



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR**

**TESIS DE DOCTORADO EN INGENIERÍA**

**DINÁMICA AEROELÁSTICA NO LINEAL  
DE AEROGENERADORES DE MATERIAL  
COMPUESTO**

por

**César Martín Saravia**

*Bahía Blanca*

*Argentina*

*Marzo de 2013*



# PREFACIO

Esta tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur (UNS) y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur y en el Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca (UTN-FRBB), durante el período comprendido entre el 1 de Abril de 2008 y el 15 de Marzo de 2013, bajo la dirección del Dr. Ing. Víctor Hugo Cortínez, Profesor Titular de la cátedra Estabilidad II de la carrera Ingeniería Mecánica de la UTN-FRBB, Profesor Asociado de la cátedra Estabilidad IV de la carrera de Ingeniería Civil de la UNS e Investigador Independiente del CONICET, y la asistencia del Dr. Ing. Sebastián Pablo Machado, Profesor Titular de la cátedra Mecánica de los Fluidos, de la carrera Ingeniería Mecánica de la UTN-FRBB e Investigador Adjunto del CONICET.

César Martín Saravia

15 de Marzo de 2013



DEPARTAMENTO DE INGENIERIA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR  
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el .... / .... / ....., mereciendo la calificación de .... (.....) puntos.



# AGRADECIMIENTOS

*Las primeras palabras van dedicadas a una pequeña reflexión, muy personal, quizás poco significativa para quien eventualmente lea este trabajo, o al menos sus dos primeras páginas, pero no por eso poco deseosa de ser escrita.*

*Este trabajo ha sido desarrollado con total libertad y sin condicionamientos importantes de ningún tipo. Las pequeñas nuevas ideas comprendidas, las expresiones matemáticas que las describen y los resultados experimentales que las validan representan el inicio de mi camino en la investigación científica. En situación, la libertad de pensamiento que he experimentado ha tenido un rol con el protagonismo necesario como para generarme la máxima comodidad y confort.*

*He desarrollado mis actividades de investigación con la máxima pasión, dedicación y seriedad posibles, sin contar el tiempo ni la energía. Aún así, quizás lo único que sepa es que no puedo garantizar si la variedad de conceptos, ideas, procedimientos, metodologías, etc., que he utilizado durante el desarrollo han podido ser impregnados de un componente personal verdadero. Considero que varios actores del basamento de esta presentación tienen origen en ciertos trabajos singulares, generadores de aportes de un nivel científico por encima de mi entendimiento, y con un espectro lo suficientemente rico como para seguramente responder lo anterior.*

*Siento gratificación por haber tenido la oportunidad de acceder a tales ideas significativas, y por haberlas comprendido lo suficiente como para establecer verdad sobre la modesta relevancia de este trabajo. También, considero haber encontrado la perenne paz que alcanza uno al descubrir y aceptar el límite de sus posibilidades.*

*He ingresado al camino de la investigación con la sola y pretenciosa intención de aprender “cosas interesantes que sirvan”. Lo interesante suele resultar generalmente lo más complejo, y para enfrentar lo complejo es necesario disponer de recursos. Aquí, dos cosas puedo solamente divisar: que aún las desorientadas educaciones secundaria y universitaria que he recibido me han provisto de los recursos suficientes para al menos aprender a percibir la falta de recursos; y que es*

*seguro que mis trabas más severas no resultan de estas faltas, sino que aparecen con la ingenua intención de pretender alcanzar lo que por natura está por encima de mi estatura.*

*Agradezco notablemente a CONICET por permitirme desarrollar esta actividad durante todo este tiempo, a la Universidad Tecnológica Nacional por brindarme las instalaciones donde he trabajado y a la Universidad Nacional del Sur por permitirme el desarrollo de estos estudios como parte de su alumnado. También quiero agradecer a todos mis compañeros del GASM: José, Coco, Sebastián, Tony, Juancito, Tulio, Carlos, Adrián, Julia, Florencia y Cecilia... y también al Pibe. Debo agradecer mucho a mi gran amigo Franco Dotti, por sostener su trastocado deseo de elegir esta amistad colineal desde 1999.*

*Agradezco especialmente a mis directores Víctor Cortínez y Sebastián Machado; por su apoyo, entendimiento y aceptación de las condiciones que por mi naturaleza, y sin pretenderlo, seguramente he impuesto durante el desarrollo de este trabajo. Agradezco también la amabilidad del Profesor Alberto Cardona al atender mis inquietudes en reiteradas ocasiones. Quiero también agradecer a mi familia de los Macharelli, los Vilois, los Páez y a mis otros amigos de otros lados a quienes aprecio.*

*Con máximas notoriedad y admiración agradezco a mi novia Ana, por su enseñanza y apoyo continuos, materializados siempre a través de las palabras más inteligentes y certeras que pueda pretender. Por último, con sumo cariño quiero agradecer a mi familia: Joaquín, Tochi y José, por soportar los tres mi estructura durante los años, esforzándose siempre al máximo para lograr mantener imperante nuestra unidad familiar indestructible, todo a pesar de nosotros mismos.*

*Martín, 14 de Septiembre de 2012*

# RESÚMEN

La energía eólica es un recurso abundante, renovable, gratuito, y saludable para el medio ambiente; por esto quizás sea la fuente que sustente la mayor parte de las necesidades energéticas de la humanidad en el futuro. La capacidad eólica instalada en el mundo crece exponencialmente; tal es así que en algunos países el nivel de penetración de la energía eólica llega al 20%.

El aerogenerador de eje horizontal es la máquina que genera la mayor parte de la energía eólica mundial. Dos sistemas fundamentales lo constituyen, el sistema eléctrico y el sistema mecánico. El sistema mecánico está formado básicamente por dos subsistemas: un sub-sistema de elementos aeroestructurales que permite convertir la energía eólica en energía cinética rotacional y un sub-sistema de transmisiones que permite ceder controladamente la energía del movimiento rotacional al generador eléctrico.

El sostenimiento de la tasa de crecimiento en la producción energética ha sido logrado gracias a la constante evolución en el diseño de los aerogeneradores. Tal evolución ha requerido, y requerirá, el desarrollo de herramientas, métodos y tecnologías adaptables a los cambios conceptuales de diseño y a los nuevos escenarios en los cuales la máquina debe operar.

En este marco, el presente trabajo pretende colaborar al desarrollo de herramientas computacionales que permitan simular el comportamiento del subsistema de elementos aeroestructurales de un aerogenerador de eje horizontal de grandes dimensiones. Para esto, asumiendo que el sub-sistema aeroestructural del aerogenerador está formado por la torre y el rotor, se desarrolla una formulación aeroelástica capaz de simular con exactitud geométrica el comportamiento de gran deformación al que se supone estarán sometidos los aerogeneradores modernos actuales y los del futuro.

Tal desarrollo se basa en: la formulación de una teoría geoméricamente exacta de vigas de material anisótropo, el desarrollo de un algoritmo que permita

representar al mecanismo que une a los elementos del sub-sistema aeroestructural y el desarrollo de un algoritmo para determinar las cargas aerodinámicas que sea consistente con las hipótesis de la formulación estructural. La implementación computacional de los desarrollos mencionados se apoya en la utilización del método de elementos finitos y de la teoría de cantidad de movimiento del elemento de pala.

# ABSTRACT

Wind power is a plentiful, renewable, free and environmentally healthy resource; thus, it may be the source that sustains most of the energy needs of the human kind in the future. The wind energy installed capacity of the world grows exponentially; the growth is such that in some countries the penetration level of the wind energy has reached the 20%.

The horizontal axis wind turbine is the machine that generates most of the world wind energy. It is formed by two fundamental systems, the electric system and the mechanical system. The mechanical system is basically formed by two sub-systems; i) the sub-system of aero-structural elements, which converts the wind energy into rotational kinetic energy, and ii) the drive train sub-system, which controls the energy transference to the electric generator.

The wind energy production growth rate has been sustained during the last 20 years thanks to the constant evolution in the design of the wind turbines. This evolution has required, and will require in the future, the development of tools, methods and technologies that can be adaptable to the design conceptual changes and the new scenarios in which the machine must operate.

In this context, the present work intends to collaborate to the development of computational tools to simulate the behavior of the sub-system of aero-structural elements of large horizontal axis wind turbines. Assuming that this sub-system is formed by the tower and the rotor, it is developed an aeroelastic formulation capable of simulating with geometrical exactness the large deformation states to which modern wind turbines will be subjected.

This development is based on: the formulation of a geometrically exact theory of anisotropic beams, the development of the motion equations for the mechanism that links the elements of the aero-structural sub-system and the formulation of the expressions to evaluate the aerodynamic loading, consistently with the geometric hypothesis of the structural theory. The computational

implementation of the mentioned developments is based on the utilization of the finite element method and the blade element momentum method.

# INDICE

---

<b>PREFACIO</b> .....	3
<b>AGRADECIMIENTOS</b> .....	5
<b>RESÚMEN</b> .....	7
<b>ABSTRACT</b> .....	9
<b>INDICE</b> .....	11
<b>1 INTRODUCCIÓN</b> .....	15
1.1 OBJETIVO.....	17
<b>2 ANTECEDENTES</b> .....	19
2.1 FORMULACIÓN ESTRUCTURAL.....	20
2.2 FORMULACIÓN DE MECANISMOS .....	24
2.2.1 Formulaciones de Multicuerpos Flexibles .....	24
2.2.2 Integración Temporal de las Ecuaciones de Movimiento .....	28
2.2.3 Aplicación a la modelación de aerogeneradores .....	30
2.3 FORMULACIÓN AEROELÁSTICA .....	32
<b>3 FORMULACIÓN ESTRUCTURAL</b> .....	35
3.1 CINEMÁTICA .....	36
3.2 TENSIONES Y DEFORMACIONES .....	39
3.2.1 El Tensor de Deformaciones.....	39
3.2.2 Corrección del Problema Torsional.....	44
3.2.3 Mecánica del Material Compuesto .....	46
3.2.4 El Material Transversalmente Isótropo .....	49

---

3.2.5	Estado Plano de Tensiones.....	50
3.2.6	Ecuación Constitutiva del Laminado .....	53
3.3	FORMULACION VARIACIONAL.....	55
3.3.1	Variaciones Admisibles.....	55
3.3.2	Deformaciones Generalizadas Virtuales .....	60
3.3.3	Trabajo Virtual de las Fuerzas Internas .....	61
3.3.4	Trabajo Virtual de las Fuerzas Externas .....	63
3.3.5	Trabajo Virtual de las Fuerzas de Inercia .....	67
3.4	LINEALIZACIÓN DEL EQUILIBRIO .....	69
3.4.1	Introducción.....	69
3.4.2	Linealización del Trabajo Virtual Interno.....	70
3.4.3	Linealización del Trabajo Virtual Inercial .....	72
3.4.4	Linealización de las Fuerzas Externas .....	73
3.5	EL ELEMENTO FINITO SCB.....	75
3.5.1	Actualización del campo director .....	75
3.5.2	Interpolación.....	80
3.5.3	Variación del Campo Director .....	81
3.5.4	Deformaciones Virtuales Discretas .....	82
3.5.5	Objetividad de las Deformaciones Generalizadas .....	85
3.5.6	Matriz de Rigidez Tangente.....	88
3.5.7	Matriz de Masa .....	90
3.5.8	Balance de Fuerzas .....	90
3.6	DISCRETIZACIÓN SECCIONAL.....	91
3.6.1	Sección Transversal del Aerogenerador .....	91
3.6.2	Función de Alabeo.....	96
3.7	APÉNDICE .....	97
3.7.1	Linealización de los Directores Virtuales .....	97
3.7.2	Esfuerzos Viga .....	98
<b>4</b>	<b>MODELO DE MECANISMOS.....</b>	<b>99</b>
4.1	INTRODUCCIÓN.....	100
4.2	ECUACIONES DE MOVIMIENTO.....	100
4.3	FORMULACIÓN DE ARTICULACIONES.....	101
4.4	INTEGRACIÓN TEMPORAL .....	105
<b>5</b>	<b>FORMULACIÓN AEROELÁSTICA.....</b>	<b>109</b>

5.1	INTRODUCCIÓN .....	110
5.2	EL AEROGENERADOR.....	111
5.3	EL ROTOR UNIDIMENSIONAL IDEAL.....	112
5.4	AERODINÁMICA DE PERFILES ALARES.....	116
5.4.1	Análisis Aerodinámico Bidimensional.....	116
5.4.2	Aerodinámica Tridimensional.....	118
5.5	METODO BEM.....	119
5.5.1	BEM Geométricamente Lineal .....	120
5.5.2	BEM Geométricamente No Lineal.....	124
<b>6</b>	<b>IMPLEMENTACIÓN .....</b>	<b>131</b>
6.1	PRE-PROCESO.....	131
6.1.1	Elementos SCB Standard y Aeroelástico.....	133
6.2	RIGIDEZ SECCIONAL .....	134
6.3	MATRIZ TANGENTE .....	138
6.4	ALGORITMO BEM NO LINEAL.....	140
6.5	SOLUCIÓN.....	142
<b>7</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>145</b>
7.1	VALIDACIONES.....	146
7.1.1	Validación Estática de la Formulación Estructural.....	146
7.1.2	Test de Objetividad .....	153
7.1.3	Análisis Dinámico de la viga como multicuerpo.....	158
7.1.4	Análisis Seccional.....	159
7.2	SIMULACIÓN DEL AEROGENERADOR .....	161
<b>8</b>	<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>173</b>
	<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>179</b>



## INTRODUCCIÓN

---

La producción de energía eléctrica transformando la energía eólica es una de las tecnologías de mayor crecimiento en el mundo. Diversas ventajas lo justifican; se trata de un recurso renovable, de bajo impacto en el medio ambiente, de instalación rápida, de alta posibilidad de explotación en diversas regiones geográficas, con costos de operación y mantenimiento relativamente bajos, etc. Estos aspectos remarcan su importancia debido al rápido agotamiento de los combustibles fósiles, los impactos ambientales negativos de la energía nuclear y la insuficiencia de la energía hidráulica.

El crecimiento en la generación de energía eólica debe ser acompañado por un progreso en el conocimiento de los elementos fundamentales que aportan a dicha generación. En tal progreso juega un papel fundamental el estudio mecánico del generador eólico, por lo cual es primordial la investigación de sus diversos aspectos. Este trabajo se origina para tal fin, desde una perspectiva nacional libre de condicionamientos tecnológicos externos y con el sólo objeto de aportar al desarrollo de conocimiento técnico y científico aplicado al diseño de aerogeneradores.

La herramienta fundamental que posibilita la recolección de la energía eólica es el aerogenerador. El aerogenerador es una máquina formada básicamente por dos sistemas: un sistema mecánico, el cual recolecta la energía cinética que posee el viento y un sistema eléctrico, el cual convierte y transporta la energía transformada. La energía es extraída del viento por medio de los álabes y transportada por medio de un sistema de transmisiones mecánicas al generador eléctrico. El álabe es entonces uno de los elementos más importantes del generador, no solo desde el punto de vista estructural sino también desde el punto de vista energético. Existen por lo tanto dos aspectos fundamentales que deben investigarse si se desea obtener un buen diseño de álabe; un primer aspecto relacionado con las características aerodinámicas y/o energéticas y un segundo aspecto relacionado con el comportamiento estructural y/o de durabilidad.

Durante mucho tiempo estos aspectos fueron estudiados de forma desacoplada, utilizando así la hipótesis de independencia entre los fenómenos aerodinámicos y los fenómenos estructurales. Dicha hipótesis es válida en tanto que las deformaciones presentes en el álabe sean lo suficientemente pequeñas como para no generar perturbaciones en el flujo de aire alrededor del perfil alar del álabe. En contraposición, el hecho de que la potencia entregada por el aerogenerador sea proporcional al cuadrado del diámetro del rotor ha provocado una tendencia natural a concentrar los desarrollos tecnológicos en el diseño de máquinas cada vez más grandes, implicando álabes cada vez más largos y eficientes, generando así desplazamientos mayores y un acoplamiento más fuerte entre el fenómeno aerodinámico y el estructural.

El aumento en tamaño de los álabes acrecentó los problemas relacionados a la fatiga, lo que indujo la utilización de materiales compuestos para su fabricación. Estos materiales presentan importantes ventajas con respecto a los materiales metálicos: poseen mejores propiedades de resistencia y rigidez con respecto al peso, poseen una mayor resistencia a la fatiga, se pueden fabricar en una extensa variedad de configuraciones, sus propiedades mecánicas son fácilmente personalizables, etc. No obstante, los materiales compuestos son generalmente anisótropos, por lo que poseen un comportamiento más complejo que los

materiales isótropos y su tratamiento requiere un esfuerzo considerablemente mayor.

Desde el punto de vista computacional, los avances tecnológicos mencionados promovieron el desarrollo de nuevas herramientas computacionales basadas en nuevos marcos teóricos, formulados para predecir las características dinámicas de los nuevos álabes. Por lo tanto, a los efectos de diseñar un aerogenerador adecuadamente y en sincronismo con las tendencias actuales de la ciencia, es menester contar con herramientas computacionales unificadas que permitan optimizar simultáneamente sus características estructurales y aerodinámicas. Algunas herramientas computacionales orientadas a tal fin han sido presentadas en la literatura; no obstante, algunos aspectos fundamentales de la mecánica del problema no han sido completamente tenidos en cuenta, por lo que el campo de acción sigue siendo extenso.

## **1.1 OBJETIVO**

El presente trabajo tiene como objetivo colaborar a la formulación de herramientas computacionales aplicables al estudio científico y tecnológico del problema aeroelástico de un aerogenerador de eje horizontal, mediante el desarrollo de una teoría aeroelástica geoméricamente exacta, que sea capaz de predecir el comportamiento aeroestructural de la máquina sin hipótesis sobre la magnitud de las deformaciones que en ella ocurren. La formulación aquí presentada se apoya en un enfoque basado en elementos finitos unidimensionales capaces de deformarse arbitrariamente en el espacio y de sufrir los efectos de su interacción con el aire.

En esta dirección, se desarrollará una teoría geoméricamente exacta de vigas anisótropas de pared delgada conjuntamente con una formulación aeroelástica geoméricamente consistente. En tales desarrollos podría ubicarse el aporte principal de este trabajo.



# ANTECEDENTES

---

El desarrollo de modelos computacionales para el análisis aeroelástico de generadores eólicos de eje horizontal es uno de los temas de mayor auge dentro de la comunidad científica dedicada al estudio de estructuras. La complejidad del problema aeroelástico sumada a la necesidad de un rápido crecimiento de las energías renovables ha generado una gran concentración global de esfuerzos enfocados a clarificar aspectos fundamentales del problema.

El problema estructural de un aerogenerador tiene diferentes complejidades y por consiguiente existen diversas alternativas para abordarlo. Las dificultades de la modelación matemática y computacional de un aerogenerador tienen origen en el fuerte acoplamiento entre los diversos fenómenos físicos presentes.

La tendencia a diseñar aerogeneradores con rotores de diámetro cada vez mayor ha generado la necesidad de comprender más profundamente los fenómenos físicos que conviven en un aerogenerador; esto implica necesariamente un avance en la capacidad de predicción de las teorías matemáticas mediante la reformulación y/o refinamiento de las teorías existentes. Son ejemplo de esto las necesidades de contemplar en el diseño del aerogenerador: el efecto de los grandes

desplazamientos, el comportamiento de materiales compuestos, las interacciones aeroelásticas no lineales, etc.

Este trabajo pretende colaborar modestamente a la extensión de las fronteras del conocimiento científico sobre la modelación computacional de aerogeneradores mediante el desarrollo de un enfoque basado en la dinámica aeroelástica no lineal de multicuerpos. La dinámica no lineal de estructuras, la dinámica de multicuerpos, la mecánica de materiales compuestos y la aeroelasticidad constituyen tópicos donde es posible encontrar una extensa cantidad de trabajos científicos. Se describen a continuación los aportes fundamentales que han sido vertidos en dichas áreas.

## **2.1 FORMULACIÓN ESTRUCTURAL**

La calidad de los diseños de estructuras de pared delgada ha mejorado notablemente desde que se desarrollaron métodos computacionales para determinar su comportamiento estructural. Con el uso del método de elementos finitos diferentes formulaciones han sido reportadas, pero aún algunos puntos importantes, tales como los relacionados con la inclusión de materiales compuestos en formulaciones no lineales tipo viga, han sido escasamente tratados.

Con los recientes avances tecnológicos en el campo de los materiales, el uso de estructuras de materiales compuestos en el diseño de sistemas mecánicos ha estado creciendo sin interrupción. Debido a sus excelentes propiedades mecánicas, su alta relación resistencia/peso y su muy buena resistencia a la fatiga, las estructuras de pared delgada construidas con materiales compuestos son hoy en día extensamente utilizadas en el diseño de alas de aviones, de palas de helicópteros, de palas de aerogeneradores, etc.

Así, el concepto del diseño estructural ha cambiado sustancialmente. Por esto, si se desea aportar a la mecánica de estructuras que trabajan bajo condiciones de carga extremas es esencial tratar los fenómenos no lineales del tipo geométrico que entran en juego en el problema. El caso del aerogenerador permite la utilización de teorías estructurales tipo viga, las cuales proporcionan un marco atractivo para la formulación de no linealidades geométricas, pues la reducción del movimiento permite simplificar en el problema desde el punto de vista cinemático.

La simplificación de la cinemática ha permitido tratar el problema geométrico mas detalladamente, dando así nacimiento a las denominadas teorías geoméricamente exactas de vigas.

Una teoría de vigas geoméricamente exacta es aquella capaz de proveer las relaciones (no lineales) entre su configuración y su deformación independientemente de la magnitud de las variables cinemáticas elegidas para parametrizar la configuración y de manera consistente con el principio de trabajos virtuales. Obtener las relaciones geométricas exactas que describen el comportamiento elástico de una viga requiere necesariamente el tratamiento del problema de las rotaciones finitas, lo cual sin dudas implica un incremento sustancial en los recursos matemáticos de los cuales debe disponerse.

En tal dirección y con base en los trabajos de Reissner [1] y Antman [2], varios autores han estudiado formulaciones de vigas geoméricamente exactas. Primeramente, Reissner proveyó una teoría de vigas bidimensionales capaz de describir cambios de configuración arbitrarios y una teoría de vigas tridimensionales con rotaciones de segundo orden [3]. La formulación anterior no permite describir exactamente el caso tridimensional; los comienzos del desarrollo de las teorías geoméricamente exactas tridimensionales tienen su origen en un extenso y detallado trabajo sobre rotaciones finitas fue realizado por Argyris [4]. En dicho trabajo, Argyris describe diversos aspectos fundamentales de las rotaciones finitas espaciales y materiales, y también clarifica los conceptos relacionados a las rotaciones semitangenciales.

Dos formulaciones, una Lagrangiana Total (TL) y otra Lagrangiana Actualizada (UL), válidas para grandes desplazamientos y basadas en elementos continuos degenerados fueron presentadas por Bathe y Bolourchi [5]. Pero fueron Simo [6] y Simo y Vu-Quoc [7, 8] quienes desarrollaron la primera formulación geoméricamente exacta para vigas tridimensionales isotrópicas e hiperelásticas. Ellos usaron las relaciones de Reissner entre la variación del tensor de rotación y las rotaciones infinitesimales para derivar las relaciones entre las deformaciones y las variables cinemáticas. Simo [7] parametrizó las rotaciones finitas con cuaterniones para mejorar la efectividad computacional del algoritmo y también

propuso un procedimiento de actualización multiplicativa para los cambios rotacionales, obteniendo una matriz de rigidez no simétrica.

Por otro lado, Cardona y Geradin [9] presentaron una alternativa de parametrización diferente, en la cual utilizaron el vector de rotación total para actualizar aditivamente las rotaciones con respecto a la configuración inicial. Ellos también propusieron una actualización tomando como base la última configuración de convergencia, lo cual puede ser entendido como un enfoque UL. Tal tratamiento aditivo de los cambios rotacionales dio lugar a la primera formulación consistente desde el punto de vista geométrico. Tal consistencia se refleja en la obtención de matrices tangentes simétricas (para el caso de cargas conservativas).

Simo y Vu-Quoc [10] luego incorporaron a su formulación el efecto de las deformaciones de corte transversales y el alabeo torsional. Una extensión de la formulación de Simo a vigas curvas fue presentada por Ibrahimbegovic [11]. Él extendió los alcances de las teorías geoméricamente exactas a vigas curvas tridimensionales; manteniendo varios aspectos principales de la formulación de Simo, pero utilizando interpolación jerárquica. Ibrahimbegovic también propuso una formulación basada en el vector incremental de rotaciones [12] para resolver el problema dinámico.

El uso de las deformaciones de Green-Lagrange en una formulación geoméricamente exacta de vigas tridimensionales parece haber sido utilizada por primera vez por Gruttmann [13, 14]. También, Auricchio [15] analizó la formulación de Simo y las equivalencias entre las deformaciones de Reissner que dicha formulación adopta y las deformaciones de Green-Lagrange.

Una extensiva y detallada revisión de varios aspectos de formulaciones geoméricamente exactas de elementos finitos tipo viga fue realizada por Crisfield [16]. Él describió aspectos esenciales de las teorías de vigas geoméricamente no lineales, poniendo énfasis en el tratamiento de las rotaciones finitas. Trabajos adicionales que analizan las formulaciones existentes y clarifican algunos conceptos pueden encontrarse en las referencias [17-19].

Durante los últimos años se hicieron grandes esfuerzos para clarificar el problema de falta de objetividad que se introduce en las formulaciones que utilizan

interpolación de variables rotacionales, un problema inicialmente notado por Crisfield y Jelenic [16]. Jelenic y Crisfield [20] implementaron ideas propuestas en [16] para completar el desarrollo de una formulación invariante e independiente del camino de integración.

Además, Ibrahimbegovic y Taylor [21] re-examinaron los modelos de vigas geoméricamente exactas para clarificar algunos aspectos de la invariancia del marco de referencia de la formulación con actualizaciones de rotaciones aditivas y multiplicativas. Betsch y Steinmann [22], Armero y Romero [23] y Romero y Armero [24] también contribuyeron al tema presentando formulaciones invariantes e independientes el camino de integración. Tales formulaciones se basan en la parametrización de las ecuaciones de movimiento con vectores directores. Otros tratamientos del problema de invariancia e independencia pueden encontrarse en las referencias [25-27].

La inclusión de materiales anisótropos a teorías de vigas de pared delgada ha sido extensamente estudiada por Hodges [28]. Él desarrolló una teoría de vigas anisótropas de pared delgada totalmente intrínseca para el estudio de la dinámica de vigas curvas y pre-torsionadas. Tal teoría no contiene desplazamientos ni rotaciones como variables. Siguiendo los trabajos de Hodges, una teoría de Vlasov generalizada para vigas anisótropas basada en el análisis seccional variacional asintótico (VABS) fue presentada por Yu et al. [29]. Yu et al. [30] desarrollaron también un código de elementos finitos capaz de obtener las propiedades seccionales de una sección con geometría y laminación arbitraria por medio de un análisis seccional bidimensional basado en el método variacional asintótico de Cesnick [31]; dicho código ha sido llamado VABS. Detalles adicionales de las aplicaciones del método variacional asintótico y del VABS pueden encontrarse en [28, 32-38].

Una interesante revisión sobre métodos analíticos para resolver problemas de vigas anisótropas de pared delgada con no linealidad geométrica fue realizada por Librescu [39]. Él utilizó distintos enfoques analíticos para tratar problemas de vigas con rotaciones moderadas, siempre tratando a las rotaciones como variables vectoriales. En la misma dirección, Piovan y Cortínez [40] y Machado [41] presentaron una formulación de vigas anisótropas con rotaciones moderadas.

Ambas formulaciones se basan en la suposición de un campo de desplazamientos que contiene rotaciones “vectoriales” y es aproximado hasta cierto orden.

Recientemente, Goncalvez et al. [42] presentaron una teoría de vigas isótropas de pared delgada para grandes desplazamientos y rotaciones que considera deformación seccional.

En el marco de este trabajo, Saravia et al. [43-46] han presentado diversas conclusiones parciales sobre la formulación de un elemento finito geoméricamente exacto basado en la formulación de vigas anisótropas de pared delgada.

## **2.2 FORMULACIÓN DE MECANISMOS**

### **2.2.1 Formulaciones de Multicuerpos Flexibles**

El análisis de mecanismos flexibles generalmente implica un conocimiento profundo sobre la dinámica tridimensional de multicuerpos. Las ecuaciones de movimiento de un mecanismo están basadas en la parametrización de la cinemática mediante el uso de un conjunto de coordenadas generalizadas; en algunos casos un único conjunto de coordenadas independientes logra describir el movimiento del sistema; en otros casos la descripción cinemática presenta coordenadas redundantes, que se encuentran relacionadas entre sí por ecuaciones algebraicas y restricciones diferenciales. En el primer caso las ecuaciones quedan escritas como un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs) y en el segundo como un conjunto de ecuaciones diferenciales-algebraicas (DAEs).

La descripción cinemática de un cuerpo deformable requiere un número infinito de grados de libertad, lo cual casi exclusivamente direcciona las posibles soluciones del problema hacia la discretización espacial. Las diferentes técnicas de discretización existentes han dado lugar a distintas formulaciones del problema de mecanismos flexibles; pueden destacarse tres enfoques principales, en los cuales es posible ubicar la mayoría de las formulaciones existentes: i) enfoques de parámetros concentrados, ii) enfoques de marco de referencia flotante y iii) enfoques basados en el Método de Elementos Finitos no lineal.

Los enfoques basados en parámetros concentrados son los más sencillos del grupo, pues están basados en la interconexión de elementos rígidos por medio de resortes y amortiguadores. Con tal basamento teórico, varias formulaciones y aplicaciones computacionales han sido reportadas en la literatura; dentro de las cuales notamos las de Huston [36] y Wittbrodt y Wojciech [47]. Generalmente el enfoque es utilizado para modelar mecanismos cuyos elementos poseen modos de deformación simples y su aplicación para modelos estructurales realistas es cuestionable.

Los enfoques basados en sistemas de referencia flotantes [48-51] dividen el movimiento del elemento flexible en un movimiento de cuerpo rígido y un movimiento elástico. El movimiento de cuerpo rígido se describe mediante la ubicación de un sistema de referencia local, fijo al elemento, el cual puede ubicarse espacialmente por medio de los enfoques desarrollados para describir la dinámica de cuerpos rígidos. El movimiento generado por la deformación es superpuesto al movimiento de cuerpo rígido asumiendo pequeños desplazamientos y rotaciones, lo cual permite explotar ciertos métodos lineales para analizar la dinámica, como es el caso de los métodos de superposición modal. Inmerso en la categoría anterior se consideran las formulaciones de elemento finito tipo co-rotacional [5, 52, 53], las cuales han sido enfocadas en su gran mayoría a elementos de tipo viga.

El suceso de estos enfoques se basa principalmente en la capacidad para utilizar las mismas relaciones constitutivas utilizadas por las teorías geoméricamente lineales; lo cual a su vez se transforma en una de sus principales limitaciones. Las dificultades que presenta este enfoque están asociadas con la selección del sistema de referencia local, la definición de las funciones de forma y la formulación de los acoplamientos en la energía cinética. Si bien el movimiento del sistema de referencia y la deformación están fuertemente acoplados por la energía cinética; en algunos casos la influencia de las deformaciones sobre el sistema de referencia local puede asumirse como despreciable, lo cual permite utilizar enfoques desacoplados.

Con las tendencias actuales a diseñar estructuras cada vez más esbeltas y que trabajan en el límite de la máxima sollicitación, la hipótesis de pequeños desplazamientos resulta cuestionable. Para este tipo de problemas los enfoques del

tipo co-rotacional no ofrecen ventajas, pues la complejidad en el manejo de los términos inerciales con componentes de aceleración de Coriolis que aparecen en el sistema de referencia local no puede eliminarse asumiendo que la energía de deformación resulta idéntica a la del caso lineal.

A causa de las restricciones mencionadas, y en línea con las tendencias actuales a diversificar las capacidades de modelación, las investigaciones actuales sobre la dinámica no lineal de mecanismos flexibles han sido en gran parte direccionadas hacia adaptar los modelos de elementos finitos no lineales de sólidos y estructuras inicialmente formulados para problemas de grandes deformaciones [6, 9, 11].

La principal ventaja de dicho enfoque corresponde a su formulación en base a un sistema de referencia no inercial, lo cual resulta en ecuaciones de movimiento con el formato estándar y fácilmente resolubles por medio de esquemas de integración clásicos. El ingrediente principal del enfoque es provisto por la formulación de tipo geoméricamente exacta, con la cual resulta sencilla la evaluación de las deformaciones de componentes que experimentan movimientos de magnitud arbitraria.

Así, la dinámica no lineal de multicuerpos flexibles puede ubicarse dentro del marco de estudio del método de elementos finitos; así, cada cuerpo flexible se divide en elementos y una aproximación por interpolación de las variables de configuración nodales describe la cinemática. La configuración del sistema de multicuerpos queda entonces descrita por un conjunto de variables cinemáticas formado por desplazamientos y rotaciones medidas con respecto a un observador inercial. La interconexión de cuerpos flexibles se realiza por medio de articulaciones; las cuales, desde el punto de vista de la formulación, introducen restricciones sobre las ecuaciones de movimiento.

Como se mencionó anteriormente, una descripción adecuada del movimiento arbitrario de mecanismos requiere necesariamente una formulación geoméricamente no lineal. El desarrollo de formulaciones de elementos finitos aplicadas a la dinámica de multicuerpos flexibles comenzó en los años 90 [54]; en los años venideros se desarrollaron varios enfoques [55-57] y las distintas

implementaciones computacionales satisfactorias posibilitaron la transferencia del tema desde el nivel científico al tecnológico.

El desafío que plantean las formulaciones no lineales de elementos finitos que pretenden describir la dinámica de mecanismos flexibles yace en la formulación de las articulaciones y la metodología a utilizar para la imposición de las restricciones que ellas originan sobre las ecuaciones de movimiento del sistema. Existen básicamente dos métodos para la imposición de restricciones: i) imposición por medio de Multiplicadores de Lagrange y ii) imposición por medio de relaciones cinemáticas no lineales del tipo maestro-esclavo (master-slave).

En el marco del método de elementos finitos, la imposición de restricciones por medio de Multiplicadores de Lagrange fue propuesta inicialmente por Cardona et al. [54]. La metodología es muy versátil y general; permite tratar restricciones holonómicas y no holonómicas y el desarrollo algebraico necesario es relativamente sencillo. Como resultado de la imposición con multiplicadores, el sistema de ecuaciones de movimiento deja de ser diferencial y pasa a tener naturaleza algebraica-diferencial (DAE) [9]; lo que en cierto punto requiere de algún esfuerzo extra para su solución, no solo por el cambio de naturaleza de las ecuaciones de movimiento sino también porque como resultado de la imposición de restricciones se generan ecuaciones adicionales. Si bien la solución del sistema de ecuaciones diferenciales-algebraicas se puede encontrar fácilmente por medio de integradores temporales convencionales, la solución de ciertos inconvenientes relacionados a la integración de las ecuaciones de movimiento de sistemas DAE, como por ejemplo la presencia de oscilaciones provocada por los multiplicadores, o la disipación de energía, ha requerido investigaciones intensivas.

Diversos trabajos de investigación sobre la dinámica de multicuerpos han dado una perspectiva positivista sobre el futuro de los algoritmos basados en la imposición de restricciones con multiplicadores [51, 56-60], tal conclusión está justificada principalmente por la capacidad que posee el método para tratar cualquier tipo de restricciones. Si bien las formulaciones basadas en la eliminación de restricciones [61] no presentan los inconvenientes relacionados con la integración temporal y el incremento del tamaño del problema que generan los

multiplicadores, la limitación de su aplicación a casos con restricciones holonómicas no es una desventaja menor.

Unas pocas formulaciones geoméricamente exactas de vigas anisótropas de pared delgada orientadas a la dinámica de multicuerpos han sido desarrolladas. La mayor parte de esas formulaciones se basan en la aplicación el método variacional asintótico o VAM (Variational Asymthotic Method) de Hodges y colaboradores [28, 31, 32, 38, 62] y han sido desarrolladas principalmente por Bauchau et al. [63]. Dichas formulaciones difieren considerablemente de los enfoques típicos tanto en su formulación de las propiedades seccionales de la viga de pared delgada [28, 31] como en el tratamiento del movimiento arbitrario [63-65]. En la misma dirección, Neto et al. [66] han utilizado el software VABS para estudiar vigas de material compuesto en problemas de multicuerpos.

También, diferentes trabajos sobre la utilización de formulaciones tipo viga basadas en la parametrización con directores en formulaciones de multicuerpos han sido presentados por Betsch et al [67, 68].

### 2.2.2 Integración Temporal de las Ecuaciones de Movimiento

Es bien conocido que la dinámica estructural está gobernada por ecuaciones diferenciales *rígidas*, característica asignada ya sea por las propiedades físicas del sistema o bien por la técnica de discretización espacial adoptada. En general los métodos de un paso de tiempo son preferidos por su simplicidad y por no requerir de procedimientos especiales para su inicialización. La popularidad de los métodos de integración implícita en la integración de las ecuaciones que gobiernan la dinámica de multicuerpos está justificada por sus propiedades de estabilidad incondicional (al menos para ciertos valores de sus parámetros) y precisión de segundo orden [57, 69].

El algoritmo propuesto por Newmark [70] ha sido sin dudas la base de los demás algoritmos de integración diseñados para resolver problemas de dinámica estructural. Durante varios años las investigaciones enfocadas a la integración de las ecuaciones de movimiento de sistemas estructurales se basaron en modificaciones introducidas al método de Newmark; principalmente para lograr mantener su estabilidad incondicional en problemas no lineales. Aquí, dos casos

significativos protagonizan las investigaciones de Hilber et al. [71] y Chung y Hulbert [72], quienes utilizando las fórmulas de diferencias de Newmark dieron nacimiento a los métodos  $\alpha$  (también llamado HHT) y  $\alpha$  generalizado, respectivamente.

En los últimos años las investigaciones dedicadas al estudio de algoritmos de integración temporal de sistemas multicuerpos han sido direccionadas casi exclusivamente hacia dos caminos: i) la aplicación de métodos de integración conservativos y ii) la modificación de algoritmos de integración implícita existentes.

Los métodos de integración conservativa fueron desarrollados inicialmente por Simo y Wong [73] para sistemas de cuerpos rígidos y luego extendidos a sistemas elásticos, nuevamente por Simo et al. [74]. La aplicación de algoritmos conservativos a la dinámica de multicuerpos ha sido inicialmente estudiada por Geradin [75]. Otros trabajos importantes en el tema pueden encontrarse en las referencias [23, 61, 67, 76, 77].

Paralelamente, la modificación de los algoritmos de integración implícita existentes para su aplicación satisfactoria a la dinámica de multicuerpos flexibles no ha recibido menor atención. Los trabajos presentados en [70-72] han sido de una importancia superlativa para las investigaciones enfocadas a la integración de los sistemas de ecuaciones de naturaleza diferencial-algebraica que surgen de la dinámica de multicuerpos. La adaptación de los métodos de Newmark,  $\alpha$  y  $\alpha$ -generalizado para integrar sistemas DAE ha tendido su aporte fundamental en los trabajos de Cardona y Geradin [69]. Su trabajo demuestra que las inestabilidades que presenta el método de Newmark cuando es aplicado a sistemas dinámicos restringidos transforman al algoritmo en incondicionalmente inestable y propone como alternativa al método  $\alpha$ , el cual incorpora disipación numérica controlada y logra retener la precisión de segundo orden. Varios aspectos fundamentales relacionados con la aplicación del método  $\alpha$  a problemas con rotaciones finitas también han sido clarificados en [69]; debe destacarse de este trabajo la observación sobre la necesidad de proyección de las fuerzas obtenidas en diferentes pasos de tiempo para la comparación que el algoritmo  $\alpha$  requiere.

Posteriormente varios trabajos han sido enfocados en la dirección de [69]: Yen et al. [78] propusieron el método denominado DAE- $\alpha$ , Erlicher et al. [79] realizaron una revisión de las propiedades del método  $\alpha$ -generalizado para aplicaciones de dinámica no lineal, etc. También, Arnold y Bruls [80] propusieron, utilizando conclusiones vertidas en [79], una variante del método  $\alpha$ -generalizado para la integración de sistemas DAE de índice 3 y realizaron un análisis de convergencia del algoritmo propuesto demostrando convergencia de segundo orden. Aportes adicionales pueden encontrarse en las referencias [52, 58, 60, 81-84].

Es importante mencionar que mediante la reformulación del sistema DAE de segundo orden para su transformación en un sistema de primer orden se abre la posibilidad de aplicación de diversos esquemas de integración de ecuaciones DAE, tal como las fórmulas de Backward Difference (BDF) [85] o los métodos implícitos de Runge-Kutta (IRK) [86]. Es sabido que en casos donde deben tratarse grandes modelos estructurales, con un amplio rango de frecuencias y bajo amortiguamiento estructural, los esquemas IRK y BDF tienen limitaciones importantes asociadas a su estabilidad y eficiencia [81].

### **2.2.3 Aplicación a la modelación de aerogeneradores**

La aplicación industrial de las investigaciones realizadas sobre la simulación de mecanismos flexibles creció al ritmo de la capacidad de procesamiento de las computadoras modernas [87]. Hoy en día, la modelación de generadores eólicos de eje horizontal por medio de la dinámica de multicuerpos es una práctica muy utilizada [88-93]. En algunos casos se han adaptado software comerciales a los requerimientos de la aplicación [94, 95]; generalmente implicando el desarrollo de códigos capaces de acoplar el problema estructural con el problema aerodinámico [96, 97]. En otros casos se han escrito códigos exclusivamente para la aplicación [92, 98].

Existen diversas formulaciones y herramientas para la modelación de aerogeneradores basadas en la dinámica de multicuerpos flexibles. Observando las modelaciones con formulaciones tipo viga pueden identificarse diversas posibilidades de modelación en función la combinación entre las diferentes

alternativas que surgen de: i) la obtención de las propiedades seccionales, ii) la formulación de viga empleada y iii) la formulación de multicuerpo utilizada.

Las alternativas surgidas de i) crecen en nivel de detalle desde la modelación de la sección de como isótropa [99, 100] hasta la obtención de las propiedades seccionales del material compuesto por medio del análisis tridimensional de elementos finitos [101]; en este grupo se destacan, por sus características de confiabilidad y simplicidad, las formulaciones basadas en la teoría clásica de laminados o CLT [45] y las formulaciones basadas en el análisis bidimensional de la sección transversal de material compuesto [64, 102].

Para el caso del tipo de formulación de viga utilizada, i.e ii), el espectro de posibilidades es bastante más amplio. Muchos trabajos sobre álabes han utilizado elementos de viga lineal tipo Bernoulli-Euler [88, 91, 93, 99, 100]; restringiendo dicha elección su aplicación a casos en los cuales los efectos del esfuerzo de corte transversal pueden asumirse como despreciables. El hecho de que la mayoría de los generadores eólicos actuales estén construidos con materiales compuestos para los cuales la deformación por corte juega un papel importante es ciertamente un limitante para su aplicabilidad práctica, pero el creciente grado de esbeltez de los álabes relaja en cierto punto esta limitación y en muchos casos pueden obtenerse resultados con buena precisión. Podría decirse que la modelación de palas con teorías de viga que consideren la deformación por corte transversal es menos común [64, 102, 103], si bien la utilización de este tipo de teoría aumenta el grado de aplicabilidad, su tratamiento es generalmente complejo (particularmente en el análisis de la dinámica no lineal del álabe).

La modelación del aerogenerador como conjunto de elementos flexibles es seguramente el enfoque con mayor potencial para describir su comportamiento dinámico; es la fuerte interacción estructural y aerodinámica entre la torre y el rotor la responsable de la necesidad de recurrir a esta metodología. Particularmente la modelación como conjunto de vigas articuladas entre sí es quizás la forma más común para estudiar los fenómenos aeroelásticos presentes [33, 45, 88, 89, 91-93, 96, 97, 102, 104]. El modelo viga ofrece en general una buena aproximación al comportamiento del álabe, pues los fenómenos locales como el pandeo o la deformación seccional son tan indeseables que cualquier buen

diseño supera las garantías necesarias para sostener la validez de las hipótesis que la formulación de la viga establece.

El ítem iii) resulta más trabajoso de extender, pues referirse al tipo de formulación de multicuerpo implica considerar una extensa cantidad de clasificaciones. A grandes rasgos pueden identificarse enfoques Lagrangianos y enfoques basados en marcos de referencia flotante [89-93, 96]. Si bien los enfoques Lagrangianos ofrecen diversas ventajas, resultan ser más complejos en lo que a su marco teórico respecta, por lo que en general no son utilizados a nivel tecnológico. Por su capacidad de describir la mecánica sin hipótesis geométricas, probablemente los enfoques Lagrangianos representen el camino más rico hacia la extensión del conocimiento sobre los fuertes acoplamientos estructurales y aeroestructurales presentes en los aerogeneradores del futuro. Si bien resulta difícil convertir tal especulación en aseveración, nada puede cuestionarse sobre la necesidad de explorar la validez de la cadena de hipótesis de los modelos geoméricamente aproximados, camino transitable únicamente mediante la formulación de enfoques geoméricamente exactos.

### **2.3 FORMULACIÓN AEROELÁSTICA**

Las cargas aerodinámicas constituyen la principal sollicitación en el aerogenerador, por tal motivo su inclusión es vital para la predicción de su comportamiento dinámico. No sólo es necesario tener en cuenta las cargas aerodinámicas que se generan por la interacción entre el aire y el generador sino que además es importante considerar la variación de dichas cargas con la deformación de las palas.

Existen diversos métodos para tratar el problema aerodinámico de un aerogenerador, pueden distinguirse tres grandes enfoques: i) el método de elemento de pala o BEM (inicialmente propuesto por Glauert [105]), ii) el método de vórtices y iii) la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Es de particular interés para la aplicación en cuestión el método de elemento de pala, pues se acopla perfectamente a modelaciones estructurales con elementos viga. El método explota las peculiaridades de la teoría de perfiles alares, tal como la tabulación de fuerzas de sustentación en función del ángulo de ataque de ala y del

número de Reynolds; siempre que se lo alimente con datos confiables y se consideren algunos refinamientos, el BEM entrega excelentes resultados [91]. Hoy en día el BEM es por lejos el método más utilizado para el diseño de aerogeneradores [88, 91-93, 98, 106].

Si bien desde el punto de vista de precisión y confiabilidad podría decirse que el BEM no es tan potente como el método de vórtices o el análisis aerodinámico tridimensional, éste ofrece la ventaja de ser muy rápido, lo cual lo convierte generalmente en la elección predilecta de quien pretende optimizar el diseño del aerogenerador. El BEM también permite optimizar la geometría del rotor para maximizar su eficiencia [106], evaluar el desempeño del rotor desde el punto de vista aerodinámico [107], maximizar la producción de energía [93], evaluar el comportamiento de rotores inteligentes [108], etc.

Tal como se utiliza actualmente, el BEM es un método para la modelación de un problema aeroelástico geoméricamente lineal. Si bien en algunos trabajos se lo ha acoplado con formulaciones estructurales no lineales [92, 98], las hipótesis geométricas del BEM y las de los elementos estructurales utilizados no resultaron ser consistentes.

No parece ser un limitante para la aplicación del BEM la tendencia a diseñar álabes cada vez más grandes [108-112]. Si se considera que el cambio de dimensiones no afecta el límite de trabajo del aerogenerador en cuanto a velocidad de circulación del aire se refiere, pues siempre el incremento de dimensiones del aerogenerador implica la reducción de su velocidad angular de operación [93].

Ahora bien, existe una importante sensibilidad de la magnitud de las cargas aeroelásticas al cambio en el ángulo de ataque provocado por la deformación de la pala. El BEM no tiene razón teórica por la cual imponer una restricción en dicho cambio, salvo por la condición de linealidad geométrica que la teoría estructural genere. En dicha dirección, pocos esfuerzos se han concentrado en la corrección del BEM para incluir diferentes efectos no lineales generados por la deformación. Dai et al. [62] han incluido la vibración de la torre en el cálculo de la velocidad de incidencia en un modelo refinado del BEM. Jonkman y Buhl [96] consideraron el cambio en la proyección de la fuerza aerodinámica en función de la rotación del perfil alar en el desarrollo del código aeroelástico FAST. Buhl y Manjock [98]

mostraron la influencia de la consideración de dicha proyección utilizando diferentes códigos aeroelásticos. Poco más puede encontrarse sobre el tema.

Si bien pueden encontrarse trabajos sobre el efecto de grandes deflexiones en palas de aerogeneradores [62, 89, 90, 92, 97, 98, 110, 111], las teorías utilizadas presentan inconsistencias asociadas a la incompatibilidad entre las hipótesis geométricas de la teoría estructural y las hipótesis geométricas de la formulación aeroelástica.

# FORMULACIÓN ESTRUCTURAL

---

La modelación computacional de grandes aerogeneradores requiere necesariamente de teorías estructurales capaces de representar efectivamente configuraciones deformadas de gran magnitud. En tal escenario, el comportamiento elástico de los componentes estructurales de un generador puede representarse mediante formulaciones tipo viga, pues los dos componentes estructurales más importantes de la máquina; la torre y los álabes, cumplen perfectamente las hipótesis su formulación.

En muchos casos las teorías de vigas convencionales no logran predecir con exactitud el comportamiento de ciertos miembros estructurales debido a la restricción que impone la hipótesis de linealidad geométrica. En tales casos es necesaria la utilización de teorías de orden superior, como el caso de las teorías geoméricamente exactas, las cuales no imponen restricciones en cuanto a la magnitud de las variables cinemáticas que describen el problema.

Con el objeto de modelar computacionalmente el comportamiento estructural de un generador eólico que experimenta grandes deformaciones, el presente capítulo describe el desarrollo de una teoría estructural geoméricamente

exacta de vigas anisótropas y su implementación computacional por medio de un elemento finito no lineal.

### 3.1 CINEMÁTICA

Como se ha mencionado, el comportamiento mecánico de algunos miembros flexibles puede ser representado como un conjunto de elementos estructurales tipo viga. Por su característica de esbeltez, el rotor y la torre de un aerogenerador son un claro ejemplo del caso.

En este trabajo, se asumirá entonces que los elementos estructurales del aerogenerador pueden modelarse mediante una teoría tipo viga, la cual cumple con las siguientes hipótesis cinemáticas: i) la viga es inicialmente recta y ii) las secciones permanecen indeformables en su plano.

La descripción cinemática de la viga es extraída de la relación geométrica entre dos estados, un estado indeformado o de referencia  $\mathcal{B}_0$  y un estado deformado  $\mathcal{B}$ , ver Figura 3.1. Siendo  $\mathbf{a}$  un marco de referencia espacial, se define un marco de referencia fijo  $\mathbf{E}_i$  y un marco de referencia móvil  $\mathbf{e}_i$  (ambos ortonormales).

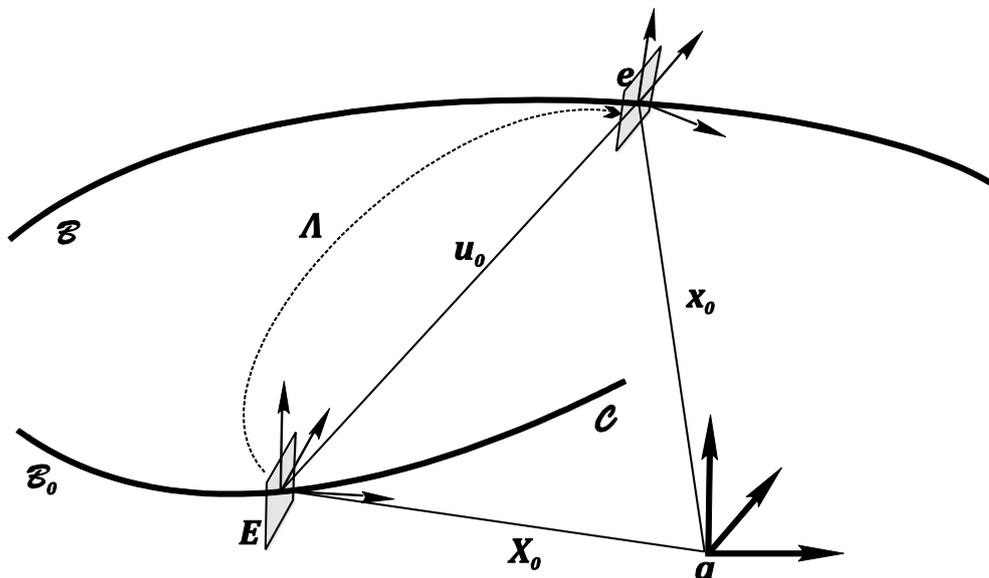


Figura 3.1 – Cinemática de la viga.

El desplazamiento de un punto cualquiera de la viga en su configuración deformada, medido con respecto a su posición en la configuración indeformada o

de referencia, puede expresarse en el sistema de coordenadas global  $\mathbf{a}_i$  en función de un vector de desplazamientos  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ . Por otro lado, el marco de referencia actual  $\mathbf{e}_i$  es función de una coordenada curvilínea  $x$ , coincidente con la línea de referencia de la viga, y permanece fijo a su sección transversal. En general se llamará *campo director* al conjunto de vectores que forman la base  $\mathbf{e}_i$ .

Por conveniencia, se supondrá que la curva de referencia es el conjunto de puntos de los centroides de inercia de las secciones transversales. Así, al origen de  $\mathbf{e}_i$  se lo ubica sobre la línea de referencia de la viga y se lo denomina *polo*. Además, se permite que la sección transversal de la viga sea de geometría arbitraria, pero inicialmente normal a la línea de referencia.

Las relaciones cinemáticas entre los sistemas de referencia están dados por las transformaciones lineales:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{\Lambda}_0(x)\mathbf{a}_i, \quad \mathbf{e}_i = \mathbf{\Lambda}(x, t)\mathbf{E}_i, \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{\Lambda}_0(x)$  y  $\mathbf{\Lambda}(x, t)$  son campos tensoriales de dos puntos  $\in \text{SO}(3)$ ; el grupo ortogonal especial o de Lie; puede verificarse que se satisface:  $\mathbf{\Lambda}_0^T \mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}$ . De aquí en adelante se considera que la viga es inicialmente recta; es decir, se asume  $\mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{I}$ .

Utilizando las relaciones (3.1) se puede expresar el vector posición de un punto de la viga en sus configuraciones indeformada y deformada (ubicaciones material y espacial) respectivamente como:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x, \xi_2, \xi_3) &= \mathbf{X}_0(x) + \sum_{i=2}^3 \xi_i \mathbf{E}_i, \\ \mathbf{x}(x, \xi_2, \xi_3, t) &= \mathbf{x}_0(x, t) + \sum_{i=2}^3 \xi_i \mathbf{e}_i, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $x$  es la coordenada longitudinal de la viga y  $\xi_2$  y  $\xi_3$  son las coordenadas de un punto de su sección transversal. En ambas ecuaciones el primer término del lado derecho indica la posición del polo y el segundo término indica la posición del punto relativa al polo. Por comodidad en la notación se define:

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=2}^3 \xi_i \mathbf{E}_i, \quad (3.3)$$

De lo dicho anteriormente se observa que es posible obtener el campo de desplazamientos de la viga como:

$$\mathbf{u}(x, \xi_2, \xi_3, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \mathbf{u}_0(x, t) + (\boldsymbol{\Lambda}(x, t) - \mathbf{I})\boldsymbol{\xi}, \quad (3.4)$$

donde  $\mathbf{u}_0$  representa el desplazamiento del centro de reducción cinemática, i.e. el polo, y  $\boldsymbol{\Lambda}$  es una matriz que representa las rotaciones tridimensionales finitas.

La matriz  $\boldsymbol{\Lambda}$  es un operador rotacional que transforma lineal e isométricamente un vector en otro vector mediante un movimiento rotacional representado por un vector de rotación. El operador  $\boldsymbol{\Lambda}$  es definido por medio del vector de rotación  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$  como:

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\theta}) = \cos \theta \mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\theta} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}, \quad (3.5)$$

donde  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$  es el vector de rotación,  $\theta$  su módulo y  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  su matriz antisimétrica, también llamada *spinor*.

La definición anterior hace explícita una parametrización canónica del operador rotacional, el cual es un punto de una variedad. Esa variedad, llamada  $SO(3)$ , es una variedad tridimensional suave embebida en el espacio Euclídeo  $\mathbb{E}^{3 \times 3}$ . Así, el operador rotacional es un elemento de la variedad rotacional, i.e.  $\boldsymbol{\Lambda} \in SO(3)$ .

El teorema de Euler establece que cuando un cuerpo rota de una orientación a otra, la cual puede a su vez ser resultado de una serie de rotaciones anteriores (con una rotación superpuesta sobre la otra), la rotación total puede ser vista como una única rotación compuesta sobre un eje espacialmente fijo  $\boldsymbol{\theta}$  (ver e.g. [4]). De esta manera, el vector de rotación puede entenderse como una rotación compuesta que globalmente parametriza la rotación compuesta vía Eq. (3.5).

Así, se establece que el conjunto de variables cinemáticas queda definido por tres desplazamientos y tres rotaciones como:

$$\mathcal{V} := \{\boldsymbol{\phi} = [\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\theta}]^T: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3\}, \quad [\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\theta}]^T = [u_1, u_2, u_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3]^T. \quad (3.6)$$

## 3.2 TENSIONES Y DEFORMACIONES

### 3.2.1 El Tensor de Deformaciones

Se pretende ahora expresar al tensor de deformaciones de Green-Lagrange en términos de las posiciones de la viga en sus configuraciones deformada e indeformada. Para esto, se obtienen primero las derivadas de los vectores de posición en las dos configuraciones como:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{,1} &= \mathbf{X}'_0 + \xi_2 \mathbf{E}'_2 + \xi_3 \mathbf{E}'_3, & \mathbf{x}_{,1} &= \mathbf{x}'_0 + \xi_2 \mathbf{e}'_2 + \xi_3 \mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{X}_{,2} &= \mathbf{E}_2, & \mathbf{x}_{,2} &= \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{X}_{,3} &= \mathbf{E}_3, & \mathbf{x}_{,3} &= \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nótese que se ha asumido implícitamente que las secciones permanecen indeformables en su propio plano. Continuando con la derivación, se operara de forma convencional inyectando los vectores tangentes  $\mathbf{X}_{,i}$  y  $\mathbf{x}_{,i}$  en la expresión del tensor de deformaciones de Green-Lagrange [113]:

$$\mathbf{E}_{GL} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{,i} \cdot \mathbf{x}_{,j} - \mathbf{X}_{,i} \cdot \mathbf{X}_{,j}). \quad (3.8)$$

Por las hipótesis cinemáticas adoptadas, las únicas componentes no nulas del tensor de deformaciones son, en forma vectorial,:

$$\mathbf{E}_{GL} = [E_{11} \quad 2E_{12} \quad 2E_{13}]^T, \quad (3.9)$$

donde:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}'_0{}^2 - \mathbf{X}'_0{}^2) + \xi_2(\mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{e}'_3 - \mathbf{X}'_0 \cdot \mathbf{E}'_3) + \xi_3(\mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{e}'_2 - \mathbf{X}'_0 \cdot \mathbf{E}'_2) \\ &\quad + \frac{1}{2}\xi_2^2(\mathbf{e}'_2{}^2 - \mathbf{E}'_2{}^2) + \frac{1}{2}\xi_3^2(\mathbf{e}'_3{}^2 - \mathbf{E}'_3{}^2) \\ &\quad + \xi_2\xi_3(\mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_3 - \mathbf{E}'_2 \cdot \mathbf{E}'_3), \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$E_{12} = \frac{1}{2}[\mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{e}_2 - \mathbf{X}'_0 \cdot \mathbf{E}_2 - \xi_3(\mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_2 - \mathbf{E}'_3 \cdot \mathbf{E}_2)],$$

$$E_{13} = \frac{1}{2}[\mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{e}_3 - \mathbf{X}'_0 \cdot \mathbf{E}_3 + \xi_2(\mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_3 - \mathbf{E}'_2 \cdot \mathbf{E}_3)].$$

Nótese que se han simplificado las expresiones anteriores conforme a:  $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_i - \mathbf{E}'_i \cdot \mathbf{E}_i = \mathbf{0}$ .

Para simplificar la derivación de las deformaciones de la viga se introduce un vector de deformaciones al que se denomina *vector de deformaciones generalizadas*, y se lo nota como  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Este vector es tal que puede transformarse linealmente para obtener el vector de deformaciones de Green-Lagrange. Dicha transformación separa del vector de deformaciones de Green-Lagrange las variables  $\xi_i$  relacionadas con la ubicación de un punto dentro de la sección transversal. De esta manera, la transformación:

$$\mathbf{E}_{GL} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.11)$$

define a  $\mathbf{D}$  como:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_3 & \xi_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\xi_2^2 & \frac{1}{2}\xi_3^2 & \xi_2\xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\xi_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

siempre que el vector de deformaciones generalizadas sea:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \kappa_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{x}'_0 - \mathbf{X}'_0 \cdot \mathbf{X}'_0) \\ \mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{e}'_3 - \mathbf{X}'_0 \cdot \mathbf{E}'_3 \\ \mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{e}'_2 - \mathbf{X}'_0 \cdot \mathbf{E}'_2 \\ \mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{e}_2 - \mathbf{X}'_0 \cdot \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{e}_3 - \mathbf{X}'_0 \cdot \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_3 - \mathbf{E}'_2 \cdot \mathbf{E}'_3 \\ \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_2 - \mathbf{E}'_2 \cdot \mathbf{E}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}'_3 - \mathbf{E}'_3 \cdot \mathbf{E}'_3 \\ \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_3 - \mathbf{E}'_2 \cdot \mathbf{E}'_3 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Aquí, es importante notar que el vector de deformaciones generalizadas contiene nueve componentes de deformación pertenecientes a una descripción material y expresadas en un sistema de coordenadas rectangular.

La geometría de la sección transversal de la torre y los álabes de un aerogenerador permite asumir una modelación seccional del tipo viga de pared delgada [88, 91], por lo que en lo que sigue se asumirá que el espesor de la sección transversal de la viga es pequeño.

Para facilitar la derivación de las mediciones de tensiones y deformaciones de la viga de pared delgada se introduce un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales  $(x, n, s)$ , tal que un punto cualquiera de la viga pueda ubicarse respecto de ese nuevo sistema. A dicho sistema de coordenadas se lo denomina: *sistema de coordenadas seccional*; la Figura 3.2 muestra la convención utilizada para una sección transversal genérica. Así, la geometría de la sección transversal quedará definida en dicho sistema de coordenadas a través de funciones  $\xi_i(n, s)$ .

La coordenada  $s$  es medida a lo largo de la tangente a la línea media de la sección transversal, con origen y dirección convenientemente elegidos. Además, la coordenada de espesor  $n$  es tal que  $-e/2 \leq n \leq e/2$ , es perpendicular a  $s$  y tiene origen en la línea media del contorno.

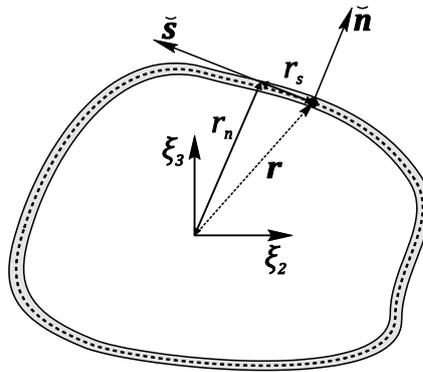


Figura 3.2 - Sistema de coordenadas seccional

De la Figura 3.2 puede verse que el vector posición de un punto cualquiera respecto del polo puede expresarse en el sistema de coordenadas seccional como:

$$\mathbf{r} = r_n \tilde{\mathbf{n}} + r_s \tilde{\mathbf{s}}, \quad (3.14)$$

donde:

$$\begin{aligned} r_n &= \xi_2 \frac{d\xi_3}{ds} - \xi_3 \frac{d\xi_2}{ds}, \\ r_s &= \xi_2 \frac{d\xi_2}{ds} + \xi_3 \frac{d\xi_3}{ds}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para representar las deformaciones de Green-Lagrange en el sistema de coordenadas seccional se hace uso del tensor de transformación curvilínea:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d\bar{\xi}_2}{ds} & \frac{d\bar{\xi}_3}{ds} \\ 0 & -\frac{d\bar{\xi}_3}{ds} & \frac{d\bar{\xi}_2}{ds} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

donde las funciones  $\bar{\xi}_i$  describen el contorno medio de la sección transversal.

Así, el vector de deformaciones de Green-Lagrange en el sistema de coordenadas seccional es notado como  $\hat{\mathbf{E}}_{GL}$  y obtenido transformando el vector de deformaciones rectangulares como:

$$\hat{\mathbf{E}}_{GL} = [E_{xx} \quad 2E_{xs} \quad 2E_{xn}]^T = \mathbf{P} \mathbf{E}_{GL}, \quad (3.17)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_{GL} = \mathbf{P} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathbf{D}} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.18)$$

Utilizando las ecuaciones (3.12), (3.13) y (3.16) se encuentra que el vector de deformaciones en coordenadas seccionales tiene la sencilla expresión:

$$\hat{\mathbf{E}}_{GL} = \begin{bmatrix} \epsilon + \xi_2 \kappa_3 + \xi_3 \kappa_2 + \frac{1}{2} \xi_2^2 \chi_2 + \frac{1}{2} \xi_3^2 \chi_3 + \xi_2 \xi_3 \chi_{23} \\ \bar{\xi}_2' \gamma_2 + \bar{\xi}_3' \gamma_3 + (\xi_2 \bar{\xi}_3' - \xi_3 \bar{\xi}_2') \kappa_1 \\ -\bar{\xi}_3' \gamma_2 + \bar{\xi}_2' \gamma_3 + (\xi_2 \bar{\xi}_2' + \xi_3 \bar{\xi}_3') \kappa_1 \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

donde el símbolo prima ( ' ) indica derivación con respecto a la coordenada  $s$ .

Utilizando la misma idea propuesta para derivar (3.11), se puede separar de la expresión de  $\hat{\mathbf{E}}_{GL}$  las cantidades relacionadas a las coordenadas seccionales  $n$  y  $s$ .

Resulta útil obtener una expresión para las deformaciones que sea función de las funciones que describen la línea media de la sección. Refiriéndose a la Fig. 2 (ver también [41]) puede comprobarse que la ubicación de un punto cualquiera en la sección transversal puede expresarse como:

$$\xi_2(n, s) = \bar{\xi}_2(s) - n \frac{d\bar{\xi}_3}{ds}, \quad \xi_3(n, s) = \bar{\xi}_3(s) + n \frac{d\bar{\xi}_2}{ds}, \quad (3.20)$$

donde  $\bar{\xi}_i$  localiza un punto cualquiera dentro de la línea media. Introduciendo (3.20) en la matriz  $\hat{\mathbf{D}}$  definida en (3.18) puede obtenerse una forma de  $\hat{\mathbf{D}}$  que sea solo función de coordenadas de la línea media.

Es posible escribir ahora las deformaciones seccionales como:

$$\hat{\mathbf{E}}_{GL} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{xn} \\ \varepsilon_{xs} \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} \kappa_x \\ 0 \\ \kappa_{xs} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

lo cual va a permitir reducir una dimensión en el análisis constitutivo, luego de integrar en el espesor. Si bien se clarificará la cuestión anterior en la siguiente sección, se tomará el concepto para definir un nuevo vector de deformaciones de Green-Lagrange en coordenadas seccionales como:

$$\boldsymbol{\epsilon}_s = [\varepsilon_x \quad \gamma_{xs} \quad \gamma_{xn} \quad \kappa_x \quad \kappa_{xs}]^T. \quad (3.22)$$

Ahora bien, como se pretende expresar el estado de deformación de la viga en función a las deformaciones generalizadas es necesario encontrar una relación entre las deformaciones seccionales (3.22) y las deformaciones generalizadas (3.13). Es sencillo demostrar que, sin considerar términos en  $n^2$ , puede escribirse:

$$\boldsymbol{\epsilon}_s = \mathcal{J} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.23)$$

si

$$\mathcal{J}(s) = \begin{bmatrix} 1 & \bar{\xi}_3 & \bar{\xi}_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\bar{\xi}_2^2 & \frac{1}{2}\bar{\xi}_3^2 & \bar{\xi}_2\bar{\xi}_3 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\xi}'_2 & \bar{\xi}'_3 & r_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\xi}'_3 & -\bar{\xi}'_2 & -r_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\xi}'_2 & \bar{\xi}'_3 & 0 & 0 & 0 & \bar{\xi}_2\bar{\xi}'_3 & -\bar{\xi}_3\bar{\xi}'_2 & -\bar{\xi}_2\bar{\xi}'_2 + \bar{\xi}_3\bar{\xi}'_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\xi}'_2{}^2 + \bar{\xi}'_3{}^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Nótese que  $r_n$  y  $r_s$  son la coordenadas del vector posición de un punto de la línea media respecto del polo, expresado en el sistema de coordenadas seccional.

Así,  $\mathcal{J}$  puede entenderse como una matriz de doble transformación, la cual transforma deformaciones generalizadas en deformaciones seccionales, sin necesidad de una transformación intermedia entre coordenadas seccionales y coordenadas rectangulares.

Ahora, resulta sencillo obtener las deformaciones seccionales como función de las coordenadas de la línea media de la sección y las deformaciones generalizadas como:

$$\epsilon_s = \begin{bmatrix} \epsilon + \kappa_3 \bar{\xi}_2 + 0.5 \chi_2 \bar{\xi}_2^2 + \kappa_2 \bar{\xi}_3 + \chi_{23} \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3 + 0.5 \chi_3 \bar{\xi}_3^2 \\ \gamma_2 \bar{\xi}_2' + \gamma_3 \bar{\xi}_3' + \kappa_1 (\bar{\xi}_3' \bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_2' \bar{\xi}_3) \\ \gamma_3 \bar{\xi}_2' - \gamma_2 \bar{\xi}_3' + \kappa_1 (\bar{\xi}_2' \bar{\xi}_2 + \bar{\xi}_3' \bar{\xi}_3) \\ \kappa_2 \bar{\xi}_2' - \kappa_3 \bar{\xi}_3' - \chi_2 \bar{\xi}_3' \bar{\xi}_2 + \chi_3 \bar{\xi}_2' \bar{\xi}_3 + \chi_{23} (\bar{\xi}_2' \bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_3' \bar{\xi}_3) \\ \kappa_1 (-\bar{\xi}_2'^2 - \bar{\xi}_3'^2) \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

### 3.2.2 Corrección del Problema Torsional

La formulación presentada no contempla el efecto del alabeo de la sección, lo cual afecta principalmente a la capacidad de predicción del problema torsional. Si bien en muchos casos las formulaciones tipo viga no incluyen el efecto del alabeo de la sección [5-7, 9, 11, 17, 19, 24, 51, 53, 57, 114], existen algunas formulaciones que efectivamente tienen cuenta dicho efecto [10, 13, 14, 28, 63].

La consideración del alabeo en la formulación podría realizarse de forma relativamente sencilla: superponiendo a la configuración deformada un desplazamiento por alabeo en la dirección  $\mathbf{e}_1$  de tal forma que:

$$\mathbf{x}(x, \xi_2, \xi_3, t) = \mathbf{x}_0(x, t) + \sum_{i=2}^3 \xi_i \mathbf{e}_i + \vartheta \omega \mathbf{e}_1, \quad (3.26)$$

donde  $\vartheta$  es la intensidad de alabeo y  $\omega$  es la función de alabeo de Saint-Venant.

Si bien la introducción a nivel cinemático del efecto del alabeo en la forma anterior permite tener en cuenta los distintos acoplamientos estructurales que éste introduce; es conocido que para vigas relativamente esbeltas y con secciones transversales cerradas, la energía elástica por alabeo es despreciable [13, 28]. Se asumirá entonces en lo que sigue, que la energía por alabeo de la sección transversal es despreciable.

Lo dicho anteriormente permite elaborar una formulación para considerar el efecto del alabeo solo en el problema torsional, de tal forma de obtener una rigidez torsional consistente con el problema de torsión de Saint-Venant y sin complicar considerablemente la expresión de las deformaciones generalizadas. Tal formulación será basada en la modificación de la deformación de corte en el plano  $\gamma_{xs}$  para contemplar el efecto del alabeo; mientras que se desprecia el efecto del

alabeo en las demás deformaciones. Así, considerando que el índice (2,6) de la matriz  $\mathcal{T}$  mutiplicado por la deformación generalizada torsional  $\kappa_1$  da la deformación de corte  $\gamma_{xs}$ , es posible añadir el efecto del alabeo solo sobre  $\gamma_{xs}$  simplemente proponiendo:

$$\gamma_{xs} = (r_n + \omega')\kappa_1 \quad (3.27)$$

donde  $\omega'$  es la derivada de la función de alabeo respecto de la coordenada  $s$ . Así el coeficiente (2,6) de la matriz  $\mathcal{T}$  se modifica a:  $r_n + \omega'$ .

### Obtención de la Función de Alabeo

La formulación para la obtención de la función de alabeo se plantea en el sistema de referencia seccional, i.e.  $(n, s, x)$ . Asumiendo que es posible despreciar los efectos de la curvatura de la sección (lo cual es perfectamente consistente con el enfoque de segmentos rectos que se utilizará para obtener las propiedades seccionales) la ecuación de equilibrio torsional para en un punto cualquiera de la viga es:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad (3.28)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{xn}\tilde{\mathbf{n}} + \tau_{xs}\tilde{\mathbf{s}}.$$

Además, debe cumplirse la condición de borde :

$$\boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{en } S_1. \quad (3.29)$$

Asumiendo que los desplazamientos en torsión están dados por:

$$\mathbf{u}_t = \psi'\omega\tilde{\mathbf{i}} + \psi r_s\tilde{\mathbf{n}} + \psi r_n\tilde{\mathbf{s}} \quad (3.30)$$

donde  $\omega$  es la función de alabeo y  $\psi$  es la variable de giro torsional, es posible escribir las tensiones de corte seccionales como:

$$\begin{aligned} \tau_{nx} &= G\gamma_{nx} = G \left( \frac{\partial u_x}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial x} \right) \\ \tau_{sx} &= G\gamma_{sx} = G \left( \frac{\partial u_x}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Derivando la Eq. (3.30) se obtiene:

$$\begin{aligned} \gamma_{nx} &= \psi' \left( \frac{\partial \omega}{\partial n} + r_s \right) \\ \gamma_{sx} &= \psi' \left( \frac{\partial \omega}{\partial s} + r_n \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Así, la ecuación de equilibrio y la condición de borde pueden escribirse como:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } S_1 \quad (3.33)$$

donde se ha definido el vector:

$$\mathbf{v} = \psi' \left( \frac{\partial \omega}{\partial n} + r_s \right) \tilde{\mathbf{n}}, \left( \frac{\partial \omega}{\partial s} + r_n \right) \tilde{\mathbf{s}} \quad (3.34)$$

Ahora, la forma débil de equilibrio de la Eq. (3.33) es:

$$\int_A (\nabla \cdot \mathbf{v}) \cdot \delta \omega \, dA = 0. \quad (3.35)$$

Integrando por partes y utilizando la condición de borde se obtiene:

$$\int_A \nabla \delta \omega \cdot \mathbf{v} \, dA = 0. \quad (3.36)$$

Utilizando la definición de  $\mathbf{v}$  es posible obtener:

$$\int_A \nabla \delta \omega \cdot \nabla \omega \, dA + \int_A \nabla \delta \omega \cdot (r_s \tilde{\mathbf{n}} + r_n \tilde{\mathbf{s}}) \, dA = 0, \quad (3.37)$$

donde el primer término da la rigidez del sistema y el segundo término da la fuerza. Luego, la obtención de la función de alabeo se obtiene numéricamente por medio del método de elementos finitos, su implementación se presentará en la sección 3.6.2.

### 3.2.3 Mecánica del Material Compuesto

Como se ha mencionado, las secciones transversal de las palas y la torre de un aerogenerador moderno se construyen con material compuesto [88, 93]. El material compuesto generalmente se constituye por laminación; cada laminado de material compuesto está constituido por distintas capas de material orientadas en distintas direcciones, las cuales a su vez están compuestas por láminas o plies.

Así, la lámina es la unidad elemental de un material compuesto, está constituida por un conjunto de fibras unidireccionales inmersas en una matriz. Las fibras tienen un diámetro aproximado de 0.01 mm y el espesor de la lámina que forman es aproximadamente 0.1 mm. En cada lámina las fibras están generalmente distribuidas aleatoriamente (ver Figura 3.3).

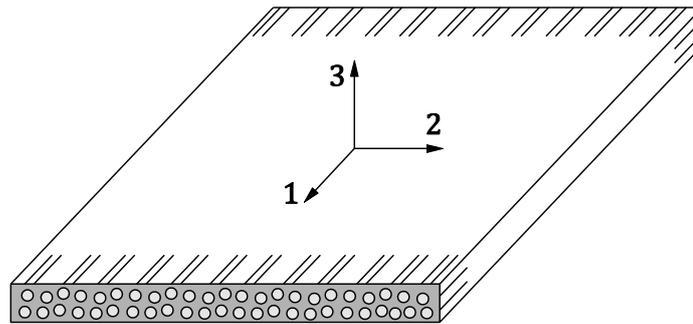


Figura 3.3 – Estructura de una lámina de material compuesto

Generalmente el comportamiento estructural de una lámina puede ser predicho por teorías micromecánicas, aunque generalmente tienden a sobreestimar su rigidez [115]. Esto se debe principalmente a su incapacidad para modelar los micro y macro cracks que normalmente se presentan en la lámina, los cuales tienden a reducir sus propiedades. Generalmente cuando las fibras son más finas ese efecto se reduce, por esto los materiales compuestos avanzados tienden a utilizar entonces fibras más finas.

Debido a las dificultades que presentan los modelos basados en la micromecánica, y con el objetivo de aproximar con más certeza las propiedades mecánicas de un material compuesto, normalmente se recurre a modelos fenomenológicos. Tales modelos permiten obtener las propiedades mecánicas y la resistencia de la lámina con mayor certeza. De esta forma es posible ignorar la microestructura de la lámina si sólo desea estudiar el comportamiento macromecánico del material que constituye.

Así, como paso inicial a la determinación de la ley constitutiva que regirá el material compuesto del que está construido el aerogenerador, se asumirá que *la lámina se comporta como ortótropa*. Además, como la lámina tiene un espesor muy pequeño, sólo cuatro constantes definirán su comportamiento mecánico: dos módulos de elasticidad en el plano, un módulo de corte y una constante de Poisson.

Debe notarse que una sola constante de Poisson es independiente, pues la siguiente condición de simetría es válida [116, 117]:

$$E_1 \nu_{12} = E_2 \nu_{21} \quad (3.38)$$

Como se mencionó, cada una de las capas que forma el material compuesto está formada por un conjunto de láminas. La capa tiene un espesor mucho mayor que la lámina y generalmente se asume que las variaciones de propiedades con el espesor es despreciable. Por tener mayor espesor, el estado tensional de la capa es tridimensional.

Es generalmente deseado referir la rigidez de la capa al sistema de referencia global, por lo tanto es necesaria una transformación de coordenadas. Cada capa puede ser isótropa, ortótropa o anisótropa, dependiendo de las características de las láminas que la componen. Para que una capa sea ortótropa debe estar constituida por láminas orientadas de tal forma que sus ejes locales coincidan con los globales, ver Figura 3.3.

Las Ecuaciones constitutivas 3D de una capa unidireccional ortótropa expresadas en su sistema de coordenadas local vienen dadas por:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_2} & \frac{-\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{31}}{E_1} & \frac{-\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

En forma matricial:

$$\epsilon_l = \mathbf{S}_l \sigma_l \quad (3.40)$$

De las 12 constantes presentes en  $\mathbf{S}_l$  solo 9 son independientes, pues:

$$\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_3} = \frac{\nu_{31}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_3} = \frac{\nu_{32}}{E_2} \quad (3.41)$$

### 3.2.4 El Material Transversalmente Isótropo

Existen ciertos casos particulares de material ortótropo en los cuales las direcciones 2 y 3 son indistinguibles, a este tipo de material se lo llama transversalmente isótropo; por ejemplo, una lámina con fibras unidireccionales es transversalmente isótropa.

El comportamiento mecánico de un material transversalmente isótropo se puede describir cinco constantes independientes:  $E_1, E_2 = E_3, G_{13} = G_{12}, G_{23}, \nu_{12} = \nu_{13}$ ; y es posible demostrar la siguiente relación entre los coeficientes de Poisson en el plano:

$$\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_1}{E_2} \quad (3.42)$$

También, es interesante notar que para un material transversalmente isótropo es posible utilizar como constante  $G_{23}$  o bien  $\nu_{23}$ , pues como el material se comporta como isótropo en el plano 2-3 dichas constantes están relacionadas por:

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \quad (3.43)$$

Debe notarse que al asumir un estado plano de tensiones las constantes necesarias para describir un material ortótropo se reducen, no así las constantes para describir un material transversalmente isótropo. Se mostrará que luego de suponer estado plano de tensiones el hecho de que el material se suponga transversalmente isótropo implica una sola modificación a las ecuaciones constitutivas, esta es:  $G_{13} = G_{12}$ , lo cual surge porque los módulos  $\nu_{13}$  y  $E_3$  no aparecen en las ecuaciones. Debe notarse también que un material ortótropo con láminas unidireccionales y propiedades que no varían en el espesor se transforma en transversalmente isótropo.

Ahora bien, es necesario transformar la matriz constitutiva de tal forma de obtener tensiones en el sistema de coordenadas global. Así, las tensiones y deformaciones expresadas en el sistema global pueden obtenerse como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma}_l, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{T}_\epsilon \boldsymbol{\epsilon}_l. \quad (3.44)$$

Además

$$\mathbf{T}_\epsilon \boldsymbol{\epsilon}_l = \mathbf{S}_l (\mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma}_l), \quad (3.45)$$

donde:

$$\mathbf{T}_\epsilon = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -2cs & 2cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -cs & cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

De esta manera puede obtenerse la siguiente relación:

$$\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{T}_\epsilon^{-1} \mathbf{S}_l \mathbf{T}_\sigma) \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} \quad (3.47)$$

### 3.2.5 Estado Plano de Tensiones

Ahora bien, si se supone que la capa es delgada se puede asumir que  $\sigma_3 = 0$  y considerando que  $\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}$  es posible obtener las ecuaciones constitutivas para el estado plano de tensiones en la lámina de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Debe notarse que no solo se ha eliminado de la ecuación constitutiva de la lámina la tensión normal en la dirección del espesor,  $\sigma_3$  sino también la deformación normal  $\epsilon_3$ . Esto ha hecho que se reduzca el número de constantes de material ortótropo de nueve a seis. Si el material además es transversalmente isótropo las constantes se reducen a cinco, pues  $G_{13} = G_{12}$ .

Debe notarse que si bien la deformación  $\epsilon_3$  no es igual a cero, no participa en la transformación porque es perpendicular al plano de orientación de la fibra.

Así, las matrices de transformación se modifican a:

$$\mathbf{T}_\epsilon = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & -cs \\ 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & s & c & 0 \\ -2cs & 2cs & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 2cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & -2cs \\ 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & s & c & 0 \\ -cs & cs & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

Luego de la transformación las ecuaciones constitutivas son:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_s \\ \gamma_{sn} \\ \gamma_{xn} \\ \gamma_{xs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & 0 & 0 & S_{26} \\ 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0 \\ S_{16} & S_{26} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_s \\ \tau_{sn} \\ \tau_{xn} \\ \tau_{xs} \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Generalmente los textos hacen referencia a la simplificación de las relaciones constitutivas por considerar  $\sigma_n = 0$ , pero en realidad las hipótesis cinemáticas son compatibles con  $\epsilon_n = 0$  [36]. La introducción de esta última hipótesis rigidizaría la formulación, como en formulaciones tipo viga es preferible flexibilizar antes de rigidizar generalmente se asume  $\sigma_n = 0$ , generando así una leve inconsistencia. También es común que se utilice la hipótesis  $N_n = 0$ , donde  $N_n$  es el esfuerzo placa en la dirección normal [115, 117]; esta hipótesis suele conducir a resultados levemente más exactos para determinados tipos de sección y laminado. Para la aplicación en cuestión se ha comprobado experimentalmente que la hipótesis anterior no representa una mejora en la predicción de la rigidez seccional de la sección transversal del aerogenerador; por esto, y con el objetivo de mantener la formulación lo menos compleja posible, se asumirá de aquí en adelante  $\sigma_n = 0$ .

Desde el punto de vista matricial se ve reflejado que si la variable que por hipótesis se iguala a cero se encuentra del lado derecho de la ecuación constitutiva (3.50), es posible directamente eliminar las filas y columnas correspondientes a

dicha variable. Por el contrario, si la hipótesis implica a una variable está del lado izquierdo, e.g.  $\epsilon_n = 0$ , es necesario actualizar la ecuación constitutiva.

Ahora bien, la hipótesis de indeformabilidad de la sección transversal impide tener una medición de las deformaciones  $\epsilon_s$  y  $\gamma_{ns}$ . En la realidad esas deformaciones no son iguales a cero, y aquí surgen nuevamente dos posibilidades, o se asumen iguales a cero o se asume que las correspondientes tensiones son iguales a cero. La primera alternativa da una formulación más rígida que la real y la segunda una más flexible. Nuevamente, se elige el camino de la flexibilización. Si se considera que  $\epsilon_s = \kappa_s = 0$  y se modifica la matriz constitutiva acordemente, la formulación se rigidiza. Si se supone un estado plano de tensiones sin corte se tiene que:

<i>Hipótesis</i>	$\epsilon_n = 0$	$\sigma_n = 0$
<i>Tensiones</i>	$\sigma_s = \frac{E}{1 - \nu^2} \epsilon_s$	$\sigma_s = E \epsilon_s$

Así, si se considera que  $\sigma_s = \sigma_{ns} = 0$  es posible directamente eliminar filas y columnas de la matriz de rigidez; así, la nueva relación constitutiva es:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xn} \\ \gamma_{xs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & S_{16} \\ 0 & S_{55} & 0 \\ S_{16} & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xn} \\ \tau_{xs} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

La forma inversa de la ecuación anterior es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xn} \\ \tau_{xs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{S_{55}S_{66}}{S_{\Delta}} & 0 & -\frac{S_{16}S_{55}}{S_{\Delta}} \\ 0 & \frac{-S_{16}^2 + S_{11}S_{66}}{S_{\Delta}} & 0 \\ -\frac{S_{16}S_{55}}{S_{\Delta}} & 0 & \frac{S_{11}S_{55}}{S_{\Delta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xn} \\ \gamma_{xs} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

donde:

$$S_{\Delta} = -S_{16}^2 S_{55} + S_{11} S_{55} S_{66} \quad (3.53)$$

En forma matricial podemos escribir la ecuación anterior como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xn} \\ \tau_{xs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{16} \\ 0 & C_{55} & 0 \\ C_{16} & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xn} \\ \gamma_{xs} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Debe decirse que podría haberse aplicado la transformación de coordenadas a la ecuación constitutiva luego de aplicar las hipótesis simplificativas de la teoría de vigas. Pero esa forma de obtener las relaciones constitutivas de una lámina es aproximada; la forma más precisa de obtener las relaciones constitutivas es la que se ha utilizado, donde la transformación local-global se aplica sobre la matriz constitutiva sin reducir. De esa forma se consideran los aportes de la rigideces transversales en el sistema de coordenadas local a la rigidez axial en el sistema de coordenadas global. Como el módulo de elasticidad transversal es aproximadamente diez veces menor que el modulo de elasticidad axial, tal aproximación está justificada.

### 3.2.6 Ecuación Constitutiva del Laminado

Como se expresó anteriormente, el vector de deformaciones de una capa ortótropa puede ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xn} \\ \gamma_{xs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_{xn} \\ \epsilon_{xs} \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} \kappa_x \\ 0 \\ \kappa_{xs} \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Donde se ha asumido que  $\kappa_{xn} = 0$ . Por lo tanto, las ecuaciones constitutivas pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xn} \\ \tau_{xs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{16} & n C_{11} & n C_{16} \\ 0 & C_{55} & 0 & 0 & 0 \\ C_{16} & 0 & C_{66} & n C_{16} & n C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_{xn} \\ \epsilon_{xs} \\ \kappa_x \\ \kappa_{xs} \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Ahora bien, es posible reducir una dimensión en la formulación integrando las tensiones en el espesor, esto es:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_{xn} \\ N_{xs} \\ M_x \\ M_{xs} \end{bmatrix} = \int_{n_{k-1}}^{n_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xn} \\ \tau_{xs} \\ \sigma_x n \\ \tau_{xs} n \end{bmatrix} dn = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{16} & | & B_{11} & B_{16} \\ 0 & A_{55} & 0 & | & 0 & 0 \\ A_{16} & 0 & A_{66} & | & B_{16} & B_{66} \\ - & - & - & - & - & - \\ B_{11} & 0 & B_{16} & | & D_{11} & D_{16} \\ B_{16} & 0 & B_{66} & | & D_{61} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_{xn} \\ \epsilon_{xs} \\ \kappa_x \\ \kappa_{xs} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Donde  $n_k$  es la coordenada  $n$  de la superficie inferior de la capa y los coeficientes constitutivos son:

$$A_{ij} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} C_{ij} dn, \quad B_{ij} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} C_{ij} n dn, \quad D_{ij} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} C_{ij} n^2 dn \quad (3.58)$$

Las constantes  $C_{ij}$  resultan ser independientes de la coordenada  $n$  y para una capa ortótropa homogénea, las integrales anteriores dan:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= C_{ij}(n_k - n_{k-1}), & B_{ij} &= \frac{1}{2}C_{ij}(n_k^2 - n_{k-1}^2), \\ D_{ij} &= \frac{1}{3}C_{ij}(n_k^3 - n_{k-1}^3). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Ahora es posible obtener las propiedades seccionales de un laminado de capas de material compuesto sumando las rigideces de cada una de las capas como:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{nl} A_{ij}^k, \quad B_{ij} = \sum_{k=1}^{nl} B_{ij}^k, \quad D_{ij} = \sum_{k=1}^{nl} D_{ij}^k. \quad (3.60)$$

donde  $nl$  es el número de capas en el laminado. Nótese que, para laminados simétricos  $B_{ij} = 0$ , lo cual muestra que para dichos laminados no hay acoplamiento flexional-extensional.

Finalmente, puede expresarse la Eq. (3.57) matricialmente como:

$$\mathbf{N}_s = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}_s, \quad (3.61)$$

donde  $\mathbf{C}$  la matriz constitutiva de la placa material compuesto y  $\boldsymbol{\epsilon}_s$  es el vector de deformaciones seccionales definido en la Eq. (3.23).

### 3.3 FORMULACION VARIACIONAL

La forma débil del equilibrio de un cuerpo tridimensional  $\mathcal{B}$  viene dada por [118, 119]:

$$\delta W(\boldsymbol{\phi}, \dot{\boldsymbol{\phi}}, \ddot{\boldsymbol{\phi}}, \delta\boldsymbol{\phi}) = \delta W_i - \delta W_e - \delta W_a, \quad (3.62)$$

donde  $\delta W_i$ ,  $\delta W_e$  y  $\delta W_a$  son los trabajos virtuales de las fuerzas internas, externas y de inercia respectivamente.

En este punto es importante notar que la formulación hasta aquí desarrollada puede implementarse tanto en un enfoque Euleriano como en uno Lagrangiano. Si bien en general los enfoques son equivalentes, en la terminología de las formulaciones de viga las caracterizaciones Euleriana y Lagrangiana no siempre implican una equivalencia. En las secciones subsiguientes se presentará el desarrollo de la formulación variacional y se analizarán brevemente las características fundamentales de las descripciones Euleriana y Lagrangiana de la mecánica de la viga.

#### 3.3.1 Variaciones Admisibles

Si bien desde el punto de vista del cálculo variacional no se presentan grandes dificultades para el tratamiento de la cinemática finita, las distintas alternativas de parametrización de las rotaciones resultan en general difíciles de tratar. El tratamiento de los desplazamientos finitos no se aleja considerablemente de su contraparte infinitesimal, pero la formulación de las rotaciones finitas no es en absoluto similar.

La formulación variacional que se propondrá estará en gran medida basada en la variación del campo director. El trabajo virtual de las fuerzas internas debe ser escrito en base a deformaciones virtuales generalizadas, las cuales contendrán necesariamente las variaciones del campo director y sus derivadas.

Para comenzar el desarrollo de la formulación variacional puede utilizarse la Eq. (3.1) para obtener una primera expresión para la variación de un vector director  $\mathbf{e}_i$  como:

$$\delta \mathbf{e}_i = \delta(\boldsymbol{\Lambda}(x, t) \mathbf{E}_i) = \delta \boldsymbol{\Lambda}(x, t) \mathbf{E}_i. \quad (3.63)$$

De aquí en adelante, por simplicidad en la notación, no se hará explícita la dependencia temporal o espacial del tensor de rotación, i.e.  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, t)$ .

La variación admisible del tensor de rotación, variación de Lie, se obtiene superponiendo una rotación virtual infinitesimal sobre la rotación finita existente, ver e.g. [17, 26]. Ambas rotaciones virtuales son elementos del espacio tangente a la variedad rotacional  $SO(3)$  en un punto base cualquiera  $\mathbf{A}$ , i.e.  $T_{\mathbf{A}}SO(3)$ . La rotación virtual puede pertenecer a un espacio tangente material o espacial; serán aquí llamadas rotación virtual material y rotación virtual espacial y serán notadas como  $\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  y  $\delta\tilde{\boldsymbol{w}}$  respectivamente. Así  $\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}} \in T_{\mathbf{A}}^m SO(3)$  y  $\delta\tilde{\boldsymbol{w}} \in T_{\mathbf{A}}^s SO(3)$ , donde  $T_{\mathbf{A}}^m SO(3)$  es el espacio tangente material en  $\mathbf{A}$  y  $T_{\mathbf{A}}^s SO(3)$  es el espacio tangente espacial de la rotación en  $\mathbf{A}$ .

Así, puede construirse un tensor de rotaciones perturbado utilizando una forma material o espacial de rotación compuesta como:

$$\mathbf{A}_\epsilon = \exp(\epsilon \delta\tilde{\boldsymbol{w}})\mathbf{A} = \mathbf{A} \exp(\epsilon \delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}). \quad (3.64)$$

Análogamente a las definiciones de  $\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  y  $\delta\tilde{\boldsymbol{w}}$  pueden definirse espacios vectoriales que contengan a vectores  $\delta\boldsymbol{\theta}$  y  $\delta\boldsymbol{w}$  tales que  $\in \mathbb{E}^3$  y que sean conceptualmente equivalentes a  $\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  y  $\delta\tilde{\boldsymbol{w}}$ , respectivamente.

En lo que sigue  $\sim$  indica la matriz antisimétrica de un vector, tal que siendo  $\mathbf{b}$  un vector cualquiera:  $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ .

### Enfoque Lagrangiano

En el marco del desarrollo de formulaciones geoméricamente exactas comúnmente se denomina enfoque Lagrangiano al que aborda el problema de las rotaciones finitas mediante su parametrización con el vector de rotación [9]; de esta forma es posible retener la aditividad como propiedad de la rotación finita y las variables rotacionales pertenecen siempre al mismo espacio vectorial, i.e.  $T_{\mathbf{I}}SO(3)$ . Así, utilizando la Eq. (3.64) es posible proponer la siguiente expresión para el tensor de rotación perturbado:

$$\mathbf{A}_\epsilon = \exp(\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \epsilon \delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \quad (3.65)$$

para tratar de encontrar un tensor de rotación incremental  $\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  que pertenezca al mismo espacio tangente que el tensor de rotación  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ , i.e.  $T_I SO(3)$ . Ahora, utilizando la Eq. (3.64) para la rotación material virtual y recordando que  $\boldsymbol{\Lambda} = \exp(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$  se tiene que:

$$\exp(\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \epsilon \delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \exp(\epsilon \delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \exp(\tilde{\boldsymbol{\theta}}). \quad (3.66)$$

Si se deriva con respecto al parámetro  $\epsilon$  y se evalúa la función en  $\epsilon = 0$  puede obtenerse la forma vectorial (ver e.g. [12, 120]):

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\theta} &= \mathbf{T} \delta\boldsymbol{\theta} \in T_{\boldsymbol{\Lambda}}^s, \\ \delta\mathbf{w} &= \mathbf{T}^T \delta\boldsymbol{\theta} \in T_{\boldsymbol{\Lambda}}^m, \end{aligned} \quad (3.67)$$

donde  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta})$  es un mapeo lineal entre los espacios tangentes  $T_I^s SO(3) \rightarrow T_{\boldsymbol{\Lambda}}^s SO(3)$  [9]. Debe notarse que, no como  $\boldsymbol{\Lambda}$ ,  $\mathbf{T}$  cambia el punto base de  $\mathbf{I}$  a  $\boldsymbol{\Lambda}$ .

Ahora, utilizando nuevamente la Eq. (3.64) se obtiene la variación cinemáticamente admisible del tensor de rotación como:

$$\delta\boldsymbol{\Lambda} = \frac{d}{d\epsilon} [\boldsymbol{\Lambda} \exp(\epsilon \delta\tilde{\boldsymbol{\theta}})]|_{\epsilon=0} = \boldsymbol{\Lambda} \delta\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \delta\tilde{\mathbf{w}} \boldsymbol{\Lambda}. \quad (3.68)$$

De la última ecuación es sencillo verificar que  $\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Lambda}^T \delta\tilde{\mathbf{w}} \boldsymbol{\Lambda}$ ; por lo tanto, se puede hacer uso de la Eq. (3.63) para obtener la variación del vector director como:

$$\delta\mathbf{e}_i = \boldsymbol{\Lambda} (\delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}_i) = \delta\mathbf{w} \times \mathbf{e}_i. \quad (3.69)$$

Utilizando la Eq. (3.67) se puede expresar la ecuación anterior como función del vector de rotación:

$$\delta\mathbf{e}_i = (\mathbf{T}^T \delta\boldsymbol{\theta}) \times \mathbf{e}_i. \quad (3.70)$$

En notación matricial la ecuación anterior resulta:

$$\delta\mathbf{e}_i = -\tilde{\mathbf{e}}_i \mathbf{T}^T \delta\boldsymbol{\theta}. \quad (3.71)$$

Ahora, si se nota que  $\mathbf{e}' = \widetilde{\mathbf{T}^T \boldsymbol{\theta}'} \mathbf{e}$  puede encontrarse la variación de la derivada del campo director como:

$$\delta \mathbf{e}'_i = (\delta \mathbf{T}^T \boldsymbol{\theta}' + \mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\theta}') \times \mathbf{e}_i + (\mathbf{T}^T \boldsymbol{\theta}') \times [(\mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\theta}') \times \mathbf{e}_i]. \quad (3.72)$$

Entonces, el conjunto de variaciones cinemáticamente admisibles queda definido por:

$$\delta \mathcal{V} := \{\delta \boldsymbol{\phi} = [\delta \mathbf{u}_0, \delta \boldsymbol{\theta}]^T: [0, \ell] \rightarrow R^3 | \delta \boldsymbol{\phi} = 0 \text{ en } \mathcal{S}\}, \quad (3.73)$$

donde  $\mathcal{S}$  es el contorno con desplazamientos y rotaciones prescriptas.

### Enfoque Euleriano

Si bien el enfoque Euleriano queda enmarcado en el desarrollo anterior, se diferencia del enfoque Lagrangiano por parametrizar la rotación finita con el spin espacial; de esta manera la variable cinemática rotacional es  $\Delta \mathbf{w} \in T_{\lambda}^{\mathcal{S}}$ . No es poco importante el hecho de que se ha tomado como variable cinemática a un incremento, pues en realidad no existe una variable  $\mathbf{w}$  de la cual pueda derivarse la expresión de dicho incremento [18]. Así, el enfoque Euleriano se permite prescindir del vector de rotación e ignorar la relación entre el spin espacial y el vector de rotación presentada en la Eq. (3.67).

Según lo dicho anteriormente, la variación del campo director se obtiene como:

$$\delta \mathbf{e}_i = \delta \mathbf{w} \times \mathbf{e}_i. \quad (3.74)$$

y la variación de su derivada es:

$$\delta \mathbf{e}'_i = \delta \mathbf{w}' \times \mathbf{e}_i + \delta \mathbf{w} \times \mathbf{e}'_i. \quad (3.75)$$

Entonces, para el enfoque Euleriano el conjunto de variaciones cinemáticamente admisibles queda definido por:

$$\delta \mathcal{V} := \{\delta \boldsymbol{\phi} = [\delta \mathbf{u}_0, \delta \mathbf{w}]^T: [0, \ell] \rightarrow R^3 | \delta \boldsymbol{\phi} = 0 \text{ en } \mathcal{S}\}, \quad (3.76)$$

Siendo el spin una variable cinemática, su derivada  $\Delta \mathbf{w}'$  se encuentra numéricamente mediante interpolación. Si bien el enfoque resulta atractivo por su simplicidad, la interpolación de spins no es una operación consistente pues los spins nodales pertenecen a diferentes espacios tangentes y consecuentemente no son variables aditivas. La consecuencia de dicha inconsistencia es la pérdida de

objetividad e independencia del camino de integración de la formulación [16]. Por otro lado, la linealización del campo director en una formulación Euleriana tampoco resulta ser consistente, pues se asume que  $\Delta\delta\mathbf{w} = \mathbf{0}$ , lo cual no es correcto; la consecuencia más notable de dicha suposición es la pérdida de simetría de la matriz tangente.

La Figura 3.4 presenta una interpretación geométrica de los espacios tangentes a la variedad  $SO(3)$  y las variables utilizadas para la representación de la rotación finita.

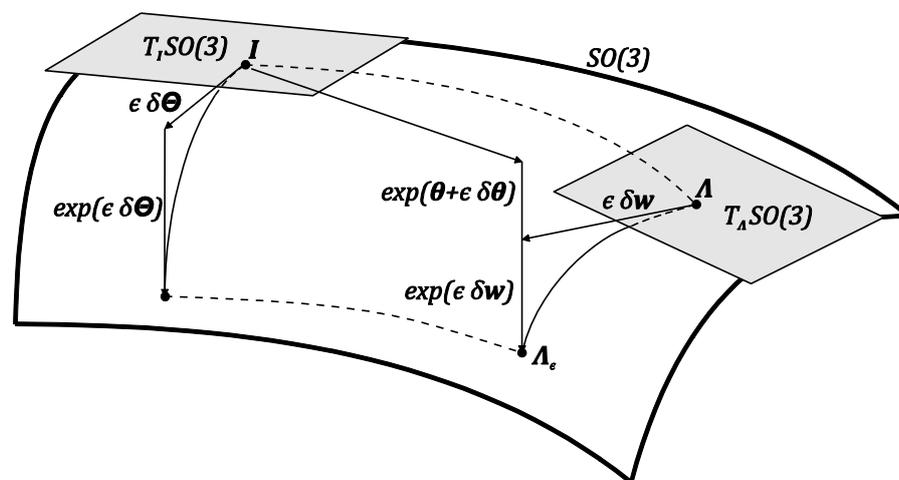


Figura 3.4 - Variedad  $SO(3)$  y espacios tangentes

### Enfoque Euleriano vs Enfoque Lagrangiano

No es el objetivo de este trabajo describir o evaluar en detalle los distintos enfoques que pueden abordar el problema de la rotación tridimensional finita, pero es interesante la justificación del enfoque que se utilizará para continuar la formulación. Aún cuando resulta difícil comparar los enfoques Lagrangiano y Euleriano sobre la sola base de los conceptos expuestos, puede decirse que para tratar el problema de la dinámica de multicuerpos la formulación Lagrangiana posee al menos tres ventajas sobre la formulación Euleriana. La formulación Lagrangiana logra: i) retener la propiedad de invariancia respecto del observador; lo cual es extremadamente importante para tratar el caso de cuerpos deformables que se mueven arbitrariamente en el espacio; ii) mantener la propiedad de independencia del camino de integración (lo cual en general es relevante solo para

estática) y iii) generar matrices tangentes simétricas (consecuencia de la derivación consistente de la variación del campo director).

En virtud de las ventajas mencionadas, se desarrolla lo que sigue de la formulación *adoptando una descripción Lagrangiana* y notando, cuando sea útil, algunos aspectos conceptuales de la formulación Euleriana.

### 3.3.2 Deformaciones Generalizadas Virtuales

Habiendo obtenido la variación del campo director y sus derivadas se pretende ahora obtener una expresión para las deformaciones virtuales. Considerando el hecho de que  $\delta \mathbf{E}_i = 0$  y  $\delta \mathbf{X}'_0 = 0$  y realizando la variación de la Eq. (3.11) se obtiene la siguiente expresión para las deformaciones virtuales generalizadas:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_0 \cdot \delta \mathbf{u}'_0 \\ \mathbf{e}'_3 \cdot \delta \mathbf{u}'_0 + \mathbf{x}'_0 \cdot \delta \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}'_2 \cdot \delta \mathbf{u}'_0 + \mathbf{x}'_0 \cdot \delta \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \delta \mathbf{u}'_0 + \mathbf{x}'_0 \cdot \delta \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \delta \mathbf{u}'_0 + \mathbf{x}'_0 \cdot \delta \mathbf{e}_3 \\ \delta \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}'_2 \cdot \delta \mathbf{e}_3 \\ 2(\delta \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_2) \\ 2(\delta \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}'_3) \\ \delta \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_3 + \mathbf{e}'_2 \cdot \delta \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

Para mantener compacta la formulación se escribe la última expresión como función de un conjunto de variables cinemáticas  $\delta \boldsymbol{\varphi}$  de tal forma que:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{H} \delta \boldsymbol{\varphi}. \quad (3.78)$$

Siendo:

$$\mathbb{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_0{}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}'_3{}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{x}'_0{}^T \\ \mathbf{e}'_2{}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{x}'_0{}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{x}'_0{}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}'_3{}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{x}'_0{}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{e}'_2{}^T & \mathbf{e}_3^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2\mathbf{e}'_2{}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2\mathbf{e}'_3{}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{e}'_3{}^T & \mathbf{e}'_2{}^T \end{bmatrix}, \quad \delta\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}'_0 \\ \delta\boldsymbol{\theta} \\ \delta\mathbf{e}_2 \\ \delta\mathbf{e}_3 \\ \delta\mathbf{e}'_2 \\ \delta\mathbf{e}'_3 \end{bmatrix}. \quad (3.79)$$

### 3.3.3 Trabajo Virtual de las Fuerzas Internas

Para el problema elástico de un continuo tridimensional, el trabajo virtual de las fuerzas internas puede escribirse como:

$$\delta W_i = \int_V \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (3.80)$$

Integrando la expresión anterior en el espesor de la sección transversal se tiene que:

$$\delta W_i = \int_L \int_S \delta\boldsymbol{\epsilon}_s^T \mathbf{N}_s ds dx. \quad (3.81)$$

Se quiere ahora reducir una dimensión más en la formulación del trabajo virtual de las fuerzas internas, de manera de obtener un enfoque unidimensional. Dado que se pretende formular la teoría en función a cantidades generalizadas, se necesita encontrar una entidad de fuerza o tensión unidimensional que sea energéticamente conjugada a las deformaciones generalizadas; a esta entidad se la denominará *esfuerzo viga*.

Para obtener las expresiones de los esfuerzos viga es conveniente expresar las tensiones de la placa  $\mathbf{N}_s$ , obtenidas en la Eq. (3.61), como función de las deformaciones generalizadas. Así, remplazando la Eq. (3.23) en la Eq. (3.61) se obtiene:

$$\mathbf{N}_s = \mathbf{C} \mathcal{T} \boldsymbol{\epsilon}. \quad (3.82)$$

Utilizando la expresión anterior y recordando además las expresiones (3.22) y (3.23) puede escribirse el trabajo virtual de las fuerzas internas de la Eq. (3.81) como:

$$\delta W_i = \int_L \int_S (\mathcal{J} \delta \boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{C} \mathcal{J} \boldsymbol{\varepsilon} ds dx, \quad (3.83)$$

Como la deformación generalizada no es función de la coordenada seccional  $s$  puede sacarse fuera de la integral seccional para obtener;

$$\delta W_i = \int_L \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \left( \int_S \mathcal{J}^T \mathbf{C} \mathcal{J} ds \right) \boldsymbol{\varepsilon} dx, \quad (3.84)$$

Así, queda definida una entidad de fuerza unidimensional que sea conjugada energéticamente con las deformaciones generalizadas, de tal forma que:

$$\delta W_i = \int_L \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{S} dx, \quad (3.85)$$

A esta fuerza unidimensional se la llama *esfuerzo viga generalizado* y tiene la expresión:

$$\mathbf{S}(x) = \left( \int_S \mathcal{J}^T \mathbf{C} \mathcal{J} ds \right) \boldsymbol{\varepsilon}(x), \quad (3.86)$$

Definiendo la matriz seccional  $\mathbb{D}$  como:

$$\mathbb{D} = \int_S \mathcal{J}^T \mathbf{C} \mathcal{J} ds, \quad (3.87)$$

se tiene que:

$$\mathbf{S}(x) = \mathbb{D} \boldsymbol{\varepsilon}(x) \quad (3.88)$$

Es importante observar que  $\mathbb{D}$  contiene no solo las funciones  $\bar{\xi}_i$  que definen el contorno medio de la sección, sino también todas las constantes del material. En general, las funciones  $\bar{\xi}_i$  se expresan como funciones lineales de  $a$  tramos, por lo que la integral puede evaluarse también de  $a$  tramos. Es de crucial importancia la evaluación correcta de  $\mathbb{D}$  pues aporta a la formulación todos los acoplamientos geométricos y constitutivos.

### 3.3.4 Trabajo Virtual de las Fuerzas Externas

El trabajo virtual de las fuerzas externas para el problema en cuestión está definido en el fibrado tangente a la variedad  $\mathcal{M}$  y puede escribirse como:

$$\delta W_e = \int_{B_0} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{F} dV, \quad (3.89)$$

donde  $\mathbf{F} \in T_{x_0}^* \mathcal{M}$  es un vector de fuerzas externas y  $\delta \mathbf{x} \in T_{x_0} \mathcal{M}$  es un desplazamiento virtual. Siguiendo un enfoque Lagrangiano se desarrolla a continuación la expresión anterior en sus formas espacial y material.

La variación del vector posición de un punto cualquiera es:

$$\delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{x}_0 + \delta \Lambda \xi. \quad (3.90)$$

Recurriendo a la expresión (3.68), sus formas material y espacial pueden escribirse fácilmente como:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x} &= \delta \mathbf{x}_0 + \Lambda \delta \tilde{\Theta} \xi, \\ &= \delta \mathbf{x}_0 + \delta \tilde{\omega} \Lambda \xi \end{aligned} \quad (3.91)$$

Ahora bien, el trabajo virtual de las fuerzas externas en sus formas material y espacial queda expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \int_L (\delta \mathbf{x}_0 + \Lambda \delta \tilde{\Theta} \xi)^T \bar{\mathbf{F}} dV = \int_L (\delta \mathbf{x}_0^T + \delta \Theta^T \tilde{\xi} \Lambda^T) \bar{\mathbf{F}} dV, \\ &= \int_L (\delta \mathbf{x}_0 + \delta \tilde{\omega} \Lambda \xi)^T \bar{\mathbf{F}} dV = \int_L (\delta \mathbf{x}_0^T + \delta \omega^T \tilde{\Lambda} \xi) \bar{\mathbf{F}} dV, \end{aligned} \quad (3.92)$$

donde se definió:

$$\bar{\mathbf{F}} = \int_A \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) dA + \int_{\partial A} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) dS + \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{X}). \quad (3.93)$$

En la expresión anterior  $\bar{\mathbf{b}}$  representa a fuerzas de volumen,  $\bar{\mathbf{T}}$  a fuerzas de superficie y  $\bar{\mathbf{P}}$  a fuerzas puntuales.

Se puede ahora operar sobre los segundos sumandos del lado derecho de la Eq. (3.92) de tal forma que:

$$(\Lambda \delta \tilde{\Theta} \xi)^T \bar{\mathbf{F}} = (\Lambda - \tilde{\xi} \delta \Theta)^T \bar{\mathbf{F}} = \delta \Theta^T (-\tilde{\xi}^T) \Lambda^T \bar{\mathbf{F}} = \delta \Theta^T \tilde{\xi} \Lambda^T \bar{\mathbf{F}} \quad (3.94)$$

$$(\delta \tilde{\mathbf{w}} \Lambda \xi)^T \bar{\mathbf{F}} = \left( (-\tilde{\Lambda} \xi) \delta \mathbf{w} \right)^T \bar{\mathbf{F}} = \delta \mathbf{w}^T (-\tilde{\Lambda} \xi)^T \bar{\mathbf{F}} = \delta \mathbf{w}^T \tilde{\Lambda} \xi \bar{\mathbf{F}}$$

Así, se reescribe el trabajo virtual de las fuerzas externas como:

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \int_L (\delta \mathbf{x}_0 + \Lambda \delta \tilde{\Theta} \xi)^T \bar{\mathbf{F}} dV = \int_L (\delta \mathbf{x}_0^T + \delta \Theta^T \tilde{\xi} \Lambda^T) \bar{\mathbf{F}} dV \\ &= \int_L (\delta \mathbf{x}_0 + \delta \tilde{\mathbf{w}} \Lambda \xi)^T \bar{\mathbf{F}} dV = \int_L (\delta \mathbf{x}_0^T + \delta \mathbf{w}^T \tilde{\Lambda} \xi) \bar{\mathbf{F}} dV, \end{aligned} \quad (3.95)$$

Operando se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \int_L \delta \mathbf{x}_0^T \bar{\mathbf{F}} dV + \int_L \delta \Theta^T \bar{\mathbf{M}}_\theta dV, \\ \delta W_e &= \int_L \delta \mathbf{x}_0^T \bar{\mathbf{F}} dV + \int_L \delta \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{M}}_w dV, \end{aligned} \quad (3.96)$$

donde se han definido los momentos:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}_\theta &= \int_A \tilde{\xi} \Lambda^T \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) dA + \int_{\partial A} \tilde{\xi} \Lambda^T \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) dS + \tilde{\xi} \Lambda^T \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{X}), \\ \bar{\mathbf{M}}_w &= \int_A \tilde{\Lambda} \xi \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) dA + \int_{\partial A} \tilde{\Lambda} \xi \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) dS + \tilde{\Lambda} \xi \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{X}), \end{aligned} \quad (3.97)$$

$\bar{\mathbf{M}}_\theta$  puede verse como un elemento del espacio vectorial material pues es conjugado energético del spin material y  $\bar{\mathbf{M}}_w$  puede verse como un elemento del espacio vectorial espacial pues es conjugado energético del spin espacial.

Ahora bien, una formulación Lagrangiana requiere momentos  $\in T_I^m$  (conjugados con el vector de rotación), para ello se relaciona al vector de rotación con los spins materiales y espaciales para obtener:

$$\delta W_e = \int_L \delta \mathbf{x}_0^T \bar{\mathbf{F}} dV + \int_L \delta \Theta^T \bar{\mathbf{M}} dV, \quad (3.98)$$

donde:

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{M}}_\theta = \mathbf{T} \bar{\mathbf{M}}_w \in T_I^m \quad (3.99)$$

Es posible demostrar que  $\Lambda \mathbf{T} = \mathbf{T}^T$  por lo que  $\bar{\mathbf{M}}_w = \Lambda \bar{\mathbf{M}}_\theta$ . De lo anterior es posible deducir que:

$$\Lambda \tilde{\xi} \Lambda^T = \tilde{\Lambda} \tilde{\xi} \quad (3.100)$$

Lo cual resulta lógico pues  $\Lambda \tilde{\xi} \Lambda^T$  representa la transformación ortogonal del tensor antisimétrico del vector posición, mientras que  $\tilde{\Lambda} \tilde{\xi}$  representa la matriz antisimétrica del vector transformado. Así, es posible reescribir la expresión de  $\bar{\mathbf{M}}_w$  en una forma quizás más conveniente:

$$\bar{\mathbf{M}}_w = \int_A \Lambda \tilde{\xi} \Lambda^T \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) dA + \int_{\partial A} \Lambda \tilde{\xi} \Lambda^T \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) dS + \Lambda \tilde{\xi} \Lambda^T \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{X}), \quad (3.101)$$

### Fuerzas y momentos seguidores

Para obtener fuerzas y momentos seguidores tanto  $\in T_\Lambda^s$  como  $\in T_\Lambda^m$  es necesario transformar la fuerza aplicada. Así, se define la fuerza seguidora como:

$$\bar{\mathbf{F}} = \Lambda \bar{\mathbf{F}} \quad (3.102)$$

Reemplazando la definición anterior en (3.97) se pueden obtener las expresiones para los momentos seguidores como:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}} &= \int_A \Lambda \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) dA + \int_{\partial A} \Lambda \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) dS + \Lambda \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{X}), \\ \bar{\mathbf{M}}_\theta &= \int_A \tilde{\xi} \Lambda^T \Lambda \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) dA + \int_{\partial A} \tilde{\xi} \Lambda^T \Lambda \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) dS + \tilde{\xi} \Lambda^T \Lambda \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{X}), \\ \bar{\mathbf{M}}_w &= \int_A \Lambda \tilde{\xi} \Lambda^T \Lambda \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) dA + \int_{\partial A} \Lambda \tilde{\xi} \Lambda^T \Lambda \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) dS + \Lambda \tilde{\xi} \Lambda^T \Lambda \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{X}), \end{aligned} \quad (3.103)$$

donde  $\bar{\mathbf{b}}$ ,  $\bar{\mathbf{T}}$  y  $\bar{\mathbf{P}}$  son vectores fijos que representan: fuerzas seguidoras de volumen, distribuidas y puntuales respectivamente. Si se recuerda que  $\Lambda^T \Lambda = \mathbf{I}$  es posible reescribir las expresiones de los momentos como:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}_\theta &= \int_A \tilde{\xi} \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) dA + \int_{\partial A} \tilde{\xi} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) dS + \tilde{\xi} \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{X}), \\ \bar{\mathbf{M}}_w &= \int_A \Lambda \tilde{\xi} \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) dA + \int_{\partial A} \Lambda \tilde{\xi} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) dS + \Lambda \tilde{\xi} \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{X}), \end{aligned} \quad (3.104)$$

Es importante notar que se han deducido las expresiones de momentos generados por pares de fuerzas. El caso de momentos aplicados debe manejarse

con cuidado adicional pues los momentos aplicados espaciales son momentos respecto de ejes fijos, lo cual no es equivalente a momentos generados por un pares de fuerzas fijas expresado en una configuración espacial. Esto es lógico pues el momento generado por un par de fuerzas fijas es variable con la rotación pues el brazo de palanca rota con la sección.

Ahora bien, si se impone un momento con componentes fijas, este momento debe ser generado por una fuerza fija y un brazo de palanca variable o viceversa. Si el momento con componentes fijas es creado mediante una fuerza puntual fija y la variación del brazo de palanca, es necesario que el brazo de palanca sea  $\xi^* = \Lambda^T \xi$ , de esta forma se tendría:

$$\begin{aligned}\bar{M}_\theta^* &= \widetilde{\Lambda^T \xi} \Lambda^T \bar{P} = \Lambda^T (\widetilde{\xi} \bar{P}), \\ \bar{M}_w^* &= \widetilde{\Lambda \Lambda^T \xi} \bar{P}(X) = \widetilde{\xi} \bar{P},\end{aligned}\tag{3.105}$$

Si se observan las expresiones anteriores se ve que el momento con componentes fijas es una especie momento seguidor. De lo anterior es posible interpretar que los momentos impuestos fijos son conjugados energéticos del spin espacial en forma directa. Análogamente, los momentos impuestos seguidores son conjugados energéticos de forma directa del spin material, lo cual concuerda con [121]. De cualquier forma, es posible expresar el trabajo virtual tanto de momentos impuestos fijos como de momentos seguidores en cualquiera de las dos configuraciones.

### Momentos nodales

Las expresiones para las fuerzas y momentos nodales se obtienen utilizando las Eqs. (3.97) como:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{F}} &= \int_A \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) dA + \int_{\partial A} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) dS + \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{X}), \\
\bar{\mathbf{M}} &= \mathbf{T}^T \left( \int_A \tilde{\xi} \boldsymbol{\Lambda}^T \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) dA + \int_{\partial A} \tilde{\xi} \boldsymbol{\Lambda}^T \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) dS + \tilde{\xi} \boldsymbol{\Lambda}^T \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{X}) \right), \\
\vec{\mathbf{F}} &= \int_A \boldsymbol{\Lambda} \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) dA + \int_{\partial A} \boldsymbol{\Lambda} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) dS + \boldsymbol{\Lambda} \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{X}), \\
\vec{\mathbf{M}} &= \mathbf{T}^T \left( \int_A \tilde{\xi} \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{X}) dA + \int_{\partial A} \tilde{\xi} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) dS + \tilde{\xi} \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{X}) \right)
\end{aligned} \tag{3.106}$$

### Momentos concentrados

En algunos casos puede desearse imponer cargas externas como momentos concentrados; como se ha mencionado, el caso no es análogo a la aplicación de un par de fuerzas excéntricas. Supóngase que se desea aplicar un momento fijo  $\bar{\mathbf{m}}$ , el trabajo virtual de ese momento fijo (espacial) vendría dado por:

$$\delta W_e(\boldsymbol{\phi}, \delta \boldsymbol{\phi}) = \delta \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{m}} = \delta \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{T} \bar{\mathbf{m}} = \delta \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Lambda}^T \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{m}} = \delta \boldsymbol{\theta}^T \bar{\mathbf{M}} \tag{3.107}$$

Como  $\bar{\mathbf{M}}$  tiene componentes fijas, observando las expresiones de los momentos anteriores se ve que ese momento no puede ser reemplazado por un par de fuerzas actuantes sobre la sección.

### 3.3.5 Trabajo Virtual de las Fuerzas de Inercia

En la deducción del trabajo virtual de las fuerzas de inercia se utilizará un enfoque material; pues ofrece la ventaja de evitar el uso de la derivada de Lie. El trabajo virtual de las fuerzas de inercia de un continuo es:

$$\delta W_a = \int_{B_0} \rho_0 \delta \mathbf{x}^T \ddot{\mathbf{x}} dV, \tag{3.108}$$

donde  $\rho_0$  es la densidad del material,  $\mathbf{x}$  es la posición de un punto cualquiera y  $\ddot{\mathbf{x}}$  su aceleración. De ahora en adelante se utilizará el punto  $\dot{\phantom{x}}$  para indicar derivadas temporales.

Ahora bien, para continuar con la derivación es necesario encontrar las expresiones de la variación de la posición y de la aceleración en cualquier punto del continuo. Antes, se define el tensor de velocidad angular material  $\tilde{\Omega} \in T_{\Lambda}^m SO(3)$  angular como:

$$\tilde{\Omega} = \Lambda^T \dot{\Lambda}, \quad (3.109)$$

Se pueden también obtener las expresiones del vector de velocidad angular material  $\Omega \in T_{\Lambda}^m$  y el vector de aceleración angular material  $\dot{\Omega} \in T_{\Lambda}^m$  como función del vector de rotación y sus derivadas  $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta} \in T_I^m$  como:

$$\begin{aligned} \Omega &= T(\theta) \cdot \dot{\theta}, \\ \dot{\Omega} &= \dot{T}(\theta) \cdot \dot{\theta} + T(\theta) \cdot \ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (3.110)$$

Ahora, haciendo uso de las Eqs. (3.2) y (3.109) es sencillo encontrar la variación de la posición y la aceleración como:

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta x_0 + \delta \Lambda \xi = \delta x_0 + \Lambda \delta \tilde{\Theta} \xi, \\ \ddot{x} &= \ddot{x}_0 + \ddot{\Lambda} \xi = \ddot{x}_0 + \left( \Lambda \tilde{\Omega} \tilde{\Omega} + \Lambda \dot{\tilde{\Omega}} \right) \xi. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Es ahora posible inyectar las expresiones (3.111) en (3.108) y obtener:

$$\delta W_a = \int_{B_0} \rho_0 (\delta x_0 + \Lambda \delta \tilde{\Theta} \xi)^T \left[ \ddot{x}_0 + \left( \Lambda \tilde{\Omega} \tilde{\Omega} + \Lambda \dot{\tilde{\Omega}} \right) \xi \right] dV \quad (3.112)$$

De ahora en adelante se asumirá que el polo de la sección es coincidente con el centro de masa, esto permite obtener:

$$\int_A \xi dA = 0 \quad (3.113)$$

Es necesario notar que la asunción anterior es muy importante, pues tendrá una consecuencia directa en la elección del punto al cual referir las fuerzas aeroelásticas.

Integrando en la sección transversal de la viga se obtiene:

$$\delta W_a = \int_L m (\delta x_0^T \ddot{x}_0) + \delta \theta^T (J \dot{\Omega} + \tilde{\Omega} J \Omega) dx, \quad (3.114)$$

donde la masa seccional  $m$  y el tensor de inercia  $J$  han sido definidos como:

$$m = \int_A \rho_0 dA, \quad J = \int_A \rho_0 \tilde{\xi}^T \tilde{\xi} dA \quad (3.115)$$

Como se ve de la expresión anterior, el tensor de inercia es constante, lo cual es una característica bien conocida de las descripciones materiales [9, 57, 120].

Hasta ahora se ha deducido la expresión para el trabajo virtual de las fuerzas de inercia en función a las velocidades y aceleraciones angulares. Es posible reescribir la Eq. (3.114) en función a las variables cinemáticas rotacionales, la forma de la expresión resultante dependerá de la parametrización elegida para representar las rotaciones finitas. Como se pretende parametrizar la formulación con el vector de rotación total se puede inyectar (3.110) en (3.114) para obtener:

$$\delta W_a = \int_l \mathbf{m}(\delta \mathbf{x}_0^T \ddot{\mathbf{x}}_0) + \delta \boldsymbol{\theta}^T \left( \mathbf{T}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{T}} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{T}^T (\widetilde{\mathbf{T} \dot{\boldsymbol{\theta}}}) \mathbf{J} \mathbf{T} \dot{\boldsymbol{\theta}} \right) dx, \quad (3.116)$$

Así, se obtuvo la expresión final para el trabajo virtual de las fuerzas inerciales.

### 3.4 LINEALIZACIÓN DEL EQUILIBRIO

#### 3.4.1 Introducción

Las ecuaciones de equilibrio (3.62) son fuertemente no lineales y la obtención de una solución analítica es prácticamente imposible. La mayoría de los métodos de solución de ecuaciones no lineales que emergen de la dinámica estructural están basados en la linealización de las ecuaciones de equilibrio en un punto donde la solución es conocida y la corrección de una solución linealmente aproximada en la vecindad de ese punto. Dicha solución aproximada se obtiene por medio de la solución del sistema linealizado, el cual está formado por incrementos en la configuración, incrementos en la fuerza externa y matrices tangentes (las cuales son función de la configuración y de sus derivadas temporales).

La linealización de las ecuaciones variacionales de equilibrio se obtiene por derivación en la dirección de un incremento virtual en las variables en un punto donde la configuración de equilibrio es conocida. Es decir, la aproximación lineal del funcional  $\delta W(\boldsymbol{\phi}, \delta \boldsymbol{\phi})$  alrededor del estado  $(\boldsymbol{\phi}_0, \dot{\boldsymbol{\phi}}_0)$  es:

$$\mathcal{L}[\delta W(\boldsymbol{\phi}, \dot{\boldsymbol{\phi}}, \ddot{\boldsymbol{\phi}}; \delta \boldsymbol{\phi})] = \delta W_0 + \mathcal{D}_\phi \delta W \cdot \Delta \boldsymbol{\phi} + \mathcal{D}_{\dot{\phi}} \delta W \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{\phi}}, \quad (3.117)$$

donde  $\mathcal{D}_\phi$  es la derivada parcial de Fréchet respecto de  $\boldsymbol{\phi}$ , es decir:

$$\mathcal{D}_\phi \delta W(\boldsymbol{\phi}, \delta \boldsymbol{\phi}) \cdot \Delta \boldsymbol{\phi} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \delta W(\boldsymbol{\phi} + \epsilon \Delta \boldsymbol{\phi}), \quad (3.118)$$

siempre que el incremento  $\Delta \boldsymbol{\phi}$  satisfaga las condiciones de borde.

Debe notarse que en la Eq. (3.118), el primer término del lado derecho representará la fuerza no balanceada en la configuración  $\boldsymbol{\phi}_0$  y depende del punto base  $(\boldsymbol{\phi}_0, \dot{\boldsymbol{\phi}}_0)$  y del campo de aceleraciones  $\ddot{\boldsymbol{\phi}}$ .

### 3.4.2 Linealización del Trabajo Virtual Interno

Aplicando la definición (3.117) sobre la expresión del trabajo virtual de las fuerzas internas Eq. (3.84) se obtiene:

$$\mathcal{L}[\delta W_i(\boldsymbol{\phi}; \delta \boldsymbol{\phi})] = \delta W_i(\boldsymbol{\phi}_0; \delta \boldsymbol{\phi}) + \mathcal{D}_\phi \delta W_i(\boldsymbol{\phi}_0; \delta \boldsymbol{\phi}) \cdot \Delta \boldsymbol{\phi}, \quad (3.119)$$

donde:

$$\mathcal{D}_\phi \delta W_i(\boldsymbol{\phi}_0; \delta \boldsymbol{\phi}) \cdot \Delta \boldsymbol{\phi} = \int_L (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta \boldsymbol{S} + \Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{S}) dx \quad (3.120)$$

Quizás con abuso en la notación, se ha utilizado en la ecuación anterior el operador  $\Delta$  para indicar la linealización, de tal forma que:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{S} &= \mathcal{D}_\phi \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\phi}_0) \cdot \Delta \boldsymbol{\phi} \\ \Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathcal{D}_\phi \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}_0; \delta \boldsymbol{\phi}) \cdot \Delta \boldsymbol{\phi} \end{aligned} \quad (3.121)$$

Si se utiliza  $\Delta \boldsymbol{S} = \mathbb{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  se tiene que:

$$\mathcal{D}_\phi \delta W_i(\boldsymbol{\phi}_0; \delta \boldsymbol{\phi}) \cdot \Delta \boldsymbol{\phi} = \int_L (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{S}) dx \quad (3.122)$$

De la ecuación anterior puede verse que la linealización del trabajo virtual interno aporta dos términos a la matriz tangente, el primer término es la rigidez material y el segundo término la rigidez geométrica. Para derivar las expresiones de las matrices de rigidez material y geométrica se separan cada uno de los

términos y se opera como sigue. Utilizando la Eq. (3.78) se puede escribir el término de rigidez material como:

$$\mathcal{D}_\phi \delta W_i^M \cdot \Delta \phi = \int_L \delta \phi^T \mathbb{H}^T \mathbb{D} \mathbb{H} \Delta \phi \, dx. \quad (3.123)$$

Por otro lado, el término de rigidez geométrica

$$\mathcal{D}_\phi \delta W_i^G \cdot \Delta \phi = \int_L \Delta \delta \epsilon^T \mathbf{S} \, dx \quad (3.124)$$

requiere la obtención de la linealización de la deformación generalizada virtual, la cual puede verificarse es:

$$\Delta \delta \epsilon = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}'_0 \cdot \Delta \mathbf{u}'_0 \\ \delta \mathbf{u}'_0 \cdot \Delta \mathbf{e}'_3 + \delta \mathbf{e}'_3 \cdot \Delta \mathbf{u}'_0 + \mathbf{x}'_0 \cdot \Delta \delta \mathbf{e}'_3 \\ \delta \mathbf{u}'_0 \cdot \Delta \mathbf{e}'_2 + \delta \mathbf{e}'_2 \cdot \Delta \mathbf{u}'_0 + \mathbf{x}'_0 \cdot \Delta \delta \mathbf{e}'_2 \\ \delta \mathbf{u}'_0 \cdot \Delta \mathbf{e}_2 + \delta \mathbf{e}_2 \cdot \Delta \mathbf{u}'_0 + \mathbf{x}'_0 \cdot \Delta \delta \mathbf{e}_2 \\ \delta \mathbf{u}'_0 \cdot \Delta \mathbf{e}_3 + \delta \mathbf{e}_3 \cdot \Delta \mathbf{u}'_0 + \mathbf{x}'_0 \cdot \Delta \delta \mathbf{e}_3 \\ \delta \mathbf{e}'_2 \cdot \Delta \mathbf{e}_3 + \delta \mathbf{e}_3 \cdot \Delta \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}_3 \cdot \Delta \delta \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_2 \cdot \Delta \delta \mathbf{e}_3 \\ 2(\mathbf{e}'_2 \cdot \Delta \delta \mathbf{e}'_2 + \delta \mathbf{e}'_2 \cdot \Delta \mathbf{e}'_2) \\ 2(\mathbf{e}'_3 \cdot \Delta \delta \mathbf{e}'_3 + \delta \mathbf{e}'_3 \cdot \Delta \mathbf{e}'_3) \\ \delta \mathbf{e}'_2 \cdot \Delta \mathbf{e}'_3 + \delta \mathbf{e}'_3 \cdot \Delta \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3 \cdot \Delta \delta \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_2 \cdot \Delta \delta \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix}. \quad (3.125)$$

Para completar el desarrollo del término de rigidez geométrica se necesita encontrar la linealización del campo directores virtuales y sus derivadas, i.e.  $\Delta \delta \mathbf{e}_i$  y  $\Delta \delta \mathbf{e}'_i$ , lo cual requiere hacer explícita la relación entre el campo de directores y la configuración. Así, utilizando las expresiones (3.70) y (3.72) se encuentra que

$$\Delta \delta \mathbf{e}_i = (\Delta \mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\theta}) \times \mathbf{e}_i + (\mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\theta}) \times [(\mathbf{T}^T \Delta \boldsymbol{\theta}) \times \mathbf{e}_i], \quad (3.126)$$

y análogamente:

$$\begin{aligned}
\Delta \delta \mathbf{e}'_i &= \Delta(\delta \mathbf{T}^T \boldsymbol{\theta}' + \mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\theta}') \times \mathbf{e}_i + (\delta \mathbf{T}^T \boldsymbol{\theta}' + \mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\theta}') \times \Delta \mathbf{e}_i \\
&\quad + \Delta(\mathbf{T}^T \boldsymbol{\theta}') \times [(\mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\theta}') \times \mathbf{e}_i] + (\mathbf{T}^T \boldsymbol{\theta}') \\
&\quad \times \Delta[(\mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\theta}') \times \mathbf{e}_i] \\
&= [(\Delta \delta \mathbf{T}^T \boldsymbol{\theta}' + \delta \mathbf{T}^T \Delta \boldsymbol{\theta}') + (\Delta \mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\theta}' + \mathbf{T}^T \Delta \delta \boldsymbol{\theta}')] \\
&\quad \times \mathbf{e}_i + (\delta \mathbf{T}^T \boldsymbol{\theta}' + \mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\theta}') \times \Delta \mathbf{e}_i \\
&\quad + (\Delta \mathbf{T}^T \boldsymbol{\theta}' + \mathbf{T}^T \Delta \boldsymbol{\theta}') \times [(\mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\theta}') \times \mathbf{e}_i] + (\mathbf{T}^T \boldsymbol{\theta}') \\
&\quad \times [(\Delta \mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\theta}') \times \mathbf{e}_i + (\mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\theta}') \times \Delta \mathbf{e}_i]
\end{aligned} \tag{3.127}$$

Como puede claramente observarse de la expresión anterior, la linealización de la derivada del campo director virtual posee una expresión compleja, pues involucra la linealización del mapa tangencial y de su variación, i.e.  $\Delta \mathbf{T}$  y  $\Delta \delta \mathbf{T}$ .

Ahora bien, si con lo desarrollado se pretendiera encontrar una expresión para la rigidez geométrica se debería inyectar (3.126) y (3.127) en (3.125) y luego en la expresión de  $\delta W_i^G$  la expresión resultante sería al menos compleja y consecuentemente difícil de manipular, por lo que se pretende desarrollar un enfoque alternativo que permita obtener una expresión más sencilla para la rigidez. Tal simplificación estará basada en la interpolación del campo director para encontrar su derivada y será presentada en las secciones siguientes, donde además se presentará la forma explícita del operador tangente.

### 3.4.3 Linealización del Trabajo Virtual Inercial

La linealización del trabajo virtual de las fuerzas inerciales  $\delta W_a$  se realiza respecto a un cambio en la configuración  $\boldsymbol{\phi}$  y sus velocidades  $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ . Debe notarse que  $\delta W_a$  se encuentra ya expresado linealmente en las aceleraciones; ver Eq. (3.116). Así, la linealización de  $\delta W_a$  en un punto de estado  $(\boldsymbol{\phi}_0, \dot{\boldsymbol{\phi}}_0)$  tiene la forma:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[\delta W_a(\boldsymbol{\phi}, \dot{\boldsymbol{\phi}}, \ddot{\boldsymbol{\phi}}; \delta \boldsymbol{\phi})] \\
&= \delta W_a(\boldsymbol{\phi}_0, \dot{\boldsymbol{\phi}}_0, \ddot{\boldsymbol{\phi}}; \delta \boldsymbol{\phi}) + \mathcal{D}_{\boldsymbol{\phi}} \delta W_a \cdot \Delta \boldsymbol{\phi} + \mathcal{D}_{\dot{\boldsymbol{\phi}}} \delta W_a \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{\phi}},
\end{aligned} \tag{3.128}$$

donde:

$$\delta W_a(\boldsymbol{\phi}_0, \dot{\boldsymbol{\phi}}_0, \ddot{\boldsymbol{\phi}}; \delta \boldsymbol{\phi}) = \delta W_a(\boldsymbol{\phi}_0, \dot{\boldsymbol{\phi}}_0; \delta \boldsymbol{\phi}) + \int_L \delta \boldsymbol{\phi}^T \mathbb{M} \ddot{\boldsymbol{\phi}} dx, \tag{3.129}$$

$$\mathcal{D}_{\phi} \delta W_a \cdot \Delta \phi = \int_L \delta \phi^T \mathbb{K}_a \Delta \phi \, dx,$$

$$\mathcal{D}_{\dot{\phi}} \delta W_a \cdot \Delta \dot{\phi} = \int_L \delta \phi^T \mathbb{C}_a \Delta \dot{\phi} \, dx.$$

Puede verificarse sencillamente utilizando la Eq. (3.116) que:

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} \end{bmatrix}, \quad (3.130)$$

con  $\mathbf{m} = m \mathbf{I}$ , siendo  $\mathbf{I}$  la matriz identidad  $3 \times 3$ .

Entonces, puede concluirse que la linealización del trabajo virtual de las fuerzas de inercia en la dirección de  $\Delta \phi$  y  $\Delta \dot{\phi}$  da lugar a dos matrices, la matriz centrífuga  $\mathbb{K}_a$  y la matriz giroscópica  $\mathbb{C}_a$ , respectivamente. Para la mayoría de las aplicaciones puede considerarse que la contribución de los términos centrífugos y giroscópicos a la fuerza total del sistema es despreciable [57]. Así, despreciando dichos efectos, la linealización del trabajo virtual de las fuerzas de inercia da:

$$\mathcal{L}[\delta W_a(\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}; \delta \phi)] \cong \int_L \delta \phi^T \mathbb{M} \Delta \ddot{\phi} \, dx. \quad (3.131)$$

Siendo la matriz de masa  $\mathbb{M}$  es función no lineal de la configuración.

#### 3.4.4 Linealización de las Fuerzas Externas

La linealización del trabajo virtual de las fuerzas externas generalmente no es nula, y genera una matriz de rigidez de carga. Adoptando una descripción espacial y recordando (3.98) se tiene:

$$\delta W_e(\phi, \delta \phi) = \int_L \delta x_0^T (\bar{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{F}}) \, dV + \int_L \delta \theta^T (\bar{\mathbf{M}} + \vec{\mathbf{M}} + \bar{\bar{\mathbf{M}}}) \, dV, \quad (3.132)$$

donde  $\bar{\mathbf{F}}$  y  $\vec{\mathbf{F}}$  son fuerzas fijas y seguidoras respectivamente y  $\bar{\mathbf{M}}$ ,  $\vec{\mathbf{M}}$  y  $\bar{\bar{\mathbf{M}}}$  representan momentos fijos, seguidores y puntuales.

Ahora bien, asumiendo que los momentos pueden generarse tanto por fuerzas excéntricas como por torques puntuales y utilizando las expresiones desarrolladas en la sección 3.3.4 para el trabajo virtual de las fuerzas externas, la expresión anterior puede escribirse como:

$$\delta W_e = \int_L \delta \mathbf{x}_0^T (\bar{\mathbf{P}} + \Lambda \bar{\mathbf{P}}) dV + \int_L \delta \boldsymbol{\theta}^T (\mathbf{T}^T \tilde{\xi} \Lambda^T \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{T}^T \tilde{\xi} \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{T} \bar{\mathbf{m}}) dV \quad (3.133)$$

donde  $\bar{\mathbf{P}}$  y  $\tilde{\mathbf{P}}$  son componentes iniciales de fuerzas fijas y seguidoras y  $\bar{\mathbf{m}}$  representa a torques puntuales aplicados. Note que, por claridad, solo se han incluido las cargas puntuales; la extensión a las demás cargas externas es sencilla.

Asumiendo que las fuerzas externas no son disipativas, el trabajo virtual de las fuerzas externas es función de la configuración y no de sus velocidades; además tampoco lo es de las aceleraciones. Así, la linealización del trabajo virtual de las fuerzas externas en un punto  $\boldsymbol{\phi}_0$  en la dirección  $\Delta \boldsymbol{\phi}$  puede obtenerse como:

$$\mathcal{L}[\delta W_e(\boldsymbol{\phi}; \delta \boldsymbol{\phi})] = \delta W_e(\boldsymbol{\phi}_0; \delta \boldsymbol{\phi}) + \mathcal{D}_{\boldsymbol{\phi}} \delta W_e \cdot \Delta \boldsymbol{\phi}. \quad (3.134)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\boldsymbol{\phi}} \delta W_e(\boldsymbol{\phi}; \delta \boldsymbol{\phi}) \cdot \Delta \boldsymbol{\phi} &= \int_L \delta \mathbf{x}_0^T \Delta(\Lambda \bar{\mathbf{P}}) dx \\ &+ \int_L \delta \boldsymbol{\theta}^T (\Delta \mathbf{T}^T \tilde{\xi} \Lambda^T \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{T}^T \tilde{\xi} \Delta \Lambda^T \bar{\mathbf{P}} + \Delta \mathbf{T}^T \tilde{\xi} \bar{\mathbf{P}} + \Delta \mathbf{T} \bar{\mathbf{m}}) dx \end{aligned} \quad (3.135)$$

Es posible escribir la expresión anterior como:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\boldsymbol{\phi}} \delta W_e(\boldsymbol{\phi}; \delta \boldsymbol{\phi}) \cdot \Delta \boldsymbol{\phi} &= \int_L \delta \boldsymbol{\phi}^T \mathbb{L} \Delta \boldsymbol{\phi} dx, \\ \mathbb{L} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\varepsilon}_A(\bar{\mathbf{P}}) \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\varepsilon}_{T^T}(\tilde{\xi} \Lambda^T \bar{\mathbf{P}}) + \mathbf{T}^T \tilde{\xi} \boldsymbol{\varepsilon}_{\Lambda^T}(\bar{\mathbf{P}}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{T^T}(\tilde{\xi} \bar{\mathbf{P}}) + \boldsymbol{\varepsilon}_T(\bar{\mathbf{m}}) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.136)$$

siendo  $\boldsymbol{\varepsilon}$  un operador tal que para una matriz  $\mathbf{A}$  y un vector  $\mathbf{b}$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_A(\mathbf{b}) = \mathcal{D}_{\boldsymbol{\theta}} [\mathbf{A}(\mathbf{b})] \cdot \Delta \boldsymbol{\theta} \quad (3.137)$$

Como puede verse, existen términos de linealización para todas las cargas externas salvo para las fuerzas no excéntricas fijas. Exceptuando este caso, todos los demás estados de carga son no conservativos y generan aportes a la rigidez global. Es importante también notar que para el caso de carga distribuida, en la expresión anterior  $\mathbf{T}$  es evaluado en el punto de integración y no en los nodos.

### 3.5 EL ELEMENTO FINITO SCB

En esta sección se presentan los detalles referidos a la discretización de la formulación de la viga geoméricamente exacta por medio del método de elementos finitos. La formulación del elemento finito estará basada en la interpolación lineal de la configuración y la integración numérica de 1 punto de las ecuaciones de equilibrio. Al elemento finito se lo llamará: elemento SCB. El elemento tendrá como característica fundamental la obtención de las derivadas del campo de director por medio de interpolación lineal. Para esto, cada elemento será dotado de dos triadas nodales, las cuales serán utilizadas para parametrizar las ecuaciones de movimiento.

#### 3.5.1 Actualización del campo director

Antes de comenzar con el desarrollo de las expresiones clásicas del método de elementos finitos es sumamente importante definir el tipo de actualización del campo director y sus derivadas que va a utilizarse en la implementación computacional. Existen diferentes formas de actualizar y discretizar el campo director, aunque sólo algunas de ellas han sido aplicadas en la práctica, de hecho solo unas pocas formulaciones basadas en directores han sido reportadas [13, 14, 22-24].

En función del tipo de actualización de la configuración que se adopte y de la variable utilizada para parametrizar la rotación finita se definen generalmente tres tipos de formulaciones: Eulerianas (EU), Lagrangianas Totales (TL) y Lagrangianas Actualizadas (UL). La formulación Euleriana adopta actualizaciones iterativas de la configuración de referencia y parametriza las rotaciones con el spin espacial, la formulación Lagrangiana Total mantiene la configuración de referencia fija y parametriza las rotaciones con el vector de rotación total y la formulación Lagrangiana Total actualiza la configuración de referencia incrementalmente y parametriza las rotaciones con el vector de rotación incremental [9].

Si bien dicha clasificación es globalmente aceptada, cuando se formula una teoría de vigas en base a la parametrización de las ecuaciones de movimiento con el campo director se generan dentro de cada una de las formulaciones diferentes alternativas de actualización y parametrización. Por ejemplo, una formulación

Euleriana podría actualizar spins nodales o bien spins en el punto de integración, y a su vez cada una de dichas alternativas podría a su vez adoptar una actualización iterativa o incremental de directores nodales o de punto de integración; similares alternativas surgen con las formulaciones restantes.

Durante el desarrollo del presente trabajo han sido desarrolladas y publicadas tres formulaciones basadas en la parametrización de las ecuaciones de movimiento con vectores directores: i) una formulación Euleriana basada en la parametrización de rotaciones con el spin espacial y la actualización iterativa de directores en el punto de integración [43], ii) una formulación Lagrangiana Total basada en la parametrización de las rotaciones con el vector de rotación total y la actualización iterativa de directores nodales, manteniendo una configuración de referencia fija [49] y iii) una formulación Lagrangiana Actualizada basada en la parametrización de las rotaciones con el vector de rotación incremental y la actualización iterativa de directores nodales, actualizando la configuración de referencia incrementalmente [50].

Cada una de las formulaciones mencionadas tiene sus ventajas y desventajas, y su elección en general depende del problema a estudiar; se presenta a continuación una breve descripción de los aspectos fundamentales de las formulaciones desarrolladas y luego se define el criterio de elección en función a sus ventajas en la modelación de un aerogenerador.

### Formulación Euleriana

La formulación Euleriana desarrollada está basada en la parametrización de la rotación finita con el spin espacial y la actualización iterativa de directores en el punto de integración [43]; la Figura 3.5 muestra una descripción elemental del elemento finito Euleriano.

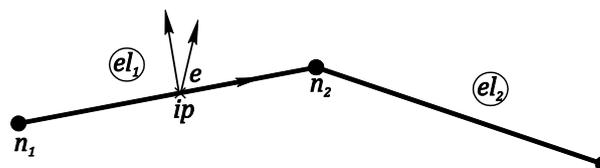


Figura 3.5 - Elemento finito Euleriano

La formulación propone, conociendo el director en la iteración  $n$ , encontrar el director para la siguiente iteración como:

$$\mathbf{e}_i^{n+1} = \mathbf{\Lambda}(\Delta\mathbf{w}_{ip}) \mathbf{e}_i^n, \quad (3.138)$$

siendo  $n$  el contador de iteraciones y  $\mathbf{\Lambda}(\Delta\mathbf{w}_{ip})$  es el tensor de rotaciones en el punto de integración correspondiente al incremento iterativo del spin espacial. Dicho incremento debe obtenerse en el punto de integración, pues las ternas actualizadas se ubican en tal punto, por lo que se asume que:

$$\Delta\mathbf{w}_{ip} = \sum_{j=1}^{nn} N_j \Delta\hat{\mathbf{w}}_j. \quad (3.139)$$

Además, la derivada del campo director puede encontrarse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_i{}^{n+1} &= \mathbf{\Lambda}'(\Delta\mathbf{w}) \mathbf{e}_i^n + \mathbf{\Lambda}(\Delta\mathbf{w}) \mathbf{e}'_i{}^n \\ &= \mathbf{\Lambda}'(\Delta\mathbf{w}) \mathbf{\Lambda}^T(\Delta\mathbf{w}) \mathbf{e}_i^{n+1} + \mathbf{\Lambda}(\Delta\mathbf{w}) \mathbf{e}'_i{}^n \end{aligned} \quad (3.140)$$

El procedimiento anterior ha sido satisfactoriamente implementado en casos estáticos [43]; la formulación es muy económica computacionalmente pues la linealización no consistente genera una matriz tangente muy simple (aunque no simétrica) y la implementación requiere sólo una tríada directora por elemento.

Si bien como se dijo la formulación es muy efectiva, la utilización de la Eq. (3.139) implica la pérdida de las propiedades de invariancia del marco de referencia y de independencia del camino de integración [122], lo cual reduce en gran medida la aplicabilidad de la formulación.

Es interesante mencionar que un enfoque similar ha sido también propuesto por Armero y Romero [23, 24]. En dicho trabajo se ha utilizado la transformación de Cayley para obtener la matriz de rotación, estableciendo a los directores como variables nodales. Dicho trabajo dice haber evitado así el uso de rotaciones como variables cinemáticas, obteniendo una formulación invariante, independiente del camino de integración y con matrices tangentes consistentes. Claramente la consistencia de las matrices tangentes de un problema elástico conservativo exige su simetría, por lo cual es cuestionable lo mencionado en dicho trabajo respecto de la consistencia de los operadores. Aparentemente la falta de simetría de los

operadores obtenidos se debe a la linealización inconsistente del campo de directores virtuales. En esta dirección, en las secciones siguientes se muestra que, si se pretende obtener operadores tangentes consistentes, necesariamente debe recurrirse a la interpolación de rotaciones.

### Formulación Lagrangiana Total

Como se mencionó en la sección 3.3.1 la formulación Lagrangiana Total está basada en la parametrización de la rotación finita con el vector de rotación. Se utilizará una actualización iterativa del campo director y, con el objetivo de simplificar la obtención de sus derivadas, se colorarán triadas directoras nodales tal como se indica gráficamente en la Figura 6.8. Así, cada elemento tendrá dos triadas (una por nodo) y de esta manera la derivada del campo director dentro del elemento podrá obtenerse por interpolación. De esta forma se simplificará no solo la obtención de dichas derivadas sino también su variación, su incremento y la variación de su incremento.

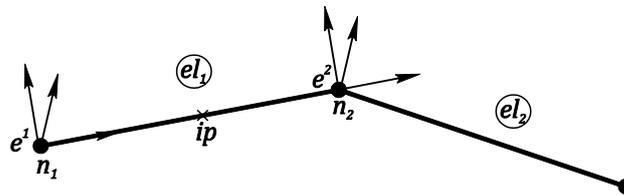


Figura 3.6 - Elemento finito Lagrangiano

Entonces, la actualización del campo director se realiza a nivel nodal como:

$$\hat{e}_i^{t+1} = \Lambda(\theta) \hat{E}_i, \quad (3.141)$$

donde  $\hat{e}_i^{t+1}$  es el vector  $i$  de la triada directora en el tiempo  $t + 1$ ,  $\hat{E}_i$  es el vector  $i$  de la triada directora en el tiempo 0 y  $\Lambda(\theta)$  es la matriz de rotación total. Ahora, la ubicación de ternas nodales nos da la posibilidad de aproximar la derivada del campo director como:

$$e_i'^{n+1} \cong \sum_{j=1}^2 N_j' \hat{e}_i^{j n+1}. \quad (3.142)$$

Muy claro queda que la expresión anterior representa una gran diferencia en comparación con la expresión análoga del enfoque Euleriano obtenida en la Eq. (3.140).

### Formulación Lagrangiana Actualizada

La formulación Lagrangiana Actualizada generalmente se entiende como un caso particular de formulación Lagrangiana, en la cual la configuración de referencia se actualiza periódicamente. Dicha actualización generalmente coincide con la configuración de equilibrio más cercana conocida, aunque diferentes alternativas de actualización pueden utilizarse.

Las formulaciones de vigas geoméricamente exactas con actualización de la configuración de referencia tienen una ventaja muy importante con respecto a las formulaciones sin actualización de la configuración de referencia; esta ventaja es la capacidad de evitar la indeterminación que la transformación tangencial presenta en las vecindades de  $\theta = n2\pi$  [9, 12, 57]. Para el análisis de mecanismos es imprescindible que no exista limitación sobre la magnitud de las rotaciones que puedan tratarse, y si bien las formulaciones Lagrangianas Totales pueden modificarse mediante técnicas de *switching* para sobrepasar la limitación [9, 120], la formulación Lagrangiana Actualizada resuelve el problema prácticamente sin reformular el elemento finito Lagrangiano Total.

Para el desarrollo de la formulación Lagrangiana Actualizada se propone la siguiente actualización:

$$\hat{\mathbf{e}}_i^{t+1} = \mathbf{A}_\Delta \hat{\mathbf{e}}_i^t, \quad (3.143)$$

siendo la matriz de rotación incremental  $\mathbf{A}_\Delta = \exp(\Delta\theta)$ . Por otro lado, la transformación tangencial debe cambiar el punto base de  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{A}_r$ , siendo  $\mathbf{A}_r$  la ubicación rotacional de referencia. De esta forma:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\Delta\theta) = \mathbf{T}_\Delta, \quad (3.144)$$

Nótese también que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_r \mathbf{A}_\Delta, \quad (3.145)$$

Considerando lo expuesto anteriormente, puede concluirse que la formulación Lagrangiana Actualizada es más atractiva que sus contrapartes Euleriana y Lagrangiana Total. Por esto, los conceptos fundamentales de la formulación de elementos finitos que se desarrollarán a continuación estarán basados en un enfoque Lagrangiano Actualizado, en el cual se asume que se actualizará la configuración de referencia luego de lograr la convergencia de las ecuaciones de equilibrio, o lo que es lo mismo: en cada paso de tiempo.

### 3.5.2 Interpolación

Siguiendo el procedimiento estándar de una formulación isoparamétrica, se interpolan los vectores posición en las configuraciones deformada e indeformada como:

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{nn} N_j \hat{\mathbf{X}}_j, \quad \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{nn} N_j (\hat{\mathbf{X}}_j + \hat{\mathbf{u}}_j), \quad (3.146)$$

donde  $N_j$  son funciones de forma lineales, el énfasis  $\hat{\phantom{x}}$  distingue variables nodales,  $j$  es el índice nodal y  $nn$  es el número de nodos por elemento. Se definen además las siguientes matrices de funciones de forma:

$$\mathbf{N}_j = \begin{bmatrix} N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_j \end{bmatrix}, \quad \mathbb{N}_j = \begin{bmatrix} N_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_j \end{bmatrix}. \quad (3.147)$$

Ahora, se aplica la misma interpolación a las variables cinemáticas que representan la configuración  $\boldsymbol{\phi}$ , por lo que su forma discreta, su derivada y su variación se obtienen como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi} &\cong \sum_{j=1}^{nn} N_j \hat{\boldsymbol{\phi}}_j, & \boldsymbol{\phi}' &\cong \sum_{j=1}^{nn} N_j' \hat{\boldsymbol{\phi}}_j, \\ \delta \boldsymbol{\phi} &\cong \sum_{j=1}^{nn} N_j \delta \hat{\boldsymbol{\phi}}_j, & \delta \boldsymbol{\phi}' &\cong \sum_{j=1}^{nn} N_j' \delta \hat{\boldsymbol{\phi}}_j. \end{aligned} \quad (3.148)$$

Usualmente se utilizará la forma matricial para las expresiones anteriores implicando la sumatoria desde 1 hasta  $nn$ ; es decir que, por ejemplo:

$$\boldsymbol{\phi} \cong \mathbb{N}_j \widehat{\boldsymbol{\phi}}_j, \quad (3.149)$$

### 3.5.3 Variación del Campo Director

Sin perjuicio de la aplicabilidad de la teoría a la modelación del mecanismo que represente el generador eólico, se asumirá que las restricciones son holonómicas; de esta manera es posible la obtención de la variación del campo director intercambiando el orden entre las operaciones de variación y derivada, es decir:

$$\delta(\mathbf{e}'_i) = (\delta\mathbf{e}_i)'. \quad (3.150)$$

Utilizando la igualdad anterior es posible obtener la variación del campo director y su derivada dentro del elemento como:

$$\delta\mathbf{e}_i \cong \sum_{j=1}^{nn} N_j \delta\widehat{\mathbf{e}}_i^j, \quad \delta\mathbf{e}'_i \cong \sum_{j=1}^{nn} N'_j \delta\widehat{\mathbf{e}}_i^j. \quad (3.151)$$

Ahora bien, la obtención de las expresiones para la linealización del campo director virtual y su derivada es más trabajosa pues requiere de la linealización de la transformación tangencial. Es clave observar que la linealización de la variación del campo director siempre aparece pre multiplicada escalarmente por algún vector constante  $\mathbf{a}$ ; así, utilizando la Eq. (3.126) se tiene que:

$$\mathbf{a} \cdot \Delta\delta\mathbf{e}_i = \mathbf{a} \cdot \{(\Delta\mathbf{T}^T \delta\boldsymbol{\theta}) \times \mathbf{e}_i + (\mathbf{T}^T \delta\boldsymbol{\theta}) \times [(\mathbf{T}^T \Delta\boldsymbol{\theta}) \times \mathbf{e}_i]\} \quad (3.152)$$

Reordenando algunos términos es posible escribir la expresión anterior en forma matricial como:

$$\mathbf{a} \cdot \Delta\delta\mathbf{e}_i = \delta\boldsymbol{\theta}^T \Delta[\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{e}}_i \mathbf{a})] + \delta\mathbf{w}^T (\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{e}}_i) \Delta\mathbf{w} \quad (3.153)$$

Utilizando la notación definida en la Eq. (3.137) se reescribe nuevamente la ecuación anterior como:

$$\mathbf{a} \cdot \Delta\delta\mathbf{e}_i = \delta\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Xi}_T(\tilde{\mathbf{e}}_i \mathbf{a}) + \delta\mathbf{w}^T (\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{e}}_i) \Delta\mathbf{w}, \quad (3.154)$$

donde  $\tilde{\mathbf{e}}_i^j$  es la matriz antisimétrica o spinor del vector director  $i$  en el nodo  $j$ . La linealización del término  $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{e}}_i \mathbf{a})$  en la dirección de  $\Delta\boldsymbol{\theta}$ , i.e.  $\boldsymbol{\Xi}_T(\tilde{\mathbf{e}}_i \mathbf{a})$ , da [26, 31]:

$$\mathbf{E}_T(\tilde{\mathbf{e}}_i \mathbf{a}) = \{c_1 \mathbf{a} \otimes \boldsymbol{\theta} - c_2 (\tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{a}) \otimes \boldsymbol{\theta} + c_3 (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{a}) \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} - c_4 \tilde{\mathbf{a}} + c_5 \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{a} \mathbf{I} + \boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{a} \cdot \Delta \boldsymbol{\theta}\} \quad (3.155)$$

Siendo  $\theta = \|\boldsymbol{\theta}\|$  y:

$$c_1 = \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^3}, \quad c_2 = \frac{\theta \sin \theta + 2 \cos \theta - 2}{\theta^4}, \quad (3.156)$$

$$c_3 = \frac{3 \sin \theta - 2\theta - \theta \cos \theta}{\theta^5}, \quad c_4 = \frac{\cos \theta - 1}{\theta^2}, \quad c_5 = \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3}$$

Ahora, utilizando la Eq. (3.67) es posible escribir la forma discreta de la Eq. (3.154) como:

$$\mathbf{a} \cdot \Delta \delta \mathbf{e}_i \cong \delta \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \left[ \sum_{j=1}^{nn} N_j \left[ \mathbf{E}_{T_j}(\tilde{\mathbf{e}}_i^j \mathbf{a}) + \mathbf{T}_j \tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{e}}_i^j \mathbf{T}_j^T \right] \right] \Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.157)$$

NOTA: Es importante mencionar que mientras existe una matriz  $\mathbf{E}_{T_j}$  por cada nodo del elemento, el vector  $\mathbf{a}$  es un vector interpolado; el cual, para el caso de elementos con 2 nodos, resulta ser constante en el elemento. Además, debe darse importante atención al hecho de que el término  $\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{e}}_i \mathbf{a})$  es quien debe linealizarse, y no simplemente  $\mathbf{T}\tilde{\mathbf{e}}_i$ .

### 3.5.4 Deformaciones Virtuales Discretas

Habiendo derivado las expresiones del campo director virtual discreto, sus derivadas y su correspondiente linealización, es ahora posible encontrar una expresión para las deformaciones generalizadas virtuales discretas y su linealización.

En la Eq. (3.79) ha sido definida la variable intermedia:

$$\delta \boldsymbol{\phi} = [\delta \mathbf{u}'_0 \quad \delta \boldsymbol{\theta} \quad \delta \mathbf{e}_2 \quad \delta \mathbf{e}_3 \quad \delta \mathbf{e}'_2 \quad \delta \mathbf{e}'_3]^T, \quad (3.158)$$

pero hasta aquí no se ha presentado su relación con la variable cinemática  $\delta \boldsymbol{\phi} = [\delta \mathbf{u}_0 \quad \delta \boldsymbol{\theta}]^T$ . Utilizando las Eqs. (3.146), (3.151) y (3.71) es posible encontrar que la variación de la variable cinemática intermedia dentro del

elemento puede expresarse como función de las variables cinemáticas virtuales en los nodos del elemento  $\delta\hat{\boldsymbol{\phi}}_j$  como:

$$\delta\boldsymbol{\varphi} \cong \sum_{j=1}^{nn} \mathbb{B}_j \delta\hat{\boldsymbol{\phi}}_j, \quad (3.159)$$

siendo:

$$\mathbb{B}_j = \begin{bmatrix} N'_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_j \\ \mathbf{0} & N_j \tilde{\boldsymbol{e}}_2^{jT} \boldsymbol{T}_j^T \\ \mathbf{0} & N_j \tilde{\boldsymbol{e}}_3^{jT} \boldsymbol{T}_j^T \\ \mathbf{0} & N'_j \tilde{\boldsymbol{e}}_2^{jT} \boldsymbol{T}_j^T \\ \mathbf{0} & N'_j \tilde{\boldsymbol{e}}_3^{jT} \boldsymbol{T}_j^T \end{bmatrix}, \quad \delta\hat{\boldsymbol{\phi}}_j = \begin{bmatrix} \delta\hat{\boldsymbol{u}}_{0j} \\ \delta\hat{\boldsymbol{\theta}}_j \end{bmatrix}. \quad (3.160)$$

donde  $\tilde{\phantom{x}}$  indica la matriz antisimétrica de un vector y  $\hat{\phantom{x}}$  indica variables nodales. Así,  $\tilde{\boldsymbol{e}}_j^i$  es la representación matricial antisimétrica del vector director del nodo  $j$  en la dirección  $i$  y  $\boldsymbol{T}_j^T$  es la matriz traspuesta de la transformación tangencial en el nodo  $j$ . De ahora en adelante se asumirá implícitamente la sumatoria sobre el índice  $j$ .

Por último, recordando la Eq. (3.79) es sencillo escribir la expresión para las deformaciones virtuales generalizadas como:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} \cong \mathbb{H} \mathbb{B}_j \delta\hat{\boldsymbol{\phi}}_j. \quad (3.161)$$

Ahora bien, la forma discreta del incremento de las deformaciones generalizadas virtuales, i.e.  $\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ , es un poco mas trabajosa de obtener. Si se revisa la estructura del término de rigidez geométrica de la Eq. (3.124) puede verse que es posible obtener una matriz  $\mathbb{G}$  tal que satisfaga la siguiente igualdad:

$$\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{S} = \delta\boldsymbol{\varphi}^T \mathbb{G} \Delta\boldsymbol{\varphi}. \quad (3.162)$$

Luego de una larga manipulación algebraica, y utilizando las Eqs. (3.125) y (3.157), conjuntamente con la expresión desarrollada para los esfuerzos viga generalizado, i.e. la Eq. (3.88), puede obtenerse:

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} S_1 & \mathbf{0} & Q_2 & Q_3 & M_3 & M_2 \\ & A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{0} & M_1 & \mathbf{0} \\ Sym & & & & 2P_2 & P_{23} \\ & & & & & 2P_3 \end{bmatrix}. \quad (3.163)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \sum_{j=1}^2 \{ & (M_2 N_j' + Q_3 N_j) [\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{e}}_3^j \mathbf{x}'_0) + \mathbf{T}_j \tilde{\mathbf{x}}'_0 \tilde{\mathbf{e}}_3^j \mathbf{T}_j^T] \\ & + (M_3 N_j' + Q_2 N_j) [\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{e}}_2^j \mathbf{x}'_0) + \mathbf{T}_j \tilde{\mathbf{x}}'_0 \tilde{\mathbf{e}}_2^j \mathbf{T}_j^T] \\ & + T [N_j' [\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{e}}_2^j \mathbf{e}_3) + \mathbf{T}_j \tilde{\mathbf{e}}_3 \tilde{\mathbf{e}}_2^j \mathbf{T}_j^T] \\ & + N_j [\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{e}}_3^j \mathbf{e}'_2) + \mathbf{T}_j \tilde{\mathbf{e}}_2 \tilde{\mathbf{e}}_3^j \mathbf{T}_j^T]] \\ & + P_2 N_j' [\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{e}}_2^j \mathbf{e}'_2) + \mathbf{T}_j \tilde{\mathbf{e}}_2 \tilde{\mathbf{e}}_2^j \mathbf{T}_j^T] \\ & + P_3 N_j' [\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{e}}_3^j \mathbf{e}'_3) + \mathbf{T}_j \tilde{\mathbf{e}}_3 \tilde{\mathbf{e}}_3^j \mathbf{T}_j^T] \\ & + P_{23} [N_j' [\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{e}}_2^j \mathbf{e}'_3) + \mathbf{T}_j \tilde{\mathbf{e}}_3 \tilde{\mathbf{e}}_2^j \mathbf{T}_j^T] \\ & + N_j' [\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{e}}_3^j \mathbf{e}'_2) + \mathbf{T}_j \tilde{\mathbf{e}}_2 \tilde{\mathbf{e}}_3^j \mathbf{T}_j^T]]] \} \end{aligned} \quad (3.164)$$

Debe notarse que  $\mathbf{A}$  resulta ser simétrica y como consecuencia  $\mathbb{G}$  es también simétrica; y aunque no es estrictamente una condición necesaria, la simetría de  $\mathbb{G}$  garantiza la simetría de la matriz de rigidez geométrica.

NOTA: Es importante citar que la forma propuesta para obtener la derivada del campo director entrega una aproximación de primer orden. Para el caso de integración numérica de 1 punto, el vector  $\mathbf{e}'_i$  es evaluado en el centro del elemento, y por lo tanto:

$$\mathbf{e}'_i \cong \frac{(\hat{\mathbf{e}}_i^1 + \hat{\mathbf{e}}_i^2)}{L_e}. \quad (3.165)$$

Esto es,  $\mathbf{e}'_i$  es constante dentro del elemento. Sí se observan las expresiones de las matrices  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{B}_j$  puede verse que la matriz  $\mathbb{H}$  es una matriz evaluada en el punto de integración mientras que la matriz  $\mathbb{B}_j$  es una matriz nodal; esto va en contraposición con lo que generalmente se encuentra en formulaciones geoméricamente exactas donde todas las matrices son evaluadas en el punto de integración y las únicas variables nodales son las cinemáticas. Por ejemplo, si se observa la expresión de  $\mathbb{B}_j$  en la Eq. (3.160) se comprueba que  $\mathbf{T}'_j$  es la transformación tangencial evaluada en el nodo  $j$ , mientras que para el cálculo de los vectores contenidos en  $\mathbb{H}$  (Eq. (3.79)) se utiliza la transformación tangencial evaluada en el punto de integración, i.e.  $\mathbf{T}'(\Delta\boldsymbol{\theta})$ . Debe notarse además que la interpolación de directores evita la necesidad de obtener la segunda variación de la transformación tangencial, pues de lo contrario la expresión para la linealización de la derivada de un director virtual sería:

$$\begin{aligned}\Delta\delta\mathbf{e}'_i &= \Delta\left((\delta\mathbf{T}'\boldsymbol{\theta}' + \mathbf{T}'\delta\boldsymbol{\theta}') \times \mathbf{e}_i + (\mathbf{T}'\boldsymbol{\theta}') \times ((\mathbf{T}'\delta\boldsymbol{\theta}') \times \mathbf{e}_i)\right) \\ &= \Delta(\delta\mathbf{T}'\boldsymbol{\theta}' + \mathbf{T}'\delta\boldsymbol{\theta}') \times \mathbf{e}_i + (\delta\mathbf{T}'\boldsymbol{\theta}' + \mathbf{T}'\delta\boldsymbol{\theta}') \times \Delta\mathbf{e}_i + \Delta(\mathbf{T}'\boldsymbol{\theta}') \\ &\quad \times ((\mathbf{T}'\delta\boldsymbol{\theta}') \times \mathbf{e}_i) + (\mathbf{T}'\boldsymbol{\theta}') \times \Delta((\mathbf{T}'\delta\boldsymbol{\theta}') \times \mathbf{e}_i)\end{aligned}\quad (3.166)$$

Es bastante claro que el desarrollo de dicha expresión y su posterior inserción en el trabajo virtual interno conducirían a expresiones para las matrices tangentes difíciles de tratar, por decir poco.

### 3.5.5 Objetividad de las Deformaciones Generalizadas

Diversos trabajos han sido avocados a demostrar la preservación de la objetividad de las mediciones de deformación utilizadas en formulaciones de vigas en su versión discreta [16, 20-25, 27]. Los trabajos de Crisfield y Jelenic [16, 20] concluyeron que las formulaciones de elementos finitos de vigas geoméricamente exactas que hayan sido parametrizadas con: spins iterativos, vectores de rotación incrementales o vectores de rotación totales no satisfacen la objetividad de la forma discreta de sus mediciones de deformación. No obstante, recientemente Mäkinen [120] mostró que dichas conclusiones sobre la objetividad de la forma discreta de las mediciones de deformación de formulaciones parametrizadas con el

vector total de rotación y con el vector incremental de rotación son incorrectas. Los errores en las conclusiones vertidas en [16, 20] sobre las formulaciones Lagrangiana Total y Lagrangiana Actualizada surgen del hecho de haber asumido que la interpolación lineal preserva una transformación de observador, lo cual se demuestra en [120] que no es correcto.

En virtud del deseo de obtener una formulación donde las mediciones discretas de deformación sean objetivas, algunos trabajos han presentado formulaciones que ganan dicha propiedad evitando la interpolación de rotaciones [22-24], y parametrizando las ecuaciones de movimiento con vectores directores (lo cual permite obtener las formas discretas de las deformaciones vía interpolación de directores). Aunque las mediciones de deformación en su forma discreta derivadas en dichos trabajos preservan la propiedad de objetividad, la linealización de los vectores directores virtuales no ha sido realizada de forma consistente y como consecuencia la matriz tangente pierde su propiedad de simetría, implicando la pérdida de convergencia cuadrática.

El enfoque presentado en este trabajo soluciona dicho problema mediante la parametrización de las rotaciones finitas con el vector de rotación y la linealización consistente de los spins. Como se ha mencionado anteriormente, la sub-parametrización de las ecuaciones de movimiento con el campo director interpolado simplifica considerablemente las expresiones de las matrices tangentes. Si bien lo anterior es muy beneficioso, puede verse de la expresión (3.160) que la matriz  $\mathbb{B}_j$  debe necesariamente contener la interpolación del vector de rotación. Por lo tanto, y en contraposición con lo concluido en trabajos que han presentado formulaciones parametrizadas con campos directores [13, 22-24, 43], se puede afirmar que *la matriz tangente de una formulación consistente de vigas geoméricamente exactas contendrá necesariamente términos correspondientes a la interpolación de vectores de rotación.*

El objetivo de esta sección es probar la objetividad de las deformaciones generalizadas discretas, para ello se procede superponiendo un movimiento de cuerpo rígido a la configuración y se comprueba luego la invariancia de las deformaciones. Un movimiento de cuerpo rígido modifica la configuración de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}_0^* = \mathbf{c} + \mathbf{Q} \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{e}_i^* = \mathbf{Q} \mathbf{e}_i \quad (3.167)$$

donde  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  y  $\mathbf{Q} \in \text{SO}(3)$ . Si, por simplicidad, se asume igual a cero la deformación inicial, se aplican las transformaciones anteriores a la Eq. (3.13) y se considera su efecto sobre, por ejemplo,  $\kappa_2$  se tiene:

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{e}'_3 \\ &= \left( \sum_{j=1}^{nn} N'_j \mathbf{x}_0^j \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^{nn} N'_j \hat{\mathbf{e}}_3^j \right) \\ \kappa_2^* &= \left[ \mathbf{c} + \mathbf{Q} \left( \sum_{j=1}^{nn} N_j \mathbf{x}_0^j \right) \right]' \cdot \left[ \mathbf{Q} \left( \sum_{j=1}^{nn} N_j \hat{\mathbf{e}}_3^j \right) \right]' \\ &= \left[ \mathbf{c}' + \mathbf{Q}' \left( \sum_{j=1}^{nn} N_j \mathbf{x}_0^j \right) + \mathbf{Q} \left( \sum_{j=1}^{nn} N'_j \mathbf{x}_0^j \right) \right] \\ &\quad \cdot \left( \mathbf{Q}' \sum_{j=1}^{nn} N_j \hat{\mathbf{e}}_3^j + \mathbf{Q} \sum_{j=1}^{nn} N'_j \hat{\mathbf{e}}_3^j \right), \end{aligned} \quad (3.168)$$

donde  $\kappa_2^*$  indica la deformación transformada. Ahora bien, como el movimiento de cuerpo rígido es constante se tiene que  $\mathbf{c}' = \mathbf{Q}' = \mathbf{0}$ , por lo que:

$$\begin{aligned} \kappa_2^* &= \mathbf{Q} \left( \sum_{j=1}^{nn} N'_j \mathbf{x}_0^j \right) \cdot \left( \mathbf{Q} \sum_{j=1}^{nn} N'_j \hat{\mathbf{e}}_3^j \right) \\ &= \left( \sum_{j=1}^{nn} N'_j \mathbf{x}_0^j \right) \cdot \left( \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \sum_{j=1}^{nn} N'_j \hat{\mathbf{e}}_3^j \right) \end{aligned} \quad (3.169)$$

Ahora, la propiedad de ortogonalidad de la rotación superpuesta da:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad (3.170)$$

lo cual observando la Eq. (3.168) permite concluir que:

$$\kappa_2^* = \kappa_2 = \left( \sum_{j=1}^{nn} N'_j \mathbf{x}_0^j \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^{nn} N'_j \hat{\mathbf{e}}_3^j \right) \quad (3.171)$$

Se concluye entonces que las deformaciones generalizadas no son afectadas por la superposición de movimientos de cuerpo rígido. La conclusión anterior tiene sentido, pues es sabido que la interpolación lineal de campos vectoriales es invariante ante movimientos de cuerpo rígido, es decir:

$$\mathbf{q} \sum_{j=1}^{nn} N_j' \hat{\mathbf{e}}_i^j = \sum_{j=1}^{nn} N_j' (\mathbf{q} \hat{\mathbf{e}}_i^j), \quad (3.172)$$

y el producto escalar es invariante ante transformaciones ortogonales. La invariancia respecto del marco de referencia de las demás deformaciones puede probarse fácilmente siguiendo un procedimiento similar.

Debe notarse que las deformaciones generalizadas puede alternativamente obtenerse por interpolación de deformaciones nodales, para  $\kappa_2$  esto sería:

$$\kappa_2 = \sum_{j=1}^{nn} N_j' (\mathbf{x}_{0j} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i^j), \quad (3.173)$$

pero esta forma, aunque mantiene la propiedad de invariancia, reduce el orden de aproximación.

### 3.5.6 Matriz de Rigidez Tangente

La derivada direccional del trabajo virtual total en la dirección de un cambio en la configuración da lugar a la denominada matriz de rigidez tangente, se presenta continuación su derivación.

Se formula en primera instancia la linealización del trabajo virtual de las fuerzas internas. Introduciendo la Eq. (3.159) en la Eq. (3.123) es posible obtener la forma discreta de la derivada direccional del trabajo virtual material como:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\hat{\boldsymbol{\phi}}} \delta W_i^M \cdot \Delta \hat{\boldsymbol{\phi}} &\cong \int_L (\mathbb{B}_j \delta \hat{\boldsymbol{\phi}})^T \mathbb{H}^T \mathbb{D} \mathbb{H} (\mathbb{B}_j \Delta \hat{\boldsymbol{\phi}}) dx \\ &= \delta \hat{\boldsymbol{\phi}}^T \int_L \mathbb{B}_j^T \mathbb{H}^T \mathbb{D} \mathbb{H} \mathbb{B}_j dx \Delta \hat{\boldsymbol{\phi}}, \end{aligned} \quad (3.174)$$

donde se asumen constantes la variación de la configuración y también su incremento. Se define entonces la *matriz de rigidez material* como:

$$\mathbf{K}_M = \int_L \mathbb{B}_j^T \mathbb{H}^T \mathbb{D} \mathbb{H} \mathbb{B}_j dx. \quad (3.175)$$

Procediendo de modo similar, se pueden utilizar las Eqs. (3.163) y (3.124) para obtener el término geométrico de la linealización del trabajo virtual de las fuerzas internas como:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\phi \delta W_i^G \cdot \Delta \hat{\boldsymbol{\phi}} &\cong \int_L (\mathbb{B}_j \delta \hat{\boldsymbol{\phi}})^T \mathbb{G} (\mathbb{B}_j \Delta \hat{\boldsymbol{\phi}}) dx \\ &= \delta \hat{\boldsymbol{\phi}}^T \int_L \mathbb{B}_j^T \mathbb{G} \mathbb{B}_j dx \Delta \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (3.176)$$

Así, se define la matriz de rigidez geométrica como:

$$\mathbf{K}_G = \int_L \mathbb{B}_j^T \mathbb{G} \mathbb{B}_j dx. \quad (3.177)$$

Ahora se procede con la linealización del trabajo virtual de las fuerzas externas; recordando la Eq. (3.136) y utilizando la matriz de funciones de interpolación presentadas en (3.147), se puede reescribir la linealización del trabajo virtual de las fuerzas externas como:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\phi \delta W_e \cdot \Delta \hat{\boldsymbol{\phi}} &= \int_L (\mathbb{N}_j \delta \hat{\boldsymbol{\phi}})^T \mathbb{L} (\mathbb{N}_j \Delta \hat{\boldsymbol{\phi}})^T dx \\ &\cong \delta \hat{\boldsymbol{\phi}}^T \int_L \mathbb{N}_j^T \mathbb{L} \mathbb{N}_j dx \Delta \hat{\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned} \quad (3.178)$$

Se define entonces la *matriz de rigidez por carga* como:

$$\mathbf{K}_L = \int_L \mathbb{N}_j^T \mathbb{L} \mathbb{N}_j dx \quad (3.179)$$

Habiendo presentado las expresiones de las matrices de rigidez que se originan de la linealización de los distintos términos del trabajo virtual total, es posible entonces definir la *matriz de rigidez tangente del elemento* como:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_L = \int_L \mathbb{B}_j^T (\mathbb{H}^T \mathbb{D} \mathbb{H} + \mathbb{G}) \mathbb{B}_j^T + \mathbb{N}_j^T \mathbb{L} \mathbb{N}_j dx. \quad (3.180)$$

Restaría solo linealizar el trabajo virtual de las fuerzas inerciales, lo que daría como resultada la matriz tangente centrífuga; como se ha mencionado en la

derivación de trabajo virtual inercial, se asumirá que el aporte energético de los términos centrífugos es despreciable.

### 3.5.7 Matriz de Masa

La deducción de la expresión de la matriz de masa se basa en la aplicación de la interpolación lineal de la Eq. (3.146) para obtener el campo de aceleraciones, esto es:

$$\ddot{\phi} = \sum_{j=1}^{nn} N_n \hat{\phi}_n \quad (3.181)$$

Se ha dicho durante la derivación la linealización del trabajo virtual de las fuerzas inerciales los efectos de los términos centrífugos y giroscópicos pueden despreciarse [57]. Considerando lo último, la linealización del trabajo virtual de las fuerzas inerciales se simplificaba considerablemente, ver Eq. (3.131). La forma lineal (en las aceleraciones) del trabajo virtual de las fuerzas de inercia presentado en la Eq. (3.131) puede ser escrito en forma discreta como:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\phi} \delta W_a \cdot \Delta \hat{\phi} &\cong \int_L \delta \phi^T \mathbb{M} \Delta \ddot{\phi} dx \\ &= \delta \hat{\phi}^T \int_L \mathbb{N}_j^T \mathbb{M} \mathbb{N}_j dx \Delta \ddot{\phi}. \end{aligned} \quad (3.182)$$

La matriz de masa queda entonces definida como:

$$\mathbf{M} = \int_L \mathbb{N}_j^T \mathbb{M} \mathbb{N}_j dx \quad (3.183)$$

Debe notarse en este punto que como el trabajo virtual inercial es función lineal de las aceleraciones, no se ha llamado a la matriz de masa como *matriz de masa tangente*, pues no deriva de la linealización del trabajo virtual en la dirección de un cambio en la configuración, las velocidades o las aceleraciones.

### 3.5.8 Balance de Fuerzas

El balance de fuerzas debe escribirse en términos de las fuerzas internas, externas e inerciales. Habiendo escrito ya la expresión del trabajo virtual de las

fuerzas de inercia en función de las variables cinemáticas  $\phi$ , se escribe ahora la forma final de la fuerza inercial:

$$\mathbf{F}_a = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{m} \ddot{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{T}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{T}} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{T}^T (\widetilde{\mathbf{T} \boldsymbol{\theta}}) \mathbf{J} \mathbf{T} \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{array} \right] \quad (3.184)$$

Análogamente, las fuerzas internas pueden evaluarse como:

$$\mathbf{F}_i = \int_L (\mathbb{H} \mathbb{B}_j)^T \mathbb{D} \boldsymbol{\varepsilon} dx \quad (3.185)$$

Mientras que las fuerzas externas vienen dadas por:

$$\mathbf{F}_e = \left[ \begin{array}{c} \bar{\mathbf{P}} + \Lambda \vec{\mathbf{P}} \\ \mathbf{T}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}} \Lambda^T \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{T}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}} \vec{\mathbf{P}} + \mathbf{T} \bar{\mathbf{m}} \end{array} \right] \quad (3.186)$$

Los términos de fuerza se evalúan utilizando integración reducida, por lo tanto para el elemento SCB todas las expresiones son evaluadas en centro del elemento.

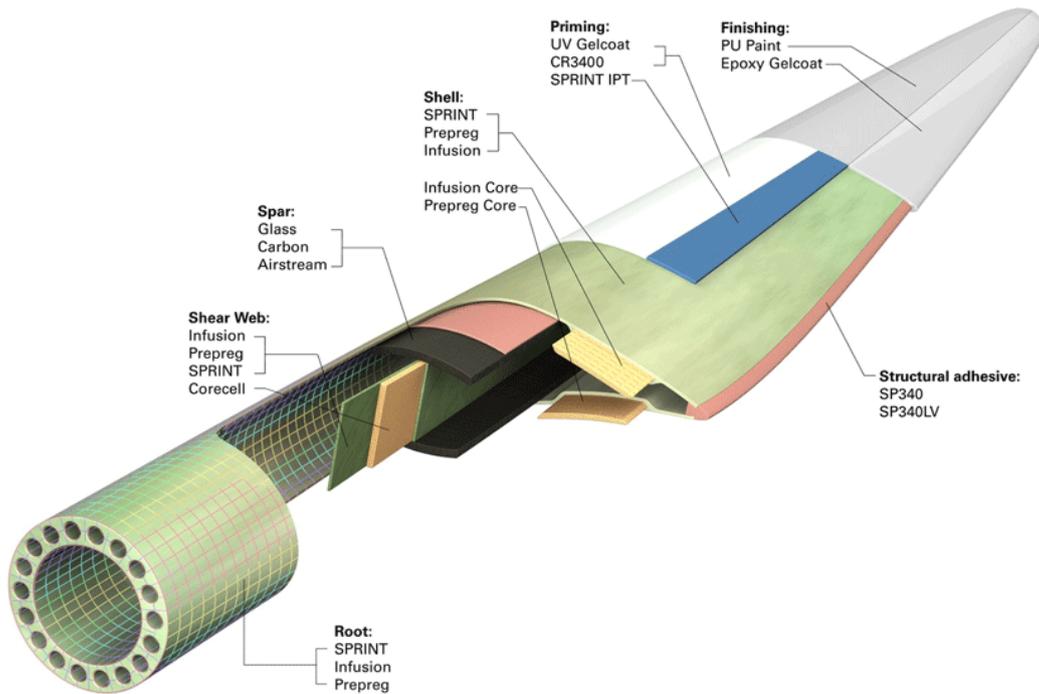
### 3.6 DISCRETIZACIÓN SECCIONAL

La formulación del elemento finito geoméricamente exacto para vigas anisótropas de pared delgada constituye uno de los aportes principales de este trabajo. Hasta el desarrollo de dicha formulación, presentada en distintas variantes en [43, 45, 46], no se había reportado en la literatura una formulación de vigas geoméricamente exactas de pared delgada con la capacidad de modelar materiales anisótropos. Es importante el hecho de que la formulación propuesta mantiene la significación de las ideas convencionales a las que recurren las teorías constitutivas de materiales compuestos más utilizadas. Es decir, el modelo constitutivo de viga anisótropa de pared delgada ha sido inyectado en la formulación geoméricamente exacta sin reformular los conceptos básicos de la teoría de laminación clásica (CLT).

#### 3.6.1 Sección Transversal del Aerogenerador

Desde el punto de vista estructural, la pala representa el elemento del aerogenerador donde se concentra la mayor cantidad de esfuerzos en lo referido al

diseño estructural. La distribución espacial de los distintos materiales que componen la pala debe ser cuidadosamente estudiada si se pretende obtener un diseño seguro y efectivo. Intervienen en la construcción de la pala, materiales estructurales, adhesivos, materiales de relleno y pinturas, la Figura 3.7 ilustra el mapeo de materiales en una pala de aerogenerador típica.



*Figura 3.7 – Mapeo de materiales en una pala típica (imagen extraída de <http://www.designnews.com>).*

Desde el punto de vista estructural algunos materiales aportan rigidez y masa y otros aportan solo masa; los materiales estructurales más utilizados son fibras de vidrio, fibras de carbono, telas o fabrics, epoxy, etc [88, 93].

Es claro que la modelación de la pala del aerogenerador tal como se ha planteado al inicio de este trabajo exige el cálculo de las rigideces de las distintas secciones transversales que forman la pala. En este sentido, la forma alar de la sección, los distintos materiales y los distintos esquemas de laminación introducen dificultad al momento de implementar la teoría constitutiva descrita en la sección 3.2.3.

La Figura 3.8 muestra un modelo simplificado de la sección transversal típica de una pala de aerogenerador. La superficie externa es definida por el perfil aerodinámico, y por debajo de ella se laminan cada uno de los tramos que constituyen el contorno. El esquema de laminación, el espesor y el material de cada tramo son definidos en función a las características de rigidez local y global que se requieran. Es estrictamente necesario evitar el pandeo local de la sección, por lo que en general la rigidez seccional local es lo suficientemente grande como para garantizar el cumplimiento de la hipótesis de indeformabilidad en su plano.

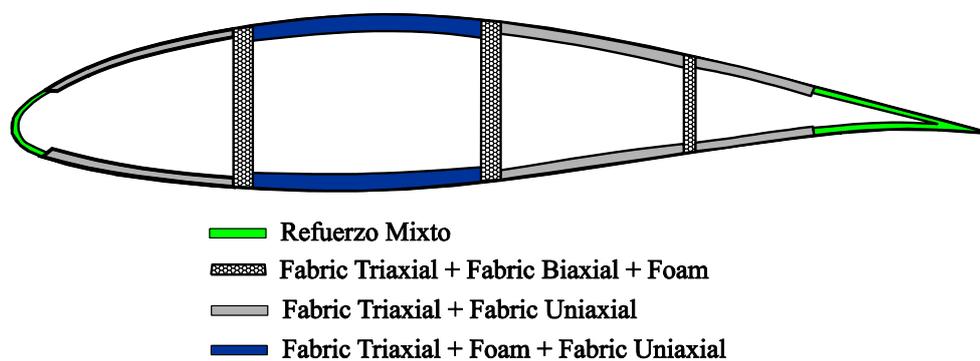


Figura 3.8 – Sección transversal esquemática de una pala típica.

Ahora bien, no solo cada uno de los tramos que forman la pala posee un esquema de laminación particular, sino que además dentro de cada tramo el laminado está formado por capas de distintos materiales. La teoría de laminación utilizada para formular el elemento finito puede modelar dicho problema si cada tramo se encuentra en estado plano de tensiones. Para algunos tramos, la validez de dicha hipótesis es garantizada simplemente por la pequeñez del espesor; para otros, la baja rigidez normal del material que une los sublaminados (generalmente Foam) permite despreciar las tensiones normales transmitidas a través del laminado.

La teoría utilizada para representar el comportamiento estructural de la sección transversal requiere ubicar una línea de referencia, ver Figura 3.2; dicha línea establece el origen de la coordenada  $n$  y ha sido definida como la línea media. En la mayoría de las formulaciones presentadas en la literatura de vigas de material compuesto se asume que el espesor es muy pequeño [39, 41, 43, 123-125], lo que posibilita restar atención a la ubicación real de la línea de referencia

con respecto a las superficies externa o interna, pues resultan ser “casi coincidentes”. Esto no puede garantizarse para el caso de la sección transversal de un aerogenerador.

Para el caso de la modelación de la sección transversal del aerogenerador el dato geométrico que gobierna el problema es la superficie exterior, pues la forma del perfil alar es provista por el diseño aerodinámico. Desde el punto de vista geométrico es importante notar que para el caso de secciones no simétricas con espesor distinto de cero, la curvatura de la línea externa, la línea media y la línea interna no coinciden exactamente. Por supuesto, cuando el espesor es pequeño el error cometido puede ser despreciado.

Ahora bien, siendo que la forma del perfil alar se construye con una sucesión de puntos unidos por rectas y que una función analítica que represente la forma alar es prácticamente imposible de obtener, es razonable modelar la sección transversal como un conjunto de segmentos rectos. Esto resulta consistente con lo asumido al utilizar la transformación presentada en la Eq. (3.16), la cual asume que el tensor de transformación no es función de la coordenada  $n$ .

En este punto debe notarse que para obtener resultados correctos de las propiedades seccionales es necesario obtener la línea media a partir de la línea externa de la sección. Si bien podría utilizarse la geometría del perfil alar y colocar el origen del sistema curvilíneo en la línea exterior; las propiedades seccionales resultan sobrestimadas pues la unión resultante entre los segmentos no resulta ser la real. La Figura 3.9 muestra la diferencia entre los solapamientos obtenidos por la teoría de vigas de pared delgada convencional (Unión TWB) y la unión real.

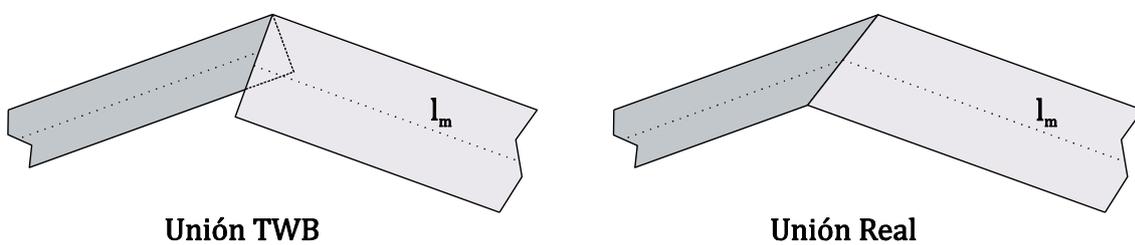


Figura 3.9 – Unión de segmentos.

Con el objeto de modelar más exactamente la sección transversal se propone obtener el punto de unión de las líneas medias de los segmentos y luego utilizar

capas de laminado cuya longitud resulta variable con la dirección normal (lo cual puede implementarse con facilidad). Para esto, debe trasladarse cada segmento en la dirección normal una distancia de medio espesor; si bien el problema parece sencillo, puede verse de la Figura 3.10 que las coordenadas del punto de unión entre las líneas medias de dos segmentos cualesquiera corresponden a la mitad de los espesores de dichos segmentos en un sistema no ortogonal formado por sus vectores unitarios normales.

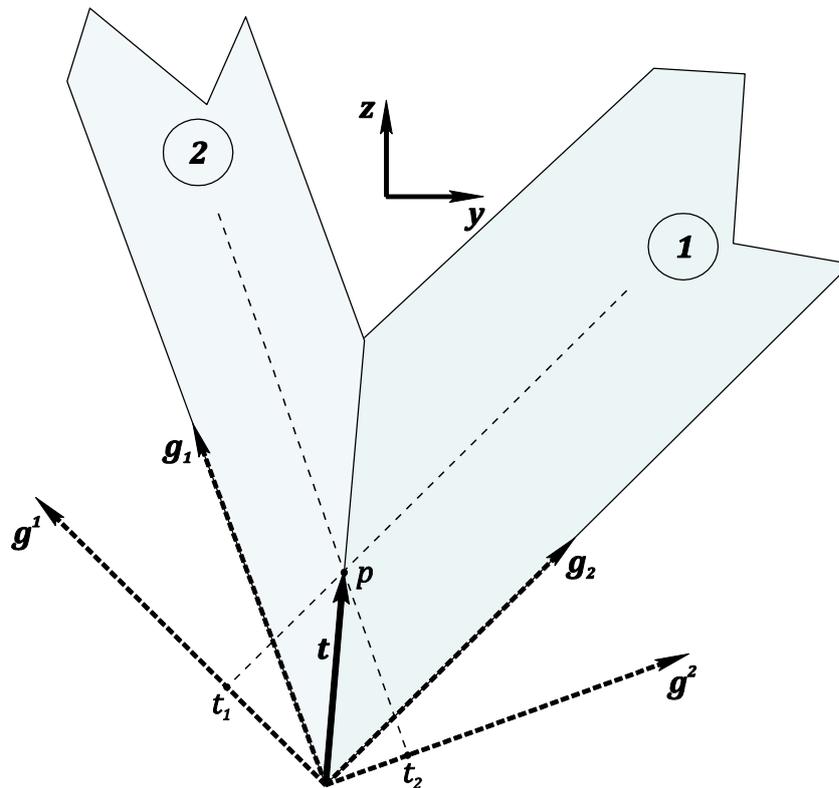


Figura 3.10 – Geometría de la unión real.

Es decir, el punto de unión de las líneas medias puede ubicarse con un vector  $\mathbf{t}$  tal que:

$$\mathbf{t} = t_1 \mathbf{g}^1 + t_2 \mathbf{g}^2, \quad (3.187)$$

donde  $\mathbf{g}^i$  es una base no ortogonal formada por los versores normales a los segmentos. Así,  $t_i$  son las componentes covariantes del vector  $\mathbf{t}$  en la base  $\mathbf{g}^i$ . La definición de una base recíproca tal que  $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j$  permite escribir [53]:

$$t_i = \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{g}_i. \quad (3.188)$$

donde  $\bar{\mathbf{t}}$  es la forma cartesiana del vector  $\mathbf{t}$ , i.e.  $\bar{\mathbf{t}} = (c_1\check{\mathbf{j}} + c_2\check{\mathbf{k}})$ . Así, es posible obtener:

$$t_i = (c_1\check{\mathbf{j}} + c_2\check{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{g}_i \quad (3.189)$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{g}_1 & \check{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{g}_1 \\ \check{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{g}_2 & \check{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (3.190)$$

Llamando  $\mathcal{M}$  a la matriz de transformación puede reescribirse la expresión anterior como:

$$t_i = \mathcal{M}^{ij} c_j \quad (3.191)$$

Finalmente, se obtienen las coordenadas cartesianas del vector posición  $\mathbf{t}$  como:

$$c_i = \mathcal{M}^{ji} t_j \quad (3.192)$$

Implementando la formulación anterior es posible obtener la geometría real de cada segmento; utilizando la Eq. (3.87) para cada segmento se obtiene la rigidez de la sección transversal como:

$$\mathbb{D} = \sum_{i=1}^{ns} \mathbb{D}_i \quad (3.193)$$

donde  $ns$  es el número de segmentos en la sección.

### 3.6.2 Función de Alabeo

En la sección 3.2.2 se presentó la formulación para el problema del alabeo de la sección transversal. En esta sección se presenta la solución de la ecuación diferencial (3.37) mediante el método de elementos finitos, utilizando la misma discretización unidimensional propuesta en la sección anterior.

Asumiendo que la función de alabeo es constante en el espesor es posible simplificar la ecuación diferencial a:

$$t \int_S \frac{\partial \delta \omega}{\partial s} \frac{\partial \delta \omega}{\partial s} ds + t \int_S \frac{\partial \delta \omega}{\partial s} r_n ds = 0, \quad (3.194)$$

donde  $t$  es el espesor total del segmento.

Se interpola ahora linealmente la variable de alabeo como:

$$\omega = \mathbf{N}_\omega \hat{\boldsymbol{\omega}}, \quad (3.195)$$

$$\mathbf{N}_\omega = [N_1 \quad N_2], \quad \hat{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_1 \\ \hat{\omega}_2 \end{bmatrix}.$$

En forma matricial la ecuación de equilibrio (3.194) puede ser escrita como:

$$\delta \hat{\boldsymbol{\omega}}^T \left( \int_S \mathbf{N}'_\omega{}^T \mathbf{N}'_\omega ds \right) \hat{\boldsymbol{\omega}} + \delta \hat{\boldsymbol{\omega}}^T \left( \int_S \mathbf{N}'_\omega{}^T r_n ds \right) = 0, \quad (3.196)$$

Lo cual puede finalmente se escribe en forma matricial como:

$$\mathbb{W} \hat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbb{F}_\omega, \quad (3.197)$$

$$\mathbb{W} = \int_S \mathbf{N}'_\omega{}^T \mathbf{N}'_\omega ds, \quad \mathbb{F}_\omega = \int_S \mathbf{N}'_\omega{}^T r_n ds.$$

La ecuación algebraica anterior puede resolverse fácilmente para obtener la función de alabeo.

## 3.7 APÉNDICE

### 3.7.1 Linealización de los Directores Virtuales

La obtención de la expresión (3.154) requiere operar varias veces algebraicamente sobre la expresión (3.152), es decir:

$$\mathbf{a} \cdot \Delta \delta \mathbf{e}_i = \mathbf{a} \cdot \{(\Delta \mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\theta}) \times \mathbf{e}_i + (\mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\theta}) \times [(\mathbf{T}^T \Delta \boldsymbol{\theta}) \times \mathbf{e}_i]\} \quad (3.198)$$

Ahora bien, el término  $\mathbf{a} \cdot \Delta \delta \mathbf{e}_i$  se origina de aplicar las reglas de derivación de funciones compuestas durante la linealización de un término de la forma  $\mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{e}_i$ . Es decir, dicha linealización da por supuesto dos términos:

$$\Delta(\mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{e}_i) = \Delta \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{e}_i + \mathbf{a} \cdot \Delta \delta \mathbf{e}_i, \quad (3.199)$$

por lo cual el término sobre el cual debe operarse asume que el vector  $\mathbf{a}$  es constante. De esta forma, se puede decir que

$$\mathbf{a} \cdot \Delta \delta \mathbf{e}_i = \Delta(\mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{e}_i), \quad \Delta \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (3.200)$$

Notado esto, es posible operar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \Delta \delta \mathbf{e}_i &= \Delta(\mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{e}_i) = \Delta(\mathbf{a} \cdot (\delta \mathbf{w} \times \mathbf{e}_i)) \\ &= \Delta(\mathbf{a} \cdot (\delta \mathbf{w} \times \mathbf{e}_i)) = \Delta(\mathbf{a} \cdot ((\mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\theta}) \times \mathbf{e}_i)) \\ &= \Delta((\mathbf{T}^T \delta \boldsymbol{\theta}) \cdot (\mathbf{e}_i \times \mathbf{a})) \end{aligned} \quad (3.201)$$

Ahora, cambiando a notación matricial y sabiendo que  $\Delta \delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \Delta \delta \mathbf{e}_i &= \mathbf{a}^T \Delta \delta \mathbf{e}_i \\ &= \delta \boldsymbol{\theta}^T \Delta(\mathbf{T} \tilde{\mathbf{e}}_i \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (3.202)$$

### 3.7.2 Esfuerzos Viga

La expresión explícita del vector de esfuerzos viga generalizados da:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} N \\ M_2 \\ M_3 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ T \\ P_2 \\ P_3 \\ P_{23} \end{bmatrix} = \int_S \begin{pmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \bar{\xi}'_2 + N_{xx} \bar{\xi}'_3 \\ -M_{xx} \bar{\xi}'_3 + N_{xx} \bar{\xi}'_2 \\ N_{xs} \bar{\xi}'_2 - N_{xn} \bar{\xi}'_3 \\ N_{xn} \bar{\xi}'_2 + N_{xs} \bar{\xi}'_3 \\ -M_{xs} (\bar{\xi}'_2{}^2 + \bar{\xi}'_3{}^2) + N_{xs} (\omega' + \bar{\xi}'_3 \bar{\xi}'_2 - \bar{\xi}'_2 \bar{\xi}'_3) + N_{xn} (\bar{\xi}'_2 \bar{\xi}'_2 + \bar{\xi}'_3 \bar{\xi}'_3) \\ -M_{xx} \bar{\xi}'_3 \bar{\xi}'_2 + \frac{1}{2} N_{xx} \bar{\xi}'_2{}^2 \\ M_{xx} \bar{\xi}'_2 \bar{\xi}'_3 + \frac{1}{2} N_{xx} \bar{\xi}'_3{}^2 \\ N_{xx} \bar{\xi}'_2 \bar{\xi}'_3 + M_{xx} (\bar{\xi}'_2 \bar{\xi}'_2 - \bar{\xi}'_3 \bar{\xi}'_3) \end{pmatrix} ds, \quad (3.203)$$

donde  $N$  es el esfuerzo axial,  $M_2$  y  $M_3$  son los momentos flexionales,  $Q_2$  y  $Q_3$  son los esfuerzos de corte,  $T$  es el momento torsional y  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_{23}$  son momentos flexionales-torsionales de alto orden.

# MODELO DE MECANISMOS

---

Las interacciones entre los elementos estructurales del aerogenerador son controladas por medio de mecanismos diseñados especialmente para permitir o restringir ciertos movimientos y gobernar así la dinámica del conjunto. Hasta aquí se ha desarrollado una formulación estructural para modelar aisladamente el comportamiento mecánico de los elementos individuales del aerogenerador; el objetivo de este capítulo es desarrollar una formulación que permita modelar al aerogenerador como un conjunto de elementos mecánicos flexibles, unidos entre sí mediante mecanismos.

Si bien el aerogenerador contiene una cantidad importante de elementos mecánicos, los cuales interactúan entre sí en las más variadas formas, el comportamiento estructural no lineal de la máquina puede describirse aproximadamente modelando solo el rotor, la torre y el mecanismo que los une.

En este capítulo se presentan los detalles de la formulación del problema de mecanismos. Se formulan las ecuaciones de movimiento del sistema de multicuerpos, conjuntamente con las ecuaciones que gobiernan las restricciones entre los componentes de dicho sistema.

#### 4.1 INTRODUCCIÓN

El problema de la dinámica de multicuerpos es generalmente formulado por medio de dos enfoques; un enfoque basado en la eliminación de los grados de libertad redundantes en las ecuaciones de movimiento y otro enfoque basado en la inclusión de restricciones a dichas ecuaciones mediante multiplicadores de Lagrange. En general la eliminación de restricciones conduce a una formulación más económica computacionalmente pero considerablemente más compleja. Por otro lado, el enfoque basado en multiplicadores de Lagrange introduce ecuaciones algebraicas adicionales pero mantiene una relativa simplicidad matemática y permite modelar restricciones no holonómicas.

El elemento finito desarrollado en las secciones anteriores es particularmente apto para ser utilizado en un enfoque basado en multiplicadores de Lagrange pues las relaciones entre las variables nodales pueden expresarse de forma sencilla en función del campo director.

#### 4.2 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Utilizando un enfoque basado en multiplicadores de Lagrange, la formulación del comportamiento dinámico de sistemas de multicuerpos da como resultado un conjunto de ecuaciones de movimiento del tipo diferencial-algebraico; su resolución por distintos métodos ha sido estudiada extensivamente [51, 52, 56-59, 63, 65, 68, 75, 80, 81, 84]. Se desarrollan en esta sección los detalles de la formulación de las ecuaciones de movimiento del sistema restringido en base al método de Lagrangiano Aumentado [57].

Las ecuaciones que rigen el movimiento del sistema de multicuerpos vienen dadas por [57]:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{B}^T(p\boldsymbol{\Phi} + k\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\phi}, \dot{\boldsymbol{\phi}}, t) \\ k\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\phi}, t) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $\mathbf{B}^T$  es la matriz de gradientes de las restricciones,  $\boldsymbol{\Phi}$  es el vector de restricciones,  $\boldsymbol{\lambda}$  es el vector de multiplicadores de Lagrange y  $\mathbf{g}$  es el vector de fuerzas aparentes (suma de las fuerzas internas, externas y complementarias de inercia). Además,  $p$  y  $k$  son factores de penalización y escala.

La forma discreta de la linealización de las ecuaciones de movimiento puede obtenerse utilizando la Eq. (3.180) como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \ddot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} \\ \Delta \ddot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} \\ \Delta \dot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} + p\mathbf{B}^T\mathbf{B} & k\mathbf{B}^T \\ k\mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^* \\ -\boldsymbol{\Phi}^* \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde  $\mathbf{R}^*$  es el vector de fuerzas residuales en la configuración aproximada  $\boldsymbol{\phi}^*$  y  $\boldsymbol{\Phi}^*$  es la restricción en la configuración aproximada. El vector de fuerzas residuales para una configuración de equilibrio es:

$$\mathbf{R} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\phi}, \dot{\boldsymbol{\phi}}, t) - \mathbb{M} \ddot{\boldsymbol{\phi}} - \mathbf{B}^T(p\boldsymbol{\Phi} + k\boldsymbol{\lambda}) \quad (4.3)$$

Debe notarse que se ha despreciado la dependencia de las fuerzas de inercia con la configuración, lo cual es consistente con la derivación del trabajo virtual de inercia presentada en la sección 3.3. Además, considerando que el factor de penalización se elige tal que sea grande, se ha asumido que el efecto de la rigidez geométrica asociada a los multiplicadores de Lagrange es despreciable comparado con el efecto del término de penalización, i.e.  $p\mathbf{B}^T\mathbf{B} \gg \partial_{\boldsymbol{\phi}}(k\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda})$ .

### 4.3 FORMULACIÓN DE ARTICULACIONES

La formulación de articulaciones está basada en las relaciones cinemáticas entre la configuración de dos nodos. Frecuentemente el tratamiento de las restricciones cinemáticas rotacionales se formula mediante la introducción de sistemas de referencia o triadas nodales que no forman parte de la formulación de elementos finitos. El caso de la formulación desarrollada aquí es diferente, pues al ser las triadas nodales parte de la formulación es posible formular las articulaciones en función al campo director, sin la necesidad de encontrar las relaciones explícitas entre las variables rotacionales de los nodos que forman la articulación.

Siguiendo las ideas de Cardona et al. [54], cada articulación se formulará como un elemento finito. Así, la articulación poseerá una matriz de rigidez, una matriz de masa y un vector de fuerza interna; cada uno de los cuales se ensamblará

en la correspondiente matriz global de forma convencional. Por otro lado, los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones impuestas serán tratados como grados de libertad adicionales.

Por brevedad se presenta solo la formulación de una articulación tipo bisagra o *hinge*, otras articulaciones pueden derivarse siguiendo el mismo procedimiento. El hinge impone tres restricciones vectoriales entre dos puntos de dos elementos estructurales; en el modelo de elementos finitos esos puntos serán nodos de los elementos unidos por la articulación. Las restricciones entre los nodos de los elementos que forman el mecanismo involucran al vector de desplazamientos nodales y a los vectores directores nodales. En primer lugar, la articulación hace coincidentes a los desplazamientos de un nodo  $A$  de un elemento de la articulación, con los desplazamientos de un nodo  $B$  del otro elemento de la articulación. Además, los vectores directores nodales se relacionan de tal forma de permitir solo una rotación relativa entre los nodos  $A$  y  $B$ . De esta forma, se pueden expresar dichas restricciones en forma vectorial como:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A \\ \mathbf{e}_1^A \cdot \mathbf{e}_2^B \\ \mathbf{e}_1^A \cdot \mathbf{e}_3^B \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

Una vez definido el vector de restricciones  $\Phi$  es posible obtener su variación como:

$$\delta\Phi = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}_B - \delta\mathbf{u}_A \\ \delta\mathbf{e}_1^A \cdot \mathbf{e}_2^B + \mathbf{e}_1^A \cdot \delta\mathbf{e}_2^B \\ \delta\mathbf{e}_1^A \cdot \mathbf{e}_3^B + \mathbf{e}_1^A \cdot \delta\mathbf{e}_3^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}_B - \delta\mathbf{u}_A \\ (\delta\tilde{\mathbf{w}}_A \mathbf{e}_1^A) \cdot \mathbf{e}_2^B + \mathbf{e}_1^A \cdot (\delta\tilde{\mathbf{w}}_B \mathbf{e}_2^B) \\ (\delta\tilde{\mathbf{w}}_A \mathbf{e}_1^A) \cdot \mathbf{e}_3^B + \mathbf{e}_1^A \cdot (\delta\tilde{\mathbf{w}}_B \mathbf{e}_3^B) \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Reordenando algunos términos y utilizando la Eq. (3.67) se reescribe la expresión anterior como:

$$\delta\Phi = \mathbf{B}\delta\hat{\Phi}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\tilde{\mathbf{e}}_1^A \mathbf{e}_2^B)^T \mathbf{T}_1^T & \mathbf{0} & (\tilde{\mathbf{e}}_2^B \mathbf{e}_1^A)^T \mathbf{T}_2^T \\ \mathbf{0} & (\tilde{\mathbf{e}}_1^A \mathbf{e}_3^B)^T \mathbf{T}_1^T & \mathbf{0} & (\tilde{\mathbf{e}}_3^B \mathbf{e}_1^A)^T \mathbf{T}_2^T \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

donde  $\mathbf{B}$  es una matriz de dimensiones  $5 \times 12$  llamada *gradiente de restricciones*. Como puede verse, la expresión del gradiente de restricciones es muy simple y no contiene el tensor de rotación.

Así, la ecuación de movimiento para la articulación tipo hinge rígido y sin masa puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} p\mathbf{B}^T\mathbf{B} & k\mathbf{B}^T \\ k\mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^T(p\boldsymbol{\Phi} + k\lambda) \\ -\boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

La pseudo matriz de rigidez y el pseudo vector de fuerzas internas quedan expresados como:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} p\mathbf{B}^T\mathbf{B} & k\mathbf{B}^T \\ k\mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^T(p\boldsymbol{\Phi} + k\lambda) \\ -\boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

y se ensamblan en el sistema global de manera convencional.

### Efectos Viscosos

Para algunas aplicaciones es importante que la articulación tenga la capacidad de disipar energía; para el caso del aerogenerador la disipación de energía de la articulación entre la torre y el rotor puede ser útil para representar la energía absorbida por el generador eléctrico. La utilización de una articulación con disipación viscosa es una aproximación relativamente válida para representar el efecto del generador eléctrico; a continuación se muestra su formulación en el marco del elemento finito SCB.

Por hipótesis, las fuerzas viscosas en la articulación se asumirán linealmente proporcionales a la diferencia de velocidad entre sus nodos maestro (nodo  $A$ ) y esclavo (nodo  $B$ ). Puesto que dicha articulación solo permite una rotación, es claro que existirá solamente una fuerza viscosa en la articulación, y que esa fuerza viscosa será proporcional a la diferencia de velocidades angulares en los nodos. Si bien lo anterior es trivial, quizás no resulta tan trivial identificar la conjugación energética entre las fuerzas viscosas y las variables cinemáticas que describen la formulación.

La relación rotacional entre los nodos maestro y esclavo del hinge se expresan como:

$$\boldsymbol{\Lambda}_s = \boldsymbol{\Lambda}_m \boldsymbol{\Lambda}_j, \quad (4.9)$$

donde  $\Lambda_s$ ,  $\Lambda_m$  y  $\Lambda_j$  son los tensores de rotación del nodo esclavo, del nodo maestro y de la articulación respectivamente. Los tensores anteriores se obtienen mediante el mapeo exponencial definido en la Eq. (3.5) considerando que:

$$\boldsymbol{\theta}_j = \boldsymbol{\theta}_s - \boldsymbol{\theta}_m, \quad \boldsymbol{\theta}_j, \boldsymbol{\theta}_s, \boldsymbol{\theta}_m \in T_I^m \quad (4.10)$$

Se define ahora al momento viscoso en la articulación como aquel proporcional a la velocidad angular material de la articulación  $\boldsymbol{\Omega}_j$ , esto es:

$$\bar{\mathbf{M}}_v = c_v \boldsymbol{\Omega}_j. \quad (4.11)$$

Siendo entonces  $\bar{\mathbf{M}}_v$  una entidad del espacio  $T_A^m$ .

Utilizando la Eq. (3.110) la velocidad angular material en la articulación puede expresarse como:

$$\boldsymbol{\Omega}_j = \mathbf{T}_j (\dot{\boldsymbol{\theta}}_s - \dot{\boldsymbol{\theta}}_m), \quad (4.12)$$

donde ha sido posible explotar la relación:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_j = \dot{\boldsymbol{\theta}}_s - \dot{\boldsymbol{\theta}}_m, \quad (4.13)$$

puesto que  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_j, \dot{\boldsymbol{\theta}}_s, \dot{\boldsymbol{\theta}}_m \in T_I^m$ .

Según una descripción material, el trabajo virtual de las fuerzas disipativas en la articulación es:

$$\begin{aligned} dW_v &= \delta \boldsymbol{\Theta}_j \cdot \bar{\mathbf{M}}_v \\ &= \delta \boldsymbol{\Theta}_j \cdot c_v \boldsymbol{\Omega}_j \end{aligned} \quad (4.14)$$

Si bien hasta ahora no se ha obtenido la expresión del spin material en la articulación, ésta puede obtenerse utilizando la expresión (4.9) y operando de tal forma que:

$$\begin{aligned} \delta \Lambda_s &= \delta \Lambda_m \Lambda_j + \Lambda_m \delta \Lambda_j, \\ \Lambda_s \delta \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_s &= \Lambda_m \delta \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_m \Lambda_j + \Lambda_m \Lambda_j \delta \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_j, \end{aligned} \quad (4.15)$$

Operando se obtiene:

$$\delta \boldsymbol{\Theta}_j = \delta \boldsymbol{\Theta}_s - \Lambda_j^T \delta \boldsymbol{\Theta}_m, \quad (4.16)$$

Así, el trabajo virtual de las fuerzas disipativas es:

$$dW_v = (\delta\theta_s - \Lambda_j^T \delta\theta_m) \cdot [c_v T_j (\dot{\theta}_s - \dot{\theta}_m)] \quad (4.17)$$

En forma matricial:

$$dW_v = \delta\theta^T \mathbb{C}_v \dot{\theta} \quad (4.18)$$

$$\mathbb{C}_v = c_v \begin{bmatrix} \mathbf{T}_s^T \mathbf{T}_j & -\mathbf{T}_s^T \mathbf{T}_j \\ -\mathbf{T}_m^T \Lambda_j \mathbf{T}_j & \mathbf{T}_m^T \Lambda_j \mathbf{T}_j \end{bmatrix}, \quad \delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\theta_s \\ \delta\theta_m \end{bmatrix}, \quad \dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_s \\ \dot{\theta}_m \end{bmatrix}$$

Las fuerzas viscosas nodales en la articulación quedan entonces expresadas como función de las velocidades nodales como:

$$\bar{\mathbf{M}}_v = \mathbb{C}_v \dot{\theta} \quad (4.19)$$

La versión Lagrangiana Actualizada de la matriz  $\mathbb{C}_v$  es simplemente:

$$\mathbb{C}_v = c_v \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\Delta s}^T \mathbf{T}_{\Delta j} & -\mathbf{T}_{\Delta s}^T \mathbf{T}_{\Delta j} \\ -\mathbf{T}_{\Delta m}^T \Lambda_{Rj} \Lambda_{\Delta j} \mathbf{T}_{\Delta j} & \mathbf{T}_{\Delta m}^T \Lambda_{Rj} \Lambda_{\Delta j} \mathbf{T}_{\Delta j} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

#### 4.4 INTEGRACIÓN TEMPORAL

La integración temporal de las ecuaciones de movimiento del sistema restringido requiere de un tratamiento especial debido a su naturaleza diferencial-algebraica. Las ecuaciones que gobiernan el sistema restringido están formadas por dos sistemas de ecuaciones acoplados, el sistema estructural y el sistema que describe las restricciones. Si bien es posible reducir el sistema de restricciones y obtener solo un sistema estructural de tal forma de aplicar los métodos de integración convencionales, existen métodos de integración capaces de tratar el sistema compuesto simultáneamente de forma muy efectiva.

En el Capítulo 2 se mencionó que los diferentes algoritmos de integración implícita utilizados en la dinámica estructural han sido en general desarrollados tomando como base el algoritmo propuesto por Newmark [70]. Por su capacidad para introducir al sistema disipación numérica controlada sin perder la propiedad de precisión de segundo orden, el enfoque más utilizado actualmente para la integración temporal implícita del sistema de las Eqs. (4.1) es el *método  $\alpha$ -generalizado* [57, 69, 80]. El presente trabajo adopta dicho enfoque, se describen a

continuación algunos de sus aspectos fundamentales según la implementación propuesta en [80].

Sean  $\phi_{t+1}$ ,  $\dot{\phi}_{t+1}$ ,  $\ddot{\phi}_{t+1}$  y  $\lambda_{t+1}$  variables que satisfacen las Eqs. (4.1) en el tiempo  $t + 1$ , el método  $\alpha$ -generalizado propone la definición de una variable  $\mathbf{a}$  de pseudo-aceleración tal que:

$$(1 - \alpha_m)\mathbf{a}_{t+1} + \alpha_m\mathbf{a}_t = (1 - \alpha_f)\ddot{\phi}_{t+1} + \alpha_f\ddot{\phi}_t, \quad \mathbf{a}_0 = \ddot{\phi}_0. \quad (4.21)$$

donde  $\alpha_m$  y  $\alpha_f$  son parámetros algorítmicos tales que controlan la disipación de tal forma que:

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}, \quad \alpha_f = \frac{2\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \quad (4.22)$$

El esquema se completa con la introducción de la pseudo aceleración  $\mathbf{a}$  en las fórmulas de integración de Newmark, de tal forma que las velocidades y las aceleraciones se puede obtener como:

$$\phi_{t+1} = \phi_t + \dot{\phi}_t\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\mathbf{a}_t\Delta t^2 + \beta\mathbf{a}_{t+1}\Delta t^2 \quad (4.23)$$

$$\dot{\phi}_{t+1} = \dot{\phi}_t + (1 - \gamma)\mathbf{a}_t\Delta t + \gamma\mathbf{a}_{t+1}\Delta t \quad (4.24)$$

La solución numérica se obtiene mediante un algoritmo predictor-corrector [69]; dicho esquema utiliza las ecuaciones (4.23) y (4.24) para la predicción, mientras que la corrección viene dada por:

$$\begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = -\mathbf{S}_T^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^* \\ -\Phi^* \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

donde la matriz de iteración es:

$$\mathbf{S}_T = \begin{bmatrix} \beta'\mathbf{M} + \gamma'\mathbf{C}_T + \mathbf{K}_T & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

y se han definido los parámetros:

$$\beta' = \frac{(1 - \alpha_m)}{\beta(1 - \alpha_f)\Delta t^2}, \quad \gamma' = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \quad (4.27)$$

Es importante notar que no se ha asumido que la matriz de masa es constante, por lo que la forma residual de la ecuación (4.21) no ha sido explotada.

Por cuestiones de brevedad no se incluyen detalles adicionales de la metodología de solución; tratamientos especiales del tema pueden encontrarse en las referencias [54, 57, 58, 80, 83].



# FORMULACIÓN AEROELÁSTICA

---

El generador eólico es una máquina en la cual la interacción entre la aerodinámica y la dinámica estructural juega un rol decisivo. El rotor es la parte más importante del aerogenerador puesto que sus características aerodinámicas gobiernan el rendimiento y durabilidad de máquina. El rotor debe ser capaz no solo de convertir la máxima cantidad de energía contenida en el viento sino también de transformar una fuente fluctuante de potencia en torque uniforme sobre el generador. Dichos requerimientos abren diversos caminos en los cuales es necesario investigar, diseñar y optimizar; uno de los campos que concentran gran cantidad de esfuerzos es el estudio de las interacciones entre el problema elástico y el aerodinámico, comúnmente llamado *problema aeroelástico*.

La interacción aeroelástica es extremadamente importante, pues no solo influencia en gran medida la generación de potencia sino también gobierna la mayoría de los fenómenos vibratorios que ocurren en el aerogenerador, los cuales son responsables principales de la durabilidad del mismo.

## 5.1 INTRODUCCIÓN

Diversos métodos han sido desarrollados para abordar el estudio del comportamiento aeroelástico de generadores eólicos, varios de ellos derivados de herramientas desarrolladas para el estudio de rotores de helicópteros. Primeramente los métodos se basaron en modelos matemáticos analíticos, luego, con el progreso de las computadoras, varios enfoques computacionales comenzaron a desarrollarse. Uno de los enfoques más utilizados para abordar el problema aeroelástico del aerogenerador es el método de cantidad de movimiento del elemento de pala o BEM [88, 91, 92]. El BEM se basa en un enfoque unidimensional semi-discreto, mediante el cual se obtienen las fuerzas aerodinámicas en una sección alar en movimiento. Su filosofía 1D lo hace particularmente atractivo para ser acoplado con formulaciones tipo viga; así, la formulación estructural provee la configuración de la pala y el BEM provee las fuerzas aerodinámicas.

Las formulaciones del BEM que han sido presentadas en la literatura fueron formuladas exclusivamente asumiendo la linealidad de los desplazamientos y las rotaciones. A los efectos prácticos tal asunción no implica en general una restricción excluyente en cuanto a aplicabilidad, pues la gran mayoría de los diseños de aerogeneradores existentes fueron pensados para trabajar dentro del rango de linealidad elástica. No obstante, la tendencia natural a diseñar palas de longitud cada vez mayor está provocando un acercamiento acelerado hacia la frontera de aplicabilidad de las teorías estructurales geoméricamente lineales. En tal situación, es preciso obtener una formulación aeroelástica que integre aspectos estructurales y aerodinámicos bajo las mismas hipótesis geométricas.

En esta dirección, algunos trabajos científicos han abordado el problema del aerogenerador geoméricamente no lineal adoptando un elemento finito tipo viga geoméricamente exacta para el modelo estructural y un modelo aeroelástico tipo BEM convencional [62, 92, 97, 98, 110]. Dicho enfoque resulta inconsistente, pues la hipótesis de linealidad geométrica adoptada por la formulación aeroelástica en cierto punto restringe al elemento finito a ser utilizado en su rango lineal. En post de abordar el problema aeroelástico en forma geoméricamente consistente, la formulación del BEM que se desarrollará en este capítulo deberá ser consistente

con el elemento finito presentado, lo cual implica que deberá ser válida para cambios de configuración arbitrarios.

Como se ha mencionado, el análisis del problema aeroelástico es sumamente importante en el aerogenerador pues las cargas aerodinámicas son protagonistas fundamentales no solo de la generación de energía sino también de la sollicitación estructural. Es muy importante una determinación precisa de las cargas actuantes sobre la pala; también es altamente deseable que la teoría aeroelástica describa con la mayor precisión posible los fenómenos aerodinámicos que ocurren durante la operación del generador eólico.

El presente capítulo desarrolla, en el marco del BEM, los aspectos fundamentales de la determinación de las cargas aerodinámicas de una pala de aerogenerador con desplazamientos rotaciones arbitrarios. Solo para diferenciar las capacidades de esta nueva formulación, se denominará el método *BEM geoméricamente no lineal*. En el desarrollo del BEM geoméricamente no lineal sobresalen dos instancias fundamentales, el desarrollo de la teoría de cantidad de movimiento unidimensional del flujo sobre el rotor y el desarrollo de la teoría bidimensional de flujo sobre el perfil alar de una sección de la pala. Claro es que el análisis unidimensional de flujo sobre el rotor no establece hipótesis sobre la magnitud de los desplazamientos de las palas, pues el rotor se asume rígido, y por eso este aspecto de la formulación permanecerá intacto. Por otro lado, el análisis de flujo bidimensional requiere analizar vectorialmente las componentes de las velocidades de incidencia e inducida, y es aquí donde se manifiestan los efectos de la no linealidad geométrica de la configuración. Así, la metodología que se desarrollará en éste capítulo obtendrá las expresiones para dichas velocidades considerando variaciones arbitrarias en la configuración del elemento a analizar.

## 5.2 EL AEROGENERADOR

El aerogenerador se orienta de tal manera de aprovechar al máximo la velocidad de viento. En general existen dos ángulos muy importantes que definen la configuración de un aerogenerador: el ángulo  $\theta_T$  que forma el eje del rotor con la horizontal y el ángulo  $\theta_C$  que forman las palas con un plano perpendicular al eje.

La Figura 5.1 muestra la configuración del aerogenerador y esclarece la ubicación de dichos ángulos.

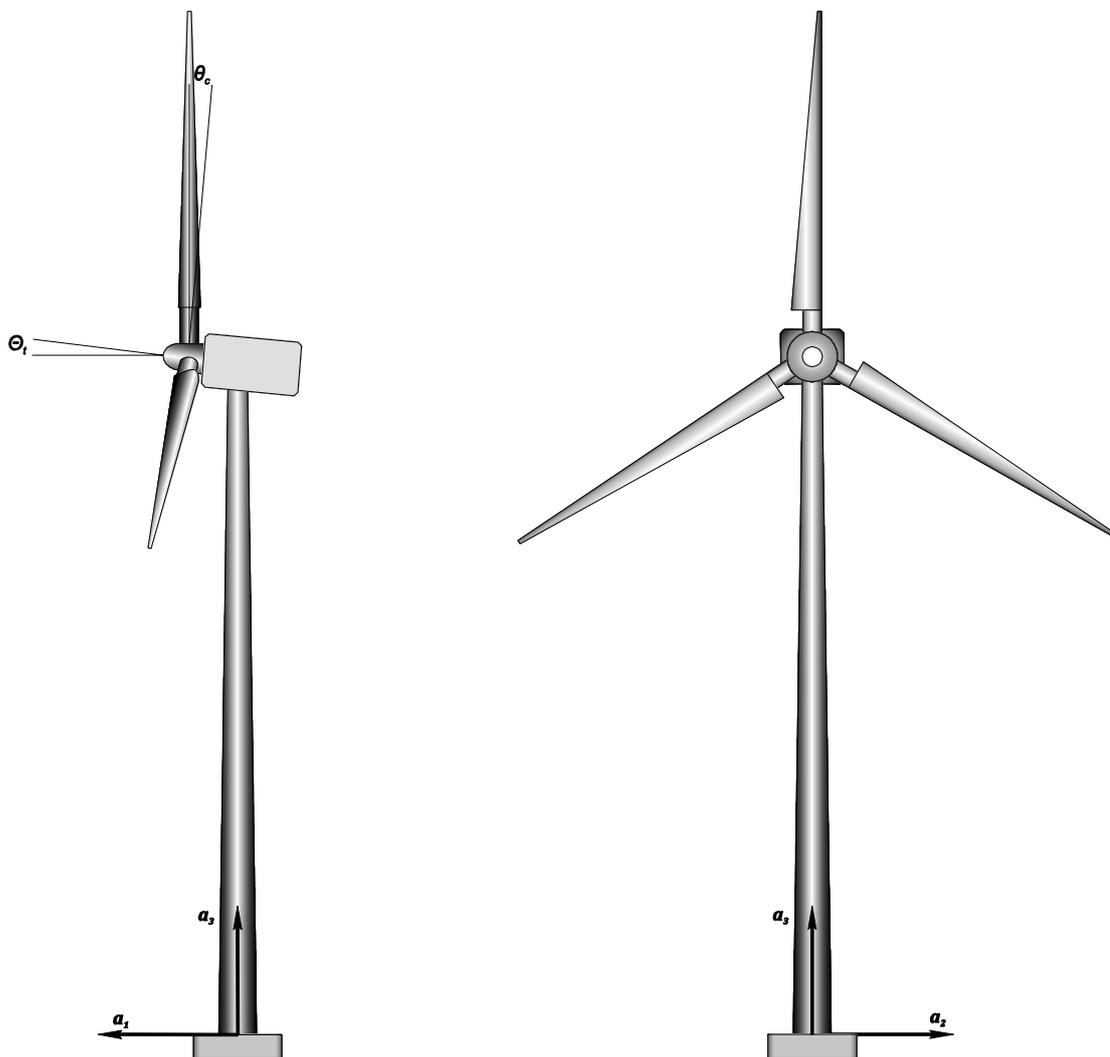


Figura 5.1 - Configuración del aerogenerador

Debe aclararse también que el ángulo de incidencia del viento con respecto a la normal al plano del rotor es importante solo a los efectos de determinar el empuje en el rotor ideal, pues en la formulación bidimensional no se utilizará. A este ángulo de se lo notará como  $\theta_Y$ .

### 5.3 EL ROTOR UNIDIMENSIONAL IDEAL

La derivación del BEM comienza con el análisis del cambio en la cantidad de movimiento que experimenta un fluido al atravesar un rotor ideal, a tal análisis

generalmente se lo conoce como teoría de cantidad de movimiento unidimensional del rotor ideal.

En el modelo unidimensional el rotor es considerado como un disco permeable y sin fricción, que disminuye la velocidad del aire convirtiendo la energía cinética en energía mecánica. Así, el rotor ideal actúa como un dispositivo de arrastre que disminuye la velocidad de corriente libre de  $V_0$  a  $V_E$ , donde  $V_0$  es la velocidad del viento y  $V_E$  es la velocidad de la estela irrotacional, ver Figura 5.2.

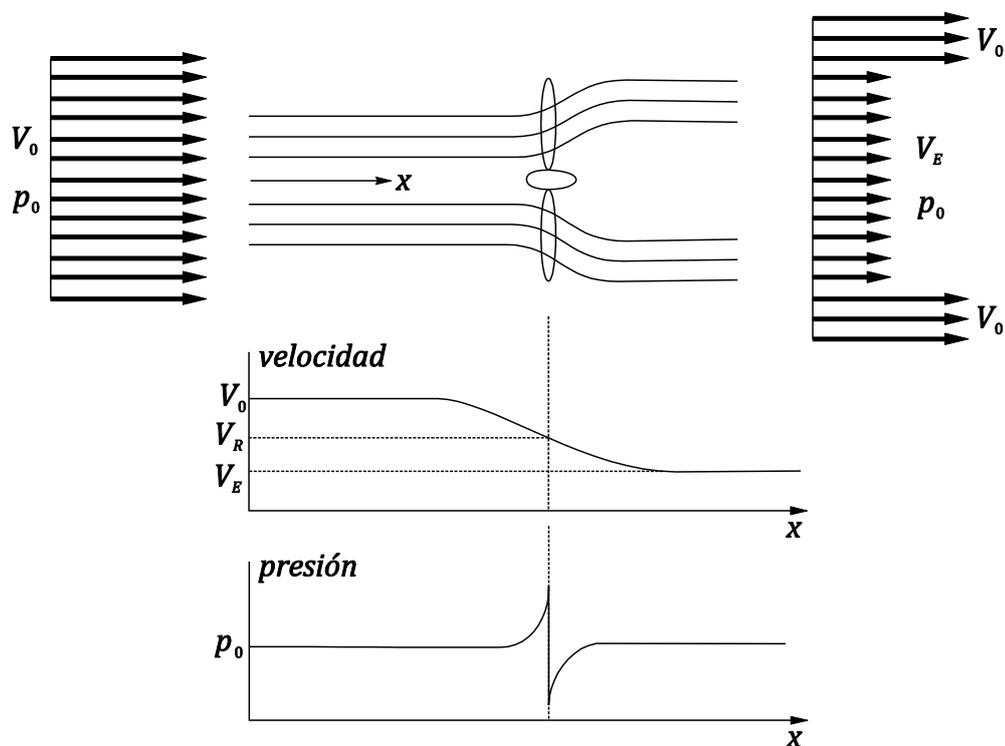


Figura 5.2 - Caída de presión y velocidad en el rotor unidimensional

Al circular, el aire genera una fuerza de empuje  $T_A$  en la dirección de la corriente; dicha fuerza resulta de la caída de presión  $\Delta p$  provocada por el rotor, así:

$$T_A = \Delta p A_R, \quad (5.1)$$

donde  $A_R$  es el área del rotor.

Aplicando la ecuación de Bernoulli antes y después del rotor y combinándolas se encuentra que:

$$\Delta p = \frac{1}{2}(V_0^2 - V_E^2) \quad (5.2)$$

Utilizando la forma integral de la cantidad de movimiento en la dirección axial es posible demostrar que la velocidad de corriente en la posición del rotor es [91]:

$$V_R = \frac{1}{2}(V_0 + V_E) \quad (5.3)$$

Para un volumen de control que tome la forma de las líneas de corriente se puede verificar que si el fluido no tiene fricción no hay cambio de energía interna entre la entrada y la salida, y que la fuerza neta de presión sobre el volumen de control es cero. Por lo tanto, utilizando la ecuación de cantidad de movimiento axial se obtiene la fuerza de empuje en el rotor como:

$$F_E = \rho V_R A_R (V_0 - V_E). \quad (5.4)$$

donde  $\rho$  es la densidad del aire.

De la misma forma, es posible encontrar que la potencia entregada al rotor es:

$$P_R = \frac{1}{2} \rho V_R A_R (V_0^2 - V_E^2). \quad (5.5)$$

Ahora, se define un factor de inducción axial  $a_{ax}$  tal que la velocidad en el rotor sea la siguiente función de la velocidad de corriente libre:

$$V_R = (1 - a_{ax})V_0 \quad (5.6)$$

Haciendo uso de la Eq. (5.3) puede obtenerse una relación para la velocidad de la estela como función de la velocidad de incidencia:

$$V_E = (1 - 2a_{ax})V_0 \quad (5.7)$$

Ahora, utilizando el resultado anterior, pueden reescribirse las ecuaciones del empuje y la potencia como:

$$F_E = 2\rho V_0^2 A_R a_{ax} (1 - a_{ax}) \quad (5.8)$$

$$P_R = 2\rho V_0^3 A_R a_{ax} (1 - a_{ax})^2$$

Para la derivación de la potencia entregada al rotor por el fluido se ha considerado que el rotor es ideal, caso para el cual no hay rotación del aire en la estela. En el caso real el aire detrás del rotor contiene cierta rotación, lo cual genera una pérdida de energía adicional. Es posible tener en cuenta aproximadamente dicho efecto si se define un factor de inducción tangencial  $a_{tg}$  tal que la velocidad rotacional en el fluido luego de atravesar el rotor pueda expresarse como:

$$V_{\theta} = 2a_{tg}\omega r, \quad (5.9)$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular del rotor y  $r$  la posición radial del elemento anular diferencial. Es importante notar que el factor de inducción tangencial  $a_{tg}$  es función de la velocidad angular, de tal forma que la componente tangencial de la velocidad en la estela disminuye al incrementarse la velocidad angular del rotor.

Ahora bien, si se supone que en lugar de analizar lo que ocurre con el rotor en su totalidad se pretende analizar lo que ocurre con un elemento anular diferencial, consistentemente con lo desarrollado anteriormente se puede suponer que la distribución de presión sobre los límites curvos del volumen de control de cada elemento anular diferencial no genera una resultante axial de fuerza [91]. Por lo tanto, si se utiliza la forma diferencial de la Eq. (5.8) para el elemento anular se concluye que el empuje sobre el volumen de control da:

$$dF_E = \rho V_0^2 4\pi r a_{ax}(1 - a_{ax}) dr \quad (5.10)$$

Ahora bien, para el caso de rotor ideal, es decir sin rotación en la estela, se ha encontrado que la potencia entregada al rotor era definida según la Eq. (5.8). Ahora, utilizando la ecuación de momento de la cantidad de movimiento se puede obtener la potencia generada en el elemento anular diferencial del rotor que genera rotación en la estela como [91]:

$$dP_R = \rho V_R 2\pi r^2 V_{\theta} dr, \quad (5.11)$$

siendo  $V_{\theta}$  la componente azimutal de la velocidad absoluta en el fluido después del rotor. Si se utilizan las relaciones (5.6) y (5.9) se puede escribir la expresión anterior para la potencia diferencial como:

$$dP_R = \rho 4\pi r^3 \omega^2 V_0 a_{tg}(1 - a_{ax}) dr. \quad (5.12)$$

Las ecuaciones (5.10) y (5.12), conjuntamente con el análisis local de la aerodinámica del perfil alar del álabe, forman la base teórica del BEM; en las secciones siguientes se presenta el desarrollo de las fuerzas aerodinámicas por medio del análisis bidimensional del perfil alar de la pala.

## 5.4 AERODINÁMICA DE PERFILES ALARES

El álabe del aerogenerador está constituido por diferentes secciones de forma alar a lo largo de su longitud, cada una con características aerodinámicas y estructurales particulares. Para la determinación de las fuerzas aerodinámicas es necesario conocer la geometría del perfil alar en cuestión y la velocidad de circulación del aire sobre el perfil; con esa información disponible, diferentes métodos pueden utilizarse para determinar la magnitud de las fuerzas actuantes.

### 5.4.1 Análisis Aerodinámico Bidimensional

El análisis aerodinámico bidimensional del perfil alar del elemento de álabe alimenta el análisis aeroelástico con las fuerzas aerodinámicas. Conociendo la velocidad de incidencia y el ángulo de ataque del ala es posible encontrar las fuerzas aerodinámicas de sustentación y arrastre como [126]:

$$\begin{aligned} F_{Sus} &= \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}_i|^2 c C_L, \\ F_{Arr} &= \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}_i|^2 c C_D \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde  $c$  es la longitud de la cuerda del ala,  $\rho$  es la densidad del aire,  $C_L$  y  $C_D$  son los coeficientes de sustentación y arrastre y  $\mathbf{V}_i$  es la velocidad de incidencia del aire. Es muy importante también notar que, para el caso de perfiles asimétricos, se genera además un momento de cabeceo a causa de que la no colinealidad entre las resultantes de fuerzas sobre el extradós y el intradós. Por lo tanto:

$$M_A = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}_i|^2 c C_M, \quad (5.14)$$

Es sumamente importante comprender la definición de las fuerzas aerodinámicas en lo que respecta a sus direcciones; la fuerza de sustentación se

define como perpendicular a la velocidad de incidencia mientras que la fuerza de arrastre se define como codireccional a ella, ver Figura 5.3

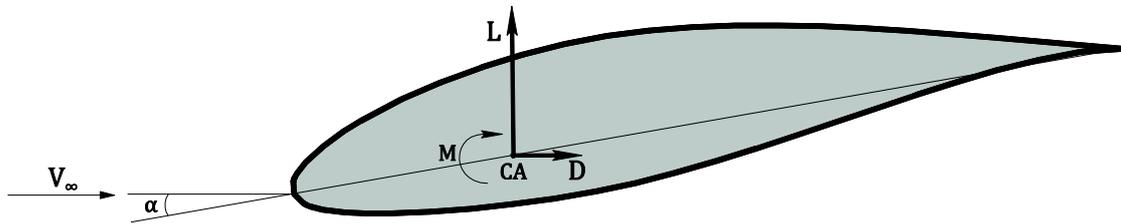


Figura 5.3 - Fuerzas aerodinámicas

Para el análisis aeroelástico debe hacerse explícito el punto en el cual han sido calculados las fuerzas y el momento aerodinámico. Si bien las fuerzas aerodinámicas pueden ubicarse en cualquier punto de la sección transversal del perfil alar, existen dos puntos para los cuales las fuerzas obtenidas tienen características especiales:

**Centro Aerodinámico (CA):** es un punto tal que, para pequeños ángulos de ataque, el coeficiente de momento de cabeceo  $C_M$  es constante e independiente de  $C_L$ . Lo anterior es equivalente decir que en el CA el coeficiente  $C_M$  es independiente del ángulo de ataque. Para perfiles delgados y sin efectos viscosos generalmente el CA se encuentra a un 25% de la cuerda.

**Centro de Presión (CP):** en el CP el momento de cabeceo es cero. Generalmente está ubicado detrás de la resultante de la sustentación. Se encuentra entre un 25% y un 60% de la cuerda, no es un punto de gran utilidad pues la ubicación del centro de presión cambia con el ángulo de ataque.

Ahora bien, si bien dichos puntos son generalmente los más utilizados para referir las fuerzas aerodinámicas, desde el punto de vista estructural es posible identificar dos puntos adicionales que pueden ser de utilidad para el análisis aeroelástico:

**Centro de Corte (CC):** es un punto tal que si las fuerzas externas se aplicaran en él no producirían torsión de la sección. Es un punto interesante pues, de ubicar los ejes seccionales en el CC, la matriz seccional  $\mathbb{D}$  obtenida no tendría términos de acoplamiento flexional-torsional. Si bien a los efectos de calcular las propiedades estructurales de la sección el punto resulta atractivo, su ubicación en secciones de material compuesto no es sencilla de determinar [28].

Centro de Masa (CM): es el punto de la sección transversal en el cual la inercia rotacional y traslacional de la sección se encuentran desacopladas.

Ahora bien, es deseable que el punto de referencia para el cálculo de las fuerzas aerodinámicas y el punto de referencia para el cálculo de las propiedades seccionales coincidan; o lo que es lo mismo, que las fuerzas aerodinámicas estén referidas al centro estructural de la sección. Durante el desarrollo de la teoría estructural se ha asumido que el *polo* de la sección transversal está ubicado en su centro de masa (lo que ha permitido desacoplar la inercia rotacional de la inercia traslacional); es claro entonces que para no generar inconsistencias en la teoría las fuerzas aerodinámicas deberán expresarse respecto de ejes locales con origen en el centro de masa de la sección.

Es importante notar que otros enfoques alternativos pueden utilizarse para obtener las fuerzas aerodinámicas sobre una sección de la pala. Tal es el caso de la teoría de perfiles alares, la cual por medio del teorema de Kutta-Joukowski obtiene la fuerza de sustentación como  $F = \rho u_{\infty} \Gamma$ , siendo  $\Gamma$  la circulación neta que contiene el cilindro (función de la forma del perfil y el ángulo de ataque).

#### 5.4.2 Aerodinámica Tridimensional

El comportamiento aerodinámico de un perfil alar tridimensional difiere considerablemente del comportamiento bidimensional. La distribución de la sustentación a lo largo de la coordenada longitudinal del álabe cambia el flujo corriente arriba y esto genera para una posición longitudinal cualquiera un *cambio en el ángulo de ataque local*.

El fenómeno se origina porque en el borde del ala se unen los flujos del extradós y del intradós; como la presión en el intradós es superior a la del extradós se genera un flujo tridimensional, es decir: una circulación que mueve el aire desde el intradós al extradós. Así, si se observara desde arriba un ala que vuela recto, se vería que las líneas de corriente superiores se mueven hacia adentro y las inferiores hacia afuera; esa curvatura de las líneas de corriente genera una reducción en la sustentación generada por el ala. La diferencia de velocidades en el borde de ala genera un vórtice llamado vórtice de punta de ala (trailing edge vortex).

En un ala tridimensional el sistema de vórtices está formado por vórtices de punta de ala y vórtices que se desprenden del borde de salida; los últimos se generan casi siempre bien detrás del ala (excepto a bajas velocidades de incidencia) y son débiles. El efecto de los vórtices de punta de ala y de los vórtices libres crea una deflexión en la corriente libre; dicha deflexión se presenta hacia arriba en el borde de ataque y hacia abajo en el borde de salida, ver Figura 5.4.

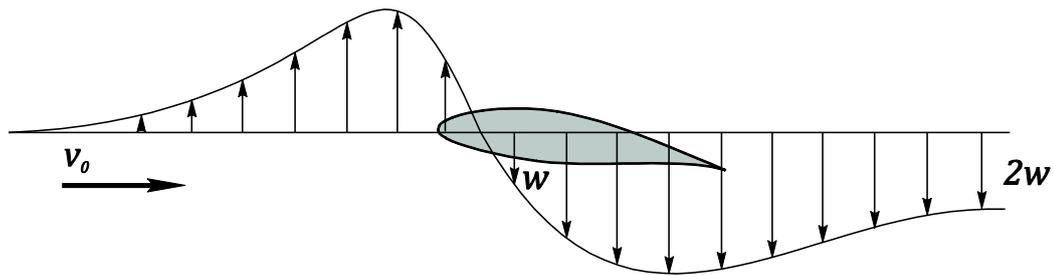


Figura 5.4 - Deflexión de la corriente

A la altura del centro aerodinámico la velocidad inducida se dirige hacia abajo y genera una reducción en el ángulo de ataque efectivo, a este efecto se lo denomina generalmente *downwash*.

## 5.5 METODO BEM

El BEM es una formulación matemática que permite predecir el comportamiento aerodinámico/aeroelástico de un rotor; básicamente el método acopla la teoría de cantidad de movimiento unidimensional con los fenómenos locales que ocurren en las palas del rotor. El primer desarrollo del BEM corresponde a Glauert [105]; su formulación es capaz de predecir ciertas magnitudes aerodinámicas estacionarias como la fuerza de empuje sobre el rotor y la potencia generada para diferentes velocidades de viento, velocidades de rotación y ángulo de giro de pala o pitch. Si bien la formulación funciona relativamente bien en la estimación de producción energética del aerogenerador, la descripción de los fenómenos aeroelásticos que realmente ocurren en el aerogenerador generalmente requiere de un enfoque no estacionario [91, 92].

Un enfoque no estacionario debe caracterizar el comportamiento estructural dinámico del álabes e incluir los efectos que éste genera sobre la aerodinámica local. Queda muy claro lo anterior si se nota que el cambio en el ángulo de ataque del

perfil alar generado por el desplazamiento y la rotación tridimensional del álabe implica un consecuente cambio en las fuerzas aerodinámicas. En tal dirección, una formulación BEM no estacionaria debe necesariamente predecir la realimentación continua entre las fuerzas aerodinámicas y el comportamiento dinámico de la estructura.

### 5.5.1 BEM Geométricamente Lineal

Como se ha mencionado, el método BEM se basa en el acoplamiento de las ecuaciones proporcionadas por la teoría de cantidad de movimiento del rotor unidimensional con el análisis de la aerodinámica local de una sección de la pala. Así, el BEM propone discretizar al rotor en elementos anulares, los cuales se analizan separadamente; es decir, sin considerar las interacciones entre ellos. Además, se asume que el flujo es constante dentro de cada elemento anular.

En lo que sigue se supone, por simplicidad, que los ángulos  $\theta_Y$ ,  $\theta_T$  y  $\theta_C$  (ver Figura 5.1) son iguales a cero. De esta manera, se puede suponer que el vector velocidad de viento  $V_w$  es coincidente en dirección con el eje de rotación del rotor, quien a su vez resulta ser coincidente en dirección y sentido opuesto al eje global  $a_1$ .

Considerando lo asumido respecto de la geometría del aerogenerador, se ubica la pala de tal manera que su perfil alar se orienta como muestra la Figura 5.5; donde  $\theta$  es el ángulo de torsión del perfil sobre su propio eje,  $\varphi$  es el ángulo entre el vector de velocidad de incidencia del aire  $V_i$  en la dirección tangencial y  $V_a$  y  $V_t$  son las velocidades axial y tangencial de la sección de pala.

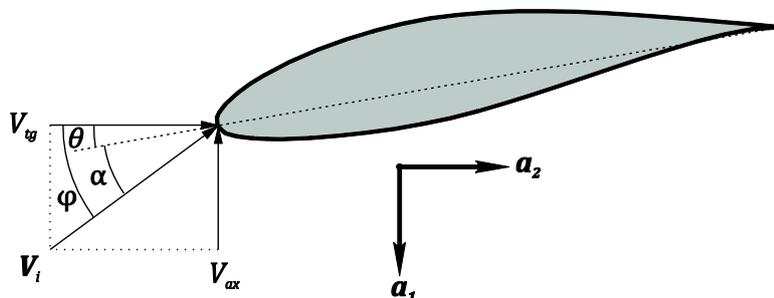


Figura 5.5 - Velocidades sobre el perfil de pala

Como puede verse de la Figura 5.5, la diferencia entre  $\varphi$  y  $\theta$  da el ángulo de ataque efectivo del perfil, al que notaremos como  $\alpha$ . Además, la velocidad de incidencia resulta de la suma vectorial de las velocidades axial y tangencial, es decir:

$$\mathbf{V}_i = [V_a \ V_t \ 0]^T. \quad (5.15)$$

Entonces, el ángulo de ataque efectivo es:

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{V_a}{V_t} \right) - \theta. \quad (5.16)$$

Si bien la expresión anterior para obtener el ángulo de ataque es muy sencilla de evaluar y podría rápidamente disponerse de los coeficientes aerodinámicos de la sección, las velocidades axial y tangencial son todavía desconocidas, pues no solo dependen de la velocidad del viento y la velocidad de giro del rotor sino también de la velocidad de vibración de la pala y las velocidades inducidas.

Para aclarar lo anterior nótese primero que los vórtices originados por el rotor del generador forman un patrón helicoidal, y el sistema de vórtices induce en las palas una nueva velocidad con componentes en las direcciones axial y tangencial. Por otro lado, la velocidad de traslación de la sección en cuestión resulta del movimiento de la pala como cuerpo rígido más la vibración de la misma por efectos de su deformación. Si bien en la mayoría de las formulaciones el movimiento de cuerpo rígido y el movimiento vibratorio se encuentran desacoplados, en la formulación Lagrangiana Actualizada tal separación no es necesaria y la velocidad de la sección se obtiene como suma de componentes del vector global de velocidades  $\dot{\mathbf{U}}$ . Así, considerando las distintas velocidades que entran en juego en el problema se pueden obtener las expresiones para las velocidades axial y tangencial relativas a la sección como:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_a &= \mathbf{V}_v + \dot{\mathbf{U}}_1 - \mathbf{w}_a \\ \mathbf{V}_t &= \dot{\mathbf{U}}_{23} + \mathbf{w}_t \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde  $\mathbf{V}_v$  es la velocidad del viento,  $\dot{\mathbf{U}}_1$  es la velocidad global de la sección en la dirección de  $\mathbf{a}_1$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_{23}$  es la resultante de la velocidad global de la sección en el plano

del rotor (plano  $\mathbf{a}_{23}$ , i.e. definido por  $\mathbf{a}_2$  y  $\mathbf{a}_3$ ) y  $\mathbf{w}_a$  y  $\mathbf{w}_t$  son las velocidades inducidas axial y tangencial, respectivamente.

A esta altura ya se ha introducido la primera hipótesis de linealidad geométrica, pues se ha supuesto que las velocidades yacen en el plano  $\mathbf{a}_{23}$ . Esto es equivalente a suponer que *las rotaciones del perfil provocadas por la deformación son muy pequeñas*.

Ahora bien, uno de los aspectos centrales del método BEM es linealizar las velocidades inducidas por la tridimensionalidad de la pala y obtenerlas con ayuda de la teoría unidimensional de cantidad de movimiento. Utilizando las Eqs. (5.6) y (5.9) puede entenderse que los factores de inducción axial y tangencial no son otra cosa que una linealización de la expresión de la velocidad inducida de la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_a &= a_a \mathbf{V}_v, \\ \mathbf{w}_t &= 2a_t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},\end{aligned}\tag{5.18}$$

siendo  $\boldsymbol{\omega}$  el vector de velocidad angular del rotor.

Así, las expresiones para las velocidades axial y tangencial quedan:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_a &= \mathbf{V}_v(1 - a_a) + \dot{\mathbf{U}}_1 \\ \mathbf{V}_t &= \dot{U}_{23}\check{\mathbf{t}} + 2a_t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\end{aligned}\tag{5.19}$$

donde  $\check{\mathbf{t}}$  es el versor tangencial y  $\dot{U}_{23}$  se obtiene de la formulación estructural como:

$$\dot{U}_{23} = \left( \dot{U}_2^2 + \dot{U}_3^2 \right)^{1/2}\tag{5.20}$$

sin necesidad de discriminar componentes originadas por la rotación de la pala como cuerpo rígido y componentes originadas por la deformación.

Nuevamente, el objetivo fundamental del BEM es obtener los factores de inducción axial y tangencial valiéndose de la teoría unidimensional de cantidad de movimiento; una vez obtenidos los factores de inducción utilizando una estimación de la fuerza y el momento en el elemento anular es posible obtener la velocidad de incidencia y así puede utilizarse la teoría de perfiles alares para determinar las fuerzas originadas sobre el ala. Se prosigue entonces a describir algunos aspectos de la aerodinámica bidimensional.

De la teoría de perfiles alares se tiene que la fuerza de sustentación generada por la circulación del fluido es perpendicular a la dirección de la velocidad de incidencia del flujo, mientras que la fuerza de arrastre es colineal a ella.

Las fuerzas de sustentación y arrastre locales se obtienen como:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}_i|^2 c C_L, \\ D &= \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}_i|^2 c C_D \end{aligned} \quad (5.21)$$

siendo  $c$  la cuerda del perfil alar.

La velocidad de incidencia resulta de la suma vectorial siguiente:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_v(1 - a_a) + \dot{U}_1 + \dot{U}_{23}\check{\mathbf{x}} + 2a_t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (5.22)$$

De la teoría de cantidad de movimiento unidimensional se obtuvo en las Eqs. (5.10) y (5.12) el empuje y el torque en un elemento anular diferencial,  $dF_E$  y  $dP_R$  respectivamente. Si bien en dichas ecuaciones tanto los factores de inducción como el empuje y el torque son desconocidos, es posible resolver el sistema utilizando dos ecuaciones adicionales para  $F_E$  y  $P_R$  obtenidas de la aerodinámica bidimensional (Eqs. (5.21)). Proyectando dichas fuerzas a los ejes globales se puede encontrar el empuje y la fuerza rotacional generados por las fuerzas aerodinámicas, esto es:

$$\begin{aligned} dF_E &= L \cos \varphi + D \sin \varphi \, dr, \\ dF_R &= L \sin \varphi - D \cos \varphi \, dr. \end{aligned} \quad (5.23)$$

En componentes globales, la fuerza resultante actuante sobre la sección es:

$$\mathbf{F}_A = F_E \check{\mathbf{a}}_1 + F_R \cos \omega t \check{\mathbf{a}}_2 + F_R \sin \omega t \check{\mathbf{a}}_3 \quad (5.24)$$

Es posible escribir la fuerza de empuje y el torque generado por la sección alar como:

$$\begin{aligned} dF_E &= \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}_i|^2 c (C_L \cos \varphi + C_D \sin \varphi) \, dr, \\ dP_R &= \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}_i|^2 c (C_L \sin \varphi - C_D \cos \varphi) r \, dr. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Claro es que en las ecuaciones anteriores  $C_L$  y  $C_D$  son funciones del ángulo de ataque  $\alpha$ , el cual depende de las velocidades inducidas. Las ecuaciones (5.10),

(5.12) y (5.25) pueden integrarse e igualarse para formar un sistema de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas: las velocidades inducidas axial y tangencial, las cuales pueden obtener por iteración de punto fijo.

Se analizan ahora las características del método referentes a sus hipótesis geométricas. Las Eqs. (5.17) contemplan la posibilidad de que la pala experimente velocidades de vibración importantes, lo cual de cierta manera podría verse como un punto que compatibiliza el método aeroelástico con formulaciones estructurales geoméricamente no lineales. No obstante, la compatibilidad no es tal, pues como puede claramente entenderse de la Eq. (5.24), nada se establece respecto a la posición deformada de la pala en la derivación de las fuerzas aerodinámicas globales, salvo por un pequeño ángulo de torsión  $\theta$ .

Si bien el método tal cual ha sido presentado en esta sub-sección es utilizado en la mayoría de los trabajos científicos y técnicos sobre aerogeneradores, aún cuando las teorías estructurales sean geoméricamente no lineales [92]; la inconsistencia del enfoque anterior con la teoría estructural desarrollada en el Capítulo 3 es indiscutible. La incertidumbre generada por tales inconsistencias hace valer la pena el esfuerzo por derivar un enfoque consistente, y en tal dirección se orientan la sección siguiente.

### 5.5.2 BEM Geométricamente No Lineal

La consideración de los efectos de la no linealidad geométrica en las cargas aerodinámicas obtenidas mediante el método BEM requiere cierto desarrollo matemático. En la mayoría de los trabajos presentados en la literatura las cargas aerodinámicas se obtienen realizando hipótesis restrictivas sobre el movimiento de la pala. Por supuesto, si es de interés obtener una formulación aeroelástica consistente, es necesario considerar la influencia de las grandes rotaciones y desplazamientos en la obtención de las cargas aerodinámicas.

Para esto, se propone realizar el cálculo de las fuerzas aerodinámicas en el sistema de referencia local del elemento de pala y luego transformarlas al sistema global. Es verdad que la teoría de cantidad de movimiento unidimensional considera al rotor como rígido, y tal limitación no es viable de ser removida, por lo

cual la influencia de la no linealidad geométrica sobre las cargas aerodinámicas podrá ser tenida en cuenta solo en el análisis aerodinámico bidimensional.

Analizando el BEM en su variante original o lineal se puede concluir que durante el análisis del rotor unidimensional se asume que la velocidad tangencial de la sección puede obtenerse como producto de la velocidad angular por la posición radial de la sección (pues el rotor es considerado rígido) lo cual no es exactamente cierto, pues como ya se ha mencionado, la pala experimenta velocidades adicionales originadas por su deformación.

Ahora bien, es aceptable proponer el reemplazo de las Eqs. (5.18) por su contraparte flexible:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_a &= a_a (\mathbf{V}_v + \dot{\mathbf{U}}_1), \\ \mathbf{w}_t &= 2a_t \dot{\mathbf{U}}_{23}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Las ecuaciones anteriores en cierta forma resultan más razonables que lo propuesto las Eqs. (5.18), donde el factor de inducción solo afecta a la componente de velocidad de viento  $\mathbf{V}_v$ , pues es al menos difícil de aceptar que el efecto de inducción discrimine movimientos de cuerpo rígido de movimientos vibratorios.

Las fuerzas aerodinámicas obtenidas con la Eq. (5.24) no cambian con la deflexión de la pala, lo cual no es real. Aún cuando es imposible salvar la incompatibilidad natural que surge al asumir que el rotor es rígido en el análisis unidimensional y flexible en el análisis bidimensional, es efectivamente posible evaluar las fuerzas aerodinámicas considerando los cambios de orientación de la sección originados por su deflexión.

Con el objetivo de salvar las inconsistencias mencionadas y en virtud de formular lo que quizás abusivamente se ha denominado BEM geoméricamente no lineal, se proponen dos cambios importantes a la formulación descrita en la subsección 5.5.1: i) utilizar la forma (5.26) para evaluar las velocidades inducidas y ii) realizar el análisis aerodinámico bidimensional de la sección en su sistema de coordenadas local.

Primeramente debe volver a mencionarse que las velocidades del álabe en sentido axial son despreciables debido a su gran rigidez axial, si se recuerda que la teoría aerodinámica adoptada asume que el flujo de aire en sentido axial es

despreciable, se puede establecer que las velocidades axiales de la pala no cumplen un rol en el problema aeroelástico y por lo tanto no serán consideradas.

Para comenzar con la formulación se define el vector de velocidad total como:

$$\mathbf{V}_T = \mathbf{V}_v + \dot{\mathbf{U}}. \quad (5.27)$$

Definiendo además versores axiales y tangenciales del rotor,  $\check{\mathbf{i}}_a$  y  $\check{\mathbf{i}}_t$  respectivamente, se puede utilizar el vector de velocidad total para reescribir las relaciones (5.26) como:

$$\begin{aligned} V_a &= (\mathbf{V}_T \cdot \check{\mathbf{i}}_a)(1 - a_a) \\ V_t &= (\mathbf{V}_T \cdot \check{\mathbf{i}}_t)(1 + 2a_t) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Como se ha definido en el BEM lineal, i.e. en la Eq. (5.15), y tal como se muestra en la Figura 5.6, se ha asumido que la velocidad de incidencia  $\mathbf{V}_i$  está contenida en el plano de la sección transversal.

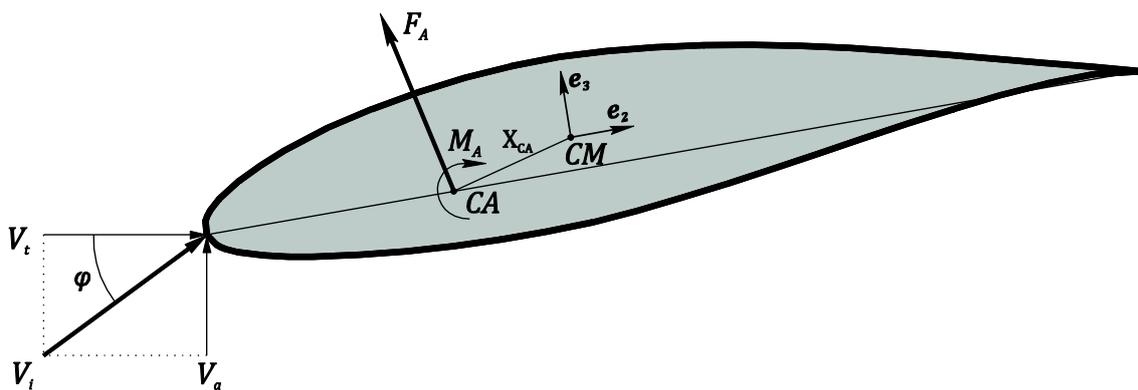


Figura 5.6 - Análisis aerodinámico local

Lo anterior no es exactamente correcto si la pala experimenta rotaciones por flexión importantes, aún cuando los las direcciones  $\check{\mathbf{i}}_a$  y  $\check{\mathbf{i}}_t$  hayan sido definidas considerando la configuración deformadas del rotor (lo cual generaría una inconsistencia con la formulación de rotor ideal en cuanto al significado de los factores de inducción), pues el efecto de corte transversal prohíbe la igualdad entre el vector tangente a la deformada de la pala y el vector director  $\mathbf{e}_1$ . Esto sugiere inmediatamente que si se desea obtener una expresión sin hipótesis geométricas respecto a la ubicación de la pala y a la dirección de la velocidad de incidencia es preciso cambiar el enfoque del análisis geométrico.

Ahora bien, los vectores velocidad  $\mathbf{V}_T$ ,  $\mathbf{V}_v$  y  $\dot{\mathbf{U}}$  tienen claro significado si son referidos al sistema de coordenadas global. Por otro lado, las fuerzas de arrastre y sustentación generadas por el fenómeno aerodinámico tienen un significado claro si se refieren al sistema local del elemento de pala. Entonces, si se desea formular expresiones para las fuerzas aerodinámicas sin hipótesis geométricas respecto de la orientación de la sección transversal de la pala, resulta natural proponer una transformación de observador para la velocidad de incidencia  $\mathbf{V}_i$  y proceder con la obtención de las fuerzas aerodinámicas según el observador local de la sección, se procede entonces bajo esa motivación.

El análisis del problema aerodinámico en ejes locales de la sección se ve facilitado para el caso de la formulación estructural presentada en los capítulos anteriores pues la sección cuenta por naturaleza con un sistema de referencia local, i.e. la tríada directora del elemento. Ventajoso resulta además el hecho de que la tríada de la sección se mueve con la pala, sin importar la magnitud ni naturaleza del movimiento. Es conveniente notar en este punto que esa tríada directora resulta generalmente de la interpolación lineal de las tríadas nodales del elemento; también, en la implementación computacional la geometría de la sección resulta de la interpolación tipo spline de los valores del parámetro de longitud de cuerda como función de la coordenada longitudinal del álabe.

Así, la descripción del fenómeno aerodinámico respecto de un observador local comienza con la expresión de la velocidad de incidencia en el sistema de coordenadas global, utilizando la Eq. (5.28) se tiene:

$$\mathbf{V}_i = V_a \check{\mathbf{i}}_a + V_t \check{\mathbf{i}}_t. \quad (5.29)$$

Generalmente la velocidad de incidencia no estará contenida en el plano de la sección transversal, ver Figura 5.7.

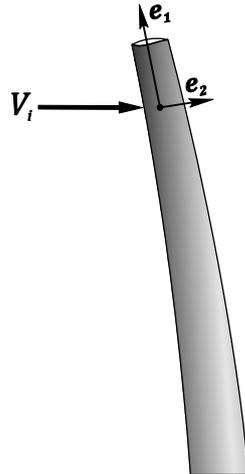


Figura 5.7 - Rotación del perfil de la pala.

Luego, se puede transformar velocidad de incidencia al sistema de coordenadas local de la sección transversal según:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{A}_A^T \mathbf{V}_i, \quad (5.30)$$

donde  $\mathbf{A}_A$  es la matriz de rotación total de la sección respecto del sistema de referencia global del aerogenerador. Es notable el hecho de que  $\mathbf{A}_A = \mathbf{e}$ , lo cual permite escribir la ecuación anterior como:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{e}^T \mathbf{V}_i, \quad \mathbf{v}_i = [v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}]^T, \quad (5.31)$$

y así la velocidad de incidencia queda expresada respecto de la tríada local de la sección. Se asumirá que la componente en  $\mathbf{e}_1$  de la velocidad de incidencia, i.e.  $v_1$ , genera un flujo axial despreciable; lo cual es compatible con la hipótesis de flujo bidimensional. Además, considerando que la rigidez de la pala en la dirección axial es muy grande, tampoco la velocidad de incidencia en su componente  $v_{i1}$  tendrá una componente no despreciable. Así, de ahora en adelante se asumirá:

$$\mathbf{v}_i = [0, v_{i2}, v_{i3}]^T, \quad (5.32)$$

Lo cual en general origina que:

$$|\mathbf{v}_i| \neq |\mathbf{V}_i|, \quad (5.33)$$

Ahora bien, la Figura 5.8 muestra las fuerzas aerodinámicas generadas por el flujo  $\mathbf{v}_i$ ; es sencillo ver que el ángulo de ataque puede obtenerse sin necesidad de recurrir al ángulo de torsión  $\theta$ , el cual fue introducido en el BEM lineal para medir

la rotación torsional de la pala. Para el análisis local el ángulo de ataque efectivo puede determinarse como:

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{v_{i3}}{v_{i2}} \right) \quad (5.34)$$

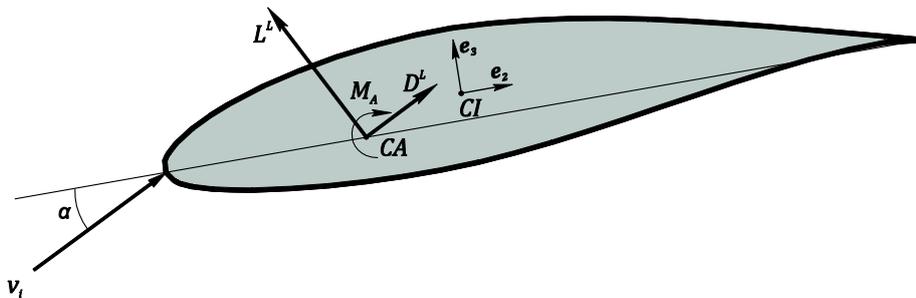


Figura 5.8 - Fuerzas aerodinámicas locales

La obtención del ángulo de ataque permite obtener las fuerzas aerodinámicas como:

$$\begin{aligned} L^L &= \frac{1}{2} \rho c C_L |v_i|^2, \\ D^L &= \frac{1}{2} \rho c C_D |v_i|^2, \\ M^L &= \frac{1}{2} \rho c C_M |v_i|^2, \end{aligned} \quad (5.35)$$

donde la fuerza de sustentación  $L^L$  es perpendicular a la velocidad de incidencia, la fuerza de arrastre  $D^L$  es colineal a la misma y el momento aerodinámico  $M^L$  está expresado respecto del CA.

Ahora es necesario expresar las fuerzas aerodinámicas anteriores respecto de los ejes locales del elemento, por lo tanto no solo es preciso rotar el vector de fuerzas aerodinámicas resultantes sino también expresar el momento aerodinámico respecto del origen de la tríada directora, i.e. el CM.

Si se define ahora un vector

$$\mathbf{F}_C = [0 \ D^L \ L^L]^T, \quad (5.36)$$

el vector puede interpretarse como un vector resultante de fuerzas aerodinámicas expresadas en un sistema de referencia con dirección 2 paralela a  $v_i$  y dirección 3

perpendicular a  $\mathbf{v}_i$ ), se ve que la fuerza aerodinámica y el momento aerodinámico pueden expresarse respecto de la terna local como:

$$\begin{aligned} d\vec{\mathbf{F}}_A &= \Lambda(\alpha)\mathbf{F}_C dr, \\ d\vec{\mathbf{M}}_A &= (-M^L\mathbf{e}_1 + \vec{\mathbf{F}}_A \times \mathbf{X}_{CA}) dr, \end{aligned} \quad (5.37)$$

donde  $\mathbf{X}_{CA}$  es el vector posición del centro aerodinámico respecto del centroide de la sección (ver Figura 5.6) y:

$$\Lambda(\alpha) = \exp([\alpha \ 0 \ 0]^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Por inspección se puede ver que las expresiones anteriores tienen un sentido bastante claro, pues siendo la forma explícita de la fuerza aerodinámica:

$$d\vec{\mathbf{F}}_A = ((D^L \cos \alpha - L^L \sin \alpha)\mathbf{e}_2 + (D^L \sin \alpha + L^L \cos \alpha)\mathbf{e}_3) dr, \quad (5.39)$$

se ve que ésta tiene componentes en  $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$  y generará un momento local respecto del centroide de la sección con una única componente en  $\mathbf{e}_1$ .

La fuerza aerodinámica debe expresarse en el sistema de referencias global e integrada sobre la longitud de elemento de álabe para ser comparada con la Eq. (5.8); así:

$$\vec{\mathbf{F}}_A^G = \int_{r_i}^{r_e} \mathbf{e} d\vec{\mathbf{F}}_A = \int_{r_i}^{r_e} \mathbf{e} \Lambda(\alpha)\mathbf{F}_C dr \cong \mathbf{e} \Lambda(\alpha)\bar{\mathbf{F}}_C(r_e - r_i) \quad (5.40)$$

donde  $\bar{\mathbf{F}}_C$  es una fuerza promedio dentro de la sección. El torque generado por el elemento de álabe es:

$$\vec{\mathbf{T}}_A^G = \int_{r_i}^{r_e} \mathbf{r} \times \mathbf{e}(\Lambda(\alpha)\mathbf{F}_C) dr \quad (5.41)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector posición de la sección respecto del eje del rotor.

Las expresiones anteriores concluyen el desarrollo del llamado BEM geoméricamente no lineal.

# IMPLEMENTACIÓN

---

En esta sección se presenta una descripción breve de algunos detalles relacionados a la implementación computacional de las formulaciones anteriormente presentadas. Como se ha mencionado, la implementación ha sido realizada en MatLab, elección justificada principalmente por la posibilidad que el lenguaje ofrece para optimizar rutinas y purgar errores sin necesidad de compilar el código. Para agilizar la comunicación se llamará al conjunto de rutinas desarrolladas simplemente NLWIND.

## 6.1 PRE-PROCESO

NLWIND ha sido desarrollado de tal forma que el modelo de elementos finitos y la configuración del análisis son leídos de un archivo ASCII con el formato de comandos utilizado por Abaqus y que contiene información de nodos, elementos, propiedades seccionales, tipos de análisis a realizar, etc. Lo anterior permite utilizar cualquier software comercial especializado en la construcción de mallas para generar el modelo de elementos finitos del aerogenerador. En este trabajo se ha utilizado preferentemente el software Altair Hypermesh para la generación del modelo de elementos finitos; luego del modelado del generador se

ha exportado el modelo en formato Abaqus para luego realizar el proceso con NLWIND. La Figura 6.1 muestra un archivo de entrada típico de NLWIND.

```

**=====
**          N L W I N D      I N P U T      F I L E
**=====
**----- N O D O S -----
*NODE
      1,  0.0          ,  0.0          ,  0.0
      2,  9.8632929902493, -0.99168368949 , -5.629566133238
...
**----- E L E M E N T O S -----
*ELEMENT,TYPE=SCP2UL,ELSET=S01_SNL_100m_Transition84
      1,      1,      12 ,      66
      2,      12,      2 ,      66
...
*ELEMENT, TYPE=REVJUL, ELSET=Joint
      64,      53,      54,      46,      1,
*ELEMENT, TYPE=MASSTR, ELSET=Hub
      65,  1,  2.45E5
**
**----- I N F O R M A C I O N   S E C C I O N A L -----
*GRAL SECTION, NAME=S01_SNL_100m_Transition84, ELSET=S01_SNL_100m_Transition84,
FOIL=Cylinder1,  BLADE=snl100
*GRAL SECTION, NAME=S02_SNL_100m_Transition47, ELSET=S02_SNL_100m_Transition47,
FOIL=Cylinder2,  BLADE=snl100
...
**----- A N A L I S I S   A E R O E L A S T I C O -----
*ROTOR, NAME=SNLRotor, ELSET=ALL, START=YES
      1,      64,      0,-1,0,      0,0,1  102.5,  146.4
      40,      -20000
*STEP, NAME=iecstep, TYPE=DYNAMIC, METHOD=ALPHA, NUMDAMP=0.8, NLGEOM=YES
0, 100, 0.1
*BOUNDARY, TYPE=DISP
      65,  1,6,  0
**
*BFORCE, NAME=gravedad
0, 0, -9.8
**
*WIND, NAME=viento, BEM=YES, FILE=NWP113
*END

```

*Figura 6.1 – Esquema del archivo de entrada a NLWIND.*

La lectura del archivo de entrada es seguida por la inicialización de vectores y el pre-dimensionamiento convencional de cualquier código de elementos finitos.

Es quizás importante el hecho de que la inicialización de las tríadas nodales debe realizarse de tal forma que cada elemento posea dos tríadas únicas, es decir, dos elementos adyacentes no comparten una triada nodal en el nodo que tienen en común. Además, las dos tríadas iniciales de cada elemento son idénticas.

### 6.1.1 Elementos SCB Standard y Aeroelástico

Según su capacidad para considerar efectos aerodinámicos, el elemento finito desarrollado en la sección 3.5 se implementa en dos variantes. La primera variante corresponde a una implementación no aerodinámica, en la cual el elemento es insensible al flujo de aire. La segunda variante corresponde a una implementación aeroelástica, en la cual el elemento tiene capacidad para recibir cargas aerodinámicas. A dichas variantes se las abreviará, SCBS y SCBA respectivamente.

El elemento aeroelástico SCBA se diferencia del elemento SCBS en: i) la inicialización de su campo director está afectada por un ángulo de ataque definido inicialmente para cada sección y ii) la forma de su sección transversal, su ubicación espacial y su velocidad con respecto al flujo de aire externo generan un vector de fuerzas externas aerodinámicas.

La orientación de la sección transversal para ambos tipos de elementos requiere de la definición de un tercer nodo para cada elemento. Ahora bien, el elemento SCBA ha sido pensado para modelar la pala del aerogenerador, y como convencionalmente la geometría de la pala queda ubicada espacialmente por la especificación de una variación del ángulo de giro del perfil alar respecto de su eje axial (lo cual es necesario para dar a la sección un ángulo de ataque que le otorgue las características aerodinámicas deseadas), la rutina de inicialización de tríadas nodales para los elementos finitos SCBA se modifica respecto a la rutina de inicialización del elemento SCBS. Así, la ubicación del tercer nodo para los elementos SCBA se define inicialmente para ángulo de ataque cero y luego se rota de acuerdo a:

$$\bar{x}_{n3} = \exp(\alpha E_1^{el}) x_{n3} \quad (6.1)$$

donde  $\bar{x}_{n3}$  es el vector posición rotado del tercer nodo del elemento,  $E_1^{el}$  es el versor axial del elemento,  $\alpha$  es el ángulo de ataque y  $x_{n3}$  es el vector posición inicial del tercer nodo.

La aplicación de la rotación al tercer nodo requiere necesariamente la definición del ángulo de ataque de la pala en función a su longitud. Por eso, y como puede verse de la Figura 6.1, la línea correspondiente al comando \*GRAL SECTION del archivo de entrada indica con el comando BLADE=snl100 el nombre de la tabla que contiene la información de la geometría de la pala. Para que la lectura funcione, debe generarse previamente un archivo que contenga información de la geometría de la pala, respetando el ordenamiento definido en la Figura 6.2.

** span	$\alpha$	cuerda	amp.
0.0000	13.308	5.767	1
4.7222	13.308	5.767	1
9.1667	13.308	6.285	1
...			

Figura 6.2 – Esquema del archivo de información geométrica de la pala.

## 6.2 RIGIDEZ SECCIONAL

Se ha mencionado en la sección 3.6 que la determinación de las propiedades seccionales de rigidez se basa en un enfoque discreto. La idea básica es dividir la forma del perfil alar en elementos rectos y asignar a cada uno de esos segmentos las propiedades del laminado que correspondan con su ubicación dentro de la sección.

La forma alar se obtiene convencionalmente mediante la gráfica de los puntos definidos en la tabla del perfil. Es importante mencionar que las formas de los perfiles alares no son gobernadas por expresiones analíticas sino que se corresponden con una sucesión de rectas. Por lo tanto, en principio podría utilizarse la misma tabla de puntos para definir los segmentos laminados, aunque generalmente es preferible utilizar una discretización menos detallada.

La definición de la sección transversal como sucesión de segmentos se obtiene realizando una malla de elementos unidimensionales en Hypermesh, desde

donde luego se exporta un archivo en formato Abaqus que contiene la información de puntos, segmentos, materiales, laminados y grupos o colectores, ver Figura 6.3. Los grupos o colectores permiten agrupar a los segmentos que tienen las mismas características de laminado y material.

```

**=====
**              S E C C I O N   10_NACA_64_618
**=====
*NODE
      1,  0.0          ,  0.0          ,  0.0
      2,  0.0          ,  0.75         , -2.0
      ...

*ELEMENT,TYPE=T3D2,ELSET=LEPanel,LAMINATE=LEPanel
      78,      86,      87
      72,      80,      81
      ....

*ELEMENT,TYPE=T3D2,ELSET=SparCap,LAMINATE=SparCap
      70,      78,      79
      80,      88,      89
      ....

**----- M A T E R I A L E S -----
*MATERIAL, NAME=ELT5500
*ELASTIC, TYPE=TRISOTROPIC
      41.8E9,  14E9,  2.63E9,  3.00E9,  0.28, 1920
*MATERIAL, NAME=SAERTEX
*ELASTIC, TYPE=TRISOTROPIC
      13.6,   13.3E9,  11.8E9,  14.00E9,  0.51, 1780
*MATERIAL, NAME=SNLTRIAX
*ELASTIC, TYPE=TRISOTROPIC
      27.7E9,  13.65E9,  7.2E9,  9.00E9,  0.39, 2775

**----- L A M I N A D O S -----
*LAMINATE, NAME=LEPanel
      0          0          0
      0.005     0.000001   0.005
      3          1          3
*LAMINATE, NAME=TEPanel
      0          0          0
      0.005     0.000001   0.005
      3          1          3
      ....
*END

```

Figura 6.3 – Esquema del archivo de entrada para el cálculo de la rigidez seccional.

La Figura 6.4 muestra una malla de una sección transversal típica de un aerogenerador; debe mencionarse que, como se aprecia claramente, los segmentos transversales correspondientes a los *shear webs* mantienen la conectividad. Lo anterior es necesario para obtener la función de alabeo correctamente, aunque no es estrictamente necesario para obtener los parámetros de rigidez transversal.

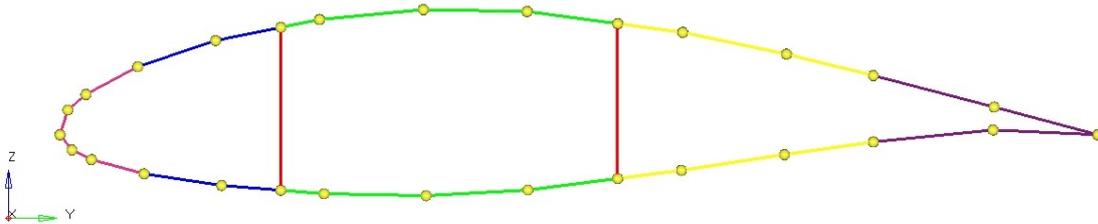
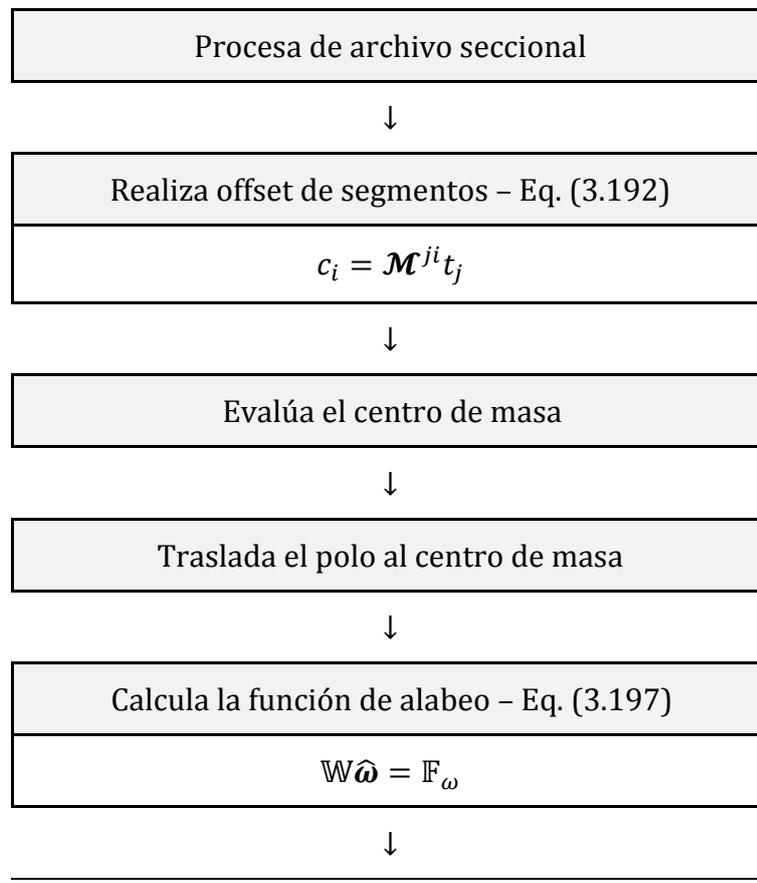


Figura 6.4 – Malla de una sección transversal típica.

Un esquema del algoritmo que determina la rigidez seccional definida en la Eq. (3.87) se presenta en la Figura 6.5.



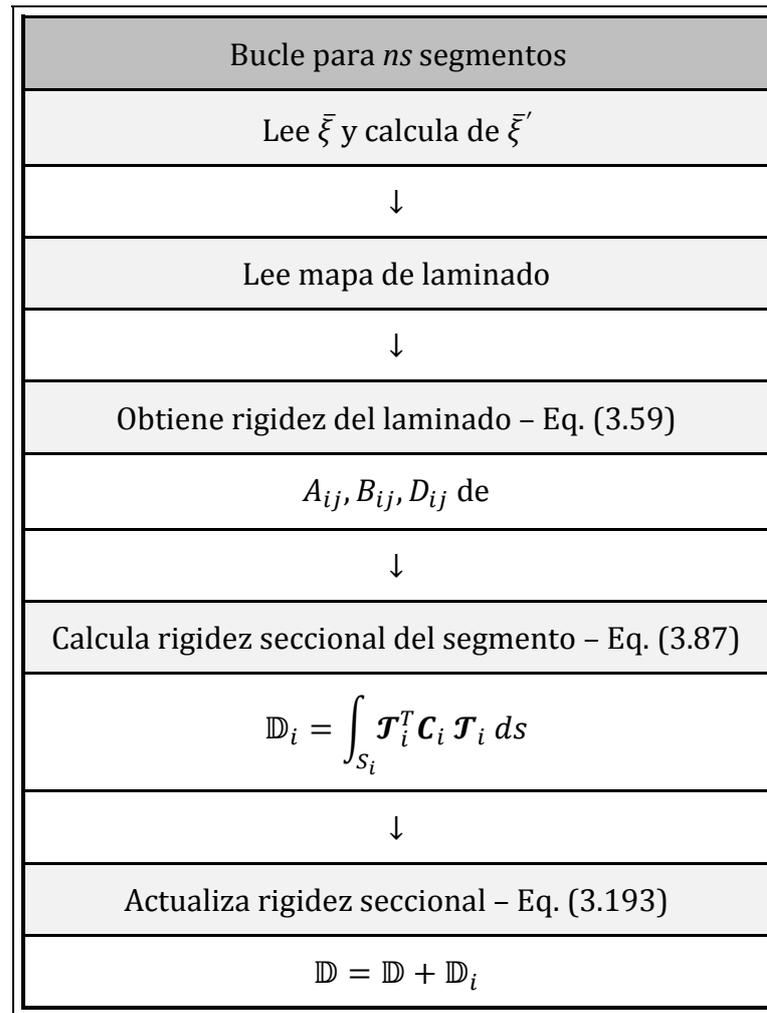


Figura 6.5 – Algoritmo de propiedades seccionales.

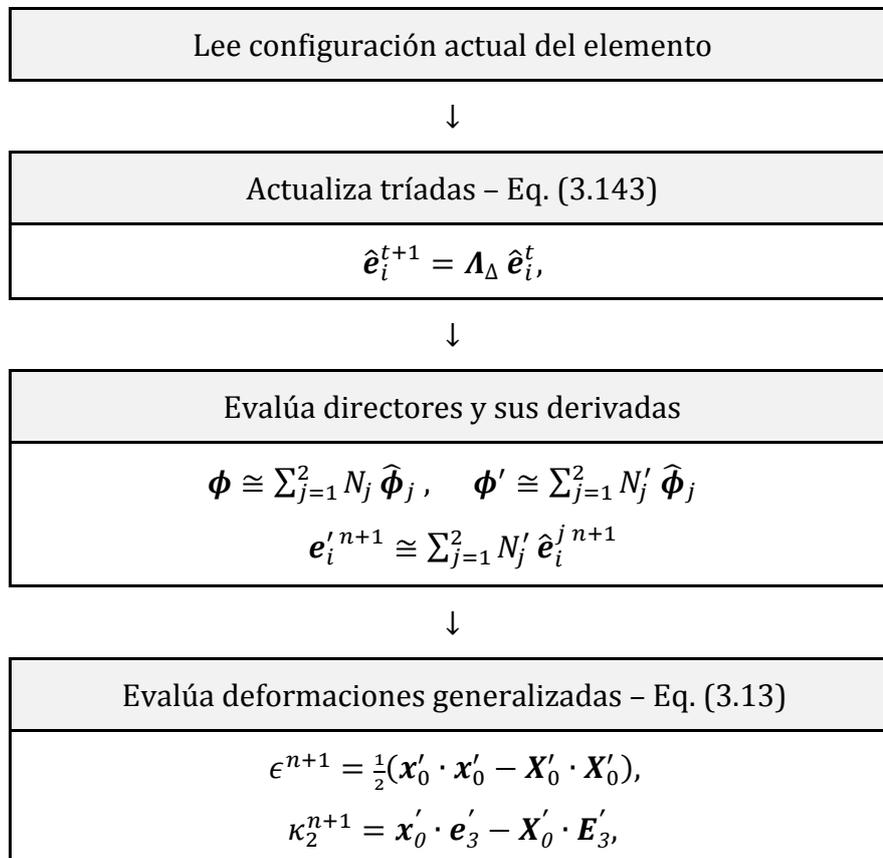
La rutina que obtiene las rigideces seccionales se utiliza solo durante el pre-proceso. Una vez determinadas las propiedades de las secciones transversales activas, éstas se almacenan para su posterior utilización en la evaluación de la rigidez tangente del elemento viga. Puesto que las propiedades seccionales no son función de la deformación del elemento, la rutina no se utiliza una vez comenzado el análisis.

Es importante mencionar que la rigidez de la sección transversal se determina independientemente de su posición espacial en el modelo; es decir, para ángulo de ataque cero. Si bien podría determinarse la rigidez de la sección para su configuración correspondiente al ángulo de ataque inicial que posea según el diseño de la pala, resulta más sencillo imponer el giro correspondiente al ángulo de ataque inicial a nivel del campo director según la Eq. (6.1).

### 6.3 MATRIZ TANGENTE

La evaluación de la matriz tangente del sistema es el proceso que consume la mayor parte del tiempo computacional. Particularmente, la obtención de la matriz de rigidez geométrica es considerablemente costosa, pues en ella están contenidas sub-matrices que resultan de la linealización del campo director y sus derivadas y que consumen una gran cantidad de operaciones.

La modelización del aerogenerador requiere al menos el uso de tres tipos de elementos: i) elementos SCBS, ii) elementos aeroelásticos SCBA y iii) elementos que representen las articulaciones. Las implementaciones de los elementos SCBS y SCBA son muy similares, solo la evaluación de las fuerzas aerodinámicas distingue a sus rutinas. Como la fuerza aerodinámica es función de la configuración y las velocidades del elemento, su determinación se realiza dentro de la rutina que obtiene la matriz tangente del elemento. La Figura 6.6 muestra un esquema de la rutina para el cálculo de la matriz tangente y las fuerzas internas, de cuerpo y aerodinámicas del elemento SCBA.



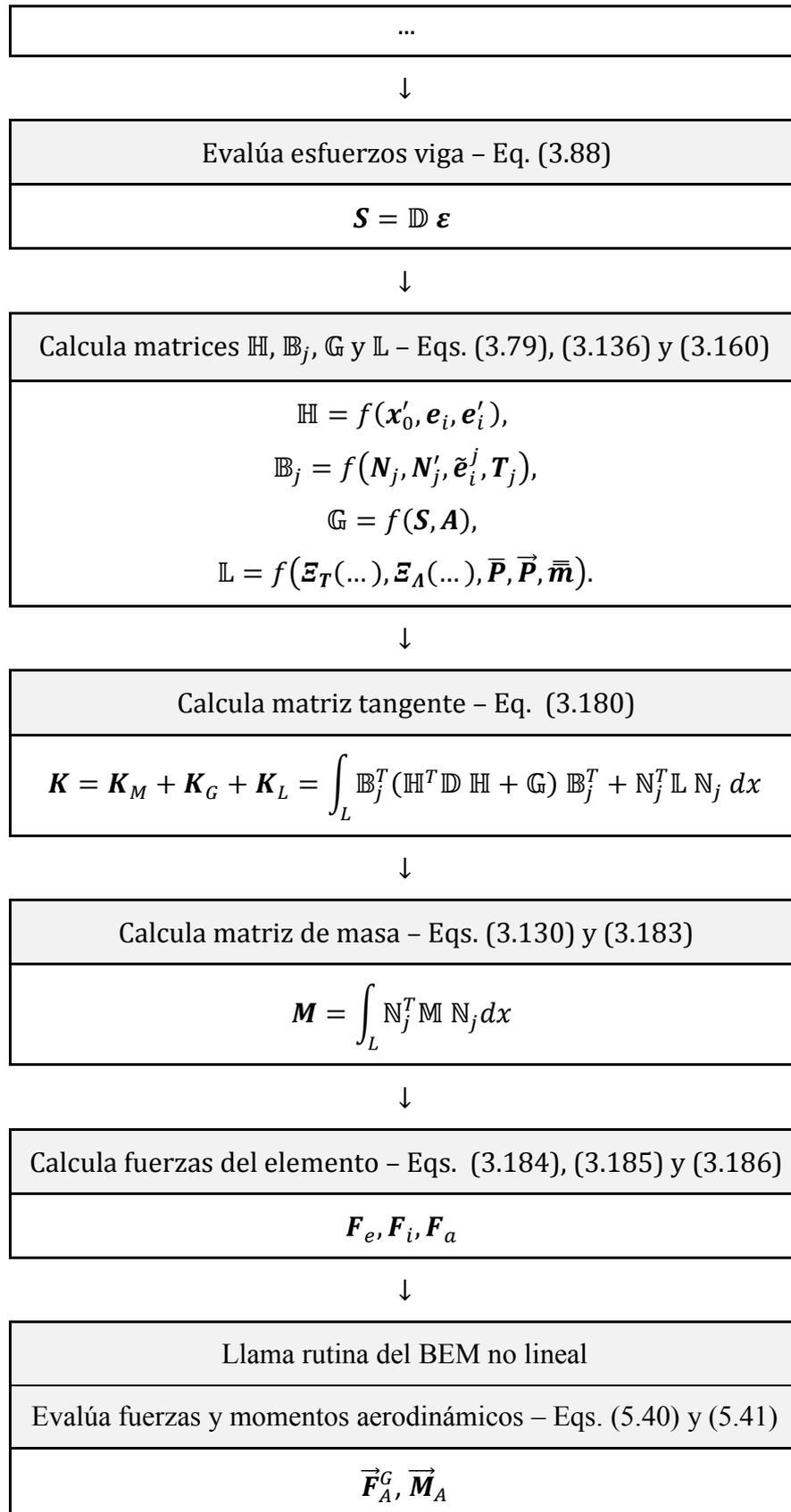
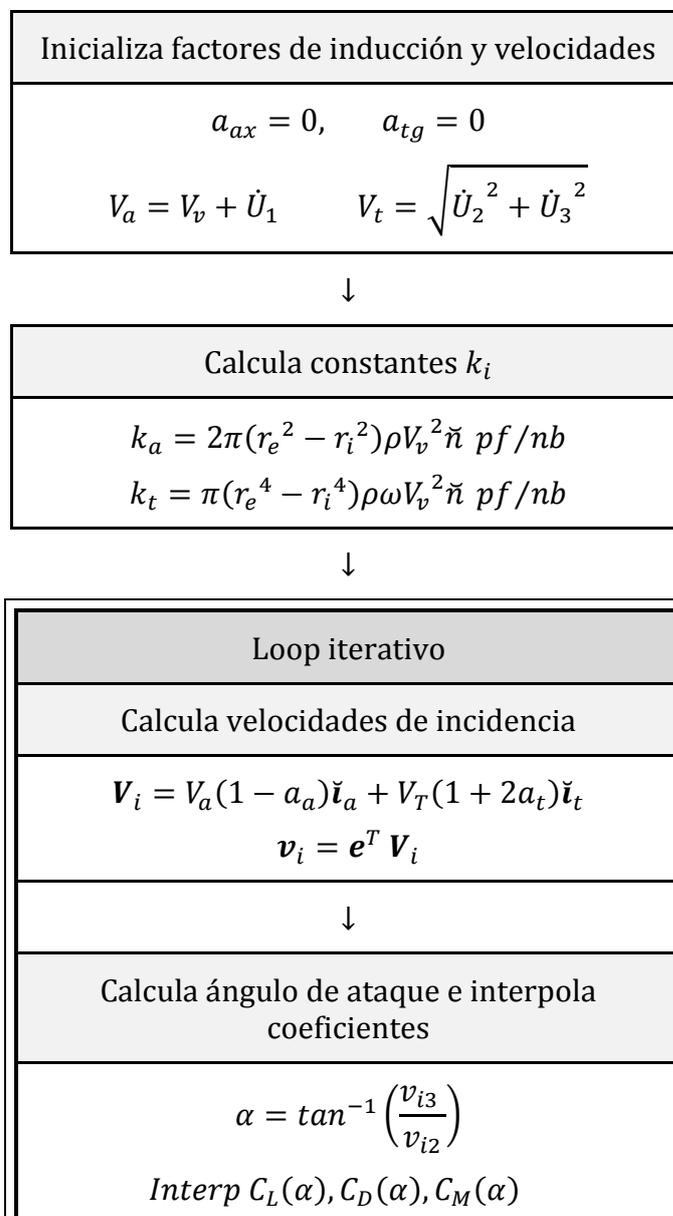


Figura 6.6 – Esquema de la rutina de matriz tangente y fuerza del elemento SCBA.

### 6.4 ALGORITMO BEM NO LINEAL

Como se ha mencionado, la variante no lineal del BEM tiene ciertas diferencias con respecto a su variante lineal; tales diferencias generan una modificación sustancial en el algoritmo en el que se basa su implementación computacional. Para el caso lineal, el BEM conduce a expresiones cerradas no lineales para los factores de inducción; la aplicación del algún método numérico de solución de ecuaciones no lineales posibilita la solución. Para el caso no lineal no es posible encontrar una expresión cerrada para los factores de inducción; se presenta en esta sección un esquema del algoritmo aeroelástico.



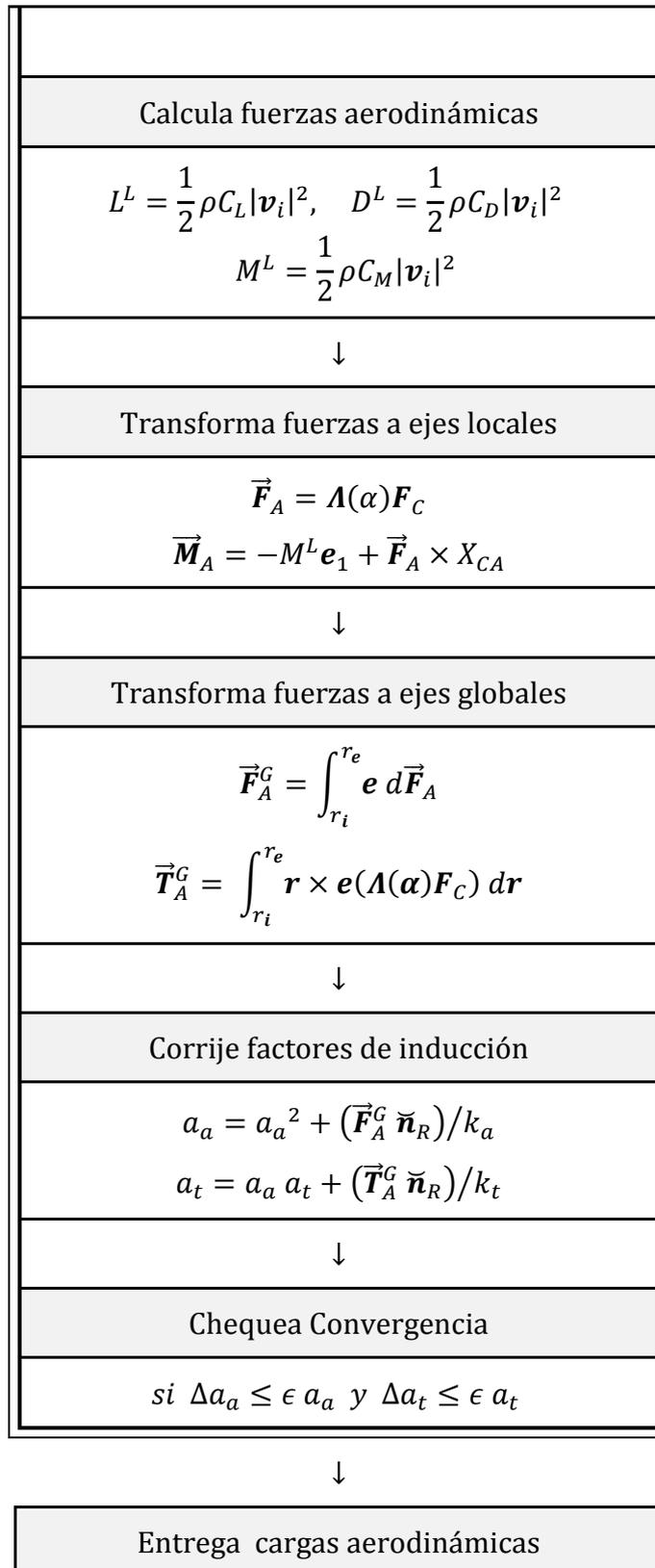
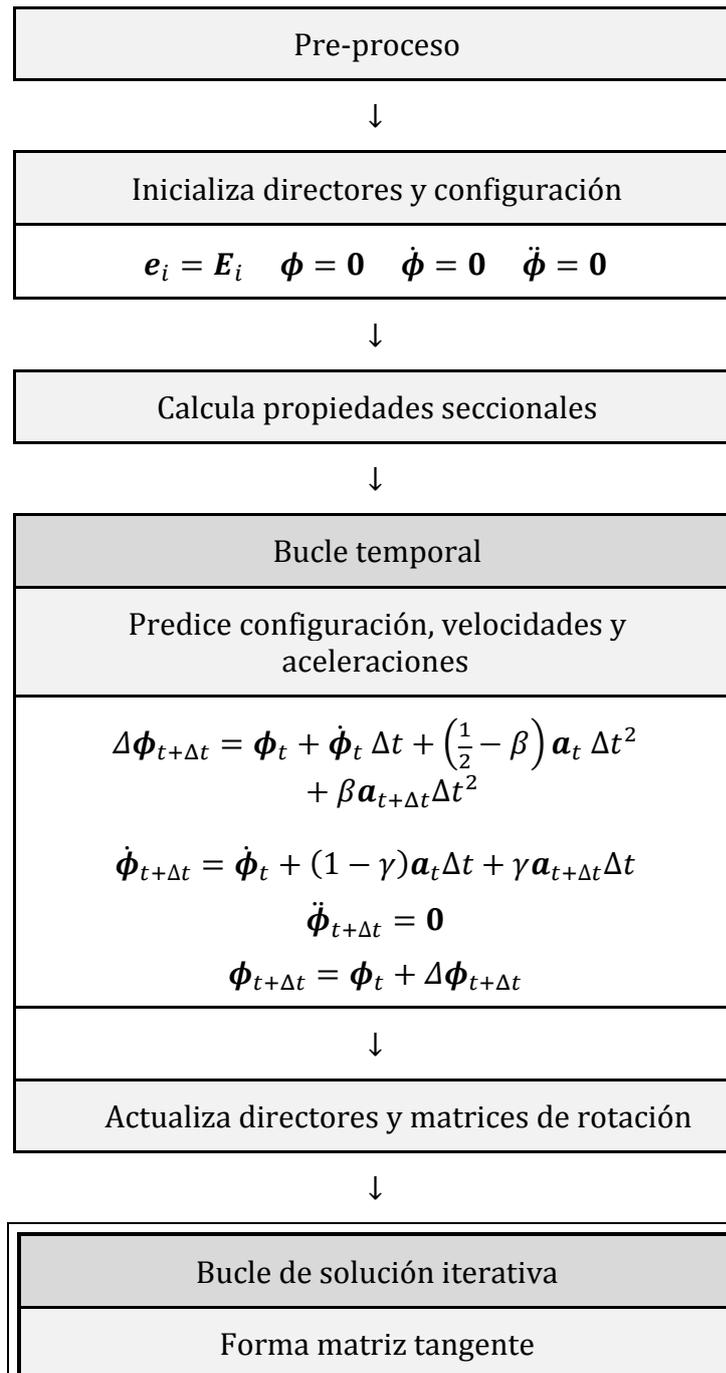


Figura 6.7 – Esquema del algoritmo del BEM no Lineal

## 6.5 SOLUCIÓN

Como se ha mencionado anteriormente, la solución de las ecuaciones de movimiento se determina por medio de la combinación de un algoritmo predictor-corrector que integra el método de Newton-Raphson. La Figura 6.8 muestra un esquema de la rutina de implementación computacional de la solución de las ecuaciones de movimiento según un enfoque Lagrangiano Actualizado.



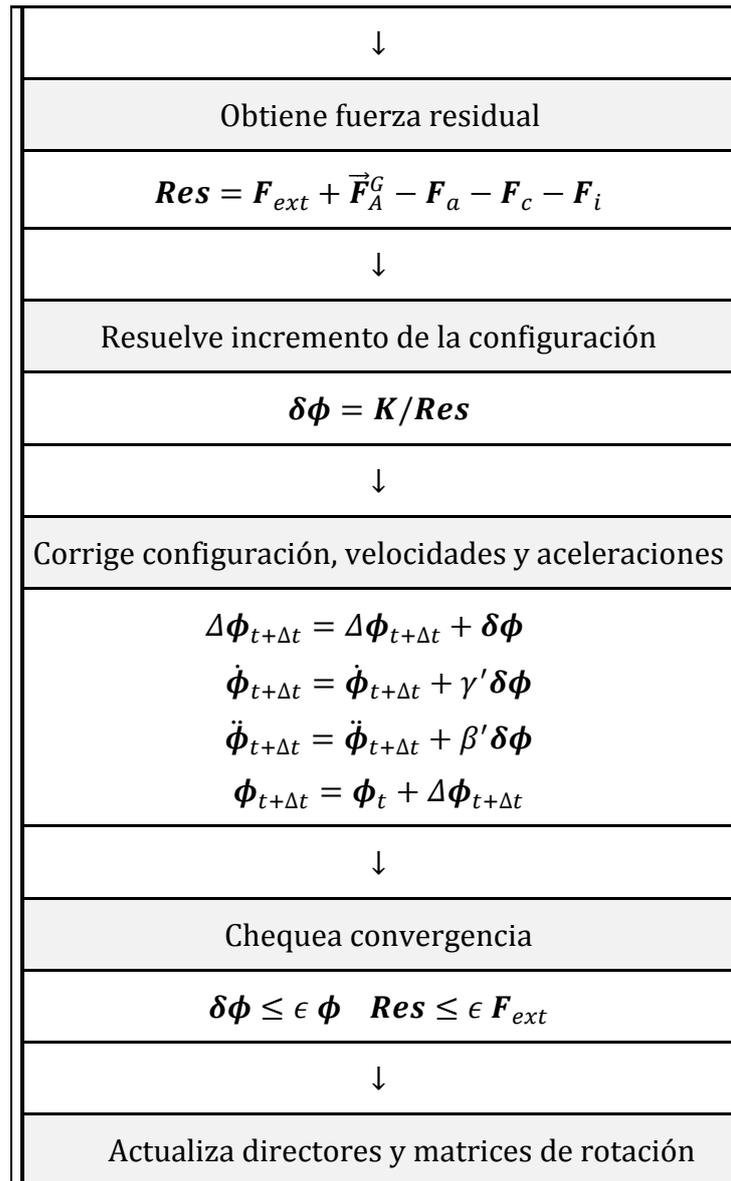


Figura 6.8 – Rutina de solución de las ecuaciones de movimiento.



# RESULTADOS

---

La completitud del desarrollo de las formulaciones presentadas en los capítulos anteriores exige necesariamente la ejecución de tests experimentales que prueben su capacidad para predecir el comportamiento que matemáticamente describen. Para esto, la formulación estructural, la formulación de mecanismos y la formulación aeroelástica, han sido implementadas computacionalmente y comparadas contra resultados presentados en la literatura y contra modelos de elementos finitos desarrollados con software comerciales.

El proceso de validación se ha realizado en el mismo orden en el que se ha presentado la formulación teórica: i) se ha validado la formulación estructural, ii) se ha testado la implementación de mecanismos, iii) se ha ensayado la formulación aeroelástica para el caso de un generador eólico conocido.

La validación de la formulación estructural se centra principalmente en su capacidad para predecir con exactitud el comportamiento de estructuras que sufren cambios finitos en su geometría. También, en base a test que prueban las propiedades e invariancia y objetividad, se muestra la aptitud del elemento finito SCB para ser utilizado en una formulación de multicuerpos. Durante la validación de la formulación del elemento SCB, se han elegido modelos tipo placa para

realizar comparaciones pues no existen en la literatura formulaciones unidimensionales de vigas geoméricamente exactas capaces de incorporar materiales anisótropos y con basamento en la teoría de laminación clásica.

Para el caso de la formulación de mecanismos, y por cuestiones de brevedad, se presenta un caso de estudio sencillo, donde se comparan los resultados de la formulación desarrollada contra un modelo de elementos finitos tipo placa.

Finalmente se presentan los resultados de la implementación de la formulación a la modelación del caso de un generador eólico de grandes dimensiones. Se presentan comparaciones de distintos resultados obtenidos con el modelo aeroelástico geoméricamente no lineal, así como también distintos comentarios sobre ciertos aspectos relacionados con la implementación computacional.

## **7.1 VALIDACIONES**

### **7.1.1 Validación Estática de la Formulación Estructural**

En esta sección se estudia el comportamiento del elemento finito propuesto utilizando diferentes test estáticos propuestos en la literatura. Se ha mencionado que la mayoría de las formulaciones geoméricamente exactas de elementos finitos no tratan el caso de materiales compuestos; entonces, en tests que involucren materiales compuestos la formulación presentada será comparada contra modelos tridimensionales tipo placa. Los modelos tipo placa o shell han sido creados con ABAQUS utilizando elementos S4R en un promedio de 50000 DOF.

En algunos casos se compararán resultados contra dos de las formulaciones de viga geoméricamente exacta más referenciadas en la literatura, i.e. [7, 127]. Dichas formulaciones contienen la limitación de las formulaciones de vigas geoméricamente exactas existentes: la ley constitutiva del material es válida solo para materiales isótropos; por lo tanto, cuando se presenten comparaciones contra dichas formulaciones, se asumirá que el material es isótropo. Los resultados presentados con las formulaciones [7, 127] han sido obtenidas utilizando el software de investigación FEAP [128].

### Rolado de una viga cantilever isótropa

En este ensayo se estudia un caso extremo clásico de flexión pura: el rolado (roll up) de una viga cantilever. Como se ha mencionado, para comparar contra las formulaciones [7, 127] se asume material isótropo.

La viga estudiada es de pared delgada y sección transversal cuadrada, las medidas de la base, altura, espesor y longitud son:  $b=h=0.5$ ,  $t = 0.05$  y  $l=50$ . Las constantes de material de material han sido definidas como  $E=144\times 10^9$  y  $\nu=0.3$ .

Con la fórmula de Euler  $\theta = Ml/EI$  es posible obtener la magnitud de dos momentos tal que aplicados sobre sobre el extremo de la viga producen una forma deformada de mitad de círculo y círculo completo. Para el caso de la viga mencionada dichos momento son  $M_1=3.80761\times 10^7$  y  $M_2=7.615221\times 10^7$  respectivamente; la Figura 7.1 muestra la formas deformadas obtenidas con la formulación Lagrangiana actualizada.

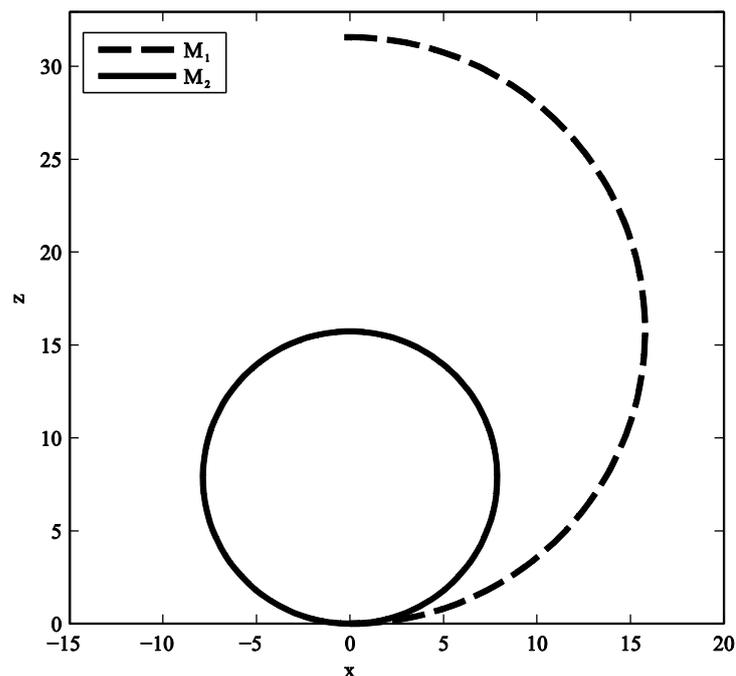


Figura 7.1 – Test de rolado

La Tabla 7.1 presenta una comparación entre los resultados numéricos obtenidos con el elemento SCB y otros elementos finitos existentes; se compara el desplazamiento máximo en el extremo libre de la viga para los casos de carga  $M_1$  y  $M_2$ .

	Desp. vertical en el extremo	Desp. horizontal en el extremo	Desp vertical máximo	Elementos
Simo & Vu-Quoc (FEAP)	31.673	-50.448	31.673	10
	31.546	-50.446	31.546	50
Ibrahimbegovic-Al Mikad (FEAP)	31.673	-50.448	31.673	10
	31.546	-50.446	31.546	50
Fórmula de Euler	31.831	-50.000	31.831	-
SCB Euleriano	31.694	-50.405	31.694	10
	31.567	-50.403	31.567	50
SCB Lagrangiano	31.108	-51.258	31.108	10
	31.554	-50.422	31.553	50

*Tabla 7.1 – Desplazamientos para  $M_1$ .*

Puede observarse de la Tabla 7.1 y la Tabla 7.2 que la formulación Euleriana del elemento SCB tiene una performance muy buena comparada con los elementos existentes. La implementación Lagrangiana tiene una performance relativamente pobre cuando se utilizan pocos elementos, pero al incrementar el número de elementos los resultados convergen a los de la formulación Euleriana.

	Desp. vertical en el extremo	Desp. horizontal en el extremo	Desp vertical máximo	Elementos
Simo & Vu-Quoc (FEAP)	0.013	-49.545	16.038	10
	0.012	-49.554	15.781	50
Ibrahimbegovic & Al Mikad (FEAP)	0.013	-49.545	16.038	10
	0.012	-49.554	15.781	50
Fórmula de Euler	0.000	-50.000	15.915	-
SCB Euleriano	0.016	-49.494	16.004	10
	0.015	-49.501	15.752	50
SCB Lagrangiano	1.263	-45.863	14.495	10
	0.024	-49.380	15.707	50

*Tabla 7.2– Desplazamientos para  $M_2$ .*

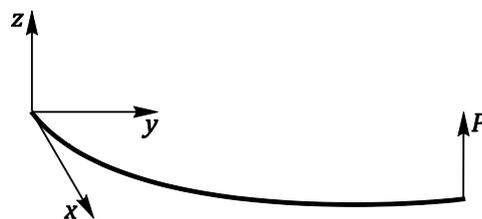
Es comportamiento anteriormente mencionado es en realidad esperado, pues la obtención de las derivadas del campo director mediante el uso de interpolación introduce un error de interpolación en la formulación Lagrangiana que la

formulación Euleriana no posee; debe recordarse en este punto que la formulación Euleriana recurre a la derivada del tensor de rotación para obtener las curvaturas, lo cual es más exacto. Es entonces importante notar que debe darse atención a la convergencia de la formulación Lagrangiana, la cual puede controlarse alterando la densidad de la malla de elementos finitos.

Es importante mencionar que desde el punto de vista computacional la formulación Lagrangiana resulta ser más costosa que la formulación Euleriana, no solo porque requiere evaluar el mapeo tangencial en los nodos sino también porque requiere calcular las matrices de linealización del mapeo tangencial.

### **Torso-Flexión de una viga cantiléver isótropa**

Este ejemplo estudia la precisión de elemento finito SCB en un caso tridimensional de grandes desplazamientos y rotaciones. La configuración de referencia es una viga curva con geometría dada por un segmento de arco circular de  $45^\circ$  con radio  $R=100$  y ubicado sobre el plano  $z=0$ . Las propiedades del material isótropo son  $E=1.0 \times 10^7$  y  $\nu=0.3$  y la sección transversal es rectangular, con  $b=h=1$  y  $t=0.1$



*Figura 7.2 – Arco de  $45^\circ$*

La Tabla 7.3 muestra los resultados de desplazamientos en el extremo de la viga del ensayo de flexión para  $P=100$ ; puede verse que la formulación presente se comporta poco mejor que la implementación en [7] del elemento de Simo & Vu-Quoc y que el elemento B31 de Abaqus. Además, como es de esperarse, el elemento SCB en sus formulaciones Euleriana y Lagrangiana dan prácticamente los mismos resultados. La solución ha sido alcanzada utilizando 5 pasos de carga y un promedio de 8 iteraciones por paso.

	Desp. y	Desp. x	Desp. z	Elementos
Abaqus Shell	-2.090	-3.641	22.611	5k
Abaqus B31	-2.574	-3.570	22.734	50
Simo & Vu-Quoc (FEAP)	-1.986	-3.325	22.001	50
SCB Euleriano	-2.068	-3.495	22.366	50
SCB Lagrangiano	-2.069	-3.449	22.367	50

*Tabla 7.3 – Desplazamientos en el extremo libre del arco de 45° en el ensayo de flexión, caso de P=100.*

Aumentando la severidad del estado de carga es posible evaluar nuevamente un caso extremo; llamando extremo al caso que exceda por lejos el límite de sollicitación que puede encontrarse en el caso del aerogenerador. Incrementando la carga a  $P=400$  se obtienen los resultados que muestra la Tabla 7.4.

	Desp. y	Desp. x	Desp. z	Elementos
Abaqus Shell	-12.201	-21.546	50.997	5k
Abaqus B31	-12.401	-21.311	-51.110	50
Abaqus B32	-12.416	-21.310	-51.111	50
Simo & Vu-Quoc (FEAP)	-12.008	-20.692	50.067	50
SCB Euleriano	-12.205	-21.015	50.880	50
SCB Lagrangiano	-12.206	-21.019	50.884	50

*Tabla 7.4 – Desplazamientos en el extremo libre del arco de 45° en el ensayo de flexión, caso de P=400.*

Puede apreciarse claramente que las implementaciones Euleriana y Lagrangiana del elemento SCB mantienen una excelente performance aún en casos de deformación tridimensional extrema.

### **Torso-Flexión de una viga cantiléver anisótropa**

Con el objetivo de evaluar el comportamiento del elemento SCB en lo que respecta a su capacidad para modelar materiales compuestos, se estudia nuevamente el caso anterior, pero esta vez utilizando un material compuesto. La elección del caso anterior como caso de estudio no es caprichosa; pues sabiendo

que el elemento propuesto se comporta bien desde el punto de vista de su capacidad para describir el movimiento finito es posible observar su capacidad para la modelación constitutiva de materiales compuestos casi aisladamente.

Como se ha mencionado, se analizará el arco de 45° mostrado en la Figura 7.2, en este caso construido con un laminado con configuración {45,-45,-45,45} y con sección transversal cuadrada con  $b=h=1$  y  $t=0.1$ . Las láminas están fabricadas con fibra de vidrio tipo E y una matriz de Epoxy (FVEE); las propiedades del material se muestran en la Tabla 7.5.

$E_{11}$	$E_{22}$	$G_{12}$	$G_{23}$	$\nu_{12}$
$45.0 \times 10^9$	$12.0 \times 10^9$	$5.5 \times 10^9$	$5.5 \times 10^9$	0.3

Tabla 7.5 – Propiedades de la lámina de Fibra de Vidrio E – Epoxy (FVEE).

Para inducir un estado tensional más complejo se modifica el estado de carga de tal forma que la carga  $P$  tenga componentes  $P_x=4.0 \times 10^5$ ,  $P_y=-4.0 \times 10^5$ ,  $P_z=8.0 \times 10^5$ . Figura 7.3 muestra las curvas que describen la evolución de los desplazamientos centroidales del punto medio de la viga y de su extremo en función de la carga  $P$ . LPF es la sigla que representa al factor proporcional de carga y  $t$  y  $m$  son los subíndices que indican curvas medidas en el extremo y el punto medio de la viga respectivamente.

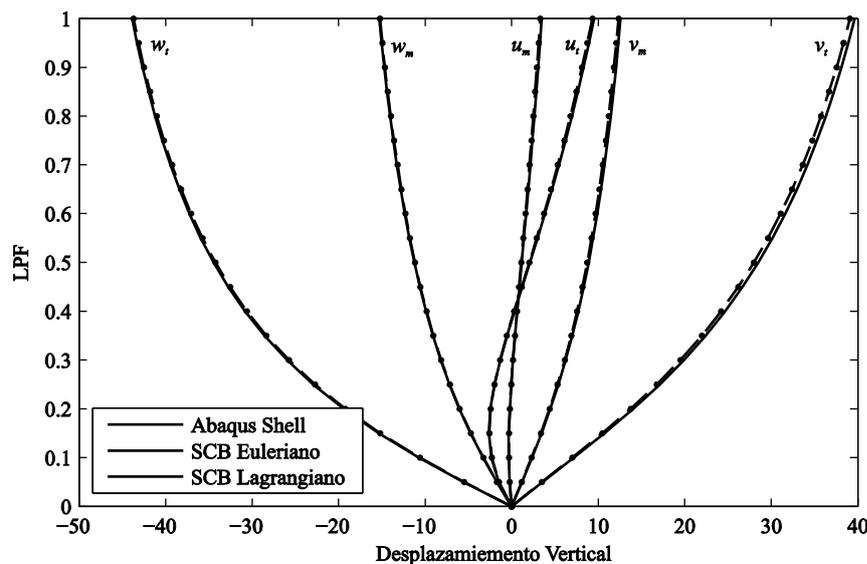


Figura 7.3 – Curvas de flexo-torsión de viga anisótropa

Como puede verse de la Figura 7.3, la correlación del elemento SCB con el modelo shell de Abaqus es excelente. Además, puede observarse que la formulación Euleriana y la formulación Lagrangiana dan idénticos resultados.

### Test de Independencia del Camino de Integración

Se ha mencionado que la formulación Lagrangiana Total es independiente del camino de integración mientras que el problema de dependencia asociado a la interpolación de spins sí afecta a la formulación Euleriana [16, 20]. Si bien la relevancia de dicho problema toma protagonismo en casos estáticos, su presencia en casos dinámicos podría transformar dicha propiedad en deseable para el estudio de la dinámica del aerogenerador.

En esta sección se utiliza el mismo arco estudiado en el ejemplo anterior y se configura un experimento para mostrar la propiedad de independencia de una formulación. Aplicando una carga  $P = (P_x, P_y, P_z)$  según el esquema mostrado en la Tabla 7.1 y analizando los desplazamientos remanentes es posible demostrar experimentalmente que la propiedad de invariancia del camino de integración se cumple. Considerando que los estados de carga descritos en la Tabla 7.1 se propagan al paso siguiente puede verificarse que al final del ciclo de carga la magnitud de la carga aplicada es cero. Si la formulación logra cumplir la propiedad de independencia del camino de integración los desplazamientos remanentes deben necesariamente ser iguales a cero.

Paso	$P_x$	$P_y$	$P_z$
1	0	0	200000
2	0	100000	0
3	20000	0	0
4	0	0	-200000
5	-20000	0	0
6	0	-100000	0

Tabla 7.6 – Esquema de carga.

Como muestra la Tabla 7.7, los desplazamientos y rotaciones vuelven a cero luego de retirar la carga. Además, puede observarse que dicha propiedad es

independiente del esquema incremental (Inc. indica el número de incrementos de carga utilizados) y de la densidad de malla.

Desplazamientos Remanentes							
Inc.	Els.	$u$	$v$	$w$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
5	50	$-1.05 \times 10^{-14}$	$-1.80 \times 10^{-14}$	0.0	0.0	0.0	$-6.28 \times 10^{-17}$
	25	$-9.11 \times 10^{-15}$	$9.65 \times 10^{-15}$	0.0	0.0	0.0	$8.29 \times 10^{-17}$
10	50	$-4.49 \times 10^{-14}$	$-1.25 \times 10^{-15}$	0.0	0.0	0.0	$1.01 \times 10^{-16}$
	25	$-1.18 \times 10^{-14}$	$-4.04 \times 10^{-15}$	0.0	0.0	0.0	$4.91 \times 10^{-17}$
20	50	$-5.27 \times 10^{-14}$	$-1.16 \times 10^{-15}$	0.0	0.0	0.0	$2.23 \times 10^{-16}$
	25	$-7.03 \times 10^{-15}$	$5.91 \times 10^{-19}$	0.0	0.0	0.0	$3.45 \times 10^{-19}$

*Tabla 7.7 – Desplazamientos remanentes en test de independencia del camino de integración.*

Es importante notar que la implementación Lagrangiana Actualizada desarrollada en este trabajo retiene la propiedad de independencia del camino de integración puesto que los tensores de rotación de referencia no son calculados en el punto de integración. Por el contrario, las implementaciones Lagrangianas Actualizadas que propagan el error de interpolación a través de la actualización de la rotación de referencia en el punto de integración no resultan ser independientes del camino de integración [19, 21].

### 7.1.2 Test de Objetividad

Como se mencionado anteriormente, la retención de la propiedad de objetividad de las deformaciones es una característica necesaria para que una formulación de elementos finitos entregue resultados confiables. Mas aún, si el elemento en cuestión ha sido formulado tal que pueda ser utilizado en un sistema de multicuerpos, es estrictamente necesario que la medición de deformaciones sea invariante con respecto al observador.

En la sección 3.5.5 se ha demostrado matemáticamente que las deformaciones generalizadas son objetivas, en esta sección se presentan algunos ejemplos que permiten comprobar experimentalmente dicha demostración.

### Caso de Carga Fija

Este caso de estudio es muy similar al propuesto por Crisfield y Jelenic [16]; se utiliza para mostrar la propiedad de invariancia del observador o invariancia del marco de referencia de la formulación del elemento finito. El test consiste en un pórtico con configuración en forma de L contenido en el plano  $z = 0$  tal como muestra la Figura 7.4; la sección transversal del pórtico es tipo cajón con dimensiones  $h=1$ ,  $b=1$   $t=0.1$  y está laminada con 4 láminas de Fibra de Vidrio E-Epoxy en configuración {45,-45,-45,45}; las propiedades de material se detallan en la Tabla 7.5.

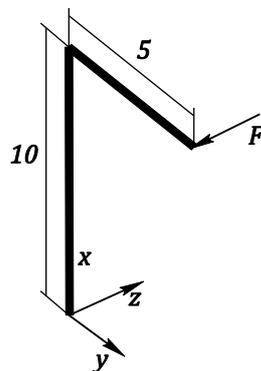


Figura 7.4 – Pórtico en L del test de invariancia.

El pórtico es cargado inicialmente en el extremo libre con una fuerza en la dirección  $z$   $F = 2 \times 10^7$ , generando así un estado tensional inicial. Luego de aplicar la carga se estudian tres casos de sollicitación basados en la rotación de la estructura alrededor de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

La propiedad de invariancia se observa mediante el monitoreo de la configuración del pórtico luego de aplicar una rotación correspondiente a 100 revoluciones, aplicada en 4000 incrementos de  $\pi/20$  revoluciones cada uno.

La Figura 7.5 muestra la evolución de los desplazamientos iniciales luego de completar cada una de las revoluciones; como es esperable de una formulación invariante, los desplazamientos iniciales permanecen constantes a medida que transcurren las revoluciones. Como los desplazamientos son resultado de un estado de carga inicial común, las gráficas para la evolución correspondiente a las rotaciones respecto de cada uno de los ejes coordenados coinciden.

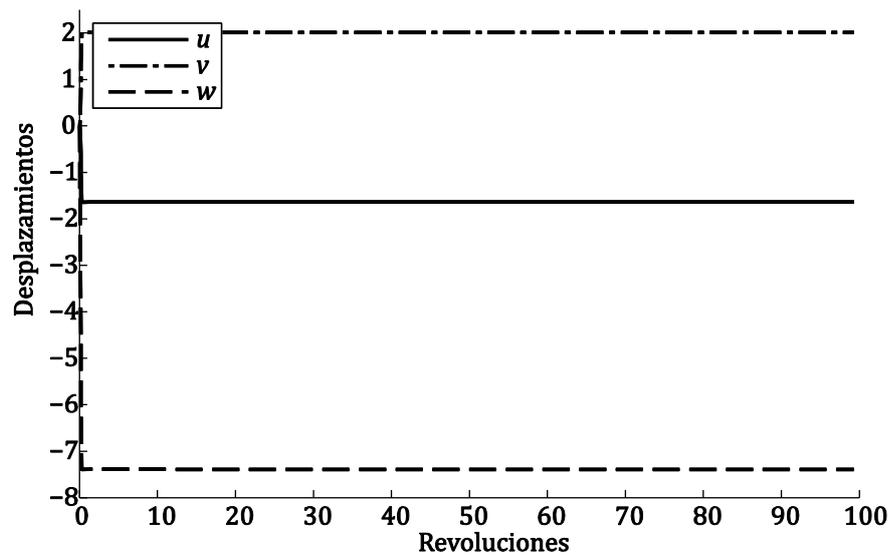


Figura 7.5 – Test de invariancia de una viga anisótropa. Evolución de desplazamientos iniciales.

La Figura 7.6, la Figura 7.7 y la Figura 7.8 muestran las formas deformadas del pórtico durante el camino de revolución completo. Para los tres esquemas de rotación puede observarse que las formas deformadas coinciden para cada una de las 100 revoluciones. Debe notarse que la deformación inicial es muy grande, esto ha sido inducido deliberadamente para enfatizar el hecho de que el trabajo no trivial generado por la fuerza fija inicial será nulo, aún cuando su magnitud sea realmente grande.

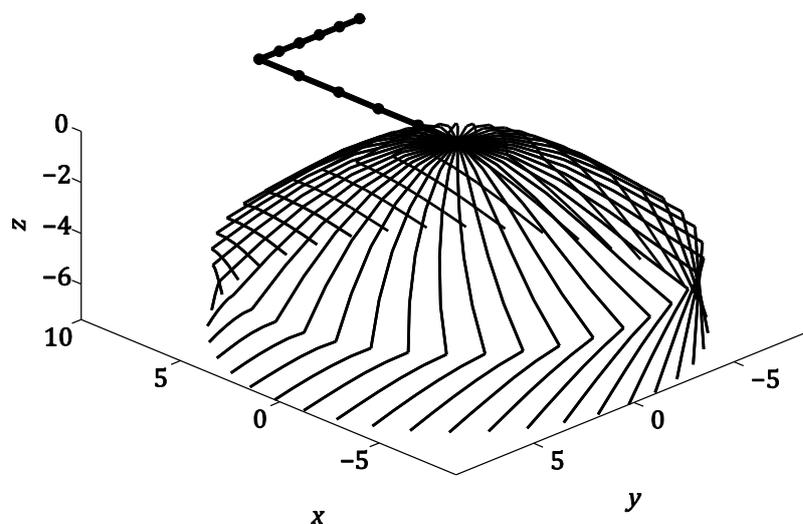


Figura 7.6 – Test de invariancia de una viga anisótropa. Configuración deformada de viga anisótropa rotando alrededor del eje z.

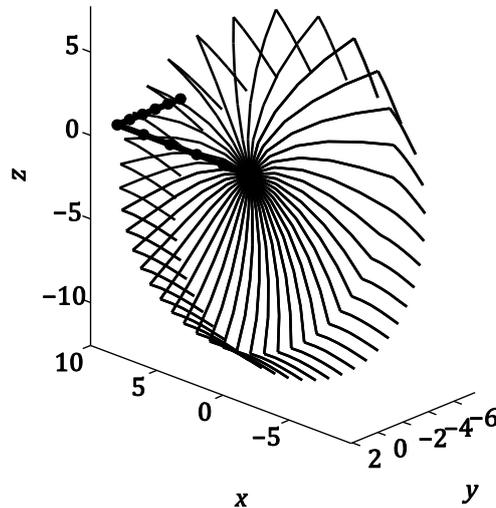


Figura 7.7 – Test de invariancia de una viga anisótropa. Configuración deformada de viga anisótropa rotando alrededor del eje y.

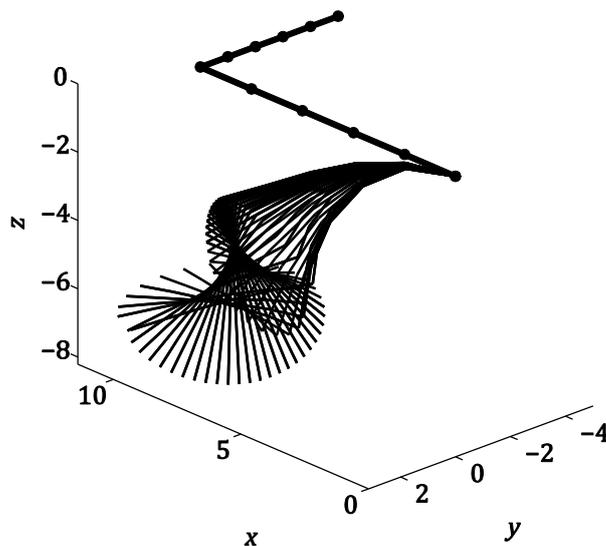


Figura 7.8 – Test de invariancia de una viga anisótropa. Configuración deformada de viga anisótropa rotando alrededor del eje x.

### Caso de Carga Seguidora

Se considera ahora la misma estructura analizada en el ejemplo anterior y se estudia el caso en el cual la carga es seguidora, inicialmente orientada en la dirección z, y rotación alrededor del eje y.

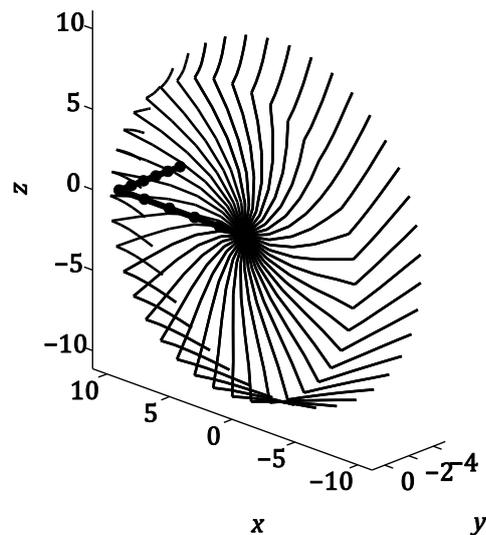


Figura 7.9 – Test de invariancia de una viga anisótropa. Configuración deformada de viga anisótropa rotando alrededor del eje  $y$  y para carga seguidora.

La Figura 7.9 muestra las formas deformadas para el camino completo de 100 revoluciones. Puede observarse que, al igual que el caso de carga fija, las formas deformadas coinciden para cada revolución cuando la carga inicial es seguidora. Puede decirse entonces que la formulación mantiene la invariancia para el caso de carga seguidora; si bien se muestra solo el caso de rotación alrededor del eje  $y$ , los casos de rotación alrededor de los demás ejes presentan el mismo comportamiento.

La evolución de los desplazamientos iniciales a medida que transcurren las revoluciones para los casos de carga fija y seguidora se muestran en la Figura 7.10.

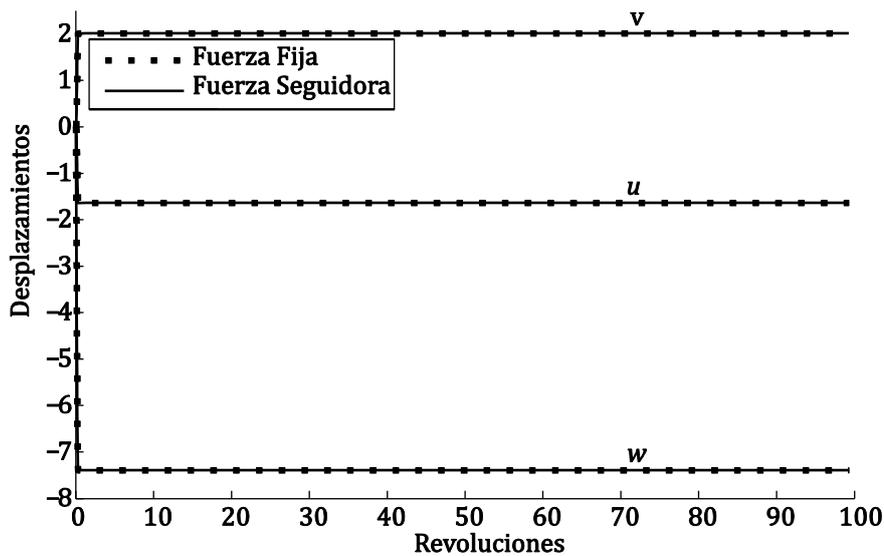


Figura 7.10 – Test de invariancia de una viga anisótropa. Evolución de desplazamientos iniciales para carga fija y seguidora.

Como puede observarse de la Figura 7.10, el caso de carga seguidora coincide exactamente con el caso de carga fija. Es claro que los desplazamientos permanecen inalterados a medida que transcurren las revoluciones.

### 7.1.3 Análisis Dinámico de la viga como multicuerpo

En el siguiente ejemplo se evalúa el comportamiento dinámico de un bipéndulo formado por vigas dos anisótropas unidas entre sí por una articulación tipo hinge, tal como muestra la Figura 7.11. Las vigas tienen una sección cuadrada con  $b = h = 0.1$  y  $t = 0.01$  y han sido laminadas con FVEE en configuración {45,-45,-45,45}.

El efecto de la gravedad hace caer el bipéndulo, la Figura 7.12 muestra la evolución de los desplazamientos verticales en su extremo derecho.

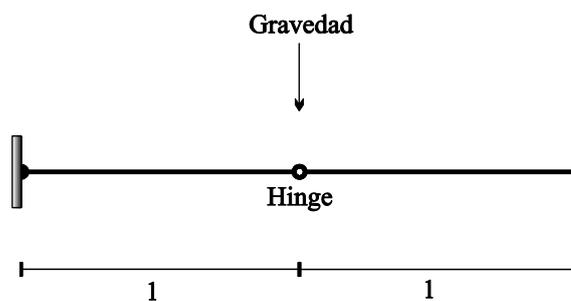
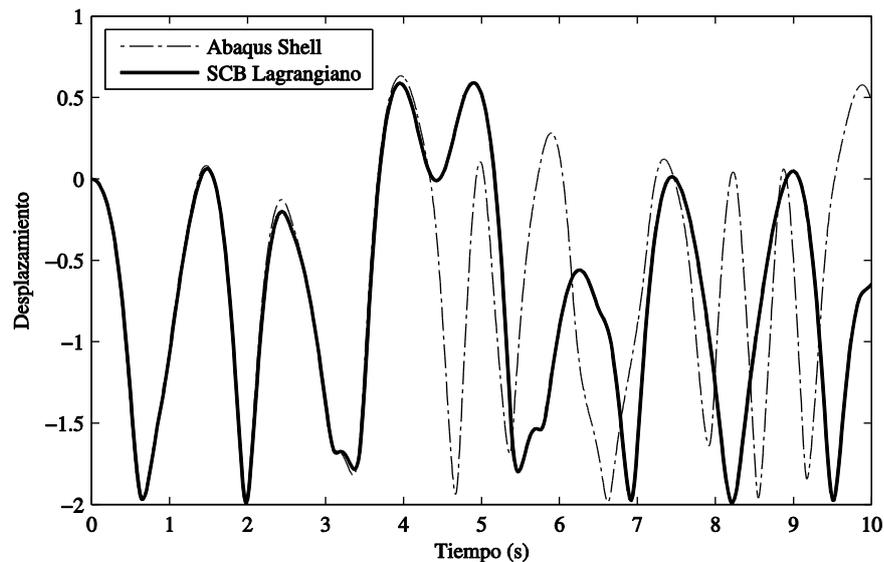


Figura 7.11 – Configuración del bipéndulo.



*Figura 7.12 – Evolución de los desplazamientos verticales en el extremo derecho del bipéndulo.*

Como puede apreciarse de la Figura 7.12 la correlación de la historia temporal del desplazamiento horizontal es muy buena en los primeros 5 segundos, luego las curvas difieren considerablemente. Es altamente probable que la discrepancia repentina entre los modelos se deba al comportamiento rápidamente caótico que experimenta el bipéndulo flexible; aunque este punto debería probarse matemáticamente esto escapa a los objetivos de este trabajo.

Por razones de brevedad se han omitido las gráficas de desplazamientos verticales y velocidades horizontales y verticales; no obstante, todas las historias temporales han demostrado el mismo nivel de correlación.

#### **7.1.4 Análisis Seccional**

En esta sección se presenta una comparación entre las propiedades seccionales del aerogenerador SNL100 obtenidas con la formulación presentada en la sección 3.2.6 y las informadas en [110]. Las propiedades informadas en [110] fueron obtenidas con el software PreComp [Bir, 2005 #167], un programa desarrollado por Gunjit Bir en el National Wind Technology Center [129] y utilizado por diversos investigadores en todo el mundo.

Las propiedades seccionales obtenidas con la presente formulación son las contenidas en la matriz  $\mathbb{D}$  de la Eq. (3.87); como se ha dicho y puede verse

claramente,  $\mathbb{D}$  contiene contantes que corresponden a esfuerzos de alto orden y acoplamientos de alto orden. PreComp está basado en una teoría lineal, por lo que no considera los efectos de los acoplamientos y de los esfuerzos de alto orden mencionados. Además, PreComp no considera la deformación por corte transversal.

Considerando lo anteriormente mencionado, se presentan en la Tabla 7.8 los valores obtenidos para las rigideces en la dirección flap, lag (edge), torsional y axial.

Estación	Modelo	Flap	Edge	Tors.	Axial
3	SCB	$3.219 \times 10^{10}$	$1.510 \times 10^{11}$	$4.502 \times 10^9$	$3.127 \times 10^{10}$
	PreComp	$2.851 \times 10^{10}$	$9.910 \times 10^{10}$	$3.221 \times 10^9$	$2.812 \times 10^{10}$
5	SCB	$6.463 \times 10^9$	$2.208 \times 10^{10}$	$1.207 \times 10^9$	$1.776 \times 10^{10}$
	PreComp	$5.382 \times 10^9$	$2.175 \times 10^{10}$	$6.900 \times 10^9$	$1.769 \times 10^{10}$
8	SCB	$4.335 \times 10^8$	$5.370 \times 10^9$	$1.660 \times 10^9$	$5.048 \times 10^9$
	PreComp	$3.551 \times 10^9$	$4.899 \times 10^9$	$1.286 \times 10^9$	$5.019 \times 10^9$

Tabla 7.8 – Comparación de rigideces seccionales.

La Tabla 7.9 presenta los resultados para la masa y las inercias en la dirección flap y lag.

Estación	Modelo	Masa	Flap	Lag
3	SCB	$1.835 \times 10^3$	$1.738 \times 10^3$	$8.570 \times 10^3$
	PreComp	$1.760 \times 10^3$	$1.581 \times 10^3$	$6.618 \times 10^3$
5	SCB	$1.079 \times 10^3$	$3.478 \times 10^2$	$1.755 \times 10^3$
	PreComp	$1.107 \times 10^3$	$2.915 \times 10^2$	$1.781 \times 10^3$
8	SCB	$3.831 \times 10^2$	$2.949 \times 10^1$	$4.509 \times 10^2$
	PreComp	$3.587 \times 10^2$	$2.224 \times 10^1$	$3.863 \times 10^2$

Tabla 7.9 – Comparación de inercias seccionales.

Puede concluirse que la formulación seccional entrega resultados similares a los arrojados por PreComp. Resulta al menos difícil realizar interpretaciones adicionales sobre la performance de la formulación seccional puesto que la predicción de PreComp ha demostrado presentar algunas divergencias con respecto a resultados obtenidos con enfoques tridimensionales [130]. En trabajos futuros se planea analizar en detalle el comportamiento de la formulación

seccional presentada y realizar comparaciones con formulaciones tridimensionales, de tal forma de analizar en detalle el comportamiento de la presente formulación en comparación con las herramientas computacionales basadas en teorías similares.

## **7.2 SIMULACIÓN DEL AEROGENERADOR**

La simulación del aerogenerador está basada en la aplicación de la formulación presentada al caso de un generador eólico de grandes dimensiones. Recientemente han sido publicados detalles de diseño y resultados de performance del generador eólico desarrollado por el laboratorio SANDIA en Estados Unidos; el generador está equipado con la pala SNL100-00, diseñada enteramente con fibra de vidrio. La pala SNL tiene una longitud de 100 metros, y aunque aún no ha sido construida, es la pala más larga diseñada hasta el momento. El reporte [110] muestra que el diseño de la pala cumple con los requerimientos estructurales y de forma necesarios para que el generador entregue una potencia nominal de 13.2 MW.

Considerando que en la actualidad el generador de mayor tamaño existente posee palas de 64 metros y entrega una potencia nominal de 5MW, el diseño de SANDIA realmente extiende las fronteras actuales de la ingeniería de aerogeneradores, no solo en cuanto a sus dimensiones sino también en cuanto a la tecnología de sus materiales. Resulta entonces particularmente atractivo aplicar la teoría desarrollada para el caso mencionado; así, en lo que sigue se presenten diferentes estudios dinámicos del comportamiento del generador SNL100-00, conjuntamente con un análisis de las potencialidades y debilidades de la formulación desarrollada en este trabajo.

### **Condiciones de Trabajo y Normativa IEC**

Actualmente las reglas establecidas por la normativa IEC son generalmente aceptadas como base para el diseño estructural de grandes aerogeneradores. La norma establece distintos escenarios y estados de carga que son requeridos para obtener la certificación de un generador eólico. Cada escenario y condición de

trabajo especificada depende de una clasificación previa del tipo de generador según distintas clases (I, II, III y IV); tal clasificación depende a su vez de las condiciones de viento esperadas en la zona de asentamiento del aerogenerador [88]. Además de la clasificación correspondiente a la clase, se establece una clasificación adicional que depende de la turbulencia del viento esperada. El aerogenerador SNL100-00 corresponde a la clase I y a la categoría de turbulencia B, pues sus condiciones de diseño han sido establecidas por los siguientes parámetros:

Velocidad de diseño	11.3 m/s
Velocidad de arranque	4.0 m/s
Velocidad de corte	24.0 m/s
Diámetro de rotor	205 m
Altura del hub	146.0 m

*Tabla 7.10 – Parámetros de diseño de SNL100-00.*

En lo que respecta a los distintos escenarios de carga de viento que estipula la norma, y con basamento exclusivo en condiciones meteorológicas, éstos se dividen en dos grupos: escenarios con condiciones de viento normal y escenarios con condiciones viento extremo. Se entienden por “normales” a aquellas condiciones que ocurren frecuentemente en el año, mientras que las condiciones “extremas” se entienden como aquellas que tienen una cierta probabilidad de ocurrir una vez en un lapso de 1 a 50 años.

Más de 35 condiciones de carga están estipuladas en la norma IEC, por cuestiones de brevedad y considerando que no es el objetivo de este trabajo verificar la máquina, se analizarán solo algunos estados de carga.

Es importante notar que con respecto los parámetros algorítmicos del análisis dinámico, para la totalidad de las simulaciones presentadas se han utilizado un paso de tiempo de 0.1 segundos y un radio espectral de 0.8. Las siguientes secciones presentan los resultados obtenidos.

### **Condiciones Extremas**

Existen dos estados de carga identificados como condiciones extremas: a) velocidad de viento extrema y b) cambio de dirección de viento extrema. En las siguientes líneas se describen los resultados obtenidos para la condición de velocidad de viento extrema, la cual resulta ser generalmente la más severa.

El caso de carga originado por una velocidad de viento extrema se denomina EWM50 y consiste en la imposición instantánea y con rotor estacionado de una velocidad de viento esperable una vez en 50 años. Para el caso del generador SNL100-00, la normativa IEC establece para el estado EWM50 una velocidad de 70 m/s. La respuesta del aerogenerador a tal condición se analiza en las siguientes líneas.

Para las condiciones de estudio que no requieran el uso de una formulación multicuerpo se compararán resultados del elemento SCB Lagrangiano Actualizado acoplado con el BEM no lineal desarrollado en la sección 5.5.2 contra una versión lineal del mismo elemento finto acoplado con el BEM tradicional presentado en la sección 5.5.1.

La Figura 7.13 muestra la respuesta temporal del aerogenerador a la condición EWM50 en el punto de máxima altura; en la figura pueden verse las respuestas para el caso de la formulación lineal y para el caso de la formulación geoméricamente exacta.

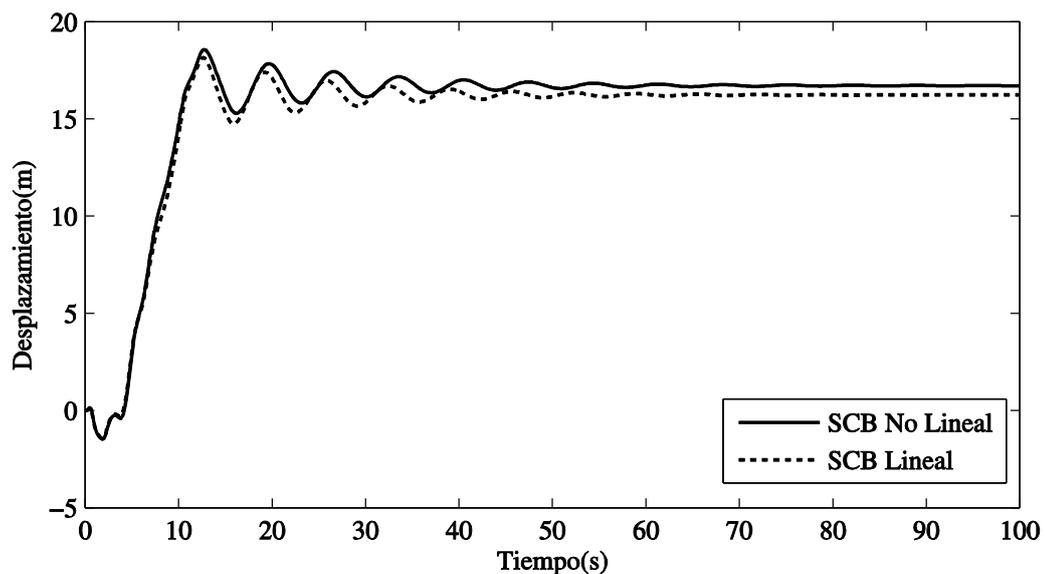


Figura 7.13 – Desplazamiento Flexional Máximo – SNL100-00 EWM50

Puede apreciarse que si bien el desplazamiento flexional máximo es relativamente bien predicho por la teoría lineal, los resultados lineales no resultan ser conservativos, lo cual es una consecuencia importante.

Considerando el mismo punto de medición, la Figura 7.14 muestra la evolución del desplazamiento en la dirección tangencial o lag; puede verse claramente que la teoría lineal es predice relativamente muy bien la magnitud del desplazamiento tangencial. Lo anterior es esperado si se sabe que para la condición EWM50 las solicitaciones no son importantes en esa dirección, y consecuentemente los desplazamientos y rotaciones obtenidas no son de gran magnitud.

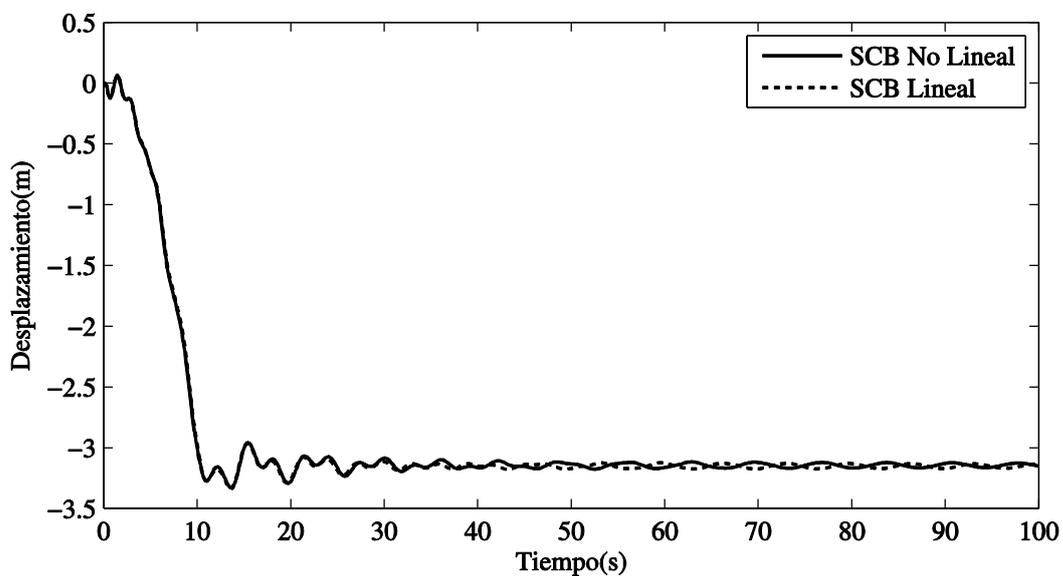


Figura 7.14 – Desplazamiento Lateral Máximo – SNL100-00 EWM50

Para el caso de la evolución del desplazamiento axial el resultado entregado por la teoría lineal difiere considerablemente del predicho por la teoría geoméricamente exacta. Es lógica tal conclusión pues la teoría lineal no es capaz de capturar los acoplamientos geométricos flexional-extensional y flexional-torsional.

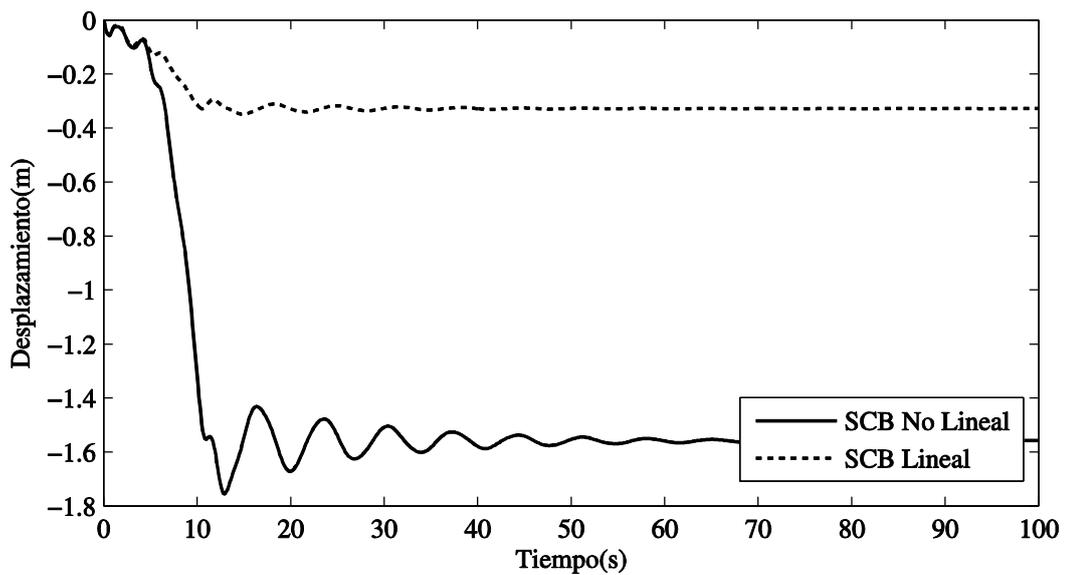


Figura 7.15 – Desplazamiento Axial Máximo – SNL100-00 EWM50

El caso del giro torsional en el extremo de pala es quizás el más significativo en cuanto al impacto que la predicción puede tener en el comportamiento aeroelástico del aerogenerador. Puede verse de la Figura 7.16 que la predicción del ángulo de giro torsional que se obtiene con la teoría lineal difiere considerablemente en magnitud y también difiere en signo con el obtenido mediante la teoría geoméricamente exacta.

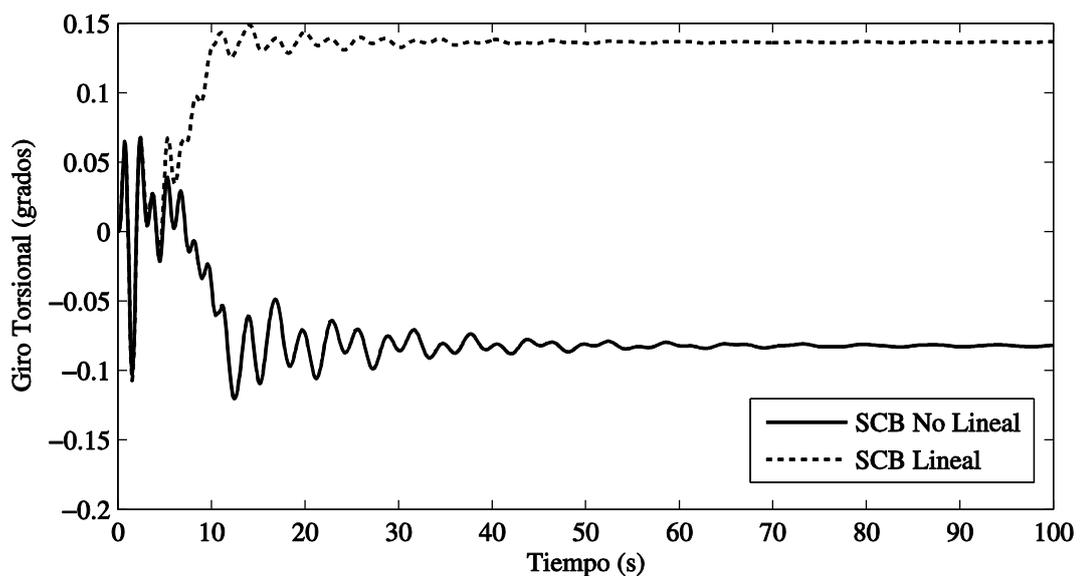


Figura 7.16 – Desplazamiento Torsional Máximo – SNL100-00 EWM50

Es importante notar que aunque la condición analizada no corresponde a un estado de operación del aerogenerador, la conclusión anterior no debe pasar desapercibida. Este tipo de discrepancias entre los giros torsionales obtenidos por teorías lineales y los giros torsionales obtenidos por teorías no lineales puede tener un impacto directo en la predicción de la potencia generada y la durabilidad de la máquina, pues las cargas aerodinámicas son función del ángulo de torsión de la pala.

### **Condiciones de Operación Normal**

Existen al menos 30 condiciones de operación que deben ser verificadas para aprobar el diseño de un aerogenerador; como se ha mencionado, dichas condiciones están establecidas por la normativa IEC. Por cuestiones de brevedad se presentarán en esta sección los resultados obtenidos para los casos de cargas más severos en función a lo informado en [110].

- **Condición NWP 11.3**

La condición de funcionamiento NWP 11.3 establece que el generador debe someterse a una velocidad de viento constante de 11.3 m/s con un exponente de corte vertical  $\lambda_{vs} = 0.14$ , ver [88]. Para analizar tal condición, se impone dicha velocidad de viento durante 100 segundos se deja al generador responder dinámicamente. Las gráficas que se presentan a continuación muestran los resultados obtenidos sin considerar los efectos del amortiguamiento estructural.

La Figura 7.17 muestra la evolución de los desplazamientos en el extremo de cada una de las palas en la dirección axial  $\mathbf{a}_1$  o  $Y$ . Para comprender la historia temporal de los desplazamientos es preciso notar que el rotor se encuentra espacialmente rotado en dos ejes por ángulos de cono e inclinación, por lo que aún sin la presencia de deformación, la pala experimentaría desplazamientos. Como puede verse, la historia temporal de desplazamientos es consistente con esto.

Entonces, la magnitud de los desplazamientos tiene una componente de cuerpo rígido y una componente de deformación. En formulaciones Lagrangianas, las variables cinemáticas no se discriminan en componentes asociadas a la deformación y componentes asociadas al movimiento de cuerpo rígido, por lo que no es posible obtener directamente como resultado de la deformación deflexiones.

No obstante, las deflexiones de cualquier componente del sistema pueden obtenerse de forma sencilla mediante una rutina paralela a la formulación.

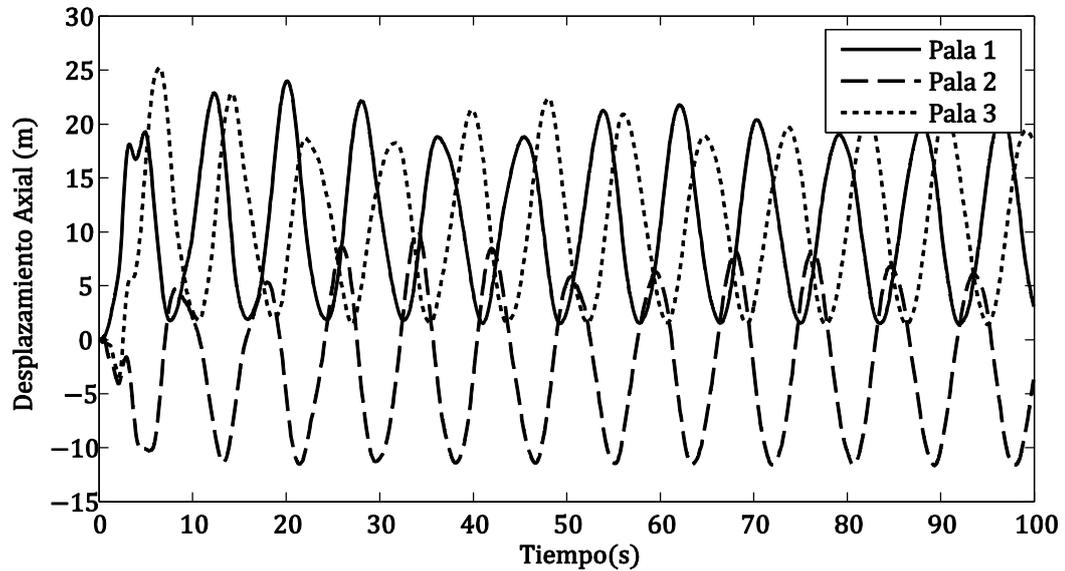


Figura 7.17 – Desplazamientos axiales en punta de pala.

La Figura 7.18 muestra la evolución de los momentos en la dirección flap en la raíz de las palas. La magnitud obtenida para dichos momentos concuerda con los resultados informados en [110], donde se ha estimado que dicho momento es de aproximadamente 5000 KNm. Puede apreciarse claramente que las historias temporales de los momentos en las raíces de las tres palas difieren durante el arranque pero rápidamente toman valores similares, diferenciándose solo en fase. Considerando además el hecho de que no se ha incluido amortiguamiento estructural en el aerogenerador, las vibraciones tienen un efecto fuerte sobre la señal.

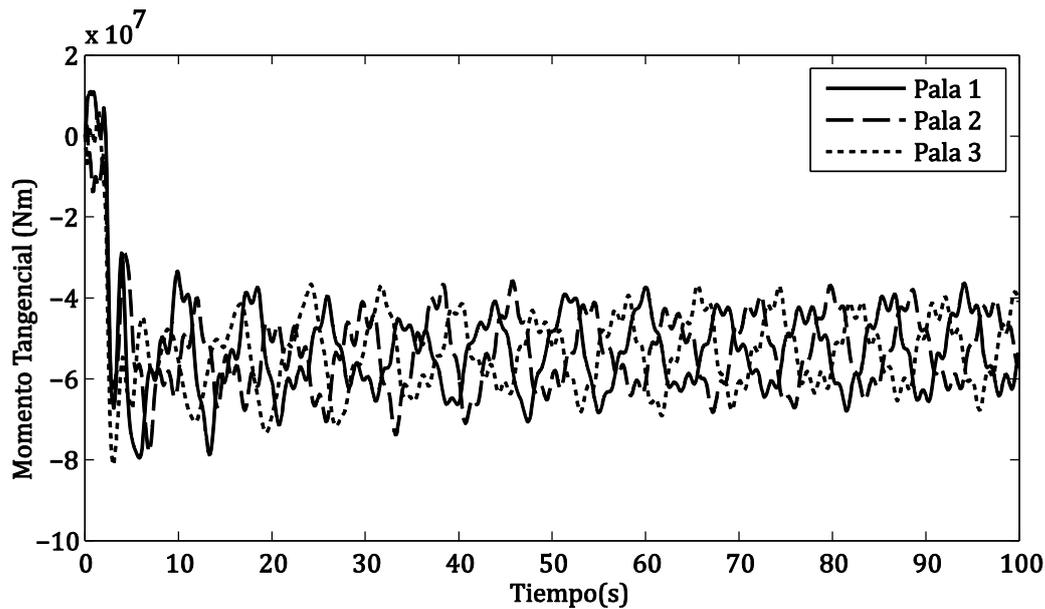


Figura 7.18 – Historia temporal del momento tangencial en raíz de palas.

La Figura 7.19 muestra la evolución del ángulo de ataque, medido en grados, para tres secciones de una de las palas. Puede verse que el ángulo de ataque oscila durante todo el análisis; dicha oscilación se origina por: i) el acoplamiento flexional-torsional constitutivo y seccional que posee la pala, ii) la variación de la velocidad de incidencia originada por la rotación de la pala en el cono descrito por el rotor y iii) la variación temporal del momento aerodinámico.

Es interesante notar que al comienzo del análisis el ángulo de ataque toma valores del orden de los 80° puesto que la pala no posee velocidad tangencial y consecuentemente la velocidad local en la pala es resultado solo de la transformación de la velocidad de circulación del viento.

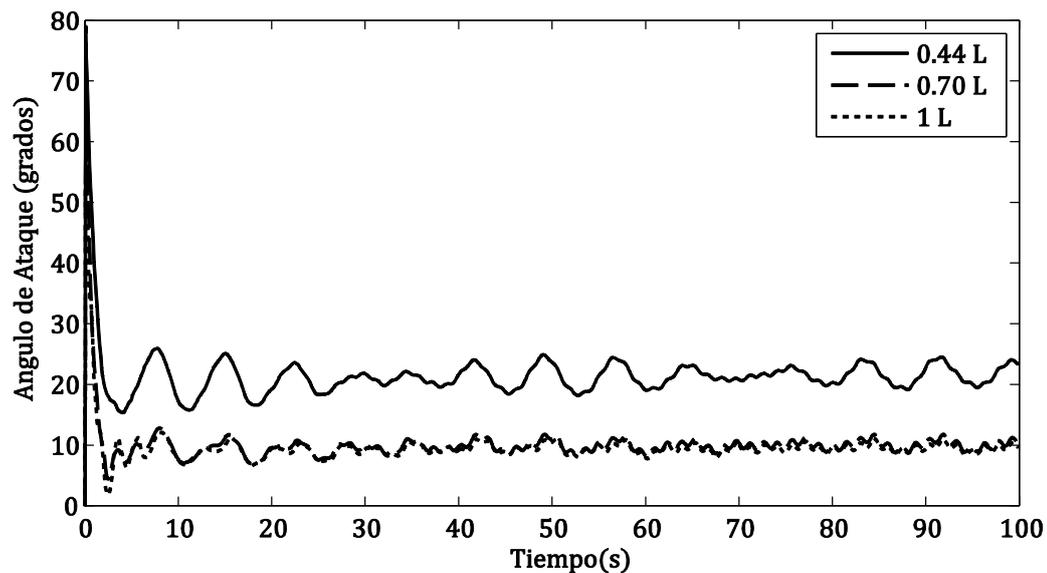


Figura 7.19 – Evolución del ángulo de ataque para distintas secciones transversales de pala.

- **NWP 11.3 - Efecto del Amortiguamiento Estructural**

Como se ha mencionado anteriormente, la amplitud de vibración de las palas es atenuada por la presencia de amortiguamiento estructural y de amortiguamiento aerodinámico. Es entonces generalmente deseable que la formulación contemple el efecto del amortiguamiento estructural.

Las formas más comunes para considerar efecto del amortiguamiento estructural se basan en asumir que las fuerzas de amortiguamiento son función lineal de la velocidad con la que varía la configuración a causa de su deformación. En el marco de una formulación Lagrangiana, dichas formas no son naturalmente aplicables, puesto que las velocidades Lagrangianas contienen aportes de cuerpo rígido y aportes correspondientes a las deformaciones. Por lo tanto, si se utilizase una forma de amortiguamiento proporcional utilizando dichas velocidades se amortiguaría necesariamente a los movimientos de cuerpo rígido; tal limitación no es fácilmente salvable puesto que las velocidades no son separables naturalmente en componentes asociadas a la deformación y componentes asociadas al movimiento de cuerpo rígido.

Afortunadamente, se puede permitir utilizar una forma proporcional de amortiguamiento que utilice un vector de velocidades al cual se le han restado las velocidades originadas por el movimiento de cuerpo rígido. Si bien encontrar el

vector de velocidades de cuerpo rígido exige conocer de antemano la cinemática, para el caso del aerogenerador esto no representa un gran problema, puesto que el único componente que experimenta dichas velocidades es el rotor. Las velocidades de cuerpo rígido de los componentes del rotor, es decir las palas, puede calcularse sencillamente utilizando la ley impropia de distribución de velocidades.

Entonces, con el objeto de contemplar de forma sencilla el efecto del amortiguamiento estructural sobre el aerogenerador, se ha utilizado en este trabajo una forma proporcional de amortiguamiento estructural en la cual las fuerzas de amortiguamiento se consideran proporcionales a una velocidad de configuración a la cual se le ha sustraído la velocidad asociada a un movimiento de cuerpo rígido conocido a priori. La forma de amortiguamiento estructural corresponde a amortiguamiento de Rayleigh proporcional a la rigidez; se ha utilizado para todos los casos una constante de amortiguamiento modal de 0.04, tal como se ha informado en [110].

La Figura 7.20 y la Figura 7.21 muestran las señales de los momentos flectores en las direcciones axial (flap) y tangencial (lag) considerando los efectos del amortiguamiento estructural. Puede verse claramente que la vibración de la pala en las frecuencias superiores se amortigua considerablemente, generando no solo una onda más suave sino también con amplitud reducida.

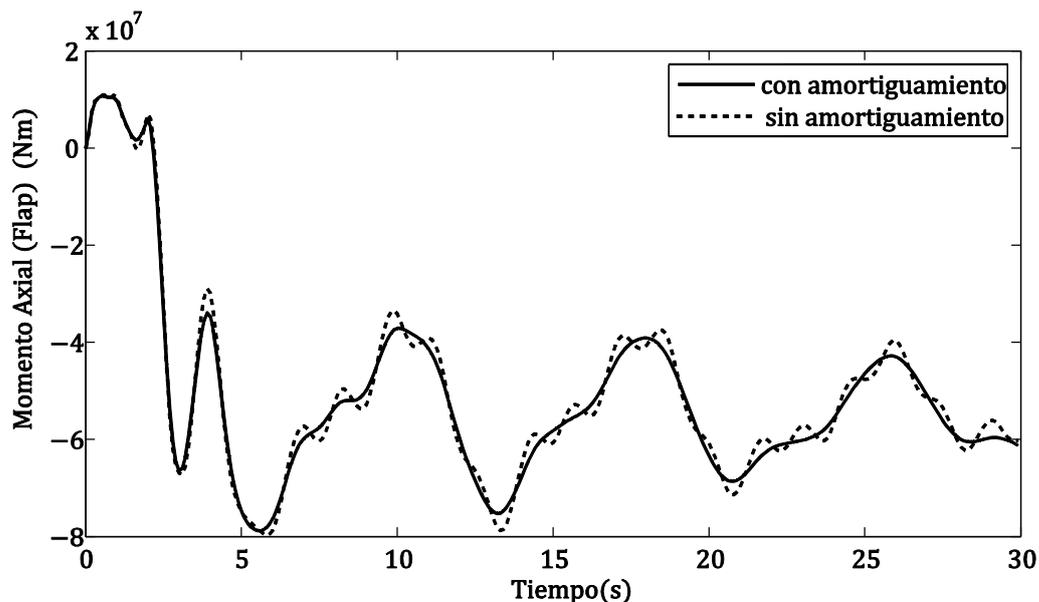


Figura 7.20 – Momento flector en la dirección tangencial (lag) en la raíz de pala.

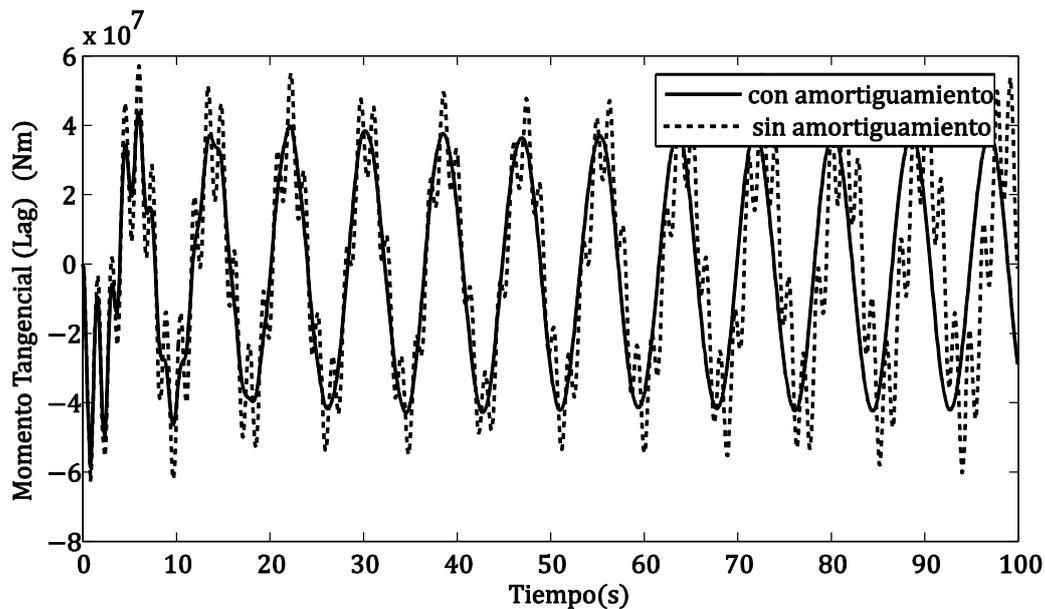


Figura 7.21 – Momento flector en la dirección axial (*flap*) en la raíz de pala.

Los resultados anteriores evidencian la necesidad de desarrollar una formulación para las fuerzas de amortiguamiento que sea consistente con las hipótesis geométricas de las formulaciones Lagrangianas. Si bien tal desarrollo no fue realizado en este trabajo, es probable que la formulación del amortiguamiento estructural como función de la velocidad de deformación resulte particularmente efectiva.

- **NWP 11.3 – Ráfaga severa.**

En este caso se muestra el comportamiento del generador eólico en un escenario de viento transitorio. A la condición de operación normal se la altera de forma tal que a partir de los 20 segundos de comenzado el análisis el viento incrementa rápidamente su velocidad para llegar a un máximo de 25 m/s a los 30 segundos y volver a la velocidad de operación de 25 m/s a los 40 segundos.

La Figura 7.22 muestra la evolución de los momentos flectores en la dirección lag en las tres palas. Puede verse que la formulación responde bien a la condición transitoria y que, como es de esperarse, la estabilización de la máquina se ralentiza a causa del amortiguamiento aerodinámico.

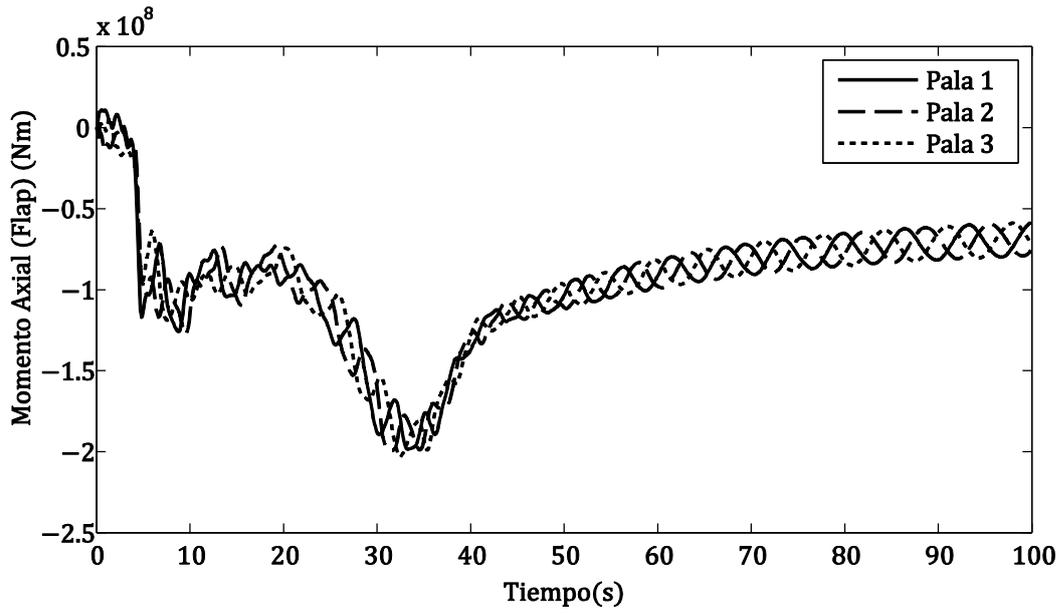


Figura 7.22 – Momentos en la raíz de pala en la dirección flap.

La Figura 7.23 muestra la forma deformada no amplificada obtenida para un tiempo  $t$  en el cual los desplazamientos son máximos.

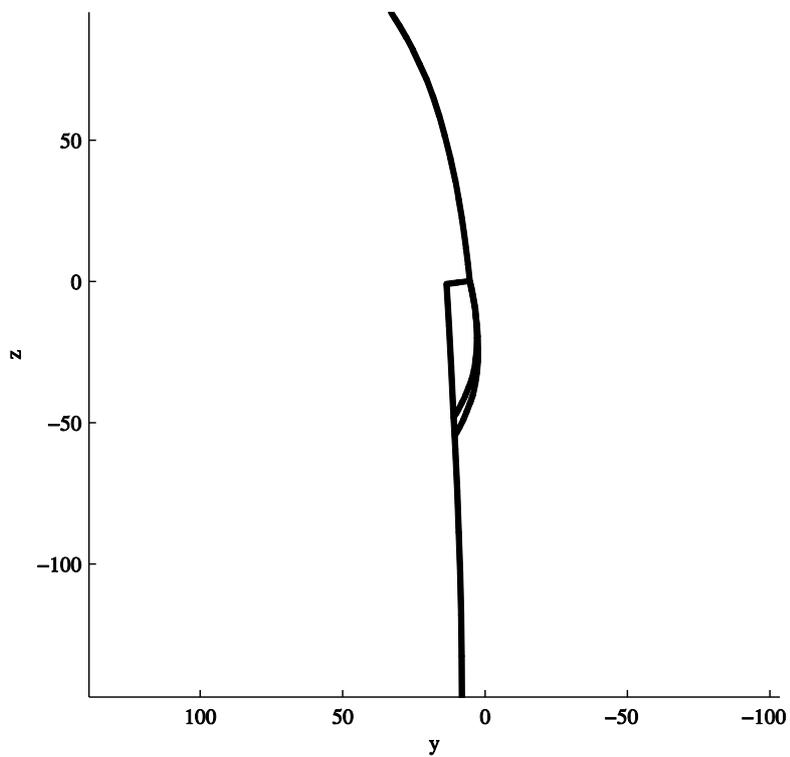


Figura 7.23 – Forma deformada para el caso de ráfaga severa.

# CONCLUSIONES

---

Esta presentación ha tratado diferentes aspectos de la modelación del aerogenerador como un mecanismo formado por vigas de material compuesto. Las conclusiones obtenidas están relacionadas a: el desarrollo teórico de la formulación aero-estructural, su correlación otras teorías presentadas en la literatura, los resultados obtenidos al modelar el caso de un generador eólico de grandes dimensiones, las capacidades no explotadas de la formulación y los posibles trabajos futuros.

Es posible identificar ciertos puntos en los cuales esta presentación podría resultar de utilidad científica y técnica: i) la formulación de la viga geoméricamente exacta, ii) la modelación seccional de álabes, iii) la implementación de la formulación geoméricamente exacta en un algoritmo de multicuerpos y iv) el desarrollo del método de elemento de álabes geoméricamente no lineal.

Antes de explicitar las conclusiones obtenidas, debe mencionarse que la validación de la formulación se encuentra en algunos aspectos incompleta. Aunque se han efectuado comparaciones en uno u otro aspecto para todas las cuestiones

que se han desarrollado y/o implementado, no se han validado exhaustivamente los resultados entregados por la formulación seccional y el método BEM geoméricamente no lineal. Aún así, comparaciones preliminares y no rigurosas han demostrado que tanto las propiedades seccionales como las cargas aerodinámicas obtenidas con la presente formulación se encuentran dentro de un rango esperado.

La formulación geoméricamente exacta ha seguido en varios puntos los desarrollos de Cardona & Geradin [9] y Mäkinen [19]. Las diferencias principales entre la formulación presentada en este trabajo y las formulaciones presentadas en la literatura yace en la utilización de las deformaciones de Green-Lagrange, el uso de relaciones constitutivas desarrolladas a partir de la Teoría de Laminación Clásica y la sub-parametrización con vectores directores de las ecuaciones de movimiento. En este último punto, debe notarse que si bien algunos trabajos en la literatura han utilizado vectores directores para parametrizar las ecuaciones de movimiento, siempre las derivaciones han explotado la interpolación de spins, originando formulaciones no consistentes.

Podría resumirse entonces que en lo que respecta a la formulación de la viga geoméricamente exacta puede concluirse que:

- se han parametrizado las rotaciones finitas con el vector de rotación total.
- se han sub-parametrizado las ecuaciones de equilibrio con vectores directores nodales y sus derivadas.
- se ha utilizado al tensor de Green-Lagrange como medición de deformaciones.
- las implementaciones Lagrangiana Total y Lagrangiana Actualizada han resultado ser invariantes con respecto al marco de referencia e independientes del camino de integración.

En lo referente a la modelación seccional del álabe, se ha desarrollado un enfoque unidimensional que permite calcular las propiedades seccionales de álabes construidos con material compuesto. Puede concluirse que la formulación:

- considera geometrías y secuencias de laminación arbitrarias.

- permite modelar segmentos con forma trapezoidal, lo que posibilita a su vez considerar el cambio de longitud de cada capa de laminado en función de su ubicación respecto de la coordenada normal de la sección.
- incluye los efectos del alabeo sobre la rigidez torsional de la sección, los cuales han sido formulados en base a la obtención de una función de alabeo mediante una formulación unidimensional de elementos finitos.

La formulación del sistema multicuerpo se ha basado en gran medida en la formulación desarrollada por Cardona [54], la cual se basa en el concepto fundamental de modelar cada articulación como un elemento. Varios detalles de lo presentado en [54] no resultan extensivos a la formulación desarrollada para este trabajo, por lo que ciertos aspectos tuvieron que ser estudiados, como es el caso de la formulación de las restricciones y sus gradientes. Así, en lo referente a la formulación de multicuerpos puede decirse que:

- se ha implementado satisfactoriamente el elemento SCB en una formulación de multicuerpos flexibles.
- se han formulado las ecuaciones de movimiento de una articulación tipo bisagra o hinge con características disipativas.
- se ha mostrado que la formulación entrega resultados que correlacionan bien con modelos construidos con software comercial.
- se ha implementado una forma aproximada para contemplar el efecto del amortiguamiento estructural sin amortiguar los movimientos de cuerpo rígido.
- el modelo de multicuerpos del generador eólico de grandes dimensiones parece correlacionar bien con resultados preliminares presentados por otros investigadores.

En lo que respecta a la formulación aeroelástica, el desarrollo principal de este trabajo ha sido la formulación del método de elemento de pala geoméricamente no lineal. Dicha formulación surge de la necesidad de contar con un método para determinar las cargas aerodinámicas que sea consistente en sentido geométrico con la formulación estructural. Puede concluirse que

- se ha modificado la formulación clásica del BEM de tal forma de considerar efectos geoméricamente no lineales.

- la implementación computacional de la formulación ha respondido de manera satisfactoria en cuanto a lo referido a su estabilidad y la convergencia de los factores de inducción.

La modelización del generador eólico por medio de la formulación presentada ha resultado satisfactoria. Si bien la poca cantidad de resultados reportados sobre el comportamiento del generador SNL100 hace difícil la elaboración de conclusiones definitivas, los resultados obtenidos para la condición de viento extremo muestran una marcada influencia de la no linealidad geométrica en el comportamiento dinámico de la máquina.

Debe mencionarse que en caso de pretenderse comparar los resultados obtenidos en este trabajo con resultados obtenidos por medio de otras formulaciones y/o implementaciones, deberían sintonizarse todos los parámetros algorítmicos involucrados en la simulación. Principalmente aquellos correspondientes al amortiguamiento estructural, el amortiguamiento numérico, los criterios de convergencia y los factores de penalización de la formulación de mecanismos.

La implementación computacional de la formulación ha sido testeada por bloques; los parámetros algorítmicos han respondido generalmente según lo esperado, obteniendo siempre una buena respuesta en cuanto a convergencia y precisión. No obstante, es posible que el cruzamiento de parámetros intervinientes en diferentes bloques influya sobre los resultados en formas que no hayan sido advertidas en este trabajo.

### **Trabajos Futuros**

Las perspectivas sobre la utilidad de la formulación serán clarificadas a través de diversos trabajos que se planea realizar en el futuro. Dentro de éstas tareas se destacan las siguientes:

i) Reformular la teoría estructural proponiendo un campo de deformaciones que admita cambios finitos en la cinemática y que a su vez retenga la hipótesis de pequeñas deformaciones, compatibilizando así la medición de deformaciones con las hipótesis constitutivas y logrando una reducción significativa en el costo computacional. Lo anterior podría lograrse operando sobre el tensor de Green-

Lagrange de tal forma de lograr su descomposición polar extendida. Es probable que tal metodología simplifique en gran medida la linealización del trabajo virtual de las fuerzas internas; logrando así simplificar la expresión de la matriz de rigidez tangente, sin perder capacidad de descripción cinemática.

ii) Formular los efectos aerodinámicos no estacionarios presentes en el aerogenerador de forma consistente con las hipótesis cinemáticas de la versión geoméricamente no lineal del BEM. Lo anterior es estrictamente necesario para capturar ciertos comportamientos vibratorios que se presentan en el aerogenerador cuando se imponen cambios repentinos en la orientación del rotor o bien en el ángulo de pitch de las palas. Se considera posible formular e implementar versiones del filtro de Oye y el modelo de stall dinámico de Beddoes-Leishman [91, 92, 131] que sean consistentes con la formulación presentada.

iii) Incluir en la formulación los mecanismos que dan origen a los movimientos de yaw y pitch. Los mecanismos de orientación del rotor y giro de pala son elementos vitales del aerogenerador, la operación de dichos mecanismos generalmente introduce vibraciones y su influencia en el rango no lineal ha sido poco tratada.

iv) Caracterizar y cuantificar consistentemente la influencia de la cinemática finita en la respuesta dinámica y la estabilidad del generador según las condiciones de operación establecidas en la normativa IEC. Para lograr comparar consistentemente la formulación geoméricamente exacta con una formulación lineal debería primero obtenerse una formulación lineal de multicuerpos flexibles a partir de la formulación desarrollada en este trabajo. Es probable que pueda lograrse lo anterior utilizando marcos de referencia flotantes, respecto de los cuales el movimiento se asuma como geoméricamente lineal; las técnicas para tratar el problema de multicuerpos resultarían ser idénticas a las utilizadas en este trabajo.

vi) Estudiar la influencia de las fuerzas de Coriolis, los términos inerciales no lineales y la conjugación de fuerzas y momentos aerodinámicos en la respuesta del aerogenerador. En una formulación geoméricamente exacta diversos términos de alto orden intervienen en las expresiones de las matrices tangentes; su evaluación es muy costosa desde el punto de vista computacional y por ello es importante

evaluar su influencia real en el comportamiento dinámico y la estabilidad del aerogenerador.

vii) Evaluar la durabilidad del aerogenerador en función de la recuperación de los valores de tensión en la sección transversal. La formulación presentada no requiere de los valores de tensión en la sección transversal para la solución de las ecuaciones de movimiento, no obstante es sencillo obtener dichos valores a partir de la historia temporal de las deformaciones. Así, la obtención de la historia temporal de las tensiones seccionales es trivial, y su obtención permitiría calcular la vida de cada componente por medio de un análisis de fatiga convencional.

viii) Proveer una herramienta computacional confiable y de libre acceso para la modelación de la respuesta dinámica de grandes aerogeneradores tomando como base las rutinas desarrolladas en este trabajo.

# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] E. Reissner, A one-dimensional finite strain beam theory: the plane problem, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 23 (1972) 307-351.
- [2] S.S. Antman, Ordinary differential equations of one dimensional elasticity: foundations of the theories of nonlinearly elastic rods and shells, *Arch. Rational Mech*, 61 (1976).
- [3] E. Reissner, On finite deformations of space-curved beams, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 32 (1981) 734-744.
- [4] J. Argyris, An excursion into large rotations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32 (1982) 85-155.
- [5] K.-J. Bathe, S. Bolourchi, Large displacement analysis of three-dimensional beam structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14 (1979) 961-986.
- [6] J.C. Simo, A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49 (1985) 55-70.
- [7] J.C. Simo, L. Vu-Quoc, A three-dimensional finite-strain rod model. part II: Computational aspects, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58 (1986) 79-116.
- [8] J.C. Simo, L. Vu-Quoc, On the dynamics in space of rods undergoing large motions -- A geometrically exact approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66 (1988) 125-161.

- [9] A. Cardona, M. Geradin, A beam finite element non-linear theory with finite rotations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26 (1988) 2403-2438.
- [10] J.C. Simo, L. Vu-Quoc, A Geometrically-exact rod model incorporating shear and torsion-warping deformation, *International Journal of Solids and Structures*, 27 (1991) 371-393.
- [11] A. Ibrahimbegovic, On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 122 (1995) 11-26.
- [12] A. Ibrahimbegović, F. Frey, I. Kožar, Computational aspects of vector-like parametrization of three-dimensional finite rotations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 (1995) 3653-3673.
- [13] F. Gruttmann, R. Sauer, W. Wagner, A geometrical nonlinear eccentric 3D-beam element with arbitrary cross-sections, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 160 (1998) 383-400.
- [14] F. Gruttmann, R. Sauer, W. Wagner, Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48 (2000) 1675-1702.
- [15] F. Auricchio, P. Carotenuto, A. Reali, On the geometrically exact beam model: A consistent, effective and simple derivation from three-dimensional finite-elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 45 (2008) 4766-4781.
- [16] M. Crisfield, G. Jelenic, Objectivity of strain measures in the geometrically exact three-dimensional beam theory and its finite-element implementation, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 455 (1999) 1125-1147.
- [17] P. Betsch, On the parametrization of finite rotations in computational mechanics A classification of concepts with application to smooth shells, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155 (1998) 273-305.
- [18] A. Ibrahimbegovic, On the choice of finite rotation parameters, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149 (1997) 49-71.
- [19] J. Mäkinen, H. Marjamäki, Total and Updated Lagrangian Geometrically Exact Beam Elements, in, 2006, pp. 658-658.

- [20] G. Jelenic, M.A. Crisfield, Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 171 (1999) 141-171.
- [21] A. Ibrahimbegovic, R. Taylor, On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 (2002) 5159-5176.
- [22] P. Betsch, P. Steinmann, Frame-indifferent beam finite elements based upon the geometrically exact beam theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54 (2002) 1775-1788.
- [23] F. Armero, I. Romero, On the objective and conserving integration of geometrically exact rod models, in: *Proc. Trends in computational structural mechanics*, CIMNE, Barcelona, Spain, 2001.
- [24] I. Romero, F. Armero, An objective finite element approximation of the kinematics of geometrically exact rods and its use in the formulation of an energy-momentum conserving scheme in dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54 (2002) 1683-1716.
- [25] S. Ghosh, D. Roy, A frame-invariant scheme for the geometrically exact beam using rotation vector parametrization, *Computational Mechanics*, 44 (2009) 103-118.
- [26] M. Ritto-Corrêa, D. Camotim, On the differentiation of the Rodrigues formula and its significance for the vector-like parameterization of Reissner-Simo beam theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55 (2002) 1005-1032.
- [27] C. Sansour, W. Wagner, Multiplicative updating of the rotation tensor in the finite element analysis of rods and shells – a path independent approach, *Computational Mechanics*, 31 (2003) 153-162.
- [28] D.H. Hodges, *Nonlinear Composite Beam Theory*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Virginia, 2006.
- [29] W. Yu, D.H. Hodges, V.V. Volovoi, E.D. Fuchs, A generalized Vlasov theory for composite beams, *Thin-Walled Structures*, 43 (2005) 1493-1511.
- [30] W. Yu, V.V. Volovoi, D.H. Hodges, X. Hong, Validation of the variational asymptotic beam sectional analysis, *IAA Journal*, 40 (2002) 2105-2113.

- [31] C.E.S. Cesnik, D.H. Hodges, VABS: A New Concept for Composite Rotor Blade Cross-Sectional Modeling, *Journal of the American Helicopter Society*, 42 (1997) 27-38.
- [32] D.H. Hodges, A mixed variational formulation based on exact intrinsic equations for dynamics of moving beams, *International Journal of Solids and Structures*, 26 (1990) 1253-1273.
- [33] D.H. Hodges, P.G. Alvin, *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*, Cambridge University Press 2002.
- [34] D.H. Hodges, A.R. Atilgan, C.E.S. Cesnik, M.V. Fulton, On a simplified strain energy function for geometrically nonlinear behaviour of anisotropic beams, *Composites Engineering*, 2 (1992) 513-526.
- [35] D.H. Hodges, W. Yu, M.J. Patil, Geometrically-exact, intrinsic theory for dynamics of moving composite plates, *International Journal of Solids and Structures*, 46 (2009) 2036-2042.
- [36] R.L. Huston, Computer methods in flexible multibody dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 (1991) 1657-1668.
- [37] W. Yu, D.H. Hodges, V. Volovoi, C.E.S. Cesnik, On Timoshenko-like modeling of initially curved and twisted composite beams, *International Journal of Solids and Structures*, 39 (2002) 5101-5121.
- [38] W. Yu, L. Liao, D.H. Hodges, V.V. Volovoi, Theory of initially twisted, composite, thin-walled beams, *Thin-Walled Structures*, 43 (2005) 1296-1311.
- [39] L. Librescu, *Thin-Walled Composite Beams*, Springer, Dordrecht, 2006.
- [40] M.T. Piovan, V.H. Cortínez, Mechanics of thin-walled curved beams made of composite materials, allowing for shear deformability, *Thin-Walled Structures*, 45 (2007) 759-789.
- [41] S.P. Machado, V.H. Cortínez, Non-linear model for stability of thin-walled composite beams with shear deformation, *Thin-Walled Structures*, 43 (2005) 1615-1645.
- [42] R. Gonçalves, M. Ritto-Corrêa, D. Camotim, A large displacement and finite rotation thin-walled beam formulation including cross-section deformation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 (2010) 1627-1643.

- [43] C.M. Saravia, S.P. Machado, V.H. Cortínez, A Geometrically Exact Nonlinear Finite Element for Composite Closed Section Thin-Walled Beams, *Computer and Structures*, 89 (2011) 2337-2351.
- [44] C.M. Saravia, S.P. Machado, V.H. Cortínez, Free vibration and dynamic stability of rotating thin-walled composite beams, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 30 (2011) 432-441.
- [45] C.M. Saravia, S.P. Machado, V.H. Cortínez, A geometrically exact composite thin-walled beam element for flexible multibody dynamics, in: J.W.S. Oscar Möller, Mario A. Storti (Ed.), *AMCA*, Rosario, Argentina, 2011, pp. 959-978.
- [46] M.C. Saravia, S.P. Machado, V.H. Cortínez, A consistent total Lagrangian finite element for composite closed section thin walled beams, *Thin-Walled Structures*, 52 (2012) 102-116.
- [47] E. Wittbrodt, S. Wojciech, Application of rigid finite element method to dynamic analysis of spatial systems, *AIAA J. Guidance, Control, and Dynamics*, 18 (1995).
- [48] B.F. De Veubeke, The dynamics of flexible bodies *International Journal of Engineering Science*, 14 (1976) 895-913.
- [49] A.A. Shabana, R.A. Wehage, A Coordinate Reduction Technique for Dynamic Analysis of Spatial Substructures with Large Angular Rotations\*, *Journal of Structural Mechanics*, 11 (1983) 401-431.
- [50] A. Cardona, M. Géradin, A superelement formulation for mechanism analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100 (1992) 1-29.
- [51] A.A. Shabana, *Dynamics of Multibody Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [52] O. Brüls, A. Cardona, M. Arnold, Lie group generalized- $\alpha$  time integration of constrained flexible multibody systems, *Mechanism and Machine Theory*, 48 (2012) 121-137.
- [53] M.A. Crisfield, *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Advanced Topics*, John Wiley & Sons, Inc., 1997.
- [54] A. Cardona, M. Geradin, D.B. Doan, Rigid and flexible joint modelling in multibody dynamics using finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89 (1991) 395-418.

- [55] A. Ibrahimbegovic, S. Mamouri, On rigid components and joint constraints in nonlinear dynamics of flexible multibody systems employing 3D geometrically exact beam model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188 (2000) 805-831.
- [56] A. Ibrahimbegovic, R.L. Taylor, H. Lim, Non-linear dynamics of flexible multibody systems, *Computers & Structures*, 81 (2003) 1113-1132.
- [57] M. Geradin, A. Cardona, *Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach*, Wiley, Chichester, 2001.
- [58] M. Arnold, A. Fuchs, C. Führer, Efficient corrector iteration for DAE time integration in multibody dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 (2006) 6958-6973.
- [59] W. Schiehlen, Computational dynamics: theory and applications of multibody systems, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 25 (2006) 566-594.
- [60] B. Simeon, On Lagrange multipliers in flexible multibody dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 (2006) 6993-7005.
- [61] A. Ibrahimbegović, S. Mamouri, R.L. Taylor, A.J. Chen, Finite Element Method in Dynamics of Flexible Multibody Systems: Modeling of Holonomic Constraints and Energy Conserving Integration Schemes, *Multibody System Dynamics*, 4 (2000) 195-223.
- [62] J.C. Dai, Y.P. Hu, D.S. Liu, X. Long, Aerodynamic loads calculation and analysis for large scale wind turbine based on combining BEM modified theory with dynamic stall model, *Renewable Energy*, 36 (2011) 1095-1104.
- [63] O.A. Bauchau, Computational Schemes for Flexible, Nonlinear Multi-Body Systems, *Multibody System Dynamics*, 2 (1998) 169-225.
- [64] O.A. Bauchau, C.L. Bottasso, Y.G. Nikishkov, Modeling rotorcraft dynamics with finite element multibody procedures, *Mathematical and Computer Modelling*, 33 (2001) 1113-1137.
- [65] O.A. Bauchau, D.H. Hodges, Analysis of Nonlinear Multibody Systems with Elastic Couplings, *Multibody System Dynamics*, 3 (1999) 163-188.
- [66] M.A. Neto, J.A.C. Ambrósio, R.P. Leal, Composite materials in flexible multibody systems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 (2006) 6860-6873.

- [67] P. Betsch, Energy-consistent numerical integration of mechanical systems with mixed holonomic and nonholonomic constraints, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 (2006) 7020-7035.
- [68] P. Betsch, The discrete null space method for the energy consistent integration of constrained mechanical systems: Part I: Holonomic constraints, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 (2005) 5159-5190.
- [69] A. Cardona, M. Geradin, Time integration of the equations of motion in mechanism analysis, *Computers & Structures*, 33 (1989) 801-820.
- [70] N.M. Newmark, A method of computation for structural dynamics, *Journal of Engineering Mechanics*, 85 (1959) 67-94.
- [71] H.M. Hilber, T.J.R. Hughes, R.L. Talor, Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5 (1977) 282-292.
- [72] J. Chung, G.M. Hulbert, A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized-alpha Method, *Journal of Applied Mechanics*, 60 (1993) 371-375.
- [73] J.C. Simo, K.K. Wong, Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52 (1991) 19:31.
- [74] J.C. Simo, N. Tarnow, K.K. Wong, Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 116 (1992) 100:163.
- [75] M. Géradin, Energy conserving time integration for multibody dynamics - application to top motion, in: *Proc. Proceedings MECOM 94, Mar del Plata, Argentina 1994*.
- [76] D. Kuhl, M.A. Crisfield, Energy-conserving and decaying Algorithms in non-linear structural dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45 (1999) 569-599.
- [77] A. Ibrahimbegovic, S. Mamouri, Energy conserving/decaying implicit time-stepping scheme for nonlinear dynamics of three-dimensional beams undergoing finite rotations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 (2002) 4241-4258.

- [78] J. Yen, L. Petzold, S. Raha, A Time Integration Algorithm For Flexible Mechanism Dynamics: the DAE Alpha-method, *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*, 158 (1998) 341–355.
- [79] S. Erlicher, L. Bonaventura, O.S. Bursi, The analysis of the generalized  $\alpha$  method for non-linear dynamic problems, *Computational Mechanics*, 28 (2002) 83-104.
- [80] M. Arnold, O. Brüls, Convergence of the generalized- $\alpha$  scheme for constrained mechanical systems  
*Multibody System Dynamics*, 18 (2007) 185-202.
- [81] O. Brüls, J.C. Golinval, The generalized- $\alpha$  method in mechatronic applications, *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 86 (2006) 748-758.
- [82] S. Uhlar, P. Betsch, On the derivation of energy consistent time stepping schemes for friction afflicted multibody systems, *Computers & Structures*, 88 (2010) 737-754.
- [83] D. Negrut, R. Rampalli, G. Ottarsson, A. Sajdak, On the Use of the HHT Method in the Context of Index 3 Differential Algebraic Equations of Multibody Dynamics, in: *Proc. ASME International Design Engineering Technical Conferences*, Long Beach, CA, 2005.
- [84] B. Gavrea, D. Negrut, F. Potra, The Newmark Integration Method for Simulation of Multibody Systems: Analytical Considerations, in: *Proc. ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, Orlando, FL, 2005.
- [85] E. Hairer, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations. II. Stiff and Differential Algebraic Problems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.
- [86] M. Arnold, Simulation algorithms and software tools, in: G. Mastinu, M. Plochl (Eds.) *Road and Off-Road Vehicle System Dynamics Handbook*, Taylor and Francis, London, 2005.
- [87] G. Kocher, Industrial applications of linear/nonlinear dynamics of multibody systems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 91 (1991) 1397-1402.
- [88] E. Hau, *Wind Turbines*, 2nd ed., Springer, Berlin, 2006.

- [89] K. Holm-Jørgensen, S.R.K. Nielsen, A component mode synthesis algorithm for multibody dynamics of wind turbines, *Journal of Sound and Vibration*, 326 (2009) 753-767.
- [90] T.J. Larsen, A.M. Hansen, T. Buhl, Aeroelastic effects of large blade deflections for wind turbines, in: D.U.o. Technology (Ed.) *Proceeding of The Science of Making Torque from Wind*, The Netherlands, 2004, pp. 238-246.
- [91] M.O.L. Hansen, *Aerodynamics of Wind Turbines*, Earthscan Publications Ltd., London, 2008.
- [92] M.O.L. Hansen, J.N. Sørensen, S. Voutsinas, N. Sørensen, H.A. Madsen, State of the art in wind turbine aerodynamics and aeroelasticity, *Progress in Aerospace Sciences*, 42 (2006) 285-330.
- [93] D.A. Spera, *Wind Turbine Technology*, in, ASME, New York, 2009.
- [94] <http://www.mscsoftware.com/Products/CAE-Tools/Adams.aspx>
- [95] <http://www.3ds.com/products/simulia/overview/>
- [96] J.M. Jonkman, M.L. Buhl, *FAST User's Guide*, in, NREL, 2005.
- [97] M.L. Buhl, A.D. Wrigth, K.G. Pierce, *Wind Tubine Design Codes: A Comparison of the Structural Response*, in, NREL, 2000.
- [98] M.L. Buhl, M. Andreas, *A comparison of wind turbine aeroelastic codes used for certification*, in, National Renewable Energy Laboratory, 2006.
- [99] J.W. Larsen, S.R.K. Nielsen, Non-linear dynamics of wind turbine wings, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41 (2006) 629-643.
- [100] J.W. Larsen, S.R.K. Nielsen, Nonlinear parametric instability of wind turbine wings, *Journal of Sound and Vibration*, 299 (2007) 64-82.
- [101] D.L. Laird, *NuMAD User's Manual*, in, Sandia National Laboratories, 2001.
- [102] D.H. Hodges, W. Yu, A rigorous, engineer-friendly approach for modelling realistic, composite rotor blades, *Wind Energy*, 10 (2007) 179-193.
- [103] C.M. Saravia, S.P. Machado, V.H. Cortínez, Dynamic Stability of Rotating Thin-Walled Composite Beams, in: P.L. Cristian García Bauza, Lisandro Parente, Marcelo Vénere (Ed.) *Mecánica Computacional*, Asociación Argentina de Mecánica Computacional Tandil 2009, pp. 3297-3317.

- [104] X. Zhao, P. Maißer, J. Wu, A new multibody modelling methodology for wind turbine structures using a cardanic joint beam element, *Renewable Energy*, 32 (2007) 532-546.
- [105] H. Glauert, *Airplane Propellers*, Dover Publications, New York, 1963.
- [106] R. Lanzafame, M. Messina, Fluid dynamics wind turbine design: Critical analysis, optimization and application of BEM theory, *Renewable Energy*, 32 (2007) 2291-2305.
- [107] R. Lanzafame, M. Messina, Design and performance of a double-pitch wind turbine with non-twisted blades, *Renewable Energy*, 34 (2009) 1413-1420.
- [108] T.K. Barlas, G.A.M. van Kuik, Review of state of the art in smart rotor control research for wind turbines, *Progress in Aerospace Sciences*, 46 (2010) 1-27.
- [109] TPI-Composites, *Innovative Design Approaches for Large Wind Turbine Blades Final Report*, in, Sandia National Laboratories, 2004.
- [110] D.T. Griffith, T.D. Ashwill, *The Sandia 100-meter all-glass baseline wind turbine blade: SNL100-00*, in, Sandia National Laboratories, 2011.
- [111] H.J.T. Kooijman, L. C., D. Winkelaar, E.L. van der Hooft, *DOWEC 6MW PreDesign: Aeroelastic modeling of the DOWEC 6 MW pre-design in PHATAS.*, in, Energy Research Center of the Netherlands, 2002.
- [112] C. Lindenburg, *Aeroelastic Modelling of the LMH64-5 Blade*, in, Energy Research Center of the Netherlands, 2002.
- [113] J. Bonet, R.D. Wood, *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [114] S.S. Antman, *Nonlinear Problems of Elasticity*, Springer, 1995.
- [115] L.P. Kollár, G.S. Springer, *Mechanics of Composite Structures*, Cambridge University Press, New York, 2003.
- [116] R.M. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, Taylor & Francis, London, 1999.
- [117] E. Barbero, *Introduction to Composite Material Design*, Taylor and Francis, London, 2008.
- [118] K. Washizu, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, Oxford, 1968.

- [119] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, *The Finite Element Method*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.
- [120] J. Mäkinen, Total Lagrangian Reissner's geometrically exact beam element without singularities, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 70 (2007) 1009-1048.
- [121] M. Ritto-Corrêa, D. Camotim, Work-conjugacy between rotation-dependent moments and finite rotations, *International Journal of Solids and Structures*, 40 (2003) 2851-2873.
- [122] C.M. Saravia, S.P. Machado, V.H. Cortínez, A Geometrically Exact Total Lagrangian Finite Element for Composite Closed Section Thin-Walled Beams: A Frame Invariant and Path Independent Approach, *International Journal of Solids and Structures*, (2011) 30.
- [123] V.H. Cortínez, M.T. Piovan, Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability, *Journal of Sound and Vibration*, (2002) 701–723.
- [124] V.H. Cortínez, M.T. Piovan, Stability of composite thin-walled beams with shear deformability *Computers and Structures* 84 (2006).
- [125] S.P. Machado, *Estabilidad Dinámica de Estructuras Esbeltas Construidas con Materiales Compuestos*. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 2006.
- [126] A.I. Carmona, *Aerodinámica y Actuaciones del Avión*, Paraninfo, Madrid, España, 2000.
- [127] A. Ibrahimbegovic, M. Al Mikdad, Finite rotations in dynamics of beams and implicit time-stepping schemes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41 (1998) 781-814.
- [128] R. Taylor, *FEAP Users Manual*, in: *FEAP Berkeley*, 2009.
- [129] <http://wind.nrel.gov/>
- [130] H. Chen, W. Yu, M. Capellaro, A critical assessment of computer tools for calculating composite wind turbine blade properties, *Wind Energy*, 13 (2010) 497-516.
- [131] J.G. Leishman, T.S. Beddoes, A Semi-Empirical Model for Dynamic Stall, *Journal of the American Helicopter Society*, 34 (1989) 3-17.