todo $i \in J$.*

Proposición 2.3.3 *(Cignoli et al. [13]) Si $\langle A, \vee, \wedge, \sim, (\phi_i)_{i \in J}, 0, 1 \rangle$ es un álgebra de Łukasiewicz-Moisil de orden $(n+1)$, entonces el reducto $\langle A, \vee, \wedge, \sim, \phi_n, 0, 1 \rangle$ es un álgebra de Stone involutiva.*

Dem. Basta probar que valen de (SI1) a (SI4) del Teorema 2.1.5.

(SI2): Si $i \in J$ tenemos que $\phi_i(x \vee \phi_n x) \overset{(C1)}{=} \phi_i x \vee \phi_i \phi_n x \overset{(C3)}{=} \phi_i x \vee \phi_n x \overset{(C5)}{=} \phi_n x$. Por otro lado, $\phi_i \phi_n x \overset{(C3)}{=} \phi_n x$. Por (C6) se tiene que $x \vee \phi_n x = \phi_n x$ esto es $x \leq \phi_n x$.

(SI3): $\phi_n(x \wedge y) = \phi_n({\sim\sim}\, x \wedge {\sim\sim}\, y) = \phi_n({\sim}\,({\sim}\, x \vee {\sim}\, y)) \overset{(C4)}{=} {\sim}\, \phi_1({\sim}\, x \vee {\sim}\, y) \overset{(C1)}{=}$
$= {\sim}\,(\phi_1 {\sim}\, x \vee \phi_1 {\sim}\, y) = {\sim}\, \phi_1 {\sim}\, x \wedge {\sim}\, \phi_1 {\sim}\, y \overset{(C4)}{=} {\sim\sim}\, \phi_n x \wedge {\sim\sim}\, \phi_n y = \phi_n x \wedge \phi_n y$.

(SI4): Inmediato de (C2).

(SI1): Sea $j \in J$, y sea $x \in A$ por (C2) tenemos que $\phi_j x \wedge {\sim}\, \phi_j x = 0$. Luego, $\phi_i(\phi_j x \wedge {\sim}\, \phi_j x) = \phi_i 0$, para todo $i \in J$. Luego, por (SI2) se tiene que, $\phi_i \phi_j x \wedge \phi_i {\sim}\, \phi_j x = \phi_i 0$; por (C2), (C3) y (C4) $\phi_j x \wedge {\sim}\, \phi_{n+1-i} \phi_j x = \phi_j x \wedge {\sim}\, \phi_j x = 0 = \phi_i 0$. En particular, $\phi_n 0 = 0$. Teniendo en cuenta la Observación 2.3.2 queda probada la proposición. ■

En particular, si $n = 3$ tenemos que

Proposición 2.3.4 *(Cignoli et al. [13]) Si $\langle A, \vee, \wedge, \sim, \phi_1, \phi_2, 0, 1 \rangle$ es un álgebra de Łukasiewicz-Moisil de orden 3, entonces $\langle A, \vee, \wedge, \sim, \phi_2, 0, 1 \rangle$ es un álgebra de Stone involutiva que verifica la desigualdad*

$$a \wedge \phi_2 {\sim}\, a \leq b \vee {\sim}\, \phi_2 b$$

Dem. Sean $a, b \in A$. $\phi_1(a \wedge \phi_2 {\sim}\, a) \overset{(SI3)}{=} \phi_1 a \wedge \phi_1 \phi_2 {\sim}\, a \overset{(C4)}{=} \phi_1 a \wedge \phi_1 {\sim}\, \phi_1 a$ $\overset{(C4)}{=} \phi_1 a \wedge {\sim}\, \phi_2 \phi_1 a \overset{(C3)}{=} \phi_1 a \wedge {\sim}\, \phi_1 a = 0$. Luego, $\phi_1(a \wedge \phi_2 {\sim}\, a) \leq \phi_1(b \vee {\sim}\, \phi_2 b)$. Por otro lado, $\phi_2(a \wedge \phi_2 {\sim}\, a) = \phi_2 a \wedge \phi_2 \phi_2 {\sim}\, a \overset{(C3)}{=} \phi_2 a \wedge \phi_2 {\sim}\, a = \phi_2(a \wedge {\sim}\, a) = \phi_2 0 = 0$. Esto es, $\phi_2(a \wedge \phi_2 {\sim}\, a) \leq \phi_2(b \vee {\sim}\, \phi_2 b)$ y, por la Observación 2.3.2, se tiene $a \wedge \phi_2 {\sim}\, a \leq b \vee {\sim}\, \phi_2 b$. ■

Por otro lado, si A es un álgebra de Stone involutiva en la cual se verifica la desigualdad $a \wedge \nabla \neg a \leq b \vee \neg \nabla b$, es fácil verificar que la estructura $\langle A, \vee, \wedge, \neg, \Delta, \nabla, 0, 1 \rangle$ es una álgebra de Łukasiewicz-Moisil 3–valuada. Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

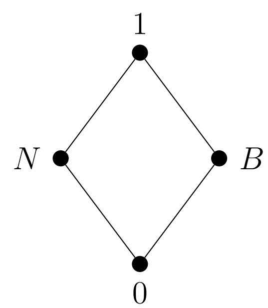
Proposición 2.3.5 *(Cignoli et al. [13]) La clase de las álgebras de Łukasiewicz-Moisil 3- valuadas coincide con la clase de las álgebras de Stone involutivas que verifican la identidad*

$$(a \wedge \nabla \neg a) \vee (b \vee \neg \nabla b) = b \vee \neg \nabla b$$

2.4. Estructura de álgebra de Stone involutiva sobre un álgebra de De Morgan

En esta sección, analizaremos condiciones necesarias y suficientes para que diversas álgebras de De Morgan admitan una estructura de álgebra de Stone involutiva.

Comencemos observando que no toda álgebra de De Morgan admite estructura de álgebra de Stone involutiva. En efecto, consideremos el retículo asociado a la conocida *lógica relevante de Belnap* 4-valuada $\mathfrak{B}_4$ dado por



donde $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$, $\neg N = N$ y $\neg B = B$. En este caso, $K(\mathfrak{B}_4) = \{0, 1\}$, además, $\nabla 0 = 0$ y $\nabla N = 1 = \nabla B = \nabla 1$. Entonces, $\nabla(N \wedge B) = \nabla 0 = 0$ y, por otro lado, $\nabla N \wedge \nabla B = 1 \wedge 1 = 1$. Luego, ∇ no es un homomorfismo de retículos.

Dados los posets $\mathbf{P} = (P, \leq)$ y $\mathbf{Q} = (Q, \leq)$, una función $f : P \to Q$ se dice **residuada** si existe $f^* : Q \to P$ tal que para todo $p \in P$ y para todo $q \in Q$ se verifica:

$$f(p) \leq q \iff p \leq f^*(q).$$

En este caso, se dice que f y f^* son un *par residuado* (o *par adjunto*), que f^* es un *residuo a derecha* (o *adjunto a derecha*) de f y que f es un *residuo a izquierda* (o *adjunto a izquierda*) de f^*.

Lema 2.4.1 *Si f y f^* son un par residuado, entonces f y f^* son monótonas.*

Dem. Sean $a \leq b$ en P. Como f y f^* es un par residuado,

$$f(b) \leq f(b) \iff b \leq f^*(f(b))$$

y por lo tanto,

$$a \leq b \Longrightarrow a \leq f^*(f(b)) \iff f(a) \leq f(b).$$

■

El siguiente teorema nos provee condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra de De Morgan admita estructura de álgebra de Stone involutiva.

Teorema 2.4.2 *Sea A un álgebra de De Morgan y sea $K \subseteq A$ su centro. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) A admite estructura de álgebra de Stone involutiva,

(ii) el homomorfismo inclusión $\iota : K \hookrightarrow A$ tiene un adjunto a izquierda $f : A \to K$ compatible con el ínfimo, esto es, para todo $x, y \in A$ vale que $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

Dem. $(i) \Rightarrow (ii)$
Como A admite estructura de álgebra de Stone involutiva, existe un operador $\nabla : A \to A$ que verifica de (SI1) a (SI4) del Teorema 2.1.5. Por la Proposición 2.1.4 (i), sabemos que la imagen de ∇ es K. Luego, podemos pensar a $\nabla : A \to K$. Entonces, $f = \nabla$ es adjunto a izquierda de ι. En efecto, sea $a \in A$ y sea $k \in K$

$$f(a) \leq k \Leftrightarrow \nabla a \leq k \Leftrightarrow a \leq k \Leftrightarrow a \leq \iota(k)$$

Además, por (SI3), f es compatible con el ínfimo.
$(ii) \Rightarrow (i)$
Supongamos que $\iota : K \to A$ tiene un adjunto a izquierda $f : A \to K$ que es compatible con el ínfimo. Veamos que la estructura $\langle A, \vee, \wedge, \neg, f, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Stone involutiva.
Sea $a \in A$ y sea $k \in K_a = \{q \in K : a \leq q\}$. Entonces, $a \leq k$, esto es, $a \leq \iota(k)$. Como f es adjunto a izquierda de ι se tiene que $f(a) \leq k$. Por otro lado, de $f(a) \leq f(a)$ se tiene que $a \leq \iota(f(a)) = f(a)$, luego, $f(a) \in K_a$. Hemos probado que $f(a)$ es el primer elemento de K_a. Falta ver que f es homomorfismo de retículos y para esto solo falta probar que f es compatible con $\vee$.
Sean $a, b \in A$. Como $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$, por el Lema 2.4.1, $f(a) \leq f(a \vee b)$ y $f(b) \leq f(a \vee b)$ luego $f(a) \vee f(b) \leq f(a \vee b)$. Por otro lado, como $a \leq f(a)$ y $b \leq f(b)$ se tiene que $a \vee b \leq f(a) \vee f(b) = \iota(f(a) \vee f(b))$. Como f es adjunto a izquierda de ι tenemos que $f(a \vee b) \leq f(a) \vee f(b)$. ■

Dado un conjunto no vacío X, una *involución* sobre X es una función $f : X \to X$ que verifica, para todo $x \in X$

$$f(f(x)) = x$$

Claramente, toda involución es una biyección y, se verifica, $f = f^{-1}$. Recíprocamente, toda biyección f sobre X que verifica $f = f^{-1}$, es una involución.

Por otro lado, para todo A, notamos al complemento de A como $\mathcal{C}A = X \setminus A$ y definimos una operación unaria sobre $\mathcal{P}(A)$ del siguiente modo

$$\neg_f A = \mathcal{C}f(A) = \mathcal{C}f^{-1}(A)$$

Luego,

Teorema 2.4.3 *([41]) Sea X un conjunto no vacío y f una involución sobre X. La estructura $\langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup, \neg_f, \emptyset, X\rangle$ es un álgebra de De Morgan.*

Dem. Es bien sabido que $\langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup, \emptyset, X\rangle$ es un retículo distributivo acotado. Por otro lado, si $A \subseteq X$ entonces $\neg_f\neg_f A = \neg\mathcal{C}f(A) = \mathcal{C}f(\mathcal{C}f(A))$. Como f es una involución (y por lo tanto biyectiva) tenemos que $\mathcal{C}f(\mathcal{C}f(A)) = \mathcal{C}\mathcal{C}f(f(A)) = A$. Además, $\neg_f(A \cup B) = \mathcal{C}f(A \cup B) = \mathcal{C}(f(A) \cup f(B)) = \mathcal{C}f(A) \cap \mathcal{C}f(B) = \neg_f A \cap \neg_f B$. ■

Es interesante saber que elementos del álgebra $\langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup, \neg_f, \emptyset, X\rangle$ forman el conjunto $K(\mathcal{P}(X))$.

Lema 2.4.4 *$A \in K(\mathcal{P}(X))$ si, y solo si, $f(A) = A$.*

Dem.

$$\begin{array}{rcl} A \in K(\mathcal{P}(X)) & \Leftrightarrow & A \cap \neg_f A = \emptyset \text{ y } A \cup \neg_f A = X \\ & \Leftrightarrow & \neg_f A \subseteq \mathcal{C}A \text{ y } \mathcal{C}A \subseteq \neg_f A \\ & \Leftrightarrow & \neg_f A = \mathcal{C}A \\ & \Leftrightarrow & \mathcal{C}f(A) = \mathcal{C}A \\ & \Leftrightarrow & A = f(A) \end{array}$$

■

Observemos que si $f = id_X$ entonces $\neg_f A = \mathcal{C}A = X \setminus A$ es el complemento de A.

Teorema 2.4.5 *Sea X un conjunto no vacío y f una involución sobre X. Entonces, la estructura $\langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup, \neg_f, \nabla_f, \emptyset, X\rangle$ es un álgebra de Stone involutiva donde para cada $A \subseteq X$, $\neg_f A = \mathcal{C}f(A)$ y*

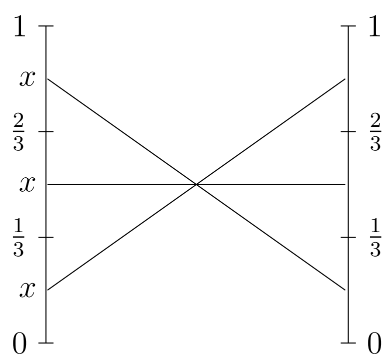
$$\nabla_f A = \bigcap\{Z \subseteq X : f(Z) = Z \text{ y } A \subseteq Z\}$$

Dem. Solo queda probar que ∇_f verifica de (SI1) a (SI4). Como $f(\emptyset) = \emptyset$ se tiene que $\nabla_f\emptyset = \emptyset$. Además, $f(\nabla_f A) = f(\bigcap\{Z \subseteq X : f(Z) = Z \text{ y } A \subseteq Z\}) =$
$= \bigcap f(\{Z \subseteq X : f(Z) = Z \text{ y } A \subseteq Z\}) = \bigcap\{f(Z) : f(Z) = Z \text{ y } A \subseteq Z\} = \nabla_f A$. Luego, es claro que $A \subseteq \nabla_f A$, pues f es biyectiva.
Por otro lado, $\nabla_f(A \cap B) = \bigcap\{Z \subseteq X : f(Z) = Z \text{ y } A \cap B \subseteq Z\}$, como $f(\nabla_f A) = \nabla_f A$ y

$A \cap B \subseteq A \subseteq \nabla_f A$, tenemos que $\nabla_f(A \cap B) \subseteq \nabla_f A$. Análogamente, se prueba que $\nabla_f(A \cap B) \subseteq \nabla_f B$ y por lo tanto $\nabla_f(A \cap B) \subseteq \nabla_f A \cap \nabla_f B$. Recíprocamente, si $Z \subseteq X$ es tal que $A \cap B \subseteq Z$, entonces $(A \cap B) \cup Z = Z$ y entonces $(A \cup Z) \cap (B \cup Z) = Z$. Aplicando f a ambos miembros tenemos $f((A \cup Z) \cap (B \cup Z)) = f(A \cup Z) \cap f(B \cup Z) = f(Z) = Z$. Tomando $Z_1 = f(A \cup Z)$ y $Z_2 = f(B \cup Z)$ se tiene que $f(Z_i) = Z_i$, para $i = 1, 2$ y $A \subseteq Z_1$, $B \subseteq Z_2$ con $Z_1 \cap Z_2 = Z$.
Si $x \in \nabla_f A$ y $x \in \nabla_f B$ entonces $x \in Z_1$, para todo Z_1 tal que $f(Z_1) = Z_1$ y $A \subseteq Z_1$ y $x \in Z_2$, para todo Z_2 tal que $f(Z_2) = Z_2$ y $B \subseteq Z_2$.
Por otro lado, si $Z \subseteq X$ es tal que $f(Z) = Z$ y $A \cap B \subseteq Z$ sabemos por lo anterior que $Z = Z_1 \cap Z_2$ con $f(Z_i) = Z_i$, para $i = 1, 2$ y $A \subseteq Z_1$, $B \subseteq Z_2$. Luego, $x \in Z$ y como Z es arbitrario $x \in \nabla_f(A \cap B)$.
Finalmente, $\neg_f \nabla_f A \cap \nabla_f A = \mathcal{C} f(\nabla_f A) \cap \nabla_f A = \mathcal{C} \nabla_f A \cap \nabla_f A = \emptyset$. ∎

Para finalizar esta sección mostraremos un ejemplo de un álgebra de Stone involutiva de conjuntos. Sea $X = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ \\ 1 - x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$



Claramente, f es una involución sobre $[0, 1]$. En efecto, sea $x \in [0, 1]$. Si $x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ $\Rightarrow f(x) = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x) = x$. Por otro lado, $x \in [0, \frac{1}{3}] \Leftrightarrow f(x) \in [\frac{2}{3}, 1]$ y entonces $f(f(x)) = f(1 - x) = x$. Análogamente, si $x \in [\frac{2}{3}, 1]$, se tiene que $f(f(x)) = x$.

Luego, por el Teorema 2.4.5, $\langle \mathcal{P}([0, 1]), \cap, \cup, \neg, \nabla_f, \emptyset, X \rangle$ es un álgebra de Stone involutiva. En virtud del Lema 2.4.4 y la definición de f, es claro que

$$\left\{A : A \subseteq \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\} = \mathcal{P}\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) \subseteq K(\mathcal{P}([0,1])).$$

Pero, en $K(\mathcal{P}([0,1]))$ hay otros conjuntos como por ejemplo $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right)$.

2.5. Dualidad topológica para las álgebras de Stone involutivas

Cignoli y Sagastume en [13] adaptaron la construcción mostrada en la Sección 1.2 con el objeto de dar una dualidad topológica para las álgebras de Stone involutivas. Como mostraremos a continuación.
Un **s**–espacio es un **m**–espacio (X, g) que satisface la siguiente condición:

(S) Para cada $U \in D(X)$, U es abierto y $g((U]) = (U]$.

Si X y X' son **s**–espacios, una **s**–función $f : X \to X'$ es una **m**–función que verifica.

$$f(\operatorname{Max} X) \subseteq \operatorname{Max} X'$$

Denotamos con **s** a la categoría de los **s**–espacios junto con las **s**–funciones. Además, denotaremos con S a la categoría cuyos objetos son las álgebras de Stone involutivas y sus morfismos son los homomorfismos entre álgebras de Stone involutivas.

Sea A un objeto de $\mathcal{S}$. Como A es, en particular, un álgebra de De Morgan, podemos afirmar que A es un objeto de la categoría $\mathcal{M}$. Luego, sea $\Phi(A) = (X, g)$.
Como A es un retículo de Stone, se tiene por Priestley ([44], Proposición 2) que
$\sigma(\nabla a) = \sigma(a^{\star\star}) = (\sigma(a)]$ para cada $a \in A$. Como $\nabla a \in K(A)$, tenemos que $g((\sigma(a)] = (\sigma(a)]$.
Por lo tanto, $(X, g) \in \mathbf{s}$.
Recíprocamente, sea $(X, g) \in \mathbf{s}$. La condición (S) implica que $(U]$ es abierto y creciente para cada $U \in D(X)$. Luego, nuevamente por Priestley ([44], Proposición 2), tenemos que $D(X)$ es un retículo de Stone y $(U] = U^{**} = \nabla U$.
Luego, por la Observación 2.2.3, tenemos que $D_{\mathbf{s}}(X, g) = \langle D(X), \cup, \cap, \neg, \nabla, X, \emptyset\rangle$ es un objeto de $\mathcal{S}$. Además, como de la Observación 2.2.3 se deduce que los morfismos de la categoría $\mathcal{S}$ son los homomorfismos de álgebras de De Morgan que preservan el pseudocomplemento; y por la caracterización de los maps duales de los homomorfismos de las álgebras de Stone dadas por Priestley ([44], Proposición 5), se concluye que los maps duales de los morfismos en $\mathcal{S}$ son precisamente las **s**–funciones. Luego, si denotamos con Φ_S a la restricción del funtor Φ a la subcategoría $\mathcal{S}$ de $\mathcal{L}$ y denotamos con Ψ_S a la restricción del funtor Ψ a **s**, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.5.1 *(Cignoli et al. [13]) Las categorías* **s** *y* $\mathcal{S}^{op}$ *son naturalmente equivalentes. Más precisamente, los funtores composición* $\Psi_S\Phi_S$ *y* $\Phi_S\Psi_S$ *son naturalmente equivalentes a los funtores identidad de* $\mathcal{S}$ *y* **s**, *respectivamente.*

Sea $(X, g) \in \mathbf{s}$. Decimos que $Y \subseteq X$ cerrado e involutivo es un $\mathbf{S}$-conjunto si

$$[Y) \cap Max\, X \subseteq Y$$

Es bien sabido que si X es el espacio dual de un retículo distributivo pseudocomplementado, entonces el retículo de las congruencias que preservan el pseudocomplemento son de la forma $\Theta(Y)$, donde Y es un subconjunto cerrado de X tal que $[Y) \cap Max\, X \subseteq Y$ (ver [45], sección 4).

Teorema 2.5.2 *(Cignoli et al. [13]) Sea $A \in \mathbf{S}$ y $(X, g) = \Phi_S(A)$. El map $Y \mapsto \Theta(Y)$ establece un isomorfismo entre el retículo de los $\mathbf{S}$-conjuntos de X y el retículo de las congruencias de A, $Con(A)$.*

Dem. Fue probado por Priestley en, [45] Sección 4, que si X es el espacio dual de un retículo distributivo pseudocomplementado, entonces el retículo de las congruencias que preservan el pseudocomplemento son de la forma $\Theta(Y)$, donde Y es un subconjunto cerrado de X tal que $[Y) \cap Max\, X \subseteq Y$. De este resultado, el Lema 1.2.3 y la Observación 2.2.3 se completa la demostración del teorema. ■

Sea $(X, g) \in \mathbf{s}$. Como X es el espacio dual de un retículo de Stone, es bien sabido ([44], Proposición 3) que para cada $x \in X$ existe exactamente un $n_x \in Max\, X$ tal que $x \leq n_x$. Es claro que $n_{g(x)} = n_x$, para cada $x \in X$, pues si $g(x) \not\leq n_x$ entonces existiría un $U \in \Psi(X)$ tal que $g(x) \in U$ y $n_x \notin U$. Pero como $n_x \in Max\, X$, tendríamos que $n_x \notin (U]$. Pero esto es una contradicción ya que $g((U]) = (U]$ y entonces $(U]$ no tendría elementos comparables con X.
Para cada $x \in X$ definimos

$$Y_x = \{x, n_x, g(x), g(n_x)\}$$

Es claro que, Y_x es un $\mathbf{S}$-conjunto. Sea g_x la restricción de g a Y_x. Como $Y_x = \epsilon^{-1}(\Phi(\pi)(\Psi(X, g)/\Theta(Y_x)))$, se tiene que $(Y_x, g_x) \in \mathbf{s}$ y que $\Psi(Y_x, g_x) \cong \Psi(X, g)/\Theta(Y_x)$. Más aún, como $\bigcup_{x \in X} Y_x = X$ tenemos el siguiente resultado:

Lema 2.5.3 *(Cignoli et al. [13]) Sea A un álgebra de Stone involutiva tal que $\Phi(A) = (X, g)$. Entonces A es un producto subdirecto de la familia $\{\Phi(Y_x, g_x)\}_{x \in X}$.*

Dem. Es consecuencia de las consideraciones anteriores y el Teorema 2.5.2. ■

Luego, para cada $x \in X$ se tienen los siguientes casos posibles:

(1)	$g(n_x) = g(x) = x = n_x$		
(2a)	$g(n_x) = g(x) < x = n_x$	(2b)	$g(n_x) = x < g(x) = n_x$
(3)	$g(n_x) < g(x) = x < n_x$		
(4a)	$g(n_x) < g(x) < x < n_x$	(4b)	$g(n_x) < x < g(x) < n_x$
(5)	$g(n_x) < x$ y $g(x) < n_x$		y x y $g(x)$ no son comparables.

Observemos que en el caso (i), con $1 \leq i \leq 4$, $\Psi(Y_x, g_x) \cong Ł_{i+1}$. En el caso (5), $\Psi(Y_x, g_x) \cong \mathfrak{S}_6$. Luego tenemos:

Lema 2.5.4 *(Cignoli et al. [13]) Si $|Y_x| = j$, con $1 \leq j \leq 3$, entonces $\Psi(Y_x, g_x) \cong Ł_{j+1}$. Si $|Y_x| = 4$, y x es comparable con $g(x)$, entonces $\Psi(Y_x, g_x) \cong Ł_5$. Si x y $g(x)$ no son comparables, entonces $\Psi(Y_x, g_x) \approx \mathfrak{S}_6$.*

Teorema 2.5.5 *(Cignoli et al. [13]) Las álgebras de Stone involutivas subdirectamente irreducibles son $Ł_j$ con $2 \leq j \leq 5$, y $\mathfrak{S}_6$. Las álgebras de Stone involutivas simples son $Ł_2$ y $Ł_3$.*

Dem. Es fácil chequear que $Ł_2$ y $Ł_3$ son álgebras simples; y que $Ł_4$, $Ł_5$ y $\mathfrak{S}_6$ tienen exactamente una congruencia no trivial dada por **S**-conjunto $Y = Min\, X \cup Max\, X = g(Max\, X) \cup Max\, X$, donde (X, g) denota al correspondiente espacio de Priestley. Luego, las álgebras $Ł_j$ con $2 \leq j \leq 5$, y $\mathfrak{S}_6$ son subdirectamente irreducibles.
Supongamos que A es un álgebra de Stone involutaiva subdirectamente irreducible. De los lemas 2.5.3 y 2.5.4, se tiene que A es un producto subdirecto de las álgebras $Ł_j$ con $2 \leq j \leq 5$, y $\mathfrak{S}_6$. Como A es subdirectamente irreducible tenemos que $A \cong Ł_j$ con $2 \leq j \leq 5$, o bien $A \cong \mathfrak{S}_6$ ■

Como las álgebras $Ł_j$ con $2 \leq j \leq 5$ son subálgebras de $\mathfrak{S}_6$, tenemos que:

Teorema 2.5.6 **S** $= \mathcal{V}(\mathfrak{S}_6)$*, esto es, la variedad* **S** *de las álgebras de Stone involutivas está generada por $\mathfrak{S}_6$.*

Capítulo 3

La lógica *Six*

En este capítulo, nos interesaremos por la lógica que preserva grados de verdad asociada a las álgebras de Stone involutivas, a la que llamaremos ***Six***. Esto sigue un patrón muy general que puede ser considerado para cualquier clase de estructura de valores de verdad con un orden definido sobre ellos. El objetivo es explotar la multiplicidad de valores de verdad, considerando una relación de consecuencia que preserve cotas inferiores en lugar de solo preservar el último elemento del orden (el valor 1). Como veremos, ***Six*** resulta ser una lógica paraconsistente, más aún, es una Lógica de la Inconsistencia Formal (**LFI**) en la que podrá ser definido un operador de consistencia.

Es importante notar que existen diferentes maneras de relacionar a una lógica con una clase dada de álgebras (cf.[35]). El estudio de las lógicas que preservan grados de verdad se remonta a Wójcicki en su libro de 1988 [49], en el contexto de la lógica de Łukasiewicz, y luego extendido en [5, 21, 22, 23] entre otros.

3.1. La lógica que preserva grados de verdad

Sea $\mathfrak{Fm} = \langle Fm, \vee, \wedge, \neg, \nabla, \bot, \top \rangle$ el álgebra absolutamente libre de tipo (2,2,1,1,0,0) generada por un conjunto numerable de variables Var. Como es usual, con las letras p, q, ... denotaremos a las variables proposicionales, con las letras $\alpha, \beta, \ldots$ denotaremos a las fórmulas y con $\Gamma, \Sigma, \ldots$ denotaremos a conjuntos de fórmulas. Si A y B son álgebras similares de tipo (2,2,1,1,0,0), denotaremos con $Hom(A, B)$ al conjunto de todos los homomorfismos de A en B.

Definición 3.1.1 *La lógica que preserva grados de verdad sobre* $\mathbf{S}$*, es la lógica proposicional* $\mathbb{L}_{\mathbf{S}}^{\leq} = \langle Fm, \models_{\mathbf{S}}^{\leq} \rangle$ *dada como sigue, para todo* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$*:*

(i) Si $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \neq \emptyset$*,*

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models^{\leq}_{\mathbf{S}} \alpha \iff \begin{array}{c} \forall A \in \mathbf{S},\ \forall v \in Hom(\mathfrak{Fm}, A),\ \forall a \in A \\ \textit{si } v(\alpha_i) \geq a, \textit{ para todo } i \leq n, \textit{ entonces } v(\alpha) \geq a \end{array}$$

(ii) $\emptyset \models^{\leq}_{\mathbf{S}} \alpha \iff \forall A \in \mathbf{S}, \forall v \in Hom(\mathfrak{Fm}, A), v(\alpha) = 1.$

(iii) *Si* $\Gamma \subseteq Fm$ *es infinito,*

$$\Gamma \models^{\leq}_{\mathbf{S}} \alpha \iff \textit{existen } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma \textit{ tales que } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \models^{\leq}_{\mathbf{S}} \alpha.$$

De la definición anterior se deduce:

Proposición 3.1.2 $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{S}}$ *es una lógica sentencial, es decir,* $\models^{\leq}_{\mathbf{S}}$ *es una relación de consecuencia finitaria definida sobre* Fm*.*

Dem. Inmediato de la definición. ■

Además, $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{S}}$ verifica lo siguiente:

Lema 3.1.3 *Para todo* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha\} \subseteq Fm$*,* $n \geq 1$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models^{\leq}_{\mathbf{S}} \alpha$,

(ii) $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \models^{\leq}_{\mathbf{S}} \alpha$,

(iii) $\mathbf{S} \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \preccurlyeq \alpha$.

Dem. (i)⇒(ii) Sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha\} \subseteq Fm$, $n \geq 1$. Supongamos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models^{\leq}_{\mathbf{S}} \alpha$. Luego, $\forall A \in \mathbf{S}$, $\forall v \in Hom_{\mathbf{S}}(Fm, A)$, $\forall a \in A$, si $v(\alpha_i) \geq a$, para todo $i \leq n$, entonces $v(\alpha) \geq a$. Como A es un retículo, tenemos que $v(\alpha_i) \geq a$, para todo $i \leq n$, si y solo si, $\bigwedge_{i=1}^{n} v(\alpha_i) \geq a$, si y solo si, $v\left(\bigwedge_{i=1}^{n}(\alpha_i)\right) \geq a$. Luego, si $v\left(\bigwedge_{i=1}^{n}(\alpha_i)\right) \geq a$, entonces $v(\alpha) \geq a$; es decir, $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \preccurlyeq \alpha$. Análogamente, se ve que (ii)⇒(i).

Finalmente, (iii) es simplemente otra forma de escribir (ii), teniendo en cuenta (i). ■

Observación 3.1.4

(i) La equivalencia (i)⟺(ii) nos dice que la lógica $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{S}}$ es *conjuntiva*, esto es: el conectivo $\wedge$ tiene el mismo comportamiento que la conjunción clásica.

(ii) La equivalencia (ii)$\Longleftrightarrow$(iii) expresa que la relación de consecuencia $\models^{\leq}_{\mathbf{S}}$ internaliza la relación de orden de las álgebras de Stone involutivas. Más aún, la lógica $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{S}}$ depende solamente de las ecuaciones que verifica la variedad $\mathbf{S}$.

Como consecuencia del Lema 3.1.3 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.1.5 *Para todo $\alpha, \beta \in Fm$,*

(i) $\alpha \models^{\leq}_{\mathbf{S}} \beta \iff \mathbf{S} \models \alpha \preccurlyeq \beta$,

(ii) $\alpha \dashv\models^{\leq}_{\mathbf{S}} \beta \iff \mathbf{S} \models \alpha \approx \beta$,

Dem. (i) Inmediato, tomando $n = 1$. (ii) Inmediato de (i). ■

Observación 3.1.6 Sabemos que la variedad de las álgebras de Stone involutivas está generada por el álgebra de seis elementos $\mathfrak{S}_6$, i.e., $\mathbf{S} = \mathcal{V}(\mathfrak{S}_6)$ (ver Teorema 2.5.6). Esto quiere decir que toda ecuación (o inecuación) es válida en la variedad de las álgebras de Stone involutivas, si y solo si, esta es válida en $\mathfrak{S}_6$.

Luego,

Proposición 3.1.7 *Para todo conjunto $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$, $\Gamma \models^{\leq}_{\mathbf{S}} \alpha$ si, y solo si, existe $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito tal que para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{S}_6)$, $\bigwedge\{h(\gamma) \ : \ \gamma \in \Gamma_0\} \leq h(\alpha)$. En particular, $\emptyset \models^{\leq}_{\mathbf{S}} \alpha$ si, y solo si, $h(\alpha) = 1$ para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{S}_6)$.*

3.2. $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{S}}$ como lógica matricial

En esta sección veremos que $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{S}}$ puede ser caracterizada en términos de matrices lógicas y matrices generalizadas.
Recordemos que una *matriz lógica* (o simplemente una matriz) es un par $\langle A, F\rangle$ donde A es un álgebra y F es un subconjunto (no vacío) de A. Una *matriz generalizada* es un par $\langle A, \mathcal{C}\rangle$ donde A es un álgebra y $\mathcal{C}$ es una familia de subconjuntos de A que forman un sistema de conjuntos cerrados. Es decir, $\mathcal{C}$ verifica:

(C1) $A \in \mathcal{C}$,

(C2) Si $\{X_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{C}$ entonces $\bigcup_{i\in I} X_i \in \mathcal{C}$.

A continuación recordaremos la definición de la lógica determinada por una matriz.

Definición 3.2.1 *Sea* $M = \langle A, F\rangle$ *una matriz lógica. La lógica* $\mathbb{L}_M = \langle \mathfrak{Fm}, \models_M\rangle$ *se define como sigue: si* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$

$$\Gamma \models_M \alpha \iff \begin{array}{c} \forall v \in Hom(\mathfrak{Fm}, A) \\ \text{si } v(\gamma) \in F, \text{ para todo } \gamma \in \Gamma, \text{ entonces } v(\alpha) \in F. \end{array}$$

Si $\mathcal{F} = \{M_i\}_{i\in I}$ *es una familia de matrices lógicas, entonces la lógica* $\mathbb{L}_{\mathcal{F}} = \langle \mathfrak{Fm}, \models_{\mathcal{F}}\rangle$ *determinada por* $\mathcal{F}$ *se define como la intersección de las lógicas determinadas por cada una de las matrices de la familia, es decir,*

$$\models_{\mathcal{F}} = \bigcap_{i\in I} \models_{M_i}$$

Por otro lado, la lógica determinada por una matriz generalizada se define como sigue.

Definición 3.2.2 *Sea* $G = \langle A, \mathcal{C}\rangle$ *una matriz generalizada. La lógica* $\mathbb{L}_G = \langle \mathfrak{Fm}, \models_G\rangle$ *se define como sigue: si* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$

$$\Gamma \models_G \alpha \iff \begin{array}{c} \forall v \in Hom(\mathfrak{Fm}, A),\ \forall F \in \mathcal{C} \\ \text{si } v(\gamma) \in F, \text{ para todo } \gamma \in \Gamma, \text{ entonces } v(\alpha) \in F. \end{array}$$

Análogamente, la lógica determinada por una familia de lógicas generalizadas, es la intersección de las lógicas determinadas por cada una de las matrices generalizadas de la familia.

Consideremos las siguientes familias de matrices y matrices generalizadas con sus lógicas asociadas. Sea la familia de matrices lógicas

$$\mathcal{F} = \{\langle A, F\rangle : A \in \mathbf{S} \text{ y } F \text{ es un filtro de } A\}$$

y la familia de matrices generalizadas

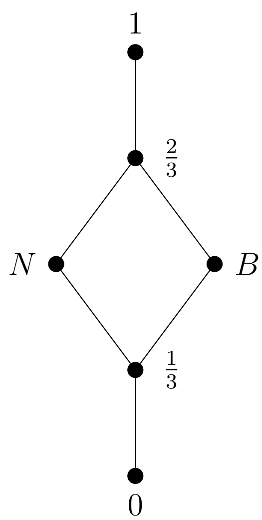
$$\mathcal{F}_g = \{\langle A, Fi(A)\rangle : A \in \mathbf{S}\}$$

donde $Fi(A)$ es la familia de todos los filtros de A.
Entonces,

Teorema 3.2.3 *Las lógicas $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ y $\mathbb{L}_{\mathcal{F}_g}$ coinciden, y a su vez, coinciden con $\mathbb{L}_{\mathbf{S}}^{\leq}$.*

Dem. La igualdad de las lógicas $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}$ y $\mathbb{L}_{\mathcal{F}_g}$ sale directamente analizando las definiciones 3.2.1 y 3.2.2. Además, puesto que $\mathbf{S}$ es una variedad y la noción de filtro es elementalmente definible, la clase $\mathcal{F}_g$ es cerrada por ultraproductos. Luego, $\mathbb{L}_{\mathcal{F}_g}$ es finitaria (compacta).
Luego, para probar que $\mathbb{L}_{\mathcal{F}_g}$ y $\mathbb{L}_{\mathbf{S}}^{\leq}$ coinciden, solo debemos hacerlo para un número finito de premisas. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha \in Fm$ tales que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models_{\mathbf{S}}^{\leq} \alpha$. Luego, por el Lema 3.1.3, para todo $v \in Hom(Fm, A)$, (1) $v(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge v(\alpha_n) \leq v(\alpha)$. Sea $F \in Fi(A)$ y supongamos que $v(\alpha_1), \ldots, v(\alpha_n) \in F$, entonces por definición de filtro tenemos, $v(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge v(\alpha_n) \in F$. Por (1) y definición de filtro, $v(\alpha) \in F$. Luego, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models_{\mathcal{F}_g} \alpha$.
Recíprocamente, supongamos que (2) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models_{\mathcal{F}_g} \alpha$ y sea $v \in Hom(Fm, A)$. Consideremos el filtro generado por $v(\alpha_1), \ldots, v(\alpha_n)$, $F = Fi(v(\alpha_1), \ldots, v(\alpha_n))$. Claramente $v(\alpha_i) \in F$ para todo $i \leq n$, y entonces por (2) $v(\alpha) \in F$. Luego, por propiedad de filtro generado,
$v(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge v(\alpha_n) \leq v(\alpha)$. Por lo tanto, por el Lema 3.1.3, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models_{\mathbf{S}}^{\leq} \alpha$. ■

Recordemos que el álgebra $\mathfrak{G}_6 = \langle \{0, \frac{1}{3}, N, B, \frac{2}{3}, 1\}, \wedge, \vee, \neg, \nabla, 0, 1 \rangle$ dada por



donde la negación y el operador ∇ están dados por:

x	$\neg x$	∇x
0	1	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
N	N	1
B	B	1
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
1	0	1

Los filtros de $\mathfrak{G}_6$ son los filtros principales generados por cada uno de los elementos de $\mathfrak{G}_6$, estos son $[0) = \mathfrak{G}_6$, $[\frac{1}{3}) = \{\frac{1}{3}, N, B, \frac{2}{3}, 1\}$, $[N) = \{N, \frac{2}{3}, 1\}$, $[B) = \{B, \frac{2}{3}, 1\}$, $[\frac{2}{3}) = \{\frac{2}{3}, 1\}$ y $[1) = \{1\}$. Luego, $Fi(\mathfrak{G}_6) = \{[0), [\frac{1}{3}), [N), [B), [\frac{2}{3}), [1)\}$. Consideremos la siguiente familia de matrices lógicas

$$\mathcal{F}^6 = \{\langle \mathfrak{G}_6, F\rangle : F \in Fi(\mathfrak{G}_6)\} = \{\langle \mathfrak{G}_6, [0)\rangle, \langle \mathfrak{G}_6, \left[\frac{1}{3}\right)\rangle, \langle \mathfrak{G}_6, [N)\rangle, \langle \mathfrak{G}_6, [B)\rangle, \langle \mathfrak{G}_6, \left[\frac{2}{3}\right)\rangle, \langle \mathfrak{G}_6, [1)\rangle\}$$

y la matriz generalizada

$$\mathcal{F}^6_g = \langle \mathfrak{G}_6, Fi(\mathfrak{G}_6)\rangle$$

Entonces,

Teorema 3.2.4 *Las lógicas $\mathbb{L}_{\mathcal{F}^6}$, $\mathbb{L}_{\mathcal{F}^6_g}$ y $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{S}}$ coinciden.*

Dem. Puesto que toda lógica determinada por un número finito de matrices finitas es compacta, probaremos que estas lógicas coinciden para un número finito de premisas. Es claro que $\mathbb{L}_{\mathcal{F}^6}$ y $\mathbb{L}_{\mathcal{F}^6_g}$ coinciden.
Por otro lado, sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha \in Fm$ tales que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models^{\leq}_{\mathbf{S}} \alpha$. Por la Proposición 3.1.7, esto es equivalente a $\mathfrak{G}_6 \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \preccurlyeq \alpha$, es decir, que para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{G}_6)$, $h(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge h(\alpha_n) \leq h(\alpha)$. Luego, por las mismas propiedades de filtros que expusimos en la demostración del Teorema 3.2.3, tenemos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models_{\mathcal{F}^6_g} \alpha$. La recíproca es análoga a la exhibida en la demostración del Teorema 3.2.3. ■

Hemos probado que $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{S}}$ es una lógica matricial, más aún, es una lógica matricial determinada por una familia de seis matrices finitas. A continuación veremos que podemos prescindir de algunas de las matrices de la familia $Fi(\mathfrak{G}_6)$.

En primer lugar, observemos que la matriz $\langle \mathfrak{G}_6, [0)\rangle = \langle \mathfrak{G}_6, \{0, \frac{1}{3}, N, B, \frac{2}{3}, 1\}\rangle$ es inocua. En efecto, para todo $\alpha \in Fm$ y todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{G}_6)$ se tiene que $h(\alpha) \in [0)$. Luego, para todo $\Gamma \subseteq Fm$ vale que $\Gamma \models_{\langle \mathfrak{G}_6, [0)\rangle} \alpha$. Es decir, podemos prescindir de esta matriz.

Por otro lado, veremos que las matrices $\langle \mathfrak{G}_6, [N)\rangle$ y $\langle \mathfrak{G}_6, [B)\rangle$ son isomorfas. Para ello, primero probaremos el siguiente resultado técnico.

Lema 3.2.5 *Sea $h : \mathfrak{Fm} \to \mathfrak{G}_6$, $\mathcal{V}' \subseteq Var$ y $h' : \mathfrak{Fm} \to \mathfrak{G}_6$ tales que, para todo $p \in \mathcal{V}'$,*

$$h'(p) = \begin{cases} h(p) & si\ h(p) \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\} \\ N & si\ h(p) = B \\ B & si\ h(p) = N \end{cases} .\ Entonces\ h'(\alpha) = \begin{cases} h(\alpha) & si\ h(\alpha) \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\} \\ N & si\ h(\alpha) = B \\ B & si\ h(\alpha) = N \end{cases}$$

para todo $\alpha \in \mathfrak{Fm}$ tal que $Var(\alpha) \subseteq \mathcal{V}'$.

Dem. Vamos a hacer la demostración por inducción sobre la longitud de la fórmula α(número de símbolos que intervienen en α). Recordemos que $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\} \simeq \mathbb{L}_3$ es una subálgebra de $\mathfrak{G}_6$, es decir que es un conjunto cerrado con respecto a todas las operaciones.
Si $\alpha \equiv p$, donde p es una variable proposicional, el lema vale por hipótesis.
Supongamos que el lema vale para todo fórmula con longitud menor que k, $k \geq 1$; y sea α una fórmula de longitud k. Analizaremos los siguientes casos:
Caso I : $\alpha \equiv \neg\beta$, con $\beta \in Fm$. Si $h(\alpha) \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, como $h(\alpha) = h(\neg\beta) = \neg h(\beta)$, tenemos que $h(\beta) \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$. Por lo tanto $h'(\beta) \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$. Por hipótesis inductiva, $h(\beta) = h'(\beta)$. Como h' es homomorfismo $h'(\alpha) = h'(\neg\beta) = \neg h(\beta) = \neg h'(\beta) = h'(\neg\beta) = h'(\alpha)$. Si $h(\alpha) = N$, como $\neg N = N$, tenemos que $h(\beta) = N$. Por hipótesis inductiva, $h'(\beta) = B$; y como $\neg B = B$, se tiene que $h'(\alpha) = B$. Análogamente se analiza el caso en el que $h(\alpha) = B$.
Caso II : $\alpha \equiv \beta_1 \wedge \beta_2$, con $\beta_1, \beta_2 \in Fm$. Si $h(\alpha) = h(\beta_1) \wedge h(\beta_2) \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ tenemos que analizar varios subcasos. Si $h(\beta_1), h(\beta_2) \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, por hipótesis inductiva, $h(\beta_1) = h'(\beta_1)$ y $h(\beta_2) = h'(\beta_2)$ y entonces $h(\alpha) = h(\beta_1) \wedge h(\beta_2) = h'(\beta_1) \wedge h'(\beta_2) = h'(\alpha)$. Si $h(\beta_1) = N$ y $h(\beta_2) \in \{0, \frac{1}{3}\}$, por H.I., $h'(\beta_1) = B$ y $h'(\beta_2) = h(\beta_2)$ y entonces $h'(\alpha) = h'(\beta_1) \wedge h'(\beta_2) = B \wedge h(\beta_2) = h(\beta_2) = N \wedge h(\beta_2) = h(\beta_1) \wedge h(\beta_2) = h(\alpha)$. El resto de los subcasos se analizan de la misma manera.
Caso III : $\alpha \equiv \beta_1 \vee \beta_2$, con $\beta_1, \beta_2 \in Fm$. Análogo al caso II.
Caso IV : $\alpha \equiv \nabla\beta$, con $\beta \in Fm$. Entonces, $h(\alpha) = h(\nabla\beta) = \nabla h(\beta) \in \{0, 1\}$. Si, $h(\alpha) = 0$, entonces $h(\beta) = 0$, por como está defindo el operador ∇ en $\mathfrak{G}_6$. Por H.I, $h'(\beta) = h(\beta) = 0$ y por lo tanto $h'(\alpha) = 0 = h(\alpha)$. Si $h(\alpha) = 1$, entonces $h(\beta) \in \{\frac{1}{3}, N, B, \frac{2}{3}, 1\}$. En cualquier caso, se tiene que $h'(\alpha) = 1$. ■

Entonces, podemos probar que las matrices $\langle \mathfrak{G}_6, [N) \rangle$ y $\langle \mathfrak{G}_6, [B) \rangle$ determinan la misma lógica.

Lema 3.2.6 *Las lógicas $\models_{\langle \mathfrak{G}_6, [N) \rangle}$ y $\models_{\langle \mathfrak{G}_6, [B) \rangle}$ coinciden.*

Dem. Puesto que $\models_{\langle \mathfrak{G}_6, [N) \rangle}$ (y $\models_{\langle \mathfrak{G}_6, [B) \rangle}$) es una relación de consecuencia compacta y conjuntiva; es suficiente considerar las inferencias de la forma $\alpha \models_{\langle \mathfrak{G}_6, [N) \rangle} \beta$ (en el caso de que β sea un teorema es suficiente considerar α como $\neg\bot$).

Supongamos que $(1)\alpha \models_{\langle \mathfrak{G}_6, [N) \rangle} \beta$ y sea $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{G}_6)$ tal que $h(\alpha) \in \{B, \frac{2}{3}, 1\}$.

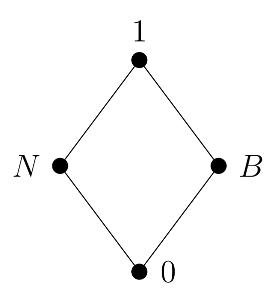
Si $h(\alpha) = B$, consideremos el homomorfismo h' como en el Lema 3.2.5. Entonces, $h'(\alpha) = N \in \{N, \frac{2}{3}, 1\}$ y por (1), $h'(\beta) \in \{N, \frac{2}{3}, 1\}$. Si $h'(\beta) = N$, entonces $h(\beta) = B \in \{B, \frac{2}{3}, 1\}$. Si, en cambio, $h'(\beta) \in \{\frac{2}{3}, 1\}$, entonces $h'(\beta) = h(\beta) \in \{\frac{2}{3}, 1\} \subseteq \{B, \frac{2}{3}, 1\}$.
Si $h(\alpha) \in \{\frac{2}{3}, 1\}$, por (1), $h(\beta) \in \{N, \frac{2}{3}, 1\}$. Si $h(\beta) = N$, entonces $h'(\beta) = B$. Pero, en este caso, $h(\alpha) = h'(\alpha) \in \{\frac{2}{3}, 1\}$, es decir, $h' \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{G}_6)$ verifica que $h'(\alpha) \in \{N, \frac{2}{3}, 1\}$ pero $h'(\beta) \notin \{N, \frac{2}{3}, 1\}$, lo que contradice (1). Luego, $h(\beta) \in \{\frac{2}{3}, 1\} \subseteq \{B, \frac{2}{3}, 1\}$.
De analizar los diferentes casos concluimos que $\alpha \models_{\langle \mathfrak{G}_6, [B)\rangle} \beta$.

Análogamente se prueba que si $\alpha \models_{\langle \mathfrak{G}_6, [B)\rangle} \beta$ entonces $\alpha \models_{\langle \mathfrak{G}_6, [N)\rangle} \beta$. ■

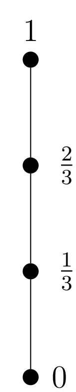
De los resultados expuestos hasta el momento, podemos afirmar que $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{S}}$ es una lógica matricial determinada por cuatro matrices. Cada una de estas matrices está formada por el álgebra de seis elementos $\mathfrak{G}_6$ y cierto filtro de esta.

Teorema 3.2.7 *La lógica que preserva grados de verdad asociada a las álgebras de Stone involutivas, $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{S}}$, es una lógica seis-valorada y matricial determinada por las matrices* $\langle \mathfrak{G}_6, [\frac{1}{3})\rangle$, $\langle \mathfrak{G}_6, [N)\rangle$, $\langle \mathfrak{G}_6, [\frac{2}{3})\rangle$ *y* $\langle \mathfrak{G}_6, [1)\rangle$.

Observación 3.2.8 En virtud del Teorema 3.2.7 llamaremos ***Six*** a la lógica $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{S}}$. Es interesante observar que ***Six*** es sublógica de la lógica proposicional clásica (**CPL**), de las lógicas de Łukasiewicz 3,4 y 5-valoradas ($\mathbf{Ł}_3$, $\mathbf{Ł}_4$, y $\mathbf{Ł}_5$); como así también, de la lógica tetravalente modal ($\mathcal{TML}$). Esta última está intimamente relacionada con la *lógica* 4*-valuada de Belnap*, la cual es bien conocida por sus múltiples aplicaciones en diferentes campos: de las extensiones de la *teoría de verdad* de Kripke para lenguajes que permiten la auto–referencia (ver [19, 48]) a las semánticas para la programación lógica (ver [20]), y en general, en bases de datos deductivas y programas de lógicas distribuidas que manipulan información que puede contener conflictos o gaps (ver [28]).
En particular, las lógicas $\mathcal{TML}$ ([25, 9]) y $\mathbf{Ł}_4$ son lógicas matriciales con matrices $\langle \mathfrak{B}_4, \{1, N\}\rangle$ y $\langle Ł_4, \{1\}\rangle$, respectivamente, donde



$\mathfrak{B}_4$



$Ł_4$

Donde $\neg N = N$, $\neg B = B$, $\neg 0 = 1$ y $\neg 1 = 0$ en $\mathfrak{B}_4$, y por otro lado, $\neg\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\neg\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $\neg 0 = 1$ y $\neg 1 = 0$ en $\mathbb{L}_4$.

En $\mathcal{TML}$ los diferentes valores de verdad se deben al siguiente esquema: 1 simboliza *verdadero y no falso*, 0 *falso y no verdadero* (estos valores son identificables con los valores clásicos), N representa *ni falso, ni verdadero* (neither true nor false) y B *tanto verdadero como falso* (both true and false).
Por otro lado, en Ł$_4$ tenemos una graduación de la noción de verdad. Es decir, intuitivamente, $\frac{1}{3}$ es "más verdadero" que 0, $\frac{2}{3}$ es "más verdadero"que $\frac{1}{3}$, siendo 1 el valor de verdad asignado a las proposiciones verdaderas.

Estas características aparecen combinadas en ***Six*** y es este el motivo por el que hemos denominado como lo hicimos a los valores de verdad de $\mathfrak{G}_6$.

En una lógica dada, un conjunto de conectivos lógicos es *funcionalmente completo* si puede ser usado para expresar todas las posibles tablas de verdad sobre una semántica matricial dada correcta y completa con respecto a la lógica. Decimos que la lógica es *funcionalmente completa* si contiene un conjunto de conectivos lógicos funcionalmente completo.

Lema 3.2.9 *Sea* $h : \mathfrak{Fm} \to \mathfrak{G}_6$, $h' : \mathfrak{Fm} \to \mathfrak{G}_6$ *y* $p \in Var$ *tales que* $h(p) = B$ *y* $h'(p) = N$. *Entonces,* $h(\alpha) \neq N$ *y* $h'(\alpha) \neq B$ *para todo* $\alpha \in \mathfrak{Fm}$ *tal que* $Var(\alpha) \subseteq \{p\}$.

Dem. Es consecuencia del hecho que $\{0, \frac{1}{3}, B, \frac{2}{3}, 1\}$ y $\{0, \frac{1}{3}, N, \frac{2}{3}, 1\}$ son subálgebras de $\mathfrak{G}_6$. ■

Corolario 3.2.10 ***Six*** *no es funcionalmente completa.*

Dem. Teniendo en cuenta el Lema 3.2.9, no es posible definir la función $f : \mathfrak{G}_6 \to \mathfrak{G}_6$ tal que $f(x) = N$, para todo x. ■

3.3. Aspectos paraconsistentes de *Six*

En esta sección nos abocaremos a analizar a ***Six*** bajo la perspectiva de la paraconsistencia. Veremos que las contradicciones (con respecto a $\neg$) no necesariamente trivializan las inferencias, y por lo tanto, esta es un lógica paraconsistente en el sentido de da Costa (cf. [14, 15]). Más aún, mostraremos que ***Six*** es una *Lógica de la Inconsistencia Formal* (**LFI**, por sus siglas en inglés), gentilmente explosiva (gently explosive) con respecto a un conjunto de fórmulas adecuado $\bigcirc(p)$ el cual depende solamente de la variable proposicional p (cf. [8, 7]).

Proposición 3.3.1 ***Six*** *es una lógica no trivial y no explosiva.*

Dem. Si p y q son variables proposicionales diferentes, entonces tenemos que

$$p, \neg p \not\models_{\boldsymbol{Six}} q. \tag{3.1}$$

En efecto, es suficiente tomar un homomorfismo h tal que $h(p) = N$ y $h(q) = B$. Además, ***Six*** es no explosiva con respecto a $\neg$. ■

Recordemos que una lógica $\mathbb{L}$ se dice paracompleta si en ella no vale la *ley del tercero excluido*. Utilizando el mismo homomorfismo que antes podemos ver que:

$$\not\models_{\boldsymbol{Six}} q \vee \neg q \tag{3.2}$$

De esta manera, tenemos:

Proposición 3.3.2 ***Six*** *es una lógica paracompleta.*

Por otro lado, consideremos en el lenguaje de ***Six*** al conjunto $\bigcirc(p) = \{\Delta p \vee \Delta\neg p\}$. Entonces

Lema 3.3.3 *La lógica* ***Six*** *es finitamente gentilmente explosiva con respecto a* $\bigcirc(p)$ *y* $\neg$.

Dem. Sean p y q variables proposicionales distintas. Es fácil ver que

$$\bigcirc(p), p \not\models_{\boldsymbol{Six}} q \quad \text{y} \quad \bigcirc(p), \neg p \not\models_{\boldsymbol{Six}} q.$$

Por otro lado, está claro que $h((\Delta p \vee \Delta\neg p) \wedge p \wedge \neg p) = 0$, para toda $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{S}_6)$. De esta manera, tenemos que $\bigcirc(p), p, \neg p \models_{\boldsymbol{Six}} \perp$. ■

De este resultado y de la ecuación (3.1) tenemos que:

Teorema 3.3.4 *La lógica* ***Six*** *es una* **LFI** *con respecto a* $\neg$ *y con operador de consistencia* $\circ$ *definido por* $\circ\alpha = \Delta\alpha \vee \Delta\neg\alpha$, *para todo* $\alpha \in Fm$.

Además, al igual que en los sistemas C_n de da Costa (cf. [14, 15]), el operador de consistencia se propaga a través de los restantes conectivos.

Teorema 3.3.5 *La lógica* ***Six*** *satisface las siguientes condiciones:*

(i) $\models_{\boldsymbol{Six}} \circ\bot$ (ii) $\circ\alpha \models_{\boldsymbol{Six}} \circ\nabla\alpha$

(iii) $\circ\alpha \models_{\boldsymbol{Six}} \circ\neg\alpha$ (iv) $\circ\alpha, \circ\beta \models_{\boldsymbol{Six}} \circ(\alpha\#\beta)$ *para* $\# \in \{\wedge, \vee\}$.

Dem. Directo de considerar las tablas de verdad. ■

Más aún, $\models_{\boldsymbol{Six}} \circ\neg^n\circ\alpha$, para todo $n \geq 0$. En particular, $\models_{\boldsymbol{Six}} \circ\circ\alpha$. De este modo, ***Six*** valida todos los axiomas $(cc)_n$ de la lógica **mCi** (ver [7]).
Como es usual en el marco de las **LFI**s, es posible definir un operador de inconsistencia $\bullet$ sobre ***Six*** del siguiente modo:

$$\bullet\alpha =_{def} \neg \circ \alpha.$$

Entonces, $\bullet\alpha$ es equivalente a $\nabla\alpha \wedge \nabla\neg\alpha$. Observemos que $\bullet$ y $\circ$ pueden ser expresados equivalentemente como $\bullet\alpha = \nabla(\alpha \wedge \neg\alpha)$ y $\circ\alpha = \Delta(\alpha \vee \neg\alpha)$. La tabla de verdad de ambos conectivos se muestra abajo:

p	$\circ p$	$\bullet p$
0	1	0
$\frac{1}{3}$	0	1
N	0	1
B	0	1
$\frac{2}{3}$	0	1
1	1	0

Teorema 3.3.6 *En* ***Six*** *vale:*

(i) $\alpha \wedge \neg\alpha \models_{\boldsymbol{Six}} \bullet\alpha$ *pero* $\bullet\alpha \not\models_{\boldsymbol{Six}} \alpha \wedge \neg\alpha$,

(ii) $\bullet\alpha \models_{\boldsymbol{Six}} \bullet\neg\alpha$ *y* $\bullet\neg\alpha \models_{\boldsymbol{Six}} \bullet\alpha$,

(iii) $\bullet(\alpha\#\beta) \models_{\boldsymbol{Six}} \bullet\alpha \vee \bullet\beta$ *para* $\# \in \{\wedge, \vee\}$*; la recíproca no vale.*

Dem. Directo. ■

Este último resultado muestra que el concepto de inconsistencia, por un lado, y el de contradicción, por el otro, pueden ser diferenciados en la lógica ***Six***. Esta es una característica valiosa en el universo de las **LFI**s, solo satisfecha por unas pocas de ellas como **mbC** y $\mathcal{TML}$, siendo la primera la más débil de la jerarquía presentada en [7]. A pesar del hecho de que ***Six*** no es funcionalmente completa (cf. Corolario 3.2.10), esta goza de una gran poder expresivo. Por ejemplo, en ***Six*** es posible hablar de valores de verdad "clásicos" (0 y 1), como así también de valores "no clásicos", a saber, $\frac{1}{3}$, N, B y $\frac{2}{3}$. De esta manera, por ejemplo, si $\circ\alpha$ es satisfecho entonces α solo asume valores de verdad 0 ó 1. Por otro lado, $\bullet\alpha$ afirma que los valores de verdad de α son $\frac{1}{3}$, N, B ó $\frac{2}{3}$.

Observación 3.3.7 Las fórmulas modales $\nabla\alpha \vee \nabla\neg\alpha$ y $\Delta\alpha \wedge \Delta\neg\alpha$, utilizadas para definir el operador de consistencia $\circ\alpha$ y el operador de inconsistencia $\bullet\alpha$ en ***Six***, coinciden con las fórmulas introducidas por H. Montgomery y R. Routley en [42] para definir los conceptos filosóficos de *no contingencia* (denotado por $\triangle$) y de *contingencia* (denotado por $\triangledown$), respectivamente. Las lógicas de contingencia y no contingencia fueron extensivamente estudiadas por diferentes autores. Es interesante notar, que el operador de no contingencia tiene propiedades de propagación similares a aquellas que tiene el operador de consistencia $\circ$ propuesto por da Costa (cf. [14, 15]).

Como es usual con las **LFI**s, es interesante analizar la posibilidad de reproducir a la lógica clásica dentro de ***Six***.
Pensemos a **CPL** en el lenguaje generado por la conjunción $\wedge$, la disyunción $\vee$ y la negación $\neg$ (intencionalmente estamos utilizando los mismos símbolos para los conectivos comunes de ***Six*** y **CPL**). Sea $\mathfrak{Fm}_{\mathbf{CPL}}$ el álgebra de las fórmulas de **CPL** en ese lenguaje. Entonces, tenemos el siguiente *Derivability Adjustment Theorem* (DAT) con respecto a **CPL**.

Teorema 3.3.8 *Sea* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *un conjunto finito de fórmulas en* **CPL**. *Entonces,* $\Gamma \vdash_{\mathbf{CPL}} \alpha$ *si, y solo si,* $\Gamma, \circ p_1, \ldots, \circ p_n \models_{\boldsymbol{Six}} \alpha$ *donde* $\mathrm{Var}(\Gamma \cup \{\alpha\}) = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

Dem. ($\Leftarrow$) Sea $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq \mathfrak{Fm}_{\mathbf{CPL}}$ y sea $h \in Hom(\mathfrak{Fm}_{\mathbf{CPL}}, \mathbb{B}_1)$ donde $\mathbb{B}_1$ es el álgebra de Boole con un átomo (esto es, $\mathbb{B}_1 = \{0, 1\}$). Puesto que $\mathbb{B}_1$ puede verse como una **S**-subálgebra de $\mathfrak{S}_6$ (poniendo $\nabla(x) = x$, para todo x, se tiene que $\mathbb{B}_1 \simeq \mathbb{L}_2$), tenemos que $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{S}_6)$. Luego, por hipótesis tenemos que

$$h(\bigwedge_{i=1}^{k} \alpha_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} \circ p_j) \leq h(\alpha).$$

Como $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbb{B}_1)$, entonces $h(p_j) \in \{0, 1\}$ para todo j, $1 \leq j \leq n$. De esta manera, por definición de $\circ$, $h(\circ p_j) = \circ h(p_j) = 1$ para todo j, $1 \leq j \leq n$.

Entonces, si $h(\alpha_i) = 1$ para todo i, $1 \leq i \leq k$ tenemos que $h(\bigwedge_{i=1}^{k} \alpha_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} \circ p_j) = 1$ y, por lo tanto, $h(\alpha) = 1$. Esto significa que $\Gamma \vdash_{\mathbf{CPL}} \alpha$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{CPL}} \alpha$ y sea $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{S}_6)$. Veamos que $\Gamma, \circ p_1, \ldots, \circ p_n \models_M \alpha$ para cada una de las matrices M que determinan a ***Six***. Sea $M = \langle \mathfrak{S}_6, [\frac{1}{3}) \rangle$ y supongamos que $h(\Gamma \cup \{\circ p_1, \ldots, \circ p_n\}) \subseteq [\frac{1}{3})$, donde $\mathrm{Var}(\Gamma \cup \{\alpha\}) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Entonces, $h(\circ p_i) \neq 0$ lo que implica que $h(p_i) \in \{1, 0\}$ para todo i, y por eso, podemos pensar a h como $h \in Hom(\mathfrak{Fm}_{\mathbf{CPL}}, \mathbb{B}_1)$.
Como $\Gamma \vdash_{\mathbf{CPL}} \alpha$ y $h(\Gamma) \subseteq \{1\}$, entonces $h(\alpha) = 1$ y $h(\alpha) \in [\frac{1}{3})$. Luego, $\Gamma, \circ p_1, \ldots, \circ p_n \models_{\langle \mathfrak{S}_6, [\frac{1}{3}) \rangle} \alpha$.
De la misma manera se prueba que $\Gamma, \circ p_1, \ldots, \circ p_n \models_M \alpha$ para las restantes matrices que determinan a ***Six***. Por lo tanto, $\Gamma, \circ p_1, \ldots, \circ p_n \models_{\boldsymbol{Six}} \alpha$. ■

3.4. Teoría de prueba para *Six*

Como hemos visto en las secciones anteriores, la lógica ***Six*** ha sido presentada por medios semánticos. Con el objeto de dar una caracterización sintáctica de ***Six***, presentaremos una versión de ella por medio de un cálculo estilo Gentzen.
En el siguiente cálculo de secuentes, al que denominamos $\mathfrak{G}$, trataremos con secuentes *multiple-conclusioned*, es decir, con secuentes de la forma $\Gamma \Rightarrow \Sigma$ donde Γ y Σ son subconjuntos finitos de Fm. Los axiomas y reglas de $\mathfrak{G}$ son los siguientes:

Axiomas

(Axioma estructural) $\alpha \Rightarrow \alpha$ $\qquad$ ($\bot$) $\bot \Rightarrow$ $\qquad$ ($\top$) $\Rightarrow \top$

(Primer axioma modal) $\alpha \Rightarrow \nabla\alpha$ $\qquad$ (Segundo axioma modal) $\Rightarrow \nabla\alpha \vee \neg\nabla\alpha$

Reglas estructurales

(Debilitamiento a Izquierda) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Sigma}$ $\qquad$ (Debilitamiento a Derecha) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Sigma, \alpha}$

(Corte) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Sigma, \alpha \quad \alpha, \Gamma \Rightarrow \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Sigma}$

Reglas lógicas

$$(\wedge\Rightarrow)\quad \frac{\Gamma,\alpha,\beta\Rightarrow\Sigma}{\Gamma,\alpha\wedge\beta\Rightarrow\Sigma}\qquad\qquad (\Rightarrow\wedge)\quad \frac{\Gamma\Rightarrow\Sigma,\alpha\quad \Gamma\Rightarrow\Sigma,\beta}{\Gamma\Rightarrow\Sigma,\alpha\wedge\beta}$$

$$(\vee\Rightarrow)\quad \frac{\Gamma,\alpha\Rightarrow\Sigma\quad \Gamma,\beta\Rightarrow\Sigma}{\Gamma,\alpha\vee\beta\Rightarrow\Sigma}\qquad\qquad (\Rightarrow\vee)\quad \frac{\Gamma\Rightarrow\Sigma,\alpha,\beta}{\Gamma\Rightarrow\Sigma,\alpha\vee\beta}$$

$$(\neg)\quad \frac{\alpha\Rightarrow\beta}{\neg\beta\Rightarrow\neg\alpha}$$

$$(\neg\neg\Rightarrow)\quad \frac{\Gamma,\alpha\Rightarrow\Sigma}{\Gamma,\neg\neg\alpha\Rightarrow\Sigma}\qquad\qquad (\Rightarrow\neg\neg)\, \frac{\Gamma\Rightarrow\alpha,\Sigma}{\Gamma\Rightarrow\neg\neg\alpha,\Sigma}$$

$$(\nabla)\quad \frac{\Gamma,\alpha\Rightarrow\nabla\Sigma}{\Gamma,\nabla\alpha\Rightarrow\nabla\Sigma}\qquad\qquad (\neg\nabla\Rightarrow)\quad \frac{\Gamma,\neg\nabla\alpha\Rightarrow\Sigma}{\Gamma,\nabla\neg\nabla\alpha\Rightarrow\Sigma}$$

La noción de *derivación* (o $\mathfrak{G}$–*prueba*) en el cálculo de Gentzen $\mathfrak{G}$ es la usual.

Definición 3.4.1 *(i) Todo secuente inicial es una prueba en si misma, cuyo secuente final es el propio secuente inicial.*

(ii) Suponga que Π *es una prueba con secuente final* S_1 *y, supongamos que existe una instancia de una regla de* $\mathfrak{G}$ *con secuente superior* S_1 *y secuente inferior* S*. Entonces, la siguiente figura es una prueba de* $\mathfrak{G}$*:*

$$\frac{\Pi}{S}$$

(iii) Suponga que Π_1 *y* Π_2 *son pruebas con secuentes finales* S_1 *y* S_2*, respectivamente. Y supongamos que existe una instancia de una regla de* $\mathfrak{G}$ *con secuentes superiores* S_1 *y* S_2 *y con secuente inferior* S*. Entonces, la siguiente figura es una prueba con secuente final* S*:*

$$\frac{\Pi_1 \qquad \Pi_2}{S}$$

Decimos que el secuente $\Gamma\Rightarrow\Sigma$ es *probable* en $\mathfrak{G}$, y notaremos $\mathfrak{G}\vdash\ \Gamma\Rightarrow\Sigma$, si tiene una demostración en $\mathfrak{G}$ (o una $\mathfrak{G}$-demostración). Si α es una fórmula escribimos $\mathfrak{G}\vdash\alpha$ para simbolizar que $\mathfrak{G}\vdash\Rightarrow\alpha$, i.e., el secuente $\Rightarrow\alpha$ es probable en $\mathfrak{G}$. Notaremos $\Gamma\Leftrightarrow\Sigma$ para indicar que tanto el secuente $\Gamma\Rightarrow\Sigma$ como $\Sigma\Rightarrow\Gamma$ son probables en $\mathfrak{G}$.

A continuación probaremos una serie de resultados técnicos, que nos serán de mucha utilidad para probar los Teoremas de Correctitud y Completitud.

Lema 3.4.2 *Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in Fm$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m$ *es probable en* $\mathfrak{G}$*,*

(ii) $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m$ *es probable en* $\mathfrak{G}$

(iii) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Rightarrow \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_m$ *es probable en* $\mathfrak{G}$

(iv) $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_m$ *es probable en* $\mathfrak{G}$*.*

Dem. Probaremos que (i) y (ii) son equivalentes para $n = 2$, ya que para valores mayores de n la demostración consiste en aplicar susecivamente la equivalencia para $n = 2$.

Si $\alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m$ es probable en $\mathfrak{G}$. Entonces, existe una prueba

$$\frac{\Pi}{\alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m}$$

Luego podemos construir la siguiente prueba,

$$(\wedge \Rightarrow)\ \dfrac{\dfrac{\Pi}{\alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m}$$

Recíprocamente, si $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m$ es probable, existe una prueba

$$\frac{\Pi'}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m}$$

Entonces, podemos construir la prueba

$$(\text{corte})\ \dfrac{(\text{deb. der.})\ \dfrac{(\Rightarrow \wedge)\ \dfrac{(\text{deb. izq.})\ \dfrac{\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1}{\alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1} \quad (\text{deb. izq.})\ \dfrac{\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2}{\alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2}}{\alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2}}{\alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2, \beta_1, \ldots, \beta_m} \quad (\text{deb. izq.})\ \dfrac{\dfrac{\Pi}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m}}{\alpha_1 \wedge \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m}}{\alpha_1, \alpha_2 \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m}$$

De un modo similar se prueba que (i) y (iii) son equivalentes. Además, usando (ii) y (iii), se prueba que (i) y (iv) son equivalentes. ■

Observación 3.4.3 *Dado que las reglas lógicas que determinan el comportamiento de la conjunción $\wedge$ y disyunción $\vee$ son las mismas que en el caso clásico, sabemos que verifican las mismas propiedades que en este último.*

Lema 3.4.4 *Sean $\alpha, \beta, \gamma \in Fm$ tales que $\alpha \Leftrightarrow \beta$. Entonces,*

(i) $\alpha \vee \gamma \Leftrightarrow \beta \vee \gamma$,

(ii) $\alpha \wedge \gamma \Leftrightarrow \beta \wedge \gamma$,

(iii) $\neg\alpha \Leftrightarrow \neg\beta$,

(iv) $\nabla\alpha \Leftrightarrow \nabla\beta$.

Dem. (i):

$$(\vee\Rightarrow)\,\dfrac{(\Rightarrow\vee)\,\dfrac{\text{(Deb.)}\,\dfrac{\text{(Hip.)}\,\dfrac{}{\alpha \Rightarrow \beta}}{\alpha \Rightarrow \beta, \gamma}}{\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma} \qquad (\Rightarrow\vee)\,\dfrac{\text{(Deb.)}\,\dfrac{\gamma \Rightarrow \gamma}{\gamma \Rightarrow \beta, \gamma}}{\gamma \Rightarrow \beta \vee \gamma}}{\alpha \vee \gamma \Rightarrow \beta \vee \gamma}$$

Análogamente se prueba que $\beta \vee \gamma \Rightarrow \alpha \vee \gamma$.
(ii):

$$(\Rightarrow\wedge)\,\dfrac{(\wedge\Rightarrow)\,\dfrac{\text{(Deb.)}\,\dfrac{\text{(Hip.)}\,\dfrac{}{\alpha \Rightarrow \beta}}{\alpha, \gamma \Rightarrow \beta}}{\alpha \wedge \gamma \Rightarrow \beta} \qquad (\wedge\Rightarrow)\,\dfrac{\text{(Deb.)}\,\dfrac{\gamma \Rightarrow \gamma}{\alpha, \gamma \Rightarrow \gamma}}{\alpha \wedge \gamma \Rightarrow \gamma}}{\alpha \wedge \gamma \Rightarrow \beta \wedge \gamma}$$

(iii): Inmediato.
(iv):

$$(\nabla)\,\dfrac{\text{(corte)}\,\dfrac{\text{(Hip.)}\,\dfrac{}{\alpha \Rightarrow \beta} \qquad \beta \Rightarrow \nabla\beta}{\alpha \Rightarrow \nabla\beta}}{\nabla\alpha \Rightarrow \nabla\beta}$$

Análogamente se prueba que $\nabla\beta \Rightarrow \nabla\alpha$. ■

Corolario 3.4.5 *Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Fm$ tales que $\alpha \Rightarrow \beta$ y $\gamma \Rightarrow \delta$. Entonces, $\alpha\wedge\gamma \Rightarrow \beta\wedge\delta$ y $\alpha \vee \gamma \Rightarrow \beta \vee \delta$.*

Dem. Es consecuencia del Lema 3.4.4 (i) y (ii), y la regla de corte. ■

Se prueba que vale la distributividad entre la disyunción y la conjunción. Más precisamente,

Lema 3.4.6 *Sean $\alpha, \beta, \gamma \in Fm$. Entonces, $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.*

Dem.

$$(\vee\Rightarrow)\,\dfrac{(\Rightarrow\wedge)\,\dfrac{(\Rightarrow\vee)\,\dfrac{(\text{Deb.})\,\dfrac{\alpha\Rightarrow\alpha}{\alpha\Rightarrow\alpha,\beta}}{\alpha\Rightarrow\alpha\vee\beta}\qquad(\Rightarrow\vee)\,\dfrac{(\text{Deb.})\,\dfrac{\alpha\Rightarrow\alpha}{\alpha\Rightarrow\alpha,\gamma}}{\alpha\Rightarrow\alpha\vee\gamma}}{\alpha\Rightarrow(\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)}\qquad(\Rightarrow\wedge)\,\dfrac{\dfrac{(\text{Deb.})\,\dfrac{\beta\Rightarrow\beta}{\beta,\gamma\Rightarrow\alpha,\beta}}{\beta\wedge\gamma\Rightarrow\alpha\vee\beta}\qquad\dfrac{(\text{Deb.})\,\dfrac{\gamma\Rightarrow\gamma}{\beta,\gamma\Rightarrow\alpha,\gamma}}{\beta\wedge\gamma\Rightarrow\alpha\vee\gamma}}{\beta\wedge\gamma\Rightarrow(\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)}}{\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)\Rightarrow(\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)}$$

Recíprocamente,

$$(\Rightarrow\wedge)\,\dfrac{(\text{Lema})\,\dfrac{(\wedge\Rightarrow)\,\dfrac{(\text{Deb.})\,\dfrac{\beta\Rightarrow\beta}{\beta,\gamma\Rightarrow\beta}}{\beta\wedge\gamma\Rightarrow\beta}}{\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)\Rightarrow\alpha\vee\beta}\qquad(\text{Lema})\,\dfrac{(\wedge\Rightarrow)\,\dfrac{(\text{Deb.})\,\dfrac{\gamma\Rightarrow\gamma}{\beta,\gamma\Rightarrow\gamma}}{\beta\wedge\gamma\Rightarrow\gamma}}{\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)\Rightarrow\alpha\vee\gamma}}{\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)\Rightarrow(\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)}$$

■

Por otro lado, $\neg$ es una negación de De Morgan por lo que es esperable el siguiente lema.

Lema 3.4.7 *Sean $\alpha, \beta \in Fm$. Los siguientes secuentes son probables en $\mathfrak{G}$.*

(i) $\alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha, \quad \neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha,$

(ii) $\alpha \vee \beta \Rightarrow \neg\neg\alpha \vee \neg\neg\beta,$

(iii) $\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta \Rightarrow \alpha \vee \beta$,

(iv) $\neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$,

(v) $\neg\alpha \vee \neg\beta \Rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$,

(vi) $\neg\alpha \wedge \neg\beta \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$,

(vii) $\neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$,

Dem. (i) Inmediato por las reglas $(\neg\neg \Rightarrow)$ y $(\Rightarrow \neg\neg)$.
(ii)

$$(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\text{(deb. der.)}\ \dfrac{(\Rightarrow\neg\neg)\ \dfrac{\alpha\Rightarrow\alpha}{\alpha\Rightarrow\neg\neg\alpha}}{\alpha\Rightarrow\neg\neg\alpha,\neg\neg\beta}}{\alpha\Rightarrow\neg\neg\alpha\vee\neg\neg\beta} \qquad (\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\text{(deb. der.)}\ \dfrac{(\Rightarrow\neg\neg)\ \dfrac{\beta\Rightarrow\beta}{\beta\Rightarrow\neg\neg\beta}}{\beta\Rightarrow\neg\neg\alpha,\neg\neg\beta}}{\beta\Rightarrow\neg\neg\alpha\vee\neg\neg\beta}}{\alpha\vee\beta\Rightarrow\neg\neg\alpha\vee\neg\neg\beta}$$

(iii) Análoga a (ii).
(iv)

$$(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{(\neg)\ \dfrac{(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\text{(deb. der.)}\ \dfrac{\alpha\Rightarrow\alpha}{\alpha\Rightarrow\alpha,\beta}}{\alpha\Rightarrow\alpha\vee\beta}}{\neg(\alpha\vee\beta)\Rightarrow\neg\alpha} \qquad (\neg)\ \dfrac{(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\text{(deb. der.)}\ \dfrac{\beta\Rightarrow\beta}{\beta\Rightarrow\alpha,\beta}}{\beta\Rightarrow\alpha\vee\beta}}{\neg(\alpha\vee\beta)\Rightarrow\neg\beta}}{\neg(\alpha\vee\beta)\Rightarrow\neg\alpha\wedge\neg\beta}$$

(v)

$$(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{(\neg)\ \dfrac{(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\text{(deb. izq.)}\ \dfrac{\alpha\Rightarrow\alpha}{\alpha,\beta\Rightarrow\alpha}}{\alpha\wedge\beta\Rightarrow\alpha}}{\neg\alpha\Rightarrow\neg(\alpha\wedge\beta)} \qquad (\neg)\ \dfrac{(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\text{(deb. izq.)}\ \dfrac{\beta\Rightarrow\beta}{\alpha,\beta\Rightarrow\beta}}{\alpha\wedge\beta\Rightarrow\beta}}{\neg\beta\Rightarrow\neg(\alpha\wedge\beta)}}{\neg\alpha\vee\neg\beta\Rightarrow\neg(\alpha\wedge\beta)}$$

(vi)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\LeftLabel{(ii)}
\UnaryInfC{$\alpha \vee \beta \Rightarrow \neg\neg\alpha \vee \neg\neg\beta$}
\LeftLabel{(deb. der.)}
\UnaryInfC{$\alpha \vee \beta \Rightarrow \neg\neg\alpha \vee \neg\neg\beta, \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{(iv)}
\UnaryInfC{$\neg\neg\alpha \vee \neg\neg\beta \Rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$}
\LeftLabel{(deb. izq.)}
\UnaryInfC{$\alpha \vee \beta, \neg\neg\alpha \vee \neg\neg\beta \Rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$}
\LeftLabel{(corte)}
\BinaryInfC{$\alpha \vee \beta \Rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$}
\LeftLabel{$(\neg)$}
\UnaryInfC{$\neg\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$}
\LeftLabel{$(\neg\neg \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\neg\alpha \wedge \neg\beta \Rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$}
\end{prooftree}
$$

(vii) Análoga a (vi), usando (iii), $(\neg)$ y la regla de corte.

■

Finalmente, el siguiente lema refleja el hecho que ∇ goza de las mismas propiedades que el respectivo operador unario de las álgebras de Stone involutivas.

Lema 3.4.8 *Sean $\alpha, \beta \in Fm$. Los siguientes secuentes son probables en $\mathfrak{G}$.*

(i) $\nabla(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \nabla\alpha \vee \nabla\beta$,

(ii) $\nabla(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \nabla\alpha \wedge \nabla\beta$,

(iii) $\nabla\nabla\alpha \Leftrightarrow \nabla\alpha$,

(iv) $\nabla\neg\nabla\alpha \Leftrightarrow \neg\nabla\alpha$,

(v) $\mathfrak{G} \vdash \Rightarrow \nabla\bot$.

Dem. (i)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\alpha \Rightarrow \alpha$}
\UnaryInfC{$\alpha \Rightarrow \alpha, \beta$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow \vee)$}
\UnaryInfC{$\alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta$}
\UnaryInfC{$\alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta, \nabla(\alpha \vee \beta)$}
\AxiomC{$\alpha \vee \beta \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)$}
\UnaryInfC{$\alpha, \alpha \vee \beta \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)$}
\LeftLabel{(c)}
\BinaryInfC{$\alpha \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)$}
\LeftLabel{(∇)}
\UnaryInfC{$\nabla\alpha \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)$}
\AxiomC{$\beta \Rightarrow \beta$}
\UnaryInfC{$\beta \Rightarrow \alpha, \beta$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow \vee)$}
\UnaryInfC{$\beta \Rightarrow \alpha \vee \beta$}
\UnaryInfC{$\beta \Rightarrow \alpha \vee \beta, \nabla(\alpha \vee \beta)$}
\AxiomC{$\alpha \vee \beta \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)$}
\UnaryInfC{$\beta, \alpha \vee \beta \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)$}
\LeftLabel{(c)}
\BinaryInfC{$\beta \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)$}
\LeftLabel{(∇)}
\UnaryInfC{$\nabla\beta \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)$}
\LeftLabel{$(\vee \Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$\nabla\alpha \vee \nabla\beta \Rightarrow \nabla(\alpha \vee \beta)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\alpha \vee \beta \Rightarrow \alpha \vee \beta$}
\LeftLabel{(Lem. 3.4.2)}
\UnaryInfC{$\alpha \vee \beta \Rightarrow \alpha, \beta$}
\AxiomC{$\alpha \Rightarrow \nabla\alpha$}
\LeftLabel{(deb.)}
\UnaryInfC{$\alpha, \beta \Rightarrow \nabla\alpha, \nabla\beta$}
\LeftLabel{(c)}
\BinaryInfC{$\alpha \vee \beta \Rightarrow \nabla\alpha, \nabla\beta$}
\LeftLabel{(∇)}
\UnaryInfC{$\nabla(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \nabla\alpha, \nabla\beta$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow \vee)$}
\UnaryInfC{$\nabla(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \nabla\alpha \vee \nabla\beta$}
\end{prooftree}
$$

(ii)

$$(\Rightarrow\wedge)\,\dfrac{(\nabla)\,\dfrac{(\wedge\Rightarrow)\,\dfrac{(\text{deb})\,\dfrac{\alpha \Rightarrow \nabla\alpha}{\alpha,\beta \Rightarrow \nabla\alpha}}{\alpha\wedge\beta \Rightarrow \nabla\alpha}}{\nabla(\alpha\wedge\beta) \Rightarrow \nabla\alpha} \qquad (\nabla)\,\dfrac{(\wedge\Rightarrow)\,\dfrac{(\text{deb})\,\dfrac{\beta \Rightarrow \nabla\beta}{\alpha,\beta \Rightarrow \nabla\beta}}{\alpha\wedge\beta \Rightarrow \nabla\beta}}{\nabla(\alpha\wedge\beta) \Rightarrow \nabla\beta}}{\nabla(\alpha\wedge\beta) \Rightarrow \nabla\alpha\wedge\nabla\beta}$$

$$(\wedge\Rightarrow)\,\dfrac{(\nabla)\,\dfrac{(\nabla)\,\dfrac{(\text{c})\,\dfrac{(\text{deb})\,\dfrac{(\text{Lem. 3.4.2})\,\dfrac{\alpha\wedge\beta \Rightarrow \alpha\wedge\beta}{\alpha,\beta \Rightarrow \alpha\wedge\beta}}{\alpha,\beta \Rightarrow \alpha\wedge\beta,\nabla(\alpha\wedge\beta)} \qquad (\text{deb})\,\dfrac{\alpha\wedge\beta \Rightarrow \nabla(\alpha\wedge\beta)}{\alpha\wedge\beta,\alpha,\beta \Rightarrow \nabla(\alpha\wedge\beta)}}{\alpha,\beta \Rightarrow \nabla(\alpha\wedge\beta)}}{\nabla\alpha,\beta \Rightarrow \nabla(\alpha\wedge\beta)}}{\nabla\alpha,\nabla\beta \Rightarrow \nabla(\alpha\wedge\beta)}}{\nabla\alpha\wedge\nabla\beta \Rightarrow \nabla(\alpha\wedge\beta)}$$

(iii)
$\nabla\alpha \Rightarrow \nabla\nabla\alpha$ es una instancia del primer axioma modal. Por otro lado

$$(\nabla)\,\dfrac{\nabla\alpha \Rightarrow \nabla\alpha}{\nabla\nabla\alpha \Rightarrow \nabla\alpha}$$

(iv) Es consecuencia del primer axioma modal y de la regla $(\neg\nabla)$.

(v)

$$(\neg)\,\dfrac{(\nabla)\,\dfrac{\bot \Rightarrow}{\nabla\bot \Rightarrow}}{\Rightarrow \neg\nabla\bot}$$

■

3.5. Correctitud, Completitud y Principio de Inversión

Para poder probar los teoremas de Correctitud y Completitud es necesario especificar cuando un secuente es *válido* en este contexto.

Definición 3.5.1 Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in Fm$. Diremos que el secuente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m$ es válido si para todo homomorfismo $h \in Hom(Fm, \mathfrak{S}_6)$ se verifica que

$$h(\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i) \leq h(\bigvee_{j=1}^{m} \beta_j)$$

Si $n = 0$, consideramos $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = \top$ y si $m = 0$, consideramos $\bigvee\limits_{j=1}^{m} \beta_j = \bot$.

De la definición anterior podemos deducir fácilmente que

Proposición 3.5.2 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_m$ *es válido si, y solo si,* $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \models_{\boldsymbol{Six}} \bigvee\limits_{j=1}^{m} \beta_j$.

Además, diremos que la regla de secuentes

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Sigma_1, \ldots, \Gamma_k \Rightarrow \Sigma_k}{\Gamma \Rightarrow \Sigma}$$

preserva validez si se verifica que

$$\Gamma_i \Rightarrow \Sigma_i \text{ es válido para } 1 \leq i \leq k \;\text{ implica }\; \Gamma \Rightarrow \Sigma \text{ es válido.}$$

Las siguientes nociones son usuales en el campo de la *Teoría de la Prueba* y necesarias para el desarrollo de esta sección.
Recordemos que, se denomina *complejidad* de la fórmula $\alpha \in Fm$ al número de ocurrencias de conectivos en ella. Más precisamente:

Definición 3.5.3 *Sea $\alpha \in Fm$. Se llama complejidad de α, y se nota $c(\alpha)$, al número entero no negativo que se calcula recursivamente de la siguiente manera:*

- $c(\bot) = c(\top) = c(p_i) = 0$, *para toda variable proposicional* p_i,
- $c(\neg\beta) = 1 + c(\beta)$,
- $c(\nabla\beta) = 1 + c(\beta)$,
- $c(\beta \wedge \gamma) = c(\beta \vee \gamma) = 1 + c(\beta) + c(\gamma)$

Por otro lado, existen diferentes convenciones sobre como medir la longitud de una demostración en un cálculo de secuentes. Para nosotros, la *longitud* de una demostración P, notado $lenght(P)$ es el número de ocurrencias de reglas lógicas en P.

Teorema 3.5.4 *Sea $\alpha \in Fm$. Entonces, $\alpha \dashv\vDash \top$ o $\alpha \dashv\vDash \bot$ o*

$$\alpha \dashv\vDash \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}$$

donde $\alpha_{ij} \in \{p_k, \neg p_k, \nabla p_k, \nabla\neg p_k, \neg\nabla p_k, \neg\nabla\neg p_k\}$ para alguna variable proposicional p_k, $n \geq 0$, $m_i \geq 0$.

Dem. Haremos la demostración por inducción sobre la complejidad de α. Si $c(\alpha) = 0$, entonces α es p_k o $\top$ o $\bot$. En cualquiera de los tres casos el teorema vale trivialmente.
(H.I.) Supongamos que el teorema vale para toda fórmula de complejidad menor estricto que k, $k \geq 0$. Sea α tal que $c(\alpha) = k$, entonces
Si α es $\alpha^1 \wedge \alpha^2$, por H.I., $\alpha^k \dashv\vDash \top$ o $\alpha^k \dashv\vDash \bot$ o

$$\alpha^k \dashv\vDash \bigwedge_{i=1}^{n_k} \bigvee_{j=1}^{m_{k_i}} \alpha_{ij}^k$$

para $k = 1, 2$.
Si $\alpha^1 \dashv\vDash \bot$ o $\alpha^2 \dashv\vDash \bot$, entonces $\alpha \dashv\vDash \bot$. Si $\alpha^1 \dashv\vDash \top$, entonces $\alpha \dashv\vDash \alpha^2$ y por H.I. el teorema está probado. Análogo si $\alpha^2 \dashv\vDash \top$.
Sino, $\alpha^1 \dashv\vDash \bigwedge_{i=1}^{n_1} \bigvee_{j=1}^{m_{1_i}} \alpha_{ij}^1$ y $\alpha^2 \dashv\vDash \bigwedge_{i=1}^{n_2} \bigvee_{j=1}^{m_{2_i}} \alpha_{ij}^2$ entonces $\alpha = \alpha^1 \wedge \alpha^2 \dashv\vDash \bigwedge_{i=1}^{n_1} \bigvee_{j=1}^{m_{1_i}} \alpha_{ij}^1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n_2} \bigvee_{j=1}^{m_{2_i}} \alpha_{ij}^2$ y esta última expresión es la conjunción de términos que son disyunciones de fórmulas que están en $\{p_k, \neg p_k, \nabla p_k, \nabla\neg p_k, \neg\nabla p_k, \neg\nabla\neg p_k\}$.

Si α es $\alpha^1 \vee \alpha^2$ con α^1 y α^2 como en el caso anterior. Entonces, Si $\alpha^1 \dashv\vDash \top$ o $\alpha^2 \dashv\vDash \top$, entonces $\alpha \dashv\vDash \top$. Si $\alpha^1 \dashv\vDash \bot$, entonces $\alpha \dashv\vDash \alpha^2$ y por H.I. el teorema está probado. Análogo si $\alpha^2 \dashv\vDash \bot$. Sino, $\alpha = \alpha^1 \vee \alpha^2 \dashv\vDash \bigwedge_{i=1}^{n_1} \bigvee_{j=1}^{m_{1_i}} \alpha_{ij}^1 \vee \bigwedge_{i=1}^{n_2} \bigvee_{j=1}^{m_{2_i}} \alpha_{ij}^2$. Por el Corolario 3.1.5 y teniendo en cuenta que toda álgebra de Stone involutiva es, en particular, un retículo distributivo, aplicando la propiedad distributiva el número de veces necesario podemos transformar la expresión $\bigwedge_{i=1}^{n_1} \bigvee_{j=1}^{m_{1_i}} \alpha_{ij}^1 \vee \bigwedge_{i=1}^{n_2} \bigvee_{j=1}^{m_{2_i}} \alpha_{ij}^2$ en una expresión del tipo $\bigwedge\bigvee \beta_t$ donde $\beta_t \in \{p_k, \neg p_k, \nabla p_k, \nabla\neg p_k, \neg\nabla p_k, \neg\nabla\neg p_k\}$ para alguna variable proposicional p_k.

Si α es $\neg\alpha^1$, por H.I., $\alpha^1 \dashv\vDash \top$ o $\alpha^1 \dashv\vDash \bot$ o $\alpha^1 \dashv\vDash \bigwedge_{i=1}^{n_1} \bigvee_{j=1}^{m_{1_i}} \alpha^1_{ij}$. Si $\alpha^1 \dashv\vDash \top$, entonces $\alpha \dashv\vDash \bot$. Si $\alpha^1 \dashv\vDash \bot$, entonces $\alpha \dashv\vDash \top$. Sino, por el Corolario 3.1.5, $\alpha = \neg\alpha^1 \dashv\vDash \neg \bigwedge_{i=1}^{n_1} \bigvee_{j=1}^{m_{1_i}} \alpha^1_{ij}$. Como toda álgebra de Stone involutiva es, en particular, un álgebra de De Morgan, en ellas valen las leyes de De Morgan, luego $\alpha \dashv\vDash \neg \bigwedge_{i=1}^{n_1} \bigvee_{j=1}^{m_{1_i}} \alpha^1_{ij} \dashv\vDash \bigvee_{i=1}^{n_1} \bigwedge_{j=1}^{m_{1_i}} \neg\alpha^1_{ij}$.
Nuevamente, por la propiedad distributiva y teniendo en cuenta que en toda álgebra de Stone involutiva vale la identidad $\neg\neg x \approx x$, se tiene que la expresión $\bigvee_{i=1}^{n_1} \bigwedge_{j=1}^{m_{1_i}} \neg\alpha^1_{ij}$ es equivalente a una del tipo $\bigwedge \bigvee \beta_t$ donde $\beta_t \in \{p_k, \neg p_k, \nabla p_k, \nabla\neg p_k, \neg\nabla p_k, \neg\nabla\neg p_k\}$ para alguna variable proposicional p_k.

Finalmente, si α es $\nabla\alpha^1$ y $\alpha^1 \dashv\vDash \top$, entonces $\alpha \dashv\vDash \top$. Si $\alpha^1 \dashv\vDash \bot$, entonces $\alpha \dashv\vDash \bot$. Sino, $\alpha^1 \dashv\vDash \bigwedge_{i=1}^{n_1} \bigvee_{j=1}^{m_{1_i}} \alpha^1_{ij}$ y como en la variedad de las álgebras de Stone involutivas valen las identidades $\nabla\nabla x \approx \nabla x$, $\nabla\neg\nabla x \approx \neg\nabla x$, $\nabla(x \vee y) \approx \nabla x \vee \nabla y$ y $\nabla(x \wedge y) \approx \nabla x \wedge \nabla y$, tenemos que $\alpha = \nabla\alpha^1 \dashv\vDash \bigwedge_{i=1}^{n_1} \bigvee_{j=1}^{m_{1_i}} \nabla\alpha^1_{ij}$, donde $\nabla\alpha^1_{ij}$ es equivalente a alguno de los elementos de $\{p_k, \neg p_k, \nabla p_k, \nabla\neg p_k, \neg\nabla p_k, \neg\nabla\neg p_k\}$ para alguna variable proposicional p_k. ■

Observación 3.5.5 *El Teorema 3.5.4 nos dice que toda fórmula $\alpha \in Fm$ es lógicamente equivalente (en* **Six***) a $\top$ o $\bot$ o a una fórmula de la forma $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}$. Si α no es equivalente a $\bot$ ni a $\top$, diremos que $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}$ es una* **forma conjuntiva** *de α y denotaremos con $\bar{\alpha}$ a cualquier forma conjuntiva de α. Si α es equivalente a $\bot$ o a $\top$, entonces $\bot$ (o a $\top$) es una forma conjuntiva de α. Además, diremos que cada α_{ij} es un bloque de $\bar{\alpha}$.*

Si α es una forma conjuntiva, denotaremos con $\#\alpha$ al número de bloques que intervienen en ella. Es decir, si α es $\bot$ o a $\top$, entonces $\#\alpha = 0$. Sino, si α es $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}$, entonces $\#\alpha = m_1 + \cdots + m_n$.

Ejemplo 3.5.6 *Consideremos la fórmula $\nabla((p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla p_2)$. Entonces, por el Lema 3.4.8 (i), tenemos*

$$\nabla((p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla p_2) \Leftrightarrow \nabla(p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla\nabla p_2$$

y , por el Lema 3.4.8 (ii) y el Lema 3.4.4 (i), tenemos

$$\nabla(p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla\nabla p_2 \Leftrightarrow (\nabla p_1 \wedge \nabla\neg\nabla p_2) \vee \nabla\nabla p_2$$

Por otro lado, $\nabla p_1 \wedge \nabla\neg\nabla p_2 \Leftrightarrow \nabla p_1 \wedge \neg\nabla p_2$*, por el Lema 3.4.4 (ii) y Lema 3.4.8 (iv). Luego, por el Lema 3.4.4 (ii)*

$$(\nabla p_1 \wedge \nabla\neg\nabla p_2) \vee \nabla\nabla p_2 \Leftrightarrow (\nabla p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla\nabla p_2$$

Por el Lema 3.4.8 (ii) y Lema 3.4.4(i), se tiene

$$(\nabla p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla\nabla p_2 \Leftrightarrow (\nabla p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla p_2$$

Finalmente, por el Lema 3.4.6, tenemos

$$(\nabla p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla p_2 \Leftrightarrow (\nabla p_1 \vee \nabla p_2) \wedge (\neg\nabla p_2 \vee \nabla p_2)$$

Esta última fórmula es una forma conjuntiva lógicamente equivalente a la original y hemos probado que la fórmula $\nabla((p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla p_2)$ *y* $(\nabla p_1 \vee \nabla p_2) \wedge (\neg\nabla p_2 \vee \nabla p_2)$ *son interprobables. Es decir, los siguientes secuentes son probables*

$$\nabla((p_1 \wedge \neg\nabla p_2) \vee \nabla p_2) \Leftrightarrow (\nabla p_1 \vee \nabla p_2) \wedge (\neg\nabla p_2 \vee \nabla p_2)$$

En este caso $\#(\nabla p_1 \vee \nabla p_2) \wedge (\neg\nabla p_2 \vee \nabla p_2) = 4$

Lema 3.5.7 *Sean* $\alpha \in Fm$ *y* $\bar{\alpha}$ *una forma conjuntiva de* α*. Entonces,* $\alpha \Leftrightarrow \bar{\alpha}$*.*

Dem. Es consecuencia de los Lemas 3.4.4, 3.4.7, 3.4.8 y 3.4.6. ■

Teorema 3.5.8 *(Correctitud) Todo secuente* $\Gamma \Rightarrow \Sigma$ *probable en* $\mathfrak{G}$ *es válido.*

Dem. Mostraremos que todo secuente final en una $\mathfrak{G}$-prueba es válido, usando inducción en el número de secuentes en la prueba. Para el caso base, la prueba consiste de una sola línea, un secuente inicial. Los único secuentes iniciales son de la forma $\perp \Rightarrow$, $\Rightarrow \top$, $\alpha \Rightarrow \alpha$, $\alpha \Rightarrow \nabla\alpha$ y $\Rightarrow \nabla\alpha \vee \neg\nabla\alpha$; y claramente son válidos.
Para el paso inductivo, necesitamos verificar que todas las reglas (lógicas y estructurales) preservan validez. Por ejemplo, la regla de debilitamiento

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Sigma}$$

preserva validez. En efecto, supongamos que $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\Sigma = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ y que el secuente $\Gamma \Rightarrow \Sigma$ es válido. Entonces, la desigualdad $\bigwedge_{i=1}^{n} h(\alpha_i) \leq \bigvee_{j=1}^{m} h(\beta_j)$ vale en $\mathfrak{G}_6$. Como $\mathfrak{G}_6$ es un retículo distributivo, se tiene inmediatamente que $\bigwedge_{i=1}^{n} h(\alpha_i) \wedge h(\alpha) \leq \bigvee_{j=1}^{m} h(\beta_j)$ y, por lo tanto, $\Gamma, \alpha \Rightarrow \Sigma$ es válido. Luego, la regla de debilitamiento a izquierda preserva validez. Por un razonamiento análogo se verifica que la regla de debilitamiento a derecha preserva validez.
Además, la regla de corte

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Sigma, \alpha \quad \alpha, \Gamma \Rightarrow \Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Sigma}$$

preserva validez. En efecto, si $\bigwedge_{i=1}^{n} h(\alpha_i) \leq \bigvee_{j=1}^{m} h(\beta_j) \vee h(\alpha)$ y $\bigwedge_{i=1}^{n} h(\alpha_i) \wedge h(\alpha) \leq \bigvee_{j=1}^{m} h(\beta_j)$ se tiene que $\bigwedge_{i=1}^{n} h(\alpha_i) \leq \bigvee_{j=1}^{m} h(\beta_j)$, ya que en todo retículo distributivo vale que si $x \leq y \vee z$ y $x \wedge z \leq y$ entonces $x \leq y$.
Nuevamente, debido a la estructura reticular de $\mathfrak{G}_6$, se prueba sin dificultad que las reglas lógicas $(\wedge \Rightarrow)$, $(\Rightarrow \wedge)$, $(\vee \Rightarrow)$, y $(\Rightarrow \vee)$ preservan validez.
Por otra lado, teniendo en cuenta que $\mathfrak{G}_6$ es un álgebra de De Morgan, por (DM1) y (DM6) (Capítulo 2), se ve claramente que las reglas lógicas $(\neg)$, $(\neg\neg \Rightarrow)$ y $(\Rightarrow \neg\neg)$ preservan validez.
Finalmente, veamos que

$$(\nabla) \quad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \nabla\Sigma}{\Gamma, \nabla\alpha \Rightarrow \nabla\Sigma}$$

preserva validez. Supongamos que (1) $\bigwedge_{i=1}^{n} h(\alpha_i) \wedge h(\alpha) \leq \bigvee_{j=1}^{m} h(\nabla\beta_j)$. Entonces, como ∇ es homomorfismo de retículos, tenemos $\bigwedge_{i=1}^{n} h(\alpha_i) \wedge h(\alpha) \leq \bigvee_{j=1}^{m} \nabla h(\beta_j) = \nabla\left(\bigvee_{j=1}^{m} h(\beta_j)\right)$. Pero, en $\mathfrak{G}_6$ vale que $\nabla x \in \{0,1\}$ para todo x. Luego, $\nabla\left(\bigvee_{j=1}^{m} h(\beta_j)\right) \in \{0,1\}$. Si $\nabla\left(\bigvee_{j=1}^{m} h(\beta_j)\right) = 0$, entonces, por (1), $\bigwedge_{i=1}^{n} h(\alpha_i) \wedge h(\alpha) = 0$ y eso implica que $\bigwedge_{i=1}^{n} h(\alpha_i) = 0$ o $h(\alpha) = 0$. En ambos casos se tiene que $\bigwedge_{i=1}^{n} h(\alpha_i) \wedge h(\nabla\alpha) = 0$ y por lo tanto $\bigwedge_{i=1}^{n} h(\alpha_i) \wedge h(\nabla\alpha) \leq \bigvee_{j=1}^{m} h(\nabla\beta_j)$. Si $\nabla\left(\bigvee_{j=1}^{m} h(\beta_j)\right) = 1$, trivialmente se tiene que $\bigwedge_{i=1}^{n} h(\alpha_i) \wedge h(\nabla\alpha) \leq \bigvee_{j=1}^{m} h(\nabla\beta_j)$.

■

Para probar el Teorema de Completitud, necesitamos primero ver que se verifica el *Principio de Inversión.*

Lema 3.5.9 *(Principio de Inversión) Para toda regla de* $\dfrac{S_1, \ldots, S_k}{S}$ *de* $\mathfrak{G}$*, excepto las reglas de debilitamiento, se verifica que: si* S *es válido entonces* S_i *son válidos para* $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Dem. Las reglas $(\wedge \Rightarrow)$, $(\Rightarrow \wedge)$, $(\vee \Rightarrow)$ y $(\Rightarrow \vee)$ son las mismas que en el caso clásico. Dado que las álgebras de Stone involutivas son en particular retículos distributivos, se verifica como en el caso clásico el Principio de Inversión para ellas.
Como la negación de las álgebras de Stone involutivas es una negación de De Morgan, las reglas $(\neg)$, $(\neg\neg \Rightarrow)$ y $(\Rightarrow \neg\neg)$ verifican el Principio de Inversión.
La regla $(\neg\nabla \Rightarrow)$ verifica el Principio de Inversión ya que en $\mathbf{S}$ verifica la identidad $\nabla\neg\nabla\alpha \approx \neg\nabla\alpha$.

Veamos que (∇) verifica el Principio de Inversión. Supongamos que el secuente $\Gamma, \nabla\alpha \Rightarrow \nabla\Sigma$ es válido. Luego, para todo homomorfismo $h \in Hom(Fm, \mathfrak{G}_6)$ se verifica que

$$h(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma) \wedge \nabla h(\alpha) = h(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma \wedge \nabla\alpha) \leq h(\bigvee_{\beta\in\Sigma} \nabla\beta) = h(\nabla \bigvee_{\beta\in\Sigma} \beta) = \nabla h(\bigvee_{\beta\in\Sigma} \beta)$$

Por como está definido el operador ∇ en $\mathfrak{G}_6$ se tiene que $\nabla h(\bigvee_{\beta\in\Sigma} \beta) \in \{0,1\}$. Si $\nabla h(\bigvee_{\beta\in\Sigma} \beta) = 0$, entonces $h(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma) \wedge \nabla h(\alpha) = 0$. En $\mathfrak{G}_6$ podemos afirmar que $h(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma) = 0$ ó $\nabla h(\alpha) = 0$. Si $h(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma) = 0$ y entonces $h(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma \wedge \alpha) \leq h(\bigvee_{\beta\in\Sigma} \nabla\beta)$. Si $\nabla h(\alpha) = 0$, luego $h(\alpha) = 0$ y entonces $h(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma) \wedge h(\alpha) = 0$ y $h(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma \wedge \alpha) \leq h(\bigvee_{\beta\in\Sigma} \nabla\beta)$.
Por otro lado, si $\nabla h(\bigvee_{\beta\in\Sigma} \beta) = 1$, claramente $h(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \gamma \wedge \alpha) \leq h(\bigvee_{\beta\in\Sigma} \nabla\beta)$. ■

Teorema 3.5.10 *(Completitud) Todo secuente válido de* $\mathfrak{G}$ *es probable en* $\mathfrak{G}$.

Dem. Mostraremos que todo secuente válido $\Gamma \Rightarrow \Sigma$ tiene una demostración en $\mathfrak{G}$ por inducción sobre el número total de conectivos lógicos $\vee$ y $\wedge$ que ocurren en $\Gamma \Rightarrow \Sigma$. En virtud del Lema 3.5.7, asumimos que toda fórmula en $\Gamma \cup \Sigma$ está en forma conjuntiva.
Para el caso base, toda fórmula en Γ y Σ es un bloque en $\{p, \neg p, \nabla p, \nabla\neg p, \neg\nabla p, \neg\nabla\neg p\}$ para alguna variable proposicional p, o una de las constantes $\perp$ o $\top$. Como el secuente es válido, tenemos los siguientes casos:

(1) $\perp \in \Gamma$ o $\top \in \Sigma$,

(2.1) $p \in \Gamma$ y $p \in \Sigma$; (2.2) $p \in \Gamma$ y $\nabla p \in \Sigma$,

(3.1) $\neg p \in \Gamma$ y $\neg p \in \Sigma$; (3.2) $\neg p \in \Gamma$ y $\nabla \neg p \in \Sigma$,

(4.1) $\nabla p \in \Gamma$ y $\nabla p \in \Sigma$; (4.2) $\nabla \neg p \in \Gamma$ y $\nabla \neg p \in \Sigma$,

(5.1) $\neg \nabla \neg p \in \Gamma$ y $\neg \nabla \neg p \in \Sigma$; (5.2) $\neg \nabla \neg p \in \Gamma$ y $p \in \Sigma$,

(6) $\nabla p, \neg \nabla p \in \Sigma$.

En el caso (1), $\Gamma \Rightarrow \Sigma$ puede ser derivado de $(\perp)$ o $(\top)$ o mediante la aplicación de debilitamiento(s). En los casos (2.1), (3.1), (4.1), (4.2) y (5.1), $\Gamma \Rightarrow \Sigma$ puede ser derivado de un axioma estructural y debilitamiento(s). En los casos (2.2), (3.2), $\Gamma \Rightarrow \Sigma$, puede ser derivada del primer axioma modal y debilitamiento(s). En el caso (5.2), podemos derivar $\neg \nabla \neg p \Rightarrow p$ como sigue

$$\dfrac{(\neg)\,\dfrac{\neg p \Rightarrow \nabla \neg p}{\neg \nabla \neg p \Rightarrow \neg \neg p} \qquad \neg \neg p \Rightarrow p}{\neg \nabla \neg p \Rightarrow p}\,(\text{cut})$$

y de acá , derivamos $\Gamma \Rightarrow \Sigma$ por debilitamiento(s). En el caso (6), derivamos $\Gamma \Rightarrow \Sigma$ usando el segundo axioma modal, el Lema 3.4.2 y debilitamiento(s).
Para el paso inductivo, sea α una fórmula cualquiera que no es un bloque y tampoco una constante en Γ o Σ. Entonces, por la definición de la fórmula proposicional, α debe tener una de las siguientes formas $(\beta \vee \gamma)$ o $(\beta \wedge \gamma)$. Si α tiene la forma $(\beta \vee \gamma)$ y ∇p es un bloque de β y $\neg \nabla p$ es un bloque de γ, entonces $\Gamma \Rightarrow \Sigma$ sale usando el segundo axioma modal, el Lema 3.4.2 y debilitamiento(s).
En otro caso, $\Gamma \Rightarrow \Sigma$ puede ser derivado de las reglas de introducción de $\vee$ o $\wedge$, respectivamente, usando el caso a izquierda o a derecha, dependiendo de si α está en Γ o Σ, pero sin usar debilitamientos. En cada caso, cada secuente superior de la regla tendrá menos conectivos $\wedge$ o $\vee$ que $\Gamma \Rightarrow \Sigma$, y por el Principio de Inversión, el secuente es válido. Por lo tanto, cada secuente superior tiene una derivación en $\mathfrak{G}$, por la hipótesis inductiva. ■

Capítulo 4

Conclusiones

En esta tesis, hemos estudiado la lógica que preserva grados de verdad con respecto a las álgebras de Stone involutivas, llamada ***Six***. Probamos que esta es una lógica seis–valorada que puede ser definida en términos de cuatro matrices finitas. ***Six*** resulta ser una lógica interesante que combina buenas características de la lógica cuatro–valuada de Belnap $FOUR$ con las lógicas n-valuadas de Łukasiewicz para $2 \leq n \leq 5$. Como lógica paraconsistente, ***Six*** resulta ser una genuina **LFI** con operados de consistencia que permite distinguir entre *inconsistencia* y *contradicción*.

Recordemos de [7] que una lógica $\mathbb{L}$ es *marcadamente* paraconsistente (boldly paraconsistent) si no existe una fórmula $\beta(p_1, \ldots, p_n)$ que satisfaga las siguientes condiciones:

(i) $\nvdash_L \beta(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ para algún $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, y

(ii) $\alpha, \neg\alpha \vdash_{\mathbb{L}} \beta(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ para todo $\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

Una lógica paraconsistente que no es marcadamente paraconsistente no es una "genuina" lógica paraconsistente: de una contradicción es posible derivar todas las instancias del mismo esquema. Por ejemplo, la lógica minimal de Johánsson es paraconsistente, pero no marcadamente paraconsistente puesto que $\alpha, \neg\alpha \vdash \neg\beta$, para todo α y todo β. Nos proponemos determinar si ***Six*** es marcadamente paraconsistente.

Por otro lado, exhibimos una representación sintáctica de ***Six*** por medio del cálculo de secuentes $\mathfrak{G}$. Pensamos que $\mathfrak{G}$ merece un estudio más profundo. Por ejemplo, queda abierta la cuestión de si es posible probar un *teorema de eliminación de corte* para $\mathfrak{G}$. Pensamos que este no es el caso debido a la forma inusual de las reglas lógicas que regulan el comportamiento del operador ∇. En este sentido, pensamos que la herramienta de los *hipersecuentes* puede ser más adecuada para presentar un cálculo estilo Gentzen para ***Six*** con la propiedad de eliminación de corte.

Finalmente, creemos que sería interesante el desarrollo de un sistema de *Deducción Natural* para ***Six***. Para esto, se deberán presentar reglas de introducción y eliminación para cada conectivo. En particular, se deberán presentar sendas reglas para el conectivo de consistencia y determinar si procede el descargo de hipótesis en cada caso. Además, cuando construimos pruebas, se pueden realizar inferencias innecesarias (rodeos). Una ocurrencia de una fórmula se dice maximal si es, simultáneamente, la conclusión de una regla de introducción e hipótesis de una regla de eliminación. Una prueba se dice normal si no contiene fórmulas maximales. Buscaremos un método para normalizar demostraciones, esto es, un método que permita hallar demostraciones sin rodeos, y proveer un *Teorema de la Forma Normal*.

Bibliografía

[1] R. Balbes and P. Dwinger. *Distributive Lattices*, Univ. of Missouri Press, Columbia, 1974.

[2] N. Belnap. *How computers should think*. Contemporary Aspects of Philosophy (Editor: G. Ryle). Oriol Press,pp. 30–56, 1976.

[3] A. Bialynicki-Birula and H. Rasiowa. *On the representation of Quasi-Boolean algebras*, Bull.Acad. Pol.Sci. Sér. Math. Astronim. Phys. 5(1957), 259–261.

[4] V. Boicescu, A. Filipoiu, G. Georgescu and S. Rudeanu, Łukasiewicz-Moisil algebras, *Annals of Discrete Mathematics*, 49, North-Holland, 1991.

[5] F. Bou, F. Esteva, J. M. Font, A. Gil, L. Godo, A. Torrens and V. Verdú. *Logics preserving degrees of truth from varieties of residuated lattices*. Journal of Logic and Computation, **19** (2009), 1031-–1069.

[6] S. Burris and H. P. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 78, Springer-Verlag, Berlin, 1081.

[7] W. A. Carnielli, M. E. Coniglio and J. Marcos. *Logics of Formal Inconsistency*. Handbook of Philosophical Logic, vol. 14, pp. 15-107. Eds.: D. Gabbay; F. Guenthner. Springer, 2007.

[8] W. A. Carnielli and J. Marcos. *A taxonomy of* **C**-*systems*. In W. A. Carnielli, M. E. Coniglio, and I. M. L. D'Ottaviano, editors, *Paraconsistency — The logical way to the inconsistent*, volume 228 of *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, pp. 1–94. Marcel Dekker, New York, 2002.

[9] M. Coniglio and M. Figallo, *Hilbert-style Presentations of Two Logics Associated to Tetravalent Modal Algebras* , Studia Logica, nro. 3, vol. 102 (2014), 525–539.

[10] W. H. Cornish and P. R. Flower. *Coproducts of De Morgan Algebras*, Bull. Austral. Math. Soc. 16(1977),113.

[11] W. H. Cornish and P. R. Flower. *Coproducts of Kleene Algebras*, Bull. Austral. Math. Soc. Ser. A 27(1979), 209–220.

[12] R. Cignoli and M. S. de Gallego, *The lattice structure of some Łukasiewicz algebras*, Algebra Universalis, **13** (1981), 315–328.

[13] R. Cignoli and M. S. de Gallego, *Dualities for some De Morgan algebras with operators and Łukasiewicz algebras*, J. Austral Math. Soc (Series A), **34** (1983), 377–393.

[14] N.C.A. da Costa, *Calculs propositionnel pour les systèmes formels inconsistants*. Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris, série A, vol. 257(1963), 3790–3792.

[15] N.C.A. da Costa, *On the Theory of inconsistent formal systems*. Notre Dame Journal of Formal Logic, 15(4):497–510, 1974.

[16] N.C.A. da Costa and E. H. Alves, *Une sémantique pour le calcul C_1 (en francés)*. Compte Rendus de l'Académie de Sciences de Paris (A-B),283:729–731 (1976).

[17] N.C.A. da Costa and E. H. Alves, *A semantical analysis of the calculi C_n*. Notre Dame Journal of Formal Logic, 18(4):621–630 (1977).

[18] J. M. Dunn and G. M. Hardegree, *Algebraic Methods in Philosophical Logic*. Oxford Logic Guides: 41. Clarendon Press. Oxford, 2001.

[19] M. Fitting. *Bilattices and the theory of truth, Journal of Philosophical Logic*, vol. 18 (1989), 225–256.

[20] M. Fitting. *Bilattices and the semantics of logic programming*. Journal of Logic Programming, vol. 11 (1991), 91–116.

[21] J. M. Font. *On substructural logics preserving degrees of truth*. Bulletin of the Section of Logic, **36** (2007), 117-–130.

[22] J. M. Font. *Taking degrees of truth seriously*. Studia Logica (Special issue on Truth Values, Part I), **91** (2009), 383-–406.

[23] J. M. Font, A. Gil, A. Torrens and V. Verdú. *On the infinite-valued Łukasiewicz logic that preserves degrees of truth*. Archive for Mathematical Logic, **45** (2006), 839—868.

[24] J. M. Font. *Belnap's four-valued logic and De Morgan lattices*. Logic Journal of the IGPL, **5** (1997), n. 3, 413–440.

[25] J. M. Font and M. Rius. *An abstract algebraic logic approach to tetravalent modal logics*. J. Symbolic Logic **65**, n. 2 (2000), 481–518.

[26] G. Gentzen. *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Mathematische Zeitschrift, 39, pp 176–210, 405–431 (1935).

[27] G. Gentzen. *Recherches sur la déduction Logique* traduit de L'Allemand par R. Feys et J. Ladrière, Presses Universitaires de France, 108, Boulevard Saint-Germain, Paris, 1955.

[28] M. L. Ginsberg. *Multivalued logics: A uniform approach to inference in artificial intelligence*, Computational Intelligence, vol. 4 (1988), 265–316.

[29] J. Y. Girard, Y. Lafont and P. Taylor. *Proofs and Types*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[30] J. Y. Girard. *Proof theory and Logical Complexity*, Bibliopolis, 1987.

[31] K. Gödel. On the intuitionistic propositional calculus (1932). In: S. Feferman et al., editors, *K. Gödel's Collected Works*, volume 1, pages 223-225. Oxford University Press, Oxford, 1986.

[32] G. Grätzer and H. Lakser. *The structure of pseudocomplemented distributive lattices II. Congruence extension and amalgamation*, Trans. Amer. Math. Soc. 156 (1971), 343—358.

[33] P. Halmos. Algebraic Logic, Chelsea, New York, 1962.

[34] T. Hecht and T. Katriňak. *Principal congruences of p-algebras and double p-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 58, (1976), 25—31.

[35] R. Jansana. *Propositional consequence relations and algebraic logic*, in E. N. Zalta (ed.), The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Spring 2011 Edition, http://plato.stanford.edu/archives/spr2011/entries/consequence-algebraic/.

[36] E. J. Lemmon and D. Scott. *An Introduction to Modal Logic*. In: The Lemmon notes, K. Segerberg (editor). Volume 11 of American Philosophical Quarterly Monograph series. Basil Blackwell, Oxford, 1977.

[37] G. Moisil. *Recherches sur les logiques non–chrysippiennes*, Ann. Sci. Uni. Jassy 26 (1940), 431-–466.

[38] A. Monteiro. *La sémisimplicité des algébres de Boole topologiques et les systémes d'eductifs*, Revista de la Unión Matemática Argentina 25 (1975), 417-–448.

[39] A. Monteiro. *Algebras de Lukasiewicz trivalentes*, Curso dictado en la Universidad Nac. del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 1963.

[40] L. Monteiro.*Axiomes ind'ependants pour les algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Bull. Soc. Sc. Math. R. P. Roumaine 7, 55 (1963), 199-–202.

[41] A. A. Monteiro, L. F. Monteiro. *ÁLGEBRAS DE MORGAN. Informe técnico interno número 72*, Universidad Nacional del Sur, INMABB CONICET-UNS, 2000.

[42] H. Montgomery and R. Routley, *Contingency and non-contingency bases for normal modal logics*. Logique et analyse, 9 (1966), 318–328.

[43] H. A. Priestley. *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces*, Bull. London Math. Soc. 2 (1970), 186–190.

[44] H. A. Priestley. *Stone lattices: a topological approach*, Fund. Math. **84** (1974), 127–143.

[45] H. A. Priestley. *The construction of spaces dual to pseudocomplemented distributive lattices*, Quart. J. Math. Oxford Ser. **26** (1975), 215–228.

[46] H. Sankappanavar. *Pseudocomplemented Ockham and De Morgan algebras*, Z. Math. Logik Grundlagen Math. 32 (1986), 385—394.

[47] S. J. Scroggs. *Extensions of The Lewis System* **S5**. The Journal of Symbolic Logic, 16 (1951), n. 2, 112–120.

[48] A. Visser. *Four-valued semantics and the liar*. Journal of Philosophical Logic, vol. 13 (1984), 181–212.

[49] R. Wójcicki. Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. Vol. 199 of Synthese Library, Kluwer, 1988.