

ESTUDIO DE OSCILACIONES EN SISTEMAS NO LINEALES
MULTIPARAMETRICOS

TESIS PRESENTADA
EN EL DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA
DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

REUNIENDO LOS REQUERIMIENTOS PARCIALES PARA
OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR EN CONTROL DE SISTEMAS

por
JORGE LUIS MOIOLA
Marzo de 1992

ESTUDIO DE OSCILACIONES EN SISTEMAS NO LINEALES MULTIPARAMETRICOS

PROGRAMA DE DOCTORADO EN CONTROL DE SISTEMAS

Departamento de Ingeniería Eléctrica
con la colaboración de los Departamentos
de Ingeniería Química (PLAPIQUI)
y de Matemáticas de la
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR


.....
Jorge Luis Moiola

Miembros del Jurado:

Ing. Alfredo Desages
Director de Tesis
Prof. Titular U.N. del Sur
Invest. Independiente de la CIC

Dr. Vicente Costanza
Prof. Titular U.N. del Litoral
Invest. Independiente del CONICET

Dr. Carlos D'Attellis
Prof. Asociado UBA
Investigador de la CNEA

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi Director de Tesis, el Ing. Alfredo Desages, por su guía y ayuda continua en la elaboración de este trabajo de investigación. Deseo también hacer extensivo este reconocimiento a los miembros del jurado Dres. Vicente Costanza y Carlos D'Attellis por su gentileza de participar en el trabajo de corrección y evaluación, como así también al Dr. Hernán Cendra por sus sugerencias y valiosos comentarios de la primera versión de esta tesis.

No puedo dejar de reconocer la ayuda inmensa que he recibido en mi formación a lo largo de estos años de trabajo por amigos, colegas y profesores, quienes de una u otra forma agregaron sus contribuciones enriqueciendo este material significativamente. Esta deuda de gratitud la mantengo con Celeste Colantonio, quién me inició en el apasionante mundo de las bifurcaciones de Hopf, Liliana Castro, Ron Chen, y Lelang Shieh. Agradezco también el valioso aporte del Dr. Eusebius Doedel quién gentilmente me envió la última versión de su programa AUTO para verificar los resultados numéricos de los últimos capítulos. A todos ellos vaya mi más profundo reconocimiento.

Debo apreciar también la ayuda brindada materialmente por la Universidad Nacional del Sur a través de su Departamento de Ingeniería Eléctrica y la Planta Piloto de Ingeniería Química (PLAPIQUI), y el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) que han hecho posible la concreción de este trabajo.

Finalmente, deseo expresar mi mayor agradecimiento a mi esposa e hija quienes supieron alentarme en los momentos más difíciles brindándome su cariño sin límites. A ellas, como también a toda mi familia, va dedicado este trabajo.

A Mariela y Melissa, con amor bifurcado

RESUMEN

En esta tesis se presenta un estudio de oscilaciones en sistemas no lineales generales que cumplen ciertas condiciones de diferenciabilidad. Para ello se parte, en una primera etapa, de verificar los postulados del teorema de bifurcación de Hopf que da las condiciones para detectar la presencia de soluciones periódicas en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias sujeto a la variación de un parámetro μ del mismo. A tal efecto, se utiliza una propuesta fuertemente enraizada en la Teoría de Control Moderna que ofrece una interesante y didáctica presentación gráfica. Con estos primeros resultados exploramos una generalización del teorema de bifurcación de Hopf, permitiéndole mayor flexibilidad a sus hipótesis. En otras palabras, dos de las tres hipótesis originales podrán no cumplirse dando lugar a una gama variada de diagramas de bifurcaciones locales, esto es, representaciones entre el estado estacionario y la rama de soluciones periódicas cuando varía el parámetro de bifurcación μ . Es así como, avanzando en una jerarquía de tales puntos singulares, es decir donde fallan los postulados del teorema, se cae inevitablemente en una perturbación multiparamétrica cuando se intentan recuperar los diagramas de bifurcaciones o, en otras palabras, cuando se intenta recuperar la dinámica oscilatoria del sistema.

Con la propuesta formalmente enunciada se estudian las llamadas degeneraciones del teorema de bifurcación de Hopf. Para las mismas se han previsto dos alternativas de análisis. La primera consiste en plantear las condiciones de definición y de no-degeneración con nuestra formulación y aplicar los resultados de la teoría de singularidades para obtener los diagramas de bifurcaciones locales. La segunda, en cambio, permite directamente construir los diagramas locales en el espacio de los parámetros originales del sistema aplicando técnicas numéricas. En este trabajo mostramos ambas formas de análisis, especialmente en los últimos capítulos. Con tal

fin, hemos implementado diferentes órdenes de aproximaciones para recuperar la dinámica oscilatoria del sistema. Estas aproximaciones incluyen, en orden ascendente, mayor información del sistema no lineal en forma similar a la clásica expansión en series de Taylor.

Las contribuciones originales más importantes radican en: 1) La formulación de las condiciones de definición y de no-degeneración utilizando las técnicas en el llamado dominio frecuencia; 2) La extensión del método gráfico existente para hallar la amplitud y frecuencia de las oscilaciones de tal manera de incluir naturalmente a las bifurcaciones degeneradas de Hopf; 3) La continuación de las ramas de soluciones periódicas bifurcadas utilizando técnicas numéricas junto con diferentes aproximaciones de balance armónico ,y 4) La comparación de resultados numéricos entre la formulación propuesta y el programa más completo y preciso de continuación de soluciones periódicas hasta el presente, el conocido código AUTO.

ABSTRACT

In this thesis a study of oscillations in general smooth nonlinear systems is presented. For this task, in a first stage, the hypotheses of the Hopf bifurcation theorem are verified to satisfy the conditions for the occurrence of oscillations in a system of ordinary differential equations in which a parameter μ varies. Concerning with this, a proposal enrooted strongly in the Modern Control Theory offering an interesting and didactic graphical presentation is used. With this primary results, a generalization of the Hopf bifurcation theorem is explored by permitting much greater flexibility to its hypotheses. In other words, two of the three original hypotheses can fail giving a variety of local bifurcation diagrams, that is, representations between the steady-state solutions and the branch of periodic solutions when the bifurcation parameter μ varies. Doing that, a hierarchy of such singular points can be constructed, that is, when the Hopf postulates fail, and, inevitably, a multiparameter perturbation appears in the effort of recovering the bifurcation diagrams or, in other words, when the oscillatory dynamics is trying to be recovered.

With the proposal formally presented, the so-called degenerate Hopf bifurcations are studied. For this task, two different alternatives of analysis are included. The former consists in presenting the defining and the nondegeneracy conditions with our formulation, and then in applying the well-known results of singularity theory to obtain the local bifurcation diagrams. The latter, on the other hand, permits directly the construction of the local diagrams in the space of the original system parameters by using numerical techniques. In this work, we show both ways of analysis specially in the last chapters. As a matter of fact, we have implemented different orders of approximations to recover the oscillatory dynamics of the system. These approximations include, in ascending order, more information of the nonlinear system in a way similar to the classical expansion in Taylor series.

The most important original contributions of this work are: 1) The formulation of the defining and nondegeneracy conditions using the so-called frequency domain techniques; 2) The extension of the existent graphical procedure to obtain the amplitude and frequency of the oscillations in order to include naturally Hopf bifurcation degeneracies; 3) The continuation of the bifurcated periodic solution branches using numerical techniques together with different harmonic balance approximations, and 4) The comparison of numerical results between the proposed approach and the most complete and accurate program for the continuation of periodic solutions, the well-known software package AUTO.

CONTENIDO

	pags.
Agradecimientos.	iii
Resumen.	v
Abstract	vii
Lista de Figuras y Tablas	xi
Nomenclatura	xviii
1. CAPITULO 1	
BIFURCACIONES Y DINAMICA DE SISTEMAS	1
2. CAPITULO 2	
EL TEOREMA DE BIFURCACION DE HOPF.	11
2.1 Introducción	11
2.2 Teorema de bifurcación de Hopf en el dominio tiempo.	14
2.3 Teorema de bifurcación de Hopf en el dominio frecuencia	20
2.4 Bifurcación de Hopf en un reactor tanque agitado continuo	33
3. CAPITULO 3	
CONTINUACION DE CURVAS DE BIFURCACION EN EL ESPACIO DE PARAMETROS.	46
3.1 Introducción	47
3.2 Bifurcaciones estáticas y dinámicas: Resultados Preliminares	48
3.3 Bifurcaciones degeneradas de Hopf de codimensión 1	53
3.4 Ejemplos de aplicación	
3.4.a Reactor tanque agitado continuo con reacciones consecutivas.	60
3.4.b Reactor tanque agitado continuo con capacitancia térmica	75
4. CAPITULO 4	
LOCALIZACION DE BIFURCACIONES DEGENERADAS EN EL ESPACIO DE PARAMETROS.	79
4.1 Introducción	80

4.2	Multiplicidad de estados de equilibrio	81
4.3	Multiplicidad de puntos de bifurcación de Hopf	84
4.4	Ejemplo de aplicación.	88
5.	CAPITULO 5	
	BIFURCACIONES DEGENERADAS DE HOPF.	108
5.1	Introducción	108
5.2	Bifurcaciones degeneradas de Hopf y la Teoría de Singularidades	110
5.3	Bifurcaciones degeneradas de Hopf y el método en el dominio frecuencia.	124
5.4	Ejemplo de aplicación.	141
6.	CAPITULO 6	
	CONTINUACION DE SOLUCIONES PERIODICAS.	146
6.1	Introducción	146
6.2	Aproximaciones de balance armónico de alto orden	148
6.3	Continuación de las soluciones periódicas usando diferentes aproximaciones.	152
6.4	Diagramas de bifurcaciones locales utilizando diferentes aproximaciones.	155
7.	CAPITULO 7	
	COEFICIENTES DE CURVATURA USANDO TECNICAS EN EL DOMINIO FRECUENCIA	190
7.1	Introducción	190
7.2	Balance armónico y los coeficientes de curvatura	192
7.3	Coefficientes de estabilidad: Otra alternativa de cálculo	197
7.4	Múltiples ciclos límites en el espacio de parámetros.	199
8.	CAPITULO 8	
	CONCLUSIONES.	209
	REFERENCIAS	214

LISTA DE FIGURAS Y TABLAS

- Figura 2.1: Bifurcaciones de Hopf: (a) supercrítica, (b) subcrítica (pag. 16).
- Figura 2.2: Efectos de las soluciones periódicas en (a) sistemas lineales, (b) no lineales (p. 17).
- Figura 2.3: Diagrama de bifurcación local para: (a) bifurcación supercrítica, (b) subcrítica (p. 18).
- Figura 2.4: (a) Sistema no lineal realimentado general, (b) sistema linealizado (p. 24).
- Figura 2.5: (a) Condición de bifurcación estática en el dominio tiempo y en el dominio frecuencia, (b) Idem para bifurcación dinámica (p. 26).
- Figura 2.6: Método de Hopf gráfico: lugares geométricos (p. 28).
- Figura 2.7: Bifurcaciones de Hopf: (a) supercrítica y (b) subcrítica en el dominio frecuencia (p. 30).
- Figura 2.8: Lugar geométrico característico para el caso 1 (p. 35).
- Figura 2.9.a: Diagramas de polos y ceros correspondientes al caso 2 (p. 36).
- Figura 2.9.b: Lugar geométrico característico del caso 2. Permite ambos tipos de bifurcaciones: estáticas y dinámicas (p. 37).
- Figura 2.9.c: Lugar geométrico característico del caso 2. Únicamente se puede detectar bifurcación estática (p. 37).
- Figura 2.10.a: Diagrama de polos y ceros correspondiente al caso 3 (p. 38).
- Figura 2.10.b: Lugar geométrico característico del caso 3 (p. 38).
- Figura 2.11: Detección de ciclos límites estables para dos valores diferentes del parámetro de bifurcación D , $B=22$, $\beta=3$ y D varía entre 0.085 y 0.086. (a) Método de Hopf gráfico. (b) Plano de fase (p. 41).
- Figura 2.12: Comparación de resultados entre la simulación (línea llena) y el algoritmo (línea punteada), $D=0.0874$ (p. 42).
- Figura 2.13: Detección de ciclo límite inestable para $B=14$, $\beta=3$ y $D=0.163$. (a) Método gráfico, (b) Comparaciones con resultados de la simulación (p. 43).
- Figura 2.14: Doble intersección utilizando el método gráfico para $B=19$, $\beta=3$ y $D=0.1029$ (p. 44).

- Figura 3.1: Diagramas de bifurcaciones locales para interacciones entre dos puntos de bifurcación de Hopf (p. 55).
- Figura 3.2: Diagrama de bifurcación local y secuencia de lugares geométricos característicos asociados (p. 64).
- Tabla 3.1: Valores de los parámetros auxiliares en los casos estudiados (p. 66).
- Tabla 3.2: Clasificación de las degeneraciones y valores del parámetro de bifurcación (p. 66).
- Figura 3.3: Variedad de estado estacionario y sus curvas de bifurcación. El parámetro α varía desde 1 a 1.4 (p. 67).
- Figura 3.4: Curvas de bifurcaciones cuando el parámetro auxiliar β varía desde 1.5 a 2 (p. 69).
- Figura 3.5: Curvas de bifurcaciones cuando el parámetro auxiliar B varía entre 12 y 14 (p. 70).
- Figura 3.6: Curvas de bifurcaciones cuando el parámetro auxiliar B varía entre 9 y 18 (p. 72).
- Figura 3.7: Curvas de bifurcaciones cuando el parámetro auxiliar B varía entre 8 y 18 (p. 73).
- Figura 3.8: Variedad de estados de equilibrio, curvas de bifurcaciones y conjuntos de catástrofes para $S=0.01$, $\alpha=1$, $\beta=1.8$ y B varía entre 6 y 18 (p. 74).
- Figura 3.9: Variedad de estados de equilibrio, curvas de bifurcaciones y lugares geométricos característicos para $B=11$, $\epsilon=0.8$, $\rho=1$ y β varía entre 0.1 y 2 (p. 77).
- Figura 4.1: Curvas de bifurcaciones estáticas y la singularidad *butterfly* para $B=8$ y $S=0.04$. En el diagrama superior $\beta=1.206$ mientras que en el inferior $\beta=1.3$ (p. 92).
- Figura 4.2: Variedad de estado estacionario, curvas de bifurcaciones y conjuntos de catástrofes para $B=8$, $S=0.04$, $\beta=1.3$ y α varía entre 0.7 y 1.3 (p. 93)
- Figura 4.3: Curvas de puntos cuspidales como secciones de corte de la singularidad *swallowtail* para $B=8$ en el plano de parámetros α - β , cuando varía S (p. 94).
- Figura 4.4: Diagrama de la singularidad *swallowtail* en el espacio de pará-

metros α - β -S (p. 95).

Figura 4.5: Continuación de las singularidades *swallowtails* (S) hasta alcanzar la singularidad *butterfly* indicada por B. Valor del único parámetro constante, $B=8$ (p. 96).

Figura 4.6: Curvas de bifurcaciones degeneradas para $B=8$ y $S=0.04$ (p. 97).

Figura 4.7: Curvas de bifurcaciones degeneradas para $\alpha=1$ y $S=0.01$ (p. 98).

Figura 4.8: Diagramas de bifurcaciones locales correspondientes a las Figuras 4.6 y 4.7. cuando el parámetro D varía (p. 99).

Figura 4.9: Bifurcaciones degeneradas en el plano de parámetros α - β para $B=8$ y $S=0.06$ (p. 101).

Figura 4.10: Bifurcaciones degeneradas en el plano de parámetros α - β para $B=8$ y $S=0.08$ (p. 102).

Figura 4.11: Bifurcaciones degeneradas en el plano de parámetros α - β para $B=8$ y $S=0.1$ (p. 103).

Figura 4.12: Bifurcaciones degeneradas en el plano de parámetros α - β para $B=8$ y $S=0.12$ (p. 104).

Figura 4.13: Ampliación de la Figura 4.12. Bifurcaciones degeneradas en el plano de parámetros α - β para $B=8$ y $S=0.12$ (p. 105).

Figura 4.14: Bifurcaciones degeneradas en el plano de parámetros α - β para $B=8$ y $S=0.14$ (p. 106).

Figura 5.1: Bifurcación de Hopf subcrítico y supercrítico (p. 111).

Figura 5.2: Diagramas de bifurcaciones locales para la singularidad H_{01} (ecuación (5.10)) (p. 116).

Figura 5.3: Diagramas de bifurcaciones locales para la singularidad H_{01} (ecuación (5.12)) (p. 116).

Figura 5.4: Variedades de transición en el espacio de parámetros α - β en cercanías de la singularidad H_{02} (p. 117).

Figura 5.5: Diagramas de bifurcaciones locales para la singularidad H_{02} (ecuación (5.14)) (p. 117).

Figura 5.6: Diagramas de bifurcaciones locales para la singularidad H_{02} (ecuación (5.16)) (p. 118).

Figura 5.7: Diagramas de bifurcaciones locales para la singularidad H_{10} (ecuación (5.20)) (p. 119).

Figura 5.8: Diagramas de bifurcaciones locales para la singularidad H_{10}

(ecuación (5.22)) (p. 119).

Figura 5.9: Variedades de transición en el espacio de parámetros α - β en cercanías de la singularidad H_{20} (p. 120).

Figura 5.10: Diagramas de bifurcaciones locales para la singularidad H_{20} (ecuación (5.24)) (p. 121).

Figura 5.11: Variedades de transición en el espacio de parámetros α - β en cercanías de una singularidad H_{11} (p. 122).

Figura 5.12: Diagramas de bifurcaciones locales para uno de los casos de singularidades H_{11} (p. 123).

Figura 5.13: Diagramas de bifurcaciones locales y el método en el dominio frecuencia para una singularidad H_{01} (p. 130).

Figura 5.14: Idem a la Fig. anterior pero con diferente estabilidad en la solución bifurcada (p. 131).

Figura 5.15: Diagramas de bifurcaciones locales y el método en el dominio frecuencia para una singularidad H_{02} (p. 132).

Figura 5.16: Idem a la Fig. anterior pero con diferente estabilidad en la solución bifurcada (p. 133).

Figura 5.17: Diagramas de bifurcaciones locales y el método en el dominio frecuencia para una singularidad H_{10} (p. 135).

Figura 5.18: Idem a la Fig. anterior pero con diferente signo del segundo coeficiente de curvatura (p. 136).

Figura 5.19: Diagramas de bifurcaciones locales y el método en el dominio frecuencia para una singularidad H_{20} (p. 138).

Figura 5.20: Idem a la Fig. anterior pero con diferente signo del tercer coeficiente de curvatura (p. 139).

Figura 5.21: Variedades de transición en cercanías de la bifurcación degenerada H_{20} . Los números corresponden a los diagramas locales de las Figuras 5.20 y 5.21 (p. 140).

Figura 5.22: Diagramas de bifurcaciones locales y el método en el dominio frecuencia, para $B=22.076$, $\beta=4.63$, $\epsilon=2$ y $\rho=1$ (p. 142).

Figura 5.23: Diagramas de bifurcaciones locales y el método en el dominio frecuencia, para $B=22.074$, $\beta=4.63$, $\epsilon=2$ y $\rho=1$ (p. 144).

Figura 5.24: Diagramas de bifurcaciones locales y el método en el dominio frecuencia, para $B=22.07$, $\beta=4.63$, $\epsilon=2$ y $\rho=1$ (p. 145).

- Figura 6.1: Lugares geométricos característico y de las amplitudes usando el algoritmo propuesto (p. 152).
- Figura 6.2: Diagrama de bifurcaciones globales para $B=22.076$, $\beta=4.63$, $\epsilon=2$ y $\rho=1$ (p. 156).
- Figura 6.3: Continuación de las ramas periódicas usando diferentes aproximaciones de balance armónico a partir de HB2 y su comparación con resultados de AUTO (p. 157).
- Figura 6.4: Continuación del valor del período T y su comparación con similares resultados de AUTO (p. 158).
- Figura 6.5: Lugares geométricos característicos y límites de la aproximación (p. 159).
- Figura 6.6: Retratos de fase mostrando las comparaciones entre las diferentes aproximaciones y AUTO ($D=0.212526087$) (p. 161).
- Figura 6.7: Evolución temporal en un período y comparaciones entre las diferentes aproximaciones y AUTO (p. 162).
- Figura 6.8: Retratos de fase mostrando comparaciones entre las diferentes aproximaciones y AUTO ($D=0.1826608935$) (p. 163).
- Figura 6.9: Evolución temporal en un período y comparaciones entre las diferentes aproximaciones y AUTO (p. 165).
- Figura 6.10: Retratos de fase mostrando comparaciones entre las diferentes aproximaciones y AUTO ($D=0.170954638$) (p. 166).
- Figura 6.11: Evolución temporal en un período y comparaciones entre las diferentes aproximaciones y AUTO (p. 167).
- Figura 6.12: Lugar geométrico característico y de las amplitudes L_3 y L_4 para $B=22.076$, $\beta=4.63$, $\epsilon=2$, $\rho=1$ y $D=0.14189356$ (p. 168).
- Figura 6.13: Evolución temporal comparando las aproximaciones L_3 y L_4 con los resultados dados por AUTO (p. 169).
- Figura 6.14: Evolución temporal comparando la aproximación L_4 con los resultados dados por AUTO (p. 170).
- Figura 6.15: Plano de fase comparando la aproximación L_4 con los resultados dados por AUTO (p. 170).
- Figura 6.16: Bifurcaciones degeneradas de Hopf H_{01} y H_{02} para $\epsilon=4$ y $\rho=1$ (p. 171)
- Figura 6.17: Diagrama de bifurcaciones global para $B=58.25$, $\beta=20.36$, $\epsilon=4$ y

- $\rho=1$ (p. 173).
- Figura 6.18: Continuación de ramas periódicas utilizando las diferentes aproximaciones de balance armónico (p. 174).
- Figura 6.19: Lugares geométricos característico y de las amplitudes. Criterio de detención de alguna de las aproximaciones (p. 175).
- Figura 6.20: Lugares geométricos característico y de las amplitudes. Detección de múltiples ciclos límites (p. 176).
- Figura 6.21: Variación del período para las diferentes ramas de soluciones bifurcadas (p. 178).
- Figura 6.22: Diagrama de bifurcaciones global para $B=58.3$, $\beta=20.348$, $\epsilon=4$ y $\rho=1$ (p. 179).
- Figura 6.23: Continuación de ramas periódicas utilizando las diferentes aproximaciones de balance armónico (p. 180).
- Figura 6.24: Diagrama de bifurcaciones global para $B=58.4$, $\beta=20.456$, $\epsilon=4$ y $\rho=1$ (p. 181).
- Figura 6.25: Continuación de ramas periódicas utilizando las diferentes aproximaciones de balance armónico (p. 182).
- Figura 6.26: Diagrama de bifurcaciones global para $B=58.04$, $\beta=20.276$, $\epsilon=4$ y $\rho=1$ (p. 183).
- Figura 6.27: Continuación de ramas periódicas utilizando las diferentes aproximaciones de balance armónico (p. 184).
- Figura 6.28: Diagrama de bifurcaciones, aproximaciones de balance armónico y sus comparaciones con resultados de AUTO para $B=58.2$, $\beta=20.376$, $\epsilon=4$ y $\rho=1$ (p. 186).
- Figura 6.29: Diagrama de bifurcaciones, aproximaciones de balance armónico y sus comparaciones con resultados de AUTO para $B=57.62372$, $\beta=20.376$, $\epsilon=4$ y $\rho=1$ (p. 187).
- Figura 6.30: Retratos de fase para $D=0.313675$, $B=57.62372$, $\beta=20.376$, $\epsilon=4$ y $\rho=1$ (p. 188).
- Figura 7.1: Variedades de transición en el espacio de parámetros α - β - γ y diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de una singularidad H_{30} (p. 201).
- Figura 7.2: Diagrama de bifurcación propuesto por Planeaux y Jensen (1986) para $\epsilon=2$ y $\rho=1$ rescatando las variedades de transición (p. 202).

- Figura 7.3: Diagrama de bifurcación hallado usando la información del coeficiente de curvatura tercero (p. 203).
- Figura 7.4: Diagrama de bifurcación hallado usando la información del tercer y cuarto coeficientes de curvatura (p. 204).
- Figura 7.5: Diagrama de bifurcación local usando AUTO para $B=23.825$ y $\beta=4.99$ ($\epsilon=2$ y $\rho=1$) (p. 205).
- Figura 7.6: Diagrama de bifurcación local usando AUTO para $B=23.83$ y $\beta=4.99$ ($\epsilon=2$ y $\rho=1$) (p. 206).
- Figura 7.7: Diagrama de bifurcación local usando AUTO para $B=23.84$ y $\beta=4.99$ ($\epsilon=2$ y $\rho=1$) (p. 206).
- Figura 7.8: Diagrama de bifurcación local usando AUTO para $B=23.86$ y $\beta=4.99$ ($\epsilon=2$ y $\rho=1$) (p. 207).
- Figura 7.9: Diagrama de bifurcación local usando AUTO para $B=23.82$ y $\beta=4.99$ ($\epsilon=2$ y $\rho=1$) (p. 208).
- Figura 7.10: Diagrama de bifurcación local usando AUTO para $B=23.81$ y $\beta=4.99$ ($\epsilon=2$ y $\rho=1$) (p. 208).

NOMENCLATURA

\mathbb{C}	Campo de los números complejos.
\hat{e}	Puntos de equilibrio.
E^i	Armónico propuesto de orden i .
f, g	Funciones no lineales sin memoria.
$G(s; \mu)$	Matriz que involucra la parte lineal.
$G(s; \mu)J$	Matriz de transferencia de la rama directa.
$H(jk\omega)$	Matriz de transferencia de lazo cerrado.
H_{00}	Notación compacta para indicar que un punto cumple con los postulados del teorema de bifurcación de Hopf clásicos.
H_{mn}	Notación compacta para indicar las bifurcaciones degeneradas de Hopf ($m \neq 0$ ó $n \neq 0$).
i	Unidad imaginaria.
$J(\mu)$	Matriz de Jacobiano en el dominio frecuencia.
J_1	Matriz de Jacobiano en el dominio tiempo.
L_i	Lugares geométricos de la amplitud correspondientes a un balance armónico de orden i .
$M(\omega, \mu)$	Determinante de las degeneraciones.
$P(\lambda)$	Polinomio característico que resulta de calcular el determinante de $\lambda I - G(s; \mu)J$.
\mathbb{R}	Campo de los números reales.
s	Variable de Laplace.
T	Período de la solución periódica.
u^T	Autovector izquierdo de $G(\cdot)J$ correspondiente al autovalor $\hat{\lambda}$.
v	Autovector derecho de $G(\cdot)J$ correspondiente al autovalor $\hat{\lambda}$.
V_{ij}	Vectores para aproximar la solución periódica.
ω	Frecuencia angular (rad/seg).
ω_i	Frecuencia angular de la solución correspondiente a la aproximación de balance armónico de orden i .
ω_r	Frecuencia angular de intersección del lugar geométrico

$\hat{\lambda}$ con el eje real negativo más cercano a $(-1+i0)$.
 x Variables de las ecuaciones de estado.
 z, \bar{z} z es el complejo conjugado de \bar{z} .

LETRAS GRIEGAS

α, β, γ Parámetros de perturbación (Capítulos 5 y 7) en cercanías de bifurcaciones degeneradas.
 $\alpha(\mu)$ Parte real de los autovalores bifurcantes en el dominio tiempo.
 θ Medida de la amplitud de las oscilaciones.
 λ_i Autovalores de $G(s; \mu)J$.
 λ_i^* Autovalores de la matriz producto de la linealización en el dominio tiempo.
 $\hat{\lambda}$ Autovalor de $G(\cdot)J$ más cercano al punto $(-1+i0)$
 μ Parámetro principal de bifurcación.
 ξ_i Vectores obtenidos haciendo un balance armónico de orden $2i$.
 σ_i Coeficientes de curvatura obtenidos al realizar un balance armónico de orden $2i$.

CAPITULO 1

BIFURCACIONES Y DINAMICA DE SISTEMAS

Los sistemas físicos reales son modelados mediante ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales para representar sus manifestaciones dinámicas en un contexto donde se puedan aplicar herramientas de análisis generales. Al modelo matemático resultante, una vez estudiado su comportamiento dinámico, se le aplican diversas técnicas con el fin de mejorar sus prestaciones, sea logrando una optimización del proceso, controlando ciertas variables críticas, asegurando rangos de estabilidad, mejorando velocidad de respuesta, etc.

Estos lineamientos generales como objetivos bien definidos involucran el estudio e identificación de sistemas en un primer paso, para trasladar *observaciones* del modelo experimental a ecuaciones matemáticas. Sin embargo, en esta etapa también confluyen los conocimientos que revelan el grado de comprensión de los fenómenos particulares (y extraños) de cada sistema y la experiencia adquirida por los especialistas. Es indispensable un buen manejo de la teoría de ecuaciones diferenciales para la convalidación de resultados y comparación de los modelos experimental y matemático. Esta es una de las partes más difíciles en la búsqueda del modelo que luego se convertirá en la idealización del proceso o sistema y por ende en el producto terminal de la etapa de identificación.

Una vez que el modelo propuesto vía identificación llena los huecos de incertidumbre paramétrica y regiones de aplicabilidad, que los matemáticos llaman dominios de validez, comportándose en forma similar al proceso que le dió origen, viene una etapa de continuos ensayos sobre el mismo. Aquí se descargan toda la maquinaria y rigor matemático en las formulaciones y se exploran caminos nuevos que pueden ser de utilidad en aplicaciones futuras. Las primeras observaciones y desarrollos de estas investigaciones en el terreno matemático normalmente se realimentan en la etapa de identificación dando un producto que generalmente converge a un modelo mejor. Así aparecen

complejidades que deben añadirse al modelo propuesto en la identificación para tener en cuenta fenómenos más particulares o bien modelizaciones más generalizadas.

Al estudio de la dinámica de sistemas compete la elaboración matemática de análisis generales sobre ecuaciones diferenciales que caracterizan al sistema físico. Sin embargo, los métodos e ideas abren infinitas posibilidades en el terreno de la matemática aplicada a científicos que actúan relacionando tópicos de la matemática pura de sistemas dinámicos con aquéllos que resultan de la realidad de las experiencias. Así, interactuando en los diferentes niveles, los tres grupos -experimental, puro y aplicado-, coexisten aportando soluciones e ideas a problemas de interés y, cuando el lazo de realimentación funciona, los avances son tan vertiginosos que los grupos se enriquecen continuamente y tienen una excelente producción científico-tecnológica.

La última etapa consiste en *mejorar* al sistema físico original controlando su producto final o las prestaciones de la planta en general. Existen innumerables estrategias de control para sistemas lineales: desde los clásicos compensadores y filtros, pasando por los observadores de estado, hasta las recientes técnicas de control robusto usando perturbaciones estructuradas. En cambio, para sistemas no lineales aparecen complicaciones formales en las definiciones más elementales y se requieren herramientas fuertemente enraizadas en las teorías de operadores, análisis funcional, geometría diferencial, topología y ecuaciones diferenciales.

Una clasificación general de los sistemas puede hacerse a partir de su modelo matemático. Existen así dos grandes ramas: los sistemas lineales y los sistemas no lineales. En los últimos años se han hecho ingentes esfuerzos para trasladar las definiciones clásicas de los sistemas lineales a los no lineales y se han utilizado métodos poderosos, pero generalmente complicados, para extender las nociones simples de controlabilidad y observabilidad en forma más general.

Sin embargo, la mayoría de los sistemas físicos responden a un modelo no lineal, y no a uno lineal que resulta de la restricción de la zona de operación o de interés. Innumerables son las aplicaciones para las cuales los rangos de validez encuadran perfectamente y se diseñan así controladores eficaces para tal o cual proceso. Pero existen aplicaciones que no sólo no se enmarcan en ciertos rangos reducidos, sino que su dinámica es tan rica que el modelo lineal no logra satisfacer siquiera alguno de los fenómenos experimentales más distintivos.

Es claro que la modelización por un sistema no lineal no siempre es deseable por la complejidad que aparece en las ecuaciones y más tarde en los métodos que se deberán emplear para resolver el problema. Sin embargo, es el único camino para englobar los fenómenos más característicos y singulares de sistemas en forma general sin estar atados a restricciones de dominios y simplificaciones, la mayoría de las veces audaces y conflictivas.

En la teoría de Reacciones químicas y Procesos en general los modelos no lineales presentan una riqueza dinámica tan elogiable, desde el punto de vista de su complejidad, que no es de extrañar que los primeros modelos matemáticos algo sofisticados hayan aparecido en el período 1950-1960. En otras disciplinas, principalmente en Física, el estudio de la dinámica de sistemas ha sido un factor fundamental de avance, desde el clásico oscilador de Van der Pol hasta el comportamiento caótico de la juntura Josephson, pasando por la teoría de turbulencias en fluidodinámica y definiciones concretas y evolucionadas de los *atractores extraños*.

Es importante recalcar aquí la necesidad del estudio de la dinámica de sistemas no lineales para posteriormente abocarse al control de los mismos. El conocimiento de la variedad de configuraciones *extrañas*, pero fácilmente individualizadas desde el punto de vista físico o experimental, es de fundamental importancia para determinar los objetivos de control, performance u optimización que se establecerán sobre el sistema en estudio.

Como primer paso de tremendos y multiplicativos avances, tuvimos los

resultados de estabilidad de los puntos singulares o de estado estacionario de un sistema físico modelado por ecuaciones diferenciales ordinarias. El test de estabilidad se basaba en el cálculo de los autovalores de la matriz del sistema linealizado. El primer escollo había sido superado así por Lyapunov. Entonces, se necesitó esperar muy poco para que un genio como Poincaré impulsara vivamente con ideas brillantes la Mecánica Celeste y la teoría de ecuaciones diferenciales, y planteara la necesidad de una singularidad curvilínea, conocida como ciclo límite, para representar un estado oscilatorio permanente. A fines del siglo pasado, este científico francés sentó las bases matemáticas para estudiar oscilaciones y clasificar la dinámica para sistemas de orden dos (plano de fase). Aparecieron entonces relaciones claras entre dos grandes ramas de la Matemática: la teoría de ecuaciones diferenciales y la topología.

Sin embargo, ya en este siglo, hasta la década del '30 no quedaron resueltas todas las configuraciones dinámicas en el plano de fase, es decir los diferentes flujos de trayectorias (soluciones de las ecuaciones diferenciales) en cercanías de los puntos de equilibrio o estacionarios de un sistema. Nuevamente la escuela rusa, en este caso con Andronov y sus discípulos, tomó la delantera en el estudio de la dinámica de sistemas y principalmente en la dinámica de osciladores, de grandes aplicaciones en la actualidad en la ingeniería electrónica. Los trabajos de Andronov y su equipo (ver Andronov y colaboradores, 1966) se vieron coronados más tarde por todas las aplicaciones, en especial en ingeniería química, pues su claridad en la explicación de los fenómenos y rigurosidad matemática, hicieron de los mismos una de las recopilaciones más completas, íntegras y excepcionales que un no especialista en el tema pueda leer y deleitarse al mismo tiempo. Andronov unió la genialidad de Poincaré en sus aplicaciones a la belleza de la simplicidad y claridad de sus exposiciones, resultando tal combinación formidable en el primer *gran compendio* de la dinámica de sistemas.

En 1942, un científico alemán (ver Hopf, 1942), enunció un teorema, que hoy lleva su nombre, donde indicó las proposiciones que debían cumplir-

se para que aparecieran ciclos límites en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuando variaba un parámetro del mismo. Las repercusiones y aplicaciones de tan extraordinario resultado se hicieron esperar más de treinta años por la complejidad de los cálculos involucrados que demandaban el uso de una computadora digital, inexistente en aquella época.

A partir de la década del '70 aparecieron ideas muy novedosas que permitieron un tratamiento de este tipo de problemas usando *elementos* más abstractos como la geometría diferencial. Era tan importante la variedad de resultados obtenidos que ocurrió un avance vertiginoso en diversas ramas de las ciencias junto al propio avance de la Matemática pura. Se desprendieron como especialidades las teorías de Singularidades y Catástrofes como ramas de la Teoría de Bifurcación (mediados de la década del '70). Así, el controvertido libro de René Thom (ver Thom, 1975) se sitúa hoy con una perspectiva impresionante de aplicaciones, tan sugestivas pictóricamente como inter-relacionadas con la Teoría de Singularidades. Más aún, hablar si la palabra bifurcación fue propuesta por Poincaré para denotar el fenómeno de separación o dos caminos que nacen de uno original, o si la utilizaron anteriormente otros investigadores, podemos apreciar que este vocablo es tan rico en la jerga Matemática, Física y aún ingenieril que lo podemos identificar como uno de los pasos elementales al estudio más avanzado de *atractores extraños* y *caos*.

Demos un bosquejo de ciertos elementos que necesitaremos con asiduidad más adelante. Los puntos de equilibrio o estados estacionarios tienen definida su estabilidad calculando los autovalores del sistema linealizado, mediante el signo de su parte real. Si todos tienen parte real negativa ese estado de equilibrio corresponde a un punto singular estable. El fenómeno de bifurcación está ligado al cruce de ese límite o frontera de estabilidad que es el eje imaginario. ¿Qué ocurre entonces si algún autovalor de la matriz de linealización es cero, o si un par complejo está sobre el eje imaginario? En el primer caso tenemos un punto de bifurcación estática, es decir aparecen dos ramas de estados de equilibrio -una estable y la otra inestable- al realizar una perturbación en alguno de los parámetros del

sistema, suponiendo que los autovalores restantes permanecen en el semiplano izquierdo.

En el segundo caso se cumple el primer postulado del teorema de bifurcación de Hopf, es decir en cercanías de dicho estado, variando un parámetro del sistema, es posible encontrar oscilaciones, es decir variaciones cíclicas en las variables solución del sistema cuando se asume que el campo vectorial es diferenciable hasta por lo menos cuarto orden. Se ha asumido que los demás autovalores de la matriz de linealización se encuentran todos en el semiplano izquierdo. El problema de indefinición de estabilidad en este caso fue alertado por Lyapunov, analizado por Poincaré, resuelto por Andronov para sistemas de dimensión dos y totalmente demostrado por Hopf para sistemas de dimensión "n". Esa es la razón por la cual muchos investigadores prefieren llamar al clásico teorema de bifurcación de Hopf como teorema de Poincaré-Andronov-Hopf.

Sin embargo estos dos tipos de bifurcaciones, estáticas y de Hopf (también llamadas dinámicas) son los primeros de una larga serie de fenómenos que recién ahora han comenzado a estudiarse. Por ello a estos dos tipos básicos de bifurcaciones podríamos llamarlos elementales.

Veamos para una aplicación donde se verifique el Teorema de bifurcación de Hopf el tremendo error que se comete considerando sólo la dinámica del sistema lineal. Cuando se varía el parámetro distintivo y se linealiza el modelo, supondremos que un par simple de autovalores complejos cruza el eje imaginario haciendo que dos autovalores tengan parte real positiva (equilibrio inestable), mientras que los demás conservan el signo de su situación anterior, es decir están en el semiplano izquierdo. Evaluando una expresión obtenida originalmente por Hopf puede detectarse la presencia de ciclos límites (estables o inestables) en el modelo. Para el caso lineal sólo podemos decir que el estado estacionario cambió de estable a inestable. Sin embargo, un comportamiento más cercano a la realidad predice que el sistema mantendrá un régimen oscilatorio para condiciones iniciales cercanas a las de estado estacionario. Una imagen simplista sería la siguiente

te: Supongamos tener una habitación a oscuras y un velador que define difusamente un círculo iluminado. No podemos establecer el radio de dicho círculo para que se noten perfectamente los diferentes objetos de la habitación. Con la linealización apenas vemos un entorno, y en los casos que no se puede predecir qué tipo de estabilidad tendrá el estado de equilibrio debemos analizar los términos de orden superior (derivadas de mayor orden del campo vectorial). Con herramientas como el Teorema de bifurcación de Hopf ampliamos el radio del círculo iluminado y detectamos algunos de los contornos de los objetos de la habitación. Con métodos más poderosos, auxiliados por la geometría diferencial y formas normales de Poincaré, podemos ampliar dicho entorno para distinguir los objetos que están en la penumbra. Entonces, a mayor información recabada de los términos no lineales corresponde mayor intensidad lumínica del velador.

Los desarrollos de bifurcaciones estáticas y catástrofes elementales, en cambio, como los puntos cuspidales, llevan a analizar en forma completa la multiplicidad de estados de equilibrio, uno de los tópicos característicos de la teoría de reacciones y sistemas químicos en general. Es claro que un punto o una curva de puntos de catástrofe revela que para ciertas combinaciones de parámetros del sistema el comportamiento cambia en forma tan notoria al cruzar la singularidad que parece como si tuviéramos otro sistema en estudio. De allí el nombre de catástrofe. El ejemplo típico en la teoría de reacciones es cuando la curva de estado estacionario tiene un único estado de equilibrio cuando se varía el parámetro principal, pero para una modificación de un segundo parámetro pasamos a una curva de estados de equilibrio que tiene multiplicidad.

El material que presentaremos en esta tesis no intenta ser exhaustivo en un tema que ha crecido explosivamente en los últimos diez años. Por el contrario, la finalidad de este trabajo es mostrar cómo pueden realizarse aproximaciones de las soluciones periódicas utilizando técnicas de la teoría de control no lineal. En todos los casos la aparición de las soluciones periódicas estará vinculada a un teorema de Hopf generalizado para el cual los postulados clásicos ya no se cumplen. Al tipo de singularidades que se

obtienen de dicha *generalización* se las conoce como bifurcaciones degeneradas de Hopf. Con este fin se ha incluido, entonces, una extensión de las técnicas del teorema de bifurcación de Hopf en el dominio frecuencia que muestra la potencialidad y versatilidad del mismo en caracterizar fenomenologías más amplias. Para ello se han utilizado ejemplos clásicos de la literatura ingenieril donde se han descubierto comportamientos dinámicos complejos nunca antes presentados en comunicaciones científicas. Tal es el caso de interacciones entre diferentes curvas de bifurcaciones degeneradas estáticas y dinámicas dando origen a centros organizadores de dinámica en varios parámetros del sistema, como también localizaciones de estructuras de cuatro ciclos límites anidados en el espacio de estado.

La tesis se ha organizado de la siguiente manera. El Capítulo 2 presenta el teorema de bifurcación de Hopf en el dominio tiempo y en el dominio frecuencia junto con una aplicación de todas las fórmulas usando la segunda variante de cálculo. Para aquéllos con amplios conocimientos en cálculo de soluciones periódicas este capítulo puede evitarse y comenzar directamente con la lectura del Capítulo 3. Para los no iniciados en el tema, el Capítulo 2 brinda las bases de la notación que mantendremos a lo largo de los capítulos sucesivos como así también una rápida introducción a la teoría de bifurcaciones de Hopf.

El Capítulo 3 incluye una continuación de las curvas de bifurcaciones estáticas y dinámicas utilizando la formulación en el dominio frecuencia. Se muestra, además, cómo naturalmente pueden definirse las degeneraciones elementales del teorema de bifurcación de Hopf cuando un segundo parámetro del sistema en estudio se varía. Al final se presentan resultados numéricos en un ejemplo más elaborado que el del Capítulo 2, donde se corrigen y amplían varios trabajos científicos precedentes.

Por su parte el Capítulo 4 muestra la continuación de curvas de bifurcaciones degeneradas en el espacio de parámetros definido por el parámetro principal de bifurcación y por dos parámetros auxiliares. Asimismo se incluyen una serie de gráficas que determinan diferentes diagramas de bifur-

caciones locales en el espacio de dos de los parámetros auxiliares. Como una extensión, se incluye una posterior variación de un tercer parámetro auxiliar para visualizar interacciones más complejas entre las curvas de bifurcaciones degeneradas. Aquí se muestran, entonces, posibles centros organizadores de la dinámica para el sistema bajo estudio.

En el Capítulo 5 se introduce formalmente al lector en el estudio de las bifurcaciones degeneradas de Hopf. Para ello se indican brevemente los resultados obtenidos usando teoría de singularidades para más tarde incluir el análisis de dichas degeneraciones utilizando el método en el dominio frecuencia. Además, se muestra un ejemplo de aplicación donde se detecta una estructura de tres ciclos límites anidados.

En el Capítulo 6 se presenta la técnica de continuación para el cálculo de las soluciones periódicas ante la variación del parámetro principal. La importancia de este capítulo es primordial pues no sólo se muestran las diferentes aproximaciones de balance armónico implementadas para recuperar la solución periódica, sino que se realizan comparaciones con el programa de continuación de ramas bifurcadas AUTO. Este último conjunto de subrutinas es hasta el momento el programa más confiable y exacto que existe para el cálculo de bifurcaciones de un sistema de ecuaciones diferenciales. Los resultados numéricos usando el método en el dominio frecuencia están orientados no sólo a recuperar la rama periódica bifurcada desde el punto crítico, sino también a reconstruir los diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de ciertas bifurcaciones degeneradas.

En el Capítulo 7, en tanto, se muestran aproximaciones para el cálculo de los denominados coeficientes de curvatura que permiten el análisis de la estabilidad de la solución bifurcada. Por tal motivo, cuando se logra que varios de dichos coeficientes se anulen, se está en presencia de singularidades que involucran a varios ciclos límites anidados. Al final del capítulo se muestra la localización de estructuras de hasta cuatro ciclos límites para uno de los ejemplos estudiados, resultado novedoso hasta el presente en la teoría de reacciones químicas.

Finalmente, en el Capítulo 8 se agregan brevemente las conclusiones a las que hemos arribado al término de este trabajo de investigación. También se presentan algunas líneas que a juicio del autor son importantes de explorar en el futuro para completar aún más los resultados obtenidos.

CAPITULO 2

EL TEOREMA DE BIFURCACION DE HOPF

El teorema de bifurcación de Hopf constituye una poderosa herramienta analítica para explorar la aparición de soluciones periódicas en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. A pesar de la sencillez de sus postulados, las implicancias de su aplicación son extraordinarias, considerando el amplio espectro de ecuaciones diferenciales que tienen como solución a las órbitas periódicas. Es por ello que se han invertido ingentes esfuerzos en obtener, primero, un marco teórico adecuado para tratar el problema, para luego dar lugar al cálculo propiamente dicho de las soluciones. En este capítulo se presentarán brevemente dos propuestas que enuncian al teorema de bifurcación de Hopf. La primera de ellas la identificaremos como metodología en el dominio tiempo, mientras que la segunda la llamaremos propuesta en el dominio frecuencia. Como esta última variante será la base de futuros desarrollos, mostraremos al final de este capítulo una aplicación a un ejemplo para resaltar los lineamientos generales de dicha formulación. En la Sección 2.1 incluiremos una reseña histórica. En la Sección 2.2 presentaremos la versión del teorema de bifurcación de Hopf en el dominio tiempo, mientras que en la Sección 2.3 haremos lo propio con su contrapartida en el dominio frecuencia. La Sección 2.4 contendrá un análisis sobre la posible estructura de bifurcaciones en un ejemplo, así como la determinación de la amplitud y frecuencia de las soluciones periódicas emergentes de puntos de bifurcación de Hopf.

2.1. INTRODUCCION

El concepto de ciclo límite o solución periódica de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se remonta a las ideas geniales del gran matemático francés de fines del siglo pasado Henri Poincaré. Entre sus innumerables y formidables contribuciones figuran la representación de la dinámica de sistemas de orden dos en el retrato o plano de fase y resultados sobre la existencia de ciclos límites en tales sistemas. La amplia y

profunda generalidad de análisis impresa en todos sus razonamientos, unida a la gran necesidad de caracterizar la rica dinámica observada en la faz experimental, dieron un impulso extraordinario al estudio de la dinámica de sistemas, auxiliado por incipientes resultados en otras ramas de la matemática tales como la Topología.

Para sistemas de dos dimensiones la temprana conjetura de existencia de ciclos límites formulada por Poincaré fue formalmente demostrada por Andronov y colaboradores (ver Andronov y Chaikin, 1949, Andronov y colegas, 1966). Es así que algunos investigadores reconocen a este resultado de existencia de soluciones periódicas en dos dimensiones como la conjetura de Poincaré-Andronov. Apenas un par de años más tarde, un matemático alemán, Eberhardt Hopf (1942), enuncia unos simples postulados sobre los cuales demuestra la existencia de ciclos límites en sistemas de "n" dimensiones ($n \geq 2$) bajo ciertas condiciones de diferenciabilidad de las funciones no lineales que componen el campo vectorial. El teorema, que hoy lleva su nombre, trata sobre el nacimiento, a partir de un cierto valor crítico, de soluciones periódicas cuya amplitud y frecuencia pueden calcularse aproximadamente cuando varía un parámetro real μ en las ecuaciones originales del sistema en estudio. Este importante resultado fue rescatado luego de casi treinta años por investigadores que perfeccionaron la formulación original y demostraron el teorema usando otras técnicas matemáticas (véanse, por ejemplo, los trabajos de Poore, 1976; Marsden y McCracken, 1976; Hsu y Kazarinoff, 1976; Allwright, 1977; Mees y Chua, 1979, entre otros).

Casi al mismo tiempo, otros científicos trataron de reformular el teorema en términos más globales permitiéndole que ciertos enunciados de las hipótesis originales de Hopf no se cumplieran. Entre estos últimos trabajos caben destacarse las contribuciones de Takens (1973), Chafee (1978), Hassard y Wan (1978), Kielhöfer (1979), Götter y Willamowsky (1979), Golubitsky y Langford (1981), y Golubitsky y Schaeffer (1985). A grandes rasgos, la generalización del teorema de bifurcación de Hopf lleva a considerar una variación multiparamétrica en el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (también puede hacerse para sistemas de ecuaciones a deriva-

das parciales). Dos premisas pueden rescatarse intactas de tal emprendimiento: *i)* Estudiar las diferentes familias de soluciones periódicas en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias agrupándolas en diagramas de bifurcaciones locales y globales, y, *ii)* Localizar, dado un cierto modelo de un sistema real, la singularidad más compleja con el fin de analizar el estudio de la dinámica ante perturbaciones en todos sus parámetros. Tal singularidad actúa como un centro generador u organizador de fenómenos dinámicos menos complejos cuyos efectos, en la mayoría de los sistemas reales, perduran como comportamiento global.

En los capítulos siguientes se irán delineando estas posibilidades usando el método en el dominio frecuencia. Sin embargo, deben quedar claras dos falencias inevitables que posee la teoría de bifurcación de Hopf: *i)* Los resultados son enteramente locales. Aunque los dominios de validez de la existencia de las soluciones periódicas pueden extenderse, deben realizarse complicados estudios del error de la aproximación; *ii)* Otros fenómenos dinámicos más complicados pueden presentarse. Al respecto, existen trabajos acerca de la interacción entre bifurcaciones "*generalizadas*" (o más precisamente, degeneradas) de Hopf y rutas al caos, entre los que se destacan, por ejemplo, Healy y colaboradores (1991).

Para finalizar con esta reseña, no podemos dejar de mencionar ciertos trabajos de relieve en la faz numérica que implementan las formulaciones precedentes o de por sí constituyen hitos en la localización de estructuras de bifurcación. Entre los más destacados figuran los trabajos de Keller (1977), Langford (1977) y Seydel (1981) (vease también Seydel, 1991) en la presentación teórica del problema. Los algoritmos e implementaciones más eficientes pueden encontrarse en Hassard y colaboradores (1981), Aluko y Chang (1984), Holodniok y Kubicek (1984), entre otros. Sin embargo, el código de subrutinas más aceptado y poderoso que existe hasta el momento lo constituye el programa AUTO de Eusebius Doedel (véase Doedel, 1981; Doedel y colaboradores, 1984; Doedel, 1986). El programa AUTO permite no sólo calcular bifurcaciones estáticas (ligadas al problema de multiplicidad de estados de equilibrio) y dinámicas con su correspondiente continuación en uno

o dos parámetros del sistema, sino también evaluar fenómenos globales y secuencias de bifurcaciones que doblan su período. Así las dos falencias remarca- das que posee la teoría de bifurcación de Hopf para el cálculo de las soluciones periódicas para valores alejados del crítico fueron enteramente superadas en dicho conjunto de subrutinas.

Notemos, no obstante, que la evaluación y localización de singularidades complejas podría insumir, aún utilizando el programa AUTO, tiempos de cómputo muy grandes, sobre todo teniendo en cuenta la variación multipara- métrica del modelo en estudio. Es así que se hace necesaria una combinación de técnicas de las propuestas del teorema de bifurcación de Hopf generali- zado, cuya máxima expresión está volcada en las páginas del libro de Golub- bitsky y Schaeffer (1985), con la más exquisita y refinada técnica de con- tinuación de soluciones periódicas dada por Keller (1977) e implementada por Doedel en su paquete AUTO.

2.2. TEOREMA DE BIFURCACION DE HOPF EN EL DOMINIO TIEMPO

El teorema de bifurcación de Hopf trata sobre la aparición de solucio- nes periódicas en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuando un parámetro real de las ecuaciones del modelo varía. Más formalmente, di- remos que si en un sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = \tilde{f}(x, \mu)$ de orden " n " que depende de un parámetro real μ y que ha sido linealizado alrededor de un punto de equilibrio, encontramos que un par de autovalores complejos conjugados del sistema linealizado cruza el eje imaginario para un valor crítico de μ , entonces para ciertos valores de μ cercanos al crítico pueden encontrarse ciclos límites en proximidades del punto de equilibrio. En otras palabras, desde el valor crítico del parámetro μ para el que se pro- duce el cruce de los autovalores de las ecuaciones linealizadas, emerge una rama de soluciones periódicas que crece en amplitud a medida que nos aleja- mos del valor crítico.

Los ciclos límites pueden existir para valores menores que el crítico μ_0 (bifurcación subcrítica) o bien para valores mayores que μ_0 (bifurcación

supercrítica). Entonces, puede notarse que para ciertos valores de μ tendremos localmente un único estado de equilibrio, mientras que para otros tendremos la "competencia" entre un estado de equilibrio y un ciclo límite. Esta "competencia" no es tal pues se ha asumido que los demás autovalores de las ecuaciones linealizadas, con excepción del par que cruza el eje imaginario, permanecen en el semiplano izquierdo. Así existe una *transferencia* de la estabilidad del estado de equilibrio que pasa de estable a inestable (o viceversa) al ciclo límite emergente. Resta entonces determinar para qué valores de μ existe la rama de soluciones periódicas, pues su estabilidad vendrá determinada en contraposición a la estabilidad del estado de equilibrio encerrado por la misma.

Asumiremos que la función $\tilde{f}(x, \mu)$ es no lineal y es C^k ($k \geq 4$) tanto en $x \in \mathbb{R}^n$ como en $\mu \in \mathbb{R}$. Entonces, puede calcularse una expresión complicada, que llamaremos coeficiente de curvatura, cuyo signo determinará la estabilidad del ciclo límite y por ende si el ciclo límite existirá para valores de $\mu < \mu_0$ ó para valores de $\mu > \mu_0$. En la Figura 2.1 mostramos el retrato de fase de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de dos dimensiones y su alteración fenomenológica al variar un parámetro del mismo. Puede notarse como el estado de equilibrio pasa de foco estable ($\mu < \mu_0$) a foco inestable ($\mu > \mu_0$). Para el valor crítico $\mu = \mu_0$ tendremos un continuo de órbitas periódicas del sistema linealizado. Esta singularidad se conoce como centro (ver Minorsky, 1962, para una discusión más detallada sobre los puntos de equilibrio y su estabilidad). Si consideramos únicamente la información provista por la linealización sólo podríamos decir que la estabilidad del estado de equilibrio ha cambiado, es decir pasa de foco estable a foco inestable. En cambio, si aplicamos el teorema de bifurcación de Hopf, podríamos determinar cuál de las dos situaciones (bifurcación subcrítica o supercrítica) es la real para nuestro sistema. En otras palabras, determinaríamos para qué valores de μ aparece un ciclo límite y podríamos calcular su amplitud y frecuencia de oscilación. Las dos situaciones presentadas en las Figuras 2.1.a y 2.1.b son indistinguibles localmente teniendo en cuenta los términos provenientes de la linealización. No obstante, algo alejado del punto de equilibrio los efectos de las no linealidades se hacen sentir

y se manifiestan en la aparición de una órbita periódica aislada.

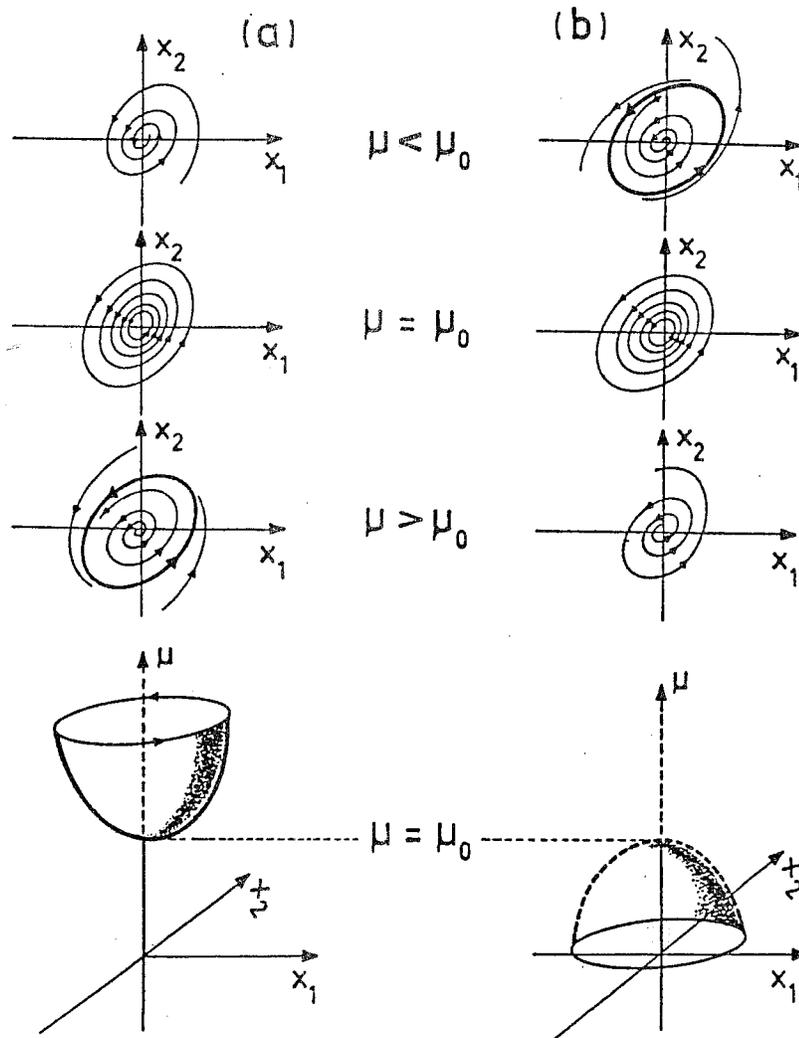


Figura 2.1: Bifurcaciones de Hopf: (a) supercrítica, (b) subcrítica.

Debe notarse que para el valor crítico $\mu=\mu_0$ la teoría de sistemas lineales predice un continuo de órbitas periódicas como lo señala la Figura 2.1. Sin embargo, la situación real del sistema no lineal será muy distinta. Más específicamente, la teoría de bifurcación de Hopf predice un ciclo límite de "amplitud cero" para $\mu=\mu_0$. Un diagrama esclarecedor de tal situación lo constituye la Figura 2.2 donde se muestran los diagramas de bifurcaciones locales para el caso lineal y no lineal de una bifurcación de Hopf supercrítica. En la primera alternativa el continuo de *ciclos límites* a partir del valor crítico $\mu=\mu_0$ se representa con una recta, pudiéndose obtener infinitas órbitas periódicas anidadas de cualquier amplitud. Para el caso no lineal, en cambio, la situación es diferente: Exactamente para $\mu=\mu_0$ tendremos un único ciclo de amplitud cero, o para los lectores que desean un refinamiento en este concepto, diremos que para $\mu=\mu_0$ tendremos la unión de un ciclo límite de amplitud cero con un estado de equilibrio.

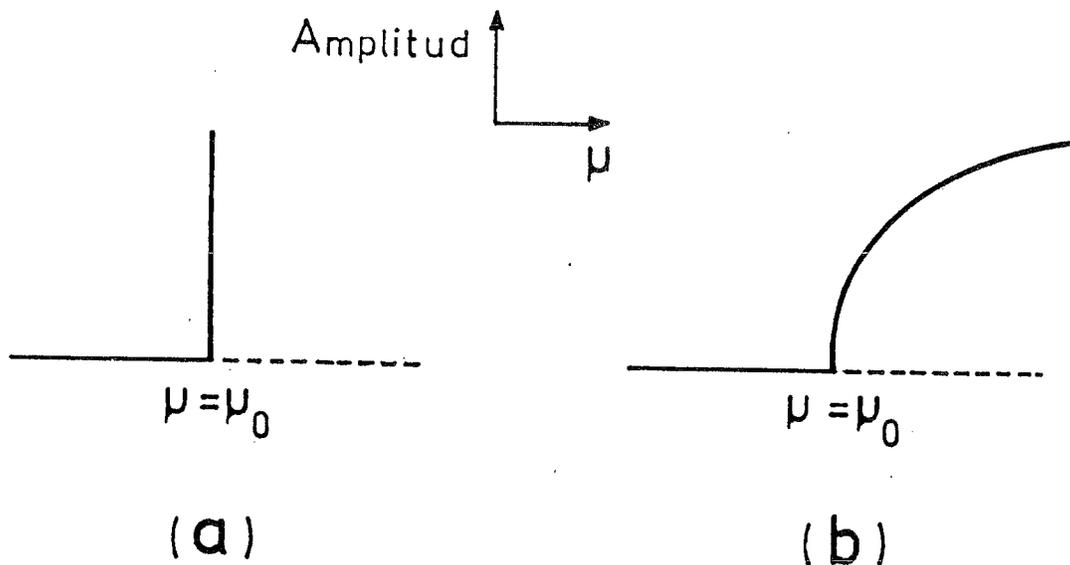


Figura 2.2: Efectos de las soluciones periódicas en: (a) sistemas lineales y (b) no lineales.

El uso de estos diagramas fue popularizado principalmente por Golu-

bitsky y Langford (1981) considerando que el estado de equilibrio puede trasladarse al origen de coordenadas mediante una transformación y utilizando la simetría inherente de las soluciones periódicas. Es así que sólo se representa la rama superior de los ciclos límites y se omite, en todas las gráficas, la rama dual inferior. Existen otras formas de representación de las ramas de ciclos límites que tienen en cuenta alguna medida de la amplitud de la oscilación. Aquí utilizaremos la forma dada en Golubitsky y Langford (1981) y, en algunos casos, presentaremos el diagrama completo con su simetría natural cuando sea estrictamente necesario.

En el sistema no lineal, para distinguir entre los dos posibles diagramas de la Figura 2.1, debe calcularse una expresión conocida como el coeficiente de curvatura o el índice de estabilidad del foco σ_1 . Suponiendo que la parte real de los autovalores complejos conjugados $\lambda_{1,2}^*(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$ que cruzan el eje imaginario se incrementa cuando μ se incrementa, diremos que estaremos en presencia de la situación mostrada en la Figura 2.1.a cuando el coeficiente de curvatura es negativo. Por otro lado la Figura 2.1.b corresponde a la situación cuando el coeficiente de curvatura es positivo. Para una fácil referencia adjuntamos en la Figura 2.3 los dos casos anteriores en la forma propuesta por Golubitsky y Schaeffer (1985) como diagramas alternativos de los casos supercrítico y subcrítico. A continuación enunciaremos el teorema de bifurcación de Hopf en el dominio tiempo (ver Marsden y McCracken, 1976).

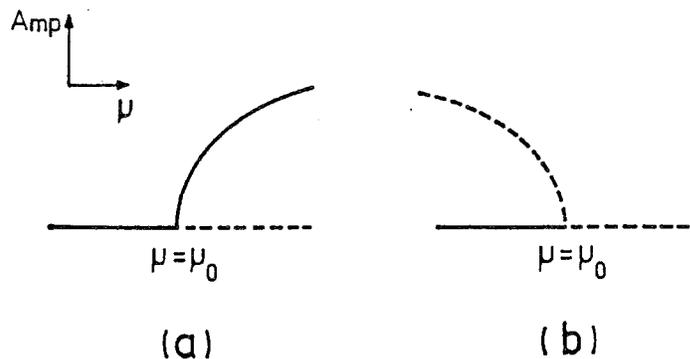


Figura 2.3: Diagrama de bifurcación local para: (a) bifurcación supercrítica y (b) subcrítica.

Teorema 1

Sea $\tilde{f}(x;\mu)$ un campo vectorial en \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), parametrizado en $\mu \in \mathbb{R}$ y \mathbb{C}^k ($k \geq 4$) tanto en $x \in \mathbb{R}^n$ como en μ . Supongamos que $\tilde{f}(x,\mu)=0$ para un único punto $\hat{x}(\mu)$ y notemos a la matriz $J_1(\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ como el Jacobiano $(D\tilde{f})|_{\hat{x}(\mu)}$ definido por

$$(D\tilde{f})|_{\hat{x}(\mu)} = J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x_1} & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \Big|_{\hat{x}(\mu)}$$

Supongamos, además:

a) $J_1(\mu)$ tiene un par de autovalores complejos conjugados $\lambda_{1,2}^* = \alpha(\mu) \pm iw(\mu)$, para los cuales $\alpha(\mu_0) = 0$ y

$$d\alpha/d\mu(\mu_0) > 0, \quad w(\mu_0) > 0;$$

b) Los restantes autovalores de $J_1(\mu)$ satisfacen

$$Re[v(\mu_0)] \neq 0;$$

c) $Re[\sigma_1]$, conocido como el coeficiente de curvatura es distinto de cero. Entonces existe un rango de valores positivos o negativos de $\Delta\mu = \mu - \mu_0$ en el cual a cada valor de μ le corresponde un único ciclo límite a una distancia $O(|\Delta\mu|^{1/2})$ desde el estado de equilibrio $\hat{x}(\mu)$ y cuyo período de oscilación es $2\pi/w(\mu_0) + O(\Delta\mu)$. Además, si $Re[\sigma_1] < 0$ y $Re[v(\mu_0)] < 0 \forall v$ el ciclo límite es estable, mientras que si $Re[\sigma_1] > 0$ y $Re[v(\mu_0)] > 0 \forall v$ el ciclo límite es inestable.

La fórmula para el cálculo de σ_1 puede consultarse en Poore (1975), Allwright, (1977), Hassard y Wan (1978), entre otros, donde se utilizaron diferentes herramientas matemáticas. La fórmula de σ_1 se incluye en la Sección 2.4 de esta tesis utilizando la metodología en el dominio frecuencia.

En el terreno de las aplicaciones concretas a un modelo no trivial el trabajo de Uppal y colaboradores (1974) constituyó un ejemplo de las poderosas implicancias del teorema de bifurcación de Hopf. A estos primeros resultados se sumaron refinamientos exquisitos tanto en la teoría como en las implementaciones numéricas que iremos mencionando en el transcurso de este trabajo.

Antes de concluir con esta sección notemos que las condiciones a) y b) del teorema pueden verificarse usando el criterio de estabilidad generalizado de Nyquist llevando al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a una representación equivalente entrada-salida. Realizando una linealización alrededor de los estados de equilibrio podemos aplicar dicho criterio pues las estructuras finales son lineales (ver MacFarlane y Postlethwaite, 1977). Para trasladar la parte c) del teorema de bifurcación de Hopf en el dominio tiempo a la configuración de entrada-salida necesitamos los resultados de Allwright (1977) para sistemas de una entrada una salida (también conocidos con la sigla SISO) y extendidos por Mees y Chua (1979) para sistemas de múltiples entradas-múltiples salidas (MIMO). En la siguiente sección presentaremos brevemente dichos resultados para mostrar luego, en una aplicación a un ejemplo, el uso de la formulación en el dominio frecuencia.

2.3. TEOREMA DE BIFURCACION DE HOPF EN EL DOMINIO FRECUENCIA

La representación de una órbita periódica como una sumatoria de infinitos términos a través de una serie de Fourier fue la motivación principal de diversos métodos para "ensayar" una posible aproximación de la solución del sistema. Sin embargo, había que considerar, en algún momento del análisis, la truncación de la serie para obtener una solución aproximada ante la imposibilidad de sobrellevar los infinitos cálculos que la teoría demandaba. Esta propuesta para encontrar las soluciones periódicas de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias fue presentada en forma de una matriz en Mees (1972) de tal modo de inter-relacionar la dinámica de sistemas con la teoría de control. Así podrían obtenerse los coeficientes de la serie propuesta como solución hasta el orden deseado junto con la frecuencia de

la oscilación. Además, al poco tiempo, el vínculo fue más evidente con la teoría de control, como lo demostraron los intentos por mejorar la aproximación y el conservatismo de las predicciones obtenidas con el método de la función descriptora (vea, por ejemplo, Mees y Bergen, 1975). No obstante debieron transcurrir unos años más para que todo el encanto de la teoría de bifurcación de Hopf fuera trasladado magistralmente al *dominio frecuencia* haciendo uso de las ideas vertidas en Mees (1972).

Es así como en Allwright (1977) se presentó una versión del teorema de bifurcación de Hopf que rescata las ideas de una expansión de la solución en series de Fourier junto con un método gráfico que mejora las predicciones del clásico método de la función descriptora. Aunque la versión de Allwright fue desarrollada para sistemas SISO, pues simultáneamente se estaba gestando el criterio de estabilidad para sistemas MIMO, rápidamente fue extendida por Mees y Chua (1979) para permitir múltiples no linealidades en los lazos de realimentación.

El método en el dominio frecuencia tiene ciertas ventajas comparado con su contrapartida en el dominio tiempo. Entre ellas podemos mencionar:

- a) Es particularmente atractivo si necesitamos la estructura de bloques realimentados para luego realizar algún tipo de control, o bien, si la forma primitiva del sistema en estudio ya posee las características típicas de la configuración entrada-salida.
- b) Tiene una poderosa y útil interpretación gráfica tanto para sistemas de un lazo como para sistemas multilazo.
- c) Tiene una expresión sencilla para el cálculo del coeficiente de curvatura que no requiere transformaciones de coordenadas ni reducciones sofisticadas.
- d) Es conceptualmente fácil de manipular en sus resultados finales por no especialistas.
- e) Permite extender los dominios de validez de las soluciones periódicas

utilizando mejores aproximaciones, o en otras palabras, incluyendo más términos de la serie propuesta como solución.

f) Permite visualizar gráficamente cuándo fallan ciertos postulados del teorema de bifurcación de Hopf.

Antes de enunciar el teorema principal definamos la notación específica a utilizar. Consideremos un sistema de "n" ecuaciones de estado no lineal general y autónomo indicado por las siguientes expresiones:

$$\dot{x} = A(\mu)x + B(\mu)g(Cx;\mu) \quad (2.1.a)$$

$$y = C(\mu)x, \quad (2.1.b)$$

donde A, B y C son matrices cuyas dimensiones están dadas por $n \times n$, $n \times r$ y $m \times n$, respectivamente, y $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r$. Aplicando transformada de Laplace en ambos miembros de (2.1) y considerando $e = -C^{-1}x$, $g(Cx;\mu) = f(e;\mu)$, definimos

$$G(s;\mu) = C(sI - A)^{-1}B, \quad (2.2.a)$$

$$y = -e. \quad (2.1.b)$$

Notemos que (2.1.a) es un sistema de "n" dimensiones, mientras que la función no lineal $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r$ es un vector de "r" componentes. Generalmente "r" es considerablemente menor que "n", por lo tanto es razonable esperar que la versión en el dominio frecuencia del teorema de bifurcación de Hopf requiera menos esfuerzo computacional que su clásica contrapartida en el dominio tiempo. Entonces, los puntos de equilibrio se obtienen hallando las soluciones de las "m" ecuaciones no lineales indicadas por

$$G(0;\mu) f(e;\mu) = -e. \quad (2.3)$$

Nótese que $G(0,\mu)$ está bien definida pues sólo necesitamos que A^{-1} exista, lo cual es siempre posible, ya que pueden agregarse términos en la parte lineal A de tal forma de asegurar dicha condición e incluirlos al mismo tiempo con signo cambiado en la parte no lineal.

Linealizando la estructura general de bloques realimentados mostrada en la Figura 2.4.a alrededor de un punto de equilibrio \hat{e} , obtenemos el sis-

tema indicado en la Figura 2.4.b, donde $J=(Df)_{\hat{e}}$ es la matriz de Jacobiano de $f(e;\mu)$ evaluada en $\hat{e}(\mu)$. Entonces, con dos bloques lineales, uno en la rama directa y el otro en la realimentación podemos aplicar el Criterio de estabilidad generalizado de Nyquist para estudiar la estabilidad del punto de equilibrio.

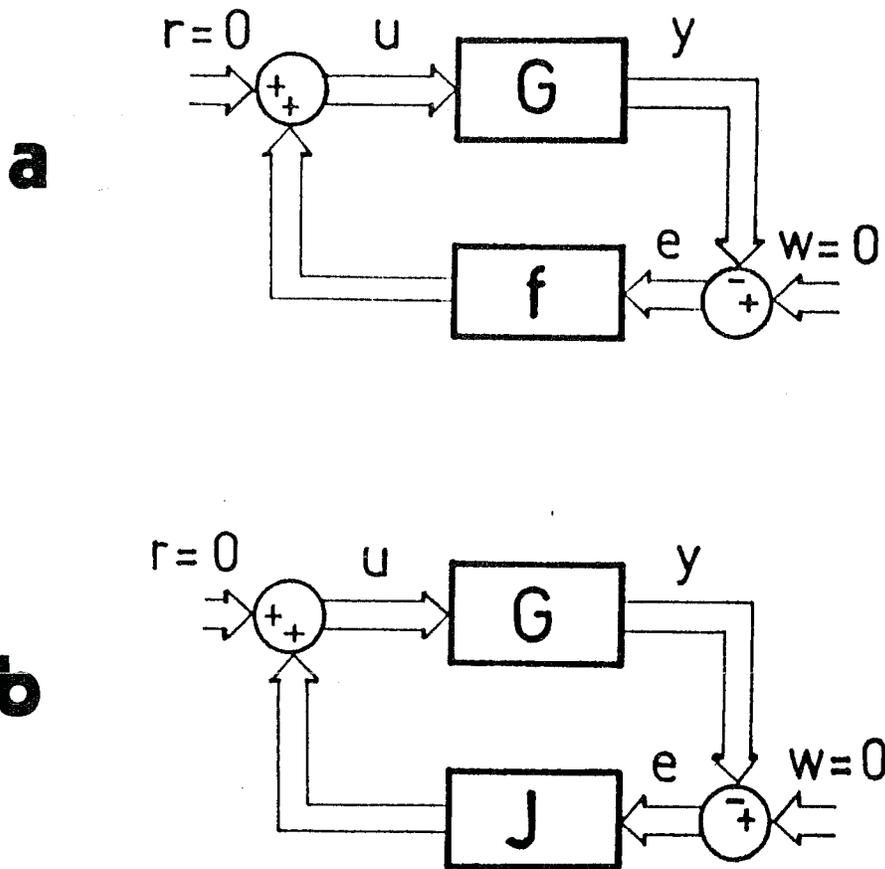


Figura 2.4: (a) Sistema no lineal realimentado general, (b) sistema linealizado.

De la teoría de sistemas realimentados sabemos que a un par de autovalores imaginarios puros $\pm iw_0$ asociado con la matriz J_1 de la versión en el

dominio tiempo corresponde un autovalor $(-1+i0)$ de la matriz de lazo abierto $G(i\omega_0;\mu)J(\mu)$ para el valor crítico del parámetro $\mu=\mu_0$. Así en la versión del dominio frecuencia la condición de bifurcación de Hopf se obtiene cuando un autovalor de $G(s;\mu)J(\mu)$ es $(-1+i0)$ para $s=i\omega_0$, $\omega_0 \neq 0$ y $\mu=\mu_0$. En otras palabras, mediante la variación de μ , uno de los autovalores de $G(s;\mu)J(\mu)$ pasará por el punto crítico $(-1+i0)$ en el plano complejo cuando "s" se mueve en el clásico contorno de Nyquist. Para ello, simplemente se calculan todos los autovalores de $G(i\omega;\mu)J(\mu)$ en una frecuencia ω y se repite este procedimiento en $\omega+\Delta\omega$ hasta cubrir $[0,\infty)$. Posteriormente, se ordenan los autovalores de forma de determinar curvas suaves parametrizadas en frecuencia. Finalmente, se grafican dichos valores y sus correspondientes conjugados en lo que se conoce como lugar geométrico característico de $G(i\omega;\mu)J(\mu)$. Estas curvas representan el gráfico de Nyquist generalizado de la función característica.

Para hacer el estudio de estabilidad del punto de equilibrio se cuenta, para un cierto valor del parámetro μ , el número de vueltas en sentido antihorario dado por los lugares geométricos característicos alrededor del punto $(-1+i0)$. Si este número es igual al número de polos de $P(\lambda)$ con parte real positiva, el sistema es estable. En la forma usual, hemos indicado con $P(\lambda)$ al polinomio característico definido al calcular los autovalores de $G(s;\mu)J(\mu)$.

Un caso que se obtiene frecuentemente en la práctica ocurre cuando todos los polos de $P(\lambda)$ tienen parte real negativa, o en otras palabras la planta $G(s;\mu)$ es estable. Diremos entonces que el estado de equilibrio es inestable si existe al menos un lugar geométrico característico cuyo número de vueltas alrededor del punto crítico $(-1+i0)$ en sentido horario es mayor que cero. Técnicamente existen otros detalles que el lector interesado puede consultar en MacFarlane y Postlethwaite (1977). En esta tesis mencionaremos otras variantes y casos especiales cuando sea estrictamente necesario. Por el momento exigiremos que un único autovalor, al que distinguiremos con $\hat{\lambda}(i\omega)$, pase por el punto crítico $(-1+i0)$ cuando $\mu=\mu_0$ mientras que los demás autovalores, aún ante variaciones de μ en un entorno de μ_0 , per-

manecen "alejados" del punto crítico $(-1+i0)$. La segunda restricción que imponemos será que el autovalor $\hat{\lambda}(i\omega)$, responsable del fenómeno de bifurcación, pase por el punto crítico para un único valor de $\omega \in (0, \infty)$, es decir que no existan los llamados *bucles* en el gráfico de los lugares geométricos característicos. Ambas restricciones evitan el caso de cruces múltiples de autovalores de las ecuaciones linealizadas en el dominio tiempo.

Antes de enunciar el teorema de bifurcación de Hopf en el dominio frecuencia incluiremos en este punto una definición que utilizaremos a menudo en los capítulos siguientes. Sea

$$P(\lambda, s; \mu) = \det[\lambda I - G(s; \mu)J(\mu)] = \lambda^m + a_{m-1}(s; \mu)\lambda^{m-1} + \dots + a_0(s; \mu) = 0 \quad (2.4)$$

el polinomio característico de la matriz de la rama directa $G(s; \mu)J(\mu)$ obtenido luego de aplicar el proceso de linealización descrito al comienzo de esta sección. Consideremos $\lambda = -1$ como una raíz simple de (2.4), entonces podemos enunciar lo siguiente:

Definición

Supongamos $P(-1, i\omega, \mu) = 0$ para $\mu = \mu_0$, entonces diremos que si $\omega_0 = 0$ tendremos la condición de bifurcación estática, mientras que si $\omega_0 \neq 0$ estaremos en presencia de la condición de bifurcación dinámica o de Hopf.

Observación

Nótese que para la verificación del teorema de bifurcación de Hopf la anterior definición para $\omega_0 \neq 0$ constituye sólo uno de los postulados a verificar del clásico teorema. Es por ello que se habla más propiamente de condición de bifurcación. En el dominio tiempo, la condición de bifurcación estática ocurre cuando un autovalor real de las ecuaciones linealizadas es cero.

Obsérvese que en el dominio frecuencia el producto final de los lugares geométricos característicos corresponde a una parametrización en frecuencia cuya interpretación aparece por el momento más oscura que la correspondiente a su contrapartida en el dominio tiempo. Sin embargo, a lo

largo de esta tesis, indicaremos ciertas ventajas que ofrece el dominio frecuencia sobre el dominio tiempo que justifican su estudio.

Las condiciones de bifurcaciones estáticas y dinámicas pueden representarse gráficamente en ambos dominios de análisis para el caso crítico $\mu = \mu_0$. Aquí supondremos que la condición de bifurcación es simple, es decir un único autovalor real en cero para bifurcación estática o un único par de autovalores imaginarios puros para bifurcación dinámica. La Figura 2.5.a muestra la condición de bifurcación estática en ambos dominios mientras que la Figura 2.5.b hace lo propio con la condición de bifurcación dinámica. Es claro ver de las mismas que mientras en el dominio tiempo la representación es directamente el autovalor, en el dominio frecuencia tenemos una curva parametrizada en w . Sin embargo, a pesar de esta aparente dificultad, existen ciertas ventajas, además de las ya mencionadas al comienzo de esta sección, que vigorizan el método de análisis en el dominio frecuencia como veremos oportunamente.

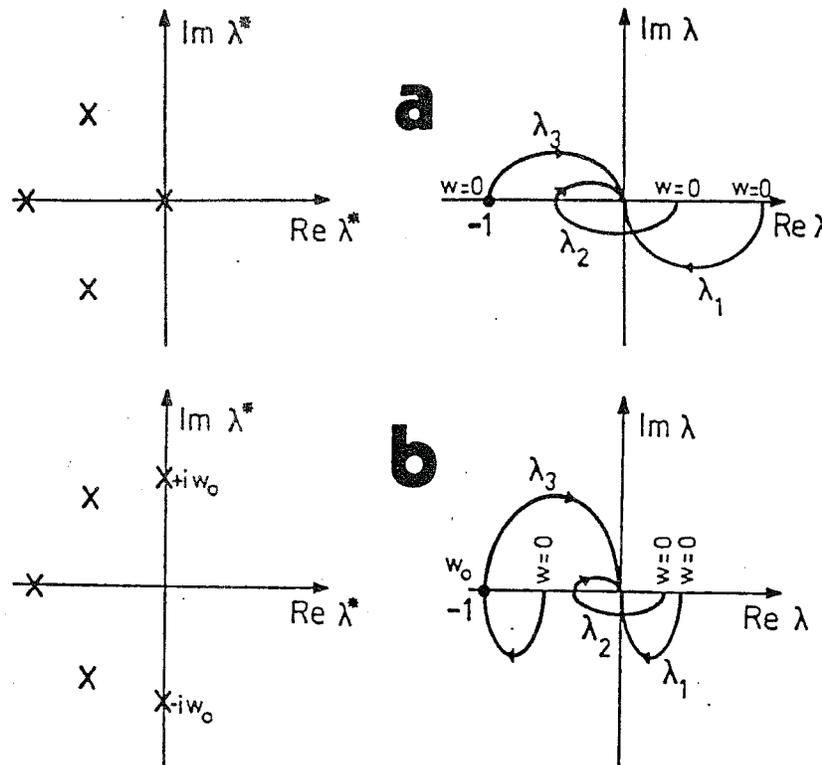


Figura 2.5: (a) Condición de bifurcación estática en el dominio tiempo y en el dominio frecuencia, (b) Idem para bifurcación dinámica.

Definida la notación correspondiente, enunciaremos a continuación el teorema de bifurcación de Hopf en el dominio frecuencia (Mees y Chua, 1979).

Teorema 2

Sea un sistema realimentado definido por las ecuaciones (2.2) y representado en forma de diagrama en bloques como en la Figura 2.4.a. Tal sistema es equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias como el indicado genéricamente por las ecuaciones (2.1). Supongamos que $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r$ es una función C^4 y que $\hat{e}(\mu)$ es la solución única de (2.3), notando además que $J=(Df)_{\hat{e}}$. Escribamos dualmente \hat{x} para el punto de equilibrio de la ecuación diferencial. Sea $G(s;\mu)J(\mu)$ la matriz de lazo abierto con funciones características o autovalores $\lambda_k(s)$ donde $k=1, \dots, m$. El polinomio característico es una función algebraica $P(\lambda, s)=0$ parametrizada en μ . Notemos $\hat{\lambda}$ para aquel λ_k cuyo lugar geométrico característico interseca al eje real negativo lo más cerca posible del punto crítico $(-1+i0)$, siendo la frecuencia angular de intersección correspondiente ω_r . Supongamos que cierta expresión $\xi_1(\omega_r) \neq 0$ (el algoritmo para obtener dicho número complejo se indica en la página 39) y el segmento, cuya dirección está fijada por $\xi_1(\omega_r)$, trazado desde el punto crítico $(-1+i0)$ interseca a $\hat{\lambda}(i\omega)$ en \hat{P} como se muestra en la Figura 2.6 con $\hat{\lambda}(i\omega) = \hat{P} = -1 + i\theta^2 \xi_1(\omega_r)$, donde $\theta \geq 0$. Asumiremos además los siguientes postulados:

- i) La intersección es transversal.
- ii) No existen otras intersecciones entre dicho segmento y algún otro lugar geométrico característico distinto de $\hat{\lambda}(i\omega)$.

Entonces existen valores de $\theta_0 \geq \theta_1 > 0$ y $\omega_0 \geq \omega_1 > 0$ tales que

- a) Si $\hat{\theta} < \theta_0$ y $|\hat{\omega} - \omega_r| < \omega_0$ el sistema realimentado tiene una solución periódica $e(t)$ de frecuencia $\omega = \hat{\omega} + O(\hat{\theta}^4)$ tal que

$$e(t) = \hat{e} + \text{Re} \left[\sum_{k=0}^2 E^k \exp(ik\hat{\omega}t) + O(\hat{\theta}^3) \right], \quad (2.5)$$

donde E^k son los valores de las amplitudes de los armónicos.

- b) La órbita periódica correspondiente en el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es única. Dicha órbita está centrada en \hat{x} y tiene su ra-

dio acotado. Sea $\hat{\theta} < \theta_1$ y $|\hat{w} - w_r| < w_1$, entonces el ciclo límite es estable si el número total de vueltas alrededor del punto $\hat{P} + \xi_1 \delta$ en sentido antihorario por el lugar geométrico característico es igual al número de polos de $P(\lambda)$ con parte real positiva. Aquí se ha tomado $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño para que no ocurra ninguna nueva intersección entre el lugar geométrico característico y el segmento que define $\xi_1(w_r)$.

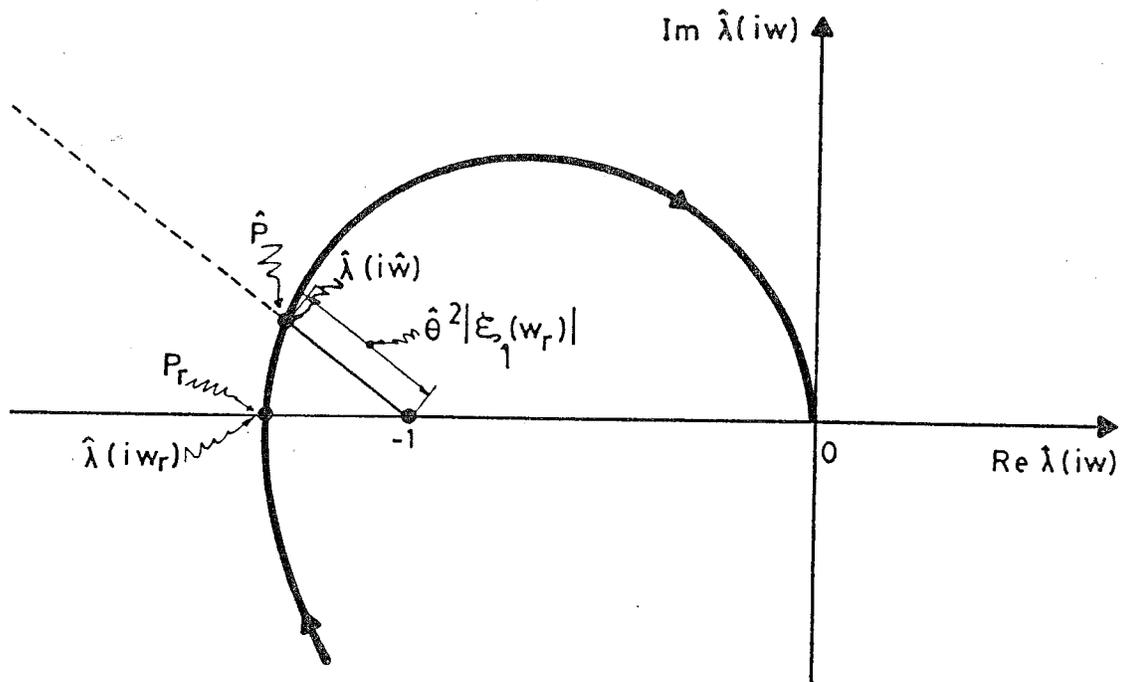


Figura 2.6: Método de Hopf gráfico: lugares geométricos.

La prueba de este teorema puede consultarse en Mees y Chua (1979) y en Mees (1981), aunque ambas dependen fuertemente de la prueba original de Allwright (1977). En las citadas referencias se calcula la expresión de $\xi_1(w_r)$ basándose en que existe una solución de la forma dada por la ecuación (2.5) en el sistema realimentado. Brevemente, el método utilizado consiste en igualar la salida de la parte no lineal $f(e, \mu)$ con la entrada de

la parte lineal $G(s, \mu)$ para cada uno de los armónicos a considerar, a saber para este caso, el término de frecuencia cero (que no tiene dependencia temporal), el de frecuencia fundamental y el del segundo armónico. Así entonces, a esta primera aproximación, la denominaremos formulación de balance armónico de segundo orden. La fórmula para $\xi_1(\omega_r)$ contiene expresiones de las derivadas segunda y tercera de la función no lineal evaluadas en el punto de equilibrio $\hat{e}(\mu)$.

Allwright (1977) capturó magistralmente la obtención de ξ_1 a partir de la estructura de bloques realimentados por lo cual recomendamos con énfasis la lectura de su trabajo. Más adelante veremos una extensión de su técnica que permite considerar una mayor cantidad de armónicos en la solución propuesta (2.5). Sin embargo, a los efectos de completar este capítulo introductorio de la teoría de bifurcación de Hopf en el dominio frecuencia, es suficiente con interpretar la idea de ξ_1 como expresión que nuclea la información de la dinámica del sistema no lineal para determinar qué tipo de diagrama local (subcrítico o supercrítico) corresponde ante la variación de μ .

En cuanto al análisis de estabilidad de la solución periódica ocurre generalmente que $G(s; \mu)J(\mu)$ no tiene polos en el semiplano derecho y el punto crítico $(-1 + i0)$ no será encerrado excepto por $\hat{\lambda}(i\omega)$. Entonces, la condición a verificar para estudiar la estabilidad es simplemente que el segmento cuya dirección queda determinado por ξ_1 apunte hacia afuera en la intersección \hat{P} para que el ciclo límite sea estable y hacia adentro para que sea inestable. Estas dos posibilidades están representadas en la Figura 2.7 donde se agregan, para facilitar la interpretación gráfica, los diagramas correspondientes a bifurcaciones supercríticas y subcríticas. Nótese que en forma análoga a su contrapartida en el dominio tiempo, la parte lineal del sistema, es decir el lugar geométrico de $\hat{\lambda}(i\omega)$, es exactamente el mismo para ambos casos. En otras palabras, no podemos distinguir entre la situación supercrítica o subcrítica teniendo sólo como información la parte lineal.

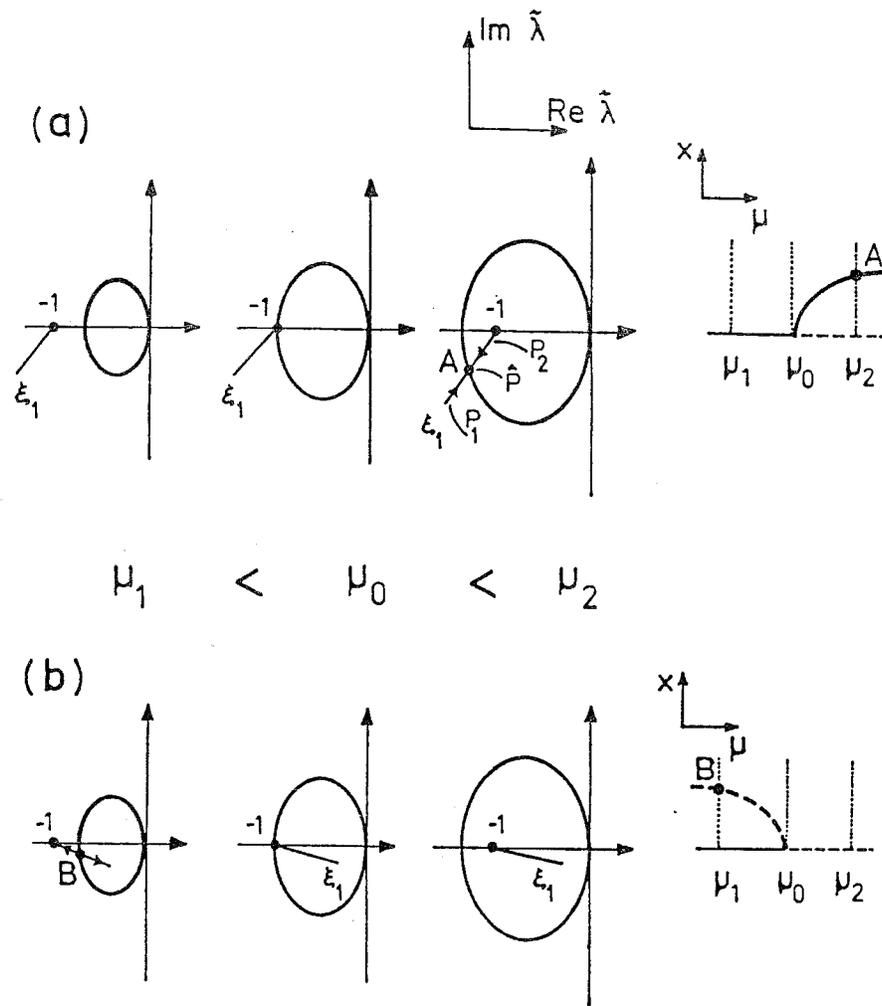


Figura 2.7: Bifurcaciones de Hopf: (a) supercrítica y (b) subcrítica en el dominio frecuencia.

Para realizar esta clasificación necesitamos saber cuál será el comportamiento de los términos no lineales nucleados en ξ_1 . Por ejemplo, para valores del parámetro μ tales como μ_1 en la Figura 2.7.a no encontramos intersección entre ambas entidades: La parte que lleva la información de la linealización, es decir $\hat{\lambda}(i\omega)$ y la parte resultante de la aproximación de los términos no lineales ξ_1 , mientras que si ocurre para $\mu > \mu_0$. Por lo tanto el diagrama correspondiente es el supercrítico. Note que para $\mu < \mu_0$, $\hat{\lambda}(i\omega)$

no encierra al punto crítico $(-1+i0)$ por lo cual el estado de equilibrio es estable. Si el vector ξ_1 apuntara hacia adentro como en la Figura 2.7.b, entonces sí obtendríamos una intersección entre $\hat{\lambda}(i\omega)$ y ξ_1 para valores de $\mu < \mu_0$. Para valores de $\mu > \mu_0$ se observa que no existe una intersección entre $\hat{\lambda}(i\omega)$ y ξ_1 para la cual $|\hat{\omega} - \omega_r|$ sea un valor pequeño. Por lo tanto concluimos que estamos en presencia de bifurcación de Hopf subcrítica. El valor de $\hat{\theta}$ que se obtiene por el método gráfico es una medida de la amplitud de los armónicos que intervienen en las expresiones de E^0 , E^1 y E^2 .

Observaciones

Es interesante recalcar ciertos puntos estratégicos de la formulación del teorema de bifurcación de Hopf en el dominio frecuencia para resaltar ciertas similitudes con la formulación en el dominio tiempo. Por ejemplo, la mención de un único autovalor o lugar geométrico característico que pasa por $(-1+i0)$ y la ausencia de bucles de $\hat{\lambda}$ es similar a pedir en el dominio tiempo que sea un único par de autovalores complejos conjugados el que da lugar a la bifurcación. Esta condición evita los casos de bifurcaciones múltiples tales como los presentados por Moliola (1991,1992) utilizando técnicas en el dominio frecuencia.

En el teorema principal de Mees y Chua se requiere que la intersección sea transversal, es decir se trata de evitar que ξ_1 sea tangente a $\hat{\lambda}(i\omega)$. Como ξ_1 es función de las derivadas segunda y tercera de la función no lineal evaluada en el punto de equilibrio $\hat{\theta}(\mu)$, puede mostrarse que ξ_1 tiene una variación suave con μ pues $f(e,\mu) \in C^4$. Puede suponerse, entonces, que localmente ante una perturbación en el parámetro μ a partir del valor crítico μ_0 la *tendencia* de ξ_1 no se verá drásticamente afectada. En otras palabras, y como lo sugiere la Figura 2.7, ξ_1 seguirá apuntando hacia afuera o hacia adentro dependiendo del caso supercrítico o subcrítico de bifurcación. Entonces podría calcularse únicamente el gráfico central de ambos casos y así decidir a qué tipo de bifurcación corresponde, pues una pequeña modificación en μ no afectaría el resultado final de la dirección de ξ_1 . Esta idea fue explorada en Mees y Chua (1979) para derivar, a partir de una expresión similar a ξ_1 , el coeficiente de curvatura o de estabilidad del fo-

co. Sin embargo, existe una posibilidad de invalidar dichos razonamientos y es cuando el vector ξ_1 es tangente en el punto crítico al lugar geométrico característico: Ante pequeñas perturbaciones en un entorno de μ es imposible determinar si ξ_1 apuntará hacia afuera o hacia adentro del lugar geométrico. Esto tiene su analogía en el dominio tiempo al exigir que una determinada expresión tenga definición de signo.

Si consideramos $\mu \neq \mu_0$ la necesidad de exigir una intersección transversal está ligada con la unicidad de la solución periódica emergente. Si ξ_1 fuera tangente al lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(i\omega)$ para $\mu = \mu_3$ se podrían obtener dos posibles soluciones periódicas o ninguna. Esta situación también, por el momento, deseamos evitar.

Para concluir con esta sección notemos que la estabilidad del ciclo límite puede hallarse aplicando el Criterio de estabilidad generalizado de Nyquist trasladando el punto crítico $(-1+j0)$ al punto de intersección \hat{P} . Ante una perturbación en la amplitud de la solución $\hat{\theta}$ se analizará el comportamiento para valores menores y mayores a $\hat{\theta}$. Por ejemplo, para la intersección esquematizada por la letra A en la Figura 2.7.a., para un valor $\theta_1 > \hat{\theta}$ el punto correspondiente P_1 no es encerrado por ningún lugar geométrico característico, luego la solución es estable por encima de \hat{P} , es decir la amplitud de $\hat{\theta}$ tiende a disminuir alcanzando la solución \hat{P} como muestra la flecha. En cambio, para un valor de $\theta_2 < \hat{\theta}$ el punto correspondiente P_2 queda encerrado por el lugar geométrico característico $\hat{\lambda}$, luego la solución es inestable por debajo de \hat{P} . Entonces, la amplitud $\hat{\theta}$ tiende a aumentar alcanzando la solución \hat{P} como indica la flecha. Por lo tanto, A indica un ciclo límite estable pues ante pequeñas perturbaciones en la amplitud del mismo, el estado final tiende a la solución señalada por \hat{P} . De la misma forma puede hacerse un análisis similar para determinar la estabilidad de la órbita periódica señalada por la letra B. En este caso las flechas escapan del punto esquematizado por la letra B indicando que la solución, ante pequeñas perturbaciones, es inestable.

2.4. BIFURCACION DE HOPF EN UN REACTOR TANQUE AGITADO CONTINUO

En esta sección consideraremos el análisis de la aparición de ciclos límites usando el método en el dominio frecuencia. Básicamente se mostrarán algunos cálculos sencillos algebraicos para determinar la forma del lugar geométrico característico como también resultados de implementaciones en una computadora. Para ello consideraremos una reacción exotérmica irreversible de primer orden que tiene lugar en un reactor tanque agitado en forma continua, tal como fue presentado en el hoy clásico trabajo de Uppal y colaboradores (1974). Las ecuaciones del modelo en forma adimensional son

$$dx_1/dt = -x_1 + D (1-x_1) \exp[x_2/(1+x_2/\gamma)] \quad (2.6.a)$$

$$dx_2/dt = -x_2 + B D (1-x_1) \exp[x_2/(1+x_2/\gamma)] - \beta(x_2-x_{2c}), \quad (2.6.b)$$

donde D es el parámetro principal o de bifurcación, B , β y γ son parámetros auxiliares del sistema. Cabe aclarar que esta elección puede resultar conflictiva o artificial cuando se quieren comprobar las predicciones del modelo con los resultados experimentales. Así, otros autores como Vaganov y colegas (1978), o más recientemente Pismen (1985), consideraron otro parámetro de bifurcación.

Considerando $x_{2c}=0$ y $\gamma \rightarrow \infty$ podemos simplificar las expresiones anteriores de la siguiente manera,

$$dx_1/dt = -x_1 + D (1-x_1) \exp(x_2) \quad (2.7.a)$$

$$dx_2/dt = -(1 + \beta)x_2 + B D (1-x_1) \exp(x_2), \quad (2.7.b)$$

que pueden ser expresadas en la forma de sistemas realimentados equivalentes, donde se han tomado las siguientes asignaciones:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-\beta \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ B \end{bmatrix}; \quad C = I; \quad f(e,D)=D(1+e_1)\exp(-e_2).$$

Usando la ecuación (2.2.a), obtenemos

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1/(s+1) \\ B/(s+1+\beta) \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

mientras que la matriz de Jacobiano J es

$$J = [J_1 \quad J_2] = [D \exp(-\hat{e}_2) \quad \hat{e}_1]. \quad (2.9)$$

Los puntos de equilibrio $\hat{e}(D)$ se obtienen usando la ecuación (2.3)

$$\hat{e}_1 = -D (1 + \hat{e}_1) \exp(-\hat{e}_2), \quad (2.10.a)$$

$$\hat{e}_2 = B \hat{e}_1 / (1+\beta). \quad (2.10.b)$$

Las funciones características de $G(s)J$ son:

$$\lambda_1(s) = 0 \quad \forall s, \quad (2.11.a)$$

$$\lambda_2(s) = [(J_1 + BJ_2)s + J_1(1 + \beta) + BJ_2] / [(s+1)(s+1+\beta)]. \quad (2.11.b)$$

Reemplazando s por $i\omega$ obtenemos los lugares geométricos característicos para diferentes valores del parámetro de bifurcación D . En este caso sólo el autovalor $\lambda_2(i\omega)$ será $\hat{\lambda}(i\omega)$ y representará la dinámica de la parte lineal.

Antes de aplicar el teorema de bifurcación de Hopf al ejemplo propuesto en esta sección derivaremos condiciones para detectar la presencia de bifurcaciones utilizando la información dada por (2.11.b). Las manipulaciones algebraicas son simples y pueden también ser obtenidas por el método en el dominio tiempo. Sin embargo, se ha preferido este análisis para mostrar completamente el uso de la metodología en el dominio frecuencia.

Usando la ecuación (2.9) obtenemos $J_2 = -(1+\hat{e}_1)J_1$. Entonces, la ecuación (2.11.b) puede escribirse de la siguiente manera

$$\lambda_2(s) = J_1 \{ [1 - B(1+\hat{e}_1)]s + 1 + \beta - B(1+\hat{e}_1) \} / [(s+1)(s+1+\beta)]. \quad (2.12)$$

Dado que D es estrictamente un valor positivo, entonces $J_1 > 0$ y llamando $a = J_1 [1 - B(1+\hat{e}_1)]$, y $b = a + J_1 \beta$ en la expresión (2.12) podemos distinguir fácil-

mente tres casos:

Caso 1: $a > 0$. Entonces $b > 0$ dado que $\beta > 0$ y $\lambda_2(i\omega)$ tiene un gráfico similar al mostrado en la Figura 2.8. Para nuestro análisis futuro esta condición no es de interés pues el lugar geométrico $\lambda_2(i\omega)$ nunca pasará por el punto crítico $(-1 + i0)$ como puede verse de la figura mencionada precedentemente.

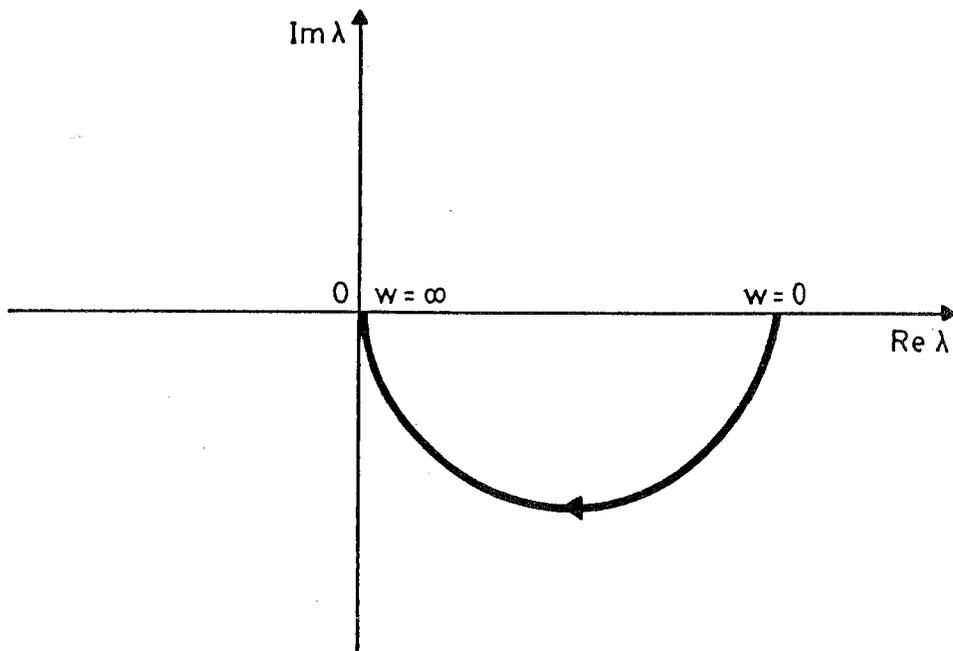


Figura 2.8: Lugar geométrico característico para el caso 1.

Caso 2: $a < 0$ y $b < 0$. En esta particular disposición la expresión para $\lambda_2(s)$ resulta

$$\lambda_2(s) = - [c(s + d/c)] / [(s+1)(s+1+\beta)], \quad (2.13)$$

donde $c = -a$ y $d = -b$ son valores positivos. Note además que los polos de $\lambda_2(s)$ son $p_1 = -1$ y $p_2 = -1 - \beta$, mientras que el cero es $z_1 = -d/c$. Usando las anteriores expresiones de a y b en términos de los parámetros originales del sistema se llega a la siguiente expresión de d/c ,

$$d/c = 1 - \beta[B(1+\hat{\epsilon}_1)-1] \quad (2.14)$$

y haciendo uso de las condiciones de definición que distinguen a este caso puede verse fácilmente que

$$0 < d/c < 1.$$

Entonces el diagrama de polos y ceros y sus posibles correspondientes lugares geométricos característicos están representados en la Figura 2.9. Nótese que para el lugar geométrico esquematizado en la Figura 2.9.b existen dos intersecciones con el eje real negativo: la primera para una frecuencia $\omega_1=0$ y la segunda para una frecuencia $\omega_0 \neq 0$. Entonces dicha configuración permite la presencia de bifurcaciones estáticas y dinámicas cuando alguna de dichas intersecciones coincide con el punto crítico $(-1+j0)$. En cambio, para el lugar geométrico característico presentado en la Figura 2.9.c la única intersección con el eje real negativo corresponde siempre para frecuencias $\omega_1=0$. Luego, la única posibilidad es la presencia de bifurcaciones estáticas cuando la intersección se produce en el punto crítico $(-1+j0)$.

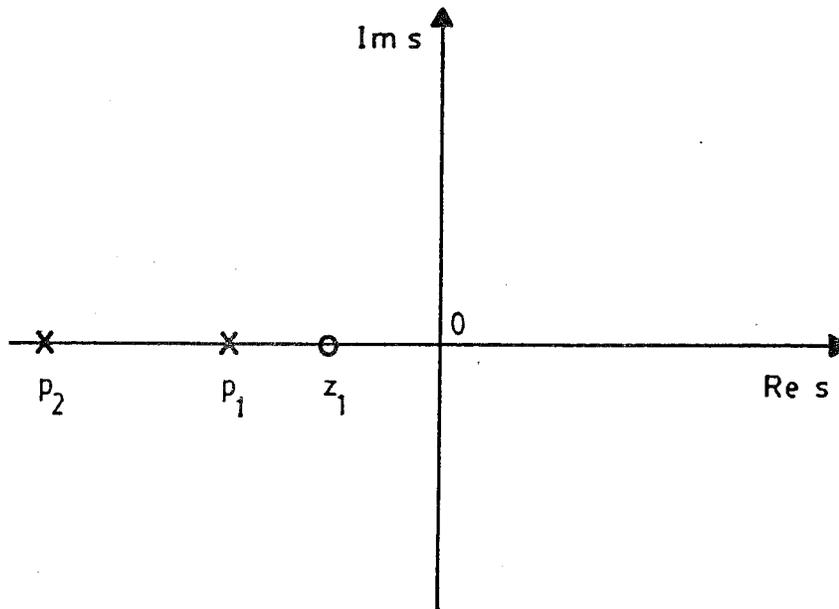


Figura 2.9.a: Diagramas de polos y ceros correspondientes al caso 2.

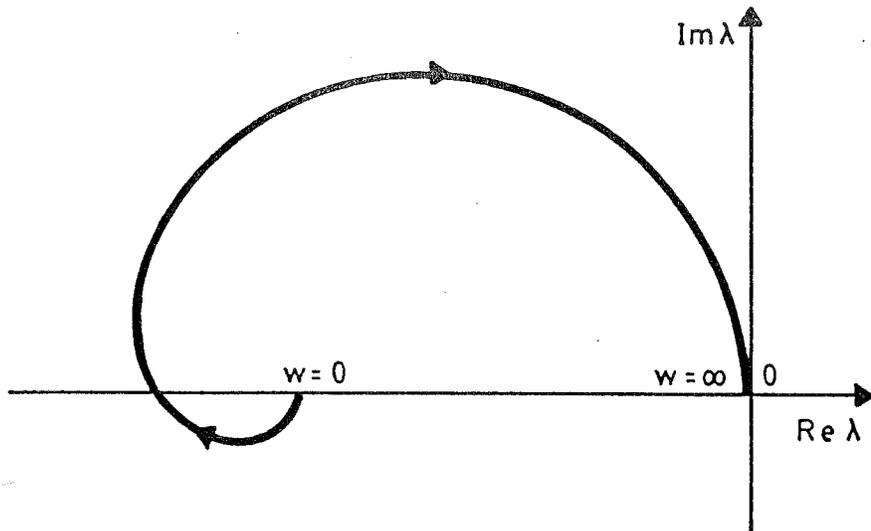


Figura 2.9.b: Lugar geométrico característico del caso 2. Permite ambos tipos de bifurcaciones: estáticas y dinámicas.

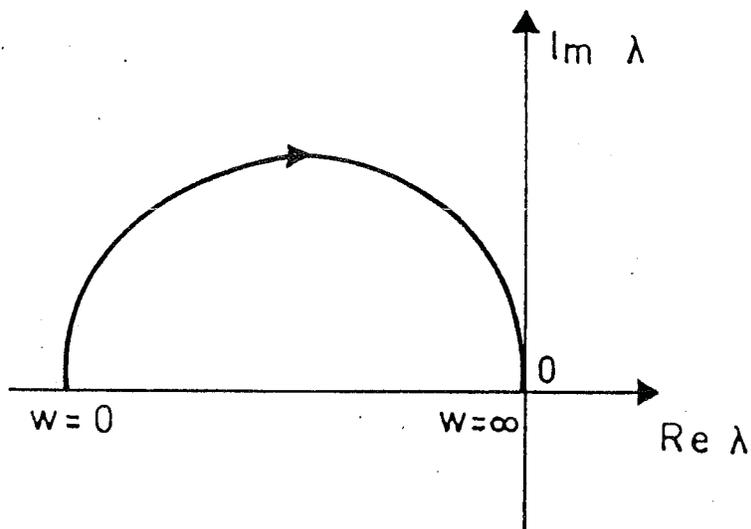


Figura 2.9.c: Lugar geométrico característico del caso 2. Únicamente se puede detectar bifurcación estática.

Caso 3: $a < 0$ y $b > 0$. Ahora $\lambda_2(s)$ puede expresarse de la siguiente manera

$$\lambda_2(s) = - [c(s - b/c)] / [(s+1)(s+1+\beta)]. \quad (2.15)$$

Como b y c son ambos estrictamente positivos, entonces el cero de $\lambda_2(s)$ está en el semiplano derecho (sistema de fase no-mínima). El diagrama de polos y ceros se indica en la Figura 2.10 junto con el lugar geométrico característico. Para este caso puede detectarse una intersección entre $\lambda_2(i\omega)$ y el eje real negativo para $\omega_0 \neq 0$. Luego, con esta configuración, podemos obtener únicamente la condición de bifurcación dinámica cuando dicha intersección coincide con el punto crítico $(-1+i0)$.

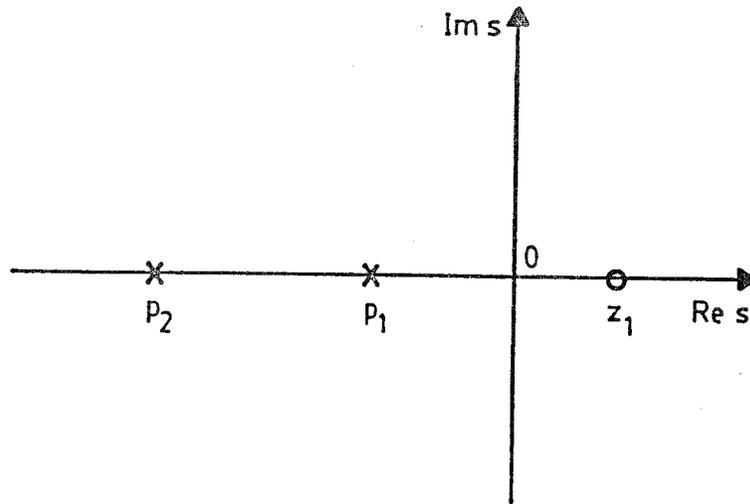


Figura 2.10.a: Diagrama de polos y ceros correspondiente al caso 3.

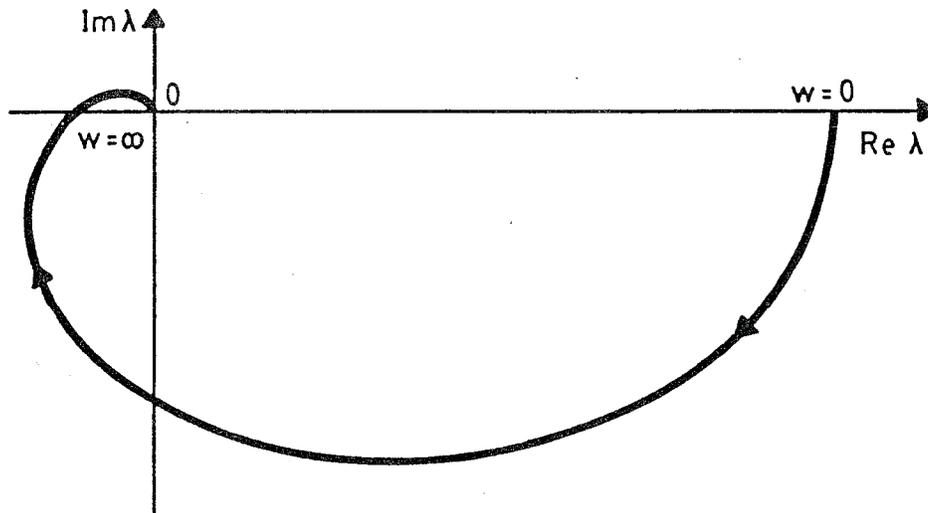


Figura 2.10.b: Lugar geométrico característico del caso 3.

Una vez analizada la estructura del lugar geométrico característico, cubriendo todas las posibilidades de formas de acuerdo a las restricciones de valores de los parámetros, podemos abocarnos a la detección de oscilaciones usando el método en el dominio frecuencia. Antes de comenzar con los resultados numéricos propiamente dichos incluiremos brevemente el algoritmo implementado para calcular $\xi_1(\omega_r)$ y la solución periódica aproximada. Por simplicidad definamos $D_k = (D^k f)_{\hat{\theta}}$ para $k=1, 2$ y 3 como un operador lineal sobre el producto tensorial, donde $D_1 = J$ en nuestra notación anterior. Sea $\hat{\lambda}$ el autovalor de $G(i\omega)D_1$ más cercano al punto crítico $(-1+i0)$ y u^T y v los autovalores izquierdo y derecho de $G(i\omega)D_1$ pertenecientes a $\hat{\lambda}(i\omega)$. Definamos $H(i\omega) = [G(i\omega)D_1 + I]^{-1}G(i\omega)$. Entonces el algoritmo implementado, propuesto originalmente en Mees y Chua (1979), consta de los cinco pasos presentados a continuación:

- 1) Normalice v tal que $|v|=1$ y u tal que $u^T v = 1$.
- 2) Calcule $V_{02} = -1/4 H(0) D_2 v \otimes \bar{v}$,

$$V_{22} = -1/4 H(2i\omega) D_2 v \otimes v,$$

$$p(i\omega) = D_2 (V_{02} \otimes v + 1/2 \bar{v} \otimes V_{22}) + 1/8 D_3 v \otimes v \otimes \bar{v},$$

donde \bar{v} es el complejo conjugado de v .

- 3) Calcule $\xi_1(\omega) = -u^T G(i\omega)p(\omega)$, y el coeficiente de curvatura

$$\sigma_1(\omega) = -\text{Re}[\xi_1(\omega)/(u^T G'(i\omega)Jv)], \quad G'(i\omega) = dG(s)/ds \Big|_{s=i\omega}.$$

- 4) Obtenga la solución gráfica en $\hat{\theta}$ y $\hat{\omega}$, si existe, de la siguiente expresión

$$\hat{\lambda}(i\hat{\omega}) = -1 + \xi_1(\omega_r)\hat{\theta}^2.$$

- 5) Calcule, con los valores obtenidos de $\hat{\theta}$ y $\hat{\omega}$, las siguientes fórmulas

$$E^0 = \hat{\theta}^2 V_{02},$$

$$E^1 = \hat{\theta} v,$$

$$E^2 = \hat{\theta}^2 V_{22},$$

$$e(t) = \hat{\theta} + \text{Re} \left[\sum_{k=0}^2 E^k \exp(ik\hat{\omega}t) \right]. \quad (2.16)$$

El ejemplo que estamos tratando posee multiplicidad en la solución de

equilibrio (ver Uppal y colegas, 1974). Esta fenomenología está relacionada con la detección de bifurcaciones estáticas que sabemos únicamente ocurren para las configuraciones mostradas en las Figuras 2.9.b y 2.9.c. Sin embargo, dejaremos para capítulos sucesivos el estudio de tales bifurcaciones estáticas y nos abocaremos a la aparición y detección de ciclos límites que emergen siguiendo los postulados del teorema de bifurcación de Hopf en el dominio frecuencia.

Por ejemplo, consideremos la situación presentada en la Figura 2.11.a. Los parámetros B y β están fijos mientras que D varía provocando el fenómeno de bifurcación de Hopf. Con el algoritmo presentado anteriormente calculamos el vector $\xi_1(\omega_r)$ y su intersección con el correspondiente lugar geométrico $\lambda_2(j\omega)$. Note que ambos polos de $\lambda_2(s)$ están en el semiplano izquierdo para los valores permisibles de los parámetros, por lo tanto la dirección de $\xi_1(\omega_r)$ determina la estabilidad de los ciclos límites emergentes. Como vemos de la Figura 2.11.a el vector ξ_1 apunta hacia afuera de $\lambda_2(j\omega)$, dando lugar a ciclos límites estables. Una vez obtenida la solución gráfica, es decir $\hat{\theta}$ y \hat{w} , usando el paso 5 del algoritmo precedente hallamos la solución periódica aproximada. Para las dos situaciones mostradas en la Figura 2.11.a tendremos las correspondientes órbitas periódicas (vea la Figura 2.11.b) en el plano de fase usando la ecuación (2.16) notando para este ejemplo que se cumple $e=-x$.

Cuando D disminuye, la amplitud de las oscilaciones aumenta. Sin embargo debemos tener presente la naturaleza local de las predicciones realizadas por el teorema de bifurcación de Hopf y la presencia de otros fenómenos que pueden llevar a la desaparición del ciclo límite para valores algo alejados del crítico μ_0 . En estos casos es conveniente tomar alguna de las dos variantes siguientes:

- a) Realizar una simulación con alguna subrutina de integración numérica para verificar los resultados, o
- b) Aplicar la versión del teorema de bifurcación de Hopf de alto orden propuesta en Mees y Allwright (1979) y en Mees (1981).

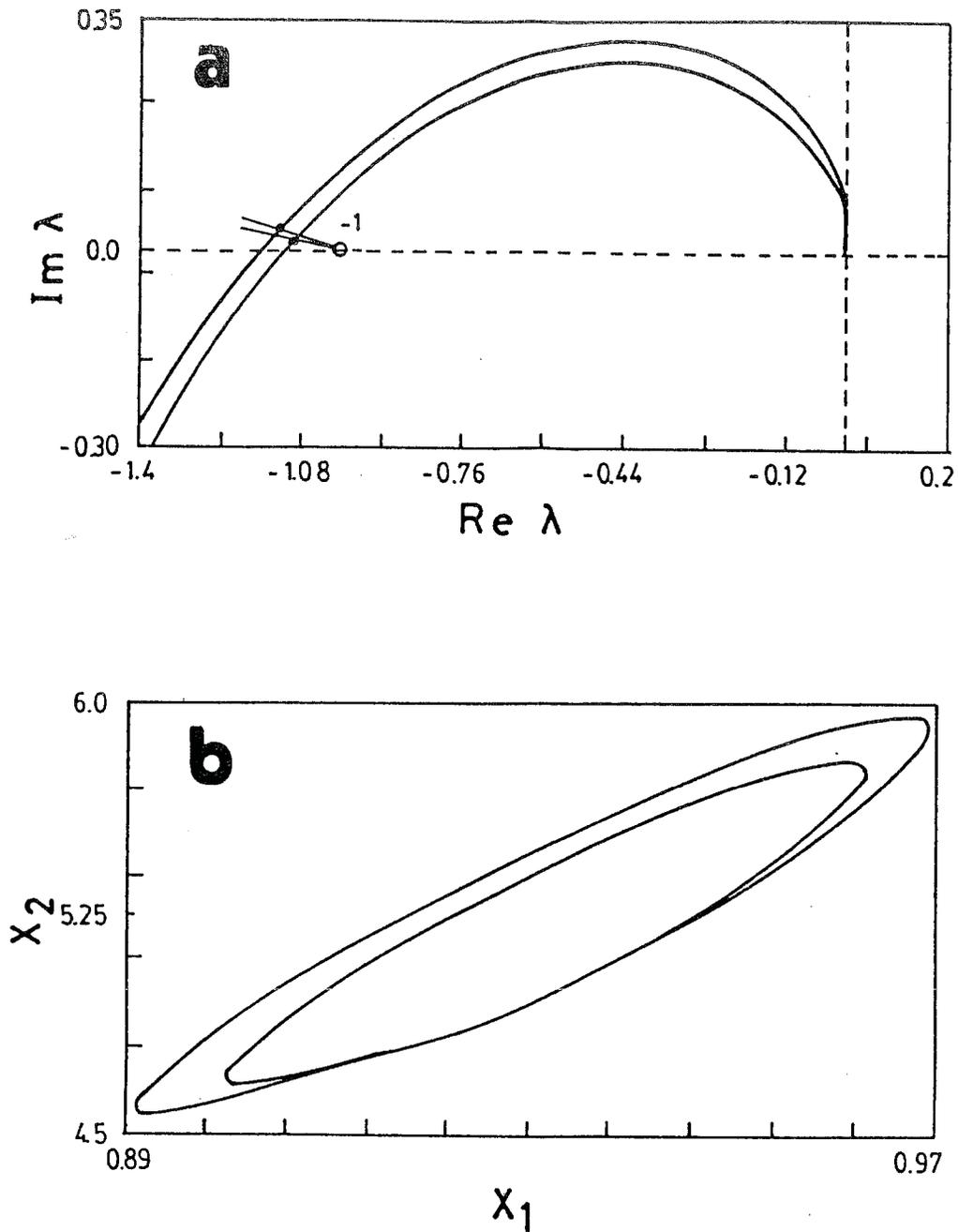


Figura 2.11: Detección de ciclos límites estables para dos valores diferentes del parámetro de bifurcación D , $B=22$, $\beta=3$ y D varía entre 0.085 y 0.086. (a) Método de Hopf gráfico. (b) Plano de fase.

La primera alternativa se muestra en la Figura 2.12 donde se presenta una comparación entre la aproximación de la solución periódica utilizando el método en el dominio frecuencia y una simulación utilizando una rutina

de integración numérica. Así los resultados pueden verificarse inmediatamente teniendo cierta confiabilidad en la solución aproximada resultante al aplicar el método en el dominio frecuencia. Aunque dependiente del paso de integración, los valores típicos de tiempo de CPU de las simulaciones van de 20 a 60 segundos, mientras que son sólo de cuatro segundos para cubrir los cinco pasos del algoritmo indicado precedentemente. Más aún, este tiempo se minimizó a menos de dos segundos utilizando una implementación más eficiente. Para todos los cálculos se usó una computadora VAX/750.

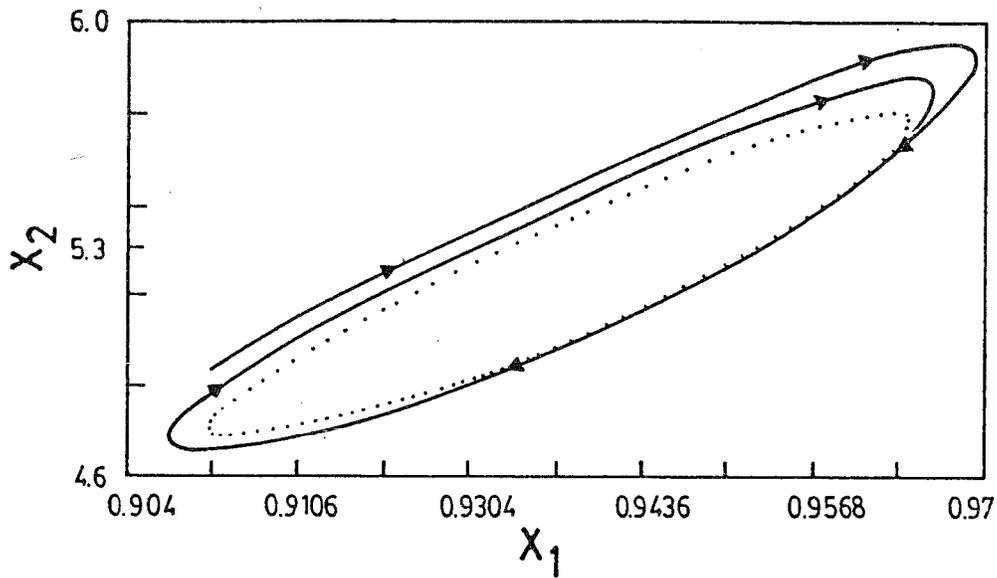


Figura 2.12: Comparación de resultados entre la simulación (línea llena) y el algoritmo (línea punteada), $D=0.0874$.

Aclaradas las ventajas y limitaciones debemos mencionar que tal vez los resultados más interesantes son obtenidos en la detección de ciclos límites inestables como fue remarcado en Colantonio y colegas (1989). El tiempo de cómputo es el mismo, independientemente de la estabilidad de la solución periódica, por lo cual el método en el dominio frecuencia brinda una herramienta poderosa para determinar ciclos límites inestables que son difíciles de localizar utilizando integración numérica. Por ejemplo, cuando $B=14$, $\beta=3$ y $D=0.163$ puede localizarse, aplicando los resultados del teorema de bifurcación de Hopf en el dominio frecuencia, un ciclo límite inestable tal como se muestra en la Figura 2.13.a donde el vector $\xi_1(w_r)$ apunta hacia el interior de $\lambda_2(iw)$. En cambio, en la Figura 2.13.b se completa el análisis

sis incluyendo en el plano de fase el ciclo límite inestable aproximado junto con dos soluciones obtenidas por simulación que *escapan* de dicha singularidad curvilínea.

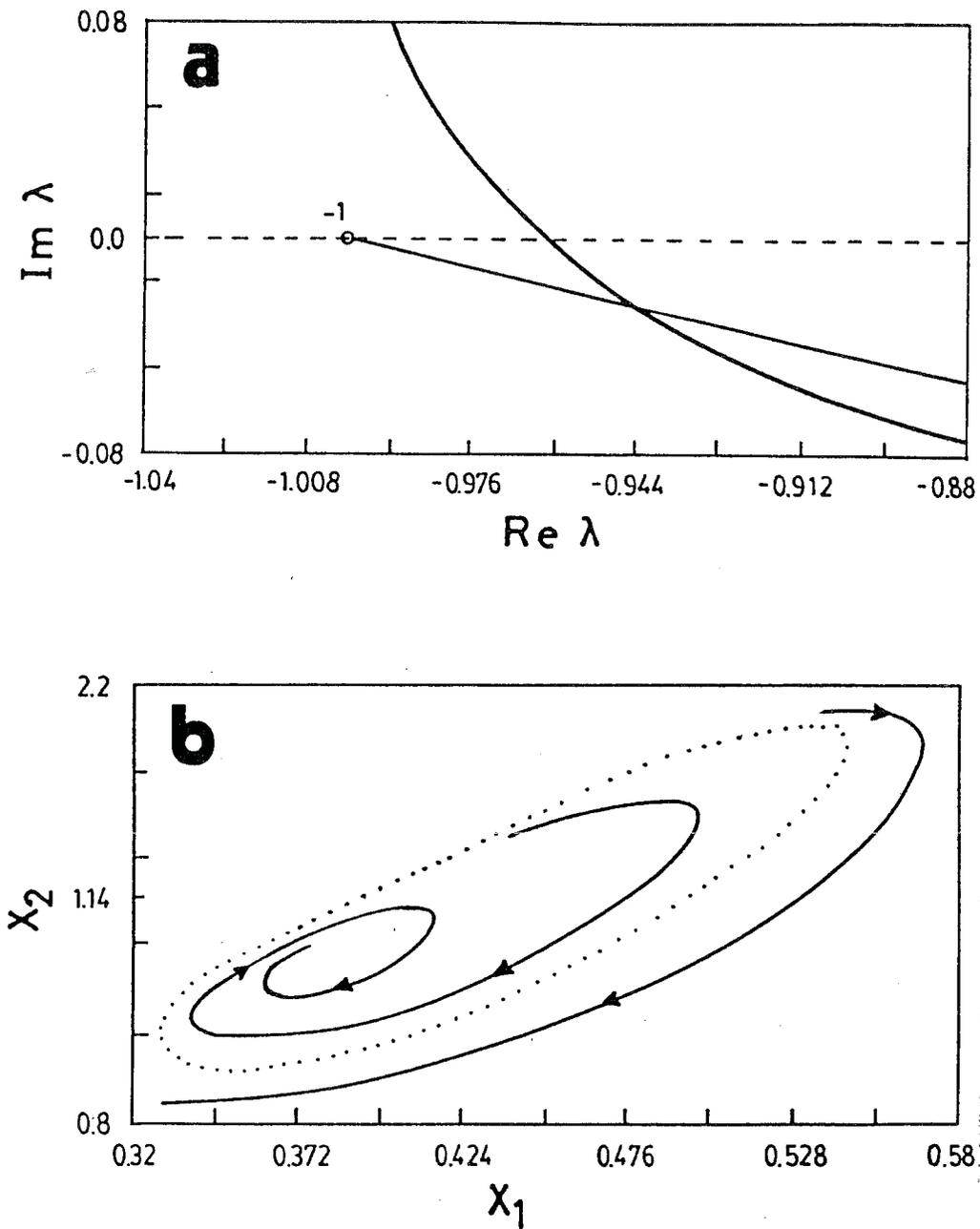


Figura 2.13: Detección de ciclo límite inestable para $B=14$, $\beta=3$ y $D=0.163$.
 (a) Método gráfico, (b) Comparaciones con resultados de la simulación.

Finalmente, cuando D disminuye por debajo de 0.103, con el método en

el dominio frecuencia pueden detectarse dos intersecciones, relativamente próximas, que corresponden a una estructura de dos ciclos límites anidados, uno estable y el otro inestable. Para este tipo de situaciones se recomienda tomar más términos en la aproximación de la función no lineal $f(e, \mu)$ en el bloque de la realimentación. Así, es conveniente aplicar, al menos, una aproximación de balance armónico de cuarto orden como la utilizada en Mees y Allwright (1979) para sistemas SISO o en Mees (1981) para sistemas MIMO. El ciclo límite de menor amplitud (inestable) en la Figura 2.14 se obtiene con menores errores que el ciclo límite exterior (estable). La primer intersección tiene lugar para una frecuencia $\omega_1 > 0$ y el ciclo límite es estable pues el vector $\xi_1(\omega_r)$ apunta hacia afuera de $\lambda_2(i\omega)$, mientras que la segunda corresponde a un ciclo límite inestable de frecuencia $\omega_2 > \omega_1$. Si continuamos disminuyendo el valor de D no se detectarán, superado un cierto valor crítico, más intersecciones entre el vector ξ_1 y el autovalor λ_2 . Ello coincide en el modelo matemático con la unión y posterior desaparición de ambos ciclos límites.

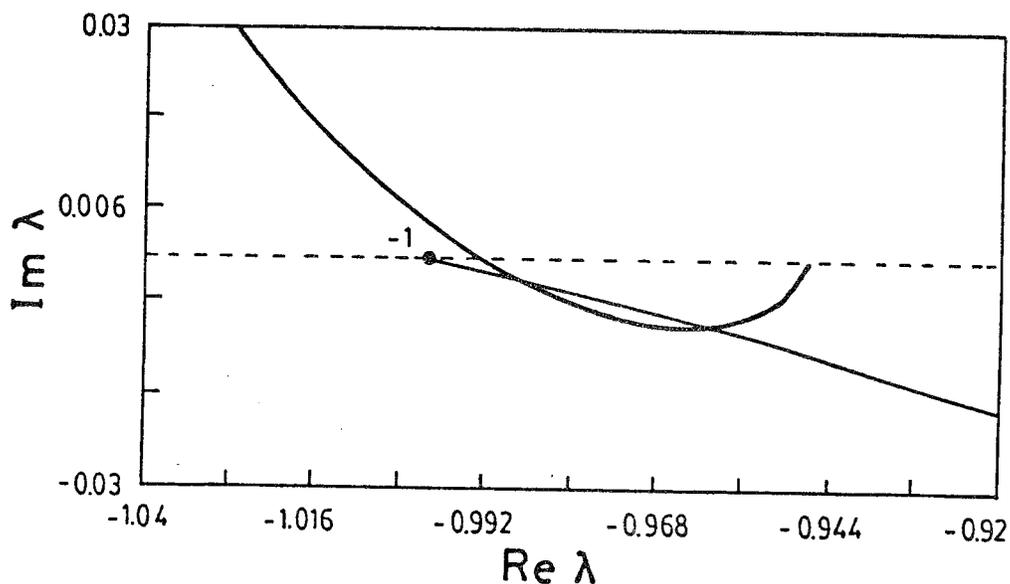


Figura 2.14: Doble intersección utilizando el método gráfico para $B=19$, $\beta=3$ y $D=0.1029$.

Aunque los resultados son muy promisorios, esta situación de concordancias no pasa generalmente para todos los tipos de sistemas no lineales. Nuestra recomendación es realizar una cuidadosa simulación para varias con-

diciones iniciales en el retrato de fase o utilizar programas más sofisticados de continuación de soluciones periódicas. Trataremos estos problemas en capítulos sucesivos, pero nos permitimos mencionar, para finalizar el presente, que la necesidad de transversalidad en el corte entre $\xi_1(w_r)$ y $\lambda_2(iw)$ compete a la unicidad de la solución periódica como puede apreciarse claramente en la Figura 2.14. Así, disminuyendo el valor de D por debajo de 0.1029, alcanzaremos una situación de tangencia entre ξ_1 y λ_2 en el caso límite para luego no detectar intersección.

CAPITULO 3

CONTINUACION DE CURVAS DE BIFURCACION EN EL ESPACIO DE PARAMETROS

Una vez localizado un punto de bifurcación, sea estático o dinámico, el paso siguiente consiste en analizarlo detalladamente realizando la variación del parámetro que provocó su nacimiento. Pueden emplearse diferentes herramientas en este primer análisis, pero sin duda resultará de sumo interés preguntarse si las estructuras dinámicas obtenidas se mantendrán inalteradas cualitativamente ante la presencia de perturbaciones. Esta aparente insensibilidad o resistencia a un cambio profundo puede determinarse como así también, en contrapartida, si el sistema es proclive a cambiar drásticamente su conocida y estudiada estructura dinámica. Podríamos pensar, entonces, que las perturbaciones actuarían enriqueciendo la dinámica del sistema logrando la localización de puntos más conflictivos que los puntos de bifurcaciones estáticas y dinámicas por sí solos. Más aún, el modelo matemático, como una aproximación del fenómeno físico, presenta incertidumbres no sólo en el valor de los parámetros sino en la consideración de todas las leyes físicas intervinientes en lo que se da en llamar incertidumbres dinámicas. Por lo tanto, resulta de sumo interés considerar la modificación de los primeros estudios a la luz de nuevas interacciones, a veces inimaginables, que tienen lugar ante la presencia de perturbaciones. En nuestro caso permitiremos la variación de un parámetro auxiliar de tal forma de continuar los puntos de bifurcaciones en dos dimensiones utilizando las técnicas en el dominio frecuencia. En la Sección 3.1 daremos una reseña histórica prestando especial énfasis a las aplicaciones. En cambio, en la Sección 3.2 presentaremos resultados preliminares para continuar las curvas de bifurcaciones como así también las condiciones de definición de otras singularidades. En la Sección 3.3 presentaremos las condiciones de definición de las bifurcaciones degeneradas de Hopf más simples usando el método en el dominio frecuencia. Por último en la Sección 3.4 mostraremos ejemplos de aplicación.

3.1. INTRODUCCION

Uno de los trabajos más completos en el intento de analizar la dinámica de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuando se varían al menos dos parámetros del mismo lo constituye el realizado por Uppal y colaboradores (1974). En el hoy clásico trabajo se dividían regiones en el espacio de parámetros que tenían, al menos localmente, una misma configuración dinámica, por ejemplo de estados de equilibrio, de ciclos límites estables o inestables o similar número de puntos de bifurcación de Hopf. Inspirado, en muchas de sus presentaciones gráficas, en los libros de Andronov y colaboradores (1966, 1973), el trabajo de Uppal y colegas rescataba la continuación de curvas de bifurcaciones que ocasionaban cambios apreciables en el retrato de fase. Su excelente factura técnica dejaba entrever las poderosas aplicaciones que tendría más adelante, no sólo el teorema de bifurcación de Hopf sino también las bifurcaciones degeneradas de Hopf y las interacciones con otras singularidades estáticas y dinámicas.

En este contexto es importante rescatar la filosofía de estudio: En el espacio de parámetros del sistema se calculaban sólo ciertas curvas (de bifurcaciones) distintivas, luego las áreas encerradas por las mismas tendrían, al menos localmente, diagramas similares de bifurcación. Con un relativamente escaso esfuerzo computacional se lograba un vasto conocimiento de la dinámica local del sistema. El trabajo tuvo un amplio y profundo impacto en ingeniería química y matemática aplicada como así también en otras disciplinas que necesitaban evaluar convenientemente los aspectos más sobresalientes de la dinámica de sistemas sin requerir simulaciones exhaustivas.

Más tarde, nuevamente Uppal y colegas (1976) extendían sus metodologías a un caso más complejo. De allí en más dos líneas claras se separarían casi indefectiblemente: Por un lado los estudios sobre multiplicidad de estado de equilibrio (aplicando la teoría de catástrofe) como en Chang y Calo (1979) o utilizando teoría de singularidades como en Balakotaiah y Luss (1982a, 1982b, 1984), Farr y Aris (1986). En cambio, en la otra vereda es-

taban las aplicaciones orientadas exclusivamente a oscilaciones como en Planeaux y Jensen (1986) y Farr y Aris (1987), entre otros. Sin embargo, una serie de trabajos mixtos trataba de emular y explotar los desarrollos de Uppal y colaboradores (1974), como en Hamer y colegas (1981), Heinemann y Poore (1983), por citar alguno de los más destacados.

En el terreno de los matemáticos se estaban dando los últimos retoques a teorías poderosas para analizar las estructuras locales de bifurcación tanto estáticas como dinámicas en Golubitsky y Schaeffer (1979), Golubitsky y Keyfitz (1980), Golubitsky y Langford (1981), Golubitsky y Schaeffer (1985), Golubitsky y colegas (1988), para citar a nuestro juicio las más importantes contribuciones. Especialmente en Golubitsky y Schaeffer (1985) la teoría desarrollada es tan general que es independiente de la clasificación de la bifurcación, es decir no se hace distinción si la bifurcación es estática o dinámica sino que se capturan todos los diagramas locales en cercanías de la singularidad.

En las secciones sucesivas mostraremos como pueden calcularse ciertas condiciones de definición para bifurcaciones estáticas y dinámicas utilizando la propuesta en el dominio frecuencia. En especial, continuaremos los puntos de bifurcaciones detectados usando la formulación clásica de un sólo parámetro para extenderla luego a un segundo parámetro que llamaremos auxiliar. Otros programas incluyen esta importante opción, principalmente el código AUTO de Doedel (1986). Sin embargo, nuestra formulación incluye el cálculo del coeficiente de curvatura adquiriendo mayor flexibilidad y generalidad en los resultados en cuanto a técnica de continuación se refiere. Debe notarse que los cálculos se harán todos en la condición de bifurcación, esto es cuando el lugar geométrico característico responsable de la bifurcación pasa por el punto crítico $(-1+i0)$.

3.2. BIFURCACIONES ESTATICAS Y DINAMICAS: RESULTADOS PRELIMINARES

Supongamos que al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias representado por

$$\dot{x} = A x + Bg(Cx; \mu), \quad (3.1)$$

donde A es una matriz $n \times n$, B es $n \times r$, C es $m \times n$ y $g(\cdot)$ es una función no lineal $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r$, $g(\cdot)$ es C^k ($k \geq 4$) en $x \in \mathbb{R}^n$ y $\mu \in \mathbb{R}$, se lo transforma en un sistema de bloques realimentados equivalente. La metodología ya fue presentada en el capítulo anterior, por lo tanto omitiremos los detalles y usaremos el resultado final. Así, realizando la linealización alrededor del estado de equilibrio $\hat{e}(\mu)$, el sistema equivalente queda como el presentado en la Figura 2.4.b que, por comodidad para el lector, repetiremos aquí,

$$G(s; \mu) = C (sI - A)^{-1} B, \quad (3.2.a)$$

$$J(\mu) = (Df)|_{\hat{e}}. \quad (3.2.b)$$

Los autovalores de $G(s; \mu)J(\mu)$ pueden utilizarse para estudiar la estabilidad del estado de equilibrio usando el Criterio de estabilidad generalizado de Nyquist. Sin embargo, debemos tener en cuenta que el sistema general es no lineal y por lo tanto los lugares geométricos o autovalores de $G(s; \mu)J(\mu)$ variando sobre el clásico contorno de Nyquist, darán una idea sobre la dinámica local del estado de equilibrio, en especial sobre su estabilidad. Sin embargo, en este capítulo, estaremos interesados en las condiciones que deben cumplirse para que el estado de equilibrio pierda o gane estabilidad cuando uno o dos polos del sistema realimentado de lazo cerrado cruzan el eje imaginario en una u otra dirección. Esta condición es equivalente a que uno o dos autovalores de las ecuaciones linealizadas en el dominio tiempo crucen el eje imaginario. En otras palabras, en principio, buscaremos una formulación que permita caracterizar en forma sencilla el cruce de un autovalor real por el eje imaginario (condición de bifurcación estática) o el cruce de un par simple de autovalores complejos conjugados (condición de bifurcación dinámica o de Hopf).

Sabemos que la función algebraica $P(\lambda, s)$, formalmente anunciada en el Teorema 2 del capítulo anterior, puede parametrizarse en μ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P(\lambda, s; \mu) &= \det |\lambda I - G(s, \mu)J(\mu)| = \\ &= \lambda^t + a_{t-1}(s; \mu)\lambda^{t-1} + \dots + a_1(s; \mu)\lambda + a_0(s; \mu) = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $a_i(.)$ son funciones racionales en s parametrizadas en μ , y $t=\min(m,r)$. Para evitar cruces múltiples de autovalores en el dominio tiempo o cruces múltiples de polos de lazo cerrado en el dominio frecuencia, supondremos

$$(\partial P/\partial \lambda)|_{\lambda_0, s_i} \neq 0, \quad (3.4.a)$$

$$(\partial P/\partial s)|_{\lambda_i, s_0} \neq 0, \quad (3.4.b)$$

en un primer análisis. Los puntos (λ_0, s_i) que satisfacen $P(\lambda_0, s_i) = \partial P/\partial \lambda(\lambda_0, s_i) = 0$ corresponden a raíces múltiples en λ , mientras que los puntos (λ_i, s_0) que satisfacen $P(\lambda_i, s_0) = \partial P/\partial s(\lambda_i, s_0) = 0$ corresponden a raíces múltiples en s .

En la teoría de sistemas realimentados el punto crítico es $(-1+i0)$, luego para las condiciones de bifurcaciones simples, es decir estática o dinámica, exigiremos $\lambda=-1$ y que s varíe siguiendo el clásico contorno de Nyquist. En fórmulas matemáticas estas condiciones pueden notarse en dos grupos que denominaremos condiciones de definición y condiciones de no-degeneración de la singularidad.

Para la condición de definición de bifurcación simple tendremos

$$P(-1, iw_0, \mu) = 0 \quad (3.5)$$

mientras que las condiciones de no-degeneración son

$$\partial P/\partial \lambda(-1, iw_0, \mu) \neq 0, \quad (3.6.a)$$

$$\partial P/\partial s(-1, iw_0, \mu) \neq 0. \quad (3.6.b)$$

En la presentación anterior hemos supuesto que no existen polos de lazo abierto exactamente en el eje imaginario, es decir los denominadores de $a_i(.)$ no se anulan para valores de $s=iw$.

Separaremos la condición de definición de bifurcación simple en el dominio frecuencia en parte real e imaginaria

$$F_1(w, \mu) = \operatorname{Re}[P(-1, iw, \mu)] = -1^t + \sum_{k=1}^{t-1} (-1)^k \operatorname{Re}[a_k(iw, \mu)] = 0 \quad (3.7.a)$$

$$F_2(w, \mu) = \operatorname{Im}[P(-1, iw, \mu)] = \sum_{k=1}^{t-1} (-1)^k \operatorname{Im}[a_k(iw, \mu)] = 0. \quad (3.7.b)$$

Escribamos a las funciones racionales $a_k(s; \mu)$ de la siguiente manera

$$a_k(s; \mu) = \frac{\sum_{j=0}^{pk} \beta_{pk-j, k} s^{pk-j}}{\sum_{l=0}^{qk} \alpha_{qk-l, k} s^{qk-l}}, \quad (3.8)$$

donde $\beta_{i_1, k}$ y $\alpha_{i_2, k}$ son funciones reales de los parámetros del sistema, especialmente de μ , $k=0, 1, \dots, t-1$; $i_1=0, 1, \dots, pk$; $i_2=0, 1, \dots, qk$. Nótese que si se hubieran permitido retardos en la matriz $G(s; \mu)$ podrían aparecer coeficientes complejos en ambos polinomios de (3.8) cuando s recorre el contorno de Nyquist.

Proposición 1

Supongamos que se satisfacen las condiciones de no-degeneración (3.6.a) y (3.6.b) para $w_0=0$. Diremos que la condición de definición de bifurcación estática es únicamente $F_1(0, \mu)=0$, pues $F_2(0, \mu) \equiv 0$.

Prueba

En forma general podríamos considerar el polinomio $P(\lambda, s; \mu)=0$ dado en (3.3) cuando $\lambda=-1$ es una raíz simple y $s=0$. Utilizando estas dos condiciones en la ecuación (3.3) y la ecuación (3.8) es fácil verificar el siguiente resultado

$$(-1)^t + (-1)^{t-1} \frac{\beta_{0, t-1}}{\alpha_{0, t-1}} + (-1)^{t-2} \frac{\beta_{0, t-2}}{\alpha_{0, t-2}} + \dots + \frac{\beta_{0, 0}}{\alpha_{0, 0}} = 0. \quad (3.9)$$

Nótese que la expresión (3.9) es real y es igual a $F_1(0, \mu)=0$. Luego, para el caso de bifurcación estática $F_2(0, \mu)$ debe ser idénticamente cero. Una prueba más detallada, se puede dar por un cálculo directo tal como la pre-

sentada por Moiola y colegas (1990a).

Proposición 2

Las condiciones de definición para un autovalor doble en cero en el dominio tiempo pueden trasladarse a satisfacer las siguientes expresiones en el dominio frecuencia

$$F_1(0, \mu) = 0, \quad (3.10.a)$$

$$\partial F_2 / \partial w(0, \mu) = 0. \quad (3.10.b)$$

Para la prueba de esta proposición puede consultarse también la anterior referencia. Nótese que en esta última proposición se ha hecho uso de una de las condiciones de no-degeneración expresada por la ecuación (3.6.b) que se refiere a la multiplicidad en s , o más específicamente hablando a la multiplicidad en w .

Es claro entonces notar que las ecuaciones (3.7) poseen la información para detectar bifurcaciones estáticas y dinámicas. Para las primeras basta considerar $F_1(0, \mu) = 0$, mientras que las segundas vienen determinadas por el conjunto $F_1(w_0, \mu) = F_2(w_0, \mu) = 0$ cuando $w_0 \neq 0$. Además, en numerosas ocasiones el parámetro μ corresponde a una de las componentes de un punto de equilibrio. Entonces pueden obtenerse los conjuntos de bifurcaciones que resultan de calcular las derivadas sucesivas de $F_1(0, \mu)$ con respecto a μ . Estos conjuntos nos permitirán estudiar la multiplicidad de soluciones de los estados de equilibrio. Nótese que la información íntegra de bifurcaciones estáticas está contenida en la función $F_1(0, \mu) = 0$, por lo tanto se utilizará dicha expresión como base para analizar multiplicidad de los estados de equilibrio. A los efectos de completar el material necesario para analizar el ejemplo de aplicación de la Sección 3.4 notemos que $F_1(0, \mu) = 0$ (o su expresión similar (3.9)) depende de los parámetros del sistema, donde se supone ahora que μ es una de las componentes del estado de equilibrio. Para ser rigurosos definamos más apropiadamente una función $g_1(\mu, q_1, \dots, q_p)$ tal que $F_1(0, \mu) = g_1(\mu, q_1, \dots, q_p) = 0$ donde hemos evitado la primitiva dependencia con la variable $w=0$ e incluido "p" parámetros del sistema original que pueden rescatarse sencillamente de la ecuación (3.9). Entonces, ahora μ será una varia-

ble de la función $g_1(\cdot)$ (ver Thom, 1975).

La teoría elemental de catástrofe constituye una herramienta muy útil para predecir el número máximo de soluciones que existen en las cercanías de un punto Q en el espacio de parámetros (q_1, \dots, q_p) . Esto se logra encontrando en la región permisible del sistema en estudio él o los puntos singulares de mayor orden o codimensión caracterizados por el valor entero más grande para el cual el conjunto de ecuaciones

$$g_1 = dg_1/d\mu = d^2g_1/d\mu^2 = \dots = d^k g_1/d\mu^k = 0, \quad 1 \leq k \leq p \quad (3.11)$$

$$d^{k+1}g_1/d\mu^{k+1} \neq 0$$

tiene una solución en $(\mu_0, q_{10}, \dots, q_{p0})$.

Como en nuestra formulación los valores de μ_0 que satisfacen $g_1(\mu_0, q_{10}, \dots, q_{p0})=0$ corresponden a puntos de bifurcación estática (o también conocidos como "*folds*" en la teoría de catástrofe), la siguiente singularidad será el punto cuspidal, cuyas condiciones de definición son

$$g_1 = dg_1/d\mu = 0.$$

En el capítulo siguiente se avanzará en la clasificación de estas singularidades usando la formulación en el dominio frecuencia. Para el presente capítulo nos quedan estudiar las condiciones de definición de las bifurcaciones de Hopf más simples, tarea de la que nos ocuparemos en la siguiente sección.

3.3. BIFURCACIONES DEGENERADAS DE HOPF DE CODIMENSION 1

Condiciones de Definición

El objetivo de esta sección es hallar las condiciones de definición de las bifurcaciones degeneradas de Hopf más sencillas tales como: a) La falla de la condición de transversalidad, es decir cuando en la formulación en el dominio tiempo $d(\text{Re } \lambda^*)/d\mu=0$, y b) La falla del test de estabilidad cuando una expresión complicada (llamada coeficiente de curvatura) no tiene definición de signo. Notaremos, por simplicidad, la primera de las degeneracio-

nes como H_{01} , mientras que la segunda corresponderá a la degeneración H_{10} .

Puede decirse que la primera degeneración involucra la interacción, en cercanías del valor crítico, de al menos dos puntos de bifurcaciones de Hopf, mientras que la segunda está relacionada con al menos dos ciclos límites anidados, emergentes del mismo punto de bifurcación de Hopf. El valor de codimensión, sencillamente hablando, corresponde al número de parámetros auxiliares necesarios para localizar la degeneración. En términos más generales, dicho número indica la necesidad de incluir dichos parámetros auxiliares para describir la fenomenología en cercanías de la singularidad. Aquí no se ahondarán más estos conceptos; sin embargo una exposición más refinada y rigurosa puede consultarse en Golubitsky y Schaeffer (1985).

Para obtener la fórmula equivalente en el dominio frecuencia de la falla de la condición de transversalidad en el cruce de los autovalores, analicemos primero una de las estructuras de diagramas locales que pueden obtenerse en cercanías de la degeneración. Hemos considerado a ρ como parámetro auxiliar del sistema, y por simplicidad, hemos representado sólo el lugar geométrico característico $\hat{\lambda}$ del autovalor en frecuencia que provoca el fenómeno de bifurcación. En la Figura 3.1 de los diagramas de bifurcaciones locales puede decirse que para $\rho=\rho_1$ tendremos dos puntos de bifurcaciones de Hopf mientras que para $\rho=\rho_3$ no tendremos ninguno. Sin embargo, para este último valor de ρ tendremos soluciones periódicas tal como muestra la figura antes mencionada. Notemos que existen intersecciones entre ambos lugares geométricos para todos los valores de μ indicados cuando $\rho=\rho_3$, cumpliendo las condiciones de detección de órbitas periódicas al realizar un balance armónico de segundo orden. En el capítulo 5 ampliaremos estos conceptos.

Del análisis del lugar geométrico característico, para $\rho=\rho_1$, $\hat{\lambda}$ pasa dos veces por el punto crítico $(-1+i0)$: una para $\mu=\mu_1$ y la otra para $\mu=\mu_3$, mientras que $\hat{\lambda}$ alcanza como valor "mínimo" el punto crítico $(-1+i0)$ para $\mu=\mu_5$ y $\rho=\rho_2$. Además, esta condición particular muestra el límite entre los diagramas locales para $\rho=\rho_1$ (dos puntos de bifurcaciones de Hopf) y para

$\rho = \rho_3$ (ningún punto de bifurcación de Hopf). Entonces, para $\rho = \rho_3$ y $\mu = \mu_5$ tenemos la falla de la condición de transversalidad del clásico teorema de Hopf, que como vimos está ligada a la presencia de un extremo (máximo o mínimo) del lugar geométrico característico $\hat{\lambda}$ por el punto crítico $(-1+i0)$. Una vez dada la imagen global procederemos a la prueba formal dando al mismo tiempo la formulación necesaria para calcular la condición de definición de tal degeneración.

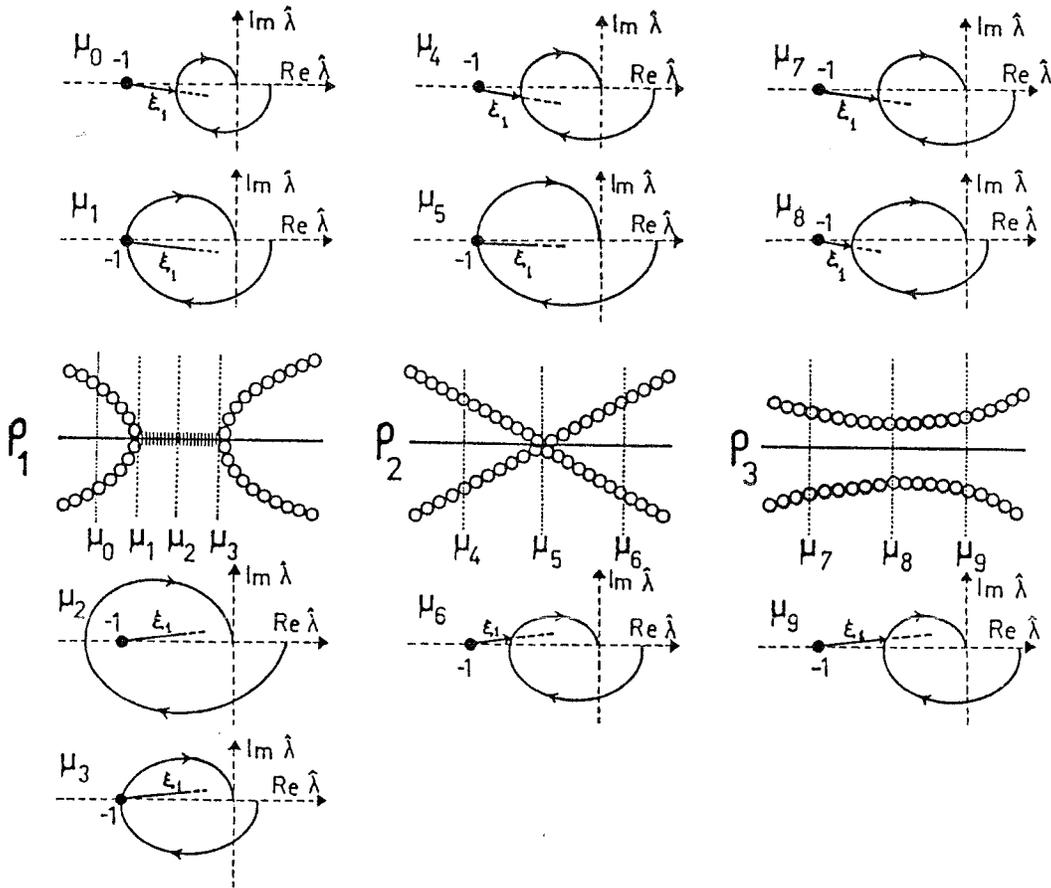


Figura 3.1: Diagramas de bifurcaciones locales para interacciones entre dos puntos de bifurcación de Hopf.

Sea el lugar geométrico característico más cercano al punto crítico $(-1+i0)$

$$\hat{\lambda} = G_1(w, \mu) + iG_2(w, \mu), \quad (3.12)$$

entonces, cuando $\lambda = -1$ en (w_0, μ_0) tendremos $G_1(w_0, \mu_0) = F_1(w_0, \mu_0) - 1$, y $G_2(w_0, \mu_0) = F_2(w_0, \mu_0)$. Así encontrar los valores extremos del lugar geométrico característico en $\lambda = -1$ es lo mismo que encontrar los valores extremos de $G_1(w, \mu)$ con la condición $G_2(w, \mu) = 0$. Para ello podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición 3

Supongamos que (w_0, μ_0) es un punto de bifurcación dinámica, es decir satisface las ecuaciones (3.7).

a) Si $G_1(w, \mu)$ tiene un extremo relativo en (w_0, μ_0) con la condición $G_2(w, \mu) = 0$, y si $\partial F_2 / \partial w(w_0, \mu_0) \neq 0$ ó $\partial F_2 / \partial \mu(w_0, \mu_0) \neq 0$, entonces $M(w_0, \mu_0) = (\partial F_1 / \partial \mu)(\partial F_2 / \partial w) - (\partial F_1 / \partial w)(\partial F_2 / \partial \mu) = 0$.

b) Si $M(w_0, \mu_0) = 0$ y $\partial F_2 / \partial w(w_0, \mu_0) \neq 0$ ó $\partial F_2 / \partial \mu(w_0, \mu_0) \neq 0$, entonces (w_0, μ_0) es un punto crítico de la función $G_1(w, \mu)$ con la condición $G_2(w, \mu) = 0$.

Prueba

a) Supongamos que $\partial F_2 / \partial w(w_0, \mu_0) = \partial G_2 / \partial w(w_0, \mu_0) \neq 0$. Entonces por el teorema de la función implícita existe un entorno $E(w_0, \mu_0)$ tal que $w = w(\mu) \forall \mu \in E(w_0, \mu_0)$ y

$$\frac{dw}{d\mu}(w_0, \mu_0) = - \frac{\partial G_2 / \partial \mu}{\partial G_2 / \partial w} \Big|_{(w_0, \mu_0)} = - \frac{\partial F_2 / \partial \mu}{\partial F_2 / \partial w} \Big|_{(w_0, \mu_0)}$$

Como la función $G_1(w, \mu)$ tiene un valor extremo en (w_0, μ_0) y $w = w(\mu)$ en $E(w_0, \mu_0)$ podemos definir $H(\mu) = G_1(w(\mu), \mu) \forall \mu \in E(w_0, \mu_0)$ y por lo tanto $(dH/d\mu)(w_0, \mu_0) = 0$:

$$(dH/d\mu)(w_0, \mu_0) = [\partial G_1 / \partial \mu + \partial G_1 / \partial w \partial w / \partial \mu] \Big|_{(w_0, \mu_0)} = \frac{1}{\partial F_2 / \partial w} [\partial F_1 / \partial \mu.$$

$$\frac{\partial F_2 / \partial w - \partial F_1 / \partial w \cdot \partial F_2 / \partial \mu}{\partial F_2} \Big|_{(w_0, \mu_0)} = \frac{1}{\partial w} M \Big|_{(w_0, \mu_0)} = 0,$$

entonces debe verificarse $M(w_0, \mu_0) = 0$, como queríamos demostrar. ■

Existe una prueba análoga para $\partial F_2 / \partial \mu(w_0, \mu_0) \neq 0$.

La expresión M fue presentada por primera vez en Moiola y colegas (1990b) como condición a verificar para la continuación de las curvas de bifurcaciones estáticas y dinámicas. A continuación enunciaremos el resultado más importante de esta sección para completar la falla de la transversalidad de cruce de los autovalores.

Proposición 4

Supongamos que $\partial F_2 / \partial w(w_0, \mu_0) \neq 0$, $M(w_0, \mu_0) = 0$, $w_0 \neq 0$ y sea $H(\mu)$, $\mu \in E(w_0, \mu_0)$ la función y el entorno encontrados anteriormente en la prueba de la Proposición 3.

a) Si $d^2 H / d\mu^2(\mu_0) \neq 0$, entonces falla la condición de transversalidad del clásico teorema de Hopf.

b) Si $d^2 H / d\mu^2(\mu_0) = 0$ y el signo de $[d^2 H / d\mu^2(\mu_1) d^2 H / d\mu^2(\mu_2)] = 1$ para algún valor de $\mu_1 < \mu_0 < \mu_2$, entonces falla la condición de transversalidad del teorema de Hopf.

c) Si $d^2 H / d\mu^2(\mu_0) = 0$ y el signo de $[d^2 H / d\mu^2(\mu_1) d^2 H / d\mu^2(\mu_2)] = -1$ para algún valor de $\mu_1 < \mu_0 < \mu_2$, entonces la condición de transversalidad diremos que se degenera.

Prueba

Las partes a) y b) se prueban inmediatamente de la parte b) de la proposición 3, pues en ambos casos éstas son condiciones suficientes para que (w_0, μ_0) sea un valor extremo de $G_1(w, \mu)$ con la condición $G_2(w, \mu) = 0$. Para la parte c) diremos que si esta condición se satisface, esto significa que $H(\mu)$ tiene un punto de inflexión en μ_0 , es decir dicho punto es la conjunción de un valor máximo y otro mínimo. Por lo tanto $G_1(w, \mu)$ con la condición $G_2(w, \mu) = 0$ no tiene un valor extremo en (w_0, μ_0) . ■

Las condiciones anteriores a), b) y c) pueden fácilmente verificarse suponiendo un único extremo, dos extremos (máximo y mínimo) y tres extremos (mínimo, máximo y mínimo, por ejemplo) y representando las derivadas prime-

ra y segunda para cada caso. Para el caso de un extremo es inmediato pues directamente es un máximo o mínimo. Luego, para el caso de los dos extremos se supondrá que ambos se juntan lográndose así, en el límite, un punto de inflexión (caso c). Finalmente, para el caso de tres extremos, supondremos que éstos se juntan en uno sólo en el límite, satisfaciendo la condición b) expresada anteriormente. Es fácil de verificar que dicho punto corresponderá a un máximo o mínimo. En este caso, y ajustándonos a la elección anterior, será un mínimo.

Antes de pasar a la falla del coeficiente de curvatura digamos que la condición de definición de la falla de la transversalidad de los autovalores en el dominio frecuencia viene dada por

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial \mu} \frac{\partial F_2}{\partial \omega} - \frac{\partial F_1}{\partial \omega} \frac{\partial F_2}{\partial \mu} \right|_{(\omega_0, \mu_0)} = 0,$$

mientras que la condición de no-degeneración es

$$\left. \frac{d^2 H}{d\mu^2} \right|_{(\omega_0, \mu_0)} \neq 0.$$

Allwright (1977) demostró que el coeficiente de curvatura $\sigma_1 = -\text{Re}[u^T G(i\omega_0) p_1 / \eta]$ (donde $\eta = u^T G'(i\omega_0) J_1^* G'(i\omega_0) = dG/ds(i\omega_0)$) se reducía a la fórmula de Poore (1976) para el caso de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Luego si $\sigma_1 = 0$, no existía definición de signo y no podía determinarse para qué valores de μ tendríamos ciclos límites. En otras palabras la forma parabólica típica sería más *plana* que para el caso no degenerado y se debería realizar una aproximación de mayor orden para determinar si la bifurcación sería supercrítica o subcrítica.

Obtengamos una imagen más clara de la situación que efectivamente ocurre con el método gráfico. Cuando se enunció el teorema de bifurcación de Hopf en el dominio frecuencia en el capítulo 2, uno de los postulados requería que la intersección entre el lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(i\omega)$ y el lugar geométrico de la amplitud, definido por $L_1(\omega, \theta) = -1 + \xi_1(\omega)\theta^2$ fuera transversal. Matemáticamente esto puede definirse de la siguiente manera

$$\det \begin{vmatrix} \operatorname{Re}[\xi_1(w)] & \operatorname{Im}[\xi_1(w)] \\ \operatorname{Re}[d\hat{\lambda}/dw] & \operatorname{Im}[d\hat{\lambda}/dw] \end{vmatrix} \neq 0, \quad (3.14)$$

donde $d\hat{\lambda}/dw$ se calcula en \hat{w} . En otras palabras se trata de que ambos vectores no sean colineales. Recordemos que de anularse dicho determinante estaríamos en presencia, ante pequeñas perturbaciones, de dos intersecciones, de una única intersección o de ninguna, como se mencionó en el Capítulo 2 en su última sección. El propósito de la siguiente proposición es relacionar la expresión (3.14) con la fórmula del coeficiente de curvatura σ_1 dada por Allwright (1977). Este resultado fue tímidamente apuntado en Mees y Chua (1979), pero no fue demostrado formalmente. Aquí daremos, en la siguiente proposición, la prueba rigurosa.

Proposición 5

Si el vector $\xi_1(w_r)$ es tangente en el punto crítico $(-1+i0)$ al lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(iw)$, entonces el coeficiente de curvatura es cero.

Prueba

Para probar la proposición anterior necesitamos primero calcular la expresión de $(d\hat{\lambda}/ds)$. Sea u^T el autovector izquierdo de $G(s)J$, correspondiente al autovalor $\hat{\lambda}(s)$,

$$u^T G(s) J = \hat{\lambda} u^T.$$

Derivando ambos miembros con respecto a "s" y notando por simplicidad $G'=dG/ds$, tendremos

$$u'^T G J + u^T G' J = \hat{\lambda}' u'^T + \hat{\lambda} u'^T. \quad (3.15)$$

Multiplicando ambos miembros por el autovector derecho v de la matriz $G(s)J$ correspondiente al mismo autovalor $\hat{\lambda}$ y normalizando ambos autovectores de tal modo que $u^T v=1$, tendremos

$$u'^T G J v + u^T G' J v = \hat{\lambda}' u'^T v + \hat{\lambda}' u'^T v, \quad (3.16)$$

de donde es fácil deducir usando $G(s) J v = \hat{\lambda} v$ que

$$u^T G' J v = \hat{\lambda}'. \quad (3.17)$$

Usando la hipótesis de la proposición vemos que debe cumplirse

$$Re[\xi_1(w_r)] Im[d\hat{\lambda}/dw(w_r)] - Im[\xi_1(w_r) Re[d\hat{\lambda}/dw(w_r)]] = 0. \quad (3.18)$$

Notemos que para $s=iw$, $d\hat{\lambda}/ds=d\hat{\lambda}/d(iw)=-i d\hat{\lambda}/dw$. Supongamos que $d\hat{\lambda}/dw=c+id$, entonces $d\hat{\lambda}/ds=d-ic$, y de la expresión (3.18) tendremos, considerando $\xi_1(w_r)=a+ib$,

$$a d - c b = 0 \Rightarrow ad = cb. \quad (3.19)$$

Por otra parte la fórmula del coeficiente de curvatura es

$$\sigma_1 = - \frac{Re[u^T G(iw) p_1]}{u^T G' J v} = -Re[\xi_1(w_r)/\hat{\lambda}']. \quad (3.20)$$

Reemplazando $\xi_1(w_r)=a+ib$, y $\hat{\lambda}'=d\hat{\lambda}/ds=d-ic$, podemos verificar el siguiente resultado

$$\sigma_1 = - \frac{a + ib}{d - ic} = - \left[\frac{ad - cb}{d^2 + c^2} \right]. \quad (3.21)$$

Usando entonces la condición (3.19) obtenemos que $\sigma_1=0$ cuando el vector $\xi_1(w_r)$ es tangente en el punto crítico $(-1+i0)$ al lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(iw)$. En la sección siguiente mostraremos dos ejemplos donde se utilizan varias de las fórmulas aquí presentadas.

3.4. EJEMPLOS DE APLICACION

a) Reactor tanque agitado continuo con reacciones consecutivas

Consideremos el modelo de la ecuación diferencial adimensional para un reactor perfectamente mezclado con una serpentina de enfriamiento en el cual ocurren dos reacciones consecutivas, irreversibles de primer orden $A \rightarrow B \rightarrow C$, tal como el presentado en Halbe y Poore (1981)

$$\dot{x}_1 = -x_1 + D(1 - x_1)\exp(x_3), \quad (3.22.a)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + D(1 - x_1)\exp(x_3) - DSx_2 \exp(x_3), \quad (3.22.b)$$

$$\dot{x}_3 = -(1+\beta)x_3 + BD(1 - x_1)\exp(x_3) + DBS\alpha x_2 \exp(x_3), \quad (3.22.c)$$

donde D es el parámetro de bifurcación y B, S, α y β son parámetros del sistema. Tal conjunto de ecuaciones puede llevarse a la forma indicada en (2.1) tomando la siguiente elección de matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\beta \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ B & B\alpha \end{bmatrix}, \quad C = I, \quad y$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} D(1 - x_1)\exp(x_3) \\ DSx_2 \exp(x_3) \end{bmatrix}.$$

La función transferencia resulta entonces aplicando la ecuación (2.2.a) en

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{-1}{s+1} \\ \frac{B}{s+1+\beta} & \frac{B\alpha}{s+1+\beta} \end{bmatrix}.$$

Notando que $y=-e$ en la estructura propuesta en el Capítulo 2, podemos hallar los estados de equilibrio usando la ecuación (2.3)

$$D = -\hat{e}_1 / (1 + \hat{e}_1) \exp(\hat{e}_3), \quad (3.23.a)$$

$$\hat{e}_2 = \hat{e}_1 (1 + \hat{e}_1) / [1 + (1-S)\hat{e}_1] \quad (3.23.b)$$

$$\hat{e}_3 = B(1+\alpha)\hat{e}_1 / (1+\beta) - B\alpha\hat{e}_1 (1 + \hat{e}_1) / [(1+\beta)(1 + \hat{e}_1 - S\hat{e}_1)]. \quad (3.23.c)$$

Aunque el parámetro de bifurcación elegido es D, es más conveniente

tomar como parámetro a \hat{e}_1 (componente primera del estado de equilibrio) para analizar los conjuntos de bifurcaciones estáticas y la multiplicidad de estado de equilibrio. Las conocidas curvas con forma de S pueden trazarse asignando valores a \hat{e}_1 en el intervalo $(-1,0)$ y reemplazando en las expresiones (3.23) para obtener los valores de D , \hat{e}_2 y \hat{e}_3 .

La función no lineal $f(e,D)$ es localmente reemplazada por la matriz de Jacobiano $J = \partial f / \partial e|_{\hat{e}}$, cuya expresión es

$$J = \begin{bmatrix} D \exp(-\hat{e}_3) & 0 & -D(1+\hat{e}_1) \exp(-\hat{e}_3) \\ 0 & -SD \exp(-\hat{e}_3) & SD\hat{e}_2 \exp(-\hat{e}_3) \end{bmatrix},$$

o en forma compacta

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & J_{13} \\ 0 & J_{22} & J_{23} \end{bmatrix}.$$

Calculando los autovalores de $G(s)J$ obtenemos

$$\lambda_1 = 0, \quad \forall s \quad (3.24.a)$$

$$\lambda^2 + A_1\lambda + A_2 = 0, \quad (3.24.b)$$

donde

$$A_1 = (J_{22} - J_{11})/(s+1) - B(J_{13} + \alpha J_{23})/(s+1+\beta),$$

$$A_2 = B[\alpha J_{23} J_{11} - J_{22} J_{13} (1+\alpha)] / [(s+1)(s+1+\beta)] - J_{11} J_{22} / (s+1)^2.$$

Como ha sido notado por Halbe y Poore (1981) y Jorgensen y colaboradores (1984), existe al menos un autovalor del sistema linealizado en el dominio tiempo en el semiplano izquierdo para un amplio rango del conjunto de parámetros. Farr (1986) demostró que en este reactor no tiene lugar la singularidad de un autovalor triple en el origen, como así tampoco un par imaginario puro y un autovalor en cero. Entonces, además de las singularidades producto de la multiplicidad de estado de equilibrio, tendremos únicamente las siguientes :

a) Un autovalor real *simple* en el origen.

- b) Dos autovalores reales en el origen o un autovalor *doble* en cero.
- c) Un par *simple* de autovalores imaginarios puros.

Nótese que el sistema linealizado en el dominio tiempo tiene tres autovalores, mientras que sólo dos funciones características aparecen en el dominio frecuencia. En otras palabras: el polinomio característico para estudiar la estabilidad del estado de equilibrio es de orden tres en el dominio tiempo, mientras que en el dominio frecuencia es de orden dos. Sin embargo, también debe notarse que el polinomio resultante en el dominio tiempo tiene coeficientes reales mientras que en el dominio frecuencia tiene coeficientes complejos.

Estudiando el comportamiento de los lugares geométricos característicos en cercanías al punto crítico $(-1+j0)$ podemos distinguir los siguientes comportamientos detectados en los diagramas pequeños de la Figura 3.2: (1) Puntos de bifurcaciones estáticas, como en los casos b y e; (2) Puntos de bifurcaciones de Hopf, como en los casos g e i, y (3) Ningún punto de bifurcación, como en los casos a, c, d, f, h y j. La estabilidad de los puntos de equilibrio y de los ciclos límites está agregada en el gráfico para ilustrar mejor la situación. Los puntos límites en la curva de equilibrio corresponden a bifurcaciones estáticas y provocan el cambio en la multiplicidad de la solución de equilibrio para algunos valores de D. La amplitud, frecuencia y estabilidad de los ciclos se hallaron usando las técnicas descritas en el Capítulo 2. Es bueno aclarar, sin embargo, que esta gráfica está distorsionada para darle mayor claridad conceptual a la dinámica del sistema.

El objetivo es continuar, permitiendo la variación en un segundo parámetro del sistema en estudio, los puntos correspondientes a bifurcaciones estáticas y dinámicas tales como e y g (por ejemplo), respectivamente, usando la información dada por (3.24.b). Así, tomando $\lambda = -1$ y $s = iw$ en (3.24.b), y separando en partes real (*Re*) e imaginaria (*Im*) el resultado es

$$F_1(w, \hat{e}_1) = 1 - a/p_1 + b(1+\beta)/p_2 + c(1+\beta-w^2)/p_3 + d(1-w^2)/p_4 = 0, \quad (3.25.a)$$

$$F_2(w, \hat{e}_1) = aw/p_1 - bw/p_2 - c(2+\beta)w/p_3 - 2dw/p_4 = 0, \quad (3.25.b)$$

donde

$$a = \hat{e}_1(s+1)/(1+\hat{e}_1), \quad b = B\hat{e}_1[1+(1-s-\alpha)\hat{e}_1]/[1+(1-s)\hat{e}_1],$$

$$c = -B\hat{e}_1^2[1+\alpha+(1-s-\alpha)\hat{e}_1]/\{[1+(1-s)\hat{e}_1](1+e_1)\}, \quad d = S\hat{e}_1^2/(1+\hat{e}_1)^2,$$

$$p_1=1+w^2, \quad p_2=(1+\beta)^2+w^2, \quad p_3=(1+\beta-w^2)^2+[(2+\beta)w]^2, \quad p_4=(1-w^2)^2+4w^2.$$

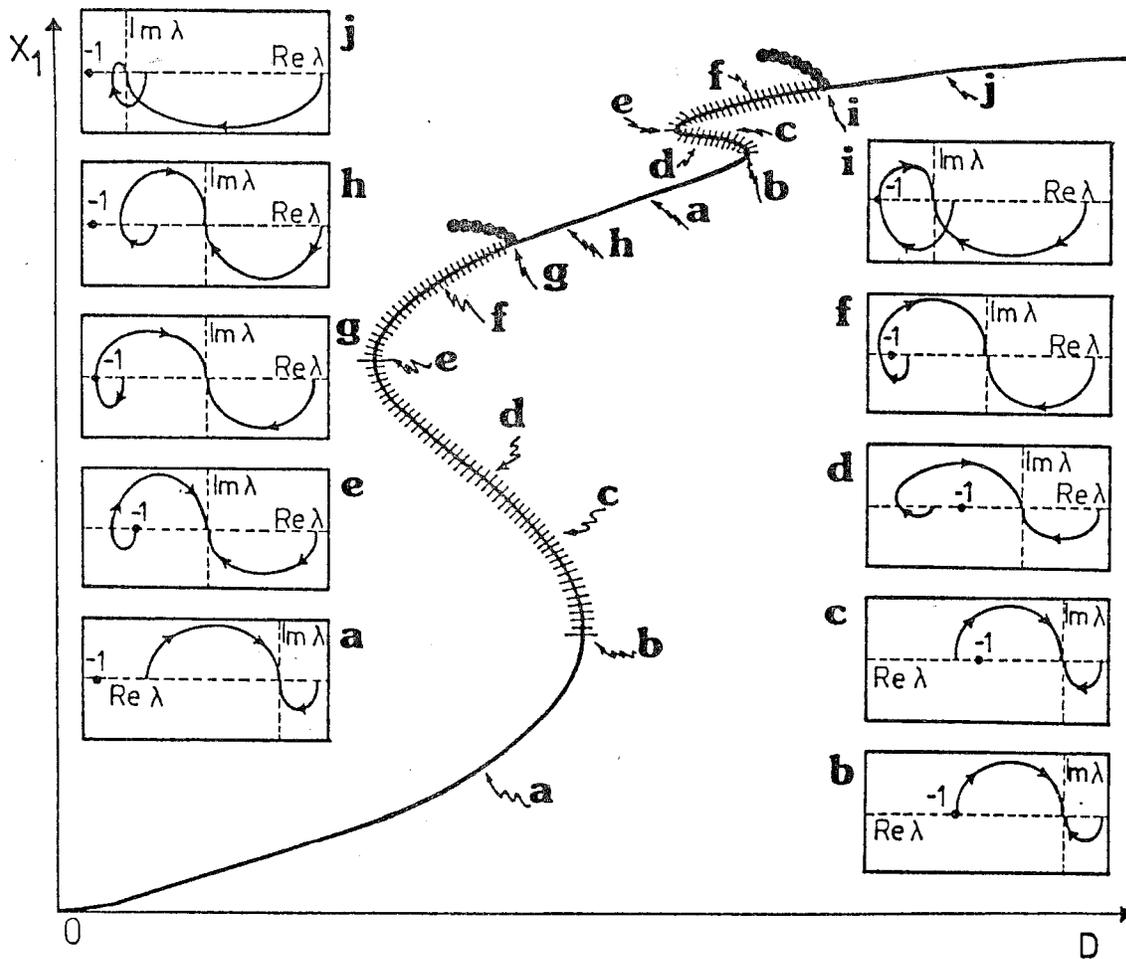


Figura 3.2: Diagrama de bifurcación local y secuencia de lugares geométricos característicos asociados.

Cuando $w=0$, podemos verificar por inspección que (3.25.b) es idénticamente cero. Entonces, la condición de bifurcación estática se obtiene satisfaciendo la ecuación

$$1 - a + b/(1+\beta) + c/(1+\beta) + d = 0. \quad (3.26)$$

Esta expresión es similar a la presentada por Halbe y Poore (1981) utilizando \hat{e}_1 en lugar de \hat{x}_1 . En cambio, deben usarse ambas expresiones para bifurcación dinámica, es decir (3.25) para $w_0 \neq 0$.

Hemos explicado en el capítulo anterior como se hace el estudio de la estabilidad de los ciclos límites cuando varía el parámetro de bifurcación. En esta sección detectaremos los puntos de bifurcaciones estáticas y dinámicas y los continuaremos sobre la variedad de estados de equilibrio. Además, a los puntos de bifurcación de Hopf les indicaremos la estabilidad de los ciclos emergentes considerando el signo del coeficiente de curvatura. Todas las gráficas están distorsionadas con el fin de mostrar los resultados con claridad.

Los resultados principales se muestran en los diagramas cualitativos de las Figuras 3.3 a 3.7. En las Tablas 3.1 y 3.2 se presentan los casos estudiados junto con la información de los valores de los parámetros. Se ha trabajado con \hat{e}_1 como parámetro *artificial* pues es inmediato luego obtener el valor de D usando (3.23).

Para la construcción de las curvas de bifurcación se necesita una estimación inicial de \hat{e}_1 y w cercana a un punto de bifurcación. Luego, se resuelve la ecuación (3.25) usando una rutina standard para encontrar los ceros del sistema de ecuaciones no lineales. Entonces, se varía el parámetro auxiliar elegido (por ejemplo B , S , α o β) y se resuelve nuevamente la ecuación (3.25), utilizando para este caso como solución inicial la solución final obtenida en la iteración anterior. Note, además, que los dos tipos de bifurcaciones (estáticas y dinámicas) se obtienen con la misma fórmula. Así, el dominio frecuencia se convierte en una forma natural para

T A B L A 3.1				
	B	S	α	β
Caso 1	8	0.04	1	1.5
Caso 2	8	0.04	1.4	1.5
Caso 3	8	0.04	1.4	2
Caso 4	12	0.01	0.6	1
Caso 5	14	0.01	0.6	1
Caso 6	9	0.01	1	2
Caso 7	18	0.01	1	2
Caso 8	18	0.01	1	1
Caso 9	8	0.01	1	1

T A B L A 3.2				
	tipo degeneración	\hat{x}_1	D	parámetro aux.
Figura 3.3	H_{10}	0.8279	0.2162	$\alpha=1.059$
	H_{01}	0.8588	0.2163	$\alpha=1.093$
	Cúspide	0.9480	0.2306	$\alpha=1.044$
Figura 3.4	H_{10}	0.6269	0.2418	$\beta=1.815$
	H_{10}	0.8102	0.3082	$\beta=1.969$
	H_{01}	0.8279	0.3091	$\beta=1.9587$
Figura 3.5	H_{10}	0.8965	0.0268	$B=12.300$
	Cúspide y punto Hopf con $w=0$	0.9885	0.03534	$B=12.349$
Figura 3.6	punto Hopf con $w=0$	0.3409	0.1147	$B=13.1804$
	Cúspide	0.5215	0.141	$B=11.637$
	H_{10}	0.551	0.2149	$B=9.3716$
	H_{10}	0.9254	0.06213	$B=15.4645$
	H_{01}	0.9409	0.0487	$B=16.229$
	Cúspide	0.9895	0.3495	$B=11.4259$
Figura 3.7	H_{10}	0.9908	1.068	$B=9.1992$
	H_{10}	0.8723	0.05309	$B=10.4672$
	punto Hopf con $w=0$	0.9077	0.02477	$B=12.10081$

considerar estos fenómenos. La mayoría de los investigadores en esta área han trabajado en el dominio tiempo y los algoritmos generalmente no incluyen ambos tipos de bifurcaciones dentro de una misma formulación (por ejemplo, consulte a Roose y Hlavacek 1985, para un tratamiento y referencias más completo).

La Figura 3.3 representa la forma de evolución de las curvas de bifurcaciones entre el caso 1 -en el cual no existe multiplicidad de la solución de equilibrio- y el caso 2 -en el que para algunos valores de D tenemos multiplicidad tres- cuando varía el parámetro auxiliar α desde 1 a 1.4. Desde el caso 1 puede verse cómo dos curvas de bifurcaciones de Hopf, una que da origen a ciclos límites estables y la otra a ciclos límites inestables, se juntan para luego desaparecer cuando α es mayor que 1.093. Es también interesante notar que la curva de Hopf inestable no cambia su estabilidad al alcanzar una bifurcación degenerada de Hopf en el punto límite. El punto de unión de ambas curvas de Hopf, se conoce como singularidad H_{01} siguiendo la notación propuesta por Planeaux y Jensen (1986), y es fácil de clasificar usando los diagramas de Golubitsky y Langford (1981) y las asignaciones de estabilidad mostradas en la Figura 3.3.

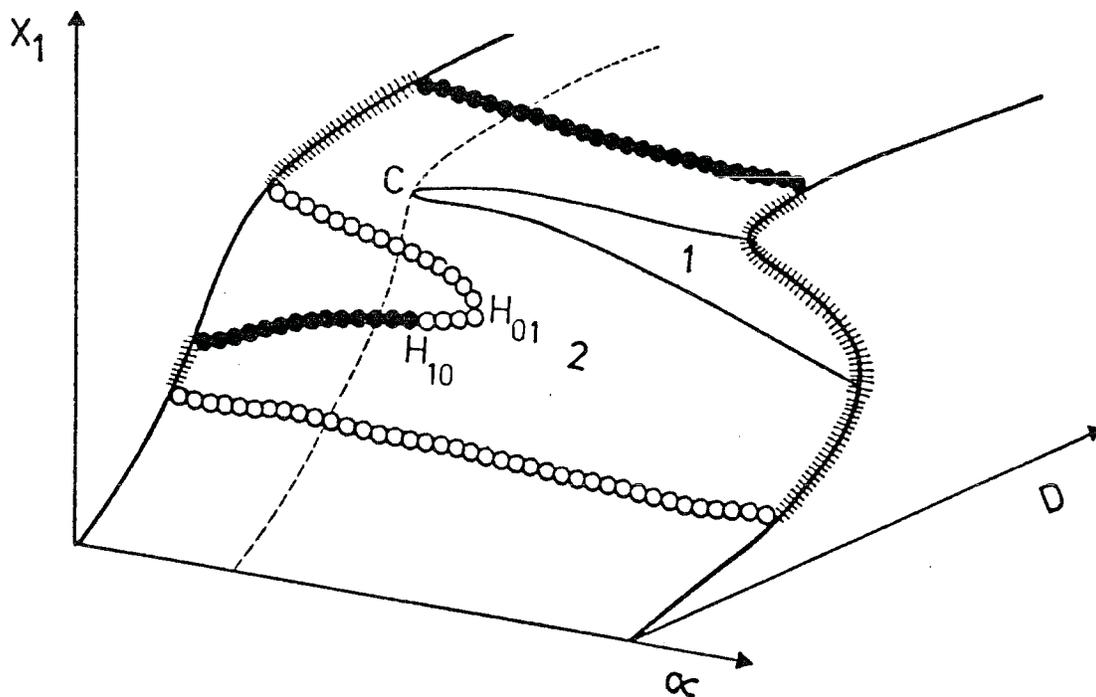


Figura 3.3: Variedad de estado estacionario y sus curvas de bifurcación. El parámetro α varía desde 1 a 1.4.

Por otro lado, el cambio de estabilidad en la curva de Hopf corresponde a una bifurcación degenerada denominada H_{10} por Planeaux y Jensen (1986). Notemos que ambas singularidades están muy cercanas, y no sería sorprendente encontrar, ante la variación de un segundo parámetro auxiliar la degeneración H_{11} , que corresponde a una singularidad con cambio en la estabilidad de la solución bifurcada en el punto crítico junto con la falla de la condición de transversalidad del clásico teorema de Hopf. En otras palabras, H_{01} corresponde a una bifurcación degenerada de Hopf donde falla la transversalidad de cruce de los autovalores, mientras que H_{10} corresponde a una bifurcación degenerada de Hopf donde el coeficiente de curvatura es cero.

Para un valor particular de α dos curvas de bifurcaciones estáticas emergen desde un punto cuspidal. Esta situación crítica marca un cambio en la forma de los diagramas de equilibrio en el plano x_1 -D y como resultado aparece multiplicidad de la solución de equilibrio. Los números sobre la variedad de equilibrio de la Figura 3.3 indican el número de vueltas alrededor del punto crítico $(-1+i0)$ por el lugar geométrico característico. Esto corresponde también al número de autovalores en el semiplano derecho en el dominio tiempo y determina áreas con la misma estabilidad local. Al atravesar las curvas de bifurcaciones estos números se modifican, agregándose (o quitándose) 1 ó 2 según sea la bifurcación estática o dinámica.

En la Figura 3.4 puede verse qué ocurre cuando comenzando desde el caso 2 y variando el parámetro β éste llega al valor 2 que corresponde al caso 3. Para β cercano a 1.96 aparecen dos bifurcaciones degeneradas como era el caso de la Figura 3.3. En el mismo diagrama incluimos en el margen derecho el lugar geométrico característico y el vector $\xi_1(w_r)$ para el caso de la bifurcación degenerada de Hopf H_{10} . Notemos que el vector $\xi_1(w_r)$ es tangente al lugar geométrico $\hat{\lambda}(i\omega)$ en el punto crítico $(-1+i0)$, por lo cual no podemos decir nada acerca de la estabilidad de la solución bifurcada realizando un balance armónico de segundo orden. Más adelante, en los capítulos sucesivos, estudiaremos estas situaciones con mayor detalle empleando una aproximación de balance armónico de orden superior.

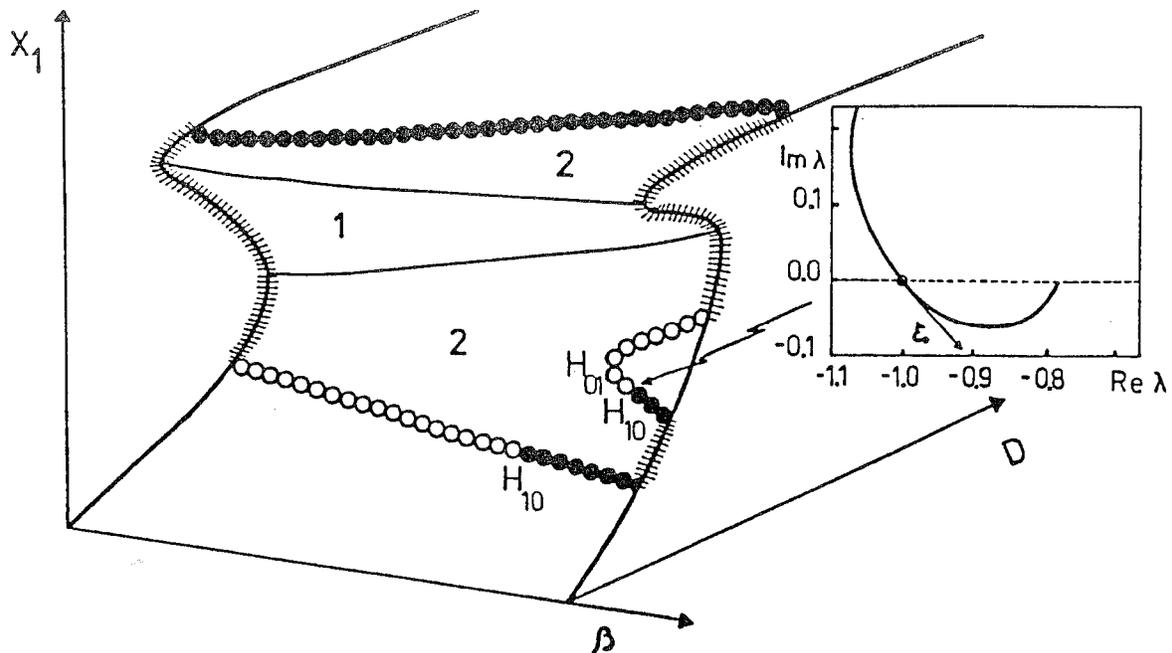


Figura 3.4: Curvas de bifurcaciones cuando el parámetro auxiliar β varía desde 1.5 a 2.

Las curvas de bifurcaciones de Hopf inferior y superior se mantienen sin variantes al continuárselas desde el caso 2 al caso 3. Sin embargo, la curva inferior tiene un cambio en la estabilidad de la solución bifurcada, producto de una singularidad H_{10} . Además, las dos curvas de bifurcaciones estáticas presentan continuidad cuando β varía sin llegar a unirse. Así entonces no existe modificación en la multiplicidad de estados de equilibrio.

En la Figura 3.5 describimos la situación que acontece cuando el parámetro B varía, comenzando desde el caso 4 y llegando al caso 5. Una de las curvas de bifurcación dinámica tiene un cambio en la estabilidad de la solución bifurcada (degeneración H_{10}) mientras que la otra curva termina en el punto de unión de dos curvas de bifurcaciones estáticas. En esta última situación, el valor del parámetro B es cercano a 12.34 y el coeficiente de curvatura es menor que cero, es decir corresponde a una bifurcación de Hopf estable, pero w disminuye y se hace cero cuando dicha curva dinámica termina en las curvas estáticas. En valores cercanos a los de esta singularidad

encontramos las características propias del fenómeno de bifurcación de Hopf junto con saltos o bien a un estado de equilibrio estable o a una órbita periódica. Sin embargo, la situación dinámica completa es más compleja, a tal punto que muchos investigadores conocen esta singularidad, que corresponde a un cero doble en el dominio tiempo, como la singularidad de Bogdanov-Takens (vease, por ejemplo, Guckenheimer y Holmes, 1985 y Guckenheimer, 1984).

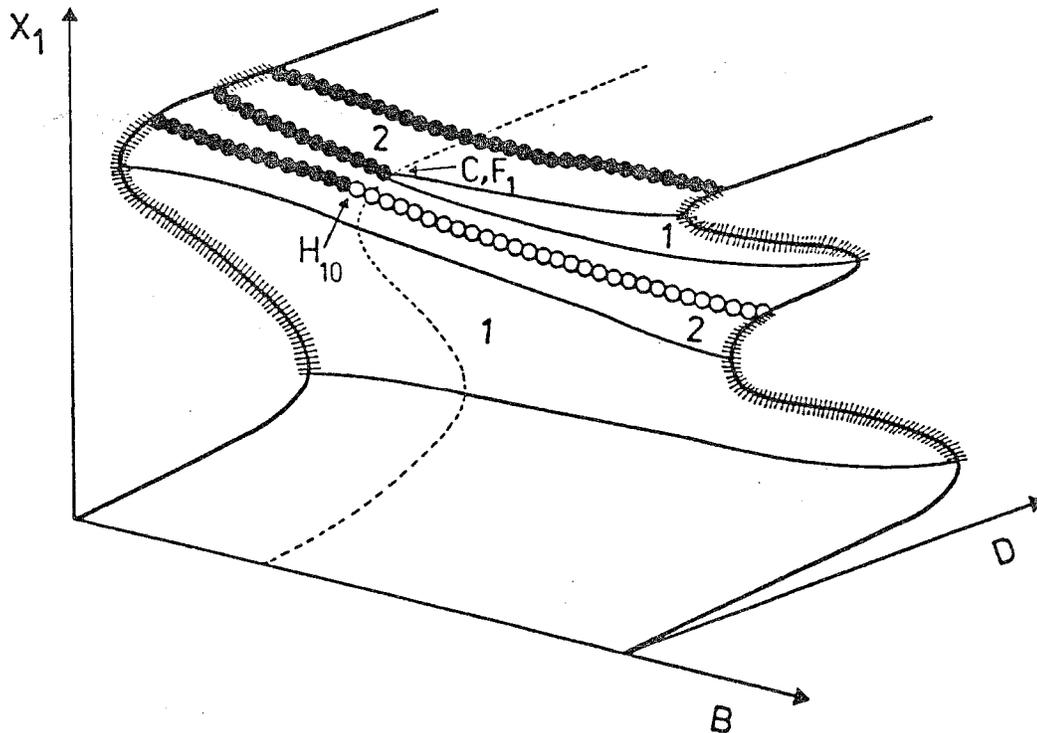


Figura 3.5: Curvas de bifurcaciones cuando el parámetro auxiliar B varía entre 12 y 14.

En el plano complejo puede notarse que la frecuencia de intersección w_r del lugar geométrico más cercano al punto crítico $(-1+i0)$, disminuye hasta hacerse cero bajo la variación de los parámetros principal y auxiliar. Esto corresponde a un par simple de autovalores complejos conjugados que degeneran en un cero doble en el sistema de las ecuaciones linealizadas

en tiempo. Esta singularidad además incluye el nacimiento de dos curvas de bifurcaciones estáticas en dicho punto. Luego la degeneración puede denominarse como cero doble en tiempo y punto cuspidal a la vez.

En la Figura 3.5 puede notarse también que para algunos valores de D y B la multiplicidad de la solución de equilibrio cambia de 3 a 5. Esto puede obtenerse fácilmente proyectando las curvas de bifurcaciones estáticas en el plano D - B y aplicando la clasificación de la teoría de catástrofe o las herramientas analíticas de la teoría de singularidades (ver, por ejemplo, Balakotaiah y Luss, 1986; Farr y Aris, 1986, entre otros).

La curva dinámica superior en la Figura 3.5 correspondiente al caso 5 es estable. Esto puede determinarse luego de aplicar el método en el dominio frecuencia. El mismo resultado hemos obtenido al continuar la curva de bifurcación dinámica estable del caso 4 cuando el parámetro auxiliar B varía. Además, Doedel y Heinemann (1983) predijeron un ciclo límite estable para nuestro caso 5 en su estudio de continuación de las ramas periódicas. Sin embargo, Halbe y Poore (1981) habían calculado que el ciclo límite emergente era inestable, aunque habían detectado por simulación un salto a una órbita periódica estable.

Realizando la continuación en la variedad de equilibrio de los puntos de bifurcación del caso 6, puede obtenerse, variando el parámetro auxiliar B , los puntos de bifurcación del caso 7 (ver Figura 3.6). Comenzando por un caso sin multiplicidad en la solución de estado de equilibrio, la forma de la variedad de equilibrio cambia drásticamente cuando el parámetro B llega al valor de 11.42. Desde este valor y hasta el valor de $B=11.64$ la multiplicidad para ciertos valores de D es 3 (tres). Para valores de B mayores que 11.64 la multiplicidad de estado de equilibrio puede ser 5 (cinco). Nuevamente, proyectando las curvas de bifurcaciones estáticas en el plano de los parámetros D - B , obtenemos la multiplicidad de la solución de equilibrio aplicando los resultados de clasificación de la teoría de catástrofe.

Más aún, otra bifurcación degenerada aparece en la parte inferior de

la Figura 3.6, donde la frecuencia de la curva dinámica, que también cambia de estabilidad para un valor de B intermedio, disminuye a cero. La curva dinámica finaliza en una curva estática para $B=13.18$. Esta situación es menos compleja que la antes vista de la Figura 3.5, donde también interviene un cambio en la multiplicidad de la solución de estados de equilibrio.

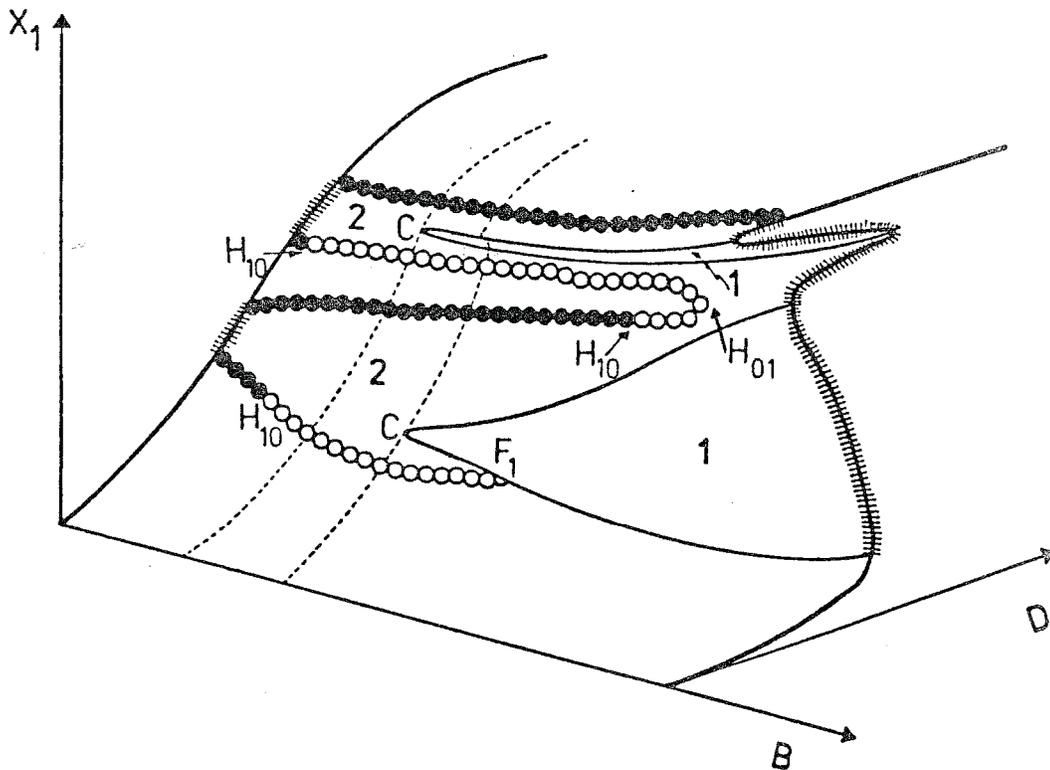


Figura 3.6: Curvas de bifurcaciones cuando el parámetro auxiliar B varía entre 9 y 18.

Las dos curvas de bifurcaciones dinámicas centrales de la Figura 3.6 se unen en un punto correspondiente a una bifurcación degenerada H_{01} . Para valores superiores de B a este valor crítico no se hallan curvas de bifurcaciones de Hopf en cercanías de esta singularidad.

Un nuevo resultado se encontró para el caso 7. El punto de bifurcación de Hopf superior no había sido detectado por Halbe y Poore (1981). Aplican-

do el método en el dominio frecuencia, hemos obtenido este punto de bifurcación dinámica así como su estabilidad. También pudo verificarse realizando la continuación de la curva de Hopf superior desde el caso 6. En la Figura 3.7 puede verse como se modifican las curvas de bifurcaciones para pasar del caso 9 al caso 8 variando el parámetro auxiliar B. En esta figura la degeneración más característica que aparece es cuando una curva de bifurcación de Hopf inestable degenera en dos curvas de bifurcaciones estáticas. Esta singularidad corresponde a un cero doble en el dominio tiempo y a un punto cuspidal como hemos visto en otra de las figuras precedentes.

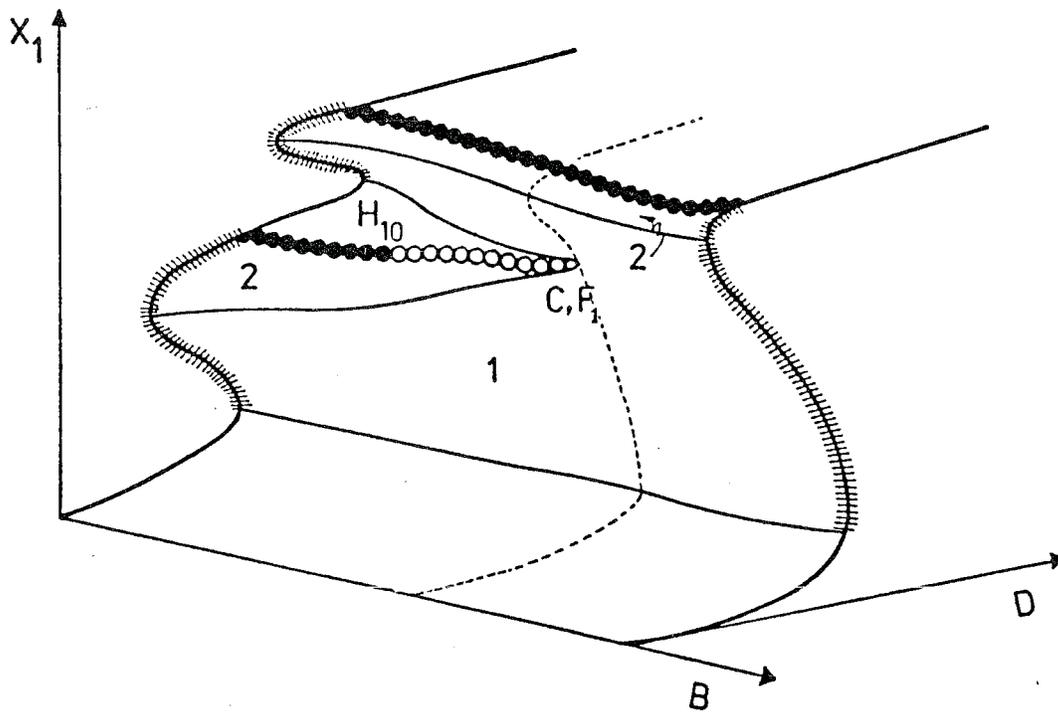


Figura 3.7: Curvas de bifurcaciones cuando el parámetro auxiliar B varía entre 8 y 18.

Para concluir con este primer estudio de este ejemplo, en la Figura 3.8 mostramos cómo de la variedad de estados de equilibrio obtenemos los conjuntos de catástrofe al proyectar en el plano de parámetros D-B. Se indican las combinaciones de pares (D,B) que conducen a unicidad de la solución de equilibrio, a tres o a cinco estados de equilibrio. Nótese que en este diagrama se han marcado las degeneraciones dinámicas H_{10} , H_{01} y F_1 .

Esta última corresponde a un par de autovalores cero en el sistema de las ecuaciones linealizadas en tiempo o a multiplicidad en $w=0$ en el dominio frecuencia, al satisfacerse la ecuación (3.10). El lugar geométrico característico típico de la singularidad F_1 , se muestra en el diagrama superior derecho. En el capítulo siguiente se continuarán estas degeneraciones agregando la variación de un segundo parámetro auxiliar. Sin embargo, antes de concluir este capítulo, veremos la continuación de curvas de bifurcaciones estáticas y dinámicas en un ejemplo aparentemente más sencillo que el tratado anteriormente. La complejidad encubierta de este segundo ejemplo la iremos describiendo a medida que lo analicemos.

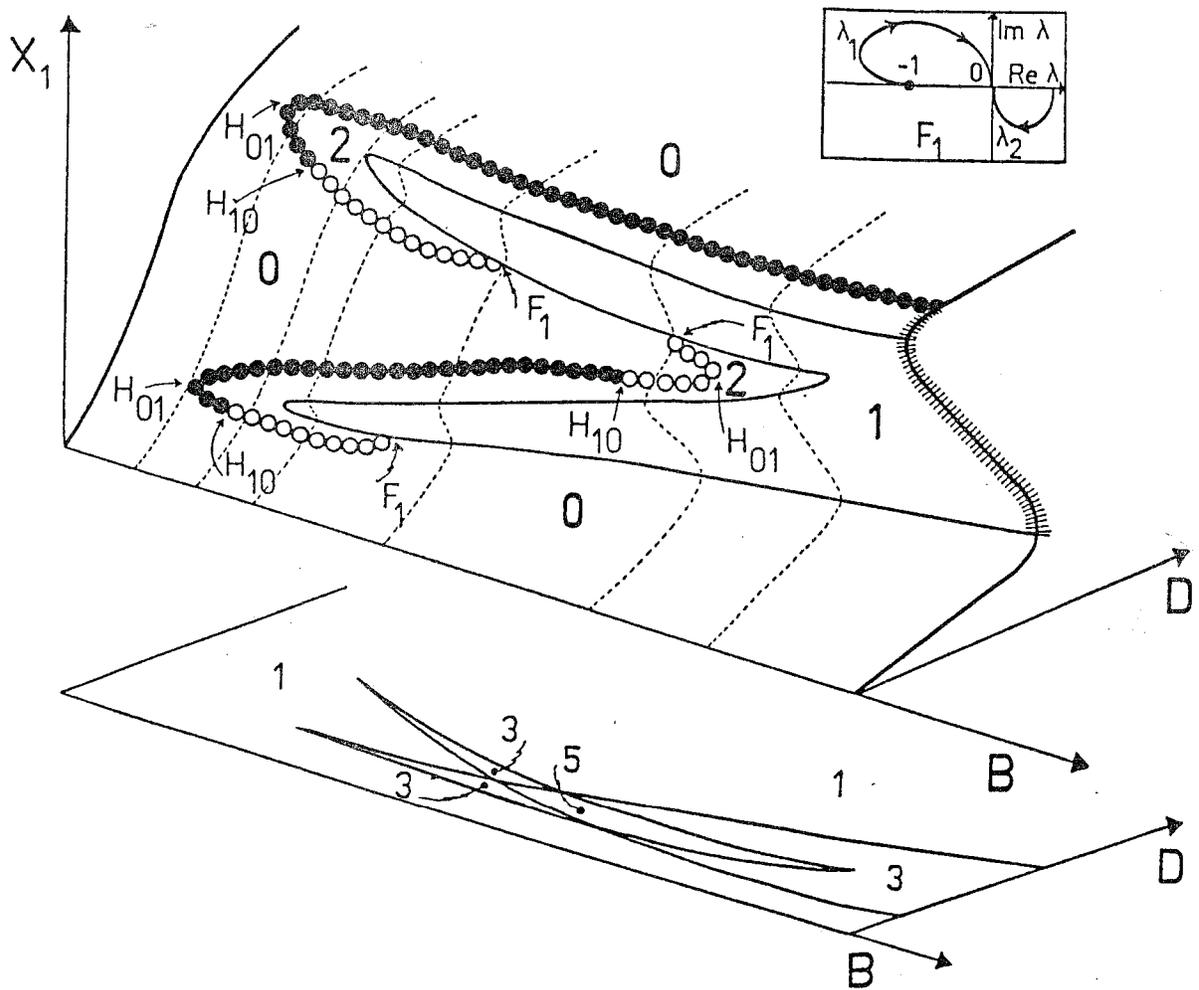


Figura 3.8: Variedad de estados de equilibrio, curvas de bifurcaciones y conjuntos de catástrofes para $S=0.01$, $\alpha=1$, $\beta=1.8$ (B varía entre 6 y 18).

b) Reactor tanque agitado continuo con capacitancia térmica

Consideremos un reactor tanque agitado continuo con una reacción simple, irreversible, exotérmica de primer orden $A \rightarrow B$ con capacitancia térmica externa como el sugerido por Planeaux y Jensen (1986)

$$\dot{x}_1 = -x_1 + D(1-x_1)\exp(x_2), \quad (3.27.a)$$

$$\dot{x}_2 = -(1+\beta+\beta\rho)x_2 + \beta\rho x_3 + DB(1-x_1)\exp(x_2), \quad (3.27.b)$$

$$\dot{x}_3 = \beta\rho(x_2-x_3)/\epsilon, \quad (3.27.c)$$

donde D es el parámetro principal de bifurcación, mientras que B , β , ρ y ϵ son otros parámetros del sistema. Las matrices A , B , C y la función no lineal $g(x)$ pueden tomarse de la siguiente manera,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\beta-\beta\rho & \beta\rho \\ 0 & \beta\rho/\epsilon & -\beta\rho/\epsilon \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$g(x) = D(1-x_1)\exp(x_2).$$

Entonces $G(s)$ viene dada según (3.2.a) como

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1/(s+1) & (s+\beta\rho/\epsilon)B/D_1 \end{bmatrix}^T,$$

donde

$$D_1 = s^2 + (1 + \beta + \beta\rho + \beta\rho/\epsilon)s + (1+\beta)\beta\rho/\epsilon.$$

Considerando $g(x) \equiv f(e)$ y $x = -e$, los puntos de equilibrio se obtienen usando (2.3),

$$D = -\hat{e}_1 / (1 + \hat{e}_1) \exp[B\hat{e}_1 / (1 + \beta)] \quad (3.28.a)$$

$$\hat{e}_2 = B\hat{e}_1 / (1 + \beta), \quad (3.28.b)$$

donde claramente puede tomarse \hat{e}_1 como parámetro principal (artificial) de bifurcación, pues dando valores a \hat{e}_1 obtenemos los correspondientes valores de D . La "matriz" de Jacobiano viene dada por

$$J = [J_1 \quad J_2] = [-\hat{e}_1 / (1 + \hat{e}_1) \quad \hat{e}_1], \quad (3.29)$$

mientras que los autovalores de la matriz de 2×2 $G(s)J$ son

$$\lambda_1 = 0 \quad \forall s, \quad (3.30.a)$$

$$\lambda_2 = -\hat{e}_1 / [(1+\hat{e}_1)(s+1)] + B\hat{e}_1(s+\beta\rho/\epsilon)/D_1. \quad (3.30.b)$$

Note que el único autovalor relevante capaz de causar fenómenos de bifurcación es el dado por (3.30.b). Además, observe que los polos de $\lambda_2(s)$ están en el semiplano izquierdo pues los valores de β , ρ y ϵ son positivos. Entonces, el número de vueltas de $\lambda_2(i\omega)$ alrededor del punto crítico $(-1+i0)$ en sentido horario nos dará el número de polos de lazo cerrado en el semiplano derecho.

Considerando la condición de bifurcación $\lambda_2 = -1$ y $s = i\omega$ podemos separar (3.30.b) en partes real e imaginaria como sigue,

$$F_1(\omega, \hat{e}_1) = 1 - \frac{\hat{e}_1}{(1+\hat{e}_1)(1+\omega^2)} + \frac{B\hat{e}_1 [(\beta\rho/\epsilon)^2(1+\beta) + \omega^2(1+\beta+\beta\rho)]}{D_1(i\omega) \bar{D}_1(i\omega)} = 0 \quad (3.31.a)$$

$$F_2(\omega, \hat{e}_1) = \frac{\hat{e}_1 \omega}{(1+\hat{e}_1)(1+\omega^2)} - \frac{B\hat{e}_1 \omega [\omega^2 + (\beta\rho)^2(1+1/\epsilon)1/\epsilon]}{D_1(i\omega) \bar{D}_1(i\omega)} = 0. \quad (3.31.b)$$

Los puntos de bifurcación estática acontecen para iguales valores de los parámetros B y β que en el ejemplo del Capítulo 2. Para un tratamiento más detallado usando la formulación en el dominio frecuencia puede consultarse Moiola y colaboradores (1990a), donde se obtuvieron analíticamente varias condiciones de bifurcaciones y sus degeneraciones. Aquí en cambio, se han preferido usar las fórmulas dadas por (3.31) en la continuación de curvas de bifurcaciones estáticas y dinámicas. Como ejemplo mostraremos la Figura 3.9 donde las curvas de bifurcaciones dinámicas llevan marcada su estabilidad. De dicha figura se desprende que las curvas de bifurcaciones dinámicas cortan a las anteriores en los puntos "a" dando lugar a una singularidad que involucra un par de autovalores imaginarios puros y un autovalor en cero. Incluimos en tal figura los resultados de estabilidad del punto de equilibrio al aplicar el Criterio de estabilidad generalizado de Nyquist. Así podemos tener 1, 2 ó 3 vueltas alrededor del punto crítico $(-1+i0)$ como

lo muestran los diagramas superiores. La imagen especular de $\lambda_2(i\omega)$ para $0 \leq \omega < \infty$ se muestra en líneas punteadas y corresponde a $\lambda_2(i\omega)$ cuando $0 \geq \omega > -\infty$. El análisis de la dinámica en la singularidad indicada por los puntos "a" puede hacerse mediante las herramientas desarrolladas en Langford (1983) o en Yu y Huseyin (1988). Note que en dichos puntos singulares el lugar geométrico característico tiene un bucle y pasa dos veces por el punto crítico $(-1+i0)$.

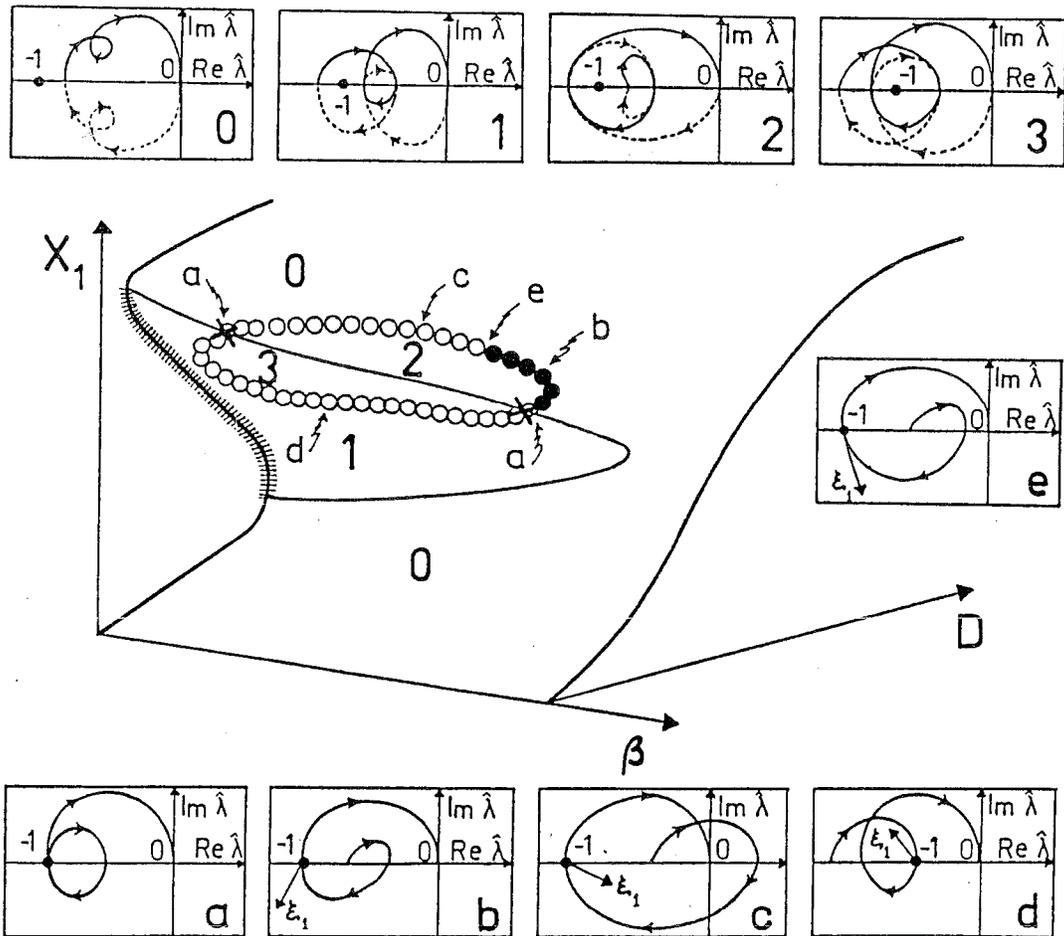


Figura 3.9: Variedad de estados de equilibrio, curvas de bifurcaciones y lugares geométricos característicos para $B=11$, $\epsilon=0.8$, $\rho=1$ (β varía entre 0.1 y 2).

Las condiciones de definición de tal singularidad usando la informa-

ción dada en el dominio frecuencia fueron puntualizadas recientemente en Moiola (1991, 1992). Aquí, en cambio, nos contentaremos con señalar las diferencias entre esta configuración y las vistas en el ejemplo previo. Recordemos que en el ejemplo anterior las curvas de bifurcaciones dinámicas finalizaban en las estáticas si existía intersección entre ambas. En este ejemplo, para un autovalor simple en cero (estática) y un par imaginario puro (dinámica) ambas curvas deben intersectarse en la forma mostrada por la Figura 3.9.

Finalmente, la estabilidad de las órbitas periódicas se determina usando las fórmulas del coeficiente de curvatura cuando el tercer autovalor en el dominio tiempo está en el semiplano izquierdo. En cambio, cuando tenemos uno de los autovalores en el semiplano derecho debemos analizar la estabilidad de la órbita emergente realizando perturbaciones en cercanías de \hat{P} para determinar el sentido de las flechas como se hizo en el Capítulo 2. Así, para este ejemplo, el caso "b" corresponde a la aparición de un ciclo límite estable, el caso "c" a uno inestable y el caso "d" a uno meta-estable o semi-estable. Una discusión más detallada puede encontrarse en Moiola y colegas (1990a).

CAPITULO 4

LOCALIZACION DE BIFURCACIONES DEGENERADAS EN EL ESPACIO DE PARAMETROS

Un análisis preliminar en el estudio de la dinámica de sistemas lo constituye la evaluación de ciertas condiciones de definición para la localización de las singularidades en el espacio de parámetros. Estas degeneraciones dividen el espacio de parámetros característicos en zonas de igual comportamiento dinámico (al menos localmente). Así, puede tenerse una idea más clara de la complejidad del sistema bajo estudio al explorar el mismo sólo en ciertos aspectos distintivos. El esfuerzo computacional se ve drásticamente reducido pues se deben evaluar fórmulas bien definidas y realizar su prolongación o continuación en otros parámetros auxiliares. Además, con esta metodología se hallan intersecciones entre las curvas de bifurcaciones que corresponden a otros puntos distintivos, de mayor complejidad, que actúan como centros organizadores de dinámica. Es decir, en cercanías de los mismos, se obtienen diferentes diagramas de bifurcaciones locales que ayudan a completar enormemente la imagen dinámica en amplias regiones del espacio de parámetros. En otras palabras, tales diagramas locales se distorsionan alejados de la singularidad, pero sus connotaciones e implicancias en la dinámica del sistema permanecen intactas. Entonces es importante la obtención de dichas singularidades a través, primero de su ubicación en el espacio de parámetros para luego pasar al estudio más detallado de obtener sus diagramas locales. En la Sección 4.1 daremos una introducción y reseña histórica del estudio de dichas singularidades. En la Sección 4.2 presentaremos algunas fórmulas para obtener ciertos conjuntos de catástrofe derivados del estudio de la multiplicidad de la solución de equilibrio. Luego, en la Sección 4.3 haremos lo mismo con los conjuntos pertenecientes a las bifurcaciones dinámicas. Finalmente, en la Sección 4.4, mostraremos un rico ejemplo de aplicación sobre el cual se obtendrán los diagramas de bifurcaciones locales. Toda la formulación presentada estará basada en la metodología en el dominio frecuencia. Debe aclararse, sin embargo, que otras condiciones de definición pueden obtenerse para caracterizar otras singularidades, tanto o más interesantes que las aquí propuestas. Sin em-

bargo, creemos que las presentadas a continuación cubren una gama variada en las aplicaciones como así también son suficientes para hacer notar la potencialidad de análisis del método en el dominio frecuencia.

4.1. INTRODUCCION

Los primeros trabajos que remarcaron la posibilidad de estudiar diferentes configuraciones dinámicas locales ante la variación de dos parámetros del sistema fueron presentados en el excelente libro de Andronov y colaboradores (1966), y luego rescatados también por Minorsky (1962). La escuela de matemáticos rusos aventajaba claramente a Occidente en el estudio de sistemas no lineales en general, y de oscilaciones en particular. Las primeras aplicaciones numéricas no triviales aparecieron algo más tarde del advenimiento de las computadoras digitales, con su consecuente uso masivo dado por los investigadores. Una de las primeras fue el famoso trabajo de Uppal y colegas (1974) en el estudio de un reactor tanque agitado continuo. Como ya hemos mencionado en el capítulo anterior, este trabajo generó una tremenda actividad en el estudio de singularidades y degeneraciones que derivaron más tarde en las aplicaciones más refinadas de las teorías de catástrofes y singularidades. Sin embargo, el camino había sido allanado y preparado para tal ocasión a través de una secuencia admirable de trabajos de Amundson y colaboradores, entre los cuales podemos mencionar a Bilous y Amundson (1955), Amundson y Aris (1958), y Amundson y Schmitz (1963). No fue coincidencia que las aplicaciones más importantes y complejas ocurrieran en el campo de la ingeniería química, pues los procesos son mayoritariamente no lineales. Podrían rescatarse otras primeras aplicaciones en Biología principalmente, pero sin duda no muestran la riqueza dinámica de la coexistencia entre soluciones de equilibrio múltiples y oscilaciones.

Desde el clásico trabajo de Uppal y colegas (1974) las aplicaciones han aumentado considerablemente en complejidad y se espera que las nuevas herramientas de computación algebraica en forma simbólica y técnicas de procesamiento en paralelo hagan posible análisis aún más sofisticados. Para ello basta comparar, por ejemplo, los estudios preliminares de Halbe y

Poore (1981) en la dinámica de un reactor tanque agitado continuo con reacciones consecutivas utilizando las fórmulas de bifurcación de Hopf con un análisis similar, pero mucho más profundo y general, que el presentado en su tesis doctoral por Farr (1986) haciendo gala de las más sofisticadas técnicas de la teoría de singularidades. Mientras el primero de los trabajos incluía únicamente los diagramas de bifurcaciones locales, el segundo mostraba los diagramas globales para un amplísimo conjunto de combinaciones en el espacio de parámetros.

Históricamente los problemas de multiplicidad debido a bifurcaciones estáticas y las oscilaciones periódicas resultantes del fenómeno de bifurcaciones de Hopf fueron tratados en forma conjunta. Sin embargo, la complejidad subyacente en ambos pronto obligó a los investigadores a abocarse a uno u otro problema por separado. No obstante, a partir de las contribuciones de Golubitsky y Schaeffer (1985) principalmente, donde se presentó una teoría general capaz de tratar ambos problemas con las mismas herramientas analíticas, existe una tendencia a unificar el estudio de bifurcaciones. Aunque todavía muchos fenómenos de bifurcación permanecen algo oscuros o de difícil caracterización, se ha tratado de salvar esta dificultad tomando casos particulares o agregando ciertas restricciones que facilitan el muchas veces tedioso y complejo proceso algebraico. Este capítulo se ha diagramado con esa filosofía: Mostrar que una dada metodología permite el análisis simultáneo de los dos tipos elementales de bifurcaciones y varias de sus degeneraciones más comunes. En este contexto el material que presentaremos es completamente original, como así también varios de los resultados incluidos en las aplicaciones numéricas.

4.2. MULTIPLICIDAD DE ESTADOS DE EQUILIBRIO

En esta sección daremos las fórmulas más importantes para analizar la multiplicidad de estados de equilibrio partiendo de la información brindada por los puntos de bifurcaciones estáticas. Estos últimos supondremos que son puntos límites de un diagrama de bifurcación, es decir, variando el parámetro principal del sistema alcanzaremos los mismos con valores máximos o

mínimos del parámetro, al menos localmente hablando. Para tener una imagen más clara el lector puede consultar la Figura 3.2. En la misma claramente puede notarse que asociado a estos puntos límites o de bifurcación estática (puntos b y e) existen al menos dos estados de equilibrio para pequeñas perturbaciones en el parámetro principal. La proyección de estos puntos límites sobre el eje de las abscisas (correspondiente al parámetro de bifurcación) separa regiones con diferente multiplicidad como fácilmente puede apreciarse de la Figura 3.2.

La información de la *evolución* de los puntos de bifurcaciones estáticas está contenida en la expresión $F_1(0, \mu) = 0$ derivada en el capítulo anterior (ecuación (3.7.a)). Hemos utilizado la palabra *evolución* para indicar que podemos construir las curvas de bifurcaciones estáticas y algunas de sus "degeneraciones" considerando un espacio de parámetros más amplio. El objetivo de esta sección es proveer las fórmulas necesarias para hallar las degeneraciones de bifurcaciones estáticas utilizando la clasificación propuesta por la teoría de catástrofe (Thom, 1975; Mees, 1981).

Así los conjuntos que describiremos serán, en primer lugar la unión de dos puntos límites o puntos de bifurcaciones estáticas. Esta singularidad se conoce como punto cuspidal y las condiciones de definición son

$$F_1(0, \mu) = dF_1/d\mu(0, \mu) = 0, \quad (4.1)$$

para algún valor de $\mu = \mu_0$, mientras que la condición de no-degeneración viene dada por

$$d^2F_1/d\mu^2(0, \mu) \neq 0. \quad (4.2)$$

Siguiendo con la clasificación, diremos que la unión de dos puntos cuspidales se conoce como la singularidad "*swallowtail*". Usando la formulación en el dominio frecuencia vemos que las condiciones de definición son

$$F_1(0, \mu) = dF_1/d\mu(0, \mu) = d^2F_1/d\mu^2(0, \mu) = 0 \quad (4.3)$$

para algún valor de $\mu = \mu_0$, mientras que la condición de no-degeneración puede notarse como

$$d^3 F_1 / d\mu^3(0, \mu) \neq 0. \quad (4.4)$$

Finalmente para el caso que nos ocupa debemos también definir la singularidad "*butterfly*" que consiste en la unión de dos singularidades *swallow-tails*. Entonces, las condiciones de definición vienen dadas por

$$F_1(0, \mu) = dF_1/d\mu(0, \mu) = d^2 F_1/d\mu^2(0, \mu) = d^3 F_1/d\mu^3(0, \mu) = 0 \quad (4.5)$$

para algún valor de $\mu = \mu_0$, mientras que la condición de no-degeneración para esta singularidad es

$$d^4 F_1/d\mu^4(0, \mu) \neq 0. \quad (4.6)$$

Para el ejemplo que trataremos en la Sección 4.4 esta última es la singularidad de mayor orden encontrada. Sin embargo, únicamente para completar la formulación en el dominio frecuencia, podemos decir que la unión de dos singularidades *butterflies* dará lugar a la singularidad "*wigwam*", cuyas condiciones de definición son

$$F_1(0, \mu) = dF_1/d\mu(0, \mu) = d^2 F_1/d\mu^2(0, \mu) = d^3 F_1/d\mu^3(0, \mu) = d^4 F_1/d\mu^4(0, \mu) = 0, \quad (4.7)$$

para algún valor de $\mu = \mu_0$, siendo la condición de no-degeneración

$$d^5 F_1/d\mu^5(0, \mu) \neq 0. \quad (4.8)$$

Recientemente Farr y Aris (1986) encontraron la singularidad *wigwam* obteniendo hasta siete estados de equilibrio ante perturbaciones en cinco parámetros del sistema. En muchos casos los cálculos pueden realizarse sin implementar las fórmulas y obteniendo los conjuntos de estas singularidades en el espacio de parámetros como en Balakotaiah y Luss (1986), es decir pueden obtenerse analíticamente. En otras aplicaciones es necesaria la implementación en una computadora para seguir la evolución de estos conjuntos en busca de la singularidad de mayor orden o codimensión. Para la completa clasificación de la multiplicidad de los estados de equilibrio deben calcularse otras expresiones para así obtener los diagramas de bifurcaciones locales. Como estamos interesados únicamente en obtener la localización de las singularidades utilizando técnicas en el dominio frecuencia y hemos considerado a μ como una de las componentes del estado de equilibrio, la

extensión resulta inmediata si tenemos en cuenta además la variación de un parámetro auxiliar. El lector interesado puede encontrar en Balakotaiah y Luss (1986) una exposición más detallada junto con la definición de ciertas variedades que deben calcularse para realizar así la clasificación de los diferentes diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de la singularidad de mayor orden.

4.3. MULTIPLICIDAD DE PUNTOS DE BIFURCACION DE HOPF

Podemos realizar de manera análoga a la presentada para el análisis de multiplicidad de estados de equilibrio, una ecuación que contenga toda la información de los puntos de bifurcación de Hopf. Asumiendo la notación y los postulados de la proposición 3 vemos que tal función se puede caracterizar por $H(\mu) = G_1(w(\mu), \mu) \forall \mu \in E(w_0, \mu_0)$ con tal que $\partial F_2 / \partial w(w_0, \mu_0) \neq 0$ ó $\partial F_2 / \partial \mu(w_0, \mu_0) \neq 0$. En otras palabras, cuando $H(\mu_0) = -1$ y $w_0 \neq 0$ tenemos un lugar geométrico característico pasando por el punto crítico $(-1 + i0)$, es decir se da la condición de bifurcación dinámica.

Considerando las derivadas sucesivas de $H(\mu)$ con respecto al parámetro de bifurcación podemos encontrar las siguientes singularidades:

$$a) H(\mu_0) = -1, dH/d\mu(\mu_0) = 0 \text{ y } d^2H/d\mu^2(\mu_0) \neq 0 \quad (4.9)$$

o falla de la condición de transversalidad del clásico teorema de Hopf;

$$b) H(\mu_0) = -1, dH/d\mu(\mu_0) = d^2H/d\mu^2(\mu_0) = 0 \text{ y } d^3H/d\mu^3(\mu_0) \neq 0, \quad (4.10)$$

es decir, falla de la condición de transversalidad hasta segundo orden;

$$c) H(\mu_0) = -1, dH/d\mu(\mu_0) = d^2H/d\mu^2(\mu_0) = d^3H/d\mu^3(\mu_0) = 0 \text{ y } d^4H/d\mu^4(\mu_0) \neq 0 \quad (4.11)$$

es decir, falla de la condición de transversalidad hasta tercer orden. La degeneración a) presenta la interacción entre dos puntos de bifurcación de Hopf. La singularidad b), en cambio, corresponde a la interacción de tres puntos de bifurcación de Hopf, mientras que la última compete a la presencia de cuatro puntos de bifurcación de Hopf.

Ahora estamos preparados para la definición rigurosa de una de las familias de bifurcaciones degeneradas de Hopf: aquella que representa la interacción entre múltiples puntos de bifurcaciones de Hopf. En el capítulo 3 utilizamos una notación abreviada para el primer miembro de esa familia, H_{01} . En virtud de la simplicidad y claridad no agregamos las condiciones de no-degeneración de cada miembro de la misma. A tal efecto, a fin de poder interpretar los resultados dados en la última sección, definiremos los tres primeros miembros de esta familia H_{0m} , que involucran interacciones entre "m+1" puntos de bifurcaciones de Hopf. Los tres primeros miembros de esta familia son:

a) H_{01} , cuyas condiciones de definición son

$$H(\mu_0) = -1 \quad \text{y} \quad dH/d\mu(\mu_0) = 0, \quad (4.12)$$

y las condiciones de no-degeneración son

$$d^2H/d\mu^2(\mu_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \sigma_1(w_0, \mu_0) \neq 0 \quad (4.13)$$

donde $\sigma_1(\cdot)$ es el coeficiente de curvatura resultante de aplicar un balancer armónico de segundo orden (ecuación (3.20)).

b) H_{02} , cuyas condiciones de definición son

$$H(\mu_0) = -1 \quad \text{y} \quad dH/d\mu(\mu_0) = d^2H/d\mu^2(\mu_0) = 0 \quad (4.14)$$

y las condiciones de no-degeneración son

$$d^3H/d\mu^3(\mu_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \sigma_1(w_0, \mu_0) \neq 0. \quad (4.15)$$

c) H_{03} , cuyas condiciones de definición son

$$H(\mu_0) = -1 \quad \text{y} \quad dH/d\mu(\mu_0) = d^2H/d\mu^2(\mu_0) = d^3H/d\mu^3(\mu_0) = 0 \quad (4.16)$$

y las condiciones de no-degeneración son

$$d^4H/d\mu^4(\mu_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \sigma_1(w_0, \mu_0) \neq 0. \quad (4.17)$$

La segunda familia de bifurcaciones degeneradas de Hopf comprende múltiples ciclos límites en la rama de órbitas periódicas. En el capítulo 7 se verá una aproximación para obtener los llamados coeficientes de curvatura de orden superior a $\sigma_1(w_0, \mu_0)$. Nuestro análisis será incompleto hasta ese

momento. Sin embargo, como el objetivo consiste en mostrar los diagramas de bifurcaciones locales en la sección siguiente, no existe ningún impedimento para hacerlo usando sólo algunas de las definiciones aquí presentadas. En otras palabras, la información dada supera ampliamente el margen necesario para obtener los diagramas de bifurcaciones locales. Por lo tanto definiremos algunas singularidades que hemos detectado en el ejemplo de la sección siguiente y otras cuya existencia mostraremos en otro ejemplo del capítulo 7.

Los tres primeros miembros de la segunda familia de bifurcaciones degeneradas de Hopf son:

a) H_{10} , cuyas condiciones de definición son

$$H(\mu_0) = -1 \quad \text{y} \quad \sigma_1(w_0, \mu_0) = 0, \quad (4.18)$$

mientras que las condiciones de no-degeneración son

$$dH/d\mu(\mu_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \sigma_2(w_0, \mu_0) \neq 0. \quad (4.19)$$

En este caso $\sigma_2(\cdot)$ es el coeficiente de curvatura de segundo orden para el cual necesitamos una aproximación de balance armónico de cuarto orden. Dicho coeficiente rescata la información hasta la derivada quinta de la función no lineal $f(\mathbf{e}, \mu)$ de la rama de la realimentación.

b) H_{20} , cuyas condiciones de definición son

$$H(\mu_0) = -1 \quad \text{y} \quad \sigma_1(w_0, \mu_0) = \sigma_2(w_0, \mu_0) = 0, \quad (4.20)$$

mientras que las condiciones de no-degeneración son

$$dH/d\mu(\mu_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \sigma_3(w_0, \mu_0) \neq 0. \quad (4.21)$$

En este caso, el coeficiente de curvatura de tercer orden $\sigma_3(\cdot)$ involucra una aproximación de balance armónico de sexto orden, y por ende lleva la información de la dinámica del sistema hasta la séptima derivada de la función no lineal $f(\mathbf{e}, \mu)$ de la rama de la realimentación.

c) H_{30} , cuyas condiciones de definición son

$$H(\mu_0) = -1 \quad \text{y} \quad \sigma_1(w_0, \mu_0) = \sigma_2(w_0, \mu_0) = \sigma_3(w_0, \mu_0) = 0, \quad (4.22)$$

y las condiciones de no-degeneración son

$$dH/d\mu(\mu_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \sigma_4(w_0, \mu_0) \neq 0. \quad (4.23)$$

Aquí la nueva cantidad definida por $\sigma_4(\cdot)$ corresponde al coeficiente de curvatura de cuarto orden calculado a partir de una aproximación de balance armónico de octavo orden. Dicho coeficiente lleva en su cálculo la información de todas las derivadas parciales hasta el orden noveno inclusive de la función no lineal $f(e, \mu)$. Debemos notar que en cercanías de la singularidad H_{10} pueden detectarse hasta dos ciclos límites anidados, con diferente estabilidad. En cercanías de H_{20} , ante la perturbación de dos parámetros auxiliares, pueden detectarse hasta tres ciclos límites anidados emergentes del mismo punto de bifurcación de Hopf, y así sucesivamente.

Finalmente, mencionemos algunos de los miembros de la tercer familia y sin lugar a dudas, la más difícil de clasificar en cuanto a la obtención de sus diagramas de bifurcaciones locales, como ha sido señalado en Golubitsky y Langford (1981), y más tarde en Golubitsky y Schaeffer (1985).

Mencionemos sólo cuatro miembros de esta familia, tales como:

a) H_{11} , cuyas condiciones de definición son

$$H(\mu_0) = -1 \quad \text{y} \quad dH/d\mu(\mu_0) = \sigma_1(w_0, \mu_0) = 0, \quad (4.24)$$

y las condiciones de no-degeneración son

$$d^2H/d\mu^2(\mu_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \sigma_2(w_0, \mu_0) \neq 0. \quad (4.25)$$

Esta singularidad involucra la interacción entre dos puntos de bifurcación de Hopf y dos ciclos límites anidados en alguna de las ramas de órbitas periódicas.

b) H_{12} , cuyas condiciones de definición son

$$H(\mu_0) = -1 \quad \text{y} \quad dH/d\mu(\mu_0) = d^2H/d\mu^2(\mu_0) = \sigma_1(w_0, \mu_0) = 0, \quad (4.26)$$

y las condiciones de no-degeneración son

$$d^3H/d\mu^3(\mu_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \sigma_2(w_0, \mu_0) \neq 0. \quad (4.27)$$

En cercanías de esta singularidad encontramos la interacción entre tres puntos de bifurcaciones de Hopf con dos ciclos límites anidados en algunas

de las ramas de órbitas periódicas.

c) H_{21} , cuyas condiciones de definición son

$$H(\mu_0)=-1 \quad \text{y} \quad dH/d\mu(\mu_0)=\sigma_1(w_0, \mu_0)=\sigma_2(w_0, \mu_0)=0, \quad (4.28)$$

y las condiciones de no-degeneración son

$$d^2H/d\mu^2(\mu_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \sigma_3(w_0, \mu_0) \neq 0. \quad (4.29)$$

En cercanías de esta singularidad hallamos la interacción entre dos puntos de bifurcación de Hopf con estructuras de tres ciclos límites anidados.

d) H_{13} , cuyas condiciones de definición son

$$H(\mu_0)=-1 \quad \text{y} \quad dH/d\mu(\mu_0)=d^2H/d\mu^2(\mu_0)=d^3H/d\mu^3(\mu_0)=\sigma_1(w_0, \mu_0)=0, \quad (4.30)$$

y las condiciones de no-degeneración son

$$d^4H/d\mu^4(\mu_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \sigma_2(w_0, \mu_0) \neq 0. \quad (4.31)$$

Esta singularidad involucra la presencia de cuatro puntos de bifurcación de Hopf y dos ciclos límites anidados. La clasificación de esta última familia fue presentada originalmente en Golubitsky y Schaeffer (1985). Debe notarse, sin embargo, que las variantes de clasificación de los diagramas locales son mayores que en las primeras dos familias. En otras palabras, deben evaluarse otras expresiones para saber a qué subtipo pertenecen estas singularidades para así obtener los respectivos diagramas locales.

En la sección siguiente mostraremos algunas de estas singularidades y su continuación en el espacio de parámetros. Debemos aclarar que los tiempos de cómputos son razonables para todas las singularidades halladas. No obstante, como se verá más adelante, las implementaciones de los coeficientes de curvatura mayores que el primero requieren mucho tiempo de CPU por lo cual se limitarán sus aplicaciones cuando estemos interesados exclusivamente en detectar estructuras de ciclos límites anidados.

4.4. EJEMPLO DE APLICACION

Consideraremos el primer ejemplo dado en el Capítulo 3 y descrito por las ecuaciones diferenciales ordinarias (3.22). Seguiremos con la formula-

ción presentada en (3.25) con el objeto de brindar expresiones explícitas par calcular las degeneraciones más importantes enunciadas en las Secciones 4.2 y 4.3 de este capítulo. Además, mejoraremos la presentación de los diagramas de bifurcación dados en Halbe y Poore (1981), adicionando mayor información al fenómeno oscilatorio mostrado en Jorgensen y colaboradores (1984) y en Moiola y colegas (1990a).

Hemos visto que la condición de bifurcación estática debía satisfacer la expresión siguiente

$$F_1(0, \hat{e}_1) = g(\hat{e}_1) = 1 - a + b/(1+\beta) + c/(1+\beta) + d = 0. \quad (4.32)$$

Para el caso de un cero doble en $w=0$ (autovalor doble en cero en el dominio tiempo) necesitamos satisfacer (4.32) y

$$\partial F_2 / \partial w(0, \hat{e}_1) = a - b/(1+\beta)^2 - c/(1+\beta)^2 - 2d = 0. \quad (4.33)$$

Tomando ahora las derivadas de (3.25) con respecto a \hat{e}_1 encontramos

$$\partial F_1 / \partial \hat{e}_1 = \frac{-1}{p_1} \frac{\partial a}{\partial \hat{e}_1} + \frac{1+\beta}{p_2} \frac{\partial b}{\partial \hat{e}_1} + \frac{1+\beta-w^2}{p_3} \frac{\partial c}{\partial \hat{e}_1} + \frac{1-w^2}{p_4} \frac{\partial d}{\partial \hat{e}_1}, \quad (4.34.a)$$

$$\partial F_2 / \partial \hat{e}_1 = \frac{w}{p_1} \frac{\partial a}{\partial \hat{e}_1} - \frac{w}{p_2} \frac{\partial b}{\partial \hat{e}_1} - \frac{(2+\beta)w}{p_3} \frac{\partial c}{\partial \hat{e}_1} - \frac{2w}{p_4} \frac{\partial d}{\partial \hat{e}_1}, \quad (4.34.b)$$

donde: $\partial a / \partial \hat{e}_1 = (1+S)/(1+\hat{e}_1^2),$

$$\partial b / \partial \hat{e}_1 = B[(1-S)(1-S-S\alpha)\hat{e}_1^2 + 2(1-S-S\alpha)\hat{e}_1 + 1] / [1+(1-S)\hat{e}_1^2],$$

$$\frac{\partial c}{\partial \hat{e}_1} = \frac{-BS\{(1-S)(1-S-S\alpha)\hat{e}_1^4 + 2(2-S)(1-S-S\alpha)\hat{e}_1^3 + [5+2\alpha-4S(1+\alpha)]\hat{e}_1^2 + 2(1+\alpha)\hat{e}_1\}}{[(1-S)\hat{e}_1^2 + (1-S)\hat{e}_1 + 1]^2}$$

$$\partial d / \partial \hat{e}_1 = 2S\hat{e}_1 / (1+\hat{e}_1)^3.$$

Tomando ahora las derivadas parciales en (3.25) con respecto a w podemos obtener las siguientes expresiones

$$\frac{\partial F_1}{\partial w} = -a \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{1}{p_1} \right] + b(1+\beta) \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{1}{p_2} \right] + c \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{1+\beta-w^2}{p_3} \right] + d \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{1-w^2}{p_4} \right], \quad (4.35.a)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial w} = a \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{w}{p_1} \right] - b \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{w}{p_2} \right] - c(2+\beta) \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{w}{p_3} \right] - 2d \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{w}{p_4} \right], \quad (4.35.b)$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{1}{p_1} \right] = -2w/p_1^2, \quad \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{w}{p_1} \right] = (1-2w^2/p_1)/p_1, \quad \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{1}{p_2} \right] = -2w/p_2^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{w}{p_2} \right] = (1-2w^2/p_2)/p_2, \quad \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{w}{p_3} \right] = [1-2w^2(2w^2 + \frac{2+2\beta}{p_3} + \beta^2)]/p_3,$$

$$\frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{w}{p_4} \right] = [1 - 4w^2 \frac{(1+w^2)}{p_4}] / p_4, \quad \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{1-w^2}{p_4} \right] = -2w [1 + 2 \frac{(1-w^4)}{p_4}] / p_4.$$

Para un punto cuspidal las condiciones de definición resultan de satisfacer (4.32) y

$$\frac{dg_1}{d\hat{e}_1} = -\frac{da}{d\hat{e}_1} + \frac{1}{1+\beta} \frac{db}{d\hat{e}_1} + \frac{1}{1+\beta} \frac{dc}{d\hat{e}_1} + \frac{d(d)}{d\hat{e}_1} = \frac{\partial F_1}{\partial \hat{e}_1}(0, \hat{e}_1) = 0. \quad (4.36)$$

Para un punto cuspidal y una raíz doble en $w=0$ necesitamos satisfacer las ecuaciones (4.32), (4.33) y (4.36). Tomando las derivadas sucesivas de la función $g_1(\hat{e}_1)$ obtendremos la singularidad swallowtail, al satisfacer (4.32), (4.36) y

$$\frac{d^2 g_1}{d\hat{e}_1^2} = -\frac{d^2 a}{d\hat{e}_1^2} + \frac{1}{1+\beta} \frac{d^2 b}{d\hat{e}_1^2} + \frac{1}{1+\beta} \frac{d^2 c}{d\hat{e}_1^2} + \frac{d^2(d)}{d\hat{e}_1^2} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial \hat{e}_1^2}(0, \hat{e}_1) = 0, \quad (4.37)$$

mientras que la singularidad *butterfly* viene dada por la solución simultánea de (4.32), (4.36), (4.37) y

$$\frac{d^3 g_1}{d\hat{e}_1^3} = -\frac{d^3 a}{d\hat{e}_1^3} + \frac{1}{1+\beta} \frac{d^3 b}{d\hat{e}_1^3} + \frac{1}{1+\beta} \frac{d^3 c}{d\hat{e}_1^3} + \frac{d^3(d)}{d\hat{e}_1^3} = \frac{\partial^3 F_1}{\partial \hat{e}_1^3}(0, \hat{e}_1) = 0. \quad (4.38)$$

Para las bifurcaciones dinámicas necesitamos resolver (3.25) con $w_0 \neq 0$. Entonces, usando esta condición en (3.25.b) obtenemos la siguiente expresión

$$a/p_1 = b/p_2 + c(2+\beta)/p_3 + 2d/p_4. \quad (4.39)$$

Usando la información de (4.39) en (3.25.a) llegamos a la fórmula presentada a continuación,

$$1 + b\beta/p_2 - c(1+w^2)/p_3 - d(1+w^2)/p_4 = 0 \quad (4.40)$$

que contiene la información de las condiciones de bifurcaciones de Hopf. Para la falla de la condición de transversalidad deberemos satisfacer (4.40) para $w_0 \neq 0$ junto con

$$\left[\frac{\partial F_1}{\partial \hat{e}_1} \frac{\partial F_2}{\partial w} - \frac{\partial F_1}{\partial w} \frac{\partial F_2}{\partial \hat{e}_1} \right] (w_0, \hat{e}_1) = 0. \quad (4.41)$$

Primero analizaremos los diagramas resultantes de calcular los puntos de bifurcaciones estáticas, puntos cuspidales, singularidades *swallowtail* y *butterfly*. A tal efecto, en la Figura 4.1 mostramos los conjuntos de catástrofe resultantes de proyectar las curvas de bifurcaciones estáticas sobre el plano de los parámetros α y D . Se pueden ver que las mismas pertenecen a secciones de corte del conjunto de catástrofe conocido como *butterfly*. Un gráfico más ilustrativo sería llevar toda la información de las curvas de bifurcaciones estáticas y dinámicas tal como el presentado en la Figura 4.2. Note que la proyección de las curvas de bifurcaciones estáticas en el plano de parámetros α - D corresponde al caso inferior de la Figura 4.1. Las bifurcaciones degeneradas de Hopf se han notado en la forma antes indicada en tanto que la singularidad de un cero doble se esquematizó con la letra F_1 . Las singularidades indicadas con la letra C en la Figura 4.2 corresponden a puntos cuspidales cuando se proyectan las curvas de bifurcaciones estáticas sobre el plano α - D . En la manera usual, se han indicado el número de polos inestables de lazo cerrado (o número de vueltas en sentido horario alrededor del punto crítico $(-1+i0)$) sobre la variedad de estados de equilibrio y la multiplicidad de la solución de equilibrio sobre el plano α - D .

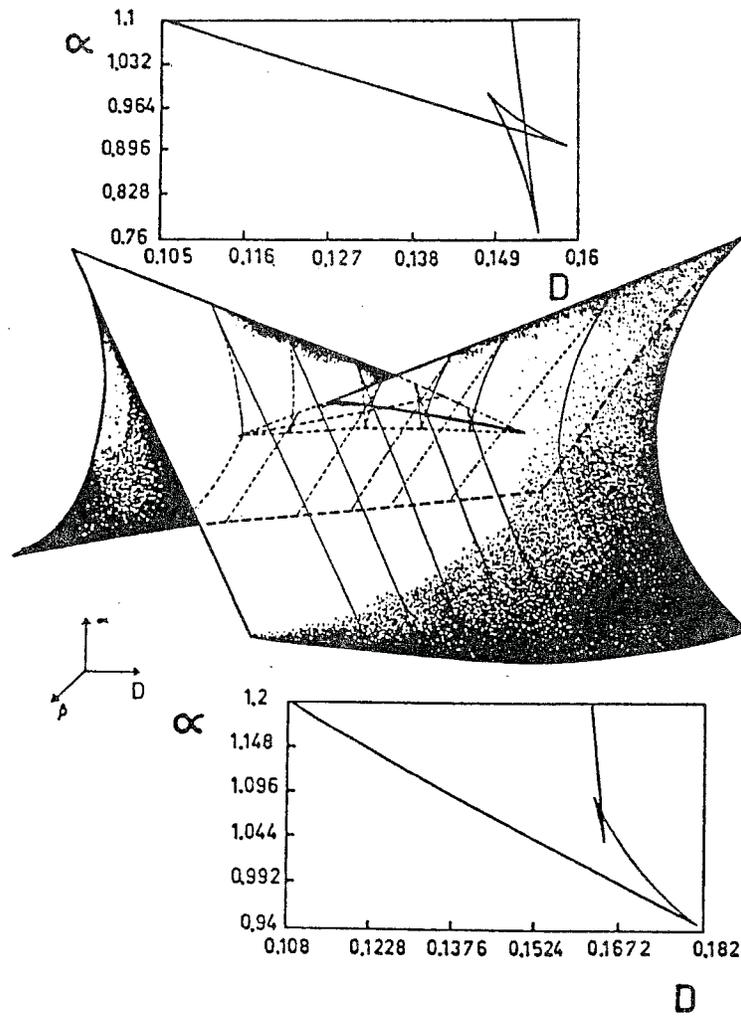


Figura 4.1: Curvas de bifurcaciones estáticas y la singularidad *butterfly* para $B=8$ y $S=0.04$. En el diagrama superior $\beta=1.206$ mientras que en el inferior $\beta=1.3$.

Sobre el margen superior izquierdo se representan los dos autovalores relevantes (ecuación (3.24.b)) indicando mediante la dirección de $\xi_1(w_r)$ la estabilidad de los ciclos límites emergentes. Así, ξ_s corresponde a las condiciones de ciclos límites estables, ξ_u a las condiciones de ciclos límites inestables y $\xi_{H_{10}}$ a la condición de degeneración de la falla del coeficiente de curvatura.

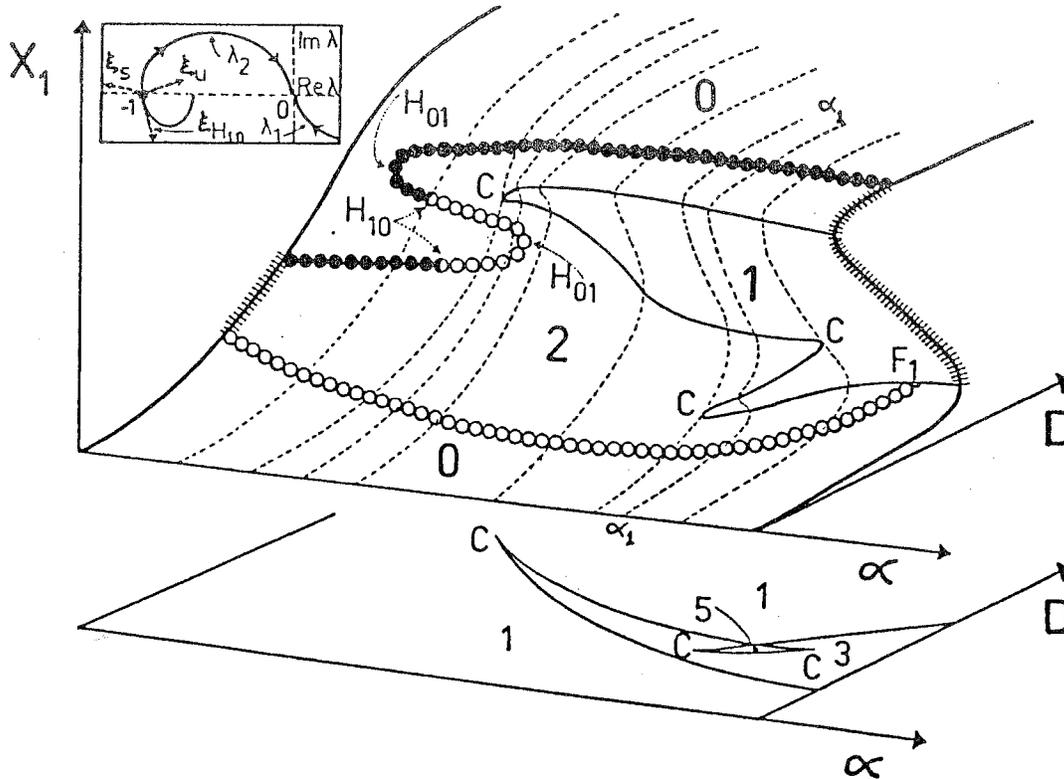


Figura 4.2: Variedad de estado estacionario, curvas de bifurcaciones y conjuntos de catástrofes para $B=8$, $S=0.04$, $\beta=1.3$ y α varía entre 0.7 y 1.3.

Volviendo a la Figura 4.1 podemos continuar los tres puntos cuspidales para obtener singularidades de mayor orden. Así en la Figura 4.3 vemos que variando un tercer parámetro encontramos que para ciertos valores del mismo aparecen dos nuevas singularidades que resultan de la unión de las curvas de puntos cuspidales. A estas singularidades las habíamos llamado *swallowtails*. Notemos que también la forma de unirse de los puntos cuspidales es un nuevo punto cuspidal. Las cúspides propiamente dichas forman una superficie en el espacio de parámetros α , β y S . A esta superficie también se la conoce como el conjunto de catástrofe *swallowtail* (ver Figura 4.4).

En la Figura 4.3 podemos repetir el mismo procedimiento y continuar en un nuevo parámetro auxiliar las dos cúspides que representan singularidades *swallowtails*. Utilizando las correspondientes fórmulas dadas al comienzo de esta sección podemos hallar el gráfico indicado en la Figura 4.5 donde ambas *swallowtails* se unen, siguiendo la característica forma cuspidal, en una singularidad *butterfly*. Balakotiah y Luss (1984) probaron que dicha

singularidad era la de mayor orden encontrada en este sistema. En cercanías de esta singularidad se obtienen todos los diagramas representativos de multiplicidad de la solución de equilibrio ante pequeñas perturbaciones en los parámetros auxiliares α , β y S . Los diagramas de bifurcaciones muestran la forma característica de la solución de equilibrio en función del parámetro principal de bifurcación D . Algunos de dichos diagramas de bifurcaciones se presentan con línea de trazos en la Figura 4.2 sobre la variedad de estados de equilibrio.

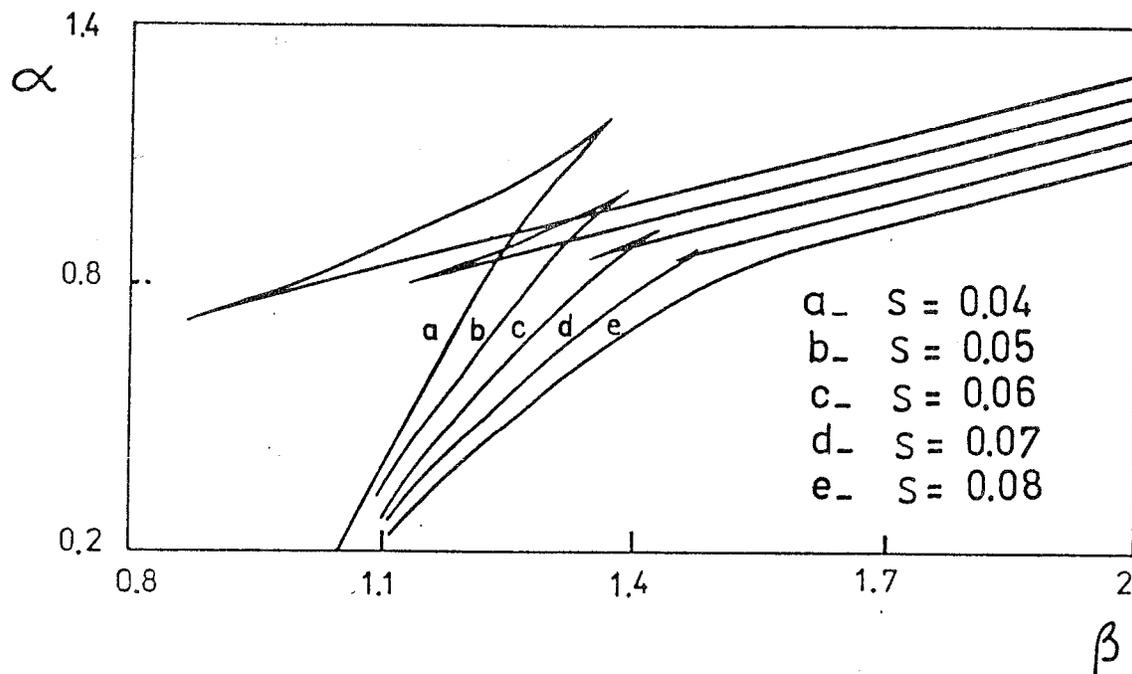


Figura 4.3: Curvas de puntos cuspidales como secciones de corte de la singularidad *swallowtail* para $B=8$ en el plano de parámetros α - β , cuando varía S .

La teoría de singularidades desarrollada en Golubitsky y Schaeffer (1985) presenta otra forma poderosa de obtener los diagramas locales de bifurcaciones en presencia de la variación de un parámetro principal o distinguido (en este caso D). Las aplicaciones más sobresalientes de esta teoría para la obtención de los posibles diagramas de bifurcaciones locales fueron presentadas en una secuencia admirable de trabajos por Balakotaiah y Luss (1982a, 1982b, 1984 y 1986). Una vez indicadas estas bifurcaciones es-

táticas y sus degeneraciones nos abocaremos ahora a compactar aún más la información de las gráficas tipo Figura 4.2, considerando la variación de un tercer parámetro del sistema. Entonces únicamente continuaremos, usando las fórmulas correspondientes dadas al comienzo de esta sección, las siguientes singularidades H_{01} , H_{10} , C y F_1 para obtener los diferentes diagramas de bifurcaciones locales en amplias zonas del espacio de parámetros.

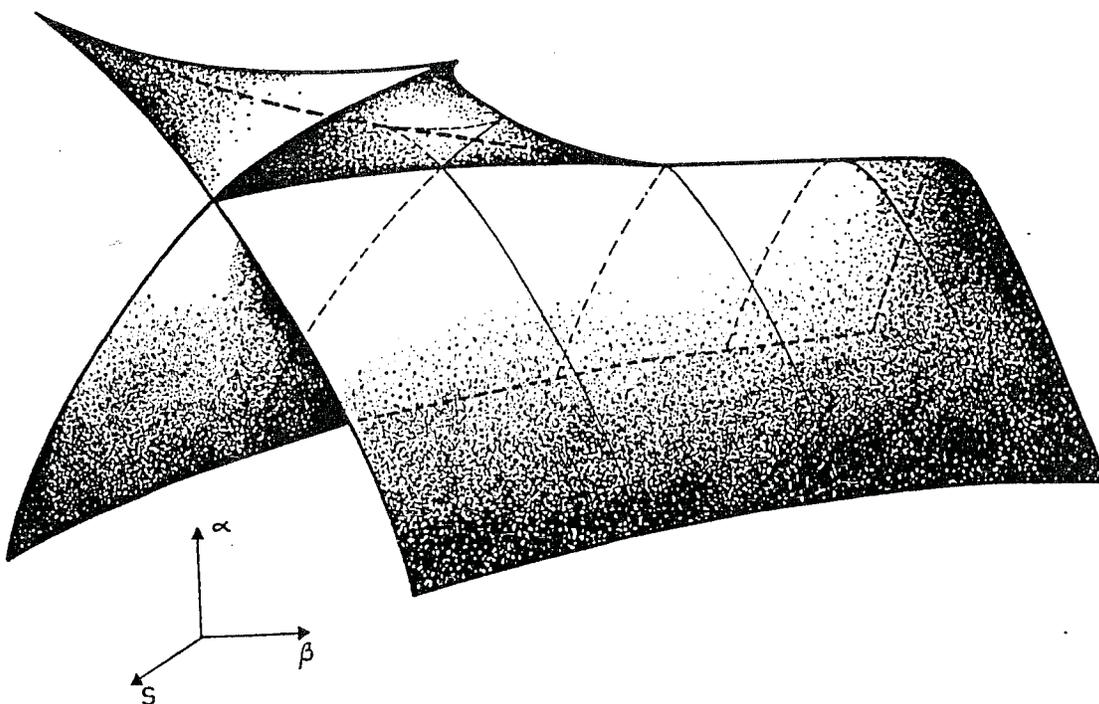


Figura 4.4: Diagrama de la singularidad *swallowtail* en el espacio de parámetros α - β - S .

En las Figuras 4.6 y 4.7 se muestran, para dos conjuntos de parámetros, las continuaciones de tales singularidades que dividen el plano de los parámetros auxiliares en zonas diferentes, en cuanto a comportamiento dinámico (local) se refiere. Así las degeneraciones H_{10} delimitan áreas donde una curva de bifurcación de Hopf cambia su estabilidad. Las singularidades F_1 y H_{01} confinan áreas donde el número de puntos de bifurcación de Hopf se mantiene constante (sea 0, 1, 2, 3 ó 4 para este ejemplo) bajo la variación del parámetro principal de bifurcación D . Por último, las singularidades cuspidales C involucran multiplicidad en la variedad de estados

de equilibrio y confinan diferentes número de soluciones de estado estacionario.

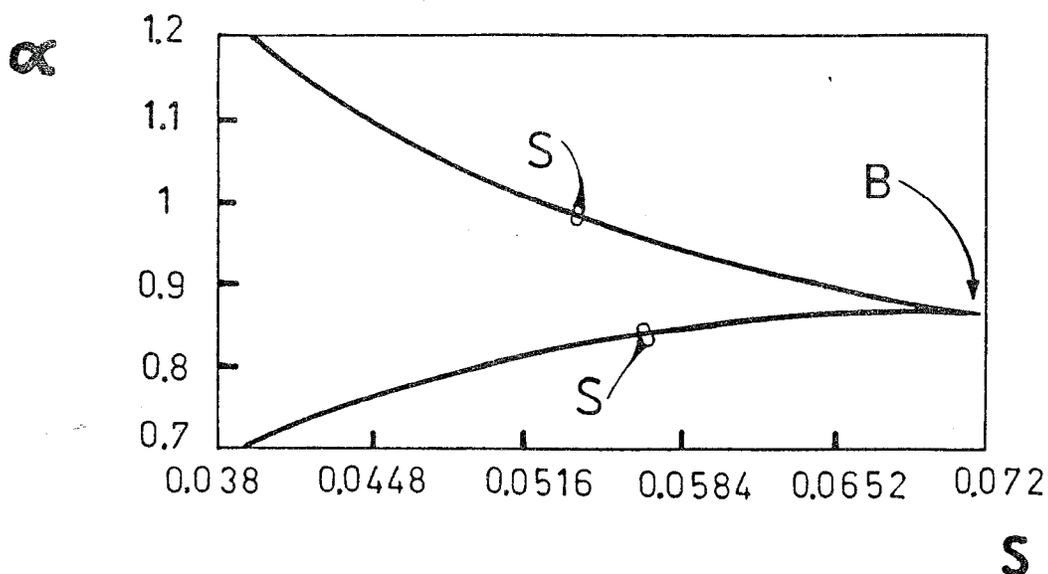


Figura 4.5: Continuación de las singularidades *swallowtails* (S) hasta alcanzar la singularidad *butterfly* indicada por B. Valor del único parámetro constante, $B=8$.

En las Figuras 4.6 y 4.7 no trazamos la variedad de límite doble propuesta por Golubitsky y Schaeffer (1985) para realizar un detallado análisis de las posibles formas de los diagramas de bifurcaciones ligados a la multiplicidad de estado estacionario. Hemos preferido clasificar estas regiones de acuerdo al número de puntos de bifurcaciones de Hopf en desmedro de obtener todas las combinaciones posibles de diagramas locales. Además, creemos oportuno señalar que la inclusión de estas variedades hubiera llevado a complicar sobremanera el ya intrincado gráfico. De todas formas dichas variedades pueden calcularse en el dominio frecuencia partiendo de la información provista por las curvas de bifurcaciones estáticas.

Habiendo aclarado estas limitaciones diremos que todas aquellas regiones nombradas con la letra a_i ($i=1,2$ y 3) no tienen ningún punto de bifurcación de Hopf en sus diagramas locales cuando D varía. Las regiones nom-

bradas por b_j ($j=1,2,\dots,9$) tienen dos puntos de bifurcaciones de Hopf; c_k ($k=1,\dots,4$) tienen sólo un punto de bifurcación de Hopf; d_l ($l=1,\dots,10$) tienen tres puntos de bifurcaciones de Hopf, y finalmente, e_r ($r=1,\dots,14$) tienen cuatro puntos de bifurcaciones de Hopf. La Figura 4.7 fue obtenida por primera vez utilizando las herramientas analíticas de la teoría de singularidades y la formulación dada por Golubitsky y Langford (1981) en la tesis doctoral de Farr (1986), y más tarde publicada por Farr y Aris (1987). En forma independiente fue obtenida también por Moiola y colegas (1990c) donde se la completó para obtener los diagramas de bifurcaciones locales. En cambio, el complejo diagrama de bifurcaciones mostrado en la Figura 4.6 fue obtenido por primera vez por Moiola y colaboradores (1990c) junto con la clasificación de los diagramas locales presentados en la Figura 4.8 donde se han distorsionado sus formas para lograr mayor claridad.

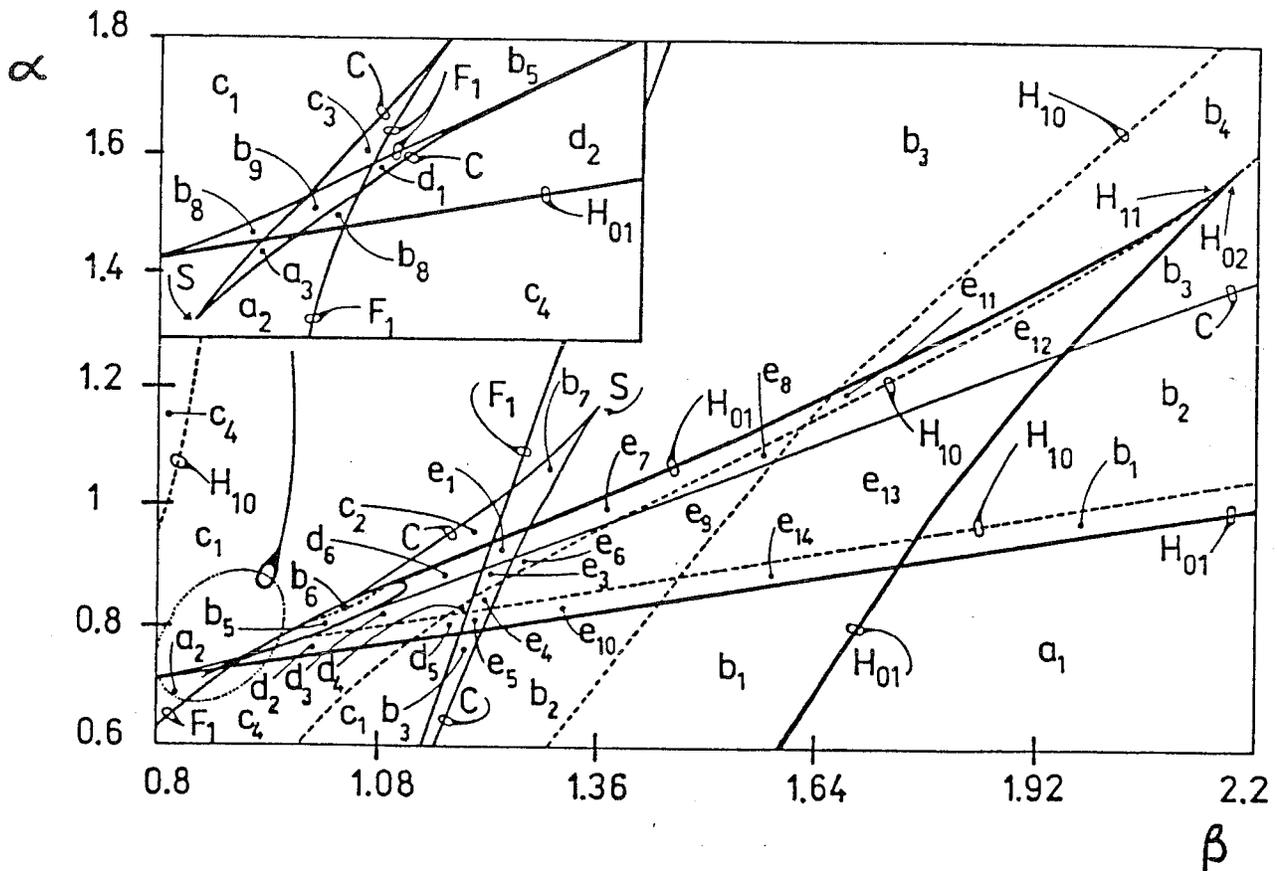


Figura 4.6: Curvas de bifurcaciones degeneradas para $B=8$ y $S=0.04$.

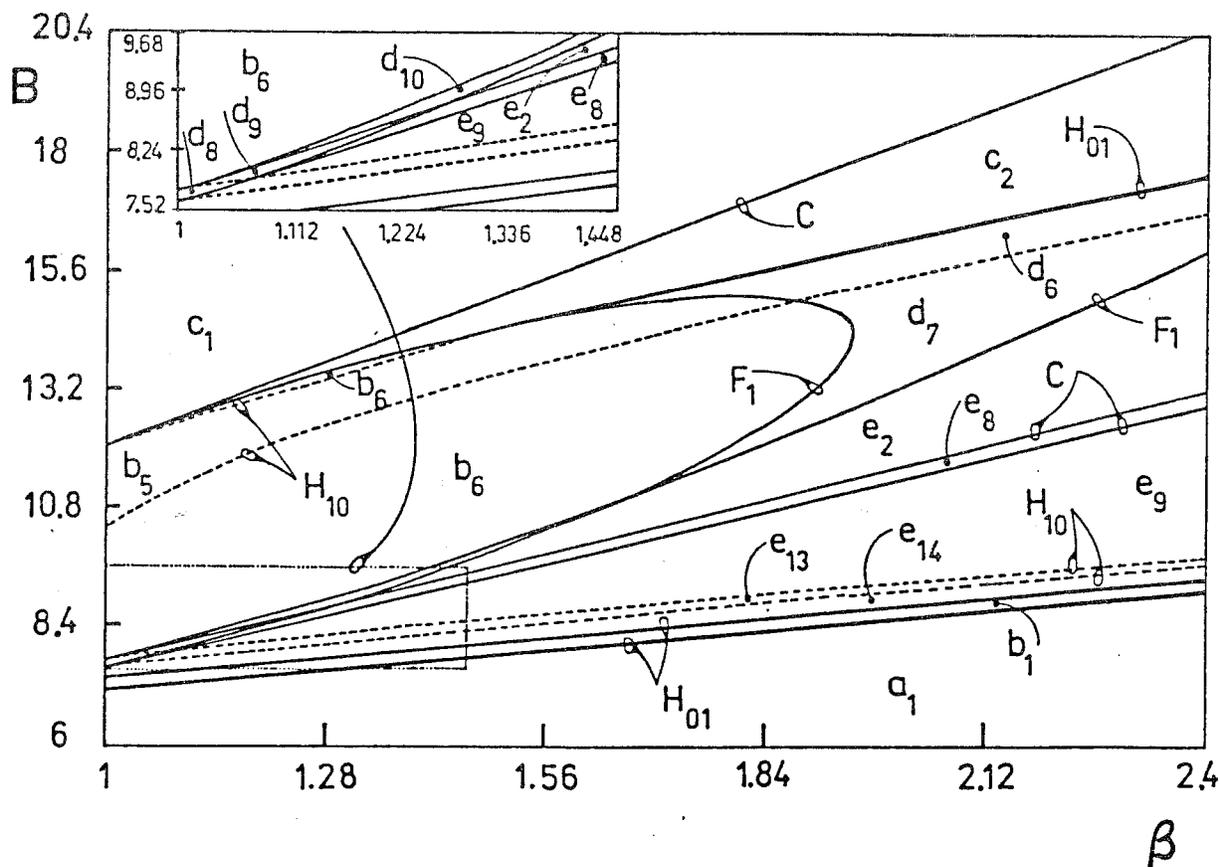


Figura 4.7: Curvas de bifurcaciones degeneradas para $\alpha=1$ y $S=0.01$.

En dichos diagramas locales se indican los puntos de bifurcaciones estáticas sin ánimo de analizar exactamente la forma de la solución de equilibrio. Estos diagramas se muestran de una forma cualitativa y con el objeto de resumir ambos fenómenos de bifurcaciones estáticas y dinámicas en la región de los parámetros del sistema. Así podemos ver ahora como varían dichos diagramas locales al cruzar alguno de los tipos de bifurcaciones o singularidades presentadas en las Figuras 4.6 y 4.7. Por ejemplo, cruzando la singularidad H_{01} desde la región a_1 a la b_1 tendremos en cada una un diagrama de bifurcación local diferente. Luego la región b_1 es enteramente similar a la región a_1 pero con dos puntos de bifurcaciones de Hopf debido al cruce de esta degeneración H_{01} . En forma análoga, pero cruzando la singularidad H_{10} desde b_1 a b_2 encontramos que b_2 tiene la misma configuración

que b_1 excepto que el punto de bifurcación de Hopf inferior ha cambiado su estabilidad. Teniendo en cuenta el tipo de singularidad que se ha cruzado podemos encontrar así el nuevo diagrama de bifurcación.

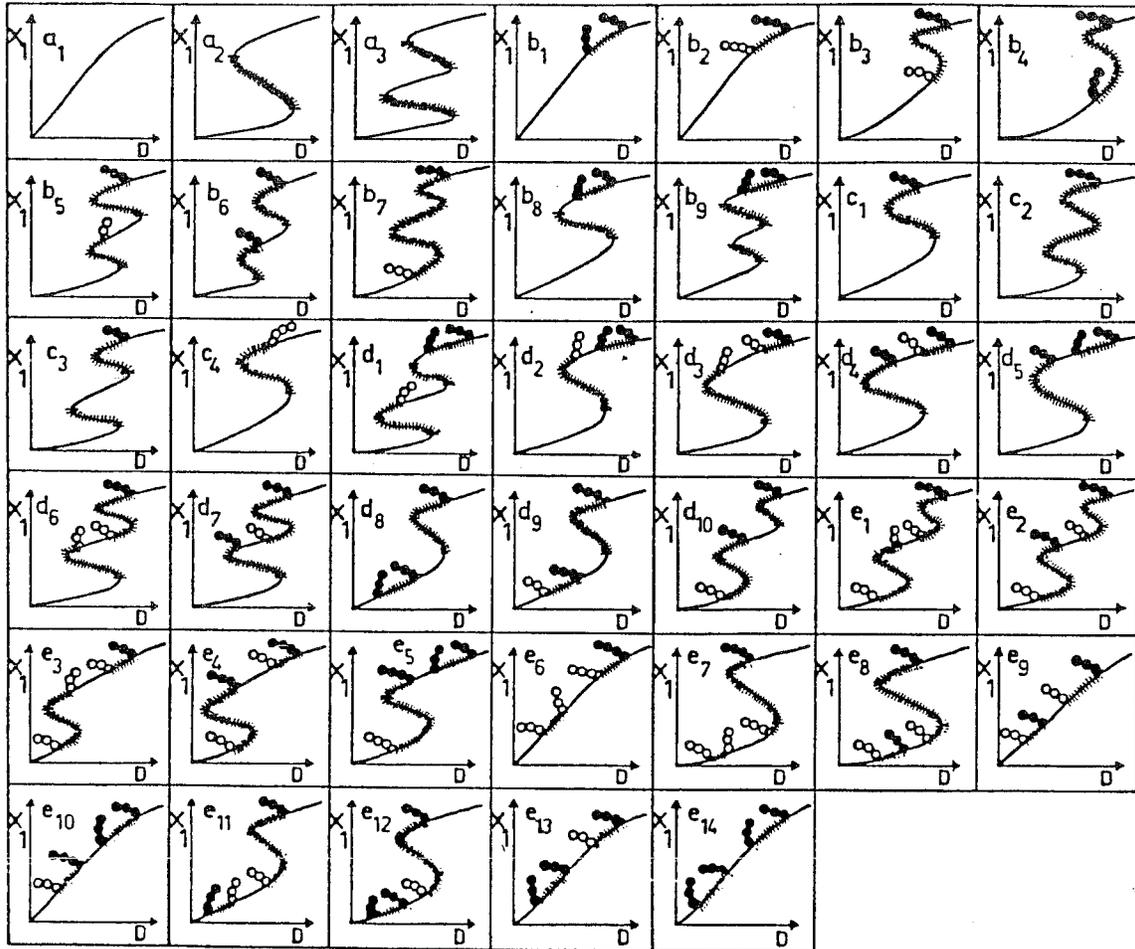


Figura 4.8: Diagramas de bifurcaciones locales correspondientes a las Figuras 4.6 y 4.7. cuando el parámetro D varía.

Hemos indicado otras bifurcaciones degeneradas más complejas en la Figura 4.6 que corresponden a los puntos de intersección (para los mismos valores de D y x_1) de H_{01} y H_{10} , que llamamos H_{11} (véanse las condiciones de definición en la Sección 4.3), H_{01} y H_{01} , que llamaremos H_{02} ; C y C , que notaremos como S (*swallowtail*), etc.

Los cuarenta diagramas locales representativos completan los diez diagramas dados por Halbe y Poore (1981). Sin embargo, todas las posibilidades no están exhaustas y es posible encontrar otra cantidad similar o mayor que la presentada considerando la variación de los dos parámetros auxiliares restantes. No obstante, el espíritu de esta presentación se basa más en mostrar una metodología de análisis que en determinar todas las estructuras posibles de diagramas de bifurcaciones locales. Por ejemplo, en la región triangular superior delimitada por los puntos cuspidales es claro que aparecerán diagramas locales adicionales cuando se grafiquen las variedades de límite doble aumentando considerablemente este número.

Un comentario adicional es el siguiente, sobre las curvas H_{10} no hemos incluido la información del signo de $\sigma_2(w_0, \mu_0)$, o en otras palabras los puntos probables de $\sigma_2(w_0, \mu_0)=0$ con $\sigma_1(w_0, \mu_0)=0$, que darían lugar a las condiciones de definición de las degeneraciones H_{20} . Sin embargo, a los efectos de clasificar los diagramas de bifurcaciones locales estrictamente hablando, esta información puede prescindirse. Otros autores, principalmente Farr (1986), adjuntaron esta información pero en gráficos distorsionados. Sin embargo, muchos de ellos carecen de varias de las curvas de bifurcaciones. A tal efecto, utilizando los resultados de Moiola y colegas (1991a), mostraremos un análisis de las curvas de bifurcaciones degeneradas cuando se varían cuatro parámetros del sistema.

Para determinar otras singularidades de mayor orden partiremos de la situación presentada en la Figura 4.6 donde se nota una interesante interacción entre curvas de bifurcaciones degeneradas estáticas y dinámicas. Para ello variaremos el parámetro S para mostrar como emergen y desaparecen ciertas singularidades en el espacio de parámetros. En cercanías de la singularidad F_1 puede encontrarse el fenómeno de bifurcación de período infinito. Note que el bucle de singularidades F_1 , encerrado en el extremo izquierdo de la Figura 4.6 desaparece en la Figura 4.9 cuando $S=0.06$.

Las poderosas relaciones de unión entre las singularidades C , H_{01} , H_{10}

y F_1 han desaparecido para dar lugar a dos bien distinguidas secciones de la singularidad de catástrofe *swallowtail*, una de ellas comprendiendo a los puntos cuspidales propiamente dichos y la otra a las singularidades H_{01} . Esto ocurre luego de un fenómeno similar al observado en Farr (1986) donde se notaron esquemáticamente las transiciones que ocurren antes que el bucle desaparezca. Para nosotros esta singularidad actúa como uno de los centros organizadores de la dinámica del sistema. Desafortunadamente, el estudio global de esta degeneración resulta extremadamente complejo pues correspondería a una singularidad de Takens-Bogdanov (vea por ejemplo Takens 1974, Bogdanov 1981a, 1981b) con mayor número de estados de equilibrio y cambio

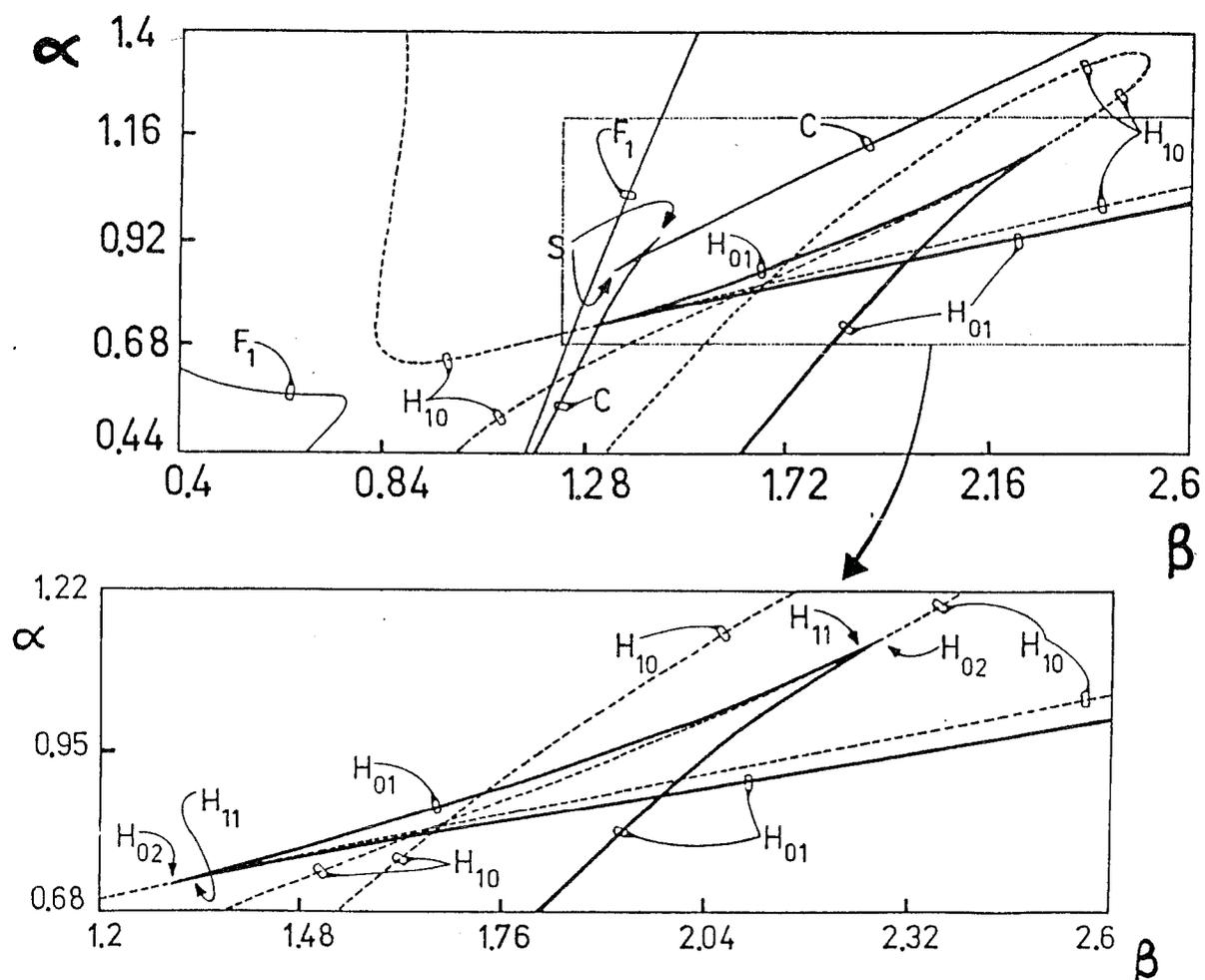


Figura 4.9: Bifurcaciones degeneradas en el plano de parámetros α - β para $B=8$ y $S=0.06$.

de estabilidad en el ciclo límite emergente. El resultado final en el plano de parámetros α - β es el nacimiento de las degeneraciones H_{02} y H_{11} en el lado izquierdo de la singularidad dinámica *swallowtail*. El diagrama amplificado en la parte inferior de la Figura 4.9 sólo muestra las degeneraciones dinámicas indicando cuatro bifurcaciones de Hopf degeneradas de alto orden.

En la Figura 4.10 el parámetro auxiliar S es 0.08. Como hemos mostrado anteriormente en las Figuras 4.4 y 4.5 ambas singularidades *swallowtails* se unen en una singularidad *butterfly*. Así, para valores de α y β por encima de la curva C podemos encontrar hasta tres soluciones de equilibrio, mientras que por debajo de dicha curva no tenemos multiplicidad de la solución de estado estacionario. Por otro lado, el conjunto de catástrofe cuyas secciones corresponden a la singularidad *swallowtail* dinámica va disminuyendo en tamaño, en otras palabras ambas degeneraciones H_{02} se encuentran más juntas a medida que crece el valor de S . Igualmente, ambas degeneracio-

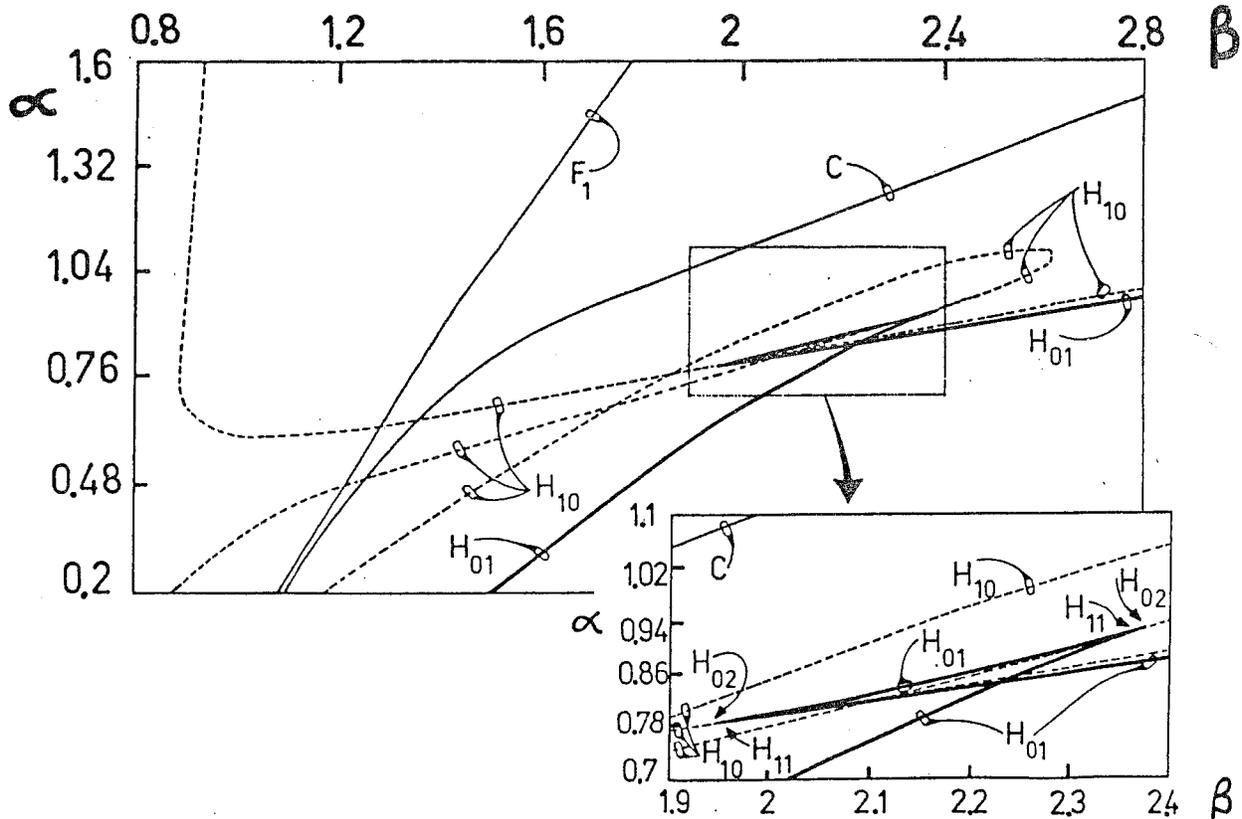


Figura 4.10: Bifurcaciones degeneradas en el plano de parámetros α - β para $B=8$ y $S=0.08$.

nes H_{11} se hallan más próximas a las singularidades H_{02} , por lo cual será una tarea difícil obtener los diagramas locales correspondientes a estas degeneraciones que casi se parecen a una singularidad H_{12} .

La Figura 4.11 muestra las curvas de bifurcaciones degeneradas cuando S es 0.1. Note que la sección transversal de la singularidad *swallowtail* aún persiste en el plano de los parámetros α - β . Los dos diagramas inferiores son ampliificaciones de la zona de interés. Nuevamente, ambas degenera-

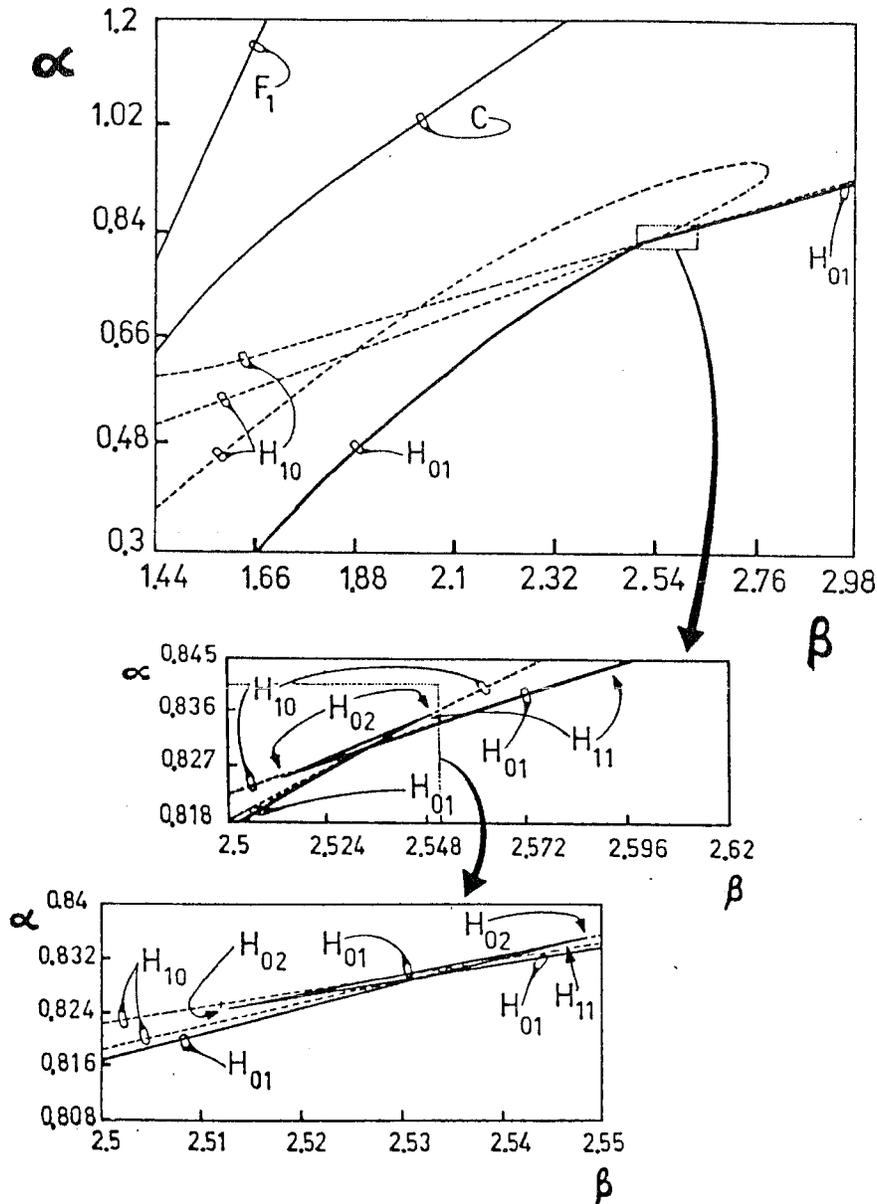


Figura 4.11: Bifurcaciones degeneradas en el plano de parámetros α - β para $B=8$ y $S=0.1$.

ciones H_{02} se encuentran más próximas entre sí, y una de las singularidades H_{11} (específicamente la de menores valores de β en la Figura 4.11) se movió para la rama inferior de las degeneraciones H_{01} luego de pasar por una singularidad H_{12} para valores de S comprendidos en $0.08 < S < 0.1$.

La Figura 4.12 muestra las curvas de bifurcaciones degeneradas cuando $S=0.12$. Note que la forma de las curvas H_{01} cambia notablemente en esta situación con respecto a la Figura anterior. Además, ambas singularidades H_{02} desaparecen en una degeneración H_{03} para un valor de S comprendido en $0.1 < S < 0.12$. En cercanías de esta última degeneración encontramos la interacción entre cuatro puntos de bifurcaciones de Hopf. Al mismo tiempo, ambas singularidades H_{11} están más próximas entre sí que en la figura previa. Para aclarar más la situación, la Figura 4.13 presenta una considerable am-

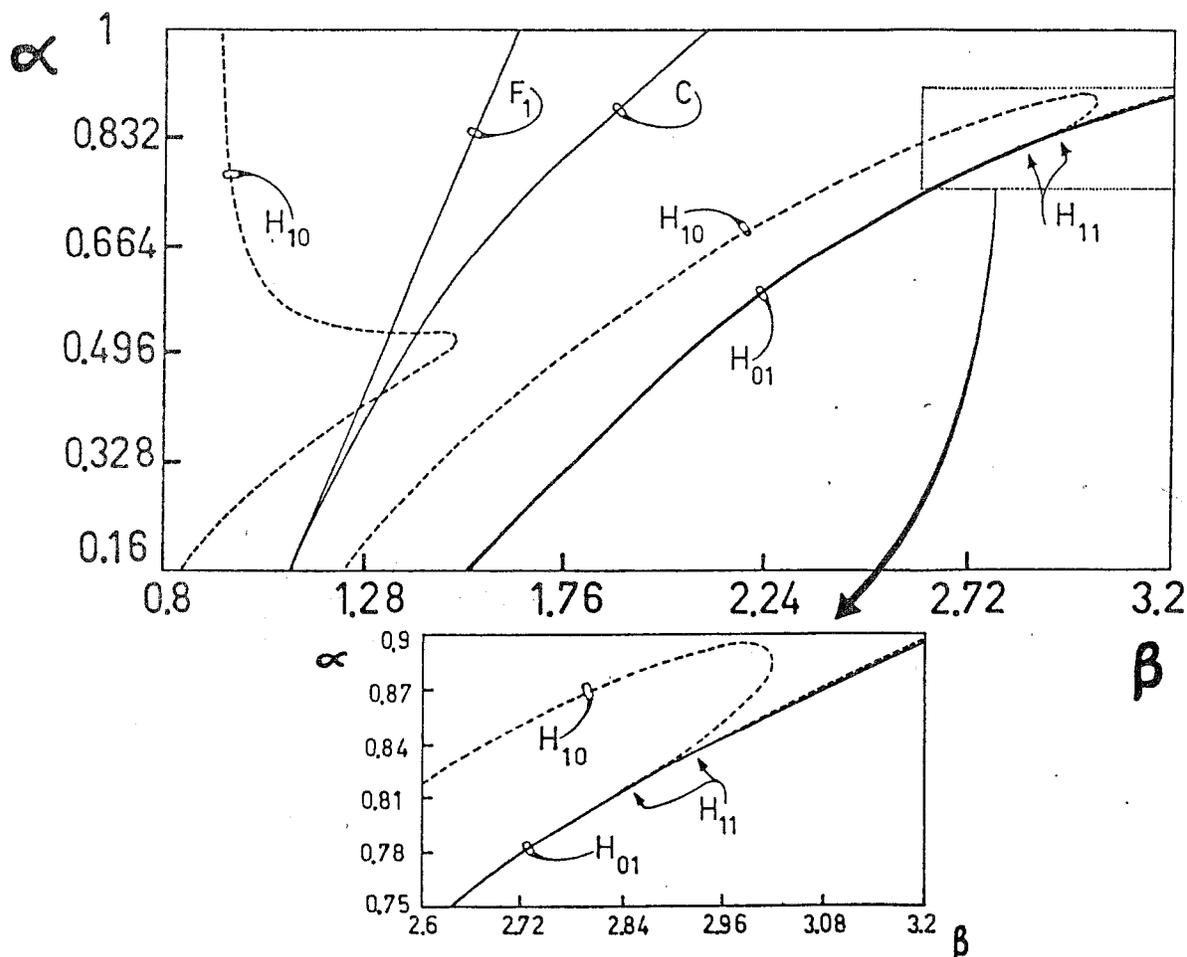


Figura 4.12: Bifurcaciones degeneradas en el plano de parámetros α - β para $B=8$ y $S=0.12$.

pliación del pequeño diagrama de la Figura 4.12 para mostrar la localización de ambas singularidades H_{11} sobre la única curva H_{01} .

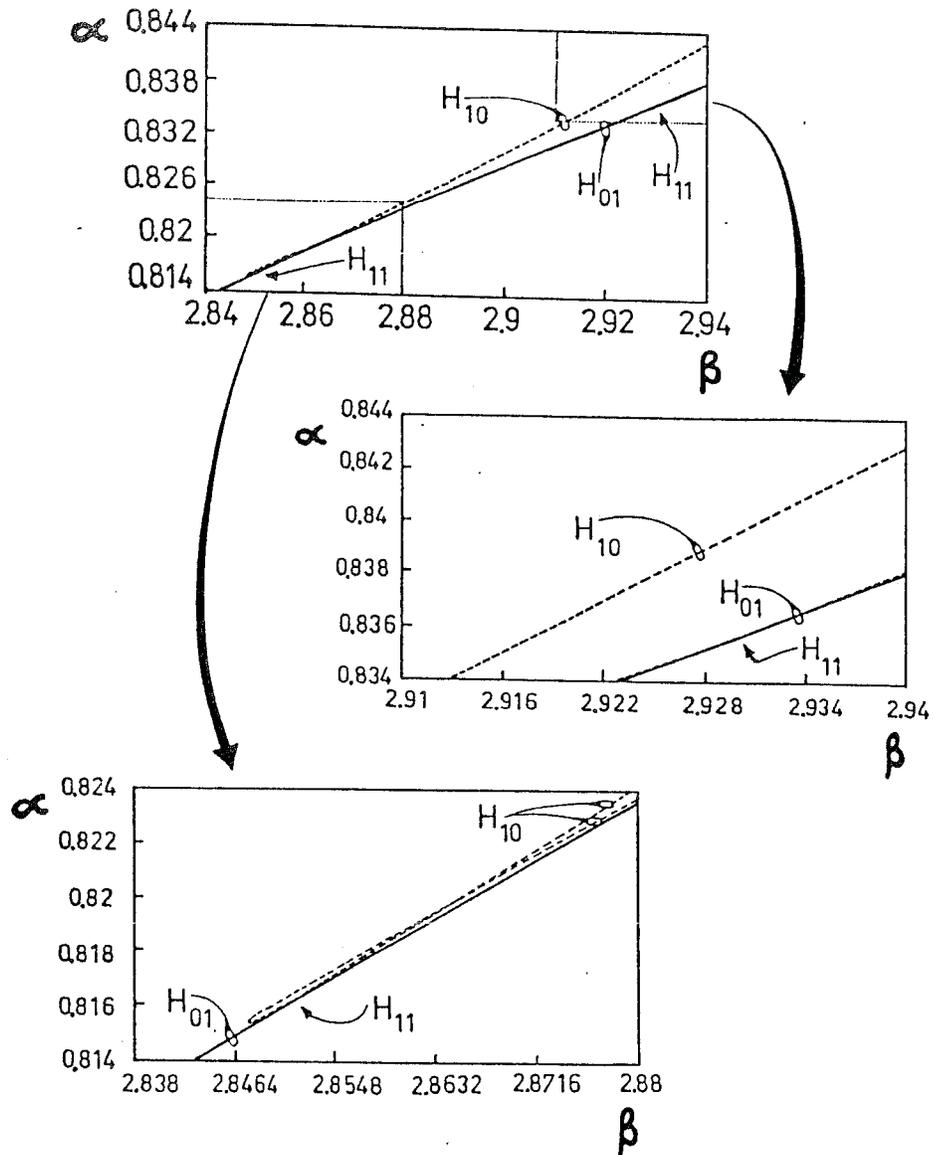


Figura 4.13: Ampliación de la Figura 4.12. Bifurcaciones degeneradas en el plano de parámetros α - β para $B=8$ y $S=0.12$.

Finalmente, en la Figura 4.14 incluimos las curvas de bifurcaciones luego de la desaparición de ambas degeneraciones H_{11} para un valor de $S=0.14$. En todas las figuras consideradas a partir de la Figura 4.9 hemos

fijado el parámetro $B=8$, por lo que creemos es posible encontrar la bifurcación degenerada H_{13} para este modelo muy cerca de nuestro conjunto de parámetros investigado. Debemos mencionar que de incluir el cálculo de los coeficientes de curvatura σ_2 , σ_3 y σ_4 podríamos encontrar otras degeneraciones de Hopf en este espacio de parámetros extendidos.

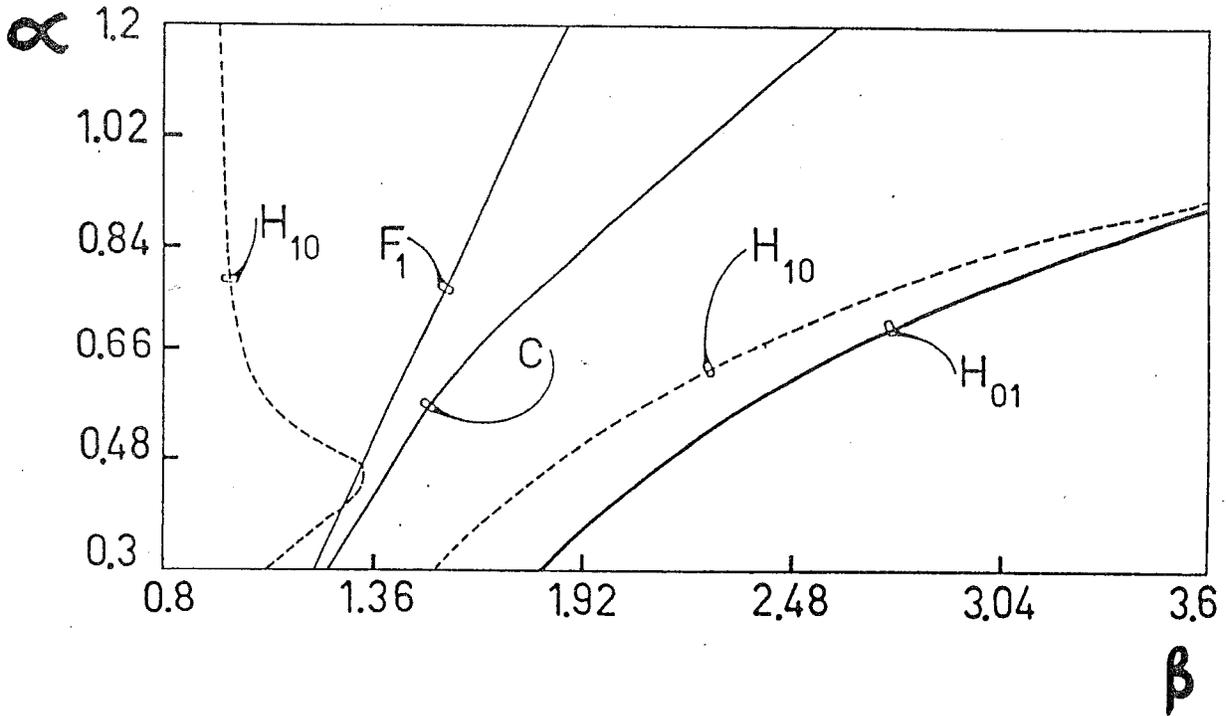


Figura 4.14: Bifurcaciones degeneradas en el plano de parámetros α - β para $B=8$ y $S=0.14$.

Recientemente, Byeon y Chung (1989) exploraron la desaparición de las singularidades *swallowtails* estáticas y dinámicas para valores próximos a los parámetros aquí presentados. El objetivo de nuestro trabajo fue presentar fórmulas equivalentes pero partiendo de la metodología en el dominio frecuencia que utiliza la representación característica de sistemas realimentados de control. Aunque el tratamiento de Byeon y Chung (1989) permite mostrar varios diagramas de bifurcaciones globales no queda claro de esta última referencia si los mismos se han obtenido por simulación o usando algún programa de continuación de órbitas periódicas. Más aún, el número de

diagramas en Byeon y Chung (1989) es menor que el presentado en la Figura 4.8, por lo cual creemos que la anterior referencia completa nuestros resultados pues calcula las variedades de límite doble. Notemos también que muchos de los diagramas ejemplificados en la Figura 4.8 completan la búsqueda realizada en Byeon y Chung (1989) pues estos últimos investigadores no calcularon los ceros del coeficiente de curvatura como fácilmente se desprende de la observación de las gráficas relacionadas con la singularidad *swallowtail* dinámica.

CAPITULO 5

BIFURCACIONES DEGENERADAS DE HOPF

Hasta aquí se han visto las implicancias del teorema de bifurcación de Hopf, una forma de cálculo aproximado de la solución periódica emergente y la determinación de ciertas curvas de bifurcación cuando fallan dos de los postulados (o su combinación) en el clásico teorema utilizando el método en el dominio frecuencia. Sin embargo, todavía no se ha indicado una metodología para calcular los diagramas de bifurcaciones locales en un entorno de las degeneraciones más simples. En este contexto trataremos brevemente los resultados de la teoría de singularidades para poder recuperar los diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de las degeneraciones. Con esta información en mente y los resultados preliminares de los capítulos anteriores podemos mostrar, al menos localmente, como el método gráfico en el dominio frecuencia puede resolver los diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de estas degeneraciones. Este proceso se mostrará para dos de las familias de bifurcaciones degeneradas de Hopf. En la Sección 5.1 daremos una introducción y reseña histórica. En la Sección 5.2 daremos los lineamientos y resultados del estudio de estas bifurcaciones degeneradas utilizando la teoría de singularidades. En cambio, en la Sección 5.3 mostraremos cómo pueden hallarse los respectivos diagramas locales usando las técnicas del dominio frecuencia. Finalmente, en la Sección 5.4, incluiremos un ejemplo de análisis para mostrar la aplicación del método.

5.1. INTRODUCCION

De las cuatro hipótesis originales que Hopf consideró para la prueba de su hoy famoso teorema, digamos que conservaremos las dos primeras, a saber: a) Un par simple de autovalores complejos conjugados, que ante la variación del parámetro μ , se hace imaginario puro. b) Todos los demás autovalores tienen parte real negativa. La violación de la primera hipótesis corresponde a la aparición de múltiples autovalores sobre el eje imaginario, situación que debe estudiarse para cada caso en especial. En particu-

lar, podemos recomendar los tratamientos de Langford (1979, 1983), Guckenheimer (1984), Guckenheimer y Holmes (1985), Golubitsky y Roberts (1987) y Crawford y Knobloch (1988), entre otros. La segunda hipótesis es considerada la mayoría de las veces incluida en la primera. En cambio, la falla de la condición de transversalidad (que correspondería al tercer postulado) y la falla del coeficiente de curvatura (o cuarto postulado), pueden pensarse como degeneraciones que conducen a múltiples puntos de bifurcaciones de Hopf la primera y a múltiples ciclos límites en la rama bifurcada la segunda.

Entre las contribuciones más sobresalientes que trataron de resolver el problema planteado por las fallas de los postulados 3 y 4 pueden mencionarse a Andronov y colegas (1973), Takens (1973), Flockerzi (1979), Kielhöfer (1979) y Vanderbauwhede (1980). Sin embargo, estos trabajos mencionados fueron el preludio del tratado más completo hasta la fecha como clasificación de las bifurcaciones degeneradas de Hopf: La contribución de Golubitsky y Langford (1981). Este último trabajo mostró una metodología para analizar los diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de las singularidades y trató además las fallas combinadas de los postulados 3 y 4. Más tarde, Golubitsky y Schaeffer (1985) clasificaron otras singularidades de mayor orden dejando el terreno despejado para las aplicaciones concretas. Estas últimas, entonces, no se hicieron esperar.

La primera aplicación numérica de importancia la realizó Labouriau (1983, 1985, 1989) en sistemas biológicos. La siguieron las aplicaciones de Planeaux y Jensen (1986) y Farr (1986) en ingeniería química, Chen y Varaiya (1988) en ingeniería eléctrica, Margolis y Matkowsky (1989) en teoría de combustión, entre otras. Recientemente algunos investigadores han empleado técnicas combinadas de análisis teórico y numérico sofisticadas, tales como las aplicaciones de Hassard y Shiau (1989) y Shiau y Hassard (1991), en biología. Particularmente en la última referencia se usaron técnicas derivadas de la teoría de singularidades para el análisis de las bifurcaciones degeneradas de Hopf junto con las aplicaciones del sofisticado programa AUTO (Doedel, 1986) para la continuación de las soluciones periódicas.

Cabe mencionar que todas estas aplicaciones hacen uso intensivo de los resultados dados por Golubitsky y Langford (1981). Sin embargo, otras formulaciones independientes han mostrado su eficacia para analizar los diagramas locales en cercanías de algunas de estas singularidades. Estas variantes fueron dadas por Atadan y Huseyin (1984, 1986) y Huseyin (1986) empleando el método de balance armónico intrínseco, y por Moiola y colaboradores (1990c, 1991b) aplicando herramientas de la teoría de sistemas realimentados junto con técnicas de balance armónico. No obstante, la formulación dada por Golubitsky y Langford (1981) es tan extremadamente completa y poderosa que la convierten, sin lugar a dudas, en la mejor opción para el estudio de bifurcaciones degeneradas de Hopf. Sin embargo, consideramos de sumo interés completar una metodología para el estudio de tales degeneraciones sobre todo si permite su aplicación directa en una disciplina tan vasta como es la teoría de control. En parte de este capítulo y en los siguientes seguiremos mostrando cómo la formulación en el dominio frecuencia rescata la dinámica del sistema y constituye así una herramienta poderosa para el análisis de oscilaciones en sistemas no lineales.

5.2. BIFURCACIONES DEGENERADAS DE HOPF Y LA TEORIA DE SINGULARIDADES

En esta sección no se pretenden presentar los lineamientos más distintivos de la teoría de singularidades sino un bosquejo del tratamiento de bifurcaciones degeneradas de Hopf usando herramientas de dicha teoría. Para facilitar la consulta con trabajos o libros más específicos uniformaremos primero la notación científica. Comenzaremos enunciando el teorema de bifurcación de Hopf junto con una notación más acorde con las principales referencias en este subtópico. Consideraremos campos vectoriales de "n" dimensiones que dependen en forma *suave* de las variables de estado como así también de un vector de "p" parámetros independientes. Aquí haremos una distinción entre todos los parámetros del sistema: uno de ellos será llamado el parámetro distintivo o principal de bifurcación, por ejemplo μ , es decir el parámetro clásico asociado con la bifurcación de Hopf. Los otros son considerados como parámetros de *perturbación*. Digamos que estos últimos

definen un espacio de $(p-1)$ dimensiones. Por simplicidad en la notación, primero omitiremos la dependencia de dicho vector con los parámetros $(p-1)$ dimensionales.

Supongamos entonces $\dot{v}=f(v,\mu)$ con $f(0,0)=0$ que llamaremos soluciones de equilibrio. Si a) El Jacobiano de $f(\cdot)$ cerca del punto $(v,\mu)=(0,0)$ tiene autovalores simples $\alpha(\mu)\pm i\omega(\mu)$ con $\alpha(0)=0$, $\omega(0)\neq 0$ y no existen otros autovalores en el eje imaginario en $(0,0)$; b) $d\alpha/d\mu(0)\neq 0$, es decir la condición de cruce de los autovalores es transversal; c) $\mu_2\neq 0$, donde μ_2 es el coeficiente de estabilidad o de curvatura.

Entonces, existe una única rama de soluciones periódicas que emerge de $(0,0)$. La estabilidad y dirección de la rama periódica cumple con la clásica fórmula de la expansión de la amplitud

$$\mu = \mu_2 x^2,$$

y el principio de cambio de estabilidad (es decir a un estado de equilibrio inestable corresponde un ciclo límite estable o viceversa). Generalmente x es una medida de la amplitud del ciclo límite, como se muestra en la Figura 5.1.

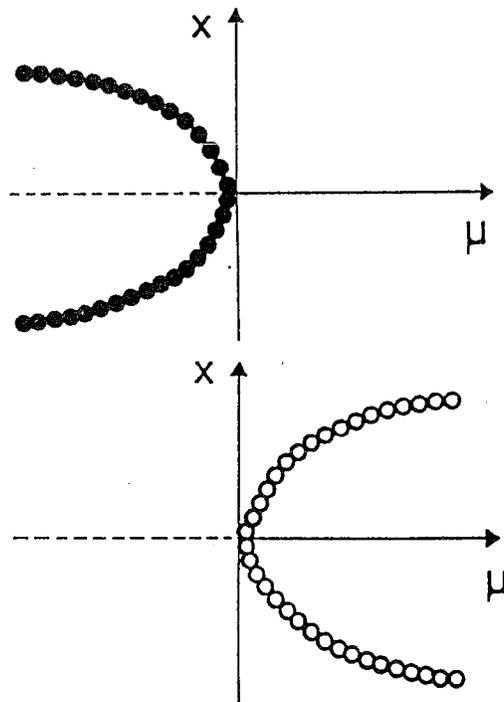


Figura 5.1: Bifurcación de Hopf subcrítico y supercrítico.

Definición

Llamaremos a un punto de bifurcación de Hopf degenerado si la primera condición a) se satisface, pero una o ambas de las hipótesis b) y c) no se satisfacen.

Estas bifurcaciones degeneradas de Hopf pueden ser analizadas estudiando una ecuación definida implícitamente, tal como fue mostrado en Golubitsky y Langford (1981). Esta ecuación incluye, al menos localmente, la información de la dinámica del sistema original. Diremos localmente pues esta ecuación resultante consiste en una versión simplificada del sistema dinámico considerando que las soluciones son periódicas. Así entonces podemos escribir

$$a(x^2, \mu)x = 0, \quad \text{con } a(0,0)=0, \quad (5.1)$$

donde $x=0$ corresponde a las soluciones de estado estacionario, y las soluciones de $a(\cdot)=0$ para $x \neq 0$ representan soluciones periódicas en el sistema original. Se usa entonces la teoría de singularidades para analizar las soluciones no triviales de la ecuación (5.1), es decir para $x \neq 0$, considerando una perturbación en la ecuación original en la degeneración, adicionando para tal fin la variación de parámetros auxiliares.

Para describir las soluciones no triviales de la ecuación (5.1) podemos reemplazar $z=x^2$ (notemos que $z \geq 0$). Entonces, la ecuación resulta $a(z, \mu)x=0$. Notemos que no reemplazamos $x=\sqrt{z}$ debido a que sólo estamos interesados en la solución $x=0$ ó solución de equilibrio.

Enunciaremos ahora las condiciones de no-degeneración del clásico teorema de bifurcación de Hopf como sigue

$$b) \quad \frac{d\alpha}{d\mu}(0) = -a_\mu, \quad (a_\mu = -\frac{\partial a}{\partial \mu}(\cdot)),$$

$$c) \quad \mu_2 = \frac{-a_z}{a_\mu}, \quad (\mu_2 = -\frac{\partial a}{\partial z} / \frac{\partial a}{\partial \mu}).$$

Sin embargo, resulta una tarea difícil de realizar analíticamente, aún para estas derivadas parciales de primer orden, calcular estas expresiones para la clase general de sistemas no lineales. Por lo tanto algunos autores han preferido evaluarlas numéricamente (Hassard, Kazarinoff y Wan, 1981; Shiau y Hassard, 1991).

Para simplificar la notación introduciremos la siguiente expresión

$$a_{i,j} = \frac{\partial^{i+j} a}{\partial z^i \partial \mu^j} \quad (5.2)$$

Entonces el análisis de las bifurcaciones degeneradas de Hopf utilizando la teoría de singularidades consiste en tres etapas. En la primera se identifica la estructura dinámica cualitativa de la singularidad con un simple polinomio, denominado forma normal. Este proceso consiste en obtener las derivadas de la función $a(z, \mu)$ y calcular su valor. Aquéllas que se anulen se identificarán con las condiciones de definción, mientras que las desigualdades corresponderán a las condiciones de no-degeneración para que la singularidad no sea de mayor orden. La teoría provee entonces un mínimo número de parámetros requerido para construir un entorno general de estas formas normales con todas sus variantes. Este entorno general significa que se permitirá una perturbación de los parámetros auxiliares de tal forma de describir completamente la dinámica de la singularidad utilizando un número mínimo de parámetros.

La segunda etapa consiste en el análisis de la forma normal propiamente dicha obtenida para determinar todos los diagramas de bifurcaciones presentes en cercanías de la singularidad. Los elementos cualitativos que dividen las regiones del espacio de parámetros en diferentes diagramas de bifurcaciones se conocen como variedades de transición. Estas variedades se definen de la siguiente manera

$$B_0 = \{p: \exists \mu \text{ tal que } a(z, \mu) = a_\mu(z, \mu) = 0, \text{ en } (0, \mu; p)\} \quad (5.3)$$

$$H_0 = \{p: \exists \mu \text{ tal que } a(z, \mu) = a_z(z, \mu) = 0, \text{ en } (0, \mu; p)\} \quad (5.4)$$

$$H_1 = \{p: \exists z, \mu \text{ con } z > 0 \text{ tal que } a(z, \mu) = a_z(z, \mu) = a_{zz}(z, \mu) = 0, \text{ en } (z, \mu; p)\} \quad (5.5)$$

$$D = \{p: \exists \mu, z_1, z_2 \text{ con } z_1 \neq z_2 \text{ y } z_1, z_2 \geq 0 \text{ tal que } a(z, \mu) = za_z(z, \mu) = 0, \text{ en } (z_1, \mu; p) \text{ y } (z_2, \mu; p)\} \quad (5.6)$$

$$B_1 = \{p: \exists z, \mu \text{ con } z > 0 \text{ tal que } a(z, \mu) = a_z(z, \mu) = a_\mu(z, \mu) = 0 \text{ en } (z, \mu; p)\}. \quad (5.7)$$

En cada caso "p" consiste en un vector de parámetros auxiliares. Entonces, usando estos conjuntos de transiciones podemos analizar las variaciones de las formas normales, que tienen una naturaleza polinomial, bajo la influencia de los parámetros auxiliares. Sin embargo, el análisis es aún local aunque pueda obtenerse una gran diversidad de diagramas de bifurcaciones. La razón es simple: otros fenómenos más complejos de bifurcación, no contemplados en la teoría, pueden aparecer en cercanías de estas bifurcaciones degeneradas. Nos referimos específicamente a bifurcaciones en un toro invariante o rutas conducentes a movimientos caóticos.

La etapa final consiste en identificar los parámetros del sistema real con aquellos resultantes de las perturbaciones de la forma normal. Esta no es una tarea difícil de hacer localmente, pero generalmente requiere el uso de una computadora. Especialmente las tres últimas transiciones presentadas exhiben problemas numéricos tan difíciles de tratar que aún no han sido resueltas eficientemente.

Luego podemos describir las bifurcaciones degeneradas de Hopf como aquellas singularidades pertenecientes a una de las tres familias: *I) Singularidades que involucran la falla de la segunda hipótesis del teorema de bifurcación de Hopf.* Para las mismas requerimos como condición de no-degeneración que $a_{10} = a_z(0, \mu) \neq 0$. Como hemos visto en el capítulo anterior llamaremos a los miembros de esta familia H_{0m} , donde "m" es el número de parámetros auxiliares requerido para contemplar todas las posibilidades de diagramas de bifurcaciones locales. Las condiciones de definición de los miembros de la familia H_{0m} son

$$a_{01}(0,\mu) = a_{02}(0,\mu) = \dots = a_{0m}(0,\mu) = 0, \quad (5.8)$$

con las condiciones de no-degeneración

$$a_{10}(0,\mu) \neq 0, \quad a_{0,m+1}(0,\mu) \neq 0.$$

Las formas normales y el entorno generalizado para los dos primeros miembros de esta familia se dan a continuación.

i) Degeneración H_{01} , cuyas condiciones de definición son $a_{01}(0,\mu)=0$ y las condiciones de no-degeneración son $a_{02} \neq 0$, $a_{10}(0,\mu) \neq 0$. Las formas normales de esta singularidad pueden ser de dos tipos como se muestra a continuación:

a) Para este caso la forma normal es

$$x(x^2 + \mu^2) = 0 \quad (5.9)$$

exactamente en la singularidad, mientras que la perturbación en un entorno de un parámetro auxiliar α es

$$x(x^2 + \mu^2 + \alpha) = 0. \quad (5.10)$$

Los diagramas de bifurcaciones para este caso se muestran en la Figura 5.2, donde con línea de puntos indicamos que la solución de equilibrio o la solución periódica es inestable y con línea llena que tales soluciones son estables. Note que para $\alpha > 0$ no tendremos ningún punto de bifurcación de Hopf, mientras que tendremos dos para $\alpha < 0$. La teoría clásica de bifurcación de Hopf predice la forma de ambas ramas de soluciones periódicas pero no su unión esquematizada para valores de $\alpha < 0$.

b) Para este caso la forma normal es

$$x(-x^2 + \mu^2) = 0, \quad (5.11)$$

mientras que la perturbación en un entorno de un parámetro auxiliar α es

$$x(-x^2 + \mu^2 + \alpha) = 0. \quad (5.12)$$

Los diagramas de bifurcaciones locales se presentan en la Figura 5.3. Note que para este caso la teoría de Hopf clásica predice solamente el diagrama correspondiente a $\alpha < 0$. Debe aclararse que cada uno de estos dos casos de la

degeneración H_{01} tiene a su vez dos variantes reemplazando todas las soluciones estables por inestables y viceversa, en caso que la asignación de estabilidad tuviera sentido contrario al de las Figuras 5.2 y 5.3. Esta observación vale también para todas las degeneraciones que trataremos a continuación por lo cual omitiremos en cada una de ellas la consabida aclaración.

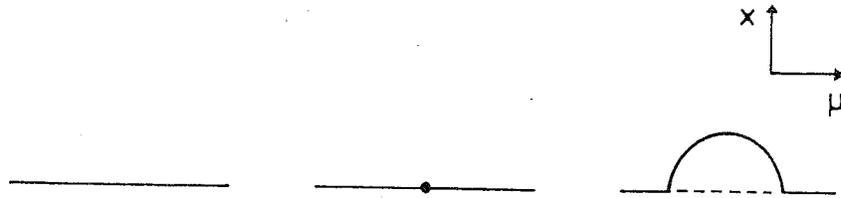


Figura 5.2: Diagramas de bifurcaciones locales para la singularidad H_{01} (ecuación (5.10)).

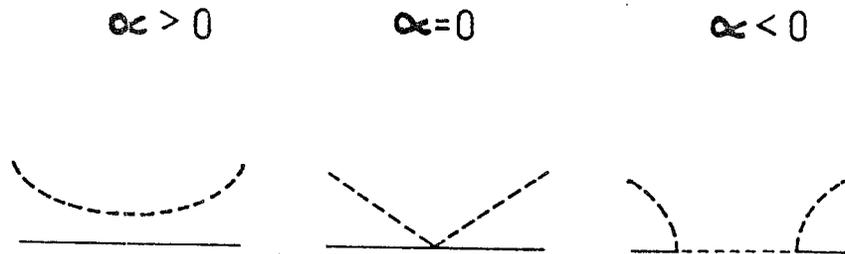


Figura 5.3: Diagramas de bifurcaciones locales para la singularidad H_{01} (ecuación (5.12)).

ii) Degeneración H_{02} , cuyas condiciones de definición son $a_{01}(0,\mu)=a_{02}(0,\mu)=0$ y las condiciones de no-degeneración son $a_{10}(0,\mu)\neq 0$ y $a_{03}(0,\mu)\neq 0$. Como en la singularidad anterior tendremos dos casos diferentes.

a) La forma normal es

$$x(x^2 - \mu^3) = 0, \quad (5.13)$$

mientras que su perturbación en una región de dos parámetros auxiliares α y β es

$$x(x^2 + \mu^3 + \alpha + \beta\mu) = 0. \quad (5.14)$$

El plano de parámetros α - β queda dividido en la forma indicada por la Figura 5.4. Los diagramas de bifurcaciones locales, en tanto, correspondientes a las regiones 0,1 y 2 son indicados en la Figura 5.5.

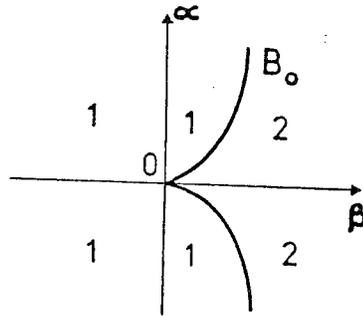


Figura 5.4: Variedades de transición en el espacio de parámetros α - β en cercanías de la singularidad H_{02} .

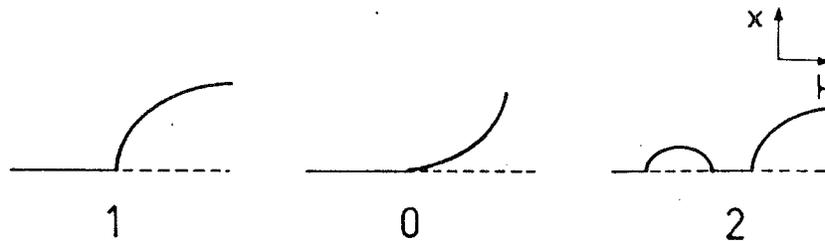


Figura 5.5: Diagramas de bifurcaciones locales para la singularidad H_{02} (ecuación (5.14)).

b) La forma normal es

$$x(x^2 + \mu^3) = 0, \quad (5.15)$$

mientras que su perturbación en una región de dos parámetros auxiliares α - β es

$$x(x^2 + \mu^3 + \alpha + \beta\mu) = 0. \quad (5.16)$$

Los diagramas de bifurcaciones locales en este caso se muestran en la Figura 5.6.

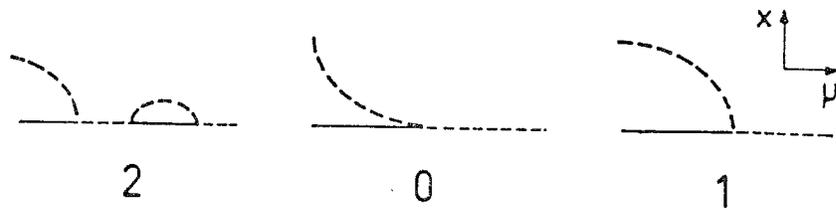


Figura 5.6: Diagramas de bifurcaciones locales para la singularidad H_{02} (ecuación (5.16)).

II) Singularidades que involucran la falla de la tercera hipótesis del clásico teorema de bifurcación de Hopf. Esta segunda familia es una clase de complemento de la primera, pero en lugar de tener multiplicidad en los puntos de bifurcaciones de Hopf, tiene multiplicidad de ciclos límites. Para ello requerimos como condición de no-degeneración que $a_{01}(0, \mu) \neq 0$, pero permitiremos que se anulen las derivadas parciales de $a(z, \mu)$ con respecto a z .

Definiremos entonces una singularidad H_{n0} como la degeneración que satisface las siguientes condiciones de definición

$$a_{10}(0, \mu) = a_{20}(0, \mu) = \dots = a_{n0}(0, \mu) = 0, \quad (5.17)$$

y las condiciones de no-degeneración

$$a_{01}(0, \mu) \neq 0 \quad \text{y} \quad a_{n+1,0}(0, \mu) \neq 0. \quad (5.18)$$

Las expresiones (5.17) son conocidas como los índices focales, índices de estabilidad o coeficientes de curvatura. En términos más simples diremos que las degeneraciones H_{n0} conducen a puntos límites en la rama de las soluciones periódicas y a múltiples ciclos límites. Las formas normales y el entorno generalizado para los dos primeros miembros de esta familia son:

i) Para la degeneración H_{10} , cuyas condiciones de definición son $a_{10}(0, \mu) = 0$ y las condiciones de no-degeneración $a_{01}(0, \mu) \neq 0$ y $a_{20}(0, \mu) \neq 0$, tendremos dos casos a considerar.

a) La forma normal es

$$x(x^4 + \mu) = 0, \quad (5.19)$$

mientras que su perturbación en un entorno de un parámetro auxiliar α es

$$x(x^4 + \mu + \alpha x^2) = 0. \quad (5.20)$$

Note que el punto límite (PL) representa la coalescencia entre las soluciones periódicas estables e inestables como se muestra en la Figura 5.7.

b) La forma normal es

$$x(x^4 - \mu) = 0, \quad (5.21)$$

y su perturbación en un entorno del parámetro auxiliar α es

$$x(x^4 - \mu + \alpha x^2) = 0. \quad (5.22)$$

Los diagramas de bifurcaciones locales se incluyen en la Figura 5.8 donde puede notarse, como en el caso anterior de la Figura 5.7, que para la condición crítica ($\alpha=0$) la rama periódica emerge en forma más *vertical* que para cualquiera de los otros dos diagramas donde α es o bien positiva o bien negativa.

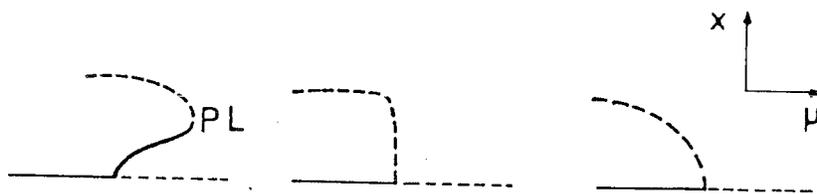


Figura 5.7: Diagramas de bifurcaciones locales para la singularidad H_{10} (ecuación (5.20)).

$\alpha < 0$

$\alpha = 0$

$\alpha > 0$

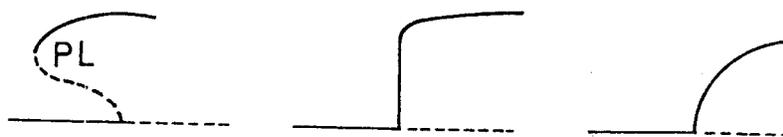


Figura 5.8: Diagramas de bifurcaciones locales para la singularidad H_{10} (ecuación (5.22)).

ii) Degeneración H_{20} , cuyas condiciones de definición son $a_{10}(0,\mu)=a_{20}(0,\mu)=0$ y las condiciones de no-degeneración son $a_{01}(0,\mu)\neq 0$ y $a_{30}(0,\mu)\neq 0$. Mostraremos uno de los dos casos para esta singularidad, pues el restante puede obtenerse en forma análoga a los anteriormente presentados.

La forma normal es

$$x(x^6 - \mu) = 0, \quad (5.23)$$

mientras que su perturbación en una región de parámetros auxiliares α - β es

$$x(x^6 - \mu + \alpha x^2 + \beta x^4) = 0. \quad (5.24)$$

Las variedades de transición en el plano de los parámetros auxiliares α - β dividen al mismo de la manera indicada por la Figura 5.9. Nótese que al atravesar estas variedades se modifica significativamente la forma de los diagramas de bifurcaciones locales como se muestra en la Figura 5.10. Notemos que para los diagramas de bifurcaciones locales que poseen hasta dos puntos límites es posible encontrar hasta tres ciclos límites en la rama de soluciones periódicas para un mismo valor del parámetro μ .

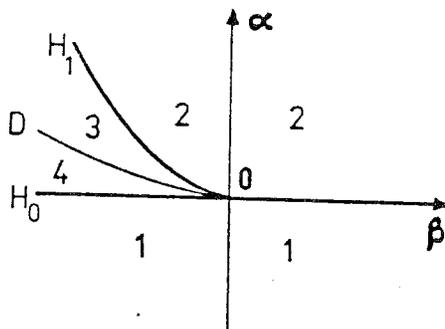


Figura 5.9: Variedades de transición en el espacio de parámetros α - β en cercanías de la singularidad H_{20} .

Si consideráramos la singularidad H_{30} podríamos encontrar hasta cuatro ciclos límites rodeando el mismo estado de equilibrio para ciertas combinaciones de tres parámetros auxiliares y el parámetro de bifurcación principal μ . Esta singularidad, por comodidad, la presentaremos en el capítulo 7 cuando se calculen expresiones aproximadas para los coeficientes de curvatura.

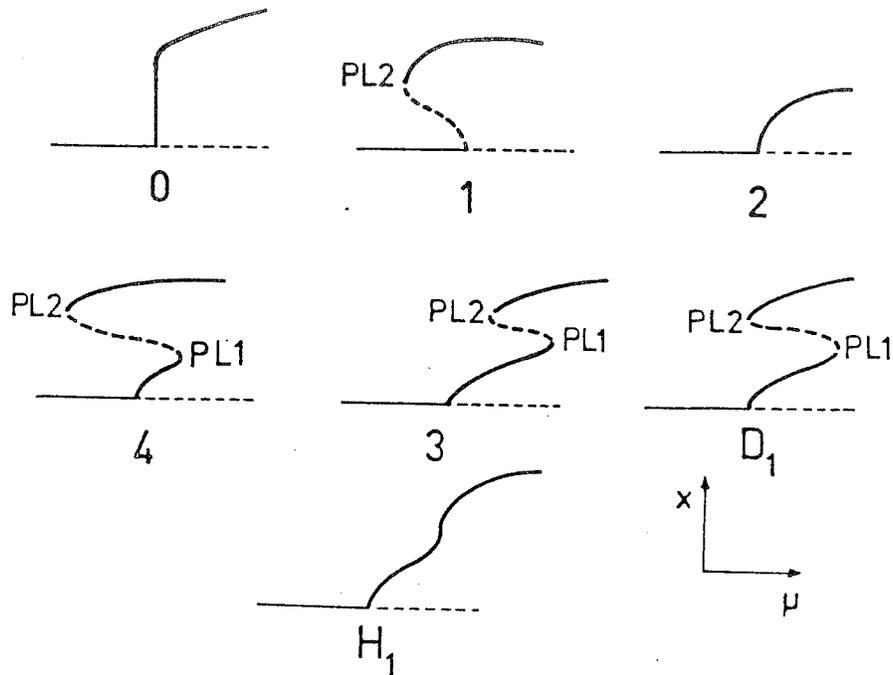


Figura 5.10: Diagramas de bifurcaciones locales para la singularidad H_{20} (ecuación (5.24)).

III) Singularidades que involucran la falla combinada de las segunda y tercera hipótesis del teorema de bifurcación de Hopf. Estas degeneraciones difieren considerablemente de las dos familias tratadas precedentemente debido a la presencia de un parámetro modal. El más simple de sus miembros se define de tal forma de satisfacer las siguientes condiciones de definición

$$a_{10}(0, \mu) = a_{01}(0, \mu) = 0. \quad (5.25)$$

Su forma normal es

$$x(\epsilon x^4 + 2m\mu x^2 + \delta\mu^2) = 0, \quad (5.26)$$

donde

$$\epsilon = \text{signo}(a_{20}), \quad \delta = \text{signo}(a_{02}), \quad \text{y} \quad m = \frac{a_{11}}{\sqrt{|a_{20}a_{02}|}}.$$

Las condiciones de no-degeneración son $a_{20}(0, \mu) \neq 0$, $a_{02}(0, \mu) \neq 0$ y $m^2 \neq \epsilon\delta$. El parámetro "m" se conoce como parámetro modal. Notemos que si $m^2 = \epsilon\delta$, enton-

ces la ecuación (5.26) puede factorizarse. Las otras condiciones de no-degeneración corresponden a lo siguiente:

- a) Si $a_{20}(0, \mu) = 0$, tendremos múltiples soluciones periódicas; y
- b) Si $a_{02}(0, \mu) = 0$, tendremos interacciones entre tres puntos de bifurcación de Hopf. La forma normal resultante en el entorno generalizado requiere la inclusión de dos parámetros adicionales α y β , dando como resultado la siguiente expresión

$$x(\epsilon x^4 + 2 m \mu x^2 + \delta \mu^2 + \alpha + \beta x^2) = 0. \quad (5.27)$$

Luego, existen tres situaciones distintas de bifurcaciones asociadas dependiendo de los valores de ϵ , δ y m . La primera ocurre para

$$\epsilon \delta = -1.$$

Las conjuntos de transición y los diagramas locales se muestran en las Figuras 5.11 y 5.12, dependiendo del signo de "m". La correspondiente forma normal es

$$x(x^4 + 2 m \mu x^2 - \mu^2 + \alpha + \beta x^2) = 0. \quad (5.28)$$

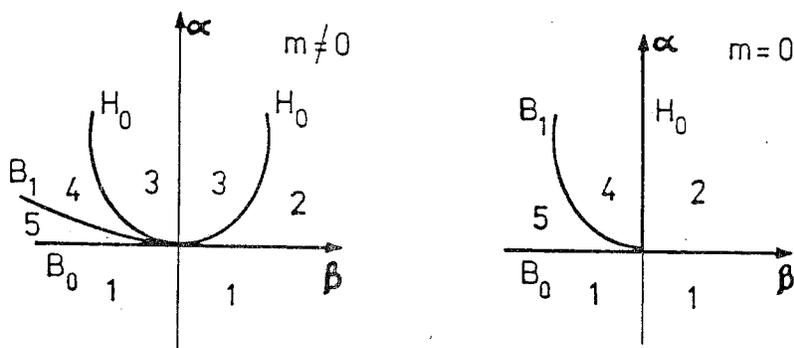


Figura 5.11: Variedades de transición en el espacio de parámetros α - β en cercanías de una singularidad H_{11} .

Notemos que en la Figura 5.12 los diagramas de bifurcaciones locales presentan la interacción entre dos puntos de bifurcación de Hopf y dos ciclos límites en la rama de soluciones bifurcadas. Para otra posibilidad de ϵ , δ y m , Golubitsky y Langford (1981) mostraron la presencia de soluciones pe-

riódicas aisladas de la solución de equilibrio. Este fenómeno es conocido como *isolas* de ciclos límites, siendo actualmente aún complejo calcular la estructura global de las mismas pues muchos algoritmos necesitan como punto de partida un punto de bifurcación de Hopf. Como para estas estructuras no tenemos puntos de bifurcación de Hopf se han sugerido ciertas variantes que, no obstante, carecen de una eficiencia razonable (vea, por ejemplo más comentarios en Doedel, 1986).

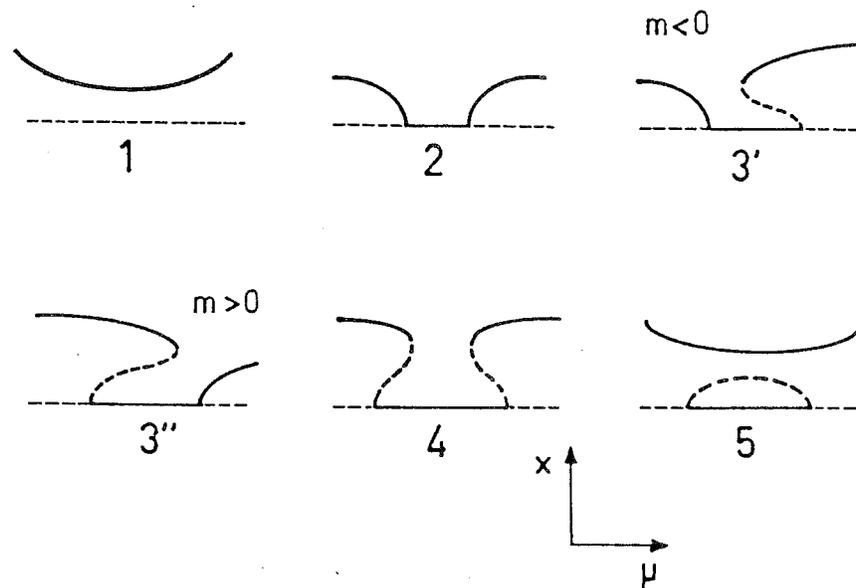


Figura 5.12: Diagramas de bifurcaciones locales para uno de los casos de singularidades H_{11} .

En Golubitsky y Schaeffer (1985) fueron analizados otros miembros de esta familia que conducen a una gran variedad de diagramas de bifurcaciones locales. En la sección siguiente mostraremos cómo el método gráfico puede capturar los diagramas de bifurcaciones locales para las dos primeras familias de bifurcaciones degeneradas de Hopf. Para la tercera familia creemos que pueden hacerse análisis similares, pero sería más conveniente calcular el valor de "m" utilizando las técnicas en el dominio frecuencia y así identificar su respectiva forma normal usando los resultados de Golubitsky y Schaeffer (1985).

5.3. BIFURCACIONES DEGENERADAS DE HOPF Y EL METODO EN EL DOMINIO FRECUENCIA

En el capítulo 4 hemos visto cómo se definían algunas bifurcaciones degeneradas de Hopf utilizando técnicas en el dominio frecuencia. Sin embargo, para algunas de tales condiciones veremos la formulación correspondiente en el capítulo 7. Nos referimos, específicamente, a las expresiones de los coeficientes de curvatura. No obstante, puede notarse que una vez individualizadas las condiciones de definición y de no-degeneración de las singularidades con la formulación en el dominio frecuencia, se torna inmediata la obtención de las correspondientes formas normales y diagramas de bifurcaciones locales. Ello es posible gracias a los resultados de Golubitsky y Langford (1981). En otras palabras, la formulación en el dominio frecuencia permite dos líneas claras de análisis: a) La primera consiste en trasladar las condiciones de definición y de no-degeneración al dominio frecuencia, aplicando luego los resultados de Golubitsky y Schaeffer (1985). b) La segunda, consiste en obtener los diagramas de bifurcaciones locales utilizando el método gráfico en el dominio frecuencia considerando la aproximación de balance armónico más apropiada.

En esta sección haremos uso de la segunda alternativa de análisis, mostrando sus aspectos más distintivos como así también sus ventajas y desventajas. No obstante, para ello necesitamos considerar una expansión de la función no lineal $f(e, \mu)$ en la rama de la realimentación que incluya las derivadas de mayor orden, y por ende realizar un balance armónico superior al segundo. Los pasos a seguir fueron dados por primera vez en Mees (1981) para el cálculo de un balance armónico de cuarto orden y en Tang y colaboradores (1983) para el cálculo de un balance armónico de cualquier orden. No obstante, en esta última referencia se utilizaron series de Volterra y los autores, aunque mostraron de qué manera podían obtenerse los vectores solución en forma iterativa, calcularon únicamente las fórmulas explícitas correspondientes al balance armónico de segundo orden. Recientemente, en forma análoga a la presentada en Mees (1981), Moiola y colegas (1991b) derivaron las fórmulas de una aproximación de balance armónico de sexto orden, es decir incluyendo la información hasta la derivada séptima de la

función no lineal. Más tarde, en Moiola (1991) fueron presentadas las fórmulas correspondientes a una aproximación de balance armónico de octavo orden. Describiremos brevemente los lineamientos generales para obtener dichas aproximaciones, para luego mostrar su aplicación en la recuperación de ciertos diagramas de bifurcaciones locales.

Una extensión natural consiste en presentar una mejor aproximación de la solución gráfica dada por

$$\hat{\lambda}(i\omega) = -1 + \xi_1(\omega_r)\theta^2, \quad (5.29)$$

e implementada en el capítulo 2 siguiendo el algoritmo de cálculo respectivo. Esta mejor aproximación puede notarse de la siguiente manera

$$\hat{\lambda}(i\omega) = -1 + \sum_{k=1}^q \xi_k \theta^{2k}, \quad (5.30)$$

donde los números complejos ξ_k se obtienen luego de realizar una aproximación de balance armónico de $2k$ -ésimo orden. En otras palabras, el gráfico resultante de la ecuación (5.29) que incluía una línea recta desde el punto crítico $(-1+i0)$ se convierte en una curva en la expresión (5.30) parametrizada en θ . Los resultados de estabilidad de la solución periódica siguen las mismas reglas que para la aproximación de balance armónico de segundo orden. Entonces necesitamos encontrar las intersecciones, si existen, entre el lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(i\omega)$ y el lugar geométrico de la amplitud L_q que definimos de la siguiente manera

$$L_q(\omega, \theta) = -1 + \sum_{k=1}^q \xi_k \theta^{2k}. \quad (5.31)$$

Estas intersecciones corresponderán a aproximaciones de soluciones periódicas en el sistema real. Sobre el lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(i\omega)$ leeremos la frecuencia de la solución periódica, mientras que sobre el lugar geométrico de la amplitud obtendremos una medida de θ . Supondremos que el sistema no lineal representado por las ecuaciones (2.1) en la Figura 2.4.a presenta soluciones periódicas para ciertos valores de μ , en la forma dada por

$$e(t) = \hat{e} + \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{2q} E^k \exp(ik\omega t) \right] + O(\delta^{2q+1}), \quad (5.32)$$

donde $\delta = (|\mu - \mu_0|)^{1/2}$ es suficientemente pequeño, μ_0 es el valor del parámetro principal de bifurcación en el punto crítico y

$$E^0 = \theta^2 V_{02} + \theta^4 V_{04} + \dots + \theta^{2q} V_{0,2q}, \quad (5.33.a)$$

$$E^1 = \theta V_{11} + \theta^3 V_{13} + \dots + \theta^{2q+1} V_{1,2q+1}, \quad (5.33.b)$$

$$E^2 = \theta^2 V_{22} + \theta^4 V_{24} + \dots + \theta^{2q} V_{2,2q}, \quad (5.33.c)$$

$$E^3 = \theta^3 V_{33} + \theta^5 V_{35} + \dots + \theta^{2(q-1)} V_{3,2(q-1)}, \quad (5.33.d)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$E^{2q} = \theta^{2q} V_{2q,2q}. \quad (5.33.e)$$

Supondremos además que la función no lineal en la rama de la realimentación es diferenciable hasta el orden $2r+1$, donde $1 \leq q \leq r$. Dado que $e(t)$ tiene frecuencia ω , también tiene esta frecuencia $f(e(t))$, pues asumimos que estamos ante una solución periódica del sistema realimentado, luego debemos obtener los coeficientes de Fourier F^k como funciones de $E^0, E^{\pm 1}, \dots, E^{\pm i}$, donde $E^{-k} = \bar{E}^k$.

Debemos resolver la ecuación fundamental de balance armónico resultante de igualar la entrada y salida de la parte lineal y no lineal respectivamente

$$E^k = -G(ik\omega)F^k, \quad (5.34)$$

donde $k=0, \pm 1, \dots, \pm 2q$.

Realizando la expansión de $f(e)$ en series de Taylor alrededor del punto de equilibrio \hat{e} , sustituyendo la expresión de prueba $e(t)$ dada por (5.32) y utilizando algunas propiedades de las funciones trigonométricas podemos verificar

$$(\theta^2 \xi_1 + \theta^4 \xi_2 + \theta^6 \xi_3 + \dots) \sum_{j=1}^r u^T V_{1,2j+1} \theta^{2j+1} = -u^T G(i\omega) \sum_{j=1}^r W_{1,2j+1} \theta^{2j+1}. \quad (5.40)$$

Igualando los coeficientes para las mismas potencias en θ tendremos

$$\xi_1 = -u^T G(i\omega) W_{13}, \quad (5.41.a)$$

$$\xi_2 = -u^T G(i\omega) W_{15} - \xi_1 u^T V_{13}, \quad (5.41.b)$$

$$\xi_r = -u^T G(i\omega) W_{1,2r+1} - \xi_{r-1} u^T V_{13} - \xi_{r-2} u^T V_{15} - \dots. \quad (5.41.c)$$

Como puede verse de las fórmulas anteriores todos los ξ_r pueden calcularse si los $V_{1,2r+1}$ son conocidos. Luego de la fórmula que especifica la componente ortogonal a v se obtiene

$$P [G(i\omega) D_1 + I] V_{1,2j+1} = -P G(i\omega) W_{1,2j+1}, \quad (5.42.a)$$

y

$$V_{1,2j+1} \perp v, \quad (5.42.b)$$

donde $P=I-vv^T$ es la proyección sobre un subespacio ortogonal a v . En Moiola (1991) se presentaron las fórmulas completas de los vectores V_{ij} y los números complejos ξ_3 y ξ_4 resultantes de considerar sendas aproximaciones de balances armónicos de sexto y octavo órdenes, respectivamente.

Finalmente, para concluir esta somera descripción de las técnicas empleadas, diremos que los números complejos ξ_k dependen de la frecuencia solución $\hat{\omega}$. Sin embargo, tomaremos en la aplicación al final de esta sección el cálculo de los ξ_k en ω_r , la frecuencia de intersección de $\hat{\lambda}(i\omega)$ con el eje real negativo más cercano al punto crítico $(-1+i0)$. En el capítulo siguiente se verá una técnica corregida donde presentaremos un algoritmo de cálculo para hacer más eficientes las aproximaciones de alto orden.

Estamos en condiciones ahora de obtener los diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de dos de las familias de bifurcaciones degeneradas de Hopf. La primer familia involucra la falla en la condición de transversalidad, es decir es la familia de bifurcaciones degeneradas H_{0m} . Como ya hemos indicado las condiciones de definición y de no-degeneración en el capítulo

4 nos remitiremos a analizar los diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de estas singularidades. Notemos que en todos los miembros de la familia H_{0m} hemos supuesto que $\sigma_1(w_0, \mu_0) \neq 0$, por lo que el lugar geométrico de la amplitud L_1 apuntará hacia adentro o hacia afuera pero nunca será tangente al lugar geométrico característico. Esto significa que ante pequeñas perturbaciones en los parámetros del sistema la dimensión del lugar geométrico L_1 no se verá dramáticamente afectada.

Comencemos con el miembro más sencillo de esta familia, es decir la singularidad H_{01} . En forma similar a la gráfica presentada en la Figura 3.1, podemos representar la variación del lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(j\omega)$ cuando se modifica el valor del parámetro principal de bifurcación μ . Una vez finalizado esto diremos que hemos representado la superficie de la ganancia característica. Analicemos ahora con mayor detalle la Figura 5.13 donde se ha llevado a cabo el proceso descrito anteriormente. En la condición del parámetro auxiliar $\alpha = \alpha_1$ podemos encontrar dos puntos de bifurcaciones de Hopf variando el parámetro μ . Los círculos llenos indican soluciones estables mientras que los círculos vacíos representan ciclos límites inestables. Observamos en esta última figura que las ramas de soluciones periódicas crecen en amplitud a medida que se separan de sus respectivos puntos de bifurcaciones de Hopf siguiendo la característica y particular forma parabólica.

Los ciclos límites esquematizados representan las intersecciones entre los lugares geométricos de la amplitud y el lugar geométrico característico. Se incluyen en la misma figura el movimiento de los autovalores complejos conjugados responsables de provocar el fenómeno de bifurcación de Hopf bajo la variación del parámetro μ . Estos autovalores son los de la formulación en el dominio tiempo e indican también dos puntos de bifurcaciones de Hopf para $\mu = \mu_2$ y $\mu = \mu_4$. Para obtener el diagrama de bifurcación local para $\alpha = \alpha_1$ directamente aplicamos el teorema de Hopf gráfico presentado en el capítulo 2, pues para esta condición todos los postulados se satisfacen. Ahora podemos variar α y μ apropiadamente hasta alcanzar las condiciones de definición de la singularidad H_{01} . En este caso la superficie de la ganancia

cia característica tiene un punto de tangencia (ver el diagrama central de la Figura 5.13), es decir, alcanza un extremo cuando pasa por el punto crítico $(-1+i0)$ para $\alpha=\alpha_2$. En otras palabras, el lugar geométrico característico en el punto crítico $(-1+i0)$ alcanza un valor máximo o mínimo local. Esto corresponde a la falla de la condición de transversalidad en el dominio tiempo para el par (α_2, μ_7) , como está indicado en la Figura 5.13. En la misma forma que hemos indicado anteriormente podemos recuperar todas las intersecciones entre ambos lugares geométricos, es decir, característico y de la amplitud, para graficar las ramas de soluciones periódicas como se muestra en la parte superior de la Figura 5.13.

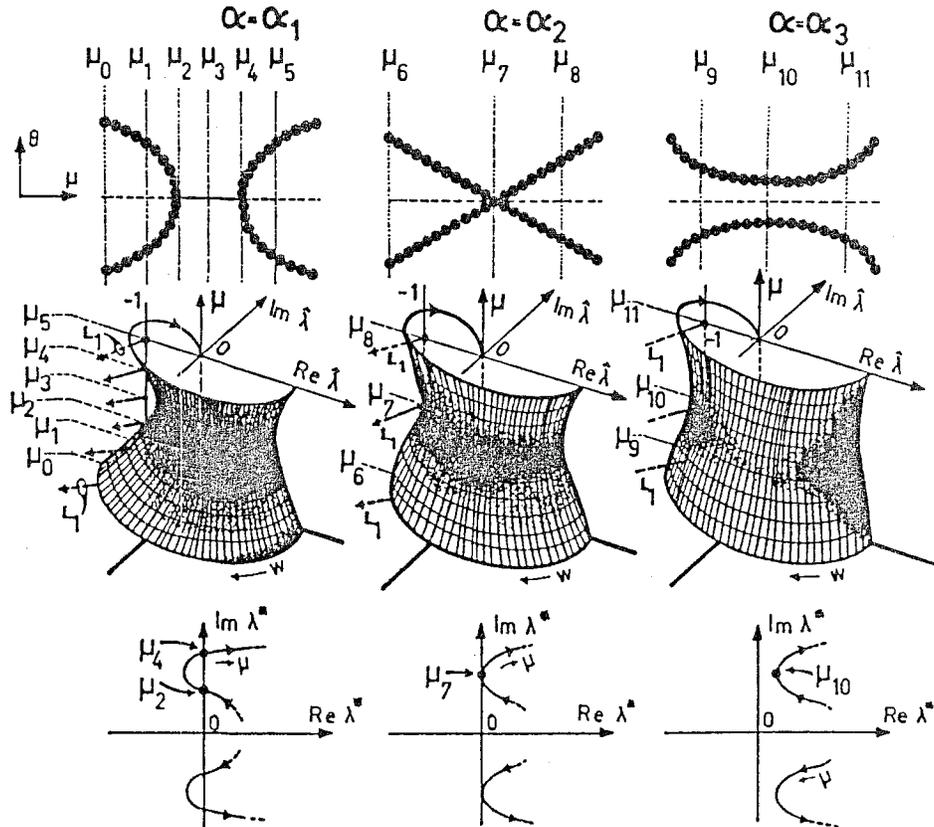


Figura 5.13: Diagramas de bifurcaciones locales y el método en el dominio frecuencia para una singularidad H_{01} .

Finalmente, cuando $\alpha = \alpha_3$ observamos que no existen puntos de bifurcación de Hopf pero si soluciones periódicas. Como fue presentado en Mees (1981), la utilización del método de balance armónico es válido en esta situación si se verifica que la frecuencia de intersección w_r del lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(i\omega)$ con el eje real negativo es cercana a la frecuencia de oscilación \hat{w} , indicada como intersección entre $\hat{\lambda}(i\omega)$ y el lugar geométrico de la amplitud.

Notemos que si el lugar geométrico de la amplitud L_1 apunta hacia adentro, llegaremos a la situación esquematizada en la Figura 5.14. En este caso, podemos sólo detectar intersecciones en un pequeño intervalo en la variación del parámetro principal, es decir en $\mu_1 < \mu < \mu_3$ para $\alpha = \alpha_1$. Notemos, sin embargo, que el lugar geométrico L_1 puede cortar al lugar geométrico $\hat{\lambda}(i\omega)$ pero para valores muy alejados de la frecuencia w_r , es decir $\hat{w} \gg w_r$, y en este caso las aproximaciones locales ya no son válidas.

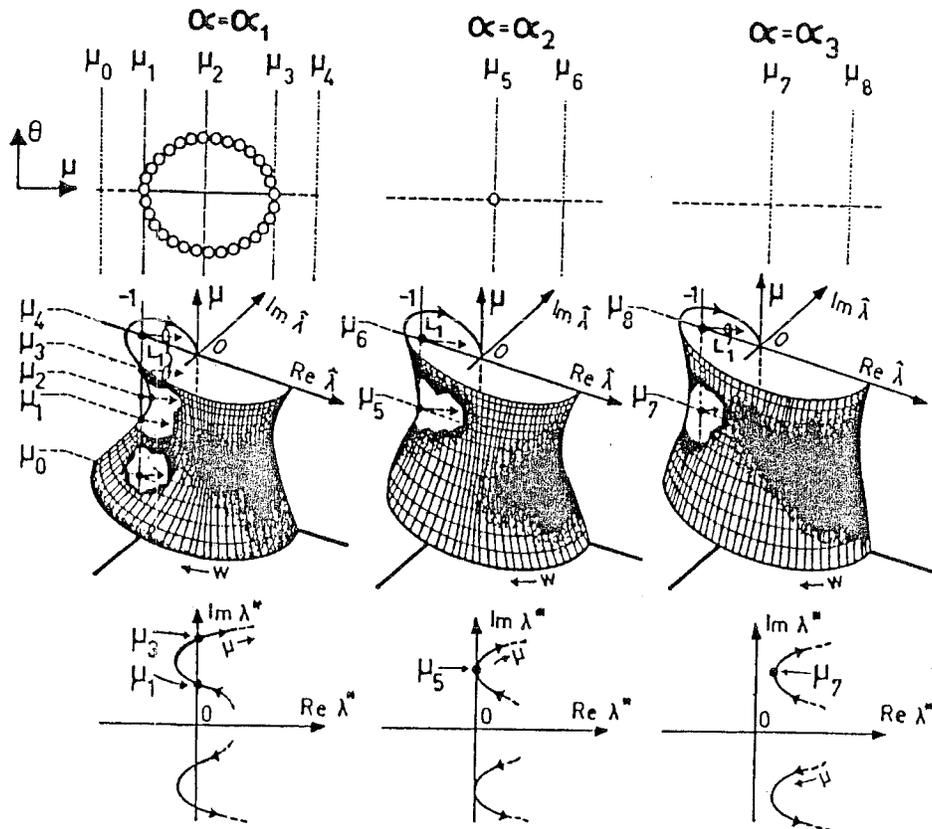


Figura 5.14: Idem a la Fig. anterior pero con diferente estabilidad en la solución bifurcada.

Observemos que si cambiamos la dirección del lugar geométrico de la amplitud y la estabilidad de las soluciones de equilibrio apropiadamente, podemos fácilmente obtener los dos casos restantes para completar la degeneración H_{01} . Es interesante destacar que la estabilidad de la solución de equilibrio en las Figuras 5.13 y 5.14 es la misma, por lo que sólo la dirección del lugar geométrico de la amplitud es determinante para clasificar qué tipo de diagramas de bifurcaciones locales tendremos.

Las Figuras 5.15 y 5.16 muestran, por otro lado, el análisis de los diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de la singularidad H_{02} . Observamos que hasta tres puntos de bifurcaciones de Hopf pueden localizarse ante las variaciones del parámetro principal μ y dos parámetros auxiliares α y β . Incluimos también la correspondiente variación de los autovalores

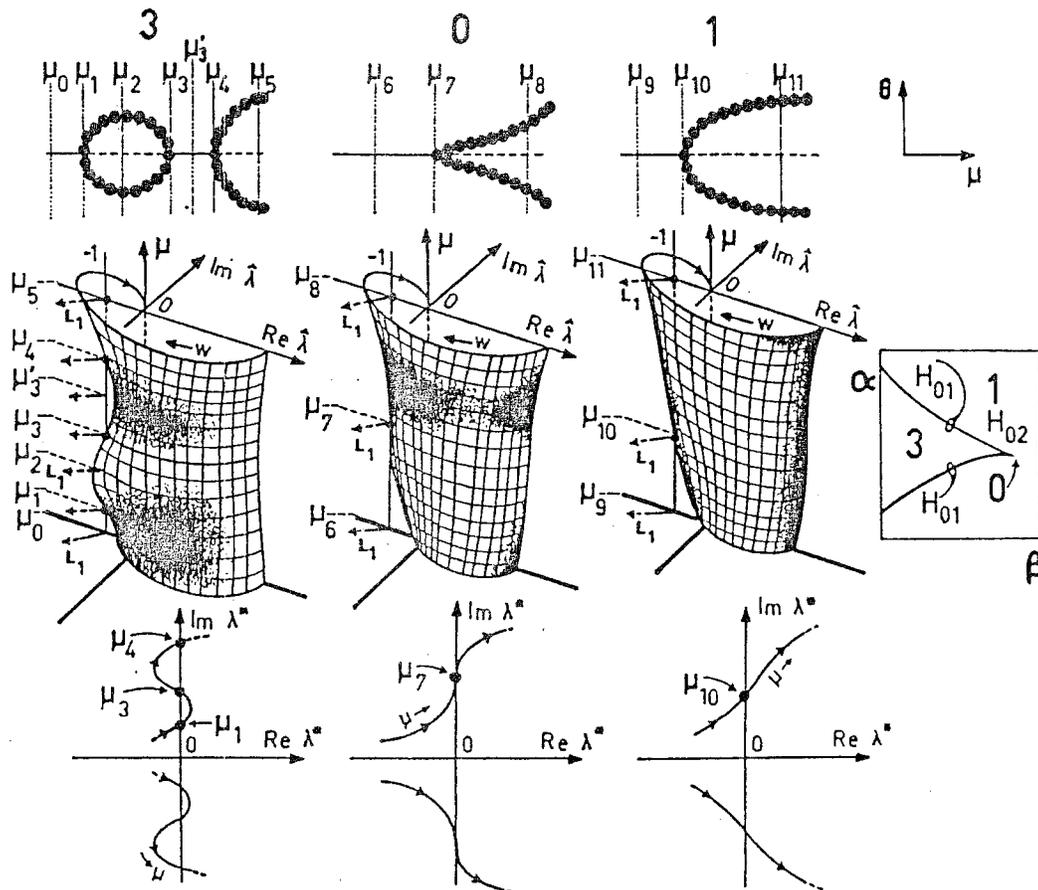


Figura 5.15: Diagramas de bifurcaciones locales y el método en el dominio frecuencia para una singularidad H_{02} .

res de las ecuaciones linealizadas en el dominio tiempo en la parte inferior de las figuras para darle mayor claridad a nuestros resultados. Note que la superficie de las ganancias características de la izquierda tiene tres intersecciones con la línea crítica $(-1+i0)$, pero sólo una intersección para las otras configuraciones. Nuevamente, cambiando la estabilidad de las soluciones de equilibrio y, correspondientemente, la dirección del lugar de la amplitud L_1 podemos encontrar dos figuras más que completan todas las posibilidades de la singularidad H_{02} . En todas las figuras hemos supuesto que la planta es estable a lazo abierto, es decir el hecho de que $\hat{\lambda}(i\omega)$ encierre al punto crítico $(-1+i0)$ significa una solución de equilibrio inestable.

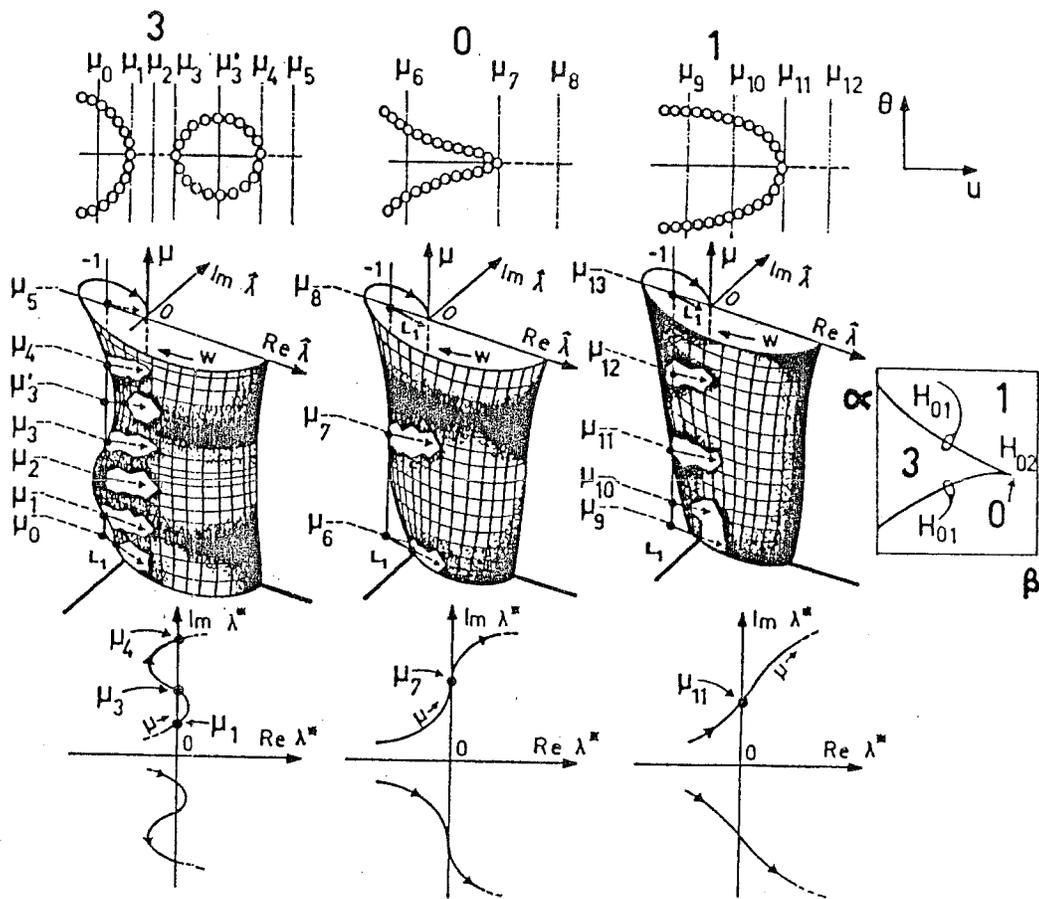


Figura 5.16: Idem a la Fig. anterior pero con diferente estabilidad en la solución bifurcada.

Para esta familia de bifurcaciones degeneradas es suficiente considerar el lugar geométrico de la amplitud L_1 o equivalentemente un balance armónico de segundo orden. Sin embargo, todos los diagramas obtenidos adolecen de la localidad de las soluciones periódicas. Para ganar mayor confianza en el trazado de las ramas de las órbitas periódicas pueden utilizarse los lugares geométricos de las amplitudes L_2, L_3 ó L_4 . En el capítulo 6 haremos uso de estas aproximaciones para comparar las predicciones entre diferentes órdenes en la solución de balance armónico propuesta.

La singularidad H_{03} no fue analizada pero sigue las mismas reglas que el estudio de las singularidades H_{01} y H_{02} . Para este caso tendríamos la interacción entre dos singularidades H_{02} , debiendo considerar un tercer parámetro auxiliar, por ejemplo γ , para poder describir todos los diagramas de bifurcaciones locales en las cercanías de la singularidad.

La segunda familia que trataremos será la correspondiente a degeneraciones H_{n0} . Estas, como ya hemos mencionado, involucran la presencia de $n+1$ ciclos límites en cercanías de la singularidad para valores apropiados de los parámetros principal y auxiliares. Las condiciones de definición y de no-degeneración de varios miembros de esta familia fueron indicados en el capítulo 4. En el capítulo 7 indicaremos como a partir de la información de las ecuaciones de balance armónico es posible obtener una aproximación para determinar los coeficientes de curvatura. Aquí en cambio, mostraremos como pueden obtenerse los diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de estas singularidades aplicando aproximaciones de alto orden en el teorema de bifurcación de Hopf en el dominio frecuencia.

Al menos localmente, diremos que para analizar una singularidad H_{n0} es suficiente realizar un balance armónico de orden $2(n+1)$, es decir para hallar los diagramas locales de H_{10} necesitamos hacer un balance armónico de cuarto orden, para H_{20} , un balance armónico de sexto orden, y así sucesivamente. En todos los miembros de esta familia hemos supuesto que se satisface la condición de cruce transversal de los autovalores, o en otras palabras que $dH/d\mu(\mu_0) \neq 0$ (ver ecuaciones (4.19), (4.20) y (4.23)). Por lo

tanto evitaremos la interacción de dos puntos de bifurcación de Hopf, como en la singularidad H_{01} .

Analicemos primero los diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de la degeneración H_{10} . La misma involucra hasta dos ciclos límites en la misma rama de soluciones periódicas para ciertas combinaciones del parámetro principal μ y del parámetro auxiliar α . En las Figuras 5.17 y 5.18 se muestran los lugares geométricos característicos $\hat{\lambda}(i\omega)$ y de las amplitudes L_1 y L_2 para varias combinaciones de los parámetros. El vector $\xi_1(\omega_0, \mu_5)$ es tangente al lugar geométrico característico que cruza al punto $(-1+i0)$ en $\omega=\omega_0$. Realizando sólo un balance armónico de segundo orden es imposible determinar completamente la rica estructura dinámica en cercanías de esta singularidad. Para ello necesitamos incluir las contribuciones de los armó-

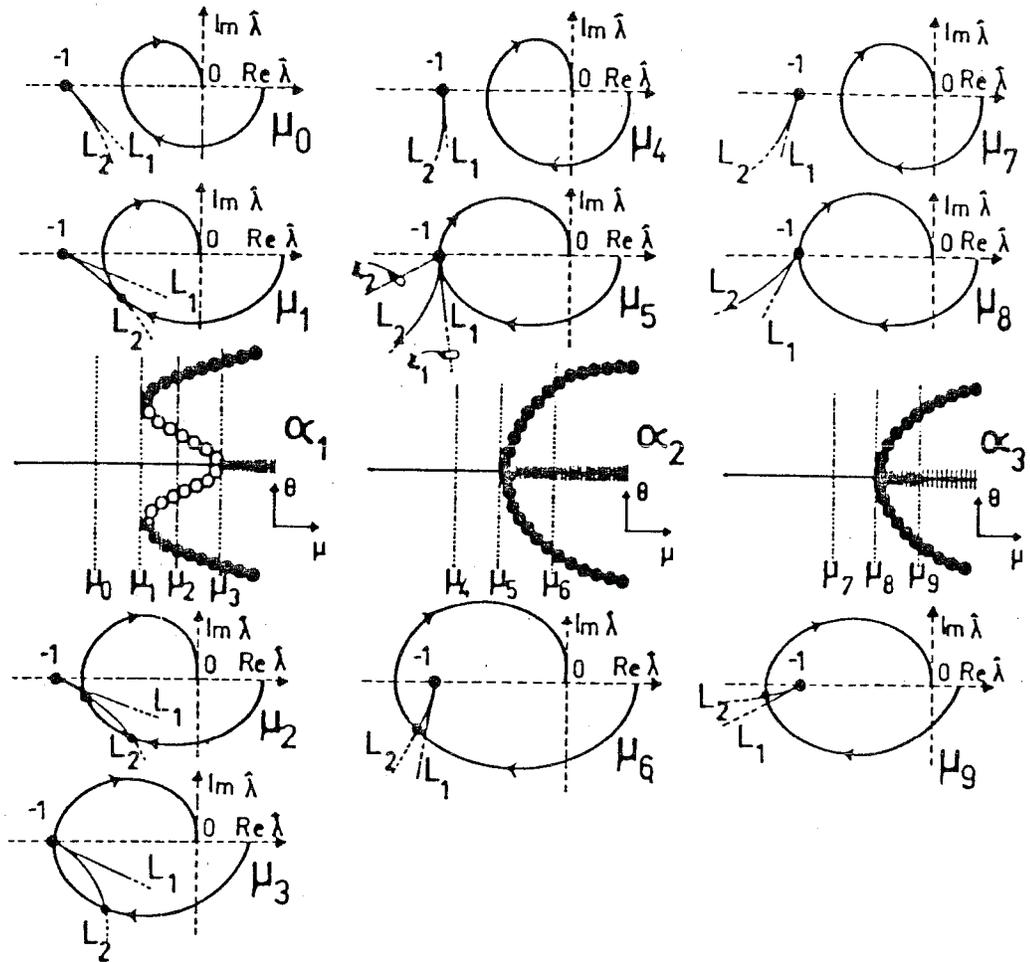


Figura 5.17: Diagramas de bifurcaciones locales y el método en el dominio frecuencia para una singularidad H_{10} .

nicos más altos, hasta el cuarto al menos. Cuando calculamos $\xi_2(w_0, \mu_5)$ podemos obtener dos posibles direcciones de este escalar complejo, como se muestra en las Figuras 5.17 y 5.18. Esto significa que $\xi_2(w_0, \mu_5)$ apunta hacia afuera o hacia adentro del lugar geométrico característico. Como en las figuras anteriores en el estudio de las singularidades H_{0m} supondremos que la solución de equilibrio es estable cuando el lugar geométrico no encierra el punto crítico $(-1+i0)$.

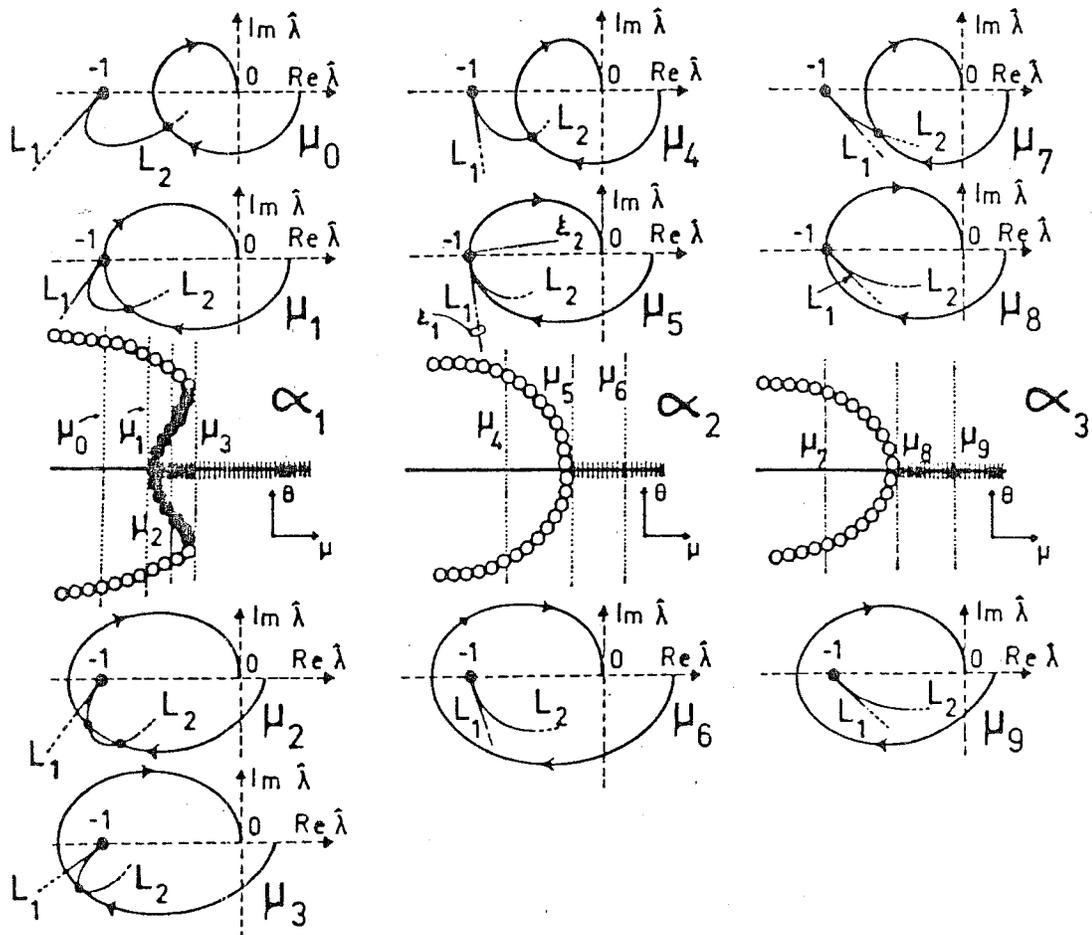


Figura 5.18: Idem a la Fig. anterior pero con diferente signo del segundo coeficiente de curvatura.

El lugar geométrico L_2 corresponde a una mejor aproximación de la parte no lineal $f(e, \mu)$ pues incluye hasta las derivadas de quinto orden con respecto a e . Note que para valores de μ comprendidos en $\mu_1 < \mu < \mu_3$ ($\alpha = \alpha_1$) el lugar geométrico de la amplitud L_2 interseca al lugar geométrico caracte-

rístico $\hat{\lambda}(i\omega)$ en dos lugares, indicados por círculos en el diagrama correspondiente a $\mu=\mu_2$. Las demás configuraciones no presentan ninguna complejidad de análisis, por lo cual pueden reconstruirse sin mayores inconvenientes los diagramas de bifurcaciones locales correspondientes a $\alpha=\alpha_2$ y $\alpha=\alpha_3$. Nótese que el punto límite (o punto de coalescencia entre ciclos límites estables e inestables) corresponde a la condición de *tangencia* entre ambos lugares geométricos para valores distintos del punto crítico $(-1+i0)$ cuando $\alpha=\alpha_1$ y $\mu=\mu_1$ en la Figura 5.17 y $\mu=\mu_3$ en la Figura 5.18. Observe además que usando el principio de cambio de estabilidad, podríamos obtener dos configuraciones más para completar el análisis de esta singularidad.

Ahora supongamos que tenemos que analizar los diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de la singularidad H_{20} . La misma incluye regiones en el espacio de parámetros (principal) μ y α y β (auxiliares) donde pueden detectarse hasta tres ciclos límites como hemos visto en la sección anterior. La situación, usando el método en el dominio frecuencia, puede esquematizarse en los diagramas de las Figuras 5.19 y 5.20. Para estos casos no podemos obtener todas las configuraciones permisibles en cercanías de la singularidad utilizando una aproximación de balance armónico de cuarto orden. Debemos utilizar, al menos, una aproximación de balance armónico de sexto orden. Así, en la Figura 5.21, agregamos la información de las variedades de transición que dividen el plano de los parámetros auxiliares α y β y ayudan a identificar los diferentes diagramas de bifurcaciones locales de las Figuras 5.19 y 5.20. Estas figuras, presentadas por primera vez en Moiola y colegas (1991b), muestran los dos subcasos más importantes de la degeneración H_{20} , dependiendo si el número complejo $\xi_3(\cdot)$ apunta hacia afuera o hacia adentro del lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(i\omega)$ permitiéndonos clasificar los diferentes diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de dicha degeneración.

Para la definición de las variedades de transición H_1 y D de la teoría de singularidades deberíamos ser más cuidadosos. Aunque de los respectivos diagramas de las Figuras 5.19 y 5.20 se desprenden fácilmente las condiciones de definición de tales variedades, veremos en el capítulo siguiente que

el cálculo de los lugares geométricos de las amplitudes L_1, \dots, L_i obedece, para obtener una mejor aproximación, reglas de cálculo iterativo. Por lo

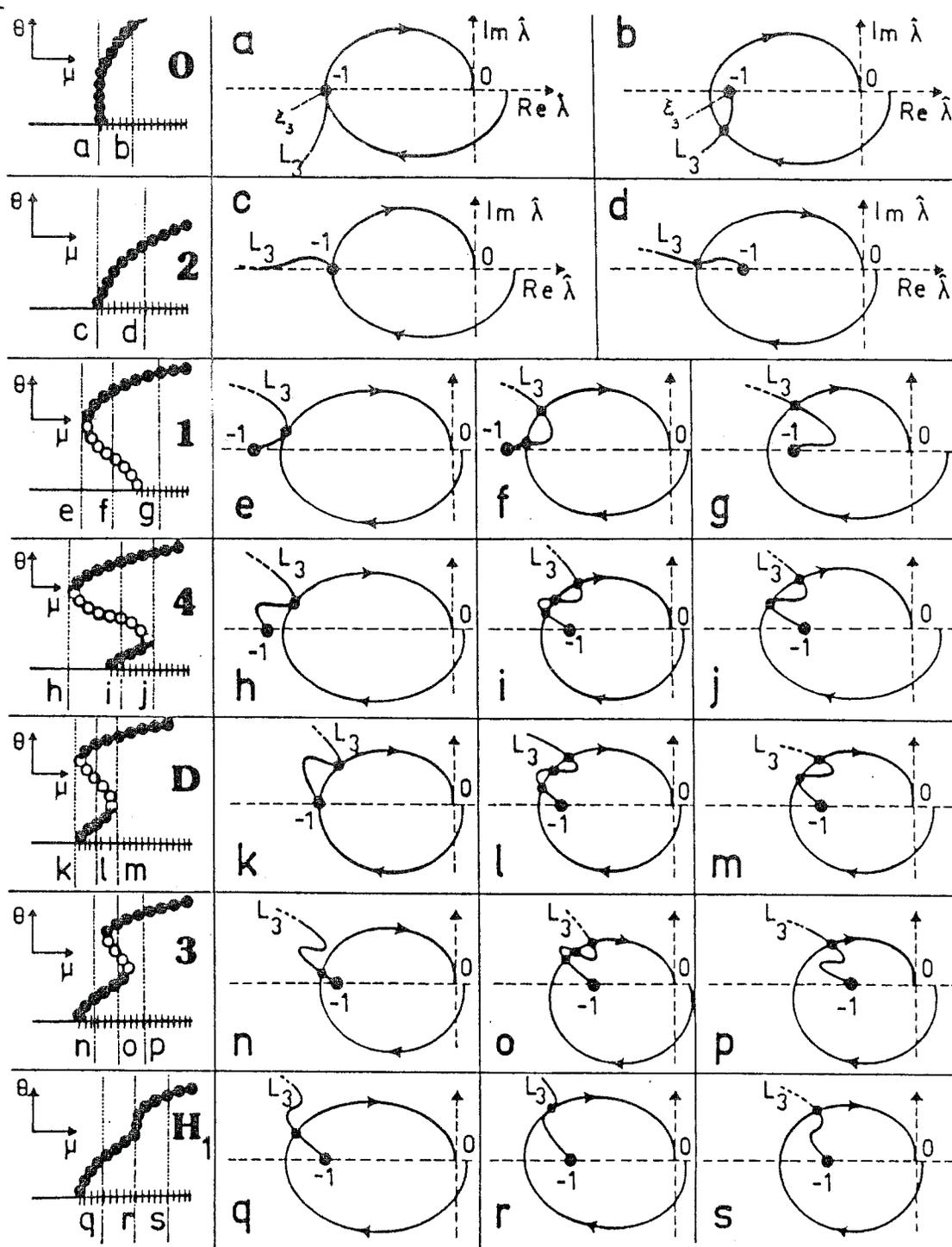


Figura 5.19: Diagramas de bifurcaciones locales y el método en el dominio frecuencia para una singularidad H_{20} .

tanto, diremos que tales variedades involucran tangencias entre el lugar geométrico de la amplitud y el lugar geométrico característico considerando

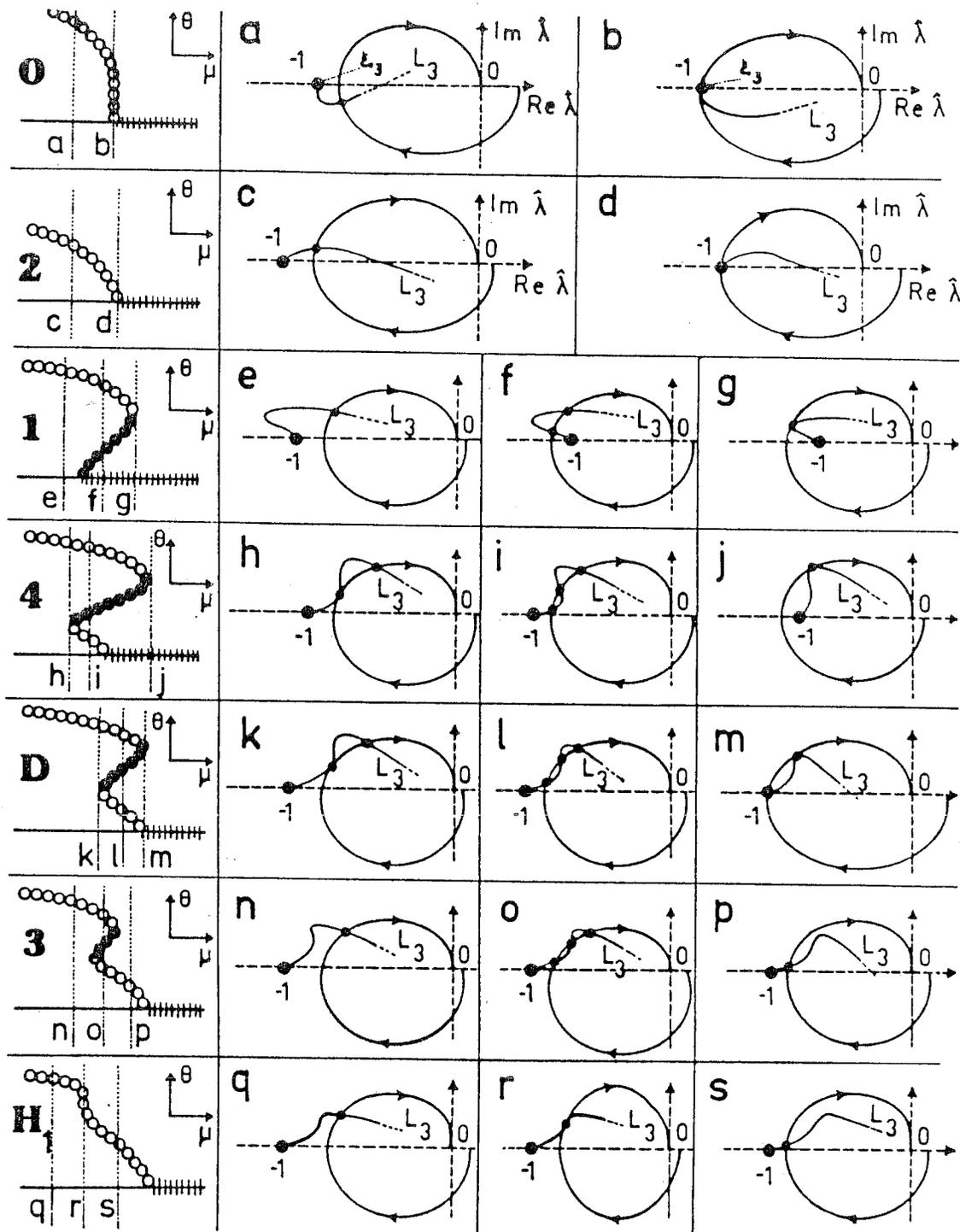


Figura 5.20: Idem a la Fig. anterior pero con diferente signo del tercer coeficiente de curvatura.

cierto orden de aproximación de balance armónico. En otras palabras, debemos tener especial cuidado en extender estos resultados que, como sabemos, son estrictamente locales pues puede suceder que avanzando en órdenes siguientes de balance armónico estas variedades se encuentren algo más o menos alejadas de los valores obtenidos con un balance armónico de sexto orden. En el ejemplo de aplicación que veremos más adelante ampliaremos estos conceptos.

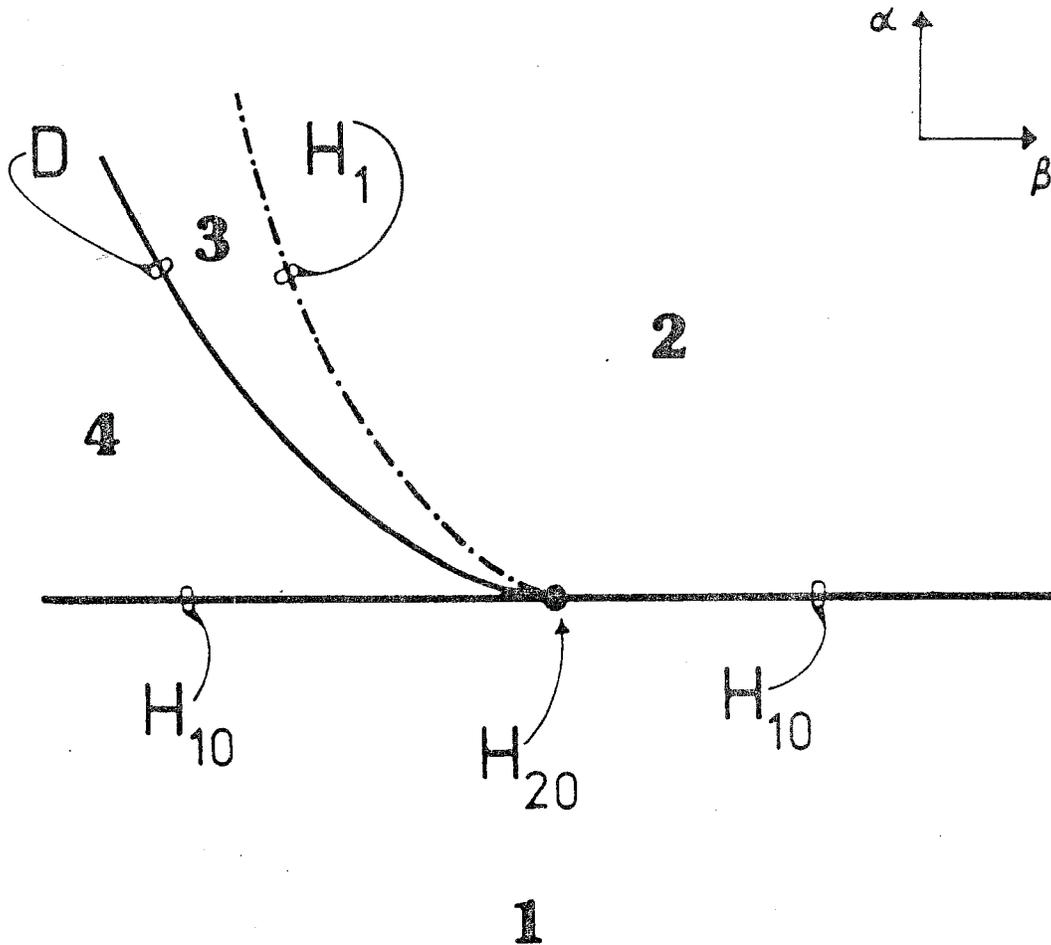


Figura 5.21: Variedades de transición en cercanías de la bifurcación degenerada H_{20} . Los números corresponden a los diagramas locales de las Figuras 5.20 y 5.21.

Finalmente, observamos que el lugar geométrico de la amplitud L_2 falla en predecir el comportamiento periódico en cercanías de la singularidad H_{20} , como L_1 falla también en cercanías de la singularidad H_{10} . Debemos te-

ner en cuenta que trabajamos con una aproximación y por lo tanto muy cercana a la singularidad H_{k0} debemos analizar los diagramas de bifurcaciones locales considerando al menos el lugar geométrico de la amplitud L_{k+1} . Dos suposiciones más se realizaron. La primera considera que todos los números escalares ξ_i se calcularon en w_r , es decir la frecuencia correspondiente a la intersección entre el lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(i\omega)$ y el eje real negativo. Si las frecuencias de intersección de las soluciones propiamente dichas \hat{w} son lo suficientemente cercanas a w_r el error cometido es muy pequeño. La segunda suposición contempla el caso de múltiples intersecciones que dan lugar a múltiples ciclos límites. Como estamos analizando diagramas de bifurcaciones locales, es decir muy cercanos a la singularidad, hemos supuesto que \hat{w}_1 (frecuencia de intersección del lugar geométrico de la amplitud L_3 y del lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(i\omega)$ más cercana a w_r) y \hat{w}_3 (idem a \hat{w}_1 pero en este caso es la más alejada de w_r) son muy cercanas entre sí. En otras palabras, w_r es lo suficientemente cercana a \hat{w}_1 , \hat{w}_2 y \hat{w}_3 (cuando hubiere tres intersecciones) que se verifican $L_3(\hat{w}_3) \cong L_3(\hat{w}_2) \cong L_3(\hat{w}_1)$. Sin embargo, para obtener una mejor aproximación de los diagramas de bifurcaciones locales debemos usar, por ejemplo, el algoritmo que detallaremos en el siguiente capítulo. Así evitaremos errores en los diagramas locales obteniendo al mismo tiempo una idea de la convergencia de las soluciones.

5.4. EJEMPLO DE APLICACION

Para concluir este capítulo mostraremos un ejemplo de aplicación utilizando una aproximación de balance armónico de sexto orden. Por simplicidad tomaremos el ejemplo 2 del capítulo 3 (ecuaciones (3.27)) donde el único lugar geométrico característico relevante venía dado por

$$\lambda_2(i\omega) = \hat{e}_1 / [(1 + \hat{e}_1)(1 + i\omega)] + B\hat{e}_1(i\omega + \beta\rho/\epsilon) / D_1(i\omega). \quad (5.43)$$

En la Figura 5.22 mostramos el diagrama de bifurcación local en cercanías de una singularidad H_{20} . En el pequeño diagrama "a" no encontramos ninguna intersección entre ambos lugares geométricos en cercanías del punto crítico $(-1 + i0)$. Sin embargo, existe una intersección entre ambos lugares geométri-

cos correspondiente a un ciclo límite estables para grandes valores de la amplitud θ . Tal intersección la denotamos como "s1". Variando el parámetro principal D al valor indicado por "b" podemos encontrar tres intersecciones entre ambos lugares geométricos, dos corresponden a soluciones periódicas estables (s1) y una a órbitas periódicas inestables (u1). El análisis de

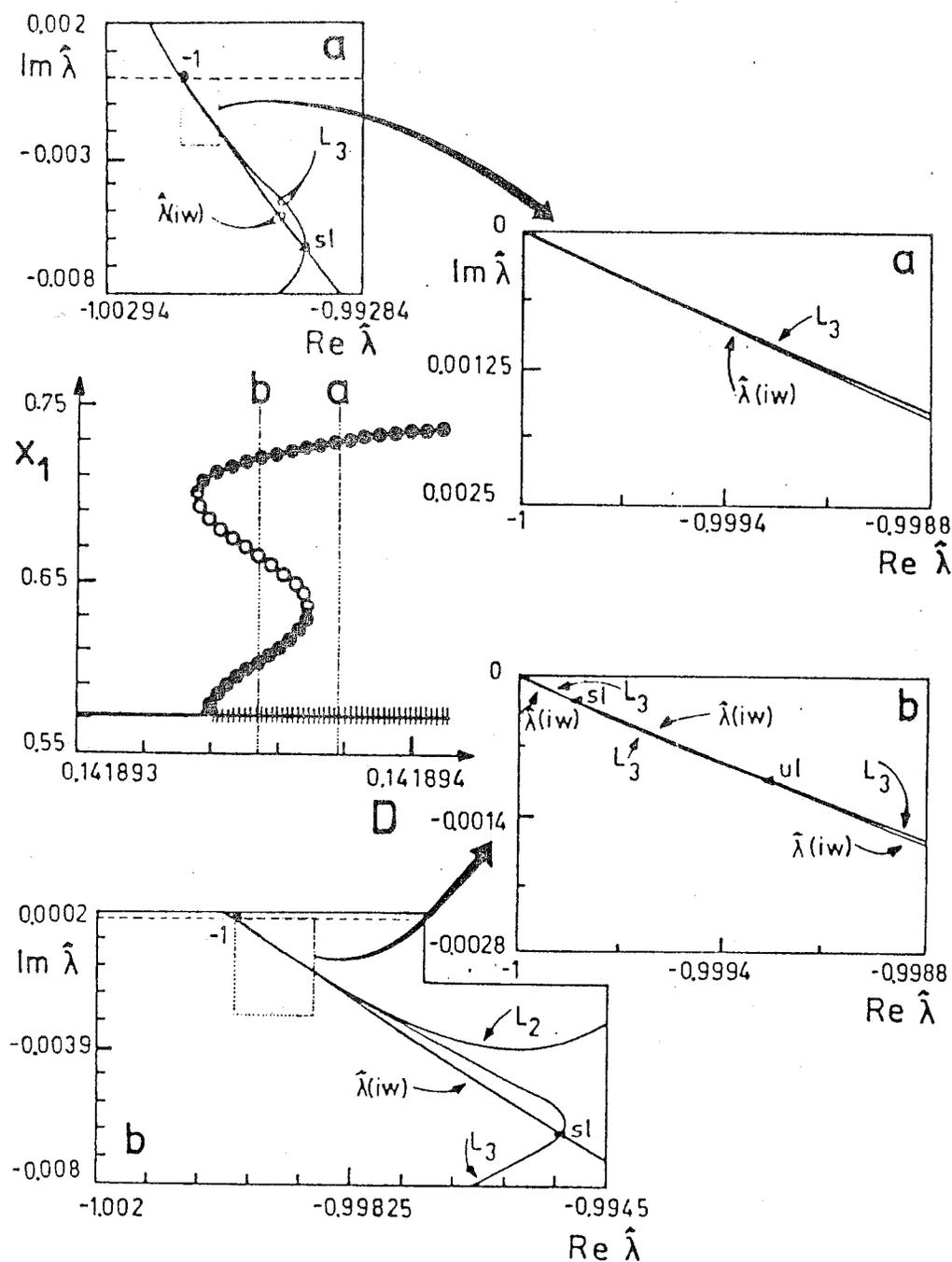


Figura 5.22: Diagramas de bifurcaciones locales y el método en el dominio frecuencia, para $B=22.076$, $\beta=4.63$, $\epsilon=2$ y $\rho=1$.

estabilidad se hace de la misma forma que para el caso del lugar geométrico L_1 , es decir en cada intersección se hace una perturbación en $\hat{\theta}$ de tal forma de poder aplicar el Criterio de estabilidad generalizado de Nyquist.

Note que en la Figura 5.22 el lugar geométrico de la amplitud L_2 da estimaciones erróneas de amplitud y frecuencia para el ciclo límite más alejado del punto de equilibrio. La intersección entre $\hat{\lambda}(i\omega)$ y L_2 se da para una frecuencia $\hat{\omega}_2$ superior a ω_r como se muestra en el diagrama izquierdo c de la figura siguiente. Sin embargo, utilizando el programa AUTO con el cual se han trazado los diagramas de bifurcaciones, puede verificarse que la frecuencia del ciclo límite exterior es menor que ω_r para tales valores de D .

Variando el parámetro B ligeramente podemos obtener el diagrama de bifurcación mostrado en la Figura 5.23. En el pequeño diagrama "c" podemos notar que el lugar geométrico de la amplitud interseca al lugar geométrico $\hat{\lambda}(i\omega)$ lejos del punto crítico $(-1+i0)$ dando pobres resultados de aproximaciones en la amplitud y frecuencia del ciclo límite más grande. Para clarificar más los resultados podemos agregar en esta figura la dirección de los números complejos ξ_1 , ξ_2 y ξ_3 . Observemos que ξ_1 es casi tangente a $\hat{\lambda}(i\omega)$. Además, el pequeño diagrama "d" muestra dos intersecciones entre ambos lugares geométricos correspondientes a ciclos límites estables e inestables. Aunque hemos usado una aproximación que involucra la información de las derivadas parciales hasta séptimo orden, es muy difícil localizar en forma precisa el punto límite de la rama periódica más alejado de la solución de equilibrio. Aún usando una expansión de balance armónico de octavo orden la localización es aproximada, como ha sido mostrado en Moiola (1991). Tengamos en cuenta que la función no lineal $f(e, \mu)$ es C^3 y nosotros estamos aproximándola por un número finito de sus derivadas parciales evaluadas en el equilibrio. Por otro lado, hemos obtenido mejores resultados para el punto límite más cercano al estado de equilibrio aún con una aproximación como L_2 .

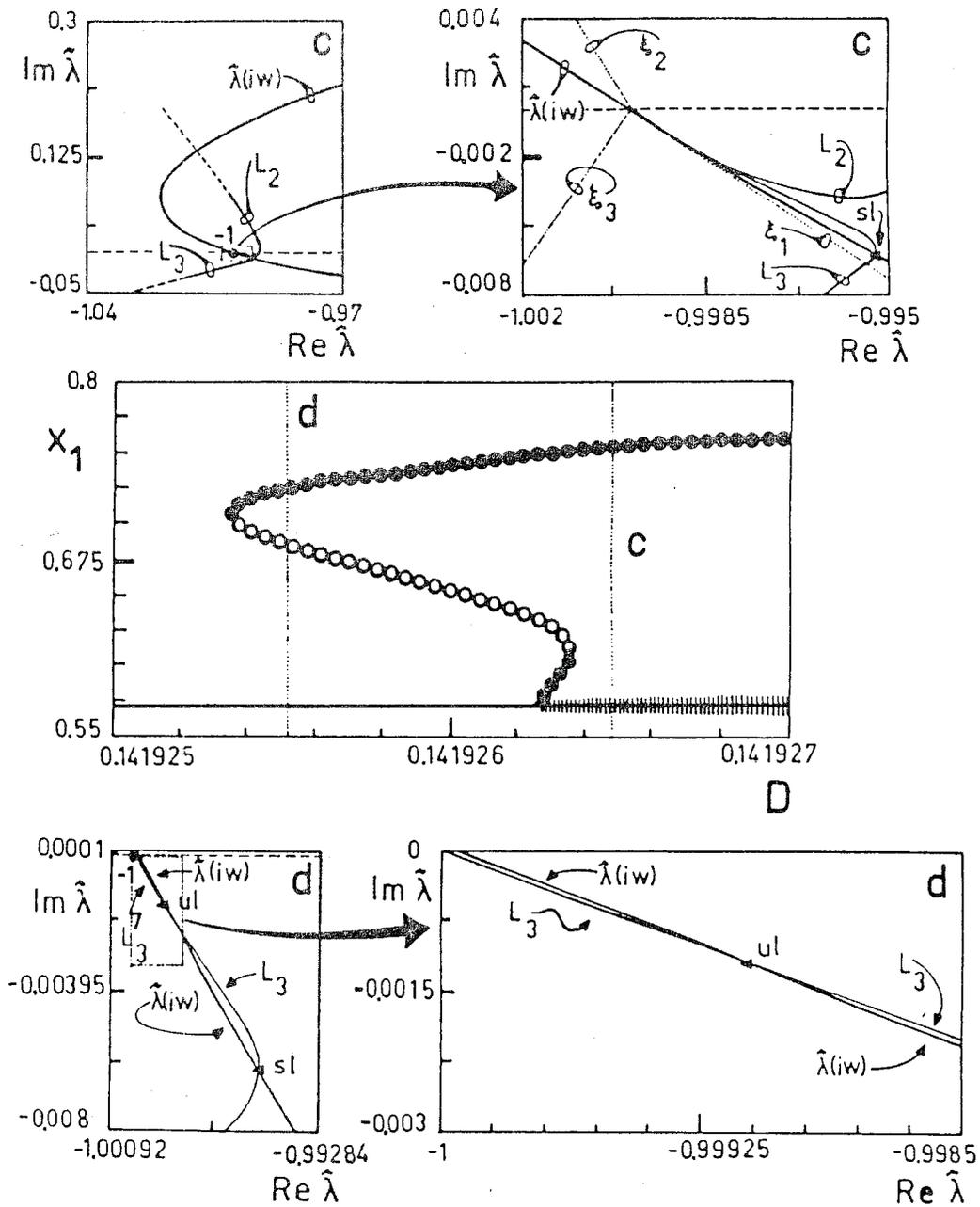


Figura 5.23: Diagramas de bifurcaciones locales y el método en el dominio frecuencia, para $B=22.074$, $\beta=4.63$, $\epsilon=2$ y $\rho=1$.

Finalmente, en la Figura 5.24 presentamos el diagrama de bifurcación local una vez que los ciclos límites estables de menor amplitud desaparecen de escena. Esto ocurre luego de que la variación en el parámetro B es tal que atraviesa una variedad de transición H_0 desde la Figura 5.23 a la Figu-

ra 5.24. En el pequeño diagrama "e" de esta última figura detectamos únicamente el ciclo límite estable más alejado, mientras que en el diagrama "f" podemos obtener una configuración de ciclos límites estables e inestables. Nuevamente, la inclusión de la expansión de balance armónico de sexto orden o L_3 mejora sobremanera las predicciones del lugar geométrico de la amplitud L_2 como se desprende de esta última gráfica.

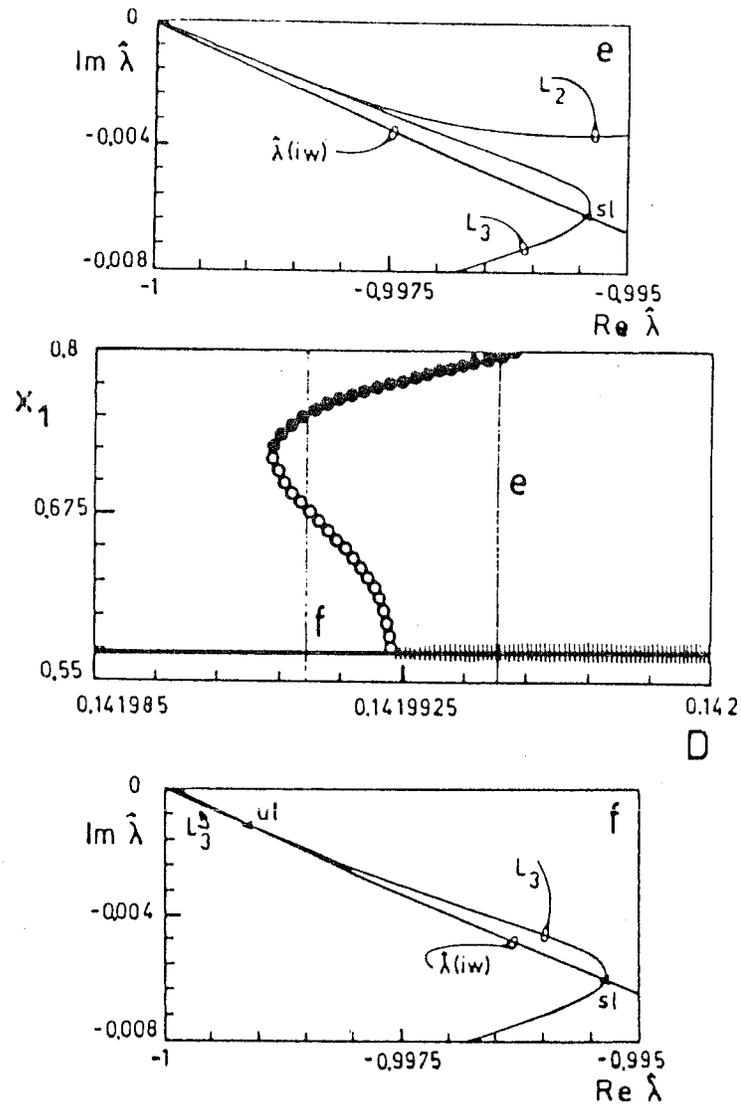


Figura 5.24: Diagramas de bifurcaciones locales y el método en el dominio frecuencia, para $B=22.07$, $\beta=4.63$, $\varepsilon=2$ y $\rho=1$.

CAPITULO 6

CONTINUACION DE SOLUCIONES PERIODICAS

En los capítulos anteriores hemos tratado principalmente el estudio de soluciones periódicas pero para un rango muy pequeño de variación del parámetro principal de bifurcación μ . Además, en la mayoría de los casos hemos considerado a la singularidad propiamente dicha, sea proveniente de un punto de bifurcación de Hopf como de una bifurcación degenerada. En cambio, ahora, propondremos extender los dominios de validez de las soluciones periódicas implementando varias aproximaciones de balance armónico de diferente orden cuando se varía el parámetro μ . Se verificarán y compararán los resultados con sus similares obtenidos usando el sofisticado programa AUTO de continuación de soluciones periódicas. Las diferentes aproximaciones de balance armónico de alto orden implementadas se compararán con los resultados obtenidos al aplicar AUTO a un modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias. A tal efecto se mostrarán diferentes gráficos para señalar las virtudes y defectos de la metodología usando técnicas en el dominio frecuencia. Tales diagramas incluyen gráficos en el plano de fase, diagramas temporales, diagramas de bifurcaciones locales y gráficas de verificación de período. En la Sección 6.1 presentaremos una introducción al tema y una reseña histórica. En la Sección 6.2 incluiremos brevemente la metodología de cálculo para hallar las aproximaciones de balance armónico de alto orden (cuarto, sexto y octavo orden). En cambio, en la Sección 6.3 mostraremos con mayor detalle los lineamientos más salientes del algoritmo. Finalmente en la Sección 6.4, incluiremos un ejemplo de aplicación donde se mostrarán varias comparaciones con resultados similares obtenidos usando el programa de continuación de soluciones periódicas AUTO.

6.1. INTRODUCCION

En forma simultánea con la aparición de fórmulas más manejables del teorema de bifurcación de Hopf comenzaron a ver la luz numerosos intentos de obtener métodos numéricos confiables y precisos para estudiar dichos fenómenos dinámicos. Así paralelamente, crecieron algoritmos que solucionaban

uno u otro problema de la continuación de las soluciones bifurcadas. Ante tal diversidad de métodos numéricos, ideados para aplicaciones particulares unos, para aplicaciones algo más generales otros, preferimos dar al lector la referencia de dos trabajos que contienen un buen número de los mismos. Una recopilación exhaustiva hasta el año 1981 puede consultarse en Mittelman y Weber (1981), mientras que una más sintética pero rigurosa puede obtenerse en Doedel (1986).

En este momento existen varios programas que permiten la continuación de la rama de soluciones periódicas comenzando desde el punto crítico o punto de bifurcación de Hopf. Habiendo nombrado a varios de ellos con anterioridad, nos detendremos en el programa que consideramos más general, y por qué no decirlo perfecto, que se conoce con el nombre de AUTO. La base teórica de su implementación se fundamenta en el clásico y excelente trabajo de Keller (1977) sobre soluciones numéricas en problemas de bifurcaciones. Sin embargo, el padre del programa es E. Doedel quién tras algo más de diez años de esfuerzos logró plasmar, junto con un equipo de colaboradores, una versión libre de errores, poderosa y de fácil manejo interactivo.

Desde la aparición de los trabajos de Heinemann y Doedel (1983) y Doedel (1984) se inauguró la época de las aplicaciones de sofisticadas técnicas numéricas en modelos concretos para determinar el comportamiento de soluciones periódicas. Sin embargo, el programa AUTO, aunque extremadamente poderoso, adolece de herramientas numéricas para localizar bifurcaciones degeneradas de Hopf que constituyen centros organizadores de la dinámica del sistema. Por ejemplo, pueden obtenerse los primeros miembros de las familias de bifurcaciones degeneradas H_{0m} y H_{n0} , pero a costa de un considerable esfuerzo computacional. No obstante, puede decirse que el programa fue pensado para continuar las ramas de soluciones periódicas -tarea que hace excepcionalmente bien- y no para hallar las singularidades de bifurcaciones en el espacio de parámetros. Más orientado a obtener una expansión de las fórmulas de bifurcación de Hopf es el programa BIFOR2 de Hassard y colegas (1981) o sus versiones más recientes de Hassard y Shiau (1989). Sin embargo, este programa hace el cálculo de las derivadas parciales de la

función no lineal numéricamente, por lo que pueden encontrarse serios problemas de precisión. Es así que cualquier intento serio de comparación de resultados y verificación de las soluciones periódicas lleva a utilizar el programa AUTO definitivamente (vea por ejemplo Planeaux y Jensen, 1986; Shiau y Hassard, 1991, entre otros).

En este capítulo utilizaremos varias aproximaciones de balance armónico de alto orden para calcular las soluciones periódicas emergentes de puntos de bifurcación de Hopf. La presentación tendrá el espíritu y alcance de trabajos similares, principalmente aquellos realizados por Langford (1977), Mees y Allwright (1979) y, más recientemente, por Hassard y Shiau (1989) y Shiau y Hassard (1991). Las fórmulas que utilizaremos han sido derivadas en Mees (1981), donde se presentaron las expresiones luego de realizar sendos balances armónicos de segundo y cuarto órdenes, y en Moiola (1991) donde se obtuvieron las correspondientes al realizar balances armónicos de sexto y octavo órdenes. Aunque la formulación es algebraicamente compleja, creemos que el uso de eficientes técnicas de procesamiento en paralelo junto con el uso de computación simbólica aliviarán sobremanera su implementación para sistemas generales.

Distinto a otros trabajos anteriormente mencionados hemos preferido la inclusión de las derivadas parciales en forma explícita evitando así problemas numéricos en su aproximación. Además, dicha formulación permite obtener, con un pequeño esfuerzo extra, una aproximación de los coeficientes de curvatura para estudiar ciertas bifurcaciones degeneradas de Hopf.

6.2. APROXIMACIONES DE BALANCE ARMONICO DE ALTO ORDEN

En el capítulo anterior hemos visto brevemente como se obtenían los coeficientes de las series E^0, \dots, E^k , donde $k=2q$, siendo q el orden de la aproximación de balance armónico utilizada. Dichas expresiones, principalmente las relacionadas con balances armónicos de sexto y octavo órdenes, ocupan varias páginas en Moiola (1991) y hacen parecer a las fórmulas de balance armónico de segundo y cuarto órdenes relativamente sencillas.

El algoritmo a implementar consiste en el cálculo de los vectores V_{02} y V_{22} a partir del autovector derecho de $G(i\omega, \mu)J(\mu)$ calculado en w_r , es decir la frecuencia de intersección entre el lugar geométrico $\hat{\lambda}(i\omega)$ y el eje real negativo. Siguiendo el algoritmo dado en el capítulo 2 obtenemos el número complejo $\xi_1(w_r)$. Trazando el lugar geométrico de la amplitud $L_1(w_r, \theta) = -1 + \xi_1(w_r)\theta^2$ y el lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(i\omega)$ supondremos que existe una intersección entre ambos que satisface los postulados del teorema de bifurcación de Hopf en el dominio frecuencia. Esta intersección determinará una frecuencia que llamaremos $w_{1,1}$ y una amplitud $\theta_{1,1}$, donde los subíndices señalan el orden del lugar geométrico de la amplitud y el número de iteración, respectivamente. Partiremos ahora de esta frecuencia $w_{1,1}$ y de $\hat{\lambda}(iw_{1,1})$ para recalculamos $\xi_1(w_{1,1})$. Una vez hallado el valor numérico de esta última expresión se obtiene un nuevo valor del par (w, θ) aplicando el método gráfico. Con este nuevo valor, que llamaremos $(w_{1,2}, \theta_{1,2})$ se procederá a repetir el procedimiento hasta alcanzar una diferencia pre-fijada $|w_{1,j+1} - w_{1,j}| < \epsilon_w$ o bien $|\theta_{1,j+1} - \theta_{1,j}| < \epsilon_\theta$. Llamemos a estos valores finales $w_{1,j+1} = \hat{w}_1$ y $\theta_{1,j+1} = \hat{\theta}_1$, y con ellos calcularemos la aproximación de balance armónico de segundo orden dada por

$$E_1^0 = V_{02}(\hat{w}_1) \hat{\theta}_1^2, \quad (6.1.a)$$

$$E_1^1 = V_{11}(\hat{w}_1) \hat{\theta}_1, \quad (6.1.b)$$

$$E_1^2 = V_{22}(\hat{w}_1) \hat{\theta}_1^2; \quad (6.1.c)$$

$$e(t) = \hat{e} + \text{Re} \left[\sum_{k=0}^2 E_1^k \exp(ik\hat{w}_1 t) \right]. \quad (6.1.d)$$

Para calcular la aproximación de balance armónico siguiente, esto es de cuarto orden, consideramos como solución inicial la solución final del balance armónico de segundo orden. Así usaremos lo siguiente $w_{2,1} = \hat{w}_1$ y $\theta_{2,1} = \hat{\theta}_1$. Además, de los vectores correspondientes a la anterior aproximación debemos calcular los siguientes V_{13} , V_{04} , V_{24} , V_{33} y V_{44} . Ahora estamos en condiciones de hallar el número complejo $\xi_2(w_{2,1})$ y por lo tanto describir el lugar geométrico de la amplitud L_2 . Supongamos que dicho lugar geométrico interseca a $\hat{\lambda}(i\omega)$ en un punto dando el par $(w_{2,2}, \theta_{2,2})$. El pro-

cedimiento nuevamente se repite hasta alcanzar una diferencia prefijada ϵ_w o ϵ_θ . Para este caso la solución se notará como $(\hat{w}_2, \hat{\theta}_2)$. La aproximación de balance armónico de cuarto orden vendrá expresada por

$$E_2^0 = V_{02}(\hat{w}_2) \hat{\theta}_2^2 + V_{04}(\hat{w}_2) \hat{\theta}_2^4, \quad (6.2.a)$$

$$E_2^1 = V_{11}(\hat{w}_2) \hat{\theta}_2 + V_{13}(\hat{w}_2) \hat{\theta}_2^3, \quad (6.2.b)$$

$$E_2^2 = V_{22}(\hat{w}_2) \hat{\theta}_2^2 + V_{24}(\hat{w}_2) \hat{\theta}_2^4, \quad (6.2.c)$$

$$E_2^3 = V_{33}(\hat{w}_2) \hat{\theta}_2^3, \quad (6.2.d)$$

$$E_2^4 = V_{44}(\hat{w}_2) \hat{\theta}_2^4, \quad (6.2.e)$$

$$e(t) = \hat{e} + Re \left[\sum_{k=0}^4 E_2^k \exp(ik\hat{w}_2 t) \right]. \quad (6.2.f)$$

Repitiendo el procedimiento hasta aquí presentado podemos encontrar las aproximaciones de balance armónico de sexto y octavo órdenes calculando las siguientes expresiones

$$E_3^0 = V_{02}(\hat{w}_3) \hat{\theta}_3^2 + V_{04}(\hat{w}_3) \hat{\theta}_3^4 + V_{06}(\hat{w}_3) \hat{\theta}_3^6, \quad (6.3.a)$$

$$E_3^1 = V_{11}(\hat{w}_3) \hat{\theta}_3 + V_{13}(\hat{w}_3) \hat{\theta}_3^3 + V_{15}(\hat{w}_3) \hat{\theta}_3^5, \quad (6.3.b)$$

$$E_3^2 = V_{22}(\hat{w}_3) \hat{\theta}_3^2 + V_{24}(\hat{w}_3) \hat{\theta}_3^4 + V_{26}(\hat{w}_3) \hat{\theta}_3^6, \quad (6.3.c)$$

$$E_3^3 = V_{33}(\hat{w}_3) \hat{\theta}_3^3 + V_{35}(\hat{w}_3) \hat{\theta}_3^5, \quad (6.3.d)$$

$$E_3^4 = V_{44}(\hat{w}_3) \hat{\theta}_3^4 + V_{46}(\hat{w}_3) \hat{\theta}_3^6, \quad (6.3.e)$$

$$E_3^5 = V_{55}(\hat{w}_3) \hat{\theta}_3^5, \quad (6.3.f)$$

$$E_3^6 = V_{66}(\hat{w}_3) \hat{\theta}_3^6, \quad (6.3.g)$$

$$e(t) = \hat{e} + Re \left[\sum_{k=0}^6 E_3^k \exp(ik\hat{w}_3 t) \right]; \quad (6.3.h)$$

y

$$E_4^0 = V_{02}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^2 + V_{04}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^4 + V_{06}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^6 + V_{08}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^8, \quad (6.4.a)$$

$$E_4^1 = V_{11}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4 + V_{13}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^3 + V_{15}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^5 + V_{17}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^7, \quad (6.4.b)$$

$$E_4^2 = V_{22}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^2 + V_{24}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^4 + V_{26}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^6 + V_{28}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^8, \quad (6.4.c)$$

$$E_4^3 = V_{33}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^3 + V_{35}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^5 + V_{37}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^7, \quad (6.4.d)$$

$$E_4^4 = V_{44}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^4 + V_{46}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^6 + V_{48}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^8, \quad (6.4.e)$$

$$E_4^5 = V_{55}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^5 + V_{57}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^7, \quad (6.4.f)$$

$$E_4^6 = V_{66}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^6 + V_{68}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^8, \quad (6.4.g)$$

$$E_4^7 = V_{77}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^7, \quad (6.4.h)$$

$$E_4^8 = V_{88}(\hat{w}_4) \hat{\theta}_4^8, \quad (6.4.i)$$

$$e(t) = \hat{e} + \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^8 E_4^k \exp(ik\hat{w}_4 t) \right]; \quad (6.4.j)$$

respectivamente. En la Figura 6.1 se muestra gráficamente la marcha del algoritmo para las cuatro aproximaciones de balance armónico implementadas. De la misma figura puede notarse si las predicciones de las aproximaciones de órdenes mayores concuerdan con las de órdenes menores. Por ejemplo, en la Figura 6.1 obsérvese que las intersecciones entre las aproximaciones L_3 y L_4 y el lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(i\omega)$ están más juntas que las intersecciones correspondientes entre L_3 y L_2 . Parece entonces razonable pensar que la aproximación de balance armónico de orden sexto será suficiente para aproximar a la órbita periódica dentro de determinados errores y no se justificará realizar un balance armónico de orden octavo que introduce sólo pequeñas modificaciones en \hat{w} y $\hat{\theta}$ pero implica un gran volumen de operaciones de cálculo. En otras palabras, con el método gráfico es posible tener una idea de la convergencia de la solución para las diferentes aproximaciones de balance armónico.

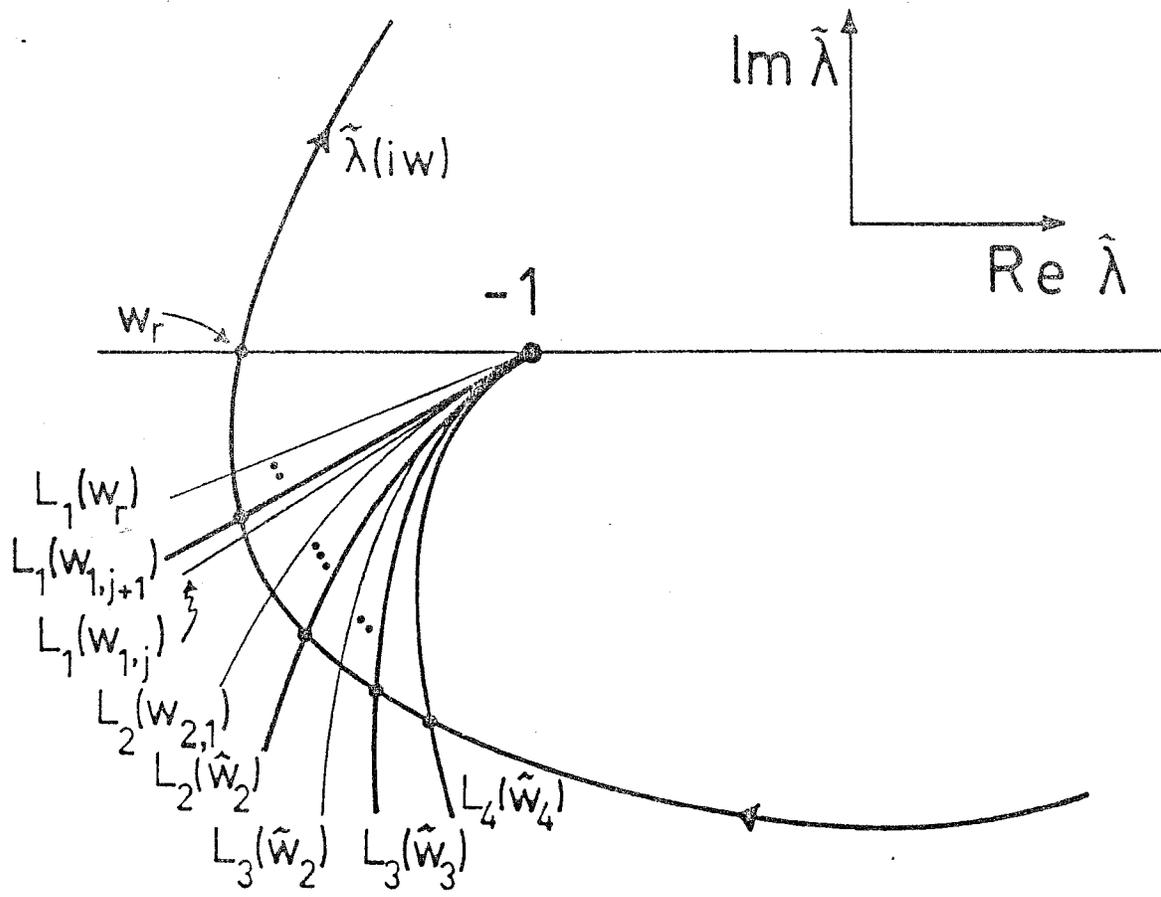


Figura 6.1: Lugares geométricos característico y de las amplitudes usando el algoritmo propuesto.

6.3. CONTINUACION DE LAS SOLUCIONES PERIODICAS USANDO DIFERENTES APROXIMACIONES

En la sección anterior hemos mostrado cómo se calcula la órbita periódica usando diferentes aproximaciones (L_1, \dots, L_4) para un valor particular del parámetro de bifurcación μ , por ejemplo $\mu = \mu_1$. Ahora estamos interesados en hallar la órbita periódica para $\mu = \mu_1 + \Delta\mu$. Para ello proponemos un algoritmo de *continuación* de la solución de tal manera de sacar ventaja de la tendencia que muestran las diferentes aproximaciones de balance armónico. Más específicamente, podemos usar como aproximación del par inicial (w, θ) para $\mu = \mu_1 + \Delta\mu$ los valores de $(\hat{w}_1, \hat{\theta}_1)$ correspondientes a $\mu = \mu_1$, si estamos in-

interesados en la *continuación* de las soluciones periódicas con una aproximación de balance armónico de segundo orden. En forma similar usaremos los valores de $(\hat{w}_2, \hat{\theta}_2)$, $(\hat{w}_3, \hat{\theta}_3)$ y $(\hat{w}_4, \hat{\theta}_4)$ como soluciones iniciales para continuar las órbitas periódicas con aproximaciones de balance armónico de cuarto, sexto y octavo órdenes, respectivamente. Note que excepto en el punto de bifurcación propiamente dicho las soluciones iniciales $(\hat{w}_i, \hat{\theta}_i)$ para cada aproximación L_i ($i=1, \dots, 4$) están más cerca de la solución verdadera que comenzando el algoritmo en w_r como habíamos planteado en la sección anterior.

Podemos bosquejar esquemáticamente el algoritmo implementado siguiendo los pasos dados a continuación:

- 1) Para un valor dado de $\mu = \mu_k$, $k=1$, no necesariamente el valor del parámetro en el punto de bifurcación de Hopf, se calcula w_r y $L_{1,k}(w_r)$.
- 2) Se obtiene la intersección entre $L_{1,k}(w)$ y $\hat{\lambda}(i\omega)$ que satisface $L_{1,k}(\hat{w}_{1,k}) = \hat{\lambda}(i\hat{w}_{1,k})$, como hemos visto en la sección anterior.
- 3) De la misma forma se obtienen las soluciones aplicando el método iterativo gráfico de $L_{2,k}(\hat{w}_{2,k}) = \hat{\lambda}(i\hat{w}_{2,k})$, $L_{3,k}(\hat{w}_{3,k}) = \hat{\lambda}(i\hat{w}_{3,k})$, $L_{4,k}(\hat{w}_{4,k}) = \hat{\lambda}(i\hat{w}_{4,k})$, considerando un cierto criterio de error para detener el algoritmo al alcanzar una solución $(\hat{w}_{i,k}, \hat{\theta}_{i,k})$ satisfactoria.
- 4) Para un valor de $\mu_{k+1} = \mu_k + \Delta\mu$ se consideran como valores iniciales para cada aproximación de balance armónico los valores finales $(\hat{w}_{i,k}, \hat{\theta}_{i,k})$ obtenidos para $\mu = \mu_k$.
- 5) Se repiten los pasos 2 y 3.
- 6) Se toma $k=k+1$ y se continua desde el paso 4 ó se finaliza el algoritmo una vez alcanzado el valor de $\mu_{i_{max}}$ (máximo) ó $\mu_{i_{min}}$ (mínimo).

Notemos que $\Delta\mu$ puede ser un valor positivo o negativo según se quiera avanzar o retroceder con el parámetro, respectivamente. Obsérvese, además, que se podría haber propuesto implementar sólo las aproximaciones de balance armónico de segundo y cuarto órdenes para valores de μ cercanos al valor crítico y, a medida que nos vamos alejando del mismo, mejorar las aproximaciones incluyendo la información de los órdenes sexto y octavo. Se ha preferido, no obstante, esta forma de cálculo pues el objetivo consiste en

comparar las diferentes aproximaciones para luego proponer estrategias de análisis más eficientes para el estudio del comportamiento oscilatorio del sistema. Como se harán comparaciones con los resultados del programa AUTO se tendrá una clara perspectiva de las falencias y ventajas del algoritmo implementado, así como de la riqueza dinámica subyacente de los sistemas no lineales.

Es importante mencionar aquí que hemos decidido detener el cálculo de cada aproximación de balance armónico cuando el respectivo lugar geométrico tiende a ser tangente al lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(i\omega)$. Esta cercanía de tangencia entre ambos lugares geométricos predice, en la mayoría de los casos, puntos límites en la rama de soluciones periódicas, indicando la coalescencia de ciclos límites estables e inestables. Sin embargo, veremos en los ejemplos de la sección siguiente, que estos puntos límites son detectados a veces por defecto y otras por exceso en los valores del parámetro principal de bifurcación μ . Más aún, algunas aproximaciones de balance armónico no detectan estas configuraciones hasta valores algo alejados de los verdaderos. La explicación es muy sencilla. Notemos que $f(e, \mu)$ es una función infinitamente diferenciable en la mayoría de los casos, y nosotros tratamos de aproximarla realizando una expansión en series de Taylor, con lo cual introducimos una truncación forzosa. Además, se ha realizado una truncación en la solución de balance armónico, pues es limitado el número de términos que consideramos para capturar la verdadera onda periódica. Ambas simplificaciones llevan a que cualquiera de las soluciones de balance armónico sean simplemente meras aproximaciones de la realidad. Es por ello que ahora puede entenderse más claramente la dificultad de detectar, aún con la mejor aproximación de balance armónico implementada, los puntos límites en la rama de soluciones periódicas, y más aún las variedades de transición H_1 y D , siguiendo la notación presentada en el capítulo anterior. Entonces los diagramas de las Figuras 5.17, 5.18, 5.19 y 5.20 deben interpretarse como los diagramas equivalentes por contacto a los verdaderos diagramas de bifurcaciones hallados en proximidades de las singularidades. En otras palabras, existirán funciones continuas y con inversa continua cuya aplicación sobre los diagramas obtenidos por cálculo numérico con la de-

bida aproximación (L_2 para la singularidad H_{10} , L_3 para la singularidad H_{20} , etc.) nos conducirá a los diagramas reales cuya obtención puede realizarse usando el sofisticado programa AUTO.

Sin embargo, debemos destacar que la aplicación del método gráfico de Hopf en el dominio frecuencia permite obtener los diagramas de bifurcaciones locales directamente en el plano (o espacio si se quiere) de los parámetros reales del sistema. Es decir, considerando una cierta aproximación podemos trazar los diagramas de bifurcaciones locales utilizando únicamente herramientas numéricas directamente en el plano de los parámetros auxiliares *originales*. En otras palabras, y para concluir esta sección, los diagramas de bifurcaciones locales que hallaremos serán distorsiones de los diagramas de bifurcaciones locales reales. Cuán menor o mayor es la distorsión estará ligado al orden de la aproximación empleada y al cumplimiento de las hipótesis simplificativas para hallarlos. En la sección siguiente mostraremos el funcionamiento del algoritmo de continuación empleado y amplias comparaciones con resultados similares obtenidos con el programa AUTO. Además incluiremos la obtención de diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de miembros de la familia de bifurcaciones degeneradas H_{0m} . Se ha elegido esta familia pues conduce a una única intersección entre ambos lugares geométricos L_1 y $\hat{\lambda}(i\omega)$

6.4. DIAGRAMAS DE BIFURCACIONES LOCALES UTILIZANDO DIFERENTES APROXIMACIONES

En esta sección mostraremos comparaciones entre los diagramas de bifurcaciones locales obtenidos al aplicar diferentes aproximaciones de balance armónico, a saber, de segundo ó L_1 , cuarto ó L_2 , sexto ó L_3 y octavo ó L_4 órdenes. Las mismas se presentarán siempre acompañadas con los resultados, que asumiremos exactos, dados por el programa de continuación de soluciones periódicas AUTO.

Las gráficas, que incluimos a continuación, completan resultados preliminares de Moiola (1991), Moiola y Chen (1992) donde se implementó un al-

goritmo similar pero no se realizó una exhaustiva verificación de la aproximación en amplitud de la órbita periódica. El ejemplo tratado es un reactor tanque agitado continuo cuyo modelo matemático fue presentado en el ejemplo 2 del capítulo 3. Considerando los siguientes valores de los parámetros auxiliares, $B=22.076$, $\beta=4.63$, $\rho=1$ y $\varepsilon=2$, se encuentran dos puntos de bifurcaciones de Hopf que dan lugar a dos ramas de soluciones periódicas conectadas entre sí. Esquemáticamente puede representarse esta situación como muestra la Figura 6.2.

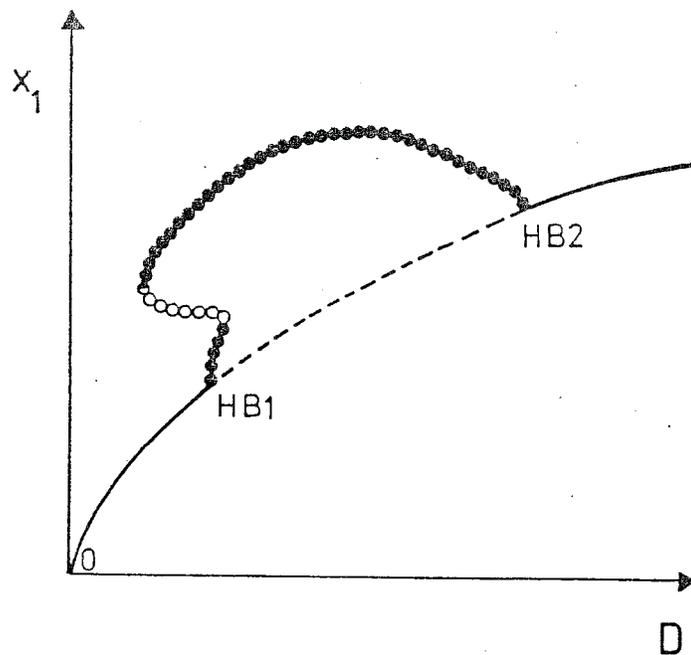


Figura 6.2: Diagrama de bifurcaciones globales para $B=22.076$, $\beta=4.63$, $\varepsilon=2$ y $\rho=1$.

Consideremos la rama de órbitas periódicas emergente desde el segundo punto de bifurcación de Hopf, esto es desde HB2 en la Figura 6.2. En la Figura 6.3 se presenta el lugar geométrico de los ciclos límites que se obtiene aplicando el algoritmo descrito en las secciones precedentes utilizando las aproximaciones que por simplicidad notaremos como L_1 , L_2 , L_3 y L_4 . Únicamente en el gráfico de la Figura 6.3.a se incluye también la variación del estado de equilibrio con el parámetro principal de bifurcación D del sistema descrito por las ecuaciones 3.27. Nótese que en todos los diagramas de bifurcaciones locales todas las aproximaciones concuerdan para

valores extremadamente cercanos al de bifurcación HB2. En todos los casos de órbitas periódicas se ha graficado el valor máximo para las diferentes componentes de estado $e_{i,max} = \max[e_i(t)]$ (donde $e = -x$) para $0 \leq t < T$, donde T es el período del ciclo límite, para hacer inmediata la comparación con los resultados del programa AUTO.

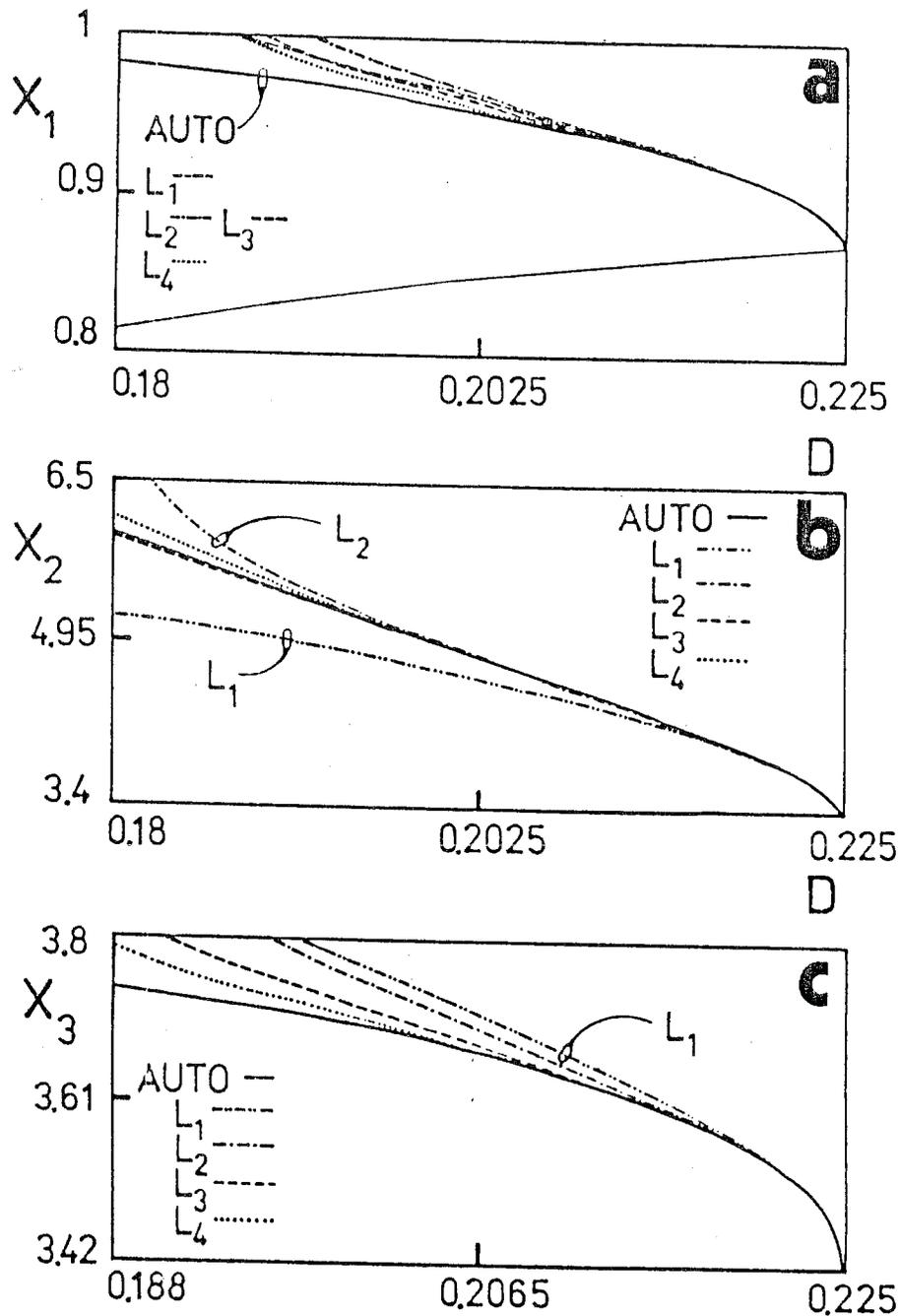


Figura 6.3: Continuación de las ramas periódicas usando diferentes aproximaciones de balance armónico a partir de HB2 y su comparación con resultados de AUTO.

En la Figura 6.3.a puede notarse que la mejor aproximación es L_4 pues es la más cercana a la rama periódica hallada usando el programa AUTO. En cambio, según la variable x_2 la mejor aproximación es L_3 seguida muy de cerca por L_4 , como indica la Figura 6.3.b. Finalmente, si consideramos la variable x_3 vemos que las aproximaciones de balance armónico se comportan naturalmente pues a medida que el orden aumenta se acercan más a la rama periódica obtenida usando el código AUTO. Así L_4 se aproxima más a la solución obtenida por AUTO que L_3 ; L_3 constituye una mejor aproximación que L_2 , etc.

En la Figura 6.4 se muestra la variación del período con el parámetro principal de bifurcación D . Puede notarse que tanto L_1 , L_3 como L_4 constituyen buenas aproximaciones, en tanto que L_2 se aparta apreciablemente de la solución verdadera dada por AUTO. Casualmente es para esta aproximación de balance armónico que se presentan problemas de solución (intersección) única para valores de \hat{x}_1 próximos a 0.793. En la Figura 6.5 mostramos los lugares geométricos característico $\hat{\lambda}(i\omega)$ y de las amplitudes L_1 , L_2 , L_3 y L_4 para dos valores de \hat{x}_1 . La Figura 6.5.a muestra que todos los lugares geométricos de la amplitud intersectan a $\hat{\lambda}(i\omega)$ transversalmente, dando lu-

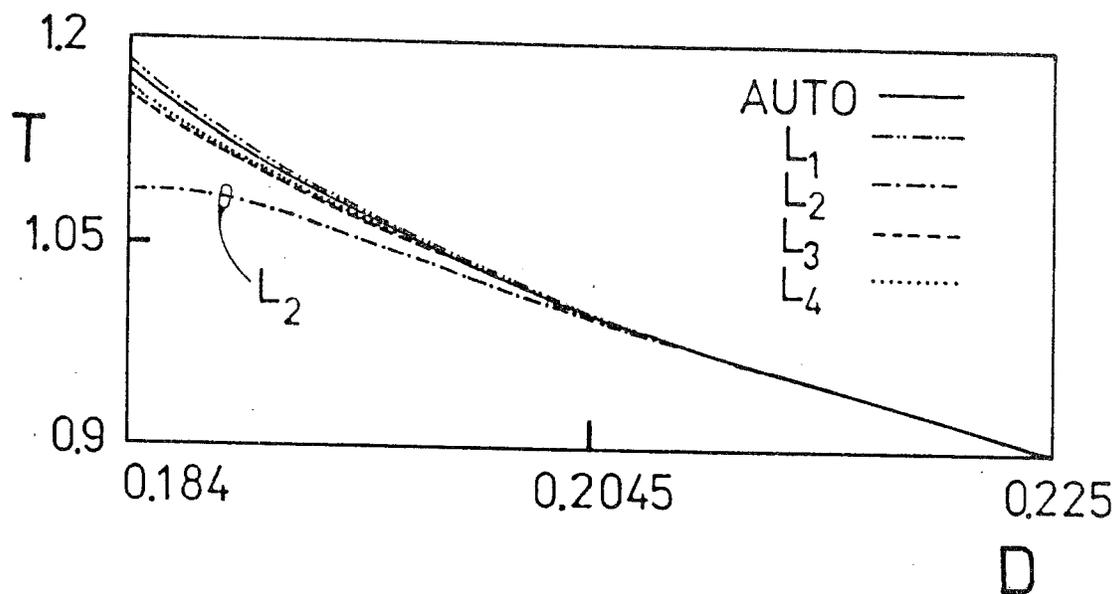


Figura 6.4: Continuación del valor del período T y su comparación con similares resultados de AUTO.

gar, al menos localmente, a una única solución $(\hat{w}_i, \hat{\theta}_i)$. En cambio, en la Figura 6.5.b, el lugar geométrico de la amplitud L_2 es casi *tangente* a $\hat{\lambda}(i\omega)$. Para la Figura 6.5.a, $\hat{x}_1=0.812$, mientras que para la Figura 6.5.b, $\hat{x}_1=0.793$. Este último valor será el límite de cálculo en nuestra aproximación de balance armónico. Obsérvese, además, que las intersecciones entre ambos lugares geométricos $\hat{\lambda}(\cdot)$ y L_1 , ó $\hat{\lambda}(\cdot)$ y L_3 , o $\hat{\lambda}(\cdot)$ y L_4 son cercanas unas a otras. Es de esperar entonces que dichas aproximaciones no den resultados discordantes entre sí.

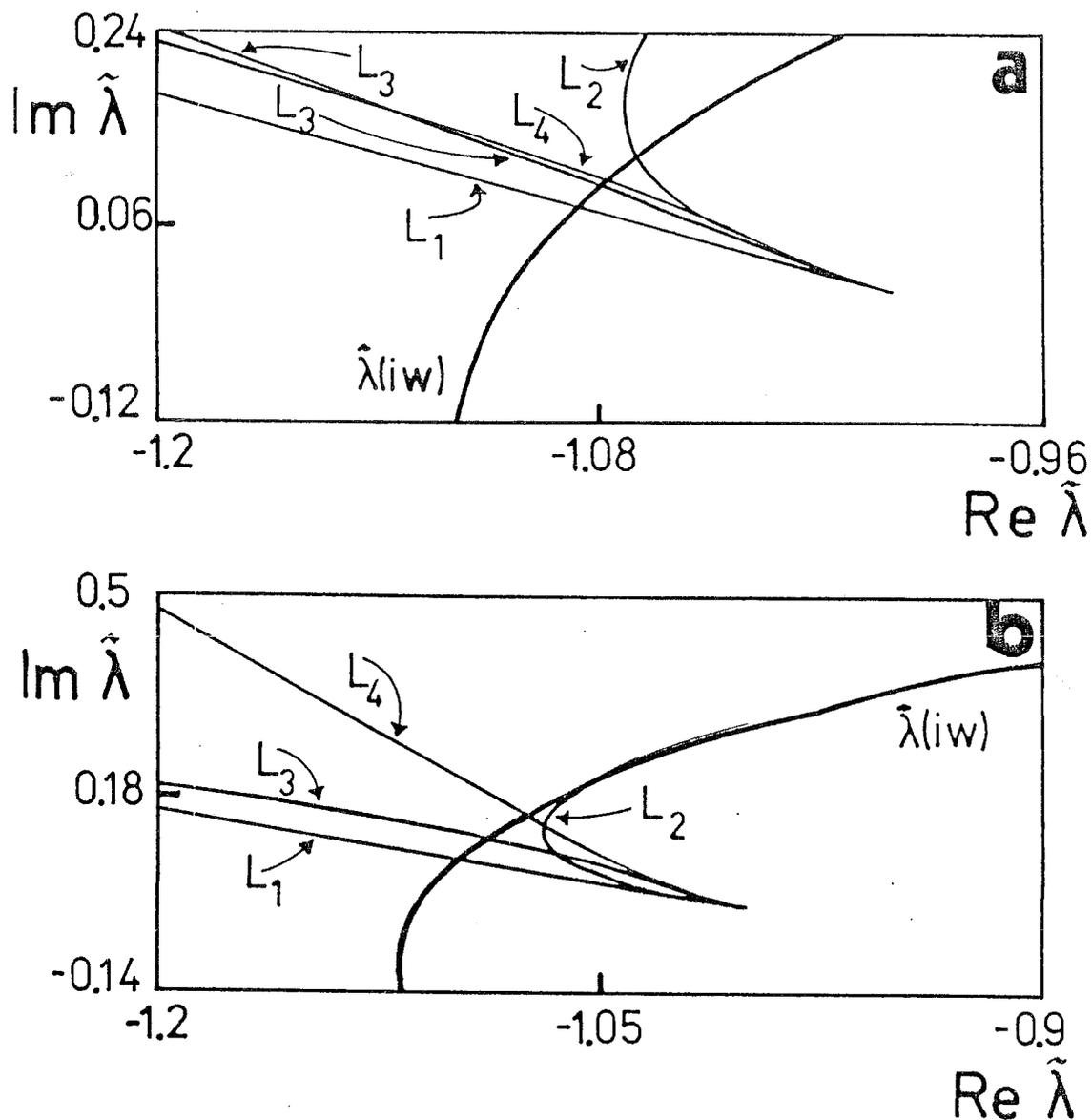


Figura 6.5: Lugares geométricos característicos y límites de la aproximación.

Ahora seleccionamos tres valores del parámetro principal de bifurcación D que corresponden a diferentes situaciones sobre la rama de soluciones periódicas. El objetivo será comparar con mayor detalle las aproximaciones entre sí y los resultados dados por el programa AUTO. Así para $D=0.212526087$ estaremos muy cerca del punto de bifurcación de Hopf HB_2 , por lo cual todas las soluciones utilizando la técnica de balance armónico para los diferentes órdenes darán muy buenas aproximaciones. Notemos que el valor de $\hat{\theta}$ para este caso es pequeño y la serie converge rápidamente. Las soluciones periódicas en el plano o retrato de fase pueden apreciarse en la Figura 6.6 para las diferentes aproximaciones usando el método en el dominio frecuencia. La aproximación de balance armónico de cuarto orden da mejores resultados que la aproximación de balance armónico de segundo orden (Figuras 6.6.a y 6.6.b). Por otro lado, las aproximaciones de balance armónico de sexto y octavo órdenes son indistinguibles, al menos gráficamente, y constituyen una mejor aproximación que la obtenida con L_2 (ver la Figura 6.6.c).

El retrato de fase da mayor información que los diagramas de bifurcaciones locales en lo que respecta a la *forma* del ciclo límite. Nótese que se tiene información no sólo de los valores máximos sino también mínimos. Por otro lado, los diagramas de bifurcaciones locales brindan mayor información desde el punto de vista de la conexión o interacción de ramas periódicas ante la variación del parámetro de bifurcación principal. En la Figura 6.6.c podemos apreciar la casi total concordancia entre el ciclo límite obtenido por el programa AUTO y el calculado usando una aproximación de balance armónico de sexto orden (L_3) y una de octavo orden (L_4).

En la Figura 6.7 se observa la forma de onda de la variable x_1 en función del tiempo para las diferentes aproximaciones. El desfasaje entre las formas de ondas de las aproximaciones de balance armónico y los resultados del programa AUTO es irrelevante pues, como sabemos, el estado final del sistema para $t \rightarrow \infty$ será el ciclo límite. Nótese que todas las aproximaciones concuerdan cuando los valores de $\hat{\theta}$, como en este caso, son pequeños ($\hat{\theta} \cong 0.7$).

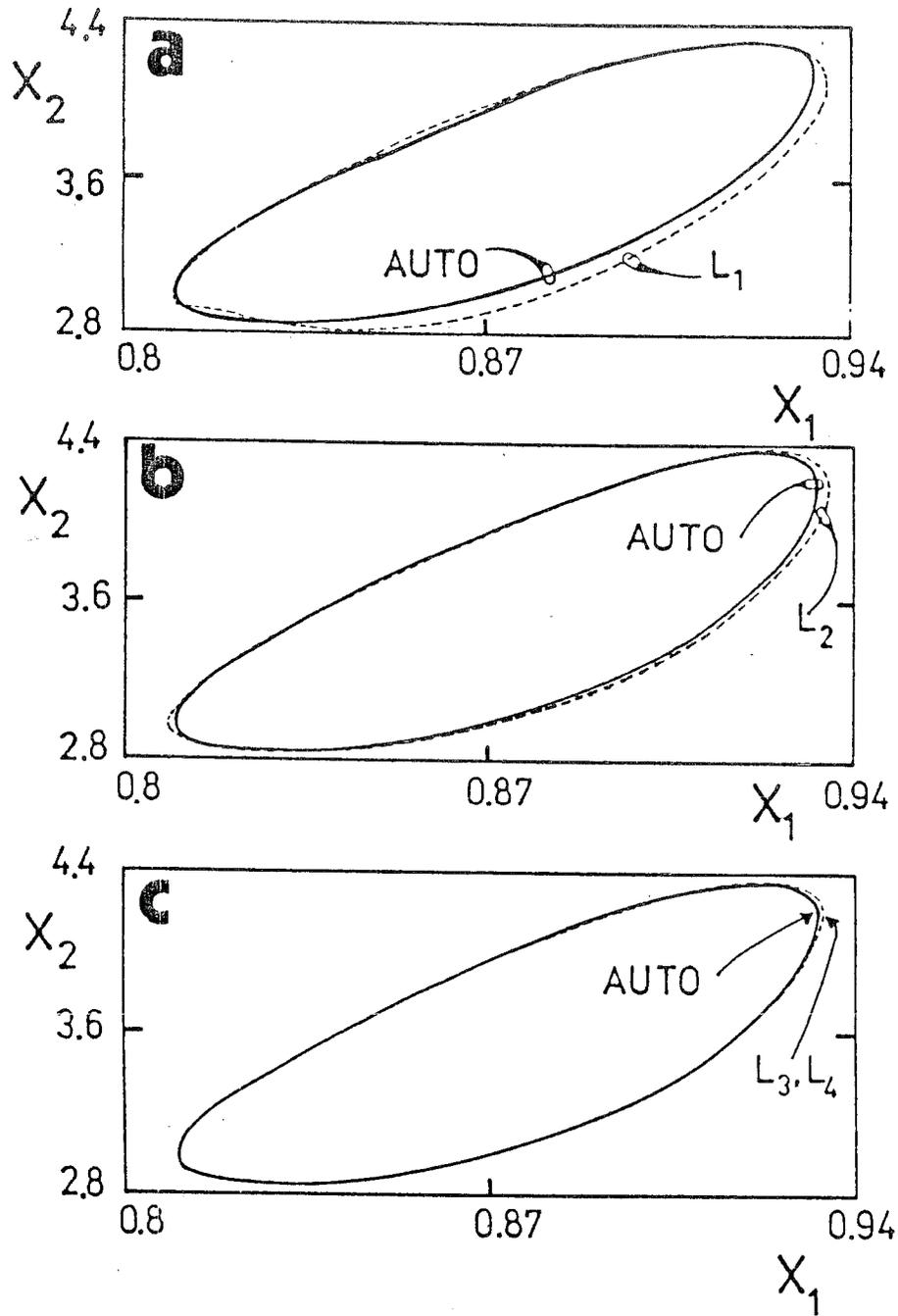


Figura 6.6: Retratos de fase mostrando las comparaciones entre las diferentes aproximaciones y AUTO ($D=0.212526087$).

Disminuyendo el valor del parámetro D podemos obtener para $D=0.1826608935$ los retratos de fase indicados en la Figura 6.8. En esta última figura graficamos el ciclo límite obtenido usando las aproximaciones

de balance armónico segundo (L_1) y cuarto (L_2) junto con los resultados dados por el programa AUTO (Figura 6.8.a), y las comparaciones con las

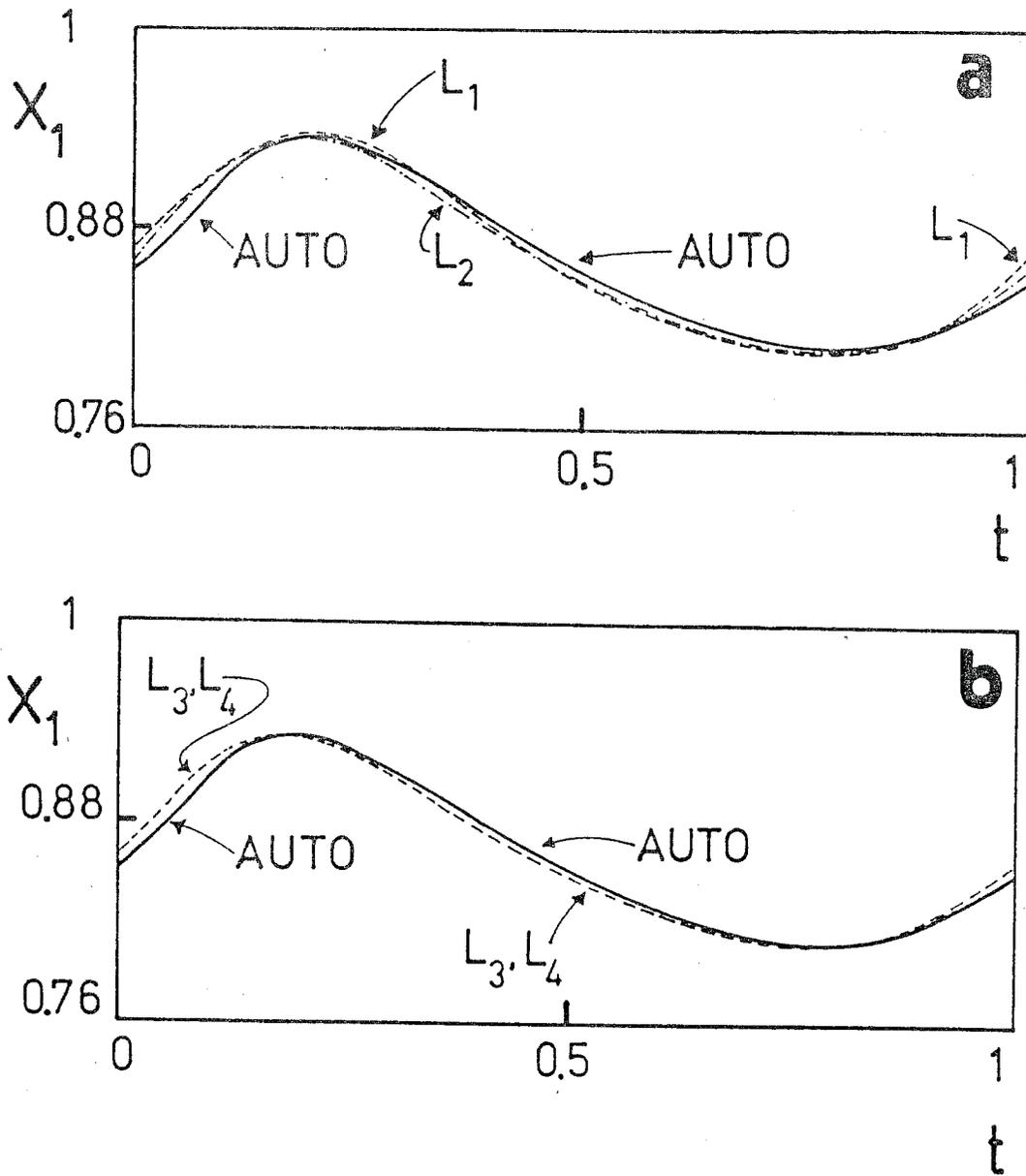


Figura 6.7: Evolución temporal en un período y comparaciones entre las diferentes aproximaciones y AUTO.

aproximaciones de balance armónico de sexto y octavo órdenes (Figura 6.8.b). De la Figura 6.8.a vemos que la aproximación L_2 da una medida excesiva de la amplitud del ciclo límite. En cambio, tanto L_3 como L_4 corrigen fuertemente las primeras aproximaciones L_1 y L_2 dando lugar a una mejor lo-

calización de la órbita periódica y recuperando notablemente la forma de la curva cerrada.

Comparando la Figura 6.8 con la Figura 6.6 puede verse que la forma del ciclo límite se ha modificado sustancialmente cuando nos alejamos del punto de bifurcación de Hopf. En cercanías del valor crítico de bifurcación

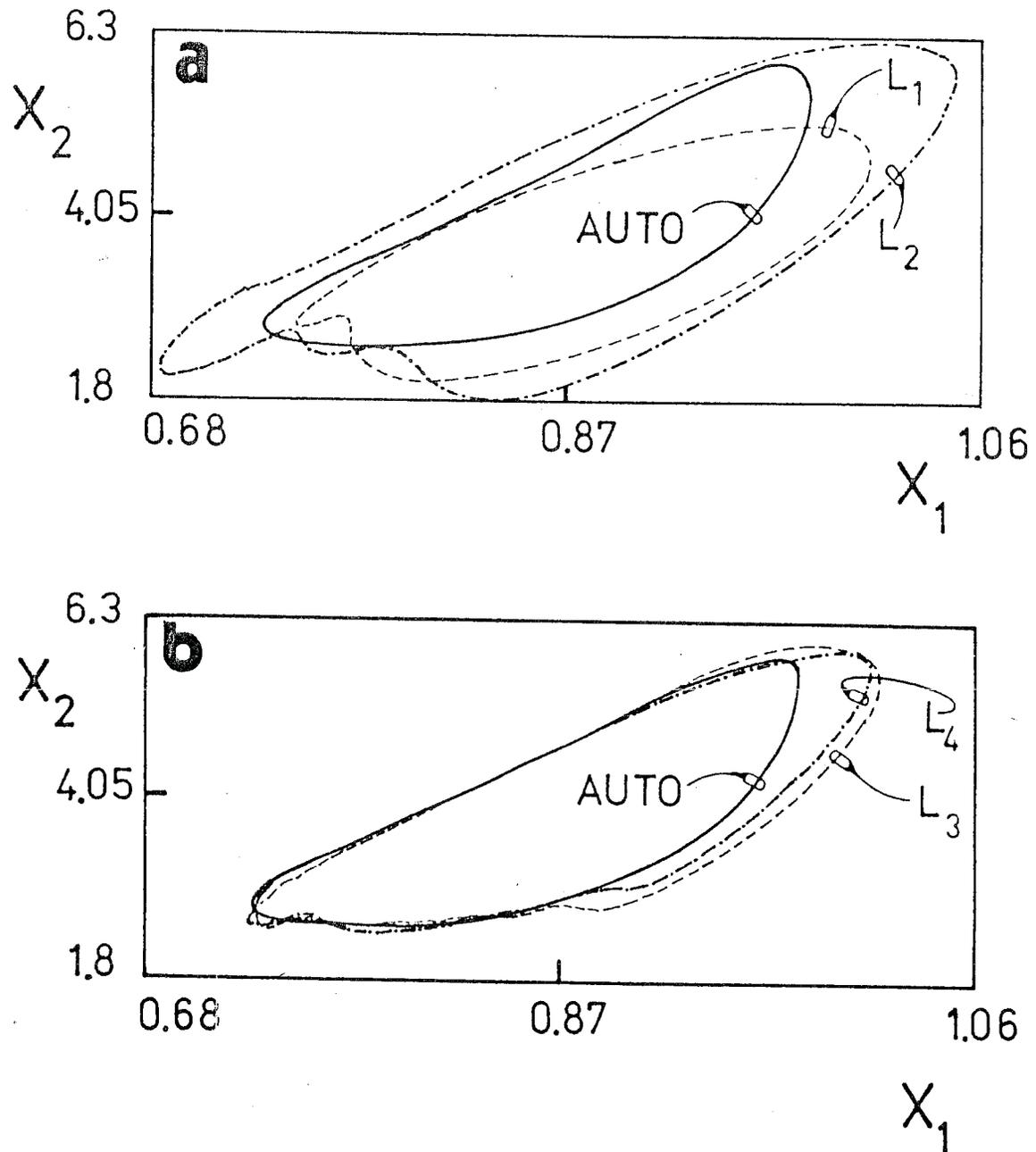


Figura 6.8: Retratos de fase mostrando comparaciones entre las diferentes aproximaciones y AUTO ($D=0.1826608935$).

la forma es casi una elipse, mientras que sus extremos comienzan a hacerse más agudos a medida que nos alejamos de esta condición. En otras palabras, para la condición de la Figura 6.6 puede lograrse la expresión que aproxime al ciclo límite considerando sólo algunos armónicos. En cambio para la condición de la Figura 6.8 es indispensable la inclusión de más armónicos en la solución para lograr una mejor aproximación en la caracterización de la curva cerrada.

Esto puede verse claramente en la Figura 6.9 donde se presenta el diagrama de las ondas periódicas para las diferentes aproximaciones en función del tiempo. Nuevamente se ha elegido el gráfico de un período (normalizado) de la oscilación. Con la ayuda de la información dada por la Figura 6.4 puede fácilmente desnormalizarse. La Figura 6.9.a muestra las comparaciones entre las aproximaciones L_1 y L_2 con los resultados obtenidos luego de aplicar el programa AUTO. Como puede notarse claramente de la mencionada figura las aproximaciones L_1 y L_2 difieren de la onda asumida como verdadera dada por AUTO. Las aproximaciones L_3 y L_4 capturan mejor la solución periódica dada por AUTO (ver Figura 6.9.b) pero a expensas de un mayor volumen de cálculo. Nótese nuevamente que los diagramas más ilustrativos y completos resultan ser los retratos de fase en lo que respecta a la localización del ciclo límite.

Disminuyendo aún más el valor del parámetro D , la amplitud de los ciclos límites de la rama de soluciones periódicas aumenta aún más, entonces es de esperar que las aproximaciones de balance armónico den resultados cada vez más alejados de la solución verdadera. Recordemos que hemos aproximado la función no lineal $f(\theta, \mu)$ por una serie de Taylor evaluada en el estado de equilibrio, luego a medida que nos alejamos de $\hat{\theta}(\mu)$, necesitamos más términos de la serie para describir la función $f(\theta, \mu)$ apropiadamente. Sin embargo, hemos establecido como límite la información brindada por la derivada novena que consideramos en la aproximación de balance armónico de octavo orden. Así, en la Figura 6.10 se muestran los ciclos límites en el plano de fase x_1-x_2 para las diferentes aproximaciones usando el método en el dominio frecuencia. La aproximación L_2 , en este caso, predice una osci-

lación de mayor amplitud que la solución periódica verdadera dada por AUTO (ver Figura 6.10). En cambio, las aproximaciones L_3 y L_4 , aunque también deficientes, capturan mejor la forma y ubicación de la solución periódica en el plano de fase que las aproximaciones L_1 y L_2 .

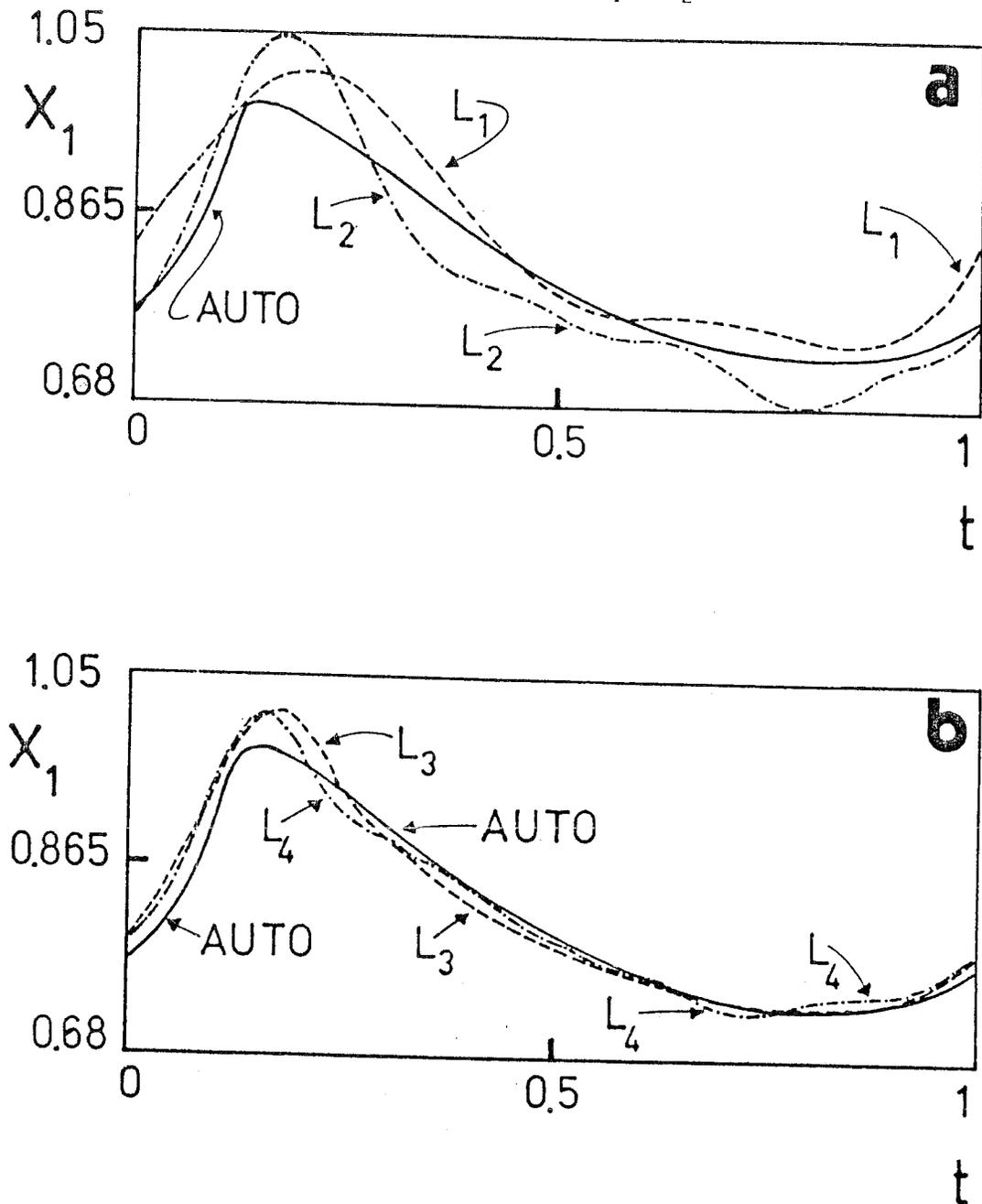


Figura 6.9: Evolución temporal en un período y comparaciones entre las diferentes aproximaciones y AUTO.

Las formas de ondas en función del tiempo para las diferentes aproximaciones se adjuntan en la Figura 6.11. La aproximación L_2 da resultados

erróneos comparándola con la onda obtenida utilizando el programa AUTO. Aunque con mejores resultados que L_2 , las aproximaciones L_1 , L_3 y L_4 capturan con deficiencias la forma de onda verdadera. El valor del parámetro de

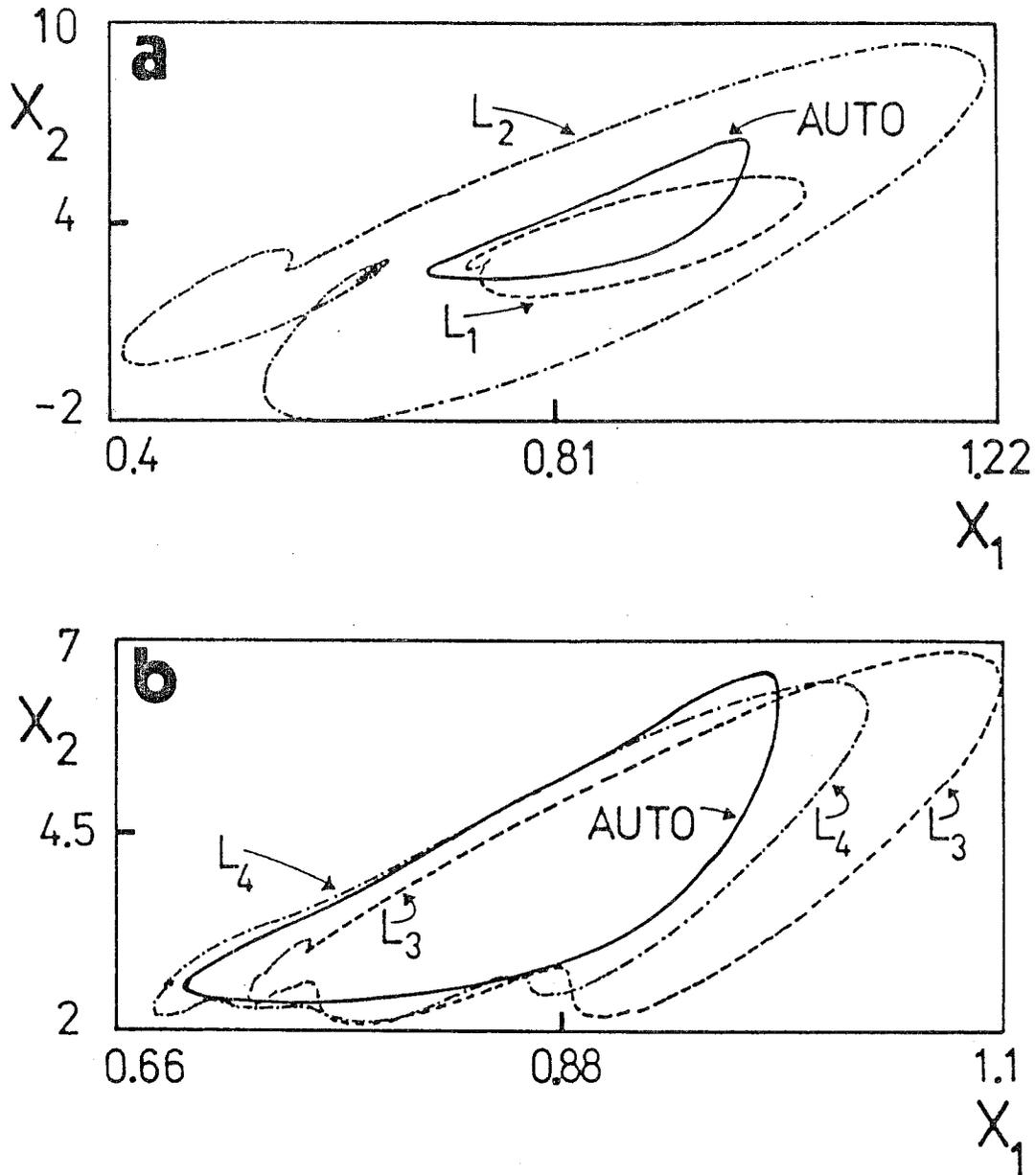


Figura 6.10: Retratos de fase mostrando comparaciones entre las diferentes aproximaciones y AUTO ($D=0.170954638$).

bifurcación D es el mismo para la Figura 6.11 que para la Figura 6.5.b. Notemos que para la aproximación de balance armónico L_2 (o lugar geométrico de la amplitud) obteníamos una intersección que distaba de ser un corte

transversal con el lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(i\omega)$. Esa condición fijaba además el límite de continuación de la rama de soluciones periódicas para la aproximación L_2 .

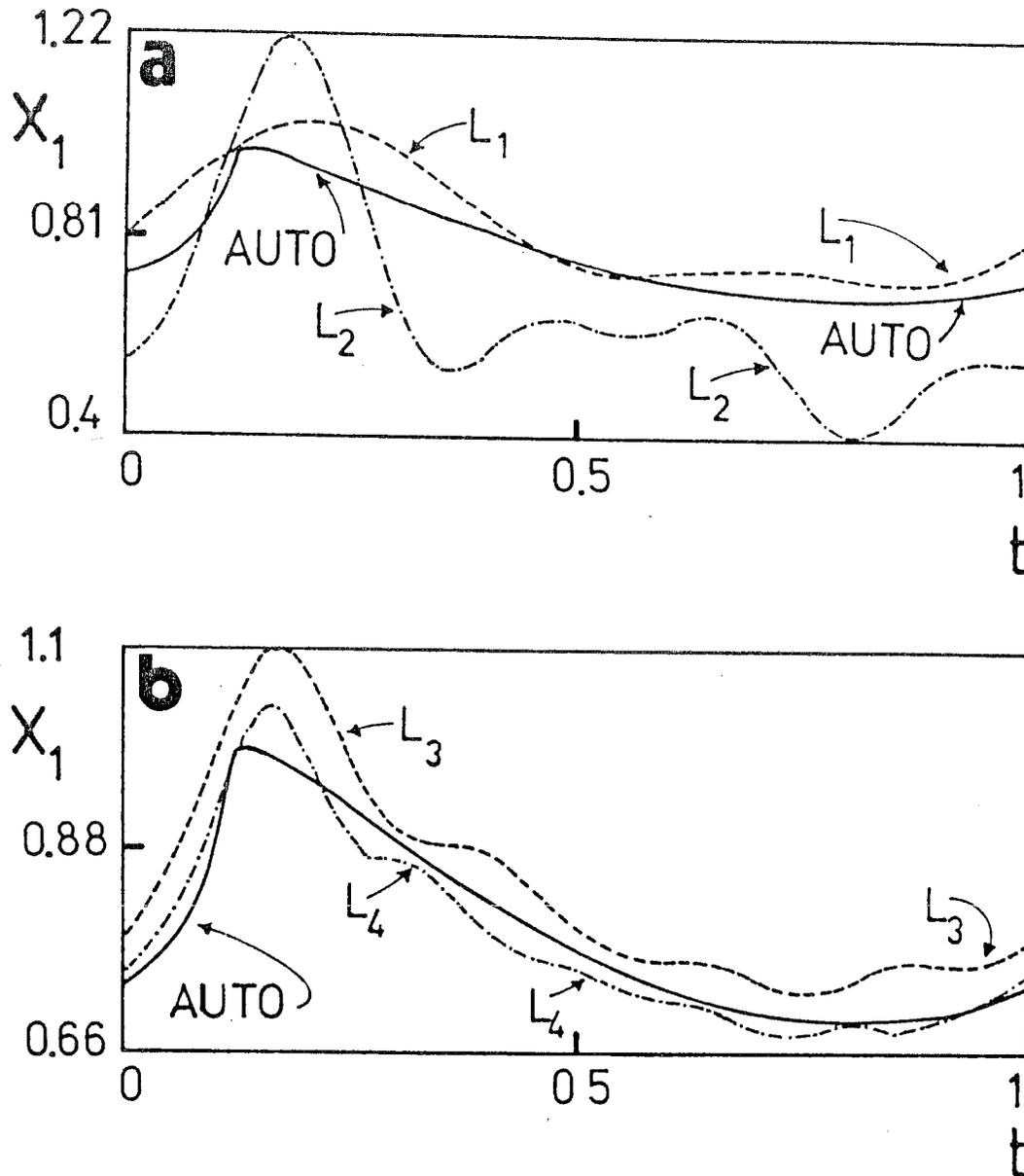


Figura 6.11: Evolución temporal en un período y comparaciones entre las diferentes aproximaciones y AUTO.

Completemos ahora los resultados dados en el capítulo anterior incluyendo la información de la aproximación de balance armónico de orden octavo. En la Figura 5.22 mostramos cómo la aproximación L_3 intersectaba a

$\hat{\lambda}(i\omega)$ en tres lugares diferentes indicando la posible existencia de tres ciclos límites anidados (o configuraciones policíclicas). Consideremos la intersección más alejada, o en otras palabras aquella que predice el ciclo límite de mayor amplitud. La Figura 6.12 muestra los lugares geométricos de la amplitud L_3 y L_4 junto con el lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(i\omega)$. La intersección entre L_4 y $\hat{\lambda}(i\omega)$ ocurre para valores de $\hat{\theta}$ cercanos a 0.5, mientras que la intersección entre L_3 y $\hat{\lambda}(i\omega)$ se da para $\hat{\theta}_3 \cong 0.67$ (no mostrada en la Figura 6.12 pero si en la Figura 5.22). Graficando las correspondientes soluciones en función del tiempo para las aproximaciones L_3 y L_4 podemos encontrar los diagramas de la Figura 6.13. Aquí puede notarse claramente que la aproximación L_4 recupera mucho mejor que la aproximación L_3 la forma de onda de la solución periódica.

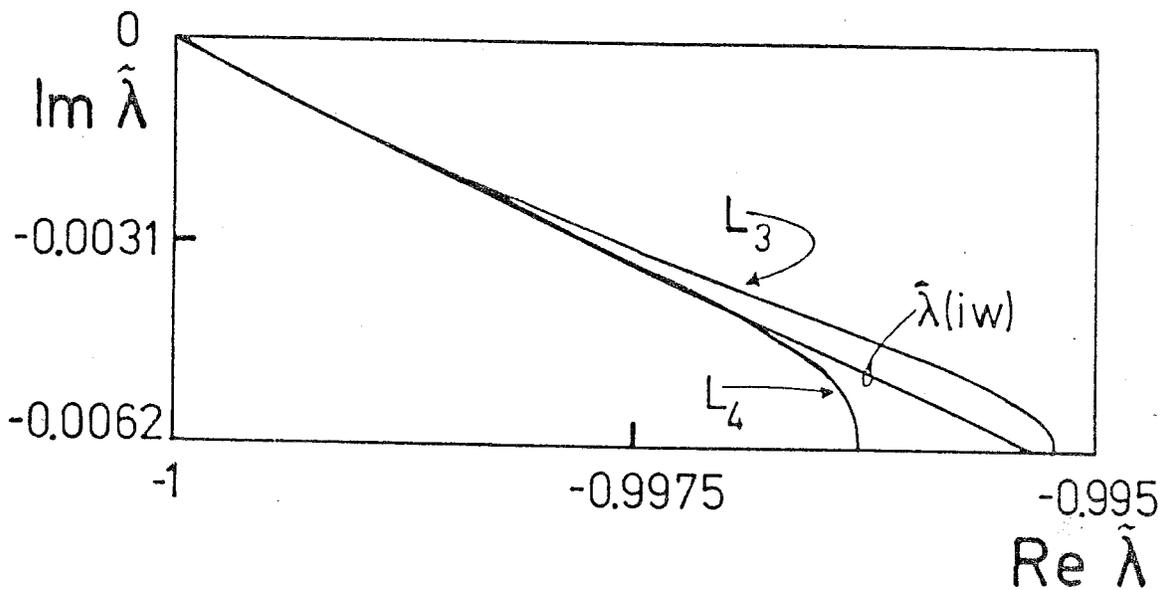


Figura 6.12: Lugar geométrico característico y de las amplitudes L_3 y L_4 para $B=22.076$, $\beta=4.63$, $\epsilon=2$, $\rho=1$ y $D=0.14189356$.

En este caso de múltiples soluciones periódicas habíamos visto que la aproximación L_3 era suficiente para describir localmente perturbaciones en la degeneración H_{20} . Sin embargo, si queremos que el error sea pequeño debemos considerar aproximaciones de mayor orden, esto es L_4 , L_5 , etc. Esto

trae aparejado un considerable aumento en el volúmen de cálculo, con lo cual se hace hasta el presente dificultoso ir más allá de la aproximación L_4 . Si la localización de estos ciclos límites de *grandes amplitudes* (pues corresponden a los ciclos límites externos) es una tarea compleja, el lector puede claramente apreciar cuán mayor será la dificultad de la localización de las variedades de transición H_1 y D mencionadas en el capítulo anterior. Es por ello que aún no se dispone de algoritmos eficientes para su continuación en el espacio de parámetros.

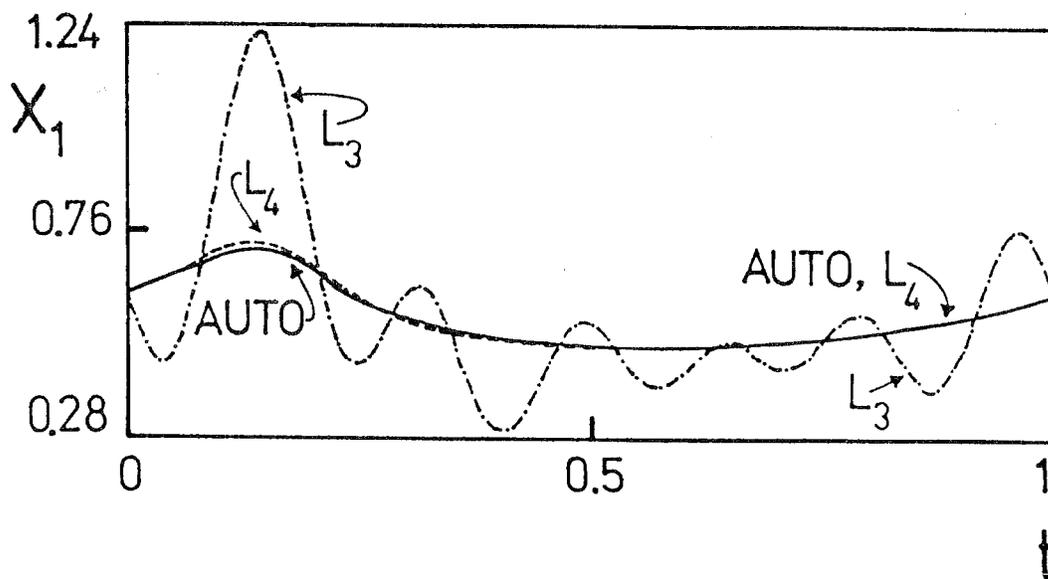


Figura 6.13: Evolución temporal comparando las aproximaciones L_3 y L_4 con los resultados dados por AUTO.

Para concluir con este ejemplo numérico antes de pasar al análisis de los diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de ciertas bifurcaciones degeneradas de Hopf, mostramos en la Figura 6.14 un diagrama ampliado para comparar la solución periódica obtenida por L_4 y por AUTO. Además, en la Figura 6.15 incluimos los respectivos ciclos límites en el plano de fase donde puede apreciarse una buena concordancia entre los resultados de la aproximación de balance armónico de octavo orden y el programa AUTO. Nótese que el ciclo límite tiene una forma algo distorsionada en uno de sus extre-

mos de la típica y simétrica forma elipsoidal encontrada en los ciclos límites internos. Como hemos notado anteriormente, las aproximaciones L_1 y L_2 fallan en la detección de este ciclo límite que es el más alejado de la solución de estado estacionario. Esa es la razón de explorar con las aproximaciones siguientes L_3 y L_4 .

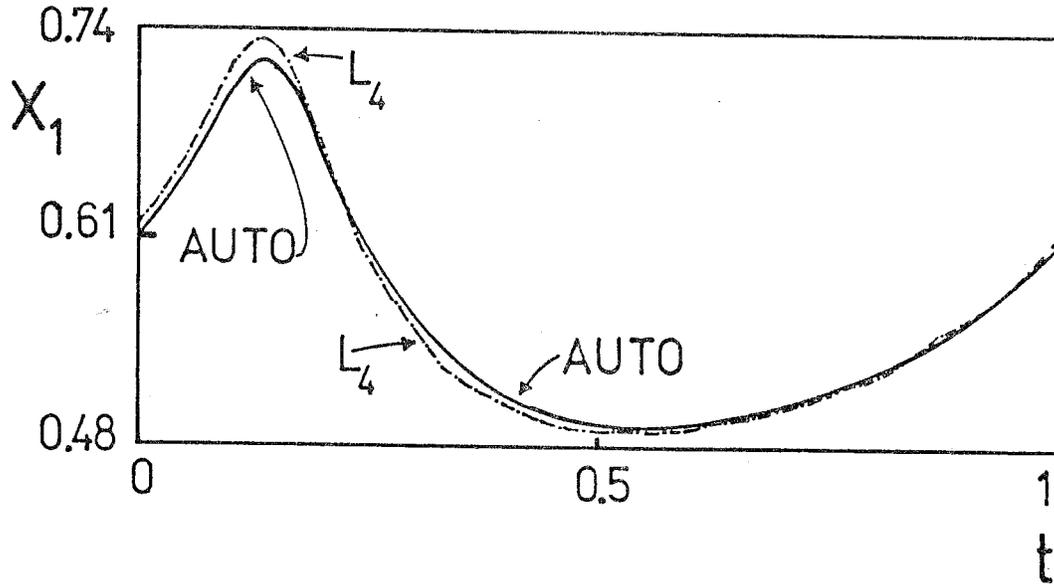


Figura 6.14: Evolución temporal comparando la aproximación L_4 con los resultados dados por AUTO.

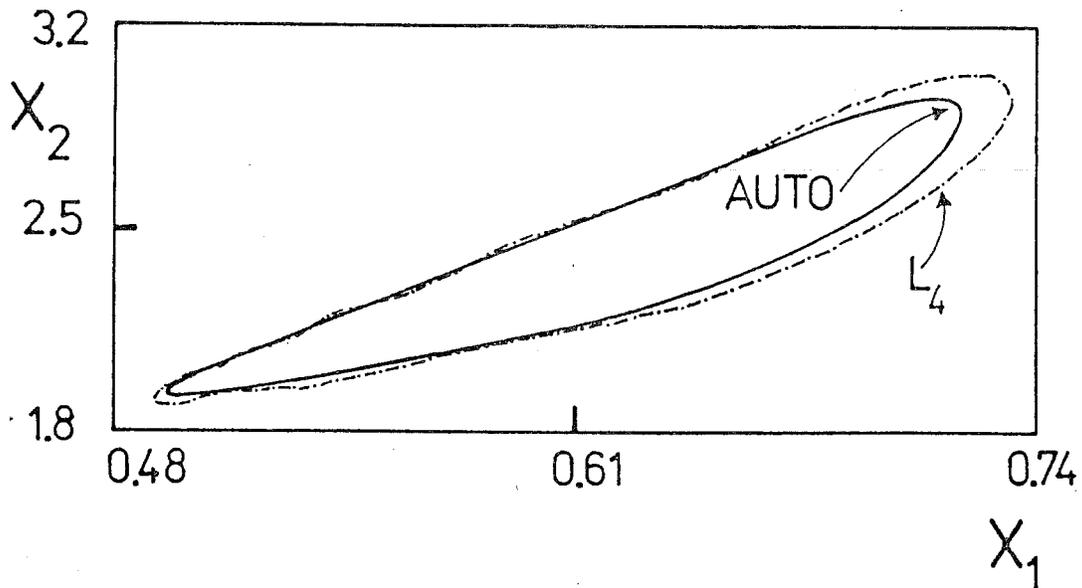


Figura 6.15: Plano de fase comparando la aproximación L_4 con los resultados dados por AUTO.

Si siguiendo con este ejemplo pero para una condición diferente en el espacio de parámetros, esto es para $\epsilon=4$ y $\rho=1$ podemos encontrar la estructura de bifurcaciones degeneradas presentada en la Figura 6.16. En el gráfico superior de esta figura notamos la interacción entre singularidades H_{01} , es decir aquéllas que involucran la interacción de dos puntos de bifurcaciones

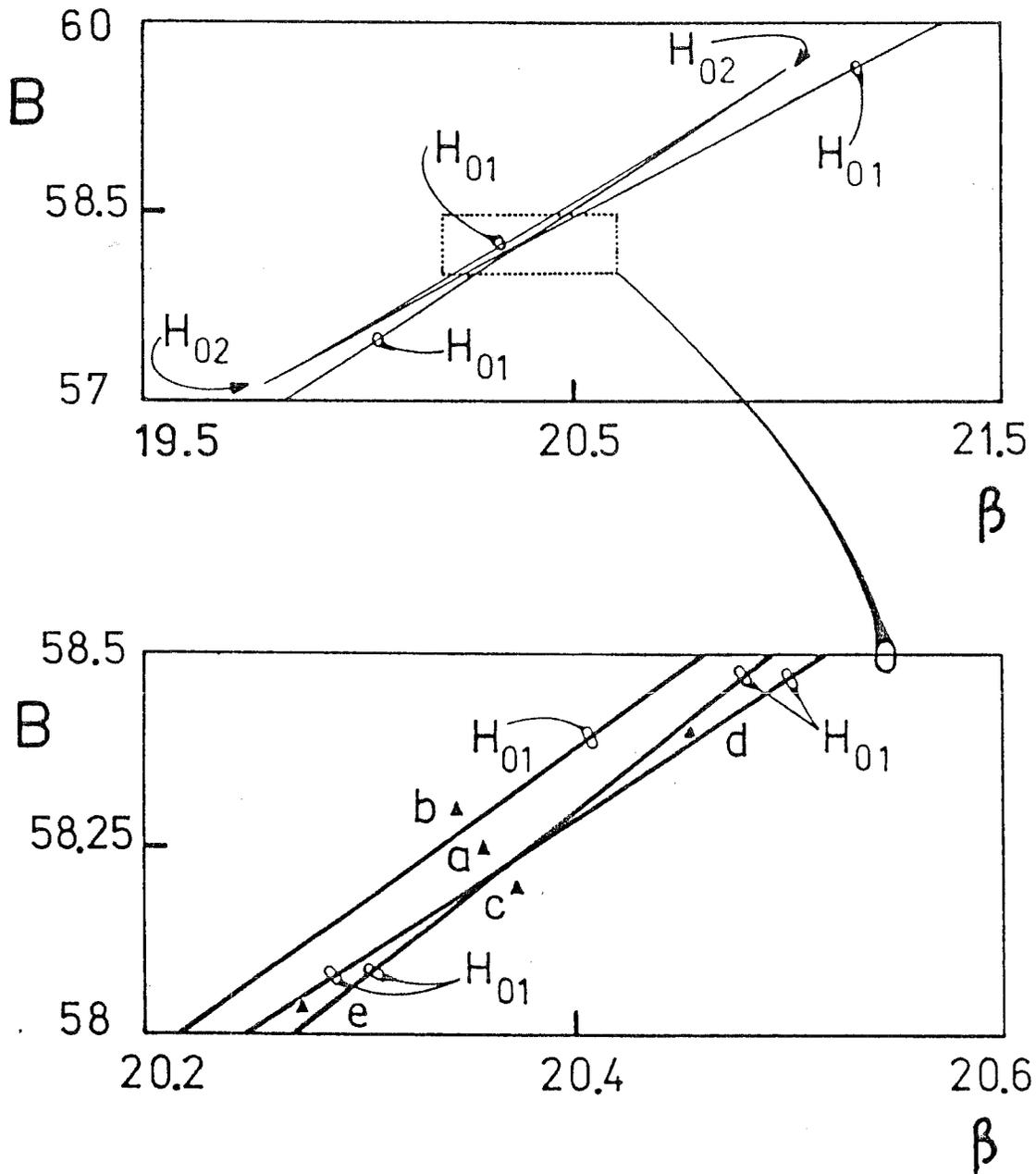


Figura 6.16: Bifurcaciones degeneradas de Hopf H_{01} y H_{02} para $\epsilon=4$ y $\rho=1$.

de Hopf. Estas degeneraciones H_{01} se unen para dar lugar a dos degeneraciones H_{02} , es decir aquéllas que presentan la interacción entre tres puntos de bifurcaciones de Hopf en cercanías de las mismas. La forma de obtención y formulación han sido presentadas en el capítulo 4, por tal razón no abundaremos en mayores detalles. Los diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de estas singularidades han sido anunciados en el capítulo 5, usando herramientas de la teoría de singularidades y el método en el dominio frecuencia. Usando como referencia el gráfico inferior de la Figura 6.16 podemos indicar cinco zonas de similar comportamiento dinámico, al menos localmente hablando. Estas regiones están esquematizadas como a, b, c, d y e. En puntos internos a la singularidad *swallowtail* tales como el a, podemos encontrar cuatro puntos de bifurcaciones de Hopf. En cambio, para los puntos b, d y e tenemos sólo dos puntos de bifurcaciones de Hopf y ninguno para puntos tales como el c. Notemos que atravesar una singularidad H_{01} en el plano de los parámetros $B-\beta$ equivale a aumentar (o disminuir) en dos el número de puntos de bifurcaciones de Hopf. En otras palabras, en puntos como c no tenemos puntos de bifurcación de Hopf, pero al pasar cualquiera de las primeras singularidades H_{01} llegamos a e o d, donde tenemos dos puntos de bifurcaciones de Hopf. Pasar de d o e a a implica una vez más aumentar en dos los puntos de bifurcación de Hopf. En cambio, pasar de a a b implica restar dos puntos de bifurcaciones de Hopf al número existente en la región esquematizada por a.

Los valores de los parámetros B y β para el punto a son $B=58.25$ y $\beta=20.36$. La Figura 6.17 muestra la curva de estados de equilibrio junto con los cuatro puntos de bifurcaciones de Hopf y la conexión entre las ramas periódicas emergentes. Así el primer punto de bifurcación de Hopf o HB1 se une con el último (HB4) luego de pasar la rama periódica por dos puntos límites. En cambio, el segundo punto de bifurcación de Hopf (HB2) se une con el tercero (HB3) mediante la rama periódica central. Estos resultados fueron obtenidos con el programa AUTO de continuación de soluciones periódicas desde puntos de bifurcaciones de Hopf. El objetivo será ahora obtener los diagramas de bifurcaciones locales usando las diferentes aproximaciones de balance armónico. Así en la Figura 6.18 presentamos dichos diagramas de bi-

furcaciones locales utilizando el algoritmo descrito en las secciones pre-

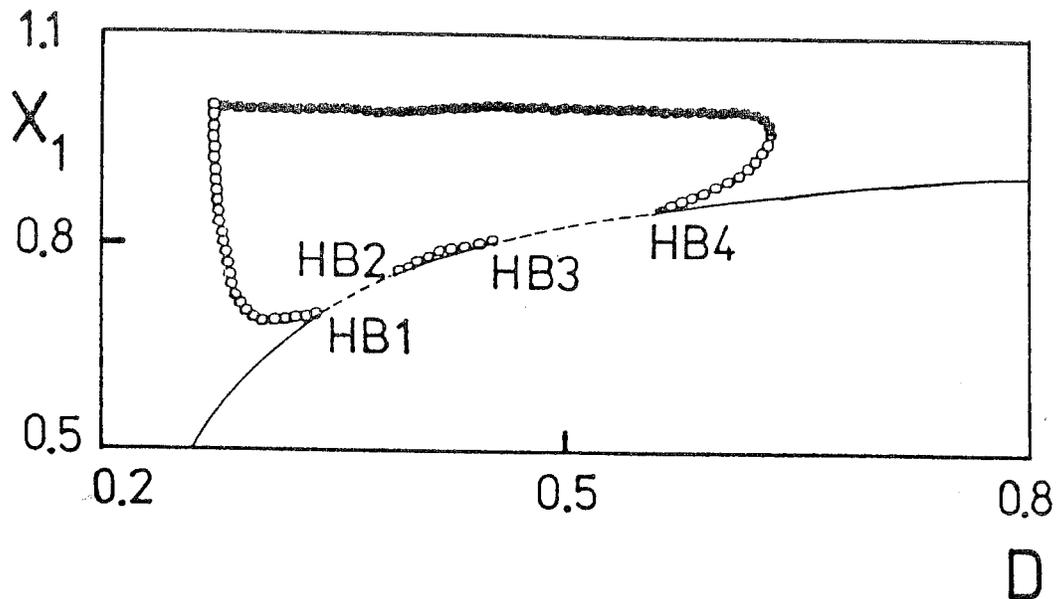


Figura 6.17: Diagrama de bifurcaciones global para $B=58.25$, $\beta=20.36$, $\epsilon=4$ y $\rho=1$.

cedentes. Por ejemplo, la Figura 6.18.a presenta la continuación de las soluciones periódicas desde el primer punto de bifurcación de Hopf $HB1$; la Figura 6.18.b la interconexión entre los puntos de bifurcaciones de Hopf $HB2$ y $HB3$ mediante la rama de órbitas periódicas respectivas y la Figura 6.18.c hace lo propio desde el punto de bifurcación $HB4$. En todas las gráficas se ha incluido el valor de la solución de estado estacionario para tener una idea de la distancia entre este último y la solución periódica respectiva para cada valor del parámetro principal de bifurcación D . Nótese que en el gráfico central, es decir la Figura 6.18.b, todas las aproximaciones coinciden sistemáticamente con los resultados dados por AUTO.

El criterio de detención del algoritmo para cada aproximación es cuando se detecta alguna intersección que no es transversal entre el lugar geométrico de la amplitud L_1 y el lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(i\omega)$. A modo de ejemplo para la Figura 6.18.a notemos que cuando $D=0.29206$ tenemos la configuración de lugares geométricos de las amplitudes y característico dados por la Figura 6.19. En esta última figura puede verse claramente que la

aproximación L_4 intersecta a $\hat{\lambda}(i\omega)$ en dos valores muy cercanos entre sí, presagiando la presencia de un punto límite en la rama de soluciones periódicas.

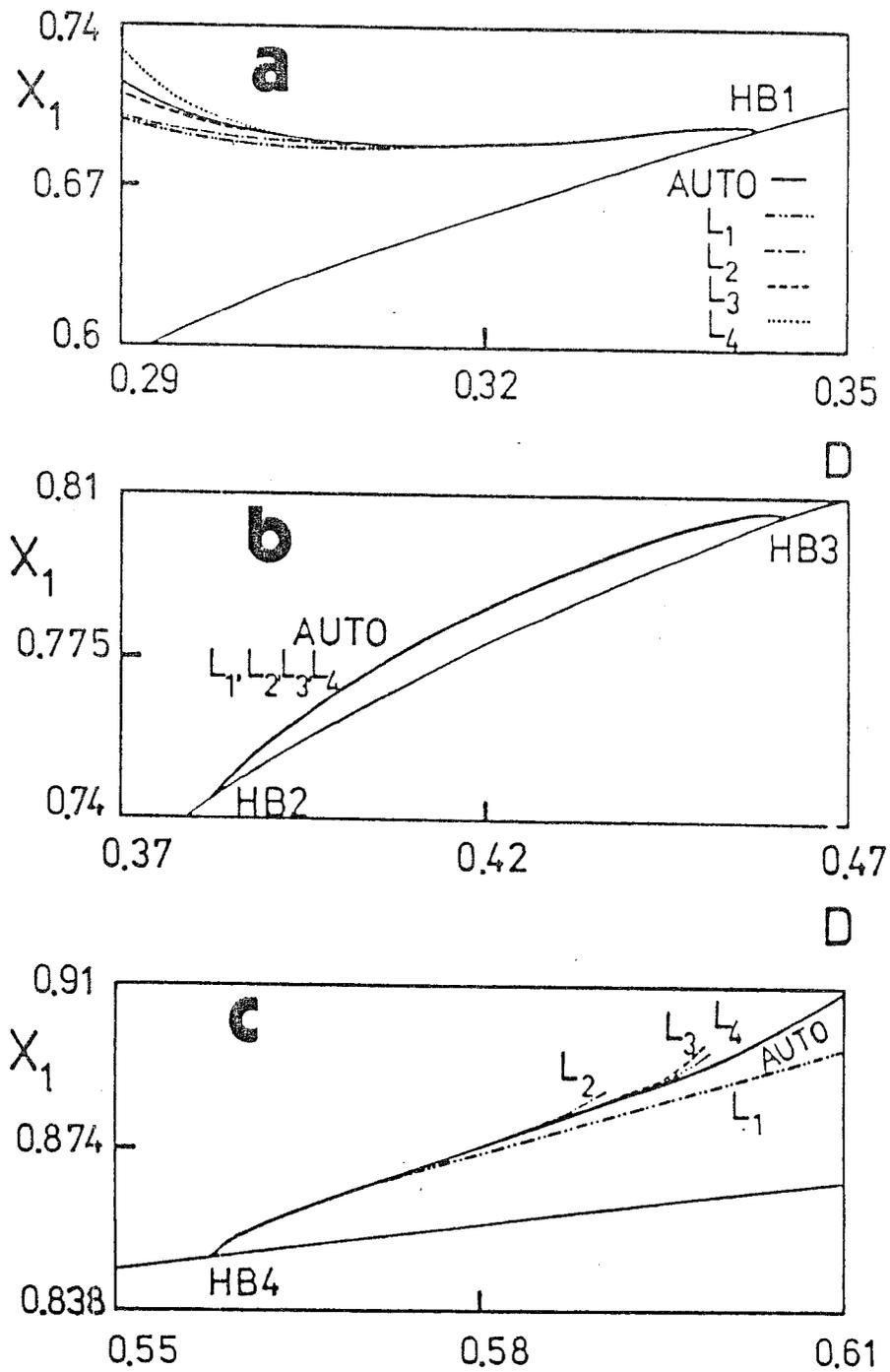


Figura 6.18: Continuación de ramas periódicas utilizando las diferentes aproximaciones de balance armónico.

dicas. Nótese que esta condición realmente aparece en el gráfico de la Figura 6.17 pero para valores del parámetro D inferiores al valor indicado

como detención de cálculo de la aproximación L_4 . La aproximación L_3 también presenta dos cortes con $\hat{\lambda}(i\omega)$ pero éstos se dan para valores de frecuencia más separados que los cortes entre L_4 y $\hat{\lambda}(i\omega)$. Es de esperar que la detección del punto límite por parte de la aproximación L_3 se de para valores del parámetro de bifurcación D menores que los obtenidos utilizando el programa AUTO.

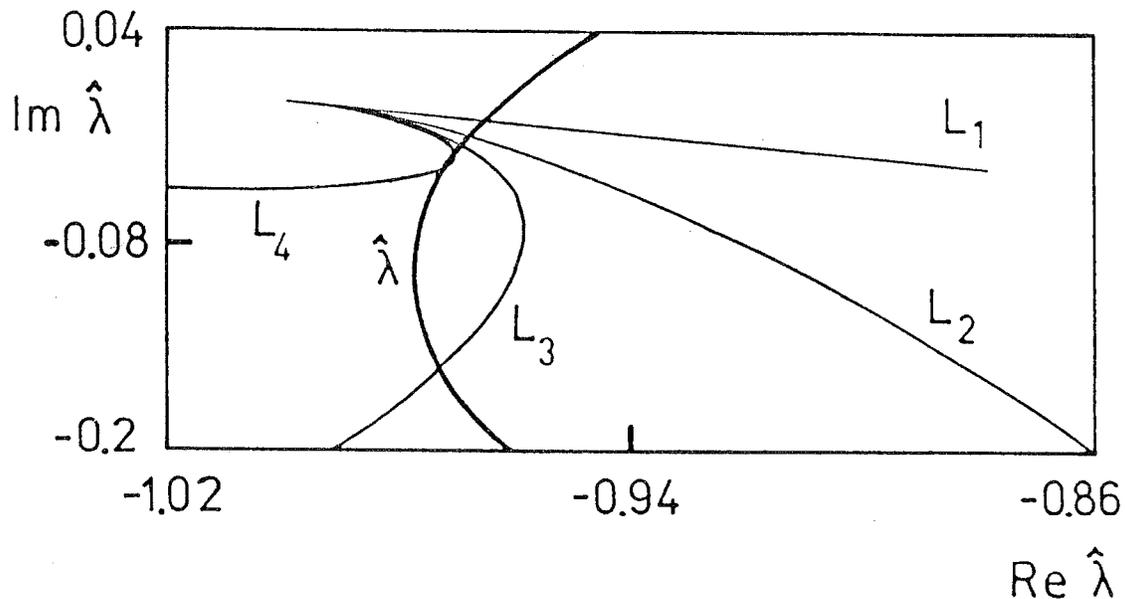


Figura 6.19: Lugares geométricos característico y de las amplitudes. Criterio de detención de alguna de las aproximaciones.

Notemos que para las diferentes aproximaciones (L_1 , L_2 , L_3 y L_4) las intersecciones con el lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(i\omega)$ que indican un ciclo límite inestable están todas muy cercanas entre sí. Sin embargo, las segundas intersecciones entre L_4 y $\hat{\lambda}(i\omega)$, y L_3 y $\hat{\lambda}(i\omega)$ pueden verse que están bastante separadas (ciclo límite estable). Estas últimas dan una idea de la convergencia de la solución periódica utilizando varias aproximaciones de balance armónico. Para la intersección correspondiente a un ciclo límite inestable la convergencia es clara, mientras que para la intersección correspondiente a un ciclo límite estable sólo las aproximaciones L_3 y L_4 parecen tener una cierta tendencia hacia la convergencia en la detección de la solución periódica.

Para ilustrar más estos conceptos veamos cómo se comportan los diferentes lugares geométricos de la amplitud L_1 , L_2 , L_3 y L_4 para un valor del parámetro D en la rama periódica central, es decir entre los puntos de bifurcación de Hopf HB2 y HB3. Para $D=0.416150$ los lugares geométricos de las amplitudes y característico son mostrados en la Figura 6.20. En la misma podemos notar que la intersección de todos los L_i ($i=1, \dots, 4$) con $\hat{\lambda}$ es coincidente (ver en el diagrama ampliado inferior el círculo indicando tal

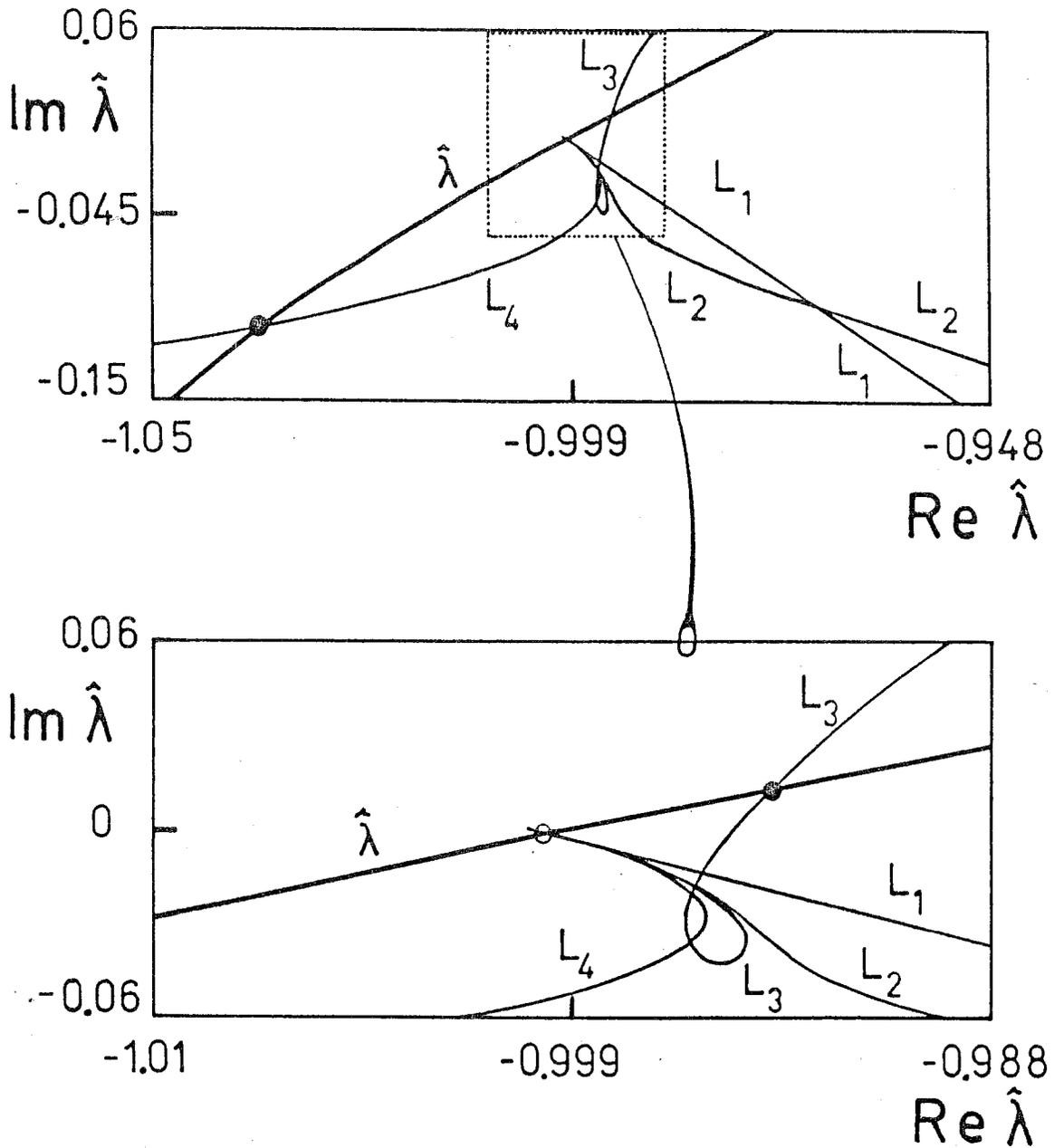


Figura 6.20: Lugares geométricos característico y de las amplitudes. Detección de múltiples ciclos límites.

intersección). Como el valor de $\hat{\theta}$ es pequeño todas las aproximaciones son muy cercanas entre sí y, tal como hemos visto en la Figura 6.18.b, coincidentes con los resultados del programa AUTO. Notemos, no obstante, que tanto el lugar geométrico de la amplitud L_3 como L_4 tienen sendas intersecciones con $\hat{\lambda}(i\omega)$ para valores algo alejados de la frecuencia ω_r . Estas intersecciones indicadas con círculos llenos, corresponden a ciclos límites estables. De la Figura 6.17 puede notarse que tales ciclos límites estables existen y rodean a los pequeños ciclos límites inestables.

Hemos verificado que las predicciones en frecuencia son más acertadas con la aproximación L_4 que con L_3 . Sin embargo, queremos hacer notar aquí que para la segunda intersección los resultados de L_3 y L_4 no son tan cercanos como lo eran para la primera intersección (ciclo límite inestable) los resultados de L_1 , L_2 , L_3 y L_4 .

De la misma forma que se ha realizado en la Figura 6.18 podemos mostrar cómo se va modificando el período de las soluciones periódicas cuando varía el parámetro D para las diferentes ramas. Para cada aproximación llevaremos el valor del período T_i ($i=1, \dots, 4$) resultante de aplicar la siguiente fórmula $T_i = 2\pi/\hat{\omega}_i$. Esto se muestra en la Figura 6.21 para las diferentes ramas de órbitas periódicas. Con HB_i ($i=1, \dots, 4$) denotamos los respectivos puntos de bifurcaciones de Hopf tal como se ha presentado en la Figura 6.17.

Al atravesar la singularidad H_{01} desde el punto "a" hasta el punto "b" nos encontramos con que han desaparecido dos puntos de bifurcaciones de Hopf, específicamente HB_2 y HB_3 , en forma similar a la presentada por la Figura 5.14. El diagrama de bifurcación para el punto "b", cuyos valores de B y β son 58.3 y 20.348 respectivamente, se muestra en la Figura 6.22. Aunque no aparece en esta última figura, las ramas periódicas emergentes de HB_1 y HB_4 se conectan en forma similar a la mostrada en la Figura 6.17 a través de soluciones periódicas estables. Como hemos hecho en el caso anterior en la Figura 6.23 se muestran los diagramas de bifurcaciones locales obtenidos con las cuatro aproximaciones de balance armónico y los resulta-

dos del programa AUTO. Las Figuras 6.23.a y 6.23.b presentan los diagramas de bifurcaciones para la rama emergente del punto de bifurcación de Hopf

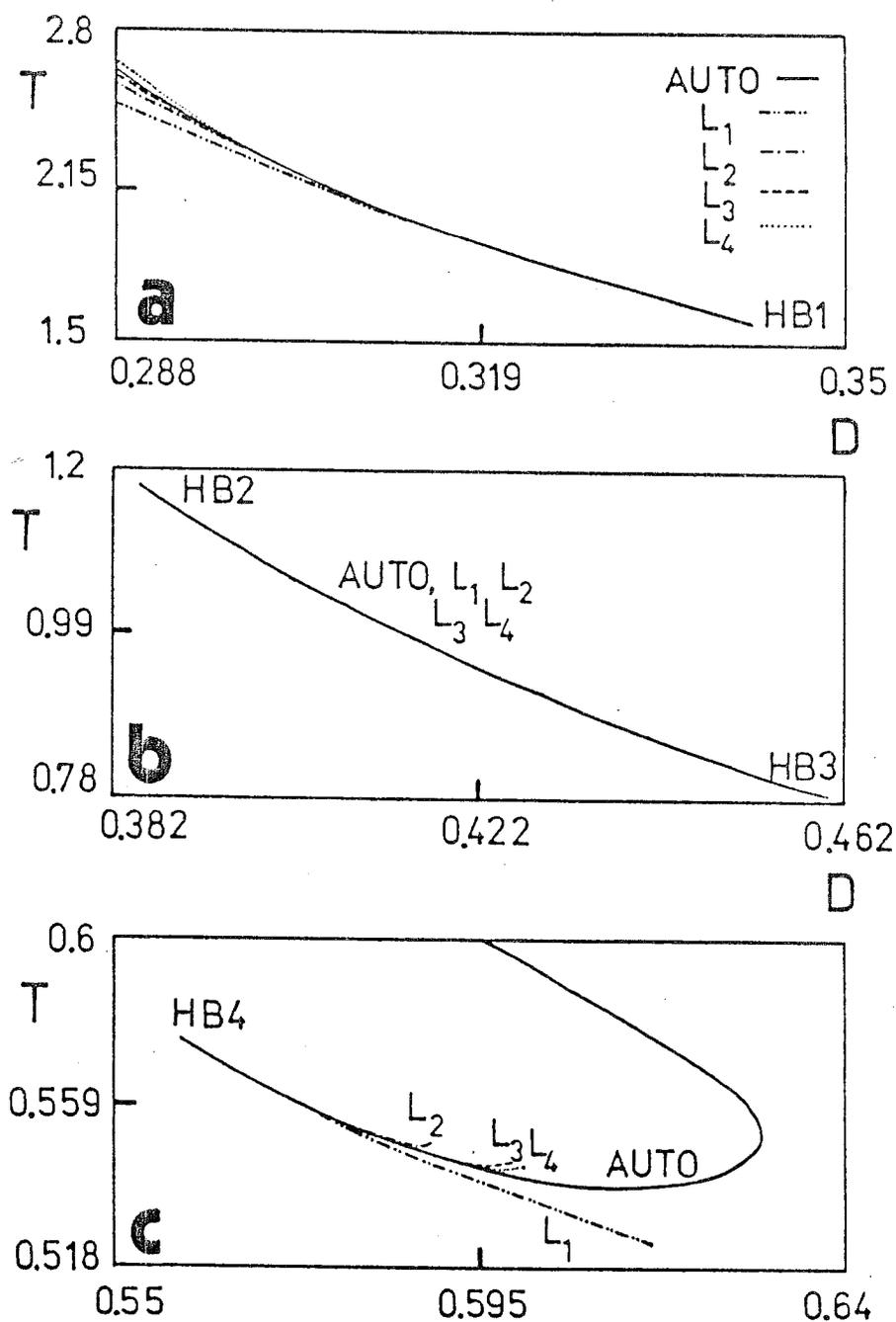


Figura 6.21: Variación del período para las diferentes ramas de soluciones bifurcadas.

HB1 para las dos componentes x_1 y x_2 de las variables de estado. En tanto en la Figura 6.23.c se hace lo propio con la rama emergente de HB4 para la

componente x_1 . Las aproximaciones L_3 y L_4 dan muy buenos resultados como puede apreciarse en la Figura 6.23. En el diagrama de la Figura 6.23.c la aproximación L_2 (como en la Figura 6.18.c) deja de continuarse en cercanías de una intersección no transversal. En cambio, L_3 y L_4 siguen dando soluciones aceptables más allá de este valor singular para el lugar geométrico de la amplitud L_2 .

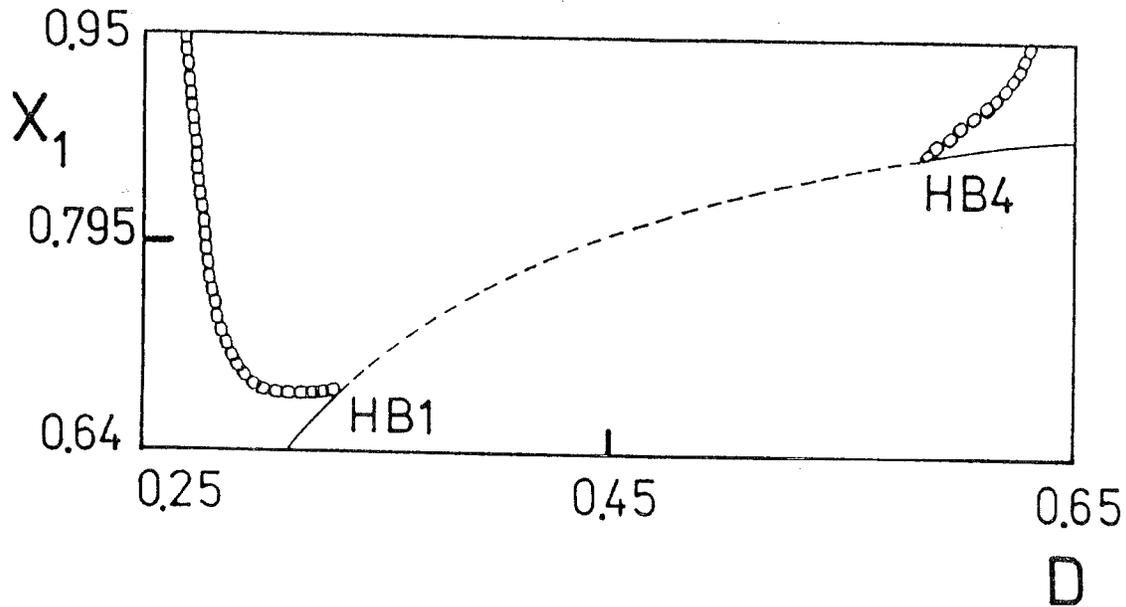


Figura 6.22: Diagrama de bifurcaciones global para $B=58.3$, $\beta=20.348$, $\epsilon=4$ y $\rho=1$.

Se ha preferido incluir el diagrama de la Figura 6.23.b para notar como las diferentes aproximaciones de balance armónico se separan de la solución asumida como verdadera obtenida por el programa AUTO. Así es fácil ver que L_2 será mejor aproximación que L_1 para valores de $D < 0.31$, mientras que L_3 será mejor aproximación que L_2 para valores de $D < 0.29$. Nuevamente la aproximación L_4 detecta el punto límite (no indicado en la Figura 6.23.b) hacia la derecha de su valor real mientras que L_3 lo hace a la izquierda.

Si desde el punto "a" en la Figura 6.16 nos movemos de tal forma de llegar al punto "d", atravesando sólo una singularidad H_{01} , pasamos a un

diagrama de bifurcación tal como el presentado en la Figura 6.24. Para tal configuración los valores de los parámetros son $B=58.4$ y $\beta=20.456$. En esta

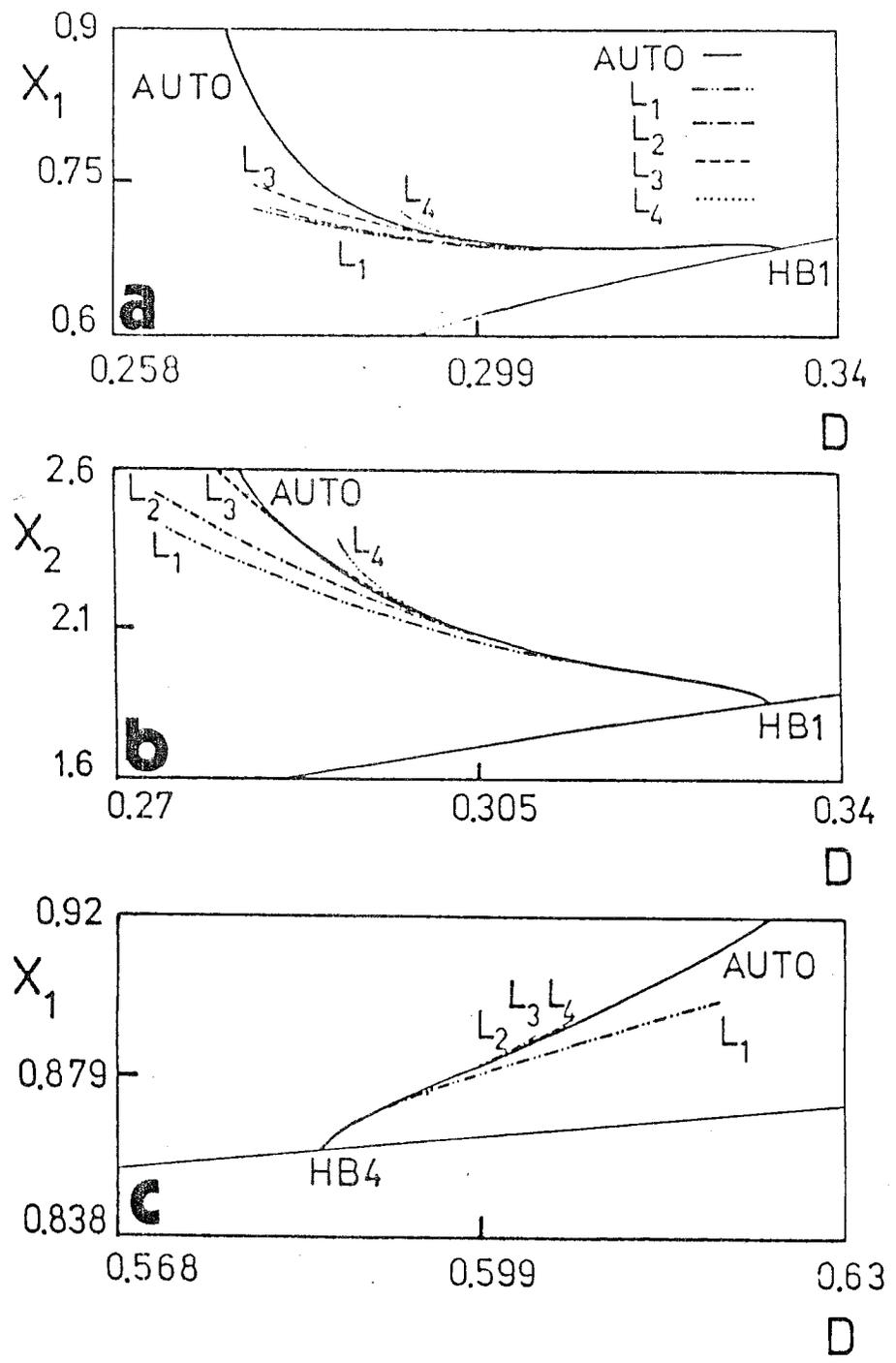


Figura 6.23: Continuación de ramas periódicas utilizando las diferentes aproximaciones de balance armónico.

última figura los puntos notados como HB3 y HB4 han desaparecido luego de cruzada la singularidad H_{01} . Los diagramas de bifurcaciones locales han si-

do presentados en la Figura 5.13 pero con las asignaciones de estabilidad cambiadas (tanto de la solución de equilibrio como de la órbita periódica).

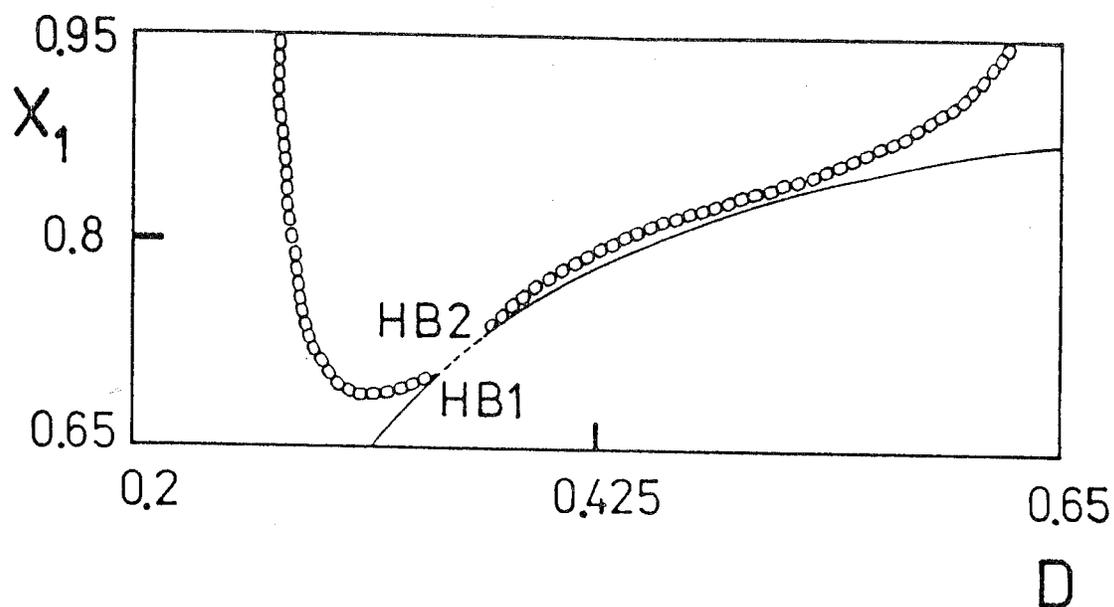
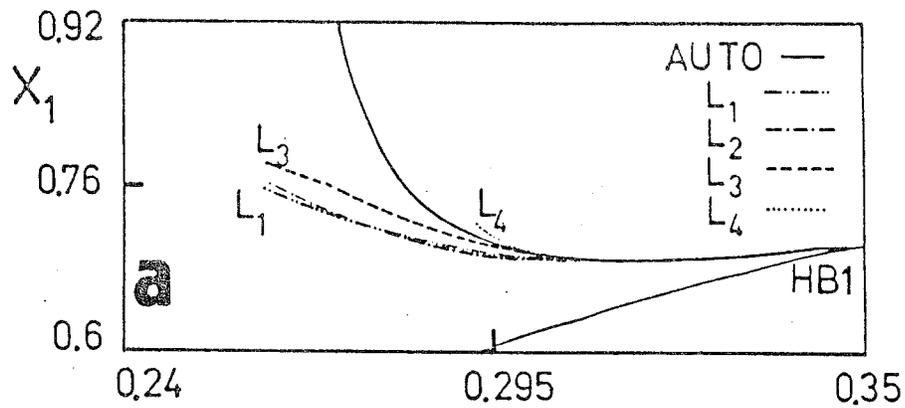


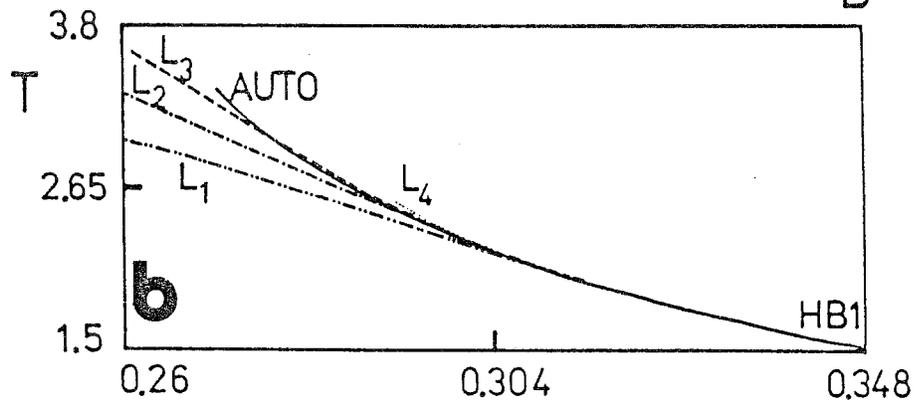
Figura 6.24: Diagrama de bifurcaciones global para $B=58.4$, $\beta=20.456$, $\epsilon=4$ y $\rho=1$.

Las soluciones periódicas mostradas en la Figura 6.24 junto con las soluciones de estado estacionario fueron halladas utilizando el programa AUTO. En forma similar a la presentada para los casos "a" y "b", mostramos en la Figura 6.25 la continuación de las ramas de soluciones periódicas desde los puntos de bifurcaciones de Hopf HB1 y HB2. Así, en la Figura 6.25.a se muestra la continuación de las órbitas periódicas usando las diferentes aproximaciones para la rama emergente de HB1. En la Figura 6.25.b se hace lo mismo pero con el período de la rama de soluciones periódicas. En cambio, en la Figura 6.25.c se muestra la rama emergente del punto de bifurcación de Hopf HB2. Para este último diagrama nótese que todas las aproximaciones coinciden para un amplio rango del parámetro de bifurcación mientras el valor de $\hat{\theta}$ es pequeño.

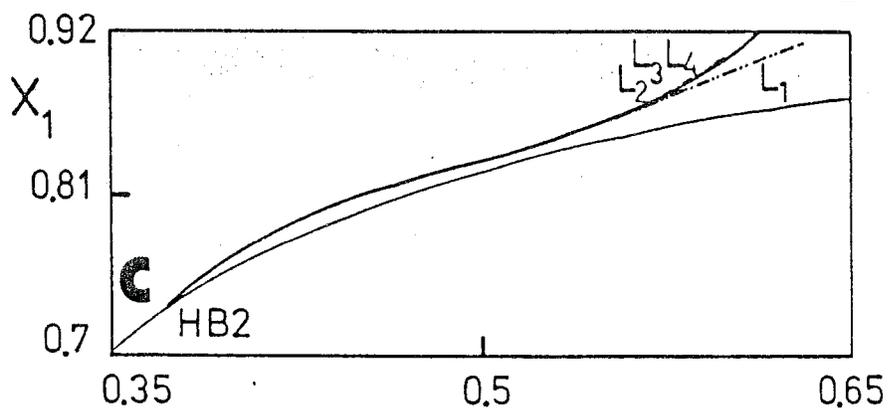
En la Figura 6.25.a las aproximaciones L_1 , L_2 y L_3 no predicen la presencia del punto límite en la rama periódica hasta valores algo alejados del valor real dado por AUTO. En cambio, el cálculo de L_4 debe detenerse ante la presencia de una intersección no transversal entre el lugar geomé-



D



D



D

Figura 6.25: Continuación de ramas periódicas utilizando las diferentes aproximaciones de balance armónico.

trico de la amplitud L_4 y el lugar geométrico característico $\hat{\lambda}(i\omega)$. Diremos entonces que L_4 aproxima la rama periódica por exceso mientras que L_3 , L_2 y L_1 lo hacen por defecto.

Consideremos ahora trasladarnos desde el punto "a" al punto "e" luego de pasar por una única curva H_{01} . El diagrama de bifurcación resultante al aplicar el programa AUTO se muestra en la Figura 6.26 para $B=58.04$ y $\beta=20.276$. Los puntos de bifurcaciones de Hopf HB1 y HB2 desaparecen en forma similar a la coalescencia de HB3 y HB4 del caso anterior. Una vez más, pueden hallarse dichas ramas periódicas emergentes de los puntos de bifurcaciones de Hopf HB3 y HB4 usando las técnicas en el dominio frecuencia.

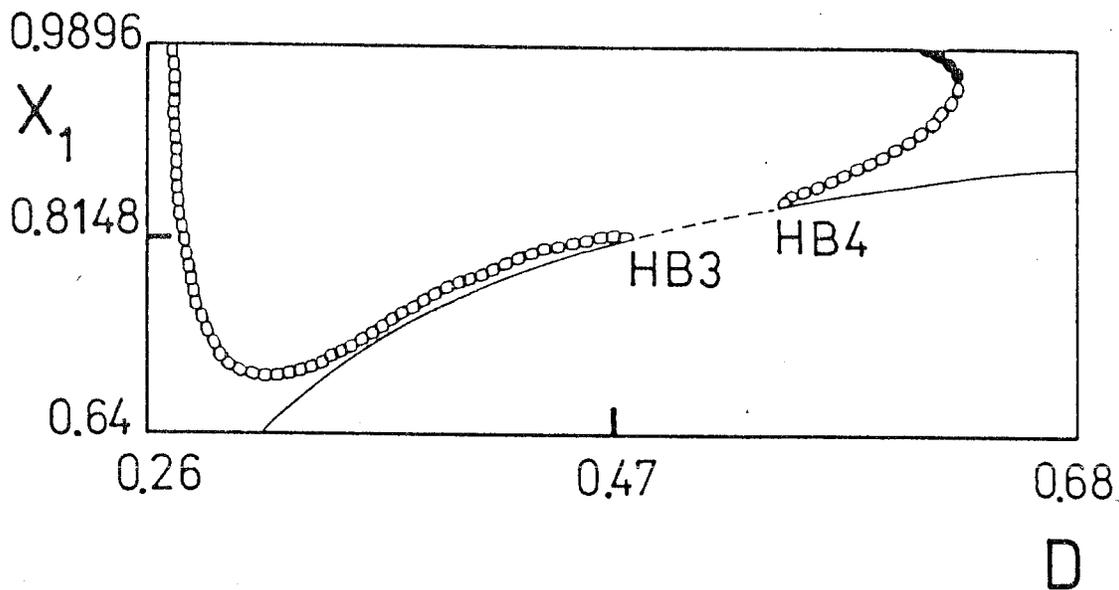


Figura 6.26: Diagrama de bifurcaciones global para $B=58.04$, $\beta=20.276$, $\epsilon=4$ y $\rho=1$.

Las aproximaciones de balance armónico L_1 , L_2 , L_3 y L_4 para dichas ramas de soluciones periódicas se muestran en la Figura 6.27. En las Figuras 6.27.a y 6.27.b se ha preferido presentar la continuación de la rama de órbitas periódicas emergente desde HB3 según las componentes x_1 y x_2 , respectivamente. En ambas figuras puede apreciarse que todas las aproximaciones de balance armónico concuerdan para un amplio rango del parámetro principal de bifurcación D . En la Figura 6.27.c se muestra la continuación de los ciclos

límites emergentes desde HB4 usando las diferentes aproximaciones L_i ($i=1, \dots, 4$) y el programa AUTO en la componente x_1 de las variables de estado del sistema.

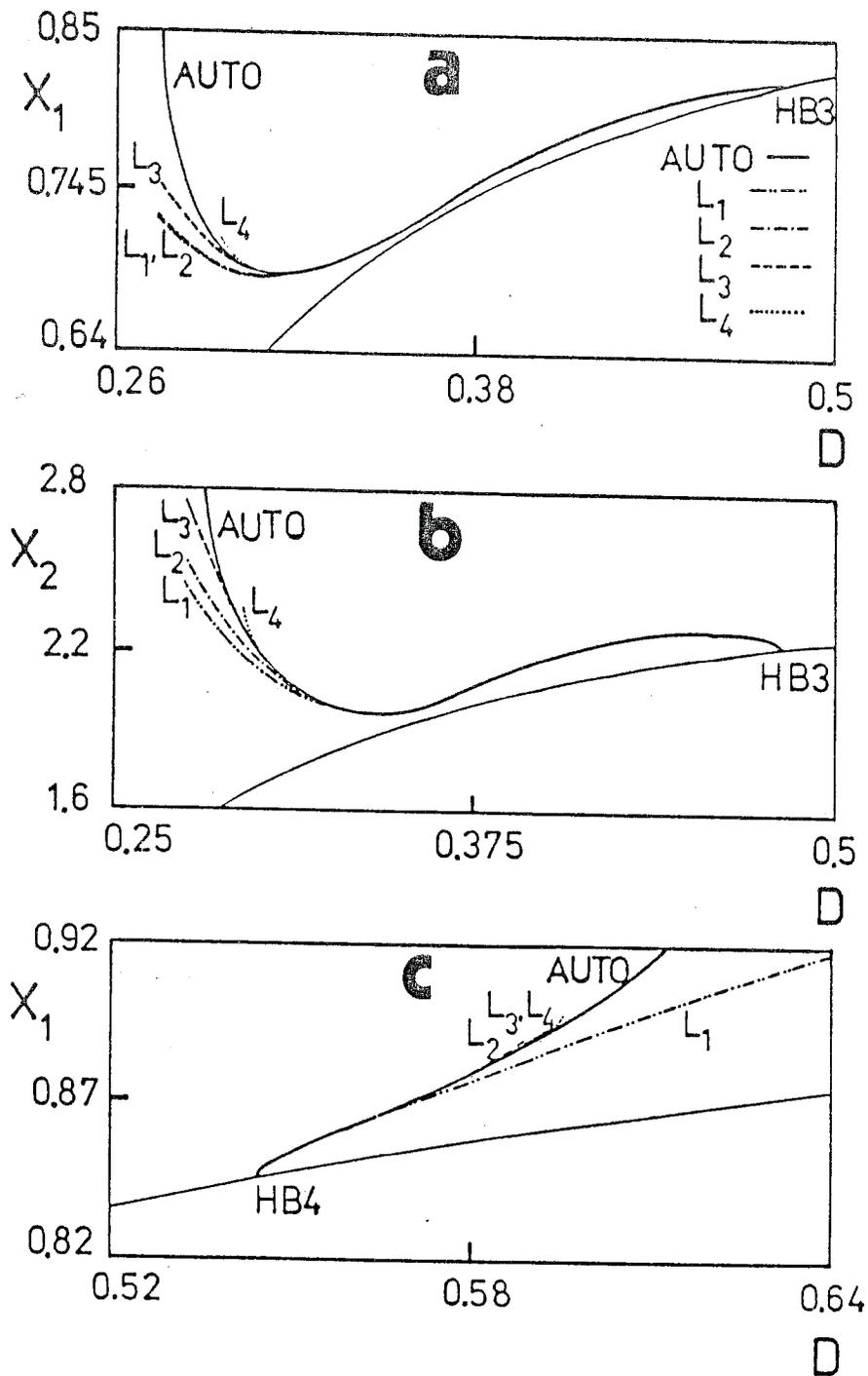


Figura 6.27: Continuación de ramas periódicas utilizando las diferentes aproximaciones de balance armónico.

Pasando de la configuración del caso "e" al "c" debemos cruzar una curva de singularidades H_{01} . Para los valores de los parámetros auxiliares $B=58.2$ y $\beta=20.376$ tenemos el diagrama de bifurcación presentado en la Figura 6.28.a y esquematizado por el punto "c" en la Figura 6.16. Los puntos de bifurcaciones de Hopf HB3 y HB4 de la Figura 6.26 han desaparecido al cruzar la degeneración H_{01} mencionada. Entonces, a pesar de no existir puntos de bifurcaciones de Hopf, tenemos soluciones periódicas en esta configuración muy cercanas a la solución de equilibrio. He aquí una de las ventajas del método en el dominio frecuencia sobre el programa de continuación AUTO. Este último basa la continuación de órbitas periódicas considerando una solución inicial: generalmente (y automáticamente) los puntos de bifurcaciones de Hopf. Sin embargo, en esta condición, tal como la señalada en la Figura 6.28.a, debe proveerse otra solución inicial que demanda, usualmente, tiempo extra de computación. En cambio, con el algoritmo en el dominio frecuencia esto no sucede y puede continuarse la solución periódica desde cualquier punto inicial con tal que satisfaga las condiciones de transversalidad requeridas en el método de Hopf gráfico.

En las Figuras 6.28.b y 6.28.c se muestran las ramas de soluciones periódicas para dos de las componentes de las variables de estado, a saber x_1 y x_2 . Puede nuevamente apreciarse que en la zona central todas las aproximaciones concuerdan y que es en los bordes donde, al hacerse $\hat{\theta}$ mayor, todas presentan divergencias en su intento de recuperar las soluciones periódicas verdaderas. Hasta aquí puede decirse que se han recuperado todos los diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de las singularidades H_{01} , H_{02} (nótese que existen dos degeneraciones H_{02} en la Figura 6.16) y H_{03} . Esta última singularidad resulta al variar alguno de los parámetros auxiliares libres (esto es ϵ y ρ) y encontrar la unión de las dos singularidades cuspidales H_{02} de la Figura 6.16. El análisis local, usando únicamente la aproximación de balance armónico de segundo orden L_1 , sigue las reglas mostradas en las Figuras 5.13, 5.14, 5.15 y 5.16 pero agregando una configuración que tenga cuatro intersecciones entre la superficie del lugar geométrico característico y la línea crítica $(-1+j0)$.

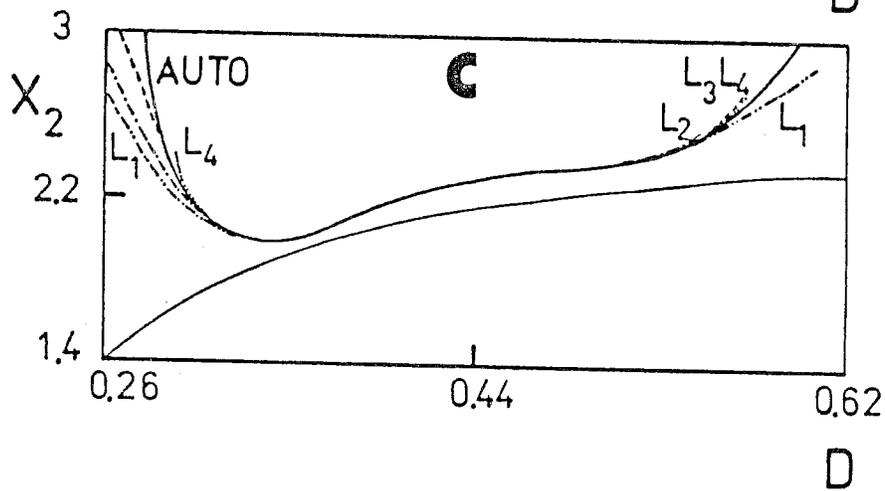
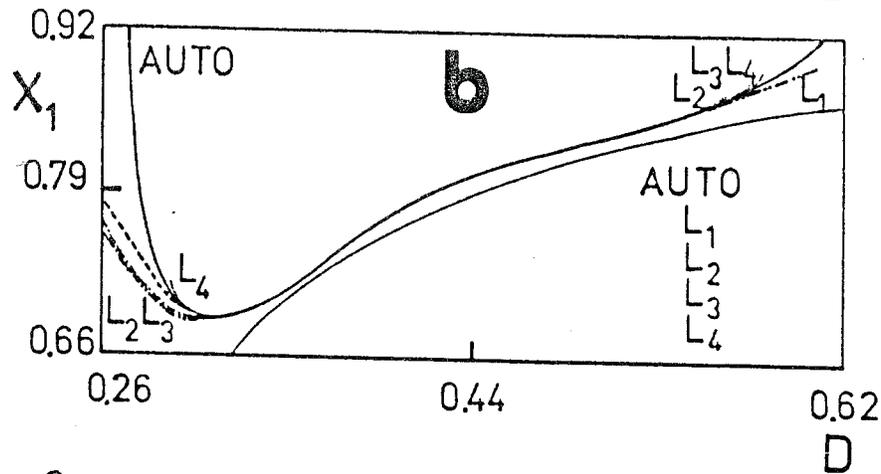
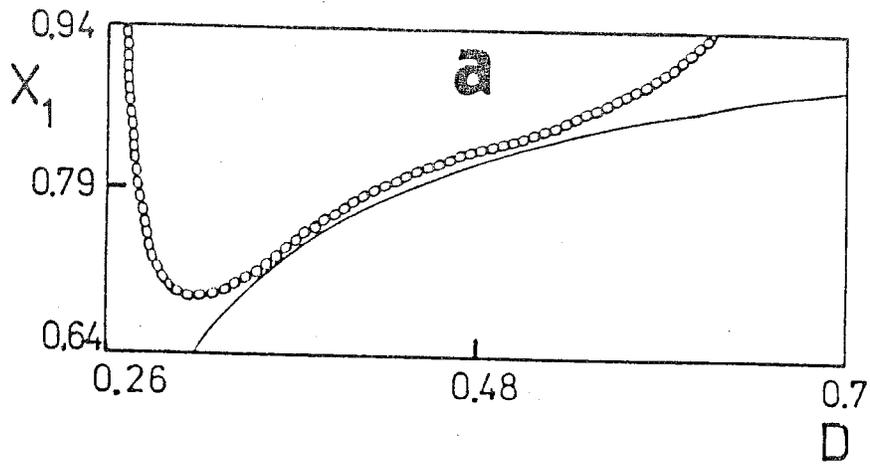


Figura 6.28: Diagrama de bifurcaciones, aproximaciones de balance armónico y sus comparaciones con resultados de AUTO para $B=58.2$, $\beta=20.376$, $\epsilon=4$ y $\rho=1$.

Variando los parámetros auxiliares B y β podemos lograr que la rama cerrada de soluciones periódicas o "isola" se separe aún más de las soluciones de equilibrio. Luego, para $B=57.62372$ y $\beta=20.376$ tendremos el dia-

grama de bifurcaciones globales mostrado en la Figura 6.29.a, en tanto que en la Figura 6.29.b se presentan las diferentes aproximaciones de balance armónico para recuperar la rama inferior de soluciones periódicas. La Figura 6.29.c agrega un diagrama ampliado de una porción de la Figura 6.29.b

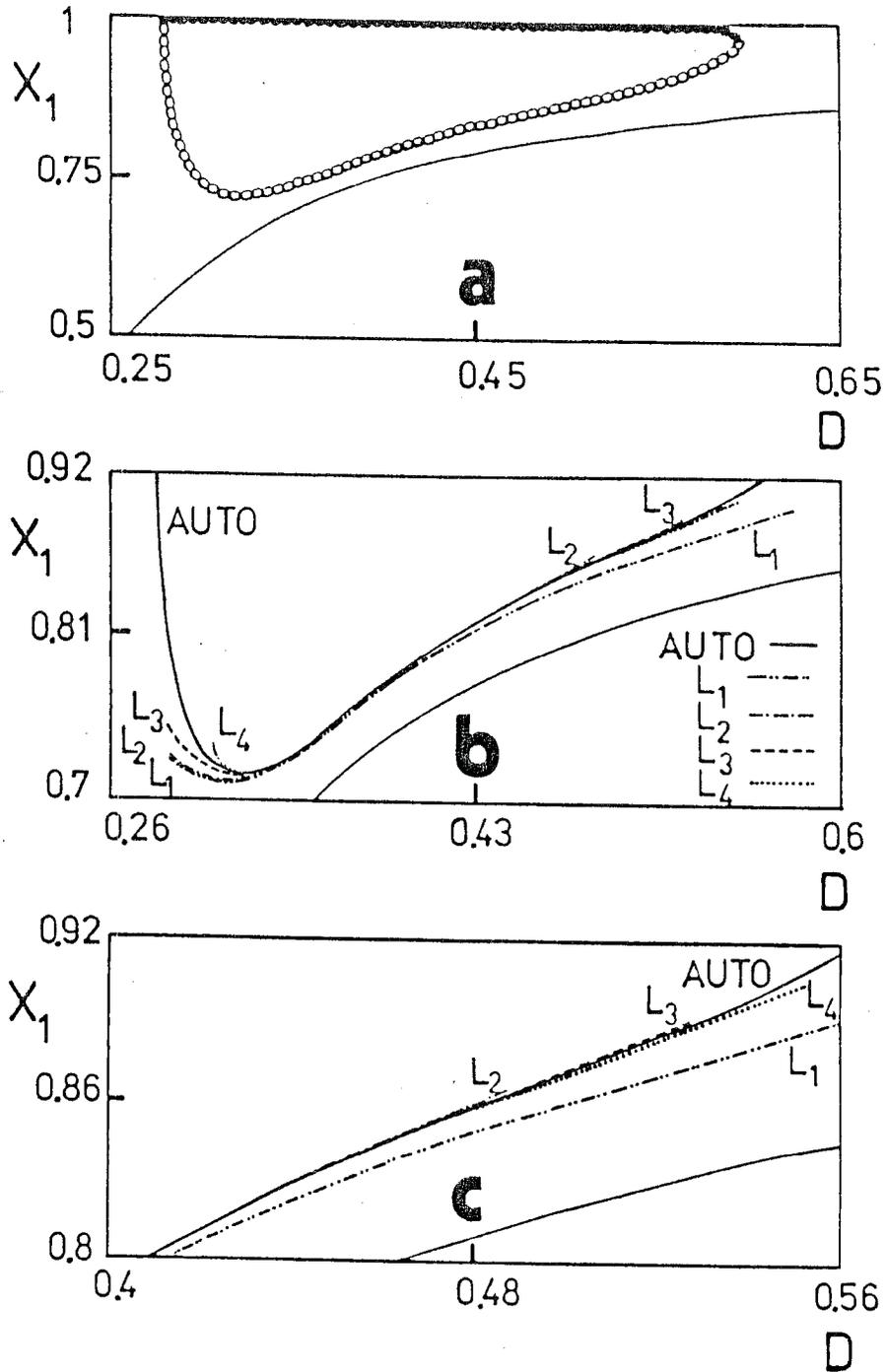


Figura 6.29: Diagrama de bifurcaciones, aproximaciones de balance armónico y sus comparaciones con resultados de AUTO para $B=57.62372$, $\beta=20.376$, $\epsilon=4$ y $\rho=1$.

donde pueden apreciarse más claramente las ramas de órbitas periódicas aproximadas usando el método en el dominio frecuencia.

Finalmente, tal como lo habíamos realizado al comienzo de esta sección presentamos, para un dado valor del parámetro principal de bifurcación D , los ciclos límites obtenidos en el retrato de fase usando las diferentes aproximaciones de balance armónico. Sea, por ejemplo, el valor de D elegido 0.313675 . Así de las Figuras 6.30.a y 6.30.b puede notarse que para los va-

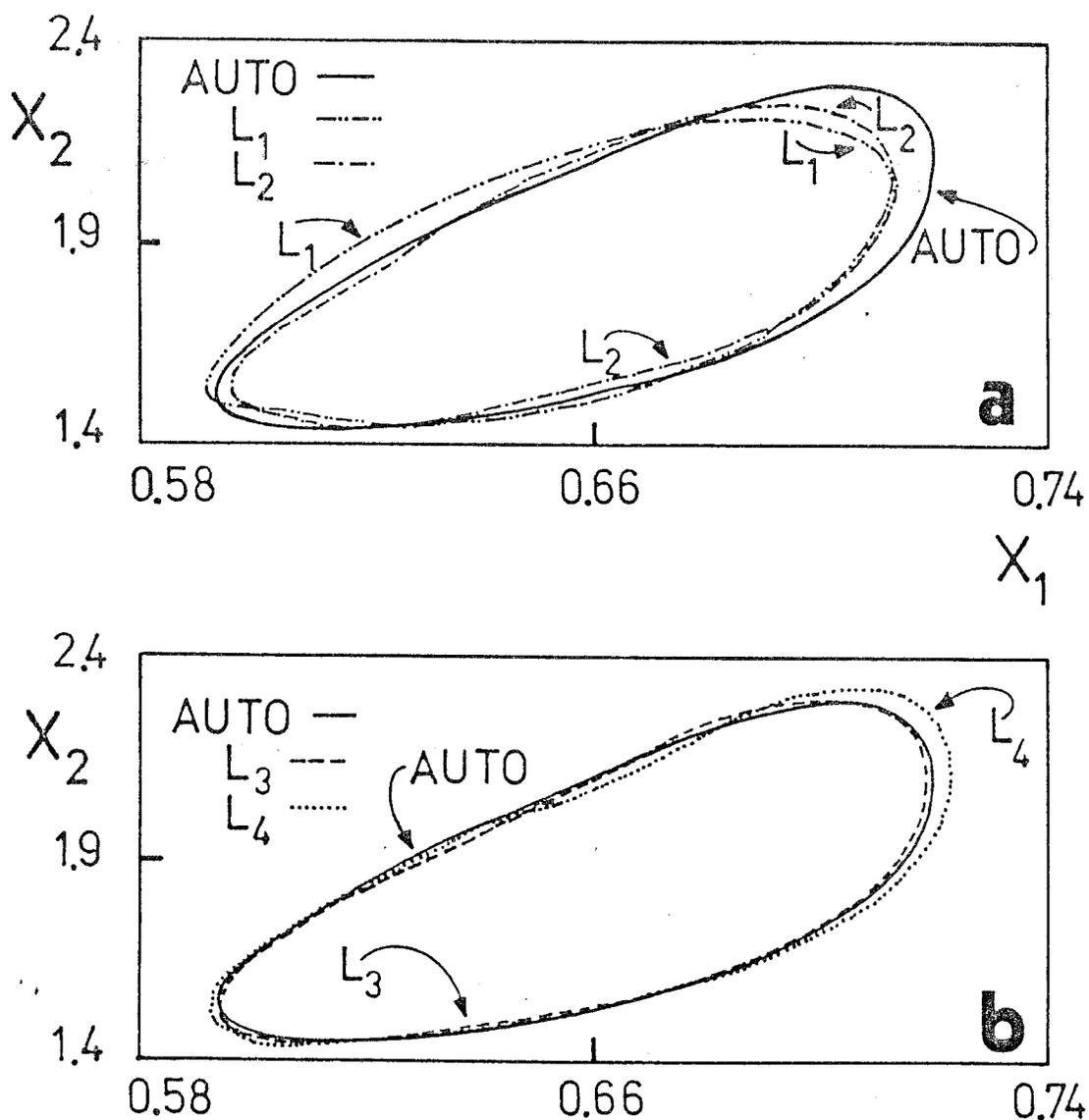


Figura 6.30: Retratos de fase para $D=0.313675$, $B=57.62372$, $\beta=20.376$, $\epsilon=4$ y $\rho=1$.

lores máximos de x_1 , L_4 aproxima en exceso como habíamos dicho, mientras que L_1 , L_2 y L_3 lo hacen por defecto. Notemos que a pesar de llevar los valores máximos de oscilación de la variable en los diagramas de bifurcación tales como en la Figura 6.29.b, los mismos son representativos de la precisión de la aproximación. Así puede verse claramente de la Figura 6.29.b para este valor del parámetro D que tanto L_3 como L_4 dan muy buenas aproximaciones del ciclo límite en tanto que L_1 y L_2 ya señalan pequeñas divergencias con la solución real. No obstante es dificultoso observar que L_3 provee una mejor aproximación que L_4 como queda puesto de manifiesto en la Figura 6.30.b.

Para concluir con esta sección diremos que hemos presentado sendas aplicaciones de continuación de las soluciones periódicas y análisis de una familia de bifurcaciones degeneradas de Hopf. En el próximo capítulo calcularemos aproximaciones de los coeficientes de curvatura mayores al primero para detectar zonas de múltiples ciclos límites utilizando la formulación de los lugares geométricos de las amplitudes.

CAPITULO 7

COEFICIENTES DE CURVATURA USANDO TECNICAS EN EL DOMINIO FRECUENCIA

Usando las diferentes aproximaciones de balance armónico hemos visto que se pueden reconstruir los diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de ciertas degeneraciones del teorema de Hopf. Este tratamiento es enteramente numérico y tiene como límite algún valor de θ en la expansión de los lugares geométricos de la amplitud para el cual la serie se torna divergente. Es útil, además de poder recuperar los diagramas de bifurcaciones locales, tener expresiones para calcular las condiciones de definición y de no-degeneración de singularidades pertenecientes a la familia H_{n0} de bifurcaciones degeneradas. En esta familia, como ya hemos adelantado, pueden encontrarse $n+1$ ciclos límites en cercanías de la singularidad. El objetivo del presente capítulo consistirá en encontrar aproximaciones para calcular estas condiciones de definición y no-degeneración, que se conocen también como coeficientes de estabilidad o coeficientes de curvatura. Para ello utilizaremos la formulación en el dominio frecuencia donde ya hemos calculado diferentes aproximaciones de alto orden. A tal efecto ordenaremos el material como sigue. En la Sección 7.1 daremos una reseña histórica. En la Sección 7.2 se obtendrá una formulación recurrente para el cálculo de los cuatro primeros coeficientes de curvatura. En la Sección 7.3 presentaremos un cálculo similar pero usando una estrategia diferente. Finalmente, en la Sección 7.4 mostraremos un interesante ejemplo numérico junto con la verificación de los resultados obtenidos utilizando el programa AUTO.

7.1. INTRODUCCION

Los coeficientes de curvatura, también conocidos como los índices de estabilidad del foco, llevan la información de la estabilidad de la rama de soluciones periódicas emergente desde puntos de bifurcaciones de Hopf. Así es posible, evaluando una fórmula algo compleja en el valor crítico, es decir para $\mu=\mu_0$, saber si el ciclo límite que emanará desde el punto de bifurcación de Hopf será estable o inestable. En el caso particular que dicha

expresión, que llamaremos primer coeficiente de curvatura, fuera cero, debe proseguirse con el cálculo del segundo coeficiente de curvatura, y así sucesivamente. Andronov y colaboradores (1973) obtuvieron el primer coeficiente de estabilidad utilizando el método de la función de sucesión. El tratamiento se limitaba a sistemas de dos dimensiones por lo cual los resultados pueden considerarse parciales. Sin embargo, la extensión a sistemas de n -dimensiones no se hizo esperar. Poore (1975), Mees y Chua (1979), entre otros, lograron las expresiones del primer coeficiente de curvatura para sistemas multivariantes utilizando diferentes herramientas matemáticas.

El cálculo del segundo coeficiente de curvatura fue presentado por primera vez por Hassard y Wan (1978) y corregido más tarde en Hassard y colaboradores (1981). Utilizando otros métodos pronto aparecieron cálculos equivalentes para obtener el segundo coeficiente de curvatura, principalmente en Golubitsky y Langford (1981). Usando el método de las constantes de Lyapunov, Göbber y Willamowski (1979) obtuvieron, para sistemas de dos dimensiones, las expresiones de los tres primeros coeficientes de curvatura. Más tarde, Farr (1986) extendió la formulación dada en Golubitsky y Langford (1981) para calcular el tercer coeficiente de curvatura para sistemas de n -dimensiones. En su tesis doctoral, Farr no consideró la normalización en frecuencia propuesta en Golubitsky y Langford (1981), logrando expresiones más generales y de inmediata aplicación. Las fórmulas dadas en Farr (1986) fueron corregidas más tarde por problemas tipográficos en Farr y colaboradores (1989). En este último trabajo fueron aplicadas en un ejemplo para determinar el número máximo de ciclos límites y su posición en un sistema de dos dimensiones cuadrático, en lo que se conoce como la segunda parte del problema decimosexto de Hilbert.

A este respecto la bibliografía sobre el número máximo de ciclos límites en sistemas cuadráticos, cúbicos, etc. de dos dimensiones ha tenido un notable auge desde la aparición de cálculos usando computación simbólica como el presentado en Rand (1985). El lector interesado en la fenomenología de sistemas de dos dimensiones con múltiples ciclos límites puede consul-

tar, por ejemplo, Rousseau (1987) o una serie de contribuciones más específicas dada por Lloyd (1986, 1988a, 1988b), Wan Dongming (1990), James y Lloyd (1991), entre otros.

Recientemente han aparecido contribuciones utilizando el método en el dominio frecuencia y aplicaciones del teorema de bifurcación de Hopf a problemas ingenieriles, tales como en Kwatny y Piper (1990), Colantonio y colaboradores (1991), y Moiola y colegas (1991c). Es por ello que creemos conveniente la extensión de dicha formulación para poder estudiar los dominios de existencia de múltiples soluciones periódicas.

El cálculo del segundo coeficiente de curvatura utilizando técnicas de balance armónico fue presentado en Moiola y colaboradores (1991b) junto con las fórmulas para la aproximación de balance armónico de sexto orden. Posteriormente, Moiola y Chen (1991) dieron una expresión aproximada del tercer coeficiente de curvatura para analizar ciertas bifurcaciones degeneradas de Hopf usando el método gráfico. El objetivo de las secciones siguientes será dar una mejor aproximación de las mismas junto con el cálculo del cuarto coeficiente de curvatura. Para tal fin se utilizará la aproximación de balance armónico de octavo orden junto con las fórmulas de los vectores V_{ij} presentadas en Moiola (1991). En la última sección, se mostrará un ejemplo donde se incluyen las implementaciones derivadas en las secciones previas con el fin de localizar estructuras de múltiples ciclos límites anidados rodeando a un mismo estado de equilibrio.

7.2. BALANCE ARMONICO Y LOS COEFICIENTES DE CURVATURA

Supongamos tener un valor de la variable compleja s para el cual la matriz de transferencia $G(s;\mu)J(\mu)$ tiene un autovalor en -1 . Es fácil de verificar que $G(\bar{s};\mu)J(\mu)$ tendrá también el mismo autovalor. En bifurcación para $\mu=\mu_0$ tenemos $s=i\omega_0$ y $\bar{s}=-i\omega_0$, es decir los autovalores de la formulación en el dominio tiempo. Consideremos que cuando μ se incrementa, pasando por μ_0 , " s " se mueve en el semiplano derecho tomando el valor $\alpha+iw$, siendo α y w valores positivos. Requeriremos también que para un valor de μ fijo

más allá de μ_0 el sistema tenga como solución una órbita periódica. Como en los capítulos anteriores, v y u^T son los autovectores derecho e izquierdo de $G(s; \mu)J(\mu)$ correspondientes al autovalor -1 normalizados de la siguiente manera $|v|=1$ y $u^T v=1$. Entonces, podemos proponer la siguiente expresión como solución en la detección de soluciones periódicas

$$E^1 = \theta v + \theta^3 V_{13} + \theta^5 V_{15} + \dots = \theta y_1, \quad (7.1)$$

donde $V_{1,3}, \dots, V_{1,2q+1}$ son vectores ortogonales a v . Para una determinada frecuencia w_1 podemos escribir la siguiente expansión

$$G(iw_1) = G(s) + (-\alpha + i\delta w)G'(s) + \frac{1}{2}(-\alpha + i\delta w)^2 G''(s) + \frac{1}{6}(-\alpha + i\delta w)^3 G'''(s) + \dots, \quad (7.2)$$

donde $\delta w = w_1 - w$, y $G'(s)$, $G''(s)$, ... son las derivadas primera, segunda, etc. de $G(s)$ con respecto a "s", evaluadas en nuestro valor propuesto de $s = \alpha + iw$.

En la ecuación de balance armónico (5.38), que repetiremos por comodidad a continuación

$$[G(iw)J + I] \sum_{j=1}^r V_{1,2j+1} \theta^{2j+1} = -G(iw) \sum_{j=1}^r W_{1,2j+1} \theta^{2j+1}, \quad (7.3)$$

donde $V_{11} = v$ y "r" es el orden de la aproximación de balance armónico, usaremos la siguiente notación simplificada

$$W_{1,2k+1} = p_k. \quad (7.4)$$

En forma general intentamos resolver la siguiente expresión

$$[G(iw_1)J + I](v\theta + V_{13}\theta^3 + V_{15}\theta^5 + \dots) = -G(iw_1)[p_1\theta^3 + p_2\theta^5 + \dots]. \quad (7.5)$$

Usando la expresión (7.2) en (7.5) llegamos a

$$[G(s)J - (\alpha - i\delta w)G'(s)J + \frac{1}{2}(\alpha - i\delta w)^2 G''(s)J + \dots + I](v\theta + V_{13}\theta^3 + V_{15}\theta^5 + \dots) = -[G(s) - (\alpha - i\delta w)G'(s) + \dots][p_1\theta^3 + p_2\theta^5 + \dots]. \quad (7.6)$$

Premultiplicando ambos miembros por u^T y usando el hecho que u^T es el autovector izquierdo de $G(s)J$ correspondiente al autovalor -1 , la ecuación an-

terior puede escribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 & -(\alpha - i\delta\omega)u^T G'(s)Jv\theta + \frac{1}{2}(\alpha - i\delta\omega)^2 u^T G''(s)Jv\theta - (\alpha - i\delta\omega)u^T G'(s)Jv_{13}\theta^3 + \\
 & \dots = -u^T G(s)p_1\theta^3 + (\alpha - i\delta\omega)u^T G'(s)p_1\theta^3 - u^T G(s)p_2\theta^5 + \\
 & \quad + (\alpha - i\delta\omega)u^T G'(s)p_2\theta^5 + \dots \quad (7.7)
 \end{aligned}$$

Consideremos ahora la primera aproximación dada por Mees y Chua (1979),

$$(\alpha - i\delta\omega) = \frac{u^T G(i\omega)p_1\theta^2}{u^T G'(i\omega)Jv} = \gamma_1\theta^2 \quad (7.8)$$

Reemplazando (7.8) en (7.7) y agrupando los términos de iguales potencias en θ podemos escribir, siguiendo los resultados originales dados en Moiola y colegas (1991b),

$$\begin{aligned}
 & -(\alpha - i\delta\omega)u^T G'(s)Jv\theta + \frac{1}{2}\gamma_1^2 u^T G''(s)Jv\theta^5 - \gamma_1 u^T G(s)Jv_{13}\theta^5 + \dots = \\
 & \quad -u^T G(s)p_1\theta^3 + \gamma_1 u^T G'(s)p_1\theta^5 - u^T G(s)p_2\theta^5 + \dots \quad (7.9)
 \end{aligned}$$

Esta última expresión se reordena como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
 & -(\alpha - i\delta\omega)u^T G'(s)Jv\theta = -u^T G(s)p_1\theta^3 + \theta^5 [\gamma_1 u^T G'(s)Jv_{13} - \frac{1}{2}\gamma_1^2 u^T G''(s)Jv + \\
 & \quad + \gamma_1 u^T G'(s)p_1 - u^T G(s)p_2] + \dots \quad (7.10)
 \end{aligned}$$

Para valores de $s = i\omega$ la expresión (7.10) puede acomodarse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 & (\alpha - i\delta\omega) = u^T G(i\omega)p_1\theta^2/\eta + [-\gamma_1 u^T G'(i\omega)Jv_{13}/\eta + 1/2\gamma_1^2 u^T G''(i\omega)Jv/\eta \\
 & \quad - \gamma_1 u^T G'(i\omega)p_1/\eta + u^T G(i\omega)p_2/\eta]\theta^4 + O(\theta^5), \quad (7.11)
 \end{aligned}$$

dónde $\eta = u^T G'(i\omega)Jv$.

En forma simplificada podemos notar a la ecuación (7.11) como sigue

$$(\alpha - i\delta\omega) = \gamma_1\theta^2 + \gamma_2\theta^4 + O(\theta^5). \quad (7.12)$$

Por lo tanto, en lugar de usar la ecuación (7.8) como primera aproximación de $(\alpha - i\delta\omega)$ podemos usar la expresión más exacta (7.12). Entonces, introduciendo la expresión (7.12) en la ecuación (7.6), agrupando en valores de θ en forma similar a la realizada anteriormente llegamos a la siguiente expresión

$$(\alpha - i\delta\omega) = \gamma_1\theta^2 + \gamma_2\theta^4 + \gamma_3\theta^6 + O(\theta^7), \quad (7.13)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_3 = & u^T G(i\omega)p_3/\eta - \gamma_1 u^T G'(i\omega)p_2/\eta - \gamma_2 u^T G'(i\omega)p_1/\eta + \\ & \gamma_1^2 u^T G''(i\omega)p_1/(2\eta) - \gamma_2 u^T G'(i\omega)JV_{13}/\eta - \gamma_1 u^T G'(i\omega)JV_{15}/\eta + \\ & \gamma_1\gamma_2 u^T G''(i\omega)JV/\eta + \gamma_1^2 u^T G(i\omega)JV_{13}/(2\eta) - \gamma_1^3 u^T G'''(i\omega)JV/(6\eta), \end{aligned}$$

Nuevamente, suponiendo ahora la mejor aproximación (7.13) para $(\alpha - i\delta\omega)$ los valores de los coeficientes de las potencias menores que θ^6 no sufrirán cambios. Entonces, reemplazando (7.13) en (7.6) y luego de un tedioso proceso algebraico podemos verificar

$$(\alpha - i\delta\omega) = \gamma_1\theta^2 + \gamma_2\theta^4 + \gamma_3\theta^6 + \gamma_4\theta^8 + O(\theta^9), \quad (7.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_4 = & u^T G(i\omega)p_4/\eta - \gamma_3 u^T G'(i\omega)p_1/\eta - \gamma_2 u^T G'(i\omega)p_2/\eta - \\ & \gamma_1 u^T G'(i\omega)p_3/\eta + \gamma_1^2 u^T G''(i\omega)p_2/(2\eta) - \gamma_1\gamma_2 u^T G''(i\omega)p_1/\eta - \\ & \gamma_1^3 u^T G'''(i\omega)p_1/\eta - \gamma_3 u^T G'(i\omega)JV_{13}/\eta - \gamma_2 u^T G'(i\omega)JV_{15}/\eta - \\ & \gamma_1 u^T G'(i\omega)JV_{17}/\eta + 1/2 \gamma_2^2 u^T G''(i\omega)JV/\eta + \gamma_1\gamma_3 u^T G''(i\omega)JV/\eta \\ & + \gamma_1\gamma_2 u^T G''(i\omega)JV_{13}/\eta + \gamma_1^2 u^T G''(i\omega)JV_{15}/(2\eta) - \\ & 1/2\gamma_1^2\gamma_2 u^T G'''(i\omega)JV/\eta - 1/6\gamma_1^3 u^T G'''(i\omega)JV_{13}/\eta + \gamma_1^4 u^T G''''(i\omega)JV/(24\eta)]. \end{aligned}$$

Los valores de γ_1 , γ_2 y γ_3 han sido dados anteriormente y como puede fácilmente verificar el lector no se modifican cuando se calcula una mejor aproximación. El valor de p_2 fue dado por primera vez en Mees (1981), en tanto que los valores de p_3 y p_4 fueron calculados por Moiola y colegas (1991b) y Moiola y Chen (1992), respectivamente.

Tomando las partes real e imaginaria de la expresión (7.14) llegamos a

$$\alpha = \operatorname{Re}(\gamma_1) \theta^2 + \operatorname{Re}(\gamma_2) \theta^4 + \operatorname{Re}(\gamma_3) \theta^6 + \operatorname{Re}(\gamma_4) \theta^8 + \dots \quad (7.15)$$

Analicemos primero que ocurre cuando $\operatorname{Re}(\gamma_1) \neq 0$. La aproximación que utilizaremos será entonces

$$\alpha \cong \operatorname{Re}(\gamma_1) \theta^2. \quad (7.16)$$

Para que exista una solución periódica (θ debe ser un valor real) tanto α como $\operatorname{Re}(\gamma_1)$ tienen que tener igual signo. Por convención de estabilidad diremos que existirán ciclos límites cuando el coeficiente de curvatura σ_1 y α satisfagan $\alpha\sigma_1 < 0$, es decir $\sigma_1 = -\operatorname{Re}(\gamma_1)$. Notemos que cuando α es positivo los autovalores bifurcantes están en el semiplano derecho y por lo tanto el estado de equilibrio es inestable. De existir ciclos límites en esta condición los mismos serían estables. Luego a ciclos límites estables corresponden coeficientes de curvatura negativos.

Supongamos ahora que $\sigma_1 = 0$ exactamente en el punto crítico. Luego no podríamos determinar la estabilidad de la solución bifurcada considerando una solución de balance armónico de segundo orden. Entonces deberíamos considerar la expansión

$$\alpha = \operatorname{Re}(\gamma_1) \theta^2 + \operatorname{Re}(\gamma_2) \theta^4. \quad (7.17)$$

Entonces, con el mismo razonamiento, $\sigma_2 = -\operatorname{Re}(\gamma_2)$ es el segundo coeficiente de curvatura. Notemos, además, que la expresión (7.17) es muy similar a la forma normal perturbada encontrada en cercanías de la singularidad H_{10} , dada por la ecuación (5.20). En este caso el rol del parámetro principal de bifurcación μ es asumido por α , mientras que la medida de la amplitud de la solución periódica θ puede fácilmente relacionarse con x de la ecuación (5.20).

En forma similar al planteamiento anterior, supongamos que tanto σ_1 como σ_2 sean exactamente cero para ciertas combinaciones de los parámetros auxiliares y en la condición de bifurcación. Entonces, debemos tener en cuenta una expansión que involucre los términos de un balance armónico de

sexto orden, es decir

$$\alpha = \operatorname{Re}(\gamma_1) \theta^2 + \operatorname{Re}(\gamma_2) \theta^4 + \operatorname{Re}(\gamma_3) \theta^6. \quad (7.18)$$

Así, rápidamente podemos individualizar $\sigma_3 = -\operatorname{Re}(\gamma_3)$, pues en la condición crítica tendríamos

$$\alpha \cong \operatorname{Re}(\gamma_3) \theta^6, \quad (7.19)$$

ya que $\operatorname{Re}(\gamma_1) = \operatorname{Re}(\gamma_2) = 0$. Una vez más la ecuación (7.19) puede fácilmente relacionarse con la forma normal dada por (5.23) para la singularidad H_{20} y la expresión (7.18) con la forma normal perturbada indicada en la ecuación (5.24).

En forma análoga, cuando $\operatorname{Re}(\gamma_1) = \operatorname{Re}(\gamma_2) = \operatorname{Re}(\gamma_3) = 0$ debemos examinar el signo del coeficiente de θ^6 para poder determinar para qué valores de α existen soluciones periódicas. Por lo tanto usaremos (7.15) para tal condición. En la Sección 7.4 mostraremos un ejemplo con múltiples ciclos límites que responde a la expresión (7.15). Para tal caso daremos además las formas normales y perturbadas que se obtienen luego de aplicar la teoría de Golubitsky y Schaeffer (1985). Haremos uso de las expresiones anteriores, principalmente de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ y γ_4 para localizar en el espacio de parámetros configuraciones de múltiples ciclos límites.

7.3. COEFICIENTES DE ESTABILIDAD: OTRA ALTERNATIVA DE CALCULO

En la anterior formulación se ha prestado especial cuidado en agrupar los términos de diferentes potencias en θ de tal forma que la mejor aproximación de $(\alpha - i\delta\omega)$ como serie en θ no afecte los resultados de la expresión anterior. Los cálculos pueden agruparse en forma más compacta escribiendo la ecuación (7.6) de la siguiente manera

$$\left[I + \sum_{i=0}^{\infty} x^i \frac{G^i J}{i!} \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \theta^{2k+1} v_{2k+1} \right] = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^n x^n}{n!} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \theta^{2j+1} p_j \right], \quad (7.17)$$

donde $x^i = (-\alpha + i\delta\omega)^i$; $G^0 = G(s)$; $G^i = d^i G / ds^i$; $v_{k+1} = V_{1, 2k+1}$, ($k=0, 1, \dots$). Premultiplicando ambos miembros por u^T y usando que $u^T G J = -u^T$, la expresión

(7.17) puede notarse como

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} u^T x^i G^i J / i! \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \theta^{2k+1} v_k \right] = -u^T \sum_{n=0}^{\infty} G^n x^n / n! \left[\sum_{j=1}^{\infty} \theta^{2j+1} p_j \right]. \quad (7.18)$$

Supongamos ahora que "x" viene dado por una serie en θ de la siguiente forma

$$x = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m \theta^{2m}. \quad (7.19)$$

Nuestra tarea entonces consistirá en reemplazar "x" en (7.18) para obtener los valores δ_m una vez igualados los coeficientes de ambos miembros para iguales potencias en θ . Haciendo esto último pueden verificarse las siguientes expresiones

$$\delta_0 = 0, \quad (7.20.a)$$

$$\delta_1 = -u^T G^0 p_1 / \eta, \quad (7.20.b)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{\eta} [-u^T G^0 p_2 - \delta_1 u^T G^1 p_1 - \delta_1 \beta_1 v_2 - \delta_1^2 \beta_2 v_1], \quad (7.20.c)$$

$$\delta_3 = 1/\eta [-u^T G^0 p_3 - \delta_1 u^T G^1 p_2 - \delta_2 u^T G^1 p_1 - \delta_1^2 u^T G^2 p_1 / 2 - \delta_2 \beta_1 v_2 - \delta_1 \beta_1 v_3 - 2\delta_1 \delta_2 \beta_2 v_1 - \delta_1^2 \beta_2 v_2 - \delta_1^3 \beta_3 v_1], \quad (7.20.d)$$

$$\delta_4 = u^T / \eta [-G^0 p_4 - \delta_3 G^1 p_1 - \delta_2 G^1 p_2 - \delta_1 G^1 p_3 - \delta_1^2 G^2 p_2 / 2 - \delta_1 \delta_2 G^2 p_1 - \delta_1^3 G^3 p_1 / 6] - 1/\eta [\delta_3 \beta_1 v_2 + \delta_2 \beta_1 v_3 + \delta_1 \beta_1 v_4 + \delta_2^2 \beta_2 v_1 + 2\delta_1 \delta_3 \beta_2 v_1 + 2\delta_1 \delta_2 \beta_2 v_2 + \delta_1^2 \beta_2 v_3 + 3\delta_1^2 \delta_2 \beta_3 v_1 + \delta_1^3 \beta_3 v_2 + \delta_1^4 \beta_4 v_1]. \quad (7.20.e)$$

donde se ha usado $\beta_i = u^T G^i J$. Las anteriores expresiones concuerdan totalmente con las obtenidas en la sección anterior, cumpliéndose la siguiente relación

$$\gamma_i = -\delta_i \quad (i=1, \dots, 4). \quad (7.21)$$

Diremos que las fórmulas de los coeficientes de curvatura son aproximadas

pues en las ecuaciones (7.6) no se han considerado las variaciones de los vectores $V_{1,2j+1}$ ($j=0,1,\dots,n$) y p_i ($i=1,\dots,m$) con "s". Una formulación exacta de los mismos debería considerar estos efectos. Por ello hablamos de fórmulas aproximadas para los coeficientes de curvatura. Sin embargo, tales variaciones son pequeñas y afectan levemente la localización de la singularidad en el espacio de parámetros.

En la sección siguiente veremos un ejemplo donde hemos localizado una estructura de múltiples ciclos límites que no había sido detectada previamente por otros investigadores. Allí aplicaremos las fórmulas presentadas en esta sección para poder clasificar ciertas bifurcaciones degeneradas de Hopf que resultan en múltiples ciclos límites. Para la comprobación utilizaremos el programa de Doedel (1986) de continuación de órbitas periódicas. Creemos que esta forma de análisis resulta muy eficiente y apropiada pues primero se localiza en el espacio de parámetros la singularidad, y luego se estudia la misma en el espacio real de los parámetros del sistema. Si quisiéramos aplicar cada una de estas técnicas separadamente el esfuerzo computacional sería tremendo. Notemos que deberíamos realizar cientos o miles de ejecuciones con el programa AUTO para localizar aproximadamente la singularidad. Por otro lado, usando la técnica de balance armónico, podríamos predecir la localización de la singularidad pero obtendríamos aproximaciones de los diagramas de bifurcaciones locales sin saber los rangos de validez de las mismas. La combinación de ambas técnicas se mostrará en el ejemplo de la siguiente sección.

7.4. MÚLTIPLES CICLOS LÍMITES EN EL ESPACIO DE PARÁMETROS

Antes de considerar el ejemplo propiamente dicho daremos los diagramas de bifurcaciones locales que se encuentran en cercanías de la singularidad H_{30} . La misma involucra en ciertas regiones de los parámetros auxiliares la presencia de hasta cuatro ciclos límites anidados alrededor del estado de equilibrio. Hemos preferido incluir aquí los respectivos diagramas de bifurcaciones locales y no en el Capítulo 5 para mayor comodidad del lector, pues en la aplicación que veremos más adelante estudiaremos uno de dichos

conjuntos distintivos. Entonces, la bifurcación degenerada de Hopf H_{30} tiene las siguientes condiciones de definición:

$$a_{30} = a_{20} = a_{10} = 0, \quad (7.22)$$

usando la notación de Golubitsky y Schaeffer (1985), o

$$\sigma_3 = \sigma_2 = \sigma_1 = 0, \quad (7.23)$$

usando la notación introducida por el método en el dominio frecuencia.

Las condiciones de no-degeneración son

$$a_{40} \neq 0 \quad \text{y} \quad a_{01} \neq 0 \quad (7.24)$$

y

$$\sigma_4 \neq 0 \quad \text{y} \quad dH/d\mu \neq 0, \quad (7.25)$$

respectivamente.

La forma normal de dicha singularidad es

$$x(x^8 \pm \mu) = 0, \quad (7.26)$$

mientras que la forma normal perturbada en los parámetros auxiliares α , β y γ puede escribirse como

$$x(x^8 - \mu + \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6) = 0. \quad (7.27)$$

Los conjuntos de transiciones y diagramas locales de bifurcaciones pueden apreciarse en la Figura 7.1. Como era de esperar son más complicados que los diagramas en cercanías de la singularidad H_{20} . En particular, la variedad de transición D es más intrincada en este caso de lo que era previamente para la degeneración H_{20} . Golubitsky y Schaeffer (1985) no mostraron en detalle la forma de dicha variedad de transición D en el plano de los parámetros α - β cuando $\gamma > 0$. Esta fue deducida en Farr (1986) luego de analizar en detalle otras singularidades especialmente relacionadas con la multiplicidad de estados de equilibrio. Notemos que, localmente hablando, es decir considerando las regiones 2, 4, 7 y 8 alrededor de la singularidad H_{20} cuando $\gamma > 0$ en la Figura 7.1, tendremos una configuración similar a la mostrada en las Figuras 5.9 y 5.10, como era de esperar.

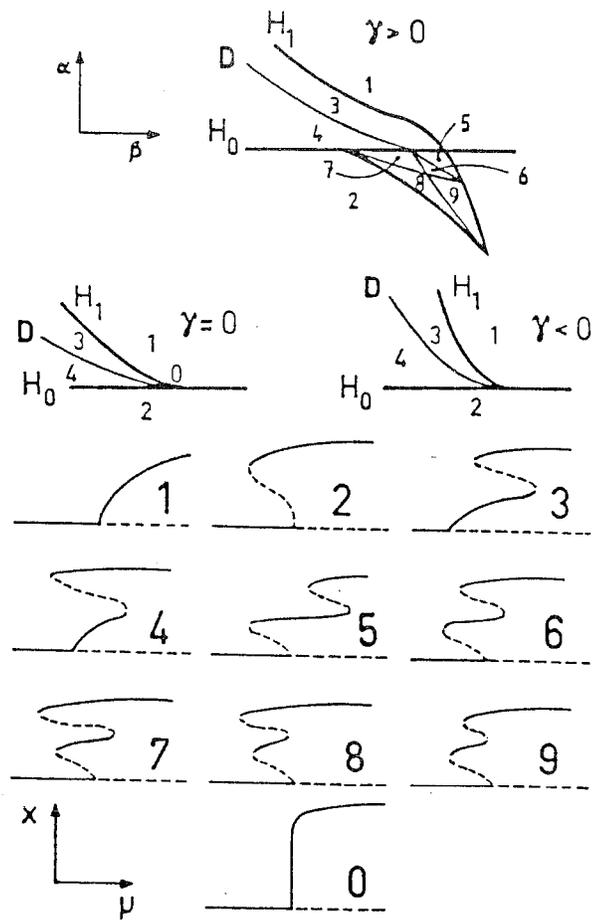


Figura 7.1: Variedades de transición en el espacio de parámetros α - β - γ y diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de una singularidad H_{30} .

Habiendo presentado los diagramas de bifurcaciones locales de la singularidad H_{30} procederemos a estudiar un ejemplo donde aplicaremos las fórmulas desarrolladas precedentemente. El ejemplo de aplicación es un reactor tanque agitado continuo con una reacción exotérmica, irreversible, de primer orden $A \rightarrow B$ con capacitancia térmica externa, como el estudiado en Planaux y Jensen (1986). Ya hemos visto cómo la formulación en el dominio frecuencia permite estudiar ciertas bifurcaciones degeneradas de Hopf en este reactor (capítulo 6) por lo cual sólo nos limitaremos a presentar los resultados específicos de los coeficientes de curvatura.

En la anterior referencia, Planeaux y Jensen (1986) encontraron una estructura de dos bifurcaciones degeneradas H_{20} que se conectaban a través de las variedades de transición D y H_1 como muestra esquemáticamente la Figura 7.2, para los valores de los parámetros auxiliares $\epsilon=2$ y $\rho=1$. Sin embargo, se desprende de la lectura de la anterior referencia que dichos autores no calcularon el coeficiente de curvatura tercero (σ_3) pues utilizaron la formulación dada por Hassard y Wan (1978) y Hassard y colegas (1981) que sólo incluye el coeficiente de estabilidad segundo. Para determinar los diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de ambas singularidades H_{20} es necesario el cálculo de σ_3 para determinar su signo. Planeaux y Jensen (1986), en cambio, realizaron numerosas ejecuciones con el programa AUTO de tal forma de concluir con el trazado de las variedades de transición mostrado en la Figura 7.2.

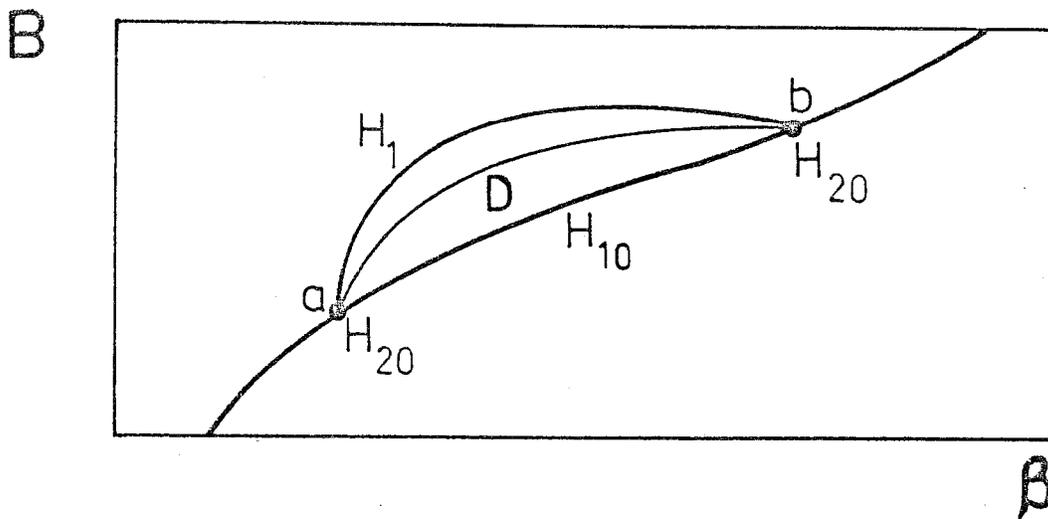


Figura 7.2: Diagrama de bifurcación propuesto por Planeaux y Jensen (1986) para $\epsilon=2$ y $\rho=1$ rescatando las variedades de transición.

Aplicando las fórmulas para los coeficientes de curvatura presentados en las dos primeras secciones obtuvimos los siguientes resultados:

a) Para la singularidad H_{20} denotada como "a" en la Figura 7.2 hallamos $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 < 0$ y $\sigma_4 < 0$.

b) Para la singularidad H_{20} mostrada como "b" en la figura precedente obtuvimos $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 > 0$ y $\sigma_4 < 0$.

Entonces es claro ver que, para la primera degeneración H_{20} , nuestros resultados son coincidentes con los de Planeaux y Jensen, mientras que para la segunda obtuvimos una muy diferente asignación de las variedades H_1 y D , producto de que el signo de σ_3 es positivo. Sin usar la información del signo de σ_4 podríamos, aunque en forma local y esquemática, presentar nuestros resultados de la manera mostrada en la Figura 7.3. Considerando el signo de σ_4 podríamos ampliamente corroborar que la segunda degeneración H_{20} posee la estructura de la variedad de transición como la mostrada en la Figura 7.1. Entonces, la forma de conexión de las variedades de transición es como la indicada en la Figura 7.4.

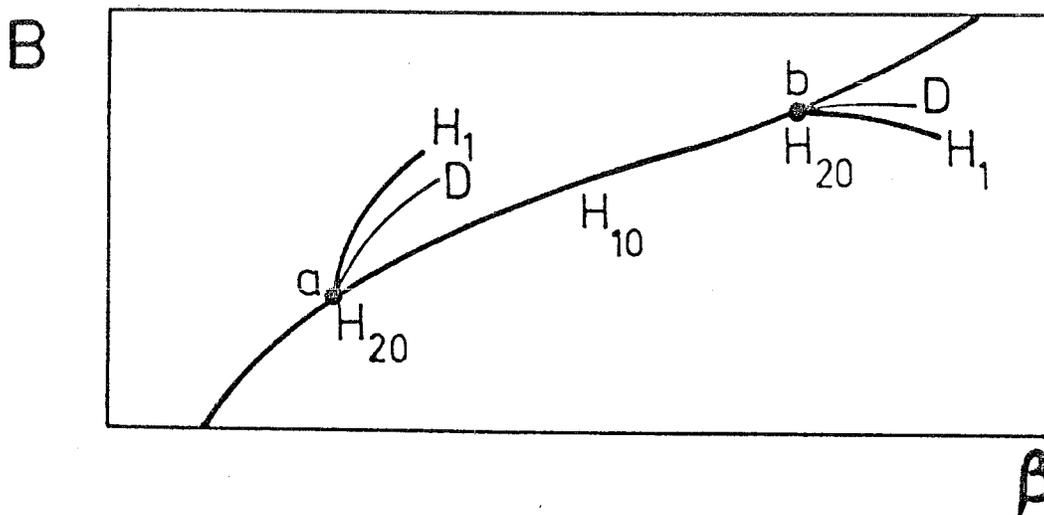


Figura 7.3: Diagrama de bifurcación hallado usando la información del coeficiente de curvatura tercero.

Para comprobar estos resultados obtenidos con el método en el dominio frecuencia realizamos a continuación una extensa búsqueda en el espacio de parámetros B - β para detectar las variedades de transición H_1 y D de tal

forma de verificar la estructura propuesta en la Figura 7.4. En especial, mostraremos los resultados obtenidos al recuperar los diagramas de bifurcaciones locales a la derecha de la singularidad H_{20} (b) usando el programa AUTO.

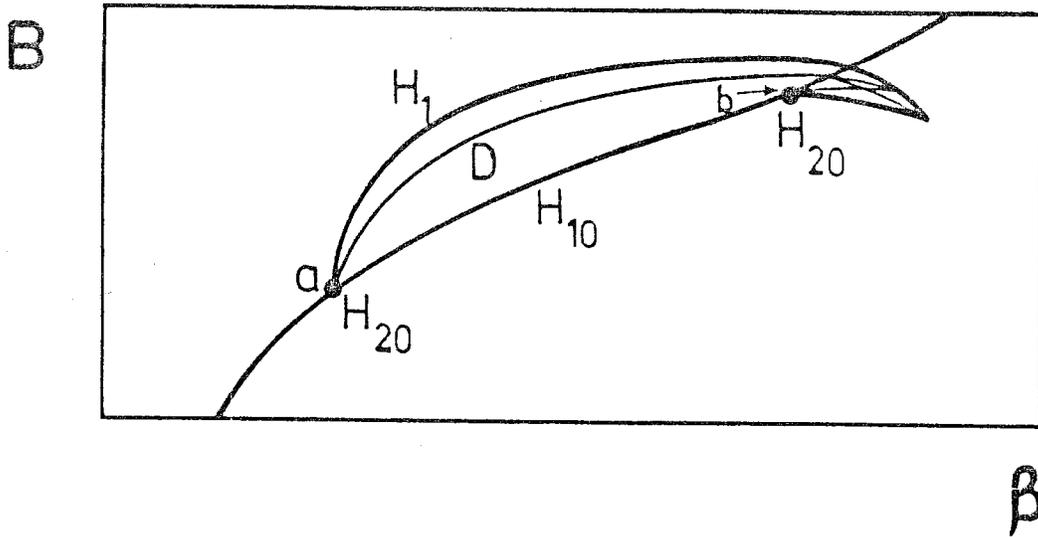


Figura 7.4: Diagrama de bifurcación hallado usando la información del tercer y cuarto coeficientes de curvatura.

Así, en la Figura 7.5 mostramos una estructura de ciclos límites anidados alrededor de un estado de equilibrio que fácilmente localizamos como el diagrama 8 de la Figura 7.1. Para un cierto rango del parámetro D podemos obtener cuatro ciclos límites anidados. Este resultado es nuevo en este reactor y modifica sustancialmente el número de diagramas de bifurcaciones locales en el mismo. Los parámetros auxiliares B y β tienen los valores siguientes 23.825 y 4.99, respectivamente.

Otro diagrama de bifurcaciones locales interesante aparece en la Figura 7.6, para $B=23.83$ y $\beta=4.99$. Ambos puntos límites superiores de la rama de soluciones periódicas se encuentran muy próximos entre sí anunciando una posible coalescencia ante la variación apropiada de B y β . Este diagrama de la Figura 7.6 corresponde al diagrama 5 en cercanías de la singularidad H_{30}

de la Figura 7.1

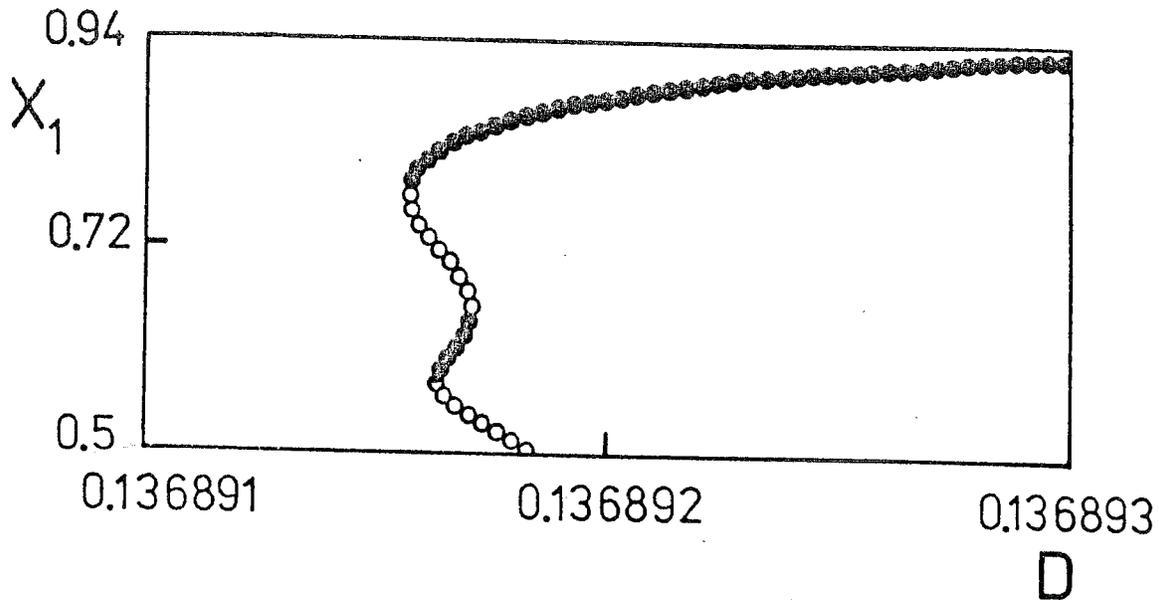


Figura 7.5: Diagrama de bifurcación local usando AUTO para $B=23.825$ y $\beta=4.99$ ($\epsilon=2$ y $\rho=1$).

Cuando $B=23.84$ y $\beta=4.99$ el diagrama de bifurcación se modifica respecto del de la Figura anterior como muestra la Figura 7.7. La desaparición de ambos puntos límites lleva sólo a estructuras de dos ciclos límites anidados para ciertos valores del parámetro de bifurcación D . Este diagrama de bifurcación corresponde al diagrama local 2 de la Figura 7.1.

Variando B , específicamente $B=23.86$ ($\beta=4.99$), obtenemos el diagrama de bifurcación mostrado en la Figura 7.8, que corresponde al diagrama local 1 de la Figura 7.1. Puede notarse que el punto límite de la Figura 7.7 ha desaparecido en la Figura 7.8 producto de atravesar la singularidad H_0 (ó H_{10}).

En la Figura 7.9 se muestra el diagrama de bifurcación para $B=23.82$ y $\beta=4.99$, cuando dos de los tres puntos límites se encuentran muy próximos entre sí. Este diagrama corresponde al diagrama de bifurcación local esque-

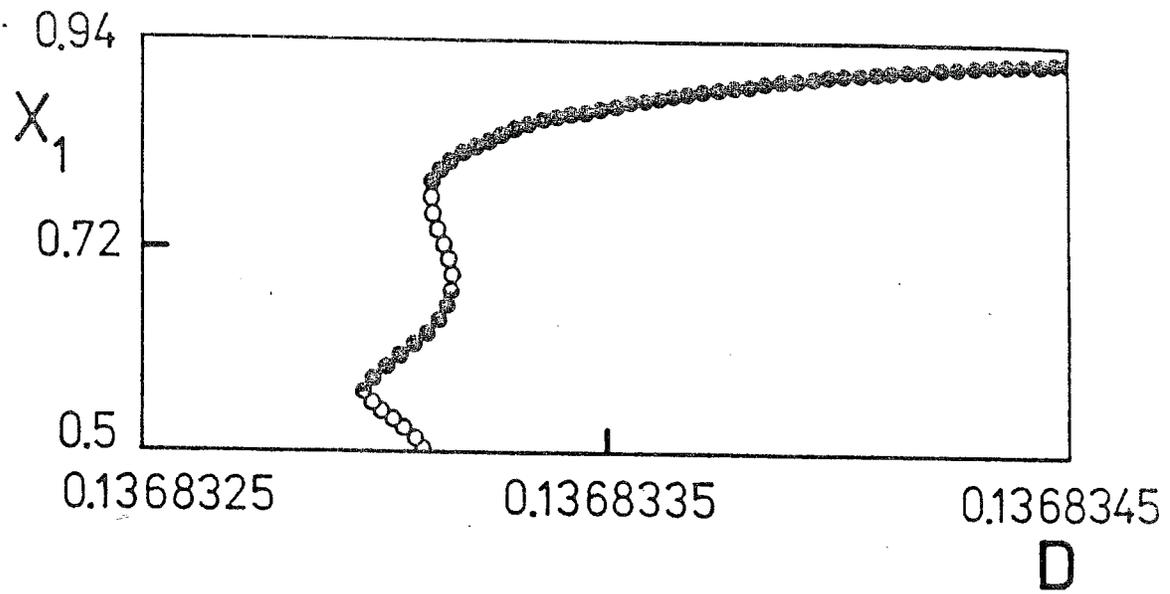


Figura 7.6: Diagrama de bifurcación local usando AUTO para $B=23.83$ y $\beta=4.99$ ($\epsilon=2$ y $\rho=1$).

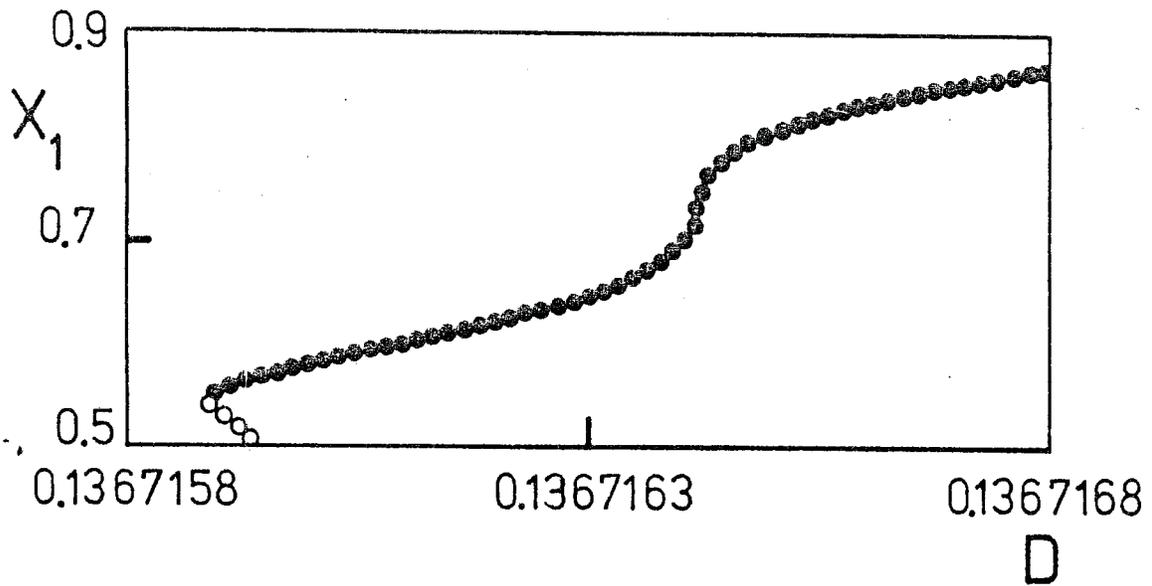


Figura 7.7: Diagrama de bifurcación local usando AUTO para $B=23.84$ y $\beta=4.99$ ($\epsilon=2$ y $\rho=1$).

matizado con el número 8 en la Figura 7.1. Finalmente para $B=23.81$ y $\beta=4.99$ ambos puntos límites desaparecen (ver Figura 7.10). Notemos que cualitativamente este diagrama corresponde al 2 de la Figura 7.1 como también co-

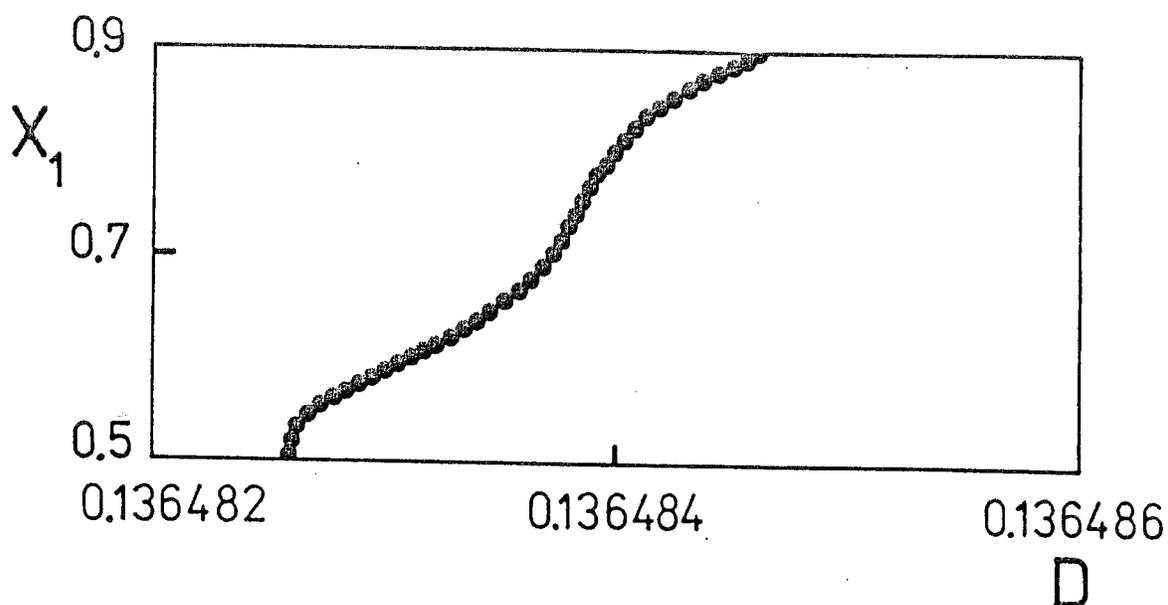


Figura 7.8: Diagrama de bifurcación local usando AUTO para $B=23.86$ y $\beta=4.99$ ($\epsilon=2$ y $\rho=1$).

responde al 2 el de la Figura 7.7. Sin embargo, en la Figura 7.10 el único punto límite de la rama de soluciones periódicas se encuentra para valores de "x" superiores a 0.8, mientras que en la Figura 7.7 lo encontramos para valores de x cercanos a 0.54.

Aquí podemos ver la importancia de la teoría de bifurcaciones degeneradas de Hopf en predecir estructuras de diagramas locales en un entorno de la singularidad. Así, podemos obtener la localización de tales degeneraciones con técnicas en el dominio frecuencia y clasificarlas, al menos localmente, utilizando los resultados de Golubitsky y Schaeffer (1985). Luego, aplicando el método iterativo en el dominio frecuencia con aproximaciones de alto orden (Capítulo 6) o bien usando un método más exacto dado por el programa AUTO podemos recuperar los diagramas reales en cercanías de la singularidad.

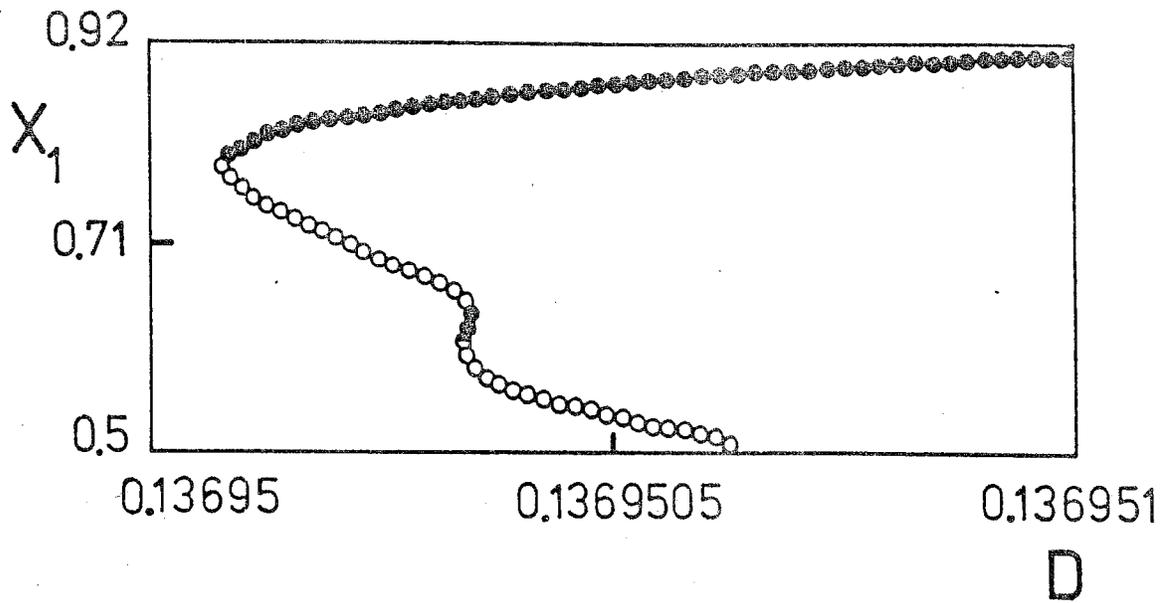


Figura 7.9: Diagrama de bifurcación local usando AUTO para $B=23.82$ y $\beta=4.99$ ($\epsilon=2$ y $\rho=1$).

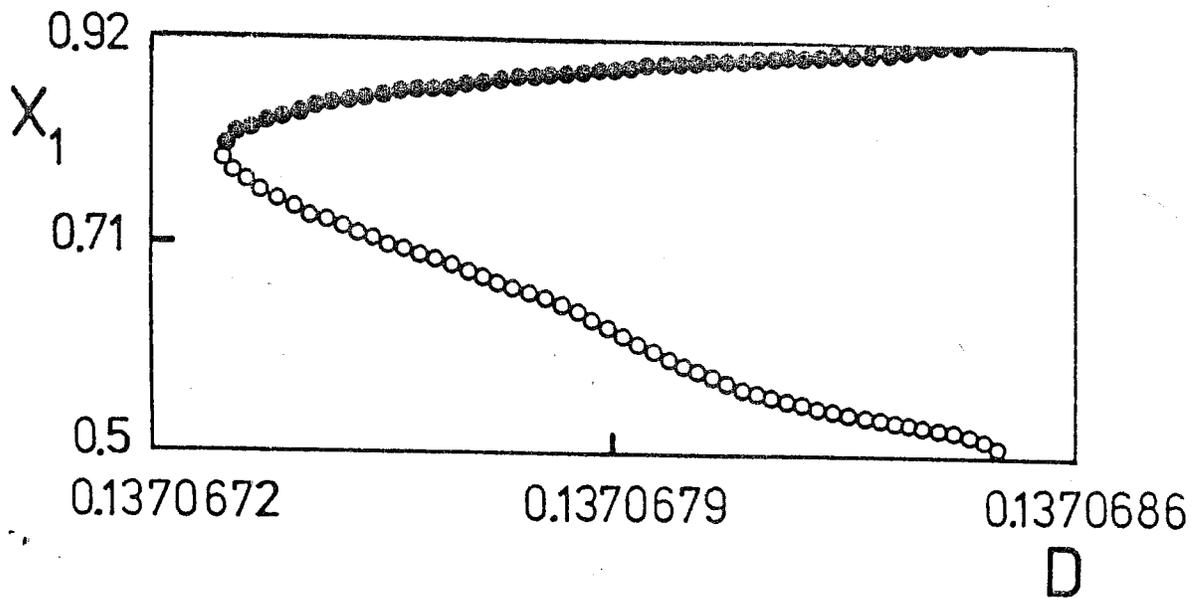


Figura 7.10: Diagrama de bifurcación local usando AUTO para $B=23.81$ y $\beta=4.99$ ($\epsilon=2$ y $\rho=1$).

CAPITULO 8

CONCLUSIONES

En esta tesis hemos presentado un estudio sobre soluciones periódicas en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias utilizando la técnica de balance armónico y resultados de la teoría de sistemas realimentados. El tratamiento ha sido formulado enteramente en el dominio frecuencia usando herramientas analíticas de la teoría de variable compleja con técnicas sofisticadas como los resultados de la teoría de singularidades. El objetivo fundamental ha sido resolver los diagramas de bifurcaciones locales que se encuentran en cercanías de bifurcaciones degeneradas de Hopf usando las antedichas técnicas en el dominio frecuencia. Para tal fin hemos previsto dos posibles alternativas de análisis, a saber: a) Obtener las correspondientes (y equivalentes) condiciones de definición y de no-degeneración de las singularidades usando la formulación en el dominio frecuencia para luego aplicar los resultados de Golubitsky y Schaeffer (1985). Así pueden encontrarse los diagramas de bifurcaciones locales en un entorno de la singularidad. b) Recuperar los diagramas de bifurcaciones locales usando el método de Hopf gráfico en el dominio frecuencia. Con tal fin hemos presentado resultados de recuperación de diagramas de bifurcaciones locales para al menos dos familias de bifurcaciones degeneradas: las que son provocadas por la falla de la transversalidad del cruce de los autovalores bifurcantes, y las que se originan cuando los coeficientes de estabilidad de alto orden se anulan.

Para la tercer familia de bifurcaciones degeneradas de Hopf hemos advertido que sería conveniente calcular ciertas expresiones para luego aplicar los resultados de Golubitsky y Schaeffer (1985) y así poder clasificar la singularidad con sus diagramas de bifurcaciones locales asociados. Otra forma consistiría en obtener los mismos haciendo uso del método gráfico y las aproximaciones de alto orden. Sin embargo, numéricamente aparecen problemas serios en su obtención debido a la dificultad de calcular eficientemente ciertas variedades de transición, sobre todo cuando las mismas están

alejadas de la singularidad.

En la obtención de los diagramas de bifurcaciones locales, hemos implementado varias aproximaciones de balance armónico de alto orden para notar en forma gráfica la marcha del algoritmo en cuanto a convergencia y precisión en la recuperación de la solución bifurcada. A tal fin hemos comparado no sólo los resultados obtenidos entre las diferentes aproximaciones de balance armónico entre sí, sino también dichas aproximaciones con los resultados obtenidos de ejecutar el programa AUTO. Así, pudieron verse claramente las limitaciones que ofrece el método en el dominio frecuencia en cuanto a la convergencia de la serie en función de la amplitud θ . Para todos los métodos que dependen de similares aproximaciones en serie es de esperar que sufran de tales limitaciones. Por otro lado, la posibilidad de contar con un programa tan pulido y preciso como AUTO hicieron sencilla la ciclópea tarea de realizar miles de simulaciones tratando de comprobar los resultados dados por el método en el dominio frecuencia. A la imprecisión de las simulaciones que realizaríamos con subrutinas de integración numérica deberíamos agregarle sus tiempos de cómputos prohibitivos. Por ejemplo, para hallar con certeza un ciclo límite estable para alguno de los modelos de reactores aquí estudiados, los tiempos de cómputo, usando programas de simulación numérica, oscilan entre 20 y 60 segundos sólo para un único valor del parámetro de bifurcación. En cambio con AUTO puede obtenerse, para valores similares de tiempo de cálculo, la *continuación de los ciclos límites* variando el parámetro principal y con mucha mejor resolución. Por otro lado, con el auxilio del algoritmo que hemos implementado, la desagradable tarea de realizar simulaciones se ve drásticamente reducida.

La localización de las bifurcaciones degeneradas de Hopf en el espacio de parámetros es una tarea que se torna imprescindible para comenzar cualquier análisis serio de oscilaciones en sistemas. A tal fin hemos provisto una formulación ordenada para hallar los miembros más distintivos (y usuales) de las diferentes familias de bifurcaciones degeneradas de Hopf. Una vez determinada tal o cual degeneración en el espacio de parámetros, recomendamos, especialmente para las singularidades de gran codimensión, estu-

diar los diagramas locales usando las aproximaciones de alto orden L_2 , L_3 y L_4 , ó bien, si se busca mayor precisión, obtener dichos diagramas de bifurcaciones luego de aplicar el programa AUTO.

Una importante ventaja del algoritmo que hemos implementado con respecto al programa AUTO la constituye el hecho de prescindir de una solución inicial para la continuación de ramas periódicas. La mayoría de los programas disponibles requieren de una solución inicial, que bién puede ser un punto de bifurcación de Hopf, para comenzar el trazado de las soluciones periódicas cuando se varía el parámetro principal de bifurcación. En cambio, para la metodología en el dominio frecuencia basta que la frecuencia de intersección w_r no esté muy alejada de cualquiera de las frecuencias solución \hat{w}_i de las diferentes aproximaciones L_i . Una interesante aplicación de esta ventaja la constituye el hecho de poder localizar rápidamente la rama de soluciones periódicas inferiores (o más próxima al estado de equilibrio) de una "isola". En cambio usando, por ejemplo, el programa AUTO, primero se debe hacer una continuación de alguna de las ramas periódicas donde existen puntos de bifurcación de Hopf. Luego debe hacerse una continuación de soluciones periódicas de igual período en un segundo parámetro del sistema hasta llegar a la posible zona de "isolas". Entonces, se debe proceder nuevamente a realizar una continuación de soluciones periódicas utilizando la condición final de *continuación de igual período* como condición inicial de *continuación de órbita periódica*, ahora sí en un único parámetro. Como es de esperar, el tiempo de cómputo crece enormemente y no es raro que la localización de las *isolas* demande varias horas de paciente espera, sobre todo si no se conoce la localización de ciertas bifurcaciones degeneradas de Hopf que inevitablemente acompañan su aparición.

Por todos estos conceptos creemos que muchos resultados que se obtienen con los algoritmos aquí implementados complementan a varios programas de continuación de ramas periódicas. Es por ello que creemos conveniente primero explorar en la búsqueda de las degeneraciones del teorema de bifurcación de Hopf usando la formulación dada, para luego analizar con mayor detalle los diagramas de bifurcaciones locales usando, por ejemplo, AUTO.

Esta forma híbrida de análisis tiene una gran potencialidad debido a que:

a) La localización exacta de degeneraciones de Hopf alerta sobre la existencia de ciertos diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de la singularidad. Sin embargo, muchas veces estos diagramas locales tienen un rango de existencia prolongado, por lo cual pasan a ser distorsiones evidentes de aquellos originales diagramas locales que les dieron vida, para convertirse en diagramas de bifurcaciones globales.

b) Ya sea en la localización de la singularidad, para la cual utilizamos la metodología en el dominio frecuencia, como en el gráfico del diagrama de bifurcación, para el cual usamos AUTO, los resultados son precisos, pues nos valemos de todas las bondades de cada técnica.

c) Parece muy probable encontrar en estos modelos de reacciones químicas singularidades de mayor codimensión que no han sido analizadas aún en la teoría dada por Golubitsky y Schaeffer (1985). Nos referimos específicamente, por ejemplo, a interacciones entre cuatro ciclos límites y varios puntos de bifurcaciones de Hopf. Estas singularidades pueden localizarse usando las técnicas en el dominio frecuencia al tiempo que pueden obtenerse sus diagramas de bifurcaciones locales utilizando AUTO. La importancia de las mismas radica en que actúan como centros organizadores de dinámica, es decir alrededor de las mismas se manifiestan todos los fenómenos distintivos de la dinámica oscilatoria relacionada con bifurcaciones de Hopf. Encontrar todos los diagramas de bifurcaciones locales en cercanías de tales singularidades, equivale a conocer los diagramas de bifurcaciones de la familia de ecuaciones diferenciales con variación multiparamétrica.

Finalmente, diremos que tres líneas de investigación a explorar en el futuro serían apropiadas: a) Completar con exactitud el cálculo de los coeficientes de curvatura para poder hallar las degeneraciones de máxima codimensión (o de mayor complejidad), b) Obtener relaciones entre el método de balance armónico y la dinámica de sistemas caóticos, y c) Estudiar formas de controlar la dinámica de sistemas oscilatorios o caóticos aplicando técnicas de control no lineal.

Para el caso a) el estudio ya fue fundamentado en el capítulo 7 de es-

ta tesis por lo cual no insistiremos en la importancia de dicha línea de investigación. En cambio, para la segunda variante, podemos decir que ya existen trabajos preliminares vinculando a las técnicas del dominio frecuencia con la dinámica caótica de ciertos sistemas. En particular, los modos de frecuencias fundamentales y algunos de sus armónicos de una forma de onda de dinámica caótica pueden ser calculados aproximadamente utilizando las aproximaciones de amplitud presentadas en esta tesis. Es claro recordar que la mayoría de estos sistemas tienen un espectro en frecuencia continuo, pero pueden presentar varios *picos* para valores selectivos de la frecuencia. Como fuera reportado oportunamente, varios investigadores coincidieron en afirmar que el método de balance armónico daría una idea de la magnitud de dichos picos, por lo cual resulta interesante una investigación más exhaustiva al respecto incorporando diferentes aproximaciones de balance armónico.

Para terminar, diremos que la tercera línea es de reciente aparición en la comunidad científica, ya que los artículos sobre control de sistemas caóticos comenzaron a aparecer en 1990. Esta línea tiene un futuro promisorio pues es deseable, en muchos procesos, evitar estas manifestaciones dinámicas que ocasionan en muchos casos cuantiosas pérdidas, además de ofrecer características de intratabilidad en la solución del modelo. A tal efecto, las investigaciones de la comunidad internacional se han rápidamente orientado a tratar vías de control utilizando toda la aparatología de la Teoría de Control Moderna auxiliados por herramientas propias de la Dinámica de Sistemas tanto en sistemas continuos como en sistemas discretos. Esta comunión necesaria entre ambas ramas de las ciencias es el primer paso en el camino para resolver el control de sistemas oscilatorios y de dinámica caótica o compleja.

BIBLIOGRAFIA

- Aluko, M. y Chang, H.C., 1984, PEFLOQ: An algorithm for the bifurcational analysis of periodic solutions of autonomous systems. *Comp. Chem. Engng.*, Vol. 8, pags. 355-365.
- Allwright, D.J., 1977, Harmonic balance and the Hopf bifurcation theorem. *Math. Proc. Cambridge Philosophical Soc.*, Vol. 82, pags. 453-467.
- Amundson, N. R. y Aris, R., 1958, An analysis of chemical reactor stability and control-I. *Chem. Engng. Science*, Vol. 7, pags. 121-131.
- Amundson, N. R. y Schmitz, R., 1963, An analysis of chemical reactor stability and control-Va. *Chem. Engng. Science*, Vol. 18, pags. 265-289.
- Andronov, A. A. y Chaikin, C.E., 1949, *Theory of Oscillations*. Editado por Solomon Lefschetz, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (versión original en ruso, 1937).
- Andronov, A. A., Vitt, A. y Khaikin, S., 1966, *Theory of Oscillators*, London, Pergamon Press.
- Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I. y Maier, A. G., 1973, *Theory of bifurcations of Dynamical Systems in the Plane*. Israel Program for Scientific translations, Halstead Press, John Wiley, New York.
- Atadan, A. S. y Huseyin, K., 1984, Symmetric and flat bifurcations: An oscillatory phenomenon. *Acta Mechanica*, Vol. 53, pags. 213-232.
- Atadan, A. S. y Huseyin, K., 1986, A double Hopf bifurcation phenomenon. *Meccanica*, Vol. 21, pags. 123-129.
- Balakotaiah, V. y Luss, D., 1982a, Exact steady-state multiplicity criteria for two consecutive or parallel reactions in lumped-parameter systems. *Chem. Engng. Science*, Vol. 37, pags. 433-445.
- Balakotaiah, V. y Luss, D., 1982b, Structure of the steady-state solutions of lumped-parameter chemically reacting systems. *Chem. Engng. Science*, Vol. 37, pags. 1611-1623.
- Balakotaiah, V. y Luss, D., 1984, Global analysis of the multiplicity features of multi-reaction lumped-parameter systems. *Chem. Engng. Science*,

Vol. 39, pags. 865-881.

Balakotaiah, V. y Luss, D., 1986, Steady-state multiplicity features of lumped-parameter chemically reacting systems, en *Dynamics of Nonlinear Systems*, editado por V. Hlavacek. Gordon and Breach Science Publishers, pags. 1-46.

Bilous, O. y Amundson, N. R., 1955, Chemical reactor stability and sensitivity. *AIChE J.*, Vol. 1, pags. 513-521.

Bogdanov, R. I., 1981a, Bifurcation of the limit cycle of a family of plane vector fields. *Sel. Math. Sov.*, 1(4), pags. 373-388.

Bogdanov, R. I., 1981b, Versal deformation of a singularity of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues. *Sel. Math. Sov.*, 1(4), pags. 389-421.

Byeon, K. H. y Chung, I. J., 1989, Analysis of the multiple Hopf bifurcation phenomena in a CSTR with two consecutive reactions -The singularity theory approach. *Chem. Engng. Science*, Vol. 44, pags. 1735-1742.

Colantonio, M. C., Moiola, J. L., Desages, A. C. y Romagnoli, J. A., 1989, Hopf bifurcation in a CSTR using characteristic loci. *Chem. Engng. Science*, Vol. 44, pags. 595-602.

Colantonio, M. C., Padín, M., Desages, A. C. y Romagnoli, J. A., 1991, Application of higher-order bifurcation formulas. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-36, pags. 746-749.

Crawford, J. D. y Knobloch, E., 1988, Classification and unfolding of degenerate Hopf bifurcations with $O(2)$ symmetry: no distinguished parameter. *Physica D*, Vol. 31, pags. 1-48.

Chafee, N., 1978, Generalized Hopf bifurcation and perturbation in a full neighborhood of a given vector field. *Indiana Univ. Math. J.*, Vol. 27, pags. 173-194.

Chang, H. C. y Calo, J. M., 1979, Exact criteria for uniqueness and multiplicity of an n -th order chemical reaction via a catastrophe theory approach. *Chem. Engng. Science*, Vol. 34, pags. 285-299.

- Chen, R. L. y Varaiya, P.P., 1988, Degenerate Hopf bifurcations in power systems. *IEEE Trans. on Circuits and Systems* (Special issue on chaos and bifurcations in Circuits and Systems), Vol. CAS-35, pags. 818-824.
- Doedel, E. J., 1981, AUTO: A program for the automatic bifurcation analysis of autonomous systems. *Cong. Num.* 30, pags. 265-284, (Proc. 10th Manitoba Conf. on Num. Math. and Comp., Univ. of Manitoba, Winnipeg, Canada, 1980).
- Doedel, E. J. y Heinemann, R. F., 1983, Numerical computation of periodic solution branches and oscillatory dynamics of the stirred tank reactor with $A \rightarrow B \rightarrow C$ reactions. *Chem. Engng. Science*, Vol. 38, pags. 1493-1499.
- Doedel, E. J., 1984, Continuation techniques in the study of chemical reaction schemes, en *Proc. Special Year in Energy Math.*, Univ. of Wyoming, editado por Gross, K. I., SIAM Pub., pags. 103-138.
- Doedel, E. J., Jepson, A. D. y Keller, H. B., 1984, Numerical methods for Hopf bifurcation and continuation of periodic solution paths, en: *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering VI*, editado por Glowinski, R., y Lions, J. L., North Holland, Amsterdam, pags. 127-136.
- Doedel, E. J., 1986, AUTO: Software for continuation and bifurcation problems in ordinary differential equations. *Monograph*, Applied Mathematics, Caltech.
- Dongming, W., 1990, A class of cubic differential systems with 6-tuple Focus. *J. Differential Eqns.*, Vol. 87, pags. 305-315.
- Farr, W. W., 1986, *Mathematical Modelling: Dynamics and Multiplicity*. Ph.D. Thesis, University of Minnesota.
- Farr, W. W. y Aris, R., 1986, Yet who would have thought the old man to have had so much blood in him? Reflections on the multiplicity of steady states of the stirred tank reactor. *Chem. Engng. Science*, Vol. 41, pags. 1385-1402.
- Farr, W. W. y Aris, R., 1987, Degenerate Hopf bifurcations in the CSTR with reactions $A \rightarrow B \rightarrow C$. *Canadian Mathematical Society Conference Proceedings*, Vol. 8, pags. 397-418.
- Farr, W. W., Li, C., Labouriau, I. S. y Langford, W. F., 1989, Degenerate

- Hopf bifurcation formulas and Hilbert's 16th Problem. *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 20, pags. 13-30.
- Flockerzi, D., 1979, Existence of small periodic solutions of ordinary differential equations in \mathbb{R}^2 . *Arch. Math.*, 33, pags. 263-278.
- Göbber, F. y Willamowski, K.-D., 1979, Lyapunov approach to multiple Hopf bifurcation. *J. Math. Analysis Appl.*, Vol. 71, pags. 333-350.
- Golubitsky, M. y Schaeffer, D. G., 1979, A theory for imperfect bifurcation via singularity theory. *Commun. Pure Appl. Math.*, Vol. 32, pags. 21-98.
- Golubitsky, M. y Keyfitz, B. L., 1980, A qualitative study of the steady-state solutions for a continuous flow stirred tank chemical reactor. *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 11, pag. 316-339.
- Golubitsky, M. y Langford, W. F., 1981, Classification and unfoldings of degenerate Hopf bifurcations. *J. Differential Eqns.*, Vol. 41, pags. 375-415.
- Golubitsky, M. y Schaeffer, D. G., 1985, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. I, Springer-Verlag, New York.
- Golubitsky, M. y Roberts, M., 1987, A classification of degenerate Hopf bifurcations with $O(2)$ symmetry. *J. Differential Eqns.*, Vol. 69, pags. 216-264.
- Golubitsky, M., Stewart, I. y Schaeffer, D. G., 1988, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. 2. New York, Springer-Verlag.
- Guckenheimer, J., 1984, Multiple bifurcation problems of codimension two. *SIAM J. Math. Analysis*, Vol. 15, pags. 1-49.
- Guckenheimer, J. y Holmes, P., 1985, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York.
- Halbe, D. C. y Poore, A. B., 1981, Dynamics of the continuous stirred tank reactor with reactions $A \rightarrow B \rightarrow C$. *Chem. Engng. Journal*, Vol. 21, pags. 241-253.
- Hamer, J. W., Akramov, T. A. y Ray, W. H., 1981, The dynamic behavior of continuous polymerization reactors-II. *Chem. Engng. Science*, Vol. 36, pags. 1897-1914.

- Hassard, B. D. y Wan, Y. H., 1978, Bifurcation formulae derived from center manifold theory. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 63, pags. 297-312.
- Hassard, B. D., Kazarinoff, N. D. y Wan, Y. H., 1981, *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*. London Math. Soc. Lecture Notes Series 41, Cambridge University Press, Cambridge.
- Hassard, B. D. y Shiau, L. J., 1989, Isolated periodic solutions of the Hodgkin-Huxley equations. *J. Theor. Biol.*, Vol. 136, pags. 267-280.
- Healy, J. J., Broomhead, D. S., Cliffe, K. A., Jones, R. y Mullin, T., 1991, The origins of chaos in a modified Van der Pol oscillator. *Physica D*, Vol. 48, pags. 322-339.
- Heinemann, R. F. y Poore, A. B., 1981, Multiplicity, instability, and oscillatory dynamics of the tubular reactor. *Chem. Engng. Science*, Vol. 36, pags. 1411-1419.
- Holodniok, M. y Kubicek, M., 1984, DERPER - An algorithm for the continuation of periodic solutions in ordinary differential equations. *J. Comp. Phys.*, Vol. 55, pags. 254-267.
- Hopf, E., 1942, Bifurcation of a periodic solution from a stationary solution of system of differential equations. *Ber. Math. Phys. Klassen Sächs. Akad. Wiss.*, Vol. 94, pags. 3-22.
- Hsu, I.-D. y Kazarinoff, N. D., 1976, An applicable Hopf bifurcation formula and instability of small periodic solutions of the Field-Noyes model. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 55, pags. 61-89.
- Huseyin, K., 1986, *Multiple Parameter Stability, Theory and its Applications*. Oxford University Press, Oxford.
- James, E. M., y Lloyd, N. G., 1991, A cubic system with eight small-amplitude limit cycles. *Preprint*, The University College of Wales, Aberystwyth.
- Jorgensen, D. V., Farr, W. W. y Aris, R., 1984, More on the dynamics of a stirred tank with consecutive reactions. *Chem. Engng. Science*, Vol. 39, pags. 1741-1752.
- Keller, H. B., 1977, Numerical solution of bifurcation and nonlinear

- eigenvalue problem, en *Applications of Bifurcation Theory*, editado por Rabinowitz, P. H., Academic Press, pags. 359-384.
- Kielhöfer, H., 1979, Generalized Hopf bifurcation in Hilbert space. *Math. Meth. Appl. Sci.*, Vol. 1, pags. 498-513.
- Kwatny, H. G. y Piper, G. E., 1990, Frequency domain analysis of Hopf bifurcations in electric power networks. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. 37, pags. 1317-1321.
- Labouriau, I. S., 1983, *Applications of Singularity Theory to Neurobiology*. Ph.D. Thesis, University of Warwick, Coventry, United Kingdom.
- Labouriau, I. S., 1985, Degenerate Hopf bifurcations and nerve impulse. *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 16, pags. 1121-1133.
- Labouriau, I. S., 1989, Degenerate Hopf bifurcations and nerve impulse. Part 2. *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 20, pags. 1-12.
- Langford, W. F., 1977, Numerical solution of bifurcation problems for ordinary differential equations. *Numerische Mathematik*, Vol. 28, pags. 171-190.
- Langford, W. F., 1979, Periodic and steady-state mode interactions lead to tori. *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 37, pags. 22-48.
- Langford, W. F., 1983, A review of interactions of steady-state and Hopf bifurcations, en: *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, editado por Barenblatt, G. I., Iooss, G. y Joseph, D. D., Pitman, Boston, pags. 213-237.
- Lloyd, N. G., 1986, Limit cycles of certain polynomial systems, en *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, editado por S. P. Singh., D. Reidel Publishing Company, pags. 317-326.
- Lloyd, N. G., 1988a, Limit cycles of polynomial systems- Some recent developments, en *New Directions in Dynamical Systems*, editado por T. Bedford y J. Swift, Cambridge University Press, pags. 192-234.
- Lloyd, N. G., 1988b, The number of limit cycles of polynomial systems in the plane. *The Institute of Mathematics and its Applications*, Vol. 24,

pags. 161-165.

MacFarlane, A. G. J. y Postlethwaite, I., 1977, The generalized Nyquist stability criterion and multivariable root loci. *Int. Journal of Control*, Vol. 25, pags. 81-127.

Margolis, S. B. y Matkowsky, B. J., 1989, New modes of quasi-periodic combustion near a degenerate Hopf bifurcation point. *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 48, pags. 828-853.

Marsden, J. E. y McCracken, M., 1976, *The Hopf bifurcations and its Applications*, Springer, New York.

Mees, A. I., 1972, The describing function matrix. *J. Inst. Maths. Applics.*, Vol. 10, pags. 49-67.

Mees, A. I. y Bergen, A. R., 1975, Describing functions revisited. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-20, pags. 473-478.

Mees, A. I. y Allwright, D. J., 1979, Using characteristic loci in the Hopf bifurcation. *Proc. Instn. Elect. Engrs.*, Vol. 126, pags. 628-632.

Mees, A. I., y Chua, L., 1979, The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. CAS-26, pags. 235-254.

Mees, A. I., 1981, *Dynamics of Feedback Systems*, John Wiley & Sons, Chichester.

Minorsky, N., 1962, *Nonlinear Oscillations*. D. Van Nostrand Comp., Inc.

Mittelmann, H. D. y Weber, H., 1981, A bibliography on numerical methods for bifurcation problems, *Universitat Dortmund*, Nr. 56.

Moiola, J. L., Desages, A. C. y Romagnoli, J. A., 1990a, Bifurcations in chemical reactors via feedback system theory. *Chem. Engng. Science*, Vol. 45, pags. 1863-1874.

Moiola, J. L., Colantonio, M. C., Desages, A. C. y Romagnoli, J. A., 1990b, Bifurcations and degeneracies in a CSTR with reactions $A \rightarrow B \rightarrow C$: Frequency domain analysis. *Chem. Engng. Science*, Vol. 45, pags. 297-305.

Moiola, J. L., Castro, L., Cendra, H. y Desages, A. C., 1990c, Degenerate

- bifurcations and catastrophe sets via frequency analysis. *Dynamics and Stability of Systems*, Vol. 5, pags. 149-162.
- Moiola, J. L., Desages, A. C. y Romagnoli, J. A., 1991a, Catastrophes, bifurcations and degeneracies via feedback system theory. *Latin American Applied Research*, Vol. 21, pags. 77-92.
- Moiola, J. L., Desages, A. C. y Romagnoli, J. A., 1991b, Degenerate Hopf bifurcations via feedback system theory: higher-order harmonic balance. *Chem. Engng. Science*, Vol. 46, pags. 1475-1490.
- Moiola, J. L., Desages, A. C. y Romagnoli, J. A., 1991c, Computing bifurcation points using characteristic gain loci. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-36, pags. 358-362.
- Moiola, J. L., 1991, *Bifurcations in nonlinear systems using frequency domain analysis*. M.S. Thesis, University of Houston.
- Moiola, J. L. y Chen, G. R., 1991, Degenerate Hopf bifurcations via graphical analysis. Presentado en *Texas Days Dynamics, Workshop on Nonlinear Dynamics* (Chairman: M. Golubitsky), Houston, Texas.
- Moiola, J. L. y Chen, G. R., 1992, Computation of limit cycles via higher-order harmonic balance approximation. Aceptado para su publicación en *IEEE Trans. on Automatic Control* (aparecerá en el Vol. 38, N 3, 1993).
- Moiola, J. L., 1992, Bifurcation conditions using frequency analysis: Applications in Engineering. A aparecer en *IEEE Student Paper Contest Book*, New Jersey.
- Pismen, L. M., 1985, Dynamic of lumped chemically reacting system near singular bifurcation points-II. Almost Hamiltonian dynamics. *Chem. Engng. Science*, Vol. 40, pags. 905-916.
- Planeaux, J. B. y Jensen, K. F., 1986, Bifurcation phenomena in CSTR dynamics: A system with extraneous thermal capacitance. *Chem. Engng. Science*, Vol. 41, pags. 1497-1523.
- Poore, A. B., 1975, Bifurcation of periodic orbits in a chemical reaction problem. *Math. Biosciences*, Vol. 26, pags. 99-107.
- Poore, A. B., 1976, On the theory and applications of the Hopf-Friedrichs

- bifurcation theory. *Arch. Ration. Mech. Analysis*, Vol. 60, pags. 371-393.
- Rand, R. H., 1985, Derivation of the Hopf bifurcation formula using Lindstedt's perturbation method and MACSYMA, en *Applications of Computer Algebra*, editado por R. Pavelle, Kluwer, Boston, p. 293.
- Roose, D., y Hlavacek, V., 1985, A direct method for the computation of Hopf bifurcation points. *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 45, pags. 879-894.
- Rousseau, C., 1987, Bifurcation methods in quadratic systems. *Canadian Mathematical Society Conference Proceedings*, Vol. 8, pags. 637-653.
- Seydel, R., 1981, Numerical computation of periodic orbits that bifurcate from stationary solutions of ordinary differential equations. *Appl. Math. Comp.*, Vol. 9, pags. 257-271.
- Seydel, R., 1991, Tutorial on continuation. *International J. on Bifurcation and Chaos*, Vol. 1, pags. 3-11.
- Shiau, J. L. y Hassard, B., 1991, Degenerate Hopf bifurcation and isolated periodic solutions of the Hodgkin-Huxley model with varying sodium ion concentration. *J. Theo. Biol.*, Vol. 148, pags. 157-173.
- Takens, F., 1973, Unfoldings of certain singularities of vector fields: Generalized Hopf bifurcations. *J. Differential Eqns.*, Vol. 14, pags. 476-493.
- Takens, F., 1974, Forced oscillations and bifurcations. *Commun. Math. Inst. Rijksuniversiteit Utrecht*, 3, pags. 1-59.
- Tang, Y. S., Mees, A. I. y Chua, L., 1983, Hopf bifurcation via Volterra series. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-28, pags. 42-53.
- Thom, R., 1975, *Structural stability and morphogenesis*. Traducido por D. H. Fowler, Benjamin, Reading, Mass.
- Uppal, A., Ray, W. H. y Poore, A. B., 1974, On the dynamic behavior of continuous stirred tank reactors. *Chem. Engng. Science*, Vol. 29, pags. 967-985.
- Uppal, A., Ray, W. H. y Poore, A. B., 1976, The classification of the dynamic behaviour of continuous stirred tank reactors -influence of reactor

residence time. *Chem. Engng. Science*, Vol. 31, pags. 205-214.

Vaganov, D. A., Samoilenko, N. G. y Abramov, V. G., 1978, Periodic regimes of continuous stirred tank reactors. *Chem. Engng. Science*, Vol. 33, pags. 1133-1140.

Vanderbauwhede, A., 1980, An abstract setting for the study of Hopf bifurcation. *Nonlinear Anal.*, Vol. 4, pags. 547-566.

Yu, P. y Huseyin, K., 1988, A perturbation analysis of interactive static and dynamic bifurcations. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 33, pags. 28-41.