



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR**

**TESIS DE DOCTORADO EN INGENIERÍA**

**DISEÑO E IMPLEMENTACION DE  
RECUPERADORES DE ENERGIA EN VEHICULOS  
DE TRANSPORTE**

por

**Claudio David Gatti**

*Bahía Blanca*

*Argentina*

*Marzo de 2019*



# Prefacio

Esta tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur (UNS) y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur, del Instituto de Física del Sur (IFISUR) de la UNS y del Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada (GIMAP) de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca (UTN-FRBB), durante el período comprendido entre el 1 de Abril de 2014 y el 31 de Marzo de 2019, bajo la co-dirección del Dr. Ing. Sebastián Pablo Machado, Profesor Titular de la cátedra Mecánica de los Fluidos de la carrera Ingeniería Mecánica de la UTN-FRBB e Investigador Independiente del CONICET, y del Dr. Mariano Febbo, Profesor Adjunto de la cátedra Dinámica Analítica de la carrera de Física de la UNS e Investigador Adjunto del CONICET.

Claudio David Gatti

17 de Octubre de 2018



DEPARTAMENTO DE INGENIERIA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el .... / .... / ....., mereciendo la calificación de .... (.....) puntos.



# Agradecimientos

*En primer lugar, quiero agradecer profundamente a las dos personas que confiaron en mí para llevar a cabo esta tesis doctoral y caminaron a la par mía, de igual a igual, este camino tan apasionante que es la investigación aplicada. Ellos son mis directores, Mariano Febbo y Sebastián Machado, quienes desinteresadamente escucharon y supieron entender los problemas personales que he tenido que atravesar.*

*Sin ser menos importantes que mis directores en este camino, mis compañeros de trabajo del GIMAP merecen una atención especial. Ellos me brindaron todas las herramientas que tenían disponible, dejando de lado cualquier tipo de beneficio personal, facilitándome mucho la realización de esta tesis.*

*Agradezco sinceramente al CONICET por haberme permitido desarrollar esta actividad durante todo este tiempo, a la UTN FRBB por brindarme las instalaciones de trabajo y a la UNS por permitirme el desarrollo de estos estudios como parte de su alumnado.*

*Difícilmente un profesional llegue a lograr algo en su vida sin una familia que lo sostenga al llegar a casa... y yo tengo la suerte de haber nacido en el seno de una de esas. No me caben las palabras de agradecimiento para mis padres, que desde chico me dieron todo y más de lo que tenían para formarme profesionalmente, pero sobre todo les estaré eternamente agradecidos por los valores que me inculcaron como persona. Agradezco también a mis hermanos, Emiliano, Marcelo, Martina y Sebastián, y a sus familias, que alegran mis días pero fundamentalmente estuvieron en el momento más difícil de mi vida.*

*Finalmente, le quiero agradecer a la mujer de mi vida, a Celeste, a la mujer que sobre todo en esos momentos en que el rumbo no estaba claro estuvo ahí. Estuvo cada día de desarrollo de esta tesis esperándome en casa, con paciencia, tolerancia... pero sobre todo con mucho amor incondicional.*

*Claudio, 17 de Octubre de 2018*



*En memoria de mi gran "hermano"...*

*... Ramiro, que desde algún lugar sé que estará orgulloso del trabajo de su amigo.*





# Resumen

En un vehículo de transporte de pasajeros convencional, sólo un porcentaje muy bajo del combustible, entre el 10 y el 16%, se utiliza para la marcha del mismo mientras que el resto es energía disipada en los frenos, transmisión, motor, accesorios, resistencia a la rodadura, arrastre aerodinámico y ralentí. De todas estas pérdidas, la de mayor magnitud es la del motor (aproximadamente el 63%), la cual en gran medida se pierde en forma de vibración.

El propósito de esta tesis, por lo tanto, se centra en el diseño y fabricación de un dispositivo recuperador piezoeléctrico multimodal capaz de recuperar parcialmente la energía que se pierde en la vibración del motor. Esta energía vibratoria disponible está caracterizada por un gran número de ondas mecánicas de diferente magnitud y frecuencia que se excitan para cada velocidad de giro del motor. El diseño se basa en una viga piezoeléctrica compuesta y dos sistemas dinámicos masa-resorte en sus extremos, cuya respuesta dinámica se calcula a partir del desarrollo de un modelo analítico que contempla aspectos distintivos como acoplamiento electromecánico, relaciones constitutivas no lineales, disipación de energía, magnitud de la carga eléctrica, etc.

Mediante una apropiada reducción del modelo analítico se identifican los parámetros no lineales correspondientes al modelo. Posteriormente, se fabrican y ensayan cuatro dispositivos, evaluándose el voltaje y la potencia eléctrica dados por el modelo sobre una resistencia de carga. Los resultados obtenidos son validados por los experimentos.

En el proceso de optimización del dispositivo de mayor potencia se propone una función objetivo que contempla las características de frecuencia y aceleración variables de la excitación, obteniéndose un dispositivo final superior a los originales, con valores de potencia eléctrica significativos. Finalmente, se realiza la implementación en un escenario real sobre el vehículo, donde se realizan dos recorridos urbanos diferentes para el sensado de temperatura a partir de la alimentación del dispositivo recuperador optimizado.



# Abstract

In a conventional transport vehicle, only about 10 to 16% of the energy from the fuel is used to move it down the road. The rest of the energy is lost in the brakes, transmission, engine, accessories, rolling resistance, aerodynamic drag and idle losses. Among all of these, the largest loss is the energy lost in the engine (approximately 63%), which is mostly wasted as vibration.

The purpose of this thesis is the design and fabrication of a multimodal piezoelectric energy harvesting device capable of recovering that lost energy. The available vibratory energy is characterized by a large number of mechanical waves of different magnitudes and frequencies which are excited for each speed of the engine. The harvesting device is based on a composite piezoelectric beam with two mass-spring systems at its ends. A one-dimensional analytical model is developed to analyze the dynamic response. Among the distinctive aspects contemplated in the model are: electromechanical coupling, nonlinear constitutive relations, energy dissipation, magnitude of the electric load, etc.

By means of an appropriate reduction of the analytical model, the nonlinear parameters corresponding to the model are identified. Subsequently, four devices are fabricated and tested to evaluate the voltage and electrical power over an electrical load, calculated with the analytical model. The results are then validated by the experiments.

An optimization process is applied to the device of maximum mean energy by means of the method of genetic algorithms. In order to take into account the principal characteristics of the excitation (variable frequency and acceleration) a proper objective function is proposed. The final device obtained is greatly improved and obtaining a very improvement final device to the original. Significant values of the electrical power are obtained. Finally, the implementation is carried out in a real scenario on the vehicle with considering two different routes trajectories for temperatures measure, from the feeding of using the optimized harvester device as power supply.



# Indice

---

<b>PREFACIO</b> .....	<b>3</b>
<b>AGRADECIMIENTOS</b> .....	<b>5</b>
<b>RESUMEN</b> .....	<b>9</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>11</b>
<b>INDICE</b> .....	<b>13</b>
<b>1 INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>15</b>
1.1    CONTENIDO.....	22
1.2    OBJETIVO.....	23
1.3    PRINCIPALES APORTES .....	24
<b>2 MATERIALES PIEZOELÉCTRICOS</b> .....	<b>25</b>
2.1    ANTECEDENTES HISTORICOS DE LA PIEZOELECTRICIDAD.....	28
2.2    CERAMICAS PZT.....	29
2.3    COMPUESTO DE MACRO-FIBRAS PIEZOELECTRICAS (MFC).....	31
<b>3 DISPOSITIVO RECUPERADOR</b> .....	<b>35</b>
3.1    CARACTERIZACION DE LA ENERGIA DISPONIBLE .....	35
3.2    INTERVALO DE UTILIZACION.....	43
3.3    DISEÑO CONCEPTUAL .....	46
<b>4 FORMULACIÓN MATEMÁTICA</b> .....	<b>49</b>
4.1    REVISION DE MODELOS NO LINEALES .....	50
4.1.1 <i>Clasificación de ecuaciones constitutivas no lineales</i> .....	51
4.1.1.1 <i>Ecuaciones constitutivas de segundo orden</i> .....	51
4.1.1.2 <i>Ecuaciones constitutivas de órdenes superiores</i> .....	56
4.1.1.3 <i>Ecuaciones constitutivas polinómicas</i> .....	58
4.1.1.4 <i>Ecuaciones basadas en experimentos (empíricos)</i> .....	62
4.1.2 <i>Disipación</i> .....	63
4.1.2.1 <i>Disipación viscosa de segundo orden</i> .....	64
4.1.2.2 <i>Disipación debida a la histéresis de Rayleigh</i> .....	65
4.2    MODELO ELECTROMECHANICO ADOPTADO PARA GENERACION POR $D_{31}$ .....	66
4.2.1 <i>Cinemática</i> .....	68
4.2.2 <i>Densidad de Entalpía y Ecuaciones Constitutivas</i> .....	68
4.2.3 <i>Energía Potencial</i> .....	70
4.2.4 <i>Energía Cinética</i> .....	73
4.2.5 <i>Energía disipada</i> .....	74
4.2.6 <i>Principio de Hamilton</i> .....	75
4.2.7 <i>Discretización espacial de las ecuaciones</i> .....	75

4.3	VARIANTES PARA GENERACION POR $D_{33}$ .....	79
4.4	CASO PARTICULAR (LINEAL).....	83
4.4.1	<i>Solución Armónica</i> .....	84
<b>5</b>	<b>IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS.....</b>	<b>87</b>
5.1	IDENTIFICACION EN VIGAS CANTILEVER .....	91
5.1.1	<i>MFC 2814-P2 (<math>d_{31}</math>)</i> .....	91
5.1.2	<i>MFC 8507-P2 (<math>d_{31}</math>)</i> .....	95
5.1.3	<i>MFC 8507-P1 (<math>d_{33}</math>)</i> .....	101
5.1.4	<i>MIDE QP16N (<math>d_{31}</math>)</i> .....	106
5.2	EFFECTOS DE LOS PARAMETROS NO LINEALES.....	112
5.2.1	<i>Generación por <math>d_{31}</math></i> .....	113
5.2.2	<i>Generación por <math>d_{33}</math></i> .....	116
<b>6</b>	<b>ENSAYOS EXPERIMENTALES Y VALIDACIÓN COMPUTACIONAL .....</b>	<b>119</b>
6.1	CASOS DE ESTUDIO .....	127
6.1.1	<i>Dispositivo 1</i> .....	127
6.1.2	<i>Dispositivo 2</i> .....	136
6.1.3	<i>Dispositivo 3</i> .....	138
6.1.4	<i>Dispositivo 4</i> .....	143
6.2	VALIDACION COMPUTACIONAL.....	148
<b>7</b>	<b>OPTIMIZACIÓN.....</b>	<b>153</b>
7.1	PARAMETROS, RESTRICCIONES Y FUNCIONES OBJETIVO .....	155
7.2	OPTIMIZACION DEL DISPOSITIVO DE MAYOR POTENCIA MEDIA (2) .....	157
7.3	DISPOSITIVO OPTIMIZADO .....	166
<b>8</b>	<b>APLICACIÓN EN EL SENSADO.....</b>	<b>169</b>
8.1	MEDICIONES DE LABORATORIO.....	171
8.2	MEDICIONES SOBRE EL VEHICULO .....	174
	<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>179</b>
<b>APÉNDICE A</b>	<b>PRINCIPIO DE HAMILTON.....</b>	<b>185</b>
<b>APÉNDICE B</b>	<b>PROBLEMA DE AUTOVALORES.....</b>	<b>187</b>
<b>APÉNDICE C</b>	<b>CAMPO Y CAPACIDAD ELÉCTRICA .....</b>	<b>193</b>
<b>APÉNDICE D</b>	<b>MÉTODO DE PROMEDIACIÓN .....</b>	<b>199</b>
	<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>203</b>

# Introducción

---

La recuperación de energía es uno de los temas fundamentales en la aplicación tecnológica de desarrollos científicos para la industria. En el ámbito de los vehículos de transporte, que utilizan para su propulsión motores de combustión interna o turbomáquinas ya sean terrestres, marinos o aéreos, el consumo de combustible involucra dos problemáticas bien definidas. Por un lado, la contaminación ambiental y con ello la degradación de la capa de ozono y la producción de gases de efecto invernadero a partir de la propia combustión incompleta de los combustibles. Por otro lado, al ser dichos combustibles recursos naturales no renovables, se prevé el agotamiento de este recurso en un futuro no muy lejano. De esta manera, resulta imperativo implementar en forma inmediata diferentes técnicas de recuperación de energía a fin de mitigar estos graves inconvenientes.

➤ **Técnicas de recuperación de energía**

La recuperación de energía, también llamada cosecha de energía por su término en inglés “energy harvesting”, es el aprovechamiento de la energía proveniente del ambiente. Las fuentes de esta energía son muy diversas pero están asociadas fundamentalmente al sol, como la energía solar, al viento, como la energía eólica y la aeroelástica, al mar y las corrientes marinas, como la energía undimotriz,

al calor, como la energía térmica, y al movimiento en general, en particular a las vibraciones mecánicas, siendo esta última el objeto de estudio de esta tesis. En ese sentido, Xiao y Wang [1] y Kim et al. [2] realizaron una revisión exhaustiva sobre técnicas de recuperación de energía basada en vibraciones mecánicas.

Para recuperar este tipo de energía se utilizan elementos transductores que pueden ser de diferentes tipos: electromagnéticos, termoeléctricos o piezoeléctricos, entre otros. Existe una amplia bibliografía en lo referente a estas tres formas de recuperación de energía y combinaciones de ellas. Por razones de espacio, aquí sólo expondremos los trabajos que a nuestro criterio consideramos relevantes. El lector interesado podrá profundizar su búsqueda en las referencias citadas.

Respecto a los dispositivos electromagnéticos, Saravia et al. [3] presentaron un enfoque híbrido, numérico-analítico, sobre dispositivos recuperadores basados en levitación electromagnética. Utilizando el mismo principio, Soares dos Santos et al. [4] realizaron un modelo semi-analítico no lineal para la transducción de energía.

En cuanto a recuperadores de energía termoeléctricos, Bahk et al. [5] trataron sobre materiales termoeléctricos aplicados a dispositivos recuperadores de energía, haciendo una optimización de los mismos. Además, Sebald et al. [6] realizaron una interesante comparación entre los materiales termoeléctricos y los piroeléctricos, antecesores de los piezoeléctricos.

Sobre estos últimos materiales, Meitzler et al. [7] en el año 1988 condensaron los principales trabajos de la literatura en un artículo: la “IEEE standard on piezoelectricity”. Su principal objetivo fue convertir al trabajo en la fuente de referencia sobre materiales piezoeléctricos y sus aplicaciones. En ella se expone la formulación lineal de dichos materiales, con un reducido aporte sobre el comportamiento no lineal.

### ➤ **Materiales piezoeléctricos**

La utilización de materiales piezoeléctricos como recuperadores de energía es la base del presente trabajo de tesis. En particular, nos interesa la recuperación de energía provocada por la deformación del material piezoeléctrico ocasionada por la vibración, para generar un voltaje que luego es convertido en potencia eléctrica. Este material se ha utilizado en diferentes configuraciones para conformar un



dispositivo recuperador, entre ellas se puede citar el uso de címbalos axiales, resortes piezoeléctricos corrugados, vigas piezoeléctricas lineales y no lineales, sistemas aeroelásticos o pilas multicapa.

Tanto Kim et al. [8] como Ren et al. [9] presentaron címbalos piezoeléctricos en aplicaciones de transducción de energía. Harne [10] utilizó láminas corrugadas fabricadas de material piezoeléctrico para el control de vibraciones y para la recuperación de la energía vibratoria en los paneles laterales de los colectivos urbanos. Van Blarigan et al. [11] desarrollaron un modelo para vigas piezoeléctricas bimorfas de sección no uniforme y comportamiento lineal, al igual que lo hicieron Erturk e Inman [12] para un caso unimorfo y de sección constante. Ramirez et al. [13] validaron experimentalmente una formulación de elementos finitos sobre dispositivos basados en vigas piezoeléctricas rotantes, bajo comportamiento lineal.

Por otra parte, en el año 2013, Harne y Wang [14] hicieron una revisión sobre sistemas bi-estables (no lineales) de vigas piezoeléctricas analizando diferentes métodos de resolución: integración numérica, balance armónico, promediación y escalas múltiples. Respecto a sistemas aeroelásticos, He y Gao [15] analizaron la recuperación de energía del viento basándose en un dispositivo que aprovecha las vibraciones inducidas por el flujo del mismo, generando el impacto de una viga cantiléver piezoeléctrica contra un *stopper* o limitador. Además, Bibo y Daqaq [16] investigaron la transducción de un recuperador piezoaeroelástico bajo la combinación de cargas aerodinámicas y excitación de la base. Xu et al. [17] estudiaron la generación eléctrica mediante cerámicas PZT en forma de pilas multicapa (*stack generator*) en modo  $d_{33}$ .

En el desarrollo presentado en esta tesis se utiliza una lámina de fibras de material piezoeléctrico PZT-5A de electrodos interdigitados, la cual presenta importantes ventajas frente a las convencionales. En primer lugar, las fibras piezoeléctricas orientadas longitudinalmente otorgan gran flexibilidad a las láminas y, por lo tanto, larga vida a fatiga. A su vez, esto permite grandes esfuerzos y con ello una mayor generación de energía (Beckert y Kreher [18]). En segundo lugar, el campo eléctrico puede ser establecido tanto en la dirección longitudinal como en la transversal, dependiendo solamente de la disposición de los electrodos interdigitados. Esto hace que la conveniencia de la generación de energía con un

coeficiente piezoeléctrico  $d_{33}$  (polarización en la misma dirección que la tensión aplicada) o con el coeficiente  $d_{31}$  (polarización en la dirección perpendicular a la tensión aplicada) pueda ser evaluada fácilmente [19].

Tanto Nelson et al. [20] como Bowen et al. [21] optimizaron el diseño de los electrodos interdigitados en un compuesto de fibras piezoeléctricas con generación  $d_{33}$  en modo de actuación. En esa misma dirección, Lin et al. [22] desarrollaron, modelaron y ensayaron experimentalmente compuestos de fibras piezoeléctricas destinados especialmente a aplicaciones aeroespaciales. Por otra parte, Hareesh et al. [23] presentaron un nuevo método para lograr la actuación en modo flexional transversal de dispositivos micro-piezoeléctricos fabricados con capas homogéneas de material PZT.

➤ **Linealidad y no linealidad en recuperadores piezoeléctricos**

Formulaciones de modelos lineales de dispositivos recuperadores de energía conformados por vigas delgadas han sido desarrolladas por muchos investigadores, como por ejemplo Beeby et al. [24] y Erturk et al. [25]. Estos modelos usan en su mayoría la teoría de vigas de Bernoulli-Euler bajo excitación de la base, considerando una ecuación constitutiva lineal del piezoeléctrico y amortiguamiento estructural modal proporcional de Rayleigh [26].

Respecto al comportamiento no lineal de los dispositivos de recuperación de energía, existen diferentes enfoques en la literatura dependiendo de las aplicaciones. Algunos autores presentan sus modelos a partir de no linealidades geométricas debido a grandes desplazamientos. Otros, en cambio, desde el punto de vista de las ecuaciones constitutivas por medio de no linealidades elásticas, de acoplamiento electromecánico o por el fenómeno de histéresis ferroelástica y ferroeléctrica. Dichas no linealidades emergen de manera más frecuente a lo que suele creerse en muchas aplicaciones de ingeniería y el comportamiento no lineal que provocan en los dispositivos recuperadores de energía ha sido y es, aun hoy, objeto de estudio por muchos investigadores. Por ejemplo, Mak et al. [27] validaron experimentalmente un modelo con no linealidad geométrica considerando tanto la deformación longitudinal como la transversal de la viga. El modelo fue

implementado en un dispositivo cantiléver bimorfo incorporando un limitador de recorrido en la punta.

Respecto a las ecuaciones constitutivas no lineales, si bien será un tema que se abordará exhaustivamente en el Capítulo 4 de esta tesis, se presenta a continuación una breve revisión histórica sobre el tema. En este sentido, Joshi [28] presentó en el año 1992 unas relaciones constitutivas no lineales para materiales piezocerámicos, que luego sería la base de muchos trabajos sobre piezoelectricidad aplicada. En el libro sobre histéresis de Bertotti y Mayergoyz [29] del año 2006, Damjanovic [30] presentó el estudio minucioso sobre la histéresis en materiales piezoeléctricos y ferroeléctricos. Siguiendo ese mismo tópico, Goldschmidtboeing et al. [31] analizaron la influencia de la histéresis ferroelástica en vigas cantilever de material PZT, mecánicamente excitadas en la base. Por otra parte, Stanton et al. [32] validaron experimentalmente un modelo matemático teniendo en cuenta la no linealidad correspondiente a efectos elásticos de orden superior y acoplamiento no lineal asociado a un circuito recuperador de energía. Aurelle et al. [33] estudiaron la contribución de las deformaciones y el acoplamiento electromecánico en la respuesta no lineal de una viga piezoeléctrica bajo campos eléctricos débiles con el fin de focalizar su estudio sobre las no linealidades en forma separada. Siguiendo con esta línea, Albareda et al. [34] consideraron una formulación de alto orden en el potencial termodinámico a partir del cual se obtienen ecuaciones constitutivas no lineales para la tensión y el desplazamiento eléctrico de alto orden en la deformación y el campo eléctrico. Priya et al. [35] analizaron no linealidades eléctricas generadas por campos eléctricos fuertes y la influencia del fenómeno ferroelástico. Leadenham et al. [36] estudiaron un modelo de parámetros distribuidos teniendo en cuenta el ablandamiento y no linealidades disipativas provocadas por la histéresis ferroelástica de una viga piezoeléctrica en su primer modo flexional usando el método de promediación para la resolución de las ecuaciones diferenciales. Dicha formulación para el material piezoeléctrico es validada experimentalmente tanto en actuación como en cosecha de energía.

### ➤ **Dispositivos multimodales**

La mayoría de los dispositivos mencionados previamente están diseñados para funcionar a su frecuencia de resonancia, donde el sistema es capaz de recuperar la máxima energía debido a las grandes deformaciones que sufre el material piezoeléctrico en ese estado. La principal desventaja de este enfoque es que los sistemas son eficientes para una sola frecuencia de excitación (generación de modo único o unimodal), la cual debe coincidir con una de las frecuencias naturales del dispositivo recuperador. Debido a esta condición, a medida que la frecuencia de excitación se aleja de la zona de resonancia, la tensión generada cae bruscamente. Con el objetivo de resolver dicho problema, las propuestas más sofisticadas de dispositivos de recuperación de energía han implementado sistemas multimodales con múltiples modos resonantes dentro del rango de las frecuencias de excitación y de esta manera incrementando el rango de operación del dispositivo.

Uno de los principales trabajos en la literatura es el de Sadeqi et al. [37] en el cual incorporaron a una viga piezoeléctrica dos sistemas masa-resorte en cada uno de sus extremos, de manera tal de anular los movimientos torsionales de la viga y generar un dispositivo multimodal. Dicho dispositivo lo implementaron en la llanta de un vehículo sometida a rotación. Zhu et al. [38] hicieron una revisión detallada sobre diferentes estrategias para incrementar el ancho de banda en frecuencia de dispositivos recuperadores de energía. Se destacan las que lo logran mediante: (i) el corrimiento del centro de gravedad de la masa en la punta de una viga cantiléver, (ii) resortes de rigidez variable y (iii) múltiples vigas cantiléver de distintas longitudes. Un estudio sobre esta última estrategia lo presentaron Rezaei-Hosseini et al. [39] en su trabajo sobre la optimización de recuperadores de energía de sistemas rotantes a partir de la excitación del viento.

### ➤ **Aplicaciones en vehículos de transporte**

En la industria de los vehículos de transporte particularmente se han implementado diversos dispositivos basados en los principios anteriormente nombrados, siendo relevantes los trabajos realizados sobre el aprovechamiento del giro de los neumáticos y la deformación de los mismos. En este sentido, Roundy [40] presentó las principales consideraciones de diseño en la recuperación de energía

para el monitoreo de la presión de los neumáticos mediante sensores TPMS (Tire-Pressure Monitoring System). La energía requerida para la alimentación del sistema de monitoreo la estiman en 1.125 mJ por minuto a un voltaje constante de 3 volts. Sobre la energía necesaria para la transmisión de los datos de estos sensores, Lohndorf et al. aseguran que sólo entre 10-15  $\mu$ W de potencia son suficientes. De esta manera, la recuperación alcanzada en el trabajo de Roundy [40] de entre 3 y 13.5  $\mu$ W, para velocidades del vehículo entre 30 y 110 km/h, alcanza para transmitir los datos requeridos. Otros trabajos basados en la rotación de la rueda son los de Wang et al. [41, 42]. En ellos se recupera energía mediante un péndulo electromecánico en el orden de los 0.9 a 2.6 mW dependiendo de la velocidad de giro. Lee et al. [43] también presentaron la recuperación de energía a partir de la rotación de la rueda de un vehículo pero mediante el aprovechamiento de la deformación del neumático, a través de piezoeléctricos colocados en la cara interior de la misma.

Por otra parte, utilizando otro tipo de elemento transductor, cabe destacar las contribuciones sobre absorbedores dinámicos recuperadores de energía implementados sobre suspensiones de vehículos [44-46], los cuales recuperan una gran cantidad de energía (entre 1 y 15 W de potencia media) mediante dispositivos electromagnéticos. Finalmente, en lo referente a la recuperación de energía de las vibraciones generadas por el motor de vehículos los trabajos presentados en la literatura son escasos. En uno de ellos, Glynne-Jones et al. [47] propusieron un microgenerador electromagnético montado en la parte superior del bloque del motor de un automóvil con una generación promedio de 157  $\mu$ W de potencia eléctrica.

➤ **Optimización de los recuperadores de energía**

La optimización del dispositivo recuperador de energía, el cual será finalmente aplicado sobre el vehículo, es una etapa fundamental del diseño del dispositivo, en búsqueda de una configuración que recupere la mayor cantidad de energía posible. Por esa razón muchos investigadores [48, 49] han implementado diferentes técnicas de optimización y propuesto distintas funciones objetivo para conseguir el mejor dispositivo posible. Entre las técnicas de optimización se encuentra la utilización de

algoritmos genéticos [50] cuya implementación, en una de sus diversas variantes, será empleada en el desarrollo de la presente tesis.

En cuanto a la propuesta de funciones objetivo, la mayoría de los autores se han inclinado, independientemente de la técnica de recuperación y optimización, por la propuesta de maximizar el pico máximo de potencia a una cierta frecuencia. Este es el caso de los trabajos de Shafer et al. [52], Park et al. [53], Lefeuvre et al. [54, 55] y de Shen et al. [51]. Sin embargo, no siempre se obtiene el mejor dispositivo para el rango de frecuencias de operación debido a la influencia de las características de amplitud y frecuencia de la aplicación sobre la cual se utilizará el dispositivo. En el presente trabajo, se enfatizará este aspecto fundamental y su importancia para la optimización del dispositivo propuesto.

## 1.1 CONTENIDO

En los siguientes capítulos se presenta el desarrollo de un dispositivo multimodal electromecánico, basado en una viga de material piezoeléctrico, para la recuperación de energía de las vibraciones mecánicas provocadas por el giro del motor de un vehículo de transporte convencional. Se propone un sistema multimodal con múltiples modos en un rango de frecuencias bien definido. Se busca recuperar energía suficiente para alimentar sensores dentro del vehículo en forma autónoma y de esta manera aumentar la autonomía del vehículo.

En el Capítulo 2 se hace una breve descripción de los materiales piezoeléctricos para entender su utilización en este tipo de aplicaciones. Luego, en el Capítulo 3, se caracteriza la energía disponible en la vibración del motor Diesel de un vehículo marca Citroën modelo C4 de uso convencional, que se utilizará como aplicación del recuperador. Además se determina cuáles son las velocidades de giro habituales del motor, a partir de mediciones en un recorrido de ciudad. En la parte final del capítulo se describe conceptualmente el dispositivo recuperador que se utiliza, con el circuito electrónico asociado.

En el Capítulo 4 se desarrolla la formulación matemática completa, necesaria para modelar la generación eléctrica del dispositivo. Al comienzo del capítulo, se hace una revisión sobre los modelos no lineales existentes en la literatura, para luego desarrollar todo el contenido matemático del modelo no lineal propuesto.

También se presenta la reducción de dicho modelo al caso lineal, válido para bajas amplitudes de excitación.

La identificación necesaria de los parámetros no lineales asociados a la formulación propuesta se lleva a cabo en el Capítulo 5. Las identificaciones se realizan mediante la implementación de mínimos cuadrados en Matlab, y sobre el final del capítulo se analiza el efecto de cada parámetro sobre la generación eléctrica en el dispositivo.

En el Capítulo 6 se expone con detalle la fabricación de cuatro dispositivos y los ensayos experimentales de laboratorio realizados sobre los mismos. Se evalúa y compara la capacidad de recuperación de energía de cada uno de ellos, seleccionando el de mayor potencia media. Además, se procede a la validación del modelo matemático no lineal propuesto con las mediciones sobre el dispositivo seleccionado.

En el Capítulo 7, se presenta la optimización mediante la implementación de algoritmos genéticos del dispositivo seleccionado en el capítulo anterior. Se describe la metodología de fabricación y los ensayos experimentales, comparando los resultados con el dispositivo original. También se destaca la importancia de la selección de la función objetivo en el procedimiento de optimización.

Finalmente, en el Capítulo 8 se muestra la aplicación directa de los dispositivos sobre la alimentación de un sensor de temperatura. Se presentan las mediciones de temperatura obtenidas en dos recorridos llevados a cabo con el vehículo en la ciudad y los dispositivos colocados sobre el motor. Las conclusiones y trabajos a futuro darán cierre a esta tesis doctoral.

## **1.2 OBJETIVO**

El presente trabajo tiene como objetivo principal el estudio, diseño y fabricación de un dispositivo electromecánico capaz de recuperar parcialmente la energía que se disipa en la vibración del motor de un vehículo de transporte convencional para alimentar sensores electrónicos de bajo consumo. El dispositivo posee un carácter multimodal para poder extraer la energía dentro del rango de frecuencias de utilización del motor y no solo a una frecuencia fija. En búsqueda del dispositivo final, se propone una función objetivo que contempla las características

de la fuente mediante la implementación de técnicas basadas en algoritmos genéticos.

### **1.3 PRINCIPALES APORTES**

Resumidamente, los principales aportes de este trabajo se resumen en los siguientes desarrollos:

- ✓ Diseño y fabricación de un dispositivo recuperador de energía capaz de alimentar sensores a partir de las vibraciones de un motor.
- ✓ El dispositivo multimodal reúne las características óptimas para la recuperación de energía de una fuente de excitación variable tanto en amplitud como en frecuencia.
- ✓ El modelo no lineal constitutivo y disipativo desarrollado combina diferentes aportes en forma compacta y original y permite predecir los resultados de los experimentos.
- ✓ Una nueva propuesta de función objetivo para la optimización de un recuperador de este tipo que representa una mejora a las usuales encontradas en la literatura.



# Materiales Piezoeléctricos

---

La piezoelectricidad es la capacidad que tienen algunos cristales para generar energía eléctrica al ser sometidos a tensiones mecánicas, es decir, al ser golpeados o deformados [56, 57]. Ello se debe a que las tensiones mecánicas provocadas en dichos cristales piezoeléctricos, producen una polarización eléctrica en su volumen y la aparición de cargas eléctricas en su superficie, que pueden aprovecharse para generar una corriente eléctrica a través de una resistencia de carga. También existe lo que se conoce como el efecto inverso, es decir, al aplicar a estos cristales una tensión eléctrica en su superficie, se produce una tensión mecánica en el mismo. Ambos efectos (directo e inverso) son usados actualmente con distintos fines: para generación eléctrica, como es nuestro caso, o para actuación, por el proceso inverso, donde lo que se busca es la deformación del piezoeléctrico con determinado fin (control activo de vibraciones por ejemplo [58]).

Las propiedades de estos cristales dependen fuertemente de su estructura, la que, a su vez, está determinada por la temperatura. Por ejemplo, por debajo de una temperatura crítica, conocida como temperatura de Curie, la estructura cristalina del piezoeléctrico presentará una simetría tetragonal donde el centro de simetría de las cargas eléctricas positivas no coincide con el centro de simetría de las cargas negativas, dando origen a un dipolo eléctrico. La existencia de este dipolo provoca que la estructura cristalina se deforme en presencia de un campo eléctrico y genere

un desplazamiento eléctrico cuando es sometida a una deformación mecánica, caracterizando el efecto piezoeléctrico inverso y directo, respectivamente. Sin embargo por encima de la temperatura de Curie, los dipolos de los cristales cambian su orientación y la polarización resulta ser muy baja o cero, desapareciendo el efecto piezoeléctrico.

En lo que se refiere a la organización de la estructura microscópica de los cristales, los dipolos con orientación paralela están agrupados en los denominados dominios de Weiss. Las respuestas de los dipolos a un campo eléctrico aplicado desde el exterior tenderán a cancelarse unas a otras, sin producir cambios significativos en las dimensiones del piezoeléctrico ni presentar ningún comportamiento piezoeléctrico macroscópico. Para obtener una respuesta piezoeléctrica a nivel macroscópico, los dipolos deben estar alineados unos con otros permanentemente, característica que se logra mediante el proceso de polarización. En el proceso de polarización el material es calentado por encima de la temperatura de Curie y se le aplica un potente campo eléctrico en cuya dirección (dirección de polarización) se alinearán los dipolos.

Conservando el campo eléctrico constante, el material se enfría por debajo de su temperatura de Curie, haciendo que los dipolos queden permanentemente alineados aun habiendo suprimido el campo eléctrico, pudiendo decir que el material está polarizado. Los dipolos no quedarán completamente alineados ni paralelos unos con otros, pero esa alineación será suficiente para obtener las propiedades piezoeléctricas. Ya con el material piezoeléctrico polarizado, los dominios de Weiss aumentan su alineamiento proporcionalmente al voltaje (o deformación) que le sea aplicado, con el resultado de un cambio en las dimensiones del material. Este proceso es similar al proceso de magnetización en materiales ferromagnéticos y por ello, estos materiales se denominan ferroeléctricos.

Las principales propiedades de los materiales piezoeléctricos desde el punto de vista de su aplicación se pueden resumir en las siguientes:

- Coeficiente de carga piezoeléctrica ( $d$ ) en m/V o C/N. Informa cuál es la proporción entre la variación dimensional del material piezoeléctrico (en metros) y la diferencia de potencial aplicada (en Volts), o entre la generación de cargas eléctricas (en Coulomb) y la fuerza aplicada en el

material (en Newtons), para los casos de actuación y generación, respectivamente.

- Coeficiente de tensión piezoeléctrica ( $g$ ) en Vm/N. Informa cuál es la proporción entre la diferencia de potencial generada (en Volts) y la fuerza aplicada (en Newton) para un piezoeléctrico de un metro de longitud.
- Factor de acoplamiento ( $\kappa$ ), adimensional. Es la eficiencia del material en la transducción/conversión de energía eléctrica en mecánica y viceversa.
- Factor de calidad mecánica ( $Q_m$ ), adimensional. Es una medida del amortiguamiento del material y proporciona el ancho de banda característico a la frecuencia de resonancia del material.
- Factor de disipación dieléctrica ( $\tan \delta$ ), adimensional. Es una medida dieléctrica del material. Cuando la corriente y el voltaje están fuera de fase en el ángulo de pérdida dieléctrica ( $\delta$ ), se pierde energía en forma de calor.
- Temperatura de Curie ( $T_c$ ) en °C. Es la temperatura donde la estructura cristalina del material sufre una transición de fase dejando de presentar propiedades piezoeléctricas. Después de superar esta temperatura, el material pierde la polarización remanente inducida, tornándose inservible para su utilización como elemento transductor de energía eléctrica en mecánica y viceversa.
- Constantes de frecuencia ( $N$ ) en Hz.m (Hertz por metro). Es un factor importante ya que permite la estimación de la frecuencia de resonancia de los dispositivos piezoeléctricos.

## 2.1 ANTECEDENTES HISTORICOS DE LA PIEZOELECTRICIDAD

El antecesor del efecto piezoeléctrico fue el efecto piroeléctrico, por el cual un material genera un potencial eléctrico en respuesta a un cambio de temperatura y fue estudiado por primera vez por Linnaeus y Aepinus [59] en la mitad del siglo XVIII. Basándose en este conocimiento, Becquerel [60] postula una relación entre la tensión mecánica y la carga eléctrica aunque los experimentos no fueron concluyentes. En base a estos trabajos, a finales del siglo XVIII, Coulomb [61] teoriza que la electricidad puede ser producida aplicando presión mecánica. El fenómeno piezoeléctrico fue descubierto por el mineralogista francés René-Just Haüy hacia 1822 [62], aunque sus experimentos, carentes de rigurosidad, tampoco arrojaron certezas.

La primera demostración del efecto piezoeléctrico directo fue realizada en 1880 por los hermanos Pierre y Jacques Curie [63]. Ellos combinaron sus conocimientos de piroelectricidad y estructuras cristalinas, lo que dio origen a la piroelectricidad como propiedad para predecir el comportamiento del cristal y demostraron el efecto utilizando cristales de turmalina, topacio, caña de azúcar, cuarzo y sal de Rochelle. Estos dos últimos fueron los materiales que exhibieron la mayor piro-piezoelectricidad. La piroelectricidad está estrechamente relacionada con la piezoelectricidad, de tal modo que todos los materiales piroeléctricos son también piezoeléctricos. Los hermanos Curie, sin embargo, no predijeron el efecto piezoeléctrico inverso, que se dedujo matemáticamente de principios termodinámicos fundamentales por Lippmann en el año 1881 [64].

Durante las décadas siguientes, la piezoelectricidad se mantuvo como un efecto curioso de laboratorio, en donde se trabajó para explorar y definir las estructuras cristalinas que mostraban piezoelectricidad. Esto culminó en 1910 con la publicación de Voigt [65] en donde se describen las clases cristalinas naturales piezoeléctricas.

Como antesala a las aplicaciones modernas de los materiales piezoeléctricos, al final de la primera guerra mundial se descubrió que las ondas sonoras producidas por los submarinos podían ser detectadas por un trozo de cuarzo sumergido en el agua. En él se medían las corrientes generadas que posibilitaban la detección de la dirección de dónde provenía el sonido. Se iniciaba así la era del radar, lo que implicó

una revolución tecnológica que decidió, entre otros avances tecnológicos, el curso de la segunda guerra mundial.

## 2.2 CERAMICAS PZT

De entre las diferentes variantes de materiales piezoeléctricos pueden distinguirse dos grupos principales: (i) los que presentan estas propiedades de forma natural, como es el cuarzo, la turmalina y la sal de Rochelle, y (ii) los ferroeléctricos, que presentan propiedades piezoeléctricas tras ser sometidos a la polarización. Los primeros tienen un efecto piezoeléctrico muy pequeño y fue por ese motivo que se desarrollaron los segundos, con un efecto mucho mayor. Los materiales más usados en la industria de este segundo tipo (ferroeléctricos) son: el titanato de bario ( $\text{BaOTiO}_2$ ), zirconato de plomo ( $\text{PbZrO}_3$ ) y titanato de plomo ( $\text{PbTiO}_3$ ). A la combinación de estos dos últimos se le llama popularmente PZT (zirconato-titanato de plomo) y son fabricados por compresión de polvo a alta temperatura, moldeados y cocidos en un horno.

El PZT fue desarrollado en 1952 en el instituto tecnológico de Tokio, el cual está basado en una solución sólida sintetizada de titanato de plomo con zirconato de plomo. Estas cerámicas piezoeléctricas son las más usadas por su alta temperatura de Curie, por su gran coeficiente piezoeléctrico y por su relativamente baja temperatura de funcionamiento. Adicionalmente tiene la ventaja sobre otras cerámicas de que se puede fabricar a un precio muy bajo, siendo físicamente fuerte y químicamente inerte, además de haber demostrado mayor sensibilidad piezoeléctrica que otras cerámicas, lo que se comprueba observando su alto coeficiente piezoeléctrico. Por todas estas razones el material piezoeléctrico PZT es el más utilizado comercialmente para las aplicaciones antes mencionadas.

A su vez, estas cerámicas PZT se clasifican de la siguiente manera:

- Navy Type I ("Hard"): recomendado para aplicaciones de media y alta potencia en condiciones de uso continuo y repetitivo. Es capaz de generar altas amplitudes de vibraciones (o de campo eléctrico) manteniendo bajas las pérdidas mecánicas y dieléctricas. Es comercialmente conocido como PZT-4 y su campo de aplicación es en sistemas de limpieza por ultrasonido y sonares.

- Navy Type II (“Soft”): alta sensibilidad, ideal para la transmisión y recepción en dispositivos de baja potencia. Presenta pérdidas dieléctricas y mecánicas que impiden la excitación continua con alta intensidad. Comercialmente conocidos como PZT-5A y se aplican en dispositivos para ensayos no destructivos, recuperación de energía, hidrófonos y acelerómetros. Este es el tipo de PZT utilizado en el presente trabajo.
- Navy Type III (“Hard”): similar al Navy Type I pero menos sensible. Es capaz de convertir el doble de potencia manteniendo bajas las pérdidas mecánicas y dieléctricas. Recomendado para aplicaciones que precisen de alta potencia como en sistemas de soldadura por ultrasonidos y procesamiento de materiales. Comercialmente conocido como PZT-8.
- Navy Type IV (“Soft”): adecuado para aplicaciones de potencia media. Ya obsoleto y sustituido por el Navy Type I. La principal aplicación que tuvo fue la manutención de equipos antiguos. Conocido comercialmente como titanato de bario.
- Navy Type V (“Soft”): adecuado para aplicaciones que requieren alta energía y diferencia de potencial. Comercialmente conocido como PZT-5J y se lo aplica principalmente en detonadores de impacto.
- Navy Type VI (“Soft”): adecuado para aplicaciones que requieren grandes deformaciones mecánicas, como por ejemplo en actuadores y posicionadores. Comercialmente conocido como PZT-5H.

Las principales propiedades de los PZT-5A, material que se utiliza en esta tesis, se muestran en la Tabla 2.1. Los valores que se presentan en dicha Tabla corresponden a valores estándar que proveen los fabricantes [66].

Nombre	Símbolo	Unidad	Valor
Permitividad (1kHz)	$\epsilon_{33}^{\sigma}/\epsilon_0$		1850
Factor de disipación dieléctrica (1kHz)	$\tan \delta$		0.012
Temperatura de Curie	$T_c$	$^{\circ}C$	335
Coeficientes de carga piezoeléctrica	$d_{31}$	$pm/V$	-185
	$d_{33}$	$pm/V$	440
	$d_{15}$	$pm/V$	560
Coeficiente de tensión piezoeléctrica	$g_{33}$	$V.m/N$	$25.5 \times 10^{-3}$
Factores de acoplamiento	$\kappa_p$		0.62
	$\kappa_{31}$		0.33
	$\kappa_{33}$		0.72
	$\kappa_t$		0.48
	$\kappa_{15}$		0.74
Constantes de frecuencia	$N_p$	$kHz.mm$	2020
	$N_t$	$kHz.mm$	2030
	$N_l$	$kHz.mm$	1325
	$N_3$	$kHz.mm$	1250
Módulo de elasticidad	$c_{33}^D$	$GPa$	15.7
Factor de calidad mecánica	$Q_m$		80

Tabla 2.1 – Propiedades de los piezoeléctricos PZT-5A.

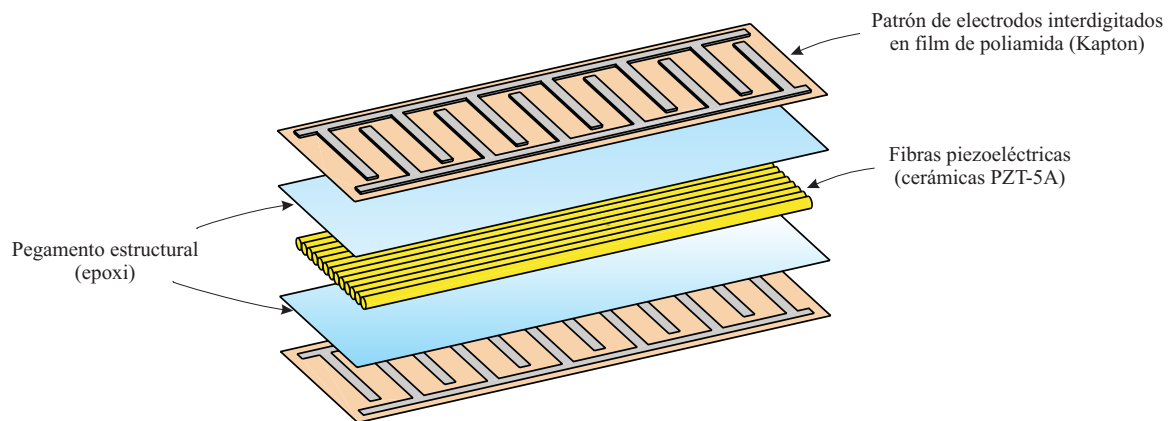
### 2.3 COMPUESTO DE MACRO-FIBRAS PIEZOELECTRICAS (MFC)

Es habitual ver en la literatura el uso de láminas (también llamadas pastillas por su forma de disco) compuestas por alguno de los materiales piezoeléctricos presentados en la sección anterior, las cuales poseen dos caras (superior-inferior o laterales) con los electrodos cubriéndolas por completo. En esta tesis se utilizará una alternativa a estas láminas que presenta ciertos beneficios detallados a continuación.

El compuesto de macro-fibras piezoeléctricas con electrodos interdigitados, más conocido como MFC (del inglés Macro-Fiber Composite) es la alternativa mencionada a las láminas convencionales. El MFC es el principal actuador-sensor de baja sección y peso que ofrece un alto rendimiento piezoeléctrico, flexibilidad mecánica y confiabilidad en un dispositivo de costo relativamente accesible. Fue originalmente desarrollado por la NASA en 1996 y en el 2002, la principal compañía

de fabricación (Smart Material) comenzó a comercializarlo y distribuirlo bajo su licencia.

Como se puede ver en la Figura 2.1, el MFC consiste en un núcleo central de fibras de cerámica piezoeléctrica PZT-5A, intercaladas entre capas de adhesivo epoxi y dos láminas (superior e inferior) de electrodos interdigitados incorporadas en un film de poliamida (Kapton). Los electrodos están unidos al film en un patrón interdigitado que transfiere el campo eléctrico generado/aplicado hacia y desde las fibras a través del Kapton. Este ensamble tipo sándwich de empaque sellado permite la polarización en el plano y en un espesor muy reducido, protegiendo al piezoeléctrico de la humedad y daños exteriores, logrando una mayor eficacia y vida útil.



*Figura 2.1 - Vista explosionada de los MFC de Smart Material utilizados en esta tesis.*

Es importante destacar que debido a su flexibilidad, este tipo de piezoeléctrico puede ser aplicado a la superficie de estructuras con formas diversas, o adicionarse (normalmente pegado) en una estructura compuesta, como es el caso que se presentará en esta tesis. Los beneficios principales de la utilización de los MFC respecto a las convencionales pastillas, pueden resumirse en los siguientes:

- ✓ Flexible, duradero y confiable.
- ✓ Mayor eficiencia.
- ✓ Tolerancia a daños debido a empaque tipo sándwich sellado.
- ✓ Se ajusta a diversas superficies.
- ✓ Fácilmente integrable.
- ✓ Disponible para generación por modo  $d_{31}$  o  $d_{33}$ .



Debido a todo esto, el MFC es una excelente alternativa para recolectar energía a partir de movimientos o vibraciones.

Respecto al último punto mencionado en el listado de beneficios, es importante realizar una reseña introductoria respecto a los modos de generación, los cuales son comunes a todos los tipos de piezoeléctricos y sobre los que se trabajará a lo largo de la presente tesis.

➤ **Modo de generación  $d_{31}$**

El coeficiente de carga piezoeléctrico  $d_{31}$ , contempla que una deformación mecánica en la dirección longitudinal de las fibras (1), produce un campo eléctrico en la dirección transversal/vertical de las mismas (3). Cuando la generación eléctrica (o en el caso inverso, la actuación) se establece en este sentido, se dice que el piezoeléctrico genera en modo  $d_{31}$ . Esto se puede ver claramente en la Figura 2.2. En la imagen inferior, se observa la distribución del campo eléctrico establecido en el espesor del piezoeléctrico. Esto es posible debido a la disposición de los electrodos (+/-) como se muestra en la imagen superior de dicha figura.

➤ **Modo de generación  $d_{33}$**

Por otro lado, el coeficiente de carga piezoeléctrico  $d_{33}$ , se refiere a que el campo eléctrico se establece en la misma dirección longitudinal (1) que la deformación mecánica. En este caso se dice que el piezoeléctrico genera en modo  $d_{33}$ . En la Figura 2.3 se puede ver la distribución del campo eléctrico, predominantemente en la dirección longitudinal.

➤ **Unimorfo y Bimorfo**

Cuando el material piezoeléctrico es utilizado en la generación de energía es habitual incorporar uno o dos elementos piezoeléctricos, ya sea del tipo MFC o láminas, en un misma estructura. En este sentido, el sistema puede ser llamado unimorfo o bimorfo. Un sistema (o dispositivo) unimorfo está constituido por una sola lámina de material piezoeléctrico, y son los utilizados en esta tesis. Cuando el sistema es de dos láminas piezoeléctricas se les llama bimorfo y presenta la alternativa de conexaslos eléctricamente entre sí en forma paralela o en serie.

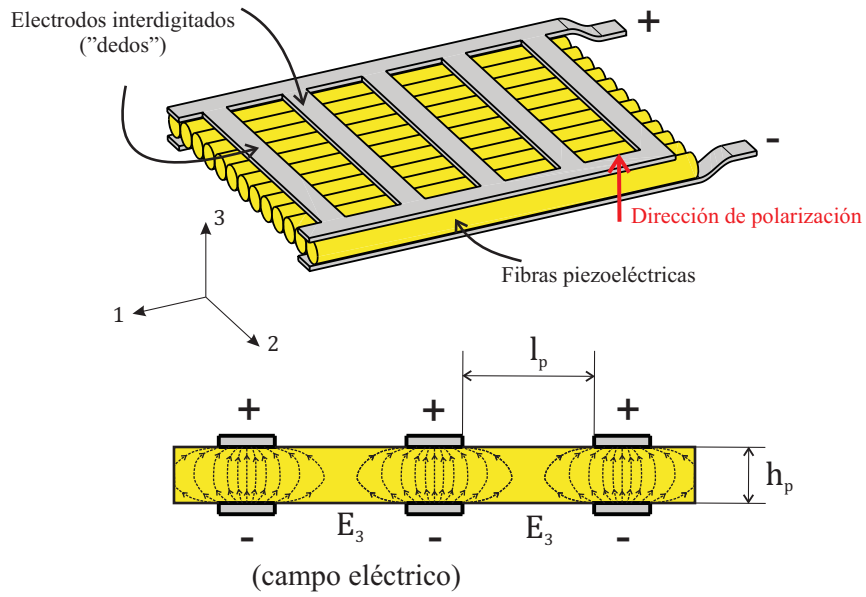


Figura 2.2 - MFC con electrodos interdigitados, para generación por  $d_{31}$ .

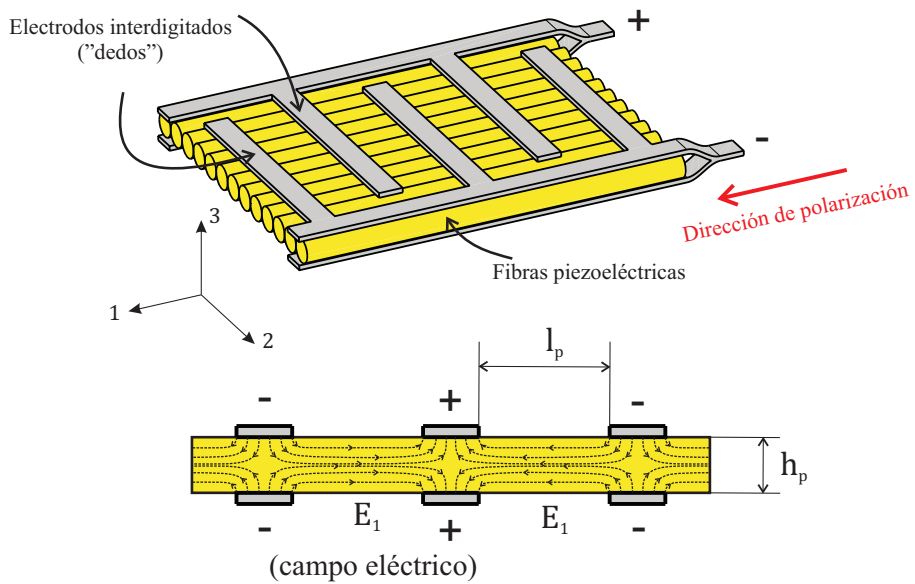


Figura 2.3 - MFC con electrodos interdigitados, para generación por  $d_{33}$ .

# Dispositivo Recuperador

---

En el Capítulo 1 se expuso la problemática sobre la energía disipada en forma de vibración en los motores de los vehículos de transporte, en tanto que en el Capítulo 2 se presentaron los elementos básicos de la teoría piezoeléctrica. A la hora de diseñar un recuperador de energía resulta determinante conocer las características de la fuente de energía disponible para poder extraer la mayor cantidad de energía posible. De esta manera, el presente capítulo muestra el análisis y la caracterización de la energía disponible del motor del automóvil que será utilizado como aplicación del recolector desarrollado. Es importante mencionar que el dispositivo recuperador será diseñado para funcionar en estado resonante, de ahí la necesidad de establecer el rango de funcionamiento sobre el cual estará basado el recuperador.

## **3.1 CARACTERIZACION DE LA ENERGIA DISPONIBLE**

La posibilidad de recuperar energía a partir de las vibraciones de los motores de vehículos de transporte implica en primer lugar el conocimiento de la energía disponible, con el fin de planificar en forma adecuada el diseño y la fabricación del dispositivo. Para alcanzar este objetivo, se realizaron mediciones estacionarias de vibración sobre el motor de un auto y posteriormente se analizó la viabilidad de la recuperación de energía. Se debe notar que en el caso que se está considerando, las

vibraciones mecánicas suceden en los tacos y bloque de motor, producto del funcionamiento del mismo.

Las mediciones realizadas se practicaron sobre un vehículo de transporte propiedad de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca (UTN FRBB). El automóvil es una unidad de la marca Citroën, modelo C4 Diesel 1.6 HDi, año 2007, perteneciente al Departamento de Ingeniería Mecánica (ver Figura 3.1). Dicha unidad fue producto del premio obtenido en un concurso, auspiciado por el programa Autotécnica y transmitido por el Garage TV, por el autor de la presente tesis y el Dr. Martín Saravia, en representación de la Facultad.



*Figura 3.1 - Unidad Citroën C4 1.6 HDi utilizada para realizar las mediciones.*

La elección de este vehículo se debe a su disponibilidad para tareas académicas y de investigación y el hecho de que es un vehículo convencional que puede adquirirse comercialmente, razones por las cuales será eje en la presente tesis.

Las mediciones efectuadas pretenden caracterizar la aceleración del motor y del chasis, considerando especialmente la zona de unión entre ambos (los anclajes o tacos de motor). Esto se realizó con el vehículo parado y para distintas velocidades de giro del motor, mostrando la excitación generada por el motor y la correspondiente transmisibilidad al chasis.

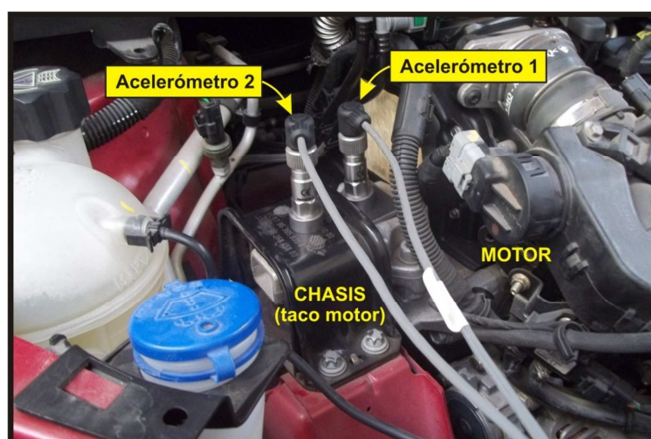
Para las mediciones de vibración sobre el motor y el chasis (taco), se utilizaron dos acelerómetros marca Wilcoxon Research modelo 780C. La señal de los acelerómetros fue adquirida por una placa adquisidora de datos marca LabJack

modelo U3-HV que envía los datos a un CPU. El pos-procesado de los datos se realizó con la ayuda de los programas MatLab y Mathematica.



*Figura 3.2 - Acelerómetro Wilcoxon Research 780C y adquisidora de datos LabJack U3-HV utilizados para las mediciones de vibración del motor.*

La disposición de los acelerómetros se efectuó según muestra la Figura 3.3. Allí se puede observar que uno de los acelerómetros (Acelerómetro 1) está montado sobre el soporte de motor, el cual toma los datos de su aceleración, en tanto que el otro acelerómetro (Acelerómetro 2) se ubica en el taco de motor, midiendo la aceleración recibida por el chasis. De manera complementaria, se tomó una señal digital de la velocidad de giro del motor (rpm), a partir del cableado de la electrónica del mismo. Esta última señal junto con las señales analógicas de los dos acelerómetros, fueron adquiridas por la placa adquisidora de datos.



*Figura 3.3 - Montaje de los acelerómetros.*

Las mediciones se realizaron a velocidad de giro del motor constante, a tres valores de rpm diferentes, casos 1, 2 y 3, durante aproximadamente veinte segundos cada una, constituyendo los siguientes casos de estudio:

**Caso 1:** 800 rpm (ralentí)

**Caso 2:** 2000 rpm

**Caso 3:** 3000 rpm

Para los Casos 2 y 3, el control de velocidad lo realizó una persona al volante, manteniendo la velocidad de giro del motor lo más estable posible visualizada por medio del tacómetro, mientras que otra persona se encargó de iniciar la toma de datos de los acelerómetros, para que la medición fuera en forma simultánea.

En la Figura 3.4 se exponen las gráficas de aceleración para los casos 1, 2 y 3, donde se pueden observar los valores pico y cuadrático medio (RMS) reflejados en la Tabla 3.1. Cabe aclarar que dichos valores de aceleración son relativos al valor medio de los mismos, de forma de desestimar el valor estático (cero) de los acelerómetros.

Se puede observar claramente en la Tabla 3.1 que los niveles de aceleración son mucho más grandes en el motor que en el chasis, lo cual demuestra la excelente aislación que posee el vehículo, es decir, una muy baja transmisibilidad y la posibilidad de recuperar la enorme energía disponible de las vibraciones del motor. Por ejemplo, para el caso extremo de 3000 rpm, el motor llega a tener valores pico de aceleración de 15 G ( $G = 9.81 \frac{m}{s^2}$ , aceleración de la gravedad), con un RMS de 3.79 G, en tanto que el chasis experimenta valores pico de 0.44 G y RMS de 0.12 G en la misma situación.

Adicionalmente, a partir de los valores RMS de dicha Tabla 3.1, también puede notarse una relación de proporcionalidad entre la aceleración y las rpm. Más adelante se demostrará que esta relación no es lineal.

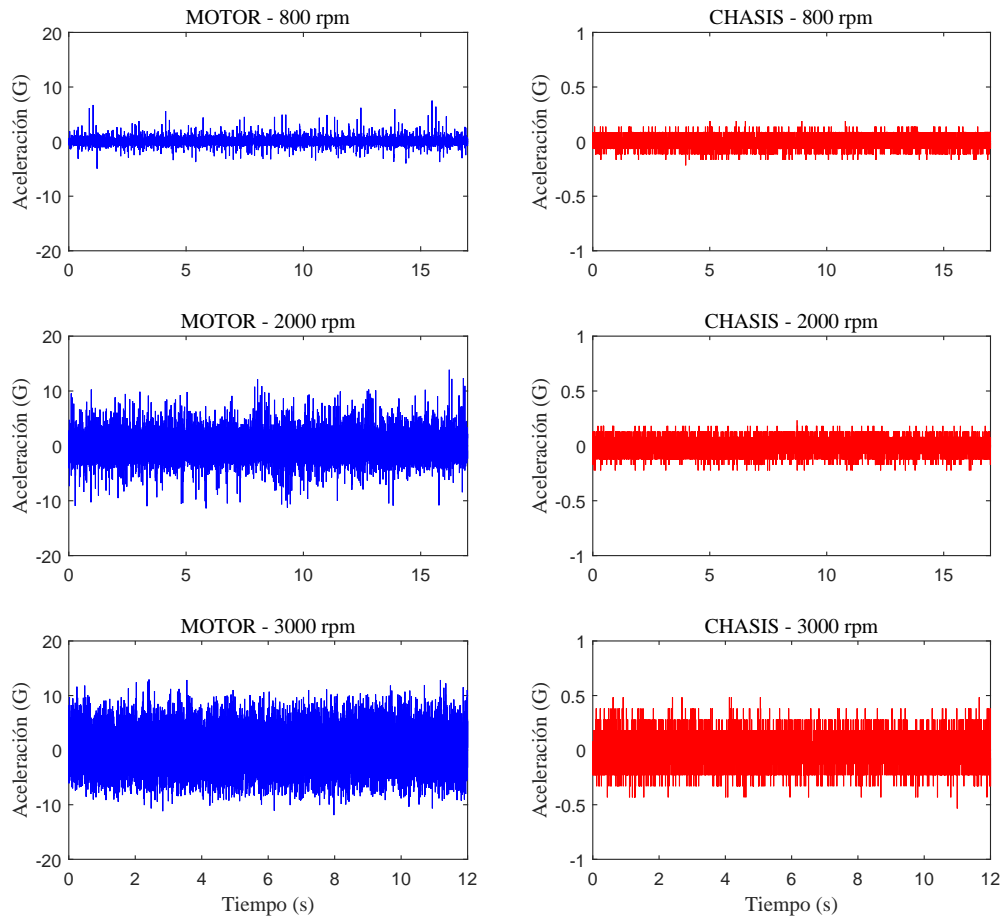


Figura 3.4 - Gráficas de aceleración del motor y chasis para 800, 2000 y 3000 rpm.

	Motor (G)		Chasis (G)	
	Máximo	RMS	Máximo	RMS
<b>Caso 1 - 800 rpm</b>	7.51	0.56	0.21	0.04
<b>Caso 2 - 2000 rpm</b>	15.79	2.10	0.23	0.06
<b>Caso 3 - 3000 rpm</b>	12.93	3.79	0.44	0.12

Tabla 3.1 – Valores máximos y RMS de aceleración, en G.

En la Figura 3.5 se visualizan el espectro (FFT) de las señales de aceleración del motor y del chasis. Analizando las gráficas se verifica, por un lado, que los niveles de aceleración en el motor son muy superiores a los del chasis. Por otra parte, se observa nuevamente la proporcionalidad entre la magnitud de la aceleración y las rpm, particularmente en la señal del motor.

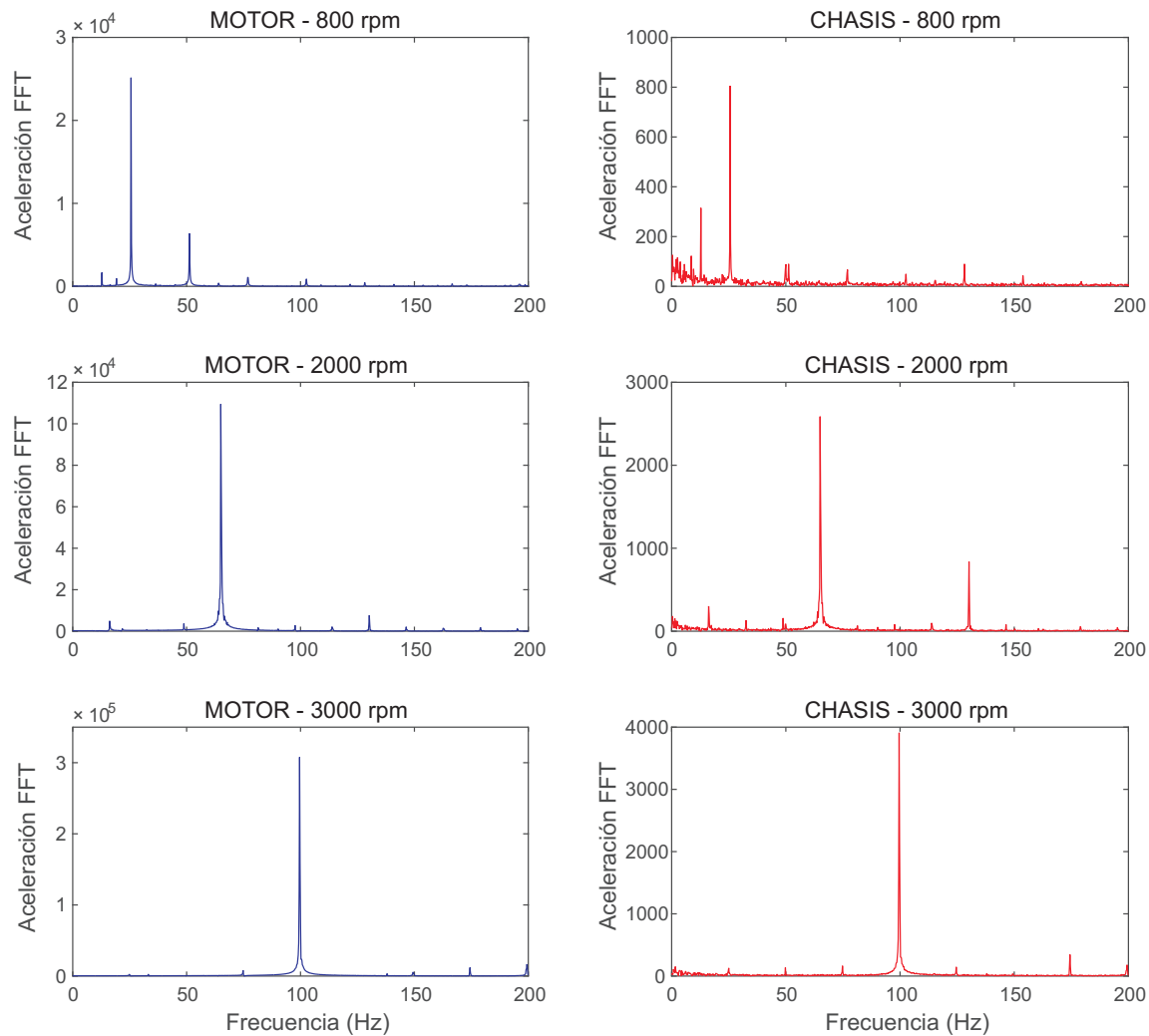


Figura 3.5 - FFT de las aceleraciones del motor y chasis para 800, 2000 y 3000 rpm.

En cuanto a los valores de frecuencias se verifica lo propuesto por Lin [67], quien asegura que las frecuencias excitadas son las que corresponden a las velocidades de giro del motor con sus respectivos armónicos, para el tipo de motor dado. Para un motor de cuatro tiempos, como es este caso, el ángulo de fase entre explosiones viene dado por la siguiente expresión:

$$\theta = \frac{2 \cdot (2\pi)}{i} = \pi = 180^\circ \quad (3.1)$$

siendo  $i$  el número de cilindros (en nuestro caso  $i = 4$ ). Este ángulo  $\theta = 180^\circ$  indica que por cada vuelta de motor se tienen dos explosiones, es decir, el doble de frecuencia respecto a la de giro del cigüeñal.



Además, la velocidad de giro del motor (o del eje cigüeñal) en rpm se relaciona con la frecuencia circular  $f$  por:

$$n \text{ (rpm)} = 60 f = 60 \frac{f_k}{k} \quad (3.2)$$

donde  $k$  es el orden del armónico y  $f_k$  es la frecuencia del  $i$ -ésimo armónico. Para un motor de cuatro tiempos, el armónico fundamental vale  $k = i/2$ , con lo cual para nuestro caso es  $k = 2$ . De esta manera, para un motor de cuatro cilindros de cuatro tiempos, la (3.2) resulta ser:

$$n \text{ (rpm)} = 30 f_2 \quad (3.3)$$

Esta última expresión verifica que la frecuencia principal en un motor de cuatro tiempos y cuatro cilindros, es el doble que la frecuencia de giro del cigüeñal, correspondiente al segundo armónico. Para nuestros casos de estudio, las correspondientes frecuencias según la última ecuación valen:

$$\begin{aligned} n &= 800 \text{ rpm} = 26.66 \text{ Hz} \\ n &= 2000 \text{ rpm} = 66.66 \text{ Hz} \\ n &= 3000 \text{ rpm} = 100 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Estos últimos valores en Hz se corresponden con los valores máximos de los picos de aceleración observados en la Figura 3.5 de las FFT. Además, en las figuras correspondientes al chasis (especialmente para 2000 rpm) se pueden ver otros picos, correspondientes a los armónicos restantes y el aporte de otras frecuencias que podrían ser las naturales de algún componente de la suspensión, de las masas no suspendidas o de algún otro elemento del chasis [68].

La señal de los acelerómetros se la integró numéricamente dos veces a fin de poder cuantificar los desplazamientos en los componentes medidos. En la Figura 3.6 se muestran los valores de desplazamiento relativo del motor respecto al chasis, presentados numéricamente en la Tabla 3.2. De la comparación para diferentes rpm, se observa que los desplazamientos varían en forma inversamente proporcional con la velocidad del motor.

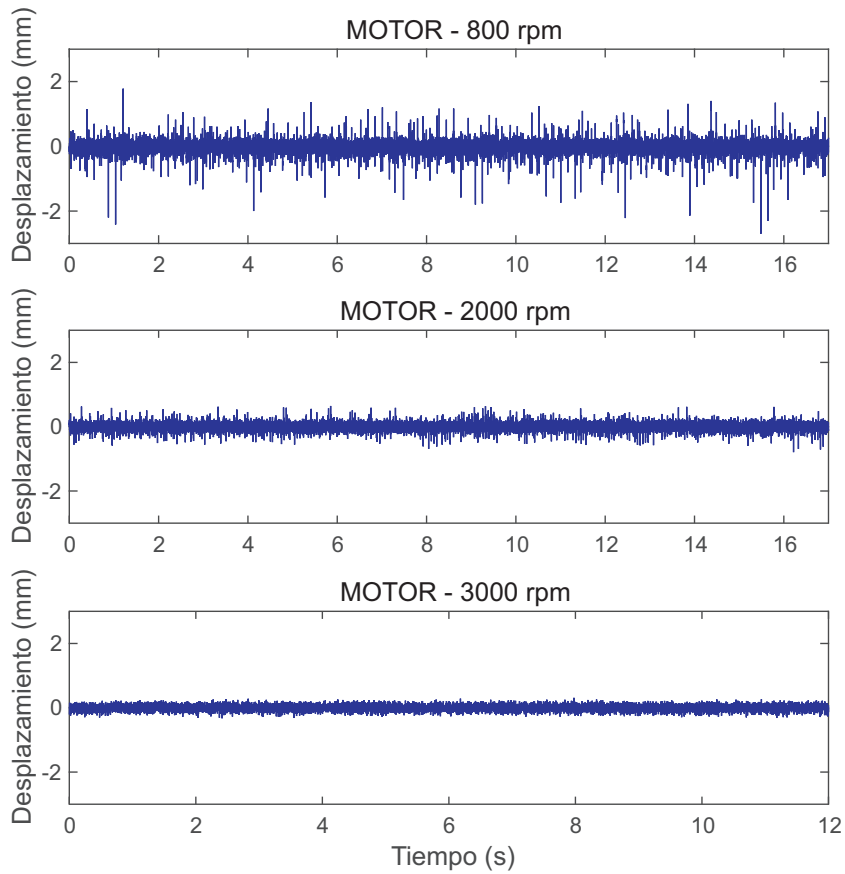


Figura 3.6 - Gráficas de los desplazamientos relativos entre motor y chasis para 800, 2000 y 3000 rpm.

	Desplazamiento relativo	
	Máximo	RMS
<b>Caso 1 - 800 rpm</b>	2.850	0.200
<b>Caso 2 - 2000 rpm</b>	0.678	0.118
<b>Caso 3 - 3000 rpm</b>	0.304	0.094

Tabla 3.2 – Valores máximos y RMS de los desplazamientos relativos del motor, en mm.

Para resumir las mediciones de los tres casos de estudio a velocidad constante, en la Figura 3.7 se muestra como varían (a) los desplazamientos relativos del motor al chasis y (b) la aceleración, ambos expresados en valores RMS y en función de las rpm.

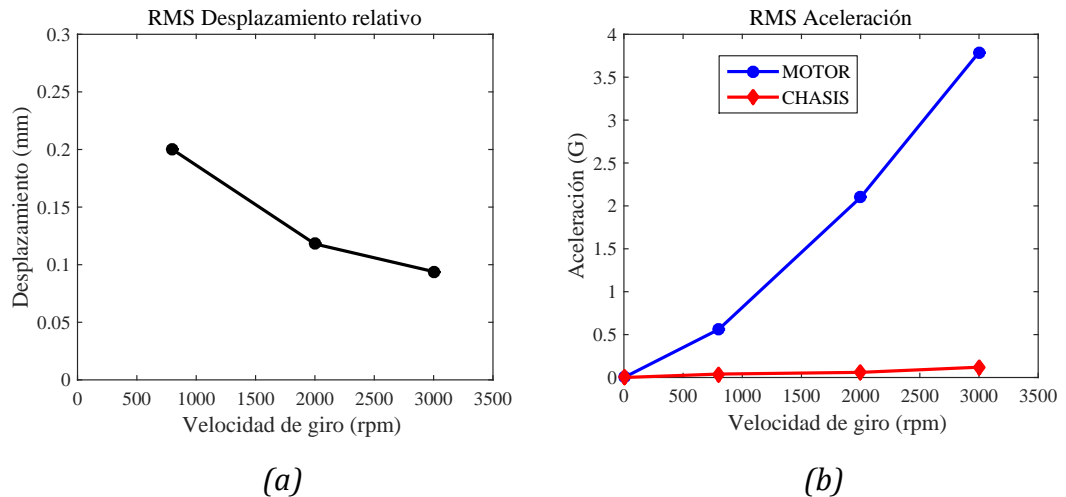


Figura 3.7 - Valores RMS en función de las rpm para (a) desplazamientos y (b) aceleración.

Como conclusión de esta sección se puede afirmar que existe una importante energía disponible en el block de motor, con promedio de aceleraciones de 3 G, en el rango más común de uso de 1000 a 3000 rpm. Si se compara con trabajos anteriores, por ejemplo el de Wang [42], en donde se analiza y diseña un dispositivo para recuperar energía de la rotación de la rueda de un vehículo, estos valores son mucho más significativos. En dicho trabajo, la energía disponible es la debida a la variación de la aceleración en la rueda, con un valor de 1 G pico a pico, pudiendo extraer con el dispositivo propuesto entre 200 y 350  $\mu\text{W}$ , suficiente como para alimentar un sensor de presión o temperatura [40]. De esta manera, analizando solo los valores de aceleración obtenidos en la presente tesis, se puede decir que el potencial para recuperación de energía a partir de las aceleraciones del block de un motor es muy importante.

### 3.2 INTERVALO DE UTILIZACION

Como se comentó en la sección anterior, además de conocer la energía disponible, es importante saber cuál es el rango de uso más frecuente del motor. Es decir, se desea conocer el régimen de rpm más frecuente del motor durante su funcionamiento en un entorno cotidiano, ya sea en la ciudad, en autopistas o en rutas. La determinación de dicho intervalo o rango de operación es trascendental a

fin de poder diseñar de la mejor manera el dispositivo recuperador, cuestión que se abordará con más detalle en capítulos siguientes.

Para la presente tesis, se decidió focalizar la utilización del dispositivo en un ambiente urbano, aunque sin dejar de lado la posibilidad de aprovecharlo en circulación por rutas a alta velocidad. Para determinar ese intervalo, se realizó un recorrido en ciudad con la unidad Citroën C4 determinando las revoluciones del motor en las que más tiempo estuvo.

El ensayo se realizó sobre un recorrido de cinco kilómetros (aproximadamente) en las calles de la ciudad de Bahía Blanca, provincia de Buenos Aires, instrumentando al vehículo con un sistema nacional de adquisición de datos por GPS marca Microtex modelo Firelog Extreme [69] para medir el tiempo, la posición y la velocidad del automóvil. Por otra parte, los valores de rpm se calcularon a partir de la velocidad del auto  $V$  y la  $i$ -ésima relación de transmisión  $\xi_i$  del vehículo a partir de la fórmula [70]:

$$n(\text{rpm}) = \frac{V \xi_i 30}{r_c \pi} \quad , \quad i = 1, \dots, 5 \text{ (para el Citroën C4)} \quad (3.4)$$

donde  $r_c$  es el *radio bajo carga* del neumático y vale 0.3 m. La relación de transmisión  $\xi_i$  se obtuvo del manual que proporciona el fabricante del vehículo y toma los valores:

$$\xi_1 = 13.04 \quad , \quad \xi_2 = 7.03 \quad , \quad \xi_3 = 4.34 \quad , \quad \xi_4 = 3.09 \quad , \quad \xi_5 = 2.45$$

En la Figura 3.8 se visualiza la posición del automóvil, los kilómetros y el tiempo que se tardó durante el recorrido realizado en el test. Además, se muestran los valores de rpm del motor calculados mediante la ecuación (3.4). La señal tiene un valor RMS de 1745 rpm y se pudo determinar un rango de utilización entre las 1600 y 2600 rpm del motor. Estos valores corresponden a 53.33 y 86.66 Hz, intervalo de uso en frecuencia que se utilizará en capítulos siguientes para diseñar y luego optimizar el dispositivo recuperador. El valor RMS corresponde a 58 Hz. El rango de utilización en ruta se define desde los 86.66 Hz hasta los 133.33 Hz (4000 rpm) debido a que este último es el máximo valor que puede alcanzar el motor.

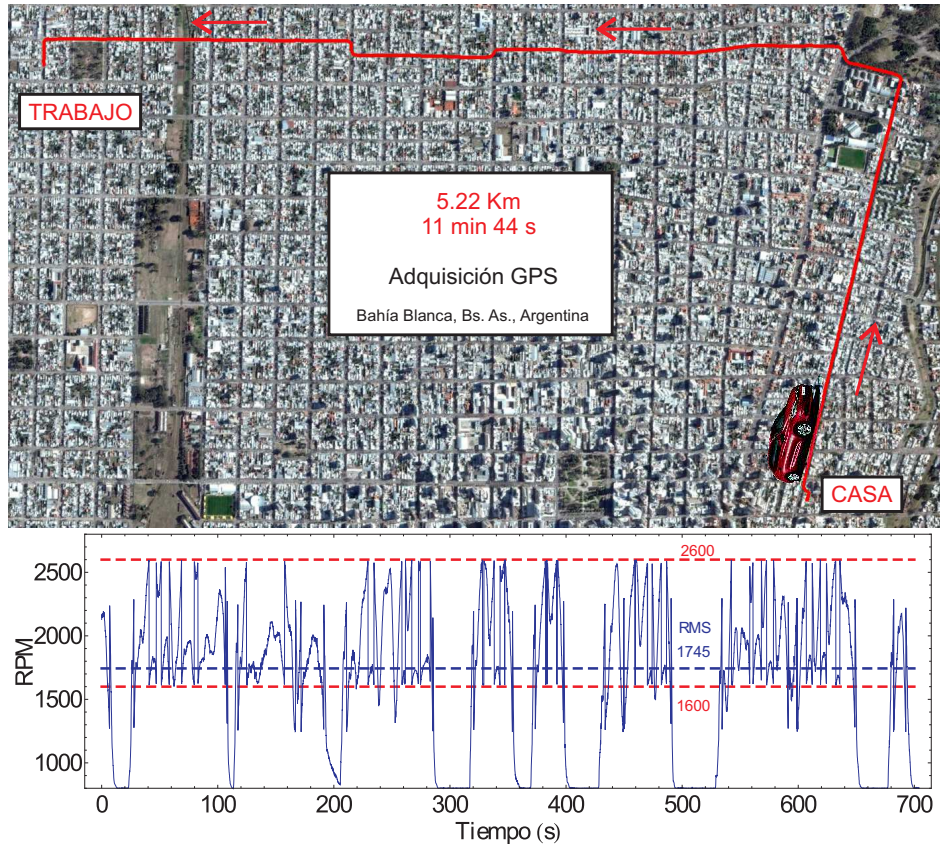


Figura 3.8 - Recorrido del vehículo durante el test y gráfica rpm-tiempo del motor.

Dependiendo de la frecuencia de excitación que provee el motor será el comportamiento y generación de voltaje del dispositivo. Por ello, es importante determinar cuál es el nivel de aceleración del motor a cada una de las frecuencias de excitación. Una aproximación a esto lo muestra la Figura 3.7 (b), sin embargo, las muestras tomadas fueron muy pocas (tres) y solo una de ellas cae dentro del rango de trabajo, lo cual es poco representativo del intervalo de utilización. Es así que se replicaron los ensayos estacionarios de la sección anterior para otros valores de rpm, obteniéndose la Figura 3.9.

En ella se pueden observar los valores RMS de aceleración medidos para cada una de las velocidades de giro, acentuando en color verde el intervalo de uso más frecuente del motor en la ciudad y en ruta. La curva continua mostrada es un ajuste cuadrático sobre dichas mediciones. Este ajuste cuadrático de la aceleración es el que se utilizará como excitación en el modelo matemático del recuperador que se presentará en el Capítulo 4. Dicha curva refleja claramente que a mayor velocidad de

giro del motor (mayor frecuencia), mayor es el nivel de aceleración del motor y por ende mayor energía disponible para recuperar. Se observa que en ciudad, los niveles de aceleración resultan entre 1 y 3 G, en tanto que en ruta se ubican entre 3 y 8.6 G.

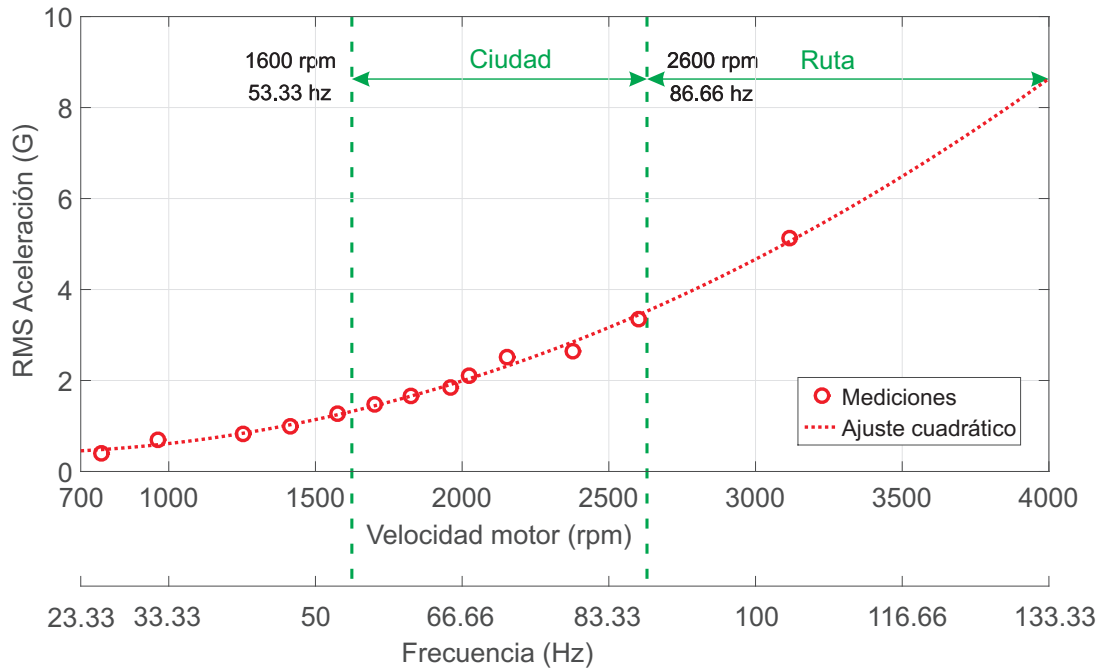


Figura 3.9 - Aceleración del motor para diferentes velocidades del motor.

### 3.3 DISEÑO CONCEPTUAL

Para la recuperación de la energía del motor se propone diseñar un dispositivo recuperador basado en una viga piezoeléctrica, la cual es sometida a una excitación en su base solidaria al motor del vehículo. A partir de la deformación de dicha viga se genera una diferencia de potencial entre los electrodos del piezoeléctrico que es aprovechada como potencia eléctrica en una resistencia de carga externa al circuito, que simula la carga real del sensor a ser alimentado. El propósito de recuperar energía de las vibraciones del motor plantea dos objetivos principales: recuperar la mayor cantidad de energía posible y proveer una larga vida útil al dispositivo.

En cuanto al primer objetivo, el sistema debe tener la capacidad de recuperar la máxima cantidad de energía bajo las condiciones de funcionamiento habitual. Para esto se propone diseñar al dispositivo de tal manera de que sus frecuencias naturales tengan valores en el rango de las frecuencias de funcionamiento típico del

motor, lo cual implica que el sistema recupere energía aprovechando la condición de resonancia. Una de las formas de lograr esto es incorporar en el diseño un sistema masa-resorte adosado a cada uno de los extremos de una viga piezoeléctrica (ver Figura 3.10). Esto logra configurar un sistema multimodal que proporciona las condiciones de vínculo adecuadas para que esto suceda [71]. En este trabajo, Sadeqi incorpora dos sistemas masa-resorte en cada uno de los extremos, de manera tal de anular los movimientos torsionales de la viga. En el presente trabajo, se incorpora un solo conjunto masa-resorte por extremo de la viga, dejando libre la posibilidad de deformación torsional, la cual podría llegar a ser beneficiosa para la generación eléctrica. Otra diferencia respecto al trabajo citado es la aplicación del dispositivo, el cual está diseñado para un dispositivo rotante en el caso de Sadeqi.

En cuanto al segundo objetivo, para soportar muchos ciclos de carga, el diseño geométrico y el material utilizado debe ser el adecuado. En esta dirección, se eligieron láminas de fibras piezoeléctricas de electrodos interdigitados las cuales tienen la siguiente característica principal: las láminas piezoeléctricas están compuestas de delgadas fibras de material piezoeléctrico orientadas de manera longitudinal, lo cual le da gran flexibilidad y con ello una alta vida a fatiga (ver Capítulo 2). Esta característica de alta flexibilidad posibilita altas deformaciones y por ende mayor generación eléctrica [18].

En base a lo expuesto en los párrafos precedentes, el esquema del dispositivo propuesto se muestra en la Figura 3.10.

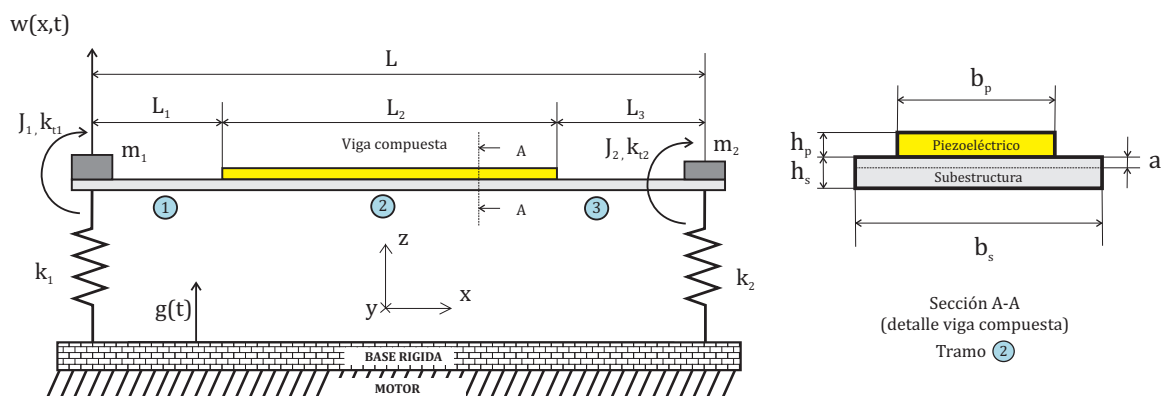


Figura 3.10 - Esquema del modelo del sistema con detalle de la viga compuesta

Este consiste en una viga compuesta con dos sistemas masa-resorte en los extremos de la misma que proporcionan las condiciones de borde apropiadas de manera de poder seleccionar, a partir de la selección de los parámetros del sistema, las frecuencias naturales del dispositivo con amplia libertad. La viga compuesta está constituida por una subestructura (de acero o aluminio) y una lámina de material piezoeléctrico unida a la superficie superior de la subestructura, constituyendo una configuración unimorfo.

En la Figura 3.10,  $w(x, t)$  es la deflexión vertical relativa de la viga,  $g(t)$  es la excitación temporal de la base,  $L$  es la longitud total de la viga compuesta,  $m_{1,2}$ ,  $k_{1,2}$  y  $k_{t1,2}$  son las masas, las rigideces verticales y torsionales de los resortes en los extremos  $x = 0$  y  $x = L$  respectivamente. Además  $a$ ,  $b_p$ ,  $h_p$ ,  $b_s$  y  $h_s$  son la distancia desde la cara inferior de la lámina piezoeléctrica hasta la fibra neutra, el ancho y espesor de la lámina piezoeléctrica, y el ancho y el espesor de la subestructura, respectivamente.

Por otra parte, en la Figura 3.11 se muestra el circuito eléctrico básico que provee el voltaje  $v(t)$  recuperado por el dispositivo. Allí puede verse el modelo eléctrico del piezoeléctrico considerado como un generador de corriente  $i(t)$  con una capacidad eléctrica interna  $C_p$  y una resistencia de carga  $R_l$  conectada en paralelo, la cual representa la carga externa (sensor, transmisor, etc.) a la cual alimenta el dispositivo.

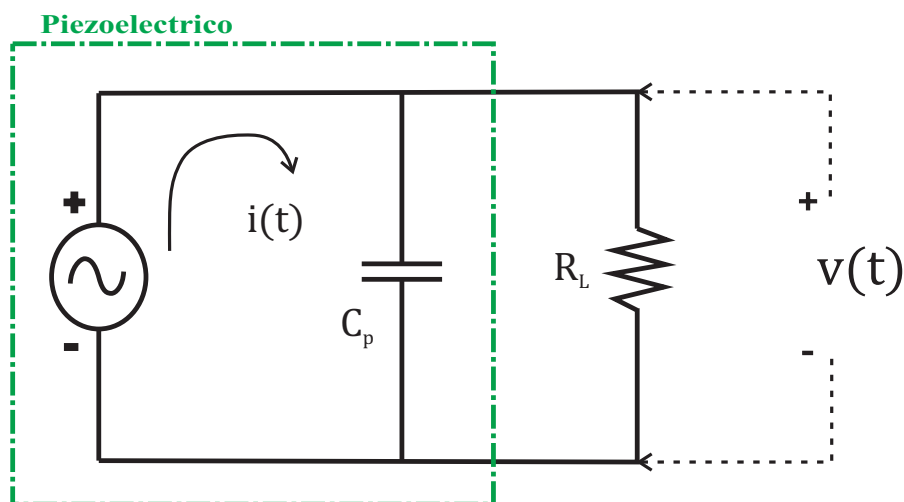


Figura 3.11 - Circuito eléctrico.



# Formulación Matemática

---

En esta sección se presentan los modelos matemáticos utilizados para describir analíticamente los dispositivos recuperadores de energía en los diferentes modos de generación,  $d_{31}$  y  $d_{33}$ .

Se pretende desarrollar un modelo analítico que permita el dimensionamiento del dispositivo multimodal de manera de contemplar todos los aspectos físicos relevantes del material piezoeléctrico, de acuerdo con el rango de interés definido en el Capítulo 3.2. La posibilidad de contar con un modelo analítico que permita optimizar el dispositivo recuperador con un bajo costo computacional, empleando métodos de optimización adecuados, resulta esencial para obtener el recuperador deseado.

A la hora de predecir el comportamiento de los materiales piezoeléctricos, los resultados obtenidos a partir de modelos analíticos lineales son precisos para bajas amplitudes de excitación (típicamente  $<0.05$  G) [25]. A medida que aumenta la amplitud de aceleración los modelos lineales sobreestiman la generación de voltaje en una condición resonante, entre otros efectos, debido a la no linealidad inherente a los materiales piezoeléctricos [32]. Por esta razón y debido a la grandes aceleraciones presentes en el motor ( $>0.5$  G) provistas por la excitación es indispensable desarrollar un modelo no lineal que permita predecir en forma adecuada el comportamiento del dispositivo recuperador en estas condiciones. El

modelo propuesto agrega a la teoría básica lineal de los materiales piezoeléctricos los fenómenos físicos que se observan debido a las grandes amplitudes de la excitación a partir de la modificación de sus características geométricas, disipativas, estructurales y eléctricas. En relación de esto último, se presenta una descripción de los modelos propuestos por diversos autores y las consideraciones pertinentes en función de las condiciones de funcionamiento del dispositivo propuesto.

En esta descripción es necesario, como primer paso, presentar las características de la teoría lineal sobre la piezoelectricidad. Presentada por Tiersten, en 1969 [72], la teoría lineal es utilizada como norma en la “IEEE Standard of Piezoelectricity” [7]. En dicha teoría, se define la función entalpia, con notación tensorial, como:

$$H = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{ijp} \varepsilon_{ij} E_p - \frac{1}{2} \epsilon_{pq}^\varepsilon E_p E_q \quad (4.1)$$

donde  $\varepsilon_{ij}$  son las componentes del tensor de deformaciones,  $E_p$  son las componentes del vector campo eléctrico y  $c_{ijkl}^E$ ,  $e_{ijp}$  y  $\epsilon_{pq}^\varepsilon$  son las componentes de los tensores elástico de cuarto orden a campo eléctrico constante (superíndice E), piezoeléctrico de tercer orden y dieléctrico a deformación constante (superíndice  $\varepsilon$ ) respectivamente.

Luego, aplicando las relaciones termodinámicas:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad , \quad D_p = - \frac{\partial H}{\partial E_p} \quad (4.2)$$

se obtienen las siguientes ecuaciones constitutivas lineales:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{ijq} E_q \\ D_p &= e_{pkl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{pq}^\varepsilon E_q \end{aligned} \quad (4.3)$$

siendo  $\sigma_{ij}$  el tensor de tensiones y  $D_p$  el vector desplazamiento eléctrico.

#### 4.1 REVISION DE MODELOS NO LINEALES

En esta sección se presenta una breve reseña de los diferentes modelos no lineales propuestos por diferentes autores para modelar el comportamiento piezoeléctrico. Se comienza primero por el estudio de las ecuaciones constitutivas

no lineales utilizadas con mayor frecuencia, para luego analizar los principales fenómenos disipativos no lineales.

#### 4.1.1 Clasificación de ecuaciones constitutivas no lineales

Es importante mencionar que hasta el momento se han presentado un gran número de modelos no lineales para materiales piezoeléctricos. Sin embargo, ninguno de ellos ha sido debidamente validado para todos los casos que es posible encontrar en la práctica. Por este motivo, en esta sección se realiza una revisión de cada uno de los modelos más relevantes de la bibliografía, de forma de poder decidir adecuadamente sobre el modelo más apropiado para nuestro caso.

Las diferentes ecuaciones constitutivas que surgen del estudio de los materiales piezoeléctricos, se las puede agrupar según el orden de la no linealidad en dos grandes grupos: respecto a la deformación ( $\varepsilon_{ij}$ ) y respecto al campo eléctrico ( $E_q$ ). También se las pueden clasificar por el orden en la formulación polinómica en la deformación, en el campo eléctrico, en el módulo de elasticidad o en el coeficiente piezoeléctrico. Y finalmente, existen aquellas ecuaciones constitutivas que formulan sus ecuaciones empíricamente, a partir de un ajuste de determinados parámetros propuestos.

##### 4.1.1.1 Ecuaciones constitutivas de segundo orden

En cuanto al desarrollo histórico del problema, el primer investigador en referirse a la no linealidad de los materiales piezoeléctricos, fue Richard Toupin en el año 1956 [73]. Allí hizo referencia a la naturaleza no lineal de los dieléctricos relacionándolo con los piezoeléctricos en general, utilizando una función de energía almacenada, aunque no desarrolló ninguna formulación matemática.

Por otro lado Tiersten, en 1971 presentó ecuaciones constitutivas para campos eléctricos grandes [74], complementando su formulación en 1975 para campos débiles [75] sobre no linealidades de placas delgadas piezoeléctricas, basándose en el trabajo de Toupin. Su trabajo consistió principalmente en reemplazar el análisis sobre la función de energía interna almacenada por un análisis basado en diferentes funciones termodinámicas escalares. Hacia 1993, simplificó la formulación

reduciendo el sistema a dos ecuaciones constitutivas con un término no lineal en cada una de ellas, directamente asociado al campo eléctrico [76]:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{ijq} E_q - \frac{1}{2} b_{ijqr} E_q E_r \\ D_p &= e_{pkl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{pq}^\varepsilon E_q + \frac{1}{2} \epsilon_{pqr}^\varepsilon E_q E_r\end{aligned}\tag{4.4}$$

donde los parámetros no lineales que adiciona a la formulación lineal (4.3) son:

$$b_{ijqr} = \text{electroestricción no lineal}$$

$$\epsilon_{pqr}^\varepsilon = \text{permitividad eléctrica no lineal}$$

Esta formulación, sin embargo, considera deformaciones infinitesimales. En referencia a este trabajo, Yang en 2006 [77], explica en detalle cómo llegar hasta las constitutivas no lineales de Tiersten y agrega no linealidades cúbicas para campos eléctricos fuertes.

Por otra parte, Joshi en 1992 [28] dedujo las ecuaciones constitutivas lineales de los materiales piezoeléctricos (4.3) y las ecuaciones derivadas por Tiersten a partir de una formulación termodinámica, considerando la energía libre de Gibbs:

$$G = U - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - E_p D_p - T_s S\tag{4.5}$$

siendo  $U$ ,  $T_s$  y  $S$  la energía interna, temperatura absoluta y la entropía, respectivamente.

A partir de esto elaboró las ecuaciones constitutivas no lineales de segundo orden haciendo una expansión en series de Taylor, obteniendo:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{ijq} E_q + \frac{1}{2} c_{ijklmn}^E \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} - \frac{1}{2} b_{ijqr} E_q E_r - e_{ijklq} \varepsilon_{kl} E_q \\ D_p &= e_{pkl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{pq}^\varepsilon E_q + \frac{1}{2} e_{pklmn} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + \frac{1}{2} \epsilon_{pqr}^\varepsilon E_q E_r + b_{pklq} \varepsilon_{kl} E_q\end{aligned}\tag{4.6}$$

En dichas ecuaciones consideró dos términos no lineales adicionales a los de Tiersten:

$$c_{ijklmn}^E = \text{elasticidad no lineal}$$

$$e_{pklmn} = \text{elastoestricción no lineal}$$

Cabe aclarar en este sentido, que los coeficientes de electrostricción y permitividad son importantes para campos eléctricos grandes, principalmente los asociados a actuación utilizando materiales piezoeléctricos (control activo), no así para campos débiles como los considerados en la presente tesis donde se pretende la recuperación de energía.

Basado en las constitutivas de Joshi, en una disertación del año 2004 [78, 79] Williams y otros estudiaron las no linealidades de los piezoeléctricos MFC en actuación, presentando incluso la fabricación y experimentación de los mismos en los laboratorios de “NASA Langley Research Center” a cargo de W. K. Wilkie. De hecho, el trabajo [78] es una publicación en gran parte experimental donde se determinan los parámetros lineales y no lineales experimentalmente. En el trabajo [79], al igual que Joshi, realizaron la deducción completa de las ecuaciones constitutivas a partir de la energía libre de Gibbs, afirmando que como los piezocerámicos son linealmente elásticos hasta la falla (la experimentación está limitada al rango elástico), los coeficientes no lineales elásticos y de permitividad desaparecen. De esta manera las ecuaciones constitutivas las reducen a:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{ijq} E_q - \frac{1}{2} b_{ijqr} E_q E_r - e_{ijklq} \varepsilon_{kl} E_q \\ D_p &= e_{pkl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{pq}^E E_q + \frac{1}{2} e_{pklmn} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + b_{pklq} \varepsilon_{kl} E_q\end{aligned}\tag{4.7}$$

De esta manera, aparecen únicamente dos no linealidades, la electro ( $b_{ijqr}$ ) y la elastostricción ( $e_{ijklq}$ ) respectivamente.

Quienes utilizaron estas últimas ecuaciones constitutivas reducidas de Williams fueron Wischke y otros en una publicación del año 2009 [80]. En dicho trabajo, para grandes campos eléctricos, incorporaron coeficientes lineales equivalentes para los términos no lineales, en función del campo eléctrico. De la primera ecuación de la (4.7) agruparon términos y presentaron la siguiente expresión:

$$\sigma_{ij} = c_e^E \varepsilon_{kl} - e_e E_q\tag{4.8}$$

siendo los coeficientes equivalentes:

$$c_e^E = c_{ijkl}^E - e_{ijklq} E_q \quad , \quad e_e = e_{ijq} + \frac{1}{2} b_{ijqr} E_r \quad (4.9)$$

De esta manera demostraron que, sin considerar un coeficiente no lineal elástico  $c_{ijklmn}^E$ , igualmente se obtiene una forma de rigidez equivalente no lineal debido al coeficiente no lineal de elastostricción  $e_{ijklq}$ . Este efecto es mayor cuanto más fuerte es el campo eléctrico, y es por eso que lo utilizan para campos eléctricos fuertes.

Un especial análisis y caracterización de la elasto y electrostricción lo realizan estos mismos autores en 2011 [81], donde el clásico acoplamiento electromecánico lineal, derivado del coeficiente  $d_{31}$ , lo modificaron por la elastostricción  $e_{ijklm}$  y la electrostricción  $b_{ijqr}$ . Además, explicaron que para determinar la elastostricción experimentalmente se le aplica un voltaje (campo eléctrico) y se mide el salto en el valor de la frecuencia natural de la viga piezoeléctrica utilizada para el experimento. Respecto de la determinación del coeficiente de electrostricción, se aplica un voltaje y se mide el desplazamiento en el extremo libre de la viga en cantiléver. Estos dos aspectos podrían considerarse como una no linealidad elástica que genera un corrimiento en frecuencia y un “amortiguamiento” que incide sobre el desplazamiento. Lo interesante de esto último es que a partir de la ecuación (4.9) y como lo muestran experimentalmente (ver Figura 4.1) la electrostricción genera una amplificación del desplazamiento en la punta y no un “amortiguamiento”.

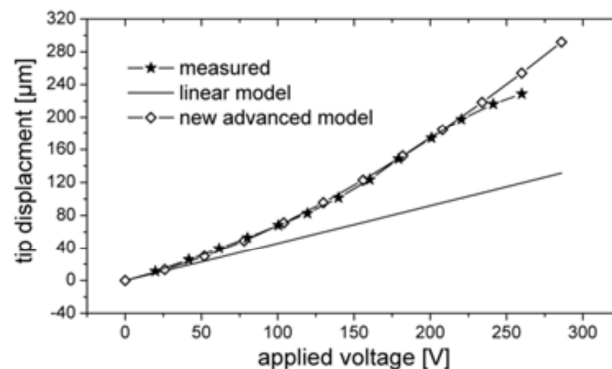


Figura 4.1 - Curva de desplazamiento en el extremo vs. voltaje aplicado, presentada por Wischke et al. [81].

Es importante resaltar que en dicho trabajo [81] los autores realizaron una expansión en series de Taylor para órdenes superiores de las constitutivas lineales, quedándose solamente con los términos cuadráticos de Williams.

Los trabajos hasta aquí presentados solo analizan la ecuación constitutiva no lineal desarrollada por Tiersten, realizando experimentos para validar las ecuaciones propuestas, y sin llegar en ningún caso a una ecuación diferencial a partir de las mismas. Abdelkefi y otros en 2012 [82] utilizaron las constitutivas de Joshi y resolvieron un sistemas de ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones diferenciales fueron resueltas mediante escalas múltiples para una viga en cantiléver unimorfo e identificaron los parámetros no lineales obteniendo los siguientes valores:

Coefficiente	Valor
$c_{111}^E$	$-3.376 \times 10^{13} \text{ N/m}^2$
$b_{133}$	$6 \times 10^{-5} \text{ N/V}^2$
$e_{113}$	$-2.8 \times 10^4 \text{ C/m}^2$
$\epsilon_{333}^E$	$2.05 \times 10^{-13} \text{ C/V}^2$

Tabla 4.1 – Parámetros identificados.

Guyomar y otros en 1997 [83] también construyeron y resolvieron una ecuación diferencial basándose en las ecuaciones constitutivas de Joshi pero para un conjunto de anillos de material piezoeléctrico PZT. Bajo la hipótesis de campo eléctrico débil, anularon los términos cuadráticos del campo eléctrico, quedando las constitutivas de Joshi reducidas en este caso a:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{ijq} E_q + \frac{1}{2} c_{ijklmn}^E \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} - e_{ijklmq} \varepsilon_{kl} E_q \\ D_p &= e_{pkl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{pq}^E E_q + \frac{1}{2} e_{pklmn} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + b_{pklq} \varepsilon_{kl} E_q \end{aligned} \tag{4.10}$$

En este trabajo [83], la identificación de los parámetros no lineales la realizaron experimentalmente a partir de las mediciones entre deformaciones y tensiones.

#### 4.1.1.2 Ecuaciones constitutivas de órdenes superiores

Beige y Schmidt en 1982 [84] obtuvieron ecuaciones constitutivas de tercer orden siguiendo principalmente los trabajos de Tiersten y Joshi. Al igual que Joshi, expandieron en series de Taylor la entalpía en términos de los campos obteniendo una función de orden superior como la que sigue:

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} c_{ijkl}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{ijp} E_p \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \varepsilon_{pq}^E E_p E_q + \frac{1}{3} c_{ijklmn}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} \\
 & - e_{ijklp} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} E_p - b_{ijpq} \varepsilon_{ij} E_p E_q - \frac{1}{3} \varepsilon_{pqr}^E E_p E_q E_r \\
 & + \frac{1}{4} c_{ijklmnuv}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{uv} - \frac{1}{4} \varepsilon_{pqrs}^E E_p E_q E_r E_s
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

de la cual se derivan las siguientes ecuaciones constitutivas:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} = & c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{ijq} E_q + c_{ijklmn}^E \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} - b_{ijqr} E_q E_r - 2e_{ijklq} \varepsilon_{kl} E_q \\
 & + c_{ijklmnuv}^E \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{uv} \\
 D_p = & e_{pkl} \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{pq}^E E_q + e_{pklmn} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + \varepsilon_{pqr}^E E_q E_r + b_{pklq} \varepsilon_{kl} E_q \\
 & + \varepsilon_{pqrs}^E E_q E_r E_s
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

De esta manera, existen dos parámetros no lineales adicionales a los de Joshi,  $c_{ijklmnuv}^E$  el tensor de elasticidad no lineal de tercer orden y  $\varepsilon_{pqrs}^E$  el tensor de permitividad no lineal de tercer orden. Una cuestión interesante de este trabajo es que obtiene una expresión analítica para cada uno de los coeficientes no lineales en término de los coeficientes lineales.

En un trabajo del año siguiente [85], Beige redujo las ecuaciones constitutivas anteriores despreciando los términos acoplados, quedando la expresión de la tensión de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} = & c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} + c_{ijklmn}^E \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + c_{ijklmnuv}^E \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{uv} \\
 D_p = & \varepsilon_{pq}^E E_q + \varepsilon_{pqr}^E E_q E_r + \varepsilon_{pqrs}^E E_q E_r E_s
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

En función de los resultados obtenidos, Beige atribuye el corrimiento en frecuencia (de la frecuencia natural) solo al tensor elástico no lineal de segundo



orden  $c_{ijklmn}^E$ , en tanto que la variación de amplitud se la atribuye a la permitividad no lineal de tercer orden  $\epsilon_{pqrs}^E$ .

Por otra parte, Stanton y otros en la publicación del año 2010 [32], siguiendo una formulación con una función de entalpia alternativa de órdenes superiores presentada por Maugin en su libro de 1986 [86], formularon las siguientes ecuaciones constitutivas cúbicas para un recuperador de energía:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} = & c_{ijkl}^E \epsilon_{kl} - e_{ijq} E_q + c_{ijklmn}^E \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} - e_{ijklq} \epsilon_{kl} E_q \\ & + c_{ijklmnuv}^E \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} \epsilon_{uv} - e_{ijklmnq} \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} E_q\end{aligned}\quad (4.14)$$

$$D_p = e_{pkl} \epsilon_{kl} + \epsilon_{pq}^E E_q + e_{pklq} \epsilon_{kl} E_q + e_{pklmnq} \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} E_q$$

En ese caso consideraron una viga piezoeléctrica bimorfa, donde las no linealidades de segundo orden desaparecen por simetría. Además, afirmaron que debido a campos eléctricos débiles, todos los órdenes superiores relacionados con el campo desaparecen. De esta manera, solo consideraron dos tipos de no linealidades: una no linealidad elástica cúbica (referida al tensor  $c_{ijklmnuv}^E$ ) y un acoplamiento no lineal cúbico (referido al tensor  $e_{ijklmnq}$ ). En consecuencia, las ecuaciones constitutivas se reducen significativamente:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} = & c_{ijkl}^E \epsilon_{kl} - e_{ijq} E_q + c_{ijklmnuv}^E \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} \epsilon_{uv} - e_{ijklmnq} \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} E_q \\ D_p = & e_{pkl} \epsilon_{kl} + \epsilon_{pq}^E E_q + e_{pklmnq} \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} E_q\end{aligned}\quad (4.15)$$

Es importante destacar que en este caso, como resultado de la aplicación de estas últimas ecuaciones a una viga cantiléver piezoeléctrica bimorfa, los autores construyeron un sistema de ecuaciones diferenciales de dos grados de libertad con un modelo de disipación no lineal empírica de la forma:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \xi_a\dot{x}|\dot{x}| + \omega^2x + \alpha x^3 - (\theta + \varphi x^2)v = f \\ C_p\dot{v} + \frac{v}{R_l} + (\theta + \varphi x^2)\dot{x} = 0\end{aligned}\quad (4.16)$$

para cuya resolución utilizaron el método de balance armónico. En las ecuaciones anteriores, el parámetro  $\alpha$  incorpora al coeficiente no lineal de tercer orden  $c_{1111}^E$  elástico, y el parámetro  $\varphi$  al coeficiente no lineal de acoplamiento de tercer orden

$e_{3111}$  electroelástico. Dichos parámetros fueron identificados experimentalmente obteniendo los siguientes valores:

Coficiente	Valor
$c_{1111}^E$	$-3.6673 \times 10^{17} \text{ N/m}^2$
$e_{3111}$	$1.7212 \times 10^8 \text{ m/V}$

Tabla 4.2 – Parámetros identificados.

En un trabajo posterior de 2012 [87], los mismos autores, agregaron a las ecuaciones constitutivas (4.15) los términos de cuarto y quinto orden en la no linealidad elástica. Sin embargo, nuevamente por simetría de la viga bimorfa eliminaron el término de cuarto orden. Además, eliminaron todos los acoplamientos no lineales, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{ijq} E_q + c_{ijklmnuv}^E \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{uv} \\ & + c_{ijklmnuvwxyz}^E \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{uv} \varepsilon_{wx} \varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$D_p = e_{pkl} \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{pq}^E E_q$$

Finalmente, identificaron los parámetros no lineales elásticos para el piezoelectrico PZT-5H y el PZT-5A:

Coficiente	PZT-5H	PZT-5A
$c_{1111}^E$	$-9.6086 \times 10^{17}$	$-9.7727 \times 10^{17}$
$c_{111111}^E$	$9.6950 \times 10^{25}$	$1.47 \times 10^{26}$

Tabla 4.3 – Parámetros identificados.

#### 4.1.1.3 Ecuaciones constitutivas polinómicas

Respecto a las ecuaciones constitutivas provenientes de polinomios de orden  $n$ , uno de los trabajos de referencia es el de von Wagner y Hagedorn del 2002 [88], en el cual proponen una variación no lineal polinómica del módulo de elasticidad y el coeficiente piezoelectrico, basándose en las experimentaciones para campos débiles de Nguyen [89]. En primer lugar, modificaron la función entalpia lineal (4.1) de la siguiente manera:

$$H = \frac{1}{2} c'_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e'_{ijp} \varepsilon_{ij} E_p - \frac{1}{2} \varepsilon_{pq}^{\varepsilon} E_p E_q \quad (4.18)$$

siendo los coeficientes polinómicos no lineales que propusieron de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} c'_{ijkl} &= c_{ijkl}^E + c_{ijklmn}^E \varepsilon_{mn} + c_{ijklmnuv}^E \varepsilon_{mn} \varepsilon_{uv} \\ e'_{ijp} &= e_{ijp} + e_{ijklp} \varepsilon_{kl} + e_{ijklmnp} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} \end{aligned} \quad (4.19)$$

correspondientes al módulo de elasticidad equivalente ( $c'_{ijkl}$ ) y al coeficiente piezoeléctrico equivalente ( $e'_{ijp}$ ). Reemplazando estos últimos coeficientes en la ecuación (4.18), obtuvieron la nueva función entalpia:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} c_{ijkl}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{3} c_{ijklmn}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + \frac{1}{4} c_{ijklmnuv}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{uv} \\ &\quad - e_{ijp} \varepsilon_{ij} E_p - \frac{1}{2} e_{ijklp} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} E_p - \frac{1}{3} e_{ijklmnp} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} E_p \\ &\quad - \frac{1}{2} \varepsilon_{pq}^{\varepsilon} E_p E_q \end{aligned} \quad (4.20)$$

Finalmente, aplicando las relaciones (4.2) llegaron a las ecuaciones constitutivas:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} + c_{ijklmn}^E \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + c_{ijklmnuv}^E \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{uv} - e_{ijq} E_q \\ &\quad - e_{ijklq} \varepsilon_{kl} E_q - e_{ijklmnp} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} E_q \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$D_p = e_{pkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} e_{pklmn} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + \frac{1}{3} e_{pklmnuv} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{uv} + \varepsilon_{pq}^{\varepsilon} E_q$$

Se puede observar que la expresión del tensor de tensiones es idéntica a la propuesta por Stanton [32] en la ecuación (4.14), sin embargo la ecuación del desplazamiento eléctrico es diferente debido a que consideran una función de entalpia distinta.

En dicho trabajo, al igual que en el de Stanton [32], resolvieron un sistema de ecuaciones diferenciales mediante balance armónico e identificaron los parámetros no lineales. El desarrollo lo realizaron para una viga bimorfa, sin considerar los términos de segundo orden nuevamente por simetría. Los parámetros no lineales de tercer orden identificados fueron:

Coefficiente	Valor
$c_{1111}^E$	$-1.4 \times 10^{18} \text{ N/m}^2$
$e_{3111}$	$-0.03596 \text{ m/V}$

Tabla 4.4 – Parámetros identificados.

Por otra parte, Leadenham y Erturk en el año 2015 [36], en base al trabajo de von Wagner [88], presentaron una función entalpia no lineal truncada en el tercer orden e imponiendo la función signo en la deformación, de manera de introducir una no linealidad acorde a las observaciones de la “back bone curve” (curva construida con el valor de máxima amplitud de desplazamiento para diferentes amplitudes de excitación). De manera similar a von Wagner, los autores propusieron una densidad de entalpia eléctrica expresada como un polinomio en la magnitud de la deformación y el campo eléctrico:

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} c_{ijkl}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{3} c_{ijklmn}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} \text{sign}(\varepsilon_{ij}) - e_{ijp} \varepsilon_{ij} E_p \\
 & - \frac{1}{2} e_{ijklp} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} E_p \text{sign}(\varepsilon_{ij}) - \frac{1}{2} \varepsilon_{pq}^\varepsilon E_p E_q
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Luego, a partir de las relaciones (4.2) se obtienen las ecuaciones constitutivas quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} = & c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} + c_{ijklmn}^E \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} \text{sign}(\varepsilon_{ij}) - e_{ijq} E_q \\
 & - e_{ijklq} \varepsilon_{kl} E_q \text{sign}(\varepsilon_{ij})
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$D_p = e_{pkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} e_{pklmn} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} \text{sign}(\varepsilon_{ij}) + \varepsilon_{pq}^\varepsilon E_q$$

De esta forma, solo aparecen dos parámetros no lineales cuadráticos; un tensor de elasticidad no lineal de sexto orden ( $c_{ijklmn}^E$ ) y un tensor piezoeléctrico no lineal de quinto orden ( $e_{ijklq}$ ).

La propuesta abarcó el estudio de una viga bimorfa para la recuperación de energía para el sensado de variables, es decir, en presencia de campos eléctricos débiles. Al no construir la función entalpia en términos de la deformación en sí misma, sino en la magnitud de la deformación (al usar la función signo), no desaparecen los términos de segundo orden por simetría.

Por otro lado, más allá de la incorporación de la función signo en la constitutiva, el aporte central de este trabajo [36] es la obtención del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$m\ddot{x} + [b_1x \operatorname{sign}(x) + b_2x^2] \operatorname{sign}(\dot{x}) + k_1x + k_2x^2 \operatorname{sign}(x) - [\theta_1 + \theta_2x \operatorname{sign}(x)]v = f \quad (4.24)$$

$$C_p \dot{v} + \frac{v}{R_l} + [\theta_1 + \theta_2x \operatorname{sign}(x)]\dot{x} = 0$$

Aplicando el método de balance armónico, los autores llegaron finalmente al sistema de ecuaciones algebraicas que se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} -m\Omega^2 X_1 + \left(\frac{2}{\pi} b_1 + \frac{4}{3\pi} b_2 X\right) X_2 + \left(k_1 + \frac{8}{3\pi} k_2 X\right) X_1 - \theta_1 V_1 \\ - \frac{4}{3\pi} \theta_2 \left[ \frac{(2X_1^2 + X_2^2)V_1 + X_1 X_2 V_2}{X} \right] - f = 0 \\ -m\Omega^2 X_2 - \left(\frac{2}{\pi} b_1 + \frac{4}{3\pi} b_2 X\right) X_1 + \left(k_1 + \frac{8}{3\pi} k_2 X\right) X_2 - \theta_1 V_2 \\ - \frac{4}{3\pi} \theta_2 \left[ \frac{(X_1^2 + 2X_2^2)V_2 + X_1 X_2 V_1}{X} \right] = 0 \\ C_p \Omega V_2 + \frac{V_1}{R_l} + \left(\theta_1 + \frac{4}{3\pi} \theta_2 X\right) \Omega X_2 = 0 \\ C_p \Omega V_1 - \frac{V_2}{R_l} + \left(\theta_1 + \frac{4}{3\pi} \theta_2 X\right) \Omega X_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde se define la amplitud del desplazamiento y el voltaje como  $X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$  y  $V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$ , respectivamente. En los coeficientes  $k_2$  y  $\theta_2$  se incluyen a los parámetros no lineales  $c_{ijklmn}^E$  y  $e_{ijklq}$ . Con estas ecuaciones (4.25), los autores [36] identificaron los parámetros no lineales:

Coeficiente	Valor
$c_{111}^E$	-60 TPa
$e_{311}$	-20 kC/m <sup>2</sup>

Tabla 4.5 – Parámetros identificados por Leademham y Erturk [36].

#### 4.1.1.4 Ecuaciones basadas en experimentos (empíricos)

Finalmente, se mencionan aquellos modelos que se basan exclusivamente en experimentos, realizando un ajuste de los datos a un modelo por ejemplo polinomial a través de mínimos cuadrados.

Un trabajo interesante es el de Yang y Upadrashta de 2016 [90], en el cual realizan una revisión y comparación de diversos modelos no lineales constitutivos. Ellos concluyen que hay una gran diversidad de modelos no lineales y que todos presentan errores en el ajuste para determinar sus parámetros. Basándose en esto, se afirma que la forma correcta de armar las ecuaciones constitutivas y determinar sus parámetros es mediante la obtención experimental de un diagrama tensión-deformación, y es lo que realizaron en la segunda parte del trabajo para el piezoeléctrico MFC-8507-P2 de Smart Material. Mediante una máquina de ensayo de tracción y un strain gauge colocado en el piezoeléctrico para medir la deformación, se obtuvieron las siguientes gráficas:

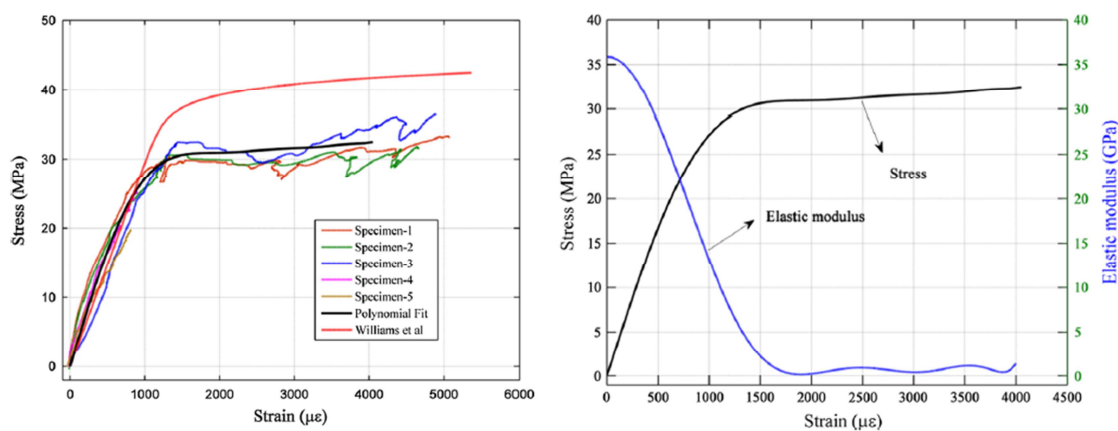


Figura 4.2 - Curvas experimentales obtenidas por Yang y Upadrashta [90].

A partir de estas curvas experimentales se presentó en [90] un polinomio con siete constantes para la expresión de la tensión en función de la deformación, adosándole luego una ecuación constitutiva eléctrica lineal. De esta manera obtuvieron las siguientes expresiones, considerando solo deformación axial:

$$\sigma_1 = C_1 \varepsilon_1 + C_2 \varepsilon_1^3 + C_3 \varepsilon_1^5 + C_4 \varepsilon_1^7 + C_5 \varepsilon_1^9 + C_6 \varepsilon_1^{11} + C_7 \varepsilon_1^{13} - e_{31} E_3 \tag{4.26}$$

$$D_3 = e_{31} \varepsilon_1 + \epsilon_{33}^E E_3$$

y los valores de las constantes para este caso fueron:

Coefficiente	Valor (Pa)
$C_1$	$3.589 \times 10^{10}$
$C_2$	$-1.074 \times 10^{16}$
$C_3$	$2.242 \times 10^{21}$
$C_4$	$-2.747 \times 10^{26}$
$C_5$	$1.926 \times 10^{31}$
$C_6$	$-7.143 \times 10^{35}$
$C_7$	$1.085 \times 10^{40}$

Tabla 4.6 – Valores de los coeficientes del polinomio aproximado.

Para concluir con esta breve revisión sobre ecuaciones constitutivas no lineales, a continuación se presenta una tabla resumiendo todas las referencias analizadas, detallando entre paréntesis la cantidad de parámetros no lineales utilizados.

		Elasticidad			Acoplamiento			Permitividad	
		$c_{ijklmn}^E$	$c_{ijklmn}^E$	$c_{ijklmn}^E$	$b_{ijqr}$	$e_{ijklq}$	$e_{ijklmnq}$	$\epsilon_{pqr}^E$	$\epsilon_{pqrs}^E$
Tiersten [76]	(2)				x			x	
Joshi [28]	(4)	x			x	x		x	
Williams [79]	(2)				x	x			
Guyomar [83]	(3)	x			x	x			
Beige [84]	(6)	x	x		x	x		x	x
Beige (reduc.) [85]	(4)	x	x					x	x
Stanton [32]	(4)	x	x			x	x		
Stanton (reduc.) [32]	(2)		x					x	
Stanton (5° ord.) [87]	(2)		x	x					
von Wagner [88]	(4)	x	x			x	x		
Leadenham [36]	(2)	x				x			

Tabla 4.7 – Resumen de modelos constitutivos no lineales.

### 4.1.2 Disipación

Además del estudio de las ecuaciones constitutivas no lineales de los piezoeléctricos, es importante analizar cómo se modela el amortiguamiento o la disipación en este tipo de materiales. La mayoría de los trabajos en la literatura

referidos a modelos de vigas piezoeléctricas, hablan de un comportamiento no lineal en la amplitud de la generación eléctrica. Este comportamiento lo describen como una reducción de la amplitud de voltaje que uno esperaría encontrar (de no existir la disipación) a medida que aumenta la amplitud de la excitación.

Para modelar esta característica, se han utilizado principalmente dos tipos de modelos disipativos a saber: amortiguamiento viscoso y/o sólido y modelos basados en histéresis.

#### 4.1.2.1 Disipación viscosa de segundo orden

Una forma de modelar el amortiguamiento no lineal antes mencionado es mediante la introducción de un término de segundo orden que involucre la velocidad o el desplazamiento de la viga. Uno de los trabajos de referencia en el tema, presentado por Stanton y otros [32] fue tratado en la sección anterior sobre las ecuaciones constitutivas no lineales. En dicho trabajo, la no linealidad disipativa fue modelada mediante un amortiguamiento de segundo orden en la velocidad de la viga. En la ecuación (4.16) se puede ver el término no lineal propuesto:

$$\xi_a \dot{x} |\dot{x}| \quad (4.27)$$

donde  $\xi_a$  es el coeficiente de amortiguamiento no lineal,  $\dot{x}$  es la velocidad relativa de la viga y el valor absoluto de la velocidad se impone para obtener un término disipativo. Esta propuesta muestra muy buenos resultados en términos de amplitud, ajustando adecuadamente el coeficiente a los experimentos para diferentes niveles de excitación.

Por otra parte, Leadenham y otros [36] construyeron una disipación de segundo orden respecto al desplazamiento de la viga. Esto puede ser observado en la ecuación (4.24), siendo el término propuesto para el amortiguamiento de la siguiente manera:

$$[b_1 x \operatorname{sign}(x) + b_2 x^2] \operatorname{sign}(\dot{x}) \quad (4.28)$$

Aquí,  $b_1$  y  $b_2$  son los coeficientes de amortiguamiento proporcionales al desplazamiento y al desplazamiento al cuadrado respectivamente, siendo  $x$  el desplazamiento relativo de la viga. En este caso, la función signo sigue siendo



necesaria para generar una disipación de energía [91]. Al igual que los autores anteriores, los resultados predicen adecuadamente los ensayos experimentales.

#### 4.1.2.2 Disipación debida a la histéresis de Rayleigh

Los modelos de histéresis que tratan el fenómeno de la disipación de energía tienen un largo desarrollo [92]. De entre ellos, el modelo de histéresis de Rayleigh fue uno de los pioneros [93]. En dicho trabajo, Rayleigh estudia la histéresis magnética y propone una relación entre el campo magnético  $H$ , su amplitud máxima  $H_m$  y la inducción magnética  $B$ , de la siguiente forma:

$$B = (\alpha + \beta H_m)H \pm \frac{1}{2}\beta(H^2 - H_m^2) \quad (4.29)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes que determinan el grado de histéresis. Esto permite que exista una disipación de energía que se calcula como el área bajo la curva de  $B$  vs  $H$ .

Jiles, en su libro de 1991 [94] sobre materiales magnéticos presentó en detalle y de manera clara este fenómeno, siendo el primero en encontrar una expresión para la energía disipada por ciclo:

$$W_d = \frac{4}{3}\nu H_m^3 \quad (4.30)$$

donde  $\nu$  es la permeabilidad magnética, encontrando que la disipación escala como el cubo de la amplitud máxima del campo magnético.

Luego, Damjanovic y Demartin en 1996 [95] haciendo una analogía entre los campos magnéticos y eléctricos aplicaron el modelo de histéresis de Rayleigh en cerámicos piezoeléctricos para evaluar la densidad de carga en función de la presión ejercida sobre el mismo (histéresis piezoelástica).

Utilizaron una expresión análoga a la (4.29):

$$Q = (\alpha + \beta X_0)X \pm \frac{1}{2}\beta(X^2 - X_0^2) \quad (4.31)$$

donde, en este caso,  $Q$  es la densidad de carga,  $X$  es la presión recibida y  $X_0$  es la amplitud de dicha presión.

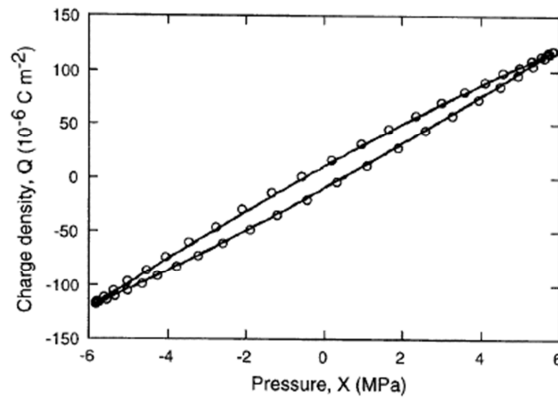


Figura 4.3 - Curva de histéresis obtenida por Damjanovic y Demartin [95].

Basado en estos trabajos, Goldschmidtboeing y otros en 2011 [31] desarrollaron un modelo no lineal para vigas piezoeléctricas bimorfas en cantiléver. Allí, construyeron una ecuación constitutiva no lineal incorporando la disipación por medio de la histéresis de Rayleigh:

$$\sigma = (c^E + \alpha c^{E^2} \varepsilon_0) \varepsilon \pm \frac{1}{2} \gamma c^{E^2} (\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2) \quad (4.32)$$

donde  $\sigma$  es la tensión,  $\varepsilon$  es la deformación,  $\varepsilon_0$  es la amplitud de la deformación,  $\alpha$  y  $\gamma$  son coeficientes propios del modelo y  $c^E$  es el módulo de elasticidad.

Sin embargo, el término disipativo lo quitaron de la ecuación constitutiva y lo incorporaron al modelo matemático como un amortiguamiento viscoso equivalente a partir de la energía disipada por cada ciclo. La expresión que utilizaron para la energía disipada es análoga a la obtenida por Jiles (4.30):

$$W_d = \frac{4}{3} \gamma c^E \varepsilon_0^3 \quad (4.33)$$

#### 4.2 MODELO ELECTROMECHANICO ADOPTADO PARA GENERACION POR $d_{31}$

En base a lo presentado en las secciones anteriores, en esta sección se presenta el modelo matemático adoptado para describir analíticamente dispositivos recuperadores de energía para grandes excitaciones en modo de generación  $d_{31}$  y configuración unimorfa.

Analizando los modelos de ecuaciones constitutivas no lineales, para nuestro caso se decidió optar por un modelo constitutivo no lineal como el propuesto por

Leadenham [36], el cual considera un coeficiente de elasticidad no lineal ( $c_{111}^p$ ) y un coeficiente de acoplamiento no lineal dado por una constante piezoeléctrica no lineal ( $e_{311}$ ). Esta elección se fundamenta en los siguientes aspectos:

- ✓ Modelo constitutivo sencillo (sólo dos parámetros no lineales).
- ✓ Reducción de las ecuaciones diferenciales a ecuaciones algebraicas.
- ✓ Modelo propuesto para vigas piezoeléctricas de características similares a las utilizadas en la presente tesis.
- ✓ Experimentos que validan los resultados numéricos.

En lo que respecta a la disipación, se optó por un modelo viscoso no lineal cuadrático como el presentado por Stanton en [32]. Esta elección se basa en lo siguiente:

- ✓ Sencillez del modelo para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales resultante.
- ✓ Los resultados obtenidos por los autores en cuanto a la validación experimental del modelo son muy buenos para casos similares a los estudiados en esta tesis.

Adicionalmente a las ecuaciones constitutivas y al modelo de disipación elegido, se consideró la no linealidad geométrica por grandes desplazamientos, debido a que en algunas configuraciones (ej: viga cantilever) la relación desplazamiento/longitud llega a alcanzar valores considerables justificando la introducción de este tipo de no linealidad.

La viga piezoeléctrica se modeló de acuerdo a la formulación de Bernoulli-Euler [96], considerando solo el desplazamiento vertical de la misma y se utilizó un enfoque lagrangiano [97] para construir el sistema de ecuaciones diferenciales.

### 4.2.1 Cinemática

En lo que sigue, los ejes  $x, y, z$ , mostrados en la Figura 3.10 corresponden a los subíndices 1, 2 y 3, respectivamente. Los puntos en la parte superior de las variables ( $\dot{\phantom{x}}, \ddot{\phantom{x}}, \dots$ ) hacen referencia a las derivadas temporales, las comillas ( $\prime, \prime\prime, \dots$ ) a las derivadas respecto de la coordenada  $x$  y la deflexión  $w(x, t)$  se nombra directamente como  $w$ . Además, los superíndices  $p$  y  $s$  hacen referencia al piezoeléctrico y a la subestructura respectivamente.

El vector desplazamiento, sin considerar el desplazamiento axial puro e incorporando la excitación temporal de la base  $g(t)$ , es:

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^t = [-zw' \quad 0 \quad w + g(t)]^t \quad (4.34)$$

Asumiendo que la viga es inextensible y en base a que la deformación axial de un elemento diferencial viene dada por [98]:

$$e = \sqrt{(1 + u_1')^2 + u_3'^2} - 1 \quad (4.35)$$

considerando  $e = 0$ , se obtiene

$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{1}{2} u_3'^2 \\ u_1 &= -\frac{1}{2} \int_0^l u_3'^2 dl \end{aligned} \quad (4.36)$$

por lo que las no linealidades geométricas se tienen en cuenta utilizando la siguiente expresión de la deformación local:

$$\varepsilon_1 = -z \left( u_3'' + \frac{1}{2} u_3'' u_3'^2 \right) = -z \left( w'' + \frac{1}{2} w'' w'^2 \right) \quad (4.37)$$

El primer término del lado derecho de la (4.37) es la deformación axial de un problema de flexión clásico de pequeños desplazamientos, en tanto que el segundo es la deformación axial generada por la consideración de grandes desplazamientos.

### 4.2.2 Densidad de Entalpía y Ecuaciones Constitutivas

La expresión de la densidad de entalpía del material piezoeléctrico ( $H^p$ ) y de la subestructura ( $H^s$ ) se definen como [36]:

$$\begin{aligned}
H^p = & \frac{1}{2} c_{11}^p \varepsilon_1^2 + \frac{1}{3} c_{111}^p \varepsilon_1^3 \text{sign}(\varepsilon_1) - e_{31} \varepsilon_1 E_3 - \frac{1}{2} e_{311} \varepsilon_1^2 E_3 \text{sign}(\varepsilon_1) \\
& - \frac{1}{2} \varepsilon_{33}^\varepsilon E_3^2
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$H^s = \frac{1}{2} c_{11}^s \varepsilon_1^2$$

donde  $c_{11}^{p,s}$  son los módulos de elasticidad lineal del piezoelectrico y de la subestructura, y  $\varepsilon_{33}^\varepsilon$  la permitividad eléctrica a deformación constante. Además,  $e_{31} = c_{11}^p d_{31}$  es la constante piezoelectrica y  $E_3$  es el campo eléctrico que se establece en el material piezoelectrico en la dirección vertical  $z$ , aproximado por la expresión [25] (ver Apéndice C):

$$E_3 = - \frac{v(t)}{h_p} \tag{4.39}$$

Aplicando las siguientes relaciones [28]:

$$\sigma_1^p = \frac{\partial H^p}{\partial \varepsilon_1}, \quad \sigma_1^s = \frac{\partial H^s}{\partial \varepsilon_1}, \quad D_3 = - \frac{\partial H^p}{\partial E_3} \tag{4.40}$$

se obtienen las expresiones de las tensiones axiales ( $\sigma^{p,s}$ ) en el piezoelectrico y en la subestructura, y el desplazamiento eléctrico ( $D$ ):

$$\begin{aligned}
\sigma^p = \sigma_1^p = & c_{11}^p \varepsilon_1 + c_{111}^p \varepsilon_1^2 \text{sign}(\varepsilon_1) - e_{31} E_3 - e_{311} \varepsilon_1 E_3 \text{sign}(\varepsilon_1) \\
\sigma^s = \sigma_1^s = & c_{11}^s \varepsilon_1
\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$D = D_3 = e_{31} \varepsilon_1 + \frac{1}{2} e_{311} \varepsilon_1^2 \text{sign}(\varepsilon_1) + \varepsilon_{33}^\varepsilon E_3$$

las cuales satisfacen la relación suficiente y necesaria [28]:

$$\frac{\partial \sigma_1^p}{\partial E_3} = - \frac{\partial D_3}{\partial \varepsilon_1} \tag{4.42}$$

Es importante aclarar que el signo de la deformación ( $\text{sign}(\varepsilon_1)$ ) se incorpora en los términos cuadráticos con el fin de mantener el efecto no lineal en ambos sentidos de la deformación de la viga. La ausencia del mismo generaría una respuesta asimétrica en las tensiones y en el desplazamiento eléctrico ya que los términos cuadráticos serían siempre positivos.

### 4.2.3 Energía Potencial

La energía potencial total del sistema, despreciando la energía potencial gravitatoria, es la suma de las energías potenciales elásticas de la viga y de los vínculos elásticos (resortes), conforme al esquema del recuperador de la Figura 3.10:

$$U = U_b + U_{k1} + U_{k2} \quad (4.43)$$

La expresión para la viga viene dada por [25]:

$$U_b = \int_{V_s} H^s dV_s + \int_{V_p} H^p dV_p \quad (4.44)$$

La primera y segunda integral de volumen en la ecuación anterior (4.44) corresponde a los elementos de la subestructura y el piezoeléctrico, respectivamente. Utilizando las expresiones (4.37), (4.38) y (4.39), reemplazando en la ecuación (4.44), desarrollando y generalizando para la longitud  $L$  se obtiene:

$$\begin{aligned} U_b = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EI w''^2 + \frac{1}{3} EI_n w''^3 \text{sign}(w'') + EI (w' w'')^2 \right. \\ \left. - 2 \left( J_p(x) w'' + \frac{1}{2} J_{pn}(x) w''^2 \text{sign}(w'') \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} J_p(x) w'^2 w'' \right] v(t) dx - \frac{1}{2} C_p v(t)^2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

donde  $EI$  es el coeficiente de rigidez lineal, el cual, para los tramos 1 y 3 (ver Figura 3.10) vale  $EI_{1,3}$ , y para el tramo 2, donde se encuentra la lámina piezoeléctrica, vale  $EI_2$ , y cuya expresiones resultan:

$$EI_{1,3} = \frac{1}{12} c_{11}^s b_s h_s^3 \quad (4.46)$$

$$EI_2 = \frac{1}{3} \left[ c_{11}^s b_s h_s (3a^2 - 3ah_s + h_s^2) + c_{11}^p b_p h_p (3a^2 + 3ah_p + h_p^2) \right]$$

Además,  $EI_n$  es el coeficiente de rigidez no lineal válido solo en el tramo 2 debido a la elasticidad no lineal del material piezoeléctrico, y se define como:

$$EI_n = \frac{1}{2} c_{111}^p b_p h_p (4a^3 + 6a^2 h_p + 4ah_p^2 + h_p^3) \quad (4.47)$$

siendo  $a = \frac{c_{11}^s b_s h_s^2 - c_{11}^p b_p h_p^2}{2(c_{11}^s b_s h_s + c_{11}^p b_p h_p)}$  la distancia desde el centroide del compuesto hasta la parte inferior del material piezoeléctrico [100].

Continuando con los términos de la ecuación (4.45),  $J_p(x)$  es el coeficiente de acoplamiento electromecánico lineal en el tramo 2 debido al material piezoeléctrico, y se define como

$$J_p(x) = J_p f_H(x) \quad (4.48)$$

siendo

$$J_p = \frac{1}{2} e_{31} b_p (2a + h_p) \quad (4.49)$$

y  $f_H(x)$  es una función dependiente del modo de generación ( $d_{31}$  o  $d_{33}$ ) y del tipo de piezoeléctrico, que se introduce para considerar el acoplamiento únicamente en la longitud de la lámina piezoeléctrica en la cual se produce, y además, para evitar que desaparezca el término correspondiente luego de la diferenciación espacial. Para piezoeléctricos  $d_{31}$  con electrodos que cubren toda la longitud del mismo vale:

$$f_H(x) = H(x - L_1) - H(x - L_1 - L_2) \quad (4.50)$$

donde  $H(x)$  es la función Heaviside (o escalón). Sin embargo, cuando los electrodos no cubren toda la superficie del piezoeléctrico, como en el caso de los interdigitados presentados en el Capítulo 2 (MFC), el campo eléctrico se establece solo en la zona por debajo de los electrodos para la generación  $d_{31}$  (ver Apéndice C). De esta manera, el acoplamiento electromecánico solo es válido en dicha zona y, siguiendo el esquema de la Figura 4.4, la función  $f_H(x)$  vale:

$$f_H(x) = \sum_{i=1}^n [H(x - x_{i1}) - H(x - x_{i2}) + H(x - x_{i3}) - H(x - x_{i4}) + H(x - x_{i5}) - H(x - x_{i6})] \quad (4.51)$$

siendo  $n$  el número de pares de electrodos.

Las posiciones  $x_{i1}$  se calculan de la siguiente manera:

$$\text{para } i = 1: \quad x_{11} = L_1, \quad \text{para } i = k: \quad x_{k1} = x_{(k-1)6}$$

y el resto de las posiciones:

$$x_{i2} = x_{i1} + \frac{w_p}{2} \quad , \quad x_{i3} = x_{i2} + l_p$$

$$x_{i4} = x_{i3} + w_p \quad , \quad x_{i5} = x_{i4} + l_p \quad , \quad x_{i6} = x_{i5} + \frac{w_p}{2}$$

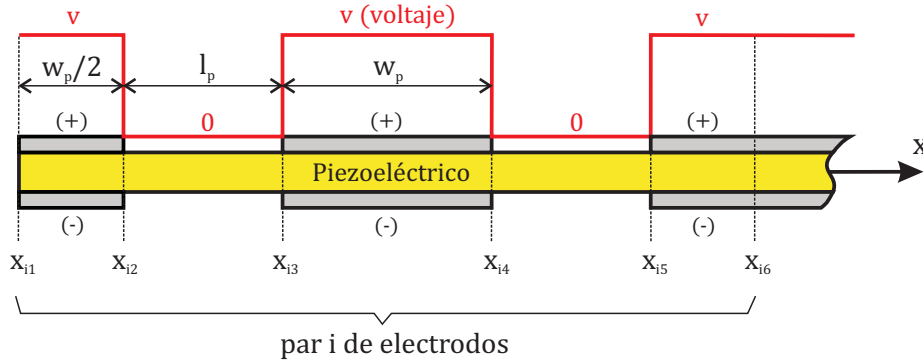


Figura 4.4 - Esquema de electrodos interdigitados para generación por  $d_{31}$ .

Volviendo a la ecuación (4.45),  $J_{pn}(x)$  es el coeficiente de acoplamiento electromecánico no lineal en el tramo 2 debido al coeficiente piezoeléctrico no lineal, y se define como:

$$J_{pn}(x) = J_{pn} f_H(x) \tag{4.52}$$

siendo:

$$J_{pn} = \frac{1}{3} e_{311} b_p (3a^2 + 3ah_p + h_p^2) \tag{4.53}$$

Finalmente, la capacidad eléctrica se calcula de la siguiente manera:

$$C_p = \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{\epsilon_{33} b_p}{h_p} dx = \frac{\epsilon_{33} b_p L_2}{h_p} \tag{4.54}$$

Dicha expresión es una aproximación, considerando que el campo eléctrico se mantiene constante en todo el largo del piezoeléctrico (ver Apéndice C).

Para culminar con la energía potencial de la viga, cabe aclarar que para los términos geométricos no lineales, solo se tomaron los términos cuadráticos provenientes de  $\epsilon_1^2$ . Además, una aproximación adicional que fue asumida, para poder obtener una expresión analítica sencilla de manipular analíticamente, es



considerar solo la componente de pequeños desplazamientos de la deformación ( $\varepsilon_1 = -zw''$ ) en la función *signo*, la cual resulta:

$$\text{sign}(\varepsilon_1) = \text{sign}(-zw'') = \text{sign}(-z) \text{sign}(w'') = -\text{sign}(z) \text{sign}(w'')$$

y como la coordenada  $z$  es siempre positiva para el caso unimorfo, se reduce a:

$$\text{sign}(\varepsilon_1) = -\text{sign}(w'') \quad (4.55)$$

Por otra parte, la energía potencial elástica de los resortes, teniendo en cuenta la deformación vertical y torsional respecto al eje  $y$ , resulta ser:

$$U_{ki} = \frac{1}{2} [k_i w(x_j, t)^2 + k_{ti} w'(x_j, t)^2] \quad , \quad i = 1, 2 \quad , \quad x_j = 0, L \quad (4.56)$$

#### 4.2.4 Energía Cinética

De manera similar a la energía potencial, la energía cinética total del sistema es la suma de las energías cinéticas de la viga y de las masas de los extremos:

$$T = T_b + T_{m1} + T_{m2} \quad (4.57)$$

Cabe aclarar que se desprecia la inercia rotacional de la viga, pero no así la de las masas de los extremos. La expresión para la viga es [25]:

$$T_b = \frac{1}{2} \left( \int_{V_s} \rho_s (\dot{w} + \dot{g})^2 dV_s + \int_{V_p} \rho_p (\dot{w} + \dot{g})^2 dV_p \right) \quad (4.58)$$

donde  $\rho_{p,s}$  es la densidad del piezoeléctrico y de la subestructura, respectivamente. Desarrollando la última ecuación y nuevamente generalizando para una longitud  $L$ , obtenemos:

$$T_b = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho A \dot{w}^2 + 2\rho A \dot{w} \dot{g}) dx + \frac{1}{2} m_t \dot{g}^2 \quad (4.59)$$

siendo  $\rho A$  la masa unitaria de la viga que para los tramos 1 y 3 vale  $\rho A_{1,3}$ , y para el tramo 2 vale  $\rho A_2$ , es decir:

$$\begin{aligned} \rho A_{1,3} &= \rho_s A_s = \rho_s b_s h_s \\ \rho A_2 &= \rho_s A_s + \rho_p A_p = \rho_s b_s h_s + \rho_p b_p h_p \end{aligned} \quad (4.60)$$

donde  $A_{p,s}$  es la sección transversal del piezoeléctrico y de la subestructura, respectivamente. Además, en el último término de la ecuación (4.59),  $m_t$  es la masa total de la viga:

$$m_t = \rho_s A_s L + \rho_p A_p L_2 \quad (4.61)$$

La energía cinética de las masas, teniendo en cuenta solamente el desplazamiento vertical y, como se dijo anteriormente, sus inercias rotacionales resulta:

$$T_{mi} = \frac{1}{2} \left\{ m_i [\dot{w}(x_j, t) + \dot{g}]^2 + J_i \dot{w}'(x_j, t)^2 \right\}, \quad i = 1, 2, \quad x_j = 0, L \quad (4.62)$$

#### 4.2.5 Energía disipada

Como ya fuera referido anteriormente, para la disipación de energía que se produce en el dispositivo, se consideran dos tipos de efectos: (a) disipación viscosa en la viga compuesta, (b) disipación por efecto Joule [101] en la resistencia de carga. Para la disipación viscosa, se propone un modelo no lineal cuadrático, siguiendo la propuesta de Stanton [32], Bandstra [102] y Yang [90] adoptando la forma:

$$F_v = c\dot{w} + c_n \dot{w}^2 \text{sign}(\dot{w}) \quad (4.63)$$

donde  $c$  y  $c_n$  son los coeficientes de amortiguamiento lineal y no lineal respectivamente, y la función  $\text{sign}(\dot{w})$  genera la disipación cuadrática.

Con el fin de poder aplicar posteriormente el principio de Hamilton para deducir las ecuaciones electromecánicas, la forma de incluir estos efectos es a través del trabajo de las fuerzas no conservativas ( $\delta W_{nc}$ ) como:

$$\delta W_{nc} = -F_v \delta w - i \delta \lambda \quad (4.64)$$

donde  $\lambda$  es el flujo eléctrico y la corriente eléctrica  $i(t)$  se calcula mediante la Ley de Ohm [103] de la siguiente manera:

$$i = \frac{\dot{\lambda}}{R_l} \quad (4.65)$$

siendo  $v = \dot{\lambda}$  el voltaje en dicha resistencia de carga.

#### 4.2.6 Principio de Hamilton

Aplicando el principio de Hamilton (ver Apéndice A) obtenemos las ecuaciones de Lagrange [97] para el sistema considerado:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial w'} \right) - \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial L}{\partial w''} \right) + c\dot{w} + c_n \dot{w}^2 \text{sign}(\dot{w}) = 0 \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial v} \right) + \frac{v}{R_l} = 0 \quad (4.67)$$

siendo el Lagrangiano  $L = T - U$ .

Desarrollando la (4.66) se obtiene la ecuación:

$$\begin{aligned} \rho A \ddot{w} + c\dot{w} + c_n \dot{w}^2 \text{sign}(\dot{w}) + EI w^{IV} + EI_n (w'''^2 + w'' w^{IV}) \text{sign}(w'') \\ + EI (w''^3 + 4w' w'' w''' + w'^2 w^{IV}) - J_p'' v \\ - v J_{pn} w^{IV} \text{sign}(w'') - v \left( J_p' w' w'' + \frac{1}{2} J_p'' w'^2 \right) \\ = -\rho A \ddot{g} \end{aligned} \quad (4.68)$$

y de la (4.67) se obtiene:

$$\begin{aligned} C_p \dot{v} + \frac{v}{R_l} + \int_0^l \left[ \left( J_p + J_{pn} w'' \text{sign}(w'') + \frac{1}{2} J_p w'^2 \right) \dot{w}'' + J_p w' w'' \dot{w}' \right] dx \\ = 0 \end{aligned} \quad (4.69)$$

#### 4.2.7 Discretización espacial de las ecuaciones

Uno de los procedimientos más utilizados para obtener una solución analítica de las ecuaciones de Lagrange para medios continuos es la discretización espacial del desplazamiento, aplicando el método estándar de expansión modal por separación de variables [104]. En este método, la deflexión de la viga es representada como una suma finita de  $N$  coordenadas generalizadas  $q_i(t)$  multiplicadas por funciones de forma modal  $\phi_i(x)$  como sigue:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \quad (4.70)$$

Las funciones de forma modal (comúnmente llamadas modos) asumidas para cada tramo de la viga compuesta, se proponen de la siguiente forma:

$$\phi_i(x) = C_1 \cos(\beta_i x) + C_2 \cosh(\beta_i x) + C_3 \sin(\beta_i x) + C_4 \sinh(\beta_i x) \quad (4.71)$$

donde los autovalores  $\beta_i$  se relacionan con las respectivas frecuencias naturales  $\omega_i$  mediante:

$$\omega_i = (\beta_i L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \quad (4.72)$$

y las constantes  $C_j$  ( $j = 1 - 4$ ) son constantes a ser determinadas por las condiciones de borde y la normalización de los modos. En el Apéndice B pueden encontrarse los detalles del problema de autovalores, incluida la normalización de los modos respecto a la masa y las mencionadas condiciones de borde.

Reemplazando la ecuación (4.70) en la (4.68), multiplicando miembro a miembro por  $\phi_i(x)$  e integrando en la longitud  $L$ , se obtiene un conjunto de  $N$  ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} M_i \ddot{q}_i + C_i \dot{q}_i + \sum_{j,k=1}^N C_{nij k} \dot{q}_j \dot{q}_k \text{sign}(\dot{q}_j) + K_i q_i \\ + \sum_{j,k=1}^N K_{nij k} q_j q_k \text{sign}(q_j) + \sum_{j,k,l=1}^N K_{Gijkl} q_j q_k q_l \\ - \left( \theta_i + \sum_{j=1}^N \theta_{nij} q_j \text{sign}(q_j) + \sum_{j,k=1}^N \theta_{Gijk} q_j q_k \right) v \\ = -M_{ai} \ddot{g} \end{aligned} \quad (4.73)$$

De manera similar, reemplazando la (4.70) en la (4.69), se obtiene la ecuación:

$$C_p \dot{v} + \frac{v}{R_l} + \sum_{i=1}^N \left( \psi_i + \sum_{j=1}^N \psi_{nij} q_j \text{sign}(q_j) + \sum_{j,k=1}^N \psi_{Gijk} q_j q_k \right) \dot{q}_i = 0 \quad (4.74)$$

La (4.73) y la (4.74) son las ecuaciones electromecánicas gobernantes del modelo del recuperador de energía que contienen el modelo no lineal más completo presentado en la presente tesis.

Al ser las funciones de forma modal normalizadas con la masa, los coeficientes de masa ( $M_i$ ), de amortiguamiento lineal ( $C_i$ ) y de rigidez lineal ( $K_i$ ) se definen como:

$$M_i = 1 \quad , \quad C_i = 2\xi_i\omega_i \quad , \quad K_i = \omega_i^2 \quad (4.75)$$

Para el amortiguamiento lineal se consideró amortiguamiento modal, siendo  $\xi_i$  el coeficiente respectivo.

Considerando el esquema de la Figura 3.10, para una configuración unimorfa en tres tramos, los restantes términos en las ecuaciones (4.73) y (4.74) se definen de la siguiente manera:

#### Amortiguamiento no lineal

$$C_{nijk} = 2\xi_{ni}\omega_i \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi_i \phi_j \phi_k \text{sign}(\phi_j) dx \quad (4.76)$$

siendo  $\xi_{ni}$  el coeficiente de amortiguamiento modal no lineal.

#### Rigidez no lineal constitutiva

$$K_{nijk} = EI_n \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi_i (\phi_j''' \phi_k''' + \phi_j'' \phi_k^{IV}) \text{sign}(\phi_j'') dx \quad (4.77)$$

#### Rigidez no lineal geométrica

$$\begin{aligned} K_{Gijkl} &= EI \int_0^L \phi_i (\phi_j'' \phi_k'' \phi_l'' + 4\phi_j' \phi_k'' \phi_l''' + \phi_j' \phi_k' \phi_l^{IV}) dx \\ &= EI_{1,3} \left( \int_0^{L_1} (...) dx + \int_{L_1+L_2}^L (...) dx \right) \\ &\quad + EI_2 \int_{L_1}^{L_1+L_2} (...) dx \end{aligned} \quad (4.78)$$

Acoplamiento lineal constitutivo (ecuación mecánica (4.73))

$$\theta_i = \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi_i J_p(x)'' dx \quad (4.79)$$

Acoplamiento no lineal constitutivo (ecuación mecánica)

$$\theta_{nij} = \int_{L_1}^{L_1+L_2} J_{pn}(x) \phi_i \phi_j^{IV} \text{sign}(\phi_j'') dx \quad (4.80)$$

Acoplamiento no lineal geométrico (ecuación mecánica)

$$\theta_{Gijk} = \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi_i \left( J_p(x)' \phi_j' \phi_k'' + \frac{1}{2} J_p(x)'' \phi_j' \phi_k' \right) dx \quad (4.81)$$

Masa forzante

$$\begin{aligned} M_{ai} &= \rho A \int_0^L \phi_i dx \\ &= \rho A_{1,3} \left( \int_0^{L_1} \phi_i dx + \int_{L_1+L_2}^L \phi_i dx \right) + \rho A_2 \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi_i dx \end{aligned} \quad (4.82)$$

Acoplamiento lineal constitutivo (ecuación eléctrica (4.74))

$$\psi_i = \gamma J_p \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi_i'' dx \quad (4.83)$$

Acoplamiento no lineal constitutivo (ecuación eléctrica)

$$\psi_{nij} = \gamma J_{pn} \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi_i'' \phi_j'' \text{sign}(\phi_j'') dx \quad (4.84)$$

Acoplamiento no lineal geométrico (ecuación eléctrica)

$$\psi_{Gijk} = \gamma J_p \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left( \phi_i' \phi_j' \phi_k'' + \frac{1}{2} \phi_j' \phi_k' \phi_i'' \right) dx \quad (4.85)$$

Es importante remarcar que los términos de acoplamiento electromecánicos  $\psi$  y  $\theta$  son diferentes ( $\psi \neq \theta$ ) debido a que el piezoeléctrico y los electrodos no cubren toda la longitud de la viga para la estructura del recuperador de electrodos interdigitados. Esta situación difiere de la mayoría de los trabajos de la literatura en donde el electrodo cubre toda la superficie del piezoeléctrico o donde se toma esta aproximación como válida. Finalmente, hay que destacar que en las últimas tres ecuaciones de acoplamiento, de la ecuación eléctrica (4.74), se incorpora un factor de corrección empírico  $\gamma$  para compensar la no uniformidad del campo eléctrico a lo largo de los electrodos. Esta última característica puede ser observada en detalle en el Apéndice C.

### 4.3 VARIANTES PARA GENERACION POR $d_{33}$

Como se ha comentado anteriormente y a partir de la descripción realizada en el Capítulo 2, la generación por medio del coeficiente piezoeléctrico  $d_{33}$  presenta diferencias importantes respecto de la generación por  $d_{31}$ . Por esta razón, la formulación matemática no escapa a estas diferencias. En esta sección se presentan las diferencias en las ecuaciones presentadas en la sección 4.2 para este modo de generación.

En primer lugar, la densidad de entalpia dada por la ecuación (4.38) para el  $d_{31}$ , se modifica de la siguiente manera:

$$H^p = \frac{1}{2}c_{11}^p \varepsilon_1^2 + \frac{1}{3}c_{111}^p \varepsilon_1^3 \text{sign}(\varepsilon_1) - e_{33} \varepsilon_1 E_1 - \frac{1}{2}e_{333} \varepsilon_1^2 E_1 \text{sign}(\varepsilon_1) - \frac{1}{2}\varepsilon_{11}^\varepsilon E_1^2 \quad (4.86)$$

donde  $e_{33} = c_{11}^p d_{33}$  es la constante piezoeléctrica lineal,  $e_{333}$  es la constante piezoeléctrica no lineal y  $\varepsilon_{11}^\varepsilon$  es la permitividad a deformación constante en la dirección  $x$ . Además,  $E_1$  es el campo eléctrico que en este caso se establece en la dirección longitudinal  $x$  de la viga y se aproxima por la expresión [18]:

$$E_1 = - \frac{v(t)}{l_p} \quad (4.87)$$

siendo  $l_p$  la distancia entre los “dedos” interdigitados de los electrodos, como se indica en la Figura 4.5. A partir de la función de entalpia y con las expresiones (4.40) se obtienen las siguientes ecuaciones constitutivas:

$$\begin{aligned} \sigma_1^p &= c_{111}^p \varepsilon_1 + c_{111}^p \varepsilon_1^2 \text{sign}(\varepsilon_1) - e_{33} E_1 - e_{333} \varepsilon_1 E_1 \text{sign}(\varepsilon_1) \\ D_1 &= e_{33} \varepsilon_1 + \frac{1}{2} e_{333} \varepsilon_1^2 \text{sign}(\varepsilon_1) + \epsilon_{11}^\varepsilon E_1 \end{aligned} \quad (4.88)$$

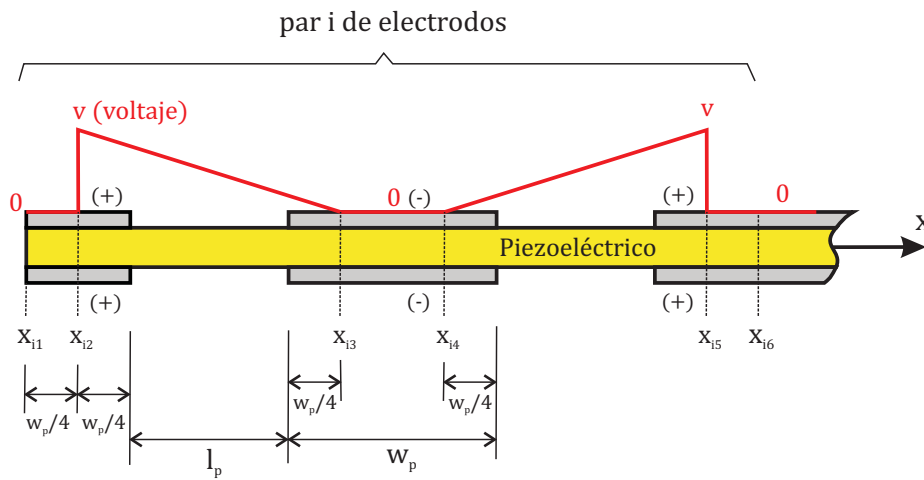


Figura 4.5 - Esquema de electrodos interdigitados para generación  $d_{33}$ .

Los cambios más significativos en la formulación matemática se dan en los coeficientes de acoplamiento electromecánico. Por un lado, para cuando los electrodos cubren toda la longitud del piezoeléctrico, el coeficiente de acoplamiento electromecánico lineal  $J_p(x)$  de la ecuación (4.48) se modifica  $J_p$  por:

$$J_p = \frac{1}{2} e_{33} b_p \frac{h_p}{l_p} (2a + h_p) \quad (4.89)$$

y la función  $f_H(x)$  es idéntica a la expresión (4.51) utilizada para la generación por  $d_{31}$ . Además, el coeficiente de acoplamiento electromecánico no lineal  $J_{pn}(x)$  de la ecuación (4.52) se modifica  $J_{pn}$  por:

$$J_{pn} = \frac{1}{3} e_{333} b_p \frac{h_p}{l_p} (3a^2 + 3ah_p + h_p^2) \quad (4.90)$$

Por otro lado, cuando los electrodos no cubren toda la longitud del piezoeléctrico, como el caso de electrodos interdigitados, es necesario realizar



ciertas correcciones en la formulación. Como se explicó en el Capítulo 2.3 y se detalla en el Apéndice C, el campo eléctrico se establece solo en la zona que se encuentra entre los “dedos” de los electrodos y de manera no uniforme. Esa no uniformidad hace que el valor del acoplamiento, y por ende la salida de voltaje del dispositivo, sea muy sensible a la geometría del piezoeléctrico. Es así que para estos casos, y en particular para piezoeléctricos constituidos por fibras, se debe tener en cuenta una geometría más detallada de la lámina piezoeléctrica, la cual considera el espesor de las láminas protectoras de poliamida (Kapton).

De acuerdo a la Figura 4.6 la ecuación (4.89) se modifica por la siguiente:

$$J_p = \frac{1}{2} e_{33} n_f b_f \frac{h_f}{l_p} (2a + 2h_k + h_f)(1 - 2\alpha) \quad (4.91)$$

donde  $n_f$  es el número total de fibras piezoeléctricas,  $b_f$  es el ancho de cada fibra y  $h_f$  y  $h_k$  son el espesor de dichas fibras y de la lámina de poliamida respectivamente. El parámetro  $\alpha$  es un factor de corrección empírico introducido para compensar la no uniformidad en el espesor del campo eléctrico [105]. Dicho parámetro es válido en el rango  $0 < \alpha < 0.5$ , siendo las condiciones extremas;  $\alpha = 0$  condición de campo totalmente uniforme en el espesor y por ende máximo acoplamiento electromecánico, y  $\alpha = 0.5$  acoplamiento nulo.

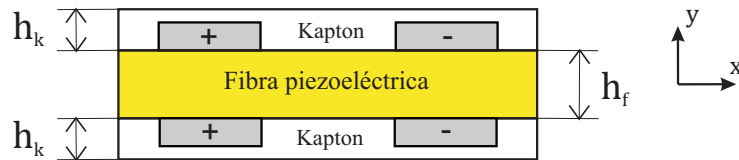


Figura 4.6 - Detalle de lámina de fibras piezoeléctricas de electrodos interdigitados

También el coeficiente no lineal de la (4.90) se modifica por:

$$J_{pn} = \frac{1}{3} e_{331} n_f b_f \frac{h_f}{l_p} [3a^2 + 3a(h_f + 2h_k) + 3h_k(h_f + h_k) + h_f^2](1 - 2\alpha) \quad (4.92)$$

Además, teniendo en cuenta la Figura 4.5, la función  $f_H(x)$  para este tipo de piezoeléctricos se calcula de la siguiente manera:

$$f_H(x) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left( 1 + \frac{x - x_{i2}}{x_{i2} - x_{i3}} \right) [H(x - x_{i2}) - H(x - x_{i3})] \right. \\ \left. + \left( \frac{x - x_{i4}}{x_{i5} - x_{i4}} \right) [H(x - x_{i4}) - H(x - x_{i5})] \right\} \quad (4.93)$$

donde las posiciones  $x_{i1}$  se determinan igual que para la generación por  $d_{31}$ , y el resto de las posiciones mediante:

$$x_{i2} = x_{i1} + \frac{w_p}{4} \quad , \quad x_{i3} = x_{i2} + l_p + \frac{w_p}{2}$$

$$x_{i4} = x_{i3} + \frac{w_p}{2} \quad , \quad x_{i5} = x_{i4} + l_p + \frac{w_p}{2} \quad , \quad x_{i6} = x_{i5} + \frac{w_p}{4}$$

Otra diferencia importante en la generación por  $d_{33}$  respecto a la de  $d_{31}$ , es la diferenciación entre los coeficientes de acoplamiento  $\theta$  de la ecuación mecánica (4.73) y los acoplamiento  $\psi$  de la ecuación eléctrica (4.74). Siguiendo los trabajos realizados por Bilgen [105], en los acoplamiento de la ecuación eléctrica se define un nuevo coeficiente  $K_p$  que reemplaza a  $J_p$  y se calcula:

$$K_p = \beta e_{33} n_f b_f (2a + 2h_k + h_f) \quad (4.94)$$

donde  $\beta$  es otro factor de corrección empírico para compensar la no perpendicularidad del desplazamiento eléctrico ( $D_1$ ) respecto de la superficie de los electrodos. Esto se puede ver claramente en el Capítulo 2.3 y se detalla en el Apéndice C.

De igual manera, se reemplaza el coeficiente no lineal  $J_{pn}$  por el coeficiente  $K_{pn}$ , y se calcula:

$$K_{pn} = \frac{1}{3} \beta e_{331} n_f b_f \frac{h_f}{l_p} [3a^2 + 3a(h_f + 2h_k) + 3h_k(h_f + h_k) + h_f^2] \quad (4.95)$$

de manera tal que los coeficientes expresados en las ecuaciones (4.83)-(4.85) se modifican por:

$$\psi_i = K_p \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi_i'' dx \quad (4.96)$$

$$\psi_{nij} = K_{pn} \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi_i'' \phi_j'' \text{sign}(\phi_j'') dx \quad (4.97)$$

$$\psi_{Gijk} = K_p \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left( \phi_i' \phi_j' \phi_k'' + \frac{1}{2} \phi_j' \phi_k' \phi_i'' \right) dx \quad (4.98)$$

Finalmente, la capacidad eléctrica se calcula de la siguiente manera:

$$C_p = n \int_0^{l_p} \frac{\epsilon_{11} b_p h_p}{l_p} dx = \frac{n \epsilon_{11} b_p h_p}{l_p} \quad (4.99)$$

recordando que  $n$  es el número de pares de electrodos. Dicha expresión es una aproximación, considerando que el campo eléctrico se mantiene constante en la dirección longitudinal entre los electrodos y en el espesor del piezoeléctrico (ver Apéndice C).

#### 4.4 CASO PARTICULAR (LINEAL)

El modelo no lineal presentado en la sección anterior es una formulación completa, la cual tiene en cuenta la mayor parte de los aspectos físicos no lineales relevantes para la generación de energía para los dispositivos presentados en esta tesis. Por ello, su resolución implica un costo computacional elevado haciendo muchas veces muy lento los procesos de optimización e identificación. Por estas razones, es importante tener un modelo simplificado y lineal, a fin de evaluar a posteriori la justificación de tener un modelo no lineal completo. Es así que en este apartado se simplifica el modelo anterior reduciéndolo al lineal sin tener en cuenta no linealidades geométricas, constitutivas ni disipativas de segundo orden. De esta manera, considerando las ecuaciones constitutivas lineales de los materiales piezoeléctricos presentados en la ecuación (4.3) y el amortiguamiento modal lineal y pequeños desplazamientos, se realiza el procedimiento presentado en el presente capítulo.

El resultado de esta simplificación reduce el sistema de las ecuaciones gobernantes (4.73) y (4.74) al siguiente sistema matricial de ecuaciones electromecánicas:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} - \boldsymbol{\theta}v = \mathbf{f} \quad (4.100)$$

$$C_p\dot{v} + \frac{v}{R_l} + \boldsymbol{\psi}\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (4.101)$$

donde  $\mathbf{f}$  es el vector forzamiento modal. Obviamente, los coeficientes no lineales  $C_{nij}, K_{nij}, K_{Gijkl}, \theta_{nij}, \theta_{Gijk}, \psi_{nij}$  y  $\psi_{Gijk}$  desaparecen y el problema se transforma en uno lineal como los que se pueden encontrar en la literatura para este tipo de casos [25].

#### 4.4.1 Solución Armónica

Para resolver el sistema de ecuaciones lineales, se propone un desplazamiento armónico de la base, del tipo:

$$g(t) = W_0 e^{i\omega t} \quad (4.102)$$

donde  $W_0$  es la amplitud del desplazamiento. Luego, la aceleración de la base resulta ser:

$$\ddot{g}(t) = -\omega^2 W_0 e^{i\omega t} \quad (4.103)$$

Por lo tanto, reemplazando la (4.103) en la (4.100), el forzamiento queda:

$$\mathbf{f} = -\mathbf{M}_a \omega^2 W_0 e^{i\omega t} = \mathbf{F} e^{i\omega t} \quad (4.104)$$

siendo  $\mathbf{F} = -\mathbf{M}_a \omega^2 W_0$  la amplitud del forzamiento armónico. Luego, la solución será armónica del tipo:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{Q} e^{i\omega t} \quad , \quad \dot{\mathbf{q}} = i\omega \mathbf{Q} e^{i\omega t} \quad , \quad \ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2 \mathbf{Q} e^{i\omega t} \\ v &= V e^{i\omega t} \quad , \quad \dot{v} = i\omega V e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4.105)$$

Reemplazando la (4.104) y las (4.105) en la (4.100) y (4.101) resulta el sistema:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{Q} - \boldsymbol{\theta}V = \mathbf{F} \quad (4.106)$$

$$\left(i\omega C_p + \frac{1}{R_l}\right)V + i\omega\boldsymbol{\theta}^t\mathbf{Q} = 0 \quad (4.107)$$

De la última ecuación obtenemos la expresión final para la amplitud del voltaje:

$$V = -i\omega\left(i\omega C_p + \frac{1}{R_l}\right)^{-1}\boldsymbol{\theta}^t\mathbf{Q} \quad (4.108)$$

Ahora, sustituyendo esta última en la (4.106) obtenemos:

$$\left[-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K} + i\omega\left(i\omega C_p + \frac{1}{R_l}\right)^{-1}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^t\right]\mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (4.109)$$

Definiendo:

$$\boldsymbol{\Gamma} = -\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K} + i\omega\left(i\omega C_p + \frac{1}{R_l}\right)^{-1}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^t \quad (4.110)$$

se pueden calcular los desplazamientos modales a partir de la ecuación (4.109) como:

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{F} \quad (4.111)$$

Una vez obtenidos los desplazamientos, es posible obtener el voltaje a partir de la (4.108) y la amplitud de la potencia eléctrica (pico) se calcula como:

$$P = \frac{V^2}{R_l} \quad (4.112)$$



# Identificación de Parámetros

---

Previo a modelar el dispositivo recuperador es importante determinar algunos parámetros que en principio no se conocen. Esto puede deberse ya sea a que no existe una fórmula apropiada para calcularlos, como es el caso de los amortiguamientos lineal y no lineal ( $\xi$  y  $\xi_n$ ) y los factores de corrección ( $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ ), o debido a que el fabricante del piezoeléctrico no los presentan en las hojas de datos, como el caso de los parámetros no lineales constitutivos ( $c_{111}^p$ ,  $e_{311}$  y  $e_{333}$ ). Para determinar estos últimos se utiliza una técnica de identificación de parámetros.

El objetivo de las técnicas de identificación es obtener los parámetros de un modelo que mejor ajusten los ensayos experimentales con las predicciones del modelo. El problema de la identificación óptima de parámetros se formula matemáticamente de la siguiente manera: dada una función  $f(\mathbf{x}): R^n \rightarrow R$  hallar  $\mathbf{x}$  tal que minimicen o maximicen dicha función  $f$  bajo ciertas restricciones, siendo  $\mathbf{x}$  el vector de parámetros del modelo. Si lo que se pretende encontrar son los parámetros de un modelo (proceso definido como identificación), se define a  $f$  como una función error o diferencia que se compone entre las predicciones numéricas del modelo y los datos experimentales. De esta manera, el problema de identificación se convierte en un problema de optimización, del cual se obtiene un conjunto de parámetros que minimizan las diferencias entre los valores derivados del modelo y los medidos experimentalmente.

El método tradicionalmente utilizado para la búsqueda de la solución del problema planteado para un sistema de ecuaciones, es el método de los mínimos cuadrados. Dado un conjunto de ecuaciones lineales o no lineales  $f_i(\mathbf{x})$ , siendo  $i$  el número de ecuaciones, el problema de los mínimos cuadrados consiste en encontrar una solución  $\mathbf{x}$ , de forma que la suma de los cuadrados de los errores para determinados valores de los parámetros sea mínima. Las condiciones ideales se tienen cuando  $f_i$  es continua, doblemente diferenciable y estrictamente convexa. Sin embargo, esto no siempre puede lograrse o es muy difícil de verificar por el carácter multidimensional de las funciones involucradas. Por lo tanto, se deben emplear diferentes metodologías desarrolladas especialmente para ello a fin de obtener el resultado deseado.

Entre la gran variedad de métodos existentes en la literatura, existen métodos que utilizan segundas y primeras derivadas, es decir utilizan la matriz hessiana y el gradiente de la función de error  $f$ , en el proceso de minimización, respectivamente. Los principales métodos de este tipo son el método de Newton, de gradiente conjugado y de máximo descenso, entre otros [106]. Por otro lado, también existen métodos que utilizan únicamente derivadas primeras como el método cuasi Newton [107] y otros que directamente no utilizan derivadas como los métodos de búsqueda aleatoria o algoritmos evolutivos [108, 109]. Sin embargo, no todos tienen la misma eficiencia para encontrar el mínimo. Generalmente, cuanto más información se utilice, es decir, cuanto mayor sea el orden de las derivadas utilizadas, más eficiente será el método en cuanto al número de iteraciones en la búsqueda de la solución. Por otra parte, conseguir toda esa información es costoso computacionalmente y, dependiendo de la función, puede hacer lento el proceso. Además, en ciertas ocasiones no se pueden calcular las derivadas primeras o segundas, por ejemplo, en funciones que no son continuas. Entonces la única solución en esos casos, es utilizar otros métodos que no usan información de derivadas.

Matemáticamente, el problema de los mínimos cuadrados se escribe de la siguiente manera [110]:

$$\min f_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r_i(\mathbf{x})^2 \quad (5.1)$$



sujeto a las restricciones de igualdades o desigualdades:

$$\begin{aligned} h_i(\mathbf{x}) &= 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \\ g_j(\mathbf{x}) &\leq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, q \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde  $r_i(x)$  es la componente  $i$ -ésima de la función residual de un total de  $m$  funciones. Además,  $h_i(\mathbf{x})$  y  $g_j(\mathbf{x})$  son las funciones de restricción.

Para resolver un problema de mínimos cuadrados los distintos métodos existentes tienen un mismo procedimiento. Por ejemplo, para un problema de una sola función  $f$  con un sólo parámetro  $x$  el método consiste en: dado un punto inicial  $x_0$  (posible solución), se construye una sucesión de puntos  $x_k$  (posibles soluciones) con la esperanza de alcanzar el mínimo de la función. Para hallar la sucesión  $x_k$  en casi todos los métodos, se construye una dirección  $d_k \neq 0$  y se obtiene  $\lambda_k$  minimizador de  $\varphi(\lambda) = f(x_k + \lambda d_k)$  cuando  $\lambda \in \mathbb{R}$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \operatorname{argmin} f(x_k + \lambda d_k) \\ x_{k+1} &= x_k + \lambda_k d_k \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde la función *argmin* es el argumento de la función a minimizar, y se debe cumplir la condición:

$$f(x_{k+1}) < f(x_k) \tag{5.4}$$

La mayor parte de los métodos de la literatura basados en el procedimiento anterior, se diferencian principalmente en la construcción de la dirección  $d_k$  [111].

El método de mínimos cuadrados basa su resolución en los algoritmos de Newton-Gauss [112], de Levenberg-Marquardt [113] o de Regiones de Confianza [114], siendo este último el utilizado en el presente trabajo. El método de Regiones de Confianza se basa en restringir la función cuadrática (7.1) a una vecindad de  $\mathbf{x}$ . Suponiendo que a partir de un punto  $\mathbf{x}$  en el espacio  $n$ -dimensional, se quiere mejorar moviéndose a un punto donde la función sea menor, la idea es aproximar  $f_i$  mediante una función  $q_i$ , que refleje razonablemente el comportamiento de la función  $f_i$  en las cercanías  $N$  del punto  $\mathbf{x}$ , siendo dicha zona  $N$  la región de confianza. Por lo tanto, para un algoritmo basado en Regiones de Confianza es necesario seleccionar una aproximación  $q_i$  definida en el punto actual  $\mathbf{x}$ , definir y modificar la

región de confianza  $N$  y la precisión del sub-problema de la región de confianza. En el método estándar de Regiones de Confianza, la aproximación cuadrática  $q_i$  está definida por los primeros dos términos del desarrollo de Taylor de  $f_i$  en las cercanías de  $\mathbf{x}$ , es decir  $N$  (en general  $N$  se toma como una esfera o un elipsoide).

En lo que sigue, todas las implementaciones numéricas de dicho método de identificación se llevan a cabo en Matlab, mediante su comando para mínimos cuadrados  $lsqnonlin(fun,x0,lb,ub)$  definiendo el algoritmo de Regiones de Confianza mediante la opción *trust-region-reflective*.

Respecto de los experimentos llevados a cabo en laboratorio, el equipamiento utilizado se puede observar en la Figura 5.1.

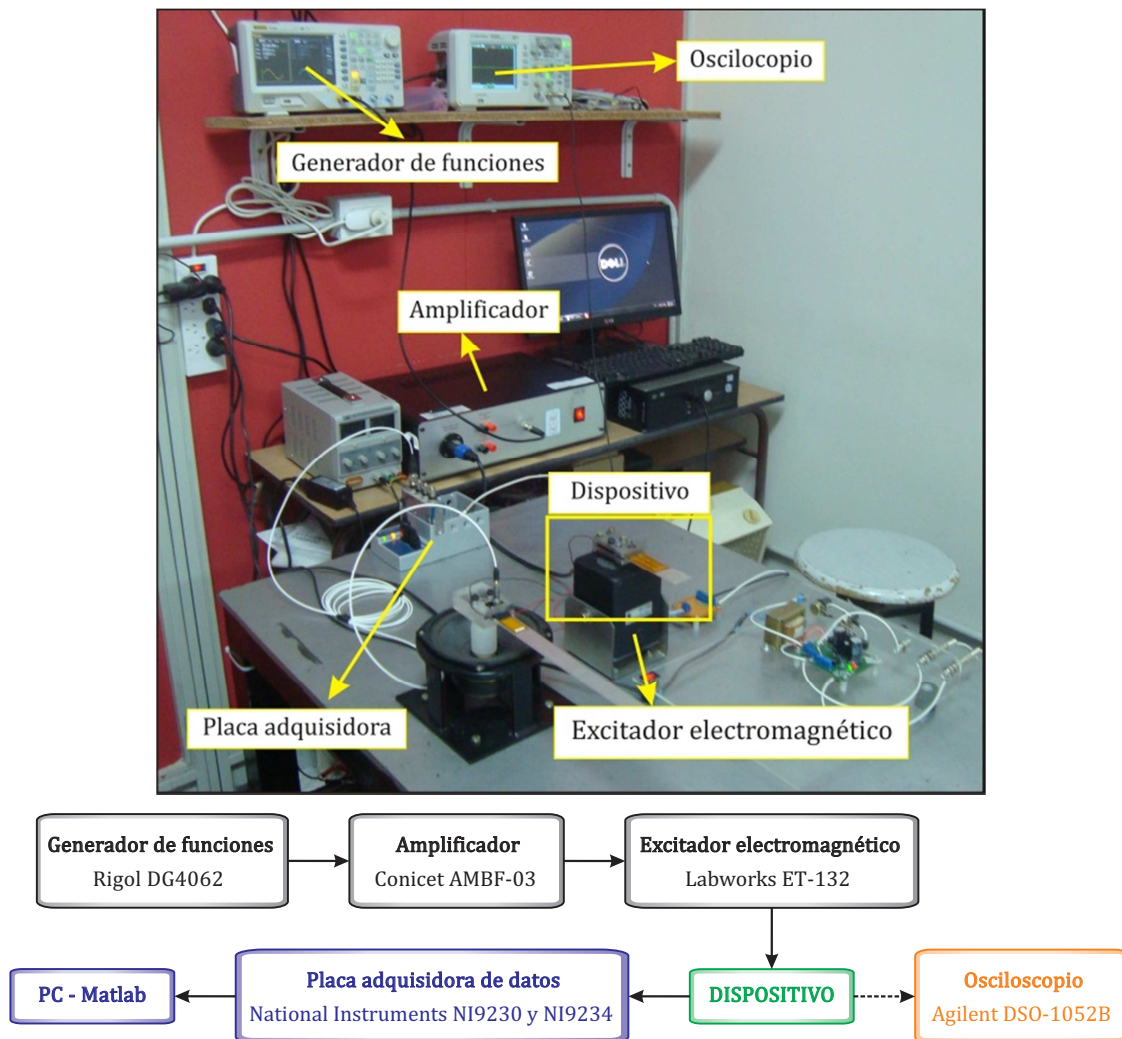


Figura 5.1 - Esquema de ensayo de laboratorio con el equipamiento utilizado.

Este esquema de medición junto con el equipamiento para llevarlo a cabo (setup) es empleado para realizar todos los ensayos experimentales de la presente tesis. Los dispositivos recuperadores de energía son excitados mediante un excitador electromecánico marca Labworks modelo ET-132. La señal de entrada es generada a través de un generador de funciones Rigol DG4062 y posteriormente amplificada por un amplificador fabricado por técnicos de Conicet (CCT-Bahía Blanca). La respuesta mecánica del dispositivo es medida por un acelerómetro PCB Piezotronics con una sensibilidad de 98.7 mV/g, en tanto que la respuesta eléctrica es obtenida de una resistencia de carga  $R_l$  en paralelo con los electrodos del piezoeléctrico. Ambas señales de salida son adquiridas por una placa National Instruments en sus dos variantes disponibles en el laboratorio del GIMAP donde fueron realizados los ensayos (NI 9230 y NI 9234) para finalmente ser procesada mediante un código propio generado en Matlab y poder ser analizadas. Paralelamente a la adquisición de datos, se emplea un osciloscopio Agilent Technologies modelo DSO 1052-B donde se puede observar la señal de voltaje generada por el dispositivo en tiempo real.

## **5.1 IDENTIFICACION EN VIGAS CANTILEVER**

Las identificaciones se llevaron a cabo para diversas configuraciones de vigas compuestas (subestructura + piezoeléctrico) en condición cantiléver, esto es empotrada-libre. La utilización de una viga en cantiléver en esta primera etapa de identificación anula o reduce cualquier inconveniente que potencialmente puede traer aparejado la incorporación de otras condiciones de vínculo, como pueden ser las articulaciones, resortes o apoyos y es uno de los sistemas continuo en vibración flexional más simple. Es por tal motivo que diversos autores han utilizado esta configuración para la identificación de parámetros mecánicos o eléctricos de este tipo de sistemas [32, 36, 87, 115].

### **5.1.1 MFC 2814-P2 ( $d_{31}$ )**

El primer caso consiste en la identificación de parámetros de una viga compuesta constituida por una lámina piezoeléctrica MFC 2814-P2 fabricada por Smart Material Corp. que fue pegada con cianoacrilato sobre la cara superior de una

subestructura de aluminio de mayor longitud. Este piezoeléctrico está fabricado para generar energía eléctrica en el modo  $d_{31}$ . En la Figura 5.2 se observa dicha viga colocada sobre el excitador electromagnético.

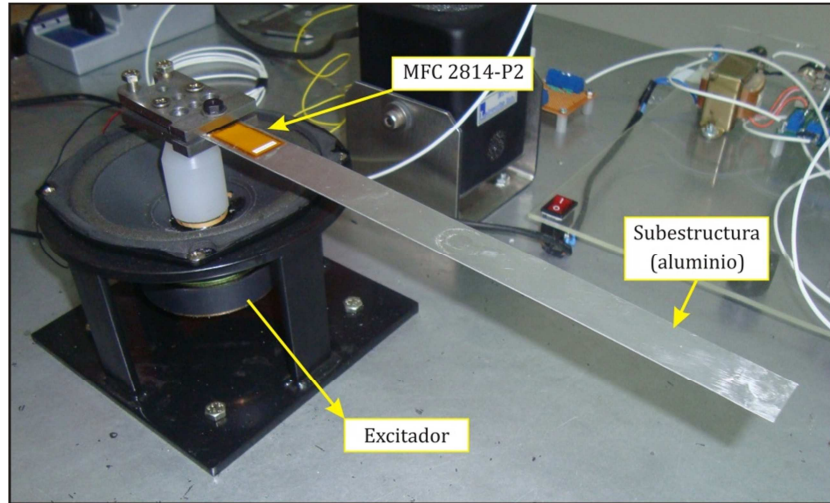


Figura 5.2 - Viga de aluminio con lámina de piezoeléctrico MFC 2814-P2 ensayada.

El objetivo principal de esta primera identificación es desarrollar una rutina en Matlab y comprobar el método de identificación, verificando la capacidad de dicho método de identificar los parámetros lineales básicos del modelo. El ensayo utilizado fue realizado a baja amplitud de excitación para asegurar un comportamiento lineal del sistema ( $<0.05$  G) y así poder describirlo con el modelo lineal simplificado presentado en el Capítulo 4.4. La identificación se realiza a partir de la ecuación (4.108) ajustando el voltaje generado en el dominio de las frecuencias:

$$V = -i\omega_2 \left( i\omega_2 C_p + \frac{1}{R_l} \right)^{-1} \frac{\theta F}{\Gamma} \quad (5.5)$$

Los valores numéricos utilizados de los principales parámetros se muestran en la Tabla 5.1. La frecuencia natural  $\omega_2$  se obtiene con la ecuación (4.72),  $M$  y  $K$  se calculan con las ecuaciones (4.75) y la capacidad  $C_p$  se mide con un multímetro Fluke 28II.

Los datos experimentales se obtuvieron mediante un barrido en frecuencia durante 60 segundos entre 35 y 50 Hz para capturar el segundo modo flexional de

vibración. Dicho modo se encuentra en una zona cercana a los 44 Hz. En este caso, no se consideró el primer modo de vibración debido a que su valor de frecuencia se encontraba cercano al valor de resonancia del excitador, lo cual dificultaba la medición.

Coefficiente	Valor
$\omega_2$	278.6 $rad/s$ (44.34 Hz)
$M$	1
$K$	77617.96
$C_p$	$2.93 \times 10^{-8} F$

Tabla 5.1 – Valores numéricos de los principales parámetros.

La amplitud de excitación de la base se mantuvo cercana a los 0.05 G, bajando a los 0.02 G en la zona de resonancia, como se puede observar en la Figura 5.3 (a), lo cual no invalida la aproximación de modelo lineal. El muestreo por segundo de la medición, al igual que en todas las mediciones que se presentarán de acá en adelante, fue de 2048 muestras por segundo y se utilizó una resistencia de carga  $R_l$  de 100 k $\Omega$ . La generación de voltaje se puede ver en la Figura 5.3 (b).

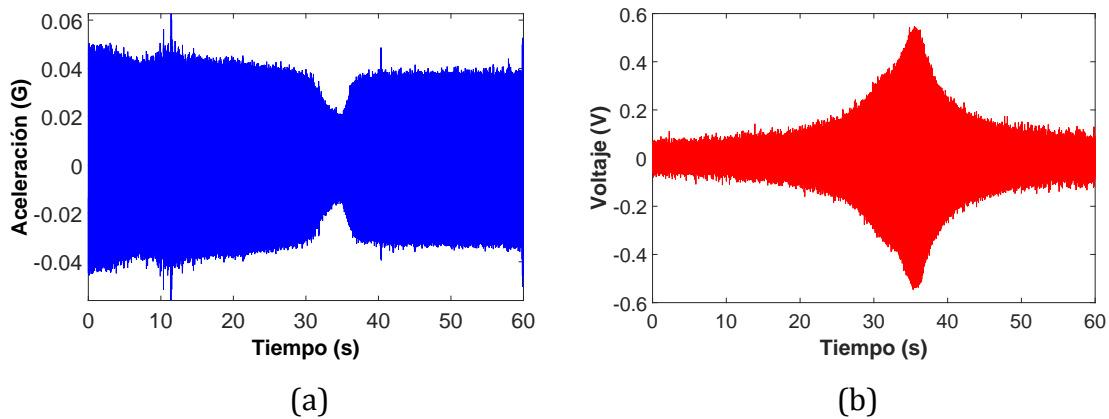


Figura 5.3 - Señal de (a) aceleración de la base y (b) voltaje generado.

Respecto a los parámetros a identificar, se dejaron libres la resistencia de carga ( $R_l$ ), el coeficiente de amortiguamiento modal ( $\xi_2$ ) y el acoplamiento electromecánico ( $\theta$ ). Esta propuesta está basada en los siguientes argumentos:

- ✓ La resistencia de carga  $R_l$  es un parámetro conocido (100 k $\Omega$  en este caso) con lo cual sirve para verificar la identificación.
- ✓ El acoplamiento electromecánico  $\theta$  se puede calcular mediante la ecuación (4.79) junto con las expresiones (4.48) y (4.49), por lo tanto la identificación servirá para comprobar dichas ecuaciones.
- ✓ Sobre el coeficiente de amortiguamiento  $\xi_2$  no se tiene conocimiento del valor ni forma de calcularlo, ya que es un valor netamente empírico, por lo tanto la identificación cumple su fin en este caso.

Las restricciones impuestas a los parámetros a identificar son:

$$0.001 \leq \xi_2 \leq 0.1$$

$$10 \leq R_l(k\Omega) \leq 100$$

$$0.001 \leq \theta \leq 0.005$$

En la Figura 5.4 se observan las curvas obtenidas con los parámetros identificados comparadas con los resultados experimentales. Se grafica la transformada de Fourier (calculada como FFT) de la señal experimental del voltaje dividida por la FFT de la señal de aceleración obteniéndose la función respuesta en frecuencia (FRF) para obtener una expresión del voltaje en términos de la excitación ( $V/G$ ). En este caso se observa un ajuste muy bueno entre los datos experimentales y el modelo propuesto. Los parámetros obtenidos luego de la identificación fueron:

$$R_l = 94.97 \text{ k}\Omega$$

$$\xi_2 = 0.0044$$

$$\theta = 0.0049$$

Respecto al valor identificado de la resistencia de carga, es un valor muy cercano al que se midió (100 k $\Omega$ ) antes de colocarla en el recuperador. Esta diferencia se debe a que dicha resistencia de carga está conectada en paralelo con la resistencia interna de la placa adquisidora National Instruments, la cual vale 2 M $\Omega$ , lo que arroja un valor de resistencia equivalente de ambas resistencias conectadas en paralelo de 95.23 k $\Omega$ , mucho más cercano al identificado. Dicho valor resulta del cálculo de un conjunto de resistencias en paralelo [116]:

$$R_{equi} = \frac{1}{\frac{1}{R_l} + \frac{1}{R_{placa}}} \quad (5.6)$$

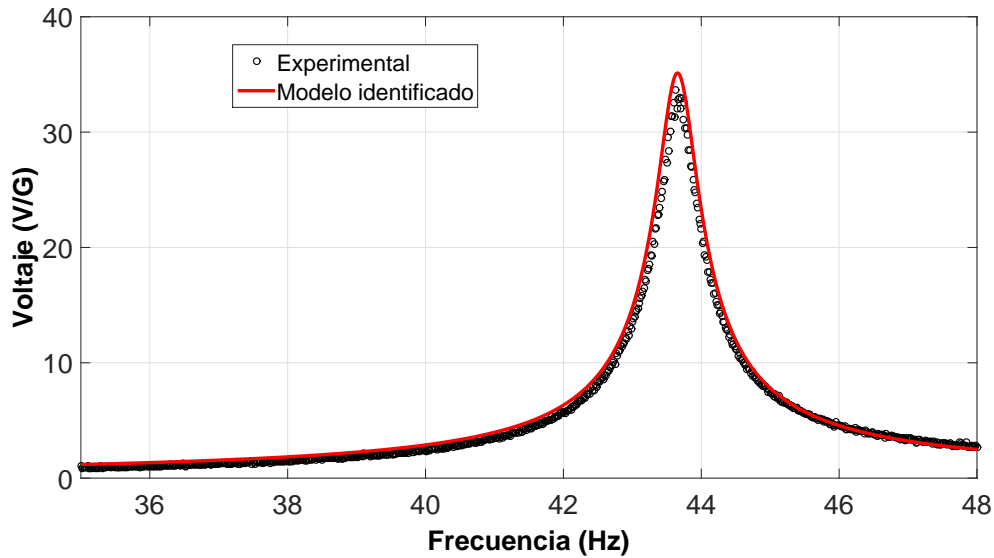


Figura 5.4 - Comparación del experimento con el modelo identificado.

Por otra parte, el amortiguamiento se encuentra dentro de los valores presentados por autores en trabajos similares [115]. Finalmente, el acoplamiento calculado con las ecuaciones arroja un valor de  $\theta = 0.0056$ , cercano al identificado. A partir de estos resultados, se puede concluir que el método de identificación seleccionado, junto con su algoritmo de resolución, es adecuado para los casos típicos de estudio que se presentan en esta tesis.

### 5.1.2 MFC 8507-P2 ( $d_{31}$ )

A partir de los resultados obtenidos para la identificación lineal, en este caso se pretende identificar los parámetros no lineales de los dos materiales piezoeléctricos principales que se utilizan en esta tesis, el MFC 8507-P2 que genera en modo  $d_{31}$  y el MFC 8507-P1 que genera por medio del  $d_{33}$ . En la Figura 5.5 se muestra la configuración experimental adoptada para el análisis, donde el material piezoeléctrico se encuentra adherido a una distancia  $L_1$  del empotramiento. En la Tabla 5.2 están los valores numéricos de los parámetros geométricos y del material. Como subestructura se utilizó una viga de acero inoxidable.

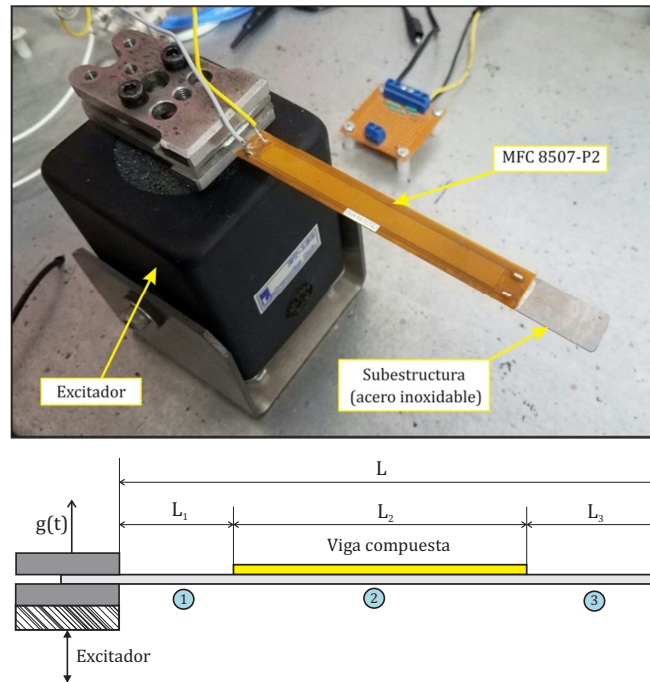


Figura 5.5 - Viga de acero inoxidable con una lámina de piezoeléctrico MFC 8507-P2 ( $d_{31}$ ) adherida a la misma.

Coefficiente	Valor	Coefficiente	Valor
$L_1$	17.2 mm	$\rho_s$	7900 kg/m <sup>3</sup>
$L_2$	85 mm	$\rho_p$	7750 kg/m <sup>3</sup>
$L_3$	21.5 mm	$c_{11s}$	193 GPa
$L$	123.7 mm	$c_{11p}$	61 GPa
$a$	0.176 mm	$C_p$	49 nF
$h_s$	0.38 mm	$d_{31}$	-190 pm/V
$h_p$	0.3 mm	$\epsilon_{33}^\epsilon$	16.81 nF/m
$b_s$	12.7 mm		
$b_p$	8 mm		

Tabla 5.2 - Parámetros geométricos y de los materiales.

Para identificar los parámetros no lineales es importante reducir el modelo no lineal completo presentado en el Capítulo 4, a un sistema de ecuaciones fáciles de resolver. Siguiendo el procedimiento utilizado por Leadenham y Erturk [36] se aplica el método de promediación (ver Apéndice D) a las ecuaciones (4.73) y (4.74), para obtener un sistema de ecuaciones algebraicas. En este caso, se obtuvieron cuatro ecuaciones para el primer modo de vibración ( $N = 1$ ) considerando un solo armónico en la solución:



$$\begin{aligned}
& -M\Omega^2 Q_1 + C\Omega Q_2 + KQ_1 - \theta V_1 + \frac{8}{3\pi} C_n \Omega^2 q Q_2 + \frac{8}{3\pi} K_n q Q_1 \\
& \quad + \frac{4}{3\pi} \theta_n \left[ \frac{(2Q_1^2 + Q_2^2)V_1 + Q_1 Q_2 V_2}{q} \right] + \frac{3}{4} K_G Q_1 q^2 \\
& \quad + \frac{1}{4} \theta_G [V_1(3Q_1^2 + Q_2^2) + 2Q_1 Q_2 V_2] + F = 0 \\
& -M\Omega^2 Q_2 - C\Omega Q_1 + KQ_2 - \theta V_2 - \frac{8}{3\pi} C_n \Omega^2 q Q_1 + \frac{8}{3\pi} K_n q Q_2 \\
& \quad + \frac{4}{3\pi} \theta_n \left[ \frac{(Q_1^2 + 2Q_2^2)V_2 + Q_1 Q_2 V_1}{q} \right] + \frac{3}{4} K_G Q_2 q^2 \\
& \quad + \frac{1}{4} \theta_G [V_2(Q_1^2 + 3Q_2^2) + 2Q_1 Q_2 V_1] = 0 \\
& C_p \Omega V_2 + \frac{V_1}{R_l} + \left[ \psi + \frac{4}{3\pi} \psi_n q + \frac{1}{4} \psi_G q^2 \right] \Omega Q_2 = 0 \\
& C_p \Omega V_1 - \frac{V_2}{R_l} + \left[ \psi + \frac{4}{3\pi} \psi_n q - \frac{1}{4} \psi_G q^2 \right] \Omega Q_1 = 0
\end{aligned} \tag{5.7}$$

donde se definen la amplitud del desplazamiento y del voltaje como  $q = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}$  y  $V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$ , respectivamente.

La identificación se lleva a cabo en dos etapas:

- (i) identificación de parámetros lineales con los ensayos realizados a baja amplitud de excitación.
- (ii) identificación de los parámetros no lineales con los ensayos a alta amplitud de excitación.

Para la primera etapa (i), se realizan ensayos estacionarios (se excita al sistema a una dada frecuencia y se espera un tiempo prudencial -algunos segundos- para eliminar el estado transitorio) a diferentes valores de frecuencia con una aceleración de la base de 0.03 G valor pico. Los valores experimentales son graficados con círculos vacíos negros en la Figura 5.6. En este caso la resistencia de carga utilizada fue de 255 k $\Omega$ . Anulando los parámetros no lineales, se identifican en simultáneo el coeficiente de amortiguamiento modal del primer modo  $\xi_1$

(incorporado a través del coeficiente  $C$ ) y el factor de corrección  $\gamma$  (presente en los acoplamientos  $\psi$ ,  $\psi_n$  y  $\psi_G$  de las ecuaciones eléctricas).

A partir de los parámetros identificados, se observa en la Figura 5.6 un satisfactorio acuerdo con los resultados experimentales. En la Tabla 5.3 se muestran los valores de los parámetros identificados.

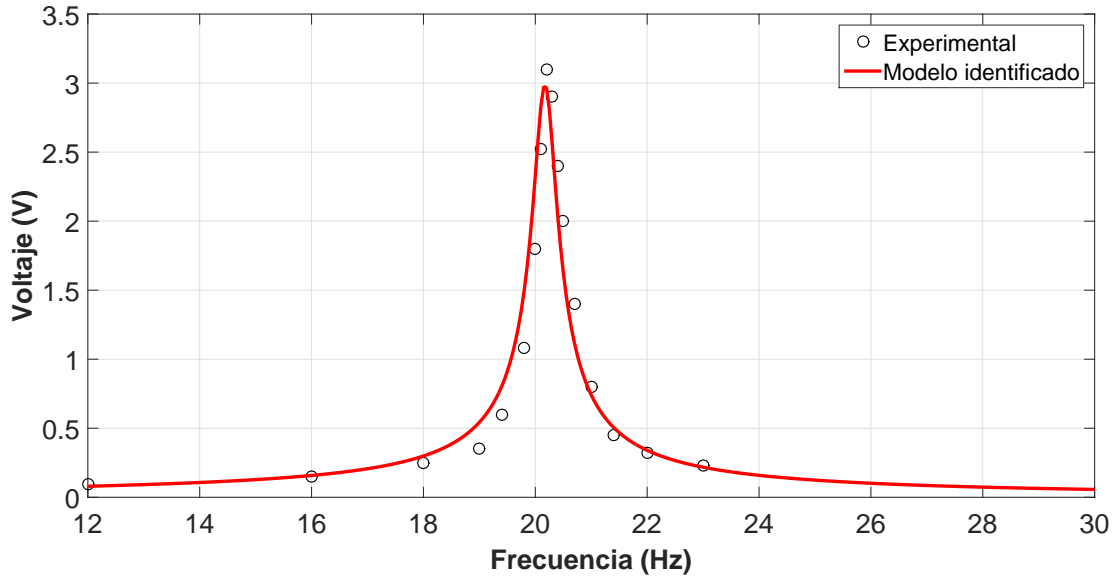


Figura 5.6 - Curvas de identificación de parámetros lineales para el MFC 8507-P2 ( $d_{31}$ ).

Coefficiente	Valor
$\xi_1$	0.0059
$\gamma$	0.65

Tabla 5.3 – Parámetros lineales identificados para el MFC 8507-P2.

En la segunda etapa (ii), fijando estos últimos parámetros, se identifican en simultáneo los siguientes parámetros no lineales: coeficiente de amortiguamiento modal  $\xi_{n1}$  no lineal (dentro del coeficiente  $C_n$ ), módulo de elasticidad  $c_{111}^p$  no lineal (incorporado en  $K_n$ ) y la constante piezoeléctrica no lineal  $e_{311}$  (presente en todos los acoplamientos electromecánicos). En este caso, los ensayos se realizan también estacionarios para determinados valores de frecuencia y para 1 G de aceleración en la base y con la misma resistencia de carga que la identificación anterior.

En la Figura 5.7 se observa el ajuste entre el modelo con todos los parámetros identificados (curva color rojo) y los datos experimentales (círculos negros), en tanto que en la Tabla 5.4 se muestran los valores de los parámetros identificados. La identificación insume un tiempo de 33 segundos, con un error RMS de 1.29 V y un error porcentual medio de 7.62 %. Nuevamente se observa un adecuado ajuste con los datos experimentales en todo el rango de frecuencias ensayado.

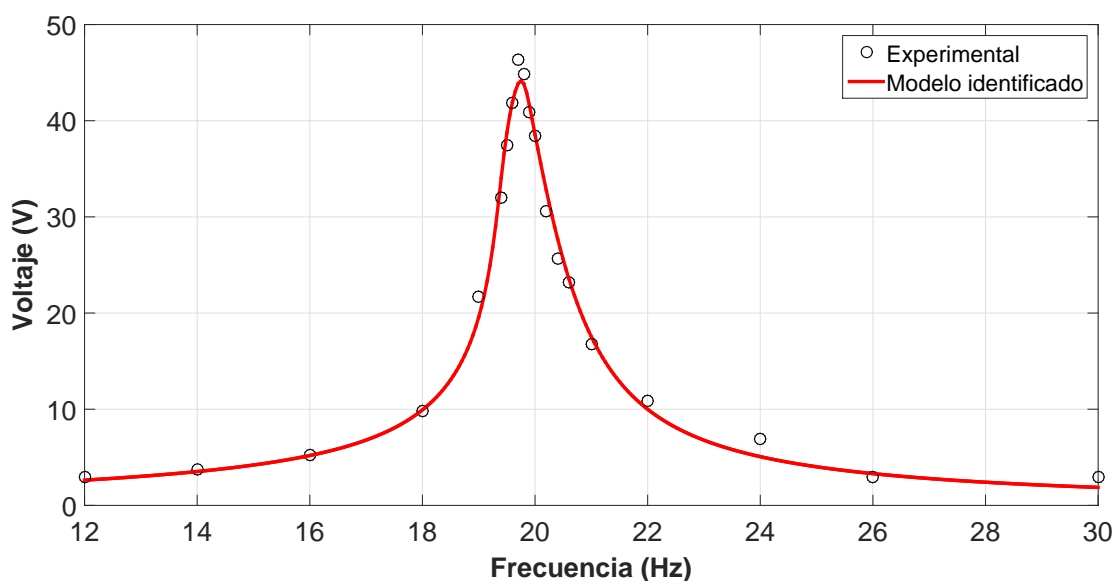


Figura 5.7 - Curvas de identificación de parámetros no lineales para el MFC 8507-P2.

Coficiente	Valor
$\xi_{n1}$	$3.0071 \times 10^{-4}$
$c_{111}^p$	$-2.685 \times 10^{12}$
$e_{311}$	$9.4553 \times 10^3$

Tabla 5.4 – Parámetros no lineales identificados para el MFC 8507-P2 ( $d_{31}$ ).

Finalmente, para validar los valores no lineales identificados, se comparó el modelo con ensayos experimentales realizados a diferentes aceleraciones, 0.1 G y 0.5 G. En la Figura 5.8 se muestran todas las curvas generadas con el modelo y los datos experimentales para 0.03 G, 0.1 G, 0.5 G y 1 G de aceleración. Se observa que el modelo tiene una buena predicción en la generación de voltaje para distintos

valores de excitación. Cuando la aceleración es de 0.1 G y 0.5 G, el modelo sobrestima la generación de voltaje, sin embargo dicha sobreestimación es considerada aceptable.

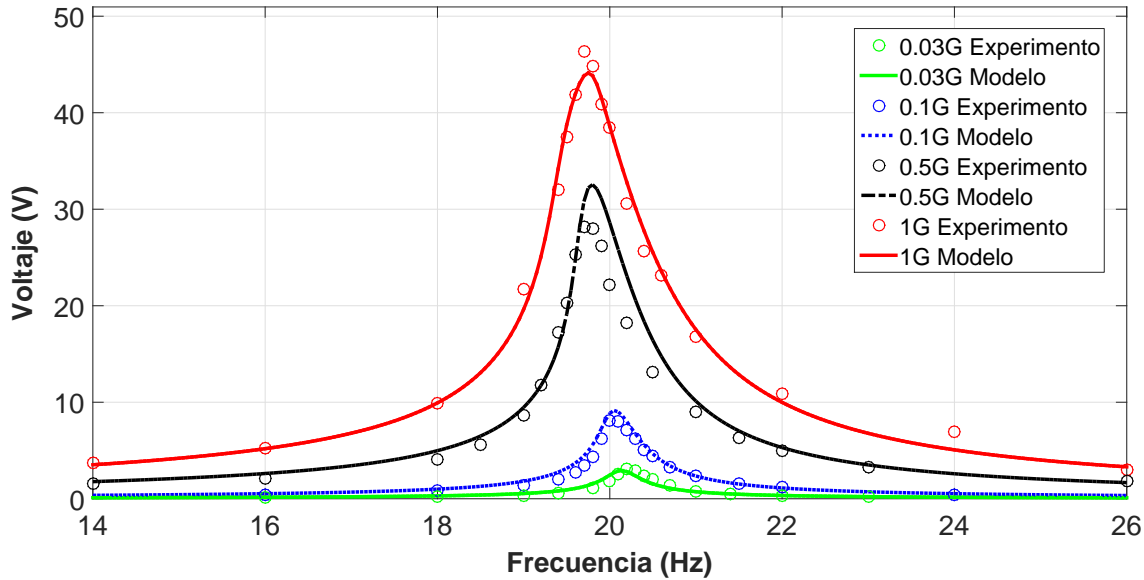


Figura 5.8 - Curvas experimentales vs. identificadas para el MFC 8507-P2.

Observando esta última figura se puede ver que a medida que aumenta la aceleración de excitación, la curva de respuesta en frecuencia se inclina (traslada) hacia la izquierda (fenómeno conocido como ablandamiento o *softening* en inglés) modificando la frecuencia resonante del sistema. El valor del pico resonante experimenta un corrimiento de 0.5 Hz al pasar de 0.03 G a 1 G de aceleración lo cual representa una diferencia porcentual del 2.5 %. Este efecto es típico del comportamiento no lineal que presenta el material piezoeléctrico cuando es sometido a grandes aceleraciones como puede verse en trabajos de otros autores [31, 36, 87]. En relación al modelo matemático, la introducción de dicho corrimiento se debe al parámetro no lineal  $c_{111}^p$ .

Por otra parte, el pico máximo de amplitud de voltaje no aumenta de manera lineal respecto al aumento en la excitación. Esto se puede ver claramente en la Figura 5.9, en la que se comparan los resultados obtenidos con el modelo lineal, el no lineal y los datos experimentales. La generación de voltaje obtenida a partir del modelo lineal se aleja de los valores experimentales a medida que aumenta la

aceleración y sólo es válido para valores inferiores a 0.1 G de aceleración. Este comportamiento del material piezoeléctrico tiene relación directa con el amortiguamiento no lineal  $\xi_{n1}$  y la constante piezoeléctrica no lineal  $e_{311}$ . De esta manera, se establece claramente la gran influencia de los efectos no lineales del material piezoeléctrico sobre la predicción de la generación de voltaje en un estado resonante, inclusive para valores pequeños de aceleración.

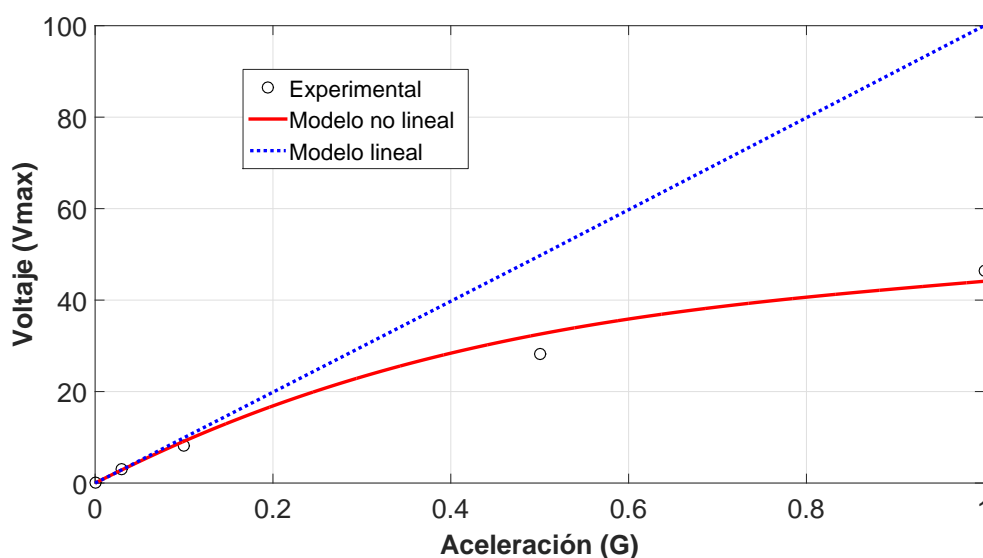


Figura 5.9 - Voltaje en función de la aceleración de excitación.

### 5.1.3 MFC 8507-P1 ( $d_{33}$ )

De manera similar a lo realizado para el piezoeléctrico MFC 8507-P2 ( $d_{31}$ ), se realiza la identificación para el MFC 8507-P1 que fue construido para generar energía eléctrica en el modo  $d_{33}$ . La configuración del sistema de medición es similar a la mostrada en la Figura 5.5 con la lámina piezoeléctrica adherida a una viga de acero inoxidable como subestructura. En la Tabla 5.5 figuran los valores numéricos de los parámetros geométricos y materiales de los elementos utilizados.

En una primera etapa se identifican los parámetros lineales con los datos experimentales tomados con una aceleración de 0.03 G de excitación. En este caso, se identifica el coeficiente de amortiguamiento modal  $\xi_1$ , y los factores de corrección empíricos  $\alpha$  y  $\beta$  (ver Capítulo 4.3). En la Figura 5.10 se muestran los resultados experimentales (círculos negros) y la curva del modelo con los parámetros

identificados (color rojo), en tanto que la Tabla 5.6 proporciona los valores numéricos de los parámetros identificados. En este caso, el ajuste no es lo suficientemente bueno como en el caso del piezoeléctrico anterior.

Coficiente	Valor	Coficiente	Valor
$L_1$	17.6 mm	$\rho_s$	7900 kg/m <sup>3</sup>
$L_2$	85 mm	$\rho_p$	7750 kg/m <sup>3</sup>
$L_3$	21.8 mm	$c_{11}^s$	193 GPa
$L$	124.4 mm	$c_{11}^p$	61 GPa
$a$	0.176 mm	$C_p$	1.5 nF
$h_s$	0.38 mm	$d_{33}$	440 pm/V
$b_s$	12.7 mm	$\epsilon_{11}^\epsilon$	15.3 nF/m
$h_f$	0.18 mm		
$b_f$	0.355 mm		
$h_k$	0.06 mm		
$l_p$	0.41 mm		
$w_p$	0.097 mm		
$n_f$	18		

Tabla 5.5 – Parámetros geométricos y materiales del MFC 8507-P1 ( $d_{33}$ ).

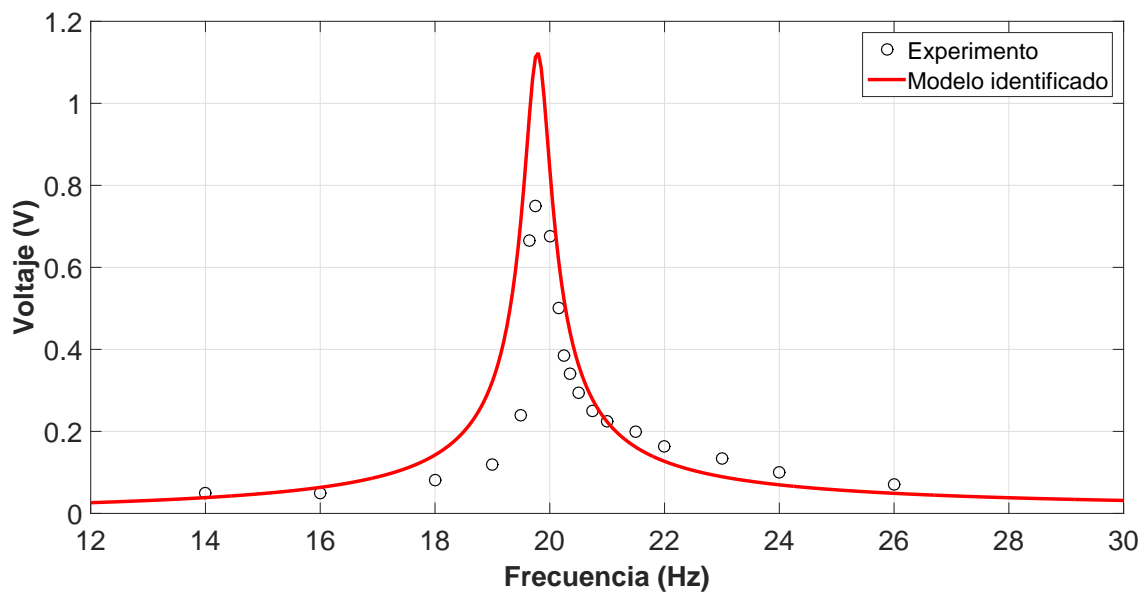


Figura 5.10 - Curvas de identificación de parámetros lineales para el MFC 8507-P1.

Coefficiente	Valor
$\xi_1$	0.0115
$\alpha$	0.2
$\beta$	0.2

Tabla 5.6 – Parámetros lineales identificados para el MFC 8507-P1 ( $d_{33}$ ).

Con los parámetros lineales ajustados, al igual que se hizo anteriormente, se identifican los parámetros no lineales con los datos experimentales obtenidos en las mediciones para 1 G de aceleración. Al igual que en caso anterior, se identifican  $\xi_{n1}$ ,  $c_{111}^p$  y  $e_{333}$ .

En la Figura 5.11 se muestran los datos experimentales con círculos negros y la curva del modelo con los parámetros identificados en color rojo mientras que en la Tabla 5.7 se observan los valores numéricos de los parámetros identificados. En este caso la identificación insume un tiempo de 4.44 segundos, con un error RMS de 2.29 V con un error porcentual medio de 11.32 %. Como se puede observar en la Figura 5.11, el ajuste es satisfactorio tanto en la amplitud del pico de resonancia como en la condición fuera de resonancia.

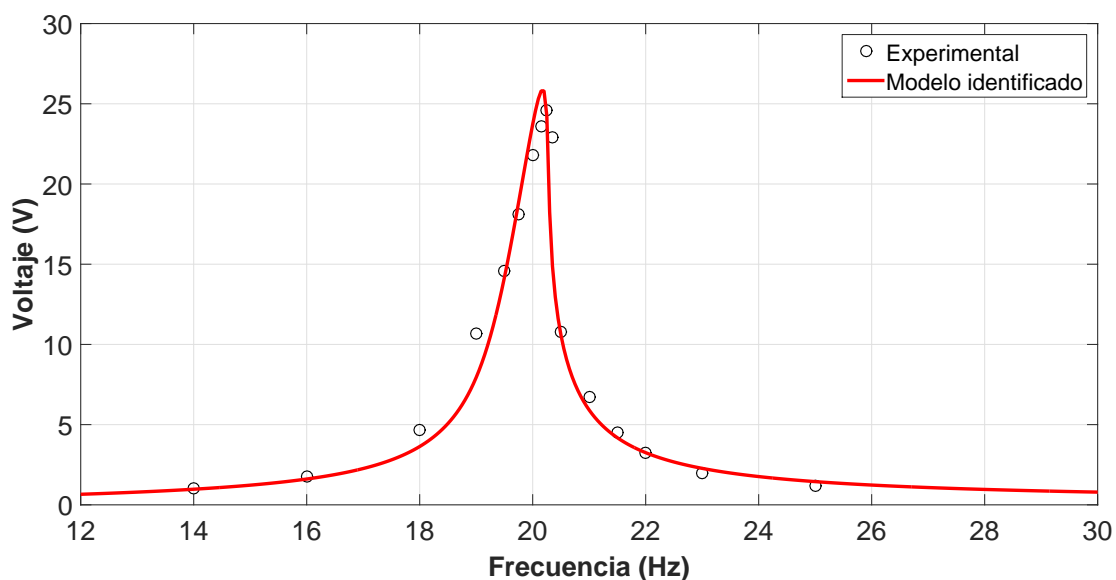


Figura 5.11 - Curvas de identificación de parámetros no lineales para el MFC 8507-P1.

Coficiente	Valor
$\xi_{n1}$	$1.387 \times 10^{-4}$
$c_{111}^p$	0
$e_{333}$	$6.5663 \times 10^4$

Tabla 5.7 – Parámetros no lineales identificados para el MFC 8507-P1 ( $d_{33}$ ).

Una vez obtenidos los parámetros no lineales, se procede de manera similar que para el anterior piezoeléctrico, es decir, se consideran los mismos parámetros y se comparan con resultados experimentales para valores intermedios de aceleración de la base, 0.1 G y 0.5 G. Todas las curvas generadas con el modelo y los puntos experimentales se pueden ver en la Figura 5.12. Para estos últimos dos valores de aceleración (curvas color negro y azul) se observa una excelente predicción por parte del modelo identificado, validando de esta manera el modelo y los parámetros obtenidos en este rango de aceleraciones.

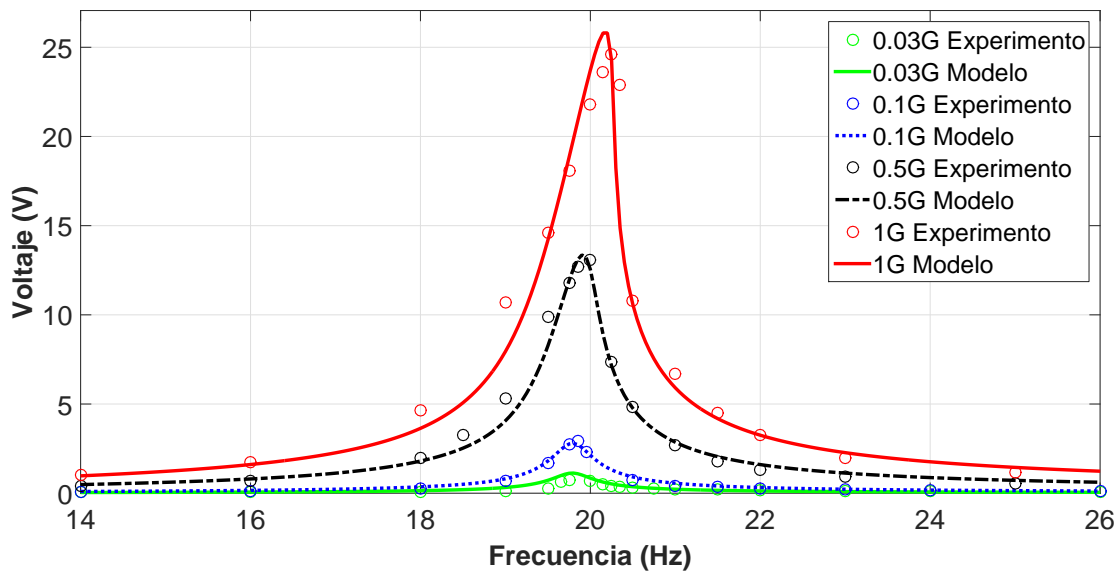


Figura 5.12 - Curvas experimentales vs. identificadas para el MFC 8507-P1 ( $d_{33}$ ).

Contrario a lo observado para el piezoeléctrico MFC 8507-P2 ( $d_{31}$ ), en este caso las curvas experimentales muestran una inclinación hacia la derecha produciendo un aumento de 0.5 Hz de la frecuencia del sistema al incrementar la aceleración de 0.03 G a 1 G lo que representa también una diferencia porcentual del 2.5%. La explicación a tal comportamiento se centra en el efecto que produce la no linealidad geométrica,



la cual induce en el sistema un endurecimiento de la estructura, justificando de esta manera la inclusión de dicha no linealidad en la formulación. Este razonamiento se valida experimentalmente, dado que al medir el desplazamiento en el extremo libre de la viga, el mismo arrojó un valor de 60 mm pico a pico, representando casi un 50 % de la longitud de la misma.

Es importante destacar que en este caso el procedimiento identifica una elasticidad no lineal ( $c_{111}^p$ ) igual a cero. Esto podría deberse a la diferencia morfológica que presentan los electrodos interdigitados para generación por modo  $d_{31}$  y por modo  $d_{33}$ , como se puede ver en la Figura 5.13. Para el caso  $d_{33}$ , la estructura discontinua de electrodos interdigitados aporta menor rigidez que la estructura continua interconectada presente en los electrodos del caso  $d_{31}$ .

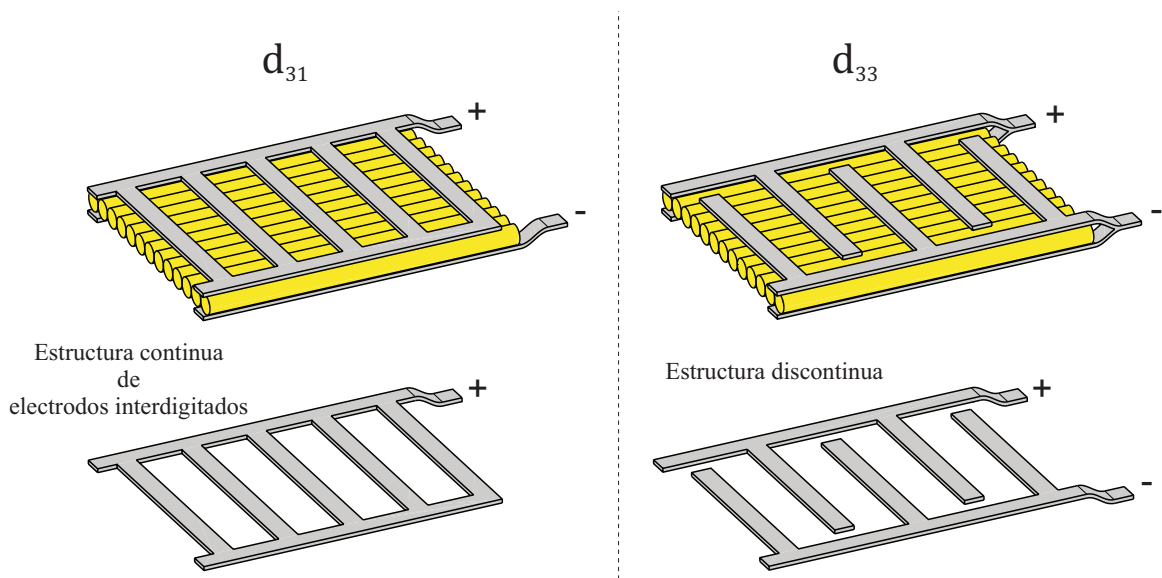


Figura 5.13 - Morfología de los electrodos interdigitados de los MFC 8507 (a) P2- $d_{31}$  y (b) P1- $d_{33}$ .

Por otra parte, en la Figura 5.14 se muestra la variación de la amplitud del voltaje en el estado resonante (máximo voltaje) con la aceleración de la base. Se observa un comportamiento muy cercano al lineal, acentuándose un poco la diferencia a medida que la aceleración aumenta.

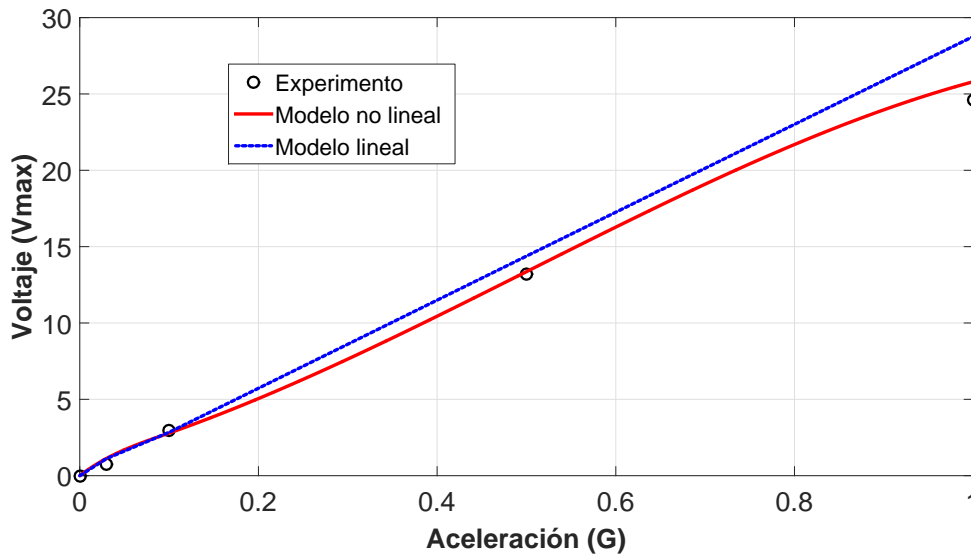


Figura 5.14 - Voltaje en función de la aceleración de excitación para el MFC 8507-P1.

Como corolario a los resultados obtenidos de la identificación y considerando la generación de voltaje de una viga cantiléver con el modo  $d_{31}$  y  $d_{33}$ , se observa una mayor generación en el modo  $d_{31}$  que en el modo  $d_{33}$  para todas las aceleraciones.

#### 5.1.4 MIDE QP16N ( $d_{31}$ )

Finalmente, se identifica una viga compuesta con una lámina de piezoeléctrico MIDE QP16N cuya generación es por medio del modo  $d_{31}$ . La subestructura sobre la que se adhiere el piezoeléctrico es de aluminio como se muestra en la Figura 5.15.

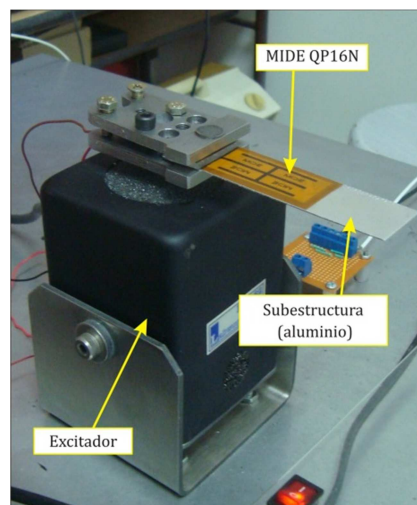


Figura 5.15 - Viga de aluminio con lámina de piezoeléctrico MIDE QP16N ( $d_{31}$ ).

En la Tabla 5.8 figuran los valores numéricos de los parámetros geométricos y materiales de la viga ensayada. La identificación se realiza en este caso para testear la versatilidad del método y del modelo ante condiciones completamente diferentes a las realizadas en las secciones anteriores. Por un lado, el piezoeléctrico es totalmente diferente ya que no posee electrodos interdigitados, sino que los electrodos cubren toda la superficie del material. Por otra parte, la subestructura utilizada es de otro material (aluminio) y más corta en comparación con los casos anteriores, por lo que la frecuencia de resonancia registra un valor mucho más alto a los identificados anteriormente (102 Hz aproximadamente).

Coefficiente	Valor	Coefficiente	Valor
$L_1$	0 mm	$\rho_s$	2700 kg/m <sup>3</sup>
$L_2$	44.2 mm	$\rho_p$	7800 kg/m <sup>3</sup>
$L_3$	34 mm	$c_{11s}$	70 GPa
$L$	78.2 mm	$c_{11p}$	67 GPa
$a$	0.146 mm	$C_p$	56.02 nF
$h_s$	0.5 mm	$d_{31}$	-190 pm/V
$h_p$	0.254 mm	$\epsilon_{33}^{\epsilon}$	15.04 nF/m
$b_s$	26.4 mm		
$b_p$	20.57 mm		

Tabla 5.8 – Parámetros geométricos y materiales del MIDE QP16N.

En este caso se identifican todos los parámetros en simultáneo (tanto lineales como no lineales) debido a que no se puede ensayar la viga a baja amplitud de excitación de la base ya que la generación es del orden de la resolución del instrumento de medición (10 mV). Por esto, los ensayos se realizan a 0.1 G, 0.2 G, 0.5 G, 1 G, 2 G y 3 G de aceleración y con una resistencia de carga de 100 k $\Omega$ . La identificación se realiza con los datos experimentales de la mayor aceleración (3 G) y en la Figura 5.16 se comparan los resultados del experimento (círculos negros) con el modelo identificado (curva color rojo). Se puede observar un ajuste muy bueno en todo el rango de frecuencias, tanto en el valor del pico de resonancia como fuera del mismo. En la Tabla 5.9 se muestran los valores de los parámetros identificados. La identificación tarda un tiempo de 10.3 segundos, con un error RMS de 0.38 V y un error porcentual medio de 2.64 %.

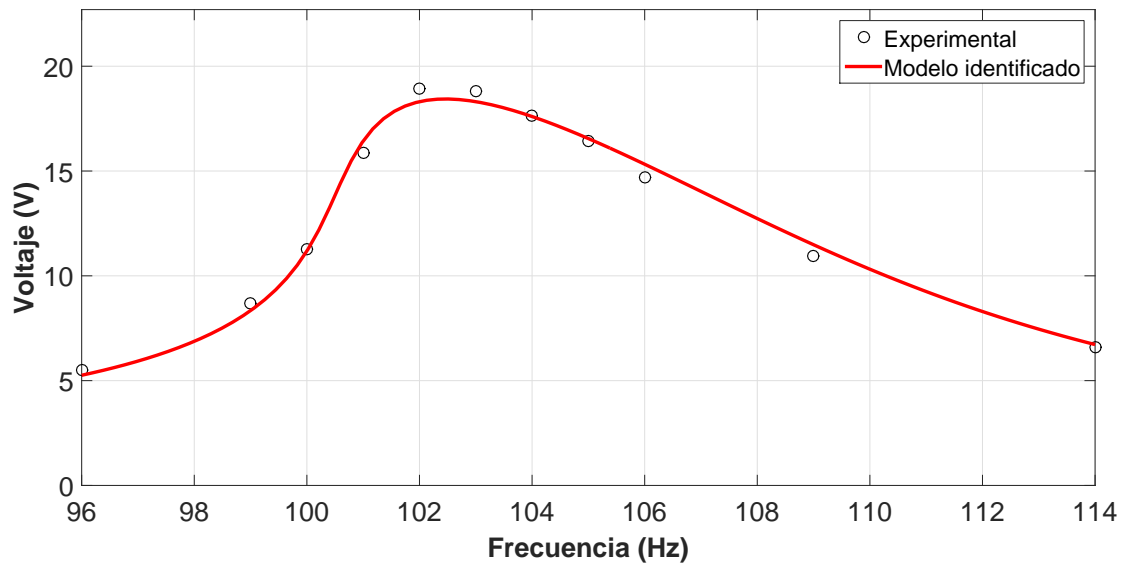


Figura 5.16 - Curvas de identificación de parámetros no lineales para el MIDE QP16N.

Coeficiente	Valor
$\xi_1$	0.019
$\xi_{n1}$	$3.2665 \times 10^{-4}$
$c_{111}^p$	$-8.228 \times 10^{13}$
$e_{311}$	$1.111 \times 10^4$

Tabla 5.9 – Parámetros identificados para el MIDE QP16N.

De manera similar a lo realizado con los piezoeléctricos anteriores, terminada la identificación de parámetros se realizan los experimentos para validar los parámetros del modelo analítico propuesto mediante ensayos para diferentes amplitudes de aceleración de la excitación. En la Figura 5.17 se observan todas las curvas de voltaje eléctrico obtenidas con el modelo identificado y los datos experimentales. Bajo cualquier excitación de la base el modelo reproduce con gran exactitud la generación del piezoeléctrico en todo el rango de frecuencia, verificando nuevamente la precisión del modelo no lineal propuesto en el Capítulo 4.2. En cuanto a los resultados, se observa que a medida que la aceleración de excitación aumenta, la curva de respuesta en frecuencia se inclina hacia la izquierda, modificando así tanto la amplitud de voltaje generado como la frecuencia natural del sistema. En este caso se produce un decremento de 6 Hz de la frecuencia del sistema al incrementar la aceleración de 0.1 G a 3 G lo que representa una diferencia

porcentual de 5.5%. A diferencia de lo que sucedía con los piezoeléctricos MFC en los casos anteriores, aquí no se observa el efecto de la no linealidad geométrica, lo cual reviste de sentido ya que al ser más corto el sistema respecto de los casos anteriores, los desplazamientos en el extremo de la viga no son lo suficientemente grandes y predominan los restantes efectos no lineales considerados en el modelo.

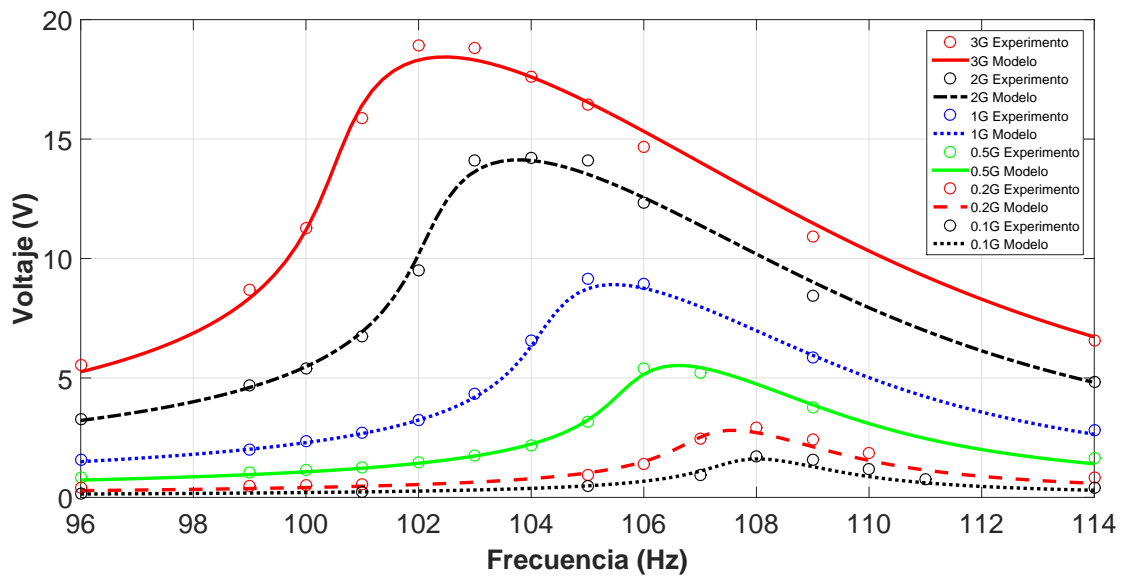


Figura 5.17 - Voltaje en función de la frecuencia para el modelo analítico no lineal y resultados experimentales con el MIDE QP16N.

La influencia de los términos no lineales es ilustrada en la Figura 5.18. Allí se pueden observar las curvas de respuesta en frecuencia experimentales y las respuestas del modelo lineal y no lineal propuesto para los diferentes niveles de aceleración. Claramente se observa que a medida que aumenta la aceleración de excitación, la predicción del modelo lineal se aleja drásticamente de los resultados experimentales. Los valores de voltaje obtenidos a partir del modelo lineal sobreestiman hasta tres veces el valor máximo de amplitud para el caso de mayor aceleración, 3 G.

En cuanto a la frecuencia natural del sistema se observa una disminución desde 108.6 Hz para 0.1G hasta 102 Hz para la máxima excitación de 3 G, es decir un corrimiento porcentual en frecuencia hacia la izquierda de 6%.

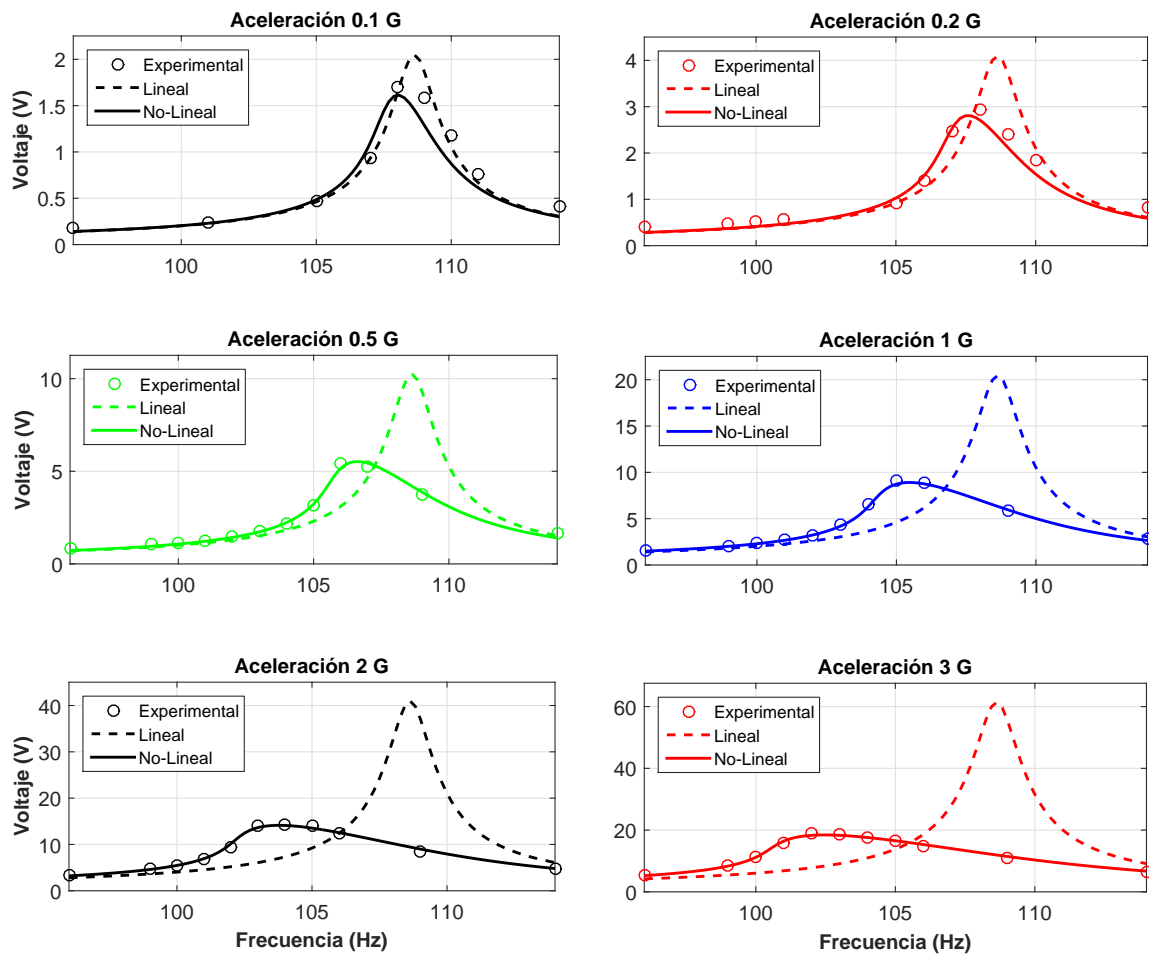
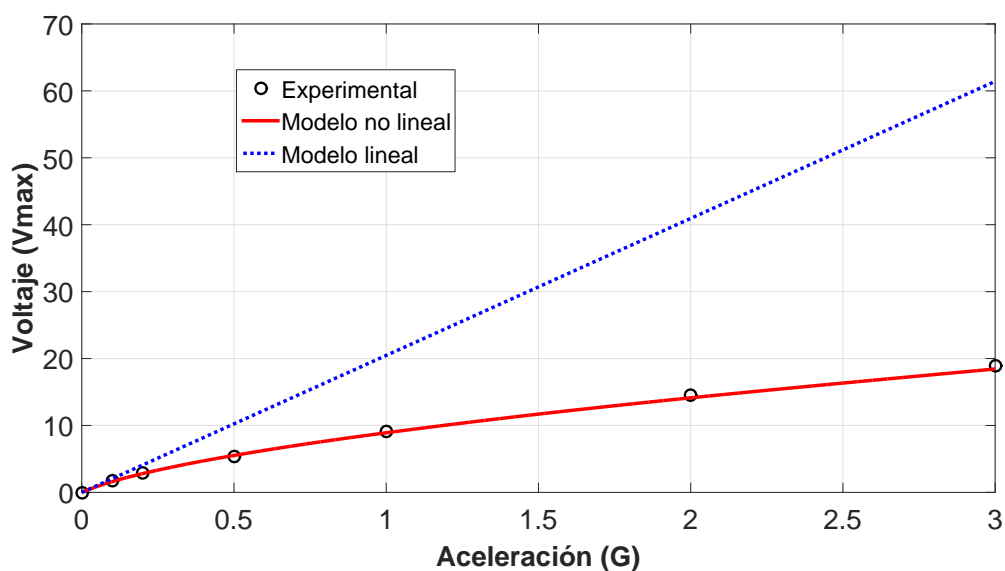


Figura 5.18 - Comparación del voltaje generado en función de la frecuencia para el modelo lineal, no lineal y experimental para diferentes valores de aceleración.

En la Figura 5.19 se muestra la generación de voltaje para los dos modelos, lineal y no lineal, y los resultados experimentales en función del valor de la aceleración de excitación. Para este caso en particular, al igual que para el piezoeléctrico MFC 8507-P2, se observa que la generación de voltaje a partir del modelo lineal no reproduce con exactitud los valores experimentales o, en tal caso sólo es válido para una aceleración menor a 0.1 G.

A raíz de la evidencia presentada por todos los casos estudiados, se puede afirmar que la influencia de los efectos no lineales del material piezoeléctrico es determinante para predecir la generación de voltaje correcta para aceleraciones que superen los 0.1 G en condición resonante. Adicionalmente, las curvas del modelo no

lineal propuesto predicen con muy buena precisión los resultados experimentales para todo el rango de excitación lo que convalida la captura del modelo a fenomenología física que ocurre en los materiales piezoeléctricos a grandes deformaciones.



*Figura 5.19 - Voltaje en función de la aceleración de excitación para los diferentes modelos considerados: lineal, no lineal y experimentos.*

Finalmente, en la Figura 5.20 se muestran las respuestas temporales del voltaje y las aceleraciones de excitación para frecuencias de excitación de 96 Hz, 102 Hz y 114 Hz apreciándose claramente la respuesta periódica y armónica del sistema, tanto en resonancia como fuera de la misma. Del diagrama espectral se puede observar que la respuesta temporal está predominada por el primer armónico, justificando de esta manera la elección de considerar solo el primer armónico en el método de promediación presentado en la ecuación (5.7).

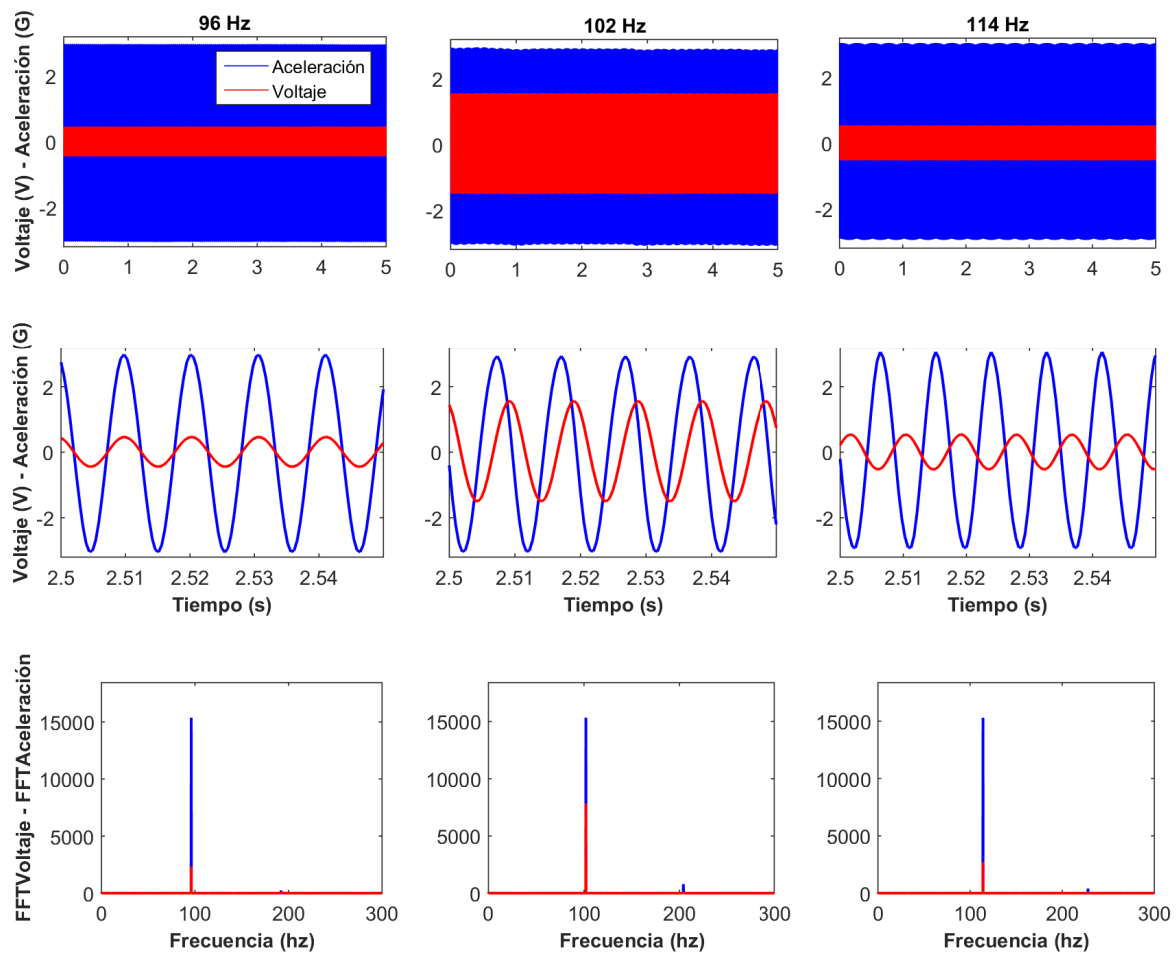


Figura 5.20 - Respuesta temporal y en frecuencia correspondiente a los experimentos a 96, 10 y 114 Hz.

## 5.2 EFECTOS DE LOS PARAMETROS NO LINEALES

Para entender con mayor profundidad el efecto físico que provoca cada uno de los parámetros del modelo no lineal sobre la respuesta del sistema, en este capítulo se realiza un estudio de la variación de cada uno de los parámetros no lineales con el fin de evaluar la sensibilidad del modelo a estos parámetros. Para ello se resuelve el modelo presentado con las ecuaciones (5.7) para distintos valores de un determinado parámetro, dejando fijo los restantes. En una primera instancia se evalúan los parámetros asociados con la generación por medio del coeficiente  $d_{31}$  en tanto que en una segunda etapa se evalúan los parámetros particulares de la generación por  $d_{33}$ . El análisis se realiza con los valores numéricos de las vigas



compuestas con los piezoeléctricos MFC 8507-P1 y P2. Además de los parámetros no lineales, se consideran también los factores de corrección empíricos de cada modelo.

### 5.2.1 Generación por $d_{31}$

Respecto a los parámetros asociados a la generación por  $d_{31}$ , el primero que se analiza es el factor de corrección  $\gamma$ , el cual se incluye en el modelo de electrodos interdigitados para compensar la no uniformidad del campo eléctrico a lo largo de los electrodos (ver Capítulo 4.2 ecuación (4.85)). En la Figura 5.21 se muestra la generación de voltaje para distintos valores del parámetro  $\gamma$ . Allí se puede ver que este factor de corrección tiene efecto sobre todo el rango de frecuencia, aunque es mayor la incidencia en la región que corresponde a la frecuencia de resonancia (20–21 Hz), aumentando o disminuyendo la amplitud del pico del resonancia y de toda la curva de voltaje en general según sea mayor o menor dicho coeficiente, respectivamente. Adicionalmente debe observarse que los valores identificados están dentro de los valores de variación propuestos para realizar el estudio  $0.5 \leq \gamma \leq 1$ .

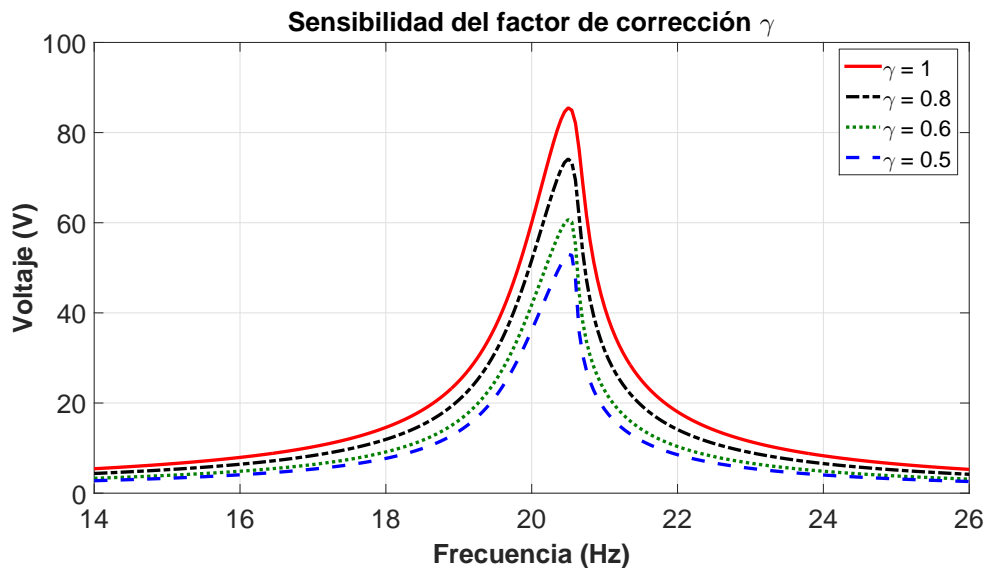


Figura 5.21 - Variación del voltaje para distintos valores del factor de corrección  $\gamma$  considerando el modelo para el piezoeléctrico MFC 8507-P2.

En la Figura 5.22 se muestra la variación del voltaje para distintos valores del coeficiente de amortiguamiento no lineal  $\xi_{n1}$ . Como era de esperarse, se observa claramente que este parámetro incide de manera sustancial para un rango de frecuencias cercano a la condición de resonancia, reduciendo el valor pico de voltaje a medida que aumenta su valor. Es importante aclarar que la aceleración de la excitación se mantuvo constante a 1 G para todas las curvas consideradas. Una observación importante es la gran diferencia que existe entre los valores pico de voltaje entre considerar  $\xi_{n1} \neq 0$  y no considerar dicho amortiguamiento no lineal ( $\xi_{n1} = 0$ ).

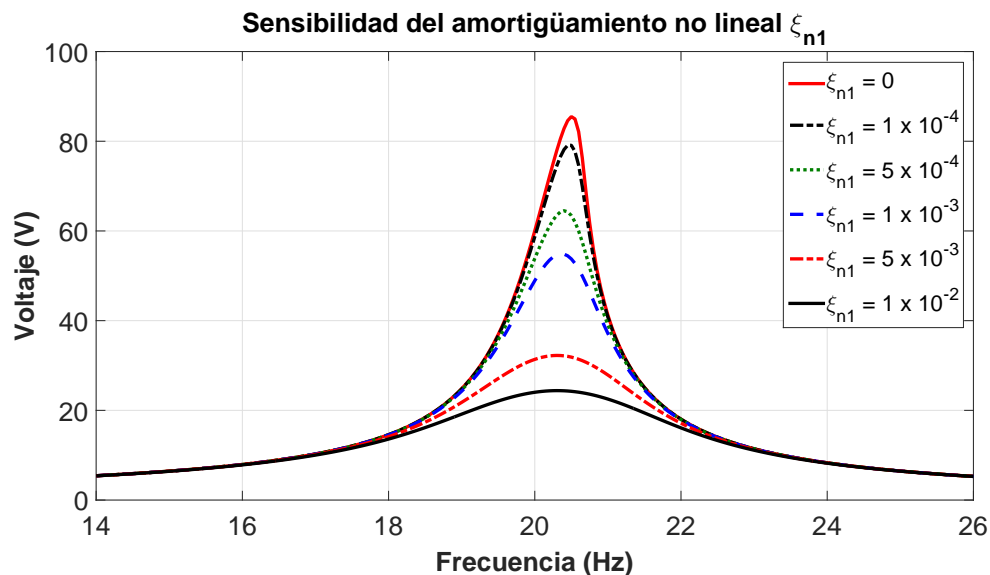


Figura 5.22 - Variación del voltaje para distintos valores de  $\xi_{n1}$  considerando el modelo para el piezoeléctrico MFC 8507-P2.

Continuando con los parámetros no lineales, en la Figura 5.23 se muestran las distintas curvas de voltaje para distintos valores de la elasticidad no lineal  $c_{111}^p$ . A medida que el parámetro toma valores cada vez más negativos, la curva se va inclinando hacia la izquierda produciendo el efecto de ablandamiento o *softening*. Además, se puede ver que para que su efecto sea notable, el parámetro debe alcanzar un valor de  $-1 \times 10^{12}$ , siendo esto consistente con las identificaciones realizadas en las secciones anteriores.

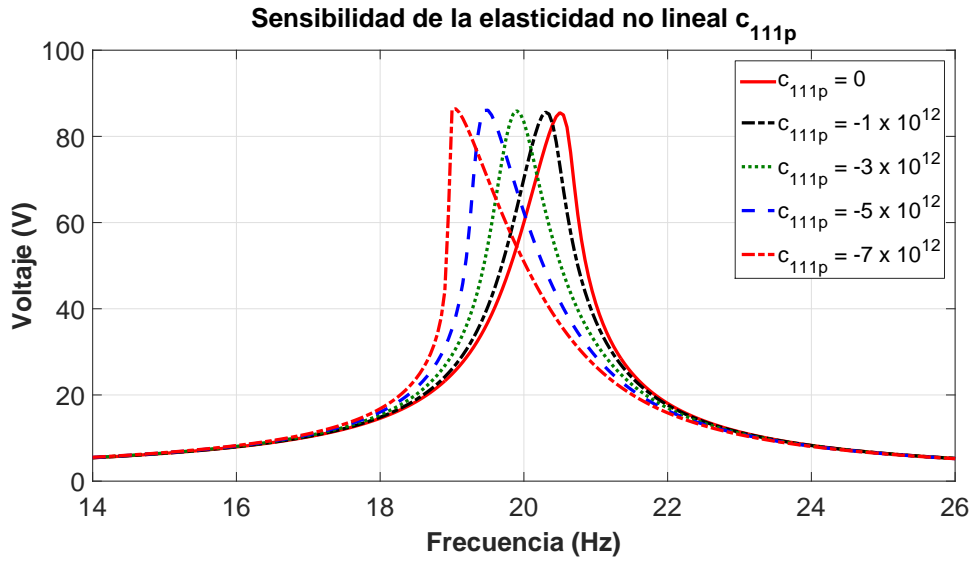


Figura 5.23 - Variación del voltaje para distintos valores de  $c_{111}^p$ .

En la Figura 5.24 se muestra la generación de voltaje para distintos valores del coeficiente de acoplamiento electromecánico no lineal  $e_{311}$ , el cual siempre es de signo positivo [80]. Se puede observar que a medida que el parámetro toma valores cada vez mayores el efecto sobre la generación es similar al de un amortiguamiento eléctrico, es decir, disminuye la generación en la condición de resonancia a medida que aumenta su valor. A su vez, se observa un leve efecto de endurecimiento o *hardening* (inclinación hacia la derecha) a medida que el valor del parámetro va aumentando.

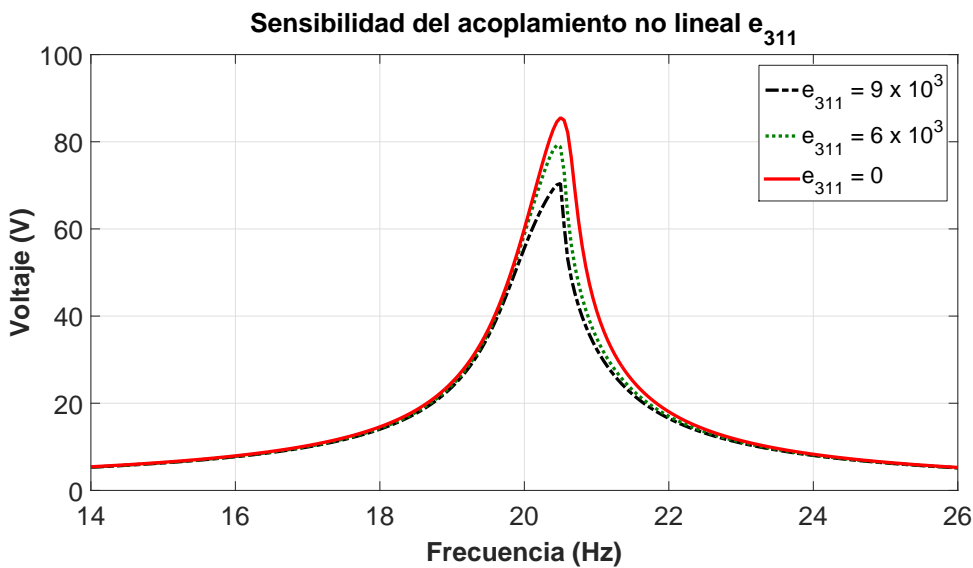
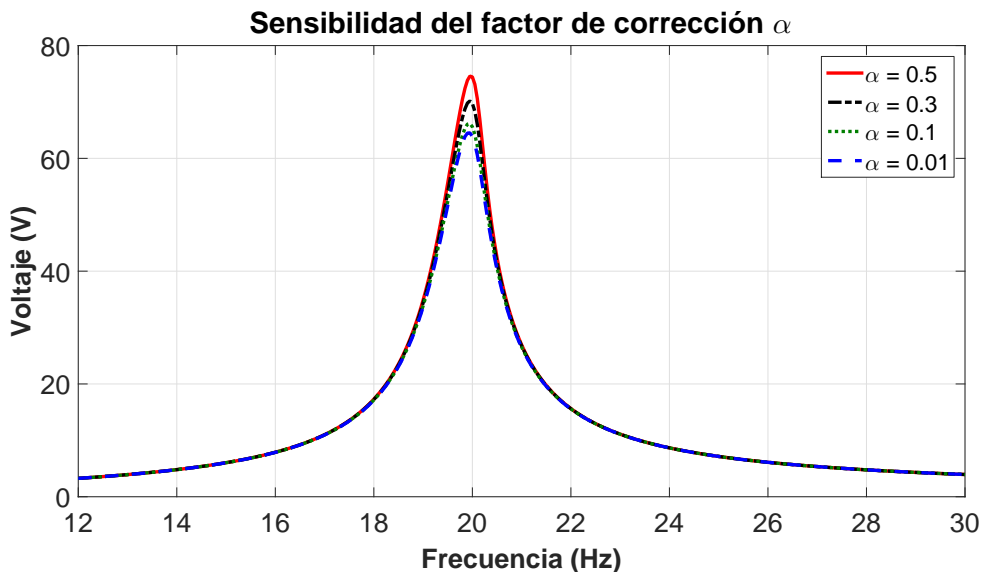


Figura 5.24 - Variación del voltaje para distintos valores de  $e_{311}$ .

### 5.2.2 Generación por $d_{33}$

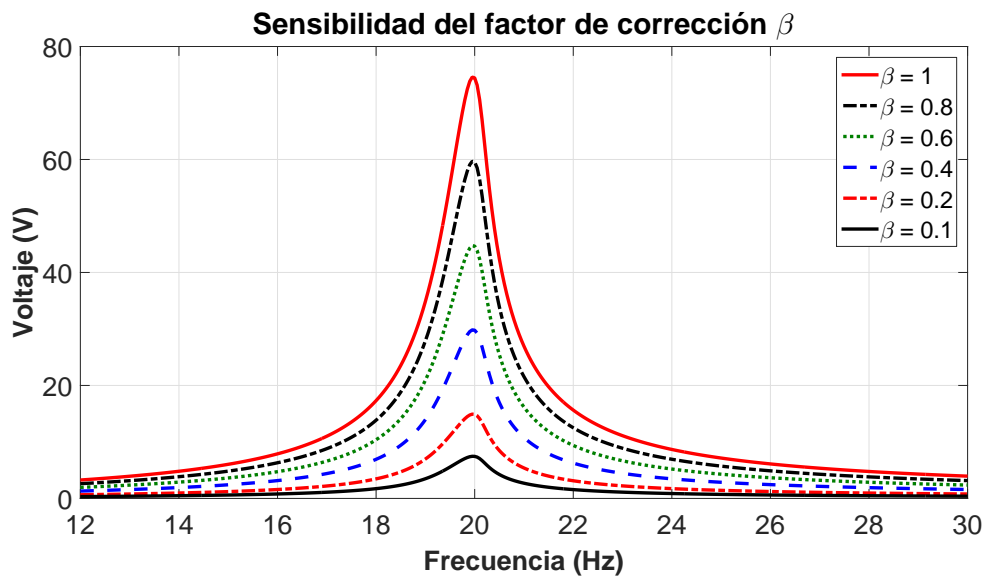
Respecto a los parámetros asociados a la generación por  $d_{33}$ , el primero que se analiza es el factor de corrección  $\alpha$ , el cual compensa la no uniformidad en el espesor del campo eléctrico en el caso de electrodos interdigitados (ver Capítulo 4.3 ecuación (4.91)). En la Figura 5.25 se puede ver cómo este factor modifica la generación en el pico resonante. Si bien a simple vista parece una corrección de poca importancia, representa una diferencia porcentual de 16.6 % al pasar de  $\alpha = 0.5$  a  $\alpha = 0.01$ . El efecto es similar al de un amortiguamiento lineal. Esto se debe a la no uniformidad del campo que hace que se pierda energía que sirve para polarizar el piezoeléctrico generando menor voltaje. Muy pocos autores [105, 115] incorporan este parámetro en el modelo, sin embargo es un ajuste fino el cual le otorga mejor predicción al modelo de la presente tesis.



*Figura 5.25 - Variación del voltaje para distintos valores de  $\alpha$  considerando el modelo para la lámina MFC 8507-P1.*

Por otra parte, en la Figura 5.26 se comparan las curvas de voltaje para distintos valores del factor de corrección  $\beta$ , el cual compensa la no perpendicularidad del desplazamiento eléctrico respecto de la superficie de los electrodos, también para el caso de electrodos interdigitados. Se puede ver que este factor de corrección es determinante, por la magnitud de la corrección de la

generación y tiene el mismo efecto que el parámetro  $\gamma$  para la generación por  $d_{31}$ , es decir, incide sobre todo el rango de frecuencia pero fundamentalmente en el estado resonante. En este caso, cuanto más chico es el parámetro  $\beta$  menor es la generación eléctrica debido a que reduce el acoplamiento electromecánico. Tanto como sucedió para el parámetro  $\alpha$  pocos autores incorporan este parámetro en el modelo, sin embargo también resulta vital en la predicción del modelo.



*Figura 5.26 - Variación del voltaje para distintos valores de  $\beta$  considerando el modelo para la lámina MFC 8507-P1.*

Finalmente, se estudió el efecto del coeficiente de acoplamiento electromecánico no lineal  $e_{333}$ . Al igual que el coeficiente de acoplamiento  $e_{311}$ , el valor de dicho parámetro es siempre positivo. En la Figura 5.27 se muestran las curvas de voltaje en las cuales se observa que a medida que el parámetro aumenta tiene un efecto de amortiguamiento eléctrico sobre el pico resonante, a costa de un aumento en el ancho de banda, generando un aumento de la generación en cercanías de la resonancia (ver curvas de color verde y negra).

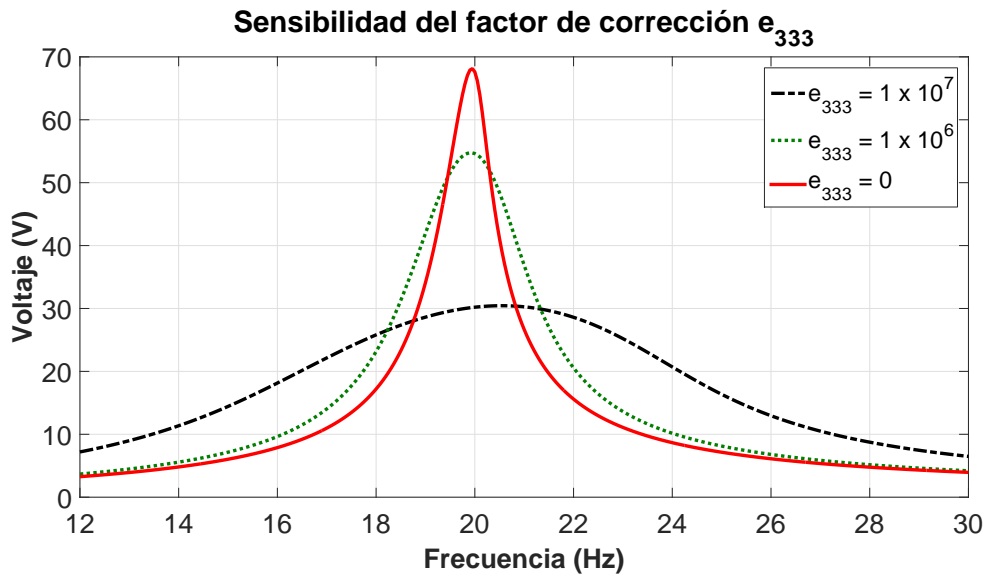


Figura 5.27 - Variación del voltaje para distintos valores de  $e_{333}$  para la lámina MFC 8507-P1.

# 6

## Ensayos Experimentales y Validación Computacional

---

En esta sección se analiza la variación de los principales parámetros mecánicos para el dimensionamiento de los recuperadores de energía. Se compara el modelo matemático presentado en el Capítulo 4 con las mediciones experimentales realizadas y se presentan las diferentes variantes de los dispositivos fabricados, junto con las mediciones de laboratorio realizadas sobre los mismos.

Previo a construir los diferentes dispositivos recuperadores de energía, es importante evaluar el efecto que producen los principales parámetros geométricos y mecánicos de diseño en la respuesta en frecuencia del dispositivo multimodal. El conocimiento de estos efectos permite realizar un dimensionado inicial acorde al requerimiento de obtener múltiples estados resonantes dentro del intervalo de utilización del auto en ciudad (ver Capítulo 3.2.).

De acuerdo a la Figura 6.1, los parámetros a evaluar son: las masas de los extremos de la viga compuesta ( $m_{1,2}$ ), las rigideces de los resortes en los extremos ( $k_{1,2}$ ), el espesor de la subestructura ( $h_s$ ) y la longitud total de la viga entre resortes ( $L$ ). Estos parámetros son elegidos debido a que pueden modificarse sin demasiada dificultad al momento de construir los dispositivos y determinan en gran medida la

respuesta modal del dispositivo. Diferente es el caso de la lámina piezoeléctrica cuya geometría y composición viene determinada por el fabricante (Smart Material).

Para evaluar el resultado de la variación de estos parámetros, se utiliza una formulación matemática lineal (ver Capítulo 4.4) simplemente porque las frecuencias, modos del sistema y la generación para bajas amplitudes están determinados casi en forma exclusiva por la teoría lineal. Para este estudio, se modifica de a un parámetro a la vez y se dejan fijos todos los restantes. En la respuesta en frecuencia se analiza la generación de energía en términos de voltaje y el corrimiento de las primeras frecuencias naturales.

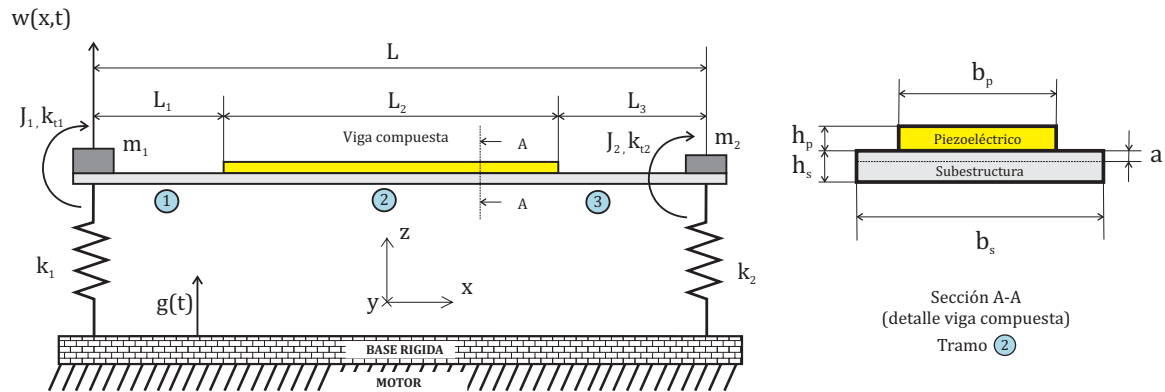


Figura 6.1 - Esquema del modelo del sistema con detalle de la viga compuesta.

El análisis se divide en seis casos de estudio, en los cuales se hace variar uno de los parámetros y se compara sobre un mismo modelo de referencia. En la Tabla 6.1 se muestran los parámetros que se analizan en cada uno de los casos y se especifican los valores numéricos de dichos parámetros utilizados en el modelo de referencia.

Caso	Parámetro variable	Valor de Referencia
1	$m_1$	15 g
2	$k_1$	4500 N/m
3	$m_2$	5 g
4	$k_2$	5500 N/m
5	$h_s$	0.8 mm
6	$L$	130 mm

Tabla 6.1 – Parámetros de análisis para cada caso de estudio.



Para todos los casos analizados, la subestructura utilizada es una viga de acero inoxidable, el piezoeléctrico es un MFC 8507-P1 ( $d_{33}$ ), la resistencia de carga es de 100 k $\Omega$  y la amplitud de la aceleración de excitación es de 1 G. En la Tabla 6.2 se muestran todos los valores numéricos de los restantes parámetros utilizados para realizar las simulaciones.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$L_1$	$(L - L_2)/2$	$\rho_s$	7900 kg/m <sup>3</sup>
$L_2$	85 mm	$\rho_p$	7750 kg/m <sup>3</sup>
$L_3$	$(L - L_2)/2$	$c_{11}^s$	193 GPa
$a$	0.176 mm	$c_{11}^p$	61 GPa
$b_s$	12.7 mm	$C_p$	1.5 nF
$h_f$	0.18 mm	$d_{33}$	440 pm/V
$b_f$	0.355 mm	$\epsilon_{11}^e$	15.31 nF/m
$h_k$	0.06 mm		
$l_p$	0.41 mm		
$w_p$	0.097 mm		
$n_f$	18		

Tabla 6.2 – Parámetros geométricos y de materiales utilizados.

En el primer caso de estudio se analiza el efecto de la masa  $m_1$  del extremo izquierdo de la viga para  $x = 0$  sobre la respuesta en frecuencia del sistema. En la Figura 6.2 se observan tres curvas de amplitud del voltaje cuando la masa vale 10, 15 y 20 gramos. Los valores del amortiguamiento modal considerados en todos los casos son  $\xi_1 = 0.02$ ,  $\xi_2 = 0.09$  y  $\xi_3 = 0.02$  para el primero, segundo y tercer modo, respectivamente.

Analizando los resultados se puede decir que, por un lado, existen tres estados resonantes correspondientes a las tres primeras frecuencias naturales del sistema. La respuesta dinámica observada en la figura confirma el carácter multimodal del dispositivo propuesto, cuyo comportamiento se debe a la incorporación de los sistemas masa-resorte en los extremos de la estructura.

Por otro lado, en relación a la influencia de la masa  $m_1$  se observa una mayor incidencia sobre la primera frecuencia natural (60-80 Hz), la cual baja un 17 % al pasar de 10 a 20 gramos, en comparación con la segunda (100-110 Hz) cuya baja es de un 10 % y la tercera (165-175 Hz) que es de un 1.7 %. Como es de esperar, a medida que aumenta el valor de la masa  $m_1$ , las frecuencias resonantes disminuyen.

Respecto a la amplitud de generación, el primer modo genera más voltaje para el menor valor de masa  $m_1$ , mientras que lo contrario sucede con el segundo modo. Por último, no se observa influencia de la masa en la amplitud del voltaje para el tercer modo de vibración.

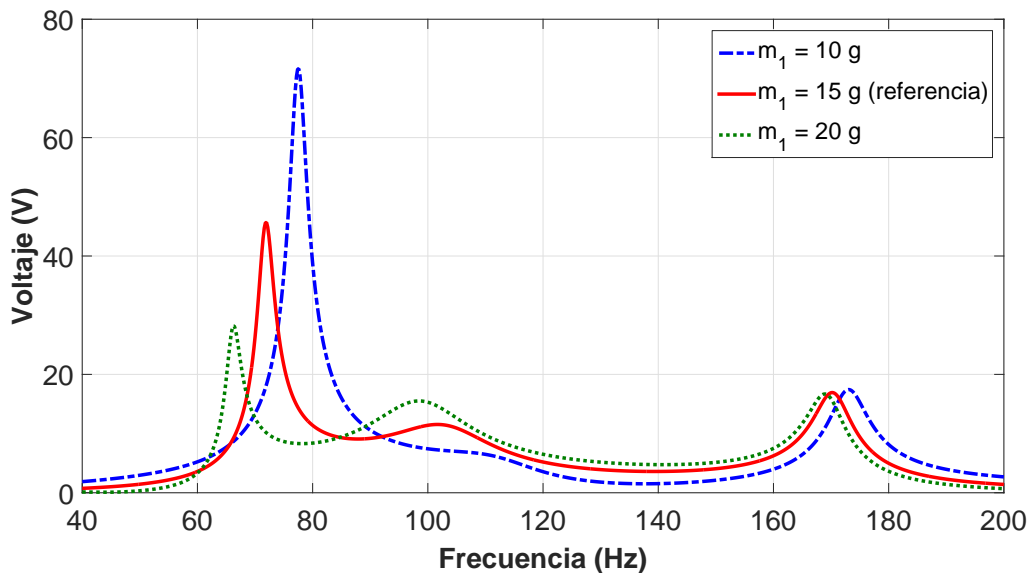


Figura 6.2 - Curvas de voltaje para distintos valores de la masa  $m_1$  para el recuperador de energía de la Figura 6.1.

En el segundo caso se analiza la rigidez  $k_1$  del resorte del extremo izquierdo de la viga ( $x = 0$ ). En la Figura 6.3 se observa la amplitud del voltaje para cuando la rigidez toma los valores de 3500, 4500 y 5500 N/m. En este caso, se puede ver una gran influencia de este efecto sobre la primera frecuencia natural, sin afectar prácticamente a las otras dos frecuencias. Contrariamente a lo que sucede con la masa  $m_1$ , se observa que a medida que la rigidez aumenta, las frecuencias resonantes también aumentan.

Respecto del análisis anterior se puede deducir que el conjunto masa-resorte en  $x = 0$  ( $m_1, k_1$ ) es el responsable de la respuesta del primer modo de vibración. En una primera aproximación, suponiendo que se reemplaza al sistema completo por un sistema masa-resorte para el primer modo de vibración, la frecuencia natural del mismo se puede calcular mediante la siguiente fórmula [97]:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad (6.1)$$

donde, para los valores de referencia (Tabla 6.1), se obtiene una frecuencia de 87 Hz, la cual concuerda con los valores del primer modo del sistema completo observado en la Figura 6.2 y Figura 6.3. La ecuación (6.1) verifica que la primera frecuencia natural del dispositivo es directamente proporcional a la rigidez  $k_1$  e inversamente proporcional a la masa  $m_1$ , como se observó en los primeros dos casos de estudio.

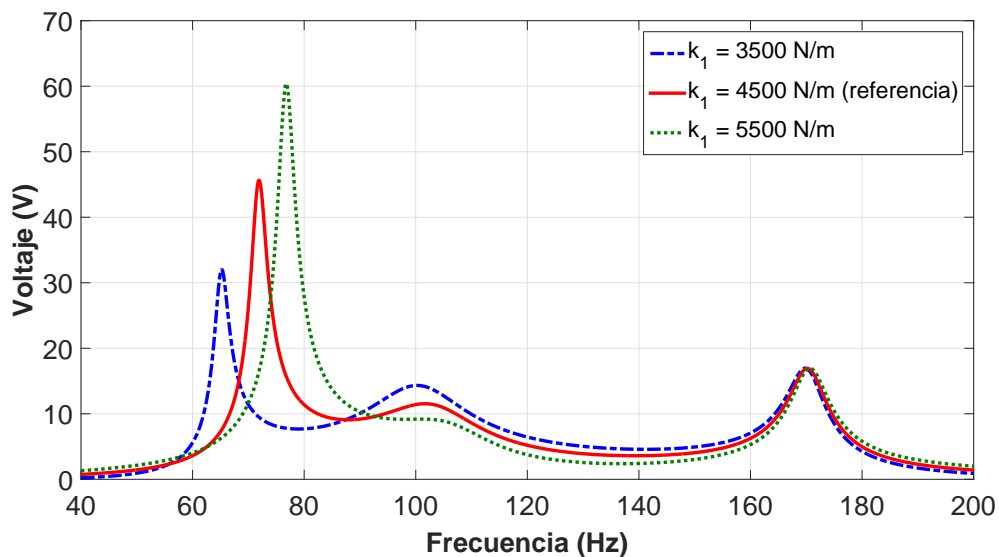


Figura 6.3 - Curvas de voltaje para distintos valores del resorte  $k_1$ .

En el tercer caso se analiza la variación de la masa  $m_2$  del extremo derecho de la viga, para  $x = L$  en la respuesta (voltaje) del sistema. En la Figura 6.4 se observa la amplitud del voltaje para cuando la masa toma los valores de 3, 5 y 7 gramos. Se observa claramente que en este caso, el tercer modo de vibración es notablemente afectado por esta masa en comparación con el primero que prácticamente no experimenta variación alguna. Es decir, la influencia de esta variación modifica directamente la frecuencia natural y la generación de voltaje del modo 3. A medida que la masa aumenta la frecuencia disminuye de 200 a 155 Hz (22.5 % menor) con la incorporación de solo 4 gramos de masa, observándose una gran sensibilidad de este parámetro sobre la frecuencia natural.

Respecto a la amplitud de generación, se puede ver que a mayor masa  $m_2$ , mayor es la amplitud del voltaje para el tercer modo de vibración. Sin embargo este aumento provoca una reducción en la generación del segundo modo.

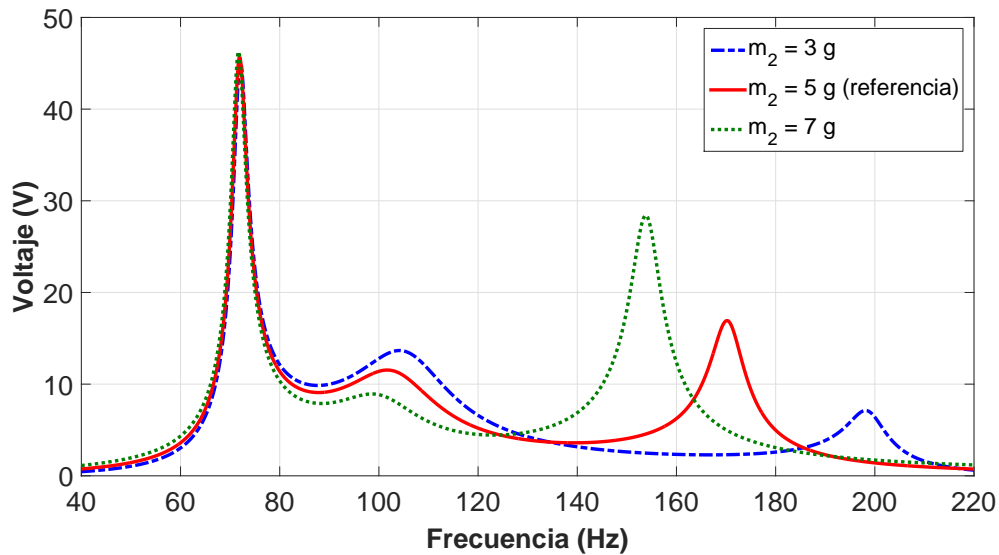


Figura 6.4 - Curvas de voltaje para distintos valores de la masa  $m_2$ .

En el cuarto caso de estudio se analiza la rigidez  $k_2$  del resorte correspondiente al extremo derecho de la viga para  $x = L$ . En la Figura 6.5 se grafican las amplitudes del voltaje para cuando la rigidez toma los valores de 4500, 5500 y 6500 N/m. En este caso, al igual que para el caso anterior, el efecto que genera el resorte tiene una incidencia muy grande sobre la frecuencia natural del tercer modo de vibración, afectando muy poco a las otras dos. Se puede ver que las frecuencias naturales son directamente proporcionales a la rigidez  $k_2$ , al igual que como se pudo observar para la rigidez  $k_1$ . En lo que a voltaje respecta, a medida que la rigidez  $k_2$  aumenta, la amplitud de generación disminuye en el tercer modo de vibración, aumentando levemente la del segundo.

Utilizando la ecuación (6.1) con los valores del modelo de referencia y para el sistema masa-resorte del extremo  $x = L$ , se obtiene que la frecuencia natural de dicho sistema, si se desconectara de la viga compuesta, sería de 167 Hz. Se puede ver en las últimas dos figuras que dicho valor es cercano al del tercer modo de vibración, verificando que el sistema masa-resorte del extremo  $x = L$  controla la frecuencia de dicho modo.

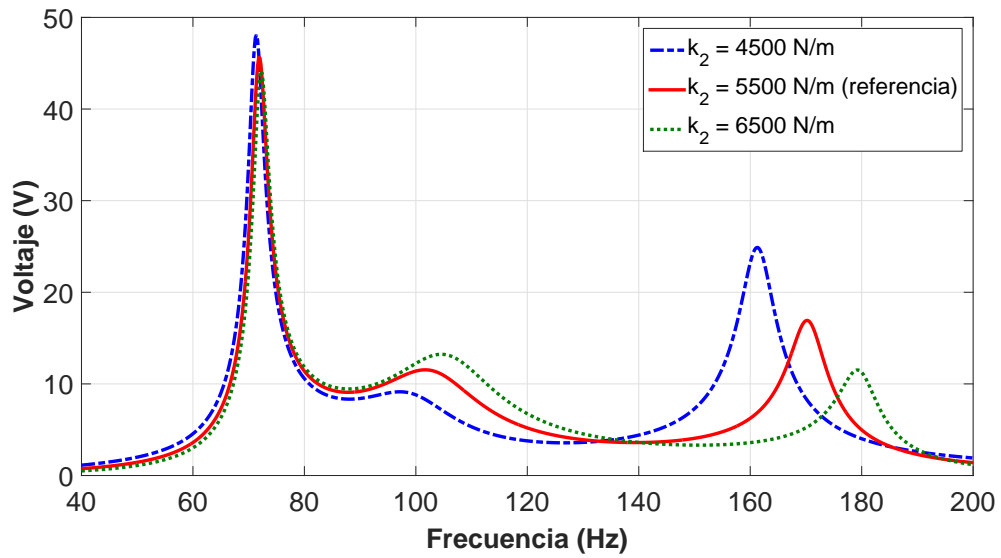


Figura 6.5 - Curvas de voltaje para distintos valores del resorte  $k_2$ .

En el quinto caso de estudio se analiza el efecto del espesor  $h_s$  de la subestructura de la viga compuesta sobre la respuesta en frecuencia del sistema. En la Figura 6.6 se muestran las gráficas de las amplitudes de voltaje para cuando el espesor vale 0.6, 0.8 y 1 mm.

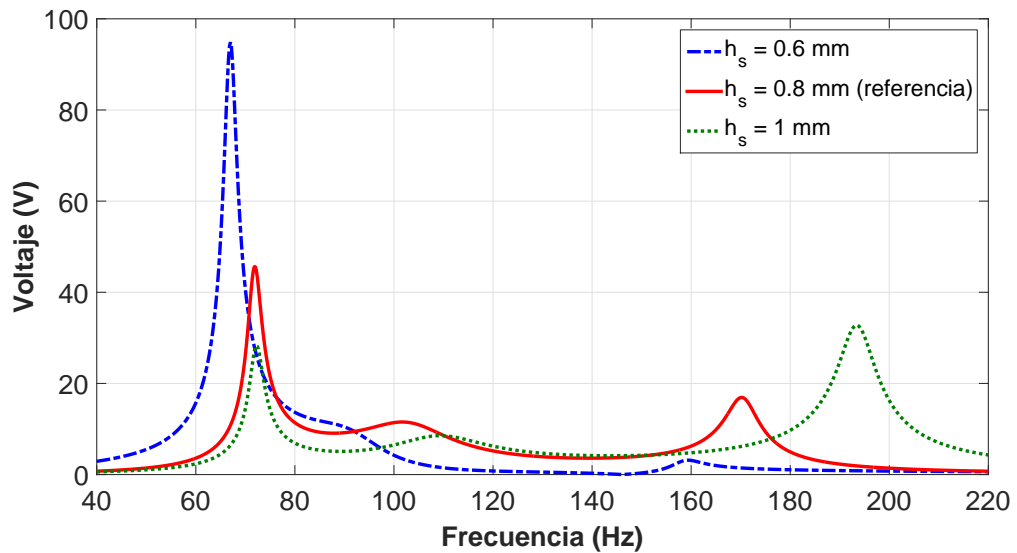


Figura 6.6 - Curvas de voltaje para distintos valores del espesor  $h_s$ .

Por un lado, se observa que a medida que el espesor aumenta, todas las frecuencias naturales experimentan un corrimiento hacia la derecha. Es decir, el aumento del espesor genera un incremento en los valores de las frecuencias asociado a la rigidez seccional de la viga. Se observa que dicho corrimiento es más acentuado en el tercer modo de vibración en comparación con el primero y segundo, donde el efecto es similar para ambos modos.

En relación al voltaje, el segundo modo se mantiene prácticamente en la misma amplitud para los distintos valores de espesor  $h_s$ . Sin embargo, a medida que el valor del espesor aumenta, la amplitud de generación disminuye en el primer modo de vibración y aumenta en el tercer modo.

Finalmente, en el sexto caso se analiza el efecto de la longitud total de la viga  $L$ . Dicha longitud corresponde a la distancia entre centros de los sistemas masa-resorte (ver en la Figura 3.10). En la Figura 6.7 se muestran las gráficas de las amplitudes de voltaje para cuando la longitud de la viga es de 120, 130 y 140 mm. Se observa en este caso que el efecto es exactamente contrario al caso anterior del espesor  $h_s$ . Esto es, a medida que la longitud aumenta el sistema se flexibiliza y todas las frecuencias naturales disminuyen. De igual manera que para el espesor, se observa que dicho corrimiento es más acentuado en el tercer modo de vibración, y en menor medida en el primero y segundo modo.

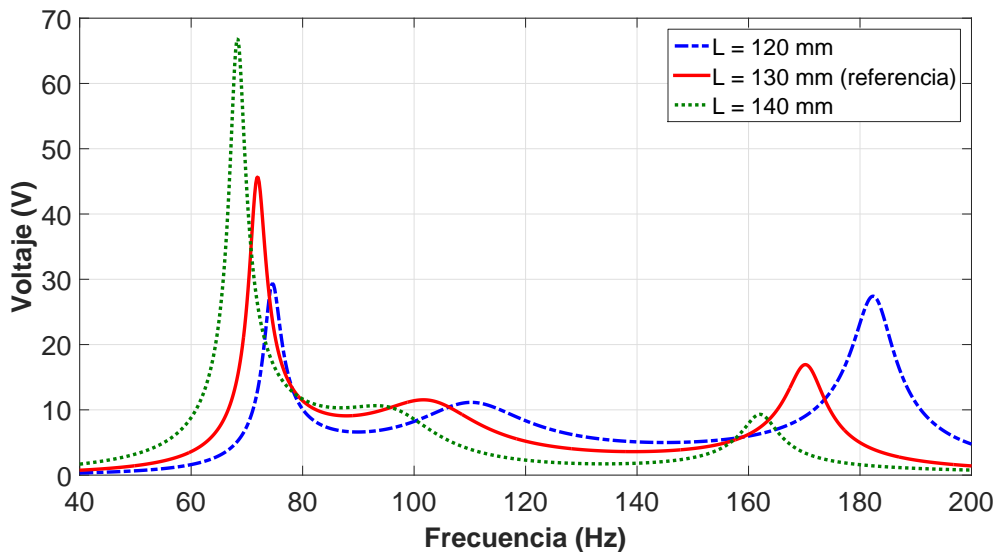


Figura 6.7 - Curvas de voltaje para distintos valores de la longitud  $L$ .

Respecto a la amplitud del voltaje, también se observa lo opuesto al caso anterior, a medida que la longitud aumenta, la amplitud de generación disminuye en el tercer modo de vibración y aumenta en el primer modo.

## 6.1 CASOS DE ESTUDIO

Una vez analizados los efectos de los parámetros constructivos sobre las frecuencias y generación de energía en el dispositivo multimodal propuesto, se presentan y analizan en esta sección cuatro dispositivos diferentes en los que su diseño combina dos variantes principales. Por un lado, el modo de generación del piezoeléctrico, pudiendo ser mediante la forma  $d_{31}$  o  $d_{33}$ . En cuanto a la segunda variante, se encuentra el tipo de vinculación de los resortes en los extremos de la viga, siendo del tipo rígida por medio de pegamento o articulada por medio de bisagras. De esta manera, quedan conformados los siguientes cuatro casos de estudio (dispositivos) combinando ambas características:

1. Extremos pegados, con generación  $d_{31}$ .
2. Extremos pegados, con generación  $d_{33}$ .
3. Extremos articulados, con generación  $d_{31}$ .
4. Extremos articulados, con generación  $d_{33}$ .

### 6.1.1 Dispositivo 1

El primer dispositivo es presentado en la Figura 6.8 y está conformado por una subestructura de acero inoxidable AISI 304 con una lámina de piezoeléctrico MFC 8507-P2 ( $d_{31}$ ) pegada en la cara superior de dicha subestructura mediante adhesivo de cianoacrilato. Tanto el soporte base como las masas y los resortes de los extremos, se fabrican en acero SAE 1010. Mediante el orificio central del soporte base se vincula el dispositivo al excitador. Los parámetros principales del piezoeléctrico y de la subestructura son los presentados en la sección correspondiente del Capítulo 5 y se muestran en la Tabla 6.3.

Una vista detallada de la vinculación de los sistemas masa-resorte de los extremos se puede ver en la Figura 6.9. La foto (a) pertenece al sistema masa-resorte 1 (lado izquierdo en Figura 3.10) y la imagen (b) al sistema masa-resorte 2 (lado derecho). Las masas  $m_{1,2}$  están divididas en dos partes iguales cada una, con el

fin de vincular la viga compuesta a los sistemas masa-resorte mediante dos tornillos. Los resortes de ambos extremos, como se puede observar en la Figura 6.9, están pegados mediante soldadura plástica a las masas y al soporte base. El resorte  $k_1$  tiene 13.8 mm de diámetro, 1.5 espiras activas y el diámetro del alambre es de 1.2 mm, en tanto que el resorte  $k_2$  tiene el mismo diámetro, está fabricado con el mismo alambre, pero tiene 2 espiras activas. Para las inercias rotacionales de las masas  $J_{1,2}$  se calcularon mediante las fórmulas de la teoría de mecánica del sólido [117] y los valores se presentan en la Tabla 6.4, junto con los de las masas y los resortes.

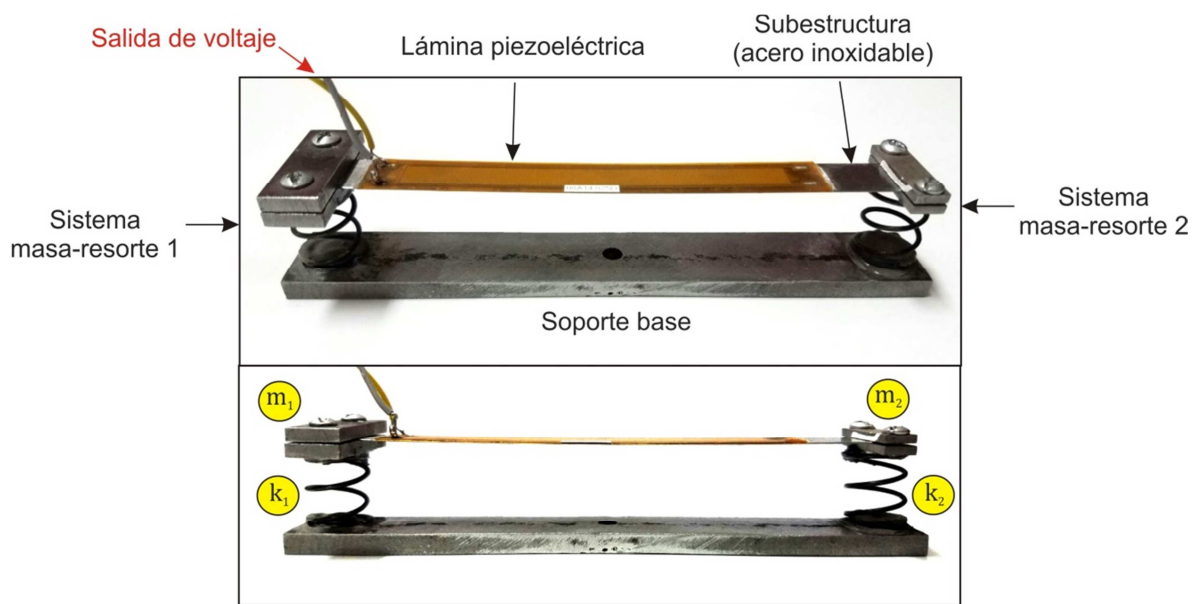


Figura 6.8 - Foto del primer dispositivo recuperador fabricado.

Coefficiente	Valor	Coefficiente	Valor
$L_1$	23.3 mm	$\rho_s$	7900 kg/m <sup>3</sup>
$L_2$	85 mm	$\rho_p$	5440 kg/m <sup>3</sup>
$L_3$	17.2 mm	$c_{11s}$	193 GPa
$L$	125.5 mm	$c_{11p}$	15.85 GPa
$a$	0.176 mm	$C_p$	49 nF
$h_s$	0.38 mm	$d_{31}$	-190 pm/V
$h_p$	0.3 mm	$\epsilon_{33}^E$	16.81 nF/m
$b_s$	12.7 mm		
$b_p$	8 mm		

Tabla 6.3 – Parámetros geométricos y de material del MFC 8507-P2.



Las mediciones de voltaje se realizan con el equipamiento presentado en el Capítulo 5 (Figura 5.1), de manera estacionaria para cada valor de frecuencia de excitación y a cinco niveles diferentes de aceleración de la base; 0.1, 0.5, 1, 2 y 3 G de amplitud máxima. La resistencia de carga  $R_l$  es de 255 k $\Omega$  para todos los casos.

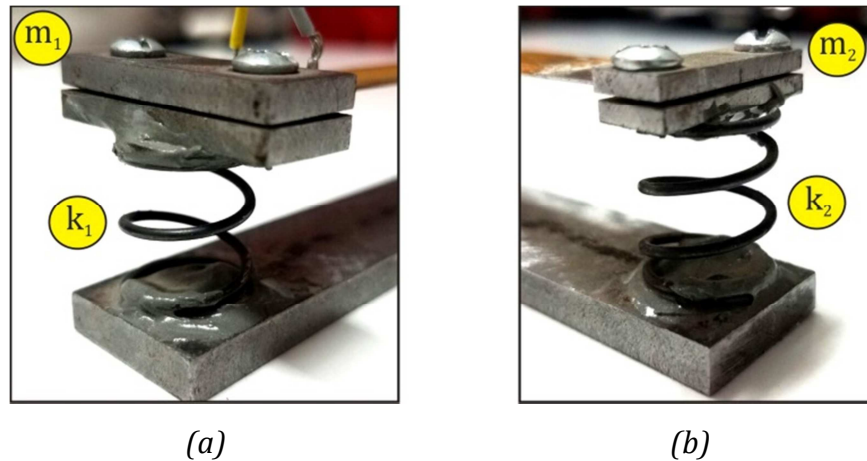


Figura 6.9 - Detalle de sistemas masa-resorte de los extremos.

Parámetro	Valor
$m_1$	19.1 g
$m_2$	6.09 g
$k_1$	4708 N/m
$k_2$	3217 N/m
$k_{t1}$	0.54 Nm/rad
$k_{t2}$	0.36 Nm/rad
$J_1$	$3.35 \times 10^{-7} \text{ kg/m}^2$
$J_2$	$5.86 \times 10^{-8} \text{ kg/m}^2$

Tabla 6.4 – Parámetros mecánicos medidos del dispositivo 1.

En la Figura 6.10 se muestra la respuesta en frecuencia del dispositivo, donde cada círculo en las curvas corresponde a un valor de voltaje medido experimentalmente para un valor de aceleración. En dicha figura, se puede ver que cada curva de aceleración presenta cuatro estados resonantes principales en aproximadamente 60, 70, 87 y 120 Hz (número de frecuencia en círculos amarillos). En el rango de velocidad del motor establecido para el tránsito en la ciudad (ver Capítulo 3.2) aparecen dos estados resonantes, mientras que para el rango de utilización en ruta se encuentran los otros dos.

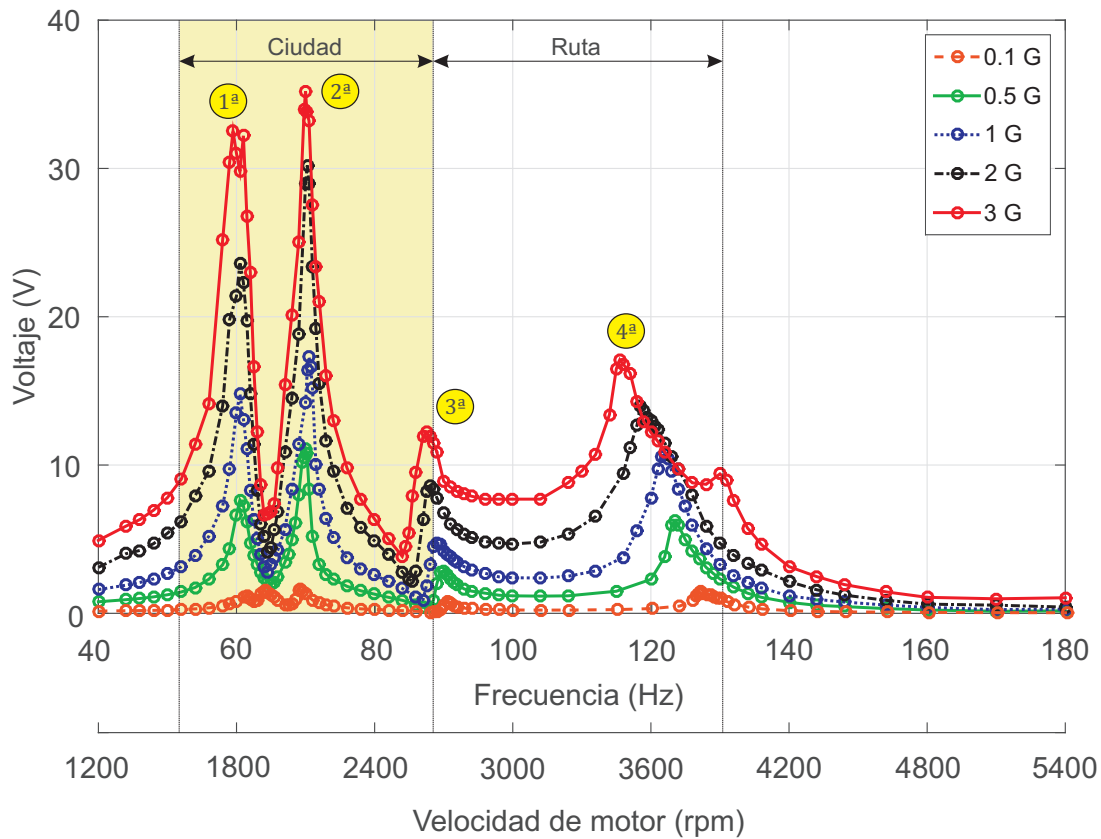


Figura 6.10 - Respuesta en frecuencia de datos experimentales (Dispositivo 1).

Aquí es importante observar que con el modelo matemático solo aparecen tres modos flexionales (Figuras 6.2 - 6.7) en comparación con los cuatro observados en los ensayos experimentales. Para poder determinar a qué se debe el modo adicional, se construye el modelo tridimensional de elementos finitos [118] con el programa comercial Abaqus [119] que se muestra en la Figura 6.11.

En dicho modelo, tanto los resortes como las masas de los extremos y la base se discretizan con elementos sólidos (tetraédricos), en tanto que la subestructura de acero inoxidable y el piezoeléctrico con elementos shell. Mediante este modelo, y como se puede observar en la Figura 6.11, se determina claramente que el primer modo que se observa en los ensayos experimentales a 60 Hz, corresponde a un modo torsional generado por el movimiento lateral de uno de los resortes (resorte 2 en  $x = L$ ). Es lógico que este modo no sea capturado con el modelo matemático presentado ya que es un modelo unidimensional que considera solo la flexión de la viga y los movimientos verticales de los resortes.

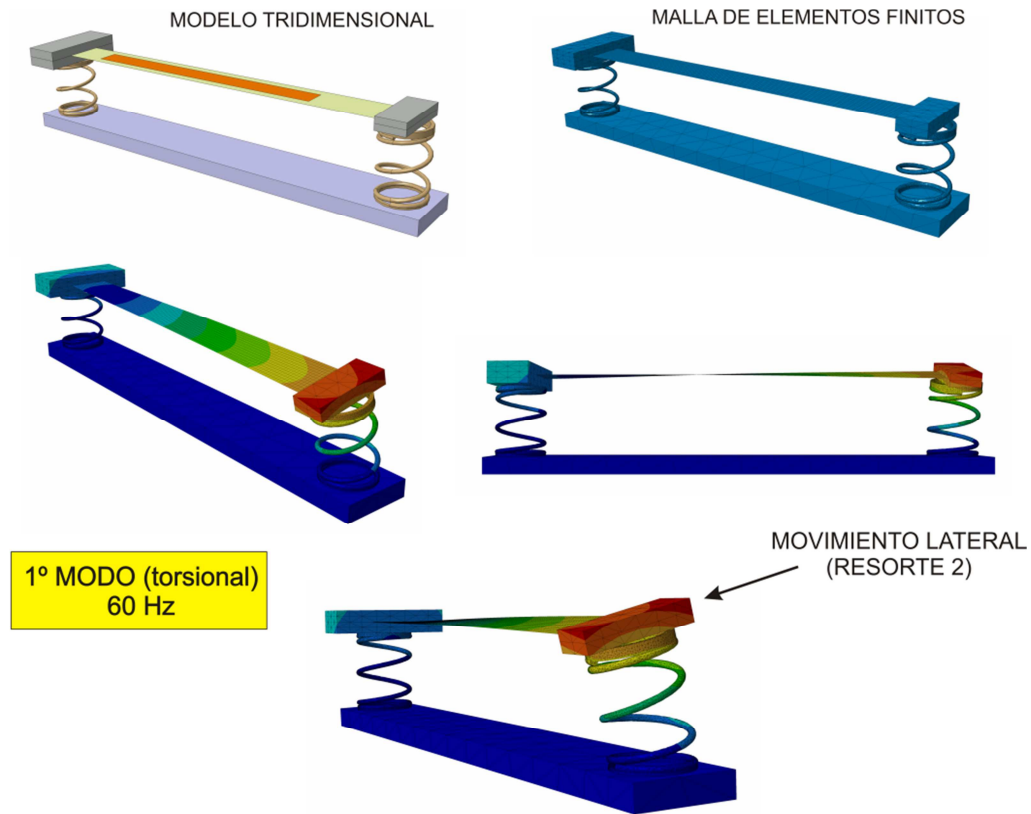


Figura 6.11 - Modelo de elementos finitos: 1º modo normal de vibración (torsional).

Adicionalmente, el modelo de elementos finitos permitió visualizar los restantes modos de vibración. De esta manera, se verifica que el segundo modo corresponde a un modo flexional en donde predomina el movimiento de la viga, como se puede ver en la Figura 6.12(a). En este caso, se observa que los sistemas masa-resortes de los extremos prácticamente no se mueven y la deformación de la viga es máxima, motivo por el cual la generación eléctrica es alta (ver Figura 6.10).

Respecto al tercer modo (Figura 6.12(b)), se observa que predomina el movimiento vertical de la masa 1 (izquierda) y un movimiento de flexión pequeño de la viga (comparado con el modo 2). Este hecho se vincula con la presencia de un nodo en proximidades de dicha masa 1 limitando la deformación de la viga.

Por otra parte, el cuarto modo (Figura 6.12(c)) está caracterizado por el movimiento vertical de la masa 2 (derecha) y la presencia de un nodo en cercanías de dicha masa que limita la deformación de la viga, en forma análoga a lo analizado para el tercer modo.

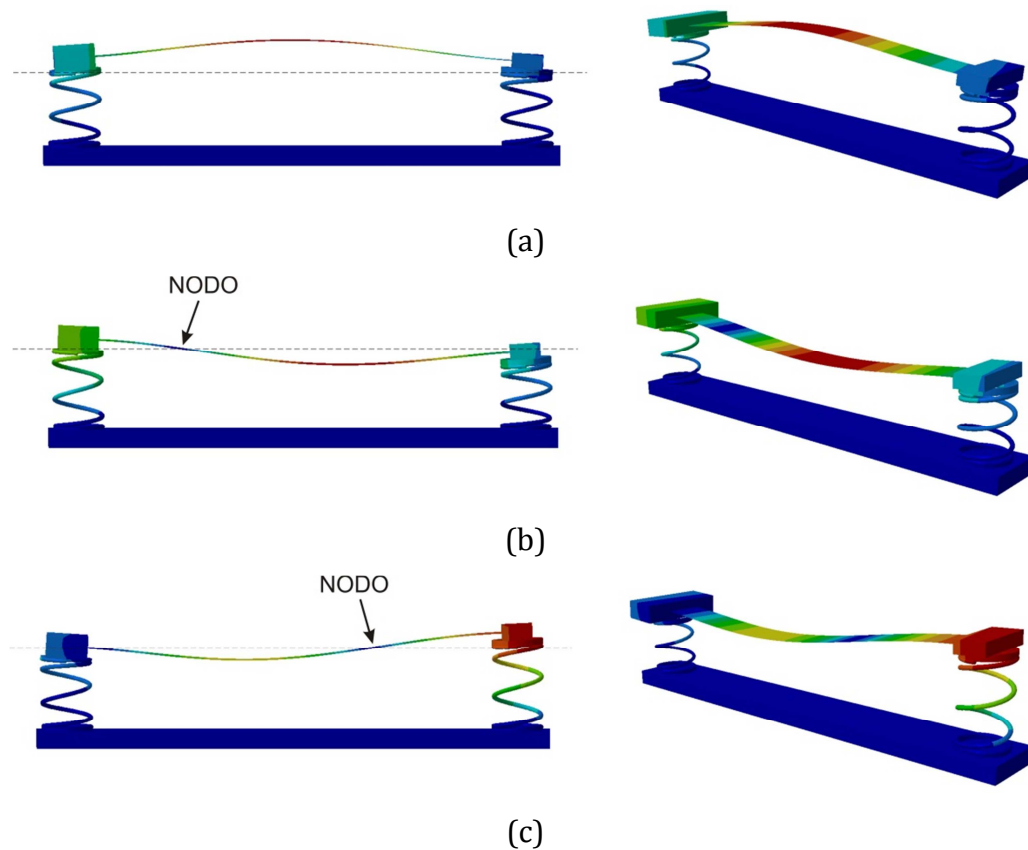


Figura 6.12 - Modelo de elementos finitos: (a) 2º modo, (b) 3er modo y (c) 4º modo.

De regreso al análisis de la Figura 6.10, se observa que los valores máximos de voltaje se encuentran dentro del rango de velocidades de motor en ciudad, presentando picos de 33 y 35 V a 3 G de aceleración, equivalentes a 4.2 y 4.8 mW de potencia eléctrica pico. Estos valores de potencia resultan ser mucho más significativos que los necesarios para alimentar diversos sensores de aceleración, presión, temperatura, velocidad del aire, etc., cuyo consumo es del orden de decenas de microwatts [40, 120]. Además, estos valores son comparativamente superiores a la potencia recuperada por dispositivos similares presentados en la literatura, como en el caso de Khalatkar y Gupta [121] (1.06 mW de valor pico) o el de Glynn-Jones y otros [47] (3.9 mW también de valor pico).

Una cuestión importante a tener en cuenta es que si bien los valores pico de voltaje y potencia son importantes en aplicaciones como la que se presenta, en la cual la frecuencia varía continuamente dentro de un rango de trabajo, es más relevante evaluar la potencia media en dicho intervalo de uso (valor medio de las

mediciones a cada frecuencia). En tal sentido, en la Tabla 6.5 se presentan los valores de potencia media recuperada para los intervalos de ciudad y ruta.

Aceleración	Potencia Media ( $\mu\text{W}$ )	
	Ciudad	Ruta
0.1 G	1.4	0.6
0.5 G	36.4	15.6
1 G	131.5	61.5
2 G	426.5	184.5
3 G	858.1	374.7

*Tabla 6.5 – Potencia media del primer dispositivo recuperador, en ciudad y ruta.*

Como puede visualizarse, los valores están en el orden de los micro-watts, pero aun así continúan siendo suficientes para alimentar los sensores referenciados previamente (ver Capítulo 1).

Como se comentó en el Capítulo 3.3, el principal objetivo del dispositivo es la recuperación de energía en un ámbito urbano, sin embargo, también es importante que tenga cierta capacidad de recuperación cuando el vehículo viaja por la ruta. Analizando esta última condición, se puede ver en la Figura 6.10 que los valores máximos de voltaje descienden a 12 y 17 V a 3 G, que en potencia eléctrica representan 0.5 y 1.1 mW respectivamente. Si bien estos últimos valores de voltaje y potencia son bajos comparados a los que se obtienen dentro del rango de ciudad, se puede observar que entre los 87 y los 133 Hz la generación no baja nunca de 8 V (250  $\mu\text{W}$ ) con una potencia media de 374  $\mu\text{W}$ , manteniendo un importante ancho de banda utilizable. A esto último hay que agregarle el hecho de que según la Figura 3.9 la aceleración real recibida por el motor en dicho intervalo es de 3.4 G a 86 Hz aumentando hasta alcanzar los 8.63 G a 133 Hz. Esto implica que los valores de voltaje y potencia en estas condiciones serán mucho mayores a los analizados para 3 G de amplitud de la excitación, por lo que es esperable una potencia aun mayor que la presentada.

Además de analizar los valores máximos y medios de generación eléctrica, también se pueden hacer importantes observaciones sobre los corrimientos en frecuencia de los estados resonantes en función de la excitación. En primer lugar, observando la Figura 6.10, se puede decir que las resonancias experimentan

corrimientos hacia la izquierda (*softening*) a medida que aumenta la aceleración de la excitación. Estos corrimientos se acentúan a medida que la frecuencia aumenta, siendo el estado resonante de mayor frecuencia el que experimenta un mayor corrimiento. En este caso, el pico de resonancia sufre una variación de 12 Hz al aumentar la aceleración de 0.1 a 3 G. En el caso de la tercera resonancia se produce un corrimiento de 2.5 Hz, en tanto que las dos primeras prácticamente no presentan corrimientos a medida que aumenta la aceleración.

A modo de comparación de este primer dispositivo recuperador, se presenta un dispositivo alternativo equivalente que consiste de una viga en cantiléver constituida por la misma viga compuesta (subestructura + piezoeléctrico) del dispositivo, empotrada al excitador en un extremo y dejando libre el otro (Figura 6.13). La longitud total de la misma es ajustada de forma que la primera frecuencia de resonancia se encuentre dentro del intervalo de utilización en ciudad.

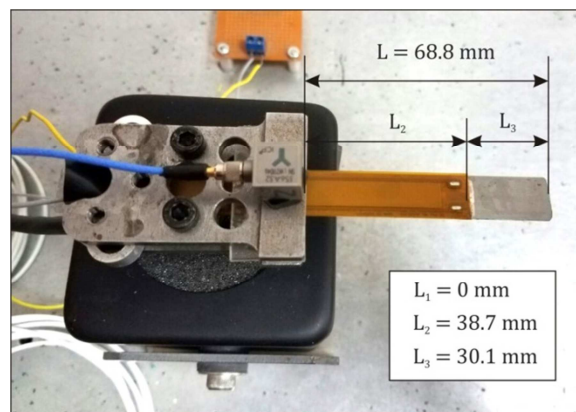


Figura 6.13 - Viga cantiléver equivalente colocada en el excitador.

El objetivo de esta comparación es justificar el desarrollo de un dispositivo multimodal, siendo esta una de las motivaciones propuestas en la introducción de esta tesis. La comparación se realiza con un dispositivo tipo cantiléver debido a que representa el diseño más simple y utilizado en todo tipo de aplicaciones de recolección de energía. En la Figura 6.14 se muestra una comparación de la respuesta en frecuencia entre el dispositivo presentado y dicha viga cantiléver equivalente. Las mediciones que se comparan corresponden a 1 G de aceleración de la base.

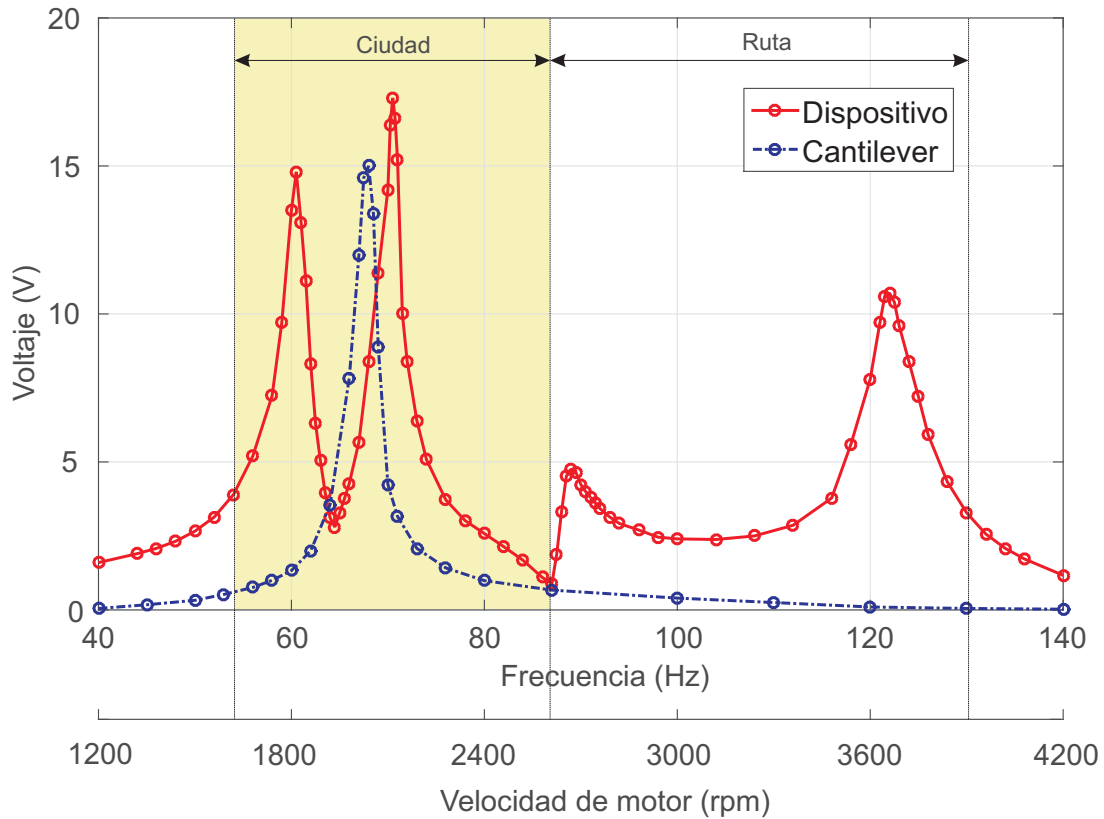


Figura 6.14 - Respuesta en frecuencia de datos experimentales (Dispositivo 1 vs. Cantiléver equivalente).

Como se puede ver en la Figura 6.14, el voltaje generado dentro del intervalo de ciudad es mayor para el dispositivo multimodal en comparación con el dispositivo tipo cantiléver. Si bien en los valores pico de voltaje no hay mucha diferencia entre ambos dispositivos, el multimodal presenta dos picos resonantes de amplitud similar al único de la cantiléver. Este comportamiento provoca un aumento en el ancho de banda, reflejándose dicho efecto en la potencia media:  $131 \mu\text{W}$  del dispositivo contra  $29 \mu\text{W}$  de la cantiléver, 4.5 veces más de generación eléctrica. En el intervalo de ruta, esta diferencia se acentúa aún más:  $61 \mu\text{W}$  del dispositivo contra  $0.2 \mu\text{W}$  de la cantiléver, 300 veces más de generación con el dispositivo. Para obtener una respuesta dinámica comparable entre ambos dispositivos, es necesario incorporar dos vigas cantiléver extras sintonizadas de forma de obtener un segundo y tercer estado resonante. Sin embargo, a partir de esta modificación no se alcanzaría a obtener una respuesta dinámica similar debido a la independencia en

los vínculos de las vigas cantiléver. De esta manera, el ancho de banda alcanzado por el dispositivo multimodal es una de las mayores características que justifican el desarrollo de un dispositivo multimodal más complejo que una simple viga en cantiléver.

### 6.1.2 Dispositivo 2

El segundo dispositivo se diferencia del primero únicamente en el reemplazo de la lámina piezoeléctrica de MFC 8507-P2 (generación en modo  $d_{31}$ ) por el piezoeléctrico MFC 8507-P1 que genera por medio del coeficiente  $d_{33}$ . A partir de este dispositivo se evalúa la diferencia entre ambas formas de conversión de energía mecánica en eléctrica de la lámina piezoeléctrica ( $d_{31}$  o  $d_{33}$ ). En este caso los nuevos parámetros del piezoeléctrico y de la subestructura son los presentados en la sección correspondiente del Capítulo 5 y se muestran en la Tabla 6.6.

Coefficiente	Valor	Coefficiente	Valor
$L_1$	23.3 mm	$\rho_s$	7900 kg/m <sup>3</sup>
$L_2$	85 mm	$\rho_p$	5440 kg/m <sup>3</sup>
$L_3$	17.2 mm	$c_{11s}$	193 GPa
$L$	125.5 mm	$c_{11p}$	15.85 GPa
$a$	0.176 mm	$C_p$	2.37 nF
$h_s$	0.38 mm	$d_{33}$	440 pm/V
$b_s$	12.7 mm	$\epsilon_{11}^E$	7.01 nF/m
$h_f$	0.18 mm		
$b_f$	0.355 mm		
$h_k$	0.06 mm		
$l_p$	0.41 mm		
$w_p$	0.097 mm		
$n_f$	18		

Tabla 6.6 – Parámetros geométricos y de material del MFC 8507-P1.

Siguiendo el mismo procedimiento experimental que para el dispositivo anterior, en la Figura 6.15 se muestra la respuesta en frecuencia para este caso, donde cada círculo en las curvas corresponde a los valores de voltaje medidos experimentalmente. Dichas curvas presentan una morfología similar a la del



dispositivo 1 (Figura 6.10), observándose los mismos cuatro estados resonantes principales en 60, 70, 87 y 120 Hz aproximadamente. Nuevamente hay dos resonancias en el intervalo de ciudad y otras dos en el intervalo de utilización en ruta.

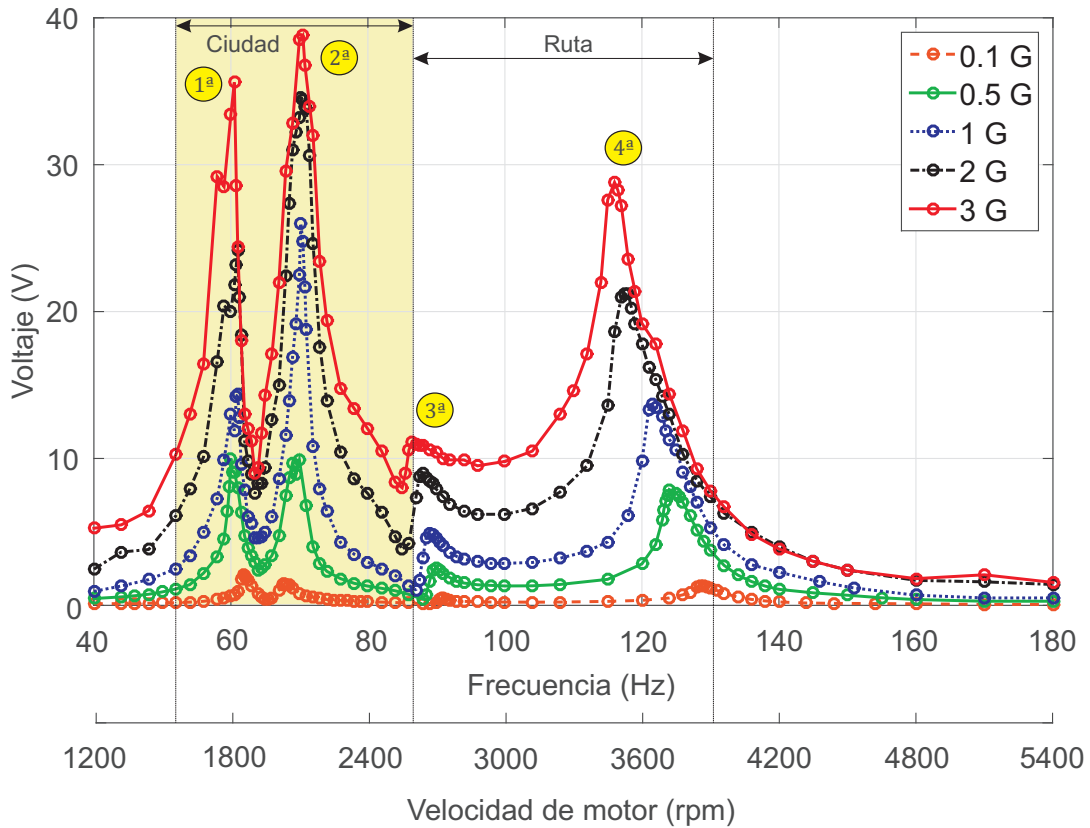


Figura 6.15 - Respuesta en frecuencia de datos experimentales (Dispositivo 2).

Los valores de voltaje máximos registrados dentro del rango de ciudad, son de 35 y 39 V a 3 G de aceleración, correspondientes a 4.8 y 5.9 mW de potencia eléctrica. La mayor diferencia en comparación con el modelo anterior se encuentra en la generación de voltaje, siendo mayor en los valores pico que los del dispositivo anterior. Analizando el intervalo de ruta, se observa un incremento en el valor pico del cuarto modo de 18 a 28 V para 3 G. Este aumento provoca un incremento en la generación dentro del rango de frecuencias del tercero y cuarto modo, la cual prácticamente no desciende de 10 V (392  $\mu$ W) con una potencia media de 699  $\mu$ W, siendo cerca del doble de lo que recuperaba el dispositivo anterior.

En la Tabla 6.7 se presentan los valores de potencia media recuperada para los intervalos de ciudad y ruta para los distintos niveles de aceleración de la base. Comparando estos valores con los de la Tabla 6.5, correspondientes al dispositivo que genera por modo  $d_{31}$ , se puede decir que con el dispositivo que genera por modo  $d_{33}$  la recuperación de energía es notablemente mayor, en especial a altos valores de aceleración.

Aceleración	Potencia Media ( $\mu\text{W}$ )	
	Ciudad	Ruta
0.1G	1.2	0.6
0.5 G	45.1	24.5
1 G	187.5	101.5
2 G	718.7	363.8
3 G	1392.6	699.6

Tabla 6.7 – Potencia media del segundo dispositivo recuperador, en ciudad y ruta.

A baja amplitud de aceleración no existe tanta diferencia (incluso en el modo  $d_{31}$  la generación es levemente mayor en ciudad para 0.1 G), sin embargo a medida que la aceleración aumenta la generación por  $d_{33}$  aumenta mucho más que con el  $d_{31}$ . Esta diferencia en la generación se acentúa aún más, a medida que los niveles de excitación aumentan, siendo cercana al doble para una aceleración de 3 G.

Respecto a los corrimientos en frecuencia, la Figura 6.15 refleja algo muy similar a lo que sucede en el dispositivo 1 (ver Figura 6.10). En este caso los corrimientos son levemente mayores, siendo de 3.5 Hz para la tercera resonancia y de 13 Hz para la cuarta.

### 6.1.3 Dispositivo 3

En este caso, se fabrica un dispositivo como el mostrado en la Figura 6.16, vinculando los resortes con la viga compuesta mediante bisagras. Con este tipo de dispositivo se busca evaluar los efectos que genera la incorporación de articulaciones en los extremos, reemplazando el pegado por soldadura plástica. En este sentido, es importante decidir sobre la conveniencia en términos de generación respecto de tener un modelo más bien rígido ( $k_{t1,2} > 0$ , pegado) o más bien flexible que permita la rotación de los extremos ( $k_{t1,2} \cong 0$ , bisagras).

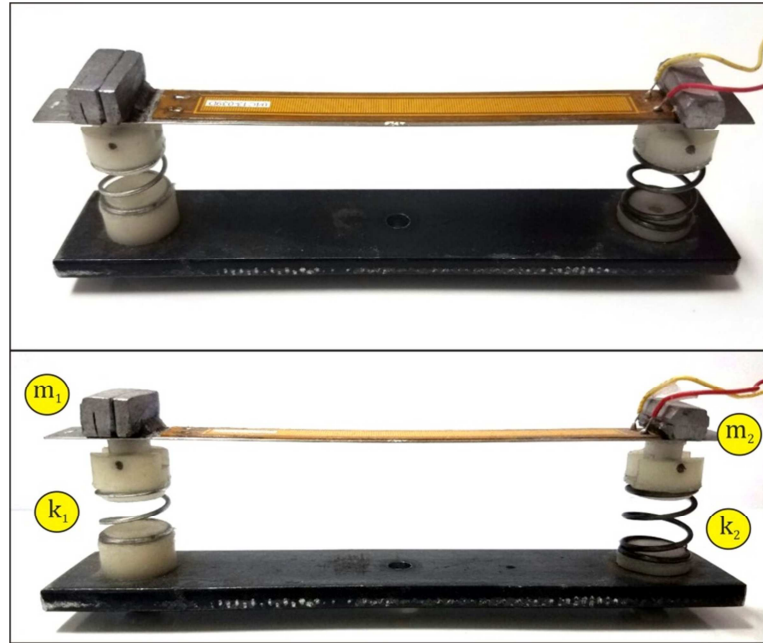


Figura 6.16 - Dispositivo 3: con bisagras en los extremos.

En la Figura 6.17 se pueden observar en detalle dichas bisagras, las cuales se componen de dos partes construidas en plástico poliacetal (Delrin), una de las partes adosada a la viga y la otra al resorte mediante un adhesivo de cianoacrilato. Estas dos partes poseen un orificio sobre el cual encastra un eje de acero mediante el cual se genera la articulación. También se puede ver en dicha figura que en este caso las masas de los extremos ( $m_{1,2}$ ) son de una sola pieza y están directamente pegadas (con cianoacrilato) sobre la superficie superior de la viga.

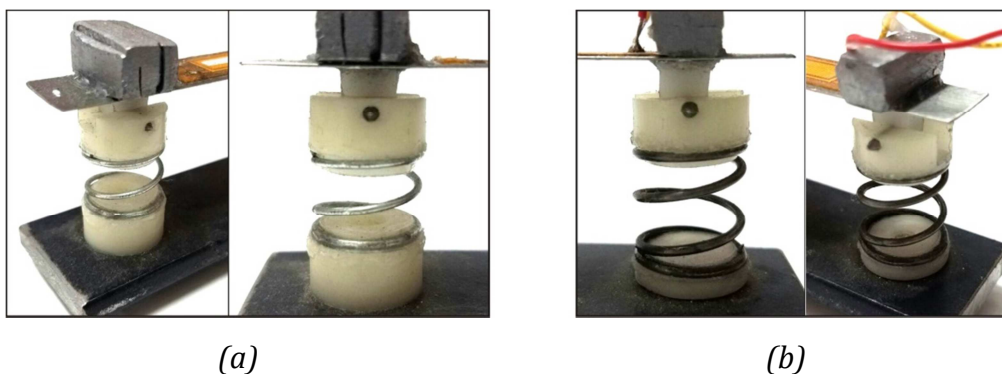


Figura 6.17 - Detalle de condiciones de vínculo del dispositivo 3: (a) sistema masa-resorte del extremo 1 y (b) del extremo 2.

Constructivamente y en comparación con los modelos anteriores, este dispositivo presenta dos características distintivas: (i) se puede repetir con facilidad ya que la fabricación es más sencilla, y (ii) permite reemplazar fácilmente la viga piezoeléctrica compuesta (con las masas de los extremos) por cualquier otra de diferente configuración haciendo más versátil el diseño.

Los parámetros del piezoeléctrico utilizado MFC 8507-P2 y de la subestructura son los mismos que se presentaron en la sección 6.1.1 del presente capítulo, excepto las longitudes que son las que se muestran en la Tabla 6.8. El resorte  $k_1$  tiene 13.6 mm de diámetro, 1.25 espiras activas y el diámetro del alambre es de 1 mm, en tanto que el resorte  $k_2$  tiene 13.8 mm de diámetro, está fabricado con un alambre de 1.2 mm de diámetro y tiene 1.5 espiras activas. Respecto a las rigideces torsionales  $k_{t1}$  y  $k_{t2}$  se consideraron nulas debido a las articulaciones. Los valores de las masas y de los resortes se muestran en la Tabla 6.9 y se eligieron convenientemente para que el dispositivo tenga aproximadamente las mismas frecuencias naturales que los dispositivos anteriores y de esta manera ser comparables entre sí.

Longitud	Valor
$L_1$	16.2 mm
$L_2$	85 mm
$L_3$	9.2 mm
$L$	110.4 mm

Tabla 6.8 – Longitudes de la viga compuesta del dispositivo 3.

Parámetro	Valor
$m_1$	15 g
$m_2$	9.5 g
$k_1$	2730 N/m
$k_2$	4320 N/m
$J_1$	$3.35 \times 10^{-7}$ kg/m <sup>2</sup>
$J_2$	$5.86 \times 10^{-8}$ kg/m <sup>2</sup>

Tabla 6.9 – Parámetros mecánicos medidos del dispositivo 3.

La Figura 6.18 presenta los ensayos experimentales para este dispositivo, donde se pueden observar las curvas de respuesta en frecuencia para los diferentes niveles de aceleración. El primer aspecto destacable es que la forma de las curvas es totalmente diferente al de los dispositivos anteriores (ver Figura 6.10 y Figura 6.15).

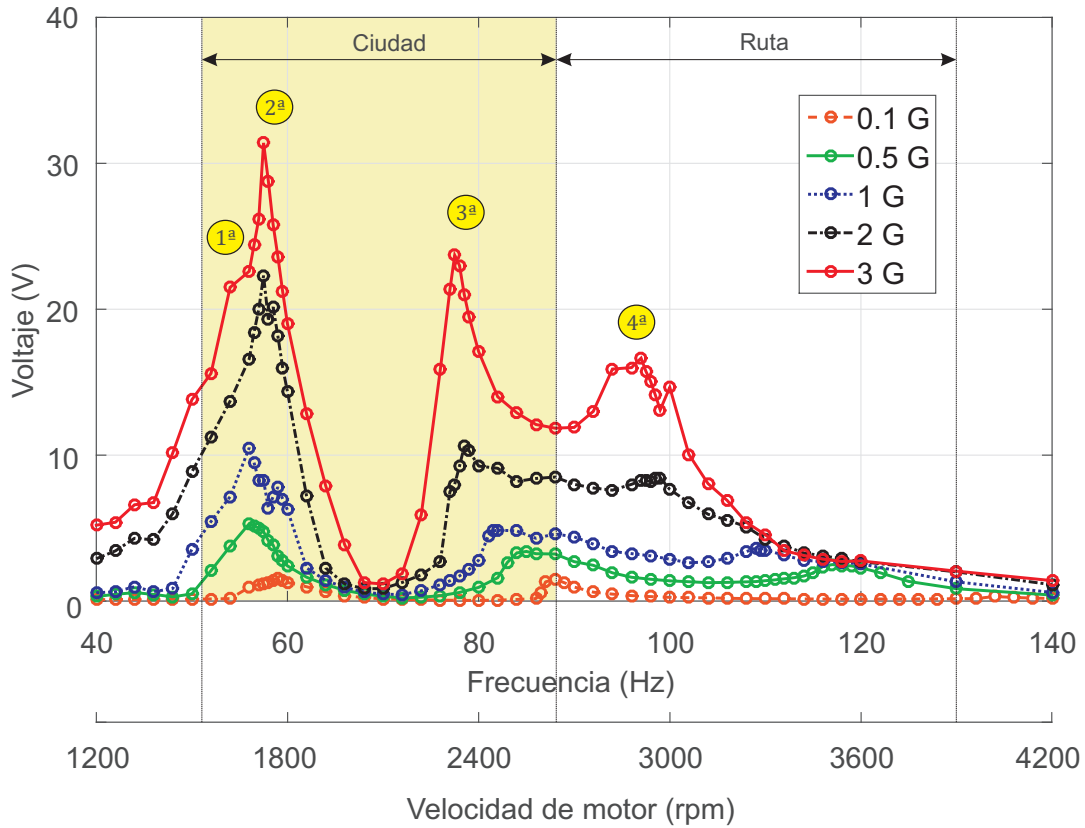


Figura 6.18 - Respuesta en frecuencia de datos experimentales (Dispositivo 3).

Por un lado, los dos primeros estados resonantes observados en dichos dispositivos a 60 y 70 Hz, ahora están más juntos, prácticamente fusionados en uno solo a 58 Hz. En segundo lugar, el tercer y cuarto estados resonantes están desplazados a menor frecuencia respecto de los dispositivos 1 y 2. El tercer modo resonante pasó de estar en los 87 Hz a estar en los 80 Hz y el cuarto modo se trasladó desde un valor de 120 Hz a 100 Hz. Además, en estos dos últimos estados resonantes se invirtieron los valores máximos, registrándose en la tercera resonancia un valor mayor de voltaje que el de la cuarta.

Al cambiar la respuesta en frecuencia aparecen los primeros tres estados resonantes en el intervalo de operación correspondiente a la velocidad en ciudad y solo un estado resonante en el rango de ruta. Si bien en el intervalo de ciudad hay un estado resonante adicional, lo cual se presenta como beneficioso, aparece una disminución de generación en la zona en torno a los 70 Hz, lo cual provoca una disminución en la recuperación de energía.

Respecto a los máximos valores de voltaje, se observa que se encuentran dentro del rango de uso en ciudad, presentando picos de 31 y 23 V a 3 G de aceleración representando 3.7 y 2 mW de potencia eléctrica. Estos valores son sensiblemente menores a los picos de los dos dispositivos previos. En el intervalo de ruta la amplitud máxima de voltaje es de 16 V, siendo la potencia eléctrica de 1 mW. En la Tabla 6.10 se presentan los valores de potencia media recuperada para los intervalos de ciudad y ruta. Analizando dichos valores se observa que si bien en el intervalo de ciudad la generación es mayor que en el de ruta, a baja amplitud de excitación la diferencia no es tan grande como en los casos anteriores (ver Tabla 6.5 y Tabla 6.7), siendo más notable la diferencia en altos niveles de aceleración.

Aceleración	Potencia Media ( $\mu\text{W}$ )	
	Ciudad	Ruta
0.1 G	0.7	0.4
0.5 G	12.2	11.3
1 G	44.4	31.1
2 G	220.1	93.9
3 G	656.9	194.3

*Tabla 6.10 – Potencia media del tercer dispositivo recuperador, en ciudad y ruta.*

Es importante comparar este tercer dispositivo con el primero, ya que dicho dispositivo está fabricado con la misma lámina piezoeléctrica (modo de generación  $d_{31}$ ), siendo la única diferencia entre ambos la vinculación de los extremos. Si bien los aspectos constructivos del presente dispositivo son más convenientes a los anteriores, esta comparación permitirá determinar cuál de las dos vinculaciones es mejor en términos de recuperación de energía, que es el principal interés de esta tesis. En este sentido, comparando los valores de la Tabla 6.10 con los de la Tabla 6.5, se puede ver claramente que el dispositivo 1, el cual posee los resortes pegados directamente a la viga, recupera considerablemente más energía en ambos intervalos de utilización y para todos los niveles de excitación. En este punto se puede decir que a pesar de que la vinculación de este tercer dispositivo presenta beneficios constructivos importantes, la recuperación de energía es mucho menor al de la vinculación por pegamento.

En relación a los corrimientos en frecuencia, se observan en la Figura 6.18 importantes desplazamientos de los picos de resonancia en el tercer y cuarto estado resonante. La tercer frecuencia de resonancia se corre desde los 88 Hz a 0.1 G hasta los 77 Hz a 3 G, es decir 11 Hz menor. Por otra parte, el cuarto pico resonante se corre nada menos que 37 Hz, pasando de 134 a 97 Hz al variar las aceleraciones de 0.1 a 3 G. En comparación con los resultados observados en los dispositivos anteriores, en el sistema actual los corrimientos son en promedio tres veces mayores.

#### 6.1.4 Dispositivo 4

Finalmente, en el cuarto dispositivo, solo se modifica la lámina piezoeléctrica del dispositivo anterior (3) cambiando de MFC 8507-P2 ( $d_{31}$ ) por MFC 8507-P1 ( $d_{33}$ ). Realizando las mismas mediciones experimentales que para los otros dispositivos, con la misma resistencia de carga (255 k $\Omega$ ), en la Figura 6.19 se muestra la respuesta en frecuencia de dicho dispositivo. En dicha figura se incorpora en forma anexa la curva para 0.1 G de aceleración (a la derecha de la figura) ya que no se alcanza a observar claramente junto con las demás curvas por la diferencia de amplitud. Se puede ver que todas las curvas presentan una morfología ligeramente diferente a la del dispositivo 3 (Figura 6.18), observándose diferencias sustanciales en el tercer y cuarto estado resonante. En este caso, los valores máximos de voltaje corresponden a la cuarta frecuencia de resonancia, situación contraria al caso anterior. Dicho valor se encuentra en el intervalo de ruta y es de 39 V (5.9 mW) en tanto que en el rango de ciudad se mantienen las otras tres resonancias siendo sus valores picos de 27 V (2.8 mW) para la primera, 31 V (3.7 mW) para la segunda y 13 V (0.6 mW) para la tercera.

En la Tabla 6.11 se muestran los valores de potencia media para ambos intervalos y para cada nivel de aceleración. Se puede ver que al igual que sucedía con los dispositivos anteriores, la generación media en el intervalo de ciudad es mayor al de ruta. Además, comparando los valores de la Tabla 6.9 con los de la Tabla 6.10 correspondientes al dispositivo 3 ( $d_{31}$ ), se puede ver que a bajos niveles de aceleración recupera más energía el dispositivo 3 con el modo  $d_{31}$ , sin embargo, para altas aceleraciones la generación por modo  $d_{33}$  lo supera ampliamente. Recordando

que el dispositivo 2 ( $d_{33}$ ) genera mayor potencia media para cualquier nivel de aceleración que el dispositivo 1 ( $d_{31}$ ), se puede decir que la generación por medio del modo  $d_{33}$  es más conveniente para este tipo de dispositivos. Este resultado se contrapone a lo que se observó con la viga cantiléver, donde la generación mediante  $d_{31}$  es mayor que la  $d_{33}$ . Sin embargo, en el caso de la viga cantiléver se utilizó únicamente una aceleración máxima de 1 G mientras que en los dispositivos multimodales se observa que la generación por  $d_{33}$  comienza a ser mayor a medida que aumenta la aceleración.

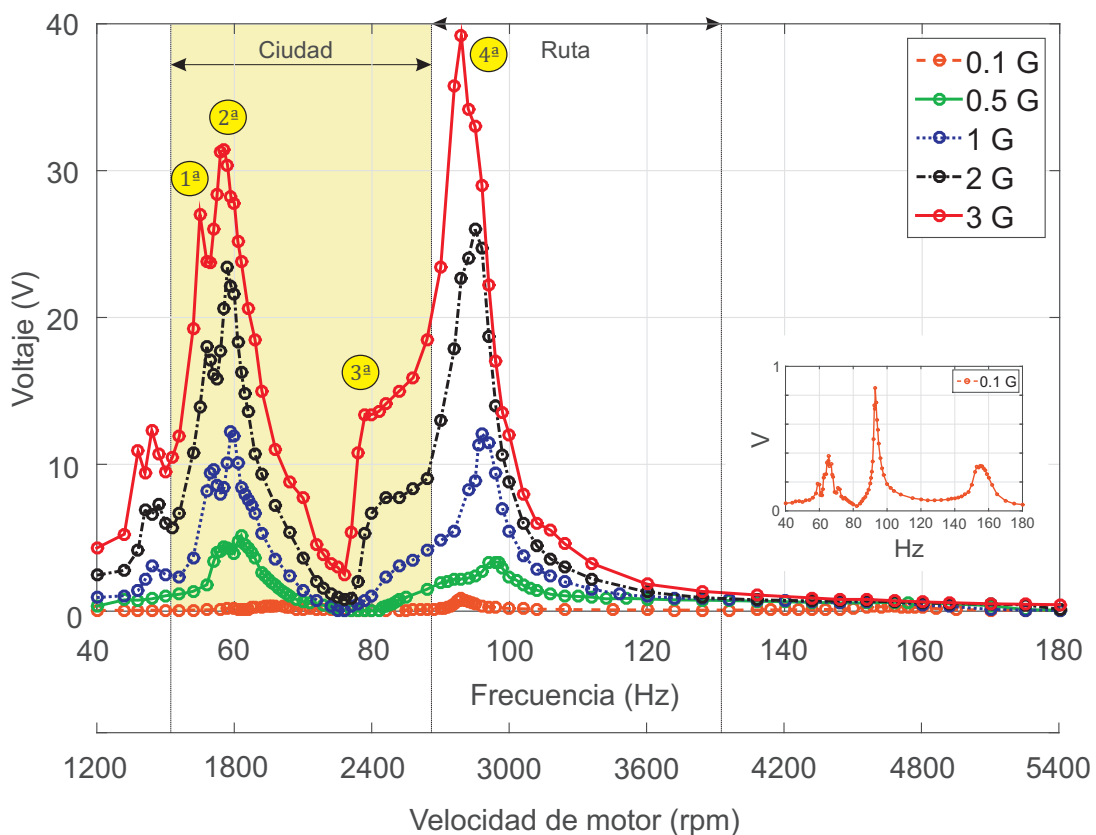


Figura 6.19 - Respuesta en frecuencia de datos experimentales (Dispositivo 4).

Por otra parte, de la Figura 6.19 se puede observar entre 45 y 50 Hz la presencia de picos adicionales de generación para el dispositivo 4 que en los dispositivos anteriores no se encontraban. Esto puede deberse a la presencia de algún modo de vibración perteneciente al conjunto de las bisagras articuladas.



Aceleración	Potencia Media ( $\mu\text{W}$ )	
	Ciudad	Ruta
0.1 G	0.1	0.1
0.5 G	8.8	7.3
1 G	54.9	39.2
2 G	275.4	155.8
3 G	813.4	356.5

*Tabla 6.11 – Potencia media del cuarto dispositivo recuperador, en ciudad y ruta.*

Respecto de los corrimientos en frecuencia de los estados resonantes, se observa que al pasar de 0.1 a 0.5 G de excitación, la frecuencia se corre de los 155 a los 98 Hz, es decir 57 Hz hacia la izquierda, siendo el mayor corrimiento registrado en todos los dispositivos presentados. Sin embargo, al pasar de los 0.5 a los 3 G solo se corre 5 Hz, es decir, experimenta un corrimiento abrupto solo a baja amplitud de excitación. Este comportamiento puede deberse a la modificación de la condición de fricción en las bisagras a medida que aumenta la aceleración. Un corrimiento menor también sucede con las restantes frecuencias resonantes, siendo de 4 Hz para la primera, 7 Hz para la segunda y 14 Hz para la tercera, al pasar de 0.1 a 3 G de aceleración. Esto demuestra que los dispositivos con vinculación por medio de bisagras presentan un mayor corrimiento de los estados resonantes que los que presentan vinculación mediante soldadura plástica. Además, esto implica que la presencia de bisagras flexibiliza al sistema en su conjunto por la introducción de condiciones de vínculo más flexibles.

Por otra parte, analizando la influencia de la condición de vínculo en los dispositivos de mayor generación  $d_{33}$  (modelo 2 y 4), se puede ver que el dispositivo 4 recupera la mitad (o incluso menos) de la energía que recupera el dispositivo 2, analizando la potencia media en los intervalos de uso. Esto mismo se concluyó en la sección 6.1.3, al comparar el dispositivo 3 ( $d_{31}$  con bisagras) con el dispositivo 1 ( $d_{31}$  con resortes pegados), es decir, la vinculación mediante pegamento de los resortes de los extremos con la viga hace que se recupere más energía que mediante la vinculación por articulaciones.

A modo de resumen, en la Tabla 6.12 se presenta una comparativa de la potencia media recuperada por cada uno de los dispositivos en el intervalo de

ciudad. Estos mismos valores se muestran en la Figura 6.20 para mejor interpretación.

Aceleración	Potencia Media ( $\mu\text{W}$ )			
	Dispositivo 1 ( $d_{31}$ + pegados)	Dispositivo 2 ( $d_{33}$ + pegados)	Dispositivo 3 ( $d_{31}$ + bisagras)	Dispositivo 4 ( $d_{33}$ + bisagras)
0.1 G	1.4	1.2	0.7	0.1
0.5 G	36.4	45.1	12.2	8.8
1 G	131.5	187.5	44.4	54.9
2 G	426.5	718.7	220.1	275.4
3 G	858.1	1392.6	656.9	813.4

Tabla 6.12 – Comparación de los cuatro dispositivos: potencia media recuperada en el intervalo de ciudad.

Es claro que el dispositivo 2 es el de mayor potencia media en todos los niveles de aceleración medidos (excepto para 0.1 G comparado con el dispositivo 1). Por otro lado, el dispositivo de menor energía media es el dispositivo 3, el cual genera por modo  $d_{31}$  y tiene vinculación por medio de bisagras. Además, los dos dispositivos vinculados por pegamento (dispositivos 1 y 2) recuperan más energía que los vinculados por bisagras. Finalmente, los dispositivos que generan por modo  $d_{33}$  (dispositivos 2 y 4) recuperan más que sus equivalentes que generan por modo  $d_{31}$  para niveles de aceleración elevados ( $>0.5$  G).

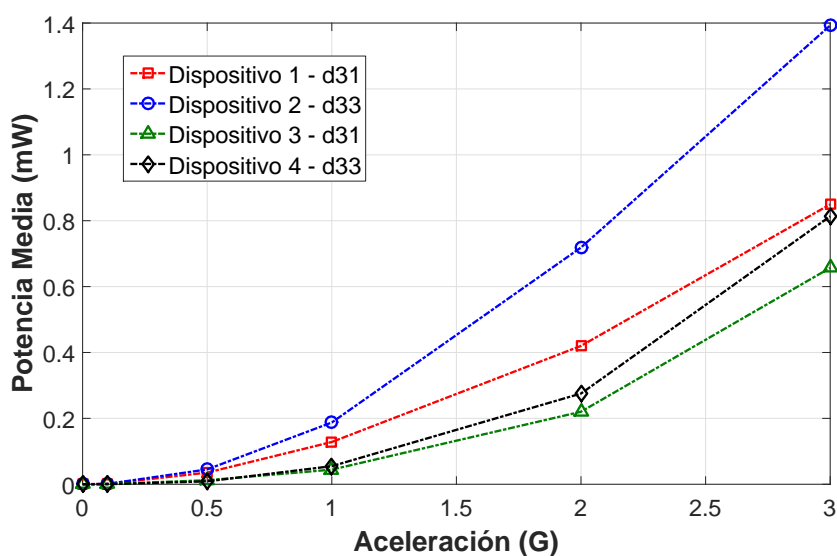


Figura 6.20 - Potencia media en el intervalo de ciudad: comparación de dispositivos.

En la Tabla 6.13 se presentan los valores de potencia media de los cuatro dispositivos pero en este caso, en el intervalo de ruta. En la Figura 6.21 se grafican estos valores.

Aceleración	Potencia Media ( $\mu\text{W}$ )			
	Dispositivo 1 ( $d_{31}$ + pegados)	Dispositivo 2 ( $d_{33}$ + pegados)	Dispositivo 3 ( $d_{31}$ + bisagras)	Dispositivo 4 ( $d_{33}$ + bisagras)
0.1 G	0.6	0.6	0.4	0.1
0.5 G	15.6	24.5	11.3	7.3
1 G	61.5	101.5	31.1	39.2
2 G	184.5	363.8	93.9	155.8
3 G	374.7	699.6	194.3	356.5

Tabla 6.13 – Comparación de los cuatro dispositivos: potencia media recuperada en el intervalo de ruta.

Comparando dicha figura con la Figura 6.20 correspondiente a los valores de potencia media en ciudad, se puede decir que todas las conclusiones elaboradas para dicho intervalo son válidas para el intervalo de ruta también. En este caso, se puede ver que los valores son aproximadamente la mitad que los obtenidos en el rango de ciudad. Además se acentúa más el hecho de que el dispositivo 2 se presenta como el mejor diseño y el dispositivo 3 como el peor en términos de potencia media recuperada.

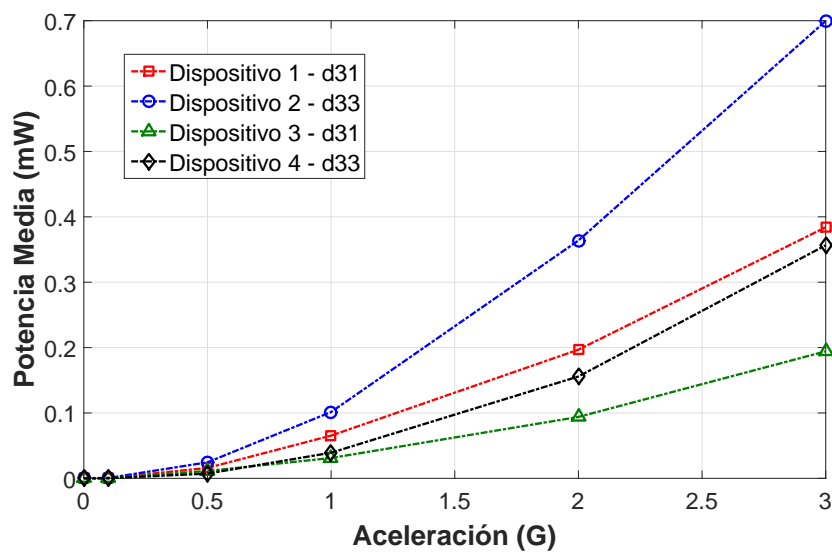


Figura 6.21 - Potencia media en el intervalo de ruta: comparación de dispositivos.

Resumiendo, se puede concluir lo siguiente:

- La recuperación de potencia media en el intervalo de ciudad es mayor al de ruta.
- La generación de energía por medio del modo  $d_{33}$  es más conveniente para este tipo de dispositivos.
- La vinculación mediante pegamento (soldadura plástica) de los resortes de los extremos con la viga permite que se recupere más energía que mediante la vinculación por bisagras.
- La generación del dispositivo 2 es significativa para todo el rango de utilización propuesto (ciudad+ruta) comparada con el resto de los dispositivos.

## 6.2 VALIDACION COMPUTACIONAL

Analizados todos los dispositivos fabricados y habiéndose determinado que el dispositivo 2 es el que mayor potencia media genera según los resultados experimentales de laboratorio, en esta sección se presenta la comparación entre dichos datos experimentales y la predicción del modelo matemático no lineal desarrollado en el Capítulo 4.3. Se utilizan los datos experimentales del dispositivo 2, el cual tiene los resortes pegados y una lámina de piezoeléctrico MFC 8507-P1 que genera por medio del coeficiente  $d_{33}$ .

De manera similar a lo realizado para la identificación de parámetros en el Capítulo 5, se reduce el modelo no lineal completo (ecuaciones (4.73) y (4.74)), a un sistema de ecuaciones algebraicas aplicando el método de promediación. Se utilizan las ecuaciones (D.3)-(D.6) que se presentan en el Apéndice D, en este caso para los tres primeros modos de vibración ( $N = 3$ ).

Los valores de los principales parámetros geométricos y de materiales utilizados en el modelo son los que se presentaron en la sección 6.1.2 del presente capítulo. Respecto a los parámetros no lineales, se utilizan los identificados en el Capítulo 5.1.3 que se muestran la Tabla 5.7, junto con los factores de corrección  $\alpha$  y  $\beta$  de la Tabla 5.6. Es importante aclarar que los tres amortiguamientos modales

lineales se ajustan con los datos experimentales a la menor excitación posible (0.1 G) y los valores obtenidos se muestran en la Tabla 6.14.

Coefficiente	Valor
$\xi_1$	0.011
$\xi_2$	0.039
$\xi_3$	0.008

Tabla 6.14 – Coeficientes de amortiguamiento lineal utilizados.

En la Figura 6.22 se muestran las curvas de respuesta en frecuencia obtenidas con el modelo no lineal a 0.1, 0.5, 1, 2 y 3 G de aceleración de la excitación. Como era de esperar, y al igual que sucedió con la viga en cantiléver utilizada en la identificación de parámetros (Figura 5.12), el voltaje aumenta a medida que la excitación aumenta, para todos los valores de frecuencia. En dicha curva se observan las tres principales frecuencias naturales de vibración ubicadas a 69, 87 y 122 Hz pertenecientes a los tres primeros modos flexionales de vibración del recuperador. Anticipando un comentario a la comparación con los datos experimentales, en este caso no se observan los corrimientos en frecuencia que surgen en los experimentos (ver Figura 6.15).

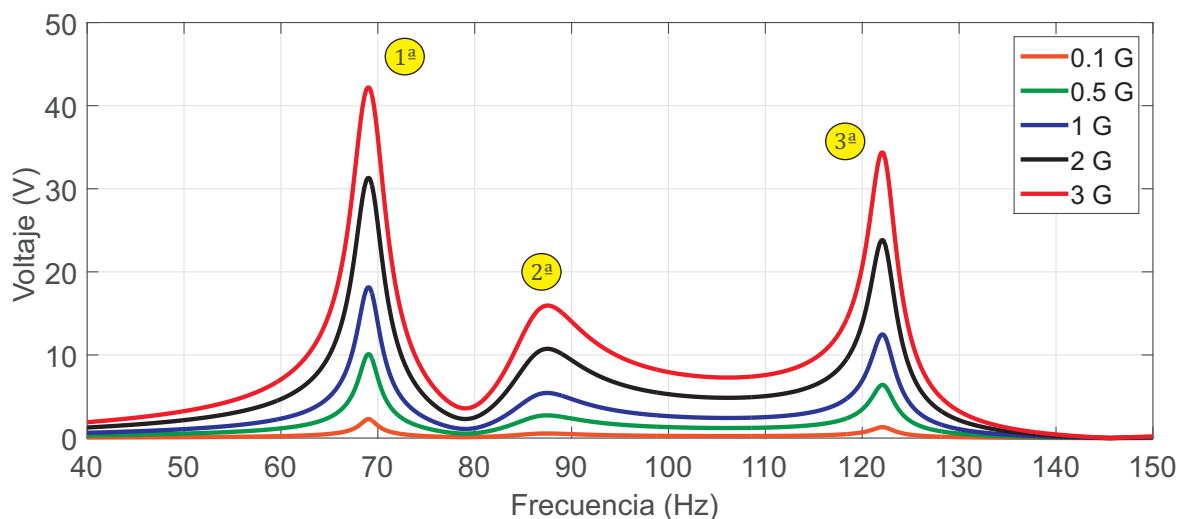


Figura 6.22 - Curvas de respuesta en frecuencia del modelo no lineal (Dispositivo 2).

Con el objetivo de poder comparar los datos experimentales con el modelo matemático, de la Figura 6.23 a la 6.27 se muestran los datos experimentales y las curvas obtenidas con el modelo no lineal, para cada nivel de aceleración por separado. En la Figura 6.23 para 0.1 G de aceleración, se observa que la curva del modelo tiene la forma de los datos experimentales, sin embargo el modelo matemático no predice el primer modo experimental debido a que este último corresponde al modo torsional a 62 Hz.

Las diferencias más notorias se observan en los desfases en frecuencia que experimentan el segundo y tercer modo flexional, siendo de 4 y 7 Hz respectivamente, prediciendo el modelo menores valores. Estas discrepancias pueden deberse a la condición de vinculo. En este sentido, como se analizó en la introducción del presente capítulo y se puede ver en la Figura 6.5, sobre estos modos (segundo y tercero) tiene incidencia directa la rigidez vertical del resorte  $k_2$ . Debido a las irregularidades de la soldadura plástica y a la dificultad de la medición de rigidez motivada por el reducido tamaño de los resortes, la incertidumbre en el valor medido de la rigidez vertical es grande, siendo posiblemente el motivo de dichos desfases de las frecuencias. Siguiendo este mismo concepto, la rigidez torsional de dicho resorte ( $k_{t2}$ ) puede ser otro factor que genere diferencias, más aun teniendo en cuenta la dificultad que presenta la medición de dicho parámetro, ya que la aplicación de una fuerza sobre el extremo para generar un momento sobre el resorte y poder medir así esta rigidez es muy difícil de realizar.

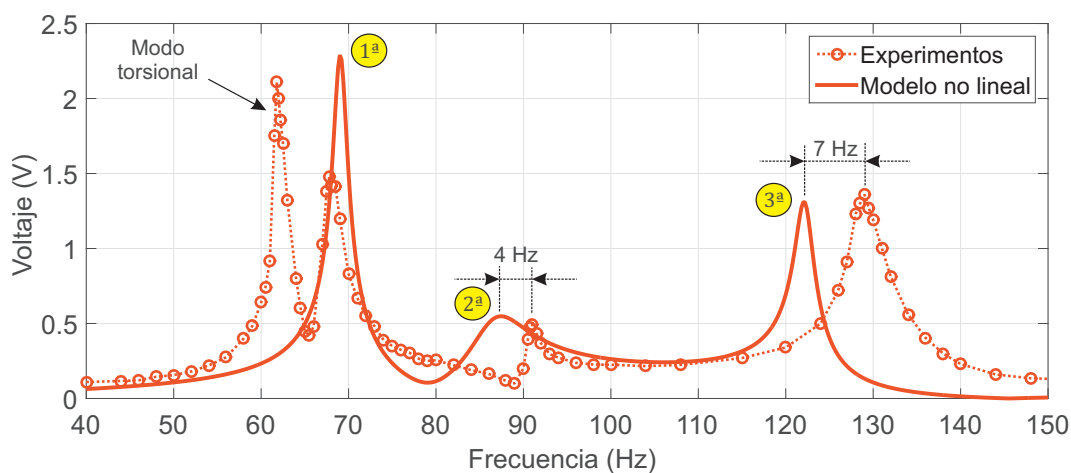


Figura 6.23 - Comparación de respuesta en frecuencia para 0.1 G de aceleración.

Observando las restantes figuras (6.24 - 6.27) para los otros valores de aceleración, se puede ver que la diferencia de los resultados experimentales con los del modelo matemático se va achicando a medida que aumenta la aceleración. Esto se debe al efecto de corrimiento en frecuencia hacia la izquierda de los valores experimentales del segundo y tercer modo, como se analizó en la sección anterior 6.1.2 (ver Figura 6.15).

Considerando la complejidad constructiva, el comportamiento dinámico multimodal del dispositivo recuperador y la no linealidad material del piezoeléctrico, se puede estimar como aceptable la predicción del modelo no lineal propuesto en la presente tesis. El calificativo de aceptable va asociado con que se trata de un modelo unidimensional compuesto por dos materiales, uno de ellos altamente no lineal, que incorpora condiciones de borde complejas del tipo masa-resorte con posibilidad de traslación y rotación, y que es utilizado para modelar un fenómeno electromecánico de generación de energía. Además, la reducción del modelo permite obtener un sistema de ecuaciones algebraicas de rápida resolución computacional que facilita, entre otros análisis, la identificación de parámetros lineales y no lineales constitutivos del dispositivo (Capítulo 5) y la optimización del dispositivo recuperador (presentada en el siguiente capítulo).

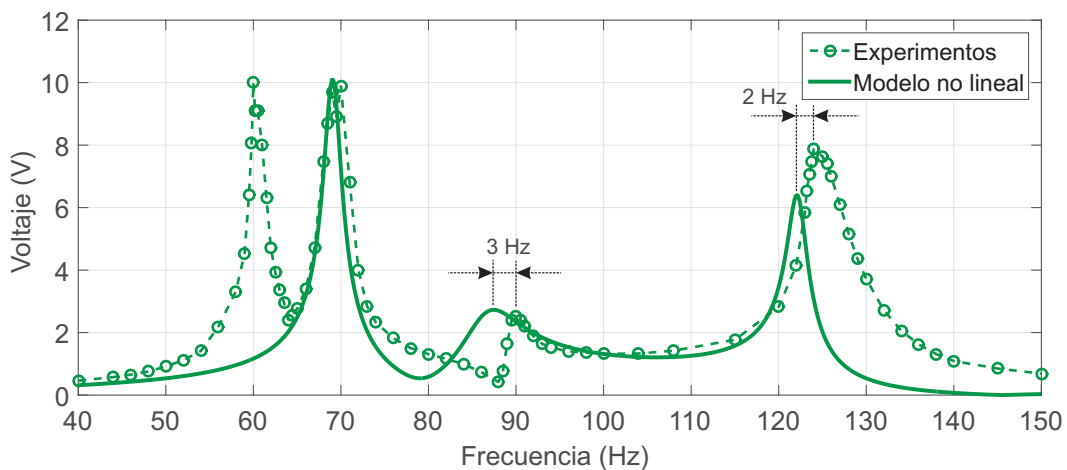


Figura 6.24 - Comparación de respuesta en frecuencia para 0.5 G de aceleración.

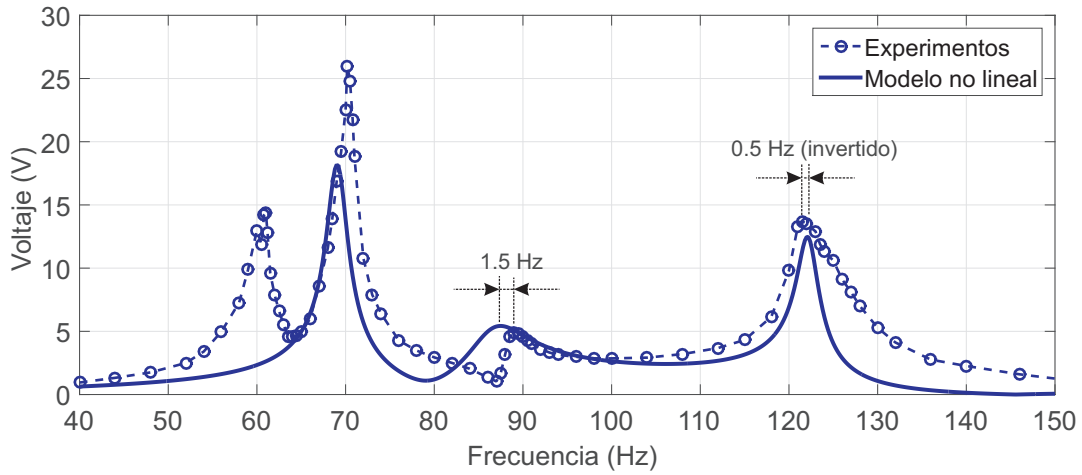


Figura 6.25 - Comparación de respuesta en frecuencia para 1 G de aceleración.

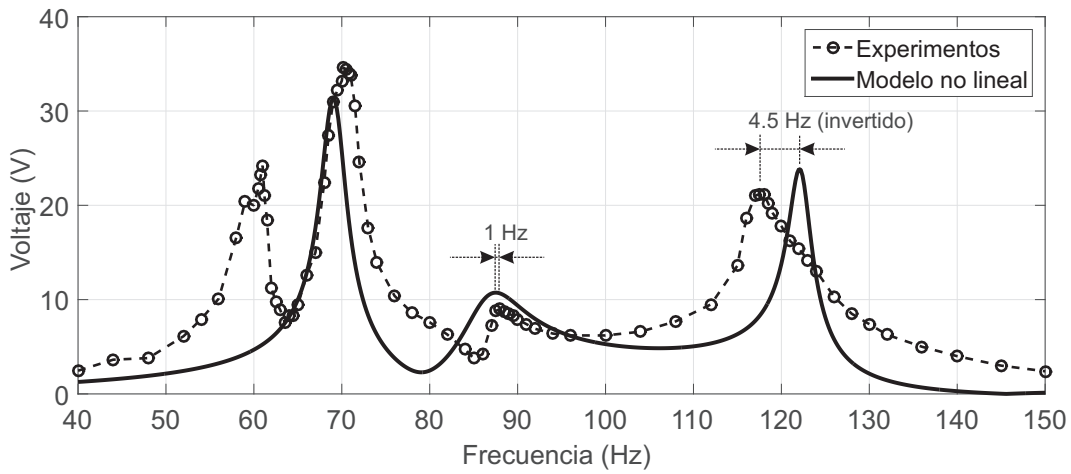


Figura 6.26 - Comparación de respuesta en frecuencia para 2 G de aceleración.

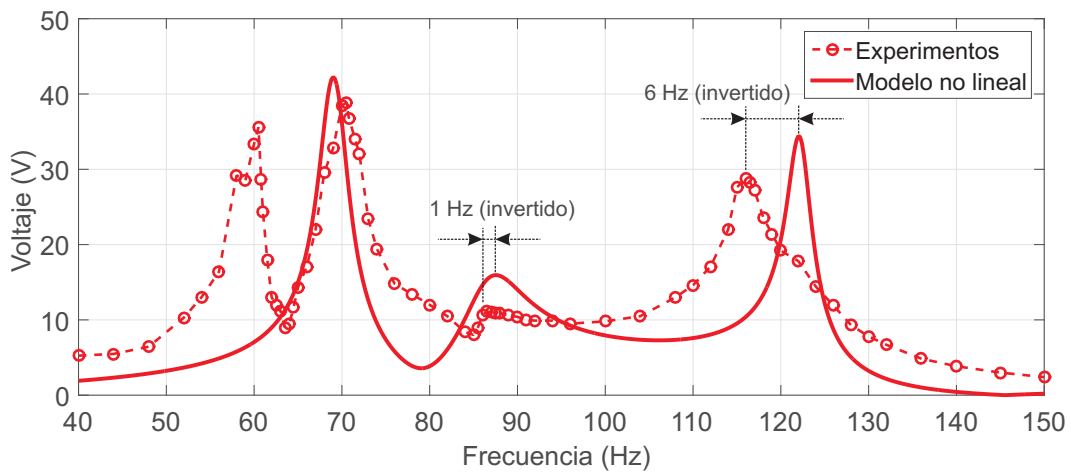


Figura 6.27 - Comparación de respuesta en frecuencia para 3 G de aceleración.



# Optimización

---

En el capítulo anterior se presentaron las diferentes variantes de dispositivos recuperadores de energía vibratoria, determinándose cuál de todas ellas es la mejor en términos de potencia media recuperada. Sin embargo, el hecho de que represente la mejor alternativa entre los presentados hasta aquí no significa que sea la alternativa óptima que se pueda obtener. Es decir, bajo las mismas condiciones de vínculo y de materiales utilizados, puede existir un conjunto de parámetros geométricos y mecánicos diferentes que permitan una mayor extracción de energía.

Con el fin de obtener dicho conjunto de parámetros óptimos, muchos investigadores [20, 48] han implementado diferentes técnicas de optimización. Matemáticamente, el problema general de optimización consiste en la minimización de una función objetivo,  $F(\mathbf{X})$ :

$$\min F(\mathbf{X}) \quad , \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n \quad (7.1)$$

sujeto a las restricciones:

$$\begin{aligned} h_i(\mathbf{X}) &= 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \\ g_j(\mathbf{X}) &\leq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (7.2)$$

donde  $\mathbf{X}$  es el vector de parámetros libres para realizar la optimización y  $h_i(\mathbf{X})$ ,  $g_j(\mathbf{X})$  son funciones de restricción.

Entre las técnicas de optimización heurísticas más utilizadas actualmente se encuentra la de algoritmos genéticos [50], la cual presenta diversas variaciones dependiendo fundamentalmente de cómo se apliquen los operadores genéticos (selección, cruzamiento y mutación). Básicamente, un algoritmo genético es un método para abordar problemas de optimización con o sin restricciones basándose en un proceso de selección natural que imita la evolución biológica. El método pertenece a la clase de métodos estocásticos de búsqueda y se puede aplicar para solucionar problemas que no se adaptan en forma adecuada a los algoritmos de optimización estándar [122], incluidos aquellos en los que la función objetivo es discontinua, no diferenciable, estocástica o altamente no lineal.

La base de este algoritmo es la modificación repetida de una población de soluciones individuales para dar con la solución óptima. Un esquema del mecanismo evolutivo utilizado, es presentado en la Figura 7.1, el cual puede resumirse de la siguiente manera:

- Sobre una población  $i$  (generación) de  $j$  individuos (conjunto de parámetros) se evalúa la función objetivo  $F(\mathbf{X}_{ij})$  para cada individuo  $\mathbf{X}_{ij}$  el cual está compuesto por  $k$  número de genes (parámetros).
- Los mejores individuos (elite), es decir, los que mejor resultado arrojan son seleccionados para la siguiente reproducción (generación). Durante dicha reproducción, los restantes individuos de la población resultan de modificaciones e intercambio genético de los padres (anteriores individuos) mediante los operadores de cruzamiento y mutación.
- Una vez que se renueva la población, el proceso recomienza y tras  $n$  generaciones sucesivas, la población evoluciona hacia una solución óptima.

Esto implica que hay dos espacios donde opera la evolución. Por un lado, a nivel de los individuos físicos (fenotipo) que deben adaptarse para ser seleccionados y por otro lado, a nivel de la información genética (genotipo) a través de los operadores que intercambian y varían la información genética. Entre estos últimos operadores genéticos pueden distinguirse tres operadores con diferentes funciones. El primer operador es el de *selección*, mediante el cual se selecciona a los mejores

individuos (elite) de una población para la nueva etapa de reproducción. El segundo es el operador de *mutación*, el cual introduce cierta aleatoriedad en la búsqueda al cambiar unos genes de algunos individuos por otros, contribuyendo a una exploración azarosa en el espacio genético. Finalmente, el operador de *cruzamiento* que genera una recombinación de la información (genes) durante la reproducción de los individuos seleccionados.

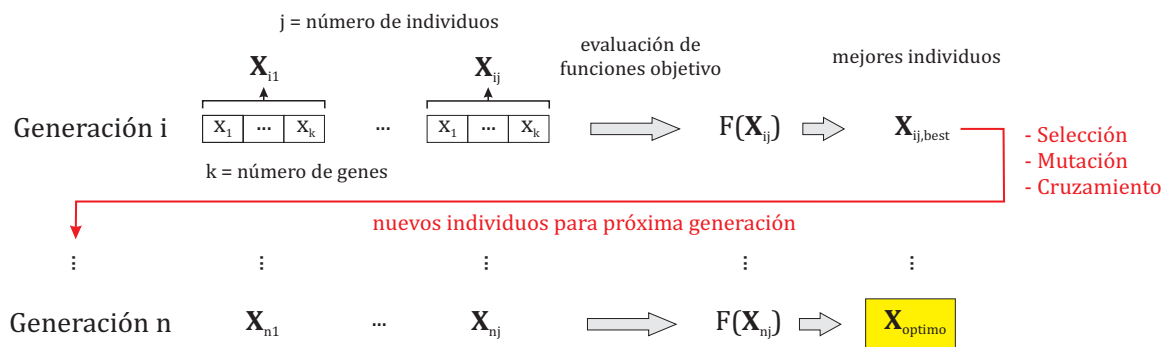


Figura 7.1 - Esquema general del algoritmo genético.

### 7.1 PARAMETROS, RESTRICCIONES Y FUNCIONES OBJETIVO

Para poder realizar la optimización del dispositivo recuperador de energía presentado en el capítulo anterior es importante determinar y definir previamente tres cuestiones fundamentales:

- (i) los parámetros libres,
- (ii) las restricciones de dichos parámetros y
- (iii) la función objetivo.

Respecto a los parámetros que se dejan libres para realizar la optimización, se establece un control sobre la selección de ellos ya sea por disponibilidad en el mercado proveedor o por la posibilidad de variar algunos parámetros en la fabricación del dispositivo recuperador. Además, la modificación de dichos parámetros debe generar un efecto notable sobre la respuesta en frecuencia del dispositivo en referencia a la generación eléctrica. Entre los parámetros que cumplen estas condiciones se encuentran los geométricos y mecánicos analizados en el Capítulo 6: las masas de los extremos ( $m_{1,2}$ ), la rigidez vertical de los resortes

de dichos extremos ( $k_{1,2}$ ), el espesor de la subestructura de acero inoxidable ( $h_s$ ) y la longitud total de la viga compuesta ( $L$ ). Estos seis parámetros son las variables que se utilizan para realizar la optimización del dispositivo y en la Tabla 7.1 se muestran las restricciones adoptadas sobre los mismos en el proceso de optimización. Cabe aclarar que la longitud del piezoeléctrico ( $L_2$ ) se mantiene fija (debido a las restricciones impuestas por el fabricante), con lo cual la longitud  $L$  se varía acortando o alargando las longitudes de los extremos ( $L_1$  y  $L_3$ ) en iguales proporciones. Las restricciones respecto al espesor de la subestructura ( $h_s$ ) son debidas a la disponibilidad del proveedor del material y en el caso de los resortes y las masas en los extremos debido a cuestiones constructivas y de tamaño.

Parámetro	Mínimo	Máximo	Unidades
$m_{1,2}$	1	40	$g$
$k_{1,2}$	100	10000	$N/m$
$h_s$	0.1	1.5	$mm$
$L$	100	140	$mm$

Tabla 7.1 – Parámetros y restricciones de la optimización.

En relación a la selección de la función objetivo, en la mayoría de los trabajos de investigación se propone como función objetivo la maximización del pico máximo de potencia eléctrica a una cierta frecuencia [49, 53-55]. Sin embargo, a partir de dicha función objetivo no siempre se obtiene el dispositivo que recupera la mayor cantidad de energía posible en el intervalo de frecuencias de operación. Esto se debe principalmente a que el criterio de maximizar la potencia para una frecuencia en particular se contrapone a las características de la fuente, variable tanto en amplitud como en frecuencia, resultando determinantes en el desenvolvimiento del dispositivo recuperador.

En base a esto último, en este trabajo se presenta y analiza la influencia de tres funciones objetivos diferentes en la optimización del dispositivo, determinando de esta manera la más adecuada para recuperar energía en una aplicación de las características consideradas en esta tesis. Las tres funciones objetivo seleccionadas son:

1. Potencia máxima: es la función objetivo adoptada convencionalmente por la mayoría de los autores. Se maximiza el máximo pico de potencia eléctrica de salida que se puede obtener dentro del intervalo de frecuencias de trabajo en ciudad, y se define como:

$$\min - \max |P(f, \mathbf{X})| \quad , \quad 53.3 \leq f(\text{Hz}) \leq 86.6 \quad (7.3)$$

siendo  $\mathbf{X}$  el vector de parámetros bajo las restricciones de la Tabla 7.1. Cabe aclarar en la ecuación (7.3) que obtener el máximo de una función es equivalente a obtener el mínimo de la función cambiada de signo.

2. Potencia media: se maximiza la potencia eléctrica media de salida dentro del intervalo de frecuencias de trabajo en ciudad y se define como:

$$\min - \text{mean} |P(f, \mathbf{X})| \quad , \quad 53.3 \leq f(\text{Hz}) \leq 86.6 \quad (7.4)$$

Para una aplicación como esta, en la cual la frecuencia de trabajo estará variando continuamente dentro del rango de utilización, esta función objetivo a priori parecería ser más apropiada que la anterior.

3. Potencia máxima para valor RMS: en este caso se maximiza el valor de potencia eléctrica pico, específicamente para el valor RMS de la frecuencia (presentado en el Capítulo 3.2) y se define como:

$$\min - \max |P(f, \mathbf{X})| \quad , \quad f = 58 \text{ Hz} \quad (7.5)$$

La optimización del dispositivo únicamente para la frecuencia que, en promedio, más tiempo permanece el dispositivo recuperando energía, parece ser una solución de compromiso entre las dos anteriores y la intención es establecer si las supera o no.

## 7.2 OPTIMIZACION DEL DISPOSITIVO DE MAYOR POTENCIA MEDIA (2)

Una vez presentados los parámetros, sus restricciones y las funciones objetivo a utilizar, se procede a realizar un breve comentario sobre las optimizaciones que se

realizan sobre el dispositivo 2, el cual recupera la mayor potencia media de los cuatro dispositivos presentados en el Capítulo 6.1.

Como ya se ha expresado, los tres tipos de optimizaciones referidas en la sección anterior, se diferencian por sus funciones objetivo. En la primera optimización (O1), la función objetivo considera la maximización del máximo valor de potencia pico en el intervalo de uso en ciudad, en la segunda (O2) se maximiza la potencia media en dicho intervalo y en la tercera (O3) se busca el máximo valor de potencia pico para el valor RMS de la frecuencia de uso del vehículo en ciudad. Para las tres optimizaciones el forzamiento impuesto para cada valor de frecuencia de excitación proviene del ajuste cuadrático de la aceleración que provee el motor, presentado en la Figura 3.9 del Capítulo 3 y es el que, por otra parte, realmente experimentará el dispositivo colocado en el motor del vehículo.

Adicionalmente a los tres casos anteriores se realiza una optimización (O4) imponiendo como forzamiento la señal real de rpm del motor obtenida en el recorrido urbano realizado con el Citroën C4 (Figura 3.8, Capítulo 3) transformada en una señal de aceleración según la Figura 3.9. La función objetivo de esta última optimización es directamente la energía recuperada en todo ese tiempo:

$$\min - |E(t, \mathbf{X})| \quad (7.6)$$

En este caso, la energía recuperada es función del tiempo ( $t$ ) y de los parámetros de optimización ( $\mathbf{X}$ ) y se obtiene mediante la integración numérica de la potencia eléctrica calculada con la expresión (4.112) en función del voltaje  $v(t)$  obtenido. Claramente, con esta última optimización se obtiene el mejor conjunto de parámetros que maximiza la energía recuperada para la situación específica de ese trayecto en particular, y carece de generalidad. Sin embargo, igualmente es interesante su comparación con las otras optimizaciones ya que provee un máximo posible.

Debido a la cantidad de variables de optimización (seis) y al modelo matemático no lineal discretizado con 3 modos (ecuaciones (D.3)-(D.6) del Apéndice D) el proceso de optimización resulta complejo. Por lo tanto, antes de comenzar con dicho proceso se decide realizar un análisis de los posibles rangos de las variables a optimizar para poder restringir aún más el problema y facilitar al método de

algoritmos genéticos en la búsqueda del máximo global. De esta manera, primero se resuelve numéricamente el modelo no lineal dejando cuatro parámetros de optimización fijos y variando solamente dos. Esto se hace considerando que los parámetros optimizados en cada caso estarán cerca de los óptimos variando solamente dos de ellos cada vez. En dicho procedimiento se utilizan los mismos parámetros geométricos y de materiales que se utilizaron en el Capítulo 6.2 correspondiente a la validación computacional de los experimentos.

En primer lugar se dejaron variables los resortes ( $k_{1,2}$ ), luego las masas ( $m_{1,2}$ ) y finalmente los parámetros geométricos ( $h_s$  y  $L$ ). En la Figura 7.2 se visualizan los contornos de potencia eléctrica en función de cada pareja de parámetros (de arriba hacia abajo según el orden descrito), para cada uno de los casos de estudio.

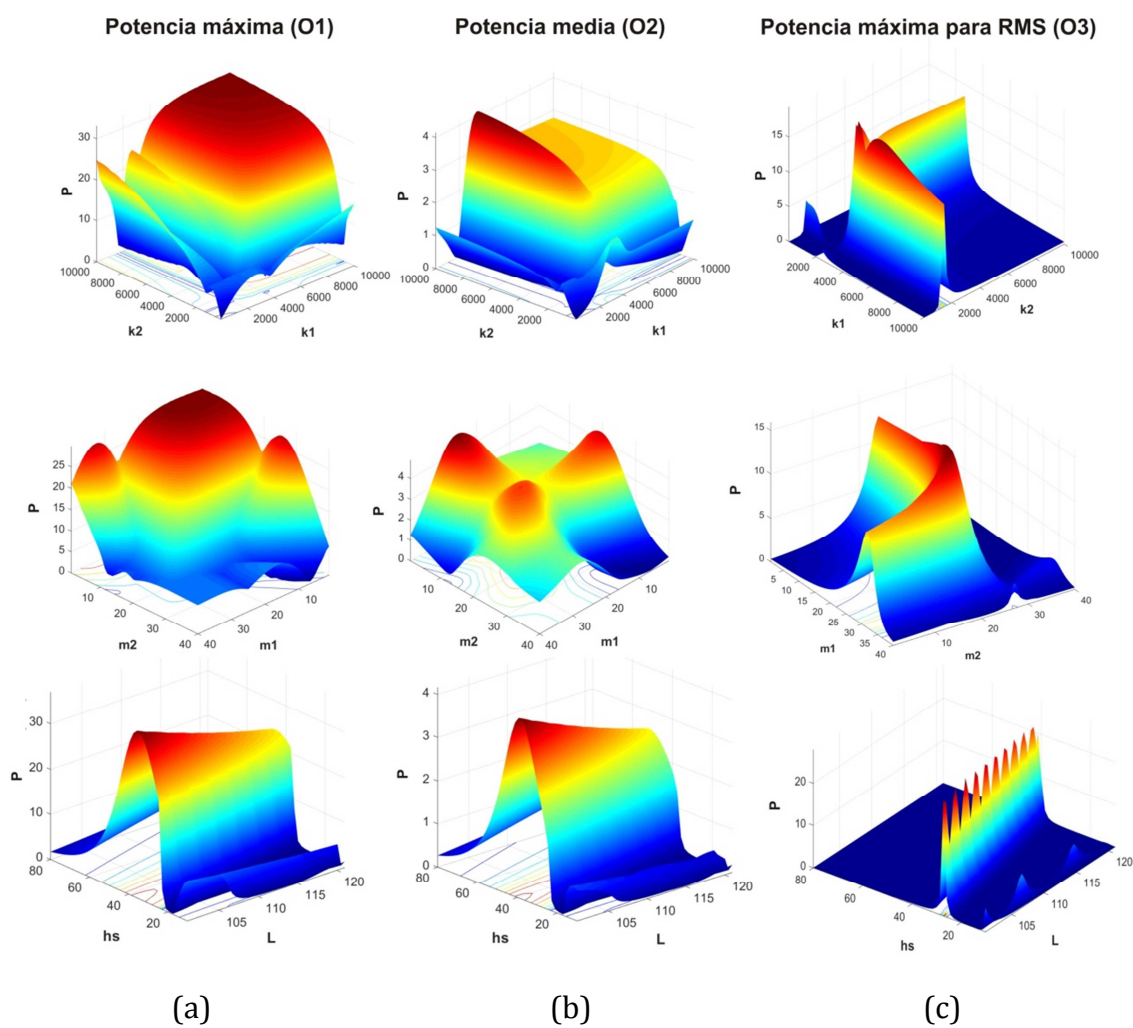


Figura 7.2 - Contorno de potencia eléctrica para cada uno de los casos de estudio.

En las figuras (a) se muestran los contornos correspondientes a las respuestas según la función objetivo 1 (O1), en (b) para la función objetivo 2, (O2) y en (c) para la 3 (O3). En color rojo se tienen las zonas de pares de parámetros de mayor valor, en tanto que las azules corresponden a los conjuntos de menor valor para cada una de las funciones objetivo propuestas. En base a estos contornos se restringieron aún más las variables presentadas en la Tabla 7.1.

Las diferentes optimizaciones se llevan a cabo numéricamente mediante el uso de los algoritmos genéticos implementados en Matlab mediante el comando *ga(fitnessfcn, nvars, [], [], [], [], lb, ub, [], IntCon, options)*. Los principales parámetros y operadores genéticos utilizados se muestran en la Tabla 7.2 y los resultados se pueden ver en la Tabla 7.3.

Parámetros	O1	O2	O3	O4
Generaciones	600	600	600	600
Individuos	200	60	60	200
Elite	3	6	6	1
Fracción de Cruzamiento	0.6	0.8	0.8	0.8
Fracción de Mutación	0.4	0.2	0.2	0.2

Tabla 7.2 – Valores utilizados de operadores y parámetros de optimización.

Optimización	$k_1$ (N/m)	$k_2$ (N/m)	$m_1$ (g)	$m_2$ (g)	$h_s$ (mm)	$L$ (mm)	$P_{\text{maxima}}$ (mW)	$P_{\text{media}}$ (mW)
Dispositivo 2	4708	3217	19.1	6.09	0.38	125.5	4.27	0.57
O1	6006	3366	2	1	0.90	140	41.94	6.24
O2	3405	3667	1	1	0.86	140	34.72	7.99
O3	1425	1097	1	1	0.80	140	8.3	1.18
O4 (validación)	3528	3715	1	1	0.94	140	38.57	7.89

Tabla 7.3 – Parámetros optimizados y salida de potencia en el intervalo de ciudad.

En dicha Tabla 7.3 se presentan los valores de los parámetros que se obtienen con cada una de las optimizaciones comparándolos con los del dispositivo 2 (original sin optimizar). Además se presentan los valores de potencia máxima y media que se obtienen en cada caso, para el intervalo de frecuencias de uso en ciudad.



Recordando que la O4 es en realidad una optimización que sirve de comparación, en primer lugar se procede a analizar los resultados de las tres principales optimizaciones (O1, O2 y O3), a partir de los cuales se pueden concluir varias afirmaciones. Por un lado, se observa de manera general que los parámetros obtenidos para una determinada optimización no coinciden con los de las optimizaciones restantes, aunque algunos de ellos son similares. Es decir, se obtienen diferentes dispositivos dependiendo de la elección de la función objetivo. Por otro lado, todas las optimizaciones presentan salidas de potencia (máxima y media) superiores a las del dispositivo original siendo para las dos primeras (O1 y O2) la mejora considerablemente grande. Adicionalmente, los valores de potencia obtenidos establecen una clara diferencia entre las tres funciones objetivo adoptadas.

La O1, que optimiza el máximo valor de potencia en el intervalo de ciudad, entrega un valor máximo de potencia mayor que la O2 (17%), pero una potencia media menor que la misma (22% menor). Esto último se debe a que lo que se maximiza en la función objetivo de la O2 es la potencia media. Por otra parte la O3, que optimiza el valor de potencia pico a la frecuencia RMS (58 Hz), presenta ambos valores (máximo y medio) notablemente inferiores a las otras dos. Respecto de la optimización O4, que optimiza la máxima energía en una situación de tránsito real en ciudad (O4) no es la que presenta el mayor valor de potencia máxima ni de potencia media. Sin embargo dichos valores se encuentran entre los valores obtenidos con la O1 y la O2.

Por otra parte, observando la Tabla 7.3, se destaca que todas las optimizaciones obtienen valores pequeños de las masas de los extremos (1-2 g), intentando tal vez aumentar de esta manera los valores de las frecuencias naturales. Además, esto concuerda con los elevados valores (0.8-0.9 mm) que se obtuvieron para el espesor de la subestructura  $h_s$ . En contrapartida, para la longitud entre centros ( $L$ ) siempre se obtuvo el valor límite superior de 140 mm. En este sentido, si bien el incremento de  $L$  baja los valores de frecuencia, también es cierto que hace aumentar la deformación en el centro de la viga compuesta, posibilitando mayor generación eléctrica.

En la Figura 7.3 se presenta la respuesta en frecuencia en términos de potencia eléctrica para cada uno de los casos de estudio y se detallan los intervalos analizados. Por un lado se puede ver que el ancho de banda del estado resonante de la O2 se encuentra en mayor medida dentro del rango de ciudad, en cambio el de la O1 en el de ruta. En este sentido, realizando un cálculo de la potencia media de cada una de las optimizaciones en el intervalo de ruta, no considerado en la optimización, se obtienen los siguientes valores: 5.71 mW con la O1, 2.22 mW con la O2, 0.13 mW con la O3 y 2.68 mW con la de validación O4. Es decir, con la O1 que optimiza el pico máximo del intervalo de ciudad, se obtiene el mayor valor de potencia media en el intervalo de ruta. Esto representa un beneficio adicional no buscado, ya que en dicho intervalo el dispositivo no fue optimizado. Cabe aclarar que con estos valores de potencia la alimentación de sensores está garantizada sobradamente.

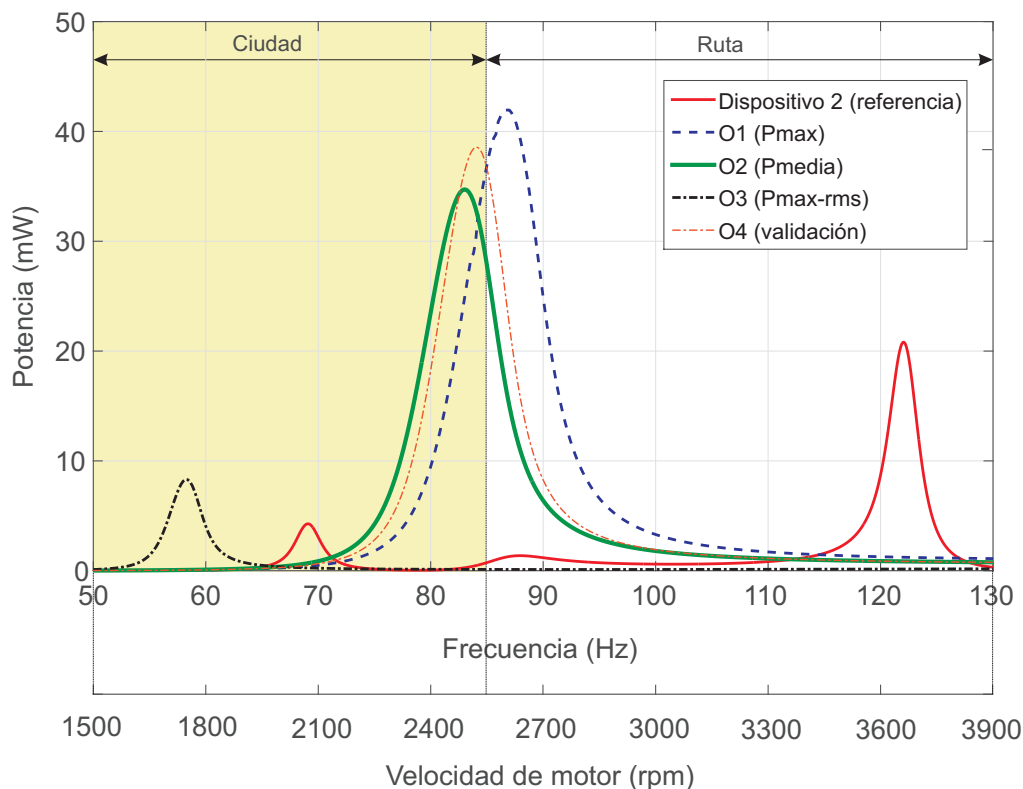


Figura 7.3 - Curvas de potencia eléctrica de las distintas optimizaciones.

Por otra parte, la Figura 7.3 presenta un solo estado resonante en el rango de frecuencias analizado, lo cual puede resultar sorprendente debido al carácter multimodal con el que fue diseñado el dispositivo. Para analizar esto es importante

recordar que el forzamiento impuesto al modelo es el valor de aceleración que le corresponde a cada rpm (frecuencia) del motor según la Figura 3.9. En dicha figura se ve que la aceleración del motor aumenta a medida que aumentan las rpm, por lo tanto el nivel de energía que hay disponible es mayor a mayores frecuencias. De esta manera, en el comienzo (53.3 Hz) y en el final (86.6 Hz) del intervalo de ciudad la aceleración es de 1.28 G y 3.44 G, respectivamente, mientras que en el final del intervalo de ruta (133.3 Hz) es de 8.6 G. Este es el motivo principal por el cual las optimizaciones ubican un solo estado resonante en el intervalo de uso (en ciudad) y sobre la zona de altas frecuencias del mismo. Es decir, el método de optimización predice como configuración óptima un sólo estado resonante a alta frecuencia, en lugar de tener varios estados resonantes próximos dentro del intervalo.

Esto último fue factible de alcanzar debido a la optimización de seis parámetros en forma simultánea, gracias al modelo multimodal propuesto. Resulta útil comparar en este punto, el dispositivo optimizado con la configuración más sencilla de recolección de energía como es una viga cantiléver. Estos resultados pueden verse en la Figura 7.4 donde se compara la curva de potencia obtenida con el dispositivo resultante de la O2 respecto a la curva de una viga cantiléver equivalente (misma frecuencia de resonancia que la O2).

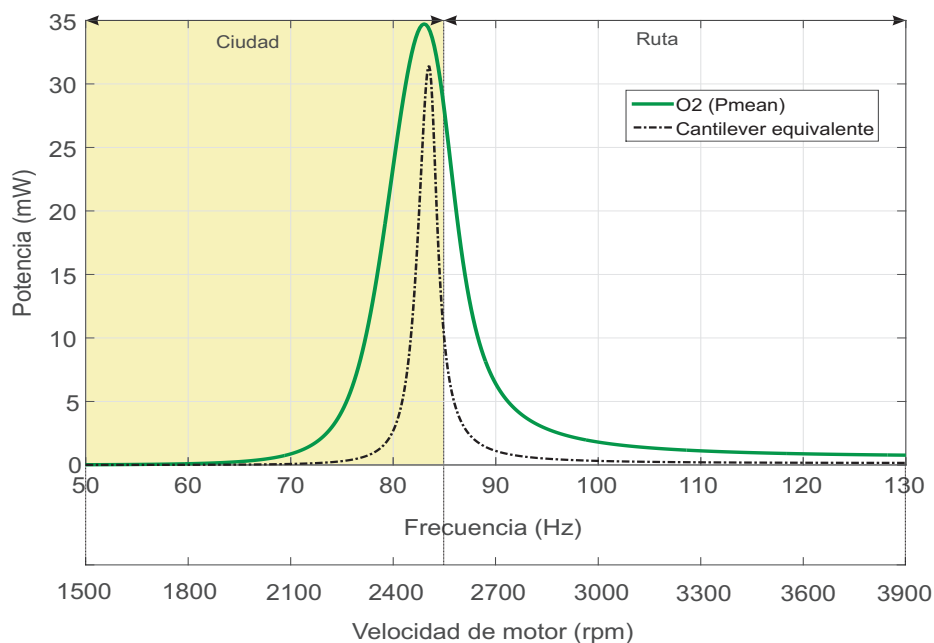


Figura 7.4 - Comparación de curvas de potencia entre O2 y viga cantiléver.

Para este modelo de viga cantiléver, se utilizan los valores numéricos utilizados en el Capítulo 5 (identificación), con longitudes de la viga de  $L_1 = 0$ ,  $L_2 = 43.7 \text{ mm}$  y  $L_3 = 30.1 \text{ mm}$ . Como es posible observar, con el dispositivo equivalente tipo viga cantiléver el ancho de banda es menor que con el dispositivo O2 y a su vez el valor del máximo de la curva de potencia también es menor. La potencia media en el rango de ciudad es de 2.8 mW contra los 7.99 mW que se obtienen en la O2 (Tabla 7.3).

Los valores de potencia que se muestran en la Tabla 7.3 representan una valiosa herramienta para decidir sobre el dispositivo óptimo en la recuperación de energía. Sin embargo no determinan cuál es la función objetivo más adecuada en cuanto a energía recuperada en un cierto lapso de tiempo. Con este fin, se analiza la energía recuperada a lo largo de un recorrido urbano. Para ello fue elegido el recorrido del vehículo en la situación real presentada en el Capítulo 3.2 y se simula numéricamente (ver Figura 7.5) el modelo con cada uno de los parámetros obtenidos en las optimizaciones, calculándose la energía recuperada cuyos valores se muestran en la Tabla 7.4. Nuevamente, la energía se obtuvo integrando numéricamente la potencia eléctrica calculada con la expresión (4.112) en función del voltaje  $v(t)$  obtenido por el modelo.

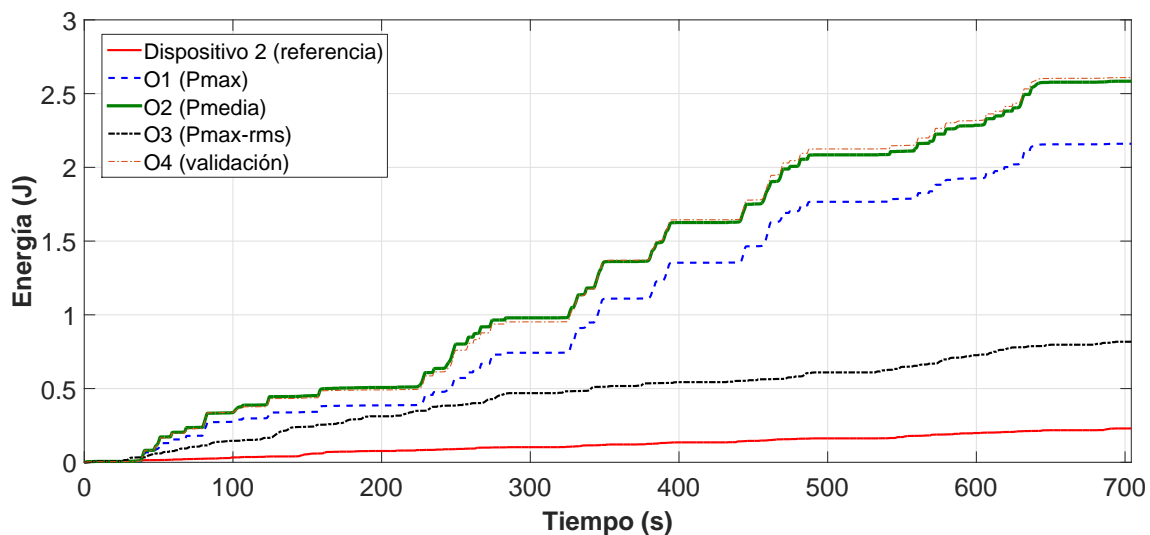


Figura 7.5 - Energía recuperada en cada caso de estudio.

Optimización	$P_{\text{media}}$ (mW)	$E_{\text{recuperada}}$ (J)	Diferencia O4
Dispositivo 2	0.32	0.22	-91.54 %
O1	3.06	2.15	-17.31 %
O2	3.66	2.58	-0.77 %
O3	1.16	0.81	-68.85 %
O4 (validación)	3.70	2.60	-

*Tabla 7.4 – Valores de potencia y energía recuperada con señal real de excitación y diferencia porcentual con la optimización O4.*

Como era de esperar, el modelo con los parámetros de la optimización O4, que optimiza el dispositivo para esta señal en particular, es el de mayor energía recuperada. Sin embargo, un hecho remarcable es que el modelo de la O2 es el que más energía recupera en comparación con O1 y O3 y no tiene una gran diferencia con la O4. Por lo tanto, la selección de esta función (potencia media en el rango de uso) implica una efectiva optimización del dispositivo para este tipo de aplicación en particular. Es remarcable la significativa diferencia en la energía recuperada (20%) respecto a la O1, la cual representa la función objetivo de uso más frecuente en la mayor parte de los trabajos presentados en la literatura. En lo que a la O3 se refiere, es claro que no es una función objetivo apropiada para este tipo de casos en donde existe un gran espectro de frecuencias dentro del rango de aplicación empleado. Adicionalmente a esto último, es importante entender que a la frecuencia RMS de 58 Hz, la aceleración es baja (1.5 G) comparada con la de la zona de transición ciudad-ruta (3.4 G) donde se ubican los estados resonantes de las otras optimizaciones y por lo tanto la energía disponible es mucho menor. Finalmente, se observa que la optimización O2 respecto del dispositivo original representa una mejora sustancial como puede apreciarse en la Figura 7.5.

Como último punto, es necesario remarcar, como se mencionó en el inicio del presente capítulo, que la selección de la función objetivo es de fundamental importancia para obtener buenos resultados en aplicaciones de frecuencia y amplitud variable como la de la presente tesis.

### 7.3 DISPOSITIVO OPTIMIZADO

Una vez realizado el procedimiento de optimización se procede a fabricar el dispositivo óptimo, el cual se obtuvo a partir de la optimización de la potencia media a través de la función objetivo (O2). En la Figura 7.6 se muestra el dispositivo fabricado y en la Figura 7.7 un detalle del sistema masa-resorte 1 (a) y del sistema masa-resorte 2 (b).

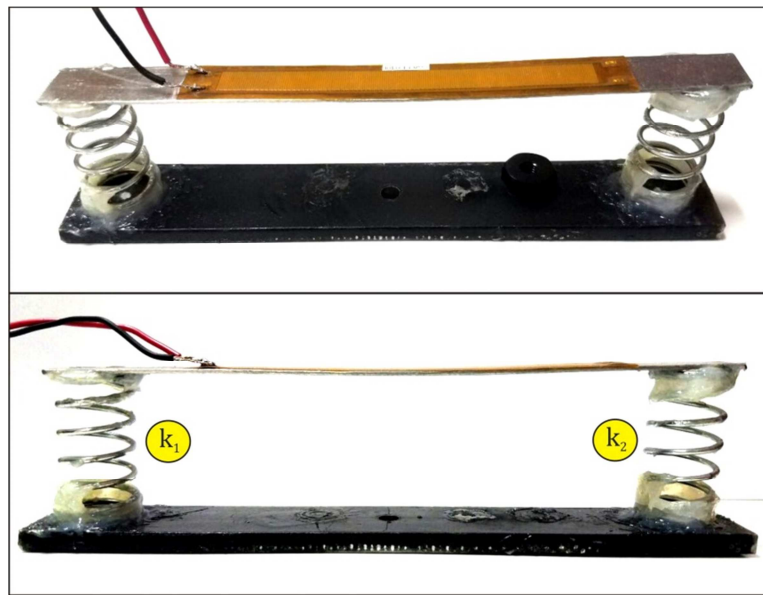


Figura 7.6 - Dispositivo optimizado fabricado.

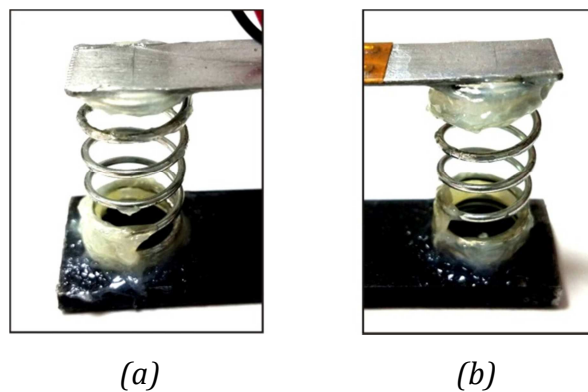


Figura 7.7 - Detalle de sistemas masa-resorte de los extremos.

El resorte  $k_1$  tiene 15.9 mm de diámetro, 3.5 espiras activas, el diámetro del alambre es de 1.5 mm y el valor medido de la rigidez vertical es de 3389 N/m (obtenido mediante el procedimiento detallado en el Capítulo 6.1.1). El resorte  $k_2$  tiene el mismo diámetro y alambre que el resorte 1 pero tiene 3 espiras activas y el valor medido de rigidez es de 3691 N/m. Estos valores reproducen aproximadamente a los obtenidos mediante la optimización.

En la Figura 7.8 se muestra la respuesta en frecuencia en términos del voltaje de los resultados experimentales del dispositivo optimizado (círculos rojos), y se los compara con los del dispositivo 2 sin optimizar (círculos azules) y con el modelo matemático no lineal introduciendo los valores de los parámetros del dispositivo optimizado (curva sólida roja). El ensayo se realiza con la misma resistencia de carga que se utilizó para el resto de los experimentos (255 k $\Omega$ ) y con una amplitud de aceleración constante a 1 G. Es posible observar una notoria diferencia entre la generación del dispositivo original y el optimizado, teniendo este último un valor pico de voltaje de 80 V contra 29 V del original. En términos de potencia eléctrica, el original tiene una potencia media de 292  $\mu$ W contra 1290  $\mu$ W del optimizado, casi 5 veces mayor. Todo lo analizado en las líneas precedentes concuerda con lo presentado y observado en la sección anterior (ver Figura 7.3).

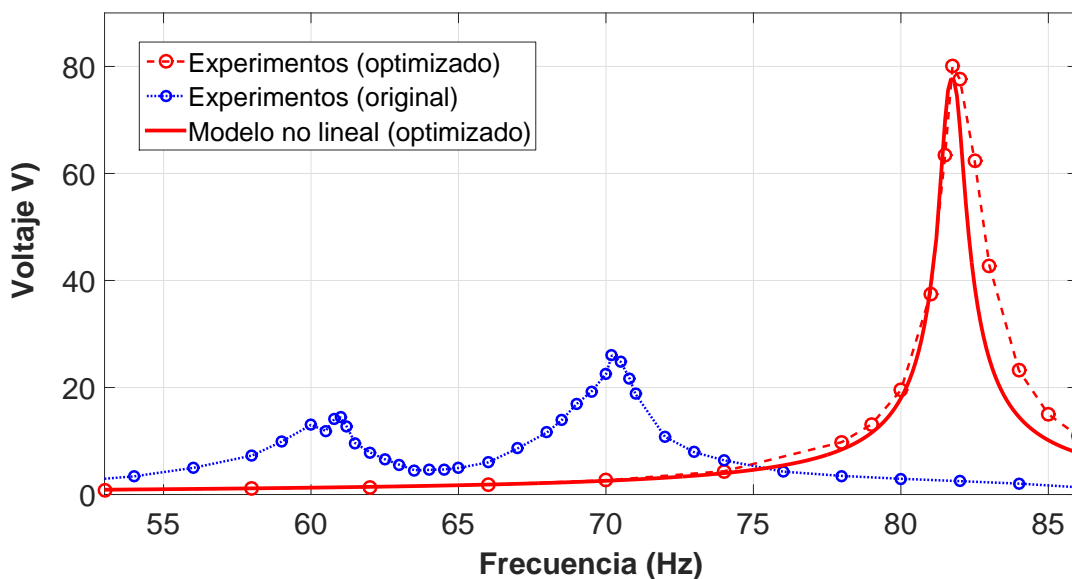


Figura 7.8 - Comparación de respuestas en frecuencia (experimentos-modelo).

Por otro lado, se puede ver que el modelo no lineal aproxima adecuadamente los datos experimentales, especialmente fuera de la condición de resonancia y también el pico máximo de voltaje. Cabe aclarar que se volvieron a ajustar los valores de los coeficientes de amortiguamientos con los datos experimentales, obteniéndose los valores de:  $\xi_1 = 0.0044$  y  $\xi_n = 9.97 \times 10^{-5}$ .



# Aplicación en el Sensado

---

Como se mencionó en la introducción de la presente tesis, el objetivo final de los dispositivos desarrollados es la alimentación de sensores a partir de la energía recuperada de la vibración del motor de un vehículo. Es por ello que en este capítulo se presenta la utilización de los dispositivos recuperadores como fuente de energía de un sensor de temperatura. Dada la necesidad de acondicionar la señal alterna que provee el dispositivo para alimentar al sensor, en primer lugar se realiza una breve descripción del circuito electrónico desarrollado para dicha función. En segundo lugar se presentan una serie de mediciones de laboratorio y finalmente se presenta la implementación definitiva sobre el vehículo Citroën C4, considerando dos recorridos urbanos diferentes.

Como se mencionó anteriormente, todas las mediciones de voltaje presentadas en capítulos previos y sus correspondientes valores de potencia calculados son en base a los valores máximos de la señal alterna (AC) que suministra el dispositivo a una frecuencia dada (voltaje pico y potencia pico, respectivamente). Dicha señal no es adecuada para alimentar sensores, los cuales requieren un suministro de energía a voltaje constante o continuo (DC).

Un esquema del circuito electrónico de acondicionamiento de la señal alterna proveniente del piezoeléctrico se muestra en la Figura 8.1. El primer bloque, que recibe el nombre circuito rectificador, rectifica la señal del piezoeléctrico mediante

un puente de diodos que convierte el voltaje alterno (AC) en pulsante positivo, cargando un capacitor electrolítico que se emplea para almacenar la energía y suavizar el voltaje pulsante para convertirlo en continuo. Luego del rectificado, se introduce un circuito temporizador analógico que permite controlar los niveles de carga y descarga de dicho capacitor, accionando una llave electrónica de descarga hacia el último bloque de regulación y sensado. Al cerrarse la llave, un circuito regulador provee al sensor de temperatura un voltaje constante de 3.3 V (DC) para realizar el sensado. En la Figura 8.1,  $V_c$  es el voltaje de carga del capacitor y  $V_s$  es el voltaje del sensor, proporcional a la temperatura medida en este caso. El sensor utilizado es un LM335z que convierte, mediante una fórmula sencilla (presentada más adelante), voltaje en temperatura. Cabe aclarar que el circuito electrónico presentado fue desarrollado exclusivamente para esta aplicación por integrantes del área electrónica del GIMAP, encabezado por el Dr. Andrés García [123].

La elección del sensor LM335z marca Texas Instruments [124] fue debido a que es un circuito integrado de precisión, de fácil calibrado, económico y de uso corriente. El mismo opera como un diodo zenner de dos terminales, con una sensibilidad de 10 mV/K, en un rango de corriente de 400  $\mu$ A a 5 mA y de voltaje entre 3 a 5 V prácticamente sin cambios en el rendimiento. El consumo aproximado es de 10.6 mW, el error en la medición es de menos de 1  $^{\circ}$ C y opera en un rango de -40 a 100  $^{\circ}$ C con una salida lineal, lo que permite una fácil conversión para la medición de temperatura.

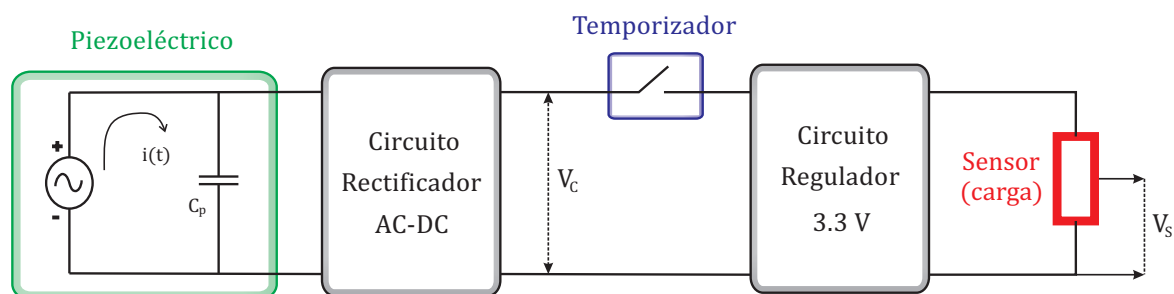


Figura 8.1 - Esquema del circuito electrónico acondicionador para alimentación en el sensado.

## 8.1 MEDICIONES DE LABORATORIO

Las mediciones de laboratorio se realizan con el equipamiento y en base al esquema presentado en el Capítulo 5 (Figura 5.1). Las mismas consisten en la captura de la señal del voltaje de carga ( $V_C$ ) y del voltaje de sensado ( $V_S$ ), provenientes del circuito electrónico de la Figura 8.1 (rectificador + regulador + circuito de carga), mediante una placa adquisidora de datos. En la Figura 8.2 se pueden ver los principales elementos que intervienen en la adquisición de los de datos.

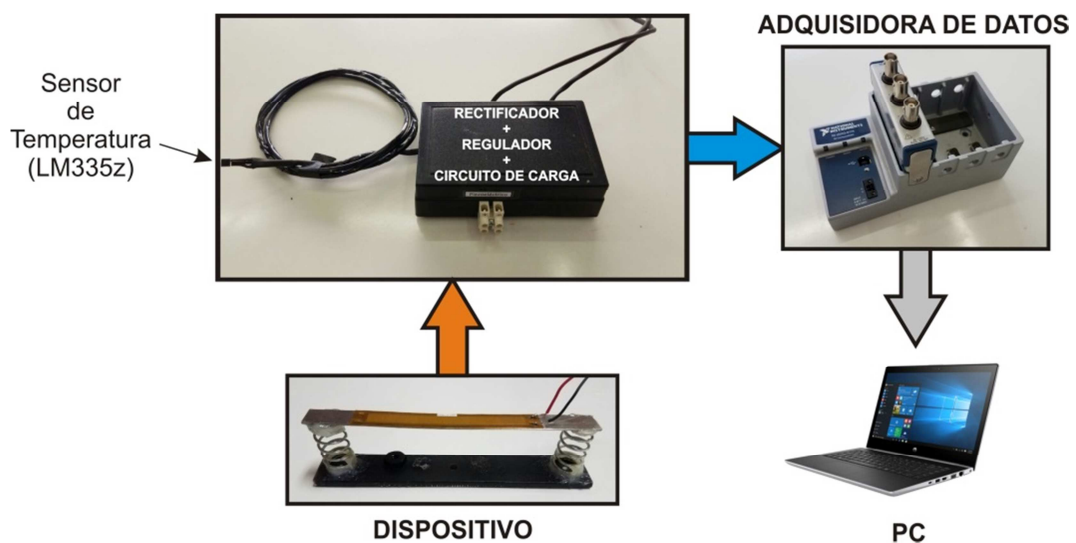


Figura 8.2 - Esquema del equipo de medición para el sensado.

Las mediciones se realizan con el dispositivo 2 (el de mejor rendimiento de los presentados en el Capítulo 6) y el optimizado, los cuales son excitados a 2 G de aceleración constante para todas las mediciones, adquiriendo los voltajes en forma estacionaria para cada frecuencia del intervalo de uso de un vehículo en ciudad.

En la Figura 8.3 se muestran las curvas temporales características del sistema de carga que permite el sensado. En color azul, se muestra el voltaje de carga del capacitor el cual, una vez que alcanza un determinado valor de corte controlado por el circuito electrónico transfiere la energía al sensor (color rojo), habilitando el sensado de temperatura por un determinado lapso de tiempo. Ese tiempo durante el cual se mide la temperatura es función de la configuración establecida previamente del circuito electrónico y de la generación de energía del dispositivo recuperador. A

medida que el dispositivo tiene mayor capacidad de recuperación de energía, mayor es el tiempo de sensado y menor el de carga.

Con el fin de analizar el rendimiento de los dispositivos, se mide el tiempo de carga  $t_c$  y el tiempo de sensado  $t_s$ . Además, se calcula la energía recuperada disponible para el sensado multiplicando la potencia nominal del sensor (10.6 mW) por el tiempo que dura el sensado ( $t_s$ ). Es necesario aclarar que esta no es la energía total recuperada, ya que no contempla el consumo del circuito electrónico ni las pérdidas internas. Adicionalmente, se calcula la potencia media con la cual el dispositivo carga el circuito, dividiendo la energía recuperada por el tiempo que dura la carga del capacitor ( $t_c$ ).

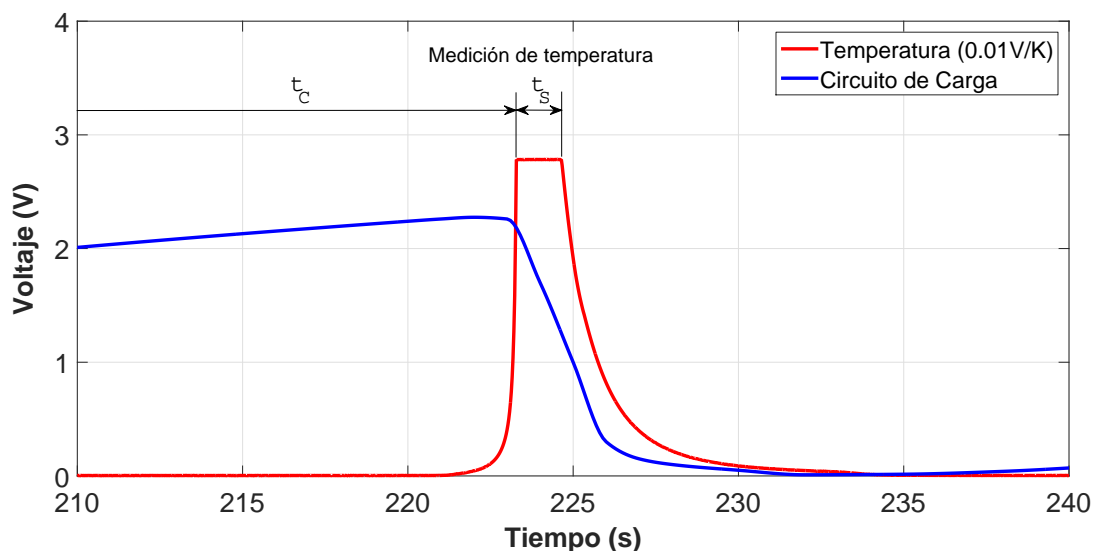


Figura 8.3 - Curvas características suministradas por el arreglo electrónico.

En la Figura 8.4 se presentan los valores medidos, para el intervalo de uso en ciudad, de los tiempos de carga y sensado, de energía recuperada y de potencia de carga, correspondientes al dispositivo 2 (círculos rojo) y al optimizado (círculos azules). Por un lado, se puede observar que el valor pico del tiempo de sensado es levemente mayor en el dispositivo optimizado (+7 %). Sin embargo, el tiempo de carga es la mitad en dicho dispositivo respecto al original. Es decir en resonancia (80 Hz), el dispositivo optimizado carga al capacitor en casi la mitad de tiempo (32 s) que el original (a su frecuencia de resonancia de 70 Hz) y a su vez la medición dura más tiempo (1.8 s). Esto representa claramente una ventaja, ya que en el

mismo lapso de tiempo el dispositivo optimizado recupera aproximadamente el doble de energía que el circuito original.

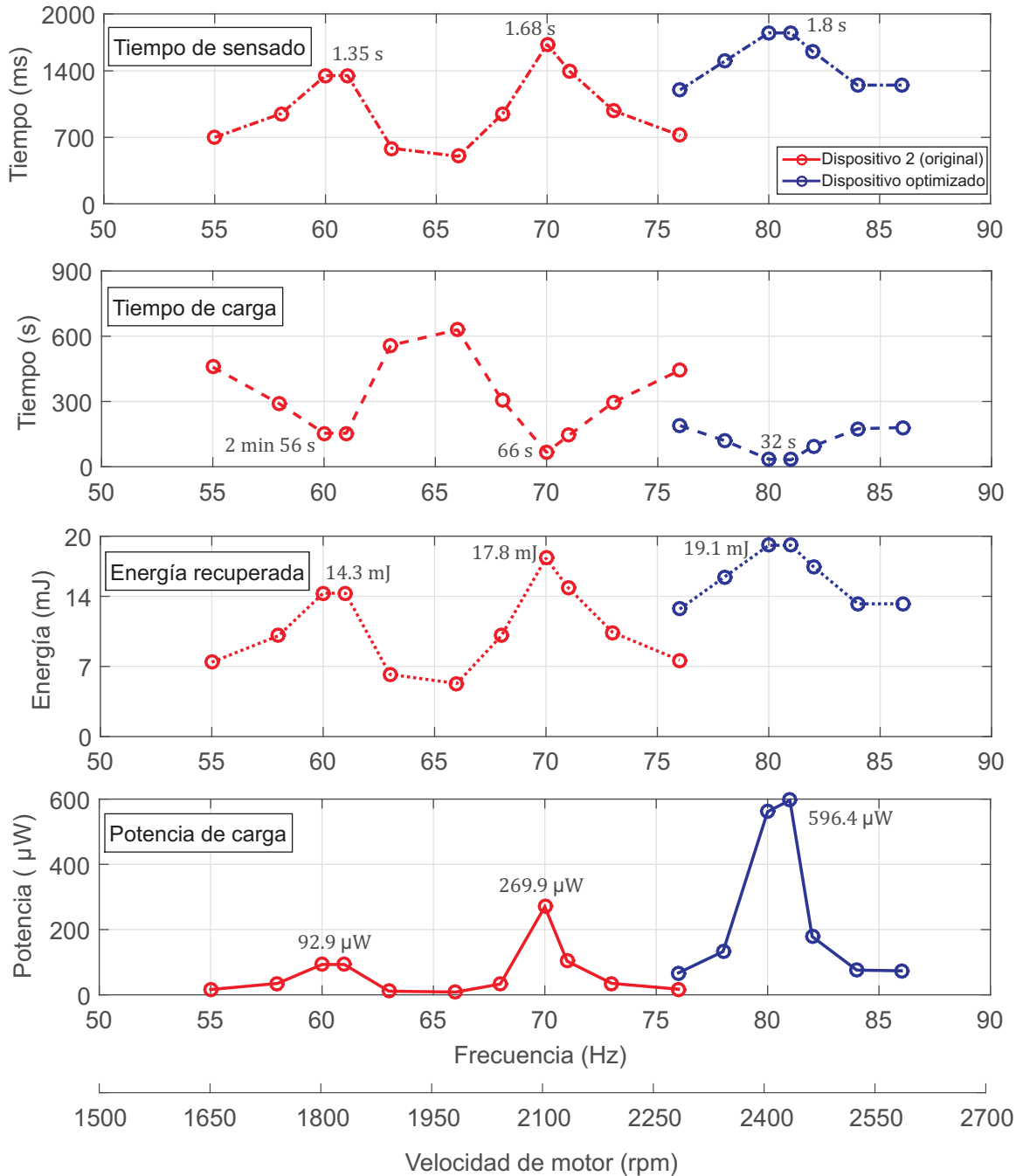


Figura 8.4 - Valores de tiempo de carga y sensado, energía recuperada y potencias de carga medidos en el laboratorio.

El mismo efecto se ve reflejado tanto en la energía recuperada como en la potencia de carga. Si bien la energía recuperada es levemente mayor en el

dispositivo optimizado (+7 % - 19.1 mJ), la potencia con la cual carga el capacitor es de más del doble (596  $\mu$ W).

Por otro lado, es importante observar que los tiempos de carga aumentan notablemente para frecuencias fuera de la resonancia en ambos dispositivos, haciendo muy sensible el sensado a la frecuencia de excitación. En este sentido, tener en cuenta que las mediciones presentadas en la Figura 8.4 corresponden a 2 G de aceleración constante, situación que en el motor del vehículo no se cumple, donde la aceleración aumenta a medida que aumentan las rpm (frecuencias).

## 8.2 MEDICIONES SOBRE EL VEHICULO

Finalmente, se presentan las mediciones de temperatura realizadas bajo condiciones reales de funcionamiento mientras el vehículo es conducido por la ciudad. Nuevamente las mediciones se realizan con el dispositivo 2 y con el optimizado. Para realizar dichas mediciones se coloca un dispositivo recuperador y todo el equipamiento necesario de medición sobre el motor del vehículo Citroën C4. Se realizan dos recorridos, para ambos dispositivos, de aproximadamente 10 minutos cada uno en la ciudad de Bahía Blanca (provincia de Buenos Aires, Argentina). En la Figura 8.5 se muestra una vista satelital de los recorridos realizados con una distancia de aproximadamente 5 kilómetros de longitud cada uno.



*Figura 8.5 - Recorridos urbanos utilizados.*

Así mismo, en la Figura 8.6 se observa el lugar de alojamiento del dispositivo recuperador sobre el motor, el cual se adhiere con soldadura plástica al mismo.

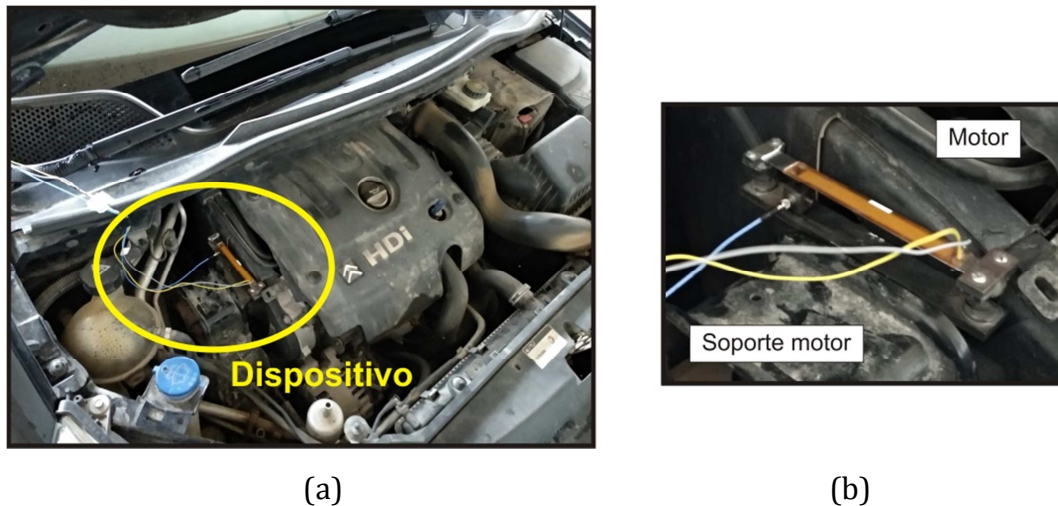


Figura 8.6 - Alojamiento del dispositivo en el vehículo: (a) vista general del vano del motor y (b) detalle de posicionamiento del dispositivo.

Los resultados de los voltajes de carga y sensado registrados durante el recorrido 1, correspondientes al dispositivo original (curvas rojas) y al optimizado (curvas azules) se muestran en la Figura 8.7. Por un lado se puede ver claramente que con cada dispositivo se logra una sola medición de temperatura en todo el tiempo que dura el recorrido. Sin embargo, el tiempo que dura el sensado es mucho mayor en el dispositivo optimizado, 1.3 s, respecto al original que dura 0.6 s, lo que representa una energía entregada al sensor de 13.78 mJ en el dispositivo optimizado y de 6.36 mJ en el original (- 54 %), es decir más del doble.

Por otro lado, al ser la frecuencia y la amplitud de la excitación variable, la curva de voltaje de carga presenta una forma muy distinta a la observada en los ensayos de laboratorio a frecuencia y excitación constante (Figura 8.3). Se puede ver en la Figura 8.7 que ambas curvas de carga son irregulares presentando aumentos y descensos en el voltaje de carga. En base a esto, para poder analizar y comparar los dispositivos, es conveniente obtener un valor de pendiente media de carga, indicativa de la velocidad con la cual el dispositivo carga al capacitor. Para esto se calcula dicha pendiente mediante la siguiente expresión:

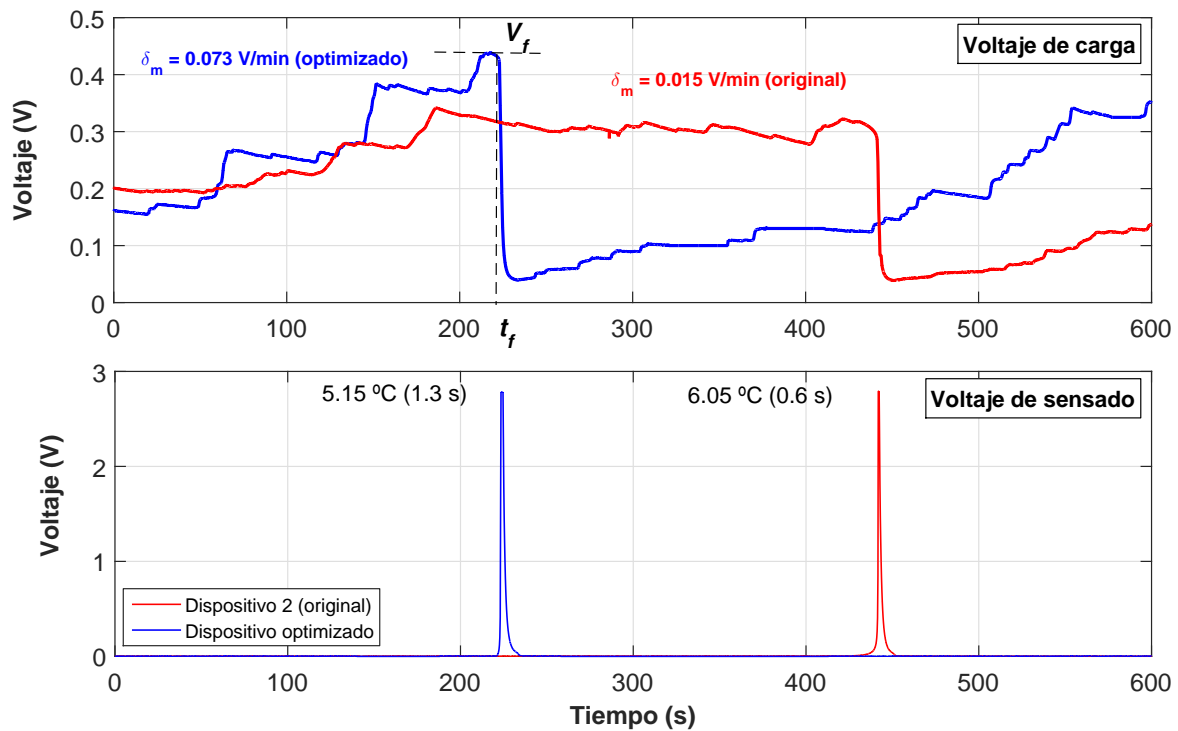


Figura 8.7 - Sensado de temperatura en recorrido urbano 1.

$$\delta_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_f - V_i}{t_f - t_i} \tag{8.1}$$

donde  $V_f$  y  $t_f$  son el voltaje y el tiempo de corte al cual descarga el capacitor su energía al sensor, mientras que  $V_i$  es el voltaje en un instante de tiempo cualquiera  $t_i$ . En este caso, para el cálculo se utiliza el voltaje  $V_i$  en el instante inicial  $t = 0$ . Además, si al voltaje de corte ( $V_f$ ) se lo divide por la pendiente de carga media ( $\delta_m$ ) se puede estimar el tiempo total de carga.

Para el caso del dispositivo original la pendiente media de carga se estimó en 0.015 V/min y, teniendo en cuenta que el voltaje de corte se encuentra aproximadamente en los 0.34 V, el tiempo estimado de carga es de 22 minutos (suponiendo  $t_i = 0$  y  $V_i = 0$ ). Con este tiempo de carga y la energía entregada al sensor (6.36 mJ en este caso), se calcula una potencia media de carga disponible para el sensado de 4.81  $\mu W$  (potencia recuperada total menos pérdidas). Para el dispositivo optimizado se obtuvo una pendiente media de carga de 0.073 V/min, siendo casi cinco veces mayor que la del original. A su vez, teniendo en cuenta que el



voltaje de corte en este caso es de 0.44 V, el tiempo de carga estimado es de 6 minutos, representando el 27 % del tiempo insumido por el dispositivo original. En este caso la potencia media de carga disponible para el sensado es de 38.27  $\mu\text{W}$ , casi ocho veces más grande que la del original. Las curvas de voltaje de carga pueden verse en la Figura 8.7.

De manera similar al recorrido 1, en la Figura 8.8 se muestran los voltajes de carga y sensado registrados durante el recorrido 2, para ambos dispositivos.

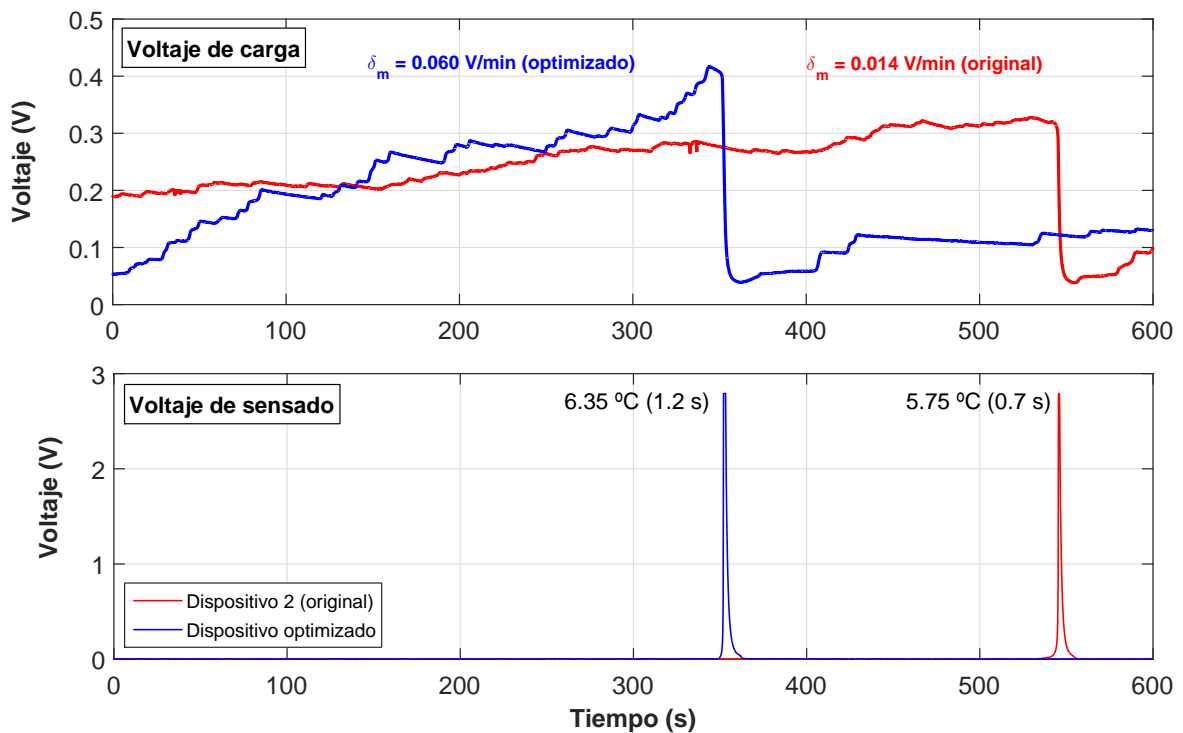


Figura 8.8 - Sensado de temperatura en recorrido urbano 2.

En dicha figura, al igual que lo registrado en el recorrido 1, se puede observar que con cada dispositivo se logra una única medición de temperatura durante el recorrido. Los tiempos de sensado son muy similares al caso anterior, siendo de 1.2 s para el optimizado (representando una energía de 12.72 mJ) y de 0.7 s para el original (7.42 mJ). Asimismo, la pendiente media de carga en el dispositivo original se estimó en 0.014 V/min, y con el mismo voltaje de corte que en el recorrido anterior (0.34 V); de ello se desprende que el tiempo estimado de carga es de 24 minutos y la potencia media de carga disponible para sensado de 5.15  $\mu\text{W}$ . Para el

dispositivo optimizado la pendiente media de carga es de 0.060 V/min en este caso, siendo poco más de cuatro veces superior que la del original. Para el mismo voltaje de corte anterior (0.44 V) el tiempo de carga estimado es de 7 minutos, siendo el 29 % del tiempo que le lleva al dispositivo original, representando una potencia media disponible para sensado de 30.28  $\mu\text{W}$ , casi seis veces más que el original.

Se puede concluir que en ambos recorridos se obtienen valores similares de pendiente media, tiempos de carga, tiempos de sensado, energía de sensado y potencia media de carga disponible para sensado, demostrando que ante diferentes condiciones de excitación el comportamiento general se mantiene. Esto justifica el haber utilizado un recorrido genérico en ciudad como patrón de medida en la optimización del dispositivo. Adicionalmente, las mediciones evidencian claramente que el dispositivo optimizado es superior al original (dispositivo 2 presentado en el Capítulo 6), acentuando la importancia de tener un modelo analítico que posibilita la realización de dicha optimización y la previa identificación de parámetros.

Finalmente, es importante mencionar los posibles puntos a mejorar cuya resolución desborda el análisis electromecánico presentado en esta tesis. Más específicamente, involucran a las mejoras en el circuito electrónico de rectificación, regulación y carga. Es posible observar en todas las curvas de voltaje de carga que en determinados intervalos de tiempo, en los cuales el dispositivo no recupera la suficiente energía, el voltaje de carga disminuye, haciendo ineficiente la recuperación de energía. Este comportamiento se debe a las pérdidas internas provocadas por las resistencias eléctricas, el capacitor, el circuito temporizador electrónico y el circuito regulador, siendo factibles de reducir disminuyendo así el tiempo de carga y permitiendo una mayor cantidad de puntos de sensado durante el recorrido.

Por otra parte, los tiempos de sensado presentados en la Figura 8.7 (1.3 y 0.6 s) y en la Figura 8.8 (1.2 y 0.7 s) son demasiado grandes en sí mismos desaprovechando la energía recuperada, ya que por cada segundo de sensado es posible adquirir 2048 muestras de temperatura en un muestreo típico. De esta manera, es posible disminuir dicho tiempo de forma de reducir así el tiempo de carga e incrementando los intervalos de sensado durante todo el recorrido.

# Conclusiones

---

Esta tesis presentó el diseño y la fabricación de un dispositivo electromecánico capaz de recuperar la energía de las vibraciones generadas por el motor de un vehículo convencional, basado en una viga piezoeléctrica compuesta vinculada a su base por medio de dos sistemas masa-resorte. Las conclusiones que se obtuvieron se relacionan con los siguientes aspectos:

- ✓ Niveles de energía en términos de aceleración y frecuencia presentes en un motor Diesel de un vehículo convencional de transporte (Citroën C4).
- ✓ Intervalo de utilización habitual del motor (rpm/frecuencia) en la ciudad y en ruta.
- ✓ Formulación matemática no lineal del dispositivo recuperador multimodal que propone una nueva formulación combinando el aporte de diferentes autores de la literatura aplicada a los diferentes tipos de piezoeléctricos comerciales.
- ✓ Aspectos constructivos del dispositivo.
- ✓ Resultados experimentales de laboratorio y en campo.
- ✓ Función objetivo para la optimización de dispositivos recuperadores acorde a una aplicación de frecuencia y aceleración variables.
- ✓ Capacidad de alimentación de sensores.

De esta manera, entre los puntos mencionados anteriormente es posible identificar tópicos claves en los cuales este trabajo resulta un aporte a la comunidad científica y técnica: (a) niveles de aceleración e intervalo de frecuencias de uso de un

motor Diesel, (b) modelo matemático no lineal integrador, (c) complicaciones constructivas, (d) generación por modo  $d_{31}$  o  $d_{33}$  y (e) la definición de una función objetivo adecuada para la optimización.

Respecto del primer punto, las mediciones de los niveles de aceleración presentes en las vibraciones del motor, arrojaron resultados sorprendentes comparados con aplicaciones de similares características como es el caso de sistemas rotantes. Los valores pico de aceleración se encontraron entre los 7 y los 15 G, en tanto que los RMS se ubicaron entre 0.5 y 5 G en los intervalos de uso, con un promedio de 3 G. Estas mediciones proporcionan información vital para el desarrollo de dispositivos recuperadores asociados a las vibraciones de los motores convencionales, y no existen en la literatura suficientes referencias que presenten mediciones similares.

En ese mismo sentido, el intervalo de uso del motor también es de utilidad fundamental en los diseños referidos al tema. Si bien las rpm a las que giran los motores son propias del sistema de transmisión del vehículo, en líneas generales trabajan en un margen acotado de revoluciones, similares a las que se presentan aquí. En este sentido, el aporte de este trabajo para el caso particular de un Citroën C4 es escalable para otro tipo de vehículos en general.

Respecto al modelo no lineal desarrollado utilizado para describir la compleja relación entre la aceleración del motor y el voltaje del dispositivo recuperador, se utilizó una ecuación constitutiva no lineal del material piezoeléctrico como la presentada por Leadenham et al. [36] junto con un término de disipación viscosa no lineal propuesto por Stanton et al. [32]. La reducción del complejo sistema de ecuaciones diferenciales se realizó aplicando el método de promediación. Mediante un elaborado trabajo algebraico se obtuvieron ecuaciones en forma compacta y general para  $N$  modos, lo cual representa uno de los desarrollos más significativos de la tesis. Si bien las ecuaciones algebraicas resultantes tienen una extensión considerable, fue posible con ellas optimizar el dispositivo con un bajo costo computacional y en tiempos de cálculo razonables. Como caso particular, se obtuvieron las ecuaciones de Leadenham et al. [36] considerando  $N = 1$ . Esta formulación fue validada experimentalmente tanto para vigas en cantiléver como para el dispositivo multimodal, arrojando muy buenos resultados.

Constructivamente, la fabricación de un dispositivo alternativo con bisagras (dispositivo 3 y 4) que articulan el movimiento entre la viga compuesta y los sistemas masa-resorte de los extremos permitió entender problemas asociados a dicha condición de vínculo que pueden ser de ayuda en trabajos futuros. Esta vinculación, si bien representó una alternativa viable en un primer momento, luego presentó aspectos indeseables como grandes variaciones en la generación al cambiar la aceleración de excitación, debidas probablemente a cambios en las condiciones de fricción en las bisagras. Por estas razones, se demostró que la capacidad de recuperación de energía eléctrica es menor que en una vinculación más rígida por pegamento, por lo que fue desechada para el diseño final.

Por otra parte, se identificó una clara dependencia de las condiciones de vínculo, en la generación por modo  $d_{31}$  y  $d_{33}$ . En este sentido, para un sistema viga en cantiléver, se observó que la generación por  $d_{31}$  supera ampliamente a la  $d_{33}$ . Sin embargo, para los dispositivos multimodales que se utilizan en la presente tesis, la generación por modo  $d_{33}$  es la más conveniente.

En el proceso de optimización, se propusieron varias funciones objetivo para el intervalo de uso habitual del dispositivo y se realizaron las optimizaciones correspondientes utilizando algoritmos genéticos. De todas ellas, la que mejores resultados arrojó en cuanto a recuperación de energía fue la optimización basada en la potencia media, la cual fue verificada no solo computacional sino también experimentalmente. Esto permitió la obtención de un dispositivo que superó ampliamente a los construidos originalmente. De manera adicional se demostró la importancia que tiene sobre la optimización, la selección de una función objetivo que contemple las características de la aplicación sobre la cual se va a implementar el recuperador.

Cómo último punto se realizó una prueba de campo del dispositivo optimizado y el original en un recorrido en ciudad. Los resultados arrojaron que ambos dispositivos proveen la alimentación suficiente a un sensor de temperatura para que pueda operar en forma autónoma, demostrando que el optimizado supera ampliamente al original.

### ➤ TRABAJOS A FUTURO

En base a las observaciones que se presentaron en esta tesis, se plantean una serie de posibles trabajos a futuro, con el fin de mejorar aún más el diseño y la eficiencia de este tipo de recuperadores de energía. Ellos se pueden resumir en los siguientes puntos:

- ✓ Mejoras al circuito electrónico basadas en: (i) minimización de la cantidad de muestras de temperatura a medir para obtener más puntos de medición en los recorridos urbanos y (ii) reducción de pérdidas internas del circuito optimizando, entre otras variables, resistencias de carga internas.
- ✓ Realización de mayor cantidad de recorridos urbanos elegidos aleatoriamente, para verificar la adecuación del dispositivo a diferentes condiciones de funcionamiento.
- ✓ Estimación de vida a fatiga del dispositivo con mediciones de ciclos de carga en ensayos de laboratorio.
- ✓ Adecuación del dispositivo para distintos vehículos y diferentes clases de sensores.

### ➤ PUBLICACIONES REALIZADAS

De los estudios presentados en esta tesis surgieron las publicaciones que se detallan a continuación:

- C. D. Gatti, J. M. Ramirez, M. Febbo and S. P. Machado, “Multimodal piezoelectric device for energy harvesting from engine vibration,” in *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, vol. 13, pp. 17-34, 2018. SJR Q1.
- C. D. Gatti, J. M. Ramirez, S. P. Machado and M. Febbo, “Influence of nonlinear constitutive relations in unimorphs piezoelectric harvesters,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 773, p. 012093, 2016. SJR Q3.

- C. D. Gatti, J. M. Ramirez, S. P. Machado y M. Febbo, “Influencia de relaciones constitutivas no lineales en la recolección piezoeléctrica de energía,” en *Mecánica Computacional*, vol. 34, pp. 3047-3063, 2016.
- C. D. Gatti, J. M. Ramirez, S. P. Machado y M. Febbo, “Determinación de función objetivo para la optimización de un recolector de energía en vehículos de transporte,” en *Mecánica Computacional*, vol. 35, pp. 1327-1337, 2017.
- C. D. Gatti, J. M. Ramirez, M. Febbo and S. P. Machado, “Effect of nonlinearities and objective function in optimization of an energy harvesting device,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1052, p. 012098, 2018. SJR Q3.





# Apéndice A

## Principio de Hamilton

---

El principio de Hamilton [97] viene definido por:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (\text{A.1})$$

siendo  $\delta L$  la primera variación [125] del Lagrangiano  $L = T - U$  y  $\delta W_{nc}$  la primera variación del trabajo de las fuerzas no conservativas que para los casos contemplados en esta tesis viene definida por la ecuación:

$$\delta W_{nc} = -F_v \delta w - i \delta \lambda \quad (\text{A.2})$$

donde  $i$  es la corriente eléctrica y  $\lambda$  el flujo eléctrico, siendo  $\dot{\lambda} = v$  (voltaje). Además,  $F_v$  es la fuerza disipativa viscosa que, siguiendo la propuesta de Stanton [32], Bandstra [102] y Yang [90], adopta la forma:

$$F_v = c\dot{w} + c_n \dot{w}^2 \text{sign}(\dot{w}) \quad (\text{A.3})$$

La variación del Lagrangiano es:

$$\delta L(\dot{w}, w', w'', \dot{\lambda}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \delta \dot{w} + \frac{\partial L}{\partial w'} \delta w' + \frac{\partial L}{\partial w''} \delta w'' + \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \delta \dot{\lambda} \quad (\text{A.4})$$

donde el punto es la derivada temporal y el prima la derivada con respecto a la variable espacial  $x$ .

Reemplazando la (A.4) en la (A.1) e integrando por partes, el primer término de la integral queda:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \delta \dot{w} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) \delta w dt \quad (\text{A.5})$$

donde los términos que se evalúan en los extremos  $t_1$  y  $t_2$  se hacen cero.

De manera similar, el segundo término queda:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial w'} \delta w' dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial w'} \delta w \Big|_0^l - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial w'} \right) \delta w \right) dt \quad (\text{A.6})$$

El tercero:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial w''} \delta w'' dt \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial w''} \delta w' \Big|_0^l - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial w''} \right) \delta w \Big|_0^l \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial L}{\partial w''} \right) \delta w \right) dt \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

El cuarto:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \delta \dot{\lambda} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right) \delta \lambda dt \quad (\text{A.8})$$

Ahora, agrupando términos comunes se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[ - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial w'} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial L}{\partial w''} \right) - c \dot{w} \right. \right. \\ \left. \left. - c_n \dot{w}^2 \text{sign}(\dot{w}) \right] \delta w + \left[ - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right) - \frac{\dot{\lambda}}{R_l} \right] \delta \lambda \right. \\ \left. + \left[ \frac{\partial L}{\partial w'} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial w''} \right) \right] \delta w \Big|_0^l + \left[ \frac{\partial L}{\partial w''} \right] \delta w' \Big|_0^l \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

De las cuales se desprenden las dos ecuaciones electromecánicas de Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial w'} \right) - \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial L}{\partial w''} \right) + c \dot{w} + c_n \dot{w}^2 \text{sign}(\dot{w}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right) + \frac{\dot{\lambda}}{R_l} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

# Apéndice B

## Problema de Autovalores

---

Las ecuaciones gobernantes del movimiento transversal de la viga Bernoulli-Euler, separada en tres tramos (ver Figura 3.10) viene dada por [96]:

$$EI_e w^{IV} = -\rho A_e \ddot{w} \quad , \quad e = 1 - 3 \quad (\text{B.1})$$

discretizando con la ecuación (4.70) para cada tramo  $e$  y para un modo genérico  $i$  queda:

$$EI_e q_{ei} \phi_{ei}^{IV} = -\rho A_e \phi_{ei} \ddot{q}_{ei} \quad (\text{B.2})$$

Reacomodando, se obtiene la relación en variables separadas:

$$\frac{EI_e \phi_{ei}^{IV}}{\rho A_e \phi_{ei}} = -\frac{\ddot{q}_{ei}}{q_{ei}} = \omega_i^2 \quad (\text{B.3})$$

Con lo cual se tienen tres ecuaciones para  $\phi_{ei}(x)$ :

$$\phi_{ei}^{IV}(x) - \beta_{ei}^4 \phi_{ei}(x) = 0 \quad (\text{B.4})$$

y tres ecuaciones para  $q_{ei}(t)$ :

$$\ddot{q}_{ei}(t) + \omega_i^2 q_{ei}(t) = 0 \quad (\text{B.5})$$

siendo los autovalores:

$$\beta_{ei} = \left( \frac{\omega_i^2 \rho A_e}{EI_e} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{B.6})$$

Las soluciones propuestas para las ecuaciones (B.4), para cada uno de los tres tramos de la viga, vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
 \phi_{1i}(x) &= C_{1i} \cos(\beta_{1i} x) + C_{2i} \cosh(\beta_{1i} x) + C_{3i} \sin(\beta_{1i} x) \\
 &\quad + C_{4i} \sinh(\beta_{1i} x) \quad , \quad 0 < x < L_1 \\
 \phi_{2i}(x) &= C_{5i} \cos(\beta_{2i} x) + C_{6i} \cosh(\beta_{2i} x) + C_{7i} \sin(\beta_{2i} x) \\
 &\quad + C_{8i} \sinh(\beta_{2i} x) \quad , \quad L_1 < x < L_1 + L_2 \\
 \phi_{3i}(x) &= C_{9i} \cos(\beta_{3i} x) + C_{10i} \cosh(\beta_{3i} x) + C_{11i} \sin(\beta_{3i} x) \\
 &\quad + C_{12i} \sinh(\beta_{3i} x) \quad , \quad L_1 + L_2 < x < L
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

donde  $C_{ji}$  ( $j = 1 - 12$ ) son constantes a ser determinadas con las condiciones de vínculo, las cuales se escriben junto a las ecuaciones de compatibilidad, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 EI_1 \phi_{1i}''(0) &= (k_{t1} - J_1 \omega^2) \phi_{1i}'(0) \\
 EI_1 \phi_{1i}'''(0) &= (m_1 \omega^2 - k_1) \phi_{1i}(0) \\
 \phi_{1i}(L_1) &= \phi_{2i}(L_1) \\
 \phi_{1i}'(L_1) &= \phi_{2i}'(L_1) \\
 EI_1 \phi_{1i}''(L_1) &= EI_2 \phi_{2i}''(L_1) \\
 EI_1 \phi_{1i}'''(L_1) &= EI_2 \phi_{2i}'''(L_1) \\
 \phi_{2i}(L_1 + L_2) &= \phi_{3i}(L_1 + L_2) \\
 \phi_{2i}'(L_1 + L_2) &= \phi_{3i}'(L_1 + L_2) \\
 EI_2 \phi_{2i}''(L_1 + L_2) &= EI_3 \phi_{3i}''(L_1 + L_2) \\
 EI_2 \phi_{2i}'''(L_1 + L_2) &= EI_3 \phi_{3i}'''(L_1 + L_2) \\
 EI_3 \phi_{3i}''(L) &= (J_2 \omega^2 - k_{t2}) \phi_{3i}'(L) \\
 EI_3 \phi_{3i}'''(L) &= (k_2 - m_2 \omega^2) \phi_{3i}(L)
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Con los modos (B.7) reemplazados en las condiciones de borde (B.8), se tiene un sistema de doce ecuaciones, a partir del cual se obtiene la matriz de coeficientes del sistema:

$$\begin{aligned}
 MC = & \left[ \begin{array}{cccc}
 -\beta_{1i}^2 & \beta_{1i}^2 & -H_{11}\beta_{1i} & \dots \\
 H_1 & H_1 & -\beta_{1i}^3 & \dots \\
 \cos(\beta_{1i}L_1) & \cosh(\beta_{1i}L_1) & \sin(\beta_{1i}L_1) & \dots \\
 -\beta_{1i} \sin(\beta_{1i}L_1) & \beta_{1i} \sinh(\beta_{1i}L_1) & \beta_{1i} \cos(\beta_{1i}L_1) & \dots \\
 -EI_1\beta_{1i}^2 \cos(\beta_{1i}L_1) & EI_1\beta_{1i}^2 \cosh(\beta_{1i}L_1) & -EI_1\beta_{1i}^2 \sin(\beta_{1i}L_1) & \dots \\
 EI_1\beta_{1i}^3 \sin(\beta_{1i}L_1) & EI_1\beta_{1i}^3 \sinh(\beta_{1i}L_1) & -EI_1\beta_{1i}^3 \cos(\beta_{1i}L_1) & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & -H_{11}\beta_{1i} & 0 & \dots \\
 \dots & -\beta_{1i}^3 & 0 & \dots \\
 \dots & \sinh(\beta_{1i}L_1) & -\cos(\beta_{2i}L_1) & \dots \\
 \dots & \beta_{1i} \cosh(\beta_{1i}L_1) & \beta_{2i} \sin(\beta_{2i}L_1) & \dots \\
 \dots & EI_1\beta_{1i}^2 \sinh(\beta_{1i}L_1) & EI_2\beta_{2i}^2 \cos(\beta_{2i}L_1) & \dots \\
 \dots & EI_1\beta_{1i}^3 \cosh(\beta_{1i}L_1) & -EI_2\beta_{2i}^3 \sin(\beta_{2i}L_1) & \dots \\
 \dots & 0 & \cos[\beta_{2i}(L_1 + L_2)] & \dots \\
 \dots & 0 & -\beta_{2i} \sin[\beta_{2i}(L_1 + L_2)] & \dots \\
 \dots & 0 & -EI_2\beta_{2i}^2 \cos[\beta_{2i}(L_1 + L_2)] & \dots \\
 \dots & 0 & EI_2\beta_{2i}^3 \sin[\beta_{2i}(L_1 + L_2)] & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & -\sin(\beta_{2i}L_1) & -\sinh(\beta_{2i}L_1) & \dots \\
 \dots & -\beta_{2i} \cos(\beta_{2i}L_1) & -\beta_{2i} \cosh(\beta_{2i}L_1) & \dots \\
 \dots & EI_2\beta_{2i}^2 \sin(\beta_{2i}L_1) & -EI_2\beta_{2i}^2 \sinh(\beta_{2i}L_1) & \dots \\
 \dots & EI_2\beta_{2i}^3 \cos(\beta_{2i}L_1) & EI_2\beta_{2i}^3 \cosh(\beta_{2i}L_1) & \dots \\
 \dots & \sin[\beta_{2i}(L_1 + L_2)] & \sinh[\beta_{2i}(L_1 + L_2)] & \dots \\
 \dots & \beta_{2i} \cos[\beta_{2i}(L_1 + L_2)] & \beta_{2i} \cosh[\beta_{2i}(L_1 + L_2)] & \dots \\
 \dots & -EI_2\beta_{2i}^2 \sin[\beta_{2i}(L_1 + L_2)] & EI_2\beta_{2i}^2 \sinh[\beta_{2i}(L_1 + L_2)] & \dots \\
 \dots & -EI_2\beta_{2i}^3 \cos[\beta_{2i}(L_1 + L_2)] & EI_2\beta_{2i}^3 \cosh[\beta_{2i}(L_1 + L_2)] & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & -\cosh[\beta_{3i}(L_1 + L_2)] & -\sin[\beta_{3i}(L_1 + L_2)] & \dots \\
 \dots & -\beta_{3i} \sinh[\beta_{3i}(L_1 + L_2)] & -\beta_{3i} \cos[\beta_{3i}(L_1 + L_2)] & \dots \\
 \dots & -EI_3\beta_{3i}^2 \cosh[\beta_{3i}(L_1 + L_2)] & EI_3\beta_{3i}^2 \sin[\beta_{3i}(L_1 + L_2)] & \dots \\
 \dots & -EI_3\beta_{3i}^3 \sinh[\beta_{3i}(L_1 + L_2)] & EI_3\beta_{3i}^3 \cos[\beta_{3i}(L_1 + L_2)] & \dots \\
 \dots & \beta_{3i}^2 \cosh(\beta_{3i}L) + H_{22}\beta_{3i} \sin(\beta_{3i}L) & H_{22}\beta_{3i} \cos(\beta_{3i}L) - \beta_{3i}^2 \sin(\beta_{3i}L) & \dots \\
 \dots & -H_2 \cosh(\beta_{3i}L) + \beta_{3i}^3 \sinh(\beta_{3i}L) & -\beta_{3i}^3 \cos(\beta_{3i}L) - H_2 \sin(\beta_{3i}L) & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & -\cosh[\beta_{3i}(L_1 + L_2)] & -\sin[\beta_{3i}(L_1 + L_2)] & \dots \\
 \dots & -\beta_{3i} \sinh[\beta_{3i}(L_1 + L_2)] & -\beta_{3i} \cos[\beta_{3i}(L_1 + L_2)] & \dots \\
 \dots & -EI_3\beta_{3i}^2 \cosh[\beta_{3i}(L_1 + L_2)] & EI_3\beta_{3i}^2 \sin[\beta_{3i}(L_1 + L_2)] & \dots \\
 \dots & -EI_3\beta_{3i}^3 \sinh[\beta_{3i}(L_1 + L_2)] & EI_3\beta_{3i}^3 \cos[\beta_{3i}(L_1 + L_2)] & \dots \\
 \dots & \beta_{3i}^2 \cosh(\beta_{3i}L) + H_{22}\beta_{3i} \sin(\beta_{3i}L) & H_{22}\beta_{3i} \cos(\beta_{3i}L) - \beta_{3i}^2 \sin(\beta_{3i}L) & \dots \\
 \dots & -H_2 \cosh(\beta_{3i}L) + \beta_{3i}^3 \sinh(\beta_{3i}L) & -\beta_{3i}^3 \cos(\beta_{3i}L) - H_2 \sin(\beta_{3i}L) & \dots
 \end{array} \right] \tag{B.9}
 \end{aligned}$$

definiendo los coeficientes:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{k_1}{EI_1} - \frac{m_1\beta_{1i}^4}{\rho A_1} \quad , \quad H_2 = \frac{k_2}{EI_3} - \frac{m_2\beta_{3i}^4}{\rho A_3} \\
H_{11} &= \frac{k_{t1}}{EI_1} - \frac{J_1\beta_{1i}^4}{\rho A_1} \quad , \quad H_{22} = \frac{k_{t2}}{EI_3} - \frac{J_2\beta_{3i}^4}{\rho A_3}
\end{aligned}
\tag{B.10}$$

y haciendo el determinante de la matriz de coeficientes igual a cero, se obtiene la ecuación de frecuencia y de allí, reemplazando todos los coeficientes, se obtienen las frecuencias naturales  $\omega_i$ .

Para realizar la normalización de los modos respecto a la matriz de masa, se debe realizar la ortogonalización de los mismos siguiendo el siguiente procedimiento.

Se toma de manera genérica la parte espacial de la (B.3), se la multiplica por un segundo modo  $\phi_j$  y se la integra en la longitud de la viga  $l$ , de tal manera que se obtiene:

$$\int_0^l EI \phi_j \phi_i^{IV} dx = \omega_i^2 \int_0^l \rho A \phi_j \phi_i dx
\tag{B.11}$$

Aplicando integración por partes dos veces sucesivas del lado izquierdo se obtiene:

$$\phi_j EI \phi_i''' - \phi_j' EI \phi_i'' + \int_0^l EI \phi_j'' \phi_i'' dx = \omega_i^2 \int_0^l \rho A \phi_j \phi_i dx
\tag{B.12}$$

Utilizando las condiciones de borde (B.8) y reacomodando se llega a:

$$\begin{aligned}
&\int_0^l EI \phi_j'' \phi_i'' dx + k_1 \phi_{1i}(0) \phi_{1j}(0) + k_2 \phi_{3i}(L) \phi_{3j}(L) \\
&\quad + k_{t1} \phi_{1i}'(0) \phi_{1j}'(0) + k_{t2} \phi_{3i}'(L) \phi_{3j}'(L) \\
&= \omega_i^2 \left[ \int_0^l \rho A \phi_j \phi_i dx + m_1 \phi_{1i}(0) \phi_{1j}(0) \right. \\
&\quad + m_2 \phi_{3i}(L) \phi_{3j}(L) + J_1 \phi_{1i}'(0) \phi_{1j}'(0) \\
&\quad \left. + J_2 \phi_{3i}'(L) \phi_{3j}'(L) \right]
\end{aligned}
\tag{B.13}$$

De manera similar, multiplicando por  $\phi_i$  la parte que contiene la dependencia en  $x$  (espacial) de la (B.3) para un modo  $j$  y realizando el mismo procedimiento se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l EI \phi_j'' \phi_i'' dx + k_1 \phi_{1i}(0) \phi_{1j}(0) + k_2 \phi_{3i}(L) \phi_{3j}(L) \\
 & \quad + k_{t1} \phi_{1i}'(0) \phi_{1j}'(0) + k_{t2} \phi_{3i}'(L) \phi_{3j}'(L) \\
 & = \omega_j^2 \left[ \int_0^l \rho A \phi_j \phi_i dx + m_1 \phi_{1i}(0) \phi_{1j}(0) \right. \\
 & \quad + m_2 \phi_{3i}(L) \phi_{3j}(L) + J_1 \phi_{1i}'(0) \phi_{1j}'(0) \\
 & \quad \left. + J_2 \phi_{3i}'(L) \phi_{3j}'(L) \right] \tag{B.14}
 \end{aligned}$$

Restando la (B.14) a la (B.13), nos queda:

$$\begin{aligned}
 & (\omega_j^2 - \omega_i^2) \left[ \int_0^l \rho A \phi_j \phi_i dx + m_1 \phi_{1i}(0) \phi_{1j}(0) + m_2 \phi_{3i}(L) \phi_{3j}(L) \right. \\
 & \quad \left. + J_1 \phi_{1i}'(0) \phi_{1j}'(0) + J_2 \phi_{3i}'(L) \phi_{3j}'(L) \right] = 0 \tag{B.15}
 \end{aligned}$$

Finalmente, la condición de ortogonalidad de las formas modales resulta ser de forma general siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l \rho A \phi_j \phi_i dx + m_1 \phi_{1i}(0) \phi_{1j}(0) + m_2 \phi_{3i}(L) \phi_{3j}(L) \\
 & \quad + J_1 \phi_{1i}'(0) \phi_{1j}'(0) + J_2 \phi_{3i}'(L) \phi_{3j}'(L) = \delta_{ij} \tag{B.16}
 \end{aligned}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \quad \omega_i \neq \omega_j \\ 1 & , \quad \omega_i = \omega_j \end{cases}$$

Una forma alternativa de la condición de ortogonalidad se puede obtener a partir de la (B.13) o de la (B.14), obteniéndose la expresión:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l EI \phi_j'' \phi_i'' dx + k_1 \phi_{1i}(0) \phi_{1j}(0) + k_2 \phi_{3i}(L) \phi_{3j}(L) \\
 & \quad + k_{t1} \phi_{1i}'(0) \phi_{1j}'(0) + k_{t2} \phi_{3i}'(L) \phi_{3j}'(L) = \omega_i^2 \delta_{ij} \tag{B.17}
 \end{aligned}$$

Matricialmente, la (B.16) y la (B.17) se pueden escribir:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \delta_{ij} \\ \mathbf{K} (\boldsymbol{\Omega}^t \boldsymbol{\Omega})^{-1} &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{B.18}$$

Siendo  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  y  $\boldsymbol{\Omega}$  la matriz de masa, de rigidez y el vector frecuencias naturales, respectivamente.



# Apéndice C

## Campo y Capacidad Eléctrica

---

En este apartado se presenta el estudio del campo eléctrico y la capacidad eléctrica en los materiales piezoeléctricos de electrodos interdigitados, tanto en la configuración para generación por medio del coeficiente  $d_{31}$  como para la generación por  $d_{33}$ . Mediante el software de elementos finitos FlexPDE [118] se obtuvo la distribución de voltaje y del campo eléctrico en el dominio del material piezoeléctrico, además de calcularse la capacidad eléctrica del mismo.

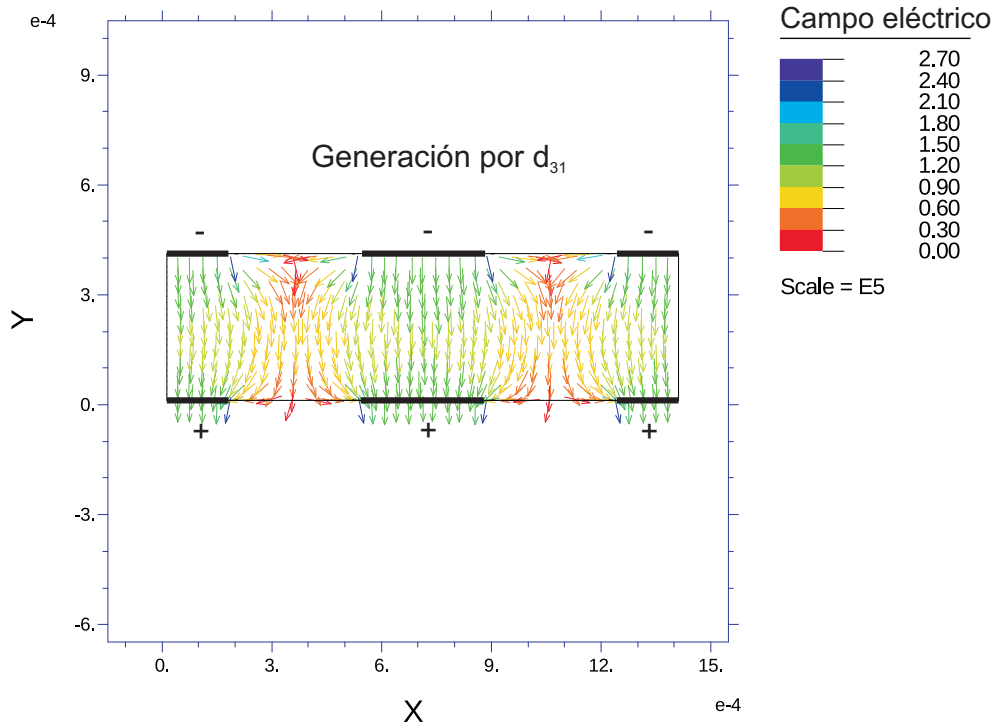
El estudio se realiza en dos dimensiones (2D), sobre el plano transversal longitudinal  $xz$  del piezoeléctrico, y los resultados se comparan con los obtenidos a partir de las expresiones analíticas propuestas en la literatura. Los valores geométricos y eléctricos utilizados para las simulaciones se muestran en la Tabla C.1.

Parámetro	Nombre	Valor
$h_p$	espesor del piezoeléctrico	0.40 mm
$w_p$	ancho del electrodo	0.38 mm
$l_p$	separación entre electrodos	0.32 mm
$V$	voltaje aplicado	50 V
$\epsilon_{11}^s$ y $\epsilon_{33}^s$	permitividad a tensión constante	15.3 nF/m
$\epsilon_0$	permitividad del vacío	8.854 pF/m

Tabla C.1 – Valores de los parámetros geométricos y eléctricos utilizados.

### **Generación por $d_{31}$**

En primer lugar se analiza la configuración para generación por  $d_{31}$  y en la Figura C.1 se muestra la distribución del campo eléctrico (en V/m) para cuando se aplica un voltaje de 0-50 V en los electrodos.



*Figura C.1 - Distribución del campo eléctrico en plano xz en configuración  $d_{31}$ .*

En la Figura C.2 se grafican las componentes del campo eléctrico en (a) el plano medio longitudinal y en (b) el plano transversal debajo del centro de la superficie de los electrodos.

Por un lado, en ambas figuras se comprueba que el campo eléctrico está en mayor porcentaje en la dirección vertical  $y$ , como corresponde a la generación por  $d_{31}$ . Por otro lado se observa que ese campo eléctrico no es constante a lo largo de todo el piezoelectrico, como sí sucede cuando los electrodos cubren toda la superficie del mismo. Notar en la Figura C.1 y en la Figura C.2 (b) que en la zona central debajo de los electrodos, el campo se mantiene prácticamente constante.

En la literatura [25, 126] se propone la siguiente expresión de cálculo para aproximar el valor del campo eléctrico:

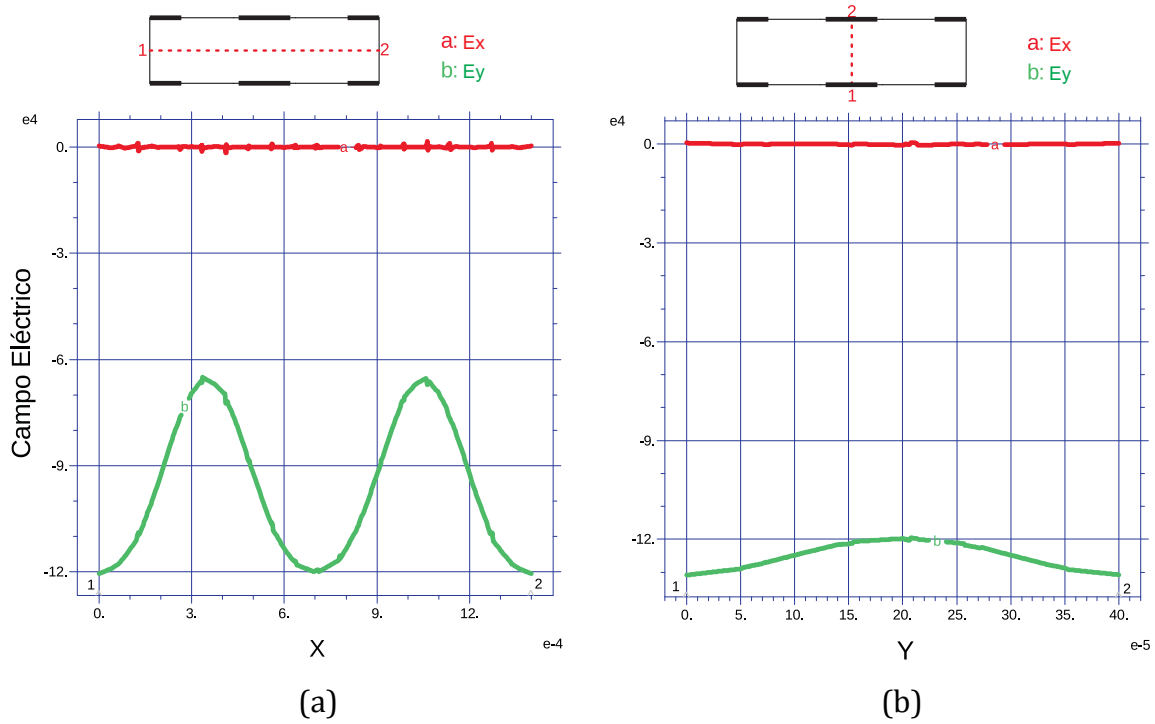


Figura C.2 - Componentes del campo eléctrico en configuración  $d_{31}$  para la zona de las líneas punteadas que se observan en el extremo superior de las figuras.

$$E = -\frac{V}{h_p} \tag{C.1}$$

donde  $V$  es el voltaje y  $h_p$  es el espesor del piezoelectrico. Utilizando dicha fórmula con los valores de la Tabla C.1, se obtiene un valor de campo de  $12.5 \times 10^4$  el cual se encuentra muy cerca de los valores máximos obtenidos en la simulación por elementos finitos (ver Figura C.2). Como complemento, en la Figura C.3 se visualiza la distribución del voltaje en el dominio del piezoelectrico.

Respecto a la capacidad eléctrica, el modelo del software obtiene un valor de  $41.05 \text{ nF/m}$ . Si se calcula con la ecuación propuesta por la literatura, para cuando los electrodos cubren toda la superficie del piezoelectrico:

$$C_p = \frac{\epsilon_{33}^s b_p L}{h_p} \tag{C.2}$$

siendo  $b_p = 1 \text{ m}$  el ancho del piezoelectrico y  $L = 2w_p + 2l_p = 1.4 \text{ mm}$ , se obtiene un valor de  $53.55 \text{ nF/m}$ . Al utilizar esta fórmula analítica se comete un error del

30.45% (para este caso en particular) debido a la no uniformidad del campo eléctrico en el largo del piezoelectrico consecuencia de la configuración de dedos interdigitados.

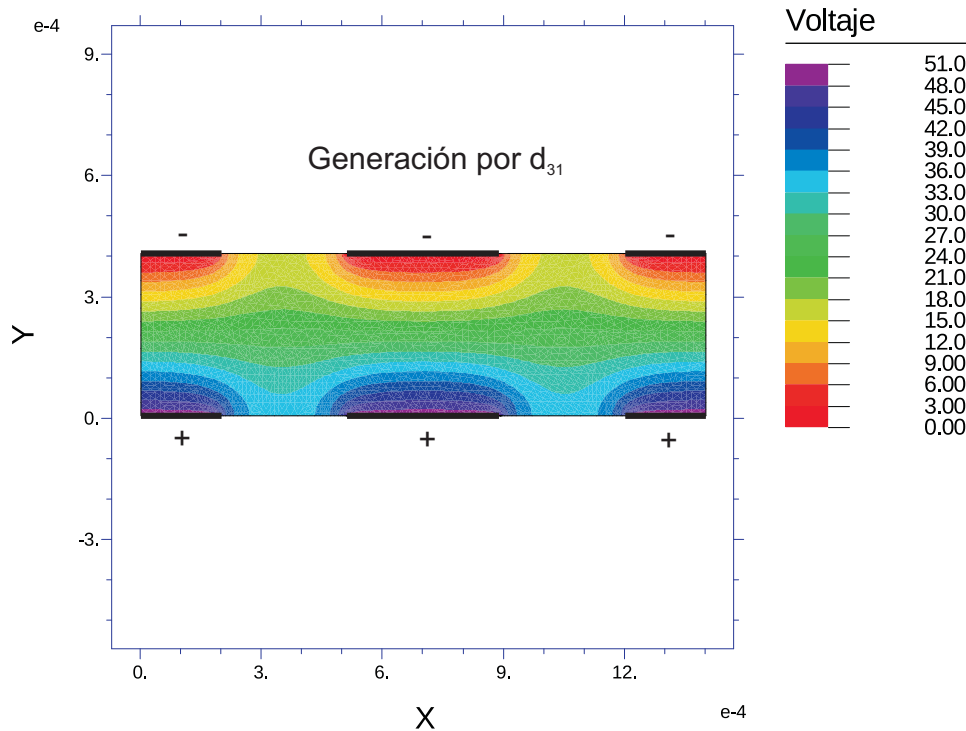


Figura C.3 - Distribución del voltaje en plano  $xz$  en configuración  $d_{31}$ .

### **Generación por $d_{33}$**

En lo que respecta a la configuración para generación por medio del coeficiente  $d_{33}$ , en la Figura C.4 se muestra la distribución del campo eléctrico para el mismo voltaje aplicado en los electrodos. En la Figura C.5 se grafican las componentes del campo eléctrico en (a) el plano medio longitudinal y en (b) el plano transversal entre las superficies de los electrodos.

En este caso se comprueba que el campo eléctrico está en su mayor porcentaje en la dirección longitudinal  $x$ , como corresponde a la generación por  $d_{33}$ . Por otro lado se observa que ese campo eléctrico no es constante ni a lo largo ni en el espesor del piezoelectrico. Se puede ver tanto en la Figura C.4 como en la Figura C.5 (b) que en la zona central en el espacio que queda entre los electrodos, el campo se mantiene prácticamente constante.

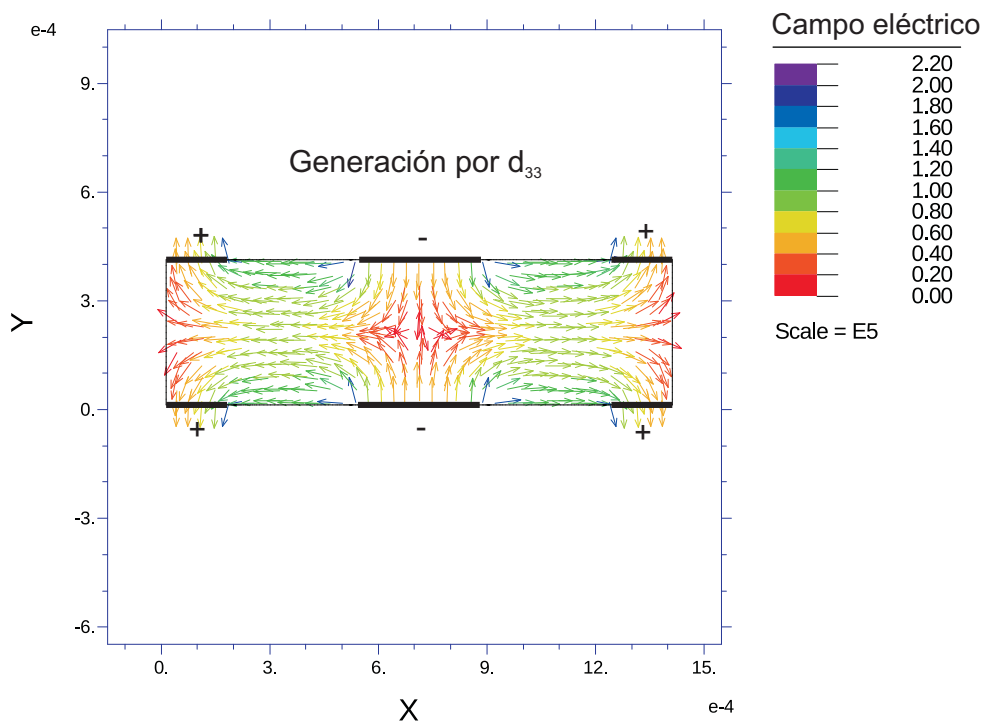


Figura C.4 - Distribución del campo eléctrico en plano xz en configuración  $d_{33}$ .

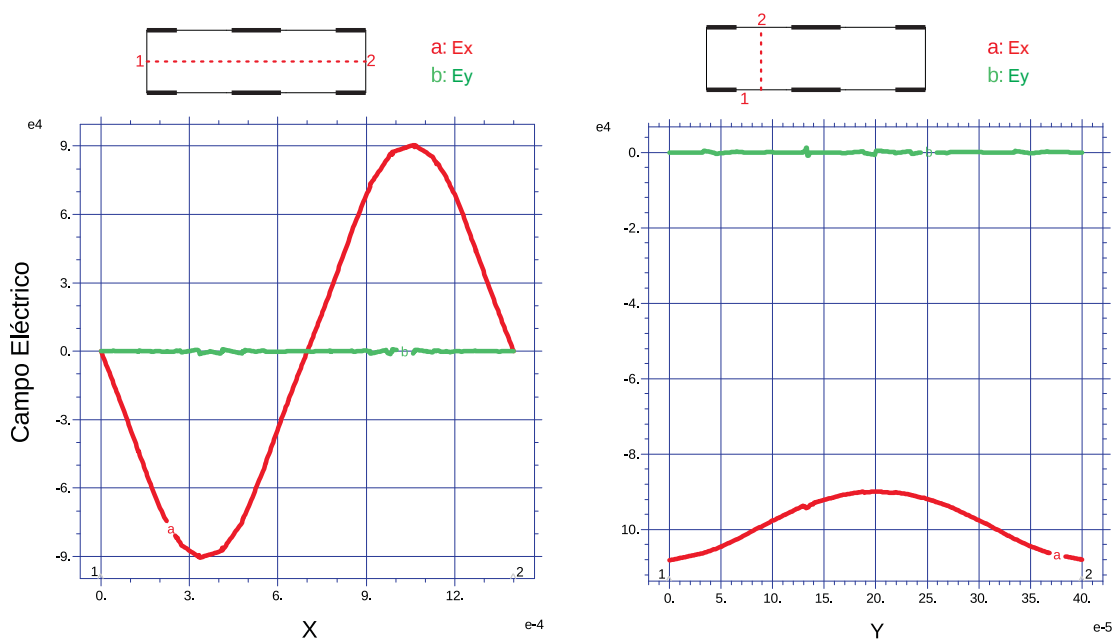


Figura C.5 - Componentes del campo eléctrico en configuración  $d_{33}$ .

En este caso, en la literatura [18, 43] se encuentra la siguiente expresión de cálculo para aproximar el valor del campo eléctrico:

$$E = -\frac{V}{l_p} \quad (\text{C.3})$$

donde  $l_p$  es la separación entre electrodos. Utilizando dicha fórmula con los valores de la Tabla C.1, se obtiene un valor de campo de  $15.62 \times 10^4$  el cual se encuentra bastante alejado al valor máximo obtenido en la simulación por elementos finitos de  $10.8 \times 10^4$  (Figura C.5).

Respecto a la capacidad eléctrica, el modelo del software obtiene un valor de  $24.03 \text{ nF/m}$ . Calculándolo con la ecuación propuesta por la literatura:

$$C_p = \frac{n\epsilon_{11}^s b_p h_p}{l_p} \quad (\text{C.4})$$

con  $n = 2$  número de pares de electrodos, se obtiene un valor de  $38.25 \text{ nF/m}$ . En este caso la fórmula analítica comete un error del 59.17%. Esto se debe a que la ecuación (C.4) considera constante el campo eléctrico en el área entre los electrodos, sin embargo, como se puede ver en la Figura C.4 el campo no se mantiene constante e incluso no alcanza el valor máximo estimado por la (C.3).

Para finalizar, en la Figura C.6 se visualiza la distribución del voltaje en el dominio del piezoeléctrico.

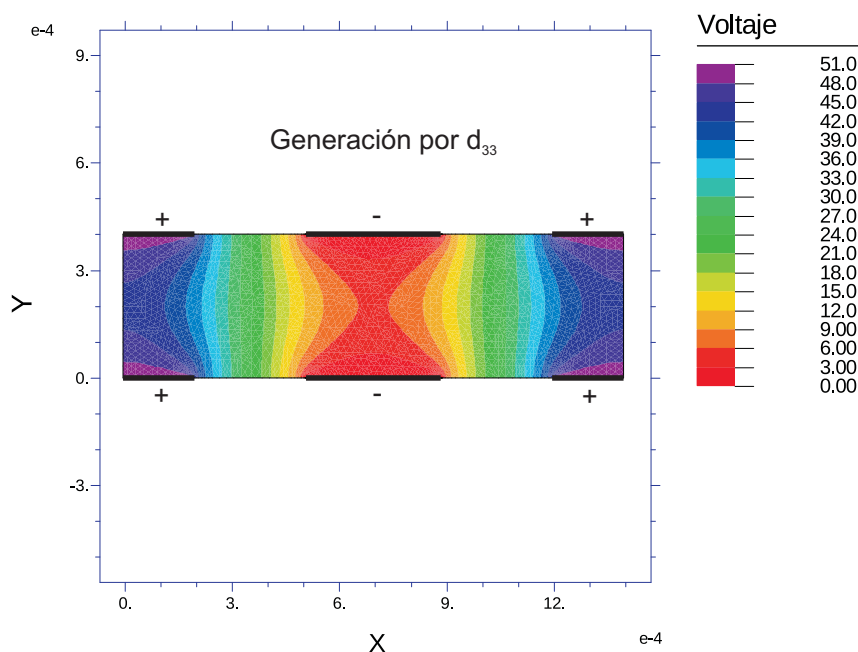


Figura C.6 - Distribución del campo eléctrico en plano  $xz$  en configuración  $d_{33}$ .

# Apéndice D

## Método de Promediación

---

El método de promediación [127] se ha utilizado ampliamente para analizar soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Se asume una solución en series de Fourier, reemplazando las ecuaciones diferenciales ordinarias por ecuaciones algebraicas. El error en la solución aproximada es minimizado con el método de Galerkin [128]. El sistema resultante de ecuaciones algebraicas se resuelve iterativamente, con métodos como el de Newton-Raphson.

Brevemente, el procedimiento consiste primeramente en proponer una aceleración armónica de la base, del tipo:

$$\ddot{g}(t) = G \cos(\Omega t) \quad (\text{D.1})$$

Luego se asume que la respuesta temporal del desplazamiento del modo  $i$   $q_i^*(t)$  y del voltaje  $v(t)$ , serán armónicas de la forma:

$$q_i^*(t) = Q_{(2i-1)} \cos(\Omega t) + Q_{(2i)} \sin(\Omega t) \quad (\text{D.2})$$

$$v(t) = V_1 \cos(\Omega t) + V_2 \sin(\Omega t)$$

Además, se definen las amplitudes de desplazamiento modal como  $q_i = \sqrt{Q_{(2i-1)}^2 + Q_{(2i)}^2}$  y la amplitud del voltaje  $V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$ . Sustituyendo las ecuaciones (D.1) y (D.2) en las ecuaciones diferenciales del dispositivo recuperador, (4.73) y (4.74), y aplicando el método de promediación bajo el procedimiento desarrollado por Leadenham [91], se obtiene un sistema de  $2 + 2N$  ecuaciones algebraicas, siendo  $N$  el número de modos a ser considerados. El sistema resultante

consiste de dos subsistemas de  $N$  ecuaciones mecánicas acopladas cada uno, más dos ecuaciones eléctricas acopladas.

Las primeras  $N$  ecuaciones mecánicas que se obtienen tienen la forma:

$$\begin{aligned} -M_i \Omega^2 Q_{(2i-1)} + C_i \Omega Q_{(2i)} + K_i Q_{(2i-1)} - \theta_i V_1 + \frac{8}{3\pi} C_n^* \Omega^2 Q_{(2i)} + \frac{8}{3\pi} K_n^* Q_{(2i-1)} \\ + \frac{4}{3\pi} \theta_n^* [(2Q_{(2i-1)}^2 + Q_{(2i)}^2) V_1 + Q_{(2i-1)} Q_{(2i)} V_2] + \frac{3}{4} K_G^* Q_{(2i-1)} \\ + \frac{1}{4} \theta_G^* [V_1 (3Q_{(2i-1)}^2 + Q_{(2i)}^2) + 2Q_{(2i-1)} Q_{(2i)} V_2] + F_i = 0 \end{aligned} \quad (D.3)$$

y las segundas  $N$  ecuaciones mecánicas:

$$\begin{aligned} -M_i \Omega^2 Q_{(2i)} - C_i \Omega Q_{(2i-1)} + K_i Q_{(2i)} - \theta_i V_2 - \frac{8}{3\pi} C_n^* \Omega^2 Q_{(2i-1)} + \frac{8}{3\pi} K_n^* Q_{(2i)} \\ + \frac{4}{3\pi} \theta_n^* [(Q_{(2i-1)}^2 + 2Q_{(2i)}^2) V_2 + Q_{(2i-1)} Q_{(2i)} V_1] + \frac{3}{4} K_G^* Q_{(2i)} \\ + \frac{1}{4} \theta_G^* [V_2 (Q_{(2i-1)}^2 + 3Q_{(2i)}^2) + 2Q_{(2i-1)} Q_{(2i)} V_1] = 0 \end{aligned} \quad (D.4)$$

La primera ecuación eléctrica que se obtiene es:

$$C_p \Omega V_2 + \frac{V_1}{R_l} + \Omega \sum_{i=1}^N Q_{(2i)} \left[ \psi_i + \frac{4}{3\pi} \psi_n^* + \frac{1}{4} \psi_G^* \right] = 0 \quad (D.5)$$

y la segunda:

$$C_p \Omega V_1 - \frac{V_2}{R_l} + \Omega \sum_{i=1}^N Q_{(2i-1)} \left[ \psi_i + \frac{4}{3\pi} \psi_n^* + \frac{1}{4} \psi_G^* \right] = 0 \quad (D.6)$$

En las ecuaciones anteriores, se definen los coeficientes:

$$\begin{aligned} C_n^* = \frac{q_1}{q_i} \sum_{j,k=1}^N A_{jk} C_{nijk} \quad , \quad K_n^* = \frac{q_1}{q_i} \sum_{j,k=1}^N A_{jk} K_{nijk} \quad , \quad K_G^* = \frac{q_1}{q_i} \sum_{j,k,l=1}^N q_j A_{kl} K_{Gijkl} \\ \theta_n^* = \frac{q_1}{q_i^3} \sum_{j=1}^N A_{ij} \theta_{nij} \quad , \quad \theta_G^* = \frac{q_1}{q_i^2} \sum_{j,k=1}^N A_{jk} \theta_{Gijk} \quad , \quad \psi_n^* = \sum_{j=1}^N q_j \psi_{nij} \quad , \quad \psi_G^* = q_1 \sum_{j,k=1}^N A_{jk} \psi_{Gijk} \end{aligned}$$

donde los coeficientes  $C_{nijk}$ ,  $K_{nijk}$ ,  $K_{Gijkl}$ ,  $\theta_{nij}$ ,  $\theta_{Gijk}$ ,  $\psi_{nij}$  y  $\psi_{Gijk}$  son los presentados en el Capítulo 4.2 y  $A_{ij} = A_{jk} = A_{kl}$  son las componentes de la matriz de coeficientes de amplitudes  $\mathbf{A}$ , la cual se expresa genéricamente como:



$$A = \begin{bmatrix} \frac{q_1^2}{q_1} & \dots & \dots & \dots & q_N \\ & \ddots & & & \frac{q_1 q_N}{q_1} \\ & & \ddots & & \frac{q_2 q_N}{q_1} \\ & & & \ddots & q_1 \\ & & & & \vdots \\ Sym & & & & \frac{q_N^2}{q_1} \end{bmatrix} \quad (D.7)$$

Para el caso en que se toman los primeros tres modos de vibración (N = 3), la matriz D.7 se reduce a:

$$A = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ & \frac{q_2^2}{q_1} & \frac{q_2 q_3}{q_1} \\ & Sym & \frac{q_3^2}{q_1} \end{bmatrix} \quad (D.8)$$

Finalmente, para el caso particular en el que se considera un solo modo, el sistema se reduce a las siguientes cuatro ecuaciones algebraicas, coincidentes con Leadenham [36] en los términos no disipativos:

$$\begin{aligned} & -M\Omega^2 Q_1 + C\Omega Q_2 + KQ_1 - \theta V_1 + \frac{8}{3\pi} C_n \Omega^2 q Q_2 + \frac{8}{3\pi} K_n q Q_1 \\ & + \frac{4}{3\pi} \theta_n \left[ \frac{(2Q_1^2 + Q_2^2)V_1 + Q_1 Q_2 V_2}{q} \right] + \frac{3}{4} K_G Q_1 q^2 \\ & + \frac{1}{4} \theta_G [V_1(3Q_1^2 + Q_2^2) + 2Q_1 Q_2 V_2] + F = 0 \\ \\ & -M\Omega^2 Q_2 - C\Omega Q_1 + KQ_2 - \theta V_2 - \frac{8}{3\pi} C_n \Omega^2 q Q_1 + \frac{8}{3\pi} K_n q Q_2 \\ & + \frac{4}{3\pi} \theta_n \left[ \frac{(Q_1^2 + 2Q_2^2)V_2 + Q_1 Q_2 V_1}{q} \right] + \frac{3}{4} K_G Q_2 q^2 \\ & + \frac{1}{4} \theta_G [V_2(Q_1^2 + 3Q_2^2) + 2Q_1 Q_2 V_1] = 0 \\ \\ & C_p \Omega V_2 + \frac{V_1}{R_l} + \left[ \psi + \frac{4}{3\pi} \psi_n q + \frac{1}{4} \psi_G q^2 \right] \Omega Q_2 = 0 \\ \\ & C_p \Omega V_1 - \frac{V_2}{R_l} + \left[ \psi + \frac{4}{3\pi} \psi_n q - \frac{1}{4} \psi_G q^2 \right] \Omega Q_1 = 0 \end{aligned} \quad (D.9)$$



# Bibliografía

---

- [1] H. Xiao and X. Wang, "A review of piezoelectric vibration energy harvesting techniques," *Fuel cells (methanol)*, vol. 280, p. 28, 2014.
- [2] H. S. Kim, J.-H. Kim, and J. Kim, "A review of piezoelectric energy harvesting based on vibration," *International journal of precision engineering and manufacturing*, vol. 12, pp. 1129-1141, 2011.
- [3] C. M. Saravia, J. M. Ramírez, and C. D. Gatti, "A hybrid numerical-analytical approach for modeling levitation based vibration energy harvesters," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 257, pp. 20-29, 2017.
- [4] M. P. S. Dos Santos, J. A. Ferreira, J. A. Simões, R. Pascoal, J. Torrão, X. Xue, *et al.*, "Magnetic levitation-based electromagnetic energy harvesting: a semi-analytical non-linear model for energy transduction," *Scientific reports*, vol. 6, p. 18579, 2016.
- [5] J.-H. Bahk, H. Fang, K. Yazawa, and A. Shakouri, "Flexible thermoelectric materials and device optimization for wearable energy harvesting," *Journal of Materials Chemistry C*, vol. 3, pp. 10362-10374, 2015.
- [6] G. Sebald, D. Guyomar, and A. Agbossou, "On thermoelectric and pyroelectric energy harvesting," *Smart Materials and Structures*, vol. 18, p. 125006, 2009.
- [7] A. Meitzler, H. Tiersten, A. Warner, D. Berlincourt, G. Couquin, and F. Welsh III, "IEEE standard on piezoelectricity," ed: Society, 1988.
- [8] H. W. Kim, A. Batra, S. Priya, K. Uchino, D. Markley, R. E. Newnham, *et al.*, "Energy harvesting using a piezoelectric "cymbal" transducer in dynamic environment," *Japanese Journal of Applied Physics*, vol. 43, p. 6178, 2004.

- [9] B. O. Ren, S. W.; Zhao, X.; Luo, H. , "Energy harvesting using a modified rectangular cymbal transducer based on  $0.71\text{Pb}(\text{Mg}_{\frac{1}{3}}\text{Nb}_{\frac{2}{3}})\text{O}_3-0.29\text{PbTiO}_3$  single crystal," *Journal of Applied Physics*, vol. 107, 2010.
- [10] R. Harne, "Development and testing of a dynamic absorber with corrugated piezoelectric spring for vibration control and energy harvesting applications," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 36, pp. 604-617, 2013.
- [11] L. Van Blarigan, J. Moehlis, and R. McMeeking, "Low dimensional modeling of a non-uniform, buckled piezoelectric beam for vibrational energy harvesting," *Smart Materials and Structures*, vol. 24, pp. 65012-65021, 2015.
- [12] A. Erturk and D. J. Inman, "On mechanical modeling of cantilevered piezoelectric vibration energy harvesters," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 19, pp. 1311-1315, 2008.
- [13] J. Ramírez, C. Gatti, S. Machado, and M. Febbo, "An experimentally validated finite element formulation for modeling 3D rotational energy harvesters," *Engineering Structures*, vol. 153, pp. 136-145, 2017.
- [14] R. Harne and K. Wang, "A review of the recent research on vibration energy harvesting via bistable systems," *Smart Materials and Structures*, vol. 22, p. 023001, 2013.
- [15] X.-F. He and J. Gao, "Wind energy harvesting based on flow-induced-vibration and impact," *Microelectronic Engineering*, vol. 111, pp. 82-86, 2013.
- [16] A. Bibo and M. F. Daqaq, "Energy harvesting under combined aerodynamic and base excitations," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, pp. 5086-5102, 2013.
- [17] X. Tian-Bing, J. S. Emilie, K. Jin Ho, Z. Lei, Z. Wanlu, T. Xiudong, *et al.*, "Energy harvesting using a PZT ceramic multilayer stack," *Smart Materials and Structures*, vol. 22, p. 065015, 2013.
- [18] W. Beckert and W. S. Kreher, "Modelling piezoelectric modules with interdigitated electrode structures," *Computational Materials Science*, vol. 26, pp. 36-45, 2003.
- [19] K. Uchino, *Piezoelectric actuators and ultrasonic motors* vol. 1: Springer Science & Business Media, 1997.

- [20] L. Nelson, C. Bowen, R. Stevens, M. Cain, and M. Stewart, "Modeling and measurement of piezoelectric fibers and interdigitated electrodes for the optimization of piezofibre composites," in *Smart Structures and Materials*, 2003, pp. 556-567.
- [21] C. Bowen, L. Nelson, R. Stevens, M. Cain, and M. Stewart, "Optimisation of interdigitated electrodes for piezoelectric actuators and active fibre composites," *Journal of Electroceramics*, vol. 16, pp. 263-269, 2006.
- [22] X.-j. Lin, K.-c. Zhou, X.-y. Zhang, and D. Zhang, "Development, modeling and application of piezoelectric fiber composites," *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*, vol. 23, pp. 98-107, 2013.
- [23] P. Hareesh, I. Misri, S. Yang, and D. L. DeVoe, "Transverse interdigitated electrode actuation of homogeneous bulk PZT," *Microelectromechanical Systems, Journal of*, vol. 21, pp. 1513-1518, 2012.
- [24] S. P. Beeby, M. J. Tudor, and N. White, "Energy harvesting vibration sources for microsystems applications," *Measurement science and technology*, vol. 17, p. R175, 2006.
- [25] A. Erturk and D. J. Inman, *Piezoelectric energy harvesting*: John Wiley & Sons, 2011.
- [26] M. Liu and D. Gorman, "Formulation of Rayleigh damping and its extensions," *Computers & structures*, vol. 57, pp. 277-285, 1995.
- [27] K. H. Mak, A. A. Popov, and S. McWilliam, "Experimental model validation for a nonlinear energy harvester incorporating a bump stop," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, pp. 2602-2623, 2012.
- [28] S. P. Joshi, "Non-linear constitutive relations for piezoceramic materials," *Smart Materials and Structures*, vol. 1, p. 80, 1992.
- [29] G. Bertotti and I. D. Mayergoyz, *The science of hysteresis: Hysteresis in materials* vol. 3: Gulf Professional Publishing, 2006.
- [30] D. Damjanovic, "Hysteresis in piezoelectric and ferroelectric materials," *The science of hysteresis*, vol. 3, pp. 337-465, 2006.
- [31] F. Goldschmidtboeing, C. Eichhorn, M. Wischke, M. Kroener, and P. Woias, "The influence of ferroelastic hysteresis on mechanically excited PZT cantilever beams," in *Proceedings of the 11th International Workshop on*

- Micro and Nanotechnology for Power Generation and Energy Conversion Applications*, 2011, pp. 114-117.
- [32] S. C. Stanton, A. Erturk, B. P. Mann, and D. J. Inman, "Nonlinear piezoelectricity in electroelastic energy harvesters: Modeling and experimental identification," *Journal of Applied Physics*, vol. 108, p. 074903, 2010.
- [33] N. Aurelle, D. Guyomar, C. Richard, P. Gonnard, and L. Eyraud, "Nonlinear behavior of an ultrasonic transducer," *Ultrasonics*, vol. 34, pp. 187-191, 1996.
- [34] A. Albareda, P. Gonnard, V. Perrin, R. Briot, and D. Guyomar, "Characterization of the mechanical nonlinear behavior of piezoelectric ceramics," *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 47, pp. 844-853, 2000.
- [35] S. Priya, D. Viehland, A. V. Carazo, J. Ryu, and K. Uchino, "High-power resonant measurements of piezoelectric materials: Importance of elastic nonlinearities," *Journal of applied physics*, vol. 90, pp. 1469-1479, 2001.
- [36] S. Leadenham and A. Erturk, "Unified nonlinear electroelastic dynamics of a bimorph piezoelectric cantilever for energy harvesting, sensing, and actuation," *Nonlinear Dynamics*, vol. 79, pp. 1727-1743, 2015.
- [37] S. Sadeqi, S. Arzanpour, and K. H. Hajikolaie, "Broadening the Frequency Bandwidth of a Tire-Embedded Piezoelectric-Based Energy Harvesting System Using Coupled Linear Resonating Structure."
- [38] D. Zhu, M. J. Tudor, and S. P. Beeby, "Strategies for increasing the operating frequency range of vibration energy harvesters: a review," *Measurement Science and Technology*, vol. 21, p. 022001, 2010.
- [39] N. Rezaei-Hosseiniabadi, A. Tabesh, and R. Dehghani, "A topology and design optimization method for wideband piezoelectric wind energy harvesters," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 63, pp. 2165-2173, 2016.
- [40] S. Roundy, "Energy harvesting for tire pressure monitoring systems: design considerations," *Proceedings of Power MEMS+ microMEMS, Sendai, Japan*, pp. 9-12, 2008.

- 
- [41] Y.-J. Wang, C.-D. Chen, and C.-K. Sung, "Design of a frequency-adjusting device for harvesting energy from a rotating wheel," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 159, pp. 196-203, 2010.
- [42] Y.-J. Wang, C.-D. Chen, and C.-K. Sung, "System design of a weighted-pendulum-type electromagnetic generator for harvesting energy from a rotating wheel," *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, vol. 18, pp. 754-763, 2013.
- [43] J. Lee, S. Kim, J. Oh, and B. Choi, "A self-powering system based on tire deformation during driving," *International Journal of Automotive Technology*, vol. 13, pp. 963-969, 2012.
- [44] Y. Zhang, K. Huang, F. Yu, Y. Gu, and D. Li, "Experimental verification of energy-regenerative feasibility for an automotive electrical suspension system," in *Vehicular Electronics and Safety, 2007. ICVES. IEEE International Conference on*, 2007, pp. 1-5.
- [45] G. Zhang, J. Cao, and F. Yu, "Design of active and energy-regenerative controllers for DC-motor-based suspension," *Mechatronics*, vol. 22, pp. 1124-1134, 2012.
- [46] L. Zuo and P.-S. Zhang, "Energy harvesting, ride comfort, and road handling of regenerative vehicle suspensions," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 135, p. 011002, 2013.
- [47] P. Glynne-Jones, M. J. Tudor, S. P. Beeby, and N. M. White, "An electromagnetic, vibration-powered generator for intelligent sensor systems," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 110, pp. 344-349, 2004.
- [48] J. M. Renno, M. F. Daqaq, and D. J. Inman, "On the optimal energy harvesting from a vibration source," *Journal of sound and vibration*, vol. 320, pp. 386-405, 2009.
- [49] Y.-C. Shu and I. Lien, "Efficiency of energy conversion for a piezoelectric power harvesting system," *Journal of micromechanics and microengineering*, vol. 16, p. 2429, 2006.
- [50] D. E. Goldberg, "Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning, 1989," *Reading: Addison-Wesley*, 1989.

- [51] M. W. Shafer, M. Bryant, and E. Garcia, "Designing maximum power output into piezoelectric energy harvesters," *Smart Materials and Structures*, vol. 21, p. 085008, 2012.
- [52] J. Park, S. Lee, and B. M. Kwak, "Design optimization of piezoelectric energy harvester subject to tip excitation," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 26, pp. 137-143, 2012.
- [53] E. Lefeuvre, A. Badel, C. Richard, and D. Guyomar, "Piezoelectric energy harvesting device optimization by synchronous electric charge extraction," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 16, pp. 865-876, 2005.
- [54] E. Lefeuvre, D. Audigier, C. Richard, and D. Guyomar, "Buck-boost converter for sensorless power optimization of piezoelectric energy harvester," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 22, pp. 2018-2025, 2007.
- [55] D. Shen, J. Ajitsaria, S.-Y. Choe, and D.-J. Kim, "The optimal design and analysis of piezoelectric cantilever beams for power generation devices," *MRS Online Proceedings Library Archive*, vol. 888, 2005.
- [56] T. Ikeda, *Fundamentals of piezoelectricity*: Oxford university press, 1996.
- [57] J. Yang, *An introduction to the theory of piezoelectricity* vol. 9: Springer Science & Business Media, 2004.
- [58] C. Xie, Y. Wu, and Z. Liu, "Modeling and active vibration control of lattice grid beam with piezoelectric fiber composite using fractional order PD  $\mu$  algorithm," *Composite Structures*, vol. 198, pp. 126-134, 2018.
- [59] S. B. Lang, "Pyroelectricity: A 2300-year history," *Ferroelectrics*, vol. 7, pp. 231-234, 1974.
- [60] A. C. Becquerel, *Traité expérimental de l'électricité et du magnétisme et de leurs rapports: avec les phénomènes naturels* vol. 1: Didot, 1834.
- [61] C. A. Coulomb, *Collection de mémoires relatifs à la physique* vol. 4: Gauthier-Villars, 1889.
- [62] R. J. Haüy, "Traité de Cristallographie. 2 Bde," *Atlas, Paris*, 1822.
- [63] J. Curie and P. Curie, "Développement par compression de l'électricité polaire dans les cristaux hémihédres à faces inclinées," *Bulletin de minéralogie*, vol. 3, pp. 90-93, 1880.



- [64] G. Lippmann, "Principe de la conservation de l'électricité, ou second principe de la théorie des phénomènes électriques," *J. Phys. Theor. Appl.*, vol. 10, pp. 381-394, 1881.
- [65] W. Voigt, *Lehrbuch der kristallphysik (mit ausschluss der kristalloptik)*: Springer-Verlag, 2014.
- [66] Smart-Material. Available: <https://www.smart-material.com/PZTFiber-product-material.html>
- [67] H. Lin and K. Ding, "A new method for measuring engine rotational speed based on the vibration and discrete spectrum correction technique," *Measurement*, vol. 46, pp. 2056-2064, 2013.
- [68] R. N. Jazar, *Vehicle dynamics: theory and application*: Springer, 2017.
- [69] Microtex. Available: [www.microtex.com.ar](http://www.microtex.com.ar)
- [70] J. E. Shigley, "Mechanical engineering design," 1972.
- [71] S. Sadeqi, "Broadening the Frequency Bandwidth of Piezoelectric Energy Harvesters Using Coupled Linear Resonators," *Applied Sciences: School of Engineering Science*, 2013.
- [72] H. F. Tiersten, *Linear Piezoelectric Plate Vibrations: Elements of the Linear Theory of Piezoelectricity and the Vibrations Piezoelectric Plates*: Springer, 2013.
- [73] R. A. Toupin, "The elastic dielectric," *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, vol. 5, pp. 849-915, 1956.
- [74] H. Tiersten, "On the nonlinear equations of thermo-electroelasticity," *International Journal of Engineering Science*, vol. 9, pp. 587-604, 1971.
- [75] H. Tiersten, "Nonlinear electroelastic equations cubic in the small field variables," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 57, pp. 660-666, 1975.
- [76] H. Tiersten, "Electroelastic equations for electroded thin plates subject to large driving voltages," *Journal of Applied Physics*, vol. 74, pp. 3389-3393, 1993.
- [77] J. Yang, *Analysis of piezoelectric devices*: World Scientific, 2006.
- [78] R. Williams, "Nonlinear mechanical and actuation characterization of piezoceramic fiber composites PhD Thesis Blacksburg (VA)," ed: USA, 2004.

- [79] R. B. Williams, D. J. Inman, and W. K. Wilkie, "Nonlinear response of the macro fiber composite actuator to monotonically increasing excitation voltages," in *ASME 2004 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 2004, pp. 49-54.
- [80] M. Wischke, M. Masur, F. Goldschmidtboeing, and P. Woias, "Resonance tunability of clamped-free piezoelectric cantilevers," *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 19, p. 125020, 2009.
- [81] M. Wischke, N. Dieterich, D. Haller, M. Kröner, and P. Woias, "Elastostriction and Electrostriction in PZT Transducers," in *Meeting Abstracts*, 2011, pp. 2088-2088.
- [82] A. Abdelkefi, A. Nayfeh, and M. Hajj, "Effects of nonlinear piezoelectric coupling on energy harvesters under direct excitation," *Nonlinear Dynamics*, vol. 67, pp. 1221-1232, 2012.
- [83] D. Guyomar, N. Aurelle, and L. Eyraud, "Piezoelectric ceramics nonlinear behavior. Application to Langevin transducer," *Journal de Physique III*, vol. 7, pp. 1197-1208, 1997.
- [84] H. Beige and G. Schmidt, "Electromechanical resonances for investigating linear and nonlinear properties of dielectrics," *Ferroelectrics*, vol. 41, pp. 39-49, 1982.
- [85] H. Beige, "Elastic and dielectric nonlinearities of piezoelectric ceramics," *Ferroelectrics*, vol. 51, pp. 113-119, 1983.
- [86] G. A. Maugin, *Nonlinear electromechanical effects and applications* vol. 1: World Scientific Publishing Company, 1986.
- [87] S. C. Stanton, A. Erturk, B. P. Mann, E. H. Dowell, and D. J. Inman, "Nonlinear nonconservative behavior and modeling of piezoelectric energy harvesters including proof mass effects," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 23, pp. 183-199, 2012.
- [88] U. Von Wagner and P. Hagedorn, "Piezo-beam systems subjected to weak electric field: experiments and modelling of non-linearities," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 256, pp. 861-872, 2002.
- [89] M.-N. Nguyen, *Nichtlineares dynamisches Verhalten von Piezo-Balkensystemen bei schwachem elektrischem Feld*: GCA-Verlag, 2000.

- [90] Y. Yang and D. Upadrashta, "Modeling of geometric, material and damping nonlinearities in piezoelectric energy harvesters," *Nonlinear Dynamics*, vol. 84, pp. 2487-2504, 2016.
- [91] S. Leadenham, "Advanced concepts in nonlinear piezoelectric energy harvesting: intentionally designed, inherently present, and circuit nonlinearities," Georgia Institute of Technology, 2015.
- [92] I. D. Mayergoyz, *Mathematical models of hysteresis and their applications*: Academic Press, 2003.
- [93] L. Rayleigh, "XXV. Notes on electricity and magnetism.—III. On the behaviour of iron and steel under the operation of feeble magnetic forces," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 23, pp. 225-245, 1887.
- [94] D. Jiles, "Magnetization and magnetic moment," in *Introduction to magnetism and Magnetic Materials*, ed: Springer, 1991, pp. 27-45.
- [95] D. Damjanovic and M. Demartin, "The Rayleigh law in piezoelectric ceramics," *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 29, p. 2057, 1996.
- [96] S. S. Rao, *Vibration of continuous systems*: John Wiley & Sons, 2007.
- [97] L. Meirovitch and R. Parker, "Fundamentals of vibrations," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 54, p. 100, 2001.
- [98] A. H. Nayfeh and P. F. Pai, *Linear and nonlinear structural mechanics*: John Wiley & Sons, 2008.
- [99] J. Bonet and R. D. Wood, *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*: Cambridge university press, 1997.
- [100] C. Sun, L. Qin, F. Li, and Q.-M. Wang, "Piezoelectric energy harvesting using single crystal Pb (Mg<sub>1/3</sub>Nb<sub>2/3</sub>) O<sub>3-x</sub>PbTiO<sub>3</sub> (PMN-PT) device," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 20, pp. 559-568, 2009.
- [101] J. P. Joule, "XVII. On the effects of magnetism upon the dimensions of iron and steel bars," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 30, pp. 76-87, 1847.
- [102] J. Bandstra, "Comparison of equivalent viscous damping and nonlinear damping in discrete and continuous vibrating systems," *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, vol. 105, pp. 382-392, 1983.

- 
- [103] R. A. Millikan and E. S. Bishop, *Elements of electricity: a practical discussion of the fundamental laws and phenomena of electricity and their practical applications in the business and industrial world*: American Technical Society, 1917.
- [104] W. Weaver Jr, S. P. Timoshenko, and D. H. Young, *Vibration problems in engineering*: John Wiley & Sons, 1990.
- [105] O. Bilgen, A. Erturk, and D. J. Inman, "Analytical and experimental characterization of macro-fiber composite actuated thin clamped-free unimorph benders," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 132, p. 051005, 2010.
- [106] S. G. Nash and A. Sofer, "Linear and nonlinear programming," 1996.
- [107] C. G. Broyden, "Quasi-Newton methods and their application to function minimisation," *Mathematics of Computation*, vol. 21, pp. 368-381, 1967.
- [108] T. Back, *Evolutionary algorithms in theory and practice: evolution strategies, evolutionary programming, genetic algorithms*: Oxford university press, 1996.
- [109] W. Price, "Global optimization by controlled random search," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 40, pp. 333-348, 1983.
- [110] J. E. Dennis and R. B. Schnabel, "Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations," ed: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- [111] H. M. M. Escobar, *Optimización no lineal y dinámica*: Univ. Nacional de Colombia, 2001.
- [112] R. Fletcher, *Practical methods of optimization*: John Wiley & Sons, 2013.
- [113] D. D. Morrison, "Methods for nonlinear least squares problems and convergence proofs," 1960.
- [114] R. H. Byrd, R. B. Schnabel, and G. A. Shultz, "A trust region algorithm for nonlinearly constrained optimization," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 24, pp. 1152-1170, 1987.
- [115] A. Erturk, O. Bilgen, M. Fontenille, and D. J. Inman, "Piezoelectric energy harvesting from macro-fiber composites with an application to morphing-wing aircrafts," in *Proceedings of the 19th International Conference on Adaptive Structures and Technologies, Ascona, Switzerland, Oct, 2008*, pp. 6-9.

- 
- [116] J. A. Edminister, M. Nahvi, R. S. Navarro, E. L. Sánchez, and P. de Miguel Rodríguez, *Circuitos eléctricos* vol. 3: McGraw-Hill, 1997.
- [117] E. P. Popov, T. A. Balan, J. L. CARDENAS, R. TEC, and J. D. L. CERA ALONSO, *Mecánica de sólidos*: Pearson Educación, 2000.
- [118] T. R. Chandrupatla and A. D. Belegundu, *Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería*: Pearson Educación, 1999.
- [119] Abaqus. Available: <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/>
- [120] S. W. Arms, C. Townsend, D. Churchill, J. Galbreath, and S. Mundell, "Power management for energy harvesting wireless sensors," in *Smart Structures and Materials 2005: Smart Electronics, MEMS, BioMEMS, and Nanotechnology*, 2005, pp. 267-276.
- [121] A. Khalatkar and V. Gupta, "Piezoelectric energy harvester for low engine vibrations," *Journal of Renewable and Sustainable Energy*, vol. 9, p. 024701, 2017.
- [122] O. Nelles, "Nonlinear system identification: from classical approaches to neural network and fuzzy models," *Berlin Heidelberg NY: Springer-Verlag*, 2001.
- [123] G. Monte, D. Marasco, A. García, and E. Perotti, "On-chip spectral analysis with low power and optimal control for energy harvesting using piezoelectric devices " *IECON 2018*, 2018.
- [124] TI, "Texas Instruments: LM335z datasheet," ed. Francia, 2018.
- [125] C. Dym and I. Shames, "Solid mechanics: a variational approach," ed: McGraw-Hill, New York, 1973.
- [126] H. Kim, S. Priya, H. Stephanou, and K. Uchino, "Consideration of impedance matching techniques for efficient piezoelectric energy harvesting," *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 54, 2007.
- [127] P. Deufhard, *Newton methods for nonlinear problems: affine invariance and adaptive algorithms* vol. 35: Springer Science & Business Media, 2011.
- [128] K. Stewartson, "VARIATIONAL METHODS IN MATHEMATICAL PHYSICS," ed: Wiley Online Library, 1966.